Zusatzaufgaben 12

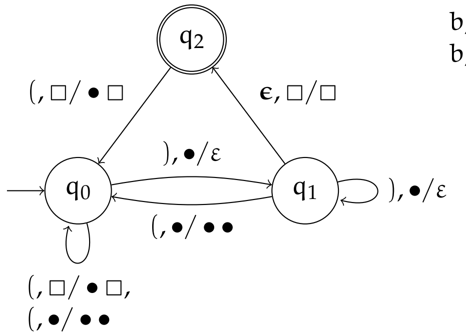
Gegeben seien die Alphabete $\Sigma_1 \triangleq \{\, (,\ )\,\}$, $\Sigma_2 \triangleq \{\, a,\ b,\ c \,\}$ und $\Sigma_3 \triangleq \{\, 0,\ 1 \,\}$, die PDAs

$M_1 \triangleq (\{\, q_0,\ q_1,\ q_2 \,\},\ \Sigma_1,\ \{\, \square,\ \bullet \,\},\ \square,\ \Delta_1,\ q_0,\ \{\, q_2 \,\})$ und

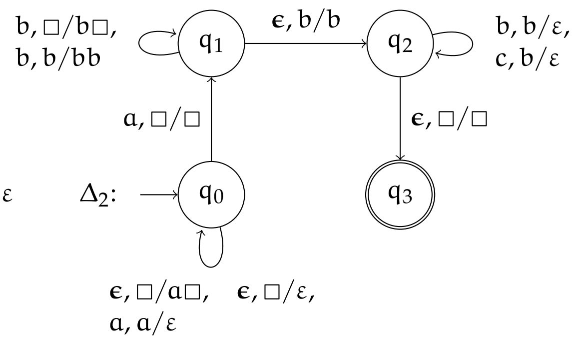
$M_2 \triangleq (\{\, q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3 \,\},\ \Sigma_2,\ \Sigma_2 \cup \{\, \square \,\},\ \square,\ \Delta_2,\ q_0,\ \{\, q_3 \,\})$

mit

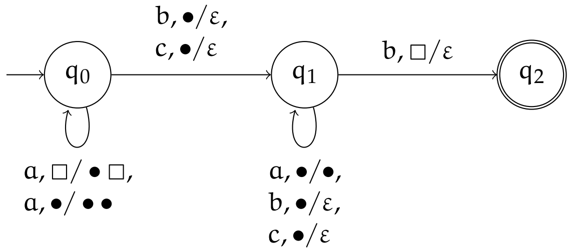
Δ_1:



Δ_2:



der DPDA $M_3 \triangleq (\{\, q_0,\ q_1,\ q_2 \,\},\ \Sigma_2,\ \{\, \square,\ \bullet \,\},\ \square,\ \Delta_3,\ q_0,\ \{\, q_2 \,\})$ mit Δ_3:



sowie die Sprachen:

$A_4 \triangleq \{\, w \in \Sigma_2^* \mid |w|_a = |w|_b \,\}$

$A_5 \triangleq \{\, w \in \Sigma_3^* \mid |w|_0 < |w|_1 \,\}$

$A_6 \triangleq \{\, 00^n(01)^n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$

$A_7 \triangleq \{\, w \in \Sigma_3^* \mid |w|_0 > |w|_1 \,\}$

Aufgabe 1: Sprache eines Kellerautomaten

1.a) *Gib* die Ableitungen für die Wörter ε, abb, abc und acb in M_3 *an*. Welche dieser Wörter liegen in $L_{\text{End}}(M_3)$ und welche liegen in $L_{\text{Kel}}(M_3)$?

