Technische Universität Berlin **Sommersemester 2022**
Fakultät II – Institut für Mathematik 27. Juli 2022
Dozent: G. Penn-Karras

Modulprüfung

Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen

Durch die Teilnahme an der Klausur erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§39 Abs. 2 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Zur Bearbeitung der Klausuraufgaben sind eigene Aufzeichnungen und Materialien zugelassen. Die Rechenwege sind ausführlich darzustellen. Die Lösungen sind handschriftlich auf DIN-A4-Blättern anzufertigen und anschließend als pdf hochzuladen.

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Bei der Klausur sind 60 Punkte erreichbar. Die Klausur ist mit 30 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe (8 Punkte)

a) [4 Punkte] Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem einer linearen Differentialgleichung.

$$y' = ((t - \frac{\pi}{2})^2 + \sin(t))y \qquad y(\frac{\pi}{2}) = 5$$

b) [4 Punkte] Berechnen Sie **alle** Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = ((t - \frac{\pi}{2})^2 + \sin(t))y^2.$$

2. Aufgabe (12 Punkte)

a) [6 Punkte] Finden Sie ein reelles Fundamentalsystem für das lineare homogene DGL-system

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

b) [6 Punkte] Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \vec{x} + e^{4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und geben Sie die allgemeine Lösung an. Dabei dürfen Sie folgendes Fundamentalsystem des zugehörigen homogenen Systems verwenden:

$$\vec{x}_1(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2(t) = e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Aufgabe (9 Punkte)

Ein kausales LTI-System S habe die Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{2s}{s^2 - 4}.$$

a) Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems.

b) Bestimmen Sie die Systemantwort auf das Eingangssignal

$$a_{\text{in}}(t) = 2 + \delta_5(t),$$

wobei δ_5 die in 5 zentrierte Dirac-Distribution ist.

Hinweis: Eine Laplace-Tabelle finden Sie auf der letzten Seite der Klausur.

Bitte wenden.

1. Aufgabe (8 Punkte

a) [4 Punkte] Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem einer linearen Differentialgle chung.

$$y' = ((t - \frac{\pi}{2})^2 + \sin(t))y \qquad y(\frac{\pi}{2}) = 5$$

b) [4 Punkte] Berechnen Sie **alle** Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = ((t - \frac{\pi}{2})^2 + \sin(t))y^2.$$

a) $a(t) = (t-\frac{\pi}{2})^2 + \sin t$

$A(t) = \int (t-\frac{\pi}{2})^2 + \sin t \, dt = \frac{1}{3}(t-\frac{\pi}{2})^3 - \cos t$

$y(t) = c \cdot e^{\frac{1}{3}(t-\frac{\pi}{2})^3 - \cos t}$

$y(\frac{\pi}{2}) = c \cdot 1 = 5 \Rightarrow c = 5 \quad \Rightarrow y(t) = 5e^{\frac{1}{3}(t-\frac{\pi}{2})^3 - \cos t}$

b) ① $g(y) = y^2 = 0 \quad \Rightarrow y = 0$

② $\int \frac{1}{y^2} dy = \int (t-\frac{\pi}{2})^2 + \sin t \, dt$

$-y^{-1} = \frac{1}{3}(t-\frac{\pi}{2})^3 - \cos t + C$

$y = -\dfrac{1}{\frac{1}{3}(t-\frac{\pi}{2})^3 - \cos t + C}$

2. Aufgabe (12 Punkte)

a) [6 Punkte] Finden Sie ein reelles Fundamentalsystem für das lineare homogene DGL-system

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

b) [6 Punkte] Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \vec{x} + e^{4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und geben Sie die allgemeine Lösung an. Dabei dürfen Sie folgendes Fundamentalsystem des zugehörigen homogenen Systems verwenden:

$$\vec{x}_1(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2(t) = e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) EW: $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \\ 0 & 0 \end{matrix}$

$= (2-\lambda)^2(-\lambda) + (2-\lambda) = (2-\lambda)(-2\lambda + \lambda^2 + 1)$

$= (2-\lambda)(\lambda - 1)^2 = 0$

$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_{2,3} = 1$

$\text{alg}(2) = 1 \quad \text{alg}(1) = 2$

EV zu $\lambda_1 = 2$ $\quad (A-2I)\vec{v_1} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} v_2 = v_3 \\ v_1 - 2v_2 - v_3 = 0 \\ v_1 = 3v_3 \end{matrix}$$

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EV zu $\lambda_{2,3} = 1$ $\quad (A-I)\vec{v_2} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} v_3 = 0 \\ v_1 = v_2 \end{matrix}$$

$$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{geo}(1) = 1 < \text{alg}(1) = 2$$

