Dr. Robert Beinert

Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen
(Hausaufgabe 3)

Abgabe: 13. – 17. Mai 2024

Sommersemester 2024

Aufgabe 7

(4 Punkte)

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 2t^2 - 2t - 7 & -2t^2 + 2t + 5 & t^2 - 2t - 4 \\ 2t^2 - 2t - 2 & -2t^2 + 2t & t^2 - 2t - 1 \end{pmatrix} x(t),$$

zusammen mit drei Lösungen

$$\vec{x}_1(t) \coloneqq \begin{pmatrix} t+1 \\ t \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2(t) \coloneqq \begin{pmatrix} t^2 + 2t + 1 \\ t^2 + 3 \\ -4t + 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3(t) \coloneqq \begin{pmatrix} t^2 + 4t + 3 \\ t^2 + 2t + 3 \\ -4t - 2 \end{pmatrix}$$

(a) Zeige mittels des Wronski-Tests, dass $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \vec{x}_3(t)$ linear abhängig sind.

(b) Stelle $\vec{x}_3(t)$ als Linearkombination von $\vec{x}_1(t)$ und $\vec{x}_2(t)$ dar.

Aufgabe 8

(6 Punkte)

Löse das Anfangswertsproblem

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -3 & -5 & 3 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \vec{x}(t), \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9

(5 Punkte)

Bestimme die allgemeine Lösung von

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix} \vec{x}(t).$$

Aufgabe 7

(4 Punkte)

Linwei Li 501123
Xiangfeng Yang 505399
Yilong Wang 483728

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 2t^2 - 2t - 7 & -2t^2 + 2t + 5 & t^2 - 2t - 4 \\ 2t^2 - 2t - 2 & -2t^2 + 2t & t^2 - 2t - 1 \end{pmatrix} x(t),$$

zusammen mit drei Lösungen

$$\vec{x}_1(t) := \begin{pmatrix} t+1 \\ t \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2(t) := \begin{pmatrix} t^2 + 2t + 1 \\ t^2 + 3 \\ -4t + 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3(t) := \begin{pmatrix} t^2 + 4t + 3 \\ t^2 + 2t + 3 \\ -4t - 2 \end{pmatrix}$$

(a) Zeige mittels des Wronski-Tests, dass $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \vec{x}_3(t)$ linear abhängig sind.

(b) Stelle $\vec{x}_3(t)$ als Linearkombination von $\vec{x}_1(t)$ und $\vec{x}_2(t)$ dar.

a)

$$W(t) = \left(\vec{x}_1(t) \quad \vec{x}_2(t) \quad \vec{x}_3(t)\right)$$

$$= \begin{pmatrix} t+1 & t^2+2t+1 & t^2+4t+3 \\ t & t^2+3 & t^2+2t+3 \\ -2 & -4t+2 & -4t-2 \end{pmatrix} \begin{matrix} t+1 & t^2+2t+1 \\ t & t^2+3 \\ -2 & -4t+2 \end{matrix}$$

$$\det(W(t)) = \cancel{(t+1)(t^2+3)(-4t-2)} + \cancel{(t+1)}^2 \cancel{(t^2+2t+3)}(\cancel{-2}) + (t+3)\cancel{(t+1)}\,\cancel{t}\cdot(-4t+2)$$
$$-(\cancel{-2})\cancel{(t^2+3)}(\cancel{t+3})\cancel{(t+1)} - (-\cancel{4t}+2)\cancel{(t^2+2t+3)}\cancel{(t+1)} - (-4t-2)\cancel{t}(t+1)^2$$
$$= (t^2+3)(t+1)(-4t-2+2t+6) + (t+1)(t^2+2t+3)(-2t-2+4t-2) + t(t+1)\cdot(-4t^2+2t-12t+6+4t^2+2t+4t+2)$$
$$= (t^2+3)(t+1)(-2t+4) + (t+1)(t^2+2t+3)(2t-4) + t(t+1)(-4t+8)$$
$$= (t+1)(-2t+4)\cdot[t^2+\cancel{3}-t^2-\cancel{2t}-\cancel{3}+\cancel{2t}]$$
$$= 0$$

$\Rightarrow \vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \vec{x}_3(t)$ sind linear abhängig

(b) $x_3(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} t^2+4t+3 \\ t^2+2t+3 \\ -4t-2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} t+1 \\ t \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} t^2+2t+1 \\ t^2+3 \\ -4t+2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow c_1 = 2 \qquad c_2 = 1$$

$$\Rightarrow x_3(t) = 2x_1(t) + x_2(t)$$

Aufgabe 8

(6 Punkte)

Löse das Anfangswertsproblem

Linwei Li 501123
Xiangfeng Yang 505399
Yilong Wang 483728

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -3 & -5 & 3 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \vec{x}(t), \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -3 & -5 & 3 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

