Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen
(Tutorium 6)

Vorlesungswoche: 27. – 31. Mai 2024 Sommersemester 2024

Aufgabe 16

Gegeben ist das lineare Differentialgleichungssystem

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass die Funktionen $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ mit

$$\vec{x}_1(t) \coloneqq \mathrm{e}^{6t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_2(t) \coloneqq \mathrm{e}^{6t} \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung bilden.

(b) Löse die inhomogene Gleichung durch Variation der Konstanten.

Aufgabe 17

Löse das Anfangswertsproblem

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} & \frac{1}{2t^2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2t} \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad t > 0; \qquad \vec{x}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der homogenen Lösung

$$\vec{x}_h(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 18

Der Tank K_1 enthalte 100 l Wasser, in dem zu Beginn 5 kg Salz aufgelöst sind, der Tank K_2 enthalte 300 l Wasser mit 5 kg Salz. Pro Minute werden ständig 10 l Salzlösung von K_1 nach K_2 und 10 l von K_2 nach K_1 gepumpt. Die Durchmischung in beiden Tanks erfolgt ideal (sofort und vollständig). Wie groß sind die Salzgehalte in beiden Tanks zur Zeit t? Welches Verhältnis werden die Salzkonzentrationen nach langer Zeit zueinander haben?

Inhomogene DGL-System 1-Ordnung

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \underbrace{\vec{b}(t)}_{\text{Inhomogenität}}$$

① zugehörige homogene Lösung (TUT 3-5)

$\rightarrow \vec{x}_H(t) = c_1\vec{x}_1(t) + c_2\vec{x}_2(t) + \dots + c_n\vec{x}_n(t)$

② Variation des Konstanten (VdK)

Ansatz: $\underbrace{\vec{x}_P(t)}_{\text{partikulär Lösung}} = c_1(t)\vec{x}_1(t) + c_2(t)\vec{x}_2(t) + \dots + c_n(t)\vec{x}_n(t)$

Es gilt: $\boxed{W(t)\cdot\vec{c}'(t) = \vec{b}(t)}$ mit $W(t) = (\vec{x}_1(t)\ \vec{x}_2(t) \cdots \vec{x}_n(t))$ $\quad c'(t) = \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix}$

↳ LGS Lösung nach $c'(t)$

↳ $c_1(t), c_2(t) \dots = \int c_1'(t)\,dt, \int c_2'(t)\,dt$

↳ $c_1, c_2, \dots$ zurück in den Ansatz $\rightarrow \vec{x}_p(t)$

③ Allgemeine Lösung:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_H(t) + \vec{x}_p(t)$$

Aufgabe 16

Gegeben ist das lineare Differentialgleichungssystem

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass die Funktionen $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ mit

$$\vec{x}_1(t) \coloneqq e^{6t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_2(t) \coloneqq e^{6t}\begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung bilden.

(b) Löse die inhomogene Gleichung durch Variation der Konstanten.

a) ① $\vec{x}_1$ & $\vec{x}_2$ Lösungen?

$\vec{x}_1'(t) = A\vec{x}_1(t) \Rightarrow 6e^{6t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot e^{6t} = e^{6t}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_1$ löst das homogen System

$\vec{x}_2'(t) = A\vec{x}_2(t) \Rightarrow \begin{pmatrix} 6te^{6t} + e^{6t} \\ 6(1-t)e^{6t} - e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}e^{6t} = \begin{pmatrix} 7t+1-t \\ -t+5-5t \end{pmatrix}e^{6t} = e^{6t}\begin{pmatrix} 6t+1 \\ 5-6t \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{x}_2$ löst das homogen System

② lineare unabhängigkeit?

$$\det(W(t)) = \det\begin{pmatrix} e^{6t} & te^{6t} \\ -e^{6t} & (1-t)e^{6t} \end{pmatrix}\Big|_{t=0} = (1-t)e^{12t} + te^{12t} = e^{12t}\,\Big|_{t=0} = 1$$

$\Rightarrow \vec{x}_1$ & $\vec{x}_2$ sind linear unabhängig

$\Rightarrow \vec{x}_1, \vec{x}_2$ bilden FS

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

行列式

b) ① homogene Lösung: $\vec{x}_H(t) = c_1 e^{6t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{6t}\begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}$

② Vdk: $\vec{x}_p = c_1(x)\, e^{6t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2(t)\, e^{6t}\begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}$

$W(t)\,C'(t) = b(t) \Rightarrow \begin{pmatrix} e^{6t} & te^{6t} \\ -e^{6t} & (1-t)e^{6t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $W^{-1}(t) = \frac{1}{e^{12t}(1-t+t)}\begin{pmatrix} (1-t)e^{6t} & -te^{6t} \\ e^{6t} & e^{6t} \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{e^{6t}}\begin{pmatrix} 1-t & -t \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{e^{6t}}\begin{pmatrix} 1-t & -t \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{e^{6t}}\begin{pmatrix} -7+6t \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$c_1(t) = \int \underset{f'}{e^{-6t}}\,\underset{g}{(6t-7)}\,dt = -\tfrac{1}{6}e^{-6t}(6t-7) - \int (-\tfrac{1}{6})e^{-6t}\cdot 6\,dt$$

$$= -\tfrac{1}{6}e^{-6t}(6t-7) + \tfrac{1}{6}6\cdot(-\tfrac{1}{6})e^{-6t}$$

$$= e^{-6t}(1-t)$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$c_2(t) = \int e^{-6t}(-6) = e^{-6t}$$

$$\Rightarrow \vec{x}_p(t) = e^{-6t}(1-t)\,e^{6t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{-6t}\cdot e^{6t}\begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

