**TU Berlin - Institut für Mathematik**
**Sommersemester 2024**
Dozent: Dr. Nikolas Tapia
Assistentin: M.Sc. Claudia Drygala

# Stochastik für Informatik(er) – Übung 6

Abgabe bis Freitag, den 07.06.2024 um 23:59

---

**Hinweise zur Bearbeitung des Übungsblattes:**

- Das Übungsblatt enthält Haus- und Tutoriumsaufgaben.
- Die Tutoriumsaufgaben werden in den Tutorien der KW 22 besprochen (27.05.-31.05.).
- Die Abgabe der Hausaufgaben erfolgt über ISIS in festen Gruppen von 2-3 Personen. Die Gruppen bilden sich aus Studierenden, die das gleiche Tutorium besuchen bzw. mindestens dieselbe/denselben Tutor*in haben. Laden Sie Ihre handschriftlichen Lösungen (z.B. Scan Ihrer Lösungen oder Erstellung Ihrer Lösungen über Tablet) als eine PDF-Datei bei dem enstprechenden Übungsblatt hoch. LaTeX-Abgaben sind auch willkommen (in diesem Fall die kompilierte PDF)! Achten Sie darauf, dass die Abgaben gut lesbar und verständlich verfasst sind. Bitte Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe auf der Abgabe mit angeben!

## Tutoriumsaufgaben

### Tutoriumsaufgabe 6.1

(i) Eine faire Münze wird solange geworfen, bis entweder das erste Mal "Zahl" oder bis insgesamt dreimal "Kopf" erscheint. Die Zufallsvariable $X$ beschreibe die Anzahl der ausgeführten Würfe bis zum Eintritt eines dieser Ereignisse. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$.

(ii) Die Zufallsvariable $U$ gebe die Augenzahl beim einmaligen Wurf eines fairen Würfels an. Berechnen Sie $\mathbb{E}[\frac{1}{U}]$.

### Tutoriumsaufgabe 6.2

Sei $X \sim Bin(n, p)$.

(i) Zeigen Sie dass

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{1+X}\right] = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$

(ii) Berechnen Sie $\mathbb{E}[\, e^{uX}]$.

### Tutoriumsaufgabe 6.3

Sei $X$ eine diskrete Zufallsvariable.

(i) Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n) = \mathbb{E}[X]\,.$$

(ii) Beweisen Sie: Wenn$\mathbb{E}[X] < \infty$, dann gilt, dass $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X \geq n) \to 0$.

**Tutoriumsaufgabe 6.4**

Sei $X$ zipfverteilt mit Parameter $\alpha > 1$.

(i) Für welche Werte von $\alpha$ ist Var$(X)$ endlich? Falls Var$(X)$ endlich ist, wie groß ist sie?

(ii) Für festes $\alpha$, bestimmen Sie die Menge

$$M_\alpha := \{\beta > 0 \colon \mathbb{E}[X^\beta] < \infty\}$$

und berechnen Sie $\mathbb{E}[X^\beta]$ für $\beta \in M_\alpha$.

Für alle $1 < p < q$

$\mathbb{E}[X^q]$ existiert $\Rightarrow \mathbb{E}[X^p]$ existiert

**Tutoriumsaufgabe 6.1** VL – 8.9

(i) Eine faire Münze wird solange geworfen, bis entweder das erste Mal "Zahl" oder bis insgesamt dreimal "Kopf" erscheint. Die Zufallsvariable $X$ beschreibe die Anzahl der ausgeführten Würfe bis zum Eintritt eines dieser Ereignisse. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$.

(ii) Die Zufallsvariable $U$ gebe die Augenzahl beim einmaligen Wurf eines fairen Würfels an. Berechnen Sie $\mathbb{E}[\frac{1}{U}]$.

