operations research
QUANTITATIVE INFRASTRUKTURSYSTEMMODELLIERUNG

Tutorium

Operations Research – Grundlagen

Technische Universität Berlin
Fachgebiet **W**irtschafts- und **I**nfrastruktur**P**olitik
WIP

Flüsse in Netzwerken:

Max-Flow Min-Cut, Min-Cost Flow

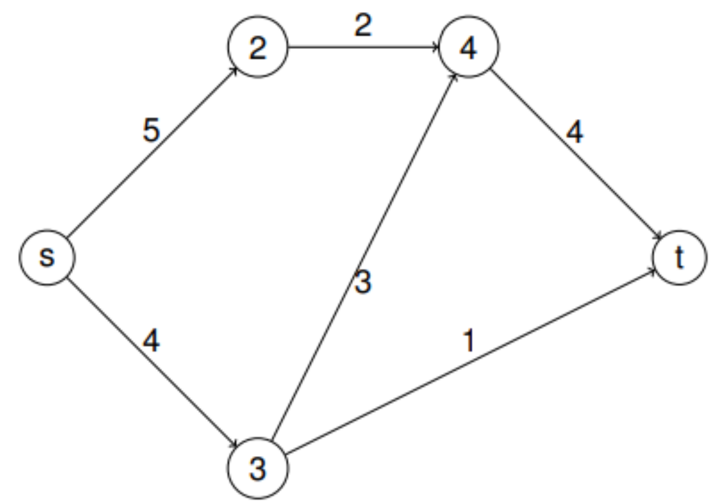
<u>Tutoriumsaufgaben:</u>

3.10, 3.11	Max-Flow Min-Cut Theorem
3.12	Min-Cost Flow als Optimierungsproblem
3.13	Geschenkepipeline im Kamin

Wiederholung

- Flussmaximierungsproblem
- NB für die Kapazitätsrestriktion als Matrix aufschreiben
- Gewichtete Adjazenzmatrix aufstellen:

$$u(i,j) = \begin{array}{c} \\ s \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ t \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} s & 2 & 3 & 4 & t \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



- Statt jede NB für die Kapazitätsrestriktion aufzuschreiben können wir mit der Matrix alle in einer Zeile aufstellen:

$$g(i,j) \leq u(i,j)$$

Wiederholung

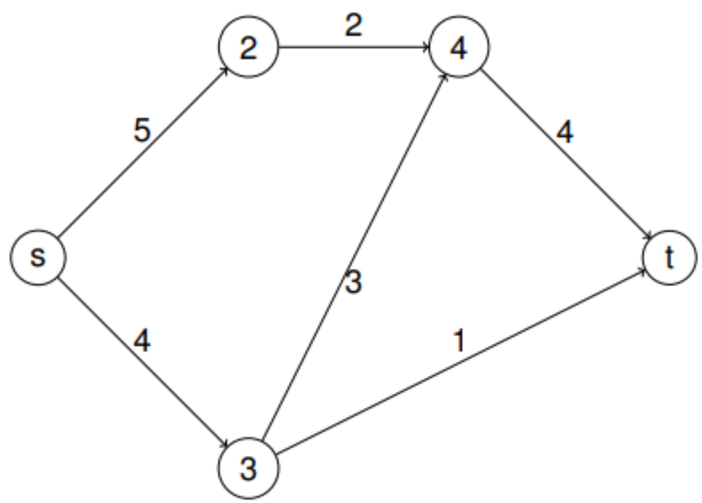
$$\max z = g_{s,2} + g_{s,3}$$

s.t.

$$g(i,j) \leq u(i,j)$$ *(Wobei $u(i,j)$ hier die gewichtete Adjazenzmatrix ist!)*

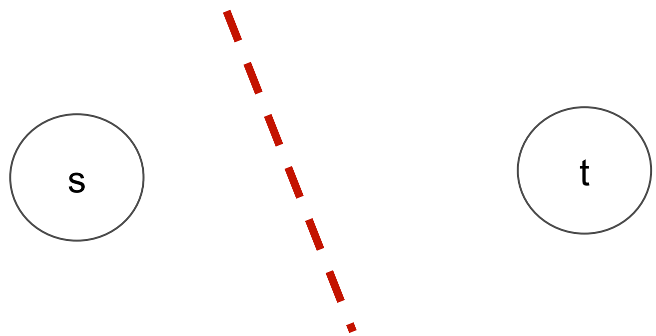
$$-g_{s,2} + g_{2,4} = 0$$
$$-g_{s,3} + g_{3,4} + g_{3,t} = 0$$
$$-g_{2,4} - g_{3,4} + g_{4,t} = 0$$

$$g(i,j) \geq 0 \quad \forall (i,j) \in E$$

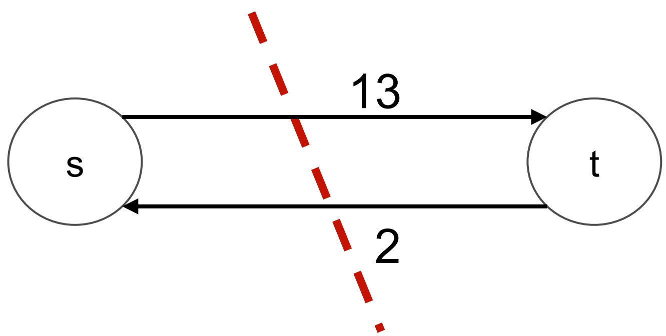


Max-Flow Min Cut Theorem

- Ein (S, T) Schnitt schneidet das Netzwerk, sodass eine Seite die Qulle **s** enthält und die andere Seite die Senke **t**.



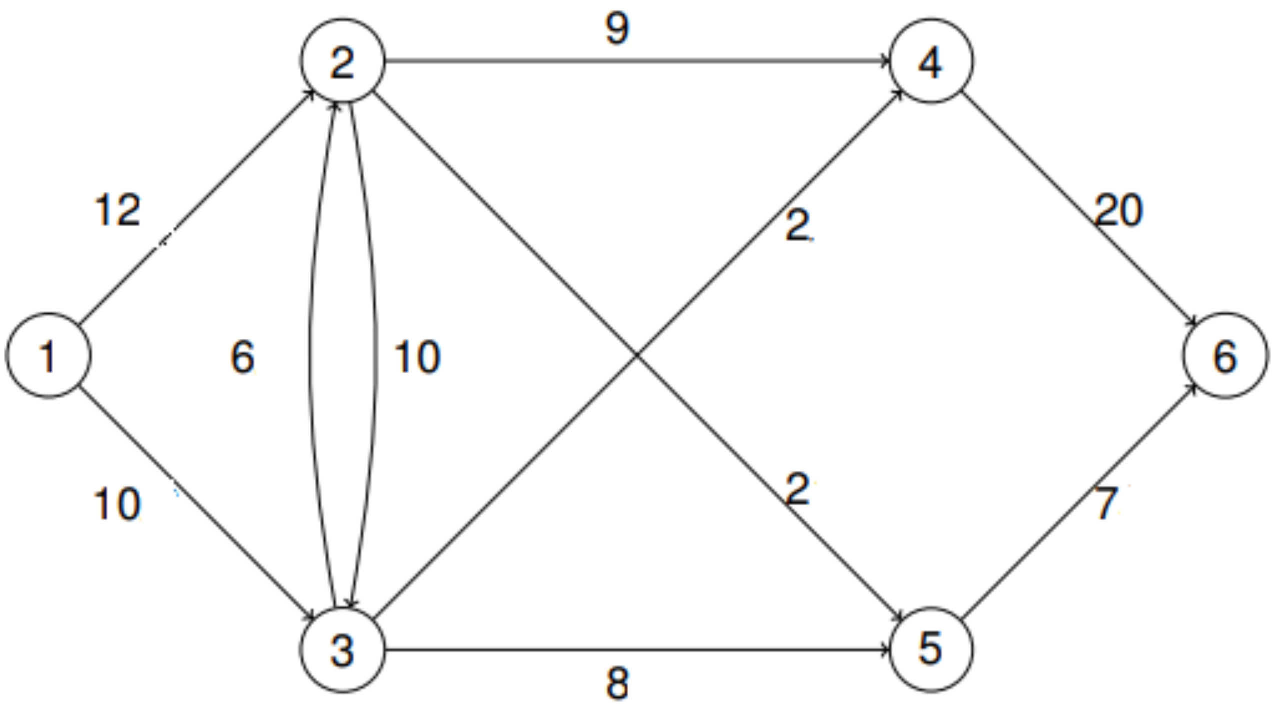
- Die Kapazität von einem Schnitt ist die Summe von allen Kapazitäten die von der **s** Seite zur **t** Seite zeigen.



