lineare homogene DGL 1.Ordnung

$\boxed{x'(t)=a(t)x(t)}$

$x(t)=Ce^{\int a(t)dt} = Ce^{A(t)}$ $C\in\mathbb{R}$

linear inhomogene DGL 1.Ord

$\boxed{x'(t)=a(t)x(t)+b(t)}$

1) homogene DGL lösen.

$x_H'(t)=a_H(t)x_H(t) \Rightarrow x_H(t)=Ce^{-\cos t}$

2) Variation der Konstante (Vdk)

2.1) $x_p(t)=c(t)e^{-\cos(t)}$

2.2) Ableitung $x'_p(t)=\cdots$

2.3) 2.1 und 2.2 in inhom. DGL einsetzen $\Rightarrow c(t)=\cdots$

2.4) partikuläre lsg: $x_p(t)=\ldots$

3) Allg. lsg $x(t)=x_H(t)+x_p(t)$

seperable DGL nicht linear, homg. DGL 1.Ord

$\boxed{x'(t)=f(t)g(x)}$

1) konstante Lösg: $g(x)=0 \to x$ ist konst. lsg

TdV 2) $\int \frac{1}{g(x)}dx = \int f(t)dt$ (ohne Const / mit Const)

EES: $x'(t)=F(t,x)$

① $F(x,y)$ hat stetig part. Ableitung: $\frac{\partial F}{\partial t} \neq \frac{\partial F}{\partial x}$ mit $\frac{\partial F}{\partial t}: D\to\mathbb{R}$

② $D=\mathbb{R}^2$ ist offen

③ $(t_0,x_0)\in D$. $\Rightarrow$ AWP hat einzig eindeutige lsg

Homogene DGL-System 1.Ord

$\boxed{\vec{x}'(t)=A\vec{x}(t)}$ A: Systemmatrix

① EW: $P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow \lambda=\cdots$

② EV: $(A-\lambda_i I)\vec{v}_i=\vec{0}$

③ FS: $\vec{x}_i(t)=e^{\lambda_i t}\vec{v}_i$ (lsg linear unabhängig)

④ allg. lsg: $\vec{x}(t)=c_1\vec{x}_1(t)+\cdots+c_n\vec{x}_n(t)$

Wronski-Test: für hom. DGL System, ZZ $\vec{x}_i$ linear unabh.

$\det(W(t))|_{t=r}\neq 0 \Rightarrow \vec{x}_1$ bis $\vec{x}_n$ linear unabh.

$W(t)=(\vec{x}_1(t)\ \vec{x}_2(t)\ \cdots\ \vec{x}_n(t))$

$e^{2it}=\cos(2t)+i\sin(2t)$

Spur(A) = Summe der EW
= Summe der Diagonale

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a\end{bmatrix}$$

$\int u\,dv = uv-\int v\,du$

Umwandlung DGL höheres Ord. in DGL-System 1.Ord.

① DGL in Normalform: $x^{(n)}(t)=\cdots$

② Substitution von $x(t)$ durch $\vec{y}(t)$

$$\begin{pmatrix} x(t)\\ x'(t)\\ \cdots\\ x^{(n-1)}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1(t)\\ y_2(t)\\ \cdots\\ y_n(t)\end{pmatrix}$$

③ Ableitung von $\vec{y}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} y_1(t)\\ y_2(t)\\ \cdots\\ y_n(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_2(t)\\ y_3(t)\\ \cdots\\ x^{(n)}(t)\end{pmatrix}$$

EES für DGL-System

$\vec{x}'(t)=A\vec{x}+\vec{b}(t), \vec{x}(t_0)=\vec{x}_0$

① Einträge von Matrix A und $\vec{b}(t)$ auf D stetig

② $t_0\in D$

$\Rightarrow$ AWP hat eindeutige lsg

$\boxed{\vec{x}'(t)=A\vec{x}(t)}$

Homogene DGL-System 1.Ord

① EW, alg(λ)

② EV und HV (Hauptvektor)

