

Operations Research – Grundlagen



Tutorium

Operations Research – Grundlagen

Technische Universität Berlin
Fachgebiet **W**irtschafts- und **I**nfrastruktur**P**olitik 

Branch-and-Bound-Algorithmus

Tutoriumsaufgaben:

- 4.1 Einführung
- 4.2 Branch-and-Bound-Algorithmus: Die Raffinerie in Karlsruhe

Freiwillige Hausaufgabe:

- 4.3 Branch-and-Bound-Algorithmus: Die Raffinerie in Karlsruhe 2.0
- 4.4 Branch-and-Bound-Algorithmus I
- 4.5 Branch-and-Bound-Algorithmus II
- 4.6 Branch-and-Bound-Algorithmus III

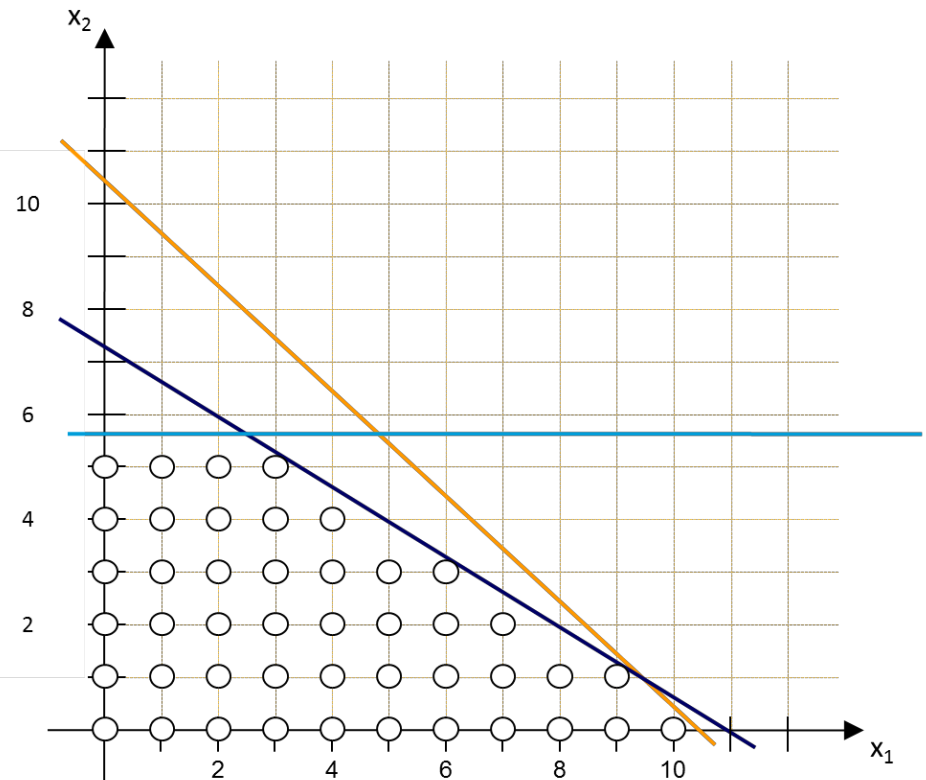


Einführung in Ganzzahlige Optimierung



Lineare Optimierung

- Zulässiger Bereich ist konvex
- Simplex möglich



Ganzzahlige Optimierung

- Zulässiger Bereich ist nicht konvex
- Simplex nicht möglich

Ganzzahlige Optimierung

- Wir unterscheiden in ganzzahlige und binäre Probleme
 - Binär:
 - Wird die Maschine des Typs i beschafft?
 - Wird Gegenstand i eingepackt? (Rucksackproblem)
 - Ganzzahlig:
 - Wie viele Maschinen des Typs i werden beschafft?
 - Welche Kombination aus Produkten soll produziert werden?

