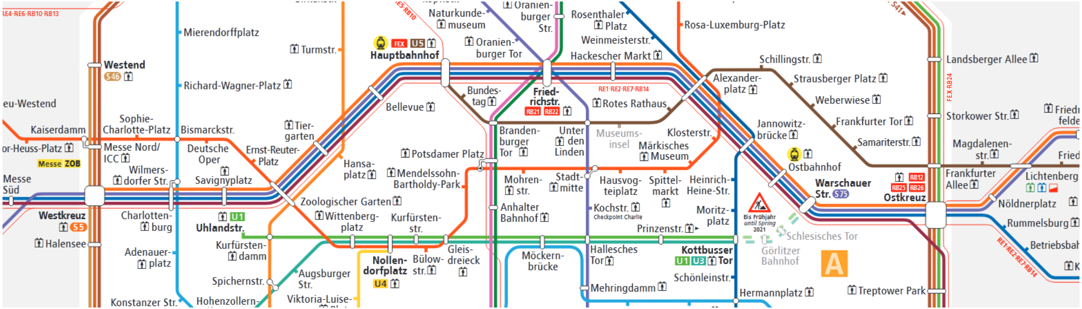
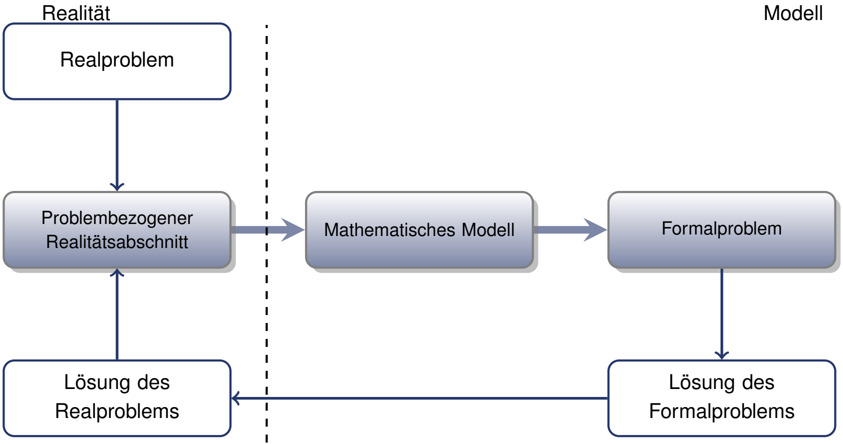
Agenda

Agenda

- Ein Modell ist ein vereinfachtes, zweckorientiertes Abbild eines realen Systems.
- Operations Research beschäftigt sich mit Analysemodellen.
- Verschiedene analytische Modelltypen:
  - Entscheidungsmodelle/Optimierungsmodelle
  - Simulationsmodelle
  - Prognosemodelle
  - . . .



Von der Realität zum Modell



Optimierungsmodelle

Leonid Vitaliyevich Kantorovich

Leben:

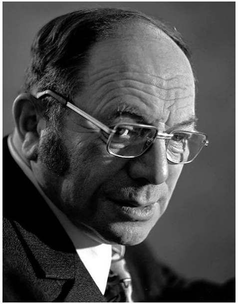
- *19.01.1912 (St. Petersburg), †07.04.1986 (Moskau)
- 1926 Mathematikstudium an der Staatlichen Universität Leningrad
- 1934 Professor in Leningrad, Novosibirsk (1935 Doktortitel)
- 1971 Direktor des Forschungslabors des Instituts für nationale ökonomische Planung in Moskau

Hauptwerk:

- „The mathematical method of production planning and organization“

Wirkung:

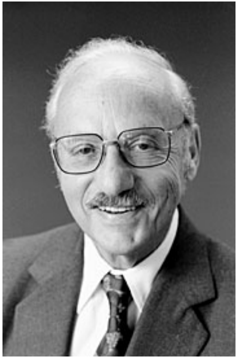
- Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften (1975) mit Tjalling Koopmans
- Beiträge zur linearen und dynamischen Programmierung
- Lenin-Preis (1965)
- Ehrendoktorwürde der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg (1984)
- Seit 2000 „L. V. Kantorovich-Forschungspreis“



