4. Tutoriumsblatt – Diskrete Strukturen

(Besprechung in den Tutorien in der Woche vom 20.05.2024)

Erinnerung: **Prüfungsanmeldung auf Moses nur noch bis zum 30.05.**

Aufgabe 1

Bei den letzten Begegnungen ist euch immer wieder das bizarre Verhalten der Suchenden aufgefallen. Sie wirken nicht aggressiv, aber vollständig fanatisch. Ahmed hat bereits einige Orte ausgemacht an denen sie sich wiederholt zu versammeln scheinen. Ihr entscheidet euch Teams zu bilden, um diese Orte zu beobachten. Arbi üerzeugt euch, dass ihr nicht genug seid, um alle diese Orte zu beobachten.

Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es n Personen auf bis zu k von den o möglichen Orten aufzuteilen?

Aufgabe 2

Bei eurer Beobachtung merkt ihr dass sich die Suchenden jeweils in kultähnlichen Versammlungen zusammenschließen. Ihr schafft es nicht herauszufinden wer oder was sich im Zentrum dieser Versammlungen befindet, aber ihr hört die Worte die von dort erklingen. Es sind die folgenden:

(i) Gegeben sei die Permutation $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 8 & 5 & 3 & 1 & 9 & 7 & 10 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. Schreiben Sie π als Produkt von disjunkten Zyklen.

(ii) Gegeben seien die Permutationen
$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ und $\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.
Finden Sie eine Permutation π_2, so dass $\pi_3 = \pi_2 \circ \pi_1$.

(iii) Sei $\mathbb{N}^+$ die Menge der positiven natürlichen Zahlen. Zeigen Sie die folgende Gleichung für die Stirling-Zahlen erster Art (mit einem kombinatorischen Argument):

$$s_{n,n-1} = \binom{n}{2} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}^+.$$

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}^+$. Wir platzieren insgesamt $2n$ Punkte auf einem Kreis.

Ihr wollt wissen, wie viele Möglichkeiten es git die Punkte mit Strichen innerhalb des Kreises zu verbinden so, dass jeder Punkt Endpunkt von genau einem Strich ist und sich keine Striche berühren.

(i) Wie könnt ihr das Problem als rekursive Formel beschreiben? Beschreibt das Problem für $2n$ Punkte, indem ihr es auf kleinere Versionen des gleichen Problems reduziert.

(ii) Wie könnt ihr die Anzahl von Möglichkeiten in einer geschlossenen Formel repräsentieren?

Zusatzaufgabe:

Aufgabe 4

Zeigen Sie mit Hilfe von Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt:

$$S_{n,2} = 2^{n-1} - 1.$$

Folgendes Ergebnis aus der Vorlesung kann Ihnen dabei helfen:

Es gilt $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}$ für $2 \leq k \leq n-1$.

Aufgabe 1

Bei den letzten Begegnungen ist euch immer wieder das bizarre Verhalten der Suchenden aufgefallen. Sie wirken nicht aggressiv, aber vollständig fanatisch. Ahmed hat bereits einige Orte ausgemacht an denen sie sich wiederholt zu versammeln scheinen. Ihr entscheidet euch Teams zu bilden, um diese Orte zu beobachten. Arbi üerzeugt euch, dass ihr nicht genug seid, um alle diese Orte zu beobachten.

Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es n Personen auf bis zu k von den o möglichen Orten aufzuteilen?

在最近的接触中，你们多次注意到寻求者的怪异行为。
他们看起来并不咄咄逼人，而是完全狂热。
艾哈迈德已经确定了几个它们似乎反复聚集的地方。
你们决定组成小组去观察这些地方。
阿尔比让你相信，你还不足以观察所有这些地方。
有多少种不同的方法可以将 n 人分成最多 k 个可能的 o 个地点?

Lösung zu Aufgabe 1

Wir legen erst einmal eine Zwischenrechnung für eine Anzahl an Orten $i \leq o$ fest. Wir wählen i der o Orte aus, also gibt es $\binom{o}{i}$ mögliche Szenarien.

Da die Personen in eurer Gruppe unterscheidbar sind, können wir die Stirling-Zahl zweiter Art $S_{n,i}$ benutzen, da wir die Personen in i verschiedene Partitionen aufteilen. Nun haben wir die Anzahl der Möglichkeiten Orte auszuwählen und die Aufteilung der Personen in unserer Berechnung berücksichtigt. Es fehlt allerdings noch ein Teil der ermittelt auf wie viele Arten man die Orte auf die einzelnen Personengruppen aufteilen kann. Dies entspricht der Anzahl an Bijektionen zwischen zwei Mengen der Größe i was sich mit $i!$ berechnen lässt. Diese Entscheidungen Aufteilungen werden alle nacheinander gemacht und unterschiedliche Entscheidungen könne nicht zum gleichen Ergebnis führen. Somit nutzen wir hier die Produktregel.

