operations research
QUANTITATIVE INFRASTRUKTURSYSTEMMODELLIERUNG

Tutorium

Operations Research – Grundlagen

Technische Universität Berlin
Fachgebiet **W**irtschafts- und **I**nfrastruktur**P**olitik
WIP

operations research
QUANTITATIVE INFRASTRUKTURSYSTEMMODELLIERUNG

Tutorium

Operations Research – Grundlagen

Technische Universität Berlin
Fachgebiet Wirtschafts- und InfrastrukturPolitik

Lineare Optimierung: Simplex und ökonomische Interpretation

Tutorium:

2.15	Dualer Simplex
2.18	Der Viehzuchtbetrieb

Freiwillige Hausaufgaben:

2.13 a,f,g	Simplex-Algorithmus
2.14	Primaler Simplex
2.16	Dualer und Primaler Simplex
2.17 a-c	Der Eisenwarenproduzent
2.19	Der Nährstoffpillenhersteller

Bitte zu jedem Tutorium Aufgabenkatalog und Handout mitbringen!

Simplex-Algorithmus (2-Phasen-Methode)

Simplex算法（两阶段法）

Dualer Simplex: Findet eine zulässige Basislösung.

双重Simplex算法：找到一个可行的基本解。

Primaler Simplex: Geht die Eckpunkte des zulässigen Bereichs (zulässige Basislösungen) ab und sucht nach der optimalen Basislösung.

原始Simplex算法：遍历可行区域的顶点（可行的基本解），并寻找最优的基本解。要使用Simplex法解决Tableau形式的LP问题，必须将问题转化为标准形式，并将其转换为Simplex表。

Um ein LP mit dem Simplex in Tableauschreibweise zu lösen, muss das Problem in die Standardform gebracht werden und in ein Simplex-Tableau übertragen werden.

Dualer Simplex:

双重Simplex算法：
1. 评估当前表：bi列的所有值都是正的吗？是→找到了可行的基本解→应用原始Simplex算法（从第7步开始） 否→尚未找到可行的基本解→应用双重Simplex算法
1. 在bi列中找到最小的负值 ⇒ 旋转行

1. **Beurteilung des vorliegenden Tableaus:**
   Sind alle Werte der b_i-Spalte positiv?

   Ja → zulässige Basislösung gefunden → Primalen Simplex anwenden (ab Schritt 7)

   Nein → zulässige Basislösung noch nicht gefunden → Dualen Simplex anwenden

2. Suche den minimalen negativen Wert in bi-Spalte

   ⇒ Pivotzeile

3. 对于所有负的aij，计算z行和旋转行之间的比率zj aij，并选择最大的比率 ⇒ 旋转列

3. Bilde die Quotienten zwischen z-Zeile und Pivotzeile $\frac{z_j}{a_{ij}}$ für alle negativen a_{ij} und wähle den maximalen Quotienten

   ⇒ Pivotspalte

4. 创建新的表。将旋转行的行标头替换为旋转列的列标头。（将非基变量纳入基变量中）

4. Neues Tableau erstellen. Dabei Zeilenkopf der Pivotzeile mit dem Spaltenkopf der Pivotspalte ersetzen. (Nichtbasisvariable in Basis mit aufnehmen)

5. Einheitsvektor durch elementare Zeilenoperationen mit der Pivotzeile an der Position der Pivotspalte im neuen Tableau herstellen

5. 通过在新表中将旋转行的位置进行基本行操作来创建单位向量
6. 重复步骤1-5

6. Wiederhole Schritte 1 - 5

原始Simplex算法：
7. 评估当前表：zj行的所有值都是正的吗？是→找到了最优的基本解→从最优表中读取解 否→尚未找到最优的基本解→应用原始Simplex算法
1. 在z行中找到最小的负值 ⇒ 旋转列

Primaler Simplex:

7. **Beurteilung des vorliegenden Tableaus:**
   Sind alle Werte der z_j- Zeile positiv?

   Ja → optimale Basislösung gefunden → **Lösung aus Optimaltableau ablesen**

   Nein → optimale Basislösung noch nicht gefunden → Primalen Simplex anwenden

8. Suche den minimalen negativen Wert in z-Zeile

   ⇒ Pivotspalte

9. Bilde die Quotienten zwischen b_i-Spalte und Pivotspalte $\frac{b_i}{a_{ij}}$ für alle positiven a_{ij} und wähle den minimalen Quotienten

   ⇒ Pivotzeile

9. 对于所有正的aij，计算bi列和旋转列之间的比率，并选择最小的比率 ⇒ 旋转行
10. ⇒ 如第4步。
11. ⇒ 如第5步。
12. 重复步骤7-11

10. ⇒ *Wie 4.*

11. ⇒ *Wie 5.*

12. Wiederhole Schritte 7 - 11

Tutorium 2

TUB-Cloud Link für Tutoriumsmitschriften/Folien:
https://tubcloud.tu-berlin.de/s/A7QK8tTNzd32tbR

Kurze Wiederholung der Standardform

Zielfunktion: max z = Zahl

Nebenbedingungen: s. t. Variablen ≤ Zahl

→ **Schlupf in jede NB einfügen**
→ **Nicht-Negativitätsbedingung für alle Variablen (inkl. Schlupfvariablen) einführen**

Standardform - Vorgehensweise

- Zielfunktion:
  - Maximierungsproblem
    - Minimierungsproblem in Maximierungsproblem umwandeln durch Multiplikation mit (-1)
  - Alle Variablen auf der linken Seite und alle Konstante auf der rechten Seite bringen

- Nebenbedingung:
  - ≤ Nebenbedingung
    - ≥ Nebenbedingung in ≤ Nebenbedingung umwandeln durch Multiplikation mit (-1)
  - Alle Variablen auf der linken Seite und alle Konstante auf der rechten Seite bringen
  - Schlupfvariable als positive Variable in die linke Seite einführen
    - Numerierung: Fortführung der Numerierung von Strukturvariablen
  - „≤“ durch „=“ ersetzen

- Definitionsbereich anpassen

2.13 b) und d) Simplex Algorithmus

b) Gegeben ist das folgende LP. Geben Sie die Standardform an. Finden Sie eine graphische Lösung. Geben Sie den Wert der Struktur- und Schlupfvariablen im Optimum an.

Standardform

- Zielfunktion:

$$\min z = -3x_1 - 2x_2 \mid \cdot (-1)$$

$$\max -z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\max -z - 3x_1 - 2x_2 = 0$$

- Nebenbedingung
  - NB1

$$x_2 \leq 6 - x_1$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

- NB2

$$-3x_1 \geq -9 \mid \cdot (-1)$$

$$3x_1 \leq 9$$

$$3x_1 + x_4 = 9$$

- NB3

$$4x_2 \geq x_1 - 1 \mid \cdot (-1)$$

$$-4x_2 \leq -x_1 + 1$$

$$x_1 - 4x_2 \leq 1$$

$$x_1 - 4x_2 + x_5 = 1$$

- Definitionsbereich

$$x_{1,2,3,4,5} \geq 0$$

2.13 b) LP in Standardform

Allgemeine Form

$$\min z = -3x_1 - 2x_2$$

s.t.

$$x_2 \leq 6 - x_1$$

$$-3x_1 \geq -9$$

$$4x_2 \geq x_1 - 1$$

$$x_{1,2} \geq 0$$

Standardform

$$max -z - 3x_1 - 2x_2 = 0$$

s.t.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$3x_1 + x_4 = 9$$

$$x_1 - 4x_2 + x_5 = 1$$

$$x_{1,2,3,4,5} \geq 0$$

2.13 b) Graphische Lösung

LP

$$\min z = -3x_1 - 2x_2$$

s.t.

