FG Logik und Semantik SoSe 2024
Technische Universität Berlin Stand: 2. Mai 2024

1. Tutoriumsblatt – Diskrete Strukturen

(Besprechung in den Tutorien in der Woche vom 29.04.2024)

Aufgabe 1

Es ging alles so schnell. Vor kaum mehr als einer Stunde saßest du gemeinsam mit deinen Kommiliton*innen im Mathegebäude und freutest dich mit ihnen auf die nächste DS Vorlesung. Jetzt seid ihr gemeinsam auf der Flucht. Zuerst haben sich nur einige Studierende auf dem Campus komisch verhalten, doch plötzlich wurdet ihr gejagt. Inzwischen habt ihr gemerkt, dass ihr vom Rest der Welt isoliert zu sein scheint. Endlich habt ihr es gemeinsam geschafft euch in einem sicheren Raum vor den Verrücktgewordenen zu verstecken. Die Meisten scheinen wegen dieser traumatisierenden Situation unter Schock zu stehen, doch einige wenige wirken gefasst. Leo spricht zuerst: "Seit Jahren habe ich mich auf eine Zombie Apokalypse vorbereitet. Ich weiß genau was jetzt zu tun ist. Zuerst brauchen wir Vorräte und einen Plan, um so weit wie möglich von hier weg zu kommen."

(i) Mohammad meint: "Wichtig ist, dass wir uns gut koordinieren. Ich schlage vor dass wir uns in Zuständigkeitsgruppen für Planung und Materialsammlung aufteilen." Ihr seid 18 Personen. Wie viele Möglichkeiten gibt es euch in zwei Teams aufzuteilen? Wie viel Möglichkeiten gibt es, wenn beide Teams gleich groß sein sollen?

(ii) Er hat sich auch schon 4 Orte überlegt, am denen das Material-Team suchen kann. Wie viele Möglichkeiten gibt es die 9 Personen des Teams auf die 4 Ziele aufzuteilen?

(iii) Anna teilt die 9 Personen im Planungsteam in Schichten auf, um auf euer Lager aufzupassen. Wie viele Möglichkeiten gibt es in jeder der nächsten 3 Stunden jedem eurer 3 Räume eine Person im Planungsteam zuzuteilen? Was, wenn jede Person maximal eine Schicht machen soll?

(iv) Beim Suchen nach Verpflegung habt ihr in der Mathe Cafeteria Brot, Dosenbohnen, Früchte und Schokoriegel gefunden. Es ist genug von allem da, aber ihr habt nur 7 Rucksäcke dabei. Wenn ihr einen Rucksackk immer nur mit einer Sache füllt, wie viele Kombinationen von Essen könnt ihr mitnehmen?

Aufgabe 2

Du siehst beim Vorbeigehen an einem Vorlesungssaal, dass er überfüllt mit Studierenden ist. Du traust dich aufgrund der Situation auf dem Campus nicht sie auf dich aufmerksam zu machen, aber merkst, dass sie alle fokussiert auf die Tafel starren. Dort stehen folgende Aufgaben:

Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion.

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}^+$ gilt $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}^+$ gilt $3^n > n^2$.

Aufgabe 3

Da alle Wege vom Campus von Suchenden blockiert zu sein scheinen, enscheidet ihr euch auf lange Zeit zu planen. Zuerst beschäftigt ihr euch mit dem Essensplan. Ihr habt viel Vorrat von 12 unterschiedlichen Zutaten.

(i) Ihr könnt aus je 3 Zutaten ein Essen zubereiten. Wie viele unterschiedliche Essen könnt ihr so zubereiten?

1. Tutoriumsblatt – Diskrete Strukturen
(Besprechung in den Tutorien in der Woche vom 29.04.2024)

Aufgabe 1

Es ging alles so schnell. Vor kaum mehr als einer Stunde saßest du gemeinsam mit deinen Kommiliton*innen im Mathegebäude und freutest dich mit ihnen auf die nächste DS Vorlesung. Jetzt seid ihr gemeinsam auf der Flucht. Zuerst haben sich nur einige Studierende auf dem Campus komisch verhalten, doch plötzlich wurdet ihr gejagt. Inzwischen habt ihr gemerkt, dass ihr vom Rest der Welt isoliert zu sein scheint. Endlich habt ihr es gemeinsam geschafft euch in einem sicheren Raum vor den Verrücktgewordenen zu verstecken. Die Meisten scheinen wegen dieser traumatisierenden Situation unter Schock zu stehen, doch einige wenige wirken gefasst. Leo spricht zuerst: "Seit Jahren habe ich mich auf eine Zombie Apokalypse vorbereitet. Ich weiß genau was jetzt zu tun ist. Zuerst brauchen wir Vorräte und einen Plan, um so weit wie möglich von hier weg zu kommen."

