Woche 6: *30. Mai 2024*

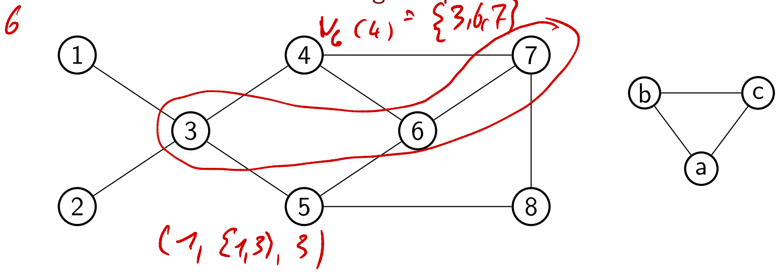
Thema: *Mehrfachzusammenhang und Rundtouren*

6.1 Wiederholung

Wiederholung: Zusammenhang in Graphen

Definition. Sei G ein nicht-leerer Graph.

1. G ist zusammenhängend, wenn es zwischen je zwei Knoten $u, v \in V(G)$ einen Pfad in G gibt.
2. Wir nennen $U \subseteq V(G)$ *zusammenhängend in G*, wenn $G[U]$ zusammenhängend ist.
3. Die maximalen zusammenhängenden Untergraphen von G heißen die Zusammenhangskomponenten von G.



Wiederholung: Brücken und Schnittknoten

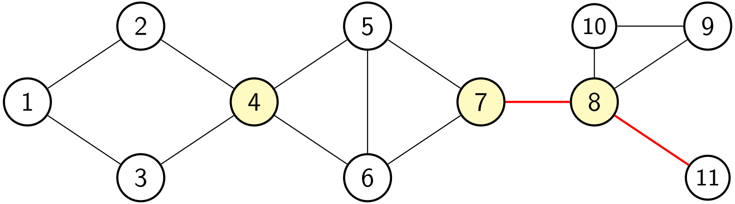
Definition. Sei G ein zusammenhängender Graph.

1. $v \in V(G)$ ist ein *Schnittknoten*, wenn $G - v$ nicht zusammenhängend ist.
2. $e = \{u, v\}$ ist eine *Brücke* von G, wenn $G - e$ nicht zusammenhängend ist.

Definition. Sei G ein beliebiger Graph.

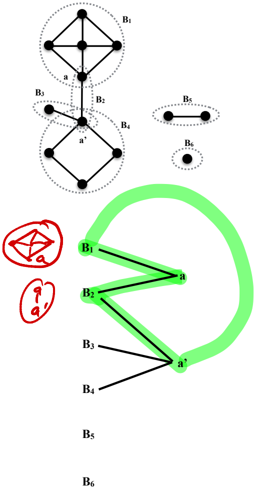
Ein Schnittknoten von G ist ein Schnittknoten einer Komponente von G.

Eine Brücke von G ist eine Brücke einer Komponente von G.



Wiederholung: Der Blockgraph

Definition. Sei G ein Graph. Ein maximaler zusammenhängender Untergraph von G ohne Schnittknoten heißt Block von G.



Definition. Sei $A \subseteq V(G)$ die Menge der Schnittknoten in G und sei $\mathcal{B}$ die Menge der Blöcke von G.

Der Blockgraph von G ist definiert als der bipartite Graph $B(G)$ mit Knotenmenge $A \cup \mathcal{B}$ und Kantenmenge

$$\{\{a, B\} : B \in \mathcal{B}, a \in A \text{ und } a \in V(B)\}.$$

Proposition. Für jeden Graph G ist der Blockgraph $B(G)$ ein Wald.

Ist G zusammenhängend, dann ist $B(G)$ ein Baum.

在图论中，"Wald" 是德语，翻译成英语是 "forest"（森林）。在图论中，森林是一个无环图的集合，也就是说，森林是一个没有环的无向图。换句话说，森林是由多个树（即无环连通子图）组成的图。

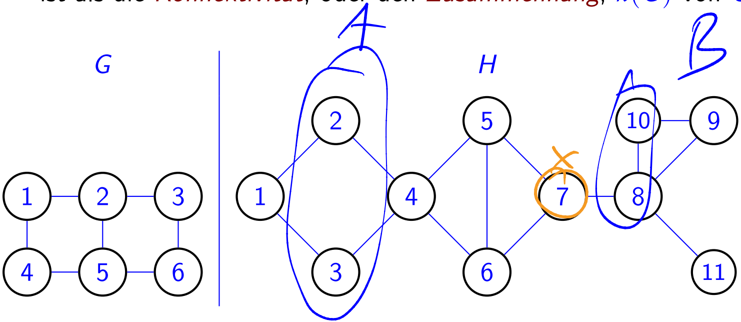
森林的性质

1. **无环性**：森林中的每个子图（即每棵树）都没有环。
2. **连通性**：森林中的每棵树是连通的，但不同的树之间是不连通的。
3. **边数与节点数的关系**：对于一棵树，如果有 n 个节点，则有 $n-1$ 条边。对于包含 k 棵树的森林，如果总共有 n 个节点，则有 $n-k$ 条边。

Wiederholung: Zusammenhang und k-Zusammenhang

Definition. Sei G ein Graph.

1. Ein Graph G ist *k-zusammenhängend*, wenn $|G| > k$ und $G - X$ für jede Menge $X \subseteq V(G)$ mit $|X| < k$ zusammenhängend ist.
2. Wir bezeichnen das maximale $k \geq 0$ für das G k-zusammenhängend ist als die *Konnektivität*, oder den *Zusammenhang*, $\kappa(G)$ von G.

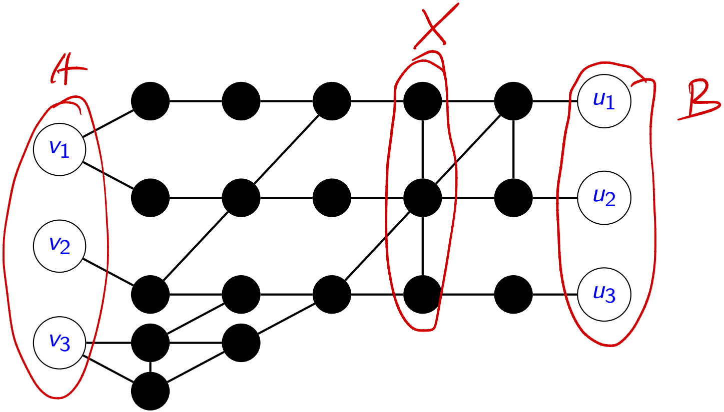


6.2 Separationen und Trenner

Separatoren und Trenner

Definition. Sei G ein Graph und $A, B \subseteq V(G)$. Sei $X \subseteq V(G)$.

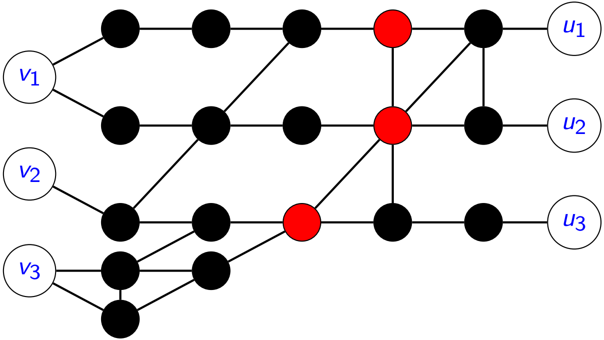
1. X *trennt* A und B in G, oder X ist ein A–B-*Trenner*, wenn jeder A–B-Pfad in G einen Knoten aus X enthält.



Separatoren und Trenner

Definition. Sei G ein Graph und $A, B \subseteq V(G)$. Sei $X \subseteq V(G)$.

