5. Vorlesung: Diskrete Zufallsvariablen

Nikolas Tapia

29. April 2024, Stochastik für Informatik(er)

Leibniz Gemeinschaft

Erinnerung

Ergebnismenge

W-Maß

Definition 5.1

Ein allgemeiner Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ bestehend aus einer beliebigen Ergebnismenge Ω, einer Klasse von "geeigneten" Ereignissen $\mathcal{A}$ und einer Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$, die die Axiomen von Kolmogorov erfüllt.

Anmerkung 1

Wir annehmen stets, dass alle Ereignisse von Interesse "geeignet" sind.

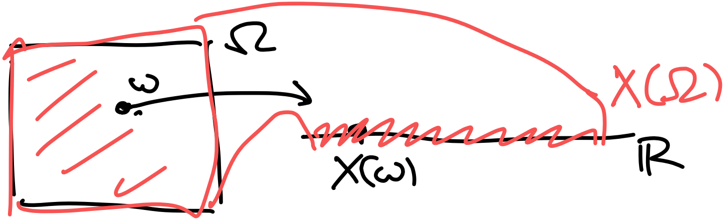
Erinnerung

Definition 5.2

Eine **Zufallsvariable** ist eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
Das Bild $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ nennen wir den **Wertebereich** von X.

Definition 5.3

Eine Zufallsvariable X heißt **diskret**, wenn ihr Wertebereich endlich oder abzählbar unendlich ist.



Erinnerung

Definition 5.4

Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable und $E \subset \mathbb{R}$. Dann, das Urbild

$$X^{-1}(E) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in E\} \subseteq \Omega.$$

ist ein Ereignis.

Definition 5.5

Wir verwenden folgende Kurzschreibweise:

Ereignis

$$\{X \in E\} := X^{-1}(E) \qquad \mathbb{P}(X \in E) := \mathbb{P}(X^{-1}(E))$$
$$\{X = x\} := X^{-1}(\{x\}) \qquad \mathbb{P}(X = x) := \mathbb{P}(X^{-1}(\{x\}))$$
$$\{X \leq x\} := X^{-1}((-\infty, x]) \qquad \mathbb{P}(X \leq x) := \mathbb{P}(X^{-1}((-\infty, x])),$$

usw.

Funktionen von Zufallsvariablen

Definition 5.6

Seien $X_1, \dots, X_n$ Zufallsvariable und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion von n Variable. Dann ist $f(X_1, \dots, X_n)\colon \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(X_1, \dots, X_n)(\omega) := f(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$$

wieder eine Zufallsvariable.

Bsp: $\Omega = \{(1,1), \dots, (6,6)\}$ 2-fach Würfeln.

$X_1(\omega) := \omega_1$

$X_2(\omega) := \omega_2$

$S(\omega) = \omega_1 + \omega_2 = g(X_1, X_2)$, $g(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

$f(x) := x^2$ $\quad Z := f(X_1) = X_1^2$

Verteilungsfunktion

Definition 5.7

Sei X eine (allg.) Zufallsvariable. Die **kumulative Verteilungsfunktion** F_X von X ist definiert als

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1], \quad F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \leq x\})$$

Aussage 5.1

Die kumulative Verteilungsfunktion F_X einer Zufallsvariable X ist monoton steigend.

Bew: $\{X \leq x\} \subseteq \{X \leq y\}$

wenn $x \leq y$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X \leq x) \leq \mathbb{P}(X \leq y)$

$\Rightarrow F_X(x) \leq F_X(y)$.

Weitere Eigenschaften

Aussage 5.2

Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable X hat folgende Eigenschaften:

1. $\mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
2. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt $\mathbb{P}(X \in (a, b]) = F_X(b) - F_X(a)$.

Bew: 1. $\{X > x\} = \{X \leq x\}^c$

$\mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x)$

2. $\{X \in (a,b]\}$

$= \{a < X \leq b\}$

$= \{X \leq b\} \setminus \{X \leq a\}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X \in (a,b])$

$= \underbrace{\mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a)}$

def $\Rightarrow \mathbb{P}(X \in (a,b]) = \quad \downarrow$

Verteilung einer diskreten Zufallsvariable

Definition 5.8

Sei X eine diskrete Zufallsvariable. Die **Verteilung** (oder Wahrscheinlichkeitsfunktion) von X ist die Funktion

$$p_X : \mathbb{R} \to [0,1], \quad p_X(x) := \mathbb{P}(X = x).$$

Anmerkung 1

Die *Verteilung* einer *diskrete* Zufallsvariable sollte nicht mit der *kumulative Verteilungsfunktion* einer *beliebigen* Zufallsvariable verwechselt werden.

