operations research
QUANTITATIVE INFRASTRUKTURSYSTEMMODELLIERUNG

Tutorium

Operations Research – Grundlagen

Technische Universität Berlin
Fachgebiet **W**irtschafts- und **I**nfrastruktur**P**olitik

Modellierung mit binären Variablen und Rucksackproblem

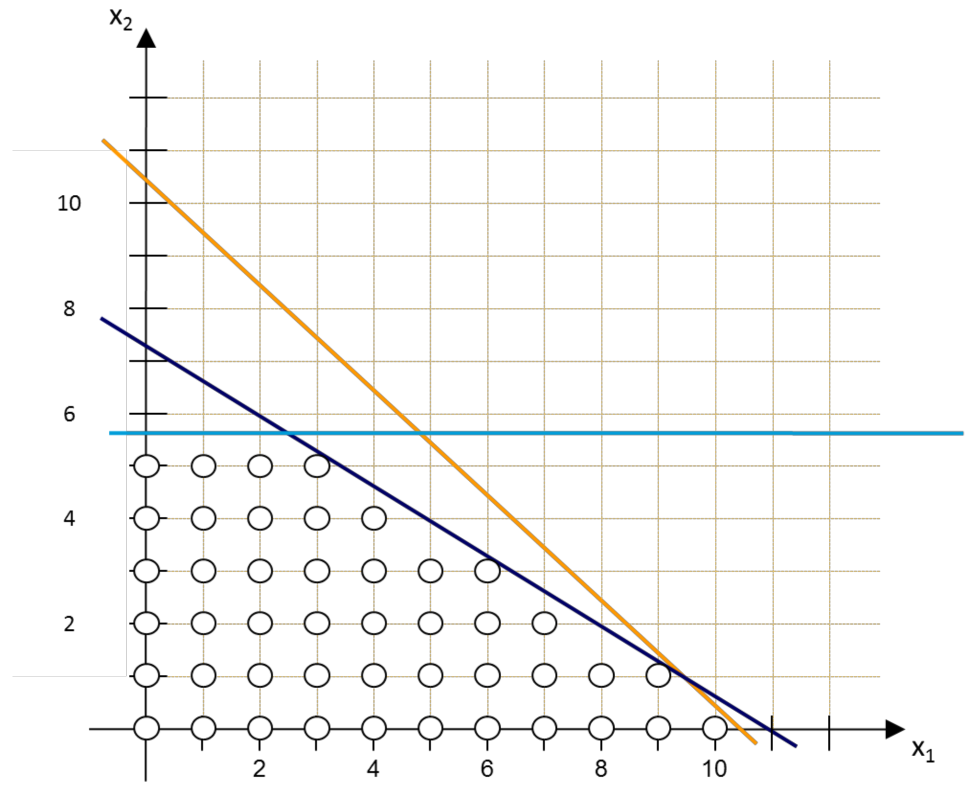
Tutoriumsaufgaben:

4.7	Binäre Variablen: Bei Ikea
4.9	Rucksackproblem: Oriana geht aufs Festival

Freiwillige Hausaufgabe:

4.8	Binäre Variablen: Oriana beim Süßigkeiten-Wettbewerb in NYC

Einführung in Ganzzahlige Optimierung



Lineare Optimierung
- **Zulässiger Bereich ist konvex**
- **Simplex möglich**

Ganzzahlige Optimierung
- **Zulässiger Bereich ist nicht konvex**
- **Simplex nicht möglich**

Modellierung mit binären Variablen

Mit binären Variablen können nicht nur **Entscheidungen zum Investment** in eine Maschine getroffen werden, sondern es können auch **Abhängigkeiten** dargestellt werden.