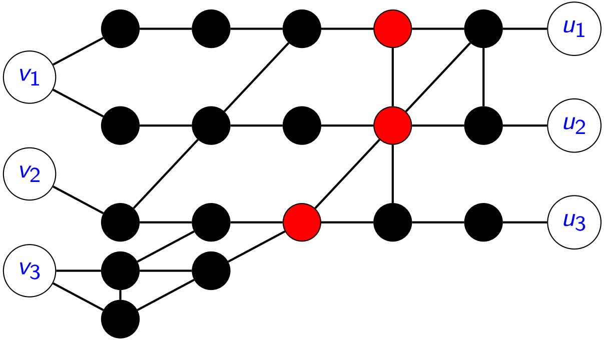
1. X *trennt* A und B in G, oder X ist ein A–B-*Trenner*, wenn jeder A–B-Pfad in G einen Knoten aus X enthält.



Separatoren und Trenner

Definition. Sei G ein Graph und $A, B \subseteq V(G)$. Sei $X \subseteq V(G)$.

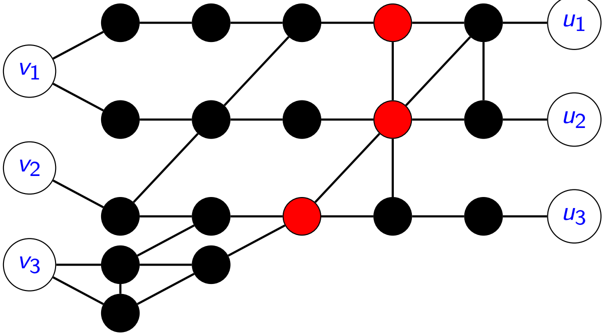
1. X *trennt* A und B in G, oder X ist ein A–B-*Trenner*, wenn jeder A–B-Pfad in G einen Knoten aus X enthält.
2. X ist ein *Trenner* in G, wenn X zwei Knoten $u, v \notin X$ derselben Komponente von G trennt.



Separatoren und Trenner

Definition. Sei G ein Graph und $A, B \subseteq V(G)$. Sei $X \subseteq V(G)$.

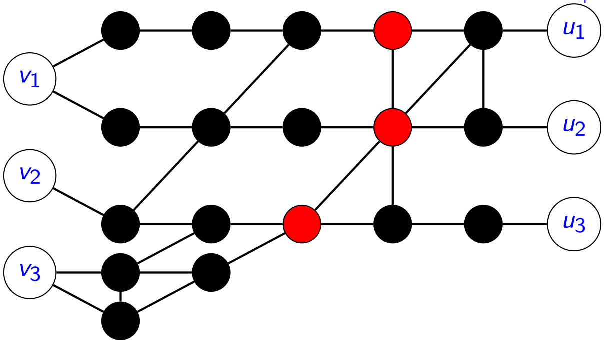
1. X *trennt* A und B in G, oder X ist ein A–B-*Trenner*, wenn jeder A–B-Pfad in G einen Knoten aus X enthält.
2. X ist ein *Trenner* in G, wenn X zwei Knoten $u, v \notin X$ derselben Komponente von G trennt.
3. Ein k-*Trenner* in G ist ein Trenner X in G mit $|X| = k$.



Separatoren und Trenner

Definition. Sei G ein Graph und $A, B \subseteq V(G)$. Sei $X \subseteq V(G)$.

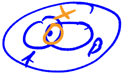
1. X *trennt* A und B in G, oder X ist ein A—B-*Trenner*, wenn jeder A—B-Pfad in G einen Knoten aus X enthält.
2. X ist ein *Trenner* in G, wenn X zwei Knoten $u, v \notin X$ derselben Komponente von G trennt.
3. Ein k-*Trenner* in G ist ein Trenner X in G mit $|X| = k$.



Anmerkungen

1) $A \cap B \subseteq X$

G



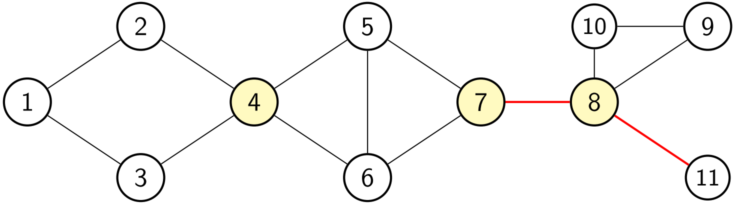
Notation.
Statt Trenner sagt man auch oft Separator.

2) $X = A$ oder $X = B$ ist immer ein A-B-Trenner.

Trenner

Definition.
Sei G Graph, $A, B \subseteq V(G)$.
$X \subseteq V(G)$ *trennt* A und B in G, wenn jeder A–B-Pfad in G einen Knoten aus X enthält.

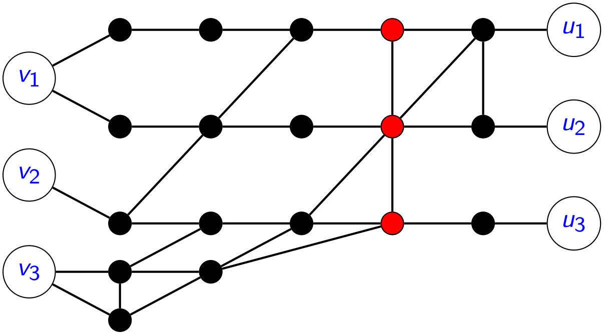
Bemerkung. Sei G ein Graph und sei $X \subseteq V(G)$.
Ist $X = \{v\}$ ein Trenner in G, dann ist v einen Schnittknoten in G.



Eigenschaften von Trennern

Beobachtung.

Ein Graph G ist also genau dann k-zusammenhängend, wenn $|G| > k$ und es keinen Trenner $X \subseteq V(G)$ der Größe $|X| < k$gibt, der zwei Knoten $u, v \in V(G) \setminus X$ trennt.



Definition.
Sei G Graph, $A, B \subseteq V(G)$.
$X \subseteq V(G)$ *trennt* A und B in G, wenn jeder A–B-Pfad in G einen Knoten aus X enthält.

6.3 Der Satz von Menger

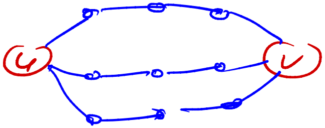
Eine positivere Sicht auf Zusammenhang

k-facher Zusammenhang. Wir haben bisher *k-fachen Zusammenhang* so definiert, dass man durch "zerstören" von weniger als k Knoten den Zusammenhang von G nicht ändern oder zerstören kann.

Eine positivere Sicht auf Zusammenhang

k-facher Zusammenhang. Wir haben bisher *k-fachen Zusammenhang* so definiert, dass man durch “zerstören” von weniger als k Knoten den Zusammenhang von G nicht ändern oder zerstören kann.

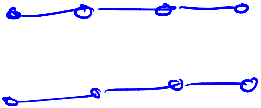
Eine etwas positivere Sicht auf die Dinge. Es wäre vielleicht naheliegender gewesen, k-fachen Zusammenhang so zu definieren, dass es zwischen je zwei Knoten mindestens k voneinander verschiedene Pfade geben soll.



Eine positivere Sicht auf Zusammenhang

k-facher Zusammenhang. Wir haben bisher *k-fachen Zusammenhang* so definiert, dass man durch “zerstören” von weniger als k Knoten den Zusammenhang von G nicht ändern oder zerstören kann.

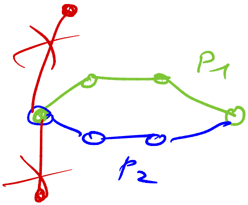
Eine etwas positivere Sicht auf die Dinge. Es wäre vielleicht naheliegender gewesen, k-fachen Zusammenhang so zu definieren, dass es zwischen je zwei Knoten mindestens k voneinander verschiedene Pfade geben soll.



Definition. Sei G ein Graph und seien P_1, P_2 zwei Pfade in G.

- P_1, P_2 sind *Knoten-disjunkt*, oder kurz *disjunkt*, wenn es keinen Knoten $v \in V(G)$ gibt, der sowohl in P_1 als auch in P_2 vorkommt.
- P_1, P_2 sind *intern Knoten-disjunkt*, wenn es keinen Knoten gibt, der sowohl in P_1 als auch in P_2 vorkommt und kein Endpunkt von P_1 oder kein Endpunkt von P_2 ist.

