Agenda

2. Lineare Optimierung

Dualität – Einführendes Beispiel

Max hat sich für eine neue Karriere als Schreiner entschieden. Da er zwei linke Hände besitzt kann er nur Regale und Schränke bauen. Trotzdem kann er seine Regale für 100 Euro und seine Schränke für 150 Euro verkaufen. Der Materialbedarf kann der folgenden Tabelle entnommen werden:

	Regal (x_1)	Schrank (x_2)	Lagerbestand
Bretter (u_1)	10	16	100
Nägel (u_2)	120	60	1000
Lackdosen (u_3)	1	1	5

Daraus ergibt sich das folgende Optimierungsproblem:

$$
\begin{aligned}
\max z_P = \quad & 100x_1 + 150x_2 & & \\
\text{s.t.} \quad & 10x_1 + 16x_2 & \leq 100 & \qquad (1) \\
& 120x_1 + 60x_2 & \leq 1000 & \qquad (2) \\
& x_1 + x_2 & \leq 5 & \qquad (3) \\
& x_{1,2} & \geq 0 &
\end{aligned}
$$

Dualität – Einführendes Beispiel

Wie ihr in OR-INF erfahren werdet, hat Max Mutter eine Farm gekauft und er soll dort aushelfen. Max steht nun vor der Entscheidung seine Materialien zu verkaufen oder aber die restlichen Regale und Schränke zu fertigen. Helft Max herauszufinden, für welche Preise er seine Materialien verkaufen müsste, damit es sich für ihn lohnt, direkt bei seiner Mutter anzufangen.

$$
\begin{aligned}
\max z_P = \quad & 100x_1 + 150x_2 & & \\
\text{s.t.} \quad & 10x_1 + 16x_2 & \leq 100 & \quad (1) \\
& 120x_1 + 60x_2 & \leq 1000 & \quad (2) \\
& x_1 + x_2 & \leq 5 & \quad (3) \\
& x_{1,2} & \geq 0 &
\end{aligned}
$$

(1) Was ist der Wert eines Brettes?

(2) Was ist der Wert eines Nagels?

(3) Was ist der Wert einer Dose Lack?

Mit einem Regal verdient Max 100 Euro. Für ein Regal benötigt er

- 10 Bretter (u_1),
- 120 Nägel (u_2),
- 1 Dose Lack (u_3).

(4) Zusammen muss er also 10 Bretter, 120 Nägel und eine Dose Lack für mindestens 100 Euro verkaufen.

Mit einem Schrank verdient er 150 Euro. Für einen Schrank benötigt er

- 16 Bretter (u_1),
- 60 Nägel (u_2),
- 1 Dose Lack (u_3).

(5) Zusammen muss er also 16 Bretter, 60 Nägel und eine Dose Lack für mindestens 150 Euro verkaufen.

$$10u_1 + 120u_2 + u_3 \geq 100 \tag{4}$$

$$16u_1 + 60u_2 + u_3 \geq 150 \tag{5}$$

Dualität – Einführendes Beispiel

Da Max die notwendigen Minimalerlöse für seine Materialien ermitteln möchte, handelt es sich um ein Minimierungsproblem. Der Gesamtwert ergibt sich aus den Lagerbeständen und dem jeweiligen Preis, der natürlich positiv sein muss (Nichtnegativitätsbedingung). Daraus ergibt sich ein neues Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \min z_D = \quad & 100u_1 + 1000u_2 + 5u_3 & & \\ \text{s.t.} \quad & 10u_1 + 120u_2 + u_3 & \geq 100 & \quad (4) \\ & 16u_1 + 60u_2 + u_3 & \geq 150 & \quad (5) \\ & u_{1,2,3} & \geq 0 & \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Problems ergibt den selben Zielfunktionswert wie das Ausgangsproblem.

Betrachten wir das folgende lineare Programm:

$$
\begin{array}{rllr}
\max z_P = & 10x_1 + 20x_2 & & \\
\text{s.t.} & 1x_1 + 1x_2 & \leq 100 & (1) \\
 & 6x_1 + 9x_2 & \leq 720 & (2) \\
 & x_2 & \leq 60 & (3) \\
 & x_{1,2} & \geq 0 &
\end{array}
$$

Aus den Nebenbedingungen lassen sich obere Schranken für den Zielfunktionswert herleiten:

(1) $z_P(x_1, x_2) = 10x_1 + 20x_2 \leq 20x_1 + 20x_2 \leq 2000$

(2) $z_P(x_1, x_2) = 10x_1 + 20x_2 \leq \frac{40}{3}x_1 + 20x_2 \leq 1600$

Betrachten wir das folgende lineare Programm:

$$
\begin{array}{rlll}
\max z_P = & 10x_1 + 20x_2 & & \\
\text{s.t.} & 1x_1 + 1x_2 & \leq 100 & (1) \\
& 6x_1 + 9x_2 & \leq 720 & (2) \\
& x_2 & \leq 60 & (3) \\
& x_{1,2} & \geq 0 &
\end{array}
$$

Ebenso lassen sich Linearkombinationen der Nebenbedingungen verwenden:
$z_P(x_1, x_2) = 10x_1 + 20x_2 \leq u_1(x_1 + x_2) + u_2(6x_1 + 9x_2) + u_3(x_2) \leq u_1 \cdot 100 + u_2 \cdot 720 + u_3 \cdot 60$ mit
$u_1 + 6u_2 + 0u_3 \geq 10$
$u_1 + 9u_2 + u_3 \geq 20$
Da Ungleichungen addiert, aber nicht subtrahiert werden dürfen gilt: $u_{1,2,3} \geq 0$.

Dualität

Ebenso lassen sich Linearkombinationen der Nebenbedingungen verwenden:
$z_P(x_1, x_2) = 10x_1 + 20x_2 \leq u_1(x_1 + x_2) + u_2(6x_1 + 9x_2) + u_3(x_2) \leq u_1 \cdot 100 + u_2 \cdot 720 + u_3 \cdot 60$ mit
$u_1 + 6u_2 + 0u_3 \geq 10$
$u_1 + 9u_2 + u_3 \geq 20$

Für jede nichtnegative Linearkombination ergibt sich eine obere Schranke für z_P. Also ist $z_P \leq z_D$:

$$\begin{array}{rlll} \min z_D = & 100u_1 + 720u_2 + 60u_3 & & \\ \text{s.t.} & 1u_1 + 6u_2 + 0u_3 & \geq 10 & (1) \\ & 1u_1 + 9u_2 + 1u_3 & \geq 20 & (2) \\ & u_{1,2,3} & \geq 0 & \end{array}$$

$\min z_D$ heißt das zu $\max z_P$ duale Problem.

Definition

Sei folgendes Maximierungsproblem gegeben:

$$\begin{aligned} \max z_P = \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Dann heißt das folgende Problem dazu das **duale Problem**:

$$\begin{aligned} \min z_D = \quad & b^T u \\ \text{s.t.} \quad & A^T u = c \\ & u \geq 0 \end{aligned}$$

Satz

Einschließungssatz/schwache Dualität:
Sei P ein Maximierungsproblem mit der zulässigen Lösung $(x_1, \ldots, x_k)$ und sei D das duale (Minimierungs-)Problem von P mit der zulässigen Lösung $(u_1, \ldots, u_n)$. Dann gilt $z_P(x_1, \ldots, x_k) \leq z_D(u_1, \ldots, u_n)$.

Beweis

$$\begin{aligned}
& z_P(x_1, \ldots, x_k) \\
={}& c_1 x_1 + \ldots + c_k x_k \\
\leq{}& (a_{11} u_1 + a_{21} u_2 + \ldots + a_{n1} u_n) x_1 + \ldots + (a_{1k} u_1 + a_{2k} u_2 + \ldots + a_{nk} u_n) x_k \\
={}& (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1k} u_1 + \ldots + (a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{kn} x_k) u_n \\
\leq{}& b_1 u_1 + \ldots + b_n u_n \\
={}& z_D(u_1, \ldots, u_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max z_P = \quad & 10x_1 + 20x_2 & & \\ \text{s.t.} \quad & 1x_1 + 1x_2 & \leq 100 & \quad (1) \\ & 6x_1 + 9x_2 & \leq 720 & \quad (2) \\ & x_2 & \leq 60 & \quad (3) \\ & x_{1,2} & \geq 0 & \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1	1	1	0	0	100
x_4	6	9	0	1	0	720
x_5	0	1	0	0	1	60
z_P	-10	-20	0	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1	0	1	0	-1	40
x_4	6	0	0	1	-9	180
x_2	0	1	0	0	1	60
z_P	-10	0	0	0	20	1200

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	0	0	1	$-1/6$	$1/2$	10
x_1	1	0	0	$1/6$	$9/6$	30
x_2	0	1	0	0	1	60
z_P	0	0	0	$5/3$	5	1500

$$
\begin{aligned}
\min z_D = \quad & 100u_1 + 720u_2 + 60u_3 & & \\
\text{s.t.} \quad & 1u_1 + 6u_2 + 0u_3 & \geq 10 & \quad (1) \\
& 1u_1 + 9u_2 + 1u_3 & \geq 20 & \quad (2) \\
& u_{1,2,3} & \geq 0 &
\end{aligned}
$$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	b_i
u_4	-1	-6	0	1	0	-10
u_5	-1	-9	-1	0	1	-20
$-z_D$	100	720	60	0	0	0