- Fixkosten
- Bedingungen
  - Entweder, oder
  - Wenn, dann
- BIG muss dazu implementiert werden und beschreibt inhaltlich eine hinreichend große Zahl

使用二进制变量不仅可以做出是否投资于一台机器的决策，还可以表示依赖关系。

- 固定成本
- 条件
  - 要么，要么
  - 如果，那么
- BIG必须被实现，并在内容上描述一个足够大的数字。

Einführungsbeispiel – Binären Variablen

	Tisch	Stuhl	Schrank	Verfügbar
Arbeitszeit [h/Einheit]	3	2	6	150 h
Holz [m^2/Einheit]	4	3	4	160 m^2
Verkaufspreis [Euro/Einheit]	12	8	15	
Variable Kosten [Euro/Einheit]	6	4	8	

$$\begin{aligned} \max z &= 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 \\ s.t.\quad & 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 150 \\ & 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 160 \\ & x_{1\ldots3} \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Einführungsbeispiel – Binäre Variablen & Fixkosten

	Tisch	Stuhl	Schrank	Verfügbar
Arbeitszeit [h/Einheit]	3	2	6	150 h
Holz [m^2/Einheit]	4	3	4	160 m^2
Verkaufspreis [Euro/Einheit]	12	8	15	
Variable Kosten [Euro/Einheit]	6	4	8	
Fixkosten [Euro]	200	150	100	

Ganzzahlige Optimierung mit Fixkosten – Beispiel aus der VL

- Modellierung der **Fixkosten** mit Hilfe von BIG
- BIG: hinreichend große Zahl

	Tisch	Stuhl	Schrank	Verfügbar
Arbeitszeit [h/Einheit]	3	2	6	150 h
Holz [m²/Einheit]	4	3	4	160 m²
Verkaufspreis [Euro/Einheit]	12	8	15	
Variable Kosten [Euro/Einheit]	6	4	8	
Fixkosten [Euro]	200	150	100	

1

$$
\begin{array}{llcl}
\max z = & 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 \boxed{- 200\, y_1 - 150\, y_2 - 100\, y_3} & & \\
s.t. & 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 & \leq & 150 \\
 & 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 & \leq & 160 \\
 & x_1 & \leq & BIG \cdot y_1 \\
 & x_2 & \leq & BIG \cdot y_2 \\
 & x_3 & \leq & BIG \cdot y_3 \\
 & x_{1..3} & \in & \mathbb{N}_0 \\
 & y_{1...3} & \in & \{0,1\}
\end{array}
$$

2

3

BIG = hinreichend große Zahl

Allgemein: Entweder … oder ...

Entweder $f(x_i) \leq 0$ oder $g(x_i) \leq 0$

Nebenbedingungen

$$f(x_i) \leq BIG \; * \; y_i$$
$$g(x_i) \leq BIG\,(1 - y_i)$$

Definitionsbereich

$$y_i \in \{0,1\}$$

Beispiel: Entweder … oder ...

Modifikation des Ausgangsproblems

- Wenn Tische produziert werden, dann mindestens 25
  - **Entweder** $x_1 \leq 0$ **oder** $x_1 \geq 25$

Entweder $f(x_i) \leq 0$ oder $g(x_i) \leq 0$

$$f(x_i) \leq BIG * y_i$$
$$g(x_i) \leq BIG\ (1 - y_i)$$

g(x_i) : $25 - x_1 \leq BIG \cdot (1 - y_1)$

f(x_i) : $x_1 \leq BIG \cdot y_1$

Beispiel: Entweder … oder ...

Modifikation des Ausgangsproblems

- Wenn Tische produziert werden, dann mindestens 25
  - **Entweder** $x_1 \leq 0$ **oder** $x_1 \geq 25$

$$\begin{aligned} 25 - x_1 &\leq BIG \cdot (1 - y_1) \\ x_1 &\leq BIG \cdot y_1 \end{aligned}$$

- Wenn Stühle produziert werden, dann mindestens 26
  - **Entweder** $x_2 \leq 0$ **oder** $x_2 \geq 26$

$$\begin{aligned} 26 - x_2 &\leq BIG \cdot (1 - y_2) \\ x_2 &\leq BIG \cdot y_2 \end{aligned}$$

- Wenn Schränke produziert werden, dann mindestens 27
  - **Entweder** $x_3 \leq 0$ **oder** $x_3 \geq 27$

$$\begin{aligned} 27 - x_3 &\leq BIG \cdot (1 - y_3) \\ x_3 &\leq BIG \cdot y_3 \end{aligned}$$

Beispiel: Entweder … oder ...