  D.h. intern Knoten-disjunkte Pfade dürfen gemeinsame Endpunkte haben, aber kein innerer Knoten des einen Pfades darf auf dem anderen liegen.



Der Satz von Menger

Satz (Menger 1927).

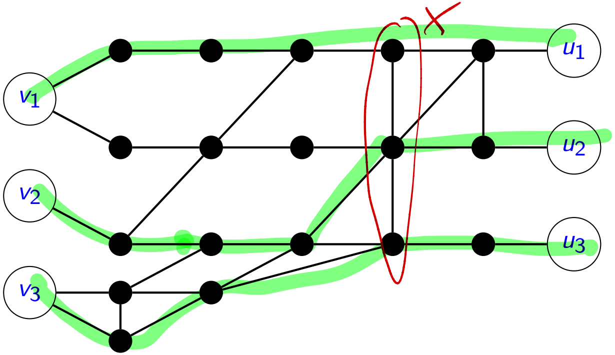
Sei G ein Graph und seien $A, B \subseteq V(G)$.

Die minimale Zahl von Knoten, die A und B voneinander trennen, ist gleich der maximalen Anzahl knoten-disjunkter A—B-Pfade in G.

Karl Menger, 1902–1985,
Österreichischer Mathematiker

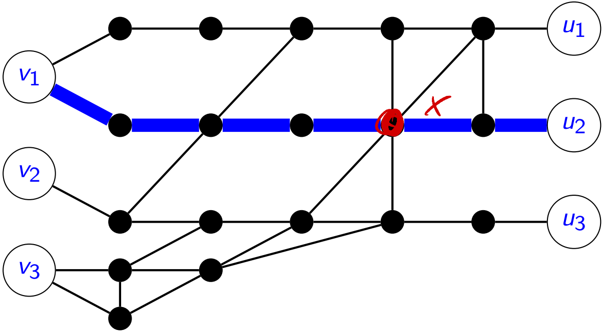
Der Satz von Menger

Satz. Sei G ein Graph und seien $A, B \subseteq V(G)$.
Die minimale Zahl von Knoten, die A und B voneinander trennen, ist gleich der maximalen Anzahl knoten-disjunkter A–B-Pfade in G.



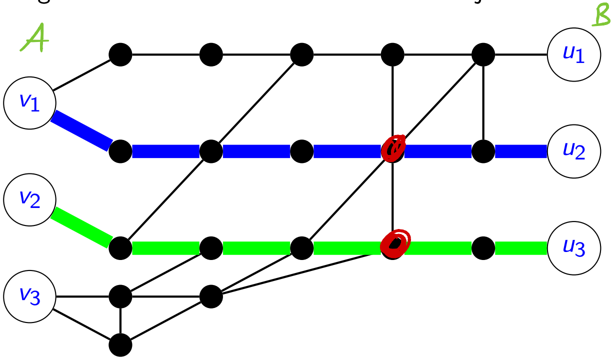
Der Satz von Menger

Satz. Sei G ein Graph und seien $A, B \subseteq V(G)$.
Die minimale Zahl von Knoten, die A und B voneinander trennen, ist gleich der maximalen Anzahl knoten-disjunkter A–B-Pfade in G.



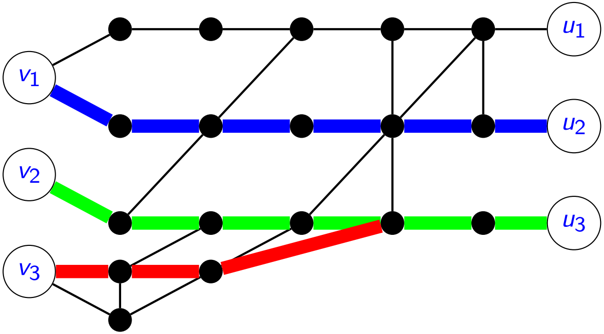
Der Satz von Menger

Satz. Sei G ein Graph und seien $A, B \subseteq V(G)$.
Die minimale Zahl von Knoten, die A und B voneinander trennen, ist gleich der maximalen Anzahl knoten-disjunkter A–B-Pfade in G.



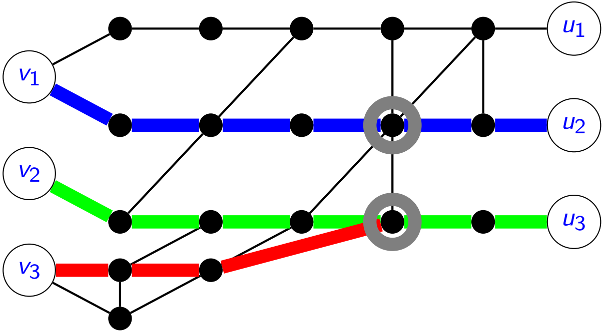
Der Satz von Menger

Satz. Sei G ein Graph und seien $A, B \subseteq V(G)$.
Die minimale Zahl von Knoten, die A und B voneinander trennen, ist gleich der maximalen Anzahl knoten-disjunkter A–B-Pfade in G.



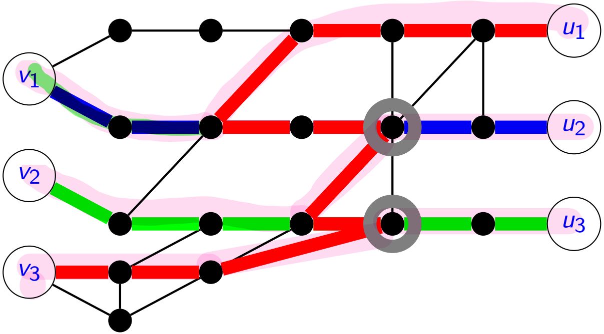
Der Satz von Menger

Satz. Sei G ein Graph und seien $A, B \subseteq V(G)$.
Die minimale Zahl von Knoten, die A und B voneinander trennen, ist gleich der maximalen Anzahl knoten-disjunkter A–B-Pfade in G.



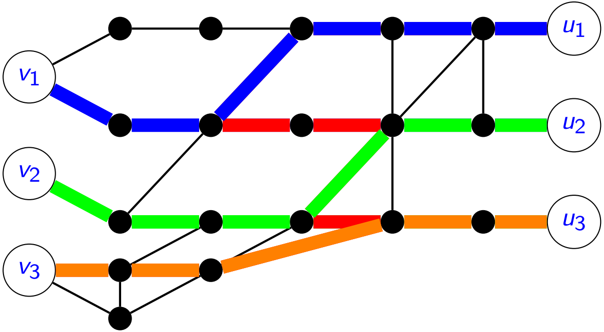
Der Satz von Menger

Satz. Sei G ein Graph und seien $A, B \subseteq V(G)$.
Die minimale Zahl von Knoten, die A und B voneinander trennen, ist gleich der maximalen Anzahl knoten-disjunkter A–B-Pfade in G.



Der Satz von Menger

Satz. Sei G ein Graph und seien $A, B \subseteq V(G)$.
Die minimale Zahl von Knoten, die A und B voneinander trennen, ist gleich der maximalen Anzahl knoten-disjunkter A–B-Pfade in G.



Der Satz von Menger

Theorem (Menger 1927) Sei G ein Graph und seien $A, B \subseteq V(G)$.

Die minimale Zahl von Knoten, die A und B voneinander trennen, ist gleich der maximalen Anzahl knoten-disjunkter A–B-Pfade in G.

Der Satz von Menger

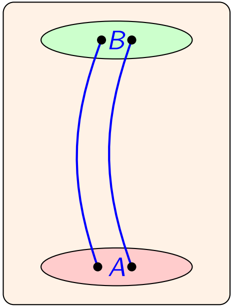
Theorem (Menger 1927) Sei G ein Graph und seien $A, B \subseteq V(G)$.

Die minimale Zahl von Knoten, die A und B voneinander trennen,
ist gleich der maximalen Anzahl knoten-disjunkter $A{-}B$-Pfade in G.

