Diskrete Strukturen
Großübung

Amelie Heindl

Lehrstuhl für Logik und Semantik

Technische Universität Berlin

Sommersemester 2024

Themenüberblick

Themenüberblick: Vorlesungswoche 5

- Graphen
- Adjazenz und Inzidenz
- Handshake Lemma
- Untergraphen
- Graphoperationen
- Zusammenhang in Graphen
- Bäume
- Spannbäume
- Suchen in Bäumen
- Blockgraphen

Graphen

Graphen: Definition

Graphen sind abstrakte Strukturen, die aus einer Menge und Beziehungen zwischen den Elementen der Menge bestehen. Mithilfe von Graphen kann eine Vielzahl von Problemen und Anwendungen modelliert werden.

Ungerichteter Graph

Ein ungerichteter Graph G ist ein Tupel (V, E) aus zwei Mengen, wobei $E \subseteq \mathscr{P}_2(V)$ gilt.

Gerichteter Graph

Ein gerichteter Graph G ist ein Tupel (V, E) aus zwei Mengen, wobei $E \subseteq V \times V$ gilt.

Die Elemente in V werden Knoten genannt und die Elemente in E werden Kanten genannt.

Graphen: Grundlagen

In dieser Vorlesung werden hauptsächlich Graphen betrachtet, die ungerichtet sind und keine Schleifen und Mehrfachkanten enthalten.

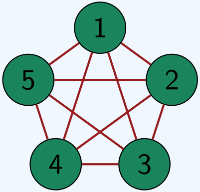
Es gibt weitere Arten von Graphen, die in einigen Fällen nützlich sind. Beispielsweise kann man Graphen mit beschrifteten Kanten, Mehrfachkanten oder Hyperkanten definieren.

Neben der Darstellung als Tupel gibt es weitere Möglichkeiten, Graphen darzustellen. Insbesondere ist eine graphische Darstellung üblich, bei der die Knoten als Kreise und die Kanten als Linien gezeichnet werden.

Die Modellierung als Graph ermöglicht eine Abstraktion eines Problems und die Graphentheorie liefert Lösungen für Fragestellungen in diesen Modellen.

Graphen: Beispiel I

Betrachte den Graphen $G = (\{1,2,3,4,5\}, \mathscr{P}_2(\{1,2,3,4,5\}))$.
G lässt sich folgendermaßen graphisch darstellen:

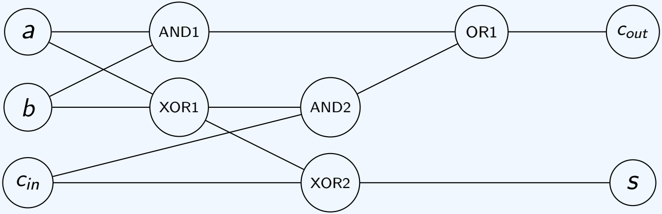


Kantenmenge $E(G)$

Graphen: Beispiel II

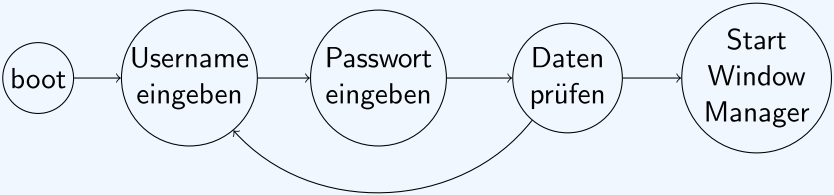
Wir betrachten Boolesche Schaltkreise als Modell für digitale Schaltungen.
Die Gatter, sowie die Inputs und Outputs können als Knoten betrachtet werden und die Verbindungen von Aus- und Eingaben als Kanten.