Modifikation des Ausgangsproblems:

$$
\begin{array}{llrlrlrlrlrlrlll}
\max z & = & 6 & x_1 & + & 4 & x_2 & + & 7 & x_3 & - 200 & y_1 & - 150 & y_2 & - 100 & y_3 & & \\
s.t. & & 3 & x_1 & + & 2 & x_2 & + & 6 & x_3 & & & & & & & \leq & 150 \\
 & & 4 & x_1 & + & 3 & x_2 & + & 4 & x_3 & & & & & & & \leq & 160
\end{array}
$$

$$
\boxed{
\begin{array}{lllll}
 & x_1 & & & \leq BIG \cdot y_1 \\
 & & x_2 & & \leq BIG \cdot y_2 \\
 & & & x_3 & \leq BIG \cdot y_3 \\
25 & - x_1 & & & \leq BIG \cdot (1 - y_1) \\
26 & & - x_2 & & \leq BIG \cdot (1 - y_2) \\
27 & & & - x_3 & \leq BIG \cdot (1 - y_3)
\end{array}
}
$$

$$x_{1..3} \in \mathbb{N}_0$$

$$\boxed{y_{1...3} \in \{0,1\}}$$

Allgemein: Wenn ... dann ...

Wenn f(x) > 0 dann g(x) ≥ 0

Nebenbedingungen

$$f(x) \leq BIG * (1 - q)$$
$$-g(x) \leq BIG * q$$

Definitionsbereich

$$q \in \{0,1\}$$

Beispiel: Wenn … dann ...

$$f(x) \leq BIG \ast (1-q)$$
$$-g(x) \leq BIG \ast q$$

Modifikation des Ausgangsproblems:

- Wenn die Summe der produzierten Stühle (x_2) und Schränke (x_3) 24 Einheiten übersteigt, müssen mindestens 30 Tische (x_1) hergestellt werden.

$\boxed{\textbf{Wenn } f(x) > 0 \textbf{ dann } g(x) \geq 0}$

- Wenn $\mathbf{x_2 + x_3 > 24}$, dann $\mathbf{x_1 \geq 30}$
- Alternativ: Wenn $\mathbf{x_2 + x_3 - 24 > 0}$, dann $\mathbf{x_1 - 30 \geq 0}$

$$\begin{array}{lrrl} \mathbf{f(x_i):} & x_2 + x_3 & -\ 24 & \leq BIG\ (1-q) \\ \mathbf{g(x_i):} & -x_1 & +\ 30 & \leq \ BIG \cdot q \end{array}$$

$$q = \begin{cases} 1, & falls\ die\ Summe\ von\ x_2\ und\ x_3\ 24\ Einheiten\ nicht\ \text{übersteigt} \\ 0, & sonst \end{cases}$$

4.7 Binäre Variablen: Bei Ikea

Die Midsommanacht hat Folgen nach sich gezogen. Einige der Köttbullar auf der IKEA Betriebsfeier waren verdorben, weshalb nun ein Großteil der Belegschaft ausfällt. Aufgrund dieses Mangels an Arbeitskräften, beschränkt sich die Produktion nun auf die drei beliebtesten Artikel: Betten **Godfjord (x_1), Stühle Börje (x_2) und Tische Nordby (x_3).** Es gilt nun, die begrenzte Personalkapazität möglichst optimal einzusetzen, um den Gewinn der verkauften Produkte zu maximieren. Ein Bett benötigt **3 Stunden** Fertigungszeit, ein Stuhl **1 Stunde** und ein Tisch **2 Stunden**. Insgesamt beträgt die Personalkapazität **200 Stunden**. Betten verkauft IKEA für **500 EUR, Stühle für 50 EUR und Tische für 100 EUR.** Bereits gegeben ist folgendes ganzzahliges Problem zur Darstellung der Situation:

$$\begin{array}{lrrrcl} \max\ z = & 500 \cdot x_1 + & 50 \cdot x_2 + & 100 \cdot x_3 & & \\ \text{s.t.} & 3 \cdot x_1 + & 1 \cdot x_2 + & 2 \cdot x_3 & \leq & 200 \\ & & & x_{1,\dots,3} & \in \mathbb{N}_0 & \end{array}$$

