$$x'(t) = a(t)\,x(t) + b(t)$$

Separable Differentialgleichungen

Def Ein Anfangswertproblem heißt separabel, wenn es die Form

$$x'(t) = f(t)\, g(x(t)), \qquad x(t_0) = x_0$$

besitzt. Die Funktion f soll um t_0 und g um x_0 stetig sein.

Wir betrachten

$$\frac{x'(t)}{g(x(t))} = f(t)$$

wobei wir $g(x_0) \neq 0$ voraussetzen.
Ansonsten können wir $x(t) := x_0$ setzen und sind fertig.

$$\int_{t_0}^{t} f(\xi)\, d\xi = \int_{t_0}^{t} \frac{x'(\xi)}{g(x(\xi))}\, d\xi = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{g(\eta)}\, d\eta$$

Substitutionsregel

$$\int_{t_0}^{t} h(x(\xi)) \cdot x'(\xi)\, d\xi \underset{\eta = x(\xi)}{=} \int_{x(t_0)}^{x(t)} h(\eta)\, d\eta$$

$\longrightarrow$ Gleichung ohne Ableitung (+)

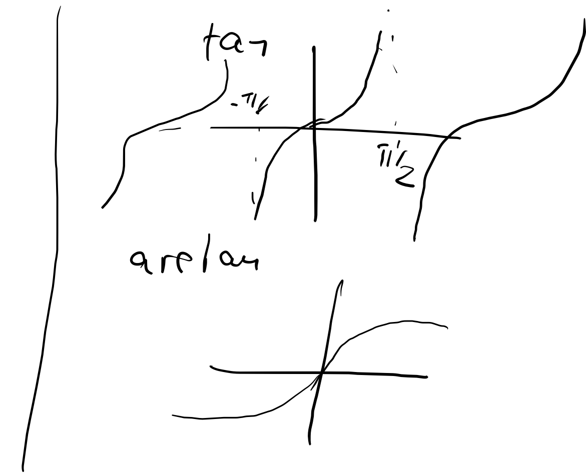
$\longrightarrow$ Dafür müssen wir Integrale ausrechnen (−)

$\longrightarrow$ Dieser Ansatz heißt „Trennung der Variablen“

Beispiel 5

$x'(t) = t \cdot (1 + x^2(t))$, $\qquad x(0) = 0$

$[\, f(t) = t, \quad g(x(t)) = 1 + x^2(t), \quad g(\eta) = 1 + \eta^2 \,]$



Trennung der Veränderlichen:

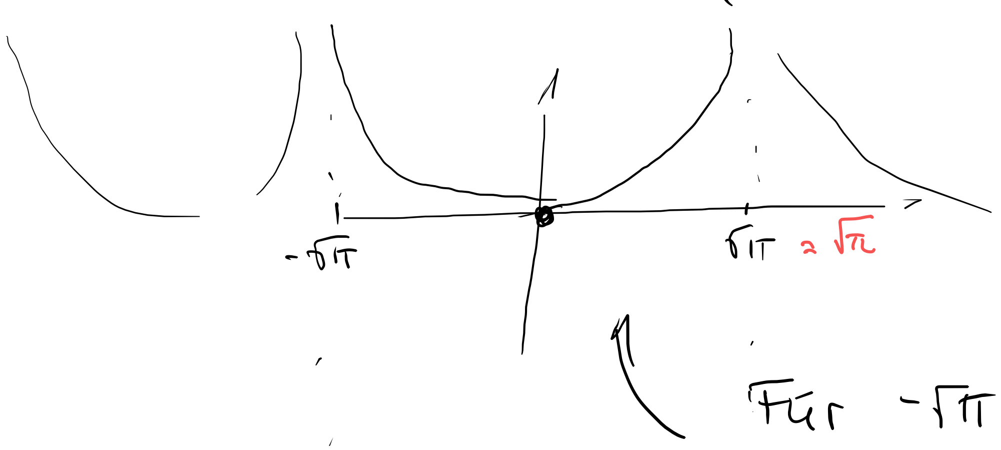
$$\int_0^t f(\xi)\, d\xi = \int_0^{x(t)} \frac{1}{g(\eta)}\, d\eta$$

$$\frac{1}{2} t^2 = \int_0^t \xi\, d\xi = \int_0^{x(t)} \frac{1}{1+\eta^2}\, d\eta = \arctan(x(t))$$

Stammfunktion $\frac{1}{2}\xi^2$

Stammfunktion arctan

$\Rightarrow \quad x(t) = \tan\left(\frac{1}{2} t^2\right)$ $\leftarrow$ Lösung mit Anfangswert $x(0) = 0$



Lösung nur auf $(-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ wohl definiert

maximaler Definitionsbereich

Für $-\sqrt{\pi}$ und $\sqrt{\pi}$ ist die Lösung nicht <u>definiert</u>

Fragen:

- Gibt es eine Lösung? (Existenz)
- Wie viele Lösungen gibt es? (Eindeutigkeit)
- Eigenschaften der Funktion.