Lösung

$(q_0,\ \varepsilon,\ \square) \nvdash_{M_3}$

$(q_0,\ abb,\ \square) \vdash_{M_3} (q_0,\ bb,\ \bullet\square) \vdash_{M_3} (q_1,\ b,\ \square) \vdash_{M_3} (q_2,\ \varepsilon,\ \varepsilon) \nvdash_{M_3}$

$(q_0,\ abc,\ \square) \vdash_{M_3} (q_0,\ bc,\ \bullet\square) \vdash_{M_3} (q_1,\ c,\ \square) \nvdash_{M_3}$

$(q_0,\ acb,\ \square) \vdash_{M_3} (q_0,\ cb,\ \bullet\square) \vdash_{M_3} (q_1,\ b,\ \square) \vdash_{M_3} (q_2,\ \varepsilon,\ \varepsilon) \nvdash_{M_3}$

und damit $abb, acb \in L_{\text{End}}(M_3)$ sowie $abb, acb \in L_{\text{Kel}}(M_3)$ aber $\varepsilon, abc \notin L_{\text{End}}(M_3)$ sowie $\varepsilon, abc \notin L_{\text{Kel}}(M_3)$.

/Lösung

1.b) *Gib an:* $L_{\text{End}}(M_3)$ und $L_{\text{Kel}}(M_3)$

Lösung

$$L_{\text{End}}(M_3) = L_{\text{Kel}}(M_3)$$
$$= \{\, abb, acb, a^n w b \mid w \in \{\, b,\ c \,\} \cdot \{\, a,\ b,\ c \,\}^* \cdot \{\, b,\ c \,\} \wedge n \geqslant 2 \wedge |w|_b + |w|_c = n \,\}$$

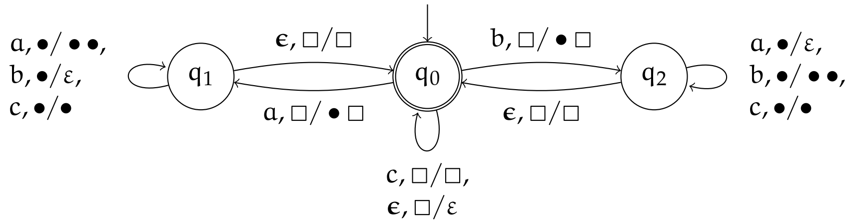
/Lösung

Aufgabe 2: Konstruktion von Kellerautomaten

2.a) *Gib* einen PDA M_4' mit dem Kelleralphabet $\Gamma_4' = \{ \square, \bullet \}$ so *an*, dass $L_{End}(M_4') = L_{Kel}(M_4') = A_4$.

Lösung

$M_4' = (\{ q_0, q_1, q_2 \}, \Sigma_2, \Gamma_4', \square, \Delta_4', q_0, \{ q_0 \})$ mit Δ_4':

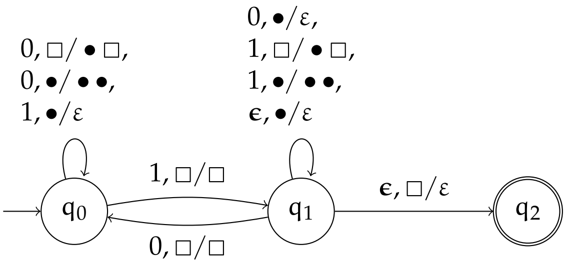


/Lösung

2.b) *Gib* einen PDA M_5 so *an*, dass $L_{End}(M_5) = L_{Kel}(M_5) = A_5$.

Lösung

$M_5 = (\{ q_0, q_1, q_2 \}, \Sigma_3, \{ \square, \bullet \}, \square, \Delta_5, q_0, \{ q_2 \})$ mit Δ_5:

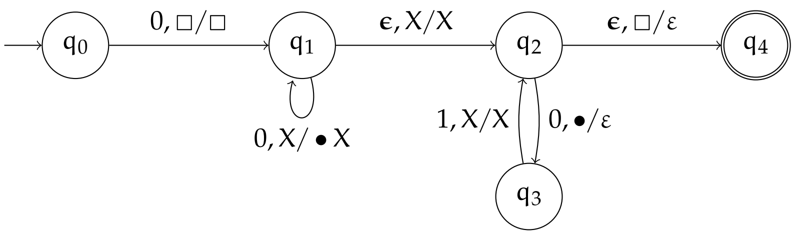


/Lösung

2.c) *Gib* einen PDA M_6 über dem Alphabet Σ_3 so *an*, dass $L_{End}(M_6) = L_{Kel}(M_6) = A_6$.

