Def. Bipartiter Graph

Ein Graph heißt bipartit, falls es Knotenmengen $A, B \subseteq V$ gibt, mit:

1) $V = A \cup B$
2) $\forall e \in E$: $e \cap A \neq \emptyset$ und $e \cap B \neq \emptyset$

↳ Keine Kanten innerhalb einer Partitionsklasse

Aufgabe 1

Sei G ein bipartiter Graph mit Farbklassen A und B und P ein Pfad in G.

Erinnerung: Die *Länge* eines Pfades is die Anzahl seiner Kanten.

Zeigen Sie, dass die Endpunkte von P die gleiche Farbe haben (d.h. beide in A, oder beide in B liegen) genau dann, wenn P gerade Länge hat.

Da G bipartit ist, hat jede Kante einen Endpunkt in A und in B. In jedem Schritt (eine Kante traversieren) wechselt man also die Partitionsklasse. Damit beginnt und endet ein Pfad also genau dann in der selben Klasse, wenn er eine gerade Länge hat.

Lösung zu Aufgabe 1

Wir zeigen die Behauptung mittels vollständiger Induktion über die Länge ℓ des Pfades P.

IA: $\ell = 0$, $\ell = 1$. Im Fall $\ell = 0$ besteht P aus genau einem Knoten und damit haben beide Endpunkte die gleiche Farbe. Im Fall $\ell = 1$ besteht P aus einer einzelnen Kante und damit können die beiden Endpunkte von P, die nun Nachbarn sind, nicht die gleiche Farbe haben.

IV: Die Endpunkte eines Pfades P der Länge höchstens ℓ haben genau dann die gleiche Farbe, wenn ℓ gerade ist.

IS: Sei P ein Pfad der Länge $\ell + 1$ und x, y die beiden Endpunkte von P.

Zunächst betrachten wir den Pfad $P' := P - x$ mit Endpunkten x' und y, dann hat P' Länge ℓ. Nach IV haben x' und y die gleiche Farbe genau dann, wenn ℓ gerade ist. Da x und x' benachbart sind in G, haben sie unterschiedliche Farben. Somit haben die Endpunkte von P genau dann unterschiedliche Farben, wenn die Endpunkte von P' die gleiche Frabe haben. Zudem haben die Pfade P' und P unterschiedliche Parität, da $\ell + 1 - \ell = 1$ ist. Es folgt, dass die Endpunkte von P genau dann die gleiche Farbe haben, wenn $\ell + 1$ gerade ist.

Def. Matching

Ein Matching M in G ist eine Menge von Kanten $M \subseteq E$, sodass gilt:

$e \cap h = \emptyset$ für alle $e, h \in M$ mit $e \neq h$.

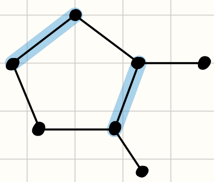
↳ Kanten haben keine gemeinsamen Endpunkte

↳ jeder Knoten $v \in V$ ist zu max. einer Kante $e \in M$ inzident.

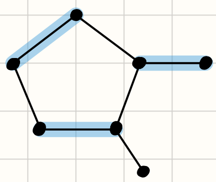
M heißt **maximal** (nicht erweiterbar), falls es kein $e \in E \setminus M$ gibt, sodass $M \cup \{e\}$ ein Matching ist.

M heißt **größtmöglich**, falls für jedes Matching $M' \subseteq E$ gilt: $|M'| \leq |M|$.

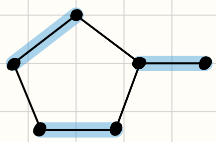
maximal



größtmöglich



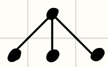
perfekt



M heißt **perfekt**, falls es $\forall v \in V$ eine Kante $e_v \in M$ mit $v \in e_v$ gibt (also $2 \cdot |M| = |V|$)

↳ jeder Knoten $v \in V$ ist inzident zu genau einer Matchingkante $e \in M$.

Insb. kann G nur dann ein perfektes Matching besitzen, falls $|V|$ gerade ist.

↳ Bed. ist nicht hinreichend! So hat z.B.  kein perfektes Matching.

Allgemein gilt also perfekt $\Rightarrow$ größtmöglich $\Rightarrow$ maximal,

aber die Rückrichtungen sind i.A. falsch!

Für $S \subseteq V$ heißt M_S **Matching von S in G**, falls $S \subseteq V(M_S)$ gilt.

