Schnittebenenverfahren nach Gomory

Grundidee

- Beschneidung des Lösungsraumes durch weitere Schranken, sogenannte Schnittebenen
  - Schnittebenen sind zusätzliche Nebenbedingungen, die von allen zulässigen, ganzzahligen Lösungspunkten erfüllt werden.
  - Momentan optimaler Punkt des linearen Problems wird „abgeschnitten“.
- Es werden solange weitere Schnittebenen hinzugefügt, bis eine zulässige Lösung erreicht ist.

施奈特本文法（Schnittebenenverfahren）是根据戈莫里（Gomory）的方法进行的。

基本思想：

1. 通过添加额外的限制条件，即所谓的切割平面，来削减解空间。
   - 切割平面是额外的约束条件，必须由所有可行的整数解点满足。
   - 目前线性问题的最优点被“切掉”。
2. 继续添加更多的切割平面，直到找到一个可行解。

Ralph E. Gomory

Leben:

- *07.05.1929 (New York City)
- studierte am Williams College, Cambridge University und Princeton University Mathematik
- ehem. Forschungsdirektor und Vizepräsident von IBM
- Professur an der Stern School of Business (NYU)
- Präsident Emeritus der Alfred P. Sloan Foundation

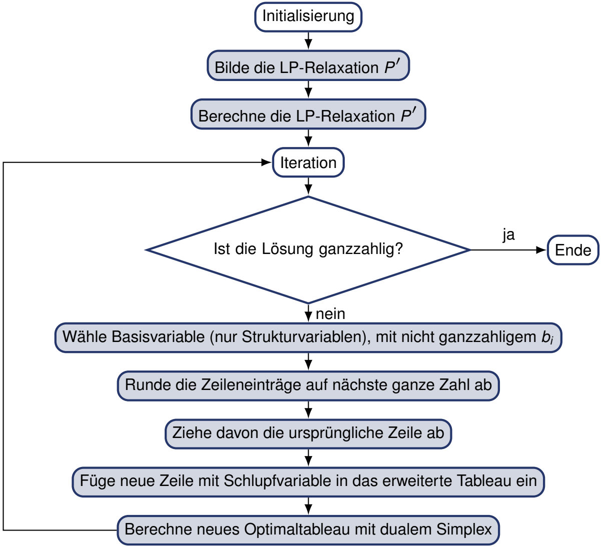
Publikation:

- „Global Trade and Conflicting National Interests“ (2001)

Wirkung:

- Ganzzahlige Optimierung (Schnittebenenverfahren)
- Rucksackproblem, Problem des Handlungssreisenden
- Auszeichnungen: Frederick-W.-Lanchester-Prize (1963), Von Neumann Theory Prize (1984), National Medal of Science (1988)

Schnittebenenverfahren nach Gomory



Produktion von Stühlen und Tischen

Tisch:

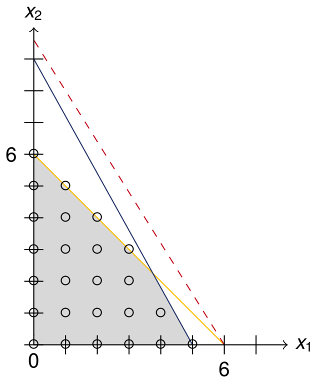
- $1h$ Arbeit
- $9m^2$ Holz
- 8 Euro Erlös

Stuhl:

- $1h$ Arbeit
- $5m^2$ Holz
- 5 Euro Erlös

Momentan verfügbar:

- $6h$ Arbeit
- $45m^2$ Holz

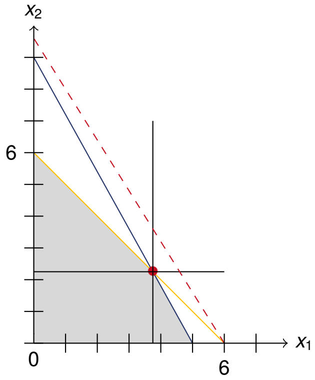


$$
\begin{aligned}
\max z = \quad & 8x_1 + 5x_2 & \\
\text{s.t.} \quad & 1x_1 + 1x_2 & \leq 6 \\
& 9x_1 + 5x_2 & \leq 45 \\
& x_{1,2} & \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

LP-Relaxierung: Entfernung der Ganzzahligkeitsbedingung

Ergebnis der Berechnung (Optimaltableau)

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_2	0	1	2,25	−0,25	2,25
x_1	1	0	−1,25	0,25	3,75
z	0	0	1,25	0,75	41,25



$$\begin{aligned} \max z = \quad & 8x_1 + 5x_2 & \\ \text{s.t.} \quad & 1x_1 + 1x_2 & \leq 6 \\ & 9x_1 + 5x_2 & \leq 45 \\ & x_{1,2} & \geq 0 \end{aligned}$$

