operations research
QUANTITATIVE INFRASTRUKTURSYSTEMMODELLIERUNG

Tutorium

Operations Research – Grundlagen

Technische Universität Berlin
Fachgebiet **W**irtschafts- und **I**nfrastruktur**P**olitik

operations research
QUANTITATIVE INFRASTRUKTURSYSTEMMODELLIERUNG

Tutorium

Operations Research – Grundlagen

Technische Universität Berlin
Fachgebiet **W**irtschafts- und **I**nfrastruktur**P**olitik

Dualität und Komplementärer Schlupf

Tutoriumsaufgaben:

2.20	Dualitätssätze
2.22	Dualproblem
2.28	Komplementärer Schlupf II

Freiwillige Hausaufgabe:

2.24	Oriana baut Lithium-Ionen-Batterien
2.27	Komplementärer Schlupf I

Dualität – Einführendes Beispiel

Max hat sich für eine neue Karriere als Schreiner entschieden. Da er zwei linke Hände besitzt kann er nur Regale und Schränke bauen. Trotzdem kann er seine Regale für 100 Euro und seine Schränke für 150 Euro verkaufen. Der Materialbedarf kann der folgenden Tabelle entnommen werden:

	Regal (x_1)	Schrank (x_2)	Lagerbestand
Bretter (u_1)	10	16	100
Nägel (u_2)	120	60	1000
Lackdosen (u_3)	1	1	5

Max möchte seinen Profit maximieren. Wie viele Regale und Schränke soll er bauen? Was ist sein maximaler Profit?

- **LP:**

$$
\begin{array}{rcrlclll}
\max z_P & = & 100 & x_1 & + & 150 & x_2 & & \\
s.t. & & 10 & x_1 & + & 16 & x_2 & \leq & 100 \\
 & & 120 & x_1 & + & 60 & x_2 & \leq & 1000 \\
 & & & x_1 & + & & x_2 & \leq & 5 \\
 & & & & & & x_{1,2} & \geq & 0
\end{array}
$$

Dualität – Einführendes Beispiel

Annahme: Alles was Max verkaufen will, wird auch verkauft! Die Nachfrage ist in jeden Fall hoch genug!

Max Mutter hat eine Farm gekauft und er soll dort aushelfen. Daher steht Max nun vor folgender Entscheidung:

- Soll er seine Materialien (Bretter, Nägel & Dosen Lack) verkaufen oder die restlichen Regale und Schränke anfertigen und diese verkaufen?
- Ab welchen Verkaufspreisen lohnt es sich für Max seine Materialien zu verkaufen?

u_1: „Mindestverkaufspreis eines Brettes“

u_2: „Mindestverkaufspreis eines Nagels“

u_3: „Mindestverkaufspreis einer Dose Lack“

Dualität – Einführendes Beispiel

- Soll er seine Materialien (Bretter, Nägel & Dosen Lack) verkaufen oder die restlichen Regale und Schränke anfertigen und diese verkaufen?
- Ab welchen Verkaufspreisen lohnt es sich für Max seine Materialien zu verkaufen?

u_1: „Mindestverkaufspreis eines Brettes“

u_2: „Mindestverkaufspreis eines Nagels“

u_3: „Mindestverkaufspreis einer Dose Lack“

- Mit einem Regal verdient Max 100€. Dafür benötigt er:
  - 10 Bretter
  - 120 Nägel
  - 1 Dose Lack
    - Er muss also 10 Bretter, 120 Nägel und 1 Dose Lack zusammen für mindestens 100€ verkaufen, damit mindestens genau so viel verdient als wenn er die Regale produziert und verkauft. (Annahme: Produktionskosten irrelevant)

    - NB1: $10u_1 + 120\,u_2 + u_3 \geq 100$

Dualität – Einführendes Beispiel

- Soll er seine Materialien (Bretter, Nägel & Dosen Lack) verkaufen oder die restlichen Regale und Schränke anfertigen und diese verkaufen?
- Ab welchen Verkaufspreisen lohnt es sich für Max seine Materialien zu verkaufen?

u_1: „Mindestverkaufspreis eines Brettes“

u_2: „Mindestverkaufspreis eines Nagels“

u_3: „Mindestverkaufspreis einer Dose Lack“

- Schrank analog...
  - NB2: $16u_1 + 60\,u_2 + u_3 \geq 150$

- Max möchte die minimalen Verkaufspreise für seine Materialien ermitteln. Ab diesen Preisen lohnt es sich für ihn die Materialien direkt, anstatt der produzierten Regalen und Schränke, zu verkaufen.
  - Der Gesamtwert (ZF-Wert) ergibt sich aus $Verkaufspreis\ *\ Lagerbestand$
    - ZF: $\min z_d = 100u_1 + 1000u_2 + 5u_3$

