Hausaufgabe Teil 2

Abgabeformalia. Folgende Formalia sind bei der Abgabe der Hausaufgabe unbedingt zu beachten:

- Abzugeben ist am **05.07. bis 12:00 Uhr in ISIS**. Eine verspätete Abgabe wird mit erheblichem Punktabzug bestraft.
- Es darf nur **eine .pdf-Datei** für beide Hausaufgabenteile und das **Deckblatt** abgegeben werden. Diese muss mit einem Textsatzsystem (z.B. LaTeX) erstellt werden. Der Name der .pdf-Datei muss eure Matrikelnummer sein. (z.b. 123456.pdf)
- Wenn man sich entscheidet Aufgaben mit Hilfe einer Isabellformalisierung zu lösen, dann muss außerdem eine .zip-Datei abgegeben werden. In dieser .zip-Datei muss genau eine .thy-Datei mit dem Namen Theorie<Matrikelnummer> sein(z.B. Theorie123456.thy)
- Aufgaben, die mit Hilfe einer Isabelleformalisierung gelöst werden können, sind mit einem entsprechenden Hinweis gekennzeichnet.
- Die Abgabe erfolgt in **Gruppen der Größe 1 (also alleine)**.
- Plagiate führen zum Nichtbestehen des Moduls. Verschiedene Abgaben dürfen nicht gleiche Lösungen haben; solch enges Zusammenarbeiten ist nicht erlaubt und wird als Plagiat eingestuft.
- Werden zwei Lösungen abgegeben, bewerten wir die schlechtere.

Aufgabenformulierungen Es gibt verschiedene Formulierungen in ForSA.

- *Gib an:* — Ein passender Wert soll angegeben werden (ohne Begründung).
- *Gib explizit an:* — Ein passender Wert soll so weit wie möglich vereinfacht angegeben werden.
- *Berechne:* — Ein passender Wert soll explizit angegeben werden. Zusätzlich ist der Lösungsweg schrittweise anzugeben. Jeder Schritt muss begründet werden.
- *Begründe:* — Eine textuelle Erläuterung soll angegeben werden. Ein Beweis ist zulässig, aber nicht notwendig. Es muss ein klarer und logischer Argumentationsweg erkennbar sein.
- *Beweise:* — Ein formaler Beweis soll angegeben werden. Dabei muss jeder Schritt einzeln ausgeführt und begründet werden. Zum Vergleich habt ihr die Beispiellösungen.
- *Widerlege:* — Analog zu dem vorigen Punkt. In diesem Fall soll das Gegenteil der Behauptung bewiesen werden. (Oft ist hier ein Gegenbeispiel gefragt.)
- *Beweise oder widerlege:* — Hier ist entweder ein formaler Beweis der Aussage oder ein formaler Beweis des Gegenteils der Aussage anzugeben. Zudem muss durch einen Antwortsatz kenntlich gemacht werden ob ihr die Aussage bewiesen oder widerlegt habt.

Aufgabe 4: Pumping Lemma regulärer Sprachen (19 Punkte)

Sei $\Sigma \triangleq \{ a, b, c \}$. Gegeben seien die Sprachen

$$A_1 \triangleq \left\{ w^2 \mid w \in \Sigma^* \right\}.$$

$$A_2 \triangleq \left\{ c^j a^k b^l a^m \mid j,k,l,m \in \mathbb{N} \land ggT(k,m) < l+2 \land j \bmod 2 = m \bmod 2 \right\}$$

4.a) Beweise nur mit dem Pumping Lemma für reguläre Sprachen, dass A_1 nicht regulär ist.
4.b) Beweise nur mit dem Pumping Lemma für reguläre Sprachen, dass A_2 nicht regulär ist.

Aufgabe 5: Myhill-Nerode für reguläre Sprachen (12 Punkte)

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma \triangleq \{ a, b \}$ und
die Sprache $A \triangleq \{ a^n b^m \mid n,m \in \mathbb{N} \land n \bmod 2 = 0 \land m \bmod 2 = 1 \}$ über Σ.
5.a) *Gib* alle Äquivalenzklassen der Myhill-Nerode-Relation bezüglich der Sprache A *an*.
5.b) *Gib* den A-Äquivalenzklassenautomaten M_A *an*.