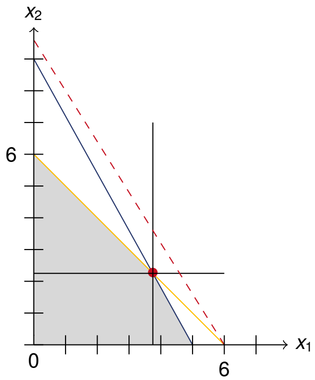
Vorgehensweise

1. Wahl einer nicht ganzzahligen Strukturvariable in der Basis, hier
   $x_2 : 0x_1 + 1x_2 + 2{,}25x_3 - 0{,}25x_4 = 2{,}25$ (I)
2. Abrunden der Koeffizienten in der ausgewählten Zeile:
   $0x_1 + 1x_2 + 2x_3 - 1x_4 \leq 2$ (II)
3. Ziehe davon die ursprüngliche Zeile ab:
   $0x_1 + 0x_2 - 0{,}25x_3 - 0{,}75x_4 \leq -0{,}25$ (II) – (I)
4. Füge neue NB mit Schlupfvariablen in das Tableau:
   $0x_1 + 0x_2 - 0{,}25x_3 - 0{,}75x_4 + x_5 = -0{,}25$
5. Löse das neue Simplex-Tableau mithilfe des Dualen Simplex.

Optimaltableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	$7/3$	0	$-1/3$	$7/3$
x_1	1	0	$4/3$	0	$1/3$	$11/3$
x_4	0	0	$1/3$	1	$-4/3$	$1/3$
z	0	0	1	0	1	41

Vorgehensweise (Ermitteln der Schnittebene)
Um die Schnittebene in die Grafik einzutragen, ist es erforderlich, die neue Schnittebene in Abhängigkeit von Strukturvariablen zu formulieren.
Dies wird in den folgenden Folien für die Schnittebene
$0x_1 + 0x_2 - 0{,}25x_3 - 0{,}75x_4 + x_5 = -0{,}25$ erläutert.



$$\begin{array}{rll} \max z = & 8x_1 + 5x_2 & \\ \text{s.t.} & 1x_1 + 1x_2 & \leq 6 \\ & 9x_1 + 5x_2 & \leq 45 \\ & x_{1,2} & \geq 0 \end{array}$$

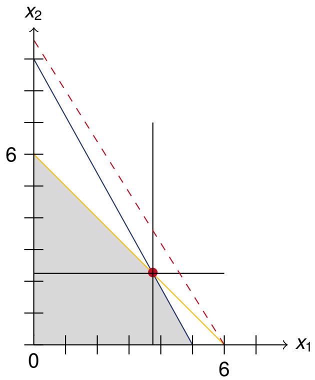
Gomory-Algorithmus: Ermitteln der Schnittebene

Vorgehensweise (Ermitteln der Schnittebene)

1. Stelle die Nebenbedingungen aus der Standardform des Ausgangsproblems nach den Schlupfvariablen um:
   Aus $1x_1 + 1x_2 + x_3 = 6$ folgt: $x_3 = 6 - 1x_1 - 1x_2$
   Aus $9x_1 + 5x_2 + x_4 = 45$ folgt: $x_4 = 45 - 9x_1 - 5x_2$
2. Einsetzen von x_3 und x_4 in die neue Schnittebene (exkl. Schupfvariable x_5):

$$\begin{array}{lll} -0{,}25x_3 & -0{,}75x_4 & \leq -0{,}25 \\ -0{,}25(6 - 1x_1 - 1x_2) & -0{,}75(45 - 9x_1 - 5x_2) & \leq -0{,}25 \end{array}$$

3. Vereinfachen der Ungleichung ergibt: $7x_1 + 4x_2 \leq 35$
4. Diese kann nun in der nebenstehenden Grafik ergänzt werden. (nächste Folie – grün)



$$\begin{array}{lll} \max z = & 8x_1 + 5x_2 & \\ \text{s.t.} & 1x_1 + 1x_2 & \leq 6 \\ & 9x_1 + 5x_2 & \leq 45 \\ & x_{1,2} & \geq 0 \end{array}$$

Gomory-Algorithmus

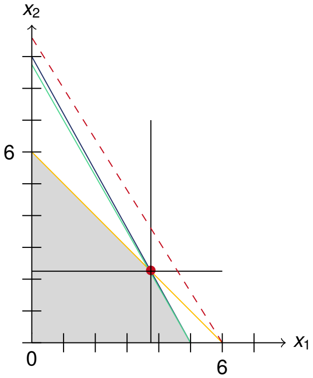
LP-Relaxierung: Entfernung der Ganzzahligkeitsbedingung

