Woche 1~~0~~1: *4. Juli 2024*

Thema: *Ordnungen und Äquivalenzen*

10.1 Äquivalenzrelationen

Relationen und deren Eigenschaften

Definition. Sei M eine Menge und $k \geq 0$.

1. Mit M^k bezeichnen wir die Menge aller k-Tupel von Elementen aus M, d.h.

$$M^k := \{(a_1, \dots, a_k) : a_i \in M \text{ für alle } 1 \leq i \leq k\}.$$

Hinweis. Für $k = 0$ gibt es genau 2 Relationen über M: $\emptyset$ und $\{()\}$.

2. Eine *k-stellige Relation R über M* ist eine Teilmengemenge $R \subseteq M^k$.

Relationen und deren Eigenschaften

Definition. Sei M eine Menge und $k \geq 0$.

1. Mit M^k bezeichnen wir die Menge aller k-Tupel von Elementen aus M, d.h.

$$M^k := \{(a_1, \dots, a_k) : a_i \in M \text{ für alle } 1 \leq i \leq k\}.$$

Hinweis. Für $k = 0$ gibt es genau 2 Relationen über M: $\emptyset$ und $\{()\}$.

2. Eine *k-stellige Relation R über M* ist eine Teilmengemenge $R \subseteq M^k$.

Beispiele.

- Sei $M = V(G)$ die Knotenmenge eines gerichteten Graphs.
  Dann ist $E \subseteq M^2$ eine zweistellige Relation über M.
- Sei M die Menge aller Bahnhöfe, Zugnummern, Tage und Zeiten.

  Dann können wir einen Bahnfahrplan als 4-stellige Relation über M auffassen, mit Einträgen der Form

$$F = \{ \text{(HBf Berlin, ICE837, 9.7.2024, 9:00h), ...} \}.$$

Binäre Relationen

2-stellige Relationen werden oft als *binäre* Relationen bezeichnet.

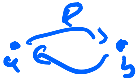
Spezielle Eigenschaften binärer Relationen.

Sei M eine Menge und $R \subseteq M^2$.

- R ist *reflexiv*, wenn $(a, a) \in R$ für alle $a \in M$.

- R ist *irreflexiv*, wenn $(a, a) \notin R$ für alle $a \in M$.
- R ist *symmetrisch*, wenn für alle $a, b \in M$ gilt:

  Wenn $(a, b) \in R$, dann auch $(b, a) \in R$.

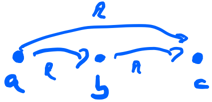


- R ist *antisymmetrisch*, wenn für alle $a \neq b \in M$ gilt:

  Wenn $(a, b) \in R$, dann $(b, a) \notin R$.

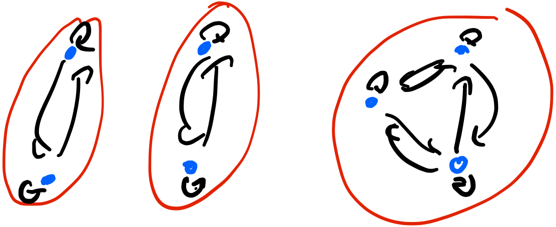
- R ist *transitiv*, wenn für alle $a, b, c \in M$ gilt:

  Wenn $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$, dann auch $(a, c) \in R$.



Äquivalenzrelationen

Definition. Sei M eine Menge. Eine *Äquivalenzrelation* über M ist eine *reflexive, transitive* und *symmetrische* Relation $R \subseteq M \times M$.



reflexiv:
$(a, a) \in R$ für alle $a \in M$.

symmetrisch:
Wenn $(a, b) \in R$, dann $(b, a) \in R$.

transitiv:
Wenn $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$, dann $(a, c) \in R$.

Äquivalenzrelationen

Definition. Sei M eine Menge. Eine *Äquivalenzrelation* über M ist eine *reflexive, transitive* und *symmetrische* Relation $R \subseteq M \times M$.

Beispiel.

Für $n \geq 1$ ist die Relation

$$R := \{(a, b) : a \equiv b \pmod{n}\}$$

eine Äquivalenzrelation über $\mathbb{Z}$. Denn:

- reflexiv. $a \equiv a \pmod{n}$ gilt für alle $a \in \mathbb{Z}$.
- symmetrisch.
  Wenn $a \equiv b \pmod{n}$, dann auch $b \equiv a \pmod{n}$.
- transitiv. Wenn $a \equiv b \pmod{n}$ und $b \equiv c \pmod{n}$, dann gilt auch $a \equiv c \pmod{n}$.

reflexiv:
$(a, a) \in R$ für alle $a \in M$.

symmetrisch:
Wenn $(a, b) \in R$, dann $(b, a) \in R$.

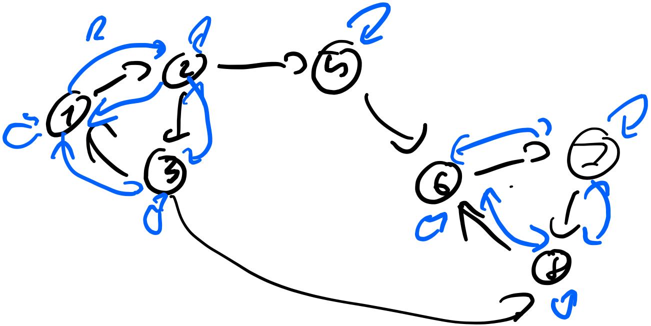
transitiv:
Wenn $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$, dann $(a, c) \in R$.

Beispiel Äquivalenzrelationen

Sei G ein gerichteter Graph und $R \subseteq V(G) \times V(G)$ definiert durch

$$R = \left\{ (u, v) : \begin{array}{l} \text{es gibt in } G \text{ einen Weg von } u \text{ nach } v \\ \text{und einen Weg von } v \text{ nach } u \end{array} \right\}.$$

Behauptung. R ist eine Äquivalenzrelation.



reflexiv:
$(a, a) \in R$ für alle $a \in M$.

symmetrisch:
Wenn $(a, b) \in R$, dann $(b, a) \in R$.

transitiv:
Wenn $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$, dann $(a, c) \in R$.

Definition.
$R \subseteq M^2$ ist *Äquivalenzrelation*, wenn R *reflexiv*, *transitiv* und *symmetrisch* ist.

Beispiel Äquivalenzrelationen

Sei G ein gerichteter Graph und $R \subseteq V(G) \times V(G)$ definiert durch

$$R = \left\{ (u, v) : \begin{array}{l} \text{es gibt in } G \text{ einen Weg von } u \text{ nach } v \\ \text{und einen Weg von } v \text{ nach } u \end{array} \right\}.$$

Behauptung. R ist eine Äquivalenzrelation.

- Offensichtlich gilt $(u, u) \in R$ für alle $u \in V(G)$.

reflexiv:
$(a, a) \in R$ für alle $a \in M$.

symmetrisch:
Wenn $(a, b) \in R$, dann $(b, a) \in R$.

transitiv:
Wenn $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$, dann $(a, c) \in R$.

Definition.
$R \subseteq M^2$ ist *Äquivalenzrelation*, wenn R *reflexiv*, *transitiv* und *symmetrisch* ist.

