Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 20/21
G. Penn-Karras 18. März 2021

März – Klausur
Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen

Durch die Teilnahme an der Klausur erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§39 Abs. 2 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Zur Bearbeitung der Klausuraufgaben sind eigene Aufzeichnungen und Materialien zugelassen. Die Rechenwege sind ausführlich darzustellen. Die Lösungen sind handschriftlich auf DIN-A4-Blättern anzufertigen und anschließend als pdf hochzuladen.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden.

---

1. Aufgabe 10 Punkte

Ermitteln Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation jeweils die Lösung der Anfangswertsprobleme

$$\text{a)} \qquad y'' - y' - 2y = 6u_2(t), \quad y(0) = 4,\ y'(0) = -1,$$

$$\text{b)} \qquad y'' - y' - 2y = 6\delta_2(t), \quad y(0) = 4,\ y'(0) = -1.$$

Die Funktion $u_2(t)$ ist wie folgt definiert:

$$u_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leqslant 2 \\ 1 & \text{für } t > 2 \end{cases}.$$

Die Funktion $\delta_2(t)$ ist die bei $t = 2$ konzentrierte Dirac-Funktion.
Eine Laplace-Tabelle finden Sie auf der letzten Seite.

2. Aufgabe 8 Punkte

Ermitteln Sie mit Hilfe der $\mathcal{Z}$-Transformation eine Zahlenfolge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit den drei Eigenschaften

$$y_{k+2} + y_{k+1} - 2y_k = 0,\ y_0 = 4,\ y_1 = -5.$$

Hinweis: Es gilt für $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$:

$$\mathcal{Z}\left[(a^k)_{k\in\mathbb{N}_0}\right](z) = \mathcal{Z}\left[(1, a, a^2, a^3, \ldots)\right](z) = \frac{z}{z-a}.$$

Bitte zu den Aufgaben 3-6 wenden!

1. Aufgabe

10 Punkte

Ermitteln Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation jeweils die Lösung der Anfangswertsprobleme

a) $y'' - y' - 2y = 6u_2(t), \quad y(0) = 4,\ y'(0) = -1,$

b) $y'' - y' - 2y = 6\delta_2(t), \quad y(0) = 4,\ y'(0) = -1.$

Die Funktion $u_2(t)$ ist wie folgt definiert:

$$u_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leqslant 2 \\ 1 & \text{für } t > 2 \end{cases}.$$

Die Funktion $\delta_2(t)$ ist die bei $t = 2$ konzentrierte Dirac-Funktion.
Eine Laplace-Tabelle finden Sie auf der letzten Seite.

$-st - t + 2$

a)

$$\int_0^\infty u_2(t)\, e^{-st}\, dt = \int_2^\infty e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st}\Big|_2^\infty = \frac{1}{s} e^{-2s}$$

$$(s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0)) - (s Y(s) - y(0)) - 2Y(s) = (s^2 - s - 2) Y(s) - (s-1) y(0) - y'(0)$$

$$= (s-2)(s+1) Y(s) - (s-1)4 + 1$$

$$= (s-2)(s+1) Y(s) - 4s + 5 = \frac{6}{s} e^{-2s}$$

$$Y(s) = \frac{6e^{-2s}}{s(s-2)(s+1)} + \frac{4s-5}{(s-2)(s+1)}$$

$$= \frac{6e^{-2s}}{s(s-2)(s+1)} + \frac{1}{(s-2)} + \frac{3}{(s+1)}$$

$$\frac{6}{s(s-2)(s+1)} = \frac{-3}{s} + \frac{1}{s-2} + \frac{2}{s+1}$$

$$Y(s) = e^{-2s} \cdot \left(\frac{-3}{s} + \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s-2} \right) + \frac{11}{3(s-2)} + \frac{1}{3(s+1)}$$

$$y(t) = u_2(t)\left(-3 + e^{-(t-2)} + e^{2(t-2)}\right) + e^{2t} + 3e^{-t}$$

b) $\mathcal{L}[\delta_2(t)](s) = e^{-2s}$

$$(s-2)(s+1) Y(s) - 4s + 5 = 6e^{-2s}$$

$$\frac{-8}{-3}$$

$$Y(s) = \frac{6e^{-2s}}{(s-2)(s+1)} + \frac{4s-5}{(s-2)(s+1)}$$

$$= e^{-2s}\left(\frac{2}{s-2} - \frac{2}{s+1} \right) + \frac{1}{s-2} + \frac{3}{s+1}$$

$$y(t) = u_2(t) \cdot \left(2 \cdot e^{2(t-2)} - 2e^{-(t-2)}\right) + e^{2t} + 3e^{-t}$$

