Zusatzaufgaben 5

Aufgabe 1: Grammatiken und Sprachen I

Gegeben sei die Grammatik $G = (\{ S, A, B \}, \{ a, b \}, P, S)$ mit:

$$\begin{array}{llll} P: & S & \to & \varepsilon \mid aA \mid Bb \\ & A & \to & aS \\ & B & \to & Sbb \end{array}$$

1.a) *Begründe:* Welche der Wörter ε, $aaaa$, $aabbb$ und $aabaabb$ werden von G erzeugt und welche nicht? Gib gegebenenfalls eine Ableitung für das jeweilige Wort und sonst eine Begründung dafür an, warum das Wort nicht in der von G erzeugten Sprache liegt.

Lösung

Die ersten drei Wörter werden von G erzeugt:

$$S \Rightarrow_G \varepsilon$$
$$S \Rightarrow_G aA \Rightarrow_G aaS \Rightarrow_G aaaA \Rightarrow_G aaaaS \Rightarrow_G aaaa$$
$$S \Rightarrow_G aA \Rightarrow_G aaS \Rightarrow_G aaBb \Rightarrow_G aaSbbb \Rightarrow_G aabbb$$

Keine Regel in G „erzeugt“ mehr als ein Nichtterminal und jede Regel „verbraucht“ ein Nichtterminal, d. h. jedes von G erzeugte Wort enthält höchstens ein Nichtterminal. Die einzigen Regeln zum Erzeugen von a's sind die Regeln $S \to aA$ und $A \to aS$. Die einzigen Regeln zum Erzeugen von b's sind die Regeln $S \to Bb$ und $B \to Sbb$. Mit diesen Regeln werden a's immer links vom Nichtterminal und b's immer rechts vom Nichtterminal erzeugt. Das Wort $aabaabb$ kann demnach nicht von G erzeugt werden, da es in G nicht möglich ist, rechts von einem b ein a zu erzeugen.

/Lösung

1.b) *Gib* die Sprache $L(G)$ *an*.

Lösung

$L(G) = \{ a^{2n}b^{3m} \mid n, m \in \mathbb{N} \}$

/Lösung

1.c) *Begründe:* Welche Wörter liegen in $L(G)$ und in $L(G)^n$ mit $n \in \mathbb{N}^+$, d.h. welche Wörter liegen in $L(G) \cap L(G)^n$?

Lösung

Alle Wörter aus $L(G)$ sind auch in $L(G)^n$, da $\varepsilon \in L(G)$, insbesondere gilt auch $\varepsilon \in L(G)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $L(G) \cap L(G)^n = L(G)$ (Beachte: $L(G)^0 = \{ \varepsilon \}$)

/Lösung

1.d) *Begründe:* Wie muss n gewählt werden, damit $bbbaabbbaa \in L(G)^n$?

Lösung

$bbb, aabbb, aa \in L(G)$ und $bbb \cdot aabbb \cdot aa = bbbaabbbaa$, also ist $bbbaabbbaa \in L(G)^n$ für alle $n \geqslant 3$. (Beachte: $L(G)^1 = L(G)$)

/Lösung

1.e) *Gib an:* Erzeuge die Grammatik G' aus G durch Ergänzen von P um eine neue Regel, so dass zum Beispiel auch das Wort aab erzeugt werden kann und gib die Sprache $L(G')$ an.

Lösung

$G' = (\{ S, A, B \}, \{ a, b \}, P', S)$, wobei P' gleich P ist, so um eine Regel ergänzt, dass aab erzeugt werden kann. Da das Alphabet der Nichtterminale nicht verändert werden und nur eine neue Regel hinzugefügt werden soll, bieten sich vor allem die folgenden zwei Möglichkeiten an:
1) Ergänze die Regel $S \to aab$, dann ist

$$L(G') = L(G) \cup \{ a^n aabb^m \mid n, m \in \mathbb{N} \land n \mod 2 = 0 \land m \mod 3 = 0 \}$$

2) Ergänze die Regel $B \to \varepsilon$ oder $S \to b$, dann ist

$$L(G') = \{\, a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \wedge n \bmod 2 = 0 \wedge m \bmod 3 \in \{\, 0,\ 1 \,\} \,\}$$

/Lösung

1.f) *Gib an:* Erzeuge die Grammatik G'' aus G durch Reduzieren von P um komplette Regeln, so dass $L(G'') = L(G) \cap \{\, w \mid w \in \{\, b \,\}^* \,\}$. Gib G'' und $L(G'')$ an.

