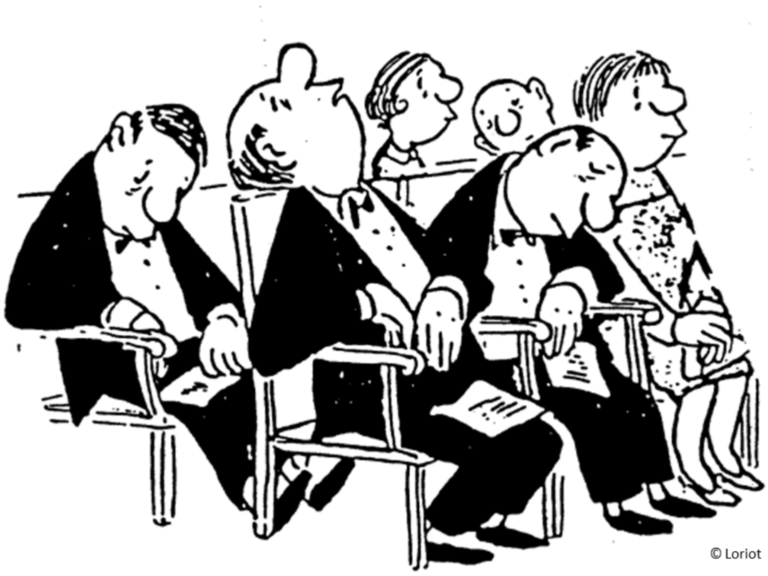
Technische Universität Berlin
Fakultät VII (Wirtschaft & Management)
Fachgebiet Wirtschafts- und Infrastrukturpolitik (WIP)

Lösungskatalog
Operations Research – Grundlagen



Inhaltsverzeichnis

1 Einführung und Übersicht

– Keine Übungsaufgaben –

2 Lineare Optimierung

2.1 Einführung in die lineare Programmierung

a) Unter einem linearen Optimierungs- oder Programmierungsproblem (LP-Problem oder LP) versteht man die Aufgabe, eine lineare (Ziel-)Funktion unter der Beachtung von linearen Nebenbedingungen (= Restriktionen) zu maximieren (oder minimieren).

b)

$$\max z = \sum_{j=1}^{p} c_j \cdot x_j$$

s.t

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \text{ für } 1 \leq i \leq m_1$$

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} \cdot x_j \geq b_i \text{ für } m_1 + 1 \leq i \leq m_2$$

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} \cdot x_j = b_i \text{ für } m_2 + 1 \leq i \leq m$$

$$x_j \in \mathbb{R}$$

c) Die Schlupfvariablen werden der Allgemeinen Form hinzugefügt, um die Normalform zu erhalten. Die Strukturvariablen sind bereits in der Allgemeinen Form enthalten.

$$\max z = \sum_{j=1}^{p} c_j \cdot x_j + \sum_{j=p+1}^{n} 0 \cdot x_j$$

s.t

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} \cdot x_j + x_{p+i} = b_i \qquad \text{für } 1 \leq i \leq m_1$$

$$\sum_{j=1}^{p} -a_{ij} \cdot x_j + x_{p+i} = -b_i \qquad \text{für } m_1 + 1 \leq i \leq m_2$$

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} \cdot x_j = b_i \qquad \text{für } m_2 + 1 \leq i \leq m$$

$$x_j \geq 0 \qquad \text{für } 1 \leq j \leq p$$

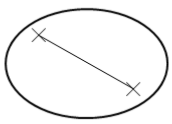
d) • Ein LP besitzt genau eine optimale Basislösung. (möglich)

- Ein LP besitzt keine optimale Basislösung. (möglich)
- Ein LP besitzt unendlich viele optimale Basislösungen. (möglich)
- Ein LP besitzt genau zwei optimale Basislösungen. (unmöglich)
- Ein LP besitzt genau 734.982.726 optimale Basislösungen. (unmöglich)

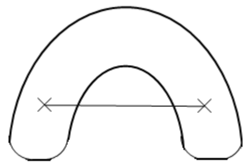
2.2 Konvexität

a) Mengen: Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist konvex, wenn für alle $x, y \in M$ auch $\lambda x + (1-\lambda)y \in M$, $\lambda \in [0,1]$.

D. h. für zwei beliebige Punkte einer Menge, liegt auch die Verbindungsstrecke ganz in der Menge.



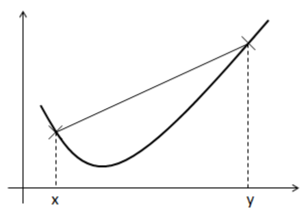
konvex



nicht konvex

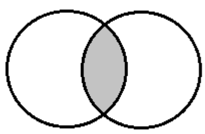
Funktionen: Eine Funktion ist konvex, wenn für alle x_1, x_2 in $\mathbb{R}^n$ und für jedes $\lambda \in [0,1]$ gilt: $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$.

D. h. alle Funktionswerte zwischen zwei beliebigen Werten x,y liegen unterhalb oder auf der Verbindungsgraden der beiden Funktionwerte an x und y.

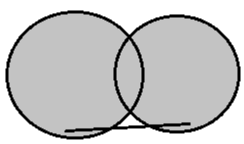


konvex

b) Ja.



c) Nein.



d) Ohne die Konvexität ließe sich nicht sagen, dass ein gefundenes lokales Optimum auch ein globales ist.

e) Ja.

