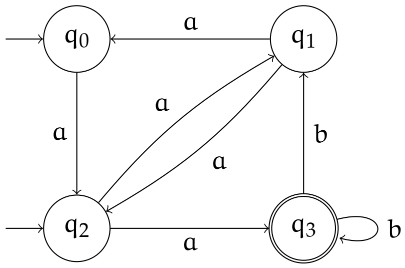
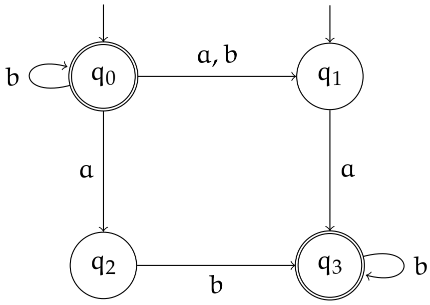
Tutorium 7

Aufgabe 1: Nichtdeterministische endliche Automaten

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma \triangleq \{ a, b \}$, die NFAs $M_1 \triangleq (Q, \Sigma, \Delta_1, \{ q_0, q_2 \}, \{ q_3 \})$ und $M_2 \triangleq (Q, \Sigma, \Delta_2, \{ q_0, q_1 \}, \{ q_0, q_3 \})$ mit $Q \triangleq \{ q_0, q_1, q_2, q_3 \}$ und

Δ_1: 

und Δ_2: 

sowie die Sprachen:

$A_3 \triangleq \left\{ (ab)^n ax \mid n \in \mathbb{N} \land x \in \{ b, ba \}^* \right\}$

$A_4 \triangleq \{ w \in \Sigma^* \mid w$ enthält eines der Wörter aaa, aab oder aba als Teilwort $\}$

1.a) *Gib* alle Berechnungen von M_1 für das Eingabewort aa *an*. Gehört aa zur Sprache von M_1?

Lösung

$(q_0, aa) \vdash_{M_1} (q_2, a) \vdash_{M_1} (q_1, \varepsilon) \nvdash_{M_1}$
$(q_0, aa) \vdash_{M_1} (q_2, a) \vdash_{M_1} (q_3, \varepsilon) \nvdash_{M_1}$
$(q_2, aa) \vdash_{M_1} (q_1, a) \vdash_{M_1} (q_0, \varepsilon) \nvdash_{M_1}$
$(q_2, aa) \vdash_{M_1} (q_1, a) \vdash_{M_1} (q_2, \varepsilon) \nvdash_{M_1}$
$(q_2, aa) \vdash_{M_1} (q_3, a) \nvdash_{M_1}$
und damit $aa \in L(M_1)$.

/Lösung

1.b) *Gib an:* $L(M_1)$

Lösung

$$L(M_1) = \left\{ a^n b^m a \mid n, m \in \mathbb{N}^+ \right\}^* \cdot \left\{ a^n b^m \mid n \in \mathbb{N}^+ \land m \in \mathbb{N} \right\}$$
$$(= L\big((aa^* bb^* a)^* \, aa^* b^*\big) \,)$$

/Lösung

1.c) *Gib* alle Berechnungen von M_2 für das Eingabewort ba *an*.. Gehört ba zur Sprache von M_2?

Lösung

$(q_0, ba) \vdash_{M_2} (q_0, a) \vdash_{M_2} (q_1, \varepsilon) \nvdash_{M_2}$
$(q_0, ba) \vdash_{M_2} (q_0, a) \vdash_{M_2} (q_2, \varepsilon) \nvdash_{M_2}$
$(q_0, ba) \vdash_{M_2} (q_1, a) \vdash_{M_2} (q_3, \varepsilon) \nvdash_{M_2}$
$(q_1, ba) \nvdash_{M_2}$
und damit $ba \in L(M_2)$.

/Lösung

1.d) *Gib an:* $L(M_2)$

Lösung

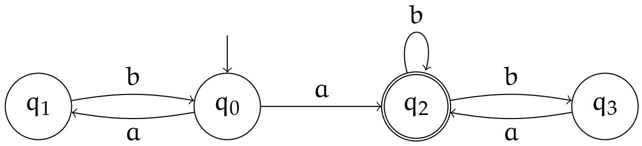
$L(M_2) = \{ b^n, b^n x b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \land x \in \{ a, aa \} \} (= L(b^* + b^* (a + aa) b^*))$

/Lösung

1.e) *Gib* einen NFA M_3 so *an*, dass $L(M_3) = A_3$.

