12. Tutorium: z-Trafo, zeitdiskrete Filter

- Analysegleichung

$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = U(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) \cdot z^{-k}$$

1.2 Bestimme die z-Transformierten der folgenden zeitdiskreten Signale. Gib jeweils auch den Konvergenzbereich an, auf dem die z-Transformierte definiert ist.

a) $u_1 = \{4, 3, 2, 1\}$

$$u_1 = \{4, 3, 2, 1\}$$

$$U_1(z) = (4 \cdot z^{-0} + 3 \cdot z^{-1} + 2 \cdot z^{-2} + 1 \cdot z^{-3}) \cdot \frac{z^3}{z^3}$$

$$= \frac{4z^3 + 3z^2 + 2z^1 + 1}{z^3}$$

Konvergenzbereich: $\forall z \setminus \{0\}$, $|z| > 0$

1.3 Bestimme jeweils das zugehörige Signal im Zeitbereich für die folgenden z-Transformierten.

a) $U_1(z) = z + 2 + z^{-1}$

$$\boxed{* \; \delta(k-q) \circ\!\!-\!\!\bullet \; z^{-q}}$$

$$U_1(z) = z + 2 + z^{-1}$$

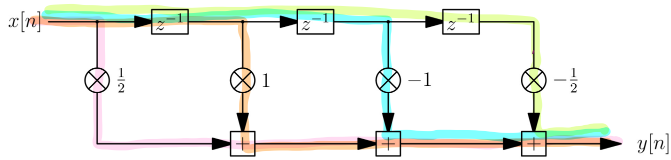
$$u_1(k) = \delta(k+1) + 2\delta(k) + \delta(k-1)$$

$\therefore u_1(k) = \{1, 2, 1\}$

2.1 Skizziere für die folgenden Filter die ersten fünf Werte der Impulsantwort und gib die jeweilige Differenzengleichung an. Bestimme weiterhin die z-Transformierte der Differenzengleichung.

$h(n)$ $y(n)$ $Y(z)$

a)



Eingang : $x(n)$

Ausgang : $y(n)$

Zeitverzögerungsglied : z^{-1}

Addierer : $\boxed{+}$

Multiplizierer mit Koeffizient a : $\otimes\, a$

$$y(n) = \frac{1}{2}\cdot x(n) + x(n-1) + -1\cdot x(n-2) + -\frac{1}{2}\cdot x(n-3)$$

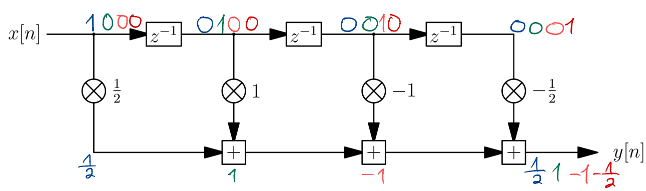
$$Y(z) = \frac{1}{2} z^{0}\cdot X(z) + z^{-1}\cdot X(z) - z^{-2}\cdot X(z) - \frac{1}{2} z^{-3}\cdot X(z)$$

$$Y(z) = X(z)\left(\frac{1}{2} + z^{-1} - z^{-2} - \frac{1}{2} z^{-3}\right)$$

$$\mathcal{H}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2} + z^{-1} - z^{-2} - \frac{1}{2} z^{-3} + 0$$

$$h(n) = \{\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{n=0}, 1, -1, -\tfrac{1}{2}, \underbrace{0}_{n>3}\}$$

andere Methode

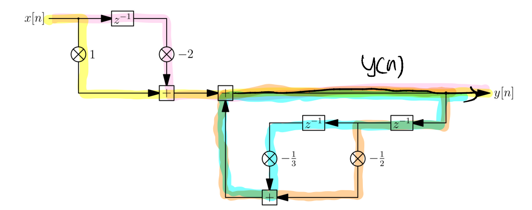


$h(n) = y(n)$ für $x(n) = 1$

Interation n	$h(n)$	$y(n)$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1	1
2	−1	−1
3	1	$-\frac{1}{2}$

