Woche 3: *2. Mai 2024*

Thema: *Grundlegende kombinatorische Prinzipien*

3.1 Wiederholung

Wiederholung: Zusammenfassung Woche 2

Thema Woche 2: Auswahl von Elementen aus einer Menge

Auswählen von Elementen einer Menge. Wir haben verschiedene Arten diskutiert, Elemente aus einer Menge M der Größe n auszuwählen.

- Es gibt 2^n Teilmengen von M.
- Es gibt $\binom{n}{k}$ k-elementige Teilmengen von M.
- Es gibt n^k Möglichkeiten, k Elemente aus M zu ziehen, wenn die Reihenfolge beachtet wird und die gezogenen Elemente wieder zurückgelegt werden.
- Wird die Reihenfolge nicht beachtet, so gibt es $\binom{k+n-1}{k}$ Möglichkeiten.
- Wird die Reihenfolge beachtet, die Elemente aber nicht zurückgelegt, gibt es $\frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten.
- Die Zahl der Möglichkeiten, die Elemente von n anzuordnen, ist $n!$.

Wiederholung: Binomialkoeffizienten

Erinnerung. Für eine Menge N mit n Elementen und $k \in \mathbb{N}$ ist der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$ definiert als

$$\binom{n}{k} := |\mathcal{P}_k(N)|.$$

Wiederholung.

1. Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, \dots, n\}$ gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. Für alle $n, k \in \mathbb{N}_+$ ist $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.
3. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, \dots, n\}$ gilt: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

Spezialfälle.
Wir definieren $\binom{0}{0} = 1$ und $\binom{n}{k} = 0$ für alle $k > n$ und $k < 0$.

Wiederholung: Ziehen von Elementen aus einer Menge

Wir wollen k Elemente aus einer Menge M mit n Elementen ziehen.

Wir unterscheiden zwischen:

- Auswahl mit bzw. ohne Reihenfolge: Ist es wichtig, in welcher Reihenfolge die Elemente gezogen werden?
- Mit oder ohne Zurücklegen: Können Elemente doppelt gezogen werden?

Mögliche Arten, k Elemente aus n Elementen zu ziehen

	Reihenfolge wichtig (geordnet)	Reihenfolge nicht wichtig (ungeordnet)
Mit Zurücklegen	n^k	$\binom{k+n-1}{k}$
Ohne Zurücklegen	$n^{\underline{k}} = \binom{n}{k} \cdot k!$	$\binom{n}{k}$

3.2 Grundlagen

Grundlegende Prinzipien der Kombinatorik

Wir haben letzte Woche einige kombinatorische Ergebnisse bewiesen und dabei „implizit“ einige grundlegende Prinzipien benutzt, ohne sie explizit zu benennen oder zu beweisen.

Grundlegende Prinzipien der Kombinatorik

Wir haben letzte Woche einige kombinatorische Ergebnisse bewiesen und dabei „implizit" einige grundlegende Prinzipien benutzt, ohne sie explizit zu benennen oder zu beweisen.

Beispiel. Zahl der Möglichkeiten, k Elemente aus einer n-elementigen Menge M mit Zurücklegen und unter Beachtung der Reigenfolge zu ziehen.

Begründung.

$$\begin{array}{rl}
1.\ \text{Element:} & n \text{ Möglichkeiten} \\
2.\ \text{Element:} & n \text{ Möglichkeiten} \\
3.\ \text{Element:} & n \text{ Möglichkeiten} \\
\vdots & \vdots \\
k\text{-tes Element:} & n \text{ Möglichkeiten} \\
\hline
\text{Insgesamt:} & \underbrace{n \cdot n \cdot n \dots n}_{k \text{ mal}} \text{ Möglichkeiten}
\end{array}$$

Grundlegende Prinzipien der Kombinatorik

Wir haben letzte Woche einige kombinatorische Ergebnisse bewiesen und dabei „implizit" einige grundlegende Prinzipien benutzt, ohne sie explizit zu benennen oder zu beweisen.

Beispiel. Zahl der Möglichkeiten, k Elemente aus einer n-elementigen Menge M mit Zurücklegen und unter Beachtung der Reigenfolge zu ziehen.

Begründung.

1. Element:	n Möglichkeiten
2. Element:	n Möglichkeiten
3. Element:	n Möglichkeiten
$\vdots$	$\vdots$
k-tes Element:	n Möglichkeiten
Insgesamt:	$\underbrace{n \cdot n \cdot n \dots n}_{k \text{ mal}}$ Möglichkeiten

Produktregel.
Die Zahl der Möglichkeiten in einem k-stufigen Prozess ist $n_1 \cdot n_2 \dots n_k$, wobei n_i die Zahl der Möglichkeiten in der i-ten Stufe ist.

Die Produktregel

k-stufiger Prozess. Wir führen k-mal hintereinander eine „Aktion“ aus.

Beispiel. Wir ziehen k mal hintereinander ein Element aus einer Menge.

Produktregel.

Die Zahl der Möglichkeiten in einem k-stufigen Prozess ist

$$n_1 \cdot n_2 \dots n_k,$$

wobei n_i die Zahl der Möglichkeiten in der i-ten Stufe ist.

Die Produktregel

k-stufiger Prozess. Wir führen k-mal hintereinander eine „Aktion“ aus.

Beispiel. Wir ziehen k mal hintereinander ein Element aus einer Menge.

$M = \{a_1 \ldots a_n\}$.

Produktregel.

Die Zahl der Möglichkeiten in einem k-stufigen Prozess ist

$n = |M|$ „Größe“ von M
d.h. Zahl der Elemente.

$$n_1 \cdot n_2 \ldots n_k,$$

wobei n_i die Zahl der Möglichkeiten in der i-ten Stufe ist.

Alternative Definition. Seien $M_1, \ldots, M_k$ endliche Mengen.

Wir ziehen k mal nacheinander ein Element, wobei wir in der i-ten Iteration ein Element $a_i \in M_i$ ziehen.

$M_i := M \quad 1 \leq i \leq \ell$

Dann ist die Zahl der verschiedenen Möglichkeiten

$$\prod_{i=1}^{k} |M_i| = |M_1| \cdot |M_2| \ldots |M_k|.$$

Wiederholung: Rekursionsformel des Binomialkoeffizienten

Satz. Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k \leq n$ ist

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Beweis. Sei $M := \{a_1, \dots, a_n\}$ eine Menge mit n Elementen. Wir wissen bereits, dass $\binom{n}{k} = |\mathcal{P}_k(M)|$.

