Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 23/24

O. Sète 26. Februar 2024

Februar – Klausur
Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Hiermit erkläre ich, dass ich mich prüfungsfähig fühle. Mir ist bekannt, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat (§ 64 Abs. 1 Satz AllgStuPO).

Hiermit erkläre ich, dass mir die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Mir ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§ 63 Abs. 2 AllgStuPO).

Hiermit erkläre ich, dass mir bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§ 63 Abs. 1 AllgStuPO).

Es ist nur ein doppelseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt mit Notizen zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Eine Laplace-Tabelle finden Sie auf der letzten Seite.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift und in Rot geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** oder eine **vollständige Begründung** an. Alle Lösungen müssen auf den Lösungsblättern stehen. Lösungen auf dem Deckblatt werden nicht bewertet.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

Lösung zur Klausur 26. Februar 2024

1. Aufgabe 9 Punkte

Lösen Sie das Anfangswertsproblem

$$y'' + 5y' + 6y = 2\mathrm{e}^{-(t-3)}u_3(t), \quad y(0) = -1,\ y'(0) = 2$$

mit Hilfe der Laplacetransformation.

Hinweis: Es ist

$$u_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leqslant 3 \\ 1 & \text{für } t > 3 \end{cases}.$$

Lösung: Mit $Y := \mathcal{L}[y](s)$ ist im Laplace-Bereich

$$(s^2Y + s \cdot 1 - 2) + 5(sY + 1) + 6Y = \mathrm{e}^{-3s} \cdot \frac{2}{s+1}$$

$$Y \cdot (s^2 + 5s + 6) + s - 2 + 5 = \mathrm{e}^{-3s} \cdot \frac{2}{s+1}$$

$$s^2 + 5s + 6 = (s+2)(s+3)$$

$$Y = -\frac{s+3}{(s+2)(s+3)} + \frac{2\mathrm{e}^{-3s}}{(s+1)(s+2)(s+3)} = -\frac{1}{s+2} + \frac{2\mathrm{e}^{-3s}}{(s+1)(s+2)(s+3)}.$$

Eine PBZ

$$\frac{2}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s+3}.$$

Also

$$Y = -\frac{1}{s+2} + \mathrm{e}^{-3s}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s+3}\right).$$

Rücktransformation ergibt die Lösung für das AWP, nämlich

$$y(t) = -\mathrm{e}^{-2t} + u_3(t)\left(\mathrm{e}^{-(t-3)} - 2\mathrm{e}^{-2(t-3)} + \mathrm{e}^{-3(t-3)}\right).$$

1. Aufgabe

Lösen Sie das Anfangswertsproblem

$$y'' + 5y' + 6y = 2\mathrm{e}^{-(t-3)}u_3(t), \quad y(0) = -1,\ y'(0) = 2$$

mit Hilfe der Laplacetransformation.

Hinweis: Es ist

$$u_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leqslant 3 \\ 1 & \text{für } t > 3 \end{cases}.$$

$$\mathcal{L}[2e^{-(t-3)}u_3(t)](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^3 0\, d(t) + \int_3^\infty 2e^{-(t-3)-st}dt$$

$$= \int_3^\infty 2\cdot e^3 \cdot e^{-(s+1)t} dt$$

$$= 2e^3 \cdot \frac{1}{(-s-1)} e^{-(s+1)t} \Big|_3^\infty$$

$$= 0 - 2e^3 \frac{1}{(-s-1)} e^{-3(s+1)} = 2e^3 \frac{1}{(s+1)} e^{-3(s+1)} = \frac{2}{s+1} e^{-3s}$$

$$(s^2 y(s) - s y(0) - y'(0)) + 5(s y(s) - y(0)) + 6 y(s) = (s^2+5s+6) y(s) + s + 3 = \frac{2}{s+1} e^{-3s}$$

$$y(s) = \frac{2e^{-3s} - (s+3)(s+1)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$= -\frac{1}{s+2} + \frac{2e^{-3s}}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$\frac{2}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s+3}$$

$$y(s) = -\frac{1}{s+2} + \left(\frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s+3}\right) e^{-3s}$$

$$y(t) = -e^{-2t} + \left(e^{-(t-3)} - 2\cdot e^{-2(t-3)} + e^{-3(t-3)}\right) \cdot u_3(t)$$

2. Aufgabe

12 Punkte

Ermitteln Sie im $\mathbb{R}^3$ die allgemeine Lösung $\vec{y}(t)$ des reellen Differentialgleichungssystems

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}\,.$$

Lösung:
Charakteristisches Polynom:

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^2 + 1 - \big((1-\lambda) - (2-\lambda)\big)$$
$$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2.$$

Hieraus folgt: 1 ist ein doppelter Eigenwert, 2 ist ein einfacher Eigenwert.