$\Rightarrow$ HV 2. Stufe: $\quad (A-I)\vec{v_3} = \vec{v_2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} v_3 = 0 \\ v_1 = 1 + v_2 \end{matrix}$$

$$\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

allg. Lsg: $\vec{x}(t) = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{t}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

b)

b) [6 Punkte] Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems

$$\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\vec{x} + e^{4t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und geben Sie die allgemeine Lösung an. Dabei dürfen Sie folgendes Fundamentalsystem des zugehörigen homogenen Systems verwenden:

$$\vec{x}_1(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2(t) = e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{x}_H(t) = c_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_p(t) = c_1(t) e^{3t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(t) e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$W(t)\,\vec{c}\,'(t) = \begin{pmatrix} 2e^{3t} & e^{4t} \\ e^{3t} & e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{4t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2e^{7t} - e^{7t}}\begin{pmatrix} e^{4t} & -e^{4t} \\ -e^{3t} & 2e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ e^{4t} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{e^{7t}}\begin{pmatrix} -e^{8t} \\ 2e^{7t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{t} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c_1(t) = \int -e^{t}\,dt = -e^{t}$$

$$c_2(t) = \int 2\,dt = 2t$$

$$\vec{x}_p(t) = -e^{4t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2t\,e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Aufgabe (9

Ein kausales LTI-System S habe die Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{2s}{s^2 - 4}.$$

a) Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems.

b) Bestimmen Sie die Systemantwort auf das Eingangssignal

$$a_{\text{in}}(t) = 2 + \delta_5(t),$$

wobei δ_5 die in 5 zentrierte Dirac-Distribution ist.

Hinweis: Eine Laplace-Tabelle finden Sie auf der letzten Seite der Klausur.

a) $h(t) = 2\cosh(2t)$

b) $A_{in}(s) = \frac{2}{s} + e^{-5s}$

$$A(s) = A_{in}(s) \cdot H(s) = \frac{2s}{s^2-4}\left(\frac{2}{s} + e^{-5s}\right)$$

$$= \frac{4}{s^2-4} + \frac{2s e^{-5s}}{s^2-4}$$

$$= \frac{4}{s^2-4} + \left(\frac{1}{(s-2)} + \frac{1}{s+2}\right) e^{-5s}$$

$$a(t) = 2\sinh(2t) + \left(e^{2(t-5)} + e^{-2(t-5)}\right) u(t-5)$$

4. Aufgabe (9 Punkte)

Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{si}(t-\tau)}{9+\tau^2}\,\mathrm{d}\tau. \qquad \mathcal{F}\left[\mathrm{si}(t) * \frac{1}{9+t^2}\right]$$

Hinweis: Sie dürfen die aus der Vorlesung bekannten Fouriertransformierten benutzen:

$$\mathcal{F}[e^{-t^2/2}](\omega) = \sqrt{2\pi}e^{-\omega^2/2},$$

$$\mathcal{F}[e^{-|t|}](\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}, \qquad \mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](\omega) = \pi e^{-|\omega|},$$

$$\mathcal{F}[r_T(t)](\omega) = \mathrm{si}(\omega T) \qquad \mathcal{F}[\mathrm{si}(tT)](\omega) = 2\pi r_T(\omega).$$

5. Aufgabe (12 Punkte)

Gegeben ist das reelle Randwertproblem für eine Funktion $u(x,t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 3u + \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = u(\frac{\pi}{2}, t) = 0.$$

a) [8 Punkte] Finden Sie alle nichttrivialen Lösungen $u(x,t)$ der Form $X(x)T(t)$. Sie dürfen dabei verwenden, dass $X(x)$ periodisch und nicht-konstant ist.

b) [4 Punkte] Ermitteln Sie durch Superposition der in a) gefundenen Lösungen eine Lösung $u(x,t)$ mit der Eigenschaft

$$u(x,0) = 5\sin(6x) + \sin(4x).$$

6. Aufgabe (10 Punkte)

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an. (Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt die jeweils angegebenen Punkte.)

a) [2 Punkte] Wenn eine homogene lineare Differentialgleichung mit reellen konstanten Koeffizienten von $\sin(2x)$ gelöst wird, so wird diese Differentialgleichung auch von $\cos(2x)$ gelöst.

ja, sin(2x) zeigt NST 2i und -2i, dann cos(2x)

b) [2 Punkte] Die Funktion e^{4t^2-t} ist von exponentieller Ordnung. falsch Annahme: $e^{4t^2-t} \le c e^{\gamma t} = e^{\ln c + \gamma t}$

$\underbrace{4t^2-(1+\gamma)t}_{\text{quadratisch}} \le \underbrace{\ln c}_{\text{konstant}}$

falsch

falsch

$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[e^{-t}]\cdot\mathcal{L}[g]$

$f(t) = e^{-t} * g$

c) [2 Punkte] Ist $\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s+1}\mathcal{L}[g](s)$, dann ist $f(t) = e^{-t}g(t)$.

d) [2 Punkte] Sei $y : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' + 2y = f, \quad y(0) = 1.$$

Dann gilt für die Laplace-Transformierte von y:

falsch

$$(s+2)\mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}[f](s).$$

e) [2 Punkte] Für eine ungerade S-Funktion f gilt $\mathcal{F}[f](0) = 0$.