Lösung

NFA $M_3 \triangleq (\{ q_0, q_1, q_2, q_3 \}, \Sigma, \Delta_3, \{ q_0 \}, \{ q_2 \})$ mit Δ_3:

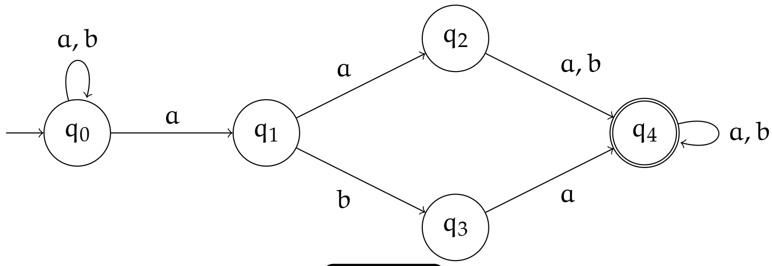


/Lösung

1.f) *Gib* einen NFA M_4 so *an*, dass $L(M_4) = A_4$.

Lösung

NFA $M_4 \triangleq (\{ q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 \}, \Sigma, \Delta_4, \{ q_0 \}, \{ q_4 \})$ mit Δ_4:



/Lösung

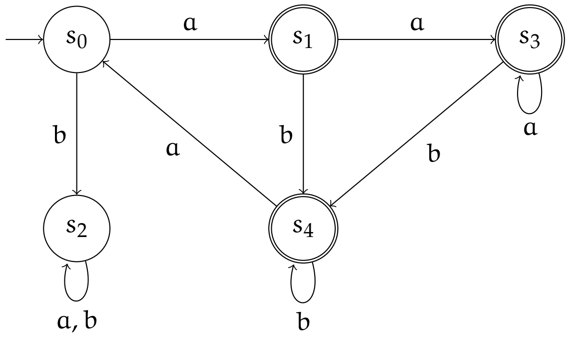
Aufgabe 2: Untermengen-Konstruktion

2.a) *Berechne:* Konstruiere nur mit Hilfe der Untermenge-Konstruktion den DFA M_1' zum NFA M_1 aus Aufgabe 1.

Lösung

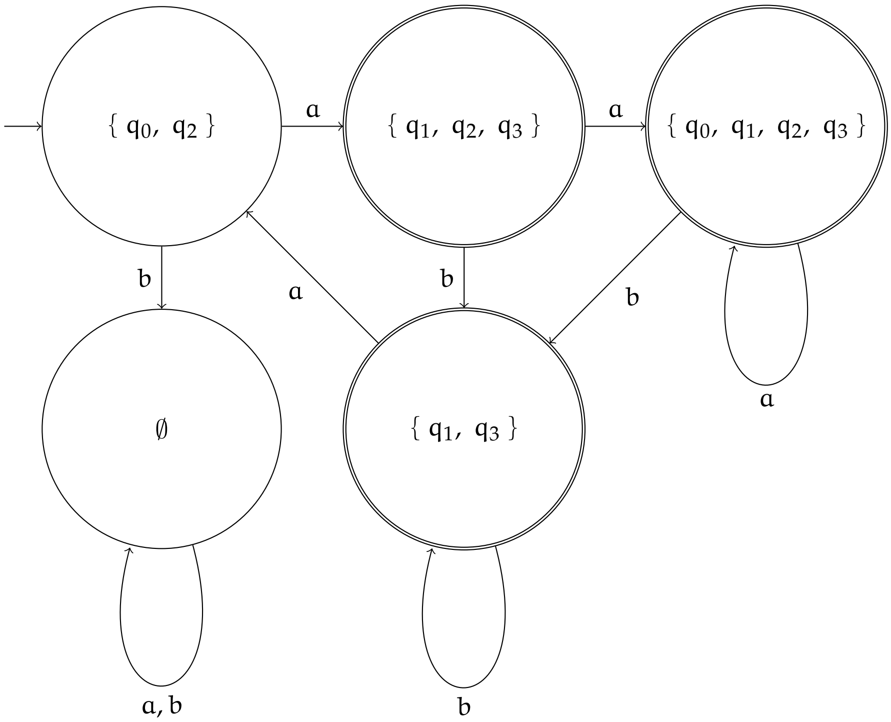
		a	b	
S	$\{ q_0, q_2 \}$	$\{ q_1, q_2, q_3 \}$	$\emptyset$	s_0
F	$\{ q_1, q_2, q_3 \}$	$\{ q_0, q_1, q_2, q_3 \}$	$\{ q_1, q_3 \}$	s_1
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	s_2
F	$\{ q_0, q_1, q_2, q_3 \}$	$\{ q_0, q_1, q_2, q_3 \}$	$\{ q_1, q_3 \}$	s_3
F	$\{ q_1, q_3 \}$	$\{ q_0, q_2 \}$	$\{ q_1, q_3 \}$	s_4