$x_2 \leq 6 - x_1$ NB1

$-3x_1 \geq -9$ NB2

$4x_2 \geq x_1 - 1$ NB3

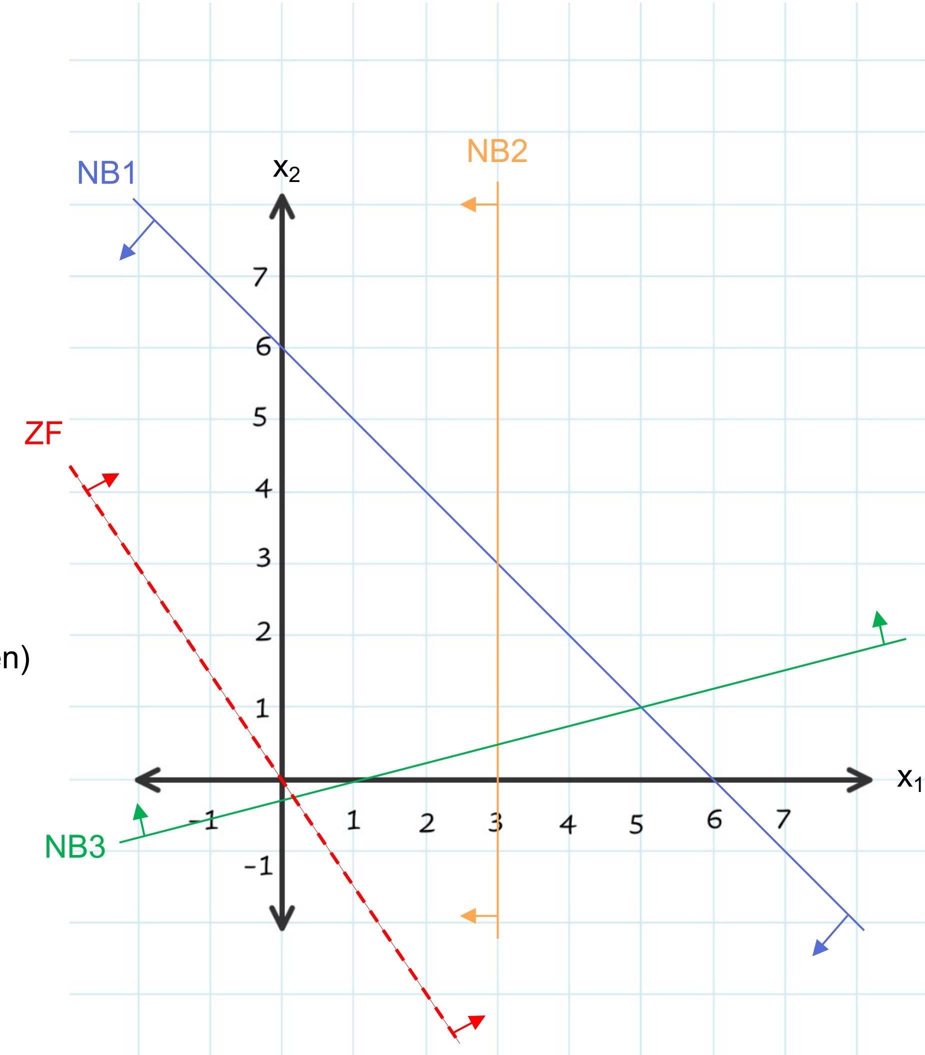
$x_{1,2} \geq 0$

Optimierungsrichtung (min)

$x_1 \uparrow \Rightarrow z \downarrow$

$x_2 \uparrow \Rightarrow z \downarrow$

d.h. nach rechts, oben (Nordosten)



2.13 b) Graphische Lösung

$$\min z = -3x_1 - 2x_2$$

s.t.

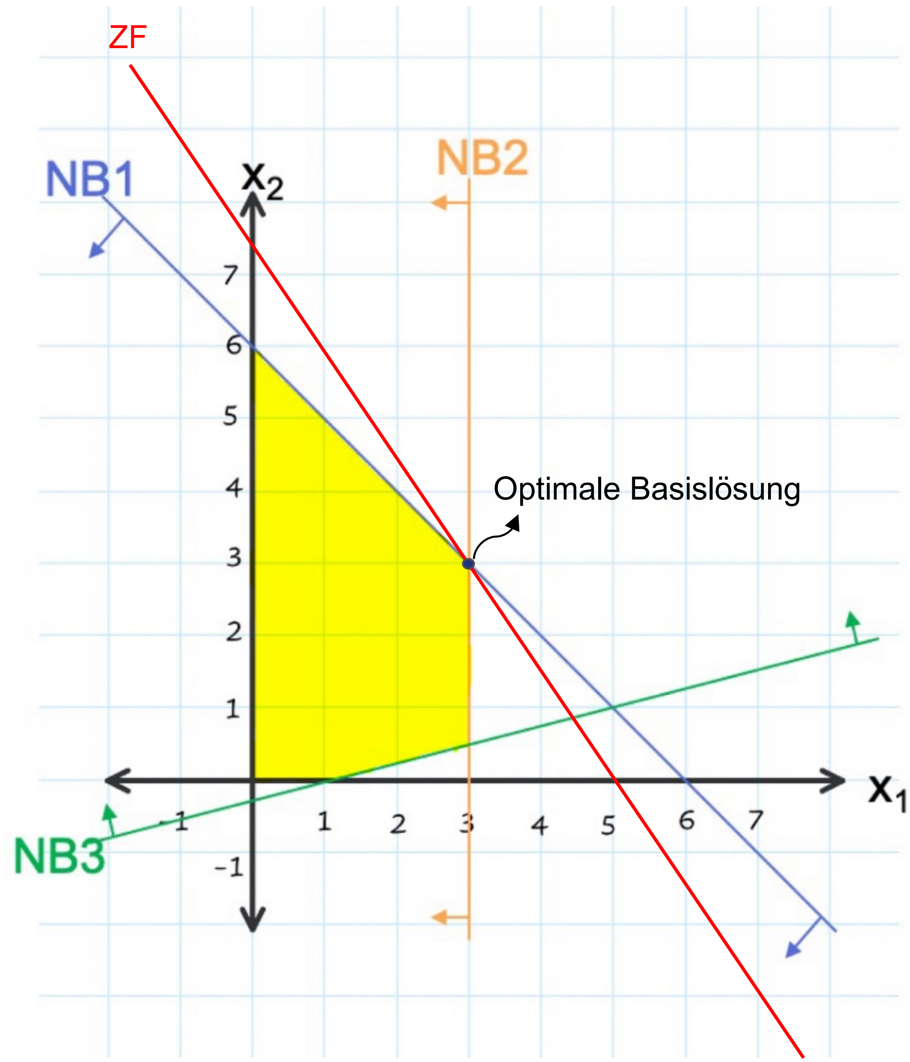
$x_2 \leq 6 - x_1$ NB1

$-3x_1 \geq -9$ NB2

$4x_2 \geq x_1 - 1$ NB3

$x_{1,2} \geq 0$

- **Strukturvariablen** : x_1, x_2
- **Schlupfvariablen** : x_3, x_4, x_5
- **Zulässige Basislösung** : (0,0); (1,0); (3, ½); (3,3); (0,6)
- **Optimale Basislösung** : (3,3)
- **Optimaler ZF-Wert** : z* = -3(3)-2(3) = -15
- **Aktive/Bindende Nebenbedingungen:** NB1 und NB2
- **Passive/Nicht Bindende Nebenbedingungen:** NB3



2.13 d) Simplex Algorithmus: Primaler Simplex

d) Lösen Sie das vorangegangene Problem mit dem Simplex-Algorithmus in Tableauschreibweise.