George B. Dantzig

Leben:

- *08.11.1914 (Portland) †13.05.2005 (Palo Alto)
- Sohn europäischer Emigranten, wuchs in armen Verhältnissen auf
- Studium der Mathematik und Physik an den Universitäten von Maryland und Michigan
- 1946: Promotion an der UCLA, Berkeley
- arbeitete für die U.S. Airforce, das us-amerikanische Verteidigungsministerium und die RAND Corporation



Hauptwerk:

- „Linear programming and extensions“ (1963)

Wirkung:

- Vater der Linearen Optimierung
- Simplex-Algorithmus
- Auszeichnungen: Von Neumann Theory Prize (1975), National Medal of Science (1976)

Unter einem linearen Optimierungs- oder Programmierungsproblem (LP-Problem oder LP) versteht man die Aufgabe, eine lineare (Ziel-)Funktion unter der Beachtung von linearen Nebenbedingungen (= Restriktionen) zu maximieren (oder minimieren).

Maximiere

$$F(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j$$

Unter den Nebenbedingungen (subject to, s.t.)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, n \text{ und } j = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0$$

Ablauf des Planungsprozesses

Erkennen und Analysieren eines Problems

↓

Bestimmen von Zielen und Handlungsmöglichkeiten

↓

Mathematisches Modell

↓

Datenbeschaffung

↓

Lösungsfindung

↓

Bewerten der Lösung

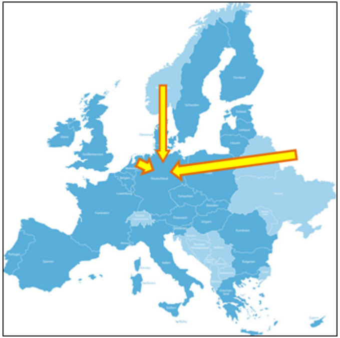
Aktuelle Situation in Deutschland

Jährliche Nachfrage nach Gas in Deutschland:

- 84 Mrd. m^3,
- davon Eigenproduktion: 8 Mrd. m^3

Deutschland bezieht zurzeit Erdgas aus Russland, Norwegen und den Niederlanden:

- Importmenge aus Russland: 31 Mrd. m^3
- Importmenge aus Norwegen: 22 Mrd. m^3
- Importmenge aus den Niederlanden: 23 Mrd. m^3



Problemstellung – Ukraine-Krise

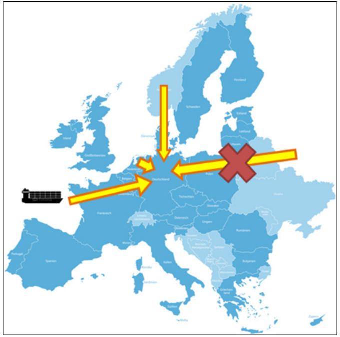
Durch die aktuellen politischen Entwicklungen, ausgelöst durch die Krim-Krise, haben sich Spannungen zwischen der EU und Russland aufgebaut. Nachdem die Krim bereits an Russland angegliedert wurde, drohen neue Unruhen in der Ostukraine den Konflikt zu verschärfen. Die Bundesregierung fordert den Verzicht Russlands auf einen militärischen Einsatz in der Ukraine. Inmitten dieser Ereignisse hat Russland bereits die Gaspreise für die Ukraine um 50 % erhöht.

- Welchen Einfluss könnte ein Ausfall der russischen Gasexporte auf die deutsche Versorgungssicherheit haben?
- Wie können wir diesen Einfluss in einem Modell abbilden?

Aufgabenstellung

Stellen Sie sich nun vor, Russland stellt aufgrund dieser Entwicklungen seinen Gasexport in die EU ein. Um die Nachfrage zuverlässig decken zu können besteht die Möglichkeit, zusätzlich zu den Importen aus den Niederlanden und Norwegen, Flüssiggas über verschiedene Terminals zu beziehen. Hierdurch ist auch der Gasimport aus Übersee möglich.

- Wie können wir möglichst kostenminimal unseren Bedarf decken?