Beweis. Sei $k := k(G, \cancel{X}A, \cancel{Y}B)$ die minimale Zahl von Knoten, die A und B trennen. Wir zeigen folgende stärkere Aussage:

Wenn $\mathcal{P}$ weniger als k disjunkte A-B-Pfade enthält, dann gibt es eine Menge $\mathcal{Q}$ von $|\mathcal{P}| + 1$ disjunkten A-B-Pfaden die $\mathcal{P}$ erweitert.

$\mathcal{Q}$ *erweitert* $\mathcal{P}$: $A \cap V(\mathcal{P}) \subset A \cap V(\mathcal{Q})$ und $B \cap V(\mathcal{P}) \subset B \cap V(\mathcal{Q})$



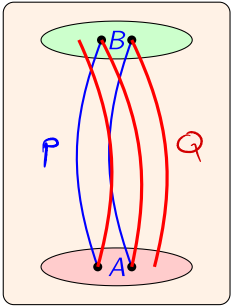
Der Satz von Menger

Theorem (Menger 1927) Sei G ein Graph und seien $A, B \subseteq V(G)$.
Die minimale Zahl von Knoten, die A und B voneinander trennen, ist gleich der maximalen Anzahl knoten-disjunkter A—B-Pfade in G.

Beweis. Sei $k := k(G, X, Y)$ die minimale Zahl von Knoten, die A und B trennen. Wir zeigen folgende stärkere Aussage:

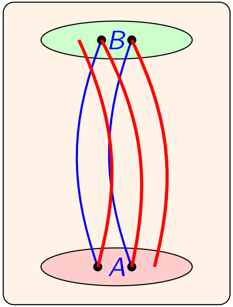
Wenn $\mathcal{P}$ weniger als k disjunkte A-B-Pfade enthält, dann gibt es eine Menge $\mathcal{Q}$ von $|\mathcal{P}| + 1$ disjunkten A-B-Pfaden die $\mathcal{P}$ erweitert.

$\mathcal{Q}$ *erweitert* $\mathcal{P}$: $A \cap V(\mathcal{P}) \subset A \cap V(\mathcal{Q})$ und $B \cap V(\mathcal{P}) \subset B \cap V(\mathcal{Q})$



Der Satz von Menger

Theorem (Menger 1927) Sei G ein Graph und seien $A, B \subseteq V(G)$.
Die minimale Zahl von Knoten, die A und B voneinander trennen, ist gleich der maximalen Anzahl knoten-disjunkter A–B-Pfade in G.



Beweis. Sei $k := k(G, X, Y)$ die minimale Zahl von Knoten, die A und B trennen. Wir zeigen folgende stärkere Aussage:

Wenn $\mathcal{P}$ weniger als k disjunkte A-B-Pfade enthält, dann gibt es eine Menge $\mathcal{Q}$ von $|\mathcal{P}| + 1$ disjunkten A-B-Pfaden die $\mathcal{P}$ erweitert.

$\mathcal{Q}$ *erweitert* $\mathcal{P}$: $A \cap V(\mathcal{P}) \subset A \cap V(\mathcal{Q})$ und $B \cap V(\mathcal{P}) \subset B \cap V(\mathcal{Q})$

Wir fixieren im folgenden G und A, werden aber B ändern.

Der Beweis ist per Induktion über $|V(\mathcal{P})| := |\bigcup_{P \in \{\mathcal{P}\}} V(P)|$.

Der Satz von Menger

Die minimale Zahl von Knoten, die A und B voneinander trennen, ist gleich der maximalen Anzahl knoten-disjunkter A–B-Pfade in G.

Bisher. $k := k(G, X, Y)$: minimale Zahl von Knoten, die A und B trennen.

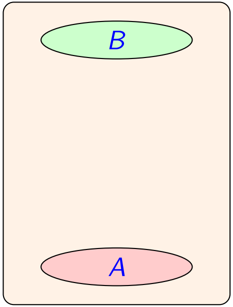
Wir zeigen folgende stärkere Aussage:

Wenn $\mathcal{P}$ weniger als k disjunkte A-B-Pfade sind, dann enthält G eine Menge $\mathcal{Q}$ von $|\mathcal{P}| + 1$-disjunkter A-B-Pfade die $\mathcal{P}$ erweitert.

Induktionsbasis $|V(\mathcal{P})| = 0$.

Sei R ein A-B-Pfad. Wir setzen wir $\mathcal{Q} := \{R\}$.

$\mathcal{Q}$ erweitert $\mathcal{P}$.
$A \cap V(\mathcal{P}) \subset A \cap V(\mathcal{Q})$
$B \cap V(\mathcal{P}) \subset B \cap V(\mathcal{Q})$



Der Satz von Menger

Die minimale Zahl von Knoten, die A und B voneinander trennen, ist gleich der maximalen Anzahl knoten-disjunkter A–B-Pfade in G.

Bisher. $k := k(G, X, Y)$: minimale Zahl von Knoten, die A und B trennen.

Wir zeigen folgende stärkere Aussage:

Wenn $\mathcal{P}$ weniger als k disjunkte A-B-Pfade sind, dann enthält G eine Menge $\mathcal{Q}$ von $|\mathcal{P}|+1$-disjunkter A-B-Pfade die $\mathcal{P}$ erweitert.

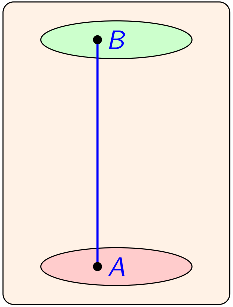
Induktionsbasis $|V(\mathcal{P})| = 0$.

Sei R ein A-B-Pfad. Wir setzen wir $\mathcal{Q} := \{R\}$.

$\mathcal{Q}$ erweitert $\mathcal{P}$.

$A \cap V(\mathcal{P}) \subset A \cap V(\mathcal{Q})$

$B \cap V(\mathcal{P}) \subset B \cap V(\mathcal{Q})$



Der Satz von Menger

Die minimale Zahl von Knoten, die A und B voneinander trennen, ist gleich der maximalen Anzahl knoten-disjunkter A–B-Pfade in G.

Bisher. $k := k(G, X, Y)$: minimale Zahl von Knoten, die A und B trennen.
Wir zeigen folgende stärkere Aussage:

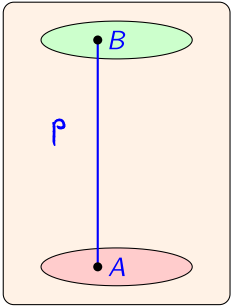
Wenn $\mathcal{P}$ weniger als k disjunkte A-B-Pfade sind, dann enthält G eine Menge $\mathcal{Q}$ von $|\mathcal{P}|+1$-disjunkter A-B-Pfade die $\mathcal{P}$ erweitert.

Induktionsbasis $|V(\mathcal{P})| = 0$.
Sei R ein A-B-Pfad. Wir setzen wir $\mathcal{Q} := \{R\}$.

Induktionsschritt $|V(\mathcal{P})| > 0$. Sei R ein A-B-Pfad der die $(< k)$ Knoten aus B in $V(\mathcal{P})$ vermeidet.

Fall 1. Falls R keinen Pfad aus $\mathcal{P}$ trifft, setzen wir $\mathcal{Q} := \mathcal{P} \cup \{R\}$.

$\mathcal{Q}$ erweitert $\mathcal{P}$.
$A \cap V(\mathcal{P}) \subset A \cap V(\mathcal{Q})$
$B \cap V(\mathcal{P}) \subset B \cap V(\mathcal{Q})$



Der Satz von Menger

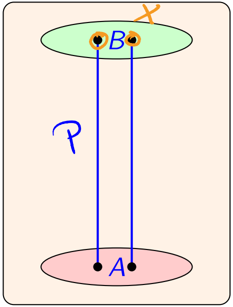
Die minimale Zahl von Knoten, die A und B voneinander trennen, ist gleich der maximalen Anzahl knoten-disjunkter A–B-Pfade in G.

Bisher. $k := k(G, X, Y)$: minimale Zahl von Knoten, die A und B trennen.

Wir zeigen folgende stärkere Aussage:

Wenn $\mathcal{P}$ weniger als k disjunkte A-B-Pfade sind, dann enthält G eine Menge $\mathcal{Q}$ von $|\mathcal{P}|+1$-disjunkter A-B-Pfade die $\mathcal{P}$ erweitert.

