10.VL Ana 2

Definitheit und Taylorapproximation

Thema: Definitheit symmetrischer Matrizen, Kriterium für Definitheit (Eigenwertkriterium, Hauptminorenkriterium). Taylorapproximation

Aus Vorlesung 9 bekannt:

Für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ ist die zugehörige quadratische Form $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$q(\vec{x}) = \vec{x}^T\, A\, \vec{x}.$$

Definition (Definitheit)

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ heißt

(1) **positiv definit**, falls $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A\, \vec{x} > 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$;

(2) **negativ definit**, falls $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A\, \vec{x} < 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$;

(3) **indefinit**, falls es $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$q(\vec{x}) = \vec{x}^T A\, \vec{x} < 0 < \vec{y}^T A\, \vec{y} = q(\vec{y})$$

(4) **positiv semidefinit**, falls $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A\, \vec{x} \geq 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$;

(5) **negativ semidefinit**, falls $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A\, \vec{x} \leq 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Definitheit und Taylorapproximation

Folie 85

Beispiele

(1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow q(x,y) = 2x^2 + 3y^2 > 0$ für alle $(x,y) \neq (0,0)$

$\Rightarrow$ A ist positiv definit

(2) $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow q(x,y) = -3x^2 - y^2 < 0$ für alle $(x,y) \neq (0,0)$

$\Rightarrow$ A ist negativ definit

(3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow q(x,y) = x^2 + 4y^2 + 4xy = (x+2y)^2 \geq 0$

Es gilt: $q(2,-1) = (2 + 2\cdot(-1))^2 = 0$

$\Rightarrow$ A ist positiv semidefinit

(4) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow q(x,y) = y^2 + 2xy$

Es gilt: $q(0,1) = 1 > 0$

$q(-1,1) = -1 < 0$

$\Rightarrow$ A ist indefinit

(5) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow q(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy - 2xz$

$\Rightarrow$ A ist ? $\Leftarrow$ später!

Eigenwertkriterium für die Definitheit

1. Fall: Diagonalmatrix

$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind die Eigenwerte von A

$\Rightarrow q(\vec{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$

Dann gilt:

$q(\vec{x}) > 0$ für alle $\vec{x} \neq \vec{0} \iff \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$

$q(\vec{x}) < 0$ für alle $\vec{x} \neq \vec{0} \iff \lambda_1, \dots, \lambda_n < 0$

2. Fall: Allgemeine symmetrische Matrix

Eigenschaften symmetr. Matrizen:

(i) Symmetr. Matrizen haben nur reelle Eigenwerte

(ii) Symmetr. Matrizen sind immer diagonalisierbar.

(iii) Symmetr. Matrizen haben eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren

Also gibt es eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{n,n}$ (d.h. $S^{-1} = S^T$) und eine Diagonalmatrix

$$D = S^{-1} A S = S^T A S,$$

so dass

$$A = S D S^{-1} = S D S^T$$

$\Rightarrow q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} = \underbrace{\vec{x}^T S}_{=\vec{y}^T} D \underbrace{S^T \vec{x}}_{=:\vec{y}}$ $\Rightarrow \vec{y}^T = (S^T\vec{x})^T = \vec{x}^T S$

$= \vec{y}^T D \vec{y}$

Diagonalmatrix $\rightarrow$ Wende 1. Fall an mit den Eigenwerten von A auf der Hauptdiagonalen

Eigenwertkriterium für Definitheit

Sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ symmetrisch. Dann gilt:

(1) A ist positiv definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind.

(2) A ist negativ definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A negativ sind.

(3) A ist indefinit genau dann, wenn A sowohl positive als auch negative Eigenwerte besitzt.

(4) A ist positiv semidefinit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A positiv oder Null sind.

(5) A ist negativ semidefinit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A negativ oder Null sind.

Folie 86

Beispiel von oben

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Eigenwerte bestimmen

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{Entw. 3. Spalte}}{=} (-1) \underbrace{\det \begin{bmatrix} 1 & 1-\lambda \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{=1-\lambda} + (3-\lambda) \underbrace{\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}}_{(2-\lambda)\cdot(1-\lambda)-1}$$

$$= (-1)(1-\lambda) + (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - (3-\lambda)$$

$$= (3-\lambda)\cdot(2-\lambda)(1-\lambda) - \underbrace{(3+1-\lambda-\lambda)}_{\substack{=4-2\lambda \\ =2(2-\lambda)}}$$

$$= (2-\lambda)\underbrace{\left[(3-\lambda)\cdot(1-\lambda) - 2\right]}_{\substack{= 3-3\lambda-\lambda+\lambda^2-2 \\ = \lambda^2-4\lambda+1 \overset{!}{=} 0}} \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2 > 0$

$\Rightarrow \lambda_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}$

$\Rightarrow \lambda_2 = 2 + \sqrt{3} > 0$ und $\lambda_3 = 2 - \underbrace{\sqrt{3}}_{\approx 1.732} > 0$

$\Rightarrow A$ ist positiv definit

Hauptminorenkriterium für Definitheit

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \end{matrix}$$

Setze $A_k = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,k} \;\hat{=}$ linke obere $k\times k$-Teilmatrix

$\det(A_k)$ heißt k-ter Hauptminor von A

Es gilt:

(1) A ist positiv definit $\Leftrightarrow \det(A_k) > 0$ für $k = 1,\dots,n$

(2) A ist negativ definit

$\Leftrightarrow -A$ ist positiv definit

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} (-1)^k \det(A_k) > 0$ für $k = 1,\dots,n$

det linear in jeder Spalte

$\Leftrightarrow \det(A_1) < 0,\ \det(A_2) > 0$, usw....

(3) A ist indefinit, falls $\det(A) \neq 0$ und (1), (2) sind nicht erfüllt

Hauptminorenkriterium für Definitheit

Sei $A = [a_{i,j}]_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{K}^{n,n}$ symmetrisch und sei

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \dots & a_{k,k} \end{bmatrix} \quad \text{für } k = 1,\dots,n.$$

Dann gilt:

(1) A ist positiv definit genau dann, wenn $\det(A_k) > 0$ für alle $k = 1,\dots,n$.

(2) A ist negativ definit genau dann, wenn $(-1)^k \det(A_k) > 0$ für alle $k = 1,\dots,n$.

(3) A ist indefinit, falls $\det(A) \neq 0$ und (1), (2) sind nicht erfüllt (nur Implikation, es gibt auch indefinite Matrizen mit $\det(A) = 0$).

Spezialfall für $n = 2$

Sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ und sei $\det(A) = \lambda_1\lambda_2$ mit den Eigenwerten λ_1, λ_2 von A. Dann gilt:

(1) Falls $\det(A) > 0$ und $a > 0$, so ist A positiv definit.

(2) Falls $\det(A) > 0$ und $a < 0$, so ist A negativ definit.

(3) Falls $\det(A) < 0$, so ist A indefinit.

(4) Falls $\det(A) = 0$ und $a > 0$, so ist A positiv semidefinit.

(5) Falls $\det(A) = 0$ und $a < 0$, so ist A negativ semidefinit.

Bemerkung

Für jede quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ gilt

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von A (Vielfachheiten mitzählen!).

Folie 87

Beispiele

Bsp. von oben

(1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad A_1,\ A_2,\ A_3 = A$

$\det(A_1) = 2 > 0$

$\det(A_2) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2 - 1 = 1 > 0$

$\det(A_3) = \det(A) \overset{\text{Entw. v. 3 Zeile}}{=} (-1) \underbrace{\det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=1} + 3 \underbrace{\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{=1}$

$= -1 + 3 = 2 > 0$

$\Rightarrow A$ ist positiv definit

(2) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad \det(A_1) = 0$

$\det(A_3) = \det(A) \overset{\text{Entw. 3. Zeile}}{=} (-2) \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$= 2 \neq 0$

$\Rightarrow A$ ist indefinit

(3) $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\det B_1 = 2$, $\det B_2 = 0$, $\det B_3 = 0$

EW: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -3$

$\Rightarrow$ B ist indefinit

$\det C_1 = 2$, $\det C_2 = 0$, $\det C_3 = 0$

EW: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$

$\Rightarrow$ C ist positiv semidefinit

Taylorapproximation

Ana 1:

Sei $h: I \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diffbar, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $t_0 \in I$ der Entwicklungspunkt

$$\Rightarrow h(t) \overset{\text{Taylor Ana 1}}{=} h(t_0) + h'(t_0)\cdot(t-t_0) + \frac{h''(t_0)}{2}\cdot(t-t_0)^2 + R_2(t)$$

$$\text{mit } \lim_{t \to t_0} \frac{R_2(t)}{(t-t_0)^2} = 0$$

Setze $t = 1$ und $t_0 = 0$: $(\Rightarrow t - t_0 = 1)$

$$h(1) = h(0) + h'(0) + \tfrac{1}{2} h''(0) + R_2(1) \qquad (*)$$

↳ Taylor 2. Ordnung mit allgemeinem Restglied

und

$$h(1) = h(0) + h'(0) + \tfrac{1}{2} h''(\xi) \quad \text{für ein } \xi \in \,]0,1[\qquad (**)$$

↳ Taylor 1. Ordnung mit Lagrange-Restglied

Jetzt: Taylorapproximation für $f: D \to \mathbb{R}$ „diffbar" mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen

Seien $\vec{x}, \vec{x}_0 \in D$. Betrachte die Funktion $h: [0,1] \to \mathbb{R}$

$$h(t) := f(\vec{x}_0 + t\,\vec{\Delta x}) \quad \text{mit } \vec{\Delta x} = \vec{x} - \vec{x}_0,\ t \in [0,1]$$

Vor: Verbindungsstrecke zw. $\vec{x}$ und $\vec{x}_0$ gehört zu D

Dann gilt: $h(0) = f(\vec{x}_0)$, $h(1) = f(\vec{x})$

$$\Rightarrow h'(t) \overset{\text{Kettenregel Ana 2}}{=} f'(\vec{x}_0 + t\,\vec{\Delta x})\cdot \vec{\Delta x}$$
$$= \langle \operatorname{grad}_{\vec{x}_0 + t\vec{\Delta x}} f, \vec{\Delta x} \rangle$$
$$= \langle \vec{\Delta x}, \operatorname{grad}_{\vec{x}_0 + t\vec{\Delta x}} f \rangle$$

$$\Rightarrow h''(t) \underset{\substack{\text{Kettenregel} \\ \text{Skalarprodukt}}}{=} \underbrace{\langle 0, \operatorname{grad}_{\vec{x}_0 + t\vec{\Delta x}} f \rangle}_{=0}$$
$$+ \langle \vec{\Delta x}, H_f(\vec{x}_0 + t\vec{\Delta x})\cdot \vec{\Delta x} \rangle \qquad \text{da } (\operatorname{grad}_{\vec{y}} f)' = H_f(\vec{y})$$
$$= \underbrace{\vec{\Delta x}^T \cdot H_f(\vec{x}_0 + t\vec{\Delta x})\cdot \vec{\Delta x}}_{= \operatorname{hess}_f(\vec{x}_0 + t\vec{\Delta x})}$$

Damit gilt:

$$h'(0) = \langle \operatorname{grad}_{\vec{x}_0} f, \vec{\Delta x} \rangle$$
$$h''(0) = \vec{\Delta x}^T \cdot H_f(\vec{x}_0)\cdot \vec{\Delta x} = \operatorname{hess}_f(\vec{x}_0)$$

Dann folgt aus $(*)$

$$h(1) = h(0) + h'(0) + \tfrac{1}{2} h''(0) + R_2(1)$$
$$\| \qquad \| \qquad \|$$
$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \langle \operatorname{grad}_{\vec{x}_0} f, \vec{\Delta x} \rangle + \tfrac{1}{2} \vec{\Delta x}^T H_f(\vec{x}_0) \vec{\Delta x} + R_2(\vec{x}) \quad \text{mit } \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \frac{R_2(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2} = 0$$

↳ 2. Ordnung mit Restglied

und aus $(**)$

$$h(1) = h(0) + h'(0) + \tfrac{1}{2} h''(\xi)$$
$$\| \qquad \| \qquad \|$$
$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \langle \operatorname{grad}_{\vec{x}_0} f, \vec{\Delta x} \rangle + \tfrac{1}{2} \vec{\Delta x}^T H_f(\vec{x}_0 + \xi \vec{\Delta x}) \vec{\Delta x} \quad \text{mit } \xi \in \,]0,1[$$

↳ 1. Ordnung mit Lagrange-Restglied

Wiederholung

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen) zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\operatorname{grad} f: D \to \mathbb{R}^n, \quad \vec{x} \mapsto \operatorname{grad}_{\vec{x}} f$$

und grad f hat als Ableitung eine $n \times n$-Matrix gegeben durch

$$(\operatorname{grad}_{\vec{x}} f)' = H_f(\vec{x}) \quad (H_f(\vec{x})\text{-Hessematrix von } f \text{ in } \vec{x})$$

Für $\vec{x}_0 \in D$ ist $H_f(\vec{x}_0)$ nach dem Satz von Schwarz symmetrisch (d.h. $H_f(\vec{x}_0)^T = H_f(\vec{x}_0)$) und die zugehörige quadratische Form

$$q(\vec{x}) = \vec{x}^T\ H_f(\vec{x}_0)\ \vec{x} =: \operatorname{hess}_f(\vec{x})$$

ist die **Hesseform** von f in $\vec{x}_0$.

Taylorformel

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $\vec{x}, \vec{x}_0 \in D$, so dass deren Verbingungsstrecke in D liegt (z.B. wenn D konvex ist). Dann gilt mit $\vec{\Delta x} := \vec{x} - \vec{x}_0$:

(1) $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \langle \operatorname{grad}_{\vec{x}_0} f, \vec{\Delta x} \rangle + \frac{1}{2} \vec{\Delta x}^T H_f(\vec{x}_0) \vec{\Delta x} + R_2(\vec{x})$

mit $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \dfrac{R_2(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2} = 0$

(2) $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \langle \operatorname{grad}_{\vec{x}_0} f, \vec{\Delta x} \rangle + \frac{1}{2} \vec{\Delta x}^T H_f(\vec{x}_0 + \xi \vec{\Delta x}) \vec{\Delta x}$

mit $\xi \in]0,1[$.

