Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen
(Tutorium 4)

Vorlesungswoche: 13. – 17. Mai 2024 | Sommersemester 2024

Aufgabe 10

Wir betrachten die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$x''(t) - x(t) = 0.$$

(a) Schreibe die Differentialgleichung mittels der Hilfsfunktion $y(t) \coloneqq x'(t)$ in ein System 1. Ordnung um. Wie sieht die Matrixform des Systems aus?

(b) Zeige, dass $(x(t), y(t)) \coloneqq (\sinh(t), \cosh(t))$ und $(x(t), y(t)) \coloneqq (\cosh(t), \sinh(t))$ Lösungen des erhaltenen Systems sind.

(c) Zeige mittels der Differentialgleichung, dass die Gleichung

$$\cosh(\xi) = \sinh(\xi)$$

keine Lösung besitzt.

Aufgabe 11

(a) Löse das Anfangswertproblem

$$x'(t) + \mathrm{e}^t(1 + x^2(t)) = 0, \quad x(0) = 0$$

und gebe den maximalen Definitionsbereich der Lösung an.

(b) Gibt es Punkte (t_0, x_0), durch die keine Lösungskurve der Differentialgleichung

$$x'(t) + \mathrm{e}^t(1 + x^2(t)) = 0$$

geht? Das heißt, dass es keine Lösung $x(t)$ mit $x(t_0) = x_0$ gibt.

Aufgabe 12

Ermittele die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$t^2 x''(t) - 2x(t) = 0 \quad \text{mit} \quad t > 0.$$

Mache den Ansatz $x(t) = t^r$ mit $r \in \mathbb{R}$.

Umwandlung DGL höherer Ordnung

in DGL-System 1. Ordnung

① DGL in Normalform umstellen $x^{(n)}(t) = \dots$

② Substitution von $x(t)$ durch einen Vektor $\vec{y}(t)$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

③ Ableitung von $\vec{y}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ y_3(t) \\ \vdots \\ x^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

Rechte Seite DGL in NF (Normal Form) mit durch $\vec{y}$ ersetzen $x(t), x'(t), \dots$

Aufgabe 10

Wir betrachten die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$x''(t) - x(t) = 0.$$

(a) Schreibe die Differentialgleichung mittels der Hilfsfunktion $y(t) := x'(t)$ in ein System 1. Ordnung um. Wie sieht die Matrixform des Systems aus?

(b) Zeige, dass $(x(t), y(t)) := (\sinh(t), \cosh(t))$ und $(x(t), y(t)) := (\cosh(t), \sinh(t))$ Lösungen des erhaltenen Systems sind.

(c) Zeige mittels der Differentialgleichung, dass die Gleichung

$$\cosh(\xi) = \sinh(\xi)$$

keine Lösung besitzt.

a) ① $x''(t) = x(t)$ $(n=2)$

②

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \vec{y}$$

bis $n-1 = 1$

③ Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_2(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}\,'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\vec{y}(t)}_{= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}$$ ← DGL-System in 1. Ordnung

b) $\vec{y}_1(t) = \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix}$ $\quad \vec{y}_2(t) = \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \end{pmatrix}$ $\quad$ Lösung?

$$\vec{y}_1\,'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}_1(t) \Rightarrow \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{Y}_1$ löst das DGL-System

$$\vec{y}_2{}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}_2(t) \Rightarrow \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{y}_2$ löst das DGL-System

EES für DGL-System

Es sei ein AWP der Form $\vec{x}'(t) = A \cdot \vec{x} + \vec{b}(t)$, $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ gegeben.

Falls ① die Eintrag von Matrix A und $\vec{b}(t)$ stetig auf einem zusammenhängende Definitionsbereich D sind

② $t_0 \in D$

dann hat das AWP eine eindeutige auf D maximal fortgesetzt Lösung

c) hat $\cosh(\xi) = \sinh(\xi)$ eine Lösung $\xi_0 \in \mathbb{R}$?

Annahme: $\cosh(\xi_0) = \sinh(\xi_0) = A$

$\Rightarrow$ AWP: $\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}(t)$ $\quad \vec{y}_1(\xi_0) = \begin{pmatrix} \sinh(\xi_0) \\ \cosh(\xi_0) \end{pmatrix} = \vec{y}_2(\xi_0) = \begin{pmatrix} \cosh(\xi_0) \\ \sinh(\xi_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{y}(\xi_0) = \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}$ AW

EES: ① Einträge von Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sind auf $D = \mathbb{R}$ stetig

② $t_0 = \xi_0 \in D = \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Das AWP hat eine eindeutige Lsg. Wiederspruch zu (b), 2 Lösungen wurden gefunden

$\Rightarrow$ Annahme falsch

$\Rightarrow \sinh(\xi) = \cosh(\xi)$ hat keine Lsg

Aufgabe 11

(a) Löse das Anfangswertproblem

$$x'(t) + e^t(1 + x^2(t)) = 0, \quad x(0) = 0$$

und gebe den maximalen Definitionsbereich der Lösung an.