Lösung

$G'' = (\{\, S,\ A,\ B \,\}, \{\, a,\ b \,\}, P'', S)$, wobei P'' gleich P ohne die folgenden Regel(n) ist.
$L(G'') = \{\, b^m \mid m \in \mathbb{N} \wedge m \bmod 3 = 0 \,\}$, d.h. $L(G'')$ enthält keine Wörter mehr, die a's enthalten. Es genügt deshalb in P die Regel $S \to aA$ zu entfernen, denn ohne diese Regel können keine a's mehr erzeugt werden.
Ohne diese Regel sind auch die Regel $A \to aS$, da diese nicht mehr erreicht werden kann, und damit auch das Nichtterminal A überflüssig. Die Regel $A \to aS$ könnte also auch noch entfernt werden. Überflüssige Regeln oder Nichtterminale stören aber auch nicht.
Alternativ würde es auch genügen, nur die Regel $A \to aS$ zu entfernen. Man könnte dann immer noch die Regel $S \to aA$ anwenden und somit ein a in einer Ableitungsfolge erzeugen, aber diese Ableitungsfolge kann dann nicht weiter geführt werden, da es ohne $A \to aS$ keine Regeln für A gibt. Damit können auf diesem Weg keine Wörter mehr abgeleitet werden.

/Lösung

1.g) *Gib an:* Erzeuge die Grammatik G''' aus G, so dass

$$L(G''') = L(G) \cap \{\, w \in \{\, a,\ b \,\}^* \mid |w| \geqslant 2 \,\}$$

Lösung

$L(G''') = \{\, a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \wedge n \bmod 2 = 0 \wedge m \bmod 3 = 0 \wedge |w| \geqslant 2 \,\}$
Auch hier gibt es verschiedene Möglichkeiten. Man kann zum Beispiel in P die Regel $S \to \varepsilon$ streichen und die Regeln $S \to aa$ und $S \to bbb$ ergänzen. Damit ergibt sich:

$$G''' = \big(\{\, S,\ A,\ B \,\}, \{\, a,\ b \,\}, P''', S\big) \text{ mit}$$

$$\begin{array}{lrcl} P''': & S & \to & aa \mid bbb \mid aA \mid Bb \\ & A & \to & aS \\ & B & \to & Sbb \end{array}$$

/Lösung

1.h) *Gib an:* Erzeuge die Grammatik G'''' aus G, so dass

$$L(G'''') = L(G) \cup \{\, w \in \{\, c \,\}^* \mid |w| \geqslant 2 \,\}$$

Lösung

Auch hier gibt es verschiedene Möglichkeiten. Man muss zuerst die Menge der Terminale um c ergänzen. Dann kann man zum Beispiel die Menge der Nichtterminale um C und S' ergänzen, S' zum neuen Startsymbol machen und P um die Regeln $S' \to S$, $S' \to C$, $C \to Cc$ und $C \to cc$ ergänzen. Damit ergibt sich:

$$G'''' = \big(\{\, S',\ S,\ A,\ B,\ C \,\}, \{\, a,\ b,\ c \,\}, P'''', S'\big) \text{ mit}$$

$$\begin{array}{lrcl} P'''': & S' & \to & S \mid C \\ & S & \to & \varepsilon \mid aA \mid Bb \\ & A & \to & aS \\ & B & \to & Sbb \\ & C & \to & cc \mid cC \end{array}$$

/Lösung

Aufgabe 2: Sprachen und Grammatiken II

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma = \{ \square, \ \diamond \}$ und die Sprachen

$A_1 = \{ w \in \Sigma^* \mid |w| \mod 2 = 0 \}$

$A_2 = \{ w \in \Sigma^+ \mid \square$ und $\diamond$ wechseln sich in w ab $\}$

2.a) *Gib* zwei verschiedene Wörter *an*, die in A_1 enthalten sind, und zwei Wörter, die in A_1 nicht enthalten sind.

Lösung

z.B.: $\varepsilon, \square\diamond \in A_1$ und $\square, \diamond \notin A_1$

/Lösung

2.b) *Gib* eine Grammatik G_1 *an*, so dass $L(G_1) = A_1$.

