1. Vorlesung: Was ist Stochastik?

Nikolas Tapia

15. April 2024, Stochastik für Informatik(er)

Organisatorisches: Vorlesung

Vorlesungstermine

- Mo. 10:15–11:45 im H 101
- Do. 14:15–15:45 im MA 001

Dozent:

- Dr. Nikolas Tapia
- E-Mail: tapia@wias-berlin.de
- Sprechstunde: Di. 10:00–11:00 über Zoom (Link auf Isis).

Organisatorisches: Vorlesung

Vorlesungsmaterial:

- Lehrbuch von Prof. Noemi Kurt (frei zugänglich, siehe Link auf Isis),
- Skript zum Buch,
- Weitere Literatur-Vorschläge auf Isis,
- Folien gewöhnlich jeweils kurz nach VL auf Isis,
- Übungszettel freitags auf Isis (abweichung möglich).

Organisatorisches: Tutorium

Assistentin:

- Name: Claudia Drygala
- E-Mail: drygala@math.tu-berlin.de
- Sprechstunde: nächste Woche mitgeteilt

© Christian Kielmann

Organisation Tutorien:

- Anmeldung über MOSES-Konto bis Mi. 17. April, 18:00
- Zuteilung des Tutoriums über MOSES-Konto
- Beginn Tutorien in der 2. Vorlesungswoche
- Ausgabe der Übungsblätter über Isis
- Abgabe der Hausaufgaben in festen Gruppen über Isis innerhalb von zwei Wochen

Organisatorisches

Isis-Seite:

https://isis.tu-berlin.de/course/view.php?id=37640

Informationen

- Studienbüro für den Mathematik-Service: Frau Konteva, Frau Stephan, für alle organisatorischen Fragen.
- E-Mail: mathe-service@math.tu-berlin.de

Wichtige Hinweise

1. Gemäß der neuen Studienordnung Informatik (seit WS 14/15) wird diese Vorlesung mit 4 Stunden Vorlesung und 2 Stunden Tutorien angeboten, zum Erwerb von 9 LP.
2. Die alte Studienordnung Informatik sowie die meisten anderen Studienordnungen sehen den Erwerb von 6 LP vor.
3. Wer gemäß seiner Studienordnung nur 6 LP erwerben will/darf/muss, besucht nur den ersten Teil der Vorlesung und der Tutorien (bis 8 HA). Inhalte und Umfang dieses ersten Teils decken sich mit der bisherigen zweistündigen Vorlesung.
4. Klausur-Anmeldung über Qispos: “Stochastik für Informatik” für 9 LP, “Stochastik für Informatiker” für 6 LP. Klausuren finden für beide Varianten am selben Termin statt.

Organisatorisches: Klausur

Klausurtermine:

- 01.08.2024
- 30.09.2024

Dauer, Voraussetzungen und Hilfsmittel:

- Dauer: 90 Minuten.
- Zulassungsvoraussetzung: 50% Punkte aus den Hausaufgaben der Aufgabenblätter 1–8 (Bearbeitung bis Blatt 9 bzw. bis Blatt 12 für 6 LP bzw. 9 LP empfohlen!).
- Hilfsmittel: Ein beidseitig handschriftlich beschriebenes A4-Blatt, sowie ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner. Smartphones, Tablets, etc. dürfen nicht als Taschenrechnerersatz genutzt werden, internetfähige Geräte müssen während der Klausur ausgeschaltet bleiben.

Was ist Stochastik?

Was ist Stochastik?

Stochastik wird dafür angewendet:

... um einen Zufallsgenerator zu programmieren (Kryptographie),

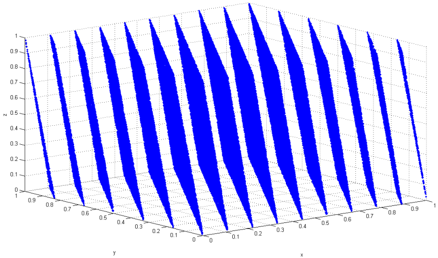


Abbildung: RANDU Zufallsgenerator, 1960.