Kapazität vom Schnitt:
13

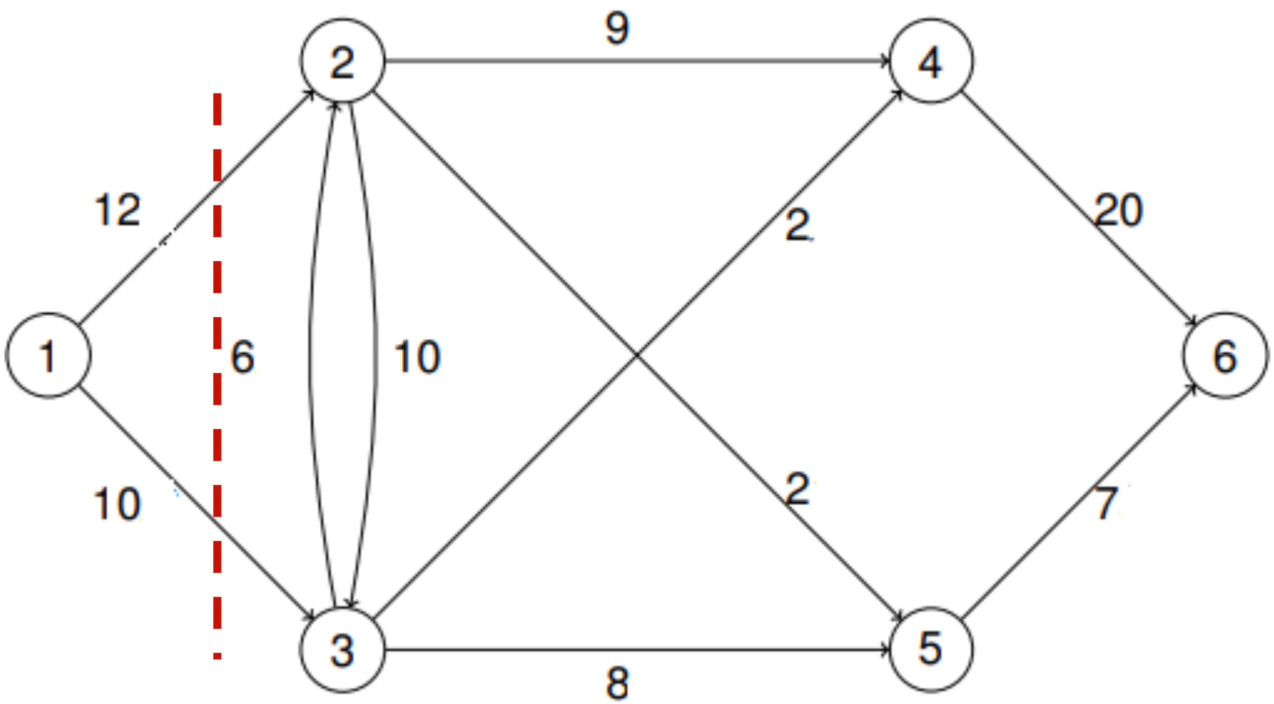
Max-Flow Min Cut Theorem 3.10

- Finde den minimalsten (S,T) **Schnitt** in diesem Netzwerk um die **Gesamtkapazität** zu ermitteln (Knoten 1 ist die Quelle **s** und Knoten 6 die Senke **t**)



Max-Flow Min Cut Theorem 3.10

- Finde den minimalsten (S,T) **Schnitt** in diesem Netzwerk um die **Gesamtkapazität** zu ermitteln

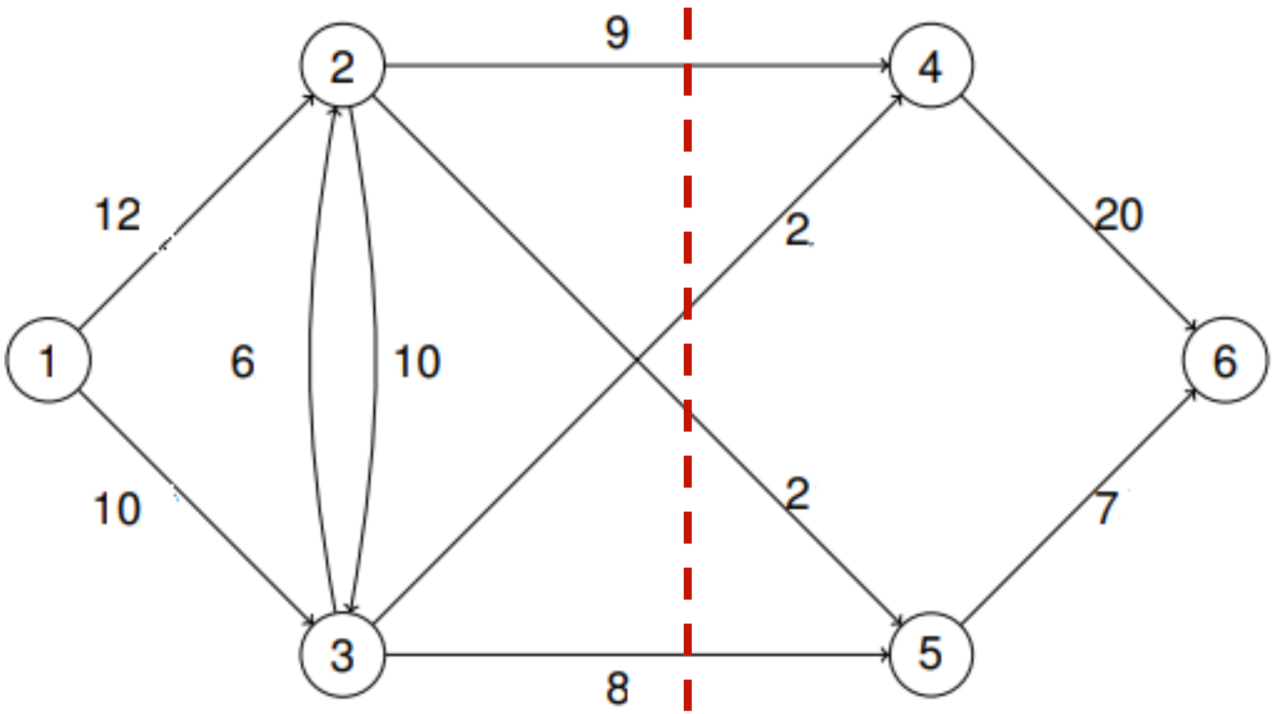


Kapazität: 22

Bisher minimalster Schnitt: 22

Max-Flow Min Cut Theorem 3.10

- Finde den minimalsten (S,T) **Schnitt** in diesem Netzwerk um die **Gesamtkapazität** zu ermitteln

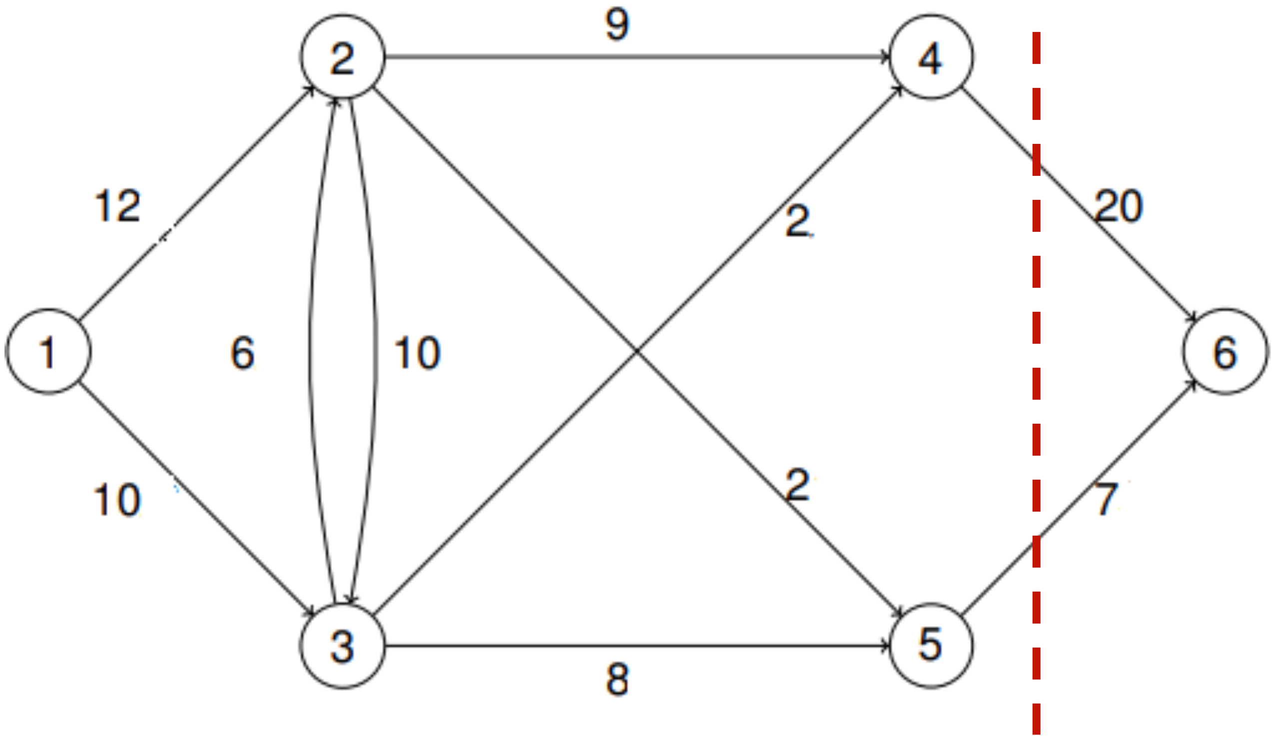


Kapazität: 21

Bisher minimalster Schnitt: 21

Max-Flow Min Cut Theorem 3.10

- Finde den minimalsten (S,T) **Schnitt** in diesem Netzwerk um die **Gesamtkapazität** zu ermitteln

