Linda Li 458029
Xiang Li 478592
Yilong Wang 483728

Gruppen: Saef 1

Hausaufgabe 3.1 (3=1+2 Punkte)

Ein Elternpaar hat ein Zwillingspaar. Die Erfahrung lehrt, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 64% Zwillinge das gleiche biologische Geschlecht (männlich oder weiblich) haben. Außerdem ist ein Neugeborenes ein Mädchen mit einer Wahrscheinlichkeit von 51%. Wir bezeichnen mit F_1 und F_2 die Ereignisse, dass der erste bzw. zweite Zwilling ein Mädchen ist.

(i) Formulieren Sie mit Hilfe der Ereignisse F_1 und F_2 die Informationen aus dem Aufgabentext.

(ii) Berechnen Sie $\mathbb{P}(F_1|F_2)$ und $\mathbb{P}(F_1|F_2^c)$. Stellen Sie dann ein lineares Gleichung system für $\mathbb{P}(F_1|F_2)$ und $\mathbb{P}(F_1|F_2^c)$ auf und lösen Sie es anschließend.

(i) Sei F_i eine Zufallsvariablen, dass der i-te Zwilling ein Mädchen ist, wobei $F_i(\Omega)=\{0,1\}$

$\mathbb{P}(F_i=1)=0,51$ $\quad \mathbb{P}(F_i=0)=0,49$ $\quad i\in\{1,2\}$ $\quad F_i\sim Ber(0.51)$

$\mathbb{P}(F_1=F_2)=\mathbb{P}(F_1=1,F_2=1)+\mathbb{P}(F_1=0,F_2=0)=0,64$

(ii)
$$\begin{cases}\underbrace{\mathbb{P}(F_1\cap F_2)}_{a}+\underbrace{\mathbb{P}(F_1\cap F_2^c)}_{b}+\underbrace{\mathbb{P}(F_1^c\cap F_2)}_{c}+\underbrace{\mathbb{P}(F_1^c\cap F_2^c)}_{d}=1\\ \mathbb{P}(F_1)=\mathbb{P}(F_1\cap F_2^c)+\mathbb{P}(F_1\cap F_2)=0,51\\ \mathbb{P}(F_2)=\mathbb{P}(F_1\cap F_2)+\mathbb{P}(F_1^c\cap F_2)=0,51\\ \mathbb{P}(F_1=F_2)=\mathbb{P}(F_1\cap F_2)+\mathbb{P}(F_1^c\cap F_2^c)=0,64\end{cases}$$

$$\begin{cases}a+b+c+d=1\\ b+a=0,51\\ a+c=0,51\\ a+d=0,64\end{cases}\Rightarrow\quad \begin{matrix}b+c=0.36\\ b-c=0\end{matrix}$$

$\Rightarrow b=0,18$
$\Rightarrow a=0.33$
$\Rightarrow c=0,18$
$\Rightarrow d=0.31$

$$\mathbb{P}(F_1|F_2)=\frac{\mathbb{P}(F_1\cap F_2)}{\mathbb{P}(F_2)}=\frac{0.33}{0.51}\approx 0,647$$

$$\mathbb{P}(F_1|F_2^c)=\frac{\mathbb{P}(F_1\cap F_2^c)}{\mathbb{P}(F_2^c)}=\frac{0,18}{0.49}\approx 0.367$$

Hausaufgabe 3.2 (6=1+2+3 Punkte)

Bei einem Verstärker mit zwei Röhren können eine oder beide Sicherungen durchbrennen, wenn eine Röhre defekt ist. Betrachten Sie die Ereignisse:

$$\begin{aligned}A_i &:= \text{die Röhre } i \text{ ist defekt } (i=1,2)\,;\\ B_j &:= \text{die Sicherung } j \text{ brennt durch } (j=1,2)\,,\\ B_3 &:= B_1\cap B_2\,.\end{aligned}$$

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(B_i|A_j)$ sind in der Tabelle zusammengefasst

$\mathbb{P}(B_i\|A_j)$	A_1	A_2
B_1	0.6	0.4
B_2	0.4	0.5
B_3	0.1	0.2

Das Ereignis A_1 hat die Wahrscheinlichkeit 0.6 und A_1, A_2 sind eine Partition von Ω.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass:

(i) Beide Röhren defekt sind, falls beide Sicherungen durchgebrannt sind;

(ii) Röhre 2 defekt ist, falls beide Sicherungen durchgebrannt sind;

(iii) nur Röhre 2 defekt ist, falls mindestens eine Sicherung durchgebrannt ist.

Hinweis: Mit einer Partition einer Menge ist ihre Zerlegung in nichtleere paarweise disjunkte Teilmengen gemeint.

