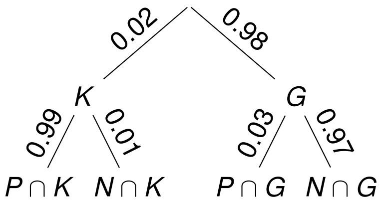
4. Vorlesung: ~~Satz der totalen Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit~~ Bayes-Formel & Zufallsvariablen.

Nikolas Tapia

22. April 2024, Stochastik für Informatik(er)

Beispiel (Test auf Krankheit)

Eine Krankheit tritt bei 2% der Bevölkerung auf.
Ein Bluttest erkennt sie in 99% der Fälle, aber er zeigt bei 3% der gesunden Personen falsch positiv an.

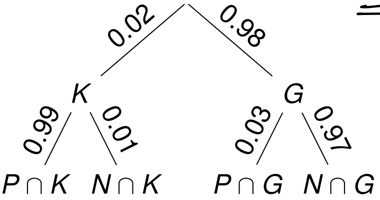


$$\mathbb{P}(P \cap K) = 0{,}0198$$
$$= 1{,}98\,\%$$

$$\mathbb{P}(P) = 4{,}92\,\%$$
$$= \mathbb{P}(P|K)\,\mathbb{P}(K)$$
$$+ \mathbb{P}(P|G)\,\mathbb{P}(G).$$

Beispiel (Test auf Krankheit)

Angenommen ich wurde positiv getestet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ich die Krankheit habe?



$\mathbb{P}(P|K)$ ✓

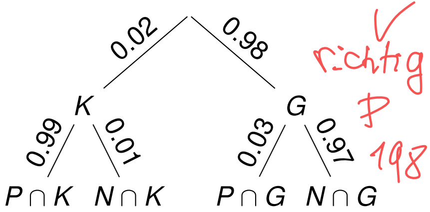
$$\mathbb{P}(K \cap P) = \mathbb{P}(K|P)\,\mathbb{P}(P)$$

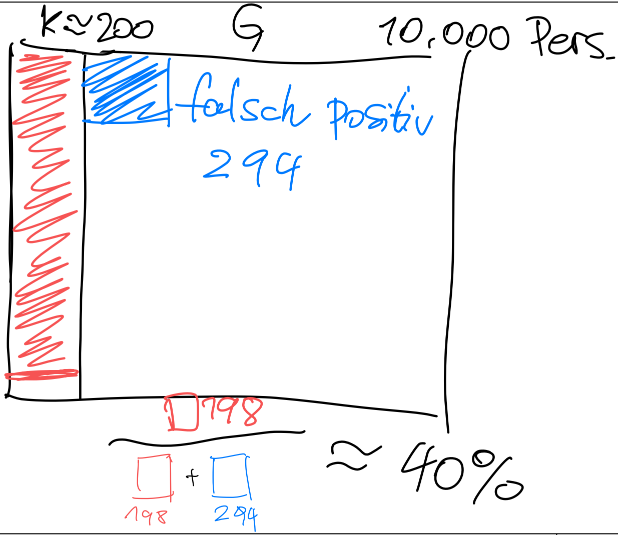
$$\Rightarrow \mathbb{P}(K|P) = \frac{\mathbb{P}(K \cap P)}{\mathbb{P}(P)}$$

$$\leftarrow \frac{0{,}0198}{0{,}0492}$$

$$= 0{,}402 \approx 40{,}2\,\%$$

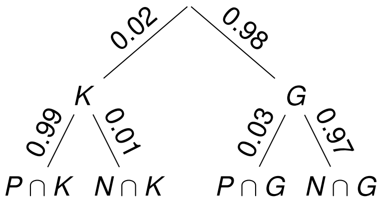
Angenommen ich wurde positiv getestet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ich die Krankheit habe?

