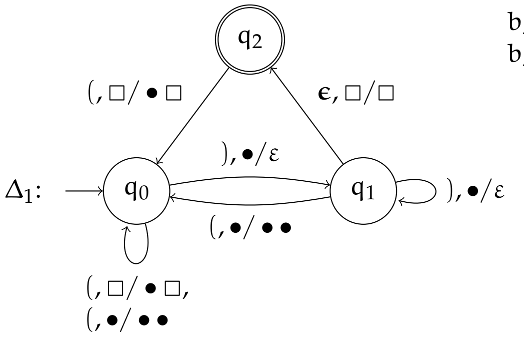
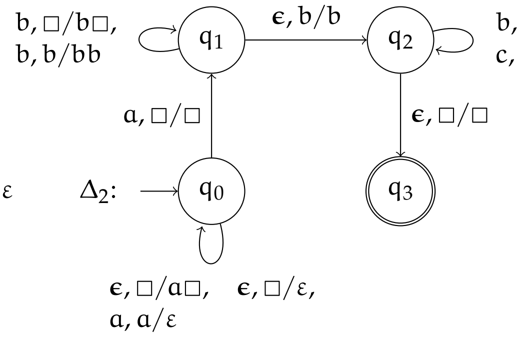
Tutorium 12

Gegeben seien die Alphabete $\Sigma_1 \triangleq \{\, (,\ )\, \}$, $\Sigma_2 \triangleq \{\, a,\ b,\ c\, \}$ und $\Sigma_3 \triangleq \{\, 0,\ 1\, \}$, die PDAs

$$M_1 \triangleq (\{\, q_0,\ q_1,\ q_2\, \},\ \Sigma_1,\ \{\, \square,\ \bullet\, \},\ \square,\ \Delta_1,\ q_0,\ \{\, q_2\, \}) \text{ und}$$
$$M_2 \triangleq (\{\, q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3\, \},\ \Sigma_2,\ \Sigma_2 \cup \{\, \square\, \},\ \square,\ \Delta_2,\ q_0,\ \{\, q_3\, \})$$

mit





sowie die Sprache:

$$A_4 \triangleq \{\, w \in \Sigma_2^* \mid |w|_a = |w|_b\, \}$$

Aufgabe 1: Sprache eines Kellerautomaten

1.a) *Gib* jeweils *alle* Ableitungen für die Wörter ε, $()$, $()($, $())$, $)(()$ und $(()())$ in M_1 *an*. Welche dieser Wörter liegen in $L_{\text{End}}(M_1)$ und welche liegen in $L_{\text{Kel}}(M_1)$?

Lösung

$$(q_0,\ \varepsilon,\ \square) \nvdash_{M_1}$$
$$(q_0,\ (),\ \square) \vdash_{M_1} (q_0,\ ),\ \bullet\square) \vdash_{M_1} (q_1,\ \varepsilon,\ \square) \vdash_{M_1} (q_2,\ \varepsilon,\ \square) \nvdash_{M_1}$$
$$(q_0,\ ()(,\ \square) \vdash_{M_1} (q_0,\ )(,\ \bullet\square) \vdash_{M_1} (q_1,\ (,\ \square) \vdash_{M_1} (q_2,\ (,\ \square) \vdash_{M_1} (q_0,\ \varepsilon,\ \bullet\square) \nvdash_{M_1}$$
$$(q_0,\ ()),\ \square) \vdash_{M_1} (q_0,\ )),\ \bullet\square) \vdash_{M_1} (q_1,\ ),\ \square) \vdash_{M_1} (q_2,\ ),\ \square) \nvdash_{M_1}$$
$$(q_0,\ )((),\ \square) \nvdash_{M_1}$$
$$(q_0,\ (()()),\ \square) \vdash_{M_1} (q_0,\ ()()),\ \bullet\square) \vdash_{M_1} (q_0,\ )()),\ \bullet\bullet\square) \vdash_{M_1} (q_1,\ ()),\ \bullet\square) \vdash_{M_1}$$
$$(q_0,\ )),\ \bullet\bullet\square) \vdash_{M_1} (q_1,\ ),\ \bullet\square) \vdash_{M_1} (q_1,\ \varepsilon,\ \square) \vdash_{M_1} (q_2,\ \varepsilon,\ \square) \nvdash_{M_1}$$