Verteilung einer diskreten Zufallsvariable

Aussage 5.3

Sei X eine diskrete Zufallsvariable. Dann gilt

1. $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} p_X(x) = 1$,
2. $F_X(x) = \sum\limits_{y \leq x} p_X(y)$.

Bew.: $X^{-1}(\Omega) = \bigcup\limits_{x \in X(\Omega)} \{X = x\}$

$\Rightarrow 1 = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} p_X(x)$

2. $\{X \leq x\} = \bigcup\limits_{y \leq x} \{X = y\}$

$\mathbb{P}(X \leq x) = \sum\limits_{y \leq x} \mathbb{P}(X = y)$

$\Rightarrow F_X(x) = \sum\limits_{y \leq x} p_X(y)$

Beispiel (2-faches Würfeln)

$\Omega = \{(1,1), \ldots, (6,6)\}$,

$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{36} \Rightarrow$ LR.

ZV $S(\omega) := \omega_1 + \omega_2$

$S(\Omega) = \{2, \ldots, 12\}$

Verteilung? $p_S(k)$, $k \in S(\Omega)$.

$p_S(2) = \mathbb{P}(S=2) = \mathbb{P}(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}$

$p_S(3) = \mathbb{P}(S=3) = \mathbb{P}(\{(1,2), (2,1)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

S <u>nicht</u> gleichverteilt.

Beispiel (2-faches Würfeln)

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
		(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)	
			(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)		
				(4,1)	(4,2)	(4,3)	(5,3)	(6,3)			
					(5,1)	(5,2)	(6,2)				
						(6,1)					
$p_X(k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$
$\approx$	0,027	0,055	0,083	0,111	0,138	0,166	0,138	0,111	0,083	0,055	0,027

Leibniz Gemeinschaft

Beispiel (Diskrete Gleichverteilung)

X heißt gleichverteilt, falls $X(\Omega) = \{1, \dots, n\}$

und

$$P_X(k) = \frac{1}{n}$$

z.B.:

$$X(\Omega) = \{\overset{1}{\bigcirc}, \overset{2}{\triangle}, \overset{3}{\square}, \overset{4}{*}\} \dots$$

Beispiel (Gleichverteilung auf [0, 1])

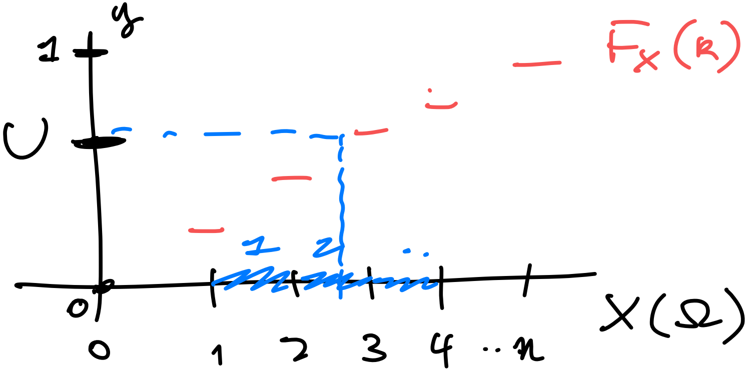
$X(\Omega) = [0,1]$, $p_X(x)$ nicht def.

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = x.$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X \in (a,b]) = b-a, \quad \forall (a,b] \subseteq [0,1]$$

X ist gleichverteilt auf $[0,1]$.

