$\Rightarrow x(t) = 6e^{-2t} - 4e^{-3t} + te^{-2t}$

$x'(t) = -12e^{-2t} + 12e^{-3t} + e^{-2t} - 2te^{-2t}$
$= (-11-2t)e^{-2t} + 12e^{-3t}$

$x''(t) = -2e^{-2t} - 2(-11-2t)e^{-2t} - 36e^{-3t}$
$= (20+4t)e^{-2t} - 36e^{-3t}$

$x'' + 5x' + 6x = (20+4t-55-10t+36+6t)e^{-2t} + (-36+60-24)e^{-3t}$
$= e^{-2t}$

---

$x(t) = 4e^{-2t} - 2e^{-3t} + (t-1)e^{-2t}$
$= (3-t)e^{-2t} - 2e^{-3t}$
$x'(t) = (3-t)(-2)e^{-2t} - e^{-2t} + 6e^{-3t}$
$= (-7+2t)e^{-2t} + 6e^{-3t}$
$x''(t) = (14-4t)e^{-2t} + 2e^{-2t} - 12e^{-3t}$
$= (16-4t)e^{-2t} - 12e^{-3t}$

$x'' + 5x' + 6x = (16-4t-35+10t+18-6t)e^{-2t} + (-12+30-12)e^{-3t}$
$= -1e^{-2t} + 30e^{-3t}$

$$\frac{1}{-3e^{-5t}+2e^{-5t}} \begin{pmatrix} -3e^{-3t} & -e^{-3t} \\ +2e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{-e^{-5t}} \begin{pmatrix} -e^{-5t} \\ e^{-4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{t} \end{pmatrix}$$

② Partikulär Lsg $\quad x_p(t) = c_1(t)e^{-2t} + c_2(t)e^{-3t}$

$W(t) \cdot \vec{c}'(t) = b(t)$

$$\begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-3t} \\ -2e^{-2t} & -3e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{-e^{-5t}} \begin{pmatrix} -3e^{-3t} & -e^{-3t} \\ 2e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{t} \end{pmatrix}$$

$c_1(t) = \int c_1'(t)\,dt = t$

$c_2(t) = \int c_2'(t)\,dt = -e^{t}$ $\qquad x_p(t) = c_1(t)e^{-2t} + c_2(t)e^{-3t} = te^{-2t} - e^{-2t}$

③ allg. Lsg $\quad x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + (t-1)e^{-2t}$

④ AWP $\quad x'(t) = -2c_1e^{-2t} + -3c_2e^{-3t} + e^{-2t} + -2(t-1)e^{-2t}$

$x(0) = c_1 + c_2 = 2 \qquad x'(0) = -2c_1 - 3c_2 + 3 = 1$

$c_2 = -2 \quad c_1 = 4$

$\Rightarrow \quad x(t) = 4e^{-2t} - 2e^{-3t} + (t-1)e^{-2t}$

$x(0) = c_1 + c_2 - 1 = 2 \quad \Rightarrow c_1 + c_2 = 3$

$x'(0) = -2c_1 - 3c_2 + 1 + 2 = 1$

$\Rightarrow 2c_1 + 3c_2 = 2$

$\Rightarrow c_1 = 7 \qquad c_2 = -4$

$\Rightarrow x(t) = 7e^{-2t} - 4e^{-3t} + (t-1)e^{-2t}$

es muss noch $-s < b < s$ erfüllt

b) $f(t) = e^{at}\cos(bt)$

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{at}\cos(bt)\cdot e^{-st}\,dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\cos(bt)\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\cos(bt)\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\cdot b\cdot\sin(bt)\,dt$$

$$= \lim_{c\to\infty}\Big[\underbrace{\frac{1}{a-s}}_{\text{wenn } (a-s)<0,\ \text{konvergiert} \to 0}e^{(a-s)t}\cos(bt)\Big]_0^c + \lim_{c\to\infty}\int\Big[\underbrace{\frac{1}{a-s}}_{a-s<0,\ e^{(a-s)t}\ \text{konvergiert}}e^{(a-s)t}\cdot b\cdot\sin(bt)\Big]_0^c$$

$$= \frac{1}{a-s}$$

und erfüllt $s > a$

konvergiert für $Re(s) > 0$

Für $t \geq 1$ $\quad \mathcal{L}[2e^{-(t-1)}](s) = 2e\cdot\frac{1}{s+1}$ $\quad Re(s) > -1$

$$\frac{1}{s+1} = \mathcal{L}[e^{-t}] = \int_0^\infty e^{-t}\cdot e^{-st}\,dt$$

从0开始

$$(s^2+2s+1)\,\mathcal{L}[x(t)](s) = \frac{2e}{s+1} + 1$$

Widerspruch zu Annahme $t \geq 1$

$$\mathcal{L}[x(t)](s) = \frac{2e}{(s+1)^3} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$x(t) = \cancel{2}e\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot e^{-t}\cdot t^2 + e^{-t}t = e^{1-t}\cdot t^2 + e^{-t}t$$

und geben Sie die allgemeine Lösung an. Dabei dürfen Sie folgendes Fundamentalsystem des zugehörigen homogenen Systems verwenden:

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix}t^2\\t^2+1\end{pmatrix}.$$

...HV bestimmen (A-
3) Fundamentalsystem
$= \{e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1, \dots, e^{\lambda_k t}$
Spezialfall: $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, ...

**3. Aufgabe** (10 Punkte)

Ein kausales LTI-System $S$ liefere auf das Eingangsignal $a_{in} = \cos(2t)$ die Systemantwort $a_{out} = t\sin(2t)$.

a) [6 Punkte] Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion und die Impulsantwort des Systems.

b) [4 Punkte] Bestimmen Sie Systemantwort auf das Eingangssignal

$$b_{in}(t) = \delta_3(t),$$

wobei $\delta_3$ die in 3 zentrierte Dirac-Distribution ist.

*Hinweis:* Eine Laplace-Tabelle finden Sie auf der letzten Seite der Klausur.

**Bitte wenden.**

$a_{in} = \cos(2t)$ $\qquad$ $a_{out} = t\sin(2t)$

a) $A_{in} = \frac{s}{s^2+4}$ $\qquad$ $A_{out} = \frac{1}{(s-2)^2}$ $\qquad$ $\frac{4s-8+8}{(s-2)^2}$

$A_{in} \cdot H(s) = A_{out}$

$$H(s) = \frac{1}{(s-2)^2} \cdot \frac{s^2+4}{s} = \frac{\frac{4}{4}}{s} + \frac{-4s}{(s-2)^2}$$

↑ Übergangsfkt

$$= \frac{1}{s} + \frac{4s}{(s-2)^2} = \frac{1}{s} + \frac{4}{s-2} + \frac{8}{(s-2)^2}$$

$h(t) = 1 + 4e^{2t} + 8te^{2t}$

↑ Impulsantwort

b) $b_{in} = \delta_3(t)$ $\qquad$ $B_{in} = e^{-3t}$

$$B_{out} = B_{in} \cdot H(s) = e^{-3t} \cdot \left(\frac{1}{s} + \frac{4}{s-2} + \frac{8}{(s-2)^2}\right)$$

$$b_{out}(t) = \left(1 + 4e^{2(t-3)} + 8(t-3)e^{2(t-3)}\right)\delta_3$$