# Formale Sprachen und Automaten

Prof. Dr. Uwe Nestmann - 26. Juli 2021

## Schriftlicher Test

**Studierendenidentifikation:**

| | |
|---|---|
| NACHNAME | |
| VORNAME | |
| MATRIKELNUMMER | |
| STUDIENGANG | □ Informatik Bachelor, □ ____________________________ |

**Aufgabenübersicht:**

| AUFGABE | SEITE | PUNKTE | THEMENBEREICH |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 15.5 | MODELLE REGULÄRER SPRACHEN |
| 2 | 4 | 16 | UNTERMENGEN-KONSTRUKTION |
| 3 | 5 | 22 | MINIMIERUNG EINES DFA |
| 4 | 6 | 10 | CYK-ALGORITHMUS |
| 5 | 7 | 11 | MODELLE KONTEXTFREIER SPRACHEN I |
| 6 | 8 | 5 | MODELLE KONTEXTFREIER SPRACHEN II |

Zwei Punkte in diesem Test entsprechen einem Portfoliopunkt.

**Korrektur:**

| AUFGABE | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| PUNKTE | 15.5 | 16 | 22 | 10 | 11 | 5 | 79 |
| ERREICHT | | | | | | | |
| KORREKTOR | | | | | | | |
| EINSICHT | | | | | | | |

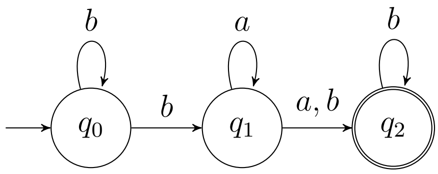
.5

**Aufgabe 1: Modelle Regulärer Sprachen** **(15.5 Punkte)**

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma \triangleq \{ a, b \}$,
die reguläre Sprache $A_1 \triangleq \{ b^n x b a^m \mid m, n \in \mathbb{N} \land x \in \{ \varepsilon, a \} \}$,
die reguläre Grammatik $G_2 \triangleq (\{ S, T, U, W \}, \Sigma, P_2, S)$ und
der NFA $M_3 \triangleq (\{ q_0, q_1, q_2 \}, \Sigma, \Delta_3, \{ q_0 \}, \{ q_2 \})$ mit:

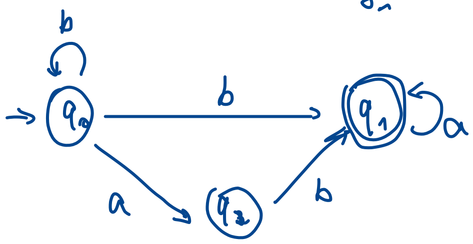
$$
\begin{array}{llll}
P_2: & S & \rightarrow & bT \\
 & T & \rightarrow & bS \mid aU \\
 & U & \rightarrow & bW \mid a \\
 & W & \rightarrow & bW \mid b
\end{array}
$$

$\Delta_3$:

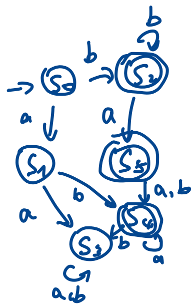



a. **( 6 Punkte)** *Gib* einen DFA $M_1$ mit $\mathrm{L}(M_1) = A_1$ *an.*

$M_1 \triangleq (\{q_0, q_1, q_2\}, \Sigma, \Delta_1, \{q_0\}, \{q_2\})$ mit $\Delta_1$:
$\delta_1$ $\delta_1$




| | | a | b | |
|---|---|---|---|---|
| S | $q_0$ | $q_2$ | $q_0 q_1$ | $S_0$ |
| | $q_2$ | $\emptyset$ | $q_1$ | $S_1$ |
| F | $q_0 q_1$ | $q_1 q_2$ | $q_0 q_1$ | $S_2$ |
| | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $S_3$ |
| F | $q_1$ | $q_1$ | $\emptyset$ | $S_4$ |
| P | $q_1 q_2$ | $q_1$ | $q_1$ | $S_5$ |




b. **( 4 Punkte)** *Gib* eine Typ-3 Grammatik $G_1$ mit $\mathrm{L}(G_1) = A_1$ *an.*

$G_1 = (\{S, T, U\}, \Sigma, P_1, S\}$ mit $P_1$:

$P_1$: $S \rightarrow bS \mid bT \mid aU$
$T \rightarrow \varepsilon \mid aT$
$U \rightarrow bT$

$b^* b a^*$

$b^* a b a^*$

c. **( 3 Punkte)** *Gib* $\mathrm{L}(G_2)$ *an,* ohne auf Automaten oder Grammatiken zu verweisen.