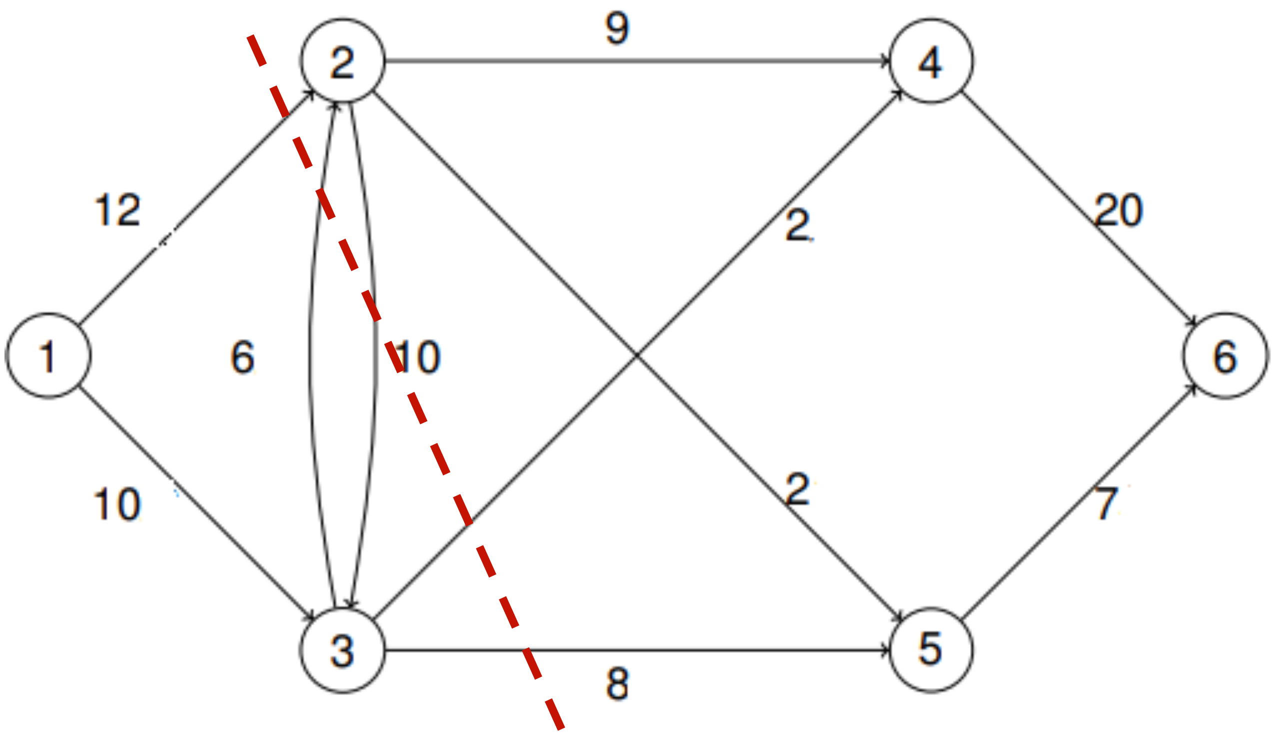


Kapazität: 27

Bisher minimalster Schnitt: 21

Max-Flow Min Cut Theorem 3.10

- Finde den minimalsten (S,T) **Schnitt** in diesem Netzwerk um die **Gesamtkapazität** zu ermitteln

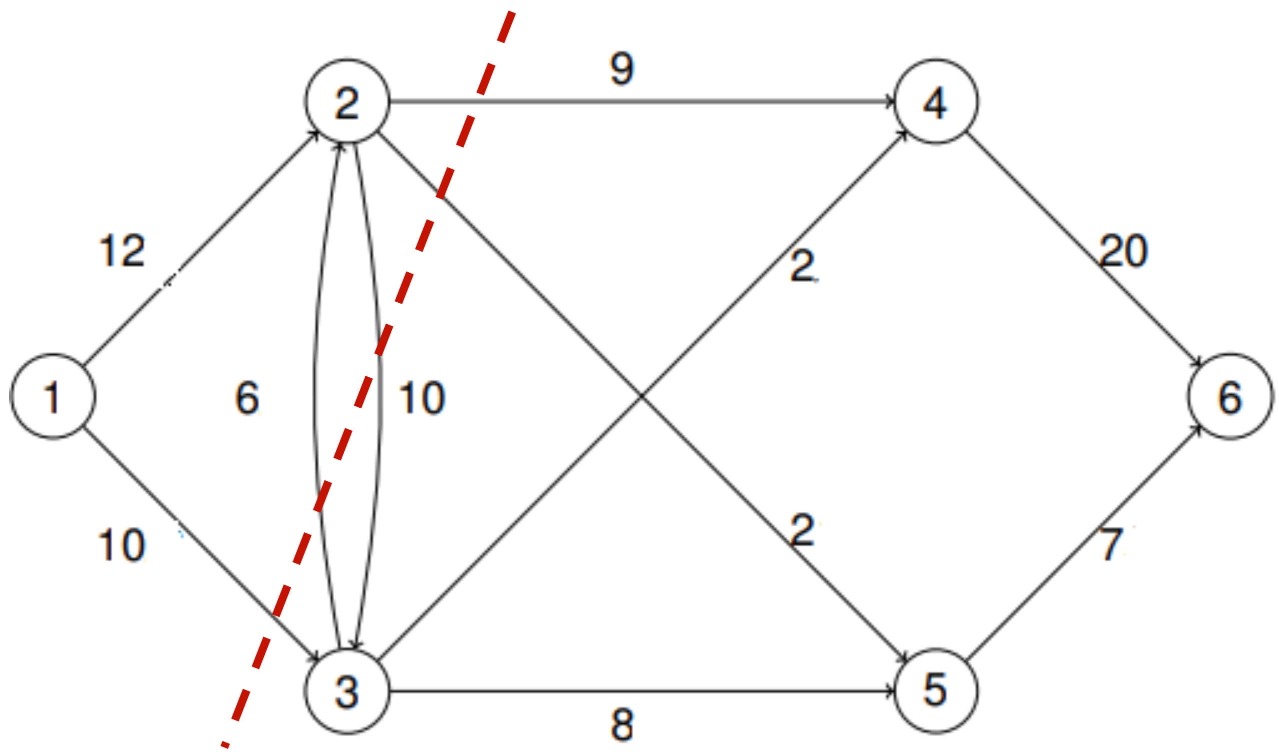


Kapazität: 28

Bisher minimalster Schnitt: 21

Max-Flow Min Cut Theorem 3.10

- Finde den minimalsten (S,T) **Schnitt** in diesem Netzwerk um die **Gesamtkapazität** zu ermitteln

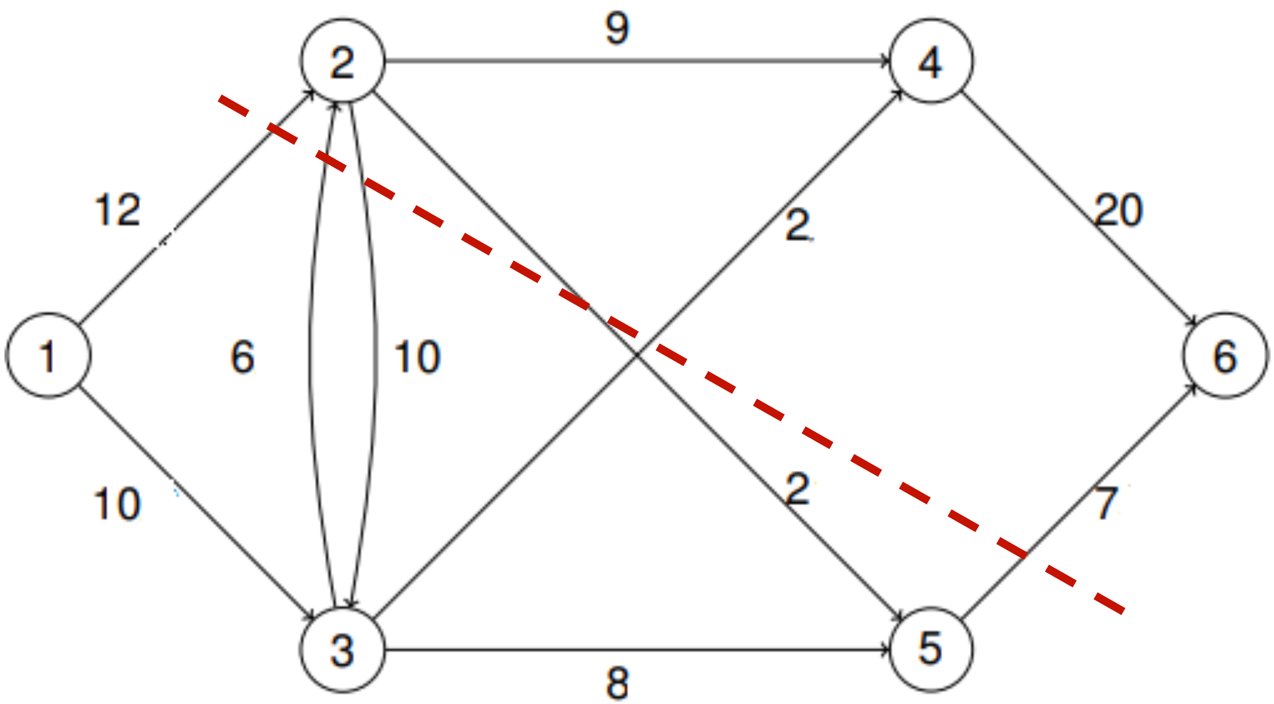


Kapazität: 31

Bisher minimalster Schnitt: 21

Max-Flow Min Cut Theorem 3.10

- Finde den minimalsten (S,T) **Schnitt** in diesem Netzwerk um die **Gesamtkapazität** zu ermitteln

