2. Zeitkontinuierliche Signale

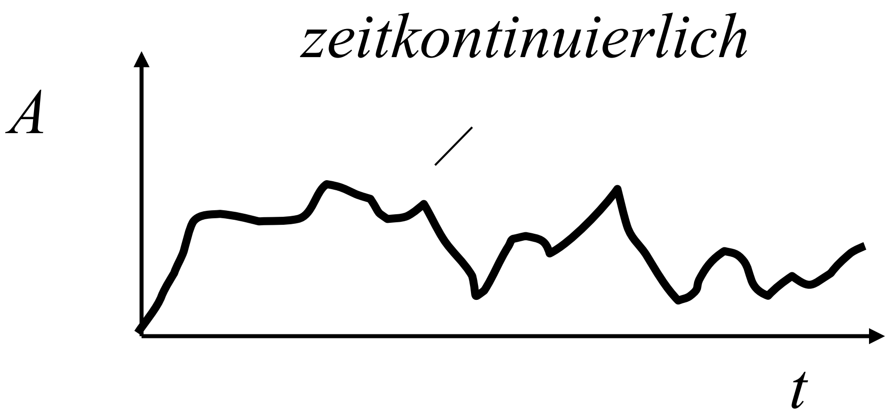
Prof. Thomas Sikora

Fachgebiet Nachrichtenübertragung

2.1 Signalarten

*Ein Signal u(t) ist zeitkontinuierlich, existiert also für alle Zeiten t $\in$ **R**, wenn die unabhängige Variable t kontinuierlich ist.*

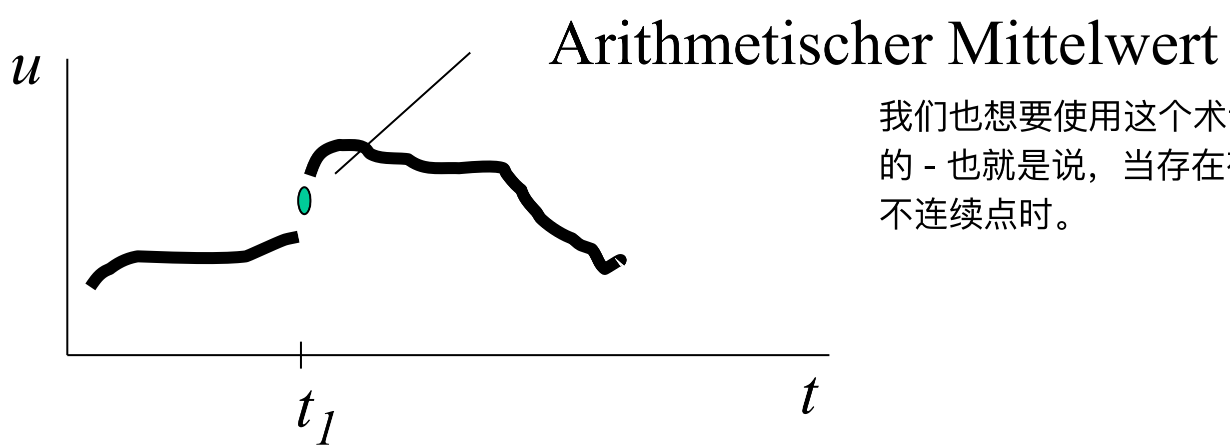
一个信号 u(t) 是时间连续的，也就是说，对于所有时间 t ∈ R， 如果独立变量 t 是连续的，则信号存在。



2.1 Signalarten

Wir wollen diesen Begriff auch verwenden, wenn das Signal nur stückweise kontinuierlich ist

- *d.h. wenn eine endliche Zahl oder eine abzählbar unendliche Zahl von Diskontinuitäten vorliegt.*



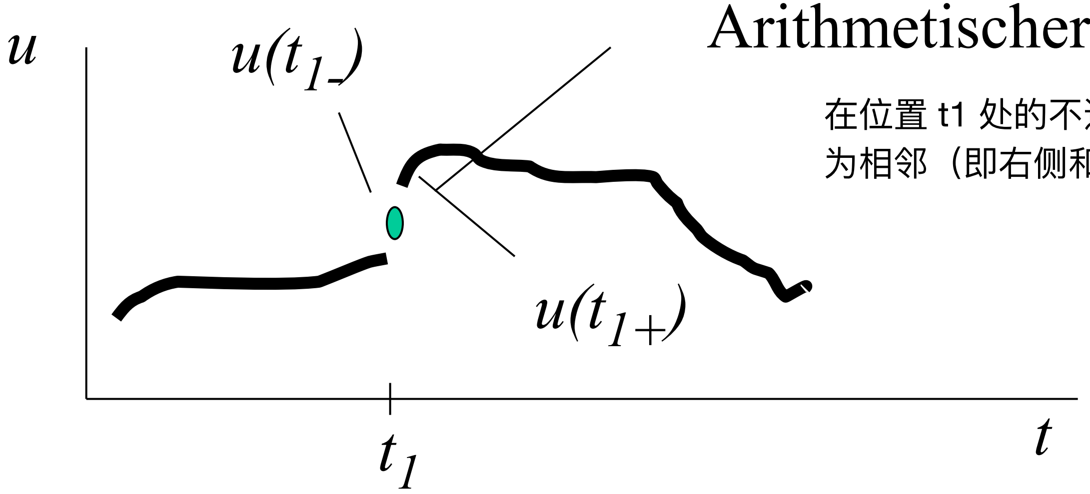
我们也想要使用这个术语，即使信号只是分段连续的 - 也就是说，当存在有限数量或可数无限数量的不连续点时。

2.1 Signalarten

Der Amplitudenwert $u(t_1)$ einer Diskontinuität an der Stelle t_1 wird definiert als Mittelwert der benachbarten (d.h. rechts- und linksseitigen Grenz-) Werte:

Arithmetischer Mittelwert

在位置 t1 处的不连续点的幅度值 u(t1) 被定义为相邻（即右侧和左侧的极限）值的平均值：



$$u(t_1) = \frac{u(t_{1-}) + u(t_{1+})}{2} \qquad (2.1)$$

Unterscheidung von Signalen

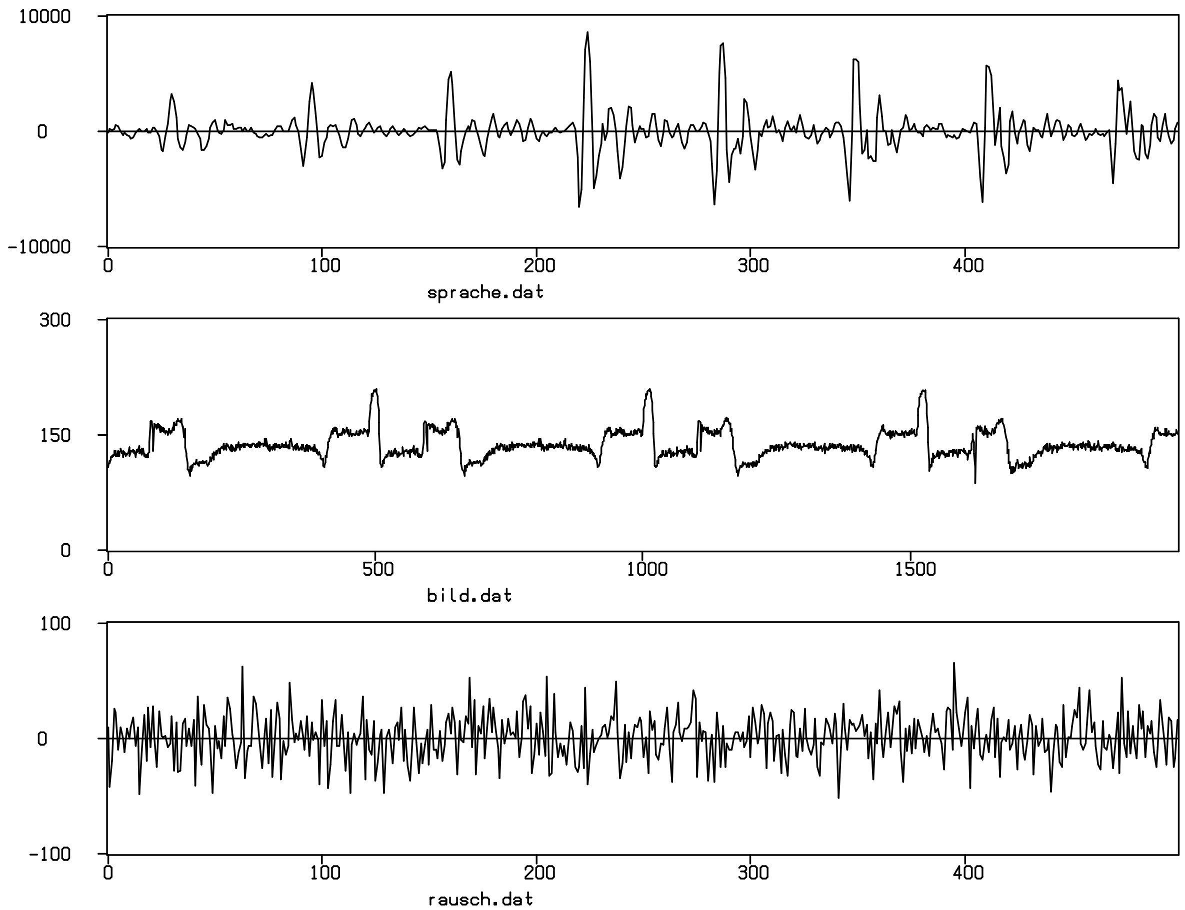
- ***Typen:***
  - ***Determiniert***
  - ***Stochastisch***
- ***Kennwerte:***
  - ***Mittelwert***
  - ***Varianz***
- ***Allg:***
  - ***Energiesignale***
  - ***Leistungssignale***
  - ***Periodische Signale***

信号的区分:
- 类型:
  - 确定性信号
  - 随机性信号
- 特征:
  - 平均值
  - 方差
- 总体:
  - 能量信号
  - 功率信号
  - 周期信号

我们将仅讨论幅度连续的信号，然后再谈论连续信号。

Wir werden nur amplitudenkontinuierliche Signale behandeln und dann von *kontinuierlichen Signalen* sprechen.

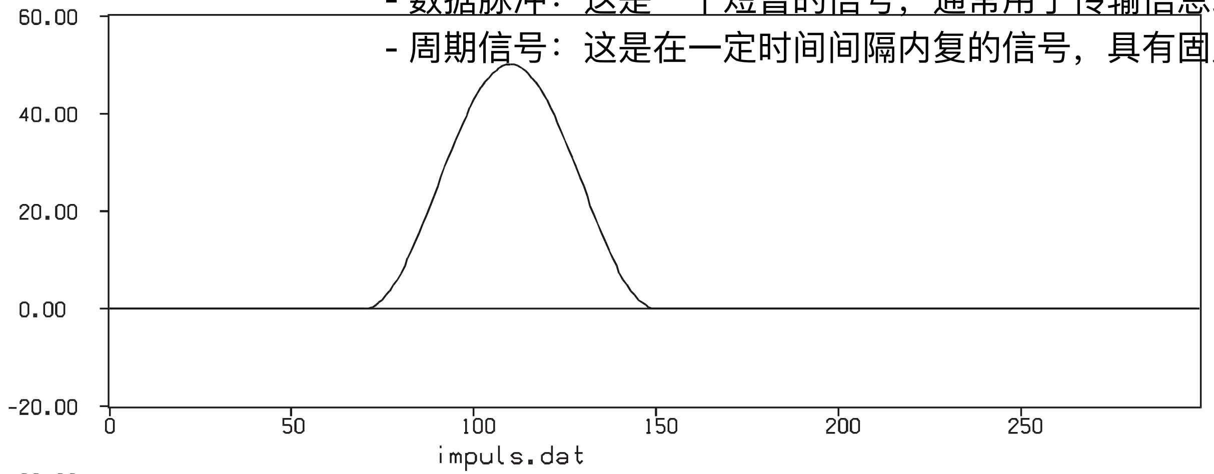
Stochastische Signale (Sprach-, Sensor-, Rauschsignal)

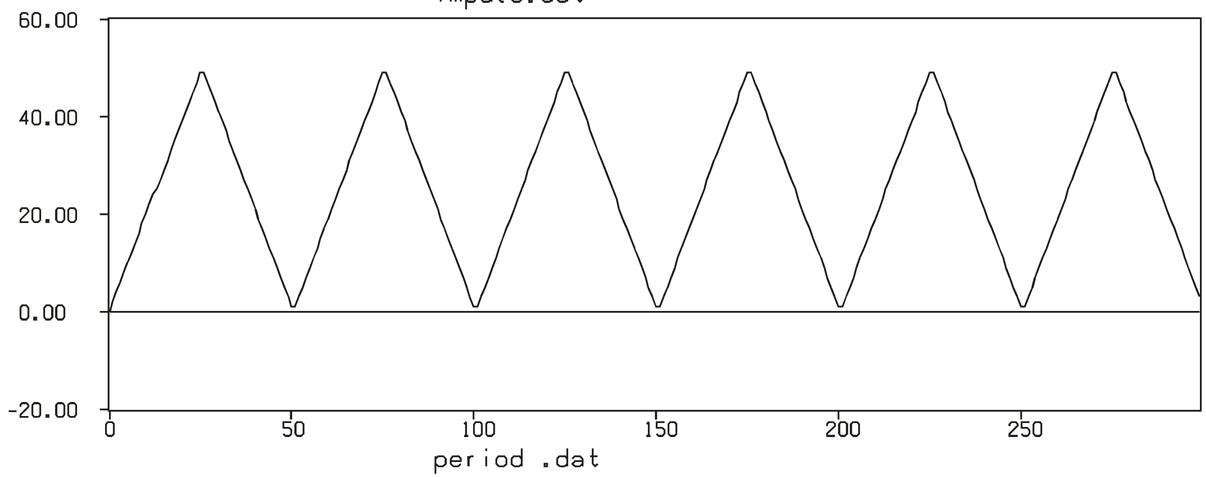


Determinierte Signale (Datenimpuls und periodisches Signal)

确定信号包括数据脉冲和周期信号。

- 数据脉冲：这是一个短暂的信号，通常用于传输信息或标记特定事件。
- 周期信号：这是在一定时间间隔内复的信号，具有固定的周期性质。

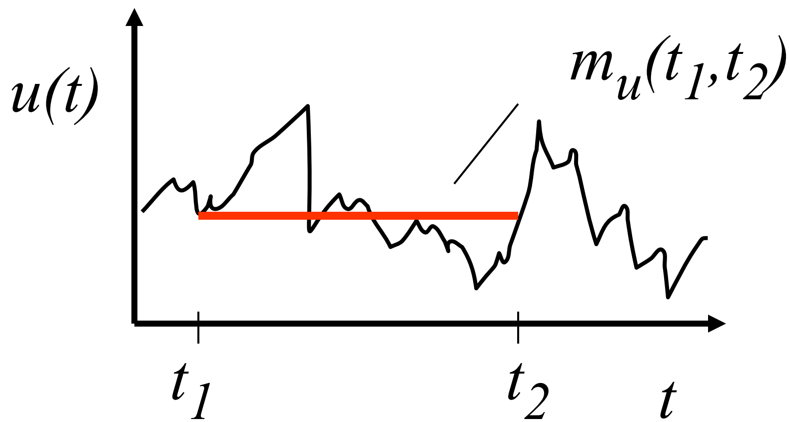




2.1.1 Arithmetischer Mittelwert

Der arithmetische Mittelwert eines Signals u(t) in einem Zeitbereich (t_1,t_2) ist

$$m_u(t_1,t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u(t)\,dt$$



2.1.1 Arithmetischer Mittelwert

Im Gesamtbereich des Signals ist der arithmetische Mittelwert mit $t_2 = t_1 + T$

$$m_u := \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T u(t)\, dt$$

对于周期信号，其周期性质允许我们在其周期范围内确定算术平均值 mu。

T = beliebiger Ausschnitt

T = 任意区间

Bei periodischen Signalen kann der arithmetische Mittelwert m_u in seinem Perioditätsintervall bestimmt werden.

