Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen
(Tutorium 5)

Vorlesungswoche: 20. – 24. Mai 2024 | Sommersemester 2024

Aufgabe 13

Ermittle ein (reellwertiges) Fundamentalsystem, und löse das Anfangswertproblem

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}(t), \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 14

Ermittle (reellwertige) Fundamentalsysteme zu den Systemen:

(a) $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$, (b) $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$, (c) $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -2 \\ 0 & 9 & 9 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$.

Hinweis: Die Eigenwerte in (c) sind 6 und 12.

Aufgabe 15

Ermittle ein (reellwertiges) Fundamentalsystem des Systems:

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}(t).$$

Homogene DGL-System 1. Ordnung $\vec{x}\,'(t) = A\vec{x}(t)$

① Eigenwerte von A   → algebraische Vielfachheit alg(λ)

② Eigenvektoren & ggf. Hauptvektoren

$(A-\lambda_i I)\vec{v}_i = \vec{0}$ ⇒ $\vec{v}_i$ ist EV zu EW λ_i (= HV 1. Stufe)

geometrische Vielfachheit (= Anzahl an linear unabhängige EV zu EW λ)

Falls alg(λ) > geo(λ), dann braucht man HV bis zur alg(λ)'ten Stufe.

→ HV 2.te Stufe: $(A-\lambda_i I)\vec{h}_2 = \vec{v}_1 = \vec{h}_1$

→ HV k.te Stufe: $(A-\lambda_i I)\vec{h}_i = \vec{h}_{i-1}$

③ Fundamentalsystem:

3.1) Reelle EV $\vec{v}_i$ ⇒ $\vec{x}_i(t) = e^{\lambda_i t}\vec{v}_i$

3.2) HV 2.te Stufe ⇒ $\vec{x}_{i+1}(t) = e^{\lambda_i t}(\vec{v}_2 + t\vec{v}_1)$

3.3) HV k.te Stufe ⇒ $\vec{x}_{i+k-1}(t) = e^{\lambda_i t}\sum_{n=0}^{k-1}\frac{t^n}{n!}\vec{h}_{k-n}$

3.4) komplexer EV $\vec{v}_i$

↳ komplexes FS: $\vec{x}_i(t) = e^{\lambda_i t}\vec{v}_i$ $\vec{x}_{i+1}(t) = \overline{\vec{x}_i(t)} = e^{\bar{\lambda}_i t}\,\overline{\vec{v}_i}$

↳ Reelle FS: $\vec{x}_{i,reelle}(t) = Re\{\vec{x}_i(t)\}$ $\vec{x}_{i+1,reelle}(t) = Im\{\vec{x}_i\}$

④ Allg. Lsg: $\vec{x}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + c_2\vec{x}_2(t) + \dots$

Aufgabe 13

Ermittle ein (reellwertiges) Fundamentalsystem, und löse das Anfangswertproblem

$$\vec{x}\,'(t) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\vec{x}(t), \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix}2\\ -2\\ 3\end{pmatrix}.$$

① EW

$$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 2 & 1-\lambda & -2\\ 3 & 2 & 1-\lambda\end{pmatrix}\begin{matrix}1-\lambda & 0\\ 2 & 1-\lambda\\ 3 & 2\end{matrix} = (1-\lambda)^3 + 4(1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)\det\begin{pmatrix}1-\lambda & -2\\ 2 & 1-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2+4\right) = 0$$

$\lambda_1 = 1$ $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$

② EV

EV zu $\lambda_1 = 1$:

$$(A-\lambda_1 I)\vec{v}_1 = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -2\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$\begin{cases} v_1 = v_3 \\ 3v_1 + 2v_2 = 0 \end{cases}$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}v_3\\ -\frac{3}{2}v_3\\ v_3\end{pmatrix} \overset{v_3 = 2}{=\!=} \begin{pmatrix}2\\ -3\\ 2\end{pmatrix}$$

EV zu $\lambda_2 = 1+2i$:

$$(A-\lambda_2 I)\vec{v_2} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2i & 0 & 0 \\ 2 & -2i & -2 \\ 3 & 2 & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} v_1 = 0 \\ v_2 = i v_3 \end{matrix}$$

$$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ -iv_2 \end{pmatrix} \underset{=}{\overset{v_2=1}{=}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{v_3} = \overline{\vec{v_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$$

③ FS: 3.1) $\vec{x_1}(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

3.2) komplexes FS: $\vec{x_2}(t) = e^{(1+2i)t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$ $\quad \vec{x_3}(t) = e^{t(1-2i)}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$

Reelles FS: $\vec{x_2}(t) = e^{t} e^{2it}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \underset{\uparrow \text{ Euler-Formel}}{=} e^{t}\left(\cos(2t) + i\sin(2t)\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$$= e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) + i\sin(2t) \\ -i\cos(2t) + \sin(2t) \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}}_{Re\{\vec{x_2}\}} + \underbrace{i\, e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix}}_{Im\{\vec{x_2}\}}$$

$\vec{x}_{2,reell} = Re\{\vec{x_2}\}$

$\vec{x}_{3,reell} = Im\{\vec{x_2}\}$

④ Allg. Lsg: $\vec{x}(t) = c_1 e^{t}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} + c_3 e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix}$

AW: $\vec{x}(0) = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = -1 \end{cases}$$

$$\vec{x}(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} - e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 14

Ermittle (reellwertige) Fundamentalsysteme zu den Systemen:

(a) $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{x}(t)$, (b) $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}\vec{x}(t)$, (c) $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -2 \\ 0 & 9 & 9 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\vec{x}(t)$.