↳ jeder Knoten $s \in S$ ist Endpunkt einer Matchingkante $e \in M$.

Für $G = (A \cup B, E)$ bipartit ist M genau dann ein Matching von A (B),

falls $|M| = |A|$ ($|M| = |B|$) gilt.

↳ „$\Leftarrow$" da jede Kante $e \in M$ einen anderen Endpunkt in A besitzt, und es $|A|$ viele solcher Kanten gibt, gibt es für alle $a \in A$ ein $e_a \in M$ mit $a \in e_a$. ($\Rightarrow A \subseteq V(M)$)

„$\Rightarrow$" da M Matching von A ist, gilt nach Def. $|M| \geq |A|$, da jeder Knoten in A zu einer anderen Matchingkante inzident sein muss (da G bipartit).

Die Ungleichung $|M| \leq |A|$ gilt für allg. Matchings in bipart. Graphen. ($\Rightarrow |M| = |A|$)

Satz von Hall

Ist $G = (A \cup B, E)$ **bipartit**, so gilt:

Es gibt ein Matching von A in G $\iff$ $\forall S \subseteq A: |N_G(S)| \geq |S|$ („$\Rightarrow$" ist klar)

Satz von König:

Ist $G = (A \cup B, E)$ **bipartit**, so gilt:

Ist $\tilde{X} \subseteq V$ ein kleinstmögliches Vertex Cover und $\tilde{M}$ ein größtmögliches Matching, so gilt $|\tilde{X}| = |\tilde{M}|$ („$\geq$" gilt für allg. G)

Erinnerung: Vertex Cover

Eine Knotenmenge $X \subseteq V$ heißt Vertex Cover, falls gilt:

$\forall e \in E: \; e \cap X \neq \emptyset$ also: Für jede Kante $e = \{a, b\} \in E$ ist $a \in X$ oder $b \in X$

Zusammenhang: Matching und Vertex Cover in allg. Graphen

Sei $M \subseteq E$ ein bel. Matching in G. Da für $e, f \in M$ mit $e \neq f$ immer $e \cap f = \emptyset$ gilt, ist schon klar: Es gilt $|X| \geq |M|$ für jedes Vertex Cover $X \subseteq V$.

Einschub

Sei $G = (A \cup B, E)$ ein bipartiter Graph für die Partition in A und B.

(ii) Zeige ohne den Satz von Hall oder den Satz von König zu nutzen: Wenn eine Menge $A' \subseteq A$ existiert mit $N(A') < A'$, dann existiert ein Vertex Cover X von G mit $|X| < |A|$.

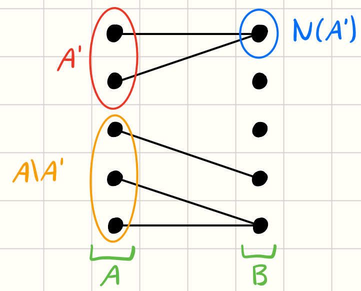
Wir setzen $X := N(A') \cup (A \setminus A')$.

Dann ist $|X| = |N(A')| + |A \setminus A'| < |A'| + |A \setminus A'| = |A|$

und X ist ein Vertex Cover, denn für $e = \{a, b\} \in E$ gilt:

Fall 1: $a \in A' \Rightarrow b \in N(A') \subseteq X \Rightarrow e \cap X \neq \emptyset$

Fall 2: $a \in A \setminus A' \Rightarrow a \in X \Rightarrow e \cap X \neq \emptyset$

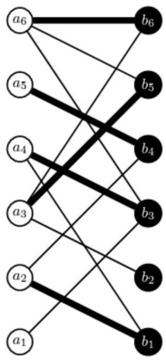


Oder unter Benutzung von Hall und König:

Wegen $|N(A')| < |A'|$ gibt es nach Hall kein Matching von A.
Insbesondere gilt also für ein größtmögliches Matching $M \subseteq E$, dass $|M| < |A|$ ist. Nach dem Satz von König existiert somit auch ein Vertex Cover $X \subseteq V$ von G mit $|X| < |A|$.

Lösung zu Aufgabe 2

(i)



(ii) Wir betrachten die Menge $S := \{a_1, a_2, a_4, a_5\}$. Die Nachbarschaft $N(S) = \{b_1, b_3, b_4\}$ enthält nur drei Knoten während $S = 4$. Nach dem Satz von Hall gibt es also kein Matching von $\{a_1, \ldots, a_6\}$ nach $\{b_1, \ldots, b_6\}$, also kein Matching der Größe 6 in G. Da unser Matching aus Aufgabenteil *(i)* fünf Kanten enthält, muss es sich um ein Maximum Matching handeln und darum kann es kein größeres Matching geben.

