Öffentliche Lösungsvorschläge zum 11. Tutorium – Diskrete Strukturen

Ihr habt es endlich geschafft das EN-Gebäude zu betreten, indem ihr die Primfaktorzerlegung von n rekonstruiert und so den privaten Schlüssel herausgefunden habt. Schon beim Eintreten hört ihr aus dem 1.Stock eifriges Getippe. Ihr wisst, dass dort das LaS arbeitet.

Ihr nähert euch dem Raum und bei dem Anblick scheint euch das Blut in den Adern zu gefrieren. Professor Reztuerk scheint völlig erschöpft an den Folien zu arbeiten. Die wissenschaftlichen Mitarbeiter dagegen wirken manisch.

“Mehr Übungen!”, ruft Eilema.

“Mehr Aufgaben!”, kreischt Sennahoj.

Keine*r der Drei scheint euch bemerkt zu haben. Der Rest des Raumes ist gefüllt mit großen, zum Teil stark beschädigten Metalltonnen mit der Aufschrift: **“DSsoziativum”**.

Aufgabe 1

Zeigt, dass die Menge der Klassen einer Äquivalenzrelation $\sim$ eine Partition ist.

Lösung zu Aufgabe 1

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $X_1, \dots, X_\ell$ die dazugehörigen Äquivalenzklassen. Zunächst stellen wir fest, dass $a \sim a$ für alle $a \in X$ gelten muss und damit gilt

$$\bigcup_{i=1}^{\ell} X_i = X.$$

Nun nehmen wir an, dass $i, j \in \{1, \dots, \ell\}$ mit $i \neq j$ existieren, sodass ein $a \in X_i \cap X_j$ existiert. Wir betrachten nun ein beliebiges Element $b_i \in X_i$ und ein beliebiges $b_j \in X_j$. Dann gilt $b_i \sim a$ und $a \sim b_j$ und somit $b_i \sim b_j$ da $\sim$ transitiv ist. Es folgt $X_i = X_j$, ein Widerspruch zu $i \neq j$.

Aufgabe 2

Sei M eine Menge. Zeigt die Aussage aus der Vorlesung, dass $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ ein Verband ist.

Lösung zu Aufgabe 2

Wir müssen zeigen, dass $\subseteq$ reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Sowie, dass es für je zwei Elemente $u, v \in \mathcal{P}(M)$ ein Supremum und ein Infimum gibt.

(i) Reflexitivität: Sei $X \subseteq M$ beliebig, dann gilt klarerweise $X \subseteq X$ und wir sind fertig.

(ii) Antisymmetrie: Seien $X, Y \subseteq M$ mit $X \subseteq Y$ und $Y \subseteq X$. Angenommen es gibt ein Element $y \in Y$ mit $y \notin X$, dann kann nicht gelten $Y \subseteq X$. Aus dem selben Grund gibt es kein Element $x \in X$ mit $x \notin Y$ und somit muss gelten $X = Y$.

(iii) Transitivität: Seien $X, Y, Z \subseteq M$ mit $X \subseteq Y$ und $Y \subseteq Z$. Angenommen es gäbe ein Element $x \in X$ mit $x \notin Z$. Da $Y \subseteq Z$ muss dann auch gelten $x \notin Y$, aber da $X \subseteq Y$ kann ein solches x nicht existieren.

(iv) Supremum/Infimum: Seien $S_1, S_2 \subseteq M$. Es gilt $S_1 \cap S_2$ ist das Infimum von S_1 und S_2, da keine Menge S' mit $S' \subseteq S_1$ und $S' \subseteq S_2$ ein Element e enthalten kann was nicht in $S_1 \cap S_2$ enthalten ist. Zudem gilt $S_1 \cup S_2$ ist das Supremum von S_1 und S_2, da keine Menge S' mit $S_1 \subseteq S'$ und $S_2 \subseteq S'$ ein Element e nicht enthalten kann was in $S_1 \cup S_2$ enthalten ist.

Aufgabe 3

Sei M eine Menge mit $|M| = m \in \mathbb{N}$, sowie $X \subseteq M$ mit $|X| = k \leq m$.

(i) Zeigt, dass jede maximale Kette bezüglich $\subseteq$ in $\mathcal{P}(M)$ genau $m + 1$ Elemente enthält.

(ii) Wieviele maximale Ketten bezüglich $\subseteq$, die X enthalten, gibt es in $\mathcal{P}(M)$? Begründet die Antwort.

Lösung zu Aufgabe 3

(i) Sei $P = P_1 \subseteq P_2 \subseteq \cdots \subseteq P_\ell$ eine maximale Kette bezüglich $\subseteq$ mit $\ell \leq m$ Elementen. Da P maximal ist muss $P_\ell = M$ gelten, denn sonst könnte P verlängert werden.