Energiesignale

Energiesignale haben eine endliche Energie, ihr Wert im Intervall (t_1,t_2) ist

$$W_u(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} u^2(t)\,dt$$

Die Gesamtenergie ist entsprechend

$$W_u = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t)\,dt < \infty$$

Die mittlere Leistung (siehe nächster Abschnitt) ist bei Energiesignalen Null:

$$P_u = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T u^2(t)\, dt = 0$$

T = beliebiger Ausschnitt

Mittelwert des Signalquadrates

Dimensionen

In der systemtheoretischen Literatur werden meist alle Größen dimensionslos angesetzt, auch die Zeitgrößen.

Eine Zeitfunktion in der Form

$u(t) = e^{-t}$

entspricht einer Funktion

$u(t) = e^{-t/T}$ mit T = 1s.

第一张图片讲述的是维度（Dimensionen）在系统理论文献中的处理方式。通常，大多数的量在系统理论中都是被假设为无量纲的，包括时间量。图片中给出了一个时间函数的例子：$u(t) = e^{-t}$，表示这个函数等同于$u(t) = e^{-t/T}$ 其中T是时间常数，取值为1秒。函数$u(t)$被用作一个无量纲的量，这样可以自由地将它与电压值、亮度值、血压或股票指数等量相关联。

Wir verwenden die Funktion u(t) als dimensionslose´Größe und sind dann frei, dem Signal u(t) einen Spannungswert, einen Helligkeitswert, einen Blutdruck oder einen Aktienindex zuzuordnen.

第二张图片说明，在系统理论中，计算时必须预先定义量的维度。如果$u(t)$是一个电压（单位伏特）的时间函数，它在电阻R（单位欧姆，Ω = V/A）上出现，那么能量的单位是伏特-安培秒，即瓦特秒（W·s）。这里提到了能量的一个表达式，即：

In der Systemtheorie muß also bei Berechnungen vorab die Dimension der Größen festgelegt werden.

Ist u(t) beispielsweise ein Spannungsverlauf der Spannung (Dimension Volt), die an einem Widerstand *R* (Dimension Ω = V/A) auftritt, so hat die Energie die Dimension VAs = Ws:

$$W_u^* = \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t)\, dt < \infty \qquad (2.7)$$

这表示如果积分的结果是有限的，那么我们可以说电阻上的电压或电流的时间函数描述了一个能量。这个“电气技术”能量与系统理论中使用的表达式是一致的，除了一个1/R的缩放因子。如果u(t)描述一个电压或电流的变化，我们就可以把这个表达式称为与R=1Ω相关的能量。

Offensichtlich stimmt diese "elektrotechnische" Energie mit dem in der Systemtheorie verwendeten Ausdruck bis auf einen Skalierungsfaktor 1/R überein. Wenn u(t) einen Spannungs- oder Stromverlauf beschreibt, können wir W_u auch die auf R=1Ω bezogene Energie nennen.

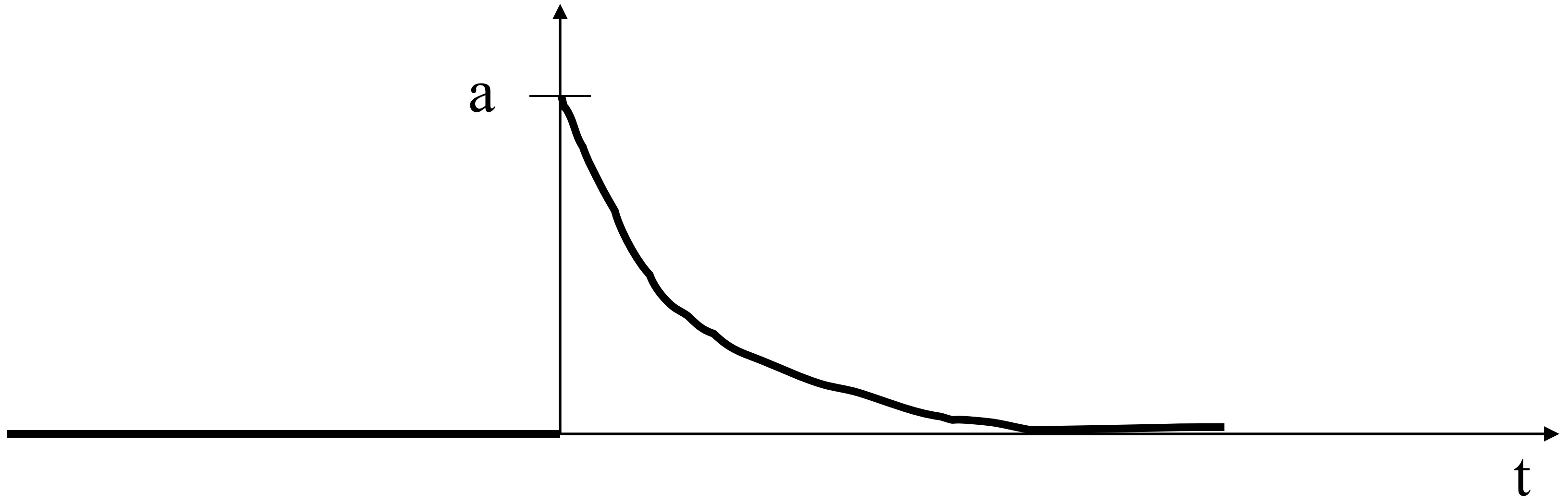
Beispiel: Rechtsseitiger Exponentialimpuls

右侧指数脉冲

一个信号可以是无限延伸的，但仍然可以是一个能量信号；所以

Ein Signal kann unendlich ausgedehnt, trotzdem aber ein Energiesignal sein; so hat

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ a \cdot e^{-\frac{5t}{T}} & \text{sonst} \end{cases} \qquad (2.8)$$



Beispiel: Rechtsseitiger Exponentialimpuls

Energie für a = 2 V und T = 1 µs

Wu ist die an R = 1Ω auftretende Energie.

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ a \cdot e^{-\frac{5t}{T}} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$W_u = a^2 \int_{-0}^{\infty} e^{-10\frac{t}{T}}\, dt = \frac{a^2 T}{10} = 0{,}4 \cdot 10^{-6}\ V^2 s$$

An einem Widerstand R = 8kΩ tritt somit eine Energie Wu*= 0,05 nWs auf.

3.1.2. Leistungssignale

<u>Leistungssignale</u> haben mit der Augenblicksleistung $P_u(t) = u^2(t)$ eine <u>*endliche mittlere*</u> Leistung.

Im Zeitintervall (t_1,t_2) ist sie

(2.10)

$$P_u(t_1,t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} P_u(t)\,dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u^2(t)\,dt < \infty$$

(2.11)

$$\sigma_u^2(t_1,t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[u(t) - m_u(t_1,t_2)\right]^2 dt$$

3.1.2. Leistungssignale

Durch Grenzwertbildung erhält man die Werte P_u und $\sigma_u{}^2$:

$$P_u = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T u^2(t)\, dt$$

$$\sigma_u^2 = P_u - m_u^2$$

- Die Energie dieses Leistungssignals ist unendlich groß ($W_u \to \infty$).

- Die positive Quadratwurzel der mittleren Leistung ist der *Effektivwert* des Signals.

3.1.2. Leistungssignale

$$P_u(t_1,t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} P_u(t)\,dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} u^2(t)\,dt < \infty$$

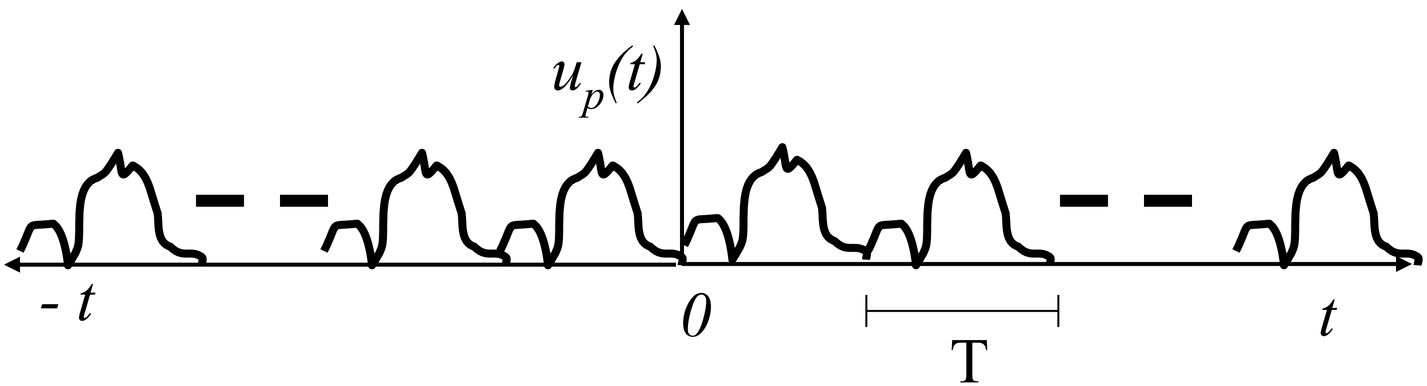
$$P_u = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T u^2(t)\,dt$$

Bei endlichem Intervall (t_1,t_2) können $P_u\,(t_1,t_2)$ und $\sigma_u^{\,2}\,(t_1,t_2)$ als Schätzwerte der wahren Werte interpretiert werden.

Leistungssignale sind alle periodischen Zeitsignale, aber auch stochastische Signale (Quellensignale, Rauschsignale), denn diese werden i. A. als (zeitlich) unendlich ausgedehnt angenommen.

2.1.4. Periodische Signale

Periodische Signale $u_p(t)$ stellen einen Sonderfall von Leistungssignalen dar.



$$\mathbf{u_p(t) := u_p(t+T)}$$

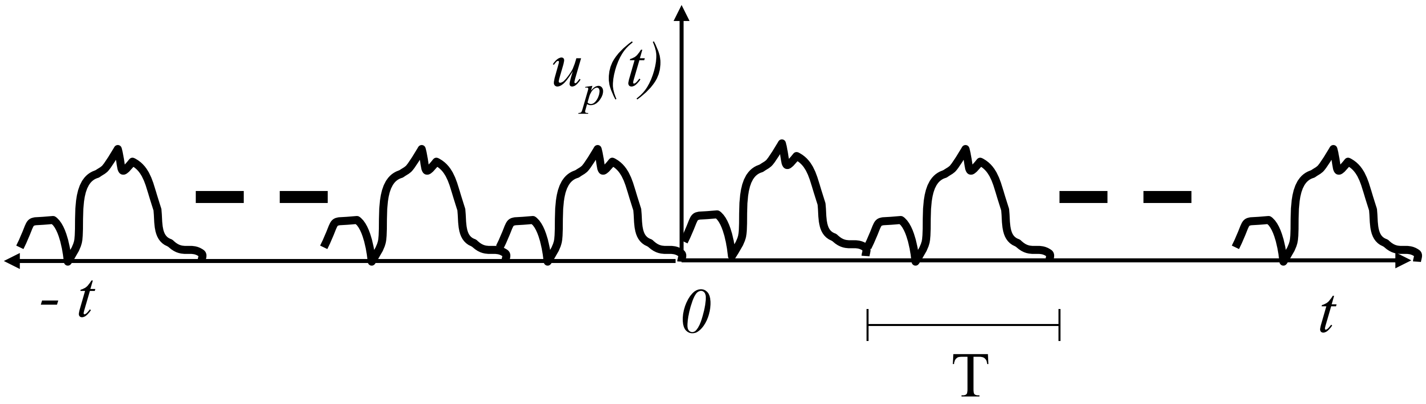
T: *Periodizitätsintervall*

$$f_p := \frac{1}{T}$$

[1/s][Hz]

Grundfrequenz

Mittelwert und Leistung eines periodischen Signals



(2.16)

$$m_u := \frac{1}{T}\int_T u_p(t)\,dt$$

$$P_u := \frac{1}{T}\int_T u_p^2(t)\,dt$$

Von den absoluten Zeitpunkten unabhängig

2.1.5. Zeittransformierte Signale

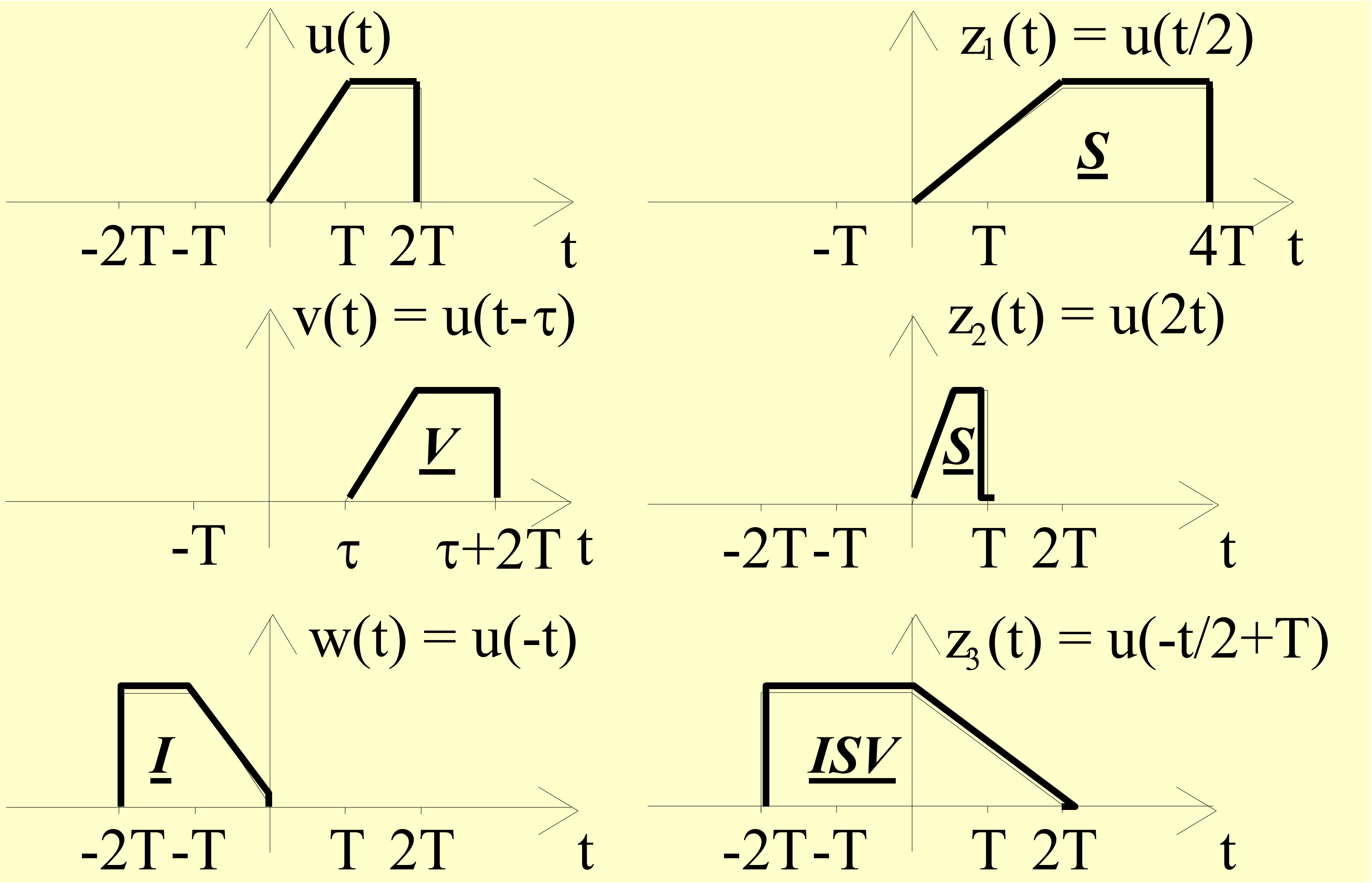
Aus einem Signal u(t) wird durch

Zeitverschiebung um τ ein Signal $v(t) = u(t-\tau)$,

Zeitinversion ein Signal $w(t) = u(-t)$

Zeitskalierung um den Faktor α ein Signal $z(t) = u(\alpha t)$.

