Woche 7: *3. Juni 2024*

Thema: *Matchings*

7.1 Einleitung

Zuordnung von Seminarthemen

Problembeschreibung.

Die Studienordnung eines fiktiven Studiengangs sieht vor, dass alle Studierenden im dritten Semester ein Seminar absolvieren müssen.

Um den Bedarf zu bedienen, bieten die einzelnen Lehrstühle verschiedene Seminare an mit jeweils einer beschränkten Anzahl von Seminarthemen.

Jede Person $a \in A$ muss also ein Thema $s(a) \in S$ wählen. Laut Vorgabe darf kein Thema an zwei Studierende vergeben werden.

Verteilung der Themen. Die Seminarthemen werden zentral vergeben.

Dazu gibt jede Person $a \in A$ eine Liste mit Vorkenntnissen, eine Liste möglicher Themen sowie ihre Präferenzen für die einzelnen Themen ab.

Anhand dieser Daten werden die Themen dann zugeordnet.

Beispiel.

Studierende.

$A := \{a_1, \dots, a_4\}$

Seminare.

Seminar S_1. 3 Themen

Seminar S_2. 2 Themen

Studierendenpräferenz.

	Wahl		
Stud.	1.	2.	3.
a_1	s_1^1	s_2^1	s_1^2
a_2	s_2^1	s_3^1	-
a_3	s_1^2	s_2^2	-
a_4	s_2^2	s_1^2	-

Zuordnung von Seminarthemen: Modellierung

Eingabeinstanz.

Sei A die Menge der Studierenden im dritten Semester.

Angeboten werden Seminare

$$\begin{aligned} S_1 &:= \{s_1^1, \dots, s_{t_1}^1\}, \\ &\vdots \\ S_l &:= \{s_1^l, \dots, s_{t_l}^l\}, \end{aligned}$$

$s_1^i, \dots, s_{t_i}^i$: Themen von S_i.

Sei $S := \bigcup_{i=1}^{l} S_i$.

Jede Person $a \in A$ wählt bestimmte Themen $I(a) \subseteq S$ aus und ordnet diese in der Reihenfolge des Interesses.

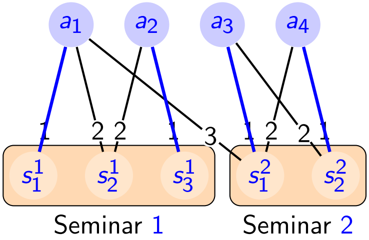
Problem. Jeder Person $a \in A$ soll ein Thema $s(a) \in I(a)$ zugeordnet werden, wobei $s(a) \neq s(b)$ für alle $a \neq b \in A$ gelten muss.

Dabei sollen nach Möglichkeit die Präferenzen der Personen berücksichtigt werden.

Modellierung durch Graphen

Menge A von Studierenden

Menge S von Seminarthemen



Studierendenpräferenz.

Stud.	Wahl 1.	Wahl 2.	Wahl 3.
a_1	s_1^1	s_2^1	s_1^2
a_2	s_2^1	s_3^1	-
a_3	s_1^2	s_2^2	-
a_4	s_2^2	s_1^2	-

Modellierung durch einen Graph G.

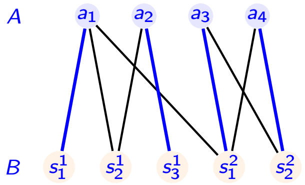
- Knotenmenge: $V(G) = A \cup S$.
- Kantenmenge:
  $E(G) = \{\{a, s\}$: Person $a \in A$ interessiert sich für Thema $s \in S\}$.
- Präferenzen: für jedes $a \in A$ eine lineare Ordnung $\leq_a$ auf der Menge

$$I(a) = \{s \in S : \{a, s\} \in E(G)\}.$$

7.2 Matchings in Bipartiten Graphen

Matchings in Bipartiten Graphen

Wir betrachten zunächst eine einfachere Variante des Problems ohne Präferenzen der Studierenden.



Definition.
Ein Graph G heißt *bipartit*, wenn $V(G)$ in zwei disjunkte Teilmengen $V(G) = A \dot\cup B$ zerlegt werden kann, so dass für alle $e \in E(G)$ gilt:

$$e \cap A \neq \emptyset \text{ und } e \cap B \neq \emptyset.$$

Definition.
Ein *matching* in einem Graph G ist eine Menge $M \subseteq E(G)$ von Kanten, so dass $e \cap f = \emptyset$ für alle $e \neq f \in M$.