Dualität – Einführendes Beispiel

- Soll er seine Materialien (Bretter, Nägel & Dosen Lack) verkaufen oder die restlichen Regale und Schränke anfertigen und diese verkaufen?
- Ab welchen Verkaufspreisen lohnt es sich für Max seine Materialien zu verkaufen?

u_1: „Mindestverkaufspreis eines Brettes“

u_2: „Mindestverkaufspreis eines Nagels“

u_3: „Mindestverkaufspreis einer Dose Lack“

$$
\begin{array}{llrlrlrlcrl}
\min z_D & = & 100 & u_1 & + & 1000 & u_2 & + & 5 & u_3 & & & \\
s.t. & & 10 & u_1 & + & 120 & u_2 & + & & u_3 & \geq & 100 & (4) \\
 & & 16 & u_1 & + & 60 & u_2 & + & & u_3 & \geq & 150 & (5) \\
 & & & & & & & & & u_{1...3} & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Dualität – Einführendes Beispiel

Ausgangs LP (primal):

$$
\begin{array}{lcrlclcl}
\max z_P & = & 100 & x_1 & + & 150 & x_2 & & \\
s.t. & & 10 & x_1 & + & 16 & x_2 & \leq & 100 \\
 & & 120 & x_1 & + & 60 & x_2 & \leq & 1000 \\
 & & & x_1 & + & & x_2 & \leq & 5 \\
 & & & & & & x_{1,2} & \geq & 0
\end{array}
$$

Neue LP (dual):

$$
\begin{array}{lcrlcrlcrlcll}
\min z_D & = & 100 & u_1 & + & 1000 & u_2 & + & 5 & u_3 & & & \\
s.t. & & 10 & u_1 & + & 120 & u_2 & + & & u_3 & \geq & 100 & (4) \\
 & & 16 & u_1 & + & 60 & u_2 & + & & u_3 & \geq & 150 & (5) \\
 & & & & & & & & & u_{1\ldots3} & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Was für Ähnlichkeiten erkennt ihr?

Dualität

Definition

Sei folgendes Maximierungsproblem gegeben:

$$\begin{array}{llll} \max z = & c^T & x & \\ s.t. & A & x \leq & b \\ & & x \geq & 0 \end{array}$$

allg. Form min

$\geq$ ~~0~~ const

max

Dann heißt das folgende Problem dazu das **duale Problem**:

$$\begin{array}{llll} \min z_D = & b^T & u & \\ s.t. & A^T & u \geq & c \\ & & u \geq & 0 \end{array}$$

Achtung!

- **Das primale Problem kann auch ein Minimierungsproblem sein. In diesem Fall ist das dazugehörige duale Problem ein Maximierungsproblem.**
- **Es können auch andere Ungleichzeichen in den NB des primalen und denen des dualen LPs auftauchen.**
- **Die Variablen können einen anderen Definitionsbereich haben**

2.22 Dualproblem I

Gegeben ist folgendes primales LP. Bitte stellen Sie das duale LP auf.

$$
\begin{array}{llllllll}
\max\ z_P = & 2\cdot x_1- & 4\cdot x_2+ & 11\cdot x_3+ & 13\cdot x_4+ & 2\cdot x_5 & & \\
\text{s.t.} & 0\cdot x_1- & 0\cdot x_2- & 2\cdot x_3+ & 0\cdot x_4- & 1\cdot x_5 & \leq & 3\\
 & 3\cdot x_1+ & 7\cdot x_2+ & 5\cdot x_3- & 2\cdot x_4+ & 0\cdot x_5 & \leq & 6\\
 & 0\cdot x_1- & 15\cdot x_2- & 0\cdot x_3+ & 0\cdot x_4- & 2\cdot x_5 & \leq & 7\\
 & 6\cdot x_1- & 0\cdot x_2- & 2\cdot x_3+ & 2\cdot x_4+ & 3\cdot x_5 & \geq & -4\\
 & 4\cdot x_1+ & 12\cdot x_2+ & 7\cdot x_3- & 1\cdot x_4- & 4\cdot x_5 & = & -1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
x_{1,3} & \leq 0\\
x_{2,4} & \geq 0\\
x_5 & \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