Standardform

$$\max -z - 3x_1 - 2x_2 = 0$$

s.t.

$$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 6$$
$$3x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 9$$
$$1x_1 - 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 1$$
$$x_{1,2,3,4,5} \geq 0$$

STARTTABLEAU

Spalte : Alle Variable

Start-tableau	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1	1	1	0	0	6
x_4	3	0	0	1	0	9
x_5	1	-4	0	0	1	1
$-z_j$	-3	-2	0	0	0	0

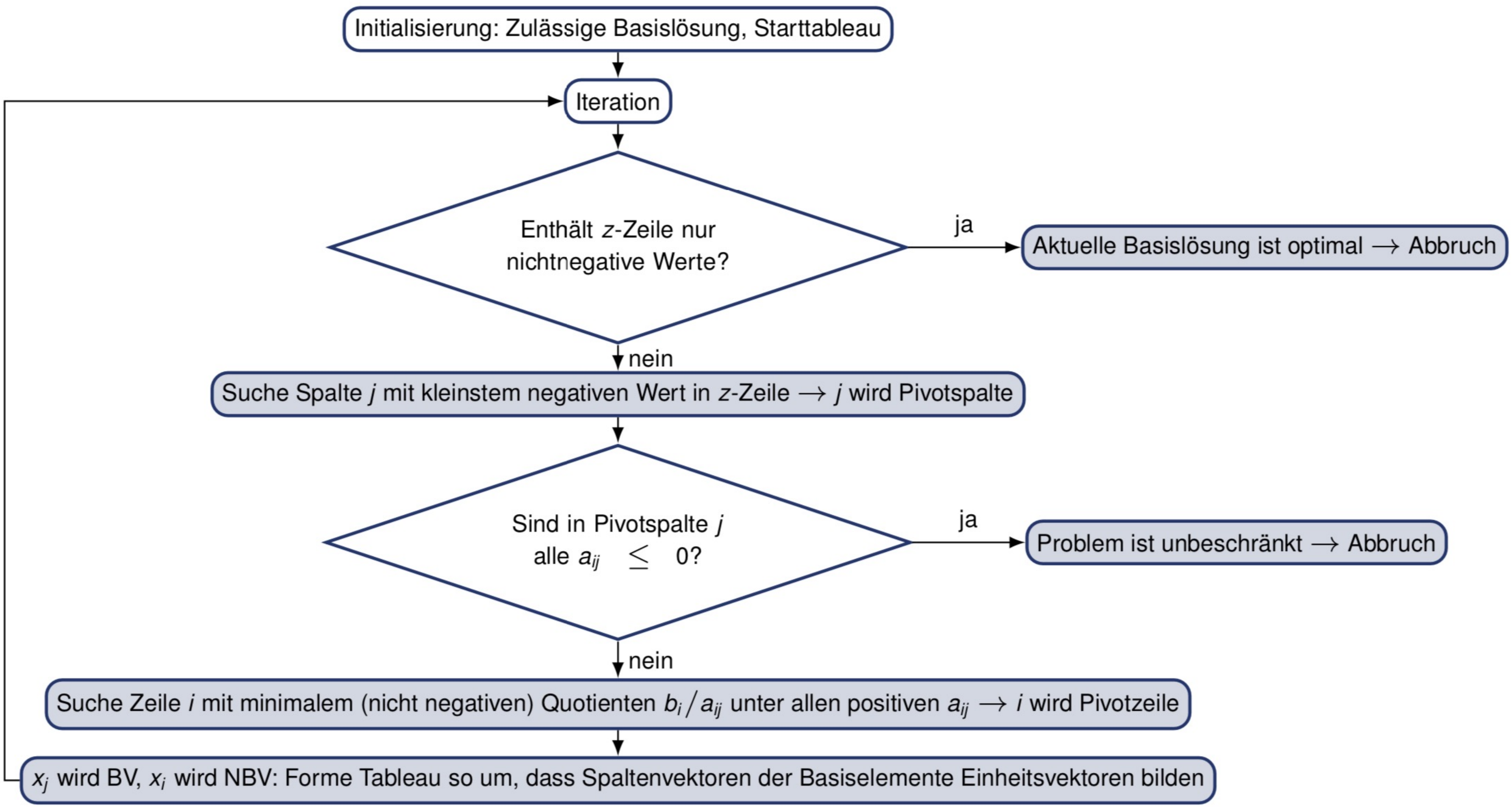
Zielfunktion in Standardform

BASISVARIABLE
- Im Starttableau beinhaltet alle Schlupfvariablen

Ressourcenbeschränkung
- Rechte Seite der NB in Standardform

Zielfunktionsvariable
- Max-Problem : z_j
- Min-Problem : $-z_j$

Simplex Algorithmus



Primaler Simplex

Voraussetzung Tableautransformation

1. Zulässige Basislösung (Alle $b_i \geq 0$)
2. Optimale Basislösung ist noch nicht gefunden (Mindestens ein z_j-Eintrag ist negative)

Pivotelemente bestimmen

- Pivotspalte : Suche den minimalen negative Wert in z_j-Zeile
- Pivotzeile : $\min\left\{\frac{b_i}{a_{ij}}\right\}$ für $a_{ij} > 0$

<u>Start-tableau</u>	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1	1	1	0	0	6
x_4	3	0	0	1	0	9
x_5	1	-4	0	0	1	1
$-z_j$	-3	-2	0	0	0	0

Pivotelement

Pivotspalte

Pivotzeile:
$$min\left\{\frac{6}{1};\frac{9}{3};\frac{1}{1}\right\} = 1 \cong x_5$$

2.13 d)

- **Starttableau**

Start-tableau	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	
x_3	1	1	1	0	0	6	I
x_4	3	0	0	1	0	9	II
x_5	1	-4	0	0	1	1	III
$-z_j$	-3	-2	0	0	0	0	$-z_j$

- **1. Tableautransformation**
  - Pivotspalte in Basisvariable ($x_1 \rightarrow x_5$)
  - Spalten von Basisvariablen bilden Einheitsvektoren
  - Zeilenstufenform bzgl. Pivotelement

