18. VL Ana 2

Skalares Kurvenintegral und mehrdimensionale Integration

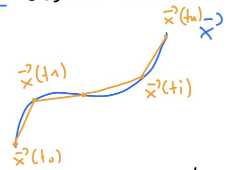
Themen: Skalares Kurvenintegral, Bogenlänge, mehrdimensionale Integration, Berechnung durch Riemannsche Summen

Skalares Kurvenintegral und mehrdimensionale Integration

Skalares Kurvenintegral

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\vec{x}: [a,b] \to D$ stetig diffbar (z.B. ein Draht im Raum) und $f: D \to \mathbb{R}$ stetig (z.B. Massendichte des Drahtes)

Ziel: Gesamtmasse des Drahtes 电话线



Zerlege $[a,b]$: $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$

Falls Massendichte konstant: Masse = Dichte × Länge

Für feine Zerlegungen gilt:

(i) Draht zwischen $\vec{x}(t_{i-1})$ und $\vec{x}(t_i)$ nahezu konstant

(ii) f ist zwischen $\vec{x}(t_{i-1})$ und $\vec{x}(t_i)$ nahezu konstant $f(\vec{x}(t_i))$

$\Rightarrow$ Gesamtmasse m

$$\approx \sum_{i=1}^{m} f(\vec{x}(t_i)) \cdot \|\vec{x}(t_i) - \vec{x}(t_{i-1})\|$$

$$= \sum_{i=1}^{m} f(\vec{x}(t_i)) \cdot \underbrace{\frac{\|\vec{x}(t_i) - \vec{x}(t_{i-1})\|}{t_i - t_{i-1}}}_{\approx \|\dot{\vec{x}}(t_i)\|} \cdot \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{=: \Delta t_i}$$

$$\approx \underbrace{\sum_{i=1}^{m} f(\vec{x}(t_i)) \cdot \|\dot{\vec{x}}(t_i)\| \cdot \Delta t_i}_{\text{Riemannsche Summe}}$$

$$\xrightarrow{m \to \infty} \quad m = \int_a^b f(\vec{x}(t)) \cdot \|\dot{\vec{x}}(t)\| \, dt$$

Definition (skalares Kurvenintegral)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \to \mathbb{R}$ ein stetiges Skalarfeld. Ist $\vec{x}: [a,b] \to D$ eine stetig differenzierbare Kurve, dann heißt

$$\int_{\vec{x}} f \, ds := \int_a^b f(\vec{x}(t)) \|\dot{\vec{x}}(t)\| \, dt$$

skalares Kurvenintegral von f entlang der Kurve $\vec{x}$.

$ds = \|\dot{\vec{x}}(t)\| \, dt$ heisst **skalares Streckenelement**.

Beispiel

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 4x^2y + 4y$

$\vec{x}: [-1,2] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{bmatrix} t \\ 3t \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \int_{\vec{x}} f \, ds = \int_{-1}^{2} \underbrace{f(\vec{x}(t))}_{= 4t^2 \cdot 3t + 4 \cdot 3t} \cdot \underbrace{\|\dot{\vec{x}}(t)\|}_{\left\|\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}} \, dt$$

$$= \int_{-1}^{2} (12t^3 + 12t)\sqrt{10} \, dt = \sqrt{10}\left(3t^4 + 6t^2\right)\Big|_{-1}^{2}$$

$$= \sqrt{10}(3 \cdot 16 + 6 \cdot 4 - 3 - 6) = \dots\dots$$

Zurück zum Anfangsbeispiel:

Falls $f \equiv 1$ (konstante Dichte), dann ist

$\int_{\vec{x}} 1 \, ds$ die Länge des Drahtes bzw.

genauer die Bogenlänge der Kurve

Definition (Bogenlänge)

Sei $\vec{x}: [a,b] \to D$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann heißt

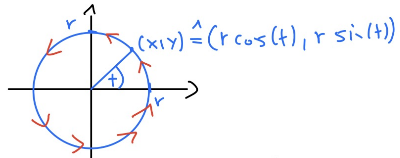
弧长 $$\int_{\vec{x}} 1 \, ds$$

die **Bogenlänge** der Kurve.

Beispiel

Bestimme Umfang des Kreises um $\vec{0}$ mit Radius r

Parametrisierung: $\vec{x}: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \begin{bmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{bmatrix}$



$$\Rightarrow \int_{\vec{x}} 1 \, ds = \int_0^{2\pi} 1 \cdot \left\| \begin{bmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{bmatrix} \right\| dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \underbrace{(\sin^2(t) + \cos^2(t))}_{=1}} \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2} \, dt = \int_0^{2\pi} r \, dt = rt\Big|_0^{2\pi} = 2\pi r$$

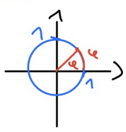
Für $\vec{x}: [0, \sqrt{2\pi}] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{bmatrix} r\cos(t^2) \\ r\sin(t^2) \end{bmatrix}$ (gleiche Kurve, andere Parametrisierung)

$$\Rightarrow \int_{\vec{x}} 1 \, ds = \int_0^{\sqrt{2\pi}} 1 \cdot \left\| \begin{bmatrix} -r\sin(t^2) \cdot 2t \\ r\cos(t^2) \cdot 2t \end{bmatrix} \right\| dt$$

$$= \int_0^{\sqrt{2\pi}} \sqrt{r^2 (2t)^2 \underbrace{(\sin^2(t^2) + \cos^2(t^2))}_{=1}} \, dt$$

$$= \int_0^{\sqrt{2\pi}} r \, 2t \, dt = r t^2 \Big|_0^{\sqrt{2\pi}} = 2\pi r$$

Spezialfall: $\Rightarrow \vec{x}: [0, \varphi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$



$$\Rightarrow \int_{\vec{x}} 1 \, ds = \int_0^{\varphi} \left\| \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} \right\| dt = \int_0^{\varphi} 1 \, dt = \varphi$$

Eigenschaften des skalaren Kurvenintegrals

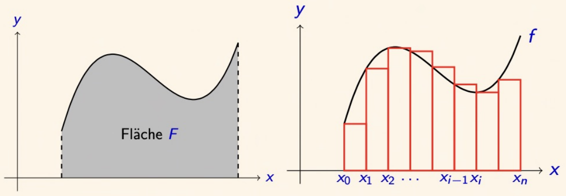
(1) Der Wert des Kurvenintegrals ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung.

(2) Der Wert des Kurvenintegrals ist unabhängig von der Durchlaufrichtung.
Achtung: Bei vektoriellen Kurvenintegralen änderte sich das Vorzeichen bei der Umkehrung der Durchlaufrichtung.

Definition des Integralbegriffs im $\mathbb{R}^2$

Wiederholung Analysis 1

Betrachte $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, zerlege $[a,b]$ in $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ und berechne Fläche unter Treppenfunktion



Riemannsche Summe: $\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i$ mit $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

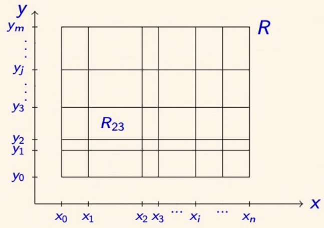
Es gilt: $F \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F$

Jetzt: Integral einer Treppenfunktion

Sei R ein Rechteck im $\mathbb{R}^2$ und zerlege dieses in $n \cdot m$ Teilrechtecke R_{ij} wie folgt:

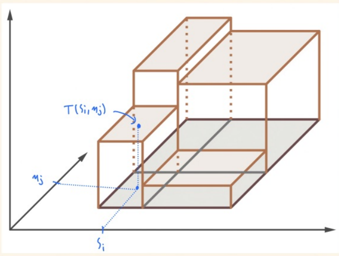
x-Richtung: $x_0, \ldots, x_n$ mit $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ für $i = 1, \ldots, n$

y-Richtung: $y_0, \ldots, y_m$ mit $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ für $j = 1, \ldots, m$



Eine Funktion $T\colon R \to \mathbb{R}$ heisst **Treppenfunktion**, falls sie in dem Inneren jedes Teilrechtecks R_{ij} konstant ist.

Integral einer Treppenfunktion: Graph einer Treppenfunktion

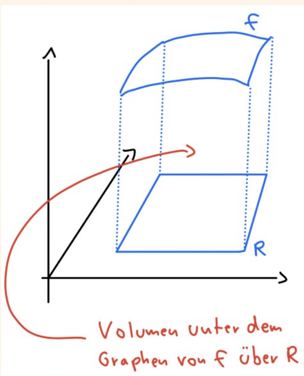


Wähle zu jedem R_{ij} einen inneren Punkt (ξ, η_j)

$\Rightarrow$ $T(\xi_i, \eta_j)\Delta x_i \Delta y_j$ ist das Volumen unter dem Graphen von T über R_{ij}

$\Rightarrow \iint_R T(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} T(\xi_i, \eta_j)\Delta x_i \Delta y_j$ ist das Gesamtvolumen unter dem Graphen von T.

Integral einer beschränkten Funktion $f\colon R \to \mathbb{R}$ (R Rechteck)



Idee: Approximiere f durch Treppenfunktionen

Definition (integrierbar über ein Rechteck)

Die Funktion $f\colon R \to \mathbb{R}$ ($R \subseteq \mathbb{R}^2$ Rechteck) heißt integrierbar über $R \subseteq \mathbb{R}^2$, falls es zwei Folgen $(T_k)_{k\geq 1}$ und $(T^k)_{k\geq 1}$ von Treppenfunktionen auf R gibt, so dass gilt:

(1) $T_k(x,y) \leq f(x,y) \leq T^k(x,y)$ für alle $(x,y) \in R$ und für alle $k \geq 1$.

(2) $\iint_R T^k(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_R T_k(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \frac{1}{k}$

Dann ist das Integral von f über R definiert als

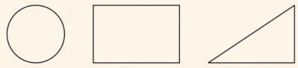
$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{k\to\infty} \iint_R T_k(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{k\to\infty} \iint_R T^k(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Integral über kompakte Mengen

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt (also abgeschlossen und beschränkt) und sei $f\colon B \to \mathbb{R}$ beschränkt.

Grundvoraussetzung: Der Rand von B ist stückweise glatt, d.h. der Rand von B besteht aus endlich vielen glatten Kurven (d.h. mit stetig differenzierbarer Parametrisierung)

Beispiele: (abgeschlossene) Kreise, Rechtecke, Dreiecke



Kreis: Bereits gesehen, eine glatte Kurve genügt

Rechteck: Nicht stetig differenzierbar in den Eckpunkten, aber jede Seite durch glatte Kurve darstellbar

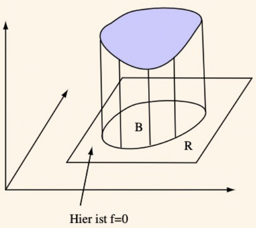
Dreieck: Analog, drei glatte Kurven ausreichend

Definition (Integral über kompakte Mengen)

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt mit stückweise glattem Rand (siehe letzte Folie) und sei $f\colon B \to \mathbb{R}$ beschränkt.

B ist beschränkt, da kompakt, also liegt B in einem Rechteck R. Erweitere f auf R:

$$\tilde{f}\colon R \to \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{falls } (x,y) \in B, \\ 0 & \text{falls } (x,y) \in R \setminus B. \end{cases}$$



Dann setzen wir

$$\iint_B f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y := \iint_R \tilde{f}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

falls das rechte Integral existiert.

Bemerkungen

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt mit stückweise glattem Rand.

(1) Vektorwertige Funktionen integriert man komponentenweise:

$$\iint_B \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y := \begin{bmatrix} \iint_B f_1(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \iint_B f_2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{bmatrix}$$

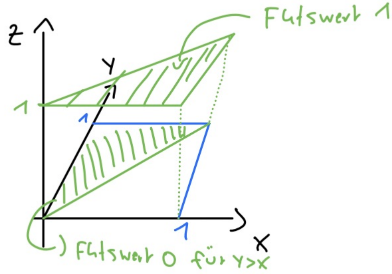
(2) Stetige Funktionen $f\colon B \to \mathbb{R}$ sind integrierbar.

(3) Beschränkte Funktionen sind integrierbar, wenn die Menge der Punkte, in denen f nicht stetig ist, eine Vereinigung von endlich vielen glatten Kurven ist (z.B. Treppenfunktionen).

Beispiel

$$f: R \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } y \leq x \\ 0 & \text{für } y > x \end{cases}$$

$R = [0,1] \times [0,1]$

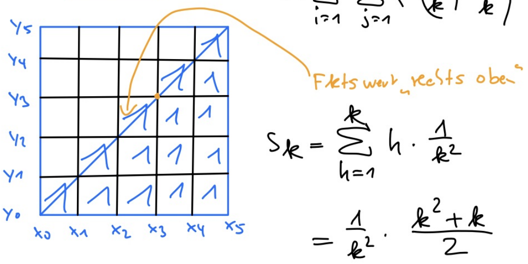


zerlege R in Teilquadrate mit Kantenlänge $\frac{1}{k}$:

$x_i = i \cdot \frac{1}{k}$ für $i = 0, \dots, k \Rightarrow \Delta x_i = x_i - x_{i-1} = i \cdot \frac{1}{k} - (i-1) \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k}$

$y_j = j \cdot \frac{1}{k}$ für $j = 0, \dots, k \Rightarrow \Delta y_j = \frac{1}{k}$

$$\Rightarrow S_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)\, \Delta x_i\, \Delta y_j$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} f\left(\frac{i}{k}, \frac{j}{k}\right) \cdot \frac{1}{k^2}$$



$$S_k = \sum_{h=1}^{k} h \cdot \frac{1}{k^2}$$
$$= \frac{1}{k^2} \cdot \frac{k^2 + k}{2}$$
$$= \frac{k^2 + k}{2k^2} = \frac{1 + \frac{1}{k}}{2}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}$$

$$\Rightarrow \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{k \to \infty} S_k = \frac{1}{2}$$

Integration im $\mathbb{R}^3$ (analoge Herleitung zu dem Fall $\mathbb{R}^2$)

Sei $f\colon B \to \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}^3$.

(1) Sei $B = Q$ ein Quader und betrachte Treppenfunktion T auf Q. Zerlege Q in Teilquader $Q_{i,j,k}$ und setze

$$\iiint_Q T(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \sum_i \sum_j \sum_k T(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

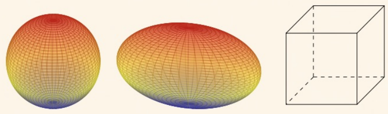
(2) Approximiere f durch Treppenfunktionen T_ℓ, $\ell \in \mathbb{N}$ (von oben und von unten) und betrachte den Grenzwert

$$\iiint_Q f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \lim_{\ell \to \infty} \iiint_Q T_\ell(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Integration im $\mathbb{R}^3$ (Fortsetzung)

Sei $f\colon B \to \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}^3$.

(3) **Grundvoraussetzung:** B ist kompakt und der Rand von B ist eine Vereinigung von endlich vielen glatten Flächen (grob: Kurven, die keine Knicke haben, später mehr dazu).
Beispiele: (abgeschlossene) Kugel, Ellipsoid, Würfel



Erweitere f trivial durch $\tilde{f}$ auf einen Quader Q mit $B \subseteq Q$ und setze

$$\iiint_B f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_Q \tilde{f}(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

Rechenregeln für integrierbare Funktionen

Seien $B \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f, g\colon B \to \mathbb{R}$ integrierbar.

(1) **Linearität**

$$\iint_B (f(x,y) + g(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint_B f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_B g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
$$\iint_B \lambda f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lambda \iint_B f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

Integrierbare Funktionen bilden einen Vektorraum, d.h. Linearkombinationen von integrierbaren Funktionen sind wieder integrierbar.

(2) **Monotonie:**

$$\iint_B f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \iint_B g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \text{falls } f \leq g,$$

Rechenregeln für integrierbare Funktionen (Fortsetzung)

Seien $B \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f, g\colon B \to \mathbb{R}$ integrierbar.

(3) **Dreiecksungleichung:**

$$\left| \iint_B f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right| \leq \iint_B |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(4) **Bereichsadditivität:** Für $B = B_1 \cup B_2$ mit $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ gilt

$$\iint_{B = B_1 \cup B_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{B_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{B_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Analoge Rechenregeln gelten im $\mathbb{R}^3$ für Integrale der Form

$$\iiint_B f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

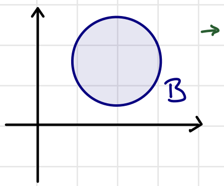
n	geometrisch	physikalisch
1	$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ Fläche unter dem Graphen (Flächenbilanz)	$\varrho\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Massendichte eines Drahtes $\int_a^b \varrho(x)\,\mathrm{d}x$ Masse Draht
2	$f\colon B \to \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}^2$ $\iint_B f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ Volumen unter dem Graphen von f (Volumenbilanz)	$\varrho\colon B \to \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}^2$ Massendichte einer Platte $\iint_B \varrho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ Masse der Platte
3	$f\colon B \to \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}^3$ $\iiint_B f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 4-dim. Volumen ??	$\varrho\colon B \to \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}^3$ Massendichte eines Körpers $\iiint_B \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ Masse des Körpers

18. VL. Berechnung durch Mehrfach-Integration

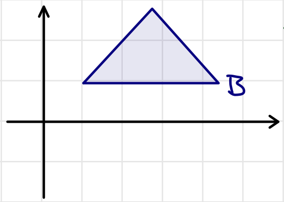
Mehrdimensionale Integrale:

Satz: $\iint_B f(x,y)\,dF$ existiert, falls gilt

① $B \subset \mathbb{R}^2$ ist kompakt, $\underset{\text{Rand von } B}{\partial B}$ besteht aus endlich vielen glatten Kurven

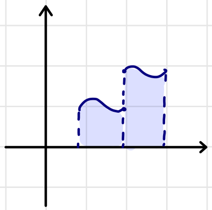


→ Kreislinie ist eine glatte Kurve

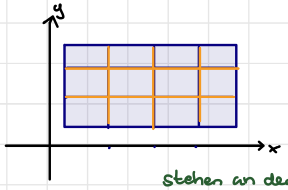


→ Rand besteht aus drei Strecken und jede davon ist eine glatte Kurve

② $f: B \to \mathbb{R}$ ist stetig, Außnahmen in endlich vielen Punkten auf endlich vielen Kurven sind erlaubt.



→ macht einen Sprung, kann man trotzdem integrieren

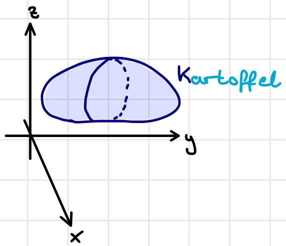


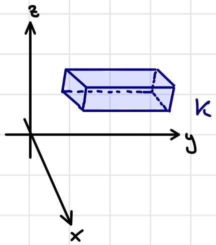
→ wenn man auf die Quadrate mit Lego baut mit unterschiedlichen Höhen, entstehen an den Kanten unstetige Stellen, die aber kein Problem sind !!

→ Punkte (0-dimensional) und Kurven (1-dimensional) sind Mengen, die eine niedrigere Dimension haben als der Integrationsbereich (→ Null-Mengen)

Satz: $\iiint_K f(x,y,z)\,dV$ existiert, falls gilt:

① $K \subset \mathbb{R}^3$ ist kompakt, ∂K besteht aus endlich vielen glatten Flächen





→ besteht aus 6 glatten Flächen

② $f: K \to \mathbb{R}$ ist stetig, Ausnahmen in endlich vielen Punkten, Kurven, Flächen sind erlaubt

↳ unstetigkeit kann auch auf ganzen Flächen (2-dimensional < 3-dimensional) zugelassen werden.
$\downarrow$ Null-Menge

Bsp: Für Anwendung im $\mathbb{R}^3$:

① $\mu(x,y,z)$ Massendichte $\Rightarrow \iiint_K g(x,y,z)\,dV$ Gesamtmasse

② $\iiint_K 1\,dV$ = Volumenmaße von K

$\| \iint_B 1\,dF$ = Flächeninhalt von B

③ Schwerpunkt von K: $S = (S_1, S_2, S_3)$

$$S_1 = \underset{\text{Gesamtmasse}}{\frac{1}{M}} \iiint_K x \cdot \mu(x,y,z)\,dV \quad \text{analog für } S_2, S_3.$$

Falls $\mu \equiv 1$: geometrischer Schwerpunkt

Rechenregeln: (exemplarisch im $\mathbb{R}^2$)

① $\iint_B f(x,y)+g(x,y)\,dF = \iint_B f(x,y)\,dF + \iint_B g(x,y)\,dF$

② $\iint_B \lambda \cdot f(x,y)\,dF = \lambda \iint_B f(x,y)\,dF$

} Linearität

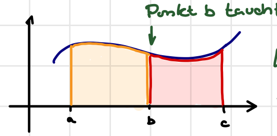
③ $f(x,y) \leq g(x,y)$ für alle $(x,y) \in B \Rightarrow \iint_B f(x,y)\,dF \leq \iint_B g(x,y)\,dF$ Monotonie

④ $\left| \iint_B f(x,y)\,dF \right| \leq \iint_B |f(x,y)|\,dF$ → erweiterte Dreiecksungleichung

↳ wie bei den Summen: Eine Summe wird größer, wenn man den Betrag hineinzieht

↳ diese Rechenregeln bis hier gelten für alle Arten von Integralen!

$\| \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

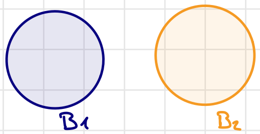


Punkt b taucht in beiden Integralen auf → ist eine Linie (1-dimensional) = Null-dimensional ↳ deshalb stört es nicht

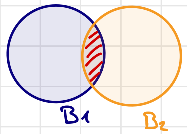
⑤ $\iint\limits_{B_1 \cup B_2} f(x,y)\,dF = \iint\limits_{B_1} f(x,y)\,dF + \iint\limits_{B_2} f(x,y)\,dF$

↑ Vereinigung

↳ Wann gilt das?

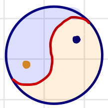


↳ Bei der Integration würde man den gesamten Bereich unter dem Graph von B_1 und B_2 bekommen



↳ hier würde man bei der Integration einen Bereicht doppelt berechnen

⇒ Rechenregel hier nicht anwendbar



↳ Bei Mengen, die aussehen wie Yin und Yang, wo der "Schnitt" eine Nullmenge ist, funktioniert die Regel (Mengen aus $\mathbb{R}^2$, Schnittlinie aus $\mathbb{R}$)
↳ spielt im $\mathbb{R}^2$-Integral keine Rolle

Die Regel gilt, falls $B_1 \cap B_2$ aus höchsens endlichen glatten Kurven oder Punkten besteht.

(analog im $\mathbb{R}^3$: $\iiint\limits_{K_1 \cap K_2} f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{K_1} f(x,y,z)\,dV + \iiint\limits_{K_2} f(x,y,z)\,dV$

gilt, falls $K_1 \cup K_2$ aus endlich vielen glatten Kurven, Flächen oder Punkten besteht.)