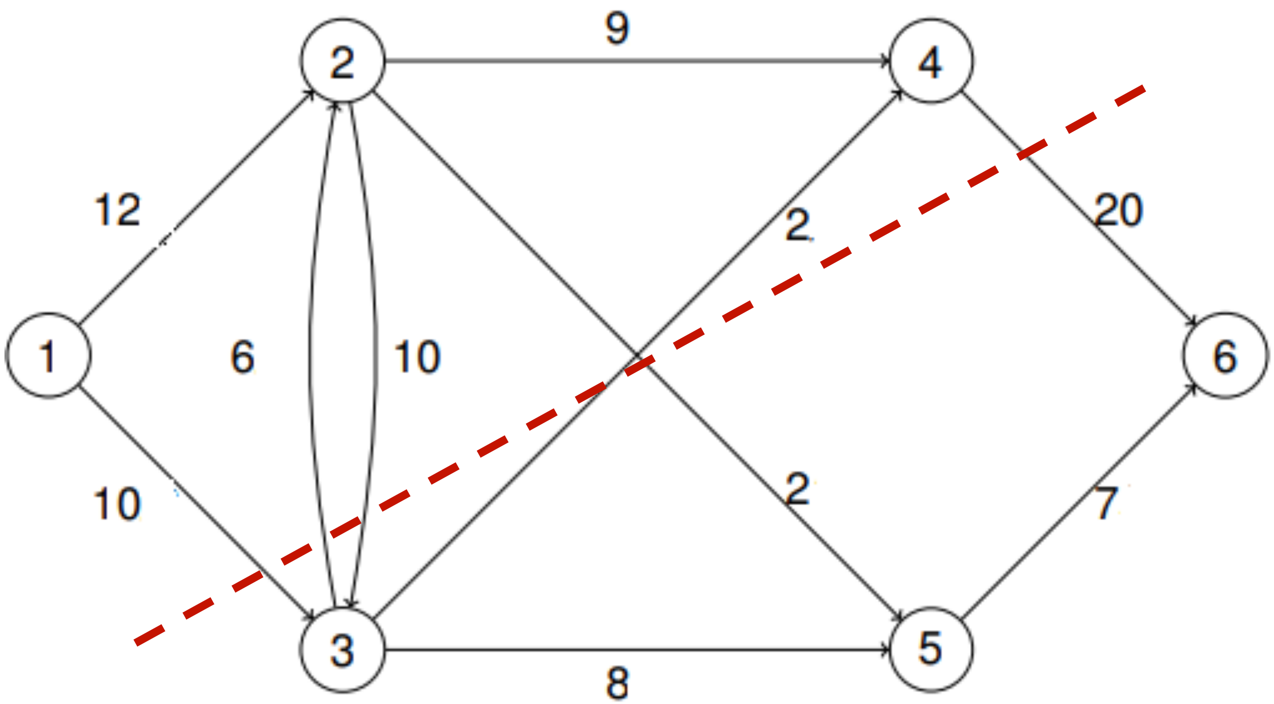


Kapazität: 27

Bisher minimalster Schnitt: 21

Max-Flow Min Cut Theorem 3.10

- Finde den minimalsten (S,T) **Schnitt** in diesem Netzwerk um die **Gesamtkapazität** zu ermitteln

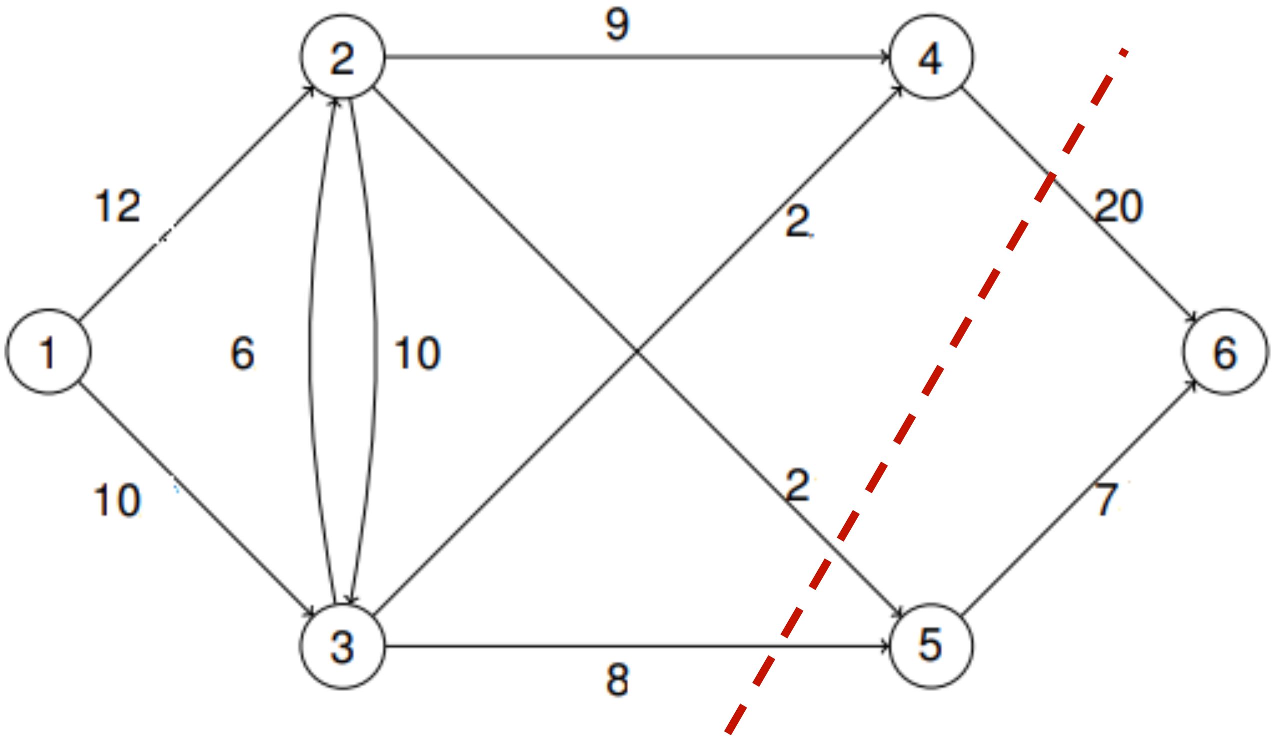


Kapazität: 42

Bisher minimalster Schnitt: 21

Max-Flow Min Cut Theorem 3.10

- Finde den minimalsten (S,T) **Schnitt** in diesem Netzwerk um die **Gesamtkapazität** zu ermitteln

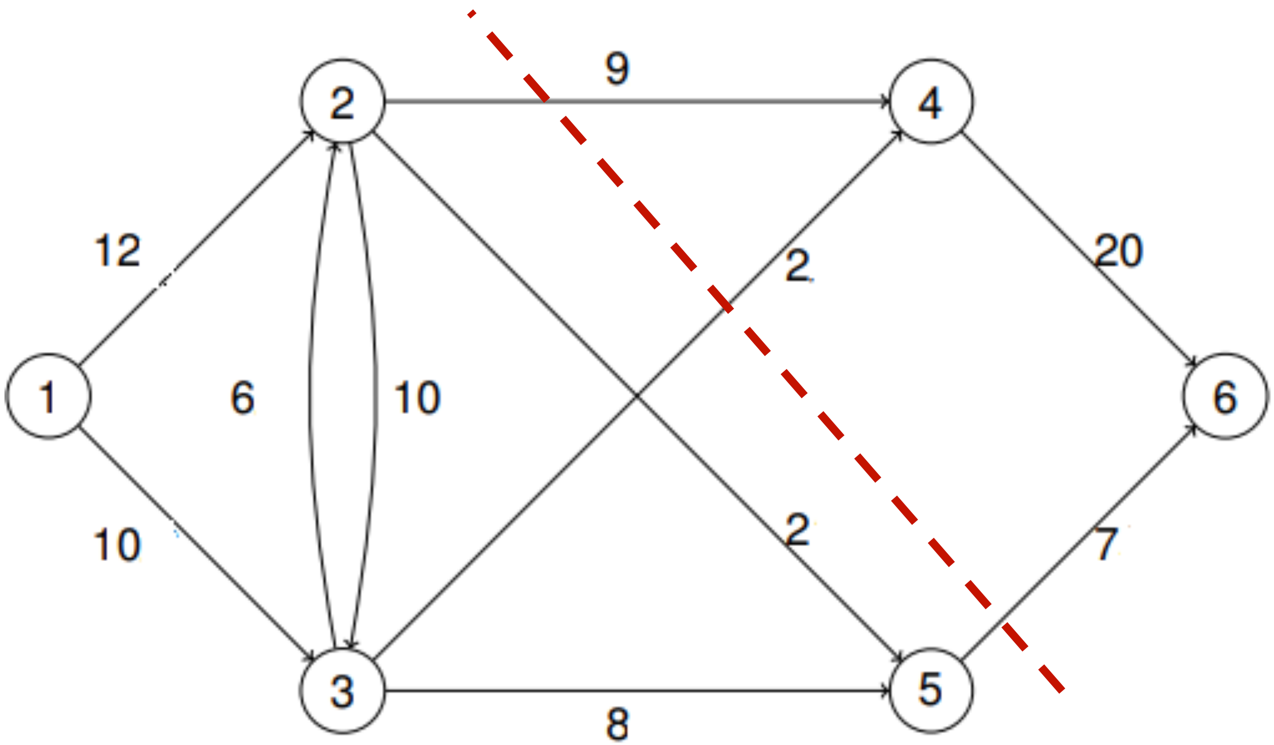


Kapazität: 30

Bisher minimalster Schnitt: 21

Max-Flow Min Cut Theorem 3.10

- Finde den minimalsten (S,T) **Schnitt** in diesem Netzwerk um die **Gesamtkapazität** zu ermitteln