Beispiel Äquivalenzrelationen

Sei G ein gerichteter Graph und $R \subseteq V(G) \times V(G)$ definiert durch

$$R = \left\{ (u, v) : \begin{array}{l} \text{es gibt in } G \text{ einen Weg von } u \text{ nach } v \\ \text{und einen Weg von } v \text{ nach } u \end{array} \right\}.$$

Behauptung. R ist eine Äquivalenzrelation.

- Offensichtlich gilt $(u, u) \in R$ für alle $u \in V(G)$.
- Aus der Symmetrie der Definition von R folgt:

  Wenn $(u, v) \in R$, dann $(v, u) \in R$.

reflexiv:
$(a, a) \in R$ für alle $a \in M$.

symmetrisch:
Wenn $(a, b) \in R$, dann $(b, a) \in R$.

transitiv:
Wenn $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$, dann $(a, c) \in R$.

Definition.
$R \subseteq M^2$ ist *Äquivalenzrelation*, wenn R *reflexiv*, *transitiv* und *symmetrisch* ist.

Beispiel Äquivalenzrelationen

Sei G ein gerichteter Graph und $R \subseteq V(G) \times V(G)$ definiert durch

$$R = \left\{ (u,v) : \begin{array}{l} \text{es gibt in } G \text{ einen Weg von } u \text{ nach } v \\ \text{und einen Weg von } v \text{ nach } u \end{array} \right\}.$$

Behauptung. R ist eine Äquivalenzrelation.

- Offensichtlich gilt $(u,u) \in R$ für alle $u \in V(G)$.
- Aus der Symmetrie der Definition von R folgt:

  Wenn $(u,v) \in R$, dann $(v,u) \in R$.
- Seien $(u,v) \in R$ und $(v,w) \in R$. Zu zeigen: $(u,w) \in R$.

  Nach Definition gibt es Wege

  $$P = u\, e_1 \dots e_{l-1}\, v \text{ und } P' = v\, e_1' s_2' e_2' \dots e_{l'-1}'\, w.$$

  Dann ist $P \cdot P' := u\, \underbrace{e_1 \dots e_{l-1}}_{P}\, \underbrace{v\, e_1' \dots e_{l'-1}'}_{P'}\, w$ ein Weg von u nach w.

reflexiv:
$(a,a) \in R$ für alle $a \in M$.

symmetrisch:
Wenn $(a,b) \in R$, dann $(b,a) \in R$.

transitiv:
Wenn $(a,b) \in R$ und $(b,c) \in R$, dann $(a,c) \in R$.

Definition.
$R \subseteq M^2$ ist *Äquivalenzrelation*, wenn R *reflexiv*, *transitiv* und *symmetrisch* ist.

Beispiel Äquivalenzrelationen

Sei G ein gerichteter Graph und $R \subseteq V(G) \times V(G)$ definiert durch

$$R = \left\{ (u, v) : \begin{array}{l} \text{es gibt in } G \text{ einen Weg von } u \text{ nach } v \\ \text{und einen Weg von } v \text{ nach } u \end{array} \right\}.$$

Behauptung. R ist eine Äquivalenzrelation.

- Offensichtlich gilt $(u, u) \in R$ für alle $u \in V(G)$.
- Aus der Symmetrie der Definition von R folgt:

  Wenn $(u, v) \in R$, dann $(v, u) \in R$.
- Seien $(u, v) \in R$ und $(v, w) \in R$. Zu zeigen: $(u, w) \in R$.

  Nach Definition gibt es Wege

  $$P = u\, e_1 \dots e_{l-1}\, v \text{ und } P' = v\, e'_1 s'_2 e'_2 \dots e'_{l'-1}\, w.$$

  Dann ist $P \cdot P' := u\, e_1 \dots e_{l-1}\, v\, e'_1 \dots e'_{l'-1}\, w$ ein Weg von u nach w.

  Analog konstruieren wir aus Wegen Q von w nach v und Q' von v nach u einen Weg Q'' von w nach u. Daraus folgt $(u, w) \in R$. □

reflexiv:
$(a, a) \in R$ für alle $a \in M$.

symmetrisch:
Wenn $(a, b) \in R$, dann $(b, a) \in R$.

transitiv:
Wenn $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$, dann $(a, c) \in R$.

Definition.
$R \subseteq M^2$ ist *Äquivalenzrelation*, wenn R *reflexiv*, *transitiv* und *symmetrisch* ist.

Äquivalenzrelationen

Definition. Sei R eine Äquivalenzrelation über einer Menge M.

Für $u \in M$ definieren wir die *Äquivalenzklasse* von u bzgl. R als

$$[u]_R := \{v \in M : (u, v) \in R\}.$$

Äquivalenzrelationen

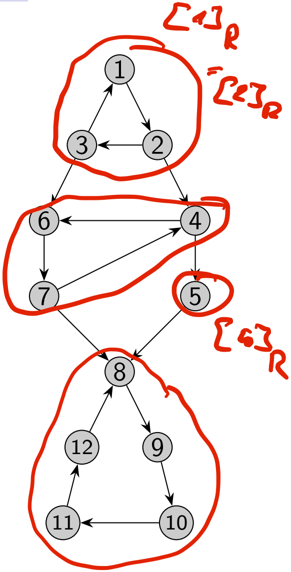
Definition. Sei R eine Äquivalenzrelation über einer Menge M.
Für $u \in M$ definieren wir die *Äquivalenzklasse* von u bzgl. R als

$$[u]_R := \{v \in M : (u,v) \in R\}.$$

Beispiel. Sei G ein gerichteter Graph und $R \subseteq V(G) \times V(G)$ definiert durch

$$R = \left\{ (u,v) : \begin{array}{l} \text{es gibt in } G \text{ einen Weg von } u \text{ nach } v \\ \text{und einen Weg von } v \text{ nach } u \end{array} \right\}.$$

Beobachtung.
Für $u \in V(G)$ entspricht Äquivalenzklasse $[u]_R$ genau der Menge der Knoten der starken Zusammenhangskomponente von u in G.



Äquivalenzklassen

Definition. Sei R eine Äquivalenzrelation über einer Menge M.

Für $u \in M$ definieren wir die *Äquivalenzklasse* von u bzgl. R als

$$[u]_R := \{v \in M : (u, v) \in R\}.$$

Lemma. Sei R eine Äquivalenzrelation über M.

Dann gilt $u \in [u]_R$ für alle $u \in M$.

reflexiv:
$(a, a) \in R$ für alle $a \in M$.

symmetrisch:
Wenn $(a, b) \in R$, dann $(b, a) \in R$.

transitiv:
Wenn $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$, dann $(a, c) \in R$.

Definition.
$R \subseteq M^2$ ist *Äquivalenzrelation*, wenn R *reflexiv*, *transitiv* und *symmetrisch* ist.

Äquivalenzklassen

Definition. Sei R eine Äquivalenzrelation über einer Menge M.

Für $u \in M$ definieren wir die *Äquivalenzklasse* von u bzgl. R als

$$[u]_R := \{v \in M : (u, v) \in R\}.$$

Lemma. Sei R eine Äquivalenzrelation über M.

Dann gilt $u \in [u]_R$ für alle $u \in M$.

Beweis. Da R reflexiv ist, gilt $(a, a) \in R$ für alle $a \in M$.

Insbesondere gilt also $(u, u) \in R$ und somit $u \in [u]_R$. □

reflexiv:
$(a, a) \in R$ für alle $a \in M$.

symmetrisch:
Wenn $(a, b) \in R$, dann $(b, a) \in R$.

transitiv:
Wenn $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$, dann $(a, c) \in R$.

