Zusatzaufgaben 9

Aufgabe 1: Myhill-Nerode für nicht reguläre Sprachen

Gegeben seien die Sprachen:

$$A \triangleq \{ 1^n 0^n \mid n \in \mathbb{N} \} \qquad \text{mit } \Sigma_A \triangleq \{ 1,\ 0 \}$$
$$B \triangleq \{ 73a^n 7b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \land n = m + 2 \} \qquad \text{mit } \Sigma_B \triangleq \{ a,\ b,\ 3,\ 7 \}$$
$$C \triangleq \{ w \in \{ a,\ b \}^* \mid |w|_a = |w|_b \} \qquad \text{mit } \Sigma_C \triangleq \{ a,\ b \}$$

1.a) *Gib* alle Äquivalenzklassen der Myhill-Nerode-Relation bzgl. A *an*.

Lösung

$$\begin{aligned}
[\, 1^k \,]_{\equiv_A} &= \{ 1^k \} \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \\
[\, 1^{l+1}0 \,]_{\equiv_A} &= \left\{ 1^{l+i}0^i \mid i \in \mathbb{N}^+ \right\} \quad \text{für } l \in \mathbb{N} \\
[\, 0 \,]_{\equiv_A} &= \left\{ 0x, 1^n0^m, x01y \mid x, y \in \Sigma_A^* \land n, m \in \mathbb{N}^+ \land m > n \right\} \\
&= \Sigma_A^* \setminus \left(\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [\, 1^k \,]_{\equiv_A} \right) \cup \left(\bigcup_{l \in \mathbb{N}} [\, 1^{l+1}0 \,]_{\equiv_A} \right) \right)
\end{aligned}$$

/Lösung

1.b) *Beweise* mit Hilfe der Myhill-Nerode-Relation, dass A nicht regulär ist.

Lösung

Zu den Äquivalenzklassen von $\equiv_A$ gehören u.A. die Klassen:

$$[\, 1^{n+1}0 \,]_{\equiv_A} = \left\{ 1^{n+i}0^i \mid i \in \mathbb{N}^+ \right\} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

(Diese Zeile repräsentiert bereits unendlich viele Klassen, wir zeigen noch, dass diese Klassen tatsächlich bzgl. $\equiv_A$ unterschieden werden müssen.)
Annahme: $n \neq m$.
Zu Zeigen: $1^{n+1}0 \not\equiv_A 1^{m+1}0$
Betrachte $z = 0^n$.
Dann ist $1^{n+1}0z = 1^{n+1}0^{n+1} \in A$ und $1^{m+1}0z = 1^{m+1}0^{n+1} \notin A$, weil $n \neq m$.
Mit der Definition von $\equiv_A$ gilt damit $1^{n+1}0 \not\equiv_A 1^{m+1}0$ (und damit $[\, 1^{n+1}0 \,]_{\equiv_A} \neq [\, 1^{m+1}0 \,]_{\equiv_A}$).
Damit ist der Index von $\equiv_A$ unendlich. Nach Theorem 2.4.1 ist A damit nicht regulär.

/Lösung

1.c) *Gib* alle Äquivalenzklassen der Myhill-Nerode-Relation bzgl. B *an*.

Lösung

$$\begin{aligned}
[\, \varepsilon \,]_{\equiv_B} &= \{ \varepsilon \} \\
[\, 7 \,]_{\equiv_B} &= \{ 7 \} \\
[\, 73a^k \,]_{\equiv_B} &= \{ 73a^k \} \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \\
[\, 73a^{l+2}7 \,]_{\equiv_B} &= \left\{ 73a^{l+2+n}7b^n \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{für } l \in \mathbb{N} \\
[\, 3 \,]_{\equiv_B} &= \Sigma_B^* \setminus \left([\, \varepsilon \,]_{\equiv_B} \cup [\, 7 \,]_{\equiv_B} \cup \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [\, 73a^k \,]_{\equiv_B} \right) \cup \left(\bigcup_{l \in \mathbb{N}} [\, 73a^{l+2}7 \,]_{\equiv_B} \right) \right)
\end{aligned}$$

/Lösung

1.d) *Beweise* mit Hilfe der Myhill-Nerode-Relation, dass B nicht regulär ist.

