Woche 4: *16. Mai 2024*

Thema: *Permutationen, Partitionen und Catalan-Zahlen*

4.1 Wiederholung

Wiederholung: Der (spezielle) Satz von Ramsey

Wir beweisen hier einen Spezialfall des Satzes von Ramsey.

Der Satz besagt, dass es für alle $k \geq 0$ in jeder „hinreichend" großen Menge von Personen

- mindestens k Personen gibt, die sich gegenseitig nicht kennen, oder es
- mindestens k Personen gibt, die sich alle gegenseitig kennen (eine Clique).

Satz.

Es gibt eine Funktion $R : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass für alle Graphen $G = (V, E)$ und alle $c, i \geq 0$ gilt: Wenn $|V| \geq R(c, i)$, dann

- gibt es ein $X \subseteq V$ mit $|X| = i$ und X ist eine unabhängige Menge in G oder
- es gibt ein $X \subseteq V$ mit $|X| = c$ und X induziert eine Clique in G, d.h. für alle $u \neq v \in X$ gilt $\{u, v\} \in E$.

Wiederholung: Der (spezielle) Satz von Ramsey

Konstruktion. Sei $V = \{P_1, \ldots, P_n\}$. P_1 belegt den obersten freien Platz.

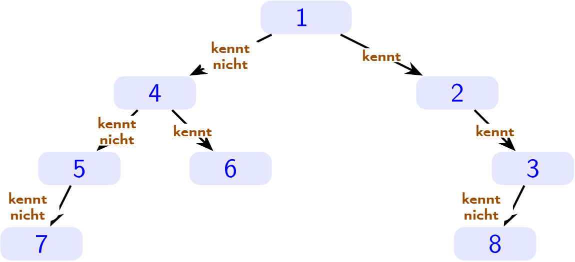
Angenommen $P_1, \ldots, P_{i-1}$ wurden schon platziert.

P_i fängt ganz oben an. Ist der Platz frei, belegt eP_i den Platz.

Ist der Platz durch P_j belegt:

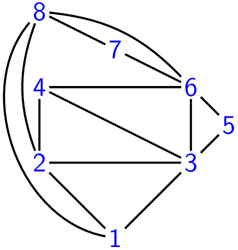
- Wenn $\{P_i, P_j\} \in E$, dann geht P_j zum rechten Nachfolger.
- Ansonsten geht P_i zum linken Nachfolger.

Dort wird das Verfahren wiederholt.



Satz. Es ex. Funktion R, so dass für alle $G = (V, E)$ und $c, i \geq 0$:
Wenn $|V| \geq R(c, i)$, dann ex.
- unab. Menge $X \subseteq V$ mit $|X| = i$
oder
- Clique $C \subseteq V$ der Größe c.

Beispiel.



Wiederholung: Der (spezielle) Satz von Ramsey

Konstruktion. Sei $V = \{P_1, \dots, P_n\}$. P_1 belegt den obersten freien Platz.

Angenommen $P_1, \dots, P_{i-1}$ wurden schon platziert.

P_i … tz.

Ist …

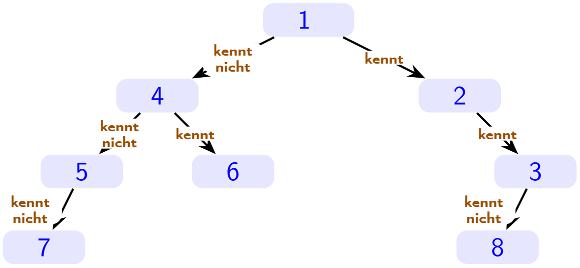
- V … r.
- A …

Dort wird das Verfahren wiederholt.

Beobachtung.

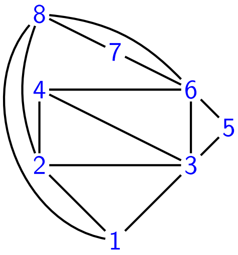
Geht eine Person $(i-1)$-mal nach links, dann enthält der Pfad eine unabhängige Menge der Größe i.

Geht eine Person $(c-1)$-mal nach rechts, dann enthält der Pfad eine Clique der Größe c.