(b) Gibt es Punkte (t_0, x_0), durch die keine Lösungskurve der Differentialgleichung

$$x'(t) + e^t(1 + x^2(t)) = 0$$

geht? Das heißt, dass es keine Lösung $x(t)$ mit $x(t_0) = x_0$ gibt.

a) $x'(t) = \underbrace{-e^t}_{f(t)} \underbrace{(1 + x^2(t))}_{g(t)}$ ↳ Verkettung → nicht linear

① Konstante Lösungen: $g(x) = 1 + x^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm i \notin \mathbb{R}$

→ keine reelle Lösung gefunden

⑤ $\int \frac{1}{g(x)}\,dx = \int f(x)\,dt$

$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int -e^x\,dx$

$\arctan(x) = -e^x + c$

$e^x \neq \frac{1}{2}k\pi + 1$

$x(t) = \tan(-e^x + c)$ → Allgemeine Lösung

AW: $x(0) = \tan(-e^0 + c) = 0 \Rightarrow c - 1 = k\pi \Rightarrow c = k\pi + 1 \quad k \in \mathbb{Z}$

AWP-Lösung: $x(t) = \tan(-e^x + k\pi + 1) \quad k \in \mathbb{Z}$

Max. Definitionsbereich: ① $M_1 = \mathbb{R}$

② $\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi < -e^x + k\pi + 1 < \frac{\pi}{2} + k\pi$

$-\frac{\pi}{2} < -e^x + 1 < \frac{\pi}{2}$

$\underbrace{1 - \frac{\pi}{2}}_{>0} < e^x < 1 + \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow x < \ln(1 + \frac{\pi}{2})$

$M_2 =]-\infty, \ln(1+\frac{\pi}{2})[$

③ $M_1 \cap M_2 =]-\infty, \ln(1+\frac{\pi}{2})[$

④ $]-\infty, \ln(1+\frac{\pi}{2})[$

⑤ $0 \in]-\infty, \ln(1+\frac{\pi}{2})[$

$\Rightarrow D_{max} =]-\infty, \ln(1+\frac{\pi}{2})[$

(b) Gibt es Punkte (t_0, x_0), durch die keine Lösungskurve der Differentialgleichung

$$x'(t) + e^t(1 + x^2(t)) = 0$$

geht? Das heißt, dass es keine Lösung $x(t)$ mit $x(t_0) = x_0$ gibt.

b) AWP: $x'(t) = -e^t(1 + x^2(t)) = F(t, x)$

EES: ① $\frac{\partial F}{\partial x} = -e^t \cdot 2x \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = -e^t(1+x^2)$

$D = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \qquad F: D \to \mathbb{R} \quad \frac{\partial F}{\partial x}: D \to \mathbb{R} \quad \frac{\partial F}{\partial t}: D \to \mathbb{R}$

② D ist offen

③ $(t_0, x_0) \in D$

⇒ Das AWP hat eine eindeutige Lösung, unabhängig davon in welchem Punkt (t_0, x_0)

⇒ Es gibt keine Punkt (t_0, x_0) durch die keine Lösungskurve verläuft

Aufgabe 12

Ermittele die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$t^2 x''(t) - 2x(t) = 0 \quad \text{mit} \quad t > 0.$$

Mache den Ansatz $x(t) = t^r$ mit $r \in \mathbb{R}$.

Ansatz: $x(t) = t^r \qquad r \in \mathbb{R}$

$\frac{\partial}{\partial t} t^r = r\, t^{r-1}$

$\frac{\partial^2}{\partial t^2} t^r = r \cdot (r-1)\, t^{r-2}$

→ in DGL:

$$t^2 \cdot r(r-1) t^{r-2} - 2t^r = 0$$

$$r(r-1)t^r - 2t^r = 0$$

$$t^r \cdot \underbrace{(r^2 - r - 2)}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow (r-2)(r+1) = 0 \quad \Rightarrow r_1 = -1 \quad r_2 = 2$$

$$\Rightarrow x_1(t) = t^{-1} \qquad x_2(t) = t^2$$

FS?: - Lösungen ✓

- linear unabhängig ✓

→ Allgemeine Lösung: $x(t) = c_1 t^{-1} + c_2 t^2$