Diskrete Strukturen

Großübung

Amelie Heindl

Lehrstuhl für Logik und Semantik

Technische Universität Berlin

Sommersemester 2024

Themenüberblick

Themenüberblick: Vorlesungswoche 7

- Bipartite Graphen
- Matchings
- Vertex Cover
- Satz von König
- Satz von Hall

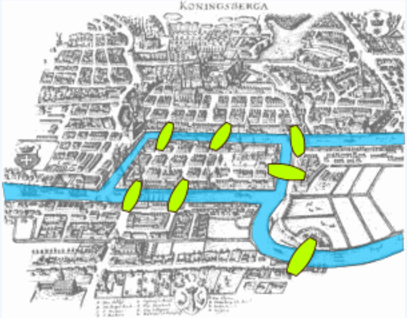
Euler-Touren

Euler-Touren: Geschichte

Königsberger Brückenproblem

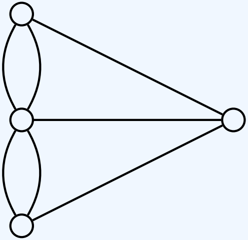
Im 18. Jahrhundert wurde die Frage gestellt, ob es möglich ist, einen Stadtrundgang durch Königsberg zu unternehmen, bei dem man jede der sieben Brücken genau einmal überquert.

Königsberg:



Source: `https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Konigsberg_bridges.png`

Modellierung als Graph:



Lösung: Ein derartiger Rundweg ist nicht möglich.

Euler-Touren: Grundlagen

Euler-Tour

Sei G ein Graph. Ein geschlossener Weg in G, der jede Kante $e \in E(G)$ genau einmal enthält, heißt Euler-Tour.

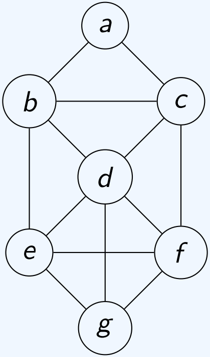
Unformale Beobachtung: Wie beim Brückenproblem, muss jedes Mal, wenn man auf einer Euler-Tour über eine Kante zu einem Knoten läuft, der Knoten über eine andere Kante wieder verlassen werden.

Daraus lässt sich ein Kriterium definieren: Eine Euler-Tour existiert genau dann in einem zusammenhängenden Graphen G, wenn $d_G(v)$ für alle $v \in V(G)$ gerade ist.

Euler-Touren: Beispiele

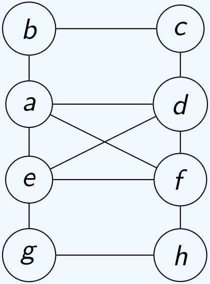
Gibt es in diesem Graphen eine Euler-Tour?

G_1:



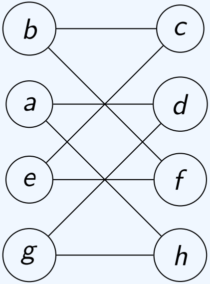
Nein, da $d_{G_1}(g), d_{G_1}(d)$ ungerade sind.

G_2:



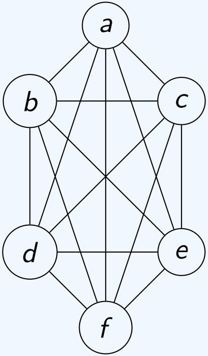
Ja, beispielsweise $a, e, g, h, f, d, c, b, a, d, e, f, a$.

G_3:



Nein, da G_3 nicht zusammenhängend ist.

G_4:



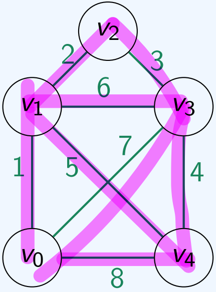
Nein, da alle Knoten ungeraden Grad haben.

Euler-Touren: Verallgemeinerung

Es gibt auch Euler-Wege als Verallgemeinerung von Euler-Touren. Dies sind, nicht notwendigerweise geschlossene, Wege in einem Graphen G, die jede Kante $e \in E(G)$ genau einmal enthalten.

Zusammenhängende Graphen G, die keine Euler-Touren enthalten, enthalten genau dann einen Euler-Weg, wenn es genau zwei Knoten mit ungeradem Grad in G gibt.

Beispielgraph:



G kann keine Euler-Tour enthalten, da $d_G(v_0)$ und $d_G(v_4)$ nicht gerade sind.

Aber $v_0, \{v_0, v_1\}, v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \{v_2, v_3\}, v_3, \{v_3, v_4\}, v_4, \{v_4, v_1\}, v_1, \{v_1, v_3\}, v_3, \{v_3, v_0\}, v_0, \{v_0, v_4\}, v_4$ ist ein Euler-Weg.

Hamilton-Kreise

Hamilton-Kreise: Grundlagen

Analog zur Frage nach Euler-Touren, kann man sich auch fragen, ob ein Graph einen geschlossenen Weg enthält, der nicht jede Kante, sondern jeden Knoten des Graphen genau einmal enthält (der Start- bzw. Endknoten des Weges muss natürlich zweimal enthalten sein).

