Agenda

2. Lineare Optimierung

Sensitivitätsanalyse

Bisher

- ▶ Suchen einer Optimallösung unter der Annahme bestimmter Inputdaten

Realität

- ▶ Koeffizienten aus Beobachtungen, “Messungen“ unsicher
- ▶ Koeffizienten aus Prognosen unsicher
- ▶ Koeffizienten aus Verfügbarkeitsannahmen änderbar
- ▶ Koeffizienten unterliegen Schwankungen
  - ▷ Kosten
  - ▷ Margen
  - ▷ Angebot
  - ▷ Nachfrage

Problem

- ▶ Das Aufstellen und Lösen eines LPs mit verschiedenen Parametern führt bei großen Modellen zu einem unangemessenen Aufwand

敏感性分析

过去

- ▶ 在假定特定输入数据的情况下寻找最佳解决方案

现实

- ▶ 系数来自观察，"测量"不确定 ▶ 系数来自预测不确定
- ▶ 系数来自可用性假设可更改
- ▶ 系数受波动影响
  - ▷ 成本
  - ▷ 利润率
  - ▷ 供应 ▷ 需求

问题

- ▶ 在大型模型中，使用不同参数制定和解决线性规划问题会导致不必要的麻烦

Definition

Das Testen einer optimalen Lösung eines linearen Programms bzgl. einer Veränderung der Eingabedaten bezeichnet man als **Sensitivitäts-** oder **Sensibilitätsanalyse**.

Vorgehensweise

(1) Lösung des LPs mit bestmöglich geschätzten Parametern

(2) Betrachtung der Eingabedaten

- ▷ Zielfunktionskoeffizienten c_j
- ▷ rechte Seiten der Nebenbedingungen b_i
- ▷ Koeffizienten der Nebenbedingungen a_{ij}

定义
对线性规划的最优解进行测试，以考察输入数据变化的过程被称为敏感性分析或灵敏度分析。

步骤
(1) 使用最佳估计的参数解决线性规划问题
(2) 考虑输入数据
▷ 目标函数系数 cj
▷ 约束条件右侧 bi ▷ 约束条件系数 aij
▶ 通过敏感性分析，可以相对轻松地了解解的稳定性。它检查单个参数可以变化到什么程度，而不会对解的质量产生影响。在此过程中，所有其他大小都保持不变。
▶ 如果基本变量和非基本变量的结构发生变化，即原来的非基本变量变为基本变量，反之亦然，则存在质的变化。

- ▶ Mit der Sensitivitätsanalyse lässt sich mit verhältnismäßig geringem Aufwand ein Eindruck von der Stabilität der Lösung gewinnen. Es wird überprüft, inwieweit sich einzelne Parameter ändern dürfen, ohne dass sich an der Lösung etwas qualitativ ändert. Dabei werden alle anderen Größen konstant gehalten.
- ▶ Eine qualitative Änderung liegt dann vor, wenn sich die Struktur von Basis- und Nicht-Basisvariablen ändert, d. h. eine bisherige Nicht-Basisvariable Basisvariable wird und vice versa.

Sensitivitätsanalyse

Annahmen

- Lineares Problem
  - Maximierung
  - Strukturvariablen $x_1, \ldots, x_p$
  - Schlupfvariablen $x_{p+1}, \ldots, x_{p+m}$
- Es liegt keine Degeneration vor

Bezeichnung der Koeffizienten im optimalen Simplextableau

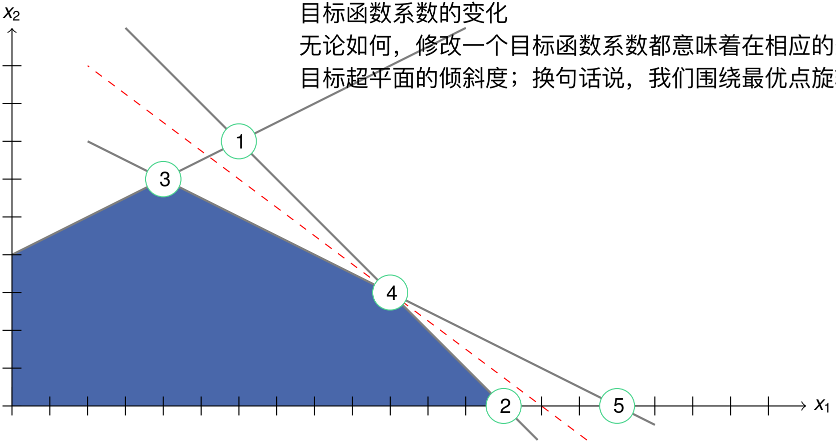
- c_j^*
- b_i^*
- a_{ij}^*

Änderung von Zielfunktionskoeffizienten

Die Modifikation eines Zielfunktionskoeffizienten heißt in jedem Fall, die Neigung der Zielhyperebene in entsprechender Koordinatenrichtung zu ändern; man dreht also die Zielebene um den optimalen Punkt.

