Woche 8: *14.6.2024*

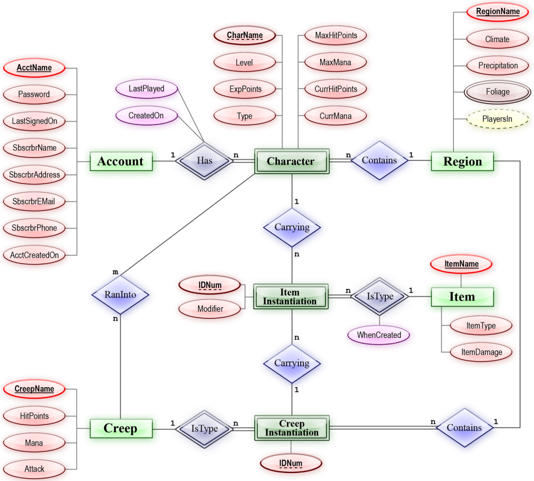
Thema: *Planar Graphen und Färbungen*

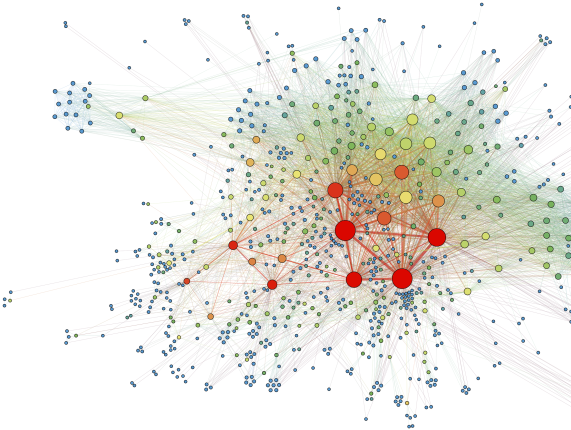
8.1 Planare Graphen

Landkarten


DÄNEMARK (Grönland)
Grönland-see
Irminger-see
Barentsee
Europäisches Nordmeer
ISLAND
DÄNEMARK (Färöer)
ATLANTISCHER OZEAN
NOR-WEGEN
SCHWEDEN
FINNLAND
RUSSLAND
EST-LAND
Ostsee
LETTLAND
LITAUEN
RUSS-LAND
Nordsee
DÄNE-MARK
IRLAND
MAN
VEREINIGTES KÖNIGREICH
NIEDER-LANDE
BELGIEN
DEUTSCH-LAND
POLEN
WEISS-RUSSLAND
UKRAINE
KASACHSTAN
Kaspisches Meer
GUERNSEY
JERSEY
LUXEM-BURG
TSCHECHIEN
SLOWAKEI
MOLDA-WIEN
ATLANTISCHER OZEAN
FRANKREICH
SCHWEIZ
ÖSTER-REICH
UNGARN
RUMÄNIEN
(SÜD-OSSETIEN)
(ABCHASIEN)
GEORGIEN
ASER-BAID-SCHAN
ARME-NIEN
Schwarzes Meer
SLO-WENIEN
KROATIEN
BOSNIEN UND HERZE-GOWINA
SERBIEN
BULGARIEN
IRAN
MONACO
SAN MARINO
ANDORRA
PORTU-GAL
SPANIEN
VATIKAN
ITALIEN
MONTE-NEGRO
(KOSOVO)
MAZE-DONIEN
TÜRKEI
ALBA-NIEN
GRIECHEN-LAND
SYRIEN
IRAK
Mittelmeer
(NORDZ.)
ZYPERN
LIBA-NON
JORDA-NIEN
ATLAN-TISCHER OZEAN
MAROKKO
ALGERIEN
TUNESIEN
MALTA
Mittelmeer
ISRAEL
SAUDI-ARABIEN

Graphzeichnen





Zeichnen und Färben von Graphen

Visualisierung von Graphen. Bisher haben wir Graphen als mathematische Abstraktion z.B. zur Lösung algorithmischer Probleme verwendet.

Eine andere wichtige Anwendung ist die Verwendung von Graphen zur Strukturierung und Visualisierung von Zusammenhängen in Daten.

Graphzeichnen. Wie zeichnet man Graphen so, dass ihre Struktur leicht erkannt werden kann?

Färben von Graphen.

Man möchte die Knoten eines Graphen farblich markieren.

Zur besseren Unterscheidung sollen dabei benachbarte Knoten unterschiedliche Farben bekommen.

Frage. Wie kann man das effizient mit möglichst wenig Farben machen?