③ Allg. Lsg: $\vec{x}(t) = c_1 e^{6t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{6t}\begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 17

Löse das Anfangswertsproblem

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} & \frac{1}{2t^2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2t} \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad t > 0; \qquad \vec{x}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der homogenen Lösung

$$\vec{x}_h(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

① Hom. Lösung: $\vec{x}_H(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ -1 \end{pmatrix}$

② VdK: $\vec{x}_p(t) = C_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + C_2(t) \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ -1 \end{pmatrix}$

$$W(t) \cdot \vec{c}\,'(t) = \vec{b}(t) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{t} \\ t & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \quad \Big| \quad W^{-1}(t) = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{t} \\ -t & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{t} \\ -t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -t-t \\ -t^2+t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C_1(t) = \int t \, dt = \frac{1}{2} t^2$$

$$C_2(t) = \int 0 \, dt = 0$$

$$\Rightarrow \vec{x}_p(t) = \frac{1}{2} t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} t^2 \\ \frac{1}{2} t^3 \end{pmatrix}$$

③ Allgemeine Lösung:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_H(t) + \vec{x}_p(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} t^2 \\ \frac{1}{2} t^3 \end{pmatrix}$$

AW: $\vec{x}(1) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= \tfrac{1}{2} \\ C_1 - C_2 &= \tfrac{1}{2} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} C_1 &= \tfrac{1}{2} \\ C_2 &= 0 \end{aligned}$$

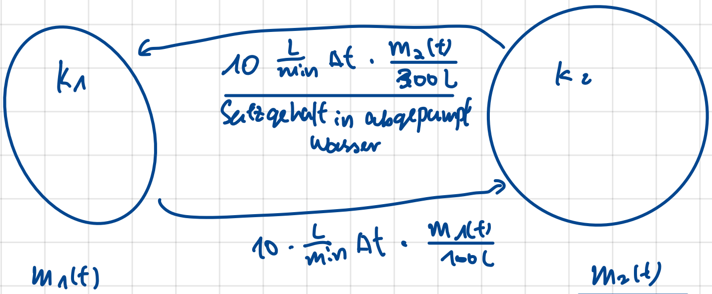
AWP-Lsg $\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} t^2 \\ \frac{1}{2} t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} t^2 \\ \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} t^3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 18

Der Tank K_1 enthalte 100 l Wasser, in dem zu Beginn 5 kg Salz aufgelöst sind, der Tank K_2 enthalte 300 l Wasser mit 5 kg Salz. Pro Minute werden ständig 10 l Salzlösung von K_1 nach K_2 und 10 l von K_2 nach K_1 gepumpt. Die Durchmischung in beiden Tanks erfolgt ideal (sofort und vollständig). Wie groß sind die Salzgehalte in beiden Tanks zur Zeit t? Welches Verhältnis werden die Salzkonzentrationen nach langer Zeit zueinander haben?

Salzgehalt $m_i(t)$ $\qquad$ $m_1(0) = 5\,\text{kg}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;$ $m_2(0) = 5\,\text{kg}$



$\frac{m_1(t)}{100\,L}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\frac{m_2(t)}{300\,L}$

$$\Delta m_1(t) = -10\,\tfrac{L}{min}\cdot\Delta t\cdot\frac{m_1(t)}{100\,L} + 10\,\tfrac{L}{min}\cdot\Delta t\cdot\frac{m_2(t)}{300\,L}$$
$$\Delta m_2(t) = 10\,\tfrac{L}{min}\cdot\Delta t\cdot\frac{m_1(t)}{100\,L} - 10\,\tfrac{L}{min}\cdot\Delta t\cdot\frac{m_2(t)}{300\,L} \qquad \Big|\; :\Delta t,\ \Delta t \to 0$$

$\frac{\Delta m_1(t)}{\Delta t}$ = Steigung $= m_1'(t)$

$$m_1' = \frac{\Delta m_1(t)}{\Delta t} = -10\,\tfrac{L}{min}\cdot\frac{m_1(t)}{100\,L} + 10\,\tfrac{L}{min}\cdot\frac{m_2(t)}{300\,L} = -\frac{m_1(t)}{10\,min} + \frac{m_2(t)}{30\,min}$$
$$m_2' = \frac{\Delta m_2(t)}{\Delta t} = 10\,\tfrac{L}{min}\cdot\frac{m_1(t)}{100\,L} - 10\,\tfrac{L}{min}\cdot\frac{m_2(t)}{300\,L} = \frac{m_1(t)}{10} - \frac{m_2(t)}{30}$$

$$m'(t) = \begin{pmatrix} m_1' \\ m_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1(t) \\ m_2(t) \end{pmatrix}$$

Homog. DGL-System

allg. Lsg $\qquad \vec{m}(t) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\frac{2}{15}t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

AW $\qquad \vec{m}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$c_1 = \frac{10}{4} = 2{,}5$$
$$c_2 = 2{,}5$$

$$\Rightarrow \text{AWP-Lösung: } \vec{m}(t) = \frac{5}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{5}{2}e^{-\frac{2}{15}t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$m_1(t) = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}e^{-\frac{2}{15}t}$$
$$m_2(t) = \left(\frac{15}{2}\right) - \frac{5}{2}e^{-\frac{2}{15}t}$$