$(A-\lambda I)\vec{v}_i=\vec{0} \Rightarrow \vec{v}_i$ ist EV

Falls alg(λ) > geo(λ), dann braucht man HV bis zur alg(λ)'te Stufe

$\to$ HV 2.te Stufe: $(A-\lambda_i I)\vec{h}_2=\vec{v}_1$

$\to$ HV k.te Stufe: $(A-\lambda_i I)\vec{h}_i=\vec{h}_{i-1}$

③ FS

3.1) Reelle EV
$\Rightarrow \vec{x}_i(t)=e^{\lambda_i t}\vec{v}_i$

3.2) HV 2.te Stufe:
$\Rightarrow \vec{x}_{i+1}(t)=e^{\lambda_i t}(\vec{v}_2+t\vec{v}_i)$

3.3) HV k.te Stufe:
$\Rightarrow \vec{x}_{i+k-1}=e^{\lambda_i t}\left(\sum_{n=0}^{k-1}\frac{t^n}{n!}h_{k-n}\right)$

3.4) komplexer EV $\vec{v}_i$

Komplexe FS: $\vec{x}_i(t)=e^{\lambda_i t}\vec{v}_i$

$\vec{x}_{i+1}(t)=\overline{\vec{x}_i(t)}$

Reelle FS: $\vec{x}_{i,reelle}=Re\{\vec{x}_i(t)\}$

$\vec{x}_{i+1,reell}(t)=Im\{\vec{x}_i\}$

④ Allg. lsg: $\vec{x}(t)=c_1\vec{x}_1(t)+\cdots c_n\vec{x}_n(t)$

$\frac{s^2+25}{(s-2)(s^2+6)}=\frac{A}{s-2}+\frac{Bs+C}{s^2+6}$

Inhomogene DGL-System 1.Ord

$\vec{x}'(t)=A\vec{x}(t)+\vec{b}(t)$

① zugehörige hom. lsg

$\vec{x}_H(t)=c_1\vec{x}_1(t)+\cdots+c_n\vec{x}_n(t)$

② Vdk

Ansatz: $\vec{x}_p(t)=c_1(t)\vec{x}_1(t)+\cdots+c_n(t)\vec{x}_n(t)$

Es gilt: $W(t)\vec{c}'(t)=\vec{b}(t)=(\vec{x}_1(t)\cdots\vec{x}_n(t))\begin{pmatrix}c_1'(t)\\ \cdots\\ c_n'(t)\end{pmatrix}$

③ Allg. lsg

$\vec{x}(t)=\vec{x}_H(t)+\vec{x}_p(t)$

Linear DGL, höcher Ord

homoge: $x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\cdots+a_nx(t)=0$

① $P(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n=0$
$\to \lambda_{1,\cdots,n}$

② FS

2.1) Reelle einfache Nullstelle $\lambda_i \Rightarrow x_i(t)=e^{\lambda_i t}$

2.2) Reelle k-fache NST: $\lambda_{i,\cdots,k-1+i}$:
$x_i(t)=e^{\lambda_i t}$ $x_{i+1}(t)=te^{\lambda_i t}$
$x_{i+2}(t)=t^2e^{\lambda_i t}$

2.3) Komplexes-konjugiert NST-Paar $\lambda_{i,i+1}=\alpha\pm i\beta$
$x_i(t)=e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ $x_{i+1}(t)=e^{\alpha t}\sin(\beta t)$

2.4) k-fach komplexe NST: $\lambda_{i,\ldots,2k-1+i}=\alpha\pm i\beta$
$\Rightarrow x_i(t)=e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ $x_{i+1}(t)=e^{\alpha t}\sin(\beta t)$
$x_{i+2}(t)=te^{\alpha t}\cos(\beta t)$ $x_{i+3}(t)=te^{\alpha t}\sin(\beta t)$

③ Allg. lsg $x(t)=c_1x_1(t)+\cdots c_nx_n(t)$

inhomoge: $x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\cdots+a_nx(t)=b(t)$

① homg lsg: $b(t)=0 \Rightarrow x_H(t)=c_1x_1(t)+\cdots c_nx_n(t)$

② $x_p(t)=c_1(t)x_1(t)+\cdots+c_n(t)x_n(t)$

$$W(t)\vec{c}'(t)=\vec{b}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t)\\ x_1'(t) & \cdots & x_n'(t)\\ x_1^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1'(t)\\ c_2'(t)\\ \cdots\\ c_n'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\ b(t)\end{pmatrix}$$

