

8. Vorlesung: Poisson-Approximation und Erwartungswert

Nikolas Tapia

13. Mai 2024, Stochastik für Informatik(er)

Erinnerung: Faltungsformel

Aussage 8.1

Seien X, Y zwei unabhängige diskrete Zufallsvariablen. Dann hat die Zufallsvariable $X + Y$ die Verteilung

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = k - x)$$

für alle $k \in (X + Y)(\Omega) = \{m + n : m \in X(\Omega), n \in Y(\Omega)\}$.

Aussage 8.2

Seien X, Y unabhängige Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit Parametern $\lambda, \mu > 0$.
Dann ist die Zufallsvariable $X + Y$ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda + \mu$.

$$P(X + Y = k) = e^{-(\lambda + \mu)} \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!}$$

$$\Leftrightarrow X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda + \mu)$$

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=m) \mathbb{P}(Y=k-m) \quad (X(\Omega)=N_0)$$

Faltungsformel

$$= \sum_{m=0}^k \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \frac{\mu^{k-m} e^{-\mu}}{(k-m)!}$$

$$\mathbb{P}(Y=k-m)=0$$

$$m > k$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{m=0}^k \lambda^m \mu^{k-m} \frac{k!}{m!(k-m)!} \cdot \frac{1}{k!}$$

$$(\lambda+\mu)^k = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}$$

Seien $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$,
 $Y \sim \text{Poisson}(\mu)$.

Welche bedingte Verteilung hat X ,
 gegeben $X + Y = n$?

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow & \frac{\cancel{e^{-\lambda}} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \cancel{e^{-\mu}} \frac{\mu^{(n-k)}}{(n-k)!}}{\cancel{e^{-(\lambda+\mu)}} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{\lambda^k \mu^{(n-k)}}{(\lambda+\mu)^{n-k+k}} \\
 & = \frac{n!}{(n-k)!k!} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k} \sim \text{Binom}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)
 \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X=k | X+Y=n) = \frac{\mathbb{P}(X=k, X+Y=n)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X=k, Y=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\overset{\sim \mu}{X}=k) \mathbb{P}(\overset{\sim \lambda}{Y}=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n) \sim \mu+\lambda}$$

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu} = 1$$

Theorem 1 (Poisson-Grenzwertsatz)

Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zahlen aus $[0, 1]$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda \in (0, \infty)$.

Sei $X_n \sim \text{Binom}(n, p_n)$ eine Folge von binomialverteilten Zufallsvariablen, und sei $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Poisson-Approximation

Aussage 8.3

Sei $\lambda > 0$. Sei X binomialverteilt mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p = \frac{\lambda}{n}$. Dann gilt

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \mathbb{P}(X = k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k \in \{0, \dots, n\}, \quad \overset{\sim \text{Poisson}(\lambda)}{\underset{[0,1]}{n}}$$

d.h. X ist approximativ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda = np$. Die Approximation wird besser, je größer n bzw. kleiner p ist.

Ein Geschäft herstellt eine große Anzahl von gleichartigen Produkten, aus denen n zufällig getestet werden. Mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.1$ ist ein Produkt defekt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass aus einer Stichprobe von 10 Produkten höchstens 1 defekt ist?

$$X = \# \text{ Fehler} \sim \text{Binomial}(10, 0.1)$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P_X(0) + P_X(1) \\ &= \binom{10}{0} (0.1)^0 (0.9)^{10} \\ &\quad + \binom{10}{1} (0.1)^1 (0.9)^9 \\ &= 0.7361. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= 10 \times 0.1 \\ &= 1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\approx e^{-1} \frac{1^0}{0!} + e^{-1} \frac{1^1}{1!} \\ &= 0.7358. \end{aligned}$$

Definition 8.1

Sei X eine diskrete Zufallsvariable. Der **Erwartungswert** von X ist definiert als

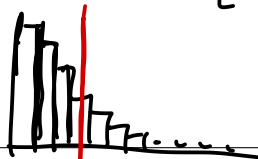
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x),$$

sofern $\sum_{x \in X(\Omega)} |x| \mathbb{P}(X = x) < \infty$ ist. Wenn Letzteres erfüllt ist, so sagen wir, dass der Erwartungswert von X existiert.

Bem: Falls $|X(\Omega)| < \infty \Rightarrow \mathbb{E}[X]$ existiert.



