2. Vorlesung: Bedingte Wahrscheinlichkeit

Nikolas Tapia

18. April 2024, Stochastik für Informatik(er)

2. Vorlesung: Bedingte Wahrscheinlichkeit

Nikolas Tapia

18. April 2024, Stochastik für Informatik(er)

Laplace-Raum

Definition 1

Ein **Laplace-Raum** ist ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, in dem alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, d.h. $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$ für alle $\omega \in \Omega$.

Aussage 1

In einem Laplace-Raum ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $A \subset \Omega$ gegeben durch

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Dabei ist $|A|$ die Anzahl der Elemente in A.

Bew: $A \subset \Omega$: $A = \{\omega_1, \dots, \omega_k\} = \{\omega_1\} \cup \dots \cup \{\omega_k\}$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\omega_1) + \dots + \mathbb{P}(\omega_k) = \frac{1}{|\Omega|} + \dots + \frac{1}{|\Omega|} = \frac{k}{|\Omega|} \quad \blacksquare$$

Beispiel (Würfel)

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}, \quad \mathbb{P}(1) = \dots = \mathbb{P}(6) = \frac{1}{6}.$$

$$A = \{\omega : \omega \text{ ist gerade}\} = \{2, 4, 6\}.$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$B = \{\omega : \omega \geq 4\} = \{4, 5, 6\} \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Beispiel (Würfel)

$$\Omega_2 = \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,6), (2,1), \ldots, (6,6)\}.$$

$$|\Omega_2| = 36 = 6^2$$

$$A = \{\omega : \omega \text{ Pasch}\} = \{(1,1), (2,2), \ldots, (6,6)\}$$

$$\Rightarrow |A| = 6$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{36} = \frac{1}{6}$$

Wiederholtes Zufallsexperiment

Wir betrachten ein Zufallsexperiment mit k möglichen Ergebnissen. (1-fach ZE)
Wiederholen wir das Experiment n-mal unter gleichbleibenden Bedingungen.
Wir bezeichnen mit Ω_n die Menge aller möglichen Folgen des n-fach wiederholten Experiments, d.h.

$$\Omega_n := \{\omega = \underbrace{(\overset{k}{\omega_1}, \ldots, \overset{k\ \text{Mögl.}}{\omega_n})}_{} : \omega_i \in \Omega\}.$$

Dann gilt $|\Omega_n| = k^n$.
Element aus Ω_n bezeichnen wir mit $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, ein geordnetes Tupel.

Beispiel (Mehrfaches Würfeln)

$\Omega_1 = \{1, \ldots, 6\}$

$\Omega_2 = \{(1,1), \ldots, (1,6), (2,1), \ldots, (6,6)\}, \quad |\Omega_2| = 36.$

$\Omega_3 = \{(1,1,1), (1,1,2), \ldots\}, \quad |\Omega_3| = 6^3$

$\vdots$

$\Omega_n = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) : \omega_i \in \Omega\}$

$|\Omega_n| = 6^n$

<u>LR.</u>

Ein geeignetes Raum konkret angeben

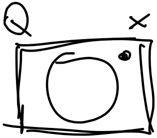
Oft möglich, oft nicht sinnvoll.

Alternativen

- Wahrscheinlichkeiten statistisch schätzen.
- Modellierung über Teilexperimenten, oft im Form von *Urnenmodellen*.
- Zufallsvariable durch ihre **Verteilung** definieren. → in 2 Woche.

Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten

$\mathbb{P}$ ist sehr oft nicht direkt messbar.
Die **absolute Häufigkeit** $H_n(\omega_i)$ von $\omega_i \in \Omega$ ist die Anzahl der Realisierungen, in denen ω_i bei n Versuchen auftritt.
Die **relative Häufigkeit** $h_n(\omega_i) := \frac{H_n(\omega_i)}{n}$ von ω_i ist der Anteil der Realisierungen, in denen ω_i bei n Versuchen auftritt.
Die relative Häufigkeit $h_n(\omega_i)$ ist ein Näher für die theoretische Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\omega_i)$.



$$X_1, \dots, X_n$$
$$\downarrow$$
$$Z_1, \dots, Z_n = \begin{cases} 0 & \sim \\ 1 & X_i \in O \end{cases}$$

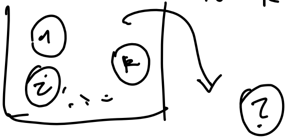
$$\mathbb{P}(X \in O) \approx \frac{\sum Z_i}{n} \quad \left(n \to \infty,\ \mathbb{P}(X \in O) = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum Z_i}{n}\right) //.$$

Leibniz Gemeinschaft

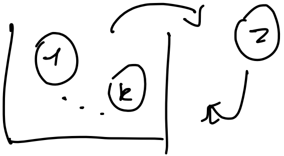
Urnenmodelle

Mit Zurücklegen, mit Reihenfolge

k Kugel.

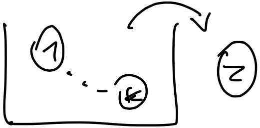


1.



$\to 2$

2.



$\to 2$

$\Omega_1 = \{1, \dots, k\}$

$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{k^n}$

$\Uparrow$ LR

$\Omega_n = \{\underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{n} \dots \dots (k, \dots, k)\}$

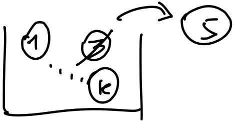
$\Rightarrow |\Omega_n| = k^n.$

Urnenmodelle

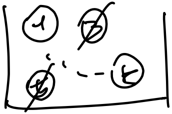
Ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge

1.


k Mögl.