Offensichtlich gilt

$$\mathcal{P}_k(M) = \underbrace{\{X \subseteq M : |X| = k \ \text{ und } a_1 \in X\}}_{P^+} \ \dot\cup \ \underbrace{\{X \subseteq M : |X| = k \ \text{ und } a_1 \notin X\}}_{P^-}.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} \tbinom{n}{k} = |\mathcal{P}_k(M)| &= |P^+| + |P^-| \\ &= |\{X \subseteq M \setminus \{a_1\} : |X| = k-1\}| + |\{X \subseteq M \setminus \{a_1\} : |X| = k\}| \\ &= \tbinom{n-1}{k-1} + \tbinom{n-1}{k} \end{aligned}$$

Wiederholung: Rekursionsformel des Binomialkoeffizienten

Satz. Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k \leq n$ ist

Zählen disjunkter Vereinigungen.
Wir haben hier ausgenutzt, dass die Fälle $a_1 \in X$ und $a_1 \notin X$ disjunkt sind und deshalb gilt

$$|\mathcal{P}_k| = |\{X \in \mathcal{P}_{k-1} : a \in X\}| + |\{X \in \mathcal{P}_k : a \notin M\}|.$$

Beweis. Sei $M :=$ ... ss $\binom{n}{k} = |\mathcal{P}_k(M)|$.

Offensichtlich

$$\mathcal{P}_k(M) = \underbrace{\{X \subseteq M : |X| = k \text{ und } a_1 \in X\}}_{P^+} \ \dot\cup \ \underbrace{\{X \subseteq M : |X| = k \text{ und } a_1 \notin X\}}_{P^-}.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} = |\mathcal{P}_k(M)| &= |P^+| + |P^-| \\
&= |\{X \subseteq M \setminus \{a_1\} : |X| = k-1\}| + |\{X \subseteq M \setminus \{a_1\} : |X| = k\}| \\
&= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}
\end{aligned}$$

Summenregel

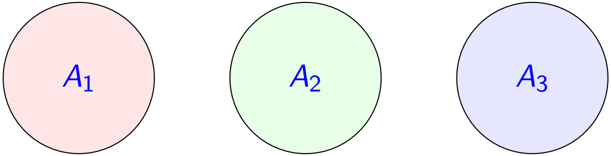
Summenregel.

Seien $A_1, \dots, A_k$ paarwise disjunkte Mengen.

(d.h. es gilt $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $1 \leq i < j \leq k$.)

Dann gilt

$$|\bigcup_{i=1}^{k} A_i| \quad = \quad \sum_{i=1}^{k} |A_i|.$$

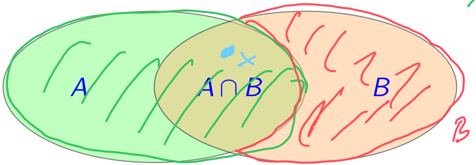


Vereinigung von zwei nicht-disjunkten Mengen

Wie sieht es bei der Vereinigung von zwei nicht-disjunkten Mengen aus?

Sei $M = A \cup B$ aber $A \cap B \neq \emptyset$.

$M = A \cup (B \setminus A \cap B)$



$M = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$B \setminus (A \cap B)$

Offenbar gilt dann nicht mehr $|M| = |A| + |B|$, denn die Elemente in $A \cap B$ werden auf der rechten Seite doppelt gezählt.

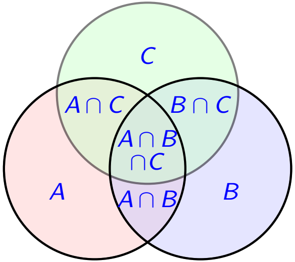
Es gilt daher:

$$|M| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Vereinigung dreier nicht-disjunkter Mengen

Was passiert bei drei nicht-disjunkten Mengen?

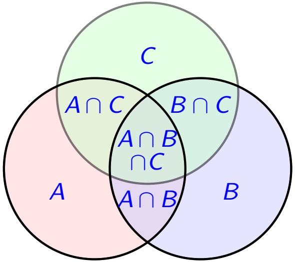
Sei $M = A \cup B \cup C$ die paarweise nicht disjunkt sind.



Vereinigung dreier nicht-disjunkter Mengen

Was passiert bei drei nicht-disjunkten Mengen?

Sei $M = A \cup B \cup C$ die paarweise nicht disjunkt sind.

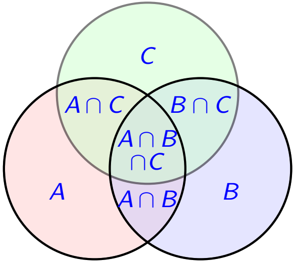


Gilt $|M| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$?

Vereinigung dreier nicht-disjunkter Mengen

Was passiert bei drei nicht-disjunkten Mengen?

Sei $M = A \cup B \cup C$ die paarweise nicht disjunkt sind.



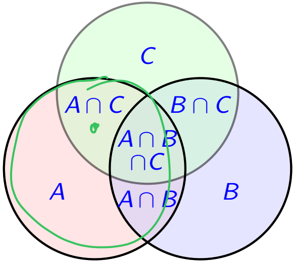
Gilt $|M| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$? Nein!

Denn nun ziehen wir die Elemente in $A \cap B \cap C$ drei mal ab, zählen sie also überhaupt nicht.

Vereinigung dreier nicht-disjunkter Mengen

Was passiert bei drei nicht-disjunkten Mengen?

Sei $M = A \cup B \cup C$ die paarweise nicht disjunkt sind.



Gilt $|M| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$? Nein!

Denn nun ziehen wir die Elemente in $A \cap B \cap C$ drei mal ab, zählen sie also überhaupt nicht.

Vereinigung dreier Mengen. Es gilt

$$|M| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Prinzip der Inklusion-Exklusion

Satz. Seien $A_1, \ldots, A_n$ endliche Mengen. Es gilt

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| \quad = \quad \sum_{r=1}^{n} \left((-1)^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n} |\bigcap_{j=1}^{r} A_{i_j}| \right).$$

Beweis des Inklusion-Exclusion Prinzips

Satz. Seien $A_1, \ldots, A_n$ endliche Mengen. Es gilt

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{r=1}^n \left((-1)^{r-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n} |\bigcap_{j=1}^r A_{i_j}|\right).$$

Beweis. Sei $a \in \bigcup_{i=1}^n A_i$ beliebig. Auf der linken Seite der Gleichung wird a genau einmal gezählt. Wir müssen also zeigen, dass es rechts auch nur den Beitrag 1 zur Summe leistet.

Beweis des Inklusion-Exclusion Prinzips

Satz. Seien $A_1, \dots, A_n$ endliche Mengen. Es gilt

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| \quad = \quad \sum_{r=1}^n \left((-1)^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} |\bigcap_{j=1}^r A_{i_j}|\right).$$

Beweis. Sei $a \in \bigcup_{i=1}^n A_i$ beliebig. Auf der linken Seite der Gleichung wird a genau einmal gezählt. Wir müssen also zeigen, dass es rechts auch nur den Beitrag 1 zur Summe leistet.