2.3 Lineare Programmierung: Grundlagen

	Richtig	Falsch
Ein unbeschränktes LP kann eine optimale Basislösung haben.	×	
Ein LP kann genau eine optimale Basislösungen besitzen.	×	
Ein optimaler Zielfunktionswert kann einen negativen Wert annehmen.	×	
Eckpunkte des zulässigen Bereichs werden auch optimale Basislösung genannt.		×
Die Vereingung von zwei konvexen Flächen ist auch konvex.		×
$f(x) = 3x^2 + 4x + 3$ ist eine konvexe Funktion.	×	
$f(x) = tan(x)\ x \in]-\frac{\Pi}{2};0]$ ist eine konvexe Funkion.		×
$\max\ z = \sqrt{7}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + 8^3x_3 - 4$ könnte eine Zielfunktion eines Linearen Programms sein.	×	
$f(x) = sin(x)\ x \in [0;\Pi]$ ist eine konvexe Funktion.		×
Der zulässige Bereich eines LPs ist immer konvex.	×	

2.4 Matrizen

a) Standardform des LPs

$$\max \quad z - 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 = 0$$

s.t

$$3 \cdot x_1 + x_3 = 9$$

$$x_1 + x_2 + x_4 = 6$$

$$x_1 - 4 \cdot x_2 + x_5 = 1$$

$$x_{1,\ldots,5} \geq 0$$

b) Wie nennt man die Eckpunkte des Lösungsraums?

Die Eckpunkte des Lösungsraums werden zulässige Basislösung genannt. Sie bilden die Menge der Kandidaten für die optimale Basislösung.

2.5 Modellbildung: Der Whisky-Importeur

Es ergeben sich drei Nebenbedingungen für die Importbeschränkung, fünf Nebenbedingungen für die maximalen bzw. minimalen Mischverhältnisse und eine Nichtnegativitätsbedingung für alle Variablen.

Die Variablen sind wie folgt definiert:

ax: Anteil von Sir Roses an Crested Ten in Litern

ay: Anteil von Highland Wind an Crested Ten in Litern

az: Anteil von Old Frenzy an Crested Ten in Litern

bx: Anteil von Sir Roses an Jameson in Litern

by: Anteil von Highland Wind an Jameson in Litern

bz: Anteil von Old Frenzy an Jameson in Litern

cx: Anteil von Sir Roses an Paddy in Litern

cy: Anteil von Highland Wind an Paddy in Litern

cz: Anteil von Old Frenzy an Paddy in Litern

$$
\begin{aligned}
\max\ z = \quad & 34(ax + ay + az) + 28,50(bx + by + bz) + 22,50(cx + cy + cz) \\
& -35(ax + bx + cx) - 25(ay + by + cy) - 20(az + bz + cz) \\
\text{s.t.} \quad & 2000 \geq ax + bx + cx \\
& 2500 \geq ay + by + cy \\
& 1200 \geq az + bz + cz \\
& ax \geq 0,6(ax + ay + az) \\
& az \leq 0,2(ax + ay + az) \\
& bx \geq 0,15(bx + by + bz) \\
& bz \leq 0,6(bx + by + bz) \\
& cz \leq 0,5(cx + cy + cz) \\
& ax \dots cz \geq 0
\end{aligned}
$$

2.6 Modellbildung: Die Personalplanung

Die 8-Stunden Mitarbeiterzeiten überlappen die Anfangszeiten der Schichten. Die Variable x_j beschreibt die Anzahl der Personen, die in den einzelnen Schichten anfangen. Der Index j beschreibt die einzelnen Schichten.

x(t): Anzahl der Arbeiter, die in Periode t anfangen

$$\begin{aligned}
\min \quad & z = \sum_{t=1}^{6}(x(t)) \\
\text{s.t} \quad & x(t) + x(t+1) \geq \text{Bedarf in Periode t+1}, \qquad t = 1, \dots, 6 \\
& x(7) = x(1), \quad \text{Bedarf in Periode 7} = \text{Bedarf in Periode 1} \\
& x(t) \in \mathbb{N}_0
\end{aligned}$$

x_1: Anzahl der Mitarbeiter, die um 0 Uhr anfangen
x_2: Anzahl der Mitarbeiter, die um 4 Uhr anfangen
x_3: Anzahl der Mitarbeiter, die um 8 Uhr anfangen
x_4: Anzahl der Mitarbeiter, die um 12 Uhr anfangen
x_5: Anzahl der Mitarbeiter, die um 16 Uhr anfangen
x_6: Anzahl der Mitarbeiter, die um 20 Uhr anfangen

$$\begin{aligned}
\min z = & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\
& \text{s.t} \\
& x_1 + x_2 \geq 8 \\
& x_2 + x_3 \geq 10 \\
& x_3 + x_4 \geq 8 \\
& x_4 + x_5 \geq 14 \\
& x_5 + x_6 \geq 5 \\
& x_1 + x_6 \geq 3 \\
& x_{1\dots6} \in \mathbb{N}_0
\end{aligned}$$

2.7 Modellbildung: Die Stahlhütte in Eisenhüttenstadt

Jede Strukturvariable stellt ein mögliches Schnittmuster für ein großes Rohr dar.