Anwendungsbeispiele sind Landkarten, aber das Problem tritt z.B. auch bei Anwendungen im scheduling auf.

Zeichnen von Graphen

Zeichnen von Graphen

Gegeben.

$G = (\{t_1, \ldots, t_n\}, \{\{t_{19}, t_{09}\}, \{t_8, t_{11}\}, \{t_3, t_{99}\}, \{t_6, t_{65}\}, \{t_7, t_{45}\}, \{t_3, t_{69}\}, \{t_4, t_{55}\}, \ldots\})$

Aufgabe. Den Graphen zu *visualisieren* bzw. zu *zeichnen*.

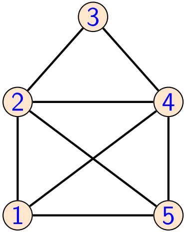
Zeichnungen. Man kann Graphen auf viele Arten zeichnen.

Hier betrachten wir "Zeichnungen auf einem Blatt Papier", also Zeichnungen des Graphen im $\mathbb{R}^2$.

Beispiel

Beispiel. $G = (V, E)$ mit

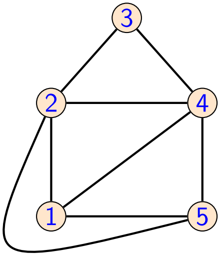
- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\})$.



Beispiel

Beispiel. $G = (V, E)$ mit

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\})$.



Planare Graphen

Zeichungen in der Ebene.

Formal zeichnen wir Graphen in die Ebene, indem wir

- jedem Knoten $v \in V(G)$ einen *Punkt* $\pi(v)$ in $\mathbb{R}^2$ zuordnen und
- jede Kante $e = \{u, v\} \in E(G)$ durch eine Verbindungslinie darstellen, die die beiden Endpunkte $\pi(u), \pi(v)$ miteinander verbindet.

Gewünschte Eigenschaften.

- Kanten sollen durch "einfache" Kurven dargestellt werden.

  Z.B. sollen sich diese Kurven nicht selbst schneiden usw.
- Eine Kurve, die eine Kante $\{u, v\}$ repräsentiert, soll nicht durch einen Punkt $x \in V(G) \setminus \{u, v\}$ laufen.
- Idealerweise sollten sich zwei Kanten nicht schneiden.

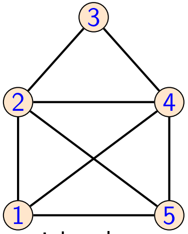
Planare Zeichnungen

Zeichnung eines Graphen G.

Einbettung in die Ebene $\Sigma := \mathbb{R}^2$, d.h. eine Abbildung π, die

- jedem Knoten $v \in V(G)$ einen Punkt $\pi(v) \in \mathbb{R}^2$ sowie
- jeder Kante $e = \{u, v\} \in E(G)$ eine Kurve $\pi(e) \subseteq \mathbb{R}^2$ zuordnet, die $\pi(v)$ mit $\pi(u)$ verbindet und sonst keinen Punkt $\pi(x)$ enthält, für ein $x \in V(G) \setminus \{u, v\}$.

平面嵌入。绘制 π 称为平面或平面图



nicht planar

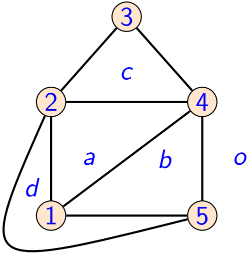
Planare Einbettung. Eine Zeichnung π heißt *eben*, oder *planar*, wenn es keine Kanten $e \neq f \in E(G)$ gibt, so dass $\pi(e)$ und $\pi(f)$ einen gemeinsamen Punkt haben der kein gemeinsamer Endpunkt ist.

如果不存在边 e ≠ f ∈ E(G)，使得 π(e) 和 π(f) 具有一个共同点且该点不是它们的公共端点。

Definition.

Ein Graph G heißt *planar*, wenn er eine ebene Einbettung hat.

Gebiete. Die Gebiete der Zeichnung π sind die maximalen zusammenhängenden Teile von Σ, die keinen Punkt einer Kante oder eines Knotens enthalten.



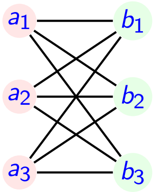
eben bzw. planar

Ein nicht-planarer Graph

Behauptung. Der Graph $K_{3,3}$ ist nicht planar.

$$K_{3,3} := (\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}, \{\{a_i, b_j\} : 1 \leq i, j \leq 3\}).$$

$K_{3,3}$.



