2 VL Ana 2

1.3 Konvergenz im $\mathbb{R}^n$

补充

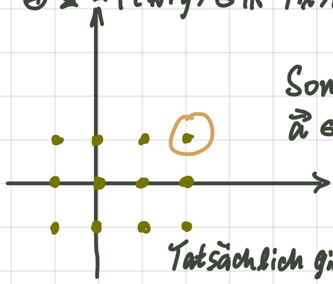
Themen: Nachtrag Topologie, Folgen und Konvergenz im $\mathbb{R}^n$, komponentenweise Konvergenz, Grenzwerte in Teilmengen, Teilfolge, Folgenkompaktheit.

1.3 Konvergenz im $\mathbb{R}^n$

Nachtrag VL 1. (Vergleich Ana 1 und Ana 2 bzgl. offen/abgeschlossen)

Weiteres Beispiel

④ $\mathbb{Z}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}^2$



Somit ist jeder Punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ ein Randpunkt, also ist $\mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ abgeschlossen

Tatsächlich gibt es keine weitere Randpunkte

Allgemein gilt: $\mathbb{Z}^n$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$ (also auch $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$)

Beispiel

$K_r(\vec{a}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{a}\| < r\}$ ist offen, denn:

Sei $\vec{y} \in K_r(\vec{a})$ bel., d.h. $\|\vec{y} - \vec{a}\| < r$

$\Rightarrow R := r - \|\vec{y} - \vec{a}\| > 0$

Zu zeigen: $K_R(\vec{y}) \subset K_r(\vec{a})$

Sei dazu $\vec{z} \in K_R(\vec{y}) \Rightarrow \|\vec{z} - \vec{a}\| = \|\vec{z} - \vec{y} + \vec{y} - \vec{a}\|$

Dreiecks-ungleichung $\rightarrow$ $\leq \|\vec{z} - \vec{y}\| + \|\vec{y} - \vec{a}\|$

$< R + \|\vec{y} - \vec{a}\|$

$= r - \|\vec{y} - \vec{a}\| + \|\vec{y} - \vec{a}\|$

$= r$

d.h. $\|\vec{z} - \vec{a}\| < r$, also $\vec{z} \in K_r(\vec{a})$

$\Rightarrow K_R(\vec{y}) \subset K_r(\vec{a})$

Damit ist $\vec{y}$ ein innerer Punkt von $K_r(\vec{a})$ und da y bel. ist, ist $K_r(\vec{a})$ offen nach dem Offenheitskriterium.

Definition (Folge oder Punktfolge)

Ein Folge (oder auch Punktfolge) von Vektoren ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}^n, \quad k \mapsto \vec{x}_k.$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $\vec{x}_k$ ein Vektor (oder Punkt) aus dem $\mathbb{R}^n$.
Schreibweise: $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Für die Bestimmung der Komponenten eines Folgengliedes benötigen wir einen weiteren Index und schreiben

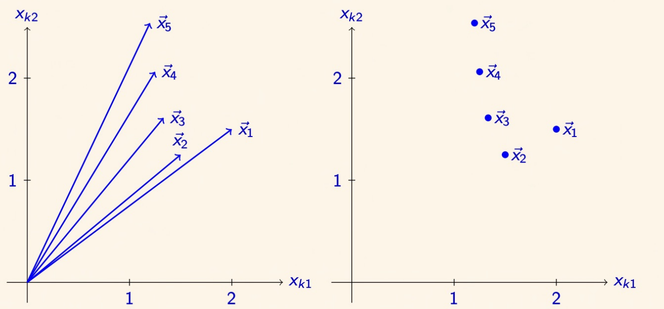
$$\vec{x}_k = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn}).$$

Der erste Index steht für den Folgenindex und der zweite Index bezeichnet die Komponente der jeweiligen Folge.

Beispiel

Sei $\vec{x}_k = (1 + \frac{1}{k}, \frac{1}{k^2} + \frac{k}{2})$ mit $k \geq 1$ eine Folge aus dem $\mathbb{R}^2$.

$$\vec{x}_1 = \left(2, \frac{3}{2}\right), \ \vec{x}_2 = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right), \ \vec{x}_3 = \left(\frac{4}{3}, \frac{29}{18}\right), \ \vec{x}_4 = \left(\frac{5}{4}, \frac{33}{16}\right) \ \ldots$$



Definition (Konvergenz im $\mathbb{R}^n$)

Ein Folge $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^n$ heißt konvergent gegen $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, falls

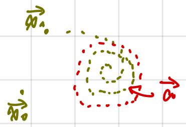
$$\lim_{k\to\infty} \|\vec{x}_k - \vec{a}\| = 0.$$

Der Vektor $\vec{a}$ heißt Limes (oder Grenzwert) der Folge $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Schreibweise: $\lim_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{a}$

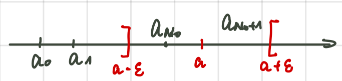
Bemerkung: Die Definition kennen wir aus Ana 1., denn $(\|\vec{x}_k - \vec{a}\|)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge reeller Zahlen.
Somit bedeutet Konvergenz:
Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq N_0$ gilt:

$$\big|\, \|\vec{x}_k - \vec{a}\| - 0 \,\big| = \|\vec{x}_k - \vec{a}\| < \varepsilon$$

Auch hier: N_0 abhängig von ε ab.
Bedeutet: $\vec{x}_k \in K_\varepsilon(\vec{a})$ für alle $k \geq N_0$, also liegen in jeder offenen Kugel um $\vec{a}$ mit Radius $\varepsilon > 0$ ab einem Index N_0 alle Folgeglieder $\vec{x}_k$ mit $k \geq N_0$



Vgl. Ana 1.



Beispiel:

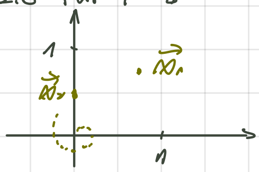
Sei $\vec{x}_k = \left(\frac{1}{k}\cos(k\varphi), \frac{1}{k}\sin(k\varphi)\right)$ eine Folge aus $\mathbb{R}^2$ mit $k \geq 1$ und $\varphi \in \mathbb{R}$

$\vec{x}_1 = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$

$\vec{x}_2 = \left(\frac{1}{2}\cos(2\varphi), \frac{1}{2}\sin(2\varphi)\right)$

$\vdots$

z.B für $\varphi = \frac{\pi}{4}$



Grenzwert ist $\vec{0}$, denn $\|\vec{x}_k - 0\| = \|\vec{x}_k\|$

$$= \sqrt{\frac{1}{k^2}\cos^2(k\varphi) + \frac{1}{k^2}\sin^2(k\varphi)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{k} \longrightarrow 0 \text{ für } k \to \infty$$

also $\lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{0}$

Vorbetrachtung:

Sei $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{a}$ und seien

$\vec{x}_k = (x_{k1}, \cdots, x_{kn})$

$\vec{a} = (a_1, \cdots, a_n)$

$\Rightarrow (x_{k\ell})_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge in $\mathbb{R}$ für jedes $\ell = 1, \cdots, n$ und es gilt:

$$\underbrace{\|\vec{x}_k - \vec{a}\|}_{\to 0} = \sqrt{\underbrace{(x_{k1}-a_1)^2}_{\to 0} + \underbrace{(x_{k2}-a_2)^2}_{\to 0} + \cdots + \underbrace{(x_{kn}-a_n)^2}_{\to 0}}$$

Fazit:

$$\lim_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{a} \iff \lim_{k\to\infty} x_{k\ell} = a_\ell \quad \text{für } \ell = 1, \cdots, n$$

Komponentenweise Konvergenz

Eine Folge $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann, wenn alle Komponentenfolgen $(x_{k\ell})_{k\in\mathbb{N}}$ für $\ell = 1, 2, \ldots, n$ konvergieren. Genauer bedeutet dies

$$\lim_{k\to\infty} \vec{x}_k = \lim_{k\to\infty} (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn})$$
$$= \left(\lim_{k\to\infty} x_{k1}, \lim_{k\to\infty} x_{k2}, \ldots, \lim_{k\to\infty} x_{kn}\right).$$

Beispiel:

① Sei $\vec{x}_k = \left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^k, \frac{1}{k} - 1, \left(\frac{1}{5}\right)^k\right)$ eine Folge in $\mathbb{R}^3$ mit $k \geq 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{k1} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e$

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{k2} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k} - 1\right) = -1$

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{k3} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k = 0$

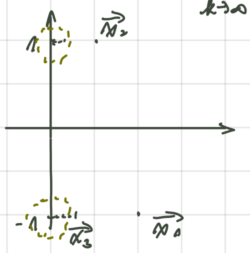
$\xrightarrow[\text{Konvergenz}]{\text{Komponentenweise}} \lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}_k = \lim\limits_{k\to\infty} (x_{k1}, x_{k2}, x_{k3})$

$= (e, -1, 0)$

② Betrachte $\vec{x}_k = \left(\frac{1}{k}, (-1)^k\right)$ mit $k \geq 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$ aber $\lim\limits_{k\to\infty} (-1)^k$ existiert nicht,

also existiert $\lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}_k$ nicht.



Grenzwerte in Teilmenge:

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq A$ konvergiert gegen $\vec{a}$, d.h. $\lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{a}$. Gilt $\vec{a} \in A$?

Beispiel

Betrachte offene Kugel $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}$ und $(\vec{x}_k)_{k\geq 1} \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $\vec{x}_k = \left(0, 1 - \frac{1}{k}\right)$

$\Rightarrow \|\vec{x}_k\| = \sqrt{0^2 + \left(1-\frac{1}{k}\right)^2} = 1 - \frac{1}{k} < 1$ für alle $k \geq 1$

d.h. $\vec{x}_k \in A$ für alle $k \geq 1$

Es gilt: $\lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}_k = \left(\lim\limits_{k\to\infty} 0, \lim\limits_{k\to\infty} 1 - \frac{1}{k}\right)$

$= (0, 1)$

Aber $\|(0,1)\| = 1$, also ist $(0,1) \notin A$

Zurück zu die Frage

Nach VL 1 ist $\vec{a}$ entweder ein

(a) innerer Punkt

(b) äußerer Punkt

(c) Randpunkt

zu (a) Es gibt eine offene Kugel um $\vec{a}$, die ganz in A enthalt ist $\Rightarrow \vec{a} \in A$

zu (b) Es gibt eine offene Kugel um $\vec{a}$, in der kein Element von A liegt

Aber: $\lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{a}$

Also liegen in jeder Kugel um $\vec{a}$ unendlich viele $\vec{x}_k \in A$. Falls (b) kann also nicht eintreten.

zu (c) In jeder offen Kugel um $\vec{a}$ liegen Punkte aus A und aus $\mathbb{R}^n \setminus A$.

Also $\vec{a} \in A$ oder $\vec{a} \notin A$

Fazit: Falls A abgeschlossen ist, muss $\vec{a} \in A$ sein.

Grenzwerte von Folgen in abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Menge und sei $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in A mit Grenzwert $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt $\vec{a} \in A$.

Definition (Teilfolge)

Als Teilfolge von $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnet man jede Folge

$$\vec{x}_{n_1}, \vec{x}_{n_2}, \vec{x}_{n_3}, \dots, \vec{x}_{n_k}, \dots,$$

mit

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots,$$

wobei $n_k \in \mathbb{N}$ ist für $k = 1, 2, \dots$.
Schreibweise: $(\vec{x}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Bemerkung

(1) Die Indizes n_k können ohne Regelmäßigkeit gewählt werden, sie müssen aber streng monoton wachsend sein und es müssen unendlich viele sein.

(2) Teilfolgen einer konvergenten Folge $\vec{x}_k \subseteq \mathbb{R}^n$ sind wieder konvergent und konvergieren insbesondere gegen den Grenzwert $\vec{a} = \lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}_k$ der Folge.

Beispiel: Betrachte $\vec{x}_k = (\frac{1}{k}, (-1)^k)$ mit $k \geq 1$
schon gesehen: $\vec{x}_k$ ist divergent
Aber: $n_k = 2k$
Dann ist die Teilfolge
$(\vec{x}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\vec{x}_{n_k} = (\vec{x}_2, \vec{x}_4, \vec{x}_6, \dots)$

$$= (\frac{1}{2k}, (-1)^{2k}) = (\frac{1}{2k}, 1)$$

konvergiert gegen $(0,1)$,
denn $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{2k} = 0$ und $\lim\limits_{k\to\infty} 1 = 1$

Man kann auch $n_k = 2k-1$ wählen
$\Rightarrow (\vec{x}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\vec{x}_{n_k} = (\vec{x}_1, \vec{x}_3, \dots)$

$$= (\frac{1}{2k-1}, (-1)^{2k-1})$$

$$= (\frac{1}{2k-1}, -1)$$

konvergiert gegen $(0,-1)$

Folgenkompaktheit ("Satz von Bolzano-Weierstraß")

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und sei $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A. Dann besitzt $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert in A liegt.

Hintergrund

(1) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann heißt A **folgenkompakt**, falls jede Folge $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in A hat eine in A konvergente Teilfolge besitzt (d.h. eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert auch wieder in A liegt).

(2) Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt: A ist kompakt $\Leftrightarrow$ A ist folgenkompakt.

(3) Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A, so hat $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.

(4) Der Name "Satz von Bolzano-Weierstraß" ist eigentlich für ein Resultat aus der Analysis 1 reserviert: Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beispiel:
Sei $A = [-1,1] \times [-1,1]$ (also kompakt) und
sei $\vec{x}_k = \left(\frac{\cos(k)}{k}, (-1)^k\right)$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$
mit $k \geq 1$.

$\Rightarrow \vec{x}_k \subseteq A$ und $\vec{x}_k$ ist divergent (wegen $(-1)^k$)

Aber: Teilfolge $(\vec{x}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $n_k = 2k$ gegeben durch $\vec{x}_{n_k} = \left(\frac{\cos(2k)}{2k}, (-1)^{2k}\right)$ konvergiert gegen $(0,1) \in A$
Analog für Teilfolge $n_k = 2k-1$

$$(\vec{x}_{n_k}) = \left(\frac{\cos(2k-1)}{2k-1}, (-1)^{2k-1}\right) \longrightarrow (0,-1) \in A$$

3. VL Ana 2 Ing

Abbildung, Funktionen und Stetigkeit

(用圖表說明)

Thema: Abbildungen / Funktionen, Veranschaulichung Graphen / partielle Funktionen / Niveaumengen / Vektorfelder (向量场), Grenzwerte von Abbildungen, Stetigkeit komponentenweise Stetigkeit, partielle Stetigkeit, Rechenregeln für stetige Abbildung, Maximum / Minimum (Def., Existenz)

1.4 Abbildungen, Funktionen und Stetigkeit.

Definition (Abbildung, Skalarfeld, Vektorfeld, Kurve)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und sei $m \in \mathbb{N}$. Ein **Abbildung** $\vec{f}$ von D nach $\mathbb{R}^m$ ist eine Zuordnungsvorschrift (分配規則), die jedem Element $\vec{x} \in D$ genau ein Element $\vec{y} = f(\vec{x})$ zuordnet. D heißt **Definitionsbereich** von $\vec{f}$ und $\mathbb{R}^m$ ist der **Wertebereich** von $\vec{f}$.
Schreibweisen: $\vec{f}: D \to \mathbb{R}^m, \vec{x} \mapsto f(\vec{x})$ oder $\vec{f}: D \to \mathbb{R}^m, f(\vec{x}) = \vec{y}$.

Für $m = 1$ nennt man die Abbildung $\vec{f}$ auch Funktion (oder **Skalarfeld** oder **skalare Funktion**) und man schreibt f ohne Pfeil.