$f(t) = -f(-t)$ $\qquad u = -t \quad du = -dt$

Gesamtpunktzahl: 60 Punkte

$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_0^\infty f \cdot e^{-i\omega t}\,dt + \int_{-\infty}^0 f(e^{-i\omega t})\,dt$

$= \int_0^\infty f e^{-i\omega t}\,dt + \int_0^\infty f(-u) e^{i\omega u}\,dt$

$= \int_0^\infty f(t) e^{-i\omega t}\,dt + \int_0^\infty -f(u) e^{i\omega u}\,du$

$\omega = 0$

$= \int_0^\infty f(t)\,dt + \int_0^\infty -f(u)\,du$

$= 0$

5. Aufgabe (12 Punkte)

Gegeben ist das reelle Randwertproblem für eine Funktion $u(x,t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 3u + \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = u(\frac{\pi}{2}, t) = 0.$$

a) [8 Punkte] Finden Sie alle nichttrivialen Lösungen $u(x,t)$ der Form $X(x)T(t)$. Sie dürfen dabei verwenden, dass $X(x)$ periodisch und nicht-konstant ist.

b) [4 Punkte] Ermitteln Sie durch Superposition der in a) gefundenen Lösungen eine Lösung $u(x,t)$ mit der Eigenschaft

$$u(x,0) = 5\sin(6x) + \sin(4x).$$

$$X''(x)T(t) = 3X(x)T(t) + X(x)T'(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = 3 + \frac{T'(t)}{T(t)} = \gamma$$

$$\begin{cases} X''(x) - \gamma X(x) = 0 \\ T'(t) = (\gamma-3)T(t) \end{cases} \Rightarrow \lambda^2 - \gamma = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-\gamma} \quad \gamma < 0$$

da $X(x)$ periodisch und nicht konstant

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{-\gamma}\,t) + C_2 \sin(\sqrt{-\gamma}\,t)$$

$$\Rightarrow T(t) = C_3 e^{(\gamma-3)t}$$

$$u(0,t) = u(\tfrac{\pi}{2},t) = X(0)T(t) = X(\tfrac{\pi}{2})T(t) = 0$$
$$\Rightarrow X(0) = X(\tfrac{\pi}{2}) = 0$$

$$X(0) = C_1 = 0$$
$$X(\tfrac{\pi}{2}) = C_2 \sin(\sqrt{-\gamma}\cdot\tfrac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow \sqrt{-\gamma}\cdot\tfrac{\pi}{2} = k\pi \qquad k \in \mathbb{N}$$
$$\sqrt{\gamma} = 2k$$
$$\gamma = -4k^2$$

$$X(x) = C_2 \sin(k\pi) \qquad T(t) = C_3 e^{(-4k^2-3)t}$$

$$u(x,t) = A_k \sin(k\pi) e^{(-4k^2-3)t}$$

b) $$u(x,0) = 5\sin(6x) + \sin(4x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\pi)$$

$k=6,\ A_6 = 5$

$k=4,\ A_4 = 1$

$k \neq 4,6,\ A_k = 0$

$-16\cdot4-3 = -64-3$

$-4\cdot36-3 = -144-3$

$$u(x,t) = 5\sin(6x)e^{-147t} + 4\sin(4x)e^{-67t}$$

Laplace-Tabelle

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t^n, $n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
t^a, $a > -1$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\delta(t-t_0)$ bzw. $\delta(t)$	e^{-st_0} bzw. 1
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$
$\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}$, $n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{(s-a)^n}$
$\frac{t^{\beta-1}e^{at}}{\Gamma(\beta)}$, $\beta > 0$	$\frac{1}{(s-a)^\beta}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$e^{bt}\sin(at)$	$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}$
$e^{bt}\cos(at)$	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$e^{bt}\sinh(at)$	$\frac{a}{(s-b)^2-a^2}$
$e^{bt}\cosh(at)$	$\frac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$
$t\sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
$t\cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$
$\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$