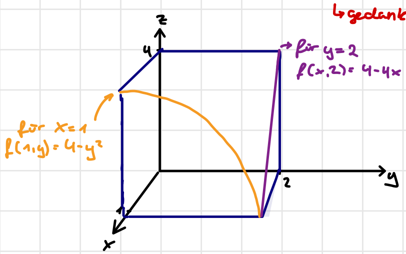
Satz: Sei $R = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$. Dann gilt $\iint\limits_R f(x,y)\,dF = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx$

↱ iteriert = nacheinander

↳ gedanklich

Bsp. $f(x,y) = 4 - xy^2$

$R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$



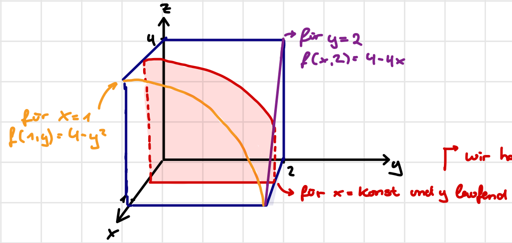
$$\iint\limits_R 4 - xy^2\,dF = \int_0^1 \left[\int_0^2 4 - xy^2\,dy \right] dx = \int_0^1 \left[\left[4y - \tfrac{1}{3}xy^3 \right]_0^2 \right] dx = \int_0^1 \left[8 - \tfrac{8}{3}x \right] dx$$

Integration nach y bei konst. x

Stammfunktion von $f(x)$:

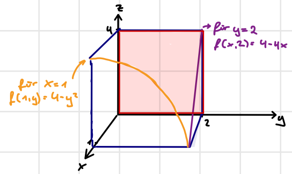
$$= \left[8x - \tfrac{4}{3}x^2 \right]_0^1 = 8 - \tfrac{4}{3} = \tfrac{24}{3} - \tfrac{4}{3} = \tfrac{20}{3}$$

↳ Volumen



↱ wir haben in den Klammern den Flächeninhalt der "Scheibe" berechnet

wenn wir die Scheibe verschieben zu x = konst = 0, dann bekommen



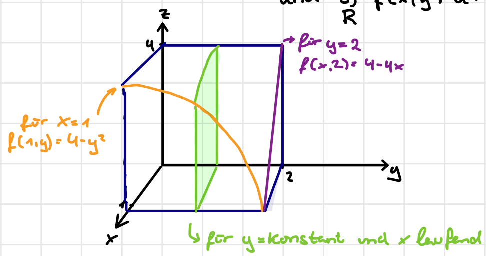
wir den Flächeninhalt des Quadrats

$2 \cdot 4 = 8 = 8 - \tfrac{8}{3} \cdot 0$

Satz: Sei $R = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$. Dann gilt $\iint\limits_R f(x,y)\,dF = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx$

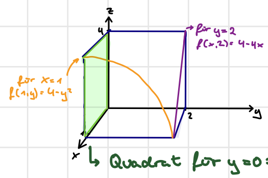
↳ gedanklich

und $\iint\limits_R f(x,y)\,dF = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy$



$$\iint\limits_R 4 - xy^2\,dF = \int_0^2 \left[\int_0^1 4 - xy^2\,dx \right] dy$$

$$= \int_0^2 \left[\left[4x - \tfrac{1}{2}x^2y^2 \right]_0^1 \right] dy = \int_0^2 \left[4 - \tfrac{1}{2}y^2 \right] dy$$

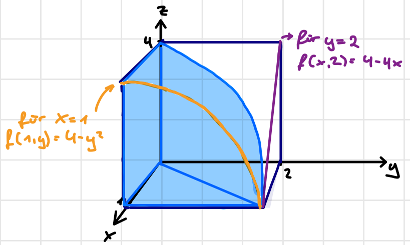


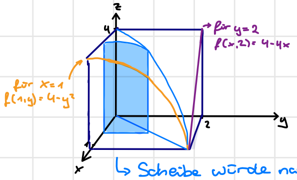
↳ Quadrat für $y = 0$: $4 \cdot 1 = 4 = 4 - \tfrac{1}{2} \cdot 0^2$

$$= \left[4y - \tfrac{1}{6}y^3 \right]_0^2 = 8 - \tfrac{8}{6} = \tfrac{24}{3} - \tfrac{4}{3} = \tfrac{20}{3}$$

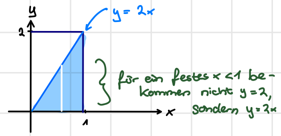
Modifikation: über ein Dreieck integrieren

halbes Volumen = $\frac{10}{3}$, aber ←
vorne ein bisschen bauchiger, deshalb
sollte mehr als $\frac{10}{3}$ rauskommen





↳ Scheibe würde nach vornehin breiter werden



⇒ wir dürfen auf der y-Achse nicht von 0 bis 2 integrieren, sondern von 0 bis 2x

$$\iint_D 4-xy^2\,dF = \int_0^1 \left[\int_0^{2x} 4-xy^2\,dy\right]dx$$

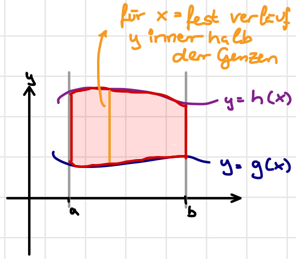
Satz: (Integration über Normalbereiche)

Falls gilt: ① (Normalbereich von Typ I)

$B = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ g(x) \le y \le h(x)\}$

Dann gilt: $$\iint_B f(x,y)\,dF = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\right]dx$$

↳ richtige Reihenfolge der Integration beachten !!!

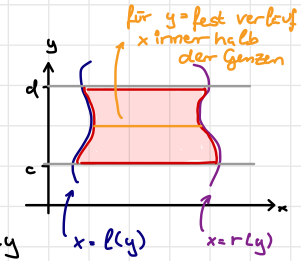


$$\cancel{\int_{g(x)}^{h(x)} \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy}$$ → so nicht !!!

② (Normalbereich vom Typ II)

$B = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ \underset{\text{links}}{\ell(y)} \le x \le \underset{\text{rechts}}{r(y)}\}$

Dann gilt: $$\iint_B f(x,y)\,dF = \int_c^d \left[\int_{\ell(y)}^{r(y)} f(x,y)\,dx\right]dy$$



↳ Rollen von x und y sind vertauscht

Zurück zur Berechnung des Integrals über einem Dreieck:

$D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2x\}$

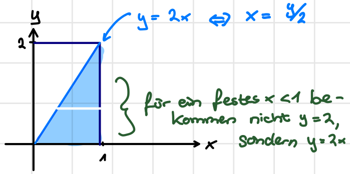
$$\iint_D 4-xy^2\,dF = \int_0^1 \left[\int_0^{2x} 4-xy^2\,dy\right]dx$$

↳ Integrationsreihenfolge nicht austauschbar !

$$= \int_0^1 \left[\left[4y - \tfrac{1}{3}xy^3\right]_0^{2x}\right]dx = \int_0^1 \left[8x - \underbrace{\tfrac{8}{3}x^4}_{\frac{1}{3}x\cdot 8x^3}\right]dx$$

$$= \left[4x^2 - \tfrac{8}{15}x^5\right]_0^1 = 4 - \underbrace{\tfrac{8}{15}}_{\text{auf drittel bringen}} = 4 - \frac{8/5}{15/5} = 4 - \frac{1{,}6}{3} = \frac{12-1{,}6}{3} = \frac{10{,}4}{3} > \frac{10}{3}$$

als Übung: Darstellung mit x als innere und y als äußere Variable



$D = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 2,\ \tfrac{y}{2} \le x \le 1\}$

$$\iint_D 4-xy^2\,dF = \int_0^2 \left[\int_{y/2}^1 4-xy^2\,dx\right]dy = \int_0^2 \left[\left[4x - \tfrac{1}{2}x^2y^2\right]_{y/2}^1\right]dy$$

$$= \int_0^2 4 - \tfrac{1}{2}y^2 - (\underbrace{2y}_{4\cdot\frac{y}{2}} - \underbrace{\tfrac{1}{8}y^4}_{\frac{1}{2}\cdot\frac{y^2}{4}\cdot y^2})\,dy$$

$$= \left[4y - \tfrac{1}{6}y^3 - y^2 + \tfrac{1}{40}y^5\right]_0^2$$

$$= 8 - \tfrac{8}{6} - 4 + \tfrac{32}{40}$$

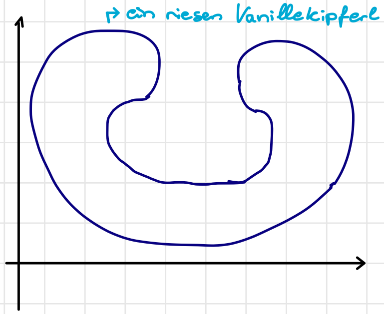
$$= 4 - \tfrac{4}{3} + \tfrac{4}{5}$$ ICH erweitere erstmal auf 15

$$= \tfrac{60}{15} - \tfrac{20}{15} + \tfrac{12}{15}$$

$$= \tfrac{52}{15}$$ auf drittel: $\frac{52}{5} = 10 + \frac{2}{5} = 10 + \frac{4}{10} = 10 + 0{,}4 = 10{,}4$ $\quad = \frac{10{,}4}{3}$

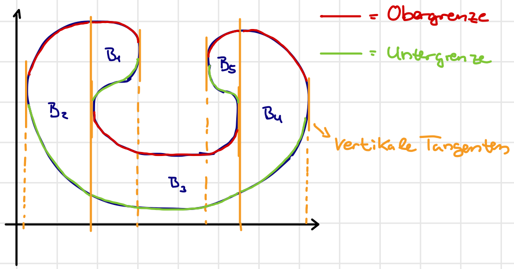
Ist jeder Integrationsbereich ein Normalbereich? Nein.

↗ ein riesen Vanillekipferl !!



→ kein Normalbereich vom Typ I oder Typ II

Jeder zulässige Integrationsbereich (= Kompakt und Rand soll aus endlich vielen glatten Kurven bestehen) lässt sich durch Achsenparallele Schnitte in Normalbereiche vom Typ I oder Typ II zerlegen.

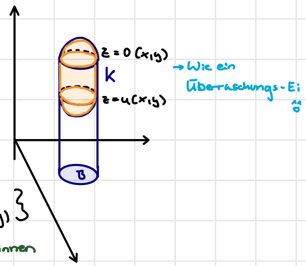


$B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5$

$\Rightarrow \iint\limits_B = \iint\limits_{B_1} + \iint\limits_{B_2} + \dots + \iint\limits_{B_5}$ (ohne Integrant)

Integration im $\mathbb{R}^3$: Wenn gilt $K = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in B,\ \underset{\text{unten}}{u(x,y)} \le z \le \underset{\text{oben}}{o(x,y)}\}$

Dann ist $\iiint\limits_K f(x,y,z)\,dV = \iint\limits_B \left[\int\limits_{u(x,y)}^{o(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right] dF$



am besten ist eine Darstellung:

$K = \{(x,y,z) \mid \underset{\text{außen, feste Grenzen}}{a \le x \le b},\ \underset{\text{mitte, Grenzen dürfen von x abh.}}{g(x) \le y \le h(x)},\ \underset{\text{Grenzen dürfen von x, y abh.} \Rightarrow \text{ganz innen}}{u(x,y) \le z \le o(x,y)}\}$

↳ oder eine andere Rollenverteilung

Dann gilt $\iiint\limits_K f(x,y,z)\,dV = \int\limits_a^b \left[\int\limits_g^{h(x)} \left[\int\limits_{u(x,y)}^{o(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right] dy \right] dx$

Bsp: $\iiint\limits_K 2xz\,dV$ K sei kompakt und werde begrenzt von den Flächen ① $x = 0$ ② $x = 1 - y^2$ ③ $z = 0$ ④ $x + 2z = 1$

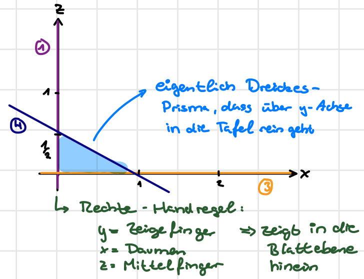
Was ist das für ein Körper?

③ $z = 0 \Rightarrow$ x-y-Ebene
① $x = 0 \Rightarrow$ y-z-Ebene
④ $x + 2z = 1 \Rightarrow$ Ebene

} Ebenengleichungen in der kein y vorkommt

⇒ wir projizieren y weg:

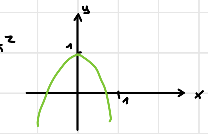
↳ Spurpunkte:
$x + 0y + 2z = 1$
$S_x(1 \mid 0 \mid 0) \Rightarrow x = 1$
$S_z(0 \mid 0 \mid \tfrac{1}{2}) \Rightarrow z = \tfrac{1}{2}$
S_y gibt's nicht

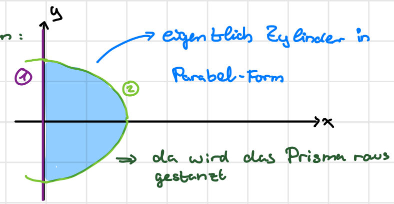


bei ① und ② kommt kein z vor ⇒ z wegprojizieren:

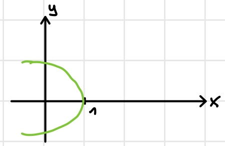
② $x = 1 - y^2$

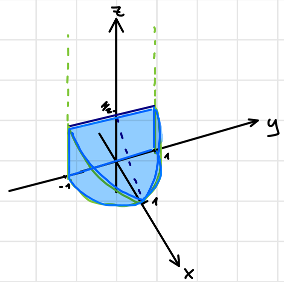
man kennt $y = 1 - x^2$





$x = 1 - y^2$ Spiegelung in $y = x$ (Quadrantenhalbierende)





→ wir brauchen für das Integral Beschreibungen in Form von Ungleichungen:

$K = \{(x,y,z) \mid \underset{\text{feste Grenzen, innen}}{-1 \le y \le 1},\ \underset{\text{Grenzen dürfen von y abh., mittig; Parabel}}{0 \le x \le 1 - y^2},\ \underset{\text{Grenzen dürfen von x und y abh., außen}}{0 \le z \le \tfrac{1-x}{2}}\}$

$x + 2z = 1 \Rightarrow z = \frac{1-x}{2}$

→ wir wollten ursprünglich mal $2xz$ integrieren ;)

$$\iiint\limits_K 2xz\,dV = \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{0}^{1-y^2} \int\limits_{0}^{\frac{1-x}{2}} 2xz\,dz\,dx\,dy = \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{0}^{1-y^2} \left[xz^2 \right]_0^{\frac{1-x}{2}} dx\,dy$$

$\uparrow y \quad \uparrow x \quad \uparrow z$

↳ selbe Reihenfolge wie oben

$$= \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{0}^{1-y^2} x \cdot \frac{(1-x)^2}{4}\,dx\,dy$$

Kleines Kunststück: Man darf alles machen, was man mal über Integrale gelernt hat, also führen wir jetzt mitten drin einfach mal eine Substitution durch

Sub: $t = 1-x \Leftrightarrow x = 1-t$

$$\frac{\partial t}{dx} = -1 \Rightarrow dt = -dx$$

$\hookrightarrow x = 1-y^2 \Rightarrow t(1-y^2) = 1-(1-y^2) = y^2$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{1}^{y^2} -(1-t)\,\frac{t^2}{4}\,dt\,dy$$

$\hookrightarrow x = 0 \Rightarrow t(0) = 1-0 = 1$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{1}^{y^2} -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t^3\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[-\frac{1}{12}t^3 + \frac{1}{16}t^4\right]_1^{y^2} dy$$

$$= \int_{-1}^{1} -\frac{1}{12}y^6 + \frac{1}{16}y^8 - \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{16}\right) dy$$

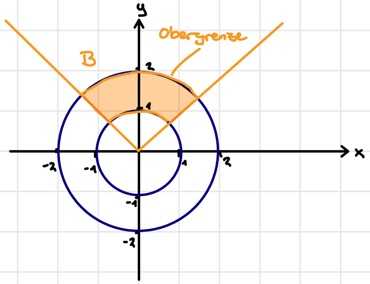
$= \ldots$ ne ne werde ich jetz auch nicht weiter ausrechnen ^^

... hui, wir haben's geschaft ...

20. VL Berechnung durch Koordinatentransformationen

Mehrdimensionale Integration – Koordinatentransformation

Bsp: $\iint\limits_B f(x,y)\,dF$



Menge beschreiben

$B = \{(x,y) \mid \quad \le x \le \quad , \quad \le y \le \quad \}$

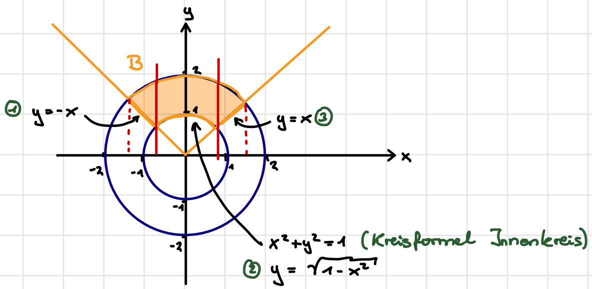
$\le x \le$ ↓ in festen Grenzen

$\le y \le$ ↓ in Grenzen die von x abhängen dürfen

Kreisformel (Außenkreis)

Obergrenze: $x^2+y^2=4 \Leftrightarrow y^2 = 4-x^2 \overset{\sqrt{\ldots}}{\Longleftrightarrow} \pm y$ ... aber da y positiv $+y = \sqrt{4-x^2}$

Untergrenze:



man braucht drei Mengenbeschreibungen:

$B = \{(x,y) \mid -\sqrt{2} \le x \le -\sqrt{\tfrac{1}{2}} \,,\ \overset{①}{-x \le y \le \sqrt{4-x^2}} \}$

vereinigt $\cup \{(x,y) \mid -\sqrt{\tfrac{1}{2}} \le x \le \sqrt{\tfrac{1}{2}} \,,\ \overset{②}{\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}} \}$

$\cup \{(x,y) \mid \sqrt{\tfrac{1}{2}} \le x \le \sqrt{2} \,,\ \overset{③}{x \le y \le \sqrt{4-x^2}} \}$

Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit dem Innenkreis:

$x^2+y^2=1$ mit $y=\pm x$

$x^2+(\pm x)^2=1 \Leftrightarrow 2x^2=1$

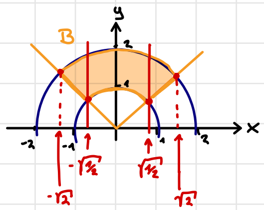
$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}$

Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit dem Außenkreis:

$x^2+y^2=4$ mit $y=\pm x$

$x^2+(\pm x)^2=4 \Leftrightarrow 2x^2=4$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$



$$\iint\limits_B \; = \int_{-\sqrt{2}}^{-\sqrt{\frac{1}{2}}} \int_{-x}^{\sqrt{4-x^2}} \ldots \; + \int_{-\sqrt{\frac{1}{2}}}^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \ldots \; + \int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{\sqrt{2}} \int_{x}^{\sqrt{4-x^2}} \ldots$$

→ Ein Kreisring lässt sich einfach nicht gut in Kartesischen Koordinaten beschreiben!

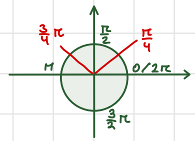
→ Man könnte ihn aber ganz wunderbar in Polarkoordinaten beschreiben :)

In Polarkoordinaten: $x = \varrho \cdot \cos(\varphi)$, $y = \varrho \sin(\varphi)$

ϱ = Abstand zur z-Achse (Ursprung): $1 \le \varrho \le 2$

φ = Winkel der mit pos. x-Achse eingeschlossen wird: $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3}{4}\pi$

↳ wie im Einheitskreis:



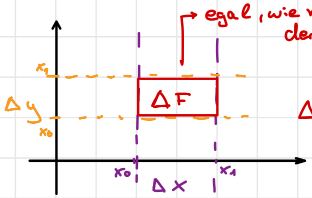
$$\iint\limits_B f(x,y)\,dF = \int_1^2 \int_{\pi/4}^{3/4\pi} f(\varrho\cos(\varphi), \varrho\sin(\varphi)) \;\boxed{?}$$

$\uparrow \varrho \quad \uparrow \varphi$

Was ist das dF? Man könnte denken, da dF im Kartesischen dx, dy ist, ist dF in Polar $d\varrho$, $d\varphi$ ...

... so ist es aber nicht!

Warum setzt man überhaupt für dF im Kartesischen dx, dy ein?

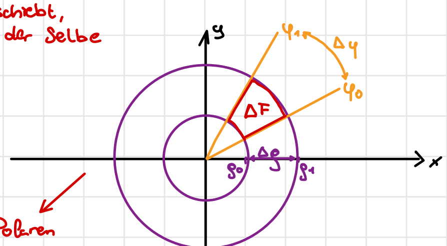


→ egal, wie man das Kästchen verschiebt, der Flächeninhalt bleibt der Selbe

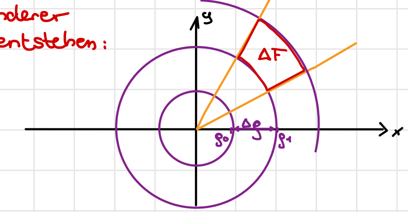
$\Delta F = \Delta x \cdot \Delta y$

x_0, x_1 feste Werte, y frei

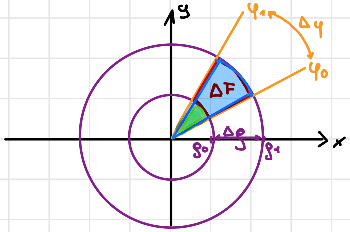
→ Differenz zw. x_0 und $x_1 = \Delta x$



wenn wir im Polaren das Kästchen verschieben könnte ein anderer Flächeninhalt entstehen:



Elementargeometrie:



Flächeninhalt des großen Kreises

$A_{Kreis} = \pi \cdot r^2$ hier: $r = \varrho_1$

$A_{gr.\,Kreis} = \pi \varrho_1^2$

Flächeninhalt des großen Tortenstückes $\sim \Delta\varphi$

zB: $\Delta\varphi = 2\pi$, dann hätten wir den ganzen Kreis

$$A_{gr.\,Tortenstück} = \underbrace{\frac{\Delta\varphi}{2\pi}}_{\text{Anteil des gr. Kreises}} \cdot \pi\varrho_1^2 = \frac{\Delta\varphi}{2} \cdot \varrho_1^2$$

ΔF = großes Tortenstück − kleines Tortenstück

ist die gleiche Formel, wie fürs gr. Tortenstück, nur mit ϱ_0 statt ϱ_1

$$\Delta F = \frac{\Delta\varphi}{2} \cdot \varrho_1^2 - \frac{\Delta\varphi}{2}\varrho_0^2$$

$$= \left(\frac{\varrho_1^2 - \varrho_0^2}{2}\right) \cdot \Delta\varphi$$

3. Binomische F:
$(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$

$$= \frac{(\varrho_1 + \varrho_0)}{2} \underbrace{(\varrho_1 - \varrho_0)}_{=\Delta\varrho} \cdot \Delta\varphi$$

$$= \frac{(\varrho_1 + \varrho_0)}{2} \Delta\varrho \cdot \Delta\varphi$$

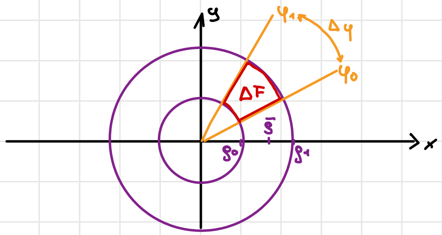
$\frac{(\varrho_1 + \varrho_0)}{2}$ = arithmetisches Mittel = Radius zw. ϱ_1 und ϱ_0 = $\bar{\varrho}$

$$= \bar{\varrho} \cdot \Delta\varrho \cdot \Delta\varphi$$

Flächeninhalt hängt linear von $\bar{\varrho}$ ab

$$\Rightarrow \boxed{dF = \varrho \cdot d\varrho \cdot d\varphi}$$

für $\Delta\varrho \to 0 = \varrho$



$$\iint_B f(x,y)\, dF = \int_{\pi/4}^{2}\int_{\pi/4}^{3/4\pi} f(\varrho\cos(\varphi), \varrho\sin(\varphi)) \cdot \varrho \, d\varphi\, d\varrho$$

(äußeres Integral: ϱ, inneres Integral: φ)

↳ weil wir erst nach φ integrieren wollen (siehe Grenzen) und dann nach ϱ

$$\iint_B f(x,y)\, dF = \int\!\!\int f(\varrho\cos(\varphi), \varrho\sin(\varphi)) \cdot \underbrace{\varrho\, d\varrho\, d\varphi}_{=dF}$$

$x = \varrho\cos\varphi$
$y = \varrho\sin\varphi$

im Kartesischen $dF = dx\,dy$

Zusammenhang zur Substitution:

$$\int_a^b f(x)\, dx =$$

$x = x(t)$ bzw $x = g(t)$ irgendeine Fkt. ①

↳ wie bei $x = \varrho\cos\varphi$

$\frac{dx}{dt} = g'(t) \Rightarrow dx = g'(t) \cdot dt$ ②

x-Grenzen a, b in t-Grenzen umwandeln: ③

$x = a \Rightarrow a = g(t) \Rightarrow t = g^{-1}(a)$

$x = b \Rightarrow b = g(t) \Rightarrow t = g^{-1}(b)$

$$= \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))\, g'(t) \cdot dt$$

⇒ das Gleiche wird bei der mehrdimensionalen Substitution (= Transformation) auch gemacht ☺

$$\iint_B f(x,y)\, dF = \iint_{\tilde{B}} f(\varrho\cos(\varphi), \varrho\sin(\varphi)) \cdot \varrho\, d\varrho\, d\varphi$$

Satz: Transformation in Polarkoordinaten

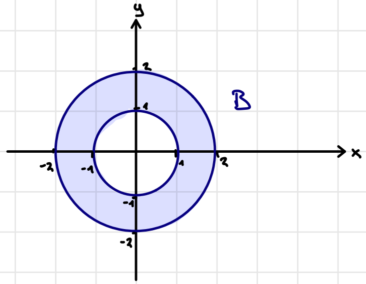
$$\iint_B f(x,y)\, dF = \iint_{\tilde{B}} f(\varrho\cos(\varphi), \varrho\sin(\varphi)) \cdot \varrho\, d\varrho\, d\varphi$$

wobei $\tilde{B}$ die Beschreibung von B in Polarkoordinaten ist.