$\mathcal{Q}$ erweitert $\mathcal{P}$.
$A \cap V(\mathcal{P}) \subset A \cap V(\mathcal{Q})$
$B \cap V(\mathcal{P}) \subset B \cap V(\mathcal{Q})$



Induktionsbasis $|V(\mathcal{P})| = 0$.

Sei R ein A-B-Pfad. Wir setzen wir $\mathcal{Q} := \{R\}$.

Induktionsschritt $|V(\mathcal{P})| > 0$. Sei R ein A-B-Pfad der die ($< k$) Knoten aus B in $V(\mathcal{P})$ vermeidet.

Fall 1. Falls R keinen Pfad aus $\mathcal{P}$ trifft, setzen wir $\mathcal{Q} := \mathcal{P} \cup \{R\}$.

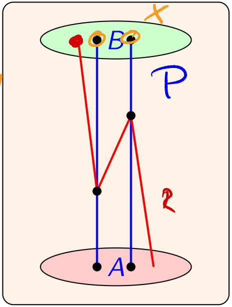
Der Satz von Menger

Die minimale Zahl von Knoten, die A und B voneinander trennen, ist gleich der maximalen Anzahl knoten-disjunkter A–B-Pfade in G.

$\mathcal{Q}$ erweitert $\mathcal{P}$.
$A \cap V(\mathcal{P}) \subset A \cap V(\mathcal{Q})$
$B \cap V(\mathcal{P}) \subset B \cap V(\mathcal{Q})$

Bisher. $k := k(G, X, Y)$: minimale Zahl von Knoten, die A und B trennen.
Wir zeigen folgende stärkere Aussage:
Wenn $\mathcal{P}$ weniger als k disjunkte A-B-Pfade sind, dann enthält G eine Menge $\mathcal{Q}$ von $|\mathcal{P}|+1$-disjunkter A-B-Pfade die $\mathcal{P}$ erweitert.

$G \setminus X$
keine A-B-Pfad



Induktionsbasis $|V(\mathcal{P})| = 0$.
Sei R ein A-B-Pfad. Wir setzen wir $\mathcal{Q} := \{R\}$.

Induktionsschritt $|V(\mathcal{P})| > 0$. Sei R ein A-B-Pfad der die $(< k)$ Knoten aus B in $V(\mathcal{P})$ vermeidet.

Fall 1. Falls R keinen Pfad aus $\mathcal{P}$ trifft, setzen wir $\mathcal{Q} := \mathcal{P} \cup \{R\}$.

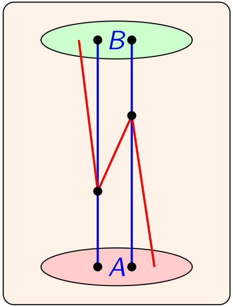
Fall 2. Ang., R trifft einen Pfad aus $\mathcal{P}$.

R existiert, da sonst $X = V(\mathcal{P}) \cap B$ ein A-B-Trenner der Größe $|\mathcal{P}| < k$ wäre ↯

Der Satz von Menger

Induktionsschritt $|V(\mathcal{P})| > 0$. Sei R ein A-B-Pfad der die Knoten aus B in $V(\mathcal{P})$ vermeidet. Ang., R trifft einen Pfad aus $\mathcal{P}$.

$\mathcal{Q}$ erweitert $\mathcal{P}$.
$A \cap V(\mathcal{P}) \subset A \cap V(\mathcal{Q})$
$B \cap V(\mathcal{P}) \subset B \cap V(\mathcal{Q})$



Der Satz von Menger

Induktionsschritt $|V(\mathcal{P})| > 0$. Sei R ein A-B-Pfad der die Knoten aus B in $V(\mathcal{P})$ vermeidet. Ang., R trifft einen Pfad aus $\mathcal{P}$.

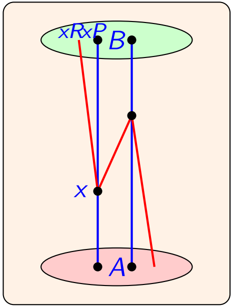
Sei x der letzte Knoten aus R der auf einem $P \in \mathcal{P}$ liegt.

Wir setzen $B' := B \cup V(xP \cup xR)$ und $\mathcal{P}' := (\mathcal{P} \setminus \{P\}) \cup \{Px\}$.

$\mathcal{Q}$ erweitert $\mathcal{P}$.

$A \cap V(\mathcal{P}) \subset A \cap V(\mathcal{Q})$

$B \cap V(\mathcal{P}) \subset B \cap V(\mathcal{Q})$



Der Satz von Menger

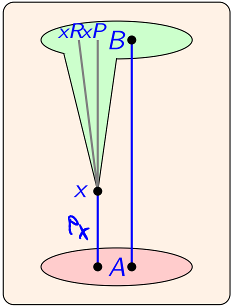
Induktionsschritt $|V(\mathcal{P})| > 0$. Sei R ein A-B-Pfad der die Knoten aus B in $V(\mathcal{P})$ vermeidet. Ang., R trifft einen Pfad aus $\mathcal{P}$.

Sei x der letzte Knoten aus R der auf einem $P \in \mathcal{P}$ liegt.

Wir setzen $B' := B \cup V(xP \cup xR)$ und $\mathcal{P}' := (\mathcal{P} \setminus \{P\}) \cup \{Px\}$.

$\mathcal{Q}$ erweitert $\mathcal{P}$.

$A \cap V(\mathcal{P}) \subset A \cap V(\mathcal{Q})$
$B \cap V(\mathcal{P}) \subset B \cap V(\mathcal{Q})$



Der Satz von Menger

$\mathcal{Q}$ erweitert $\mathcal{P}$.
$A \cap V(\mathcal{P}) \subset A \cap V(\mathcal{Q})$
$B \cap V(\mathcal{P}) \subset B \cap V(\mathcal{Q})$

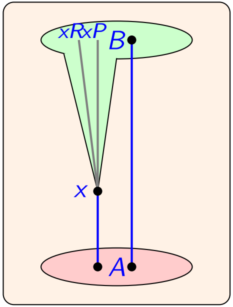
Induktionsschritt $|V(\mathcal{P})| > 0$. Sei R ein A-B-Pfad der die Knoten aus B in $V(\mathcal{P})$ vermeidet. Ang., R trifft einen Pfad aus $\mathcal{P}$.

Sei x der letzte Knoten aus R der auf einem $P \in \mathcal{P}$ liegt.
Wir setzen $B' := B \cup V(xP \cup xR)$ und $\mathcal{P}' := (\mathcal{P} \setminus \{P\}) \cup \{Px\}$.

Nun gilt $|V(\mathcal{P}')| < |V(\mathcal{P})|$. Nach IV gibt es daher eine Menge $\mathcal{Q}'$ von $|\mathcal{P}'| + 1$ disjunkten A-B'-Pfade die $\mathcal{P}'$ erweitern.

$\mathcal{Q}'$ muss daher

- einen Pfad Q enthalten, der in x endet und
- einen eindeutigen Pfad Q', dessen letzter Knoten y keiner der letzten Endknoten von Pfaden in $\mathcal{P}'$ ist.



Der Satz von Menger

Induktionsschritt $|V(\mathcal{P})| > 0$. Sei R ein A-B-Pfad der die Knoten aus B in $V(\mathcal{P})$ vermeidet. Ang., R trifft einen Pfad aus $\mathcal{P}$.

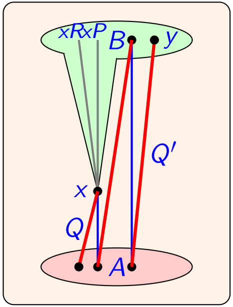
Sei x der letzte Knoten aus R der auf einem $P \in \mathcal{P}$ liegt.
Wir setzen $B' := B \cup V(xP \cup xR)$ und $\mathcal{P}' := (\mathcal{P} \setminus \{P\}) \cup \{Px\}$.

