

# 9. Tutorium: Abtastung

## o Was ist Abtastung?

- ein Prozess des Erfassens von kontinuierlichen Signalen zu diskreten Abtastwerten.

Das lernt ihr bei weiteren Modulen! z.B. ENÜ

Analog  $\rightarrow$  Abtastung  $\rightarrow$  Quantisierung  $\rightarrow$  Codierung  $\rightarrow$  Digital  
 SWS  
 < Analog-Digital-Wandlung>

## o Ideale Abtastung

$$u(t) \xrightarrow{\text{Multiplizieren}} u_{a, \text{ideal}}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(j\omega - k\omega_T)$$

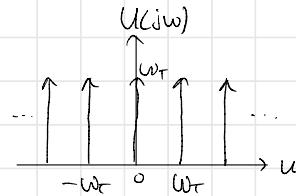
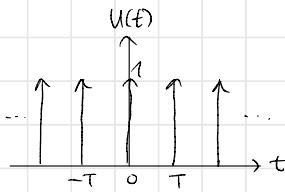
$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

Deltakamm

## o Fourier-Träfo Siehe „Fouriertransformation“ im Zusatzmaterial auf ISIS!

Deltakamm

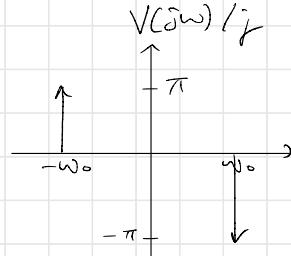
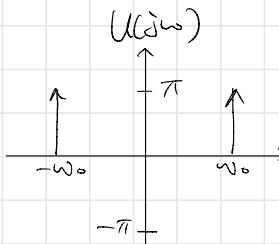
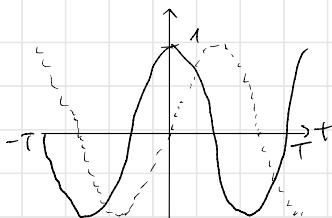
$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \xrightarrow{\mathcal{F}} W_T \cdot \delta_{WT}(\omega), \text{ mit } \omega_T = \frac{2\pi}{T}$$



• Sinus / Cosinus

$$\cos(\omega_0 t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$- u(t) = \cos(\omega_0 t) \quad \sin(\omega_0 t) \xrightarrow{\mathcal{F}} j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$



$$\text{mit } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

**1.1 Das Signal**  $u_1(t) = A \cdot \sin(\omega_u \cdot t)$ ,  $\omega_u = \frac{2\pi}{T_u}$ , soll mit der Abtastfrequenz  $\omega_T$  ideal abgetastet und übertragen werden. Zur Rekonstruktion steht ein idealer Tiefpass mit der Grenzfrequenz  $\omega_g = \frac{3}{2}\omega_u$  zur Verfügung.

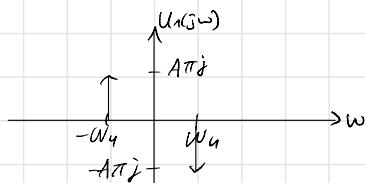
- c) [HK]: Es sei  $\omega_T = 1,5\omega_u$ . Skizziere das Spektrum des abgetasteten Signals sowie den Verlauf des rekonstruierten Signals im Zeitbereich.

## Spektrum

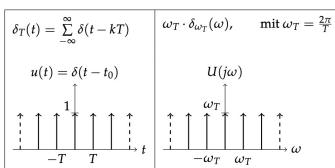
$$U_1(t) = A \cdot \sin(\omega_u \cdot t)$$

$$\mathcal{F} \quad \text{↓}$$

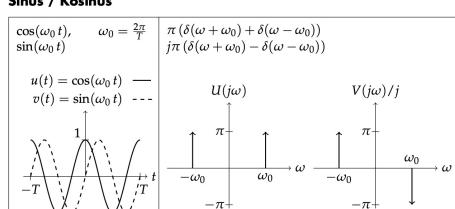
$$U_1(j\omega) = A \cdot j\pi (\delta(\omega + \omega_u) - \delta(\omega - \omega_u))$$



### Deltakamm



### Sinus / Kosinus



## Abtastung

$$U_1(t) \cdot \delta_T(t)$$

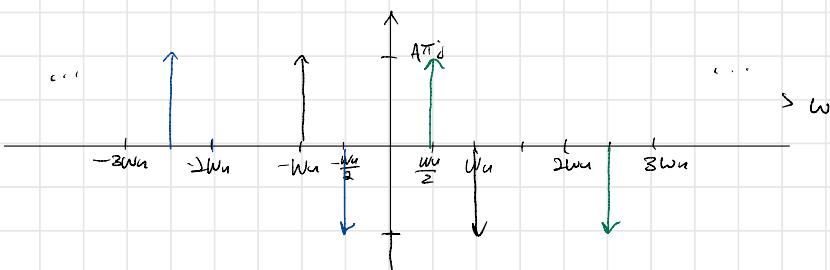
$$= A \cdot \sin(\omega_u t) \cdot \delta_T(t)$$