Damit ergibt sich der DFA $M_1' = (\{ s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 \}, \Sigma, \delta_1', s_0, \{ s_1, s_3, s_4 \})$ mit δ_1':



alternative Lösungen

Alternativ können die Zustände anders benannt werden. Wir akzeptieren alle drei Namenskonventionen. In dieser Aufgabe wäre s_0 direkt mit $\{ q_0, q_2 \}$ oder kürzer q_{02} zu bezeichnen. **Beachtet**, dass in der Tabelle der Untermengenkonstruktion trotzdem weiterhin die Zustands-Mengen angegeben werden müssen und eine eindeutige Zuordnung von Zustands-Mengen zu abkürzenden Bezeichnungen angegeben werden muss. Es ergeben sich dann alternative Automaten wie folgt:
$M_1' = \big(\{ \{ q_0, q_2 \}, \{ q_1, q_2, q_3 \}, \emptyset, \{ q_0, q_1, q_2, q_3 \}, \{ q_1, q_3 \} \}, \Sigma, \delta_1',$
$\{ q_0, q_2 \}, \{ \{ q_1, q_2, q_3 \}, \{ q_0, q_1, q_2, q_3 \}, \{ q_1, q_3 \} \}\big)$ mit δ_1':



/alternative Lösungen

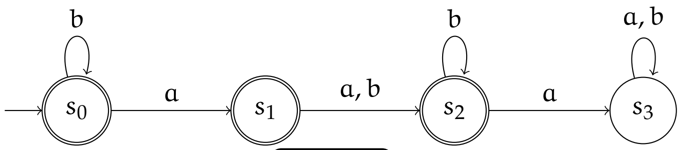
/Lösung

2.b) *Berechne:* Konstruiere nur mit Hilfe der Untermenge-Konstruktion den DFA M_2' zum NFA M_2 aus Aufgabe 1.

Lösung

		a	b	
SF	$\{ q_0, q_1 \}$	$\{ q_1, q_2, q_3 \}$	$\{ q_0, q_1 \}$	s_0
F	$\{ q_1, q_2, q_3 \}$	$\{ q_3 \}$	$\{ q_3 \}$	s_1
F	$\{ q_3 \}$	$\emptyset$	$\{ q_3 \}$	s_2
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	s_3

Damit ergibt sich der DFA $M_2' = (\{ s_0, s_1, s_2, s_3 \}, \Sigma, \delta_2', s_0, \{ s_0, s_1, s_2 \})$ mit δ_2':



/Lösung

Aufgabe 3: DFAs und reguläre Grammatiken

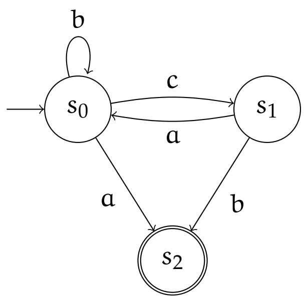
Gegeben seien $\Sigma \triangleq \{ a, b, c \}$ und die reguläre Grammatik $G_5 \triangleq (\{ S, T \}, \Sigma, P_5, S)$ mit:

$$
\begin{aligned}
P_5 : \quad S &\rightarrow a \mid bS \mid cT \\
T &\rightarrow b \mid aS
\end{aligned}
$$

3.a) *Berechne:* Konstruiere einen DFA M_5 mit $L(M_5) = L(G_5)$.