Für $m > 1$ nennt man die Abbildung $\vec{f}$ auch **Vektorfeld**. 向量场

Für $n = 1$ und $m > 1$ bezeichnet man die Abbildung $\vec{f}$ auch als **Kurve**.

Definition (Graph)

Der **Graph** einer Abbildung $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Menge

$$\Gamma_{\vec{f}} = \{(\vec{x}, f(\vec{x})) \mid \vec{x} \in D\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Im Fall $n = 2$ ergibt sich der Graph einer Funktion durch

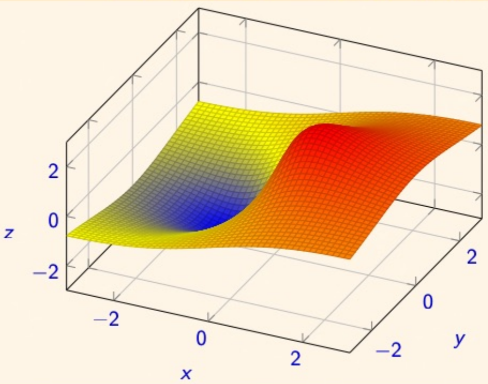
$$\begin{aligned}\Gamma_f &= \{(x, y, f(x,y)) \mid (x,y) \in D\} \\ &= \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ z = f(x,y)\}.\end{aligned}$$

Für $n = 1$ kennen wir den Graphen bereits

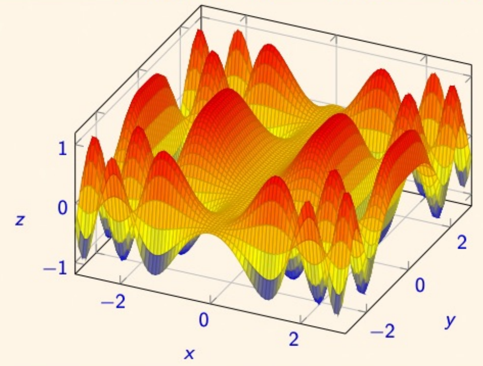
$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\} = \{(x,y) \mid x \in D,\ y = f(x)\}.$$

(1) Veranschaulichung durch Graphen

$f: D \to \mathbb{R}$ mit $D = [-3,3] \times [-3,3]$ und $f(x,y) = \frac{5x}{x^2+y^2+1}$



$f: D \to \mathbb{R}$ mit $D = [-3,3] \times [-3,3]$ und $f(x,y) = \sin(x^2)\cos(y^2)$



(2) Veranschaulichung durch partielle Funktion

Definition (partielle Funktionen)

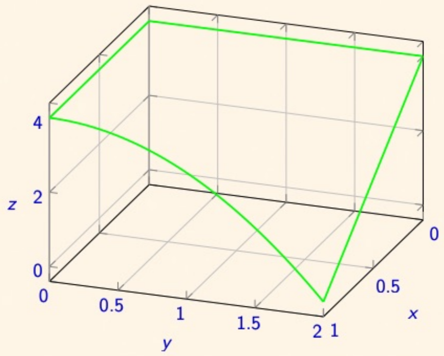
Sei $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Funktion und sei $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in D$ beliebig fest gewählt. Dann ist

$$x_i \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

die i-te partielle Funktion von f für $i = 1, \dots, n$. Eine partielle Funktion entsteht also durch das Festhalten aller Variablen bis auf eine und erzeugt eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

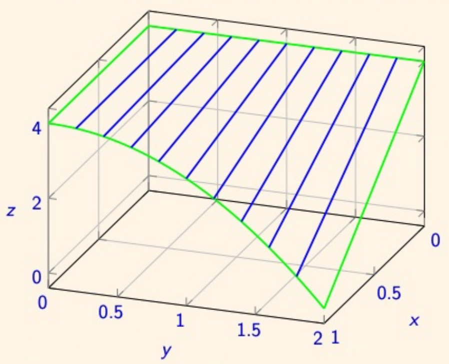
$f: D \to \mathbb{R}$ mit $D = [0,1] \times [0,2]$ und $f(x,y) = 4 - xy^2$

Zeichnen zuerst den Graphen auf dem Rand von D:
Betrachte partielle Funktion $x \mapsto f(x, 0) = 4$,
$x \mapsto f(x,2) = 4 - 4x$, $y \mapsto f(0,y) = 4$ und $y \mapsto f(1,y) = 4 - y^2$.



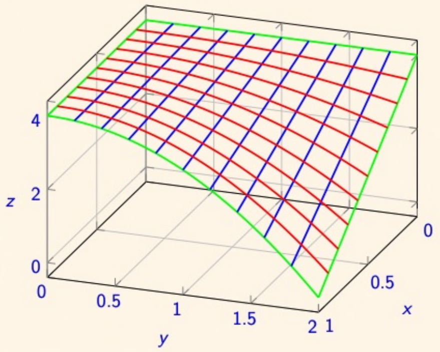
$f: D \to \mathbb{R}$ mit $D = [0,1] \times [0,2]$ und $f(x,y) = 4 - xy^2$

Jetzt: y-Variable festhalten, liefert eine Funktion
$x \mapsto f(x, c_1) = 4 - c_1^2 x$ wobei wir für c_1 beliebig, feste Werte einsetzen können, z.B. $c_1 \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8\}$

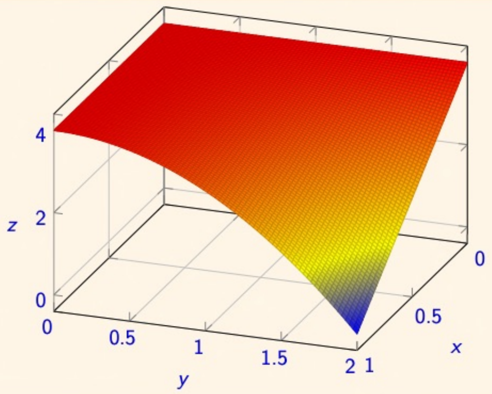


$f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D = [0,1] \times [0,2]$ und $f(x,y) = 4 - xy^2$

Jetzt: x-Variable festhalten, liefert eine Funktion $y \mapsto f(c_2, y) = 4 - c_2 y^2$ wobei wir für c_2 beliebig, feste Werte einsetzen können, z.B. $c_2 \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}$



$f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D = [0,1] \times [0,2]$ und $f(x,y) = 4 - xy^2$



(3) Veranschaulichung durch Niveaumengen

Definition

Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine gegebene Funktion und sei $c \in \mathbb{R}$. Die Menge

$$N_c = \{\vec{x} \in D \,|\, f(\vec{x}) = c\}$$

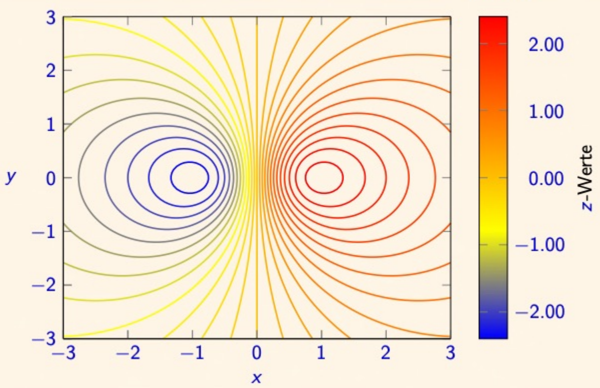
nennt man **Niveaumenge** von f zum Niveau (oder zum Level) c.

Bemerkung

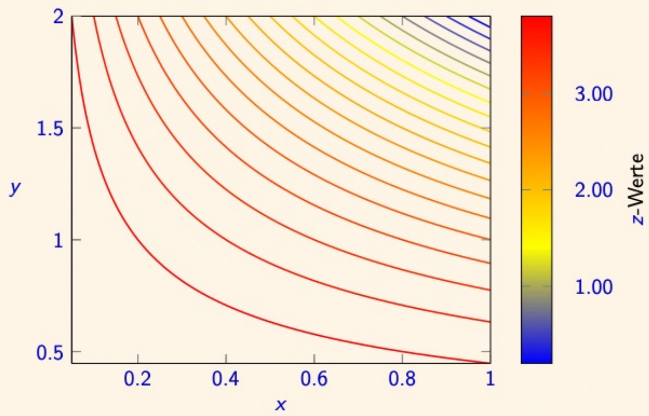
Für Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind die Niveaumengen typischerweise Kurven, sogenannte **Niveaukurven**. Man sagt auch **Niveau- oder Höhenlinie**.

Für Funktionen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sind die Niveaumengen Flächen, sogenannte **Niveauflächen**.

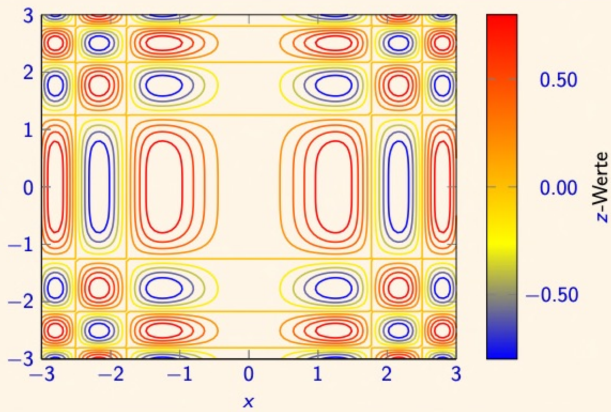
$f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D = [-3,3] \times [-3,3]$ und $f(x,y) = \frac{5x}{x^2+y^2+1}$



$f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D = [0,1] \times [0,2]$ und $f(x,y) = 4 - xy^2$

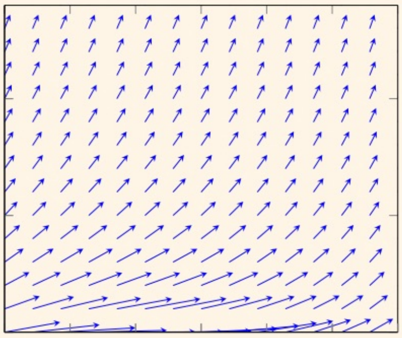


$f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D = [-3,3] \times [-3,3]$ und $f(x,y) = \sin(x^2)\cos(y^2)$



(4) Veranschaulichung durch Vektorfelder

$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



Definition (Grenzwert von Abbildungen)

Seien $\vec{f}\colon D \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Wir sagen, $\vec{f}$ hat für $\vec{x}$ gegen $\vec{a}$ den Grenzwert $\vec{b}$, in Zeichen

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b},$$

falls gilt:

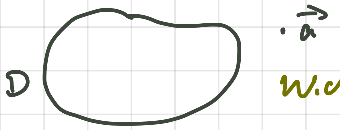
(1) Für jede Folge $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit
- (i) $\vec{x}_k \in D$,
- (ii) $\vec{x}_k \neq \vec{a}$,
- (iii) $\lim\limits_{k \to \infty} \vec{x}_k = \vec{a}$,

ist $\lim\limits_{k \to \infty} \vec{f}(\vec{x}_k) = \vec{b}$.

(2) Es gibt mindestens eine Folge $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit (i)–(iii).

Hinweis: Der Grenzwert $\vec{a}$ kann im Definitionsbereich von $\vec{f}$ sein, muss aber nicht. Ebenso sehen wir in Punkt (2), dass der Punkt $\vec{a}$ von der Menge $D \setminus \{\vec{a}\}$ „erreichbar“ sein muss.

Ana 1:  nicht erlaubt

Ana 2:  nicht erlaubt

Beispiel:

(1) $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

ges: $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{0}} f(\vec{x})$

Sei dazu $(\vec{x}_k)$ bel. Folge aus $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit

$\lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{0} = (0,0)$. Für $\vec{x}_k = (x_{k1}, x_{k2})$

ist $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k1} = 0 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{k2}$

Dann gilt:

$$0 \le |f(\vec{x}_k) - 0| = \frac{x_{k1}^2}{\sqrt{x_{k1}^2 + x_{k2}^2}} = \frac{|x_{k1}|\cdot|x_{k1}|}{\sqrt{x_{k1}^2 + x_{k2}^2}} \le \frac{|x_{k1}|\cdot|x_{k1}|}{\sqrt{x_{k1}^2}} = |x_{k1}| \xrightarrow[\text{für } k\to\infty]{} 0$$

$\Longrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} |f(\vec{x}_k) - 0| = 0$, d.h. $\lim\limits_{k\to\infty} f(\vec{x}_k) = 0$

$\Longrightarrow \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{0}} f(\vec{x}) = 0$

(2) $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$

ges: $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{0}} f(\vec{x})$

Sei z.B. $\vec{x}_k = (0, \frac{1}{k})$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}_k = 0$ und $\lim\limits_{k\to\infty} f(\vec{x}_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{0\cdot\frac{1}{k}}{0^2 + \frac{1}{k^2}} = 0$

Andere Folge: Sei z.B. $\vec{x}_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}_k = 0$ und

$\lim\limits_{k\to\infty} f(\vec{x}_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{0}} f(\vec{x})$ existiert nicht

Definition (Stetigkeit)

Eine Abbildung $\vec{f}: D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset R^n$ heißt stetig in $\vec{a} \in D$, falls

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a}).$$

Die Abbildung $\vec{f}$ heißt stetig, falls $\vec{f}$ in jedem Punkt $\vec{a} \in D$ stetig ist.

Komponentenweise Stetigkeit

Eine Abbildung $\vec{f}: D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ ist genau dann stetig, wenn alle Komponentenfunktionen f_i, $i = 1, \ldots, m$ stetig sind.

Beispiel

(1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

ist nicht stetig in $\vec{a} = \vec{0}$, da

$\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{0}} f(\vec{x}) = 0 \neq f(\vec{0}) = 2$

siehe oben

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

ist stetig, insbesonder in $\vec{a} = \vec{0}$ da

$\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{0}} f(\vec{x}) = 0 = f(\vec{0})$

(2) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ c & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$(c \in \mathbb{R})$

ist nicht stetig in $\vec{a} = \vec{0}$ (für jedes $c \in \mathbb{R}$)

da $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{0}} f(\vec{x})$ nicht existiert.

Komponentenweise Stetigkeit

Sei $\vec{f}: D \to \mathbb{R}^m$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann besitzt $\vec{f}(\vec{x})$ für jeder $x \in D$ m Komponenten:

$$\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x}))$$

$f_i: D \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$ nennt man

Komponentenfunktionen.

VL 2: Komponentenweise Konvergenz liefert

$$\lim_{\vec x\to\vec a} \vec f(\vec x) = f(\vec a)$$

$$\iff \lim_{\vec x\to\vec a} f_i(\vec x) = f_i(\vec a) \text{ für } i=1,\dots,m$$

Also ist $\vec f$ genau dann stetig, wenn

<u>alle</u> f_i stetig sind.

Beispiel

$$\vec f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto \begin{bmatrix} x^2\cdot\cos(x)+e^x \\ \sin(x) \end{bmatrix}$$

ist stetig, denn

$f_1: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_1(x) = x^2\cdot\cos(x)+e^x$

$f_2: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_2(x) = \sin(x)$ sind stetig

2 Komponentenfunktion

Definition (partielle Stetigkeit)

Eine Funktion $\vec f: D\to\mathbb{R}$, $D\subseteq\mathbb{R}^n$ heißt **partiell stetig in** $\vec a$, wenn die partiellen Funktionen

$$\begin{aligned} x_1 &\mapsto f(x_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \\ x_2 &\mapsto f(a_1, x_2, a_3, \dots, a_n) \\ x_3 &\mapsto f(a_1, a_2, x_3, \dots, a_n) \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_n &\mapsto f(a_1, a_2, a_3, \dots, x_n) \end{aligned}$$

stetig sind.