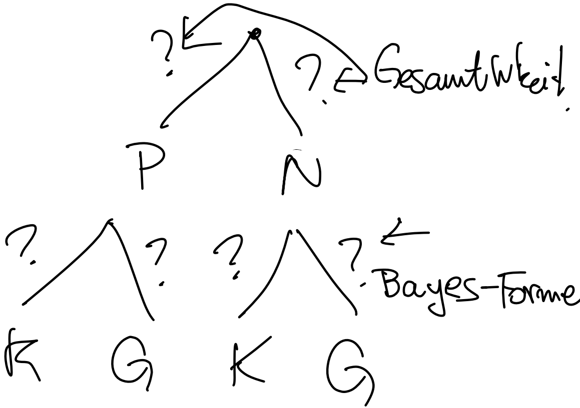




Beispiel (Test auf Krankheit)

Angenommen ich wurde positiv getestet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ich die Krankheit habe?





Bayes'sche Umkehrformel

Theorem 1

Seien A, B Ereignisse mit $0 < \mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) < 1$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Anmerkung 1

Mit $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \mid B^c)\mathbb{P}(B^c)$ folgt

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \mid B^c)\mathbb{P}(B^c)}.$$

Bayes-Formel

Allg. Bayes-Formel

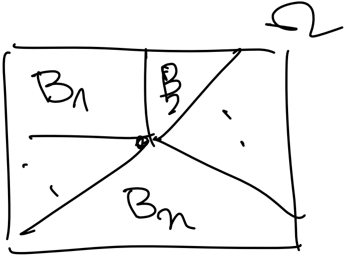
Theorem 2

Sei A ein Ereignis und $B_1, \ldots, B_n$ eine disjunkte Zerlegung von Ω. Dann gilt

$$\mathbb{P}(B_i \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid B_j)\mathbb{P}(B_j)}.$$

$\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid B_j)\mathbb{P}(B_j) = \mathbb{P}(A)$

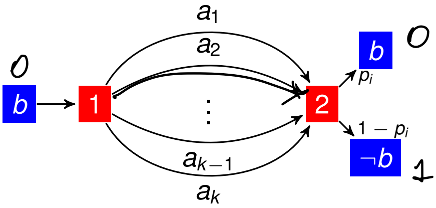
Gesamt W'keit.



$B_n \cap B_m = \emptyset$

$\bigcup_n B_n = \Omega.$

Beispiel (Signalübermittlung)



$a_i \sim$ W'keit Kanal i benutzt wird.

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = 1$$

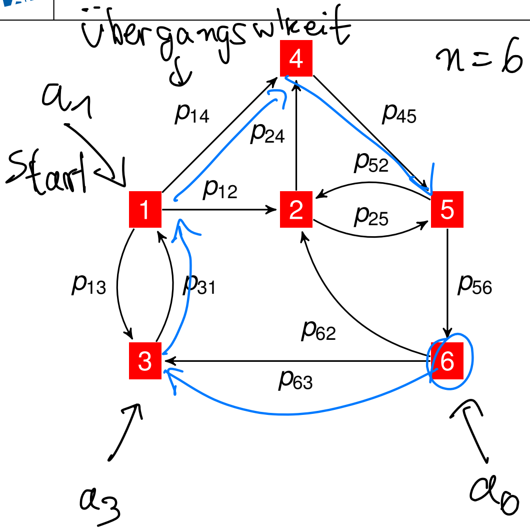
$A = \{$ bit ✓ ankommt $\}$

$K_i := \{$ i-te Kanal benutzt wurde $\}$.

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{k} \overbrace{\mathbb{P}(A|K_i)}^{p_i} \overset{a_i}{\mathbb{P}(K_i)} = \sum_{i=1}^{k} a_i p_i$$

$$\mathbb{P}(K_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|K_i)\mathbb{P}(K_i)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{a_i p_i}{\sum_{j=1}^{k} a_j p_j}$$

Beispiel (Markov-Kette)



$n = 6$

Starten ℓ — Knoten j nach dem ersten Sprung.