Da M Kardinalität m hat muss also ein $i \in \{1 \ldots \ell - 1\}$ existieren mit $|P_{i+1}| - |P_i| \geq 2$, es existieren also $x, y \in M$ mit $x, y \in P_{i+1} \setminus P_i$, sei nun $P' := P_i \cup \{x\}$, dann ist $P' \neq P_i$ und $P' \neq P_{i+1}$ und es gilt $P_i \subseteq P' \subseteq P_{i+1}$. Mit der Transitivität von $\subseteq$ folgt nun, dass

$$P_1 \subseteq P_2 \subseteq \cdots \subseteq P_i \subseteq P' \subseteq P_{i+1} \subseteq \cdots \subseteq P_\ell$$

eine Kette ist, die mehr Elemente enthält als P, das widerspricht der Maximalität von P und wir sind fertig.

(ii) Es ist die Anzahl aller möglichen Ketten der Form

$$\emptyset = A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_k \subseteq A_{k+1} \subseteq \cdots \subseteq A_m = M$$

gesucht mit $A_k = X$. Insbesondere folgt aus Aufgabenteil i), dass genau k Elemente unserer maximalen Kette vor unserem Element X liegen. Mehr noch, wir wissen, dass $|P_{k-1}| = k - 1$ und $|X| = k$, folglich müssen wir uns überlegen wie viele Mögliche Ketten mit $k + 1$ Elementen es gibt, deren größtes Element X ist. Das entspricht genau der Anzahl von Möglichkeiten die Elemente von X linear anzuordnen. Wir zählen k Möglichkeiten für das kleinste Element, $k - 1$ Möglichkeiten für das zweite, $k - 2$ Möglichkeiten für das dritte und so weiter. Insgesamt erhalten wir also $k!$ solche Ketten. Mit den selben Argumenten folgt, dass wir nun nur noch die Anzahl der Ketten mit $m - k + 1$ Elementen zählen müssen, die mit X beginnen. Dies sind $(m - k)!$ viele.

Insgesamt erhalten wir also $k!\,(m - k)!$ viele solche Ketten.

Aufgabe 4

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten das Poset $([n], |)$, wobei $[n]$ die Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, \ldots, n\}$ ist und $x \mid y$ die Teilbarkeitsrelation (siehe Vorlesung). Findet eine maximale Antikette und eine minimale Zerlegung in Ketten für $([10], |)$.

Lösung zu Aufgabe 4

In dem folgenden Hasse-Diagramm ist eine maximale Antikette in blau und eine minimale Kettenzerlegung in rot markiert.

Aufgabe 2

Sei M eine Menge. Zeigt die Aussage aus der Vorlesung, dass $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ ein Verband ist.

zZ: „$\subseteq$" ist eine partielle Ordnung auf $\mathcal{P}(M)$, sodass es für alle $x, y \in \mathcal{P}(M)$ ein Infimum und Supremum gibt.

1) Reflexivität

2) Antisymmetrie

3) Transitivität

(i) Reflexivität: Sei $X \subseteq M$ beliebig, dann gilt klarerweise $X \subseteq X$ und wir sind fertig.

(ii) Antisymmetrie: Seien $X, Y \subseteq M$ mit $X \subseteq Y$ und $Y \subseteq X$. Angenommen es gibt ein Element $y \in Y$ mit $y \notin X$, dann kann nicht gelten $Y \subseteq X$. Aus dem selben Grund gibt es kein Element $x \in X$ mit $x \notin Y$ und somit muss gelten $X = Y$.

(iii) Transitivität: Seien $X, Y, Z \subseteq M$ mit $X \subseteq Y$ und $Y \subseteq Z$. Angenommen es gäbe ein Element $x \in X$ mit $x \notin Z$. Da $Y \subseteq Z$ muss dann auch gelten $x \notin Y$, aber da $X \subseteq Y$ kann ein solches x nicht existieren.

4)

Definition. Sei M eine Menge und $\sqsubseteq$ eine partielle Ordnung auf M. Seien $x, y \in M$. Ein Element $a \in M$ heißt

- *obere Schranke* für x und y, wenn $x \sqsubseteq a$ und $y \sqsubseteq a$.
- *kleinste obere Schranke* oder *Supremum* von x und y, geschrieben $x \vee y$, wenn a eine obere Schranke für x und y ist und $a \sqsubseteq b$ für jede obere Schranke b für x und y.

