Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen
(Tutorium 10)

Vorlesungswoche: 24. – 28. Juni 2024

Sommersemester 2024

Aufgabe 27

Untersuche das inhomogene Anfangswertproblem

$$x'(t) + x(t) = h(t), \qquad x(0) = 0,\ x'(0) = 0.$$

(a) Bestimme die zugehörige Greensche Funktion.

(b) Löse das Anfangswertproblem in Abhängigkeit von $t_0 \geq 0$ für

$$h(t) \coloneqq \begin{cases} \mathrm{e}^{-(t-t_0)}, & t \geq t_0, \\ 0, & t < t_0. \end{cases}$$

Aufgabe 28

Löse die Integralgleichung

$$x(t) - \int_0^t \sin(t-\tau)\, x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1.$$

Aufgabe 29

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine absolut-integrierbare, ungerade Funktion. Zeige

$$\mathcal{F}[f](\omega) = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\big(\mathcal{L}[f](\mathrm{i}\omega)\big).$$

Berechne mit dieser Identität die Fouriertransformierte von $t \mapsto t\,\mathrm{e}^{-|t|}$.

Laplace-Faltung

Definition $\quad f(t)*g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = \int_0^t g(t-\tau)f(\tau)\,d\tau$

Faltungssatz $\quad \mathcal{L}[f(t)*g(t)](s) = \mathcal{L}[f](s)\cdot\mathcal{L}[g](s)$

Anwendung

$$\xrightarrow[e(t)]{E(s)} \boxed{\text{LTI-System}} \xrightarrow[a(t)]{A(s)}$$

$$\downarrow$$

$G(s)$ Übertragungsfunktion

$g(t)$ Impulsantwort

$$\boxed{A(s) = G(s)\cdot E(s)}$$

$$\mathcal{L}[a(t)](s) = \mathcal{L}[g(t)](s)\cdot\mathcal{L}[e(t)](s) \overset{FS}{=} \mathcal{L}[g(t)*e(t)](s)$$

$$\Rightarrow \boxed{a(t) = g(t)*e(t)}$$

Greensche-Funktion

AWP: $x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n x(t) = h(t)$

$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0$

$$\xrightarrow[H(s)]{h(t)} \boxed{\quad\quad\quad} \xrightarrow[X(s)]{x(t)}$$

$$\downarrow$$

$g(t)$

$G(s)$

$$\boxed{X(s) = \underbrace{(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n)^{-1}}_{G(s) = \mathcal{L}[g(t)](s)} H(s)}$$

Greensche Fkt

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = g(t)*h(t)}$$

Aufgabe 27

Untersuche das inhomogene Anfangswertproblem

$$x'(t) + x(t) = h(t), \qquad x(0) = 0,\ x'(0) = 0.$$

(a) Bestimme die zugehörige Greensche Funktion.

(b) Löse das Anfangswertproblem in Abhängigkeit von $t_0 \geq 0$ für

$$h(t) := \begin{cases} e^{-(t-t_0)}, & t \geq t_0, \\ 0, & t < t_0. \end{cases}$$

a) Greensche Fkt: $\quad X(s) = \underbrace{(s+1)^{-1}} H(s)$

$\quad G(s) = \mathcal{L}[g(t)](s) = \frac{1}{s+1} \rightarrow g(t) = e^{-t}$

b) $X(t) = g(t)*h(t) = \int_0^t g(t-\tau)h(\tau)\,d\tau = \int_0^t e^{-t+\tau}h(\tau)\,d\tau$

für $t < t_0$: $\quad x(t) = \int^t e^{-t+\tau}\cdot 0\,d\tau = 0$

für $t \geq t_0$: $x(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-t+\tau} \cdot e^{-(\tau - t_0)} d\tau$

$$= \int_{t_0}^{t} e^{-t+t_0} d\tau$$

$$= (t-t_0) e^{-t+t_0}$$

Aufgabe 28

Löse die Integralgleichung

$$x(t) - \int_0^t \sin(t-\tau)\, x(\tau)\, \mathrm{d}\tau = 1.$$

$X(t) - \sin(t) * x(t) = 1$

$\mathcal{L}[x(t)](s) - \mathcal{L}[\sin(t) * x(t)](s) = \mathcal{L}[1](s)$

$\mathcal{L}[x(t)](s) - \mathcal{L}[\sin(t)](s) \cdot \mathcal{L}[x(t)](s) = \frac{1}{s}$

$X(s)\left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s}$

$X(s) = \frac{s^2+1}{s \cdot s^2} = \frac{s^2+1}{s^3}$

$= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}$

$= \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s^3}$

$\Rightarrow x(t) = 1 + \frac{1}{2} t^n$

$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$

Fourier-Transformation

Definition $f(t): \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ Fourier-Trafo von f: $\mathcal{F}[f(t)](\omega) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$

Aufgabe 29

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine absolut-integrierbare, ungerade Funktion. Zeige

$$\mathcal{F}[f](\omega) = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\big(\mathcal{L}[f](\mathrm{i}\omega)\big).$$

Berechne mit dieser Identität die Fouriertransformierte von $t \mapsto t\,\mathrm{e}^{-|t|}$.

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}[f(t)](i\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(t) e^{-i\omega t} dt}_{\text{Substition mit } u=-t \text{ mit } du=-dt} + \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{\infty}^{0} -f(-u) e^{i\omega u} du + \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$f(u)$ ungerade
$$= \int_0^{\infty} -f(u) e^{i\omega u} du + \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$\overline{x \cdot y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$
$$= \int_0^{\infty} -\overline{\bar{f}(u) e^{-i\omega u}} du + \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$= -\overline{\mathcal{L}[\bar{f}\ ](i\omega)} + \mathcal{L}[f\ ](i\omega)$$

$$= -\overline{\mathcal{L}[f\ ](i\omega)} + \mathcal{L}[f](i\omega)$$

$$= 2i\,\mathrm{Im}(\mathcal{L}[f](i\omega))$$

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$\bar{f} = f$

$-\bar{x} + x$

$= -\overline{(a+ib)} + a + ib$

$= -(a-ib) + a + ib$

$= 2ib$