Ergebnis der Berechnung (Optimaltableau)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	$7/3$	0	$-1/3$	$7/3$
x_1	1	0	$4/3$	0	$1/3$	$11/3$
x_4	0	0	$1/3$	1	$-4/3$	$1/3$
z	0	0	1	0	1	41

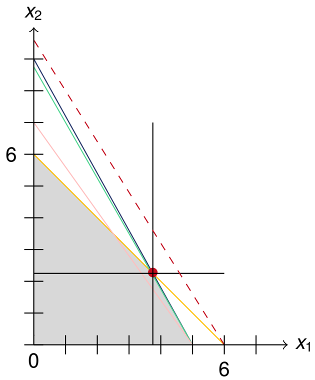
Der Gomory-Algorithmus wird solange wiederholt, bis die gewünschte Ganzzahligkeit der Strukturvariablen erreicht wird.

Eine Wiederholung der vorherigen Schritte ergibt folgende weitere Schnittebene (nächste Folie – pink): $3x_1 + 2x_2 \leq 15$



$$
\begin{array}{lll}
\max z = & 8x_1 + 5x_2 & \\
\text{s.t.} & 1x_1 + 1x_2 & \leq 6 \\
& 9x_1 + 5x_2 & \leq 45 \\
& 7x_1 + 4x_2 & \leq 35 \\
& x_{1,2} & \geq 0
\end{array}
$$

Gomory-Algorithmus: Fortsetzung



Nach mehrfacher Wiederholung des Gomory-Algorithmus ergibt sich folgende Lösung des Problems: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $z = 40$

$$
\begin{array}{lrl}
\max z = & 8x_1 + 5x_2 & \\
\text{s.t.} & 1x_1 + 1x_2 & \leq 6 \\
 & 9x_1 + 5x_2 & \leq 45 \\
 & 7x_1 + 4x_2 & \leq 35 \\
 & 3x_1 + 2x_2 & \leq 15 \\
 & x_{1,2} & \geq 0
\end{array}
$$

Exkurs: Branch-and-Cut-Algorithmus

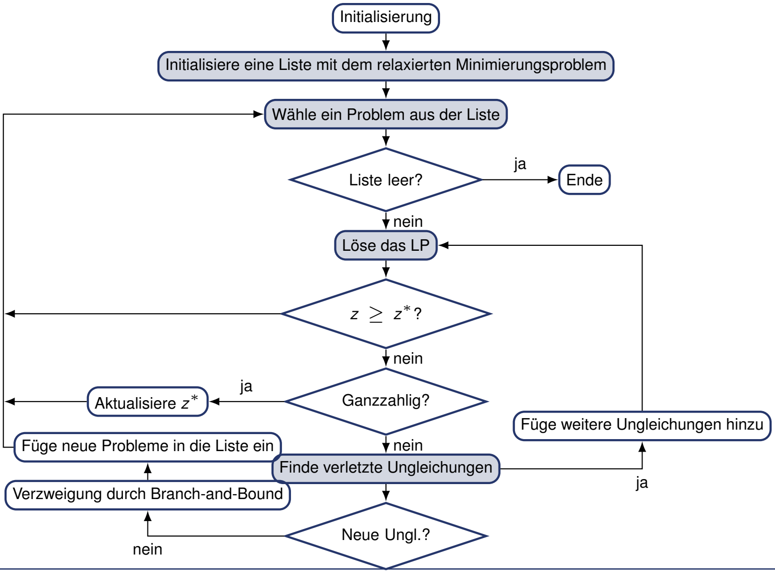
Schnittebenenverfahren (Gomory) und Branch-and-Bound können kombiniert werden. Man spricht dann von Branch-and-Cut.

Verfahren:
Für viele NP-harte Probleme ist der Branch-and-Bound-Ansatz nicht effizient genug. Für solche Probleme bietet das Branch-and-Cut-Verfahren eine Lösungsmöglichkeit. Dieses generiert zusätzliche Schnittebenen in den Teilproblemen des Branch-and-Bound-Baumes, die den (ursprünglichen) zulässigen Lösungsraum weiter beschneiden.

Geschichtlicher Hintergrund:
Während man den Gomory- und Branch-and-Bound-Algorithmus bereits Mitte des 20. Jahrhunderts entwickelte, wurden diese Verfahren erst in den 1980er Jahren zum sogenannten „Branch-and-Cut" kombiniert. Erste Anwendung fand dieses Verfahren in der Untersuchung des "Travelling Salesman Problem (TSP)".

