Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen
(Tutorium 7)

Vorlesungswoche: 3. – 7. Juni 2024 | Sommersemester 2024

Aufgabe 19

Bestimme ein reelles Fundamentalsystem für die folgenden Differentialgleichungen:

(a) $x'''(t) - x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = 0$,

(b) $x''(t) + 6x'(t) + 9x(t) = 0$,

(c) $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 0$,

(d) $x^{(4)}(t) - 4x'''(t) + 8x''(t) - 8x'(t) + 4x(t) = 0$.

Hinweis: Eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms in (d) ist $1 + \mathrm{i}$.

Aufgabe 20

Der Fall eines Körpers im Schwerefeld mit geschwindigkeitslinearer Reibung (etwa der Fall in einer zähen Flüssigkeit), wird im wesentlichen durch die Differentialgleichung

$$x''(t) = -\gamma x'(t) + g$$

modelliert, wobei γ der Stärke der Reibung entspricht. Löse das Anfangswertproblem, wenn sich der Körper zur Zeit $t = 0$ in Ruhe an der Position x_0 befindet. Wie bewegt sich der Körper in ferner Zukunft?

Aufgabe 21

Wähle eine geeignete Ansatzfunktion entsprechend der rechten Seite, um eine partikuläre Lösung der folgenden Differentialgleichungen zu bestimmen:

(a) $x''(t) - x'(t) - 6x(t) = 8\mathrm{e}^{8t}$,

(b) $x'''(t) + x'(t) = 14\cos(t)$,

(c) $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = t\mathrm{e}^{-t}$.

Lineare DGLs höherer Ordnung

↳ homogen $x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + a_2 x^{(n-2)}(t) + \dots + a_n x(t) = 0$

konstant

① charakterisches Polynom

$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0 \Rightarrow \lambda_{1,\dots,n}$

② Fundamentale System

2.1) Reelle, einfache Nullstelle (NST) λ_i: $\Rightarrow x_i(t) = e^{\lambda_i t}$

2.2) Reelle, k-fache NST $\lambda_{i,\dots,k-1+i}$ $\Rightarrow x_i(t) = e^{\lambda_i t}$ $\quad x_{i+1}(t) = te^{\lambda_i t}$

$x_{i+2}(t) = t^2 e^{\lambda_i t} \dots x_{i+k-1}(t) = t^{k-1} e^{\lambda_i t}$

2.3) Einfaches komplexes-konjugiertes NST-Paar $\lambda_{i,i+1} = \alpha \pm i\beta$

$\Rightarrow x_i(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t) \quad x_{i+1}(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$

2.4) k-faches komplex-konjugiertes NST-Paar $\lambda_{i,\dots,2k-1+i} = \alpha \pm i\beta$

$\Rightarrow x_i(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t) \quad x_{i+1}(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$

$x_{i+2}(t) = te^{\alpha t}\cos(\beta t) \quad x_{i+3}(t) = te^{\alpha t}\sin(\beta t)$

$x_{i+2k-2} = t^{k-1}e^{\alpha t}\cos(\beta t) \quad x_{i+2k-1} = t^{k-1}e^{\alpha t}\sin(\beta t)$

③ Allgemeine Lösung:

$x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + \dots + C_nx_n(t)$

Aufgabe 19

Bestimme ein reelles Fundamentalsystem für die folgenden Differentialgleichungen:

(a) $x'''(t) - x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = 0$,

(b) $x''(t) + 6x'(t) + 9x(t) = 0$,

(c) $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 0$,

(d) $x^{(4)}(t) - 4x'''(t) + 8x''(t) - 8x'(t) + 4x(t) = 0$.

Hinweis: Eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms in (d) ist $1 + i$.