2.1.5. Zeittransformierte Signale



2.2. Elementarsignale

idealisierte, technisch zumindest näherungsweise erzeugbare Signale

- *für Analyse und Messung linearer Übertragungssysteme von Bedeutung*

2.2. 基本信号
理想化的信号，至少在技术上是可以近似生成的
对于线性传输系统的分析和测量具有重要意义

2.2.1. Sinusförmige Zeiger

2.2.1. 正弦波指数
在电气工程中，正弦波信号扮演着重要的角色：
(a) 因为它们在技术上很容易产生

Sinusförmige Signale spielen in der Elektrotechnik eine herausragende Rolle

(b) 因为正如我们将在接下来看到的那样，在通过线性系统时它们的形态不会改变。
• 经过微分操作后，正弦波信号的形态不会改变
• 相同频率的正弦波信号的加法将再次产生一个正弦波信号

(a) weil sie sich technisch einfach erzeugen lassen

(b) weil sie, wie wir noch sehen werden, beim Durchlaufen linearer Systeme ihre Form nicht ändern.

- sinusförmige Signale ändern nach Differentiationsvorgängen ihre Form nicht
- eine Addition von sinusförmigen Signalen gleicher Frequenz ergibt wieder ein sinusförmiges Signal

2.2.1. Sinusförmige Zeiger

Cosinussignal der Kreisfrequenz ω_0 und mit Scheitelwert $\hat{u}$ in der Form 余弦信号的圆频率为ω_0，峰值为$\hat{u}$，表达式为

$$u(t) = \hat{u}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad (2.17)$$

$\omega_0 = 2\pi f_0 =$ *Kreisfrequenz*

$\varphi_0 =$ *Nullphasenwinkel*

- Die *Frequenz* $f_0 = \omega_0 / 2\pi$ gibt die Zahl der sinusförmigen Schwingungen je Sekunde an.
- Das *Periodizitätsintervall* ist $T_0 = 1/f_0$.

Exponentialdarstellungen

$$u(t) = \hat{u}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{\hat{u}}{2}\left[e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} + e^{-j(\omega_0 t + \varphi_0)}\right] \qquad (2.18)$$

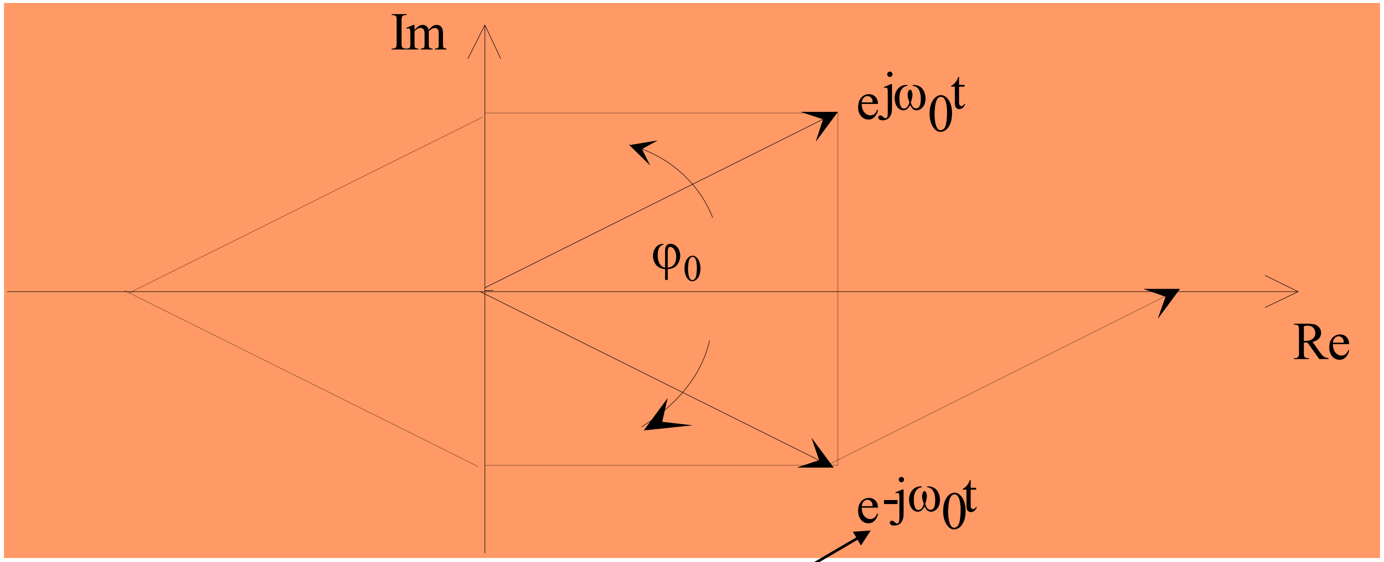
$\exp(j\omega_0 t)$ und $\exp(-j\omega_0 t)$

erlaubt eine Interpretation durch zwei gegenläufige Zeiger

exp(iwt) 和 exp(-jwt) 可以通过两个相反的矢量进行解释，从而引入了负频率的概念。

führt damit auf die Einführung *negativer* Frequenzen

$$u(t) = \hat{u}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{\hat{u}}{2}\left[e^{j(\omega_0 t+\varphi_0)} + e^{-j(\omega_0 t+\varphi_0)}\right]$$



$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \textit{Kreisfrequenz} = 2\pi/T_0$$

Konjugiert komplexe Form

$$u(t) = \hat{u}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{\hat{u}}{2}\left[e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} + e^{-j(\omega_0 t + \varphi_0)}\right]$$

第三张图片进一步展示了这个余弦信号的复数形式，将其表示为一个复数振幅U的实部。这里的U是一个复数，它的绝对值表示信号的振幅，其相角表示信号的相位ϕ_0。公式中的U^*代表U的共轭复数，即振幅不变，但相位反向。将U和U^*各自乘以$e^{j(\omega_0 t)}$和$e^{-j(\omega_0 t)}$后再相加，仍然可以得到原来的余弦信号。

$$u(t) = \hat{u}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{U}{2} e^{j(\omega_0 t)} + \frac{U^*}{2} e^{-j(\omega_0 t)}$$

$U = |U|\, e^{j\varphi 0} =$ *komplexe Amplitude*

konjugiert komplexer Wert $= U^* = |U|\, e^{-j\varphi 0}$

Mittlere Leistung

$$P_u = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} u^2(t)dt = \frac{\hat{u}^2}{2}$$

- Die positive Quadratwurzel von P_u nennen wir den *Effektivwert* des Signals.
- Der Mittelwert ist Null.

2.2.2. Exponentialfunktionen

$u(t) = e^{st}$ (2.21)

und bezeichnen *s* als *komplexe Frequenz:*

$s = \sigma + j\omega$ (2.22)

$u(t)=e^{st}$ sind i.a. komplexe Signale

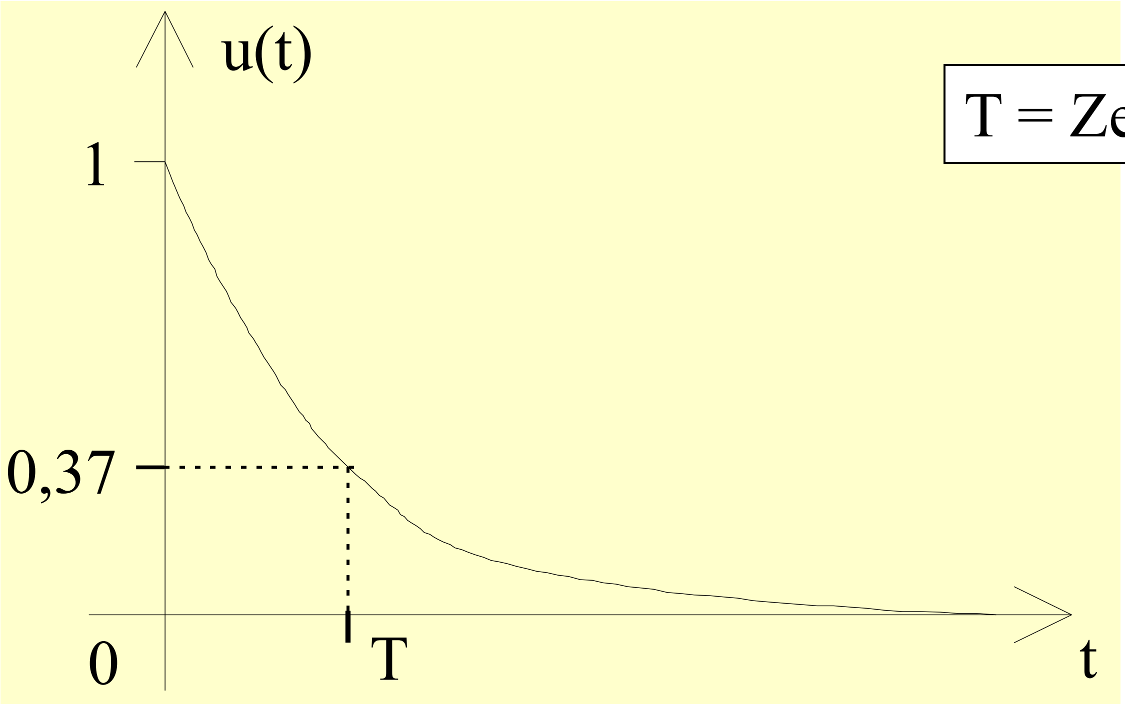
Sonderfall: $\omega = 0$
reelle Exponentialfunktionen

$\sigma < 0$ --- Amplitude zeitlich abnehmend

$\sigma > 0$ --- Amplitude zeitlich zunehmend

Beispiel: Rechtsseitige Exponentialfunktion

$$u(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t}{T}} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

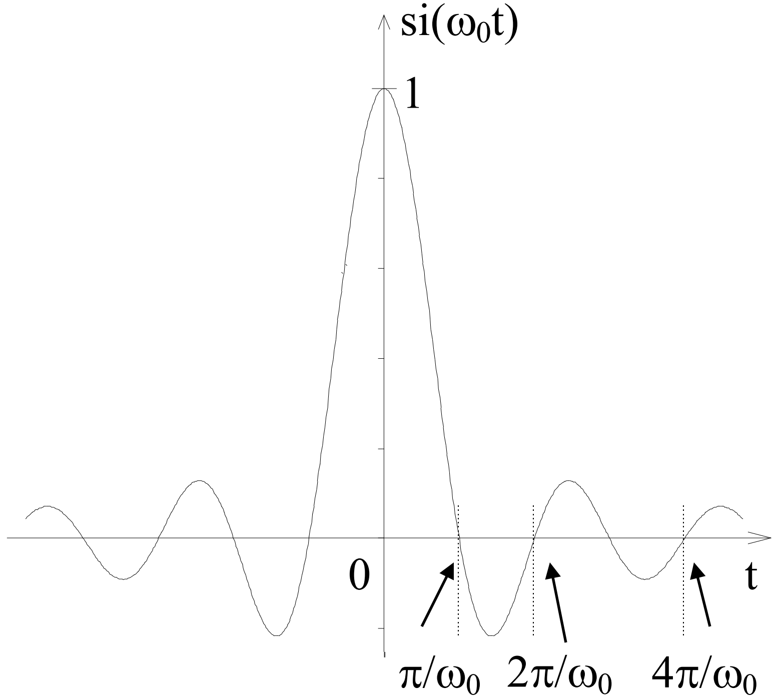


T = Zeitkonstante

2.2.3 si – Funktion (Spaltfunktion)

$$\mathrm{si}(\omega_0 t) := \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t}$$

$$si(x) := \frac{\sin(x)}{x}$$



Maximum liegt bei t = 0

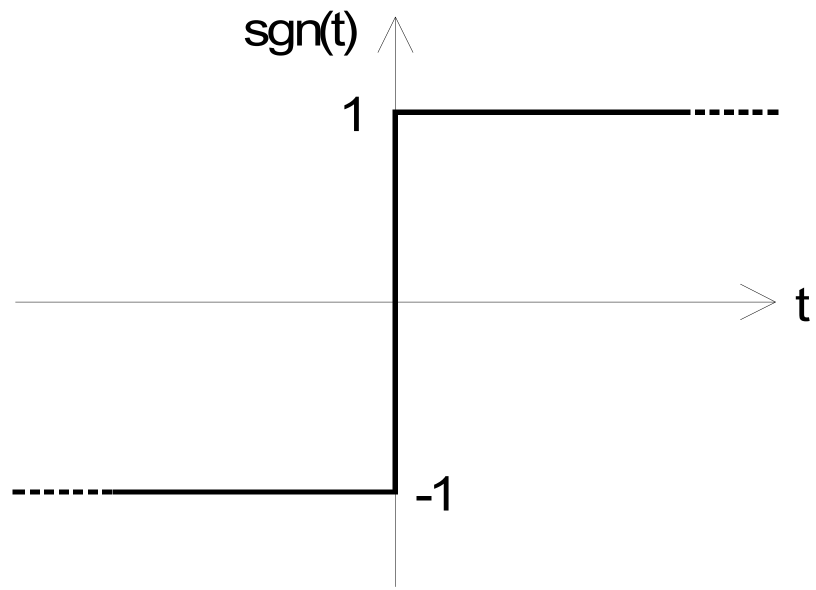
在时间 t 的整数倍处有等间距的零交叉点

äquidistante Nulldurchgänge bei ganzzahligen Vielfachen von $t = \pi/\omega_0 = 1/(2f_0)$.

2.2.4 Elementarsignale mit Diskontinuitäten

Signumfunktion

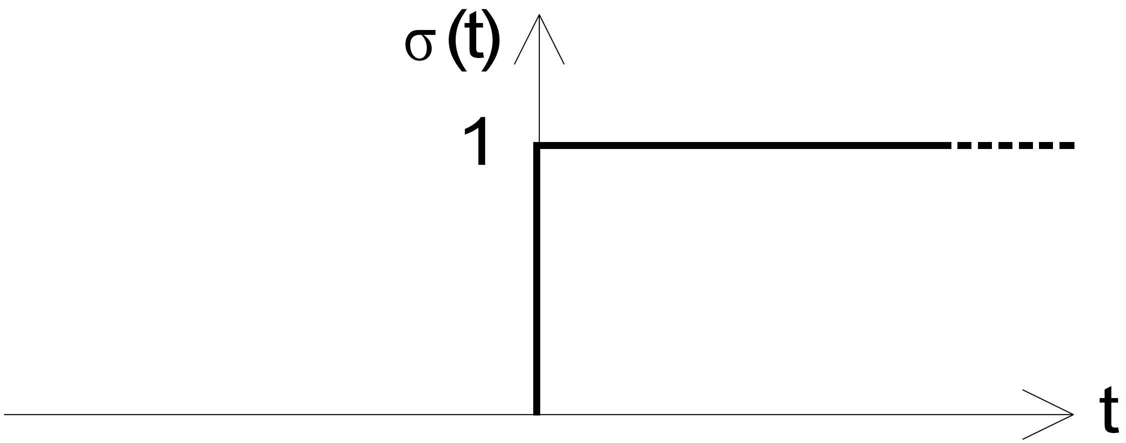
$$\mathrm{sgn}(t) := \begin{cases} -1 & \text{für } t < 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$



2.2.4 Elementarsignale mit Diskontinuitäten

Sprungfunktion

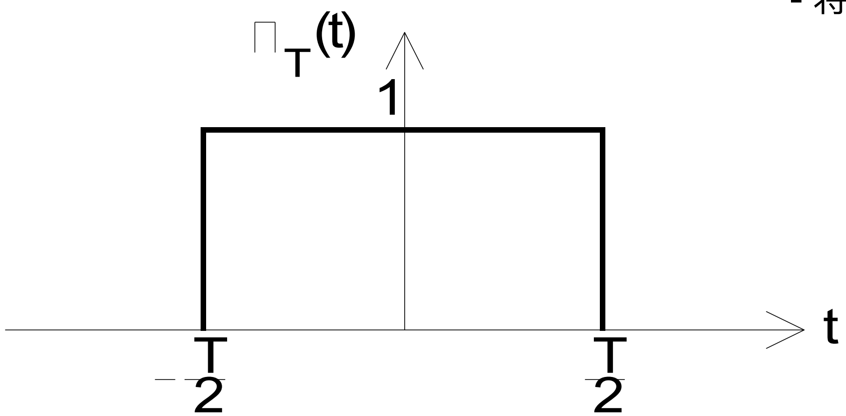
$$\sigma(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 0.5 & \text{für } t = 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$