3. Aufgabe

12 Punkte

Ermitteln Sie im $\mathbb{R}^3$ die allgemeine Lösung $\vec{y}(t)$ des DGL-Systems

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{y}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

4. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist das reelle Randwertsproblem für eine Funktion $u(x,t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial t} + 7u = 0, \qquad 0 < x < \pi, \quad 0 < t\,;$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad 0 < t\,.$$

a) Finden Sie alle nichttrivialen Lösungen $u(x,t)$ der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$. Hierbei können Sie ohne Beweis verwenden, dass die Funktionen $X(x)$ periodisch und nicht-konstant sind.

b) Ermitteln Sie durch Superposition eine Lösung $u(x,t)$ mit der Eigenschaft

$$u(x,0) = 5\sin 2x + \sin 3x.$$

5. Aufgabe

10 Punkte

Werten Sie die nachfolgenden Integrale mit Hilfe der Laplace- oder der Fourier-Transformation aus:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^x \mathrm{e}^{2y-4x} \cos(3x-3y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-|y-x|} \cdot \frac{1}{1+9y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

Bitte zur Aufgabe 6 wenden!

3. Aufgabe

12 Punkte

Ermitteln Sie im $\mathbb{R}^3$ die allgemeine Lösung $\vec{y}(t)$ des DGL-Systems

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{y}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 2 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} 1-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$= (1-\lambda)(2+\lambda)(1+\lambda) + 2 + \cancel{2(\lambda+1)} - (\lambda-1) - 3(1+\lambda)$$

$$= (1-\lambda)(2+\lambda)(1+\lambda) - 2 - 2\lambda = 0$$

$$= (1+\lambda)(-\lambda^2 - \lambda)$$

$$= (1+\lambda)(-\lambda)(\lambda+1) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_{2,3} = -1$$

EV zu $\lambda_1 = 0$ $\quad A\vec{v_1} = \vec{0}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$v_2 = v_3$

$v_1 - 3v_2 + 2v_3 = 0$ $\quad \Rightarrow \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v_1 = v_3$

EV zu $\lambda_{2,3} = -1$ $\quad (A+I)\vec{v_2} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$v_1 = -v_3$

$v_2 = 0$

$$\Rightarrow \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

HV 2. Stufe $\quad (A+I)\vec{v_3} = \vec{v_2}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$v_1 = 1 - v_3$

$v_2 = 1$

$$\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x_1}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{x_2}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{x_3}(t) = e^{-t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\vec{x}(t) = c_1 \vec{x_1}(t) + c_2 \vec{x_2}(t) + c_3 \vec{x_3}(t)$$

$$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

4. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist das reelle Randwertsproblem für eine Funktion $u(x,t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial t} + 7u = 0, \qquad 0 < x < \pi, \quad 0 < t\,;$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad 0 < t\,.$$

a) Finden Sie alle nichttrivialen Lösungen $u(x,t)$ der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$. Hierbei können Sie ohne Beweis verwenden, dass die Funktionen $X(x)$ periodisch und nicht-konstant sind.

b) Ermitteln Sie durch Superposition eine Lösung $u(x,t)$ mit der Eigenschaft

$$u(x,0) = 5\sin 2x + \sin 3x.$$

a) $X''(x)T(t) + X(x)T'(t) + 7X(x)T(t) = 0$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{-T'(t) - 7T(t)}{T(t)} = -\frac{T'(t)}{T(t)} - 7 = \gamma$$

$$\begin{cases} X''(x) - \gamma X(x) = 0 \\ T'(t) = (-7-\gamma)T(t) \end{cases} \Rightarrow \lambda^2 - \gamma = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\gamma} \quad \text{da } X(x) \text{ periodisch und nicht konstant}$$

$$X(x) = C_1 \cdot \cos(\sqrt{-\gamma}\,x) + C_2 \sin(\sqrt{-\gamma}\,x)$$

$$\Rightarrow T(t) = C_3 e^{-(7+\gamma)t}$$

$$u(0,t) = X(0)T(t) = u(\pi,t) = X(\pi)T(t) = 0$$

$$\Rightarrow X(0) = X(\pi) = 0$$

$X(0) = C_1 = 0 \quad X(\pi) = C_2 \sin(\sqrt{-\gamma}\,\pi) = 0 \qquad \sqrt{-\gamma}\,\pi = k\pi \quad k \in \mathbb{N} \ k>0$