Vorgehensweise:
Beim Branch-and-Cut-Verfahren wird in jedem Knoten überprüft, ob Schnittebenen eingefügt werden können. Ist dies der Fall, so setzt hier das Schnittebenen-Verfahren nach Gomory an: Neue Schnittebenen werden als Restriktionen dem linearen Modell hinzugefügt, welches erneut gelöst wird. Dies wird solange wiederholt, bis das Modell zulässig ist oder keine neuen Schnittebenen mehr gefunden werden können. Ist dies nicht mehr gewährleistet, so folgt wieder ein Verzweigungsschritt durch den Branch-and-Bound-Algorithmus.

Exkurs: Branch-and-Cut-Algorithmus



Modellierung mit binären Variablen

Mit binären Variablen können nicht nur Entscheidungen zum Investment in eine Maschine getroffen werden, sondern es können auch Abhängigkeiten dargestellt werden.

- Fixkosten
- Bedingungen
  - entweder, oder
  - wenn, dann
- BIG muss dazu implementiert werden und beschreibt inhaltlich eine hinreichend große Zahl
  - z. B. bei „entweder, oder“ kann die Variable 0 oder 1 annehmen. Um die Differenz zwischen den beiden Möglichkeiten zu erhöhen, wird BIG als hinreichend große Zahl eingeführt.

使用二进制变量建模

二进制变量不仅可以用于决定是否投资于一台机器，还可以表示依赖关系。

1. 固定成本
2. 条件
   - 要么，要么
   - 如果，那么
3. 必须实现BIG，并且在内容上描述一个足够大的数字
   - 例如，在“要么，要么”情况下，变量可以取0或1。为了增加两种可能性之间的差异，引入BIG作为足够大的数。

Ganzzahlige Optimierung mit Fixkosten – Beispiel

		Tisch	Stuhl	Schrank	Verfügbar
Arbeitszeit	[h/Einheit]	3	2	6	$150h$
Holz	[m^2/Einheit]	4	3	4	$160m^2$
Verkaufspreis	[*Euro*/Einheit]	12	8	15	
Variable Kosten	[*Euro*/Einheit]	6	4	8	

Ziel: Gewinnmaximierung unter Beachtung der genannten Restriktionen

$$\begin{array}{rrl} \max z = & 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 & \\ \text{s.t.} & 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 & \leq 150 \\ & 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 & \leq 160 \\ & x_{1,2,3} & \in \mathbb{N}_0 \end{array}$$

Ganzzahlige Optimierung mit Fixkosten – Beispiel

		Tisch	Stuhl	Schrank	Verfügbar
Arbeitszeit	[h/Einheit]	3	2	6	$150h$
Holz	[m^2/Einheit]	4	3	4	$160m^2$
Verkaufspreis	[*Euro*/Einheit]	12	8	15	
Variable Kosten	[*Euro*/Einheit]	6	4	8	
Fixkosten	[*Euro*]	200	150	100	

$$\begin{array}{rrcrcrrl}
\max z = & 6x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & -200y_1 - 150y_2 - 100y_3 & \\
\text{s.t.} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & & \leq 150 \\
& 4x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & \leq 160 \\
& & & & & & x_{1,2,3} & \in \mathbb{N}_0 \\
& & & & & & y_{1,2,3} & \in \{0,1\}
\end{array}$$

Ganzzahlige Optimierung mit Fixkosten – Beispiel

BIG: hinreichend große Zahl

$$
\begin{array}{rrcrcrrr}
\max z = & 6x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & -200y_1 - 150y_2 - 100y_3 & \\
\text{s.t.} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & & \leq 150 \\
 & 4x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & \leq 160 \\
 & x_1 & & & & & & \leq BIG \cdot y_1 \\
 & & & x_2 & & & & \leq BIG \cdot y_2 \\
 & & & & & x_3 & & \leq BIG \cdot y_3 \\
 & & & & & & x_{1,2,3} & \in \mathbb{N}_0 \\
 & & & & & & y_{1,2,3} & \in \{0,1\}
\end{array}
$$

BIG: hinreichend große Zahl

$$
\begin{array}{rccccccr}
\max z = & 6x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & -200y_1 - 150y_2 - 100y_3 & \\
\text{s.t.} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & & \leq 150 \\
& 4x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & \leq 160 \\
& x_1 & & & & & & \leq BIG \cdot y_1 \\
& & & x_2 & & & & \leq BIG \cdot y_2 \\
& & & & & x_3 & & \leq BIG \cdot y_3 \\
& & & & & & x_{1,2,3} & \in \mathbb{N}_0 \\
& & & & & & y_{1,2,3} & \in \{0,1\}
\end{array}
$$

Soll $x_i \geq 0$ sein, so muss y_i den Wert 1 annehmen.