2.2.4 Elementarsignale mit Diskontinuitäten

元信号与不连续性
意义
- 描述脉冲（例如，在二进制数据传输中）
- 将信号限制（抑制）在一个区域 T 内。

Rechteckfunktion



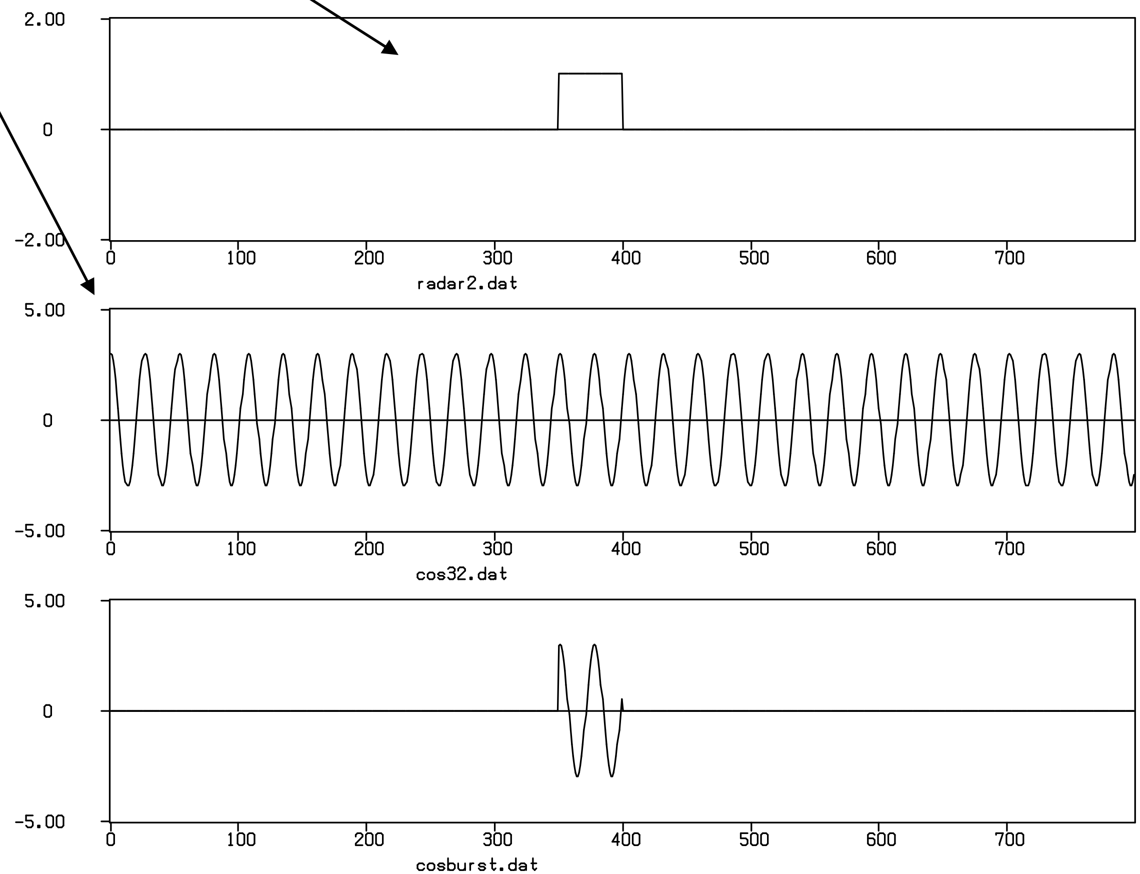
$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T/2 \\ 0{,}5 & |t| = T/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bedeutung

- Beschreibung von Impulsen (z.B. bei einer binären Datenübertragung)
- Eingrenzung (Ausblendung) von Signalen auf einen Bereich *T*.

Cosinuspuls - Ausblendeigenschaft der Rechtfunktion

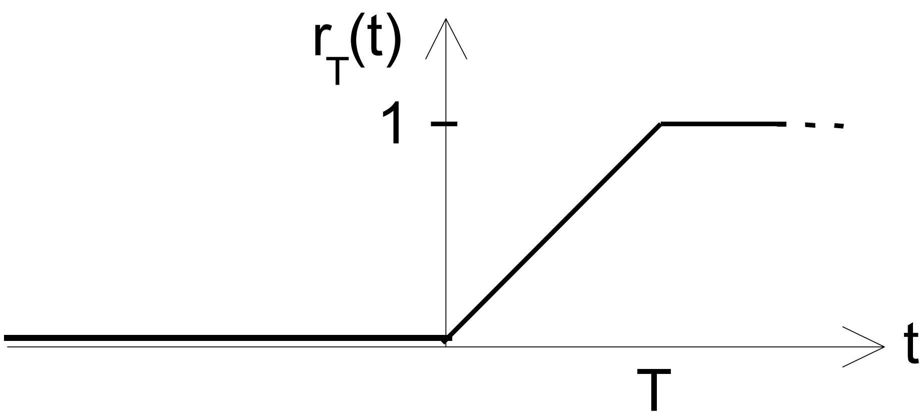
$$u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega_1 t) \cdot \Pi_T(t)$$



Rampenfunktion

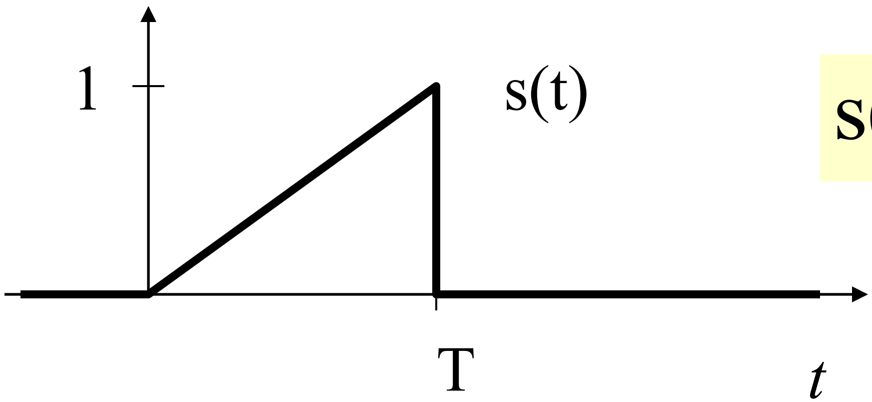
斜坡函数

$$r_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t/T & 0 \le t \le T \\ 1 & t > T \end{cases}$$

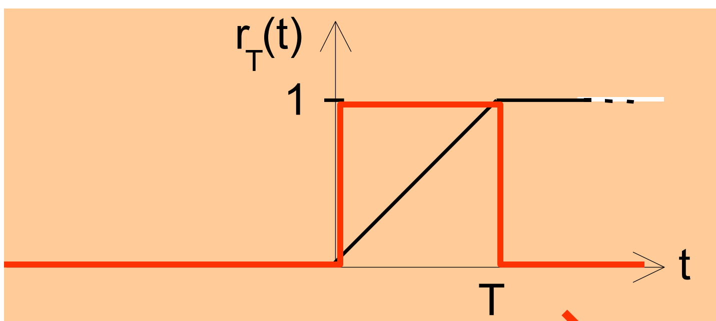


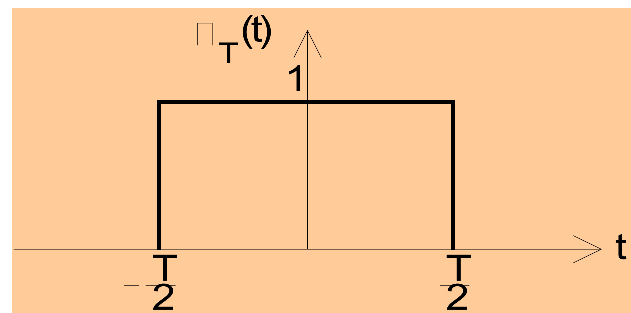
Sägezahn

锯齿形



$$s(t) = r_T(t) \cdot \Pi_T(t - T/2)$$

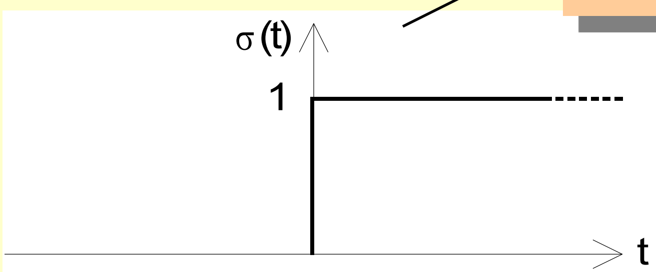




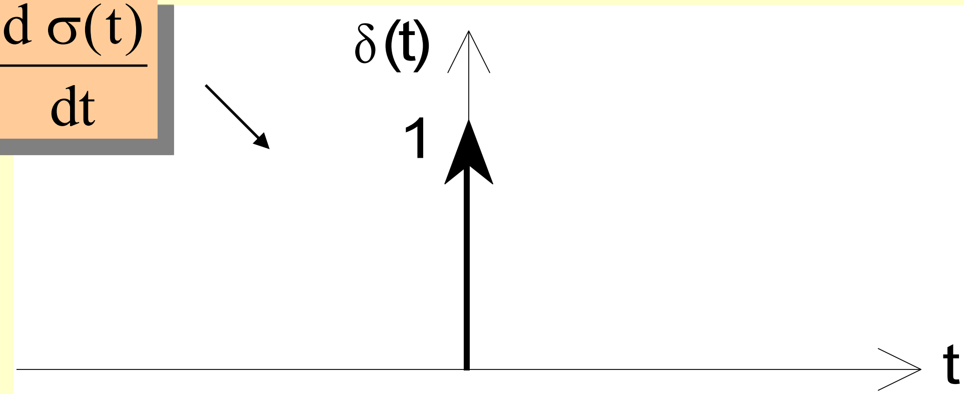
Ausblendung durch Rechteckfunktion

2.3. Deltaimpuls

Deltaimpuls δ(t) (Deltafunktion, Diracimpuls, Einheitsstoß, ...)



$$\delta(t) = \frac{d\,\sigma(t)}{dt}$$



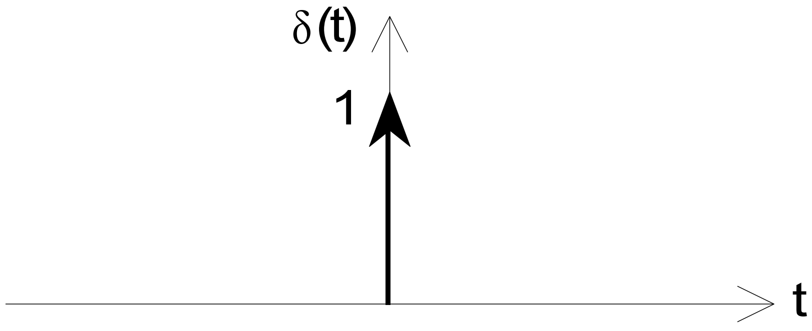
- *hat nur für t = 0 von Null verschiedene Werte*
- *er stellt im Zeitbereich einen idealisierten Impuls dar*

2.3. Deltaimpuls

Der Deltaimpuls gehört zu der Klasse der verallgemeinerten Funktionen (Distributionen)

Er wird hier durch seine Wirkung unter dem Integral definiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,\delta(t)\,dt = u(0) \qquad (2.31)$$

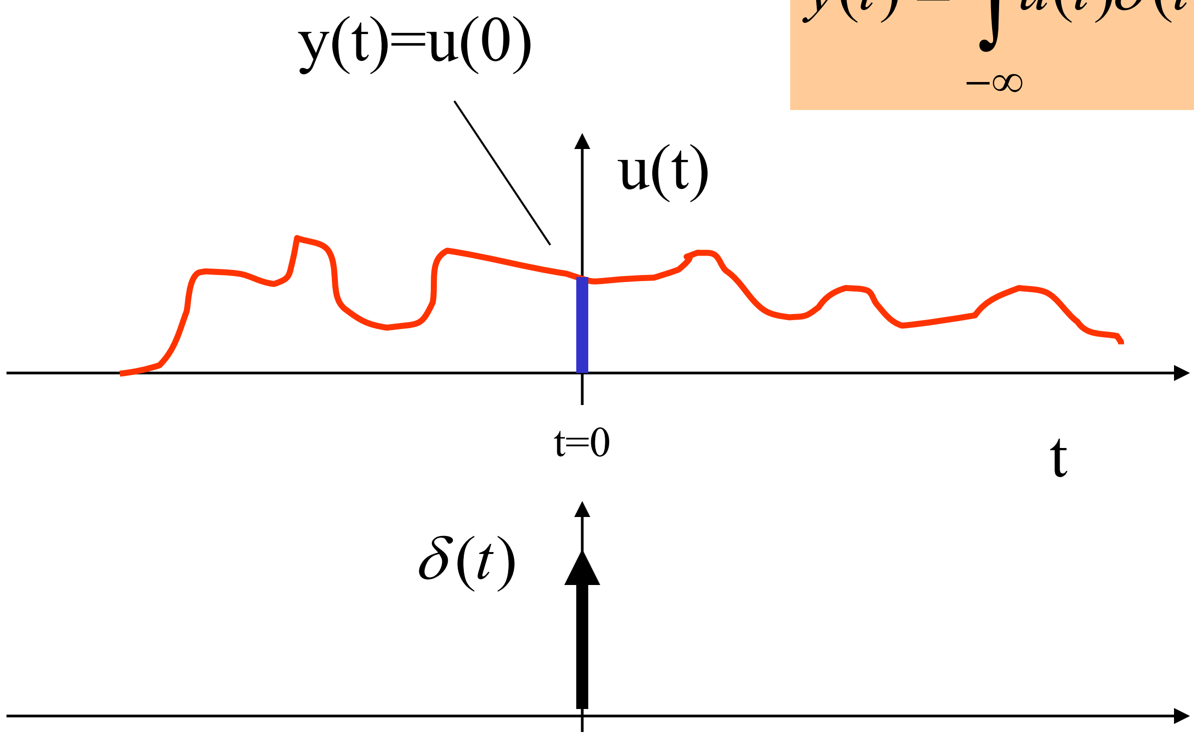


Der Deltaimpuls ist eine Distribution, durch die der Funktion u(t) der Wert u(0) zugeordnet wird

Ausblendeigenschaft

Der Deltaimpuls *blendet* den Funktionswert u(0) (Ausblendeigenschaft des Deltaimpulses) aus.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\delta(t)dt = u(0)$$



2.3. Deltaimpuls

Flächeneigenschaft

Aus Gl. (2.31)

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,\delta(t)\,dt = u(0)$$

folgt für u(t) = 1

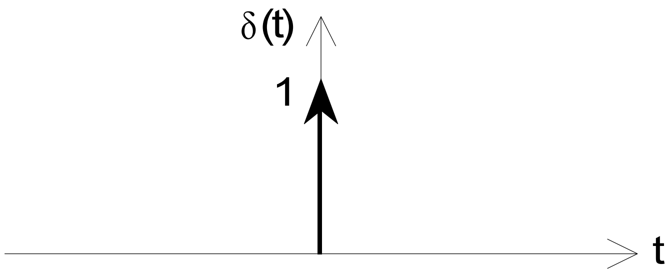
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1 \qquad (2.32)$$

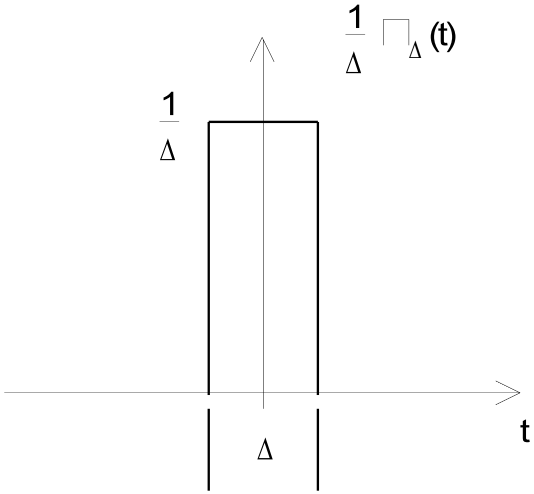
Wir sagen: der Deltaimpuls hat ein Gewicht (=Fläche) der Größe 1.

Allg.: Funktion $a \cdot \delta(t)$ hat ein Gewicht (=Fläche) der Größe *a*.

