3. Vorlesung: Satz der totalen Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

Nikolas Tapia

22. April 2024, Stochastik für Informatik(er)

$G = K^c$

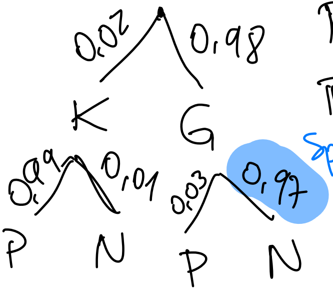
Beispiel (Test auf Krankheit)

Eine Krankheit tritt bei 2% der Bevölkerung auf.
Ein Bluttest erkennt sie in 99% der Fälle, aber er zeigt bei 3% der gesunden Personen falsch positiv an.

Positivität

$\mathbb{P}(P|K) = 0{,}99$

$\mathbb{P}(N|K) = 1 - \mathbb{P}(P|K)$
$= 0{,}01$



$\mathbb{P}(K) = 0{,}02$

$\mathbb{P}(G) = 1 - \mathbb{P}(K)$
$= 0{,}98$
$(= 98\%)$

da: $\mathbb{P}(\cdot|K)$ ist ein W'keitsmaß

Beispiel (Test auf Krankheit)

Eine Krankheit tritt bei 2% der Bevölkerung auf.
Ein Bluttest erkennt sie in 99% der Fälle, aber er zeigt bei 3% der gesunden Personen falsch positiv an.

W'keit $\mathbb{P}(P \cap K)$?

$$\mathbb{P}(P \cap K) = \mathbb{P}(P \mid K)\,\mathbb{P}(K)$$

$$= 0.99 \times 0.02$$

$$= 0{,}0198 \quad (1{,}98\%)$$

$\mathbb{P}(P)$? $\mathbb{P}(K \mid P)$?

Gesamt W'keit

Formel der Gesamtwahrscheinlichkeit

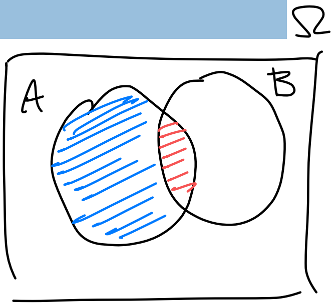
Aussage 3.0

Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse, mit $0 < \mathbb{P}(B) < 1$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c).$$

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$$

da $\cap = \emptyset$



$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c)$$

$$= \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)$$

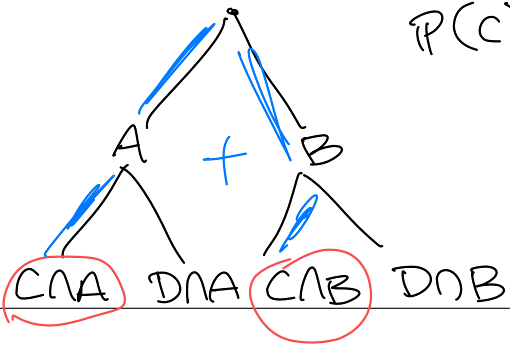
Additionsregel

Aussage 3.1

In einem mehrstufigen Experiment berechnet sich die Wahrscheinlichkeit eines ~~Ergebnisses~~ durch **Addition** der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten auf den Blättern des Baumes.

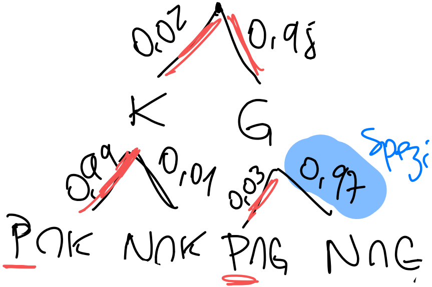
Ereignis

$\mathbb{P}(C)$?



Beispiel (Test auf Krankheit)

Eine Krankheit tritt bei 2% der Bevölkerung auf.
Ein Bluttest erkennt sie in 99% der Fälle, aber er zeigt bei 3% der gesunden Personen falsch positiv an.



