1 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Integraltransformationen sind ein wesentliches Hilfsmittel zur Lösung von Differentialgleichungen und die Behandlung *partieller* Differentialgleichungen setzt vielfach die Vertrautheit mit den *gewöhnlichen* Differentialgleichungen voraus. Wir beginnen deshalb mit einer Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

1.1 Differentialgleichungen in den Anwendungen

Ein kräftefreier Massenpunkt bewegt sich nach Newton mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$. Wirkt auf ihn eine Kraft $\vec{F}$, so bewirkt diese eine zeitliche Änderung der Geschwindigkeit (=Beschleunigung) proportional zur Kraft. Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ wird jetzt eine Funktion $\vec{v} = \vec{v}(t)$, und es gilt

$$m\vec{v}'(t) = \vec{F}. \tag{1}$$

Dieser so einfach erscheinende Sachverhalt ist fundamental für unsere Methode, Naturvorgänge und damit technische Vorgänge zu modellieren: Die momentanen (infinitesimalen) Änderungen eines Systems werden „ergründet“ und beschrieben, um aus ihnen die „makroskopische“ Entwicklung des Systems zu bestimmen. Durch (triviale) Integration von (1) findet man die Entwicklung der Geschwindigkeit

这个看似简单的事实，却是我们模拟自然过程和技术过程的基本方法：
对系统的瞬时（无限小）变化进行 "确定 "和描述，以确定系统的 "宏观 "发展。
通过对 (1) 的（微不足道的）积分，我们可以发现速度的发展情况

$$m\vec{v}(t) = t\vec{F} + m\vec{v}_0.$$

Wenn allerdings $\vec{F}$ nicht konstant ist, sondern selbst von t oder, wie bei Reibungsphänomenen, auch von $\vec{v}$ abhängt, bekommt man eine kompliziertere Beziehung ¡

$$m\vec{v}'(t) = \vec{F}(t, \vec{v}).$$

Dann wird die Integration schwieriger, oder $\vec{v}(t)$ läßt sich gar nicht mehr durch Integration finden. Darauf gehen wir im nächsten Abschnitt ein.

Die Newtonsche Gleichung ist in allen Bereichen der Dynamik von fundamentaler Bedeutung. Vor allem gewöhnliche lineare Differentialgleichungssysteme sind das Kernstück der Regelungstechnik. Andere Gebiete werden von partiellen Differentialgleichungen bestimmt, also Differentialgleichungen für Funktionen von mehreren Variablen, deren partielle Ableitungen gewisse Gleichungen erfüllen. Die Theorie elektromagnetischer Felder beruht auf den Maxwellschen-Gleichungen. Die Ausbreitung von Radiowellen wird durch die Wellen- oder Schwingungsgleichung beschrieben. Wärmeleitungsprozesse und gleichermaßen Diffusionsprozesse zum Beispiel zur Erzeugung von Fremdstoffkonzentrationen in Halbleiterkristallen werden durch die Wärmeleitungsgleichung beschrieben.

1.2 Erster Blick auf die Mathematik von Differentialgleichungen

Zur Terminologie:

- *Differentialgleichungen* sind Gleichungen für eine gesuchte Funktion, welche Ableitungen dieser Funktion involvieren.
- Wenn die Funktion vektorwertig ist, wenn also mehrere Komponentenfunktionen gesucht werden, spricht man von einem *System* von Differentialgleichungen, sonst auch von *skalaren* Differentialgleichungen.
  vektorwertige Fkt.
  skalaren Fkt.

Newton-Gleichung:

$m\vec{v}'(t) = \vec{F}$
$m\vec{v}'(t) = \vec{F}(t)$
$m\vec{v}'(t) = \vec{F}(t, v(t))$
- DG-System
- gewöhnliche DG
- 1. Ordnung

Wachstumsprozess

$f'(t) = a\, f(t)$
- skalare DG
- gew. DG
- 1. Ordnung

eine Variablen → gewöhnlichen Differentialgleichung → gesucht eine Fkt $v(t)$, $v: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

mehreren Variablen ⇒ partiellen Differentialgleichung → gesucht eine Fkt $v(t, x_1, x_3)$, $v: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

- Wenn die Funktion von mehreren Variablen abhängt und partielle Ableitungen auftreten, spricht man von *partiellen*, andernfalls von *gewöhnlichen* Differentialgleichungen.
- Die höchste auftretende Ableitungsordnung der gesuchten Funktion heißt die *Ordnung* der Differentialgleichung.

1.2.1 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Wir beginnen mit einigen Bemerkungen zu Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Beispiel 1. Das einfachste Beispiel ist

$$x'(t) = f(t)$$

- 1. Ordnung
- skalare DG
- gewö. DG

$x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

mit einer Funktion $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Die Lösungen sind die Stammfunktionen von f, die man (bei stetigem f) durch Integrieren finden kann:

$$F(t) = x(t) = x_0 + \int_\alpha^t f(u)du.$$

Ansatz $x(t) = F(t)$ mit F Stammfkt. von f.

$F'(t) = f(t)$

Dabei ist x_0 eine beliebige Konstante. Sie wird eindeutig bestimmt, wenn man außer der Differentialgleichung noch eine *Anfangsbedingung*

$$x(\alpha) = x_0$$

vorgibt.

Beispiel 2. Das nächste Beispiel ist anders geartet, hier kommt die gesuchte Funktion auch auf der rechten Seite vor: $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x'(t) = ax(t), \quad a \in \mathbb{R}.$$

gew. 1. Ordng, skalar

Offenbar ist $x(t) := e^{at}$ eine Lösung. Aber es ist nicht die einzige Lösung, wie zum Beispiel die Funktion $x(t) = x_0\, e^{a(t-t_0)}$ zeigt, welche überdies die Anfangsbedingung

$$x(t_0) = x_0$$

$x(t) = e^{at+c}$

Anfangsbedingung: $b e^{at_0+c} = x_0$

für $c = -at_0$ und $b = x_0$ → Lösung: $\boxed{x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)}}$

erfüllt.

Beispiel 3. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x'(t) = a(t)x(t) \tag{2}$$

mit einer auf $[\alpha, \beta]$ stetigen Funktion a. Eine Lösung ist $x(t) := A_0 e^{A(t)}$, wobei $A(t)$ eine Stammfunktion von $a(t)$ ist.