2.3. Deltaimpuls

$\delta(t)$ z.B. kann als <u>Grenzwert einer Rechteckfunktion</u> mit der Breite Δ und der Höhe $1/\Delta$ veranschaulicht werden



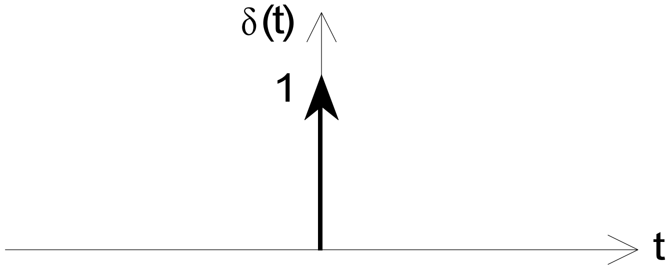


$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \Pi_{\Delta}(t) \qquad (2.33)$$

$\delta(t)$ strebt für *kleine delta* gegen unendlich!!!

2.3. Deltaimpuls

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$



Da u(t)-Werte für $t \neq 0$ nichts zum Integral beitragen, muß gelten:

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} \delta(t)\, dt = 1 \quad \text{für beliebiges } \alpha > 0$$

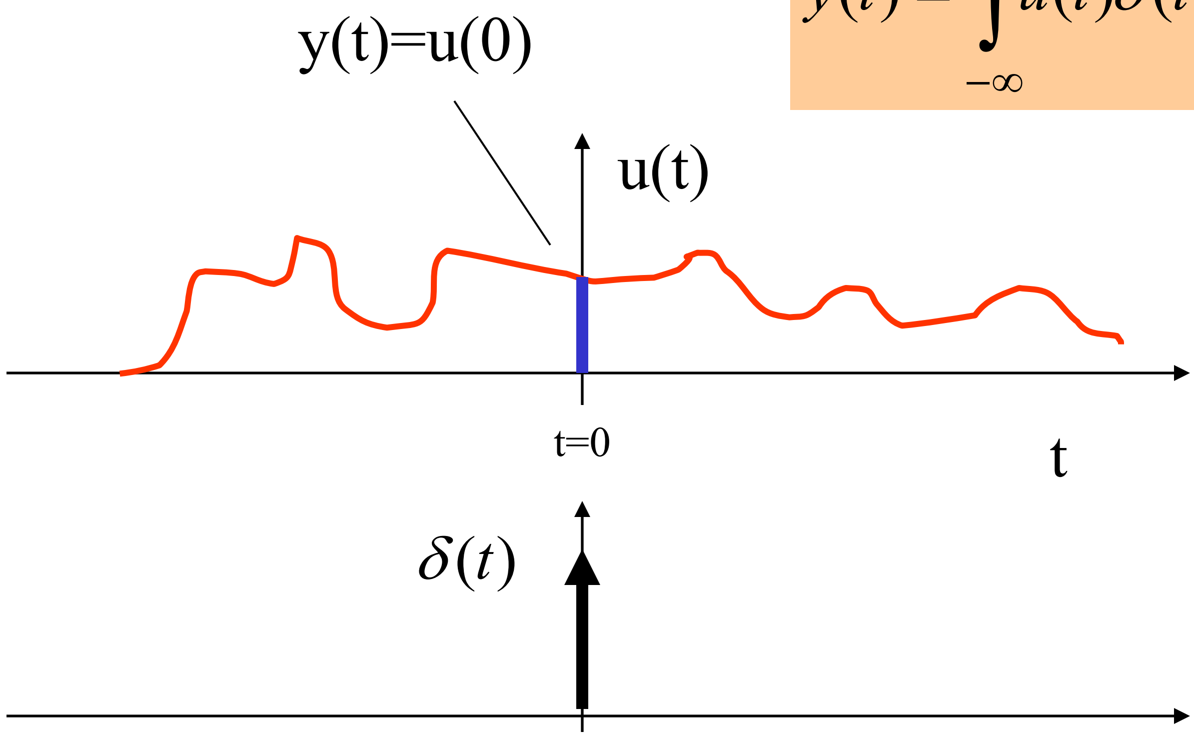
bzw.

$$\delta(t) = 0 \quad \text{für alle } t \neq 0$$

Ausblendeigenschaft

Der Deltaimpuls *blendet* den Funktionswert u(0) (Ausblendeigenschaft des Deltaimpulses) aus.

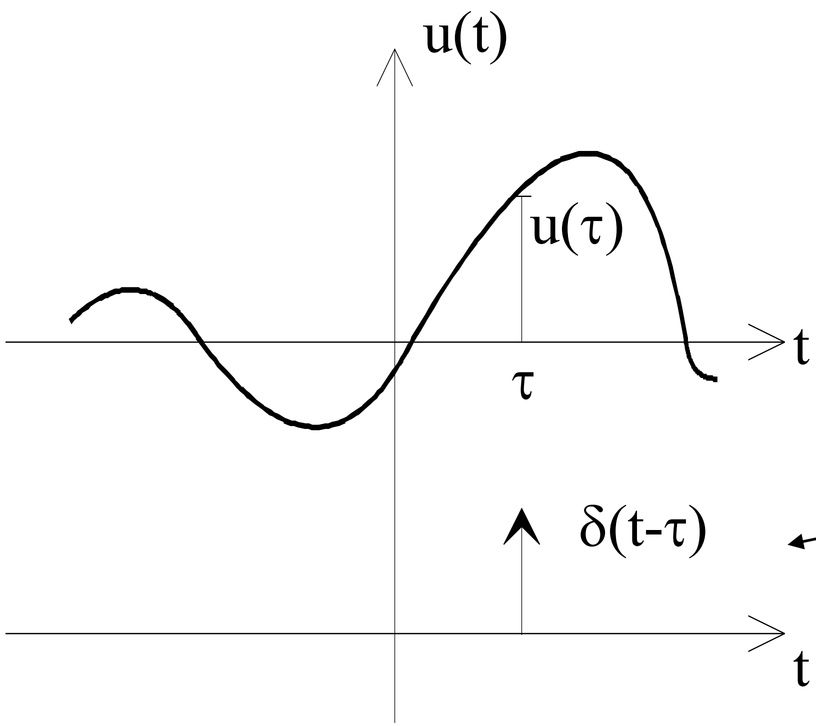
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\delta(t)dt = u(0)$$



Ausblendeigenschaft

Ausblendung des Funktionswert u(τ) einer beliebigen Funktion u(t)

$$u(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,\delta(t-\tau)\,dt$$



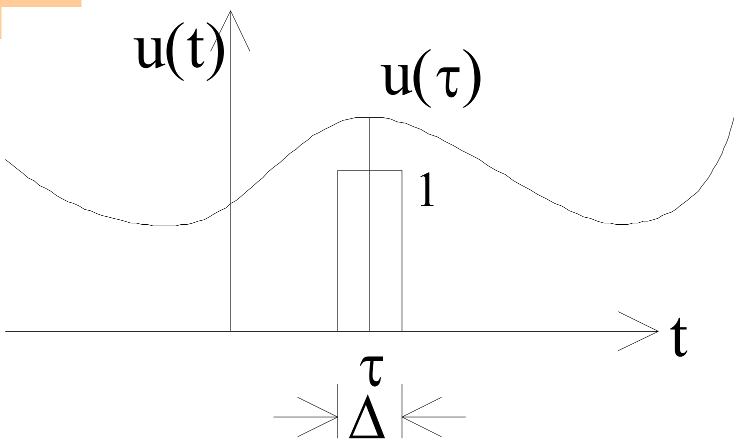
Zeitlich verschobene Deltafunktion

Abtasteigenschaft

Es muß auch gelten:

$$u(t)\,\delta(t-\tau) = u(\tau)\,\delta(t-\tau) \qquad (2.38)$$

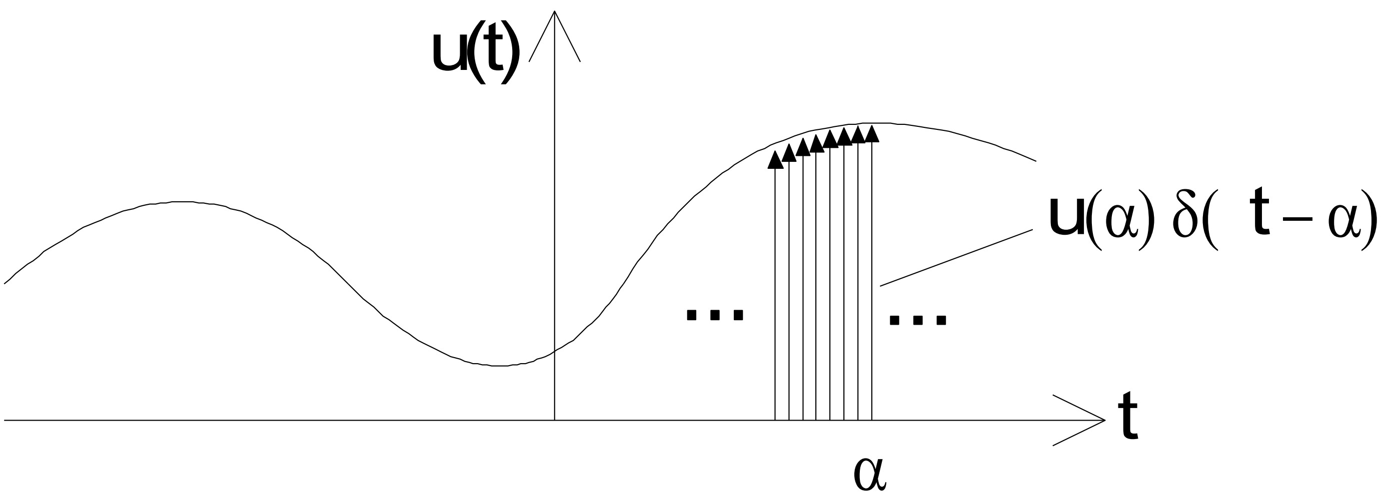
$$u(t)\,\Pi_{\Delta}(t-\tau) \approx u(\tau)\,\Pi_{\Delta}(t-\tau)$$



Darstellung beliebiger Funktionen

Eine beliebige Funktion u(t) kann als eine unendlich dichte Folge gewichteter Deltaimpulse gedeutet werden

任意函数 u(t) 可以被解释为无限密度的加权 Delta 脉冲序列。



Darstellung beliebiger Funktionen

Denn aus:

$$u(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,\delta(t-\tau)\,dt$$

nach Austausch der Integrationsvariablen t und τ

Faltungsintegral

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\,d\tau$$

Integraloperation wird auch als Faltung (Symbol *) bezeichnet

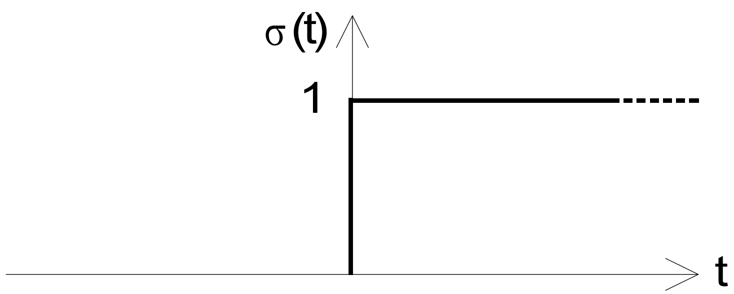
卷积积分

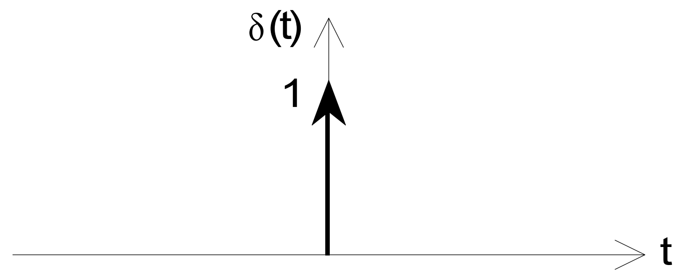
将一个函数与一个 Delta 脉冲进行卷积，结果再次是该函数。

Die Faltung einer Funktion mit einem Deltaimpuls ergibt also wieder die Funktion

Deltaimpuls und Sprungfunktion

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\alpha)\, d\alpha$$

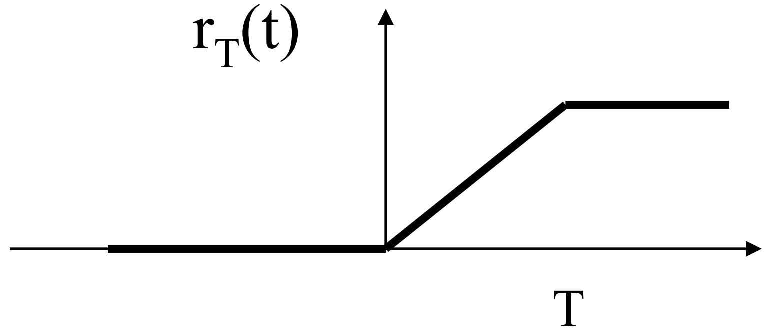




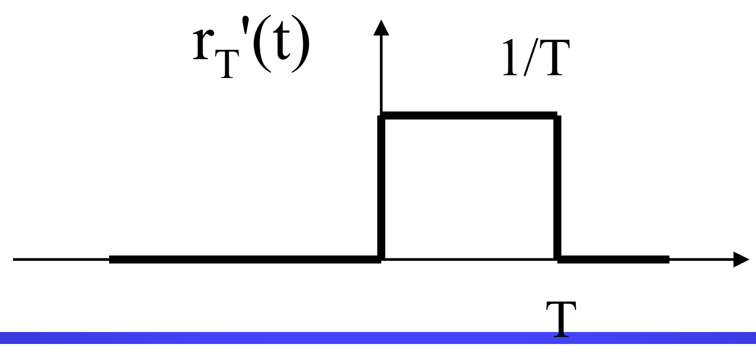
$$\delta(t) = \frac{d\,\sigma(t)}{dt}$$

Deltaimpuls und Sprungfunktion

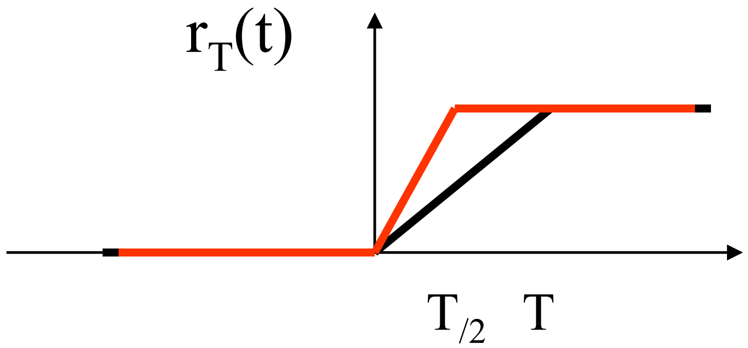
Veranschaulicht an der Rampenfunktion



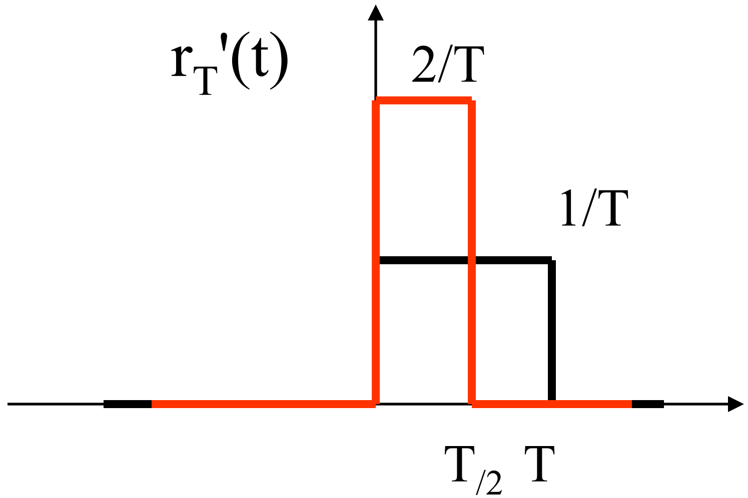
Die Ableitung $r_T'(t)$ ist eine Rechteckfunktion



Deltaimpuls und Sprungfunktion



die <u>Rampenfunktion</u> nähert sich der <u>Sprungfunktion</u>



die <u>Rechteckfunktion</u> nähert sich der *<u>Deltafunktion</u>*

Deltaimpuls und Sprungfunktion

Aus der Ausblendeigenschaft $u(t)\,\delta(t-\tau) = u(\tau)\,\delta(t-\tau)$

folgt für $u(t) = \sigma(t)$

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(t-\alpha)\,\delta(\alpha)\,d\alpha$$

Mit $\sigma(t-\alpha) = 0$ für $t < \alpha$ folgt

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\alpha)\,d\alpha$$

Eine Sprungfunktion ist also das Integral des Deltaimpulses

Deltaimpuls und Sprungfunktion

Umgekehrt gilt auch:

$$\delta(t) = \frac{d\,\sigma(t)}{dt}$$

Der Deltaimpuls $\delta(t)$ kann damit als Ableitung der Sprungfunktion $\sigma(t)$ gedeutet werden.