(i) es sei $X(\Omega) = \{1,2,3\}$

$$P(X=k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & k=1 \\ \frac{1}{4} & k=2 \\ \frac{1}{4} & k=3 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in X(\Omega)} k P(X=k) = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

(ii) es sei $U(\Omega) = \{1,2,\dots,6\}$ und $\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{6}$

es gilt

$$\mathbb{E}[\tfrac{1}{U}] = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k} \mathbb{P}(X=k) = (1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\dots+\tfrac{1}{6}) \cdot \tfrac{1}{6} = \frac{49}{120}$$

$$\boxed{\mathbb{E}[f(x)] = \sum_{k \in X(\Omega)} f(x)\, \mathbb{P}(X=k)}$$

**Tutoriumsaufgabe 6.2**

Sei $X \sim Bin(n,p)$.

(i) Zeigen Sie dass

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{1+X}\right] = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$

(ii) Berechnen Sie $\mathbb{E}[e^{uX}]$.

(i) $X(\Omega) = \{1,2,\dots,n\}$

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{1+X}\right] = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k} \mathbb{P}(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Hinweis: $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} = b^{n+1} + n a b^n + \dots + a^{n+1}$

$a = p \quad b = 1-p$

$\Rightarrow \quad (1)^{n+1} = (p+1-p) = (1-p)^{n+1} + n p (1-p)^n + \dots + p^{n+1}$

$$\Rightarrow \quad 1-(1-p)^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k}$$

$$= \frac{1}{p(n+1)} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!\,(n+1)}{(k+1)!\,(n-k)!}\, p^{k+1} (1-p)^{n+1-(k+1)}$$

$$= \frac{1}{p(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{\cdot\,(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!}\, p^{k} (1-p)^{n+1-k}$$

$$= \frac{1}{p(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} p^{k} (1-p)^{n+1-k}$$

$$\overset{\text{Hinweis}}{=} \frac{1-(1-p)^{n+1}}{p(n+1)}$$

(ii) $\mathbb{E}[e^{uX}] = \sum_{k=0}^{n} e^{uk}\, \mathbb{P}(X=k)$

$$= \sum_{k=0}^{n} e^{uk} \cdot \binom{n}{k} p^{k} (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{u} \cdot p)^{k} (1-p)^{n-k}$$

$$= (pe^{u} + 1 - p)^{n}$$

**Tutoriumsaufgabe 6.3**

Sei $X$ eine diskrete Zufallsvariable.

(i) Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n) = \mathbb{E}[X]\,.$$

(i)

Summande von $\sum_{k=0}^{\infty} k\,\mathbb{P}(X=k)$

$k=0$: $0 \cdot \mathbb{P}(X=0) = 0$

$k=1$: $1 \cdot \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=1)$

$k=2$: $2 \cdot \mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=2)$

$\vdots$

$k=n$: $n\,\mathbb{P}(X=n) = \underbrace{\mathbb{P}(X=n) + \mathbb{P}(X=n) + \dots}_{k\text{-mal}}$

$k=1$ $\qquad$ $k=2$

$= \mathbb{P}(k \geq 1)$ $\qquad$ $\mathbb{P}(k \geq 2)$

Lösung: es gilt $\{X \geq k\} = \bigcup_{n=k}^{\infty} \{X = n\}$ f.a. $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

es ist $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(X=n)$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=n) \cdot a_{k,n} \quad \text{mit Def. } a_{k,n} = \begin{cases} 1 & n \geq k \\ 0 & n < k \end{cases}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=n) \cdot a_{k,n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=n) \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathbb{P}(X=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n\,\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{E}[X]$$

(ii) Beweisen Sie: Wenn$\mathbb{E}[X] < \infty$, dann gilt, dass $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X \geq n) \to 0$.

Sei $\mathbb{E}[X] < \infty$ Nach i) konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$

Nach dem notwendige Kriterium der Reihenkonvergenz gilt $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X \geq n) = 0$

$\mathbb{P}(X \geq M) = \sum_{n=1}^{M} \mathbb{P}(X \geq n) - \sum_{n=1}^{M-1} \mathbb{P}(n \geq n) \to \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X] = 0$

Wdh: Notwendige Kriterium der Reihekonvergenz

sei $\sum a_k$ eine konvergenz Reihe, Dann gilt $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

Beweise: $a_k = \sum_{k=0}^{k} a_n - \sum_{k=0}^{k-1} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_n - \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 0$

**Tutoriumsaufgabe 6.4**

Sei $X$ zipfverteilt mit Parameter $\alpha > 1$.

