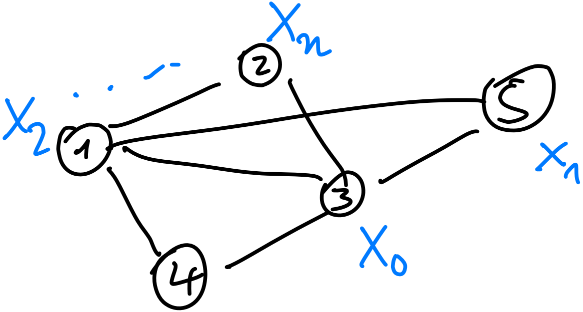
13. Vorlesung: Markov-Ketten

Nikolas Tapia

03. Juni 2024, Stochastik für Informatik(er)



Markovkette

Definition 13.1

Sei S eine Menge. Eine **Markovkette** auf S ist eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Werten in S, sodass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $s_0, \dots, s_n \in S$ gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = s_{n+1} \mid X_0 = s_0, \dots, X_n = s_n) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = s_{n+1} \mid X_n = s_n) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = s_{n+1} \mid X_0 = s_n).\end{aligned}$$

Die Menge S heißt **Zustandsraum** der Markovkette, ein Element $s \in S$ heißt **Zustand**.

$$\mathbb{P}\Big(X_t = x \,\Big|\, (X_u = y)_{u \le t}\Big) \qquad t > s.$$

Irrfahrt.

Beispiel

$S = \mathbb{Z}$.

X_n

$$\begin{tikzcd} k-1 & k \in \mathbb{Z} \arrow[l, bend right, "1/2"'] \arrow[r, bend left, "1/2"] & k+1 \end{tikzcd}$$

symmetrisch

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k+1 \mid X_n = k) = \mathbb{P}(X_{n+1} = k-1 \mid X_n = k) = 1/2$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$.

<u>Asymmetrische</u>:

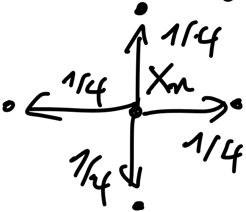
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k+1 \mid X_n = k) = p = 1 - \mathbb{P}(X_{n+1} = k-1 \mid X_n = k)$$

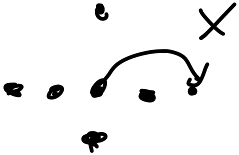
2D Irrfahrt.

Beispiel

$S = \mathbb{Z}^2$

Symmetrische





Im allg.: $S = \mathbb{Z}^d$

Nachbarn

$$P_{xy} = \begin{cases} \frac{1}{2d} & \text{falls } x \sim y \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel

Darstellung (Irrfahrt).

$$X_n := X_0 + Y_1 + \dots + Y_{n-1}$$

↑ Direktion

1-D: $Y_k \sim \text{Gleich}(-1,1) \Rightarrow$

$$\mathbb{P}(Y_k = 1) = \mathbb{P}(Y_k = -1) = 1/2$$

Zentraler Grenzwertsatz

$$X_n \overset{n\to\infty}{\approx} n\,\mathbb{E}[Y_1] + \sqrt{n}\,\sigma^2 Z, \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Beispiel

$$X_n = X_0 + Y_1 + \dots + Y_{n-1}$$

Bernoulli(1/2)

$$\mathbb{E}[Y_1] = \frac{1}{2} \times (-1) + \frac{1}{2} \times 1 = 0 \qquad Y_1 = 2B - 1$$

$$\mathbb{V}ar(Y_1) = \mathbb{V}ar(2B-1)$$
$$= 4\,\mathbb{V}(B) = 4 \times \frac{1}{4} = 1.$$

$$X_n \approx \sqrt{n}\, Z, \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

d-Dim:

$$X_n \sim n^{d/2} Z$$

$$Z \sim N(\vec{0}, I_{d \times d}).$$

Graph

Definition 13.2

Ein Graph besteht aus einer Menge V von **Knoten**, einer Teilmenge $E \subseteq \binom{V}{2}$ von **Kanten**, wobei

$$\binom{V}{2} := \{e = \{v, w\} : v, w \in V\} .$$

Die Knoten $u, v \in V$ heißen **nachbar**, wenn $\{u, v\} \in E$.
Für jeden Knoten $u \in V$, sei $N_u := \{v : \{u, v\} \in E\}$.

$P(u,v)$, $v \in N_u$.