仲夏之夜带来了一些后果。宜家公司聚会上的一些瑞典肉丸变质了，因此现在大部分员工都请假了。由于劳动力短缺，生产现在仅限于三种最受欢迎的产品：Godfjord床（x1）、Börje椅子（x2）和Nordby桌子（x3）。现在的目标是尽可能有效地利用有限的人力资源，以最大化销售产品的利润。一张床需要3小时的生产时间，一把椅子需要1小时，一张桌子需要2小时。总人力资源为200小时。宜家公司以500欧元销售床，以50欧元销售椅子，以100欧元销售桌子。以下是提供的整数问题，用于描述情况：

4.7 Binäre Variablen: Bei Ikea

(…) Betten **Godfjord (x_1), Stühle Börje (x_2) und Tische Nordby (x_3).** Es gilt nun, die begrenzte Personalkapazität möglichst optimal einzusetzen, um den Gewinn der verkauften Produkte zu maximieren. Ein Bett benötigt **3 Stunden** Fertigungszeit, ein Stuhl **1 Stunde** und ein Tisch **2 Stunden**. Insgesamt beträgt die Personalkapazität **200 Stunden**. Betten verkauft IKEA für **500 EUR, Stühle für 50 EUR und Tische für 100 EUR.** Bereits gegeben ist folgendes ganzzahliges Problem zur Darstellung der Situation:

$$\begin{array}{lrrrcl}
\max \ z = & 500 \cdot x_1 + & 50 \cdot x_2 + & 100 \cdot x_3 & & \\
\text{s.t.} & 3 \cdot x_1 + & 1 \cdot x_2 + & 2 \cdot x_3 & \leq & 200 \\
 & & & x_{1,\dots,3} & \in \mathbb{N}_0 &
\end{array}$$

Ergänzen Sie das Problem durch Hinzufügen von weiteren Variablen unter folgenden Bedingungen:

I. Falls Betten produziert werden, fallen Fixkosten von 150 EUR an

II. Falls Stühle produziert werden, fallen Fixkosten von 50 EUR an

III. Falls Tische produziert werden, fallen Fixkosten von 80 EUR an

IV. Falls Betten produziert werden, dann mindestens 35

V. Falls die Summe von Betten und Stühlen 70 Einheiten übersteigt, müssen mindestens 10 Tische produziert werden.

Allgemein: Entweder … oder ...

$\boxed{\textbf{Entweder } f(x_i) \leq 0 \textbf{ oder } g(x_i) \leq 0}$

Nebenbedingungen

$$f(x_i) \leq BIG * y_i$$
$$g(x_i) \leq BIG\,(1 - y_i)$$

Definitionsbereich

$$y_i \in \{0,1\}$$

4.7 Binäre Variablen: Bei Ikea

(…) Betten **Godfjord (x_1), Stühle Börje (x_2) und Tische Nordby (x_3).** Es gilt nun, die begrenzte Personalkapazität möglichst optimal einzusetzen, um den Gewinn der verkauften Produkte zu maximieren. Ein Bett benötigt **3 Stunden** Fertigungszeit, ein Stuhl **1 Stunde** und ein Tisch **2 Stunden**. Insgesamt beträgt die Personalkapazität **200 Stunden**. Betten verkauft IKEA für **500 EUR, Stühle für 50 EUR und Tische für 100 EUR.** Bereits gegeben ist folgendes ganzzahliges Problem zur Darstellung der Situation:

$$
\begin{array}{lrrrcc}
\max \ z = & 500 \cdot x_1 + & 50 \cdot x_2 + & 100 \cdot x_3 & & \\
\text{s.t.} & 3 \cdot x_1 + & 1 \cdot x_2 + & 2 \cdot x_3 & \leq & 200 \\
 & & & x_{1,\dots,3} & \in \mathbb{N}_0 &
\end{array}
$$

Ergänzen Sie das Problem durch Hinzufügen von weiteren Variablen unter folgenden Bedingungen:

I. Falls Betten produziert werden, fallen Fixkosten von 150 EUR an

II. Falls Stühle produziert werden, fallen Fixkosten von 50 EUR an

III. Falls Tische produziert werden, fallen Fixkosten von 80 EUR an

IV. Falls Betten produziert werden, dann mindestens 35

V. Falls die Summe von Betten und Stühlen 70 Einheiten übersteigt, müssen mindestens 10 Tische produziert werden.

Allgemein: Wenn ... dann ...

