Diskrete Strukturen
Großübung

Amelie Heindl

Lehrstuhl für Logik und Semantik

Technische Universität Berlin

Sommersemester 2024

Themenüberblick

Themenüberblick: Vorlesungswoche 8

- Zeichnungen
- Planarität
- Eulersche Polyederformel
- Unterteilungen
- Satz von Kuratowski
- Knotenfärbung
- k-Färbbarkeit
- Gerichtete Graphen

Zeichnungen

Zeichnungen: Grundlagen

Wir haben bereits gesehen, dass Graphen in Form von gezeichneten Knoten und Kanten dargestellt werden können. Dabei können verschiedene Zeichnungen den gleichen abstrakten Graph repräsentieren.

Zeichnungen werden unter Anderem danach unterschieden, in welche Fläche der Graph eingebettet wird. Wir interessieren uns für die Fläche $\mathbb{R}^2$ und wollen den Begriff der Zeichnung formalisieren.

Zeichnung eines Graphen in der Ebene

Sei G ein Graph und sei $\Sigma := \mathbb{R}^2$. Eine Zeichnung von G ist eine Abbildung $\pi : V(G) \cup E(G) \to \Sigma \cup \mathscr{P}(\Sigma)$, wobei für alle $v \in V(G)$ das Bild $\pi(v) \in \Sigma$ ein Punkt ist und für alle $\{v, w\} \in E(G)$ das Bild $\pi(\{v, w\}) \in \mathscr{P}(\Sigma)$ eine Kurve ist, die $\pi(v)$ und $\pi(w)$ verbindet und das Bild keines anderen Knoten $x \in V(G)$ enthält.

Ein anderer Begriff dafür ist Einbettung.

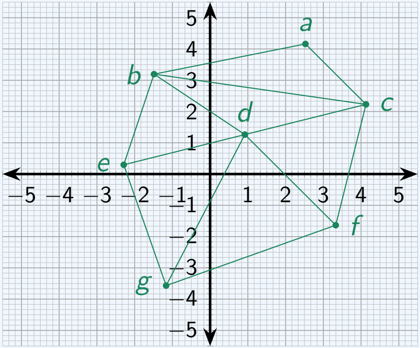
Wir betrachten eine Zeichnung eines Graphen in der Ebene.

Graph G:

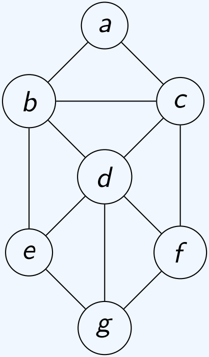
$V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

$E(G) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, f\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{d, g\}, \{e, g\}, \{f, g\}\}$

Ebene $\mathbb{R}^2$: Zeichnung $\pi(G)$:



Schematische Zeichnung:



Planarität

Planarität: Grundlagen

Von besonderem Interesse sind Zeichnungen, bei denen sich die Bilder verschiedener Kanten nicht schneiden (abgesehen von an den Endpunkten).

Planare Graphen

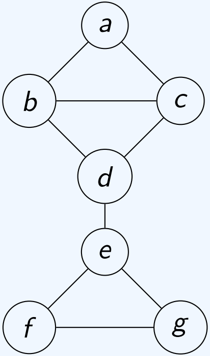
Sei G ein Graph. Dann ist G planar, falls eine Zeichnung $\pi(G)$ in $\mathbb{R}^2$ existiert, bei der für alle Kanten $\{v, w\}, \{x, y\} \in E(G)$ mit $\{v, w\} \neq \{x, y\}$ gilt, dass kein Punkt sowohl in $\pi(\{v, w\})$ als auch in $\pi(\{x, y\})$ enthalten ist, außer eventuelle gemeinsame Endpunkte.

Diejenigen Zeichnungen π, die die Bedingung erfüllen, werden planare Zeichnungen genannt.

