Formale Sprachen und Automaten

Prof. Dr. Uwe Nestmann - 11. Oktober 2022

Schriftlicher Test

Studierendenidentifikation:

NACHNAME	
VORNAME	
MATRIKELNUMMER	
STUDIENGANG	□ Informatik Bachelor, □ ________________________

Ich möchte die von mir in der Hausaufgabe erreichten Punkte anrechnen lassen.
(Ja/Nein)

Aufgabenübersicht:

AUFGABE	SEITE	PUNKTE	THEMENBEREICH
1	3	14	MODELLE REGULÄRER SPRACHEN
2	4	16	UNTERMENGEN-KONSTRUKTION
3	5	22	MINIMIERUNG EINES DFA
4	6	13	CYK-ALGORITHMUS
5	7	10	MODELLE KONTEXTFREIER SPRACHEN I
6	8	5	MODELLE KONTEXTFREIER SPRACHEN II

Zwei Punkte in diesem Test entsprechen einem Portfoliopunkt.

Korrektur:

AUFGABE	1	2	3	4	5	6	$\sum$
PUNKTE	14	16	22	13	10	5	80
ERREICHT							
KORREKTOR:IN							
EINSICHT							

Matrikelnummer: ____________________ Name: ____________________

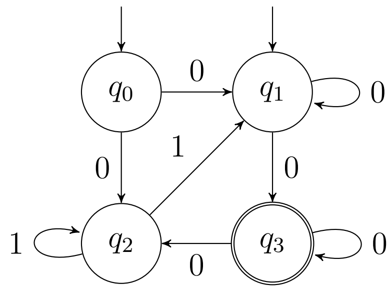
Aufgabe 1: Modelle Regulärer Sprachen **(14 Punkte)**

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma \triangleq \{\ 0,\ 1\ \}$, die reguläre Sprache $A_1 \triangleq \{\ x101y \mid x,y \in \Sigma^*\ \}$, die reguläre Grammatik $G_2 \triangleq (\{\ S,\ T,\ U,\ V\ \},\ \Sigma,\ P_2,\ S)$ und der NFA $M_3 \triangleq (\{\ q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3\ \},\ \Sigma,\ \Delta_3,\ \{\ q_0,\ q_1\ \},\ \{\ q_3\ \})$ mit:

P_2:
$$\begin{aligned} S &\to 1T \mid 0U \\ T &\to 1T \mid 1V \mid 0V \\ U &\to 0S \mid 0 \\ V &\to 1 \mid 1T \end{aligned}$$

$(00)^*0 + 1(1^*(1+0)1)^*$

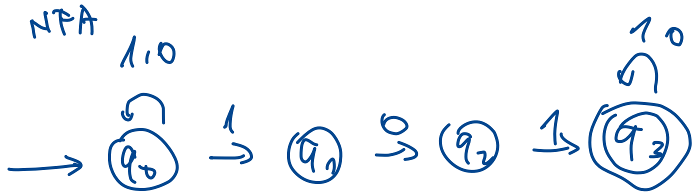
Δ_3:



$01^* + 00^*00^*01^*$

a. **(5 Punkte)** *Gib* einen DFA M_1 mit $\mathrm{L}(M_1) = A_1$ *an.*

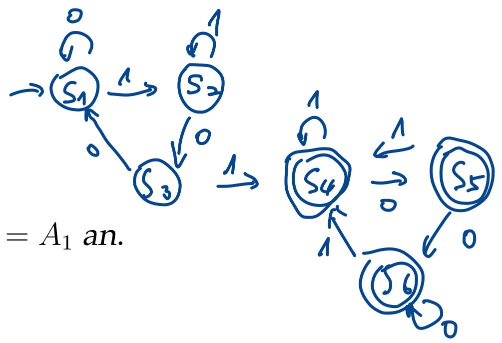
NFA



	1	0	
S	$\{q_0\}$	$\{q_0q_1\}$ $\{q_0\}$	S_1
	$\{q_0q_1\}$	$\{q_0q_1\}$ $\{q_0q_2\}$	S_2
	$\{q_0q_2\}$	$\{q_0,q_1q_3\}$ $\{q_0\}$	S_3
F	$\{q_0q_1q_3\}$	$\{q_0q_1q_3\}$ $\{q_0q_2q_3\}$	S_4
F	$\{q_0q_2q_3\}$	$\{q_0q_1q_3\}$ $\{q_0q_3\}$	S_5