Taylorpolynome (ohne Restglied):

1. Ordnung: $T_1(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \langle \operatorname{grad}_{\vec{x}_0} f, \vec{\Delta x} \rangle$

2. Ordnung: $T_2(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \langle \operatorname{grad}_{\vec{x}_0} f, \vec{\Delta x} \rangle + \frac{1}{2} \vec{\Delta x}^T H_f(\vec{x}_0) \vec{\Delta x}$

11.VL Ana 2

Lokale Extremstellen

Thema: Lokale Maxima/Minima, notwendigen und hinreichenden Kriterium für lokale Extremstellen, Vergleich Ana 1 und Ana 2

Nachtrag VL 10 (Taylor)

Beispiel

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto e^{xy}$

$\Rightarrow \operatorname{grad}_{\vec{x}} f = \begin{bmatrix} y e^{xy} \\ x e^{xy} \end{bmatrix}$

und

$H_f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} y^2 e^{xy} & e^{xy} + xye^{xy} \\ e^{xy} + xye^{xy} & x^2 e^{xy} \end{bmatrix}$

ges: $T_2(\vec{x})$ in $\vec{x}_0 = (x_0, y_0) = (1,0)$

Es gilt:

$f(1,0) = 1,\ \operatorname{grad}_{\vec{x}_0} f = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$

$H_f(\vec{x}_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$

$T_2(x,y) = f(x_0,y_0) + \left\langle \operatorname{grad}_{\vec{x}_0} f, \begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2} [x-x_0 \ \ y-y_0] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix}$

$= 1 + \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x-1 \\ y-0 \end{bmatrix} \right\rangle + \underbrace{\frac{1}{2} [x-1 \ \ y-0] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-1 \\ y-0 \end{bmatrix}}$

$= [x-1 \ \ y] \begin{bmatrix} y \\ x-1+y \end{bmatrix}$

$= (x-1) \cdot y + (x-1) y + y^2$

$= 2(x-1)y + y^2$

$= 1 + y + \frac{1}{2}(2(x-1)y + y^2)$

$= 1 + \cancel{y} + (x \cancel{-1}) y + \frac{1}{2} y^2$

$= 1 + xy + \frac{1}{2} y^2$

Ergebnis:

$e^{xy} \approx 1 + xy + \frac{1}{2} y^2$ in der Nähe von $(1,0)$

Definition (lokales Maximum/lokales Minimum)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \to \mathbb{R}$ und $\vec{x}_0 \in D$.

(1) f hat in $\vec{x}_0$ ein **lokales Maximum**, falls es eine Kugel $K_\varepsilon(\vec{x}_0) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \varepsilon\}$ um $\vec{x}_0$ für ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

$$f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}) \quad \text{für alle } \vec{x} \in K_\varepsilon(\vec{x}_0) \cap D.$$

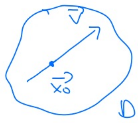
(2) f hat in $\vec{x}_0$ ein **lokales Minimum**, falls es eine Kugel $K_\varepsilon(\vec{x}_0) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \varepsilon\}$ um $\vec{x}_0$ für ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

$$f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x}) \quad \text{für alle } \vec{x} \in K_\varepsilon(\vec{x}_0) \cap D.$$

Lokale Extremstellen

Folie 92

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen) diffbar und $\vec{x}_0 \in D$.



Betrachte $h(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{v})$ mit t klein, sodass $\vec{x}_0 + t\vec{v} \in D$

Falls f in $\vec{x}_0$ ein lok. Extremum hat, dann besitzt h in $t=0$ ein lok. Extremum

$\Rightarrow h'(0) = 0$

Es gilt: $h'(t) = \langle \operatorname{grad}_{\vec{x}_0 + t\vec{v}} f, \vec{v} \rangle$

$\Rightarrow h'(0) = \langle \operatorname{grad}_{\vec{x}_0} f, \vec{v} \rangle = 0$ für alle Richtungen $\vec{v}$

$\Rightarrow \operatorname{grad}_{\vec{x}_0} f = \vec{0}$ → Folie 93

Notwendiges Kriterium für eine lokale Extremstelle

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $\vec{x}_0 \in D$. Wenn f in $\vec{x}_0$ ein lokales Extremum besitzt, dann gilt $\operatorname{grad}_{\vec{x}_0} f = \vec{0}$.

Punkte $\vec{x}_0 \in D$ mit $\operatorname{grad}_{\vec{x}_0} f = \vec{0}$ nennt man **krititsche Punkte**.

Folie 93

Sei nun $\vec{x}_0 \in D$ ein kritischer Punkt von f.

Taylorpolynom 2. Ordnung:

$T_2(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \underbrace{\langle \underbrace{\operatorname{grad}_{\vec{x}_0}}_{=\vec{0}} f, \Delta\vec{x} \rangle}_{=0}$ (mit $\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_0$)

$+ \frac{1}{2} \Delta\vec{x}^T H_f(\vec{x}_0) \Delta\vec{x}$

$= f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2} \Delta\vec{x}^T H_f(\vec{x}_0) \Delta\vec{x}$

Ebenso gilt:

$f(\vec{x}) = T_2(\vec{x}) + R_2(\vec{x})$

$\approx T_2(\vec{x})$ für $\|\Delta\vec{x}\|$ klein

$\Rightarrow$

$f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}_0) + \underbrace{\frac{1}{2} \Delta\vec{x}^T H_f(\vec{x}_0) \Delta\vec{x}}_{\text{Bestimme das Vorzeichen}}$

Falls $H_f(\vec{x}_0)$ positiv definit

$\Rightarrow f$ hat ein lok. Minimum in $\vec{x}_0$

Falls $H_f(\vec{x}_0)$ negativ definit

$\Rightarrow f$ hat ein lok. Maximum in $\vec{x}_0$

Falls $H_f(\vec{x}_0)$ indefinit:

$\Rightarrow f$ hat kein lok. Extremum in $\vec{x}_0$, sondern einen Sattelpunkt

→ Folie 94

Hinreichendes Kriterium für eine lokale Extremstelle

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $\vec{x}_0 \in D$ mit $\operatorname{grad}_{\vec{x}_0} f = \vec{0}$. Dann gilt:

(1) Ist $H_f(\vec{x}_0)$ positiv definit, so hat f in $\vec{x}_0$ ein lokales Minimum.

(2) Ist $H_f(\vec{x}_0)$ negativ definit, so hat f in $\vec{x}_0$ ein lokales Maximum.

(3) Ist $H_f(\vec{x}_0)$ indefinit, so hat f in $\vec{x}_0$ kein lokales Extremum, sondern einen Sattelpunkt.

Bemerkung

Das obige Kriterium liefert keine Aussage, wenn $H_f(\vec{x}_0)$ semidefinit, aber nicht definit ist.

Beispiele

(1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 + y^2$

$\Rightarrow \operatorname{grad}_{\vec{x}} f = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} \overset{!}{=} \vec{0}$

$\Rightarrow (x,y) = (0,0)$ ist der einzige kritische Punkt

$$\Rightarrow H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

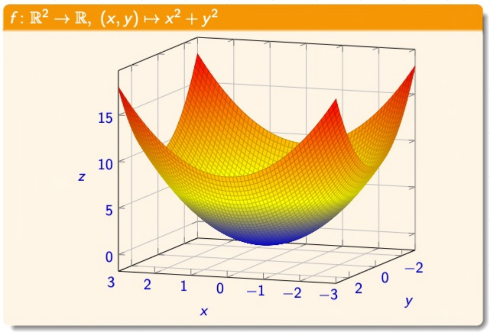
$$\Rightarrow H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow H_f(0,0)$ ist positiv definit da alle Eigenwerte positiv sind (EW: $\lambda_{1,2} = 2$ (doppelt))

f hat ein lok. Minimum in $\vec{x}_0 = (0,0)$

Da $f(x,y) \geq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ f hat sogar das globale Minimum in $(0,0)$ → Folie 95



(2) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^2$

$$\Rightarrow \operatorname{grad}_{\vec{x}} f = \begin{bmatrix} 2x \\ -2y \end{bmatrix} \overset{!}{=} \vec{0}$$

$\Rightarrow (x,y) = (0,0)$ ist d. einzige kritische Punkt

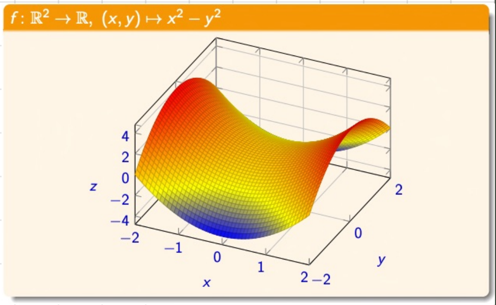
$$\Rightarrow H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

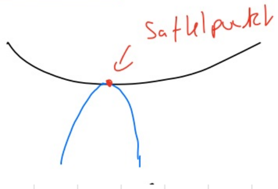
$\Rightarrow H_f(0,0)$ ist indefinit, da sowohl positive als auch negative Eigenwerte (2 und -2)

$\Rightarrow$ f hat in $(0,0)$ einen Sattelpunkt

Folie 96



Folie 96



(3) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = x^2y + xy^2 + 2x^2 - 4x + (z-1)^2$$

$$\operatorname{grad}_{(x,y,z)} f = \begin{bmatrix} 2xy + y^2 + 4x - 4 \\ x^2 + 2xy \\ 2(z-1) \end{bmatrix} \overset{!}{=} \vec{0}$$

I: $2xy + y^2 + 4x - 4 = 0$

II: $x^2 + 2xy = 0$

III: $2(z-1) = 0 \Rightarrow z = 1$

II: $x^2 + 2xy = 0 \Leftrightarrow x(x+2y) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ oder $x + 2y = 0$

(i) Setze $x = 0$ in I ein:

$y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 2$

$\Rightarrow P_1 = (0,2,1)$ und $P_2 = (0,-2,1)$

(ii) Setze $x = -2y$ in I ein:

$-4y^2 + y^2 - 8y - 4 = 0$

$\Leftrightarrow -3y^2 - 8y - 4 = 0$

$\Leftrightarrow y^2 + \frac{8}{3}y + \frac{4}{3} = 0$

$\Leftrightarrow y = -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{16}{9} - \frac{12}{9}}_{=\frac{4}{9}}}$

$= -\frac{4}{3} \pm \frac{2}{3}$

$y = -\frac{2}{3} \Rightarrow x = -2y = \frac{4}{3}$

oder

$y = -\frac{6}{3} = -2 \Rightarrow x = -2y = 4$

$\Rightarrow P_3 = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right)$ und

$P_4 = (4, -2, 1)$

Hesse-Matrix:

$$H_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2y+4 & 2x+2y & 0 \\ 2x+2y & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$H_f(0,2,1) = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det(8) = 8 > 0$

$\det\left(\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\right) = -16 < 0$

$\det \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-16) = -32 \neq 0$

$\Rightarrow H_f(0,2,1)$ ist indefinit

$\Rightarrow$ kein Extremum in $(0,2,1)$

$$H_f(0,-2,1) = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det(0) = 0$ und

$\det \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-16) = -32 \neq 0$

$\Rightarrow H_f(0,-2,1)$ ist indefinit

$\Rightarrow$ kein Extremum in $(0,-2,1)$

$$H_f\left(\tfrac{4}{3}, -\tfrac{2}{3}, 1\right) = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & 4/3 & 0 \\ 4/3 & 8/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \det\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3} > 0$

$\Rightarrow \det \begin{bmatrix} 8/3 & 4/3 \\ 4/3 & 8/3 \end{bmatrix} = \left(\frac{8}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 > 0$

$\Rightarrow \det \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & 4/3 & 0 \\ 4/3 & 8/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$= 2 \cdot \left(\left(\frac{8}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2\right) > 0$

$\Rightarrow H_f\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right)$ ist positiv definit

$\Rightarrow$ f hat in $\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right)$ ein lok. Minimum

$\Rightarrow$

$$H_f(4,-2,1) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \det(0) = 0$

$\Rightarrow \det \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-16) = -32 \neq 0$

$\Rightarrow H_f(4,-2,1)$ ist indefinit

$\Rightarrow$ kein Extremum in $(4,-2,1)$

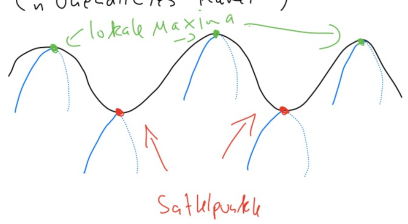
Bemerkung:

Ana I: „zwischen zwei Maximal liegt immer ein Minimum"

Dies gilt im Mehrdimensionalen nicht mehr!

Bsp: $f(x,y) = \cos(x) - y^2$

(„unendliches Kamel")



Vergleich zwischen Analysis I und Analysis II

Kriterien	Analysis I	Analysis II
Notwendiges Kriterium	$f'(x_0) = 0$	$\mathrm{grad}_{\vec{x}_0} f = \vec{0}$
Hinreichendes Kriterium (dazu $f'(x_0) = 0$ bzw. $\mathrm{grad}_{\vec{x}_0} f = \vec{0}$)	$f''(x_0) > 0$ $\Rightarrow$ lok. Minimum	$H_f(\vec{x}_0)$ positiv definit $\Rightarrow$ lok. Minimum
	$f''(x_0) < 0$ $\Rightarrow$ lok. Maximum	$H_f(\vec{x}_0)$ negativ definit $\Rightarrow$ lok. Maximum
	$f''(x_0) = 0$ $\Rightarrow$?	$H_f(\vec{x}_0)$ semidefinit $\Rightarrow$?
	Gibt es nicht!	$H_f(\vec{x}_0)$ indefinit $\Rightarrow$ Sattelpunkt

Hinreichendes Kriterium für eine lokale Extremstelle für $n = 2$

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $\vec{x}_0 \in D$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt:

(1) Ist $\det(H_f(\vec{x}_0)) > 0$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) > 0$, so hat f in $\vec{x}_0$ ein lokales Minimum.

(2) Ist $\det(H_f(\vec{x}_0)) > 0$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) < 0$, so hat f in $\vec{x}_0$ ein lokales Maximum.

