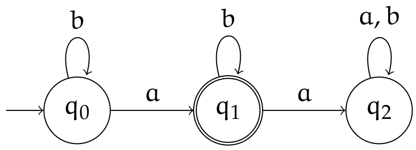
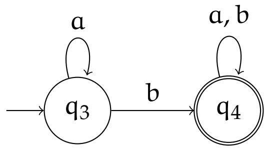
Tutorium 10

Aufgabe 1: Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma \triangleq \{ a,\ b \}$ die DFAs $M_1 \triangleq (\{ q_0,\ q_1,\ q_2 \}, \Sigma, \delta_1, q_0, \{ q_1 \})$ und $M_2 \triangleq (\{ q_3,\ q_4 \}, \Sigma, \delta_2, q_3, \{ q_4 \})$, wobei δ_1 und δ_2 durch die folgenden Graphen gegeben sind:

δ_1: 

δ_2: 

Hinweis: Es darf ohne Beweis benutzt werden, dass $L(e)$ *für einen regulären Ausdruck* e *regulär und* $\{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ *und* $\{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}^+ \}$ *nicht regulär aber kontextfrei sind. Sprachen* $L(e)$ *für reguläre Ausdrücke* e *sowie Operationen auf Mengen müssen nicht berechnet oder umgeformt werden.*

1.a) *Beweise:* $A_1 \triangleq \{ w \in \{ a,\ b \}^* \mid ab \text{ ist kein Teilwort von } w \}$ ist regulär.

------------------------------- Lösung -------------------------------

$A_1 = L((a+b)^*) \setminus L((a+b)^* ab (a+b)^*)$. Nach Theorem 2.4.4 sind reguläre Sprachen unter Differenz (\) abgeschlossen. Damit ist A_1 regulär.

——————————— /Lösung ———————————

1.b) *Beweise:* $A_2 \triangleq \{ a^n x^n \mid x \in \{ a,\ b \} \land n \in \mathbb{N} \}$ ist nicht regulär.

------------------------------- Lösung -------------------------------

Angenommen, A_2 sei regulär. Dann ist auch $A_2 \setminus L\big((aa)^*\big) = \{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}^+ \}$ regulär, weil nach Theorem 2.4.4 reguläre Sprachen abgeschlossen bezüglich Differenz (\) sind. Das ist ein Widerspruch. Damit ist A_2 nicht regulär.

——————————— /Lösung ———————————

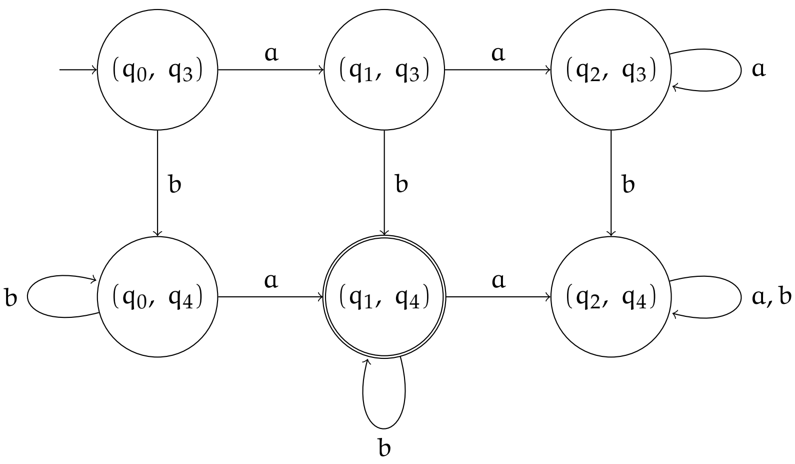
1.c) *Berechne:* Konstruiere den Produktautomaten $M_{1\otimes 2}$ für die Sprache $L(M_1) \cap L(M_2)$ aus den Automaten M_1 und M_2.

------------------------------- Lösung -------------------------------

$M_{1\otimes 2} = (Q_{1\otimes 2}, \Sigma, \delta_{1\otimes 2}, s_{1\otimes 2}, F_{1\otimes 2})$ mit:

$$Q_{1\otimes 2} = \{ (q_0,\ q_3),\ (q_0,\ q_4),\ (q_1,\ q_3),\ (q_1,\ q_4),\ (q_2,\ q_3),\ (q_2,\ q_4) \}$$
$$s_{1\otimes 2} = (q_0,\ q_3)$$
$$F_{1\otimes 2} = \{ (q_1,\ q_4) \}$$

$\delta_{1\otimes 2}$:



——————————— /Lösung ———————————

Aufgabe 2: Syntaxbäume und Normalformen

Gegeben sei ein Alphabet $\Sigma \triangleq \{ a,\ b \}$ und eine Grammatik $G \triangleq (\{ S,\ A,\ B \},\ \Sigma,\ P,\ S)$ mit

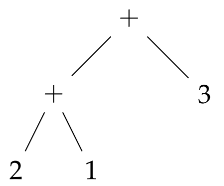
$$\begin{aligned} P_3: \quad S &\rightarrow a \mid b \mid aaB \mid Abb \\ A &\rightarrow Sa \\ B &\rightarrow bS \end{aligned}$$

und die Ableitung σ mit

$$\sigma \triangleq S \Rightarrow_G aaB \Rightarrow_G aabS \Rightarrow_G aabAbb \Rightarrow_G aabSabb \Rightarrow_G aabaabb$$