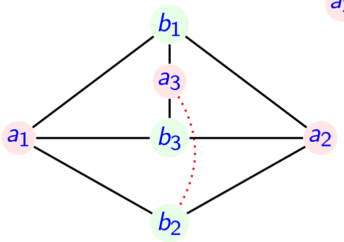
Beweisskizze. Ang. $K_{3,3}$ hätte ebene Zeichnung.

Dann müsste der Kreis (a_1, b_1, a_2, b_2) in die Ebene gezeichnet werden.

Der Pfad (a_1, b_3, a_2) muss dann in einem der beiden Gebiete liegen.

Dann gibt es aber keine Gebiet mehr, das b_1, b_2, b_3 im Gebietsrand hat.

Da aber a_3 mit b_1, b_2, b_3 benachbart ist, kann a_3 nirgendwo mehr gezeichnet werden.

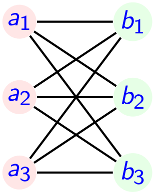


Ein nicht-planarer Graph

Behauptung. Der Graph $K_{3,3}$ ist nicht planar.

$$K_{3,3} := (\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}, \{\{a_i, b_j\} : 1 \leq i, j \leq 3\}).$$

$K_{3,3}$.



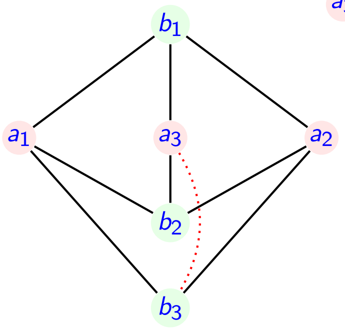
Beweisskizze. Ang. $K_{3,3}$ hätte ebene Zeichnung.

Dann müsste der Kreis (a_1, b_1, a_2, b_2) in die Ebene gezeichnet werden.

Der Pfad (a_1, b_3, a_2) muss dann in einem der beiden Gebiete liegen.

Dann gibt es aber keine Gebiet mehr, das b_1, b_2, b_3 im Gebietsrand hat.

Da aber a_3 mit b_1, b_2, b_3 benachbart ist, kann a_3 nirgendwo mehr gezeichnet werden.



Einige Beobachtungen

Lemma.

Sei G planar, π eine ebene Einbettung von G in $\mathbb{R}_2$, $e \in E(G)$.

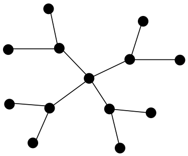
1. Sei F ein Gebiet von π und R sein Rand. Dann gilt $\pi(e) \subseteq R$, $\pi(e) \cap R \subseteq \{\pi(v) : v \in V(G)\}$ oder $\pi(e) \cap R = \emptyset$.
2. Wenn e auf einem Kreis $C \subseteq G$ liegt, dann liegt e auf dem Rand von genau zwei Gebieten von π.
3. Wenn e auf keinem Kreis liegt, dann liegt e auf dem Rand von genau einem Gebiet.

Einige Beobachtungen

Fragen.

- Sei π eine Einbettung eines Baums T. Wieviele Gebiete hat π?

  $\pi(T)$ *hat genau ein Gebiet.*



- Sei π eine Einbettung eines Graphs G in $\mathbb{R}_2$. Angenommen, es gibt zwei verschiedene Gebiete, die den gleichen Rand haben. Was können wir daraus über G schließen?

  Dann ist G *ein Kreis.*

Eulersche Polyederformel

Satz (Eulersche Polyederformel).

Sei G ein zusammenhängender planarer Graph und sei π eine ebene Zeichnung von G in $\mathbb{R}^2$. Sei F die Menge der Gebiete von π.

Dann gilt

$$|F| = |E(G)| - |V(G)| + 2.$$

Erinnerung. Wir haben schon bewiesen, dass jeder Baum T mit $n \geq 1$ Knoten genau $n - 1$ Kanten hat.

Auch haben wir gesehen, dass jeder zusammenhängende Graph mit n Knoten einen Spannbaum enthält, und daher mindestens $n - 1$ Kanten haben muss.

Also ist ein zusammenhängender Graph G mit n Knoten genau dann ein Baum, wenn G genau $n - 1$ Kanten enthält.

Eulersche Polyederformel

Satz. (Eulersche Polyederformel).
Sei G ein zusammenhängender planarer Graph und sei π eine ebene Zeichnung von G in $\mathbb{R}^2$. Sei F die Menge der Gebiete von π.
Dann gilt $|F| = |E(G)| - |V(G)| + 2$.