(a) ① $P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \quad \lambda_1 = 1$

$\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4 : \lambda - 1 = \lambda^2 - 4 = (\lambda+2)(\lambda-2)$

$\underline{\lambda^3 - \lambda^2}$

$-4\lambda + 4$

$\lambda_{2,3} = \pm 2$

② FS: 2.1) $x_1(t) = e^t \quad x_2(t) = e^{2t} \quad x_3(t) = e^{-2t}$

③ $x(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{-2t}$

b) ① $P(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \quad \lambda_{1,2} = -3$

② 2.2) $x_1(t) = e^{-3t} \quad x_2(t) = te^{-3t}$

③ $x(t) = C_1e^{-3t} + C_2te^{-3t}$

c) ① $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm i$

② FS 2.3) $x_1(t) = e^{2t}\cos(t) \quad x_2(t) = e^{2t}\sin(t)$

③ $x(t) = C_1e^{2t}\cos(t) + C_2e^{2t}\sin(t)$

d) ① $P(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1+i \quad \lambda_2 = 1-i$

$(\lambda - (1+i))(\lambda - (1-i)) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$

$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 : \lambda^2 - 2\lambda + 2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$

$\underline{\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2}$

$-2\lambda^3 + 6\lambda^2 - 8\lambda + 4$

$\underline{-2\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda}$

$2\lambda^2 - 4\lambda + 4$

$\lambda_{3,4} = 1 \pm i$

② FS (2·4) $x_1(t) = e^t\cos(t) \quad x_2(t) = e^t\sin(t)$

$x_3(t) = te^t\cos(t) \quad x_4(t) = te^t\sin(t)$

③ $x(t) = C_1 e^t\cos(t) + C_2 e^t\sin(t) + C_3 te^t\cos(t) + C_4 te^t\sin(t)$

Lineare DGLs höherer Ordnung

↳ inhomogen

$$x^{(n)}(t) + \underbrace{a_1 x^{(n-1)}(t) + a_2 x^{(n-2)}(t) + \dots + a_n x(t)}_{\text{konstant}} = b(t)$$

① zugehörige homogen Lösung: $(b(t) = 0) \Rightarrow x_H(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \dots + C_n x_n(t)$

② Partikuläre Lsg:

$\boxed{\text{VdK:}}$ $x_p(t) = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t) + \dots + C_n(t)x_n(t)$

$W(t)\cdot\vec{C}'(t) = \vec{b}(t)$ mit $W(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ $\vec{b}(t) = \left.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}\right\} n$

↳ nach $\vec{C}'(t)$ lösen

↳ $C_1 = \int c_1'(t)\,dt$

$C_n = \int c_n'(t)\,dt$

↳ $C_1, C_2, \dots, C_n$ in Ansatz $\rightarrow x_p(t)$

③ Allg. inhomogen Lsg:

$x(t) = x_H(t) + x_p(t)$

Ansatz von Typ der rechten Seite

① Ansatz in Abhängigkeit von $b(t)$

$b(t)$	$x_p(t)$
$b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m$	$A_0 + A_1 t + \dots + A_m t^m$, falls 0 keine NST von $P(\lambda)$ ist $t^k(A_0 + A_1 t + \dots A_m t^m)$, falls 0 eine k-fache NST von $P(\lambda)$ ist
$e^{\alpha t}(b_0 + b_1 t + \dots b_n t^n)$	$e^{\alpha t}(A_0 + A_1 t + \dots + A_n t^n)$ falls α keine NST von $P(\lambda)$ ist $t^k e^{\alpha t}(A_0 + A_1 t + \dots + A_n t^n)$ falls α k-fache NST von $P(\lambda)$ ist

② Ansatz in DGL einsetzen

Aufgabe 20

Der Fall eines Körpers im Schwerefeld mit geschwindigkeitslinearer Reibung (etwa der Fall in einer zähen Flüssigkeit), wird im wesentlichen durch die Differentialgleichung

$$x''(t) = -\gamma x'(t) + g$$

$\underline{x(0) = x_0}$ zur Zeit $t=0$ $\quad \underline{x'(0) = 0}$ in Ruhe

modelliert, wobei γ der Stärke der Reibung entspricht. Löse das Anfangswertproblem, wenn sich der Körper zur Zeit $t = 0$ in Ruhe an der Position x_0 befindet. Wie bewegt sich der Körper in ferner Zukunft?

