Diskrete Strukturen

Großübung

Amelie Heindl

Lehrstuhl für Logik und Semantik

Technische Universität Berlin

Sommersemester 2024

Themenüberblick

Themenüberblick: Vorlesungswoche 6

- Trenner
- Satz von Menger
- Eulertouren
- Hamiltonkreise

Durchmesser und Radius

Durchmesser und Radius: Grundlagen

Wir haben gesehen, dass man mit $dist_G(u, v) = \min\{n \mid \text{es gibt einen Pfad mit } n \text{ Kanten zwischen } u \text{ und } v\}$ die Entfernung zwischen zwei Knoten in einem Graph messen kann.
Es gibt auch Entfernungsmaße, die auf ganze Graphen angewendet werden.

Durchmesser

Sei G ein Graph. Der Durchmesser gibt an, wie groß die Entfernung zwischen den entferntesten Knoten von G ist, also "wie weit es von einem zum anderen Ende von G ist". Er ist definiert durch $\max\{dist_G(u, v) \mid u, v \in V(G)\}$.

Radius

Sei G ein Graph. Der Radius gibt an, wie groß die Entfernung zwischen einem "zentralen" und einem "entferntesten" Knoten von G ist.Er ist definiert durch $\min_{v \in V(G)} \max\{dist_G(u, v) \mid u \in V(G)\}$.

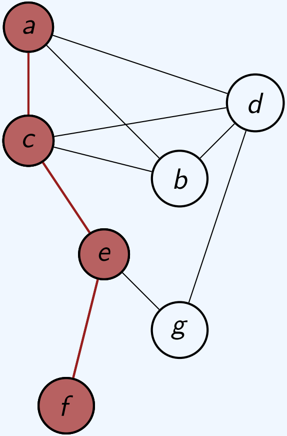
Durchmesser und Radius: Beispiel

Um den Durchmesser und Radius zu berechnen, muss zuerst die Distanz zwischen jedem Knotenpaar ermittelt werden.

dist	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	Zeilenmaximum
a	0	1	1	1	2	3	2	3
b	1	0	1	1	2	3	2	3
c	1	1	0	1	1	2	2	2
d	1	1	1	0	2	3	1	3
e	2	2	1	2	0	1	1	2
f	3	3	2	3	1	0	2	3
g	2	2	2	1	1	2	0	2

Durchmesser: 3

Beispielgraph G:



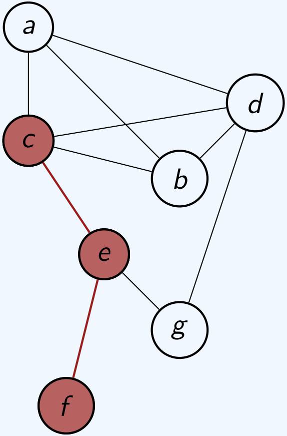
Durchmesser und Radius: Beispiel

Um den Durchmesser und Radius zu berechnen, muss zuerst die Distanz zwischen jedem Knotenpaar ermittelt werden.

dist	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	Zeilenmaximum
a	0	1	1	1	2	3	2	3
b	1	0	1	1	2	3	2	3
c	1	1	0	1	1	2	2	2
d	1	1	1	0	2	3	1	3
e	2	2	1	2	0	1	1	2
f	3	3	2	3	1	0	2	3
g	2	2	2	1	1	2	0	2

Durchmesser: 3
Radius: 2

Beispielgraph G:



Bäume

Bäume: Grundlagen

Bäume sind spezielle Graphen. Die Binärbäume, die bereits betrachtet wurden, sind spezielle Bäume. Eine allgemeine Definition ist:

Baum

Sei G ein Graph. Dann ist G ein Baum, wenn G zusammenhängend und azyklisch ist.

Graphen, die azyklisch, aber nicht notwendigerweise zusammenhängend sind, heißen Wald, ihre Zusammenhangskomponenten sind Bäume.

In dieser allgemeinen Definition gibt es keinen ausgezeichneten Wurzelknoten und die Kanten sind ungerichtet.

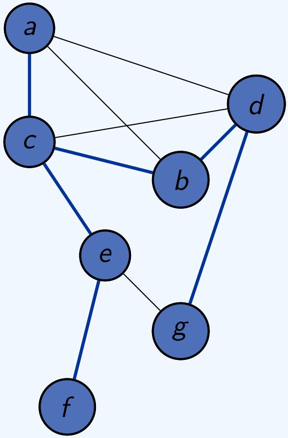
Bäume: Spannbäume

In zusammenhängenden Graphen kann man Spannbäume finden. Diese verbinden alle Knoten des Graphen und verwenden dazu insgesamt möglichst wenig Kanten.

Spannbaum

Sei G ein Graph und U ein Untergraph von G. Dann ist U ein Spannbaum von G, wenn U spannend und ein Baum ist.

Beispielgraph G:
Spannbaum U:



In zusammenhängenden Graphen kann man Spannbäume finden. Diese verbinden alle Knoten des Graphen und verwenden dazu insgesamt möglichst wenig Kanten.

Spannbaum

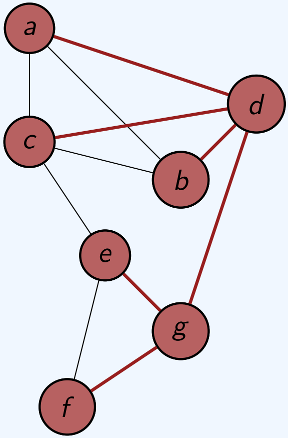
Sei G ein Graph und U ein Untergraph von G. Dann ist U ein Spannbaum von G, wenn U spannend und ein Baum ist.

Spannbäume sind nicht eindeutig.

In nicht-zusammenhängenden Graphen können Untergraphen nicht gleichzeitig zusammenhängend und spannend sein, somit kann es auch keine Spannbäume geben.

