TU Berlin - Institut für Mathematik
Sommersemester 2024
Dozent: Dr. Nikolas Tapia
Assistentin: M.Sc. Claudia Drygala

Stochastik für Informatik(er) – Übung 11

Abgabe: Keine Abgabe

Hinweise zur Bearbeitung des Übungsblattes:

- Das Übungsblatt enthält Haus- und Tutoriumsaufgaben.
- Die Tutoriumsaufgaben werden in den Tutorien der KW 27 besprochen (01.07.-05.07.).
- Die Hausaufgaben werden selbstständig bearbeitet. Lösungsvorschläge werden von uns hochgeladen. Bei Fragen wenden Sie sich an die Tutor*innen direkt im Tutorium oder in den Sprechstunden.

Tutoriumsaufgaben

Tutoriumsaufgabe 11.1

Wir bringen unser Wissen über die Konfidenzintervalle in den nachfolgenden Anwendungsbeispielen ein.

(i) *Qualitätsüberprüfung in der Schraubenproduktion:*

Ein Produktionsbetrieb möchte die durchschnittliche Länge seiner hergestellten Schrauben überprüfen. Es ist bekannt, dass die Längen der Schrauben normalverteilt sind und eine Standardabweichung von $\sigma = 0{,}2$ cm haben. Eine Stichprobe von $n = 50$ Schrauben wird gezogen und ergibt eine durchschnittliche Länge von $\overline{x} = 5{,}1$ cm.

(i) Bestimmen Sie das 95%-Konfidenzintervall für den wahren Mittelwert der Schraubenlänge und interpretieren Sie das Konfidenzintervall.

(ii) *Messung der Emissionswerte für Diesel-PKW:*

Nach der Euro 6 Norm für die Emissionswerte für Diesel-PKW ist ein Schadstoffausstoß [NOx] von 80mg/km zulässig. Ein den Zulassungsbehörden neu vorgestellter PKW hat laut Hersteller die folgenden 9 Emissionswerte im Labor des Herstellers erbracht:

Test-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
NOx [mg/km]	79.58	78.38	76.91	76.42	78.78	78.76	77.03	83.21	78.76

Die statistische Streuung bei der Messung der Emissionswerte wird als unabhängig und normalverteilt vorausgesetzt.

(a) Bestimmen Sie das arithmetische Mittel und die empirische Standardabweichung mithilfe der zugrundeliegenden Daten.

(b) Bestimmen Sie ein zweiseitiges 95%-Konfidenzintervall für den wahren Wert μ der NOx Emission des betreffenden PKW.

(c) Kann sich die Zulassungsbehörde aufgrund der vorgelegten Daten zu 95% sicher sein, dass der PKW die Abgasnorm Euro 6 erfüllt?

(d) Eine Umweltinitiative gibt ein Gegengutachten in Auftrag, bei dem ebenfalls 9 unabhängige Abgastests durchgeführt werden. Diesmal wird jedoch nicht im Labor, sondern auf der Straße gemessen. Der mittlere Schadstoffausstoß an NOx beträgt nun 90 mg/km bei 7.5 mg/km Standardabweichung. Kann die Umweltinitiative zu einem Konfidenzniveau von $1 - \alpha = 99\%$ nachweisen, dass der Fahrzeugtyp Euro 6 im Straßenverkehr nicht erfüllt?

Tutoriumsaufgabe 11.2

Sei X eine stetige, exponentialverteilte Zufallsvariable mit dem Parameter $\lambda > 0$. Berechnen Sie das α-Quantil für alle $\alpha \in (0,1)$

Tutoriumsaufgabe 11.3

(i) Betrachten Sie t-Tests für eine normalverteilte Zufallsvariable X. Unten werden die Hypothesen H_0 und H_1, das Signifikanzniveau α, das aus der Stichprobe bestimmte arithmetische Mittel $\overline{x}$ und die empirische Standardabweichung $\widehat{\sigma}$ sowie der Stichprobenumfang n angegeben. Entscheiden Sie, ob Sie Hypothese H_0 oder H_1 annehmen!

(a) $H_0 : \mu_X = 1$, $H_1 : \mu_X \neq 1$, $\alpha = 1\%$, $\overline{x} = 1.2$, $\widehat{\sigma} = 1$, $n = 25$.

(b) $H_0 : \mu_X \leq 2$, $H_1 : \mu_X > 2$, $\alpha = 10\%$, $\overline{x} = 2.12$, $\widehat{\sigma} = 3$, $n = 64$.

(ii) Sind die nachfolgenden Aussagen über statistische Tests wahr oder falsch? Begründen Sie kurz!