<u>Eigenwert 2</u>

Es ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies v_2 = -v_3, \quad 0 = v_1 + v_2 - v_3 = v_1 - 2v_3 \implies v_1 = 2v_3$$

$$\implies \text{Eigenraum span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\implies \text{Fundamentallösung } \vec{y}_1(t) = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eigenwert 1

Es ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies v_3 = 0, \quad v_2 = -v_1$$

$$\implies \text{Eigenraum span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\implies \text{Fundamentallösung } \vec{y}_2(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Eigenwert 1 hat also nur die geometrische Vielfachheit 1. Also fehlt ein echter Hauptvektor. Ansatz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \quad \vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\implies \text{Fundamentallösung } \vec{y}_3(t) = \mathrm{e}^t \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$\vec{y}(t) = C_1 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^t \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + C_3 \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

2. Aufgabe

12 Punkte

Ermitteln Sie im $\mathbb{R}^3$ die allgemeine Lösung $\vec{y}(t)$ des reellen Differentialgleichungssystems

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}\,.$$

$$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 - 1 + 0 - (1-\lambda) + (2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0 \qquad \lambda_1 = 2 \qquad \lambda_{2,3} = 1$$

$$\text{alg}(2) = 1 \qquad \text{alg}(1) = 2$$

EV zu $\lambda_1 = 2$: $(A-2I)\vec{v}_1 = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} v_2 = -v_3 \\ v_1 = 2v_3 \end{matrix}$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2v_3 \\ -v_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EV zu $\lambda_2 = 1$ $(A-I)\vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} v_1 = -v_2 \\ v_3 = 0 \end{matrix}$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\text{geo}(1) = 1 < \text{alg}(1)$

HV 2. Stufe: $(A-I)\vec{v}_3 = \vec{v}_2$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} v_1 + v_2 = 0 \\ v_3 = 1 \end{matrix}$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_1(t) = e^{2t}\vec{v}_1 \qquad \vec{y}_2(t) = e^t \vec{v}_2 \qquad \vec{y}_3(t) = e^t(\vec{v}_3 + t\,\vec{v}_2)$$

allg. Lsg: $\vec{y}(t) = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} 1+t \\ -1-t \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Aufgabe 14 Punkte

Eine reelle Funktion $u(x,t)$ soll folgende Eigenschaften besitzen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \qquad \text{für } 0 < x < \pi, \quad t > 0\,; \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0 \qquad \text{für } t > 0. \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie alle solche Funktionen von der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$, wobei Sie sich auf nicht-konstante periodische Funktionen $X(x)$ beschränken dürfen.

b) Ermitteln Sie durch Superposition eine Funktion $u(x,t)$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= 6\sin 3x, \\ u(x,0) &= 7\sin(4x) \qquad \text{für } 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{aligned}$$

Lösung:

a) Mit $u(x,t) = X(x)T(t)$ wird die partielle DGL zu

$$X''T - \frac{1}{4}XT'' = 0.$$

Division durch XT und Umstellen ergibt

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{4T}\,.$$

Es gibt demnach eine Konstante λ mit

$$\frac{X''}{X} = \lambda, \qquad \frac{T''}{4T} = \lambda.$$

Diese DGL sind verkappte lineare DGL:

$$X'' - \lambda X = 0, \qquad T'' - 4\lambda T = 0.$$

Die Randbedingungen übersetzen sich wie folgt

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \implies X(0)T(t) = X(\pi)T(t) = 0 \implies X(0) = X(\pi) = 0.$$

Damit X nun periodisch und nicht-konstant ist, muss λ negativ sein. Es ist dann

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{-\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{-\lambda} x.$$