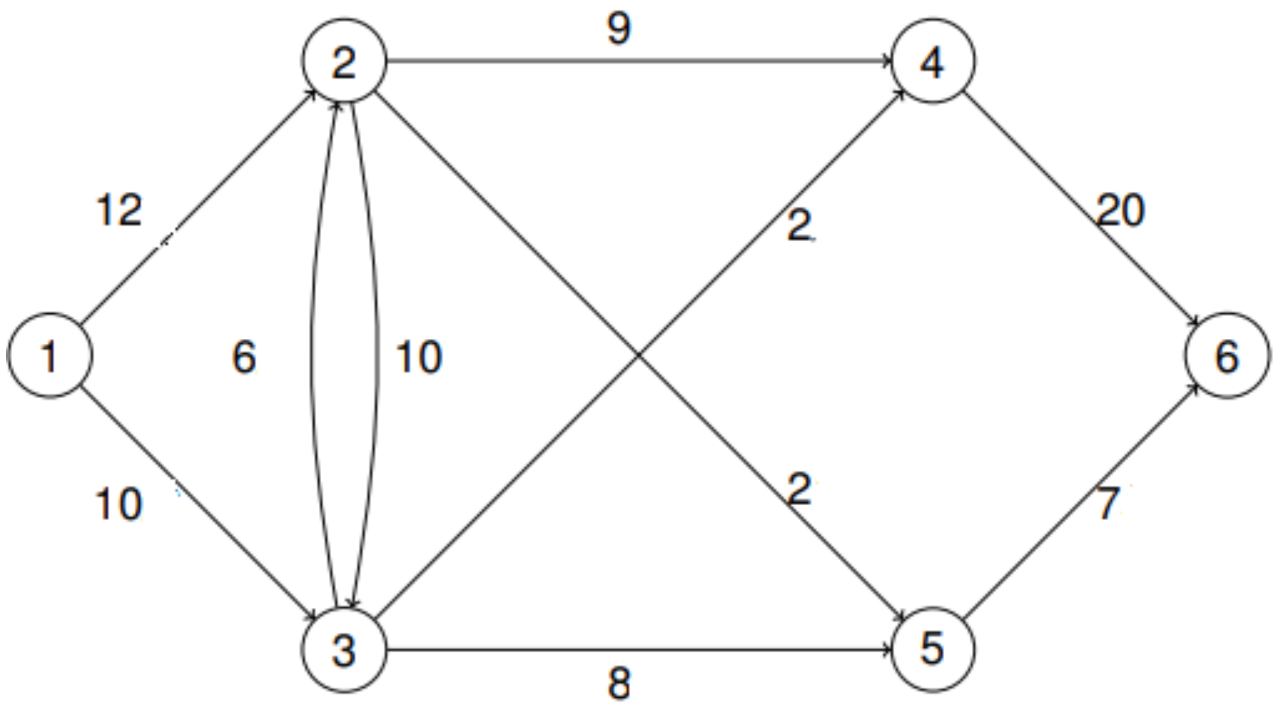


Kapazität: 18

Bisher minimalster Schnitt: 18

Max-Flow Min Cut Theorem 3.10

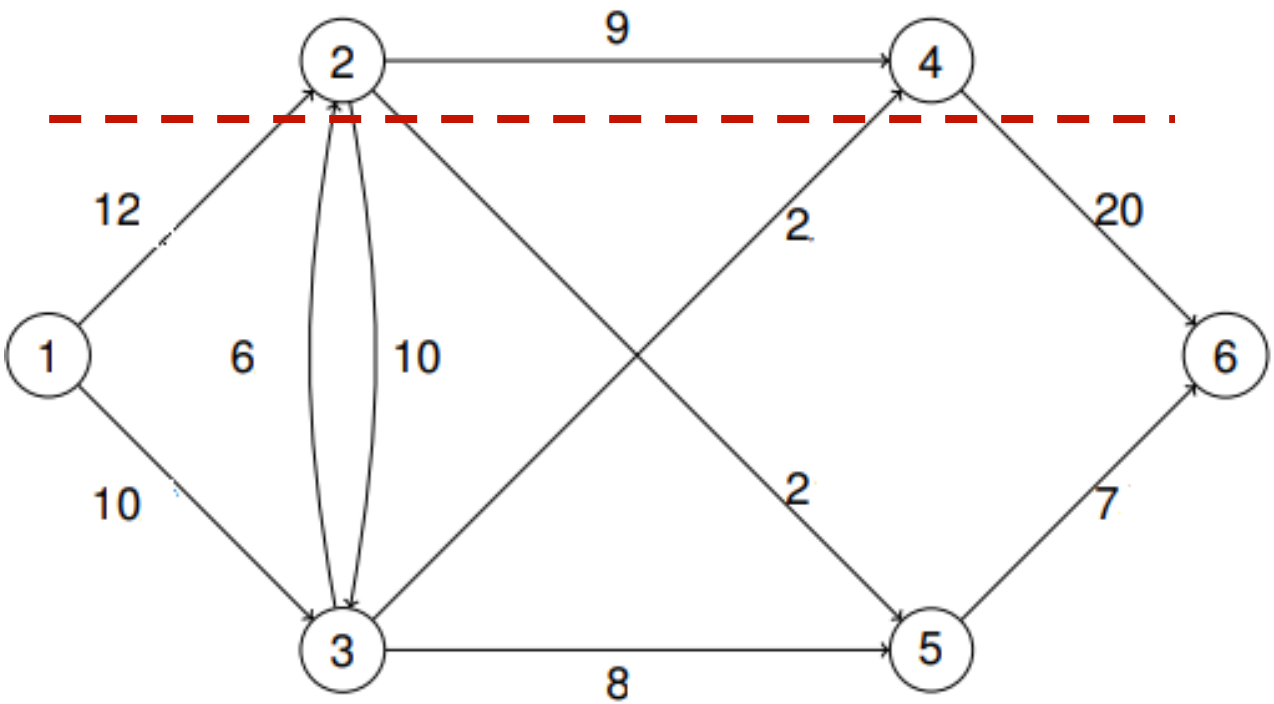
- Finde den minimalsten (S,T) **Schnitt** in diesem Netzwerk um die **Gesamtkapazität** zu ermitteln



Minimalster Schnitt: 18 = Maximaler Fluss (Gesamtkapazität)

Max-Flow Min Cut Theorem 3.10b)

- Ist dieser Schnitt gültig?



Nein, da **s** (1) und **t** (6) auf derselben Seite sind!

Kosten

12/3

Kapazität

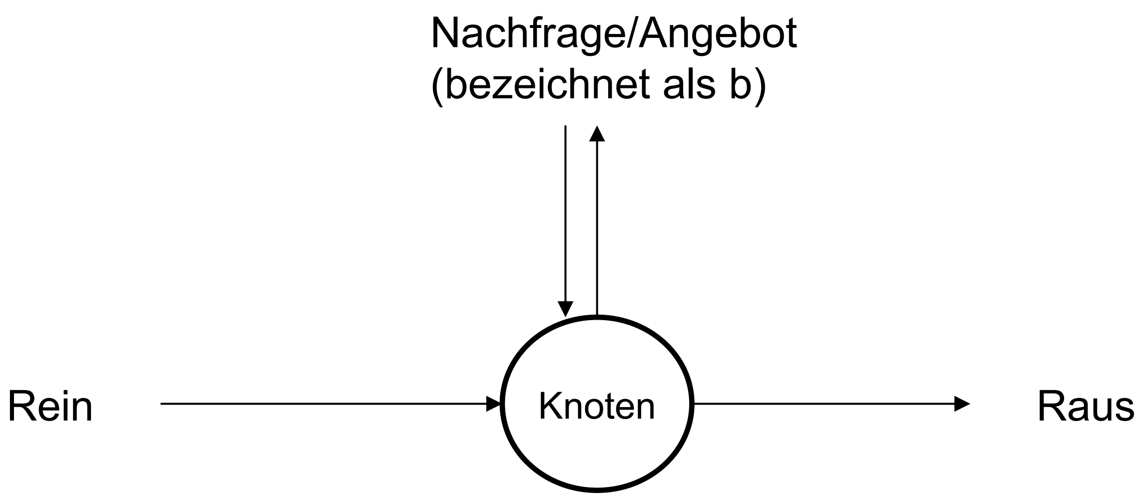
Kosten pro Einheit

- Kostenfunktion $c : E \rightarrow R+$
- Zu welchen Kosten kann eine Einheit entlang der Kante transportiert werden

Kosten

在具有成本的网络中，一些节点还具有需求/供应。
• 应用：例如，用于建模电力网络。城市对电力有需求，而发电厂则提供供应。所有需求都应以最低成本得到满足。

- In einem Netzwerk mit Kosten haben auch manche Knoten Nachfrage/Angebot
- Anwendung: z.B um Stromnetzwerke zu modellieren. Städte haben eine Nachfrage nach Strom und Kraftwerke ein Angebot. Alle Nachfragen sollen zu den minimalsten Kosten erfüllt werden.