Aufgabe 6: Myhill-Nerode für nicht-reguläre Sprachen (12 Punkte)

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma \triangleq \{ a, b \}$ und
die Sprache $B \triangleq \{ a^n b^m \mid m \geqslant (n \bmod 2)n \}$. *Gib* alle Äquivalenzklassen der Myhill-Nerode-

Relation bezüglich der Sprache B *an* außer:

$$[\,a^l bb\,]_{\equiv_B} = \left\{ a^n bb^{n-l+1} \mid n \in \mathbb{N} \land n \geqslant l \land n \bmod 2 = 1 \right\} \quad \text{für } l \in \mathbb{N} \land l > 1 \land l \bmod 2 = 1$$

Aufgabe 7: Beschreiben, erkennen und erzeugen von regulärer Sprachen **(21 Punkte)**

Hinweis: Es darf ohne Beweis benutzt werden, dass $L(e)$ *für einen regulären Ausdruck* e *regulär ist, sowie dass* $\{\, a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ *eine nicht reguläre Sprache ist.* $L(e)$ *für reguläre Ausdrücke* e *sowie Operationen auf Mengen müssen in den Beweisen weder berechnet noch umgeformt werden. Vergleiche mit den entsprechenden Übungsaufgaben.*

Hinweis: Wenn nach einer Grammatik gefragt ist, dann soll immer eine Grammatik vom höchst möglichen Typen angegeben werden, wobei gilt Typ 3 ist höher als Typ 2, welcher höher ist als Typ 1, welcher wiederum höher ist als Typ 0.

Gegeben seinen die Alphabete $\Sigma_1 \triangleq \{\, a \,\}, \Sigma_2 \triangleq \{\, a,\ b \,\}$ und $\Sigma_3 \triangleq \{\, a,\ b,\ c \,\}$

7.a) *Beweise oder widerlege:* Die Sprache $A_1 \subseteq \Sigma_1^*$ mit $A_1 \triangleq \{\, wav \mid w, v \in \{\, a \,\}^* \land \mid w \mid = \mid v \mid \,\}$ ist regulär.

7.b) *Gib* für die Sprache A_1 sofern möglich einen DFA *an* und ansonsten eine Grammatik vom höchst möglichen Typen.

7.c) *Beweise oder widerlege:* Die Sprache $A_2 \subseteq \Sigma_2^*$ mit $A_2 \triangleq \{\, wv \mid w, v \in \{\, a,\ b \,\}^* \land \mid w \mid = \mid v \mid \,\}$ ist regulär.

7.d) *Gib* für die Sprache A_2 sofern möglich einen DFA *an* und ansonsten eine Grammatik vom höchst möglichen Typen.

7.e) *Beweise oder widerlege:*
Die Sprache $A_3 \subseteq \Sigma_3^*$ mit $A_3 \triangleq \{\, ca^n b^m, a^m b^n c \mid n \bmod 2 = 0 \land m \bmod 2 = 1 \,\}$ ist regulär.

7.f) *Beweise oder widerlege:* Die Sprache $A_4 \subseteq \Sigma_3^*$ mit $A_4 \triangleq \{\, a^m c^n b^m \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^+ \,\}$ ist regulär.

7.g) *Gib* für die Sprache A_4 sofern möglich einen DFA *an* und ansonsten eine Grammatik vom höchst möglichen Typen.

Aufgabe 4: Pumping Lemma regulärer Sprachen **(19 Punkte)**

Sei $\Sigma \triangleq \{ a, b, c \}$. Gegeben seien die Sprachen

$j, m \in [0, 2, 4 \cdots]$
$[1, 3, 5 \cdots]$

$$A_1 \triangleq \left\{ w^2 \mid w \in \Sigma^* \right\}.$$

$$A_2 \triangleq \left\{ c^j a^k b^l a^m \mid j, k, l, m \in \mathbb{N} \wedge \mathrm{ggT}(k, m) < l + 2 \wedge j \bmod 2 = m \bmod 2 \right\}$$

4.a) Beweise nur mit dem Pumping Lemma für reguläre Sprachen, dass A_1 nicht regulär ist.
4.b) Beweise nur mit dem Pumping Lemma für reguläre Sprachen, dass A_2 nicht regulär ist.

