

Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen (Tutorium 10)

Vorlesungswoche: 24. – 28. Juni 2024

Sommersemester 2024

Aufgabe 27

Untersuche das inhomogene Anfangswertproblem

$$x'(t) + x(t) = h(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

- (a) Bestimme die zugehörige Greensche Funktion.
- (b) Löse das Anfangswertproblem in Abhängigkeit von $t_0 \geq 0$ für

$$h(t) := \begin{cases} e^{-(t-t_0)}, & t \geq t_0, \\ 0, & t < t_0. \end{cases}$$

Aufgabe 28

Löse die Integralgleichung

$$x(t) - \int_0^t \sin(t - \tau) x(\tau) d\tau = 1.$$

Aufgabe 29

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine absolut-integrierbare, ungerade Funktion. Zeige

$$\mathcal{F}[f](\omega) = 2i \operatorname{Im}(\mathcal{L}[f](i\omega)).$$

Berechne mit dieser Identität die Fouriertransformierte von $t \mapsto t e^{-|t|}$.

Laplace - Faltung

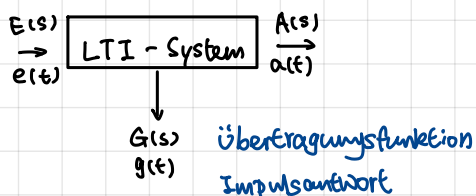
Definition

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

Faltungssatz

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)](s) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s)$$

Anwendung



$$A(s) = G(s) \cdot E(s)$$

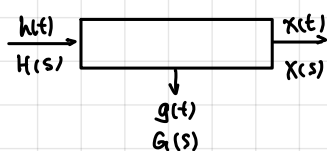
$$\mathcal{L}[a(t)](s) = \mathcal{L}[g(t)](s) \cdot \mathcal{L}[e(t)](s) \stackrel{\text{FS}}{\downarrow} = \mathcal{L}[g(t) * e(t)](s)$$

$$\Rightarrow a(t) = g(t) * e(t)$$

Greensche Funktion

$$\text{ANF: } x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n x(t) = h(t)$$

$$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0$$



$$X(s) = (s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n)^{-1} H(s)$$

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)](s) \quad \uparrow \quad \text{Greensche Fkt}$$

$$\Rightarrow x(t) = g(t) * h(t)$$

Aufgabe 27

Untersuche das inhomogene Anfangswertproblem

$$x'(t) + x(t) = h(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

- Bestimme die zugehörige Greensche Funktion.
- Löse das Anfangswertproblem in Abhängigkeit von $t_0 \geq 0$ für

$$h(t) := \begin{cases} e^{-(t-t_0)}, & t \geq t_0, \\ 0, & t < t_0. \end{cases}$$

$$\text{a) Greensche Fkt: } X(s) = \underbrace{(s+1)^{-1}}_{G(s)} H(s)$$

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)](s) = \frac{1}{s+1} \rightarrow g(t) = e^{-t}$$

$$\text{b) } x(t) = g(t) * h(t) = \int_0^t g(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_0^t e^{-t+\tau} h(\tau)d\tau$$

$$\text{für } t < t_0: \quad x(t) = \int_0^t e^{-t+\tau} \cdot 0 d\tau = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{für } t \geq t_0: x(t) &= \int_{t_0}^t e^{-t+\tau} \cdot e^{-(\tau-t_0)} d\tau \\
 &= \int_{t_0}^t e^{-t+t_0} d\tau \\
 &= (t-t_0) e^{-t+t_0}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 28

Löse die Integralgleichung

$$x(t) - \int_0^t \sin(t-\tau) x(\tau) d\tau = 1.$$

$$X(s) - \sin(s) * X(s) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[X(t)](s) - \mathcal{L}[\sin(t) * X(t)](s) = \mathcal{L}[1](s)$$

$$\mathcal{L}[X(t)](s) - \mathcal{L}[\sin(t)](s) \cdot \mathcal{L}[X(t)](s) = \frac{1}{s}$$

$$X(s) \left(1 - \frac{1}{s^2+1} \right) = \frac{1}{s}$$

$$X(s) = \frac{s^2+1}{s \cdot s^2} = \frac{s^2+1}{s^3}$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s^3}$$

$$\Rightarrow x(t) = 1 + \frac{1}{2} t^2$$

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Fourier-Transformation

Definition $f(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \text{Fourier-Transf von } f: \mathcal{F}[f(t)](\omega) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Aufgabe 29

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine absolut-integrierbare, ungerade Funktion. Zeige

$$\mathcal{F}[f](\omega) = 2i \operatorname{Im}(\mathcal{L}[f](i\omega)).$$

Berechne mit dieser Identität die Fouriertransformierte von $t \mapsto t e^{-|t|}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^0 f(t) e^{-i\omega t} dt}_{\text{Substitution mit } u = -t \text{ mit } du = -dt} + \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} -f(-u) e^{i\omega u} du + \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \end{aligned}$$

$$f(\omega) \text{ ungerade} = \int_0^{\infty} -f(u) e^{i\omega u} du + \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$\overline{x \cdot y} = \bar{x} \cdot \bar{y} = \int_0^{\infty} \overline{-f(u) e^{i\omega u}} du + \int_0^{\infty} \overline{f(t) e^{-i\omega t}} dt$$

$$= -\overline{\mathcal{L}[f](i\omega)} + \mathcal{L}[f](i\omega)$$

$$= -\overline{\mathcal{L}[f](i\omega)} + \mathcal{L}[f](i\omega)$$

$$= 2i \operatorname{Im}(\mathcal{L}[f](i\omega))$$

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}[f(t)](i\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ \bar{f} = f \end{array}$$

$$\begin{aligned} & -\overline{x} + x \\ &= -(\overline{a+ib}) + a+ib \\ &= -(a-ib) + a+ib \\ &= 2ib \end{aligned}$$