- Wenn Tische x_1 produziert werden, muss die entsprechende Miete für die Werkzeuge y_1 entrichtet werden.

Sollte $x_i = 0$ sein, so kann y_i die Werte 0 und 1 annehmen. Da $y_i = 1$ allerdings den Gewinn schmälert wird im Optimum der Wert $y_i = 0$ angenommen.

如果 xi ≥ 0，则必须取 yi 值为1。

如果生产桌子 x1，则必须支付相应的工具租金 y1。

如果 xi = 0，则 yi 可以取值0或1。然而，由于 yi = 1 会减少利润，在最优情况下将取值 yi = 0。

Entweder ... oder

Modifikation des Ausgangsproblems

- Wenn Tische produziert werden, dann mindestens 25
- Wenn Stühle produziert werden, dann mindestens 26
- Wenn Schränke produziert werden, dann mindestens 27

Entweder ... oder

Modifikation des Ausgangsproblems

- Wenn Tische produziert werden, dann mindestens 25
  - Entweder $x_1 \leq 0$ oder $x_1 \geq 25$
- Wenn Stühle produziert werden, dann mindestens 26
  - Entweder $x_2 \leq 0$ oder $x_2 \geq 26$
- Wenn Schränke produziert werden, dann mindestens 27
  - Entweder $x_3 \leq 0$ oder $x_3 \geq 27$

Allgemein:

- Es existieren zwei Nebenbedingungen $g(x) \leq 0$ und $f(x) \leq 0$.
- Mindestens eine der beiden Nebenbedingungen soll erfüllt sein.

Dies lässt sich durch Variation der beiden Nebenbedingungen wie folgt modellieren:

$$f(x_i) \leq BIG \cdot y_i$$
$$g(x_i) \leq BIG \cdot (1 - y_i)$$

Entweder ... oder

Modifikation des Ausgangsproblems

- Wenn Tische produziert werden, dann mindestens 25
  - Entweder $x_1 \leq 0$ oder $x_1 \geq 25$

$$25 - x_1 \leq BIG \cdot (1 - y_1)$$
$$x_1 \leq BIG \cdot y_1$$

- Wenn Stühle produziert werden, dann mindestens 26
  - Entweder $x_2 \leq 0$ oder $x_2 \geq 26$

$$26 - x_2 \leq BIG \cdot (1 - y_2)$$
$$x_2 \leq BIG \cdot y_2$$

- Wenn Schränke produziert werden, dann mindestens 27
  - Entweder $x_3 \leq 0$ oder $x_3 \geq 27$

$$27 - x_3 \leq BIG \cdot (1 - y_3)$$
$$x_3 \leq BIG \cdot y_3$$

Modifikation des Ausgangsproblems

Mit den neuen Nebenbedingungen sieht das Problem dann so aus:

$$
\begin{array}{rccccl}
\max z = & 6x_1 & +4x_2 & +7x_3 & -200y_1 - 150y_2 - 100y_3 & \\
\text{s.t.} & 3x_1 & +2x_2 & +6x_3 & & \leq 150 \\
 & 4x_1 & +3x_2 & +4x_3 & & \leq 160 \\
 & x_1 & & & & \leq BIG \cdot y_1 \\
 & & x_2 & & & \leq BIG \cdot y_2 \\
 & & & x_3 & & \leq BIG \cdot y_3 \\
25 & -x_1 & & & & \leq BIG \cdot (1 - y_1) \\
26 & & -x_2 & & & \leq BIG \cdot (1 - y_2) \\
27 & & & -x_3 & & \leq BIG \cdot (1 - y_3) \\
 & & & & x_{1,2,3} & \in \mathbb{N}_0 \\
 & & & & y_{1,2,3} & \in \{0,1\}
\end{array}
$$

Wenn ... dann

Modifikation des Ausgangsproblems

- Wenn die Summe der produzierten Stühle und Schränke 24 Einheiten übersteigt, müssen mindestens 30 Tische hergestellt werden:
  - Wenn $x_2 + x_3 > 24$ dann $x_1 \geq 30$

Wenn ... dann

Modifikation des Ausgangsproblems

- Wenn die Summe der produzierten Stühle und Schränke 24 Einheiten übersteigt, müssen mindestens 30 Tische hergestellt werden:
  - Wenn $x_2 + x_3 > 24$ dann $x_1 \geq 30$

Allgemein:

- Wenn $f(x) > 0$ dann $g(x) \geq 0$.