Beweis Fixiere $n := |V(G)|$. Beweis per Induktion über $m := |E(G)|$.
Da G zusammenhängend, gilt $m \geq n - 1$ nach vorherigem Lemma.
(IA). Der Basisfall ist also $m = n - 1$.

Nach vorherigem Lemma ist G ein Baum.
Also hat jede Zeichnung von G genau ein Gebiet und es gilt

$$|F| = 1 = |E(G)| - |V(G)| + 2 = (n-1) - n + 2.$$

Lemma. G zshgd.
1. $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$.
2. G ist Baum gdw. $|E(G)| = |V(G)| - 1$.

Beweis

Induktionsvoraussetzung. Die Behauptung gilt für $m-1 \geq n-1$.

Induktionsschritt. Sei $m \geq n$.

Dann enthält G einen Kreis $C \subseteq G$.

Sei e eine beliebige Kante von C. Sei $G' := G - e$.
Sei π' die Einbettung, die aus π durch Entfernen der Kante e entsteht.

Da e auf einem Kreis liegt, liegt e auf dem Rand von zwei Gebieten.

In π' fallen diese Gebiete zu einem zusammen.

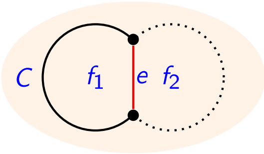
Sind F' die Gebiete von G' bzgl. π', dann gilt also $|F'| = |F| - 1$.

Da $|V(G)| = |V(G')|$ aber $|E(G')| = |E(G)| - 1$, folgt aus (IV):

$$|F'| = |E(G')| - |V(G')| + 2 = m - 1 - n + 2 = m - n + 1.$$

Also $|F| = |F'| + 1 = m - n + 2$. $\square$

Eulersche Polyederformel.
G zshgd., planar. π Zeichnung von G.
F Menge der Gebiete von π.
Dann gilt $|F| = |E(G)| - |V(G)| + 2$.



Eulersche Polyederformel

Satz (Eulersche Polyederformel).

Sei G ein zusammenhängender planarer Graph und sei π eine ebene Zeichnung von G in $\mathbb{R}^2$. Sei F die Menge der Gebiete von π.

Dann gilt $|F| = |E(G)| - |V(G)| + 2$.

Korollar. Für jeden planaren Graphen G mit $|V(G)| \geq 3$ gilt

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6.$$

Beweis. O.B.d.A. ist G zusammenhängend.

Falls G drei Knoten aber nur 2 Kanten enthält ist die Ausage klar.

Anderenfalls wird jedes Gebiet durch ≥ 3 Kanten begrenzt.

Jede Kante begrenzt höchstens 2 Gebiete.

Also $3|F| \leq 2|E(G)|$ und somit $\frac{2}{3}|E(G)| \geq |F| = |E(G)| - |V(G)| + 2$. □

Minimalgrad planarer Graphen

Korollar. Für jeden planaren Graphen G mit $|V(G)| \geq 3$ gilt

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6.$$

Korollar. Jeder planare Graph hat einen Knoten vom Grad höchstens 5.

Beweis (per Widerspruch). Angenommen, $\delta(G) \geq 6$, d.h. jeder Knoten in G hätte mindestens 6 Nachbarn.

Dann hätte G mindestens $\frac{6 \cdot |V(G)|}{2} = 3|V(G)|$ Kanten.

Das wäre aber ein Widerspruch zu obigem Satz. $\square$

Kombinatorische Planaritätskriterien

Satz. Für jeden planaren Graphen G mit $|V(G)| \geq 3$ gilt

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6.$$

Korollar. K_5 ist nicht planar.

Nicht planare Graphen. K_5 und $K_{3,3}$ sind *minimal* nicht-planar: löscht man eine beliebige Kante oder Knoten aus den Graphen, ist das Ergebnis planar.

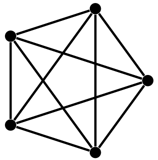
Eine weitere nützliche Eigenschaft planarer Graphen ist Abschluss unter Untergraphen.

Proposition. Ist G planar und $H \subseteq G$, dann ist H planar.

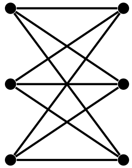
Ziel. Wir wollen nun eine rein kombinatorische Charakterisierung planarer Graphen finden.

$\rightsquigarrow$ Satz von Kuratowski

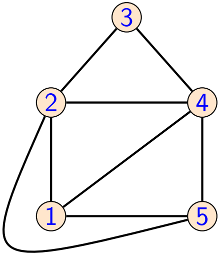
K_5.



