Agenda

2. Lineare Optimierung

Multikriterielle Optimierung beschäftigt sich mit Optimierungsproblemen, bei denen eine mehrfache Zielsetzung vorliegt.
In diesem Zusammenhang können verschiedene Ziele zueinander

- komplementär,
- konkurrierend (konträr) oder
- neutral sein.

多目标优化
多目标优化涉及到具有多重目标的优化问题。在这种情况下，不同的目标可以相互
▶ 互补的，
▶ 竞争的（相反的）或者 ▶ 中立的。
定义
设 z∗ 是要最大化的目标 i 的最佳目标函数值，而 zi (x) 是解 x 的目标函数值，则称 (z∗ – zi (x))/z∗ 为实现目标的达成程度（ZEG）。
定义
对于多目标优化问题，每个目标设定的最佳解决方案称为问题的完美解决方案。

Definition

Sei z_i^* der optimale Zielfunktionswert eines zu maximierenden Zieles i und $z_i(x)$ der Zielfunktionswert einer Lösung x, dann heißt der Quotient $(z_i^* - z_i(x))/z_i^*$ der mit x zu realisierende **Zielerreichungsgrad (ZEG)**.

Definition

Eine zu jeder Zielsetzung optimale Lösung eines multikriteriellen Optimierungsproblems heißt **perfekte Lösung** des Problems.

Gegeben sei das folgende Produktionsproblem mit drei unterschiedlichen Zielen

$$
\begin{array}{rrl}
\text{Deckungsbeitrag} & \max DB(x_1,x_2) & = 10x_1 + 20x_2 \\
\text{Absatz} & \max A(x_1,x_2) & = x_1 + x_2 \\
\text{Umsatz} & \max U(x_1,x_2) & = 60x_1 + 40x_2 \\
 & \text{s.t.} & x_1 + x_2 \leq 100 \\
 & & 6x_1 + 9x_2 \leq 720 \\
 & & x_2 \leq 60 \\
 & & x_{1,2} \geq 0
\end{array}
$$

Lösung:

- Maximaler Deckungsbeitrag: $DB^* = 1500$ im Punkt $(30,60)$
- Maximaler Absatz: $A^* = 100$ für alle Punkte im Intervall zwischen $(60,40)$ und $(100,0)$
- Maximaler Umsatz: $U^* = 6000$ im Punkt $(100,0)$

Die Ziele Umsatz und Deckungsbeitrag bzw. Deckungsbeitrag und Absatz sind konkurrierend!

Multikriterielle Optimierung

Wenn bei einem multikriteriellen Optimierungsproblem ein Zielkonflikt (konkurrierende Ziele) auftritt, muss dieser durch einen Kompromiss gelöst werden. Im Folgenden betrachtete Ansätze:

- Lexikographische Ordnung von Zielen
- Zieldominanz
- Zielgewichtung
- Berücksichtigung von Abstandsfunktionen

多目标优化
在多目标优化问题中，如果出现目标冲突（竞争目标），则必须通过妥协来解决。以下是考虑的方法：

▶️ 目标的词典排序
▶️ 目标支配
▶️ 目标加权
▶️ 考虑距离函数

这些方法旨在处理多目标优化问题中的复杂情况，以便在面临不同目标之间的权衡和冲突时找到最佳解决方案。

Lexikographische Ordnung von Zielen

Die Entscheidungsträgerin ordnet die einzelnen Ziele nach ihrer Wichtigkeit.

- Ziel A: Wichtigstes Ziel
- Ziel B: Zweitwichtigstes Ziel
- Ziel C: Drittwichtigstes Ziel
- usw.

Lösungsalgorithmus

- Schritt 1: Löse das Problem ausschließlich bezüglich Ziel A. Die Menge der optimalen Lösungen sei X_A.
- Schritt 2: Löse das Problem ausschließlich bezüglich Ziel B, wobei nur X_A als Menge der zulässigen Lösungen betrachtet wird. Die Menge der optimalen Lösungen sei X_B.
- Schritt 3: Löse das Problem ausschließlich bezüglich Ziel C, wobei nur X_B als Menge der zulässigen Lösungen betrachtet wird. Die Menge der optimalen Lösungen sei X_C.

„Untergeordnete“ Ziele werden nur dann berücksichtigt, wenn für „übergeordnete“ Ziele der Fall parametrischer Lösungen vorliegt.

