Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen
(Hausaufgabe 5)

Abgabe: 27. – 31. Mai 2024 Sommersemester 2024

Aufgabe 13

(5 Punkte)

Ermittle ein (reellwertiges) Fundamentalsystem, und löse das Anfangswertproblem

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}(t), \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 14

(5 Punkte)

Löse das reellwertige Anfangswertsproblem

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}(t), \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 15

(5 Punkte)

Ermittele die allgemeine Lösung des Systems

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}(t).$$

Aufgabe 13 (5 Punkte)

Ermittle ein (reellwertiges) Fundamentalsystem, und löse das Anfangswertproblem

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}(t), \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

① EW

$$P_A(\lambda) = \det \left(\begin{matrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 4 & -4 & 2-\lambda \end{matrix}\right) \begin{matrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \\ 4 & -4 \end{matrix}$$

$$= (1-\lambda)^2(2-\lambda) + 4 + 0 - 0 - (-4)(1-\lambda) - 0$$

$$= (1-\lambda)^2(2-\lambda) + 4 + 4 - 4\lambda$$

$$= (1-\lambda)^2(2-\lambda) + 4(2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)\left((\lambda-1)^2+4\right) = 0$$

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$$

② EV

EV zu $\lambda_1 = 2$:

$$(A-2I)\vec{V_1} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} V_2 = V_3 \\ V_1 = V_2 \end{matrix}$$

$$\vec{V_1} = \begin{pmatrix} V_2 \\ V_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \overset{V_2=1}{=\!=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

② EV

EV zu $\lambda_2 = 1+2i$

$$(A-(1+2i)I)\vec{V_2} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2i & 1 & 0 \\ 0 & -2i & 1 \\ 4 & -4 & 1-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$V_2 = 2iV_1 \Rightarrow V_1 = -\frac{1}{2} i V_2$

$V_3 = 2iV_2 = -4V_1$

$4(-\frac{1}{2}iV_2) - 4V_2 + (1-2i)(2iV_2) = 0$

$-2iV_2 - 4V_2 + 2iV_2 + 4V_2 = 0$

$$\vec{V_2} = \begin{pmatrix} V_1 \\ 2iV_1 \\ -4V_1 \end{pmatrix} \overset{V_1=1}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V_3} = \overline{\vec{V_2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ -4 \end{pmatrix}$$

③ FS:

3.1) $\vec{x_1}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.2) komplexes FS: $\vec{x_2}(t) = e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -4 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{x_3}(t) = e^{(1-2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ -4 \end{pmatrix}$

reelles FS: $\vec{x_2}(t) = e^{t} \cdot e^{2it} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -4 \end{pmatrix} = e^t \left(\cos(2t) + i\sin(2t)\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -4 \end{pmatrix}$

$$= e^t \begin{pmatrix} \cos(2t) + i\sin(2t) \\ -2\sin(2t) + 2i\cos(2t) \\ -4\cos(2t) - 4i\sin(2t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -2\sin(2t) \\ -4\cos(2t) \end{pmatrix} + i e^t \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ 2\cos(2t) \\ -4\sin(2t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_{2,reel} = \mathrm{Re}\{\vec{x}_2\} = e^{t}\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -2\sin(2t) \\ -4\cos(2t) \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_{3,reel} = \mathrm{Im}\{\vec{x}_2\} = e^{t}\begin{pmatrix} \sin(2t) \\ 2\cos(2t) \\ -4\sin(2t) \end{pmatrix}$$

④ Allgemeine Lösung: $\vec{x}(t) = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{t}\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -2\sin(2t) \\ -4\cos(2t) \end{pmatrix} + c_3 e^{t}\begin{pmatrix} \sin(2t) \\ 2\cos(2t) \\ -4\sin(2t) \end{pmatrix}$

AW: $\vec{x}(0) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 \quad + 2c_3 \\ c_1 - 4c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = 0 \end{matrix}$$

$$\vec{x}(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{t}\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -2\sin(2t) \\ -4\cos(2t) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 14 (5 Punkte)

Löse das reellwertige Anfangswertsproblem

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}(t), \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

① EW

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{array}{ccc|cc} 1-\lambda & 0 & 6 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & 0 & 1-\lambda \\ -2 & 4 & -3-\lambda & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$$= (1-\lambda)^2(-3-\lambda) + 0 + 0 + 2(1-\lambda)\cdot 6 - 8(1-\lambda) - 0$$
$$= (1-\lambda)\big((1-\lambda)(-3-\lambda) + 12 - 8\big) = 0$$
$$= (1-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = (1-\lambda)(\lambda+1)^2 = 0 \qquad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_{2,3} = -1$$

$$\mathrm{alg}(1) = 1 \quad \mathrm{alg}(-1) = 2$$

② EV und ggf. Hauptvektor

EV zu $\lambda_1 = 1$: $(A - I)\vec{v}_1 = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad v_3 = 0$, $v_1 = 2v_2$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2v_2 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{v_2 = 1}{=\!=} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

