Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 18/19
G. Penn-Karras 01. April 2019

April – Klausur
Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Füllen Sie bitte dieses Deckblatt vollständig und leserlich aus. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§39 Abs. 2 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Schreiben Sie auf *jedes* benutzte Blatt Papier sofort Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die ausgegebene oder von der ISIS-Seite heruntergeladene Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe

10 Punkte

Lösen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation das Anfangswertsproblem für eine Funktion y

$$y'' - y = 2\delta_4(t), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 3.$$

2. Aufgabe

8 Punkte

Ermitteln Sie mit Hilfe der $\mathcal{Z}$-Transformation eine Zahlenfolge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit den zwei Eigenschaften

$$y_{k+1} - 3y_k = -2,\ y_0 = 2.$$

Hinweis: Es gilt für $a \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{Z}\left[(a^k)_{k\in\mathbb{N}_0}\right](z) = \mathcal{Z}\left[(1, a, a^2, a^3, \ldots)\right](z) = \frac{z}{z-a}$$

und

$$\mathcal{Z}\left[(a)_{k\in\mathbb{N}_0}\right](z) = \mathcal{Z}\left[(a, a, a, a, \ldots)\right](z) = \frac{az}{z-1}.$$

3. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist die reelle Differentialgleichung

$$-2x\mathrm{e}^{-y} = y'.$$

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung. Gibt es Lösungen, die auf ganz $\mathbb{R}$ erklärt sind?

b) Bestimmen Sie die Lösung, die zusätzlich die Anfangsbedingung $y(0) = 2$ erfüllt, und geben Sie den maximalen Definitionsbereich dieser Lösung an. Gibt es weitere Lösungen dieses Anfangswertproblems? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

4. Aufgabe

10 Punkte

Ermitteln Sie im $\mathbb{R}^3$ die allgemeine Lösung $\vec{y}(t)$ des Differentialgleichungssystems

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \vec{y}\,.$$

1. Aufgabe

10 Punkte

Lösen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation das Anfangswertsproblem für eine Funktion y

$$y'' - y = 2\delta_4(t), \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 3.$$

$$(s^2 y(s) - s y(0) - y'(0)) - y(s) = 2 \cdot e^{-4t}$$

$$(s^2 - 1) y(s) = s + 3 + 2e^{-4t}$$

$$y(s) = \frac{s+3}{s^2-1} + \frac{2}{s^2-1} e^{-4t}$$

$$= \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s-1} + \left(\frac{-1}{s+1} + \frac{1}{s-1} \right) e^{-4s}$$

$$y(t) = -e^{-t} + 2e^{t} + u_4(t) \cdot (-e^{-(t-4)} + e^{t-4})$$

3. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist die reelle Differentialgleichung

$$-2x\mathrm{e}^{-y} = y'.$$

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung. Gibt es Lösungen, die auf ganz $\mathbb{R}$ erklärt sind?

b) Bestimmen Sie die Lösung, die zusätzlich die Anfangsbedingung $y(0) = 2$ erfüllt, und geben Sie den maximalen Definitionsbereich dieser Lösung an. Gibt es weitere Lösungen dieses Anfangswertproblems? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) ① $e^{-y} = 0 \Rightarrow$ keine konstant LSG

②

$$\int e^{y} \, dy = \int -2x \, dx$$

$$e^{y} = -x^2 + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y = \ln(-x^2 + c)$$

$$-x^2 + c > 0 \Rightarrow x^2 < c$$

$$\Rightarrow x \in]-\sqrt{c}, \sqrt{c}[$$

b) $y(0) = \ln c = 2 = \ln e^2$

$$\Rightarrow c = e^2$$

$$y = \ln(-x^2 + e^2)$$

$$x \in]-e, e[$$

4. Aufgabe

10 Punkte

Ermitteln Sie im $\mathbb{R}^3$ die allgemeine Lösung $\vec{y}(t)$ des Differentialgleichungssystems