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\binom{o}{i} S(n,i)\, i!\right)$$

Insgesamt ergibt sich also folgende Formel:

$$\binom{o}{i} \cdot S_{n,i} \cdot i!.$$

Da wir zwischen 1 und k viele Orte auswählen müssen, erhalten wir also die folgende Summe die von 1 bis k verläuft:

$$\Sigma_{i=1}^{k}\left(\binom{o}{i} \cdot S_{n,i} \cdot i!\right).$$

Aufgabe 2

Bei eurer Beobachtung merkt ihr dass sich die Suchenden jeweils in kultähnlichen Versammlungen zusammenschließen. Ihr schafft es nicht herauszufinden wer oder was sich im Zentrum dieser Versammlungen befindet, aber ihr hört die Worte die von dort erklingen. Es sind die folgenden:

(i) Gegeben sei die Permutation $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 8 & 5 & 3 & 1 & 9 & 7 & 10 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. Schreiben Sie π als Produkt von disjunkten Zyklen.

(ii) Gegeben seien die Permutationen
$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ und $\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.
Finden Sie eine Permutation π_2, so dass $\pi_3 = \pi_2 \circ \pi_1$.

i) $(1\ 4\ 3\ 5)(2\ 8\ 10\ 6\ 9)(7)$

ii)
$\pi_3(1) = \pi_2(\pi_1(1)) = \pi_2(4) = 2$
$\pi_3(2) = \pi_2(\pi_1(2)) = \pi_2(1) = 3$
$\pi_3(3) = \pi_3(\pi_1(3)) = \pi_2(3) = 4$
$\pi_3(4) = \pi_2(\pi_1(4)) = \pi_2(2) = 1$

$\pi_2(1) = \pi_2(\pi_1(2)) = \pi_3(2) = 3$
$\pi_2(2) = \pi_2(\pi_1(4)) = \pi_3(4) = 1$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(iii) Sei $\mathbb{N}^+$ die Menge der positiven natürlichen Zahlen. Zeigen Sie die folgende Gleichung für die Stirling-Zahlen erster Art (mit einem kombinatorischen Argument):

$s_{n,n-1} = s_{n-1,n-2} + (n-1)\, s_{n-1,n-1}$

$$s_{n,n-1} = \binom{n}{2} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}^+.$$

(iii) Die Stirling-Zahl erster Art $s_{n,n-1}$ ist die Anzahl der möglichen Permutationen von n Elementen mit genau $n-1$ Zyklen. Somit muss es nach dem Schubfachprinzip mindestens einen Zyklus geben der 2 Elemente enthält. Da für jeden Zyklus gilt, dass er mindestens ein Element enthält und, da die Permutation $n-1$ Zyklen enthält, gilt also, die Permutation besteht aus $n-2$ einelementigen und einem zweielementigen Zyklus. Eine Permutation ist durch die Angabe aller ihrer Zyklen die länger als 1 sind vollständig bestimmt. Die Anzahl der möglichen Permutationen von n Elementen mit genau $n-1$ Zyklen ist also gleich der Anzahl der möglichen 2er Zyklen. Da für zwei beliebige Elemente a, b der Zyklus $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ gleich $\begin{pmatrix} b & a \end{pmatrix}$ ist und jedes Element nur einmal im Zyklus vorkommen kann. Wir können unsere Situation also mit einem ungeordneten Ziehen ohne Zurücklegen modellieren. Die Anzahl der möglichen 2er Zyklen und somit die Anzahl der möglichen Permutationen von n Elementen mit genau $n-1$ Zyklen ist $\binom{n}{2}$. Die Aussage gilt also.

Aufgabe 3

我们在一个圆上总共放置了 2n 个点。您想知道有多少种方法可以将圆内的点与破折号连接起来，以便每个点恰好是一个破折号的终点，并且没有破折号相互接触。

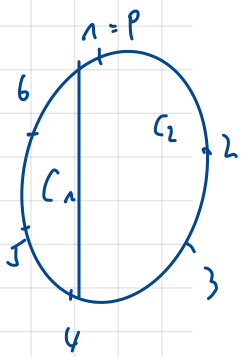
Sei $n \in \mathbb{N}^+$. Wir platzieren insgesamt $2n$ Punkte auf einem Kreis.

Ihr wollt wissen, wie viele Möglichkeiten es git die Punkte mit Strichen innerhalb des Kreises zu verbinden so, dass jeder Punkt Endpunkt von genau einem Strich ist und sich keine Striche berühren.

(i) Wie könnt ihr das Problem als rekursive Formel beschreiben? Beschreibt das Problem für $2n$ Punkte, indem ihr es auf kleinere Versionen des gleichen Problems reduziert.

(ii) Wie könnt ihr die Anzahl von Möglichkeiten in einer geschlossenen Formel repräsentieren?