Bemerkung

Partielle Stetigkeit impliziert **nicht** Stetigkeit.

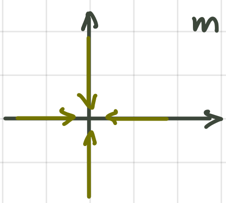
Beispiel

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

ist nicht stetig in $\vec a = \vec 0$ (siehe oben)

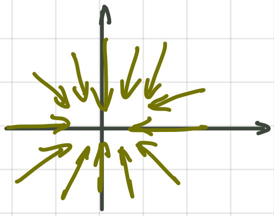
Aber Part. Funkt. $\left\{\begin{array}{l} x \mapsto f(x,0)=0 \\ y \mapsto f(0,y)=0 \end{array}\right\}$ sind stetig, also ist f partiell stetig in $\vec a = \vec 0$

Hintegrund: Bei partielle Stetigkeit nähert man sich nur achse-parallel.



Allgemein:

Selbst Geraden aus allen Richtungen reichen nicht aus, man muss sich bel. annähen können



Rechenregeln für stetige Abbildungen

Seien $\vec f, \vec g: D\to\mathbb{R}^m$, $\vec h: \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^\ell$ mit $D\subseteq\mathbb{R}^n$ stetige Abbildungen und sei $\lambda\in\mathbb{R}$. Wir schreiben $\vec f = (f_1,\dots,f_m)$, $\vec g = (g_1,\dots,g_m)$ mit den zugehörigen Komponentenfunktionen.

(1) Dann sind $\vec f+\vec g, \vec f-\vec g, \lambda\vec f: D\to\mathbb{R}^m$ stetige Abbildungen.

(2) Dann ist das Skalarprodukt $\langle\vec f,\vec g\rangle: D\to\mathbb{R}$ mit

$$\langle\vec f(\vec x), \vec g(\vec x)\rangle = f_1(\vec x)g_1(\vec x) + \dots f_m(\vec x)g_m(\vec x)$$

stetig, wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ ist.

(3) Dann ist für $m=3$ das Kreuzprodukt (auch Vektorprodukt) $\vec f\times\vec g: D\to\mathbb{R}^3$ mit

$$(\vec f\times\vec g)(\vec x) = \begin{bmatrix} f_1(\vec x) \\ f_2(\vec x) \\ f_3(\vec x)\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} g_1(\vec x) \\ g_2(\vec x) \\ g_3(\vec x)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2(\vec x)g_3(\vec x) - f_3(\vec x)g_2(\vec x) \\ f_3(\vec x)g_1(\vec x) - f_1(\vec x)g_3(\vec x) \\ f_1(\vec x)g_2(\vec x) - f_2(\vec x)g_1(\vec x)\end{bmatrix}$$

stetig.

(4) Dann ist die Komposition $\vec h\circ\vec f: D\to\mathbb{R}^\ell$ stetig.

Definition (Maximum, Minimum, Supremum, Infimum)

Sei $f: D\to\mathbb{R}$ mit $D\subseteq\mathbb{R}^n$ eine Funktion.

(1) f hat an der Stelle $\vec a\in D$ das (**globale**) **Maximum**, wenn gilt: $f(\vec x)\le f(\vec a)$ für alle $\vec x\in D$.

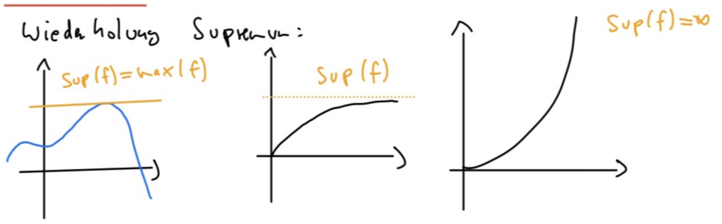
(2) f hat an der Stelle $\vec b\in D$ das (**globale**) **Minimum**, wenn gilt: $f(\vec x)\ge f(\vec b)$ für alle $\vec x\in D$.

(3) $y^*\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ ist das **Supremum** von f wenn gilt:
(a1) $f(\vec x)\le y^*$ für alle $\vec x\in D$ (y^* ist eine obere Schranke)
(a2) es gibt eine Folge $(\vec x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{k\to\infty} f(\vec x_k) = y^*$.
Bezeichnung: $y^* = \sup_{\vec x\in D} f(\vec x) = \sup f$

(4) $y_*\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ ist das **Infimum** von f, wenn gilt:
(b1) $f(\vec x)\ge y_*$ für alle $\vec x\in D$ (y_* ist eine untere Schranke)
(b2) es gibt eine Folge $(\vec x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{k\to\infty} f(\vec x_k) = y_*$.
Bezeichnung: $y_* = \inf_{\vec x\in D} f(\vec x) = \inf f$

Folie 41

Wiederholung Supremum:



Existenz vom Minimum und Maximum

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann hat f ein globales Minimum und ein globales Maximum.

Beweisidee:

Sei $(\vec{x_k}) \subseteq D$ mit $\lim_{k\to\infty} f(\vec{x_k}) = s = \sup(f)$

D kompakt $\Rightarrow$ $(\vec{x_k})$ hat konvergente Teilfolge

$(\vec{x_{n_k}})$ mit $\vec{x_{n_k}} \to \vec{a} \in D$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(\vec{x_{n_k}}) = s \underset{f \text{ stetig}}{=} f\left(\lim_{k\to\infty} \vec{x_{n_k}}\right) = f(\vec{a})$

d.h. $s = f(\vec{a})$, also ist $s < \infty$ und s ist ein Maximum von f. Analog für Minimum

Beispiel

1) Ana 1: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig hat Max. und Min

Jetzt: $f : [a,b] \cup [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig

$\hookrightarrow$ hat Max. und Min., da

$[a,b] \cup [c,d]$ beschränkt und

abgeschlossen, also kompakt ist.

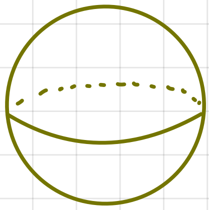
4. VL Ana 2 Ing

Lineare Abbildung und Differentiation

Thema: (Nachtrag VL 13)
Lineare Abbildungen, Richtungsabbildung, (totale) Differenzierbarkeit, Abbildung (totale Abbildung, (total) Differential).
Tangentialebene

Weitere Beispiele zu VL 3 (Existenz vom Minimum und Maximum)

(2) Sei $S := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x}\| = 1\}$



S ist die Oberfläche der Kugel.

S kompakt, da beschränkt und abgeschlossen.

Betrachte $T: S \to \mathbb{R}$ stetig.
(z.B. Temperaturverteilung)

$\Rightarrow$ T hat Max./Min., also gibt es wärmsten und kältesten Ort

(3) Seien $D = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \le 1\}$, $\vec{a} \in D$ und
$f: D \to \mathbb{R}$ $\quad f(\vec{x}) = \|\vec{x} - \vec{a}\|$

f ist stetig, also hat f Max. und Min.

$f(\vec{x}) \ge 0$ und $f(\vec{a}) = \|\vec{a} - \vec{a}\| = 0$

$\Longrightarrow$ Minimum von f liegt in $\vec{a}$

Das Maximum von f liegt in $-\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$, denn:

$$f\left(-\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}\right) = \left\|-\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} - \vec{a}\right\| = \left\|\frac{-\vec{a} - \vec{a}\|\vec{a}\|}{\|\vec{a}\|}\right\|$$

$$= \frac{\|\vec{a}\| \cdot (1 + \|\vec{a}\|)}{\|\vec{a}\|} = 1 + \|\vec{a}\|$$

Für alle $\vec{x} \in D$ gibt Dreiecksungl.

$$f(\vec{x}) = \|\vec{x} - \vec{a}\| = \|\vec{x} + (-\vec{a})\| \le \underbrace{\|\vec{x}\|}_{\le 1 \text{ da } \vec{x} \in D} + \|-\vec{a}\|$$

$$\le 1 + \|\vec{a}\| = f\left(-\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}\right)$$

1.5 Lineare Abbildung

Sei $\vec{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear.
Dann gibt es nach Ana1-LinA Ing (VL 15) eine Matrix
$A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m,n}$ mit

$$\vec{f}(\vec{x}) = A \cdot \vec{x},$$

d.h.

$$f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \end{bmatrix}$$

Die Komponentenfunktionen sind gegeben durch

$f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f_i(\vec{x}) = \underbrace{a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n}_{\text{Summe von stetigen Fktn.}}$$

für $i = 1, \dots, m$

Also sind alle f_i stetig und damit ist auch f stetig (VL 3)

Wiederholung Ana1-LinA Ing: Definition (Lineare Abbildung)

Eine Abbildung $\vec{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt linear, falls für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) **Additivität:** $\vec{f}(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{f}(\vec{x}) + \vec{f}(\vec{y})$

(2) **Homogenität:** $\vec{f}(\lambda \vec{x}) = \lambda \vec{f}(\vec{x})$

Stetigkeit von linearen Abbildungen

Jede lineare Abbildung $\vec{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist stetig.

Wiederholung Ana1-LinA Ing: Definition (Differenzierbarkeit)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f differenzierbar in $x_0 \in D$, falls

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. $f'(x_0)$ entspricht der Steigung von f in x_0.
Umformulierung der Definition: Ersetze x_0 durch x und x durch $x + \Delta x$, so wird $x - x_0$ zu Δx. Dann gilt

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \overset{\Delta x = h}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h \cdot 1) - f(x)}{h}$$

Diese Definition wollen wir jetzt verallgemeinern für Abbildungen $\vec{f}: D \to \mathbb{R}^m$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

Richtungsableitung

Definition (Richtungsableitung)

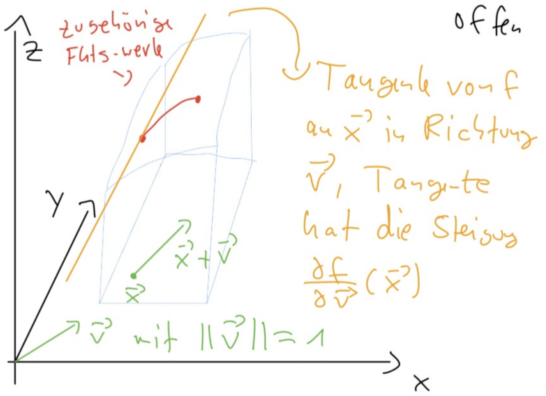
Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\vec{f}: D \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung und $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\vec{v}\| = 1$. Existiert für $\vec{x} \in D$ der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{\vec{f}(\vec{x} + h \cdot \vec{v}) - \vec{f}(\vec{x})}{h} =: \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{v}}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m,$$

so heißt $\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{v}}(\vec{x})$ **Richtungsableitung von $\vec{f}$ in $\vec{x}$ in Richtung $\vec{v}$**.

Interpretation der Richtungsableitung

Betrachte $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen



Beispiel

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x \cdot y, \ \vec{v} = \vec{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x,y)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f((x,y) + h(0,1)) - f(x,y)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x \cdot (y+h) - x \cdot y}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x \cdot h}{h} = x$$

z.B $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(3,5) = 3$ ist die Steigung von f in $(3,5)$ in Richtung $\vec{v} = \vec{e_2} = (0,1)$

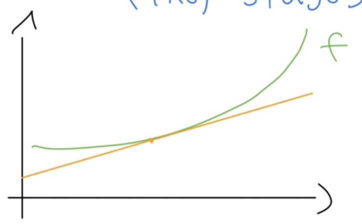
Problem: Es gibt unendlich viele Richtungen, daher ist die Richtungsableitung als Ableitung ungeeignet (z.B soll eine Ableitung eindeutig bestimmt sein)

Lineare Approximation Ana 1

1. Taylorpolynom einer Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0

$$T_1(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{Tangente von } f \text{ in } x_0}$$

$f'(x_0)$ Steigung d. Tangente



mit $f(x) = T_1(x) + R_1(x)$
$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_1(x)$

mit $\lim_{x \to x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} = 0$

Ersetze x_0 durch x und x durch $x + \Delta x$ ($\rightsquigarrow x - x_0 \hat{=} \Delta x$)

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + R_1(x + \Delta x)$$

mit $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{R_1(x + \Delta x)}{\Delta x} = 0$

Jetzt: Sei $\vec{f}: D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen

Idee: Approximation von $\vec{f}$ in $\vec{x} \in D$

$$\vec{f}(\vec{x} + \vec{\Delta x}) = \vec{f}(\vec{x}) + \underbrace{A \cdot \underbrace{\vec{\Delta x}}_{\in \mathbb{R}^n}}_{\in \mathbb{R}^m} + \vec{R_1}(\vec{x} + \vec{\Delta x})$$

Hier: A soll linear sein und bildet von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ ab

$\Rightarrow$ A ist eine $m \times n$ - Matrix

Definition ((total) differenzierbar, (totale) Ableitung)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{f}\colon D \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung.

(1) Dann heißt $\vec{f}$ **differenzierbar in** $\vec{x} \in D$ (auch: **total differenzierbar** in $\vec{x} \in D$), falls es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ gibt, so dass für alle $\overrightarrow{\Delta x}$ mit $\vec{x} + \overrightarrow{\Delta x} \in D$ gilt:

$$\vec{f}\left(\vec{x} + \overrightarrow{\Delta x}\right) = \vec{f}(\vec{x}) + A \cdot \overrightarrow{\Delta x} + \vec{R}_1\left(\vec{x} + \overrightarrow{\Delta x}\right)$$

mit

$$\lim_{\overrightarrow{\Delta x} \to \vec{0}} \frac{\vec{R}_1\left(\vec{x} + \overrightarrow{\Delta x}\right)}{\left\|\overrightarrow{\Delta x}\right\|} = 0.$$

A heißt dann die **(totale) Ableitung** (auch **(total) Differential**) von $\vec{f}$ in $\vec{x}$. Schreibweise: $\vec{f}'(\vec{x}) =: A$

(2) $\vec{f}$ heißt **differenzierbar**, falls $\vec{f}$ in allen $\vec{x} \in D$ differenzierbar ist.