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \vec{y}\,.$$

EW: $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 4 & 8 \\ -1 & -\lambda & -4 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} 4-\lambda & 4 \\ -1 & -\lambda \\ 0 & 0 \end{matrix}$

$= (4-\lambda)(-\lambda)(-2-\lambda) + 0 + 0 - 0 - 0 + 4(-2-\lambda)$

$= (-2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4)$

$= (-2-\lambda)(\lambda-2)^2 = 0$

$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_{2,3} = 2$

$\text{alg}(-2) = 1 \quad \text{alg}(2) = 2$

EV zu $\lambda = -2$: $(A + 2I)\vec{v_1} = \vec{0}$ $\quad \begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$2v_2 = v_1 + 4v_3$

$8v_1 + 16v_3 = 0$

$v_1 = -2v_3$

$2v_2 = 2v_3$

$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -2v_3 \\ v_3 \\ v_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

EV zu $\lambda = 2$: $(A - 2I)\vec{v_2} = \vec{0}$ $\quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $v_1 = -2v_2$, $v_3 = 0$

$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\text{geo}(2) = 1 < \text{alg}(2) = 2$

HV 2. Stufe: $(A - 2I)\vec{v_3} = \vec{v_2}$: $\quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $v_1 + 1 = -2v_2$, $v_3 = 0$

$\vec{v_3} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

allg. Lsg: $\vec{x}(t) = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

5. Aufgabe

12 Punkte

a) Betrachten Sie die reelle Differentialgleichung

$$y'' = \alpha y$$

mit einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es genau für $\alpha < 0$ periodische und nicht-konstante Lösungen $y(x)$ gibt. Geben Sie diese Lösungen an.

b) Gegeben ist das reelle Randanfangswertproblem für eine Funktion $u(x,t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad 0 < x < 2\pi, \quad t > 0\,;$$

$$u(0,t) = u(2\pi,t) = 0, \qquad t > 0\,,$$

$$u(x,0) = 0, \qquad 0 < x < 2\pi.$$

(i) Finden Sie alle Lösungen $u(x,t)$ der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$. Hierbei können Sie die Ergebnisse aus Teilaufgabe a) benutzen und ohne Beweis verwenden, dass die Funktionen $X(x)$ periodisch und nicht-konstant sind.

(ii) Ermitteln Sie durch Superposition eine Lösung $u(x,t)$ mit den Eigenschaften

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 4\sin x + 24\sin 4x.$$

$\mathcal{F}[e^{-t^2/2}](\omega) = \sqrt{2\pi}e^{-\omega^2/2}$,

$\mathcal{F}[e^{-|t|}](\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$, $\qquad \mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](\omega) = \pi e^{-|\omega|}$,

$\mathcal{F}[r_T(t)](\omega) = \mathrm{si}(\omega T)$ $\qquad \mathcal{F}[\mathrm{si}(tT)](\omega) = 2\pi r_T(\omega)$.

6. Aufgabe

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.
(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt 2 Punkte.)
Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

$e^{-\sqrt{t}} < 1$

$e^{-\sqrt{t}} < c \cdot e^{\lambda t}$

a) Die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}$ ist von exponentieller Ordnung. $\Rightarrow -\sqrt{t} < \ln c + \lambda t$

b) Ein LTI-System mit der Impulsantwort $h(t) = 2t$ antwortet auf ein Eingangssignal $e(t) = 3t$ mit dem Ausgangssignal $a(t) = t^3$.

$$\int_0^t 2(t-\tau)\cdot 3(\tau)\,d\tau = \int_0^t 6\cdot(-\tau^2 + t\tau)\,d\tau = 6\cdot\left(-\tfrac{1}{3}\tau^3 + \tfrac{1}{2}t\tau^2\right)\Big|_0^t = -2t^3 + 3t^3 = t^3$$

c) Die Fouriertransformierte von $f(t) = \frac{1}{1+4t^2}$ ist $F(\omega) = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\left|\frac{\omega}{2}\right|}$.