Ein Volladdierer lässt sich darstellen als Graph $G = (V, E)$ mit
$V = \{a, b, c_{in}, s, c_{out}, \text{AND1}, \text{AND2}, \text{OR1}, \text{XOR1}, \text{XOR2}\}$
$E = \{\{a, \text{AND1}\}, \{b, \text{AND1}\}, \{a, \text{XOR1}\}, \{b, \text{XOR1}\}, \{\text{AND1}, \text{OR1}\}, \{\text{XOR1}, \text{AND2}\}, \{\text{XOR1}, \text{XOR2}\}, \{c_{in}, \text{AND2}\}, \{c_{in}, \text{XOR2}\}, \{\text{AND2}, \text{OR1}\}, \{\text{XOR2}, s\}, \{\text{OR1}, c_{out}\}\}$



Graphen: Beispiel III

UML Aktivitätsdiagramme sind Graphen, die in der Softwareentwicklung benutzt werden, um Programmabläufe darzustellen. Hierbei enthält die Knotenmenge die einzelnen Aktionen/Schritte und die Kantenmenge stellt die Kontroll- und Datenflüsse dar. Für einen Computerstart erhält man den folgenden Graph:

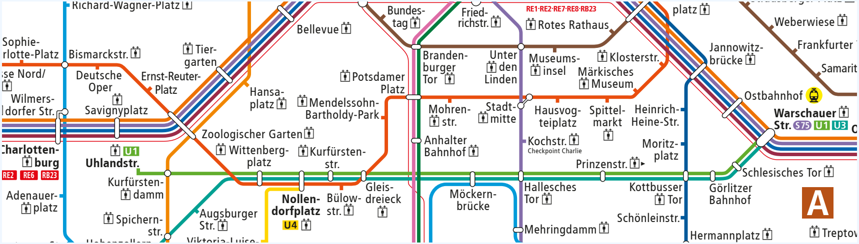


Graphen: Beispiel IV

Wir betrachten das U-Bahn-Netz von Berlin.
Die Stationen bilden eine Menge und zwei Stationen können über die Existenz einer direkten U-Bahn-Verbindung miteinander in Beziehung gesetzt werden.

$V = \{$Ernst-Reuter-Platz, Zoologischer Garten, Kurfürstendamm, $\ldots\}$

$E = \{\{$Ernst-Reuter-Platz, Zoologischer Garten$\}$,
$\{$Zoologischer Garten, Wittenbergplatz$\}$,
$\{$Zoologischer Garten, Kurfürstendamm$\}, \ldots\}$

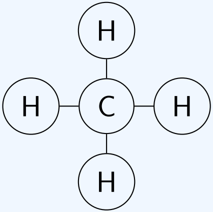


Source: https://www.bvg.de/de/verbindungen/netzplaene-und-linien

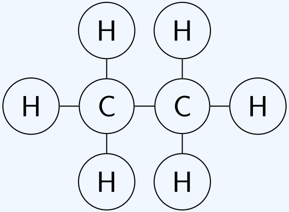
Graphen: Beispiel V

In der Chemie werden Graphen beispielsweise verwendet, um Molekülstrukturen darzustellen. Um Alkane zu modellieren, wählt man als Knotenmenge die Menge alle benötigten Kohlenstoff- und Wasserstoffatome und die Kantenmenge enthält genau die Atom-Paare, die über eine Einfachverbindung verbunden sind.

Graph für Methan:

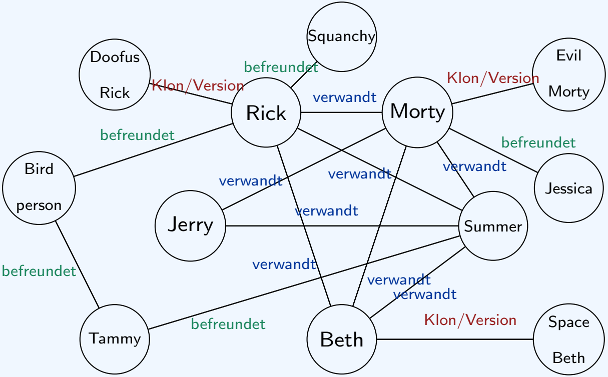


Graph für Ethan:



Graphen: Beispiel VI

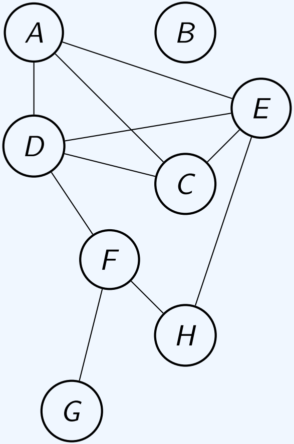
In der Literatur- und Filmwissenschaft werden Graphen beispielsweise verwendet, um Figurenkonstellationen darzustellen. Die Knotenmenge besteht dann aus den Figuren, die in einem Werk vorkommen und die Kantenmenge enthält diejenigen Figurenpaare, die miteinander in Beziehung stehen. Eine zusätzliche Kantenbeschriftung kann die Beziehungen noch weiter spezifizieren.