$L(G_2) = L(bb^* a (a + bb^*)) = \{ b^n aa, b^n ab^m \mid n, m \in \mathbb{N}^+ \}$

d. **( 2.5 Punkte)** *Gib* $\mathrm{L}(M_3)$ *an,* ohne auf Automaten oder Grammatiken zu verweisen.

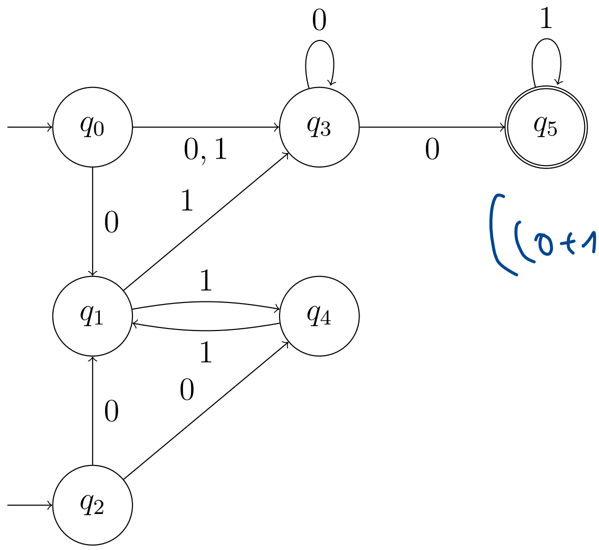
$L(M_3) = L(b^* b a^* (a+b) b^*)$

$= \{ b^n a^m a b^x, b^n a^m b b^x \mid n \in \mathbb{N}^+, m, x \in \mathbb{N} \}$

oder $\{ b^n a^m x b^i \mid n \in \mathbb{N}^+ \land m, i \in \mathbb{N} \land x \in \{a, b\} \}$

**Aufgabe 2: Untermengen-Konstruktion** **(16 Punkte)**

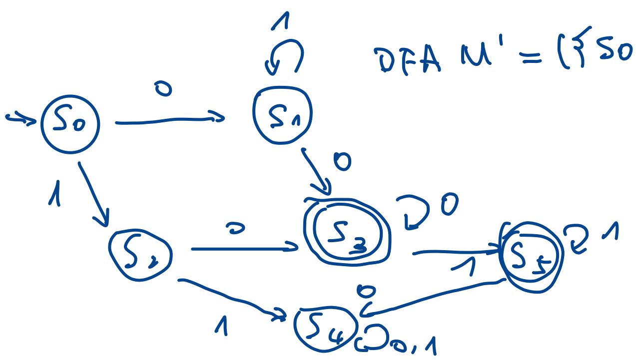
Gegeben sei der NFA $M \triangleq (\{\, q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5 \,\}, \Sigma, \Delta, \{\, q_0,\ q_2 \,\}, \{\, q_3 \,\})$ mit $\Sigma \triangleq \{\, 0,\ 1 \,\}$ und $\Delta$:




$((0+1)+0111+01+011)0^*01^*$

a. **( 13 Punkte)** Konstruiere nur mit Hilfe der Untermengen-Konstruktion den DFA $M'$ zum NFA $M$. *Gib* die bei der Untermengen-Konstruktion entstehende Tabelle sowie das Tupel des entstehenden Automaten $M'$ *an*.
*Hinweis: Es ist nicht nötig die Übergangsfunktion $\delta'$ von $M'$ (z.B. graphisch) anzugeben.*

| | | 0 | 1 | |
|---|---|---|---|---|
| S | $\{q_0, q_2\}$ | $\{q_1, q_3, q_4\}$ | $\{q_3\}$ | $S_0$ |
| | $\{q_1, q_3, q_4\}$ | $\{q_3, q_5\}$ | $\{q_1, q_3, q_4\}$ | $S_1$ |
| | $\{q_3\}$ | $\{q_3, q_5\}$ | $\emptyset$ | $S_2$ |
| F | $\{q_3, q_5\}$ | $\{q_3, q_5\}$ | $\{q_5\}$ | $S_3$ |
| | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $S_4$ |
| F | $\{q_5\}$ | $\emptyset$ | $\{q_5\}$ | $S_5$ |




DFA $M' = (\{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}, \Sigma, \delta, S_0, \{S_3, S_5\})$

mit $\delta$ =

b. **( 3 Punkte)** *Gib* $\mathrm{L}(M)$ *an*, ohne auf Automaten oder Grammatiken zu verweisen.

$L(M) = L((01^*0+10)0^* + (01^*0+10)0^*11^*)$

$= L((01^*0+10)0^*1^*)$

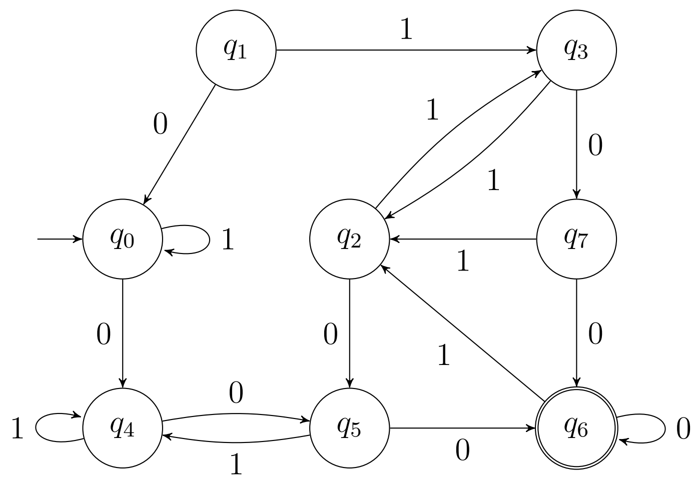
$= L((01^*+1)00^*1^*)$

Matrikelnummer: ____________________ Name: ____________________

**Aufgabe 3: Minimierung eines DFA** **(22 Punkte)**

Gegeben sei der DFA $M \triangleq (Q,\ \Sigma,\ \delta,\ q_0,\ \{\ q_6\ \})$ mit $Q = \{\ q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5,\ q_6,\ q_7\ \}$, $\Sigma = \{\ 0,\ 1\ \}$ und $\delta$:

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_0$ | $q_4$ | $q_0$ |
| $q_2$ | $q_5$ | $q_3$ |
| $q_3$ | $q_7$ | $q_2$ |
| $q_4$ | $q_5$ | $q_4$ |
| $q_5$ | $q_6$ | $q_4$ |
| $q_6$ | $q_6$ | $q_2$ |
| $q_7$ | $q_6$ | $q_2$ |




a. **( 1 Punkt)** *Gib an:* Welche Zustände sind nicht erreichbar?

$q_1$

b. **( 9 Punkte)** *Gib an:* Fülle die folgende Tabelle entsprechend des Table-Filling-Algorithmus zum Minimieren von DFAs mit Kreuzen (x) und Kreisen (o) aus.
*Hinweis: Bitte streiche zunächst alle Zeilen und Spalten für nicht erreichbare Zustände, falls es solche Zustände in M gibt.*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ~~$q_1$~~ | | | | | | | |
| $q_2$ | x | | | | | | |
| $q_3$ | x | | o | | | | |
| $q_4$ | x | | o | o | | | |
| $q_5$ | x | | x | x | x | | |
| $q_6$ | x | | x | x | x | x | |
| $q_7$ | x | | x | x | x | o | x |
| | $q_0$ | ~~$q_1$~~ | $q_2$ | $q_3$ | $q_4$ | $q_5$ | $q_6$ |

