Woche 2: *25. April 2024*

Thema: *Kombinatorik*

2.1 Einführung

Kombinatorik

Was ist Kombinatorik?

Kombinatorik behandelt die Möglichkeiten, eine bestimmte Zahl von Objekten *anzuordnen* oder zu *kombinieren* bzw. zu *zählen*, auf wieviele Arten man Objekte auf eine bestimmte Art anordnen kann.

Die Objekte kommen dabei oft aus einer endlichen Menge.

Wir interessieren uns hier vor allem um das Zählen der Möglichkeiten, Dinge zu kombinieren.

Beispiel: Auswahl von Studienteilnehmer:innen

Auswahl von Teilnehmer:innen einer Umfrage.

Unter den Studierenden dieses Moduls sollen k Studierende ausgesucht werden, die im Rahmen einer Umfrage zu Ihrer Meinung über die Vorlesung befragt werden.

Um eine gewisse Breite der Meinungen zu erhalten, sollen dabei k Studierende gewählt werden, die sich gegenseitig nicht kennen.

Aufgabenstellung.

- Eingabe. Eine Menge M von Personen, eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ und zu je zwei Personen $A, B \in M$ die Angabe, ob die beiden sich kennen.
- Ausgabe. Eine Menge $X \subseteq M$ von k Personen aus M die sich paarweise nicht kennen, oder die Ausgabe nein, wenn es eine solche Menge nicht gibt.

Modellierung durch Graphen

Um das Problem zu lösen, ist es eigentlich unerheblich, dass es sich dabei um Personen handelt. Wir können das Problem auch abstrakt formulieren.

Eingabe. Eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ und ein Paar (V, E), wobei

- V eine Menge
- $E \subseteq \{\{a, b\} : a \neq b \text{ und } a, b \in V\}$

Ausgabe. Entweder

- eine Menge $X \subseteq V$ der Größe k, so dass für alle $a, b \in X$ gilt: $\{a, b\} \notin E$,
- oder nein, falls eine solche Menge nicht existiert.

Eine solche Menge X nennt man unabhängige Menge (independent set).

Umfragebeispiel. In unserem Beispiel ist

- V die Menge M der Studierenden und
- E die „sich kennen" Relation, also

$$E := \{\{a, b\} \in M : a \neq b \text{ und } a \text{ kennt } b\}.$$

Wir nehmen hier an, dass man sich immer gegenseitig kennt.

Berechnung unabhängiger Mengen

Graph $G = (V, E)$.

V: Menge der Studierenden
E: „sich kennen"-Relation

Wie berechnet man unabhängige Mengen?

Wir suchen aus der Menge der Studierenden eine Teilmenge mit k Personen, die sich gegenseitig nicht kennen.

D.h. wir suchen in dem Studierenden-„sich kennen"-Graph eine unabhängige Menge der Größe k.

Definition.

Unabhängige Menge in $G=(V, E)$: Menge $X \subseteq V(G)$, so dass kein Knoten $u \in X$ zu einem anderen Knoten $v \in X$ benachbart ist.

Berechnung unabhängiger Mengen

Graph $G = (V, E)$.
V: Menge der Studierenden
E: „sich kennen"-Relation

Definition.
Unabhängige Menge in $G=(V,E)$: Menge $X \subseteq V(G)$, so dass kein Knoten $u \in X$ zu einem anderen Knoten $v \in X$ benachbart ist.

Algorithmus TM. Testen aller möglichen Teilmengen

Gegeben: $G = (V, E)$ mit n Knoten, $k \geq 1$.

Problem: Finde unabhängige Menge der Größe k.

Algorithmus:

1. Für jede Teilmenge $X \subseteq V$ teste
2. Hat X die Größe k und
   gibt es kein $u, v \in X$ mit $\{u, v\} \in E$ und $u \neq v$?
3. Wenn ja: Gib X aus.
4. Wenn kein geeignetes X gefunden wurde, gib nein aus.

Laufzeit des Algorithmus

Laufzeit. Um die Laufzeit abzuschätzen, müssen wir wissen, wie oft die Schleife durchlaufen wird.

Wie viele Teilmengen einer Menge M der Größe n gibt es?

Algorithmus TM. Testen aller möglichen Teilmengen

Gegeben: $G = (V, E)$ mit n Knoten, $k \geq 1$.

Problem: Finde unabhängige Menge der Größe k.