Satz. Es ex. Funktion R, so dass für alle $G = (V, E)$ und $c, i \geq 0$:
Wenn $|V| \geq R(c, i)$, dann ex.
- unab. Menge $X \subseteq V$ mit $|X| = i$
oder
- Clique $C \subseteq V$ der Größe c.

Beispiel.



4.2 Exkurs: Bäume

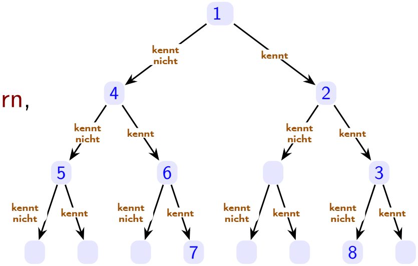
Bäume

Bäume. Wir werden uns im Kapitel über Graphentheorie noch genauer mit Bäumen beschäftigen. Hier brauchen wir nur einen informellen Begriff.

Baum (informell). Ein (Wurzel-)Baum ist ein Graph (V, E) und besteht aus:

- Einer Wurzel (der Knoten ganz oben).
- Jeder Knoten v im Baum hat eine endliche Zahl an Nachfolgern, oder Kindern, $s_1, \dots, s_t$, die selbst wieder die Wurzel eines Teilbaums sind und durch Kanten $(v, s_1), \dots, (v, s_t)$ mit v verbunden sind.

Knoten, die keine Nachfolger haben, nennt man Blätter. Die anderen Knoten heißen innere Knoten.



Höhe. Die Höhe eines Baums ist die maximale Zahl der Kanten auf einem Pfad von der Wurzel zu einem Blatt.

D.h., ein Baum mit nur einem Knoten hat Höhe 0.

Binärbäume

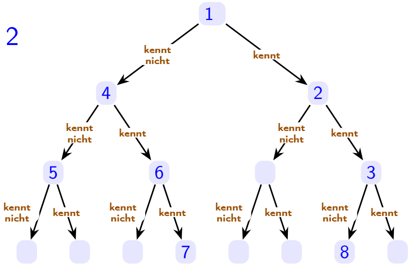
Binärbäume. Ein Baum, in dem jeder Knoten höchstens 2 Nachfolger hat, heißt Binärbaum.

Wir erlauben auch den Spezialfall eines Binärbaums mit 0 Knoten.

Wir unterscheiden bei Binärbäumen zwischen dem linken und dem rechten Nachfolger.

Ein Binärbaum heißt *vollständig*, wenn jeder Knoten Grad 0 oder 2 hat.

Wenn alle Blätter den gleichen Abstand zur Wurzel haben, nennt man den Baum balanciert.



Satz. Sei $T = (V, E)$ ein vollständiger, balancierter Binärbaum der Höhe h.

1. T hat genau $2^{h+1} - 1$ Knoten.
2. T hat genau 2^h Blätter.

Knotenzahl eines vollständigen, balancierten Binärbaums

Satz. Ein vollständiger, balancierter Binärbaum T der Höhe h enthält $2^{h+1} - 1$ Knoten.

Beweis. Beweis per Induktion über h. Sei $T = (V, E)$.

- Induktionsanfang $h = 0$. Dann enthält T nur einen Knoten und es gilt $2^{h+1} - 1 = 2^1 - 1 = 1$.
- Induktionsvoraussetzung. Wir nehmen an, die Behauptung sei für alle $j < h$ schon bewiesen.
- Induktionsschritt. Angenommen, T hat Höhe $h > 0$.

  Sei v die Wurzel von T und s_1, s_2 die beiden Nachfolger.

  Seien T_1, T_2 die beiden Teilbäume von T mit Wurzel s_1, s_2.

  Dann haben T_1, T_2 die Höhe $h - 1$ und, nach (IV), jeweils $2^h - 1$ Knoten.

  Also gilt: $|V| = 1 + 2^h - 1 + 2^h - 1 = 2^{h+1} - 1$. $\square$

Zahl der Blätter in einem Binärbaum

Satz. Sei $T = (V, E)$ ein vollständiger, balancierter Binärbaum der Höhe h. Dann hat T hat genau 2^h Blätter.