und damit $(), (()()) \in L_{\text{End}}(M_1)$, $\varepsilon, ()(, ()),)(() \notin L_{\text{End}}(M_1)$ und, da das unterste Kellersymbol $\square$ nie entfernt wird, $\varepsilon, (), ()(, ()),)((), (()()) \notin L_{\text{Kel}}(M_1)$.

/Lösung

1.b) *Gib an:* $L_{\text{End}}(M_1)$ und $L_{\text{Kel}}(M_1)$

Lösung

Sei $(v)_{1\ldots i} \triangleq (v)_1 \ldots (v)_i$ für ein Wort v und eine natürliche Zahl i mit $1 \leqslant i \leqslant |v|$.

$$L_{\text{End}}(M_1) = \left\{\, w \in \Sigma_1^+ \mid |w|_(= |w|_) \wedge \left(\forall i \in [1, |w|]\ .\ |(w)_{1\ldots i}|_(\geqslant |(w)_{1\ldots i}|_)\right) \,\right\}$$
$$L_{\text{Kel}}(M_1) = \emptyset$$

Hinweis: $L_{\text{End}}(M_1)$ *ist die nicht-leere Menge aller korrekt geklammerten Ausdrücke über* Σ_1, *dass heißt jedes Wort besteht aus sich möglicherweise überlappenden Klammerpaaren so, dass die öffnende Klammer eines jeden solchen Paares vor der entsprechenden schließenden Klammer kommt.*

/Lösung

1.c) *Gib* jeweils *alle* Ableitungen für die Wörter ε, aa, abb und abc in M_2 *an*. Welche dieser Wörter liegen in $L_{\text{End}}(M_2)$ und welche liegen in $L_{\text{Kel}}(M_2)$?

Lösung

Für das Wort ε gibt es die Ableitungen:

$(q_0,\ \varepsilon,\ \square) \vdash_{M_2} (q_0,\ \varepsilon,\ a\square) \nvdash_{M_2}$
$(q_0,\ \varepsilon,\ \square) \vdash_{M_2} (q_0,\ \varepsilon,\ \varepsilon) \nvdash_{M_2}$

Für das Wort aa gibt es die Ableitungen:

$(q_0,\ aa,\ \square) \vdash_{M_2} (q_0,\ aa,\ a\square) \vdash_{M_2} (q_0,\ a,\ \square) \vdash_{M_2} (q_0,\ a,\ a\square) \vdash_{M_2} (q_0,\ \varepsilon,\ \square) \vdash_{M_2} (q_0,\ \varepsilon,\ a\square) \nvdash_{M_2}$
$(q_0,\ aa,\ \square) \vdash_{M_2} (q_0,\ aa,\ a\square) \vdash_{M_2} (q_0,\ a,\ \square) \vdash_{M_2} (q_0,\ a,\ a\square) \vdash_{M_2} (q_0,\ \varepsilon,\ \square) \vdash_{M_2} (q_0,\ \varepsilon,\ \varepsilon) \nvdash_{M_2}$
$(q_0,\ aa,\ \square) \vdash_{M_2} (q_0,\ aa,\ a\square) \vdash_{M_2} (q_0,\ a,\ \square) \vdash_{M_2} (q_0,\ a,\ \varepsilon) \nvdash_{M_2}$
$(q_0,\ aa,\ \square) \vdash_{M_2} (q_0,\ aa,\ a\square) \vdash_{M_2} (q_0,\ a,\ \square) \vdash_{M_2} (q_1,\ \varepsilon,\ \square) \nvdash_{M_2}$
$(q_0,\ aa,\ \square) \vdash_{M_2} (q_0,\ aa,\ \varepsilon) \nvdash_{M_2}$
$(q_0,\ aa,\ \square) \vdash_{M_2} (q_1,\ a,\ \square) \nvdash_{M_2}$