(iii) Jeder Knoten aus A kann nur Nachbarn in B haben, das heißt für jeden Knoten in A haben wir maximal $|B|$ Kanten. Das macht insgesamt $|A| \cdot |B|$ viele Kanten.

(i) Geben Sie ohne Begründung ein Maximum Matching in G an.

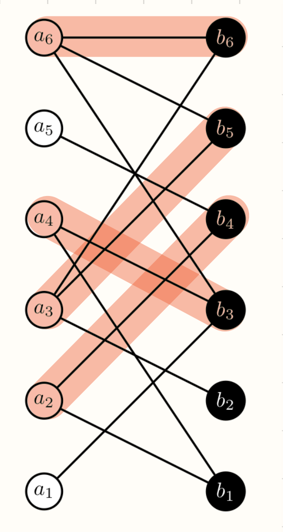
(ii) Zeigen Sie, dass es kein größeres Matching geben kann.

Wie groß ist ein größtmögliches Matching in G?

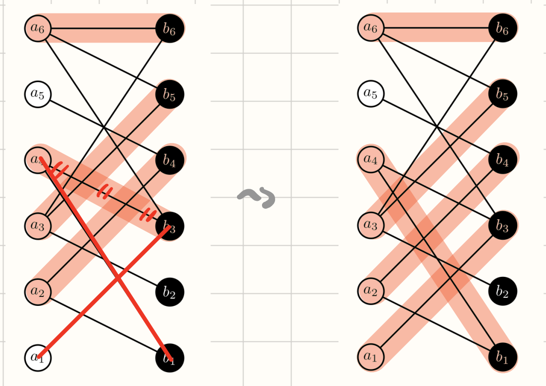
Die Knoten $S := \{a_1, a_2, a_4, a_5\}$ haben die Nachbarschaft

$N(S) = \{b_1, b_3, b_4\}$.

Also ist $|S| > |N(S)|$ und nach dem Satz von Hall kann es kein Matching der Größe $|A| = 6$ geben.



Dieses Matching ist maximal, da wir keine Kante mehr mit hinzunehmen können. Aber gibt es ein noch größeres? Durch einen alternierenden (und erweiternden) Pfad finden wir



und da dieses Matching 5 Kanten hat, handelt es sich um ein Maximum Matching.

(iii) Wie viele Kanten kann ein bipartiter Graph mit Farbklassen A und B haben?

Da G bipartit ist, gilt für alle $a \in A$: $N(a) \subseteq B$, wobei Gleichheit erlaubt ist.

$\Rightarrow$ Also gibt es maximal $|A| \cdot |B|$ viele Kanten.

Aufgabe 3

让我们考虑一个棋盘和以下声明：
声明：可以用多米诺骨牌覆盖棋盘，以便每个棋子正好覆盖棋盘的两个方格，并且没有方块被两个方块覆盖。

Wir betrachten ein Schachbrett und die folgende Behauptung:

Behauptung: Es ist möglich ein Schachbrett mit Dominosteinen zu überdecken, sodass jeder Stein genau zwei Felder des Bretts abdeckt und kein Feld von zwei Steinen abgedeckt wird.

Ein Matching $M \subseteq E(G)$ in einem Graphen heißt perfekt, wenn für jeden Knoten $v \in V(G)$ eine Kante $e \in M$ existiert mit $v \in e$.

Verwenden Sie für die Lösungen dieser Aufgabe ausschließlich graphentheoretische Argumente.

(i) Modellieren Sie ein Schachbrett als bipartiten Graphen G, sodass partielle Überdeckungen mit Dominosteinen Matchings entsprechen.

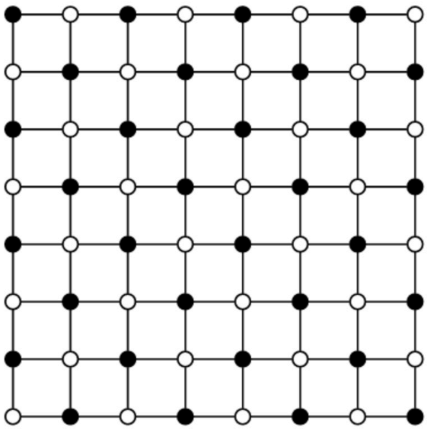
(ii) Zeigen Sie, dass es in dem Graphen ein perfektes Matching gibt.