Dies lässt sich durch Variation der beiden Nebenbedingungen wie folgt modellieren:

$$
\begin{aligned}
f(x) &\leq BIG \cdot (1 - q) \\
-g(x) &\leq BIG \cdot (q)
\end{aligned}
$$

Modifikation des Ausgangsproblems

- Wenn die Summe der produzierten Stühle und Schränke 24 Einheiten übersteigt, müssen mindestens 30 Tische hergestellt werden:
  - Wenn $x_2 + x_3 > 24$ dann $x_1 \geq 30$

$$x_2 + x_3 - 24 \leq BIG \cdot (1 - q)$$
$$-x_1 + 30 \leq BIG \cdot q$$

$$q = \begin{cases} 1, & \text{falls die Summe von } x_2 \text{ und } x_3 \text{ 24 Einheiten nicht übersteigt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Allgemein:

- Wenn $f(x) > 0$ dann $g(x) \geq 0$.

Dies lässt sich durch Variation der beiden Nebenbedingungen wie folgt modellieren:

$$f(x) \leq BIG \cdot (1 - q)$$
$$-g(x) \leq BIG \cdot (q)$$

Rucksack-Problem

Aus einer Menge von unteilbaren Objekten, die jeweils ein spezifisches Gewicht oder Volumen und Nutzen haben, sollen diejenigen Kombination an Objekten ausgewählt werden, deren Gesamtgewicht oder Gesamtvolumen eine vorgegebene Beschränkung nicht überschreitet und dennoch den maximalen Nutzen stiftet.

Das Rucksackproblem ist also ein binäres Problem. Die Elemente des Lösungsvektors dürfen nur der Menge $\{0,1\}$ entstammen. Es handelt sich um ein LP-Problem mit nur einer Restriktion.

背包问题

从一组不可分割的物品中选择物品组合，每个物品都有特定的重量或体积和价值，使得选定的物品组合的总重量或总体积不超过预先设定的限制，同时实现最大化的总价值。

因此，背包问题是一个二进制问题。解向量的元素只能来自集合{0,1}。这是一个只有一个限制条件的线性规划问题。

Rucksack-Problem – Beispiel

Max hat einen Rucksack mit einem Fassungsvermögen von 19 Litern und möchte einen Sommerausflug unternehmen. Folgende Gegenstände möchte er gerne mitnehmen:

Gegenstand	Kosten	Nutzen
Ziegelsteine	6	1
Zelt	7	3
Flasche Bier	4	2
Mückenschutz	2	5
Grill	9	4

$$\begin{aligned} \max z = 1x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 4x_5 & \\ \text{s.t.} \quad 6x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 9x_5 &\leq 19 \\ x_{1,\dots,5} &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

Rucksack-Problem – Beispiel

Max hat einen Rucksack mit einem Fassungsvermögen von 19 Litern und möchte einen Sommerausflug unternehmen. Folgende Gegenstände möchte er gerne mitnehmen:

Gegenstand	Kosten	Nutzen	Nutzen/Kosten	Rang
Ziegelsteine	6	1	0,16	5
Zelt	7	3	0,43	4
Flasche Bier	4	2	0,50	2
Mückenschutz	2	5	2,50	1
Grill	9	4	0,44	3

$$\begin{aligned} \max z = 1x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 4x_5 & \\ \text{s.t.} \quad 6x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 9x_5 & \leq 19 \\ x_{1,\dots,5} & \in \{0,1\} \end{aligned}$$

Rucksack-Problem – Beispiel

Max hat einen Rucksack mit einem Fassungsvermögen von 19 Litern und möchte einen Sommerausflug unternehmen. Folgende Gegenstände möchte er gerne mitnehmen:

Gegenstand	Kosten	Nutzen	Nutzen/Kosten	Rang
Ziegelsteine	6	1	0,16	5
Zelt	7	3	0,43	4
Flasche Bier	4	2	0,50	2
Mückenschutz	2	5	2,50	1
Grill	9	4	0,44	3
Heuristik	15	11		

$$\begin{aligned} \max z = 1x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 4x_5 \\ \text{s.t.} \quad 6x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 9x_5 \leq 19 \\ x_{1,\dots,5} \in \{0,1\} \end{aligned}$$

Rucksack-Problem – Beispiel

x_4	5	2
x_3	2	4
x_5	4	9
x_2	3	7
x_1	1	6
z		

Rucksack-Problem – Beispiel

	N	K	P_0 x_i	$\sum_K$	P_1	P_2	P_{21}	P_{22}	P_{221}	P_{222}	P_{2211}	P_{2212}
x_4	5	2	1	2								
x_3	2	4	1	6								
x_5	4	9	1	15								
x_2	3	7	4/7	19								
x_1	1	6	0	—								
z			12,71		11,67	12,67	11	12,5	12,17	—	12	—