Lösung

$M_6 = (\{ q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 \}, \Sigma_3, \{ \square, \bullet \}, \square, \Delta_6, q_0, \{ q_4 \})$ mit Δ_6:



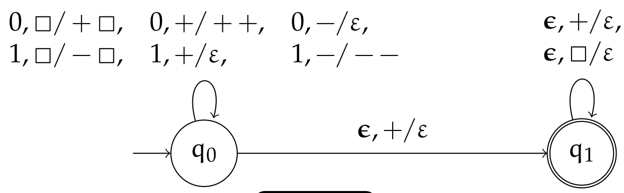
wobei $X \in \{ \square, \bullet \}$.

/Lösung

2.d) *Gib* einen PDA M_7 so *an*, dass $L_{End}(M_7) = L_{Kel}(M_7) = A_7$.

Lösung

$M_7 = (\{ q_0, q_1 \}, \Sigma_3, \{ \square, +, - \}, \square, \Delta_7, q_0, \{ q_1 \})$ mit Δ_7:

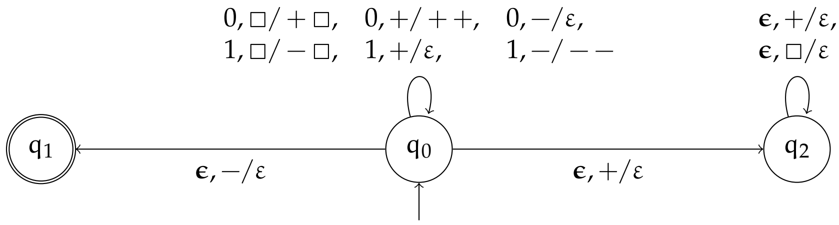


/Lösung

2.e) *Gib* einen PDA M_8 so *an*, dass $L_{End}(M_8) = A_5$ und $L_{Kel}(M_8) = A_7$.

Lösung

$M_8 = (\{ q_0, q_1, q_2 \}, \Sigma_3, \{ \square, +, - \}, \square, \Delta_8, q_0, \{ q_1 \})$ mit Δ_8:



/Lösung

Aufgabe 3: Deterministische Kellerautomaten

3.a) *Gib*, falls das möglich ist, einen DPDA M_1' mit $L_{\text{End}}(M_1') = L_{\text{End}}(M_1)$ *an*.

Lösung

M_1 ist bereits ein DPDA, also wählen wir $M_1' = M_1$.

/Lösung

3.b) *Gib*, falls das möglich ist, einen DPDA M_1'' mit $L_{\text{Kel}}(M_1'') = L_{\text{End}}(M_1)$ *an*.

Lösung

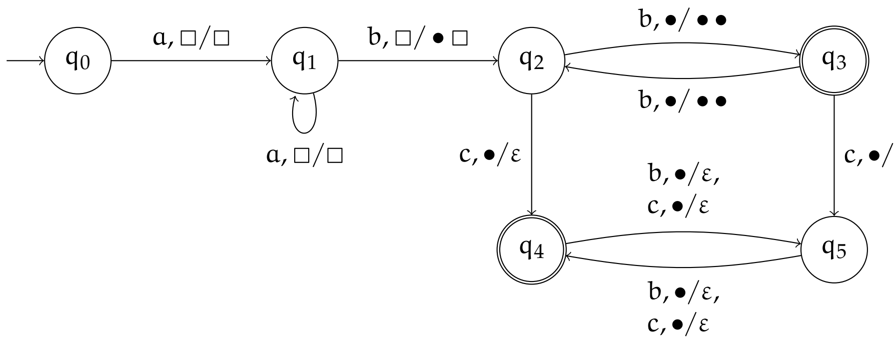
Es gibt keinen DPDA M_1'' mit $L_{\text{Kel}}(M_1'') = L_{\text{End}}(M_1)$.

/Lösung

3.c) *Gib*, falls das möglich ist, einen DPDA M_2' mit $L_{\text{End}}(M_2') = L_{\text{End}}(M_2)$ *an*.

Lösung

$M_2' = (\{ q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 \}, \Sigma_2, \{ \square, \bullet \}, \square, \Delta_2', q_0, \{ q_3, q_4 \})$ mit Δ_2':



/Lösung

3.d) *Gib*, falls das möglich ist, einen DPDA M_2'' mit $L_{\text{Kel}}(M_2'') = L_{\text{End}}(M_2)$ *an*.