Definition.
$R \subseteq M^2$ ist *Äquivalenzrelation*, wenn R *reflexiv*, *transitiv* und *symmetrisch* ist.

Äquivalenzklassen

Definition. Sei R eine Äquivalenzrelation über einer Menge M.

Für $u \in M$ definieren wir die *Äquivalenzklasse* von u bzgl. R als

$$[u]_R := \{v \in M : (u, v) \in R\}.$$

Lemma. Sei R eine Äquivalenzrelation über M und $u, v \in M$.

Wenn $(u, v) \in R$, dann ist $[u]_R = [v]_R$.

reflexiv:
$(a, a) \in R$ für alle $a \in M$.

symmetrisch:
Wenn $(a, b) \in R$, dann $(b, a) \in R$.

transitiv:
Wenn $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$, dann $(a, c) \in R$.

Definition.
$R \subseteq M^2$ ist *Äquivalenzrelation*, wenn R *reflexiv*, *transitiv* und *symmetrisch* ist.

Äquivalenzklassen

Definition. Sei R eine Äquivalenzrelation über einer Menge M.

Für $u \in M$ definieren wir die *Äquivalenzklasse* von u bzgl. R als

$$[u]_R := \{v \in M : (u, v) \in R\}.$$

Lemma. Sei R eine Äquivalenzrelation über M und $u, v \in M$.

Wenn $(u, v) \in R$, dann ist $[u]_R = [v]_R$.

Beweis. Wir zeigen $[u]_R \subseteq [v]_R$. Der andere Fall ist symmetrisch.

Da $(u, v) \in R$ und R symmetrisch, folgt $(v, u) \in R$ und somit $u \in [v]_R$. Sei nun $w \in [u]_R$ und somit $(u, w) \in R$. Da auch $(v, u) \in R$ und R transitiv, folgt $(v, w) \in R$ und somit $w \in [v]_R$. □

reflexiv:
$(a, a) \in R$ für alle $a \in M$.

symmetrisch:
Wenn $(a, b) \in R$, dann $(b, a) \in R$.

transitiv:
Wenn $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$, dann $(a, c) \in R$.

Definition.
$R \subseteq M^2$ ist *Äquivalenzrelation*, wenn R *reflexiv*, *transitiv* und *symmetrisch* ist.

Quotientenstruktur

Äquivalenzklassen. Sei R eine Äquivalenzrelation über einer Menge M.

Für $u \in M$ definieren wir die *Äquivalenzklasse* von u bzgl. R als

$$[u]_R := \{v \in M : (u, v) \in R\}.$$

Quotientenstruktur. Sei M eine Menge und $E \subseteq M \times M$ eine Relation.

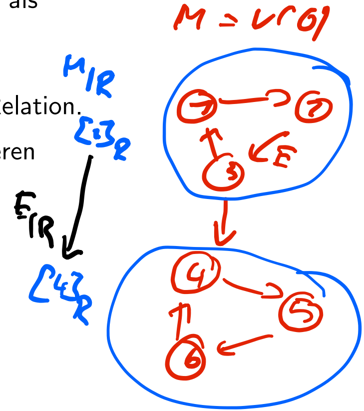
Sei $R \subseteq M \times M$ eine Äquivalenzrelation über M. Wir definieren

$$M_{|R} := \{[u]_R : u \in M\}.$$

und eine Relation $E_{|R} \subseteq M_{|R} \times M_{|R}$ über $M_{|R}$ wie folgt:

$$E_{|R} := \{([u]_R, [v]_R) : (u, v) \in E\}.$$

Man nennt $(M_{|R}, E_{|R})$ den *Quotient* von (M, E) bzgl. R.



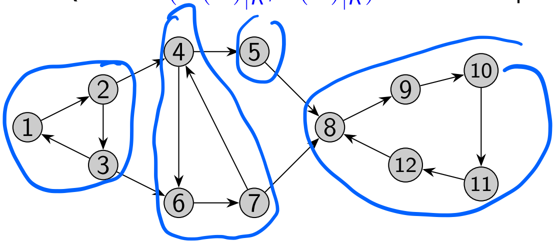
Komponenten-DAG als Quotient

Beispiel. Sei G ein gerichteter Graph und $R \subseteq V(G) \times V(G)$ definiert durch

$$R = \left\{ (u, v) : \begin{array}{l} \text{es gibt in } G \text{ einen Weg von } u \text{ nach } v \\ \text{und einen Weg von } v \text{ nach } u \end{array} \right\}.$$

Die Äquivalenzklassen $[u]_R$ entsprechen genau den Knotenmengen der starken Zusammenhangskomponenten von G.

Der Quotient $(V(G)_{|R}, E(G)_{|R})$ ist der Komponenten-DAG von G.



$$\begin{tikzcd}
{[1]_R} \arrow[d] & & \\
{[4]_R} \arrow[rr] \arrow[dr] & & {[5]_R} \arrow[dl] \\
& {[8]_R} &
\end{tikzcd}$$

Quotientenstruktur.
M Menge, $E \subseteq M^2$ Relation.
$R \subseteq M^2$ Äquivalenzrelation.

Definiere
$M_{|R} := \{[u]_R : u \in M\}$
und
$E_{|R} := \{([u]_R, [v]_R) : (u, v) \in E\}$.

Quotient $(M_{|R}, E_{|R})$ von (M, E) bzgl. R.

Weiteres Beispiel: Automaten

Beispiel. Sei $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ ein endlicher Automat.

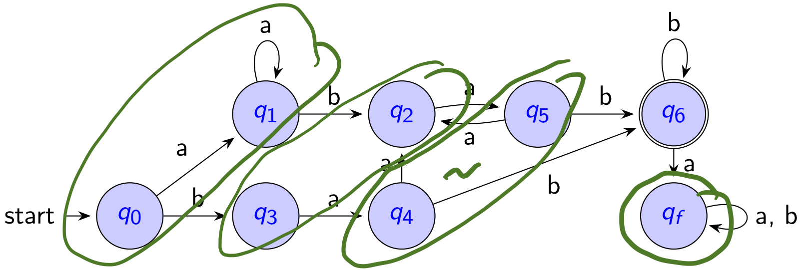
Wir definieren eine Relation $\sim \subseteq Q \times Q$ mit $q \sim q'$ gdw.

für alle Wörter $w \in \Sigma^*$ gilt:

es gibt einen mit w beschrifteten Weg von q zu einem $q_f \in F$

gdw. es gibt einen mit w beschrifteten Weg von q' zu einem $q'_f \in F$.

Beobachtung. Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.



Quotienten von Automaten

Beispiel. Sei $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ ein endlicher Automat.
Wir definieren eine Relation $\sim \subseteq Q \times Q$ mit $q \sim q'$ gdw.
für alle Wörter $w \in \Sigma^*$ gilt:
es gibt einen mit w beschrifteten Weg von q zu einem $q_f \in F$
gdw. es gibt einen mit w beschrifteten Weg von q' zu einem $q'_f \in F$.