Wenn f(x) > 0 dann g(x) ≥ 0

Nebenbedingungen

$$f(x) \leq BIG \ * (1 - q)$$
$$-g(x) \leq BIG \ * q$$

I. 如果生产床，则会产生150欧元的固定成本
II. 如果生产椅子，则会产生50欧元的固定成本
III. 如果生产桌子，则会产生80欧元的固定成本
IV. 如果生产床，则至少需要35个
V. 如果床和椅子的总和超过70个单位，则必须生产至少10个桌子。

Definitionsbereich

$$q \in \{0,1\}$$

4.7 Binäre Variablen: Bei Ikea

Gesamtlösung:

Wähle einen Parameter BIG als hinreichend große Zahl, sowie Variablen:

$$y_n = \begin{cases} 1, & \text{falls Produkt } n \text{ produziert wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3$$

$$q = \begin{cases} 1, & \text{falls Summe aus } x_1 \text{ und } x_2 \text{ 70 Einheiten nicht "ubersteigt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

$$\begin{array}{llllllllll}
\max z = & 500 & x_1 & + & 50 & x_2 & + & 100 & x_3 & \overbrace{-150y_1}^{(I)} \overbrace{-50y_2}^{(II)} \overbrace{-80y_3}^{(III)} & & & \\
\text{s.t.} & 3 & x_1 & + & 1 & x_2 & + & 2 & x_3 & \leq & 200 & \\
& & x_1 & & & & & & & \leq & BIG \cdot y_1 & \textbf{(I)} \\
& & & & & x_2 & & & & \leq & BIG \cdot y_2 & \textbf{(II)} \\
& & & & & & & & x_3 & \leq & BIG \cdot y_3 & \textbf{(III)} \\
& 35- & x_1 & & & & & & & \leq & BIG \cdot (1 - y_1) & \textbf{(IV)} \\
& & x_1 & + & & x_2 & - & & 70 & \leq & BIG \cdot (1 - q) & \textbf{(V)} \\
& - & x_3 & & & & + & & 10 & \leq & BIG \cdot q & \textbf{(V)} \\
& & & & & & & & x_{1,\ldots,3} & \in & \mathbb{N}_0 & \\
& & & & & & & & y_{1,\ldots,3} & \in & \{0,1\} & \textbf{(I- IV)} \\
& & & & & & & & q & \in & \{0,1\} & \textbf{(V)}
\end{array}$$

BIG = hinreichend große Zahl

Rucksack-Problem

Aus einer Menge von unteilbaren Objekten, die jeweils ein spezifisches Gewicht oder Volumen und Nutzen haben, soll diejenige Kombination an Objekten ausgewählt werden, deren Gesamtgewicht oder Gesamtvolumen eine vorgegebene Beschränkung nicht überschreitet und dennoch den maximalen Nutzen stiftet.

Das Rucksackproblem ist also ein **binäres Problem**. Die Elemente des Lösungsvektors dürfen nur der Menge **{0,1}** entstammen.

Es handelt sich um ein OP-Problem mit nur **einer Restriktion**.