4.1 Einführung

- a) 描述分支定界算法的基本思想。
- 解决一系列松弛问题，以解决原始的整数问题。
 - 将优化问题分解为较小的子问题（分支）。
 - 决定哪个子问题将进一步扩展或探索（界定）。
 - 整数线性松弛问题的最优解也可能是整数问题的最优解。
 - 父问题的目标函数值始终是子问题目标函数值的上界（最大问题）或下界（最小问题）。

一个松弛问题是一个更简单的问题，其解集包含原始问题的所有解。此外，松弛问题的解与原始问题的解存在非平凡的关系。

a) Schildern sie die Grundidee des Branch-and-Bound-Algorithmus.

- Lösung einer Folge von relaxierten Problemen, um ursprüngliches ganzzahlige Problem zu lösen
- Zerlegung des Optimierungsproblems in kleinere Teilprobleme (Branching)
- Entscheidung, welches Teilproblem weitergeführt oder ausgelotet wird (Bounding)
- Die ganzzahlige, optimale Lösung einer linearen Relaxation eines ganzzahligen Problems kann auch die optimale Lösung des ganzzahligen Problems sein
- Der ZF-Wert eines übergeordneten (Teil-)Problems stellt immer eine obere Schranke (Max. Problem) bzw. untere Schranke (Min. Problem) für die ZF-Werte der untergeordneten Probleme dar

Definition

Ein **relaxiertes Problem** ist ein einfacheres Problem, dessen Lösungsmenge alle Lösungen des Ursprungsproblems enthält. Ferner steht die Lösung des relaxierten Problems in einem nicht-trivialen Zusammenhang mit der Lösung des Ausgangsproblems

Einschub – Ablauf Branch-And-Bound Algorithmus

- 1. LP Relaxationen aufstellen/ ggf. verzweigen**
- 2. Alle LP Relaxationen mithilfe des Simplex Algorithmus lösen**
- 3. LP Relaxationen ausloten wenn möglich**
- 4. Auswahlregel für Teilprobleme anwenden**
- 5. Auswahlregel für Variablen anwenden**
- 6. Wiederhole Schritt 1. – 5. bis alle LP Relaxationen ausgelotet sind**

插入 - 分支定界算法流程

1. 制定LP松弛问题/必要时分支
2. 使用单纯形算法解决所有LP松弛问题
3. 如可能，探索LP松弛问题
4. 应用子问题的选择规则
5. 应用变量的选择规则
6. 重复步骤1至5，直到所有LP松弛问题都被探索完成。

b) 列举并描述在使用分支定界算法时可以应用的课堂上介绍的辅助规则。

4.1 Einführung

选择变量的规则：

→ 确定在解决问题时应该分支的变量

- 随机选择
- 分数最接近的变量（1/2规则）

- 选择当前非整数部分接近1/2的变量进行限制

b) Nennen und beschreiben Sie die in der Vorlesung vorgestellten Hilfsregeln, die während der Anwendung des Branch-and-Bound-Algorithmus angewandt werden können.

Auswahlregel für Variablen:

→ Bestimmen nach welcher Variable eines gelösten Problems verzweigt wird

- **Zufallsauswahl**
- **Fraktionellste Variable (1/2- Regel)**
 - Wähle diejenige Variable zum Einschränken, deren aktueller, nicht ganzzahliger Anteil näher an 1/2 liegt
- **Strong Branching**
 - Wahl der Variable, die den ZF-Wert am meisten verändert (→ Wahl der Variable mit dem im Betrag größten Zielfunktionskoeffizienten)

• 强分支

- 选择最大程度改变目标函数值的变量（选择具有绝对值最大的目标函数系数的变量）

4.1 Einführung

Auswahlregel für Teilprobleme:

→ Bestimmen welches Teilproblem weiter verzweigt wird

- **Maximum Upper Bound (MUB)**
 - Wähle Problem mit dem besten Zielfunktionswert aus der Liste (beachte die Optimierungsrichtung)
- **Tiefensuche**
 - Wähle Problem aus der Liste, welches als letztes eingefügt wurde (LIFO)
- **Breitensuche**
 - Wähle Problem aus der Liste, welches als erstes eingefügt wurde (FIFO)