... um Künstliches-Intelligenz zu entwickeln, optimieren und verstehen,

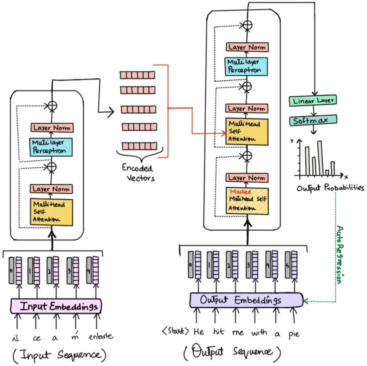
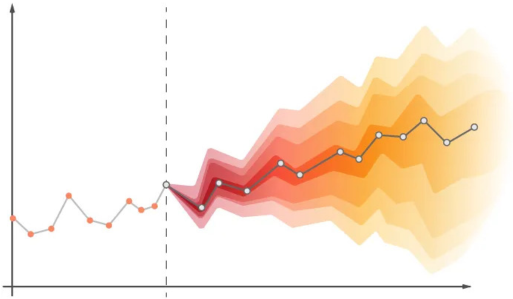


Abbildung: `a baby llama, a baby hyena and a baby black mamba in the forest, with a transformer in the background, in 3d cardboard illustration style`

... um Zeitreihen zu vorhersagen (Börsenkursen, Wetter, etc.),



...um Wartesystem zu modellieren und analysieren (Markov-Ketten),

...um Wahlergebnisse zu interpretieren, etc.

Ziel dieser Veranstaltung das Beherrschen der mathematische Grundlagen, welche diesen und anderen Anwendungen zugrunde liegen.

Inhalt und Aufbau der Vorlesung

- Grundkonzepte: Wahrscheinlichkeiten, Zufallsvariablen.
- Kenngrößen von Zufallsvariablen und ihre Berechnung.
- Wichtige Klassen von Beispiele und ihr Auftreten.
- Modellierung zufällig ablaufender Prozessen.
- Grundlagen und Methoden der Statistik.
- Markov-Ketten, Stochastische Algorithmen.

6 & 9 LP

→ 9 LP

Überbegriff für:

- **Wahrscheinlichkeitstheorie**: Mathematische Modellierung und Formalisierung, theoretische Grundlage.
- **Statistik**: Analyse und Interpretation von Messwerten und Daten aus zufälligen Vorgängen mittels wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden.

Was ist Zufall?

Mangel an Information, oder Effekt kleiner **Ereignisse**, welche einzeln nicht genau kontrolliert werden können, und deshalb als zufällig angenommen werden.

Beispiele für zufällige ablaufende Prozesse:

- Würfeln, Lottoziehung,
- Warteschlangenbildung, z.B. in der Verkehrsmodellierung,
- Bildung von Netzwerken (Social Media),
- Stochastische Algorithmen (Google PageRank),
- Quantum Computing.

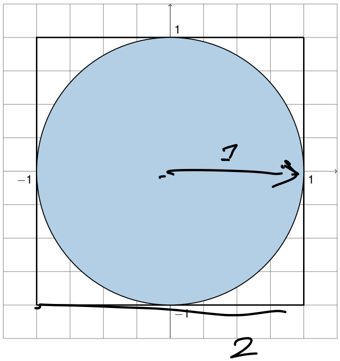
Erstes Beispiel: Schätzung von π.

Wie groß ist der Anteil des blauen Kreises an der Fläche des Quadrats?

Antwort:

$$\frac{\pi}{4}$$

Damit können wir den numerischen Wert von π schätzen, indem wir einen stochastischen Algorithmus formulieren.

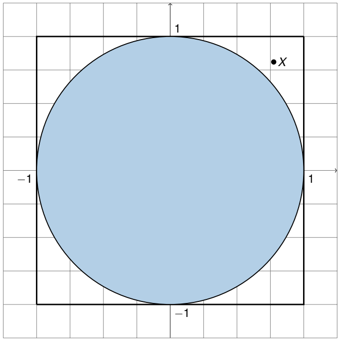


$= 4$

$\pi r^2 = \pi$

Erstes Beispiel: Schätzung von π.

