TU Berlin - Institut für Mathematik
Sommersemester 2024
Dozent: Dr. Nikolas Tapia
Assistentin: M.Sc. Claudia Drygala

Stochastik für Informatik(er) – Übung 3

Abgabe bis Freitag, den 17.05.2024 um 23:59

Hinweise zur Bearbeitung des Übungsblattes:

- Das Übungsblatt enthält Haus- und Tutoriumsaufgaben.
- Die Tutoriumsaufgaben werden in den Tutorien der KW 19 besprochen (06.05.-10.05.).
- Fällt ihr Tutorium auf einen Feiertag, besuchen Sie bitte eines der anderen Tutorien.
- Die Abgabe der Hausaufgaben erfolgt über ISIS in festen Gruppen von 2-3 Personen. Die Gruppen bilden sich aus Studierenden, die das gleiche Tutorium besuchen bzw. mindestens dieselbe/denselben Tutor*in haben. Laden Sie Ihre handschriftlichen Lösungen (z.B. Scan Ihrer Lösungen oder Erstellung Ihrer Lösungen über Tablet) als eine PDF-Datei bei dem enstprechenden Übungsblatt hoch. LaTeX-Abgaben sind auch willkommen (in diesem Fall die kompilierte PDF)! Achten Sie darauf, dass die Abgaben gut lesbar und verständlich verfasst sind. Bitte Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe auf der Abgabe mit angeben!

Tutoriumsaufgaben

Tutoriumsaufgabe 3.1

Ein Berliner Wohnhaus bestehe aus drei Wohnungen 1, 2 und 3, deren Miete am Anfang eines Jahres jeweils mit Wahrscheinlichkeit p unabhängig voneinander erhöht wird, wobei $0 < p < 1$. Berechnen Sie:

(i) die Wahrscheinlichkeit, dass die Miete der Wohnungen 1 und 3 erhöht wird, jedoch die Miete der Wohnung 2 nicht,

(ii) die Wahrscheinlichkeit, dass die Miete von genau zwei Wohnungen erhöht wird,

(iii) die Wahrscheinlichkeit, dass die Miete der Wohnungen 1 und 3 erhöht wird.

Tutoriumsaufgabe 3.2

Es sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ und $\mathbb{P}(\omega_1) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(\omega_2) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(\omega_3) = \frac{1}{4}$. Wir definieren Zufallsvariablen X und Y durch

$$\begin{array}{lll} X(\omega_1) = 5 & X(\omega_2) = 1 & X(\omega_3) = 5 \\ Y(\omega_1) = 1 & Y(\omega_2) = 5 & Y(\omega_3) = 1 \end{array}$$

(i) Zeigen Sie, dass X und Y die gleiche Verteilung haben.

(ii) Berechnen Sie die Verteilung von X^Y.

Tutoriumsaufgabe 3.3

Die Verteilung einer diskreten Zufallsvariable X mit $X(\Omega) = \{-1, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ ist in der folgenden Tabelle gegeben:

x	-1	0	$\frac{1}{4}$	1
$p_X(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

(i) Berechnen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ von X.

(ii) Sei $Y := X^2$. Stellen Sie die Verteilung von Y in einer Tabelle dar.

(iii) Berechnen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion $F_Y(x)$ von Y.

Tutoriumsaufgabe 3.4

Betrachten Sie eine Urne mit N Kugeln. $M \leq N$ Kugeln sind weiß und $N - M$ sind schwarz. Bezeichnen wir die weißen Kugeln als Elemente der Menge $\{1\,, \cdots, M\}$ und die schwarzen Kugeln Elemente von der Menge $\{M + 1\,, \cdots, N\}$. Wir nehmen n Kugeln mit Zurücklegen. Sei dann $(\Omega, \mathbb{P})$ der Laplace-Raum der möglichen n Ziehungen und sei $X\colon \Omega \to \{1, \cdots, n\}$ die Anzahl der weißen Kugeln in jedem Ergebnis.

(i) Geben Sie die Wahl von Ω und die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}$ an.

