Tutorium 5

Aufgabe 1: Alphabete, Wörter und Sprachen

Gegeben seien die Mengen $\Sigma_1 = \emptyset$, $\Sigma_2 = \{ \triangleleft, \triangleright \}$ und $\Sigma_3 = \mathbb{N}$, das Alphabet $\Sigma = \{ a, b \}$ und die Sprache $A = \Sigma^*$.

1.a) *Gib an:* Welche der Mengen Σ_1, Σ_2 und Σ_3 sind Alphabete?

Lösung

Nur Σ_2.

/Lösung

1.b) *Gib* das kürzeste und das längste Wort in der Sprache A *an*. *Begründe* deine Antwort.

Lösung

Die Sprache Σ^* besteht aus allen Wörtern, die man aus (gemischten) Folgen von a's und b's bilden kann. Das kürzeste Wort ist ε, dessen Länge gleich 0 ist. Ein längstes Wort gibt es in Σ^* nicht, denn jedes Wort, dass wir als längstes Wort betrachten wollten, können wir zum Beispiel um ein a verlängern.

/Lösung

1.c) *Begründe:* Sind die Sprachen A und $\{ a \}^* \cdot \{ b \}^*$ gleich?

Lösung

Nein.
Die Sprache Σ^* besteht aus allen Wörtern, die man aus (gemischten) Folgen von a's und b's bilden kann. Die Sprache $\{ a \}^* \cdot \{ b \}^*$ enthält dagegen nur Wörter, die aus einer (möglicher Weise leeren) Folge von a's gefolgt von einer (möglicher Weise leeren) Folge von b's bestehen. Die Sprache $\{ a \}^* \cdot \{ b \}^*$ enthält also weniger Worte als A, so ist zum Beispiel das Wort ba in A aber nicht in $\{ a \}^* \cdot \{ b \}^*$ enthalten.
Oder mathematisch ausgedrückt:

$$\{ a \}^* \cdot \{ b \}^* = \{ a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \} \subseteq \Sigma^* = \{ a, b \}^*$$

/Lösung

1.d) *Begründe:* Sind die Sprachen A und $\{ a \}^* \cup \{ b \}^*$ gleich?

Lösung

Nein.
Die Sprache Σ^* besteht aus allen Wörtern, die man aus (gemischten) Folgen von a's und b's bilden kann. Die Sprache $\{ a \}^* \cup \{ b \}^*$ enthält dagegen nur Wörter, die aus einer (möglicher Weise leeren) Folge von a's oder einer (möglicher Weise leeren) Folge von b's bestehen. Die Sprache $\{ a \}^* \cup \{ b \}^*$ enthält also ebenfalls weniger Worte als A (und sogar noch weniger Wörter als $\{ a \}^* \cdot \{ b \}^*$), so ist zum Beispiel das Wort ab in A aber nicht in $\{ a \}^* \cup \{ b \}^*$ enthalten.
Oder mathematisch ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \{ a \}^* \cup \{ b \}^* &= \{ x^n \mid x \in \{ a, b \} \wedge n \in \mathbb{N} \} \\ &\subseteq \{ a \}^* \cdot \{ b \}^* = \{ a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \} \subseteq \Sigma^* \end{aligned}$$

/Lösung

Aufgabe 2: Grammatiken und Sprachen

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma = \{ 0, 1 \}$ und die Grammatik $G = (\{ S, T \}, \Sigma, P, S)$ mit:

$$\begin{aligned} P: \quad S &\rightarrow \varepsilon \mid 0T \mid 1T \mid 00T0 \\ 0T &\rightarrow 0S0 \\ 1T &\rightarrow 1S1 \end{aligned}$$

2.a) *Gib an:* Leite aus der Grammatik G die Wörter 00 und 001100 ab.

Lösung

$S \Rightarrow_G 0T \Rightarrow_G 0S0 \Rightarrow_G 00$
$S \Rightarrow_G 0T \Rightarrow_G 0S0 \Rightarrow_G 00T0 \Rightarrow_G 00S00 \Rightarrow_G 001T00 \Rightarrow_G 001S100 \Rightarrow_G 001100$
$S \Rightarrow_G 00T0 \Rightarrow_G 00S00 \Rightarrow_G 001T00 \Rightarrow_G 001S100 \Rightarrow_G 001100$

/Lösung

2.b) *Gib* die von G erzeugte Sprache $L(G)$ *an*.

Lösung

$L(G) = \{ vv^R \mid v \in \Sigma^* \}$
(Wobei w^R die Umkehrung des Wortes w ist.)

/Lösung

2.c) Sei das Alphabet $\Sigma_1 = \{ a, b \}$ und die Sprache $A_1 \triangleq \{ w \in \Sigma^* \mid |w|_a > |w|_b \}$ gegeben. *Gib* eine Grammatik G_1 *an*, so dass $L(G_1) = A_1$.