EV zu $\lambda_2 = -1$: $(A + I)\vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad v_1 = -3v_3$, $v_2 = -v_3$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3v_3 \\ -v_3 \\ v_3 \end{pmatrix} \overset{v_3 = 1}{=\!=} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{geo}(-1) = 1 < \mathrm{alg}(-1) = 2 \Rightarrow$ Hauptvektor 2.ter Stufe

HV zu $\lambda = -1$:

$$(A+I)\vec{u_2} = \vec{v_2} \Rightarrow \begin{pmatrix}2&0&6\\0&2&2\\-2&4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$$

I $2u_1+6u_3=-3$
II $2u_2+2u_3=-1$
III $-2u_1+4u_2-2u_3=1$
I+III $4u_2+4u_3=-2$

$\Rightarrow u_1=-3u_3-\frac{3}{2}$
$u_2=-u_3-\frac{1}{2}$
u_3 beliebig

$$\vec{u_2}=\begin{pmatrix}-3u_3-\frac{3}{2}\\-u_3-\frac{1}{2}\\u_3\end{pmatrix} \overset{u_3=\frac{1}{2}}{=\!=} \begin{pmatrix}-3\\-1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

③ <u>FS</u>: 3.1) $\vec{x_1}(t)=e^{t}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ $\vec{x_2}(t)=e^{-t}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$

3.2) $\vec{x_3}(t)=e^{-t}\left(\begin{pmatrix}-3\\-1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$

④ Allgemeine Lösung: $\vec{x}(t)=c_1e^{t}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2e^{-t}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}+c_3e^{-t}\left(\begin{pmatrix}-3\\-1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$

$\vec{x}(0)=c_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-3\\-1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$-c_2-c_3=1$
$c_1=\frac{1}{2}c_3$
$2c_2+c_3=0$

$\Rightarrow c_1=-1$
$c_2=1$
$c_3=-2$

$$\vec{x}(t)=-e^{t}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+e^{-t}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}-2e^{-t}\left(\begin{pmatrix}-3\\-1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$$

Aufgabe 15

(5 Punkte)

Ermittele die allgemeine Lösung des Systems

$$\vec{x}'(t)=\begin{pmatrix}0&2&-1\\2&1&-2\\1&2&-2\end{pmatrix}\vec{x}(t).$$

① <u>EW</u>:

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}-\lambda&2&-1\\2&1-\lambda&-2\\1&2&-2-\lambda\end{pmatrix}\begin{matrix}-\lambda&2\\2&1-\lambda\\1&2\end{matrix}$$

$= \lambda(1-\lambda)(2+\lambda)-\cancel{4}-\cancel{4}+(1-\lambda)-\cancel{4\lambda}+4(\cancel{2}+\cancel{\lambda})$
$= \lambda(1-\lambda)(2+\lambda)+(1-\lambda)$
$= (1-\lambda)(\lambda^2+2\lambda+1)$
$= (1-\lambda)(\lambda+1)^2=0 \Rightarrow \lambda_1=1 \quad \lambda_{2,3}=-1$

$alg(1)=1 \quad alg(-1)=2$

② <u>EV</u>: ggf. HV:

EV zu $\lambda=1$: $(A-I)\vec{v_1}=\vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix}-1&2&-1\\2&0&-2\\1&2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$ $v_1=v_3$, $v_1=v_2$

$$\vec{v_1}=\begin{pmatrix}v_1\\v_1\\v_1\end{pmatrix}\overset{v_1=1}{=\!=}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

EV zu $\lambda_2 = -1$: $(A+I)\vec{v_2} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad v_1 = v_3$, $v_2 = 0$

$$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_1 \end{pmatrix} \overset{v_1=0}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{geo}(-1) = 1 < \text{alg}(-1) = 2$$

$\Rightarrow$ HV 2.te Stufe

HV zu $\lambda_{2,3} = -1$:

$$(A+I)\vec{u_2} = \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$u_1 = u_3 - 1$
$u_1 - u_3 = -1$
$u_1 + u_2 - u_3 = 0$
$u_2 = u_3 - u_1 = 1$

$$\vec{u_2} = \begin{pmatrix} u_3 - 1 \\ 1 \\ u_3 \end{pmatrix} \overset{u_3=1}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

③ FS: 3.1) $\vec{x_1}(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{x_2}(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.2) $\vec{x_3}(t) = e^{-t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

④ Allgemein Lösungen:

$$x(t) = c_1 e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$