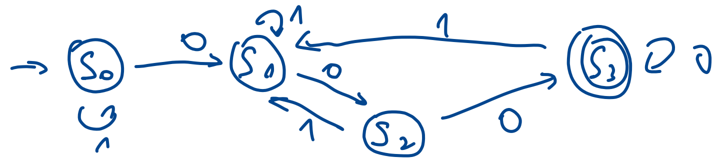
$\langle q_3, q_5\rangle : \xrightarrow{0} \langle q_7, q_6\rangle$ nicht markiert
$\xrightarrow{1} \langle q_2, q_4\rangle$ nicht markiert
$\langle q_3, q_7\rangle : \xrightarrow{0} \langle q_7, q_6\rangle$ nicht markiert
$\xrightarrow{1} \langle q_2, q_2\rangle$ nicht markiert

c. **( 4 Punkte)** Die Minimierung unterteilt $Q$ in Äquivalenzklassen. *Gib* alle Äquivalenzklassen *an*, die sich aus der Tabelle ergeben.
*Hinweis: Die Namen der Klassen in der Form $[\ q_0\ ]$ genügen hier* nicht. *Es müssen auch die zugehörigen Mengen, also so etwas wie $[\ q_0\ ] = \{\ \ldots\ \}$, angegeben werden.*

$[q_2] = \{q_2, q_3, q_4\}$ $S_1$ $[q_0] = \{q_0\}$ $S_0$

$[q_5] = \{q_5, q_7\}$ $S_2$ $[q_6] = \{q_6\}$ $S_3$

d. **( 5 Punkte)** *Gib* den minimierten DFA M' *an.*




e. **( 3 Punkte)** *Gib* $\mathrm{L}(M)$ *an*, ohne auf Automaten oder Grammatiken zu verweisen.

$1^*0\left(\left((1+01)^*00^*1\right)^* + (1+01)^*00^*\right)$

Matrikelnummer: ____________________ Name: ____________________

**Aufgabe 4: CYK-Algorithmus** **(10 Punkte)**

Gegeben sei eine Menge Nicht-Terminale $V \triangleq \{ S, T, U, V, W \}$, ein Alphabet $\Sigma \triangleq \{ a, b \}$, sowie eine CNF-Grammatik $G \triangleq (V, \Sigma, P, S)$ mit

$$
\begin{array}{llcl}
P: & S & \to & WT \mid TW \mid VU \\
 & T & \to & SV \mid a \\
 & U & \to & WT \mid TW \\
 & V & \to & VS \mid a \\
 & W & \to & WS \mid b
\end{array}
$$

a. **( 2 Punkte)** *Begründe:* Warum ist $G$ eine CNF-Grammatik?

Für jeder Produktionsregel gilt, dass auf rechte Seite genau nur zwei Nicht-Terminale oder einzelnes Terminalsymbol stehen

b. **( 8 Punkte)** *Berechne:* Gegeben sei ein Wort $w \triangleq baaba$. Löse mit dem CYK-Algorithmus das Wortproblem: $w \in L(G)$ oder $w \notin L(G)$?

| $CYK_w(i,j)$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1: b | $\{W\}$ | $\{S,U\}$ | $\{T\}$ | $\{W,S,U\}$ | $\{S,U,T\}$ |
| 2: a | $\{T,V\}$ | $\emptyset$ | $\{V,S\}$ | $\{V,T\}$ | |
| 3: a | $\{T,V\}$ | $\{S,U\}$ | $\{S,V,T\}$ | | |
| 4: b | $\{W\}$ | $\{S,U\}$ | | | |
| 5: a | $\{T,V\}$ | | | | |

$w \in L(G)$ da $S \in CYK_w(1,5)$

Matrikelnummer: ________________ Name: ________________

**Aufgabe 5: Modelle Kontextfreier Sprachen I** **(11 Punkte)**

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma \triangleq \{ a,\ b,\ c \}$ und die kontextfreie Sprache:

$$A \triangleq \{ wc^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge w \in \{ a,\ b \}^* \wedge |w|_b = 1 \wedge |w|_a = n \}$$

