17. Vorlesung: Konfidenzbereiche: Quantilmethode

Nikolas Tapia

17. Juni 2024, Stochastik für Informatik(er)

17. Vorlesung: Konfidenzbereiche: Quantilmethode

Nikolas Tapia

17. Juni 2024, Stochastik für Informatik(er)

Konfidenzbereiche 置信区间

Sei $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ einen Datenvektor, der aus einer Realisierung von u.i.v. Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ stammt. Die Verteilung der X_i hängt von einem unbekannten Parameter $\theta \in \Theta$ ab.

Definition 17.1

Sei $\alpha \in (0, 1)$ ein **Fehlerniveau** vorgegeben.
Ein **Konfidenzbereich für θ zum Fehlerniveau** α ist ein *zufälliges* Intervall $J = J(X_1, \ldots, X_n) = (u(X_1, \ldots, X_n), o(X_1, \ldots, X_n)) \subseteq \Theta$, sodass

$$\mathbb{P}_\theta(\theta \in J) \geq 1 - \alpha \quad \forall \theta \in \Theta$$

gilt.

hängt von θ nicht ab!

Pivot-Statistik

Definition 17.2

Eine **Pivot-Statistik** ist eine Zufallsvariable $T(X_1, \ldots, X_n; \theta)$, die eine Verteilung unter $\mathbb{P}_\theta$ hat, die nicht von θ abhängt und *explizit* angegeben werden kann, d.h.

$$\mathbb{P}_\theta(T(X_1, \ldots, X_n; \theta) \leq t) = F(t) \quad \forall \theta \in \Theta$$

Beispiele: $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\bar{\mu}_n(x_1, \ldots, x_n) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow T(X_1, \ldots, X_n; \mu) = \frac{\bar{\mu}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Quantile

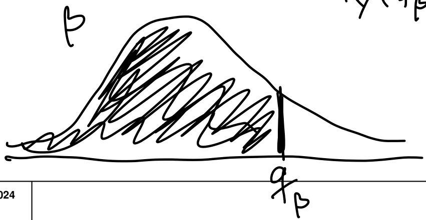
Definition 17.3

Sei $\beta \in [0, 1]$ und sei Y eine Zufallsvariable mit bekannter Verteilungsfunktion F_Y. Das **Quantil** der Verteilung von Y zum Niveau β ist die kleinste Zahl q_β, für die gilt

$$F_Y(q_\beta) \geq \beta.$$

Bei ZV die eine Dichte besitzen:

$$F_Y(q_\beta) = \int_{-\infty}^{q_\beta} f_Y(y)\,dy = \beta$$



$$\int_{-\infty}^{0{,}674\ldots} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}\,dy = 0{,}75$$

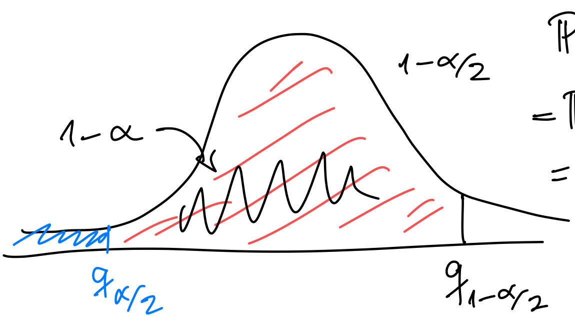
...

Quantile

Aussage 17.1

Sei T eine Pivot-Statistik, die eine Dichte besitzt, und sei $\alpha \in (0,1)$. Dann gilt

$$\mathbb{P}_\theta(q_{\alpha/2} \leq T \leq q_{1-(\alpha/2)}) \geq 1-\alpha \quad \forall \theta \in \Theta.$$



$$\mathbb{P}(q_{\alpha/2} \leq T \leq q_{1-\alpha/2})$$
$$= \mathbb{P}(T \leq q_{1-\alpha/2}) - \mathbb{P}(T \geq q_{\alpha/2})$$
$$= 1 - \alpha/2 - \alpha/2 = 1 - \alpha.$$

Quantile der Standardnormalverteilung

Bei $T \sim N(0,1)$

$$\mathbb{P}(-q_{1-\alpha/2} \le T \le q_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha$$