$[q_0]$
b
$[q_3]$

Beobachtung. Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

$[q_4]$

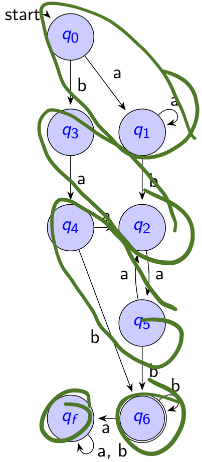
Quotient. Betrachten wir den Automaten als Graph, können wir den Quotienten $\mathcal{A}_{|\sim} = (Q_{|\sim}, (E_a)_{|\sim}, (E_b)_{|\sim})$ bilden.

$\{q_0\}$

Hier: E_a sind die mit a und E_b die mit b beschrifteten Kanten.

Fragen. Entspricht $\mathcal{A}_{|\sim}$ einem Automat?
Wenn ja, sind $\mathcal{A}_{|\sim}$ und $\mathcal{A}$ äquivalent?

$[q_f]$



Quotienten von Automaten

R: $\{q_0, q_2, q_4, q_6\}$

$\{q_1, q_3, q_5\}$ $\{q_f\}$

Beispiel. Sei $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ ein endlicher Automat.

Wir definieren eine Relation $\sim \subseteq Q \times Q$ mit $q \sim q'$ gdw.

für alle Wörter $w \in \Sigma^*$ gilt:

es gibt einen mit w beschrifteten Weg von q zu einem $q_f \in F$

gdw. es gibt einen mit w beschrifteten Weg von q' zu einem $q'_f \in F$.

Beobachtung. Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

Quotient. Betrachten wir den Automaten als Graph, können wir den Quotienten $\mathcal{A}_{|\sim} = (Q_{|\sim}, (E_a)_{|\sim}, (E_b)_{|\sim})$ bilden.

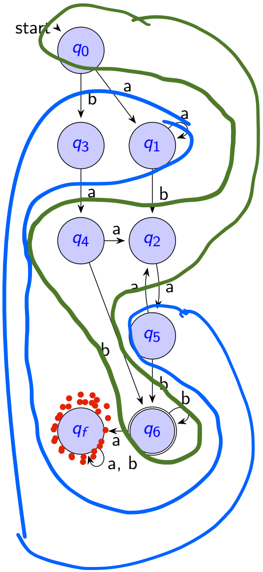
Hier: E_a sind die mit a und E_b die mit b beschrifteten Kanten.

Fragen. Entspricht $\mathcal{A}_{|\sim}$ einem Automat?

Wenn ja, sind $\mathcal{A}_{|\sim}$ und $\mathcal{A}$ äquivalent?

Muss $\sim$ nicht irgendwie zur Beschriftung der Kanten passen?

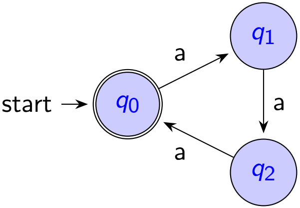
Transitionen ähneln doch eher Abbildungen von $Q \to Q$ als nur einfachen Kanten?



Beispiel: Automaten über einem unären Alphabet

Sei $\Sigma := \{a\}$ und sei $\mathcal{A}$ folgender Automat.

$\mathcal{A}$ akzeptiert $w \in \Sigma^*$, wenn die Zahl a's in w durch 3 teilbar ist.



Beobachtung. Man kann also den Buchstaben a auch als Abbildung $a : Q \to Q$ auffassen: $a(q_0) = q_1 \qquad a(q_1) = q_2 \qquad a(q_2) = q_0$.

D.h. der Automat entspricht dem Paar (Q, a) bestehend aus Q und einer unären Funktion a.

Quotienten. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf Q.

Wir können nur dann sinnvoll den Quotienten bilden, wenn a alle Elemente einer Äquivalenzklasse auf Elemente derselben anderen Klasse abbildet.

10.2 Ordnungen

Partielle Ordnungen

Definition. Sei M eine Menge.

(i) Eine *strikte (partielle) Ordnung auf M* ist eine irreflexive, antisymmetrische und transitive Relation $R \subseteq M \times M$.
D.h. es gilt
- $(a, a) \notin R$,
- wenn $(a, b) \in R$ und $(b, a) \in R$, dann $a = b$ und
- wenn $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$ dann auch $(a, c) \in R$.

(ii) Ist R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv, so heißt R *partielle Ordnung*.

(iii) Gilt zusätzlich, dass für alle $u \neq v \in M$ entweder $(u, v) \in R$ oder $(v, u) \in R$, so nennt man R *linear*.

Partielle Ordnungen

Definition. Sei M eine Menge.

(i) Eine *strikte (partielle) Ordnung auf M* ist eine irreflexive, antisymmetrische und transitive Relation $R \subseteq M \times M$.
D.h. es gilt
- $(a, a) \notin R$,
- wenn $(a, b) \in R$ und $(b, a) \in R$, dann $a = b$ und
- wenn $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$ dann auch $(a, c) \in R$.

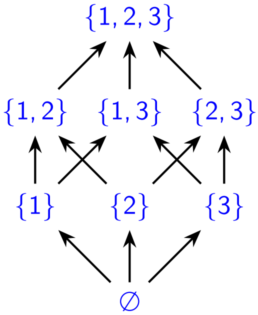
(ii) Ist R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv, so heißt R *partielle Ordnung*.

(iii) Gilt zusätzlich, dass für alle $u \neq v \in M$ entweder $(u, v) \in R$ oder $(v, u) \in R$, so nennt man R *linear*.

Beispiel. Sei M eine Menge und $\mathcal{P}(M) := \{S : S \subseteq M\}$.

Dann ist $\subseteq$ eine partielle Ordnung auf $\mathcal{P}(M)$.

Beispiel. Sei $M := \{1, 2, 3\}$.



Partielle Ordnungen

Definition. Sei M eine Menge.

(i) Eine *strikte (partielle) Ordnung auf M* ist eine irreflexive, antisymmetrische und transitive Relation $R \subseteq M \times M$.

(ii) Ist R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv, so heißt R *partielle Ordnung*.

(iii) Gilt zusätzlich, dass für alle $u \neq v \in M$ entweder $(u, v) \in R$ oder $(v, u) \in R$, so nennt man R *linear*.

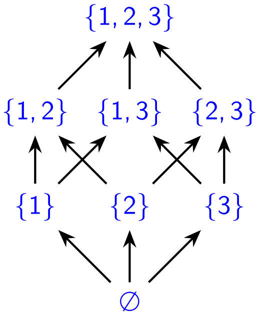
Definition. Eine *partiell geordnete Menge (poset)* ist ein Paar $(M, \sqsubseteq)$ bestehend aus einer Menge M und einer partiellen Ordnung $\sqsubseteq$ auf M.

Beispiel. Sei M eine Menge und $\mathcal{P}(M) := \{S : S \subseteq M\}$.

Dann ist $\subseteq$ eine partielle Ordnung auf $\mathcal{P}(M)$.

Also ist $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ ein poset.

Beispiel. Sei $M := \{1, 2, 3\}$.



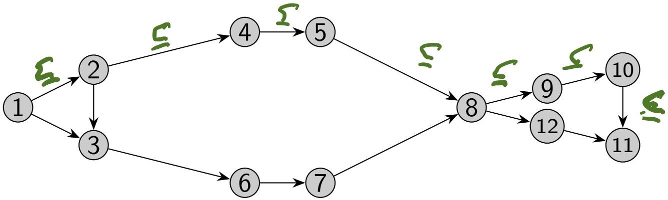
Beispiel: gerichtete, azyklische Graphen

Sei G ein azyklischer, gerichteter Graph.