F $\{q_0q_3\}$ $\{q_0q_1q_3\}$ $\{q_0q_3\}$ S_6

DFA:



b. **(4 Punkte)** *Gib* eine Typ-3 Grammatik G_1 mit $\mathrm{L}(G_1) = A_1$ *an.*

$G_1: (\{S,A,B,D\}, \Sigma, P_1, S)$ mit P_1:

$S \to 0S \mid 1S \mid 1A$

$A \to 0B$

$B \to 1D$

$D \to 0D \mid 1D \mid \varepsilon$

c. **(3 Punkte)** *Gib* $\mathrm{L}(G_2)$ *an,* ohne auf Automaten oder Grammatiken zu verweisen.

$(00)^*0 + 1(1^*(1+0)1)^*$

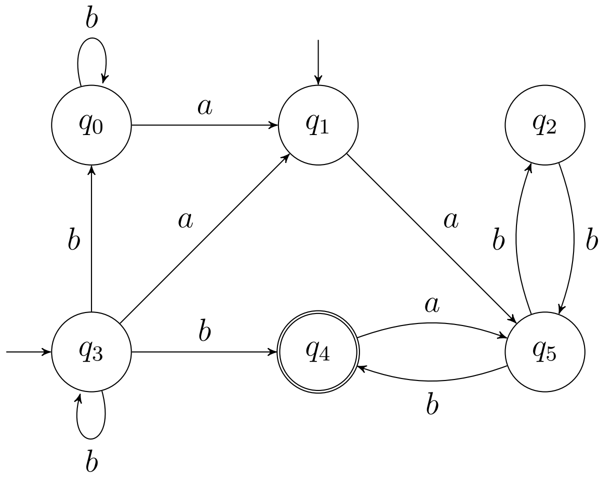
d. **(2 Punkte)** *Gib* $\mathrm{L}(M_3)$ *an,* ohne auf Automaten oder Grammatiken zu verweisen.

00^*
$+(00^*11^*0^*)^*0$

Matrikelnummer: ______________ Name: ______________

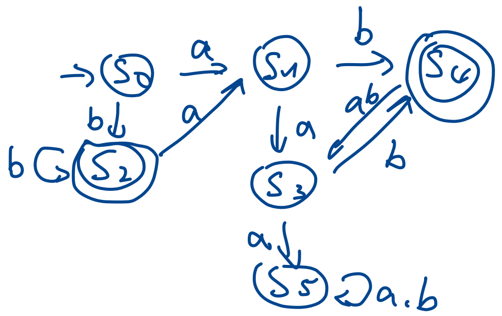
Aufgabe 2: Untermengen-Konstruktion **(16 Punkte)**

Gegeben sei der NFA $M \triangleq (\{ q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5 \},\ \Sigma,\ \Delta,\ \{ q_1,\ q_3 \},\ \{ q_4 \})$ mit $\Sigma = \{ a,\ b \}$ und Δ:



a. **(13 Punkte)** *Berechne:* Konstruiere nur mit Hilfe der Untermengen-Konstruktion den DFA M' zum NFA M. *Gib* die bei der Untermengen-Konstruktion entstehende Tabelle sowie das Tupel des entstehenden Automaten M' *an*.
Hinweis: Es ist nicht nötig die Übergangsfunktion δ' von M' (graphisch) anzugeben.