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	b_i
u_4	-1	-6	0	1	0	-10
u_3	1	9	1	0	-1	20
$-z_D$	40	180	0	0	60	-1200

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	b_i
u_2	$1/6$	1	0	$-1/6$	0	$5/3$
u_3	$-1/2$	0	1	$3/2$	-1	5
$-z_D$	10	0	0	30	60	-1500

Dualität

Die Lösung des dualen Problems kann am finalen Simplextableau des primalen Problems abgelesen werden:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	0	0	1	$-1/6$	$1/2$	10
x_1	1	0	0	$1/6$	$9/6$	30
x_2	0	1	0	0	1	60
z_P	0	0	0	$5/3$	5	1500

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	b_i
u_2	$1/6$	1	0	$-1/6$	0	$5/3$
u_3	$-1/2$	0	1	$3/2$	-1	5
$-z_D$	10	0	0	30	60	-1500

Satz

Starke Dualität: Hat das primale Problem P eine optimale Lösung x^*, so besitzt das zugehörige duale Problem D eine optimale Lösung u^* und es gilt $z_P(x^*) = z_D(u^*)$. Die optimale Lösung des dualen Problems kann in der Zielfunktionszeile des finalen Simplextableaus des primalen Problems abgelesen werden.

$$
\begin{aligned}
\max z_P = \quad & 10x_1 + 20x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 1x_1 + 1x_2 \leq 100 && (1)\\
& 6x_1 + 9x_2 \leq 720 && (2)\\
& x_2 \leq 60 && (3)\\
& x_{1,2} \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min z_D = \quad & 100u_1 + 720u_2 + 60u_3 \\
\text{s.t.} \quad & 1u_1 + 6u_2 + 0u_3 \geq 10 && (1)\\
& 1u_1 + 9u_2 + 1u_3 \geq 20 && (2)\\
& u_{1,2,3} \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\qquad
\boxed{\begin{aligned} u_1 x_3 &= 0 \\ u_2 x_4 &= 0 \\ u_3 x_5 &= 0 \end{aligned}}
\qquad
\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{3} \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\max z_P = \quad & 10x_1 + 20x_2 & & \\
\text{s.t.} \quad & 1x_1 + 1x_2 & \leq 100 & \quad (1)\\
& 6x_1 + 9x_2 & \leq 720 & \quad (2)\\
& x_2 & \leq 60 & \quad (3)\\
& x_{1,2} & \geq 0 &
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min z_D = \quad & 100u_1 + 720u_2 + 60u_3 & & \\
\text{s.t.} \quad & 1u_1 + 6u_2 + 0u_3 & \geq 10 & \quad (1)\\
& 1u_1 + 9u_2 + 1u_3 & \geq 20 & \quad (2)\\
& u_{1,2,3} & \geq 0 &
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\qquad
\boxed{\begin{aligned} u_4 x_1 &= 0 \\ u_5 x_2 &= 0 \end{aligned}}
\qquad
\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{3} \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

补充的滑动

设x和u是原始问题P和对偶问题D的解（带有滑动变量）。设n是约束条件的数量，n-i是P的结构变量的数量。

Satz

Seien x und u Lösungen des primalen und dualen Problems P und D (mit Schlupfvariablen). Sei n die Anzahl der Nebenbedingungen und $n-i$ die Anzahl der Strukturvariablen von P.

Dann gilt:

Ist $u_i > 0$ für ein $1 \le i \le n$, so folgt $x_{p+i} = 0$.

Ist $x_j > 0$ für ein $1 \le j \le p$, so folgt $u_{n+j} = 0$.

- 变量 → 滑动
  - ▷ 如果第j个原始变量为正，则在对偶问题的第j个约束条件中没有滑动。
  - ▷ 如果第i个对偶变量为正，则在原始问题的第i个约束条件中没有滑动。
- 滑动 → 变量
  - ▷ 如果对偶问题的第j个约束条件的滑动大于零，则第j个原始变量的值为零。
  - ▷ 如果原始问题的第i个约束条件的滑动大于零，则第i个对偶变量的值为零。

- Variable → Schlupf
  - Ist die j-te Primalvariable positiv, so gibt es in der j-ten Nebenbedingung des dualen Problems keinen Schlupf.
  - Ist die i-te Dualvariable positiv, so gibt es in der i-ten Nebenbedingung des primalen Problems keinen Schlupf.
- Schlupf → Variable
  - Ist der Schlupf der j-ten Nebenbedingung des dualen Problems größer null, so ist der Wert der j-ten Primalvariable gleich null.
  - Ist der Schlupf der i-ten Nebenbedingung des primalen Problems größer null, so ist der Wert der i-ten Dualvariable gleich null.