Lösung

Es gibt keinen DPDA M_2'' mit $L_{\text{Kel}}(M_2'') = L_{\text{End}}(M_2)$.

/Lösung

3.e) *Gib*, falls das möglich ist, einen DPDA M_4' mit $L_{\text{Kel}}(M_4') = A_4$ *an*.

Lösung

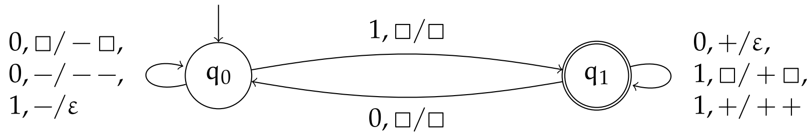
Es gibt keinen DPDA M_4' mit $L_{\text{Kel}}(M_4') = A_4$.

/Lösung

3.f) *Gib*, falls das möglich ist, einen DPDA M_5 mit $L_{\text{End}}(M_5) = A_5$ *an*.

Lösung

$M_5 = (\{ q_0, q_1 \}, \Sigma_2, \{ \square, +, - \}, \square, \Delta_5, q_0, \{ q_1 \})$ mit Δ_5:



/Lösung

3.g) *Gib*, falls das möglich ist, einen DPDA M_5' mit $L_{Kel}(M_5') = A_5$ *an*.

Lösung

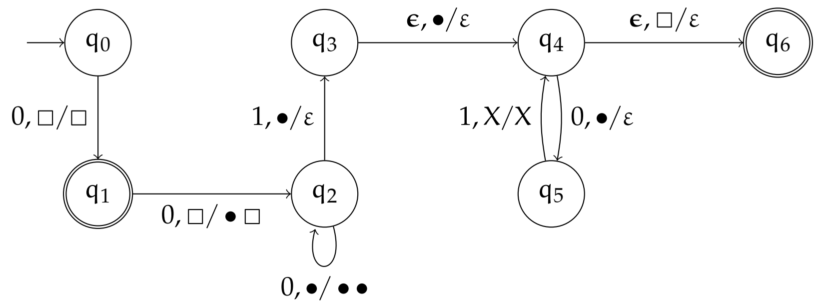
Es gibt keinen DPDA M_5' mit $L_{Kel}(M_5') = A_5$.

/Lösung

3.h) *Gib*, falls das möglich ist, einen DPDA M_6 über dem Alphabet Σ_3 mit $L_{End}(M_6) = A_6$ *an*.

Lösung

$M_6 = (\{ q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6 \}, \Sigma_3, \{ \square, \bullet \}, \square, \Delta_6, q_0, \{ q_1, q_6 \})$ mit Δ_6:



wobei $X \in \{ \square, \bullet \}$.

/Lösung

3.i) *Gib*, falls das möglich ist, einen DPDA M_6' über dem Alphabet Σ_3 mit $L_{Kel}(M_6') = A_6$ *an*.

Lösung

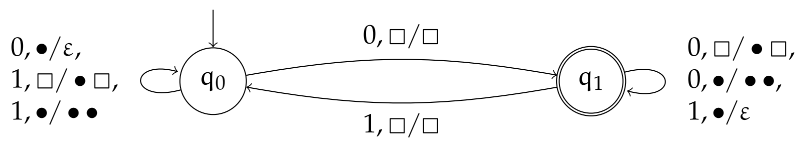
Es gibt keinen DPDA M_6' mit $L_{Kel}(M_6') = A_6$.
(Für den DPDA M_6 aus Aufgabe 3.h) gilt aber $L_{Kel}(M_6) = A_6 \setminus \{ 0 \} = \{ 00^n(01)^n \mid n \in \mathbb{N}^+ \}$.)

/Lösung

3.j) *Gib*, falls das möglich ist, einen DPDA M_7 mit $L_{End}(M_7) = A_7$ *an*.