(3) Ist $\det(H_f(\vec{x}_0)) < 0$, so hat f in $\vec{x}_0$ kein lokales Extremum, sondern einen Sattelpunkt.

Falls $\det(H_f(\vec{x}_0)) = 0$, so liefert das Kriterium keine Aussage.

12. VL Ana 2

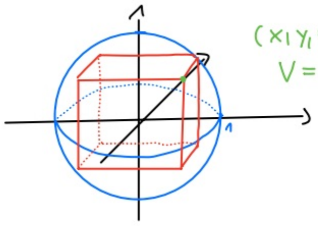
Extrema unter Nebenbedingungen

Themen: Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen, Lagrange-Verfahren, Lagrange-Multiplikator

Extrema unter Nebenbedingungen

Beispiel

Finde einen achsenparallelen Quader mit Mittelpunkt $\vec{0}$ innerhalb der Einheitskugel mit maximalem Volumen V



(x,y,z)

$V = 2x \cdot 2y \cdot 2z = 8xyz$ (Volumen des Quaders)

Idee: Maximiere $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto xyz$

auf $D = \underbrace{\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}}_{\text{Einheitskugel}}$

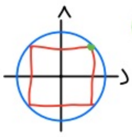
Dann wird auch $V = 8xyz$ maximal.

Wissen: Da f stetig und D kompakt

$\Rightarrow f$ hat auf D ein Maximum und ein Minimum

Fall $n=2$: Maximiere $\tilde{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto xy$

auf $\tilde{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$



(x,y)

$F = 2x \cdot 2y = 4xy$

$\Rightarrow$ Dann wird auch d. Flächeninhalt $F = 4xy$ maximal

Betrachte kritische Punkte von f:

$$\operatorname{grad}_{\vec{x}} f = \begin{bmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{bmatrix} \overset{!}{=} \vec{0}$$

Dann gilt:

(x,y,z) ist ein kritischer Punkt von f $\Leftrightarrow$ Mindestens zwei der drei Koordinaten sind Null

$\Rightarrow f(x,y,z) = 0$ für alle kritischen Punkte

Allerdings gibt es $\vec{x} \in D$ mit $f(\vec{x}) > 0$ (auch $f(\vec{x}) < 0$)

Somit liegen die Punkte, die zu einem Max. oder Min. gehören, nicht in der Menge d. kritischen Punkte

Wie kann das sein?

Das Kriterium für lokale Extremstellen gilt nur für offene Mengen, z.B. für die Menge $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 < 1\}$ — Das Innere von D

Problem: Das Maximum von f auf D liegt auf dem Rand von D!

Betrachte Randpunkte von D:

Hier gilt: $\|\vec{x}\|^2 = x^2+y^2+z^2 = 1$, d.h.

für $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2-1$

gilt $g(x,y,z) = 0$ für alle $(x,y,z) \in \partial D$

Fazit: Finde Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(\vec{x}) = 0$

Definition (Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f, g: D \to \mathbb{R}$ differenzierbar.
Dann heißt

$$\begin{cases} f(\vec{x}) \to \text{extremal}, \\ g(\vec{x}) = 0, \end{cases}$$

Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen.

Der Ausdruck „$f(\vec{x}) \to$ extremal" steht für $\min f(\vec{x})$ oder $\max f(\vec{x})$.

Wie löst man eine Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen?

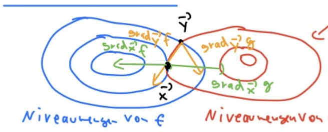
1. Möglichkeit

Löse $g(\vec{x}) = 0$ nach einer Variablen auf und setze diese in f ein

Aber: Oftmals kann man $g(\vec{x}) = 0$ nicht explizit nach einer Variablen auflösen

2. Möglichkeit Untersuche die Niveaumengen von f und g

$N_0(g) = \{\vec{x} \in D \mid g(\vec{x}) = 0\}$



Fazit

Ist $\vec{x}$ Stelle eines lokalen Extremums auf $N_0(g)$, so müssen $\operatorname{grad}_{\vec{x}} f$ und $\operatorname{grad}_{\vec{x}} g$ parallel sein, denn andernfalls gibt es in eine Richtung einen Anstieg und in die entgegengesetzte einen Abfall.

Dann gilt: Es gibt $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$\operatorname{grad}_{\vec{x}} f = \lambda \cdot \operatorname{grad}_{\vec{x}} g$, falls $\operatorname{grad}_{\vec{x}} g \neq \vec{0}$

Lagrange-Verfahren für Extrema mit Nebenbedingungen

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f, g: D \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Gesucht sind die Lösungen der Extremwertaufgabe

$$\begin{cases} f(\vec{x}) \to \text{extremal}, \\ g(\vec{x}) = 0. \end{cases}$$

Die einzig möglichen Kandidaten sind dann die Lösungen $\vec{x} \in D$ der folgenden Gleichungssysteme:

(1) **Regulärer Fall:**

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_{\vec{x}} f &= \lambda \operatorname{grad}_{\vec{x}} g \\ g(\vec{x}) &= 0 \end{aligned}$$

λ nennt man den **Lagrange-Multiplikator**.

(2) **Singulärer Fall:**

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_{\vec{x}} g &= \vec{0} \\ g(\vec{x}) &= 0. \end{aligned}$$

Vorgehen beim Lagrange-Verfahren

① Überprüfe, ob $\operatorname{grad}_{\vec{x}} g \neq \vec{0}$ für alle $g(\vec{x})=0$

↳ regulärer Fall

Punkte $\vec{x}$ mit $g(\vec{x})=0$ und $\operatorname{grad}_{\vec{x}} g = \vec{0}$ müssen separat betrachtet werden

↳ singulärer Fall

② Bestimme Lösungen des Gleichungssystems

$$\operatorname{grad}_{\vec{x}} f = \lambda \operatorname{grad}_{\vec{x}} g \quad \to n \text{ Gleichungen}$$
$$g(\vec{x}) = 0 \quad \to 1 \text{ Gleichung}$$

Also $n+1$ Gleichungen für $n+1$ Variablen $x_1, \dots, x_n, \lambda$

Dies liefert $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ($\hat{=}$ kritische Punkte) und λ (benötigt man nicht)

③ Überprüfe, ob in $\vec{x}$ ein Max. oder Min. ist

1. Fall: $\{\vec{x} \in D \mid g(\vec{x}) = 0\}$ ist kompakt

$\Rightarrow$ f nimmt Max. und Min. an

$\Rightarrow$ Max./Min. müssen unter den kritischen und singulären Punkten sein (Funktionswerte vergleichen)

2. Fall: $\{\vec{x} \in D \mid g(\vec{x}) = 0\}$ ist nicht kompakt

$\longrightarrow$ gibt kein allgemeines Verfahren

Vorgehen beim Lagrange-Verfahren

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Gesucht sind die Lösungen der Extremwertaufgabe

$$f(\vec{x}) \to \text{extremal}, \qquad g(\vec{x}) = 0.$$

1. Schritt: Überprüfe ob $\operatorname{grad}_{\vec{x}} g \neq \vec{0}$ für alle $\vec{x} \in D$ mit $g(\vec{x}) = 0$ (regulärer Fall), Punkte $\vec{x} \in D$ mit $g(\vec{x}) = 0$ und $\operatorname{grad}_{\vec{x}} g = \vec{0}$ müssen separat untersucht werden (singulärer Fall)

2. Schritt: Löse das Gleichungssystem

$$\operatorname{grad}_{\vec{x}} f = \lambda \operatorname{grad}_{\vec{x}} g, \quad g(\vec{x}) = 0$$

$\to n+1$ Gleichungen für $n+1$ Variablen $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n), \lambda$

Liefert kritische Punkte $x = (x_1, \dots, x_n)$, λ nicht wichtig

3. Schritt:

- $\{\vec{x} \in D \mid g(\vec{x}) = 0\}$ kompakt: Vergleiche Funktionswerte der kritischen/singulären Punkte $\to$ Bestimme Max. und Min
- $\{\vec{x} \in D \mid g(\vec{x}) = 0\}$ nicht kompakt: Kein allgemeines Verfahren

Beispiel vom Anfang

$f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y,z) = xyz$$
$$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$$

Gesucht: Bestimme das Max. von f unter der Nebenbedingung $g(\vec{x}) = 0$

$$\operatorname{grad}_{(x,y,z)} f = \begin{bmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{bmatrix}, \quad \operatorname{grad}_{(x,y,z)} g = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}$$

① Es gilt

$$\operatorname{grad}_{(x,y,z)} g = \vec{0} \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$$

$\Rightarrow g(0,0,0) = -1$, also gibt es keine singulären Punkte

② Löse

$$\operatorname{grad}_{(x,y,z)} f = \lambda \operatorname{grad}_{(x,y,z)} g \quad \text{und} \quad g(x,y,z) = 0$$

I: $yz = 2\lambda x$
II: $xz = 2\lambda y$
III: $xy = 2\lambda z$
IV: $x^2+y^2+z^2 = 1$

1. Fall: $xyz \neq 0$

$\Rightarrow \lambda \neq 0$ andernfalls wäre $xyz = 0$

I: $x = \frac{yz}{2\lambda}$ $\overset{\text{Einsetzen}}{\Rightarrow}$ in II $\frac{\cancel{y} z^2}{2\lambda} = 2\lambda \cancel{y} \Rightarrow z^2 = 4\lambda^2$

Einsetzen in III: $\frac{y^2 \cancel{z}}{2\lambda} = 2\lambda \cancel{z} \Rightarrow y^2 = 4\lambda^2$

Auch gilt:

$$x^2 = \left(\frac{yz}{2\lambda}\right)^2 = \frac{y^2 z^2}{4\lambda^2} = \frac{4\lambda^2 \cdot \cancel{4\lambda^2}}{\cancel{4\lambda^2}} = 4\lambda^2$$

Setze nun Darstellungen von x^2, y^2 und z^2 in IV ein:

$$4\lambda^2 + 4\lambda^2 + 4\lambda^2 = 1 \Rightarrow 4\lambda^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x^2 = y^2 = z^2 = 4\lambda^2 = \frac{1}{3}$$

Damit erhalten wir 8 kritische Punkte

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

2. Fall $xyz = 0$

Dort kann kein Maximum liegen, da es Punkte $\vec{x} \in D$ mit $f(\vec{x}) > 0$ gibt.

③ Die Menge

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid g(\vec{x}) = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

ist kompakt.

Man erhält:

4 Punkte mit Maxima $f(x,y,z) = \frac{1}{(\sqrt{3})^3} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

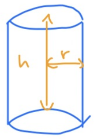
↳ alle positiven Vorzeichen oder genau 2 mit negativen Vorzeichen

4 Punkte mit Minima $f(x,y,z) = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$

↳ alle negativen Vorzeichen oder nur eine Komponente mit neg. Vorzeichen

Beispiele

Optimale zylinderförmige Konservendose



Radius r
Höhe h

Minimiere die Oberfläche M der Konservendose bei festem Volumen $V > 0$

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

$$M = \underbrace{2\pi r h}_{\text{Mantel}} + \underbrace{\pi r^2}_{\text{Boden}} + \underbrace{\pi r^2}_{\text{Deckel}} = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

Mathematisch:

Minimiere $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(r,h) \mapsto 2\pi r h + 2\pi r^2$

unter der Nebenbedingung

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (r,h) \mapsto \pi r^2 h - V = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad}_{\vec{x}} f = \begin{bmatrix} 2\pi h + 4\pi r \\ 2\pi r \end{bmatrix}, \quad \operatorname{grad}_{\vec{x}} g = \begin{bmatrix} 2\pi r h \\ \pi r^2 \end{bmatrix}$$

1 $\operatorname{grad}_{\vec{x}}\, g = \vec{0} \Rightarrow r^2 = 0$, also $g(r,h) = \underbrace{\pi r^2 \cdot h}_{=0} - V = -V \neq 0$

$\Rightarrow$ es gibt kein singl. Punkt

2 $\operatorname{grad}_{\vec{x}}\, f = \lambda \operatorname{grad}_{\vec{x}}\, g$
$g(\vec{x}) = 0$

$$\begin{aligned} \text{I}: &\ 2\pi h + 4\pi r = 2\lambda\pi r h \\ \text{II}: &\ 2\pi r = \lambda\pi r^2 \\ \text{III}: &\ \pi r^2 h - V = 0 \end{aligned}$$

3 1. Fall: $\lambda = 0$

$\overset{\text{II}}{\Rightarrow} r = 0 \overset{\text{III}}{\Rightarrow} g(r,h) = -V \neq 0$ ↯ Widerspruch

2. Fall: $\lambda \neq 0$

$\Rightarrow r \neq 0$ (aus III)

$$\text{II}: \frac{2}{\lambda} = \frac{\pi r^2}{\pi r} = r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{2}{\lambda}$$

in I einsetzen $\Rightarrow$ $2\pi h + 4 \cdot \pi \cdot \frac{2}{\lambda} = 2\cancel{\lambda}\pi \cdot \frac{2}{\cancel{\lambda}} h = 4\pi h \quad |-2\pi h$

$$\Rightarrow \frac{8\pi}{\lambda} = 2\pi h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{4}{\lambda}$$

r, h $\Rightarrow$ in III einsetzen $\quad V = \pi r^2 h = \pi \frac{4}{\lambda^2} \cdot \frac{4}{\lambda} = \frac{16\pi}{\lambda^3}$

$$\Rightarrow \lambda^3 = \frac{16\pi}{V} \Rightarrow \lambda = \sqrt[3]{\frac{16\pi}{V}} = 2\sqrt[3]{\frac{2\pi}{V}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

$$\Rightarrow r = \frac{2}{\lambda} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, \quad h = \frac{4}{\lambda} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

$\Rightarrow \left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, 2\sqrt{\frac{V}{2\pi}}\right)$ kritisch Punkt (einziger)

3 $\{(r,h) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi r^2 h = V\}$ ist nicht beschränkt, also nicht kompakt

Aber: Es muss ein Minimum geben. Da es nur einen kritischen Punkt gibt, muss es an dieser Stelle sein!