Hamilton-Kreis

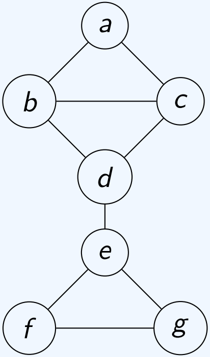
Sei G ein Graph. Ein Kreis in G, der jeden Knoten aus $V(G)$ enthält, heißt Hamilton-Kreis.

Bemerkung: Kreise, die jeden Knoten enthalten, enthalten jeden Knoten genau einmal, da Kreise per Definition keinen Knoten außer dem Startknoten mehrmals enthalten dürfen.

Hamilton-Kreise: Beispiele I

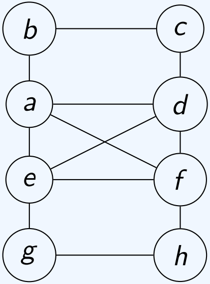
Gibt es in diesem Graphen einen Hamilton-Kreis?

G_1:



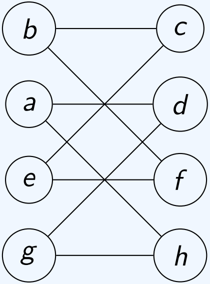
Nein, bei Schnittknoten nicht möglich.

G_2:



Ja, beispielsweise $b, c, d, f, h, g, e, a, b$.

G_3:



Nein, da G_3 nicht zusammenhängend ist.

Hamilton-Kreise: Beispiel II

Ein bekanntes NP-schweres Problem ist das Travelling Salesman Problem.

Travelling Salesman Problem (TSP)

Ein Handlungsreisender möchte in n verschiedene Städte reisen, um dort Handel zu treiben. Dabei möchte er jede Stadt genau einmal besuchen und am Ende wieder bei der Stadt ankommen, bei der er gestartet ist (diese Stadt wird also zweimal besucht). Welches ist die kürzeste Route, die er nehmen kann?

Die Situation kann als Graph modelliert werden. Dabei sind die Städte Knoten und die Verbindungen zwischen ihnen Kanten. Zusätzlich ist eine Gewichtungsfunktion notwendig, die jeder Kante ein Gewicht (wie die Kilometerzahl der entsprechenden Strecke) zuweist. Eine Lösung ist dann ein Hamilton-Kreis mit minimalem Gesamtkantengewicht.

Bipartite Graphen

Bipartite Graphen: Grundlagen

Bipartite Graphen sind Graphen, die aus zwei Teilen bestehen und es innerhalb der Teile keine Kanten gibt.

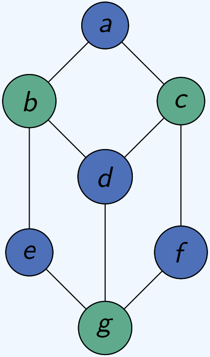
bipartit

Sei G ein Graph. G ist bipartit, falls disjunkte Knotenteilmengen $A, B \in V(G)$ mit $A \cup B = V(G)$ existieren, sodass $\{u, v\} \cap A \neq \emptyset$ und $\{u, v\} \cap B \neq \emptyset$ für jede Kante $\{u, v\} \in E(G)$ gilt.

Bipartite Graphen: Beispiele I

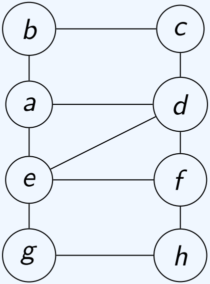
Ist dieser Graph bipartit?

G_1:



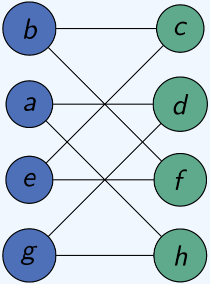
Ja, z.B.
$A = \{a, d, e, f\}$
und
$B = \{b, c, g\}$.

G_2:



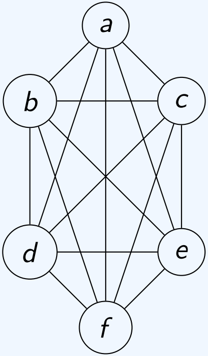
Nein.

G_3:



Ja, z.B.
A={b,a,e,g} und
$B = \{c, d, f, h\}$.

G_4:



Nein.

Matchings

Matchings: Grundlagen

Bei Matchings werden Kanten in einem Graph gewählt, die paarweise nicht zu einem gleichen Knoten inzident sind.

Matching

Sei G ein Graph. Eine Kantenmenge $M \subseteq E(G)$ mit $\{v,w\} \cap \{x,y\} = \emptyset$ für alle Kanten $\{v,w\}, \{x,y\} \in M$ mit $\{v,w\} \neq \{x,y\}$ heißt Matching von G.