Lösung

$M_7 = (\{ q_0, q_1 \}, \Sigma_2, \{ \square, \bullet \}, \square, \Delta_7, q_0, \{ q_1 \})$ mit Δ_7:



/Lösung

3.k) *Gib*, falls das möglich ist, einen DPDA M_7' mit $L_{Kel}(M_7') = A_7$ *an*.

Lösung

Es gibt keinen DPDA M_7' mit $L_{Kel}(M_7') = A_7$.

/Lösung

3.l) *Gib an:* Welche der Sprachen A_4, A_5, A_6 und A_7 sind deterministisch kontextfrei?

Lösung

Alle vier Sprachen A_4, A_5, A_6 und A_7 sind deterministisch kontextfrei.

/Lösung

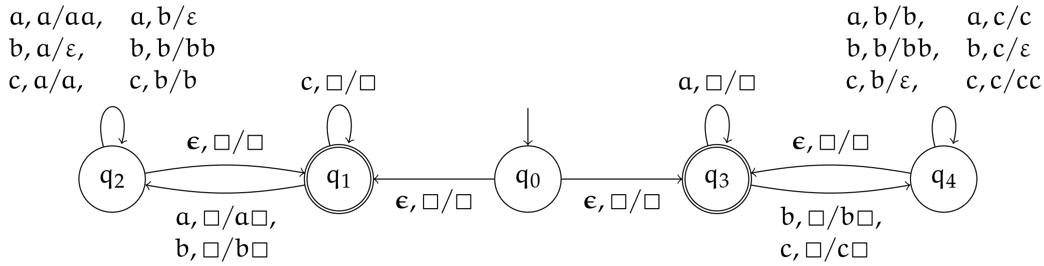
3.m) *Gib* eine Sprache A_9 über Σ_2 *an*, die kontextfrei aber nicht deterministisch kontextfrei ist. *Gib* außerdem einen PDA M_9 mit $L_{End}(M_9) = A_9$ *an*.

Lösung

z.B.: $A_9 = \{ w \in \Sigma_2^* \mid |w|_a = |w|_b \vee |w|_b = |w|_c \}$

Hinweis: Um diese Sprache durch einen PDA zu akzeptieren, muss der PDA zunächst entscheiden, ob er die Zahl der a*'s mit der Zahl der* b*'s oder die Zahl der* b*'s mit der Zahl der* c*'s vergleicht. Beide Vergleiche kann ein PDA nicht zeitgleich ausführen. Da diese Entscheidung zu Beginn aber nur nichtdeterministisch erfolgen kann (das Wort wurde ja noch nicht gelesen), gibt es für diese Sprache keinen DPDA.*

$M_9 = (\{ q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 \}, \Sigma_2, \Sigma_2 \cup \{ \square \}, \square, \Delta_9, q_0, \{ q_1, q_3 \})$ mit Δ_9:



/Lösung

Aufgabe 4: Kellerautomaten und kontextfreie Grammatiken

Gegeben sei das Alphabet $\Sigma_4 = \{ (,), +, x \}$ und die Grammatik $G_8 \triangleq (\{ S \}, \Sigma_4, P_8, S)$ mit P_8:

$S \to (S) \mid S + S \mid x$

4.a) *Gib* eine kontextfreie Grammatik G_1 so *an*, dass $L(G_1) = L_{End}(M_1)$.

Lösung

$G_1 = (\{ S \}, \Sigma_1, P_1, S)$ mit P_1:

$S \to () \mid (S) \mid SS$

/Lösung

4.b) *Gib* eine kontextfreie Grammatik G_3 so *an*, dass $L(G_3) = L_{End}(M_3)$.

Lösung

$G_3 = (\{ S, T \}, \Sigma_2, P_3, S)$ mit P_3:

$S \to abb \mid acb \mid aTbb \mid aTcb$
$T \to Ta \mid aTb \mid aTc \mid ab \mid ac$

/Lösung

4.c) *Gib* eine kontextfreie Grammatik G_4 so *an*, dass $L(G_4) = A_4$.

Lösung

$G_4 = (\{ S, T \}, \Sigma_2, P_4, S)$ mit P_4:

$S \to \varepsilon \mid T$
$T \to ab \mid ba \mid TT \mid abT \mid baT \mid aTb \mid bTa \mid Tab \mid Tba$

/Lösung

4.d) *Gib* eine kontextfreie Grammatik G_5 so *an*, dass $L(G_5) = A_5$.