(a) Der Fehler 2. Art tritt dann auf, wenn die Nullhypothese H_0 zu Unrecht angenommen wurde.

(b) Wenn das Signifikanzniveau α kleiner wird, dann steigt die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese H_0 abzulehnen.

Tutoriumsaufgabe 11.4

Bei der Überprüfung von Brunnenwasser in einer Brauerei wird die Methode der Keimzahlbestimmung verwendet. Es gelten folgende Normen:

- < 10 Keime/ml: einwandfreie Qualität;
- $10 - 100$ Keime/ml: passable Qualität;
- > 100 Keime/ml: muss aufbereitet werden.

Es werden $n = 16$ Wasserproben aus dem Brunnen geschöpft. Dabei wird ein Mittelwert $\overline{x}$ von 90 Keimen/ml festgestellt bei einer empirischen Standardabweichung

$\widehat{\sigma} = 20$ Keime/ml. Die Größe Keimzahl/ml sei hierbei als normalverteilt vorausgesetzt.

Frage: Kann man zu 99% sicher sein, dass der wahre Wert der mittleren Keimzahl μ_X kleiner als 100 Keime/ml ist, d.h. dass das Wasser nicht aufbereitet werden muss?

(a) Nennen Sie ein geeignetes Testverfahren, um die Frage zu beantworten! Begründen Sie Ihre Auswahl kurz!

(b) Setzen Sie hier das gewünschte Resultat, nämlich $\mu_X < \mu_0 = 100$ Keime/ml als Nullhypothese oder als Gegenhypothese ein? Begründen Sie Ihre Entscheidung kurz!

(c) Welchen Wert hat hier das Signifikanzniveau α?

(d) Stellen Sie die Formel für die Testentscheidung auf und bestimmen Sie das zugehörige Quantil.

(e) Berechnen Sie die Formel und führen Sie die Testentscheidung durch. Wie lautet die Antwort auf die ursprüngliche Frage?

Def Quantil

Sei X ein ZV und $\beta \in (0,1)$. Dann ist β-Quantil von X def

$$q_\beta = \min F_X^{-1}([\beta, \infty])$$

d.h. q_β ist die kleinste Zahl mit: $F_X(q_\beta) = \beta$

Tutoriumsaufgabe 11.2

Sei X eine stetige, exponentialverteilte Zufallsvariable mit dem Parameter $\lambda > 0$. Berechnen Sie das α-Quantil für alle $\alpha \in (0, 1)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \end{cases}$$

$$F_X(q) \geq \alpha$$

$q > 0$ da $\alpha > 0$

$$\Rightarrow \quad 1 - e^{-\lambda q} \geq \alpha$$

$$\Rightarrow \quad e^{-\lambda q} \leq 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow \quad -\lambda q \leq \log(1-\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad q \geq -\frac{1}{\lambda} \log(1-\alpha)$$

Also α-Quantile von X gegeben durch $q_\alpha = \dfrac{\log(1-\alpha)}{-\lambda}$

Tutoriumsaufgabe 11.1

Wir bringen unser Wissen über die Konfidenzintervalle in den nachfolgenden Anwendungsbeispielen ein.

(i) *Qualitätsüberprüfung in der Schraubenproduktion:*

Ein Produktionsbetrieb möchte die durchschnittliche Länge seiner hergestellten Schrauben überprüfen. Es ist bekannt, dass die Längen der Schrauben normalverteilt sind und eine Standardabweichung von $\sigma = 0{,}2$ cm haben. Eine Stichprobe von $n = 50$ Schrauben wird gezogen und ergibt eine durchschnittliche Länge von $\overline{x} = 5{,}1$ cm.

(i) Bestimmen Sie das 95%-Konfidenzintervall für den wahren Mittelwert der Schraubenlänge und interpretieren Sie das Konfidenzintervall.

(i) $n = 50$ $\quad X_1, \cdots X_n$ i.i.d. ZVen $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ wobei μ unbekannt, $\sigma = 0{,}2$

ist $(x_1, \cdots, x_n)$ Stichprobe von $(X_1, \cdots, X_n)$

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 5{,}1$$

Da $x_1, \cdots x_n$ mit $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$ μ unbekannt. σ bekannt

$$J = \left[\overline{\mu} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} , \overline{\mu} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

ist $(1-\frac{\alpha}{2})$-Quantil von $N(0,1)$

$$\boxed{F_{N(0,1)}(1{,}96) = 0{,}975 \quad \text{d.h. } z_{0{,}975} = 1{,}96}$$

$$= \left[5.1 - \underbrace{z_{0.975}}_{=1{,}96} \frac{0.2}{\sqrt{50}} , 5.1 + z_{0{,}975} \cdot \frac{0.2}{\sqrt{50}}\right]$$

$$= [5{,}0446 , 5{,}1554]$$

Interpretation: Mit Wkt von 95% befindet sich der Mittelwert μ im Intervall J

Insbesondere ist der durchschnittliche Stichprobe μ nach Messwert $\overline{\mu}_n$ mit einem

kleinem Unsicherheit von $\pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0{,}0559$