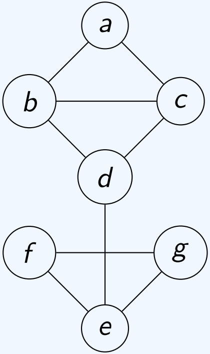
Planarität: Beispiel I

Zu einem planaren Graphen kann es verschiedene planare und auch nicht planare Zeichnungen geben.
Die folgenden Darstellungen sind alles Zeichnungen des gleichen Graphen G, jedoch sind nicht alle planar.

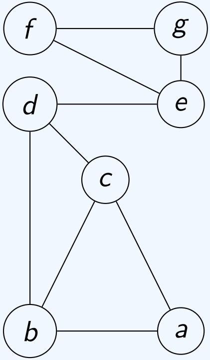
Planare Zeichnung $\pi_1(G)$:



Nicht planare Zeichnung $\pi_2(G)$:



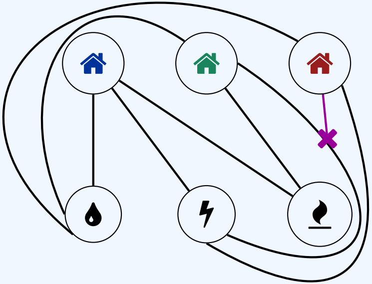
Planare Zeichnung $\pi_3(G)$:



Planarität: Beispiel II

Three Utilities Problem: Gegeben sind drei Wohnhäuser, sowie jeweils ein Gas-, Wasser- und Elektrizitätswerk. Gesucht ist eine Möglichkeit, jedes Haus über eine Leitung mit jedem Werk zu verbinden, ohne, dass sich Leitungen kreuzen.

Wir modellieren die Situation als Zeichnung eines Graphen im $\mathbb{R}^2$.

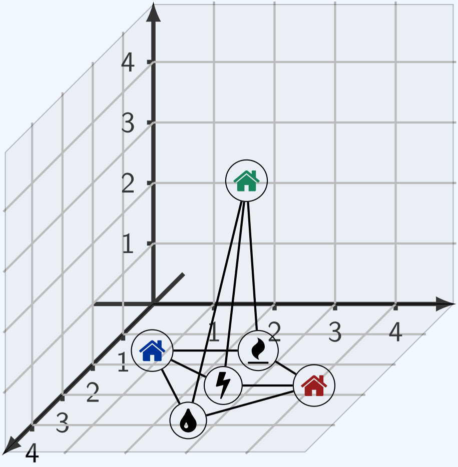


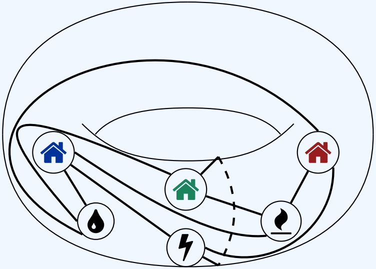
Eine Lösung wäre eine planare Zeichnung.

Der Graph ist nicht planar, es gibt keine Lösung für das Problem.

Planarität: Beispiel II

Wenn man statt $\mathbb{R}^2$ den Raum $\mathbb{R}^3$ oder die Oberfläche eines Torus verwendet, ist eine Einbettung ohne Kantenkreuzungen des 'Three-Utilities-Graphen' möglich.





Eulersche Polyederformel

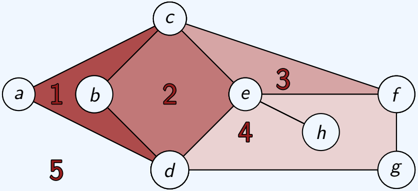
Eulersche Polyederformel: Grundlagen

Die Klasse der planaren Graphen besitzt einige interessante Eigenschaften. Beispielsweise müssen die Knoten-, Kanten- und Gebietzahlen bestimmte Anforderungen erfüllen, damit ein Graph planar sein kann.