Graphbegriffe

Graphbegriffe: Nachbarschaft

Beispielgraph G:



Nachbarschaft

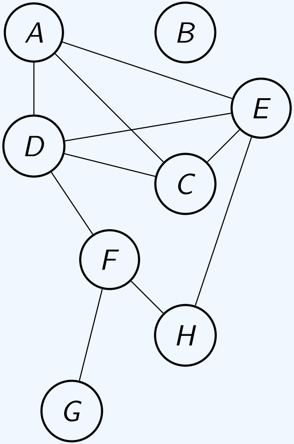
Sei G ein Graph und $v \in V(G)$ ein Knoten. Die Nachbarschaft $N_G(v)$ von v in G besteht aus allen zu v adjazenten Knoten. Also $N_G(v) := \{u \in V(G) \mid \{u, v\} \in E(G)\}$.

Im Beispielgraph:

$N_G(A) = \{D, C, E\}$
$N_G(B) = \emptyset$
$N_G(C) = \{A, D, E\}$
$N_G(D) = \{A, C, E, F\}$

Graphbegriffe: Nachbarschaft

Beispielgraph G:



Geschlossene Nachbarschaft

Sei G ein Graph und $v \in V(G)$ ein Knoten. Die geschlossene Nachbarschaft $N_G[v]$ von v in G besteht aus allen zu v adjazenten Knoten, sowie dem Knoten v. Also
$N_G[v] := \{u \in V(G) \mid u = v \vee \{u, v\} \in E(G)\}$.

Im Beispielgraph:

$N_G[E] = \{A, D, C, H, E\}$
$N_G[F] = \{D, G, H, F\}$
$N_G[G] = \{F, G\}$
$N_G[H] = \{E, F, H\}$

Graphbegriffe: Grad

Grad

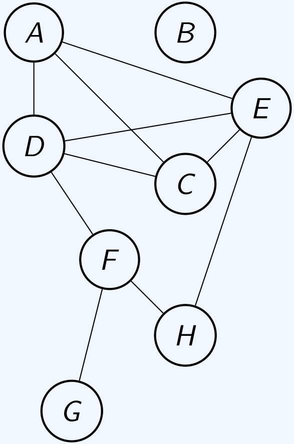
Sei G ein Graph und $v \in V(G)$ ein Knoten. Der Grad $d_G(v)$ von v in G ist die Größe der Nachbarschaft von v. Also $d_G(v) = |N_G(v)|$.

Maximalgrad und Minimalgrad

Sei G ein Graph. Der Maximalgrad $\Delta(G)$ von G ist der größte in G vorkommende Grad und der Minimalgrad $\delta(G)$ der kleinste. Also
$\Delta(G) = \max\{d_G(v) \mid v \in G\}$ und
$\delta(G) = \min\{d_G(v) \mid v \in G\}$.

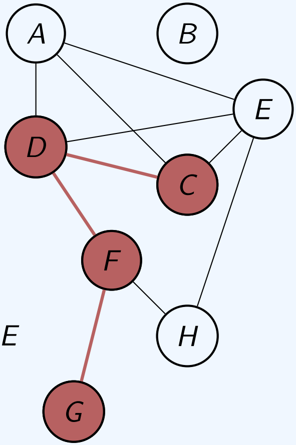
Im Beispielgraph:
$\Delta(G) = 4$
$\delta(G) = 0$

Beispielgraph G:



Graphbegriffe: Wege

Beispielgraph G:



Weg

Sei G ein Graph. Ein Weg W in G ist eine Folge adjazenter Knoten und der Kanten dazwischen. Also $W = v_0\{v_0, v_1\}v_1 \ldots \{v_{n-1}, v_n\}v_n$ mit $v_i \in V, \{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für $0 \leq i < n$.