4.1 Einführung

- c) Nennen sie die verschiedenen Möglichkeiten, warum ein Teilproblem nicht weiter betrachtet werden muss

Eliminierung von Teilproblemen:

- **Ganzzahligkeit**
 - Das Teilproblem ist optimal ganzzahlig gelöst
- **Beschränkung**
 - ZF-Wert ist schlechter als der eines bereits gelösten ganzzahligen Teilproblems (das Teilproblem wird dominiert)
- **Unzulässigkeit**
 - Der zulässige Bereich ist leer

c) 列举为什么一个子问题不需要进一步考虑的不同可能性

子问题的消除:

- 整数性
- 子问题已经以最优整数解被解决
 - 限制
- 目标函数值比已解决的整数子问题的值更差 (该子问题被支配)
 - 不可行性
- 可行解空间为空

4.2. Die Raffinerie in Karlsruhe

Die Mineralölraffinerie Oberreihn (MiRO) verkauft hochwertige Mineralölprodukte wie Benzin und Diesel.

Benzin hat dabei einen Preis von **210 EUR je Barrel** und Diesel von **180 EUR je Barrel**. Für die Produktion wird ein Hydrocrack-Verfahren verwendet. Die Geschäftsleitung möchte in Erfahrung bringen, wie viele Barrel Benzin und Diesel je Anlage pro Tag hergestellt werden sollen, damit der Gewinn pro Anlage und Tag maximal wird. Für einen Barrel Benzin wird die Anlage **2 h** belegt sowie **2 Barrel Rohöl** benötigt. Für einen Barrel Diesel sind **1 h** an der Anlage und **3 Barrel Rohöl** notwendig.

Pro Tag stehen **10 Barrel Rohöl** zur Verfügung. Die Anlage kann effektiv **7h pro Tag** genutzt werden. Die Raffinerie kann Benzin und Diesel nur in vollen Barrel verkaufen. Lösen Sie die Aufgabe mit dem Branch-and-Bound-Verfahren.

Annahme: Auswahlregel für Variable → Fraktionellste Variable/ $\frac{1}{2}$ -Regel; Breitensuche (FIFO)

上莱茵石油精炼厂 (MiRO) 销售高品质的石油产品, 如汽油和柴油。汽油的价格为每桶210欧元, 柴油为每桶180欧元。生产过程采用了加氢裂化工艺。管理层希望了解每个装置每天应生产多少桶汽油和柴油, 以使每个装置每天的利润最大化。每桶汽油需要占用装置2小时, 并且需要2桶原油。每桶柴油需要占用装置1小时, 并且需要3桶原油。每天有10桶原油可用。装置每天有效利用时间为7小时。精炼厂只能以完整的桶销售汽油和柴油。请使用分支界定法解决这个问题。

假设: 变量选择规则 → 最分数的变量/ $\frac{1}{2}$ -规则; 广度优先搜索 (FIFO) 。

4.2. Die Raffinerie in Karlsruhe

Variablen definieren:

x_1 = Diesel in Barrel pro Tag

x_2 = Benzin in Barrel pro Tag

Allgemeine Form des Ausgangsproblems aufstellen:

$$\max z = 180 \cdot x_1 + 210 \cdot x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 7$$

$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 10$$

$$x_{1,2} \in \mathbb{N}_0$$

1) LP-Relaxation P_0 aufstellen:

$$\max z = 180 \cdot x_1 + 210 \cdot x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 7$$

$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 10$$

$$x_{1,2} \geq 0$$

4.2. Die Raffinerie in Karlsruhe

2) P_0 mit Hilfe des Simplex lösen:

P_0	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_3	1	2	1	0	7
x_4	3	2	0	1	10
z_j	-180	-210	0	0	0

...

P_0	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_2	0	1	0,75	-0,25	2,75
x_1	1	0	-0,5	0,5	1,5
z_j	0	0	67,5	37,5	847,5

3) LP Relaxationen ausloten

- Nicht möglich!

