FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin

SoSe 2024
Stand: 3. Mai 2024

2. Tutoriumsblatt – Diskrete Strukturen

(Besprechung in den Tutorien in der Woche vom 06.05.2024)

Aufgabe 1

Ihr wurdet beim Erkunden an der Marchstraße entdeckt und seid auf der Flucht. Ihr flieht in das Tel-Gebäude.

(i) Das Tel-Gebäude hat 20 Stockwerke und jedes Stockwerk hat 17 Räume. Ihr rennt in den Fahrstuhl, drückt auf einen beliebigen Knopf und verteilt euch dann in drei Räumen auf dem Stockwerk auf dem ihr ankommt. Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es, in welchen Räumen ihr unterkommt?

(ii) Ihr plant den Eingang zu dem Stockwerk strategisch zu kontrollieren. Eysan schlägt vor, ihn zu versperren. Dafür bräuchtet ihr 5 der 9 Möbel, die ihr in der Nähe auftreiben könnt. Justin schlägt vor stattdessen 3 Personen von euch 18 zu bestimmen, die den Eingang nacheinander überwachen. Wie viele Möglichkeiten der Blockierung gibt es?

(iii) Ihr habt in einem eurer Räume ein Bettenlager mit 18 Betten aufgebaut. Wie viele Möglichkeiten gibt es jedem von euch ein Bett zuzuteilen?

(iv) Ihr teilt allen Anwesenden Wachtschichten zu. Ab wie vielen Schichten muss mindestens eine Person mindestens 4 Schichten machen?

Aufgabe 2

Beim Beobachten der Suchenden aus dem Fenster des Gebäudes meint Anna: “In den letzten 30 Minuten habe ich jede Minute mindestens einen Suchenden vorbeilaufen sehen. Die Gesamtzahl lag allerdings unter 45.”

Dir fällt auf, dass es somit eine Abfolge von Minuten gab in welchen genau 15 vorbeigelaufen sind.

Beweise deine Vermutung.

Aufgabe 3

Ihr merkt, dass der Essensplan, den ihr letzte Woche erstellt habt, zu viele ungeniessbare Gerichte produziert. Ihr habt weiterhin viel Vorrat von 12 unterschiedlichen Zutaten. Wie viele mögliche Gerichte gibt es, wenn jedes Gericht aus 4 Zutaten besteht und Kartoffeln oder Nudeln oder Reis und Bohnen enthält?

Frage. Was ist die Anzahl der Möglichkeiten, k Elemente aus einer Menge M mit n Elementen zu ziehen?

	Reihenfolge wichtig (geordnet)	Reihenfolge nicht wichtig (ungeordnet)
Mit Zurücklegen	n^k	$\binom{k+n-1}{k}$
Ohne Zurücklegen	$n^{\underline{k}} := \binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Aufgabe 1

Ihr wurdet beim Erkunden an der Marchstraße entdeckt und seid auf der Flucht. Ihr flieht in das Tel-Gebäude.

(i) Das Tel-Gebäude hat 20 Stockwerke und jedes Stockwerk hat 17 Räume. Ihr rennt in den Fahrstuhl, drückt auf einen beliebigen Knopf und verteilt euch dann in drei Räumen auf dem Stockwerk auf dem ihr ankommt. Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es, in welchen Räumen ihr unterkommt?

(i) Tel 大楼有 20 层，每层有 17 个房间。你们跑进电梯，按下任意按钮，然后在你们到达的那一层的 3 个房间中分配自己。你们有多少种不同的方式可以分配到不同的房间?

$$20\binom{17}{3}$$

(ii) Ihr plant den Eingang zu dem Stockwerk strategisch zu kontrollieren. Eysan schlägt vor, ihn zu versperren. Dafür bräuchtet ihr 5 der 9 Möbel, die ihr in der Nähe auftreiben könnt. Justin schlägt vor stattdessen 3 Personen von euch 18 zu bestimmen, die den Eingang nacheinander überwachen. Wie viele Möglichkeiten der Blockierung gibt es?