(Kein Knoten ist inzident zu ≥ 2 Kanten aus M.)

Matchings in bipartiten Graphen

Definition.
Ein *matching* in einem Graph G ist eine Menge $M \subseteq E(G)$ von Kanten, so dass $e \cap f = \emptyset$ für alle $e \neq f \in M$.

Ein matching M in G heißt *perfekt*, wenn jeder Knoten $v \in V(G)$ inzident zu einer Kante $e \in M$ ist.

Notation. Sei M ein matching in $G = (A \dot\cup B, E)$.

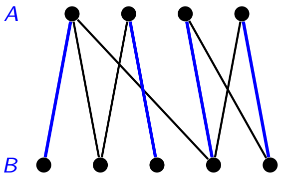
Wir definieren

$$V(M) = V(G[M]) = \{v \in V(G) : v \in e \text{ für ein } e \in M\}.$$

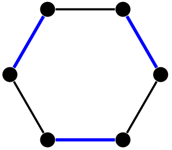
Fragen.

- Wann hat G ein perfektes matching?
- Was wissen wir über maximale matchings?
- Und wie finden wir diese?

Beispiel.

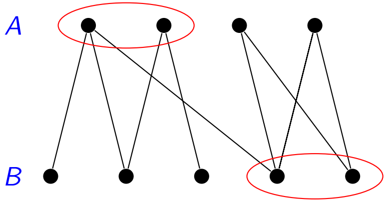


Beispiel.



Vertex Cover

Definition. Ein *vertex cover* in G ist eine Menge $X \subseteq V(G)$, so dass jede Kante $e \in E(G)$ inzident zu einem Knoten aus X ist.



Frage. Ist das vertex cover optimal? Oder gibt es ein kleineres?

Frage. Angenommen, G enthält ein matching M der Größe k.

Wie groß muss ein vertex cover X von G mindestens sein?

Antwort. $|X| \geq k$. Denn X muss aus jeder Kante $e \in M$ mindestens einen Knoten enthalten.

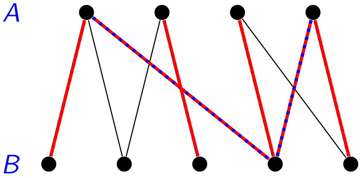
Der Satz von König

Satz. (König, 1931)

Die maximale Größe eines matchings in einem bipartiten Graph G ist gleich der minimalen Größe eines vertex covers in G.

Erweiternde Pfade

Wie finden wir maximale matchings in Graphen?



Erweiternde Pfade. Sei M ein matching in $G = (A \dot{\cup} B, E)$.

Ein *alternierender Pfad* ist ein Pfad P in G, der in einem $a \in A \setminus V(M)$ beginnt und immer abwechselnd eine Kante aus $E(G) \setminus M$ und eine Kante aus M benutzt.

P heißt *erweiternd*, wenn er in einem Knoten $b \in B \setminus V(M)$ endet.

Anmerkung. Erweiternde (augmentierende) Pfade in matchings sind ähnlich zu den entsprechenden Pfaden im Beweis von Mengers Satz.

Diese Methode kann man algorithmisch zum Berechnen maximaler matchings in bipartiten Graphen benutzen.

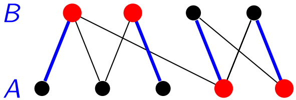
Der Satz von König

Beweis. Sei M ein matching in G maximaler Größe.

Wir konstruieren Menge $U \subseteq V(G)$ wie folgt:

Für all $e = \{a, b\} \in M$, füge a oder b zu U hinzu:

Wenn ein alternierender Pfad in b endet, wähle b. Sonst wähle a.



Behauptung. U ist minimales vertex cover von G.

Minimalität ist klar. U deckt alle $e \in M$ ab.

Zu zeigen: Wenn $\{a, b\} \in E(G) \setminus M$, dann ist $a \in U$ oder $b \in U$.

Wenn $a \in U$, sind wir fertig. Also nehmen wir an, dass $a \notin U$.

Behauptung. Es gibt einen alternierenden Pfad, der in b endet.

1. Wenn $a \notin V(M)$, dann ist ab ein solcher Pfad.
2. Sonst, ist $a \in V(M)$ und es gibt $b' \in B$ mit $\{a, b'\} \in M$.
   Da $a \notin U$, endet ein alternierender Pfad P in b'.
   Dann ist aber $P' = Pab$ ein alternierender Pfad, der in b endet.
   (oder P' enthält einen solchen Pfad, falls $b \in V(P)$.) $\dashv$

Satz. (König, 1931)
Sei G bipartit.
Max. matching-Größe in G =
min vertex-cover-Größe in G.