Maximierungsproblem	Minimierungsproblem
Zielfunktion:	Zielfunktion:
max $F_{Max}(x)$	min $F_{Min}(u)$
Nebenbedingungen:	Variablen:
i-te NB: ≤	$u_i \geq 0$
i-te NB: ≥	$u_i \leq 0$
i-te NB: =	$u_i \in \mathbb{R}$
Variablen:	Nebenbedingungen:
$x_j \geq 0$	j-te NB: ≥
$x_j \leq 0$	j-te NB: ≤
$x_j \in \mathbb{R}$	j-te NB: =

Duales Problem:

$$
\begin{array}{llllllll}
\min z_D = & 3\cdot u_1+ & 6\cdot u_2+ & 7\cdot u_3- & 4\cdot u_4- & 1\cdot u_5 & & \\
\text{s.t.} & 0\cdot u_1+ & 3\cdot u_2+ & 0\cdot u_3+ & 6\cdot u_4+ & 4\cdot u_5 & \leq & 2\\
 & 0\cdot u_1+ & 7\cdot u_2- & 15\cdot u_3- & 0\cdot u_4+ & 12\cdot u_5 & \geq & -4\\
 & -2\cdot u_1+ & 5\cdot u_2- & 0\cdot u_3- & 2\cdot u_4+ & 7\cdot u_5 & \leq & 11\\
 & 0\cdot u_1- & 2\cdot u_2+ & 0\cdot u_3+ & 2\cdot u_4- & 1\cdot u_5 & \geq & 13\\
 & -1\cdot u_1+ & 0\cdot u_2- & 2\cdot u_3+ & 3\cdot u_4- & 4\cdot u_5 & = & 2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
u_{1,2,3} & \geq 0\\
u_4 & \leq 0\\
u_5 & \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

2.20 Dualitätssätze

a) Erklären Sie den Begriff der starken Dualität.

Starke Dualität

Sei $(x_1, ..., x_k)$ optimale Lösung von A und $(u_1, ..., u_n)$ optimale Lösung des dualen Problems B von A. Dann gilt $z(x_1, ..., x_k) = z_D(u_1, ..., u_n)$.

b) Erklären Sie den Begriff der schwachen Dualität.

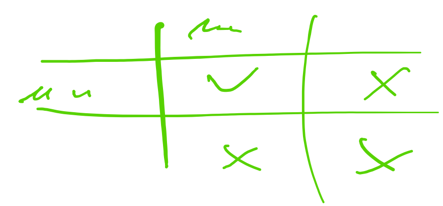
Schwache Dualität

$\rightarrow u \in \mathbb{R}^3_+$

Sei $(x_1,...,x_k)$ zulässige Lösung von A und $(u_1,...,u_n)$ zulässige Lösung des dualen Problems B von A. Dann gilt $z(x_1, ..., x_k) \leq z_D(u_1, ..., u_n)$ unter der Voraussetzung, dass A ein Maximierungsproblem ist. (Min: '≥')

Wenn P unbeschränkt => D hat keine zulässige Lösung

Wenn D unbeschränkt => P hat keine zulässige Lösung



Umkehrsatz ist notwendig, aber nicht hinreichend!

2.20 Dualitätssätze

c) Wie ändert sich der Zielfunktionswert, wenn man eine Nebenbedingung des Dualproblems um eine Einheit lockert?

Definition

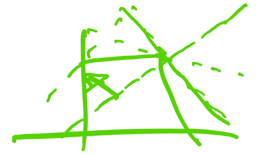
Sei folgendes Maximierungsproblem gegeben:

$$\begin{aligned} \max z &= c^T x \\ s.t. \quad & A x \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Dann heißt das folgende Problem dazu das **duale Problem**:

$$\begin{aligned} \min z_D &= b^T u \\ s.t. \quad & A^T u \geq c \\ & u \geq 0 \end{aligned}$$

2.20 Dualitätssätze



c) Wie ändert sich der Zielfunktionswert, wenn man eine Nebenbedingung des Dualproblems um eine Einheit lockert?

Lockert man eine Nebenbedingung im Dualproblem um eine Einheit, so ändert sich auch der zugehörige Zielfunktionskoeffizient im primalen Problem. Dies bedeutet, dass sich die Steigung der Zielfunktion ändert.

- Die Veränderung der Steigung der Zielfunktion führt zu keiner Veränderung in der optimalen Lösung (quantitative Änderung). Somit kann man den veränderten Zielfunktionswert berechnen, indem man die bereits gefundene optimale Lösung in die neue Zielfunktion einsetzt.
- Die Veränderung der Steigung der Zielfunktion führt dazu, dass die bereits gefundene optimale Lösung unter den neuen Voraussetzungen nicht mehr optimal ist (qualitative Änderung). In diesem Fall muss das Problem erneut gelöst werden, um den veränderten Zielfunktionswert zu bestimmen.