Angenommen a kommt in ℓ der Mengen $A_1, \dots, A_n$ vor. Dann wird a in der Summe

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \left| \bigcap_{j=1}^r A_{i_j} \right|$$

genau $\binom{\ell}{r}$ mal gezählt.

Beweis des Inklusion-Exclusion Prinzips

Satz. Seien $A_1, \dots, A_n$ endliche Mengen. Es gilt

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{r=1}^n \left((-1)^{r-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_r \le n} |\bigcap_{j=1}^r A_{i_j}|\right).$$

Beweis. Sei $a \in \bigcup_{i=1}^n A_i$ beliebig. Auf der linken Seite der Gleichung wird a genau einmal gezählt. Wir müssen also zeigen, dass es rechts auch nur den Beitrag 1 zur Summe leistet.

Angenommen a kommt in ℓ der Mengen $A_1, \dots, A_n$ vor. Dann wird a in der Summe

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_r \le n} \left| \bigcap_{j=1}^r A_{i_j} \right|$$

genau $\binom{\ell}{r}$ mal gezählt.

Denn $a \in \bigcap_{j=1}^r A_{i_j}$ gdw. $\{i_1, \dots, i_r\}$ eine r-elementige Teilmenge von $\{j : a \in A_j\}$ ist.

Beweis des Inklusion-Exclusion Prinzips

Satz. Seien $A_1, \dots, A_n$ endliche Mengen. Es gilt

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| \quad = \quad \sum_{r=1}^n \left((-1)^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} |\bigcap_{j=1}^r A_{i_j}| \right).$$

Beweis. Sei $a \in \bigcup_{i=1}^n A_i$ beliebig. Auf der linken Seite der Gleichung wird a genau einmal gezählt. Wir müssen also zeigen, dass es rechts auch nur den Beitrag 1 zur Summe leistet.

Angenommen a kommt in ℓ der Mengen $A_1, \dots, A_n$ vor. Dann wird a in der Summe

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \left| \bigcap_{j=1}^r A_{i_j} \right|$$

genau $\binom{\ell}{r}$ mal gezählt.

Denn $a \in \bigcap_{j=1}^r A_{i_j}$ gdw. $\{i_1, \dots, i_r\}$ eine r-elementige Teilmenge von $\{j : a \in A_j\}$ ist.

Aber $\{j : a \in A_j\}$ enthält genau ℓ Elemente.

Prinzip der Inklusion-Exklusion

Satz. Seien $A_1, \dots, A_n$ endliche Mengen. Es gilt

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| \quad = \quad \sum_{r=1}^n \left((-1)^{r-1} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le n} |\bigcap_{j=1}^r A_{i_j}|\right).$$

Beweis (fort.). Ang., a kommt in ℓ der Mengen $A_1, \dots, A_n$ vor.

Dann wird a in $\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le n} \left|\bigcap_{j=1}^r A_{i_j}\right|$ genau $\binom{\ell}{r}$ mal gezählt. D.h. für a vereinfacht sich $\left((-1)^{r-1} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le n} |\bigcap_{j=1}^r A_{i_j}|\right)$ zu $\left((-1)^{r-1}\binom{l}{r}\right)$.

Prinzip der Inklusion-Exklusion

Satz. Seien $A_1, \dots, A_n$ endliche Mengen. Es gilt

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| \quad = \quad \sum_{r=1}^n \left((-1)^{r-1} \sum_{1\leq i_1<i_2<\dots<i_r\leq n} |\bigcap_{j=1}^r A_{i_j}|\right).$$

Beweis (fort.). Ang., a kommt in ℓ der Mengen $A_1, \dots, A_n$ vor.

Dann wird a in $\sum_{1\leq i_1<i_2<\dots<i_r\leq n} \left|\bigcap_{j=1}^r A_{i_j}\right|$ genau $\binom{\ell}{r}$ mal gezählt. D.h. für a vereinfacht sich $\left((-1)^{r-1} \sum_{1\leq i_1<i_2<\dots<i_r\leq n} |\bigcap_{j=1}^r A_{i_j}|\right)$ zu $\left((-1)^{r-1}\binom{l}{r}\right)$.

Zu zeigen: $\sum_{r=1}^l (-1)^{r-1}\binom{l}{r} = 1$

$$\sum_{r=1}^l (-1)^{r-1}\binom{l}{r}$$

Prinzip der Inklusion-Exklusion

Satz. Seien $A_1, \dots, A_n$ endliche Mengen. Es gilt

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| \quad = \quad \sum_{r=1}^n \left((-1)^{r-1} \sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_r\le n} |\bigcap_{j=1}^r A_{i_j}|\right).$$

Beweis (fort.). Ang., a kommt in ℓ der Mengen $A_1, \dots, A_n$ vor.

Dann wird a in $\sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_r\le n} \left|\bigcap_{j=1}^r A_{i_j}\right|$ genau $\binom{\ell}{r}$ mal gezählt. D.h. für a vereinfacht sich $\left((-1)^{r-1} \sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_r\le n} |\bigcap_{j=1}^r A_{i_j}|\right)$ zu $\left((-1)^{r-1}\binom{l}{r}\right)$.

Zu zeigen: $\sum_{r=1}^l (-1)^{r-1}\binom{l}{r} = 1$

$$\sum_{r=1}^l (-1)^{r-1}\binom{l}{r}$$

$(-1)^r = (-1)^{r-2}$

$$= \quad -1 \cdot \sum_{r=1}^l \binom{l}{r}(-1)^r \qquad \text{rausziehen von } -1$$

Prinzip der Inklusion-Exklusion

Satz. Seien $A_1, \dots, A_n$ endliche Mengen. Es gilt

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| \quad = \quad \sum_{r=1}^n \left((-1)^{r-1} \sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_r\le n} |\bigcap_{j=1}^r A_{i_j}|\right).$$

Beweis (fort.). Ang., a kommt in ℓ der Mengen $A_1, \dots, A_n$ vor.

Dann wird a in $\sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_r\le n} \left|\bigcap_{j=1}^r A_{i_j}\right|$ genau $\binom{\ell}{r}$ mal gezählt. D.h. für a vereinfacht sich $\left((-1)^{r-1} \sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_r\le n} |\bigcap_{j=1}^r A_{i_j}|\right)$ zu $\left((-1)^{r-1}\binom{l}{r}\right)$.