Rucksack-Problem – Beispiel

			P_0		P_1		P_2	P_{21}	P_{22}	P_{221}	P_{222}	P_{2211}	P_{2212}
	N	K	x_i	$\sum_K$	x_i	$\sum_K$							
x_4	5	2	1	2	1	2							
x_3	2	4	1	6	1	6							
x_5	4	9	1	15	1	15							
x_2	3	7	4/7	19	0	0							
x_1	1	6	0	—	2/3	19							
z			12,71		11,67		12,67	11	12,5	12,17	—	12	—

Rucksack-Problem – Beispiel

	N	K	P_0 x_i	P_0 $\sum_K$	P_1 x_i	P_1 $\sum_K$	P_2 x_i	P_2 $\sum_K$	P_{21}	P_{22}	P_{221}	P_{222}	P_{2211}	P_{2212}
x_4	5	2	1	2	1	2	1	9						
x_3	2	4	1	6	1	6	1	13						
x_5	4	9	1	15	1	15	2/3	19						
x_2	3	7	4/7	19	0	0	1	7						
x_1	1	6	0	—	2/3	19	0	—						
z			12,71		11,67		12,67		11	12,5	12,17	—	12	—

Rucksack-Problem – Beispiel

			P_0		P_1		P_2		P_{21}		P_{22}	P_{221}	P_{222}	P_{2211}	P_{2212}
	N	K	x_i	$\sum_K$	x_i	$\sum_K$	x_i	$\sum_K$	x_i	$\sum_K$					
x_4	5	2	1	2	1	2	1	9	1	9					
x_3	2	4	1	6	1	6	1	13	1	13					
x_5	4	9	1	15	1	15	2/3	19	0	7					
x_2	3	7	4/7	19	0	0	1	7	1	7					
x_1	1	6	0	—	2/3	19	0	—	1	19					
z			12,71		11,67		12,67		11		12,5	12,17	—	12	—

Rucksack-Problem – Beispiel

			P_0		P_1		P_2		P_{21}		P_{22}		P_{221}	P_{222}	P_{2211}	P_{2212}
	N	K	x_i	$\sum K$	x_i	$\sum K$	x_i	$\sum K$	x_i	$\sum K$	x_i	$\sum K$				
x_4	5	2	1	2	1	2	1	9	1	9	1	18				
x_3	2	4	1	6	1	6	1	13	1	13	1/4	19				
x_5	4	9	1	15	1	15	2/3	19	0	7	1	16				
x_2	3	7	4/7	19	0	0	1	7	1	7	1	7				
x_1	1	6	0	—	2/3	19	0	—	1	19	0	—				
z			12,71		11,67		12,67		11		12,5		12,17	—	12	—

Rucksack-Problem – Beispiel

			P_0		P_1		P_2		P_{21}		P_{22}		P_{221}		P_{222}	P_{2211}	P_{2212}
	N	K	x_i	$\sum K$	x_i	$\sum K$	x_i	$\sum K$	x_i	$\sum K$	x_i	$\sum K$	x_i	$\sum K$			
x_4	5	2	1	2	1	2	1	9	1	9	1	18	1	18			
x_3	2	4	1	6	1	6	1	13	1	13	1/4	19	0	16			
x_5	4	9	1	15	1	15	2/3	19	0	7	1	16	1	16			
x_2	3	7	4/7	19	0	0	1	7	1	7	1	7	1	7			
x_1	1	6	0	—	2/3	19	0	—	1	19	0	—	1/6	19			
z			12,71		11,67		12,67		11		12,5		12,17		—	12	—

Rucksack-Problem – Beispiel

			P_0		P_1		P_2		P_{21}		P_{22}		P_{221}		P_{222}		P_{2211}	P_{2212}
	N	K	x_i	$\sum_K$	x_i	$\sum_K$	x_i	$\sum_K$	x_i	$\sum_K$	x_i	$\sum_K$	x_i	$\sum_K$	x_i	$\sum_K$		
x_4	5	2	1	2	1	2	1	9	1	9	1	18	1	18	0	—		
x_3	2	4	1	6	1	6	1	13	1	13	1/4	19	0	16	1	20		
x_5	4	9	1	15	1	15	2/3	19	0	7	1	16	1	16	1	16		
x_2	3	7	4/7	19	0	0	1	7	1	7	1	7	1	7	1	7		
x_1	1	6	0	—	2/3	19	0	—	1	19	0	—	1/6	19	0	—		
z			12,71		11,67		12,67		11		12,5		12,17		—		12	—