Lösung

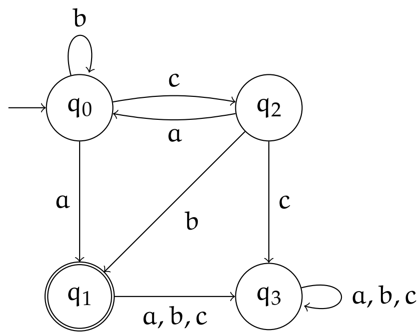
NFA $M_5' \triangleq (\{ s_0, s_1, s_2 \}, \Sigma, \Delta_5', \{ s_0 \}, \{ s_2 \})$ mit Δ_5':



		a	b	c	
S	$\{ s_0 \}$	$\{ s_2 \}$	$\{ s_0 \}$	$\{ s_1 \}$	q_0
F	$\{ s_2 \}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	q_1
	$\{ s_1 \}$	$\{ s_0 \}$	$\{ s_2 \}$	$\emptyset$	q_2
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	q_3

b(...) cb
b(...) a
cb
ca(...) a/ca(...) cb

Damit ergibt sich der DFA $M_5 = (\{ q_0, q_1, q_2, q_3 \}, \Sigma, \delta_5, q_0, \{ q_1 \})$ mit δ_5:



/Lösung

3.b) *Gib an:* $L(G_5)$

Lösung

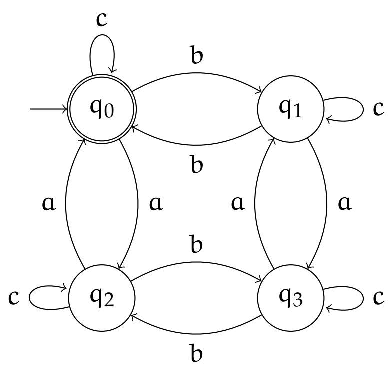
$L(G_5) = \{ xy \mid x \in \{ b, ca \}^* \land y \in \{ a, cb \} \} \big(= L\big((b + ca)^* (a + cb)\big)\big)$

/Lösung

Aufgabe 4: Sprache eines Automaten

Gegeben ist ein Alphabet $\Sigma \triangleq \{ a, b, c \}$ und der Automat $M_6 \triangleq (\{ q_0, q_1, q_2, q_3 \}, \Sigma, \delta_6, q_0, \{ q_0 \})$ wobei δ_6 gegeben ist durch den Graphen:

δ_6:



4.a) *Beweise*, dass $L(M_6) = \{ w \in \Sigma^* \mid |w|_a \mod 2 = |w|_b \mod 2 = 0 \}$ gilt.

Lösung

Wir zeigen zunächst per Induktion eine stärkere Aussage, die Berechnungen in jeden Zustand (und nicht nur die Endzustände) berücksichtigt. Sei

$$P(w) \triangleq (P_1(w) \land P_2(w) \land P_3(w) \land P_4(w))$$

wobei

$$
\begin{aligned}
P_1(w) &\triangleq \left(\widehat{\delta_6}(q_0,\ w) = q_0 \leftrightarrow (|w|_a \bmod 2 = 0 \wedge |w|_b \bmod 2 = 0)\right)\\
P_2(w) &\triangleq \left(\widehat{\delta_6}(q_0,\ w) = q_1 \leftrightarrow (|w|_a \bmod 2 = 0 \wedge |w|_b \bmod 2 = 1)\right)\\
P_3(w) &\triangleq \left(\widehat{\delta_6}(q_0,\ w) = q_2 \leftrightarrow (|w|_a \bmod 2 = 1 \wedge |w|_b \bmod 2 = 0)\right)\\
P_4(w) &\triangleq \left(\widehat{\delta_6}(q_0,\ w) = q_3 \leftrightarrow (|w|_a \bmod 2 = 1 \wedge |w|_b \bmod 2 = 1)\right)
\end{aligned}
$$

Wir verwenden das Induktionsschema:

$$(P(\varepsilon) \wedge (\forall v \in \Sigma^* \ .\ P(v) \to (P(va) \wedge P(vb) \wedge P(vc)))) \to \forall w \in \Sigma^* \ .\ P(w)$$