(i) Mohammad meint: "Wichtig ist, dass wir uns gut koordinieren. Ich schlage vor dass wir uns in Zuständigkeitsgruppen für Planung und Materialsammlung aufteilen." Ihr seid 18 Personen. Wie viele Möglichkeiten gibt es euch in zwei Teams aufzuteilen? Wie viel Möglichkeiten gibt es, wenn beide Teams gleich groß sein sollen?

(ii) Er hat sich auch schon 4 Orte überlegt, am denen das Material-Team suchen kann. Wie viele Möglichkeiten gibt es die 9 Personen des Teams auf die 4 Ziele aufzuteilen?

(iii) Anna teilt die 9 Personen im Planungsteam in Schichten auf, um auf euer Lager aufzupassen. Wie viele Möglichkeiten gibt es in jeder der nächsten 3 Stunden jedem eurer 3 Räume eine Person im Planungsteam zuzuteilen? Was, wenn jede Person maximal eine Schicht machen soll?

(iv) Beim Suchen nach Verpflegung habt ihr in der Mathe Cafeteria Brot, Dosenbohnen, Früchte und Schokoriegel gefunden. Es ist genug von allem da, aber ihr habt nur 7 Rucksäcke dabei. Wenn ihr einen Rucksackk immer nur mit einer Sache füllt, wie viele Kombinationen von Essen könnt ihr mitnehmen?

Aufgabe 2

Du siehst beim Vorbeigehen an einem Vorlesungssaal, dass er überfüllt mit Studierenden ist. Du traust dich aufgrund der Situation auf dem Campus nicht sie auf dich aufmerksam zu machen, aber merkst, dass sie alle fokussiert auf die Tafel starren. Dort stehen folgende Aufgaben:

Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion.

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}^+$ gilt $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}^+$ gilt $3^n > n^2$.

Aufgabe 3

Da alle Wege vom Campus von Suchenden blockiert zu sein scheinen, enscheidet ihr euch auf lange Zeit zu planen. Zuerst beschäftigt ihr euch mit dem Essensplan. Ihr habt viel Vorrat von 12 unterschiedlichen Zutaten.

(i) Ihr könnt aus je 3 Zutaten ein Essen zubereiten. Wie viele unterschiedliche Essen könnt ihr so zubereiten?

(ii) Ihr wollt 4 Mahlzeiten pro Tag zubereiten und ihr wollt am gleichen Tag nicht zweimal das gleiche Essen zubereiten. Wie viele unterschiedliche Menüs ergeben sich somit für einen Tag?

(iii) Ihr wollt für eine Woche planen. Wie viele mögliche Essenpläne ergeben sich somit?

Frage. Was ist die Anzahl der Möglichkeiten, k Elemente aus einer Menge M mit n Elementen zu ziehen?

	Reihenfolge wichtig (geordnet)	Reihenfolge nicht wichtig (ungeordnet)
Mit Zurücklegen	n^k	$\binom{k+n-1}{k}$
Ohne Zurücklegen	$n^{\underline{k}} := \binom{n}{k} \cdot k!$ $= \frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Aufgabe 1

Es ging alles so schnell. Vor kaum mehr als einer Stunde saßest du gemeinsam mit deinen Kommiliton*innen im Mathegebäude und freutest dich mit ihnen auf die nächste DS Vorlesung. Jetzt seid ihr gemeinsam auf der Flucht. Zuerst haben sich nur einige Studierende auf dem Campus komisch verhalten, doch plötzlich wurdet ihr gejagt. Inzwischen habt ihr gemerkt, dass ihr vom Rest der Welt isoliert zu sein scheint. Endlich habt ihr es gemeinsam geschafft euch in einem sicheren Raum vor den Verrücktgewordenen zu verstecken. Die Meisten scheinen wegen dieser traumatisierenden Situation unter Schock zu stehen, doch einige wenige wirken gefasst. Leo spricht zuerst: "Seit Jahren habe ich mich auf eine Zombie Apokalypse vorbereitet. Ich weiß genau was jetzt zu tun ist. Zuerst brauchen wir Vorräte und einen Plan, um so weit wie möglich von hier weg zu kommen."