Definition: $x(t)_{,t=1,\dots,4}$ ist die Anzahl der Durchführungen eines Schnittmusters t

x_1 : 4 Rohre der Länge von 25 cm (Verschnitt von 5 cm)

x_2 : 2 Rohre der Länge von 25 cm und ein Rohr der Länge von 35 cm (Verschnitt von 20 cm)

x_3 : 1 Rohr der Länge von 25 cm und 2 Rohre der Länge von 35 cm (Verschnitt von 10 cm)

x_4 : 0 Rohre der Länge von 25 cm und 3 Rohre der Länge von 35 cm (Verschnitt von 0 cm)

Aufstellen der Zielfunktion und der Nebenbedingungen:

$$\min z = 5 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 + 10 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$$

s.t

$$4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \geq 100$$

$$0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 \geq 80$$

$$x_{1,\dots,4} \in \mathbb{N}_0$$

2.8 Modellbildung: Oriana in der Teslafabrik

Zielfunktion

$$\boxed{\max z = 99.990 x_S + 54.190 x_3 + 109.990 x_X}$$

s.t.

$$\frac{1}{2{,}5}x_S + \frac{1}{4{,}75}x_3 + \frac{1}{1{,}25}x_X \leq 2520$$

$$2,05x_S + 1,87x_3 + 3,6x_X \leq 12.975$$

$$2,4x_S + 4,8x_X \leq 25.380$$

$$2x_X \leq 10.542$$

$$x_3 \geq 6371$$

$$x_3 \leq 7500$$

$$x_S \in \mathbb{N}_0,\ x_3 \in \mathbb{N}_0,\ x_X \in \mathbb{N}$$

2.9 Modellbildung: Studentenfutter

Variablen

x_1 – Anzahl der produzierten Packungen von "classic-mini"

x_2 – Anzahl der produzierten Packungen von "classic"

x_3 – Anzahl der produzierten Packungen von "fit-mix"

Zielfunktion

$$\max z = \underbrace{2x_1 + 3x_2 + 3,5x_3}_{\text{Erlös}} - \underbrace{10 \cdot 0,03x_3 - 30 \cdot 0,005x_2 - 15 \cdot 0,005x_1}_{\text{Kosten}}$$

Nebenbedingungen

$$\begin{array}{lrcrcrl}
\text{s.t.} & 0,15 \cdot 50x_1 & + & 0,15 \cdot 100x_2 & + & 20x_3 & \leq 1200 \\
 & 4x_1 & + & 6x_2 & + & 6x_3 & \leq 450 \\
 & x_1 & & & & & \geq 40 \\
 & & & & & x_3 & \geq 30
\end{array}$$

Definitionsbereich

$$x_{1,\,2,\,3} \quad \in \mathbb{N}_0$$

2.10 Modellbildung: Erdgas-Problematik

$$
\begin{array}{llllllll}
\min z = & 70 \cdot x_{NL} & + & 70 \cdot x_{NOR} & + & 138 \cdot x_{LNG} & & \\
\text{s.t.} & x_{NL} & & & & & \leq 27 & \\
 & & & x_{NOR} & & & \leq 28 & \\
 & & & & & x_{LNG} & \leq 27 & \\
 & x_{NL} & + & x_{NOR} & + & x_{LNG} & \geq 80 & \\
 & x_{NL} & + & x_{NOR} & & & \geq 40 & \\
 & & & & & x_i & \geq 0 & i = NL, NOR, LNG
\end{array}
$$

2.11 Einführung in die graphische Lösung

a) Die Allgemeine Form muss für dieses Problem in der folgenden Weise umformuliert werden.

$$\max z = x + y$$

$$\text{s.t.}$$

$$x \leqslant 1$$

$$x \geqslant -1$$

$$y \leqslant 1$$

$$y \geqslant -1$$

$$x, y \in \mathbb{R}$$

Grafisch kann das Problem dann in der Form gelöst werden.

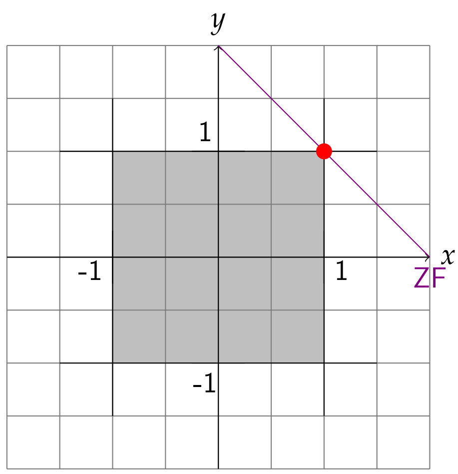


Abbildung 1: Grafische Lösung

Das Optimum liegt für die Werte $x_1 = 1$ und $x_2 = 1$ mit einem Zielfunktionswert von 2 vor.

b)

$$
\begin{aligned}
\max z = x + y \\
\text{s.t.} \\
x + y \leqslant 1 \\
x + y \geqslant -1 \\
x - y \leqslant 1 \\
-x + y \leqslant 1 \\
x, y \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