① EW $\quad P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 & 1 \\ -3 & -5-\lambda & 3 \\ -2 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} 2-\lambda & 4 \\ -3 & -5-\lambda \\ -2 & -2 \end{matrix}$

$$= (2-\lambda)(-5-\lambda)(5-\lambda) - 24 + 6 - 2(5+\lambda) + 6(2-\lambda) + 12(5-\lambda)$$
$$= (-10 + 3\lambda + \lambda^2)(5-\lambda) - 18 - 10 - 2\lambda + 12 - 6\lambda + 60 - 12\lambda$$
$$= -50 + \cancel{15\lambda} + \cancel{5\lambda^2} + \cancel{10\lambda} - \cancel{3\lambda^2} - \lambda^3 + 44 - 20\lambda$$
$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0 \qquad \Rightarrow \lambda_1 = 1$$

$$(-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6) : (\lambda - 1) = -\lambda^2 + \lambda + 6 = (\lambda + 2)(-\lambda + 3)$$
$$\underline{-\lambda^3 + \lambda^2}$$
$$\lambda^2 + 5\lambda$$
$$\underline{\lambda^2 - \lambda}$$
$$6\lambda - 6$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = -2 \qquad \lambda_3 = 3$$

② EV: $\quad$ EV zu EW $\lambda_1 = 1$: $\quad (A - I)\vec{v_1} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -3 & -6 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 3v_3 \\ -v_3 \\ v_3 \end{pmatrix} \underset{=}{\overset{\text{wähle } v_3 = 1}{=}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EV zu EW $\lambda_2 = -2$: $\quad (A + 2I)\vec{v_2} = 0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{=}{\overset{v_2 = 1}{=}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Linwei Li 501123
Xiangfeng Yang 505399
Yilong Wang 483728

EV zu $\lambda_3 = 3$:

$$(A-3I)\vec{v_3} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -3 & -8 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \vec{v_3} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_1 \end{pmatrix} \overset{v_1=1}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

③ Fundamentalsystem: $\vec{x_1}(t) = e^{\lambda_1 t}\vec{v_1} = e^{t}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{x_2}(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{x_3}(t) = e^{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

④ Allgemein Lösung:

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{t}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{x_1}(0) &= 3c_1 - c_2 + c_3 = 2 & & c_1 = -3 \\ \vec{x_2}(0) &= -c_1 + c_2 + 0 = -2 & \Rightarrow \quad & c_2 = -5 \\ \vec{x_3}(0) &= c_1 + 0 + c_3 = 3 & & c_3 = 6 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{AWP-Lösung: } \vec{x}(t) = -3e^{t}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-5)e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 6e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9 (5 Punkte)

Bestimme die allgemeine Lösung von

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix} \vec{x}(t).$$

① EW:

$$P_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & -3 \\ 3 & 1-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & -5-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \\ 3 & 3 \end{matrix}$$

$$= \underbrace{(1-\lambda)^2}_{\lambda^2-2\lambda+1}(-5-\lambda) - 27 - 27 + 9(1-\lambda) + 9(1-\lambda) + 9(5+\lambda)$$

$$= -5\lambda^2 + 10\lambda - 5 - \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 54 + 9 - 9\lambda + 9 - 9\lambda + 45 + 9\lambda$$

$$= -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0 \qquad \Longrightarrow \lambda_1 = 1$$

$$(-\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4) : (\lambda - 1) = -\lambda^2 - 4\lambda - 4 = (-\lambda-2)(\lambda+2)$$

$$\underline{-\lambda^3 + \lambda^2} \qquad\qquad \Rightarrow \lambda_{2,3} = -2$$

$$-4\lambda^2$$

$$\underline{-4\lambda^2 + 4\lambda}$$

$$-4\lambda + 4$$

Linwei Li 501123
Xiangfeng Yang 505399
Yilong Wang 483728

② EV:

EV zu $\lambda_1 = 1$: $(A - I)\vec{v_1} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{I}: \quad & v_2 - v_3 = 0 \\ \text{II}: \quad & v_1 - v_3 = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} v_2 &= v_3 \\ v_1 &= v_3 \end{aligned} \qquad \vec{v_1} = \begin{pmatrix} v_3 \\ v_3 \\ v_3 \end{pmatrix} \underset{v_3 = 1}{\overset{\text{wähle}}{=\!=}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EV zu $\lambda_2 = -2$: $(A + 2I)\vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1 + v_2 - v_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

($\vec{v_2}, \vec{v_3}$ sind unabhängig)

③ FS: $\vec{x}_1(t) = e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{x}_2(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{x}_3(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

④ Allgemeine Lösung: $\vec{x}(t) = c_1 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$