(i) Mohammad meint: "Wichtig ist, dass wir uns gut koordinieren. Ich schlage vor dass wir uns in Zuständigkeitsgruppen für Planung und Materialsammlung aufteilen." Ihr seid 18 Personen. Wie viele Möglichkeiten gibt es euch in zwei Teams aufzuteilen? Wie viel Möglichkeiten gibt es, wenn beide Teams gleich groß sein sollen?

一切都发生得太快了。就在一个多小时以前，你还和你的同学们一起坐在数学楼里，满怀期待地等待下一节数据科学课程。而现在，你们正一起逃亡。起初，只有几名学生在校园里表现异常，但突然间你们被追捕了。你们意识到自己似乎已经与外界隔绝了。终于，你们成功地在一个安全的房间里躲避那些变得疯狂的人。大多数人似乎因为这场令人痛苦的经历而处于震惊状态，但有少数几个人显得冷静。首先开口的是莱奥："多年来我一直在为一场僵尸末日做准备。我非常清楚现在应该做什么。首先我们需要物资和一个计划，以便尽可能远离这里。"穆罕默德补充说："重要的是我们要协调好。我建议我们分成规划和物资采集两个小组。"你们共有18人。有多少种方式可以将你们分成两个团队？如果两个团队应该规模相同，有多少种方式？

(i) Eine Mengen von 18 Personen hat 2^{18} Teilmengen. Dies entspricht dem 18-fachen Ziehen von ja und nein mit Zurücklegen mit Reihenfolge. Wenn man davon ausgeht, dass beide Teams nicht leer sind, dann gibt es $2^{18} - 2$ mögliche Verteilungen.

Wenn beide Teams gleich groß sein sollen, können wir für das erste Team eine beliebige Teilmenge der Größe 9 wählen. Hierfür gibt es $\binom{18}{9}$ Möglichkeiten. Dies entspricht dem Ziehen von 9 Personen aus einem Pool von 18 Personen ohne Reihenfolge und ohne Zurücklegen.

(ii) Er hat sich auch schon 4 Orte überlegt, am denen das Material-Team suchen kann. Wie viele Möglichkeiten gibt es die 9 Personen des Teams auf die 4 Ziele aufzuteilen?

4^9 mit Zurücklegen mit Reihenfolge

(iii) Anna teilt die 9 Personen im Planungsteam in Schichten auf, um auf euer Lager aufzupassen. Wie viele Möglichkeiten gibt es in jeder der nächsten 3 Stunden jedem eurer 3 Räume eine Person im Planungsteam zuzuteilen? Was, wenn jede Person maximal eine Schicht machen soll?

(iii) 安娜将规划团队中的9个人分成轮班，以看管你们的营地。在接下来的3个小时里，每个小时如何为你们的3个房间分配一名规划团队成员，共有多少种可能性？如果每人最多只能做一班次呢？

每小时换一次班

每人看 3 Räume

Eine Schichtbesetzung:

ohne zurücklegen mit Reihenfolge $\frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!}$

Für 3 Schicht: $\left(\frac{9!}{6!}\right)^3$

Jeder Personen maximal eine Schicht $= 9!$

(iv) Beim Suchen nach Verpflegung habt ihr in der Mathe Cafeteria Brot, Dosenbohnen, Früchte und Schokoriegel gefunden. Es ist genug von allem da, aber ihr habt nur 7 Rucksäcke dabei. Wenn ihr einen Rucksackk immer nur mit einer Sache füllt, wie viele Kombinationen von Essen könnt ihr mitnehmen?

(iv) 在寻找食物的过程中，你们在数学楼的自助餐厅里找到了面包、罐装豆子、水果和巧克力棒。这些食物足够多，但你们只有7个背包。如果每个背包只能装一种食物，那么你们能携带多少种不同的食物组合？

$$\binom{7+4-1}{7} = \binom{10}{7} = \binom{10}{3}$$

mit Zurücklegen ohne Reihefolge

Aufgabe 2

Du siehst beim Vorbeigehen an einem Vorlesungssaal, dass er überfüllt mit Studierenden ist. Du traust dich aufgrund der Situation auf dem Campus nicht sie auf dich aufmerksam zu machen, aber merkst, dass sie alle fokussiert auf die Tafel starren. Dort stehen folgende Aufgaben:

Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion.