IA $P(\varepsilon)$: $(q_0,\ \varepsilon) \nvdash_{M_6}$ und $|\varepsilon|_a \bmod 2 = 0 = |\varepsilon|_b \bmod 2$. Also gilt $P(\varepsilon)$.
Sei $v \in \Sigma^*$.
IV $P(v)$: $P_1(v) \wedge P_2(v) \wedge P_3(v) \wedge P_4(v)$, wobei

$$
\begin{aligned}
P_1(v) &= \left(\widehat{\delta_6}(q_0,\ v) = q_0 \leftrightarrow (|v|_a \bmod 2 = 0 \wedge |v|_b \bmod 2 = 0)\right)\\
P_2(v) &= \left(\widehat{\delta_6}(q_0,\ v) = q_1 \leftrightarrow (|v|_a \bmod 2 = 0 \wedge |v|_b \bmod 2 = 1)\right)\\
P_3(v) &= \left(\widehat{\delta_6}(q_0,\ v) = q_2 \leftrightarrow (|v|_a \bmod 2 = 1 \wedge |v|_b \bmod 2 = 0)\right)\\
P_4(v) &= \left(\widehat{\delta_6}(q_0,\ v) = q_3 \leftrightarrow (|v|_a \bmod 2 = 1 \wedge |v|_b \bmod 2 = 1)\right)
\end{aligned}
$$

IS1 $P(va)$: *Zu Zeigen:* $P_1(va) \wedge P_2(va) \wedge P_3(va) \wedge P_4(va)$, wobei

$$
\begin{aligned}
P_1(va) &= \left(\widehat{\delta_6}(q_0,\ va) = q_0 \leftrightarrow (|va|_a \bmod 2 = 0 \wedge |va|_b \bmod 2 = 0)\right)\\
P_2(va) &= \left(\widehat{\delta_6}(q_0,\ va) = q_1 \leftrightarrow (|va|_a \bmod 2 = 0 \wedge |va|_b \bmod 2 = 1)\right)\\
P_3(va) &= \left(\widehat{\delta_6}(q_0,\ va) = q_2 \leftrightarrow (|va|_a \bmod 2 = 1 \wedge |va|_b \bmod 2 = 0)\right)\\
P_4(va) &= \left(\widehat{\delta_6}(q_0,\ va) = q_3 \leftrightarrow (|va|_a \bmod 2 = 1 \wedge |va|_b \bmod 2 = 1)\right)
\end{aligned}
$$

Wir zeigen die vier Aussagen separat:

$$
\begin{aligned}
&\widehat{\delta_6}(q_0,\ va) = q_0 \overset{\text{FS 2.1.4}}{\Leftrightarrow} \delta_6(\widehat{\delta_6}(q_0,\ v),\ a) = q_0 \overset{\text{Def. } M_6}{\Leftrightarrow} \widehat{\delta_6}(q_0,\ v) = q_2\\
&\quad \overset{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \quad |v|_a \bmod 2 = 1 \wedge |v|_b \bmod 2 = 0 \overset{\text{FS 1.1.1}}{\Leftrightarrow} |va|_a \bmod 2 = 0 \wedge |va|_b \bmod 2 = 0\\
&\widehat{\delta_6}(q_0,\ va) = q_1 \overset{\text{FS 2.1.4}}{\Leftrightarrow} \delta_6(\widehat{\delta_6}(q_0,\ v),\ a) = q_1 \overset{\text{Def. } M_6}{\Leftrightarrow} \widehat{\delta_6}(q_0,\ v) = q_3\\
&\quad \overset{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \quad |v|_a \bmod 2 = 1 \wedge |v|_b \bmod 2 = 1 \overset{\text{FS 1.1.1}}{\Leftrightarrow} |va|_a \bmod 2 = 0 \wedge |va|_b \bmod 2 = 1\\
&\widehat{\delta_6}(q_0,\ va) = q_2 \overset{\text{FS 2.1.4}}{\Leftrightarrow} \delta_6(\widehat{\delta_6}(q_0,\ v),\ a) = q_2 \overset{\text{Def. } M_6}{\Leftrightarrow} \widehat{\delta_6}(q_0,\ v) = q_0\\
&\quad \overset{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \quad |v|_a \bmod 2 = 0 \wedge |v|_b \bmod 2 = 0 \overset{\text{FS 1.1.1}}{\Leftrightarrow} |va|_a \bmod 2 = 1 \wedge |va|_b \bmod 2 = 0\\
&\widehat{\delta_6}(q_0,\ va) = q_3 \overset{\text{FS 2.1.4}}{\Leftrightarrow} \delta_6(\widehat{\delta_6}(q_0,\ v),\ a) = q_3 \overset{\text{Def. } M_6}{\Leftrightarrow} \widehat{\delta_6}(q_0,\ v) = q_1\\
&\quad \overset{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \quad |v|_a \bmod 2 = 0 \wedge |v|_b \bmod 2 = 1 \overset{\text{FS 1.1.1}}{\Leftrightarrow} |va|_a \bmod 2 = 1 \wedge |va|_b \bmod 2 = 1
\end{aligned}
$$