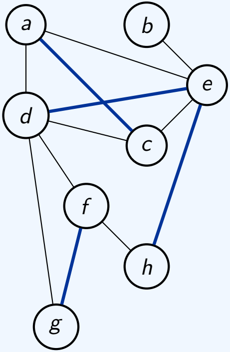
Für jede Knotenteilmenge $K \subseteq V(M)$ eines Matchings M nennt man M Matching von K.

Von besonderem Interesse sind perfekte Matchings. Ein Matching M eines Graphen G ist hierbei perfekt, wenn für jeden Knoten $v \in V(G)$ eine Kante $m \in M$ existiert mit $v \in m$. In diesem Fall ist also M ein Matching von $V(G)$.

Matchings: Beispiele I

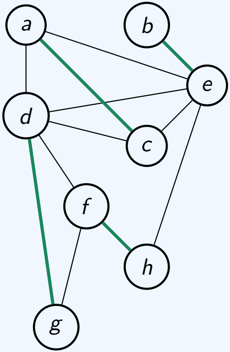
Welche Kantenmengen sind Matchings von folgendem Graphen G?

M_1:



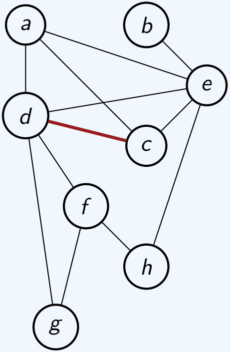
Nein, wegen $\{d, e\} \cap \{e, h\} \neq \emptyset$.

M_2:



Ja, perfektes Matching.

M_3:

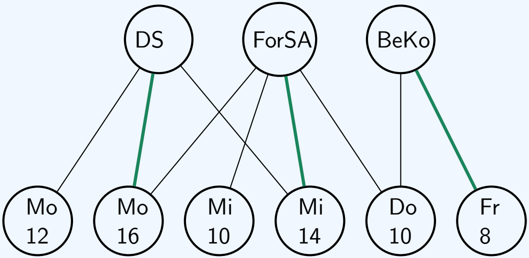


Ja.

Matchings: Beispiel II

Ein Student möchte dieses Semester DS, ForSA und BeKo besuchen. Jedes dieser Fächer bietet Tutorien zu verschiedenen Terminen an. Gesucht ist eine Auswahl von einem Tutorium pro Fach, das der Student besuchen kann, wobei sich keine Tutorien zeitlich überschneiden sollen.

Die Situation kann als Graph modelliert werden:



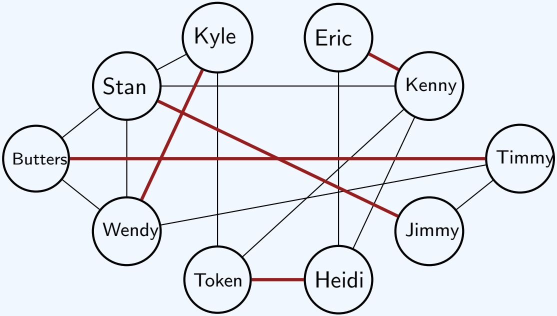
Eine Lösung für das Problem ist dann ein Matching von $K = \{\text{DS}, \text{ForSA}, \text{BeKo}\}$. Beispielsweise $M = \{\{\text{DS}, \text{Mo 16}\}, \{\text{ForSA}, \text{Mi 14}\}, \{\text{BeKo}, \text{Fr 8}\}\}$.

Der Graph ist auch ein Beispiel für bipartite Graphen.

Matchings: Beispiel III

Eine Menge von Personen soll sich für eine Tätigkeit in Zweierteams aufteilen. Aus Erfahrung ist bereits bekannt, welche Personen gut zusammen arbeiten können und bei der Teamaufteilung soll beachtet werden, dass nur Personen ein Team bilden, auf die diese Eigenschaft zutrifft.

Die Situation kann als Graph modelliert werden:



Eine Lösung für das Problem ist dann ein perfektes Matching im Graphen. Beispielsweise $M = \{\{\text{Eric, Kenny}\},$ $\{\text{Kyle, Wendy}\},$ $\{\text{Stan, Jimmy}\},$ $\{\text{Butters, Timmy}\}$ $\{\text{Heidi, Token}\}\}$.

Vertex Cover

Vertex Cover: Grundlagen

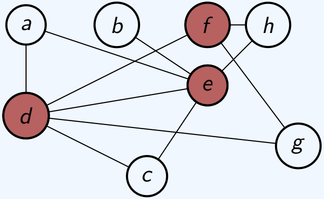
Vertex Cover sind Überdeckungen der Kanten eines Graphen mit Knoten.

Vertex Cover

Sei G ein Graph. Eine Knotenmenge $X \subseteq V(G)$ ist ein Vertex Cover von G, wenn $\{u,v\} \cap X \neq \emptyset$ für jede Kante $\{u,v\} \in E(G)$ gilt.

Eine interessante Fragestellung dazu ist, wie groß das kleinste Vertex Cover eines Graphen ist.

Beispielgraph G:



G hat ein Vertex Cover der Größe 3.