Beispiel:

$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x\cdot y$ $\qquad \vec{x} = (x,y)$, $\overrightarrow{\Delta x} = (\Delta x, \Delta y)$

$$\Rightarrow f(\vec{x} + \overrightarrow{\Delta x}) = f(x+\Delta x, y+\Delta y)$$
$$= (x+\Delta x)\cdot(y+\Delta y)$$
$$= x\cdot y + x\cdot\Delta y + y\cdot\Delta x + \Delta x\cdot\Delta y$$
$$= \underbrace{x\cdot y}_{f(x,y)} + \underbrace{[y \;\; x]}_{A}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix}}_{\overrightarrow{\Delta x}} + \underbrace{\Delta x\,\Delta y}_{\vec{R}_1(\vec{x}+\overrightarrow{\Delta x})}$$

Fehler abschätzen:

$$0 \leq \frac{|\Delta x||\Delta y|}{\|\overrightarrow{\Delta x}\|} = \frac{|\Delta x|\cdot|\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \leq \frac{|\Delta x|\cdot|\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2}}$$
$$= \frac{|\Delta x|\cdot|\Delta y|}{|\Delta x|} = |\Delta y| \longrightarrow 0 \quad \text{für } \overrightarrow{\Delta x} \to \vec{0}$$
$$(\overrightarrow{\Delta x} = (\Delta x, \Delta y))$$

Also $\displaystyle\lim_{\overrightarrow{\Delta x} \to \vec{0}} \frac{\vec{R}_1(\vec{x}+\overrightarrow{\Delta x})}{\|\overrightarrow{\Delta x}\|} = 0$

Damit ist f differenzierbar mit $f'(\vec{x}) = [y \;\; x] \in \mathbb{R}^{1,2}$

z.B $f'(3,5) = [5, 3]$

Richtungsableitung und totale Ableitung

Sei $\vec{f}\colon D \to \mathbb{R}^m$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen) diffbar in $\vec{x} \in D$ und sei $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\vec{v}\|$

Mit $A = \vec{f}'(\vec{x}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ und $\overrightarrow{\Delta x} = h\cdot\vec{v}$ folgt:

$$\vec{f}(\vec{x}+h\vec{v}) = \vec{f}(\vec{x}) + A\cdot(h\vec{v}) + \vec{R}_1(\vec{x}+h\cdot\vec{v})$$
$$= \vec{f}(\vec{x}) + h\cdot A\vec{v} + \vec{R}_1(\vec{x}+h\cdot\vec{v})$$
$$\Rightarrow \frac{\vec{f}(\vec{x}+h\vec{v}) - \vec{f}(\vec{x})}{h} = A\vec{v} + \underbrace{\frac{\vec{R}_1(\vec{x}+h\cdot\vec{v})}{h}}_{\to 0 \text{ für } h \to 0}$$

$(\|\overrightarrow{\Delta x}\| = |h|\cdot\|\vec{v}\| = |h|)$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{v}}(\vec{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{f}(\vec{x}+h\vec{v}) - \vec{f}(\vec{x})}{h} = A\vec{v} \Rightarrow \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{v}}(\vec{x}) = A\vec{v}$$

z.B $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x\cdot y$

oben: $f'(3,5) = [5 \;\; 3]$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_2}(3,5) = A\cdot\vec{e}_2 = [5 \;\; 3]\cdot\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = 3 \quad \leftarrow \text{siehe oben}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_1}(3,5) = A\cdot\vec{e}_1 = [5 \;\; 3]\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = 5$$

Interpretation d. Ableitung als Tangentialebene

Die Gleichung $z = ax+by+c$ beschreibt eine Ebene in $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ Graph von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$(x,y) \mapsto ax+by+c = [a \;\; b]\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} + c$$

ist eine Ebene in $\mathbb{R}^3$.

Andere Darstellung für $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + a(x-x_0) + b(y-y_0)$$
$$= ax+by + \underbrace{f(x_0,y_0) - ax_0 - by_0}_{=c}$$

Betrachte nun $f\colon D \to \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen) diffbar in $\vec{x} \in D$ mit Ableitung

$$f'(\vec{x}) = A = [a_1 \;\; a_2] \in \mathbb{R}^{1,2}$$

$\Rightarrow$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + [a_1 \;\; a_2]\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix} + R_1\begin{pmatrix}x+\Delta x,\\ y+\Delta y\end{pmatrix}$$
$$\approx f(x,y) + a_1\Delta x + a_2\Delta y$$

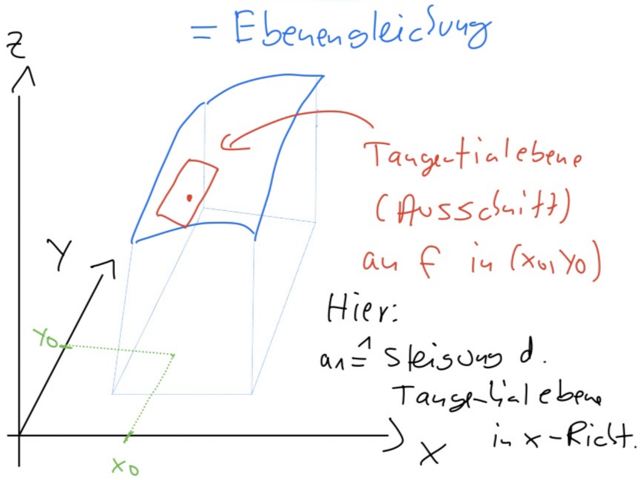
für $\|\overrightarrow{\Delta x}\|$ hinreichend klein

Ersetze $\vec{x}$ durch $\vec{x}_0$ und

$\vec{x} + \vec{\Delta x}$ durch $\vec{x}$

$$f(x,y) \approx f(x_0, y_0) + a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0)$$

= Ebenengleichung



Hier:

$a_1 \mathrel{\hat{=}}$ Steigung d. Tangentialebene in x-Richt.

$a_2 \mathrel{\hat{=}}$ Steigung d. Tangentialebene in y-Richtung

Zusammenhang Ableitung und Richtungsableitung

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\vec{f}: D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $\vec{x} \in D$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\vec{v}\| = 1$ und $\vec{f}'(\vec{x}) =: A$. Dann gilt

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{v}}(\vec{x}) = A\vec{v}.$$

5. VL Ana 2 Ing

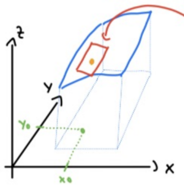
Partielle Ableitungen und totales Differential

Thema: Komponentenweise Differenzierbarkeit, Partielle Ableitung, partielle Differenzierbarkeit, Jacobi-Matrix, stetig partiell differenzierbar

Nachtrag VL 4

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen) diffbar in $\vec{x} \in D$ mit Ableitung $f'(\vec{x}) = A = [a_1 \ a_2] \in \mathbb{R}^{1,2}$

$$f(x,y) \approx \underbrace{f(x_0,y_0) + a_1(x-x_0) + a_2(y-y_0)}_{\text{Ebenengleichung}}$$



Tangentialebene (Ausschnitt) an f in (x_0, y_0)

Hier: $a_1 \hat{=}$ Steigung d. Tangentialebene in x-Richtung
$a_2 \hat{=}$ Steigung d. Tangentialebene in y-Richtung

Bemerkung

Sei $\vec{f}: D \to \mathbb{R}^m$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen) diffbar in $\vec{x} \in D$ mit $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)$ und $A = \vec{f}'(\vec{x}) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n}$

Dann ist a_{ij} die Steigung der i-ten Komponentenfunktion f_i in x_j-Richtung

1.7 Partielle Ableitungen und totales Differential

Komponentenweise Differenzierbarkeit

Sei $\vec{f}: D \to \mathbb{R}^m$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen) differenzierbar in $\vec{x} \in D$

Für $\vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$ und $\vec{f}'(x) = A$ mit

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

($A_i \in \mathbb{R}^{1,n}$ ist die i-te Zeile von A)

gilt:

$$\vec{f}(\vec{x} + \vec{\Delta x}) = \vec{f}(\vec{x}) + A \cdot \vec{\Delta x} + \vec{R}(\vec{x} + \vec{\Delta x})$$

d.h.

$$\begin{bmatrix} f_1(\vec{x} + \vec{\Delta x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x} + \vec{\Delta x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 \cdot \vec{\Delta x} \\ \vdots \\ A_m \cdot \vec{\Delta x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1(\vec{x} + \vec{\Delta x}) \\ \vdots \\ R_m(\vec{x} + \vec{\Delta x}) \end{bmatrix}$$

i-te Zeile: $f_i(\vec{x} + \vec{\Delta x}) = f_i(\vec{x}) + A_i \cdot \vec{\Delta x} + R_i(\vec{x} + \vec{\Delta x})$

Aus der komponentenweisen Konvergenz folgt für den Fehlerterm

$$\lim_{\vec{\Delta x} \to \vec{0}} \frac{\vec{R}(\vec{x} + \vec{\Delta x})}{\|\vec{\Delta x}\|} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\vec{\Delta x} \to \vec{0}} \frac{R_i(\vec{x} + \vec{\Delta x})}{\|\vec{\Delta x}\|} = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, m$$

Somit gilt:

$\vec{f}$ ist diffbar in $\vec{x}$ mit $\vec{f}'(\vec{x}) = A \in \mathbb{R}^{m,n}$

$\Leftrightarrow$ f_i ist diffbar in $\vec{x}$ mit $f_i'(\vec{x}) = A_i \in \mathbb{R}^{1,n}$ mit $i = 1, \dots, m$ wobei A_i die i-te Zeile von A ist.

Komponentenweise Differenzierbarkeit

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m): D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $\vec{x} \in D$. Die Abbildung $\vec{f}$ ist genau dann differenzierbar in $\vec{x}$ mit Ableitung $\vec{f}'(\vec{x}) = A \in \mathbb{R}^{m,n}$, wenn f_i differenzierbar in $\vec{x}$ mit Ableitung $f_i'(\vec{x}) = A_i \in \mathbb{R}^{1,n}$ für $i = 1, \dots, m$ ist, wobei A_i die i-te Zeile von A ist.

Folie 50

Beispiel

$$\vec{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto \begin{bmatrix} e^x - x \\ x^5 - x^2 \\ \cos(x) \end{bmatrix}$$

Dann sind

$f_1(x) = e^x - x$
$f_2(x) = x^5 - x^2$
$f_3(x) = \cos(x)$

diffbar. Also ist auch $\vec{f}$ diffbar mit

$$\vec{f}'(x) = \begin{bmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \\ f_3'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x - 1 \\ 5x^4 - 2x \\ -\sin(x) \end{bmatrix}$$

Wiederholung VL 4: Definition (Richtungsableitung)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\vec{f}: D \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung und $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\vec{v}\| = 1$. Existiert für $\vec{x} \in D$ der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{\vec{f}(\vec{x} + h \cdot \vec{v}) - \vec{f}(\vec{x})}{h} =: \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{v}}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m,$$

so heißt $\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{v}}(\vec{x})$ **Richtungsableitung von $\vec{f}$ in $\vec{x}$ in Richtung $\vec{v}$**.

Folie 51

Beispiel

Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 \cdot y^2$

Dann ist f diffbar (Übung) mit

$$f'(\vec{x}) = A = [a_1 \ a_2] \in \mathbb{R}^{1,2}$$

wobei gilt

a_1 ist die Steigung von f in x-Richtung
a_2 ist die Steigung von f in y-Richtung

Erinnerung: Steigung in x-Richtung ist die Richtungsableitung in Richtung $\vec{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, analog in y-Richtung für $\vec{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Richtungsableitung in x-Richtung

Sei $\vec{v} = \vec{e_1} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

Dann gilt

$$a_1 = [a_1 \;\; a_2]\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = A\cdot\vec{e_1} = f'(\vec{x})\cdot\vec{e_1} \overset{\text{VL4 Folie 48}}{=} \frac{\partial f}{\partial \vec{e_1}}(\vec{x})$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{x}+h\vec{e_1})-f(\vec{x})}{h} \qquad \vec{x}=(x,y)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

Idee: Halte $y\in\mathbb{R}$ fest und betrachte die Funktion $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$$g(x) = f(x,y) = x^2\cdot y^2 \quad (y \text{ fest})$$

$$\Rightarrow g'(x) = 2xy^2$$

$$a_1 = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= g'(x) = 2xy^2$$

Richtungsableitung in y-Richtung

Sei $\vec{v} = \vec{e_2} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow a_2 = [a_1 \;\; a_2]\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = A\cdot\vec{e_2} = f'(\vec{x})\,\vec{e_2} = \frac{\partial f}{\partial \vec{e_2}}(\vec{x})$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{x}+h\vec{e_2})-f(\vec{x})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

Definiere für $x\in\mathbb{R}$ fest
$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, mit $g(y) = f(x,y) = x^2y^2$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(y+h)-g(y)}{h} = g'(y) = 2x^2y$$

Dann gilt $f'(\vec{x}) = [a_1 \;\; a_2] = [2xy^2 \;\; 2x^2y]$

Definition (partiell differenzierbar, partielle Ableitung)

Seien $D\subseteq\mathbb{R}^n$ offen und $\vec{f}: D\to\mathbb{R}^m$.

(1) Existiert in $\vec{x}\in D$ die Richtungsableitung von f in Richtung des j-ten Standardbasisvektors $e_j\in\mathbb{R}^n$, so heißt $\vec{f}$ **partiell in $\vec{x}$ nach x_j differenzierbar**. In diesem Fall heißt

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial x_j}(\vec{x}) := \frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{e_j}}(\vec{x}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{x}+h\vec{e_j})-f(\vec{x})}{h} \in\mathbb{R}^m$$

j-te partielle Ableitung von $\vec{f}$ in $\vec{x}$.

(2) $\vec{f}$ heißt **partiell nach x_j differenzierbar**, falls $\vec{f}$ in allen $\vec{x}\in D$ partiell differenzierbar nach x_j ist. In diesem Fall heißt die Abbildung $\frac{\partial\vec{f}}{\partial x_j}: D\to\mathbb{R}^m$ die **j-te partielle Ableitung von $\vec{f}$**.

(3) $\vec{f}$ heißt **partiell differenzierbar in $\vec{x}\in D$**, falls $\vec{f}$ nach allen x_j, $j=1,\dots,n$ partiell differenzierbar in $\vec{x}$ ist.

(4) $\vec{f}$ heißt **partiell differenzierbar**, falls $\vec{f}$ in allen $\vec{x}\in D$ partiell differenzierbar ist.

Bemerkung

Mit $\vec{f} = \begin{bmatrix}f_1\\\vdots\\f_m\end{bmatrix}$ ist

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial x_j}(\vec{x}) = \begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\vec{x})\\\vdots\\\frac{\partial f_m}{\partial x_j}(\vec{x})\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^m,\; j=1,\dots,n$$

$$\Rightarrow \vec{f}'(\vec{x}) = \left[\frac{\partial\vec{f}}{\partial x_1}(\vec{x}) \;\cdots\; \frac{\partial\vec{f}}{\partial x_n}(\vec{x})\right]$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x})\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x})\end{bmatrix}}_{\text{Jacobi-Matrix (auch Ableitungsmatrix oder Funktionalmatrix)}}\in\mathbb{R}^{m,n}$$

Interpretation:

$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x})$ ist die Steigung von f_i in $\vec{x}$ in Richtung x_j

↳ Eintrag an Stelle (i,j)

Definition (Jacobi-Matrix, Ableitungsmatrix)

Seien $D\subseteq\mathbb{R}^n$ offen und $\vec{f} = (f_1,\dots,f_m): D\to\mathbb{R}^m$ differenzierbar in $\vec{x}\in D$ mit $\vec{f}'(\vec{x}) = A\in\mathbb{R}^{m,n}$. Dann ist

$$\vec{f}'(\vec{x}) = A = \begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x})\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x})\end{bmatrix}$$

die **Jacobi-Matrix** (auch **Ableitungsmatrix**) von $\vec{f}$ im Punkt $\vec{x}$, wobei $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x})$ die Steigung von f_i im Punkt $\vec{x}$ in Richtung x_j ist.

Folie 53

$\vec{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$,

$$(x,y)\longmapsto\begin{bmatrix}x^2+y^2\\e^{x-y}\\\cos(x)\,y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f_1(x,y)\\f_2(x,y)\\f_3(x,y)\end{bmatrix}$$

Partielle Ableitungen

$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 2x$

$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = e^{x-y}$

$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) = -\sin(x)\,y$

y jeweils als Konstante betrachten

$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 2y$

$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = -e^{x-y}$ $\qquad \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) = \cos(x)$

x jeweils als Konstante betrachten

Da $\vec f$ diffbar ist (Übung!) gilt

$$\vec f'(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \vec f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \\ -\sin(x)\, y & \cos(x) \end{bmatrix}$$

Definition (stetig partiell differenzierbar)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\vec f\colon D \to \mathbb{R}^m$. Dann heißt $\vec f$ **stetig partiell differenzierbar**, falls $\vec f$ partiell differenzierbar ist und die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_j}\colon D \to \mathbb{R}^m$, $j = 1, \ldots, n$, stetig sind.

Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\vec f\colon D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $\vec x_0 \in D$. Dann ist $\vec f$ stetig in $\vec x_0$.

Differenzierbarkeit impliziert partielle Differenzierbarkeit

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\vec f\colon D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $\vec x_0 \in D$. Dann ist $\vec f$ partiell differenzierbar in $\vec x_0$.

Stetig partielle Differenzierbarkeit impliziert Differenzierbarkeit

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\vec f\colon D \to \mathbb{R}^m$ stetig partiell differenzierbar in $\vec x_0 \in D$. Dann ist $\vec f$ differenzierbar in $\vec x_0$.

Folie 54

Beweis: Diffbar $\Rightarrow$ Stetigkeit

z.B.: $\lim_{\vec x \to \vec x_0} \vec f(\vec x) = \vec f(\vec x_0)$

Da f diffbar in $\vec x_0 \in D$ ist, gilt für alle $\vec x \in D$

$$\vec f(\vec x) = \vec f(\vec x_0) + \underbrace{\overset{=\vec f'(\vec x_0)}{A}\,\underbrace{(\vec x - \vec x_0)}_{\to \vec 0 \text{ für } \vec x \to \vec x_0}}_{\to 0 \text{ für } \vec x \to \vec x_0} + \underbrace{\vec R(\vec x)}_{\to 0 \text{ für } \vec x \to \vec x_0}$$

mit $\lim_{\vec x \to \vec x_0} \frac{\vec R(\vec x)}{\|\vec x - \vec x_0\|} = 0$

$\Rightarrow \lim_{\vec x \to \vec x_0} \vec f(\vec x) = \vec f(\vec x_0)$, also ist $\vec f$ stetig in $\vec x_0 \in D$. □

Zusammenfassung: Sei $\vec f\colon D \to \mathbb{R}^m$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\vec f \text{ ist stetig partiell differenzierbar in } \vec x_0 \in D.} \arrow[d, shift right] \\
 & \boxed{\vec f \text{ ist differenzierbar in } \vec x_0 \in D.} \arrow[u, shift right, "/" marking] \arrow[dl, shift right] \arrow[dr, shift right] \\
\boxed{\text{Alle Richtungsableitungen von } \vec f \text{ in } \vec x_0 \in D \text{ existieren.}} \arrow[ur, shift right, "/" marking] \arrow[dr, shift right] & & \boxed{\vec f \text{ ist stetig in } \vec x_0 \in D.} \arrow[ul, shift right, "/" marking] \arrow[dl, shift right, "/" marking] \\
 & \boxed{\vec f \text{ ist partiell differenzierbar in } \vec x_0 \in D.} \arrow[ul, shift right, "/" marking] \arrow[ur, shift right, "/" marking] &
\end{tikzcd}$$

Überprüfen der Differenzierbarkeit von $\vec f\colon D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen

Bestimme alle partiellen Ableitungen

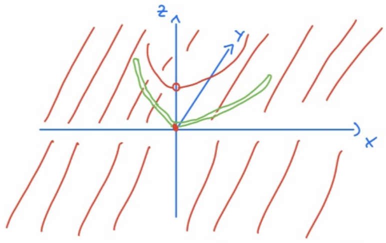
(i) Alle partiellen Ableitungen sind stetig: $\vec f$ differenzierbar
(ii) Eine partielle Ableitung existiert nicht: $\vec f$ nicht differenzierbar
(iii) Alle partiellen Ableitungen existieren, aber nicht alle sind stetig: Beides möglich, Definition anwenden

Differenzierbarkeit impliziert partielle Differenzierbarkeit

Die Umkehrung gilt nicht!

Gegenbeispiel:

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } y = x^2 \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Es gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\overset{=0}{f(0+h,0)} - \overset{=0}{f(0,0)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\overset{=0}{f(0,0+h)} - \overset{=0}{f(0,0)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$\Rightarrow f$ ist partiell differenzierbar in $\vec x = (0,0)$

(Man kann zeigen: Alle Richtungsableitungen in $(0,0)$ existieren)

Aber: f ist nicht stetig in $(0,0)$ (also auch nicht differenzierbar), denn:

Für $\vec x_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right)$ gilt $\lim_{k \to \infty} \vec x_k = \vec 0$, aber

$$\lim_{k \to \infty} f(\vec x_k) = \lim_{k \to \infty} \underbrace{f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right)}_{=1} = \lim_{k \to \infty} 1 = 1 \neq 0 = f(\vec 0)$$

6. VL Ana 2 Ing

Der Gradient und Anwendungsbeispiele für die Ableitung

斜度;梯度

Thema: Nachtrag VL 5, Gradient, Eigenschaften des Gradienten, Anwendungsbeispiel

Definition (stetig partiell differenzierbar)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{f}\colon D \to \mathbb{R}^m$. Dann heißt $\vec{f}$ **stetig partiell differenzierbar**, falls $\vec{f}$ partiell differenzierbar ist und die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_j}\colon D \to \mathbb{R}^m$, $j = 1, \dots, n$, stetig sind.

Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{f}\colon D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $\vec{x}_0 \in D$. Dann ist $\vec{f}$ stetig in $\vec{x}_0$.

Differenzierbarkeit impliziert partielle Differenzierbarkeit

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{f}\colon D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $\vec{x}_0 \in D$. Dann ist $\vec{f}$ partiell differenzierbar in $\vec{x}_0$.

Stetig partielle Differenzierbarkeit impliziert Differenzierbarkeit

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{f}\colon D \to \mathbb{R}^m$ stetig partiell differenzierbar in $\vec{x}_0 \in D$. Dann ist $\vec{f}$ differenzierbar in $\vec{x}_0$.

Stetig partielle Differenzierbarkeit

$\Longrightarrow$ Differenzierbarkeit

Beispiel: $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto \begin{bmatrix} \sin(x)\cos(y) \\ e^{x \cdot y} \end{bmatrix}$

Partielle Ableitung:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) &= \cos(x)\cos(y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) &= y\, e^{xy} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) &= -\sin(x)\sin(y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) &= x\, e^{xy} \end{aligned}\right\} \text{ sind stetig}$$

$\Rightarrow \vec{f}$ ist stetig partiell diffbar.

also auch diffbar mit:

$$\vec{f}'(x,y) = \begin{bmatrix} \cos x \cos y & -\sin x \sin y \\ y e^{xy} & x e^{xy} \end{bmatrix}$$

Wiederholung

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $\vec{x} \in D$. Dann gilt

$$f'(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1,n}.$$

Definition (Gradient)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $\vec{x} \in D$. Dann heißt der Vektor

$$\operatorname{grad}_{\vec{x}} f := \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{bmatrix}$$

der **Gradient von f in $\vec{x}$**.

Bemerkung

Es gilt $\operatorname{grad}_{\vec{x}} f = f'(\vec{x})^T$.

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto e^{xz} + x^2 y$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad}_{\vec{x}} f = \begin{bmatrix} z e^{xz} + 2xy \\ x^2 \\ x e^{xz} \end{bmatrix}$$

und

$$f'(\vec{x}) = \begin{bmatrix} z e^{xz} + 2xy & x^2 & x e^{xz} \end{bmatrix}$$

Bedeutung des Gradienten

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen) differenzierbar in $\vec{x} \in D$.

Dann gilt: $f(\vec{x} + \vec{\Delta x})$

$$\begin{aligned} &= f(\vec{x}) + f'(\vec{x})\vec{\Delta x} + R(\vec{x} + \vec{\Delta x}) \\ &\approx f(\vec{x}) + \underbrace{f'(\vec{x})}_{\in \mathbb{R}^{1,n}}\underbrace{\vec{\Delta x}}_{\in \mathbb{R}^n} \quad \text{für } \|\vec{\Delta x}\| \text{ klein} \\ &= f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) \cdot \Delta x_i \quad \text{mit } \vec{\Delta x} = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} \\ &= f(\vec{x}) + \left\langle \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{bmatrix}}_{= \operatorname{grad}_{\vec{x}} f}, \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}}_{= \vec{\Delta x}} \right\rangle \\ &= f(\vec{x}) + \langle \operatorname{grad}_{\vec{x}} f, \vec{\Delta x} \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta f := f(\vec{x} + \vec{\Delta x}) - f(\vec{x}) \approx \langle \operatorname{grad}_{\vec{x}} f, \vec{\Delta x} \rangle$$

↳ Änderung d. Funktionswerte

Aus VL 1 bekannt

$$\langle \text{grad}_{\vec{x}} f, \Delta\vec{x} \rangle = \|\text{grad}_{\vec{x}} f\| \cdot \|\Delta\vec{x}\| \cdot \cos(\alpha)$$

wobei α der Winkel zwischen $\text{grad}_{\vec{x}} f$ und $\Delta\vec{x}$

Dann gilt:

$$\Delta f \approx \|\text{grad}_{\vec{x}} f\| \, \|\Delta\vec{x}\| \, \cos(\alpha)$$

1. Fall: $\alpha = 0$ also $\cos(0) = 1$

Dann ist Δf positiv und wird am größten.

Also zeigt $\Delta\vec{x}$ in Richtung $\text{grad}_{\vec{x}} f$

2. Fall: $\alpha = \pi$ also $\cos(\pi) = -1$

Dann ist Δf negativ und wird am kleinsten.

Also zeigt $\Delta\vec{x}$ in Richtung $-\text{grad}_{\vec{x}} f$.

3. Fall: $\alpha = \frac{\pi}{2}$, also $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

Dann ist $\Delta f \approx 0$. Also sind $\text{grad}_{\vec{x}} f$ und $\Delta\vec{x}$ orthogonal zueinander.

Insbesondere gilt $\Delta f = 0$ in jeder Niveaumenge

$$N_c := \{\vec{x} \mid f(\vec{x}) = c\}, \; c \in \mathbb{R}$$

Eigenschaften des Gradienten

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $\vec{x} \in D$ und $\text{grad}_{\vec{x}} f \neq \vec{0}$. Dann gilt:

(1) $\text{grad}_{\vec{x}} f$ zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs von f.

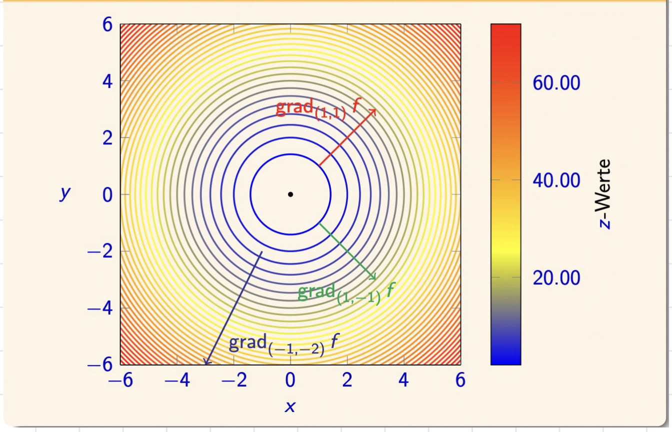
(2) $-\text{grad}_{\vec{x}} f$ zeigt in Richtung des stärksten Abfalls von f.

(3) Die Länge des Gradienten ist der stärkste Anstieg.

(4) $\text{grad}_{\vec{x}} f$ ist senkrecht zu den Niveaumengen von f.

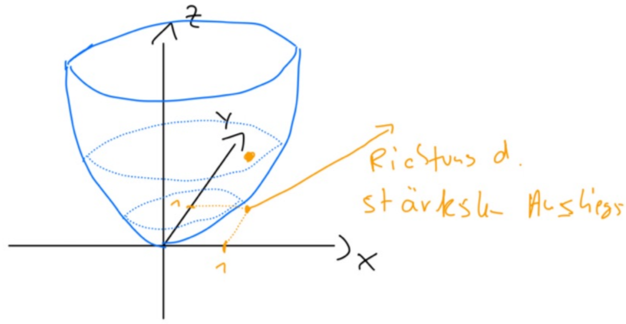
(5) Es gilt: $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = f'(\vec{x})\vec{v} = \langle \text{grad}_{\vec{x}} f, \vec{v} \rangle$ für alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\vec{v}\| = 1$.

$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; (x,y) \mapsto x^2 + y^2$



$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; (x,y) \mapsto x^2 + y^2$

Graph von f



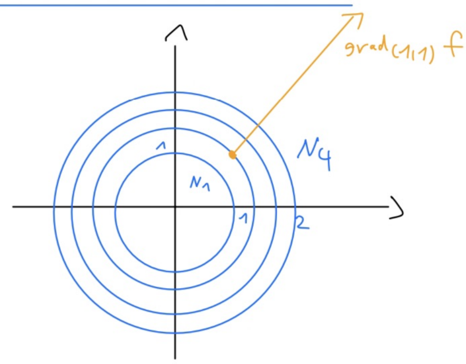
Es gilt:

$$\text{grad}_{\vec{x}} f = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

z.B für $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ist $\text{grad}_{(1,1)} f = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Niveaumenge von f

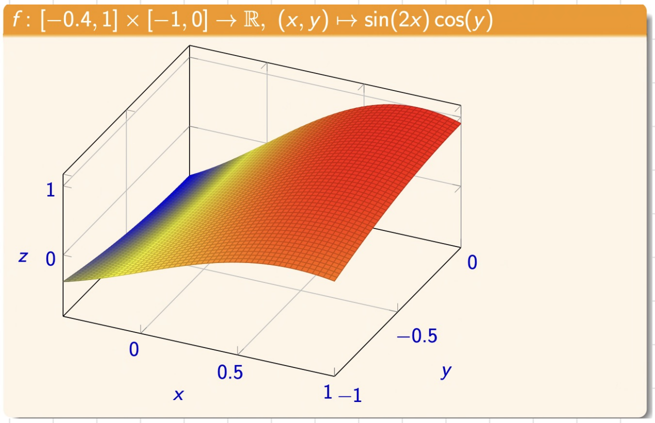


Anwendungsbeispiel

ges: Dach eines Hauses als Graph der Funktion

$$f\colon [-0.4, 1] \times [-1, 0] \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto \sin(2x)\cos(y)$$



Annahme: Am Rand bei $x=1$ verläuft eine Mauer?

1. Frage: Bildet sich eine Rinne zwischen Dach und Mauer

2. Frage: Bildet sich sogar eine Mulde, in der sich Regenwasser ansammeln kann?

Modell 1: Dach als Funktionsgraph

Es gilt:

$$\operatorname{grad}_{\vec{x}} f = \begin{bmatrix} 2\cos(2x)\cdot\cos(y) \\ -\sin(2x)\sin(y) \end{bmatrix}$$

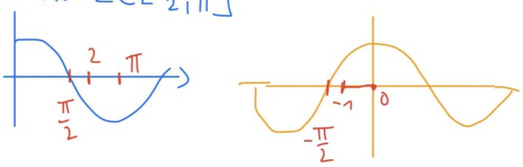
Für Punkte $\vec{x} = (1, y)$ ($\hat{=}$ Mauerpunkte an $x=1$) gilt

$$\operatorname{grad}_{\vec{x}} f = \begin{bmatrix} 2\cos(2)\cos(y) \\ -\sin(2)\sin(y) \end{bmatrix}$$

Dann gilt für die 1. Komponente

$$2\underbrace{\cos(2)}_{<0}\underbrace{\cos(y)}_{>0} < 0 \quad \text{für } y \in [-1,0]$$

da $2 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

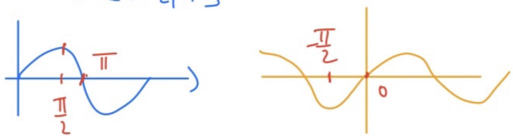


Somit zeigt der Gradient „nach links" ($\hat{=}$ Richtung des stärksten Anstiegs), d.h. das Dach fällt zur Mauer hin, also entsteht eine Rinne

Für die 2. Komponente gilt

$$-\underbrace{\sin(2)}_{>0}\cdot\underbrace{\sin(y)}_{\leq 0} \geq 0 \quad \text{für } y \in [-1,0]$$

da $2 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$



Also zeigt der Gradient „nach hinten", damit fällt das Dach „nach vorne" ab. Es bildet sich keine Mulde!