Beispiel 4. Als nächstes betrachten wir die allgemeine *lineare Differentialgleichung 1. Ordnung*

$$x' = a(t)x(t) + b(t),$$

wobei $a, b : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ stetig sind. „Linear“, weil die gesuchte Funktion x nur linear darin vorkommt. Wenn wir an die Produktregel der Differentiation denken, ist es nicht so abwegig,

$x' = a(t)\,x(t) + b(t)$

$x_H(t) = A_0 e^{A(t)}$

als Lösung

$$x(t) = B(t)x_H(t) = B(t)\,A_0 e^{A(t)} \qquad x'(t) = B'(t)A_0 e^{A(t)} + B(t)A_0\,a(t)\,e^{A(t)}$$

zu versuchen, wobei x_H die Lösung aus Beispiel 3 ist. Das heißt, wir machen den *Ansatz* $x(t) = B(t)x_H(t)$. Dann ist nämlich

$$\begin{aligned} x'(t) &= B(t)x_H'(t) + B'(t)x_H(t) \\ &= B(t)a(t)x_H(t) + B'(t)x_H(t) \\ &= a(t)x(t) + B'(t)x_H(t). \end{aligned}$$

Wir müssen nur ein $B(t)$ finden, für das

$$B'(t)x_H(t) = b(t)$$

gilt. Dies tut

$$B(t) = B_0 + \int_\alpha^t \frac{b(\xi)}{x_H(\xi)}\,d\xi.$$

Da y_H keine Nullstellen hat, existiert das Integral auf der rechten Seiten und wir haben eine Lösung gefunden.

1.2.2 Separable Differentialgleichungen

Wir sehen uns noch ein wenig bei den (nichtlinearen) Differentialgleichungen erster Ordnung um und behandeln eine Verallgemeinerung des Beispiels 3, nämlich Differentialgleichungen der Form

$$x'(t) = f(t)\,g(x(t)).$$

Wir nehmen an, dass die Funktionen rechts stetige Ableitungen haben. Um eine Lösung des Anfangswertproblems

$$x'(t) = f(t)\,g(x(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$

zu finden, betrachten wir

$$\frac{x'(t)}{g(x(t))} = f(t).$$

und nehmen $g(x_0) \neq 0$ an. Wir integrieren beide Seiten. Dabei berücksichtigen wir, dass nach der Substitutionsregel

$$\int_{t_0}^{t} \frac{1}{g(x(\xi))}\,x'(\xi)\,d\xi = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{g(\eta)}\,d\eta$$

gilt. Damit erhalten wir

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{g(\eta)}\,d\eta = \int_{t_0}^{t} f(\xi)d\xi.$$

Wenn wir die Integrale lösen können, haben wir eine Gleichung für $x(t)$ ohne Ableitungen.

Beispiel 5. Als konkretes Beispiel betrachten wir $f(t) := t$ und $g(\eta) := 1 + \eta^2$, also die Differentialgleichung:

$$x'(t) = t\,(1 + x^2(t)), \quad x(0) = 0.$$

Dann liefert die vorstehende Überlegung

$$\arctan x(t) = \int_0^{x(t)} \frac{1}{1+\eta^2}\,d\eta = \int_0^t \xi\,d\xi = \frac{t^2}{2}.$$

Daraus folgt

$$x(t) = \tan(\tfrac{t^2}{2}).$$

Allerdings ist die Lösung dieses Anfangswertproblems nicht auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, da sie bei $t = \pm\sqrt{\pi}$ ins Unendliche verschwindet.

Verhältnismäßig häufig trifft man separable Differentialgleichungen, bei denen f konstant ist.

Anwendungsbeispiel 6 (Kettenlinie). Die Form eines an zwei Punkten befestigten (homogenen) Seils unter dem Einfluss seines Eigengewichtes sei gegeben durch den Graphen einer Funktion $x(t)$, wobei $x(0)$ der Tiefpunkt des Seils sei. In der Mechnik untersucht man die Kräfteverhältnisse in dieser Situation und findet für die *Ableitung* $v(t) := x'(t)$ die Bedingung

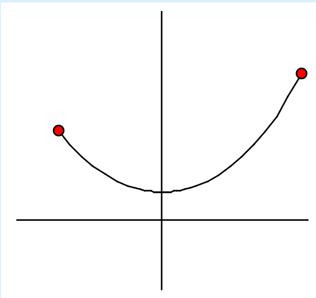
$$v' = \frac{1}{a}\sqrt{1+v^2},$$

mit einer Konstanten a, die durch Seillänge und Position der Befestigungspunkte bestimmt ist. Für diese separable Differentialgleichung finden wir mit

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \operatorname{Arsinh}(t) = \sinh^{-1}(t)$$

die Lösung

$$\sinh^{-1}(v(t)) = \frac{t}{a} + c_1.$$



oder $v(x) = \sinh\left(\frac{t}{a} + c_1\right)$.
Im Tiefpunkt ist $v(0) = y'(0) = 0$ und daher $c_1 = 0$, also

$$v(t) = \sinh(\tfrac{t}{a}).$$

Durch nochmalige Integration erhalten wir

$$x(t) = a\cosh(\tfrac{t}{a}) + c.$$

Das ist die sogenannte *Kettenlinie*.

Die meisten Differentialgleichungen konnten wir bisher relativ einfach lösen. Anders das folgende Anwendungsbeispiel, welches keine elementare Lösung hat.

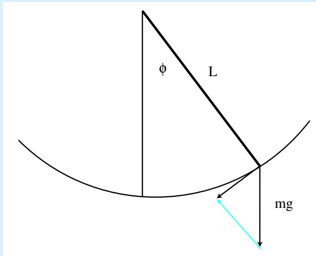
Anwendungsbeispiel 7 (Pendelgleichung). Der Ausschlagwinkel $\phi(t)$ eines (ebenen starren) Pendels erfüllt die Differentialgleichung

$$mL\,\phi''(t) = -mg\sin(\phi(t)). \tag{3}$$

Wenn man nur kleine Ausschlagwinkel betrachtet, ist $\sin(\phi(t)) \approx \phi(t)$ und man kann die Gleichung *linearisieren*:

$$mL\,\phi''(t) = -mg\,\phi(t).$$

Das ist mit dem Exponentialansatz und trigonometrischen Funktionen leicht zu lösen, ganz im Gegensatz zur Originalgleichung (3), welche nicht durch elementare Funktionen zu lösen ist.