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	
x_3	0	5	1	0	-1	5	I-III
x_4	0	12	0	1	-3	6	II-3*III
x_1	1	-4	0	0	1	1	III
$-z_j$	0	-14	0	0	3	3	$-z_j$+3*III

2.13 d)

1. Tableautransformation

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	
x_3	0	5	1	0	-1	5	I
x_4	0	12	0	1	-3	6	II
x_1	1	-4	0	0	1	1	III
$-z_j$	0	-14	0	0	3	3	$-z_j$

Pivotzeile:

$$min\left\{\frac{5}{5};\frac{6}{12}\right\} = \frac{1}{2} \cong x_4$$

2. Tableautransformation

- $x_2 \rightarrow x_4$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	
x_3	0	0	1	-5/12	1/4	5/2	$\mathrm{I} - 5 \cdot \frac{\mathrm{II}}{12}$
x_2	0	1	0	1/12	-1/4	1/2	$\frac{\mathrm{II}}{12}$
x_1	1	0	0	1/3	0	3	$\mathrm{III} + 4 \cdot \frac{\mathrm{II}}{12}$
$-z_j$	0	0	0	7/6	-1/2	10	$-z_j + 14 \cdot \frac{\mathrm{II}}{12}$

2.13 d)

2. Tableautransformation

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	0	0	1	-5/12	1/4	5/2
x_2	0	1	0	1/12	-1/4	1/2
x_1	1	0	0	1/3	0	3
$-z_j$	0	0	0	7/6	-1/2	10

3. Tableautransformation

- $x_5 \rightarrow x_3$
- Alle z_j-Einträge ≥ 0 → Optimaltableau!

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_5	0	0	4	-5/3	1	10
x_2	0	1	1	-1/3	0	3
x_1	1	0	0	1/3	0	3
$-z_j$	0	0	2	1/3	0	15

Optimale Lösung anhand des Tableaus ablesen

- Basisvariable:
  - $x_5^* = 10$
  - $x_2^* = 3$
  - $x_1^* = 3$
- Nicht-Basisvariable (nimmt den Wert von 0 an):
  - $x_3^* = 0$
  - $x_4^* = 0$

- $x_3^* = 0$ → Schlupfvariable der NB1=0 → NB1 ist bindend/aktiv
- $x_4^* = 0$ → Schlupfvariable der NB2=0 → NB2 ist bindend/aktiv
- $x_5^* \neq 0$ → Schlupfvariable der NB3≠0 → NB3 ist nicht bindend/passiv

Anmerkung zum Simplex Algorithmus

Dürfen beim Simplex Algorithmus die elementaren Zeilenoperationen mit allen Zeilen durchgeführt werden?

- Bsp. #2.13 d)

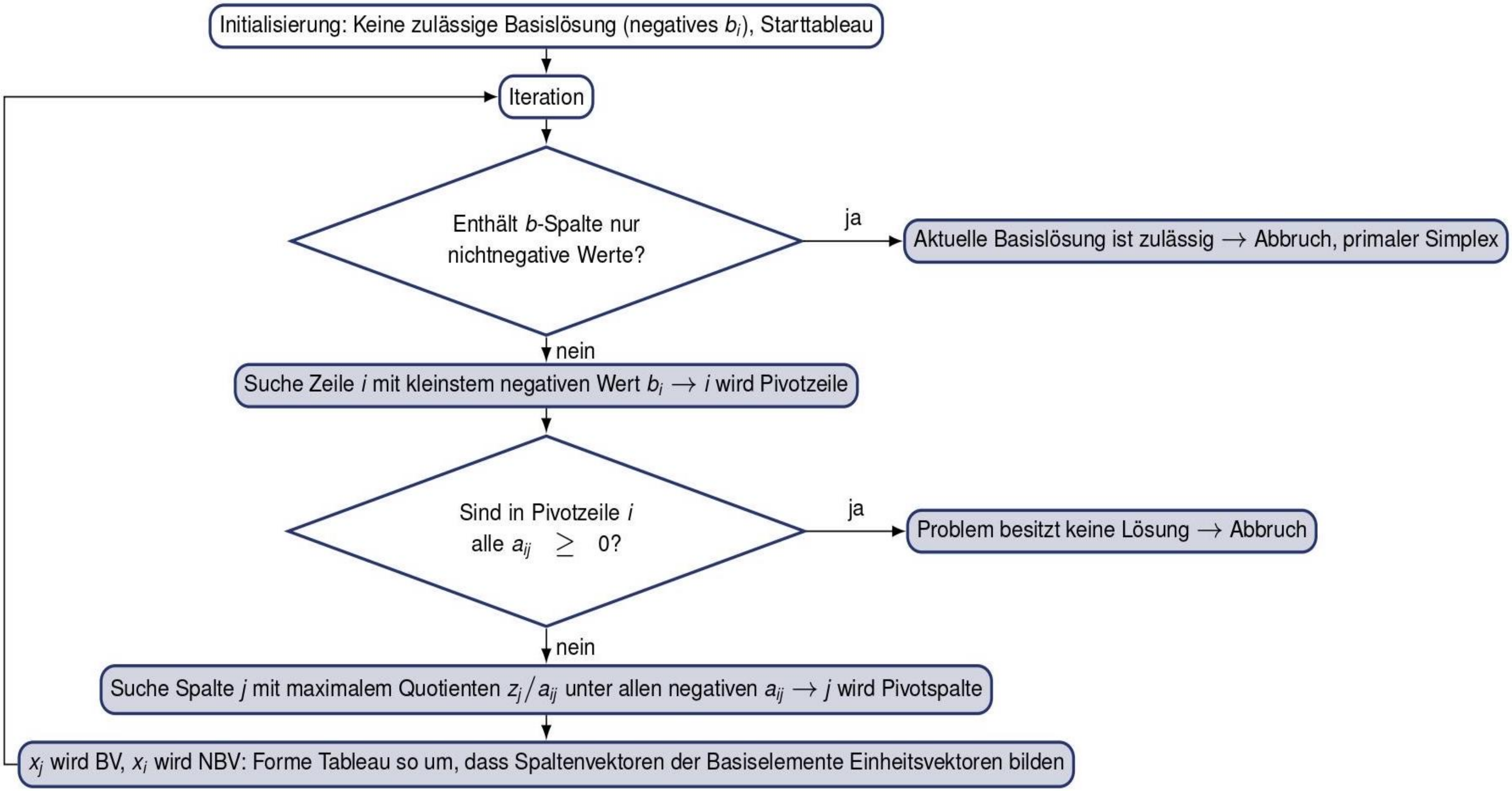
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1	1	1	0	0	6
x_4	3	0	0	1	0	9
x_5	1	-4	0	0	1	1
$-z_j$	-3	-2	0	0	0	0

- Nein, man darf elementare Zeilenoperationen nur mit der Pivotzeile anwenden!
- Achtung! Elementare Zeilenoperationen müssen hintereinander ausgeführt werden!