Wir definieren eine Relation über $V(G)$ durch

$u \sqsubseteq v$ wenn es einen gerichteten Pfad in G von u nach v gibt.

Beispiel. In der durch den folgenden Graph definierten Ordnung $\sqsubseteq$ gilt z.B.: $1 \sqsubseteq 2 \sqsubseteq 4 \sqsubseteq \ldots \sqsubseteq 11$.



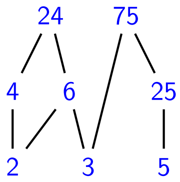
Gerichtete, azyklische Graphen und partielle Ordnungen

Definition. Sei M eine Menge und $\sqsubseteq$ eine partielle Ordnung auf M.

Für $v \in M$ heißt ein Element $u \in M$ ein

- *Vorgänger* von v, wenn $u \sqsubseteq v$ und es kein $w \in M \setminus \{u, v\}$ gibt, mit $u \sqsubseteq w \sqsubseteq v$.
- *Nachfolger* von v, wenn $v \sqsubseteq u$ und es kein $w \in M \setminus \{u, v\}$ gibt, mit $v \sqsubseteq w \sqsubseteq u$.

Hasse Diagramm.



Gerichtete, azyklische Graphen und partielle Ordnungen

Definition. Sei M eine Menge und $\sqsubseteq$ eine partielle Ordnung auf M.

Für $v \in M$ heißt ein Element $u \in M$ ein

- *Vorgänger* von v, wenn $u \sqsubseteq v$ und es kein $w \in M \setminus \{u, v\}$ gibt, mit $u \sqsubseteq w \sqsubseteq v$.
- *Nachfolger* von v, wenn $v \sqsubseteq u$ und es kein $w \in M \setminus \{u, v\}$ gibt, mit $v \sqsubseteq w \sqsubseteq u$.

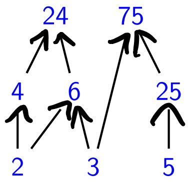
Hasse Diagramme.

Eine partielle Ordnung kann durch ein *Hasse Diagramm* dargestellt werden.

Dabei zeichnen wir für jedes Element $x \in M$ eine Kante zu jedem Nachfolger von x.

Zusätzlich wird das Diagramm so gezeichnet, dass wenn $x \sqsubseteq Y$, dann wird y weiter oben als x gezeichnet.

Hasse Diagramm.



Gerichtete, azyklische Graphen und partielle Ordnungen

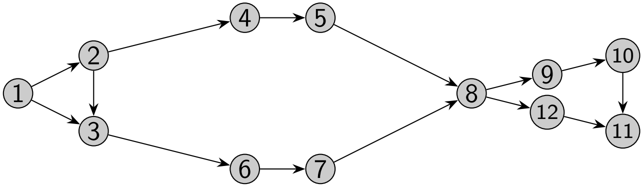
Definition. Sei M eine Menge und $\sqsubseteq$ eine partielle Ordnung auf M.

Für $v \in M$ heißt ein Element $u \in M$ ein

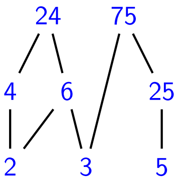
- *Vorgänger* von v, wenn $u \sqsubseteq v$ und es kein $w \in M \setminus \{u, v\}$ gibt, mit $u \sqsubseteq w \sqsubseteq v$.
- *Nachfolger* von v, wenn $v \sqsubseteq u$ und es kein $w \in M \setminus \{u, v\}$ gibt, mit $v \sqsubseteq w \sqsubseteq u$.

Bemerkung. Wenn M endlich ist, können wir $(M, \sqsubseteq)$ durch einen DAG mit Knotenmenge M repräsentieren, in dem wir Kanten von jedem Knoten zu allen seinen Nachfolgern einfügen.

Umgekehrt definiert jeder DAG eine partielle Ordnung.



Hasse Diagramm.

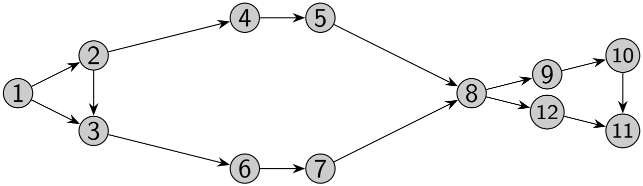


Beispiel: gerichtete, azyklische Graphen

Sei G ein azyklischer, gerichteter Graph.

Wir definieren eine Relation über $V(G)$ durch

$u \sqsubseteq v$ wenn es einen gerichteten Pfad in G von u nach v gibt.



Beispiel: gerichtete, azyklische Graphen

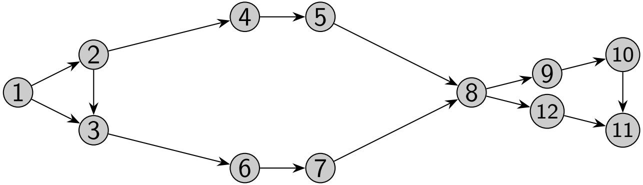
Sei G ein azyklischer, gerichteter Graph.

Wir definieren eine Relation über $V(G)$ durch

$u \sqsubseteq v$ wenn es einen gerichteten Pfad in G von u nach v gibt.

Definition. Eine *topologische* Ordnung auf G ist eine lineare Ordnung $\leq$ auf $V(G)$ die $\sqsubseteq$ respektiert, d.h. wenn $u \sqsubseteq v$ dann auch $u < v$.

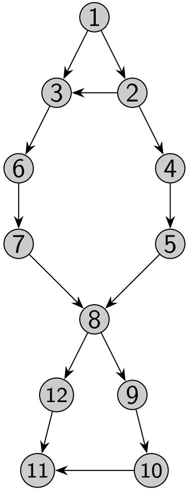
Beispiel. Eine mögliche topologische Ordnung des folgenden Graphen G ist $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 11$.



Linearisierung partieller Ordnungen

Definition. Sei M eine Menge und $\sqsubseteq$ eine partielle Ordnung über M.

Eine *Linearisierung von* $\sqsubseteq$ ist eine lineare Ordnung $\leq$ auf M, so dass für alle $a, b \in M$ gilt: wenn $a \sqsubseteq b$, dann $a \leq b$.



Linearisierung partieller Ordnungen

Definition. Sei M eine Menge und $\sqsubseteq$ eine partielle Ordnung über M.

Eine *Linearisierung von* $\sqsubseteq$ ist eine lineare Ordnung $\leq$ auf M, so dass für alle $a, b \in M$ gilt: wenn $a \sqsubseteq b$, dann $a \leq b$.

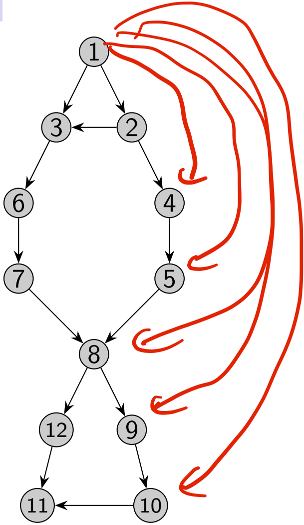
Beispiel. Sei G ein gerichteter, azyklischer Graph.