Betrachten wir das letzte Anwendungsbeispiel, kommen die folgenden Fragen auf:

- **Existenz:** Gibt es überhaupt eine Lösung?
- **Eindeutigkeit:** Wann können wir sicher sein, die „richtige" Lösung gefunden zu haben?
- **Eigenschaften:** Ist es möglich das Verhalten der Lösung aus der Differentialgleichung vorherzusagen, ohne die Lösung explizit zu berechnen?

1.3 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Wir betrachten zwei der eben angeschnittenen Fragen, nämlich die nach der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen einer Differentialgleichung. Wir beschränken uns dabei auf Differentialgleichungen 1. Ordnung. Das ist keine wesentliche Einschränkung, wie das folgende Beispiel zeigt.

Anwendungsbeispiel 8 (Newtonsche Bewegungsgleichung). Die Gleichung für die Bewegung eines Massenpunktes an der Stelle $\vec{x}(t)$ unter dem Einfluss einer von Zeit und Ort abhängigen Kraft $\vec{F}(t,\vec{x})$ ist

$$m\,\vec{x}''(t) = \vec{F}(t,\vec{x}(t)).$$

Dies ist ein 3-dimensionales System 2. Ordnung. Definieren wir den *Impuls* durch $\vec{p}(t) := m\,\vec{y}'(t)$, so erhalten wir ein 6-dimensionales System 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} \vec{x}'(t) &= \tfrac{1}{m}\,\vec{p}(t) \\ \vec{p}'(t) &= \vec{F}(t,\vec{x}(t)). \end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen

$$\vec{y}(t) := \begin{pmatrix} \vec{x}(t) \\ \vec{p}(t) \end{pmatrix}, \qquad \vec{G}(t,\vec{y}) := \begin{pmatrix} \frac{1}{m}\vec{p}(t) \\ \vec{F}(t,\vec{x}(t)) \end{pmatrix}$$

können wir unser Differentialgleichungssystem als $\vec{y}' = \vec{G}(t,\vec{y}(t))$ schreiben.

Offensichtlich kann man diesen Trick auf jede Differentialgleichung höherer Ordnung anwenden.

Jede Differentialgleichung höherer Ordnung lässt sich durch Einführen neuer abhängiger Variablen umschreiben in ein (höher-dimensionales) System 1. Ordnung der Form

$$\vec{x}'(t) = \vec{G}(t, \vec{x}(t)). \tag{4}$$

Konstruktion einer Lösung Wir betrachten das Anfangswertproblem:

$$\vec{x}'(t) = \vec{G}(t, \vec{x}(t)), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0. \tag{5}$$

Wenn $\vec{G}$ konstant ist, ist die Lösung der Streckenzug

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + (t - t_0)\,\vec{G}. \tag{6}$$

Wenn $\vec{G}$ nicht konstant aber stetig ist, können wir versuchen die Lösung der Differentialgleichung zumindest für kleine Zeitabschnitte durch einen Streckenzug wie in (6) zu approximieren. Genauer betrachten wir eine Zeitsequenz

$$t_0 \quad < \quad t_1 \coloneqq t_0 + h \quad < \quad t_2 \coloneqq t_0 + 2h \quad < \quad \ldots \quad < \quad t_N \coloneqq t_0 + Nh$$

mit positiver Schrittweite $h > 0$ und definieren rekursiv

$$\begin{aligned}\vec{x}_h(t_0) &:= \vec{x}_0,\\ \vec{x}_h(t) &:= \vec{x}_h(t_i) + (t - t_i)\,\vec{G}(t_i, \vec{x}_h(t_i)), \qquad t_i < t \le t_{i+1}.\end{aligned}$$

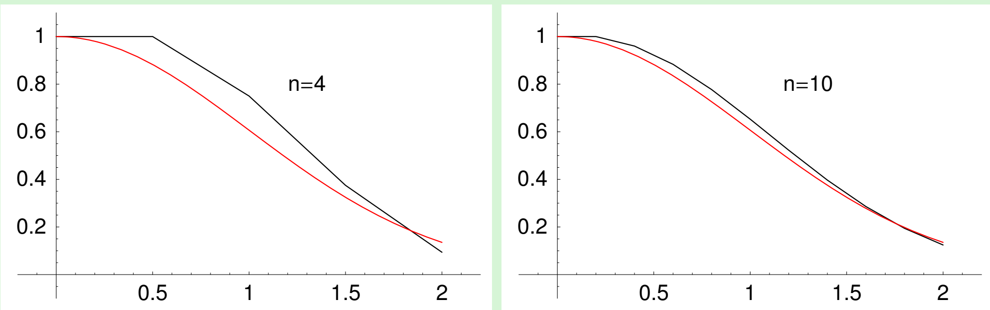
Die approximative Lösung $\vec{x}_h(t)$ ist ein Polygonzug und das definierte Vorwärtsschema wird als *Eulersches Polygonzugverfahren* oder als *Eulerverfahren* bezeichnet.

Beispiel 9. Für das Anfangswertproblem

$$x'(t) = -t\,x(t), \quad y(0) = 1$$

zeigen die beiden folgenden Abbildungen die Ergebnisse des Eulerverfahrens mit verschiedenen Schrittweiten im Vergleich zur exakten Lösung

$$x(t) = e^{-t^2/2}.$$



Wir können unter gewissen Voraussetzungen an $\vec{G}$ beweisen, dass:

- Auf einem kleinen Intervall $[t_0, t_0 + \epsilon)$ der Grenzwert

  $$\vec{x}(t) := \lim_{h \searrow 0} \vec{x}_h(t) \tag{7}$$

  existiert und eine Lösung des Anfangswertproblems

  $$\vec{x}'(t) = \vec{G}(t, \vec{x}(t)), \qquad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0.$$

  definiert.

- Je zwei Lösungen dieses Anfangsproblems gleich sind.

Die Konvergenz des Eulerverfahrens für $h \longrightarrow 0$ lässt sich im vorangehenden Beispiel bereits erkennen. Eine Weiterentwicklung ist das sogenannte Runge–Kutta-Verfahren, welches insbesondere für die Berechnung von numerische Lösungen genutzt wird. Basierend auf dem Eulerverfahren lässt sich der folgende Existenz- und Eindeutigkeitssatz zeigen.