Definition. Sei M eine Menge und $\sqsubseteq$ eine partielle Ordnung auf M. Seien $x, y \in M$. Ein Element $a \in M$ heißt

- *untere Schranke* für x und y, wenn $a \sqsubseteq x$ und $a \sqsubseteq y$.
- *größte untere Schranke* oder *Infimum* von x und y, geschrieben $x \wedge y$, wenn a eine untere Schranke für x und y ist und $b \sqsubseteq a$ für jede untere Schranke b für x und y.

Seien $A, B \in \mathcal{P}(M)$.

↳ auf jeden Fall existiert eine obere Schranke: $A, B \subseteq M$ und $M \in \mathcal{P}(M)$

eine untere Schranke: $\emptyset \subseteq A, B$ und $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$

Supremum: Wir vermuten, dass $A \vee B = A \cup B$ gilt.

- Klar: $A, B \subseteq A \cup B$ ($\rightsquigarrow$ ist obere Schranke)
- noch zZ: $A \cup B \subseteq S$ $\forall$ oberen Schranken $\quad A \subseteq A \cup B \quad B \subseteq A \cup B$

Sei $S \in \mathcal{P}(M)$ eine obere Schranke ($A \subseteq S$, $B \subseteq S$).

Ang. es gibt $x \in A \cup B$, aber $x \notin S$.

$\Rightarrow$ ↯ zu $x \in A \cup B \subseteq S$.

Infimum: Wir vermuten, dass $A \wedge B = A \cap B$ gilt.

- Klar: $A \cup B \subseteq A, B$ ($\rightsquigarrow$ ist untere Schranke)
- noch zZ: $S \subseteq A \cap B$ $\forall$ unteren Schranken

Sei $S \in \mathcal{P}(M)$ eine untere Schranke ($S \subseteq A$, $S \subseteq B$).

Ang. es gibt $x \in S$, aber $x \notin A \cap B$

$\Rightarrow x \notin A$ oder $x \notin B$

$\Rightarrow$ ↯ zu $S \subseteq A$, $S \subseteq B$.

Aufgabe 3

Sei M eine Menge mit $|M| = m \in \mathbb{N}$, sowie $X \subseteq M$ mit $|X| = k \leq m$.

(i) Zeigt, dass jede maximale Kette bezüglich $\subseteq$ in $\mathcal{P}(M)$ genau $m+1$ Elemente enthält.

↳ intuitiv klar: $\emptyset \subseteq \{1\} \subseteq \{1,2\} \subseteq \dots \subseteq \{1,2,\dots,m\}$ → $m+1$ Elemente

Definition. Sei M eine Menge und $\sqsubseteq$ eine partielle Ordnung auf M.

1. Eine *Kette* in $(M, \sqsubseteq)$ ist eine Menge $S \subseteq M$ so dass für alle $a, b \in S$ gilt: $a \sqsubseteq b$ oder $b \sqsubseteq a$.
2. Eine *Antikette* in $(M, \sqsubseteq)$ ist eine Menge $S \subseteq M$ so dass für alle $a \neq b \in S$ weder $a \sqsubseteq b$ noch $b \sqsubseteq a$ gilt.

Die *Länge* einer Kette bzw. Antikette S ist die Zahl $|S|$ de Elemente in S.

• eine Kette in $(M, \sqsubseteq)$ ist also eine Teilmenge $K \subseteq M$,

sodass $(K, \sqsubseteq|_{K \times K})$ total geordnet ist

↳ totale Ordnung: Partielle Ordnung und $\forall a,b$ mit $a \neq b$ gilt $a \sqsubseteq b$ oder $b \sqsubseteq a$

↳ ist $\subseteq$ eine totale Ordnung auf $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$?

i) Intuition für $M = \{1,2,3,4\}$

Probiere (maximale) Kette mit $4 = |M|$ Elementen zu konstruieren

↳ sollen mit $\emptyset$ beginnen und mit M enden, sonst garantiert nicht maximal

z.B: $\emptyset \subseteq \{1\} \subseteq \{1,2\} \subseteq \{1,2,3,4\}$ ($\subseteq \{1,2,4\} \subseteq$)

$\emptyset \subseteq \{1,2\} \subseteq \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,4\}$ ($\subseteq \{1\} \subseteq$)

Beobachtung: Sobald in einem Schritt mehr als ein Element dazukommt, können wir die Kette vergrößern.

Angenommen die Aussage ist falsch.