Im Beispielgraph:

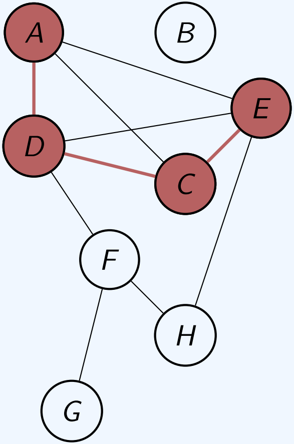
$G\{G,F\}F\{F,D\}D\{D,C\}C$ ist ein Weg

$A\{A,E\}E\{E,H\}H\{H,F\}F\{F,D\}D\{D,C\}C\{C,E\}E$ ist ein Weg

$C\{C,D\}D\{D,F\}FG\{G,E\}E$ ist kein Weg

Graphbegriffe: Wege

Beispielgraph G:

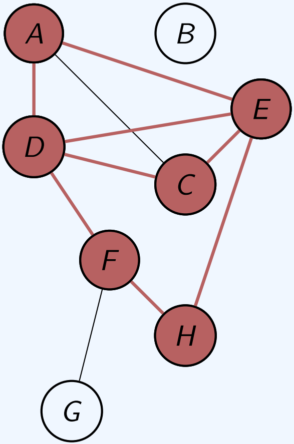


Einige spezielle Arten von Wegen sind von besonderem Interesse:

Pfad: Ein Weg, auf dem alle Knoten verschieden sind.
$A\{A,D\}D\{D,C\}C\{C,E\}E$ ist ein Pfad.

Graphbegriffe: Wege

Beispielgraph G:



Einige spezielle Arten von Wegen sind von besonderem Interesse:

Pfad: Ein Weg, auf dem alle Knoten verschieden sind.
$A\{A,D\}D\{D,C\}C\{C,E\}E$ ist ein Pfad.

Geschlossener Weg: Ein Weg, dessen Start- und Endknoten übereinstimmen.
$A\{A,E\}E\{E,H\}H\{H,F\}F\{F,D\}D\{D,C\}C$ $\{C,E\}E\{E,D\}D\{D,A\}A$ ist ein geschlossener Weg.

Graphbegriffe: Wege

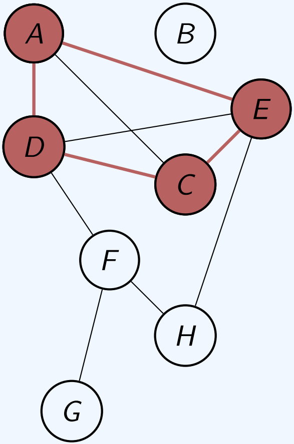
Einige spezielle Arten von Wegen sind von besonderem Interesse:

Pfad: Ein Weg, auf dem alle Knoten verschieden sind.
$A\{A,D\}D\{D,C\}C\{C,E\}E$ ist ein Pfad.

Geschlossener Weg: Ein Weg, dessen Start- und Endknoten übereinstimmen.
$A\{A,E\}E\{E,H\}H\{H,F\}F\{F,D\}D\{D,C\}C$ $\{C,E\}E\{E,D\}D\{D,A\}A$ ist ein geschlossener Weg.

Kreis: Ein Weg, dessen Start- und Endknoten übereinstimmen und alle anderen Knoten verschieden sind.
$A\{A,D\}D\{D,C\}C\{C,E\}E\{E,A\}A$ ist ein Kreis

Beispielgraph G:



Graphbegriffe: Entfernung

Die Entfernung zweier Knoten in einem Graph G wird als Anzahl der Kanten auf einem kürzesten Pfad zwischen ihnen definiert.

Distanz

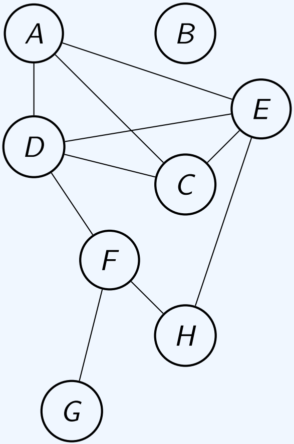
Sei G ein Graph und $u, v \in V(G)$ Knoten. Die Distanz $dist_G(u, v)$ zwischen u und v in G ist
$dist_G(u, v) = \min\{n \mid$
es gibt eine Pfad mit n Kanten zwischen u und $v\}$.

