Linda Li 458029
Xiang Li 478592
Yilong Wang 483728

uppen: Saef

Hausaufgabe 7.1 (4=1+1+1+1 Punkte)

Es sei $\Omega = \{1, \ldots, 5\}$ mit

i	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Die Zufallsvariablen X und Y seien wie folgt definiert:

$$X(i) = \begin{cases} -2, & \text{falls } i = 1, 3 \\ 4, & \text{falls } i = 2, 4 \\ -4, & \text{falls } i = 5 \end{cases}, \qquad Y(i) = \begin{cases} 4, & \text{falls } i = 1, 4, 5 \\ 2, & \text{falls } i = 2, 3 \end{cases}.$$

(i) Berechnen Sie die Erwartungswerte von X und Y.

(ii) Berechnen Sie die Varianzen von X und Y.

(iii) Berechnen Sie die Kovarianz von X und Y.

(iv) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten $\rho(X, Y)$ von X und Y.

(i) $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{5} X(i) \cdot \mathbb{P}(i) = -2 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} - 4 \cdot \frac{1}{8}$

$= 0$

$\mathbb{E}[Y] = \sum_{i=1}^{5} Y(i) \mathbb{P}(i) = 4\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)$

$= 2 + 1 = 3$

(ii) $\mathbb{E}[X^2] = \sum_{i=1}^{5} (X(i))^2 \mathbb{P}(i) = 4 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + 16 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) + 16 \cdot \frac{1}{8}$

$= 2 + 8 = 10$

$\mathbb{E}[Y^2] = \sum_{i=1}^{5} (Y(i))^2 \mathbb{P}(i) = 16 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)$

$= 8 + 2 = 10$

$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 10$

$\mathbb{V}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = 10 - 9 = 1$

(iii) $\mathbb{E}[XY] = \sum_{i=1}^{5} (X(i) Y(i)) \mathbb{P}(i) = -8 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{4} - 4 \cdot \frac{1}{4} + 16 \cdot \frac{1}{8} - 16 \cdot \frac{1}{8}$

$= -1$

$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = -1 - 0 = -1$

(iv) $\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}[X]\,\mathbb{V}[Y]}} = \frac{-1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

Hausaufgabe 7.2 (6=2+2+2 Punkte)

Ein Würfel wird 100-mal hintereinander geworfen.

(i) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Gesamtsumme $X = \sum_{i=1}^{100} X_i$.

(ii) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Gesamtprodukts $P = \prod_{i=1}^{100} X_i$.

✓ VL 10

(iii) Bestimmen Sie mit Hilfe der Chebyshev-Ungleichung eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass X größer als 380 oder kleiner als 320 ist. Was können wir über die Wahrscheinlichkeit sagen, dass X zwischen 320 und 380 liegt?

(i)

$$\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{6}(1+2+\dots+6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{100} X_i\right] = \sum_{i=1}^{100} \mathbb{E}[X_i] = 100 \cdot \frac{7}{2} = 350$$

$$\mathbb{E}[X_i^2] = \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) = \frac{91}{6}$$

$$\mathbb{V}[X_i] = \mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}[X_i]^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{70}{24} = \frac{35}{12}$$

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{V}\left[\sum_{i=1}^{100} X_i\right] \overset{X_i \text{ unabhängig}}{=\!=} \sum_{i=1}^{100} \mathbb{V}[X_i] = 100 \cdot \frac{35}{12} = \frac{875}{3}$$