4) Auswahlregel für Teilprobleme anwenden

- Es existiert nur ein Teilproblem

4.2. Die Raffinerie in Karlsruhe

P_0	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_2	0	1	0,75	-0,25	2,75
x_1	1	0	-0,5	0,5	1,5
z_j	0	0	67,5	37,5	847,5

5) Auswahlregel für Variablen anwenden

- P_0 wird nach der $\frac{1}{2}$ -Regel verzweigt
 - x_1 wird eingeschränkt
- LP Relaxation P_1 erhält die zusätzliche NB: $x_1 \leq 1$
- LP Relaxation P_2 erhält die zusätzliche NB: $x_1 \geq 2$

6) Wiederhole Schritt 1) – 5) bis alle LP Relaxationen ausgelotet sind

4.2. Die Raffinerie in Karlsruhe

1) Aufstellen der LP-Relaxation P_1 :

$$\begin{aligned} \max z = & 180 \cdot x_1 + 210 \cdot x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 7 \\ & 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 10 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_{1,2} \geq 0 \end{aligned}$$

4.2. Die Raffinerie in Karlsruhe

➤ 现在需要将P0的最优表格扩展一行一列，并将约束条件及其新的松弛变量添加到表格中。

➤ 第一步是恢复基变量的单位向量。

P_1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	0,75	-0,25	0	2,75
x_1	1	0	-0,5	0,5	0	1,5
x_5	1	0	0	0	1	1
z_j	0	0	67,5	37,5	0	847,5

- Optimaltableau aus P_0 muss nun um eine Zeile und eine Spalte erweitert werden und die Nebenbedingung samt neuer Schlupfvariable wird in das Tableau übernommen

2) P_1 mit Hilfe des Simplex lösen:

- Im ersten Schritt wird der Einheitsvektor für die Basisvariablen wieder hergestellt werden.

...

P_1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	0,5	0	-0,5	3
x_1	1	0	0	0	1	1
x_4	0	0	-1	1	-2	1
z_j	0	0	105	0	75	810

4.2. Die Raffinerie in Karlsruhe

3) P_1 ausloten?

P_1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	0,5	0	-0,5	3
x_1	1	0	0	0	1	1
x_4	0	0	-1	1	-2	1
z_j	0	0	105	0	75	810

- P_1 wird wegen Ganzzahligkeit ausgelotet

4.2. Die Raffinerie in Karlsruhe

1) Bilde LP-Relaxation P_2 :

$$\max z = 180 \cdot x_1 + 210 \cdot x_2$$

$$s.t. \quad 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 7$$

$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 10$$

$$x_1 \geq 2$$

$$x_{1,2} \geq 0$$

4.2. Die Raffinerie in Karlsruhe

2) P_2 mit Hilfe des Simplex lösen:

P_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	0,75	-0,25	0	2,75
x_1	1	0	-0,5	0,5	0	1,5
x_5	-1	0	0	0	1	-2
z_j	0	0	67,5	37,5	0	847,5

...

4.2. Die Raffinerie in Karlsruhe

3) P_2 ausloten?

P_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	0	0,5	1,5	2
x_1	1	0	0	0	-1	2
x_3	0	0	1	-1	-2	1
z_j	0	0	0	105	135	780

- P_2 wird wegen Ganzzahligkeit ausgelotet

4) Auswahlregel für Teilprobleme anwenden

- Alle Teilprobleme sind bereits ausgelotet

5) Auswahlregel für Variablen anwenden

- Alle Teilprobleme sind bereits ausgelotet

6) Alle LP Relaxationen sind ausgelotet

- Algorithmus ist fertig!