目标的词典排序

决策者按其重要性对各个目标进行排序。

- 目标 A：最重要的目标
- 目标 B：次重要的目标
- 目标 C：第三重要的目标
- 以此类推。

解决算法

- 步骤 1：仅针对目标 A 解决问题。最优解的集合为 XA。
- 步骤 2：仅针对目标 B 解决问题，仅考虑 XA 作为允许解的集合。最优解的集合为 XB。
- 步骤 3：仅针对目标 C 解决问题，仅考虑 XB 作为允许解的集合。最优解的集合为 XC。

Lexikographische Ordnung von Zielen – Beispiel

Lösung des Produktionsproblems

- Maximaler Deckungsbeitrag: $DB^* = 1500$ im Punkt $(30{,}60)$
- Maximaler Absatz: $A^* = 100$ für alle Punkte im Intervall zwischen $(60, 40)$ und $(100{,}0)$
- Maximaler Umsatz: $U^* = 6000$ im Punkt $(100{,}0)$

Beispiel 1: Lexikographische Ordnung		Zielerreichungsgrad
Ziel A: Absatz	$X_A = \{(60{,}40); (100{,}0)\}$	0
Ziel B: Deckungsbeitrag	$X_B = \{(60{,}40)\}$	0,07 (=(1500-1400)/1500)
Ziel C: Umsatz	$X_C = \{(60{,}40)\}$	0,13 (=(6000-5200)/6000)

$\Rightarrow$ Lösung $\{(60{,}40)\}$

Beispiel 2: Lexikographische Ordnung		Zielerreichungsgrad
Ziel A: Umsatz	$X_A = \{(100{,}0)\}$	0
Ziel B: Absatz	$X_B = \{(100{,}0)\}$	0
Ziel C: Deckungsbeitrag	$X_C = \{(100{,}0)\}$	0,33 (=(1500-1000)/1500)

$\Rightarrow$ Lösung $\{(100{,}0)\}$

Zieldominanz

Eines der Ziele wird (von der Entscheidungsträgerin) zum Hauptziel deklariert und als Zielfunktion berücksichtigt.
Alle anderen Ziele werden zu Nebenzielen erklärt und als Nebenbedingung in das Problem aufgenommen.

- Für zu maximierende Nebenziele: Die Zielfunktion $\max F(x)$ wird durch die Nebenbedingung $F(x) \geq u$ ersetzt. Dabei ist u eine mindestens zu erreichende untere Schranke.
- Für zu minimierende Nebenziele: Die Zielfunktion $\min F(x)$ wird durch die Nebenbedingung $F(x) \leq o$ ersetzt. Dabei ist o eine höchstens zu erreichende obere Schranke.

Probleme der Zieldominanz

- Durch die hinzukommenden unteren (bzw. oberen) Schranken der Nebenziele wird der Zielerreichungsgrad des Hauptzieles möglicherweise zu sehr beschnitten.
- Weiterhin ist es möglich, dass durch diese Schranken die Menge der zulässigen Lösungen sogar zur leeren Menge wird.

Zieldominanz

决策者将其中一个目标声明为主要目标，并将其作为目标函数考虑。所有其他目标被声明为次要目标，并作为问题的约束条件加入。

▶️对于需要最大化的次要目标：目标函数 max F (x) 被替换为约束条件 F (x) ≥ u。这里，u 是至少需要达到的下限。
▶️对于需要最小化的次要目标：目标函数 min F (x) 被替换为约束条件 F (x) ≤ o。这里，o 是最多能达到的上限。

Zieldominanz的问题
▶️通过新增的次要目标的下限（或上限），主要目标的目标达成度可能会受到过度的限制。
▶️此外，通过这些限制，允许解的集合甚至可能成为空集。

Zieldominanz – Beispiel

Beispiel: Hauptziel sei die Maximierung des Deckungsbeitrags.
Die unteren Schranken für die Nebenziele seien:

- Absatz ≥ 95
- Umsatz ≥ 4800

$$\begin{array}{rrcrl} \max DB = & 10x_1 & + & 20x_2 & \\ \text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & \geq 95 \\ & 60x_1 & + & 40x_2 & \geq 4800 \\ & & & x_{1,2} & \geq 0 \end{array}$$

Lösung: {(48,48)}		Lösung bei ausschließlich DB-Maximierung	
$DB^* = 1440$	$ZEG: 0{,}04(= (60/1500)$	$DB^* = 1500$	$ZEG: 0$
$A^* = 96$	$ZEG: 0{,}04(= (4/100)$	$A^* = 90$	$ZEG: 0{,}1$
$U^* = 4800$	$ZEG: 0{,}2(= (1200/6000)$	$U^* = 4200$	$ZEG: 0{,}3$

Zielgewichtung

Annahme: Es seien t Ziele zu berücksichtigen.