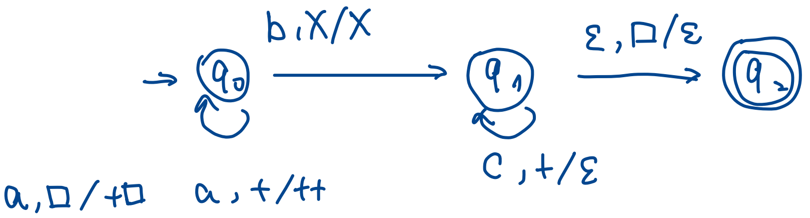
a. **( 5 Punkte)** *Gib* eine Typ-2 Grammatik $G$ mit $\mathrm{L}(G) = A$ *an*.

P: $S \to aSc \mid bA$

$A \to aAc \mid \varepsilon$

b. **( 6 Punkte)** *Gib* einen PDA $M$ mit $\mathrm{L}_{\mathrm{End}}(M) = \mathrm{L}_{\mathrm{Kel}}(M) = A$ *an*.

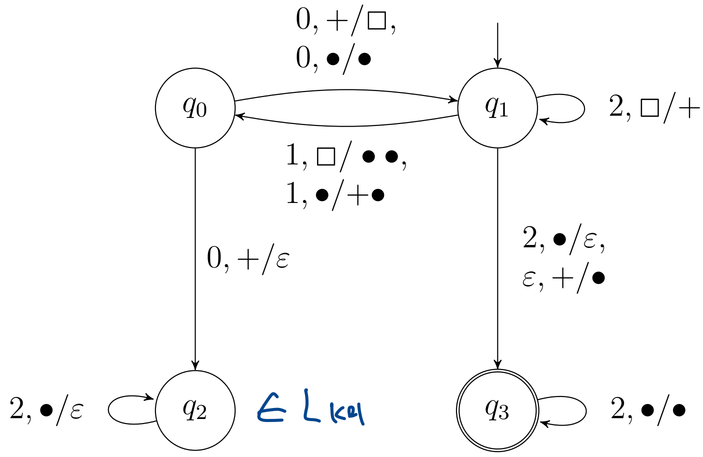
$M: (\{q_0, q_1, q_2\}, \Sigma, \{+, \square\}, \square, \Delta, q_0, \{q_3\}$ mit $\Delta$:




$X \in \{\square, +\}$

**Aufgabe 6: Modelle Kontextfreier Sprachen II** **(5 Punkte)**

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma \triangleq \{\, 0,\ 1,\ 2 \,\}$ und der PDA
$M \triangleq (\{\, q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3 \,\},\ \Sigma,\ \{\, \square,\ +,\ \bullet \,\},\ \square,\ \Delta,\ q_1,\ \{\, q_3 \,\})$ mit $\Delta$:




1 • •
0 • •
1 + • •
0 □ • •
1 • • • •
0 • • • •
1 + • • • •
0 ε • • • •
2 εε • • •
2
2
2

a. **( 2 Punkte)** *Gib* $\mathrm{L}_{\mathrm{End}}(M)$ *an,* ohne auf Automaten oder Grammatiken zu verweisen.

$L\,(2^* + (10)^+ 2^+)$

b. **( 3 Punkte)** *Gib* $\mathrm{L}_{\mathrm{Kel}}(M)$ *an,* ohne auf Automaten oder Grammatiken zu verweisen.

$L((1010)^*)$

Auf dieser Seite löse ich einen Teil der Aufgabe ___ :
Teilaufgabe ___ :

*Matrikelnummer:* ______________ *Name:* ______________

Auf dieser Seite löse ich einen Teil der Aufgabe __ :
Teilaufgabe __ :

*Matrikelnummer:* ____________________ *Name:* ____________________

Auf dieser Seite löse ich einen Teil der Aufgabe __ :
Teilaufgabe __ :