Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen
(Tutorium 3)

Vorlesungswoche: 6. – 10. Mai 2024 — Sommersemester 2024

Aufgabe 7

Gegeben ist das lineare Anfangswertsproblem

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} & \frac{1}{2t^2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2t} \end{pmatrix} \vec{x}(t), \quad \vec{x}(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass die vektorwertigen Funktionen $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ mit

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ -1 \end{pmatrix}$$

zwei Lösungen des Systems sind.

(b) Stelle eine Wronski-Matrix auf, berechne ihre Determinante und entscheide an ihr, ob die angegebenen Funktionen $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ linear unabhängig sind.

(c) Löse das Anfangswertproblem.

Aufgabe 8

Ermittele mit dem Exponentialansatz die allgemeine Lösung von

(a) $$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}(t),$$ (b) $$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}(t).$$

Aufgabe 9

Zwei Zeitfunktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ erfüllen die Bilanzgleichungen

$$\begin{aligned} x_1'(t) + 3x_1(t) + 2x_2(t) &= 0 \\ x_2'(t) + x_1(t) + 2x_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

und haben die Anfangswerte $x_1(0) = 5$ und $x_2(0) = 1$. Bestimme x_1 und x_2.

Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen
(Tutorium 3)

Vorlesungswoche: 6. – 10. Mai 2024 | Sommersemester 2024

Aufgabe 7

Gegeben ist das lineare Anfangswertsproblem

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} & \frac{1}{2t^2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2t} \end{pmatrix} \vec{x}(t), \quad \vec{x}(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass die vektorwertigen Funktionen $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ mit

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ -1 \end{pmatrix}$$

zwei Lösungen des Systems sind.

(b) Stelle eine Wronski-Matrix auf, berechne ihre Determinante und entscheide an ihr, ob die angegebenen Funktionen $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ linear unabhängig sind.

(c) Löse das Anfangswertproblem.

Aufgabe 8

Ermittele mit dem Exponentialansatz die allgemeine Lösung von

(a) $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$, (b) $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$.

Aufgabe 9

Zwei Zeitfunktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ erfüllen die Bilanzgleichungen

$$x_1'(t) + 3x_1(t) + 2x_2(t) = 0$$
$$x_2'(t) + x_1(t) + 2x_2(t) = 0$$

und haben die Anfangswerte $x_1(0) = 5$ und $x_2(0) = 1$. Bestimme x_1 und x_2.

Homogene DGL-System 1. Ordnung (Aufgabe 8)

$$\boxed{\vec{x}\,'(t) = \underbrace{A}_{\text{Systemmatrix}}\vec{x}(t)}$$

① Eigenwerte von A

Characteristisches Polynom $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda$ sind Eigenwert

② Eigenvektoren von A

$(A - \lambda_i I)\vec{v}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow \vec{v}_i$ ist EV zu EW λ_i

③ Fundamentalsystem

Fundamentallösung $\vec{x}_i(t) = e^{\lambda_i t}\,\vec{v}_i$

FS
→ enthält eigenständige Lsg eines DGL-System
→ Lösungen müssen linear unabhängig sein

④ Allgemeine Lsg

$$\vec{x}(t) = c_1\,\vec{x}_1(t) + c_2\,\vec{x}_2(t) + \dots + c_n \cdot \vec{x}_n(t)$$

Wronski-Test → überprüft Lösungen eines homogenen DGL-System auf lineare Unabhängigkeit

Falls $\det(W(t))\,|_{t=r} \neq 0 \Rightarrow \vec{x}_1$ bis $\vec{x}_n$ sind linear unabhängig (Aufgabe 7)
$r \in \mathbb{R}$

Wronski-Matrix: $W(t) = \left(\vec{x}_1(t) \quad \vec{x}_2(t) \quad \dots \quad \vec{x}_n(t)\right)$

Aufgabe 7

Gegeben ist das lineare Anfangswertsproblem

$$\vec{x}\,'(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} & \frac{1}{2t^2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2t} \end{pmatrix}\vec{x}(t), \qquad \vec{x}(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass die vektorwertigen Funktionen $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ mit

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ -1 \end{pmatrix}$$

zwei Lösungen des Systems sind.

(b) Stelle eine Wronski-Matrix auf, berechne ihre Determinante und entscheide an ihr, ob die angegebenen Funktionen $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ linear unabhängig sind.