Bsp: $B = \{ (x,y) \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \}$ = ganzer Kreisring (zw. r=1 und r=2)

↳ nicht integrationstauglich

$$\iint_B \frac{1}{x^2+y^2}\, dF$$



in Polarkoor.: $x = \varrho \cos\varphi$

$y = \varrho \sin\varphi$

$dF = \varrho \cdot \Delta\varrho \cdot \Delta\varphi$

$$\tilde{B} = \{ (\varrho, \varphi) \mid 1 \le \underset{\text{Radius}}{\varrho} \le 2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi \}$$

für $\varphi \in \mathbb{R}$ hätte man den Kreisring unendlich oft

↳ so haben wir alle Punkte einmal, außer die auf der x-Achse (0 und 2π) haben wir zwei mal (aber nur eine Linie ... is okay)

$$\iint_B \frac{1}{x^2+y^2}\, dF = \int_{\underset{\varphi}{0}}^{2\pi} \int_{\underset{\varrho}{1}}^{2} \frac{1}{(\varrho\cos\varphi)^2 + (\varrho\sin\varphi)^2}\, \varrho \, d\varrho \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \frac{1}{\varrho^2 \underbrace{(\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2)}_{=1}}\, \varrho \, d\varrho \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \frac{1}{\varrho^2}\, \varrho \, d\varrho \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \frac{1}{\varrho}\, d\varrho \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} [\ln(\varrho)]_1^2 \, d\varphi$$

$= \ln(2)$

$$= \int_0^{2\pi} \ln(2) - \underbrace{\ln(1)}_{=0} \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \ln(2)\, d\varphi$$

→ immer wenn man eine Konst. integriert, dann kommt immer raus Konst · Intervallbreite

$$= \ln(2) \cdot \int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi$$

$$= \ln(2)\, [\varphi]_0^{2\pi}$$

$$= 2\pi \cdot \ln(2) \quad //$$

Allgemeine Substitution: $x = x(u,v)$

$y = y(u,v)$

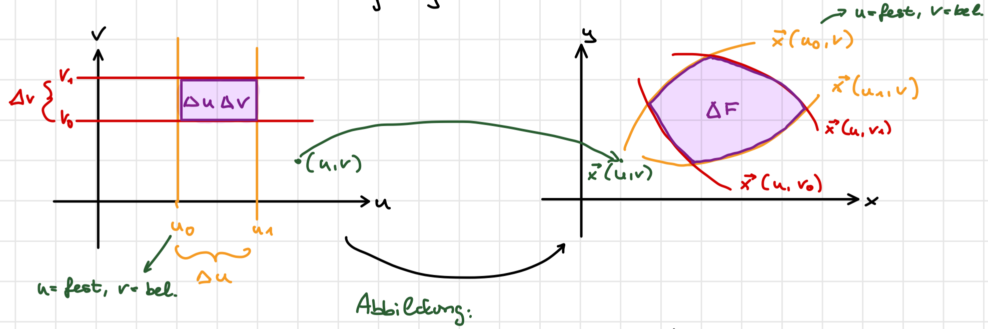


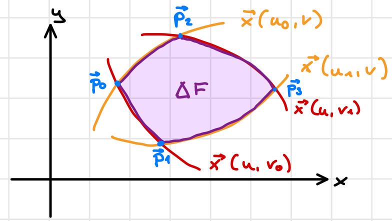
Abbildung:

$(u,v) \longrightarrow \vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

→ Welche Flächenverzerrung passiert, bei der Verwendung der neuen Koordinaten?

↳ Annäherung:



$\vec{p}_0 = \vec{x}(u_0, v_0)$

$\vec{p}_1 = \vec{x}(u_1, v_0)$

$\vec{p}_2 = \vec{x}(u_0, v_1)$

$\vec{p}_3 = \vec{x}(u_1, v_1)$

zu Punkt $\vec{p}_3$:

$\Delta u = u_1 - u_0 \Rightarrow u_1 = u_0 + \Delta u$

$\Delta v = v_1 - v_0 \Rightarrow v_1 = v_0 + \Delta v$

→ $\vec{p}_3$ wie $\vec{p}_0$, aber mit Veränderung um Δu und Δv

$$\vec{p}_3 = \vec{x}(u_1, v_1) \approx \underbrace{\vec{x}(u_0,v_0) + \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u_0,v_0)\,\Delta u + \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u_0,v_0)\,\Delta v}_{\text{lineare Approximation}}$$

zu Punkt $\vec{p}_0$: original Stelle: u_0, v_0

zu Punkt $\vec{p}_1$: $\vec{p}_1$ wie $\vec{p}_0$, aber mit Veränderung um Δu

lineare Approximation: $\vec{p}_1 = \vec{x}(u_1, v_0) \approx \vec{x}(u_0,v_0) + \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u_0,v_0)\,\Delta u$

zu Punkt $\vec{p_2}$: $\vec{p_2}$ wie $\vec{p_0}$, aber mit Veränderung um Δv

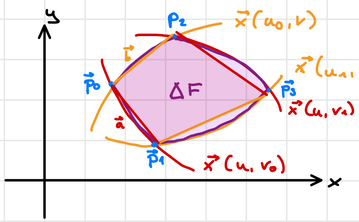
lineare Approx.: $\vec{p_2} = \vec{x}(u_0, v_1) \approx \vec{x}(u_0, v_0) + \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u_0, v_0)\,\Delta v$

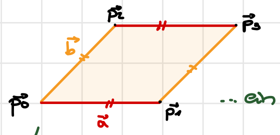
drei Vektoren beteiligt:
$\vec{a} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u_0, v_0)\,\Delta v$
$\vec{b} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u_0, v_0)\,\Delta u$
$\vec{p_0} = (u_0, v_0)$

Punkte (zusammengefasst):
$\vec{p_0}$
$\vec{p_1} \approx \vec{p_0} + \vec{a}$
$\vec{p_2} \approx \vec{p_0} + \vec{b}$
$\vec{p_3} \approx \vec{p_0} + \vec{a} + \vec{b}$

↳ nur Näherung!

Wäre es exakt, würden die Punkte ...





... ein Parallelogramm bilden

Annäherung von ΔF durch ein Parallelogramm

↳ Wie bekommen wir den Flächeninhalts eines Parallelogramms mit zwei Außgangsvektoren die vorgegeben sind in der Ebene?

Lineare Algebra: Zwei Vektoren spannen ein Parallelogramm auf
⇒ Flächeninhalt ist der Betrag der Determinante der beiden Seitenvektoren *klar... weiß man doch...*

$\Delta F = |\det(\vec{a}, \vec{b})|$ nicht exakt, aber annähernd

$$\Delta F \approx \Big|\det\Big(\underbrace{\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u_0,v_0)}_{\text{Vektor}}\,\underset{\text{Faktor}}{\Delta u},\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u_0,v_0)\,\Delta v\Big)\Big|$$

⇒ Faktor kann aus det herausgezogen werden und da Δu und Δv nicht negativ sein können, können sie auch aus dem Betrag rausgezogen werden.

$$= \Big|\det\Big(\underset{\substack{\text{1. Spalte}\\ \text{Abl. von } \vec{x}\\ \text{nach } u}}{\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u_0,v_0)},\ \underset{\substack{\text{2. Spalte}\\ \text{Abl. von } \vec{x}\\ \text{nach } v}}{\frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u_0,v_0)}\Big)\Big| \cdot \Delta u \cdot \Delta v$$

= Ableitungsmatrix

$$= |\det(\vec{x}\,'(u,v))| \cdot \Delta u \cdot \Delta v$$

Welche Flächenverzerrung passiert zw. $\Delta u \Delta v$ und ΔF (ursprüngliche Frage)?

$|\det(\vec{x}\,'(u,v))| \cdot \Delta u\, \Delta v$

- $\vec{x}\,'(u,v)$: steht für lineare Approx.
- $|\det(\ldots)|$: steht für → Ebene: Flächenverzerrung, → Raum: Volumenverzerrung

} Verzerrungsfaktor

für $\Delta u\, \Delta v$ beliebig klein: ⇒ $\boxed{dF = |\det(\vec{x}\,')| \cdot du \cdot dv}$

<u>Satz: Transformationsformel $n=2$</u> (Ebene)

↳ u, v sind die neuen Koordinaten, die wir verwenden wollen

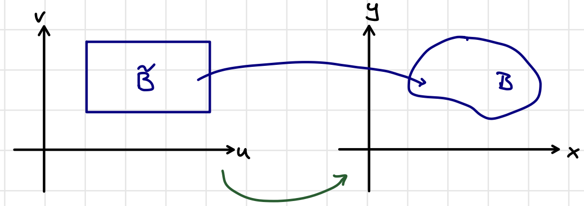


Abbildung:
$$(u,v) \longrightarrow \vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$$

$\iint_B f(x,y)\,dF$ → wollen wir transformieren, damit wir dann die Koordinaten u und v verwenden

→ B und $\tilde{B}$ müssen kompakt sein und aus endlich vielen glatten Kurven bestehen, damit sie ordentliche Integrationsbereiche ergeben

Seien $B, \tilde{B} \subset \mathbb{R}^2$ kompakt; $\overset{\text{Rand}}{\partial B}$ und $\partial \tilde{B}$ bestehen aus endlich vielen glatten Kurven

$\vec{x}: \tilde{B} \to B$, $(u,v) \longrightarrow \vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$ habe folgende Eigenschaften:

1. $\vec{x}$ habe stetige partielle Ableitungen.
2. B soll genau von $\tilde{B}$ beschrieben sein → mit u, v aus $\tilde{B}$ soll man jeden Punkt aus B errechen
   $\vec{x}: \tilde{B} \to B$ ist surjektiv (= jeder Punkt wird als Bildpunkt angenommen)
3. wir wollen jeden Punkt genau einmal
   $\vec{x}: \tilde{B} \to B$ ist injektiv, (mit Außnahmen! → Deshalb nicht bijektiv)
   Außnahmen auf $\partial \tilde{B}$ sind erlaubt

Dann gilt:
$$\iint_B f(x,y)\,dF = \iint_{\tilde{B}} f\big(\overbrace{x(u,v)}^{x}, \overbrace{y(u,v)}^{y}\big) \cdot \overbrace{\underbrace{|\det(\vec{x}\,'(u,v))|}_{\text{Funktionaldeterminante}}\,du\,dv}^{dF}$$

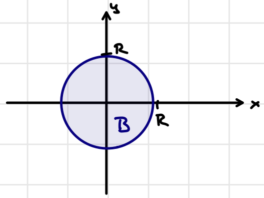
Bsp: Polarkoordinaten: $\vec{x}(\rho,\varphi) = \begin{pmatrix}\rho\cos\varphi\\ \rho\sin\varphi\end{pmatrix}$

$$\vec{x}'(\rho,\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$\det(\vec{x}'(\rho,\varphi)) = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \rho$$

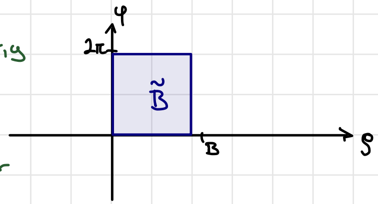
$\Rightarrow dF = \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi$

$B = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le R^2\}$ ganzer Kreis



Abstand z — Winkel (Einheitskreis)

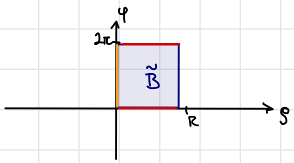
$\tilde{B} = \{(\rho,\varphi) \mid 0 \le \rho \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$



Surjektiv? → jedes ρ,φ kann mind. einen x,y zugeordnet werden

injektiv? → wenn man vers. Punkte ρ,φ nimmt kommen dann auch immer vers. Punkte x,y raus?

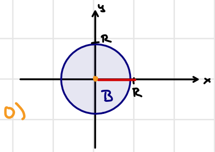
↳ fast immer! Abweichung von Injektivität:



$\varphi = 0$ bei $(0,R)$

$\varphi = 2\pi$ bei $(0,R)$

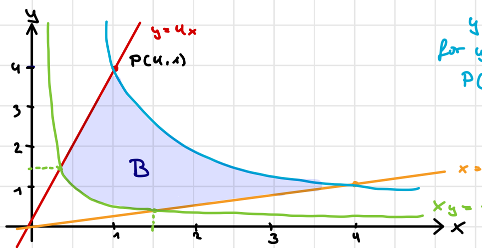
$\rho = 0$ immer $(0,0)$



→ Abweichungen von Injektivität sind auf $\partial\tilde{B}$ erlaubt :)

Bsp: $\iint_B x \, dF$ B sei kompakt im 1. Quadranten und begrenzt durch

$y = 4x$, $x = 4y$, $xy = 1$, $xy = 4$



$y = \frac{4}{x}$

für $y = 4 \Rightarrow x = 1$

P(4,1)

Nebenrechnungen:

$y = \frac{1}{4}x$

$y = \frac{1}{x}$

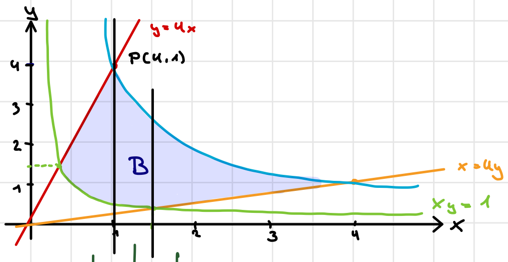
Schnittpunkte von $\frac{1}{x}$:

$\frac{1}{x} = 4x \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}$

$x = \frac{1}{2}$

Symmetrisch: $y = \frac{1}{2}$

Beschreibung von B als Normalbereich vom Typ I:



obere Begrenzung: Gerade

untere Begrenzung: Hyperbel

obere/untere Beg.: Hyperbel

obere Beg: Hyperbel

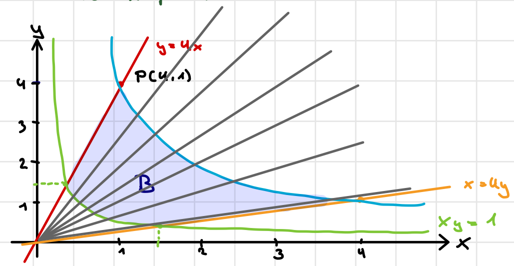
untere Beg.: Gerade

sieht nicht schön aus...

Bemerken: Geraden $y = 4x \Rightarrow \frac{y}{x} = 4$; $y = \frac{1}{4}x \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{4}$

$\frac{y}{x} = u$ mit $\frac{1}{4} \le u \le 4$

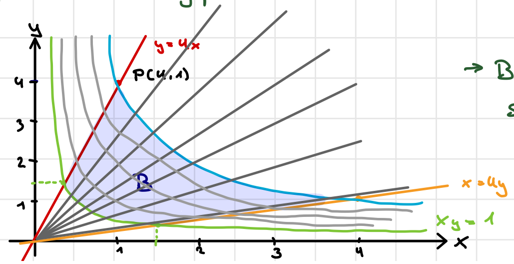
alle Geraden mit $\frac{y}{x}$ fest:



Hyperbeln $xy = 1$; $xy = 4$

$x \cdot y = v$ mit $1 \le v \le 4$

alle Hyperbeln mit $x \cdot y$ fest:



→ B lässt sich gut beschreiben mit u und v für Transformation müssen wir x mit u,v und y mit u,v ausdrücken

$$u \cdot v = \underbrace{\frac{y}{x}}_{u} \cdot \underbrace{x \cdot y}_{v} = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{u \cdot v}$$

$$\frac{v}{u} = \frac{x \cdot y}{\frac{y}{x}} = \frac{x \cdot y \cdot x}{y} = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{v}{u}}$$

$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{v}{u}} \\ \sqrt{u \cdot v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{-\frac{1}{2}} \cdot v^{\frac{1}{2}} \\ u^{\frac{1}{2}} \cdot v^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

→ wir wollen das Integral transformieren, sodass wir statt x und y die Variablen u und v verwenden:

$x = \sqrt{\frac{v}{u}}$ Grenzen: $\tilde{B}\{(u,v) \mid \frac{1}{4} \le u \le 4,\ 1 \le v \le 4\}$

Funktionaldeterminante als Verzerrungsfaktor:

$$\vec{x}\,'(u,v) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} u^{-\frac{3}{2}} \cdot v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot v^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} \cdot u^{\frac{1}{2}} \cdot v^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

$$\det(\vec{x}(u,v)) = -\frac{1}{4} u^{-1} - \frac{1}{4} u^{-1} = -\frac{2}{4} u^{-1} = -\frac{1}{2} \frac{1}{u} = -\frac{1}{2u}$$

das ist eine 4 ↳ das ist ein u ...sorry, die sehen sich bei mir sehr ähnlich

$$dF = |\det(\vec{x}(u,v))|\, du\, dv = \left|-\frac{1}{2u}\right| du\, dv = \frac{1}{2u}\, du\, dv$$

$$\iint_B x \; dF = \iint_{\tilde{B}} \sqrt{\frac{v}{u}} \cdot \frac{1}{2u}\, du\, dv = \int_{1}^{4}\int_{1/4}^{4} v^{\frac{1}{2}} \cdot u^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} u^{-1} \; du\, dv$$

mehrdimensionale Variante der Substitution

$\uparrow v$ (bei $\int_1^4$: $\uparrow u$, bei $\int_{1/4}^4$: $\uparrow v$)

$$= \int_1^4 \int_{1/4}^4 \frac{1}{2} v^{\frac{1}{2}} \cdot u^{-\frac{3}{2}} \; du\, dv$$

NR: $-\frac{3}{2} + 1 = -\frac{3}{2} + \frac{2}{2} = -\frac{1}{2}$

$$= \int_1^4 \left[\frac{1}{2} v^{\frac{1}{2}} \cdot (-2) u^{-\frac{1}{2}} \right]_{1/4}^{4} dv$$

$$= \int_1^4 \left[-v^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{u}} \right]_{1/4}^{4} dv$$

$$= \int_1^4 -v^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2} - 2 \right) dv$$

$$= \int_1^4 \frac{3}{2} v^{\frac{1}{2}} \; dv$$

NR: $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$$= \frac{3}{2} \left[\frac{2}{3} v^{\frac{3}{2}} \right]_1^4$$

$$= \left[v^{\frac{3}{2}} \right]_1^4$$

NR: $v^{\frac{3}{2}} = (v^{\frac{1}{2}})^3 = \sqrt{v}^3$

$$= \left[\sqrt{v}^3 \right]_1^4$$

$$= 2^3 - 1 = 7$$

→ hätte man im Kartesischen ausrechnen können, hätte aber deutlich länger gedauert, weil man da die Unterteilung in drei Teil hat, die wir hier vermieden haben :)

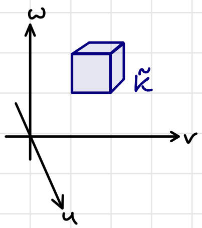
Penn-Karras hat mir ein paar von euren Kommentaren von der Evaluation von letzter Woche geschickt. Sooo lieb von euch! Ich wünschte ich hätte sie alle lesen können. Vielen Dank für eure Wertschätzung und support ♥
Das ist unglaublich motivierend!
Haltet durch, wir schaffen das! Und denkt dran, es gibt wichtigere Dinge als Uni im Leben :)

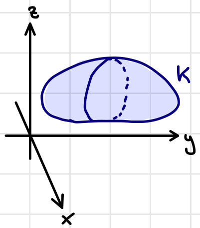
XoXo Toni

21. Vorlesung Berechnung durch Koordinatentransformationen 2

Satz: Transformationsformel $n=3$ (Raum)

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dV$$





→ K lässt sich in anderen Koordinaten besser beschreiben;
neue Koordinaten: u, v, w

Koordinatenabbildung: $(u,v,w) \to x(u,v,w) = \begin{pmatrix} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w) \end{pmatrix}$

Seien $K, \tilde{K} \subset \mathbb{R}^3$ kompakt; ∂K und $\partial\tilde{K}$ bestehen aus endlich vielen glatten Flächen

$\vec{x}: \tilde{K} \to K, \quad (u,v,w) \to x(u,v,w) = \begin{pmatrix} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w) \end{pmatrix}$ habe folgende Eigenschaften:

① $\vec{x}$ hat stetige partielle Ableitungen.

② K soll genau von $\tilde{K}$ beschrieben sein → mit u,v,w aus $\tilde{K}$ soll man jeden Punkt aus erreichen
$\vec{x}: \tilde{K} \to K$ ist surjektiv (= jeder Punkt wird als Bildpunkt angenommen)

③ wir wollen jeden Punkt genau einmal
$\vec{x}: \tilde{K} \to K$ ist injektiv, Ausnahmen auf $\partial\tilde{K}$ sind erlaubt → Deshalb nicht bijektiv

Dann gilt: $$\iiint_K f(x,y,z)\,dV = \iiint_{\tilde{K}} f(\vec{x}(u,v,w)) \cdot |\det(\vec{x}\,'(u,v,w))| \cdot du\,dv\,dw$$

Transformation des Volumenelementes:
$$dV = dx\,dy\,dz = \underbrace{|\det \vec{x}\,'(u,v,w)|}_{\text{Funktionaldeterminante}}\,du\,dv\,dw$$

Zylinderkoordinaten

$\vec{x}(\rho,\varphi,z) = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \qquad \vec{x}\,'(\rho,\varphi,z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix} + & - & + \\ & & - \\ & & + \end{matrix}$

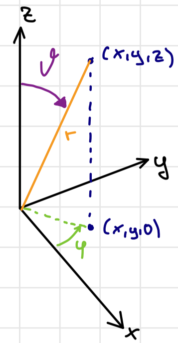
$\det \vec{x}\,'(u,v,z) = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix} = \rho$ (siehe letzte VL!)

↑ Entwicklung nach letzter Zeile

Volumenelement in Zylinderkoordinaten: $dV = \rho \cdot d\rho\,d\varphi\,dz$

Kugelkoordinaten

aus VL 19 (W4 B2 V1):



r = Abstand zum Ursprung, $r \geq 0$

θ - Theta = Winkel der den Zeiger vom Ursprung (r) zur positiven z-Achse einschließt
→ ein Winkel zw. zwei Vektoren, dessen Wert immer zw. 0 und π liegt
0 → parallel/gleichgerichtet
$\pi = 180°$ → genau entgegen gesetzt

$\theta \in [0,\pi]$ (fest!)

φ = Winkel der Projektion auf die x-y-Ebene zur positiven x-Achse

$\varphi \in [0, 2\pi]$ (zum Beispiel!)

$$\vec{x}(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}\,'(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} + & - & + \\ & & - \\ & & + \end{matrix}$$

$\det \vec{x}\,' = -r\sin\theta\sin\varphi \cdot \det\begin{pmatrix} \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{pmatrix} - r\sin\theta\cos\varphi \cdot \det\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{pmatrix}$

↑ Entwicklung nach letzter Spalte

$= -r\sin\theta\sin\varphi \cdot (-r\sin^2\theta\sin\varphi - r\cos^2\theta\sin\varphi) - \sin\theta\cos\varphi \cdot (-r\sin^2\theta\cos\varphi - r\cos^2\theta\cos\varphi)$

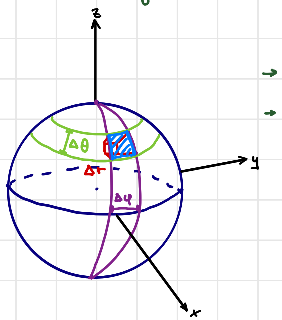
$= -r\sin\theta\sin\varphi\,(-r\sin\varphi) - r\sin\theta\cos\varphi \cdot (-r\cos\varphi)$

$= r^2\sin\theta\sin^2\varphi + r^2\sin\theta\cos^2\varphi$

$= r^2\sin\theta \quad \geq 0$, da $\sin\theta$ mit $\theta \in [0,\pi]$ immer positiv außer bei $\sin(0) = 0$
↓ auf dem Rand ☺

Volumenelement in Kugelkoordinaten: $dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$

Veranschaulichung des Verzerrungsfaktors:



→ Δr (Dicke) soll gleichbleiben

→ der Flächeninhalt verändert sich → Faktor r^2

↳ steht auch im Volumenelement drin

Woher kommt das $\sin\theta$ im Volumenelement?

→ je weiter man in Pol-Nähe kommt, desto kleiner werden die Stücke → im Pol treffen sich alle Meridiane

惯性力矩

Bsp. Trägheitsmoment einer homogenen Hohlkugel bei Rotation um die z-Achse.

↳ Massendichte konst. $M(x,y,z) = 1$

Rotation um eine Achse a:

↳ Trägheitsmoment $= \int$ (Abstand von jedem Punkt zur Achse a)^2

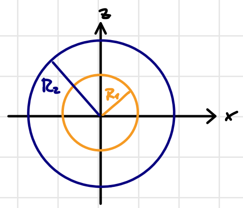
$$\iiint_K d^2(x,y,z)\,dV \qquad d(x,y,z) = \text{Abstand zur } z\text{-Achse}$$

→ Abstand zur z-Achse $= \rho = \sqrt{x^2+y^2}$

Trägheitsmoment bei Rotation um die z-Achse: $\iiint_K x^2+y^2\,dV$

↳ eines homogenen Körpers!