Die *transitive Hülle* von $E(G)$ ist die Relation

$$TC(G) := \{(u, v) : \text{es gibt einen Weg in } G \text{ von } u \text{ nach } v\}.$$

Wenn G azyklisch ist, dann ist $TC(G)$ eine partielle Ordnung.

Eine topologische Ordnung von G ist eine Linearisierung von $TC(G)$.



11.3 Verbände

Maximale und Minimale Elemente

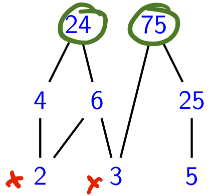
Definition. Sei M eine Menge und $\sqsubseteq$ eine partielle Ordnung auf M.
Ein Element $x \in M$ heißt

- *maximales Element*, wenn es kein $y \neq x \in M$ mit $x \sqsubseteq y$ gibt.

Definition. Sei M eine Menge und $\sqsubseteq$ eine partielle Ordnung auf M.
Seien $x, y \in M$. Ein Element $a \in M$ heißt

- *obere Schranke* für x und y, wenn $x \sqsubseteq a$ und $y \sqsubseteq a$.
- *kleinste obere Schranke* oder *Supremum* von x und y, geschrieben $x \vee y$, wenn a eine obere Schranke für x und y ist und $a \sqsubseteq b$ für jede obere Schranke b für x und y.

Beispiel. max. El.



6 Supremum von 2 und 3

6, 24 oberen Schranke.

Maximale und Minimale Elemente

Definition. Sei M eine Menge und $\sqsubseteq$ eine partielle Ordnung auf M.

Ein Element $x \in M$ heißt

- *maximales Element*, wenn es kein $y \neq x \in M$ mit $x \sqsubseteq y$ gibt.

Definition. Sei M eine Menge und $\sqsubseteq$ eine partielle Ordnung auf M.

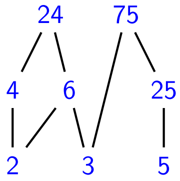
Seien $x, y \in M$. Ein Element $a \in M$ heißt

- *obere Schranke* für x und y, wenn $x \sqsubseteq a$ und $y \sqsubseteq a$.
- *kleinste obere Schranke* oder *Supremum* von x und y, geschrieben $x \vee y$, wenn a eine obere Schranke für x und y ist und $a \sqsubseteq b$ für jede obere Schranke b für x und y.

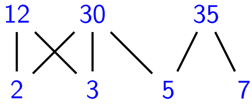
Bemerkungen.

- Es muss nicht für alle $x, y \in M$ obere Schranken geben.
- $x, y \in M$ können obere Schranken haben aber kein Supremum.
- Wenn M endlich ist, gibt es immer maximale Elemente.

Beispiel.



Beispiel.



12, 30 obere Schranke von 2 und 3.
2 und 3 haben kein Supremum

Maximale und Minimale Elemente

Definition. Sei M eine Menge und $\sqsubseteq$ eine partielle Ordnung auf M.

Ein Element $x \in M$ heißt

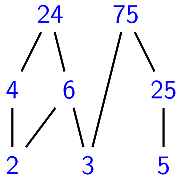
- *minimales Element*, wenn es kein $y \neq x \in M$ mit $y \sqsubseteq x$ gibt.

Definition. Sei M eine Menge und $\sqsubseteq$ eine partielle Ordnung auf M.

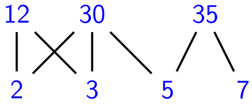
Seien $x, y \in M$. Ein Element $a \in M$ heißt

- *untere Schranke* für x und y, wenn $a \sqsubseteq x$ und $a \sqsubseteq y$.
- *größte untere Schranke* oder *Infimum* von x und y, geschrieben $x \wedge y$, wenn a eine untere Schranke für x und y ist und $b \sqsubseteq a$ für jede untere Schranke b für x und y.

Beispiel.



Beispiel.

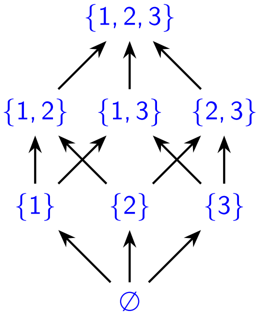


Verbände

Definition. Eine partiell geordnete Menge $(M, \sqsubseteq)$ heißt *Verband*, wenn es für alle $x, y \in M$ sowohl ein Supremum als auch ein Infimum gibt.

Beispiel. Für jede Menge M ist $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ ein Verband, der sogenannte *Teilmengenverband*.

Beispiel. Sei $M := \{1, 2, 3\}$.



10.4 Der Satz von Dilworth

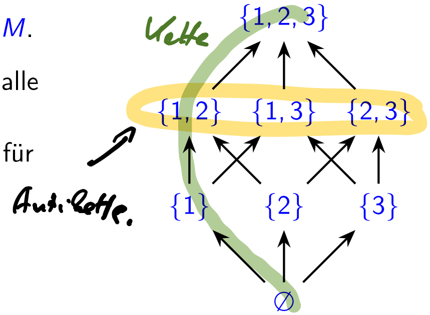
Ketten und Antiketten

Definition. Sei M eine Menge und $\sqsubseteq$ eine partielle Ordnung auf M.

1. Eine *Kette* in $(M, \sqsubseteq)$ ist eine Menge $S \subseteq M$ so dass für alle $a, b \in S$ gilt: $a \sqsubseteq b$ oder $b \sqsubseteq a$.
2. Eine *Antikette* in $(M, \sqsubseteq)$ ist eine Menge $S \subseteq M$ so dass für alle $a \neq b \in S$ weder $a \sqsubseteq b$ noch $b \sqsubseteq a$ gilt.

Die *Länge* einer Kette bzw. Antikette S ist die Zahl $|S|$ de Elemente in S.

Beispiel. Sei $M := \{1, 2, 3\}$.

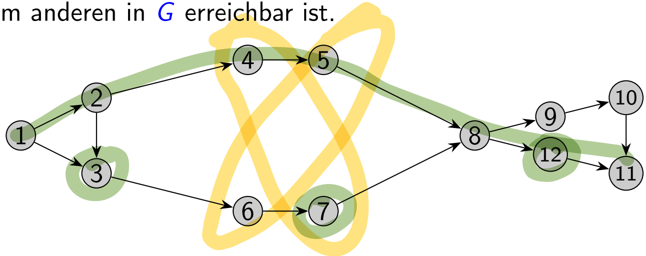


Beispiel: DAGs

Beispiel. Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter, azyklischer Graph und $\sqsubseteq = TC(E)$.

Die Ketten bzgl. $(V, \sqsubseteq)$ sind genau die Mengen von Knoten, die gemeinsam auf einem Pfad in G vorkommen.

Die Antiketten von G sind also Mengen von Knoten, so dass kein Knoten von einem anderen in G erreichbar ist.

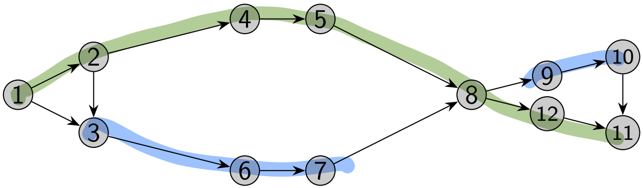


Überdeckungen durch Ketten und Antiketten

Definition. Sei $(M, \sqsubseteq)$ ein poset.

Eine *Zerlegung* oder *Überdeckung* von $(M, \sqsubseteq)$ in Ketten (Antiketten) ist eine Partition von M in disjunkte Ketten (Antiketten).