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}^+$ gilt $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}^+$ gilt $3^n > n^2$.

i) IA: für $n=1$ linken Seiten: 1^3 rechten Seite: $\frac{1 \cdot 2^2}{4} = 1$

IV: Es gelte $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ für ein $n \in \mathbb{N}^+$

IS: $\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

ii) IA: $n \in \{1,2\}$ $3^1 = 3 > n^2 = 1$

$3^2 = 9 > 2^2 = 4$

IV: Es gelte $3^n > n^2$ für ein $n \in \mathbb{N}^+$ mit $n \geq 2$

IS: $3^{n+1} > (n+1)^2$

$3^n > n^2$

$3^{n+1} > 3n^2 = n^2 + n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1$ (mit $n \geq 2$ gilt: $n^2 \geq 2n$ und $n^2 \geq 1$)

$3^{n+1} > (n+1)^2$

Aufgabe 3

Da alle Wege vom Campus von Suchenden blockiert zu sein scheinen, enscheidet ihr euch auf lange Zeit zu planen. Zuerst beschäftigt ihr euch mit dem Essensplan. Ihr habt viel Vorrat von 12 unterschiedlichen Zutaten.

(i) Ihr könnt aus je 3 Zutaten ein Essen zubereiten. Wie viele unterschiedliche Essen könnt ihr so zubereiten?

(ii) Ihr wollt 4 Mahlzeiten pro Tag zubereiten und ihr wollt am gleichen Tag nicht zweimal das gleiche Essen zubereiten. Wie viele unterschiedliche Menüs ergeben sich somit für einen Tag?

(iii) Ihr wollt für eine Woche planen. Wie viele mögliche Essenpläne ergeben sich somit?

i) ohne Zurücklegen ohne Reihenfolge $\binom{12}{3}$

ii) ohne Zurücklegen mit Reihenfolge $\binom{n}{k} k! = \frac{\binom{12}{3}!}{\left(\binom{12}{3}-4\right)!}$

$n = \binom{12}{3}$ $k=4$

iii) $n = \frac{\binom{12}{3}!}{\left(\binom{12}{3}-4\right)!}$ $k=7$ $n^k = \left(\frac{\binom{12}{3}!}{\left(\binom{12}{3}-4\right)!}\right)^7$

mit Zurücklegen mit Reihenfolge

FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

SoSe 2024
Veröffentlichung: 2. Mai 2024

1. freiwillige Übung – Diskrete Strukturen
Abgabe: bis 10:30 am 09.05.2024 im ISIS-Kurs [SoSe 2024] Diskrete Strukturen

Aufgabe 4

Gegeben seien die Mengen $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B := \{a, b, c, d\}$, $C = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta\}$ und $D := \{A, B, C\}$.

(i) Geben Sie für jedes $X \in \{A, B, C, D\}$ die Anzahl der 4-elementigen Teilmengen an.

(ii) Geben Sie für jedes $k \in A$ die Anzahl der k-stelligen Tupel über C an.

(iii) Geben Sie die Anzahl der Abbildungen von A nach D an.

(iv) Geben Sie die Anzahl der injektiven Abbildungen von D nach B an.

Sie brauchen keine Ihrer Antworten zu begründen.

Aufgabe 5

Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion.

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ gilt $n^2 - 2n - 1 > 0$.

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $1 + \sum_{i=1}^{n} (\frac{2^{2\cdot(i-1)}}{3^i}) = \left(\frac{4}{3}\right)^n$.

(iii) Schwer: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \cdot y^{n-i} = (x + y)^n$

Aufgabe 6

Paul möchte sich für euren Gruppenchat, den ihr nutzen wollt sobald das Internet wieder da ist, ein Passwort auszudenken, dass möglichst nicht für andere zu knacken ist. Dafür möchte er sich ein Passwort überlegen, das sicher genug ist. Ihm fallen folgende Methode ein, um das Passwort zu erzeugen:

(i) Er wählt 4 zufällige Satz aus dem Roman, den er dabei hat. Und reiht sie dann in der Reihenfolge auf in der sie im Roman vorkommen. Der Roman ist 20 000 Sätze lang.

(ii) Er startet mit seinem Namen und ersetzt drei Buchstaben daraus durch irgendeine Ziffer zwischen 0 und 9.

(iii) Er wählt drei Wörter aus seinem Wörterbuch und konkateniert die drei Wörter in einer zufälligen Reihenfolge. Sein Wörterbuch enthält genau 5 000 Wörter. Zusätzlich verwendet er die 0 als Trennsymbol zwischen den Wörter.

Wie viele verschiedene Passwörter kann er mit den jeweiligen Methoden erzeugen?

Bonus: warum wäre die vorherige Aufgabe mit den gegebenen Informationen nicht eindeutig lösbar, wenn es kein Trennsymbol zwischen den Wörtern geben würde?