Nun gilt $|V(\mathcal{P}')| < |V(\mathcal{P})|$. Nach IV gibt es daher eine Menge $\mathcal{Q}'$ von $|\mathcal{P}'| + 1$ disjunkten A-B-Pfade die $\mathcal{P}'$ erweitern.

$\mathcal{Q}'$ muss daher

- einen Pfad Q enthalten, der in x endet und
- einen eindeutigen Pfad Q', dessen letzter Knoten y keiner der letzten Endknoten von Pfaden in $\mathcal{P}'$ ist.

$\mathcal{Q}$ erweitert $\mathcal{P}$.
$A \cap V(\mathcal{P}) \subset A \cap V(\mathcal{Q})$
$B \cap V(\mathcal{P}) \subset B \cap V(\mathcal{Q})$



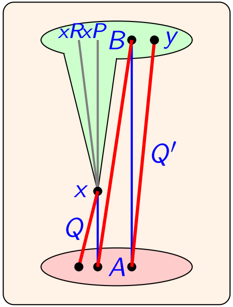
Beweis

$\mathcal{Q}$ erweitert $\mathcal{P}$.

$A \cap V(\mathcal{P}) \subset A \cap V(\mathcal{Q})$
$B \cap V(\mathcal{P}) \subset B \cap V(\mathcal{Q})$

Fall 1: $y \notin V(xP)$. Dann erhalten wir $\mathcal{Q}$ aus $\mathcal{Q}'$ indem wir xP an Q anhängen. Ferner,

- falls $y \in V(xR)$, hängen wir yR an Q' an und fügen diesen Pfad zu $\mathcal{Q}$ hinzu.
- Falls $y \notin V(xR)$ fügen wir Q' zu $\mathcal{Q}$ hinzu.



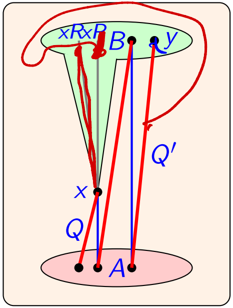
Beweis

Fall 1: $y \notin V(xP)$. Dann erhalten wir $\mathcal{Q}$ aus $\mathcal{Q}'$ indem wir xP an Q anhängen. Ferner,

- falls $y \in V(xR)$, hängen wir yR an Q' an und fügen diesen Pfad zu $\mathcal{Q}$ hinzu.
- Falls $y \notin V(xR)$ fügen wir Q' zu $\mathcal{Q}$ hinzu.

Fall 2: $y \in V(xP)$. Dann erhalten wir $\mathcal{Q}$ aus $\mathcal{Q}'$ indem wir xR zu Q und yP zu Q' hinzufügen.
In beiden Fällen erweitert $\mathcal{Q}$ die Menge $\mathcal{P}$, was zu zeigen war.

$\mathcal{Q}$ erweitert $\mathcal{P}$.
$A \cap V(\mathcal{P}) \subset A \cap V(\mathcal{Q})$
$B \cap V(\mathcal{P}) \subset B \cap V(\mathcal{Q})$



Beweis

Fall 1: $y \notin V(xP)$. Dann erhalten wir $\mathcal{Q}$ aus $\mathcal{Q}'$ indem wir xP an Q anhängen. Ferner,

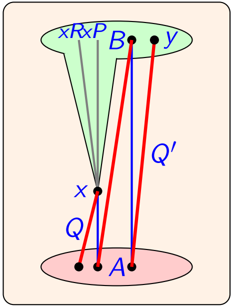
- falls $y \in V(xR)$, hängen wir yR an Q' an und fügen diesen Pfad zu $\mathcal{Q}$ hinzu.
- Falls $y \notin V(xR)$ fügen wir Q' zu $\mathcal{Q}$ hinzu.

Fall 2: $y \in V(xP)$. Dann erhalten wir $\mathcal{Q}$ aus $\mathcal{Q}'$ indem wir xR zu Q und yP zu Q' hinzufügen.
In beiden Fällen erweitert $\mathcal{Q}$ die Menge $\mathcal{P}$, was zu zeigen war.

Wir haben also bewiesen: Sei $k := k(G, X, Y)$ die minimale Zahl von Knoten, die A und B trennen. Wir zeigen folgende stärkere Aussage:

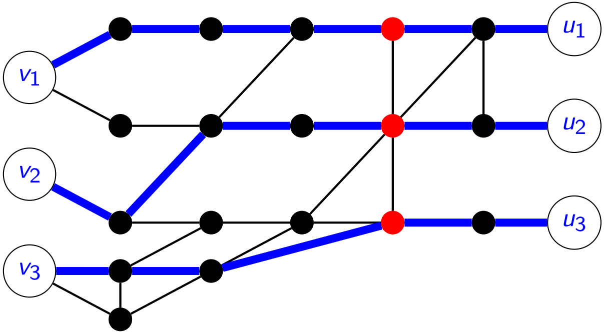
> *Wenn $\mathcal{P}$ weniger als k disjunkte A-B-Pfade enthält, dann gibt es eine Menge $\mathcal{Q}$ von $|\mathcal{P}| + 1$ disjunkten A-B-Pfaden die $\mathcal{P}$ erweitert.*

$\mathcal{Q}$ erweitert $\mathcal{P}$.
$A \cap V(\mathcal{P}) \subset A \cap V(\mathcal{Q})$
$B \cap V(\mathcal{P}) \subset B \cap V(\mathcal{Q})$



Der Satz von Menger

Theorem (Menger 1927) Sei G ein Graph und seien $A, B \subseteq V(G)$.
Die minimale Zahl von Knoten, die A und B voneinander trennen, ist gleich der maximalen Anzahl knoten-disjunkter A–B-Pfade in G.



Der Satz von Menger

Theorem (Menger 1927) Sei G ein Graph und seien $A, B \subseteq V(G)$.

Die minimale Zahl von Knoten, die A und B voneinander trennen, ist gleich der maximalen Anzahl knoten-disjunkter A–B-Pfade in G.

Algorithmus. Aus unserem Beweis folgt nicht sofort ein Algorithmus zum Berechnen einer maximalen Menge disjunkter Pfade.

Man kann mit der gleichen Idee aber einen Algorithmus konstruieren, der in polynomieller Zeit eine maximale Menge disjunkter Pfade ausrechnet. (Siehe auch matchings)

Am einfachsten geht das mit Netzwerkflussalgorithmen, die Sie im Modul „Algorithmen und Datenstrukturen" kennenlernen werden.

Der Satz von Menger

Theorem (Menger 1927) Sei G ein Graph und seien $A, B \subseteq V(G)$.

Die minimale Zahl von Knoten, die A und B voneinander trennen, ist gleich der maximalen Anzahl knoten-disjunkter A–B-Pfade in G.

Varianten. Der Satz von Menger gilt analog auch für viele Varianten des Problems. Z.B. gilt er für

- gerichtete Graphen
- kantendisjunkte Pfade und Kantenschnitte.

  Die maximale Zahl von paarweise kantendisjunkten Pfaden zwischen A und B ist gleich der minimalen Zahl von Kanten die gelöscht werden müssen um A von B zu trennen.

Der Satz von Menger

Theorem (Menger 1927) Sei G ein Graph und seien $A, B \subseteq V(G)$.

Die minimale Zahl von Knoten, die A und B voneinander trennen, ist gleich der maximalen Anzahl knoten-disjunkter A—B-Pfade in G.

Varianten. Der Satz von Menger gilt analog auch für viele Varianten des Problems. Z.B. gilt er für

- gerichtete Graphen
- kantendisjunkte Pfade und Kantenschnitte.

  Die maximale Zahl von paarweise kantendisjunkten Pfaden zwischen A und B ist gleich der minimalen Zahl von Kanten die gelöscht werden müssen um A von B zu trennen.

Dualitätssätze. Der Satz von Menger beweist eine Art von *Dualität*.