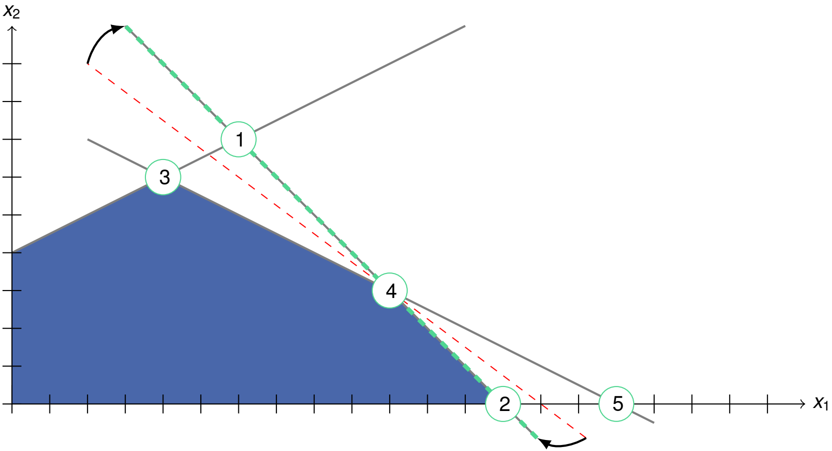
目标函数系数的变化

无论如何，修改一个目标函数系数都意味着在相应的坐标方向上改变目标超平面的倾斜度；换句话说，我们围绕最优点旋转目标平面。



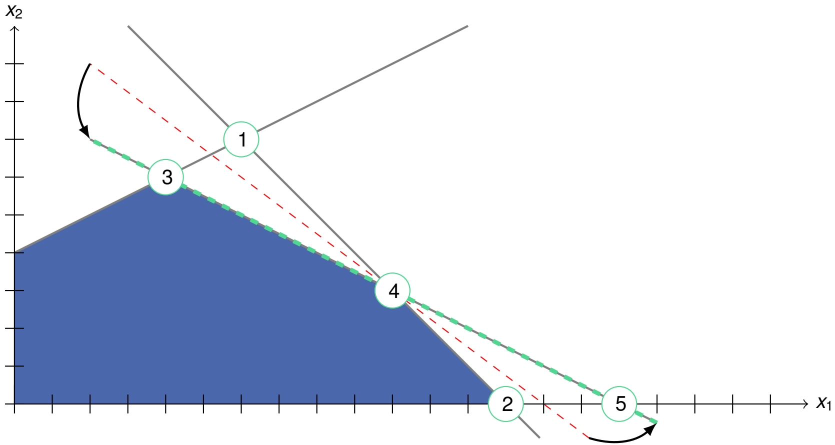
Änderung von Zielfunktionskoeffizienten

Die Modifikation eines Zielfunktionskoeffizienten heißt in jedem Fall, die Neigung der Zielhyperebene in entsprechender Koordinatenrichtung zu ändern; man dreht also die Zielebene um den optimalen Punkt.

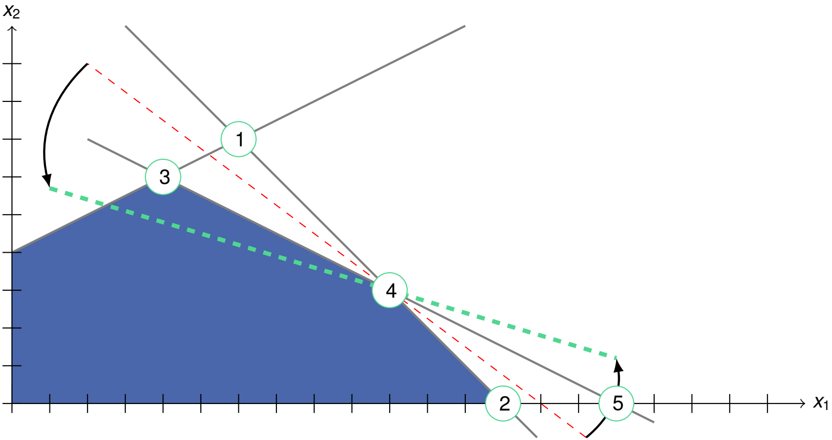


Änderung von Zielfunktionskoeffizienten

Die Modifikation eines Zielfunktionskoeffizienten heißt in jedem Fall, die Neigung der Zielhyperebene in entsprechender Koordinatenrichtung zu ändern; man dreht also die Zielebene um den optimalen Punkt.

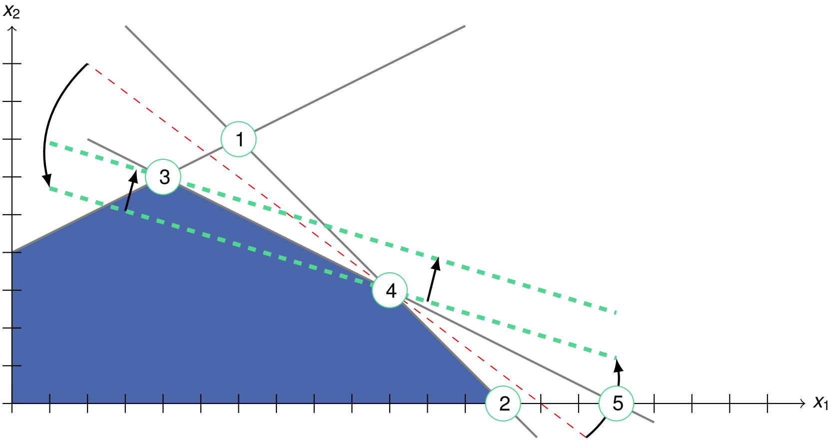


Die Modifikation eines Zielfunktionskoeffizienten heißt in jedem Fall, die Neigung der Zielhyperebene in entsprechender Koordinatenrichtung zu ändern; man dreht also die Zielebene um den optimalen Punkt.



Änderung von Zielfunktionskoeffizienten

Die Modifikation eines Zielfunktionskoeffizienten heißt in jedem Fall, die Neigung der Zielhyperebene in entsprechender Koordinatenrichtung zu ändern; man dreht also die Zielebene um den optimalen Punkt.



Änderung von Zielfunktionskoeffizienten

Fragestellung

- In welchem Bereich $[c_k - c_k^-; c_k + c_k^+]$ kann der Zielfunktionskoeffizient c_k der Variable x_k geändert werden, ohne dass die optimale Basislösung ihre Optimalität verliert?

Unterscheidung, ob x_k Basis- oder Nichtbasisvariable der Optimallösung ist

- Nichtbasisvariable
  - $c_k^- = \infty$, da eine Verminderung des Nutzens von x_k (bei Maximierung) nicht zu einer Aufnahme in die Basis führen kann.
  - $c_k^+ = c_k^*$, da bei einem größeren Wert die Opportunitätskosten von x_k n tuelle Lösung nicht mehr optimal.
- Basisvariable
  - $c_k^- = \infty$, falls alle a_{kj}^* mit $j \neq k$ nicht-positiv sind, sonst
  - $c_k^- = \min \frac{c_j^*}{a_{kj}^*}$ mit $j \neq k$ für positive a_{kj}^*
  - $c_k^+ = \infty$, falls alle a_{kj}^* mit $j \neq k$ nicht-negativ sind, sonst
  - $c_k^+ = \min -\frac{c_j^*}{a_{kj}^*}$ mit $j \neq k$ für negative a_{kj}^*

这张图片上是有关线性规划中目标函数系数变化的内容。在优化问题中，经常需要考虑目标函数的系数变化对最优解的影响。图片中的内容是在讲解目标函数系数 c_k 的变化范围 $[c_k^-; c_k^+]$ 对于一个线性规划问题中的变量 x_k 的影响，不会导致当前的最优解失效的情况。