Alternierender Pfad.
Beginnt in $a \in A \setminus V(M)$,
abwechselnd Kanten aus
$E(G) \setminus M$ und aus M.

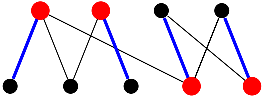
Der Satz von König

Beweis. Sei M ein matching in G maximaler Größe.

Wir konstruieren Menge $U \subseteq V(G)$ wie folgt:

Für all $e = \{a, b\} \in M$, füge a oder b zu U hinzu:

Wenn ein alternierender Pfad in b endet, wähle b. Sonst wähle a.



Behauptung. U ist minimales vertex cover von G.

Minimalität ist klar. U deckt alle $e \in M$ ab.

Zu zeigen: Wenn $\{a, b\} \in E(G) \setminus M$, dann ist $a \in U$ oder $b \in U$.

Wenn $a \in U$, sind wir fertig. Also nehmen wir an, dass $a \notin U$.

Behauptung. Es gibt einen alternierenden Pfad, der in b endet. $\dashv$

Da M maximal ist, kann P kein erweiternder Pfad sein.

Also ist $b \in e'$ für ein $e' \in M$ und wurde daher zu U hinzugefügt. $\square$

Satz. (König, 1931)
Sei G bipartit.
Max. matching-Größe in G = min vertex-cover-Größe in G.

Alternierender Pfad.
Beginnt in $a \in A \setminus V(M)$, abwechselnd Kanten aus $E(G) \setminus M$ und aus M.

Dualität

Satz. (König, 1931)

Die maximale Größe eines matchings in einem bipartiten Graph G ist gleich der minimalen Größe eines vertex covers in G.

Dualität. Der Satz von König beweist eine *Dualität* zwischen matchings und vertex cover.

Vergleiche mit der Dualität des Satzes von Menger.

Der Satz von Hall

Frage. Wann gibt es in $G = (A \dot\cup B, E)$ ein perfektes matching?

Offensichtlich muss $|A| = |B|$ gelten.

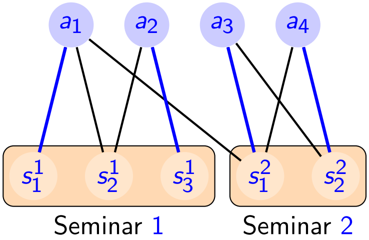
Definition. Sei $G = (A \dot\cup B, E)$ und $S \subseteq V(G)$.

Ein *matching von S* ist ein matching M von G mit $S \subseteq V(M)$.

Wir können also allgemeiner fragen: Wann hat G ein matching von A?

Menge A von Studierenden

Menge S von Seminarthemen



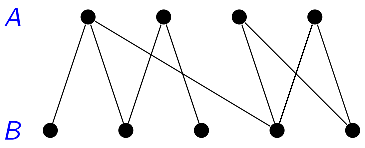
Der Satz von Hall

Frage. Wann gibt es in $G = (A \dot\cup B, E)$ ein matching von A?

Notwendige Bedingung.

Offensichtlich muss folgende Bedingung gelten:

$$|S| \leq |N_G(S)| \qquad \text{für alle } S \subseteq A$$



Satz. (Hall 1935)

Ein bipartiter Graph $G := (A \dot\cup B, E)$ enthält ein matching von A genau dann, wenn $|N(S)| \geq |S|$ für alle $S \subseteq A$.

Beweis des Satzes von Hall

Satz. Ein bipartiter Graph $G := (A \dot\cup B, E)$ enthält ein matching von A genau dann, wenn $|N(S)| \geq |S|$ für alle $S \subseteq A$.

Beweis. Ang, $|N(S)| \geq |S|$ für alle $S \subseteq A$. Sei M ein matching in G.

Zeige: wenn es $a \in A$ gibt mit $a \notin V(M)$, dann gibt es einen erweiternden Pfad für M in G und somit ist M nicht maximal.

$A' := \{v \in A \setminus \{a\}$: es gibt alternierenden Pfad P von a zu $a'\}$.

$B' := \{b \in B :$ b ist der vorletzte Knoten eines alternierenden Pfades P von a nach $v \in A'\}$.

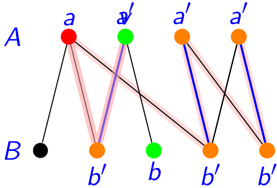
Die letzten Kanten dieser Pfade P liegen in M, also gilt $|A'| = |B'|$.

