Hausaufgabe 5.1 (4=1+1+2 Punkte)

Linda Li 458029
Xiang Li 478592
Yilong Wang 483728

Gruppen: Saef 1

Es seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ mit den folgenden Verteilungen

k	1	2	3	4
$p_X(k)$	0.20	0.36	0.26	0.18
$p_Y(k)$	0.15	0.26	0.37	0.22

Berechnen Sie

(i) $\mathbb{P}(X = Y)$

(ii) $\mathbb{P}(X = 2Y)$

(iii) $\mathbb{P}(X > Y)$

(i) X, Y unabhängig $\Rightarrow \mathbb{P}(X=k_1, Y=k_2) = \mathbb{P}(X=k_1) \cdot \mathbb{P}(Y=k_2)$
$= p_X(k_1) \cdot p_Y(k_2)$

$$\mathbb{P}(X=Y) = \mathbb{P}(X=1, Y=1) + \mathbb{P}(X=2, Y=2) \cdots + \mathbb{P}(X=4, Y=4)$$
$$= \sum_{k=1}^{4} p_X(k) \cdot p_Y(k)$$
$$= 0{,}2 \cdot 0{,}15 + 0{,}36 \cdot 0{,}26 + 0{,}26 \cdot 0{,}37 + 0{,}18 \cdot 0{,}22 = 0{,}2594$$

(ii) $$\mathbb{P}(X=2Y) = \sum_{k=1}^{2} \mathbb{P}(X=2k, Y=k) = \sum_{k=1}^{2} p_X(2k) \cdot p_Y(k)$$
$$= p_X(2)\, p_Y(1) + p_X(4) \cdot p_Y(2)$$
$$= 0{,}36 \cdot 0{,}15 + 0{,}18 \cdot 0{,}26 = 0.1008$$

(iii) $$\mathbb{P}(X>Y) = \sum_{k=1}^{3} \mathbb{P}(X>k, Y=k)$$
$$= \mathbb{P}(X>1, Y=1) + \mathbb{P}(X>2, Y=2) + \mathbb{P}(X>3, Y=3)$$
$$= p_X(k>1) \cdot p_Y(k=1) + p_X(k>2) \cdot p_Y(k=2) + p_X(x>3)\, p_Y(k=3)$$
$$= (0{,}36+0{,}26+0{,}18) \cdot (0{,}15) + (0{,}26+0{,}18) \cdot (0{,}26) + 0{,}18 \cdot 0{,}37$$
$$= 0.301$$

Hausaufgabe 5.2 (7=2+3+2 Punkte)

Ihre Speisekammer enthält die drei Arten von Lebensmitteln: Pizza, Sandwiches und Pasta, die jeweils mit den Prozentsätzen $p_1 > 0$, $p_2 > 0$ und $p_3 > 0$ so vorliegen, dass $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Im Verlaufe eines Tages öffnen Sie die Speisekammer nur zweimal und nehmen jedes Mal eines der drei Lebensmittel. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass bei jeder Öffnung die Anteile der Lebensmittel gleich bleiben und die Lebensmittel unabhängig voneinander gewählt werden. Seien P und S dann die Zufallsvariablen der Anzahl der am Tag gegessenen Pizzen bzw. Sandwiches.

(i) Beschreiben Sie die Gemeinsame Verteilung von P und S mithilfe eine Tabelle.

(ii) Geben Sie die Randverteilungen von P und S nur mit Hilfe von p_1 und p_2 an. Wie heißen diese Verteilungen?

(iii) Was ist die bedingte Verteilung von P gegeben S?

(i)

P\S	0	1	2	P_P
0	P_3^2	$2P_2P_3$	P_2^2	$(P_1-1)^2$
1	$2P_1P_3$	$2P_1P_2$	0	$2P_1(1-P_1)$
2	P_1^2	0	0	P_1^2
P_S	$(P_2-1)^2$	$2P_2(1-P_2)$	P_2^2	

(i) $P_S(0) = P_3^2 + 2P_1P_3 + P_1^2 = (1-P_1-P_2+2P_1)(1-P_1-P_2)+P_1^2$ $\;= (P_1+P_3)^2 = (1-P_2)^2$

$= (1+P_1-P_2)(1-P_1-P_2)+P_1^2 = 1-\cancel{P_1}-P_2+\cancel{P_1}-\cancel{P_1^2}-\cancel{P_1P_2}-P_2+\cancel{P_1P_2}+P_2^2+\cancel{P_1^2}$