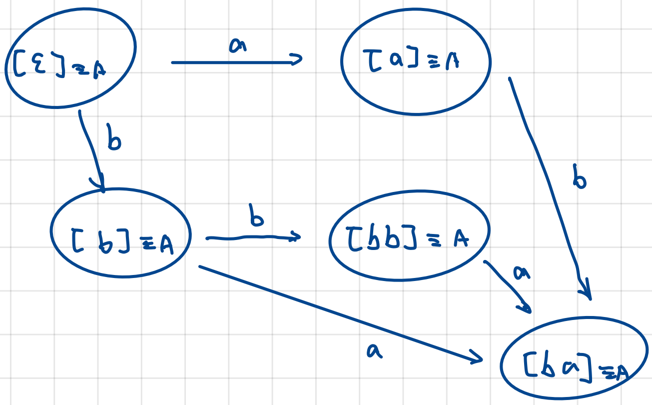
4.a) Sei $n \in \mathbb{N}$ (fest aber beliebig) wir wählen $w = (a^n b^n)^2 = a^n b^n a^n b^n$ mit $w \in A_1$ und $|w| > n$, $a^n b^n \in \Sigma^*$
Sei $w = xyz$ eine beliebige Zerlegung und $y \neq \varepsilon$, $|xy| \leq n$
Dann ist $x = a^j$ $y = a^i$ $z = a^{n-i-j} b^n a^n b^n$ für ein $i \neq 0$ und $i + j \leq n$
Wir wählen $k = 0$, dann ist $xy^0z = a^{n-j} b^n a^n b^n \notin A_1$, denn $n - 1 \neq n$ für $i \neq 0$ und $a^{n-1} b^n \neq a^n b^n$
Da $\neg$PUMP-REG(A_1) gilt, ist A_1 nicht regulär

Aufgabe 5: Myhill-Nerode für reguläre Sprachen **(12 Punkte)**

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma \triangleq \{ a, b \}$ und
die Sprache $A \triangleq \{ a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \wedge n \bmod 2 = 0 \wedge m \bmod 2 = 1 \}$ über Σ.
5.a) *Gib* alle Äquivalenzklassen der Myhill-Nerode-Relation bezüglich der Sprache A *an*.
5.b) *Gib* den A-Äquivalenzklassenautomaten M_A *an*.

5.a) $[\varepsilon]_{\equiv A} = \{ a^n \mid n \bmod 2 = 0 \wedge n \in \mathbb{N} \}$ ε a^2 a^4
$[a]_{\equiv A} = \{ a^n \mid n \bmod 2 = 1 \wedge n \in \mathbb{N} \}$ a a^3 a^5
$[b]_{\equiv A} = \{ a^n b^m \mid n \bmod 2 = 0 \wedge m \bmod 2 = 1 \wedge n, m \in \mathbb{N} \}$ $a^2 b^3$
$[bb]_{\equiv A} = \{ a^n b^m \mid n \bmod 2 = 0 \wedge m \bmod 2 = 0 \wedge n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^+ \}$ $a^2 b^2$
$[ba]_{\equiv A} = \{ a^m b, a^n b^n a, a^n b^m a \mid m \bmod 2 = 1 \wedge n \bmod 2 = 0 \wedge m \in \mathbb{N}^+ \wedge n \in \mathbb{N} \}$
通过画图确定

5.b)



$a^3 b$
$a^2 b^2 a$
$a^2 b^3 a$

Aufgabe 7: Beschreiben, erkennen und erzeugen von regulärer Sprachen **(21 Punkte**

Hinweis: Es darf ohne Beweis benutzt werden, dass $L(e)$ *für einen regulären Ausdruck* e *regulär ist, sowi dass* $\{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ *eine nicht reguläre Sprache ist.* $L(e)$ *für reguläre Ausdrücke* e *sowie Operatione auf Mengen müssen in den Beweisen weder berechnet noch umgeformt werden. Vergleiche mit de entsprechenden Übungsaufgaben.*

Hinweis: Wenn nach einer Grammatik gefragt ist, dann soll immer eine Grammatik vom höchst mögliche Typen angegeben werden, wobei gilt Typ 3 ist höher als Typ 2, welcher höher ist als Typ 1, welcher wiederun höher ist als Typ 0.

Gegeben seinen die Alphabete $\Sigma_1 \triangleq \{ a \}, \Sigma_2 \triangleq \{ a, b \}$ und $\Sigma_3 \triangleq \{ a, b, c \}$

7.a) *Beweise oder widerlege:* Die Sprache $A_1 \subseteq \Sigma_1^*$ mit $A_1 \triangleq \{ wav \mid w, v \in \{ a \}^* \wedge |w| = |v| \}$ is regulär.

7.b) *Gib* für die Sprache A_1 sofern möglich einen DFA *an* und ansonsten eine Grammatik vo höchst möglichen Typen.