Lösung

$G_1 = (\{ S, \ T \}, \Sigma, P_1, S)$ mit

$$\begin{aligned} P_1 : \quad S &\rightarrow \varepsilon \mid \square T \mid \diamond T \\ T &\rightarrow \square S \mid \diamond S \end{aligned}$$

/Lösung

2.c) *Gib* zwei verschiedene Wörter *an*, die in A_2 enthalten sind, und zwei Wörter, die in A_2 nicht enthalten sind.

Lösung

$\square, \square\diamond \in A_2$ und $\varepsilon, \diamond\diamond \notin A_2$

/Lösung

2.d) *Gib* eine Grammatik G_2 *an*, so dass $L(G_2) = A_2$.

Lösung

$G_2 = (\{ S, \ T, \ U \}, \Sigma, P_2, S)$ mit

$$\begin{aligned} P_2 : \quad S &\rightarrow \square T \mid \diamond U \\ T &\rightarrow \varepsilon \mid \diamond U \\ U &\rightarrow \varepsilon \mid \square T \end{aligned}$$

/Lösung

Aufgabe 3: Sprachen und Grammatiken III

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma = \{ a, \ b \}$ und die Sprachen

$A_1 = \{ a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \wedge m = 2n \} \cap \{ aab, \ abb, \ bab, \ bba, \ bbb \}$

$A_2 = \{ w \in \Sigma^* \mid |w|_a$ ist gerade $\wedge |w|_b$ ist ungerade $\}$

3.a) *Gib* eine Grammatik G_1 *an*, so dass $L(G_1) = A_1$.

Lösung

$A_1 = \{ abb \}$ und damit ist

$G_1 = (\{ S \}, \Sigma, P_1, S)$ mit

$$P_1 : \quad S \rightarrow abb$$

/Lösung

3.b) *Gib* eine Grammatik G_2 *an*, so dass $L(G_2) = A_2$.

Lösung

$G_2 = (\{ S, \ T \}, \Sigma, P_2, S)$ mit

$$\begin{aligned} P_2 : \quad S &\rightarrow b \mid aTS \mid bTS \\ T &\rightarrow \varepsilon \\ aTb &\rightarrow bTa \\ bTa &\rightarrow aTb \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Grammatiken und Sprachen IV

Diese Aufgabe dient lediglich der Illustration, dass es nicht ausreicht als Beweis für den Typ einer Sprache eine Grammatik dieses Typs anzugeben, die die Sprache vermeintlich erzeugt. *Beweise oder widerlege:* Die Grammatik $G = (\{ S \}, \{ a, b \}, P, S)$ mit

$$P: \quad S \quad \to \quad \varepsilon \mid aS \mid bS$$

erzeugt die Sprache $A = \{ a, b \}^*$.

Lösung

Wir beweisen die Aussage in zwei Schritten:

1) Wir zeigen, dass alle Wörter in A von G erzeugt werden können.
   Zu Zeigen: $\forall w \in A \,.\, S \Rightarrow_G^{|w|} wS \Rightarrow_G w$
   Sei

   $$P(w) \triangleq \left(S \Rightarrow_G^{|w|} wS \Rightarrow_G w\right)$$

   Wir verwenden das Induktionsschema:

   $$(P(\varepsilon) \wedge (\forall v \in A \,.\, P(v) \to (P(va) \wedge P(vb)))) \to (\forall w \in A \,.\, P(w))$$

   IA1 ($P(\varepsilon)$): $S \Rightarrow_G^0 S \Rightarrow_G \varepsilon$

   Sei $v \in A$.

   IV ($P(v)$): $S \Rightarrow_G^{|v|} vS \Rightarrow_G v$

   IS ($P(va)$): *Zu Zeigen:* $S \Rightarrow_G^{|v|+1} vaS \Rightarrow_G va$
   Nach IV gilt $S \Rightarrow_G^{|v|} vS$. Aus P folgt $vS \Rightarrow_G vaS \Rightarrow_G va$. Damit gilt zusammengenommen $S \Rightarrow_G^{|v|+1} vaS \Rightarrow_G va$.

   IS ($P(vb)$): *Zu Zeigen:* $S \Rightarrow_G^{|v|+1} vbS \Rightarrow_G vb$
   Nach IV gilt $S \Rightarrow_G^{|v|} vS$. Aus P folgt $vS \Rightarrow_G vbS \Rightarrow_G vb$. Damit gilt zusammengenommen $S \Rightarrow_G^{|v|+1} vbS \Rightarrow_G vb$.

   Nach FS 3.2.3 gilt damit $A \subseteq L(G)$.

