$$\vec{x}'(t) = \vec{g}(t, \vec{x}(t))$$
$$\vec{g} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t)$

1.5 Gewöhnliche lineare Differentialgleichungssysteme

Def 14 (Lineare DG 1. Ordnung)

Sei I ein offenes Intervall.
Sei $a_{ij}(t)$, $b_i(t)$ stetig auf I.
Eine DG heißt linear wenn

$$x_1'(t) = a_{11}(t)\, x_1(t) + \dots + a_{1n}(t)\, x_n(t) + b_1(t)$$
$$\vdots$$
$$x_n'(t) = a_{n1}(t)\, x_1(t) + \dots + a_{nn}(t)\, x_n(t) + b_n(t)$$

$\Rightarrow$ Fasse $a_{ij}(t)$ und $b_i(t)$ zusammen als Matrix / Vektor

$\Rightarrow$ $\vec{x}'(t) = A(t)\, \vec{x}(t) + \vec{b}(t)$

Beispiel

$$x_1'(t) = \frac{3}{t} x_1(t) - \frac{2}{t^2} x_2(t) + \frac{3}{t} \qquad x_1(1) = 1$$
$$x_2'(t) = 4 x_1(t) - \frac{2}{t} x_2(t) + 5 \qquad x_2(1) = 3$$

$$\Rightarrow \vec{x}'(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 3/t & -2/t^2 \\ 4 & -2/t \end{bmatrix}}_{A(t)} \vec{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 3/t \\ 5 \end{bmatrix}}_{= b} \qquad \vec{x}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Def 15

Ist $b(t) \equiv 0$ heißt die DG <u>homogen</u>, ansonsten <u>inhomogen</u>

zu jeder

Zu jeder inhomogenen DG gehört eine homogene DG. ($b(t) = 0$ setzen)

Satz 16 (Existenz und Eindeutigkeit)

Sei $A(t)$, $b(t)$ stetig auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in I$.
Dann hat das Anfangswertproblem

$$\vec{x}\,'(t) = A(t)\,\vec{x}(t) + \vec{b}(t), \qquad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$$

für jedes $\vec{x}_0$ <u>genau eine Lösung auf I.</u>

jeders

Beispiel

$$\vec{x}\,'(t) = \begin{bmatrix} 3/t & -2/t^2 \\ 4 & -2/t \end{bmatrix} \vec{x}(t) + \begin{bmatrix} 3/t \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad \vec{x}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

In $t = 0$ ist die DG nicht definiert, wähle $I = (-\infty, 0)$ oder <u>$I = (0, \infty)$</u>

$A(t)$ und $b(t)$ sind stetig.

$\Rightarrow$ Eindeutige Lösung auf $I = (0, \infty)$

1.5.1. Lösungsraum der homogenen Gleichung

Satz Sei $A(t)$ stetig auf offenem Intervall.
Die Menge aller Lösungen

$$\vec{x}'(t) = A(t)\,\vec{x}(t) \qquad \text{mit} \qquad \vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n$$

ist ein Vektorraum der Dimension n. Das heißt:

- Linearkombinationen von Lösungen sind Lösungen
- Es gibt n linear unabhängige Lösungen $\vec{x}_1(t) \dots \vec{x}_n(t)$
- Jede weitere Lösung ist eine Linearkombination:

$$\vec{x}(t) = c_1 \vec{x}_1(t) + \dots + c_n \vec{x}_n(t)$$

Ein Anfangswert $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ bestimmt $c_1 \dots c_n$ eindeutig

linear unabhängig:
$c_1 \vec{x}_1(t) + \dots + c_n \vec{x}_n(t) \overset{!}{=} 0$
$\iff c_1 \dots c_n = 0$

Beispiel

$$\vec{x}'(t) = \begin{bmatrix} 3/t & -2/t^2 \\ 4 & -2/t \end{bmatrix} \vec{x}(t)$$

- $\vec{x}_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3/t & -2/t^2 \\ 4 & -2/t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2 \\ 4t-2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \end{bmatrix} = \vec{x}_1'(t)$ ✓
- $\vec{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 1/t \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3/t & -2/t^2 \\ 4 & -2/t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/t \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/t^2 - 4/t^2 \\ 4/t - 4/t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/t^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{x}_2'(t)$ ✓

$\Rightarrow \vec{x}_1, \vec{x}_2$ Lösungen, alle Linearkombination sind Lösungen
$\Rightarrow \vec{x}_1, \vec{x}_2$ unabhängig ?