d) Die Funktion $f(t) = \mathrm{si}(t) * r_1(t)$ ist von endlicher Bandbreite.

e) Die Bessel-Funktion $J_4(x)$ ist eine lineare Funktion.

c) $\mathcal{F}[\frac{1}{1+4t^2}](\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}[\frac{1}{1+t^2}](\frac{1}{2}\omega) = \frac{1}{2}\pi e^{-|\frac{1}{2}\omega|}$

d) $\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[\mathrm{si}(t)](\omega) \cdot \mathcal{F}[r_1(t)] = 2\pi r_1(\omega)\cdot \mathrm{si}(\omega)$ ist von endlichen Bandbreite

e)

5. Aufgabe

12 Punkte

a) Betrachten Sie die reelle Differentialgleichung

$$y'' = \alpha y$$

mit einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es genau für $\alpha < 0$ periodische und nicht-konstante Lösungen $y(x)$ gibt. Geben Sie diese Lösungen an.

b) Gegeben ist das reelle Randanfangswertproblem für eine Funktion $u(x,t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad 0 < x < 2\pi, \quad t > 0\,;$$

$$u(0,t) = u(2\pi,t) = 0, \qquad t > 0\,,$$

$$u(x,0) = 0, \qquad 0 < x < 2\pi.$$

(i) Finden Sie alle Lösungen $u(x,t)$ der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$. Hierbei können Sie die Ergebnisse aus Teilaufgabe a) benutzen und ohne Beweis verwenden, dass die Funktionen $X(x)$ periodisch und nicht-konstant sind.

(ii) Ermitteln Sie durch Superposition eine Lösung $u(x,t)$ mit den Eigenschaften

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 4\sin x + 24\sin 4x.$$

a) $y'' - \alpha y = 0$

$\alpha > 0$: $y(x) = C_1 e^{x\sqrt{\alpha}} + C_2 e^{-x\sqrt{\alpha}}$

$\alpha = 0$ $y(x) = C_1 x + C_2$

$\lambda^2 - \alpha = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-\alpha}\, i$

$y(x) = C_1 \cos(\sqrt{-\alpha}\, x) + C_2 \sin(\sqrt{-\alpha}\, x)$ $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

b) (i) $X''(x)T(t) - \frac{1}{4} X(x) T''(t) = 0$

$\frac{4X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = r$

$\begin{cases} X''(x) - \frac{1}{4} \cdot r X(x) = 0 \\ T''(t) - r\, T(t) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \lambda_x^2 - \frac{1}{4} r = 0 \Rightarrow \lambda_x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{-r}$

$X(x) = C_1 \cos(\frac{1}{2}\sqrt{-r}\, x) + C_2 \sin(\frac{1}{2}\sqrt{-r}\, x)$

$\Rightarrow T(t) = C_3 \cos(\sqrt{-r}\, t) + C_4 \sin(\sqrt{-r}\, t)$

$X(0) = C_1 = 0$

$X(2\pi) = C_2 \sin(\pi\sqrt{-r}) = 0 \Rightarrow \cancel{\pi}\sqrt{-r} = k\cancel{\pi}$ $\quad k \in \mathbb{N}$ $\quad k > 0$

$r = -k^2$

$T(0) = C_3 = 0$

$X(x) = C_2 \sin(\frac{1}{2} k x)$

$T(t) = C_4 \sin(kt)$

$u(x,t) = A \sin(\frac{1}{2} kx) \sin(kt)$

(ii) $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\frac{1}{2} kx) \sin(kt)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot k \sin\left(\frac{1}{2}kx\right) \cos(kt) = 4 \sin x + 24 \sin 4x$$

$$k = 2, \quad A_2 = 2$$

$$k = 8, \quad A_8 = 3$$

$$k \neq 2, 8, \quad A_k = 0$$

$$u(x,t) = 2 \sin(x) \sin(2t) + 3 \sin(4x) \sin(8t)$$