Zusatzaufgaben 4

Aufgabe 1: Wörter

Seien $\Sigma \triangleq \{\, \mathtt{a},\ \mathtt{b},\ \mathtt{c} \,\}$ und $\Sigma' \triangleq \{\, \mathtt{aa},\ \mathtt{bb} \,\}$.

1.a) *Gib* jeweils 4 Wörter mit paarweise verschiedener Länge aus Σ^* und Σ'^* *an*.

Lösung

Zum Beispiel: $\varepsilon, \mathtt{a}, \mathtt{bc}, \mathtt{bab}$ für Σ^* und $\varepsilon, \mathtt{aa}, \mathtt{aabb}, \mathtt{bbbbbb}$ für Σ'^*

/Lösung

1.b) *Gib* 4 Wörter gleicher Länge aus Σ^* *an*.

Lösung

Zum Beispiel: $\mathtt{aaa}, \mathtt{cba}, \mathtt{cca}, \mathtt{bbb}$

/Lösung

1.c) *Gib* die Menge aller Teilworte von $\mathtt{bbca} \in \Sigma^*$ *an*.

Lösung

$\{\, \varepsilon,\ \mathtt{a},\ \mathtt{b},\ \mathtt{c},\ \mathtt{bb},\ \mathtt{bc},\ \mathtt{ca},\ \mathtt{bbc},\ \mathtt{bca},\ \mathtt{bbca} \,\}$

/Lösung

1.d) *Gib explizit an:* $P \triangleq \{\, vw \mid v, w \in \Sigma^* \wedge v \text{ ist Präfix von } \mathtt{bac} \wedge w \text{ ist Suffix von } \mathtt{aab} \,\}$

Lösung

Die Menge aller Präfixe von $\mathtt{bac}$ ist $\{\, \varepsilon,\ \mathtt{b},\ \mathtt{ba},\ \mathtt{bac} \,\}$.
Die Menge aller Suffixe von $\mathtt{aab}$ ist $\{\, \varepsilon,\ \mathtt{b},\ \mathtt{ab},\ \mathtt{aab} \,\}$.
Damit ist $P = \{\, \varepsilon,\ \mathtt{b},\ \mathtt{ab},\ \mathtt{ba},\ \mathtt{bb},\ \mathtt{aab},\ \mathtt{bab},\ \mathtt{bac},\ \mathtt{baab},\ \mathtt{bacb},\ \mathtt{baaab},\ \mathtt{bacab},\ \mathtt{bacaab} \,\}$.

/Lösung

Aufgabe 2: Sprachen

Sei $\Sigma \triangleq \{ a, b, c, d \}$ ein Alphabet und seien $A_1 \triangleq \{ a, b, ac, ca \}$, $A_2 \triangleq \{ \varepsilon, a, b \}$, $A_3 = \{ bab, abba \}$ und $A_4 = \{ \varepsilon, aba, baab \}$ Sprachen über Σ.

2.a) *Gib explizit an:* $A_1 \cdot A_2$

Lösung

$A_1 \cdot A_2 = \{ a, b, aa, ab, ac, ba, bb, ca, aca, acb, caa, cab \}$

/Lösung

2.b) *Gib explizit an:* $A_3 \cdot A_4$

Lösung

$A_3 \cdot A_4 = \{ bab, abba, bababa, abbaaba, babbaab, abbabaab \}$

/Lösung

2.c) *Berechne:* $(A_2)^3$

Lösung

$$\begin{aligned}
(A_2)^3 \; (&= A_2 \cdot (A_2 \cdot A_2)) \\
&\overset{\text{Def.}\,\cdot}{=} A_2 \cdot \{ \varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb \} \\
&\overset{\text{Def.}\,\cdot}{=} \{ \varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb \}
\end{aligned}$$

/Lösung

2.d) *Berechne:* $(A_3)^2$

Lösung

$$\begin{aligned}
(A_3)^2 \; (&= A_3 \cdot A_3) \\
&\overset{\text{Def.}\,\cdot}{=} \{ babbab, abbabab, bababba, abbaabba \}
\end{aligned}$$

/Lösung

2.e) *Gib explizit an:* $\{ |w| \mid w \in \{ ab \}^* \}$ für Σ.

Lösung

$\{ n \in \mathbb{N} \mid n \bmod 2 = 0 \}$

/Lösung

Aufgabe 3: Reguläre Ausdrücke

Gegeben sei der reguläre Ausdruck $e_1 \triangleq \big((ab)^* + b^*\big)\,(\epsilon + a)$.

3.a) *Gib* das kürzeste Wort, das längste Wort und drei Wörter der Länge 3 aus $L(e_1)$ *an*.