Gebiet

Sei G ein Graph und $\pi(G)$ eine planare Zeichnung in der Ebene. Die maximalen zusammenhängenden Gebiete von $\mathbb{R}^2$, die keinen Punkt des Bildes einer Kante oder eines Knotens enthalten, sind die Gebiete von $\pi(G)$. Die Menge der Gebiete wird mit F bezeichnet.

Beispiel:
Der Beispielgraph hat fünf Gebiete.



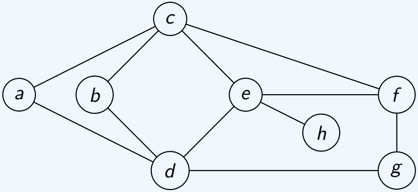
Eulersche Polyederformel: Aussage

Euler hat folgenden Sachverhalt in planaren Graphen festgestellt.

Eulersche Polyederformel

Sei G ein zusammenhängender planarer Graph und π eine Zeichnung von G in $\mathbb{R}^2$. Dann gilt $|F| = |E(G)| - |V(G)| + 2$.

Beispielgraph G:



Es gilt $|E(G)| - |V(G)| + 2 = 11 - 8 + 2 = 5 = |F|$

Verschiedene planare Zeichnungen des gleichen Graphen haben die gleiche Anzahl an Gebieten.

Eulersche Polyederformel: Folgerung

Aus der Eulerschen Polyederformel lässt sich eine von F unabhängige Ungleichung ableiten, die zum Nachweis der Nicht-Planarität eines Graphen verwendet werden kann.

Sei dafür G ein zusammenhängender planarer Graph mit $|V(G)| \geq 3$ und π eine Zeichnung von G in $\mathbb{R}^2$. Wir zählen nun für jedes Gebiet die Kanten, die es berührt. Jedes Gebiet wird von mindestens drei Kanten begrenzt, also ist das Ergebnis mindestens $3|F|$.

Außerdem berührt jede Kante höchstens zwei Gebiete, also ist das Ergebnis höchstens $2|E(G)|$.

1. Mit der Polyederformel.

Somit gilt:

$$2|E(G)| \geq 3|F| \overset{1.}{=} 3(|E(G)| - |V(G)| + 2) = 3|E(G)| - 3|V(G)| + 6$$

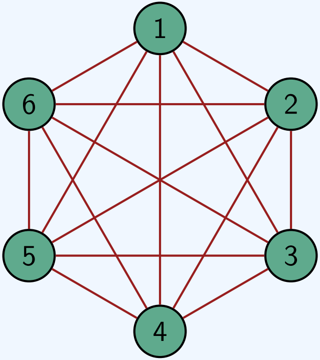
$$3|V(G)| - 6 \geq |E(G)|$$

umstellen

Wenn ein Graph also mehr Kanten hat als drei mal die Knotenzahl minus sechs, kann er nicht planar sein.

Eulersche Polyederformel: Beispiel

Wir betrachten folgenden Graphen G:



Es gilt:

$|V(G)| = 6$

$|E(G)| = \binom{6}{2} = 15$

Es folgt:

$|E(G)| > 3|V(G)| - 6$

Somit ist G nicht planar.

Unterteilungen

Unterteilungen: Grundlagen

Unterteilungen sind eine weitere Operation, die auf Graphen angewandt werden kann, um andere Graphen zu konstruieren. Dabei werden Kanten des Graphen geteilt und ein neuer Knoten an der Teilungsstelle eingefügt.

Unterteilung

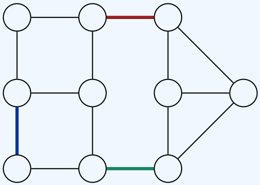
Sei G ein Graph. Jeder Graph G', den man erhält, indem man Kanten von G durch Pfade beliebiger Länge > 0 mit neuen inneren Knoten ersetzt, ist eine Unterteilung von G.