Modell 2: Dach als Niveaumenge

Betrachte die Funktion

$$g(x,y,z) = z - f(x,y)$$

Dann ist das Dach gegeben durch die Fläche

$$z = f(x,y) \quad \text{bzw.} \quad g(x,y,z) = 0$$

Also ist unser Dach die Niveaumenge N_0 von g zum Niveau 0:

$$N_0 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; g(x,y,z)=0,\ x \in [-0.4,1],\ y \in [-1,0] \right\}$$

Es gilt

$$\operatorname{grad}_{\vec{x}} g = \begin{bmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2\cos(2x)\cos(y) \\ \sin(2x)\sin(y) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wissen: $\operatorname{grad}_{\vec{x}}\, g$ ist senkrecht zur Niveaumenge N_0

Für Mauerpunkt $\vec{x} = (1, y)$ (also $x = 1$) gilt dann

$$\operatorname{grad}_{\vec{x}}\, g = \begin{bmatrix} -2\cos(2)\cos(y) \\ \sin(2)\sin(y) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Für $y \in [-1, 0]$ gilt:

$$-2 \underbrace{\cos(2)}_{<0} \underbrace{\cos(y)}_{>0} > 0$$

$\operatorname{grad}_{\vec{x}}\, g$ ist „nach rechts“ geneigt, also ist das Dach zur Mauer hin geneigt

$\Rightarrow$ Es bildet sich eine Rinne!

$$\underbrace{\sin(2)}_{>0} \underbrace{\sin(y)}_{\leq 0} \leq 0$$

$\operatorname{grad}_{\vec{x}}\, g$ ist „nach vorn“ geneigt, also ist das Dach auch nach vorn geneigt

$\Rightarrow$ Es bildet sich keine Mulde

7. VL Ana 2 Ing

Rechenregeln für die Differentiation

Thema: Summe, Vielfache, Produkte und Kompositionen differenzierbarer Funktionen, Linearität der Ableitung, Produktregeln für partielle Ableitungen, Rechenregeln für den Gradienten, Kettenregel mit Ableitungsmatrix, Kettenregel für partielle Ableitung

Analog zu Analysis I

Summen, Vielfache, Produkte oder Kompositionen von differenzierbaren Funktionen sind wieder differenzierbar.

Linearität der Ableitung

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\vec{f}, \vec{g} \colon D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $\vec{x} \in D$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $\vec{f} + \vec{g} \colon D \to \mathbb{R}^m$ und $\lambda \vec{f} \colon D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $\vec{x} \in D$ und es gilt:

(1) **Additivität:** $(\vec{f} + \vec{g})'(\vec{x}) = \vec{f}'(\vec{x}) + \vec{g}'(\vec{x})$

(2) **Skalarmultiplikation:** $(\lambda \vec{f})'(\vec{x}) = \lambda \vec{f}'(\vec{x})$

Alle auftretenden Ableitungsmatrizen haben das Format $m \times n$.

Produktregeln für partielle Ableitungen

Die Formeln für die Differentiation der Produkte in Matrixschreibweise ist etwas kompliziert. Wir beschränken uns daher auf den Fall von partiellen Ableitungen.

(1) **Produkt mit reeller Funktion (auch Skalarmultiplikation)**
Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \colon D \to \mathbb{R}$, $\vec{g} \colon D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $\vec{x} \in D$. Dann gilt für $f \cdot \vec{g} \colon D \to \mathbb{R}^m$ und $j = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial (f \cdot \vec{g})}{\partial x_j}(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x}) + f(\vec{x}) \cdot \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_j}(\vec{x})$$

(2) **Skalarprodukt**
Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{f}, \vec{g} \colon D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $\vec{x} \in D$. Dann gilt für $\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle \colon D \to \mathbb{R}$ und $j = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial \langle \vec{f}, \vec{g} \rangle}{\partial x_j}(\vec{x}) = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j}(\vec{x}), \vec{g}(\vec{x}) \right\rangle + \left\langle \vec{f}(\vec{x}), \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_j}(\vec{x}) \right\rangle$$

1.10 Rechenregeln für die Differentiation

Folie 63

zu (1)

$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x,y) \mapsto f(x,y) = e^{xy}$

$\vec{g} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ (x,y) \mapsto \begin{bmatrix} x+2y \\ xy \end{bmatrix}$

$\Rightarrow f \cdot \vec{g} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ (x,y) \mapsto f(x,y) \cdot g(x,y) = e^{xy} \begin{bmatrix} x+2y \\ xy \end{bmatrix}$

und

$$\frac{\partial (f \cdot \vec{g})}{\partial x}(x,y) = y e^{xy} \begin{bmatrix} x+2y \\ xy \end{bmatrix} + e^{xy} \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix} = e^{xy} \begin{bmatrix} xy + 2y^2 + 1 \\ xy^2 + y \end{bmatrix}$$

zu (2)

Beweis: Ansonsten lasse ich weg!

$$\frac{\partial \langle \vec{f}, \vec{g} \rangle}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(f_1 g_1 + f_2 g_2 + \dots + f_m g_m\right)$$

Linearität d. Ableitung + (1) auf Folie

$$= \frac{\partial f_1}{\partial x_j} g_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_j} g_2 + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_j} g_m + f_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_j} + f_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_j} + \dots + f_m \frac{\partial g_m}{\partial x_j}$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_j} \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j}, \vec{g} \right\rangle + \left\langle \vec{f}, \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_j} \right\rangle \qquad \square$$

Beispiel

$\vec{f}, \vec{g} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \ \vec{x} \mapsto \vec{x}$

$$\Rightarrow \frac{\partial \langle \vec{f}, \vec{g} \rangle}{\partial x_j}(\vec{x}) \overset{(2)}{=} \Big\langle \underbrace{\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j}(\vec{x})}_{= \frac{\partial}{\partial x_j} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{e}_j}, \underbrace{\vec{g}(\vec{x})}_{= \vec{x}} \Big\rangle + \Big\langle \underbrace{\vec{f}(\vec{x})}_{= \vec{x}}, \underbrace{\frac{\partial \vec{g}}{\partial x_j}(\vec{x})}_{= \vec{e}_j} \Big\rangle$$

$$= \langle \vec{e}_j, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{e}_j \rangle = x_j + x_j = 2 x_j$$

Das stimmt, denn $\langle \vec{f}(\vec{x}), \vec{g}(\vec{x}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = x_1^2 + \dots + x_n^2$

$$\Rightarrow \frac{\partial \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}{\partial x_j} = 2 x_j$$

Produktregeln für partielle Ableitungen (Fortsetzung)

(3) **Vektorprodukt (oder Kreuzprodukt)**
Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{f}, \vec{g} \colon D \to \mathbb{R}^3$ differenzierbar in $\vec{x} \in D$. Dann gilt $\vec{f} \times \vec{g} \colon D \to \mathbb{R}^3$ mit (vgl. VL 3)

$$(\vec{f} \times \vec{g})(\vec{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ f_3(\vec{x}) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} g_1(\vec{x}) \\ g_2(\vec{x}) \\ g_3(\vec{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2(\vec{x}) g_3(\vec{x}) - f_3(\vec{x}) g_2(\vec{x}) \\ f_3(\vec{x}) g_1(\vec{x}) - f_1(\vec{x}) g_3(\vec{x}) \\ f_1(\vec{x}) g_2(\vec{x}) - f_2(\vec{x}) g_1(\vec{x}) \end{bmatrix}$$

und für $j = 1, \dots, n$ gilt

$$\frac{\partial (\vec{f} \times \vec{g})}{\partial x_j}(\vec{x}) = \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x}) + \vec{f}(\vec{x}) \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_j}(\vec{x}).$$

Folie 64

Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$

Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}$

Es gilt:

(i) $\vec{x}\times\vec{y}$ ist orthogonal zu $\vec{x}$ und auch zu $\vec{y}$:

$$\langle \vec{x}, \vec{x}\times\vec{y}\rangle = x_1x_2y_3 - x_1x_3y_2 + x_2x_3y_1 - x_2x_1y_3$$
$$+ x_3x_1y_2 - x_3x_2y_1$$
$$= 0 = \langle \vec{y}, \vec{x}\times\vec{y}\rangle$$

Bsp:

$$\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1\\4\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5-12\\-3-10\\8-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-17\\-13\\7\end{bmatrix}$$

Es gilt

$$\left\langle \begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-17\\-13\\7\end{bmatrix}\right\rangle = -34+13+21 = 0$$

$$\left\langle \begin{bmatrix}-1\\4\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-17\\-13\\7\end{bmatrix}\right\rangle = 17-52+35 = 0$$

(ii) $\vec{x}, \vec{y}, \vec{x}\times\vec{y}$ bilden ein Rechtssystem (Rechte-Hand-Regel)

$\vec{x} \mathrel{\hat=}$ Daumen, $\vec{y} \mathrel{\hat=}$ Zeigefinger, $\vec{x}\times\vec{y} \mathrel{\hat=}$ Mittelfinger

Bsp:

$$\vec{e}_1\times\vec{e}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \vec{e}_3$$

(iii) $\|\vec{x}\times\vec{y}\| = \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cdot\sin(\alpha)$

wobei α Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$

Rechenregeln für den Gradienten

(1) **Produkt**
Seien $D\subseteq\mathbb{R}^n$ offen und $f,g\colon D\to\mathbb{R}$ differenzierbar in $\vec{x}\in D$. Dann gilt für $f\cdot g\colon D\to\mathbb{R}$

$$\operatorname{grad}_{\vec{x}}(f\cdot g) = g(\vec{x})\cdot\operatorname{grad}_{\vec{x}} f + f(\vec{x})\cdot\operatorname{grad}_{\vec{x}} g$$

(2) **Komposition**
Seien $D\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, $g\colon D\to\mathbb{R}$ differenzierbar in $\vec{x}\in D$ und $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenzierbar in $g(\vec{x})$. Dann gilt für $f\circ g\colon D\to\mathbb{R}$

$$\operatorname{grad}_{\vec{x}}(f\circ g) = f'(g(\vec{x}))\cdot\operatorname{grad}_{\vec{x}} g.$$

Folie 65

zu (1):

Es gilt für $j=1,\dots,n$

$$\frac{\partial(f g)}{\partial x_j}(\vec{x}) \overset{\text{Produktregel f. part. Abl.}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x})\cdot g(\vec{x}) + f(\vec{x})\,\frac{\partial g}{\partial x_j}(\vec{x})$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial(f g)}{\partial x_1}(\vec{x})\\ \vdots\\ \frac{\partial(f g)}{\partial x_n}(\vec{x})\end{bmatrix}}_{=\operatorname{grad}_{\vec{x}}(f\cdot g)} = g(\vec{x})\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})\\ \vdots\\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\end{bmatrix}}_{=\operatorname{grad}_{\vec{x}} f} + f(\vec{x})\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial g}{\partial x_1}(\vec{x})\\ \vdots\\ \frac{\partial g}{\partial x_n}(\vec{x})\end{bmatrix}}_{=\operatorname{grad}_{\vec{x}} g} \quad \square$$

zu (2)

$$\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x_j}(\vec{x}) \overset{\text{Kettenregel Ana 1}}{=} f'(g(\vec{x}))\cdot\frac{\partial g}{\partial x_j}, \quad j=1,\dots,n$$

Rest wie in (1) $\square$

Beispiel

$g\colon\mathbb{R}^n\to\,]0,\infty[,\ \vec{x}\mapsto\langle\vec{x},\vec{x}\rangle$

$f\colon\,]0,\infty[\,\to\mathbb{R},\ t\mapsto\sqrt{t}$

$$\Rightarrow f\circ g\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ f(g(\vec{x})) = \sqrt{\langle\vec{x},\vec{x}\rangle} = \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$$

Es gilt:

$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ für $t>0$ und $\operatorname{grad}_{\vec{x}} g \overset{\text{siehe oben}}{=} 2\vec{x}$

$$\Rightarrow \operatorname{grad}_{\vec{x}}(f\circ g) = f'(g(\vec{x}))\cdot\operatorname{grad}_{\vec{x}} g$$
$$= \frac{1}{\cancel{2}\underbrace{\sqrt{\langle\vec{x},\vec{x}\rangle}}_{=\|\vec{x}\|}}\cdot\cancel{2}\vec{x} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \quad \text{für } \vec{x}\neq\vec{0}$$

Direkt ausrechnen:

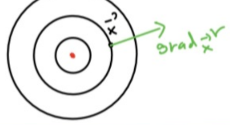
$r\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ r(\vec{x}) = \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x_j}(\vec{x}) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}}\cdot\cancel{2}x_j = \frac{x_j}{\|\vec{x}\|}$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad}_{\vec{x}} r = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \qquad \left\|\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right\| = \frac{1}{\|\vec{x}\|}\cdot\|\vec{x}\| = 1$$

Fazit: Der Gradient der Norm $\|\vec{x}\|$ ist der normierte Ortsvektor

Niveaulinien von r



$\|\operatorname{grad}_{\vec{x}} r\| = 1$

Kettenregel mit Ableitungsmatrix

Seien $D\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, $\vec{g}\colon D\to\mathbb{R}^m$, $\vec{f}\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$ differenzierbar. Dann gilt für $\|\Delta\vec{x}\|$ klein

$$\boxed{\vec{g}(\vec{x}+\Delta\vec{x}) \approx \vec{g}(\vec{x}) + \vec{g}\,'(\vec{x})\cdot\Delta\vec{x}}$$

und

$$(\vec{f}\circ\vec{g})(\vec{x}+\Delta\vec{x})$$
$$= \vec{f}(\vec{g}(\vec{x}+\Delta\vec{x}))$$
$$\approx \vec{f}\big(\underbrace{\vec{g}(\vec{x})}_{=:\vec{y}} + \underbrace{\vec{g}\,'(\vec{x})\cdot\Delta\vec{x}}_{=\Delta\vec{y}}\big)$$
$$= \vec{f}(\vec{y}+\Delta\vec{y})$$
$$\overset{\vec{f}\text{ ist diffbar}}{\approx} \vec{f}(\vec{y}) + \vec{f}\,'(\vec{y})\,\Delta\vec{y}$$
$$= \vec{f}(\vec{g}(\vec{x})) + \underbrace{\vec{f}\,'(\vec{g}(\vec{x}))\cdot\vec{g}\,'(\vec{x})}_{=(\vec{f}\circ\vec{g})'(\vec{x})}\cdot\Delta\vec{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\vec{f}\circ\vec{g})'(\vec{x}) = \vec{f}\,'(\vec{g}(\vec{x}))\cdot\vec{g}\,'(\vec{x})}$$

Kettenregel mit Ableitungsmatrix

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{g}: D \to \mathbb{R}^m$, $\vec{f}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ differenzierbar. Dann gilt für $\vec{f} \circ \vec{g}: D \to \mathbb{R}^p$ und $\vec{x} \in D$

$$(\vec{f} \circ \vec{g})'(\vec{x}) = \vec{f}'(\vec{g}(\vec{x})) \cdot \vec{g}'(\vec{x}),$$

wobei die Ableitungsmatrizen folgende Formate haben:

$$(\vec{f} \circ \vec{g})'(\vec{x}) : p \times n$$
$$\vec{f}'(\vec{g}(\vec{x})) : p \times m$$
$$\vec{g}'(\vec{x}) : m \times n$$

Spezialfall

Für $n = m = p = 1$ erhält man die Kettenregel aus Analysis I.