(i) A_1, A_2 sind eine Partition von Ω $\Rightarrow A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$

$\mathbb{P}(A_1) = 0,6 \qquad \mathbb{P}(A_2) = 1 - \mathbb{P}(A_1) = 0,4$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 | B_3) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap B_3)}{\mathbb{P}(B_3)} = 0$$

(ii) $\mathbb{P}(B_3) = \mathbb{P}(B_3|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B_3|A_2)\mathbb{P}(A_2)$

$= 0,1 \cdot 0,6 + 0.2 \cdot 0,4 = 0,06 + 0,08 = 0,14$

$$\mathbb{P}(A_2|B_3) = \frac{\mathbb{P}(A_2 \cap B_3)}{\mathbb{P}(B_3)} = \frac{\mathbb{P}(B_3|A_2)\,\mathbb{P}(A_2)}{\mathbb{P}(B_3)} = \frac{0.2 \cdot 0.4}{0,14} = \frac{8}{14} \approx 0.571$$

(iii)

$$\mathbb{P}(A_2|B_1 \cup B_2) = \frac{\mathbb{P}(A_2 \cap (B_1 \cup B_2))}{\mathbb{P}(B_1 \cup B_2)} = \frac{\mathbb{P}(B_1 \cup B_2|A_2)\,\mathbb{P}(A_2)}{\mathbb{P}(B_1 \cup B_2|A_1)\,\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B_1 \cup B_2|A_2)\,\mathbb{P}(A_2)}$$

$$\mathbb{P}(B_1 \cup B_2|A_i) = \mathbb{P}(B_1|A_i) + \mathbb{P}(B_2|A_i) - \mathbb{P}(B_1 \cap B_i|A_i)$$

$\Rightarrow \mathbb{P}(B_1 \cup B_2|A_1) = 0,6 + 0,4 - 0,1 = 0,9$

$\mathbb{P}(B_1 \cup B_2|A_2) = 0,4 + 0,5 - 0,2 = 0,7$

$$\mathbb{P}(A_2|B_1 \cup B_3) = \frac{\mathbb{P}(B_1 \cup B_2|A_2)\,\mathbb{P}(A_2)}{\mathbb{P}(B_1 \cup B_2|A_1)\,\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B_1 \cup B_2|A_2)\,\mathbb{P}(A_2)} = \frac{0,7 \cdot 0.4}{0,9 \cdot 0,6 + 0,7 \cdot 0.4} = \frac{0,28}{0,54 + 0,28}$$

$$= \frac{28}{82} \approx 0,341$$

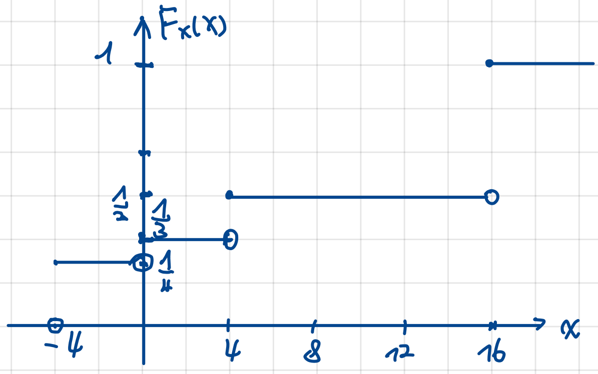
Hausaufgabe 3.3 (4=2+2 Punkte)

Die Verteilung einer diskreten Zufallsvariable X ist in der folgenden Tabelle gegeben:

x	-4	0	4	16
$p_X(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

(i) Berechnen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ von X.

(i) $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$



Da X diskret ist, $F_X(x) = \sum_{y \leq x} \mathbb{P}(X = y)$

$$F_X(x) = \sum_{y \leq x} P(X = y) = \begin{cases} 0 & x < -4 \\ \frac{1}{4} & -4 \leq x < 0 \\ \frac{4}{12} = \frac{1}{3} & 0 \leq x < 4 \\ \frac{1}{2} & 4 \leq x < 16 \\ 1 & 16 \leq x \end{cases}$$

(ii) Seien $Y := 2\sqrt{|X|}$ und $Z = (X - Y)^2$. Stellen Sie die Verteilung von Y und von Z in einer Tabelle mit den Wertebereichen dar.

$y = 2\sqrt{\lvert x \rvert}$	0	$2\sqrt{4} = 4$	$2\sqrt{16} = 8$
P_Y	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{1}{12} & 0 \leq y < 4 \\ \frac{1}{2} & 4 \leq y < 8 \\ 1 & 8 \leq y \end{cases}$$

$z = (X - Y)^2 = (x - 2\sqrt{|x|})^2$

x	-4	0	4	16
$(x - 2\sqrt{\lvert x \rvert})^2$	64	0	0	64
$P_X(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

$z = (x - 2\sqrt{\lvert x \rvert})^2$	0	64
P_Z	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \leq z < 64 \\ 1 & 64 < z \end{cases}$$

Hausaufgabe 3.4 (7=1+3+3 Punkte)

Ein fairer Würfel wird dreimal geworfen und zeigt die Augenzahlen $\omega \in \Omega$. Diese Zahlen werden absteigend der Größe nach geordnet und man erhält das Tripel $Y(\omega)$.

(i) Bestimmen Sie den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ und den Wertebereich $Y(\Omega)$ der Zufallsvariable Y.

