Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen
(Tutorium 13)

Vorlesungswoche: 15. – 19. Juli 2024

Sommersemester 2024

Aufgabe 36

Löse das Dirichletsche Randwertproblem

$$-\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(x,y) - \tfrac{\partial^2}{\partial y^2}\, u(x,y) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, y \geq 0,$$
$$u(x,0) = u_0(x)$$

mit Hilfe der Fouriertransformation.

Lösung zu Aufgabe 36

Wir nehmen an, dass die Lösung für festes $y \geq 0$ eine absolut-integrierbare Funktion ist. Fouriertransformation nach x liefert die Differentialgleichungen

$$\omega^2\, \hat{u}(\omega, y) - \tfrac{\partial^2}{\partial y^2}\, \hat{u}(\omega, y) = 0, \qquad \hat{u}(\omega, 0) = \hat{u}_0(\omega),$$

wobei wir annehmen, dass Integration und Differenziation vertauscht werden können. Für festes $\omega \in \mathbb{R}$ wird die Differentialgleichung durch

$$\hat{u}(\omega, y) \coloneqq c_1\, \mathrm{e}^{|\omega| y} + c_2\, \mathrm{e}^{-|\omega| y}$$

gelöst. Da die Fouriertransformation unserer Lösung beschränkt sein muss, können wir die erste Fundamentallösung ausschließen ($c_1 = 0$). Mit der Dilatationsregel und $\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-|x|}] = 2/(1+\omega^2)$ erhalten wir

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-|\omega| y}] = \frac{1}{2\pi}\, \frac{2y}{x^2 + y^2},$$

und mit dem Faltungssatz

$$u(x,y) \coloneqq u_0(x) * \frac{y}{\pi(x^2+y^2)} = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2}\, \mathrm{d}\xi,$$

wobei wir bezüglich der Variablen x falten.

Aufgabe 37

Löse für $c \geq 0$ die inhomogene Wellengleichung

$$\tfrac{\partial^2}{\partial t^2}\, u(x,t) - c^2\, \tfrac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(x,t) = \sin(\pi x), \qquad x \in (0,1), t \in (0,\infty)$$
$$u(x,0) = \tfrac{\partial}{\partial t}\, u(x,0) = u(0,t) = u(1,t) = 0$$

mit Hilfe der Laplacetransformation.

Lösung zu Aufgabe 37

Wir nehmen an, dass die Lösung für festes $x \in (0,1)$ eine stückweise stetige Funktion exponentieller Ordnung ist. Die Laplacetransformation bezüglich t liefert

$$s^2\, U(x,s) - c^2 \tfrac{\partial^2}{\partial x^2}\, U(x,s) = \frac{\sin(\pi x)}{s}, \qquad U(0,s) = U(1,s) = 0,$$

wobei wir annehmen, dass Integration und Differenziation vertauscht werden dürfen. Wir lösen diese Differentialgleichung in x für festes $s > 0$. Die allgemeine homogene Lösung ist

$$U_h(x,s) \coloneqq c_1\, \mathrm{e}^{\frac{s}{c}x} + c_2\, \mathrm{e}^{-\frac{s}{c}x}.$$

Für die partikuläre Lösung machen wir den Ansatz

$$U_p(x,s) = A\cos(\pi x) + B\sin(\pi x)$$

entsprechend der rechten Seite. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned}
&(s^2 + c^2\pi^2)\,\big(A\cos(\pi x) + B\sin(\pi x)\big) = \frac{\sin(\pi x)}{s} \\
&\longrightarrow \quad A = 0, \quad B = \frac{1}{s(s^2 + c^2\pi^2)} \quad \longrightarrow \quad U_p(x,s) \coloneqq \frac{\sin(\pi x)}{s(s^2 + c^2\pi^2)}.
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist somit

$$U(x,s) \coloneqq c_1\, \mathrm{e}^{\frac{s}{c}x} + c_2\, \mathrm{e}^{-\frac{s}{c}x} + \frac{\sin(\pi x)}{s(s^2 + c^2\pi^2)}.$$