Folie 66

Beispiel

$$\vec{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) \mapsto \begin{bmatrix} e^{xy} \\ x^2+yz \end{bmatrix}$$

$$\vec{g}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u,v) \mapsto \begin{bmatrix} \cos(v) \\ u^2 \\ -v^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{f}'(x,y,z) = \begin{bmatrix} y e^{xy} & x e^{xy} & 0 \\ 2x & z & y \end{bmatrix}$$

$$\vec{g}'(u,v) = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(v) \\ 2u & 0 \\ 0 & -2v \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (\vec{f} \circ \vec{g})(u,v) \overset{\text{Kettenregel}}{=} \vec{f}'(\vec{g}(u,v)) \cdot \vec{g}'(u,v)$$

$$= \begin{bmatrix} u^2 e^{\cos(v) u^2} & \cos(v) e^{\cos(v) u^2} & 0 \\ 2\cos(v) & -v^2 & u^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\sin(v) \\ 2u & 0 \\ 0 & -2v \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2u \cos(v) e^{\cos(v) u^2} & -\sin(v) u^2 e^{\cos(v) u^2} \\ -2uv^2 & -2\sin(v)\cos(v) - 2v u^2 \end{bmatrix}$$

oder:

Direkt ausrechnen

$$\vec{f} \circ \vec{g}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{f}(\vec{g}(u,v)) = \begin{bmatrix} e^{\cos(v) u^2} \\ \cos^2(v) - u^2 v^2 \end{bmatrix}$$

Kettenregel für partielle Ableitungen

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{g}: D \to \mathbb{R}^m$, $\vec{f}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ differenzierbar. Weiterhin seien $x_1, \ldots, x_n$ die Variablen im $\mathbb{R}^n$ und $y_1, \ldots y_m$ die Variablen im $\mathbb{R}^m$. Dann gilt für $\vec{f} \circ \vec{g}: D \to \mathbb{R}^p$ und $\vec{x} \in D$

$$\frac{\partial (\vec{f} \circ \vec{g})_i}{\partial x_j}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(\vec{g}(\vec{x})) \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(\vec{x}),$$

für $i = 1, \ldots, p$ und $j = 1, \ldots, n$.

1. Kurzschreibweise: Argumente weglassen

$$\frac{\partial (\vec{f} \circ \vec{g})_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_j},$$

2. Kurzschreibweise: Argumente weglassen und schreibe $y_1 = g_1(x_1, \ldots, x_n), y_2 = g_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m = g_m(x_1, \ldots, x_n)$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial y_m}{\partial x_j},$$

8. VL Ana 2 Ing

Koordinatensystem

Thema: Nachtrag VL 7, Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$, Zylinder- und Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$, Umrechnung der jeweiligen partiellen Ableitung in kartesische Form (und umgekehrt)

Nachtrag VL 7
Kettenregel für partielle Ableitungen

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\vec{g}: D \to \mathbb{R}^m$, $\vec{f}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ diffbar, $x_1, \dots, x_n$ die Variablen in $\mathbb{R}^n$, $y_1, \dots, y_m$ die Variablen in $\mathbb{R}^m$.

Dann gilt nach der Kettenregel für $\vec{x} \in D$

$$(\vec{f} \circ \vec{g})'(\vec{x}) = \vec{f}'(\vec{g}(\vec{x})) \cdot \vec{g}'(\vec{x})$$

d.h.

$$(\vec{f} \circ \vec{g})'(\vec{x}) = \begin{array}{c|c} & \\ i & \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\vec{g}(\vec{x})) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(\vec{g}(\vec{x})) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1}(\vec{g}(\vec{x})) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial y_m}(\vec{g}(\vec{x})) \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} j \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{bmatrix} \end{array}$$

Betrachte den Eintrag an der Stelle (i,j) von $(\vec{f} \circ \vec{g})'(\vec{x})$:

$$\frac{\partial (\vec{f} \circ \vec{g})_i}{\partial x_j}(\vec{x})$$

$$= \frac{\partial f_i}{\partial y_1}(\vec{g}(\vec{x})) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_j}(\vec{x})$$

$$+ \dots + \frac{\partial f_i}{\partial y_m}(\vec{g}(\vec{x})) \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x_j}(\vec{x})$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(\vec{g}(\vec{x})) \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(\vec{x})$$

1. Kurzschreibweise: Argumente weglassen

$$\frac{\partial (\vec{f} \circ \vec{g})_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_j}$$

2. Kurzschreibweise:

Argumente weglassen und nutze

$y_1 = g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m = g_m(x_1, \dots, x_n)$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial (\vec{f} \circ \vec{g})_i}{\partial x_j}}_{=: \frac{\partial f_i}{\partial x_j}} = \frac{\partial f_i}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial y_m}{\partial x_j}$$

(weitere Abkürzung)

Kettenregel für partielle Ableitungen

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{g}: D \to \mathbb{R}^m$, $\vec{f}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ differenzierbar. Weiterhin seien $x_1, \dots, x_n$ die Variablen im $\mathbb{R}^n$ und $y_1, \dots y_m$ die Variablen im $\mathbb{R}^m$. Dann gilt für $\vec{f} \circ \vec{g}: D \to \mathbb{R}^p$ und $\vec{x} \in D$

$$\frac{\partial (\vec{f} \circ \vec{g})_i}{\partial x_j}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(\vec{g}(\vec{x})) \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(\vec{x}),$$

für $i = 1, \dots, p$ und $j = 1, \dots, n$.

1. Kurzschreibweise: Argumente weglassen

$$\frac{\partial (\vec{f} \circ \vec{g})_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_j},$$

2. Kurzschreibweise: Argumente weglassen und schreibe
$y_1 = g_1(x_1, \dots, x_n), y_2 = g_2(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m = g_m(x_1, \dots, x_n)$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial y_m}{\partial x_j},$$

Beispiel

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\vec{g}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = xy + y^2 z$

$$\vec{g}(u,v) = \begin{bmatrix} uv \\ e^{u+v} \\ u-v \end{bmatrix}$$

$x \,\hat{=}\, u \cdot v$
$y \,\hat{=}\, e^{u+v}$
$z \,\hat{=}\, u - v$

a. Kurzschreibweise

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$= e^{u+v} \cdot v + (u \cdot v + 2e^{u+v} \cdot (u-v)) e^{u+v} + (e^{u+v})^2 \cdot 1$$

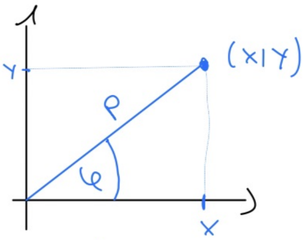
__Direkt:__

$$(f \circ \vec{g})(u,v) = f\left(\begin{bmatrix} uv \\ e^{u+v} \\ u-v \end{bmatrix}\right) = uv \cdot e^{u+v} + (e^{u+v})^2 \cdot (u-v)$$

1.11 Koordinatensysteme

Polarkoordinaten (vgl. VL 7, Anh. 1)

Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$



$\cos(\varphi) = \frac{x}{\rho}$

$\sin(\varphi) = \frac{y}{\rho}$

ρ = rho
φ = phi

$\Rightarrow x = \rho \cos(\varphi)$
$y = \rho \sin(\varphi)$
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

und $\frac{y}{x} = \tan(\varphi)$

$\Rightarrow$
Dadurch bekommen wir eine Abbildung

$\vec{\psi}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\vec{\psi}(\rho, \varphi) = \begin{bmatrix} \rho \cdot \cos(\varphi) \\ \rho \cdot \sin(\varphi) \end{bmatrix} \hat{=} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Hintergrund: Durch ψ kann man Funktionen einfacher ausdrücken

Betrachte $f(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\Rightarrow (f \circ \psi)(\rho, \varphi)$$
$$= f(\rho \cos(\varphi), \rho \sin(\varphi))$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{\rho^2 \cos^2(\varphi) + \rho^2 \sin^2(\varphi)}}$$
$$= -\frac{1}{\rho}$$

Oftmals bezeichnet man $f \circ \vec{\psi}$ wieder als f

Ziel: Umrechnen von partiellen Ableitungen in andere Koordinatensysteme

Ableitung von $f(\rho \cos(\varphi), \rho \sin(\varphi))$:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \underbrace{\frac{\partial x}{\partial \rho}}_{\cos(\varphi)} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \underbrace{\frac{\partial y}{\partial \rho}}_{\sin(\varphi)}$$

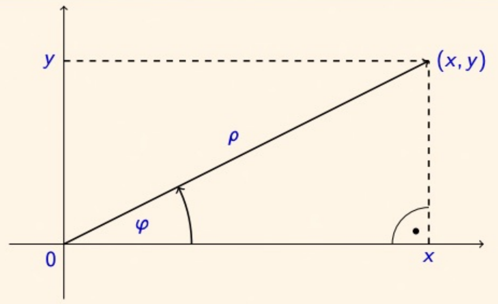
$$= \frac{\partial f}{\partial x} \cos(\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y} \sin(\varphi)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \underbrace{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}_{-\rho \sin(\varphi)} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \underbrace{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}_{\rho \cos(\varphi)}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} (-\rho \sin(\varphi)) + \frac{\partial f}{\partial y} \rho \cos(\varphi)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \rho} \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\rho \sin(\varphi) & \rho \cos(\varphi) \end{bmatrix}}_{= A} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Polarkoordinaten (vgl. VL 7 Ana1-LinA → Komplexe Zahlen)



$x=\rho\cos(\varphi)$, $\quad y=\rho\sin(\varphi)$, $\quad \frac{y}{x}=\tan(\varphi)$, $\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2}$

Jetzt: Polarkoordinaten → kart. Koord. (Part. Abl.)

$$A=\begin{bmatrix}\cos(\varphi) & \sin(\varphi)\\ -\rho\sin(\varphi) & \rho\cos(\varphi)\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A)=\rho\cos^2(\varphi)+\rho\sin^2(\varphi)=\rho$$

$\Rightarrow A$ invertierbar für $\rho>0$

Bekannt Ana1-LinA (VL 14)

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\underbrace{ad-bc}_{=\det\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}}}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{\rho}\begin{bmatrix}\rho\cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\\ \rho\sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(\varphi) & -\frac{\sin(\varphi)}{\rho}\\ \sin(\varphi) & \frac{\cos(\varphi)}{\rho}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\varphi) & -\frac{\sin(\varphi)}{\rho}\\ \sin(\varphi) & \frac{\cos(\varphi)}{\rho}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial \rho}\\ \frac{\partial f}{\partial \varphi}\end{bmatrix}$$

Ableitungen: $x=\rho\cos(\varphi)$, $\quad y=\rho\sin(\varphi)$

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}=\frac{x}{\rho}=\cos(\varphi),\qquad \frac{\partial\rho}{\partial y}=\frac{y}{\rho}=\sin(\varphi),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{-\sin(\varphi)}{\rho}=\frac{-y}{\rho^2},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\cos(\varphi)}{\rho}=\frac{x}{\rho^2}.$$

Umrechnung: Polarkoordinaten → Kartesische Koordinaten

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial\rho}\cos(\varphi)-\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\sin(\varphi)}{\rho}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial\rho}\sin(\varphi)+\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\cos(\varphi)}{\rho}$$

Beispiel

(1) $f(\rho,\varphi)=-\frac{1}{\rho}\quad\left(\text{bzw. } f(x,y)=-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial\rho}=\frac{1}{\rho^2}\ \text{ und }\ \frac{\partial f}{\partial\varphi}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{\rho^2}\cos(\varphi)=\frac{\rho\cos(\varphi)}{\rho^3}$$

$$=\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{\rho^2}\sin(\varphi)=\frac{\rho\cdot\sin(\varphi)}{\rho^3}$$

$$=\frac{y}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$$

(2) $f(\rho,\varphi)=\varphi$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial\rho}=0\ \text{ und }\ \frac{\partial f}{\partial\varphi}=1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}=-1\cdot\frac{\sin(\varphi)}{\rho}=-\frac{\rho\sin(\varphi)}{\rho^2}$$

$$=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=1\cdot\frac{\cos(\varphi)}{\rho}=\frac{\rho\cos(\varphi)}{\rho^2}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

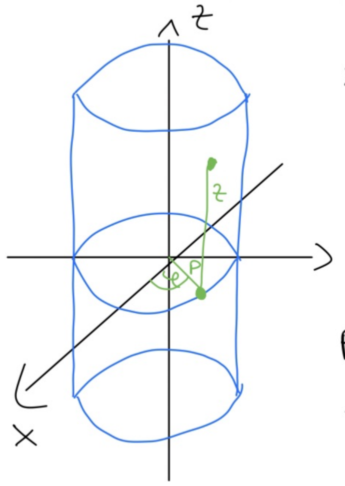
Probe:

Für $x>0$ ist $f(x,y)=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{-y}{x^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

Zylinderkoordinaten



$x = \rho \cdot \cos(\varphi)$

$y = \rho \cdot \sin(\varphi)$

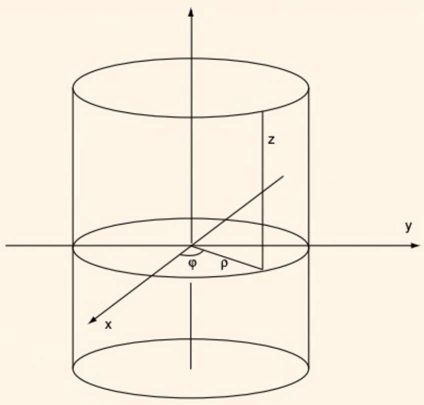
$z = z$

$\rho \geq 0,\ \varphi \in [0, 2\pi[,$

$z \in \mathbb{R}$

Ableitungen „analog" zu Polarkoordinaten

Zylinderkoordinaten (=ebene Polarkoordinaten mit z-Achse)



$$x = \rho\cos(\varphi), \quad y = \rho\sin(\varphi), \quad z = z, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ableitungen: $x = \rho\cos(\varphi),\ y = \rho\sin(\varphi),\ z = z,\ \rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho}, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho}, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-\sin(\varphi)}{\rho}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos(\varphi)}{\rho}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial z} = 1.$$

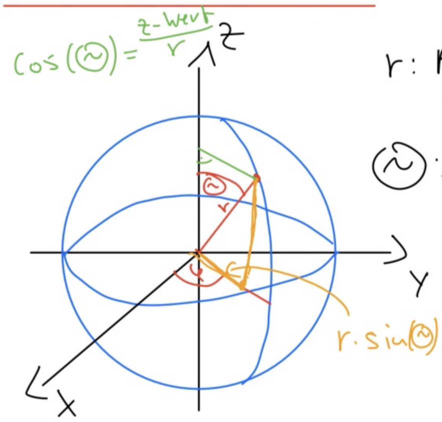
Umrechnung: Zylinderkoordinaten → Kartesische Koordinaten

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{x}{\rho} - \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\sin(\varphi)}{\rho}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{y}{\rho} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\cos(\varphi)}{\rho}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

Kugelkoordinaten



r: Abstand zum Ursprung

θ: „geographische Breite" (aber: hier wird der Winkel vom Nordpol gemessen und nicht vom Äquator)

