FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin

SoSe 2024
Stand: 24. Mai 2024

5. Tutoriumsblatt – Diskrete Strukturen
(Besprechung in den Tutorien in der Woche vom 27.05.2024)

Aufgabe 1

Durch eure Beobachtungen habt ihr jetzt eine gute Übersicht über die Knotenpunkte der Suchenden auf dem Campus und ihren Wegen dazwischen. Ihr wollt diese Übersicht analysieren, um möglicherweise etwas weiteres über ihre Organisation herauszufinden.

Zeichne den Graphen $G = (V, E)$ mit den Knoten $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ und den Kanten

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_5\}, \{v_3, v_6\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}, \{v_5, v_6\}\}.$$

Beantworten Sie folgende Fragen für G:

(i) Ist G zusammenhängend?

(ii) Was ist der Knoten in G mit dem größten Knotengrad? Welche Knoten sind in seiner Nachbarschaft?

(iii) Gebe einen Spannbaum von jeder Zusammenhangskomponente von G an.

(iv) Gebe einen kürzesten Pfad zwischen v_2 und v_4 an.

(v) Gebe einen Weg zwischen v_1 und v_2 an, der kein Pfad ist.

(vi) Gebe einen induzierten Untergraph von G an, der nicht zusammenhängend ist.

Aufgabe 2

Zeigen Sie: Jeder Baum $T = (V, E)$ mit mindestens zwei Knoten hat genau $2 + \sum_{v \in V, d_T(v) \geq 3} (d_T(v) - 2)$ viele Blätter.

Aufgabe 3

Aus der Vorlesung wisst ihr, dass ein Baum als ein zusammenhängender, kreisfreier Graph definiert ist. Zudem habt ihr den Beweis gesehen, dass für jeden Baum $G = (V, E)$ gilt $|E(G)| = |V(G)| - 1$. Beweist basierend darauf die folgenden Aussagen für alle Bäume G:

(i) G ist Kanten-maximal kreisfrei.

(ii) G ist Kanten-minimal zusammenhängend.

(iii) Zwischen je zwei Knoten $u, v \in V$ gibt es genau einen Pfad in G.

Aufgabe 1

Durch eure Beobachtungen habt ihr jetzt eine gute Übersicht über die Knotenpunkte der Suchenden auf dem Campus und ihren Wegen dazwischen. Ihr wollt diese Übersicht analysieren, um möglicherweise etwas weiteres über ihre Organisation herauszufinden.

Zeichne den Graphen $G = (V, E)$ mit den Knoten $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ und den Kanten

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_5\}, \{v_3, v_6\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}, \{v_5, v_6\}\}.$$

Beantworten Sie folgende Fragen für G:

(i) Ist G zusammenhängend?

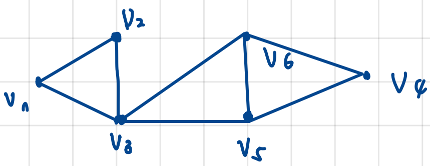
(ii) Was ist der Knoten in G mit dem größten Knotengrad? Welche Knoten sind in seiner Nachbarschaft?

(iii) Gebe einen Spannbaum von jeder Zusammenhangskomponente von G an.

(iv) Gebe einen kürzesten Pfad zwischen v_2 und v_4 an.

(v) Gebe einen Weg zwischen v_1 und v_2 an, der kein Pfad ist.

(vi) Gebe einen induzierten Untergraph von G an, der nicht zusammenhängend ist.



(i) ja

(ii) v_3 $\Delta(G) = 4$ $N_G(v_3) = \{v_1, v_2, v_6, v_5\}$

(iii) *(iii)* Durch das Entfernen der Kanten $\{v_1, v_2\}, \{v_4, v_6\}$ und $\{v_5, v_6\}$ aus G erhalten wir einen spannenden Untergraph von G, der ein Baum ist.

(iv) v_2, v_3, v_5, v_6 bilden einen Pfad der Länge 3

(v) $v_1 \{v_1, v_3\} v_3 \{v_1, v_3\} v_1 \{v_1, v_2\} v_2$ ist kein Pfad, da er v_1 mehrfach enthält

(vi) *(vi)* Der Untergraph von G, der durch v_1 und v_5 induziert wird, ist nicht zusammenhängend.

Aufgabe 2

Zeigen Sie: Jeder Baum $T = (V, E)$ mit mindestens zwei Knoten hat genau $2 + \sum_{v \in V, d_T(v) \geq 3} (d_T(v) - 2)$ viele Blätter.

IA: $|V| = 2$ Wir haben $2 + \sum_{v \in V, d_T(v) \geq 3} (d_T(v) - 2) = 2 + 0 = 2$ viele Blätter

IV: für ein festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ jeder $T = (V, E)$ mit $|V| = n$ genau $2 + \sum_{v \in V, d_T(v) \geq 3} (d_T(v) - 2)$ viele Blätter besitzt

IS: Für den Induktionsschritt beobachten wir, dass wir in einem Baum T mit $n + 1$ Knoten immer ein Blatt v löschen können und somit einen Baum $T' = T[V \setminus \{v\}]$ mit n Knoten erhalten, für welchen nach Induktionsvoraussetzung die Gleichung gilt. Wir wissen, dass die Gleichung für T' gilt. Es bleibt somit zu zeigen, dass die Gleichung für T gilt, wenn wir den Knoten wieder hinzufügen. Wir müssen uns also nur überlegen was für eine Art von Knoten der Elternknoten w von v war. Hier gibt es drei Fälle:

- Wenn w ein Blatt in T' ist, dann ändert sich die Gleichung nicht, da w somit in T Grad 2 statt 1 besitzt und da die Anzahl der Blätter in T insgesamt gleich der Anzahl der Blätter in T' ist.
- Wenn w in T' Grad 2 besitzt, hat w in T Grad 3 und wir haben ein Blatt mehr als vorher. Die Summe $2 + \sum_{v \in V:\, d_{T'}(v) \geq 3} (d_{T'}(v) - 2)$ erhöht sich also um den Wert $d_T(w) - 2 = 3 - 2 = 1$, wenn wir sie für T berechnen.
- Wenn an w mit $d_{T'}(w) = d > 2$ angehängt wird, hat w Grad $d+1$ in T und wir haben ein Blatt mehr als vorher. Die Summe $2 + \sum_{v \in V: d_T(v) \geq 3} (d_T(v) - 2)$ erhöht sich um den Wert $(d+1-2) - (d-2) = 1$.

Die Gleichung bleibt also in jedem der Fälle erfüllt.

Aufgabe 3

Aus der Vorlesung wisst ihr, dass ein Baum als ein zusammenhängender, kreisfreier Graph definiert ist. Zudem habt ihr den Beweis gesehen, dass für jeden Baum $G = (V, E)$ gilt $|E(G)| = |V(G)| - 1$. Beweist basierend darauf die folgenden Aussagen für alle Bäume G:

(i) G ist Kanten-maximal kreisfrei.

(ii) G ist Kanten-minimal zusammenhängend.

(iii) Zwischen je zwei Knoten $u, v \in V$ gibt es genau einen Pfad in G.

(i) Sei $e = \{u, v\}$ eine beliebige Kante, die noch nicht in G vorhanden ist und sei $G' = (V(G), E(G) \cup \{e\})$. Da G zusammenhängend ist, gibt es in G einen Pfad zwischen u und v. Zusammen mit $\{u, v\}$ bildet dieser Pfad einen Kreis in G'. Also ist G' nicht kreisfrei.

(ii) Beweis per Widerspruch: Sei $e = \{u, v\}$ eine beliebige Kante in G für die gilt, dass $G' = (V(G), E(G) \setminus \{e\})$ zusammenhängend ist. Da G' zusammenhängend ist, gibt es in G' einen Pfad zwischen u und v. Zusammen mit $\{u, v\}$ bildet dieser Pfad einen Kreis in G. Also ist G nicht kreisfrei.

(iii) Da G zusammenhängend ist, gibt es natürlich zwischen je zwei Knoten einen Pfad. Angenommen es existieren zwei Knoten $a, b \in V$ zwischen denen zwei unterschiedliche Pfade $P = (a = v_1, v_2, \ldots, v_k = b)$ und $P' = (a = u_1, u_2, \ldots, u_\ell = b)$ existieren. Sei i minimal, sodass $u_i \neq v_i$. Also sind v_i und u_i die ersten Knoten die sich zwischen den Pfaden unterscheiden. Sei zudem $j \geq i$ minimal, sodass $v_j = u_h$ für ein $h > i$. Dann bilden $(v_{i-1}, v_i, \ldots, v_j)$ und $(u_{i-1}, u_i, \ldots, u_h)$ einen Kreis C. Beachte insbesondere, dass $u_{i-1} = v_{i-1}$, da i minimal gewählt ist. Beachte zudem, dass alle inneren Knoten des Pfades unterschiedlich sind, da j und h minimal gewählt sind. Wir können nun eine beliebige Kante aus C in G löschen, ohne den Zusammenhang von G zu zerstören, was unseren Annahmen widerspricht. Also können keine zwei solche Pfade existieren.

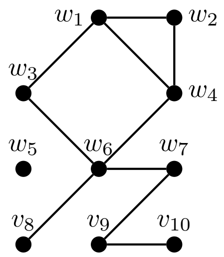
FG Logik und Semantik SoSe 2024
Technische Universität Berlin Veröffentlichung: 24. Mai 2024
Prof. Stephan Kreutzer

5. freiwillige Übung – Diskrete Strukturen
Abgabe: bis 10:30 am 06.06.2024 im ISIS-Kurs [SoSe 2024] Diskrete Strukturen

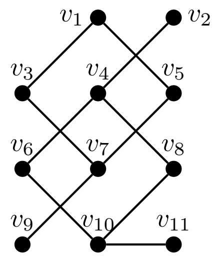
Aufgabe 4

Wir definieren die folgenden drei Graphen.

G_1 :



G_2 :



$G_3 = (V_3 = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 5\}, E_3 = \{\{x, y\} \in V_3 \times V_3 \mid x - y = 1\})$

Beantworte zu jedem dieser Graphen die folgenden Fragen:

(i) Wie viele Zusammehangskomponenten hat dieser Graph?

(ii) Ist der Graph ein Wald?

(iii) Was sind $\delta(G)$ und $\Delta(G)$?

(iv) Was sind die Durchmesser der Zusammenhangskomponenten des Graphen?

Aufgabe 5

Sei G ein Graph mit zwei Zusammenhangskomponenten A und B. Es gilt $|A| = n$ und $|B| = m$. Was ist die maximale/minimale Kantenanzahl von G abhängig von n und m?