- Die Massenbilanz Nebenbedingung muss in diesem Modell angepasst werden!

Min-Cost Flow als Optimierungsproblen 3.12

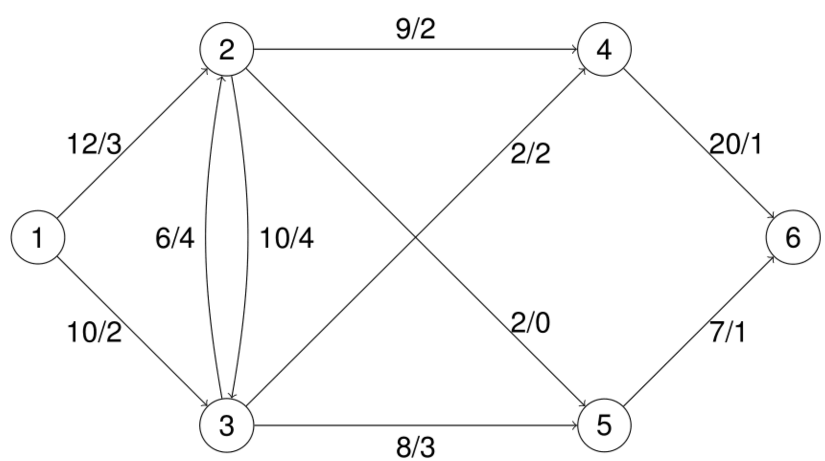
Sei (V,E,s,t,u,c) ein Flussnetzwerk. Des Weiteren seien g(i, j) ≥ 0 der Fluss von Knoten i nach Knoten j und b(i) der Fluss der im Knoten i entsteht bzw. verschwindet.

a) Stellen Sie das spezielle Problem für den gegebenen Graphen auf. Aus der Quelle 1 soll der Fluss von 12 rausfließen. 5 Einheiten davon sollen in der Senke 5 und restliche 7 in der Senke 6 verschwinden.

b) Stellen Sie das Min-Cost Flow Problem allgemein als Optimierungsproblem auf.

a) 将特定问题表述为给定图的情况。从源节点1流出的流量应为12。其中5个单位应流向汇点5，其余7个单位应流向汇点6，并在那里消失。

b) 将最小成本流问题表述为一般的优化问题。



Min-Cost Flow als Optimierungsproblen 3.12

V: Knoten

E: Kanten

i,j $\in$ V

Fluss der im Knoten i entsteht bzw. verschwindet

b(i) $\in$ R (b<0 => Nachfrage, b>0 => Angebot)

Kapazitätsfunktion

$u(i, j) \geq 0$

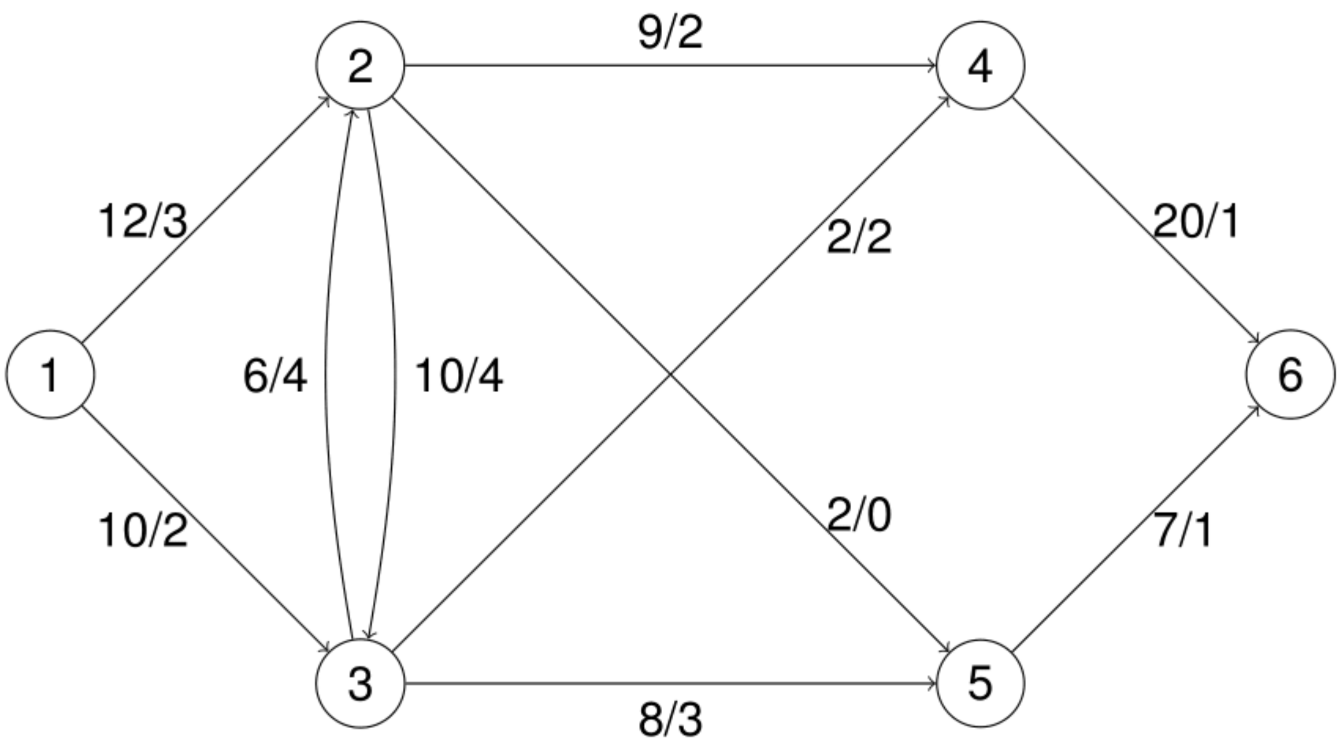
Kostenfunktion

$c(i, j) \geq 0$

Flussfunktion

$g(i, j) \geq 0$

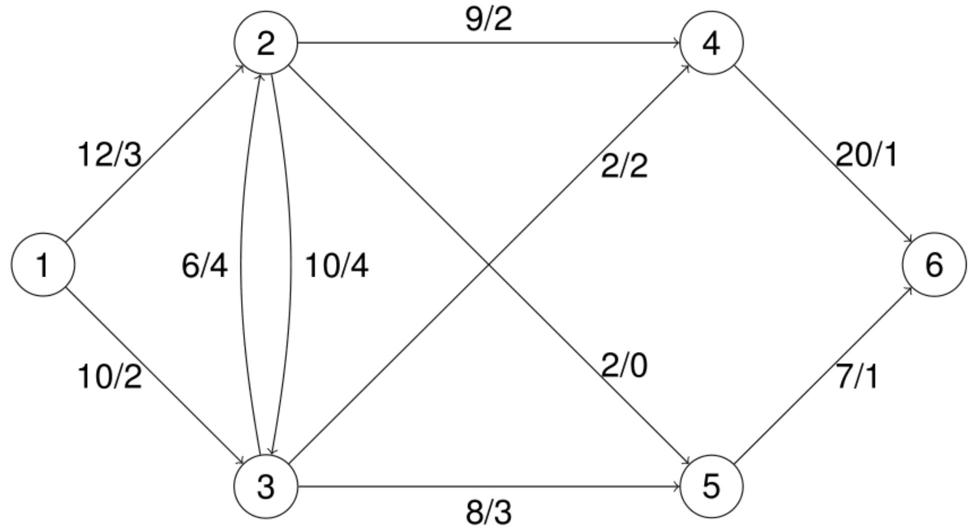
Min-Cost Flow als Optimierungsproblen 3.12