2) Außerdem zeigen wir, dass alle Ableitungen der Grammatik zu einem Wort in A führen.
   Zu Zeigen: $\forall n \in \mathbb{N} \,.\, \forall X \in \{ a, b, S \}^* \,.\, \left(S \Rightarrow_G^n X\right) \to (\exists w \in A \,.\, X \in \{ w, wS \})$
   Sei

   $$P(n) \triangleq (\forall X \in \{ a, b, S \}^* \,.\, (S \Rightarrow_G^n X) \to (\exists w \in A \,.\, X \in \{ w, wS \}))$$

   Wir verwenden das Induktionsschema:

   $$(P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N} \,.\, (P(n) \to P(n+1)))) \to (\forall x \in \mathbb{N} \,.\, P(x))$$

   IA1 ($P(0)$): $S \Rightarrow_G^0 S$ ist nach FS 3.2.2 die einzige Ableitung der Länge 0. Es gilt $S = \varepsilon S$ und $\varepsilon \in A$.

   Sei $n \in \mathbb{N}$.

   IV ($P(n)$): $\forall X \in \{ a, b, S \}^* \,.\, \left(S \Rightarrow_G^n X\right) \to (\exists w \in A \,.\, X \in \{ w, wS \})$

   IS ($P(n+1)$):
   Zu Zeigen: $\forall X \in \{ a, b, S \}^* \,.\, \left(S \Rightarrow_G^{n+1} X\right) \to (\exists w \in A \,.\, X \in \{ w, wS \})$
   Sei $X \in \{ a, b, S \}^*$.
   Zu Zeigen: $\left(S \Rightarrow_G^{n+1} X\right) \to (\exists w \in A \,.\, X \in \{ w, wS \})$
   Annahme (A1): $S \Rightarrow_G^{n+1} X$.
   Zu Zeigen (Z1): $\exists w \in A \,.\, X \in \{ w, wS \}$
   Aus (A1) folgt die Annahme (A2): $\exists Y \in \{ a, b, S \}^* \,.\, S \Rightarrow_G^n Y \Rightarrow_G X$.
   Sei $Y \in \{ a, b, S \}^*$.
   Annahme (A3): $S \Rightarrow_G^n Y \Rightarrow_G X$.

Aus (A3) und der IV folgt die Annahme (A4): $(\exists v \in A \,.\, Y \in \{\, v,\ vS \,\})$.
Sei $v \in A$.
Annahme (A5): $Y \in \{\, v,\ vS \,\}$.
Aus (A5), (A3) und P folgt $Y = vS$ und
Annahme (A6): $X = v \vee X = vaS \vee X = vbS$.

Fall 1: Annahme (A6.1): $X = v$.
Wähle $w = v$ in (Z1).
Zu Zeigen (Z2.1): $X \in \{\, v,\ vS \,\}$
(Z2.1) folgt aus (A6.1).

Fall 2: Annahme (A6.2): $X = vaS$.
Wähle $w = va$ in (Z1).
Zu Zeigen (Z2.2): $X \in \{\, va,\ vaS \,\}$
(Z2.2) folgt aus (A6.2).

Fall 3: Annahme (A6.3): $X = vbS$.
Wähle $w = vb$ in (Z1).
Zu Zeigen (Z2.3): $X \in \{\, vb,\ vbS \,\}$
(Z2.3) folgt aus (A6.3).

Nach FS 3.2.3 gilt damit $L(G) \subseteq A$.
Aus $A \subseteq L(G)$, $L(G) \subseteq A$ und FS 1.1.8 folgt $L(G) = A$.

/Lösung

Aufgabe 5: Chomsky Hierarchie

Gegeben seien die Alphabete $\Sigma_1 = \{\ a,\ b\ \}$ und $\Sigma_2 = \{\ a,\ b,\ c\ \}$ und die Grammatiken

$$G_1 = (\{\ S,\ A,\ B\ \}, \Sigma_1, P_1, S) \quad G_2 = (\{\ S,\ A\ \}, \Sigma_1, P_2, S) \quad G_3 = (\{\ S,\ A,\ B\ \}, \Sigma_1, P_3, S)$$
$$G_4 = (\{\ S,\ A\ \}, \Sigma_1, P_4, S) \quad G_5 = (\{\ S,\ A\ \}, \Sigma_2, P_5, S) \quad G_6 = (\{\ S,\ A,\ B\ \}, \Sigma_2, P_6, S)$$