这里解释了两种情况：当 x_k 是基变量和非基变量时，目标函数系数的变化对最优性的影响。

非基变量的情况：

- $c_k^- = \infty$，意味着 x_k 的目标函数系数可以无限减小而不会被引入到基中（因为在最大化问题中，这会导致 x_k 的边际收益下降到负无穷，所以不会选择这个变量进入基）。
- $c_k^+ = c_k^*$，表示当目标函数系数增加到某个点时，x_k 将不再是最优的，因为增加会导致它的机会成本变成负的，从而会被引入到基中。

基变量的情况：

- $c_k^- = \infty$，如果所有与 x_k 相关的 a_{kj}^*（从对偶问题中来）是非正的。
- $c_k^- = \min \frac{c_j^*}{a_{kj}^*}$，对于所有正的 a_{kj}^* 和 $j \neq k$，这表示 x_k 的目标函数系数可以减少多少而不影响当前的最优解。
- $c_k^+ = \infty$，如果所有与 x_k 相关的 a_{kj}^*（从对偶问题中来）是非负的。
- $c_k^+ = \min -\frac{c_j^*}{a_{kj}^*}$，对于所有负的 a_{kj}^* 和 $j \neq k$，这表示 x_k 的目标函数系数可以增加多少而不影响当前的最优解。

Sensitivitätsanalyse – Beispielproblem

$$
\begin{array}{rrcrcrl}
\max z = & 100x_1 & + & 50x_2 & + & 40x_3 & \\
\text{s.t.} & 8x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq 480 \\
& 5x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & \leq 350 \\
& x_1 & & & & & \leq 40 \\
& & & x_2 & & & \leq 90 \\
& & & & & x_3 & \leq 300 \\
& & & & & x_{1,2,3} & \geq 0
\end{array}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_i
x_4	0	0	$-27/5$	1	$-8/5$	0	$6/5$	0	28
x_2	0	1	0	0	0	0	1	0	90
x_1	1	0	$4/5$	0	$1/5$	0	$-2/5$	0	34
x_6	0	0	$-4/5$	0	$-1/5$	1	$2/5$	0	6
x_8	0	0	1	0	0	0	0	1	300
z	0	0	40	0	20	0	10	0	7900

Änderung der Zielfunktionskoeffizienten

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_i
x_4	0	0	$-27/5$	1	$-8/5$	0	$6/5$	0	28
x_2	0	1	0	0	0	0	1	0	90
x_1	1	0	$4/5$	0	$1/5$	0	$-2/5$	0	34
x_6	0	0	$-4/5$	0	$-1/5$	1	$2/5$	0	6
x_8	0	0	1	0	0	0	0	1	300
z	0	0	40	0	20	0	10	0	7900

- Um die Intervalle $[c_k - c_k^-; c_k + c_k^+]$ der Sensitivitätsanalyse zu berechnen, müssen c_k, c_k^+ und c_k^- bestimmt werden.
- Für die Sensitivitätsanalyse der Zielfunktionskoeffizienten wird zwischen Basis- und Nichtbasisvariablen in der Optimallösung unterschieden.
- Aus dem Optimaltableau lässt sich ablesen, dass x_1, x_2, x_4, x_6 und x_8 Basisvariablen und x_3, x_5 und x_7 Nichtbasisvariablen sind.

Änderung der Zielfunktionskoeffizienten – Nichtbasisvariablen

- Zunächst betrachten wir den Zielfunktionskoeffizienten von x_3, dieser heißt c_3.

Änderung der Zielfunktionskoeffizienten – Nichtbasisvariablen

- Zunächst betrachten wir den Zielfunktionskoeffizienten von x_3, dieser heißt c_3.
- Der Ausgangswert des Zielfunktionskoeffizienten ist 40, somit ist $c_3 = 40$.

Änderung der Zielfunktionskoeffizienten – Nichtbasisvariablen

- Zunächst betrachten wir den Zielfunktionskoeffizienten von x_3, dieser heißt c_3.
- Der Ausgangswert des Zielfunktionskoeffizienten ist 40, somit ist $c_3 = 40$.
- Da x_3 eine Nichtbasisvariable ist, müssen die folgenden Regeln angewendet werden: $c_k^- = \infty$ und $c_k^+ = c_k^*$.

$$c_3^- = \infty \qquad\qquad c_3^+ = 40.$$

Änderung der Zielfunktionskoeffizienten – Nichtbasisvariablen

- Zunächst betrachten wir den Zielfunktionskoeffizienten von x_3, dieser heißt c_3.
- Der Ausgangswert des Zielfunktionskoeffizienten ist 40, somit ist $c_3 = 40$.
- Da x_3 eine Nichtbasisvariable ist, müssen die folgenden Regeln angewendet werden: $c_k^- = \infty$ und $c_k^+ = c_k^*$.

$$c_3^- = \infty \qquad\qquad c_3^+ = 40.$$

- Daraus lässt sich das Intervall für c_3 ableiten: $[40 - \infty; 40 + 40] = [-\infty; 80]$.

Änderung der Zielfunktionskoeffizienten – Nichtbasisvariablen

- Zunächst betrachten wir den Zielfunktionskoeffizienten von x_3, dieser heißt c_3.
- Der Ausgangswert des Zielfunktionskoeffizienten ist 40, somit ist $c_3 = 40$.
- Da x_3 eine Nichtbasisvariable ist, müssen die folgenden Regeln angewendet werden: $c_k^- = \infty$ und $c_k^+ = c_k^*$.

$$c_3^- = \infty \qquad\qquad c_3^+ = 40.$$

- Daraus lässt sich das Intervall für c_3 ableiten: $[40 - \infty; 40 + 40] = [-\infty; 80]$.
- Analog lassen sich auch die Intervalle für c_5 und c_7 berechnen.

$$\begin{array}{llll} c_5 = 0 & c_5^- = \infty & c_5^+ = 20 & [0 - \infty; 0 + 20] = [-\infty; 20] \\ c_7 = 0 & c_7^- = \infty & c_7^+ = 10 & [0 - \infty; 0 + 10] = [-\infty; 10] \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_i
x_4	0	0	$-27/5$	1	$-8/5$	0	$6/5$	0	28
x_2	0	1	0	0	0	0	1	0	90
x_1	1	0	$4/5$	0	$1/5$	0	$-2/5$	0	34
x_6	0	0	$-4/5$	0	$-1/5$	1	$2/5$	0	6
x_8	0	0	1	0	0	0	0	1	300
z	0	0	40	0	20	0	10	0	7900

Änderung der Zielfunktionskoeffizienten – Basisvariablen

- Zunächst betrachten wir den Zielfunktionskoeffizienten von x_1, dieser heißt c_1.