Satz 10 (Existenz- und Eindeutigkeit). *Sei $\vec{G}$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar*[1] *und $(t_0, \vec{x}_0) \in U$ ein Punkt dieser Menge. Dann ist das Anfangswertproblem*

$$\vec{x}'(t) = \vec{G}(t, \vec{x}(t)), \qquad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \tag{8}$$

eindeutig lösbar. Genauer gibt es ein Intervall J mit $t_0 \in J$, so dass das Anfangswertproblem (8) eine eindeutige Lösung $\vec{x}(t)$ auf J besitzt, wobei

$$(t, \vec{x}(t)) \in U \text{ für alle } t \in J.$$

1.4 Gewöhnliche lineare Differentialgleichungssysteme

Wir untersuchen gekoppelte Systeme aus mehreren linearen Differentialgleichungen der Form

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= a_{11}(t)\,x_1(t) + a_{12}(t)\,x_2(t) + \ldots + a_{1n}(t)\,x_n(t) + b_1(t) \\
x_2'(t) &= a_{21}(t)\,x_1(t) + a_{22}(t)\,x_2(t) + \ldots + a_{2n}(t)\,x_n(t) + b_2(t) \\
&\vdots \\
x_n'(t) &= a_{n1}(t)\,x_1(t) + a_{m2}(t)\,x_2(t) + \ldots + a_{nn}(t)\,x_n(t) + b_n(t)
\end{aligned} \tag{9}$$

mit stetigen Funktionen a_{ij} und b_i auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Mit Matrizen können wir das lineare Differentialgleichungssystem kurz als

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x} + \vec{b}(t) \tag{10}$$

schreiben. Ist $\vec{b}(t) = 0$, so nennt man das System *homogen*, andernfalls *inhomogen*. Zu jedem inhomogenen System gehört ein homogenes System, bei dem $\vec{b}(t)$ durch Null ersetzt ist.

1.4.1 Struktur des Lösungsraumes

Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz (Satz 10) garantiert die eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems, ohne etwas darüber zu sagen, wie lang der Definitionsbereich der Lösung ist. Bei linearen Differentialgleichungen existiert die Lösung immer auf dem gesamten Definitionsbereich der Differentialgleichung.

Satz 11 (Existenz und Eindeutigkeit). *Haben $A(t)$ und $\vec{b}(t)$ auf dem Intervall I stetige Koeffizienten $a_{ij}(t)$ und $b_i(t)$ und ist $t_0 \in I$, so hat das Anfangswertproblem*

$$\vec{x}'(t) = A(t)\,\vec{x} + \vec{b}(t) \tag{11}$$

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \tag{12}$$

für jedes $\vec{x}_0$ genau eine auf ganz I definierte Lösung.

[1] Die Voraussetzung der stetigen Differenzierbarkeit kann wesentlich abgeschwächt werden. Zum Beispiel genügt es, wenn G stetig und im zweiten Argument stetig differenzierbar ist.

Weil alle Lösungen auf demselben Intervall definiert sind, können wir Linearkombinationen von Lösungen bilden.

Satz 12 (Lösungsraum der homogenen Gleichung). *Der Lösungsraum der homogenen Gleichung*

$$\vec{x}'(t) = A(t)\,\vec{x}(t) \quad \textit{mit} \quad \vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n \tag{13}$$

ist ein Vektorraum der Dimension n. Das heißt:

- *Linearkombinationen von Lösungen sind wieder Lösungen.*
- *Es gibt n linear unabhängige Lösungen $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$.*
- *Jede weitere Lösung $\vec{x}$ ist eine Linearkombiantion:*

$$\vec{x}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + \ldots + c_n\vec{x}_n(t). \tag{14}$$

- *Ein Anfangswert $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ bestimmt die Koeffizienten c_i in* (14) *eindeutig.*

Man nennt ein System aus n linear unabhängigen Lösungen $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$ eine *Lösungsbasis* oder ein *Fundamentalsystem.* Die Linearkombinationen in (14) werden auch als *allgemeine Lösungen* bezeichnet.

Wronski-Test. Wir betrachten n beliebige Lösungen

$$\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$$

von (13) und wollen wissen, ob sie linear unabhängig sind. Sind die Vektoren

$$\vec{x}_1(t_0), \ldots, \vec{x}_n(t_0)$$

an einer Stelle t_0 linear unabhängig, so sind $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$ als Funktionen linear unabhängig. Man kann zeigen, dass für Lösungen von (13) auch die Umkehrung gilt. Daher sind die Lösungen $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$ genau dann linear unabhängig, wenn die Funktionswerte $\vec{x}_1(t_0), \ldots, \vec{x}_n(t_0)$ an einer Stelle (und dann an jeder Stelle) linear unabhängig sind. Die Lösungen $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$ sind somit genau dann linear unabhängig, wenn die aus ihnen gebildete Wronski-Matrix

$$W(t) = (\vec{x}_1(t)|\ldots|\vec{x}_n(t)),$$

an einer und dann an jeder Stelle t vollen Rang besitzt bzw. deren Determinante nicht Null ist.

Linearkombinationen von Lösungen des inhomogenen Systems bilden im allgemeinen keine Lösungen. Wenn $\vec{x}_1(t)$ und $\vec{x}_2(t)$ zwei Lösungen des inhomogenen Systems sind, dann ist $x(t) = \vec{x}_1(t) - \vec{x}_2(t)$ allerdings eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems.

Satz 13 (Lösungsraum des inhomogenen Systems). *Sei $\vec{x}_P(t)$ eine (sogenannte* partikuläre*) Lösung der inhomogenen Gleichung*

$$\vec{x}'(t) = A(t)\,\vec{x}(t) + \vec{b}(t). \tag{15}$$

Alle weiteren Lösungen von (15) *haben dann die Form*

$$\vec{x} = \vec{x}_P + \vec{x}_H,$$

wobei $\vec{x}_H$ eine homogene Lösung von (13) *ist. Wenn $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ eine Lösungsbasis für* (13) *sind, dann* *sind alle Lösungen von (15) gegeben durch*

$$\vec{x} = \vec{x}_P + c_1\vec{x}_1 + \ldots + c_n\vec{x}_n,$$

wobei $c_1, \ldots, c_n$ reelle Konstanten sind.