$K_{3,3}$.



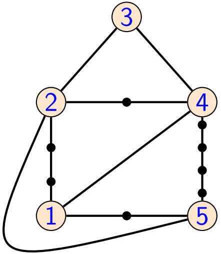
Unterteilungen



Definition. Sei G ein Graph.

1. Eine **Unterteilung** (engl. *subdivision*) von G ist ein Graph G', den man aus G dadurch erhält, indem man eine oder mehrere Kanten von G durch Pfade beliebiger Länge (aber größer als 0) ersetzt.

   Dabei haben die Pfade für verschiedene Kanten keinen inneren Knoten gemeinsam.



Satz (Satz von Kuratowski, 1930).
Ein Graph G ist genau dann planar, wenn er weder eine Unterteilung von K_5 noch von $K_{3,3}$ als Untergraph enthält.

8.2 Färbungen von Graphen

Färbungen von Graphen

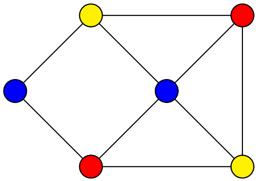
Definition. Sei G ein Graph.

Eine Knotenfärbung von G von k Farben ist eine Abbildung $c : V(G) \to \{1, \dots, k\}$, so dass $c(u) \neq c(v)$ für alle $\{u, v\} \in E(G)$ gilt.

Wir nennen G k-*färbbar*, wenn G eine Färbung mit k Farben hat.

Definition. Die chromatische Zahl $\chi(G)$ ist die minimale Anzahl k von Farben, so dass G eine Knotenfärbung mit k Farben hat.

Beispiel. Der folgende Graph ist 3-färbbar.



Beispiele

Cliquen K_n. Der vollständige Graph K_n ist n-färbbar aber nicht $n-1$-färbbar.

Die Graphen $K_{n,m}$. Der vollständige bipartite Graph $K_{n,m}$ ist 2-färbbar.

Kreise gerader Länge. Der Kreis C_n der Länge $n \geq 3$ ist 2-färbbar wenn n gerade ist.

Kreise ungerader Länge. Für ungerades n ist C_n 3-färbbar aber nicht 2-färbbar.

Anwendung: Lagern von Chemikalien

Lagern von Chemikalien. Eine Firma betreibt ein Lagerhaus für Chemikalien.

Einige Chemikalien dürfen nicht neben bestimmten anderen gelagert werden.

Die Firma richtet daher getrennte Bereiche des Lagerhauses ein.

Wie viele Bereiche braucht sie mindestens?

Antwort. Wir konstruieren folgenden Graph:

Die Knoten sind die zu lagernden Chemikalien.

Wir ziehen eine Kante zwischen zwei Knoten, wenn die Chemikalien nicht zusammen gelagert werden dürfen.

Dann ist $\chi(G)$ die minimale Zahl von Bereichen des Lagerhauses.

应用：化学品存储

化学品存储。一家公司经营一个化学品仓库。
一些化学品不能与特定的其他化学品存放在一起。
因此，该公司设立了仓库的不同区域。
它至少需要多少个区域？

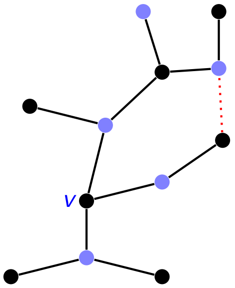
答案。我们构建以下图：
节点是要存储的化学品。
如果两种化学品不能一起存放，我们就在两个节点之间画一条边。
那么 $\chi(G)$ 就是仓库的最小区域数。

Anwendungen

Mobilfunk. Im Mobilfunk wird auf ähnliche Weise eine Zuordnung von Frequenzen zu Sendern erreicht, bei denen benachbarte Sender verschiedene Frequenzen benutzen.

Compilerbau. Im Compilerbau verwendet man diesen Ansatz, um eine Zuordnung von Variablen auf Register zu erreichen, so dass gleichzeitig verwendete Variablen in verschiedenen Registern liegen.

Färbungen von Graphen



Erinnerung (Lemma). Ein Graph G ist genau dann 2-färbbar, wenn er keinen Kreis ungerader Länge als Untergraph enthält.

Berechnen einer Färbung. Der Beweis des Lemmas gab auch direkt einen effizienten Algorithmus um zu entscheiden, ob ein Graph 2-färbbar ist.

Beobachtung. Jeder planare Graph ist 6-färbbar.

Beweisidee. Sei G planar.