(i) Für welche Werte von $\alpha$ ist $\mathrm{Var}(X)$ endlich? Falls $\mathrm{Var}(X)$ endlich ist, wie groß ist sie?

(ii) Für festes $\alpha$, bestimmen Sie die Menge

$$M_\alpha := \{\beta > 0 \colon \mathbb{E}[X^\beta] < \infty\}$$

und berechnen Sie $\mathbb{E}[X^\beta]$ für $\beta \in M_\alpha$.

(i)

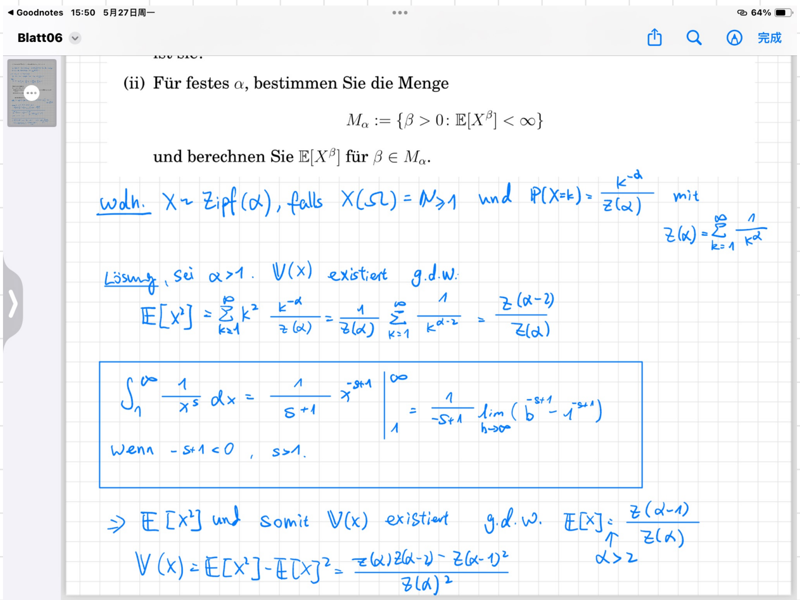
Wdh. $X \sim \mathrm{Zipf}(\alpha)$ falls $X(\Omega) = \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $\mathbb{P}(X=k) = \frac{k^{-\alpha}}{Z(\alpha)}$ mit $Z(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$

Lsg: Sei $\alpha > 1$ $V(X)$

$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{k^{-\alpha}}{Z(\alpha)} = \frac{1}{Z(\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha-2}}$

$\Rightarrow$ $\mathbb{E}[X^2]$ und somit $V(X)$ existiert

d.h. für $\alpha = 3$ $\mathbb{E}[X] \underset{\alpha > 2}{=} \frac{Z(\alpha-1)}{Z(\alpha)}$



◂ Goodnotes 15:50 5月27日周一 64%

Blatt06

完成

(ii) Für festes $\alpha$, bestimmen Sie die Menge

$$M_\alpha := \{\beta > 0 \colon \mathbb{E}[X^\beta] < \infty\}$$

und berechnen Sie $\mathbb{E}[X^\beta]$ für $\beta \in M_\alpha$.

Wdh. $X \sim \mathrm{Zipf}(\alpha)$, falls $X(\Omega) = \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $\mathbb{P}(X=k) = \frac{k^{-\alpha}}{Z(\alpha)}$ mit $Z(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$

Lösung, sei $\alpha > 1$. $V(X)$ existiert g.d.w.