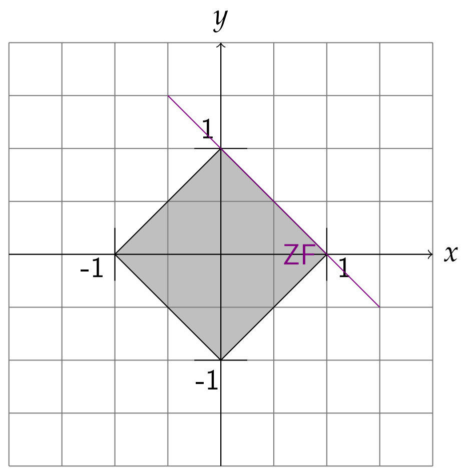


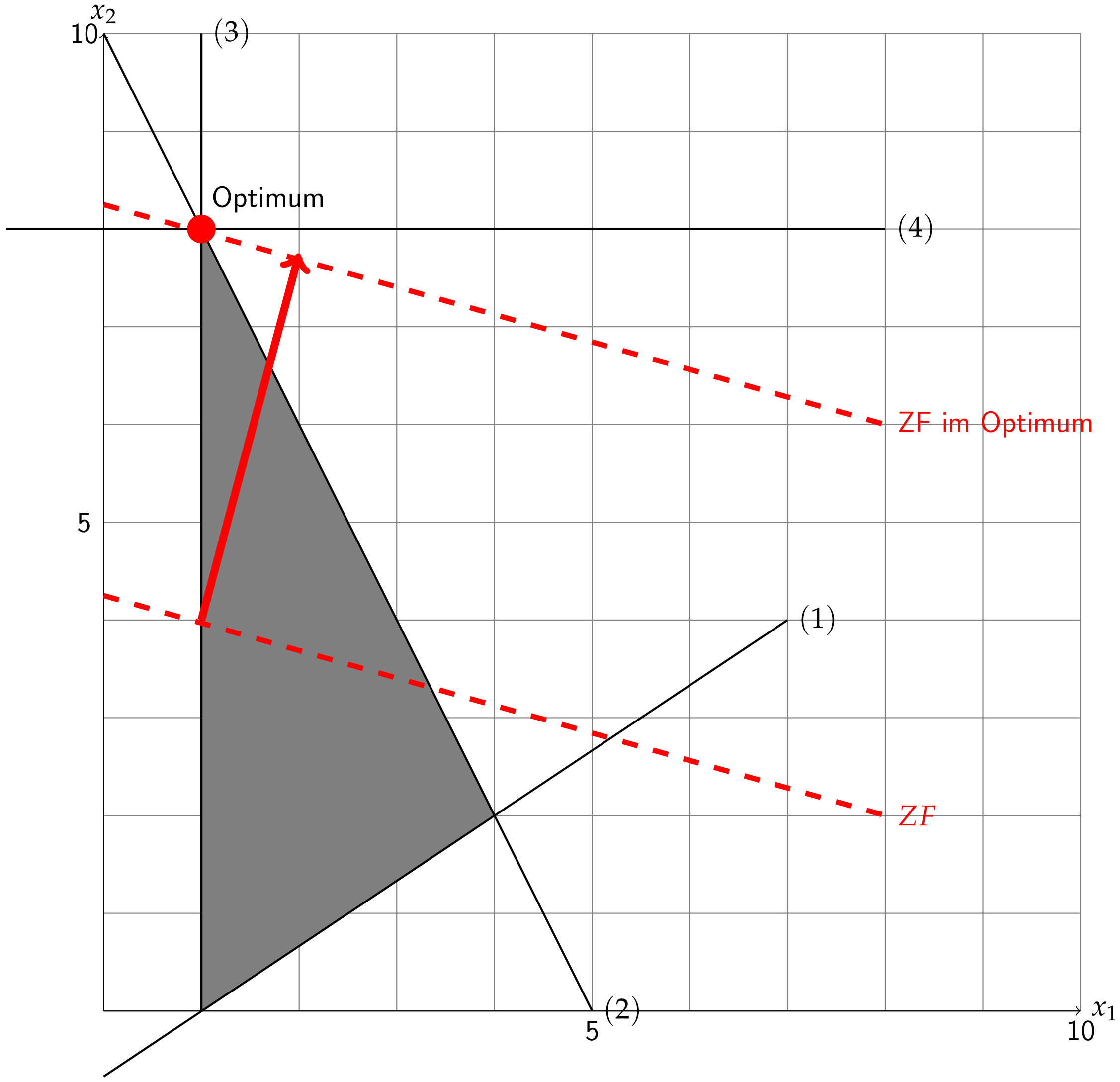
Abbildung 2: Grafische Lösung

Die Zielfunktion liegt auf dem Rand des konvexen Lösungsraums, daher gibt es für dieses Problem ∞ - Lösung.

2.12 Graphische Lösung

Gegeben sei das folgende LP. Bestimmen Sie die Lösung des Problems mit Hilfe der graphischen Lösung.

$$
\begin{aligned}
\max z = \quad & 25x_1 + 100x_2 & & \\
\text{s.t.} \quad & -x_2 + \tfrac{2}{3}x_1 & \leq \tfrac{2}{3} & \quad (1) \\
& x_2 + 2x_1 - 10 & \leq 0 & \quad (2) \\
& x_1 & \geq 1 & \quad (3) \\
& x_2 & \leq 8 & \quad (4) \\
& x_{1,2} & \geq 0 &
\end{aligned}
$$



x_1:	1	x_2:	8	z:	825

2.13 Simplex-Algorithmus

a) Standardform:

$$\begin{aligned}
\max \quad & z - x_1 - x_2 &&= 0 && \text{ZF} \\
\text{s.t.} \quad & 5 \cdot x_1 + x_2 + x_3 &&= 10 && \text{NB1} \\
& x_1 + 2 \cdot x_2 + x_4 &&= 6 && \text{NB2} \\
& -x_1 - x_2 + x_5 &&= -1 && \text{NB3} \\
& x_{1,2,3,4,5} &&\geq 0 &&
\end{aligned}$$

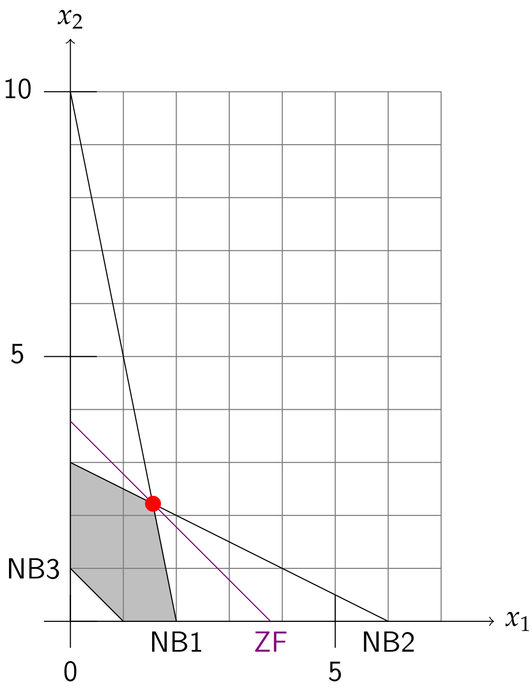


Abbildung 3: Grafische Lösung

Aus der Grafik können wir die Lösung für die beiden Strukturvariablen ablesen: $x_1 = \frac{14}{9}$, $x_2 = \frac{20}{9}$.

