FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin

SoSe 2024
Stand: 31. Mai 2024

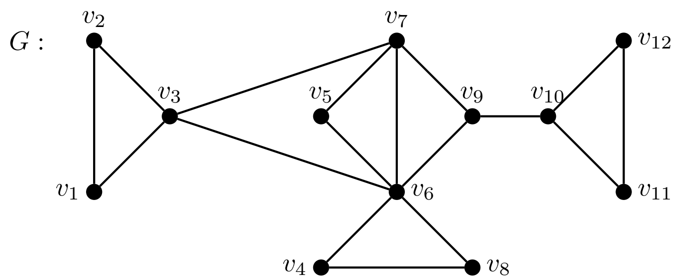
6. Tutoriumsblatt – Diskrete Strukturen
(Besprechung in den Tutorien in der Woche vom 03.06.2024)

Aufgabe 1

Durch eure Analyse der Aktivitäten der Suchenden auf dem Campus habt ihr herausgefunden, dass sich die Suchenden meistens im Mathegebäude aufzuhalten scheinen. Sie scheinen aber auch wiederholt das E-N zu betreten. Ihr wollt diese Verbindung beobachten.

(i) Zerlege den Graphen G in seinen Blockgraphen.

(ii) Bestimme: Hat der Graph G eine Euler-Tour?



Aufgabe 2

Basierend auf der ersten Aufgabe betrachten wir den Zusammenhang zwischen Blöcken und Euler-Touren. Die folgenden Aussagen dürfen für diese Aufgabe genutzt werden:

1. Ein Graph kann eindeutig in seinen Blockgraph zerlegt werden. Jede Kante ist in genau einem Block enthalten.

2. Für jeden Graphen G gilt: $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2 \cdot |E(G)|$.

(i) Zeigen Sie: Ein zusammenhängender Graph G hat eine Eulertour, wenn der induzierte Graph jedes Blockes von G eine Eulertour hat. Hierfür darf die Aussage genutzt werden, dass jede Kante von G in genau einem Block von G liegt.

(ii) Zeigen sie: Wenn ein Graph G eine Euler-Tour hat, dann hat jeder Block von G eine Eulertour.

Aufgabe 3

Ein Graph G heißt k-regulär, wenn jeder Knoten in G Knotengrad k hat.

(i) Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ ist ein Kreis genau dann, wenn der Graph 2-regulär ist.

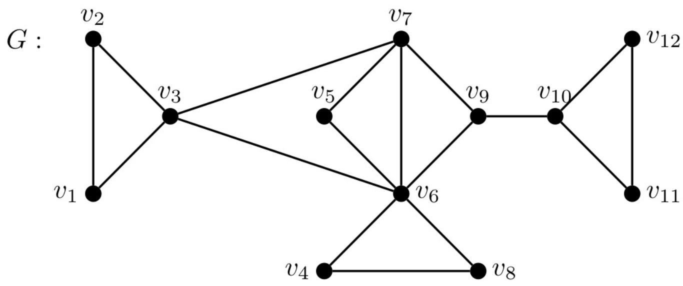
(ii) Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ ist k-zusammenhängend, wenn er k-regulär ist.

Aufgabe 1

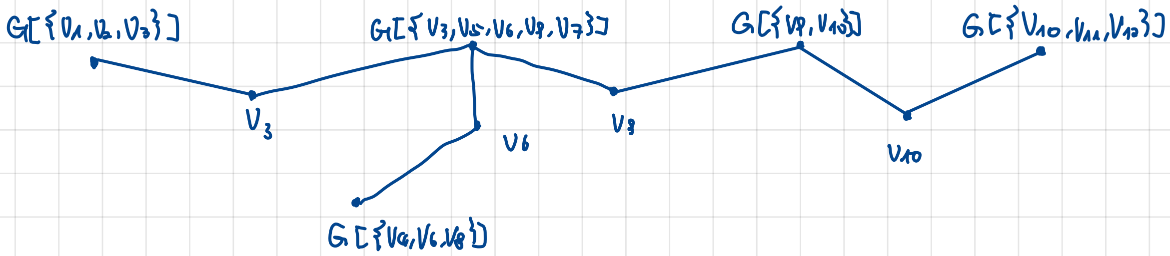
Durch eure Analyse der Aktivitäten der Suchenden auf dem Campus habt ihr herausgefunden, dass sich die Suchenden meistens im Mathegebäude aufzuhalten scheinen. Sie scheinen aber auch wiederholt das E-N zu betreten. Ihr wollt diese Verbindung beobachten.

(i) Zerlege den Graphen G in seinen Blockgraphen.

(ii) Bestimme: Hat der Graph G eine Euler-Tour?