Gegeben zwei Graphen, ist es eine interessante Fragestellung, ob einer eine Unterteilung des anderen ist oder als Untergraph enthält.

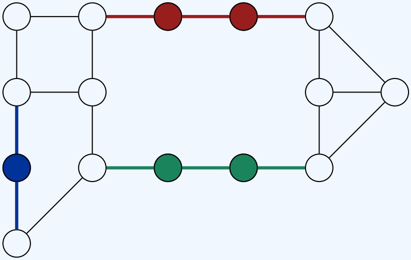
Im Satz von Kuratowski wird dies Beispielsweise genutzt um ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Planarität eines Graphen aufzustellen.

Unterteilungen: Beispiel I

Wir betrachten den folgenden Graphen G:



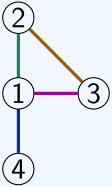
Der folgende Graph G' ist eine Unterteilung von G:



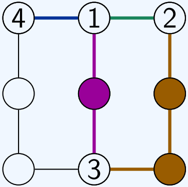
Unterteilungen: Beispiel II

Welcher Graph enthält eine Unterteilung von G als Untergraph?

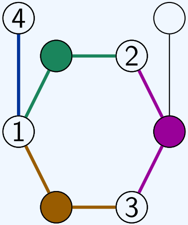
G:



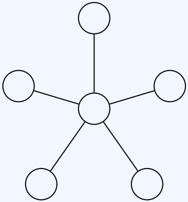
H_1 :   Ja.



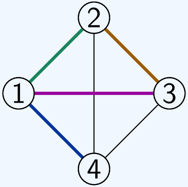
H_2 :   Ja.



H_3 :   Nein.



H_4 :   Ja.



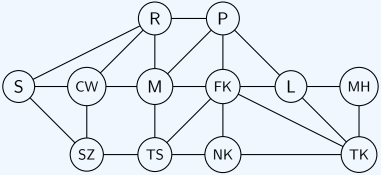
Färbung

Färbung: Hintergrund

Ausgehend von der Aufgabe, Landkarten gut lesbar darzustellen, wurde das Konzept der Graphfärbung entwickelt. Man wollte Landkarten mit farbigen Ländern zeichnen, wobei Länder, die aneinander grenzen, unterschiedlich gefärbt sein sollen. Eine Lösung kann gefunden werden, durch Modellierung als Graph, wobei Länder Knoten sind und Grenzen Kanten, und geeignetes Färben der Knoten.

Source: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Berlin_location_map_simplified.svg

$\rightarrow$

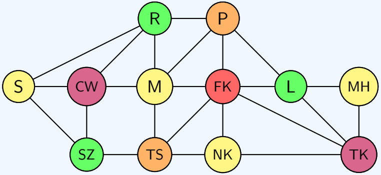


Färbung: Hintergrund

Ausgehend von der Aufgabe, Landkarten gut lesbar darzustellen, wurde das Konzept der Graphfärbung entwickelt. Man wollte Landkarten mit farbigen Ländern zeichnen, wobei Länder, die aneinander grenzen, unterschiedlich gefärbt sein sollen. Eine Lösung kann gefunden werden, durch Modellierung als Graph, wobei Länder Knoten sind und Grenzen Kanten, und geeignetes Färben der Knoten.

Source: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Berlin_location_map_simplified.svg

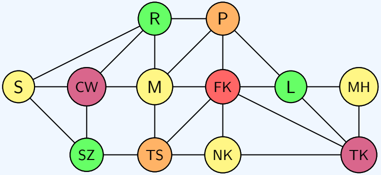
$\rightarrow$



Färbung: Hintergrund

Ausgehend von der Aufgabe, Landkarten gut lesbar darzustellen, wurde das Konzept der Graphfärbung entwickelt. Man wollte Landkarten mit farbigen Ländern zeichnen, wobei Länder, die aneinander grenzen, unterschiedlich gefärbt sein sollen. Eine Lösung kann gefunden werden, durch Modellierung als Graph, wobei Länder Knoten sind und Grenzen Kanten, und geeignetes Färben der Knoten.