Da die ersten beiden Nebenbedingungen offensichtlich bindend sind, ist der Schlupf gleich 0: $x_3 = x_4 = 0$

Lediglich für die dritte Nebenbedingung berechnen wir den Schlupf.

b)

$$
\begin{aligned}
\min z = \quad & -3x_1 - 2x_2 \\
\text{s.t.} \quad & \quad\quad\; x_2 \leq 6 - x_1 \\
& \quad -3x_1 \geq -9 \\
& \quad\quad 4x_2 \geq x_1 - 1 \\
& \quad\quad x_{1,2} \geq 0
\end{aligned}
$$

Der erste Schritt besteht darin, die Allgemeine Form in die Standardform umzuwandeln. Dazu müssen als erstes nur $\leq$- Nebenbedingungen und ein Maximierungsproblem, welches gleich null gesetzt wird, vorliegen. Die Strukturvariablen sind x_1 und x_2.

$$\begin{aligned}
\max -z \quad -3x_1 - 2x_2 &= 0 \\
\text{s.t.} \qquad x_1 + x_2 &\leq 6 \\
3x_1 &\leq 9 \\
x_1 - 4x_2 &\leq 1 \\
x_{1,2} &\geq 0
\end{aligned}$$

Des Weiteren müssen die Schlupfvariablen $x_{3...5}$ eingeführt werden.

$$\begin{aligned}
NB_1 \qquad 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= 6 \\
NB_2 \qquad 3x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 &= 9 \\
NB_3 \qquad x_1 - 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 &= 1 \\
ZF - z \quad -3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= 0
\end{aligned}$$

Aus der grafischen Lösung wird ersichtlich, dass das Optimum für $x_1 = 3$ und $x_2 = 3$ erreicht wird und daher der optimale Zielfunktionwert -15 ist.

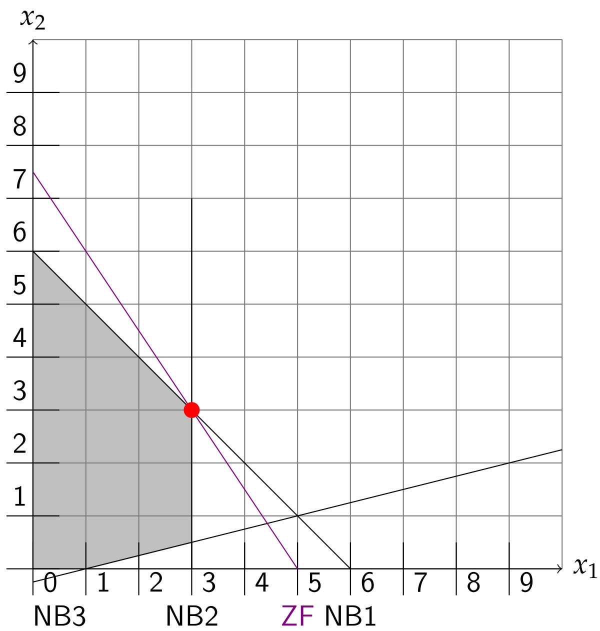


Abbildung 4: Grafische Lösung

c) Die Standardform kann der vorhergehenden Aufgabe entnommen werden. Das Starttableau lautet:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1	1	1	0	0	6
x_4	3	0	0	1	0	9
x_5	1	-4	0	0	1	1
$-z_j$	-3	-2	0	0	0	0

Nach der ersten Tableautranformation ergibt sich das folgende Tableau.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	0	5	1	0	-1	5
x_4	0	12	0	1	-3	6
x_1	1	-4	0	0	1	1
$-z_j$	0	-14	0	0	3	3

Nach einer weiteren Tableautranformation ergibt sich das folgende Tableau.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	0	0	1	-5/12	1/4	5/2
x_2	0	1	0	1/12	-1/4	1/2
x_1	1	0	0	1/3	0	3
$-z_j$	0	0	0	14/12	-1/2	10

Das Optimaltableau lautet:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_5	0	0	4	-5/3	1	10
x_2	0	1	1	-1/3	0	3
x_1	1	0	0	1/3	0	3
$-z_j$	0	0	2	1/3	0	15

d) Hierbei handelt es sich um ein umgeformtes Problem der Aufgabe 2.13 b). Aus diesem Grund ist auch die grafische Lösung hier gleich der Aufgabe 2.13 b).

e) Standardform:

$$\begin{aligned} \max \quad & z - 3x_1 - 2x_2 &= 0 \quad & \text{ZF} \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \quad & \text{NB1} \\ & 3 \cdot x_1 + x_4 &= 9 \quad & \text{NB2} \\ & x_1 - 4 \cdot x_2 + x_5 &= 1 \quad & \text{NB3} \\ & x_{1,2,3,4,5} &\geq 0 & \end{aligned}$$

I	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1	1	1	0	0	6
x_4	3	0	0	1	0	9
x_5	1	-4	0	0	1	1
z_j	-3	-2	0	0	0	0