Algorithmus:

1. Für jede Teilmenge $X \subseteq V$ teste
2. Hat X die Größe k und gibt es kein $u, v \in X$ mit $\{u, v\} \in E$ und $u \neq v$?
3. Wenn ja: Gib X aus.
4. Wenn kein geeignetes X gefunden wurde, gib nein aus.

Anzahl von Teilmengen

Teilmengen. Sei M eine Menge der Größe $n \geq 1$.

Wieviele Teilmengen $U \subseteq M$ gibt es? **Behauptung:** 2^n

M: $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad \cdots \quad a_n$

Informelle Begründung. Für jedes Element $a_i \in M$ haben wir zwei Möglichkeiten: entweder $a_i \in U$ oder $a_i \notin U$.

Da die Frage, ob $a_i \in U$ ist, unabhängig davon ist, ob $a_j \in U$ ist, für jedes $j \neq i$, multiplizieren sich die Möglichkeiten.

Anzahl von Teilmengen

Teilmengen. Sei M eine Menge der Größe $n \geq 1$.

Wieviele Teilmengen $U \subseteq M$ gibt es? **Behauptung:** 2^n

Beweis. (per Induktion über n.)

- **Induktionsverankerung $n = 0$.** Sei $M := \emptyset$.
  Es gibt genau $2^0 = 1$ Teilmengen U von M: $U = \emptyset$.
- **Induktionsannahme.** Die Behauptung gilt für alle Mengen der Größe n.
- **Induktionsschluss $n \to n+1$.** Sei $M := \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ eine Menge mit $n+1$ Elementen. Definiere $M^- := M \setminus \{a_{n+1}\} = \{a_1, \dots, a_n\}$.
  Für jedes $U' \subseteq M^-$ gilt:
  $$U_1 := U' \subseteq M \quad \text{und} \quad U_2 := U' \cup \{a_{n+1}\} \subseteq M \text{ und } U_1 \neq U_2.$$
  Umgekehrt gilt für alle $U \subseteq M$:
  $$a_{n+1} \notin U \text{ und } U \subseteq M^- \quad \text{oder} \quad a_{n+1} \in U \text{ und } U \setminus \{a_{n+1}\} \in M^-.$$
  Es gibt also genau doppelt soviele Teilmengen von M wie von M^-.
  Nach IA gibt es 2^n Teilmeng. von M^- und somit 2^{n+1} Teilmeng. von M. $\square$

Induktionsbeweise

Induktionsbeweise.

Mit Hilfe der vollständigen Induktion lassen sich Aussagen über natürliche Zahlen beweisen, also Aussagen der Form $A(n)$.

Im obigen Beispiel war $A(n)$ die Aussage:

$A(n)$: *Für alle* $k \in \mathbb{N}_+$ *ist* $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Induktionsbeweise haben immer den gleichen ungefähren Aufbau.

Induktionsverankerung.
Wir zeigen zunächst die Aussage $A(0)$.

Induktionsannahme.
Wir nehmen nun an, dass $A(n)$ schon bewiesen ist.

Induktionsschritt.
Zeige unter der Annahme, dass $A(n)$ gilt, die Aussage $A(n+1)$.

Varianten von Induktionsbeweisen

Varianten.

确定

- Manchmal stimmt die zu beweisende Aussage erst ab einer bestimmten Zahl n_0. Dann „verankern" wir die Induktion für $n = n_0$.
- Umgekehrt ist es manchmal einfacher, wenn man die Induktion für alle Zahlen $n \leq n_0$ verankert.
- Statt der Induktionsannahme „Die Aussage $A(n)$ gilt" können wir auch annehmen, dass „Die Aussage $A(j)$ gilt für alle $j \leq n$".

„Häufige Fehler."

- Die Induktion wird nicht verankert.
- Die Induktionsannahme ist falsch formuliert.
- Die Induktionsannahme wird nicht benutzt.
  (Dies ist streng genommen kein Fehler.)

Die Potenzmenge einer Menge

Notation.

- Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{0, 1, \ldots\}$. Insbesondere ist $0 \in \mathbb{N}$.
- Wir schreiben $n \geq 5$ etc. um zu sagen, dass $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 5$.

Lemma. Sei $n \in \mathbb{N}$. Jede Menge M mit n Elementen hat genau 2^n verschiedene Teilmengen.