Satz von König

Satz von König: Aussage

Im Allgemeinen sind Vertex Cover schwer zu finden, aber für spezielle Graphen gibt es bessere Lösungsmöglichkeiten. Für bipartite Graphen besteht ein Zusammenhang zwischen der Größe von Matchings und Vertex Covern.

Satz von König

Sei G ein bipartiter Graph. Dann ist die maximale Größe eines Matchings in G gleich der minimalen Größe eines Vertex Covers in G.

Es ist klar, dass das kleinste Vertex Cover nicht kleiner sein kann als das größte Matching, da es aus jeder Kante des Matchings einen Knoten enthalten muss und diese alle verschieden sind. Der interessante Teil ist, dass das kleinste Vertex Cover auch nicht größer als das größte Matching sein kann.

Satz von König: Beweis

Der Beweis aus der Vorlesung, dass es ein Vertex Cover in der Größe des größten Matchings gibt, ist konstruktiv.

Aus einem gegebenen Matching kann also ein Vertex Cover erstellt werden.

Wir betrachten dieses Vorgehen in einem Beispiel Graphen.

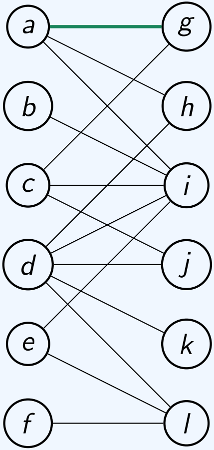
Dafür brauchen wir noch die Definition von alternierenden Pfaden.

Alternierender Pfad

Sei $G = (A \dot{\cup} B, E)$ ein bipartiter Graph und sei M ein Matching in G. Ein Pfad in G, der mit einem Knoten aus $A \setminus V(M)$ beginnt und dessen Kanten abwechselnd aus $E(G) \setminus M$ und M sind, heißt alternierend. Ein alternierender Pfad ist erweiternd, wenn er in einem Knoten $b \in B \setminus V(M)$ endet.

Satz von König: Beweis

Beispielgraph G mit $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ und $B = \{g, h, i, j, k, l\}$:



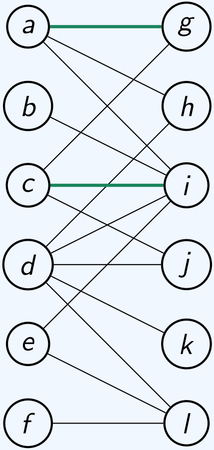
1. Finden eines größtmöglichen Matchings M:

Wir suchen in jedem Schritt einen alternierenden Pfad, der in einem ungematchten Knoten aus B endet und fügen alle Kanten des Pfades zum Matching dazu, die davor nicht drin waren und entfernen alle Kanten des Pfades aus dem Matching, die davor drin waren.

- $M = \{\{a, g\}\}$

Satz von König: Beweis

Beispielgraph G mit
$A = \{a, b, c, d, e, f\}$ und
$B = \{g, h, i, j, k, l\}$:



寻找最大匹配 M：

我们在每一步寻找一条交替路径，该路径在一个来自 B 集合中的未匹配节点处结束。然后我们将路径中所有不在匹配中的边加入匹配，同时移除路径中所有已经在匹配中的边。

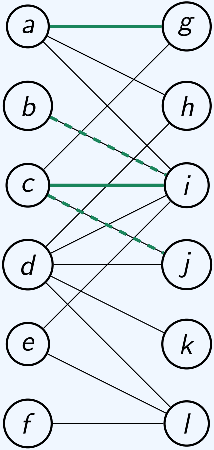
1. Finden eines größtmöglichen Matchings M:

Wir suchen in jedem Schritt einen alternierenden Pfad, der in einem ungematchten Knoten aus B endet und fügen alle Kanten des Pfades zum Matching dazu, die davor nicht drin waren und entfernen alle Kanten des Pfades aus dem Matching, die davor drin waren.

- $M = \{\{a, g\}\}$
- $M = \{\{a, g\}, \{c, i\}\}$

Satz von König: Beweis

Beispielgraph G mit $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ und $B = \{g, h, i, j, k, l\}$:



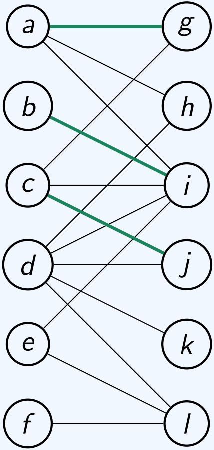
1. Finden eines größtmöglichen Matchings M:

Wir suchen in jedem Schritt einen alternierenden Pfad, der in einem ungematchten Knoten aus B endet und fügen alle Kanten des Pfades zum Matching dazu, die davor nicht drin waren und entfernen alle Kanten des Pfades aus dem Matching, die davor drin waren.