(ii) 你们计划战略性地控制楼层入口。Eysan 提议封锁它。为此，你们需要附近能找到的 9 件家具中的 5 件。Justin 提议从你们的 18 个人中选出 3 个人轮流监控入口。封锁有多少种可能性?

$$\binom{9}{5}+\binom{18}{3}\cdot 3!$$

这两事件是disjunkt 所以用 Summenregel

(iii) Ihr habt in einem eurer Räume ein Bettenlager mit 18 Betten aufgebaut. Wie viele Möglichkeiten gibt es jedem von euch ein Bett zuzuteilen?

$$\binom{18}{17}\cdot 17! = \frac{18!}{1!\,17!}\cdot 17! = 18!$$

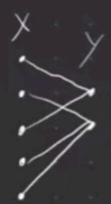
(iv) Ihr teilt allen Anwesenden Wachtschichten zu. Ab wie vielen Schichten muss mindestens eine Person mindestens 4 Schichten machen?

你们将所有在场的人分配到不同的守卫轮班。至少需要多少班次，才能保证每班~~至少有一个人~~?

一个人 4次

Schubfachprinzip

$$f: X \to Y,\quad \frac{|X|}{|Y|} > k \Rightarrow \exists y \in Y.\ |f^{-1}(y)| > k$$



X: Schichten

Y: 18 Personen

$$\frac{|X|}{|Y|} = \#\text{ Schichten eine Person} \geq 4$$

$$\to \frac{|X|}{|Y|} > 3$$

$$|X| > 3\cdot|Y| = 3\cdot 18$$

$$|X| = 3\cdot 18 + 1$$

Aufgabe 2

Beim Beobachten der Suchenden aus dem Fenster des Gebäudes meint Anna: “In den letzten 30 Minuten habe ich jede Minute mindestens einen Suchenden vorbeilaufen sehen. Die Gesamtzahl lag allerdings unter 45.”

Dir fällt auf, dass es somit eine Abfolge von Minuten gab in welchen genau 15 vorbeigelaufen sind.

Beweise deine Vermutung.

$|X| = 30$ min $\quad |Y| < 45$

$\frac{|X|}{|Y|} > \frac{2}{3} \quad \frac{3}{2} > \frac{|Y|}{|X|} > 1$

任务 2

在通过建筑物的窗户观察路人的时候，安娜说道：“在过去的30分钟里，我每分钟至少看到一个路人经过。然而，总数少于45。”

你注意到，这意味着一定存在一个连续的时间段，在这个时间段内恰好有15个路人经过。

证明你的猜想。

Lösung zu Aufgabe 2

Sei a_i mit $0 \le i \le 30$ die Anzahl der Suchenden, die bis zur einschließlich i-ten Minute vorbeigelaufen sind, und es sei $b_i = a_i + 15$ für $0 \le i \le 30$.

Dann enthält die Reihe $a_0, a_1, \ldots, a_{30}, b_0, b_1, \ldots, b_{30}$ genau 62 Zahlen im Bereich von 0 bis 59. Nach dem Schubfachprinzip muss daher mindestens eine Zahl doppelt vorkommen. Da sowohl die a_is als auch die b_is untereinander verschieden sind, muss es ein a_i und ein b_j geben mit $a_i = b_j$, und somit gilt $a_i = a_j + 15$.

设 a_i 表示到第 i 分钟（包括第 i 分钟）为止经过的路人数，其中 $0 \le i \le 30$，并且设 $b_i = a_i + 15$ 对于 $0 \le i \le 30$。

那么序列 $a_0, a_1, \ldots, a_{30}, b_0, b_1, \ldots, b_{30}$ 共有 62 个数字，范围在 0 到 59 之间。根据抽屉原理，至少有一个数字是重复的。由于 a_i 和 b_i 彼此不同，所以一定存在一个 $a_i = b_j$，因此 $a_i = a_j + 15$。

Aufgabe 3

Ihr merkt, dass der Essensplan, den ihr letzte Woche erstellt habt, zu viele ungeniessbare Gerichte produziert. Ihr habt weiterhin viel Vorrat von 12 unterschiedlichen Zutaten. Wie viele mögliche Gerichte gibt es, wenn jedes Gericht aus 4 Zutaten besteht und Kartoffeln oder Nudeln oder Reis und Bohnen enthält?