(i)



(i) Zuerst stellen wir fest, dass wir in jeder Lösung n Striche zeichnen. Wir wählen einen beliebigen Punkt p und machen eine Fallunterscheidung daran mit welchem anderen Punkt p' er verbunden wird. Die Verbindung zwischen p und p' teilt den Kreis in zwei Kreise C_1 und C_2 auf. Da die übrigen $2n-2$ Knoten noch mit Strichen verbunden werden müssen und da sie nur mit Knoten im gleichen Teilkreis verbunden werden können, müssen C_1 und C_2 jeweils eine gerade Anzahl an Knoten enthalten. Hierbei repräsentieren C_1 und C_2 wiederum eine kleinere Versionen des gleichen Problems, die unabhängig von einander gelöst werden. Da, je nach Wahl von p', C_1 jede Knotenanzahl von 0 bis $2n-2$ haben kann, ergibt sich die rekursive Definition:

$$P_{2n} = \sum_{i=0}^{n-1} P_{2i} \cdot P_{2n-2-2i}$$

$$P_0 = 1$$

(ii) Nach der rekursiven Definition gilt: $P_{2n} = C_n$. Somit gilt nach der Vorlesung, dass $P_{2n} = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$.

Aufgabe 4

Zeigen Sie mit Hilfe von Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt:

$$S_{n,2} = 2^{n-1} - 1.$$

Folgendes Ergebnis aus der Vorlesung kann Ihnen dabei helfen:

Es gilt $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}$ für $2 \leq k \leq n-1$.

Lösung zu Aufgabe 4

IA: Für $n = 2$ gilt:

$$\begin{aligned} S_{2,2} &= 1 \\ &= 2 - 1 \\ &= 2^{2-1} - 1 \end{aligned}$$

IV: Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt, dass $S_{n,2} = 2^{n-1} - 1$.

IS: Wir nutzen wieder den Satz aus der Vorlesung.

$$\begin{aligned} S_{n+1,2} &= S_{n,1} + 2 \cdot S_{n,2} \\ &\overset{\text{IV}}{=} 1 + 2 \cdot (2^{n-1} - 1) \\ &= 1 + 2 \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot 1 \\ &= 1 + 2^n - 2 \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

SoSe 2024
Veröffentlichung: 20. Mai 2024

4. freiwillige Übung – Diskrete Strukturen

Abgabe: bis 10:30 am 30.05.2024 im ISIS-Kurs [SoSe 2024] Diskrete Strukturen

Diese Aufgaben sind als Übungen für den MC-Test am 31.05.24 gedacht. Einige von ihnen sind aus früheren Versionen des MC-Tests.

Aufgabe 5

Eine Gruppe raucht Joints. Dabei gibt jede Person den Joint nach dem Ziehen immer an die gleiche nächste Person weiter, sodass jede der 11 Personen an genau einem Joint zieht. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die 11 Personen die 4 (nicht unterscheidbaren) Joints aufzuteilen?

Beachte: Es kann auch ein Joint von nur einer Person geraucht werden.

Aufgabe 6

Ein Supermarkt bietet 12 verschiedene Obstsorten an.

(i) Wie viele Möglichkeiten gibt es davon 6 Sorten auszuwählen?

(ii) Wie viele Möglichkeiten gibt es 6 Stücke Obst auszuwählen, wenn man mehrfach die gleiche Sorte Obst wählen kann?

Von den 6 angebotenen Tomatenmarksorten gibt es jeweils nur eine Dose.

(iii) Auf wie viele Arten kann man 4 Dosen auswählen und diese aufeinander aufstapeln?

Sechs Personen kommen gleichzeitig an der Kasse an.

(iv) Auf wie viele verschiedene Arten können sich diese Personen in eine Warteschlange stellen? (Alle Personen müssen Teil einer Warteschlange sein)

Aufgabe 7

Vor einer Kinokasse stehen $2n$ Personen an. n Personen haben nur 5-Euro-Scheine, die Übrigen nur 10-Euro-Scheine. Der Eintritt kostet 5 Euro. Die Kasse hat kein Wechselgeld. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Personen eine Kinokarte kaufen können ohne dass der Kasse das Wechselgeld ausgeht?

Aufgabe 8

Bestimmen sie die Zyklen der folgenden Permutationen

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 1 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 7 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9

Finden Sie eine Permutation π_2, so dass $\pi_2 \circ \pi_1 = \pi_3$, wobei π_1 und π_3 durch die folgenden Permutationen gegeben sind.

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10

Wie viele Möglichkeiten gibt es, 5 schwarze und 3 weiße Türme so auf ein 8×8-Schachbrett zu stellen, dass keine zwei Türme in der gleichen Zeile oder Spalte stehen?

Aufgabe 11

Du möchtest deinen 5 besten Freund*innen Murmeln schenken. Wie viele Möglichkeiten gibt es 15 unterscheidbare Murmeln auf deine Freund*innen zu verteilen, wenn du allen mindestens eine Murmel schenken willst?