$\leftarrow$



Source: https://de.m.wikipedia.org/wiki/Datei:Berlin,_administrative_divisions_Bdistricts_-boroughs_-pop_-_de_-_colored.svg

Färbung: Grundlagen

Wir interessieren uns hier für die Färbung der Knoten eines Graphen.

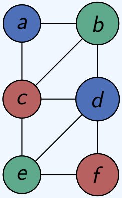
Knotenfärbung

Sei G ein Graph und $K = \{1, \ldots, k\}$ eine Menge von $k \in \mathbb{N}$ Farben. Eine Knotenfärbung von G ist eine Abbildung $c : V(G) \to K$, wobei $c(v) \neq c(w)$ für alle Knoten v, w mit $\{v, w\} \in E(G)$ gilt.
Für $k \in \mathbb{N}$, für das so eine Abbildung existiert, wird G k-färbbar genannt.

- Wenn G k-färbbar ist, ist G auch k'-färbbar für $k' > k$.
- Wenn $|V(G)| = n$ gilt, ist G n-färbbar.
- Interessant ist die Frage nach der minimalen Zahl $k \in \mathbb{N}$, für die ein Graph G k-färbbar ist. Diese nennt man chromatische Zahl, beziehungsweise $\chi(G)$.

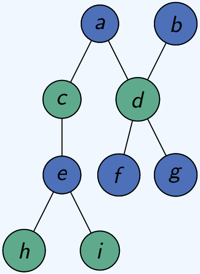
Was ist die chromatische Zahl dieser Graphen?

G_1:



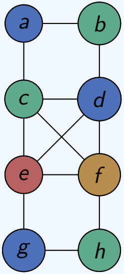
$\chi(G_1) = 3$

G_2:



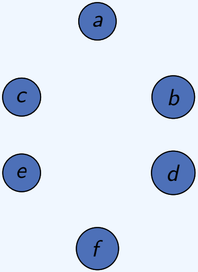
$\chi(G_2) = 2$

G_3:



$\chi(G_3) = 4$

G_4:



$\chi(G_4) = 1$

Graphtypen

Graphtypen: Pfadgraphen

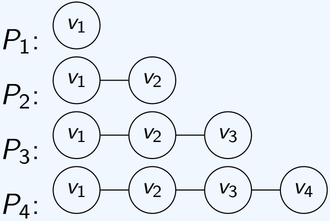
Es gibt einige einfache Typen von Graphen, die an verschiedenen Stellen nützlich sind. Dazu zählen Pfadgraphen, Kreisgraphen und vollständige Graphen.

Pfadgraphen

Sei $n \in \mathbb{N}^+$. Der Pfadgraph P_n ist definiert als $P_n := \big(\{v_1, \ldots, v_n\}, \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 1 \leq i \leq n-1\}\big)$. P_n besteht also aus einem Pfad der Länge $n-1$.

Teilweise wird P_n auch als Pfad mit $n+1$ Knoten definiert.

Beispiele:



Eigenschaften:

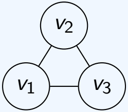
- $|V(P_n)| = n$
- $|E(P_n)| = n-1$
- $\delta(P_n) = 1$ (für $n > 1$)
- $\Delta(P_n) = 2$ (für $n > 1$)
- Durchmesser: $n-1$
- $\chi(P_n) = 2$ (für $n > 1$)

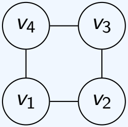
Graphtypen: Kreisgraphen

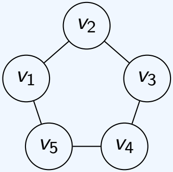
Kreisgraphen

Sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl. Der Kreisgraph C_n ist definiert als
$C_n := \left(\{v_1, \dots, v_n\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}\right)$. C_n besteht also aus einem Kreis der Länge n.