13. VL Ana 2

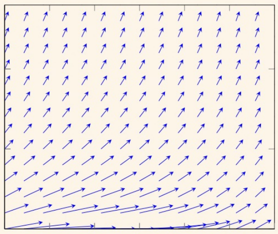
Nablakalkül und klassische Differentialoperatoren

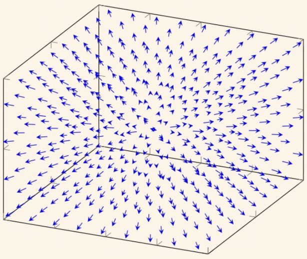
Thema: Nabla-Operator, Divergenz-Operator, Interpretation der Divergenz als Quelldichte

Wiederholung: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$

(1) Eine Abbildung $f: D \to \mathbb{R}$ heißt **Skalarfeld**.
$\to$ Vektor wird auf eine reelle Zahl abgebildet
z.B. Temperatur, Dichte, Luftdruck

(2) Eine Abbildung $\vec{v}: D \to \mathbb{R}^n$ heißt **Vektorfeld**.
$\to$ Vektor wird auf einen Vektor abgebildet
Wichtig: Vektoren aus dem Definitionsbereich und dem Wertebereich haben die gleiche Länge!
z.B. Geschwindigkeitsfeld einer Strömung, Kraftfeld (Gravitation)





Klassische Differentialoperatoren

(1) Gradient

(2) Divergenz (Interpretation als Quelldichte)

(3) Rotation (Interpretation als Wirbeldichte)

经典微分算子
(1) 梯度
(2) 散度（解释为源密度）
(3) 旋度（解释为涡密度）

许多向量空间本身就由函数组成。为了区分这些向量空间中的函数之间的映射，我们将它们称为运算符。

Was ist ein Operator?

Viele Vektorräume bestehen selbst aus Funktionen. Um Abbildungen zwischen solchen Vektorräumen von den Funktionen der Vektorräume zu unterscheiden, bezeichnet man diese als Operatoren.

Wiederholung: Gradient

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \to \mathbb{R}$ ein differenzierbares Skalarfeld und $\vec{x} \in D$. Dann heißt der Vektor

$$\operatorname{grad}_{\vec{x}} f := \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

der **Gradient von f in $\vec{x}$**.

Eigenschaften des Gradienten

(1) $\operatorname{grad} f: D \to \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \mapsto \operatorname{grad}_{\vec{x}} f$ ist ein Vektorfeld.

(2) $\operatorname{grad}_{\vec{x}} f$ zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs von f.

(3) Die Länge des Gradienten entspricht dem stärksten Anstieg.

(4) $\operatorname{grad}_{\vec{x}} f$ ist senkrecht zu den Niveaumengen von f.

Nablakalkül und klassische Differential Operatoren

Definition (Nabla-Operator)

Wir definieren den **Nabla-Operator**

$$\vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

dessen Komponenten die **partiellen Ableitungsoperatoren** sind.
Oft schreibt man auch ∇ anstatt $\vec{\nabla}$.

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \to \mathbb{R}$, $\vec{v}: D \to \mathbb{R}^n$ diffbar.
Dann gilt:

(i) $$\vec{\nabla} \cdot f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} \cdot f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \operatorname{grad} f$$

Kurz: $\vec{\nabla} f$ oder auch ∇f

(ii) $$\langle \vec{\nabla}, \vec{v} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}}_{= \text{Divergenz von } \vec{v}}$$

Definition (Divergenz)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n): D \to \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld und $\vec{x} \in D$.

(1) $\operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{v} := \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\vec{x}) + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}(\vec{x})$ heißt **Divergenz von $\vec{v}$ in $\vec{x}$**.

(2) $\operatorname{div} \vec{v}: D \to \mathbb{R}$, $\vec{x} \mapsto \operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{v}$ heißt **Divergenz von $\vec{v}$**.

Die Divergenz wird auf Vektorfelder angewandt und ist selbst ein Skalarfeld.

Gradient und Divergenz mittels Nabla-Operator

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \to \mathbb{R}$, $\vec{v}: U \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar.
Dann gilt:

(1) $\vec{\nabla} f = \operatorname{grad} f$

(2) $\langle \vec{\nabla}, \vec{v} \rangle = \operatorname{div} \vec{v}$

Beispiel

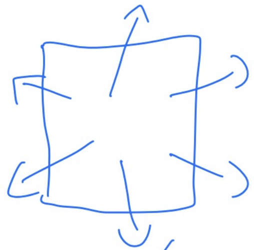
$$\vec{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto \begin{bmatrix} xyz \\ \sin(y)\, z^2 \\ e^{yz} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{v} = yz + \cos(y)\, z^2 + y e^{yz}$$

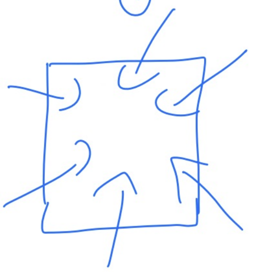
↳ Divergenz von $\vec{v}$

Divergenz als Quelldichte

Sei $\vec{v}: D \to \mathbb{R}^3$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen ein diffbares Geschwindigkeitsfeld einer Strömung

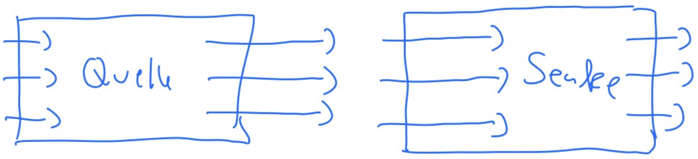


Quelle: Es strömt mehr heraus als hinein



Senke: Es strömt mehr hinein als heraus

Darstellung als Gebiet



Wie findet man Quellen und Senken?

⟶ Quelldichte

$$\text{Dichte} = \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}$$

Jetzt:

Quelldichte ρ in einem Volumen V

$$= \frac{\text{Strömungsbilanz durch die Oberfläche}}{V}$$

↳ Strömungsbilanz: Was heraus strömt minus was hinein strömt

Quelldichte $\rho(\vec{x})$ in einem Punkt $\vec{x}$:

Idee: Betrachte um $\vec{x}$ ein kleines Volumen ΔV um $\vec{x}$, berechne dort die Quelldichte und verkleinere ΔV (also $\Delta V \to 0$)

d.h.

$$\rho(\vec{x}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\text{Strömungsbilanz durch d. Oberfl.}}{\Delta V}$$

Wieviel strömt pro Zeiteinheit durch eine Fläche?

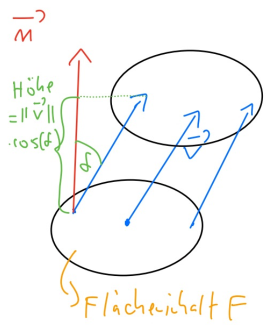
Allgemeine Antwort erst bei Integration möglich → Flussintegral (Abschnitt 3.6)

1. Spezialfall

Sei $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{v} = \text{konstant}$ (homogenes Strömungsfeld) und eine ebene Fläche

Zeiteinheit: Anfang $\vec{v}$ bis Ende $\vec{v}$

„Flussbilanz"



Fluss durch die Fläche ≙ Volumen des schiefen Zylinders (genauer: überströmtes Volumen)

$\vec{n}$ – Einheitsvektor d. Fläche, d.h. senkrecht zur Fläche mit Norm $\|\vec{n}\| = 1$

α – Winkel zw. $\vec{n}$ und $\vec{v}$

$$\text{Fluss} = \text{Fläche} \cdot \text{Höhe}$$
$$= F \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\delta)$$
$$= F \cdot \underbrace{\|\vec{n}\|}_{=1} \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\delta)$$
$$= F \langle \vec{n}, \vec{v} \rangle$$

$$\text{Fluss} > 0 \Rightarrow \langle \vec{n}, \vec{v} \rangle > 0 \Rightarrow \delta < \frac{\pi}{2}$$

d.h. die Strömung zeigt in „Richtung" (grob) von $\vec{n}$

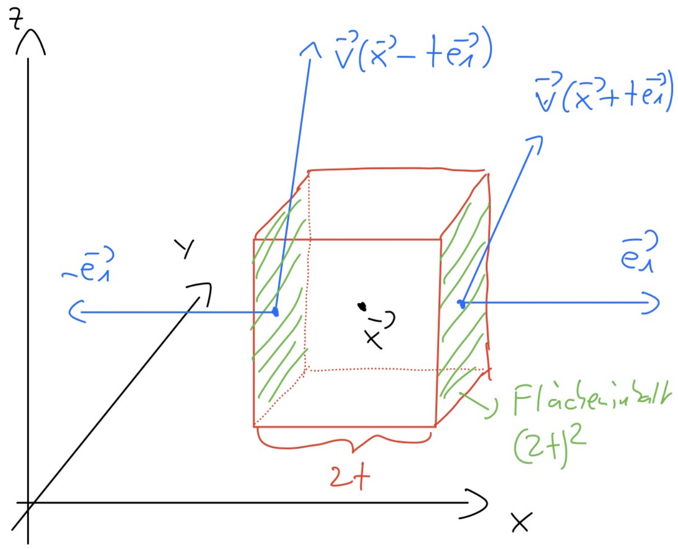
$$\text{Fluss} < 0 \Rightarrow \langle \vec{n}, \vec{v} \rangle < 0 \Rightarrow \delta > \frac{\pi}{2}$$

d.h. die Strömung zeigt in „Richtung" $-\vec{n}$

2. Spezialfall

Inhomogene Strömung $\vec{v}: D \to \mathbb{R}^3$ ($D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen) diffbar

Sei $\vec{x} \in D$ und betrachte einen Würfel W mit Mittelpunkt $\vec{x}$ und Kantenlänge $2t$



Strömungsbilanz durch die Seitenflächen parallel zur yz-Ebene

Nehmen an, dass W so klein, dass $\vec{v}$ (ist stetig) auf den Seitenflächen nahezu konstant ist

$$\text{Fluss} = F \cdot \langle \vec{n}, \vec{v} \rangle$$
$$= (2t)^2 \langle \vec{e_1}, \vec{v}(\vec{x}+t\vec{e_1}) \rangle + (2t)^2 \langle -\vec{e_1}, \vec{v}(\vec{x}-t\vec{e_1}) \rangle$$
$$= (2t)^2 \left(v_1(\vec{x}+t\vec{e_1}) - v_1(\vec{x}-t\vec{e_1}) \right)$$

Analog für Flächen parallel zu xz-Ebene (vorn und hinten) und xy-Ebene (oben und unten):

$$(2t)^2 \left(v_i(\vec{x}+t\vec{e_i}) - v_i(\vec{x}-t\vec{e_i}) \right)$$

$i=2 \mathrel{\hat{=}}$ xz-Ebene
$i=3 \mathrel{\hat{=}}$ xy-Ebene

da $\vec{v}$ diffbar

Idee:
$$v_i(\vec{x}+t\vec{e_i}) \approx v_i(\vec{x}) + v_i'(\vec{x}) \cdot t\vec{e_i} = v_i(\vec{x}) + t \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(\vec{x})$$
für t klein

Strömungsbilanz durch alle 6 Seitenflächen

$$\sum_{i=1}^{3} (2t)^2 \left(v_i(\vec{x}+t\vec{e_i}) - v_i(\vec{x}-t\vec{e_i}) \right)$$

2mal

$$\approx (2t)^2 \sum_{i=1}^{3} \left(v_i(\vec{x}) + t \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(\vec{x}) - \left(v_i(\vec{x}) - t \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(\vec{x}) \right) \right)$$

$$= (2t)^2 \sum_{i=1}^{3} \left(\cancel{v_i(\vec{x})} + t \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(\vec{x}) - \cancel{v_i(\vec{x})} + t \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(\vec{x}) \right)$$

$$= (2t)^2 \, 2t \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(\vec{x})}_{= \operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{v}}$$

$= (2t)^3 \operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{v}$ für t klein

$$\Rightarrow \rho(\vec{x}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\text{Strömungsbilanz d. Oberfl.}}{\Delta V}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{(2t)^3} \operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{v}}{\cancel{(2t)^3}} = \operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{v}$$

Somit ist $\operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{v}$ die Quelldichte in $\vec{x}$.

Es gilt:

$\operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{v} > 0 \Rightarrow$ Quelle in $\vec{x}$

$\operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{v} < 0 \Rightarrow$ Senke in $\vec{x}$

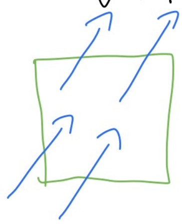
$\operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{v} = 0$ für alle $\vec{x} \in D$

$\Rightarrow \vec{v}$ ist quellfrei

Beispiele

(1) Konstantes Vektorfeld

$\vec{v}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \ \vec{x} \mapsto \text{konst.} = \vec{v}_0$



Es gilt:

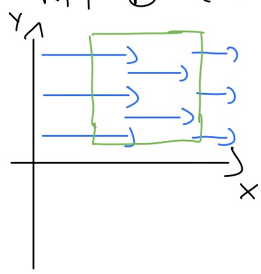
$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i}(\vec{x}) = 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(\vec{x}) = 0$$

$\Rightarrow \vec{v}$ ist quellfrei

(2) $\vec{v}: D \to \mathbb{R}^2, \ \vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} 1/x \\ 0 \end{pmatrix}$

mit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$



$$\operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\vec{x}) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(\vec{x})$$

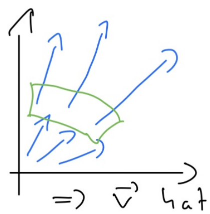
$$= -\frac{1}{x^2} + 0 = -\frac{1}{x^2} < 0$$

für alle $x \in D$

$\Rightarrow \vec{v}$ hat in jedem $\vec{x} \in D$ eine Senke

(3) $\vec{v}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$

$\vec{x} \mapsto a \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} a x_1 \\ \vdots \\ a x_n \end{bmatrix}, \ a > 0$



$$\operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\vec{x}) + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}(\vec{x})$$

$$= \underbrace{a + \dots + a}_{n\text{-mal}} = n \cdot a > 0$$

$\Rightarrow \vec{v}$ hat in jedem $\vec{x} \in D$ eine Quelle.