Übergangsmatrix

Definition 13.3

Sei $S = \{1, \dots, K\}$ ein endlicher Zustandsraum. Die **Übergangsmatrix** P einer Markovkette auf S ist die Matrix

$$P := \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{K1} & \cdots & p_{KK} \end{pmatrix},$$

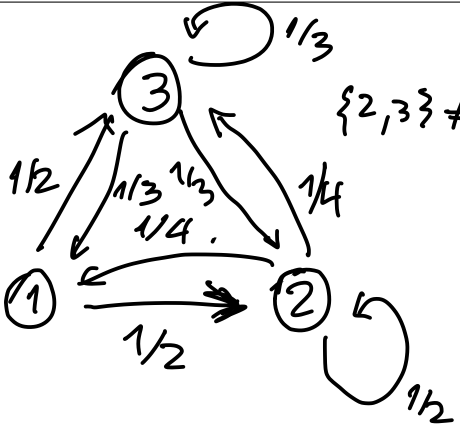
wobei die $p_{a,b}$, $a, b \in S$ die jeweiligen Übergangswahrscheinlichkeiten sind:

$$p_{a,b} := \mathbb{P}(X_1 = b \mid X_0 = a).$$

Übergangsgraph

$S = \{1, 2, 3\}$,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \iff$$



$\{2,3\} \neq \{3,2\}$

Stochastische Matrix

Definition 13.4

Eine Matrix $P = (p_{a,b})_{a,b \in S}$ heißt **stochastisch**, wenn

1. $0 \leq p_{a,b} \leq 1$ für alle $a, b \in S$,
2. $\sum_{b \in S} p_{a,b} = 1$ für alle $a \in S$.

Aussage 13.1

Sei P die Übergangsmatrix einer Markovkette auf einem endlichen Zustandsraum S. Dann ist P stochastisch.

Theorem 1

Zu jeder stochastischen Matrix P existiert es eine Markovkette mit Übergangsmatrix P.

Mehrstüfige Übergangswahrscheinlichkeiten

Aussage 13.2

Sei P eine stochastische Matrix. Dann ist die Potenz P^n ebenfalls stochastisch.

Theorem 2

Sei P die Übergangsmatrix einer Markovkette auf einem endlichen Zustandsraum S. Dann sind die Einträge von $P^n = (p_{a,b}^{(n)})_{a,b \in S}$ die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{a,b}^{(n)} := \mathbb{P}(X_n = b \mid X_0 = a).$$

Definition 13.5

Sei X eine Markovkette mit endlichem Zustandsraum $S = \{1, \dots, K\}$. Der Spalten-Vektor $\nu := (\mathbb{P}(X_0 = 1), \dots, \mathbb{P}(X_0 = K))$ heißt die **Startverteilung** von X.

Theorem 3

Sei X eine Markovkette mit Übergangsmatrix P und Startverteilung ν auf einem endlichen Zustandsraum S. Dann ist die Verteilung von X_n gegeben durch

$$\mathbb{P}(X_n = b) = (\nu P^n)_b = \sum_{a \in S} \mathbb{P}(X_0 = a) p^{(n)}_{a,b}.$$

$b = 0$

Bei Irrfahrt: $P \left[\begin{matrix} \cdots \ \tfrac{1}{2} \ 0 \ \tfrac{1}{2} \ 0 \cdots \\ \\ \end{matrix} , \right] = (\dots 0, \dots, 1, 0, \dots)$

Definition 13.5

Sei X eine Markovkette mit endlichem Zustandsraum $S = \{1, \ldots, K\}$. Der Spalten-Vektor $\nu := (\mathbb{P}(X_0 = 1), \ldots, \mathbb{P}(X_0 = K))$ heißt die **Startverteilung** von X.

Theorem 3

Sei X eine Markovkette mit Übergangsmatrix P und Startverteilung ν auf einem endlichen Zustandsraum S. Dann ist die Verteilung von X_n gegeben durch