Hohlkugel: $K = \{(x,y,z) \mid R_1^2 \le x^2+y^2+z^2 \le R_2^2\}$



Beschreibung von K in Kugelkoordinaten:

$x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi$

$x^2+y^2 = (r\sin\theta\cos\varphi)^2 + (r\sin\theta\sin\varphi)^2$

$= r^2\sin^2\theta$

$$\tilde{K} = \{(r,\theta,\varphi) \mid R_1 \le r \le R_2,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$$

gr. Theta

$$\Theta = \iiint_K x^2+y^2\,dV = \iiint_{\tilde{K}} \underbrace{r^2\sin^2\theta}_{x^2+y^2} \cdot \underbrace{r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi}_{dV}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{R_1}^{R_2} r^4\sin^3\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

(φ, θ, r)

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left[\frac{1}{5}r^5\sin^3\theta\right]_{R_1}^{R_2} d\theta\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{5}(R_2-R_1)^5\sin^3\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{5}(R_2-R_1)^5\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta\,d\varphi$$

Nebenrechnung: $\int \sin(x)^3\,dx = \int \sin(x)^2\cdot\sin(x)\,dx$ $\qquad\|\ \sin^2(x)+\cos^2(x)=1$, $\sin^2(x) = 1-\cos^2(x)$

$= \int (1-\cos(x)^2)\sin(x)\,dx$

Sub: $t = \cos(x)$

$\frac{dt}{dx} = -\sin(x) \Rightarrow dx = -\frac{1}{\sin x}dt$

$= \int (1-t^2)\cancel{\sin(x)}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{\sin(x)}}\right)dt$

$= -\int (1-t^2)\,dt$

$= -\left(t - \frac{1}{3}t^3\right)$ $\qquad$ |Resub.

$= -\left(\cos(x) - \frac{1}{3}\cos(x)^3\right)$

$= -\cos(x) + \frac{1}{3}\cos(x)^3$

$$= \frac{1}{5}(R_2-R_1)^5\int_0^{2\pi}\left[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi} d\varphi$$

→ $\cos(\pi) = -1$, $\cos(0) = 1$

$$= \frac{1}{5}(R_2-R_1)^5\int_0^{2\pi} -(-1) + \frac{1}{3}(-1)^3 - \left(-1+\frac{1}{3}\right) d\varphi$$

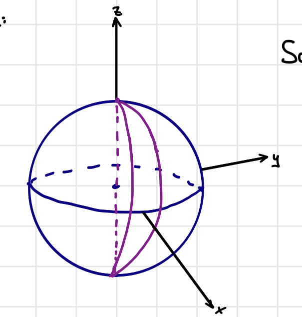
$$= \frac{1}{5}(R_2-R_1)^5\int_0^{2\pi} \underbrace{-(-1)}_{+1} + \underbrace{\frac{1}{3}(-1)^3}_{-\frac{1}{3}} - \left(-1+\frac{1}{3}\right) d\varphi$$

$+1 - \frac{1}{3} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

$$= \frac{1}{5}(R_2-R_1)^5\,\frac{4}{3}\int_0^{2\pi} 1\,d\varphi$$

$$= \frac{4}{15}(R_2-R_1)^5\cdot 2\pi = \frac{8}{15}\pi\left(R_2^5 - R_1^5\right)$$

Bsp:



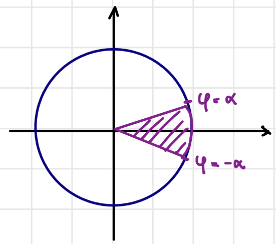
Schwerpunkt eines Apfelsinenschnittes (homogen)

→ Schwerpunkt sollte aus Symmetriegründen in der Äquatorebene liegen ⇒ $z = 0$

→ x-Achse soll genau durch die Mitte des Apfelsinens. verlaufen → links und recht von x-Achse gleich viel Apfelsine ⇒ $y = 0$

$$S = (S_1, 0, 0)$$

Obenansicht:



Öffnungswinkel 2α

Radius R

$$\tilde{K} = \{(r, \theta, \varphi) \mid 0 \le r \le R,\ 0 \le \theta \le \pi,\ -\alpha \le \varphi \le \alpha\}$$

$$S_1 = \frac{1}{V} \cdot \iiint_K x \, dV \qquad V = \iiint_K 1 \, dV$$

$$V = \iiint_K 1 \, dV = \iiint_{\tilde{K}} 1 \cdot r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \underset{\uparrow\ \varphi}{\int_{-\alpha}^{\alpha}} \underset{\uparrow\ \theta}{\int_0^{\pi}} \underset{\uparrow\ r}{\int_0^R} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

→ Grenzen sind unabhängig voneinander

→ Integrand multiplikativ getrennt: $f(r) \cdot g(\theta) \cdot h(\varphi)$

↳ $f(r) = r^2$; $g(\theta) = \sin\theta$; $h(\varphi) = 1$

⇒ deshalb parallel berechnen:

$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} 1 \, d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \cdot \int_0^R r^2 \, dr$$

$$= (\alpha - (-\alpha)) \cdot [-\cos\theta]_0^{\pi} \cdot [\tfrac{1}{3} r^3]_0^R$$

→ $\cos(\pi) = -1$, $\cos(0)$

$$= 2\alpha \cdot (1 - (-1)) \cdot \tfrac{1}{3} R^3$$

$$= \tfrac{4}{3} \alpha R^3 = V$$

Probe: für $\alpha = \pi$ ⇒ Öffnungswinkel $= 2\pi$ ganze Apfelsine
$V = \frac{4}{3} \pi R^3$ = Kugelvolumen aus Formelsammlung

$$S_1 = \frac{1}{V} \cdot \iiint_K x \, dV = \frac{3}{4\alpha R^3} \cdot \iiint_{\tilde{K}} \overbrace{r \cdot \sin\theta \cos\varphi}^{=x} \cdot \overbrace{r^2 \cdot \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi}^{dV}$$

$$= \frac{3}{4\alpha R^3} \cdot \underset{\uparrow\ \varphi}{\int_{-\alpha}^{\alpha}} \underset{\uparrow\ \theta}{\int_0^{\pi}} \underset{\uparrow\ r}{\int_0^R} r \cdot \sin\theta \cos\varphi \cdot r^2 \cdot \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \frac{3}{4\alpha R^3} \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^{\pi} \int_0^R r^3 \cdot \sin^2\theta \cdot \cos\varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

→ wieder Trick von eben anwenden:

$$= \frac{3}{4\alpha R^3} \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\varphi \, d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin^2\theta \, d\theta \cdot \int_0^R r^3 \, dr$$

$$= \frac{3}{4\alpha R^3} \cdot (\sin\alpha - (-\sin\alpha)) \cdot \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\theta)\right]_0^{\pi} \cdot \frac{1}{4} R^4$$

→ $\sin(2\pi) = 0$, $\sin(0) = 0$

$$= \frac{3}{4\alpha R^3} \cdot \cancel{2}\sin(\alpha) \cdot \frac{\pi}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{4} \cdot R^4$$

$$= \frac{3\pi \sin(\alpha)}{16\alpha} R$$

$$\Rightarrow S = \left(\frac{3}{16}\pi \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} R,\ 0,\ 0\right)$$

Klausur:

wichtige Formeln:

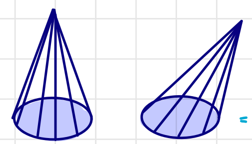
I $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

II $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta)$

⇒ $\frac{I - II}{2}$: $\sin^2\theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$

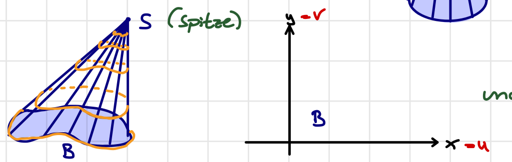
Stammfunktion von θ: $\frac{\theta - \frac{1}{2}\sin(2\theta)}{2} = \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\theta)$

Bsp: Volumen eines Kegels $= \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$



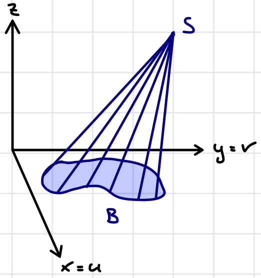
= schräger Zauberhut

allgemeiner:



und $S = (S_1, S_2, S_3)$

→ Wie groß ist das Volumen ? $V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$ → Ja, aber wir sind schon groß und können uns eine eigene Formel basteln ☺



→ verbinde jeden Punkt von B mit S

→ Strecken bilden:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}u\\v\\0\end{pmatrix}}_{\text{Punkt von B}} + t\cdot \underbrace{\left(\begin{pmatrix}S_1\\S_2\\S_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}u\\v\\0\end{pmatrix}\right)}_{\substack{\text{Richtungsvektor}\\ = \text{Differenz zw. B und S}}} \quad \text{mit } (u,v)\in B,\ t\in[0,1]$$

⇒ Punkt-Richtungsform zum Beschreiben von Geraden

Koordinatentransformation:

$$x = u + t\cdot(S_1-u)$$
$$y = v + t\,(S_2-v)$$
$$z = t\cdot S_3$$

$V = \iiint_K 1\, dV$ Integrationsbereich: K wird nun ausgedrückt durch

u,v,t → $(u,v)\in B$

→ $t\in[0,1]$

$= \iint_B \int_0^1 \ldots$

Volumenelement: $\begin{pmatrix}u+t(S_1-u)\\ v+t(S_2-v)\\ t\cdot S_3\end{pmatrix}$ muss nach u,v,t abgeleitet werden

$$\vec{x}\,'(u,v,t) = \begin{pmatrix}1-t & 0 & S_1-u\\ 0 & 1-t & S_2-v\\ 0 & 0 & S_3\end{pmatrix}$$

Produkt der Diagonalelemente ↳ obere Dreiecks-Matrix

$\det \vec{x}\,' = (1-t)^2 \cdot |S_3|$ ↳ weil S_3 muss pos. sein

⇒ $dV = (1-t)^2 \cdot S_3\, du\, dv\, dt$

$$= \iint_B \int_0^1 (1-t)^2 \cdot S_3 \cdot dt\, du\, dv$$

↑ t

$$= \iint_B \left[-\tfrac{1}{3}(1-t)^3 S_3\right]_0^1 du\, dv$$

$$= \iint_B \tfrac{1}{3}\, 1^3 S_3\, du\, dv$$

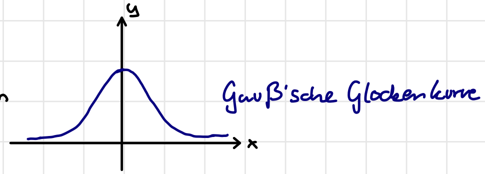
$$= \tfrac{1}{3} S_3 \iint_B 1\, du\, dv$$ → integriert man 1, kommt immer das Maß raus → bei Ebene = Fläche

$$= \tfrac{1}{3}\cdot S_3 \cdot (\text{Fläche von B})$$

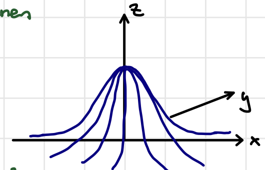
↓ ↓ ↓

$$V_K = \tfrac{1}{3} \cdot h \cdot A_G\ (\text{Grundfläche})$$

Ana I - Problem: $f(x) = e^{-x^2}$ hat keine elementare Stammfunktion



Suchen wir
↑
$F = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$ → können wir nicht berechnen



eindimensional: $f(x) = e^{-x^2}$

zweidimensionale Gaußverteilung: $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ ↳ wie g^2 = (Abstand zum Ursprung)^2

→ wir ignorieren, dass Menge nicht kompakt ist:

$V = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dF$ → können wir berechnen

→ Zusammenhang zw. F und V. $V = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dF$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dy\, dx$$

↑ x ↑ y

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\, dy\right) dx$$

Rechen-Zauber-Kunststücke

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy}_{=F\ =\ \text{feste Zahl}}\, dx$$

$$= F \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx}_{=F}$$

$$\Rightarrow \quad V = F^2$$

→ Berechnung des Volumen mit Hilfe Polarkoordinaten: $(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$

$$V = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dF = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2}\,\rho\,d\varphi\,d\rho$$

ρ — φ um einmal im Kreis

$$= \int_0^{\infty} \left[e^{-\rho^2} \cdot \rho \cdot \varphi\right]_0^{2\pi} d\rho$$

uneigentliches Integral! →

$$= \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \cdot \rho \cdot 2\pi\,d\rho$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_0^b 2\pi\rho e^{-\rho^2}\,d\rho$$

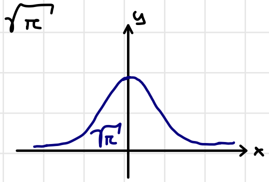
$$= \lim_{b\to\infty} \left[-\pi \cdot e^{-\rho^2}\right]_0^b$$

$(e^{-\rho^2})' = e^{-\rho^2} \cdot (-2\rho)$ → fehlt nur noch -

$$= \lim_{b\to\infty} -\pi \cdot e^{-b^2} + \underset{e^0=1}{\pi} \qquad e^{\text{"}-\infty\text{"}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad V = \pi$$

↳ $V = F^2 \quad \Rightarrow F = \sqrt{\pi} \quad \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

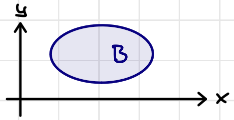


22. VL. Flächen im Raum und skalares Oberflächenintegral

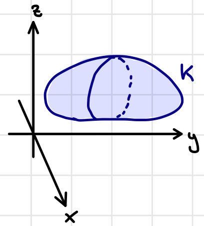
Integraltypen, die wir bereits kennen:

$\int_a^b f(x)\,dx$ Integrationsbereich: Intervall aus $\mathbb{R}$

$\iint_B f(x,y)\,dF$ Integrationsbereich: Ebene



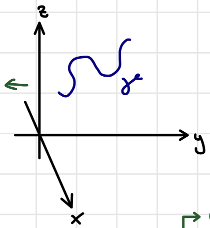
$\iiint_K f(x,y,z)\,dV$ Integrationsbereich: Raum



Kurvenintegrale skalarer Funktionen:

$\int_\gamma f(\vec{x})\,ds$

im $\mathbb{R}^3$, aber γ ist eindimensional ←
↳ der Raum hat gr. Dimension als γ



Kurvenintegrale von Vektorfeldern:

= Arbeitsintegrale

$\int_\gamma \langle \vec{v}(\vec{x}), d\vec{s} \rangle$

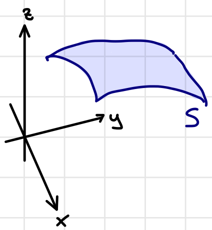
→ da γ eindimensional brauchen wir nur einen Parameter

Parametrisierung

= Abbildung: $\vec{x}: [a,b] \to \gamma \subset \mathbb{R}^n$

$t \to \vec{x}(t)$

Es fehlt uns noch Integrale über Flächen $S \subset \mathbb{R}^3$



$\iint_S f(\vec{x})\,do$ Funktionen über Flächen integrieren

↑ Oberflächen-Integrations-Element do

$\iint_S \langle \vec{v}(\vec{x}), d\vec{o} \rangle$ Vektorfeld über Flächen integrieren „Flussintegral" (häufig)

→ Flächen sind zweidimensional, deshalb brauchen wir zwei Parameter

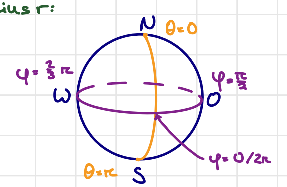
Flächen und Flächenparametrisierung im $\mathbb{R}^3$:

Bsp.: $S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = R^2\}$ Sphäre

$x^2+y^2+z^2 \le R^2$ = Kugel

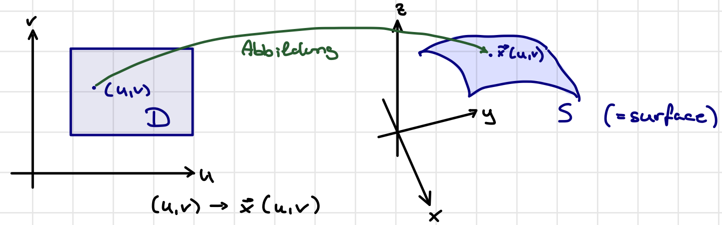
Beschreibung in Kugelkoordinaten mit festem R als Radius r:

$$\vec{x}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} R\cdot\sin\theta\,\cos\varphi \\ R\cdot\sin\theta\,\sin\varphi \\ R\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \underset{\text{N-S-Winkel}}{0 \le \theta \le \pi}, \quad \underset{\text{O-W-Winkel}}{0 \le \varphi \le 2\pi}$$



„Parametrisierung der Sphäre" (?)

Definition (Flächenparametrisierung):



Eine Parametrisierung $\vec{x}: D \to S \subset \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^2$, der Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ ist eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

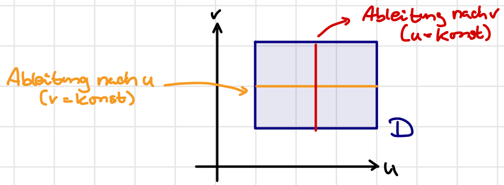
i) $D \subset \mathbb{R}^2$ ist kompakt und ∂D besteht aus endlich vielen glatten Kurven

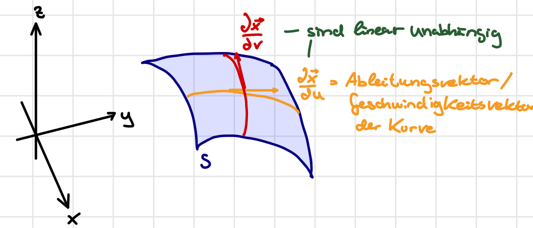
ii) $\vec{x}$ hat stetige partielle Ableitungen (Variablen heißen u, v)

iii) $\vec{x}: D \to S$ ist surjektiv wir können mit D jeden Punkt aus S abbilden

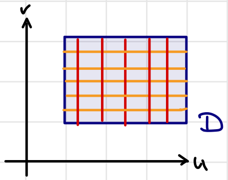
iv) $\vec{x}: D \to S$ ist injektiv vers. Punkte aus D sollen vers. Punkten in S zugeordnet werden können
Außnahmen auf ∂D sind erlaubt deshalb nicht zwingend bijektiv

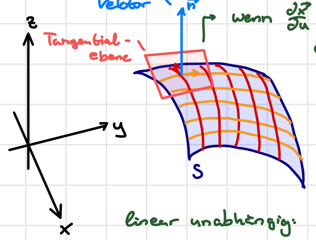
v) $\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}$ und $\frac{\partial \vec{x}}{\partial v}$ sind linear unabhängig ; Außnahmen auf ∂D sind erlaubt





Parameternetz:



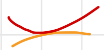


→ Kreuzprodukt aus $\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}$

↳ wenn $\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}$ linear unabhängig dann spannen sie eine Tangentialebene auf

↳ bilden eine Basis der Tangentialebene

linear unabhängig: 

linear abhängig: 

↳ wollen wir nicht!

→ man kann das Kreuzprodukt verwenden um lineare Abhängigkeit zu überprüfen

Kreuzprodukt $=0$ ⇔ Vektoren sind parallel

v) $\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}$ und $\frac{\partial \vec{x}}{\partial v}$ sind linear unabhängig ; Ausnahmen auf ∂D sind erlaubt

d.h. $\vec{n} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \neq \vec{0}$, außer ggf. auf ∂D

Zurück zum Beispiel: Sphäre

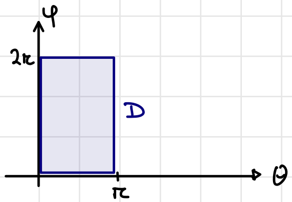
$$\vec{x}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} R \cdot \sin\theta \cos\varphi \\ R \cdot \sin\theta \sin\varphi \\ R \cos\theta \end{pmatrix}, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

„Parametrisierung der Sphäre"

→ ist das eine zulässige Parametrisierung?

$$D = \{(\theta,\varphi) \mid 0 \le \theta \le \pi, \ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$$

→ zu i) kompakt und ∂D aus endlich vielen glatten Kurven? ✓

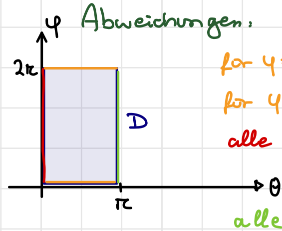


→ zu ii) stetig part. Abl? R, sin, cos sind stetige diffbare Fkt. ✓

→ zu iii) surjektiv? wenn wir alle Winkel θ und φ einsetzen, bekommen wir alle Punkte aus D ✓

→ zu iv) injektiv? ✓

Abweichungen:



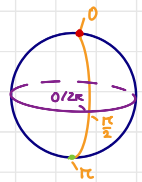
für $\varphi = 2\pi \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

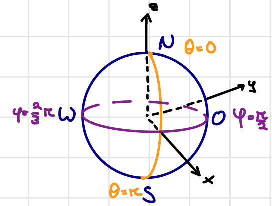
für $\varphi = 0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

alle $\theta = 0 \rightarrow \theta = 0$

alle $\theta = \pi \rightarrow \theta = \pi$

↳ nur ∂D → ist erlaubt!





→ zu v) $\frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}$ linear unabhängig? ✓

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\cos\theta\sin\varphi \\ -R\sin\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R\sin\theta\sin\varphi \\ R\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$R\cos\theta\cos\varphi$ $\quad$ $-R\sin\theta\sin\varphi$

$$= \begin{pmatrix} 0 + R^2\sin^2\theta\cos\varphi \\ R^2\sin^2\theta\sin\varphi - 0 \\ R^2\cos\theta\sin\theta\cos\varphi^2 + R^2\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi \end{pmatrix}$$

$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

$$= \begin{pmatrix} R^2\sin^2\theta\cos\varphi \\ R^2\sin^2\theta\sin\varphi \\ R^2\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= R\cdot\sin\theta \underbrace{\begin{pmatrix} R\cdot\sin\theta\cos\varphi \\ R\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi \\ R\cdot\cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{Ortsvektor } \vec{x}(\theta,\varphi) \rightarrow \text{siehe oben}} = R\sin\theta\cdot\underbrace{\vec{x}(\theta,\varphi)}_{\neq 0}$$

wann wird $R\sin\theta\cdot\vec{x}(\theta,\varphi) = 0$?

→ R kann nicht 0 werden

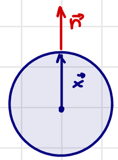
→ sin hat Nullstellen bei $k\pi$, also $0, \pi, 2\pi, \ldots$

$R\sin\theta\cdot\vec{x}(\theta,\varphi) = \vec{0}$ ⇔ $\sin\theta = 0$ ⇔ $\theta = 0$ oder $\theta = \pi$

liegt auf dem Rand, ist erlaubt ← Nordpol $\quad$ Südpol

⇒ Ja, wir haben eine Parametrisierung der Sphäre

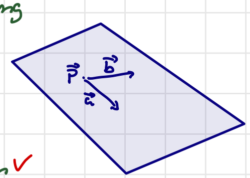
→ und wir haben herausgefunden, dass der Normalenvektor $\vec{n}$ eine Fortsetzung des Ortsvektor $\vec{x}$ ist ⇒ ist bei allen Kreisen so:



Ideen für Flächenparametrisierung:

① (Teile von) Ebenen → in Schule: Parameterdarstellung

$\vec{x}(u,v) = p + u\vec{a} + v\vec{b}$
Parameter



→ i) kompakt → Teil der Ebene mit u,v eingeschränkt, sodass u,v aus kompakter Menge kommen ✓

→ iii/iv) injektiv/surjektiv → jeder Punkt wird durch ein Parameterpaar u,v einmal erreicht ✓

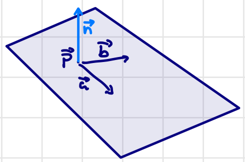
→ ii) sind partielle Ableitungen stetig?

$\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u,v) = \vec{a}$ $\quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u,v) = \vec{b}$

hängen nicht von u,v ab ⇒ Konstanten ✓

→ v) $\vec{a}, \vec{b}$ müssen linear unabhängig sein

$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$

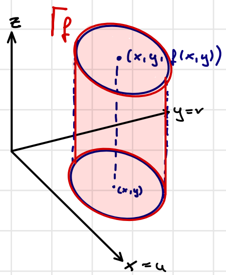


② Graphen: $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$

Γ (Graphgramma)

$\Gamma f: \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D, z = f(x,y)\}$

$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix}$



→ ist das eine zulässige Parametrisierung?