4.2. Die Raffinerie in Karlsruhe

Überblick

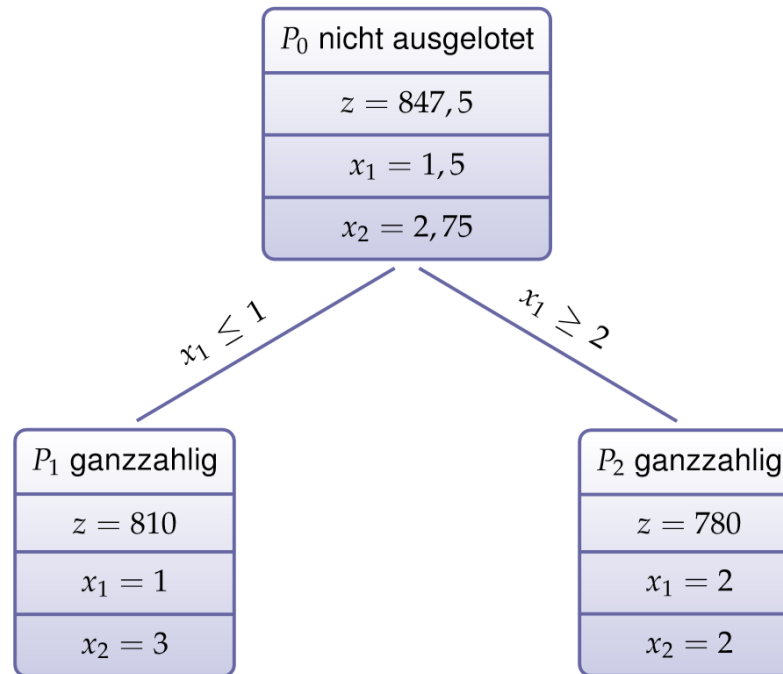


Abbildung 11: Die Raffinerieproduktion gelöst nach Breitensuche

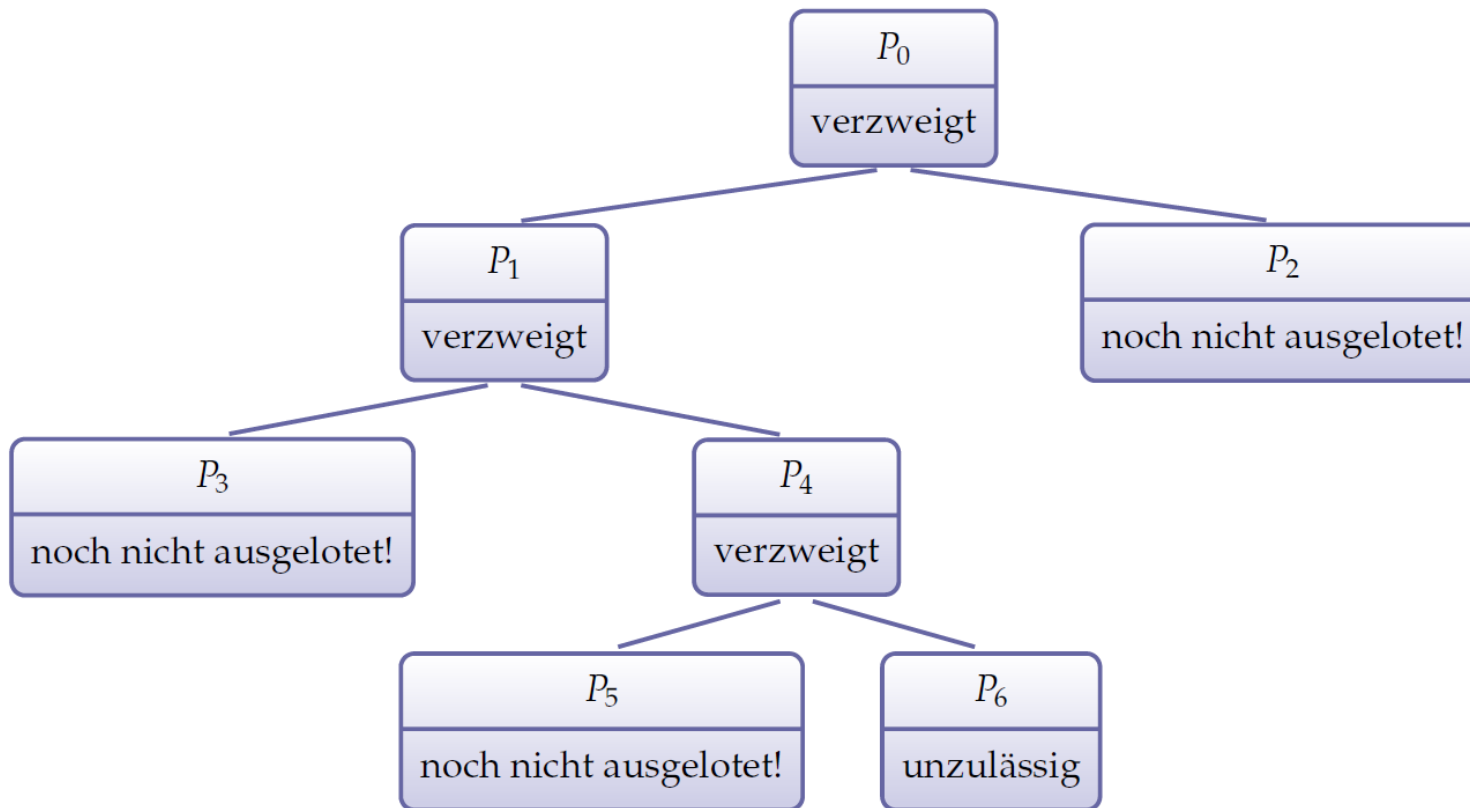
P_1 und P_2 haben jeweils eine ganzzahlige Lösung. P_1 ist unsere optimale Lösung, da Zielfunktionswert von P_1 größer ist als der von P_2 . Der Algorithmus ist beendet.