1.3 Existenz und Eindeutigkeit

<u>Anwendungsbeispiel 8</u> (Newtonsche Bewegungsgleichung)

$\vec{x}(t)$ Position eines Massepunktes

m Masse

$\vec{F}(t, \vec{x}(t))$ Kraft, die auf den Punkt wirkt

$$m\,\vec{x}''(t) = \vec{F}(t, \vec{x}(t)) \longleftarrow \text{DG 2. Ordnung}$$

wir setzen $\vec{x}'(t) = \vec{v}(t)$

$$\Longrightarrow \left.\begin{aligned} m\,\vec{v}'(t) &= \vec{F}(t, \vec{x}(t)) \\ x'(t) &= \vec{v}(t) \end{aligned}\right\} \text{6-dimensionales System } \underline{\text{1. Ordnung}}$$

$$\overset{\text{Def}}{\Longrightarrow} \quad \vec{y}(t) := \begin{pmatrix} \vec{v}(t) \\ \vec{x}(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{g}(t, \vec{y}(t)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{m}\vec{F}(t, \vec{x}(t)) \\ \vec{v}(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \quad y'(t) = \vec{g}(t, \vec{y}(t))$$

$\longrightarrow$ Alle DG-Systeme höherer Ordnung lassen sich in Systeme 1. Ordnung umschreiben

$\longrightarrow$ $\vec{x}'(t) = \vec{g}(t, \vec{x}(t))$

$$\vec{x}\,'(t) = \vec{g}(t, \vec{x}(t)), \qquad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$$

Numerische Lösung

Angenommen $\vec{G}$ konstant.

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Lösung}} \quad x_i(t) = G_i t + C_i$$

$$x_i(t_0) = G_i t_0 + C_i \overset{!}{=} x_{0i}$$

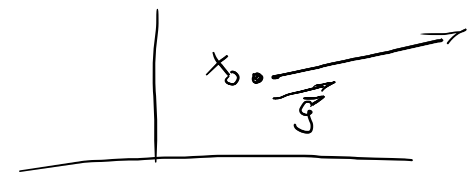
$$C_i = x_{0i} - G_i t_0$$

$$x_i(t) = G_i t + x_{0i} - G_i t_0$$

$$= x_{0i} + G_i (t - t_0)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x}(t) = \underbrace{\vec{x}_0 + (t - t_0)\,\vec{G}}_{\text{Streckenzug}}$$

Streckenzug



Wenn $\vec{G}$ nicht konstant ist, können wir zumindest die Lösung auf einem kleinen Zeitintervall durch einen Streckenzug approximieren.

wähle

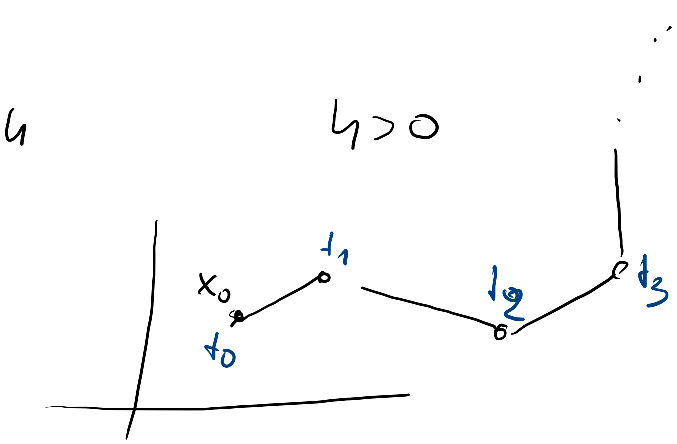
$$t_0 < t_1 = t_0 + h < t_2 = t_0 + 2h < \dots < t_N = t_0 + Nh \qquad h > 0$$

