Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen
(Hausaufgabe 7)

Abgabe: 10. – 14. Juni 2024

Sommersemester 2024

Aufgabe 19

(6 Punkte)

Bestimme für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ein reelles Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$x''(t) + 4x'(t) + \alpha\, x(t) = 0.$$

Aufgabe 20

(5 Punkte)

Löse das reelle Anfangswertproblem

$$x''(t) + 5x'(t) + 6x(t) = \mathrm{e}^{-2t}, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 1.$$

Aufgabe 21

(4 Punkte)

Verwende einen Ansatz in Form der rechten Seite, um eine partikuläre Lösung der folgenden Differentialgleichungen zu bestimmen:

(a) $x''(t) + 2x(t) = \sin(2t)$,

(b) $x''(t) - x'(t) = t^2\,\mathrm{e}^t$.

Aufgabe 19

(6 Punkte)

Bestimme für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ein reelles Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$x''(t) + 4x'(t) + \alpha\, x(t) = 0.$$

① $P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + \alpha = 0 = (\lambda+2)^2 + \alpha - 4 \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-\alpha}$

1. Fall: $4-\alpha > 0 \Rightarrow \alpha < 4$

② FS $\quad x_1(t) = e^{(-2+\sqrt{4-\alpha})t} \quad x_2(t) = e^{(-2-\sqrt{4-\alpha})t}$

③ $x(t) = C_1 e^{(-2+\sqrt{4-\alpha})t} + C_2 e^{(-2-\sqrt{4-\alpha})t}$

2. Fall: $4-\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 4 \qquad \lambda_{1,2} = -2$

② FS: $\quad x_1(t) = e^{-2t} \quad x_2(t) = te^{-2t}$

③ $x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$

3. Fall: $4-\alpha < 0 \Rightarrow \alpha > 4 \qquad \lambda_{1,2} = -2 \pm i\sqrt{\alpha-4}$

② FS: $\quad x_1(t) = e^{-2}\cos(\sqrt{\alpha-4}\,t) \quad x_2(t) = e^{-2}\sin(\sqrt{\alpha-4}\,t)$

③ $x(t) = C_1 e^{-2}\cos(\sqrt{\alpha-4}\,t) + C_2 e^{-2}\sin(\sqrt{\alpha-4}\,t)$

Aufgabe 20

(5 Punkte)

Löse das reelle Anfangswertproblem

$$x''(t) + 5x'(t) + 6x(t) = e^{-2t}, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 1.$$

① homogene LSG: $\quad x''(t) + 5x'(t) + 6x(t) = 0$

1.1) $P(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda+2)(\lambda+3) = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = -3$

1.2) $x_1(t) = e^{-2t} \quad x_2(t) = e^{-3t}$

1.3) $x_H(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}$

② Part. LSG & ATS:

2.1) $b(t) = e^{-2t} \quad \Rightarrow x_p(t) = te^{-2t} \cdot A_0$

2.2) $\vec{x}_p'(t) = A_0(e^{-2t} - 2te^{-2t}) \qquad \vec{x}_p''(t) = A_0(-2e^{-2t} - 2te^{-2t}\cdot(-2) - 2e^{-2t})$

$= A_0(-4e^{-2t} + 4te^{-2t})$

in DGL: $\quad A_0(-4e^{-2t} + 4te^{-2t}) + 5A_0(e^{-2t} - 2te^{-2t}) + 6A_0 te^{-2t} = e^{-2t}$

$\Rightarrow A_0 e^{-2t}(1 + 0\cdot t) = e^{-2t}$

$\Rightarrow A_0 = 1 \qquad \Rightarrow x_p(t) = te^{-2t}$

③ Allg. LSG: $\quad x(t) = x_H(t) + x_p(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} + te^{-2t}$

$x'(t) = -2C_1 e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t} + e^{-2t} - 2te^{-2t}$

