Färbbarkeit

Definition. Sei G ein Graph.

Eine Knotenfärbung von G von k Farben ist eine Abbildung $c : V(G) \to \{1, \dots, k\}$, so dass $c(u) \neq c(v)$ für alle $\{u, v\} \in E(G)$ gilt.

Wir nennen G *k-färbbar*, wenn G eine Färbung mit k Farben hat.

Bemerkungen : 1) G ist $|V|$-färbbar

2) Ist G k-färbbar, dann ist G auch ℓ-färbbar für $k \leq \ell$

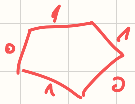
Definition. Die chromatische Zahl $\chi(G)$ ist die minimale Anzahl k von Farben, so dass G eine Knotenfärbung mit k Farben hat.

vollst. Graph mit n Knoten

↳ Für $n \in \mathbb{N}^+$ ist $\chi(K_n) = n$

↳ Für einen bipartiten Graphen G ist $\chi(G) \leq 2$

↳ G ist 2-färbbar $\iff$ G enthält keinen Kreis ungerader Länge



Zeichnung eines Graphen G.
Einbettung in die Ebene $\Sigma := \mathbb{R}^2$, d.h. eine Abbildung π, die

- jedem Knoten $v \in V(G)$ einen Punkt $\pi(v) \in \mathbb{R}^2$ sowie
- jeder Kante $e = \{u, v\} \in E(G)$ eine Kurve $\pi(e) \subseteq \mathbb{R}^2$ zuordnet, die $\pi(v)$ mit $\pi(u)$ verbindet und sonst keinen Punkt $\pi(x)$ enthält, für ein $x \in V(G) \setminus \{u, v\}$.

Planarer Graph

- G heißt planar, falls G in die Ebene eingebettet werden kann
  ↳ $\exists$ Zeichnung, sodass sich $\pi(e), \pi(h)$, für $e, h \in E$, maximal in den Endpunkten schneiden

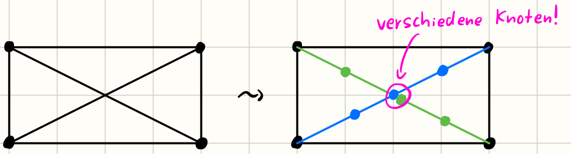
Achtung: Planare Graphen müssen nicht immer planar gezeichnet sein!
↳ es geht nur darum, ob eine solche Einbettung existiert

Definition. Sei G ein Graph.

1. Eine Unterteilung (engl. *subdivision*) von G ist ein Graph G', den man aus G dadurch erhält, indem man eine oder mehrere Kanten von G durch Pfade beliebiger Länge (aber größer als 0) ersetzt.

   Dabei haben die Pfade für verschiedene Kanten keinen inneren Knoten gemeinsam.

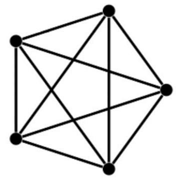
↳ Insbesondere ist G eine Unteilung von sich selbst



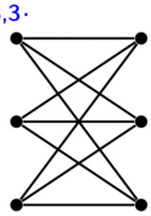
Satz von Kuratowski

G ist planar $\Longleftrightarrow$ G enthält weder eine Unterteilung von K_5 noch von $K_{3,3}$

K_5.



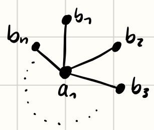
$K_{3,3}$.

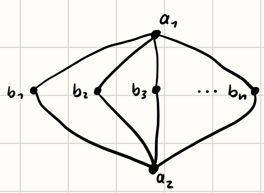


Anwendung:

Für $m, n \geq 1$ sei $K_{m,n}$ ein vollständiger bipartiter Graph mit $|A| = m$, $|B| = n$.
↳ $V(K_{m,n}) = A \cup B$, $|A| = m$, $|B| = n$

Frage: Für welche m, n ist $K_{m,n}$ planar?

- $K_{1,n}$ ist planar $\rightsquigarrow$  (ist ein Baum)

- $K_{2,n}$ ist planar $\rightsquigarrow$ 

- $K_{m,n}$ für $m, n \geq 3$ ist nicht planar, da dieser Graph dann einen $K_{3,3}$ als Untergraphen enthält.