- $M = \{\{a, g\}\}$
- $M = \{\{a, g\}, \{c, i\}\}$

Satz von König: Beweis

Beispielgraph G mit $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ und $B = \{g, h, i, j, k, l\}$:



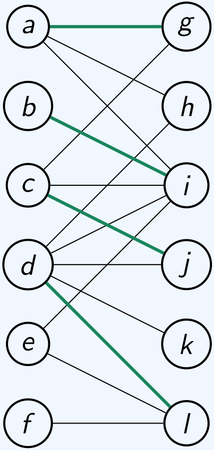
1. Finden eines größtmöglichen Matchings M:

Wir suchen in jedem Schritt einen alternierenden Pfad, der in einem ungematchten Knoten aus B endet und fügen alle Kanten des Pfades zum Matching dazu, die davor nicht drin waren und entfernen alle Kanten des Pfades aus dem Matching, die davor drin waren.

- $M = \{\{a,g\}\}$
- $M = \{\{a,g\},\{c,i\}\}$
- $M = \{\{a,g\},\{b,i\},\{c,j\}\}$

Satz von König: Beweis

Beispielgraph G mit
$A = \{a, b, c, d, e, f\}$ und
$B = \{g, h, i, j, k, l\}$:



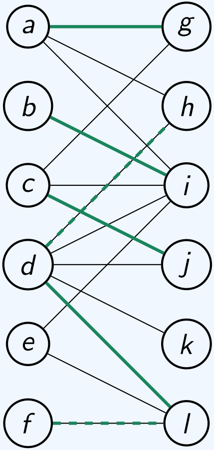
1. Finden eines größtmöglichen Matchings M:

Wir suchen in jedem Schritt einen alternierenden Pfad, der in einem ungematchten Knoten aus B endet und fügen alle Kanten des Pfades zum Matching dazu, die davor nicht drin waren und entfernen alle Kanten des Pfades aus dem Matching, die davor drin waren.

- $M = \{\{a, g\}\}$
- $M = \{\{a, g\}, \{c, i\}\}$
- $M = \{\{a, g\}, \{b, i\}, \{c, j\}\}$
- $M = \{\{a, g\}, \{b, i\}, \{c, j\}, \{d, l\}\}$

Satz von König: Beweis

Beispielgraph G mit $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ und $B = \{g, h, i, j, k, l\}$:



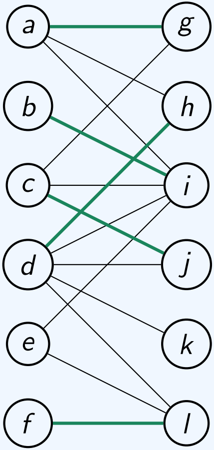
1. Finden eines größtmöglichen Matchings M:

Wir suchen in jedem Schritt einen alternierenden Pfad, der in einem ungematchten Knoten aus B endet und fügen alle Kanten des Pfades zum Matching dazu, die davor nicht drin waren und entfernen alle Kanten des Pfades aus dem Matching, die davor drin waren.

- $M = \{\{a,g\}\}$
- $M = \{\{a,g\},\{c,i\}\}$
- $M = \{\{a,g\},\{b,i\},\{c,j\}\}$
- $M = \{\{a,g\},\{b,i\},\{c,j\},\{d,l\}\}$

Satz von König: Beweis

Beispielgraph G mit $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ und $B = \{g, h, i, j, k, l\}$:



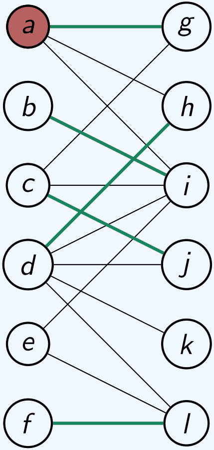
1. Finden eines größtmöglichen Matchings M:

Wir suchen in jedem Schritt einen alternierenden Pfad, der in einem ungematchten Knoten aus B endet und fügen alle Kanten des Pfades zum Matching dazu, die davor nicht drin waren und entfernen alle Kanten des Pfades aus dem Matching, die davor drin waren.

- $M = \{\{a, g\}\}$
- $M = \{\{a, g\}, \{c, i\}\}$
- $M = \{\{a, g\}, \{b, i\}, \{c, j\}\}$
- $M = \{\{a, g\}, \{b, i\}, \{c, j\}, \{d, l\}\}$
- $M = \{\{a, g\}, \{b, i\}, \{c, j\}, \{f, l\}, \{d, h\}\}$

Satz von König: Beweis

Beispielgraph G mit
$A = \{a, b, c, d, e, f\}$ und
$B = \{g, h, i, j, k, l\}$:

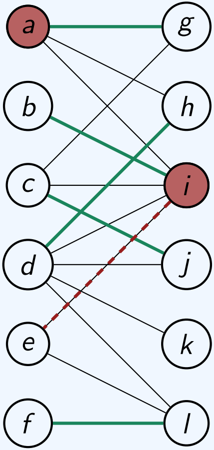


2. Konstruieren eines Vertex Covers U:
Für jede Kante $\{a, b\} \in M$ mit $a \in A$ und $b \in B$ fügen wir b zu U hinzu, falls ein alternierender Pfad in b endet, ansonsten fügen wir a zu U hinzu.