Wie wahrscheinlich ist es, dass ein *rein* zufällige Auswahl eines Punktes aus dem Quadrat auf den blauen Kreis führt? Angenommen haben wir ein Werkzeug mit dem wir rein zufällig einen Punkt auswählen können, z.B. einen Dartspfeil.



Sei Q das Quadrat. “X ist **einen rein zufälligen** Punkt von Q” bedeutet: für jede (messbare) Teilmenge $A \subset Q$ gilt

$$\mathbb{P}(X \in A) = \frac{\text{Fläche von } A}{\text{Fläche von Q}}.$$

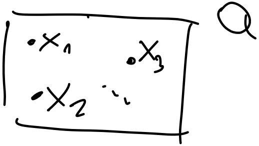
In Worten: die Wahrscheinlichkeit dass ein zufälliger Punkt X in der Menge A liegt, ist gegeben durch die Anteil der Fläche von A an der Gesamtfläche.
Hier, $\mathbb{P}$ steht für “probability”, d.h. Wahrscheinlichkeit.
Die Schreibweise $\mathbb{P}(X \in A)$ wird bald noch einmal formal eingeführt.

Angenommen wir können einen rein zufälligen Punkt auswählen, und zwar nicht nur einmal, sondern beliebig oft: wir erhalten also eine **zufällige Folge** $X_1, X_2, \dots$ von Punkten aus Q.

Für vorgegebenes $A \subset Q$ betrachten wir eine daraus abgeleitete zufällige Folge $Z_1, Z_2, \dots$ wobei

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } X_i \in A \\ 0 & \text{falls } X_i \notin A. \end{cases}$$

indikatoren



Die zufällige Zahl

$$M_{100} = \frac{1}{100}(\overbrace{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{100}}^{\text{Erwartungswert.}})$$

ist ein **Schätzer** für $\mathbb{P}(X \in A)$, d.h.

$$M_{100} \approx \mathbb{P}(X \in A).$$

Welche Werte kann die **Zufallsvariable** M_{100} annehmen?

$$M_{100} \in \left\{0, \frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \ldots, \frac{99}{100}, 1\right\}.$$

keine Punkte im O liegt.

Jedoch ist nicht jeder dieser Werte gleich wahrscheinlich.

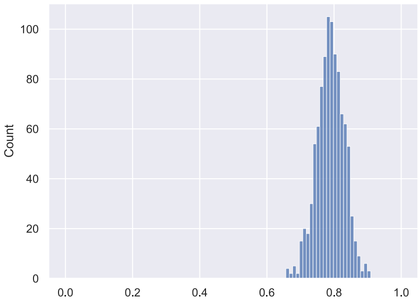
Wir erzeugen 1000 **unabhängige** Kopien von M_{100}, und zeichnen das entsprechende **Histogramm**. Der echte Wert $\mathbb{P}(X \in A)$ liegt dort, wo die **Verteilung** von M_{100} **konzentriert** ist.

$\mathbb{P}(X \in \bigcirc) = \frac{\pi}{4}$

Falls A der Kreis ist, der Schätzer M_{100} ergibt die Abschätzung $\pi \approx 4M_{100} = \underline{3.14536}\ldots$

$4 \times M_{100}$

Im Laufe diese VL werden die in diesem Beispiel verwendete Begriffe, wie **Wahrscheinlichkeit**, **Verteilung**, **zufällige Folge**, **Schätzer**, etc. präzise definiert werden.



Python-Code

```python
import numpy as np
import seaborn as sns
import matplotlib.pyplot as plt


if __name__ == "__main__":
    # Parametern für die Simulation
    N = 100
    L = 1_000

    # Zufallsngenerator
    rng = np.random.default_rng()

    # Array für die Ergebnisse
    M = np.zeros(L)
```

Punkte aus Q

Kopien von M_{100}

```
# Simulation
for k in range(0, L): 1000
    # Zufällige Punkte in [-1,1] x [-1,1]
    X = rng.uniform(low=-1.0, high=1.0, size=(N, 2))← Punkte aus D
    # Punkte im Einheitskreis
    Z = np.linalg.norm(X, axis=1) <= 1 ← Indikatoren
    # Monte-Carlo-Schätzer
    M[k] = Z.mean() ← 1/100 (Z1 + ... + Z100).
# Ausgabe
print(f"pi ~ {M.mean()*4}")
               Schätzer.
# Histogramm
sns.set_theme()
sns.histplot(M, bins=np.linspace(0,1,100))
# Speichern
plt.savefig('hist.pdf', bbox_inches='tight', pad_inches=0)
```