(ii) Sei I eine Teilmenge von $\{1, \cdots, n\}$, $I = \{i_1, \cdots, i_m\}$ und $\omega \in \Omega$, wir bezeichnen mit ω_I den Vektor $\omega_I = (\omega_{i_1}, \cdots, \omega_{i_m})$. Welche Möglichkeiten gibt es im Fall $n = 3$? Zeigen Sie allgemein die Identitäten zwischen Ereignissen

$$\{X = k\} = \bigcup_{I \subset \{1,n\}\colon |I| = k} \{\omega \in \Omega\colon \omega_I \in \{1\,, \cdots, M\}^k, \omega_{I^c} \in \{M + 1\,, \cdots, N\}^{n-k}\}\,,$$

$$\{X = 0\} = \{\omega \in \{M + 1\,, \cdots, N\}^n\}\,, \quad \{X = n\} = \{\omega \in \{1\,, \cdots, M\}^n\}\,.$$

(iii) Berechnen Sie die Verteilung von X.

Ergebnismenge

σ-Maß $\quad \mathbb{P}: \mathcal{A} \to [0,1]$

Definition 5.1

Ein allgemeiner Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ bestehend aus einer beliebigen Ergebnismenge Ω, einer Klasse von "geeigneten" Ereignissen $\mathcal{A}$ und einer Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$, die die Axiomen von Kolmogorov erfüllt.

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$

Definition 5.2

Eine **Zufallsvariable** ist eine Funktion $X: \Omega \to \mathbb{R}$.
Das Bild $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ nennen wir den **Wertebereich** von X.

Definition 5.8

Verteilung der Zufallsvariable

Sei X eine diskrete Zufallsvariable. Die **Verteilung** (oder Wahrscheinlichkeitsfunktion) von X ist die Funktion

$P_X : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,1]$

$$p_X : \mathbb{R} \to [0,1], \quad p_X(x) := \mathbb{P}(X = x).$$ für $x \in \mathbb{R}$

wobei $\{X \in A\} = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$ $\quad A \in \mathbb{R}$

Definition 5.7

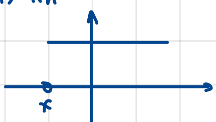
Sei X eine (allg.) Zufallsvariable. Die **kumulative Verteilungsfunktion** F_X von X ist definiert als

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1], \quad F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \leq x\})$$

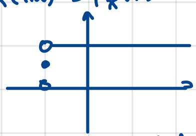
$x \longmapsto \mathbb{P}(X \leq x)$ wobei $\{X \leq x\} = X^{-1}((\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$

Eigenschaft: i) monoton wachsend

ii) $x_n \to x$ mit $x_n > x \Rightarrow F_X(x_n) \to F_X(x)$ rechtsstetig



rechtsstetig in x



nicht rechtsstetig in x

iii) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

Beispiel von Verteilung: 1) Bernoulli-Verteilung zum Parameter $p \in [0,1]$

$X \sim Ber(p)$ falls $X(\Omega) = \{0,1\}$ und $P(X=0) = 1-p \quad P(X=1) = p$

2) Binomialverteilung mit Parameter $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $p \in [0,1]$

$X \sim Bin(n,p)$ falls $X(\Omega) = \{0,1,\dots,n\}$

$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} p^k \qquad k \in \{0,1,\dots,n\}$

Beispiel: $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

$X_i \sim Ber(p) \quad i \in \{1,\dots,n\}$

unabhängig: $\quad X := \sum X_i \Rightarrow X \sim Bin(n,p)$

Tutoriumsaufgabe 3.1

Ein Berliner Wohnhaus bestehe aus drei Wohnungen 1, 2 und 3, deren Miete am Anfang eines Jahres jeweils mit Wahrscheinlichkeit p unabhängig voneinander erhöht wird, wobei $0 < p < 1$. Berechnen Sie:

(i) die Wahrscheinlichkeit, dass die Miete der Wohnungen 1 und 3 erhöht wird, jedoch die Miete der Wohnung 2 nicht,

(ii) die Wahrscheinlichkeit, dass die Miete von genau zwei Wohnungen erhöht wird,

(iii) die Wahrscheinlichkeit, dass die Miete der Wohnungen 1 und 3 erhöht wird.

i) Sei X_i eine ZV welche die Miet-Wohnung i erhöht, wobei $X_i(\Omega) = \{0,1\}$

$\mathbb{P}(X_i = 0) = 1-p \quad \mathbb{P}(X_i = 1) = p \quad i \in \{1,2,3\}$ wobei X_1, X_2, X_3 unabhängig sind

oder kurz $X_i \in \text{Ber}(p)$, $i \in \{1,2,3\}$

es gilt $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) = \mathbb{P}(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 0\} \cap \{X_3 = 1\})$