Damit ist die Struktur des Lösungsraumes linearer Differentialgleichungssysteme geklärt. Bleibt die Frage, wie man Lösungen von (15) finden kann.

Satz 14 (Variation der Konstanten). *Seien $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ eine Lösungsbasis der homogenen Gleichung (13) und seien $c_1', \ldots, c_n'$ die (eindeutig bestimmten) Lösungensfunktionen des linearen Gleichungssystems*

$$\underbrace{\Big(\vec{x}_1(t) \,\Big|\, \ldots \,\Big|\, \vec{x}_n(t)\Big)}_{\text{Wronki-Matrix}} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Mit den Stammfunktionen $c_1, \ldots, c_n$ von $c_1', \ldots, c_n'$ erhalten wir eine partikuläre Lösung

$$\vec{x}_P(t) = c_1(t)\,\vec{x}_1(t) + \ldots + c_n(t)\,\vec{x}_n(t)$$

der inhomogenen Gleichung (11).

Beweis. Wir machen den Ansatz $\vec{x}(t) := \vec{x}_P(t) := c_1(t)\,\vec{x}_1(t) + \ldots + c_n(t)\,\vec{x}_n(t)$ und setzen dies in das Differentialgleichungssystem ein. Zunächst berechnen wir

$$\begin{aligned}
\vec{x}'(t) &= c_1(t)\,\vec{x}_1'(t) + \ldots + c_n(t)\,\vec{x}_n'(t) + c_1'(t)\,\vec{x}_1(t) + \ldots + c_n'(t)\,\vec{x}_n(t) \\
&= c_1(t)\,A(t)\,\vec{x}_1(t) + \ldots + c_n(t)\,A(t)\,\vec{x}_n(t) + c_1'(t)\,\vec{x}_1(t) + \ldots + c_n'(t)\,\vec{x}_n(t) \\
&= A(t)\,\big(c_1(t)\,\vec{x}_1(t) + \ldots + c_n(t)\,\vec{x}_n(t)\big) + c_1'(t)\,\vec{x}_1(t) + \ldots + c_n'(t)\,\vec{x}_n(t) \\
&= A(t)\,\vec{x}(t) + c_1'(t)\,\vec{x}_1(t) + \ldots + c_n'(t)\,\vec{x}_n(t).
\end{aligned}$$

Also ist $\vec{x}(t)$ genau dann eine Lösung des inhomogenen Systems (11), wenn

$$c_1'(t)\,\vec{x}_1(t) + \ldots + c_n'(t)\,\vec{x}_n(t) = \vec{b}(t).$$

In Matrixschreibweise ist das aber gerade (16). □

Beispiel 15. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= x_1(t) + 3x_2(t) + 2\cos^2(t) \\
x_2'(t) &= 3x_1(t) + x_2(t) + 2\sin^2(t)
\end{aligned} \tag{17}$$

Das zugehörige homogene System hat folgende Lösungsbasis

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix},$$

was sich durch Einsetzen und den Wronski-Test überprüfen lässt. Für die Variation der Konstanten betrachten wir das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} e^{4t} & e^{-2t} \\ e^{4t} & -e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos^2 t \\ 2\sin^2 t \end{pmatrix}.$$

Addieren und Subtrahieren der Gleichungen liefert

$$2e^{4t}\,c_1'(t) = 2 \quad \text{und} \quad 2e^{-2t}\,c_2'(t) = 2(\cos^2(t) - \sin^2(t)) = 2\cos(2t)$$

und somit

$$c_1'(t) = e^{-4t}, \qquad c_2'(t) = \cos(2t)\, e^{2t}.$$

Die Stammfunctionen von c_1' und c_2' erhalten wir durch Integrieren:

$$c_1(t) = -\tfrac{1}{4}e^{-4t}, \qquad c_2(t) = \tfrac{1}{4}(\sin 2t + \cos 2t)e^{2t}.$$

Nach Satz 14 ist

$$\vec{x}_P(t) = -\tfrac{1}{4}e^{-4t}\begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix} + \tfrac{1}{4}(\sin 2t + \cos 2t)e^{2t}\begin{pmatrix} e^{-2x} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\sin 2t + \cos 2t - 1) \\ -\frac{1}{4}(\sin 2t + \cos 2t + 1) \end{pmatrix}$$

eine spezielle Lösung von (17).

Die Variation der Konstanten ist ein aufwendiges Verfahren zur Konstruktion einer partikulären Lösung. Für viele Differentialgleichungen lässt sich eine partikuläre Lösung allerdings erraten.

Manchmal lässt sich eine partikuläre Lösung durch einen geschickten Ansatz bestimmen.

Beispiel 16. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) - e^{\mu t}\vec{b} \tag{18}$$

mit konstanten A und $\vec{b}$. Wir machen den Ansatz

$$\vec{x}(t) = e^{\mu t}\vec{v} \tag{19}$$

mit einem konstanten Vektor $\vec{v}$. Einsetzen in (18) liefert

$$\mu\, e^{\mu t}\vec{v} = e^{\mu t}A\vec{v} - e^{\mu t}\vec{b} \quad \text{oder} \quad A\vec{v} - \mu\vec{v} = (A - \mu I)\,\vec{v} = \vec{b}.$$

Unser Ansatz (19) ist genau dann eine Lösung von (18), wenn $\vec{v}$ dieses lineare Gleichungssystem löst. Allerdings muss das Gleichungssystem nicht unbedingt lösbar sein; dann führt der obige Ansatz leider nicht zu einer partikulären Lösung.

1.4.2 Der Exponentialansatz

Die Bestimmung der Lösungsbasis des homogenen Differentialgleichungssystems (13) ist im allgemeinen schwierig. Sind die Koeffizienten des Systems allerdings konstant, können wir das Fundamentalsystem mit der sogenannten Eigenwertmethode bestimmen. Um das homogene lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= a_{11}(t)\,x_1(t) + a_{12}(t)\,x_2(t) + \ldots + a_{1n}(t)\,x_n(t) \\
x_2'(t) &= a_{21}(t)\,x_1(t) + a_{22}(t)\,x_2(t) + \ldots + a_{2n}(t)\,x_n(t) \\
&\ \vdots \\
x_n'(t) &= a_{n1}(t)\,x_1(t) + a_{m2}(t)\,x_2(t) + \ldots + a_{nn}(t)\,x_n(t)
\end{aligned}$$

oder kurz

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) \tag{20}$$

mit konstanten Koeffizienten a_{ij} zu lösen, machen wir ähnlich zu Beispiel 2 den Exponentialansatz

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}. \tag{21}$$

für einen konstanten Vektor $\vec{v}$. Einsetzen in die Differentialgleichung zeigt, dass (21) genau dann eine Lösung liefert, wenn $\lambda e^{\lambda t}\vec{v} = A(e^{\lambda t}\vec{v})$ bzw.