Lösung

Es gibt viele Lösungen. Eine mögliche ist die folgende Grammatik:

$$G_1 = (\{ S, B \}, \Sigma, P_1, S) \text{ mit}$$
$$\begin{array}{llll} P_1: & S & \rightarrow & aS \mid aBS \mid a \\ & aB & \rightarrow & Ba \\ & Ba & \rightarrow & aB \\ & B & \rightarrow & b \end{array}$$

/Lösung

Aufgabe 3: Chomsky Hierarchie

Gegeben seien die Alphabete $\Sigma_1 = \{ a, b \}$ und $\Sigma_2 = \{ a, b, c \}$ und die Grammatiken

$$\begin{array}{lll} G_1 = (\{ S, A, B \}, \Sigma_1, P_1, S) & G_2 = (\{ S, A \}, \Sigma_1, P_2, S) & G_3 = (\{ S, A, B \}, \Sigma_1, P_3, S) \\ G_4 = (\{ S, A \}, \Sigma_1, P_4, S) & G_5 = (\{ S, A \}, \Sigma_2, P_5, S) & G_6 = (\{ S, A, B \}, \Sigma_2, P_6, S) \end{array}$$

mit

$$\begin{array}{llll} P_1: & S & \rightarrow & \varepsilon \mid aA \mid bB \\ & A & \rightarrow & a \mid aA \\ & B & \rightarrow & b \mid bB \end{array} \quad \begin{array}{llll} P_2: & S & \rightarrow & b \mid aA \mid bA \\ & aA & \rightarrow & aaa \mid aA \\ & bA & \rightarrow & bb \mid bS \end{array} \quad \begin{array}{llll} P_3: & S & \rightarrow & a \mid b \mid aaB \mid Abb \\ & A & \rightarrow & Sa \\ & B & \rightarrow & bS \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} P_4: & S & \rightarrow & a \mid b \\ & S & \rightarrow & aAA \mid bAA \\ & A & \rightarrow & ab \end{array} \quad \begin{array}{llll} P_5: & S & \rightarrow & \varepsilon \mid aSA \\ & AaA & \rightarrow & b \\ & bAA & \rightarrow & c \mid AbA \end{array} \quad \begin{array}{llll} P_6: & S & \rightarrow & cS \mid aA \mid bB \\ & A & \rightarrow & \varepsilon \mid aS \\ & B & \rightarrow & \varepsilon \mid bS \end{array}$$

3.a) *Gib* für jede der sechs Grammatiken G_i mit $i \in [1, 6]$ *an*, welche Typen aus der Chomsky Hierarchie sie hat.

Lösung

	Typ-0	Typ-1	Typ-2	Typ-3
G_1	X	X	X	X
G_2	X	X	–	–
G_3	X	X	X	–
G_4	X	X	X	–
G_5	X	–	–	–
G_6	X	–	–	–

/Lösung

3.b) *Gib* die Sprachen A_i mit $A_i = L(G_i)$ für alle $i \in [1, 6]$ *an*.

Lösung

$A_1 = \{ w \mid (w \in \{ \mathtt{a} \}^* \lor w \in \{ \mathtt{b} \}^*) \land |w| \neq 1 \}$
$A_2 = \{ \mathtt{b}^n\mathtt{b},\ \mathtt{b}^n\mathtt{aaa} \mid n \in \mathbb{N} \}$
$A_3 = \{ (\mathtt{aab})^n\, x\, (\mathtt{abb})^m \mid n, m \in \mathbb{N} \land x \in \Sigma_1 \}$
$A_4 = \{ \mathtt{a},\ \mathtt{aabab},\ \mathtt{b},\ \mathtt{babab} \}$
$A_5 = \{ \varepsilon \}$
$A_6 = \{ xy \mid x \in \{ \mathtt{aa},\ \mathtt{bb},\ \mathtt{c} \}^* \land y \in \Sigma_1 \}$

/Lösung

3.c) Nehmen wir an, wir möchten für eine Sprache A beweisen, dass sie einen bestimmten Typ $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ hat. Nehmen wir weiterhin an, wir geben eine Grammatik vom Typ x an, die die Sprache A vermeintlich erzeugt. Was wäre nun für einen Beweis zu tun?

Lösung

Wir müssten beweisen, dass die angegebene Grammatik tatsächlich die Sprache erzeugt. Schaut euch hierfür beispielhaft den Beweis aus den Zusatzaufgaben (Aufgabe 4) an. Dort wird per Induktion zum einen gezeigt, dass alle Wörter der Sprache erzeugt werden und zum anderen, dass alle Ableitungen der Grammatik zu einem Wort der Sprache führen.

/Lösung