IS2 $P(vb)$: *Zu Zeigen:* $P_1(vb) \wedge P_2(vb) \wedge P_3(vb) \wedge P_4(vb)$, wobei

$$
\begin{aligned}
P_1(vb) &= \left(\widehat{\delta_6}(q_0,\ vb) = q_0 \leftrightarrow (|vb|_a \bmod 2 = 0 \wedge |vb|_b \bmod 2 = 0)\right)\\
P_2(vb) &= \left(\widehat{\delta_6}(q_0,\ vb) = q_1 \leftrightarrow (|vb|_a \bmod 2 = 0 \wedge |vb|_b \bmod 2 = 1)\right)\\
P_3(vb) &= \left(\widehat{\delta_6}(q_0,\ vb) = q_2 \leftrightarrow (|vb|_a \bmod 2 = 1 \wedge |vb|_b \bmod 2 = 0)\right)\\
P_4(vb) &= \left(\widehat{\delta_6}(q_0,\ vb) = q_3 \leftrightarrow (|vb|_a \bmod 2 = 1 \wedge |vb|_b \bmod 2 = 1)\right)
\end{aligned}
$$

Wir zeigen die vier Aussagen separat:

$$
\begin{aligned}
&\widehat{\delta_6}(q_0,\ vb) = q_0 \overset{\text{FS 2.1.4}}{\Leftrightarrow} \delta_6(\widehat{\delta_6}(q_0,\ v),\ b) = q_0 \overset{\text{Def. } M_6}{\Leftrightarrow} \widehat{\delta_6}(q_0,\ v) = q_1 \\
&\quad \overset{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \quad |v|_a \mod 2 = 0 \wedge |v|_b \mod 2 = 1 \overset{\text{FS 1.1.1}}{\Leftrightarrow} |vb|_a \mod 2 = 0 \wedge |vb|_b \mod 2 = 0 \\
&\widehat{\delta_6}(q_0,\ vb) = q_1 \overset{\text{FS 2.1.4}}{\Leftrightarrow} \delta_6(\widehat{\delta_6}(q_0,\ v),\ b) = q_1 \overset{\text{Def. } M_6}{\Leftrightarrow} \widehat{\delta_6}(q_0,\ v) = q_0 \\
&\quad \overset{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \quad |v|_a \mod 2 = 0 \wedge |v|_b \mod 2 = 0 \overset{\text{FS 1.1.1}}{\Leftrightarrow} |vb|_a \mod 2 = 0 \wedge |vb|_b \mod 2 = 1 \\
&\widehat{\delta_6}(q_0,\ vb) = q_2 \overset{\text{FS 2.1.4}}{\Leftrightarrow} \delta_6(\widehat{\delta_6}(q_0,\ v),\ b) = q_2 \overset{\text{Def. } M_6}{\Leftrightarrow} \widehat{\delta_6}(q_0,\ v) = q_3 \\
&\quad \overset{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \quad |v|_a \mod 2 = 1 \wedge |v|_b \mod 2 = 1 \overset{\text{FS 1.1.1}}{\Leftrightarrow} |vb|_a \mod 2 = 1 \wedge |vb|_b \mod 2 = 0 \\
&\widehat{\delta_6}(q_0,\ vb) = q_3 \overset{\text{FS 2.1.4}}{\Leftrightarrow} \delta_6(\widehat{\delta_6}(q_0,\ v),\ b) = q_3 \overset{\text{Def. } M_6}{\Leftrightarrow} \widehat{\delta_6}(q_0,\ v) = q_2 \\
&\quad \overset{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \quad |v|_a \mod 2 = 1 \wedge |v|_b \mod 2 = 0 \overset{\text{FS 1.1.1}}{\Leftrightarrow} |vb|_a \mod 2 = 1 \wedge |vb|_b \mod 2 = 1
\end{aligned}
$$