Beweis. Beweis per Induktion über h. Sei $T = (V, E)$.

- Induktionsanfang $h = 0$. Dann enthält T nur einen Knoten und dieser ist ein Blatt. Also hat T genau 2^0 Blätter.
- Induktionsvoraussetzung. Wir nehmen an, die Behauptung sei für alle $j < h$ schon bewiesen.
- Induktionsschritt. Angenommen, T hat Höhe $h > 0$.

  Sei v die Wurzel von T und s_1, s_2 die beiden Nachfolger.

  Seien T_1, T_2 die beiden Teilbäume von T mit Wurzel s_1, s_2.

  Dann haben T_1, T_2 die Höhe $h - 1$ und, nach (IV), jeweils 2^{h-1} Blätter.

  Also hat T genau $2^{h-1} + 2^{h-1} = 2^h$ Blätter. $\square$

4.3 Die Catalan-Zahlen

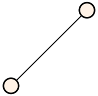
Wieviele Binärbäume mit n Knoten gibt es?

Frage. Wieviele Binärbäume mit n Knoten gibt es?

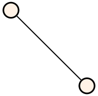
(Erinnerung. Wir unterscheiden zwischen linkem und rechtem Nachfolger.)

Beispiel.

Es gibt genau einen Binärbaum mit einem Knoten und zwei Binärbäume mit zwei Knoten:



und



Binärbäume mit n Knoten.

n	Anzahl Bäume
0	1
1	1
2	2
3	5
4	14

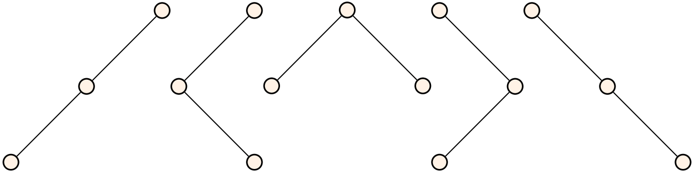
Wieviele Binärbäume mit n Knoten gibt es?

Frage. Wieviele Binärbäume mit n Knoten gibt es?

(Erinnerung. Wir unterscheiden zwischen linkem und rechtem Nachfolger.)

Beispiel.

Es gibt 5 Binärbäume der Größe 3:



und 14 Binärbäume der Größe 4.

Binärbäume mit n Knoten.

n	Anzahl Bäume
0	1
1	1
2	2
3	5
4	14

Zahl der Binärbäume mit n Knoten

Satz. Für die Anzahl B_n der Binärbäume mit n Knoten gilt:

$$B_0 = 1 \qquad \text{und für } n > 0, \qquad B_n = \sum_{k=1}^{n} B_{k-1} B_{n-k}.$$

Beweis. Per Induktion über n.

(IA) $n = 0$. Es gibt genau einen Binärbaum mit 0 Knoten.

(IV) Wir nehmen an, dass die Aussage für alle $j < n$ schon bewiesen ist.

(IS) Ein Binärbaum mit n Knoten besteht aus einer Wurzel v, einem linken Teilbaum mit ℓ Knoten und einem rechten Teilbaum mit r Knoten.

Dabei gilt $\ell + 1 + r = n$, also $r = n - (\ell + 1)$.
Weiterhin gilt $0 \leq \ell \leq n - 1$.

Nach (IV) gibt es B_ℓ Binärbäume mit ℓ Knoten und $B_{n-(\ell+1)}$ Binärbäume mit r Knoten.

Es gilt also $B_n = \sum_{\ell=0}^{n-1} B_\ell \cdot B_{n-(\ell+1)}$. Setzen wir $k := \ell + 1$ in der Summe, erhalten wir $B_n = \sum_{k=1}^{n} B_{k-1} \cdot B_{n-k}$. □

Die Catalan-Zahlen

Satz. Für die Anzahl B_n der Binärbäume auf n Knoten gilt:

$$B_0 = 1 \qquad \text{und für } n > 0, \qquad B_n = \sum_{k=1}^{n} B_{k-1} B_{n-k}.$$

Die Catalan-Zahlen. Die Zahlen B_n werden als Catalan-Zahlen bezeichnet, benannt nach dem belgischen Mathematiker Eugène Charles Catalan.