Änderung der Zielfunktionskoeffizienten – Basisvariablen

- Zunächst betrachten wir den Zielfunktionskoeffizienten von x_1, dieser heißt c_1.
- Der Ausgangswert des Zielfunktionskoeffizienten ist 100, somit ist $c_1 = 100$.

Änderung der Zielfunktionskoeffizienten – Basisvariablen

- Zunächst betrachten wir den Zielfunktionskoeffizienten von x_1, dieser heißt c_1.
- Der Ausgangswert des Zielfunktionskoeffizienten ist 100, somit ist $c_1 = 100$.
- Da nicht nur nicht-positive oder nicht nur nicht-negative a^*_{kj} in der Zeile von x_1 zu finden sind, muss für c_1^- folgende Regel angewendet werden: $c_k^- = min \frac{c_j}{a_{kj}}$ mit $j \neq k$ für alle positiven a^*_{kj}.

$$c_1^- = min \left[\frac{40}{\frac{4}{5}}; \frac{20}{\frac{1}{5}} \right] = 50.$$

Änderung der Zielfunktionskoeffizienten – Basisvariablen

- Zunächst betrachten wir den Zielfunktionskoeffizienten von x_1, dieser heißt c_1.
- Der Ausgangswert des Zielfunktionskoeffizienten ist 100, somit ist $c_1 = 100$.
- Da nicht nur nicht-positive oder nicht nur nicht-negative a^*_{kj} in der Zeile von x_1 zu finden sind, muss für c_1^- folgende Regel angewendet werden: $c_k^- = min \frac{c_j}{a_{kj}}$ mit $j \neq k$ für alle positiven a^*_{kj}.

$$c_1^- = min \left[\frac{40}{\frac{4}{5}}; \frac{20}{\frac{1}{5}} \right] = 50.$$

- Aus dem oben genannten Grund muss für c_1^+ die folgende Regel angewandt werden: $c_k^+ = min - \frac{c_j}{a_{kj}}$ mit $j \neq k$ für alle negativen a^*_{kj}.

$$c_1^+ = min \left[- \frac{10}{-\frac{2}{5}} \right] = 25.$$

Änderung der Zielfunktionskoeffizienten – Basisvariablen

- Zunächst betrachten wir den Zielfunktionskoeffizienten von x_1, dieser heißt c_1.
- Der Ausgangswert des Zielfunktionskoeffizienten ist 100, somit ist $c_1 = 100$.
- Da nicht nur nicht-positive oder nicht nur nicht-negative a^*_{kj} in der Zeile von x_1 zu finden sind, muss für c_1^- folgende Regel angewendet werden: $c_k^- = min \frac{c_j}{a_{kj}}$ mit $j \neq k$ für alle positiven a^*_{kj}.

$$c_1^- = min\left[\frac{40}{\frac{4}{5}}; \frac{20}{\frac{1}{5}}\right] = 50.$$

- Aus dem oben genannten Grund muss für c_1^+ die folgende Regel angewandt werden: $c_k^+ = min - \frac{c_j}{a_{kj}}$ mit $j \neq k$ für alle negativen a^*_{kj}.

$$c_1^+ = min\left[-\frac{10}{-\frac{2}{5}}\right] = 25.$$

- Daraus ergibt sich für c_1 das Intervall $[100 - 50; 100 + 25] = [50; 125]$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	0	0	$-27/5$	1	$-8/5$	0	$6/5$
x_2	0	1	0	0	0	0	1
x_1	1	0	$4/5$	0	$1/5$	0	$-2/5$
x_6	0	0	$-4/5$	0	$-1/5$	1	$2/5$
x_8	0	0	1	0	0	0	0
z	0	0	40	0	20	0	10

Änderung der Zielfunktionskoeffizienten – Basisvariablen

- Analog und mithilfe der anderen Formeln lassen sich nun die Intervalle für c_2, c_4, c_6 und c_8 berechnen.

$$c_2 = 50 \qquad c_2^- = min\left[\frac{10}{1}\right] = 10 \qquad c_2^+ = \infty \qquad [50 - 10; 50 + \infty] = [40; \infty]$$

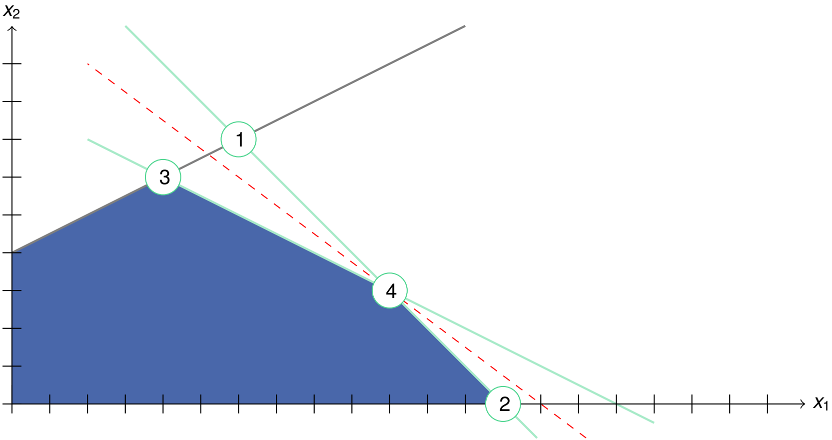
$$c_4 = 0 \qquad c_4^- = min\left[\frac{10}{\frac{6}{5}}\right] = \frac{50}{6} \qquad c_4^+ = min\left[-\frac{40}{-\frac{27}{5}}; -\frac{20}{-\frac{8}{5}}\right] = \frac{200}{27} \qquad \left[0 - \frac{50}{6}; 0 + \frac{200}{27}\right] = \left[-\frac{50}{6}; \frac{200}{27}\right]$$

$$c_6 = 0 \qquad c_6^- = min\left[\frac{10}{\frac{2}{5}}\right] = 25 \qquad c_6^+ = min\left[-\frac{40}{-\frac{4}{5}}; -\frac{20}{-\frac{1}{5}}\right] = 50 \qquad [0 - 25; 0 + 50] = [-25; 50]$$

$$c_8 = 0 \qquad c_8^- = min\left[\frac{10}{1}\right] = 40 \qquad c_8^+ = \infty \qquad [0 - 40; 0 + \infty] = [-40; \infty]$$