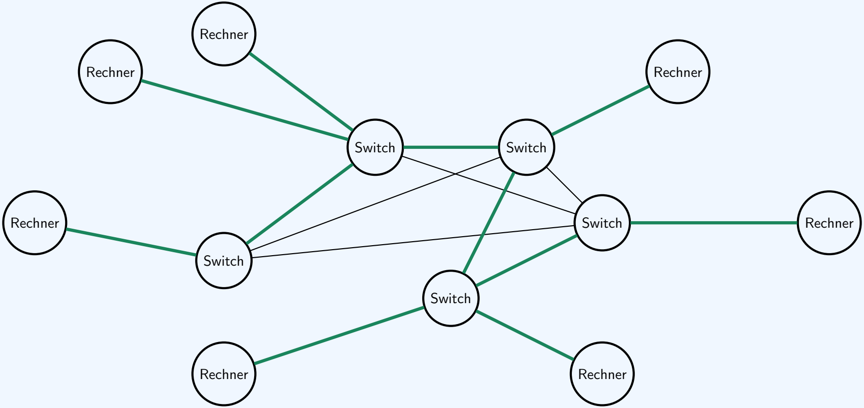
Beispielgraph G:

Spannbaum U':



Bäume: Spannbäume Beispiel

In einem Rechnernetz möchte man eindeutige (und kurze) Wege zwischen zwei Geräten. Beispielsweise das Spanning Tree Protocol stellt dies sicher, durch Identifizierung eines Spannbaums im Netz und Aktivierung der Entsprechenden Verbindungen.



Suchen

Suchen: Grundlagen

Um in Graphen etwas zu suchen, kann der Graph auf verschiedene Arten traversiert werden. Das Vorgehen ist, das man systematisch, von einem Knoten zu einem nächsten läuft, um am Ende jeden Knoten einmal besucht zu haben. Man unterscheidet die Sucharten

nach der Reihenfolge in der die Knoten besucht werden. Zwei Möglichkeiten sind:

- Tiefensuche: Vom Startpunkt aus werden Pfade möglichst weit abgelaufen.
- Breitensuche: Vom Startpunkt aus werden erst viele kurze Pfade gelaufen

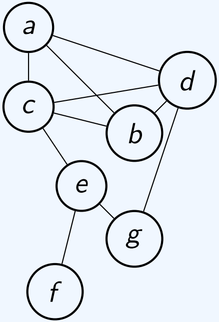
Durch die Suchreihenfolge wird dabei ein Spannbaum definiert.

Suchen: Tiefensuche

Ein Knoten v wird als Wurzel gewählt und dann für jedes $1 \leq i \leq |V(G)|$ ein Unterbaum T_i und eine Knotenbeschriftungsfunktion l_i konstruiert.
I.A.: Definiere $T_1 := (\{v\}, \emptyset)$ und $l_1(v) := 1$.
I.V.: Seien T_i, l_i schon definiert.
I.S.: Für $1 \leq j \leq i$ sei $l_i(j) := w_j$.
Sei $m := \max\{j : N_G(w_j) \setminus V(T_i) \neq \emptyset\}$.
Wähle $u \in N_G(w_m) \setminus V(T_i)$ und definiere

$$\begin{aligned} V(T_{i+1}) &= V(T_i) \cup \{u\} \\ E(T_{i+1}) &= E(T_i) \cup \{\{w_m, u\}\} \\ l_{i+1}(u) &= i+1 \text{ und } l_{i+1}(w_j) = j = l_i(w_j) \\ & \quad \text{für } 1 \leq j \leq i. \end{aligned}$$

G:

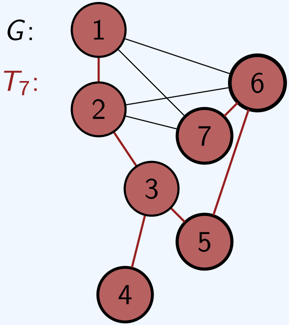


i	m	Knotenwahl	$V(T_i)$	$E(T_i)$
1		$v = a$	$\{a\}$	$\emptyset$
2	1	$u = c$	$\{a, c\}$	$\{\{a, c\}\}$
3	2	$u = e$	$\{a, c, e\}$	$\{\{a, c\}, \{c, e\}\}$
4	3	$u = f$	$\{a, c, e, f\}$	$\{\{a, c\}, \{c, e\}, \{e, f\}\}$
5	3	$u = g$	$\{a, c, e, f, g\}$	$\{\{a, c\}, \{c, e\}, \{e, f\}, \{e, g\}\}$
6	5	$u = d$	$\{a, c, e, f, g, d\}$	$\{\{a, c\}, \{c, e\}, \{e, f\}, \{e, g\}, \{g, d\}\}$
7	6	$u = b$	$\{a, c, e, f, g, d, b\}$	$\{\{a, c\}, \{c, e\}, \{e, f\}, \{e, g\}, \{g, d\}, \{d, b\}\}$

Suchen: Tiefensuche

Ein Knoten v wird als Wurzel gewählt und dann für jedes $1 \leq i \leq |V(G)|$ ein Unterbaum T_i und eine Knotenbeschriftungsfunktion l_i konstruiert.
I.A.: Definiere $T_1 := (\{v\}, \emptyset)$ und $l_1(v) := 1$.
I.V.: Seien T_i, l_i schon definiert.
I.S.: Für $1 \leq j \leq i$ sei $l_i(j) := w_j$.
Sei $m := \max\{j : N_G(w_j) \setminus V(T_i) \neq \emptyset\}$.
Wähle $u \in N_G(w_m) \setminus V(T_i)$ und definiere

$$\begin{aligned} V(T_{i+1}) &= V(T_i) \cup \{u\} \\ E(T_{i+1}) &= E(T_i) \cup \{\{w_m, u\}\} \\ l_{i+1}(u) &= i+1 \text{ und } l_{i+1}(w_j) = j = l_i(w_j) \\ &\quad \text{für } 1 \leq j \leq i. \end{aligned}$$