Satz. (ohne Beweis)
Es gilt

$$B_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Einschub: Induktive bzw. rekursive Definitionen

Catalan-Zahlen als Funktion. Wir können die Catalan-Zahlen auch als Funktion $B : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ auffassen, definiert als

- $B(0) := 1$ und
- $B(n) := \sum_{k=1}^{n} B(k-1) \cdot B(n-k)$ für $n > 0$.

Die Catalan-Funktion B ist dabei rekursiv oder induktiv definiert.

Rekursive bzw. induktive Definitionen. Wir können eine Funktion f über $\mathbb{N}$ dadurch definieren, dass wir z.B.

- die ersten n_0 Funktionswerte $f(0), f(1), ..., f(n_0)$ explizit angeben und
- für $n > n_0$ den Wert $f(n)$ mit Hilfe der Werte $f(n-1), \dots, f(n-n_0)$ bestimmen.

Explizite Form. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekursiv definiert.

Eine explizit definierte Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = g(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, heißt explizite Form von f.

Einschub: Induktive bzw. rekursive Definitionen

Induktive Definitionen. Wir können auch Funktionen $f : M \to N$ über anderen Mengen als $\mathbb{N}$ induktiv definieren.

Beispiel. Wir definieren induktiv die Höhe $h(T)$ eines Baums T.

D.h. h ist eine Funktion, die die Menge M aller (endlichen, nicht-leeren) Wurzelbäume T auf $\mathbb{N}$ abbildet.

- $h(T) = 0$ für Bäume T mit nur einem Knoten.
- Sei T ein Baum mit Wurzel v und Nachfolgern $s_1, \dots, s_\ell$ für ein $\ell > 0$. Für $1 \leq i \leq \ell$ sei T_i der Teilbaum von T mit Wurzel s_i. Dann definieren wir

$$h(T) := 1 + \max\{h(T_i) : 1 \leq i \leq \ell\}.$$

Hierbei benutzen wir, dass die Klasse der Bäume selbst induktiv definiert ist.

Wieviele syntaktisch korrekte Klammerausdrücke gibt es?

Frage. Wieviele korrekte Klammerausdrücke gibt es?

Beispiel. () ((() ()) (() (() () ())))

Definition. Ein Klammerausdruck ist eine Folge von "(" und ")" in der genauso viele "(" wie ")" vorkommen und an jeder Stelle die Zahl der bis dahin vorkommenden "(" nicht kleiner als die Zahl der bis dahin vorkommenden ")" ist. 定义。一个括号表达式是由"("和")"组成的序列，其中"("和")"的数量相等，并且在序列中的任何位置，前面出现的"("的数量都不少于前面出现的")"的数量。

Als Grammatik: $S \to \epsilon \mid SS \mid (S)$.

Satz. Sei $n \geq 0$. Für die Anzahl C_n der syntaktisch korrekten Klammerausdrücke mit n Klammerpaaren gilt

$$C_0 = 1 \qquad \text{und für } n \geq 1 \qquad C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k}.$$

Beweis der Klammerausdrücke

Beweis. (Per Induktion über n)

(IA) Für $n = 0$ gilt die Aussage offensichtlich.

(IV) Angenommen, die Aussage gilt für alle $i < n$.

(IS) Ein korrekter Klammerausdruck mit n Paaren beginnt mit “(”, die irgendwo geschlossen wird, und zwar an einer geraden Position $2k$. Den Klammerausdruck kann man also wie folgt darstellen:

$$\underset{1}{(}\ \cdots\ K\ \cdots\ \underset{2k}{)}\ \cdots\ S\ \cdots$$

K: Klammerausdruck mit $k-1$ Klammerpaaren.

S: Klammerausdruck mit $n-k$ Klammerpaaren.

Satz. Für $n \geq 0$ sei C_n die Zahl der korrekten Klammerausdrücke mit n Klammerpaaren. Es gilt $C_0 = 1$ und für $n \geq 1$ $\quad C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k}$.

Beweis (fort)

Sei A_k die Menge der Klammerausdrücke mit n Klammerpaaren, deren erste Klammer an Position $2k$ geschlossen wird.