------------------------------ Lösung ------------------------------

Zu den Äquivalenzklassen von $\equiv_B$ gehören u.A. die Klassen:

$$[\,73aaa^n7\,]_{\equiv_B} = \left\{\,73aaa^{n+l}7b^l \mid l \in \mathbb{N}\,\right\} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

Annahme: $n \neq m$.
Zu Zeigen: $73aaa^n7 \not\equiv_B 73aaa^m7$
Betrachte $z = b^n$.
Dann ist $73aaa^n7z = 73a^{n+2}7b^n \in B$ und $73aaa^m7z = 73a^{m+2}7b^n \notin B$, weil $m+2 \neq n+2$ mit $n \neq m$.
Mit der Definition von $\equiv_B$ gilt damit $73aaa^n7 \not\equiv_B 73aaa^m7$.
Damit ist der Index von $\equiv_B$ unendlich. Nach Theorem 2.4.1 ist B damit nicht regulär.

——————————— /Lösung ———————————

1.e) *Gib* alle Äquivalenzklassen der Myhill-Nerode-Relation bzgl. C *an*.

------------------------------ Lösung ------------------------------

$$[\,a^k\,]_{\equiv_C} = \{\, w \in \{\, a,\ b\,\}^* \mid |w|_a - |w|_b = k\,\} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$
$$[\,b^l\,]_{\equiv_C} = \{\, w \in \{\, a,\ b\,\}^* \mid |w|_b - |w|_a = l\,\} \quad \text{für } l \in \mathbb{N}^+$$

——————————— /Lösung ———————————

1.f) *Beweise* mit Hilfe der Myhill-Nerode-Relation, dass C nicht regulär ist.

------------------------------ Lösung ------------------------------

Zu den Äquivalenzklassen von $\equiv_C$ gehören u.A. die Klassen:

$$[\,a^n\,]_{\equiv_C} = \{\, w \in \{\, a,\ b\,\}^* \mid |w|_a - |w|_b = n\,\} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

Annahme: $n \neq m$.
Zu Zeigen: $a^n \not\equiv_B a^m$
Betrachte $z = b^n$.
Dann ist $a^nz = a^nb^n \in C$ und $a^mz = a^mb^n \notin C$, weil $|a^mb^n|_a \neq |a^mb^n|_b$ mit $n \neq m$.
Mit der Definition von $\equiv_C$ gilt damit $a^n \not\equiv_C a^m$.
Damit ist der Index von $\equiv_C$ unendlich. Nach Theorem 2.4.1 ist C damit nicht regulär.

——————————— /Lösung ———————————

Aufgabe 2: Pumping Lemma

Gegeben seien die Sprachen

$$A_1 \triangleq \{\, w \in \{\, 0,\ 1\,\}^* \mid |w|_0 = |w|_1\,\}$$
$$A_2 \triangleq \left\{\,(ab)^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\,\right\}$$
$$A_3 \triangleq \{\, w \mid w \in \{\, a,\ b\,\}^*\,\}$$
$$A_4 \triangleq \{\, w \in \{\, a,\ b\,\}^* \mid \exists x, y \in \{\, a,\ b\,\}\,.\,\exists n \in \mathbb{N}\,.\, w = bx^nay^n \lor w = x^naby^n\,\}$$
$$A_5 \triangleq \left\{\, a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\,\right\}$$

2.a) *Beweise oder widerlege*, dass die Sprache A_1 regulär ist.

------------------------------ Lösung ------------------------------

Sei $n \in \mathbb{N}$ (beliebig aber fest). Wir wählen das Wort $w = 0^n1^n$ mit $w \in A_1$, denn $|w|_0 = n = |w|_1$, und $|w| \geqslant n$. Sei $w = xyz$ eine beliebige Zerlegung mit $y \neq \varepsilon$ und $|xy| \leqslant n$. Dann ist $x = 0^i$, $y = 0^j$ und $z = 0^{n-i-j}1^n$ für ein $j \neq 0$ und $i + j \leqslant n$. Wir wählen $k = 0$. Dann ist $xy^0z = 0^{n-j}1^n$. $xy^0z \notin A_1$, denn $n - j \neq n$ für $j \neq 0$. Da $\neg$ **PUMP-REG** (A_1), ist A_1 nach dem Pumping-Lemma nicht regulär.

——————————— /Lösung ———————————

2.b) *Beweise oder widerlege,* dass die Sprache A_2 regulär ist.

Lösung

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und fest. Wir wählen das Wort $w = (ab)^{n+1} c^{n+1}$ mit $w \in A_2$ und $|w| \geqslant n$. Sei $w = xyz$ eine beliebige Zerlegung mit $y \neq \varepsilon$ und $|xy| \leqslant n$.
Dann gibt es 4 Fälle:

Fall 1: $x = (ab)^i$, $y = (ab)^j$ und $z = (ab)^{n+1-i-j} c^{n+1}$ für ein $j \neq 0$ und $2(i+j) \leqslant n$. Wir wählen $k = 0$. Dann ist $xy^0z = (ab)^{n+1-j} c^{n+1}$. $xy^0z \notin A_2$, denn $n+1-j \neq n+1$ für $j \neq 0$.