Ablauf Branch & Bound Algorithmus

- 1. LP Relaxationen aufstellen/ ggf. verzweigen**
- 2. Alle LP Relaxationen lösen**
- 3. LP Relaxationen ausloten wenn möglich**
- 4. Auswahlregel für Teilprobleme anwenden**
- 5. Auswahlregel für Variablen anwenden**
- 6. Wiederhole Schritt 1. – 5. bis alle LP Relaxationen ausgelotet sind**

Nachklausur – Sommersemester 2016: Aufgabe 7 b)

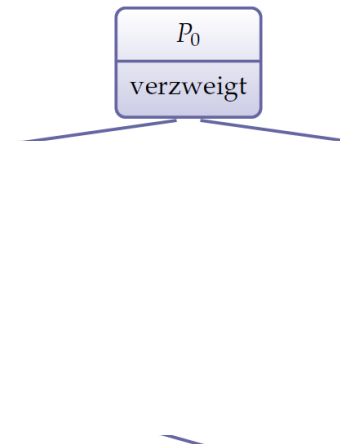
Gegeben sei folgender Branch-and-Bound Baum. Es wurde für dieses **Minimierungsproblem** die **MUB** Auswahlregel verwendet. Was können Sie allgemein über das Verhältnis der Zielfunktionswerte von P_1 zu P_3 , P_2 zu P_4 und P_3 zu P_5 aussagen? Begründen Sie Ihre Antwort kurz!



Nachklausur – Sommersemester 2016: Aufgabe 7 b)

Gegeben sei folgender Branch-and-Bound Baum. Es wurde für dieses **Minimierungsproblem** die **MUB** Auswahlregel verwendet. Was können Sie allgemein über das Verhältnis der Zielfunktionswerte von **P1 zu P3**, **P2 zu P4** und **P3 zu P5** aussagen? Begründen Sie Ihre Antwort kurz!

