Zusatzaufgaben 10

Aufgabe 1: Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen: Reguläre Ausdrücke

Hinweis: Es darf ohne Beweis benutzt werden, dass $L(e)$ *für einen regulären Ausdruck* e *regulär und* $\{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ *und* $\{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}^+ \}$ *nicht regulär aber kontextfrei sind. Sprachen* $L(e)$ *für reguläre Ausdrücke* e *sowie Operationen auf Mengen müssen nicht berechnet oder umgeformt werden.*

1.a) *Beweise:*

$$A_1 \triangleq \{ w \in \{ 0, 1 \}^* \mid w \in \{ 0^n \mid n \in \mathbb{N} \} \vee w \in \{ 1^n \mid n \in \mathbb{N} \} \vee w \in \{ 0^n 1^m \mid n, m \in \mathbb{N} \} \}$$

ist regulär.

Lösung

$A_1 = (L(0^*) \cup L(1^*)) \cup (L(0^*)\, L(1^*))$. Nach Theorem 2.4.4(2) ist $L(0^*) \cup L(1^*)$ regulär. Nach Theorem 2.4.4(3) ist $L(0^*)\, L(1^*)$ regulär. Damit ist nach Theorem 2.4.4(2) A_1 regulär.

Hinweis: A_1 *kann auch durch* $L(0^*)\, L(1^*)$ *oder* $L(0^* 1^*)$ *beschrieben werden, dann ist der Beweis entsprechend kürzer.*

/Lösung

1.b) Gegeben seien die Sprachen:

$$A_2 \triangleq L\big((a + b)^*\big)$$
$$A_3 \triangleq L\big((b + c)^*\big)$$
$$A_4 \triangleq \{ b^n, c^n \mid n \leqslant 3 \wedge n \in \mathbb{N} \}$$

Gib explizit an: $A_5 \triangleq (A_2 \cap A_3) \setminus A_4$

Lösung

$A_5 = \{ b^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n > 3 \}$

/Lösung

1.c) *Beweise:* A_5 ist regulär.

Lösung

$A_4 = L(\epsilon + b + bb + bbb + c + cc + ccc)$. Damit sind A_2, A_3 und A_4 regulär (, da sie über einen regulären Ausdruck definiert werden können). Nach Theorem 2.4.4 sind reguläre Sprachen unter Schnitt ($\cap$) und Differenz ($\setminus$) abgeschlossen. Damit ist auch $A_5 = (A_2 \cap A_3) \setminus A_4$ regulär.

/Lösung

1.d) *Beweise:* $A_6 \triangleq \left\{ a^n b^{n-1}, \varepsilon \mid n \in \mathbb{N}^+ \right\}$ ist nicht regulär.

Lösung

Angenommen, A_6 sei regulär. Dann ist auch $(A_6 \setminus L(\epsilon)) \cdot L(b) = \{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}^+ \}$ regulär, weil nach Theorem 2.4.4 reguläre Sprachen abgeschlossen bezüglich Differenz ($\setminus$) und Konkatenation ($\cdot$) sind. Das ist ein Widerspruch. Damit ist A_6 nicht regulär.

/Lösung

1.e) *Beweise:* $A_7 \triangleq \{ a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \wedge (n < m \vee m < n) \}$ ist nicht regulär.

Lösung

Angenommen, A_7 sei regulär. Dann ist auch $L(a^* b^*) \setminus A_7 = \{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ regulär, weil nach Theorem 2.4.4 reguläre Sprachen abgeschlossen bezüglich Differenz ($\setminus$) sind. Das ist ein Widerspruch. Damit ist A_7 nicht regulär.

/Lösung

1.f) *Beweise:* $A_8 \triangleq \{ a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \wedge n > m \}$ ist nicht regulär.