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \tag{22}$$

gilt. Interessante, sogenannte nicht-triviale, Lösungen ergeben sich somit für $\vec{v} \neq 0$, welche die Eigenwertaufgabe (22) lösen.

Die Funktion $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$ ist genau dann eine (nicht-triviale) Lösung der Differentialgleichung (20), wenn λ ein Eigenwert und $\vec{v}$ ein zugehöriger Eigenvektor von A sind.

Beispiel 17. Wir betrachten das homogene lineare Differentialgleichungssystem $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Die charakteristische Gleichung von A ist

$$\det(A - \lambda I) = 45 + 21\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 = 0$$

mit den drei Wurzeln -3, -3 und 5.

Eigenvektoren zum Eigenwert -3. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\big(A - (-3)\,I\big)\,\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

Die zweite und dritte Gleichung sind hier Vielfache der ersten. Es bleibt also nur die Gleichung

$$v_1 + 2v_2 - 3v_3 = 0.$$

Da zwei Parameter frei gewählen werden können, hat der zugehörige Lösungsraum, der sogenannte Eigenraum zum Eigenwert -3, die Dimension zwei. Wählen wir

$$\begin{aligned} v_3 &= 0, v_2 = 1 \implies v_1 = -2, \\ v_3 &= 1, v_2 = 0 \implies v_1 = 3, \end{aligned}$$

erhalten wir die zwei linear unabhängigen Eigenvektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eigenvektoren zum Eigenwert 5. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$(A - 5\,I)\,\vec{v} = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

Mit dem Gaußalgorithmus ergibt sich das äquivalente System

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

mit der nicht-trivialen Lösung $\vec{v}_3 = (1, 2, -1)^{\mathrm{T}}$ als Eigenvektor zum Eigenwert 5.

Die allgemeine Lösung von $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$ ist daher

$$\vec{x}(t) = e^{-3t} \left(c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + c_3 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Im optimalen Fall, besitzt die Matrix A genau n linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$. Mit Hilfe des Wronski-Tests können wir zeigen, dass die Funktionen

$$e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1, \ldots, e^{\lambda_n t} \vec{v}_n$$

eine Lösungsbasis von $\vec{x}'(t) = A\,\vec{x}(t)$ bilden.

Es können folgende Probleme auftreten:

1. Die Anzahl der mehrfach gezählten, reellen Eigenwerte kann kleiner als n sein.
2. Die algebraische und geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes stimmen nicht überein.

Defizite bei den Eigenwerten. Wenn die Anzahl der mehrfach gezählten, reellen Eigenwerte der Matrix A kleiner als n ist, dann besitzt das zugehörige charakteristische Polynom komplexe Nullstellen. Diese treten in komplex-konjugierten Paaren λ und $\bar{\lambda}$ auf, und die entsprechenden Eigenvektoren sind ebenfalls konjugiert-komplex: Ist $\vec{v}$ ein Eigenvektor von λ, dann ist $\bar{\vec{v}}$ ein Eigenvektor von $\bar{\lambda}$. Der Exponentialansatz liefert in diesem Fall die komplex-wertigen, komplex-konjugierten Lösungsfunktionen $e^{\lambda t}\,\vec{v}$ und $e^{\bar{\lambda} t}\,\bar{\vec{v}}$. Wenn wir diese addieren oder subtrahieren, erhalten wir den reell-wertigen Real- und Imaginärteil der komplex-wertigen Lösungen.

Der Real- und Imaginärteil eines komplex-wertigen Lösungspaares liefert zwei unabhängige reelle Fundamentallösungen.

Beispiel 18. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

hat die charakteristische Gleichung $(1 - \lambda)^2 + 1 = 0$ mit den Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i.$$

Die zugehörige Eigenvektoren sind

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das zugehörige Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) + x_2(t) \end{aligned}$$

hat daher die allgemeine komplex-wertige Lösung

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Durch Umschreiben der komplex-wertigen Lösung erhalten wir:

$$e^{(1\pm i)t} \begin{pmatrix} \pm i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t (\cos t \pm i \sin t) \begin{pmatrix} \pm i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \pm i e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

und somit die allgemeine reell-wertige Lösung

$$\vec{x}(t) = a_1 e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + a_2 e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Defizite bei den Eigenvektoren. Sei λ ein Eigenwert der Matrix A, dessen geometrische und algebraische Vielfachheit nicht überein stimmen. Das bedeutet, dass wir für die k-fache Nullstelle λ des charakteristischen Polynoms keine k unabhängigen Eigenvektoren finden. Als Verallgemeinerung der Eigenvektoren gibt es zu λ allerdings k unabhängige Hauptvektoren. Ein Hauptvektor ist eine nicht-triviale Lösung der Gleichung

$$(A - \lambda I)^k \vec{v} = 0.$$

Insbesondere seid Eigenvektoren auch Hauptvektoren. Mit Hilfe der Hauptvektoren können wir ein vollständiges Fundamentalsystem der homogenen linearen Differentialgleichungssystems (20) konstruieren.

Satz 19 (Hauptvektorlösungen). *Ist λ eine k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A und $\vec{v}$ ein zugehöriger Hauptvektor, so ist*

$$\vec{x}(t) := e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I)^j \, \vec{v} \tag{23}$$

eine Lösung von

$$\vec{x}'(t) = A \, \vec{x}(t).$$

Insbesondere gibt es k linear unabhängige Hauptvektoren.