(ii) X_i mit $i \in [1,100]$ sind unabhängig $\Rightarrow \mathbb{E}[X_i X_j] = \mathbb{E}[X_i] \cdot \mathbb{E}[X_j]$

$$\mathbb{E}[P] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{100} X_i\right] = \prod_{i=1}^{100} \mathbb{E}[X_i] = \left(\frac{7}{2}\right)^{100}$$

$$\mathbb{E}[P^2] = \mathbb{E}\left[\left(\prod_{i=1}^{100} X_i\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{100} X_i \cdot \prod_{i=1}^{100} X_i\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{100} X_i^2\right] = \prod_{i=1}^{100} \mathbb{E}[X_i^2] = \left(\frac{91}{6}\right)^{100}$$

$$\mathbb{V}[P] = \mathbb{E}[P^2] - \mathbb{E}[P]^2 = \left(\frac{91}{6}\right)^{100} - \left(\frac{7}{2}\right)^{200}$$

(iii)

$$\mathbb{P}(X > 380 \cup X < 320) = \mathbb{P}(X - 350 > 30 \cup X - 350 < -30)$$

$$= \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > 30) \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{30^2} = \frac{\frac{875}{3}}{900} = \frac{875}{2700}$$

$$\mathbb{P}(320 \leq X \leq 380) = 1 - \mathbb{P}(X > 380 \cup X < 320)$$

$$= 1 - \frac{875}{2700} = \frac{1825}{2700}$$

Hausaufgabe 7.3 (6=1+1+2+2 Punkte)

Eine faire Münze wird geworfen. Falls die Münze Kopf zeigt, wird danach eine unfaire Münze geworfen, die mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ Kopf zeigt. Sonst wird diese unfaire Münze nicht geworfen, sondern eine andere, auch unfaire Münze, die mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ Kopf zeigt.

Wir definieren Zufallsvariablen X, Y wie folgt: $X = 1$, falls das Ergebnis beim ersten Wurf Kopf ist und $X = 0$ sonst, und $Y = 1$, falls das Ergebnis beim zweiten Wurf Kopf ist und $Y = 0$ sonst.

(i) Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von Y gegeben $X = 1$ und die bedingte Verteilung von Y gegeben $X = 0$. Identifizieren Sie diese bedingten Verteilungen als bekannte Verteilungen und bestimmen Sie ihre Parameter.

(ii) Berechnen Sie mithilfe der Bayes-Formel die bedingte Verteilung von X gegeben $Y = 1$ und die bedingte Verteilung von X gegeben $Y = 0$.

(i) $\mathbb{P}(Y=1 \mid X=1) = \frac{1}{4}$ $\quad\quad$ $\mathbb{P}(Y=0 \mid X=1) = \frac{3}{4}$

$\mathbb{P}(Y=1 \mid X=0) = \frac{3}{4}$ $\quad\quad$ $\mathbb{P}(Y=0 \mid X=0) = \frac{1}{4}$

Die bedingte Verteilung von Y gegeben $X=1$ ist Bernoulli-Verteilung mit Parameter $= \frac{1}{4}$

Die bedingte Verteilung von Y gegeben $X=0$ ist Bernoulli-Verteilung mit Parameter $= \frac{3}{4}$

faire Münze

(ii)
$$\mathbb{P}(X=1 \mid Y=1) = \frac{\mathbb{P}(X=1, Y=1)}{\mathbb{P}(Y=1)} = \frac{\mathbb{P}(Y=1 \mid X=1)\,\mathbb{P}(X=1)}{\mathbb{P}(Y=1 \mid X=1)\,\mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(Y=1 \mid X=0)\,\mathbb{P}(X=0)}$$

$\hookrightarrow = \mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{2}$

$$= \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(X=0 \mid Y=1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\mathbb{P}(X=1 \mid Y=0) = \frac{\mathbb{P}(Y=0 \mid X=1)\,\mathbb{P}(X=1)}{\mathbb{P}(Y=0 \mid X=1)\,\mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(Y=0 \mid X=0)\,\mathbb{P}(X=0)}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$

$$\mathbb{P}(X=0 \mid Y=0) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

(iii) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y.

(iv) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X und. Y sowie die Korrelation von X und Y.