Definition (quellfrei)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{v}: D \to \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld. $\vec{v}$ heißt **quellfrei**, falls $\operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{v} = 0$ für alle $\vec{x} \in D$.

14. VL Ana 2

Klassische Differentialoperatoren II

Thema: Rotation 旋转. Interpretation der Rotation als Winkeldichte, Rechenregeln

Wiederholung

Nabla-Operator

Der **Nabla-Operator** ist gegeben durch

$$\vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

wobei die Komponenten die **partiellen Ableitungsoperatoren** sind.

Gradient und Divergenz mittels Nabla-Operator

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}$, $\vec{v}\colon D \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Dann gilt:

(1) $\vec{\nabla} f = \operatorname{grad} f$

(2) $\langle \vec{\nabla}, \vec{v} \rangle = \operatorname{div} \vec{v}$

Klassische Differentialoperatoren II

Folie 111

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)\colon D \to \mathbb{R}^3$ diffbar.

Dann gilt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{bmatrix}}_{\text{Rotation von } \vec{v}}$$

Definition (Rotation)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)\colon D \to \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld und $\vec{x} \in D$.

(1) $$\operatorname{rot}_{\vec{x}} \vec{v} := \begin{bmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2}(\vec{x}) - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}(\vec{x}) \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3}(\vec{x}) - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(\vec{x}) - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(\vec{x}) \end{bmatrix}$$ heißt **Rotation von $\vec{v}$ in $\vec{x}$**.

(2) $\operatorname{rot} \vec{v}\colon D \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \mapsto \operatorname{rot}_{\vec{x}} \vec{v}$ heißt **Rotation von $\vec{v}$**.

Die Rotation wird auf Vektorfelder angewandt und ist selbst wieder ein Vektorfeld.

Gradient, Divergenz und Rotation mittels Nabla-Operator

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}$, $\vec{v}\colon D \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Dann gilt:

(1) $\vec{\nabla} f = \operatorname{grad} f$

(2) $\langle \vec{\nabla}, \vec{v} \rangle = \operatorname{div} \vec{v}$

(3) $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \operatorname{rot} \vec{v}$ (für $n = 3$)

Folie 112

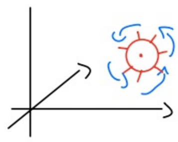
Beispiel

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto \begin{bmatrix} e^{xz} \\ \cos(x) \cdot y^2 \\ 2z^2 - y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot}_{\vec{x}} \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 - 0 \\ x e^{xz} - 0 \\ -\sin(x) y^2 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ x e^{xz} \\ -\sin(x) y^2 \end{bmatrix}$$

Interpretation der Rotation als Wirbeldichte

Betrachte ein Schaufelrad in einer Strömung



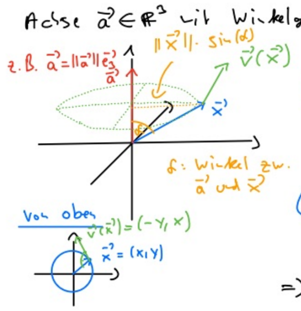
Dann gilt:

(1) Schaufelrad dreht sich am schnellsten, wenn die Achse in Richtung $\operatorname{rot}_{\vec{x}} \vec{v}$ zeigt

(2) Schaufelrad dreht sich mit Winkelgeschwindigkeit $\frac{1}{2} \|\operatorname{rot}_{\vec{x}} \vec{v}\|$ gegen den Uhrzeigersinn um die Achse $\operatorname{rot}_{\vec{x}} \vec{v}$

Idee:

Sei $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Geschwindigkeitsfeld einer starren Drehung gegen den Uhrzeigersinn um die Achse $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ mit Winkelgeschwindigkeit $\|\vec{a}\|$



Erkenntnis:

(1) Geschwindigkeits $\vec{v}(\vec{x})$ ist orthogonal zum Ortsvektor $\vec{x}$ und zur Achse $\vec{a}$

(2) Geschwindigkeit = Winkelgeschwindigkeit · Abstand zur Achse

$$\Rightarrow \|\vec{v}(\vec{x})\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{x}\| \cdot \sin(\alpha)$$

(3) Vektoren $\vec{a}, \vec{x}, \vec{v}(\vec{x})$ erfüllen die Rechte-Hand-Regel

d.h. $\vec{a} \mathrel{\hat{=}}$ Daumen, $\vec{x} \mathrel{\hat{=}}$ Zeigefinger, $\vec{v}(\vec{x}) \mathrel{\hat{=}}$ Mittelfinger

Eigenschaften (1) – (3) sind die Eigenschaften d. Vektorprodukts

$$\Rightarrow \vec{v}(\vec{x}) = \vec{a} \times \vec{x}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 x_3 - a_3 x_2 \\ a_3 x_1 - a_1 x_3 \\ a_1 x_2 - a_2 x_1 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}}_{=: A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A \vec{x}$$

Es gilt: $A^T = -A$ (= schiefsymmetrische Matrix auch antisymmetr. Matrix)

Sei nun $\vec{v}(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ mit $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ bel.

$$(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T$$

$\Rightarrow$ $A + A^T$ ist symmetrisch

$$(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -A + A^T = -(A - A^T)$$

$\Rightarrow$ $A - A^T$ ist schiefsymmetrisch

$(A+\cancel{A^T}) + (A-\cancel{A^T}) = 2A$

Fazit: $A = \underbrace{\frac{1}{2}(A+A^T)}_{\text{symmetrisch}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A-A^T)}_{\text{schief-symmetrisch (Rotationsanteil)}}$

Sei nun $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $\vec{v}: D \to \mathbb{R}^3$ diffbar

Idee: $\vec{v}(\vec{x}+\vec{\Delta x}) \approx \vec{v}(\vec{x}) + \vec{v}\,'(\vec{x}) \cdot \vec{\Delta x}$ für $\|\vec{\Delta x}\|$ klein

$$\Rightarrow \vec{v}\,'(\vec{x}) = \frac{1}{2}\left(\vec{v}\,'(\vec{x}) + \vec{v}\,'(\vec{x})^T\right) + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\vec{v}\,'(\vec{x}) - \vec{v}\,'(\vec{x})^T\right)}_{\text{Rotationsanteil}}$$

Für $\vec{v}\,'(\vec{x}) = \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\vec{x})\right]_{i,j=1,..,3}$

gilt:

$$\vec{v}\,'(\vec{x}) - \vec{v}\,'(\vec{x})^T = \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\vec{x}) - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(\vec{x})\right]_{i,j=1,2,3}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial x_2}(\vec{x}) - \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(\vec{x})}_{=-a_3} & \underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial x_3}(\vec{x}) - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}(\vec{x})}_{=a_2} \\ \overbrace{\frac{\partial v_2}{\partial x_1}(\vec{x}) - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(\vec{x})}^{=a_3} & 0 & \underbrace{\frac{\partial v_2}{\partial x_3}(\vec{x}) - \frac{\partial v_3}{\partial x_2}(\vec{x})}_{=-a_1} \\ \underbrace{\frac{\partial v_3}{\partial x_1}(\vec{x}) - \frac{\partial v_1}{\partial x_3}(\vec{x})}_{=-a_2} & \overbrace{\frac{\partial v_3}{\partial x_2}(\vec{x}) - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}(\vec{x})}^{=a_1} & 0 \end{bmatrix}$$

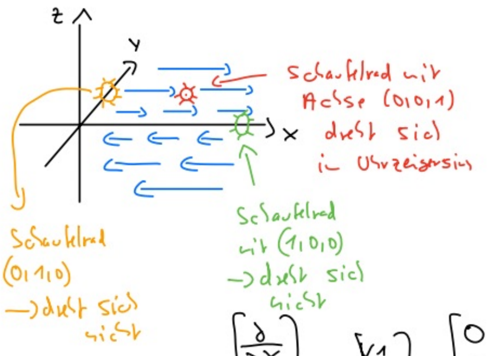
Fazit: Die zur starken Drehung zugehörige Achse ist

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2}(\vec{x}) - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}(\vec{x}) \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3}(\vec{x}) - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(\vec{x}) - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(\vec{x}) \end{bmatrix} = \mathrm{rot}_{\vec{x}}\,\vec{v}$$

mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{1}{2}\|\mathrm{rot}_{\vec{x}}\,\vec{v}\|$

Folie 113

(1) $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x,y,z) \mapsto \begin{bmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$



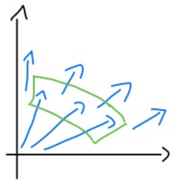
Es gilt: $\mathrm{rot}_{\vec{x}}\,\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

(2) Zentralfeld:

$\vec{v}: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{x} \mapsto \frac{\vec{x}}{r^3}$ mit $r = \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$

d.h. $\vec{v}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{r^3} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} = r^{-3} \cdot \vec{x}$

VL7: $\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} = \frac{x_i}{\|\vec{x}\|}$



Für $v_i(\vec{x}) = r^{-3} \cdot x_i$ gilt

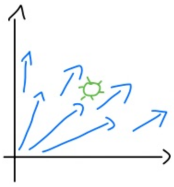
$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i}(\vec{x}) = -3r^{-4} \cdot \underbrace{\frac{\partial r}{\partial x_i}}_{=\frac{x_i}{\|\vec{x}\|} = \frac{x_i}{r}} \cdot x_i + r^{-3} \cdot \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_i}}_{=1}$$

Produkt- und Kettenregel

$$= -3r^{-4}\frac{x_i}{r} x_i + r^{-3} \cdot 1$$
$$= r^{-3}\left(-3\frac{x_i^2}{r^2} + 1\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{div}_{\vec{x}}\,\vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\vec{x}) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(\vec{x}) + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}(\vec{x})$$
$$= r^{-3}\left(-3\frac{x_1^2}{r^2} + 1 - 3\frac{x_2^2}{r^2} + 1 - 3\frac{x_3^2}{r^2} + 1\right)$$
$$= r^{-3}\left((-3) \cdot \underbrace{\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{r^2}}_{=\frac{r^2}{r^2}=1} + 3\right) = 0$$

$\Rightarrow \vec{v}$ ist quellfrei



$$\frac{\partial v_3}{\partial x_2}(\vec{x}) - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}(\vec{x})$$
$$= -3r^{-4} \cdot \frac{x_2}{r} \cdot x_3 - \left(-3r^{-4} \cdot \frac{x_3}{r} \cdot x_2\right)$$
$$= 0$$

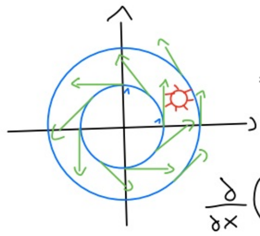
2. und 3. Komponente analog $= 0$

$\Rightarrow \mathrm{rot}_{\vec{x}}\,\vec{v} = \vec{0}$, also ist $\vec{v}$ wirbelfrei

(3) Magnetfeld (z.B. eines Leiters in der z-Achse)

$\vec{H}: D \to \mathbb{R}^3$ mit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \neq 0\}$

$$(x,y,z) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2}\begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow \mathrm{rot}_{\vec{x}}\,\vec{H} = \begin{bmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ \frac{\partial H_2}{\partial x}(\vec{x}) - \frac{\partial H_1}{\partial y}(\vec{x}) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$\Rightarrow \mathrm{rot}_{\vec{x}}\,\vec{H} = \vec{0}$, $\vec{H}$ ist wirbelfrei

Definition (wirbelfrei)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $\vec{v}: D \to \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld. $\vec{v}$ heißt **wirbelfrei**, falls $\mathrm{rot}_{\vec{x}}\,\vec{v} = 0$ für alle $\vec{x} \in D$.

Rechenregeln für die Differentialoperatoren

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f, u\colon D \to \mathbb{R}$, $\vec{v}, \vec{w}\colon D \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar, $\vec{x} \in D$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt.

(1) **Linearität:**

$$\operatorname{grad}_{\vec{x}}(f+u) = \operatorname{grad}_{\vec{x}} f + \operatorname{grad}_{\vec{x}} u, \quad \operatorname{grad}_{\vec{x}}(\lambda f) = \lambda \cdot \operatorname{grad}_{\vec{x}} f$$

$$\operatorname{div}_{\vec{x}}(\vec{v}+\vec{w}) = \operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{v} + \operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{w}, \quad \operatorname{div}_{\vec{x}}(\lambda \vec{v}) = \lambda \cdot \operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{v}$$

Für $n = 3$:

$$\operatorname{rot}_{\vec{x}}(\vec{v}+\vec{w}) = \operatorname{rot}_{\vec{x}} \vec{v} + \operatorname{rot}_{\vec{x}} \vec{w}, \quad \operatorname{rot}_{\vec{x}}(\lambda \vec{v}) = \lambda \cdot \operatorname{rot}_{\vec{x}} \vec{v}$$

(2) **Produktregeln:**

$$\operatorname{grad}_{\vec{x}}(f \cdot u) = f(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad}_{\vec{x}} u + u(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad}_{\vec{x}} f$$

$$\operatorname{div}_{\vec{x}}(f \cdot \vec{v}) = \langle \operatorname{grad}_{\vec{x}} f\,,\ \vec{v}(\vec{x})\rangle + f(\vec{x}) \cdot \operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{v}$$

Für $n = 3$:

$$\operatorname{rot}_{\vec{x}}(f \cdot \vec{v}) = \operatorname{grad}_{\vec{x}} f \times \vec{v}(\vec{x}) + f(\vec{x}) \cdot \operatorname{rot}_{\vec{x}} \vec{v}$$

$$\operatorname{div}_{\vec{x}}(\vec{v} \times \vec{w}) = \langle \operatorname{rot}_{\vec{x}} \vec{v}\,,\ \vec{w}(\vec{x})\rangle - \langle \vec{v}(\vec{x})\,,\ \operatorname{rot}_{\vec{x}} \vec{w}\rangle$$

Folie 114 Letzte Beispiel

$\vec{H}: D \to \mathbb{R}^3$ mit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \neq 0\}$

$$(x,y,z) \mapsto \underbrace{\frac{1}{x^2+y^2}}_{f} \underbrace{\begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{v}} = \begin{bmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(f \cdot \vec{v}) = \langle \operatorname{grad}_{\vec{x}} f, \vec{v}(\vec{x})\rangle + f(\vec{x}) \cdot \operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{v}$$

↳ Formel auf Folie 114

$$= \left\langle \begin{bmatrix} \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle + \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 0$$

$$= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \vec{H} \text{ ist quellfrei}$$

15. VL Ana 2

Mehrfachanwendungen der Differentialoperatoren

Wiederholung:

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}$, $\vec{v}\colon D \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar.