II	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	0	5	1	0	-1	5
x_4	0	12	0	1	-3	6
x_1	1	-4	0	0	1	1
z_j	0	-14	0	0	3	3

III	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_5	0	0	1	-5/12	1/4	5/2
x_2	0	1	0	1/12	-1/4	1/2
x_1	1	0	0	1/3	0	3
z_j	0	0	0	7/6	-1/2	10

IV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_5	0	0	4	-5/3	1	10
x_2	0	1	1	-1/3	0	3
x_1	1	0	0	1/3	0	3
z_j	0	0	2	1/3	0	15

f) Das Starttableau lautet:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
x_5	1	0	1	0	1	0	0	12
x_6	3	1	2	1	0	1	0	24
x_7	2	2	3	2	0	0	1	18
z_j	-4	-2	-3	-5	0	0	0	0

Das Optimaltableau lautet:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
x_5	1	0	1	0	1	0	0	12
x_6	2	0	0,5	0	0	1	-0,5	15
x_4	1	1	1,5	1	0	0	0,5	9
z_j	1	3	4,5	0	0	0	2,5	45

2.14 Primaler Simplex

a) Standardform:

$$\boxed{\max\ z - 5x_1 - 2x_2 = 6}$$

s.t.:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 10$$
$$2x_1 - x_2 + x_4 = 6$$
$$x_2 + x_5 = 6$$
$$x_1, \ldots, x_5 \geq 0$$

b) Optimale Lösung:

x_1: 4 x_2: 2 x_3: 0 x_4: 0 x_5: 4 z: 30

Lösungsweg

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	2	1	1	0	0	10
x_4	2	-1	0	1	0	6
x_5	0	1	0	0	1	6
z	-5	-2	0	0	0	6

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	0	2	1	-1	0	4
x_1	1	$-1/2$	0	$1/2$	0	3
x_5	0	1	0	0	1	6
z	0	$-9/2$	0	$5/2$	0	21

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	1/2	-1/2	0	2
x_1	1	0	1/4	1/4	0	4
x_5	0	0	-1/2	1/2	1	4
z	0	0	9/4	1/4	0	30

Optimale Basislösung gefunden.

2.15 Dualer Simplex

a) Standardform:

Zielfunktion:

$$\max \; -z + 3x_1 - 5x_2 = 0$$

s.t.:

$$-1/3x_1 + 1x_2 + x_3 = 7$$

$$3x_1 - 1x_2 + x_4 = 9$$

$$-x_1 + x_5 = -1$$

$$x_2 + x_6 = 6$$

$$x_1, \dots, x_6 \geq 0$$

b) Lösung:

x_1: 1 x_2: 6 x_3: $\frac{4}{3}$ x_4: 12 x_5: 0 x_6: 0 z: -27

Lösungsweg

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_3	$-\frac{1}{3}$	1	1	0	0	0	7
x_4	3	-1	0	1	0	0	9
x_5	-1	0	0	0	1	0	-1
x_6	0	1	0	0	0	1	6
$-z$	3	-5	0	0	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_3	0	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$7\frac{1}{3}$
x_4	0	-1	0	1	3	0	6
x_1	1	0	0	0	-1	0	1
x_6	0	1	0	0	0	1	6
$-z$	0	-5	0	0	3	0	-3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_3	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	-1	$\frac{4}{3}$
x_4	0	0	0	1	3	1	12
x_1	1	0	0	0	-1	0	1
x_2	0	1	0	0	0	1	6
$-z$	0	0	0	0	3	5	27

Optimale Basislösung gefunden.

2.16 Dualer und Primaler Simplex

a)

$$\begin{aligned}
\max \quad & z + x_1 - x_2 && = 0 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 - x_2 + x_3 && = 0 \\
& x_1 + 2x_2 + x_4 && = 1 \\
& -2x_1 - x_2 + x_5 && = -2 \\
& x_{1,2,3,4,5} && \geq 0
\end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	2	-1	1	0	0	0
x_4	1	2	0	1	0	1
x_5	-2	-1	0	0	1	-2
z_j	1	-1	0	0	0	0

Nach der Tableautransformation ergibt sich:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	4	0	1	0	-1	2
x_4	-3	0	0	1	2	-3
x_2	2	1	0	0	-1	2
z_j	3	0	0	0	-1	2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	0	0	1	4/3	5/3	-2
x_1	1	0	0	-1/3	-2/3	1
x_2	0	1	0	2/3	1/3	0
z_j	0	0	0	1	1	-1

Das Problem besitzt keine zulässige Lösung. Der duale Simplex bricht in der 3. Iteration ab, da man kein Pivot-Element bestimmen kann.

b)

$$\begin{aligned}
\max z - \quad & 2x_1 - x_2 && = 0 \\
\text{s.t.} \quad & -4x_1 + 3x_2 + x_3 && = 20 \\
& 1x_1 - 4x_2 + x_4 && = 0 \\
& x_{1,2,3,4} && \geq 0
\end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_3	-4	3	1	0	20
x_4	1	-4	0	1	0
z_j	-2	-1	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_3	0	-13	1	4	20
x_1	1	-4	0	1	0
z_j	0	-9	0	2	0

Nach der Tableautransformation ergibt sich:

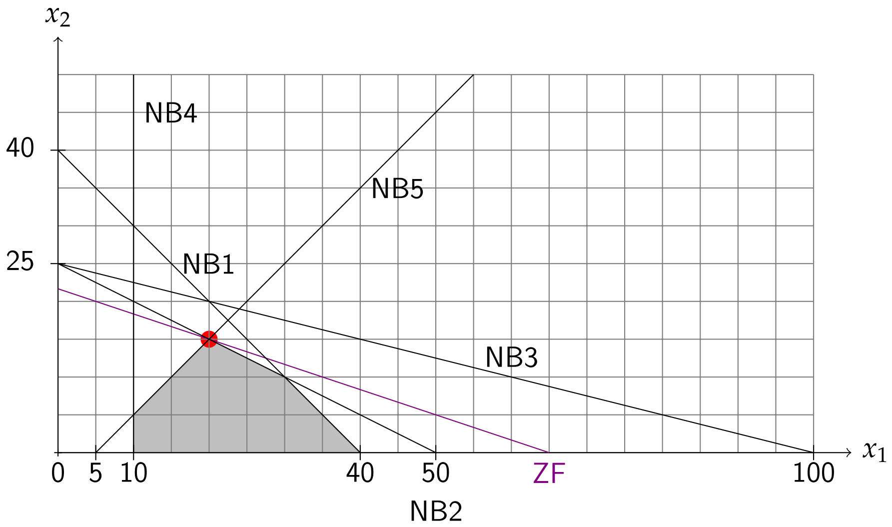
In der zweiten Iteration lässt sich der primale Simplex nicht weiter anwenden. Das Problem ist unbeschränkt.

2.17 Der Eisenwarenproduzent

a)

$$\begin{aligned}
\max z = \quad & 100x_1 && + && 300x_2 && && \\
\text{s.t.} \quad & x_1 && + && x_2 && \leq && 40 \\
& x_1 && + && 2x_2 && \leq && 50 \\
& x_1 && + && 4x_2 && \leq && 100 \\
& x_1 && && && \geq && 10 \\
& x_1 && - && x_2 && \geq && 5 \\
& && && x_{1,2} && \geq && 0
\end{aligned}$$

b) Aus der Grafik können wir das Optimum ablesen: $x_1 = 20$ $x_2 = 15$



c) Das Start-Tableau hat negative Einträge in der b_i-Spalte. Es liegt eine nicht zulässige Basislösung vor. Damit wir eine zulässige Basislösung finden, verwenden wir in der 1. Phase den dualen Simplex-Algorithmus. Wenn wir eine zulässige Lösung finden, können wir mit der 2. Phase (primaler Simplex) weitermachen.

Phase 1

- Wähle Pivotspalte mit minimalem b_i
- Wähle Pivotzeile mit maximalem Quotienten $\frac{c_j}{a_{ij}}$, $a_{ij} < 0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
x_3	1	1	1	0	0	0	0	40
x_4	1	2	0	1	0	0	0	50
x_5	1	4	0	0	1	0	0	100
x_6	-1	0	0	0	0	1	0	-10
x_7	-1	1	0	0	0	0	1	-5
z	-100	-300	0	0	0	0	0	0

Im nächsten Schritt bekommen wir eine

- zulässige Lösung, dies erkennen wir an $b_i \geq 0$,
- aber keine optimale, was wir anhand von $c_j < 0$ erkennen können.

Mit dieser Erkenntnis machen wir mit Phase 2 weiter.

Phase 2

- Wähle Pivotspalte mit kleinstem (negativen) Zielfunktionskoeffizienten c_j
- Wähle Pivotzeile mit minimalem Qutienten $\frac{b_i}{a_{ij}}$, $a_{ij} > 0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
x_3	0	1	1	0	0	1	0	30
x_4	0	2	0	1	0	1	0	40
x_5	0	4	0	0	1	1	0	90
x_1	1	0	0	0	0	-1	0	10
x_7	0	1	0	0	0	-1	1	5
z_j	0	-300	0	0	0	-100	0	1000

Wir erkennen auch hier, dass eine zulässige, aber nicht optimale Lösung vorliegt und machen weiter.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
x_3	0	0	1	0	0	2	-1	25
x_4	0	0	0	1	0	3	-2	30
x_5	0	0	0	0	1	5	-4	70
x_1	1	0	0	0	0	-1	0	10
x_2	0	1	0	0	0	-1	1	5
z_j	0	0	0	0	0	-400	300	2500

Immer weiter...

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
x_3	0	0	1	$-2/3$	0	0	$1/3$	5
x_6	0	0	0	$1/3$	0	1	$-2/3$	10
x_5	0	0	0	$-5/3$	1	0	$-2/3$	20
x_1	1	0	0	$1/3$	0	0	$-2/3$	20
x_2	0	1	0	$1/3$	0	0	$1/3$	15
z_j	0	0	0	$400/3$	0	0	$100/3$	6500

...bis wir, wie hier, eine optimale Lösung bekommen. Das erkennen wir an den nicht-negativen Zielfunktionskoeffizienten ($c_j \geq 0$).

Aus dem Tableau lesen wir die Lösung ab:

$$\begin{aligned} x_1 &= 20 \\ x_2 &= 15 \\ x_3 &= 5 \\ x_4 &= 0 \\ x_5 &= 20 \\ x_6 &= 10 \\ x_7 &= 0 \\ z &= 6500 \end{aligned}$$

2.18 TUmaten

a) Menge an gebrauchtem festen Dünger in kg $\Rightarrow x_1$

Menge an gebrauchtem flüssigen Dünger in Kilogramm $\Rightarrow x_2$

$$\begin{aligned} \min z = \quad & 5 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 & \\ \text{s.t.} \quad & 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 & \geq 6 \\ & 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 & \geq 12 \\ & 4 \cdot x_2 & \geq 4 \\ & x_{1,2} & \geq 0 \end{aligned}$$

Das Starttableau lautet:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	-2	-1	1	0	0	-6
x_4	-2	-4	0	1	0	-12
x_5	0	-4	0	0	1	-4
$-z_j$	5	7	0	0	0	0