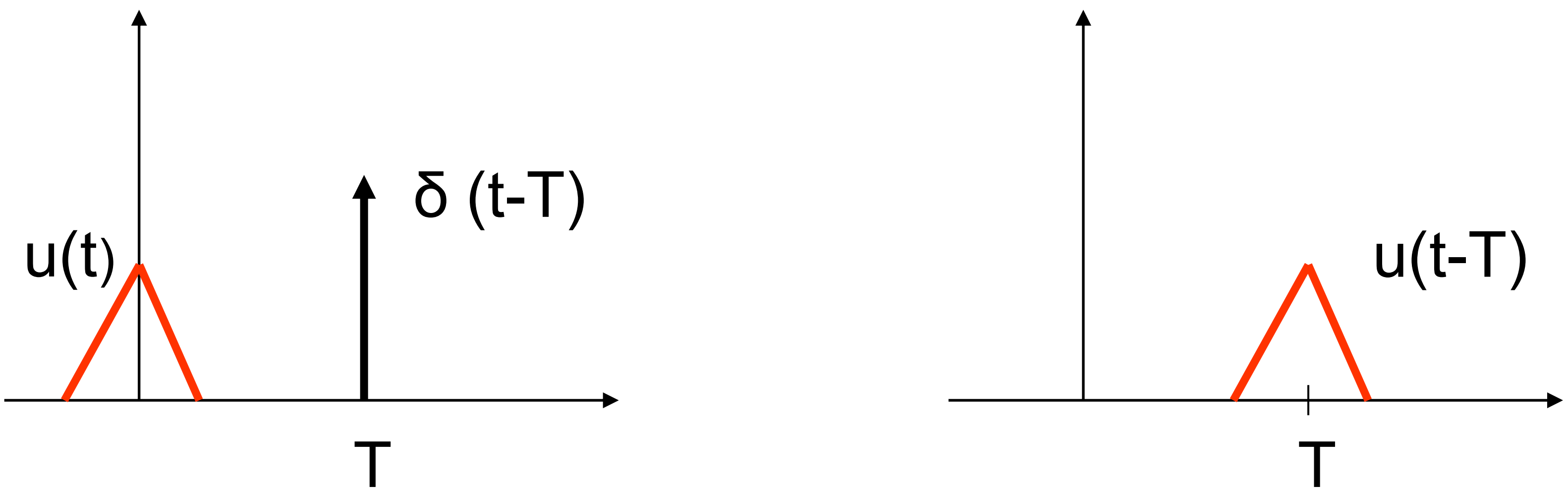
Eine Ableitung im Sinne der klassischen Analysis existiert nicht.

Wir benutzen den Begriff der *Derivierten*.

Faltung mit verschobener Deltafunktion

$$u(t) * \delta(t-T) = u(t-T)$$

Die Faltung einer Funktion u(t) mit einer verschobenen Deltafunktion δ (t-T) führt zu einer Verschiebung der Funktion u(t) um den Faktor T.

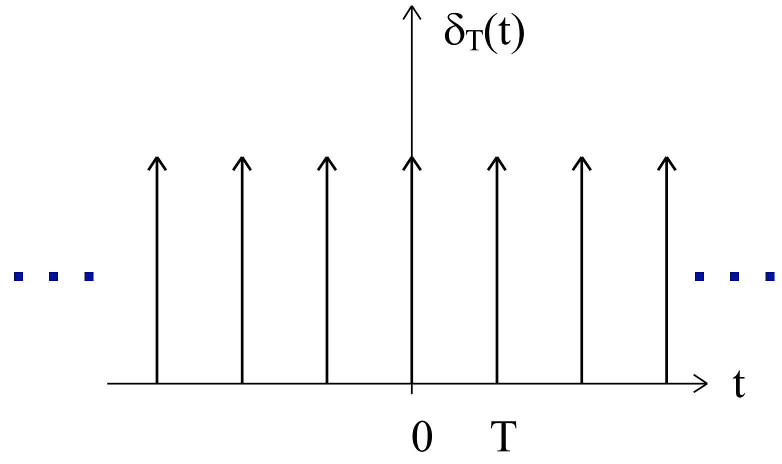


Deltakamm

Der Deltakamm (Deltapuls) $\delta_T(t)$

ist als eine periodische Folge von Deltaimpulsen im Abstand T definiert.

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$



Periodische Funktionen

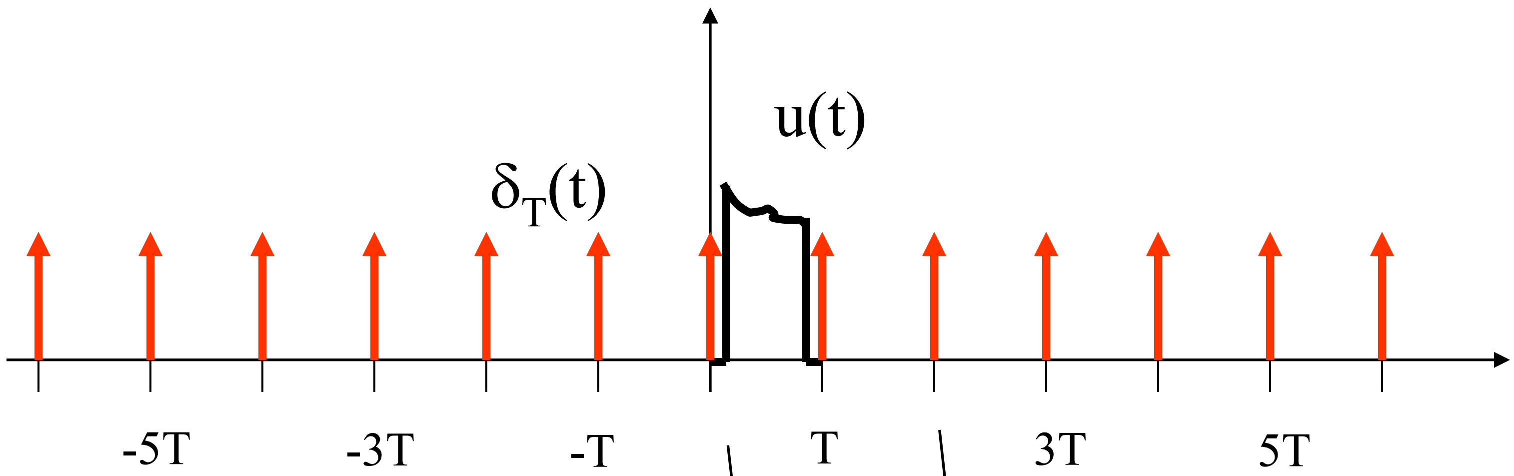
Mit der Faltungsoperation

$$y(t) = u(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

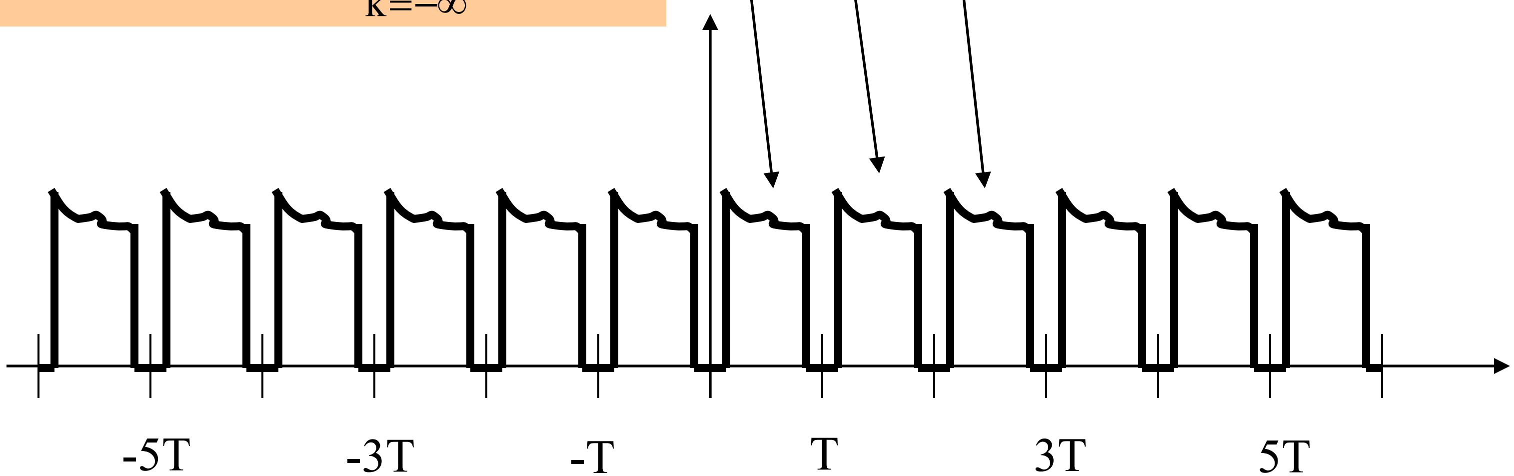
kann eine beliebige Funktion u(t) mit endlicher Länge $\tau \leq T$ periodisch mit dem Periodizitätsintervall T fortgesetzt werden.

$$u_p(t) = u(t) * \delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(t - kT)$$

Periodische Funktionen



$$u_p(t) = u(t) * \delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(t - kT)$$



Überlagerung von Exponentialfunktionen

eine unendlich dichte Überlagerung von Exponentialfunktionen oder cos-Funktionen führt zu dem Term $2\pi\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t)\, d\omega = 2\pi\,\delta(t)$$

当所有频率的指数函数或余弦函数叠加时，在t=0时刻，它们相加会得到一个无限大的值（或δ-峰），而在其他时刻，不同频率的指数函数将相互抵消至零。

Offenbar addieren sich alle Signalanteile für $t = 0$ zu einem δ-Peak, während sich alle anderen Anteile zu Null kompensieren

2.4. Verknüpfungen von Signalen

Additive Verknüpfungen

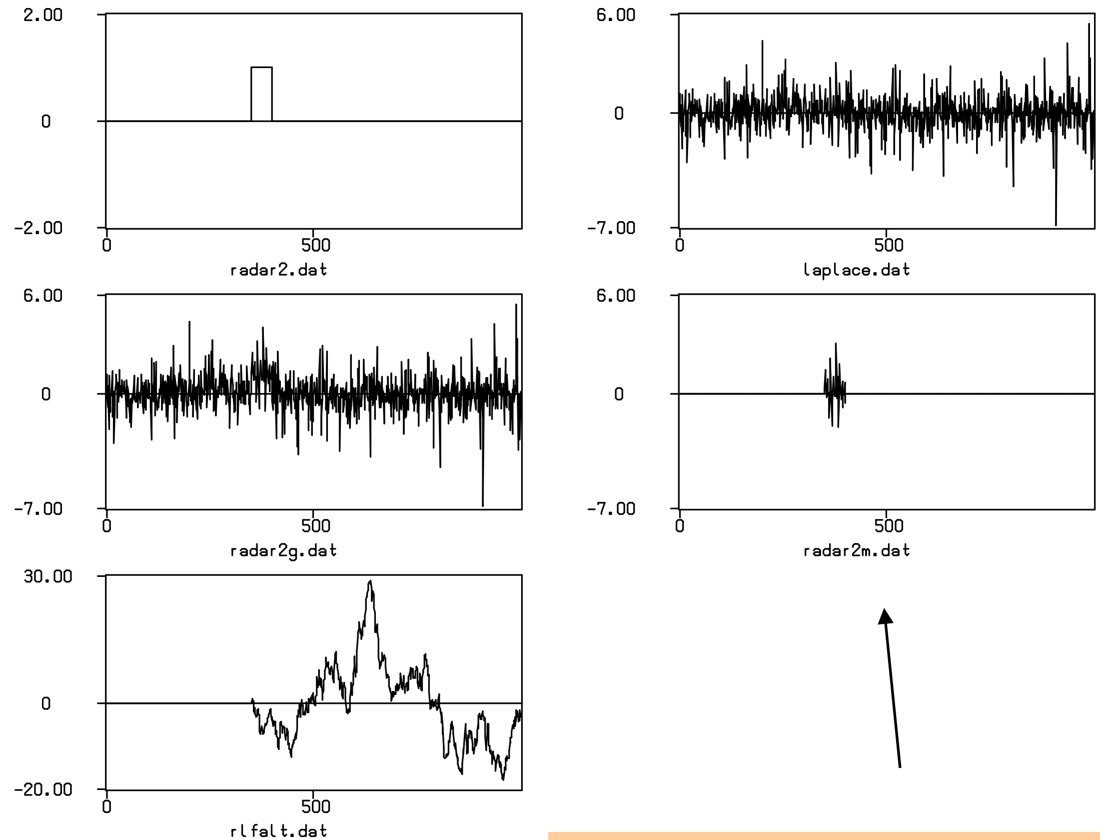
$$w(t) = a\,u(t) + b\,v(t)$$

Multiplikative Verknüpfungen

$$w(t) = a\,u(t)\,v(t)$$

2.4. Verknüpfungen von Signalen

$w(t) = a\,u(t) + b\,v(t)$



Faltung

$w(t) = a\,u(t)\,v(t)$

Originalbild (O) und verrauschtes (V) bei einem Signal-Rauschabstand (SNR) von 10 dB

Verknüpfungen durch Faltung

Die Faltungsoperation spielt bei linearen Systemen eine herausragende Rolle

$$w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\varepsilon)\, v(t-\varepsilon)\, d\varepsilon = u(t) * v(t)$$

Integraltransformation

Faltungssymbol

Verknüpfungen durch Faltung

$$w(t) \longleftarrow \boxed{\text{Dynamisches System } v(t)} \longleftarrow u(t)$$

System-Impulsantwort v(t)

$$w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\varepsilon)\, v(t-\varepsilon)\, d\varepsilon = u(t) * v(t)$$

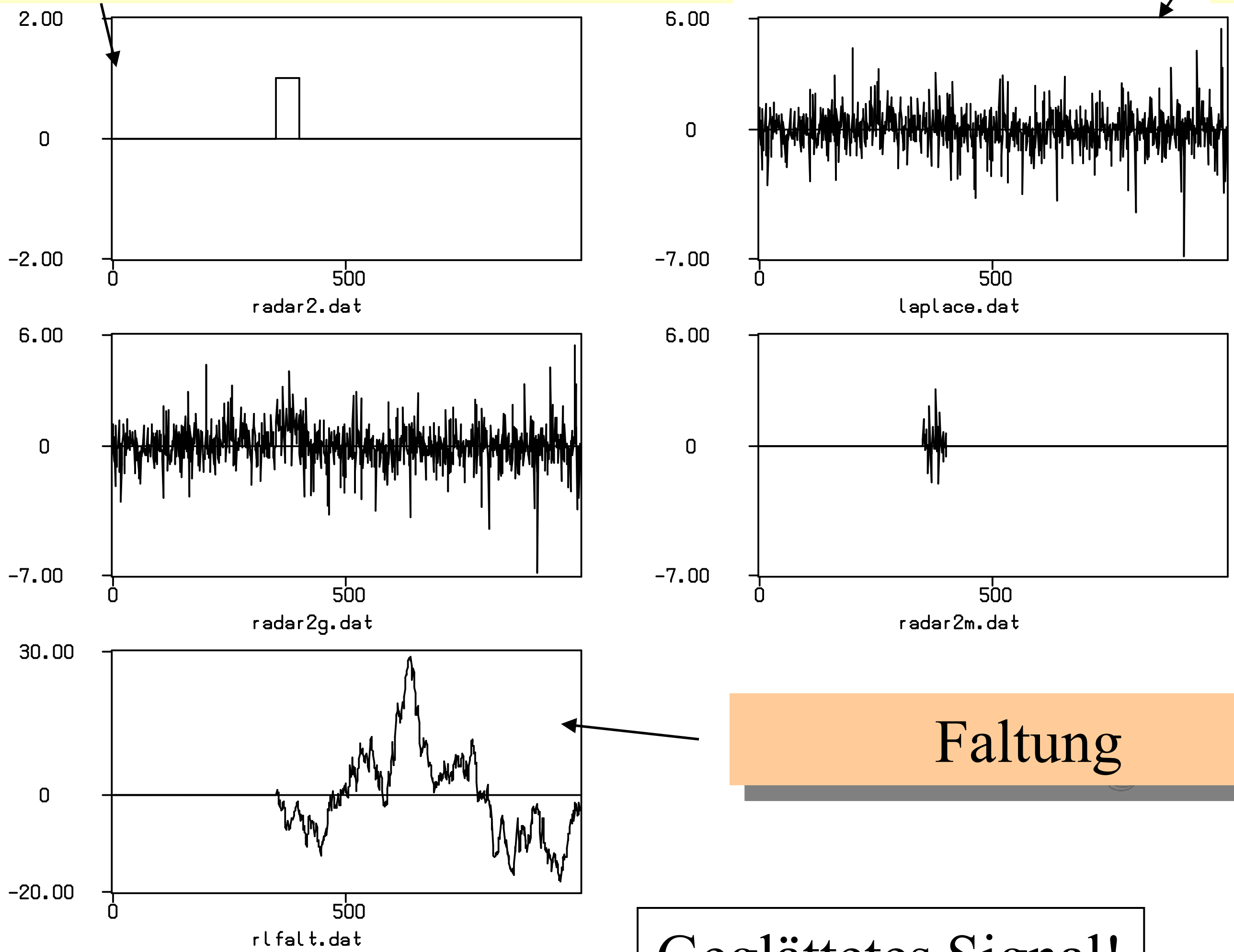
Ausgangssignal

Eingangssignal

Verknüpfungen durch Faltung

z.B. Impulsantwort eines Tiefpassfilters

Signal



Faltung

Geglättetes Signal!