Beispiel.

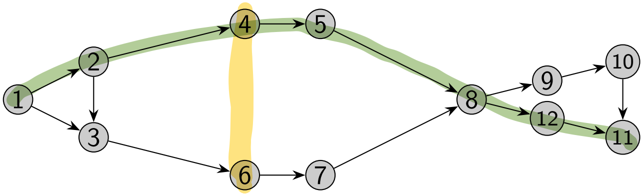


Überdeckungen durch Ketten und Antiketten

Definition. Sei $(M, \sqsubseteq)$ ein poset.

Eine *Zerlegung* oder *Überdeckung* von $(M, \sqsubseteq)$ in Ketten (Antiketten) ist eine Partition von M in disjunkte Ketten (Antiketten).

Beispiel.



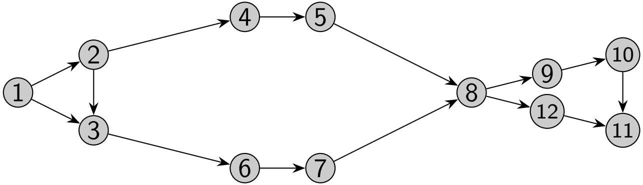
Frage. Was ist die minimale Zahl von Ketten oder Antiketten, in die $(M, \sqsubseteq)$ zerlegt werden kann?

Überdeckungen durch Ketten und Antiketten

Definition. Sei $(M, \sqsubseteq)$ ein poset.

Eine *Zerlegung* oder *Überdeckung* von $(M, \sqsubseteq)$ in Ketten (Antiketten) ist eine Partition von M in disjunkte Ketten (Antiketten).

Beispiel.



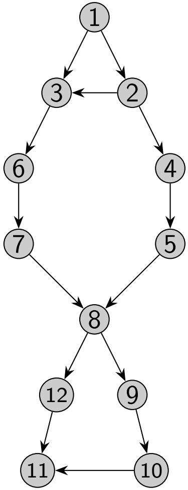
Frage. Was ist die minimale Zahl von Ketten oder Antiketten, in die $(M, \sqsubseteq)$ zerlegt werden kann?

Klar: wenn $S \subseteq M$ eine Antikette der Länge r ist, kann $(M, \sqsubseteq)$ nicht mit weniger als r Ketten überdeckt werden.

Der Satz von Dilworth

Satz von Dilworth. Sei $(M, \sqsubseteq)$ ein poset wobei M endlich ist.

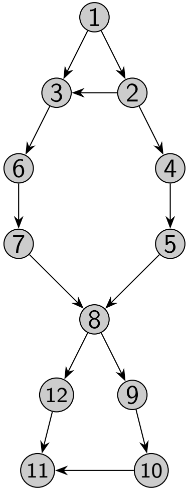
Die maximale Länge r einer Antikette in $(M, \sqsubseteq)$ ist gleich der minimalen Größe k einer Überdeckung von $(M, \sqsubseteq)$ durch Ketten.



Der Satz von Dilworth

Satz von Dilworth. Sei $(M, \sqsubseteq)$ ein poset wobei M endlich ist.

Die maximale Länge r einer Antikette in $(M, \sqsubseteq)$ ist gleich der minimalen Größe k einer Überdeckung von $(M, \sqsubseteq)$ durch Ketten.



Beweis.

Wir haben schon gesehen, dass $k \geq r$.

Denn sei A eine Antikette in $(M, \sqsubseteq)$ der Größe r.

Da in einer Kette K je zwei Elemente vergleichbar sind, kann keine Kette mehr als ein Element aus A enthalten.

Also kann $(M, \sqsubseteq)$ nicht mit weniger als $r = |A|$ Ketten überdeckt werden.

Es bleibt also noch die andere Richtung zu zeigen.

Der Satz von Dilworth

Satz von Dilworth. Sei $(M, \sqsubseteq)$ ein poset wobei M endlich ist.

Die maximale Länge r einer Antikette in $(M, \sqsubseteq)$ ist gleich der minimalen Größe k einer Überdeckung von $(M, \sqsubseteq)$ durch Ketten.

Beweis.

Wir haben schon gesehen, dass $k \geq r$.

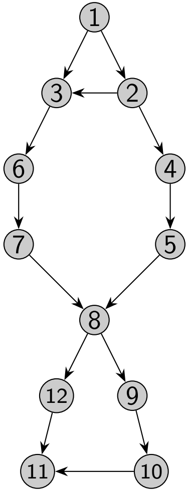
Denn sei A eine Antikette in $(M, \sqsubseteq)$ der Größe r.

Da in einer Kette K je zwei Elemente vergleichbar sind, kann keine Kette mehr als ein Element aus A enthalten.

Also kann $(M, \sqsubseteq)$ nicht mit weniger als $r = |A|$ Ketten überdeckt werden.

Es bleibt also noch die andere Richtung zu zeigen.

Lemma. Sei $(M, \sqsubseteq)$ ein poset wobei M endlich ist. Sei r die maximale Länge einer Kette in $(M, \sqsubseteq)$. Dann kann M in r Antiketten zerlegt werden.



Der Satz von Dilworth

Lemma. Sei $(M, \sqsubseteq)$ ein poset wobei M endlich ist. Sei r die maximale Länge einer Kette in $(M, \sqsubseteq)$. Dann kann M in r ~~Anti~~ketten zerlegt werden. Anti

Beweis: Induktion über $|M|$.

(IA) $|M| = 0$ ✓

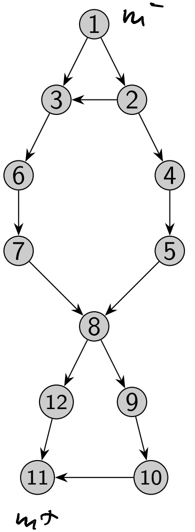
(IS) $|M| > 0$.

Fall 1: falls es kein $a \neq b \in M$ mit $a \sqsubseteq b$, dann ist M eine Antikette der Länge $r = |M|$ und M kann durch r Ketten $\{\{a\} : a \in M\}$ überdeckt werden.

Fall 2: es ex. $a \neq b \in M$ s.d. $a \sqsubseteq b$.

Wähle $m^-, m^+ \in M$ s.d. $m^- \sqsubseteq m^+$ und
m^- minimales Element von $\sqsubseteq$
m^+ maximales " " $\sqsubseteq$

Dann ist $C = \{m^-, m^+\}$ eine Kette.

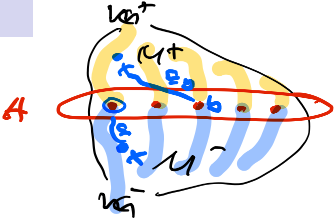


Der Satz von Dilworth

$C=\{a_i^-, a^+\}$

Satz von Dilworth. Sei $(M, \sqsubseteq)$ ein poset wobei M endlich ist.

Die maximale Länge r einer Antikette in $(M, \sqsubseteq)$ ist gleich der minimalen Größe einer Überdeckung von $(M, \sqsubseteq)$ durch Ketten.



Betrachte $M \setminus C$.

a) $M \setminus C$ hat keine Antikette der Größe r. Da $|M\setminus C| < |M|$ gibt es nach (IV) disj. Ketten $C_1 \dots C_{k'}$, $k' < r$ die $M \setminus C$ überdecken. Dann überdeckt $C, C_1 \dots C_{k'}$ M.

b) $M \setminus C$ hat Antikette A der Länge r.