1. LP Relaxationen aufstellen/ ggf. verzweigen
2. Alle LP Relaxationen lösen
3. LP Relaxationen ausloten wenn möglich
4. Auswahlregel für Teilprobleme anwenden
5. Auswahlregel für Variablen anwenden
6. Wiederhole Schritt 1. – 5. bis alle LP Relaxationen ausgelotet sind



Nachklausur – Sommersemester 2016: Aufgabe 7 b)

Gegeben sei folgender Branch-and-Bound Baum. Es wurde für dieses **Minimierungsproblem** die **MUB** Auswahlregel verwendet. Was können Sie allgemein über das Verhältnis der Zielfunktionswerte von **P1 zu P3**, **P2 zu P4** und **P3 zu P5** aussagen? Begründen Sie Ihre Antwort kurz!

给定以下的分支定界树。对于这个最小化问题，使用了MUB选择规则。您能对P1与P3的目标函数值、P2与P4的目标函数值以及P3与P5的目标函数值之间的关系做出一般性的描述吗？请解释您的答案。

在P1被分支后，P3和P4被解决了。然后比较了P2、P3和P4的目标函数值，选择了具有最佳（即最小）目标函数值的问题继续进行（MUB）。P4具有最佳的目标函数值。

P1 zu P3

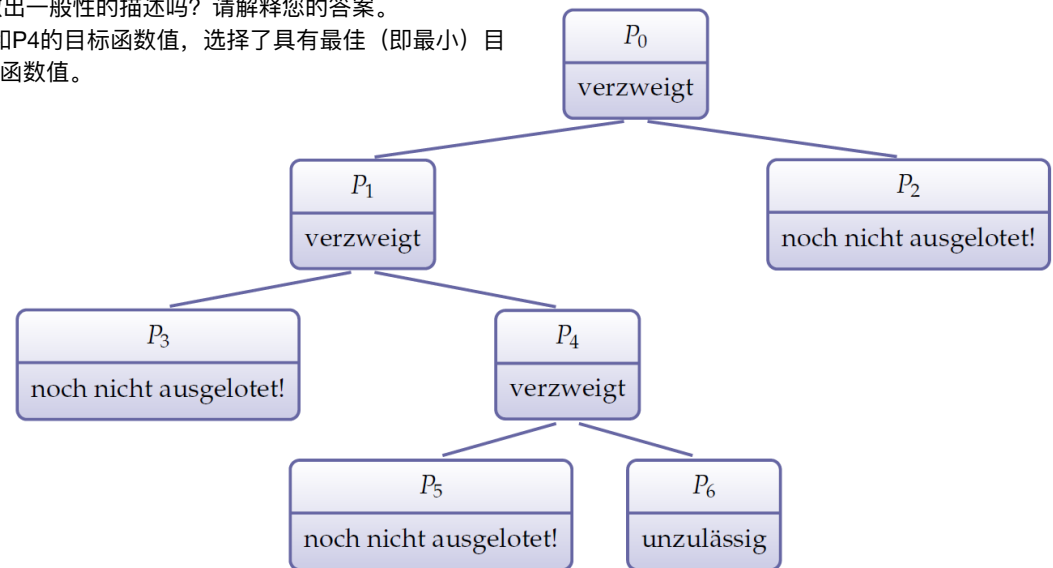
$$z_1 \leq z_3$$

- P1 ist die untere Schranke von P3

P2 zu P4

$$z_4 \leq z_2$$

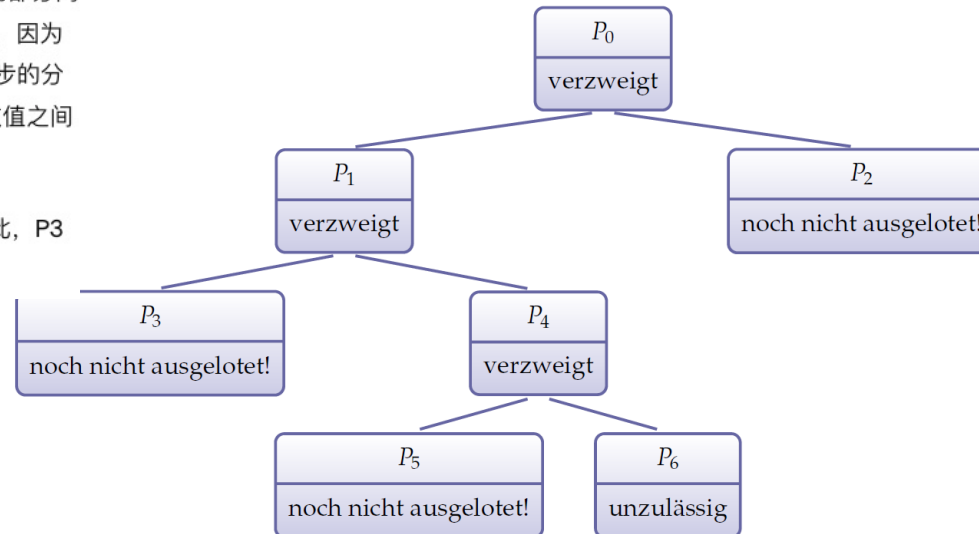
- Nachdem P1 verzweigt wurde, wurden P3 und P4 gelöst. Danach wurden die ZF-Werte von P2, P3 und P4 verglichen und das Problem mit dem besten (also hier kleinsten) ZF-Wert weitergeführt (MUB). Den besten ZF-Wert hat P4.



Nachklausur – Sommersemester 2016: Aufgabe 7 b)