mit

$$\begin{array}{llll llll llll}
P_1: & S & \to & \varepsilon \mid aA \mid bB & P_2: & S & \to & b \mid aA \mid bA & P_3: & S & \to & a \mid b \mid aaB \mid Abb \\
& A & \to & a \mid aA & & aA & \to & aaa \mid aA & & A & \to & Sa \\
& B & \to & b \mid bB & & bA & \to & bb \mid bS & & B & \to & bS \\
\\
P_4: & S & \to & a \mid b & P_5: & S & \to & \varepsilon \mid aSA & P_6: & S & \to & cS \mid aA \mid bB \\
& S & \to & aAA \mid bAA & & AaA & \to & b & & A & \to & \varepsilon \mid aS \\
& A & \to & ab & & bAA & \to & c \mid AbA & & B & \to & \varepsilon \mid bS
\end{array}$$

5.a) *Gib* für jede der sechs Sprachen A_i mit $i \in [1, 6]$ *an*, welche minimalen Typen aus der Chomsky Hierarchie sie hat. *Gib* außerdem jeweils eine Grammatik mit dem jeweiligen minimalen Typ der Sprache *an*.
Hinweis: Mit minimaler Typ ist der Typ gemeint, der zur kleinsten Menge von Sprachen führt, d.h. Typ-3 < Typ-2 < Typ-1 < Typ-0.

--- Lösung ---

A_i ist für alle $i \in [1, 6]$ regulär (Typ-3). Die Grammatik G_1 ist schon regulär. Für die anderen Sprachen wird jeweils eine reguläre Grammatik angegeben, mit $L(G_i') = A_i$ für $i \in [2, 6]$.

$G_2' = (\{\ S,\ T,\ U\ \}, \Sigma_1, P_2', S)$ mit

$$\begin{array}{llll}
P_2': & S & \to & b \mid aT \mid bS \\
& T & \to & aU \\
& U & \to & a
\end{array}$$

$G_3' = (\{\ S,\ A,\ B,\ C,\ D,\ E\ \}, \Sigma_1, P_3', S)$ mit

$$\begin{array}{llll}
P_3': & S & \to & a \mid b \mid aA \mid aC \mid bC \\
& A & \to & aB \\
& B & \to & bS \\
& C & \to & aD \\
& D & \to & bE \\
& E & \to & b \mid bC
\end{array}$$

$G_4' = (\{\ S,\ A,\ B,\ C,\ D\ \}, \Sigma_1, P_4', S)$ mit

$$\begin{array}{llll}
P_4': & S & \to & a \mid b \mid aA \mid bA \\
& A & \to & aB \\
& B & \to & bC \\
& C & \to & aD \\
& D & \to & b
\end{array}$$

$G_5' = (\{\ S\ \}, \Sigma_2, \{\ S \to \varepsilon\ \}, S)$

$G_6' = (\{\ S,\ A,\ B\ \}, \Sigma_2, P_6', S)$ mit

$$\begin{array}{llll}
P_6': & S & \to & a \mid b \mid cS \mid aA \mid bB \\
& A & \to & aS \\
& B & \to & bS
\end{array}$$

--- /Lösung ---

5.b) *Gib* für jede der Sprachen A_i mit $i \in [1, 2]$ aus Aufgabe 3 *an*, welche minimalen Typen aus der Chomsky Hierarchie sie hat. *Gib* außerdem jeweils eine Grammatik mit dem jeweiligen minimalen Typ der Sprache *an*.

Lösung

A_1 und A_2 sind regulär. Wir geben zwei reguläre Grammatiken G_1' mit $L(G_1') = A_1$ und G_2' mit $L(G_2') = A_2$ an:

$$G_1' = \big(\{\, S,\ A,\ B \,\}, \{\, a,\ b \,\}, P_1', S\big) \text{ mit}$$

$$\begin{array}{llll} P_1': & S & \to & aA \\ & A & \to & bB \\ & B & \to & b \end{array}$$

$$G_2' = \big(\{\, S,\ T,\ U,\ V \,\}, \{\, a,\ b \,\}, P_2', S\big) \text{ mit}$$

$$\begin{array}{llll} P_2': & S & \to & b \mid aT \mid bU \\ & T & \to & aS \mid bV \\ & U & \to & aV \mid bS \\ & V & \to & a \mid aU \mid bT \end{array}$$

/Lösung