7.c) *Beweise oder widerlege:* Die Sprache $A_2 \subseteq \Sigma_2^*$ mit $A_2 \triangleq \{ wv \mid w, v \in \{ a, b \}^* \wedge |w| = |v| \}$ is regulär.

7.d) *Gib* für die Sprache A_2 sofern möglich einen DFA *an* und ansonsten eine Grammatik vo höchst möglichen Typen.

7.e) *Beweise oder widerlege:*
Die Sprache $A_3 \subseteq \Sigma_3^*$ mit $A_3 \triangleq \{ ca^n b^m, a^m b^n c \mid n \bmod 2 = 0 \wedge m \bmod 2 = 1 \}$ ist regulär.

7.f) *Beweise oder widerlege:* Die Sprache $A_4 \subseteq \Sigma_3^*$ mit $A_4 \triangleq \{ a^m c^n b^m \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^+ \}$ is regulär.

7.g) *Gib* für die Sprache A_4 sofern möglich einen DFA *an* und ansonsten eine Grammatik vo höchst möglichen Typen.

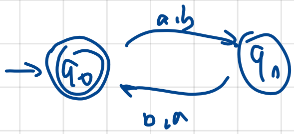
7.a) $L(a \cdot (aa)^*) = L(a) \cdot L(aa)^* = A_1$

regulär Ausdruck

b)

c) $A_2 = (L(a+b) \cdot L(a+b))^*$ ist eine regulär Ausdruck

d)



e) $(L(c) \cdot L(aa)^* L(b) L(bb)^*) \cup (L(a) L(aa)^* L(bb)^* L(c))$

f) Angenommen A_4 sei regulär

Dann ist $(A_4 \cdot L(\varepsilon)) \cap (L(a^* b^*)) = \{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ regulär

→ Widerspruch

→ A_4 nicht regulär

g)

$S \to ATB \mid C \mid AB$

$A \to a$

$B \to b$

$C \to cC \mid c$

Hausaufgabe Teil 1

Abgabeformalia Folgende Formalia sind bei der Abgabe der Hausaufgabe unbedingt zu beachten:

- Abzugeben ist am **05.07. bis 12:00 Uhr in ISIS**. Eine verspätete Abgabe wird mit erheblichem Punktabzug bestraft.
- Es darf nur **eine .pdf-Datei** für beide Hausaufgabenteile und das **Deckblatt** abgegeben werden. Diese muss mit einem Textsatzsystem (z.B. LaTeX) erstellt werden.
- Wenn man sich entscheidet Aufgaben mit Hilfe einer Isabellformalisierung zu lösen dann muss außerdem eine .thy-Datei abgegeben werden
- Aufgaben, die mit Hilfe einer Isabelleformalisierung gelöst werden können sind mit einem entsprechenden Hinweis gekennzeichnet.
- Die Abgabe erfolgt in **Gruppen der Größe 1 (also alleine)**
- Plagiate führen zum Nichtbestehen des Moduls. Verschiedene Abgaben dürfen nicht gleiche Lösungen haben; solch enges Zusammenarbeiten ist nicht erlaub und wird als Plagiat eingestuft.
- Werden zwei Lösungen abgegeben bewerten wir die schlechtere.

Aufgabenformulierungen Es gibt verschiedene Formulierungen in FoSA.

- *Gib an:* — Ein passender Wert soll angegeben werden (ohne Begründung).
- *Gib explizit an:* — Ein passender Wert soll so weit wie möglich vereinfacht angegeben werden.
- *Berechne:* — Ein passender Wert soll explizit angegeben werden. Zusätzlich ist der Lösungsweg schrittweise anzugeben. Jeder Schritt muss begründet werden.
- *Begründe:* — Eine textuelle Erläuterung soll angegeben werden. Ein Beweis ist zulässig, aber nicht notwendig. Es muss ein klarer und logischer Argumentationsweg erkennbar sein.
- *Beweise:* — Ein formaler Beweis soll angegeben werden. Dabei muss jeder Schritt einzeln ausgeführt und begründet werden. Zum Vergleich habt ihr die Beispiellösungen.
- *Widerlege:* — Analog zu dem vorigen Punkt. In diesem Fall soll das Gegenteil der Behauptung bewiesen werden. (Oft ist hier ein Gegenbeispiel gefragt.)
- *Beweise oder widerlege:* — Hier ist entweder ein formaler Beweis der Aussage oder ein formaler Beweis des Gegenteils der Aussage anzugeben. Zudem muss durch einen Antwortsatz kenntlich gemacht werden ob ihr die Aussage bewiesen oder widerlegt habt.