你们发现上周制定的食谱计划生成了太多无法食用的菜肴。你们仍有大量的12种不同的原料。如果每道菜由4种原料组成，并且其中必须包含土豆或面条或米饭和豆类，那么有多少种可能的菜肴?

Lösung zu Aufgabe 3

Nach Prinzip von Inklusion und Exklusion gibt es

$$\binom{11}{3} + \binom{11}{3} + \binom{10}{2} - \binom{10}{2} - \binom{9}{1} - \binom{9}{1} + \binom{8}{0} = 313$$

viele unterschiedliche Gerichte.

FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

SoSe 2024
Veröffentlichung: 3. Mai 2024

2. freiwillige Übung – Diskrete Strukturen

Abgabe: bis 10:30 am 16.05.2024 im ISIS-Kurs [SoSe 2024] Diskrete Strukturen

Aufgabe 4

Geben Sie Formeln an, um die folgenden Zählprobleme zu lösen.

(i) Es sind n gleiche Kugeln gegeben, die auf zwei Kisten A und B aufgeteilt werden sollen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Kugeln zu verteilen?

(ii) Wir haben eine gerade Anzahl $n = 2k$ gleiche Kugeln, aber nun drei Kisten A, B und C. In Kiste A sollen wenigstens 2 Kugeln liegen und Kiste C darf höchstens $\frac{n}{2} = k$ Kugeln enthalten. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Kugeln zu verteilen?

Aufgabe 5

Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe des Schubfachprinzips:

(i) Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ definieren wir die Menge $A_n = \{2, 3, 4, \ldots, 2n-3, 2n-2, 2n-1\}$. Sei $S \subseteq A_n$ eine beliebige Menge mit $|S| = n$. Zeigen Sie, dass S zwei Elemente a, b enthält mit $a + b = 2n + 1$.

(ii) In jeder Auswahl von $3n - 2$ Teilmengen mit jeweils 3 Elementen aus $\{1, \ldots, n\}$ finden sich zwei Mengen, sodass die Summen ihrer Elemente übereinstimmen.

Aufgabe 6

Zum Zeitvertreib habt ihr euch aus herumliegenden Materialien ein Spiel gebaut. Ein Zug läuft so ab: Zuerst würfelt man mit einem Würfel. Falls dieser eine 6 anzeigt würfelt man einen zweiten Würfel. Dann bewegt man eine seiner 4 Figuren so viele Felder auf dem Board vorwärts oder rückwärts wie die Summe der Würfel anzeigt. Anschließend zieht man eine grüne oder rote Ereigniskarte nach Wahl. Es gibt 5 unterschiedliche grüne Ereigniskarten, die alle deine Figur entweder $1-3$ Felder nach vorne bewegen oder $1-2$ Felder zurück. Wenn man eine rote Ereigniskarte zieht, wiederholt man diesen Prozess solange bis man eine Stop Karte zieht. und bewegt, dann die bereits zuvor bewegte Figur so viele Felder nach vorne wie die Summe der roten Karten ist, die vor der Stop Karte aufgedeckt wurden. Anschließend werden die gezogenen Karten wieder reingemischt. Der rote Stapel enthält 5 2-Karten, 10 1 Karten und 3 Stop-Karten. Wie viele unterschiedliche Züge gibt es von derselben Startposition?

Aufgabe 7

Sei A die Menge solcher Permutationen des Alphabets, die das Wort "alt" enthalten. Sei B die Menge derer Permutationen des Alphabets bei denen "a" unter den ersten 5 Buchstaben ist. Sei C die Menge jener Permutationen des Alphabets, die das Wort "tenor" enthalten. Sei D die Menge der Permutationen des Alphabets, die mit "xyz" enden.

Berechne $|A \cup B \cup C \cup D|$.