Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen
(Tutorium 2)

Vorlesungswoche: 29. April – 3. Mai 2024 Sommersemester 2024

Aufgabe 4

Löse die separablen Differentialgleichungen

$$\text{(a) } x'(t) + x^2(t)\,\sin(t) = 0, \qquad \text{(b) } x'(t) + \frac{1}{2}(1 - x^2(t))\,\sin(t) = 0$$

jeweils mit dem Anfangswert $x(2\pi) = -1$. Wie groß sind die maximalen Definitionsbereiche?

Aufgabe 5

Betrachte noch einmal die Anfangswertsprobleme

(a) $x'(t) - x(t)\sin(t) = \mathrm{e}^{t-\cos(t)}, \qquad x(0) = 1;$

(b) $x'(t) + 2t\,x(t) = t^{-1}\,\mathrm{e}^{-t^2}, \qquad x(\mathrm{e}) = 0.$

Zeige, dass die berechneten Lösungen zu Aufgabe 2 eindeutig sind.

Aufgabe 6 (*Logistische Gleichung*)

Bei beschränkten Ressourcen kann eine Population nicht unbeschränkt wachsen. Dieser Sachverhalt kann durch die sogenannte *logistische Gleichung*

$$P'(t) = \frac{a}{b}\,P(t)\,(b - P(t)), \qquad P(0) = c,$$

mit konstantem $a, b, c > 0$ und $b > c$ modelliert werden. Die Funktion $P(t)$ gibt hierbei die Größe der Population zum Zeitpunkt t an. Ohne die Differentialgleichung explizit zu lösen, beantworte folgende Fragen:

(a) Zwischen welchen Werten wird sich die Populationsgröße $P(t)$ bewegen?

(b) Ist $P(t)$ monoton wachsend?

(c) Gegen welchen Wert wird $P(t)$ in ferner Zukunft laufen?

Löse anschließend das Anfangswertsproblem rechnerisch.

Seperable DGL   Nichtlinear, homogen DGL, 1. Ordnung

$$\boxed{x'(t) = f(t)\cdot g(x)}$$

Lösungsvorgang: ① konstante Lösungen:

$g(x)=0 \Rightarrow x$ sind konstante Lösungen

② Ansatz:

$$\boxed{\int \frac{1}{g(x)}\,dx = \int f(t)\,dt}$$

mit Konstante

ohne Konstante

↳ Nach $x(t)$ auflösen

Aufgabe 4

Löse die separablen Differentialgleichungen

$$\text{(a) } x'(t) + x^2(t)\ \sin(t) = 0, \qquad \text{(b) } x'(t) + \frac{1}{2}(1 - x^2(t))\ \sin(t) = 0$$

jeweils mit dem Anfangswert $x(2\pi) = -1$. Wie groß sind die maximalen Definitionsbereiche?

a) $x'(t) = \underbrace{-\sin(t)}_{f(t)}\underbrace{x^2(t)}_{g(t)}$

① $g(x) = x^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0 \Rightarrow x(t) = 0$ → Wiederspricht von Anfangswert

$x(2\pi) = 0 \neq -1$ ↳ DGL Lösung

aber keine AWP-Lösung

② $\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int -\sin(t)\,dt$

$-x^{-1} = \cos(t) + c$

$\Rightarrow x(t) = -\frac{1}{\cos(t)+c}$ allgemeine Lösung

AW $x(2\pi) = -\frac{1}{1+c} = -1 \Rightarrow c = 0$

$\to x(t) = -\frac{1}{\cos(t)}$ AWP-Lösung

Maximale Definition bereichen:

ⓐ $M_1 = \mathbb{R}$ ⓑ $M_2 = \mathbb{R}\setminus\{k\pi + \frac{\pi}{2}\}$

ⓒ $M_1 \cap M_2 = \mathbb{R}\setminus\{k\pi + \frac{\pi}{2}\}$

ⓓ $]k\pi + \frac{\pi}{2}, (k+1)\pi + \frac{1}{2}\pi[$

ⓔ $k=1$ $]\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi[$

$\Rightarrow D_{max} =]\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi[$

b) (b) $x'(t) + \frac{1}{2}(1 - x^2(t))\ \sin(t) = 0$

$x'(t) = \underbrace{-\frac{1}{2}\sin(t)}_{f(t)}\underbrace{(1-x^2(t))}_{g(x)}$

① $g(x) = 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1(t) = 1$ $x_2(t) = -1$

$x(2\pi) = -1 \to x(t) = -1$

Maximale Def. Bereich

ⓐ $M_1 = \mathbb{R}$ ⓑ $M_2 = \mathbb{R}$ ⓒ $M_1 \cap M_2 = \mathbb{R}$

ⓓ x ⓔ $D_{max} = \mathbb{R}$

Existenz und Eindeutigkeit (EES)

Gegeben sei ein AWP der Form $x'(t) = F(t,x)$

$x(t_0) = x_0$

Fälle: ① $F(x,y): D \to \mathbb{R}$ hat stetige partielle Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial t} \neq \frac{\partial F}{\partial x}$ mit $\frac{\partial F}{\partial t}: D \to \mathbb{R}$, $\frac{\partial F}{\partial x}: D \to \mathbb{R}$