IS3 $P(vc)$: *Zu Zeigen:* $P_1(vc) \wedge P_2(vc) \wedge P_3(vc) \wedge P_4(vc)$, wobei

$$
\begin{aligned}
P_1(vc) &= \left(\widehat{\delta_6}(q_0,\ vc) = q_0 \leftrightarrow (|vc|_a \mod 2 = 0 \wedge |vc|_b \mod 2 = 0)\right) \\
P_2(vc) &= \left(\widehat{\delta_6}(q_0,\ vc) = q_1 \leftrightarrow (|vc|_a \mod 2 = 0 \wedge |vc|_b \mod 2 = 1)\right) \\
P_3(vc) &= \left(\widehat{\delta_6}(q_0,\ vc) = q_2 \leftrightarrow (|vc|_a \mod 2 = 1 \wedge |vc|_b \mod 2 = 0)\right) \\
P_4(vc) &= \left(\widehat{\delta_6}(q_0,\ vc) = q_3 \leftrightarrow (|vc|_a \mod 2 = 1 \wedge |vc|_b \mod 2 = 1)\right)
\end{aligned}
$$

Wir zeigen die vier Aussagen separat:

$$
\begin{aligned}
&\widehat{\delta_6}(q_0,\ vc) = q_0 \overset{\text{FS 2.1.4}}{\Leftrightarrow} \delta_6(\widehat{\delta_6}(q_0,\ v),\ c) = q_0 \overset{\text{Def. } M_6}{\Leftrightarrow} \widehat{\delta_6}(q_0,\ v) = q_0 \\
&\quad \overset{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \quad |v|_a \mod 2 = 0 \wedge |v|_b \mod 2 = 0 \overset{\text{FS 1.1.1}}{\Leftrightarrow} |vc|_a \mod 2 = 0 \wedge |vc|_b \mod 2 = 0 \\
&\widehat{\delta_6}(q_0,\ vc) = q_1 \overset{\text{FS 2.1.4}}{\Leftrightarrow} \delta_6(\widehat{\delta_6}(q_0,\ v),\ c) = q_1 \overset{\text{Def. } M_6}{\Leftrightarrow} \widehat{\delta_6}(q_0,\ v) = q_1 \\
&\quad \overset{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \quad |v|_a \mod 2 = 0 \wedge |v|_b \mod 2 = 1 \overset{\text{FS 1.1.1}}{\Leftrightarrow} |vc|_a \mod 2 = 0 \wedge |vc|_b \mod 2 = 1 \\
&\widehat{\delta_6}(q_0,\ vc) = q_2 \overset{\text{FS 2.1.4}}{\Leftrightarrow} \delta_6(\widehat{\delta_6}(q_0,\ v),\ c) = q_2 \overset{\text{Def. } M_6}{\Leftrightarrow} \widehat{\delta_6}(q_0,\ v) = q_2 \\
&\quad \overset{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \quad |v|_a \mod 2 = 1 \wedge |v|_b \mod 2 = 0 \overset{\text{FS 1.1.1}}{\Leftrightarrow} |vc|_a \mod 2 = 1 \wedge |vc|_b \mod 2 = 0 \\
&\widehat{\delta_6}(q_0,\ vc) = q_3 \overset{\text{FS 2.1.4}}{\Leftrightarrow} \delta_6(\widehat{\delta_6}(q_0,\ v),\ c) = q_3 \overset{\text{Def. } M_6}{\Leftrightarrow} \widehat{\delta_6}(q_0,\ v) = q_3 \\
&\quad \overset{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \quad |v|_a \mod 2 = 1 \wedge |v|_b \mod 2 = 1 \overset{\text{FS 1.1.1}}{\Leftrightarrow} |vc|_a \mod 2 = 1 \wedge |vc|_b \mod 2 = 1
\end{aligned}
$$

Damit zeigen wir die eigentliche Aussage:

$$
\begin{aligned}
L(M_6) &\overset{\text{FS 2.1.6}}{=} \left\{ w \in \Sigma^* \mid \widehat{\delta_6}(q_0,\ w) \in \{ q_0 \} \right\} \\
&\overset{P_1(w)}{=} \{ w \in \Sigma^* \mid |w|_a \mod 2 = |w|_b \mod 2 = 0 \}
\end{aligned}
$$

/Lösung