Dann hat G einen Knoten v mit Grad $d_G(v) \leq 5$.

$G - v$ ist planar und kann rekursiv mit Farben $\{1, \ldots, 6\}$ gefärbt werden.

Da v nur ≤ 5 Nachbarn hat, wird in $N_G(v)$ eine Farbe $c \in \{1, \ldots, 6\}$ nicht benutzt.

Färbe v mit Farbe c. $\square$

Färbungen von Graphen

Beobachtung. Jeder planare Graph ist 6-färbbar.

Satz (Appel und Haken, 1977). Jeder planare Graph ist 4-färbbar.

Berechnen der chromatischen Zahl. Wir haben gesehen, dass wir in polynomieller Zeit eintscheiden können, ob ein Graph 2-färbbar ist.

Für $k > 2$ ist das Problem zu entscheiden, ob ein Graph k-färbbar ist, algorithmisch sehr schwierig und vermutlich nicht in polynomieller Zeit lösbar (das Problem ist NP-vollständig).

Das gilt sogar für planare Graphen!

Färbbarkeit planarer Graphen. Das Problem zu entscheiden, ob ein planarer Graph k-färbbar ist, ist

- einfach für $k = 1$ und $k = 2$
- schwer für $k = 3$
- einfach für alle $k \geq 4$.

Färben von degenerierten Graphen

Erinnerung. Jeder planare Graph ist 6-färbbar.

Beweisidee. Sei G planar.

Dann hat G einen Knoten v mit Grad $d_G(v) \leq 5$.

$G - v$ ist planar und kann rekursiv mit Farben $\{1, \ldots, 6\}$ gefärbt werden.

Da v nur ≤ 5 Nachbarn hat, wird in $N_G(v)$ eine Farbe $c \in \{1, \ldots, 6\}$ nicht benutzt.

Färbe v mit Farbe c. $\square$

Kernidee des Beweises. Wir haben hier eigentlich gar nicht die Planarität von G ausgenutzt, sondern nur

- die Tatsache, dass G einen Knoten v vom Grad ≤ 5 hat und
- diese Eigenschaft erhalten bleibt, wenn wir den Knoten löschen.

Wir können diese Idee als Definition einer Klasse von Graphen benutzen, auf denen der gleiche Ansatz funktioniert.

Degenerierte Graphen

Definition. Sei $r \in \mathbb{N}$.

Ein Graph G ist r-degeneriert, wenn jeder Untergraph $H \subseteq G$ einen Knoten vom Grad $d_H(v) \leq r$ hat.

Lemma. Jeder r-degenerierte Graph ist $r+1$-färbbar und eine $r+1$-Färbung kann effizient berechnet werden.

Beweis. Wir verwenden den gleichen rekursiven Algorithmus wie bei planaren Graphen.

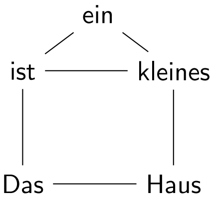
8.3 Gewichtete und Gerichtete Graphen

Beschriftete Graphen

Beschriftete Graphen. In vielen Anwendungen von Graphen haben wir neben der reinen Graphstruktur noch weitere Informationen über die Kanten und Knoten gegeben.

Z.B. können in Straßenkarten die Kanten mit der Länge der Straße beschriftet sein.

Erweiterung des Graphmodells. Ein *Kanten- und Knotenbeschrifteter Graph* ist ein 4-Tupel $(V, E, \lambda_V, \lambda_E)$, wobei (V, E) ein Graph ist und $\lambda_v : V \to D_V$ und $\lambda_E : E \to D_E$ Beschriftungsfunktionen sind.



$V := \{1, 2, 3, 4, 5\}$

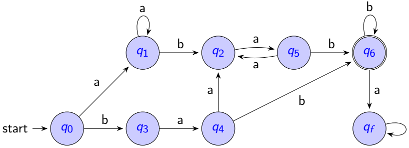
$E := \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 4\}, \{4, 5\}, \{1, 5\}\}$

$\lambda_V(1) := \mathit{Das}$ $\quad\lambda_V(2) := \mathit{ist}$

$\lambda_V(3) := \mathit{ein}$ $\quad\lambda_V(4) := \mathit{kleines}$

$\lambda_V(5) := \mathit{Haus}$

Endliche Automaten.