(ii) *Messung der Emissionswerte für Diesel-PKW:*

Nach der Euro 6 Norm für die Emissionswerte für Diesel-PKW ist ein Schadstoffausstoß [NOx] von 80mg/km zulässig. Ein den Zulassungsbehörden neu vorgestellter PKW hat laut Hersteller die folgenden 9 Emissionswerte im Labor des Herstellers erbracht:

Test-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
NOx [mg/km]	79.58	78.38	76.91	76.42	78.78	78.76	77.03	83.21	78.76

x_i ist Stichprobe von $X_1, \cdots X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$

Die statistische Streuung bei der Messung der Emissionswerte wird als unabhängig und normalverteilt vorausgesetzt.

(a) Bestimmen Sie das arithmetische Mittel und die empirische Standardabweichung mithilfe der zugrundeliegenden Daten.

a) $\bar{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \approx 78.05$ $\qquad \bar{\delta}_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{\mu}_n)^2} = 2.0124$

(b) Bestimmen Sie ein zweiseitiges 95%-Konfidenzintervall für den wahren Wert μ der NOx Emission des betreffenden PKW. → VL 18 P13

(c) Kann sich die Zulassungsbehörde aufgrund der vorgelegten Daten zu 95% sicher sein, dass der PKW die Abgasnorm Euro 6 erfüllt?

(d) Eine Umweltinitiative gibt ein Gegengutachten in Auftrag, bei dem ebenfalls 9 unabhängige Abgastests durchgeführt werden. Diesmal wird jedoch nicht im Labor, sondern auf der Straße gemessen. Der mittlere Schadstoffausstoß an NOx beträgt nun 90 mg/km bei 7.5 mg/km Standardabweichung. Kann die Umweltinitiative zu einem Konfidenzniveau von $1 - \alpha = 99\%$ nachweisen, dass der Fahrzeugtyp Euro 6 im Straßenverkehr nicht erfüllt?

b) $\alpha = 0{,}05$, da $x_1, \dots, x_n$ st; dvrta von $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$J = \left[\bar{\mu}_n - t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{\delta}_n^2}{n}}, \ \bar{\mu}_n + t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{\delta}_n^2}{n}} \right]$$

t - score

查表

$$= \left[78.65 - \underbrace{t_{8, 0.975}}_{= 2{,}306} \frac{2.0124}{3}, \ 78.65 - t_{8, 0.975} \frac{2.0124}{3} \right]$$

$$= [77.10, 80.81]$$

	f = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1-α = 0,6	0,325	0,289	0,277	0,271	0,267	0,265	0,263	0,262	0,261	0,260
0,750	1,000	0,816	0,765	0,741	0,727	0,718	0,711	0,706	0,703	0,700
0,800	1,376	1,061	0,978	0,941	0,920	0,906	0,896	0,889	0,883	0,879
0,900	3,078	1,886	1,638	1,533	1,476	1,440	1,415	1,397	1,383	1,372
0,950	6,314	2,920	2,353	2,132	2,015	1,943	1,895	1,860	1,833	1,812
0,975	12,706	4,303	3,182	2,776	2,571	2,447	2,365	2,306	2,262	2,228
0,990	31,821	6,965	4,541	3,747	3,365	3,143	2,998	2,896	2,821	2,764
0,995	63,657	9,925	5,841	4,604	4,032	3,707	3,499	3,355	3,250	3,169

c)

$$J = \left(-\infty, \ \bar{\mu}_n + t_{n-1, 1-\alpha} \frac{\bar{\delta}_n}{\sqrt{n}} \right]$$

$$= \left(-\infty, \ 78.65 + \underbrace{t_{8, 0.95}}_{= 1.86} \frac{20.420}{3} \right]$$

$$= (-\infty, 78.888]$$

Ja

d) $\bar{\mu}_n = 90 \quad \bar{\delta}_n = 7.5$

$$J = \left[\bar{\mu}_n - t_{n-1, 1-\alpha} \frac{\bar{\delta}_n}{\sqrt{n}}, \infty \right)$$

$$= \left[90 - t_{8, 0.99} \cdot \frac{7.5}{3}, \infty \right)$$

$$= [82.76, \infty)$$

Ja. kann sie

t-test

$X_1, \dots, X_n$ i.i.d ZVen mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \delta^2)$ $\quad$ $\mu_0 \in \mathbb{R}$ gegeben