(i) B(G)



(ii) Nein V9, V10

Aufgabe 2

Basierend auf der ersten Aufgabe betrachten wir den Zusammenhang zwischen Blöcken und Euler-Touren. Die folgenden Aussagen dürfen für diese Aufgabe genutzt werden:

1. Ein Graph kann eindeutig in seinen Blockgraph zerlegt werden. Jede Kante ist in genau einem Block enthalten.

2. Für jeden Graphen G gilt: $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2 \cdot |E(G)|$.

(i) Zeigen Sie: Ein zusammenhängender Graph G hat eine Eulertour, wenn der induzierte Graph jedes Blockes von G eine Eulertour hat. Hierfür darf die Aussage genutzt werden, dass jede Kante von G in genau einem Block von G liegt.

(ii) Zeigen sie: Wenn ein Graph G eine Euler-Tour hat, dann hat jeder Block von G eine Eulertour.

(i) Paritätsbeweis:

Sei G ein Graph in dem jeder Block eine Euler-Tour hat. Für jeden Knoten gilt:

$$d_G(v) = \sum_{\substack{B \in \mathcal{B}_G \\ v \in V(B)}} d_B(v)$$

.

Da jeder Block eine Euler-Tour hat, gilt nach der Vorlesung, dass $d_B(v)$ gerade ist, für alle Blöcke B von G und $v \in V(G)$. Mit der Gleichung oben folgt, dass $d_G(v)$ gerade ist für alle $v \in V(G)$. Somit hat nach der Vorlesung G eine Euler-Tour.

Konstruktionsbeweis:

Sei G ein Graph in dem jeder Block eine Euler-Tour hat. Wir bauen iterativ eine Eulertour ET in G, die zu jedem Zeitüunkt eine Eulertour durch eine Untermenge der Blöcke von G ist. Wir betrachten einen beliebigen Block B_1 von G. Sei ET_1 eine Euler-Tour von B_1. Wir starten mit $ET = ET_1$. Wenn G keinen weiteren Block hat, sind wir fertig.

Sonst wiederholen wir die folgenden Schritte: Da G zusammenhängend ist und ET keine Eulertour von G ist, gibt es mindestens eine Kante $\{u, v\}$, sodass $u \in ET$ und $v \notin ET$. Sei B_i der Block in dem $\{u, v\}$ liegt und sei ET_i eine Eulertour von B_i. Da $u \in ET$ gilt ET ist ein geschlossener Kantenzug $(u, v_1, \ldots, v_l, u))$ für ein $l \in \mathbb{N}$. Da $\{u, v\} \in E(B_i)$ gilt ET_i ist ein geschlossener Kantenzug $(u, w_1, \ldots, w_k, u))$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Wir erweitern ET indem wir ET_i einfügen. Das Resultat ist ein geschlossener Kantenzug ET für einen zusätzlichen Block von G.

Wir wiederholen diesen Prozess bis ET eine Eulertour für ganz G ist.

(ii) Paritätsbeweis:

Sei G ein Graph der eine Euler-Tour hat. Für jeden Knoten gilt:

$$d_G(v) = \sum_{\substack{B \in \mathcal{B}_G \\ v \in V(B)}} d_B(v)$$

.

Da G eine Euler-Tour hat, gilt nach der Vorlesung, dass $d_G(v)$ gerade ist.

Widerspruchsbeweis: Wir nehmen an, es existiert ein Block B_1, der keine Euler-Tour hat. Da alle Knotengrade in G gerade sind, gilt insbesondere, dass auch alle nicht-Schnittknoten v in B_1 geraden Grad haben, da für nicht Schnittknoten in B_1 gilt, dass $d_G(v) = d_{B_1}(v)$. Da B_1 keinen Eulerkreis hat, existiert in B_1 ein Schnittknoten mit w mit $d_{B_1}(w)$ ist ungerade. Da w ein Schnittknoten ist, hat $G - w$ mindestens zwei Zusammenhangskomponenten. Wir betrachten die Zusammenhangskomponente C_1 von $G - w$, die B_1 enthält. Wir konstruieren C_1', indem wir w und alle Kanten von w in B_1 wieder zu C_1 hinzufügen. Dann gilt, dass $d_{C_1'}(v) = d_G(v)$ für alle Knoten $v \in V(C_1')$ ausser w. Zudem gilt, dass $d_{C_1'}(w)$ ungerade ist, da $d_{B_1}(w)$ ungerade ist. Somit gilt $\sum_{v \in V(C_1')} d_{C_1'}(v)$ ist ungerade. Dies widerspricht dem Lemma oben.

Konstruktionsbeweis:

Sei $ET = (v_1, ..., v_n)$ eine Euler-Tour von G. Sei B ein Block von G. Sei $S = W_1, W_2, \ldots, W_l$ die Sequenz von Segmenten von ET, die in B verlaufen, in der Reihenfolge, in der sie in ET auftreten. Dann gilt, dass der Endknoten von W_i gleich dem Startknoten von W_{i+1} ist, für alle $1 \leq i \leq l - 1$,

da das Segment, was W_i in ET mit W_{i+1} verbindet, sonst ein Weg P zwischen zwei Schnittknoten von B in G ist, der nicht durch B verläuft. Wenn es einen solchen Weg gäbe, könnten wir in ihm einen Pfad zwischen diesen Schnittknoten finden, der nicht durch B verläuft. Ein solcher Pfad kann nicht existieren, da der Pfad sonst Teil von B wäre. Das selbe gilt für den Startknoten von W_1 und den Endknoten von W_l. Zudem enthält S jede Kante in B genau einmal, sodass die Aneinanderreihung von den Kantensequenzen in S eine Euler-Tour von B ist. Somit hat jeder Block von G eine Euler-Tour.