$$\mathbb{P}(S_\ell \mid K_j)$$

$$\mathbb{P}(S_\ell) = a_\ell$$

$$\mathbb{P}(K_j \mid S_\ell) = p_{\ell j}$$

$$\mathbb{P}(S_\ell \mid K_j) = \frac{\mathbb{P}(K_j \mid S_\ell)\,\mathbb{P}(S_\ell)}{\mathbb{P}(K_j)} = \frac{p_{\ell j} \cdot a_\ell}{\sum_{k=1}^{n} a_k p_{kj}}$$

$$\mathbb{P}(K_j) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(K_j \mid S_k)\,\mathbb{P}(S_k)$$

Wiederholung: Wahrscheinlichkeitsraum

Definition 4.0

Ein **endlicher** Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Paar $(\Omega, \mathbb{P})$, mit Ω endlich und $\mathbb{P}$ erfüllt

1. $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$ für alle $A \subseteq \Omega$,
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
3. für $A, B \subseteq \Omega$ disjunkt,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Definition 4.1

Ein **diskreter** Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Paar $(\Omega, \mathbb{P})$, mit Ω *abzählbar* und $\mathbb{P}$ erfüllt 1. und 2. aus obiger Definition und

3'. für $A_1, A_2, \ldots \subseteq \Omega$ mit $A_n \subseteq \Omega$ und $A_n \cap A_m = \emptyset$ für $n \neq m$, gilt

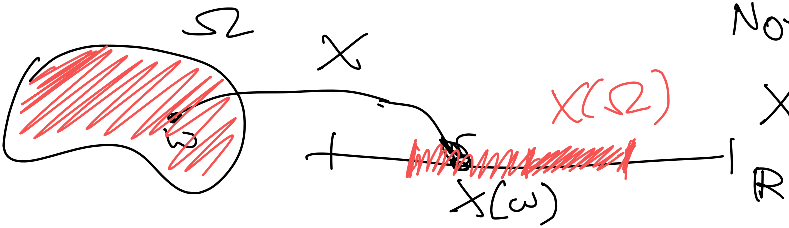
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Zufallsvariablen

Definition 4.2

Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein (allg.) Wahrscheinlichkeitsraum. Eine (eindim.) **Zufallsvariable** ist eine Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
Der **Wertebereich** von X ist

$$X(\Omega) := \{x \in \mathbb{R} \mid \text{es existiert } \omega \in \Omega \text{ mit } X(\omega) = x\}.$$



Notation: ZV

$X, Y, Z, U, V, \ldots$

Diskrete Zufallsvariablen

Definition 4.3

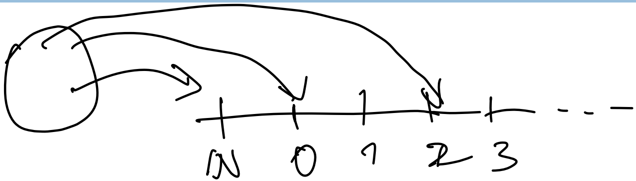
Eine Zufallsvariable X heißt **diskret**, falls ihr Wertebereich endlich oder abzählbar ist.

Definition 4.4

Eine Abbildung $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ heißt d-dimensionale Zufallsvariable oder **Zufallsvektor**.

Anmerkung 1

Falls Ω diskret ist, dann ist jede(r) Zufallsvariable(-vektor) diskret.



$X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega))$

$$\Omega = \{ \omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_i \in \{1, \dots, 6\} \}$$

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{36} \Rightarrow LR.$$

$$X_1(\omega) = \omega_1 \quad \rightarrow \quad X_1(\Omega) = \{1, \dots, 6\}$$

$$X_2(\omega) = \omega_2 \quad \rightarrow \quad X_2(\Omega) = \{1, \dots, 6\}$$

$$S(\omega) = \omega_1 + \omega_2 \quad \rightarrow \quad S(\Omega) = \{2, 3, \dots, 12\}$$

$$M(\omega) = \min\{\omega_1, \omega_2\}$$

(1,1) (2,1) (1,2) (6,6)