$M^+ = \{x \in M : \text{es ex. } a \in A \text{ mit } a \sqsubseteq x\}$

$M^- = \{x \in M : \text{es ex. } a \in A \text{ mit } x \sqsubseteq a\}$

(i) $M^- \cap M^+ = A$

(ii) $a^- \in M^- \setminus A$, $a^+ \in M^+ \setminus A$. Also $|M^-|, |M^+| < |M|$

Nach (IV) ex. Ketten $C_1^- \dots C_r^-$ disj. die M^- überdeck. und $C_1^+ \dots C_r^+$ die M^+ überdeck.

$C_1^- \dots C_r^-, C_1^+ \dots C_r^+$

(iii) Jede Kette in M kann nur ≤ 1 El. aus A enthalten. D.h. für alle $a \in A$ ex

$C_a^+ \in \{C_1^+ \dots C_r^+\}$

$C_a^- \in \{C_1^- \dots C_r^-\}$ s.d. $a \in C_a^+ \cap C_a^-$.

Dann ist $C_a^+ \cup C_a^- =: C_a$ Kette und $\{C_a : a \in A\}$ überdeckt M.

□

Der Satz von Dilworth

Satz von Dilworth. Sei $(M, \sqsubseteq)$ ein poset wobei M endlich ist.

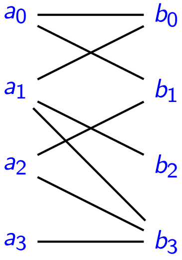
Die maximale Länge r einer Antikette in $(M, \sqsubseteq)$ ist gleich der minimalen Größe einer Überdeckung von $(M, \sqsubseteq)$ durch Ketten.

Anwendungen. Aus dem Satz von Dilworth kann man leicht weitere interessante Aussagen folgern.

Satz von Hall. Ein bipartiter Graph $G := (A \dot{\cup} B, E)$ mit $|A| = |B|$ enthält ein perfektes matching genau dann, wenn $|N(S)| \geq |S|$ für alle $S \subseteq A$.

Anwendung des Satzes von Dilworth

Satz. Ein bipartiter Graph $G := (A \dot\cup B, E)$ mit $|A| = |B|$ enthält ein perfektes matching genau dann, wenn $|N(S)| \geq |S|$ für alle $S \subseteq A$.



Beweis. Sei $M = A \cup B$ und $\sqsubseteq$ folgende partielle Ordnung auf M:

$$a \sqsubseteq b \text{ gdw. } \{a, b\} \in E(G).$$

Alle anderen Elemente sind unvergleichbar.

Beobachtung. A ist eine Antikette in $(M, \sqsubseteq)$.

Anwendung des Satzes von Dilworth

Satz. Ein bipartiter Graph $G := (A \dot\cup B, E)$ mit $|A| = |B|$ enthält ein perfektes matching genau dann, wenn $|N(S)| \geq |S|$ für alle $S \subseteq A$.

Beweis. Sei $M = A \cup B$ und $\sqsubseteq$ folgende partielle Ordnung auf M:

$$a \sqsubseteq b \text{ gdw. } \{a, b\} \in E(G).$$

Alle anderen Elemente sind unvergleichbar.

Beobachtung. A ist eine Antikette in $(M, \sqsubseteq)$.

Behauptung. Es gibt keine größere Antikette.

Beweis. Sei I eine Antikette in $(M, \sqsubseteq)$. Definiere $I_B = I \cap B$ und $I_A = I \cap A$.

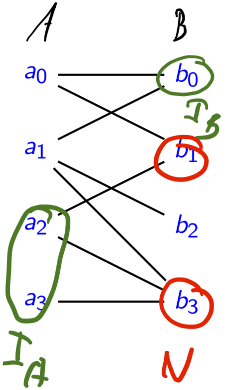
Betrachte nun $N = \{b \in B : \text{es ex. } a \in I_A \text{ mit } \{a, b\} \in E(G)\}$.

Nach Konstruktion sind A und N disjunkt.

Nach Voraussetzung gilt $|N| \geq |I_A|$. Also

$$|I| = |I_A| + |I_B| \leq |I_B| + |N| \leq |B| = |A|$$

da I_A und N disjunkt sind. $\dashv$



Anwendung des Satzes von Dilworth

Satz. Ein bipartiter Graph $G := (A \dot{\cup} B, E)$ mit $|A| = |B|$ enthält ein perfektes matching genau dann, wenn $|N(S)| \geq |S|$ für alle $S \subseteq A$.

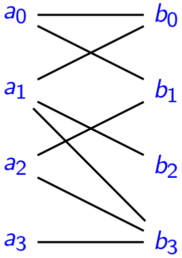
Beweis. Sei $M = A \cup B$ und $\sqsubseteq$ folgende partielle Ordnung auf M:

$$a \sqsubseteq b \text{ gdw. } \{a, b\} \in E(G).$$

Alle anderen Elemente sind unvergleichbar.

Beobachtung. A ist eine Antikette in $(M, \sqsubseteq)$.

Behauptung. Es gibt keine größere Antikette.



Anwendung des Satzes von Dilworth

Satz. Ein bipartiter Graph $G := (A \dot\cup B, E)$ mit $|A| = |B|$ enthält ein perfektes matching genau dann, wenn $|N(S)| \geq |S|$ für alle $S \subseteq A$.

Beweis. Sei $M = A \cup B$ und $\sqsubseteq$ folgende partielle Ordnung auf M:

$$a \sqsubseteq b \text{ gdw. } \{a, b\} \in E(G).$$

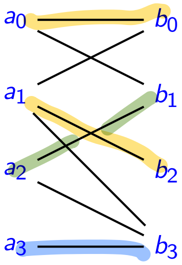
Alle anderen Elemente sind unvergleichbar.

Beobachtung. A ist eine Antikette in $(M, \sqsubseteq)$.

Behauptung. Es gibt keine größere Antikette.

Nach dem Satz von Dilworth kann $(M, \sqsubseteq)$ also durch $|A|$ Ketten $K_1, \dots, K_{|A|}$ überdeckt werden.

Jede Kette ist aber eine Kante in G, d.h. $K_1, \dots, K_{|A|}$ entspricht einem perfekten matching. □



Ein Lemma von Erdős und Szekeres

Lemma. Seien $r, s \in \mathbb{N}$ und sei $n \geq (r-1) \cdot (s-1) + 1$.

Sei $(a_1, \ldots, a_n)$ eine Folge paarweise verschiedener reeller Zahlen.

Dann gibt es

- $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq n$ mit $a_{i_1} < a_{i_2} < \ldots < a_{i_r}$ oder
- $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leq n$ mit $a_{i_1} > a_{i_2} > \ldots > a_{i_s}$.

Ein Lemma von Erdős und Szekeres

Lemma. Seien $r, s \in \mathbb{N}$ und sei $n \geq (r-1) \cdot (s-1) + 1$.

Sei $(a_1, \ldots, a_n)$ eine Folge paarweise verschiedener reeller Zahlen.

Dann gibt es

- $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq n$ mit $a_{i_1} < a_{i_2} < \ldots < a_{i_r}$ oder
- $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leq n$ mit $a_{i_1} > a_{i_2} > \ldots > a_{i_s}$.