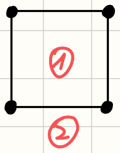
Def.: Gebiete (Faces)

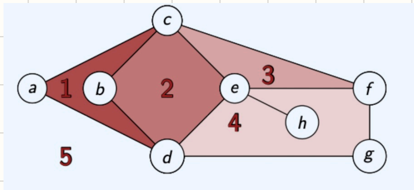
↳ „zusammenhängende" Teile des $\mathbb{R}^2$, die durch das „Zerschneiden" des $\mathbb{R}^2$ entlang der Kanten entstehen

↳ ein Gebiet enthält insb. keine Punkte eines Knotens oder einer Kante

Bemerkungen: 1) ist T ein Baum und π seine planare Einbettung, dann hat π 1 Gebiet

2) Die Einbettung

G:  hat 2 Gebiete



Eulersche Polyederformel

- G zsh. und planar
- π planare Einbettung von G
- F die Menge der Gebiete von G

Dann gilt: $|F| = |E| - |V| + 2$

Direkte Folgerung:

Für jeden planaren Graphen G mit $|V| \geq 3$ gilt: $|E| \leq 3 \cdot |V| - 6$

Direkte Folgerung daraus:

Ist G planar, so existiert $v \in V$ mit $d(v) \leq 5$

grad 连到v的边的数量

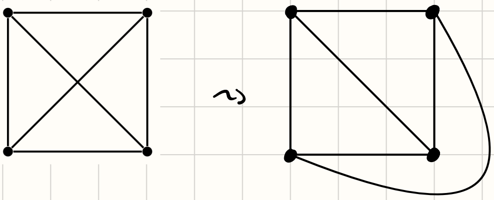
↳ Ang. $\forall v \in V: d(v) \geq 6$

$$\Rightarrow 2|E| = \sum_{v \in V} d(v) \geq 6 \cdot |V| \iff |E| \geq 3 \cdot |V| \quad (*)$$

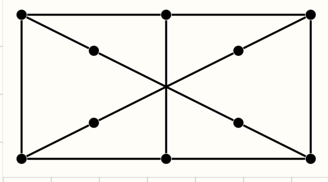
aber nach der Polyederformel gilt $|E| \leq 3 \cdot |V| - 6$ also mit $(*)$

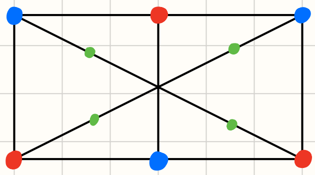
$$3 \cdot |V| - 6 \geq |E| \geq 3 \cdot |V| \iff -6 \geq 0 \quad \lightning$$

Planar ? Chromatische Zahl ?



- also planar ✓
- chromatische Zahl = 4, da alle Knoten benachbart.

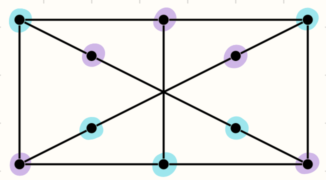


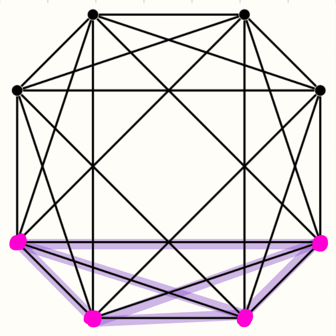


ist der $K_{3,3}$ mit $A=$ ●, $B=$ ● und die grünen Knoten entstehen bei Unterteilung

1) nicht planar, da Unterteilung des $K_{3,3}$ enthalten ist

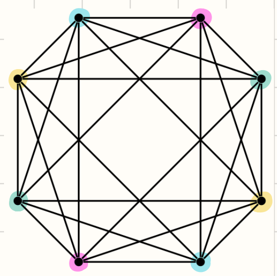
2) chromatische Zahl = 2, denn
   - Graph hat eine Kante (=> chrom. Zahl min. 2)
   - ist 2-färbbar, denn

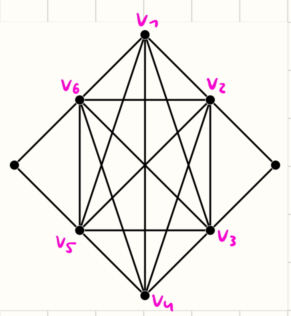




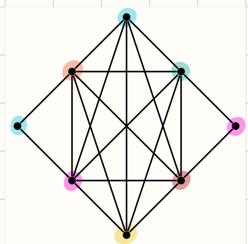
1) nicht planar, da 6-regulär
   ↳ es gibt keinen Knoten $v \in V$ mit $d(v) \le 5$

2) · nicht 3-färbbar, denn es ist ein K_4 enthalten
   · aber 4-färbbar mit
   => chrom. Zahl = 4





1) nicht planar, denn
   - $G[\{v_i \mid 1 \le i \le 6\}]$ ist ein K_6
   - oder: Polyederformel ist nicht erfüllt
     ↳ $|V| = 8$, $3 \cdot |V| - 6 = 18$ und
     der neben den $\binom{6}{2} = 15$ Kanten des K_6
     gibt es noch mehr als 3 weitere Kanten.



