20. Vorlesung: Hypothesentests: χ^2- und t-Test

Nikolas Tapia

27. Juni 2024, Stochastik für Informatik(er)

Hypothesentests

Definition 20.1

Ein **Hypothesentest** ist ein statistisches Verfahren, um eine Aussage über einen Parameter einer Grundgesamtheit zu treffen.

- **Nullhypothese** H_0: Annahme, die widerlegt werden soll.
- **Alternativhypothese** H_1: Annahme, die bestätigt werden soll.

Definition 20.2

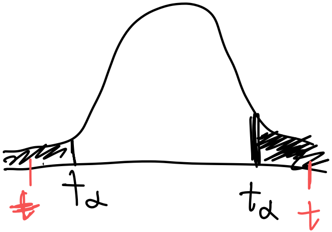
Ein **Signifikanzniveau** α ist die Wahrscheinlichkeit, mit der die Nullhypothese zu Unrecht abgelehnt wird (Fehler 1. Art).

Art von Hypothesentests

- **Einseitiger Test**: Die Nullhypothese ist entweder
  - Linksseitig: $H_0 : \theta \geq \theta_0$ oder
  - Rechtsseitig: $H_0 : \theta \leq \theta_0$.
- **Beidseitiger Test**: Die Nullhypotese ist $H_0 : \theta = \theta_0$.

Die zugehörige Ablehnungsbereiche sind

- Einseitig:
  - Linksseitig: $\{T \leq t_\alpha\}$
  - Rechtsseitig: $\{T \geq t_\alpha\}$
- Beidseitig: $\{T \leq t_{\alpha/2}\} \cup \{T \geq t_{1-\alpha/2}\}$



p-Wert

Definition 20.3

Der ***p*-Wert** ist die Wahrscheinlichkeit, unter der Annahme, dass die Nullhypothese wahr ist, ein Ergebnis zu erhalten, das mindestens so extrem ist wie das beobachtete:

$$p = \mathbb{P}(T \geq t \mid H_0), usw.$$

- Ist der p-Wert kleiner als das Signifikanzniveau α, wird die Nullhypothese abgelehnt.
- Ist der p-Wert größer als α, wird die Nullhypothese nicht abgelehnt.

Einseitiger t-Test

Theorem 20.1

Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Stichprobe einer normalverteilten Grundgesamtheit mit unbekanntem Erwartungswert und unbekannter Varianz. Dann ist

$$T = \frac{\bar{\mu}(X_1, \ldots, X_n) - \mu_0}{\sqrt{\bar{\sigma}^2(X_1, \ldots, X_n)/n}} \sim t_{n-1}$$

eine t-verteilte Zufallsvariable mit $n-1$ Freiheitsgraden.

Einseitiger t-Test

Wir testen die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq \mu_0$ oder $H_0 : \mu \leq \mu_0$.

Aussage 20.1

Der Ablehnungsbereich für einen einseitigen Test auf dem Signifikanzniveau α ist

$$\{t \leq t_{n-1,\alpha}\} \quad \text{oder} \quad \{t \geq t_{n-1,1-\alpha}\}$$

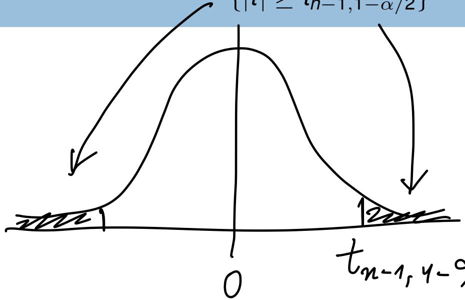
Beidseitiger t-Test

Wir testen die Nullhypothese $H_0 : \mu = \mu_0$.

Aussage 20.2

Der Ablehnungsbereich für einen beidseitigen Test zum Signifikanzniveau α ist

$$\{|t| \geq t_{n-1,1-\alpha/2}\}$$



$t_{n-1,1-\alpha/2}$ = Quantil

t-Test für zwei Stichproben

Seien $X_1, \ldots, X_n$ und $Y_1, \ldots, Y_m$ zwei Stichproben von (annähernd) normalverteilte Zufallasvariablen mit unbekannten Erwartungswerten, sodass $\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{V}(Y_1)$ gilt. Wir stellen die Nullhypothese

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y$$

Vorgehen

- Berechnung der Teststatistik

$$T = \sqrt{\frac{nm}{n+m}}\, \frac{\overbrace{\bar{\mu}(X_1, \ldots, X_n)}^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i} - \overbrace{\bar{\mu}(Y_1, \ldots, Y_m)}^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i}}{S} \sim t_{n+m-2},$$