Beweis. Für $n \geq 1$ haben wir das eben schon bewiesen. Für $n = 0$ gilt: Wenn $|M| = 0$, dann ist $M = \emptyset$ und hat nur $2^0 = 1$ Teilmengen. □

Definition. Sei M eine Menge.
Wir definieren die *Potenzmenge* $\mathcal{P}(M)$ von M als die Menge

$$\mathcal{P}(M) := \{U : U \subseteq M\}.$$

Hinweis. Oft wird die Potenzmenge von M auch mit 2^M bezeichnet.

Unabhängige Mengen

Der Algorithmus TM.

In der Schleife werden alle 2^n Teilmengen von V durchlaufen.

Das heißt, die Laufzeit wächst *exponentiell* mit der Eingabegröße.

Wir nennen das einen *Exponentialzeitalgorithmus*.

Allerdings ist TM offensichtlich etwas ineffizient. Denn wir interessieren uns ja nur für Teilmengen $X \subseteq V$ der Größe k.

Es reicht also, nur über alle Teilmengen der Größe k zu iterieren.

Algorithmus TM. Testen aller möglichen Teilmengen

Gegeben: $G = (V, E)$ mit n Knoten, $k \geq 1$.

Problem: Finde unabhängige Menge der Größe k.

Algorithmus:

1. Für jede Teilmenge $X \subseteq V$ teste
2. Hat X die Größe k und gibt es keine $u \notin v \in X$ mit $\{u, v\} \in E$?
3. Wenn ja: Gib X aus.
4. Wenn kein geeignetes X gefunden wurde, gib nein aus.

Graph $G = (V, E)$.

V: Menge der Studierenden

E: „sich kennen"-Relation

Definition.

Unabhängige Menge in $G=(V, E)$: Menge $X \subseteq V(G)$, so dass kein Knoten $u \in X$ zu einem anderen Knoten $v \in X$ benachbart ist.

Unabhängige Mengen

Algorithmus kTM. Iteriere über k-elementige Mengen

Gegeben: $G = (V, E)$ mit n Knoten, $k \geq 1$.

Problem: Finde unabhängige Menge der Größe k.

Algorithmus:

1. Für jede k-elementige Teilmenge $X \subseteq V$ teste
2. Gibt es $u, v \in X$ mit $\{u, v\} \in E$ und $u \neq v$?
3. Wenn nein: gib X aus.
4. Wenn kein geeignetes X gefunden wurde, gib nein aus.

Graph $G = (V, E)$.
V: Menge der Studierenden
E: „sich kennen"-Relation

Definition.
Unabhängige Menge in $G=(V, E)$: Menge $X \subseteq V(G)$, so dass kein Knoten $u \in X$ zu einem anderen Knoten $v \in X$ benachbart ist.

Unabhängige Mengen

Algorithmus rec-IS. Iteriere über die Knoten von V

Gegeben: $G = (V, E)$ mit $V := \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$, $k \geq 1$.

Problem: Finde unabhängige Menge der Größe k.

Algorithmus: rufe rec-ind$(G, k, 0, \emptyset)$ auf.

Algorithmus: rec-ind(G, k, i, X)

1. Falls $(n-1) - i < k$ oder $i \geq n$, dann gib nein zurück.
2. Falls $k = 0$:
   2.1 Wenn X unabhängige Menge $\rightsquigarrow$ gib X aus
   2.2 Ansonsten, gib nein zurück.
3. Rufe rekursiv rec-ind$(G, k-1, i+1, X \cup \{v_i\})$ auf.
   Wenn Rückgabe Menge X', gib X' aus.
   Ansonsten, gib das Ergebnis von rec-dom$(G, k, i+1, X)$ zurück.

Graph $G = (V, E)$.
V: Menge der Studierenden
E: „sich kennen"-Relation

Definition.
Unabhängige Menge in $G{=}(V, E)$: Menge $X \subseteq V(G)$, so dass kein Knoten $u \in X$ zu einem anderen Knoten $v \in X$ benachbart ist.

Laufzeit der beiden Algorithmen?

Algorithmus kTM. Iteriere über k-elementige Mengen

Gegeben: $G = (V, E)$ mit n Knoten, $k \geq 1$.

Problem: Finde unabhängige Menge der Größe k.

Algorithmus:

1. Für jede k-elementige Teilmenge $X \subseteq V$ teste
2. Gibt es $u, v \in X$ mit $\{u, v\} \in E$ und $u \neq v$?
3. Wenn nein: gib X aus.
4. Wenn kein geeignetes X gefunden wurde, gib nein aus.