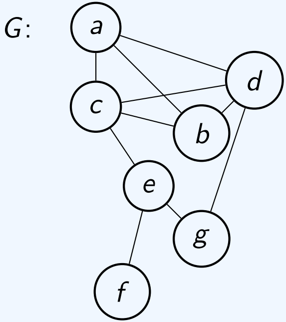


i	m	Knotenwahl	$V(T_i)$	$E(T_i)$
1		$v = a$	$\{a\}$	$\emptyset$
2	1	$u = c$	$\{a, c\}$	$\{\{a, c\}\}$
3	2	$u = e$	$\{a, c, e\}$	$\{\{a, c\}, \{c, e\}\}$
4	3	$u = f$	$\{a, c, e, f\}$	$\{\{a, c\}, \{c, e\}, \{e, f\}\}$
5	3	$u = g$	$\{a, c, e, f, g\}$	$\{\{a, c\}, \{c, e\}, \{e, f\}, \{e, g\}\}$
6	5	$u = d$	$\{a, c, e, f, g, d\}$	$\{\{a, c\}, \{c, e\}, \{e, f\}, \{e, g\}, \{g, d\}\}$
7	6	$u = b$	$\{a, c, e, f, g, d, b\}$	$\{\{a, c\}, \{c, e\}, \{e, f\}, \{e, g\}, \{g, d\}, \{d, b\}\}$

Suchen: Breitensuche

Ein Knoten v wird als Wurzel gewählt und dann für jedes $1 \le i \le |V(G)|$ ein Unterbaum T_i und eine Knotenbeschriftungsfunktion l_i konstruiert.
I.A.: Definiere $T_1 := (\{v\}, \emptyset)$ und $l_1(v) := 1$.
I.V.: Seien T_i, l_i schon definiert.
I.S.: Für $1 \le j \le i$ sei $l_i(j) := w_j$.
Sei $m := \min\{j : N_G(w_j) \setminus V(T_i) \neq \emptyset\}$.
Wähle $u \in N_G(w_m) \setminus V(T_i)$ und definiere

$$\begin{aligned} V(T_{i+1}) &= V(T_i) \cup \{u\} \\ E(T_{i+1}) &= E(T_i) \cup \{\{w_m, u\}\} \\ l_{i+1}(u) &= i+1 \text{ und } l_{i+1}(w_j) = j = l_i(w_j) \\ & \quad \text{für } 1 \le j \le i. \end{aligned}$$



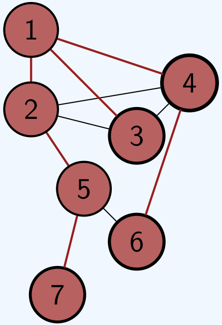
i	m	Knotenwahl	$V(T_i)$	$E(T_i)$
1		$v = a$	$\{a\}$	$\emptyset$
2	1	$u = c$	$\{a,c\}$	$\{\{a,c\}\}$
3	1	$u = b$	$\{a,c,b\}$	$\{\{a,c\},\{a,b\}\}$
4	1	$u = d$	$\{a,c,b,d\}$	$\{\{a,c\},\{a,b\},\{a,d\}\}$
5	2	$u = e$	$\{a,c,b,d,e\}$	$\{\{a,c\},\{a,b\},\{a,d\},\{c,e\}\}$
6	4	$u = g$	$\{a,c,b,d,e,g\}$	$\{\{a,c\},\{a,b\},\{a,d\},\{c,e\},\{d,g\}\}$
7	5	$u = f$	$\{a,c,b,d,e,g,f\}$	$\{\{a,c\},\{a,b\},\{a,d\},\{c,e\},\{d,g\},\{e,f\}\}$

Suchen: Breitensuche

Ein Knoten v wird als Wurzel gewählt und dann für jedes $1 \le i \le |V(G)|$ ein Unterbaum T_i und eine Knotenbeschriftungsfunktion l_i konstruiert.
I.A.: Definiere $T_1 := (\{v\}, \emptyset)$ und $l_1(v) := 1$.
I.V.: Seien T_i, l_i schon definiert.
I.S.: Für $1 \le j \le i$ sei $l_i(j) := w_j$.
Sei $m := \min\{j : N_G(w_j) \setminus V(T_i) \neq \emptyset\}$.
Wähle $u \in N_G(w_m) \setminus V(T_i)$ und definiere

$$\begin{aligned} V(T_{i+1}) &= V(T_i) \cup \{u\} \\ E(T_{i+1}) &= E(T_i) \cup \{\{w_m, u\}\} \\ l_{i+1}(u) &= i+1 \text{ und } l_{i+1}(w_j) = j = l_i(w_j) \\ & \quad \text{für } 1 \le j \le i. \end{aligned}$$

G:
T_7:



i	m	Knotenwahl	$V(T_i)$	$E(T_i)$
1		$v = a$	$\{a\}$	$\emptyset$
2	1	$u = c$	$\{a, c\}$	$\{\{a, c\}\}$
3	1	$u = b$	$\{a, c, b\}$	$\{\{a, c\}, \{a, b\}\}$
4	1	$u = d$	$\{a, c, b, d\}$	$\{\{a, c\}, \{a, b\}, \{a, d\}\}$
5	2	$u = e$	$\{a, c, b, d, e\}$	$\{\{a, c\}, \{a, b\}, \{a, d\}, \{c, e\}\}$
6	4	$u = g$	$\{a, c, b, d, e, g\}$	$\{\{a, c\}, \{a, b\}, \{a, d\}, \{c, e\}, \{d, g\}\}$
7	5	$u = f$	$\{a, c, b, d, e, g, f\}$	$\{\{a, c\}, \{a, b\}, \{a, d\}, \{c, e\}, \{d, g\}, \{e, f\}\}$

Blockgraphen

Blockgraphen: Grundlagen

Blockgraphen sind eine Möglichkeit, die grobe Struktur von Graphen darzustellen. Um den Blockgraphen eines Graphen zu bilden, müssen dessen Schnittknoten und Blöcke identifiziert werden.

Schnittknoten

Sei G ein Graph und $v \in V(G)$ ein Knoten. Dann ist v ein Schnittknoten von G, wenn es eine Zusammenhangskomponente Z von G gibt, für die $Z - v$ nicht zusammenhängend ist.

Block

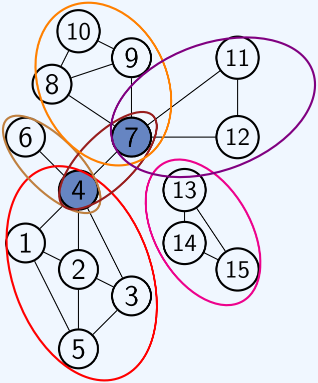
Sei G ein Graph. Jeder maximale zusammenhängende Untergraph von G ohne Schnittknoten ist ein Block von G.