- $U = \{a\}$

Satz von König: Beweis

Beispielgraph G mit $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ und $B = \{g, h, i, j, k, l\}$:

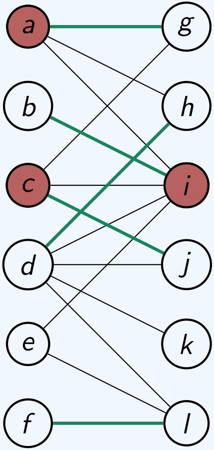


2. Konstruieren eines Vertex Covers U:
Für jede Kante $\{a, b\} \in M$ mit $a \in A$ und $b \in B$ fügen wir b zu U hinzu, falls ein alternierender Pfad in b endet, ansonsten fügen wir a zu U hinzu.

- $U = \{a\}$
- $U = \{a, i\}$

Satz von König: Beweis

Beispielgraph G mit $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ und $B = \{g, h, i, j, k, l\}$:

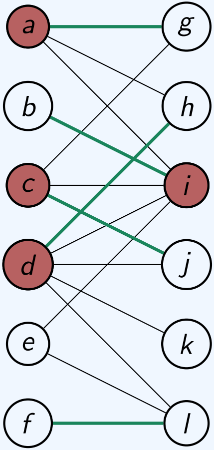


2. Konstruieren eines Vertex Covers U:
Für jede Kante $\{a, b\} \in M$ mit $a \in A$ und $b \in B$ fügen wir b zu U hinzu, falls ein alternierender Pfad in b endet, ansonsten fügen wir a zu U hinzu.

- $U = \{a\}$
- $U = \{a, i\}$
- $U = \{a, i, c\}$

Satz von König: Beweis

Beispielgraph G mit
$A = \{a, b, c, d, e, f\}$ und
$B = \{g, h, i, j, k, l\}$:



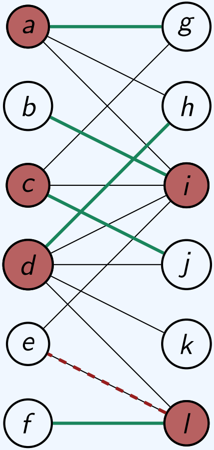
2. Konstruieren eines Vertex Covers U:

Für jede Kante $\{a, b\} \in M$ mit $a \in A$ und $b \in B$ fügen wir b zu U hinzu, falls ein alternierender Pfad in b endet, ansonsten fügen wir a zu U hinzu.

- $U = \{a\}$
- $U = \{a, i\}$
- $U = \{a, i, c\}$
- $U = \{a, i, c, d\}$

Satz von König: Beweis

Beispielgraph G mit $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ und $B = \{g, h, i, j, k, l\}$:



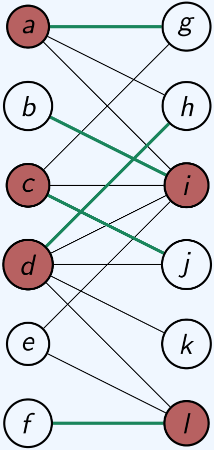
2. Konstruieren eines Vertex Covers U:

Für jede Kante $\{a, b\} \in M$ mit $a \in A$ und $b \in B$ fügen wir b zu U hinzu, falls ein alternierender Pfad in b endet, ansonsten fügen wir a zu U hinzu.

- $U = \{a\}$
- $U = \{a, i\}$
- $U = \{a, i, c\}$
- $U = \{a, i, c, d\}$
- $U = \{a, i, c, d, l\}$

Satz von König: Beweis

Beispielgraph G mit $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ und $B = \{g, h, i, j, k, l\}$:



2. Konstruieren eines Vertex Covers U:

Für jede Kante $\{a, b\} \in M$ mit $a \in A$ und $b \in B$ fügen wir b zu U hinzu, falls ein alternierender Pfad in b endet, ansonsten fügen wir a zu U hinzu.

- $U = \{a\}$
- $U = \{a, i\}$
- $U = \{a, i, c\}$
- $U = \{a, i, c, d\}$
- $U = \{a, i, c, d, l\}$

Satz von Hall

Satz von Hall: Aussage

Auch der Satz von Hall beschäftigt sich mit Matchings in bipartiten Graphen, genauer mit der Suche nach einem Matching, das alle Knoten aus einem der bipartiten Teile überdeckt.

Satz von Hall

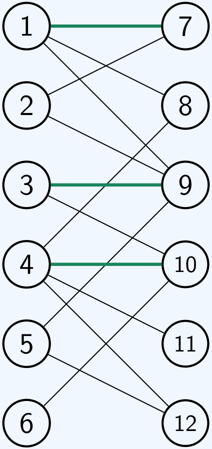
Sei $G = (A \dot{\cup} B, E)$ ein bipartiter Graph. Dann enthält G genau dann ein Matching von A, wenn $|N_G(S)| \geq |S|$ für alle $S \subseteq A$ gilt.