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen. Nutzen wir aus, dass $(A - \lambda E)^m \vec{v} = 0$ für alle $m \geq k$, können wir die Summe in (23) als

$$\vec{s}(t) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I)^j \vec{v}$$

schreiben. Die Ableitung von s ist:

$$\begin{aligned} \vec{s}'(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} (A - \lambda I)^j \vec{v} = (A - \lambda I) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} (A - \lambda I)^{j-1} \vec{v} \\ &= (A - \lambda I) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I)^j \vec{v} = (A - \lambda I) \, \vec{s}(t). \end{aligned}$$

Für die Ableitung von x gilt somit

$$\vec{x}'(t) = \frac{d}{dt}\, e^{\lambda t}\vec{s}(t) = \lambda\vec{x}(t) + (A - \lambda I)\,\vec{x}(t) = A\vec{x}(t). \qquad \square$$

Die direkte Anwendung von Satz 19 ist mühsam, da wir alle Hauptvektoren bestimmen müssen, was auf die Berechnung der Jordan-Zerlegung von A hinausläuft. Für doppelte Nullstellen lassen sich die Hauptvektoren allerdings mittels eines Gleichungssystems bestimmen.

Beispiel 20. Für einen **zweifachen** Eigenwert λ berechnen wir zunächst einen Eigenvektor $\vec{v}_1$. Gibt es zu λ keinen zweiten linear unabhängigen Eigenvektor, so gibt es einen von $\vec{v}_1$ linear unabhängigen *Haupt*vektor $\vec{v}_2$. Für den gilt

$$0 = (A - \lambda I)^2\,\vec{v}_2 = (A - \lambda I)\,\big((A - \lambda I)\,\vec{v}_2\big).$$

Das heißt, dass $(A - \lambda I)\,\vec{v}_2$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ ist. Damit können wir den Hauptvektor durch Lösen des Gleichungssystem

$$(A - \lambda I)\,\vec{v}_2 = \vec{v}_1$$

bestimmen. Die zugehörige Lösung ist

$$\vec{y}(t) = e^{\lambda t}(\vec{v}_2 + t\vec{v}_1).$$

Beispiel 21. Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit Eigenwerten $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$. Die Gleichung

$$(A - 1\,I)\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

liefert den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 1. Da es keine zweite linear unabhängige Lösung gibt, bestimmen wir den zweiten Hauptvektor durch Lösen von

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir beispielsweise als zweiten Hauptvektor $(0, 0, -1)^{\mathrm{T}}$. Das Differentialgleichungssystem

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$$

besitzt in diesem Fall eine Lösungsbasis bestehend aus

$$\vec{x}_1(t) = e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2(t) = e^t\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

und einer weiteren Lösung $\vec{x}_3(t) = e^{2t}\,(0,1,1)^{\mathrm{T}}$ zum Eigenwert 2. Die allgemeine Lösung ist

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 t e^t \\ c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^t \\ -c_2 e^t + c_3 e^t \end{pmatrix}.$$

1.5 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Wir betrachten nun gewöhnliche lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung für skalare Funktionen. Genauer betrachten wir Differentialgleichungen mit der allgemeine Form:

$$x^{(n)} + a_1(t)\,x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)\,x(t) = b(t) \tag{24}$$

mit stetigen Funktionen $a_k(t)$ und $b(t)$ auf einem Intervall I. Ist $b = 0$, so nennt man die Gleichung *homogen*, andernfalls *inhomogen*.

Anwendungsbeispiel 22 (Federpendel). Die Bewegungsgleichung für ein Federpendel der Masse m mit Federkonstante k und Reibungskoeffizient a ist gegeben durch

$$x''(t) + \tfrac{a}{m}x'(t) + \tfrac{k}{m}x(t) = 0. \tag{25}$$

Wenn wir die Geschwindigkeit mit $v(t) = x'(t)$ bezeichnet, ist die Gleichung äquivalent zu einem linearen System, nämlich

$$\begin{aligned} x'(t) &= v(t) \\ v'(t) &= -\frac{b}{m}x(t) - \frac{a}{m}v(t) \end{aligned} \tag{26}$$

Die erste Komponente jeder Lösung $(x(t), v(t))^{\mathrm{T}}$ liefert eine Lösung von (25). Umgekehrt liefert jede Lösung $x(t)$ von (25) zusammen mit ihrer Ableitung eine Lösung $(x(t), x'(t))^{\mathrm{T}}$ von (26).

Skalare Gleichungen und Systeme. Allgemein ist

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)\,x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}(t)\,x'(t) + a_n(t)\,x(t) = b(t) \tag{27}$$

nach Einführung der Hilfsfunktionen $x_k(t) := x^{(k-1)}(t)$ äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \ldots & -a_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Als Konsequenz ist die Theorie der skalaren Differentialgleichungen n-ter Ordnung ein Spezialfall der Systeme 1. Ordnung, und beide Theorien stimmen weitgehend überein.

1.5.1 Struktur des Lösungsraumes

Satz 23 (Existenz und Eindeutigkeit). *Gegeben sei die Differentialgleichung*

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)\,x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)\,x(t) = b(t) \tag{29}$$

mit stetigen Funktionen $a_k(t)$ und $b(t)$ auf einem Intervall I und mit Anfangswerten

$$x(t_0) = \eta_0, x'(t_0) = \eta_1, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = \eta_{n-1}$$

für ein $t_0 \in I$. Dann gibt es genau eine Lösung $x(t)$ von (29) mit diesen Anfangswerten.

Weil alle Lösungen auf demselben Intervall definiert sind können wir wieder Linearkombinationen von Lösungen bilden.

Satz 24 (Lösungsraum der homogenen Gleichung). *Der Lösungsraum der homogenen Gleichung*

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)\,x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)\,x(t) = 0 \tag{30}$$

ist ein Vektorraum der Dimension n. Das heißt:

- *Linearkombinationen von Lösungen sind wieder Lösungen.*
- *Es gibt n linear unabhängige Lösungen $x_1(t), \ldots, x_n(t)$.*
- *Jede weitere Lösung x ist Linearkombiantion:*

$$x(t) = c_1 x_1(t) + \ldots + c_n x_n(t). \tag{31}$$

Ein System aus n linear unabhängigen Lösungen $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ bezeichnen wir wieder als eine *Lösungsbasis* oder ein *Fundamentalsystem*. Die Linearkombinationen (31) bilden wieder die allgemeinen Lösung von (30).

Wronski-Test. Um zu bestimmen, ob die Lösungen

$$x_1(t), \ldots, x_n(t)$$

von (30) linear unabhängig sind, bilden wir die Wronski-Matrix

$$W(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \ldots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \ldots & x_n'(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \ldots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen sind genau dann linear unabhängig, wenn W an einer (und dann an jeder) Stelle t den Rang besitzt, also eine Determinante nicht Null ist.