Min-Cost Flow als Optimierungsproblen 3.12

Zielfunktion

$$\min z = \sum_{(i,j)\in E} g(i,j) * c(i,j)$$



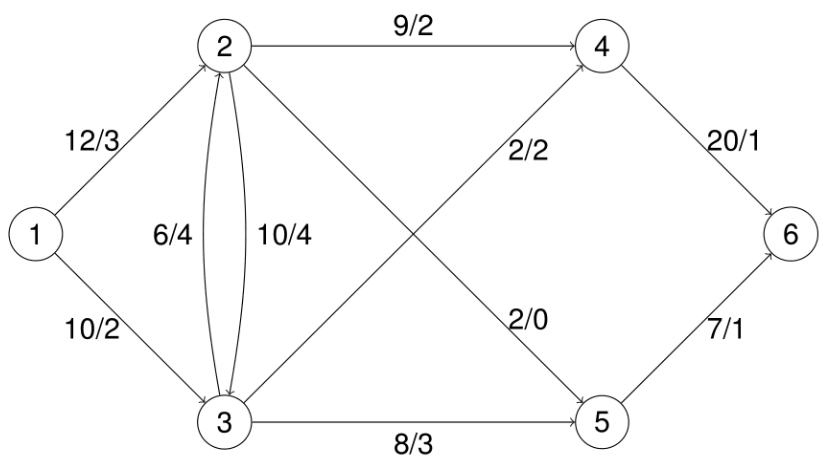
$$\min z = 3g_{1,2} + 2g_{1,3} + 4g_{2,3} + 4g_{3,2} + 2g_{2,4} + 0g_{2,5}$$
$$+2g_{3,4} \quad + 3g_{3,5} + 1g_{4,6} + 1g_{5,6}$$

Min-Cost Flow als Optimierungsproblen 3.12

Nebenbedingungen – Kapazitätsrestriktionen

$$g(i,j) \leq u(i,j) \quad \forall (i,j) \in E$$

$$g_{1,2} \leq 12$$
$$g_{1,3} \leq 10$$
$$g_{2,3} \leq 10$$
$$g_{3,2} \leq 6$$
$$g_{2,4} \leq 9$$
$$g_{2,5} \leq 2$$
$$g_{3,4} \leq 2$$
$$g_{3,5} \leq 8$$
$$g_{4,6} \leq 20$$
$$g_{5,6} \leq 7$$

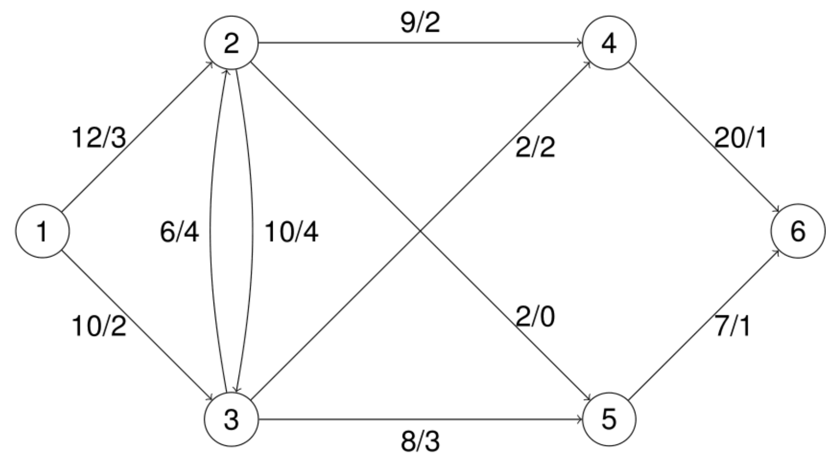


Min-Cost Flow als Optimierungsproblen 3.12

Nebenbedingungen – Massenbilanz

$$\sum_{j\in V:(i,j)\in E} g(i,j) - \sum_{j\in V:(j,i)\in E} g(j,i) = b(i) \;\; \forall\, i \in V$$

$$\begin{aligned}
g_{1,2} + g_{1,3} &= 12 \\
g_{2,3} + g_{2,4} + g_{2,5} - g_{3,2} - g_{1,2} &= 0 \\
g_{3,2} + g_{3,4} + g_{3,5} - g_{2,3} - g_{1,3} &= 0 \\
g_{4,6} - g_{2,4} - g_{3,4} &= 0 \\
g_{5,6} - g_{2,5} - g_{3,5} &= -5 \\
-g_{4,6} - g_{5,6}. &= -7
\end{aligned}$$

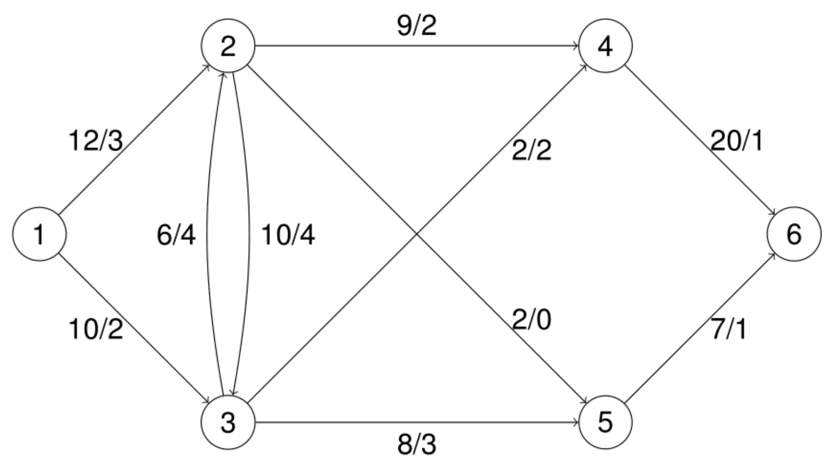


Min-Cost Flow als Optimierungsproblen 3.12

Definitionsbereich

$$g(i,j) \geq 0 \qquad \forall (i,j) \in E$$

$$E = \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(2,5),(3,2),(3,4),(3,5),(4,6),(5,6)\}$$



Min-Cost Flow als Optimierungsproblen 3.12

Zielfunktion

V: Knoten

E: Kanten

i, j ∊ V

$$\min z = \sum_{(i,j)\in E} g(i,j) * c(i,j)$$

- **Minimiere die Gesamtkosten des Flusses**
- **Gesamtkosten ergeben sich als Summe der Kosten für jede Kante**

Min-Cost Flow als Optimierungsproblen 3.12

Nebenbedingungen

V: Knoten

E: Kanten

i, j ∊ V

Kapazitätsrestriktionen

$$g(i,j) \leq u(i,j) \quad \forall (i,j) \in E$$

- **Der Fluss entlang einer Kante darf die Kapazität dieser Kante nicht überschreiten**

Min-Cost Flow als Optimierungsproblen 3.12

Nebenbedingungen

V: Knoten

E: Kanten

i, j ∊ V

Massenbilanz

$$\sum_{j \in V:(i,j) \in E} g(i,j) - \sum_{j \in V:(j,i) \in E} g(j,i) = b(i) \ \forall\, i \in V$$

- **In jedem Knoten muss genau b Einheiten Fluss produziert bzw. konsumiert werden.**

Min-Cost Flow als Optimierungsproblen 3.12

Definitionsbereich

$$g(i,j) \geq 0$$
$$u(i,j) \geq 0$$
$$c(i,j) \geq 0$$
$$b(i) \in \mathbb{R}$$

V: Knoten

E: Kanten

i, j ∊ V

Min-Cost Flow als Optimierungsproblen 3.12

V: Knoten

E: Kanten

i, j ∈ V

Allgemeine Darstellung

$$\min z = \sum_{(i,j)\in E} g(i,j) * c(i,j)$$

$$g(i,j) \;\leq\; u(i,j) \qquad \forall (i,j) \in E$$

$$\sum_{j\in V:(i,j)\in E} g(i,j) - \sum_{j\in V:(j,i)\in E} g(j,i) \quad = b(i) \qquad \forall\, i \in V$$

$$g(i,j) \;\geq\; 0$$
$$u(i,j) \geq \; 0$$
$$\mathrm{c}(i,j) \geq \; 0$$
$$b(i) \in \mathbb{R}$$

Geschenkepipeline im Kamin 3.13

当前，礼物生产正处于高峰期，礼物分发计划也在紧锣密鼓地进行。圣诞老人利用一个精密的烟囱分发系统来送出他的礼物。将礼物通过烟囱系统送出，根据不同的段落，圣诞老人将花费一定量宝贵的星尘。圣诞老人自己能包装30份礼物，但得到了小精灵的帮助，他们包装15份礼物，以及精灵的帮助，他们负责包装10份礼物。

Aktuell läuft die Produktion der Geschenke auf Hochtouren und damit auch die Planung zur Geschenkverteilung. Der Weihnachtsmann nutzt ein ausgeklügeltes Kaminverteilungssystem, um seine Geschenke auszuliefern.

Die Geschenke durch das Kaminsystem zu schicken, kostet den Weihnachtsmann je nach Abschnitt eine bestimmte Menge an wertvollem Sternenstaub.

Der Weihnachtsmann schafft es selbst nur 30 Geschenke zu verpacken, bekommt aber Hilfe von Wichteln, die 15 Geschenke verpacken, und von Elfen, die für 10 Geschenke verantwortlich sind.

Wir betrachten näher die Häuser 24, 25 und 26 in der Rentierstraße. In den zweiten Stockwerken wohnen ältere Ehepaare, die zwei Geschenke benötigen. Im ersten Stockwerk mittelgroße Familien, die 7 Geschenke bekommen sollten, und im Erdgeschoss große Familien, die 10 Geschenke brauchen.

Stellen Sie ein Optimierungsmodell auf, mit dessen Hilfe der Weihnachtsmann seinen minimalen Sternenstaubverbrauch berechnen kann. Modellieren Sie dazu zunächst das Netzwerk mit den zugehörigen Kapazitäten.