Auch hier ist eine Richtung der Aussage klar. Wenn G ein Matching von A enthält, muss die Nachbarschaft aller Teilmengen von A mindestens so groß wie die Teilmenge sein, da in dieser sonst nicht alle Knoten von einer Kante eines Matchings 'getroffen' werden können.

Das Vorgehen für die schwierige Richtung des Beweises betrachten wir an einem Beispielgraph.

Satz von Hall: Beweis

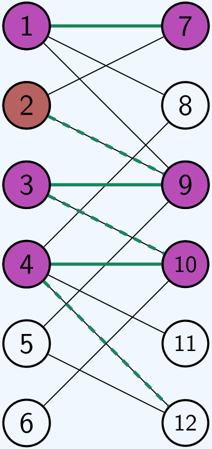
Beispielgraph G mit $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ und $B = \{7,8,9,10,11,12\}$:



In G gilt $|N_G(S)| \geq |S|$ für alle $S \subseteq A$ und $M = \{\{1,7\},\{3,9\},\{4,10\}\}$ ist ein Matching. Wir wollen daraus ein Matching für A konstruieren.
Dafür suchen wir für jeden noch ungematchten Knoten aus A einen alternierenden Pfad, mit dem wir M erweitern können.

Satz von Hall: Beweis

Beispielgraph G mit $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $B = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$:



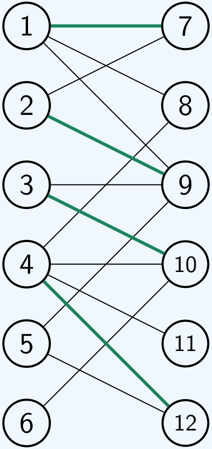
Für $a \in A \setminus V(M)$ gibt es erweiternden Pfad für M in G:
$A' := \{a' \in A \setminus \{a\} \mid$ es gibt alternierenden Pfad P von a zu $a'\}$.
$B' := \{b \in B \mid b$ ist der vorletzte Knoten eines alternierenden Pfades P von a nach $a' \in A'\}$.

Wir finden $b \in B \setminus B'$ und $v \in A' \cup \{a\}$ mit $\{v, b\} \in E$ und damit alternierenden Pfad $P = ab_1 \dots b_l v$ und erweiternden Pfad $P' = ab_1 \dots b_l vb$.

1. Knoten 2 ist noch in keiner Kante des Matchings. Wir setzen $A' := \{1, 3, 4\}$ und $B' := \{7, 9, 10\}$. Wir finden die Kante $\{4, 12\}$, den alternierenden Pfad $2, 9, 3, 10, 4$ und den erweiternden Pfad $2, 9, 3, 10, 4, 12$.

Satz von Hall: Beweis

Beispielgraph G mit $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ und $B = \{7,8,9,10,11,12\}$:



Für $a \in A \setminus V(M)$ gibt es erweiternden Pfad für M in G:
$A' := \{a' \in A \setminus \{a\} \mid$ es gibt alternierenden Pfad P von a zu $a'\}$.
$B' := \{b \in B \mid b$ ist der vorletzte Knoten eines alternierenden Pfades P von a nach $a' \in A'\}$.

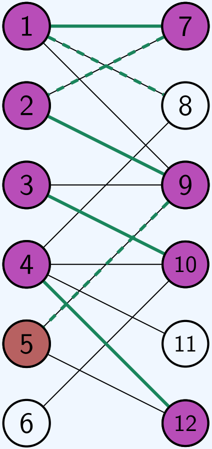
Wir finden $b \in B \setminus B'$ und $v \in A' \cup \{a\}$ mit $\{v,b\} \in E$ und damit alternierenden Pfad $P = ab_1 \dots b_l v$ und erweiternden Pfad $P' = ab_1 \dots b_l vb$.

1. Knoten 2 ist noch in keiner Kante des Matchings. Wir setzen $A' := \{1,3,4\}$ und $B' := \{7,9,10\}$. Wir finden die Kante $\{4,12\}$, den alternierenden Pfad $2,9,3,10,4$ und den erweiternden Pfad $2,9,3,10,4,12$. Dann setzen wir das Matching auf $M := \{\{1,7\},\{2,9\},\{3,10\},\{4,12\}\}$.

Für $a \in A \setminus V(M)$ gibt es erweiternden Pfad für M in G:
$A' := \{a' \in A \setminus \{a\} \mid$ es gibt alternierenden Pfad P von a zu $a'\}$.
$B' := \{b \in B \mid b$ ist der vorletzte Knoten eines alternierenden Pfades P von a nach $a' \in A'\}$.

Wir finden $b \in B \setminus B'$ und $v \in A' \cup \{a\}$ mit $\{v, b\} \in E$ und damit alternierenden Pfad $P = ab_1 \dots b_l v$ und erweiternden Pfad $P' = ab_1 \dots b_l vb$.