Für einen Graphen G mit A als der Menge der Schnittknoten von G und Blockmenge $\mathscr{B}$ ist der Blockgraph $B(G)$ definiert durch

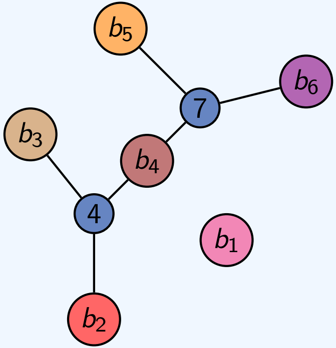
$$B(G) = (A \cup \mathscr{B}, \{\{a, b\} \mid a \in A, b \in \mathscr{B}, a \in V(b)\})$$

Blockgraphen: Beispiel

Beispielgraph G:
Schnittknoten: $A = \{4, 7\}$
Blöcke: $\mathscr{B} = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$



Blockgraph $B(G)$:



Trenner

Trenner: Grundlagen

Trenner sind Teilmengen der Knotenmenge eines Graphen, deren Entfernen dazu führt, dass bestimmte Teile des Graphen nicht mehr verbunden sind.

$A - B$-Trenner

Sei G ein Graph und $A, B, X \subseteq V(G)$ Knotenteilmengen. Dann ist X ein $A - B$-Trenner in G, wenn jeder Pfad zwischen einem Knoten in A und einem Knoten in G einen Knoten aus X enthält.

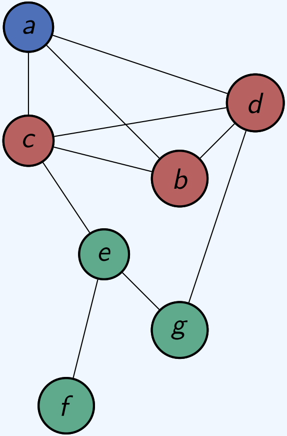
Trenner

Sei G ein Graph und $X \subseteq V(G)$ eine Knotenteilmenge. Dann ist X ein Trenner in G, wenn X ein $\{u\} - \{v\}$-Trenner für Knoten u, v aus derselben Zusammenhangskomponente von G ist.

Trenner der Größe k werden k-Trenner genannt.

Trenner: Beispiel

Beispielgraph G:



Sei $A = \{a\}$ und $B = \{e, f, g\}$.
Dann ist $X = \{b, c, d\}$ ein $A - B$-Trenner in G.

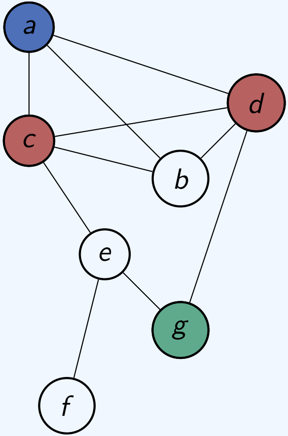
Trenner: Beispiel

Sei $A = \{a\}$ und $B = \{e, f, g\}$.
Dann ist $X = \{b, c, d\}$ ein $A - B$-Trenner in G.

Auch $Y = \{c, d\}$ ist ein $A - B$-Trenner in G.

Y ist auch ein $A - C$-Trenner in G für $C = \{g\}$ und damit ein Trenner in G.
Wegen $|Y| = 2$ ist Y ein 2-Trenner in G.

Beispielgraph G:



Satz von Menger

Satz von Menger: Aussage

Der Satz von Menger stellt eine Beziehung zwischen der Größe minimaler Trenner und der Anzahl knoten-disjunkter Pfade her. Zwei Pfade P, Q in einem Graphen G sind hierbei knoten-disjunkt, wenn es keinen Knoten aus $V(G)$ gibt, der sowohl in P als auch in Q enthalten ist.

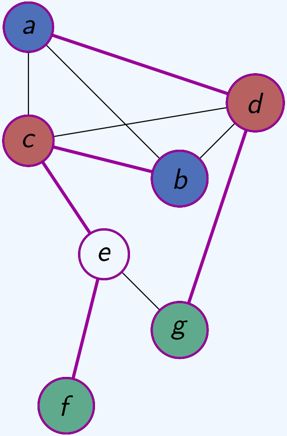
Satz von Menger

Sei G ein Graph und $A, B \subseteq V(G)$ Teilmengen der Knotenmenge. Dann ist die minimale Größe eines $A - B$-Trenners in G gleich der maximalen Anzahl knoten-disjunkter Pfade zwischen A und B in G.

Wenn k die minimale Größe eines $A - B$-Trenners ist, ist nach der Definition von Trennern klar, dass es nicht mehr als k knoten-disjunkte Pfade zwischen A und B geben kann. Dass tatsächlich k viele solche Pfade existieren, ist schwieriger zu zeigen.

Satz von Menger: Beispiel

Beispielgraph G:



Sei $A = \{a, b\}, B = \{g, f\}$. Dann ist $X = \{c, d\}$ ist ein minimaler $A - B$-Trenner.

Es gilt somit $k = 2$. Nach dem Satz von Menger gibt es in G also Mengen, die aus knoten-disjunkten $A - B$-Pfaden bestehen und Mächtigkeit 2 haben.