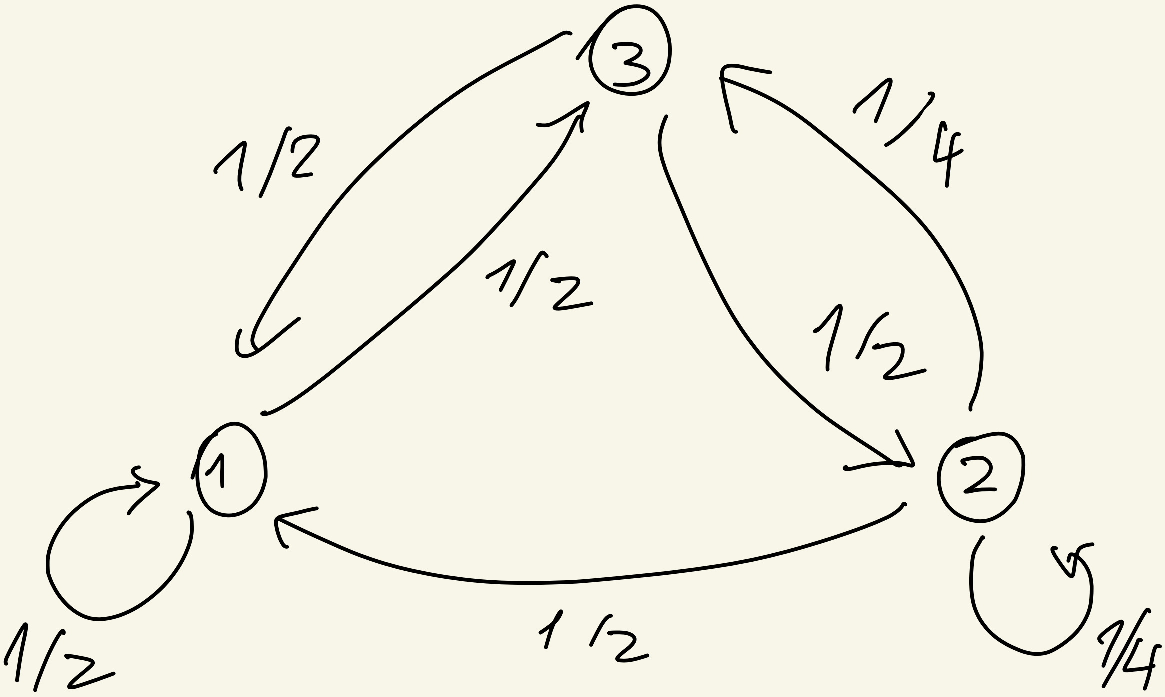
$$\mathbb{P}(X_n = b) = \nu^T P^n = \sum_{a \in S} \mathbb{P}(X_0 = a) p_{a,b}^{(n)}.$$

P stochastisch $\Rightarrow$ ist νP stochastisch
ν 〃

Leibniz Gemeinschaft

$S = \{1, 2, 3\}$

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \nu = \left(1/2,\ 0,\ 1/2\right)$$



$$\mathbb{P}(X_3 = \cdot) = \nu P^3$$

$$P^3 = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/16 & 5/16 \\ 1/2 & 13/64 & 19/64 \\ 1/2 & 7/32 & 9/32 \end{bmatrix}$$

$$\nu P^3 = \left(1/2 \quad 13/64 \quad 19/64\right)$$

Das heißt:

$$\mathbb{P}_\nu(X_3 = 1) = 1/2$$

$$\mathbb{P}_\nu(X_3 = 2) = 13/64$$

$$\mathbb{P}_\nu(X_3 = 3) = 19/64$$

Invariante Verteilungen

Definition 13.6

Sei X eine Markov-Kette mit Übergangsmatrix P und Zustandsraum S.
Ein Vektor $\pi = (\pi_a)_{a \in S}$ heißt **invariante Verteilung** von X, falls

1. $\pi_a \geq 0$ für alle $a \in S$,
2. $\sum_{a \in S} \pi_a = 1$,
3. $\pi^\top P = \pi^\top$, d.h.

$$(\pi^T P)_b = \mathbb{P}_\pi(X_1 = b) = \pi_b$$

$$\pi_a = \sum_{b \in S} \pi_b P_{ba}$$

für alle $a \in S$.

gilt.

$$\Rightarrow \quad \pi^T P^n = \pi^T$$

Eigenschaften

Aussage 13.3

Falls π eine stationäre Verteilung für X ist, und $\mathbb{P}(X_0 = a) = \pi_a$ für alle $a \in S$ gilt, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a \in S$:

$$\mathbb{P}(X_n = a) = \pi_a.$$

Existenz

Theorem 4

Eine Markovkette auf einem *endlichen* Zustandsraum S besitzt mindestens eine invariante Verteilung.
Invariante Verteilungen sind Lösungen des Gleichungssystems

$$\pi_a = \sum_{b \in S} \pi_b P_{ba}, \quad a \in S,$$

$$\sum_{a \in S} \pi_a = 1.$$