2.


$k-1$ Mögl.

3.


$k-2$ Mögl.

$\vdots$

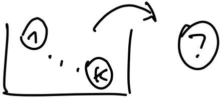
$n \leq k$

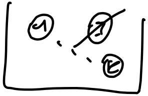
$$k(k-1)\cdots(k-n+1) = \frac{k!}{(k-n)!} = |\Omega|$$

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{(k-n)!}{k!}$$

Urnenmodelle

Ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge

1.  k Mögl.

2.  $k-1$ Mögl.

$$(1,3,11) = (3,11,1) = (11,3,1) \Big\} \text{ Permutation}$$

$$= \{1,3,11\}$$

$$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \Omega,\ \omega_1 < \dots < \omega_n\}.$$

$$|\Omega| = \frac{k!}{(k-n)!\,n!} = \binom{k}{n} \overset{LR}{\Longrightarrow} \mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{\binom{k}{n}}.$$

Beispiel (Zusatzinformation)

$\Omega = \{1, \dots, 6\}$

$\mathbb{P}(1) = \dots = \mathbb{P}(6) = \frac{1}{6}$ (LR).

$A = \{\omega : \omega \text{ ist gerade}\} \to$ Zusatz Info

$\tilde{\mathbb{P}}(1) = \tilde{\mathbb{P}}(3) = \tilde{\mathbb{P}}(5) = 0.$

$\tilde{\mathbb{P}}(2) = \tilde{\mathbb{P}}(4) = \tilde{\mathbb{P}}(6) = 1/3$

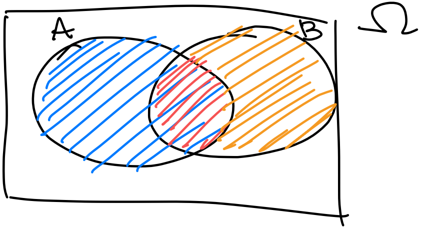
(nicht LR).

Bedingte Wahrscheinlichkeit

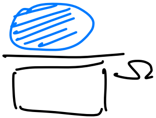
Definition 2

Seien $A, B \subset \Omega$ Ereignisse mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Die **bedingte Wahrscheinlichkeit von** A **gegeben** B, ist definiert als

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$



$\mathbb{P}(A) =$



$\mathbb{P}(A|B) =$

Bmk: $\mathbb{P}(\cdot|B)$ ist W'keitsmaß

$$\mathbb{P}(\Omega|B) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Definition 2

Seien $A, B \subset \Omega$ Ereignisse mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Die **bedingte Wahrscheinlichkeit von** A **gegeben** B, ist definiert als

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

$$\tilde{\mathbb{P}}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\tilde{\mathbb{P}}(\Omega|B) = \mathbb{P}(\Omega \cap B) = \mathbb{P}(B) < 1 \quad \times$$

2. Axiom von Kolmogorov.

Beispiel (Würfel)

$\Omega = \{1, \dots, 6\}$

$\mathbb{P}(1) = \dots = \mathbb{P}(6) = \frac{1}{6}$

$A = \{\omega : \omega \text{ ist gerade}\}$

$B = \{\omega : \omega \geq 3\} = \{3, 4, 5, 6\}$.

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\{4,6\})}{\mathbb{P}(\{2,4,6\})} = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Beispiel (Würfel)

$C = \{ w : w \leq 3 \}$, $\quad \mathbb{P}(C \mid A) = \dfrac{\mathbb{P}(C \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$

$$= \frac{\mathbb{P}(\{1,2,3\} \cap \{2,4,6\})}{\mathbb{P}(\{2,4,6\})}$$

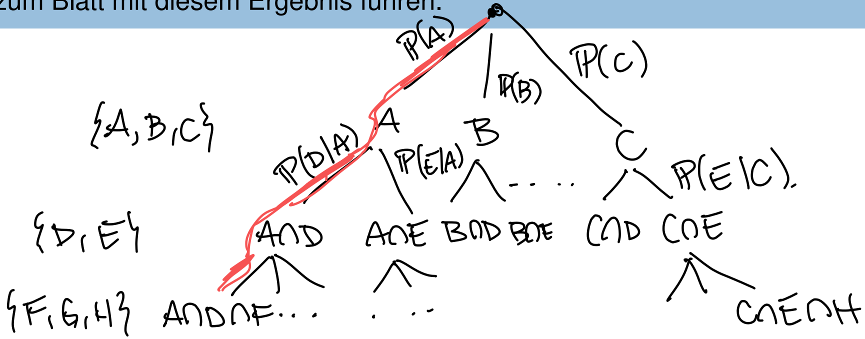
$$= \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \neq \mathbb{P}(C \mid A)$$

Multiplikationsregel

Aussage 2

In einem mehrstufigen Experiment berechnet sich die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses durch **Multiplikation** der Wahrscheinlichkeiten entlang der Kanten, die zum Blatt mit diesem Ergebnis führen.



$\mathbb{P}(A \cap D \cap F) = \mathbb{P}(F | A \cap D)\,\mathbb{P}(D|A)\,\mathbb{P}(A)$ usw.