Beispielsweise
$\mathscr{P} = \{(a, \{a, d\}, d, \{d, g\}, g),$
$(b, \{b, c\}, c, \{c, e\}, e, \{e, f\}, f)\}$

Satz von Menger: Beweis

Nun betrachten wir den Beweis aus der Vorlesung für den schwierigen Teil des Satzes von Menger.
Sei G ein Graph und seien $A, B \subseteq V(G)$. Weiter sei $k = k(G, A, B)$ die minimale Größe eines $A-B$-Trenners in G.
Es wurde Folgendes gezeigt:

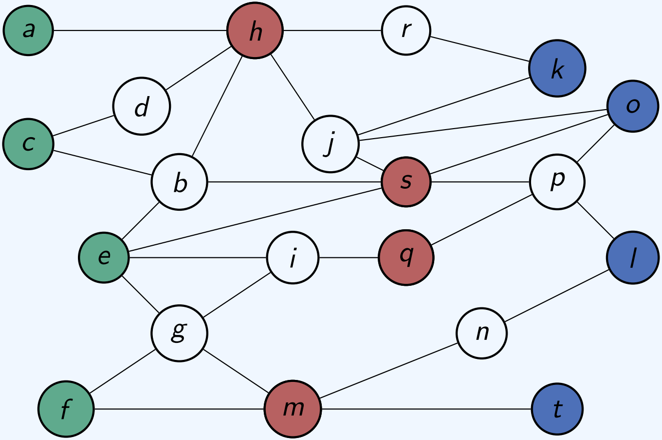
> Sei $\mathscr{P}$ eine Menge knoten-disjunkter $A-B$-Pfade in G mit $|\mathscr{P}| < k$. Dann gibt es eine Menge $\mathscr{Q}$ aus knoten-disjunkten $A-B$-Pfaden in G mit $|\mathscr{Q}| = |\mathscr{P}| + 1$, für die gilt, dass die Knoten aus A, die auf einem Pfad aus $\mathscr{P}$ liegen eine echte Teilmenge der Knoten aus A, die auf einem Pfad aus $\mathscr{Q}$ liegen, bilden und analog für B.

Dem Vorgehen des Beweises folgend, kann man induktiv eine Menge von k knoten-disjunkten Pfade erstellen, deren Existenz im Satz von Menger konstatiert wird.

Satz von Menger: Beweis

Dieses konstruktive Vorgehen betrachten wir in einem Beispielgraphen.

Beispielgraph G mit A und B:



Wie groß ist k?

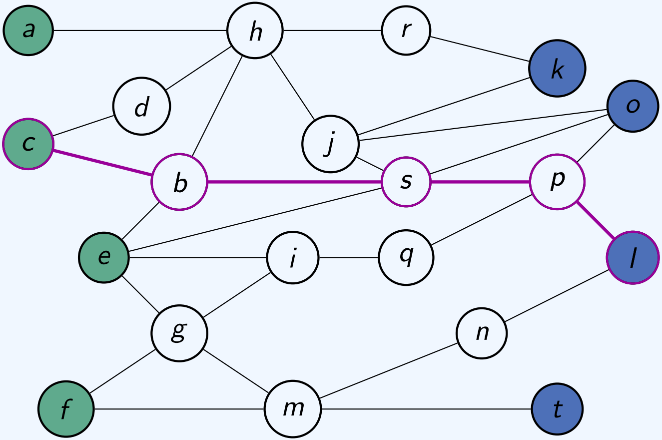
$k = 4$

Satz von Menger: Beweis

Induktionsbasis $|V(\mathscr{P})| = 0$.
Sei R ein A-B-Pfad. Wir setzen $\mathscr{Q} := \{R\}$.

Dieses konstruktive Vorgehen b… …n.

Beispielgraph G mit A und B:



Wie groß ist k?
$k = 4$

1. Wir starten mit $\mathscr{P} := \emptyset$ und können einen beliebigen $A-B$-Pfad R_1 wählen.
Wir wählen $R_1 = (c, b, s, p, l)$ und setzen $\mathscr{Q} := \{R_1\}$.

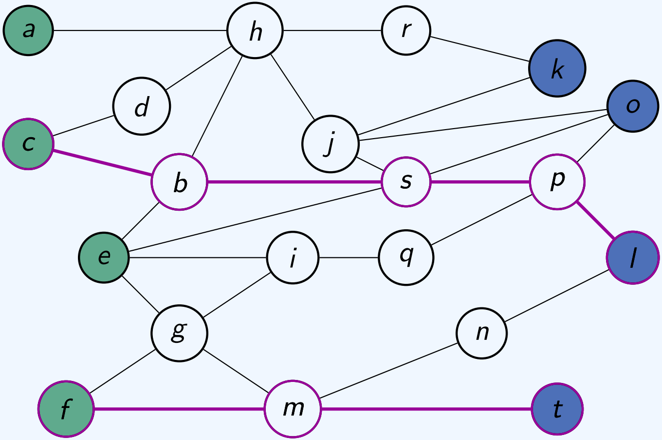
Satz von Menger: Bewei

Induktionsschritt $|V(\mathscr{P})| > 0$. Sei R ein A-B-Pfad der die ($< k$) Knoten aus B in $V(\mathscr{P})$ vermeidet.

Fall 1. Falls R keinen Pfad aus $\mathscr{P}$ trifft, setzen wir $\mathscr{Q} := \mathscr{P} \cup \{R\}$.

Dieses konstruktive Vorgehen betrac

Beispielgraph G mit A und B:

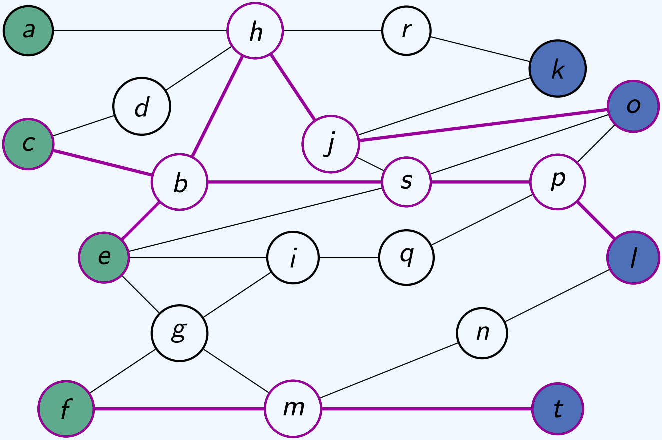


1. Wir starten mit $\mathscr{P} := \emptyset$ und können einen beliebigen $A-B$-Pfad R_1 wählen.
Wir wählen $R_1 = (c, b, s, p, l)$ und setzen $\mathscr{Q} := \{R_1\}$.
2. Es wird $\mathscr{P} := \mathscr{Q}$ gesetzt und wir wählen $R_2 = (f, m, t)$. Da wir in Fall 1 sind, wird $\mathscr{Q} = \{R_1, R_2\}$ gesetzt.

Satz von Menge[...]