2.5. Ähnlichkeiten von Signalen

1. Signal-Rausch-Abstand
2. Die Kreuzkorrelationsfunktion (KKF)
3. Die Autokorrelationsfunktion (AKF)
4. AKF und KKF für Leistungssignale

2.5.1. Signal-Rausch-Abstand

<u>Geg:</u> u(t) - ungestörtes Leistungssignal

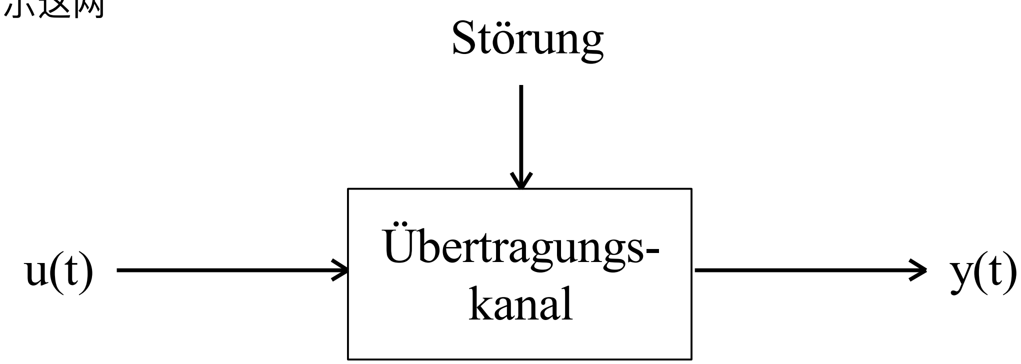
y(t) - gestörte Version von u(t)

给定:
- u(t) - 未受干扰的功率信号
- y(t) - u(t) 的受干扰版本

我们可以通过信噪比来表示这两个信号的相似性。

传输通道
干扰
u(t) y(t)

2.5.1. 信噪比



Ähnlichkeit der beiden Signale können wir z.B. über das Signal-Rausch-Verhältnis angeben.

2.5.1. Signal-Rausch-Abstand

Leistung P_u des <u>ungestörten</u> Signals zu der Leistung P_f des <u>Fehlersignals</u> wird ins Verhältnis gesetzt

$$f(t) = u(t) - y(t)$$

Fehlersignal

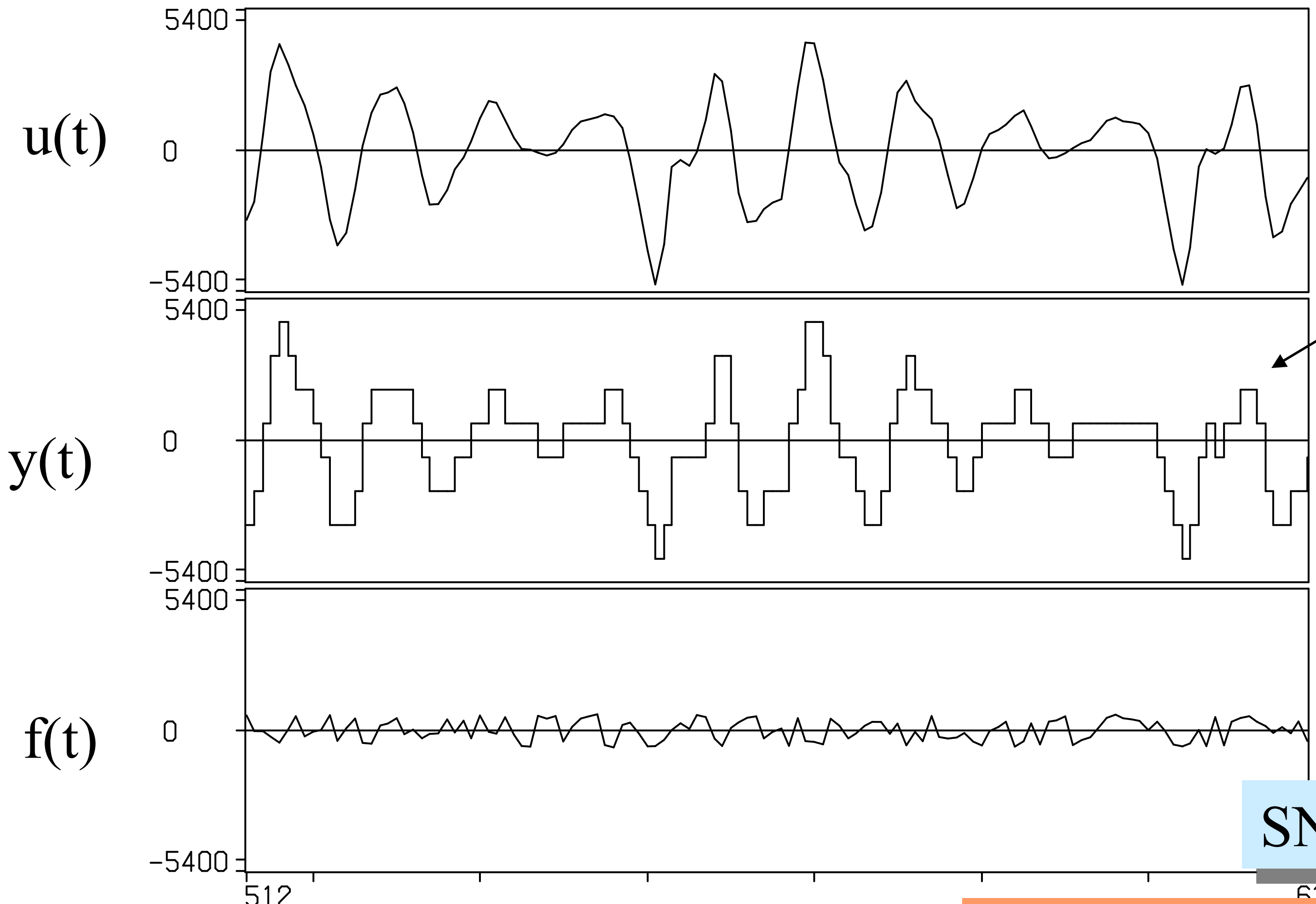
$$SRV = \frac{P_u}{P_f}$$

Signal-Rausch-Verhältnis

$$SNR = 10 \log \frac{P_u}{P_f} \qquad [dB]$$

Signal-Rausch-Abstand

Beispiel: Quantisierung eines Signals



achtstufig Quantisierung

SNR = 13,8 dB

$$SRV = 10^{(13.8/10)} = 23{,}98$$

2.5.1. Signal-Rausch-Abstand

$$\mathrm{SRV} = \frac{P_u}{P_f}$$

$$\mathrm{SNR} = 10 \log \frac{P_u}{P_f} \qquad [\mathrm{dB}]$$

SVR	**SNR**
1	0 dB
10	10 dB
50	17 dB
100	20 dB

Quantisierung eines Bildsignals

Original

quantisiert

Quantisierungsfehler

2.5.2. Die Kreuzkorrelationsfunktion (KKF)

交叉相关函数（KKF）

如何确定两个可能存在时间偏移的信号是否相似?

Wie kann man feststellen, ob zwei möglicherweise zeitlich versetzte Signale ähnlich sind?

我们只考虑能量信号，对于功率信号可以建立相应的定义。

Wir betrachten nur Energiesignale, für Leistungssignale kann eine entsprechende Definition aufgestellt werden.

Geg.: zwei beliebige Signale u(t) und v(t)

Kreuzkorrelationsfunktion

$$r_{uv}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, v(t+\tau)\, dt$$

Zeitverschiebung τ ein zu variierender Parameter

2.5.2. Die Kreuzkorrelationsfunktion (KKF)

Kreuzkorrelationsfunktion

$$r_{uv}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, v(t+\tau)\, dt$$

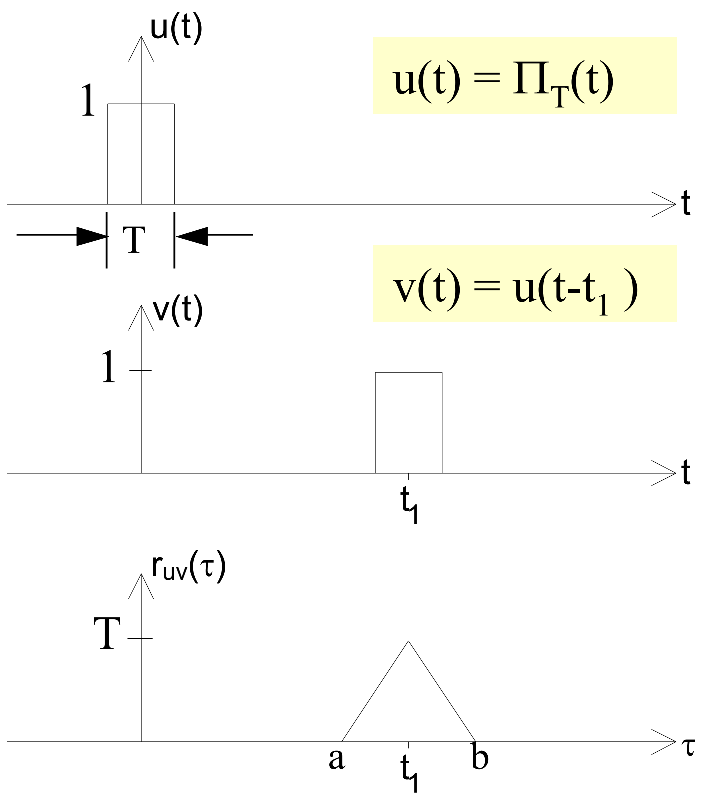
Für jeden Zeitpunkt τ ergibt sich ein Wert $r_{uv}(\tau)$.

Häufig wird die normierte KKF verwendet:

$$\rho_{uv}(\tau) = \frac{r_{uv}(\tau)}{r_{uv}(0)}$$

Beispiel: Rechteckfunktion

Kreuzkorrelationsfunktion für ein Rechtecksignal und seine zeitverschobene Version



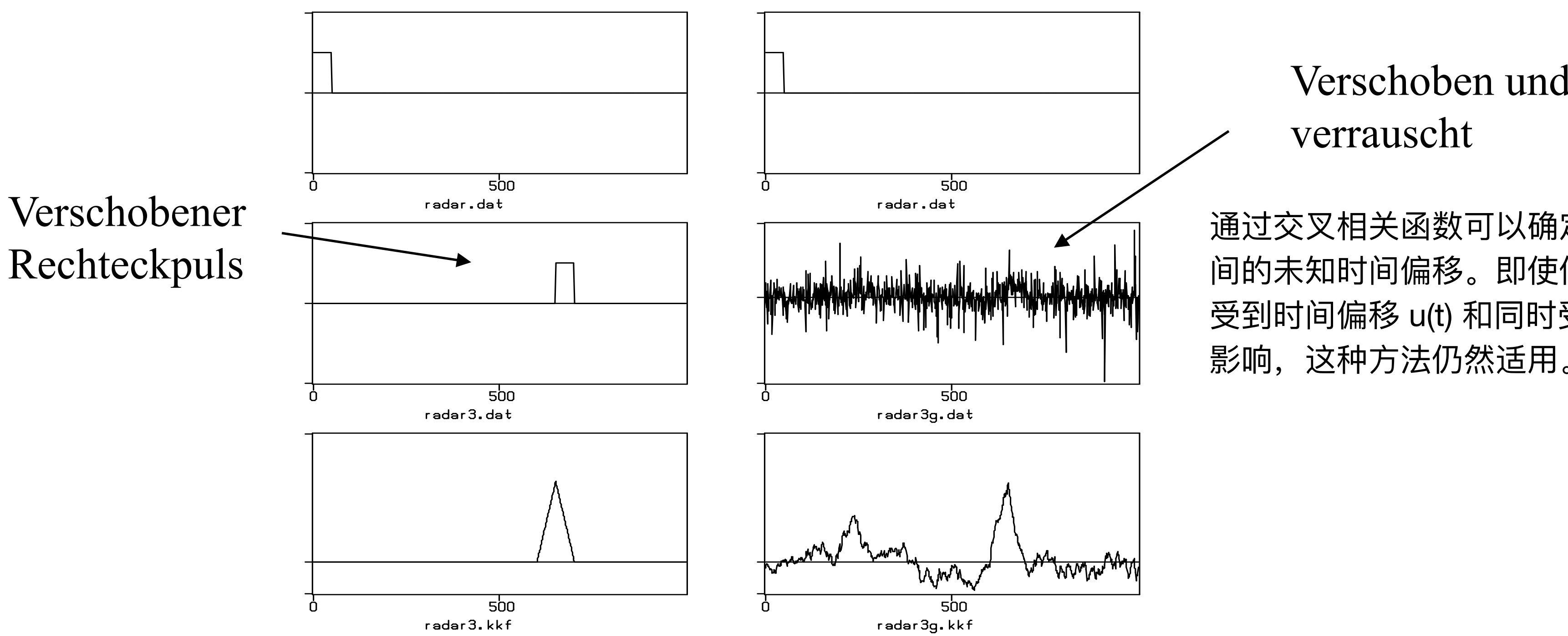
$$r_{uv}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, v(t+\tau)\, dt$$

Die Energie-Kreuzkorrelationsfunktion $r_{uv}(\tau)$ hat ein Maximum, wenn $\tau = t_1$

2.5.2. Die Kreuzkorrelationsfunktion (KKF)

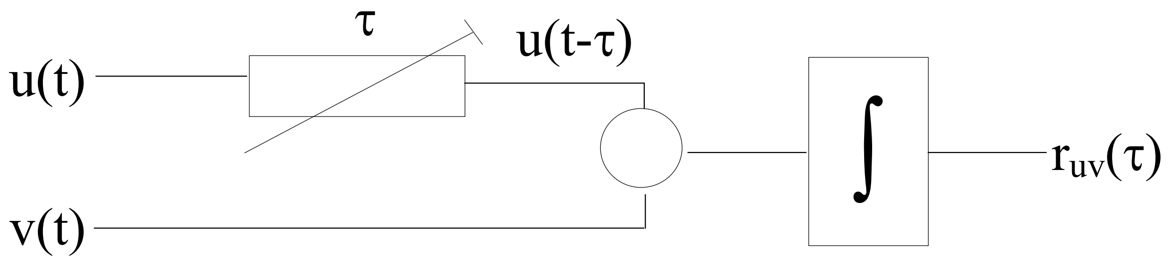
Durch Kreuzkorrelationsfunktion Bestimmung einer unbekannte Zeitverschiebung zwischen Signalen möglich.