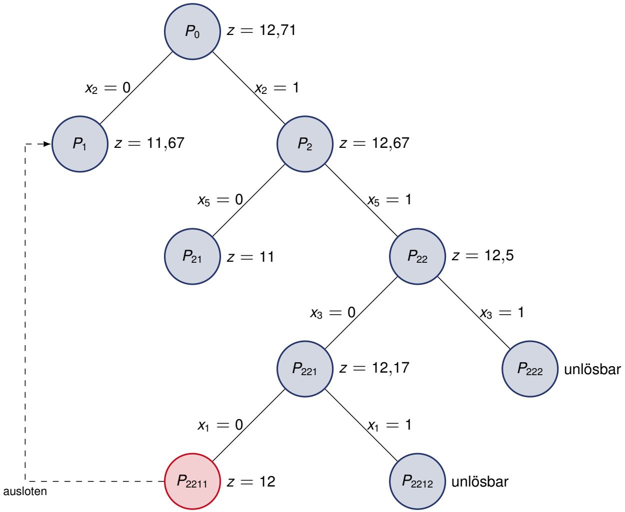
Rucksack-Problem – Beispiel

	N	K	P_0		P_1		P_2		P_{21}		P_{22}		P_{221}		P_{222}		P_{2211}		P_{2212}
			x_i	$\sum_K$	x_i	$\sum_K$	x_i	$\sum_K$	x_i	$\sum_K$	x_i	$\sum_K$	x_i	$\sum_K$	x_i	$\sum_K$	x_i	$\sum_K$	
x_4	5	2	1	2	1	2	1	9	1	9	1	18	1	18	0	—	1	18	
x_3	2	4	1	6	1	6	1	13	1	13	1/4	19	0	16	1	20	0	16	
x_5	4	9	1	15	1	15	2/3	19	0	7	1	16	1	16	1	16	1	16	
x_2	3	7	4/7	19	0	0	1	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1	7	
x_1	1	6	0	—	2/3	19	0	—	1	19	0	—	1/6	19	0	—	0	16	
z			12,71		11,67		12,67		11		12,5		12,17		—		12		—

Rucksack-Problem – Beispiel

			P_0		P_1		P_2		P_{21}		P_{22}		P_{221}		P_{222}		P_{2211}		P_{2212}	
	N	K	x_i	$\sum K$	x_i	$\sum K$	x_i	$\sum K$	x_i	$\sum K$	x_i	$\sum K$	x_i	$\sum K$	x_i	$\sum K$	x_i	$\sum K$	x_i	$\sum K$
x_4	5	2	1	2	1	2	1	9	1	9	1	18	1	18	0	—	1	18	0	—
x_3	2	4	1	6	1	6	1	13	1	13	1/4	19	0	16	1	20	0	16	0	16
x_5	4	9	1	15	1	15	2/3	19	0	7	1	16	1	16	1	16	1	16	1	16
x_2	3	7	4/7	19	0	0	1	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1	7
x_1	1	6	0	—	2/3	19	0	—	1	19	0	—	1/6	19	0	—	0	16	1	22
z			12,71		11,67		12,67		11		12,5		12,17		—		12		—	

Rucksack-Problem – Beispiel



Max sondiert den Telefonmarkt: Drei verschiedene Gesellschaften bieten Ferngespräche zu den untenstehenden Preisen an. Annahmen:

- Im Monat werden mindestens 200 Minuten Ferngespräche geführt.
- Diese Zeit kann beliebig auf die drei Anbieter aufgeteilt werden.
- Die Grundgebühr muss nur bezahlt werden, wenn auch ein Anruf erfolgt.

Wie kann Max seine Ferngespräche optimal auf die Anbieter verteilen?

	Grundgebühr [Euro]	Variable Kosten [Euro/min]
MaBell	16	0,25
PaBell	25	0,21
BabyBell	18	0,22

Max进行电话市场调查：三家不同的公司提供以下价格的长途通话。假设：

- 每月至少进行200分钟长途通话。
- 这些时间可以随意分配给三家供应商。
- 只有当进行通话时才需要支付基本费用。

Max如何将他的长途通话最优地分配给这些供应商呢?

Gemischtganzzahlige Optimierung – Beispiel

$$\begin{array}{lccccr}
\min z = & 0{,}25x_1 & +0{,}21x_2 & +0{,}22x_3 & +16x_4 + 25x_5 + 18x_6 & \\
\text{s.t.} & x_1 & +x_2 & +x_3 & & \geq 200 \\
& x_1 & & & & \leq BIG \cdot x_4 \\
& & x_2 & & & \leq BIG \cdot x_5 \\
& & & x_3 & & \leq BIG \cdot x_6 \\
& & & & x_{1,2,3} & \geq 0 \\
& & & & x_{4,5,6} & \in \{0,1\}
\end{array}$$

- Hier: BIG = 1000
- Branch-and-Bound anwenden
- Dabei sind nur die Variablen $x_{4,5,6}$ zu verzweigen.

Gemischtganzzahlige Optimierung – Beispiel