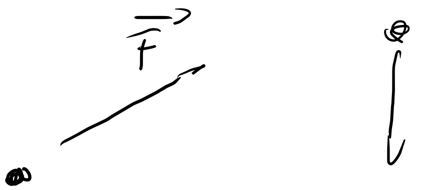
Differentialgleichungen in den Anwendungen

Kraft $\vec F$

Geschwindigkeit $\vec v$

Masse m



Newton-Gleichung:

$m \vec v\,'(t) = \vec F$

$m \vec v\,'(t) = \vec F(t)$

$m \vec v\,'(t) = \vec F(t, v(t))$

- DG-System
- gewöhnliche DG
- 1. Ordnung

Wachstumsprozesse

$f'(t) = a\, f(t)$

- skalare DG
- Gew. DG
- 1. Ordnung

Terminologie

- Differentialgleichung: Gleichungen einer Funktion und ihrer Ableitungen
- vektorwertige Funktionen: $\longrightarrow$ Differentialgleichungssysteme
- skalare Funktionen $\longrightarrow$ Skalare Differentialgleichungen
- Funktion hat eine Unbekannte $\longrightarrow$ Gewöhnliche Differentialgleichung
- Funktion hat mehrere Unbekannte $\longrightarrow$ Partielle Differentialgleichung
- Höchste Ableitung $\longrightarrow$ Ordnung der Differentialgleichung

Gesucht eine Funktion $v(t, x_1, .. x_3)$

$v: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$

Gesucht eine Funktion $v(t)$

$v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

Beispiel 1

Gesucht $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ welche die DG

$x'(t) = f(t)$ ← gewöhnlich, 1. Ordnung, skalar

→ f stetige Funktion auf $\mathbb{R}$

→ Ansatz: $x(t) = F(t) + c$ mit F Stammfunktion von f

Einsetzen

$F'(t) = f(t)$. ✓

→ Stammfunktion für viele Funktion bekannt

→ Allgemein kann F berechnet werden, wenn f stetig ist, durch

$$F(t) = x_0 + \int_\alpha^t f(u)\, du$$

(x_0 beliebige Konstant, α beliebiger Anfangswert)

Anfangsbedingung:

$x(\alpha) = x_0$

Die Stammfunktion F erfüllt die Anfangsbedingung.

$$F'(t) = x_0' + \left(\int_\alpha^t f(u)\, du \right)' = 0 + f(t)$$

$$F(\alpha) = x_0 + \underbrace{\int_\alpha^\alpha f(u)\, du}_{=0} = x_0$$

Beispiel 2

Gesucht $x(t)$, $x: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

DG: $x'(t) = a\, x(t)$ a Konstante

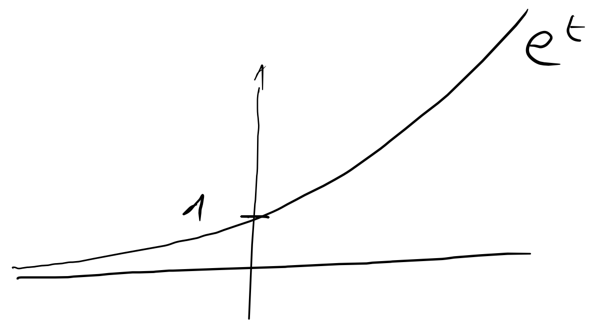
gewöhnlich, 1. Ordnung, skalar

AB: $x(t_0) = x_0$

Ansatz: $x(t) = e^{at+c}$ $b\, e^{at+c}$

Einsetzen:

$$a\, e^{at+c} = a\, e^{at+c} \quad \checkmark$$



Anfangsbedingung

$$b e^{at_0+c} = x_0$$

wird gelöst für $c = -at_0$ und $b = x_0$

$\Longrightarrow$ Lösung $\boxed{x(t) = x_0\, e^{a(t-t_0)}}$

$(e^t)' = e^t$

Kettenregel:

$$f(g(t)) = f'(g(t))\, g'(t)$$

$$b\, e^{at_0+c} = \boxed{b e^c}\, e^{at_0}$$

Nur eine Konstante

Beispiel 3

Gesucht $x(t)$, $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

DG $x'(t) = a(t)\, x(t)$ $\qquad$ $a(t)$ stetige Funktion

Ansatz $x(t) := c\, e^{A(t)}$ $\qquad$ $A(t)$ Stammfunktion $a(t)$

Einsetzen:

$$c\, A'(t)\, e^{A(t)} = c\, a(t)\, e^{A(t)} = c\,a(t)\, e^{A(t)} \quad \checkmark$$

Für Anfangsbedingung c passend wählen.

Beispiel 4 (Inhomogene DG)

Gesucht $x(t)$

DG $\underbrace{x'(t) = a(t)\,x(t)}_{\text{homogene DG}} + b(t)$ $\qquad$ a, b stetig, gegeben

Ohne $b(t)$, dann ist die Lösung $c\,e^{A(t)}$ $\qquad$ A Stammfkt von a

Ansatz $x(t) = c(t)\,e^{A(t)}$ $\qquad$ (Wähle c in Abhängigkeit von t)

Einsetzen:

$$\overbrace{c'(t)\,e^{A(t)} + \underline{c(t)\,a(t)\,e^{A(t)}}}^{x'(t)} = \underbrace{\underline{a(t)\,c(t)\,e^{A(t)}} + b(t)}_{a(t)\,x(t) + b(t)}$$

Produktregel

$(f(t)g(t))' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$

$$\Rightarrow \quad c'(t)\,e^{A(t)} = b(t)$$

$$\Rightarrow \quad c'(t) = b(t)\,e^{-A(t)} \quad \longleftarrow \text{DG für } c(t)$$

$$\Rightarrow \quad c(t) = \int_\alpha^t b(u)\,e^{-A(u)}\,du + C_0 \longleftarrow \text{Stammfunktion von } b(t)e^{-A(t)}$$

$\Rightarrow$ Lösung DG: $x(t) = e^{A(t)}\left(\int_\alpha^t b(u)\,e^{-A(u)}\,du + C_0\right)$ existiert da $b(t)\,e^{-A(t)}$ stetig

$\longrightarrow$ Für AB $x(t_0) = x_0$ können wir C_0 passend wählen.

$\longrightarrow$ Lösung für allgemeine, lineare DG 1. Ordnung.

$\rightarrow$ Variation der Konstanten