Sei $K := P_1 \subseteq P_2 \subseteq \dots \subseteq P_\ell$ eine maximale Kette mit $1 \leq \ell \leq m$ (formal ist $K = \{P_0, \dots, P_\ell\} \subseteq \mathcal{P}(M)$)

• es ist $P_\ell = M$, da die Kette sonst nicht maximal ist

• analog: $P_1 = \emptyset$

⇝ $\underbrace{P_2, P_3, \dots, P_{\ell-1}, P_\ell}_{\text{max. } m-1 \text{ viele}}$ ($P_\ell = M$), $\ell \leq m$ sind verschiedene Teilmengen von M mit $|M| = m$, die aufsteigend ineinander enthalten sind

Nach dem Schubfachprinzip $\exists j \in \{1, \dots, \ell-1\}: |P_{j+1}| - |P_j| \geq 2$

↳ eine Menge der Kette hat min. zwei Elemente mehr als ihr Vorgänger

Seien $x, y \in (P_{j+1} \setminus P_j)$. Setzen wir $P' := P_j \cup \{x\}$, dann ist

• $P' \neq P_j$, da $x \in P'$, $x \notin P_j$

• $P' \neq P_{j+1}$, da $y \notin P'$, $y \in P_{j+1}$

⇒ $P_j \subseteq P' \subseteq P_{j+1}$

Aufgrund der Transitivität: $\tilde{K} := P_1 \subseteq P_2 \subseteq \dots \subseteq P_j \subseteq P' \subseteq P_{j+1} \subseteq \dots \subseteq P_\ell$ ist länger als K ↯

(ii) Wieviele maximale Ketten bezüglich $\subseteq$, die X enthalten, gibt es in $\mathcal{P}(M)$? Begründet die Antwort.

Aus i): Alle max. Ketten haben $m+1$ Elemente und starten mit $\emptyset$, enden mit M

⇒ $\emptyset = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots \subseteq A_k \subseteq A_{k+1} \subseteq \dots \subseteq A_m = M$ $(*)$

Insb. ist $|A_i| = i$ für $i \in \{0, \dots, m\}$.

Wegen $|X| = k$ suchen wir also alle max. Ketten $(*)$ mit $A_k = X$.

1) Anzahl k-elem. Ketten, die X als max. Element haben?

↳ $k!$ (lineare Anordnungen von X)

2) Anzahl $m-k+1$ elem. Ketten, die X als min. Element haben?

↳ $(n-k+1-1)! = (n-k)!$

⇒ insgesamt $k! \cdot (n-k)!$ viele solcher Ketten

Aufgabe 4

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten das Poset $([n], |)$, wobei $[n]$ die Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, \dots, n\}$ ist und $x \mid y$ die Teilbarkeitsrelation (siehe Vorlesung). Findet eine maximale Antikette und eine minimale Zerlegung in Ketten für $([10], |)$.

2. Eine *Antikette* in $(M, \sqsubseteq)$ ist eine Menge $S \subseteq M$ so dass für alle $a \neq b \in S$ weder $a \sqsubseteq b$ noch $b \sqsubseteq a$ gilt.

Definition. Sei M eine Menge und $\sqsubseteq$ eine partielle Ordnung auf M.

Für $v \in M$ heißt ein Element $u \in M$ ein

- *Vorgänger* von v, wenn $u \sqsubseteq v$ und es kein $w \in M \setminus \{u, v\}$ gibt, mit $u \sqsubseteq w \sqsubseteq v$.
- *Nachfolger* von v, wenn $v \sqsubseteq u$ und es kein $w \in M \setminus \{u, v\}$ gibt, mit $v \sqsubseteq w \sqsubseteq u$.

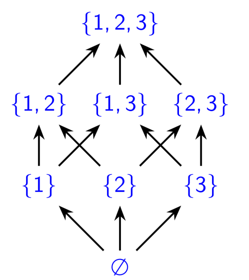
Hasse Diagramme.

Eine partielle Ordnung kann durch ein *Hasse Diagramm* dargestellt werden.

Dabei zeichnen wir für jedes Element $x \in M$ eine Kante zu jedem Nachfolger von x.

Zusätzlich wird das Diagramm so gezeichnet, dass wenn $x \sqsubseteq Y$, dann wird y weiter oben als x gezeichnet.

Beispiel. Sei $M := \{1, 2, 3\}$.

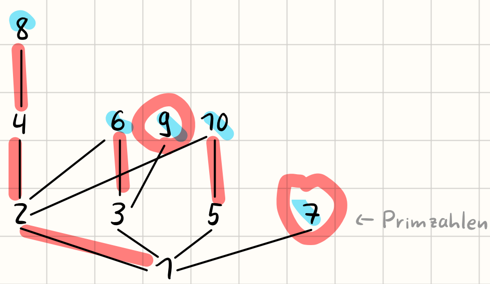


$(P(M), \subseteq)$

Aufgabe 4

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten das Poset $([n], |)$, wobei $[n]$ die Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, \dots, n\}$ ist und $x \mid y$ die Teilbarkeitsrelation (siehe Vorlesung). Findet eine maximale Antikette und eine minimale Zerlegung in Ketten für $([10], |)$.