Simulation von Zufallsvariablen mit endlichem Wertebereich

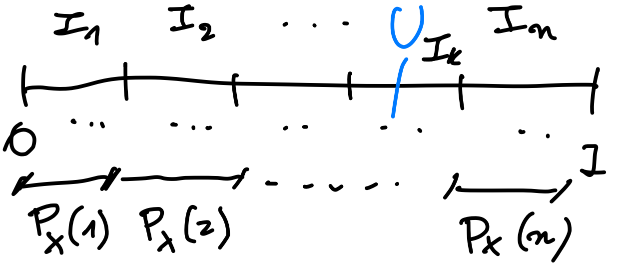


Code

Simulation von Zufallsvariablen mit endlichem Wertebereich

Im allg. $X(\Omega) = \{1, \dots, n\}$,

$U \sim \mathrm{Unif}[0,1]$



$\Rightarrow X = k$ falls $U \in I_k$

Code

Bernoulli-Experiment

Definition 5.9

Ein **Bernoulli-Experiment** ist ein Zufallsexperiment mit genau zwei möglichen Ergebnissen: **Erfolg** und **Misserfolg**.
Ein **wiederholtes Bernoulli-Experiment** besteht aus unabhängigen Bernoulli-Experimenten, bei dem die Wahrscheinlichkeiten für Erfolg und Misserfolg in jeder Ausführung gleich sind.

Bernoulli-Verteilung

Definition 5.10

Eine Zufallsvariable X heißt **Bernoulli-verteilt** mit Parameter $p \in [0, 1]$, falls $X(\Omega) = \{0, 1\}$ und $\mathbb{P}(X = 1) = p$.

Misserfolg Erfolg.

Beispiel (Münzwurf)

$\Omega = \{K, Z\}$, $X = \mathbb{1}_K(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega = Z \\ 1 & \omega = K \end{cases}$

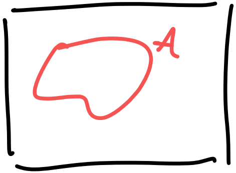
$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(K) = 1/2$ $\quad X(\Omega) = \{0, 1\}$,

$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(Z) = 1/2$

X Bernoulli-verteilt, mit param. $1/2$

Im allg. $\mathbb{P}(K) = p \Rightarrow X \sim \text{Bernoulli}(p)$,

Beispiel (Dartwurf)



$$\Omega = [-1,1]\times[-1,1]$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$|A|$ ← Fläche von A

$|\Omega|$ ← Fläche von Ω.

$\mathbb{1}_A$ ← Indikatorfkt.

$$X = \mathbb{1}_A = \begin{cases} 0 & \omega \notin A \\ 1 & \omega \in A \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(\{\omega : \omega \in A\}) = \frac{|A|}{|\Omega|} = p$$

$$\mathbb{P}(X=0) = 1-p$$

$$\Rightarrow X \sim \mathrm{Bern}(p).$$

Binomialverteilung

Definition 5.11

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$. Eine Zufallsvariable X heißt **binomialverteilt** mit Parametern n und p, falls $X(\Omega) = \{0, \ldots, n\}$ und

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}.$$

X ist die Anzahl Erfolg bei einem wiederholten Bernoulli-Experiment.

Beisp: Falls $n=1$: $p^k(1-p)^{1-k}$, $k=0,1$.

Falls $n=2$: $\binom{2}{k} p^k (1-p)^{2-k}$, $k=0,1,2$.

$P_X(2) = p^2 = \mathbb{P}((\text{Erfolg}, \text{Erfolg}))$

Aussage 5.4

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte Bernoulli-verteilte Zufallsvariable mit Parameter $p \in [0, 1]$. Dann ist die Zufallsvariable $Y := X_1 + \cdots + X_n$ binomialverteilt mit Parametern n und p.

$Y \sim$ Anzahl der Erfolg.

Beispiel (Wiederholtes Münzwurf)

Anzahl k? bei n Versuche.

$X_i = \mathbb{1}_{\{\text{Kopf im } i\text{-te Versuch}\}} \sim \text{Bernoulli}(1/2)$

||

$$Y = X_1 + \dots + X_n \sim \text{Binomial}(n, 1/2)$$

$$P_Y(k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{1}{2^n} \binom{n}{k}.$$

Beispiel (Wiederholtes Münzwurf)

Anzahl k? $\quad X_i = 1_{\{\text{Kopf im } i\text{-te Versuch}\}}$

bei n Versuche. $\quad \sim \text{Bernoulli}(1/2)$

$\|$

$$Y = X_1 + \dots + X_n \sim \text{Binomial}(n, 1/2)$$

$$P_Y(k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}.$$