$(x_1, \dots, x_n)$ Stichprobe von $(X_1, \dots, X_n)$

	zweiseitig	einseitig (1. Fall)	einseitig (2. Fall)
1. Nullhypothese	$\mu = \mu_0$	$\mu \leq \mu_0$	$\mu \geq \mu_0$
2. t definieren		$t = \sqrt{n} \dfrac{\hat{\mu}(x_1, \dots, x_n) - \mu_0}{\hat{\delta}(x_1, \dots, x_n)}$	
3. Test t im Annahme-Bereich I	$I = [-t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}, t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}]$	$I = (-\infty, t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}]$	$I = [t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$

2. und 3. endlich formulieren

z.B für einseitig 2. Fall

$$t \in [-t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} \frac{\overline{\mu_n} - \mu_0}{\overline{\delta_n}} > -t_{n-1, 1-\alpha}$$

$$\Rightarrow \mu_0 \leq \overline{\mu_n} + t_{n-1, 1-\alpha} \frac{\overline{\delta_n}}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \mu_0 \in (-\infty, \overline{\mu_n} + t_{n-1, 1-\alpha} \frac{\overline{\delta_n}}{\sqrt{n}}]$$

Tutoriumsaufgabe 11.3

(i) Betrachten Sie t-Tests für eine normalverteilte Zufallsvariable X. Unten werden die Hypothesen H_0 und H_1, das Signifikanzniveau α, das aus der Stichprobe bestimmte arithmetische Mittel $\overline{x}$ und die empirische Standardabweichung $\widehat{\sigma}$ sowie der Stichprobenumfang n angegeben. Entscheiden Sie, ob Sie Hypothese H_0 oder H_1 annehmen!

(a) $H_0 : \mu_X = 1,\ H_1 : \mu_X \neq 1,\ \alpha = 1\%,\ \overline{x} = 1.2,\ \widehat{\sigma} = 1,\ n = 25.$

(b) $H_0 : \mu_X \leq 2,\ H_1 : \mu_X > 2,\ \alpha = 10\%,\ \overline{x} = 2.12,\ \widehat{\sigma} = 3,\ n = 64.$

(ii) Sind die nachfolgenden Aussagen über statistische Tests wahr oder falsch? Begründen Sie kurz!

(a) Der Fehler 2. Art tritt dann auf, wenn die Nullhypothese H_0 zu Unrecht angenommen wurde.

(b) Wenn das Signifikanzniveau α kleiner wird, dann steigt die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese H_0 abzulehnen.

(i) (a)

$$t = \sqrt{n} \frac{\overline{\mu_n} - \mu_0}{\overline{\delta_n}} = \sqrt{25} \cdot \frac{1.2 - 1}{1} = 5 \cdot 0.2 = 1$$

$$I = [-t_{24, \underbrace{1-0.005}_{0.995}}, t_{24, 1-0.005}]$$

$$= [-2.797, 2.797]$$

es ist $t \in I$, also H_0 annehmen

b) $t = \sqrt{64} \cdot \frac{2 \cdot 12 - 2}{3} = 0,32$

$I = (-\infty, t_{63, 1-0.1}]$

$= (-\infty, 1.282]$

$t \in I$, nehmen wir H_0 an

ii) a)

Definition 19.1

Zwei Typen von “Fehler” sind möglich:

1. **Fehler 1. Art**: H_0 wird abgelehnt, obwohl sie wahr ist.
2. **Fehler 2. Art**: H_0 wird angenommen, obwohl sie falsch ist.

Wahr da es eine Umformulierung von Def ist

b) Falsch

$\mathbb{P}(\text{Fehler 1. Art}) = \mathbb{P}(H_0 \text{ abgelehnt} \mid H_0 \text{ wahr}) \leq \alpha$

$\alpha \downarrow \Rightarrow$ H_0 abzulehnen falls H_0 wahr

Hausaufgaben

Hausaufgabe 11.1 (0 Punkte)

(i) Entscheiden Sie, ob in den folgenden Aufgaben nach einem linksseitigen (linksoffenen), rechtsseitigen (rechtsoffenen) oder nach einem beidseitigen Konfidenzintervall gefragt ist. Welcher Parameter wird geschätzt? Aus welcher Verteilung werden die Quantile entnommen?