(c) Löse das Anfangswertproblem.

a) $\vec{x}_1\,'(t) = A\vec{x}_1(t)$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} & \frac{1}{2t^2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} + \frac{t}{2t^2} \\ \frac{1}{2} + \frac{t}{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_1(t) \text{ löst das DGL-System}$$

$\vec{x}_2\,'(t) = A\vec{x}_2(t)$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{t^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} & \frac{1}{2t^2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t^2} - \frac{1}{2t^2} \\ \frac{1}{2t} - \frac{1}{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t^2} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_2(t) \text{ löst das DGL-System}$$

b) Wronski-test

$$W(t) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{t} \\ t & -1 \end{pmatrix} \qquad \det(W(t)) = -1 - \frac{t}{t} = -1-1 = -2 \neq 0$$

$\Rightarrow \vec{x}_1 \quad \vec{x}_2$ sind linear unabhängig

c) Aus (a) und (b) folgt $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ bilden FS

$$\Rightarrow \vec{x}(t) = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ -1 \end{pmatrix}$$

AW: $\vec{x}(1) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 - c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = 2 \\ c_2 = 1 \end{matrix}$

$$\Rightarrow \vec{x}(t) = 2\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(AWP-Lsg)}$$

Aufgabe 8

Ermittele mit dem Exponentialansatz die allgemeine Lösung von

$$\text{(a)}\ \vec{x}\,'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}(t), \qquad \text{(b)}\ \vec{x}\,'(t) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}(t).$$

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Dreieckmatrix → Diagonale enthält EW

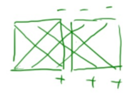
① EW

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_{2,3} = 3$

Weg 2:

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \\ -2 & 1 \end{matrix}$$



$= -(-2)(3-\lambda)\cdot(0) - 0 - 0 + (3-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) + 0 + 0$

$= (3-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) = 0$

② EV

EV zu $\lambda_1 = 2$: $(A - 2I)\vec{v_1} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ I: $v_1 = 0$

II: $v_2 = 0$

III: $-2\cancel{v_1} + \cancel{v_2} + 0 \cdot v_3 = 0$ w.A.

$\Rightarrow v_3$ ist beliebig

$\Rightarrow \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix} \overset{\text{z.B. } v_3 = 1}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

EV zu $\lambda_{2,3} = 3$: $(A - 3\lambda)\vec{v_2} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow -2v_1 + v_2 - v_3 = 0$

$\Rightarrow \quad v_2 = 2v_1 + v_3$

z.B. $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (PS: $\vec{v_2}, \vec{v_3}$ 是 unabhängig
因此 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ 不可一起)

③ FS $\vec{x}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\, \vec{v}_1 = e^{2t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\vec{x}_2(t) = e^{3t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{x}_3(t) = e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

④ Allgemein Lsg: $\vec{x}(t) = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + c_3 e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

(b) $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\vec{x}(t).$

① EW $P_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix}4-\lambda & 1 & 1\\ 2 & 2-\lambda & 3\\ 1 & 0 & -1-\lambda\end{pmatrix}\begin{matrix}4-\lambda & 1\\ 2 & 2-\lambda\\ 1 & 0\end{matrix}$

$= (4-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) + 3 + 0 - (2-\lambda) - 0 + 2(1+\lambda)$

$= -\lambda^3 + 5\lambda^2 + \lambda - 5 = 0$ $\underset{\text{raten}}{\Rightarrow} \lambda_1 = 1$

$(-\lambda^3 + 5\lambda^2 + \lambda - 5) : (\lambda - 1) = -\lambda^2 + 4\lambda + 5 = -(\lambda-5)(\lambda+1)$

$\underline{-\lambda^3 + \lambda^2}$

$4\lambda^2 + \lambda$

$\underline{4\lambda^2 - 4\lambda}$

$5\lambda - 5$

$\Rightarrow \lambda_2 = -1$

$\lambda_3 = 5$

Aufgabe 9

Zwei Zeitfunktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ erfüllen die Bilanzgleichungen

$$x_1'(t) + 3x_1(t) + 2x_2(t) = 0$$
$$x_2'(t) + x_1(t) + 2x_2(t) = 0$$

und haben die Anfangswerte $x_1(0) = 5$ und $x_2(0) = 1$. Bestimme x_1 und x_2.

$$x_1'(t) = -3x_1(t) - 2x_2(t)$$
$$x_2'(t) = -x_1(t) - 2x_2(t)$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

① EW $\quad \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -3-\lambda & -2 \\ -1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (-3-\lambda)(-2-\lambda) - 2 = 0$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 5\lambda + 6 - 2 = 0 = \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -4$$

② EV

$$(A + I)\vec{v_1} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(A + 4I)\vec{v_2} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

③ FS $\quad x_1(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad x_2(t) = e^{-4t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

③ Allgemeine Lsg $\quad x(t) = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-4t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$x_1(t) = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{-4t}$$
$$x_2(t) = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$$