$= P_2^2-2P_2+1 = (P_2-1)^2$

$P_S(1) = 2P_2P_3+2P_1P_2 = 2P_2(1-P_1-P_2)+2P_1P_2$

$= 2P_2-2P_2^2 = 2P_2(1-P_2)$

$P_S(2) = P_2^2$

$P_P(0) = P_3^2+2P_2P_3+P_2^2 = (1-P_1-P_2)(1-P_1+P_2)+P_2^2$

$= (P_1-1)^2$

$P_P(1) = 2P_1P_3+2P_1P_2 = 2P_1(1-P_1-P_2+P_2) = 2P_1(1-P_1)$

$P_P(2) = P_1^2$

Binomialverteilung: $P \sim Bin(2, P_1)$ $\quad S \sim Bin(2, P_2)$

(ii) $\mathbb{P}(P=0|S=0) = \frac{\mathbb{P}(P=0,S=0)}{\mathbb{P}(S=0)} = \frac{P_3^2}{(P_2-1)^2}$

$\mathbb{P}(P=1|S=0) = \frac{\mathbb{P}(P=1,S=0)}{\mathbb{P}(S=0)} = \frac{2P_1P_3}{(P_2-1)^2}$

analog: $\mathbb{P}(P=2|S=0) = \frac{P_1^2}{(P_2-1)^2}$

$\mathbb{P}(P=0|S=1) = \frac{2P_2P_3}{2P_2(1-P_2)}$

$\mathbb{P}(P=1|S=1) = \frac{2P_1P_2}{2P_2(1-P_2)}$

$\mathbb{P}(P=2|S=2) = \frac{P_2^2}{P_2^2} = \cancel{1}\ 0$

$\mathbb{P}(P=2|S=1) = \mathbb{P}(P=1|S=2) = \mathbb{P}(P=2|S=2) = 0$

Hausaufgabe 5.3 (3=2+1 Punkte)

Wir betrachten eine Urne mit einer zufälligen Anzahl von Kugeln, die wir durch eine Zufallsvariable $K\colon \Omega \to \mathbb{N}^* = \{1, 2, \cdots\}$ mit der folgenden Verteilung beschreiben

$$\mathbb{P}(K = m) = 2^{-m}, \quad m \geq 1.$$

Des Weiteren nehmen wir an, dass die Kugeln unabhängig voneinander weiß oder schwarz sind. Die Wahrscheinlichkeit für eine Kugel weiß zu sein beträg $\frac{1}{3}$ und die Wahrscheinlichkeit für eine Kugel schwarz zu sein beträgt $\frac{2}{3}$ gegeben, dass in der Urne insgesamt n Kugeln sind.

(i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Urne keine weißen Kugeln enthält?

(ii) Angenommen, es gibt keine weiße Kugel, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Urne genau zwei Kugeln enthält?

(i) Sei X eine Zufallsvariable, X = Anzahl der weißen Kugeln

$$\mathbb{P}(X=0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=0 \mid K=n)\,\mathbb{P}(K=n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

(ii) $$\mathbb{P}(K=2 \mid X=0) = \frac{\mathbb{P}(K=2, X=0)}{\mathbb{P}(X=0)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X=0 \mid K=2) \cdot \mathbb{P}(K=2)}{\mathbb{P}(X=0)}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 2^{-2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{9}$$

Hausaufgabe 5.4 (6=1+3+2 Punkte)

Eine Zufallsvariable $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ heißt Rademacher-verteilt zum Parameter $p \in [0,1]$ (bzw. hat die Rademacher-Verteilung zum Parameter p), falls $X(\Omega) = \{-1, 1\}$ und

$$\mathbb{P}(X=1) = p\,, \quad \mathbb{P}(X=-1) = 1-p.$$

Außerdem ist ein n-mal wiederholtes Rademacher-Experiment mit Parameter p eine Familie $(X_1, \cdots X_n)$, wobei jedes X_i Rademacher-verteilt ist mit demselben Parameter p und die Variablen unabhängig voneinander sind.