Ein einfaches Modell zur Veranschaulichung

Das gegebene Problem kann als Lineares Problem formuliert werden und mit Hilfe des Simplex-Algorithmus gelöst werden. Als zusätzliche Bedingungen soll Folgendes gelten:

- Aus politischen Gründen müssen wir insgesamt mindestens 50 % unserer Importmengen aus EWR-Mitgliedsstaaten und Norwegen beziehen.
- Sie können bei Ausfall der Versorgung durch Russland Flüssiggas (LNG) von zwei verschiedenen Terminals beziehen.

Ziel: Berechnung einer kostenminimalen (neuen) Importstruktur für die Erdgasversorgung

Zum Vergleich berechnen Sie zudem auch noch eine optimale Importstruktur mit Russland (und ohne LNG)!

给定的问题可以被表述为线性问题，并且可以使用单纯形算法来解决。以下是额外的条件：

▶️ 出于政治原因，我们必须总体上至少从欧洲经济共同体成员国和挪威进口的数量达到50%。

▶️ 在俄罗斯供应中断的情况下，您可以从两个不同的液化天然气（LNG）终端进口。目标：计算一个成本最低的（新的）天然气进口结构。

为了比较，您还需要计算一个与俄罗斯（没有LNG）的最佳进口结构！

LP-Formulierung - Bezeichnung

Importmengen:

x_{NL} – Menge des bezogenen Gas aus den Niederlanden (*NL*) in Mrd. Kubikmeter (m^3)

x_{NOR} – Menge des bezogenen Gas aus Norwegen (*NOR*) in Mrd. m^3

x_{RU} – Menge des bezogenen Gas aus Russland (*RU*) in Mrd. m^3

x_{LNG1} – Menge des bezogenen Liquified Natural Gas von Terminal 1 (LNG_1) in Mrd. m^3

x_{LNG2} – Menge des bezogenen Liquified Natural Gas von Terminal 2 (LNG_2) in Mrd. m^3

Kosten (Summe aus Produktions- und Transportkosten):

a – Kosten für Import aus *NL* in Mio. Euro pro Mrd. m^3 Gas

b – Kosten für Import aus *NOR* in Mio. Euro pro Mrd. m^3 Gas

c – Kosten für Import aus *RU* in Mio. Euro pro Mrd. m^3 Gas

d – Kosten für Import aus LNG_1 in Mio. Euro pro Mrd. m^3 Gas

e – Kosten für Import aus LNG_2 in Mio. Euro pro Mrd. m^3 Gas

LP-Formulierung - Bezeichnung

Kapazitäten:

cap_{NL} – Kapazität für Import aus NL in Mrd. m^3 Gas pro Jahr
cap_{NOR} – Kapazität für Import aus NOR in Mrd. m^3 Gas pro Jahr
cap_{RU} – Kapazität für Import aus RU in Mrd. m^3 Gas pro Jahr
cap_{LNG1} – Kapazität für Import von LNG1 in Mrd. m^3 Gas pro Jahr
cap_{LNG2} – Kapazität für Import von LNG2 in Mrd. m^3 Gas pro Jahr

Nachfrage: dem_{DEU} – Gasimportnachfrage in Deutschland in Mrd. m^3 Gas pro Jahr

Gesamtkosten: z – Gesamtkosten für die Befriedigung der deutschen Gasnachfrage in Mio. Euro

Allgemeine LP-Formulierung

Zielfunktion:

$$\min z = ax_{NL} + bx_{NOR} + cx_{RU} + dx_{LNG1} + ex_{LNG2}$$

Nebenbedingungen:

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.} \qquad x_{NL} &\leq cap_{NL} \\
x_{NOR} &\leq cap_{NOR} \\
x_{RU} &\leq cap_{RU} \\
x_{LNG1} &\leq cap_{LNG1} \\
x_{LNG2} &\leq cap_{LNG2} \\
x_{NL} + x_{NOR} + x_{RU} + x_{LNG1} + x_{LNG2} &\geq dem_{DEU} \\
x_{NL} + x_{NOR} &\geq 0{,}5 \cdot dem_{DEU} \\
x_{NL}, x_{NOR}, x_{RU}, x_{LNG1}, x_{LNG2} &\geq 0
\end{aligned}
$$