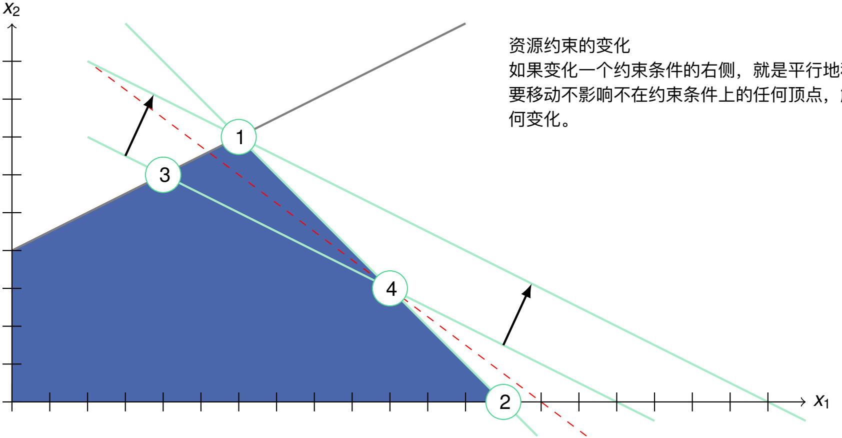
Änderung der Ressourcenbeschränkung

Variiert man die rechte Seite einer Nebenbedingung, so verschiebt man diese parallel. Qualitativ ändert sich nichts an der Lösung, so lange von der Verschiebung kein Eckpunkt betroffen ist, der nicht auf der Nebenbedingung liegt.



Änderung der Ressourcenbeschränkung

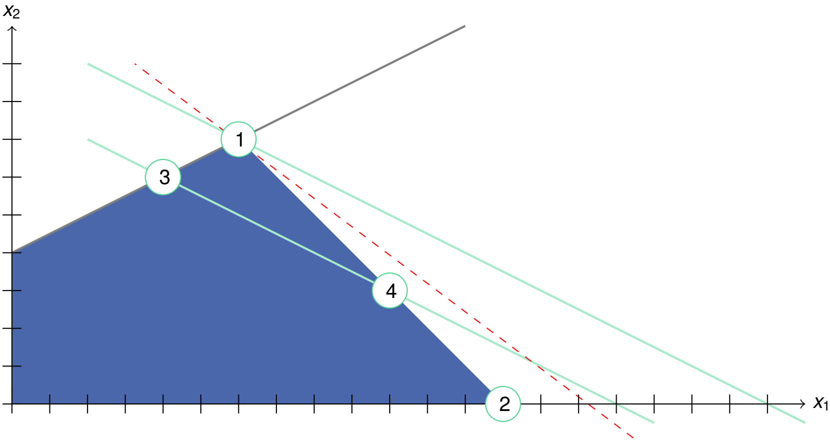
Variiert man die rechte Seite einer Nebenbedingung, so verschiebt man diese parallel. Qualitativ ändert sich nichts an der Lösung, so lange von der Verschiebung kein Eckpunkt betroffen ist, der nicht auf der Nebenbedingung liegt.



资源约束的变化
如果变化一个约束条件的右侧，就是平行地移动这个约束条件。只要移动不影响不在约束条件上的任何顶点，解的质量就不会发生任何变化。

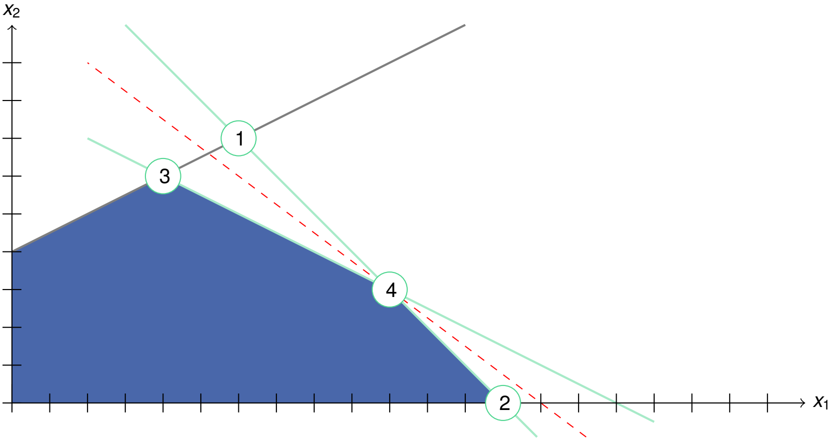
Änderung der Ressourcenbeschränkung

Variiert man die rechte Seite einer Nebenbedingung, so verschiebt man diese parallel. Qualitativ ändert sich nichts an der Lösung, so lange von der Verschiebung kein Eckpunkt betroffen ist, der nicht auf der Nebenbedingung liegt.



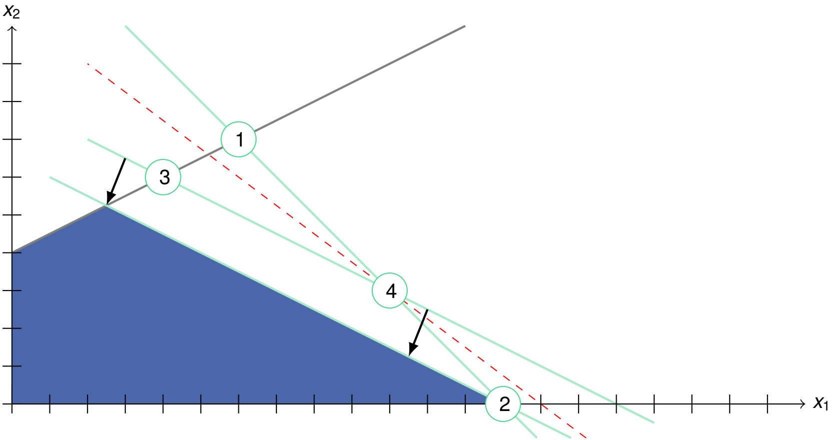
Änderung der Ressourcenbeschränkung

Variiert man die rechte Seite einer Nebenbedingung, so verschiebt man diese parallel. Qualitativ ändert sich nichts an der Lösung, so lange von der Verschiebung kein Eckpunkt betroffen ist, der nicht auf der Nebenbedingung liegt.