Lösung

$G_5 = (\{ S, T \}, \Sigma_3, P_5, S)$ mit P_5:

$S \to 1 \mid 1S \mid S1 \mid ST \mid TS$
$T \to 01 \mid 10 \mid S \mid 01T \mid 10T \mid 0T1 \mid 1T0 \mid T01 \mid T10$

/Lösung

4.e) *Gib* eine kontextfreie Grammatik G_6 über dem Alphabet Σ_3 so *an*, dass $L(G_6) = A_6$.

Lösung

$G_6 = (\{ S, T \}, \Sigma_3, P_6, S)$ mit P_6:

$$S \to 0 \mid 0T$$
$$T \to 001 \mid 0T01$$

/Lösung

4.f) *Gib* eine kontextfreie Grammatik G_7 so *an*, dass $L(G_7) = A_7$.

Lösung

$G_7 = (\{ S, T \}, \Sigma_3, P_7, S)$ mit P_7:

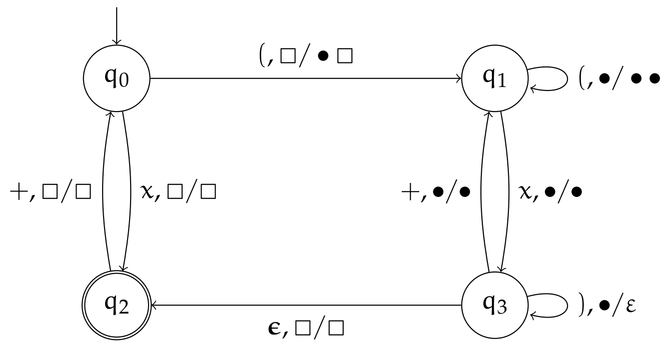
$$S \to 0 \mid 0S \mid S0 \mid ST \mid TS$$
$$T \to 01 \mid 10 \mid S \mid 01T \mid 10T \mid 0T1 \mid 1T0 \mid T01 \mid T10$$

/Lösung

4.g) *Gib* einen PDA M_8 so *an*, dass $L_{\text{End}}(M_8) = L(G_8)$.

Lösung

$M_8 = (\{ q_0, q_1, q_2, q_3 \}, \Sigma_4, \{ \square, \bullet \}, \square, \Delta_8, q_0, \{ q_2 \})$ mit Δ_8:



/Lösung

4.h) *Gib an:* $L(G_8)$

Lösung

Sei $(v)_{1\ldots i} \triangleq (v)_1 \ldots (v)_i$ für ein Wort v und eine natürliche Zahl i mit $1 \leqslant i \leqslant |v|$.

$$\begin{aligned}
L(G_8) = {} & \left\{ w \in \Sigma_8^+ \mid |w|_(= |w|_) \wedge \left(\forall i \in [1, |w|] \,.\, |(w)_{1\ldots i}|_(\geqslant |(w)_{1\ldots i}|_)\right) \right\} \\
& \cap \left\{ w \in \Sigma_8^+ \mid () \text{ ist kein Teilwort von } w \right\} \\
& \cap \left\{ w \in \Sigma_8^+ \mid \forall i \in [1, |w|] \,.\, ((w)_i = x) \to \left(i > 1 \wedge (w)_{i-1} \in \{ +, (\}\right) \right\} \\
& \cap \left\{ w \in \Sigma_8^+ \mid \forall i \in [1, |w|] \,.\, ((w)_i = x) \to \left(i < |w| \wedge (w)_{i+1} \in \{ +,) \}\right) \right\} \\
& \cap \left\{ w \in \Sigma_8^+ \mid \forall i \in [1, |w|] \,.\, ((w)_i = +) \to \left(i > 1 \wedge (w)_{i-1} \in \{ x,) \}\right) \right\} \\
& \cap \left\{ w \in \Sigma_8^+ \mid \forall i \in [1, |w|] \,.\, ((w)_i = +) \to \left(i < |w| \wedge (w)_{i+1} \in \{ x, (\}\right) \right\}
\end{aligned}$$

/Lösung