$dist_G(A, G) = 3$

$dist_G(E, F) = 2$

$dist_G(C, C) = 0$

Beispielgraph G:



Untergraphen

Untergraphen: Grundlagen

Man möchte Graphen vergleichen und miteinander in Beziehung setzen. Ein wichtiges Konzept hierbei, das 'Enthaltensein' ausdrückt, sind Untergraphen.

Untergraph

Sei G ein Graph. Ein Graph H ist ein Untergraph von G, wenn $V(H) \subseteq V(G)$ und $E(H) \subseteq E(G)$ gilt.

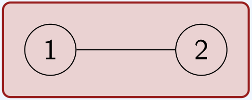
Zwei spezielle Arten von Untergraphen sind besonders interessant:

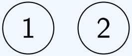
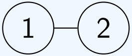
Induzierte Untergraphen: Untergraphen H mit $E(H) = \{\{u, v\} \in E(G) \mid u, v \in V(H)\}$. Also Untergraphen, die alle Kanten enthalten, die G enthält, bei denen beide Endknoten in der Knotenmenge von H sind.

Spannende Untergraphen: Untergraphen H mit $V(H) = V(G)$. Also Untergraphen mit der gleichen Knotenmenge wie G.

Untergraphen: Beispiel I

Wir betrachten den Graphen $G = (\{1,2\},\{\{1,2\}\})$ und suchen alle Untergraphen von G.

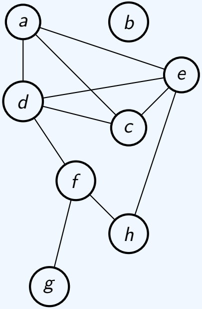


Untergraph	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5
V	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$
E	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\{1,2\}\}$
Bild					
induziert?	ja	ja	ja	nein	ja
spannend?	nein	nein	nein	ja	ja

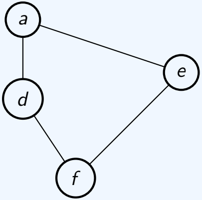
Untergraphen: Beispiel II

Welche Graphen sind Untergraphen von folgendem Graphen G?

G:

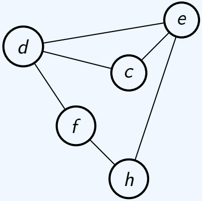


H_1:



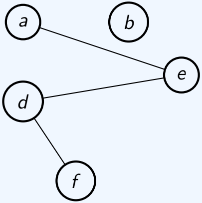
Nein, da $E(H_1) \not\subseteq E(G)$.

H_2:



Ja, sogar induziert.

H_3:



Ja.

Graphoperationen

Graphoperationen: Binäre Operationen

Man kann aus bestehenden Graphen neue Graphen erstellen. Dafür gibt es verschiedene Operationen.
Bei binären Operationen werden zwei bestehende Graphen der gleichen Art miteinander verknüpft.

Vereinigung

Seien G, H Graphen. Die Vereinigung von G und H ist der Graph, der aus den vereinigten Knotenmengen und Kantenmengen von G und H besteht, also $G \cup H := (V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H))$.

Schnitt

Seien G, H Graphen. Der Schnitt von G und H ist der Graph, der aus den geschnittenen Knotenmengen und Kantenmengen von G und H besteht, also $G \cap H := (V(G) \cap V(H), E(G) \cap E(H))$.