2) · nicht 5-färbbar wegen des K_6
   - 6-färbbar wegen ...
   => chrom. Zahl = 6

Aufgabe 2

Gebe für die folgenden Vorgaben jeweils einen Graphen an oder begründe warum ein solcher Graph nicht existieren kann.

(i) Ein 6-regulärer planarer Graph

k-regulärer Graph
每个点有k条边

↳ oben schon gezeigt, dass es in jedem planaren Graphen einen Knoten $v \in V$ mit $d_G(v) \leq 5$ gibt.

(ii) Ein 5-regulärer Graph mit 11 Knoten

Nach $2|E| = \sum_{v \in V} d(v)$ gilt $2 \cdot |E| = 5 \cdot 11 = 55$ $\lightning$ da $2 \cdot |E|$ gerade ist

(iii) Ein 5-regulärer planarer Graph mit weniger als 11 Knoten

- 5-regulär $\Rightarrow$ $|E| = \frac{5}{2} \cdot |V|$ (Handshake Lemma)
- planar und $|V| \geq 3$ (da 5-regulär) $\Rightarrow$ $|E| \leq 3 \cdot |V| - 6$ (Polyeder-Formel)

⇝ zusammen also: $\frac{5}{2} \cdot |V| = |E| \leq 3 \cdot |V| - 6 \iff |V| \geq 12$ $\lightning$

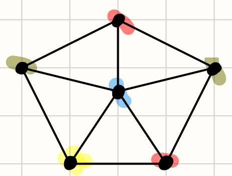
(iv) Ein Graph mit chromatischer Zahl 4, der keinen K_4 enthält.

Idee: Erweitere Graphen, der chrom. Zahl 3 hat.

↳ aus VL: G 2-färbbar $\iff$ G enthalt keinen C_n mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ ungerade

→ 构建一个长为奇数的圈

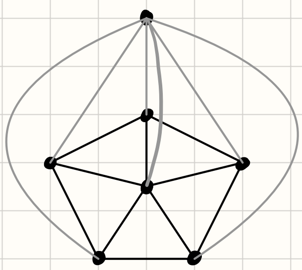
G:



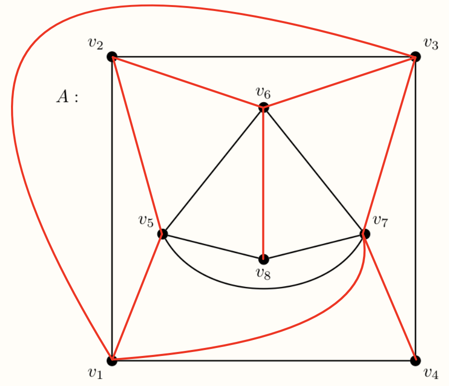
- ist nicht 3-färbbar, aber 4-färbbar.
- enthält keinen K_4

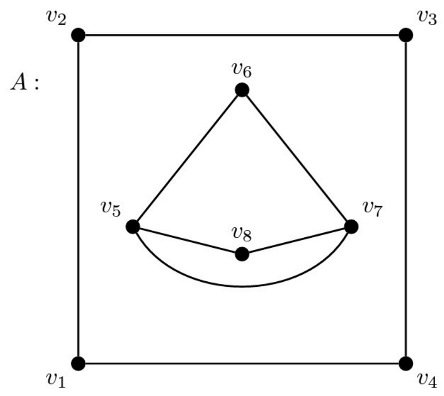
Zusatz: chromatische Zahl 5 und keinen K_5 als UG?

G':



Aufgabe 3





(i) Finde einen planaren Graph, der A als Untergraph hat, und für den eine Einbettung existiert in der jedes Gebiet von einem Kreis der Länge 3 begrenzt wird.