Algorithmus rec-IS. Iteriere über die Knoten von V

Gegeben: $G = (V, E)$ mit $V = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$, $k \geq 1$.

Problem: Finde unabhängige Menge der Größe k.

Algorithmus: rufe rec-ind$(G, k, 0, \emptyset)$ auf.

Algorithmus: rec-ind(G, k, i, X)

1. Wenn X unabhängige Menge $\rightsquigarrow$ gib X aus
2. Falls $(n-1) - i < k$ oder $i \geq n$, dann gib nein zurück.
3. Falls $k = 0$:
   - 3.1 Wenn X unabhängige Menge $\rightsquigarrow$ gib X aus
   - 3.2 Ansonsten, gib nein zurück.
4. Rufe rekursiv rec-ind$(G, k-1, i+1, X \cup \{v_i\})$ auf.
   Wenn Rückgabe Menge X', gib X' aus.
   Ansonsten, gib das Ergebnis von rec-ind$(G, k, i+1, X)$

Welche Laufzeit haben die Algorithmen?

Algorithmus kTM. Im wesentlichen Zahl der k-elementigen Teilmengen.

Algorithmus rec-IS. Rekursion: $L(n, k) = L(n-1, k-1) + L(n-1, k)$.

2.2 Auswählen von Elementen

k-elementige Teilmengen

Definition. Sei M eine Menge und $k \in \mathbb{N}$.

Wir definieren die Menge $\mathcal{P}_k(M)$ aller k-elementigen Teilmengen von M als

$$\mathcal{P}_k(M) := \{U : U \subseteq M \text{ und } |U| = k\}.$$

Auswählen von Elementen. Wir können das Bilden einer k-elementigen Teilmenge U von M auch so interpretieren, dass wir aus der Menge M nacheinander k verschiedene Elemente auswählen und daraus die Menge U bilden.

Da U eine *Menge* ist, spielt dabei die Reihenfolge, in der wir die Elemente auswählen, keine Rolle.

Es gibt auch andere Arten, Elemente auszuwählen. Wir können z.B. die Reihenfolge mit beachten oder gezogene Elemente wieder zurücklegen.

Auswählen von Elementen aus einer Menge

Wir wollen k Elemente aus einer Menge M mit n Elementen ziehen.

Wir unterscheiden zwischen:

- Auswahl mit bzw. ohne Reihenfolge:
  Ist es wichtig, in welcher Reihenfolge die Elemente gezogen werden?
- Mit oder ohne Zurücklegen:
  Können Elemente doppelt gezogen werden?

	Reihenfolge wichtig (geordnet)	Reihenfolge nicht wichtig (ungeordnet)
Mit Zurücklegen	aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc	aa, ab, ac, ~~ba~~, bb, bc, ~~ca~~, ~~cb~~, cc
Ohne Zurücklegen	~~aa~~, ab, ac, ba, ~~bb~~, bc, ca, cb, ~~cc~~	~~aa~~, ab, ac, ~~ba~~, ~~bb~~, bc, ~~ca~~, ~~cb~~, ~~cc~~

Beispiel.
Mögliche Arten, 2 Elemente aus $\{a, b, c\}$ zu ziehen

Beispiele

	Reihenfolge wichtig (geordnet)	Reihenfolge nicht wichtig (ungeordnet)
Mit Zurücklegen	2	4
Ohne Zurücklegen	1	3

Zu welcher Art von Ziehen gehören folgende Beispiele.

领奖台

1. Bei einem Rennen stehen die besten 3 auf dem Siegertreppchen.
2. Wieviele Passwörter mit 8 Zeichen aus $a, \ldots, z, A, \ldots, Z$ gibt es?
3. Gewinnchance beim Lotto?
4. Sammelbilder in Müsli-Packungen.

Beispiele

	Reihenfolge wichtig (geordnet)	Reihenfolge nicht wichtig (ungeordnet)
Mit Zurücklegen		
Ohne Zurücklegen		$\mathcal{P}_k(M)$

Frage. Wohin gehört $\mathcal{P}_k(M)$?

Definition. Sei M eine Menge und $k \in \mathbb{N}$.