- differenzierbar → ja, wenn f diffbar
- unabhängigkeit:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

⇒ sind immer linear unabhängig

Bsp: Fläche gegeben durch $\sin(x)z^2 + x^2y + 3xz^2 + \tan(x)\cdot z^3 + ye^z = 15$

Abhängigkeit in x und z sind eklig, aber die in y eigentlich ganz simpel

Gleichung nach y umstellen:

$$y(x^2 + e^z) = 15 - \sin(x)z^2 - 3xz^2 - \tan(x)\cdot z^3$$

$$y = \frac{15 - \sin(x)z^2 - 3xz^2 - \tan(x)\cdot z^3}{x^2 + e^z}$$

$x^2 \geq 0$ $\quad e^z > 0$ → kann nicht 0 werden

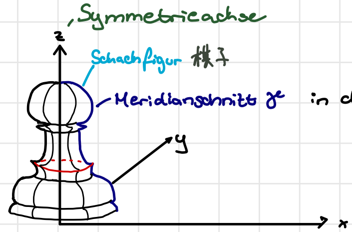
Graphensituation: $y = f(x,z)$

Parametrisierung mit $x = u$ und $z = v$:

$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ \frac{15 - \sin(u)v^2 - 3uv^2 - \tan(u)\cdot v^3}{u^2 + e^v} \\ v \end{pmatrix}$$

→ da es eine Parametrisierung eines Graphen ist keine Probleme

③ Rotationsflächen (häufig)



in der rechten Hälfte der x-z-Ebene

→ wenn man den Meridianschnitt kennt, kommt man schnell auf die Rotationsfläche

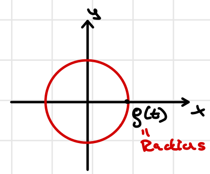
Parametrisierung γ_M: $\quad \vec{x}_\gamma(t) = \begin{pmatrix} \varrho(t) \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix}$ mit $\varrho(t) \geq 0$, $t \in [a,b]$

Abstand zur z-Achse

weil Kurve

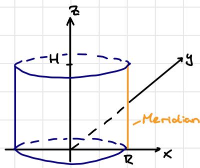
$$\vec{x}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} \varrho(t)\cdot\cos\varphi \\ \varrho(t)\cdot\sin\varphi \\ z(t) \end{pmatrix}$$

= Zylinderkoordinaten

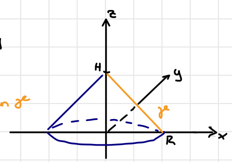


$D = \{(t,\varphi) \mid a \leq t \leq b, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$

Bsp:



Zylinder



Kegel

→ Parametrisierung:

$$\vec{x}_\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ H - \frac{H}{R}\cdot t \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \le t \le R$$

↳ $\gamma = z(t)$ fallende Gerade

$z(t) = H - \square \cdot t$

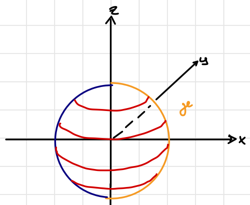
Schnittpunkt z-Achse

für $t = R$ muss $z = 0$ rauskommen

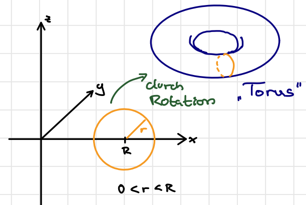
$\Rightarrow z(t) = H - \frac{H}{R}\cdot t$

$$\vec{x}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} t\cdot\cos\varphi \\ t\cdot\sin\varphi \\ H - \frac{H}{R}\cdot t \end{pmatrix}$$

$t \in [0,R]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$



Sphäre



Bagel / Schwimmreifen

→ Parametrisierung:

$$\vec{x}_\gamma(t) = \begin{pmatrix} R + r\cos(t) \\ 0 \\ r\cdot\sin t \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \le t \le R$$

↳ Kreiskoordinaten:

- da wir nur in x-z Ebene sind, fällt φ weg und $t = \theta$
- da Kreis nicht auf x-Achse im Ursprung: $+R$

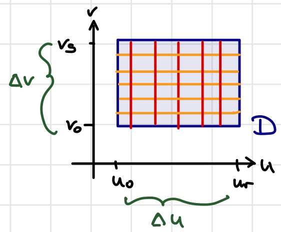
$$\vec{x}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} (R + r\cdot\cos(t))\cdot\cos\varphi \\ (R + r\cdot\cos(t))\cdot\sin\varphi \\ r\cdot\sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \le t \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

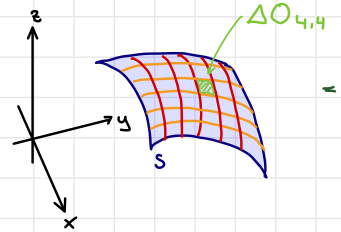
↳ in Zylinderkoord.: z bleibt gleich, $R + r\cdot\cos t \mathrel{\hat{=}}$ Radius

Flächenintegral einer skalaren Funktion:

$$\iint_S f(x,y,z)\, dO$$

zB: f Massendichte $\Rightarrow \iint_S f(x,y,z)$ Gesamtmasse





= Netz aus Facetten

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \underbrace{f(\vec{x}(u_{i-1}, v_{j-1}))}_{f \text{ an einer Ecke des } \square} \cdot \underbrace{\Delta O_{ij}}_{\text{Größe der Fläche } \square}$$

↳ wie bekommen wir das?

- durch lineare Approx. = Parallelogramm 平行四边形

Näherungsweise gilt: $\Delta O \approx$ Flächeninhalt des Parallelogramms (im Raum!), das von $\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}\cdot\Delta u$ und $\frac{\partial \vec{x}}{\partial v}\cdot\Delta v$ aufgespannt wird 张开

$= \left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}\cdot\Delta u \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}\cdot\Delta v \right\|$ = Norm des Kreuzproduktes

Lineare-Algebra-Zauber ✻: skalare Faktoren → kann aus Kreuzprodukt rausgezogen werden und weil sie nicht negativ sein können auch aus Norm

$= \left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right\| \cdot \Delta u \cdot \Delta v$

$$\Rightarrow \iint_S f(x,y,z)\, dO = \iint_D f(\vec{x}(u,v)) \underbrace{\left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right\|}_{\text{Fläche einzelner Facetten}} du\, dv$$

Definition: (Flächenintegral einer skalaren Funktion)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche mit Parametrisierung $\vec{x}: D \to S \subset \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^2$.
Dann ist das Integral der Funktion f über S definiert durch:

$$\iint_S f(\vec{x})\, dO = \iint_D f(\vec{x}(u,v)) \left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right\| du\, dv$$

$$dO = \left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right\| \, du \, dv \quad \text{heißt skalares Oberflächenelement}$$

↦ Massendichte = konst.

Bsp. Trägheitsmoment einer homogenen obere Halbsphäre bei Rotation um die z-Achse.

gr. Theta

$$\Theta = \iint_S x^2+y^2 \, dO \qquad S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = R^2, \, z \geq 0\}$$

Parametrisierung: $\vec{x}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} R\cdot\sin\theta\cos\varphi \\ R\cdot\sin\theta\sin\varphi \\ R\cdot\cos\theta \end{pmatrix}$

$$D = \{(\theta,\varphi) \mid \theta \in [0,\tfrac{\pi}{2}], \, \varphi \in [0,2\pi]\}$$

Def. der Parametrisierung → wir wollen nur oberen Halbkreis

$$dO = \left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \right\| d\theta \, d\varphi = \|\underbrace{R\cdot\sin\theta\cdot\vec{x}(\theta,\varphi)}_{\text{siehe Aufgabe Sphäre}}\| \, d\theta \, d\varphi$$

$$\left\| \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\cos\theta\sin\varphi \\ -R\sin\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R\sin\theta\sin\varphi \\ R\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} R^2\sin^2\theta\cos\varphi \\ R^2\sin^2\theta\sin\varphi \\ R^2\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} \right\| = \left\| R\cdot\sin\theta \begin{pmatrix} R\sin\theta\cos\varphi \\ R\sin\theta\sin\varphi \\ R\cos\theta \end{pmatrix} \right\|$$

→ R und sin θ kann man aus Norm herausnehmen

→ $\|\vec{x}(\theta,\varphi)\| = R$ Ortsvektor

$$= R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$\Theta = \iint_S x^2+y^2 \, dO = \iint_D \Big((\underbrace{R\sin\theta\cos\varphi}_{=x})^2 + (\underbrace{R\sin\theta\sin\varphi}_{=y})^2 \Big) \underbrace{R^2\sin\theta}_{\cdot\, dO} \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \iint_D (R^2\sin^2\theta)\cdot R^2\sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \iint_D R^4 \sin^3\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} R^4 \sin^3\theta \, \underbrace{d\varphi}_{} \, d\theta$$

↑ θ ↑ φ — hängt nicht von φ ab

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi\cdot R^4 \sin^3\theta \, d\theta$$

$$= 2\pi\cdot R^4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \, d\theta$$

↳ $\sin\theta\cdot\sin^2\theta = \sin\theta\cdot(1-\cos^2\theta) = \sin\theta - \sin\theta\cos^2\theta$

$$= 2\pi\cdot R^4 \cdot \left[-\cos\theta + \tfrac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

→ $\cos(0) = 1$; $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

$$= 2\pi\cdot R^4 \cdot \left(-\left(-1 + \tfrac{1}{3}1^3\right)\right)$$

$$= 2\pi\cdot R^4 \cdot \left(-\left(-\tfrac{2}{3}\right)\right)$$

$$= 2\pi\cdot R^4 \cdot \tfrac{2}{3}$$

$$= \tfrac{4}{3}\pi\cdot R^4$$

Platz für Notizen:

Bisher gesehen

(1) Intervalle $I = [a,b]$, $f\colon I \to \mathbb{R}$: $\int_a^b f(x)\,dx$

(2) Ebenen $B \subseteq \mathbb{R}^2$, $f\colon B \to \mathbb{R}$: $\iint_B f(x,y)\,dxdy$

(3) Körper im Raum $K \subseteq \mathbb{R}^3$, $f\colon K \to \mathbb{R}$: $\iiint_K f(x,y,z)\,dxdydz$

(4) Kurvenintegrale: $\vec{x}\colon [a,b] \to D \subseteq \mathbb{R}^n$ Kurve, $\vec{x}$-„1-dimensional"

skalar: $f\colon D \to \mathbb{R}$: $\int_{\vec{x}} f\,ds := \int_a^b f(\vec{x}(t))\|\dot{\vec{x}}(t)\|\,dt$

vektoriell: $\vec{F}\colon D \to \mathbb{R}^n$: $\int_{\vec{x}} \vec{F}\cdot\vec{ds} := \int_a^b \left\langle \vec{F}(\vec{x}(t)), \dot{\vec{x}}(t) \right\rangle dt$

Jetzt: Parametrisierung von Flächen im $\mathbb{R}^3$ ($\vec{x}$-„2-dimensional")
d.h. $\vec{x}$ hängt von zwei Parametern ab

23. Vorlesung. Integration von Vektorfeldern: Flussintegrale

Erinnerung an letzte VL: Flächenintegral einer skalaren Funktion:

$$\iint_{S \text{ Fläche}} f(\vec{x})\, dO \overset{\text{Parametrisierung}}{=} \iint_D f(\vec{x}(u,v))\, \underbrace{\left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right\| du\, dv}_{dO}$$

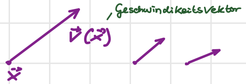
<u>Flussintegral = Integral eines Vektorfeldes über einer Fläche:</u>

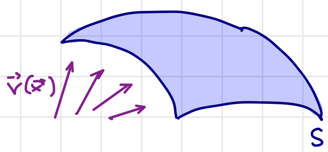
Problem: Das Vektorfeld $\vec{v}$ sei das Geschwindigkeitsfeld eine Strömung

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine gedachte Fläche

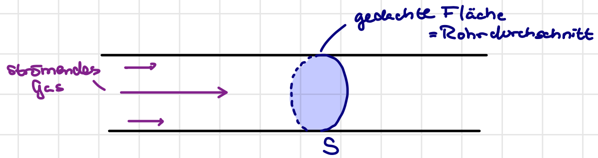
↳ soll keine Barriere im Geschwindigkeitsfeld darstellen

Geschwindigkeitsfeld eine Strömung:

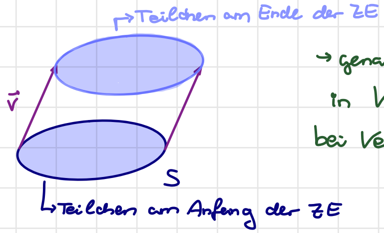




Welches Volumen wird von $\vec{v}$ pro Zeiteinheit durch S transportiert?



einfachster Spezialfall: $\vec{v}$ konstant; S eben

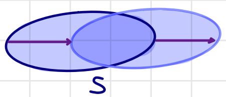


→ genau diese Zeichnung habe ich schon in VL 32 / W6 B2 V2 beschrieben, bei Verständnisfragen bitte da rein schauen :)

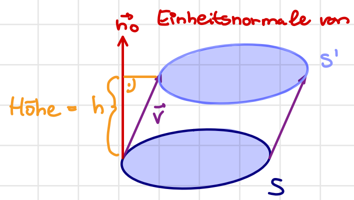
→ das transportierte Volumen = Volumen des schiefen Zylinders S :)

$V_{Zylinder}$ = Grundfläche · Höhe

↳ ist nicht $\vec{v}$, weil der Winkel den $\vec{v}$ zu S einschließt spielt wichtige Rolle



→ wenn $\vec{v}$ parallel zu S verläuft, dann würde kein Teilchen die Fläche durchdringen



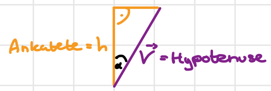
= Einheitsnormalenvektor

↳ d.h. Normalenvektor (senkrecht zu S) + Normiert (Länge 1) $\|\vec{n}_0\| = 1$

→ Höhe = orthogonale Projektion auf $\vec{n}_0$

$\langle \vec{v}, \vec{n}_0 \rangle$ = Länge $\vec{v}$ · Länge $\vec{n}_0$ · cos (von $\vec{v}$ und $\vec{n}_0$ eingeschlossene Winkel)

$= \|\vec{v}\| \cdot \underbrace{\|\vec{n}_0\|}_{=1} \cdot \cos\sphericalangle(\vec{v}, \vec{n}_0)$



$\frac{\text{Ankatete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{h}{\|\vec{v}\|} = \cos\sphericalangle(\vec{v}, \vec{n}_0)$

$\Rightarrow h = \|\vec{v}\| \cdot \cos\sphericalangle(\vec{v}, \vec{n}_0)$

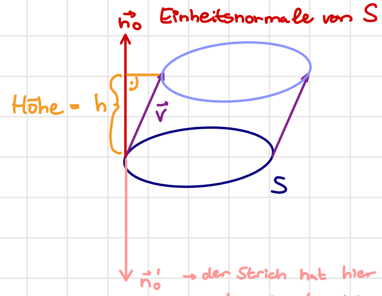
↳ ist das Selbe wie oben, da $\|\vec{n}_0\|$ = Norm = Länge 1

$h = \langle \vec{v}, \vec{n}_0 \rangle$

Durchfluss = Grundfläche · Höhe

= Fläche von S · $\langle \vec{v}, \vec{n}_0 \rangle$

Orientierungsabhängigkeit:



⇒ S hat nicht nur eine Einheitsnormale

→ der Strich hat hier nichts mit Ableitungen zu tun, sondern ist meine persönliche Bezeichnung :)

→ Das Skalarprodukt mit $\vec{n}_0$ und $\vec{v}$ ist positiv

→ Hätten wir jetzt $\vec{n}_0'$ genommen, wäre das Skalarprodukt negativ

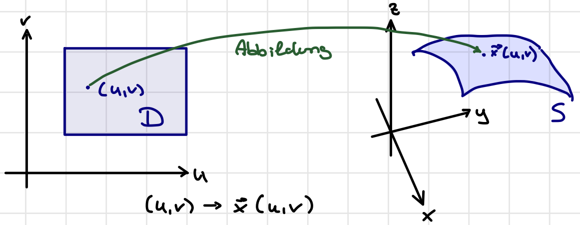
↳ am Vorzeichen kann man ablesen, ob der Winkel spitz oder stumpf ist → man muss bei einer Strömung die Richtung vorgeben, in der die Fläche durchquert wird

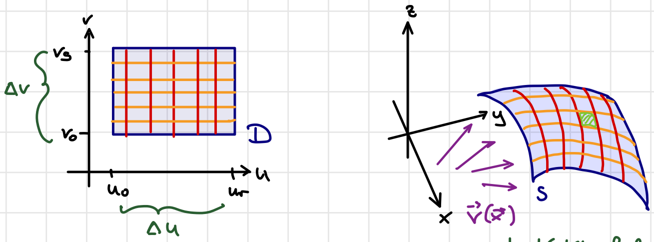
↳ Richtung wird von den Einheitsnormalen angezeigt:

- $\vec{n}_0$ (positiv): fließt aus sichtbaren Ebene "hinaus"
- $\vec{n}_0'$ (negativ): fließt in die sichtbare Ebene "hinein"

Zurück zur Problemfrage:

Flächenparametrisierung (aus letzter VL)





→ Die Facetten sind nicht eben, aber wenn man sie klein genug macht, sind sie annähernd eben

↳ Vektorfeld verändert von Punkt zu Punkt seine Richtung, aber wenn Facetten klein genug, dann verändert sich das Vektorfeld auf der Facette so wenig, dass man es sich als konstant vorstellen kann

→ Für jede einzelne Facette könnte man den Durchfluss berechnen mit "Fläche der Facette $\cdot \langle \vec{v}, \vec{n}_0 \rangle$" und dann die Summe aller Facetten berechnen → für immer kleinere Facetten würde man dann als Grenzwert auf ein Integral kommen → integriert wird dann im Prinzip Fläche von S $\cdot \langle \vec{v}, \vec{n}_0 \rangle$

beliebiger Normalenvektor

kürzt sich weg!

$$\Rightarrow \iint_D \Big\langle \vec{v}(\vec{x}(u,v)), \underbrace{\frac{\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}}{\cancel{\left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right\|}}}_{\vec{n}_0(u,v)} \Big\rangle \underbrace{\cancel{\left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right\|}}_{\text{Größe von Flächenstücke (siehe letzte VL)}} \, du \, dv$$

↳ damit wir auf einen Einheitsnormalenvektor kommen :)

$$= \iint_D \left\langle \vec{v}(\vec{x}(u,v)), \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right\rangle du \, dv$$

Definition: Flussintegral eines Vektorfeldes $\vec{v}$ über eine Fläche S:

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ einer Fläche mit Parametrisierung $\vec{x}: D \to S$, $\vec{v}: U \to \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^3$, $S \subset U$ ein stetiges Vektorfeld. Dann ist das Flussintegral von $\vec{v}$ über S erklärt durch

$$\iint_S \langle \vec{v}(\vec{x}), d\vec{O} \rangle = \iint_D \left\langle \vec{v}(\vec{x}(u,v)), \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right\rangle du \, dv$$

↳ Flächenparameter

↑ Vektorfeld / Geschwindigkeitsfeld

$d\vec{O} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \, du \, dv$ heißt vektorielles Oberflächenelement

Bsp. Fläche S sei parametrisiert durch $\vec{x}: D \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ uv \\ v^2 \end{pmatrix}$, $D = \{(u,v) \mid 0 \le u \le v \le 2\}$

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ z^2 \\ x+y \end{pmatrix}$$

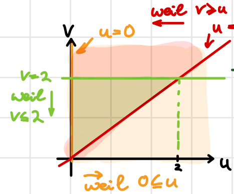
$$d\vec{O} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \, du \, dv = \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ 2v \end{pmatrix} du \, dv = \begin{pmatrix} 2v^2 \\ -2v \\ u \end{pmatrix} du \, dv$$

$x = u$, $y = uv$, $z = v^2$

$$\iint_S \left\langle \begin{pmatrix} y \\ z^2 \\ x+y \end{pmatrix}, d\vec{O} \right\rangle = \iint_D \left\langle \begin{pmatrix} uv \\ v^4 \\ u+uv \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2v^2 \\ -2v \\ u \end{pmatrix} \right\rangle du \, dv$$

Was ist D? D = Bereich der uv-Ebene

↳ Auswählen u's und v's besteht der Teil der uv-Ebene mit $0 \le u \le v \le 2$?



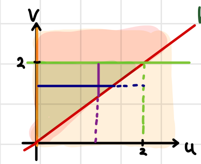
→ sowohl Normalbereich von Typ I, als auch von Typ II

Normalbereich von Typ I: $D = \{(u,v) \mid 0 \le u \le 2, \; u \le v \le 2\}$

für u feste Grenzen

für v Grenzen, die von u abhängig sind

↳ für festes u: wo fängt v an und wo hört es auf?



→ v fängt an bei u und geht bis 2

→ u fängt an bei 0 und geht bis v

für festes v: wo fängt u an und wo hört es auf?

Zum Üben nochmal anders rum:

Normalbereich von Typ II: $D = \{(u,v) \mid 0 \le v \le 2, \; 0 \le u \le v\}$

⇒ anschaulich: erste Variante; rechnen: zweite Variante → wegen den Nullen in den Grenzen ♥

$$\iint_S \left\langle \begin{pmatrix} y \\ z^2 \\ x+y \end{pmatrix}, d\vec{O} \right\rangle = \iint_D \left\langle \begin{pmatrix} uv \\ v^4 \\ u+uv \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2v^2 \\ -2v \\ u \end{pmatrix} \right\rangle du\,dv$$

$$= \int_0^2 \int_0^v \left\langle \begin{pmatrix} uv \\ v^4 \\ u+uv \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2v^2 \\ -2v \\ u \end{pmatrix} \right\rangle du\,dv$$

$\uparrow v \quad \uparrow u$

$$= \int_0^2 \int_0^v 2uv^3 - 2v^5 + u^2 + u^2 v \quad du\,dv$$

Fehler in der VL

$$= \int_0^2 \left[u^2 v^3 - 2uv^5 + \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{3}u^3 v \right]_{u=0}^{u=v} dv$$

$$= \int_0^2 v^5 - 2v^6 + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{3}v^4 \quad dv$$

$$= \left[\frac{1}{6}v^6 - \frac{2}{7}v^7 + \frac{1}{12}v^4 + \frac{1}{15}v^5 \right]_{v=0}^{v=2}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 64 - \frac{2}{7}\cdot 128 + \frac{1}{12}\cdot 16 + \frac{1}{15}\, 32$$

$$= \ldots$$

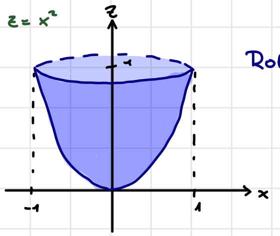
ρ^2 in Zylinderkoordinaten

Bsp: $S = \{ (x,y,z) \mid x^2+y^2 \le 1, \; z = x^2+y^2 \}$

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z^2 \end{pmatrix}$$

$$\iint_S \left\langle \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z^2 \end{pmatrix}, d\vec{O} \right\rangle$$ → auf zwei vers. Arten ausrechnen

für $y=0$:
$z = x^2$



Rotationsparaboloid
= Schale
↓
es geht um die Oberfläche, nicht um das Volumen

1. Variante: Parametrisierung als Graph
↳ z hängt von x und y ab, genau wie bei einem Graphen

$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+v^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} =x \\ =y \\ = x^2+y^2 = z \end{matrix} \qquad D = \{ (u,v) \mid u^2+v^2 \le 1 \}$$ = Kreisscheibe

$$d\vec{O} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}\, du\,dv = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix} du\,dv$$

$$= \begin{pmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix} du\,dv$$

$$\iint_S \left\langle \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z^2 \end{pmatrix}, d\vec{O} \right\rangle = \iint_D \left\langle \begin{pmatrix} -v \\ u \\ (u^2+v^2)^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle du\,dv$$

= Einheitsnormale von S

Fehler in VL, den sie später korrigiert
↳ $z = u^2+v^2$

$$= \iint_D \cancel{2uv} - \cancel{2uv} + (u^2+v^2)^2\, du\,dv$$

$$= \iint_D (u^2+v^2)^2\, du\,dv$$

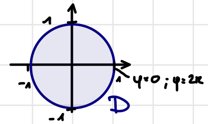
über Kreisscheibe (=D) integrieren

→ Wir wollen D in Polarkoordinaten parametrisieren:
⇒ Koordinatentransformation! Yay

Transformation in Polarkoordinaten: $u = \rho \cos\varphi \;\hat{=}\; x$
$v = \rho \sin\varphi \;\hat{=}\; y$
$du\,dv = \rho\, d\rho\, d\varphi$

Funktionaldeterminante! → siehe VL 45 / W10 B1

Welche ρ und φ sind beteiligt?
→ D = ganzer Einheitskreis: $\rho \in [0,1]$
$\varphi \in [0, 2\pi]$



$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \overbrace{\rho^4}^{(u^2+v^2)^2 = (\rho^2)^2 = \rho^4} \cdot \underbrace{\rho\, d\rho\, d\varphi}_{= du\,dv}$$

$\uparrow \varphi \quad \uparrow \rho$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^5 \, d\rho\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{6}\rho^6 \right]_{\rho=0}^{\rho=1} d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{6}\, d\varphi$$

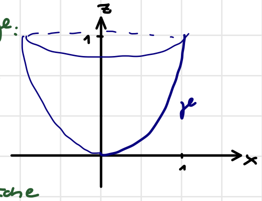
↳ Konstante integriert = Konstante · Intervallbreite ($= 2\pi$)

$$= \frac{1}{6} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3}$$

... Tja, es gibt aber arme Seelen auf dieser Welt, die das nicht so elegant korrigieren können, wie Sie an der Tafel oder ich auf dem Tablet :)

2 Variante: Parametrisierung als Rotationsfläche → bessere Wahl!

↳ Meridianschnitt γ:



Wenn man die Parametrisierung des Meridians hat, kommt man davon schnell auf die Parametrisierung der ganzen Fläche

Parametrisierung des Meridianschnittes: $\vec{x}_\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t^2 \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 1$

↳ wenn man das um z-Achse rotieren lässt, dann wirkt die x-Koordinate wie der Radius

$$\vec{x}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} \overset{t = \text{Radius} \hat{=} \rho}{t\cdot\cos\varphi} \\ t\cdot\sin\varphi \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$d\vec{O} = \frac{\partial\vec{x}}{\partial t} \times \frac{\partial\vec{x}}{\partial\varphi}\, dt\, d\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 2t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -t\sin\varphi \\ t\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} dt\, d\varphi$$

$$= \begin{pmatrix} -2t^2\cos\varphi \\ -2t^2\sin\varphi \\ t\cdot\cos^2\varphi + t\sin^2\varphi \end{pmatrix} dt\, d\varphi = \begin{pmatrix} -2t^2\cos\varphi \\ -2t^2\sin\varphi \\ t \end{pmatrix} dt\, d\varphi$$

↳ $\cos^2 + \sin^2$-Kram 🙂

$$\iint_S \left\langle \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z^2 \end{pmatrix}, d\vec{O} \right\rangle = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -t\cdot\sin\varphi \\ t\cos\varphi \\ t^4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2t^2\cos\varphi \\ -2t^2\sin\varphi \\ t \end{pmatrix} \right\rangle d\varphi\, dt$$

$z = t^2 \Rightarrow z^2 = t^4$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2t^2 \cancel{\sin\varphi}\cos\varphi - 2t^3 \cancel{\sin\varphi}\cos\varphi + t^5 \; d\varphi\, dt$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} t^5 \; d\varphi\, dt$$

↳ konst. da nicht abhängig von φ

$$= \int_0^1 t^5 \cdot 2\pi \; dt$$

$$= \left[\tfrac{1}{3} t^6 \pi \right]_{t=0}^{t=1}$$

$$= \frac{\pi}{3}$$

⇒ die Wahl der Parametrisierung spielt keine Rolle für den Wert des Flächenintegrals!