$= \mathbb{P}(X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 0)\,\mathbb{P}(X_3 = 1)$

$= p \cdot (1-p)\,p = p^2(1-p)$

ii) wir beobachten $\sum_{i=1}^{3} X_i$ modelliert den Anzahl der Miete-Wohnung und es ist $\sum_{i=1}^{3} X_i \sim \text{Bin}(3,p)$

$\to \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{3} X_i = 2\right) = \binom{3}{2} p^2 (1-p) = 3p^2(1-p)$

iii) $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_3 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_3 = 1) = p^2$

Tutoriumsaufgabe 3.2

Es sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ und $\mathbb{P}(\omega_1) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(\omega_2) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(\omega_3) = \frac{1}{4}$. Wir definieren Zufallsvariablen X und Y durch

$X(\omega_1) = 5$	$X(\omega_2) = 1$	$X(\omega_3) = 5$
$Y(\omega_1) = 1$	$Y(\omega_2) = 5$	$Y(\omega_3) = 1$

(i) Zeigen Sie, dass X und Y die gleiche Verteilung haben.

(ii) Berechnen Sie die Verteilung von X^Y.

i) Sei $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei ZVen durch

	ω_1	ω_2	ω_3
X			
Y			

zu zeigen $X \sim Y$, d.h. sind wechselt verteilt

Erinnerung: Verteilung von X bzw. Y ist $\mathbb{P}_X$ bzw $\mathbb{P}_Y$

Hinweis: Da X, Y diskret sind, reichte es $\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$ bzw $\mathbb{P}_Y(x)$ $x \in X(\Omega) = \{1,5\}$ zu bestimmen.

Lösungen 2.2 $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$

$\mathbb{P}_X(1) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\{X = 1\}) = \mathbb{P}(\{\omega \mid X(\omega) = 1\}) = \mathbb{P}(\omega_2) = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}_X(5) = \cdots = \mathbb{P}(\{\omega_1, \omega_3\}) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}_Y(1) = \mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(\{\omega_1, \omega_3\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}_Y(5) = \frac{1}{2}$

ii) $\mathbb{P}_{X^Y}$

$X^Y : \Omega \to \mathbb{R} : \omega \mapsto X(\omega)^{Y(\omega)}$

X^Y	$x=1$	$x=5$
$Y=1$	1	5
$Y=5$	1	5^5

$(X^Y)(\Omega) \subseteq \{1, 5, 5^5\}$

Tatsächlich gilt: $(X^Y)(\omega_1) = X(\omega_1)^{Y(\omega_1)} = 5^1 = 5 = X(\omega_1)$

$(X^Y)(\omega_2) = 1 = X(\omega_2)$

$(X^Y)(\omega_2) = 5 = X(\omega_3)$

$\Rightarrow X^Y = X$ auf Ω

$\rightarrow X^Y \sim X \quad \Rightarrow \mathbb{P}(X^Y = 5^5) = 0$ da $\{X^Y = 5^5\} = \emptyset$

Tutoriumsaufgabe 3.3

Die Verteilung einer diskreten Zufallsvariable X mit $X(\Omega) = \{-1, 0, \cancel{\frac{1}{2}}, 1\}$ ist in der folgenden Tabelle gegeben: $\frac{1}{4}$

x	-1	0	$\frac{1}{4}$	1
$p_X(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

(i) Berechnen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ von X.

(ii) Sei $Y := X^2$. Stellen Sie die Verteilung von Y in einer Tabelle dar.

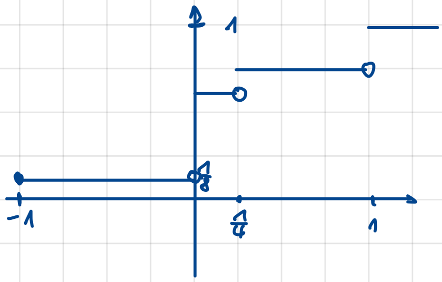
(iii) Berechnen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion $F_Y(x)$ von Y.

i) $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

Da X diskret ist, (d.h. nur abzählbar viele Werte annimmt) ist, gilt $F_X(x) = \sum_{y \leq x} \mathbb{P}(X = y)$ $\quad y \in X(\Omega)$

$F_X(-1) = \frac{1}{8}$ $\quad F_X(0) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$ $\quad F_X(\frac{1}{4}) = \frac{5}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$ $\quad F_X(1) = 1$

$$F_X(x) = \sum \mathbb{P}(X = y) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{1}{8} & -1 \leq x < 0 \\ \frac{5}{8} & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}$$



ii)