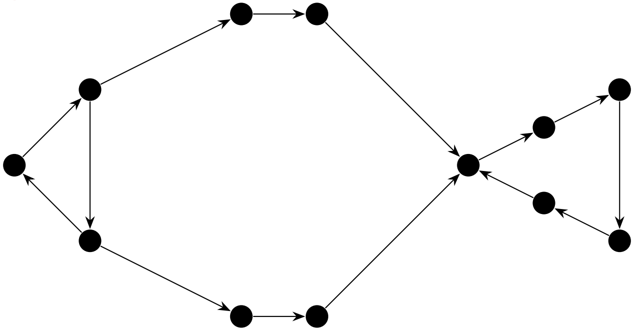


Gerichtete Graphen

Definition.

Ein *gerichteter Graph* G besteht aus einer Knotenmenge $V(G)$ und einer Menge $E(G) \subseteq V(G) \times V(G)$ von gerichteten Kanten.

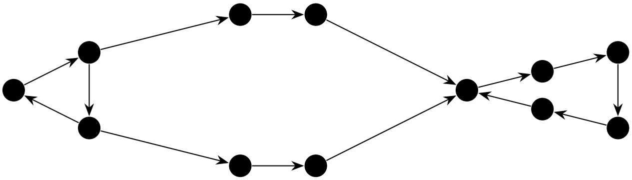
Beispiel.



Notation

Notation. Sei G ein gerichteter Graph.

- Eine Kante $e = (u, v) \in E(G)$ ist eine *eingehende Kante* von v und eine *ausgehende Kante* von u.
- Die *ausgehende Nachbarschaft* von $v \in V(G)$ ist definiert als
$$N^+(v) := \{u \in V(G) : (v, u) \in E(G)\}.$$
- Die *eingehende Nachbarschaft* von $v \in V(G)$ ist definiert als
$$N^-(v) := \{u \in V(G) : (u, v) \in E(G)\}.$$
- Der *Ausgangsgrad* $d^+(v)$ eines Knotens $v \in V(G)$ ist definiert als $|N^+(v)|$, der *Eingangsgrad* $d^-(v)$ als $|N^-(v)|$.



Gerichtete Pfade und Wege

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph.

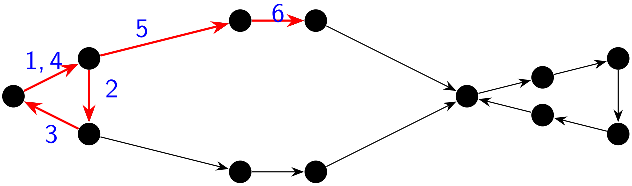
Ein *gerichteter Weg* in G ist eine Folge

$$W = (s_1, e_1, \dots, s_k, e_k, s_{k+1}),$$

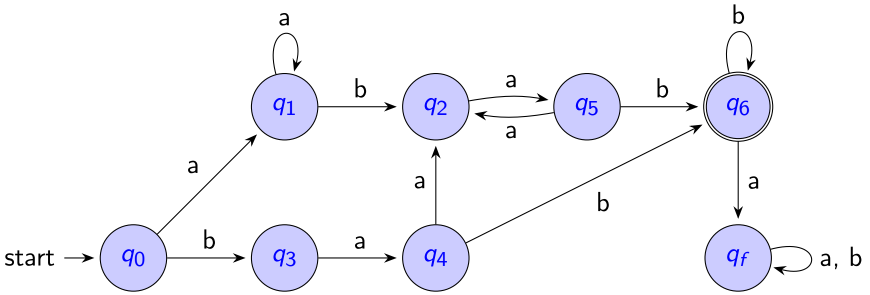
mit $s_1, \dots, s_{k+1} \in V(G)$, $e_1, \dots, e_k \in E(G)$ und $e_i = (s_i, s_{i+1})$, für alle $1 \leq i \leq k$. Die *Länge* von W ist die Zahl k der Kanten.

Gilt zusätzlich, dass $s_i \neq s_j$ für alle $1 \leq i < j \leq k$, dann nennen wir W einen *gerichteten Pfad*.

s_1 ist der Startknoten und s_{k+1} der Zielknoten von W.



Anwendung: Endliche Automaten



Beobachtung. Der Automat akzeptiert ein Wort $w = w_1 \dots w_n$, wenn es einen gerichteten Weg von einem Startzustand zu einem Endzustand gibt, der mit w beschriftet ist.

Zusammenhang in gerichteten Graphen

Definition. Sei G ein gerichteter Graph und $u.v \in V(G)$.