Elementare Zeilenoperationen

- (Vertauschen von Zeilen)
- Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl (außer 0)
- Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

Simplex Algorithmus (Dualer Simplex)



2.15 Dualer Simplex

Gegeben sei das folgende Problem:

$$
\begin{array}{rrlrlll}
\min z = & 3 & x_1 & - & 5 & x_2 & & \\
\text{s.t.} & 1/3 & x_1 & - & 1 & x_2 & \geq & -7 \\
 & -3 & x_1 & + & 1 & x_2 & \geq & -9 \\
 & 1 & x_1 & & & & \geq & 1 \\
 & & & & 1 & x_2 & \leq & 6 \\
 & & & & & x_{1,2} & \geq & 0
\end{array}
$$

a) Stellen Sie die Standardform auf.

b) Lösen Sie das Problem mithilfe des Dualen Simplex in Tableauschreibweise. Die Rechen- schritte und gewählten Pivotzeilen(Pivotspalten) müssen ersichtlich sein. Geben Sie die Lösungswerte aller Struktur- und Schlupfvariablen und den Zielfunktionswert an.

2.15 Dualer Simplex

a) Stellen Sie die Standardform auf.

Allgemeine Form:

$$
\begin{array}{lrlrlll}
\min z = & 3 & x_1 & - & 5 & x_2 & & \\
\text{s.t.} & 1/3 & x_1 & - & 1 & x_2 & \geq & -7 \\
 & -3 & x_1 & + & 1 & x_2 & \geq & -9 \\
 & 1 & x_1 & & & & \geq & 1 \\
 & & & & 1 & x_2 & \leq & 6 \\
 & & & & & x_{1,2} & \geq & 0
\end{array}
$$

Standardform:

$$\max \; -z + 3x_1 - 5x_2 = 0$$

$$-1/3x_1 + 1x_2 + x_3 = 7$$

$$3x_1 - 1x_2 + x_4 = 9$$

$$-x_1 + x_5 = -1$$

$$x_2 + x_6 = 6$$

$$x_1, \ldots, x_6 \geq 0$$

b) Lösen Sie das Problem mithilfe des Dualen Simplex in Tableauschreibweise. Die Rechen- schritte und gewählten Pivotzeilen(Pivotspalten) müssen ersichtlich sein. Geben Sie die Lösungswerte aller Struktur- und Schlupfvariablen und den Zielfunktionswert an.

2.15 Dualer Simplex

b. Lösen Sie das Problem mithilfe des Dualen Simplex in Tableauschreibweise. Die Rechenschritte und gewählten Pivotzeilen (Pivotspalten) müssen ersichtlich sein.
Geben Sie die Lösungswerte aller Struktur- und Schlupfvariablen und den Zielfunktionswert an.

b.1 Starttableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_3	$-\frac{1}{3}$	1	1	0	0	0	7
x_4	3	-1	0	1	0	0	9
x_5	-1	0	0	0	1	0	-1
x_6	0	1	0	0	0	1	6
$-z$	3	-5	0	0	0	0	0

2.15 Dualer Simplex

b. Lösen Sie das Problem mithilfe des Dualen Simplex in Tableauschreibweise. Die Rechenschritte und gewählten Pivotzeilen (Pivotspalten) müssen ersichtlich sein.
Geben Sie die Lösungswerte aller Struktur- und Schlupfvariablen und den Zielfunktionswert an.

b.1 Starttableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_3	$-\frac{1}{3}$	1	1	0	0	0	7
x_4	3	-1	0	1	0	0	9
x_5	-1	0	0	0	1	0	-1
x_6	0	1	0	0	0	1	6
$-z$	3	-5	0	0	0	0	0

≫ Keine zulässige Basislösung

≫ Dualer Simplex muss durchgeführt werden.

2.15 Dualer Simplex

Durchführung des Dualen Simplex

- Voraussetzung: Keine zulässige Basislösung, $\exists\ b_i < 0$
- **Pivotzeile**: Zeile i mit kleinstem Wert b_i
- **Pivotspalte**: Zeile j mit $\max\{\frac{z_j}{a_{ij}}\}\forall\ a_{ij} < 0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_3	$-\frac{1}{3}$	1	1	0	0	0	7
x_4	3	-1	0	1	0	0	9
x_5	-1	0	0	0	1	0	-1
x_6	0	1	0	0	0	1	6
$-z$	3	-5	0	0	0	0	0

2.15 Dualer Simplex

Durchführung des Dualen Simplex

- Voraussetzung: Keine zulässige Basislösung, $\exists\ b_i < 0$
- **Pivotzeile**: Zeile i mit kleinstem Wert b_i
- **Pivotspalte**: Zeile j mit $\max\{\frac{z_j}{a_{ij}}\}\forall\ a_{ij} < 0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_3	$-\frac{1}{3}$	1	1	0	0	0	7
x_4	3	-1	0	1	0	0	9
x_5	-1	0	0	0	1	0	-1
x_6	0	1	0	0	0	1	6
$-z$	3	-5	0	0	0	0	0

$\max\{\frac{3}{-1}\}\forall\ a_{ij} < 0 \Rightarrow \max\{-3\}$

2.15 Dualer Simplex

Wenn wir Pivotzeile und -spalte gefunden haben, gehen wir genau so vor, wie beim Primalen Simplex, also Einheitsvektor in Spalte erzeugen.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i	
x_3	$-\frac{1}{3}$	1	1	0	0	0	7	$I - \frac{1}{3} \cdot III$
x_4	3	-1	0	1	0	0	9	$II + 3 \cdot III$
x_5	-1	0	0	0	1	0	-1	$\cdot -1$
x_6	0	1	0	0	0	1	6	
$-z$	3	-5	0	0	0	0	0	$V + 3 \cdot III$

2.15 Dualer Simplex

Wenn wir Pivotzeile und -spalte gefunden haben, gehen wir genau so vor, wie beim Primalen Simplex, also Einheitsvektor in Spalte erzeugen.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i	
x_3	0	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$7\frac{1}{3}$	I - IV
x_4	0	-1	0	1	3	0	6	II + IV
x_1	1	0	0	0	-1	0	1	
x_6	0	1	0	0	0	1	6	
$-z$	0	-5	0	0	3	0	-3	V + 5•IV

- Alle $b_i \geq 0$
- Wir haben eine zulässige Basislösung gefunden.
- Wir können den Primalen Simplex durchführen, um eine optimale Basislösung zu finden.