Daten

Gasnachfrage in Deutschland: 84 Mrd. m^3, davon 8 Mrd. m^3 Eigenproduktion

Land	Kapazität in Mrd. m^3 pro Jahr	Produktionskosten in Mio. € pro Mrd. m^3	Transportkosten in Mio. € pro Mrd. m^3
NOR	27	54	16
NL	28	65	5
LNG_1	15	88	45
LNG_2	12	88	50
RU	35	36	38

Kapazitäten und Kosten der möglichen Importländer

LP-Formulierung mit Daten – mit Russland

Zielfunktion:

$$\min z = 70x_{NL} + 70x_{NOR} + 72x_{RU} + 133x_{LNG1} + 138x_{LNG2}$$

Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad x_{NL} &\leq 28 \\
x_{NOR} &\leq 27 \\
x_{RU} &\leq 35 \\
x_{LNG1} &\leq 15 \\
x_{LNG2} &\leq 12 \\
x_{NL} + x_{NOR} + x_{RU} + x_{LNG1} + x_{LNG2} &\geq 76 \\
x_{NL} + x_{NOR} &\geq 0{,}5 \cdot 76 \\
x_{NL}, x_{NOR}, x_{RU}, x_{LNG1}, x_{LNG2} &\geq 0
\end{aligned}$$

LP-Formulierung mit Daten – ohne Russland

Zielfunktion:

$$\min z = 70x_{NL} + 70x_{NOR} + 72x_{RU} + 133x_{LNG1} + 138x_{LNG2}$$

Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad x_{NL} &\leq 28 \\
x_{NOR} &\leq 27 \\
x_{RU} &\leq 0 \\
x_{LNG1} &\leq 15 \\
x_{LNG2} &\leq 12 \\
x_{NL} + x_{NOR} + x_{RU} + x_{LNG1} + x_{LNG2} &\geq 76 \\
x_{NL} + x_{NOR} &\geq 0{,}5 \cdot 76 \\
x_{NL}, x_{NOR}, x_{RU}, x_{LNG1}, x_{LNG2} &\geq 0
\end{aligned}$$

Lösung des Problems

Lösungsfindung

- Graphische Lösung: Hier nicht möglich, da 5-dimensional
- Simplex-Algorithmus: Nächste Woche

Bewertung der Lösung

- Sinnhaftigkeit der Lösung überprüfen, speziell im Hinblick auf bei der Modellbildung vernachlässigte Aspekte (Validierung)

LP-Umformung

Jedes LP kann als Maximierungsproblem

$$\max F(x_1, \dots, x_p) = \sum_{j=1}^{p} c_j \cdot x_j$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \quad \text{für } 1 \leq i \leq m$$

$$x_j \geq 0 \quad \text{für } 1 \leq j \leq p$$

oder als Minimierungsproblem dargestellt werden

$$\min -F(x_1, \dots, x_p) = -\sum_{j=1}^{p} c_j \cdot x_j$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \quad \text{für } 1 \leq i \leq m$$

$$x_j \geq 0 \quad \text{für } 1 \leq j \leq p$$

Im Folgenden bezeichnen wir $F(x_1, \dots, x_p)$ mit z für Zielfunktionswert.

Allgemeine Form

$$\max z = \sum_{j=1}^{p} c_j \cdot x_j \qquad \text{Zielfunktion}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} \cdot x_j &\leq b_i \text{ für } 1 \leq i \leq m_1 \\
\sum_{j=1}^{p} a_{ij} \cdot x_j &\geq b_i \text{ für } m_1 + 1 \leq i \leq m_2 \qquad \text{Nebenbedingungen} \\
\sum_{j=1}^{p} a_{ij} \cdot x_j &= b_i \text{ für } m_2 + 1 \leq i \leq m \\
x_j &\in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Allgemeine Form

$$\max z = \sum_{j=1}^{p} c_j \cdot x_j \qquad \text{Zielfunktion}$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \text{ für } 1 \leq i \leq m_1$$