TABLE 5.1 AREA $\Phi(x)$ UNDER THE STANDARD NORMAL CURVE TO THE LEFT OF x

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

$$\int_{-\infty}^{x \approx 0.49} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt = \Phi(x)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha = 0.01 \\ \alpha = 0.05 \end{array}}$$

$$\Rightarrow q_{0{,}995 = 1-\alpha/2} \approx 2.58$$

$$q_{\alpha/2 = 0{,}005}$$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

$$\Phi(q_{\alpha/2}) = \alpha/2 = 1-(1-\alpha/2)$$
$$= 1 - \Phi(q_{1-\alpha/2})$$
$$= \Phi(-q_{1-\alpha/2})$$

$$q_{\alpha/2} = -q_{1-\alpha/2} \Leftarrow$$

Konfidenzintervall für den Erwartungswert einer Normalverteilung

unbekannt bekannt

Aussage 17.2

Seien $x_1, \ldots, x_n$ Realisierungen von u.i.v. Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$, die $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt sind, und sei $\alpha \in (0,1)$. Der Konfidenzbereich für μ zum Fehlerniveau α ist

$$J = \left[\bar{\mu} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{\mu} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right], \qquad z_{1-\alpha/2} = q_{1-\alpha/2}$$

z-Score

wobei $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ das Quantil der Standardnormalverteilung zum Niveau $1 - \frac{\alpha}{2}$ ist.

Anmerkung 1

Übliche Werte für α sind $\alpha = 0.05$ oder $\alpha = 0.01$.
Die jeweiligen Quantile sind $z_{0.975} \approx 1.96$ und $z_{0.995} \approx 2.58$.

Beweis.

Pivot-Statistik: $T(X_1,\dots,X_n;\mu) = \frac{\bar{\mu}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\mathbb{P}\left(-z_{1-\alpha/2} \le T \le z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(-z_{1-\alpha/2} \le \frac{\bar{\mu}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} \le \bar{\mu}-\mu \le \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\bar{\mu}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} \le \mu \le \bar{\mu}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

Erweiterung

Aussage 17.3

Seien $X_1, \dots, X_n$ u.i.v. Zufallsvariablen mit existierender und *bekannter* Varianz $\sigma^2 > 0$. Falls n hinreichend groß ist, dann ist der Konfidenzbereich für den Erwartungswert μ zum Fehlerniveau α gegeben durch

$$J = \left[\bar{\mu} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{\mu} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right].$$

Aus dem Satz der großen Zahlen u. Zentraler Grenzwertsatz

$$\bar{\mu}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \approx N(\mu, \sigma^2/n) \text{ für groß } n.$$

Konfidenzintervall für die Erfolgswahrscheinlichkeit der Binomialverteilung

Aussage 17.4

Seien $x_1, \ldots, x_n$ Realisierungen von u.i.v. Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit Bernoulli(p)-Verteilung und sei $\alpha \in (0, 1)$. Der Konfidenzbereich für p zum Fehlerniveau α ist

$$J = \left[\bar{\mu} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{\mu}(1-\bar{\mu})}{n}}, \bar{\mu} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{\mu}(1-\bar{\mu})}{n}}\right],$$

wobei $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ das Quantil der Standardnormalverteilung zum Niveau $1 - \frac{\alpha}{2}$ ist.

Zentraler Grenzwertsatz:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

Häufige Missverständnisse

Ein Konfidenzniveau von 95% bedeutet nicht, dass für ein bestimmtes realisiertes Intervall eine Wahrscheinlichkeit von 95% besteht, dass der Parameter der Grundgesamtheit innerhalb des Intervalls liegt.

Häufige Missverständnisse

Ein Konfidenzniveau von 95% bedeutet nicht, dass 95% der Stichprobendaten innerhalb des Konfidenzintervalls liegen.

Häufige Missverständnisse

Ein Konfidenzniveau von 95% bedeutet nicht, dass die Parameterschätzung bei einer Wiederholung des Experiments mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% in das aus einem bestimmten Experiment berechnete Konfidenzintervall fällt.

Lehrevaluation

Vom 17.06.2024 bis 29.06.2024