... auch wenn das Signal v(t) zeitlich verschoben u(t) und gleichzeitig verrauscht ist.



通过交叉相关函数可以确定信号之间的未知时间偏移。即使信号 v(t) 受到时间偏移 u(t) 和同时受到噪声影响，这种方法仍然适用。

Meßtechnische Bestimmung der KKF



2.5.3. Die Autokorrelationsfunktion (AKF)

Wie ähnlich ist ein Energiesignal u(t) seiner um die Zeit τ verschobenen Version $u(t+\tau)$?

z.B. zur Erkennung von periodischen Strukturen

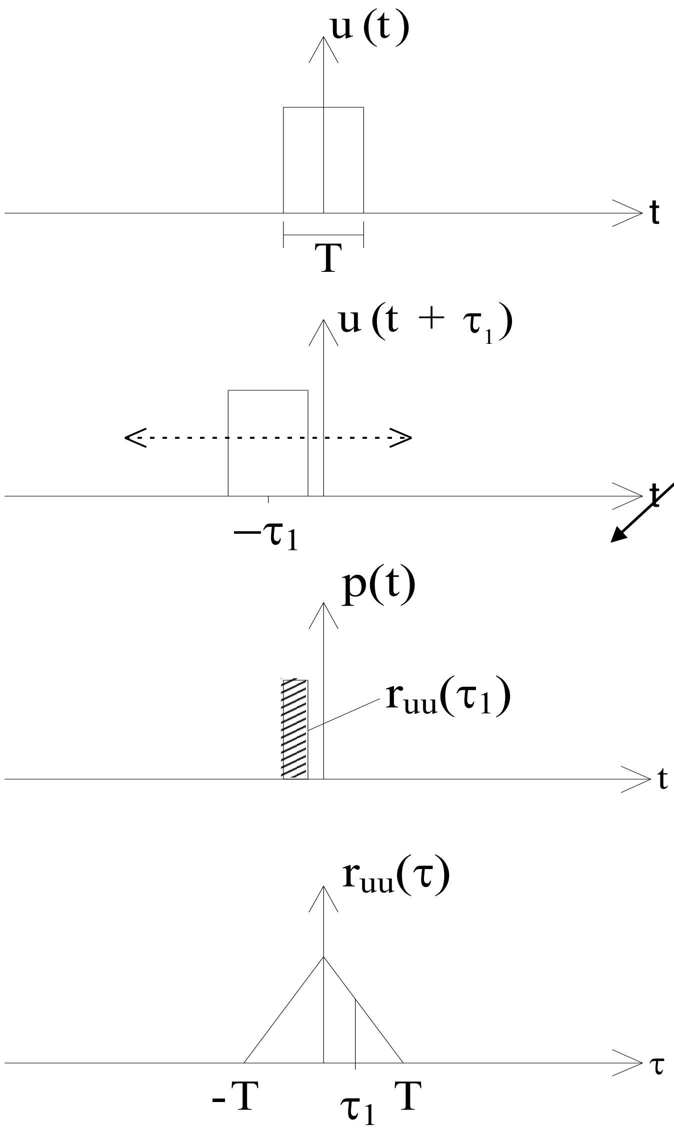
$$r_{uu}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, u(t+\tau)\, dt$$

Autokorrelationsfunktion

$$\rho_{uu}(\tau) = \frac{r_{uu}(\tau)}{r_{uu}(0)}$$

normierte AKF

2.5.3. Die Autokorrelationsfunktion (AKF)



$$r_{uu}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, u(t+\tau)\, dt$$

Produktfunktion $p(t) = u(t) \cdot u(t+\tau_1)$,

Maximum bei einem Wert des Verschiebungsparameters von $\tau = 0$:

$$r_{uu}(\tau) = W_u$$

Energie $W_u = r_{uu}(\tau=0)$

$$\rho_{uu}(0) = 1$$

2.5.4. AKF und KKF für Leistungssignale

Definition für die AKF und KKF von Leistungssignalen.

$$ {}^{L}r_{uv}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{T} u(t) \cdot v(t+\tau)\,dt $$

KKF

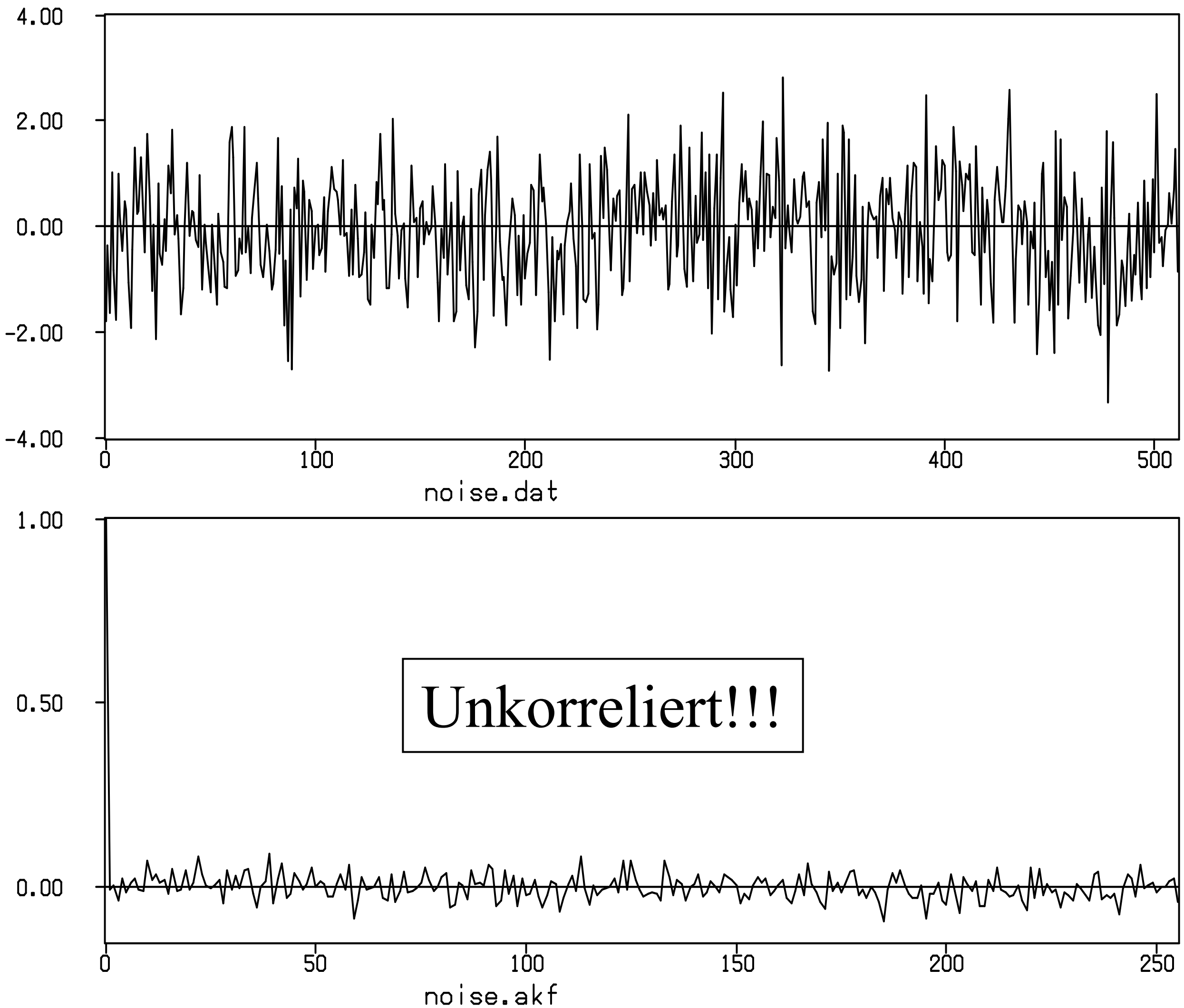
$$ {}^{L}r_{uu}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{T} u(t) \cdot u(t+\tau)\,dt $$

AKF

Meßtechnisch muß die Meßzeit *T* immer endlich sein

Leistungs-AKF/KKF und Energie-AKF/KKF unterscheiden sich nur um einen Skalierungsfaktor 1/T.

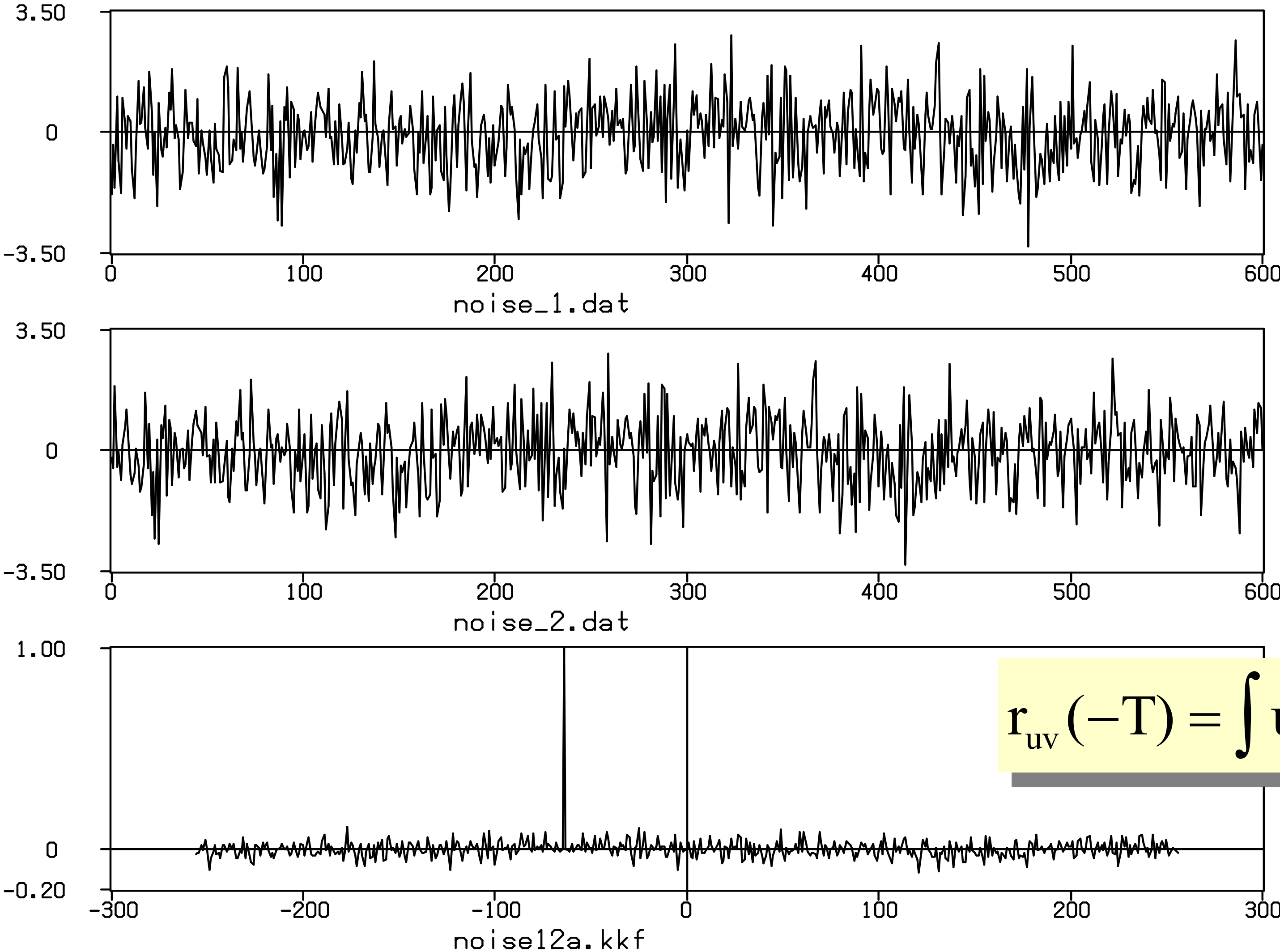
Beispiel: Weißes Rauschen



Energie-Signal

(da Ausschnitt)

AKF

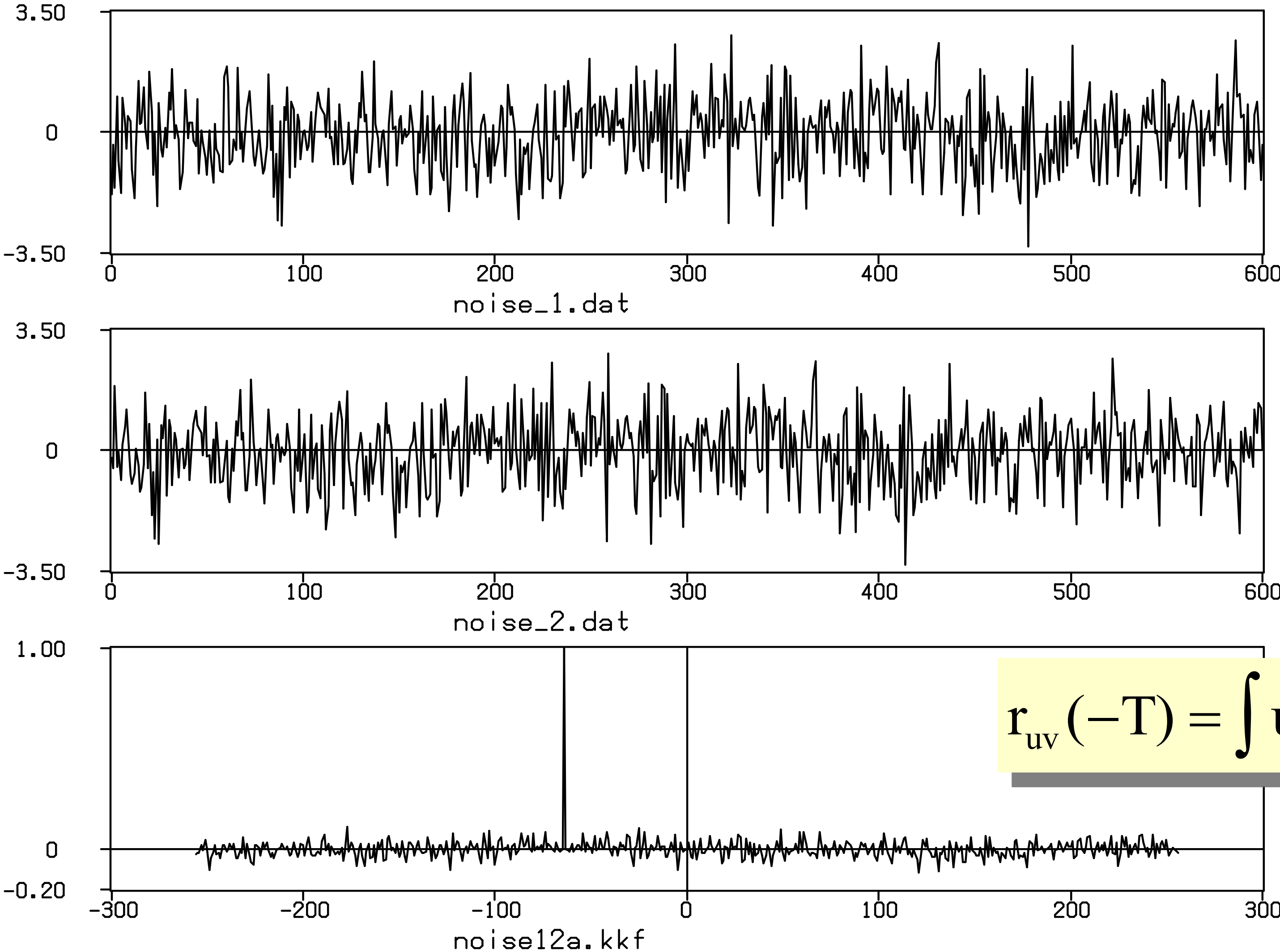


u(t)

u(t+T)

T=64

$$r_{uv}(-T) = \int u^2(t)dt = W_u$$



u(t)

u(t+T)

T=64

$$r_{uv}(-T) = \int u^2(t)dt = W_u$$