物体在引力场中以速度-线性摩擦的下落（例如在粘性液体中的下落）基本上由微分方程 x'' (t) = −γx' (t) +g 建模，其中 γ 对应于摩擦强度。如果身体在时间 t = 0 时在位置 x0 处于静止状态，则求解初始值问题。在遥远的未来，身体将如何运动？

$$\Rightarrow x''(t) + \gamma x'(t) = g$$

① hom. LSG: $x_h'' + \gamma x_h' = 0$

1.1 $P(\lambda) = \lambda^2 + \gamma\lambda = 0$ $\lambda_1 = -\gamma$ $\lambda_2 = 0$

1.2 $x_1(t) = e^{-\gamma t}$ $x_2(t) = e^0 = 1$

1.3 $x(t) = C_1 e^{-\gamma t} + C_2$

② Par. Lsg ATS

2.1 $b(t) = g$ $\Rightarrow x_p(t) = tA_0$

2.2 $x_p'(t) = A_0$ $x_p''(t) = 0$

in DGL $0 + \gamma A_0 = g$ $\Rightarrow A_0 = \frac{g}{\gamma}$

$$\Rightarrow x_p(t) = \frac{g}{\gamma} t$$

③ Allg. LSG

$x(t) = x_H(t) + x_p(t) = C_1 e^{-\gamma t} + C_2 + \frac{g}{\gamma} t$

$x'(t) = -C_1 \gamma e^{-\gamma t} + \frac{g}{\gamma}$

$x'(0) = -C_1\gamma + \frac{g}{\gamma} = 0$ $\Rightarrow$ $C_1 = \frac{g}{\gamma^2}$

$x(0) = C_1 + C_2 = x_0$ $C_2 = x_0 - \frac{g}{\gamma^2}$

$\Rightarrow x(t) = \frac{g}{\gamma^2} e^{-\gamma t} + x_0 - \frac{g}{\gamma^2} + \frac{g}{\gamma} t$

Aufgabe 21

Wähle eine geeignete Ansatzfunktion entsprechend der rechten Seite, um eine partikuläre Lösung der folgenden Differentialgleichungen zu bestimmen:

(a) $x''(t) - x'(t) - 6x(t) = 8e^{8t}$,

(b) $x'''(t) + x'(t) = 14\cos(t)$,

(c) $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = te^{-t}$.

a) ① hom. Lsg: $x_H(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t}$

② ATS.   2.1 $b(t) = 8e^{8t}$ $\Rightarrow x_p(t) = e^{8t} A_0$

2.2 $x_p'(t) = 8A_0 e^{8t}$ $x_p''(t) = 64 A_0 e^{8t}$

in DGL: $64 A_0 e^{8t} - 8A_0 e^{8t} - 6e^{8t} A_0 = 50 A_0 e^{8t} = 8e^{8t}$

$\Rightarrow A_0 = \frac{8}{50} = \frac{4}{25}$

$$\Rightarrow x_p(t) = \frac{4}{25} e^{8t}$$

③ Allg. LSG: $x(t) = x_H(t) + x_p(t)$

c) ① hom. LSG $x_H = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}$ $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda+1)^2$

② VdK $x_p(t) = C_1(t) e^{-t} + C_2(t)\, t e^{-t}$

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-t} & e^{-t} - te^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ te^{-t} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} C_1' = -t^2 \\ C_2' = t \end{matrix}$$

$C_1(t) = \int -t^2\,dt = -\frac{1}{3}t^3$ $C_2(t) = \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2$

$x_p(t) = t^2 e^{-t}(A_0 + A_1 t) = A_0 t^2 e^{-t} + A_1 t^3 e^{-t}$

$x_p'(t) = A_0(2te^{-t} - t^2 e^{-t}) + A_1(3t^2 e^{-t} - t^3 e^{-t})$

$= 2A_0 t e^{-t} + (3A_1 - A_0) t^2 e^{-t} - A_1 t^3 e^{-t}$

$x_p''(t) = 2A_0(\cancel{e^{-t}} - \cancel{te^{-t}}) + (3A_1 - A_0)(\cancel{2te^{-t}} - t^2 e^{-t})$

$- A_1(3t^2 e^{-t} - t^3 e^{-t})$

$= 2A_0 e^{-t} + (-4A_0 + 6A_1) t e^{-t}$

$+ (-6A_1 + A_0) t^2 e^{-t} + A_1 t^3 e^{-t}$

$x_p(t) = -\frac{1}{3}t^3e^{-t} + \frac{1}{2}t^3e^{-t} = \frac{1}{6}t^3e^{t}$

$x_p'' + 2x_p' + x_p = 2A_0e^{-t} + (\quad 6A_1)te^{-t} = te^{-t}$

$A_0 = 0 \qquad A_1 = \frac{1}{6}$

$x_p(t) = \frac{1}{6}t^3e^{-t}$

b) $P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad \lambda_{2,3} = \pm i$