Beispielgraph G mit $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ und $B = \{7,8,9,10,11,12\}$:



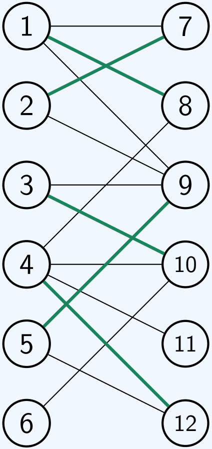
2. Knoten 5 ist noch in keiner Kante des Matchings. Wir setzen $A' := \{1,2,3,4\}$ und $B' := \{7,9,10,12\}$. Wir finden die Kante $\{1,8\}$, den alternierenden Pfad $5,9,2,7,1$ und den erweiternden Pfad $5,9,2,7,1,8$.

Satz von Hall: Bewe

Für $a \in A \setminus V(M)$ gibt es erweiternden Pfad für M in G:
$A' := \{a' \in A \setminus \{a\} \mid$ es gibt alternierenden Pfad P von a zu $a'\}$.
$B' := \{b \in B \mid b$ ist der vorletzte Knoten eines alternierenden Pfades P von a nach $a' \in A'\}$.

Wir finden $b \in B \setminus B'$ und $v \in A' \cup \{a\}$ mit $\{v, b\} \in E$ und damit alternierenden Pfad $P = ab_1 \dots b_l v$ und erweiternden Pfad $P' = ab_1 \dots b_l vb$.

Beispielgraph G mit $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ und $B = \{7,8,9,10,11,12\}$:



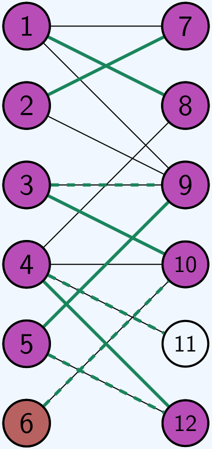
2. Knoten 5 ist noch in keiner Kante des Matchings. Wir setzen $A' := \{1,2,3,4\}$ und $B' := \{7,9,10,12\}$. Wir finden die Kante $\{1,8\}$, den alternierenden Pfad 5, 9, 2, 7, 1 und den erweiternden Pfad 5, 9, 2, 7, 1, 8. Dann setzen wir das Matching auf $M := \{\{1,8\},\{2,7\},\{3,10\},\{4,12\},\{5,9\}\}$.

Satz von Hall: Bew

Für $a \in A \setminus V(M)$ gibt es erweiternden Pfad für M in G:
$A' := \{a' \in A \setminus \{a\} \mid$ es gibt alternierenden Pfad P von a zu $a'\}$.
$B' := \{b \in B \mid b$ ist der vorletzte Knoten eines alternierenden Pfades P von a nach $a' \in A'\}$.

Wir finden $b \in B \setminus B'$ und $v \in A' \cup \{a\}$ mit $\{v, b\} \in E$ und damit alternierenden Pfad $P = ab_1 \dots b_l v$ und erweiternden Pfad $P' = ab_1 \dots b_l vb$.

Beispielgraph G mit $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $B = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$:



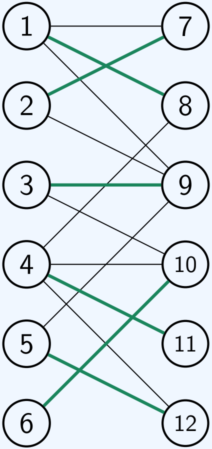
3. Knoten 6 ist noch in keiner Kante des Matchings. Wir setzen $A' := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B' := \{7, 8, 9, 10, 12\}$. Wir finden die Kante $\{4, 11\}$, den alternierenden Pfad $6, 10, 3, 9, 5, 12, 4$ und den erweiternden Pfad $6, 10, 3, 9, 5, 12, 4, 11$.

Satz von Hall: Bew

Für $a \in A \setminus V(M)$ gibt es erweiternden Pfad für M in G:
$A' := \{a' \in A \setminus \{a\} \mid$ es gibt alternierenden Pfad P von a zu $a'\}$.
$B' := \{b \in B \mid b$ ist der vorletzte Knoten eines alternierenden Pfades P von a nach $a' \in A'\}$.

Wir finden $b \in B \setminus B'$ und $v \in A' \cup \{a\}$ mit $\{v, b\} \in E$ und damit alternierenden Pfad $P = ab_1 \dots b_l v$ und erweiternden Pfad $P' = ab_1 \dots b_l vb$.

Beispielgraph G mit $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $B = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$:



3. Knoten 6 ist noch in keiner Kante des Matchings. Wir setzen $A' := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B' := \{7, 8, 9, 10, 12\}$. Wir finden die Kante $\{4, 11\}$, den alternierenden Pfad $6, 10, 3, 9, 5, 12, 4$ und den erweiternden Pfad $6, 10, 3, 9, 5, 12, 4, 11$. Dann setzen wir das Matching auf $M := \{\{1, 8\}, \{2, 7\}, \{3, 9\}, \{4, 11\}, \{5, 12\}, \{6, 10\}\}$.

Feedback, Fragen und Vorschläge zur Großübung gerne an:

a.heindl@tu-berlin.de