$\sqrt{-\gamma} = k$

$\gamma = -k^2$

$X(t) = C_2 \sin(kx)$

$T(t) = C_3\, e^{-(7-k^2)t}$

$$u(x,t) = X(t)T(t) = A\,e^{-(7-k^2)t} \sin(kx) \qquad A \in \mathbb{R}$$

b) $u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A \sin(kx) = 5\sin(2x) + \sin(3x)$

$\Rightarrow k=2: A=5$

$k=3: A=1$

$k \neq 2,3: A=0$

$$u(x,t) = 5e^{-3t}\sin(2x) + e^{2t}\sin(3x)$$

5. Aufgabe

10 Punkte

Werten Sie die nachfolgenden Integrale mit Hilfe der Laplace- oder der Fourier-Transformation aus:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^x \mathrm{e}^{2y-4x} \cos(3x-3y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-|y-x|} \cdot \frac{1}{1+9y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

a)

$$e^{-4x}\int_0^x e^{2y}\cos(3(x-y))\,dy = e^{-4x}\left(e^{2x} * \cos(3x)\right)$$

$$\int_0^\infty e^{-4x}\left(e^{2x} * \cos(3x)\right)dx = \mathcal{L}[e^{2x} * \cos(3x)](4)$$

$$\mathcal{L}[e^{2x} * \cos(3x)](s) = \mathcal{L}[e^{2x}] \cdot \mathcal{L}[\cos(3x)]$$

$$= \frac{1}{s-2} \cdot \frac{s}{s^2+9}$$

$$s = 4 \Rightarrow = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{25} = \frac{2}{25}$$

b)

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-|y-x|} \frac{1}{1+9y^2}\,dy = e^{-|x|} * \frac{1}{1+9x^2}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \left(e^{-|x|} * \frac{1}{1+9x^2}\right)dx = \mathcal{F}[e^{-|x|}](\overset{0}{\overset{\shortparallel}{w}}) \cdot \mathcal{F}\left[\frac{1}{1+9x^2}\right](\overset{0}{\overset{\shortparallel}{w}})$$

$$= \frac{2}{w^2+1} \cdot \frac{1}{3}\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+x^2}\right]\left(\frac{1}{3}w\right)$$

$$= \frac{2}{w^2+1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi e^{-\frac{1}{3}|w|}$$

$$w = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}\pi$$

6. Aufgabe

10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.
(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt die jeweils angegebenen Punkte.)

Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

$\frac{\partial F}{\partial x} = y^2 - \frac{1}{y-2}$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 2xy + \frac{x}{(y-2)^2}$ F stetig partiell diff

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 2\}$ ist offen

(1,0) ligt D

a) (3 Punkte) Das reelle Anfangswertsproblem

$$y' = xy^2 - \frac{x}{y-2}, \quad y(1) = 0$$

hat genau eine maximal fortgesetzte Lösung. V

b) (4 Punkte) Es gibt eine lineare homogene Differentialgleichung 4. Ordnung mit konstanten reellen Koeffizienten, so dass die Funktion $x^2 \sin 3x$ eine Lösung dieser Differentialgleichung ist. Nein, Sin 3x zeigt NST 3i und −3i

x^2 zeigt 3-fach komplexe-konjugiert NST

⇒ Charakteristische Polynom zumindest Grad 6

c) (3 Punkte) Das Randwertproblem auf der Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 9\}$

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{für } x^2 + y^2 < 9, \\ u(x,y) &= 9 - 2x^2 && \text{für } x^2 + y^2 = 9 \end{aligned}$$

wird durch $u(x,y) = x^2 + y^2$ gelöst.

Auf der nächsten Seite finden Sie eine Laplace-Tabelle.

Laplace-Tabelle

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
$t^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^a,\ a > -1$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\delta(t-t_0)$ bzw. $\delta(t)$	e^{-st_0} bzw. 1
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$
$\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!},\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{(s-a)^n}$
$\frac{t^{\beta-1}e^{at}}{\Gamma(\beta)},\ \beta > 0$	$\frac{1}{(s-a)^\beta}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$e^{bt}\sin at$	$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}$
$e^{bt}\cos at$	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$e^{bt}\sinh at$	$\frac{a}{(s-b)^2-a^2}$
$e^{bt}\cosh at$	$\frac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$
$t\sin at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
$t\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$
$\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$