2.a) Gegeben sei eine Menge K aller Knotenmarkierungen, eine Menge $L \triangleq \{ 1,\ 2,\ 3,\ + \}$, ein geordneter Baum $B \subset K$ mit $B \triangleq \{ \langle\rangle,\ \langle 1\rangle,\ \langle 2\rangle,\ \langle 1,\ 1\rangle,\ \langle 1,\ 2\rangle \}$ und eine Abbildung $f : B \rightarrow L$ mit $f \triangleq \{ (\langle\rangle,\ +),\ (\langle 1\rangle,\ +),\ (\langle 2\rangle,\ 3),\ (\langle 1,\ 1\rangle,\ 2),\ (\langle 1,\ 2\rangle,\ 1) \}$.
Gib den L-beschrifteten Baum (B, f) grafisch *an*.

Lösung

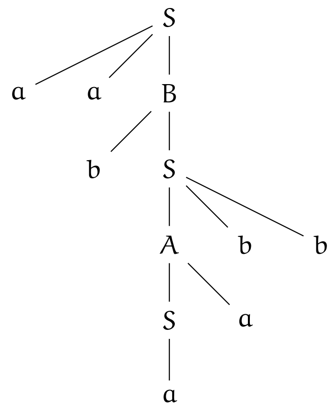


L-beschrifteter Baum (B, f)

/Lösung

2.b) *Gib* den zu σ gehörigen Syntaxbaum grafisch *an*.

Lösung



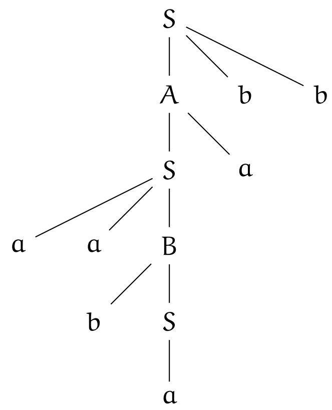
Syntaxbaum (B, syn)

/Lösung

2.c) *Beweise oder widerlege:* G ist eindeutig.

Lösung

Wir widerlegen die Aussage indem wir einen weiteren Syntaxbaum für das Wort $aabaabb \in L(G)$ angeben.



Syntaxbaum (B, syn)

/Lösung

Aufgabe 3: Chomsky-Normalform

3.a) Gib eine Beweisskizze für die Proposition 3.1.11 der Formelsammlung im Fall der Chomsky-Normalform an. *Hinweis: Es genügt an dieser Stelle ein Verfahren zur Konstruktion einer Grammatik* G' *in CNF für eine beliebige Grammatik* G *vom Typ 2. Weiterhin darf vorausgesetzt werden, dass* G *keine Kettenregeln und keine nutzlosen Nichtterminale beinhaltet.*

Lösung

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Typ 2 Grammatik ohne Kettenregeln und ohne nutzlose Nichtterminale. Wir konstruieren die Grammatik $G' = (V',\ \Sigma,\ P',\ S)$ wie folgt:

Sei zunächst $V' = V$ und $P' = \emptyset$.

Füge für alle $a \in \Sigma$ die Regel $N_a \to a$ zu P' hinzu und ersetze jedes Vorkommen von a in π' der Produktionen $\pi \to \pi' \in P$ und $|\pi'| \geqslant 2$ durch das Nichtterminalsymbol N_a.
Jede auf diese Weise modifizierte Produktion $\pi \to \pi' \in P$ hat nun die Form $A \to B_1 \dots B_j$ mit $A, B_1, \dots, B_j \in V$. Füge alle Produktionen mit $\pi' \leqslant 2$ zu P' hinzu. Für alle Produktionen mit $j \geqslant 3$ verfahre wie folgt:
Füge Nichtterminale $C_1, \dots, C_{j-2}$ zu V' hinzu. Weiterhin füge die folgenden Produktionen zu P' hinzu:

$$
\begin{aligned}
A &\to B_1 C_1 \\
C_1 &\to B_2 C_2 \\
&\vdots \\
C_{k-3} &\to B_{k-2} C_{k-2} \\
C_{k-2} &\to B_{k-1} B_k
\end{aligned}
$$

/Lösung

3.b) *Gib* eine Grammatik G' in CNF *an* mit $L(G) = L(G')$ für G aus Aufgabe 2.

Lösung

Eine Möglichkeit für eine solche Grammatik ist $G' \triangleq (\{\ S,\ N_a,\ N_b,\ A,\ B,\ A_1,\ B_1\ \},\ \Sigma,\ P',\ S)$ mit

$$
\begin{aligned}
P': \quad S &\to a \mid b \mid N_a A_1 \mid A B_1 \\
N_a &\to a \\
N_b &\to b \\
A &\to S N_a \\
B &\to N_b S \\
A_1 &\to N_a B \\
B_1 &\to N_b N_b
\end{aligned}
$$

/Lösung