③ Allg lsg $x(t)=x_H(t)+x_p(t)$

$b(t)$	$x_p(t)$
$b_0+b_1t+\cdots b_mt^m$	$A_0+A_1t+\cdots+A_mt^m$ falls 0 keine NST von $P(\lambda)$; $t^k(A_0+A_1t+\cdots+A_mt^m)$ falls 0 eine k-fache NST
$e^{\alpha t}(b_0+b_1t\cdots b_mt^m)$	$e^{\alpha t}(A_0+A_1t+\cdots+A_mt^m)$ falls α keine NST; $t^ke^{\alpha t}(A_0+A_1t+\cdots+A_mt^m)$ falls α k-fache NST
$b(x)=\cos(\beta x)\cdot(b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m)$ oder $b(x)=\sin(\beta x)(b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m)$	$\cos(\beta x)(A_0+A_1x+\cdots)+\sin(\beta x)(B_0+B_1x+\cdots)$ falls iβ keine NST; $x^k\cos(\beta x)(A_0+A_1x+\cdots)+x^k\sin(\beta x)(B_0+B_1x+\cdots)$ falls iβ k-fach NST

Laplace Transformation $f(t): [0,\infty[\to \mathbb{C}$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

(konvergiert für $Re(s) > 0$)

$f(t)$ ist laplace-transformierbar, falls $f(t)$ von exponentieller Ordnung ist

$f(t)$ ist von exp. Ord., falls es ein $\gamma \in \mathbb{R}$ und ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $|f(t)| \le c e^{\gamma t}$ $t > 0$

$$c e^{\gamma t} = e^{\ln c + \gamma t}$$

Linearität:

a) $\mathcal{L}[f(t)+g(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s) + \mathcal{L}[g(t)](s)$

b) $\mathcal{L}[a f(t)](s) = a \mathcal{L}[f(t)](s)$

Ableitungsansatz:

a) $\mathcal{L}[f'(t)](s) = s \mathcal{L}[f(t)](s) - f(0)$

b) $\mathcal{L}[f''(t)](s) = s^2 \mathcal{L}[f(t)](s) - s f(0) - f'(0)$

c) $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^n \mathcal{L}[f(t)](s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$

Laplace Faltung

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$$

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s) \cdot \mathcal{L}[g](s)$$

$E(s)$, $e(t)$ $\to$ LTI-System $\to$ $A(s)$, $a(t)$

$G(s)$ Übertragungsfunktion

$g(t)$ Impulsantwort

$$\boxed{A(s) = G(s) \cdot E(s) \qquad a(t) = g(t) * e(t)}$$

Greensche-Fkt

AWP: $x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n x(t) = h(t)$

$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0$

Anregung $h(t)$, $H(s)$ $\to$ $\square$ $\to$ $x(t)$, $X(s)$

Impulsantwort $g(t)$, $G(s)$

$$X(s) = \underbrace{(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n)^{-1}}_{G(s) = \mathcal{L}[g(t)](s)} H(s)$$

$g(t)$: greensche Fkt

$\Rightarrow x(t) = g(t) * h(t)$

Fourier-Transformation $f(t): \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\mathcal{F}[f(t)](w) = F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt$$

$$\mathcal{F}[e^{-\frac{t^2}{2}}](w) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{w^2}{2}}$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](w) = \pi e^{-|w|}$$

$$\mathcal{F}[e^{-a|t|}](w) = \frac{2a}{w^2+a^2} \quad a > 0$$

$\mathcal{F}[f+g](w) = \mathcal{F}[f](w) + \mathcal{F}[g](w)$

$\mathcal{F}[af](w) = a \mathcal{F}[f](w)$

$\mathcal{F}[t^n f(t)](w) = i^n \frac{d^{(n)}}{dw^{(n)}} \mathcal{F}[f(t)](w)$

$\mathcal{F}[f(\frac{t}{a})](w) = |a| \mathcal{F}[f(t)](aw)$

$\mathcal{F}[f(t-t_0)](w) = e^{-iwt_0} \mathcal{F}[f(t)](w)$

$\mathcal{F}[f(t) e^{iw_0 t}](w) = \mathcal{F}[f(t)](w-w_0)$

$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)](w) = (iw)^n \mathcal{F}[f(t)](w)$