(iii) $\mathbb{P}(X=0, Y=0) = \mathbb{P}(Y=0 \mid X=0)\,\mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$\mathbb{P}(X=0, Y=1) = \mathbb{P}(Y=1 \mid X=0)\,\mathbb{P}(X=0) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

$\mathbb{P}(X=1, Y=0) = \mathbb{P}(Y=0 \mid X=1)\,\mathbb{P}(X=1) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

$\mathbb{P}(X=1, Y=1) = \mathbb{P}(Y=1 \mid X=1)\,\mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

(ii) $\mathbb{E}[X] = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\mathbb{E}[Y] = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\mathbb{E}[X^2] = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\mathbb{E}[Y^2] = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$\mathbb{V}[Y] = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$\delta_X = \sqrt{\mathbb{V}[X]} = \frac{1}{2} \qquad \delta_Y = \sqrt{\mathbb{V}[Y]} = \frac{1}{2}$

$\mathbb{E}[XY] = (1 \cdot 1) \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8}\right) = \frac{1}{8}$

$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}$

$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\delta_X \delta_Y} = \frac{-\frac{1}{8}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$

Hausaufgabe 7.4 (4=2+1+1 Punkt

Sei X eine Zufallsvariable mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ c \cdot \lambda e^{-\lambda x} & , x \in [0,1) \\ c \cdot (x^{-\lambda-1} + \lambda e^{-\lambda x}) & , x \geq 1 \end{cases}$$

wobei $\lambda > 0$ fest gewählt ist und $c \in \mathbb{R}$ eine geeignete Konstante ist.

(i) Bestimmen Sie c.

(ii) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X \geq 3)$ für $\lambda = 1$.

(iii) Berechnen Sie die kumulative Verteilungsfunktion F_X für $\lambda > 1$.

(i) $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(X \in X(\Omega)) = \mathbb{P}(-\infty < X < +\infty)$

$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$

$= \int_0^1 c \cdot \lambda e^{-\lambda t}\,dt + \int_1^\infty c \cdot (t^{-\lambda-1} + \lambda e^{-\lambda t})\,dt$

$= -c \cdot e^{-\lambda t}\Big|_0^1 + c \cdot \left(\frac{1}{-\lambda} t^{-\lambda} - e^{-\lambda t}\right)\Big|_1^\infty$

$= -c \cdot (e^{-\lambda} - 1) + c \cdot \left(0 + \frac{1}{\lambda} - 0 + e^{-\lambda}\right)$

$= c + \frac{c}{\lambda} = 1 \Rightarrow c = \frac{\lambda}{\lambda+1}$

(ii) $\mathbb{P}(X \geq 3) = \int_3^\infty \frac{1}{1+1} \cdot \left(t^{-2} + e^{-t}\right)dt$

$= \frac{1}{2} \cdot \left(-t^{-1} - e^{-t}\right)\Big|_3^\infty = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{3} - 0 + e^{-3}\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2e^3}$

(iii) für $x < 0$, $F_X(x) = 0$

für $x \in [0,1[$, $F_X(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x c \cdot \lambda e^{-\lambda t}\,dt$

$$= -ce^{-\lambda t}\Big|_0^x = -ce^{-\lambda x} + c$$

für $x \in [1,\infty[$, $F_X(x) = \int_0^1 f(x)\,dt + \int_1^x f(x)\,dt$

$$= -ce^{-\lambda} + c + \int_1^x c \cdot (t^{-\lambda-1} + \lambda e^{-\lambda t})\,dt$$

$$= c(1-e^{-\lambda}) + c \cdot \left(\frac{1}{-\lambda} t^{-\lambda} - e^{-\lambda t}\right)\Big|_1^x$$

$$= c(1-\cancel{e^{-\lambda}}) + c \cdot \left(\frac{1}{\lambda} + \cancel{e^{-\lambda}} - \frac{1}{\lambda} x^{-\lambda} - e^{-\lambda x}\right)$$

$$= c\left(1 + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} x^{-\lambda} - e^{-\lambda x}\right)$$