Fall 2: $x = (ab)^i$, $y = (ab)^j a$ und $z = b\,(ab)^{n-i-j} c^{n+1}$ für $2(i+j)+1 \leqslant n$. Wir wählen $k = 0$. Dann ist $xy^0z = (ab)^i\, b\,(ab)^{n-i-j} c^{n+1}$ und damit $xy^0z \notin A_2$.

Fall 3: $x = (ab)^i a$, $y = (ba)^j$ und $z = b\,(ab)^{n-i-j} c^{n+1}$ für ein $j \neq 0$ und $2(i+j)+1 \leqslant n$. Wir wählen $k = 0$. Dann ist $xy^0z = (ab)^{n-j+1} c^{n+1}$. $xy^0z \notin A_2$, denn $n-j+1 \neq n+1$ für $j \neq 0$.

Fall 4: $x = (ab)^i a$, $y = (ba)^j b$ und $z = (ab)^{n-i-j} c^{n+1}$ für $2(i+j)+2 \leqslant n$. Wir wählen $k = 0$. Dann ist $xy^0z = (ab)^i\, a\,(ab)^{n-i-j} c^{n+1}$ und damit $xy^0z \notin A_2$.

Da $\neg$ **PUMP-REG** (A_2), ist A_2 nach dem Pumping-Lemma nicht regulär.

/Lösung

2.c) *Beweise oder widerlege,* dass die Sprache A_3 regulär ist.

Lösung

Wir zeigen, dass die Sprache A_3 gleich der Sprache $L\big((a+b)^*\big)$ ist.

$$L((a+b)^*) \overset{\text{FS 1.2.8 }*}{=} L(a+b)^* \overset{\text{FS 1.2.8+}}{=} (L(a) \cup L(b))^* \overset{\text{FS 1.2.8}a,b\in\Sigma}{=} (\{\,a\,\} \cup \{\,b\,\})^*$$
$$\overset{\text{Def. }\cup}{=} \{\,a,\ b\,\}^* \overset{\text{Def. }\in}{=} \{\,w \mid w \in \{\,a,\ b\,\}^*\,\} \overset{\text{Def. }A_3}{=} A_3$$

Da A_3 durch einen regulären Ausdruck beschrieben wird, gibt es nach Theorem 1.4.5 eine reguläre Grammatik G mit $L(G) = A_3$. Nach Definition 1.4.3 ist A_3 damit regulär.

/Lösung

2.d) *Beweise oder widerlege,* dass die Sprache A_4 regulär ist.

Lösung

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und fest. Wir wählen das Wort $w = a^{n+1}b^{n+1}$ mit $w \in A_4$, denn $w = a^n abb^n = x^n aby^n$ für $x, y \in \{\,a,\ b\,\}$, und $|w| \geqslant n$. Sei $w = xyz$ eine beliebige Zerlegung mit $y \neq \varepsilon$ und $|xy| \leqslant n$. Dann ist $x = a^i$, $y = a^j$ und $z = a^{n+1-i-j}b^{n+1}$ für ein $j \neq 0$ und $i+j \leqslant n$. Wir wählen $k = 0$. Dann ist $xy^0z = a^{n+1-j}b^{n+1}$. $xy^0z \notin A_4$, denn $n+1-j \neq n+1$ für $j \neq 0$. Da $\neg$ **PUMP-REG** (A_4), ist A_4 nach dem Pumping-Lemma nicht regulär.

/Lösung

2.e) *Beweise oder widerlege,* dass die Sprache A_5 regulär ist.

Lösung

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und fest. Wir wählen das Wort $w = a^{n^2}$ mit $w \in A_5$ und $|w| \geqslant n$. Sei $w = xyz$ eine beliebige Zerlegung mit $y \neq \varepsilon$ und $|xy| \leqslant n$. Dann ist $x = a^i$, $y = a^j$ und $z = a^{n^2-i-j}$ für ein $j \neq 0$ und $i+j \leqslant n$. Wir wählen $k = 2$. Dann ist $xy^2z = a^{n^2+j}$. Wir zeigen $xy^2z \notin A_5$ mit einem Beweis durch Widerspruch:

Annahme: $xy^2z \in A_5$.

Dann gibt es ein $l \in \mathbb{N}$, so dass $n^2 + j = (n+l)^2 = n^2 + 2nl + l^2$. Dann ist $j = 2nl + l^2$, aber gleichzeitig $j \neq 0$ und $j \leqslant n$.

Das ist ein Widerspruch, also ist $xy^2z \notin A_5$.

Da $\neg$ **PUMP-REG** (A_5), ist A_5 nach dem Pumping-Lemma nicht regulär.

/Lösung