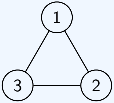
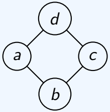
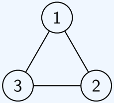
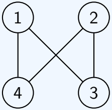
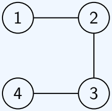
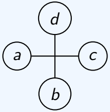
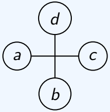
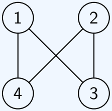
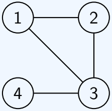
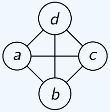
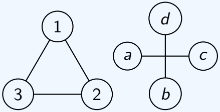
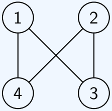
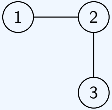
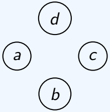
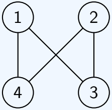
Graphoperationen: Induzieren

Man kann auch aus einem einzelnen bestehenden Graphen neue Graphen erstellen, indem man Teile davon entfernt.
Dies liefert immer Graphen, die Untergraphen des ursprünglichen Graphen sind.
Im Folgenden sei G ein Graph. Es gibt mehrere Möglichkeiten:

- Für jede Teilmenge X der Knotenmenge kann man $G[X] = (X, \{\{u,v\} \in E(G) \mid u,v \in X\})$ definieren. Dieser Graph wird von X induzierter Untergraph in G genannt.
- Für jede Teilmenge X der Knotenmenge kann man $G - X = (V(G) \setminus X, \{\{u,v\} \in E(G) \mid u,v \notin X\})$ definieren.
- Als Spezialfall davon kann man für jeden Knoten $w \in V(G)$ den Graphen $G - w = (V(G) \setminus \{w\}, \{\{u,v\} \in E(G) \mid u \neq w, v \neq w\})$ definieren.
- Für jede Kante $\{u,v\} \in E(G)$ kann man $G - \{u,v\} = (V(G), E(G) \setminus \{\{u,v\}\})$ definieren.

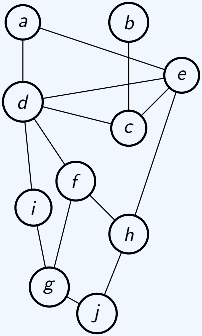
Graphoperationen: Beispiele I

Wir verknüpfen die folgenden Graphen G und H:

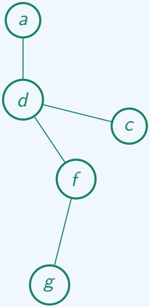
G				
H				
$G \cup H$				
$G \cap H$				

Wir bauen Untergraphen des folgenden Graphen G:

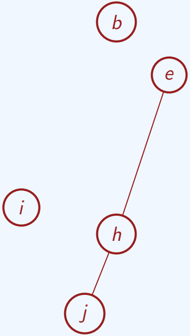
G:



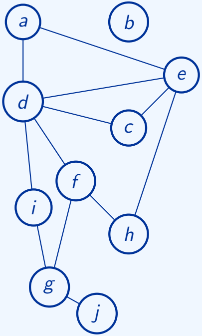
$G[\{a, c, d, f, g\}]$:



$G - \{a, c, d, f, g\}$:



$G - \{\{b, c\}\}$:



Zusammenhang

Zusammenhang: Grundlagen

Zusammenhang

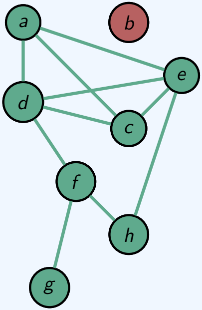
Sei G ein Graph. G ist zusammenhängend, wenn für alle Knotenpaare $u, v \in G$ ein Pfad zwischen u und v existiert.

Auch für Teilmengen der Knotenmenge ist Zusammenhang definiert. Sei G ein Graph und $M \subseteq V(G)$ eine Teilmenge der Knotenmenge. M ist zusammenhängend in G, wenn $G[M]$ als Graph zusammenhängend ist.

Jeder Graph kann in Zusammenhangskomponenten zerlegt werden. Zusammenhangskomponenten sind die von maximalen zusammenhängenden Knotenteilmengen induzierten Untergraphen.

Zusammenhang: Beispiel

Beispielgraph G:



G besteht aus den zwei Zusammenhangskomponenten $G[\{a, c, d, e, f, g, h\}]$ und $G[\{b\}]$.

Erinnerung: Der Multiple-Choice-Test findet nächste Woche, am 31.05.2024, statt.

Feedback, Fragen und Vorschläge zur Großübung gerne an:

a.heindl@tu-berlin.de

Feedback, Fragen und Vorschläge zur Großübung gerne an:

a.heindl@tu-berlin.de