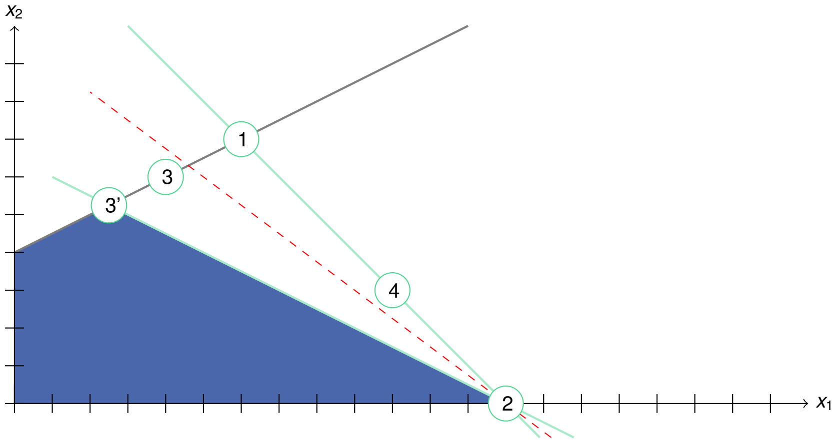
Änderung der Ressourcenbeschränkung

Variiert man die rechte Seite einer Nebenbedingung, so verschiebt man diese parallel. Qualitativ ändert sich nichts an der Lösung, so lange von der Verschiebung kein Eckpunkt betroffen ist, der nicht auf der Nebenbedingung liegt.



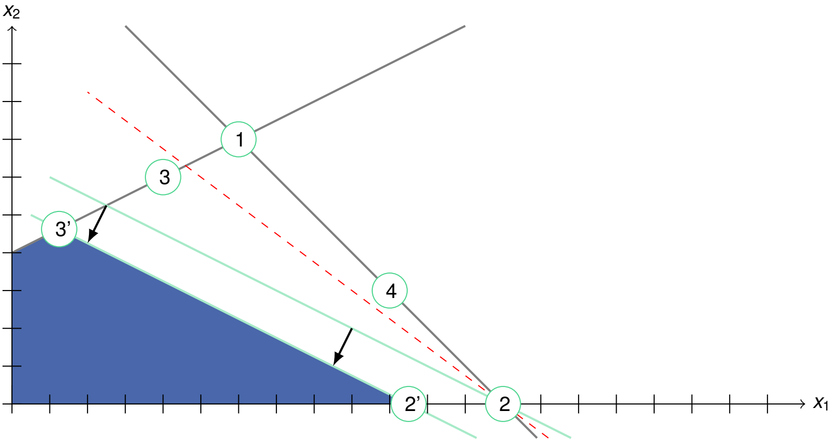
Änderung der Ressourcenbeschränkung

Variiert man die rechte Seite einer Nebenbedingung, so verschiebt man diese parallel. Qualitativ ändert sich nichts an der Lösung, so lange von der Verschiebung kein Eckpunkt betroffen ist, der nicht auf der Nebenbedingung liegt.



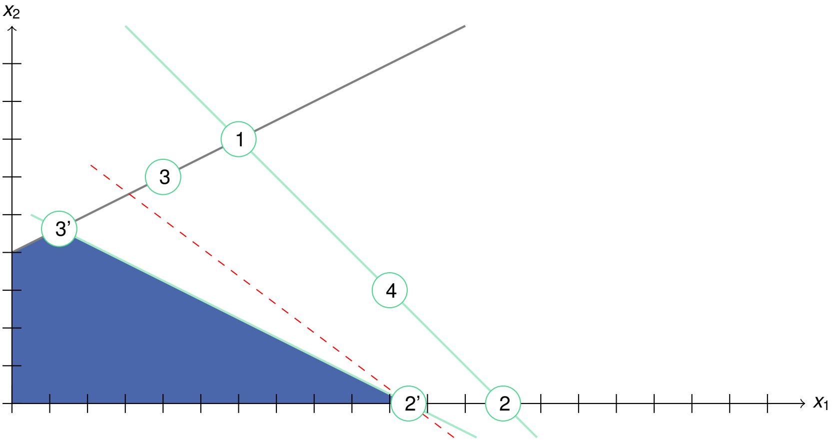
Änderung der Ressourcenbeschränkung

Variiert man die rechte Seite einer Nebenbedingung, so verschiebt man diese parallel. Qualitativ ändert sich nichts an der Lösung, so lange von der Verschiebung kein Eckpunkt betroffen ist, der nicht auf der Nebenbedingung liegt.



Änderung der Ressourcenbeschränkung

Variiert man die rechte Seite einer Nebenbedingung, so verschiebt man diese parallel. Qualitativ ändert sich nichts an der Lösung, so lange von der Verschiebung kein Eckpunkt betroffen ist, der nicht auf der Nebenbedingung liegt.



Änderung der Ressourcenbeschränkung

Fragestellung

- In welchem Bereich $[b_k - b_k^-; b_k + b_k^+]$ kann die rechte Seite b_k der k-ten Nebenbedingung variieren, ohne dass die optimale Basislösung ihre Optimalität verliert, d. h. ein Basistausch notwendig wird?