- Bei der Zielgewichtung bewertet man die einzelnen Ziele mit reellen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$.
- Dabei sei $0 \leq \lambda_i \leq 1$ und $\sum_t \lambda_i = 1$.
- Danach wird eine neue Zielfunktion über den zulässigen Bereich optimiert $z_\lambda = \lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_t z_t$.

Problem der Zielgewichtung

- Bei der Lösung von LPs mit mehrfacher Zielsetzung mit Hilfe der Zielgewichtung ist die optimale Lösung im Normalfall ein Eckpunkt des zulässigen Bereichs, wie auch bei einfacher Zielsetzung. Für bestimmte λ_i (parametrische Lösung) sind jedoch mehrere Eckpunkte und deren konvexe Linearkombinationen optimale Lösungen.

Zielgewichtung – Beispiel

Beispiel: Gewichtung der einzelnen Ziele

- Deckungsbeitrag: $\frac{1}{10}$
- Absatz: $\frac{8}{10}$
- Umsatz: $\frac{1}{10}$

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\max \Phi(x_1,x_2) = \frac{1}{10} DB(x_1,x_2) + \frac{8}{10} A(x_1,x_2) + \frac{1}{10} U(x_1,x_2) = & 7{,}8x_1 & + & 6{,}8x_2 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & \leq & 100 \\
 & 60x_1 & + & 40x_2 & \leq & 720 \\
 & & & x_2 & \leq & 60 \\
 & & & x_{1,2} & \geq & 0
\end{array}
$$

Lösung: {(60,40)}	Zielerreichunggrad
$DB^* = 1400$	$0{,}07(= (1500 - 1400)/1500)$
$A^* = 100$	0
$U^* = 5200$	$0{,}13(= 6000 - 5200)/6000)$

Berücksichtigung von Abstandsfunktion

Annahme: Es seien t Ziele zu berücksichtigen.

- Bei der Berücksichtigung von Abstandsfunktionen wird zunächst für jedes Ziel i gesondert der optimale Zielfunktionswert z_i^* berechnet.
- Danach wird eine Lösung x des gesamten Problems gesucht, welche den „Abstand“ zwischen den z_i^* und den durch x gegebenen Zielfunktionswerten minimiert.
- Außerdem können die Abstände je nach Bedeutung der einzelnen Ziele mit reellen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ bewertet werden (vgl. Zielgewichtung).
- Dabei sei $0 \leq \lambda_i \leq 1$ und $\sum_t \lambda_i = 1$.

Abstandsfunktionen sind häufig nicht linear. So werden Abweichungen umso stärker bestraft, je höher der Wert p ist. Für $p = \infty$ wird ausschließlich die größte auftretende Abweichung bewertet. Hier spricht man von der Tschebyscheff-Norm.

$$\Phi = \begin{cases} \left[\sum_{i=1}^{t} \lambda_i |z_i^* - z_i(x)|^p\right]^{\frac{1}{p}} & \text{für } 1 \leq p < \infty \\ \max\{\lambda_i |z_i^* - z_i(x)| \forall i = 1, \ldots, t\} & \text{für } p = \infty \end{cases}$$

Hier: Annahme einer linearen Funktion: $\min z_A = \lambda_1(z_1^* - z_1(x)) + \ldots + \lambda_t(z_t^* - z_t(x))$

Berücksichtigung von Abstandsfunktion – Beispiel

Beispiel: Gewichtung der einzelnen Ziele

- Deckungsbeitrag: $\lambda_{DB} = \frac{1}{10}$
- Absatz: $\lambda_A = \frac{8}{10}$
- Umsatz: $\lambda_U = \frac{1}{10}$

$$\begin{aligned} \min \Phi(x) &= \tfrac{1}{10}|1500 - 10x_1 - 20x_2| + \tfrac{8}{10}|100 - x_1 - x_2| + \tfrac{1}{10}|6000 - 60x_1 - 40x_2| = 830 - (7{,}8x_1 + 6{,}8x_2) \\ \Leftrightarrow \max \Psi(x) &= 7{,}8x_1 + 6{,}8x_2 \end{aligned}$$

Bei $p = 1$ entspricht das Vorgehen also der Zielgewichtung. Da dieselben Gewichte gewählt wurden, ist die Kompromisslösung identisch.

Lösung: {(60,40)}	Zielerreichunggrad
$DB^* = 1400$	$0{,}07(= (1500 - 1400)/1500)$
$A^* = 100$	0
$U^* = 5200$	$0{,}13(= 6000 - 5200)/6000)$