↳ nur bei Veränderung der Durchlaufrichtung, würde bei der Parametrisierung ein anderes Ergebnis raus kommen → Vorzeichenwechsel

Satz (Parameterunabhängigkeit von Flächenintegralen)

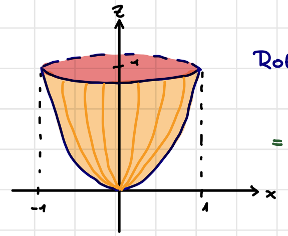
→ für skalare Oberflächenintegrale (→ noch aus der letzten VL!)

① Die Wahl der Parametrisierung und die Orientierung hat keinen Einfluss auf den Wert des Oberflächenintegrals einer skalaren Funktion

② Die Wahl der Parametrisierung hat bei gleicher Orientierung hat keinen Einfluss auf Wert des Oberflächenintegrals eines Vektorfeldes; Änderung der Orientierung kehrt das Vorzeichen um

Was ist mit der Orientierung gemeint?

Legt man nun ein Normalenfeld an die Schüssel, zeigt das Normalenfeld von gelben zur roten Seite oder von der roten zur gelben Seite

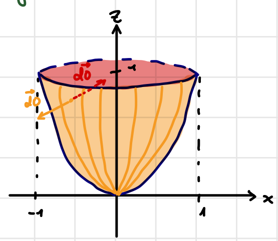


Rotations-paraboloid = Schale (außen orange, innen rot)

→ zwei Einheitsnormalenvektoren möglich:

↓ Welchen davon haben wir in der Rechnung benutzt?

$$d\vec{O} = \begin{pmatrix} -2t^2\cos\varphi \\ -2t^2\sin\varphi \\ t \end{pmatrix} dt\, d\varphi$$



→ der Vektor auf der gelben Seite zeigt tendenziell immer ein bisschen nach unten, weil er ja senkrecht auf der Fläche liegt, also müsste die z-Koordinate negativ sein!

→ der rote Vektor zeigt tendenziell nach oben → z-Koordinate müsste positiv sein! → unser $d\vec{O}$; da $t \in [0,1]$

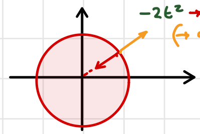
↳ genauso bei Variante 1.: $\begin{pmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix}$ → z positiv ⇒ roter Vektor!

Anderes Argument: $\begin{pmatrix} -2t^2\cos\varphi \\ -2t^2\sin\varphi \\ t \end{pmatrix}$ → Komponenten $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ ⇒ kreisartiges von oben auf Kreis:

→ Normale hat Vorfaktor $-2t^2$ → zeigt in Kreis hinein

(→ aus den Kreis hinaus)

↳ wie im Paraboloid



→ Was wenn man die gegebenheiten nicht zeichnen oder vorstellen kann?

weitere Möglichkeit: man folgt den Koordinaten Linien:

Welche ist der erste und welcher ist der zweite Parameter?

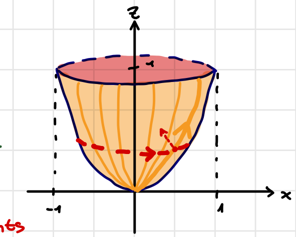
$$\vec{x}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} t\cdot\cos\varphi \\ t\cdot\sin\varphi \\ t^2 \end{pmatrix}$$

t = 1. Parameter → Wie verlaufen die t-Linien?

⇒ parabel-Linien: verlaufen nach oben mit wachsendem t

φ = 2. Parameter → Wie verlaufen die φ-Linien?

⇒ Breitenkreise: verlaufen von links nach rechts



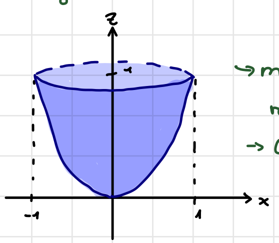
⇒ Normalenvektor richtung mit Hilfe der Rechten-Hand-Regel:

- Daumen in Richtung des 1. Parameters (hier: t-Linien)
- Zeigefinger in Richtung des 2. Parameters (hier: φ-Linien)
- → Mittelfinger zeigt, wo die Normale hinzeigt (hier: in die Blattebene hinein = rote Vektor)

⇒ um Richtung zu ändern, brauch man nur Reihnfolge der Parameter zu vertauschen:
- Daumen in Richtung des 1. Parameters (hier: φ-Linien)
- Zeigefinger in Richtung des 2. Parameters (hier: t-Linien)
- → Mittelfinger zeigt, wo die Normale hinzeigt (hier: aus Blattebene heraus = gelber Vektor)

Zu Flächenparametrisierung:

- Irrglaube, Flächen hätten eine natürliche Orientierung



→ man kann bei Flächen nicht von innen/außen/oben/unten reden, nur über Farben kenntlich machen, welche man meint

→ Orientierung muss festgelegt werden, welche Seite man betrachten will, um Flussintegral ausrechnen zu können

Normalerweise haben Flächen keine „natürliche" Orientierung.

Außnahme: Fläche, die geschlossen sind, d.h. den vollständigen Rand eines Körpers hat.

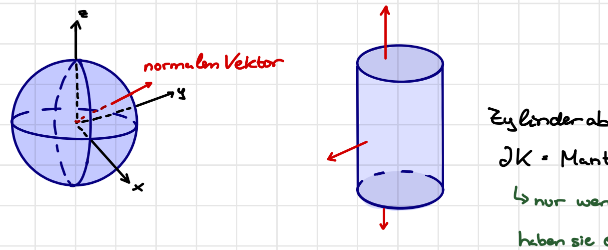
Bsp: Sphäre $\quad S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = R^2\} = \partial K \quad K = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$

(R = Radius; ∂K = Rand des Körpers)

→ die natürliche Orientierung ist, dass das Normalenfeld nach Außen zeigt

↳ kann aber auch umgekehrt werden

Solche Flächen orientiert man, in dem die Normale „nach außen" zeigt, d.h. dass sie weg vom Körper zeigt.

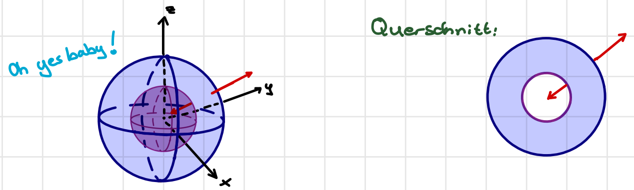


Zylinderabschnitt K

∂K = Mantel ∪ Deckel ∪ Boden

↳ nur wenn kompletter Rand besteht haben sie eine natürliche Orientierung

Bsp: Hohlkugel $\quad H = \{(x,y,z) \mid R_1 \le x^2+y^2+z^2 \le R_2\}$



$\partial H = S^-_{R_1} \cup S^+_{R_2}$

↓ der Normalenvektor der inneren Kugel würde eigentlich auch nach außen gehen hier muss er aber nach "innen"

Bsp: $S^+ = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = R^2\}$ Fluss

= Sphäre mit natürlicher orientierung nach "außen", also vom Körper weg

wir wollen den Fluss des Zentralfeldes $\vec{F}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}$ durch S_R.

↳ = Vektorfeld mit geeigneten Konstanten die Gravitation einer Masse beschreibt, welche sich im Ursprung befindet

= Kraft, welche sich in Richtung des Ortsvektors wirkt, (je nach Konstante vielleicht auch entgegengesetzt)

→ Stärke $\sim \frac{1}{(\text{Abstand})^2}$ (wie bei Gravitation)

↳ Warum dann $\frac{1}{\|\vec{x}\|^3}$??

weil Norm von: $\|\vec{F}\| = \frac{1}{\|\vec{x}\|^3}\|\vec{x}\| = \underbrace{\frac{1}{\|\vec{x}\|^2}}_{\text{Stärke}}$

umgekehrt proportional zu $\|\vec{x}\|^2 = (\text{Abstand})^2$

$$\iint_{S_R} \left\langle \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}, d\vec{O} \right\rangle = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left\langle \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}, R\cdot\sin\theta\cdot\vec{x} \right\rangle d\theta\, d\varphi$$

mit normaler Parametrisierung φ θ

Ortsvektor

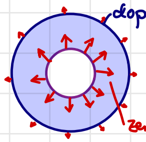
Faktoren aus Skalarprodukt herausziehen

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{R\cdot\sin\theta}{\underbrace{\|\vec{x}\|^3}_{=R^3}} \underbrace{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}_{=\|\vec{x}\|^2 = R^2} d\theta\, d\varphi$$

↳ die Norm von $\vec{x}$ auf der Sphäre $= R$

→ alle R's kürzen sich weg

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta\, d\varphi$$ ⇒ das Ergebnis hängt nicht von R ab!



doppelt so groß

↳ Fläche ist 4× so groß

⇒ die Stärk ~ $\frac{1}{(\text{Abstand})^2}$ ⇒ Zentralfeld ist nur noch ¼ so groß

Zentralfeld

↓

auf 4× Fläche

⇒ kürzt sich aus

Deswegen von R unabhängig ↲

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{-\cos(\pi)}_{-(-1)=1} + \underbrace{\cos(0)}_{=1} \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\, d\varphi = 2\cdot 2\pi = 4\pi$$

⇒ Der Fluss des Zentralfeldes $\vec{F}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}$ durch S_R ist vom Radius R unabhängig.

Definition (Flussintegral eines Vektorfeldes über einer Fläche)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^3$, $F \subseteq D$ eine glatte Fläche mit Parametrisierung $\vec{x}: B \to F$, $B \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\vec{v}: D \to \mathbb{R}^3$ stetig. Dann heißt

$$\iint_F \vec{v}\cdot d\vec{O} = \iint_B \left\langle \vec{v}(\vec{x}(u,v)), \frac{\partial\vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{x}}{\partial v} \right\rangle du\,dv$$

das **Flussintegral (vektorielles Oberflächenintegral)** von $\vec{v}$ über F.

$d\vec{O} = \frac{\partial\vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{x}}{\partial v}\, du\, dv$ heißt **vektorielles Oberflächenelement**.

Vergleich zu Vorlesung 22

$dO = \left\| \frac{\partial\vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{x}}{\partial v} \right\| du\,dv$ heißt **skalares Oberflächenelement**

Eigenschaften von Flächenintegralen

(1) **Skalares Oberflächenintegral**
Die Wahl der Parametrisierung und die Orientierung von $\frac{\partial\vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{x}}{\partial v}$ haben keinen Einfluss auf den Wert des Oberflächenintegrals einer skalaren Funktion.

(2) **Vektorielles Oberflächenintegral**
Die Wahl der Parametrisierung hat bei gleicher Orientierung von $\frac{\partial\vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{x}}{\partial v}$ keinen Einfluss auf den Wert des Oberflächenintegrals eines Vektorfeldes. Die Änderung der Orientierung von $\frac{\partial\vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{x}}{\partial v}$ kehrt das Vorzeichen um.

24. Integralsatz von Gauß

<u>Integralsätze</u>: Gauß, Stokes, (Green)

zB: Gauß $\quad \iint_{\partial K} \langle \vec{v}(\vec{x}), d\vec{O} \rangle = \iiint_K \operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{v} \, dV$ $\quad$ Körper K, Vektorfeld $\vec{v}$

↳ es ist das Gleiche, ob ich über den Rand des Körpers, das Vektorfeld integriere (= Fluss des Vektorfeldes durch den Rand des Körpers) oder, ob man über den ganzen Körper die Divergenz des Vektorfeldes integriere

typisch für Integralsätze: ① verbinden 2 Integrale verschiedener Dimensionen, wobei die Differenz zw. den beiden Dimensionen immer 1 ist

siehe oben:

$\iiint_K \operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{v} \, dV$ ist ein Volumenintegral im $\mathbb{R}^3$

⇒ 3 dimensional

$\iint_{\partial K} \langle \vec{v}(\vec{x}), d\vec{O} \rangle$ ist ein Flächenintegral im $\mathbb{R}^2$

⇒ 2 dimensional

② Da, wo mehr integriert wird steht eine Ableitung

im Bsp: links: zweimal integriert, rechts: dreimal

↳ mehr integriert, wir also recht → dort steht die Divergenz = Ableitungsopperator

⇒ grob: 3 Integrale + 1 Ableitung = 2 Integrale (links)

③ Da, wo weniger integriert wird, wird über den „Rand" integriert

im Fall Gauß ist es wirklich der Rand

↳ zB: links: Integration über eine Sphäre,

rechts: Integration über eine Kugel

Bsp: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

F ist Stammfkt. von f $\quad F' = f \qquad \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,dx$ → sind die Kriterien von oben erfüllt?

① links: 0 mal integriert, rechts: 1 mal integriert

↳ Differenz = 1 ✓

② links wird mehr integriert und das steht eine Ableitung ✓

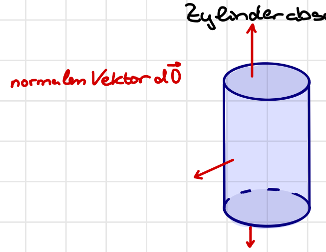
③ rechts wird weniger integriert, da gehts um den Rand ✓

Satz von Gauß (Divergenzsatz).

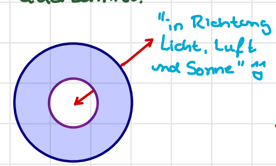
Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ ein kompakter Körper, dessen Rand aus endlich vielen glatten Flächen besteht, deren Normale nach „außen" zeigt (= weg vom Körper)

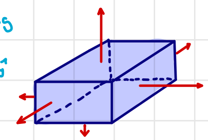
Wie könnte K aussehen?

Kugel $\qquad$ Zylinderabschnitt $\qquad$ Hohlkugel $\qquad$ Quader



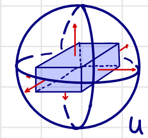
Querschnitt:





Sei $\vec{v}: U \to \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $K \subset U$ ein Vektorfeld mit stetigen partiellen Ableitungen.

z.B.



↳ Def. Bereich U um K Quader

Dann gilt

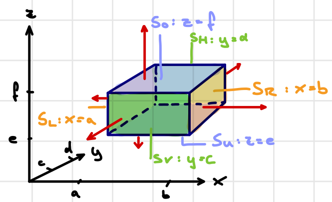
$$\iint_{\partial K} \langle \vec{v}(\vec{x}), d\vec{O} \rangle = \iiint_K \operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{v} \, dV$$

→ wir hatten die Divergenz interpretiert als Quelldichte = Fähigkeit das in diesem Vektorfeld irgendwas entsteht (zB. Gas wird erhitzt → Volumen vergrößert sich = positive Divergenz)

⇒ Gauß: Dass, was insgesamt im ganzen Körper entsteht ist identisch mit der Menge die durch den Rand des Körpers nach außen abfließt

<u>Beweisidee</u>: Spezialfall: $K = Q = \{(x,y,z) \mid a \le x \le b, c \le y \le d, e \le z \le f\}$ = Achsenparalleler Quader

$$\partial Q = S_L \cup S_R \cup S_V \cup S_H \cup S_u \cup S_o$$



Linke Seite

$$LS = \iint_{\partial Q} \langle \vec v, d\vec o\rangle = \underbrace{\boxed{\iint_{S_L} \langle \vec v, d\vec o\rangle + \iint_{S_R} \langle \vec v, d\vec o\rangle}}_{LS_1} + \underbrace{\boxed{\iint_{S_V} \langle \vec v, d\vec o\rangle + \iint_{S_H} \langle \vec v, d\vec o\rangle}}_{LS_2} + \underbrace{\boxed{\iint_{S_U} \langle \vec v, d\vec o\rangle + \iint_{S_O} \langle \vec v, d\vec o\rangle}}_{LS_3}$$

x Sonderrolle   y   z

rechte Seite

$$RS = \iiint_Q \operatorname{div} \vec v \, dV = \underbrace{\boxed{\iiint_Q \frac{\partial v_1}{\partial x} dV}}_{RS_1} + \underbrace{\boxed{\iiint_Q \frac{\partial v_2}{\partial y} dV}}_{RS_2} + \underbrace{\boxed{\iiint_Q \frac{\partial v_3}{\partial z} dV}}_{RS_3}$$

zu zeigen: $LS_3 = RS_3$ (und auch für 2. und 1. Teil)

$$RS_3 = \iiint_Q \frac{\partial v_3}{\partial z}(x,y,z)\, dV = \int_{x=a}^{b}\int_{y=c}^{d}\int_{z=e}^{f} \frac{\partial v_3}{\partial z}(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$$

↳ Abl. von v_3 integriert $= v_3$

$$= \int_a^b \int_c^d \left[v_3(x,y,z) \right]_{z=e}^{z=f} dy\, dx$$

$$= \underbrace{\int_a^b \int_c^d v_3(x,y,f)\, dy\, dx}_{\boxed{\iint_{S_O} \langle \vec v, d\vec o\rangle}} - \underbrace{\int_a^b \int_c^d v_3(x,y,e)\, dy\, dx}_{\boxed{\iint_{S_U} \langle \vec v, d\vec o\rangle}}$$

Parametrisierung von S_O: $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$, $z = \text{fest} = f$

normalerweise $u = x$, $v = y$, aber belassen wir es bei x, y

$$\vec x(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f \end{pmatrix} \quad a \le x \le b, \quad c \le y \le d$$

$$d\vec o = \frac{\partial \vec x}{\partial x} \times \frac{\partial \vec x}{\partial y}\, dx\, dy = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dx\, dy = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx\, dy$$

Normale, die nach oben zeigt, die wir auch wollten

$$\iint_{S_O} \langle \vec v, d\vec o\rangle = \int_{x=a}^{b}\int_{y=c}^{d} \langle \vec v(\underset{x}{x}, \underset{y}{y}, \underset{z}{f}), \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle dy\, dx}_{d\vec o}$$

$$= \int_a^b \int_c^d \left\langle \begin{pmatrix} v_1(x,y,f) \\ v_2(x,y,f) \\ v_3(x,y,f) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dy\, dx$$

$$= \int_a^b \int_c^d v_3(x,y,f)\, dy\, dx$$

→ für S_u: $z = e$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist der falsch, wir brauchen die Normale, die nach unten zeigt: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

analog:

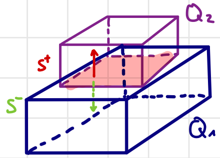
$$\iint_{S_U} \langle \vec v, d\vec o\rangle = \int_{x=a}^{b}\int_{y=c}^{d} \langle \vec v(\underset{x}{x}, \underset{y}{y}, \underset{z}{e}), \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\rangle dy\, dx}_{d\vec o}$$

$$= \int_a^b \int_c^d \left\langle \begin{pmatrix} v_1(x,y,f) \\ v_2(x,y,f) \\ v_3(x,y,f) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle dy\, dx$$

$$= -\int_a^b \int_c^d v_3(x,y,f)\, dy\, dx$$

⇒ Der Satz von Gauß gilt für achsenparallele Quadar

Körper $K = Q_1 \cup Q_2$, aus 2 Quadar zusammengesetzt



$Q_1 \cap Q_2 = S$ (Fläche)

$$RS = \iiint_K \operatorname{div} \vec v\, dV = \iiint_{Q_1 \cup Q_2} \operatorname{div} \vec v\, dV = \iiint_{Q_1} \operatorname{div} \vec v\, dV + \iiint_{Q_2} \operatorname{div} \vec v\, dV$$

$$= \iint_{\partial Q_1} \langle \vec v, d\vec o\rangle + \iint_{\partial Q_2} \langle \vec v, d\vec o\rangle$$

wären fertig, wenn gelten würde: $\partial K = \partial(Q_1 \cup Q_2) = \partial Q_1 + \partial Q_2$, ist aber nicht so, da die Fläche S nicht "außen" ist

Korrektur: $\partial K = \partial(Q_1 \cup Q_2) = (\partial Q_1 \setminus S^+) \cup (\partial Q_2 \setminus S^-)$ ($\setminus$ = ohne)

$$= \iint_{\partial Q_1 \setminus S} \langle \vec v, d\vec o\rangle + \iint_{S^+} \langle \vec v, d\vec o\rangle + \iint_{\partial Q_2 \setminus S} \langle \vec v, d\vec o\rangle + \iint_{S^-} \langle \vec v, d\vec o\rangle$$

Fluss durch eine Fläche von der einen und von der anderen Seite ⇒ hebt sich auf

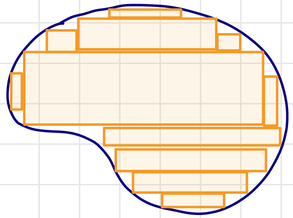
$$= \iint_{(\partial Q_1 \setminus S^+) \cup (\partial Q_2 \setminus S^-)} \langle \vec v, d\vec o\rangle$$

$$= \iint_{\partial K} \langle \vec v, d\vec o\rangle = LS$$

⇒ per Induktion könnte man zeigen, dass der Satz von Gauß für alle Körper gilt, die aus endlich vielen achsenparallelen Quader besteht

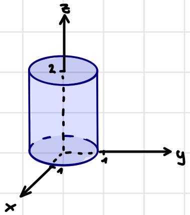
↳ wir wollen aber den Satz von Gauß für alle Körper zeigen

Idee für allgemeine Körper: Durch Quader ausschöpfen



Bsp: Satz von Gauß „verifizieren" für den Körper $K = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 2\}$
= Zylinderabschnitt

und das Vektorfeld $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+z \\ xy+y \\ z^2-x-1 \end{pmatrix}$



wollen überprüfen: $\iint_{\partial K} \langle \vec{v}, d\vec{O} \rangle = \iiint_K \operatorname{div} \vec{v}\, dV$

$$RS = \iiint_K \operatorname{div} \vec{v}\, dV = \iiint_K \operatorname{div} \begin{pmatrix} x+z \\ xy+y \\ z^2-x-1 \end{pmatrix} dV$$

$$= \iiint_K 1 + x + 1 + 2z\, dV$$

$$= \iiint_K 2+x+2z\, dV$$

K = Zylinder → Zylinderkoordinaten → Koordinatentransformation

Transformation in Zylinderkoordinaten

$x = \varrho \cos\varphi \quad y = \varrho \sin\varphi \quad z = z \qquad dV = \varrho \cdot d\varrho\, d\varphi\, dz$

Funktionaldeterminante

$0 \leq \varrho \leq 1$ Radius, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq 2$

$$\iiint_K 2+x+2z\, dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \Big(2 + \overbrace{\varrho\cos\varphi}^{x} + 2z\Big) \cdot \varrho\, dz\, d\varphi\, d\varrho$$

$\varrho \quad \varphi \quad z$

↳ Fehler in der VL!