Für $x = 0$ hat man

$$X(0) = C_1 = 0.$$

Für $x = \pi$ bleibt also

$$X(\pi) = C_2 \sin\left(\pi\sqrt{-\lambda}\right) = 0.$$

Wenn nicht $C_2 = 0$ gelten soll (und womit $X(x)$ nun eine konstante Funktion, nämlich die Nullfunktion wäre), muss λ derart sein, dass

$$\pi\sqrt{-\lambda} = n\pi$$

mit gewissen $n \in \mathbb{N},\ n > 0$ gilt. Es ist also

$$\lambda = -n^2.$$

Die Funktionen $X(x)$ sind von der Form

$$X(x) = C_2 \sin nx.$$

Die DGL für T

$$T'' - 4\lambda T = 0$$

wird zu

$$T'' + 4n^2 T = 0$$

und wird durch

$$T(t) = C_3 \cos 2nt + C_4 \sin 2nt$$

gelöst.

Insgesamt hat man als Lösungen der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$ die Funktionen

$$C_5 \sin nx \cos 2nt \quad \text{und} \quad C_6 \sin nx \sin 2nt.$$

b) Superposition über n liefert den Ansatz

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin nx \cos 2nt + B_n \sin nx \sin 2nt\right).$$

Dann ist

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-2nA_n \sin nx \sin 2nt + 2nB_n \sin nx \cos 2nt\right).$$

Die Anfangsbedingung lautet somit

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2nB_n \sin nx\right) = 6 \sin 3x,$$

woraus $B_3 = 1$ und $B_k = 0$ für $k \neq 3$ folgt.

Für die Anfangsauslenkung ist

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx = 7 \sin 4x.$$

Das ist erfüllt für $A_4 = 7$ und $A_k = 0$ für $k \neq 4$.

Die Funktion

$$u(x,t) = 7 \sin 4x \cos 8t + \sin 3x \sin 6t$$

besitzt die gewünschten Eigenschaften.

3. Aufgabe

14 Punkte

Eine reelle Funktion $u(x,t)$ soll folgende Eigenschaften besitzen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad \text{für } 0 < x < \pi, \quad t > 0;$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad \text{für } t > 0.$$

a) Bestimmen Sie alle solche Funktionen von der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$, wobei Sie sich auf nicht-konstante periodische Funktionen $X(x)$ beschränken dürfen.

b) Ermitteln Sie durch Superposition eine Funktion $u(x,t)$ mit den Eigenschaften

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 6\sin 3x,$$

$$u(x,0) = 7\sin(4x) \qquad \text{für } 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

a) $X''(x)T(t) - \frac{1}{4}X(x)T''(t) = 0$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{4T(t)} = \gamma$$

$$\begin{cases} X''(x) - \gamma X(x) = 0 \\ T''(t) - 4\gamma T(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda^2 - \gamma = 0 & \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{-\lambda} & \Rightarrow X(x) = C_1\cos(\sqrt{-\lambda}x) + C_2\sin(\sqrt{-\lambda}x) \\ \lambda^2 - 4\gamma = 0 & \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i\sqrt{-\lambda} & \Rightarrow T(t) = C_3\cos(2\sqrt{-\lambda}t) + C_4\sin(2\sqrt{-\lambda}t) \end{matrix}$$

$u(0,t) = u(\pi,t) = X(0)T(t) = X(\pi)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = X(\pi) = 0$

$X(0) = C_1 = 0 \qquad X(\pi) = C_2\sin(\pi\sqrt{-\lambda}) = 0 \Rightarrow \cancel{\pi}\sqrt{-\lambda} = k\cancel{\pi} \quad k\in\mathbb{Z}$

$-\lambda = k^2$

$\lambda = -k^2$

$u_k(x,t) = C_2\sin(kx)\cdot(C_3\cos(2kt) + C_4\sin(2kt))$

$= A_k\sin(kx)\cos(2kt) + B_k\sin(kx)\sin(2kt)$

b) $\frac{\partial}{\partial t}u_k(x,t) = -2kA_k\sin(kx)\sin(2kt) + 2kB_k\sin(kx)\cos(2kt)$

$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} 2kB_k\sin(kx) = 6\sin(3x)$

$\Rightarrow k=3: B_k = 1$

$k \neq 3: B_k = 0$

$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\sin(kx) = 7\sin(4x)$

$\Rightarrow k=4: A_k = 7$

$k \neq 4: A_k = 0$

$\Rightarrow u(x,t) = 7\sin(4x)\cos(8t) + \sin(3x)\sin(6t)$

4. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben ist das reelle Anfangswertsproblem (AWP)

$$y' = -2x\mathrm{e}^{-y}, \quad y(1) = 0.$$

a) Ermitteln Sie eine Lösung dieses AWPs und geben dabei das maximale Definitionsintervall dieser Lösung an.

b) Zeigen Sie, dass Ihre gefundene Lösung die einzige Lösung des AWP ist.