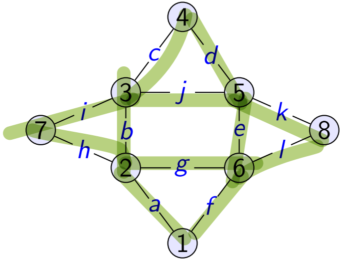
> ***Entweder*** *G enthält k disjunkte A-B Pfade* ***oder*** *es gibt eine Menge X von k Knoten, die A und B trennen und damit beweisen, dass es keine $k+1$ disjunkten A-B Pfade gibt.*

6.4 Euler-Touren und Hamiltonpfade

Euler-Touren

Definition.
Sei G ein Graph. Eine *Euler-Tour* in G ist ein geschlossener Kantenzug, der jede Kante aus G genau einmal durchläuft.

Beispiel.



Euler-Tour.

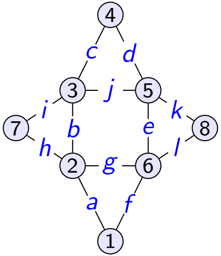
$(1, a, 2, b, 3, c, 4, d, 5, e, 6, l, 8, k, 5, j, 3, i, 7, h, 2, g, 6, f, 1)$

Euler-Touren

Definition. Sei G ein Graph. Eine *Euler-Tour* in G ist ein geschlossener Kantenzug, der jede Kante aus G genau einmal durchläuft.

Satz.

Ein zusammenhängender Graph G hat genau dann eine Euler-Tour, wenn der Grad jedes Knotens gerade ist.



Euler-Tour.
$(1, a, 2, b, 3, c, 4, d, 5, e, 6, l, 8, k, 5, j, 3, i, 7, h, 2, g, 6, f, 1)$

Euler-Touren

Definition. Sei G ein Graph. Eine *Euler-Tour* in G ist ein geschlossener Kantenzug, der jede Kante aus G genau einmal durchläuft.

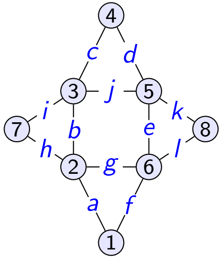
Satz.
Ein zusammenhängender Graph G hat genau dann eine Euler-Tour, wenn der Grad jedes Knotens gerade ist.

Beweis.
Hinrichtung. Zeige: Wenn G eine Euler-Tour hat, dann hat jeder Knoten in G geraden Grad.

Sei $(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_m, v_m = v_0)$ eine Euler-Tour. Definiere $e_{m+1} = e_1$.

Nach Definition einer Euler-Tour gilt $e_i \neq e_j$ für alle $1 \leq i \neq j \leq m$.

Weiterhin kommt jede Kante genau einmal in $\{e_1, \dots, e_m\}$ vor.



Euler-Tour.
$(1, a, 2, b, 3, c, 4, d, 5, e, 6, l, 8, k, 5, j, 3, i, 7, h, 2, g, 6, f, 1)$

Euler-Touren

Satz.

Ein zusammenhängender Graph G hat genau dann eine Euler-Tour, wenn der Grad jedes Knotens gerade ist.

Beweis.

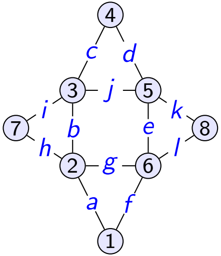
Hinrichtung. Zeige: Wenn G eine Euler-Tour hat, dann hat jeder Knoten in G geraden Grad.

Sei $(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_m, v_m = v_0)$ eine Euler-Tour. Definiere $e_{m+1} = e_1$.

Nach Definition einer Euler-Tour gilt $e_i \neq e_j$ für alle $1 \leq i \neq j \leq m$.

Weiterhin kommt jede Kante genau einmal in $\{e_1, \dots, e_m\}$ vor.

Idee. Da v_i zu e_i und e_{i+1} inzident ist, trägt jedes Vorkommen eines Knotens u in der Tour 2 Kanten zum Grad von u bei. Also haben alle Knoten einen geraden Grad.



Euler-Tour.
$(1, a, 2, b, 3, c, 4, d, 5, e, 6, l, 8, k, 5, j, 3, i, 7, h, 2, g, 6, f, 1)$

Euler-Touren

Satz.

Ein zusammenhängender Graph G hat genau dann eine Euler-Tour, wenn der Grad jedes Knotens gerade ist.

Beweis.

Hinrichtung. Zeige: Wenn G eine Euler-Tour hat, dann hat jeder Knoten in G geraden Grad.

Sei $(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_m, v_m = v_0)$ eine Euler-Tour. Definiere $e_{m+1} = e_1$.

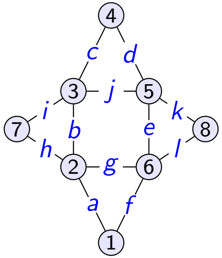
Für $u \in V(G)$ sei $I(u) := \{i : 1 \leq i \leq m, v_i = u\}$.

Dann gilt

$$\{e \in E(G) : u \text{ ist inzident zu } e\} \;=\; \{e_i, e_{i+1} : i \in I(u)\}.$$

Da G keine Schleifen enthält und per Definition einer Euler-Tour $e_i \neq e_j$ für alle $1 \leq i \neq j \leq m$, gilt $\{e_i, e_{i+1}\} \cap \{e_j, e_{j+1}\} = \emptyset$ für alle $i \neq j \in I(u)$.

Also ist $d_G(u) = 2 \cdot |\{i : i \in I(u)\}|$ und daher gerade. ⊣



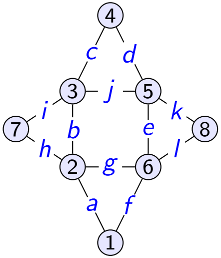
Euler-Tour.
$(1, a, 2, b, 3, c, 4, d, 5, e, 6, l, 8, k, 5, j, 3, i, 7, h, 2, g, 6, f, 1)$

1 10

$I(2) = \{1, 10\}$

Euler-Touren

Rückrichtung. Zeige: Wenn der Grad jedes Knotens in G gerade ist, dann hat G eine Euler-Tour.



Euler-Tour.
$(1, a, 2, b, 3, c, 4, d, 5, e, 6, l, 8, k, 5, j, 3, i, 7, h, 2, g, 6, f, 1)$

Euler-Touren

Rückrichtung. Zeige: Wenn der Grad jedes Knotens in G gerade ist, dann hat G eine Euler-Tour.

Behauptung 1. G enthält einen geschlossenen Kantenzug in dem keine Kante wiederholt wird.

Beweis. Wir konstruieren eine Folge $C_1, C_2, \dots$ von Kantenzügen, in denen keine Kante wiederholt wird, wie folgt:

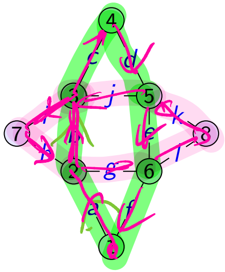
- Wähle $e_1 = \{v_0, v_1\} \in E(G)$ beliebig und definiere $C_1 = (v_0, e_1, v_1)$.
- Sei $C_i = (v_0, e_1, \dots, e_i, v_i)$ schon konstruiert.

  Wenn v_i zu einer noch nicht benutzten Kante $e = \{v_i, v'\}$ inzident ist, definiere $C_{i+1} = (v_0, e_1, \dots, e_i, v_i, e, v')$.

  Ansonsten hört die Konstruktion hier auf.

Da jeder Knoten geraden Grad hat, können wir C_i nur dann nicht erweitern, wenn $v_i = v_0$ ist und alle zu v_i inzidenten Kanten schon durchlaufen wurden.

Also ist C_i in diesem Fall ein geschlossener Kantenzug. $\dashv$



Euler-Tour.
$(1, a, 2, b, 3, c, 4, d, 5, e, 6, l, 8, k, 5, j, 3, i, 7, h, 2, g, 6, f, 1)$

Euler-Touren

Rückrichtung. Zeige: Wenn der Grad jedes Knotens in G gerade ist, dann hat G eine Euler-Tour.

Behauptung 1. G enthält einen geschlossenen Kantenzug in dem keine Kante wiederholt wird.