(iii) Sei nun $H \subseteq G$ der Teilgraph, der das Schachbrett modelliert, aus dem die Felder $(A, 8)$ und $(H, 1)$ ausgesägt wurden. Zeigen Sie, dass es kein perfektes Matching mehr gibt. Folgern Sie, dass es keine Dominoüberdeckung gibt.

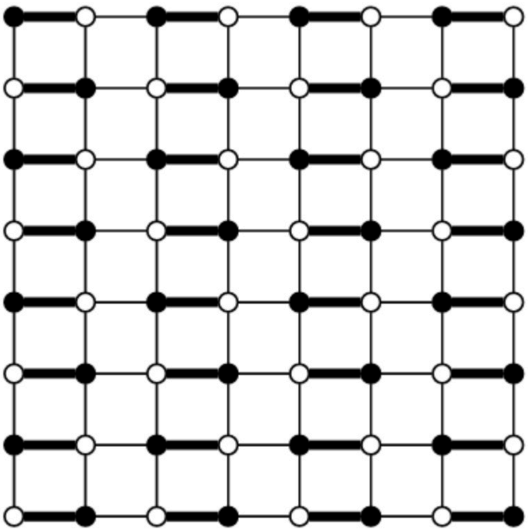
(iv) Zeigen Sie, dass ein bipartiter Graph nur dann ein perfektes Matching haben kann, wenn beide Seiten gleich groß sind.

Lösung zu Aufgabe 3

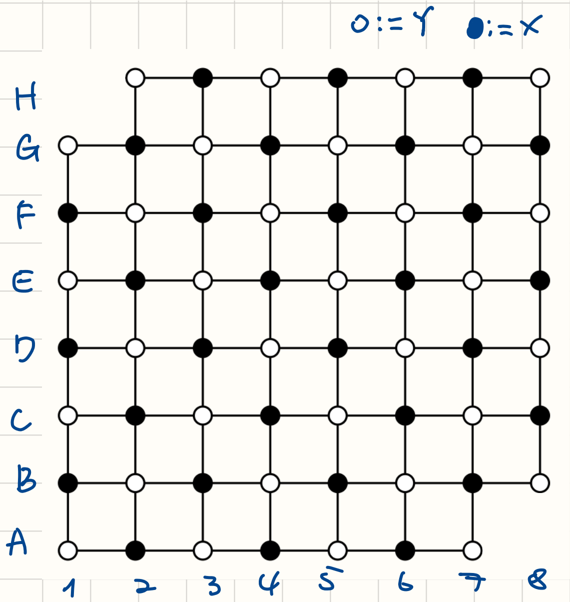
(i)



(ii)



(iii) Sei nun $H \subseteq G$ der Teilgraph, der das Schachbrett modelliert, aus dem die Felder $(A, 8)$ und $(H, 1)$ ausgesägt wurden. Zeigen Sie, dass es kein perfektes Matching mehr gibt. Folgern Sie, dass es keine Dominoüberdeckung gibt.



Sei $L = G - \{(A,8), (H,1)\}$.

Da G ein Schachbrett modelliert, gehörten $(A,8)$ und $(H,1)$ in G zur selben Partitionsklasse $=: X$.

Sei Y die andere Partitionsklasse, also $V(G) = X \cup Y$.

Beobachtung: $|X| = |Y|$ und $N_G(Y) = X$.

Mit $X_L := X \setminus \{(A,8), (H,1)\}$ gilt $V(L) = X_L \cup Y$ und weiter ist L natürlich noch bipartit.

Allerdings gilt

$$N_L(Y) = X_L \,, \quad |N_L(Y)| = |X_L| = |Y| - 2 < |Y|$$

und nach dem Satz von Hall kann L also kein perfektes Matching besitzen.

(iv) Zeigen Sie, dass ein bipartiter Graph nur dann ein perfektes Matching haben kann, wenn beide Seiten gleich groß sind.

Wir zeigen dies explizit mit dem Satz von Hall.

Sei $G = (A \cup B, E)$ bipartit. Ang. es gilt $|A| < |B|$.

Dann ist wegen der Bipartitheit

$$N_G(B) \subseteq A \quad \Rightarrow \quad |N_G(B)| \leq |A| < |B|$$

und nach Hall kann kein perfektes Matching existieren.

Also muss $|A| \geq |B|$ gelten und $|A| \leq |B|$ folgt analog.