(i) $\Omega = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$

$\mathbb{P}(\omega) = \frac{|\omega|}{|\Omega|} = \frac{1}{6^3}$

Wertebereich von $Y(\Omega)$: $\{(c,b,a) \mid 1 \leq a \leq b \leq c \leq 6,\ a,b,c \in \mathbb{N}^+\}$

(ii) Berechnen Sie die Verteilung p_Y von Y und überprüfen Sie die Normierung

$$\sum_{y \in Y(\Omega)} p_Y(y) = 1$$

in diesem speziellen Fall.

Hinweis: Während das Würfelwerfen ein Laplace-Experiment ist, sind die Ausgänge von Y nicht mehr gleichwahrscheinlich: $(1,1,1)$ kann auf genau eine Art entstehen, $(2,2,1)$ auf genau drei Arten und $(3,2,1)$ auf genau sechs. Unterteilen Sie den Wertebereich in drei Mengen A, B, C, so dass auf den Teilmengen jedes geordnete Tripel dieselbe Wahrscheinlichkeit hat.

- $A = \{(1,1,1),(2,2,2),\dots,(6,6,6)\} = \{(a,a,a) \mid a \in \{1,2,\dots 6\}\}$

  $|A| = 6$

  für $w \in A$, gilt es: $\sum_{w \in A} \mathbb{P}(w) = |A| \cdot \mathbb{P}(w) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$

- $B = \{(6,6,5),(6,6,4),\dots,(2,1,1)\}$

  $= \{(a,a,b) \mid 1 \leq b < a \leq 6, a,b \in \{1,\dots,6\}\} \cup \{(a,b,b) \mid 1 \leq b < a \leq 6, a,b \in \{1,2,\dots 6\}\}$

  $|B| = 2 \cdot (5+4+3+2+1) = 30 = 2 \cdot \binom{6}{2}$

  für $w \in B$, gilt: $\sum_{w \in B} \mathbb{P}(w) = \frac{\binom{3}{2} \cdot 6 \cdot 5}{6^3} = \frac{15}{6^2} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

- $C = \{(6,5,4),(6,5,3),\dots,(3,2,1)\} = \{(a,b,c) \mid 0 \leq c < b < a \leq 6, a,b,c \in \{1,\dots,6\}\}$

  $|C| = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ (ohne Zurücklegen ohne Reihenfolge)

  für $w \in C$, gilt $\sum_{w \in C} \mathbb{P}(w) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{20}{36}$

$$\sum_{y \in Y(\Omega)} P_Y(y) = \sum_{w \in A} \mathbb{P}(w) + \sum_{w \in B} \mathbb{P}(w) + \sum_{w \in C} \mathbb{P}(w) = \frac{1}{36} + \frac{15}{36} + \frac{20}{36} = 1$$

(iii) Verallgemeinern Sie die Ergebnisse in (i) und (ii) unter der Annahme, dass der Würfel n Flächen hat.

$\Omega = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \{1,2,\dots,n\}\}$

$\mathbb{P}(w) = \frac{|w|}{|\Omega|} = \frac{1}{n^3}$

Wertebereich von $Y(\Omega)$: $\{(c,b,a) \mid 1 \leq a \leq b \leq c \leq n, a,b,c \in \mathbb{N}^+\}$

- $A = \{(1,1,1),(2,2,2),\dots,(n,n,n)\} = \{(a,a,a) \mid a \in \{1,2,\dots n\}\}$

  $|A| = n$ für $w \in A$, gilt es: $\sum_{w \in A} \mathbb{P}(w) = |A| \cdot \mathbb{P}(w) = \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$

- $B = \{(n,n,n-1),(n,n,n-2) \dots (2,1,1)\}$

$$= \{(a,a,b) \mid 1 \leq b < a \leq n,\ a,b \in \{1,\dots,n\}\} \cup \{(a,b,b) \mid 1 \leq b < a \leq n,\ a,b \in \{1,2,\dots n\}\}$$

$$|B| = 2\binom{n}{2} = \cancel{2} \cdot \frac{n!}{\cancel{2}!\,(n-2)!} = n \cdot (n-1)$$

für $w \in B$, gilt: $\sum_{w \in B} \mathbb{P}(w) = \frac{\binom{3}{2} \cdot (n)(n-1)}{n^3} = \frac{3(n-1)}{n^2}$

- $C = \{(n,n-1,n-2) \dots \dots, \dots, (3,2,1)\} = \{(a,b,c) \mid 0 \leq c < b < a \leq n,\ a,b,c \in \{1,\dots,n\}\}$

$$|C| = \binom{n}{3} = \frac{n!}{3!\,(n-3)!} = \frac{1}{6} \cdot (n)(n-1)(n-2)$$

für $w \in C$, gilt $\sum_{w \in C} \mathbb{P}(w) = \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}$

$$\sum_{y \in Y(\Omega)} P_Y(y) = \sum_{w \in A} \mathbb{P}(w) + \sum_{w \in B} \mathbb{P}(w) + \sum_{w \in C} \mathbb{P}(w) = \frac{1}{n^2}\left(1 + 3(n-1) + (n-1)(n-2)\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\cancel{1} + \cancel{3n} - \cancel{3} + n^2 - \cancel{3n} + \cancel{2}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}(n^2) = 1$$