Eine Änderung von b_k beeinflusst die Schlupfvariable der k-ter
und $q = p + k$.
Unterscheidung, ob x_q Basis oder Nichtbasisvariable der Optin

- Basisvariable
  - $b_k^- = x_q$, da bei diesem Wert die k-te Nebenbeding
    die Basis verlässt.
  - $b_k^+ = \infty$, da bei einer Vergrößerung der rechten Se
    erfüllt ist und somit x_q die Basis nicht verlässt.
- Nichtbasisvariable
  - $b_k^- = \infty$, falls alle a_{iq}^* nicht-positiv sind, sonst
  - $b_k^- = \min \frac{b_i^*}{a_{iq}^*}$ mit $j \neq k$ für positive a_{iq}^*
  - $b_k^+ = \infty$, falls alle a_{iq}^* nicht-negativ sind, sonst
  - $b_k^+ = \min -\frac{b_i^*}{a_{iq}^*}$ für negative a_{iq}^*

1. **基变量**的情况：
   - $b_k^- = x_q$，其中 q 是结构变量的总数加上 k。这表示如果第 k 个约束的右侧值减小到 x_q，约束将被等号满足，这是最小的值而不需要进行基变换（即最优解不变）。
   - $b_k^+ = \infty$，表示第 k 个约束的右侧值可以无限增加而不会使得该约束不再以等式满足，因此不需要进行基变换。
2. **非基变量**的情况：
   - $b_k^- = \infty$，只要所有与约束相关的对偶变量 a_{kj}^* 都不是正的（即所有的 $a_{kj}^* \leq 0$），这意味着可以减小 b_k 而不会使任何非基变量变得有利可图加入到基变量中。
   - $b_k^- = \min \frac{b_j^*}{a_{kj}^*}$，对于所有正的 a_{kj}^*，是使第 k 个约束的右侧值减小而不引起基变换的最小值。
   - $b_k^+ = \infty$，只要所有与约束相关的对偶变量 a_{kj}^* 都不是负的（即所有的 $a_{kj}^* \geq 0$）。
   - $b_k^+ = \min -\frac{b_j^*}{a_{kj}^*}$，对于所有负的 a_{kj}^*，是使第 k 个约束的右侧值增加而不引起基变换的最大值。

Sensitivitätsanalyse – Beispielproblem

$$
\begin{array}{rrcrcrl}
\max z = & 100x_1 & + & 50x_2 & + & 40x_3 & \\
\text{s.t.} & 8x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq 480 \\
& 5x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & \leq 350 \\
& x_1 & & & & & \leq 40 \\
& & & x_2 & & & \leq 90 \\
& & & & & x_3 & \leq 300 \\
& & & & & x_{1,2,3} & \geq 0
\end{array}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_i
x_4	0	0	$-27/5$	1	$-8/5$	0	$6/5$	0	28
x_2	0	1	0	0	0	0	1	0	90
x_1	1	0	$4/5$	0	$1/5$	0	$-2/5$	0	34
x_6	0	0	$-4/5$	0	$-1/5$	1	$2/5$	0	6
x_8	0	0	1	0	0	0	0	1	300
z	0	0	40	0	20	0	10	0	7900

Änderung der Ressourcenbeschränkungen

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_i
x_4	0	0	$-27/5$	1	$-8/5$	0	$6/5$	0	28
x_2	0	1	0	0	0	0	1	0	90
x_1	1	0	$4/5$	0	$1/5$	0	$-2/5$	0	34
x_6	0	0	$-4/5$	0	$-1/5$	1	$2/5$	0	6
x_8	0	0	1	0	0	0	0	1	300
z	0	0	40	0	20	0	10	0	7900

- Diese Art der Sensitivitätsanalyse bezieht sich auf die Veränderung der rechten Seiten der Nebenbedingungen (b_i).
- Die Veränderung eines b_i beeinflusst die Schlupfvariable der jeweiligen Nebenbedingung. Im gegebenen Beispiel bezieht sich somit die Ressourcenbeschränkung der ersten Nebenbedingung auf x_4, die der zweiten Nebenbedingung auf x_5, die der 3. Nebenbedingung auf x_6 und so weiter.
- Zur Berechnung der Intervalle $[b_k - b_k^-; b_k + b_k^+]$ muss nun wieder unterschieden werden, ob die Schlupfvariablen im Optimaltableau Basis- oder Nichtbasisvariablen sind. Aus dem Optimaltableau lässt sich ablesen, dass x_4, x_6 und x_8 Basisvariablen und x_5 und x_7 Nichtbasisvariablen sind.

Änderung der Ressourcenbeschränkungen – Basisvariablen

- Zunächst betrachten wir die Ressourcenbeschränkung der ersten Nebenbedingung b_1, diese bezieht sich auf die Schlupfvariable x_4.

Änderung der Ressourcenbeschränkungen – Basisvariablen

- Zunächst betrachten wir die Ressourcenbeschränkung der ersten Nebenbedingung b_1, diese bezieht sich auf die Schlupfvariable x_4.
- Der Ausgangswert der Ressourcenbeschränkung ist 480, somit ist $b_1 = 480$.

Änderung der Ressourcenbeschränkungen – Basisvariablen

- Zunächst betrachten wir die Ressourcenbeschränkung der ersten Nebenbedingung b_1, diese bezieht sich auf die Schlupfvariable x_4.
- Der Ausgangswert der Ressourcenbeschränkung ist 480, somit ist $b_1 = 480$.
- Da x_4 eine Basisvariable ist, müssen die folgenden Regeln angewendet werden: $b_k^- = x_q^*$ und $b_k^+ = \infty$, wobei x_q^* der Optimalwert der Schlupfvariable ist.

$$b_1^- = 28 \qquad\qquad b_1^+ = \infty.$$

Änderung der Ressourcenbeschränkungen – Basisvariablen

- Zunächst betrachten wir die Ressourcenbeschränkung der ersten Nebenbedingung b_1, diese bezieht sich auf die Schlupfvariable x_4.
- Der Ausgangswert der Ressourcenbeschränkung ist 480, somit ist $b_1 = 480$.
- Da x_4 eine Basisvariable ist, müssen die folgenden Regeln angewendet werden: $b_k^- = x_q^*$ und $b_k^+ = \infty$, wobei x_q^* der Optimalwert der Schlupfvariable ist.

$$b_1^- = 28 \qquad\qquad b_1^+ = \infty.$$

- Daraus lässt sich das Intervall für b_1 ableiten: $[480 - 28; 480 + \infty] = [452; \infty]$.