Lösung

Angenommen, A_8 sei regulär. Dann ist auch

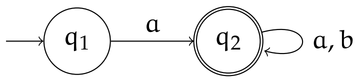
$$(A_8 \cdot L(b)) \cap \Big(\big(L\big((a + b)^*\big) \setminus A_8 \big) \cap L(a^* b^*) \Big) = \{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \}$$

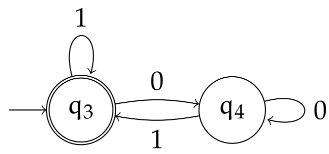
regulär, weil nach Theorem 2.4.4 reguläre Sprachen abgeschlossen bezüglich Differenz (\), Schnitt ($\cap$) und Konkatenation ($\cdot$) sind. Das ist ein Widerspruch. Damit ist A_8 nicht regulär.

/Lösung

Aufgabe 2: Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen: NFAs

Gegeben seien die NFAs $M_1 \triangleq (\{ q_1, q_2 \}, \{ a, b \}, \Delta_1, \{ q_1 \}, \{ q_2 \})$ und $M_2 \triangleq (\{ q_3, q_4 \}, \{ 0, 1 \}, \Delta_2, \{ q_3 \}, \{ q_3 \})$, wobei Δ_1 und Δ_2 durch die folgenden Graphen gegeben sind:

Δ_1: 

Δ_2: 

2.a) *Gib* die Sprachen $L(M_1)$ und $L(M_2)$ *an*, ohne auf eine Grammatik oder einen Automaten zu verweisen.

Lösung

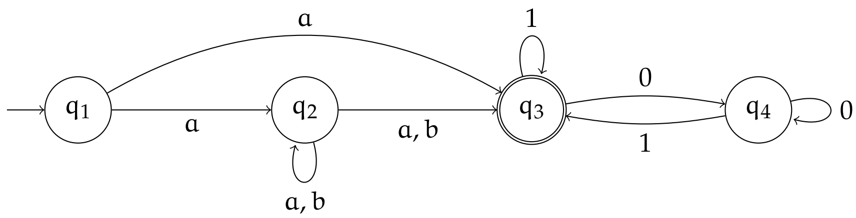
$$L(M_1) = \{ aw \mid w \in \{ a, b \}^* \} = L\big(a\,(a+b)^*\big)$$
$$L(M_2) = \left\{ 1, 0^n 1 \mid n \in \mathbb{N}^+ \right\}^* = L\big((1+00^*1)^*\big)$$

/Lösung

2.b) *Gib* einen endlichen Automaten M_3 *an*, der genau die Sprache $L(M_1) \cdot L(M_2)$ akzeptiert.

Lösung

$M_3 \triangleq (\{ q_1, q_2, q_3, q_4 \}, \{ a, b, 0, 1 \}, \Delta_3, \{ q_1 \}, \{ q_3 \})$, wobei Δ_3 durch den folgenden Graphen gegeben ist:

Δ_3 : 

/Lösung

Aufgabe 3: Syntaxbäume und Normalformen

Gegeben sei ein Alphabet $\Sigma_1 \triangleq \{ a, b \}$ und die Grammatiken $G_1 \triangleq (\{ S, A, B \}, \Sigma_1, P_1, S)$ und $G_2 \triangleq (\{ S, A \}, \Sigma_1, P_2, S)$ mit

$$\begin{array}{llll} P_1: & S & \to & \varepsilon \mid aA \mid bB \\ & A & \to & a \mid aA \\ & B & \to & b \mid bB \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} P_2: & S & \to & a \mid b \\ & S & \to & aAA \mid bAA \\ & A & \to & ab \end{array}$$

sowie die Ableitung σ_1 mit

$$\sigma_1 \triangleq S \Rightarrow_{G_2} bAA \Rightarrow_{G_2} babA \Rightarrow_{G_2} babab$$

und die Ableitungen σ_2 mit

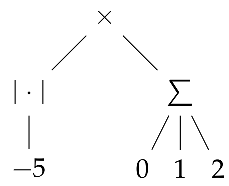
$$\sigma_2 \triangleq S \Rightarrow_{G_2} aAA \Rightarrow_{G_2} aAab \Rightarrow_{G_2} aabab$$