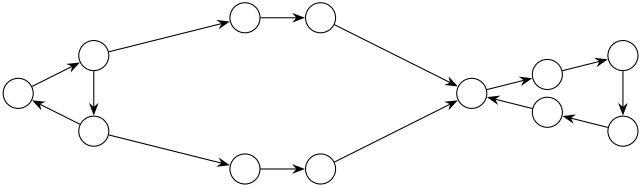
u ist von v aus *erreichbar*, wenn es einen gerichteten Pfad P in G gibt, der in u beginnt und in v endet.

u und v sind in G *stark zusammenhängend*, wenn u von v aus und v von u aus erreichbar ist.

G ist *stark zusammenhängend*, wenn je zwei Knoten in G stark zusammenhängend sind.

Definition. Sei G ein gerichteter Graph.

Eine *(starke) Zusammenhangskomponente* von G ist ein maximaler Untergraph $C \subseteq G$ der stark zusammenhängend ist.



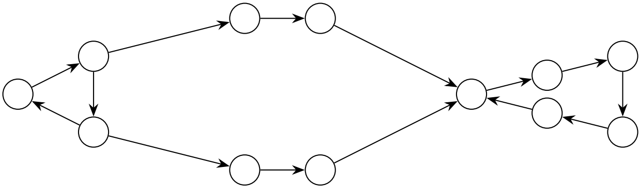
Berechnen starker Zusammenhangskomponenten

Berechnen starker Zusammenhangskomponenten. Wir können die starken Zusammenhangskomponenten eines gerichteten Graphen sehr einfach durch eine zweifache Tiefensuche ausrechnen.

Gerichtete Tiefensuche. Tiefensuche auf gerichteten Graphen funtioniert im Prinzip genauso wie auf ungerichteten Graphen.

Wir nummerieren dabei die besuchten Knoten in post-order.

D.h., werden von einem Knoten v aus die Nachfolger $u_1, \ldots, u_l$ besucht, erhalten diese kleinere Nummern als v.



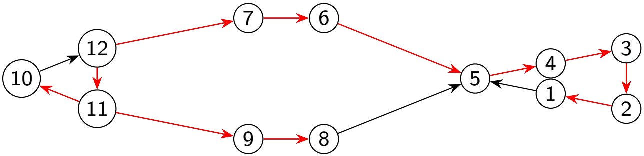
Gerichtete Tiefensuche

Eingabe: gerichteter Graph G.

Datenstrukturen: Zähler $c = 1$.
Abbildung $m : V(G) \to \mathbb{N} \cup \{\perp\}$ mit $m(v) = \perp$ für alle $v \in V(G)$.

Algorithmus. Solange es $v \in V(G)$ mit $m(v) = \perp$ gibt,
wähle $v \in V(G)$ mit $m(v) = \perp$ und setze $c = \mathit{rec\text{-}DFS}(v)$.

Algorithmus $\mathit{rec\text{-}DFS}(v)$.
Wenn $M(v) = \{w : m(w) = \perp \text{ und } (v, w) \in E(G)\} \neq \emptyset$
wähle ein $u \in M(v)$ und setze $c = \mathit{rec\text{-}DFS}(u)$.
Setze $m(v) = c$ und gib $c + 1$ zurück.



Eigenschaften.
Wenn
u von v aber
v nicht von u erreichbar ist,
dann ist $m(v) > m(u)$.

Wenn $m(u) = 1$, sind die von u erreichbaren Knoten genau die Knoten der Zshg.komp. von u.

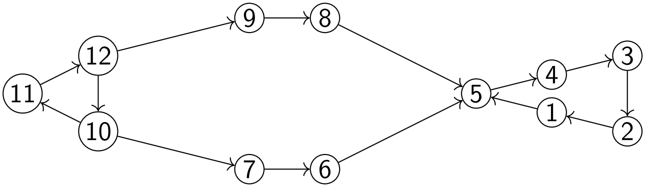
Berechnen Starker Zusammenhangskomponenten

Starke Zusammenhangskomponten. Sei G ein gerichteter Graph.

Wir können die Tiefensuche benutzen, um die starken Komponenten von G auszurechnen.

Dazu wenden wir die Tiefensuche zwei mal an.

1. Die erste Tiefensuche liefert einen markierten Graph G mit Beschriftungsfunktion m.
2. Bei der zweiten Tiefensuche, wählen wir unter den noch unmarkierten Knoten den Knoten v aus, dessen Wert $m(v)$ aus der ersten Tiefensuche minimal ist.



Eigenschaften.

Wenn

u von v aber

v nicht von u erreichbar ist,

dann ist $m(v) > m(u)$.

Wenn $m(u) = 1$, sind die von u erreichbaren Knoten genau die Knoten der Zshg.komp. von u.