Beispiele:

C_3: 

C_4: 

C_5: 

Eigenschaften:

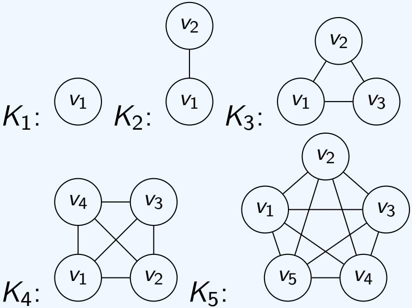
- $|V(C_n)| = n$
- $|E(C_n)| = n$
- $\delta(C_n) = 2$
- $\Delta(C_n) = 2$
- Durchmesser: $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
- $\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 3 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

Graphtypen: Vollständige Graphen

Vollständige Graphen

Sei $n \in \mathbb{N}^+$. Der vollständige Graph K_n ist definiert als $K_n := \left(\{v_1, \ldots, v_n\}, \{\{v_i, v_j\} \mid 1 \leq i < j \leq n\}\right)$. K_n besteht also aus n Knoten, die alle miteinander verbunden sind.

Beispiele:

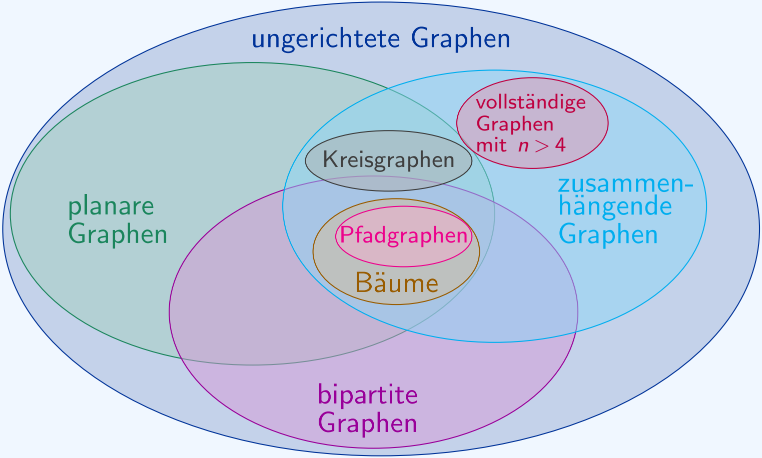


Eigenschaften:

- $|V(K_n)| = n$
- $|E(K_n)| = \binom{n}{2}$
- $\delta(K_n) = n - 1$
- $\Delta(K_n) = n - 1$
- Durchmesser: 1 (für $n > 1$)
- $\chi(K_n) = n$

Graphtypen: Übersicht

Auch andere Typen von Graphen wurden in der Vorlesung kennen gelernt, zwischen denen teilweise Zusammenhänge bestehen.



Für die meisten dieser Konzepte gibt es auch eine Version für gerichtete Graphen.

Gerichtete Graphen

Gerichtete Graphen: Grundlagen

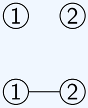
Gerichteter Graph

Ein Gerichteter Graph $G = (V(G), E(G))$ besteht aus einer Knotenmenge $V(G)$ und einer Kantenmenge $E(G) \subseteq V(G) \times V(G)$.

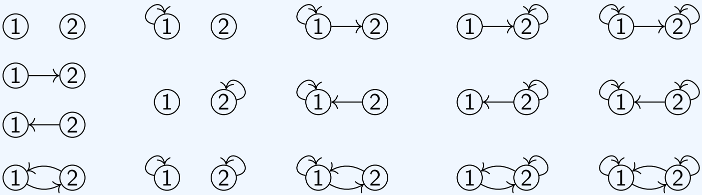
Im Unterschied zu ungerichteten Graphen sind Kanten hier also geordnete 2-Tupel von Knoten und keine Mengen.

