Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 18/19

G. Penn-Karras 18. Februar 2019

Februar – Klausur
Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Füllen Sie bitte dieses Deckblatt vollständig und leserlich aus. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§39 Abs. 2 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Schreiben Sie auf *jedes* benutzte Blatt Papier sofort Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die ausgegebene oder von der ISIS-Seite heruntergeladene Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe 9 Punkte

Lösen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation das Anfangswertsproblem für eine Funktion y

$$y'' + 4y = 5u_3(t)\mathrm{e}^{-(t-3)},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$$

Benutzen Sie hierbei ohne Nachweis die Identität

$$\frac{5}{(s^2+4)(s+1)} = \frac{1}{s+1} + \frac{-s+1}{s^2+4}.$$

2. Aufgabe 10 Punkte

Finden Sie mit Hilfe der Fourier-Transformation eine Lösung $f(t)$ der Integralgleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+4\tau^2} \cdot f(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau = \frac{1}{1+(t+1)^2}\ .$$

Hinweis: Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\ \mathrm{d}t = \pi\mathrm{e}^{-|\omega|}\ .$$

3. Aufgabe 8 Punkte

Ermitteln Sie mit Hilfe der $\mathcal{Z}$-Transformation eine Zahlenfolge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit den drei Eigenschaften

$$y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = 0,\ y_0 = 2,\ y_1 = 3.$$

Hinweis: Es gilt für $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$:

$$\mathcal{Z}\left[(a^k)_{k\in\mathbb{N}_0}\right](z) = \mathcal{Z}\left[(1, a, a^2, a^3, \ldots)\right](z) = \frac{z}{z-a}.$$

4. Aufgabe 10 Punkte

Ermitteln Sie im $\mathbb{R}^3$ die allgemeine Lösung $\vec{y}(t)$ des Differentialgleichungssystems

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 8 & -4 & -4 \end{pmatrix} \vec{y}\,.$$

2. Aufgabe

10 Punkte

Finden Sie mit Hilfe der Fourier-Transformation eine Lösung $f(t)$ der Integralgleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+4\tau^2} \cdot f(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \;=\; \frac{1}{1+(t+1)^2}\,.$$

Hinweis: Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \pi\mathrm{e}^{-|\omega|}\,.$$

$$\frac{1}{1+4t^2} * f(t) = \frac{1}{1+(t+1)^2}$$

$$\frac{1}{2}\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](\tfrac{1}{2}w) \cdot \mathcal{F}[f](w) = e^{iw}\,\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](w)$$

$$\frac{1}{2}\cancel{\pi}e^{-|\frac{w}{2}|} \cdot \mathcal{F}[f](w) = e^{iw} \cdot \cancel{\pi}e^{-|w|}$$

$$\mathcal{F}(f)(w) = 2e^{iw}\,e^{-|\frac{w}{2}|}$$

$$= e^{iw}\mathcal{F}\left[2\cdot\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{1+4t^2}\right](w)$$

$$= \mathcal{F}\left[\frac{4}{\pi}\,\frac{1}{1+4(t+1)^2}\right](w)$$

5. Aufgabe 12 Punkte

Gegeben ist das reelle Randwertproblem für eine Funktion $u(x,t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3\,\frac{\partial u}{\partial t} + u = 0, \qquad 0 < x < \pi, \quad 0 < t\,;$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad 0 < t\,.$$

a) Finden Sie alle Lösungen $u(x,t)$ der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$. Hierbei können Sie ohne Beweis verwenden, dass die Funktionen $X(x)$ periodisch und nicht-konstant sind.

b) Ermitteln Sie durch Superposition eine Lösung $u(x,t)$ mit der Eigenschaft

$$u(x,0) = 4\sin x + \sin 4x.$$

6. Aufgabe 11 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.
(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt die jeweils angegebenen Punkte.)
Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

a) (2 Punkte) Jede Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, die stetig und beschränkt ist, besitzt eine Laplacetransformierte. ✓

b) (2 Punkte) Die Funktion $f(t) = \mathrm{e}^{-|t|}$ ist von endlicher Bandbreite. ✗ $\mathcal{F}[f] = \frac{2}{1+w^2}$ immer positiv

c) (2 Punkte) Für die DGL $y'' + 4y = 0$ bilden die Funktionen $\cos 2t$ und $\cos^2 t - \sin^2 t$ ein Fundamentalsystem.
$\det \begin{vmatrix} \cos 2t & \cos^2 - \sin^2 \\ -2\sin 2t & -2\cos\sin - 2\sin\cos \end{vmatrix} \underset{t=0}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

d) (3 Punkte) Das Anfangswertproblem $(1 + y')\mathrm{e}^y = 2, \quad y(3) = \ln 2$ ist eindeutig lösbar.
$y' = 2e^{-y} - 1$ ✓

e) (2 Punkte) Die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0$$

für eine Funktion $u(x,t)$ wird durch $u(x,t) = X(x) + T(t)$ („Summenansatz“) mit zwei beliebigen differenzierbaren Funktionen $X(x)$ und $T(t)$ gelöst.

✓