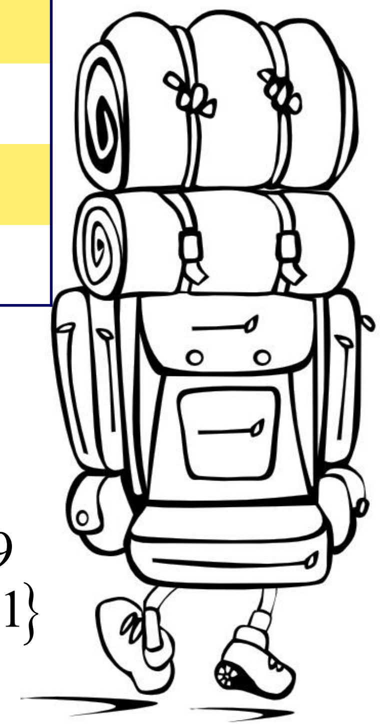
从一组不可分割的对象中选择一组对象的组合，每个对象都具有特定的重量或体积和效用，使得总
重量或总体积不超过预先设定的限制，同时产生最大的效用。因此，背包问题是一个二进制问题。
解向量的元素只能来自集合{0,1}。这是一个具有单一约束的OP问题。

Rucksack-Problem – Beispiel

Max hat einen Rucksack mit einem Fassungsvermögen von 19 Litern und möchte einen Sommerausflug machen

Folgende Gegenstände möchte er gerne mitnehmen:

Nr.	Gegenstand	Volumen	Nutzen	Nutzen/Kosten	Rang
1	Ziegelsteine	6	1		
2	Zelt	7	3		
3	Flasche Bier	4	2		
4	Mückenschutz	2	5		
5	Grill	9	4		



Maximiere den Nutzen !

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
\max z & = & 1 & x_1 & + & 3 & x_2 & + & 2 & x_3 & + & 5 & x_4 & + & 4 \; x_5 \\
s.t. & & 6 & x_1 & + & 7 & x_2 & + & 4 & x_3 & + & 2 & x_4 & + & 9 \; x_5 \le 19 \\
 & & & & & & & & & & & & & & x_{1...5} \in \{0,1\}
\end{array}
$$

Beachte das Volumen (Kosten) !

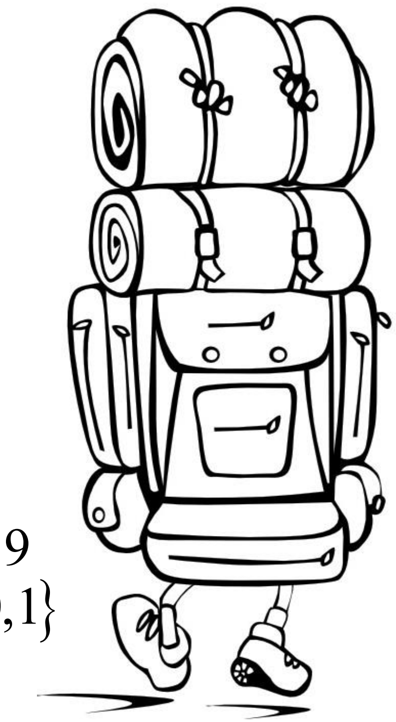
Rucksack-Problem – Beispiel

Max hat einen Rucksack mit einem Fassungsvermögen von 19 Litern und möchte einen Sommerausflug machen

Folgende Gegenstände möchte er gerne mitnehmen:

Nr.	Gegenstand	Kosten	Nutzen	Nutzen/Kosten	Rang
1	Ziegelsteine	6	1	1/6 = 0,166	5
2	Zelt	7	3	3/7 = 0,43	4
3	Flasche Bier	4	2	2/4 = 0,5	2
4	Mückenschutz	2	5	5/2 = 2,5	1
5	Grill	9	4	4/9 = 0,444	3

$$
\begin{aligned}
\max z &= 1\,x_1 + 3\,x_2 + 2\,x_3 + 5\,x_4 + 4\,x_5 \\
s.t. &\quad 6\,x_1 + 7\,x_2 + 4\,x_3 + 2\,x_4 + 9\,x_5 \leq 19 \\
&\quad x_{1\ldots5} \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$



4.9 Rucksackproblem: Oriana geht aufs Festival

Oriana möchte als Belohnung für das Bestehen der arbeitsintensiven Klausurphase auf ein Festival gehen und möchte ihre vier favorisierten Gegenstände mitnehmen. Allerdings kann sie aufgrund der Kapazitätsbeschränkung ihres Rucksacks von **17 Liter** nicht alle transportieren und muss sich demnach für die entscheiden, die ihr die **größte Zweckhaftigkeit** bringen. Gegeben ist eine Tabelle mit den Gegenständen, ihrer jeweiligen Zweckhaftigkeit und Volumen sowie das bereits aufgestellte ganzzahlige Problem.