(i) Sei Y eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable und X eine Rademacher-verteilte Zufallsvariable mit demselben Parameter $p \in [0,1]$. Wir definieren die neuen Zufallsvariablen

$$\overline{X} := \frac{X+1}{2}\,, \quad \overline{Y} := 2Y - 1$$

Beweisen Sie, dass $\overline{X}$ Bernoulli-verteilte und $\overline{Y}$ Rademacher-verteilte Zufallsvariablen jeweils mit Parameter $p \in [0,1]$ sind.

(i) $\mathbb{P}(\overline{X}=1) = \mathbb{P}\left(\frac{X+1}{2} = 1\right) = \mathbb{P}(X=1) = p$

$\mathbb{P}(\overline{X}=0) = \mathbb{P}\left(\frac{X+1}{2} = 0\right) = \mathbb{P}(X=-1) = 1-p$

$\Rightarrow \overline{X}$ ist Bernoulliverteilte

Y ist Bernoulli-Verteilung $\rightarrow$ $\mathbb{P}(Y=1) = p$ $\quad \mathbb{P}(Y=0) = 1-p$

$\mathbb{P}(\overline{Y}=1) = \mathbb{P}(2Y-1=1) = \mathbb{P}(Y=1) = p$

$\mathbb{P}(\overline{Y}=-1) = \mathbb{P}(2Y-1=-1) = \mathbb{P}(Y=0) = 1-p$

$\Rightarrow \overline{Y}$ ist Rademacher-Verteilung

(ii) Sei dann $(X_1, \cdots X_n)$ ein n-mal wiederholtes Rademacher-Experiment mit Parameter p. Wir definieren die neue Zufallsvariable

$$Z = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

Beschreiben Sie die Verteilungen von Z und $-Z$ falls $n=2$. Was fällt Ihnen auf, wenn $p = 1/2$?

(ii) $\mathbb{P}(Z=2) = \mathbb{P}(X_1+X_2=2) = \mathbb{P}(X_1=1, X_2=1) = \mathbb{P}(X_1=1)\cdot\mathbb{P}(X_2=1) = p^2$

$\mathbb{P}(Z=0) = \mathbb{P}(X_1+X_2=0) = \mathbb{P}(X_1=1, X_2=-1) + \mathbb{P}(X_1=-1, X_2=1)$

$= p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p)$

$\mathbb{P}(Z=-2) = \mathbb{P}(X_1+X_2=-2) = \mathbb{P}(X_1=-1, X_2=-1)$
$= (1-p)^2$

Für $-Z$ analog: $\mathbb{P}(-Z=-2) = p^2$

$\mathbb{P}(-Z=0) = 2p(1-p)$

$\mathbb{P}(-Z=2) = (1-p)^2$

Wenn $p=\frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(Z=2) = \frac{1}{4}$ $\mathbb{P}(Z=0) = \frac{1}{2}$ $\mathbb{P}(Z=-2) = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(-Z=-2) = \frac{1}{4}$ $\mathbb{P}(-Z=0) = \frac{1}{2}$ $\mathbb{P}(-Z=2) = \frac{1}{4}$

Bei $p=\frac{1}{2}$, Z und $-Z$ haben gleiche Verteilung

(iii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Z=0)$ für beliebige n mit Hilfe der Beschreibung der Rademacher-Variablen in Form der Bernoulli-Variablen aus (i). Nutzen Sie außerdem den Zusammenhang zwischen Bernoulli-Summen und Binomialverteilung.

$\bar{X} = \frac{X+1}{2} \Rightarrow X = 2\bar{X} - 1$

$Z = \sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{j=1}^{n} (2\bar{X}_j - 1) = 2\sum_{j=1}^{n} \bar{X}_j - n$

Sei $S = \sum_{j=1}^{n} \bar{X}_j$ eine Binomialverteilung, da $\bar{X}_j$ Bernoulli-Verteilung ist

$S \sim Bin(n,p)$

$Z = 2\sum_{j=1}^{n} \bar{X}_j - n = 2S - n \Rightarrow S = \frac{1}{2}(Z+n)$

$\mathbb{P}(Z=0) = \mathbb{P}(S = \frac{1}{2}(0+n)) = \mathbb{P}(S=\frac{1}{2}n)$

$= \begin{cases} \binom{n}{\frac{1}{2}n} p^{\frac{1}{2}n} (1-p)^{\frac{1}{2}n} & \text{für } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$