Linda Li 458029
Xiang Li 478592
Yilong Wang 483728
Gruppen: Saef 1

Hausaufgabe 8.1 (5=2+2+1 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} c_1, & -2 \le x < 0; \\ c_2 x, & 0 \le x \le 1; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Bestimmen Sie die Konstanten c_1 und c_2, so dass f eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist, und die zugehörige Zufallsvariable den Erwartungswert 0 hat.

(ii) Berechnen Sie die Varianz von der zugehörigen Zufallsvariable mit der Dichte f.

(iii) Skizzieren Sie die Dichte f und die zu f gehörige kumulative Verteilungsfunktion F.

(i)
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} c_1\,dx + \int_{0}^{1} c_2 x\,dx = c_1 x\Big|_{-2}^{0} + \frac{1}{2}c_2 x^2\Big|_{0}^{1} = 2c_1 + \frac{1}{2}c_2 = 1$$

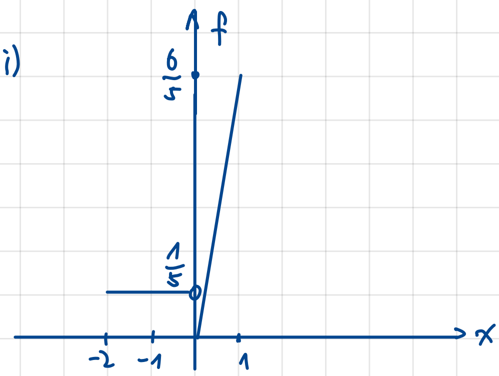
$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} c_1 x\,dx + \int_{0}^{1} c_2 x^2\,dx = \frac{1}{2}c_1 x^2\Big|_{-2}^{0} + \frac{1}{3}c_2 x^3\Big|_{0}^{1} = -2c_1 + \frac{1}{3}c_2 = 0$$

$$\begin{cases} 2c_1 + \frac{1}{2}c_2 = 1 \\ -2c_1 + \frac{1}{3}c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{5} \\ c_2 = \frac{6}{5} \end{cases}$$

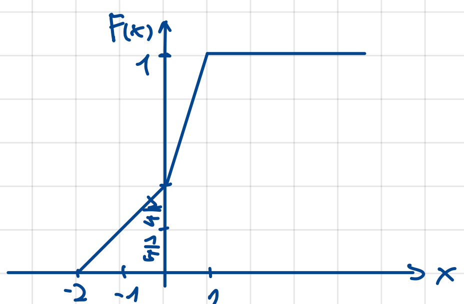
(ii)
$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} \frac{1}{5}\cdot x^2\,dx + \int_{0}^{1} \frac{6}{5}\cdot x^3\,dx = \frac{1}{15}x^3\Big|_{-2}^{0} + \frac{6}{20}\cdot x^4\Big|_{0}^{1} = \frac{8}{15} + \frac{6}{20} = \frac{16}{30} + \frac{9}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{5}{6} - 0 = \frac{5}{6}$$

(iii)



$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ \int_{-2}^{x} \frac{1}{5}\,dt = \frac{1}{5}t\Big|_{-2}^{x} = \frac{1}{5}(x+2) & -2 \le x < 0 \\ \int_{-2}^{0} \frac{1}{5}\,dt + \int_{0}^{x} \frac{6}{5}t\,dt = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}t^2\Big|_{0}^{x} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}x^2 & 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$



Hausaufgabe 8.2 VL - 12 (5=1+3+1 Punkte)

Seien X, Y zwei unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariabeln.

(i) Bestimmen Sie die gemeinsame Dichte $f_{(X,Y)}$.

(ii) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $R = X^2 + Y^2$ und seine Dichte.

Hinweis: Das zweidimensionale Integral einer Funktion $g(x^2 + y^2)$ über die Kreisfläche $B(0, \sqrt{r}) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq r\}$ kann wie folgt durch ein eindimensionales Integral ausgedrückt werden:

$$\int_{B(0,\sqrt{r})} g(x^2 + y^2)\, dx dy = 2\pi \int_0^{\sqrt{r}} g(\rho^2)\rho\, d\rho$$

(iii) Geben Sie $\mathbb{E}[R]$ und $\text{Var}[R]$ an.

(i) $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

(ii) $F_R(r) = \mathbb{P}(R \leq r) = \mathbb{P}(X^2+Y^2 \leq r)$

$$= \int_{B(0,\sqrt{r})} \cdot f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{B(0,\sqrt{r})} \cdot \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\, dx\,dy$$

$$= \cancel{2\pi} \cdot \int_0^{\sqrt{r}} \frac{1}{\cancel{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\rho^2)} \cdot \rho\, d\rho$$

$$= \int_0^{\sqrt{r}} \rho \cdot e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho$$

$$= -e^{-\frac{1}{2}\rho^2} \Big|_0^{\sqrt{r}} = 1 - e^{-\frac{1}{2}r} \quad \text{für } r \geq 0$$

$$\Rightarrow F_R(r) = \begin{cases} 0 & r < 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{2}r} & r \geq 0 \end{cases}$$

$$f(r) = F_R'(r) = \begin{cases} 0 & r < 0 \\ \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}r} & r \geq 0 \end{cases}$$