② $D = \mathbb{R}^2$ ist offen (Rand gelöst nicht nur Menge)

③ $(t_0, x_0) \in D$, dann hat das AWP einen einzige eindeutige beantwortende Lösung

Sonst macht der EES keine Aussagen

Aufgabe 5

Betrachte noch einmal die Anfangswertsprobleme

(a) $x'(t) - x(t)\sin(t) = e^{t-\cos(t)}, \qquad x(0) = 1;$

(b) $x'(t) + 2t\,x(t) = t^{-1}e^{-t^2}, \qquad x(e) = 0.$

Zeige, dass die berechneten Lösungen zu Aufgabe 2 eindeutig sind.

a) $x'(t) = \sin(t)\,x(t) + e^{t-\cos(t)} = F(t,x) = x\sin t + e^{t-\cos t}$

EES: ① $\frac{\partial F}{\partial x} = \sin t \quad \frac{\partial F}{\partial t} = x\cos t + e^{t-\cos t}\cdot(1+\sin t)$

$D = \underset{t}{\mathbb{R}} \times \underset{x}{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2 \qquad F: D \to \mathbb{R} \quad \frac{\partial F}{\partial t}: D \to \mathbb{R} \quad \frac{\partial F}{\partial x}: D \to \mathbb{R}$

② $D = \mathbb{R}^2$ ist offen

③ $(0,1) \in \mathbb{R}^2 = D$ $\quad (x(0) = 1)$

$\Rightarrow$ Das AWP hat nur einen Lsg.

b) $x'(t) = -2t\,x(t) + t^{-1}e^{-t^2} = -2tx + t^{-1}e^{-t^2} = F(t,x)$

EES: ① $\frac{\partial F}{\partial x} = -2t \quad \frac{\partial F}{\partial t} = -2x - t^{-2}e^{-t^2} + t^{-1}e^{-t^2}\cdot(-2t)$

$D = \underset{t}{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \times \underset{x}{\mathbb{R}} \qquad F: D \to \mathbb{R} \quad \frac{\partial F}{\partial x}: D \to \mathbb{R} \quad \frac{\partial F}{\partial t}: D \to \mathbb{R}$

② D ist offen

③ $(\underset{t}{e}, \underset{x}{0}) \in D$

$\Rightarrow$ AWP hat nur eine Lsg.

Aufgabe 6 (*Logistische Gleichung*)

Bei beschränkten Ressourcen kann eine Population nicht unbeschränkt wachsen. Dieser Sachverhalt kann durch die sogenannte *logistische Gleichung*

$$P'(t) = \underbrace{\frac{a}{b}}_{f(t)} \underbrace{P(t)\,(b - P(t))}_{g(P)}, \qquad P(0) = c,$$

mit konstantem $a, b, c > 0$ und $b > c$ modelliert werden. Die Funktion $P(t)$ gibt hierbei die Größe der Population zum Zeitpunkt t an. Ohne die Differentialgleichung explizit zu lösen, beantworte folgende Fragen:

(a) Zwischen welchen Werten wird sich die Populationsgröße $P(t)$ bewegen?

(b) Ist $P(t)$ monoton wachsend?

(c) Gegen welchen Wert wird $P(t)$ in ferner Zukunft laufen?

Löse anschließend das Anfangswertsproblem rechnerisch.

a) $\int \frac{1}{g(P)}\,dP = \int f(t)\,dt$

$\int \frac{1}{P(t)(b-P(t))}\,dP = \int \frac{a}{b}\,dt$

$\frac{1}{b}\int \frac{1}{P} - \frac{1}{P-b}\,dP = \frac{a}{b}t + k$

$\frac{1}{b}\left(\ln|P| - \ln|P-b|\right) = \frac{a}{b}t + k$

$\int \frac{A}{P} + \frac{B}{b-P}\,dP = \int \frac{a}{b}\,dt \qquad A = \frac{1}{b}, \quad B = \frac{1}{b}$

$\frac{1}{b}\int \frac{1}{P} + \frac{1}{b-P}\,dP = \frac{a}{b}t + k$

$\frac{1}{b} \ln\left|\frac{P}{P-b}\right| = \frac{a}{b}t + k$

$\frac{P}{P-b} = e^{at+kb}$

$P = e^{at+kb}(P-b)$

$P(1-e^{at+kb}) = -be^{at+kb}$

$P = \frac{-be^{at+kb}}{1-e^{at+kb}} = \frac{-b}{e^{-at-kb}-1} = \frac{b}{1-e^{-at-kb}}$

F A L S E

$\frac{1}{b} \cdot (\ln|P| + \ln|b-P|) = \frac{a}{b}t + k$

$\frac{1}{b} \cdot \ln|P(b-P)| = \frac{a}{b}t + k$

$\ln|P(b-P)| = at + kb$

$P(b-P) = e^{at+kb}$

$Pb - P^2 = e^{at+kb}$

① Zwischen welchen Werten befinden sich $P(t)$?

$P(t \to \infty) = b$

$P(t \to -\infty) = 0$ $\Rightarrow P(t) \in \,]0, b[$

② Mit größeren t, wächst $P(t)$

③ $P(t \to \infty) = b$