Wahrscheinlichkeiten

Definition 1 (Zufallsexperiment)

Ein **Zufallsexperiment** ist ein (reproduzierbarer) Vorgang mit zufälligem oder *a priori* unbestimmten Ausgang.

Beispiel 1

- Würfeln, Münzwurf, Lottoziehung,
- SARS-Cov2 Ag Test,
- Messung der Zahl den Zugriffe auf Webseite an zufälligen Tag,
- Physiologische u. Medizinische Messungen.

Ergebnis, Ereignis

Definition 2

Ein möglicher Ausgang eines Zufallsexperiment ist ein **Ergebnis**.
Die Menge aller möglichen Ergebnisse eines bestimmten Zufallsexperiment wird üblicherweise mit dem griechischen Buchstaben Ω bezeichnet. Für ein einzelnes Ergebnis schreiben wir $\omega \in \Omega$.
Ein **Ereignis** ist eine Teilmenge von Ω, in Mengenschreibweise $A \subset \Omega$.

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ n mögliche Ergebnisse.

$A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \subset \Omega$

Ergebnis, Ereignis

Beispiel (Würfeln)

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A = \{\omega : \omega \text{ ist gerade}\} = \{2,4,6\} \subset \Omega$

$B = \{\omega : \omega \geq 3\} = \{3,4,5,6\}.$

Mengenoperationen

Wir können aus ein paar Ergebnisse ein weiteres Ergebnis erzeugen, indem logische Aussage benutzen.

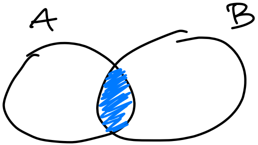
logische Verknüpfung	**Mengenoperation**
$a \wedge b$ und	$A \cap B$ Durchschnitt
$a \vee b$ oder (einschließend)	$A \cup B$ Vereinigung
$\neg a$ Negation	A^c Komplement
$a \wedge (\neg b) = \neg(a \implies b)$	$A \setminus B$ Differenz
$a \oplus b$ oder $a \veebar b$ oder (ausschließend)	$A \Delta B$ symmetrische Differenz

"A <u>und</u> B beide eintretten" $= A \cap B$
$= \{4, 6\}$

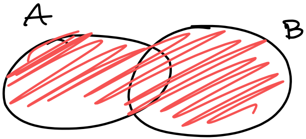
"A <u>oder</u> B eintretten" $= A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

Mengenoperationen

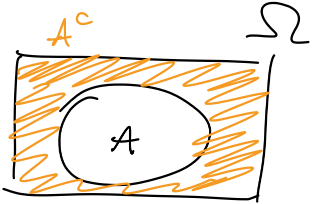
Beispiel (Mengenoperationen)



$A \cap B$



$A \cup B$



$A^c = \{\omega : \omega \text{ ist ungerade}\} = \{1, 3, 5\}$

<u>Gegenereignis</u>

Wahrscheinlichkeitsraum

Definition 3

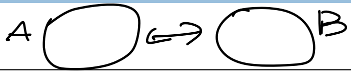
Ein **endlicher Wahrscheinlichkeitsraum** ist ein Paar $(\Omega, \mathbb{P})$, wobei Ω ist eine endliche Ergebnismenge und $\mathbb{P}$ eine Abbildung, welches jedem Ereignis $A \subset \Omega$ eine Zahl $\mathbb{P}(A)$ zuordnet.

Diese Zahl ist als die **Wahrscheinlichkeit** des Ereignisses A genannt. Die Funktion $\mathbb{P}$ wird als die **Wahrscheinlichkeitsmaß** des Raumes bezeichnet.