Satz 25 (Lösungsraum des inhomogenen Systems). *Sei $x_P(t)$ eine (sogenannte* partikuläre*) Lösung der inhomogenen Gleichung*

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)\,x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)\,x(t) = b(t). \tag{32}$$

Alle weiteren Lösungen von (32) haben dann die Form

$$x(t) = x_P(t) + x_H(t),$$

wobei x_H eine homogene Lösung von (30) ist. Wenn $x_1(t), \dots, x_n(t)$ eine Lösungsbasis für (30) sind, dann sind alle Lösungen von (32) gegeben durch

$$x(t) = x_P(t) + c_1 x_1(t) + \ldots + c_n x_n(t),$$

wobei $c_1, \dots, c_n$ reelle Konstanten sind.

Damit ist die Struktur des Lösungsraumes linearer Differentialgleichungen n-ter Ordnung geklärt. Bleibt die Frage, wie man Lösungen von (32) finden kann.

Satz 26 (Variation der Konstanten). *Seien $x_1(t), \dots, x_n(t)$ eine Lösungsbasis der homogenen Gleichung (30) und seien $c_1', \dots, c_n'$ die (eindeutig bestimmten) Lösungsfunktionen des linearen Gleichungssystems*

$$\begin{pmatrix} x_1(t) & \ldots & x_n(t) \\ x_1'(t) & \ldots & x_n'(t) \\ & \ldots & \\ x_1^{(n-1)}(t) & \ldots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Mit den Stammfunctionen $c_1, \dots, c_n$ von $c_1', \dots, c_n'$ erhalten wir eine partikuläre Lösung

$$x_P(t) = c_1(t)\, x_1(t) + \ldots + c_n(t)\, x_n(t)$$

der inhomogenen Gleichung (32).

Beispiel 27. Wir betrachten die skalare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$x''(t) + x(t) = \sin(t). \tag{34}$$

Ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist $x_1(t) = \cos(t)$ und $x_2(t) = \sin(t)$, und die zugehörige Wronski-Matrix hat die Form

$$\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

mit Determinante 1. Zur Variation der Konstanten müssen wir das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

lösen. Multiplizieren der ersten Gleichung mit $\cos(t)$ und der zweiten mit $-\sin(t)$ und anschließendes Addieren liefert:

$$\big(\cos^2(t) + \sin^2(t)\big) c_1'(t) = c_1'(t) = -\sin^2(t).$$

Durch Einsetzen in die erste Gleichung erhalten wir

$$c_2' = -\frac{\cos(t)}{\sin(t)}\, c_1'(t) = \sin(t)\cos(t).$$

Unter Verwendung der trigonometrischen Identität $\sin^2(t) = (1 - \cos(2t))/2$, können wir die Stammfunktionen bestimmen:

$$c_1(t) = \tfrac{1}{4}\big(\sin(2t) - 2t\big), \quad c_2(t) = \sin^2(t).$$

Damit erhalten wir die partikuläre Lösung

$$y_P(t) = \frac{1}{4}\big(\sin(2t) - 2t\big)\cos(t) + \sin^3(t).$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (34) ist

$$y(t) = \frac{1}{4}\big(\sin(2t) - 2t\big)\cos(t) + \sin^3(t) + c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

Ansatz vom Typ der rechten Seite. Anstelle der Variation der Konstanten können wir alternativ versuchen, eine partikuläre Lösung von

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)\, x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)\, x(t) = b(t)$$

durch einen geschickten Ansatz zu konstruieren. Haben wir beispielsweise die rechte Seite $b(t) = p(t)\, e^{\mu t}$ für ein Polynom p, können wir den Ansatz $x_p(t) \coloneqq q(t)\, e^{\mu t}$ ebenfalls mit einem Polynom q machen. Die Ableitungen des Ansatzes haben ebenfalls diese Form. Anschließend können wir versuchen die Koeffizienten von q mittels eines Koeffizientenvergleichs zu bestimmen.

1.5.2 Der Exponentialansatz

Abschließend betrachten wir homogene Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. In anderen Worten, wir untersuchen

$$x^{(n)}(t) + a_1\, x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n\, x(t) = 0. \tag{35}$$

Wenn wir die Differentialgleichung in ein System 1. Ordnung umschreiben, erhalten wir

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \tag{36}$$

Wenden wir den Laplaceschen Entwicklungssatz auf die letzte Zeile an, um das charakteristische Polynom zu bestimmen, erhalten wir (bis aufs Vorzeichen):

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \tag{37}$$

Hat diese Gleichung n verschieden Wurzeln, können wir eine vollständige Lösungsbasis konstruieren. In Abhängigkeit von der Nullstelle λ erhalten wir durch Betrachten des Real- und Imaginärteils die Fundamentallösungen

λ reell:	$e^{\lambda t}$
$\lambda \coloneqq \alpha + i\omega$ komplex:	$e^{\alpha t}\cos(\omega t), \quad e^{\alpha t}\sin(\omega t).$

Beispiel 28. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x''(t) + 6x'(t) + 10x(t) = 0.$$

Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$ hat die Lösungen

$$\lambda_1 = -3 + i, \quad \lambda_2 = -3 - i,$$

welche die allgemeine reelle Lösung liefert:

$$x(t) = c_1\, e^{-3t} \cos(t) + c_2\, e^{-3t} \sin(t).$$

Mehrfache Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Bei Matrizen der Form (36) kann die Situation mehrfacher Eigenwerte mit mehreren linear unabhängigen Eigenvektoren nicht auftreten. Ähnlich zu Beispiel 20 bilden die Hauptvektoren eine Jordan-Kette der Form $(A - \lambda I)\, \vec{v}_\ell = \vec{v}_{\ell-1}$ für $\ell = 2, \ldots, k$. Nach Satz 19 erhalten wir die unabhängige Fundamentallösungen

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \ldots, t^{k-1} e^{\lambda t}.$$

Beispiel 29. Wir betrachten die Gleichung

$$x''(t) + 6x'(t) + 9x(t) = 0.$$

Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ hat die Lösungen

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -3.$$

Die allgemeine Lösung hat somit die Form

$$x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}.$$