TU Berlin - Institut für Mathematik
Sommersemester 2024
Dozent: Dr. Nikolas Tapia
Assistentin: M.Sc. Claudia Drygala

Stochastik für Informatik(er) – Übung 1

Abgabe bis Freitag, den 03.05.2024 um 23:59

Hinweise zur Bearbeitung des Übungsblattes:

- Das Übungsblatt enthält Haus- und Tutoriumsaufgaben.
- Die Tutoriumsaufgaben werden in den Tutorien der KW 17 besprochen (22.04.-26.04.).
- Die Abgabe der Hausaufgaben erfolgt über ISIS in festen Gruppen von 2-3 Personen. Die Gruppen bilden sich aus Studierenden, die das gleiche Tutorium besuchen. Laden Sie Ihre handschriftlichen Lösungen (z.B. Scan Ihrer Lösungen oder Erstellung Ihrer Lösungen über Tablet) als eine PDF-Datei bei dem enstprechenden Übungsblatt hoch. LaTeX-Abgaben sind auch willkommen (in diesem Fall die kompilierte PDF)! Achten Sie darauf, dass die Abgaben gut lesbar und verständlich verfasst sind. Bitte Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe auf der Abgabe mit angeben!

Tutoriumsaufgaben

Tutoriumsaufgabe 1.1

Sei eine Urne mit 9 Kugeln gegeben, welche von 1 bis 9 nummeriert sind. Es wird zufällig eine Kugel gezogen. Sei Ω die Menge aller möglichen Ergebnisse. Seien nun die folgenden Ereignisse als Teilmenge von Ω definiert:

- $A = \{\text{Ergebnis ist mindestens } 4\}$, $= \{4,5,6,7,8,9\}$
- $B = \{\text{Ergebnis ist höchstens } 8\}$, $= \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$
- $C = \{\text{Ergebnis ist gerade}\}$; $= \{2,4,6,8\}$

Durch Mengenoperationen können wir neue Ereignisse beschreiben. Geben Sie die folgenden Ereignisse durch Auflisten ihrer Elemente an:

(i) $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

(ii) $A \cap B = \{4,5,6,7,8\}$

(iii) $B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

(iv) $\underbrace{(A^c \cup B^c)}_{(A \cap B)^c} \cap C = (\{1,2,3\} \cup \{9\}) \cap C = \{1,2,3,9\} \cap \{2,4,6,8\}$
$= \{2\}$

Tutoriumsaufgabe 1.2

Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, d.h. es gelten

- $\mathbb{P}(A) \geq 0$ für alle $A \subseteq \Omega$, (*Positivität*)
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ für $A, B \subseteq \Omega$ mit $A \cap B = \emptyset$ (*Additivität*).

i) $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}[A \cap (\Omega - B)] = \mathbb{P}[A \cap \Omega] - \mathbb{P}[A \cap B]$
$= \mathbb{P}[A] - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$ (da $B \subseteq A$)

ii) a) $\mathbb{P}(A) \geq 0$ gilt für Positivität b) $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$
$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) \leq 1$

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$ falls $B \subseteq A \subseteq \Omega$,

(ii) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ für alle $A \subseteq \Omega$ und $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,

(iii) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ für $A, B \subseteq \Omega$,

iii) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A)$
$= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}[A \cap \Omega] - \mathbb{P}[A \cap B] + \mathbb{P}(B \cap \Omega)$
$- \mathbb{P}[A \cap B]$
$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

iii) $\mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

$\mathbb{P}[(A \cup B) \setminus A] = \mathbb{P}[B \setminus (A \cap B)]$

Tutoriumsaufgabe 1.3

Wir betrachten das Experiment, das aus dem Werfen zweier fairer, unterscheidbarer Würfel besteht.

$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3) \cdots (2,1) \cdots (6,6)\} = \{1, \dots 6\} \times \{1, \dots, 6\}$

(i) Geben Sie einen möglichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ an.

$= \{(i,j) \mid i,j \in \{1, \dots, 6\}\}$

$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = |A|/36$

(ii) Beschreiben Sie die folgenden Ereignisse durch Teilmengen von Ω und bestimmen Sie ihre Wahrscheinlichkeiten:

$\{X_1 + X_2 \geq 9\} = \bigcup_{i=1}^{6} \{X_1 + X_2 \geq 9\} \cap \{X_2 = i\}$

$A = \{(3,6), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,6)\}$

$\sum \mathbb{P}(\{X_1 + X_2 \geq 9\} \cap \{X_2 = i\}) = \sum \mathbb{P}\{X_1 + X_2 \geq 9\} \cdot \mathbb{P}\{X_2 = i\}$
$= \frac{1}{6}(\mathbb{P}(\{X_1 \geq 6\}) + \mathbb{P}(\{X_1 \geq 5\}) + \mathbb{P}(\{X_1 \geq 4\}) + \mathbb{P}(X_1 \geq 3)$
$= \frac{1}{6}(\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6}) = \frac{10}{36}$

a) Die Augensumme ist größer oder gleich 9. $\mathbb{P}(A) = 10/36$

$B = \{(1,2), (1,4), (1,6), (2,1), (2,3) \cdots\}$

b) Die Augensumme ist ungerade.