X^2	0	$\frac{1}{16}$	1
P_{X^2}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

F_{X^2} analog wie oben bestimmen

Tutoriumsaufgabe 3.4

Betrachten Sie eine Urne mit N Kugeln. $M \leq N$ Kugeln sind weiß und $N - M$ sind schwarz. Bezeichnen wir die weißen Kugeln als Elemente der Menge $\{1, \cdots, M\}$ und die schwarzen Kugeln Elemente von der Menge $\{M+1, \cdots, N\}$. Wir nehmen n Kugeln mit Zurücklegen. Sei dann $(\Omega, \mathbb{P})$ der Laplace-Raum der möglichen n Ziehungen und sei $X\colon \Omega \to \{1, \cdots, n\}$ die Anzahl der weißen Kugeln in jedem Ergebnis.

(i) Geben Sie die Wahl von Ω und die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}$ an.

(ii) Sei I eine Teilmenge von $\{1, \cdots, n\}$, $I = \{i_1, \cdots, i_m\}$ und $\omega \in \Omega$, wir bezeichnen mit ω_I den Vektor $\omega_I = (\omega_{i_1}, \cdots, \omega_{i_m})$. Welche Möglichkeiten gibt es im Fall $n = 3$? Zeigen Sie allgemein die Identitäten zwischen Ereignissen

$$\{X = k\} = \bigcup_{I \subset \{1,n\}\colon |I| = k} \{\omega \in \Omega\colon \omega_I \in \{1, \cdots, M\}^k, \omega_{I^c} \in \{M+1, \cdots, N\}^{n-k}\},$$

$$\{X = 0\} = \{\omega \in \{M+1, \cdots, N\}^n\}, \quad \{X = n\} = \{\omega \in \{1, \cdots, M\}^n\}.$$

(iii) Berechnen Sie die Verteilung von X.

(i) $X_i =$ „ i-te Zug" mit $i \in \{1, \cdots, n\}$ $\quad X = 1$ heißt weiße Kugel

$X_i \sim \text{Ber}(\frac{M}{N}) \quad i \in \{1, \cdots, n\}$

$X_1, X_2, \cdots X_n$ unabhängig

$X =$ „Anzahl der weißen Kugeln nach n Zügen"

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Bin}(n, \tfrac{M}{N})$$

$$\Omega = \{1, \cdots, N\}^n \qquad \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \text{ mit } |\Omega| = N^n$$

(ii) $n=3$

Möglichkeit von $I \subseteq \{1,2,3\}$ z.B $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$

z.B $\quad \omega_{\{1,3\}} = (\omega_1, \omega_3)$

$\omega_{\{2,3\}} = \omega_{\{2\}} = (\omega_2)$

$$\{X = k\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\}$$

$$= \{\omega \in \Omega \mid \exists I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}, |I| = k \text{ und } \omega_I \in \{1, \cdots, M\}^k \text{ und } \omega_{I^c} \in \{M+1, \cdots, N\}^{n-k}\}$$

$$= \bigcup_{I \subseteq \{1, \dots, n\}\ |I| = k} \{\omega \in \Omega \mid \omega_I \in \{1, \dots, M\}^k \text{ und } \omega_{I^c} \in \{M+1, \dots, N\}^{n-k}\}$$

(iii) $$\mathbb{P}(X = k) = \frac{|\{X = k\}|}{N^n}$$

$$|\{X = k\}| \underset{\text{disjunkte Vereinigung}}{=} \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\} \text{ mit } |I| = k} |\{\omega \in \Omega \mid \omega_I \in \{1, \dots, M\}^k \text{ und } \omega_{I^c} \in \{M+1, \dots, N\}^{n-k}\}|$$

Für festes k und $I \subseteq \{1, \dots, k\}$ mit $|I| = k$ betrachte die Bijektion $f\colon \{\omega \in \Omega \mid \omega_I = \{1, \dots, M\}^n, \omega_{I^c} = \{M+1, \dots, N\}^{n-k}\}$ $\to \{1, \dots, M\}^n \times \{M+1, \dots, N\}^{n-k}$, $\omega \to f(\omega) = (\omega_I, \omega_{I^c})$