Zu zeigen: $\sum_{r=1}^l (-1)^{r-1}\binom{l}{r} = 1$

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^l (-1)^{r-1}\binom{l}{r} \\ = \quad & -1 \cdot \sum_{r=1}^l \binom{l}{r}(-1)^r && \text{rausziehen von } -1 \\ = \quad & -1 \cdot \left(\left(\sum_{r=0}^l \binom{l}{r}(-1)^r\right) - 1\right) && \text{Index von 0 laufen lassen} \end{aligned}$$

Prinzip der Inklusion-Exklusion

Satz. Seien $A_1, \ldots, A_n$ endliche Mengen. Es gilt

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| \quad = \quad \sum_{r=1}^n \Big((-1)^{r-1} \sum_{1\leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n} |\bigcap_{j=1}^r A_{i_j}|\Big).$$

Beweis (fort.). Ang., a kommt in ℓ der Mengen $A_1, \ldots, A_n$ vor.

Dann wird a in $\sum_{1\leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n} \left|\bigcap_{j=1}^r A_{i_j}\right|$ genau $\binom{\ell}{r}$ mal gezählt. D.h. für a vereinfacht sich $\Big((-1)^{r-1} \sum_{1\leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n} |\bigcap_{j=1}^r A_{i_j}|\Big)$ zu $\Big((-1)^{r-1}\binom{l}{r}\Big)$.

Zu zeigen: $\sum_{r=1}^l (-1)^{r-1}\binom{l}{r} = 1$

	$\sum_{r=1}^l (-1)^{r-1}\binom{l}{r}$	
$=$	$-1 \cdot \sum_{r=1}^l \binom{l}{r}(-1)^r$	rausziehen von -1
$=$	$-1 \cdot \Big(\big(\sum_{r=0}^l \binom{l}{r}(-1)^r\big) - 1\Big)$	Index von 0 laufen lassen
$=$	$1 - \sum_{r=0}^l \binom{l}{r}(-1)^r$	-1 ausmultiplizieren und umdrehen
$=$	$1 - \sum_{r=0}^l \binom{l}{r}(-1)^r 1^{n-r}$	1^{n-r} hinzu um Binom.-Formel anzuwenden

Erinnerung.
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Prinzip der Inklusion-Exklusion

Satz. Seien $A_1, \ldots, A_n$ endliche Mengen. Es gilt

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{r=1}^n \left((-1)^{r-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n} |\bigcap_{j=1}^r A_{i_j}|\right).$$

Beweis (fort.). Ang., a kommt in ℓ der Mengen $A_1, \ldots, A_n$ vor.

Dann wird a in $\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n} \left|\bigcap_{j=1}^r A_{i_j}\right|$ genau $\binom{\ell}{r}$ mal gezählt. D.h. für a vereinfacht sich $\left((-1)^{r-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n} |\bigcap_{j=1}^r A_{i_j}|\right)$ zu $\left((-1)^{r-1}\binom{l}{r}\right)$.

Zu zeigen: $\sum_{r=1}^l (-1)^{r-1}\binom{l}{r} = 1$

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=1}^l (-1)^{r-1}\binom{l}{r} \\
= \;& -1 \cdot \sum_{r=1}^l \binom{l}{r}(-1)^r && \text{rausziehen von } -1 \\
= \;& -1 \cdot \left(\left(\sum_{r=0}^l \binom{l}{r}(-1)^r\right) - 1\right) && \text{Index von 0 laufen lassen} \\
= \;& 1 - \sum_{r=0}^l \binom{l}{r}(-1)^r && -1 \text{ ausmultiplizieren und umdrehen} \\
= \;& 1 - \sum_{r=0}^l \binom{l}{r}(-1)^r 1^{n-r} && 1^{n-r} \text{ hinzu um Binom.-Formel anzuwenden} \\
= \;& 1 - (-1+1)^l = 1 && \text{Binom.-Formel mit } a = -1 \text{ und } b = 1
\end{aligned}$$

Erinnerung.
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Exkurs: Beweise

Was ist eigentlich ein Beweis?

Was ist ein mathematischer Beweis?

Streng genommen, ist ein Beweis einer Aussage A eine

- schrittweise Herleitung von A aus den
- Voraussetzungen von A und den zugrundeliegenden Axiomen bei dem
- jeder einzelne Schritt leicht zu überprüfen ist.

Einmal bewiesene Aussagen dürfen als Beweisschritte wiederverwendet werden.

Was ist eigentlich ein Beweis?

Was ist ein mathematischer Beweis?

Streng genommen, ist ein Beweis einer Aussage A eine

- schrittweise Herleitung von A aus den
- Voraussetzungen von A und den zugrundeliegenden Axiomen bei dem
- jeder einzelne Schritt leicht zu überprüfen ist.

Einmal bewiesene Aussagen dürfen als Beweisschritte wiederverwendet werden.

Diese Ansicht von Beweisen wird zum Beispiel in computer-gestützten Beweisen durch Theorembeweiser benutzt.

Was ist eigentlich ein Beweis?

Was ist ein mathematischer Beweis?

Streng genommen, ist ein Beweis einer Aussage A eine

- schrittweise Herleitung von A aus den
- Voraussetzungen von A und den zugrundeliegenden Axiomen bei dem
- jeder einzelne Schritt leicht zu überprüfen ist.

Einmal bewiesene Aussagen dürfen als Beweisschritte wiederverwendet werden.

Diese Ansicht von Beweisen wird zum Beispiel in computer-gestützten Beweisen durch Theorembeweiser benutzt.

Mathematische Beweise.

Allerdings sollen Beweise auch "erklären", warum die Aussage gilt. Formale Beweise z.B. durch Theorembeweiser liefern dies meistens nicht.

Was ist eigentlich ein Beweis?

什么是证明？**什么是数学证明？**

严格来说，证明一个陈述 A 是通过以下方式进行的：

- 从 A 和其基础公理出发逐步推导，
- 并且每个步骤都易于验证。

已证明的陈述可以作为证明步骤反复使用。这种对证明的看法在计算机辅助证明中被定理证明者采用。

数学证明

然而，证明还应解释为何该陈述成立。形式证明（例如由定理证明者生成的）通常无法做到这一点。

Was ist ein mathematischer Beweis?

Streng genommen, ist ein Beweis einer Aussage A eine

- schrittweise Herleitung von A aus den
- Voraussetzungen von A und den zugrundeliegenden Axiomen bei dem
- jeder einzelne Schritt leicht zu überprüfen ist.

Einmal bewiesene Aussagen dürfen als Beweisschritte wiederverwendet werden.

Diese Ansicht von Beweisen wird zum Beispiel in computer-gestützten Beweisen durch Theorembeweiser benutzt.

因此，证明通常以较不正式的方式并通过更多步骤来撰写。
然而，这样做也并非没有问题，因为推理中的错误可能会因此被忽略。**示例**：“很容易看出……”

Mathematische Beweise.

Allerdings sollen Beweise auch “erklären”, warum die Aussage gilt. Formale Beweise z.B. durch Theorembeweiser liefern dies meistens nicht.

Daher werden Beweise meistens in einer weniger formalen Art und mit größeren Einzelschritten geschrieben.