Dann gilt $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$.

Ausdrücke in A_k sehen wie oben aus: $(\cdots K \cdots)\cdots S \cdots$.

In A_k haben wir also C_{k-1} Möglichkeiten für K und C_{n-k} Möglichkeiten für S.

Insgesamt gilt daher

$$C_n \quad = \quad \left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| \quad = \quad \bigcup_{k=1}^{n} |A_k| \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k}. \quad \square$$

Satz. Für $n \geq 0$ sei C_n die Zahl der korrekten Klammerausdrücke mit n Klammerpaaren. Es gilt $C_0 = 1$ und für $n \geq 1$ $\quad C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k}$.

Die Catalan-Zahlen

Satz. Für die Anzahl B_n der Binärbäume mit n Knoten gilt:

$$B_0 = 1 \qquad \text{und für } n > 0, \qquad B_n = \sum_{k=1}^{n} B_{k-1} B_{n-k}.$$

Satz. Für die Anzahl C_n der syntaktisch korrekten Klammerausdrücke mit n Klammerpaaren gilt

$$C_0 = 1 \qquad \text{und für } n \geq 1 \qquad C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k}.$$

Satz. (ohne Beweis) Es gilt

$$B_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

4.4 Permutationen

Erinnerung: Permutationen

Definition (Permutationen).

Eine Permutation einer Menge $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ist eine bijektive Abbildung $\pi : A \to A$.

Man kann Permutationen einfach bildlich wie folgt darstellen.

$$\pi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \pi(a_1) & \pi(a_2) & \cdots & \pi(a_n) \end{pmatrix}$$

Satz. Die Zahl der Permutationen einer n-elementigen Menge ist $n!$.

Beispiel einer Permutation

Beispiel einer Permutation. Sei $A = \{1, \ldots, 11\}$.

Folgende Permutation π setzt 5 an die Position 1, 8 an die Position 2 usw.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 3 & 6 & 2 & 7 & 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Beobachtung. 3 und 9 sind Fixpunkte der Funktion π.

Hintereinanderausführen einer Permutation.

Die Hintereinanderausführung $\pi \circ \pi$ der Permutation π ergibt:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 7 & 8 & 4 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir das Element 1:

$$\begin{aligned} \pi(1) &= 5, \\ \pi(\pi(1)) &= 2, \\ \pi(\pi(\pi(1))) &= 8, \\ \pi(\pi(\pi(\pi(1)))) &= 1\,. \end{aligned}$$

Zyklen. $1, 5, 2, 8$ bilden einen Zyklus der Länge 4, geschrieben $(1\ 5\ 2\ 8)$.

Zyklen in Permutationen

Definition. Sei A eine Menge und π eine Permutation auf A.

Ein *Zyklus* ist eine Folge $(i_1 i_2 i_3 \dots i_t)$ verschiedener Elemente aus A, so dass $\pi(i_j) = i_{j+1}$, für alle $1 \leq j < t$ und $\pi(i_t) = i_1$ gilt.

t ist die *Länge* des Zyklus.

Beispiel.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 3 & 6 & 2 & 7 & 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Zykelschreibweise für Permutationen.

Jede Permutation kann als *Produkt* ihrer Zyklen geschrieben werden.

Die Permutation oben können wir wie folgt schreiben:

$$(1\ 5\ 2\ 8)\ (3)\ (4\ 7\ 6)\ (9)$$

Zyklen.

$1, 5, 2, 8$ bilden einen Zyklus der Länge 4, geschrieben $(1\ 5\ 2\ 8)$.

Wir könnten den Zyklus $(1\ 5\ 2\ 8)$ auch als $(5\ 2\ 8\ 1)$ schreiben.

Die *Reihenfolge* innerhalb eines Zyklus' ist aber entscheidend.

Zyklen in Permutationen

Frage. Wieviele Permutationen mit einer festen Zahl von Zyklen gibt es?

Definition. Die Zahl der Permutationen einer n-elementigen Menge mit genau k Zyklen wird als $s_{n,k}$ bezeichnet.