$\mathbb{P}(B) = \frac{18}{36} = 1/2$

$= \mathbb{P}(\{X_1 \text{ ungerade}\} \cap \{X_2 \text{ gerade}\})$
$+ \mathbb{P}(\{X_1 \text{ gerade}\} \cap \{X_2 \text{ ungerade}\})$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$
$= 1/2$

Sei X_i das Ergebnis Wurf i, für $i = 1,2$

c) Die Augenzahlen beider Würfel sind gerade.

$\mathbb{P}(\text{Beide Würfe gerade}) = \mathbb{P}(\{X_1 \text{ gerade}\} \cap \{X_2 \text{ gerade}\})$
$= \mathbb{P}(\{X_1 \text{ gerade}\}) \cdot \mathbb{P}\{X_2 \text{ gerade}\})$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$C = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6) \cdots\}$

$\mathbb{P}(C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

Tutoriumsaufgabe 1.4

Wir betrachten die Geburtstage von $N > 1$ zufällig ausgewählten Schülern in einer Klasse. Wir nehmen an, dass die Wahrscheinlichkeiten, an einem der $\{1, \cdots, 365\}$ Tage des Jahres Geburtstag zu haben, gleichverteilt sind. Wir möchten die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis berechnen, dass mindestens zwei verschiedene Schüler haben am gleichen Tag Geburtstag haben. Das Ereignis bezeichnen wir als A.

(i) Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ an, um die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A)$ für $A \subset \Omega$ zu formulieren.

(ii) Berechnen Sie $\mathbb{P}(A)$ durch die Rechnung von $\mathbb{P}(A^c)$. Für welchen Wert von N ist diese Wahrscheinlichkeit größer als $\frac{1}{2}$? Dieser Wert ist kleiner, als man denken könnte! Das nennt sich auch das *Geburtstags-Paradoxon*.

(i) $\Omega = \{(\overbrace{1, 1, \cdots}^{N}), (1, \cdots, 2) \cdots (365, 365, 365, \cdots 365)\}$

1. Falls $N > 365$, $\mathbb{P}(A) = 1$

2. Falls $N \leq 365$, $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots (365 - N + 1)}{365^N}$

$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{365!}{(365 - N)!}$

Hausaufgaben

Hausaufgabe 1.1 (4=0.5+0.5+0.5+0.5+1+1 Punkte)

Sie haben einen Fahrsimulator gebaut, welcher 3 Monitore besitzt. Auf einem Event für künstliche Intelligenz im autonomen Fahren dürfen Sie den Fahrsimulator vorstellen und hoffen dabei, dass die Präsentation erfolgreich verläuft. Ihre größte Sorge ist, dass einer oder mehrere der Monitore ausfallen könnten. Sei $A_j,\ j \in \{1, 2, 3\}$ das Ereignis, dass der Monitor j am Tag der Präsentation defekt ist. Drücken Sie die möglichen nachfolgenden Ereignisse durch A_1, A_2, A_3 mithilfe von Mengenoperationen aus:

(i) mindestens ein Monitor ist defekt

(ii) kein Monitor ist defekt

(iii) höchstens ein Monitor ist defekt

(iv) mindestens ein Monitor ist nicht defekt

(v) genau ein Monitor ist defekt

(vi) genau zwei Monitore sind defekt

Hausaufgabe 1.2 (6=2+2+2 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen für einen endlichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$:

(i) Seien $A, B, C \subseteq \Omega$ drei Ereignisse. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

(ii) Seien A und B zwei Ereignisse, für die gilt: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A^c \cap B^c)$.

(iii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(C \cap A) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - 1$ für $A, B, C \subseteq \Omega$. In welchem Fall liegt die Identität vor, d.h. wann gilt die Gleichheit ("=")?

Hausaufgabe 1.3 (4=1+2+1 Punkte)

Bei einem Würfelspiel werden in jedem Durchgang drei faire Würfel geworfen und der Spieler gewinnt, wenn die Summe strikt größer als 10 ist.

(i) Geben Sie einen möglichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ an, um eine Spielrunde zu beschreiben wobei $\Omega = \{1, \dots, 6\}^3$. Formulieren Sie das Ereignis $A \subset \Omega$, dass der Spieler die Runde gewinnt.

(ii) Sei $g \colon \Omega \to \Omega$ eine bijektive Funktion, die definiert ist durch

$$g((\omega_1, \omega_2, \omega_3)) = (7 - \omega_1, 7 - \omega_2, 7 - \omega_3)\,.$$

Zeigen Sie, dass $g(A) = A^c$.

(iii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A)$.

Hausaufgabe 1.4 (6=1+2+3 Punkte)

Wir werfen gleichzeitig zwei faire n-seitige Würfel $n > 1$ und wollen die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $A \subset \Omega$ berechnen, dass der erste Würfel ein (strikt) höheres Ergebnis liefert als der zweite.

(i) Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ an, um die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A)$ für ein Ereignis $A \subset \Omega$ zu formulieren.

(ii) Berechnen Sie $\mathbb{P}(A)$.

Hinweis: Verwenden Sie die Partition (Zerlegung) $\Omega = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$, wobei

$$B_k = \{(i, j) \in \Omega \colon j = k\}$$

und schreiben Sie A als Vereinigung von disjunkten Ereignissen.

(iii) Verallgemeinern Sie die Ergebnisse, indem Sie zwei verschiedene Würfel betrachten: Der erste Würfel hat n Flächen und der zweite Würfel hat m Flächen, wobei $m > n$.