Dualität – Zusammenhänge

Maximierungsproblem	Minimierungsproblem
Zielfunktion	Zielfunktion
$\max F_{Max}(x)$	$\min F_{Min}(u)$
Nebenbedingungen	Variablen
i-te NB: $\leq$	$u_i \geq 0$
i-te NB: $\geq$	$u_i \leq 0$
i-te NB: $=$	$u_i \in \mathbb{R}$
Variablen	Nebenbedingungen
$x_j \geq 0$	j-te NB: $\geq$
$x_j \leq 0$	j-te NB: $\leq$
$x_j \in \mathbb{R}$	j-te NB: =

Satz

Ist das primale Problem P unbeschränkt, so besitzt das duale Problem D keine zulässige Lösung. Ist D unbeschränkt, so besitzt P keine zulässige Lösung.
Achtung: Der Umkehrsatz ist notwendig, aber nicht hinreichend!

duales Problem / primales Problem	unbeschränkt	keine Lösung
unbeschränkt	$\times$	$\checkmark$
keine Lösung	$\checkmark$	$\checkmark$

对偶关系
定理
如果原始问题P是无界的，则对偶问题D没有可行解。如果D是无界的，则P没有可行解。
注意：逆定理是必要的，但不是充分的！

Duale Zusammenhänge

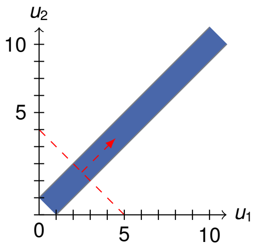
Primales Problem ist unbeschränkt

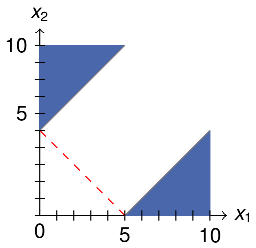
$$\begin{aligned} \min z_D = \quad & -5u_1 - 5u_2 \\ \text{s.t.} \quad & -1u_1 + 1u_2 \geq 1 \\ & 1u_1 - 1u_2 \geq 1 \\ & u_{1,2} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

Duales Problem besitzt keine Lösung

$$\begin{aligned} \max z_P = \quad & 1x_1 + 1x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -1x_1 + 1x_2 \leq -5 \\ & 1x_1 - 1x_2 \leq -5 \\ & x_{1,2} \geq 0 \end{aligned}$$





Duale Zusammenhänge

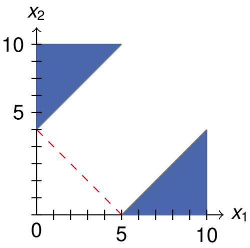
Primales Problem besitzt keine Lösung

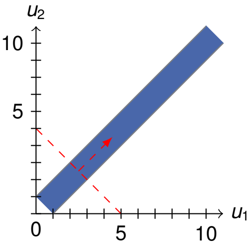
$$\begin{array}{rrl} \max z_P = & 1x_1 + 1x_2 & \\ \text{s.t.} & -1x_1 + 1x_2 & \leq -5 \\ & 1x_1 - 1x_2 & \leq -5 \\ & x_{1,2} & \geq 0 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

Duales Problem ist unbeschränkt (Variante 1)

$$\begin{array}{rrl} \min z_D = & -5u_1 - 5u_2 & \\ \text{s.t.} & -1u_1 + 1u_2 & \geq 1 \\ & 1u_1 - 1u_2 & \geq 1 \\ & u_{1,2} & \geq 0 \end{array}$$

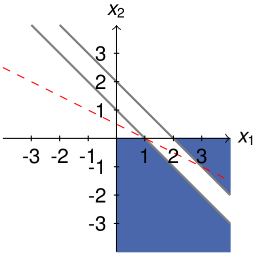




Duale Zusammenhänge

Primales Problem besitzt keine Lösung

$$\begin{aligned} \max z_P = \quad & 1x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 1x_1 + 1x_2 \geq 2 \\ & 1x_1 + 1x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \leq 0 \end{aligned}$$



$$\Downarrow$$

Duales Problem besitzt keine Lösung (Variante 2)

$$\begin{aligned} \min z_D = \quad & 2u_1 + 1u_2 \\ \text{s.t.} \quad & 1u_1 + 1u_2 \leq 1 \\ & u_1 + 1u_2 \geq 2 \\ & u_1 \geq 0 \\ & u_2 \leq 0 \end{aligned}$$