Wir definieren die Menge $\mathcal{P}_k(M)$ aller k-elementigen Teilmengen von M als

$$\mathcal{P}_k(M) := \{U : U \subseteq M \text{ und } |U| = k\}.$$

Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Reihenfolge

Frage. Sei M eine Menge mit n Elementen. Sei $k \geq 1$. Wieviele Möglichkeiten gibt es, k Elemente aus M auszuwählen, ohne Beachtung der Reihenfolge und ohne Zurücklegen?

M: $\boxed{a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad \cdots \quad a_n}$

Anzahl der Möglichkeiten.

1. Element:	n Möglichkeiten
2. Element:	$n-1$ Möglichkeiten
3. Element:	$n-2$ Möglichkeiten
$\vdots$	$\vdots$
k-tes Element:	$n-(k-1)$ Möglichkeiten
Insgesamt:	$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-(k-1))$ Möglichkeiten

Problem.
Wir haben Möglichkeiten doppelt gezählt.
Denn (a_1, a_2, a_3), (a_3, a_2, a_1), ... liefern alle das gleiche Ergebnis, da die Reihenfolge nicht beachtet wird.

Lösung. Wir müssen das Ergebnis also noch durch die Zahl der Möglichkeiten teilen, k Elemente anzuordnen.

Permutationen

Satz. Die Elemente einer Menge mit n Elementen können auf $n!$ verschiedene Arten angeordnet werden.

Beweis. (per Induktion über n)

- Induktionsverankerung $n = 0$.
  Es gibt $0! = 1$ Möglichkeit die leere Menge anzuordnen.
- Induktionsannahme. Es gibt $n!$ Anordnungen einer n-elementigen Menge.
- Induktionsschluss. Sei $M = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$.
  Eine Anordnung $(a_{i_1}, \dots, a_{i_{n+1}})$ von M wird eindeutig bestimmt durch
  (1) die Wahl des ersten Elements $a_{i_1} \in M$ und
  (2) die Anordnung $(a_{i_2}, \dots, a_{i_{n+1}})$ der restlichen Elemente aus $M \setminus \{a_{i_1}\}$.
  Für die Wahl von a_{i_1} in (1) gibt es $n + 1$ Möglichkeiten.
  Nach IA gibt es für jede Wahl von a_{i_1} noch $n!$ verschiedene Anordnungen von $M \setminus \{a_{i_1}\}$.
  Insgesamt gibt es also $(n + 1) \cdot n! = (n + 1)!$ Anordnungen von M. □

„Anordnung".
Eine *Anordnung* von M ist eine Folge $(a_1, \dots, a_n)$ in der jedes Element von M genau einmal vorkommt.

Definition.
Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die *Fakultät* $n!$ von n durch

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{für } n > 0 \end{cases}$$

Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Reihenfolge

Frage. Sei M eine Menge mit n Elementen. Sei $k \geq 1$.
Wieviele Möglichkeiten gibt es, k Elemente aus M auszuwählen, ohne Beachtung der Reihenfolge und ohne Zurücklegen?

Anzahl der Möglichkeiten.

1. Element:	n Möglichkeiten
2. Element:	$n-1$ Möglichkeiten
3. Element:	$n-2$ Möglichkeiten
$\vdots$	$\vdots$
k-tes Element:	$n-(k-1)$ Möglichkeiten
Insgesamt:	$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-(k-1))$ Möglichkeiten

Problem.
Wir haben Möglichkeiten doppelt gezählt.
Denn (a_1, a_2, a_3), (a_3, a_2, a_1), ... liefern alle das gleiche Ergebnis, da die Reihenfolge nicht beachtet wird.

Satz. Die Zahl der Möglichkeiten, k Elemente aus einer n-elementigen Menge zu ziehen ohne Beachtung der Reihenfolge und ohne Zurücklegen ist

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Der Binomialkoeffizient

Satz. Die Zahl der Möglichkeiten, k Elemente aus einer n-elementigen Menge zu ziehen ohne Beachtung der Reihenfolge und ohne Zurücklegen ist

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$\mathcal{P}_k(M)$: Menge der k-elem. Teilmengen von M.

Korollar. Für jede Menge M mit n Elementen gilt $|\mathcal{P}_k(M)| = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Definition. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k \leq n$ definieren wir den

$$\textit{Binomialkoeffizient} \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Für $k > n$ und $k < 0$ definieren wir $\binom{n}{k} := 0$.

Bemerkung.
$\binom{n}{k}$ gibt also die Zahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge an.