Setze $S = A' \cup \{a\}$. Nach Voraussetzung gilt $|N(S)| \geq |S|$.
Also gibt es $b \in B \setminus B'$ und $v \in S$ mit $\{v, b\} \in E$.

Da $v \in A' \cup \{a\}$, gibt es alternierenden Pfad $P = ab_1 \dots b_l v$.

Nach Konstruktion: $b_1 \dots b_l \in B'$ und daher $b \notin V(P)$. Aber dann ist $P' = ab_1 \dots b_l vb$ ein alternierender Pfad von a nach b.

Satz.
Sei $G := (A \dot\cup B, E)$ bipartit.
G enthält matching von A
gdw.
$|N(S)| \geq |S|$ für alle $S \subseteq A$.



Algorithmus zum Berechnen maximaler Matchings

Satz von Hall. Ein bipartiter Graph $G := (A \dot\cup B, E)$ enthält ein matching von A genau dann, wenn $|N(S)| \geq |S|$ für alle $S \subseteq A$.

Algorithmus. Aus dem Beweis des Satzes kann man leicht einen Algorithmus ableiten, der in einem bipartiten Graph $G = (A \cup B, E)$, der die Bedingung des Satzes von Hall erfüllt, ein matching von A berechnet.

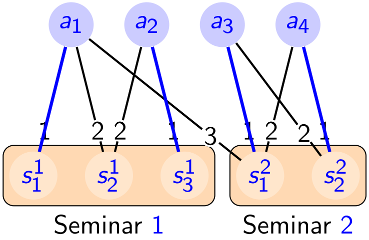
Satz. Sei $G = (A \cup B, E)$ ein bipartiter Graph, der die Bedingung des Satzes von Hall erfüllt. Dann kann ein matching M von G der Größe $|A|$ in Zeit $\mathcal{O}(|V(G)| \cdot |E(G)|)$ berechnet werden.

7.3 Zurück zur Verteilung von Seminarplätzen

Modellierung durch Graphen

Menge A von Studierenden

Menge S von Seminarthemen



Studierendenpräferenz.

	Wahl		
Stud.	1.	2.	3.
a_1	s_1^1	s_2^1	s_1^2
a_2	s_2^1	s_3^1	-
a_3	s_1^2	s_2^2	-
a_4	s_2^2	s_1^2	-

Modellierung durch einen Graph G.

- Knotenmenge: $V(G) = A \cup S$.
- Kantenmenge:
  $E(G) = \{\{a, s\}$: Person $a \in A$ interessiert sich für Thema $s \in S\}$.
- Präferenzen: für jedes $a \in A$ eine lineare Ordnung $\leq_a$ auf der Menge

$$I(a) = \{s \in S : \{a, s\} \in E(G)\}.$$

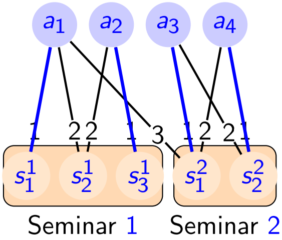
Matchings mit Präferenzen

Bisher haben wir die Präferenzen der Studierenden (und die der Seminarverantwortlichen) ignoriert.

Studierendenpräferenzen.

Für jede Person $a \in A$ eine lineare Ordnung $\leq_a$ auf der Menge

$$I(a) = \{s \in S : \{a, s\} \in E(G)\}.$$



Frage. Gibt es immer ein matching, in dem jede Person mit dem präferierten Seminar gepaart wird?

Antwort. Nein, denn es könnten ja z.B. alle Personen das selbe Thema präferieren.

Matchings mit Präferenzen

Studierendenpräferenzen.

Für jede Person $a \in A$ eine lineare Ordnung $\leq_a$ auf der Menge

$$I(a) = \{s \in S : \{a, s\} \in E(G)\}.$$

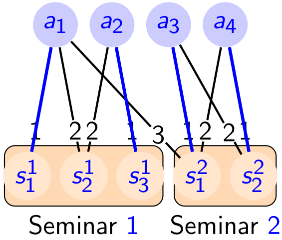
Präferenzen der Seminarverantwortlichen.

Für jedes Thema $s \in S$ eine lineare Ordnung $\leq_s$ auf der Menge

$$I(s) = \{a \in A : \{a, s\} \in E(G)\}.$$

Stabile matchings. Ein matching M in G ist stabil, wenn es kein Paar $a \in A$ und $s \in S$ gibt, so dass $s <_a s'$ und $a <_s a'$, für $s' \in S$ und $a' \in A$ mit $\{a, s'\}, \{a', s\} \in M$.