$$\mathcal{F} \quad \text{↓}$$

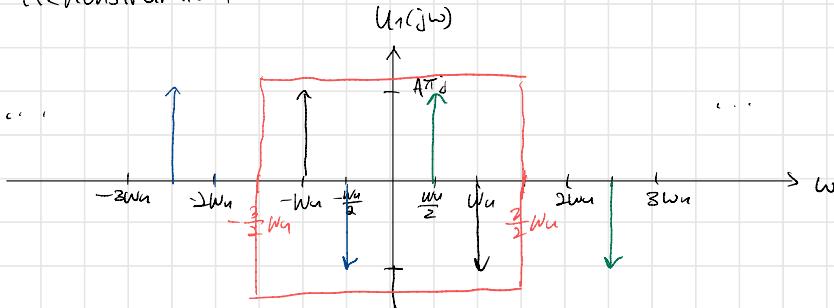
$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_1(j\omega - k\omega_T)$$

$$\omega_T = 1,5\omega_u$$

$$U_1(j\omega)$$



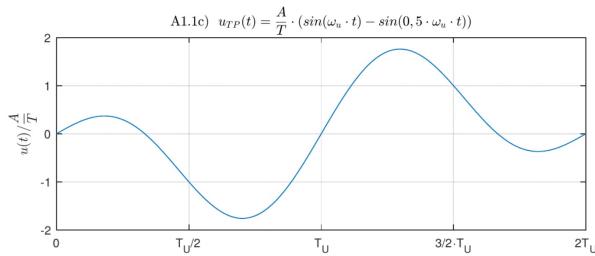
# Rekonstruktion



$$N_g = \frac{3}{2} \omega_u$$

$$\mathcal{F}^{-1} \circ U_1(j\omega) = \frac{A\pi j}{T} \left( \delta(\omega + \omega_u) - \delta(\omega - \omega_u) - \delta(\omega + \frac{\omega_u}{2}) + \delta(\omega - \frac{\omega_u}{2}) \right)$$

$$U_1(t) = \frac{A}{T} \left( \sin(\omega_u t) - \sin\left(\frac{\omega_u}{2}t\right) \right)$$



Original signal  
 $\therefore \frac{A}{T} \sin(\omega_u t)$

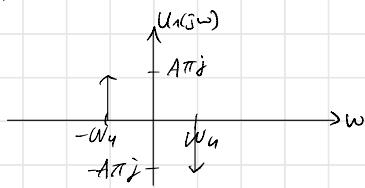
Das Signal wurde verletzt! (nicht gut rekonstruiert)

- d) Mit welcher Frequenz  $\omega_{T,min}$  muss mindestens abgetastet werden, damit das Signal fehlerfrei rekonstruiert werden kann? Was geschieht bei  $\omega_T = 2\omega_u$ ?

Nyquist-Shannon-Theorem  
 $\omega_T \geq 2\omega_u$

- b) Es sei  $\omega_T = 3\omega_u$ . Skizziere das Spektrum des abgetasteten Signals sowie den Verlauf des rekonstruierten Signals im Zeitbereich.

### Spektrum



### 1. Spektrum

(Fourier-Trafo)

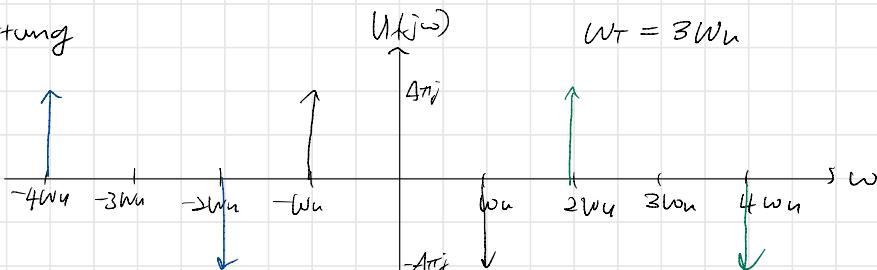
### 2. Abtastung

(Siehe die Formel)

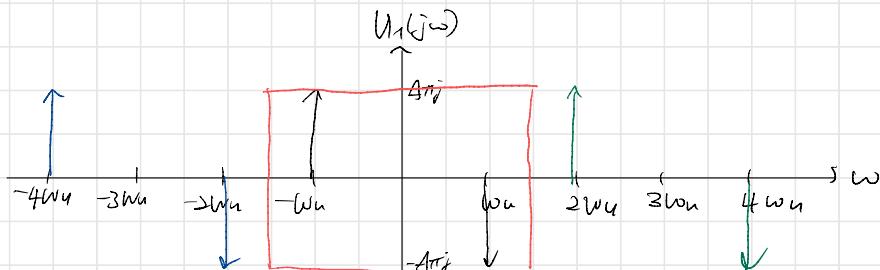
### 3. Rekonstruktion

$(Wg = \frac{3}{2}w_u, \text{ Fourier-Rücktrah})$

### Abtastung



### Rekonstruktion

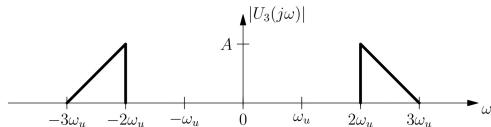


$$U_1(j\omega) = \frac{A\pi j}{T} (\delta(\omega + w_u) - \delta(\omega - w_u))$$