Induktionsschritt $|V(\mathscr{P})| > 0$. Sei R ein A-B-Pfad der die ($< k$) Knoten aus B in $V(\mathscr{P})$ vermeidet.
Fall 2. Ang., R trifft einen Pfad aus $\mathscr{P}$.
Sei x der letzte Knoten aus R der auf einem $P \in \mathscr{P}$ liegt.
Wir setzen $B' := B \cup V(xP \cup xR)$ und $\mathscr{P}' := (\mathscr{P} \setminus \{P\}) \cup \{Px\}$.

Dieses konstruktive Vor[...]
Beispielgraph G mit A und[...]



3. Es wird $\mathscr{P} := \mathscr{Q}$ gesetzt und wir wählen $R_3 = (e, b, h, j, o)$. Nun sind wir im zweiten Fall. Es ist $x = b$.

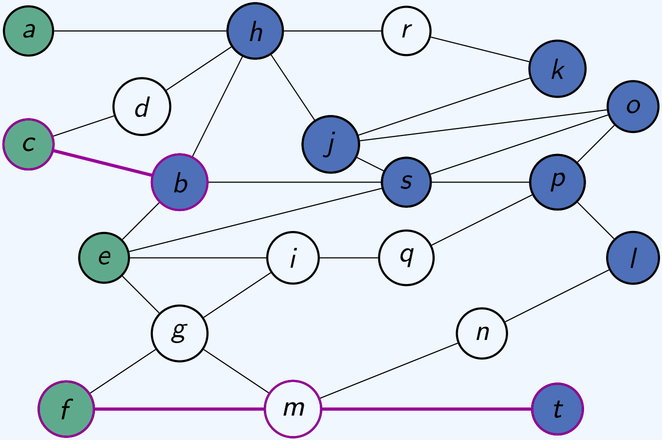
nge

Wichtig: Durch Kürzen des Pfades R_2 gilt $|V(\mathscr{P}')| < |V(\mathscr{P})|$ und wir können die I.V. verwenden.

Induktionsschritt $|V(\mathscr{P})| > 0$. Sei R ein A-B-Pfad der die ($< k$) Knoten aus B in $V(\mathscr{P})$ vermeidet.
Fall 2. Ang., R trifft einen Pfad aus $\mathscr{P}$.
Sei x der letzte Knoten aus R der auf einem $P \in \mathscr{P}$ liegt.
Wir setzen $B' := B \cup V(xP \cup xR)$ und $\mathscr{P}' := (\mathscr{P} \setminus \{P\}) \cup \{Px\}$.

e Vo

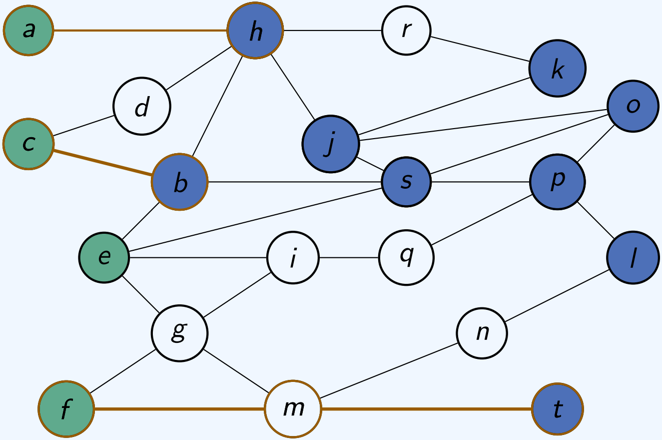
Be und



3. Es wird $\mathscr{P} := \mathscr{Q}$ gesetzt und wir wählen $R_3 = (e, b, h, j, o)$. Nun sind wir im zweiten Fall. Es ist $x = b$. Wir setzen $B' := \{k, o, l, t, b, s, p, j, b\}$ und $\mathscr{P}' := \{R_2, (c, b)\}$. Nach I.V. gibt es eine passende Menge $\mathscr{Q}'$ mit $|\mathscr{Q}'| = 3$, die $\mathscr{P}'$ erweitert. Damit konstruieren wir $\mathscr{Q}$.

Dieses konstruktive Vorgehen betrachten wir in einem Beispielgraphen.

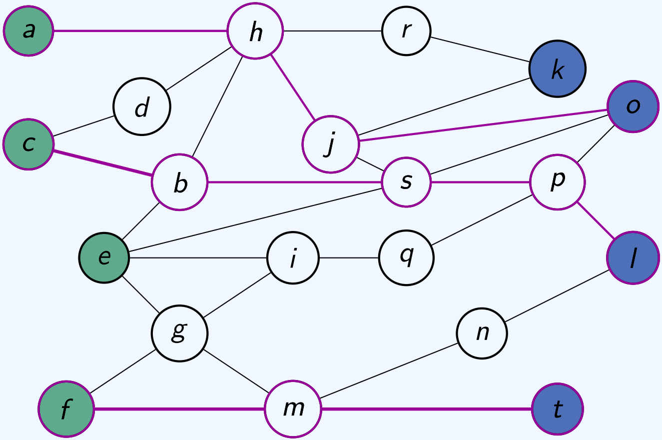
Beispielgraph G mit A und B:



$\mathscr{Q}'$ enthält einen Pfad Q_1, der in b endet und einen Pfad Q_2, der in einem Knoten $y \in \{k, o, p, l, h, j, s\}$ endet.
Ein möglicher Fall ist $y \notin V(xP)$ und $y \in V(xR)$.

Dieses konstruktive Vorgehen betrachten wir in einem Beispielgraphen.