In einem stabilen matching gibt es also kein Paar a, s, die sich gegenseitig ihren aktuellen matching-Partnern vorziehen.



Matchings mit Präferenzen

Studierendenpräferenzen.

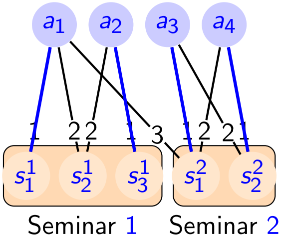
Für jede Person $a \in A$ eine lineare Ordnung $\leq_a$ auf der Menge

$$I(a) = \{s \in S : \{a, s\} \in E(G)\}.$$

Präferenzen der Seminarverantwortlichen.

Für jedes Thema $s \in S$ eine lineare Ordnung $\leq_s$ auf der Menge

$$I(s) = \{a \in A : \{a, s\} \in E(G)\}.$$



Stabile matchings. Ein matching M in G ist stabil, wenn es kein Paar $a \in A$ und $s \in S$ gibt, so dass $s <_a s'$ und $a <_s a'$, für $s' \in S$ und $a' \in A$ mit $\{a, s'\}, \{a', s\} \in M$.

Satz. (Gale, Shapley, 1962)

Sei $G = (A \cup B, E)$ ein bipartiter Graph mit $|A| = |B|$.

Dann gibt es für jedes System $\{\leq_a : a \in A\}, \{\leq_s : s \in B\}$ von Präferenzen ein stabiles matching.

7.4 Bipartite Graphen

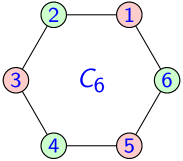
Bipartite Graphen

Definition.

Ein Graph G heißt *bipartit*, wenn $V(G)$ in zwei disjunkte Teilmengen $V(G) = A \dot\cup B$ zerlegt werden kann, so dass für alle $e \in E(G)$ gilt: $e \cap A \neq \emptyset$ und $e \cap B \neq \emptyset$.

D.h. jede Kante hat einen Endpunkt in A und den anderen in B.

Wir nennen A und B bi-Partitionen von G.



$A := \{1, 3, 5\}$
$B := \{2, 4, 6\}$

Definition. Eine k-Färbung von G ist eine Abbildung

$$c : V(G) \to \{1, \dots, k\},$$

die jedem Knoten von G eine von k möglichen Farben so zuordnet, dass $c(a) \neq c(b)$ für alle Kanten $\{a, b\} \in E(G)$ gilt.

Ein Graph G ist k-färbbar, wenn es eine k-Färbung von G gibt.

Beobachtung. Ein Graph G ist genau dann bipartit, wenn er 2-färbbar ist.

Bipartite Graphen

bipartit. $G = (A \dot\cup B, E)$
- A, B disjunkte Mengen
- jede Kante hat ein Ende in A und das andere in B.

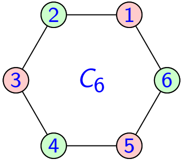
Abschlusseigenschaften bipartiter Graphen.

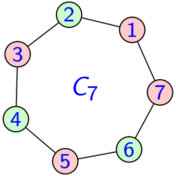
1. G ist bipartit genau dann, wenn jede Zusammenhangskomponente von G bipartit ist.
2. Wenn G bipartit ist, dann ist auch jeder Untergraph von G bipartit.

Lemma. Sei $C = (v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_\ell, e_\ell, v_1)$ ein Kreis der Länge ℓ.
C ist genau dann bipartit, wenn ℓ gerade ist.

Beweis. Betrachte den Pfad $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_\ell$.
Angenommen, C ist bipartit, also $V(C) = A \dot\cup B$.
O.B.d.A. sei $v_1 \in A$. Dann muss $v_2 \in B$ und $v_3 \in A$ sein usw.
D.h. für $1 \leq i \leq \ell$ ist $v_i \in A$ gdw. i ungerade ist.

- Wenn ℓ gerade ist, liegen v_ℓ und v_1 in verschiedenen Partitionen und C_ℓ ist bipartit.
- Wenn ℓ ungerade ist, liegen v_ℓ und v_1 in der gleichen Partition, also kann C_ℓ nicht bipartit sein. □



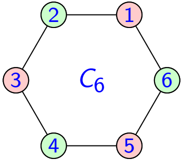


Bipartite Graphen

bipartit. $G = (A \dot\cup B, E)$
- A, B disjunkte Mengen
- jede Kante hat ein Ende in A und das andere in B.