Dies ist aber nicht unproblematisch, da hier leicht Fehler in der Argumentation unentdeckt bleiben können. Beispiel. “Man sieht leicht....”

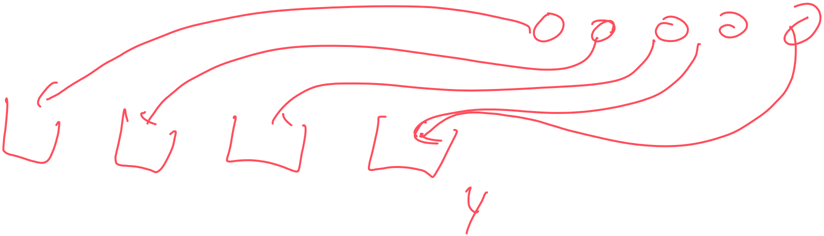
Zurück zur Kombinatorik

Das Schubfachprinzip

Das Schubfachprinzip (informell).

Wenn Sie 8 Döner in einer Woche essen wollen, dass müssen Sie an mindestens einem Tag der Woche mindestens zwei Döner essen.

(Die Aussage im Selbstversuch zu eruieren wird nicht empfohlen.)



Das Schubfachprinzip

Das Schubfachprinzip (informell).

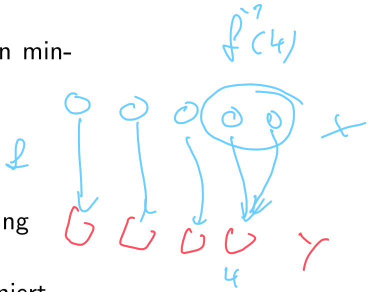
Wenn Sie 8 Döner in einer Woche essen wollen, dass müssen Sie an mindestens einem Tag der Woche mindestens zwei Döner essen.

(Die Aussage im Selbstversuch zu eruieren wird nicht empfohlen.)

Satz

Theorem (Schubfachprinzip).

1. Seien X, Y (endliche) Mengen mit $|X| > |Y|$. Für jede Abbildung $f : X \to Y$ gibt es ein $y \in Y$ mit $|f^{-1}(y)| \geq 2$.
2. Wird eine Menge X mit $> r \cdot s$ Elementen in r Klassen partitioniert, dann enthält eine Klasse mindestens $s + 1$ Elemente.



Das Schubfachprinzip

Das Schubfachprinzip (informell).

Wenn Sie 8 Döner in einer Woche essen wollen, dass müssen Sie an mindestens einem Tag der Woche mindestens zwei Döner essen.

(Die Aussage im Selbstversuch zu eruieren wird nicht empfohlen.)

Theorem (Schubfachprinzip).

1. Seien X, Y (endliche) Mengen mit $|X| > |Y|$. Für jede Abbildung $f : X \to Y$ gibt es ein $y \in Y$ mit $|f^{-1}(y)| \geq 2$.
2. Wird eine Menge X mit $> r \cdot s$ Elementen in r Klassen partitioniert, dann enthält eine Klasse mindestens $s + 1$ Elemente.

Anmerkung.

Im englischen heißt das Schubfachprinzip *pigeon-hole principle (PHP)*.

Anwendung I: Das handshake lemma

Lemma (handshake lemma).

Eine Menge M von Personen treffen sich auf einem Empfang. Einige davon geben sich zur Begrüßung gegenseitig die Hand.

Wenn $|M| \geq 2$, dann gibt es zwei Personen aus M, die genau gleich vielen Personen aus M die Hand geben.

Beweis. Wie finden wir einen Beweis dieser Aussage?

Anwendung I: Das handshake lemma

Lemma (handshake lemma).

Eine Menge M von Personen treffen sich auf einem Empfang. Einige davon geben sich zur Begrüßung gegenseitig die Hand.

Wenn $|M| \geq 2$, dann gibt es zwei Personen aus M, die genau gleich vielen Personen aus M die Hand geben.

Beweis. Wie finden wir einen Beweis dieser Aussage?

Schritt 1. Aufschreiben aller Voraussetzungen.

- Menge $M := \{P_1, \dots, P_n\}$ von n Personen.
- $n \geq 2$ $\qquad h_i \in \mathbb{N}$
- Für jede Person $P_i \in M$ eine Zahl h_i die angibt, wievielen Personen P_i die Hand gegeben hat.

Anwendung I: Das handshake lemma

Lemma (handshake lemma).

Eine Menge M von Personen treffen sich auf einem Empfang. Einige davon geben sich zur Begrüßung gegenseitig die Hand.

Wenn $|M| \geq 2$, dann gibt es zwei Personen aus M, die genau gleich vielen Personen aus M die Hand geben.

Beweis. Wie finden wir einen Beweis dieser Aussage?

Schritt 1. Aufschreiben aller Voraussetzungen.

- Menge $M := \{P_1, \dots, P_n\}$ von n Personen.
- $n \geq 2$
- Für jede Person $P_i \in M$ eine Zahl h_i die angibt, wievielen Personen P_i die Hand gegeben hat. Es gilt $0 \leq h_i < n$.

Anwendung I: Das handshake lemma

引理（握手引理）

在一次招待会上，一群 M 中的人彼此相遇并问候握手。

如果 $|M| \geq 2$，那么在这群人中，存在两个人握手的次数完全相同。

Lemma (handshake lemma).

Eine Menge M von Personen treffen sich auf einem Empfang. Einige davon geben sich zur Begrüßung gegenseitig die Hand.

Wenn $|M| \geq 2$, dann gibt es zwei Personen aus M, die genau gleich vielen Personen aus M die Hand geben.

Beweis. Wie finden wir einen Beweis dieser Aussage?

Schritt 1. Aufschreiben aller Voraussetzungen.

- Menge $M := \{P_1, \dots, P_n\}$ von n Personen.
- $n \geq 2$
- Für jede Person $P_i \in M$ eine Zahl h_i die angibt, wievielen Personen P_i die Hand gegeben hat. Es gilt $0 \leq h_i < n$.

Schritt 2. Was wollen wir zeigen?

Zu zeigen: es gibt $1 \leq i \neq j \leq n$ mit $h_i = h_j$.

Anwendung I: Das handshake lemma

Voraussetzungen.

- Menge $M := \{P_1, \ldots, P_n\}$ mit $n \geq 2$.
- Zahlen $h_1, \ldots, h_n$ mit $0 \leq h_i < n$.

Zu zeigen:

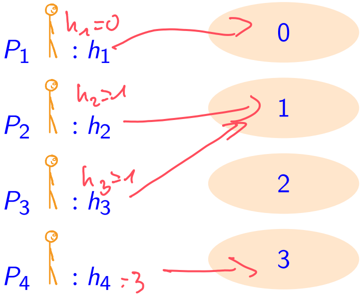
Es gibt $i \neq j$ mit $h_i = h_j$.