Pivotzeile:

$$min\left\{\frac{7\frac{1}{3}}{1};\frac{6}{1}\right\} = 6 \cong x_6$$

2.15 Dualer Simplex

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_3	0	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$7\frac{1}{3}$
x_4	0	-1	0	1	3	0	6
x_1	1	0	0	0	-1	0	1
x_6	0	1	0	0	0	1	6
$-z$	0	-5	0	0	3	0	-3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_3	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	-1	$\frac{4}{3}$
x_4	0	0	0	1	3	1	12
x_1	1	0	0	0	-1	0	1
x_2	0	1	0	0	0	1	6
$-z$	0	0	0	0	3	5	27

x_1: $\boxed{1}$ x_2: $\boxed{6}$ x_3: $\boxed{\frac{4}{3}}$ x_4: $\boxed{12}$ x_5: $\boxed{0}$ x_6: $\boxed{0}$ z: $\boxed{-27}$

Zusammenhang zwischen Primalem und Dualem Simplex

Starttableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	-2	-1	1	0	0	-6
x_4	-2	-4	0	1	0	-12
x_5	0	-4	0	0	1	-4
$-z_j$	5	7	0	0	0	0

Negative Werte in b_i -Spalte

→ Keine zulässige Basislösung (Nicht Negativitäts-Bedingung verletzt)

→ Anwendung des Primalen Simplex nicht möglich

→ Wende Dualen Simplex an, um zulässige Basislösung zu finden

Ziel: Finde mit Dualem Simplex eine zulässige Basislösung, sodass mit Primalen Simplex die optimale Basislösung gefunden werden kann

Zulässige Basislösung vs. Optimale Basislösung

Zulässige Basislösung: $b_i \geq 0 \quad \forall i$

Optimale Basislösung: $b_i \geq 0 \; \& \; z_j \geq 0 \quad \forall i, j$

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	b_1
x_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	b_2
z	z_1	z_2	z_3	z_4	ZF

2.18 Der Viehzuchtbetrieb

Ein Viehzuchtbetrieb füttert Rinder mit Kraftfuttermischung und Milch. Die Tagesration eines Rindes muss seltene Rohfette, Rohproteine und Kalzium enthalten. Ein Hektoliter Milch enthält kein Kalzium, dafür aber je zwei Gramm Rohfette und Rohproteine. Kraftfuttermischungen enthalten pro Kilogramm ein Gramm Rohfette und je vier Gramm Rohproteine und Kalzium. Jedes Rind muss pro Tag sechs Gramm Rohfette, zwölf Gramm Rohproteine und vier Gramm Kalzium aufnehmen. Bei Kosten von fünf Euro pro Hektoliter Milch und sieben Euro pro Kilogramm Kraftfuttermischung muss der Viehzuchtbetrieb den Einsatz von Kraftfuttermischung und Milch kostenminimal planen.

a) Stellen Sie mit Hilfe eines linearen Programms sicher, dass die Rinder die geforderten Nährstoffe erhalten und der Viehzuchtbetrieb möglichst geringe Kosten hat.

Strukturvariablen:

x_1 : Milch

x_2 : Kraftfuttermischung

2.18 Der Viehzuchtbetrieb

Ein Viehzuchtbetrieb füttert Rinder mit Kraftfuttermischung und Milch. Die Tagesration eines Rindes muss seltene Rohfette, Rohproteine und Kalzium enthalten. Ein Hektoliter Milch enthält kein Kalzium, dafür aber je zwei Gramm Rohfette und Rohproteine. Kraftfuttermischungen enthalten pro Kilogramm ein Gramm Rohfette und je vier Gramm Rohproteine und Kalzium. Jedes Rind muss pro Tag sechs Gramm Rohfette, zwölf Gramm Rohproteine und vier Gramm Kalzium aufnehmen. Bei Kosten von fünf Euro pro Hektoliter Milch und sieben Euro pro Kilogramm Kraftfuttermischung muss der Viehzuchtbetrieb den Einsatz von Kraftfuttermischung und Milch kostenminimal planen.

a) Stellen Sie mit Hilfe eines linearen Programms sicher, dass die Rinder die geforderten Nährstoffe erhalten und der Viehzuchtbetrieb möglichst geringe Kosten hat.

Strukturvariablen:

x_1 : Milch

x_2 : Kraftfuttermischung

2.18 Der Viehzuchtbetrieb

Ein Viehzuchtbetrieb füttert Rinder mit Kraftfuttermischung und Milch. Die Tagesration eines Rindes muss seltene Rohfette, Rohproteine und Kalzium enthalten. Ein Hektoliter Milch enthält kein Kalzium, dafür aber je zwei Gramm Rohfette und Rohproteine. Kraftfuttermischungen enthalten pro Kilogramm ein Gramm Rohfette und je vier Gramm Rohproteine und Kalzium. Jedes Rind muss pro Tag sechs Gramm Rohfette, zwölf Gramm Rohproteine und vier Gramm Kalzium aufnehmen. Bei Kosten von fünf Euro pro Hektoliter Milch und sieben Euro pro Kilogramm Kraftfuttermischung muss der Viehzuchtbetrieb den Einsatz von Kraftfuttermischung und Milch kostenminimal planen.

a) Stellen Sie mit Hilfe eines linearen Programms sicher, dass die Rinder die geforderten Nährstoffe erhalten und der Viehzuchtbetrieb möglichst geringe Kosten hat.

Strukturvariablen:

x_1 : Milch

x_2 : Kraftfuttermischung

2.18 Der Viehzuchtbetrieb

Ein Viehzuchtbetrieb füttert Rinder mit Kraftfuttermischung und Milch. Die Tagesration eines Rindes muss seltene Rohfette, Rohproteine und Kalzium enthalten. Ein Hektoliter Milch enthält kein Kalzium, dafür aber je zwei Gramm Rohfette und Rohproteine. Kraftfuttermischungen enthalten pro Kilogramm ein Gramm Rohfette und je vier Gramm Rohproteine und Kalzium. Jedes Rind muss pro Tag sechs Gramm Rohfette, zwölf Gramm Rohproteine und vier Gramm Kalzium aufnehmen. Bei Kosten von fünf Euro pro Hektoliter Milch und sieben Euro pro Kilogramm Kraftfuttermischung muss der Viehzuchtbetrieb den Einsatz von Kraftfuttermischung und Milch kostenminimal planen.

a) Stellen Sie mit Hilfe eines linearen Programms sicher, dass die Rinder die geforderten Nährstoffe erhalten und der Viehzuchtbetrieb möglichst geringe Kosten hat.

Strukturvariablen:

x_1 : Milch

x_2 : Kraftfuttermischung

2.18 Der Viehzuchtbetrieb

Ein Viehzuchtbetrieb füttert Rinder mit Kraftfuttermischung und Milch. Die Tagesration eines Rindes muss seltene Rohfette, Rohproteine und Kalzium enthalten. Ein Hektoliter Milch enthält kein Kalzium, dafür aber je zwei Gramm Rohfette und Rohproteine. Kraftfuttermischungen enthalten pro Kilogramm ein Gramm Rohfette und je vier Gramm Rohproteine und Kalzium. Jedes Rind muss pro Tag sechs Gramm Rohfette, zwölf Gramm Rohproteine und vier Gramm Kalzium aufnehmen. Bei Kosten von fünf Euro pro Hektoliter Milch und sieben Euro pro Kilogramm Kraftfuttermischung muss der Viehzuchtbetrieb den Einsatz von Kraftfuttermischung und Milch kostenminimal planen.

a) Stellen Sie mit Hilfe eines linearen Programms sicher, dass die Rinder die geforderten Nährstoffe erhalten und der Viehzuchtbetrieb möglichst geringe Kosten hat.