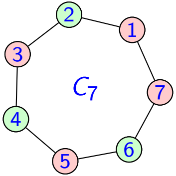
Abschlusseigenschaften bipartiter Graphen.

1. G ist bipartit genau dann, wenn jede Zusammenhangskomponente von G bipartit ist.
2. Wenn G bipartit ist, dann ist auch jeder Untergraph von G bipartit.



Lemma. Sei $C = (v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_\ell, e_\ell, v_1)$ ein Kreis der Länge ℓ. C ist genau dann bipartit, wenn ℓ gerade ist.

Folgerung. Wenn G bipartit ist, dann enthält G keinen Kreis ungerader Länge als Untergraph.



Lemma. Ein Graph G ist genau dann bipartit, wenn G keinen Kreis ungerader Länge als Untergraph enthält.

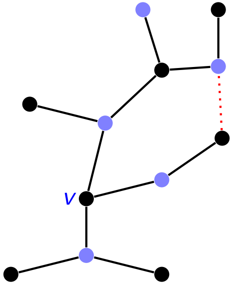
Charakterisierung Bipartiter Graphen

Lemma. Ein Graph G ist genau dann bipartit, wenn G keinen Kreis gerader Länge als Untergraph enthält.

Beweis. Wir müssen nur noch zeigen: Wenn G keinen ungeraden Kreis enthält, dann ist G bipartit.

Konstruiere Spannbaum T von G mit Wurzel v und definiere

$$A := \{u \in V(G) : \text{Pfad in } T \text{ von } u \text{ zu } v \text{ hat gerade Länge }\}$$
$$B := \{u \in V(G) : \text{Pfad in } T \text{ von } u \text{ zu } v \text{ hat ungerade Länge }\}$$



Behauptung. (A, B) ist eine bi-Partition von G.

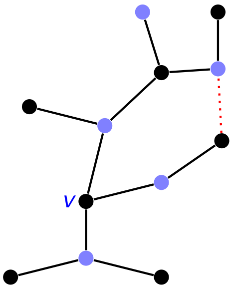
Beweis. Sei $e = \{a, b\} \in E(G)$.
Für $e \in E(T)$ sind nach Konstruktion a und b in verschiedenen Mengen.

Wenn $e \in E(G) \setminus E(T)$, dann muss e zwei Knoten a und b aus verschiedenen Mengen verbinden, da sonst ein Kreis ungerader Länge entstünde. □

Komplexität

Lemma. Ein Graph G ist genau dann bipartit, wenn G keinen Kreis gerader Länge als Untergraph enthält.

Folgerung. Es kann in polynomieller Zeit entschieden werden, ob G bipartit ist.



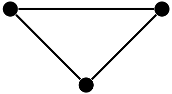
7.5 Matchings in Allgemeinen Graphen

Matchings in Allgemeinen Graphen

Wir betrachten jetzt matchings in allgemeinen Graphen, die nicht mehr bipartit sein müssen.

Dualität zu Vertex Cover. Die Dualität des Satzes von König gilt im allgemeinen nicht mehr.

Beispiel. Der folgende Graph hat kein matching der Größe 2 aber kein vertex cover der Größe 1.



Approximative Dualität. Sei k die maximale Größe eines matchings von G. Dann hat G ein vertex cover der Größe $\leq 2k$.

Sei M ein maximales matching in G. Definiere

$$X := \{v : v \in e \text{ für ein } e \in M\}.$$

Dann ist X ein vertex cover von G.

Komplexität des Berechnens Maximaler Matchings

Komplexität. Ein matching maximaler Größe in einem beliebigen Graph G kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Dazu kann man zum Beispiel einen Algorithmus von Edmonds verwenden, der erweiternde Pfade benutzt.

Zusammenfassung

Matchings.

- Definition von matchings in Graphen.
- Approximative Dualität zu vertex covern.

Matchings in bipartiten Graphen.

- Satz von König: Dualität zu vertex covern.
- Satz von Hall: Kriterium für die Existenz eines perfekten matchings.
- Matchings maximaler Größe in polynomieller Zeit berechenbar.

Bipartite und k-färbbare Graphen.

- Definition von k-Färbbarkeit.
- Bipartit entspricht 2-färbbar.
- Bipartite Graphen sind genau die Graphen ohne Kreise ungerade Länge als Untergraphen.
- Dies kann in polynomieller Zeit entschieden werden.