Anwendung I: Das handshake lemma

Erster Beweisversuch. Wir verwenden das Schubfachprinzip.

Idee. Ein Feld (Schubfach) für jeden möglichen Wert $0 \leq j \leq n-1$ den die h_i annehmen können.

Person P_i stellt sich auf Feld h_i.



Voraussetzungen.

- Menge $M := \{P_1, \dots, P_n\}$ mit $n \geq 2$.
- Zahlen $h_1, \dots, h_n$ mit $0 \leq h_i < n$.

Zu zeigen:

Es gibt $i \neq j$ mit $h_i = h_j$.

Anwendung I: Das handshake lemma

Erster Beweisversuch. Wir verwenden das Schubfachprinzip.

Idee. Ein Feld (Schubfach) für jeden möglichen Wert $0 \leq j \leq n-1$ den die h_i annehmen können.

Person P_i stellt sich auf Feld h_i.

$P_1 : h_1$ — 0

$P_2 : h_2$ — 1

$P_3 : h_3$ — 2

$P_4 : h_4$ — 3

Voraussetzungen.

- Menge $M := \{P_1, \dots, P_n\}$ mit $n \geq 2$.
- Zahlen $h_1, \dots, h_n$ mit $0 \leq h_i < n$.

Zu zeigen:

Es gibt $i \neq j$ mit $h_i = h_j$.

Problem. Es gibt genauso viele „Schubfächer“ wie mögliche Werte für die h_i.

Anwendung I: Das handshake lemma

Zweiter Beweisversuch.

Voraussetzungen.

- Menge $M := \{P_1, \dots, P_n\}$ mit $n \geq 2$.
- Zahlen $h_1, \dots, h_n$ mit $0 \leq h_i < n$.

Zu zeigen:

Es gibt $i \neq j$ mit $h_i = h_j$.

Anwendung I: Das handshake lemma

Zweiter Beweisversuch. Ausprobieren. Betrachten wir $n = 2$.

Voraussetzungen.

- Menge $M := \{P_1, \dots, P_n\}$ mit $n \geq 2$.
- Zahlen $h_1, \dots, h_n$ mit $0 \leq h_i < n$.

Zu zeigen:

Es gibt $i \neq j$ mit $h_i = h_j$.

Anwendung I: Das handshake lemma

Zweiter Beweisversuch. Ausprobieren. Betrachten wir $n = 2$.

Idee. Ein Feld (Schubfach) für jeden möglichen Wert $0 \leq j \leq 1$ den h_1 und h_2 annehmen können.

Person P_1 stellt sich auf Feld h_1, P_2 geht auf h_2.

Voraussetzungen.

- Menge $M := \{P_1, \ldots, P_n\}$ mit $n \geq 2$.
- Zahlen $h_1, \ldots, h_n$ mit $0 \leq h_i < n$.

Zu zeigen:

Es gibt $i \neq j$ mit $h_i = h_j$.

Anwendung I: Das handshake lemma

Zweiter Beweisversuch. Ausprobieren. Betrachten wir $n = 2$.

Idee. Ein Feld (Schubfach) für jeden möglichen Wert $0 \leq j \leq 1$ den h_1 und h_2 annehmen können.

Person P_1 stellt sich auf Feld h_1, P_2 geht auf h_2.

Voraussetzungen.

- Menge $M := \{P_1, \ldots, P_n\}$ mit $n \geq 2$.
- Zahlen $h_1, \ldots, h_n$ mit $0 \leq h_i < n$.

Zu zeigen:

Es gibt $i \neq j$ mit $h_i = h_j$.

Mögliche Fälle.

Fall 1. $h_1 = h_2 = 0$. Beide stehen zusammen auf Feld 0. Also ok.

Anwendung I: Das handshake lemma

Zweiter Beweisversuch. Ausprobieren. Betrachten wir $n = 2$.

Idee. Ein Feld (Schubfach) für jeden möglichen Wert $0 \leq j \leq 1$ den h_1 und h_2 annehmen können.

Person P_1 stellt sich auf Feld h_1, P_2 geht auf h_2.

Mögliche Fälle.

Fall 1. $h_1 = h_2 = 0$. Beide stehen zusammen auf Feld 0. Also ok.

Fall 2. $h_1 = 0$ und $h_2 = 1$. Nicht ok.

Voraussetzungen.

- Menge $M := \{P_1, \dots, P_n\}$ mit $n \geq 2$.
- Zahlen $h_1, \dots, h_n$ mit $0 \leq h_i < n$.

Zu zeigen:

Es gibt $i \neq j$ mit $h_i = h_j$.

Anwendung I: Das handshake lemma

Zweiter Beweisversuch. Ausprobieren. Betrachten wir $n = 2$.

Idee. Ein Feld (Schubfach) für jeden möglichen Wert $0 \leq j \leq 1$ den h_1 und h_2 annehmen können.

Person P_1 stellt sich auf Feld h_1, P_2 geht auf h_2.

Voraussetzungen.

- Menge $M := \{P_1, \ldots, P_n\}$ mit $n \geq 2$.
- Zahlen $h_1, \ldots, h_n$ mit $0 \leq h_i < n$.

Zu zeigen:

Es gibt $i \neq j$ mit $h_i = h_j$.

Mögliche Fälle.

Fall 1. $h_1 = h_2 = 0$. Beide stehen zusammen auf Feld 0. Also ok.

Fall 2. $h_1 = 0$ und $h_2 = 1$. Nicht ok.

Aber moment mal. Wie kann P_2 denn P_1 die Hand schütteln, aber P_1 niemandem die Hand schütteln?

Anwendung I: Das handshake lemma

Zweiter Beweisversuch. Ausprobieren. Betrachten wir $n = 2$.

Idee. Ein Feld (Schubfach) für jeden möglichen Wert $0 \leq j \leq 1$ den h_1 und h_2 annehmen können.

Person P_1 stellt sich auf Feld h_1, P_2 geht auf h_2.

Voraussetzungen.

- Menge $M := \{P_1, \dots, P_n\}$ mit $n \geq 2$.
- Zahlen $h_1, \dots, h_n$ mit $0 \leq h_i < n$.

Zu zeigen:

Es gibt $i \neq j$ mit $h_i = h_j$.

Mögliche Fälle.

Fall 1. $h_1 = h_2 = 0$. Beide stehen zusammen auf Feld 0. Also ok.

Fall 2. $h_1 = 0$ und $h_2 = 1$. Nicht ok.

Aber moment mal. Wie kann P_2 denn P_1 die Hand schütteln, aber P_1 niemandem die Hand schütteln? Dieser Fall ist doch gar nicht möglich!

