Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen
(Hausaufgabe 8)

Abgabe: 17. – 21. Juni 2024 | Sommersemester 2024

Aufgabe 22
(5 Punkte)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ berechne die Laplacetransformation von

$$\text{(a) } f(t) = \sinh(bt), \quad \text{(b) } f(t) = \mathrm{e}^{at}\cos(bt).$$

Für welche Argumente $s \in \mathbb{C}$ existiert die Laplacetransformation $\mathcal{L}[f](s)$?

Aufgabe 23
(5 Punkte)

Zeige, dass $\ln(1 + \mathrm{e}^t)$ von exponentieller Ordnung ist.

Aufgabe 24
(5 Punkte)

Unter der Annahme, dass die Laplacetransformation existiert, zeige, dass

$$\mathcal{L}[f(at)](s) = \tfrac{1}{a}\mathcal{L}[f(t)](\tfrac{s}{a}), \quad a > 0.$$

Benutze diese Regel, um aus $\mathcal{L}[\cos(t)](s)$ die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}[\cos(at)](s)$ herzuleiten.

Aufgabe 22

(5 Punkte)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ berechne die Laplacetransformation von

(a) $f(t) = \sinh(bt)$, (b) $f(t) = e^{at}\cos(bt)$.

Für welche Argumente $s \in \mathbb{C}$ existiert die Laplacetransformation $\mathcal{L}[f](s)$?

(a) $\mathcal{L}[f](s) = F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$

$= \int_0^\infty \sinh(bt) e^{-st} dt$

$= \int_0^\infty \frac{1}{2}(e^{bt} - e^{-bt}) e^{-st} dt$

$= \int_0^\infty \frac{1}{2}\left(e^{(b-s)t} - e^{-(b+s)t}\right) dt$

$= \frac{1}{2} \lim_{c\to\infty} \left[\frac{1}{b-s} e^{(b-s)t} + \frac{1}{b+s} e^{-(b+s)t} \right]_0^c$

$\lim_{c\to\infty} e^{-(b+s)c}$ konvergiert, falls $-(b+s) < 0 \Rightarrow s > -b$

$\left(\lim_{c\to\infty} e^{(b-s)c}\right.$ konvergiert, falls $b - s < 0 \Rightarrow s > b \left.\right)$

$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{b-s} - \frac{1}{b+s} \right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{2b}{b^2-s^2} \right] = \frac{b}{s^2-b^2}$ konvergiert für $Re\{s\} > 0$

$\begin{cases} s > -b \\ s > b \end{cases} \Rightarrow s > |b| \Rightarrow \mathcal{L}[f](s)$ existiert, falls $s > |b|$

(b) $\mathcal{L}[f](s) = F(s) = \int_0^\infty e^{at} \cos(bt) e^{-st} dt$

$= \int_0^\infty \cos(bt) e^{(a-s)t} dt$

$= \lim_{c\to\infty} \left[\frac{1}{b} \sin(bt) e^{(a-s)t} \right]_0^c - \int_0^\infty \frac{1}{b} \sin(bt) \cdot (a-s) e^{(a-s)t} dt$

$\left(\lim_{c\to\infty} \sin(bc) \cdot e^{(a-s)\cdot s}\right.$ existiert, falls $a - s < 0 \Rightarrow s > a \left.\right)$

$= -\int_0^\infty \frac{1}{b} \sin(bt) \cdot (a-s) e^{(a-s)t} dt = (s-a)\frac{1}{b} \int_0^\infty \sin(bt) e^{(a-s)t} dt$

$= \frac{(s-a)}{b} \cdot \left(\lim_{c\to\infty} \left[-\frac{1}{b}\cos(bt) e^{(a-s)t} \right]_0^c - \int_0^\infty \left(-\frac{\cos(bt)}{b} (a-s) e^{(a-s)t} \right) dt \right)$

$= \frac{(s-a)}{b} \left(\frac{1}{b} + \int_0^\infty \frac{(a-s)}{b} \cos(bt) e^{(a-s)t} dt \right)$

$\Rightarrow \left(1 + \frac{(s-a)^2}{b^2}\right) F(s) = \frac{(s-a)}{b^2}$

$\Rightarrow F(s) = \frac{s-a}{b^2 + (s-a)^2}$ konvergiert für $Re\{s\} > 0$

$\Rightarrow F(s)$ existiert, falls $s > a$

Aufgabe 23 (5 Punkte)

Zeige, dass $\ln(1+e^t)$ von exponentieller Ordnung ist.

$|\ln(1+e^t)| \leq ce^{\gamma t}$ Vermutung: ist von exp. Ord.

$0 < \ln(1+e^t) < \ln(2e^t) = \ln(e^{\ln 2} \cdot e^t) = \ln(e^{\ln 2 + t}) = \underbrace{\ln 2 + t}_{\text{linear}} \leq \underbrace{c \cdot e^{\gamma t}}_{\text{exp.}}$

$\Rightarrow |\ln(1+e^t)| \leq ce^{\gamma t}$

$\Rightarrow \ln(1+e^t)$ ist von exponentieller Ordnung.

Aufgabe 24 (5 Punkte)

Unter der Annahme, dass die Laplacetransformation existiert, zeige, dass

$$\mathcal{L}[f(at)](s) = \tfrac{1}{a}\mathcal{L}[f(t)](\tfrac{s}{a}), \quad a > 0.$$

Benutze diese Regel, um aus $\mathcal{L}[\cos(t)](s)$ die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}[\cos(at)](s)$ herzuleiten.

$$\mathcal{L}[f(at)](s) = \int_0^\infty f(at)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty \frac{1}{a} f(at)\cdot e^{-st}\,d(at) = \int_0^\infty \frac{1}{a} f(at)e^{-\frac{s}{a}\cdot at}\,d(at) \overset{u=at}{=\!=} \int_0^\infty \frac{1}{a} f(u)e^{-\frac{s}{a}u}\,du$$
$$= \frac{1}{a}\mathcal{L}[f(t)](\tfrac{s}{a})$$

$$\mathcal{L}[\cos(at)](s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}[\cos(t)](\tfrac{s}{a})$$
$$= \frac{1}{a}\cdot \int_0^\infty \cos(t)\cdot e^{-\frac{s}{a}\cdot t}\,dt$$
$$= \frac{1}{a}\cdot\left(\lim_{b\to\infty}\left[\sin(t)e^{-\frac{s}{a}t}\right]_0^b - \int_0^\infty \sin(t)\cdot(-\tfrac{s}{a})e^{-\frac{s}{a}t}\,dt\right)$$
$$= \frac{s}{a^2}\cdot\int_0^\infty \sin(t)e^{-\frac{s}{a}t}\,dt$$
$$= \frac{s}{a^2}\cdot\left(\lim_{b\to\infty}\left[-\cos(t)e^{-\frac{s}{a}t}\,dt\right]_0^b - \int_0^\infty -\cos(t)\cdot(-\tfrac{s}{a})e^{-\frac{s}{a}t}\,dt\right)$$
$$= \frac{s}{a^2}\cdot\left(1 - \int_0^\infty \frac{s}{a}\cos(t)e^{-\frac{s}{a}t}\,dt\right)$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{s^2}{a^2}\right)\mathcal{L}[\cos(at)](s) = \frac{s}{a^2}$$
$$\mathcal{L}[\cos(at)](s) = \frac{s\cdot a^2}{a^2\cdot(a^2+s^2)} = \frac{s}{a^2+s^2}$$ konvergiert für $Re\{s\}>0$