Aufgabe 3

Ein Graph G heißt k-regulär, wenn jeder Knoten in G Knotengrad k hat.

(i) Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ ist ein Kreis genau dann, wenn der Graph 2-regulär ist.

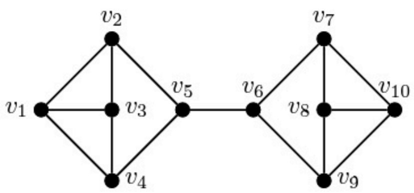
(ii) Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ ist k-zusammenhängend, wenn er k-regulär ist.

Lösung zu Aufgabe 3

(i) Wenn jede Zusammenhangskomponente eines Graphen ein Kreis ist, dann ist der Graph offensichtlich 2-regulär, da Kreise 2-regulär sind.

Sei $Z = (U, F)$ ein 2-regulärer Graph. Angefangen auf einem beliebigen Knoten $v \in U$ erstellen wir einen Weg indem wir immer einen noch nicht besuchten Nachbarn des zuletzt besuchten Knoten besuchen. Wir stellen fest, dass nach der Wahl des ersten Nachbarn diese Wahl immer vorgeschrieben ist, da jeder Knoten Grad 2 besitzt. So schließen wir irgendwann einen Kreis K in Z, da wir auf einen Knoten $v \in U$ stoßen welcher keine nicht besuchten Nachbarn mehr sieht. Angenommen die Kante, die noch nicht im Weg enthalten ist, ist nicht $\{u, v\}$. Dann gibt es in Z einen Knoten von Grad 3 oder höher. Also muss die noch nicht benutzte Kante $\{u, v\}$ sein und es gilt $Z = K$.

(ii) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel:



(i) 如果一个图的每个连通分量都是一个圈，那么显然这个图是2-正则图，因为圈是2-正则的。

设 $Z = (U, F)$ 是一个2-正则图。从一个任意的节点 $v \in U$ 开始，我们通过每次访问上一个访问的节点的未访问的邻居来构建路径。我们发现，在选择第一个邻居后，这个选择总是固定的，因为每个节点的度数是2。因此，我们最终会形成一个圈 K 在 Z 中，因为我们会遇到一个节点 $v \in U$，它没有未访问的邻居。假设在路径中还未包含的边不是 $\{u, v\}$，那么 Z 中存在一个度数为3或更高的节点。因此，必须是未使用的边 $\{u, v\}$，并且 $Z = K$。

FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

SoSe 2024
Veröffentlichung: 31. Mai 2024

6. freiwillige Übung – Diskrete Strukturen

Abgabe: bis 10:30 am 013.06.2024 im ISIS-Kurs [SoSe 2024] Diskrete Strukturen

Aufgabe 4

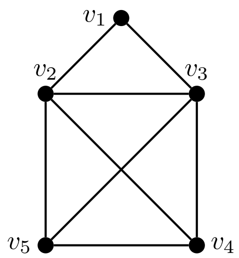
Zeigen Sie, dass jeder k-fach zusammenhängende Graph Minimalgrad mindestens k hat.

Aufgabe 5

Ein Euler-Pfad ähnelt einer Euler-Tour. Für einen Graphen G ist ein Euler-Pfad P definiert als ein Kantenzug, der jede Kante von G genau einmal enthält.

In der Vorlesung habt ihr diese Woche gelernt, dass ein Graph G eine Euler-Tour hat, genau dann wenn jeder Knotengrad in G gerade ist.

(i) Zeige oder widerlege, dass der Folgende Graph eine Eulertour hat:



(ii) Zeige, dass ein Graph G einen Euler-Pfad hat, genau dann wenn maximal 2 Knoten in G ungeraden Grad haben.

Aufgabe 6

Sei G ein zusammenhängender Graph und $v \in V(G)$ ein Schnittknoten in G, sodass $G - v$ genau zwei Zusammenhangskomponenten C_1 und C_2 enthält.

Für $i \in \{1, 2\}$ sei I_i^A eine unabhängige Menge maximaler Kardinalität in C_i mit $N_G(v) \cap I_i^A = \emptyset$. Weiter sei I_i^B eine unabhängige Menge maximaler Kardinalität in C_i mit $N_G(v) \cap I_i^B \neq \emptyset$.

Zeigen Sie, dass $I_1^A \cup \{v\} \cup I_2^A$, $I_1^A \cup I_2^B$, $I_1^B \cup I_2^A$, oder $I_1^B \cup I_2^B$ eine unabhängige Menge maximaler Kardinalität in G ist.