$\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}$

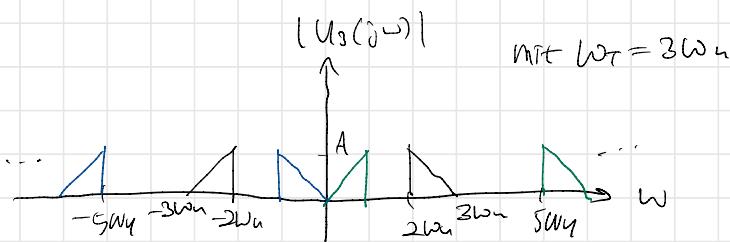
$$u_1(t) = \frac{A}{2} \sin(\omega_u t)$$

**2.1 Gegeben sei das folgende Amplitudenspektrum  $|U_3(j\omega)|$ . Das Phasenspektrum sei konstant  $\varphi(\omega) = 0$ .**



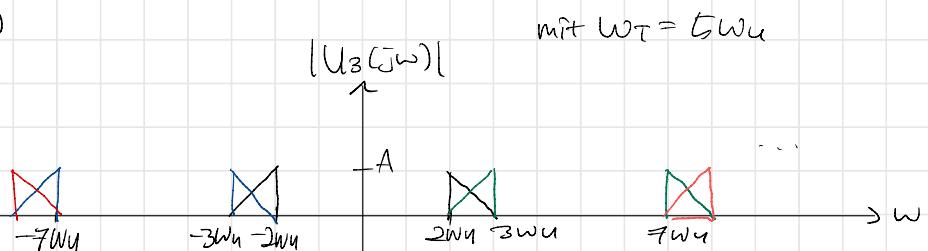
- a) Skizziere das Spektrum des abgetasteten Signals für den Fall  $\omega_T = 2\omega_u$ .
- b) [HA]: Skizziere das Spektrum des abgetasteten Signals für den Fall  $\omega_T = 3\omega_u$ .
- c) [HA]: Skizziere das Spektrum des abgetasteten Signals für den Fall  $\omega_T = 5\omega_u$ .

b)

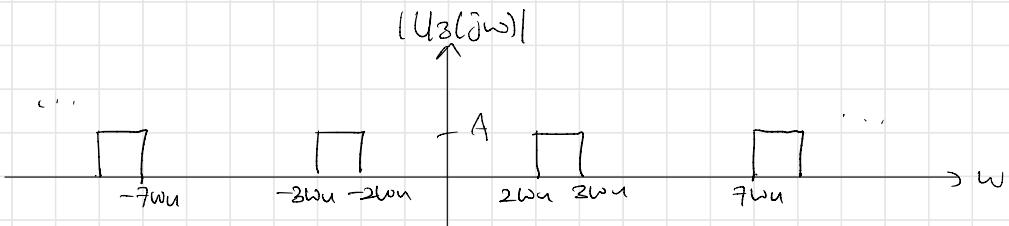


mit  $\omega_T = 3\omega_u$

c)



mit  $\omega_T = 5\omega_u$



# Quiz

**1. Bei der idealen Abtastung wird das kontinuierliche Signal  $u(t)$  mit ... (Einzelne Wahl)**

- einem Deltakamm multipliziert.
- einem Deltakamm multipliziert und anschließend einem Halteglied zugeführt.
- einer Rechteckpulsfolge multipliziert.

**2. Durch die Abtastung eines kontinuierlichen Signals wird das resultierende Signal ...**

(Einzelne Wahl)

- wert- und zeitdiskret.
- zeitdiskret.
- wertdiskret.

**3. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? (Mehrfachauswahl)**

- Beim Nyquist-Abtast-Theorem ist die Abtastfrequenz ist größer als  $w_u$
- Beim Nyquist-Abtast-Theorem ist die zweifache  $w_u$  ist kleiner als die Abtastfrequenz.
- Ein idealer Tiefpass kann nicht mehr zur fehlerfreien Rekonstruktion des ursprünglichen Signals verwendet werden.

Lösung: 1 - Deltakamm multipliziert  
2 - zeitdiskret  
3 - Abtastfrequenz ist größer als  $w_u$ ,  
zweifache  $w_u$  kleiner als  $w_T$