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \Big[\big(2z + z\varrho\cos\varphi + z^2\big) \cdot \varrho\Big]_{z=0}^{z=2} d\varphi\, d\varrho$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \big(8 + 2\varrho\cos\varphi\big)\varrho\ d\varphi\, d\varrho$$

$$= \int_0^1 \Big[\big(8\varphi - 2\varrho\sin\varphi\big)\varrho\Big]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varrho$$

↳ $\sin(0) = \sin(2\pi) = 0$

$$= \int_0^1 16\pi\varrho\, d\varrho$$

$$= \Big[8\pi\varrho^2\Big]_{\varrho=0}^{\varrho=1}$$

$$= 8\pi$$

= Gesamtvolumen pro Zeiteinheit, das in dem Zylinder entsteht (Divergenz)

LS: Wir benötigen den Rand des Körpers

∂K = Deckel ∪ Boden ∪ Mantel

$$\Rightarrow LS = \iint_{\partial K} \langle \vec{v}, d\vec{O} \rangle = \iint_{\partial K} \left\langle \begin{pmatrix} x+z \\ xy+y \\ z^2-x-1 \end{pmatrix}, d\vec{O} \right\rangle = \iint_{\text{Deckel}} \dots + \iint_{\text{Boden}} \dots + \iint_{\text{Mantel}} \dots$$

Parametrisierungen:

<u>Deckel:</u> → Kreisscheibe in der Höhe 2 → Polarkoordinaten

$$\vec{x}(\varrho,\varphi) = \begin{pmatrix} \varrho\cos\varphi \\ \varrho\sin\varphi \\ 2 \end{pmatrix} \qquad 0 \leq \varrho \leq 1,\quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$d\vec{O} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varrho} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}\, d\varrho\, d\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\varrho\sin\varphi \\ \varrho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varrho\, d\varphi$$

$\cos\varphi \qquad -\varrho\sin\varphi$

$$= \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ \varrho\cos^2\varphi + \varrho\sin^2\varphi \end{pmatrix} d\varrho\, d\varphi$$

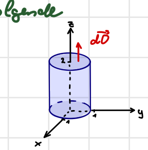
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varrho \end{pmatrix} d\varrho\, d\varphi$$

↳ Muss man jetzt noch ein ϱ reintun für die Flächenverzerrung? Nein

→ Im Oberflächenelement sind folgende Informationen verarbeitet:

- Richtung des Normalenvektors

↳ und daraus resultierend auch



die Flächenverzerrung $\Rightarrow$ um den Faktor ϱ

$$\iiint\limits_{\text{Deckel}} \left\langle \begin{pmatrix} x+z \\ xy+y \\ z^2-x-1 \end{pmatrix}, d\vec{O} \right\rangle = \int\limits_{\substack{0\\ \uparrow \\ \varrho}}^{1} \int\limits_{\substack{0\\ \uparrow \\ \varphi}}^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \varrho\cos\varphi + 2 \\ \varrho\cos\varphi \cdot \varrho\sin\varphi + \varrho\sin\varphi \\ 4-\varrho\cos\varphi - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varrho \end{pmatrix} \right\rangle d\varphi\, d\varrho$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \varrho\cos\varphi + 2 \\ \varrho\cos\varphi \cdot \varrho\sin\varphi + \varrho\sin\varphi \\ 3-\varrho\cos\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varrho \end{pmatrix} \right\rangle d\varphi\, d\varrho$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3\varrho - \varrho^2\cos\varphi \; d\varphi\, d\varrho$$

$$= \int_0^1 \left[3\varrho\varphi + \varrho^2\sin\varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varrho$$

↳ $\sin(2\pi) = \sin(0) = 0$

$$= \int_0^1 6\pi\varrho \; d\varrho$$

$$= \left[3\pi\varrho^2 \right]_{\varrho=0}^{\varrho=1}$$

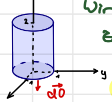
$$= 3\pi$$

→ Durch den Deckel des Zylinders. geht pro ZE ein Fluss mit dem Volumen 3π

Boden: $\vec{x}(\varphi,\varrho) = \begin{pmatrix} \varrho\cos\varphi \\ \varrho\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad 0 \le \varrho \le 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

↳ dadurch das z-koord., werden wir genau das gleiche $d\vec{O}$ kriegen

→ Möchten wir das? → Nein! Wir brauchen den, der nach unten zeigt! ⇒ also tauschen wir die Variablen aus, sodass sich das VZ wechselt



$$d\vec{O} = \frac{\partial\vec{x}}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\vec{x}}{\partial\varrho}\, d\varrho\, d\varphi = \underbrace{\begin{pmatrix} -\varrho\sin\varphi \\ \varrho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}}_{-\varrho\sin\varphi} \times \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}}_{\cos\varphi} d\varrho\, d\varphi$$

$$= \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ -\varrho\sin^2\varphi - \varrho\cos^2\varphi \end{pmatrix} d\varrho\, d\varphi$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varrho \end{pmatrix} d\varrho\, d\varphi$$

$-\varrho$ ausklammern

$$\iiint\limits_{\text{Boden}} \left\langle \begin{pmatrix} x+z \\ xy+y \\ z^2-x-1 \end{pmatrix}, d\vec{O} \right\rangle \underset{z=0}{=} \int\limits_{\substack{0\\ \uparrow \\ \varrho}}^{1} \int\limits_{\substack{0\\ \uparrow \\ \varphi}}^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \varrho\cos\varphi + 2 \\ \varrho\cos\varphi \cdot \varrho\sin\varphi + \varrho\sin\varphi \\ 0-\varrho\cos\varphi - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varrho \end{pmatrix} \right\rangle d\varphi\, d\varrho$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \varrho\cos\varphi + 2 \\ \varrho\cos\varphi \cdot \varrho\sin\varphi + \varrho\sin\varphi \\ -\varrho\cos\varphi - 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varrho \end{pmatrix} \right\rangle d\varphi\, d\varrho$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \varrho^2\cos\varphi + \varrho \; d\varphi\, d\varrho$$

$$= \int_0^1 \left[-\varrho^2\sin\varphi + \varrho\varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varrho$$

↳ $\sin(2\pi) = \sin(0) = 0$

$$= \int_0^1 2\pi\varrho \; d\varrho$$

$$= \left[\pi\varrho^2 \right]_{\varrho=0}^{\varrho=1}$$

$$= \pi$$

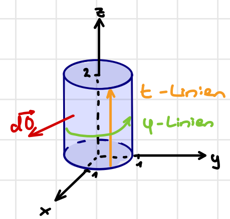
= Fluss des Vektorfeldes durch den Boden

Mantel: Zylinderkoordinaten: Radius $r = 1$; z läuft → t

$\vec{x}(\varphi, t) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ t \end{pmatrix}$ $\quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le t \le 1$ $\quad 0 \le t \le 2$

Zylinder hat die Höhe 2! (Fehler, den sie später korrigiert)

↳ (φ, t) oder (t, φ)? → Wir brauchen Normalenvektor, der nach außen zeigt! Dafür schauen wir uns an, wie die φ- und t-Linien laufen:



Rechte-Hand-Regel:

→ wenn man t als 1. Variable (Daumen) und φ als 2. Variable (Zeigefinger), dann zeigt $d\vec{O}$ in den Zylinder hinein (Mittelfinger)

→ wenn man φ als 1. Variable (Daumen) und t als 2. Variable (Zeigefinger), dann zeigt $d\vec{O}$ aus dem Zylinder hinaus (Mittelfinger) ⇒ den wollen wir! :)

$$d\vec{O} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}\, d\varphi\, dt = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\varphi\, dt$$

$-\sin\varphi \qquad 0$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi - 0 \\ 0 + \sin\varphi \\ 0 - 0 \end{pmatrix} d\varphi\, dt$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi\, dt$$

$$\underset{\text{Mantel}}{\iiint} \left\langle \begin{pmatrix} x+z \\ xy+y \\ z^2-x-1 \end{pmatrix}, d\vec{O} \right\rangle = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} \left\langle \begin{pmatrix} \cos\varphi + t \\ \cos\varphi\sin\varphi + \sin\varphi \\ t^2 - \cos\varphi - 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt\, d\varphi$$

$x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, $z = t$ (untere Grenzen: φ, t)

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2} \cos^2\varphi + t\cos\varphi + \cos\varphi\sin^2\varphi + \sin^2\varphi \; dt\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2} 1 + t\cos\varphi + \cos\varphi\sin^2\varphi \; dt\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[t + \tfrac{1}{2}t^2\cos\varphi + t\cos\varphi\sin^2\varphi \right]_{t=0}^{t=2} d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} 2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}\cos\varphi + 2\cos\varphi\sin^2\varphi \; d\varphi$$

↳ sub: $u = \sin\varphi$ $\quad \frac{du}{d\varphi} = \cos\varphi$

$\Rightarrow d\varphi = \frac{1}{\cos\varphi}\, du$

$$= \left[2\varphi + \tfrac{1}{2}\underset{=0}{\sin\varphi} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} + 2\cdot\int_{u(0)}^{u(2\pi)} \cancel{\cos\varphi} \cdot u^2 \cdot \frac{1}{\cancel{\cos\varphi}}\, du$$

$$= 4\pi + 2\left[\tfrac{1}{3}u^3 \right]_{u(0)}^{u(2\pi)}$$

$$= 4\pi + \underset{=0}{\left[\tfrac{1}{3}\sin^3\varphi \right]_0^{2\pi}}$$

$= \cancel{2\pi}$

$= 4\pi$ $\qquad \rightarrow$ RS $\overset{?}{=}$ LS

$8\pi \neq 3\pi + \pi + 2\pi = 6\pi$

$8\pi = 3\pi + \pi + 4\pi = 8\pi$ ✓

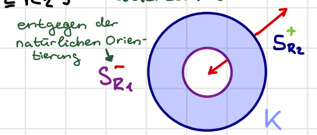
RS $= 8\pi$

$$\text{LS} = \underset{\text{Deckel}}{\iint} \ldots + \underset{\text{Boden}}{\iint} \ldots + \underset{\text{Mantel}}{\iint} \ldots = 3\pi + \pi + 4\pi = 8\pi = \text{RS}$$

nächstes Bsp (mit Stoff zum Nachdenken → genau das, was wir gerade brauchen :))

Bsp:

Zentralfeld $\vec{F}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}$ $\qquad K = \{(x,y,z) \mid R_1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq R_2\}$ (Hohlkugel) $\qquad$ Querschnitt:



Rand: $\partial K = S_{R_2}^+ + S_{R_1}^-$

$\operatorname{div} \vec{F} = \vec{0}$ → da das Zentralfeld quell und wirbelfrei ist (wie beim Magnetfeld)

↳ siehe VL 39/40 bzw W7 B2 V3/4

$$\text{LS} = \underset{K}{\iiint} \operatorname{div} \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}\, dV = \underset{K}{\iiint} 0\, dV = 0$$

$$\text{RS} = \underset{\partial K}{\iint} \langle \vec{v}, d\vec{O} \rangle = \underset{S_{R_2}^+}{\iint} \left\langle \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}, d\vec{O} \right\rangle + \underset{S_{R_1}^-}{\iint} \left\langle \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}, d\vec{O} \right\rangle$$

→ wir wollen zu Sphäre mit natürlicher Orientierung umwandeln, wofür wir das VZ wechseln

$$= \underset{S_{R_2}^+}{\iint} \left\langle \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}, d\vec{O} \right\rangle - \underset{S_{R_1}^+}{\iint} \left\langle \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}, d\vec{O} \right\rangle$$

LS = RS, laut Satz von Gauß, also:

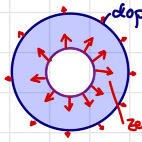
$$\underset{S_{R_2}^+}{\iint} \left\langle \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}, d\vec{O} \right\rangle - \underset{S_{R_1}^+}{\iint} \left\langle \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}, d\vec{O} \right\rangle = 0$$

Daraus folgt: $\underset{S_{R_2}^+}{\iint} \left\langle \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}, d\vec{O} \right\rangle = \underset{S_{R_1}^+}{\iint} \left\langle \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}, d\vec{O} \right\rangle$

↳ haben wir schon letzte VL heraus gefunden, dass der Fluss des Zentralfeldes durch die Sphäre ist unabhängig von Radius

Throwback to VL 48:

$$\int_0 \int_0 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$ ⇒ das Ergebnis hängt nicht von R ab!



doppelt so groß

↳ Fläche ist 4 × so groß

⇒ die Stärk $\sim \frac{1}{(\text{Abstand})^2}$ ⇒ Zent
ist
¼ s

auf 4×
⇒ tertert s

Deswegen von R unabhängig ↵

Zentralfeld

⇒ Fluss des Zentralfeldes durch eine Sphäre um $\vec{0}$ ist unabhängig von Radius

$$\iint_{S_R} \left\langle \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}, d\vec{O} \right\rangle = 4\pi \quad \text{(Ergebnis letzter VL)}$$

Frage: Was ist an folgen der Argumentation falsch?

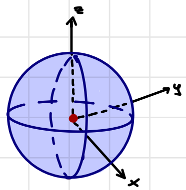
$$4\pi = \iint_{S_R} \left\langle \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}, d\vec{O} \right\rangle = \iint_{\partial K} \left\langle \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}, d\vec{O} \right\rangle \overset{\text{Satz von Gauß}}{=} \iiint_{K_R} \underbrace{\operatorname{div} \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}}_{=0} \, dV = \iiint_{K_R} 0 \, dV = 0$$

S_R → Sphäre (nicht Hohlkugel)

Satz von Gauß gilt für $\vec{v}: U \to \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und und $K \subset U$
einen Körper der vollständig in dem Def.B. U des Vektorfeldes liegt

$$\vec{F}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \qquad U = \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$$ → ohne Ursprung

aber: $\vec{0} \in K_R = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le R\}$

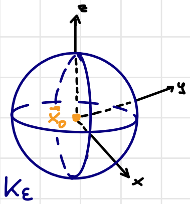


⇒ Wir hätten den Satz von Gauß garnicht anwenden dürfen!

25.VL Integralsatz von Stokes

Nachtrag: (Satz von Gauß)

$$\iint_{\partial K} \langle \vec{v}(\vec{x}), d\vec{O} \rangle = \iiint_K \operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{v} \, dV$$



Interpretation der Divergenz als Quelldichte

- Vektorfeld $\vec{v}$ ist nicht konst., aber wir stellen uns vor das die Kugel K_ε so klein ist, dass die Ableitungen des Vektorfeldes und damit auch die Divergenz näherungsweise konst. sind
  ↳ daraus folgt:

$$\iint_{\partial K_\varepsilon} \langle \vec{v}(\vec{x}), d\vec{O} \rangle = \iiint_{K_\varepsilon} \operatorname{div}_{\vec{x}_0} \vec{v} \, dV \approx \operatorname{div}_{\vec{x}_0} \vec{v} \underbrace{\iiint_{K_\varepsilon} 1 \, dV}_{\text{Volumen des Körpers}} = \operatorname{div}_{\vec{x}_0} \vec{v} \cdot \text{Volumen}(K_\varepsilon)$$

wenn div konst, dann kann man es vor das Integral ziehen

Umstellen:

$$\operatorname{div}_{\vec{x}_0} \vec{v} = \frac{\iint_{\partial K_\varepsilon} \langle \vec{v}(\vec{x}_0), d\vec{O} \rangle}{\text{Volumen}(K_\varepsilon)}$$

Flussintegral

„Fluss pro Volumen"

= Fluss der pro ZE aus der Kugel herausfließt, in Relation zu dem vorhandenen Volumen in der Kugel

Exakt: $$\operatorname{div}_{\vec{x}_0} \vec{v} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\iint_{\partial K_\varepsilon} \langle \vec{v}(\vec{x}_0), d\vec{O} \rangle}{\text{Volumen}(K_\varepsilon)}$$

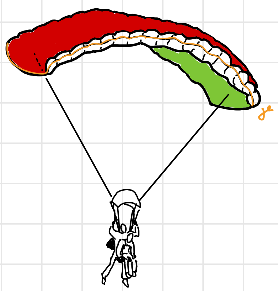
⇒ Erst durch den Satz von Gauß können wir die Divergenz als Quelldichte interpretieren!

Satz von Stokes:

$$\iint_{S} \langle \operatorname{rot}_{\vec{x}} \vec{v}, d\vec{O} \rangle = \int_{\gamma} \langle \vec{v}(\vec{x}), d\vec{s} \rangle$$

S ↘ Fläche, γ ↘ Kurve

γ sei die Randkurve von S.



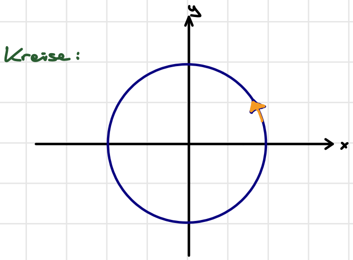
- Das Integral über Fläche S ist orientierungsabhängig
  ↳ welche Seite oben ist entscheidet über das Vorzeichen
- Kurvenintegral γ des Vektorfelds ist orientierungsabhängig
  ↳ hängt von der Durchlaufsrichtung ab → entscheidet über das VZ

⇒ die Orientierungen mit dem selben VZ gehören zueinander

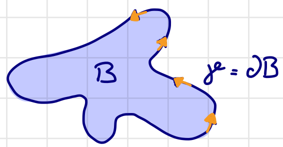
Stimmen bei dem Satz von Stokes die Kriterien für einen Integralsatz?
↳ RS ist eine Kurve = eindimensional ; LS ist eine Fläche = zweidimensional
↳ LS stehen mehr Integrale und dort ist eine Ableitung (Rotation = Differentialoperator)
↳ RS ist da, wo weniger integriert wird und dort wird in gewisser Weise über den "Rand" integriert

Geschlossene Kurven in der Ebene

Durchlaufen in „mathematisch positiven Sinn" zB Kreise:

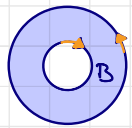


Kurve als Rand eines Bereiches



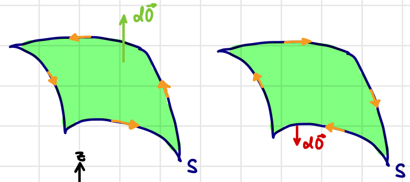
↳ mathematisch positiv heißt hier, wir laufen auf dem Rand und lassen den Bereich B links liegen

zB: B ist ein Kreisring

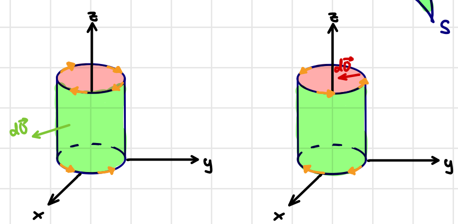


Übertragung in den Raum:

$S \subset \mathbb{R}^3$ Fläche mit Orientierung $d\vec{O}$



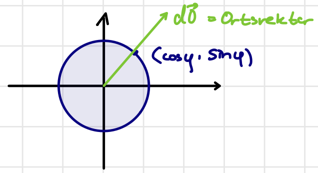
Bsp: Zylindermantel



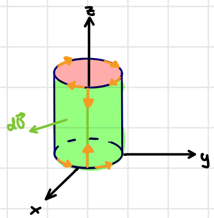
Parametrisierung: ① $\vec{x}(\varphi, t) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ t \end{pmatrix}$ $\quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \ 0 \leq t \leq 1$

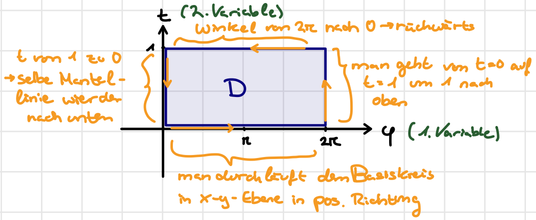
$$d\vec{O} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \, d\varphi \, dt = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\varphi \, dt = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \, dt$$

↳ Welcher Normalenvektor ist das?



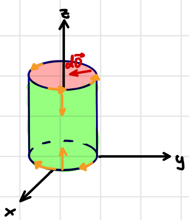
Durchlaufrichtung der Randpunkte aus der Parametrisierung, indem man den Def.B. der Parametrisierung im mathematisch positiven Sinn durchläuft

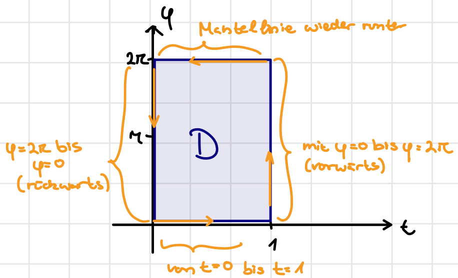




② $\vec{x}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ t \end{pmatrix}$ $\quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \; 0 \leq t \leq 1$

$$d\vec{O} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}\, d\varphi\, dt = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi\, dt = \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi\, dt$$





Satz von Stokes:

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und γ ihre Randkurve; die Orientierung der Fläche und Durchlaufrichtung der Randkurve seien zueinander "passend".

Sei $\vec{v}: U \to \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $S \subset U$ (S liegt ganz in U) ein Vektorfeld mit stetigen partiellen Ableitungen. Dann gilt:

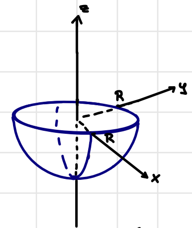
$$\iint_S \langle \operatorname{rot}_{\vec{x}} \vec{v}, d\vec{O} \rangle = \int_\gamma \langle \vec{v}(\vec{x}), d\vec{s} \rangle$$

Insbesondere gilt für geschlossene Flächen S (= der Rand eines Körpers, zB Sphäre → haben keine Randkurve):

"Achtung: geschlossene Fläche!" → $\displaystyle\oiint_S \langle \operatorname{rot}_{\vec{x}} \vec{v}, d\vec{O} \rangle = 0$

Bsp: $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ x^2 \\ z^3 \end{pmatrix}$ $\quad S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = R^2, \; z \leq 0\}$ untere Halbsphäre

Satz von Stokes verifizieren:



Linke Seite: Parametrisierung $\quad \vec{x}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} R\sin\theta\cos\varphi \\ R\sin\theta\sin\varphi \\ R\cos\theta \end{pmatrix}$ $\quad \varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y \\ x^2 \\ z^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 2x - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x-1 \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial}{\partial x}$ $\quad y$

$$d\vec{O} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}\, d\theta\, d\varphi = R \cdot \sin\theta \cdot \underbrace{\vec{x}(\theta,\varphi)}_{\text{Ortsvektor}}\, d\theta\, d\varphi = R \cdot \sin\theta \begin{pmatrix} R \cdot \sin\theta\cos\varphi \\ R \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ R \cdot \cos\theta \end{pmatrix} d\theta\, d\varphi$$

↳ siehe VL 47 / W11B1 Seite 5

$$LS = \iint_S \langle \operatorname{rot}_{\vec{x}} \vec{v}, d\vec{O} \rangle = \iint_S \langle \operatorname{rot} \begin{pmatrix} y \\ x^2 \\ z^3 \end{pmatrix}, d\vec{O} \rangle = \iint_S \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x-1 \end{pmatrix}, d\vec{O} \rangle$$

für $x = R\sin\theta\cos\varphi$ ↰ $\displaystyle = \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2(R\sin\theta\cos\varphi) - 1 \end{pmatrix}, R\sin\theta \begin{pmatrix} R \cdot \sin\theta\cos\varphi \\ R \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ R \cdot \cos\theta \end{pmatrix} \rangle\, d\varphi\, d\theta$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{2\pi} \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2R\sin\theta\cos\varphi - 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R^2\sin^2\theta\cos\varphi \\ R^2\sin^2\theta\sin\varphi \\ R^2\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} \rangle\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{2\pi} 2R^3\sin^2\theta\cos\theta\cos\varphi - R^2\sin\theta\cos\theta \; d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi} \left[2R^3 \sin^2\theta\cos\theta \sin\varphi - (R^2 \sin\theta\cos\theta)\varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\theta$$

↳ $\sin(2\pi) = \sin(0) = 0$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi} -R^2 \sin\theta\cos\theta \cdot 2\pi \, d\theta$$

$\int \sin\theta \cdot \cos\theta = \frac{1}{2}\sin^2\theta$ → Spickzettel Klausur!

$$= \left[-R^2\pi \sin^2\theta \right]_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\theta=\pi}$$

→ $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$
→ $\sin(\pi) = 0$

$$= -(-R^2\pi) = R^2\pi$$ // = Flächenintegral

außerdem: $\int \cos^2 \cdot \sin$

Sub: $u = \cos$

$= \int u^2 \left(-\frac{1}{\sin}\right) \cdot \sin$

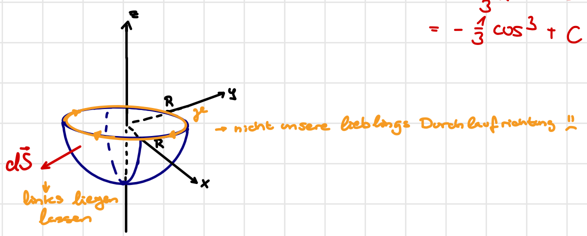
$= \int -u^2$

$= -\frac{1}{3}u^3 + C$

$= -\frac{1}{3}\cos^3 + C$

Rechte Seite:

Durchlaufrichtung der Randkurve



Parametrisierung der Randkurve γ

Lieblings Parametrisierung: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ hat die falsche Orientierung! $t \in [0, 2\pi]$

$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} R\cos(-t) \\ R\sin(-t) \\ 0 \end{pmatrix}$ $t \in [-2\pi, 0]$ ← statt t: $-t$ um Orientierung zu ändern

Fehler in der VL (den sie später korrigiert) ↓ sehr viel später...

da cos eine gerade Fkt ist, gilt: $\cos(-t) = \cos(t)$

sin ist eine ungerade Fkt, daher: $\sin(-t) = -\sin(t)$

$$\boxed{\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} R\cdot\cos(t) \\ -R\cdot\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]}$$ → hier zufällig egal!