Einsetzen der Randwerte liefert $c_1 = c_2 = 0$ und damit

$$U(x,s) = \frac{\sin(\pi x)}{s(s^2 + c^2\pi^2)} = \frac{1}{c^2\pi^2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + c^2\pi^2}\right)\sin(\pi x).$$

Die Rücktransformation für festes $x \in (0,1)$ ergibt

$$u(x,t) = \frac{1}{c^2\pi^2}\,\big(1 - \cos(c\pi t)\big)\sin(\pi x).$$

Aufgabe 36

Löse das Dirichletsche Randwertproblem

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, y \geq 0,$$
$$u(x,0) = u_0(x)$$

mit Hilfe der Fouriertransformation.

$$\hat{u}(w,y) = \mathcal{F}[u(x,y)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,y) e^{-iwx} dx$$

$$w^2 \hat{u}(w,y) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) = 0$$

$$P(\lambda) = -\lambda^2 + w^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm w$$

$$\hat{u}(w,y) = c_1 e^{wy} + c_2 e^{-wy}$$

gelöst. Da die Fouriertransformation unserer Lösung beschränkt sein muss, können wir die erste Fundamentallösung ausschließen ($c_1 = 0$). Mit der Dilatationsregel und $\mathcal{F}[e^{-|x|}] = 2/(1+\omega^2)$ erhalten wir

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-|\omega|y}] = \frac{1}{2\pi} \frac{2y}{x^2+y^2},$$

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-|w|y}] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[e^{-|w|y}](-y)$$

$$\mathcal{F}[e^{-|x|}] = \frac{2}{1+w^2}$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{2}{1+x^2}\right] = 2\pi \cdot e^{-|w|}$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{2}{1+(\frac{x}{y})^2}\right] = 2\pi \cdot |y| e^{-|w|y}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-|w|y}] = \frac{1}{2\pi |y|} \frac{2y^2}{x^2+y^2}$$

und mit dem Faltungssatz

$$u(x,y) \coloneqq u_0(x) * \frac{y}{\pi(x^2+y^2)} = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(\xi)}{(x-\xi)^2+y^2} d\xi,$$

wobei wir bezüglich der Variablen x falten.

Aufgabe 37

Löse für $c \geq 0$ die inhomogene Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = \sin(\pi x), \qquad x \in (0,1), t \in (0,\infty)$$
$$u(x,0) = \frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = u(0,t) = u(1,t) = 0$$

mit Hilfe der Laplacetransformation.

$s^2 U(x,s) - 0 - 0 - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x,s) = \frac{\sin(\pi x)}{s}$

$s^2 - c^2 \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{s}{c}$

Lösung zu Aufgabe 37

Wir nehmen an, dass die Lösung für festes $x \in (0,1)$ eine stückweise stetige Funktion exponentieller Ordnung ist. Die Laplacetransformation bezüglich t liefert

$U_h(x,s) = c_1 e^{\frac{s}{c}x} + c_2 e^{-\frac{s}{c}x}$

$$s^2 U(x,s) - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x,s) = \frac{\sin(\pi x)}{s}, \qquad U(0,s) = U(1,s) = 0,$$

wobei wir annehmen, dass Integration und Differenziation vertauscht werden dürfen. Wir lösen diese Differentialgleichung in x für festes $s > 0$. Die allgemeine homogene Lösung ist

$$U_h(x,s) \coloneqq c_1 \,\mathrm{e}^{\frac{s}{c}x} + c_2 \,\mathrm{e}^{-\frac{s}{c}x}.$$

Für die partikuläre Lösung machen wir den Ansatz

$$U_p(x,s) = A\cos(\pi x) + B\sin(\pi x)$$

entsprechend der rechten Seite. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$(s^2 + c^2\pi^2)\,(A\cos(\pi x) + B\sin(\pi x)) = \frac{\sin(\pi x)}{s}$$
$$\rightarrow \quad A = 0, \quad B = \frac{1}{s(s^2 + c^2\pi^2)} \quad \rightarrow \quad U_p(x,s) \coloneqq \frac{\sin(\pi x)}{s(s^2 + c^2\pi^2)}.$$