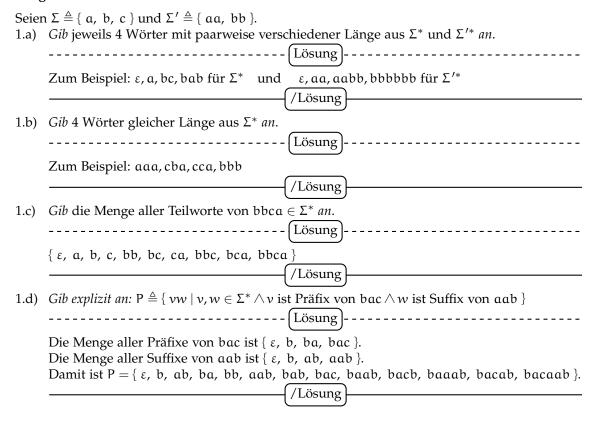
FORMALE SPRACHEN UND AUTOMATEN

MTV: Modelle und Theorie Verteilter Systeme

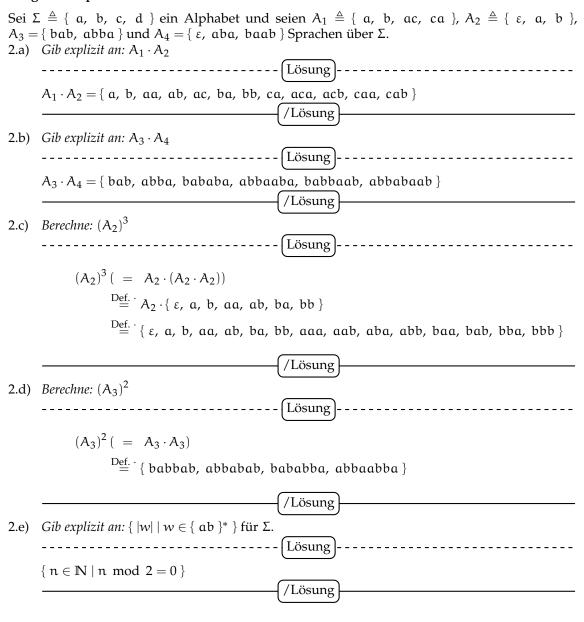
16.05.2022 - 22.05.2022

Zusatzaufgaben 4

Aufgabe 1: Wörter



Aufgabe 2: Sprachen



Aufgabe 3: Reguläre Ausdrücke

Gegeben sei der reguläre Ausdruck $e_1 \triangleq ((ab)^* + b^*) (\varepsilon + a)$.

3.a) Gib das kürzeste Wort, das längste Wort und drei Wörter der Länge 3 aus $L(e_1)$ an.

Das kürzeste Wort in der Sprache $L(e_1)$ ist ϵ .

Die Sprache $L(e_1)$ ist unendlich groß, ein längstes Wort gibt es daher nicht.

Die Wörter aba, bba und bbb sind die einzigen Wörter der Länge 3 in $L(e_1)$.

3.b) Gib die Sprache $A_1 = L(e_1)$ an.

$$\begin{split} A_1 &= \{\, x^n y \mid n \in \mathbb{N} \land x \in \{\, ab, \, b\,\} \land y \in \{\, \epsilon, \, a\,\} \} \\ &= \{\, x^n \mid n \in \mathbb{N} \land x \in \{\, ab, \, b\,\} \} \cup \{\, x^n a \mid n \in \mathbb{N} \land x \in \{\, ab, \, b\,\} \} \\ &= \{\, x^n, x^m a \mid n, m \in \mathbb{N} \land x \in \{\, ab, \, b\,\} \} \\ &= \left\{\, (ab)^n \,, (ab)^m \, a, b^k, b^l a \mid n, m, k, l \in \mathbb{N} \,\,\right\} \end{split}$$

Hinweis: Hier sind verschiedene Schreibweisen für die selbe Sprache angegeben. Es genügt natürlich, eine solche Schreibweise anzugeben. Außer den hier dargestellten Schreibweisen gibt es noch viele weitere.

/Lösung

Aufgabe 4: Induktion über Wörter

Gegeben sei ein Alphabet Σ .

4.a) Die Spiegelung von Wörtern über einem Alphabet Σ sei definiert durch

$$\varepsilon^{R} = \varepsilon \text{ und}$$
 (1)

$$(wa)^R = a(w^R)$$
, für alle $w \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$. (2)

Beweise mit Induktion, dass für alle Wörter $w=a_1\dots a_n$ mit $w\in \Sigma^*$ und $a_i\in \Sigma$ für alle $i\in [1,\,n]$ und n>0 gilt $(a_1\dots a_n)^R=a_n\dots a_1$.

Sei

$$P(n) \triangleq \left(\left(\alpha_1 \ldots \alpha_n \right)^R = \alpha_n \ldots \alpha_1 \right)$$

Wir verwenden das Induktionsschema:

$$\left(\underbrace{\underbrace{P(1)}_{IA}} \land \underbrace{\left(\forall n \in \mathbb{N}^+ \ . \ P(n) \to P(n+1)\right)}_{IS}\right) \to \left(\forall x \in \mathbb{N}^+ \ . \ P(x)\right)$$

IA (P(1)):

$$(\alpha_1)^R \stackrel{Def.}{=} (\epsilon \alpha_1)^R \stackrel{(2)}{=} \alpha_1 \left(\epsilon^R \right) \stackrel{(1)}{=} \alpha_1 \epsilon \stackrel{Def.}{=} \alpha_1$$

Sei $n \in \mathbb{N}^+$.

IV (P(n)):
$$(\alpha_1 \dots \alpha_n)^R = \alpha_n \dots \alpha_1$$

IS (P(n+1)): Zu Zeigen:
$$(a_1 ... a_{n+1})^R = a_{n+1} ... a_1$$

$$(a_1 \dots a_{n+1})^R \stackrel{\text{(2)}}{=} a_{n+1} (a_1 \dots a_n)^R \stackrel{\text{IV}}{=} a_{n+1} \dots a_1$$

/Lösung

Aufgabe 5: Ordnen von Wörtern

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma \triangleq \{ a, b, c \}$ und die totale Ordnung $R_1 : (\Sigma, \Sigma)$ mit $R_1 \triangleq t(r(\{ (b, c), (c, a) \}))$.

5.a) Ordne die Wörter ε , c, cc, cc, cc, ca, abc, bac nach der lexikographischer Ordnung bzgl. R_1 . $\underbrace{ \mathbb{E}_{R_1} \ bac \ll_{R_1} \ c \ll_{R_1} \ cc \ll_{R_1} \ cc \ll_{R_1} \ ca \ll_{R_1} \ abc }_{\text{Lösung}}$ 5.b) Ordne die Wörter ε , c, cc, cc, cc, ca, abc, bac nach der Standardordnung bzgl. R_1 . $\underbrace{ \mathbb{E}_{R_1} \ c \ll_{R_1} \ cc \ll_{R_1} \ ca \ll_{R_1} \ bac \ll_{R_1} \ cc \ll_{R_1} \ abc }_{\text{Cisung}}$ $\underbrace{ \mathbb{E}_{R_1} \ c \ll_{R_1} \ cc \ll_{R_1} \ ca \ll_{R_1} \ bac \ll_{R_1} \ cc \ll_{R_1} \ abc }_{\text{Cisung}}$