3.a) Gegeben sei eine Menge K aller Knotenmarkierungen, eine Menge $L \triangleq \{ -5,\ 0,\ 1,\ 2,\ \times,\ |\cdot|,\ \sum \}$, ein geordneter Baum $B \subset K$ mit $B \triangleq \{ \langle\rangle,\ \langle 1\rangle,\ \langle 2\rangle,\ \langle 1,\ 1\rangle,\ \langle 2,\ 1\rangle,\ \langle 2,\ 2\rangle,\ \langle 2,\ 3\rangle \}$ und eine Abbildung $f : B \to L$ mit:

$$f \triangleq \{ (\langle\rangle,\ \times),\ (\langle 1\rangle,\ |\cdot|),\ (\langle 2\rangle,\ \sum),\ (\langle 1,\ 1\rangle,\ -5),\ (\langle 2,\ 1\rangle,\ 0),\ (\langle 2,\ 2\rangle,\ 1),\ (\langle 2,\ 3\rangle,\ 2) \}$$

Gib den L-beschrifteten Baum (B, f) grafisch *an*.

Lösung

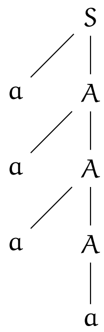


L-beschrifteter Baum (B, f)

/Lösung

3.b) *Gib* für alle möglichen Ableitungen des Wortes $aaaa$ bezüglich der Grammatik G_1 den entsprechenden Syntaxbaum *an*.

Lösung

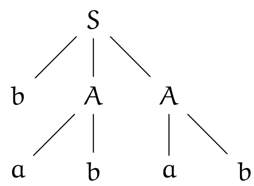


Syntaxbaum (B, syn)

/Lösung

3.c) *Gib* den zu σ_1 gehörigen Syntaxbaum *an*.

Lösung

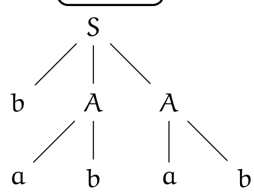


Syntaxbaum (B, syn)

/Lösung

3.d) *Gib* den zu σ_2 gehörigen Syntaxbaum *an*.

Lösung



Syntaxbaum (B, syn)

/Lösung

3.e) *Begründe:* G_2 ist eindeutig.

Lösung

Die Grammatik G_2 ist vom Typ 2 (vergleiche mit Tutorium 5 Grammatik G_4 aus Aufgabe 3). Die von der Grammatik G_2 erzeugte Sprache $L(G_2) = a, aabab, b, babab$ ist endlich. Jedes dieser vier Wörter hat genau einen Syntaxbaum. Für die Wörter a und b ist das trivial. Für die Wörter $aabab$ und $babab$ haben wir die Ableitungen σ_1 und σ_2 gesehen. Alle anderen Ableitungen für die beiden Wörter hätten lediglich eine andere Reihenfolge als die angegebenen Ableitungen. Der Syntaxbaum für diese Ableitungen sieht jeweils immer gleich aus.

/Lösung

3.f) *Begründe:* Ist G_1 eine CNF-Grammatik?

Lösung

Nein, denn zB die Produktionsregel $S \to aA$ enthält auf der rechten Seite sowohl ein Terminal als auch ein Nichtterminal. Somit ist G_1 nicht in der Chomsky-Normalform.

/Lösung

3.g) *Begründe:* Ist G_2 eine CNF-Grammatik?

Lösung

Nein, denn zB die Produktionsregel $S \to aAA$ enthält auf der rechten Seite sowohl ein Terminal als auch Nichtterminale. Somit ist G_2 nicht in der Chomsky-Normalform.

/Lösung