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} \cdot x_j \geq b_i \text{ für } m_1 + 1 \leq i \leq m_2 \qquad \text{Nebenbedingungen}$$

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} \cdot x_j = b_i \text{ für } m_2 + 1 \leq i \leq m$$

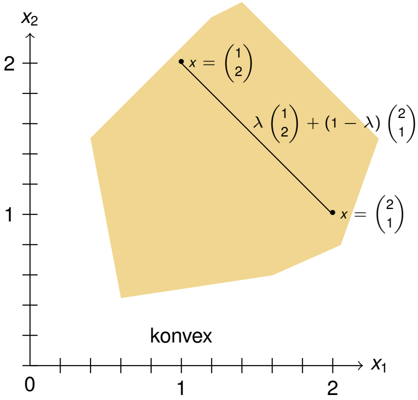
$$x_j \in \mathbb{R}$$

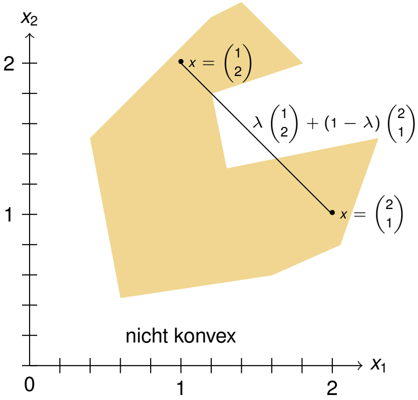
所有满足附加条件的点的集合被称为可行域。

Definition

Die Menge aller Punkte, die die Nebenbedingungen erfüllen, heißt **zulässiger Bereich**.

Konvexität von Mengen





Definition

Eine **Menge** $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn für alle $x_1, x_2 \in K$ auch $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \in K$, $\lambda \in [0,1]$.

Konvexität von Mengen

凸集的定义
设x1,...,xr是Rn中的点，且λ1 ≥0,...,λr ≥0，满足λ1 +...+λr =1。那么y :=λ1x1 +...+λrxr是x1,...,xr的凸线性组合。
如果对于所有系数λ1 > 0, . . . , λr > 0成立，那么y被称为真正的线性组合。

Definition

Seien $x_1, \ldots, x_r$ Punkte in $\mathbb{R}^n$ und seinen $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_r \geq 0$ mit $\lambda_1 + \ldots + \lambda_r = 1$. Dann heißt $y := \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_r x_{kr}$ **konvexe Linearkombination** von $x_1, \ldots, x_r$.

Gilt für alle Koeffizienten $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_r > 0$, so heißt y **echte Linearkombination**.

凸多面体的定义
所有有限点的凸线性组合的集合也称为由这些点张成的凸多面体。
凸集的角点定义
如果一个点y不能表示为凸集K中两个不同点的真正线性组合，则称y是凸集K的角点。

Definition

Die Menge aller konvexen Linearkombinationen endlich vieler Punkte wird auch das von diesen Punkten aufgespannte **konvexe Polyeder** genannt.

Definition

Ein Punkt y heißt **Eckpunkt** einer konvexen Menge K, wenn er sich nicht als echte Linearkombination zweier verschiedener Punkte in K darstellen lässt.

Konvexität von Mengen

Satz

Seien $K_1, \ldots, K_r$ konvexe Mengen mit endlich vielen Eckpunkten. Dann ist auch die Menge $K_1 \cap \ldots \cap K_r$ konvex mit endlich vielen Eckpunkten.

Beobachtung: Der zulässige Bereich eines LP ist stets konvex.

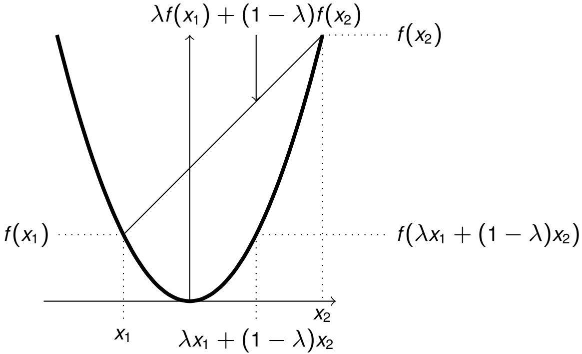
Beweis

Für jede einzelne Nebenbedingung gilt, dass die Menge der für das Problem zulässigen Punkte konvex ist. Der zulässige Bereich wird aus der Schnittmenge all dieser Mengen gebildet.