在P4被分支后，P5和P6被解决。在这一点上，算法将继续使用部分问题的选择规则（这里是MUB），并从P2、P3和P5（而不是P6，因为它是不可行的）中选择具有最佳目标函数值的子问题进行进一步的分支。然而，由于选择未被表示，我们无法对P3和P5的目标函数值之间的关系做出任何声明。

注意！P3并不是P5的下界，因为P5并不直接位于P3下方。因此，P3可能比P5还要糟糕得多！



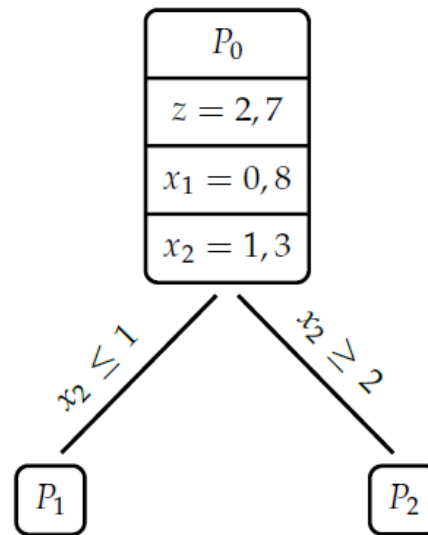
P3 zu P5

Keine Aussage möglich!

- Nachdem P4 verzweigt wurde, wurden P5 und P6 gelöst. An dieser Stelle würde der Algorithmus nun mit der Auswahlregel für Teilprobleme (hier: MUB) weitermachen und aus P2, P3 & P5 (nicht P6, weil unzulässig) das Teilproblem mit dem besten ZF-Wert weiterverzweigen. Da die Auswahl allerdings nicht abgebildet ist, können wir keine Aussage über das Verhältnis der ZF-Werte von P3 und P5 aussagen.
- Achtung! P3 ist keine untere Schranke von P5, weil P5 nicht direkt unter P3 ist. Es wäre also möglich das P3 noch viel schlechter ist als P5!

Semesterklausur – Wintersemester 13/14: Aufgabe 8.b

- b) Gegeben ist das folgende Problem mit den Optimaltableaus zu P1 und P2. Kann ein Teilproblem eliminiert werden? Welches Teilproblem wird als nächstes verzweigt? Begründen Sie Ihre Antworten in je einem Satz.



P1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	0	2	3	1,1
x_2	0	1	0	3	-1	1
x_3	0	0	1	4	-1	1,4
z_j	0	0	0	1,1	2,3	2,5

P2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	1	0	1	0
x_2	0	1	0	0	-2	2
x_4	0	0	1	1	2	2,5
z_j	0	0	2,5	0	1	2,4

Fragen zum Tutorium?