Hasse-Diagramm von $(\{1, \dots, 10\}, |)$



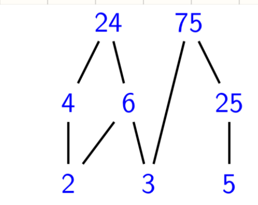
Zerlegung von $(\{1, \dots, 10\}, |)$ in Ketten

↳ Partition von $\{1, \dots, 10\}$ in disjunkte Ketten

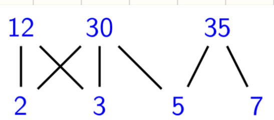
Satz von Dilworth. Sei $(M, \sqsubseteq)$ ein poset wobei M endlich ist.

Die maximale Länge r einer Antikette in $(M, \sqsubseteq)$ ist gleich der minimalen Größe einer Überdeckung von $(M, \sqsubseteq)$ durch Ketten.

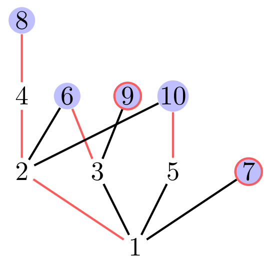
Hasse-Diagramm und Schranken



- obere Schranken von 2 und 3: 6, 24
  ↳ Supremum: 6
- es gibt keine obere Schranke von 2, 5



- 12, 30 sind obere Schranken von 2 und 3
  ↳ wegen $12 \nmid 30$ und $30 \nmid 12$ existiert aber kein Supremum



FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

SoSe 2024
Veröffentlichung: 13. Juli 2024

Öffentliche Lösungsvorschläge zur 11. freiwilligen Übung – Diskrete Strukturen

Aufgabe 5

(i) Geben Sie die partiellen Ordnungen an, die durch das Hasse-Diagramm von $(P, \preceq_P)$ und $(Q, \preceq_Q)$ definiert werden.

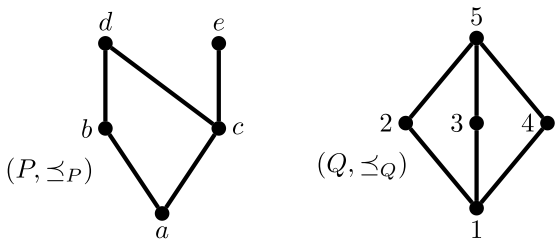


Abbildung 1: Zwei Hasse-Diagramme für zwei partielle Ordnungen.

(ii) Gebe ein Hasse-Diagramm für die kleinste partielle Ordnung $\preceq$ über $S = \{u, v, w, x, y, z\}$ an, welche folgende Anforderungen erfüllt:

$$u \preceq x \preceq z, \ x \preceq y, \ \text{und } w \preceq v.$$

(iii) Gebe die maximalen und minimalen Elemente von $(P, \preceq_P)$, $(Q, \preceq_Q)$ und $(S, \preceq)$ an.

(iv) Gebe für $(P, \preceq_P)$, $(Q, \preceq_Q)$ und $(S, \preceq)$ jeweils eine Linearisierung an. (Es bietet sich an, diese einfach als Zeichenfolge anzugeben, z.B. 53241.)

Aufgabe 6

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ mit Σ^ω bezeichnen wir die Menge aller unendlichen Wörter über Σ.

Sei $w \in \Sigma^\omega$ ein unendliches Wort und $i \in \mathbb{N}$, wir bezeichnen mit $w_{>i}$ das unendliche Teilwort von w, das durch das Streichen der ersten i Stellen entsteht.

Wir definieren die Relation $\sim_\Sigma$ wie folgt: Für alle $w, w' \in \Sigma^\omega$ gilt

$$w \sim_\Sigma w' \text{ genau dann, wenn } i, j \in \mathbb{N} \text{ existieren mit } w_{>i} = w'_{>j}.$$

Zeige oder widerlege, dass $\sim_\Sigma$ eine Äquivalenzrelation auf Σ^ω definiert.

Aufgabe 7

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ und M eine Menge mit $|M| = n$.

(i) Zeige für alle $k_1, k_2 \in \left\{0, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right\}$ mit $k_1 \leq k_2$, dass gilt $\binom{n}{k_1} \leq \binom{n}{k_2}$.

(ii) Zeige, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt:

$$|\mathcal{P}_k(M)| \leq \left|\mathcal{P}_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}(M)\right|.$$