$(G = K^c)$

Additionsregel

$$\mathbb{P}(P) \overset{X}{=} \mathbb{P}(P|K)\,\mathbb{P}(K) + \mathbb{P}(P|G)\,\mathbb{P}(G)$$

$$= 0{,}99 * 0{,}02 + 0{,}03 * 0{,}98 = 0{,}0492 \; (4{,}92\%)$$

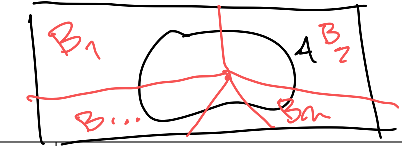
Allg. Formel der Gesamtwahrscheinlichkeit

Aussage 3.2

Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und sei A ein Ereignis. Sei $B_1, \ldots, B_n$ eine *disjunkte* Zerlegung von Ω. Dann gilt

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

Zerlegung: $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ $i \neq j$



$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$ $(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) \neq \emptyset$

$\ldots \cup (A \cap B_n)$

$P(A) = P(A \cap B_1) + \ldots + P(A \cap B_n)$

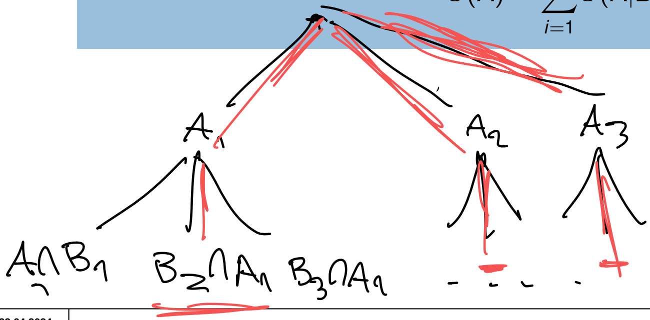
$=$ analog...

Allg. Formel der Gesamtwahrscheinlichkeit

Aussage 3.2

Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und sei A ein Ereignis. Sei $B_1, \dots, B_n$ eine *disjunkte* Zerlegung von Ω. Dann gilt

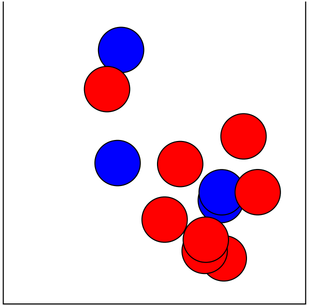
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i).$$



$$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_2|A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B_2|A_2)\mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(B_2|A_3)\mathbb{P}(A_3)$$

2-mal Ziehung ohne Zurücklegen

Beispiel (2-fache Ziehung)



$B_i = \{ i\text{-te K. ist blau} \}$

$R_i = \{ i\text{-te K. ist rot} \}$

1. Zug: B_1 mit $4/12$, R_1 mit $8/12$

2. Zug: $B_1 \cap B_2$ mit $3/11$, $B_1 \cap R_2$ mit $8/11$, $R_1 \cap B_2$, $R_1 \cap R_2$ mit $7/11$

Unabhängigkeit

Definition 3.0

Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse. A und B heißen **unabhängig**, falls

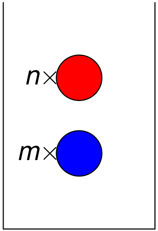
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

gilt.

Unabhängigkeit

2-mal ziehen ohne Zurücklegen.