Konvexität von Funktionen

Definition

Eine **Funktion** f ist **konvex**, wenn für alle x_1, x_2 in $\mathbb{R}^n$ und für jedes $\lambda \in [0,1]$ gilt:
$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$.



Definition

Eine **Funktion** f ist **konvex**, wenn ihre Hessematrix $H(f(x))$ positiv semi-definit ist. Hierzu müssen entweder

a) alle Hauptminoren ≥ 0 oder

b) alle Eigenwerte ≥ 0 oder

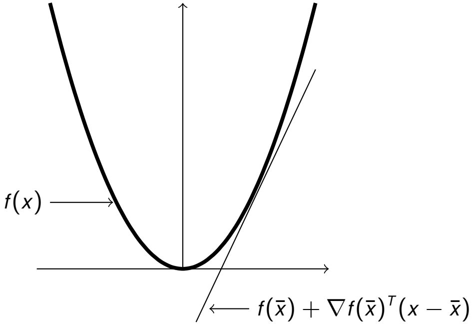
c) $x^T H(f(x))x \geq 0$.

一个函数 f 是凸函数，当且仅当其 Hesse 矩阵 H(f(x)) 是半正定的。其中，条件为：
a) 所有的主子式 ≥ 0；或者
b) 所有的特征值 ≥ 0；或者
c) 对于所有的 x，都有 x^T H(f(x)) x ≥ 0。

Konvexität von Funktionen (Tangenten)

Definition

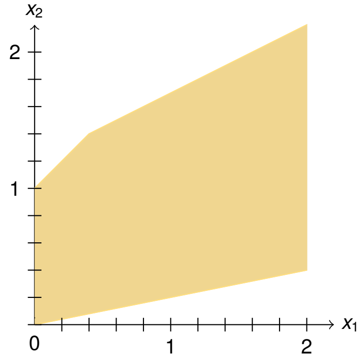
Eine **Funktion** f ist **konvex**, wenn $f(x) \geq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x})\ \forall x, \bar{x}$.



Der zulässige Bereich eines LP

Satz

Der zusässige Bereich eines LP ist konvex mit endlich vielen Eckpunkten.
(Dies kann auch bedeuten, dass der Bereich leer oder unbeschränkt ist.)



Der zulässige Bereich eines LP

Satz

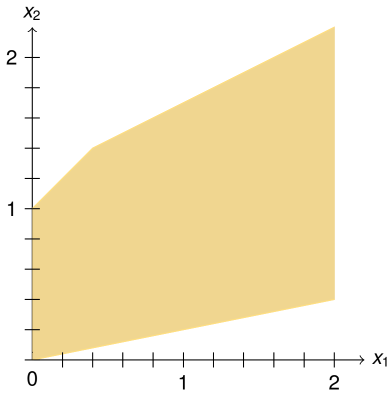
Sei z eine lineare Funktion, definiert über einer nicht leeren konvexen Menge mit endlich vielen Eckpunkten. Dann gilt: Wenn z nach oben beschränkt ist, so nimmt z das Maximum an mindestens einem der Eckpunkte an.
Ist der zulässige Bereich eines LP unbeschränkt, so gibt es folgende Fälle:

- Zielfunktion kann unbeschränkt wachsen
- Zielfunktion ist beschränkt, nimmt Optimum in einer der Ecken an

LP的可行域
定理
设 z 是定义在一个非空凸集合上、具有有限个顶点的线性函数。那么有：如果 z 有上界，那么 z 至少在其中一个顶点处取得最大值。
如果一个 LP 的可行域是无界的，那么存在以下情况：