$\mathcal{F}[f(\frac{1}{a}t - t_0)](w)$ - skar mit a - verschiebung t_0

$\mathcal{F}[f(\frac{1}{a}(t-t_0))](w)$ - verschiebung t_0 - skar a

Rücktransformation

$F(w) = \mathcal{F}[f(t)](w)$ gegeben

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[F(w)](-t)$$

Faltung: $\mathcal{F}[f*g](w) = \mathcal{F}[f](w) \cdot \mathcal{F}[g](w)$

f: ungerade Funktion:

$$\mathcal{F}[f](w) = \int_0^\infty f(t) e^{-iwt} dt + \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-iwt} dt$$

$$= \int_0^\infty f(t) e^{-iwt} dt + \int_0^\infty f(-t) e^{iwt} dt$$

$$= \int_0^\infty f(t) e^{-iwt} dt + \int_0^\infty -f(t) e^{iwt} dt$$

$$= \int_0^\infty f(t) e^{-iwt} dt - \int_0^\infty \overline{f(t) e^{-iwt}} dt$$

$$= \mathcal{L}[f] - \overline{\mathcal{L}[f]} = 2i\, Im(\mathcal{L}[f])$$

$\mathcal{F}[f * g](w) = \hat{f}(w) \hat{g}(w)$

$\mathcal{F}[f(-t)](w) = \mathcal{F}[f](-w)$

2a $(f * g)(t) = (f * g)(t)$

$$\mathcal{L}[f(t-a) u(t-a)] = e^{-as} F(s)$$

EES $y' = F(x,y)$ $M \subset \mathbb{R}$ offen

Existenz: $F(x,y)$ ist stetig auf M

Eindeutigkeit: $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ auf M stetig

Die partiellen Ableitung sind auf $\mathbb{R}^2$ stetig und damit F auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar

Der Anfangspunkt $(1,0)$ liegt in $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ es gibt genau eine maximal Lösung des AWP

f ist bandbeschränkt mit Bandbreite M, falls $\mathcal{F}[f](w) = 0$ f.a. $|w| > M$

f stetig, absintbar, bandbeschränkt mit M

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{M}\right) \operatorname{sinc}(Mt - k\pi)$$

konvergiert punktweise, absolut, gleichmäßig

DGL: Gleichungen einer Fkt und ihrer Ableitungen

DGLssystem: vektorwertige Fkt

Skalaren DGL: Fkt reelle oder komplexwertig

gewöhnlichen DGL: Fkt bei einer Unbekannte

partiellen DGL: Fkt bei mehreren Unbekannte

Ordnung der DGL: Höchste Ableitung

~~linear~~

linear: Eine skalare gew. DGL 1 Ordnung wenn

$x'(t) = a(x) x(t) + b(t)$

homogen: $b(t) = 0$

$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 2\}$ ist offen

Lerch. Seien $f, g: [0,\infty) \to \mathbb{C}$ stückweise stetig. Fkt exp. Ordnung γ. $\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g](s)$ $Re(s) > \gamma$ dann ist $f(t) = g(t)$ in allen Stetigkeitspunkten von f und g

Produktsatz $\mathcal{F}[fg] = \frac{1}{2\pi} (\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g])$

为什么n个变量的DGL要用分离法 ($u(x,t) = X(x) T(t)$)

weil man dadurch die Variablen in der Gleichung trennen kann, so entscheiden 2 unab. Gleichungen, die leichter zu lösen sind

$$\mathcal{F}[f*g](w) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) g(\tau) d\tau \right) e^{-iwt} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) e^{-iwt} dt \right) d\tau$$

$u = t - \tau$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iw(u+\tau)} du\, d\tau$$

$$= \mathcal{F}[g](w) \cdot \mathcal{F}[f](w)$$