我们仔细观察了Rentierstraße中的24号、25号和26号房子。二楼住着年长的夫妻，他们需要两份礼物。一楼住着中等规模的家庭，应该得到7份礼物，地面层住着大家庭，他们需要10份礼物。

建立一个优化模型，通过该模型，圣诞老人可以计算出他的最小星尘消耗量。首先，对具有相关容量的网络进行建模。

圣诞老人可以分别给予15个礼物给小精灵和精灵，他们会帮助他。圣诞老人自己可以向所有三栋房子送礼物，小精灵只能送到24号房，精灵只能送到26号房。小精灵和精灵可以将最多20个礼物送到烟囱入口，而圣诞老人每个烟囱入口只能送15个礼物。
由于25号和26号房直接相连，从一个烟囱入口到另一个的最大传送量是10个礼物。一般来说，只能将礼物向下或者在同一楼层送达。24号和26号房各有三层，而25号只有两层（地面和一楼）。从烟囱入口到更低一层的最大传送量是20个礼物，而地面层只能接收10个礼物。如果中间还有其他楼层，那么最多可以传送15个礼物。
在房子之间存在一些秘密通道。比如，从24号房的二楼到25号房的一楼可以送15个礼物。此外，从25号房的一楼到24号房或者从26号房到25号房也有分支通道，每个通道可以容纳10个礼物。24号和26号房有一个连接的地下室，可以互相传送5个礼物。

Geschenkepipeline im Kamin 3.13

Der Weihnachtsmann kann jeweils 10 Geschenke an Wichtel und Elfen geben, die ihm dann helfen. Der Weihnachtsmann selbst kann an alle drei Häuser liefern, die Wichtel nur an Haus 24 und die Elfen nur an Haus 26. Elfen und Wichtel können jeweils maximal 20 Geschenke an den Eingang der Kamine schicken, der Weihnachtsmann hingegen kann an jeden Kamineingang nur 15 Geschenke schicken.

Da die Häuser 25 und 26 direkt verbunden sind, ist es möglich maximal 10 Geschenke vom Eingang des einen Kamins zum Eingang des anderen zu transportieren. Generell ist es nur möglich Geschenke nach unten oder auf dem gleichen Stockwerk zu versenden. Haus 24 und 26 haben jeweils drei Stockwerke, Haus 25 jedoch nur zwei (EG und 1. Stockwerk). Es ist möglich vom Kamineingang zum nächstunteren Stockwerk 20 Geschenke zu schicken. In das Erdgeschoss können 10 Geschenke gelangen. Sollten dazwischen noch Stockwerke liegen, können dort 15 Geschenke angelangen.

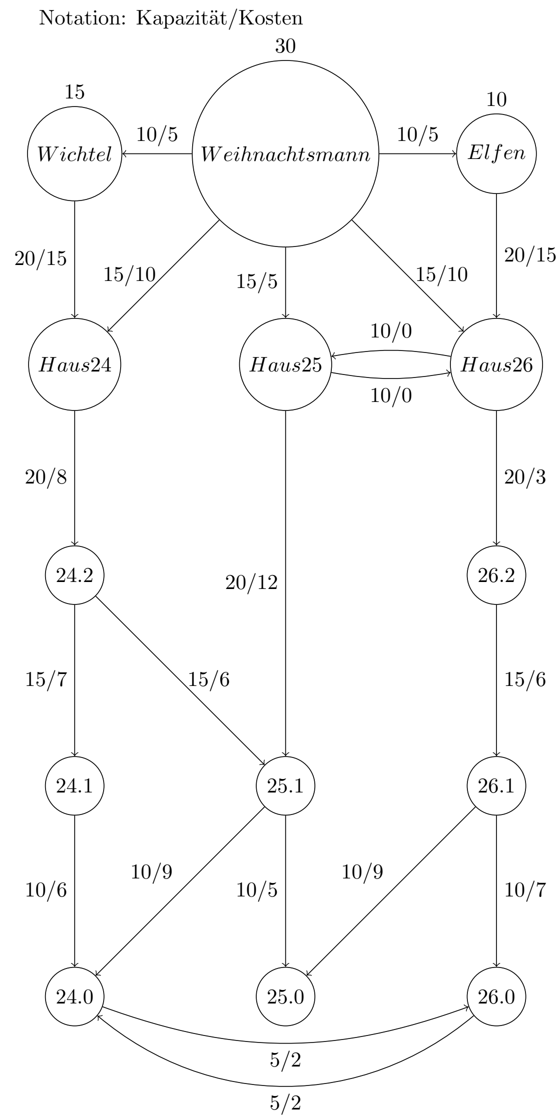
Zwischen den Häusern gibt es einige Geheimgänge. So ist es möglich vom 2. Stock in Haus 24 zum 1. Stock in Haus 25 15 Geschenke zu schicken. Außerdem gibt es Abzweigungen vom 1. Stock zum EG in Haus 25 zu 24, sowie Haus 26 zu Haus 25 mit jeweils Platz für 10 Geschenke. Haus 24 und 26 haben einen verbundenen Keller, durch den jeweils 5 Geschenke hin und her transportiert werden können.

Geschenkepipeline im Kamin 3.13

Der Weihnachtsmann hat sich in der folgenden Tabelle vermerkt wie viel Sternenstaub ihn die Benutzung der jeweiligen Wege kostet:

	Wei	Wi	Elf	24K	25K	26K	24.2	24.1	24.0	25.1	25.0	26.2	26.1	26.0
Wei	0	5	5	10	5	10	0	0	0	0	0	0	0	0
Wi	0	0	0	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Elf	0	0	0	0	0	15	0	0	0	0	0	0	0	0
24K	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0
25K	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	0	0	0	0
26K	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0
24.2	0	0	0	0	0	0	0	7	0	6	0	0	0	0
24.1	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0
24.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
25.1	0	0	0	0	0	0	0	0	9	0	5	0	0	0
25.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0
26.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	0	0	7
26.0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0

Geschenkepipeline im Kamin 3.13 - Netzwerk



Geschenkepipeline im Kamin 3.13 - Zielfunktion

$$
\begin{aligned}
\min z = {} & 5g_{Wei,Wi} + 5g_{Wei,Elf} + 10g_{Wei,24K} + 5g_{Wei,25K} + 10g_{Wei,26K} \\
& +15g_{Wi,24K} \\
& +15g_{Elf,26K} \\
& +8g_{24K,24.2} \\
& +0g_{25K,26K} + 12g_{25K,25.1} \\
& +0g_{26K,25K} + 3g_{26K,26.2} \\
& +7g_{24.2,24.1} + 6g_{24.2,25.1} \\
& +6g_{24.1,24.0} \\
& +2g_{24.0,26.0} \\
& +9g_{25.1,24.0} + 5g_{25.1,25.0} \\
& +6g_{26.2,26.1} \\
& +9g_{26.1,25.0} + 7g_{26.1,26.0} \\
& +2g_{26.0,24.0}
\end{aligned}
$$

Geschenkepipeline im Kamin 3.13

Nebenbedingungen – Kapazitätsrestriktionen

$$g(i,j) \leq u(i,j)$$

$$u(i,j) =$$

	Wei	Wi	Elf	24K	25K	26K	24.2	24.1	24.0	25.1	25.0	26.2	26.1	26.0
Wei	0	10	10	15	15	15	0	0	0	0	0	0	0	0
Wi	0	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Elf	0	0	0	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	0
24K	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0
25K	0	0	0	0	0	10	0	0	0	20	0	0	0	0
26K	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	20	0	0
24.2	0	0	0	0	0	0	0	15	0	15	0	0	0	0
24.1	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0
24.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
25.1	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	10	0	0	0
25.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0
26.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	10
26.0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0

Geschenkepipeline im Kamin 3.13 - Massenbilanz

$$g_{Wei,Wi} + g_{Wei,Elf} + g_{Wei,24K} + g_{Wei,25K} + g_{Wei,26K} = 30$$
$$g_{Wi,24K} - g_{Wei,Wi} = 15$$
$$g_{Elf,26K} - g_{Wei,Elf} = 10$$
$$g_{24K,24.2} - g_{Wei,24K} - g_{Wi,24K} = 0$$
$$g_{25K,25.1} + g_{25K,26K} - g_{Wei,25K} - g_{26K,25K} = 0$$
$$g_{26K,25K} + g_{26K,26.2} - g_{25K,26K} - g_{Wei,26K} - g_{Elf,26K} = 0$$
$$g_{24.2,24.1} + g_{24.2,25.1} - g_{24K,24.2} = -2$$
$$g_{24.1,24.0} - g_{24.2,24.1} = -7$$
$$g_{24.0,26.0} - g_{26.0,24.0} - g_{24.1,24.0} - g_{25.1,24.0} = -10$$
$$g_{25.1,24.0} + g_{25.1,25.0} - g_{25K,25.1} - g_{24.2,25.1} = -7$$
$$-g_{26.1,25.0} - g_{25.1,25.0} = -10$$
$$-g_{26K,26.2} + g_{26.2,26.1} = -2$$
$$g_{26.1,25.0} + g_{26.1,26.0} - g_{26.2,26.1} = -7$$
$$g_{26.0,24.0} - g_{24.0,26.0} - g_{26.1,26.0} = -10$$

Fragen zum Tutorium?