Strukturvariablen:

x_1 : Milch

x_2 : Kraftfuttermischung

2.18 Der Viehzuchtbetrieb

Ein Viehzuchtbetrieb füttert Rinder mit Kraftfuttermischung und Milch. Die Tagesration eines Rindes muss seltene Rohfette, Rohproteine und Kalzium enthalten. Ein Hektoliter Milch enthält kein Kalzium, dafür aber je zwei Gramm Rohfette und Rohproteine. Kraftfuttermischungen enthalten pro Kilogramm ein Gramm Rohfette und je vier Gramm Rohproteine und Kalzium. Jedes Rind muss pro Tag sechs Gramm Rohfette, zwölf Gramm Rohproteine und vier Gramm Kalzium aufnehmen. Bei Kosten von fünf Euro pro Hektoliter Milch und sieben Euro pro Kilogramm Kraftfuttermischung muss der Viehzuchtbetrieb den Einsatz von Kraftfuttermischung und Milch kostenminimal planen.

b) Interpretieren Sie das Optimaltableau ökonomisch. Gehen Sie dabei auch auf die Definitionen der Begriffe Substitutionskoeffizienten und Schattenpreis/Opportunitätskosten ein.

Strukturvariablen:

x_1 : Milch

x_2 : Kraftfuttermischung

$$
\begin{array}{rrl}
\min z = & 5 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 & \\
Rohfette: & 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 & \geq 6 \\
Rohproteine: & 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 & \geq 12 \\
Kalzium: & 4 \cdot x_2 & \geq 4 \\
& x_{1,2} & \geq 0
\end{array}
$$

2.18 Der Viehzuchtbetrieb

a. Stellen Sie mit Hilfe eines linearen Programms sicher, dass die Rinder die geforderten Nährstoffe erhalten und der Viehzuchtbetrieb möglichst geringe Kosten hat.

2. Standardform und Starttableau

$$
\begin{array}{lrl}
\max & -z + 5x_1 + 7x_2 = 0 & \\
\text{s.t.} & -2x_1 - 1x_2 + x_3 & = -6 \\
 & -2x_1 - 4x_2 + x_4 & = -12 \\
 & -4x_2 + x_5 & = -4 \\
 & x_{1,2,3,4,5} & \geq 0
\end{array}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	-2	-1	1	0	0	-6
x_4	-2	-4	0	1	0	-12
x_5	0	-4	0	0	1	-4
$-z_j$	5	7	0	0	0	0

2.18 Der Viehzuchtbetrieb

a. Stellen Sie mit Hilfe eines linearen Programms sicher, dass die Rinder die geforderten Nährstoffe erhalten und der Viehzuchtbetrieb möglichst geringe Kosten hat.

!. Standardform und Starttableau

$$
\begin{array}{lrl}
\max & -z + 5x_1 + 7x_2 = 0 & \\
\text{s.t.} & -2x_1 - 1x_2 + x_3 & = -6 \\
& -2x_1 - 4x_2 + x_4 & = -12 \\
& -4x_2 + x_5 & = -4 \\
& x_{1,2,3,4,5} & \geq 0
\end{array}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	-2	-1	1	0	0	-6
x_4	-2	-4	0	1	0	-12
x_5	0	-4	0	0	1	-4
$-z_j$	5	7	0	0	0	0

- Dualer Simplex muss angewendet werden

2.18 Der Viehzuchtbetrieb

a. Stellen Sie mit Hilfe eines linearen Programms sicher, dass die Rinder die geforderten Nährstoffe erhalten und der Viehzuchtbetrieb möglichst geringe Kosten hat.

Wir erinnern uns:

Pivotzeile: Zeile i mit kleinstem Wert b_i

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	-2	-1	1	0	0	-6
x_4	-2	-4	0	1	0	-12
x_5	0	-4	0	0	1	-4
$-z_j$	5	7	0	0	0	0

Pivotspalte: Zeile j mit $\max\{\frac{z_j}{a_{ij}}\} \forall\ a_{ij} < 0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	-2	-1	1	0	0	-6
x_4	-2	-4	0	1	0	-12
x_5	0	-4	0	0	1	-4
$-z_j$	5	7	0	0	0	0

$$\max\{\frac{5}{-2}; \frac{7}{-4}\} = \max\{-2.5; -1.75\}$$

2.18 Der Viehzuchtbetrieb

a. Stellen Sie mit Hilfe eines linearen Programms sicher, dass die Rinder die geforderten Nährstoffe erhalten und der Viehzuchtbetrieb möglichst geringe Kosten hat.

Wir erinnern uns:

Pivotzeile: Zeile i mit kleinstem Wert b_i

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	-2	-1	1	0	0	-6
x_4	-2	-4	0	1	0	-12
x_5	0	-4	0	0	1	-4
$-z_j$	5	7	0	0	0	0

Pivotspalte: Zeile j mit $\max\{\frac{z_j}{a_{ij}}\} \forall\ a_{ij} < 0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	-2	-1	1	0	0	-6
x_4	-2	-4	0	1	0	-12
x_5	0	-4	0	0	1	-4
$-z_j$	5	7	0	0	0	0

$$\max\{\frac{5}{-2}; \frac{7}{-4}\} = \max\{-2.5; -1.75\}$$

2.18 Der Viehzuchtbetrieb

a. Stellen Sie mit Hilfe eines linearen Programms sicher, dass die Rinder die geforderten Nährstoffe erhalten und der Viehzuchtbetrieb möglichst geringe Kosten hat.

Wir erinnern uns:
Wenn wir Pivotzeile und -spalte gefunden haben, gehen wir genau so vor, wie beim Primalen Simplex, also Einheitsvektor in Spalte erzeugen.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	
x_3	-2	-1	1	0	0	-6	$I - 0.25II$
x_4	-2	-4	0	1	0	-12	$\cdot - 0.25$
x_5	0	-4	0	0	1	-4	$III - II$
$-z_j$	5	7	0	0	0	0	$IV + \frac{7}{4}II$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	-3/2	0	1	-1/4	0	-3
x_2	1/2	1	0	-1/4	0	3
x_5	2	0	0	-1	1	8
$-z_j$	3/2	0	0	7/4	0	-21

2.18 Der Viehzuchtbetrieb

a. Stellen Sie mit Hilfe eines linearen Programms sicher, dass die Rinder die geforderten Nährstoffe erhalten und der Viehzuchtbetrieb möglichst geringe Kosten hat.

Wir erinnern uns:

Pivotzeile: Zeile i mit kleinstem Wert b_i

Pivotspalte: Zeile j mit $\max\{\frac{z_j}{a_{ij}}\}\forall\ a_{ij} < 0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	-3/2	0	1	-1/4	0	-3
x_2	1/2	1	0	-1/4	0	3
x_5	2	0	0	-1	1	8
$-z_j$	3/2	0	0	7/4	0	-21

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	-3/2	0	1	-1/4	0	-3
x_2	1/2	1	0	-1/4	0	3
x_5	2	0	0	-1	1	8
$-z_j$	3/2	0	0	7/4	0	-21

$$\max\{\frac{1.5}{-1.5}; \frac{1.75}{0.25}\} = \max\{-1; -7\}$$

2.18 Der Viehzuchtbetrieb

a. Stellen Sie mit Hilfe eines linearen Programms sicher, dass die Rinder die geforderten Nährstoffe erhalten und der Viehzuchtbetrieb möglichst geringe Kosten hat.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	-2/3	1/6	0	2
x_2	0	1	1/3	-1/3	0	2
x_5	0	0	4/3	-4/3	1	4
$-z_j$	0	0	1	3/2	0	-24

