FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin

SoSe 2024
Stand: 19. April 2024

0. Aufgabenblatt – Diskrete Strukturen

(Besprechung in den Tutorien in der Woche vom 22.04.2022)

Aufgabe 1

Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 2\}$$
$$B = \{k + 1 \mid k, k - 1 \in A\}$$
$$C = \{S \mid S \subset A\}$$

(i) Geben sie die Mengen A, B und C explizit an.

(ii) Geben sie die Mengen $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus C$ explizit an.

(iii) Geben sie die Menge $A \times B$ explizit an. $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A$ und $b \in B\}$

(iv) Geben sie eine Menge S minimaler Größe an, sodass ein $a \in S$ existiert mit $a \subseteq A$ und ein $b \in S$ mit $b \subseteq B$.

Aufgabe 2

Das Mengensystem aus den Mengen $M_1, \ldots, M_n$ mit $n \geq 1$ bildet eine *Sonnenblume* genau dann, wenn eine Menge S existiert, sodass $M_i \cap M_j = S$ für alle $1 \leq i < j \leq n$ gilt.

(i) Entscheiden Sie für jedes der folgenden Mengensysteme, ob es eine *Sonnenblume* bildet und geben Sie bei einer positiven Entscheidung die entsprechende Menge S an.

- $A_1 = \{S, o, n, e\}$, $A_2 = \{b, l, u, m, e\}$
- $B_1 = \{1, 2, 3\}$, $B_2 = \{4\}$, $B_3 = \{5, 6\}$, $B_4 = \{7, 8, 9\}$
- $C_1 = \{1, 2, 3\}$, $C_2 = \{2, 3, 4\}$, $C_3 = \{3, 4, 5\}, C_4 = \{4, 5, 6\}$
- $D_1 = \mathbb{N}$, $D_2 = \mathbb{Z}$, $D_3 = \mathbb{R}$
- $E_1 = \{a, b, c\}$, $E_2 = \{f, b, e, g, c\}$, $E_3 = \{c, b\}$, $E_4 = \{j, i, c, k, b\}$

(ii) Sei $M_1, \ldots, M_n$ ein nichtleeres Mengensystem aus zweielementigen Mengen, die sich paarweise in genau einem Element schneiden, das keine *Sonnenblume* bildet. Begründen Sie, welche Werte aus $\{0,1,2,3,4\}$ für n möglich sind.

Aufgabe 3

Betrachten Sie eine beliebige Platzierung der natürlichen Zahlen von 1 bis 9 auf einem Kreis. Zeigen oder widerlegen sie, es gibt drei auf dem Kreis nebeneinanderliegende Zahlen x, y und z mit $x + y + z \geq 16$.

Aufgabe 1

Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \land x \leq 2\}$$
$$B = \{k + 1 \mid k, k - 1 \in A\}$$
$$C = \{S \mid S \subset A\}$$

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}$$

(i) Geben sie die Mengen A, B und C explizit an.

(ii) Geben sie die Mengen $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus C$ explizit an.

(iii) Geben sie die Menge $A \times B$ explizit an.

(iv) Geben sie eine Menge S minimaler Größe an, sodass ein $a \in S$ existiert mit $a \subseteq A$ und ein $b \in S$ mit $b \subseteq B$.

i) $A = \{0, 1, 2\}$
$B = \{2, 3\}$
$C = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}\}$

a, b

ii) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$
$A \cap B = \{2\}$
$A \setminus C = \{0, 1, 2\}$

iii) $A \times B = \{(0,2), (0,3), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3)\}$

iv) $S = \{\emptyset\}$ oder $S = \{\{2\}\}$

Aufgabe 2

Das Mengensystem aus den Mengen $M_1, \ldots, M_n$ mit $n \geq 1$ bildet eine *Sonnenblume* genau dann, wenn eine Menge S existiert, sodass $M_i \cap M_j = S$ für alle $1 \leq i < j \leq n$ gilt.

(i) Entscheiden Sie für jedes der folgenden Mengensysteme, ob es eine *Sonnenblume* bildet und geben Sie bei einer positiven Entscheidung die entsprechende Menge S an.

- $A_1 = \{S, o, n, e\}$, $A_2 = \{b, l, u, m, e\}$ ja, $A_1 \cap A_2 = \{e\}$
- $B_1 = \{1, 2, 3\}$, $B_2 = \{4\}$, $B_3 = \{5, 6\}$, $B_4 = \{7, 8, 9\}$ ja, $\emptyset$
- $C_1 = \{1, 2, 3\}$, $C_2 = \{2, 3, 4\}$, $C_3 = \{3, 4, 5\}$, $C_4 = \{4, 5, 6\}$ nein, $C_1 \cap C_2 = \{2, 3\}$, $C_2 \cap C_3 = \{3, 4\}$
- $D_1 = \mathbb{N}$, $D_2 = \mathbb{Z}$, $D_3 = \mathbb{R}$ nein
- $E_1 = \{a, b, c\}$, $E_2 = \{f, b, e, g, c\}$, $E_3 = \{c, b\}$, $E_4 = \{j, i, c, k, b\}$ ja $\{b, c\}$

(ii) Sei $M_1, \ldots, M_n$ ein nichtleeres Mengensystem aus zweielementigen Mengen, die sich paarweise in genau einem Element schneiden, das keine *Sonnenblume* bildet. Begründen Sie, welche Werte aus {0,1,2,3,4} für n möglich sind.

- $n = 0$ ist nicht möglich, da es von der Angabe ausgeschlossen wird.
- $n = 1$ ist nicht möglich, da jede Menge S das System zur Sonnenblume machen würde
- $n = 2$ ist nicht möglich, da die Schnittmenge der zwei Mengen eine passende Menge S darstellt, die das System zur Sonnenblume machen würde
- $n = 3$ ist möglich, $M_1 = \{1, 2\}$, $M_2 = \{2, 3\}$, $M_3 = \{1, 3\}$ ist ein Beispiel.
- $n = 4$ ist nicht möglich, wie man folgendermaßen zeigen kann:

  Seien o.B.d.A. $\{a, b\}$ und $\{b, c\}$ zwei dieser Mengen. Dann kann eine dritte Menge nur die Form $\{a, c\}$ oder $\{b, d\}$ haben. Im Fall von $\{a, c\}$ existiert nun keine vierte Menge mit zwei Elementen, die $\{a, b\}, \{b, c\}$ und $\{a, c\}$ in einem Element schneidet. Im Fall von $\{b, d\}$, kann eine vierte Menge nur dann $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ und $\{b, d\}$ schneiden, wenn sie b enthält. Dann hat sie also die Form $\{b, e\}$ und wir haben eine Sonnenblume.

Aufgabe 3

Betrachten Sie eine beliebige Platzierung der natürlichen Zahlen von 1 bis 9 auf einem Kreis. Zeigen oder widerlegen sie, es gibt drei auf dem Kreis nebeneinanderliegende Zahlen x, y und z mit $x + y + z \geq 16$.

5 1 9 4 3 8 6 2 7

Annahme nicht:

so dass kein $x+y+z \geq 16$

$$\sum_{i=1}^{9} i = 45 \qquad \frac{45}{3} = 15$$

9	2	4
8	1	6
7	3	5

z_9 z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 z_7 z_8

$$z_8 + z_9 + z_1 = 15$$

$$z_9 + z_1 + z_2 = 15$$

$$z_2 = z_8$$