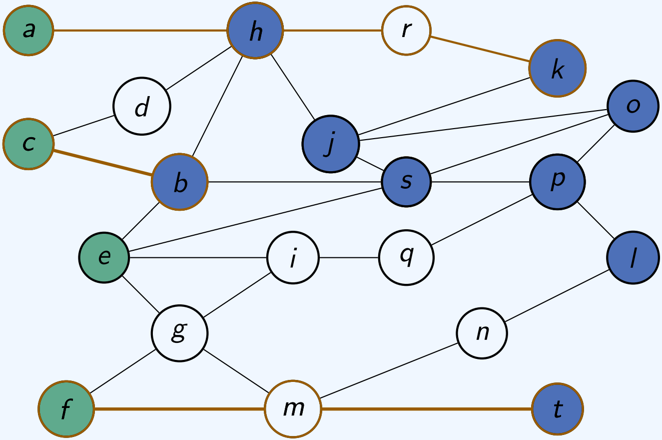
Beispielgraph G mit A und B:



$\mathcal{Q}'$ enthält einen Pfad Q_1, der in b endet und einen Pfad Q_2, der in einem Knoten $y \in \{k, o, p, l, h, j, s\}$ endet.
Ein möglicher Fall ist $y \notin V(xP)$ und $y \in V(xR)$.
Dann bilden wir $\mathcal{Q} = \{R_2, Q_1 x R_1, Q_2 y R_3\} = \{R_2, R_1, (a, h, j, o)\}$.

Dieses konstruktive Vorgehen betrachten wir in einem Beispielgraphen.

Beispielgraph G mit A und B:

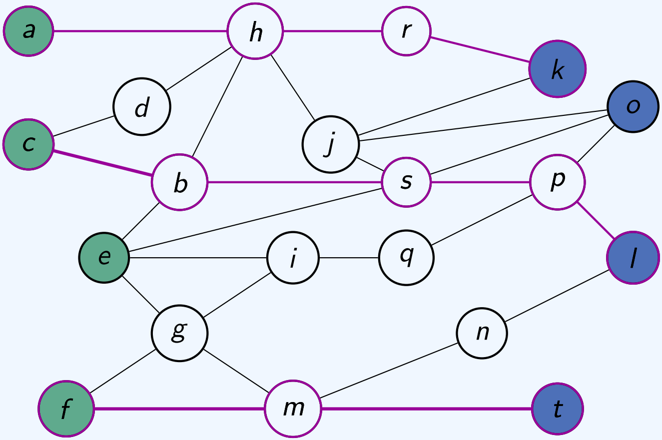


$\mathscr{Q}'$ enthält einen Pfad Q_1, der in b endet und einen Pfad Q_2, der in einem Knoten $y \in \{k, o, p, l, h, j, s\}$ endet.
Ein weiterer möglicher Fall ist $y \notin V(xP)$ und $y \notin V(xR)$.

Satz von Menger: Beweis

Dieses konstruktive Vorgehen betrachten wir in einem Beispielgraphen.

Beispielgraph G mit A und B:

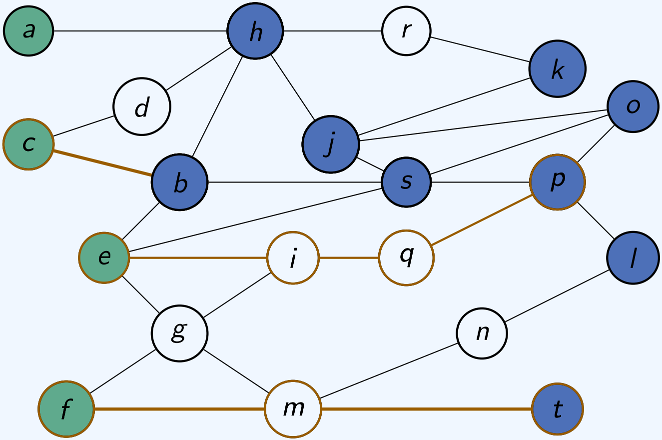


$\mathscr{Q}'$ enthält einen Pfad Q_1, der in b endet und einen Pfad Q_2, der in einem Knoten $y \in \{k, o, p, l, h, j, s\}$ endet.
Ein weiterer möglicher Fall ist $y \notin V(xP)$ und $y \notin V(xR)$.
Dann bilden wir $\mathscr{Q} = \{R_2, R_1, Q_2\} = \{R_2, R_1, (a, h, r, k)\}$.
Insbesondere funktioniert es, den gefundenen $A-B'$-Pfad in $\mathscr{Q}$ aufzunehmen, da in diesem Fall $y \in B$ gelten muss.

Satz von Menger: Beweis

Dieses konstruktive Vorgehen betrachten wir in einem Beispielgraphen.

Beispielgraph G mit A und B:

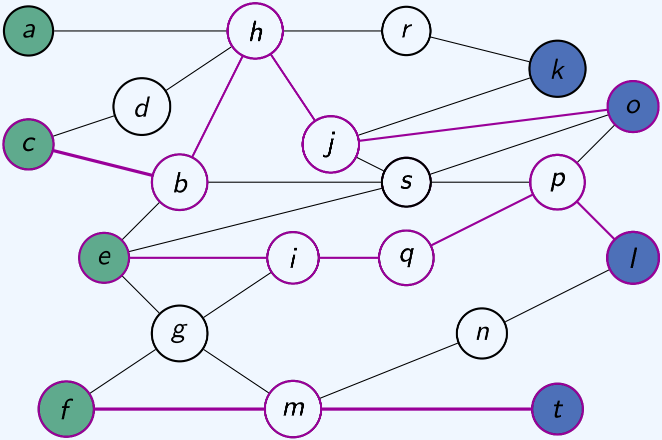


$\mathscr{Q}'$ enthält einen Pfad Q_1, der in b endet und einen Pfad Q_2, der in einem Knoten $y \in \{k, o, p, l, h, j, s\}$ endet.

Der letzte mögliche Fall ist $y \in V(xP)$.

Dieses konstruktive Vorgehen betrachten wir in einem Beispielgraphen.

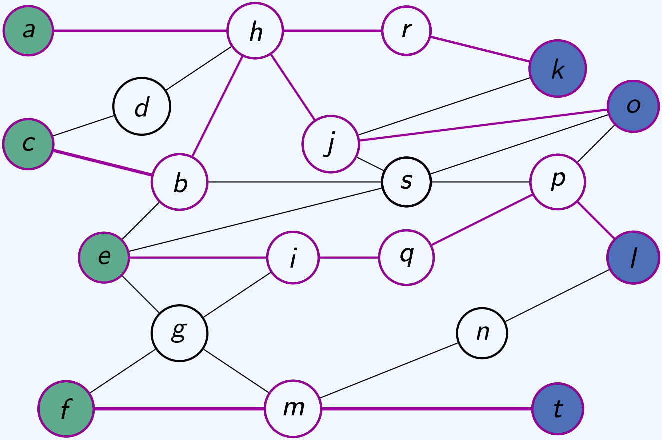
Beispielgraph G mit A und B:



$\mathcal{Q}'$ enthält einen Pfad Q_1, der in b endet und einen Pfad Q_2, der in einem Knoten $y \in \{k, o, p, l, h, j, s\}$ endet.
Der letzte mögliche Fall ist $y \in V(xP)$.
Dann bilden wir $\mathcal{Q} = \{R_2, Q_1 x R_3, Q_2 y R_1\} = \{R_2, (c, b, h, j, o), (e, i, q, p, l)\}$.