Approximation der Lösung

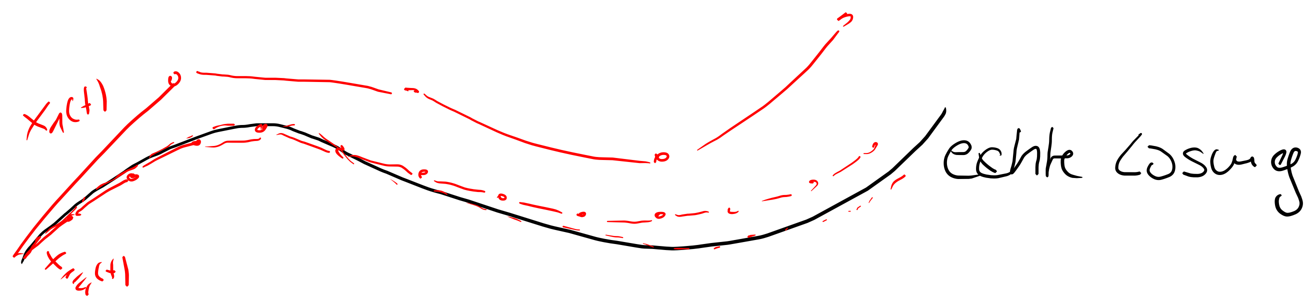
$$\vec{x}_h(t_0) := \vec{x}_0$$

rekursiv

$$\vec{x}_h(t) := \vec{x}_h(t_i) + (t - t_i)\,\vec{g}(t_i, \vec{x}_h(t_i)) \qquad t_i < t \le t_{i+1}$$



Unter bestimmten Voraussetzungen an $\vec{g}$ kann man zeigen, dass $\vec{x}_h$ gegen eine Lösung für $h \to 0$ konvergiert



→ Polygonzugverfahren oder Eulerverfahren

→ Verbesserung: Runge-Kutta-Verfahren

Runge-Kunge

$$\left| \vec{x}'(t) = \vec{g}(t, \vec{x}(t)) \right|$$

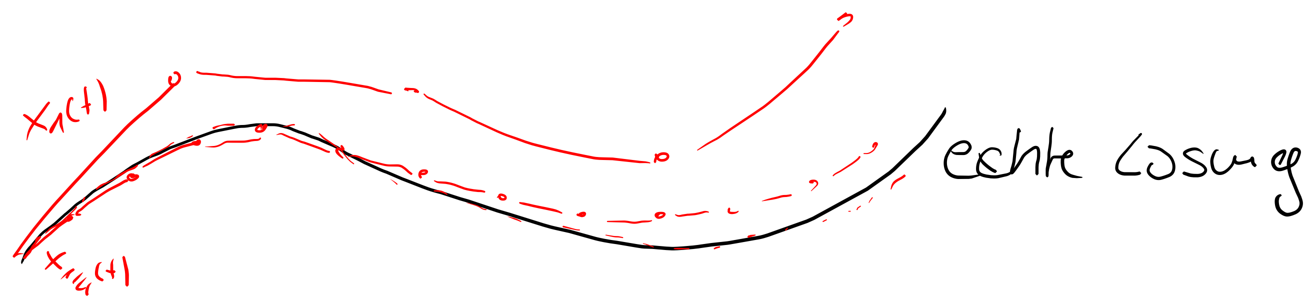
<u>Satz 10</u> (Existenz und Eindeutigkeit)

Sei $\vec{g}$ auf einer <u>offenen</u> Menge $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. und $(t_0, x_0) \in U$. Dann ist

$$\vec{x}'(t) = \vec{g}(t, \vec{x}(t)) \qquad \vec{x}(t_0) = x_0 \qquad (*)$$

eindeutig lösbar. Genauer es gibt ein Intervall I mit $t_0 \in I$, so dass $(*)$ eindeutig auf I ist.

Unter bestimmten Voraussetzungen an $\vec{g}$ kann man zeigen, dass $\vec{x}_h$ gegen eine Lösung für $h \to 0$ konvergiert



$\to$ Polygonzugverfahren oder Eulerverfahren

$\to$ Verbesserung: Runge-Kutta-Verfahren

$\vec{x}'(t) = \vec{g}(t, \vec{x}(t))$

<u>Satz 10</u> (Existenz und Eindeutigkeit)

Sei $\vec{g}$ auf einer <u>offenen</u> Menge $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $(t_0, x_0) \in U$. Dann ist

$$\vec{x}'(t) = \vec{g}(t, \vec{x}(t)) \qquad \vec{x}(t_0) = x_0 \qquad (*)$$

eindeutig lösbar. Genauer es gibt ein Intervall I mit $t_0 \in I$, so dass $(*)$ eindeutig auf I ist.