1.5.3 Lösungsraum der inhomogenen Gleichung

Def 26

- Lösungen des inhomogen Systems
$$\vec{x}'(t) = A(t)\,\vec{x}(t) + \vec{b}(t)$$
heißen partikulär

- Lösungen des homogenen Systems
$$\vec{x}'(t) = A(t)\,\vec{x}(t)$$
heißen homogen

Satz 27 (Lösungsraum des inhomogenen Systems)

Sei $A(t)$ und $b(t)$ stetig auf I.
Sei $\vec{x}_p$ eine partikuläre Lösung von
$$\vec{x}'(t) = A(t)\,\vec{x}(t) + \vec{b}(t)$$
und $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung.
Dann haben alle weiteren partikulären Lösungen die Form

$$\vec{x} = \vec{x}_p + c_1\vec{x}_1 + \dots + c_n\vec{x}_n$$

Variation der Konstanten

Sei $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung.

Sind $c_1, \dots, c_n$ die Stammfunktionen der Lösungen $c_1', \dots, c_n'$ von

$$\underbrace{\left(\vec{x}_1(t) \,\middle|\, \dots \,\middle|\, \vec{x}_n(t) \right)}_{\text{Wronski-Matrix } W(t)} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

Da $W(t)$ invertierbar ist, gibt es eine eindeutige Lösung.

dann ist

$$\vec{x}_p(t) := c_1(t)\,\vec{x}_1(t) + \dots + c_n(t)\,\vec{x}_n(t)$$

eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems.

Ansatz $\vec{x}(t) = W(t)\,\vec{c}(t) = c_1(t)\,\vec{x}_1(t) + \dots + c_n(t)\,\vec{x}_n(t)$

Einsetzen in $\vec{x}\,'(t) = A(t)\,\vec{x}(t) + b(t)$

liefert

$$\begin{aligned} & c_1'(t)\,\vec{x}_1(t) + \dots + c_n'(t)\,\vec{x}_n(t) \\ + \; & c_1(t)\,\vec{x}_1'(t) + \dots + c_n(t)\,\vec{x}_n'(t) \\ = \; & A(t)\left(c_1(t)\,\vec{x}_1(t) + \dots + c_n(t)\,\vec{x}_n(t)\right) + b(t) \end{aligned}$$

$= 0$ da $\boxed{\vec{x}_i'(t) = A(t)\,\vec{x}_i(t)}$

$\vec{x}_i$ homogene Lösung

Beispiel 28 (Variation der Konstanten)

$$x_1'(t) = x_1(t) + 3x_2(t) + 2\cos^2(t)$$
$$x_2'(t) = \underbrace{3x_1(t) + x_2(t)}_{\text{konstante Koeffizienten}} + \underbrace{2\sin^2(t)}_{\text{Inhomogenität}}$$

lineares System

1. Matrixform:

$$\vec{x}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \vec{x}(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 2\cos^2(t) \\ 2\sin^2(t) \end{pmatrix}}_{b(t)}$$

2. Homogene Gleichung $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$ lösen:

Eigenwerte: $\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 2\lambda - 8$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{9}$ $\qquad \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 4$

λ_1: $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -v_1$

$\Rightarrow$ Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

λ_2: $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$

$\Rightarrow$ Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Fundamentalsystem

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}$$

3. Partikuläre Lösung (Variation der Konstanten)

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{4t} \\ -e^{2t} & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos^2(t) \\ 2\sin^2(t) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ I+II: $2e^{4t}\, c_2'(t) = 2\left[\cos^2(t) + \sin^2(t)\right] = 2$

$\Rightarrow \quad c_2'(t) = e^{-4t}$

$\Rightarrow$ I−II: $2e^{-2t}\, c_1'(t) = 2\left(\cos^2(t) - \sin^2(t)\right) = 2\cos(2t)$

$\Rightarrow \quad c_1'(t) = \cos(2t)\, e^{2t}$

Partielle Integration

$$\int f'(t)\, g(t)\, dt = f(t)\, g(t) - \int f(t)\, g'(t)\, dt$$

Stammfunktionen

$$c_2(t) = \int e^{-4t}\, dt = -\frac{1}{4} e^{-4t}$$

$$c_1(t) = \int \underbrace{\cos(2t)}_{f'}\, \underbrace{e^{2t}}_{g}\, dt \underset{PI}{=} \frac{1}{2}\sin(2t)\, e^{2t} - \int \underbrace{\frac{2}{2}\sin(2t)}_{f'}\, \underbrace{e^{2t}}_{g}\, dt$$

$$\underset{PI}{=} \frac{1}{2}\sin(2t)\, e^{2t} + \frac{1}{2}\cos(2t)\, e^{2t} - \int \frac{2}{2}\cos(2t)\, e^{2t}\, dt$$

$$\Rightarrow 2c_1(t) = 2\int \cos(2t)\, e^{2t}\, dt = \frac{1}{2}\sin(2t)\, e^{2t} + \frac{1}{2}\cos(2t)\, e^{2t}$$

$$c_1(t) = \frac{1}{4}\left(\sin(2t) + \cos(2t)\right) e^{2t}$$

4. Einsetzen für allgemeine Lösung

$$\vec{x}_p(t) = -\frac{1}{4}\, e^{-4t} \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\left(\sin(2t) + \cos(2t)\right) e^{2t} \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = -\frac{1}{4}\, e^{-4t} \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\left(\sin(2t) + \cos(2t)\right) e^{2t} \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$$
$$+ c_1 \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ Aufwendiges Verfahren.

1. Vorlesung:

$$e^{A(t)}\left(C(t) + \hat{C}\right)$$

partikuläre

homogene

Beispiel 29 (spezielle Ansätze)

Wir betrachten

$$\vec{x}'(t) = A\,\vec{x}(t) - e^{\mu t}\vec{b} \quad , \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Möglicher Ansatz von der Form der rechten Seite

$$\vec{x}(t) = e^{\mu t}\vec{v}$$

Einsetzen:

$$\mu e^{\mu t}\vec{v} = e^{\mu t}A\vec{v} - e^{\mu t}\vec{b}$$

$$\Rightarrow e^{\mu t}(A - \mu I)\vec{v} = e^{\mu t}\vec{b}$$

$$\Rightarrow (A - \mu I)\vec{v} = \vec{b} \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ Jedes $\vec{v}$ welches $(*)$ löst, liefert eine partikuläre Lösung.

$\Rightarrow$ Wenn $(*)$ keine Lösung hat, führt der Ansatz zu keiner Lösung.

1.6 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Def 30 (Lineare, skalare Differentialgleichung n-ter Ordnung)

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)\, x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)\, x(t) = b(t)$$

wobei $a_i(t)$, $b(t)$ stetige Funktionen.

Zugehöriges lineares System

Hilfsfunktionen: $x_k(t) := x^{(k-1)}(t)$, $\left(x_1(t) = x(t) \right)$ $\Rightarrow x_k'(t) = \left(x^{(k-1)}(t) \right)' = x^{(k)}(t)$
$= x_{k+1}(t)$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \dots & & -a_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

erste Nebendiagonal ist 1