$x_H(t) = c_1e^0 + c_2\cos(t) + c_2\sin(t)$

$b(t) = 14\cos(t) \qquad x_p(t) = t\cos(t)A + t\sin(t)B$

$x'_p(t) = \cos(t)\cdot A - t\sin(t)\cdot A + \sin(t)B + t\cos(t)B$

$x''_p(t) = -\sin(t)\cdot A - \sin(t)A - t\cos(t)A + \cos(t)B + \cos(t)B - t\sin(t)B$

Ansatz vom Typ der rechten Seite

Gesucht wird eine partikuläre Lösung $y_p(x)$ der *lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = b(x)$$

mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Wesentlich für die Lösung dieser DGL ist ihr *charakteristisches Polynom*

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{(n-1)} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0\,.$$

Die Variation der Konstanten führt zwar immer zum Ziel, kann aber im Einzelfall, besonders für DGLn höherer Ordnung, sehr aufwändig werden. Für gewisse Typen von Störfunktionen sind daher spezielle Ansätze für y_p effizienter (Ansatz vom Typ der rechten Seite). Dabei geht man davon aus, dass eine partikuläre Lösung ungefähr die gleiche Bauart besitzt wie die Störfunktion $b(x)$ (=Inhomogenität, rechte Seite, Anregung).
In der Tabelle sind nur einige mögliche Ansätze ohne Anspruch auf Vollständigkeit aufgeführt. Für Störglieder mit $\sinh(\beta x)$ oder $\cosh(\beta x)$ kann man das entsprechend machen.
Ist der Ansatz schon als Teil der homogenen Lösung vorhanden (*Resonanzfall*), muss solange mit x multipliziert werden, bis dieser keine Teilmenge der homogenen Lösung mehr enthält.
In der Tabelle seien $b_0, \ldots, b_m, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ durch das Störglied gegeben und die Zahlen $A_0, \ldots, A_m$ und $B_0, \ldots, B_m \in \mathbb{R}$ zu bestimmen.

Störfunktion $b(x)$	**Ansatz**
$b(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$	$y_p(x) = A_0 + A_1x + \ldots + A_mx^m$ falls 0 keine Nullstelle von $p(\lambda)$ $y_p(x) = x^k(A_0 + A_1x + \ldots + A_mx^m)$ falls 0 eine k-fache Nullstelle von $p(\lambda)$
$b(x) = e^{\alpha x}(b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m)$	$y_p(x) = e^{\alpha x}(A_0 + A_1x + \ldots + A_mx^m)$ falls α keine Nullstelle von $p(\lambda)$ $y_p(x) = x^ke^{\alpha x}(A_0 + A_1x + \ldots + A_mx^m)$ falls α eine k-fache Nullstelle von $p(\lambda)$
$b(x) = \cos(\beta x)(b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m)$ oder $b(x) = \sin(\beta x)(b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m)$	$y_p(x) = \cos(\beta x)(A_0 + A_1x + \ldots + A_mx^m)$ $+\sin(\beta x)(B_0 + B_1x + \ldots + B_mx^m)$ falls $i\beta$ keine Nullstelle von $p(\lambda)$ $y_p(x) = x^k\cos(\beta x)(A_0 + A_1x + \ldots + A_mx^m)$ $+x^k\sin(\beta x)(B_0 + B_1x + \ldots + B_mx^m)$ falls $i\beta$ eine k-fache Nullstelle von $p(\lambda)$
$b(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)(b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m)$ oder $b(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)(b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m)$	$y_p(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)(A_0 + A_1x + \ldots + A_mx^m)$ $+e^{\alpha x}\sin(\beta x)(B_0 + B_1x + \ldots + B_mx^m)$ falls $\alpha + i\beta$ keine Nullstelle von $p(\lambda)$ $y_p(x) = x^ke^{\alpha x}\cos(\beta x)(A_0 + A_1x + \ldots + A_mx^m)$ $+x^ke^{\alpha x}\sin(\beta x)(B_0 + B_1x + \ldots + B_mx^m)$