$\therefore\ y(n) = \{\frac{1}{2}, 1, -1, -\frac{1}{2}\}$

2.1.b)



Rückkopplung (rekursiver Filter)

: Impulsantwort wird unendlich lang

IIR Filter (Infinite Impulse Response)

$$y(n) = x(n) - 2x(n-1) + -\frac{1}{2}\cdot y(n-1) - \frac{1}{3}\cdot y(n-2)$$

$$Y(z) = X(z) - 2z^{-1}\cdot X(z) - \frac{1}{2}z^{-1}\cdot Y(z) - \frac{1}{3}\cdot z^{-2}Y(z)$$

$$Y(z)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2}\right) = X(z)\left(1-2z^{-1}\right)$$

$$\mathcal{H}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-2z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2}}\cdot\frac{z^2}{z^2} = \frac{z^2-2z}{z^2+\frac{1}{2}z+\frac{1}{3}}$$

$$-2\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 1$$

$$= -\frac{5}{2}$$

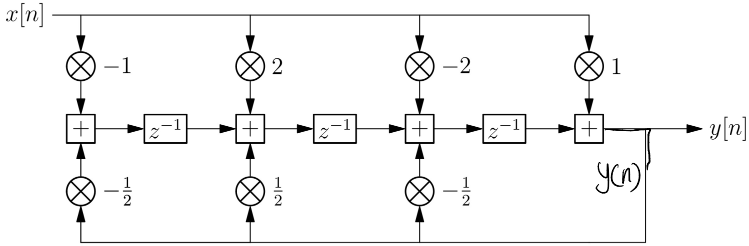
$$-\frac{1}{2}\cdot -\frac{5}{2} - \frac{1}{3}\cdot 1$$

$$=$$

Impulsantwort

n	$x(n)$	$x(n-1)$	$y(n-1)$	$y(n-2)$	$y(n)$
0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	$-\frac{5}{2}$
2	0	0	$-\frac{5}{2}$	1	$\frac{11}{12}$
3	0	0	$\frac{11}{12}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{3}{8}$
4	0	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{11}{12}$	$-\frac{71}{144}$
⋮					

$$\therefore h(n) = \left\{1, -\frac{5}{2}, \frac{11}{12}, \frac{3}{8}, -\frac{71}{144}, \ldots\right\}$$

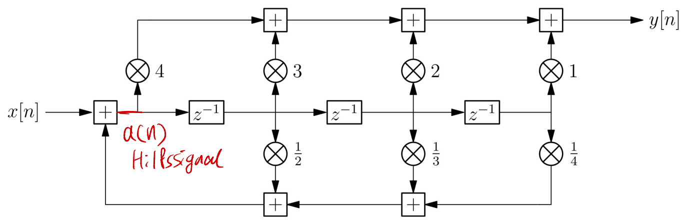


$$y(n) = 1 \cdot x(n) - 2x(n-1) + 2x(n-2) - x(n-3) - \frac{1}{2}y(n-1) + \frac{1}{2}y(n-2) - \frac{1}{2}y(n-3)$$

$$Y(z) = X(z) - 2z^{-1}X(z) + 2z^{-2}X(z) - z^{-3}X(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) + \frac{1}{2}z^{-2}Y(z) - \frac{1}{2}z^{-3}Y(z)$$

$$\mathcal{H}(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 2z - 1}{z^3 + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}}$$

d)



$$y(n) = 4a(n) + 3a(n-1) + 2a(n-2) + a(n-3)$$
$$a(n) = x(n) + \frac{1}{2}a(n-1) + \frac{1}{3}a(n-2) + \frac{1}{4}a(n-3)$$

$$Y(z) = (4 + 3z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3})\, A(z)$$
$$A(z) = \frac{X(z)}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-2} - \frac{1}{4}z^{-3}}$$

$$\mathcal{H}(z) = \frac{4z^3 + 3z^2 + 2z + 1}{z^3 - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z - \frac{1}{4}}$$