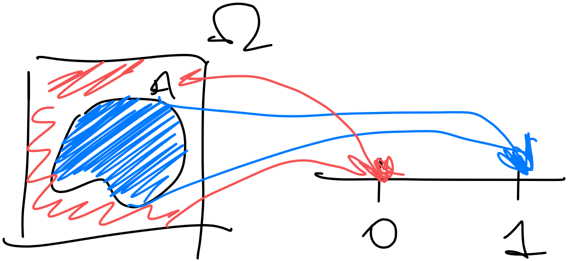
$$M(\Omega) = \{1, \dots, 6\}.$$

Beispiel (Würfeln)

Beispiel (Indikatorfunktion)

$(\Omega, \mathbb{P})$, $A \subseteq \Omega$. $\quad \mathbb{1}_A : \Omega \to \{0, 1\}$

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \notin A \\ 1 & \omega \in A \end{cases}$$



Beispiel (Indikatorfunktion)

Beispiel 3.3 (Indikatorfunktion)
Betrachten wir ein Ereignis, d. h., eine Teilmenge $A \subset \Omega$. Die **Indikatorfunktion** von A ist definiert als die Abbildung $1_A : \Omega \to \{0, 1\}$,

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

2-faches Würfeln

$A = \{\omega : \omega_1 + \omega_2 \leq 3\}$

$1 + 2 = 3 \leq 3$

$\mathbb{1}_A((1,2)) = 1$

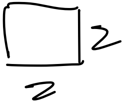
$\mathbb{1}_A((4,1)) = 0$, da $4 + 1 = 5 > 3$

$A = S^{-1}(\{1,2,3\})$

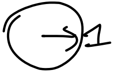
$= \{\omega \in \Omega : S(\omega) \in \{1,2,3\}\}$

$= \{\omega \in \Omega : \omega_1 + \omega_2 \leq 3\}.$

Beispiel (Indikatorfunktion)

$\Omega =$ 

$\Omega \ni \omega = (x, y), \ldots$

$A =$ 

$$Z_i = \mathbb{1}_A(\omega_i) \in \{0, 1\}$$

Algorithm 1 Bogosort

```
procedure BOGOSORT(A)
    while not ISTSORTIERT(A) do
        A ← MISCHEN(A)
    end while
end procedure
```

Beispiel (Laufzeit)

Algorithm 2 QuickSort

```
links ← 1, rechts ← n                                ▷ A[1..n] zu sortieren
procedure QUICKSORT(links, rechts)
    while links < rechts do
        m ← Teiler(links, rechts)                    ▷ Wähle Pivot (z.B. A[rechts])
        QUICKSORT(links, m − 1)                                       zufällig.
        QUICKSORT(m + 1, rechts)
    end while
end procedure
```

Laufzeit ZV. X mit $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$

$\{\omega : X(\omega) \le 100\}$ oder $\{X(\omega) \text{ in } [10,20]\}$.

Zufallsvariablen und Ereignisse

Notation 1

Für $E \subseteq X(\Omega)$ bzw. für $x \in X(\Omega)$ schreiben wir

- $\{X \in E\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in E\} = X^{-1}(E)$,
- $\{X = x\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} = X^{-1}(\{x\})$,
- $\{X \leq x\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = X^{-1}((-\infty, x])$, usw.

Für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten schreiben wir

- $\mathbb{P}(X \in E) := \mathbb{P}(\{X \in E\})$,
- $\mathbb{P}(X = x) := \mathbb{P}(\{X = x\})$, usw.

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}) = \mathbb{P}(X = x),$$

Zufallsvariablen und Ereignisse

Notation 1

Für $E \subseteq X(\Omega)$ bzw. für $x \in X(\Omega)$ schreiben wir

- $\{X \in E\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in E\} = X^{-1}(E)$,
- $\{X = x\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} = X^{-1}(\{x\})$,
- $\{X \leq x\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = X^{-1}((-\infty, x])$, usw.

Für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten schreiben wir

- $\mathbb{P}(X \in E) := \mathbb{P}(\{X \in E\})$,
- $\mathbb{P}(X = x) := \mathbb{P}(\{X = x\})$, usw.

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}) = \mathbb{P}(X = x),$$