$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{k^{-\alpha}}{Z(\alpha)} = \frac{1}{Z(\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha-2}} = \frac{Z(\alpha-2)}{Z(\alpha)}$

$\boxed{\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\, dx = \frac{1}{s+1} x^{-s+1} \Big|_1^\infty = \frac{1}{-s+1} \lim_{b\to\infty} (b^{-s+1} - 1^{-s+1}) \quad \text{wenn } -s+1 < 0,\ s > 1.}$

$\Rightarrow$ $\mathbb{E}[X^2]$ und somit $V(X)$ existiert g.d.w. $\mathbb{E}[X] \underset{\alpha > 2}{=} \frac{Z(\alpha-1)}{Z(\alpha)}$

$V(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{Z(\alpha)Z(\alpha-2) - Z(\alpha-1)^2}{Z(\alpha)^2}$

## Lösung für Tutoriumsaufgabe 6.4

(i) $\mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{Z(\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha+2} = \frac{Z(\alpha-2)}{Z(\alpha)}$ ist endlich genau dann, wenn $\alpha > 3$. In diesem Fall ist auch $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$ endlich (denn $\mathbb{E}[X] < \infty$ gilt genau dann, wenn $\alpha > 2$, siehe Literatur zur VL (Noemi), Beispiel 5.4), und es gilt

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{Z(\alpha-2)Z(\alpha) - Z(\alpha-1)^2}{Z(\alpha)^2}.$$

(ii) $\mathbb{E}[X^\beta] = \frac{1}{Z(\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha+\beta} = \frac{Z(\alpha-\beta)}{Z(\alpha)}$ ist endlich genau dann, wenn $\beta - \alpha < -1$, d.h., $\beta < \alpha - 1$.

## Hausaufgaben

### Hausaufgabe 6.1 (4=1+1+1+1 Punkte)

Sei $\Omega = \{-1, 0, 1, 2\}$ und $\mathbb{P}$ gegeben durch

| $\omega$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(\omega)$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{4}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{3}{10}$ |

Berechnen Sie in jedem der nachfolgenden Fälle den Erwartungswert und die Varianz.

(i) $X(\omega) := \omega$,

(ii) $Y(\omega) := 5\omega - 3$,

(iii) $Z(\omega) := (\omega - 1)^2$,

(iv) $U(\omega) := 1_{\{2\}}(\omega)$.

### Hausaufgabe 6.2 (4=2+2 Punkte)

Sei $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$.

(i) Berechnen Sie $\mathbb{E}[\ln(u)^X]$ für $u \in (0, \infty)$.

(ii) Zeigen Sie, dass
$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{1+X}\right] = \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda}\right) .$$

### Hausaufgabe 6.3 (6=2+2+2 Punkte)

Ein Student macht einen Multiple-Choice-Test, der aus $3$ Aufgaben besteht. Die erste Aufgabe hat $2$ mögliche Antworten, die zweite $5$ Antworten und die letzte $4$ Antworten. Bei jeder Aufgabe wählt der Student seine Antwort zufällig und unabhängig. Sei $X$ die Anzahl der richtigen Antworten.

(i) Geben Sie die Verteilung von $X$ an.

(ii) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$ und Var$(X)$.

(iii) Verallgemeinern Sie die Antworten in $(i)$ und $(ii)$, wobei Sie nun annehmen, dass der Test $N \geq 1$ Fragen und jede Frage $M \geq 1$ Antworten enthält.

### Hausaufgabe 6.4 (6=2+2+2 Punkte)

Seien $S$ und $T$ zwei unabhängige geometrisch-verteilte Zufallsvariablen. $S$ hat Parameter $p$ und $T$ Parameter $q$ mit $0 < p, q \leq 1$.

(i) Zeigen Sie, dass $U = \min\{S, T\}$ geometrisch verteilt ist, indem Sie $\mathbb{P}(U > n)$ bestimmen. Wie lautet der Parameter der geometrischen Verteilung von $U$?

(ii) Berechnen Sie $\mathbb{E}[U]$ und Var$(U)$.

(iii) Berechnen Sie für den Fall $p = q$
$$p_{S|S+T=n}(k) := \mathbb{P}(S = k | S + T = n) .$$