Beispiel (2-fache Ziehung)



$$\mathbb{P}(B_2 \cap R_1) = \mathbb{P}(B_2)\,\mathbb{P}(R_1) \;?$$

$$\boxed{\mathbb{P}(R_1) = \frac{n}{n+m}}$$

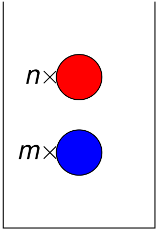
$$\mathbb{P}(B_1) = \frac{m}{n+m}$$

$$\mathbb{P}(B_2 \cap R_1) = \mathbb{P}(B_2 \mid R_1)\,\mathbb{P}(R_1)$$

$$\frac{m}{n+m-1} \times \frac{n}{n+m} = \frac{nm}{(n+m-1)(n+m)}$$

Unabhängigkeit

Beispiel (2-fache Ziehung)



$$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_2 \mid R_1)\,\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(B_2 \mid B_1)\,\mathbb{P}(B_1)$$

$$= \frac{m}{n+m-1} \times \frac{n}{n+m} + \frac{m-1}{m+n-1} \times \frac{m}{n+m}$$

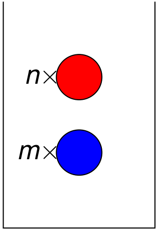
$$= \frac{mn + (m-1)m}{(n+m-1)(n+m)}$$

$$\mathbb{P}(B_2 \cap R_1) = \frac{nm}{(n+m)(n+m-1)} \neq \mathbb{P}(B_2)\,\mathbb{P}(R_1)$$

Unabhängigkeit

2-fache Ziehung mit Zurücklegen.

Beispiel (2-fache Ziehung)



$$\mathbb{P}(B_1) = \frac{m}{n+m}$$

$$\mathbb{P}(R_1) = \frac{n}{n+m}$$

$$\mathbb{P}(B_2 \mid R_1) = \frac{m}{n+m} = \mathbb{P}(B_2)\,\mathbb{P}(R_1)$$

$$\mathbb{P}(B_2 \cap R_1) = \mathbb{P}(B_2 \mid R_1)\,\mathbb{P}(R_1) = \frac{m}{(m+n)} \times \frac{n}{(m+m)}$$

Unabhängigkeit

Aussage 3.3

Seien A, B Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Dann sind A und B genau dann unabhängig, wenn

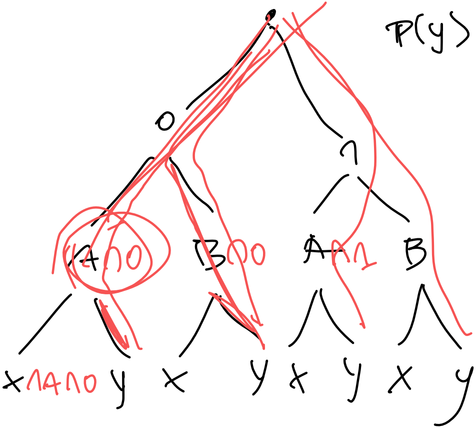
$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A).$$

Bew: A, B mit $\mathbb{P}(B) > 0$,

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A) \quad \boxtimes$$

Übung: $\boxed{\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B) \quad \mathbb{P}(A) > 0.}$

Beispiel (Leitungssysteme)



$$P(y) = P(y \mid A \cap 0)\, P(A \cap 0) = P(y \mid A \cap 0)\, P(A \mid 0)\, P(0).$$

$+ \; P($

Allg. Unabhängigkeit

Definition 3.1

Seien $A_1, \dots, A_n$ Ereignisse auf $(\Omega, \mathbb{P})$. Die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ heißen **unabhängig**, falls für alle $2 \leq k \leq n$ und Indizes $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$, $i_l \neq i_j$ für $l \neq j$, gilt:

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Anmerkung 1

Die Ereignisse A, B, C sind genau unabhängig, wenn **alle** folgenden Gleichungen gelten:

$k=2$

$$\mathbb{P}(\overset{A_1}{A} \cap \overset{A_2}{B}) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \quad \mathbb{P}(\overset{A_1}{A} \cap \overset{A_3}{C}) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C), \quad \mathbb{P}(\overset{A_2}{B} \cap \overset{A_3}{C}) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

und

$$A \cap B \cap A \cap C = A \cap B \cap C$$

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

Es gibt Beisipele für paarweise unabhängige, aber nicht unabhängige Ereignisse. Ebenso gibt es Beispiele, in denen $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ gilt, aber A, B, C nicht unabhängig sind.