Vergleich: Sei $V(G) = \{1, 2\}$.Dann ist $\mathscr{P}_2(V(G)) = \{\{1, 2\}\}$ und $V(G) \times V(G) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

Mögliche ungerichtete Graphen:



Mögliche gerichtete Graphen:

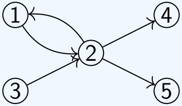


Gerichtete Graphen: Kanten

Für gerichtete Graphen G müssen einige der Konzepte für ungerichtete Graphen angepasst werden, da Kanten nur 'in eine Richtung benutzt werden können'.

- Man unterscheidet zwischen eingehenden und ausgehenden Kanten: Für $v \in V(G)$ sind alle Kanten $(a, b) \in E(G)$ mit $a = v$ ausgehende Kanten und mit $b = v$ eingehende Kanten.
- Damit kann man für jeden Knoten eine ausgehende Nachbarschaft $N^+(v)$ und eine eingehende Nachbarschaft $N^-(v)$ definieren.
- Die Größe der jeweiligen Nachbarschaft ist dann der Ausgangsgrad $d^+(v)$ beziehungsweise der Eingangsgrad $d^-(v)$ des Knotens v.

Beispiel:



Es gilt $N^+(2) = \{1, 4, 5\}$ und $N^-(2) = \{1, 3\}$.
Damit folgt $d^+(2) = 3$ und $d^-(2) = 2$.

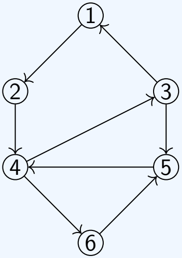
Gerichtete Graphen: Zusammenhang

Ein gerichteter Graph G heißt stark zusammenhängend, falls es von jedem Knoten $v \in V(G)$ einen gerichteten Pfad zu jedem Knoten $w \in V(G)$ gibt. Ein gerichteter Pfad hat die Form $(v_1, (v_1, v_2), v_2, \ldots, (v_{n-1}, v_n), v_n)$ mit $v_i \in V(G)$ für alle $1 \leq i \leq n$, $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$ für alle $1 \leq i \leq n-1$ und $v_i \neq v_j$ für alle $1 \leq i < j \leq n$.

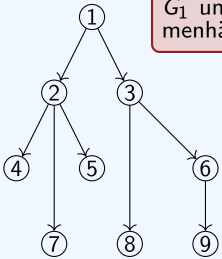
Man nennt einen gerichteten Graphen schwach zusammenhängend, wenn der zugrunde liegende ungerichtete Graph zusammenhängend ist. G_1 und G_2 sind schwach zusammenhängend.

Beispiele:

G_1 :



G_2 :



G_1 ist stark zusammenhängend, G_2 nicht.

Gerichtete Graphen: Beispiele

Während mit ungerichteten Graphen gut symmetrische Relationen dargestellt werden können, eignen sich ungerichtete Graphen zum Modellieren von Relationen, bei denen den beteiligten Entitäten unterschiedliche Rollen zukommen.

Beispiele sind:

- Straßenkarten: Stellen, an denen sich mehrere Straßen treffen, sind die Knoten. Eine gerichtete Kante zwischen zwei Knoten v, w bedeutet, dass man die Straße zwischen v und w in dieser Richtung befahren kann.
- Ablaufdiagramm: Die Arbeitsschritte sind die Knoten. Eine gerichtete Kante zwischen zwei Knoten v, w bedeutet, dass man den Arbeitsschritt in Knoten w nach dem in Knoten v ausführt.
- Stammbäume: Die Personen sind die Knoten. Eine gerichtete Kante zwischen zwei Knoten v, w bedeutet, dass die Person in Knoten w ein Nachfahre der Person in Knoten v ist.

Feedback, Fragen und Vorschläge zur Großübung gerne an:

a.heindl@tu-berlin.de