Gradient	Skalarfeld $f \mapsto$ Vektorfeld $\operatorname{grad} f$
Divergenz	Vektorfeld $\vec{v} \mapsto$ Skalarfeld $\operatorname{div} \vec{v}$
Rotation $(n=3)$	Vektorfeld $\vec{v} \mapsto$ Vektorfeld $\operatorname{rot} \vec{v}$

Mehrfachanwendungen

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}$, $\vec{v}\colon D \to \mathbb{R}^n$ zweimal differenzierbar.

	grad	div	rot $(n=3)$
grad	existiert nicht	$\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{v})$	existiert nicht
div	$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$	existiert nicht	$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v})$
rot $(n=3)$	$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)$	existiert nicht	$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{v})$

Themen:

Mehrfachanwendungen (grad, rot, div), Laplace-Operator, Stammfunktion, Potential, Potentialfeld / Gradientenfeld, notwendige und hinreichende Bedingung für ein Potential, Vektorpotential

Mehrfachanwendungen der Differentialoperatoren

Eigenschaften

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}$, $\vec{v}\colon D \to \mathbb{R}^3$ zweimal differenzierbar mit stetigen Ableitungen. Dann gilt:

(1) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \vec{0}$

(2) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v}) = 0$

Mehrfachanwendungen

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}$, $\vec{v}\colon D \to \mathbb{R}^n$ zweimal differenzierbar mit stetigen Ableitungen.

	grad	div	rot $(n=3)$
grad	existiert nicht	$\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{v})$	existiert nicht
div	$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$	existiert nicht	$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v}) = 0$
rot $(n=3)$	$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \vec{0}$	existiert nicht	$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{v})$

(1)

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \vec{\nabla} \times \operatorname{grad} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{bmatrix}$$

$= 0$ nach Satz v. Schwarz

(2)

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v}) = \operatorname{div} \begin{bmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial y}$$

$= 0$ nach Satz v. Schwarz

Definition (Laplace-Operator)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann heißt Δ gegeben durch

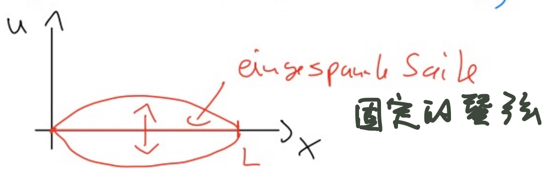
$$\Delta f := \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \left\langle \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

$=$ Summe der Diagonalelemente der Hesse-Matrix H_f

der **Laplace-Operator**.

Anwendung des Laplace-Operators

(1) Wellengleichung (Schwingung)



Auslenkung: $u(x,t)$

x: Orts-variable, t: Zeit-variable

Wellengleichung (eindimensional)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Mehrdimensional:

Für $u(x_1,\dots,x_n,t)$

gilt $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \lambda \Delta u,$$

wobei Δu nur auf die Orts-variablen $x_1,\dots,x_n$ angewandt wird

(2) Wärmeleitungsgleichung

Temperaturverteilung in einem Körper: $T(x_1,\dots,x_n,t)$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 T}{\partial x_n^2}\right) = \lambda \Delta T$$

Definition (Stammfunktion, Potential)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{v}\colon D \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Dann heißt $\vec{v}$ ein **Potentialfeld**, wenn es eine differenzierbare Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} f = \vec{v}$ gibt. Die Funktion f heißt dann **Stammfunktion** von $\vec{v}$ und $u = -f$ heißt **Potential** (auch **Potentialfunktion**), d.h.

$$\vec{v} = \operatorname{grad} f \quad \text{und} \quad \vec{v} = -\operatorname{grad} u.$$

Bemerkung

(1) u ist genau dann ein Potential von $\vec{v}$, wenn $-u$ eine Stammfunktion von $\vec{v}$ ist.

(2) Die Begriffe Stammfunktion (wichtig in der Mathematik) und Potential (wichtig in der Physik) unterscheiden sich nur um das Vorzeichen. In der Mathematik sagt man statt Potentialfeld auch **Gradientenfeld**.

Hat jedes Vektorfeld ein Potential?

Dies stimmt nicht, denn für $\vec{v}\colon D \to \mathbb{R}^3$ ($D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen) stetig diffbar mit $\boxed{\vec{v} = \operatorname{grad} f}$ (also ist f zweimal stetig diffbar) gilt $\operatorname{rot} \vec{v} = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \vec{0}$ (Folie 117)

Dies ist eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Potentials wenn $n=3$.

Notwendige Bedingung für die Existenz eines Potentials

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{v}\colon D \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Potentialfeld, d.h. es gibt eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $\vec{v} = \operatorname{grad} f$. Dann ist $\vec{v}'$ symmetrisch, d.h. $\vec{v}'(\vec{x}) = (\operatorname{grad}_{\vec{x}} f)' = H_f(\vec{x})$ ist symmetrisch.
Insbesondere gilt im Fall $n = 3$, dass $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$, d.h. $\vec{v}$ ist wirbelfrei.

Beispiel

Für $\vec{v}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{v}(x,y) = \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}$ gilt

$$\vec{v}'(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Also besitzt $\vec{v}$ keine Stammfunktion bzw. kein Potential.

Die notwendige Bedingung ist i.A. nicht hinreichend

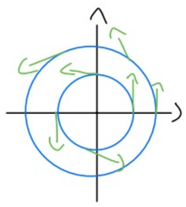
Beispiel

Magnetfeld

$$\vec{H}\colon D \to \mathbb{R}^3,\ \vec{H}(\vec{x}) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix}$$

mit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \neq 0\}$

VL 14: $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{0}$



Angenommen, $\vec{H}$ besitzt ein Potential u, d.h. $\vec{H} = -\operatorname{grad} u$.

Also zeigt $\vec{H}$ in Richtung des stärksten Abstieges.

Bei einer „Kreisdrehung" (auf einer Magnetlinie): u wird immer kleiner und ist nach 2π am Ausgangspunkt ↯ Widerspruch!

Somit besitzt $\vec{H}$ kein Potential.

Problem: Die Vorschrift von $\vec{H}$ ist nicht das Problem, sondern der Def.bereich D, dieser ist nicht konvex!

Wiederholung: Konvexität (VL 9)

Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex, falls für je zwei Punkte $\vec{x}, \vec{y} \in D$ auch deren Verbindungsstrecke S in D liegt, d.h.

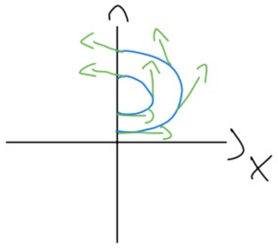
$$S = \{(1-t)\vec{x} + t\vec{y} \mid 0 \le t \le 1\} \subset D.$$

Hinreichende Bedingung für die Existenz eines Potentials

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, konvex und $\vec{v}\colon D \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit symmetrischer Ableitungsmatrix $\vec{v}\,'$ (im Fall $n = 3$ also mit $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$). Dann besitzt $\vec{v}$ ein Potential.

$$\vec{H}: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{H}(\vec{x}) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix}$$

mit $\mathcal{U} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0\}$



Jetzt: $\mathcal{U}$ ist offen und konvex und es gilt $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{0}$

Also besitzt $\vec{H}$ ein Potential

$u(x,y,z) = -\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

ist ein Potential von $\vec{H}$ auf $\mathcal{U}$, denn:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{y}{x^2+y^2} = H_1(\vec{x})$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} = H_2(\vec{x})$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) = 0 = H_3(\vec{x})$$

$\Rightarrow \vec{H}(\vec{x}) = -\operatorname{grad}_{\vec{x}} u$ für alle $\vec{x} \in \mathcal{U}$

Wie findet man Potentiale?

Beispiel

$$\vec{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{x} \mapsto \begin{bmatrix} 3x^2y \\ x^3+z \\ y+1 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$ ist offen und konvex und $\vec{v}$ stetig diffbar mit

$$\vec{v}\,'(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 6xy & 3x^2 & 0 \\ 3x^2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

symmetrisch

$\Rightarrow \vec{v}$ hat ein Potential $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bzw. eine Stammfkt. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\vec{v} = \operatorname{grad} f$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}) = 3x^2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}) = x^3 + z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(\vec{x}) = y + 1$$

1. Methode: Schrittweise Integration

Integration nach x:

$$f(x,y,z) = x^3y + c_1(y,z)$$

Ableitung nach y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}) = x^3 + \frac{\partial c_1}{\partial y}(y,z) = x^3 + z$$

$$\Rightarrow \frac{\partial c_1}{\partial y}(y,z) = z$$

Integration nach y:

$$c_1(y,z) = yz + c_2(z)$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = x^3y + yz + c_2(z)$$

Ableitung nach z:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(\vec{x}) = y + \frac{\partial c_2}{\partial z}(z) = y+1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial c_2}{\partial z}(z) = 1$$

Integration nach z:

$$c_2(z) = z + C_3, \quad C_3 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = x^3 y + yz + z + C_3$$

ist eine Stammfkt

Potential: $u(x,y,z) = -x^3 y - yz - z + C_4$, $C_4 \in \mathbb{R}$

2. Methode: Integrieren und Vergleichen (simultan)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}) = 3x^2 y$$

Integr. nach x $\Rightarrow$ $f(x,y,z) = x^3 y + c_1(y,z)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}) = x^3 + z$$

Integr. nach y $\Rightarrow$ $f(x,y,z) = x^3 y + zy + c_2(x,z)$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(\vec{x}) = y+1$$

Integr. nach z $\Rightarrow$ $f(x,y,z) = yz + z + c_3(x,y)$

Vergleich: $f(x,y,z) = x^3 y + zy + z + c$, $c \in \mathbb{R}$

Beispiel

$$\vec{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto \begin{bmatrix} 2xy \\ -y^2+y \\ x-z \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$ offen, konvex und

$$\operatorname{div} \vec{v} = 2y - 2y + 1 - 1 = 0$$

$\Rightarrow$ $\vec{v}$ hat Vektorpotential

1. Freiheitsgrad: Eine Komponente kann 0 gesetzt werden

Wähle z.B. $w_3 = 0$ (oder $w_1 = 0$ oder $w_2 = 0$)

$\operatorname{rot} \vec{w} = \vec{v}$, d.h.

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \begin{bmatrix} 2xy \\ -y^2+y \\ x-z \end{bmatrix} = \operatorname{rot} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial w_2}{\partial z} \\ \frac{\partial w_1}{\partial z} \\ \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Integr. nach z

$$\mathrm{II}: w_1(x,y,z) = -y^2 z + yz + c_1(x,y)$$

$$\mathrm{I}: w_2(x,y,z) \underset{\text{Integr. nach z}}{=} -2xyz + c_2(x,y)$$

2. Freiheitsgrad: Eine „Konstante" kann 0 gesetzt werden

z.B. $c_1(x,y) = 0$ (oder $c_2(x,y) = 0$)

$$\mathrm{III}: x - z = \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y}$$

$$= -2yz + \frac{\partial c_2}{\partial x}(x,y) - (-2yz + z)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial c_2}{\partial x}(x,y) = x - \cancel{z} + 2\cancel{y}z - 2\cancel{y}z + \cancel{z}$$

$$= x$$

$$\Rightarrow c_2(x,y) \overset{\text{Integr. nach x}}{=} \frac{1}{2}x^2 + c_3(y)$$

3. Freiheitsgrad: c_3 kann 0 gesetzt werden

$$\Rightarrow \vec{w} = \begin{bmatrix} -y^2 z + yz \\ -2xyz + \frac{1}{2}x^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ist ein Vektorpotential von $\vec{v}$.

Definition (Vektorpotential)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $\vec{v}: D \to \mathbb{R}^3$. Ist $\vec{w}: D \to \mathbb{R}^3$ differenzierbar mit $\operatorname{rot} \vec{w} = \vec{v}$, so heißt $\vec{w}$ **Vektorpotential** von $\vec{v}$.

Besitzt jedes Vektorfeld ein Vektorpotential?

Nein, denn nach Folie 117 gilt: $\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{w}) = 0$.

Notwendige und hinreichende Bedingungen für Vektorpotentiale

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $\vec{v}: D \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

(1) Hat $\vec{v}$ ein Vektorpotential, so gilt $\operatorname{div} \vec{v} = 0$. (**notwendig!**)

(2) Ist D konvex und $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, so besitzt $\vec{v}$ ein Vektorpotential. (**hinreichend!**)

Bemerkung

Sei $\vec{w}: D \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorpotential von $\vec{v}$ und sei $f: D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann ist auch $\vec{w} + \operatorname{grad} f$ ein Vektorpotential von $\vec{v}$, denn es gilt:

$$\operatorname{rot}(\vec{w} + \operatorname{grad} f) = \operatorname{rot} \vec{w} + \underbrace{\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)}_{\substack{=\vec{0} \\ \text{(vgl. Folie 117)}}} = \operatorname{rot} \vec{w} = \vec{v}.$$

16. VL Ana 2

Differentialoperatoren in anderen Koordinaten

Themen: Vektorfelder in anderen Koordinaten, Umrechnen der Basisvektoren, Differentialoperatoren in anderen Koordinaten

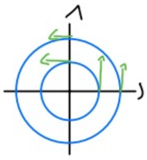
Differentialoperatoren in anderen Koordinaten

Magnetfeld

$$\vec H: D \to \mathbb{R}^3,\quad (x,y,z) \mapsto \begin{bmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit } D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \neq 0\}$$

Version in 2D:

$$\vec H: \mathbb{R}^2\setminus\{0,0\} \to \mathbb{R}^2,\quad (x,y)\mapsto \begin{bmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{bmatrix}$$



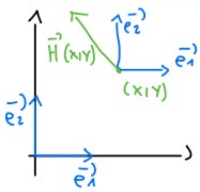
Sei $\vec v: D\to\mathbb{R}^2$ ($D\subseteq \mathbb{R}^2$) ein Vektorfeld

$$\Rightarrow \vec v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = v_1 \vec e_1 + v_2 \vec e_2$$

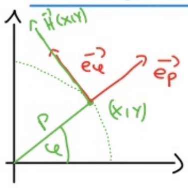
Für das obige Beispiel gilt dann:

$$\vec H = -\frac{y}{x^2+y^2}\cdot\vec e_1 + \frac{x}{x^2+y^2}\cdot \vec e_2$$

Kartesische Koord.