Aufgabe 1: Beweismethoden (24 Punkte)

1.a) Gegeben sei die Zahlenmenge $\mathbb{N}_2 \triangleq \{ n \in \mathbb{N} \mid n \mod 3 = 2 \}$.
Beweise per Induktion: $\forall n \in \mathbb{N}_2 \,.\, \sum_{i=0}^{n}(2i-1) < n^2 + 2$

1.b) *Beweise per Widerspruch:* $(\exists x \,.\, P(x)) \to \neg (\forall y \,.\, \neg P(y))$ für das einstellige Prädikat P.
Hinweis: Diese Aufgabe kann unter Zuhilfenahme der von uns zur Verfügung gestellten Formalisierung in Isabelle gelöst werden.

1.c) *Beweise:* $(\forall y \,.\, \neg P_2(y) \to \neg P_1(y)) \to (\forall x \,.\, P_1(x) \to P_2(x))$ mittels *Kontraposition* für die einstelligen Prädikate P_1 und P_2.
Hinweis: Die Kommutativität darf nicht genutzt werden.
Hinweis: Diese Aufgabe kann unter Zuhilfenahme der von uns zur Verfügung gestellten Formalisierung in Isabelle gelöst werden.

Aufgabe 2: Relationen (22 Punkte)

2.a) Sei $A \triangleq \{ 1, 2, 3, 4 \}, B \triangleq \{ a, b, c, d, e \}$ und $C \triangleq \{ 1, 2, 3 \}$. Seien weiterhin $R_1 : (A, B), R_2 : (B, C)$ und $R_3 : (A, C)$ Relationen mit:

$$R_1 \triangleq \{ (1, a), (1, c), (2, d), (3, c), (4, e) \}$$
$$R_2 \triangleq \{ (a, 2), (b, 2), (d, 3), (e, 1) \}$$
$$R_3 \triangleq R_1 R_2$$

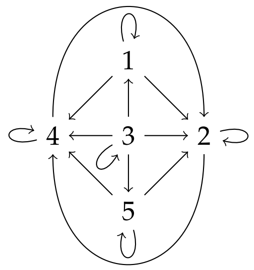
Gib für die Relationen R_1, R_2 und R_3 jeweils *an*, welche der Eigenschaften linkstotal, rechtstotal, linkseindeutig oder rechtseindeutig erfüllt sind.

Beweise, dass die Relationen die übrigen Eigenschaften nicht erfüllen.

2.b) Sei $D \triangleq \{\, 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \,\}$ und $R_4 : (D,\ D)$ mit

$$R_4 \triangleq \{(1,\ 2), (1,\ 3), (1,\ 4), (1,\ 5), (3,\ 2), (5,\ 2), (1,\ 1), (2,\ 2), (3,\ 3), (4,\ 4), (5,\ 5)\}$$

und $R_5 : (D,\ D)$ mit:



R_5

Gib für R_4 und R_5 *an* welcher der stärkste Ordnungsbegriff ist, der für die jeweilige Relation gilt.
Beweise deine Aussage.
Hinweis: Um zu beweisen, dass ein Ordnungsbegriff der stärkste ist, muss auch bewiesen werden, dass es keinen stärkeren gibt.

2.c) Sei $Q : (\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+,\ \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+)$ mit $Q \triangleq \{\, ((z_1,\ n_1),\ (z_2,\ n_2)) \mid z_1 \cdot n_2 = z_2 \cdot n_1 \,\}$.
Beweise: Q ist eine Äquivalenzrelation.
Hinweis: Diese Aufgabe kann unter Zuhilfenahme der von uns zur Verfügung gestellten Formalisierung in Isabelle gelöst werden.

Aufgabe 3: Kardinalität **(10 Punkte)**

Sei $M \triangleq \{\, n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ungerade} \,\}$
Beweise oder widerlege: $\mathrm{card}(M) = \mathrm{card}(\mathbb{N})$

Aufgabe 1: Beweismethoden **(24 Punkte)**

1.a) Gegeben sei die Zahlenmenge $\mathbb{N}_2 \triangleq \{ n \in \mathbb{N} \mid n \mod 3 = 2 \}$.
Beweise per Induktion: $\forall n \in \mathbb{N}_2 \,.\, \sum_{i=0}^{n}(2i-1) < n^2+2$