Änderung der Ressourcenbeschränkungen – Basisvariablen

- Zunächst betrachten wir die Ressourcenbeschränkung der ersten Nebenbedingung b_1, diese bezieht sich auf die Schlupfvariable x_4.
- Der Ausgangswert der Ressourcenbeschränkung ist 480, somit ist $b_1 = 480$.
- Da x_4 eine Basisvariable ist, müssen die folgenden Regeln angewendet werden: $b_k^- = x_q^*$ und $b_k^+ = \infty$, wobei x_q^* der Optimalwert der Schlupfvariable ist.

$$b_1^- = 28 \qquad\qquad b_1^+ = \infty.$$

- Daraus lässt sich das Intervall für b_1 ableiten: $[480 - 28; 480 + \infty] = [452; \infty]$.
- Analog lassen sich auch die Intervalle für b_3 und b_5 berechnen.

$$\begin{array}{llll} b_3 = 40 & b_3^- = 6 & b_3^+ = \infty & [40 - 6; 40 + \infty] = [34; \infty] \\ b_5 = 300 & b_5^- = 300 & b_5^+ = \infty & [300 - 300; 300 + \infty] = [0; \infty] \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_i
x_4	0	0	$-27/5$	1	$-8/5$	0	$6/5$	0	28
x_2	0	1	0	0	0	0	1	0	90
x_1	1	0	$4/5$	0	$1/5$	0	$-2/5$	0	34
x_6	0	0	$-4/5$	0	$-1/5$	1	$2/5$	0	6
x_8	0	0	1	0	0	0	0	1	300
z	0	0	40	0	20	0	10	0	7900

$$\begin{array}{lrcrcrl} \max z = & 100x_1 & + & 50x_2 & + & 40x_3 & \\ \text{s.t.} & 8x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq 480 \\ & 5x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & \leq 350 \\ & x_1 & & & & & \leq 40 \\ & & & x_2 & & & \leq 90 \\ & & & & & x_3 & \leq 300 \\ & & & & & x_{1,2,3} & \geq 0 \end{array}$$

Änderung der Ressourcenbeschränkungen – Nichtbasisvariablen

- Zunächst betrachten wir die Ressourcenbeschränkung der zweiten Nebenbedingung b_2, diese bezieht sich auf die Schlupfvariable x_5.

Änderung der Ressourcenbeschränkungen – Nichtbasisvariablen

- Zunächst betrachten wir die Ressourcenbeschränkung der zweiten Nebenbedingung b_2, diese bezieht sich auf die Schlupfvariable x_5.
- Der Ausgangswert der Ressourcenbeschränkung ist 350, somit ist $b_2 = 350$.

Änderung der Ressourcenbeschränkungen – Nichtbasisvariablen

- Zunächst betrachten wir die Ressourcenbeschränkung der zweiten Nebenbedingung b_2, diese bezieht sich auf die Schlupfvariable x_5.
- Der Ausgangswert der Ressourcenbeschränkung ist 350, somit ist $b_2 = 350$.
- Da x_5 im Optimaltableau eine Nichtbasisvariable ist und in der Spalte von x_5 nicht nur nicht-positive oder nicht nur nicht-negative Einträge vorhanden sind, muss für b_2^- die folgende Regel angewendet werden: $b_k^- = min \frac{b_i^*}{a_{iq}^*}$ für alle positiven a_{iq}^*.

$$b_2^- = min \left[\frac{34}{\frac{1}{5}} \right] = 170.$$

Änderung der Ressourcenbeschränkungen – Nichtbasisvariablen

- Zunächst betrachten wir die Ressourcenbeschränkung der zweiten Nebenbedingung b_2, diese bezieht sich auf die Schlupfvariable x_5.
- Der Ausgangswert der Ressourcenbeschränkung ist 350, somit ist $b_2 = 350$.
- Da x_5 im Optimaltableau eine Nichtbasisvariable ist und in der Spalte von x_5 nicht nur nicht-positive oder nicht nur nicht-negative Einträge vorhanden sind, muss für b_2^- die folgende Regel angewendet werden: $b_k^- = min \frac{b_i^*}{a_{iq}^*}$ für alle positiven a_{iq}^*.

$$b_2^- = min \left[\frac{34}{\frac{1}{5}} \right] = 170.$$

- Für die Berechnung von b_2^+ muss die folgende Regel angewendet werden: $b_k^+ = min - \frac{b_i^*}{a_{iq}^*}$ für alle negativen a_{iq}^*.

$$b_2^+ = min \left[-\frac{6}{-\frac{1}{5}} ; -\frac{28}{-\frac{8}{5}} \right] = 17{,}5.$$

- Zunächst betrachten wir die Ressourcenbeschränkung der zweiten Nebenbedingung b_2, diese bezieht sich auf die Schlupfvariable x_5.
- Der Ausgangswert der Ressourcenbeschränkung ist 350, somit ist $b_2 = 350$.
- Da x_5 im Optimaltableau eine Nichtbasisvariable ist und in der Spalte von x_5 nicht nur nicht-positive oder nicht nur nicht-negative Einträge vorhanden sind, muss für b_2^- die folgende Regel angewendet werden: $b_k^- = min \frac{b_i^*}{a_{iq}^*}$ für alle positiven a_{iq}^*.

$$b_2^- = min \left[\frac{34}{\frac{1}{5}} \right] = 170.$$

- Für die Berechnung von b_2^+ muss die folgende Regel angewendet werden: $b_k^+ = min - \frac{b_i^*}{a_{iq}^*}$ für alle negativen a_{iq}^*.

$$b_2^+ = min \left[-\frac{6}{-\frac{1}{5}}; -\frac{28}{-\frac{8}{5}} \right] = 17{,}5.$$

- Daraus lässt sich das Intervall für b_2 ableiten: $[350 - 170; 350 + 17{,}5] = [180; 367{,}5]$.

- Analog lässt sich das Intervall für b_4 berechnen.

$$b_4 = 90 \qquad b_4^- = min\left[\frac{28}{\frac{6}{5}}; \frac{90}{1}; \frac{6}{\frac{2}{5}}\right] = 15 \qquad b_4^+ = min\left[-\frac{34}{-\frac{2}{5}}\right] = 85 \qquad [90-15; 90+85] = [75; 175]$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_i
x_4	0	0	$-27/5$	1	$-8/5$	0	$6/5$	0	28
x_2	0	1	0	0	0	0	1	0	90
x_1	1	0	$4/5$	0	$1/5$	0	$-2/5$	0	34
x_6	0	0	$-4/5$	0	$-1/5$	1	$2/5$	0	6
x_8	0	0	1	0	0	0	0	1	300
z	0	0	40	0	20	0	10	0	7900

$$\begin{array}{lrcrcrl}
\max z = & 100x_1 & + & 50x_2 & + & 40x_3 & \\
\text{s.t.} & 8x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq 480 \\
& 5x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & \leq 350 \\
& x_1 & & & & & \leq 40 \\
& & & x_2 & & & \leq 90 \\
& & & & & x_3 & \leq 300 \\
& & & & & x_{1,2,3} & \geq 0
\end{array}$$