Anzahl der Möglichkeiten beim Auswählen aus einer Menge

Frage. Was ist die Anzahl der Möglichkeiten, k Elemente aus einer Menge M mit n Elementen zu ziehen?

	Reihenfolge wichtig (geordnet)	Reihenfolge nicht wichtig (ungeordnet)
Mit Zurücklegen	n^k	$\binom{k+n-1}{k}$
Ohne Zurücklegen	$n^{\underline{k}} := \binom{n}{k} \cdot k!$ $= \frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Ziehen mit Zurücklegen

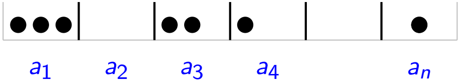
Satz. Die Zahl der Möglichkeiten, k Elemente aus einer n-elementigen Menge mit Zurücklegen ohne Reihenfolge zu ziehen ist $\binom{k+n-1}{k}$.

Beweis. Sei $M = \{a_1, \dots, a_n\}$. Wir ziehen nacheinander k Elemente aus M.

Während wir die k Elemente ziehen, führen wir eine Art „Strichliste“.

Wir haben n mit a_1 bis a_n nummerierte Felder. Jedesmal, wenn wir ein Element a_i ziehen, malen wir einen schwarzen Punkt in das Feld a_i.

Beispiel. Für $a_3\ a_1\ a_4\ a_1\ a_1\ a_3\ a_n$ ergibt sich folgendes Bild.



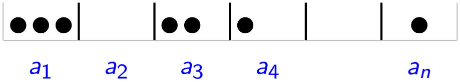
Beobachtung. Wir können die horizontale Linie sowie die beiden äußeren Ränder weglassen, ohne Informationen zu verlieren.

Ziehen mit Zurücklegen

Satz. Die Zahl der Möglichkeiten, k Elemente aus einer n-elementigen Menge mit Zurücklegen ohne Reihenfolge zu ziehen ist $\binom{k+n-1}{k}$.

Beweis. Sei $M = \{a_1, \dots, a_n\}$. Wir ziehen nacheinander k Elemente aus M.

Wir haben n mit a_1 bis a_n nummerierte Felder. Jedesmal, wenn wir ein Element a_i ziehen, malen wir einen schwarzen Punkt in das Feld a_i.



Behauptung. Jede Art, k Elemente aus M mit Zurücklegen zu ziehen, entspricht also einer solchen Strichliste.

Umgekehrt entspricht jede solche Strichliste (bis auf die Reihenfolge) einer Art, die Elemente zu ziehen.

D.h., die Zahl der verschiedenen Strichlisten ist genau die Zahl der Möglichkeiten, k Elemente mit Zurücklegen ohne Reihenfolge aus M zu ziehen.

Ziehen mit Zurücklegen

Satz. Die Zahl der Möglichkeiten, k Elemente aus einer n-elementigen Menge mit Zurücklegen ohne Reihenfolge zu ziehen ist $\binom{k+n-1}{k}$.

Beweis. Sei $M = \{a_1, \dots, a_n\}$. Wir ziehen k Elemente aus M.

k+n-1:

●●●| |●● |● | | ●

● 有 k个

| 有 n-1个

Eine „Strichliste“ ist eine Folge von ● und | mit genau $n-1$ Strichen | und k Punkten ●.

Die Strichlisten haben also alle die Länge $k+n-1$ und unterscheiden sich nur durch die Position der Striche.

Die Zahl verschiedener Strichlisten ist also genau die Zahl der Möglichkeiten, die k Punkte auf die $k+n-1$ Positionen zu verteilen.

Wie wir bereits wissen, ist das genau $\binom{k+n-1}{k}$. □

Anzahl der Möglichkeiten beim Auswählen aus einer Menge

Frage. Was ist die Anzahl der Möglichkeiten, k Elemente aus einer Menge M mit n Elementen zu ziehen?

	Reihenfolge wichtig (geordnet)	Reihenfolge nicht wichtig (ungeordnet)
Mit Zurücklegen	n^k	$\binom{k+n-1}{k}$
Ohne Zurücklegen	$n^{\underline{k}} := \binom{n}{k} \cdot k!$	$\binom{n}{k}$

2.3 Eigenschaften des Binomialkoeffizienten

Der Binomialkoeffizient

Erinnerung. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k \leq n$ definieren wir den *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$ als

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Der Name kommt von seiner Rolle in der binomischen Formel.

