Zusatzaufgaben 11

Aufgabe 1: CYK-Algorithmus

Gegeben sei eine Menge Nicht-Terminale $V \triangleq \{ A, B, C, D \}$, ein Alphabet $\Sigma \triangleq \{ a, b \}$, sowie eine CNF-Grammatik $G \triangleq (V, \{ a, b \}, P, S)$ mit

$$
\begin{array}{llcl}
P: & S & \to & AB \mid BA \mid DA \mid b \\
 & A & \to & AC \mid a \\
 & B & \to & b \\
 & C & \to & a \\
 & D & \to & AB
\end{array}
$$

1.a) *Berechne:* Gegeben sei ein Wort $w_1 \triangleq aaba$. Löse mit dem CYK-Algorithmus das Wortproblem: $w_1 \in L(G)$ oder $w_1 \notin L(G)$?

Lösung

$CYK_w(i,j)$	1	2	3	4
1: a	$\{ A, C \}$	$\{ A \}$	$\{ S, D \}$	$\{ S \}$
2: a	$\{ A, C \}$	$\{ S, D \}$	$\{ S \}$	
3: b	$\{ S, B \}$	$\{ S \}$		
4: a	$\{ A, C \}$			

Es gilt also $w_1 \in L(G)$, da $S \in CYK_w(1,4)$.

/Lösung

1.b) *Berechne:* Gegeben sei ein Wort $w_2 \triangleq bba$. Löse mit dem CYK-Algorithmus das Wortproblem: $w_2 \in L(G)$ oder $w_2 \notin L(G)$?

Lösung

$CYK_w(i,j)$	1	2	3
1: b	$\{ S, B \}$	$\emptyset$	$\emptyset$
2: b	$\{ S, B \}$	$\{ S \}$	
3: a	$\{ A, C \}$		

Es gilt also $w_2 \notin L(G)$, da $S \notin CYK_w(1,3)$.

/Lösung

1.c) *Berechne:* Gegeben sei ein Wort $w_3 \triangleq baa$. Löse mit dem CYK-Algorithmus das Wortproblem: $w_3 \in L(G)$ oder $w_3 \notin L(G)$?

Lösung

$CYK_w(i,j)$	1	2	3
1: b	$\{ S, B \}$	$\{ S \}$	$\{ S \}$
2: a	$\{ A, C \}$	$\{ A \}$	
3: a	$\{ A, C \}$		

Es gilt also $w_3 \in L(G)$, da $S \in CYK_w(1,3)$.

/Lösung

Aufgabe 2: Die schöne Seite des kontextfreien Pumping-Lemmas

Sei $\Sigma = \{ a \}$ und $A = \left\{ a^{(n^2)} \in \Sigma^+ \mid n \in \mathbb{N}^+ \right\}$.

2.a) *Beweise* mit Hilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen, dass A nicht kontextfrei ist.

Lösung

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen das Wort $z = a^{(n+1)^2}$ mit $z \in A$ denn $(n+1)^2 \in \mathbb{N}^+$. Sei $z = uvwxy$ eine beliebige Zerlegung mit $|vx| \geqslant 1$ und $|vwx| \leqslant n$. Dann gilt $u = a^i, v = a^j, w = a^l, x = a^m$ und $y = a^{p-i-j-l-m}$ mit $i+j+l+m \leqslant (n+1)^2$, $j+l+m \leqslant n$ und $j+m \geqslant 1$. Wähle k = 0. Dann gilt $uv^0wx^0y = a^{(n+1)^2-j-m}$. Nun gilt wegen $j+l+m \leqslant n$ und $(n+1)^2 - n > n^2$, dass $|a^{(n)^2}| < |a^{(n+1)^2-j-m}|$. Außerdem gilt wegen $j+m \geqslant 1$, dass$|a^{(n+1)^2-j-m}| < |a^{(n+1)^2}|$. Da es kein $q \in \mathbb{N}^+$ mit $|a^{(n)^2}| < |a^{(q)^2}| < |a^{(n+1)^2}|$ gibt, muss gelten $a^{(n+1)^2-j-m} \notin A$.

/Lösung