Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen
(Hausaufgabe 9)

Abgabe: 24. – 28. Juni 2024

Sommersemester 2024

Aufgabe 25

(4 Punkte)

Berechne die Laplacetransformierte von

$$f(t) \coloneqq \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 2, \\ 4, & 2 < t \leq 4, \\ 0, & 4 \leq t. \end{cases}$$

Aufgabe 26

(6 Punkte)

Mittels der Laplacetransformation löse

$$x''(t) + x'(t) - 6x(t) = 6\mathrm{e}^{3t}, \quad x(0) = -1, x'(0) = -8.$$

Aufgabe 27

(5 Punkte)

Mit Hilfe der Laplacetransformation löse

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-(t-1)}, & t \geq 1, \\ 0, & 0 \leq t < 1, \end{cases}$$

mit den Anfangswerten $x(0) = 0$ und $x'(0) = 1$.

Aufgabe 25

(4 Punkte)

Berechne die Laplacetransformierte von

$$f(t) := \begin{cases} t, & 0 \le t \le 2, \\ 4, & 2 < t \le 4, \\ 0, & 4 \le t. \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$
$$= \int_0^2 t e^{-st} dt + \int_2^4 4e^{-st} dt + \int_4^\infty 0 \, dt$$
$$= t \cdot (-\tfrac{1}{s}) e^{-st} \Big|_0^2 - \int_0^2 (-\tfrac{1}{s} e^{-st}) dt - \tfrac{4}{s} e^{-st} \Big|_2^4$$
$$= -\tfrac{1}{s} \cdot 2e^{-2s} + \tfrac{1}{s} \cdot (-\tfrac{1}{s}) e^{-st} \Big|_0^2 - \tfrac{4}{s}(e^{-4s} - e^{-2s})$$
$$= \tfrac{2}{s} e^{-2s} - \tfrac{1}{s^2}(e^{-2s} - 1) - \tfrac{4}{s} e^{-4s}$$
$$= \tfrac{2}{s} e^{-2s} - \tfrac{4}{s} e^{-4s} - \tfrac{1}{s^2} e^{-2s} + \tfrac{1}{s^2}$$

Aufgabe 26

(6 Punkte)

Mittels der Laplacetransformation löse

$$x''(t) + x'(t) - 6x(t) = 6e^{3t}, \quad x(0) = -1, x'(0) = -8.$$

$$\mathcal{L}[x''(t)](s) + \mathcal{L}[x'(t)](s) - 6\mathcal{L}[x(t)](s) = 6\,\mathcal{L}[e^{3t}](s)$$

$$s^2 \mathcal{L}[x(t)](s) - s\,x(0) - x'(0) + s\,\mathcal{L}[x(t)](s) - x(0) - 6\,\mathcal{L}[x(t)](s) = 6 \cdot \frac{1}{s-3} \quad \Big| \; \mathcal{L}[x(t)](s) = X(s)$$

$$s^2 X(s) + s + 8 + sX(s) + 1 - 6X(s) = \frac{6}{s-3}$$

$$(s^2 + s - 6) X(s) = -s - 8 + \frac{6}{s-3}$$

$$X(s) = \frac{-s-8}{(s-2)(s+3)} + \frac{6}{(s-3)(s-2)(s+3)} = \frac{-s^2 + 3s - 8s + 27 + 6}{(s-3)(s-2)(s+3)} = \frac{-s^2 - 6s + 33}{(s-3)(s-2)(s+3)}$$

$$= \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s-3}$$

$$A = \frac{-4 - 24 + 33}{(2+3)(2-3)} = -\frac{5}{5} = -1$$

$$B = \frac{-8 + 18 + 33}{(-3-2)(-3-3)} = \frac{42}{30} = \frac{21}{15} = \frac{7}{5}$$

$$C = \frac{-8 - 18 + 33}{6} = 1$$

$$\Rightarrow X(s) = -\frac{1}{s-2} + \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s-3}$$

$$\Rightarrow x(t) = -e^{2t} + \tfrac{7}{5} e^{-3t} + e^{3t}$$

Aufgabe 27

(5 Punkte)

Mit Hilfe der Laplacetransformation löse

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = \begin{cases} 2e^{-(t-1)}, & t \geq 1, \\ 0, & 0 \leq t < 1, \end{cases}$$

mit den Anfangswerten $x(0) = 0$ und $x'(0) = 1$.

$$\text{Sei } f(t) = \begin{cases} 2e^{-(t-1)} & t \geq 1 \\ 0 & 0 \leq t < 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_1^\infty 2e^{-(t-1)} e^{-st} \, dt$$

$$= \int_1^\infty 2e \cdot e^{(-1-s)t} \, dt$$

$$= \lim_{b \to \infty} \frac{2e}{-1-s} e^{(-1-s)t} \Big|_1^b$$

$$= \frac{2e}{-1-s} \cdot \left(-e^{-1-s}\right)$$

$$= \frac{2e}{1+s} e^{-1-s}$$

$$\mathcal{L}[x''(t)] + 2\mathcal{L}[x'(t)] + \mathcal{L}[x(t)] = \frac{2e}{1+s} e^{-1-s}$$

$$s^2 X(s) - s \cdot X(0) - X'(0) + 2\left(s X(s) - X(0)\right) + X(s) = \frac{2e}{1+s} e^{-1-s}$$

$$(s^2 + 2s + 1) X(s) - 1 = \frac{2e}{1+s} e^{-1-s}$$

$$X(s) = \frac{2e^{-s}}{(s+1)^3} + \frac{1}{(s+1)^2}$$