Satz. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Eigenschaften des Binomialkoeffizienten

Satz. Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, \dots, n\}$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Binomialkoeffizient, $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Beweis. Der Satz folgt sofort aus der Definition des Binomialkoeffizienten.

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad = \quad \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} =: \binom{n}{n-k}.$$

□

Intuitive Bedeutung. Um eine k-elementige Teilmenge $U \subseteq M$ zu konstruieren, ist es unerheblich, ob wir die k Elemente der Menge U oder die $n-k$ Elemente der Menge $M \setminus U$ auswählen. Die Zahl der Möglichkeiten bleibt gleich.

Rekursionsformel des Binomialkoeffizienten

Satz. Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k \leq n$ ist

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Beweis. Sei $M := \{a_1, \dots, a_n\}$ eine Menge mit n Elementen. Wir wissen bereits, dass $\binom{n}{k} = |\mathcal{P}_k(M)|$.

Offensichtlich gilt

$$\mathcal{P}_k(M) = \underbrace{\{X \subseteq M : |X| = k \text{ und } a_1 \in X\}}_{P^+} \ \dot\cup\ \underbrace{\{X \subseteq M : |X| = k \text{ und } a_1 \notin X\}}_{P^-}.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}
\tbinom{n}{k} = |\mathcal{P}_k(M)| &= |P^+| + |P^-| \\
&= |\{X \subseteq M \setminus \{a_1\} : |X| = k-1\}| + |\{X \subseteq M \setminus \{a_1\} : |X| = k\}| \\
&= \tbinom{n-1}{k-1} + \tbinom{n-1}{k}
\end{aligned}$$

Zusammenfassung Binomialkoeffizienten

Die letzten Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen.

Satz. Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, \dots, n\}$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Zurück zu unseren Algorithmen

Algorithmus kTM. Iteriere über k-elementige Mengen

Gegeben: $G = (V, E)$ mit n Knoten, $k \geq 1$.

Problem: Finde unabhängige Menge der Größe k.

Algorithmus:

1. Für jede k-elementige Teilmenge $X \subseteq V$ teste
2. Gibt es $u, v \in X$ mit $\{u, v\} \in E$ und $u \neq v$?
3. Wenn nein: gib X aus.
4. Wenn kein geeignetes X gefunden wurde, gib nein aus.

Algorithmus rec-IS. Iteriere über die Knoten von V

Gegeben: $G = (V, E)$ mit $V = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$, $k \geq 1$.

Problem: Finde unabhängige Menge der Größe k.

Algorithmus: rufe rec-ind$(G, k, 0, \emptyset)$ auf.

Algorithmus: rec-ind(G, k, i, X)

1. Wenn X unabhängige Menge $\rightsquigarrow$ gib X aus
2. Falls $(n-1) - i < k$ oder $i \geq n$, dann gib nein zurück.
3. Falls $k = 0$:
   3.1 Wenn X unabhängige Menge $\rightsquigarrow$ gib X aus
   3.2 Ansonsten, gib nein zurück.
4. Rufe rekursiv rec-ind$(G, k-1, i+1, X \cup \{v_i\})$ auf.
   Wenn Rückgabe Menge X', gib X' aus.
   Ansonsten, gib das Ergebnis von rec-ind$(G, k, i+1, X$

Welche Laufzeit haben die Algorithmen?

Algorithmus kTM. Im wesentlichen Zahl der k-elementigen Teilmengen. $\binom{n}{k}$

Algorithmus rec-IS. Rekursion: $L(n, k) = L(n-1, k-1) + L(n-1, k)$. $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

Zusammenfassung

Auswählen von Elementen einer Menge. Wir haben verschiedene Arten diskutiert, Elemente aus einer Menge M der Größe n auszuwählen.

- Es gibt 2^n Teilmengen von M.
- Es gibt $\binom{n}{k}$ k-elementige Teilmengen von M.
- Es gibt n^k Möglichkeiten, k Elemente aus M zu ziehen, wenn die Reihenfolge beachtet wird und die gezogenen Elemente wieder zurückgelegt werden.
- Wird die Reihenfolge nicht beachtet, so gibt es $\binom{k+n-1}{k}$ Möglichkeiten.
- Wird die Reihenfolge beachtet, die Elemente aber nicht zurückgelegt, gibt es $\frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten.
- Die Zahl der Möglichkeiten, die Elemente von n anzuordnen, ist $n!$.