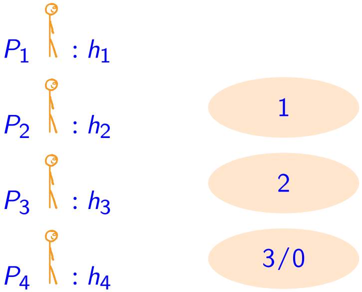
D.h., wenn ein $h_i = 0$ ist, kann es kein $h_j = n - 1$ geben!!!

Anwendung I: Das handshake lemma

Nochmal der erste Beweisversuch. Wir verwenden das Schubfachprinzip.

Idee. Felder $1, \ldots, n-1/0$.

Person P_i stellt sich auf Feld h_i, falls $h_i \neq 0$.
Wenn $h_i = 0$, geht P_i auf Feld $n-1/0$



Voraussetzungen.

- Menge $M := \{P_1, \ldots, P_n\}$ mit $n \geq 2$.
- Zahlen $h_1, \ldots, h_n$ mit $0 \leq h_i < n$.

Zu zeigen:

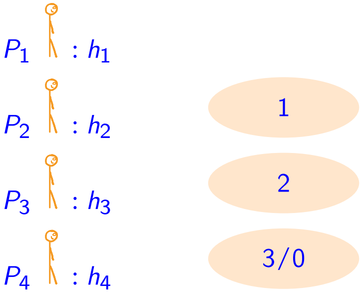
Es gibt $i \neq j$ mit $h_i = h_j$.

Anwendung I: Das handshake lemma

Nochmal der erste Beweisversuch. Wir verwenden das Schubfachprinzip.

Idee. Felder $1, \dots, n-1/0$.

Person P_i stellt sich auf Feld h_i, falls $h_i \neq 0$.
Wenn $h_i = 0$, geht P_i auf Feld $n - 1/0$



Voraussetzungen.

- Menge $M := \{P_1, \dots, P_n\}$ mit $n \geq 2$.
- Zahlen $h_1, \dots, h_n$ mit $0 \leq h_i < n$.

Zu zeigen:

Es gibt $i \neq j$ mit $h_i = h_j$.

Schubfachprinzip. Nun gibt es weniger Felder als Personen. Also müssen zwei Personen gemeisam auf einem Feld stehen. □

Anwendung II: Der (spezielle) Satz von Ramsey

Wir beweisen hier einen Spezialfall des Satzes von Ramsey.

Der Satz besagt, dass es für alle $k \geq 0$ in jeder „hinreichend“ großen Menge von Personen

- mindestens k Personen gibt, die sich gegenseitig nicht kennen, oder es
- mindestens k Personen gibt, die sich alle gegenseitig kennen (eine Clique).

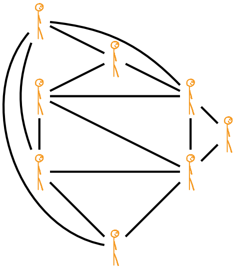
Anwendung II: Der (spezielle) Satz von Ramsey

Wir beweisen hier einen Spezialfall des Satzes von Ramsey.

Der Satz besagt, dass es für alle $k \geq 0$ in jeder „hinreichend“ großen Menge von Personen

- mindestens k Personen gibt, die sich gegenseitig nicht kennen, oder es
- mindestens k Personen gibt, die sich alle gegenseitig kennen (eine Clique).

Beispiel. Sei $k = 4$.

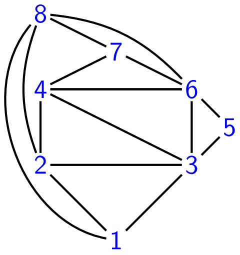


Anwendung II: Der (spezielle) Satz von Ramsey

Satz. Es gibt eine Funktion $R : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass für alle Graphen $G = (V, E)$ und alle $c, i \geq 0$ gilt: Wenn $|V| \geq R(c, i)$, dann gibt es ein

- $X \subseteq V$ mit $|X| = i$ und X ist eine unabhängige Menge in G oder ein
- $X \subseteq V$ mit $|X| = c$ und X induziert eine clique in G,
  d.h. für alle $u \neq v \in X$ gilt $\{u, v\} \in E$.

Beispiel.

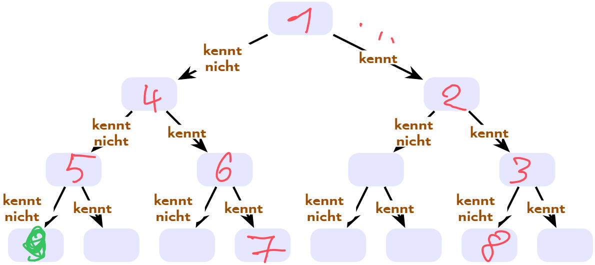


Anwendung II: Der (spezielle) Satz von Ramsey

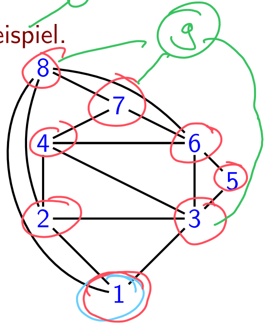
Satz. Es gibt eine Funktion $R : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass für alle Graphen $G = (V, E)$ und alle $c, i \geq 0$ gilt: Wenn $|V| \geq R(c, i)$, dann gibt es ein

- $X \subseteq V$ mit $|X| = i$ und X ist eine unabhängige Menge in G oder ein
- $X \subseteq V$ mit $|X| = c$ und X induziert eine clique in G,
  d.h. für alle $u \neq v \in X$ gilt $\{u, v\} \in E$.

Beweis. Wir beweisen den Satz „algorithmisch" mit Hilfe eines Entscheidungsbaums.

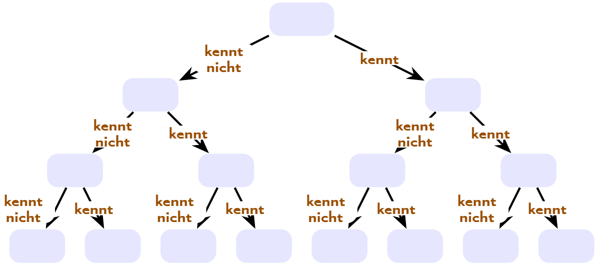


Beispiel.



Anwendung II: Der (spezielle) Satz von Ramsey

Satz. Funktion R, für alle $G = (V, E)$ und $c, i \geq 0$ gilt: Wenn $|V| \geq R(c, i)$, dann unabhängige Menge $X \subseteq V$ der Größe i oder clique $C \subseteq V$ der Größe c.



Konstruktion. Sei $V = \{P_1, \dots, P_n\}$. P_1 belegt den obersten freien Platz.

Angenommen $P_1, \dots, P_{i-1}$ wurden schon platziert.