- 目标函数可能无限增长
- 目标函数受限，取决于其中一个顶点上的最优解

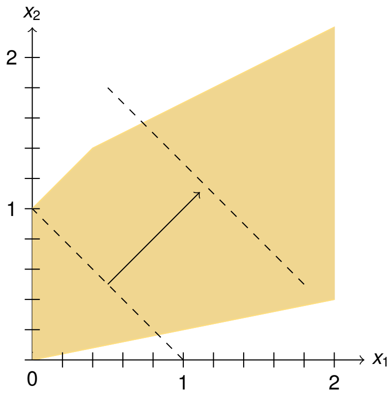
Graphische Lösung – Beispiel



Zulässiger Bereich

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad 0{,}2x_1 &\leq x_2 \\
1 + 1x_1 &\geq x_2 \\
1{,}2 + 0{,}5x_1 &\geq x_2 \\
x_{1,2} &\geq 0
\end{aligned}
$$

Graphische Lösung – Beispiel

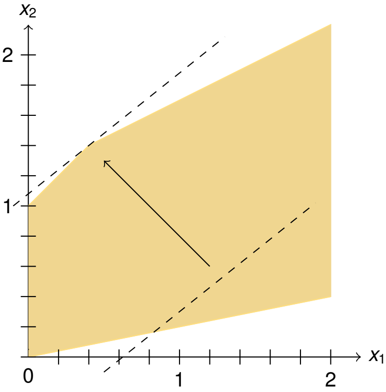


Die Zielfunktion wächst unbeschränkt

$$
\begin{aligned}
\max z = \quad & x_1 + x_2 & \\
\text{s.t.} \quad & 0{,}2x_1 & \leq x_2 \\
& 1 + 1x_1 & \geq x_2 \\
& 1{,}2 + 0{,}5x_1 & \geq x_2 \\
& x_{1,2} & \geq 0
\end{aligned}
$$

$L = \{\ \}$

Graphische Lösung – Beispiel

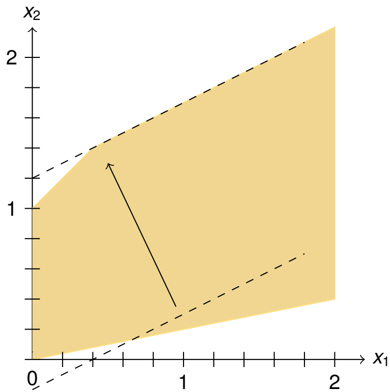


Maximum in einer Ecke

$$\begin{aligned} \max z = \quad & -0{,}8x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 0{,}2x_1 \le x_2 \\ & 1 + 1x_1 \ge x_2 \\ & 1{,}2 + 0{,}5x_1 \ge x_2 \\ & x_{1,2} \ge 0 \end{aligned}$$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 1{,}4 \end{pmatrix} \right\}$$

Graphische Lösung – Beispiel



Maximierung auf einem Strahl

$$
\begin{array}{rrl}
\max z = & -0{,}5x_1 + x_2 & \\
\text{s.t.} & 0{,}2x_1 & \leq x_2 \\
& 1 + 1x_1 & \geq x_2 \\
& 1{,}2 + 0{,}5x_1 & \geq x_2 \\
& x_{1,2} & \geq 0
\end{array}
$$

$$
L = \left\{ \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 1{,}4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
$$

$\lambda \geq 0$

Zusammenfassung - Modellbildung

- Ein Modell ist ein vereinfachtes, zweckorientiertes Abbild eines realen Systems.
- Die Kunst in der Modellbildung ist es, alle relevanten Informationen zu identifizieren. Gleichzeitig sollten irrelevante Informationen nicht berücksichtigt werden.
- Unter einem linearen Optimierungs- oder Programmierungsproblem (LP-Problem oder LP) versteht man die Aufgabe, eine lineare (Ziel-)Funktion unter der Beachtung von linearen Nebenbedingungen (= Restriktionen) zu maximieren (oder minimieren).
- Die gängigen Lösungsalgorithmen benötigen einen konvexen Lösungsraum. Lineare Probleme sind immer konvex.
- Ein Lineares Problem muss entweder keine, eine, oder unendlich viele optimale Lösungen haben. Es ist beispielsweise nicht möglich, dass ein Lineares Problem zwei optimale Lösungen hat.
- Dabei ist die optimale Lösung in einem LP immer in mindestens einem Eckpunkt zu finden.