Die Zahlen $s_{n,k}$ werden als *Stirling-Zahlen $s_{n,k}$ erster Art* bezeichnet, benannt nach dem schottischen Mathematiker James Stirling (1692 - 1770).

Satz. Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$ gilt

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1) \cdot s_{n-1,k}.$$

Beweis der Stirling-Zahlen erster Art

Satz. Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$ gilt

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1) \cdot s_{n-1,k}.$$

Beweis. Sei $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Wir zählen die Menge der Permutationen wie folgt.

1. Permutationen, in denen a_n ein Fixpunkt ist, die also den Zyklus (a_n) enthalten. Davon gibt es $s_{n-1,k-1}$ viele.

2. Permutationen mit a_n in einem Zyklus der Länge > 1.

   Wir haben also $s_{n-1,k}$ Permutationen der übrigen Elemente $a_1, \ldots, a_{n-1}$ mit genau k Zyklen.

   In einen dieser Zyklen muss das Element a_n eingefügt werden.

   Da hier die Reihenfolge wichtig ist, gibt es dazu $n-1$ Möglichkeiten. □

4.5 Partitionen einer Menge

Partitionen einer Menge

Definition. Eine *k-Partition* einer n-elementigen Menge $A := \{a_1, \dots, a_n\}$ ist eine Zerlegung der Menge A in k nicht-leere, paarweise disjunkte Mengen.

Die Zahl der k-Partitionen einer Menge mit n Elementen wird durch die sogenannten *Stirling-Zahlen $S_{n,k}$ zweiter Art* angegeben.

Stirling-Zahlen zweiterArt

Ziel. Rekursive Formel für Stirling-Zahlen 2. Art

Zunächst betrachten wir einige Randfälle.

1. Ist $k > n$, dann gilt $S_{n,k} = 0$, da keine Menge mit n Elementen in mehr als n nicht-leere Partitionen zerlegt werden kann.
2. Falls $n > 0$ ist $S_{n,0} = 0$, da die Elemente ja in mindestens einer Partition liegen müssen.
3. Wir definieren $S_{0,0} := 1$.

Satz (Stirling-Zahlen zweiter Art). Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$ gilt:

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}.$$

$S_{n,k}$. Zahl der k-Partitionen einer n-elementigen Menge.

Beweis der Stirling-Zahlen 2. Art

Wir teilen die k-Partitionen der Menge $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ in zwei disjunkte Teilmengen auf.

1. k-Partitionen, in denen sich das Element a_n alleine in einer Menge befindet.

   Wenn a_n eine eigene Partition bildet, müssen die anderen $n-1$ Elemente auf die restlichen $k-1$ Partitionen verteilt werden. Davon gibt es $S_{n-1,k-1}$ viele.

2. k-Partitionen, in denen a_n nicht alleine in einer Partition liegt.

   Es gibt $S_{n-1,k}$ k-Partitionen der restlichen $n-1$ Elemente. In jeder der k Partitionen kann a_n liegen.

   Insgesamt gibt es also $k \cdot S_{n-1,k}$ mögliche k-Partionen in dieser Menge.

Nach der Summenformel gibt es also $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}$ mögliche k-Partitionen einer n-elementigen Menge.

Satz.
Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$ gilt:

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}.$$

□

Zusammenfassung

Begriffe.

- Bäume und Binärbäume
- Permutationen und Zyklen in Permutationen.
- k-Partitionen einer Menge.

Ergebnisse. Ein vollständiger, balancierter Binärbaum der Höhe h hat

- $2^{h+1} - 1$ Knoten.
- 2^h Blätter.

Zahlen.

- Catalan-Zahlen C_n. Geben z.B. die Zahl der Binärbäume mit n Knoten an. Es gilt $B_0 = 1$ und $B_n = \sum_{k=1}^{n} B_{k-1} B_{n-k}$ für $n > 0$.
- Stirling-Zahlen $s_{n,k}$ erster Art. Zahl der Permutationen mit k Zyklen einer n-elementigen Menge. Es gilt $s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1) \cdot s_{n-1,k}$
- Stirling-Zahlen $S_{n,k}$ zweiter Art. Zahl der k-Partitionen einer n-elementigen Menge. Es gilt $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}$.