Sei $P(n) \triangleq \left(\sum_{i=0}^{n} (2i-1) < n^2+2 \right)$

$(P(2)) \land (\forall n \in \mathbb{N}_2 . (P(n) \Rightarrow P(n+3))) \rightarrow (\forall x \in \mathbb{N}_2 . P(x))$

$IA(P(2))$: $\sum_{i=0}^{2} (2i-1) = -1+1+3 = 3 < 2^2+2 = 6$

Sei $n \in \mathbb{N}_2$

$IV(P(n))$: $\sum_{i=0}^{n} (2i-1) < n^2+2$

$IS(P(n+3))$: zu zeigen $\sum_{i=0}^{n+3} (2i-1) < (n+3)^2+2$

$\sum_{i=0}^{n+3} (2i-1) \overset{IV}{<} n^2 + \cancel{2} + 2(n+1) - \cancel{1} + 2(n+2) - \cancel{1} + 2(n+3) - 1$

$= n^2 + 6n + 11 = (n+3)^2 + 2$

Aufgabe 2: Relationen **(22 Punkte)**

2.a) Sei $A \triangleq \{1, 2, 3, 4\}$, $B \triangleq \{a, b, c, d, e\}$ und $C \triangleq \{1, 2, 3\}$. Seien weiterhin $R_1 : (A, B)$, $R_2 : (B, C)$ und $R_3 : (A, C)$ Relationen mit:

$R_1 \triangleq \{ (1, a), (1, c), (2, d), (3, c), (4, e) \}$

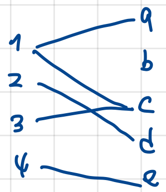
$R_2 \triangleq \{ (a, 2), (b, 2), (d, 3), (e, 1) \}$

$R_3 \triangleq R_1 R_2$

Gib für die Relationen R_1, R_2 und R_3 jeweils *an*, welche der Eigenschaften linkstotal, rechtstotal, linkseindeutig oder rechtseindeutig erfüllt sind.

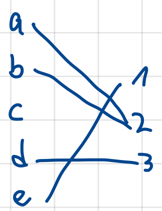
Beweise, dass die Relationen die übrigen Eigenschaften nicht erfüllen.

R_1



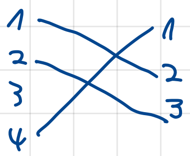
linkstotal
nicht linkseindeutig da $(1,c) \in R_1, (3,c) \in R_1$ aber $1 \neq 3$
nicht rechtstotal da $b \in B$, aber es gibt kein $y \in A$, sodass $(y,b) \in R_1$
nicht rechtseindeutig da $(1,a) \in R_1, (1,c) \in R_1$, aber $a \neq c$

R_2



rechtstotal, rechtseindeutig
nicht linkstotal, da $c \in B$, aber es gibt kein $y \in C$, sodass $(c,y) \in R_2$
nicht linkseindeutig da $(a,2) \in R_2, (b,2) \in R_2$ aber $a \neq b$

R_3

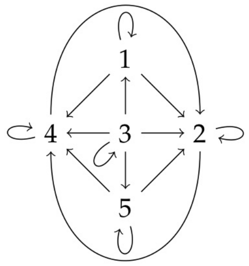


rechtstotal rechtseindeutig, linkseindeutig

2.b) Sei $D \triangleq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $R_4 : (D, D)$ mit

$$R_4 \triangleq \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(3,2),(5,2),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$$

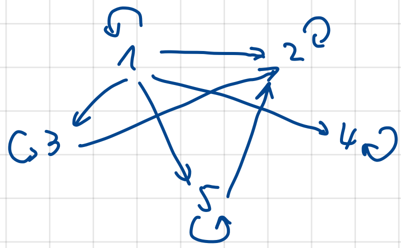
und $R_5 : (D, D)$ mit:



R_5

Gib für R_4 und R_5 *an* welcher der stärkste Ordnungsbegriff ist, der für die jeweilige Relation gilt.
Beweise deine Aussage.
Hinweis: Um zu beweisen, dass ein Ordnungsbegriff der stärkste ist, muss auch bewiesen werden, dass es keinen stärkeren gibt.

R_4



reflexiv
transitiv
antisymmetrisch
nicht linear da $2,4 \in D$, aber $(2,4) \notin R_4$ und $(4,2) \notin R_4$

$\Rightarrow R_4$ partielle Ordnung

R_5 reflexiv
transitiv
nicht antisymmetrisch
nicht linear

$\Rightarrow R_5$ Quasiordnung