Lösung:

a) Die DGL ist trennbar. Mit TdV hat man (z.B.) den Ansatz

$$\int_0^y \mathrm{e}^\eta \,\mathrm{d}\eta = \int_1^x (-2)\xi \,\mathrm{d}\xi \,.$$

Auswertung der Integrale:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^y - 1 &= -x^2 + 1 \\ \mathrm{e}^y &= -x^2 + 2 \\ y &= \ln(-x^2 + 2) \end{aligned}$$

Der maximale Definitionsbereich wird durch den Logarithmus eingegrenzt. Es muss $-x^2 + 2 > 0$ gelten, d.h. das maximale Definitionsintervall ist gleich $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.

b) Im Sinne des EES haben wir die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x, y) = -2x\mathrm{e}^{-y}.$$

Wir betrachten die offene Menge $G = \mathbb{R}^2$. Es gilt

$$F_x(x, y) = -2\mathrm{e}^{-y}, \qquad F_y(x, y) = 2x\mathrm{e}^{-y} \,.$$

Diese partiellen Ableitungen sind auf ganz G $(= \mathbb{R}^2)$ stetig,

damit ist F auf ganz G stetig differenzierbar.

Der Anfangspunkt $(1, 0)$ liegt in G.

Damit gibt es nach dem EES genau eine maximale Lösung des AWPs.

Diese Lösung haben wir bereits gefunden.

4. Aufgabe 9 Punkte

Gegeben ist das reelle Anfangswertsproblem (AWP)

$$y' = -2xe^{-y}, \quad y(1) = 0.$$

a) Ermitteln Sie eine Lösung dieses AWPs und geben dabei das maximale Definitionsintervall dieser Lösung an.

b) Zeigen Sie, dass Ihre gefundene Lösung die einzige Lösung des AWP ist.

a) $y'(x) = -2xe^{-y(x)}$

① $e^{-y} = 0$ keine Lsg

② $\int e^{y}\,dy = \int -2x\,dx$

$e^{y} = -x^2 + c$

$y = \ln(-x^2+c) \quad c \in \mathbb{R}$

$y(1) = \ln(-1+c) = 0 \Rightarrow c = 2$

$y(x) = \ln(-x^2+2)$

$-x^2+2 > 0 \quad x^2 < 2$

$M_1 = \mathbb{R} \quad M_2 =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$

$M_1 \cap M_2 = M_2$

$1 \in M_2$

$D_{max} = M_2 =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$

b) $F(x,y) = -2xe^{-y}$

$\frac{\partial F}{\partial x} = -2e^{-y} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2xe^{-y}$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig

$(1,0) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ eindeutige Lsg

5. Aufgabe

9 Punkte

Werten Sie die beiden folgenden Integrale mit den Mitteln der Laplace- und/oder der Fourier-Transformation aus und benutzen Sie auch die Laplace-Tabelle auf der letzten Seite dieser Klausur:

$$\text{a)} \quad \int_0^\infty t\mathrm{e}^{-3t}\cos t \,\mathrm{d}t\,, \qquad\qquad \text{b)} \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}t}}{1+4t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Lösung:

a) Es handelt sich um eine Laplace-Transformierte, die an einer bestimmten Stelle ausgewertet wird:

$$\int_0^\infty t\mathrm{e}^{-3t}\cos t\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}\left[t\cos t\right](3).$$

Mittels Laplace-Tabelle hat man

$$\mathcal{L}\left[t\cos t\right](s) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}.$$

Wegen

$$\mathcal{L}\left[t\cos t\right](3) = \frac{9-1}{(9+1)^2} = \frac{8}{100} = \frac{2}{25} = 0{,}08$$

gilt also

$$\int_0^\infty t\mathrm{e}^{-3t}\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{25}.$$

b) Es handelt sich um eine Fourier-Transformierte, die an der Stelle 4 ausgewertet wird:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}t}}{1+4t^2}\,\mathrm{d}t = \mathcal{F}\left[\frac{1}{1+4t^2}\right](4)\,.$$