	Volumen	Zweckhaftigkeit
Zelt(x_1)	8	6
Bettdecke(x_2)	6	3
Bier(x_3)	9	8
Gummistiefel(x_4)	3	4

$$
\begin{array}{rrrrrcr}
\max\ z = & 6x_1+ & 3x_2+ & 8x_3+ & 4x_4 & & \\
\text{s.t.} & 8x_1+ & 6x_2+ & 9x_3+ & 3x_4 & \leq & 17 \\
 & & & & x_{1,\dots,4} & \in & \{0,1\}
\end{array}
$$

4.9 Rucksackproblem: Oriana geht aufs Festival

Berechne Quotienten von Zweckhaftigkeit und Volumen und lege so die Rangfolge fest.

	Volumen	Zweckhaftigkeit	Zweckhaftigkeit/Volumen	Rang
Zelt(x_1)	8	6	6/8	3
Bettdecke(x_2)	6	3	3/6	4
Bier(x_3)	9	8	8/9	2
Gummistiefel(x_4)	3	4	4/3	1

Beginne Rucksackproblem – Algorithmus:

			P_0		$P_1 : x_1 = 0$		$P_2 : x_1 = 1$		$P_{11} : x_1 = 0, x_2 = 0$	
	Zweckhaftigkeit	Volumen	Menge	$\sum$	Menge	$\sum$	Menge	$\sum$	Menge	$\sum$
x_4	4	3	1	3	1	3	1	11	1	3
x_3	8	9	1	12	1	12	6/9	17	1	12
x_1	6	8	5/8	17	0	0	1	8	0	0
x_2	3	6	0	17	5/6	17	0		0	0
z			15,75				46/3		12	

4.9 Rucksackproblem: Oriana geht aufs Festival

Fortsetzung:

	$P_{12}: x_1 = 0, x_2 = 1$		$P_{21}: x_1 = 1, x_3 = 0$		$P_{22}: x_1 = 1, x_3 = 1$		$P_{121}: x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0$	
	Menge	$\sum$	Menge	$\sum$	Menge	$\sum$	Menge	$\sum$
x_4	1	9	1	11	0	17	1	9
x_3	8/9	17	0	8	1	17	0	0
x_1	0	0	1	8	1	8	0	0
x_2	1	6	1	17	0	17	1	6
z	127/9		13		14		7	

	$P_{122}: x_1 = 0, x_2 = x_3 = 1$		$P_{1221}: x_1 = x_4 = 0, x_2 = x_3 = 1$		$P_{1222}: x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_4 = 1$	
	Menge	$\sum$	Menge	$\sum$	Menge	$\sum$
x_4	2/3	17	0	0	1	18
x_3	1	15	1	15	1	15
x_1	0	0	0	0	0	0
x_2	1	6	1	6	1	6
z	41/3		11		unzulässig	

4.9 Rucksackproblem: Oriana geht aufs Festival

	Volumen	Zweckhaftigkeit
Zelt(x_1)	8	6
Bettdecke(x_2)	6	3
Bier(x_3)	9	8
Gummistiefel(x_4)	3	4

$$\begin{array}{rccccccc} \max \quad z = & 6x_1 + & 3x_2 + & 8x_3 + & 4x_4 & & \\ \text{s.t.} & 8x_1 + & 6x_2 + & 9x_3 + & 3x_4 & \leq & 17 \\ & & & & x_{1,\ldots,4} & \in & \{0,1\} \end{array}$$

Optimal Lösung:

x_1: $\boxed{1}$ x_2: $\boxed{0}$ x_3: $\boxed{1}$ x_4: $\boxed{0}$ z: $\boxed{14}$

Fragen zum Tutorium?