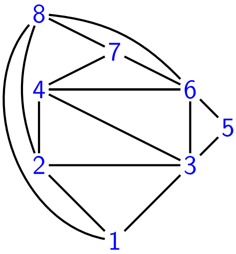
P_i fängt ganz oben an. Ist der Platz frei, belegt P_i den Platz.

Ist der Platz durch P_j belegt:

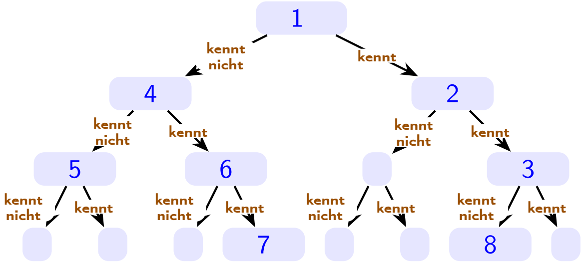
- Wenn $\{P_i, P_j\} \in E$, dann geht P_i zum rechten Nachfolger.
- Ansonsten geht P_i zum linken Nachfolger.

Dort wird das Verfahren wiederholt.

Beispiel.



Anwendung II: Der (spezielle) Satz von Ramsey

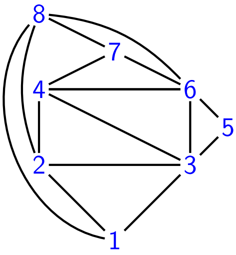


Satz. Funktion R, für alle $G = (V, E)$ und $c, i \geq 0$ gilt: Wenn $|V| \geq R(c, i)$, dann unabhängige Menge $X \subseteq V$ der Größe i oder clique $C \subseteq V$ der Größe c.

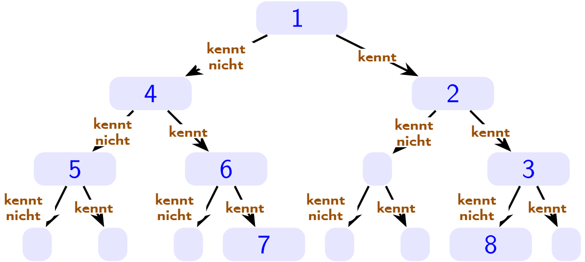
Eigenschaften der Konstruktion. Für jeden Knoten v gilt:

- Alle Personen im „rechten" Teilbaum von v kennen v
- Niemand im „linken" Teilbaum von v kennt v.

Beispiel.



Anwendung II: Der (spezielle) Satz von Ramsey



Satz. Funktion R, für alle $G = (V, E)$ und $c, i \geq 0$ gilt: Wenn $|V| \geq R(c, i)$, dann unabhängige Menge $X \subseteq V$ der Größe i oder clique $C \subseteq V$ der Größe c.

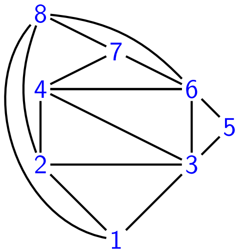
Eigenschaften der Konstruktion. Für jeden Knoten v gilt:

- Alle Personen im „rechten" Teilbaum von v kennen v
- Niemand im „linken" Teilbaum von v kennt v.

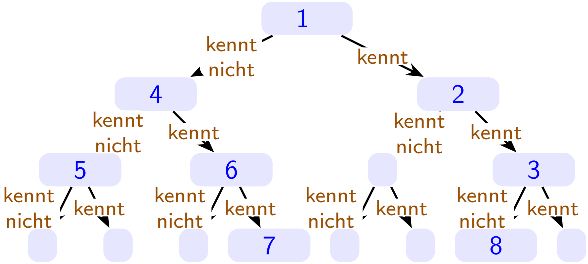
D.h., wenn es einen Weg von oben nach unten gibt, in dem

- c mal „nach rechts" gegangen wird, dann gibt es eine Clique der Größe c.
- i mal „nach links" gegangen wird, dann gibt es eine unabhängige Menge der Größe i.

Beispiel.

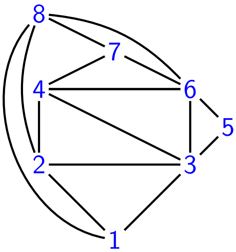


Anwendung II: Der (spezielle) Satz von Ramsey



Satz. Funktion R, für alle $G = (V, E)$ und $c, i \geq 0$ gilt: Wenn $|V| \geq R(c, i)$, dann unabhängige Menge $X \subseteq V$ der Größe i oder clique $C \subseteq V$ der Größe c.

Beispiel.



Folgerung. Der Baum hat Höhe $\leq c + i$.

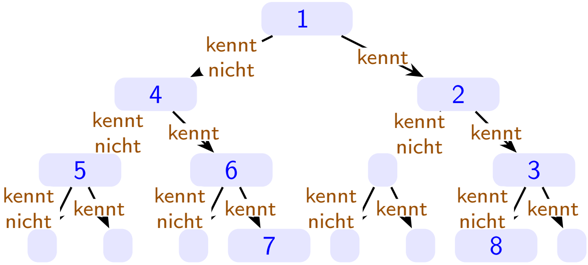
(**Höhe.** Max. Zahl von Knoten auf Wurzel-Blatt-Pfad.)

Jeder solche Baum hat $2^{c+i} - 1$ Knoten.

D.h. nach dem Schubfachprinzip, wenn $|V| \geq 2^{c+i}$, dann gibt es eine Clique der Größe c oder eine unabhängige Menge der Größe i. $\square$

Anwendung II: Der (spezielle) Satz von Ramsey

Satz. Funktion R, für alle $G = (V, E)$ und $c, i \geq 0$ gilt: Wenn $|V| \geq R(c, i)$, dann unabhängige Menge $X \subseteq V$ der Größe i oder clique $C \subseteq V$ der Größe c.



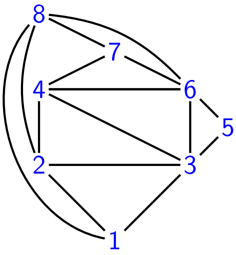
Folgerung. Der Baum hat Höhe $\leq c + i$.

(**Höhe.** Max. Zahl von Knoten auf Wurzel-Blatt-Pfad.)

Jeder solche Baum hat $2^{c+i} - 1$ Knoten.

D.h. nach dem Schubfachprinzip, wenn $|V| \geq 2^{c+i}$, dann gibt es eine Clique der Größe c oder eine unabhängige Menge der Größe i. □

Beispiel.



Genauer. Es reicht sogar, wenn $|V| \geq 2^{c+i-1}$.

Zusammenfassung

- Produktregel
- Summenregel
- Das Inklusions-Exklusionsprinzip
- Schubfachprinzip
- handshake Lemma
- Der (spezielle) Satz von Ramsey