➢ Um herauszufinden, in welchem der beiden Fälle man sich befindet, muss man eine Sensitivitätsanalyse durchführen.

对偶性定理
c) 当我们将对偶问题的一个约束条件放宽一单位时，目标函数值会发生什么变化?
当在对偶问题中放宽一个约束条件一单位时，原始问题中相应的目标函数系数也会发生变化。这意味着目标函数的斜率会发生变化。
目标函数斜率的变化不会导致最优解的变化（定量变化）。因此，我们可以通过将已找到的最优解代入新的目标函数中来计算变化后的目标函数值。
目标函数斜率的变化会导致在新的条件下已找到的最优解不再是最优的（定性变化）。在这种情况下，需要重新解决问题，以确定变化后的目标函数值。

Komplementärer Schlupf

- **Verbindung zwischen primalen und dualen Variablen**
- **"i.-te Schlupfvariable des Primalproblems ist orthogonal zur i.-ten Strukturvariable des Dualproblems."**

$$\boldsymbol{u_d \cdot x_p = 0}$$

d: Dual
p: Primal

Gilt nur für u_d und x_p, die zusammengehören

$$(\underbrace{x_1, \dots, x_p}_{p \text{ Str. Var.}}, \underbrace{x_{p+1}, \dots, x_{p+m}}_{m \text{ Schlupfvar.}}) \longleftrightarrow (\underbrace{u_1, \dots, u_m}_{m \text{ Str. Var.}}, \underbrace{u_{m+1}, \dots, u_{m+p}}_{\text{Schlupfvar.}})$$

$$\cancel{x_1 \perp u_1}$$

$$x_1 \perp u_{m+1}$$

Komplementärer Schlupf

$$u_d \cdot x_p = 0$$

d: Dual
p: Primal

Gilt nur für u_d und x_p, die zusammengehören

Primales Problem

$$
\begin{array}{llllll}
\max z = & 10\,x_1 & + 20\,x_2 & & & \\
s.t. & 1\,x_1 & + 1\,x_2 & \leq 100 & (1) & x_3 \perp u_1 \\
 & 6\,x_1 & + 9\,x_2 & \leq 720 & (2) & x_4 \perp u_2 \\
 & & 1\,x_2 & \leq 60 & (3) & x_5 \perp u_3 \\
 & & x_{1,2} & \geq 0 & &
\end{array}
$$

Duales Problem

$$
\begin{array}{llllll}
\min z_D = & 100\,u_1 & + 720\,u_2 & + 60\,u_3 & & \\
s.t. & 1\,u_1 & + 6\,u_2 & + 0\,u_3 & \geq 10 \; (1) & u_4 \perp x_1 \\
 & 1\,u_1 & + 9\,u_2 & + 1\,u_3 & \geq 20 \; (2) & u_5 \perp x_2 \\
 & & & u_{1,\dots,3} & \geq 0 &
\end{array}
$$

$x_3 \perp u_1$; $x_4 \perp u_2$; $x_5 \perp u_3$; $x_1 \perp u_4$; $x_2 \perp u_5$
gehören zusammen

Komplementärer Schlupf

$$\boldsymbol{u_d \cdot x_p = 0}$$

d: Dual
p: Primal

Gilt nur für u_d und x_p, die zusammengehören

Primales Problem

$$\begin{aligned}
\max z &= 10\ x_1 + 20\ x_2 \\
s.t.\quad & 1\ x_1 + 1\ x_2 \le 100\ (1) \quad x_3 \perp u_1 \\
& 6\ x_1 + 9\ x_2 \le 720\ (2) \\
& 1\ x_2 \le 60\ (3) \\
& x_{1,2} \ge 0
\end{aligned}$$

Duales Problem

$$\begin{aligned}
\min z_D &= 100\ u_1 + 720\ u_2 + 60\ u_3 \\
s.t.\quad & 1\ u_1 + 6\ u_2 + 0\ u_3 \ge 10\ (1) \\
& 1\ u_1 + 9\ u_2 + 1\ u_3 \ge 20\ (2) \\
& u_{1,\dots,3} \ge 0
\end{aligned}$$

z.B.
NB1 des primalen Problems ≙ Nägel
x_3 ≙ Schlupfvariable der NB1 ≙ verbleibende Nägel
u_1 ≙ Zahlungsbereitschaft für mehr Nägel

$x_3 > 0 \Rightarrow u_1 = 0$
Zahlungsbereitschaft für mehr Nägel (u_1) = 0, da wir noch Nägel im Lager haben ($x_3 > 0$)

Komplementärer Schlupf

$$u_d \cdot x_p = 0$$

d: Dual
p: Primal

Gilt nur für u_d und x_p, die zusammengehören

Was bringt uns das jetzt?