(ii) Zeigen Sie, dass für jeden zusammenhängenden, planaren Graphen $G = (V, E)$ ein planarer Graph H existiert, sodass G ein Teilgraph von H ist und eine planare Einbettung von H existiert, in welcher der Rand jedes Gebiets ein Kreis der Länge drei ist.

Bonus: Unter welchen Bedingungen kann ich H so wählen, dass $V(H) = V(G)$?

Diese Aufgabe zeigt insbesondere, dass ein Kantenmaximaler planarer Graph trianguliert ist ($\rightsquigarrow$ jedes Gebiet durch einen K_3 begrenzt)

Es sei G zsh. und planar.

Gilt $|V_G| \leq 3$, so können wir $H = K_3$ wählen.

Sei also $|V_G| \geq 3$. Wir zeigen, dass $|V_G| = |V_H|$ immer möglich ist.

Genauer: Gibt es ein Gebiet, welches nicht durch einen K_3 beschränkt ist, dann können wir eine noch nicht vorhandene Kante zur planaren Einbettung hinzufügen, sodass... 1) es weiterhin planare Einbettung ist
2) mehr Gebiete als vorher durch einen K_3 beschränkt sind

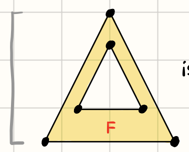
Sei F ein Gebiet der Einbettung, welches nicht durch einen K_3 beschränkt ist.

↳ $V_F :=$ Knoten des Randes von F

Da G zsh. ist, ist der Rand von F ein geschlossener Weg

↳ ein kürzester geschlossener Weg, der alle Knoten, die Teil des Gebiets sind, durchläuft.

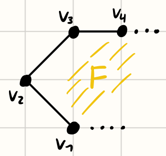
$\rightsquigarrow$



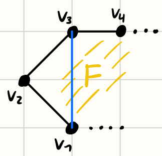
ist nicht möglich

Fall 1: Im Rand kommt kein Knoten mehrfach vor

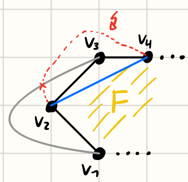
$\Rightarrow$ Rand von F ist Kreis mit min. 4 Knoten



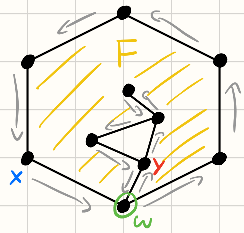
• falls $\{v_1, v_3\} \notin E \Rightarrow$ füge $\{v_1, v_3\}$ hinzu



• falls $\{v_1, v_3\} \in E$ (außerhalb von F), dann kann $\{v_2, v_4\}$ nicht existieren und wir fügen $\{v_2, v_4\}$ hinzu



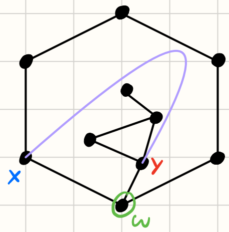
Fall 2: Im Rand kommt ein Knoten mehrfach vor



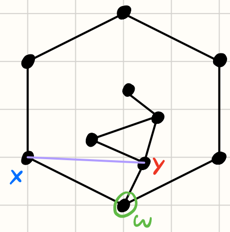
Sei $w \in V_F$ ein Knoten der mehrmals vorkommt und x, y die Knoten, die direkt vor bzw. nach w im Rand vorkommen.

$\rightsquigarrow$ Insb. ist w ein Schnittknoten!

Wir fügen die Kante $\{x, y\}$ hinzu.

$\rightsquigarrow$ 

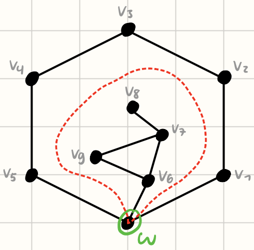
oder



Warum existiert diese Kante noch nicht (außerhalb von F)?

↳ w ist ein Schnittknoten und damit liegen x und y in verschiedenen Blöcken

$\Rightarrow \{x, y\}$ kann nicht existieren, weil sonst w kein Schnittknoten wäre



Es gibt die geschlossenen Wege

$(w, v_7, \dots, v_5, w)$ und $(w, v_6, \dots, v_9, w)$,

die beide im Rand des Gebiets sind.

Also gibt es eine in w geschlossene Kurve, die in F verläuft und keine andere Kante schneidet.

Würde die Kante $\{v_5, v_6\}$ existieren, so müsste sie die rote geschlossene Kurve schneiden und damit das Gebiet F teilen ↯