Wir haben nur die Fourier-Korrespondenz

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](\omega) = \pi\mathrm{e}^{-|\omega|}.$$

Es ist mit dem Skalierungssatz

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+4t^2}\right](\omega) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{1+(2t)^2}\right](\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right]\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\frac{|\omega|}{2}}.$$

Somit finden wir mit

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+4t^2}\right](4) = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-2},$$

dass

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}t}}{1+4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-2}.$$

5. Aufgabe

9 Punkte

Werten Sie die beiden folgenden Integrale mit den Mitteln der Laplace- und/oder der Fourier-Transformation aus und benutzen Sie auch die Laplace-Tabelle auf der letzten Seite dieser Klausur:

a) $\displaystyle\int_0^\infty t\mathrm{e}^{-3t}\cos t\,\mathrm{d}t\,,$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{-4it}}{1+4t^2}\,\mathrm{d}t\,.$

a) $\int_0^\infty t\cos t\, e^{-3t}\,dt = \mathcal{L}[t\cos t](3)$

$\mathcal{L}[t\cos t](s) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$

$\mathcal{L}[t\cos t](3) = \frac{8}{100}$

b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-4it}}{1+4t^2}\,dt = \mathcal{F}\left[\frac{1}{1+4t^2}\right](4)$

$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+4t^2}\right](w) = \left|\frac{1}{2}\right| \mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right]\left(\frac{1}{2}w\right)$

$= \left|\frac{1}{2}\right| \pi \cdot e^{-\left|\frac{1}{2}w\right|}$

$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+4t^2}\right](4) = \frac{1}{2}\pi e^{-2}$

6. Aufgabe

7 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.
(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt die jeweils angegebenen Punkte. Antworten ohne Begründung geben keine Punkte.)

Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

a) (2 Punkte) Für die Faltung im Sinne der Laplace-Transformation gilt

$$\mathrm{e}^t * \mathrm{e}^t = t\mathrm{e}^t.$$

$\int_0^t e^{\tau} \cdot e^{t-\tau} d\tau = \int_0^t e^t d\tau = te^t$

Antwort: Wahr.

α) Direkte Berechung des Faltungsprodukts

$$\mathrm{e}^t * \mathrm{e}^t = \int_0^t \mathrm{e}^{\tau}\mathrm{e}^{t-\tau}\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^t \int_0^t \,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t \cdot t.$$

β) Mittels Faltungssatz der Laplace-Transformation:

$$\mathrm{e}^t * \mathrm{e}^t \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s-1} = \frac{1}{(s-1)^2} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; t\mathrm{e}^t.$$

b) (2 Punkte) Es gilt im Rahmen der $\mathcal{Z}$-Transformation

$$\mathcal{Z}\left[(3+3^n)_{n\in\mathbb{N}_0}\right](z) = \frac{3z}{z-1} + \frac{z}{z-3}.$$

Antwort: Wahr.
Mit Linearität der $\mathcal{Z}$-Transformation und der bekannten Korrespondenz

$$\mathcal{Z}[(a^n)_{n\in\mathbb{N}_0}] = \frac{z}{z-a}$$

folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left[(3+3^n)_{n\in\mathbb{N}_0}\right](z) &= 3\mathcal{Z}\left[(1)_{n\in\mathbb{N}_0}\right](z) + \mathcal{Z}\left[(3^n)_{n\in\mathbb{N}_0}\right](z) \\ &= 3 \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-3} = \frac{3z}{z-1} + \frac{z}{z-3}.\end{aligned}$$

c) (3 Punkte) Wenn ein kausales LTI-System auf das Eingangssignal $a_{\mathrm{in}}(t) = 1$ mit dem Ausgangssignal $a_{\mathrm{out}}(t) = \mathrm{e}^t$ antwortet, so hat es die Impulsantwort $h(t) = \mathrm{e}^t$.

$1 * e^t = e^t$

$\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s-1} = \frac{1}{s-1}$

Antwort: Falsch.
Es gilt für kausale LTI-Systeme

$$a_{\mathrm{in}}(t) \, * \, h(t) = a_{\mathrm{out}}(t).$$

Die Behauptung führt zur Aussage

$$1 \, * \, \mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t \, .$$

Daraus folgt im Laplace-Bereich

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s-1} = \frac{1}{s-1},$$

was offensichtlich falsch ist.