- Sobald eine der beiden Variablen positiv ist, ist die dazugehörige andere Variable = 0.

$$u_d > 0 \Rightarrow x_p = 0 \quad \text{oder} \quad x_p > 0 \Rightarrow u_d = 0$$

- Dies gilt nicht andersherum!

$$u_d = 0 \nRightarrow x_p > 0 \quad \text{oder } x_p = 0 \nRightarrow u_d > 0$$

2.28 Komplementärer Schlupf II

Finden Sie die Lösung des abgebildeten Primalproblems mit Hilfe des Komplementären Schlupfes.

Die Optimallösung des zugehörigen dualen Problems lautet **u_2 =5**, **u_4 =200**, **u_5 =250**.

≥ 0 $\quad \geq 0$ $\quad \geq 0$?

$$
\begin{array}{lrrrrl}
\min\ z_P = & 100x_1+ & 200x_2+ & 300x_3 & & \\
\text{s.t.} & 15x_1+ & 5x_2+ & 20x_3 & \geq & 100 \\
 & 20x_1+ & 0x_2+ & 10x_3 & \geq & 300 \\
 & & & x_{1\ldots3} & \geq & 0
\end{array}
$$

2.28 Komplementärer Schlupf II

1. Zusammenhang zwischen primalen und dualen Variablen aufstellen

Gegeben: $u_2 = 5$; $u_4 = 200$; u_5 250

1. Zusammenhang zwischen primalen und dualen Variablen aufstellen

Gegeben: $u_2 = 5$; $u_4 = 200$; u_5 250

$u_1 \cdot x_4 = 0$

$u_2 \cdot x_5 = 0 \xRightarrow{u_2=5} x_5 = 0$

$u_3 \cdot x_1 = 0$

$u_4 \cdot x_2 = 0 \xRightarrow{u_4=200} x_2 = 0$

$u_5 \cdot x_3 = 0 \xRightarrow{u_5=250} x_3 = 0$

Fehlende Werte = x_1 , x_4 , u_1 , u_3

P

3 Str. Var. x_1, x_2, x_3

2 Schl. x_4, x_5

3

2 Str. Var. u_1, u_2

3 Schl. u_3, u_4, u_5

$u_1 \perp x_4$

$u_2 \perp x_5$

$u_3 \perp x_1$

$u_4 \perp x_2$

$u_5 \perp x_3$

$$u_1 \cdot x_4 = 0$$

$$u_2 \cdot x_5 = 0 \xRightarrow{u_2=5} x_5 = 0$$

$$u_3 \cdot x_1 = 0$$

$$u_4 \cdot x_2 = 0 \xRightarrow{u_4=200} x_2 = 0$$

$$u_5 \cdot x_3 = 0 \xRightarrow{u_5=250} x_3 = 0$$

Fehlende Werte = x_1 , x_4 , u_1 , u_3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
?	0	0	?	0
u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
?	5	?	200	250

2.28 Komplementärer Schlupf II

2. Fehlende Werte bestimmen mit Hilfe von Nebenbedingungen in Standardform

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	0		0
u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
0	5	0	200	250

=0

Primales Problem

NB1: $-15x_1 - \cancel{5x_2} - \cancel{20x_3} + x_4 = -100$

NB2: $-20x_1 - \cancel{0x_2} - \cancel{10x_3} + \cancel{x_5} = -300$

Bekannte Werte in die Nebenbedingungen einsetzen

$-15x_1 + x_4 = -100 \ldots (1)$

$-20x_1 \quad = -300 \ldots (2)$

$\to x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$

u_1, u_2, u_3, u_4, u_5

$>0 \Rightarrow x_5 = 0$

(2) $\to x_1 = 15$ $\left(\frac{-300}{-20}\right)$

x_1 in (1) $\to x_4 = -100 + 15(15) = 125$

$u_1 \perp x_4$

Orthogonalität:

$u_1 \cdot x_4 = 0 \xRightarrow{x_4=125} u_1 = 0$

$u_3 \cdot x_1 = 0 \xRightarrow{x_1=15} u_3 = 0$

$u_1 \perp x_4 = 0$

Falls $x_4 = 0 \Rightarrow u_1 = ?$

Nebenbedingungen des dualen Problems in Standardform!

Fragen zum Tutorium?