$\mathbb{E}[X]$



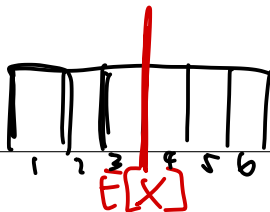
$\mathbb{E}[X]$

Bei Würfeln. $X = \text{Augenzahl}$, $\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{6}$, $k \in \{1, \dots, 6\}$

wert ↙ W'keit

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5$$



Sei X eine Zufallsvariable mit $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ und Verteilung gegeben durch folgende Tabelle:

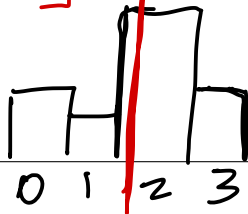
x	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x)$	0,2	0,1	0,5	0,2

Berechnen Sie den Erwartungswert von X .

Aus der Def:

$$\mathbb{E}[X] = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,2$$

$$\mathbb{E}[X] \leftarrow = 1,7.$$



Eigenschaften des Erwartungswertes

Aussage 8.4

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x| \mathbb{P}(X=x) < \infty.$$

↓

Seien X, Y diskrete Zufallsvariablen mit existierendem Erwartungswert. Dann gilt:

$$\left. \begin{array}{l} 1. \mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y). \\ 2. \mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X) \text{ für alle } a \in \mathbb{R}. \end{array} \right\} \text{linear?}$$

3. Falls $X(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$, so ist $\mathbb{E}(X) \geq 0$.

4. Falls X konstant ist, d.h. $X(\omega) = c \in \mathbb{R}$ für alle $\omega \in \Omega$, dann ist $\mathbb{E}[X] = c$.

5. Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gilt

$$\mathbb{E}[f(X, Y)] = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} f(x, y) \mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

hängt von $\mathbb{P}_{X,Y}$ ab!
nicht von $\mathbb{P}_{f(X,Y)}$

6. Falls X und Y unabhängig sind, so gilt $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

$$1. \mathbb{E}(X+Y) = \sum_{z \in (X+Y)(\Omega)} z \mathbb{P}(X+Y=z), \quad (X+Y)(\Omega) = \left\{ x+y : \begin{array}{l} x \in X(\Omega), \\ y \in Y(\Omega) \end{array} \right\}$$

$$= \sum_{\substack{z=x+y: x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} (x+y) \mathbb{P}(X=x, X+Y=z)$$

$$= \sum_{x,y} (x+y) \mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

$$\sum_y \mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(X=x)$$

$$= \sum_{x,y} x \mathbb{P}(X=x, Y=y) + \sum_{x,y} y \mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

$$= \sum_x x \mathbb{P}(X=x) + \sum_y y \mathbb{P}(Y=y)$$

$$= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

$$ax \Leftarrow X=x$$

2. $\mathbb{E}[aX] = \sum_{x \in X(\Omega)} ax \mathbb{P}(X=x)$

$$= a \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X=x)$$

$$= a \mathbb{E}(X).$$

4. $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X=x)$, $X(\Omega) = \{c\} \in \mathbb{R}$.

$$= c \underbrace{\mathbb{P}(X=c)}_{=1}$$

$$= c$$

$$5. \rightarrow f(x, y) = xy$$

$$6. \mathbb{E}[XY] \stackrel{\downarrow}{=} \sum_{x, y} xy \mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

x, y unabhängig

$$\mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

$$= \mathbb{P}(X=x) \mathbb{P}(Y=y)$$

$$= \sum_{x, y} xy \mathbb{P}(X=x) \mathbb{P}(Y=y)$$

$$= \sum_{x, y} (x \mathbb{P}(X=x)) \cdot (y \mathbb{P}(Y=y))$$

$$= \left(\sum_x x \mathbb{P}(X=x) \right) \cdot \left(\sum_y y \mathbb{P}(Y=y) \right) = \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y]$$

Aussage 8.5

Sei $X \sim \text{Bernoulli}(p)$. Dann gilt $\mathbb{E}(X) = p$.

Aussage 8.6

Sei $X \sim \text{Binom}(n, p)$. Dann gilt $\mathbb{E}(X) = np$.

Aussage 8.7

Sei $X \sim \text{Geom}(p)$. Dann gilt $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$.

Aussage 8.8

Sei $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Dann gilt $\mathbb{E}(X) = \lambda$.

1. $X \sim \text{Bernoulli}(p)$. $X(\Omega) = \{0, 1\}$, $\mathbb{P}(X=1)=p$, $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$

$$\mathbb{E}[X] = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p.$$

2. $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, $X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k \binom{n}{k} &= k \frac{n!}{k! (n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)! (n-k)!} \rightarrow n \cdot (n-1)! \\ &= n \frac{(n-1)!}{(k-1)! (n-k)!} = n \binom{n-1}{k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X] &= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} & (x+y)^{n-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-1-k} \\
 &= n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\
 &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-1-k} \\
 &= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} = np \underbrace{(p + (1-p))^{n-1}}_{=1} = np
 \end{aligned}$$

4. $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $X(\Omega) = \mathbb{N}_0$, $\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1-1}}{(k-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$