- Dualer Simplex abgeschlossen

2.18 Der Viehzuchtbetrieb

a. Stellen Sie mit Hilfe eines linearen Programms sicher, dass die Rinder die geforderten Nährstoffe erhalten und der Viehzuchtbetrieb möglichst geringe Kosten hat.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	-2/3	1/6	0	2
x_2	0	1	1/3	-1/3	0	2
x_5	0	0	4/3	-4/3	1	4
$-z_j$	0	0	1	3/2	0	-24

- Primaler Simplex ebenfalls abgeschlossen

Die Variablen nehmen im Optimum folgende Werte an:

x_1:	2	x_2:	2	$x_{3,4}$:	0	x_5:	4	z:	24

2.18 b) Der Viehzuchtbetrieb

Optimal Tableau aus a):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	-2/3	1/6	0	2
x_2	0	1	1/3	-1/3	0	2
x_5	0	0	4/3	-4/3	1	4
$-z_j$	0	0	1	3/2	0	-24

2.18 b) Substitutionskoeffizienten

Substitutionskoeffizienten

Geben an, um wie viele Einheiten sich die Basisvariable (BV) zur Zeile i erhöht ($a_{ij} < 0$) bzw. verringert ($a_{ij} > 0$), wenn man die Nichtbasisvariable (NBV) zur Spalte j um eine Einheit erhöht.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	-2/3	1/6	0	2
x_2	0	1	1/3	-1/3	0	2
x_5	0	0	4/3	-4/3	1	4
$-z_j$	0	0	1	3/2	0	-24

2.18 b) Substitutionskoeffizienten

Beispielrechnung Substitutionskoeffizienten für die Erhöhung der NBV x_3 um eine Einheit:

- Da x_3 die Schlupfvariable der NB I, entspricht eine Erhöhung von x_3 einer Verschärfung der NB I um eine Einheit.
- $x_{3,alt} = x_{3,neu} + 1 \geq 0$

Einsetzen in NB I ergibt:

$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 + x_{3,alt} &= -6 \\ -2x_1 - x_2 + (x_{3,neu} + 1) &= -6 \\ \Leftrightarrow \qquad -2x_1 - x_2 + x_{3,neu} &= -7 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir als neue Untergrenze für Rohfette 7 Gramm pro Tag.

2.18 b) Substitutionskoeffizienten

Beispielrechnung Substitutionskoeffizienten für die Erhöhung der NBV x_3 um eine Einheit:

Die Substitutionskoeffizienten zu x_3 befinden sich in der dritten Spalte des Optimaltableaus.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	-2/3	1/6	0	2
x_2	0	1	1/3	-1/3	0	2
x_5	0	0	4/3	-4/3	1	4
$-z_j$	0	0	1	3/2	0	-24

Wir betrachten Zeile $i = 1$. Die Gleichung aus dem Optimaltableau lautet:

$$x_1 - 2/3 \cdot x_3 + 1/6 \cdot x_4 = 2 \Leftrightarrow x_1 = 2/3 \cdot x_3 - 1/6 \cdot x_4 + 2$$

Da $x_4^* = 0$ und $x_{3,neu}^* = 1$ bekannt sind, folgt für die Basisvariable $x_{1,neu}^*$:

$$x_{1,neu}^* = 2 + 2/3 \cdot x_{3,neu}^* - 1/6 \cdot x_4^* = 2 + 2/3 \cdot 1 - 1/6 \cdot 0 = 2 + 2/3 = 8/3$$

Im Vergleich zu $x_{1,alt}^* = 2$ **erhöht** sich die Basisvariable also um $2/3$ Einheiten.

2.18 b) Substitutionskoeffizienten - Beispiel

Bsp. Erhöhung der NBV x_3 um eine Einheit

- Verschärfung der NB1 um eine Einheit
- Veränderung der BV
  - $x_{1,n}^* = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$
  - $x_{2,n}^* = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \approx 1{,}67$
  - $x_{5,n}^* = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$

为了满足一头牛每天的粗脂肪需求，并额外提供一单位的多余粗脂肪（x3），至少需要喂食7克粗脂肪。为此，大约需要喂食2.67升牛奶（x1）和大约1.67公斤饲料混合物（x2）。同时，这样做只会额外提供大约2.67克钙（x5）（之前额外提供了4克钙）。

Interpretation

Um den Rohfettbedarf eines Rindes pro Tag zu decken und zusätzlich eine überschüssige Einheit Rohfett (x_3) zu füttern, müssen min. 7 g Rohfett gefüttert werden. Dazu müssen ca. 2,67 Hektoliter Milch (x_1) und ca. 1,67 kg Kraftfuttermischung (x_2) gefüttert werden. Gleichzeitig werden dadurch nun nur noch ca. 2,67 g Kalzium (x_5) zusätzlich gefüttert (vorher wurden zusätzliche 4 g verfüttert).

2.18 b) Substitutionskoeffizienten

Schattenpreise bzw. Opportunitätskosten (der NBV)

Kostenmäßige Werte jeder Einheit der Kapazitätsrestriktionen: Erhöht (senkt) man die Anforderungen um eine Einheit verschlechtert (verbessert) sich der ZF-Wert um den angegebenen Wert.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	-2/3	1/6	0	2
x_2	0	1	1/3	-1/3	0	2
x_5	0	0	4/3	-4/3	1	4
$-z_j$	0	0	1	3/2	0	-24

Substitutionskoeffizienten

2.18 b) Schattenpreise bzw. Opportunitätskosten - Beispiel

Beispielrechnung Schattenpreis Nebenbedingung 1

$$2 \cdot x_1 + x_2 \geq 6$$

2. Fall: Senkung der Anforderung um eine Einheit, das bedeutet die NB wird gelockert:

$$2 \cdot x_1 + x_2 \geq 5$$

Da die Nebenbedingung gelockert wird, verbessert sich der Zielfunktionswert.
Statt den Zielfunktionswert neu zu berechnen, kann mithilfe des Schattenpreises von x_3 eine Aussage über den neuen Zielfunktionswert getroffen werden. Es gilt:

$$-z^*_{neu} = -z^*_{alt} + S(x^*_3) = -24 + 1 = -23$$

Interpretation: Wenn der Bauer einer Kuh pro Tag statt $6g$ nun nur noch mindestens $5g$ Rohfett füttern muss, senken sich die Futterkosten pro Kuh um $1,00$ Euro auf Gesamtkosten pro Kuh von insgesamt $23,00$ Euro pro Tag.

2.18 b) Schattenpreise bzw. Opportunitätskosten - Beispiel

Bsp. Verschärfung der NB1 um 1

- Neuer ZF-Wert: $z_n^* = 25$

Interpretation

Wenn der Bauer einer Kuh pro Tag statt 6 g nun min. 7 g Rohfette füttern muss, erhöhen sich die Futterkosten pro Kuh um 1 € auf Gesamtkosten pro Kuh von insgesamt 25 € pro Tag.

例子：将NB1增加1

- 新的目标函数值：$z\#_*$ = 25

解释：

如果农民每头牛每天必须喂食最少7克粗脂肪而不是6克，那么每头牛的饲料成本将增加1欧元，每头牛的总成本将达到每天25欧元。

Fragen zum Tutorium?

Fragen zum Tutorium?