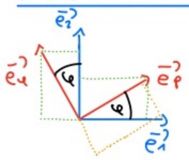


Polarkoordinaten



Für die Darstellung von Vektorfeldern in Polarkoordinaten verwenden wir $\vec e_\rho, \vec e_\varphi$ anstatt $\vec e_1, \vec e_2$

Basisvektoren umrechnen



$\vec e_1, \vec e_2, \vec e_\rho, \vec e_\varphi$ haben Länge 1

Koordinatensystem $\vec e_1, \vec e_2$

$$\vec e_\rho = \cos(\varphi)\,\vec e_1 + \sin(\varphi)\,\vec e_2$$
$$\vec e_\varphi = -\sin(\varphi)\,\vec e_1 + \cos(\varphi)\,\vec e_2$$

Koordinatensystem $\vec e_\rho, \vec e_\varphi$

$$\vec e_1 = \cos(\varphi)\cdot\vec e_\rho - \sin(\varphi)\,\vec e_\varphi$$
$$\vec e_2 = \sin(\varphi)\,\vec e_\rho + \cos(\varphi)\,\vec e_\varphi$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\vec v &= v_1\vec e_1 + v_2\vec e_2 \\ &= v_1\cos(\varphi)\,\vec e_\rho - v_1\sin(\varphi)\,\vec e_\varphi + v_2\sin(\varphi)\,\vec e_\rho + v_2\cos(\varphi)\,\vec e_\varphi \\ &= \underbrace{(v_1\cos(\varphi) + v_2\sin(\varphi))}_{=:v_\rho}\,\vec e_\rho + \underbrace{(-v_1\sin(\varphi)+v_2\cos(\varphi))}_{=:v_\varphi}\,\vec e_\varphi\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} v_\rho \\ v_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Andere Richtung

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}}_{=A}^{-1} \begin{bmatrix} v_\rho \\ v_\varphi \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\det(A)}}_{=1} \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_\rho \\ v_\varphi \end{bmatrix}$$

d.h. $v_1 = \cos(\varphi)\,v_\rho - \sin(\varphi)\,v_\varphi$

$v_2 = \sin(\varphi)\,v_\rho + \cos(\varphi)\,v_\varphi$

Umrechnung: Kartesische Koordinaten ↔ Polarkoordinaten

kartesische Koordinaten	Polarkoordinaten
$x = \rho\cos(\varphi)$	$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$
$y = \rho\sin(\varphi)$	$\tan(\varphi) = \frac{y}{x}$
$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial\rho}\cos(\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\sin(\varphi)}{\rho}$	$\frac{\partial}{\partial\rho} = \frac{\partial}{\partial x}\cos(\varphi) + \frac{\partial}{\partial y}\sin(\varphi)$
$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial\rho}\sin(\varphi) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\cos(\varphi)}{\rho}$	$\frac{\partial}{\partial\varphi} = -\rho\frac{\partial}{\partial x}\sin(\varphi) + \rho\frac{\partial}{\partial y}\cos(\varphi)$
$\vec e_1 = \cos(\varphi)\vec e_\rho - \sin(\varphi)\vec e_\varphi$	$\vec e_\rho = \cos(\varphi)\vec e_1 + \sin(\varphi)\vec e_2$
$\vec e_2 = \sin(\varphi)\vec e_\rho + \cos(\varphi)\vec e_\varphi$	$\vec e_\varphi = -\sin(\varphi)\vec e_1 + \cos(\varphi)\vec e_2$
$v_1 = \cos(\varphi)v_\rho - \sin(\varphi)v_\varphi$	$v_\rho = \cos(\varphi)v_1 + \sin(\varphi)v_2$
$v_2 = \sin(\varphi)v_\rho + \cos(\varphi)v_\varphi$	$v_\varphi = -\sin(\varphi)v_1 + \cos(\varphi)v_2$

Kartesische Koordinaten ↔ Polarkoordinaten: grad, div, Δ

kartesische Koordinaten	Polarkoordinaten
$x = \rho\cos(\varphi)$	$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$
$y = \rho\sin(\varphi)$	$\tan(\varphi) = \frac{y}{x}$
$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec e_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\vec e_2$	$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial\rho}\vec e_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\vec e_\varphi$
$\operatorname{div}\vec v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}$	$\operatorname{div}\vec v = \frac{\partial v_\rho}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}v_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}$
$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$

Beispiel Magnetfeld in $\mathbb{R}^2$

Es gilt

$\vec H = H_1\vec e_1 + H_2\vec e_2$ mit

$$H_1 = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\rho\sin(\varphi)}{\rho^2} = -\frac{\sin(\varphi)}{\rho}$$

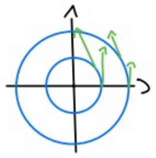
$$H_2 = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\rho\cos(\varphi)}{\rho^2} = \frac{\cos(\varphi)}{\rho}$$

$$\Rightarrow H_\rho = H_1\cos(\varphi) + H_2\sin(\varphi) = -\frac{1}{\rho}\sin(\varphi)\cos(\varphi) + \frac{1}{\rho}\cos(\varphi)\sin(\varphi) = 0$$

$H_\varphi = -H_1 \sin(\varphi) + H_2 \cos(\varphi)$

$= \frac{1}{\rho}\sin(\varphi)\sin(\varphi) + \frac{1}{\rho}\cos(\varphi)\cos(\varphi) = \frac{1}{\rho}$

$\Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\rho}\cdot \vec{e_\varphi}$



Gradient in Polarkoordinaten

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen) differenzierbar

$$\Rightarrow \text{grad } f = \begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e_1} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e_2}$$

Null
Null

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\cos(\varphi) - \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\sin(\varphi)}{\rho}\right)\cdot\left(\cos(\varphi)\vec{e_\rho} - \sin(\varphi)\vec{e_\varphi}\right)$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\sin(\varphi) + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\cos(\varphi)}{\rho}\right)\cdot\left(\sin(\varphi)\vec{e_\rho} + \cos(\varphi)\vec{e_\varphi}\right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \rho}\cos^2(\varphi)\vec{e_\rho} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{1}{\rho}\sin^2(\varphi)\vec{e_\varphi}$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial \rho}\sin^2(\varphi)\vec{e_\rho} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{1}{\rho}\cos^2(\varphi)\vec{e_\varphi}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e_\varphi}$$ Gradient in Polarkoordinaten

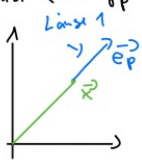
Beispiel

(1) $f(x,y) = \underbrace{\sqrt{x^2+y^2} = \|\vec{x}\|}_{=\text{kart. Koord.}} = \underbrace{\rho}_{\text{Polar Koord.}}$

Schon gesehen: $\text{grad } f = \frac{x}{\|\vec{x}\|}$ (VL 7)

In Polarkoordinaten:

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e_\varphi} = 1\cdot\vec{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\cdot 0\cdot\vec{e_\varphi} = \vec{e_\rho}$$



(2) $f(\rho,\varphi) = \varphi$

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e_\varphi} = 0 + \frac{1}{\rho}\cdot 1\cdot \vec{e_\varphi}$$

$$= \frac{1}{\rho}\vec{e_\varphi} \underset{\text{siehe oben}}{=} \vec{H}$$

In VL 15 gesehen

$f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ ist ein Stammfkt. von $\vec{H}$

auf $D = \{\vec{x}\in\mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$

Divergenz in Polarkoordinaten

$\vec{v}: D \to \mathbb{R}^2$ ($D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen) diffbar

$$\Rightarrow \text{div }\vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}$$

$$= \cos(\varphi)\frac{\partial v_1}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\sin(\varphi)\frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + \sin(\varphi)\frac{\partial v_2}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\cos(\varphi)\frac{\partial v_2}{\partial \varphi}$$

$v_1 = \cos(\varphi)v_\rho - \sin(\varphi)v_\varphi$

$v_2 = \sin(\varphi)v_\rho + \cos(\varphi)v_\varphi$

Null Null Null

$$= \cos(\varphi)\left(\cos(\varphi)\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} - \sin(\varphi)\frac{\partial v_\varphi}{\partial \rho}\right)$$

$$- \frac{1}{\rho}\sin(\varphi)\left(-\sin(\varphi)v_\rho + \cos(\varphi)\frac{\partial v_\rho}{\partial \varphi} - \cos(\varphi)v_\varphi - \sin(\varphi)\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right)$$

$$+ \sin(\varphi)\left(\sin(\varphi)\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \cos(\varphi)\frac{\partial v_\varphi}{\partial \rho}\right)$$

$$+ \frac{1}{\rho}\cos(\varphi)\left(\cos(\varphi)v_\rho + \sin(\varphi)\frac{\partial v_\rho}{\partial \varphi} - \sin(\varphi)v_\varphi + \cos(\varphi)\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right)$$

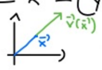
$$= \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}v_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\Rightarrow \text{div }\vec{v} = \underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}}_{\text{kart.}} = \underbrace{\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}v_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}}_{\text{Polarf.}}$$

Beispiel

(1) $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{x} = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \Rightarrow \text{div }\vec{v} = 1+1 = 2$ (in kart. Koord.)

Polar:



$\Rightarrow \vec{v}(\vec{x}) = \rho\cdot\vec{e_\rho}$ hier: $v_\rho = \rho$, $v_\varphi = 0$

$\Rightarrow \text{div }\vec{v} = 1 + \frac{1}{\rho}\cdot\rho + \frac{1}{\rho}\cdot 0 = 2$

Genau.: $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\rho\cos(\varphi)\\ \rho\sin(\varphi)\end{bmatrix} = \rho\underbrace{\left(\cos(\varphi)\vec{e_1} + \sin(\varphi)\vec{e_2}\right)}_{=\vec{e_\rho}}$

$= \rho\,\vec{e_\rho}$

(2) $\vec{H} = \frac{1}{\rho}\vec{e_\varphi}$

oben gesehen: $H_\rho = 0$, $H_\varphi = \frac{1}{\rho}$

$$\Rightarrow \text{div }\vec{H} = \frac{\partial H_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}H_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

Laplace-Operator in Polarkoordinaten

$f: D \to \mathbb{R}$ zweimal diffb. ($D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen)

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Eben gesehen: $\hat{=}\, v_\rho$ $\quad\hat{=}\, v_\varphi$

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e_\varphi}$$

$$\text{div }\vec{v} = \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}v_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\Rightarrow \Delta f = \text{div}(\text{grad } f) = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Beispiel:

$f = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^\alpha = \rho^\alpha$

$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \alpha\rho^{\alpha-1} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} = \alpha(\alpha-1)\rho^{\alpha-2}$

$$\Rightarrow \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

$$= \alpha(\alpha-1)\rho^{\alpha-2} + \frac{1}{\rho}\cdot\alpha\rho^{\alpha-1} + \frac{1}{\rho^2}\cdot 0$$

$$= (\alpha-1+1)\alpha\rho^{\alpha-2} = \alpha^2\rho^{\alpha-2}$$

Zylinderkoordinaten

Bei Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) im $\mathbb{R}^3$ benutzt man die Basis $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ mit $\vec{e}_z = \vec{e}_3$. Es ergeben sich die folgenden Formeln im $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} f &= \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z, \\
\operatorname{div} \vec{v} &= \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} v_\rho, \\
\operatorname{rot} \vec{v} &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \rho}\right)\vec{e}_\varphi \\
&\quad + \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\rho}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} v_\varphi\right)\vec{e}_z, \\
\Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.
\end{aligned}$$

Folie 127

Magnetfeld im $\mathbb{R}^3$

$\vec{H} = \frac{1}{\rho} \cdot \vec{e}_\varphi$

$\Rightarrow H_\rho = H_z = 0$ und $\frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} = 0$ da $H_\varphi = \frac{1}{\rho}$

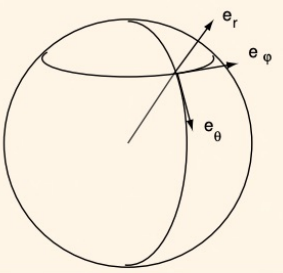
$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{H} = 0$

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0} + \vec{0} + \Big(\underbrace{\frac{\partial H_\varphi}{\partial \rho}}_{= -\frac{1}{\rho^2}} - \frac{1}{\rho}\underbrace{\frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi}}_{= 0} + \underbrace{\frac{1}{\rho} H_\varphi}_{= \frac{1}{\rho}\cdot\frac{1}{\rho}}\Big)\vec{e}_z = \vec{0}$$

Kugelkoordinaten

Bei Kugelkoordinaten verwendet man die Basis

$$\begin{aligned}
\vec{e}_r &= \frac{1}{r}(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) \\
\vec{e}_\theta &= \cos(\theta)\cos(\varphi)\vec{e}_1 + \cos(\theta)\sin(\varphi)\vec{e}_2 - \sin(\theta)\vec{e}_3 \\
\vec{e}_\varphi &= \frac{1}{r\sin(\theta)}(-y\vec{e}_1 + x\vec{e}_2).
\end{aligned}$$



Darstellung in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} f &= \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta, \\
\operatorname{div} \vec{v} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial(v_\theta \sin(\theta))}{\partial \theta}, \\
\operatorname{rot} \vec{v} &= \frac{1}{r\sin(\theta)}\left(\frac{\partial(v_\varphi \sin(\theta))}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_r \\
&\quad + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r v_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta \\
&\quad + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\varphi, \\
\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial\left(\sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)}{\partial \theta}.
\end{aligned}$$