Für das Wort abb gibt es die Ableitungen:

$(q_0,\ abb,\ \square) \vdash_{M_2} (q_0,\ abb,\ a\square) \vdash_{M_2} (q_0,\ bb,\ \square) \vdash_{M_2} (q_0,\ bb,\ a\square) \nvdash_{M_2}$
$(q_0,\ abb,\ \square) \vdash_{M_2} (q_0,\ abb,\ a\square) \vdash_{M_2} (q_0,\ bb,\ \square) \vdash_{M_2} (q_0,\ bb,\ \varepsilon) \nvdash_{M_2}$
$(q_0,\ abb,\ \square) \vdash_{M_2} (q_0,\ abb,\ \varepsilon) \nvdash_{M_2}$
$(q_0,\ abb,\ \square) \vdash_{M_2} (q_1,\ bb,\ \square) \vdash_{M_2} (q_1,\ b,\ b\square) \vdash_{M_2} (q_1,\ \varepsilon,\ bb\square) \vdash_{M_2} (q_2,\ \varepsilon,\ bb\square) \nvdash_{M_2}$
$(q_0,\ abb,\ \square) \vdash_{M_2} (q_1,\ bb,\ \square) \vdash_{M_2} (q_1,\ b,\ b\square) \vdash_{M_2} (q_2,\ b,\ b\square) \vdash_{M_2} (q_2,\ \varepsilon,\ \square) \vdash_{M_2} (q_3,\ \varepsilon,\ \square) \nvdash_{M_2}$

Für das Wort abc gibt es die Ableitungen:

$(q_0,\ abc,\ \square) \vdash_{M_2} (q_0,\ abc,\ a\square) \vdash_{M_2} (q_0,\ bc,\ \square) \vdash_{M_2} (q_0,\ bc,\ a\square) \nvdash_{M_2}$
$(q_0,\ abc,\ \square) \vdash_{M_2} (q_0,\ abc,\ a\square) \vdash_{M_2} (q_0,\ bc,\ \square) \vdash_{M_2} (q_0,\ bc,\ \varepsilon) \nvdash_{M_2}$
$(q_0,\ abc,\ \square) \vdash_{M_2} (q_0,\ abc,\ \varepsilon) \nvdash_{M_2}$
$(q_0,\ abc,\ \square) \vdash_{M_2} (q_1,\ bc,\ \square) \vdash_{M_2} (q_1,\ c,\ b\square) \vdash_{M_2} (q_2,\ c,\ b\square) \vdash_{M_2} (q_2,\ \varepsilon,\ \square) \vdash_{M_2} (q_3,\ \varepsilon,\ \square) \nvdash_{M_2}$

(Wie die roten Ableitungen zeigen,) ist $abb, abc \in L_{End}(M_2)$. Es gilt $\varepsilon, aa \notin L_{End}(M_2)$. (Wie die blauen Ableitungen zeigen,) ist $\varepsilon, aa \in L_{Kel}(M_2)$. Es gilt $abb, abc \notin L_{Kel}(M_2)$.

/Lösung

1.d) *Gib an:* $L_{End}(M_2)$ und $L_{Kel}(M_2)$

Lösung

$$L_{End}(M_2) = \{\ a^n b^m x \mid n, m \in \mathbb{N}^+ \wedge x \in \{\ b,\ c\ \}^* \wedge |x| = m\ \}$$
$$L_{Kel}(M_2) = \{\ a\ \}^*$$

/Lösung

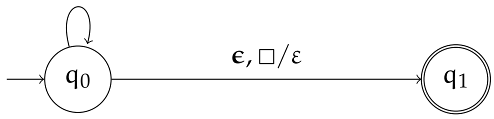
Aufgabe 2: Konstruktion von Kellerautomaten

2.a) *Gib* einen PDA M_4 so *an*, dass $L_{End}(M_4) = L_{Kel}(M_4) = A_4$.