(a) Sie sollen die durchschnittliche Preissteigerung von Äpfeln im letzten Jahr bestimmen. 10 Lieferungen werden untersucht und die prozentuale Preisveränderung gegenüber dem Vorjahresschnitt berechnet.

(b) Bei einer von einer Partei in Auftrag gegebenen Meinungsumfrage sollen Sie herausfinden, über welchen Wert das prognostizierte Wahlergebnis zu 90% liegt (die Partei befürchtet Probleme mit der 5%-Klausel). Dazu befragen Sie 500 Wähler*innen.

(c) Sie möchten anhand einer Stichprobe von Stanzstücken feststellen, wie genau man die Stanzmaschine einstellen kann. Die Genauigkeit soll mit einer Konfidenz von 95% festgestellt werden. Sie nehmen eine Stichprobe von 20 Teilen.

(ii) Wenden Sie Ihr Wissen über die Konfidentintervalle nun in dem Anwendungsbeispiel über das Vorkommen seltener Orchideen an. Auf $n = 6$ hochgelegenen Trockenrasenwiesen in Süddeutschland wird von einem Naturschutzinstitut die Anzahl seltener Orchideen pro Hektar (ha) bestimmt, indem jeweils ein Hektar ganz genau abgesucht wird. Die Ergebnisse einer solchen Erhebung haben ergeben, dass sich pro Hektar im Mittel $\bar{X}_n = 14$ seltene Orchideen auffinden lassen, wobei die empirische Varianz bei $\hat{\sigma}^2 = 6$ liegt. Es wird angenommen, dass die Anzahl von Orchideen/ha normalverteilt ist.

(a) Bestimmen Sie ein zweiseitiges 95%-Konfidenzintervall für den wahren Wert μ der mittleren Anzahl von Orchideen/ha.

(b) Vor 5 Jahren wurden in einer sehr umfangreichen Studie 18 Orchideen/ha im Mittel gemessen. Können Sie mit 99% Konfidenz sagen, dass dieser Wert zur Zeit der neuerlichen Untersuchung von der wahren Orchideendichte unterschritten wird?

Hausaufgabe 11.2 (0 Punkte)

Nachfolgend werden in zwei Anwendungsbeispielen Behauptungen aufgestellt die wir mittels geeigneter Hypothesentests überprüfen wollen.

(i) *Lebensdauer von Batterien:* Ein Unternehmen behauptet, dass die durchschnittliche Lebensdauer seiner neuen Batterien mindestens 200 Stunden beträgt. Ein Kunde vermutet, dass die tatsächliche Lebensdauer kürzer ist. Um dies zu überprüfen, nimmt er eine Stichprobe von 50 Batterien und stellt fest, dass die durchschnittliche Lebensdauer in der Stichprobe 195 Stunden beträgt. Die bekannte Standardabweichung der Batterielebensdauer ist 20 Stunden.

(ii) *Medikamentenherstellung:* Ein Medikamentenhersteller behauptet, dass eine bestimmte Pille im Durchschnitt 100 mg eines Wirkstoffs enthält. Sie möchten testen, ob der tatsächliche durchschnittliche Wirkstoffgehalt in den Pillen von diesem behaupteten Wert abweicht. Dazu haben Sie anhand einer Stichprobe von 25 Pillen den enthaltenen Wirkstoff gemessen. Diese Messung hat ein Stichprobenmittel 105 mg ergeben. Der Hersteller hat auf der Packungsbeilage bekannt gegeben, dass die Standardabweichung bei 15 mg liegt.

Wählen Sie für die beiden Beispiele jeweils einen geeigneten Hypothesentest aus. Stellen Sie die Null- und Gegenhypothese auf und führen Sie den Test zu einem Signifikantniveau von $\alpha = 0.05$ durch, um die Behauptungen der Unternehmen zu prüfen.

z_α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.60	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.70	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.80	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.90	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.00	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.10	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.20	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.30	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.40	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.50	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.60	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.70	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.80	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.90	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.00	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.10	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.20	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.30	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.40	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\tilde{x}_p$**-Quantile der Student-**t_n**-Verteilung**							
	p						
n	**0,90**	**0,95**	**0,975**	**0,99**	**0,995**	**0,999**	**0,9995**
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656	318,289	636,578
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,328	31,600
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,214	12,924
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,894	6,869
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,768
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,689
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,660
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
∞	1,282	1,645	1,960	2,327	2,577	3,092	3,293
Die Letzte Zeile ∞ enthält die Quantile der Standard-Normalverteilung und gilt in guter Näherung für die t_n-Verteilung mit $n \geq 30$							