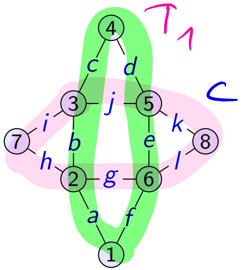
Idee. Wir konstruieren eine Folge von geschlossenen Kantenzügen $T_1, \dots$ in denen keine Kante wiederholt wird wie folgt.

- Wähle einen geschlossenen Kantenzug T_1 ohne Wiederholung einer Kante beliebig. Dies geht nach Behauptung 1.
- Sei nun $T_i = (v_0, e_1, \dots, e_j, v_j, v_{j+1}, \dots, e_\ell, v_\ell = v_0)$ schon konstruiert. Wenn T_i alle Kanten aus G enthält, ist T_i eine Euler-Tour.

  Ansonsten gibt es einen Knoten v_j, für ein $1 \leq j \leq \ell$, und eine Kante $f_1 = \{v_j, u_1\} \in E(G)$, so dass $f \neq e_s$ für alle $1 \leq s \leq \ell$.

  Wie im Beweis von Behauptung 1 konstruieren wir einen geschlossenen Kantenzug $C = (v_j, f_1, u_1, \dots, f_k, v_k = v_j)$, in dem keine Kante wiederholt wird und der keine Kante aus T_i benutzt.

  Dies geht, da in $G - \{e_1, \dots, e_\ell\}$ jeder Knoten geraden Grad hat.



Euler-Tour.
$(1, a, 2, b, 3, c, 4, d, 5, e, 6, l, 8, k, 5, j, 3, i, 7, h, 2, g, 6, f, 1)$

Euler-Touren

Rückrichtung. Zeige: Wenn der Grad jedes Knotens in G gerade ist, dann hat G eine Euler-Tour.

Idee. Wir konstruieren eine Folge von geschlossenen Kantenzügen $T_1, \dots$ in denen keine Kante wiederholt wird wie folgt.

- Sei nun $T_i = (v_0, e_1, \dots, e_j, v_j, v_{j+1}, \dots, e_\ell, v_\ell = v_0)$ schon konstruiert. Wenn T_i alle Kanten aus G enthält, ist T_i eine Euler-Tour.

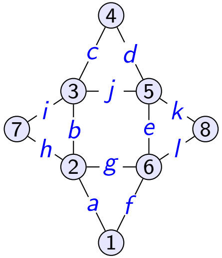
  Ansonsten gibt es einen Knoten v_j, für ein $1 \leq j \leq \ell$, und eine Kante $f_1 = \{v_j, u_1\} \in E(G)$, so dass $f \neq e_s$ für alle $1 \leq s \leq \ell$.

  Wie im Beweis von Behauptung 1 konstruieren wir einen geschlossenen Kantenzug $C = (v_j, f_1, u_1, \dots, f_k, v_k = v_j)$, in dem keine Kante wiederholt wird und der keine Kante aus T_i benutzt.

  Dies geht, da in $G - \{e_1, \dots, e_\ell\}$ jeder Knoten geraden Grad hat.

  Definiere $T_{i+1} = (v_0, e_1, \dots, v_j, f_1, u_1, \dots, f_k, v_k = v_j, e_\ell, v_\ell = v_0)$

Da G endlich ist, terminiert das Verfahren irgendwann mit einer Euler-Tour T_i. $\square$



Euler-Tour.
$(1, a, 2, b, 3, c, 4, d, 5, e, 6, l, 8, k, 5, j, 3, i, 7, h, 2, g, 6, f, 1)$

Euler-Touren

Rückrichtung. Zeige: Wenn der Grad jedes Knotens in G gerade ist, dann hat G eine Euler-Tour.

Alternative Art den Beweis aufzuschreiben. Nach Behauptung 1 enthält G einen geschlossenen Kantenzug in dem keine Kante wiederholt wird.

Sei T ein solcher Kantenzug mit einer maximalen Anzahl an Kanten.

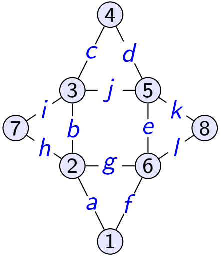
Behauptung. T ist eine Euler-Tour.

Beweis. Sei F die Menge der Kanten, die in T vorkommen.

Wenn $F \neq E(G)$, dann gibt es einen Knoten v_j in T, der zu einer Kante $e \in E(G) \setminus F$ inzident ist. Dies gilt, da G zusammenhängend ist.

Nach Behauptung 1 gibt es in $G - F$ einen geschlossenen Kantenzug C, der v_j und e enthält und keine Kante wiederholt.

Dann können wir T durch C erweitern, im Widerspruch dazu, dass T kantenmaximal gewählt wurde. $\square$



Euler-Tour.
$(1, a, 2, b, 3, c, 4, d, 5, e, 6, l, 8, k, 5, j, 3, i, 7, h, 2, g, 6, f, 1)$

Eulersche Graphen

Definition. Sei G ein Graph. Eine *Euler-Tour* in G ist ein geschlossener Kantenzug, der jede Kante aus G genau einmal durchläuft.

Satz.

Ein zusammenhängender Graph G hat genau dann eine Euler-Tour, wenn der Grad jedes Knotens gerade ist.

Eulersche Graphen

Definition. Sei G ein Graph. Eine *Euler-Tour* in G ist ein geschlossener Kantenzug, der jede Kante aus G genau einmal durchläuft.

Satz.

Ein zusammenhängender Graph G hat genau dann eine Euler-Tour, wenn der Grad jedes Knotens gerade ist.

Folgerung aus dem Beweis. Ein zusammenhängender Graph G hat genau dann eine Euler-Tour, wenn G die Vereinigung einer Menge paarweise kantendisjunkter Kreise ist.

Eulersche Graphen

Definition. Sei G ein Graph. Eine *Euler-Tour* in G ist ein geschlossener Kantenzug, der jede Kante aus G genau einmal durchläuft.

Satz.

Ein zusammenhängender Graph G hat genau dann eine Euler-Tour, wenn der Grad jedes Knotens gerade ist.

Folgerung aus dem Beweis. Ein zusammenhängender Graph G hat genau dann eine Euler-Tour, wenn G die Vereinigung einer Menge paarweise kantendisjunkter Kreise ist.

Definition. Ein Graph G, in dem der Grad jedes Knotens gerade ist, heißt eulersch.

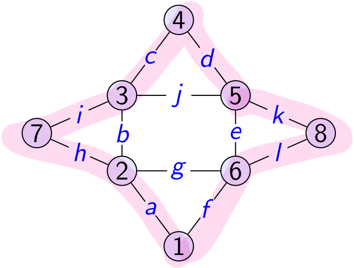
Eigenschaften eulerscher Graphen.

- Eulersche Graphen sind also die Vereinigung kantendisjunkter Kreise.
- Ist ein eulerscher Graph zusammenhängend, dann hat er eine Euler-Tour.

Hamilton-Kreise

Definition.
Sei G ein Graph. Ein *Hamilton-Kreis* in G ist Kreis, der jeden Knoten aus $V(G)$ enthält.

Beispiel.



Hamilton-Kreis.
$(1, a, 2, h, 7, i, 3, c, 4, d, 5, k, 8, l, 6, f, 1)$

Zusammenfassung

Trenner und disjunkte Pfade.

- A–B-Trenner bzw. Separator. Menge X von Knoten in G, so dass es in $G - X$ keinen A–B-Pfad gibt.
- Satz von Menger. Die maximale Zahl der knotendisjunkten Pfade zwischen A und B ist genau gleich der minimalen Größe eines A–B-Trenners.
- Der Satz gilt auch in vielen Varianten.

Euler-Touren. Ein geschlossener Kantenzug in G, in dem jede Kante genau einmal vorkommt.

- Ein Graph in dem jeder Knoten geraden Grad hat, heißt eulersch.
- Eulersche Graphen sind also die Vereinigung kantendisjunkter Kreise.
- Ist ein eulerscher Graph zusammenhängend, dann hat er eine Euler-Tour.

Hamilton-Kreise.

Ein Hamilton-Kreis ist ein Kreis, der alle Knoten von G enthält.