$\theta \in [0, \pi]$

φ: „geographische Länge"

Koordinaten:

$x = r \sin(\theta)\cos(\varphi) \quad \varphi \in [0, 2\pi[$

$y = r \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi)$

$z = r \cdot \cos(\theta)$

Außerdem: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

da $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Beispiel

$$f(x,y,z) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

In Kugelkoordinaten:

$$f(r, \theta, \varphi) = -\frac{1}{r}$$

denn:

$$f(r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta))$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\underbrace{r^2\sin^2(\theta)\cos^2(\varphi) + r^2\sin^2(\theta)\sin^2(\varphi)}_{=r^2\sin^2(\theta)} + r^2\cos^2(\theta)}}$$

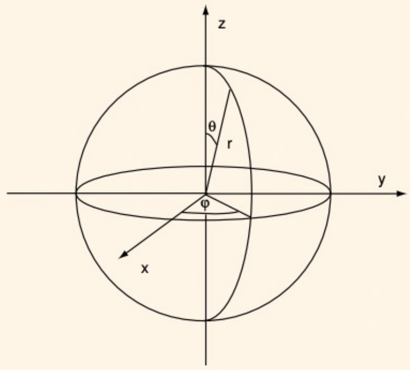
$$= -\frac{1}{\sqrt{r^2}} = -\frac{1}{r}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \underset{=\frac{1}{r^2}}{\frac{\partial f}{\partial r}} \cdot \underset{=\frac{x}{r}}{\frac{\partial r}{\partial x}} + \underset{=0}{\frac{\partial f}{\partial \theta}} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + \underset{=0}{\frac{\partial f}{\partial \varphi}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$= \frac{x}{r^3} = \frac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}$$

Kugelkoordinaten



$$x = r\sin(\theta)\cos(\varphi), \quad y = r\sin(\theta)\sin(\varphi), \quad z = r\cos(\theta),$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Ableitungen für Kugelkoordinaten:
$x = r\sin(\theta)\cos(\varphi), \quad y = r\sin(\theta)\sin(\varphi), \quad z = r\cos(\theta),$
$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\cos(\theta)\cos(\varphi)}{r}, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos(\theta)\sin(\varphi)}{r} \qquad \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{-\sin(\theta)}{r}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-\sin(\varphi)}{r\sin(\theta)}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos(\varphi)}{r\sin(\theta)} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Umrechnung: Kugelkoordinaten → Kartesische Koordinaten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\
&= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{x}{r} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\cos(\theta)\cos(\varphi)}{r} - \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\sin(\varphi)}{r\sin(\theta)} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{y}{r} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\cos(\theta)\sin(\varphi)}{r} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\cos(\varphi)}{r\sin(\theta)} \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial z} \\
&= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{z}{r} - \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\sin(\theta)}{r}.
\end{aligned}$$

9. VL Ana 2 Ing

Fehlerapproximation, höhere Ableitungen und quadratische Formen

Thema: Fehlerschrankensatz, Konvexität, höhere partielle Ableitungen, Hesse-Matrix, Satz von Schwarz, quadratische Form, Hesseform

Fehlerschrankensatz

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in D$, so dass die Verbindungsstrecke S zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ganz in D liegt.

Strecke 线

Weiterhin seien $M_1, \ldots, M_n$ reelle Zahlen, so dass für alle $\vec{z} \in S$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{z})\right| \leq M_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

Dann gilt

$$|f(\vec{y}) - f(\vec{x})| \leq \sum_{i=1}^{n} M_i |x_i - y_i|,$$

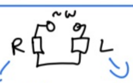
Andere Schreibweise für $\vec{y} = \vec{x} + \overrightarrow{\Delta x}$:

$$|f(\vec{x} + \overrightarrow{\Delta x}) - f(\vec{x})| \leq \sum_{i=1}^{n} M_i |\Delta x_i|,$$

1.12 Fehlerapproximation und Fehlerschranken

Beispiel

Gesamtwiderstand in einem Wechselstromkreis:

Stromkreis: 

ω - Frequenz der Wechselspannung

Widerstand   Spule mit Induktivität L

Frage: Wie groß ist der Gesamtwiderstand?

Formel: $W(R,L) = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$

Herstellerangabe:

$R = 20 \pm 0.1 \quad [\Omega] \quad \Rightarrow \Delta R = \pm 0.1$

$L = 5 \cdot 10^{-3} \pm 10^{-4} \quad [H] \quad \Rightarrow \Delta L = \pm 10^{-4}$

$\omega = 6000 \quad [Hz]$

$\Rightarrow W(20, 5\cdot 10^{-3}) = \sqrt{20^2 + 30^2} = \sqrt{1300} \approx 36.055$

Gesucht: $W(R + \Delta R, L + \Delta L)$ mit $|\Delta R| \leq 0.1$, $|\Delta L| \leq 10^{-4}$

Da W diffbar ist, gilt

$$W(R+\Delta R, L + \Delta L) \approx W(R,L) + W'(R,L)\begin{bmatrix}\Delta R\\ \Delta L\end{bmatrix}$$

für $\left\|\begin{bmatrix}\Delta R\\ \Delta L\end{bmatrix}\right\|$ klein

$$\Rightarrow \frac{\partial W}{\partial R} = \frac{\cancel{2}R}{\cancel{2}\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}, \quad \frac{\partial W}{\partial L} = \frac{\cancel{2}\omega^2 L}{\cancel{2}\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$$

Fehlerapproximation für $\Delta R = 0.1$ und $\Delta L = 10^{-4}$

$$\Delta W := W(R+\Delta R, L+\Delta L) - W(R,L) \approx W'(R,L)\begin{bmatrix}\Delta R\\ \Delta L\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial W}{\partial R} & \frac{\partial W}{\partial L}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\Delta R\\ \Delta L\end{bmatrix}$$

$$= \frac{\partial W}{\partial R}\Delta R + \frac{\partial W}{\partial L}\cdot \Delta L$$

$$\Rightarrow \Delta W \approx \frac{20}{\sqrt{1300}}\cdot 0.1 + \frac{6000^2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{1300}}\cdot 10^{-4} \approx 0.55$$

Problem:

- $\left\|\begin{bmatrix}\Delta R\\ \Delta L\end{bmatrix}\right\|$ muss klein sein
- Ist nur eine Approximation, keine sichere Fehlerschranke

Allgemein: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \to \mathbb{R}$ diffbar und $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ (z.B. Meßwerte) mit $\overrightarrow{\Delta x} = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ (z.B. Meßfehler)

Wie groß ist der Fehler

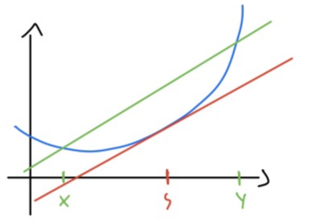
$$\Delta f := f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \ldots, x_n) \; ?$$

Wiederholung Ana 1:

Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall) diffbar und $x, y \in I$, $x < y$

$\Rightarrow$ es gibt $s \in]x,y[$ mit $f'(s) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$



Sekantensteigung: $\frac{f(y) - f(x)}{y - x}$

Tangentensteigung: $f'(s)$

Falls $|f'(t)| \leq M$ $(M \geq 0)$ für alle $t \in]x,y[$, so gilt

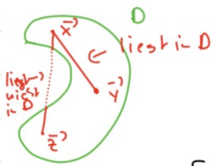
$|f(y) - f(x)| \leq |f'(s)| \cdot |y - x| \leq M\,|y-x|$ ← Schrankensatz

Setze $\Delta x = y - x$, also $y = x + \Delta x$ ← Fehlerschranke Ana 1

$\Rightarrow |\Delta f| = |f(x+\Delta x) - f(x)| \leq M\,\Delta x$

Verallgemeinerung für $f: D \to \mathbb{R}$ diffbar, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen

Was bedeutet $t \in]x,y[$ im Mehrdimensionalen?



Idee: Die Verbindungsstrecke S zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ muss in D liegen, d.h.

$$S = \{(1-t)\vec{x} + t\vec{y} \mid t \in [0,1]\} \subset D$$

Betrachte nun f entlang S:

$h: [0,1] \to \mathbb{R}$, $h = f \circ \vec{g}$ mit $\vec{g}(t) = (1-t)\vec{x} + t\vec{y}$

$\Rightarrow h(t) = f(\vec{g}(t)) = f((1-t)\vec{x} + t\vec{y})$

$\Rightarrow h(0) = f(\vec{x})$, $h(1) = f(\vec{y})$

Weiterhin gilt: Kettenregel f. part. Abl.

$$h'(t) = \frac{\partial h}{\partial t}(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec g(t)) \cdot \frac{\partial g_i}{\partial t}(t)$$

mit $g_i(t) = (1-t)x_i + t y_i$

$$g_i'(t) = \frac{\partial g_i}{\partial t}(t) = -x_i + y_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec g(t)) \cdot (y_i - x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left((1-t)\vec x + t\vec y\right) \cdot (y_i - x_i)$$

Wende nun den Mittelwertsatz auf h und $I = [0,1]$ an:

$$|f(\vec y) - f(\vec x)| = |h(1) - h(0)| = |h'(s)| \cdot |1-0| \quad \text{für ein } s \in]0,1[$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec z) \right| \cdot |y_i - x_i|$$

mit $\vec z = (1-s)\vec x + s \cdot \vec y \in S$

Definition (konvex)

Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex, falls für je zwei Punkte $\vec x, \vec y \in D$ auch deren Verbindungsstrecke S in D liegt, d.h.

$$S = \{(1-t)\vec x + t\vec y \,|\, 0 \leq t \leq 1\} \subset D.$$

Folie 79

Beispiel von oben

$$W(R,L) = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$R = 20\ [\Omega]$, $|\Delta R| \leq 0.1$

$L = 5 \cdot 10^{-3}\ [H]$, $|\Delta L| \leq 10^{-4}$

$\omega = 6000\ [Hz]$

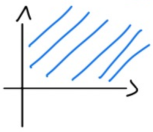
Schon gesehen:

$$W(20, 5 \cdot 10^{-3}) = 36.055$$

$$\frac{\partial W}{\partial R} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \quad \frac{\partial W}{\partial L} = \frac{\omega^2 L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

$R, L > 0$, d.h.

$$R, L \in D = \underbrace{\{(R,L) \in \mathbb{R}^2 \,|\, R, L > 0\}}_{\text{konvex}}$$



$$\left|\frac{\partial W}{\partial R}\right| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \underbrace{\omega^2 L^2}_{\geq 0}}} \leq \frac{R}{\sqrt{R^2}} = \frac{R}{R} = 1 =: M_R$$

$$\left|\frac{\partial W}{\partial L}\right| = \frac{\omega^2 L}{\sqrt{\underbrace{R^2}_{\geq 0} + \omega^2 L^2}} \leq \frac{\omega^2 L}{\sqrt{\omega^2 L^2}} = \frac{\omega^2 \cdot L}{\omega \cdot L}$$

$$= \omega = 6000 =: M_L$$

$$\Rightarrow |\Delta W| = |W(R+\Delta R, L+\Delta L) - W(R,L)|$$

$$\leq M_R \cdot |\Delta R| + M_L \cdot |\Delta L|$$

$$\leq 1 \cdot 0.1 + 6000 \cdot 10^{-4} = 0.7$$

$$\Rightarrow W(R+\Delta R, L+\Delta L) = W(R,L) \pm 0.7$$

$$= 36.055 \pm 0.7$$

↳ zuverlässige Schranke

Definition (2. partielle Ableitungen, zweimal stetig differenzierbar)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so dass alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_j}: D \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$ differenzierbar sind.

(1) Dann heißen die Funktionen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

die **zweiten partiellen Ableitungen** von f.
Kurzschreibweise falls $i = j$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$$

(2) Sind alle zweiten partiellen Ableitungen stetig, so heißt f **zweimal stetig differenzierbar**.

Definition (Hesse-Matrix)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so dass alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_j}: D \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$ differenzierbar sind und $\vec x \in D$. Die Matrix $H_f(\vec x) \in \mathbb{R}^{n,n}$ gegeben durch

$$H_f(\vec x) := \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec x)\right]_{i,j=1,\ldots,n}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\vec x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\vec x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\vec x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(\vec x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\vec x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\vec x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\vec x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\vec x) \end{bmatrix}$$

heißt **Hesse-Matrix** von f in $\vec x$.

Folien 80+81

(1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto e^{xy^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 e^{xy^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy\, e^{xy^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y^4 e^{xy^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x\left(e^{xy^2} + 2y^2 x e^{xy^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2y e^{xy^2} + 2y^3 x\, e^{xy^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2y e^{xy^2} + 2y^3 x\, e^{xy^2}$$

$$\Rightarrow H_f(x,y) = \begin{bmatrix} y^4 e^{xy^2} & 2ye^{xy^2} + 2y^3xe^{xy^2} \\ 2ye^{xy^2} + 2y^3xe^{xy^2} & 2xe^{xy^2} + 4x^2y^2e^{xy^2} \end{bmatrix}$$

Zufall? $=$

(2) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z) \mapsto xe^y + yz^2$

$$\Rightarrow f'(x,y,z) = [e^y \quad xe^y + z^2 \quad 2yz]$$

$$\Rightarrow H_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & e^y & 0 \\ e^y & xe^y & 2z \\ 0 & 2z & 2y \end{bmatrix}$$

Satz von Schwarz

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

für alle $i, j = 1, \ldots, n$.

Insbesondere ist dann die Hesse-Matrix $H_f(\vec{x})$ für alle $\vec{x} \in D$ symmetrisch (d.h. $H_f(\vec{x})^T = H_f(\vec{x})$).

Folie 82

Bemerkung:

$f: D \to \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen) zweimal stetig diffbar

$\Rightarrow \quad \operatorname{grad}_{\vec{x}} f: D \to \mathbb{R}^n$

$\operatorname{grad}_{\vec{x}} f$ hat die Ableitung eine $n \times n$-Matrix

$$(\operatorname{grad}_{\vec{x}} f)' = H_f(\vec{x})$$

Fazit:

$f(\vec{x}) \in \mathbb{R}$	Skalar	
$\operatorname{grad}_{\vec{x}} f \in \mathbb{R}^n$	Vektor	(1. Ableitung)
$H_f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^{n,n}$	Matrix	(2. Ableitung)

Definition (quadratische Form)

Sei $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch, d.h. $A^T = A$. Dann heißt $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$q(\vec{x}) = \vec{x}^T A\, \vec{x} = \langle \vec{x}, A\vec{x} \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

die zu A gehörige quadratische Form.

Quadratische Formen

Beispiel

$$q(x,y,z) = -3x^2 + 4y^2 - 5z^2 + 2xy - 4xz + 8yz$$
$$= [x \quad y \quad z]\, A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ mit symmetr. Matrix $A \in \mathbb{R}^{3,3}$

Es gilt:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Folie 82

Beispiel

(1) Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diffbar und $\vec{x}_0 \in D$

$\Rightarrow H_f(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist symmetrisch nach dem Satz von Schwarz

$\Rightarrow q(\vec{x}) = \vec{x}^T \cdot H_f(\vec{x}_0) \cdot \vec{x} =: \operatorname{hess}_f(\vec{x})$ ist die Hesseform von f in $\vec{x}_0$

(2) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow q(x,y) = [x \quad y] \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= [x \quad y] \begin{bmatrix} -2x + 3y \\ 3x + 4y \end{bmatrix}$$

$$= -2x^2 + 3xy + 3xy + 4y^2$$
$$= -2x^2 + 4y^2 + 6xy$$