(iii) $\mathbb{E}[R] = \underline{\int_0^\infty \frac{1}{2} r e^{-\frac{1}{2}r} dr} = \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-\frac{1}{2}r} \cdot r \right]_0^b - \int_0^\infty -e^{-\frac{1}{2}r} dr$

$$= 0 + \lim_{b\to\infty} \left[-2e^{-\frac{1}{2}r} \right]_0^b$$

$$= 2$$

$$\mathbb{E}[R^2] = \int_0^\infty \frac{1}{2} r^2 e^{-\frac{1}{2}r} dr = \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-\frac{1}{2}r} \cdot r^2 \right]_0^b - \int_0^\infty -e^{-\frac{1}{2}r} \cdot 2r\, dr$$

$$= \int_0^\infty 2r e^{-\frac{1}{2}r} dr = 4 \cdot \int_0^\infty \frac{1}{2} r e^{-\frac{1}{2}r} dr$$

$$= 4 \cdot 2 = 8$$

$$\mathbb{V}[R] = \mathbb{E}[R^2] - \mathbb{E}[R]^2 = 8 - 4 = 4$$

iii) oder : ?

R ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Für exponentialverteilung gelten :

$$\mathbb{E}[R] = \frac{1}{\lambda} = 2$$

$$\mathbb{V}[R] = \frac{1}{\lambda^2} = 4$$

Hausaufgabe 8.3 (4=1+1+2 Punkte)

Die Körpergröße der Mitglieder eines Eishockey-Teams der Männer ist normalverteilt mit Erwartungswert 180 cm und Standardabweichung 6 cm.

(i) Sei X die Zufallsvariable, welche die Körpergröße eines Team-Mitglieds darstellt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Team-Mitglied bei diesem Kurs größer als 192 cm?

(ii) *Prüfung der Modellierung:* Ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Team-Mitglied eine negative Körpergröße hat ($X < 0$), kleiner als 0.0003?

(iii) Angenommen, die Körpergrößen von zwei unterschiedlichen Team-Mitgliedern sind unabhängig. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der beiden Körpergrößen mindestens 372 cm ist?

Hinweis: Wenden Sie die Standardisierung auf X an und lesen Sie die gesuchten Werte in der angehängten Tabelle ab.

(i) $\mu = 180 \quad \delta = 6$

Sei $z = \frac{x-180}{\delta} = \frac{1}{6}x - 30$

$\mathbb{P}(X > 192) = \mathbb{P}(Z > \frac{192}{6} - 30) = \mathbb{P}(Z > 2)$

$= 1 - \mathbb{P}(Z \leq 2)$

$= 1 - 0{,}97725 = 0{,}02275$

(ii) $\mathbb{P}(X<0) = \mathbb{P}(Z < -30) < \mathbb{P}(Z < -3{,}49) = 1 - \mathbb{P}(Z < 3{,}49) = 1 - 0{,}9998 = 0{,}0002 < 0{,}0003$

(iii) Sei X_1, X_2 ZVen, welche die Körpergrößen von 2 unterschiedlichen Team-Mitglied dargestellt.

$S = X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\underbrace{\mu_1 + \mu_2}_{360}, \underbrace{\delta_1^2 + \delta_2^2}_{72})$, da X_1, X_2 unabhängig sind

$\mu_S = 360 \quad \delta_S = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \simeq 8{,}485$

$\mathbb{P}(S \geq 372) = \mathbb{P}(z \geq \frac{372 - 360}{8{,}485}) = \mathbb{P}(z \geq 1{,}414)$

$= 1 - \mathbb{P}(z < 1{,}414)$

$= 1 - 0{,}9207 = 0{,}0783$

Hausaufgabe 8.4 (6=3+3 Punkte)

Seien $Y_1, Y_2, \dots$ unabhängig und exponential-verteilt mit Parameter $\lambda = 1$. Sei $u > 0$ sowie

$$X_k := \begin{cases} 1 & \text{falls } Y_k > u \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Bestimmen Sie (mit Begründung)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \ ,$$

, wobei der Grenzwert bezüglich stochastischer Konvergenz zu verstehen ist.

Hinweis: Stochastische Konvergenz, wie in der Vorlesung beim Gesetz der großen Zahlen definiert worden ist.

(ii) Sei nun $u = \ln(2)$. Zeigen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_k \le \sqrt{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

(i) $Y_k \sim E(\lambda = 1)$

$$f(y) = \begin{cases} e^{-x} & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(Y_k > u) = \int_u^\infty e^{-x}\,dy = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_u^b = 0 + e^{-u} = e^{-u}$$

d.h. $X_k \sim \text{Bernoulli}(p = e^{-u})$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = E[X_k] = e^{-u}$$

(ii) $E[X_k] = e^{-u} = e^{-\ln 2} = \frac{1}{2} = \mu$ $\qquad \mathbb{V}[X_k] = e^{-u}(1 - e^{-u}) = \frac{1}{4}$

$\qquad s = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

Gemäß des zentralen Grenzwertsatzes, haben wir:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \le 0\right) = \Phi(0)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} 2X_k\right) - n\right] \le 0\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} 2X_k - \sqrt{n} \le 0\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_k \le \sqrt{n}\right) = \frac{1}{2}$$