17. VL Ana 2

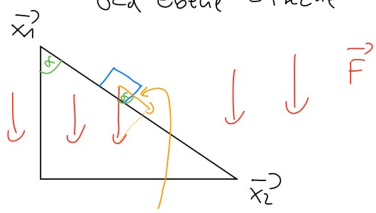
Vektorielles Kurvenintegral

Arbeitsintegral, vektorielles Kurvenintegral, vektorielles Streckenelement, Eigenschaften des Arbeitsintegrals, Integration von Potentialfeldern, geschlossene Kurve

Vektorielles Kurvenintegral

Ziel: Berechnung der verrichteten Arbeit (bzw. genauer des Energiegewinns) bei der Bewegung einer Masse in einem Kraftfeld

1. Fall: Konstantes Kraftfeld (homogen) und ebene Strecke



Komponente d. Kraft in Wegrichtung $= \|\vec{F}\| \cdot \cos(\delta)$

Arbeit = Kraft × Weg $(W = F \cdot s)$

Also gilt:

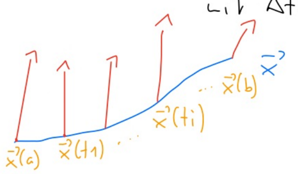
$$A = \|\vec{F}\| \cdot \cos(\delta) \cdot \|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|$$
$$= \langle \vec{F}, \vec{x}_2 - \vec{x}_1 \rangle$$

2. Fall: Allgemeines Kraftfeld entlang eines bel. Weges

Sei $\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetiges Vektorfeld und $\vec{x}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig diffbare Kurve (Kurve: Intervall $\to \mathbb{R}^n$)

($\vec{x}(t)$ ist z.B. Position eines Teilchens zum Zeitpunkt t)

Zerlege $[a,b]$: $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b$ mit $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, \dots, m$



Schreibe $\dot{\vec{x}}$ anstatt $\vec{x}'$, dann gilt

$$\dot{\vec{x}}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0)}{t - t_0}$$

da hier komp. Diffbarkeit mit $x_j: [a,b] \to \mathbb{R}$

Vor: Für eine hinreichend feine Zerlegung gilt für $i = 1, \dots, m$:

(i) $\vec{x}$ ist auf $[t_i, t_{i-1}]$ nahezu gerade

(ii) $\vec{F}$ ist auf der Verbindungsstrecke von $\vec{x}(t_i)$ und $\vec{x}(t_{i-1})$ nahezu konstant $\vec{F}(\vec{x}(t_i))$

$\Rightarrow$ Arbeit $A \overset{\text{1. Fall}}{\approx} \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{F}(\vec{x}(t_i)), \vec{x}(t_i) - \vec{x}(t_{i-1}) \rangle$

$$= \sum_{i=1}^{m} \Big\langle \vec{F}(\vec{x}(t_i)), \underbrace{\frac{\vec{x}(t_i) - \vec{x}(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}}_{\approx \dot{\vec{x}}(t_i)} \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{\Delta t_i} \Big\rangle$$

$$\underbrace{\approx \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{F}(\vec{x}(t_i)), \dot{\vec{x}}(t_i) \rangle \Delta t_i}_{\text{Riemannsche Summe Ana 1}}$$

$$\overset{m \to \infty}{\rightsquigarrow} \underbrace{\int_a^b \langle \vec{F}(\vec{x}(t_i)), \dot{\vec{x}}(t_i) \rangle \, dt}_{= A \text{ (Arbeit)}}$$

$$=: \int_{\vec{x}} \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

Punkt erinnern Soll an Skalarprodukt

Definition (Arbeitsintegral, vektorielles Kurvenintegral)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{F} = (F_1, \dots, F_n): D \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Ist $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n): [a,b] \to D$ eine stetig differenzierbare Kurve, dann heißt

$$\int_{\vec{x}} \vec{F} \cdot \vec{ds} := \int_a^b \langle \vec{F}(\vec{x}(t)), \dot{\vec{x}}(t) \rangle \, dt$$

Kurvenintegral des Vektorfeldes $\vec{F}$ entlang der Kurve $\vec{x}$.

$\vec{ds}$ heisst **vektorielles Streckenelement**.

Statt $\int_{\vec{x}} \vec{F} \cdot \vec{ds}$ schreibt man auch $\int_{\vec{x}} \langle \vec{F}, \vec{ds} \rangle$.

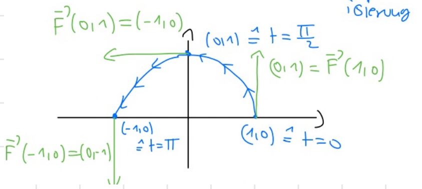
Beispiel

Betrachte $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$ entlang einer Kurve

(1) Kurve: Obere Einheitshalbkreis

$\vec{x}: [0, \pi] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$ ← Parametrisierung

↳ beschreibt den oberen Einheitshalbkreis



$$\Rightarrow \int_{\vec{x}} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_0^{\pi} \langle \vec{F}(\vec{x}(t)), \dot{\vec{x}}(t) \rangle \, dt$$

$$= \int_0^{\pi} \left\langle \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \int_0^{\pi} \underbrace{\sin^2(t) + \cos^2(t)}_{=1} \, dt$$

$$= \int_0^{\pi} 1 \, dt = t \Big|_0^{\pi} = \pi > 0$$

↑ Energiegewinn!

(2) Kurve: Andere Parametrisierung des oberen Einheitshalbkreises

$\vec{x}: [0, \sqrt{\pi}] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{bmatrix} \cos(t^2) \\ \sin(t^2) \end{bmatrix}$

z.B. $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{x}(\sqrt{\pi}) = \begin{bmatrix} \cos(\pi) \\ \sin(\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

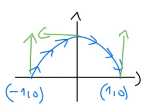
$$\Rightarrow \int_{\vec{x}} \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

$$= \int_0^{\sqrt{\pi}} \left\langle \begin{bmatrix} -\sin(t^2) \\ \cos(t^2) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin(t^2) \cdot 2t \\ \cos(t^2) \cdot 2t \end{bmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \int_0^{\sqrt{\pi}} \underbrace{(\sin^2(t^2) + \cos^2(t^2))}_{=1} 2t \, dt$$

$$= t^2 \Big|_0^{\sqrt{\pi}} = \pi$$

(3) Kurve: Entgegengesetzte Richtung (immer noch der E.h.k.)



Geeignete Parametrisierung

$\vec{x}: [0, \pi] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{bmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$

$\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{x}(\pi) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \int_{\vec{x}} \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

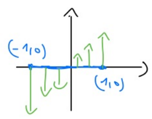
$$= \int_0^{\pi} \left\langle \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \int_0^{\pi} (-\sin^2(t) - \cos^2(t)) \, dt$$

$$= -\int_0^{\pi} 1 \, dt = -\pi$$

(4) Nehmen anderen Weg zwischen $(-1,0)$ und $(1,0)$

$\vec{x}: [0,2] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{bmatrix}1-t\\0\end{bmatrix}$



Laut Skizze: $\int_{\vec{x}} \vec{F}\cdot\vec{ds} = 0$

$$\Rightarrow \int_{\vec{x}} \vec{F}\cdot\vec{ds} = \int_0^2 \left\langle \begin{bmatrix}0\\1-t\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}\right\rangle dt = 0$$

Eigenschaften des Arbeitsintegrals (vektoriellen Kurvenintegrals)

(1) Der Wert des Kurvenintegrals ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung (bei gleichem Durchlaufsinn).

(2) Die Umkehrung des Durchlaufsinns kehrt das Vorzeichen eines Kurvenintegrals um.

(3) Der Wert eines Kurvenintegrals hängt i.A. (Ausnahme nächste Folie) nicht nur von Anfangs und Endpunkt ab, sondern vom genauen Verlauf des Weges.

zu (1)

Seien $\vec{x_1}: [a,b] \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto \vec{x_1}(t)$

$\vec{x_2}: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto \vec{x_2}(t)$

2 Parametr. (stetig diffbar)

Betrachte stetig diffb. Hilfsfunktion h mit $h(\alpha)=a$, $h(\beta)=b$

$$\begin{tikzcd} {[\alpha,\beta]} \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend right, "\vec{x_2}"'] & {[a,b]} \arrow[r, "\vec{x_1}"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \vec{x_2} := \vec{x_1} \circ h \Rightarrow \dot{\vec{x_2}}(t) = \dot{\vec{x_1}}(h(t)) \cdot \dot{h}(t)$

$\Rightarrow \vec{x_2}(\alpha) = \vec{x_1}(h(\alpha)) = \vec{x_1}(a)$

$\vec{x_2}(\beta) = \vec{x_1}(h(\beta)) = \vec{x_1}(b)$

$$\Rightarrow \int_{\vec{x_2}} \vec{F}\cdot\vec{ds} = \int_\alpha^\beta \langle \vec{F}(\vec{x_2}(t)), \dot{\vec{x_2}}(t)\rangle dt$$

$$= \int_\alpha^\beta \langle \vec{F}(x_1(h(t))), \dot{\vec{x_1}}(h(t)) \cdot \dot{h}(t)\rangle dt$$

$$= \int_\alpha^\beta \langle \vec{F}(x_1(h(t))), \dot{\vec{x_1}}(h(t))\rangle\, \dot{h}(t)\, dt$$

Subst. regel, $\tau = h(t)$, $d\tau = \dot{h}(t)\,dt$:

$$\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} \langle \vec{F}(\vec{x_1}(\tau)), \dot{\vec{x_1}}(\tau)\rangle d\tau$$

$$= \int_a^b \langle \vec{F}(\vec{x_1}(\tau)), \dot{\vec{x_1}}(\tau)\rangle d\tau$$

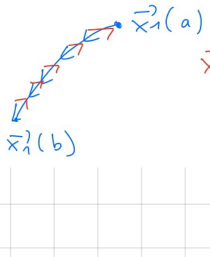
$$= \int_{\vec{x_1}} \vec{F}\cdot\vec{ds}$$

zu (2)

Betrachte $h, \vec{x_1}, \vec{x_2}$ wie in (1) mit

$h(\alpha) = b \Rightarrow \vec{x_2}(\alpha) = \vec{x_1}(h(\alpha)) = \vec{x_1}(b)$

$h(\beta) = a$, $\vec{x_2}(\beta) = \vec{x_1}(h(\beta)) = \vec{x_1}(a)$



$\vec{x_2} = \vec{x_1} \circ h$

$$\Rightarrow \int_{\vec{x_2}} \vec{F}\cdot\vec{ds} = \dots \text{ wie oben} \dots$$

$$= \int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} \langle \vec{F}(\vec{x_1}(\tau)), \dot{\vec{x_1}}(\tau)\rangle d\tau$$

$$= \int_b^a \langle \vec{F}(\vec{x_1}(\tau)), \dot{\vec{x_1}}(\tau)\rangle d\tau$$

$$= -\int_a^b \langle \vec{F}(\vec{x_1}(\tau)), \dot{\vec{x_1}}(\tau)\rangle d\tau$$

$$= -\int_{\vec{x_1}} \vec{F}\cdot\vec{ds} \qquad \square$$

Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen von Potentialfeldern

Sei $\vec{v}: D \to \mathbb{R}^n$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen) ein Potentialfeld, d.h. es existiert eine diffb. Fkt. $f: D \to \mathbb{R}$ mit $\vec{v} = -\operatorname{grad} f$, d.h.

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = -\operatorname{grad} f = \begin{bmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ -\frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Sei $\vec{x}: [a,b] \to D$ eine stetig diffb. Kurve. Dann gilt:

$$\int_{\vec{x}} \vec{v}\cdot\vec{ds} = \int_a^b \langle \vec{v}(\vec{x}(t)), \dot{\vec{x}}(t)\rangle dt$$

$$= \int_a^b \sum_{i=1}^m v_i(\vec{x}(t)) \cdot \dot{x}_i(t)\, dt$$

$$= -\int_a^b \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}(t)) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t}(t)\, dt$$

Für $f \circ \vec{x}: [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{\partial (f\circ\vec{x})}{\partial t}(t) \overset{\text{Kettenregel Ana 2}}{=} \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}(t)) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t}(t)$$

$$= -\int_a^b \frac{\partial (f\circ\vec{x})}{\partial t}(t)\, dt$$

$$\overset{\text{Hauptsatz Ana}}{=} -f(\vec{x}(t))\Big|_a^b = -f(\vec{x}(b)) + f(\vec{x}(a))$$

Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen von Potentialfeldern

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \to \mathbb{R}$ ein Potential von $\vec{v}: D \to \mathbb{R}^n$ (d.h. $\vec{v} = -\operatorname{grad} f$) und $\vec{x}: [a,b] \to D$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_{\vec{x}} \vec{v}\cdot\vec{ds} = f(\vec{x}(a)) - f(\vec{x}(b)),$$

d.h. für Potentialfelder ist das Arbeitsintegral wegunabhängig (hängt nur von Anfangs- und Endpunkt ab).

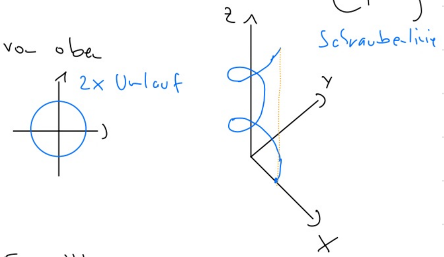
Wenn $\vec{x}$ zusätzlich eine **geschlossene Kurve** ist (d.h. $\vec{x}(a) = \vec{x}(b)$), so gilt

$$\int_{\vec{x}} \vec{v}\cdot\vec{ds} = 0.$$

Folie 133

$\vec{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto \begin{bmatrix} y \\ x \\ -3z^2 \end{bmatrix}$

$\vec{x}: [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix}$



Es gilt:

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{bmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 1-1 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

Da $\mathbb{R}^3$ offen und konvex:

$\vec{v}$ ist Potentialfeld, d.h. $\vec{v} = -\operatorname{grad} u$ mit

$u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto z^3 - xy$ (Übung)

$$\Rightarrow \int_{\vec{x}} \vec{v}\cdot\vec{ds} = u(\underbrace{\vec{x}(0)}_{=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}) - u(\underbrace{\vec{x}(4\pi)}_{=\begin{bmatrix}1\\0\\4\pi\end{bmatrix}})$$

$$= 0 - (4\pi)^3 = -64\pi^3$$