Dabei hat $\mathbb{P}$ die Eigenschaften (Axiomen von Kolmogorov):

1. $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$ für alle $A \subseteq \Omega$, $\quad \mathbb{P}(A) = 0$ "A tritt sicher <u>nicht</u> ein"
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, $\quad \mathbb{P}(A) = 1$ "A tritt sicher ein".
3. Für $A, B \subseteq \Omega$ disjunkt ($A \cap B = \emptyset$) gilt

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$



Beispiel (Würfeln)

$A = \{\omega : \omega \text{ gerade}\} = \{2, 4, 6\}$

$B = \{\omega : \omega \geq 3\} = \{3, 4, 5, 6\}$

$\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(2) = \dots = \mathbb{P}(6) = \frac{1}{6}$ (faire Würfel).

$A = \{2, 4, 6\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$

$\{2\} \cap \{4\} = \emptyset$

$\vdots$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{2, 4, 6\})$

$= \mathbb{P}(2) + \mathbb{P}(4) + \mathbb{P}(6)$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

Beispiel (Würfeln)

$$B = \{3,4,5,6\} = \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\}$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(3) + \mathbb{P}(4) + \mathbb{P}(5) + \mathbb{P}(6)$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(\{2,3,4,5,6\})$$
$$= \frac{5}{6} \neq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} > \underline{\underline{1}}$$

kein Wiederspruch zu 3.

da $A \cap B \neq \emptyset$

Rechenregeln

Ω Endlich $\mathbb{P}$ W'keitsmass

Theorem 1

Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dann gilt für alle Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$:

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, ✓
2. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$,
3. für $A \subset B$ gilt $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$,
4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$,

Beweis

Zu 2: $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

$$\Omega = A \cup A^c, \quad A \cap A^c = \emptyset$$

Aus Def 1.3. & Def. 1.2

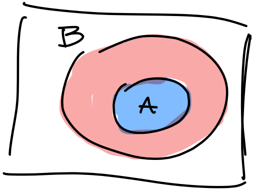
$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

Zu 1: $\Omega^c = \emptyset$, $\mathbb{P}(\emptyset) = 1 - \mathbb{P}(\Omega)$
$= 1 - 1 = 0$

Beweis

Zu 3:



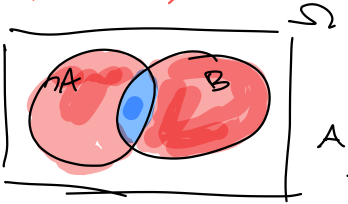
$$B = A \cup B\setminus A \,, \quad A \cap B\setminus A = \emptyset$$

$$P(B) = P(A) + \overset{\geq 0}{P(B\setminus A)} \quad \text{Aus Def. 1.1.}$$
$$\geq P(A)$$

Übung

$$A\Delta B = (A\cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

Zu 4:



$$A \cup B = A\Delta B \cup A\cap B \quad \left(A\Delta B \cap (A\cap B) = \emptyset\right)$$

$$P(A\cup B) = P(A\Delta B) + P(A\cap B)$$

$$A = A \cap \Omega$$
$$= A \cap (B \cup B^c) = (A\cap B) \cup (A \cap B^c)$$

Beweis

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup A^c) = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$$

$B \cap A$ und $B \cap A^c$ sind disjunkt.

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap A^c) \\ \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c) \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A \Delta B) + \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B) \cancel{- \mathbb{P}(B \cap A)} \cancel{+ \mathbb{P}(A \cap B)} \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \end{aligned}$$

Was ist ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsraum?

Beispiel (2-facher Münzwurf)

$$\Omega_1 = \{K, Z\}$$

geordnetes Paar

$$\Omega_2 = \{(K,K), (K,Z), (Z,K), (Z,Z)\}$$

$$\mathbb{P}((K,K)) = \mathbb{P}((K,Z)) = \mathbb{P}((Z,K)) = \mathbb{P}((Z,Z)) = \frac{1}{4}$$

„Wie oft kommt Zahl vor"?

$$\tilde{\Omega} = \{0, 1, 2\}$$

$$\tilde{\mathbb{P}}(0) = 1/4 = \tilde{\mathbb{P}}(2)$$

$$\tilde{\mathbb{P}}(1) = 1/2$$