\# X-daten   \# Y-daten

$$\bar{\sigma}_k^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}\left(z_i - \bar{\mu}(z)\right)^2$$

wobei

$$S = \sqrt{\frac{(n-1)\bar{\sigma}_n^2(X_1, \ldots, X_n) + (m-1)\bar{\sigma}_m^2(Y_1, \ldots, Y_m)}{n+m-2}}.$$

- Vergl. der Teststatistik: Ablehnungsbereich $\{|T| \geq t_{n+m-2, 1-\alpha/2}\} \Longleftrightarrow p \leq \alpha$

Beispiel

χ^2-Test auf Verteilung mit bekannten Parameter

Sei $\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{Realisierung}}$ eine Stichprobe einer Zufallsvariable. Wir aufstellen die Nullhypothese

$X_1, \dots, X_n$

H_0: Die Stichprobe stammt aus einer bestimmten Verteilung.

$X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$, $X_i \sim \text{Binom}(n,p)$ n ✓ p ✓

Vorgehen

- Gruppieren der Daten in Klassen, $A_1, \dots, A_k$ und $(A_i \cap A_j = \emptyset)$ bestimmen der empirischen (absolute) Häufigkeiten $\bigcup_{i=1}^k A_i = \underline{X(\Omega)}$

$$\boxed{N_i = \#\{x_j \in A_i\}.}$$

empirisches Histogramm

- Bestimmung der theoretischen Häufigkeiten unter H_0:

$$F_i = n \cdot \mathbb{P}(X \in A_i).$$

Theoretisches Histogramm

- Berechnung der Teststatistik

$$T = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - F_i)^2}{F_i} \sim \chi^2_{k-1}.$$

- Vergleich der Teststatistik mit dem kritischen Wert: Ablehnungsbereich

$$\{T \geq \chi^2_{k-1,1-\alpha}\}.$$

$\Longleftrightarrow$ $p \leq \alpha$.

Beispiel

X	A_1	. . . .	. . . .	A_k	← Klasse
	N_1			N_k	← Häufigkeit.

χ^2-Anpassungstest mit unbekannten Parameter

Das Vorgehen ist analog zum χ^2-Test auf Verteilung mit bekannten Parameter, nur dass die Teststatistik

$$T = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - F_i)^2}{F_i} \sim \chi^2_{k-m-1}$$

wobei m die Anzahl der geschätzten Parameter ist.

χ^2-Unabhängigkeitstest

Seien $(x_1, \ldots, x_n)$ und $(y_1, \ldots, y_n)$ Stichproben zwei Zufallsvariablen. Wir testen die Nullhypothese $H_0:$ Die Variablen sind unabhängig.

Vorgehen

x-Werten y-Werten

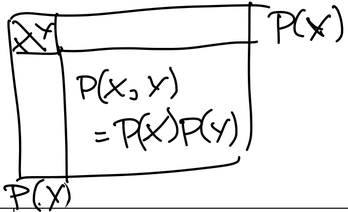
- Gruppieren der Daten in Klassen, $A_1, \ldots, A_r$ und $B_1, \ldots, B_c$, und bestimmen der empirischen Häufigkeiten

$(x_k, y_k) \in A_i \times B_j$

$$N_{ij} = \#\{x_k \in A_i, y_k \in B_j\}, \quad i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, c.$$

- Bestimmung der Randhäufigkeiten

$$N_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{c} N_{ij}, \quad N_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{r} N_{ij}.$$



X\Y	B_1	...	B_c	Σx_i
A_1				$N_{1\bullet}$
⋮		N_{ij}		⋮
A_r				$N_{r\bullet}$
Σy_i	$N_{\bullet 1}$	...	$N_{\bullet c}$	n

χ^2-Unabhängigkeitstest

- Bestimmung der theoretischen Häufigkeiten unter H_0: $\longrightarrow$

rela. $\overset{?}{=}$ $n h_{ij} = n^2 h_{i\bullet} h_{\bullet j}$

$n N_{ij} = N_{i\bullet} N_{\bullet j}$

$$F_{ij} = \frac{N_{i\bullet} N_{\bullet j}}{n}.$$

$F_{ij} = \frac{N_{i\bullet} N_{\bullet j}}{n}$	$N_{i\bullet}$
$N_{\bullet j}$	n

- Berechnung der Teststatistik

$$T = \sum_{i,j} \frac{(N_{ij} - F_{ij})^2}{F_{ij}} \sim \chi^2_{(r-1)(c-1)}.$$

- Vergleich der Teststatistik mit dem kritischen Wert: Ablehnungsbereich

$$\{T \geq \chi^2_{(r-1)(c-1),1-\alpha}\}.$$

Beispiel