$x(0) = C_1 + C_2 = 2 \qquad \Rightarrow \quad C_1 = 6$

$x'(0) = -2C_1 - 3C_2 + 1 = 1 \qquad C_2 = -4$

$\Rightarrow x(t) = 6e^{-2t} - 4e^{-3t} + te^{-2t}$

Aufgabe 21

(4 Punkte)

Verwende einen Ansatz in Form der rechten Seite, um eine partikuläre Lösung der folgenden Differentialgleichungen zu bestimmen:

(a) $x''(t) + 2x(t) = \sin(2t)$,

(b) $x''(t) - x'(t) = t^2\, e^t$.

a) ① hom. Lsg: $x'' + 2x = 0$

1.1) $P(\lambda) = \lambda^2 + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$

1.2) $x_1(t) = e^0 \cos(\sqrt{2}t) = \cos(\sqrt{2}t)$ $\quad x_2(t) = \sin(\sqrt{2}t)$

1.3) $x(t) = c_1\cos(\sqrt{2}t) + C_2 \sin(\sqrt{2}t)$

② Par. LSG: ① $b(t) = \sin(2t) \quad \Rightarrow x_p(t) = A_0\cos(2t) + B_0 \sin(2t)$

② $x_p'(t) = -2A_0\sin(2t) + 2B_0\cos(2t)$

$x_p''(t) = -4A_0\cos(2t) - 4B_0\sin(2t)$

↳ in DGL: $-4A_0\cos(2t) - 4B_0\sin(2t) + 2A_0\cos(2t) + 2B_0\sin(2t) = \sin(2t)$

$\Rightarrow \quad -2A_0\cos(2t) - 2B_0\sin(2t) = \sin(2t)$

$\Rightarrow \quad A_0 = 0 \quad B_0 = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x_p(t) = -\frac{1}{2}\sin(2t)$

③ allg. Lsg: $x(t) = c_1\cos(\sqrt{2}t) + C_2\sin(\sqrt{2}t) - \frac{1}{2}\sin(2t)$

b) ① hom. Lsg: $x'' - x' = 0$

1.1) $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1$

1.2) $x_1(t) = e^0 = 1 \quad x_2(t) = e^t$

1.3) $x(t) = C_1 + C_2 e^t$

② Par. Lsg: 2.1) $b(t) = t^2 e^t \xrightarrow{\alpha = 1 \text{ ist eine 1-fache NST von } P(\lambda)} x_p(t) = te^t\cdot(A_0 + A_1 t + A_2 t^2)$

2.2)

$x_p'(t) = (e^t + te^t)(A_0 + A_1 t + A_2 t^2) + te^t(A_1 + 2A_2 t)$

$x_p''(t) = (e^t + e^t + te^t)(A_0 + A_1 t + A_2 t^2) + (e^t + te^t)(A_1 + 2A_2 t)$
$+ (e^t + te^t)(A_1 + 2A_2 t) + te^t(2A_2)$

↳ in DGL: $x_p''(t) - x'(t) = e^t(A_0 + A_1 t + A_2 t^2) + e^t(A_1 + 2A_2 t)$
$+ (e^t + te^t)(A_1 + 2A_2 t) + te^t(2A_2)$

$= e^t(\cancel{A_0} + \cancel{A_1 t} + A_2 t^2 + \cancel{A_1} + \cancel{2A_2 t} + A_1 + 2A_2 t + \cancel{A_1 t} + 2A_2 t^2 + 2A_2 t$

$= e^t(A_0 + 2A_1 + 2A_1 t + 6A_2 t + 3A_2 t^2)$

$= t^2 e^t$

$$\begin{cases} A_0 + 2A_1 = 0 \\ 2A_1 + 6A_2 = 0 \\ 3A_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = 2 \\ A_1 = -1 \\ A_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x_p(t) = te^t\left(2 - t + \frac{1}{3}t^2\right)$$

③ allg. LSG: $x(t) = C_1 + C_2 e^t + te^t\left(2 - t + \frac{1}{3}t^2\right)$