Lösung

$M_4 = (\{\ q_0,\ q_1\ \},\ \Sigma_2,\ \{\ \square,\ +,\ -\ \},\ \square,\ \Delta_4,\ q_0,\ \{\ q_1\ \})$ mit Δ_4:

$$\begin{array}{lll} a,\square/+\square, & a,+/++, & a,-/\varepsilon, \\ b,\square/-\square, & b,+/\varepsilon, & b,-/--, \\ & c,X/X & \end{array}$$



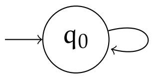
wobei $X \in \{\ \square,\ +,\ -\ \}$.

/Lösung

2.b) *Gib* einen PDA M_4'' mit nur einem Zustand und dem Kelleralphabet $\Gamma_4'' = \{\ a,\ b,\ c,\ \square\ \}$ so *an*, dass $L_{Kel}(M_4'') = A_4$. *Gib* außerdem $L_{End}(M_4'')$ *an.*

Lösung

$M_4'' = (\{\ q_0\ \},\ \Sigma_2,\ \Gamma_4'',\ \square,\ \Delta_4'',\ q_0,\ \emptyset)$ mit Δ_4'':



$$\begin{array}{lll} a,\square/a\square, & a,a/aa, & a,b/\varepsilon, \\ b,\square/b\square, & b,a/\varepsilon, & b,b/bb, \\ c,X/X, & & \\ \epsilon,\square/\varepsilon & & \end{array}$$

wobei $X \in \{\ \square,\ a,\ b\ \}$. Für den gegeben Automaten ist $L_{End}(M_4'') = \emptyset$.

Hinweis: Alternativ hätten wir auch q_0 als Endzustand wählen können. Dann wäre $L_{End}(M_4'') = \Sigma_2^*$. Es ist nicht möglich einen PDA M_4''' mit nur einem Zustand und $L_{End}(M_4''') = A_4$ anzugeben.

/Lösung

Aufgabe 3: Deterministische Kellerautomaten

3.a) *Gib* eine reguläre Sprache A_8 über Σ_2 *an*, für die es *keinen* DPDA M_8 mit $L_{Kel}(M_8) = A_8$ gibt.

Lösung

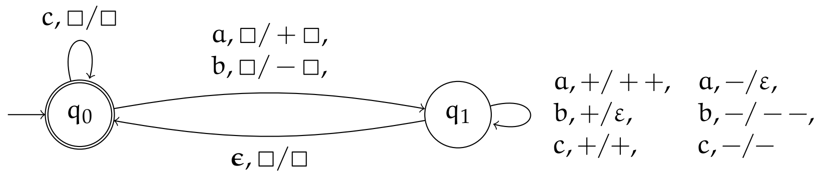
z.B.: $A_8 = \{\ a^n \mid n \in \mathbb{N}\ \}$
Hinweis: Enthält eine Sprache A ein Wort $x \in A$ so, dass auch eine Verlängerung xy dieses Wortes mit $y \neq \varepsilon$ in der Sprache enthalten ist ($xy \in A$), dann gibt es für diese Sprache keinen DPDA M mit $L_{Kel}(M) = A$.

/Lösung

3.b) *Gib*, falls das möglich ist, einen DPDA M_4 mit $L_{End}(M_4) = A_4$ *an.*

Lösung

$M_4 = (\{\ q_0,\ q_1\ \},\ \Sigma_2,\ \{\ \square,\ +,\ -\ \},\ \square,\ \Delta_4,\ q_0,\ \{\ q_0\ \})$ mit Δ_4:



/Lösung

Aufgabe 4: Kellerautomaten und kontextfreie Grammatiken

Gib eine kontextfreie Grammatik G_2 so *an*, dass $L(G_2) = L_{End}(M_2)$.

Lösung

$G_2 = (\{\ S,\ T\ \},\ \Sigma_2,\ P_2,\ S)$ mit P_2:

$$S \to aS \mid aT$$
$$T \to bb \mid bc \mid bTb \mid bTc$$

/Lösung