Lösung

Das kürzeste Wort in der Sprache $L(e_1)$ ist ε.
Die Sprache $L(e_1)$ ist unendlich groß, ein längstes Wort gibt es daher nicht.
Die Wörter aba, bba und bbb sind die einzigen Wörter der Länge 3 in $L(e_1)$.

/Lösung

3.b) *Gib* die Sprache $A_1 = L(e_1)$ *an*.

Lösung

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{\, x^n y \mid n \in \mathbb{N} \land x \in \{\, ab,\ b \,\} \land y \in \{\, \varepsilon,\ a \,\}\,\} \\
&= \{\, x^n \mid n \in \mathbb{N} \land x \in \{\, ab,\ b \,\}\,\} \cup \{\, x^n a \mid n \in \mathbb{N} \land x \in \{\, ab,\ b \,\}\,\} \\
&= \{\, x^n, x^m a \mid n, m \in \mathbb{N} \land x \in \{\, ab,\ b \,\}\,\} \\
&= \left\{\ (ab)^n, (ab)^m a, b^k, b^l a \mid n, m, k, l \in \mathbb{N} \ \right\}
\end{aligned}$$

Hinweis: Hier sind verschiedene Schreibweisen für die selbe Sprache angegeben. Es genügt natürlich, eine solche Schreibweise anzugeben. Außer den hier dargestellten Schreibweisen gibt es noch viele weitere.

/Lösung

Aufgabe 4: Induktion über Wörter

Gegeben sei ein Alphabet Σ.

4.a) Die Spiegelung von Wörtern über einem Alphabet Σ sei definiert durch

$$\varepsilon^R = \varepsilon \text{ und} \tag{1}$$

$$(wa)^R = a\left(w^R\right), \text{ für alle } w \in \Sigma^* \text{ und } a \in \Sigma. \tag{2}$$

Beweise mit Induktion, dass für alle Wörter $w = a_1 \dots a_n$ mit $w \in \Sigma^*$ und $a_i \in \Sigma$ für alle $i \in [1, n]$ und $n > 0$ gilt $(a_1 \dots a_n)^R = a_n \dots a_1$.

Lösung

Sei

$$P(n) \triangleq \left((a_1 \dots a_n)^R = a_n \dots a_1\right)$$

Wir verwenden das Induktionsschema:

$$\left(\underbrace{P(1)}_{\text{IA}} \wedge \underbrace{(\forall n \in \mathbb{N}^+ \,.\, P(n) \rightarrow P(n+1))}_{\text{IS}}\right) \rightarrow (\forall x \in \mathbb{N}^+ \,.\, P(x))$$

IA ($P(1)$)**:**

$$(a_1)^R \overset{\text{Def.}\cdot}{=} (\varepsilon a_1)^R \overset{(2)}{=} a_1\left(\varepsilon^R\right) \overset{(1)}{=} a_1\varepsilon \overset{\text{Def.}\cdot}{=} a_1$$

Sei $n \in \mathbb{N}^+$.

IV ($P(n)$)**:** $(a_1 \dots a_n)^R = a_n \dots a_1$

IS ($P(n+1)$)**:** *Zu Zeigen:* $(a_1 \dots a_{n+1})^R = a_{n+1} \dots a_1$

$$(a_1 \dots a_{n+1})^R \overset{(2)}{=} a_{n+1}\,(a_1 \dots a_n)^R \overset{\text{IV}}{=} a_{n+1} \dots a_1$$

/Lösung

Aufgabe 5: Ordnen von Wörtern

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma \triangleq \{\ a,\ b,\ c\ \}$ und die totale Ordnung $R_1 : (\Sigma, \Sigma)$ mit $R_1 \triangleq t(r(\{\ (b,\ c),\ (c,\ a)\ \}))$.

5.a) Ordne die Wörter $\varepsilon, c, cc, ccc, ca, abc, bac$ nach der lexikographischer Ordnung bzgl. R_1.

Lösung

$\varepsilon \ll_{R_1} bac \ll_{R_1} c \ll_{R_1} cc \ll_{R_1} ccc \ll_{R_1} ca \ll_{R_1} abc$

/Lösung

5.b) Ordne die Wörter $\varepsilon, c, cc, ccc, ca, abc, bac$ nach der Standardordnung bzgl. R_1.

Lösung

$\varepsilon \ll^S_{R_1} c \ll^S_{R_1} cc \ll^S_{R_1} ca \ll^S_{R_1} bac \ll^S_{R_1} ccc \ll^S_{R_1} abc$

/Lösung