Hinweis: Die Eigenwerte in (c) sind 6 und 12.

a) ① <u>EW:</u> $\lambda_{1,2} = 1$ alg(1) = 2

② EV ggf. HV

$$(A-\lambda I)\vec{v}_1 = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}v_2 = 0\\ v_1 \text{ beliebig}\end{matrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix}v_1\\0\end{pmatrix} \overset{v_1=1}{=} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

geo(1) = 1

alg(1) > geo(1)

→ HV bis zur 2. Stufe berechnen

HV 2.te Stufe zu $\lambda_{1,2} = 1$:

$$(A-\lambda_{1,2} I)\vec{u}_2 = \vec{v}_1 \Rightarrow \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}v_1 \text{ beliebig}\\ v_2 = 1\end{matrix}$$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix}u_1\\1\end{pmatrix} \overset{u_1=0}{=} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

③ <u>FS:</u> <u>3.1)</u> $\vec{x}_1(t) = e^t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

<u>3.2)</u> $\vec{x}_2(t) = e^t\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$

④ <u>Allg. Lsg:</u> $\vec{x}(t) = c_1 e^t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + c_2 e^t\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$

(c) $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix}10 & 2 & -2\\ 0 & 9 & 9\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix}\vec{x}(t).$

① EW: sind 6 und 12

$$\text{spur}(A) = \underbrace{\text{Summe der EW}}_{\substack{6+6+12\\ \text{oder } 12+12+6}} = \underbrace{\text{Summe der Diagonale}}_{10+9+5=24}$$

$\Rightarrow$ alg(6) = 2

alg(12) = 1

② <u>EV und ggf. HV:</u>

EV zu $\lambda_1 = 12$:

$$(A-12I)\vec{v}_1 = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix}-2 & 2 & -2\\ 0 & -3 & 9\\ 2 & 1 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}v_2 = 3v_3\\ v_1 = 2v_3\end{matrix}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}2v_3\\3v_3\\v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$$

EV zu $\lambda_2 = 6$:

$$(A-6I)\vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix}4 & 2 & -2\\ 0 & 3 & 9\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}v_2 = -3v_3\\ v_1 = 2v_3\end{matrix}$$

$$\vec{V_2} = \begin{pmatrix} 2V_3 \\ -3V_3 \\ V_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$geo(6) = 1 < alg(6) = 2$

$\Rightarrow$ HV 2. te Stufe

HV zu $\lambda_{1,2} = 6$:

$$(A - 6I)\vec{U_2} = \vec{V_2} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 2U_1 + U_2 - U_3 &= 2 \\ U_2 + 3U_3 &= -1 \\ 2U_1 - 4U_3 &= 3 \\ U_1 &= 2U_3 + \tfrac{3}{2} \\ U_2 &= -3U_3 - 1 \end{aligned}$$

$U_1 = 1$
$U_3 = 0$
$U_2 = -1$

$$\vec{U_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

③ FS: $\vec{x}_1(t) = e^{12t}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{x}_2(t) = e^{6t}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{x}_3(t) = e^{6t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

(b) $\quad \vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \vec{x}(t),$

① EW: $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 11-\lambda & -1 \\ 1 & 9-\lambda \end{pmatrix} = (11-\lambda)(9-\lambda) + 1 = 0$

$$= \lambda^2 - 20\lambda + 100 = 0$$
$$= (\lambda - 10)^2 = 0$$

$\lambda_{1,2} = 10$

$alg(10) = 2$

EV zu $\lambda_{1,2} = 10$, $\quad (A - 10I)\vec{V_1} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_1 = V_2 \Rightarrow \vec{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$geo(10) = 1 < alg(10) = 2$

$\Rightarrow$ HV 2. Stufe

$$(A - 10I)\vec{V_2} = \vec{V_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow U_1 = 1 + U_2$$

$$\Rightarrow \vec{V_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{x}_1(t) = e^{10t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{x}_2(t) = e^{10t} \cdot (\vec{V_2} + t\vec{V_1})$

Aufgabe 15

Ermittle ein (reellwertiges) Fundamentalsystem des Systems:

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}(t).$$

① EW:

$$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 3 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \\ 3 & 1 \end{matrix}$$

$$= (2-\lambda)^2(-\lambda) + 0 + 0 + 3(2-\lambda) - 2(2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)\left((2-\lambda)(-\lambda) + 3 - 2\right)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1)$$

$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 1 \qquad \text{alg}(2) = 1 \quad \text{alg}(1) = 2$

② EV

EV zu $\lambda_1 = 2$: $(A - 2I)\vec{v}_1 = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} v_3 = 0 \\ \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

EV zu $\lambda_2 = 1$: $(A - I)\vec{v}_2 = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} v_1 = v_3 \\ v_2 = -2v_3 \end{matrix} \quad \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\text{geo}(1) = 1 < \text{alg}(1)$

HV 2. Stufe:

$(A - I)\vec{v}_3 = \vec{v}_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \qquad \begin{matrix} x_1 = x_3 + 1 \\ x_2 = -2x_3 - 2 \end{matrix} \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$