Dieses konstruktive Vorgehen betrachten wir in einem Beispielgraphen.

Beispielgraph G mit A und B:



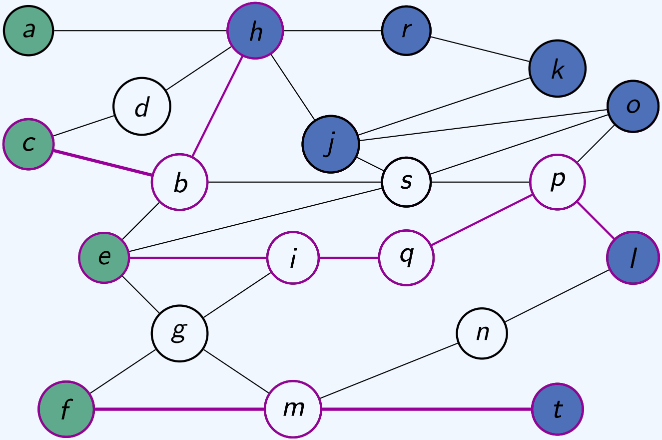
Wir gehen von der letzten Wahl für $\mathscr{Q}$ aus, um weiterzumachen.
4. Es wird $\mathscr{P} := \mathscr{Q}$ gesetzt und wir wählen $R_4 = (a, h, r, k)$.

Satz vo

Induktionsschritt $|V(\mathscr{P})| > 0$. Sei R ein A-B-Pfad der die $(< k)$ Knoten aus B in $V(\mathscr{P})$ vermeidet.
Fall 2. Ang., R trifft einen Pfad aus $\mathscr{P}$.
Sei x der letzte Knoten aus R der auf einem $P \in \mathscr{P}$ liegt.
Wir setzen $B' := B \cup V(xP \cup xR)$ und $\mathscr{P}' := (\mathscr{P} \setminus \{P\}) \cup \{Px\}$.

Dieses kons … n.

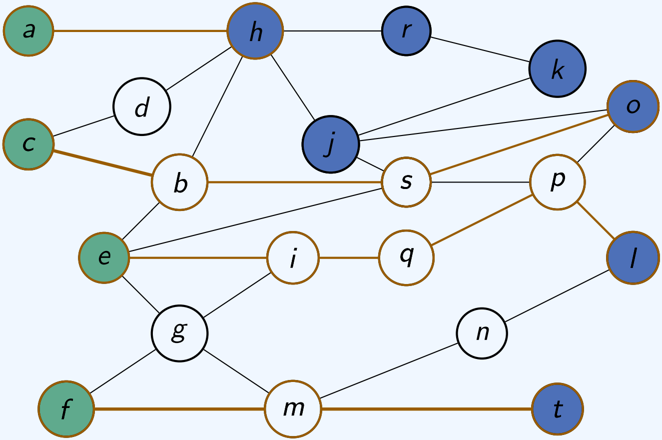
Beispielgraph



Wir gehen von der letzten Wahl für $\mathscr{Q}$ aus, um weiterzumachen.
4. Es wird $\mathscr{P} := \mathscr{Q}$ gesetzt und wir wählen $R_4 = (a, h, r, k)$. Wir sind erneut im zweiten Fall. Es ist $x = h$. Wir setzen $B' := \{k, o, l, t, h, r, j\}$ und $\mathscr{P}' := \{R_2, (e, i, q, p, l), (c, b, h)\}$.

Dieses konstruktive Vorgehen betrachten wir in einem Beispielgraphen.

Beispielgraph G mit A und B:

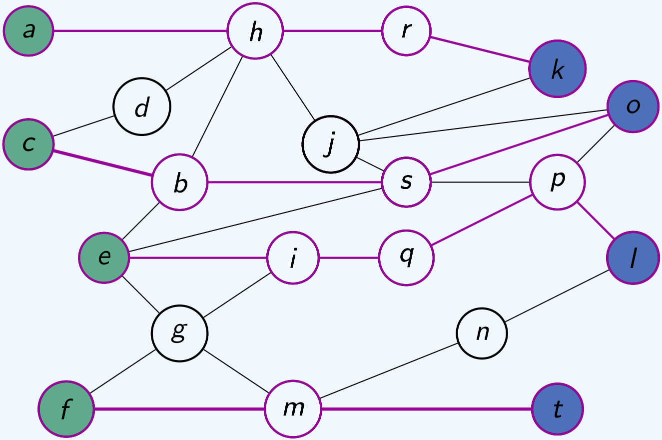


Eine Möglichkeit für $\mathscr{Q}'$ ist $\mathscr{Q}' = \{(a, h), (c, b, s, o), (e, i, q, p, l), (f, m, t)\}$. Damit sind wir im Fall $y \in V(xP)$.

Satz von Menger: Beweis

Dieses konstruktive Vorgehen betrachten wir in einem Beispielgraphen.

Beispielgraph G mit A und B:



Eine Möglichkeit für $\mathcal{Q}'$ ist $\mathcal{Q}' = \{(a,h),(c,b,s,o),(e,i,q,p,l),(f,m,t)\}$.
Damit sind wir im Fall $y \in V(xP)$.
Wir bilden also $\mathcal{Q} = \{Q_1 x R_4, Q_2 y, (e,i,q,p,l),(f,m,t)\}$.

Damit haben wir k knoten-disjunkte Pfade in G gefunden.

Feedback, Fragen und Vorschläge zur Großübung gerne an:

a.heindl@tu-berlin.de