Wronski-Test Beliebige Lösungen $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$.

Wronski-test

$t_0 \in I$ mit $\vec{x}_1(t_0), \dots, \vec{x}_n(t_0)$ unabhängig $\Longrightarrow$ $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$ unabhängig

In unserem Fall gilt auch die Umkehrung.

$\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$ unabhängig $\Longleftrightarrow$ $\vec{x}_1(t_0) \dots \vec{x}_n(t_0)$ unabhängig für ein $t_0 \in I$ (und dann für alle $t_0 \in I$)

Wronski-Matrix

$\Longleftrightarrow$ $W(t) = (\vec{x}_1(t_0) | \dots | \vec{x}_n(t_0))$ hat für ein t_0 (und dann für alle) vollen Rang n, oder Determinante ungleich 0.

Beispiel $\vec{x}_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 1/t \\ 2 \end{bmatrix}$

$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb$

Wronski-Matrix: $\bar{W}(t) = \begin{bmatrix} t & 1/t \\ t^2 & 2 \end{bmatrix}$

$\Longrightarrow$ $\det W(t) = 2 \cdot t - t = t \neq 0$ für $t \neq 0$, insbesondere auf $(0, \infty)$

$\Longrightarrow$ Unsere Lösungen sind unabhängig.

Def n unabhängige Lösungen heißen ein Fundamentalsystem

Def Alle Linearkombinationen eines Fundamentalsystems heißen allgemeine Lösung

1.5.2 Konstruktion eines Fundamentalsystems

$x'(t) = a\,x(t)$

Lösung $x(t) = e^{at}$

Def (DG mit konstanten Koeffizienten)

$$x_1'(t) = a_{11} x_1(t) + \dots + a_{1n}\, x_n(t)$$
$$\vdots$$
$$x_n'(t) = a_{n1}\, x_1(t) + \dots + a_{nn}\, x_n(t)$$

oder $\vec{x}'(t) = A\ x(t)$

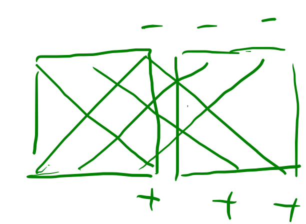
Exponentialansatz: $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\,\vec{v}$ mit $\lambda \in \mathbb{R},\ \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ einsetzen in DG: $\lambda e^{\lambda t}\vec{v} = e^{\lambda t} A\vec{v} \iff \underline{A\vec{v} = \lambda\vec{v}}$ Eigenwertproblem

$\Rightarrow$ Für jeden Eigenvektor und Eigenwert bekommen wir eine Lösung.

<u>Beispiel</u>

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}'(t) = A\,x(t)$$



$\Rightarrow$ Charakteristische Gleichung

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} -2-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \\ -1 & -2 \end{matrix}$$

$$= (-2-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) + 2\cdot(-6)(-1) + (-3)2(-2)$$
$$- (-1)(1-\lambda)(-3) - (-2)(-6)(-2-\lambda) - (-\lambda)2\,2$$
$$= -\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda + 12 + 12 - 3 + 3\lambda + 24 + 12\lambda + 4\lambda$$
$$= \underline{-\lambda^3 - \lambda^2 + 21\lambda + 45} = 0$$

Nullstellen $-3, -3, 5$

Eigenvektoren zum Eigenwert −3.

Eigenvektor zu -3.

$$(A-(-3)I)\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \qquad \Big| \; I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad v_1 + 2v_2 - 3v_3 = 0$$

wähle:

$$\Rightarrow \quad v_3 = 0,\ v_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = -2$$

$$v_3 = 1,\ v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 3$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor zu 5.

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(A-5I)\vec{v} = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 16 & 32 \\ 0 & -8 & -16 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 e^{-3t}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Probleme

- A muss nicht n reelle Eigenwerte haben
- Die algebraische und geometrische Vielfachheit sind verschieden.

  Nullstellen — unabhängige Eigenvektoren.