		a	b	
S	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_5 q_1\}$	$\{q_0 q_3 q_4\}$	S_0
	$\{q_5 q_1\}$	$\{q_5\}$	$\{q_4, q_2\}$	S_1
F	$\{q_0 q_3 q_4\}$	$\{q_1, q_5\}$	$\{q_0 q_3 q_4\}$	S_2
	$\{q_5\}$	$\emptyset$	$\{q_2 q_4\}$	S_3
F	$\{q_4 q_2\}$	$\{q_5\}$	$\{q_5\}$	S_4
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	S_5



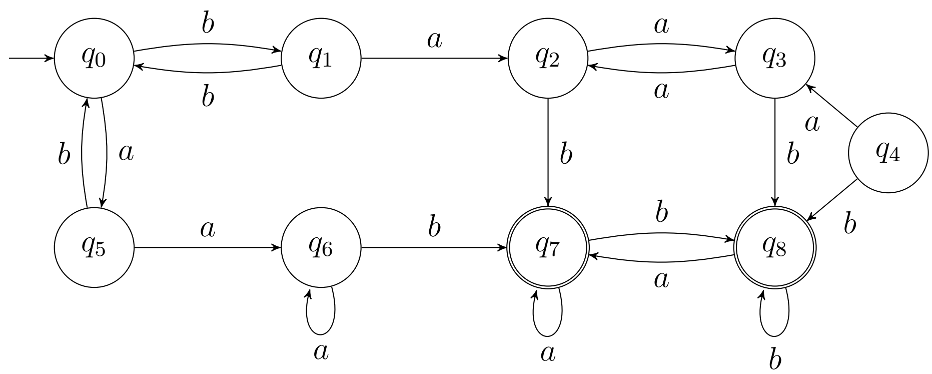
b. **(3 Punkte)** *Gib* $\mathrm{L}(M)$ *an*, ohne auf Automaten oder Grammatiken zu verweisen.

$bb^* + (a + bb^*a)(b + ab)$

Aufgabe 3: Minimierung eines DFA (22 Punkte)

Gegeben sei der DFA $M \triangleq (Q,\ \Sigma,\ \delta,\ q_0,\ \{\ q_7,\ q_8\ \})$ mit
$Q \triangleq \{\ q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5,\ q_6,\ q_7,\ q_8\ \}$, $\Sigma \triangleq \{\ a,\ b\ \}$ und δ:

	a	b
q_0	q_5	q_1
q_1	q_2	q_0
q_2	q_3	q_7
q_3	q_2	q_8
~~q_4~~		
q_5	q_6	q_0
q_6	q_6	q_7
q_7	q_7	q_8
q_8	q_7	q_8



a. **(**, 1 Punkt)** *Gib an:* Welche Zustände sind nicht erreichbar?

q_4

b. **(**, 9 Punkte)** *Gib an:* Fülle die folgende Tabelle entsprechend des Table-Filling-Algorithmus zum Minimieren von DFAs mit Kreuzen (x) und Kreisen (o) aus.
Hinweis: Bitte streiche zunächst alle Zeilen und Spalten für nicht erreichbare Zustände, falls es solche Zustände in M gibt. Die zweite Tabelle ist ein Ersatz für Verschreiber.

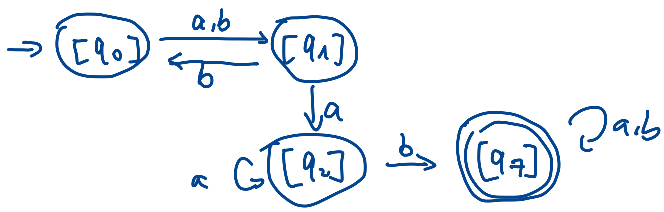
	q_0	q_1	q_2	q_3	~~q_4~~	q_5	q_6	q_7
q_1	x							
q_2	x	x						
q_3	x	x						
~~q_4~~								
q_5	x		x	x				
q_6	x	x				x		
q_7	x	x	x	x		x	x	
q_8	x	x	x	x		x	x	