Da f eine Bijektion ist folgt

$$|\{\omega \in \Omega \mid \omega_I \in \{1, \dots, M\}^k, \omega_{I^c} \in \{M+1, \dots, N\}^{n-k}\}|$$

$$= M^k (N-M)^{n-k} \quad \to \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{M}{N}\right)^k \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k}$$

Hausaufgaben

Hausaufgabe 3.1 (3=1+2 Punkte)

Ein Elternpaar hat ein Zwillingspaar. Die Erfahrung lehrt, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 64% Zwillinge das gleiche biologische Geschlecht (männlich oder weiblich) haben. Außerdem ist ein Neugeborenes ein Mädchen mit einer Wahrscheinlichkeit von 51%. Wir bezeichnen mit F_1 und F_2 die Ereignisse, dass der erste bzw. zweite Zwilling ein Mädchen ist.

(i) Formulieren Sie mit Hilfe der Ereignisse F_1 und F_2 die Informationen aus dem Aufgabentext.

(ii) Berechnen Sie $\mathbb{P}(F_1|F_2)$ und $\mathbb{P}(F_1|F_2^c)$. Stellen Sie dann ein lineares Gleichung system für $\mathbb{P}(F_1|F_2)$ und $\mathbb{P}(F_1|F_2^c)$ auf und lösen Sie es anschließend.

Hausaufgabe 3.2 (6=1+2+3 Punkte)

Bei einem Verstärker mit zwei Röhren können eine oder beide Sicherungen durchbrennen, wenn eine Röhre defekt ist. Betrachten Sie die Ereignisse:

$$\begin{aligned} A_i &:= \text{die Röhre } i \text{ ist defekt } (i = 1, 2)\,; \\ B_j &:= \text{die Sicherung } j \text{ brennt durch } (j = 1, 2)\,, \\ B_3 &:= B_1 \cap B_2\,. \end{aligned}$$

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(B_i|A_j)$ sind in der Tabelle zusammengefasst

$\mathbb{P}(B_i\|A_j)$	A_1	A_2
B_1	0.7	0.2
B_2	0.3	0.6
B_3	0.2	0.1

$\mathbb{P}(B_i\|A_j)$	A_1	A_2
B_1	0.6	0.4
B_2	0.4	0.5
B_3	0.1	0.2

Wir nehmen an, dass genau eine Roehre defekt ist. Das Ereignis A_1 hat die Wahrscheinlichkeit 0.6 und A_1, A_2 sind eine Partition von Ω.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass:

(i) Beide Röhren defekt sind, falls beide Sicherungen durchgebrannt sind;

(ii) Röhre 2 defekt ist, falls beide Sicherungen durchgebrannt sind;

(iii) nur Röhre 2 defekt ist, falls mindestens eine Sicherung durchgebrannt ist.

Hausaufgabe 3.3 (4=2+2 Punkte)

Die Verteilung einer diskreten Zufallsvariable X ist in der folgenden Tabelle gegeben:

x	-4	0	4	16
$p_X(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

(i) Berechnen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ von X.

(ii) Seien $Y := 2\sqrt{|X|}$ und $Z = (X - Y)^2$. Stellen Sie die Verteilung von Y und von Z in einer Tabelle mit den Wertebereichen dar.

Hausaufgabe 3.4 (7=1+3+3 Punkte)

Ein fairer Würfel wird dreimal geworfen und zeigt die Augenzahlen $\omega \in \Omega$. Diese Zahlen werden absteigend der Größe nach geordnet und man erhält das Paar $Y(\omega)$.

(i) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ und die Wertebereich $Y(\Omega)$ dieser Zufallsvariablen Y.

(ii) Berechnen Sie die Verteilung $p_Y$von Y und überprüfen Sie die Normierung

$$\sum_{y \in Y(\Omega)} p_Y(y) = 1$$

in diesem speziellen Fall.

Hinweis: Während das Würfelwerfen ein Laplace-Experiment ist, sind die Ausgänge von Y nicht mehr gleichwahrscheinlich: $(1, 1, 1)$ kann auf genau eine Art entstehen, $2, 2, 1$ auf genau drei Arten und $(3, 2, 1)$ auf genau sechs. Unterteilen Sie den Wertebereich in drei Mengen A, B, C, so dass auf den Teilmengen jedes geordnete Paar dieselbe Wahrscheinlichkeit hat.

(iii) Verallgemeinern Sie die Ergebnisse in (i) und (ii) unter der Annahme, dass der Würfel n Flächen hat.