↳ richtige Orientierung im Zusammenhang mit der Fläche

$$\underbrace{d\vec{S} = \vec{x}'(t)\,dt}_{\text{Geschwindigkeitsvektor}} = \begin{pmatrix} -R\cdot\sin(t) \\ -R\cdot\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$RS = \int_\gamma \langle \vec{v}(\vec{x}), \vec{ds} \rangle = \int_\gamma \left\langle \begin{pmatrix} y \\ x^2 \\ z^3 \end{pmatrix}, d\vec{S} \right\rangle = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R^2\cos^2(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ -R\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

↑ t

$$= \int_0^{2\pi} R^2\sin^2(t) - R^3\cos^3(t)\,dt$$

Trickkiste: → Klausur

$\cos^3 t = \cos t \cdot \cos^2 t = \cos t \cdot (1 - \sin^2 t) = \cos t - \sin^2 t \cos t$

$\sin^2 t$: I $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

II $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t)$

I − II: $2\sin^2 t = 1 - \cos(2t)$ $\quad | \div 2$

$\sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)$

$$= \int_0^{2\pi} R^2\tfrac{1}{2} - R^2\tfrac{1}{2}\cos(2t) - R^3\cos t + R^3 \underbrace{\sin^2 t\cdot\cos t}_{\text{mit Hilfe von Substitution}}\,dt$$

→ siehe letzte VL S. 10
→ Spickzettel Klausur

$$= \left[R^2\tfrac{1}{2}t - R^2\tfrac{1}{4}\sin(2t) - R^3\sin t + R^3\tfrac{1}{3}\sin^3 t \right]_{t=0}^{t=2\pi}$$

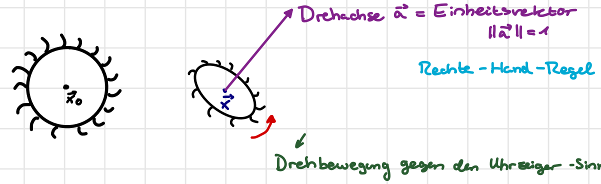
↳ $\sin(2\pi) = \sin(0) = 0$

$$= R^2 \cdot \tfrac{1}{2} 2\pi = R^2\pi \;// = LS.$$

Interpretation der Rotation als Wirbeldichte

Sei $v(\vec{x})$ das Geschwindigkeitsfeld einer Strömung. Im Punkt $\vec{x}_0$ wird ein Schaufelrad mit beweglicher Achse aufgehängt

↳ siehe auch VL 34 / W7B1 V1

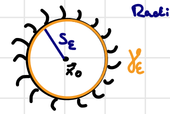


→ wir richten die Drehachse in der Strömung aus

Frage: Wie muss die Drehachse $\vec{a}$ gewählt werden, damit sich das Schaufelrad möglichst schnell dreht?

Radius = S_ε → Epsilon steht immer für kleine Größen → kleines Schaufelrad

↳ hier auch die ganze Fläche



Die Drehgeschwindigkeit ist proportional zu $\int_{\gamma_\varepsilon} \langle \vec{v}, \vec{ds} \rangle$

Satz von Stokes: $\int_{\gamma_\varepsilon} \langle \vec{v}, d\vec{S} \rangle = \int_{S_\varepsilon} \langle \operatorname{rot}\vec{v}, d\vec{O} \rangle$

→ Rädchen ist super klein, die Geschwindikeit auf dem Rädchen ist nicht konst., aber die Ableitungen sind so klein, dass sie annähernd konst. sind

$$\oint_{\gamma_\varepsilon} \langle \vec{v}, d\vec{s} \rangle = \int_{S_\varepsilon} \langle \underbrace{\operatorname{rot} \vec{v}}_{\approx \operatorname{rot}_{\vec{x}_0} \vec{v}}, d\vec{O} \rangle$$

↦ dort steht drin: Richtung des Normalenvektors bzw. der Drehachse · der Flächeninhalt des Rädchens

konst. Vektor

$$\approx \langle \operatorname{rot} \vec{v}, \vec{a} \rangle \text{ Fläche von } S_\varepsilon$$

cos des eingeschlossenen Winkels

$$\|\operatorname{rot}_{\vec{x}_0} \vec{v}\| \cdot \|\vec{a}\| \cdot \cos\sphericalangle(\operatorname{rot}\vec{v}, \vec{a}) = \langle \operatorname{rot}_{\vec{x}_0} \vec{v}, \vec{a} \rangle = \frac{\oint_{\gamma_\varepsilon} \langle \vec{v}, d\vec{s} \rangle}{\text{Fläche von } S}$$

Länge des einen Vektors

Länge des anderen Vektors

$\|\vec{a}\| = 1$ (Einheitsvektor)

ist das selbe wie

→ wenn der Ausdruck groß ist dreht sich das Rädchen schnell

⇒ Radachse muss möglichst groß werden

die Radachse steckt im cos (Winkel) drin

⇒ größter möglicher Cosinus = 1, damit cos = 1 muss Radachse $\vec{a}$ genau in Richtung Rotation zeigen

⇒ $\vec{a} = \operatorname{rot}_{\vec{x}_0} \vec{v}$ gibt die schnellste Drehung des Rädchens

d.h. $\operatorname{rot}_{\vec{x}_0} \vec{v}$ gibt die Achsenrichtung der Radachse an, die die schnellste Drehung erzeugt.

⇒ nächste Seite gehts weiter :)

Gegenüberstellung von:

Zentralfeld	Magnetfeld
$F(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}$	$\vec{H}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Potentiale (Existenz): dh. $\vec{v} = -\operatorname{grad} u$

notwendig: $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$

hinreichend: $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$, $D_{\vec{v}}$ offen und konvex

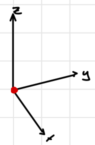
Vektorpotentiale (Existenz): dh. $\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{w}$

notwendig: $\operatorname{div} \vec{v} = 0$

hinreichend: $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, $D_{\vec{v}}$ offen und konvex

→ erfüllen beide die notw. B. für Potentiale, die hinr. B. nicht

→ erfüllen beide die notw. B. für Vektorpotentiale, die hinr. B. nicht

$\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$, $\operatorname{div} \vec{F}(\vec{x}) = 0$	$\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{x}) = \vec{0}$, $\operatorname{div} \vec{H}(\vec{x}) = 0$
$D_{\vec{F}} = \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$  ⇒ nicht konvex!	$D_{\vec{F}} = \mathbb{R}^3 \setminus_{z\text{-Achse}}$ ↳ x^2+y^2 im Nenner → dürfen nicht beide gleichzeitig Null sein  ⇒ nicht konvex!

⇒ könnten beide ein (Vektor-) Potential haben, müssen sie aber nicht

⇒ $\vec{F}$ hat ein globales Potential $\vec{F} = -\operatorname{grad} \frac{1}{\|\vec{x}\|}$ ⇒ $\vec{H}$ hat kein globales Vektorpotential	⇒ $\vec{H}$ hat ein globales Vektorpotential ⇒ $\vec{H}$ hat kein globales Potential

⇒ mehr dazu in VL 37/ W7 B2 V1

Warum hat das Zentralfeld kein globales Vektorpotential?

Laut Satz von Stokes gilt für geschlossene Flächen $\oiint_S \langle \text{rot}\,\vec{v}, d\vec{O} \rangle = 0$

Es gilt aber für das Zentralfeld und die Sphäre vom Radius R: $\oiint_S \langle \vec{F}(\vec{x}), d\vec{O} \rangle = 4\pi$

Angenommen es würde gelten: $\vec{F} = \text{rot}\,\vec{v}$ $\quad \vec{v} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$

↳ Sphäre die nicht im $\vec{0}$ liegt

dann müsste gelten $\Rightarrow \oiint_{S_R} \langle \vec{F}, d\vec{O} \rangle = \oiint_{S_R} \langle \text{rot}\,\vec{v}, d\vec{O} \rangle = 0$

wir wissen aber: $\oiint_{S_R} \langle \vec{F}, d\vec{O} \rangle = 4\pi \neq 0$

$\Rightarrow$ Somit kann das Zentralfeld kein globales Vektorpotential haben!

26. VL Satz von Green

Die Greensche Formel
= eine ebene Version des Satz vom Stokes

Nachtrag zu Kurvenintegralen:

$$\int_\gamma \langle \vec{v}, \vec{ds} \rangle$$

andere Schreibweise: $\int_\gamma x\,dy + x^2\,dz$ auch ein Kurvenintegral

Parametrisierung

$$\int_\gamma \langle \vec{v}, \vec{ds} \rangle = \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}(t)) \\ \vdots \\ v_n(\vec{x}(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \int_a^b v_1(\vec{x}(t)) \cdot x_1'(t) + \ldots + v_n(\vec{x}(t)) \cdot x_n'(t) \quad dt$$

andere Schreibweise: dt in jeden Integranten rein multiplizieren

$$= \int_a^b v_1(\vec{x}(t)) \cdot \underbrace{x_1'(t)\,dt}_{dx_1} + \ldots + v_n(\vec{x}(t)) \cdot \underbrace{x_n'(t)\,dt}_{dx_n}$$

zurück zur invarianten Schreibweise

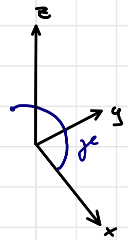
$$= \int_\gamma v_1 \cdot dx_1 + v_2 \cdot dx_n + \ldots + v_n \cdot dx_n$$

kein dx

Bsp: $\int_\gamma x\,dy + x^2\,dz = \int_\gamma \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}, \vec{ds} \right\rangle$ = gewöhnliche Schreibweise

Bsp: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$ = Schraubline (siehe VL 00 oder VL 42 / WBB2)

$t \in [0, \pi]$ → halbe Windung nach oben



wir wollen berechnen: $\int_\gamma z\,dy$

$$\int_\gamma z\,dy = \int_0^\pi \underset{\underset{z}{\shortparallel}}{t} \; \underset{\underset{\underset{(\sin t)'}{\shortparallel}}{dy}}{y'(t)\,dt} = \int_0^\pi \underset{g}{t} \cdot \underset{f'}{\cos t}\,dt$$

0 ↑ t

partielle Integration: $f' = \cos t$ $\quad f = \sin t$

$g = t$ $\quad g' = 1$

Regel: $\int g \cdot f' = g \cdot f - \int g' \cdot f$

$$= [t \cdot \sin t]_0^\pi - \int_0^\pi 1 \cdot \sin t\,dt$$

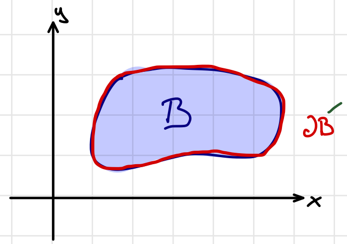
$\sin(\pi) = 0 = \sin(0)$

$$= -[-\cos t]_0^\pi$$

$$= [\cos t]_0^\pi$$

$\cos(0) = 1\,;\ \cos(\pi) = -1$

$$= -1 - 1 = -2$$



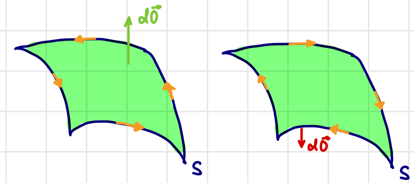
Randkurve

↳ über die Randkurve wird ein Vektorfeld integriert:

$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(x,y) \\ q(x,y) \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Satz von Stokes:

Rechte-Hand-Regel:

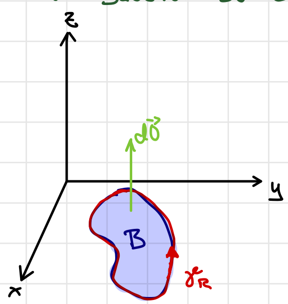


$$\iint_S \langle \operatorname{rot}_{\vec{x}} \vec{v}, \vec{do} \rangle = \int_\gamma \langle \vec{v}(\vec{x}), \vec{ds} \rangle$$

S: Fläche, γ: Kurve

γ sei die Randkurve von S.

um Satz von Stokes anwenden zu können, müssen wir im Raum sein:



$$S_R = \{(x, y, 0) \mid (x,y) \in B\}$$

Räumlich

$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} p(x,y) \\ q(x,y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$RS = \int_{\partial_R} \left\langle \begin{pmatrix} p(x,y) \\ q(x,y) \\ 0 \end{pmatrix}, d\vec{s} \right\rangle$$

Parametrisierung von ∂B: $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \ t \in [a,b]$

Parametrisierung von γ: $\vec{x}_R(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \in [a,b]$

$$= \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} p(x(t),y(t)) \\ q(x(t),y(t)) \\ \cancel{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ \cancel{0} \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

↳ für das Skalarprodukt unerheblich

$$= \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} p(x(t),y(t)) \\ q(x(t),y(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \int_{\partial B} \left\langle \begin{pmatrix} p(x,y) \\ q(x,y) \end{pmatrix}, d\vec{s} \right\rangle$$

neue Schreibweise

$$= \boxed{\int_{\partial B} p\,dx + q\,dy}$$ = Integral über die Randkurve des ebenen Bereichs

LS

$$\text{rot } \vec{v}_R = \overset{\text{Nabla}}{\nabla} \times \vec{v}_R = \underset{\frac{\partial}{\partial x}}{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}} \times \underset{p(x,y)}{\begin{pmatrix} p(x,y) \\ q(x,y) \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ \frac{\partial q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial p}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

Parametrisierung der Fläche S_R: $\vec{x}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \ (x,y) \in B$

$$d\vec{O} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial y}\, dx\,dy$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dx\,dy$$

1. Einheitsvekt. × 2. Einheitsvek. = 3. Einheitsvek.

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx\,dy$$

$$LS = \iint_{S_R} \langle \text{rot } \vec{v}, d\vec{O} \rangle = \iint_B \left\langle \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ \frac{\partial q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial p}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dx\,dy$$

Parametrisierung: $x = x$, $y = y$, $z = 0$

$$= \iint_B \frac{\partial q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial p}{\partial y}(x,y)\, dx\,dy$$

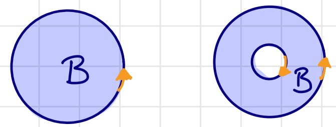
ohne Argumente:

$$= \boxed{\iint_B \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\, dx\,dy}$$ = Integral über den ebenen Bereich

Formel von Green: $\boxed{\int_{\partial B} p\,dx + q\,dy} = \boxed{\iint_B \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\, dx\,dy}$

Satz (Greensche Formel):

Es sei $B \subset \mathbb{R}^2$ kompakt; ∂B besteht aus endlich vielen glatten Kurven, die im mathematisch positiven Sinn durchlaufen werden (d.h. B bleibt links liegen)



Es seien $p, q: D \to \mathbb{R}$ Funktionen mit stetigen partiellen Ableitungen. Dann gilt

$$\iint_B \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\, dx\,dy = \int_{\partial B} p\,dx + q\,dy \left(= \int_{\partial B} \left\langle \begin{pmatrix} p(x,y) \\ q(x,y) \end{pmatrix}, d\vec{s} \right\rangle \right)$$

↳ RS ist eine Kurve = eindimensional ; LS ist eine Fläche = zweidimensional

↳ LS stehen mehr Integrale und dort wird abgeleitet ($\frac{\partial q}{\partial x}$ und $\frac{\partial p}{\partial y}$)

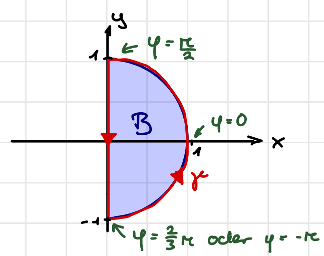
↳ RS ist da, wo weniger integriert wird und dort wird über den Rand des Bereichs von LS integriert

Bsp: $p(x,y) = xy \quad q(x,y) = x^2 + y^2 \quad B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$

$$LS = \iint_B \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\, dx\,dy$$

$$= \iint_B 2x - x\, dx\,dy$$

$$= \iint_B x\, dx\,dy$$



Koordinatentransformation in Polarkoordinaten:

$$x(\rho,\varphi) = \rho \cos\varphi \quad ; \quad y(\rho,\varphi) = \rho \sin\varphi$$

$$d\vec{S} = dx\,dy = \rho\, d\rho\, d\varphi \qquad 0 \le \rho \le 1 \;;\; -\tfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \tfrac{\pi}{2}$$

$$= \int_{\rho=0}^{1} \int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho \cos\varphi \,\rho \, d\varphi\, d\rho$$

$$= \int_0^1 \rho^2 \cdot [\sin\varphi]_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} d\rho \qquad \sin(-\tfrac{\pi}{2}) = -1 ,\ \sin(\tfrac{\pi}{2}) = 1$$

$$= \int_0^1 \rho^2 (1-(-1))\, d\rho = \int_0^1 2\rho^2 \, d\rho = \left[\tfrac{2}{3}\rho^3\right]_{\rho=0}^{\rho=1} = \tfrac{2}{3}$$

$$RS = \int_{\partial B} p\,dx + q\,dy = \int_{\partial B} xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy$$

$$= \int_{\text{Halbkreis}} xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy + \int_{\text{Strecke}} xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy$$

Parametrisierung Halbkreis: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \qquad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

$$\int_{\text{Halbkreis}} xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)\cdot\sin(t) \underbrace{(-\sin t)\,dt}_{dx = x'(t)\,dt = (\cos(t))'\,dt} + \overset{\cos^2 t + \sin^2 t}{1} \cdot \overbrace{\cos t \cdot dt}^{dy = y'(t)\,dt = (\sin t)'\,dt}$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos(t)\cdot\sin(t)\,(-\sin t) + \cos t\right) dt$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\underbrace{-\sin^2 t \cos t}_{\text{Substitution siehe VL 49 / W12 B1 S. 10}} + \cos t)\, dt$$

$$= \left[-\tfrac{1}{3}\sin^3 t + \sin t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \qquad \sin(\tfrac{\pi}{2}) = 1 \;;\; \sin(-\tfrac{\pi}{2}) = -1$$

$$= -\tfrac{1}{3} + 1 - \left(\tfrac{1}{3} - 1\right)$$

$$= -\tfrac{1}{3} + 1 - \tfrac{1}{3} + 1$$

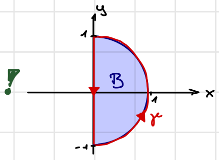
$$= -\tfrac{2}{3} + 2 = -\tfrac{2}{3} + \tfrac{6}{3} = \tfrac{4}{3}$$ → nur Halbkreis!

Parametrisierung Strecke: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \qquad -1 \le t \le 1$

⇒ aber falsche Durchlaufrichtung!

deshalb:

$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -t \end{pmatrix} \qquad -1 \le t \le 1$



$$\int_{\text{Strecke}} xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy = \int_{-1}^{1} (\underset{xy = 0\cdot(-y) = 0}{0} + 0^2 + t^2 \cdot \overset{y(t)'dt = (-t)'dt = -1\,dt}{(-1)})\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} -t^2\, dt$$

$$= \left[-\tfrac{1}{3}t^3\right]_{-1}^{1} = -\tfrac{1}{3}\cdot 1 - (-\tfrac{1}{3})\cdot(-1)$$

$$= -\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3} = -\tfrac{2}{3}$$

$$\Rightarrow RS = \int_{\partial B} xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy = \int_{\text{Halbkreis}} xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy + \int_{\text{Strecke}} xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy$$

$$= \tfrac{4}{3} - \tfrac{2}{3} = \tfrac{2}{3} = LS$$

Anwendung: Wie kann man den Flächeninhalt eines Bereiches durch ein Randintegral berechnen?

Flächeninhalt von $\underset{\text{ebener Bereich}}{B} = \iint_B 1 \, dx\, dy$

→ gesucht sind p, q, sodass $\iint_B 1\,dx\,dy$ = LS der Greenschen Formel

LS: $\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} = 1$ zB: $p = 0,\ q = x \rightarrow \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} = 1 - 0 = 1$

$$\iint_B \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\,dx\,dy = \iint_B 1\,dx\,dy = \int_{\partial B} p\,dx + q\,dy = \int_{\partial B} 0\cdot dx + x\,dy = \int_{\partial B} x\,dy$$

Flächeninhalt von B = $\iint_B 1\,dx\,dy = \boxed{\int_{\partial B} x\,dy}$

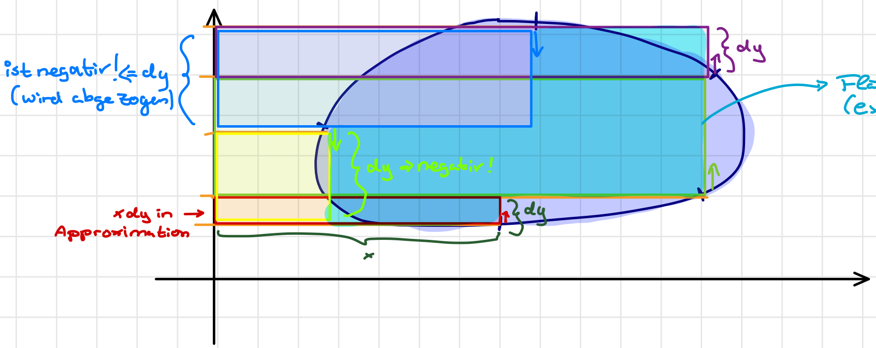
↳ damit kann man auch den Flächeninhalt eines ebenen Bereichs bestimmen

graphisch: $\int_{\partial B} x\,dy$

x-Wert

↳ kleine Δy = kleine Abstände

Was würde man in eine Näherungsrechnung bekommen?

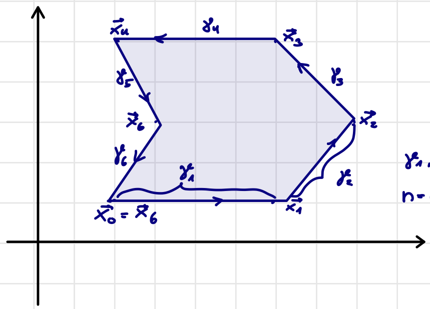


Anwendung: Gaußsche Flächenformel

Johann Carl Friedrich Gauß
1777 - 1887

verdiente sich sein Geld als Landvermesser ←

Wir suchen den Flächeninhalts eines Polygons (= Vieleck)



Fläche = $\int_{\partial B} x\,dy = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} x\,dy$

$\gamma_1, \dots, \gamma_6$ = Strecken

$n = 6$

Parametrisierung von γ_j: γ_j = Strecke von $\vec{x}_{j-1}$ nach $\vec{x}_j$

$\vec{x}(t) = \vec{x}_{j-1} + t\cdot(\vec{x}_j - \vec{x}_{j-1})$ (Punkt-Richtungs-Form) $0 \le t \le 1$

$$= \begin{pmatrix} x_{j-1} \\ y_{j-1} \end{pmatrix} + t\cdot \begin{pmatrix} x_j - x_{j-1} \\ y_j - y_{j-1} \end{pmatrix}$$

$$\int_{\gamma_j} x\,dy = \int_0^1 x_{j-1} + t\cdot(x_j - x_{j-1})\ (y_j - y_{j-1})\,dt$$

Ableitung der y-Komponente von $\vec{x}(t)$ nach t

$$= \left[x_{j-1}\cdot t + \tfrac{1}{2}t^2 (x_j - x_{j-1})\cdot(y_j - y_{j-1}) \right]_0^1$$

$$= x_{j-1} + \tfrac{1}{2}(x_j - x_{j-1})\cdot(y_j - y_{j-1})$$

↳ $x_{j-1} - \frac{1}{2}x_{j-1} = +\frac{1}{2}x_{j-1}$

$$= \tfrac{1}{2}(x_j + x_{j-1})\cdot(y_j - y_{j-1})$$

Klammern ausmultiplizieren

$$= \tfrac{1}{2}(x_j y_j + x_{j-1} y_j - x_j y_{j-1} - x_{j-1} y_{j-1})$$

= Integral über eines der Strecken

x-Wert, y-Wert vom Nachfolge-Punkt; x-Wert, y-Wert vom Vorgänger-Punkt

Anfangspunkt, Endpunkt → heben sich in der Summe von allen Strecken auf

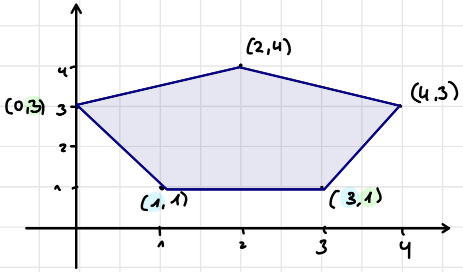
geschickt zusammengefasst, wie es nur Penn-Karras kann:

alle x-Werte von Punkten

Fläche = $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} x_j (y_{j+1} - y_{j-1})$ = Gaußsche Flächenformel zum Berechnen der Flächeninhalte von Polygonen

y-Wert vom Nachfolger; y-Wert vom Vorgänger

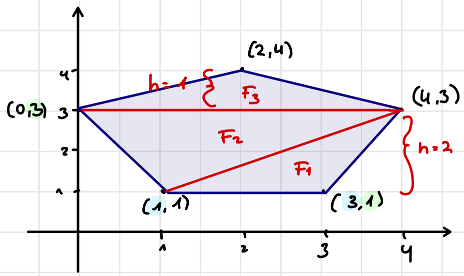
Bsp:



$$F = \frac{1}{2}\left(1\cdot(1-3) + 3(3-1) + 4(4-1) + 2(3-3) + 0(1-4)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(-2 + 6 + 12 + 0 + 0)$$

$$= 8$$



$F_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}$

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

$$= \frac{1}{2}(2\cdot 2 + 4\cdot 2 + 1\cdot 4)$$

$$= \frac{1}{2}(4 + 8 + 4)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 16$$

$$= 8$$