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
q_1								
q_2								
q_3								
q_4								
q_5								
q_6								
q_7								
q_8								

c. **(**, 4 Punkte)** Die Minimierung unterteilt Q in Äquivalenzklassen. *Gib* alle Äquivalenzklassen *an*, die sich aus der Tabelle ergeben.
Hinweis: Die Namen der Klassen in der Form $[\ q_0\ ]$ genügen hier nicht. *Es müssen auch die zugehörigen Mengen, also so etwas wie $[\ q_0\ ] = \{\ \dots\ \}$, angegeben werden.*

$[q_2] = \{q_2, q_3, q_6\}$ $[q_7] = \{q_7, q_8\}$
$[q_1] = \{q_1, q_5\}$ $[q_0] = \{q_0\}$

d. **(**, 5 Punkte)** *Gib* den minimierten DFA M′ *an*.



e. **(***, 3 Punkte)** *Gib* $\mathrm{L}(M)$ *an*, ohne auf Automaten oder Grammatiken zu verweisen.

$((a+b)b)^* a a^* b (a+b)^*$

Aufgabe 4: CYK-Algorithmus **(13 Punkte)**

Gegeben sei ein Alphabet $\Sigma \triangleq \{ a,\ b \}$ sowie zwei Grammatiken
$G_1 \triangleq (\{ S,\ A,\ B,\ C \},\ \Sigma,\ P_1,\ S)$ und $G_2 \triangleq (\{ S,\ T,\ U,\ V,\ W \},\ \Sigma,\ P_2,\ S)$ mit:

$$\begin{array}{llll} P_1: & S & \to & aBA \mid AB \\ & A & \to & b \mid BB \\ & B & \to & \underline{bCCbA} \mid aC \\ & C & \to & a \mid CC \end{array} \qquad \begin{array}{llll} P_2: & S & \to & VW \mid UT \\ & T & \to & WT \mid US \\ & U & \to & WU \mid TW \mid b \\ & V & \to & a \mid VV \mid TV \\ & W & \to & a \mid UU \end{array}$$

$\underline{CC}b\underline{A}$

a. **(5 Punkte)** *Gib* eine Grammatik G_3 in CNF mit $\mathrm{L}(G_1) = \mathrm{L}(G_3)$ *an.*

$G_3 = (\{S, M, N, A, B, X, Y, P, Q, G, C\}, \Sigma, P_3, S)$ mit

P_3: $S \to MN \mid AB$
$M \to a$
$N \to BA$
$A \to b \mid BB$
$B \to XY \mid MC$
$X \to b$
$Y \to PQ$
$P \to CC$
$Q \to GA$
$G \to b$
$C \to a \mid CC$

$$\begin{array}{llll} P_2: & S & \to & VW \mid UT \\ & T & \to & WT \mid US \\ & U & \to & WU \mid TW \mid b \\ & V & \to & a \mid VV \mid TV \\ & W & \to & a \mid UU \end{array}$$

b. **(8 Punkte)** *Berechne:* Gegeben sei das Wort $w \triangleq baaab$. Löse mit dem CYK-Algorithmus das Wortproblem: $w \in \mathrm{L}(G_2)$ oder $w \notin \mathrm{L}(G_2)$.

$CYK_w(i,j)$	1	2	3	4	5
1: b	{U}	∅	{T}	{T, U, V}	{W}
2: a	{V, W}	{S, V}	{V, S}	{U}	
3: a	{V, W}	{S, V}	{U}		
4: a	{V, W}	{U}			
5: b	{U}				

$w \notin L(G_2)$

da $S \notin CYK_w(1,5)$

Matrikelnummer: ____________________ Name: ____________________

Aufgabe 5: Modelle Kontextfreier Sprachen I **(10 Punkte)**

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma \triangleq \{ a,\ b,\ c \}$ und die kontextfreie Sprache

$$A \triangleq \{ xbc^n \mid n \in \mathbb{N}^+ \wedge x \in \{ ab,\ bb \}^+ \wedge |x|_b = n \wedge |x|_a > 0 \}$$

a. **(3 Punkte)** *Gib* eine Typ-2 Grammatik G mit $\mathrm{L}(G) = A$ *an.*

$G = (\{S, X, Y\}, \Sigma, P, S)$ mit P:

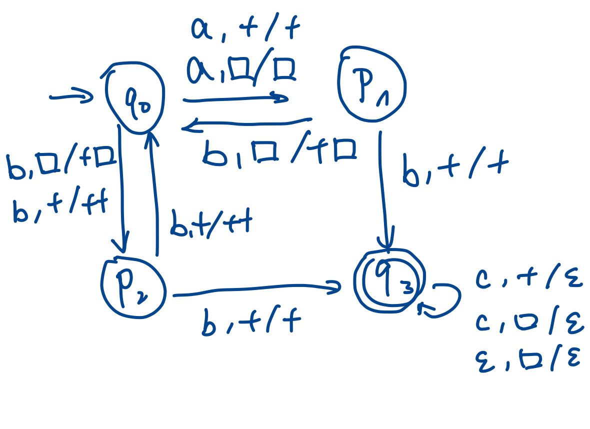
$S \to abXc \mid bbXcc$

$X \to abXc \mid bbXcc \mid abYc$

$Y \to abYc \mid bbYc \mid b$

b. **(7 Punkte)** *Gib* einen PDA M mit $\mathrm{L}_{\text{End}}(M) = \mathrm{L}_{\text{Kel}}(M) = A$ *an.*

$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \Sigma, \{\square, +\}, \square, \Delta, q_0, \{q_3\})$ mit Δ:

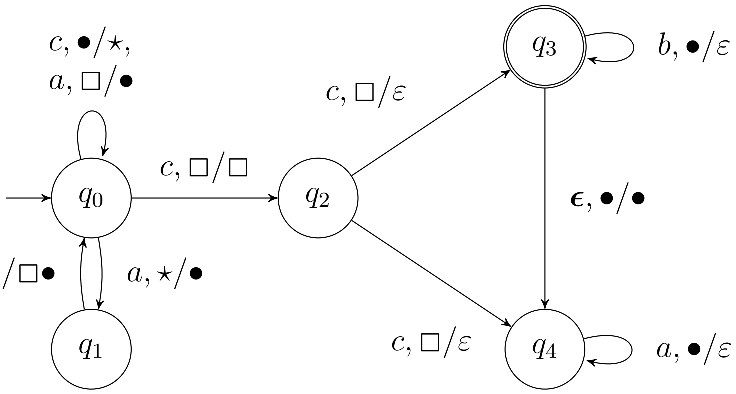


Aufgabe 6: Modelle Kontextfreier Sprachen II **(5 Punkte)**

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma \triangleq \{ a, b, c \}$ und der PDA
$M \triangleq (\{ q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 \}, \Sigma, \{ \square, \bullet, \star \}, \square, \Delta, q_0, \{ q_3 \})$ mit Δ:

$\square \xrightarrow{a} \bullet \xrightarrow{c} \star \xrightarrow{a} \bullet$
$\xrightarrow{b} \square\bullet$

$(acab)^n ccb^n$



a. **(2 Punkte)** *Gib* $L_{\text{End}}(M)$ *an,* ohne auf Automaten oder Grammatiken zu verweisen.

$\{ (acab)^n ccb^m \mid n, m \in \mathbb{N}, m \leq n \}$

b. **(3 Punkte)** *Gib* $L_{\text{Kel}}(M)$ *an,* ohne auf Automaten oder Grammatiken zu verweisen.

$(acab)^n ccb^m$ $\quad$ $m > n$

$(acab)^n cca^i$ $\quad$ $i \leq n$

Auf dieser Seite löse ich einen Teil der Aufgabe __ :
Teilaufgabe __ :

Auf dieser Seite löse ich einen Teil der Aufgabe __ :
Teilaufgabe __ :