Nach der ersten Tableautransformation ergibt sich:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	-3/2	0	1	-1/4	0	-3
x_2	1/2	1	0	-1/4	0	3
x_5	2	0	0	-1	1	8
$-z_j$	3/2	0	0	7/4	0	-21

Das Optimaltableau lautet:

Da es sich um ein Minimierungsproblem handelt, muss der Zielfunktionswert $-z = -24$ aus dem Tableau mit -1 multipliziert werden.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	-2/3	1/6	0	2
x_2	0	1	1/3	-1/3	0	2
x_5	0	0	4/3	-4/3	1	4
$-z_j$	0	0	1	3/2	0	-24

Die Variablen nehmen im Optimum folgende Werte an:

x_1:	2	x_2:	2	$x_{3,4}$:	0	x_5:	4	z:	24

b) **Substitutionskoeffizienten** (a_{ij}):

Geben an, um wieviele Einheiten sich die Basisvariable zur Zeile i erhöht ($a_{ij} < 0$) bzw. verringert ($a_{ij} > 0$), wenn man die Nichtbasisvariable zur Spalte j um eine Einheit **erhöht**.

Schattenpreise bzw. Opportunitätskosten (der Nichtbasisvariablen):

Kostenmäsige Werte jeder Einheit der Mindestanforderungen (Kapazitätrestiktion): **Erhöht** (**senkt**) man die Anforderungen um eine Einheit, verschlechtert (verbessert) sich der Zielfunktionswert um den angegebenen Wert.

Beispielrechnung Schattenpreise Betrachte NB I:

$$2 \cdot x_1 + x_2 \geq 6$$

- **1**. Fall: Erhöhung der Anforderung um eine Einheit, das bedeutet die NB wird verschärft:

  $$2 \cdot x_1 + x_2 \geq 7$$

  damit wird der zulässige Bereich des Optimierungsproblems kleiner und der Zielfunktionswert bei einer aktiven NB offensichtlich schlechter (oder bleibt gleich bei vorliegender dualer Degeneration). Da die zu der NB gehörende Schlupfvariable x_3 im Optimum des Ausgangsproblems eine Nicht-Basis-Variable ($x_3^* = 0$) ist, ist die NB aktiv, das bedeutet beschränkt das Optimum. Damit wäre das ursprüngliche Optimum ($x_1^* = 2, x_2^* = 2, x_3^* = 0, x_4^* = 0, x_5^* = 4$) nach Verschärfung der NB kein zulässiger Punkt mehr.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	-2/3	1/6	0	2
x_2	0	1	1/3	-1/3	0	2
x_5	0	0	4/3	-4/3	1	4
$-z_j$	0	0	1	3/2	0	-24

Statt den Zielfunktionswert neu zu berechnen, kann mithilfe des Schattenpreises von x_3 eine Aussage über den neuen Zielfunktionswert getroffen werden. Es gilt:

$$-z^*_{neu} = -z^*_{alt} - S(x^*_3) = -24 - 1 = -25$$

Interpretation: Wenn die TU einer Pflanze pro Tag statt $6g$ nun mindestens $7g$ Kalium zuführen muss, erhöhen sich die Düngerkosten pro Pflanze um $1,00$ Euro auf Gesamtkosten pro Pflanze von insgesamt $25,00$ Euro pro Tag.

- **2**. Fall: Senkung der Anforderung um eine Einheit, das bedeutet die NB wird gelockert:

$$2 \cdot x_1 + x_2 \geq 5$$

damit wird der zulässige Bereich des Optimierungsproblems größer und der Zielfunktionswert bei einer aktiven NB offensichtlich besser (oder bleibt gleich bei vorliegender dualer Degeneration). Da die zu der NB gehörende Schlupfvariable x_3 im Optimum des Ausgangsproblems eine Nicht-Basis-Variable ($x^*_3 = 0$) ist, ist die NB aktiv, das bedeutet beschränkt das Optimum. Damit wäre das ursprüngliche Optimum ($x^*_1 = 2, x^*_2 = 2, x^*_3 = 0, x^*_4 = 0, x^*_5 = 4$) nach Verschärfung der NB zwar noch ein zulässiger Punkt, aber würde nicht mehr auf dem Rand des Problems liegen und wäre daher kein Optimum mehr.

Statt den Zielfunktionswert neu zu berechnen, kann mithilfe des Schattenpreises von x_3 eine Aussage über den neuen Zielfunktionswert getroffen werden. Es gilt:

$$-z^*_{neu} = -z^*_{alt} + S(x^*_3) = -24 + 1 = -23$$

Interpretation: Wenn die TU eine Pflanze pro Tag statt $6g$ nun nur noch mit mindestens $5g$ Kalium versorgen muss, senken sich die Düngerkosten pro Pflanze um $1,00$ Euro auf Gesamtkosten pro Pflanze von insgesamt $23,00$ Euro pro Tag.

Da die zur NB gehörende Schlupfvariable s die Nicht-Ausschöpfung der NB wiedergibt, gilt bei **V**erschärfung einer NB immer (da die NB in Standardform vorliegen):

$s_{alt} \geq 0 \Rightarrow s_{neu} \geq -1 \Leftrightarrow s_{neu} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow s_{alt} = s_{neu} + 1 \geq 0$

Für NB I würde also $x_{3,alt} = x_{3,neu} + 1$.

Einsetzen liefert dann die in Fall 1 bestimmt NB:

$$2 \cdot x_1 + x_2 \geq 6$$
$$-2 \cdot x_1 - x_2 + x_{3,alt} = -6$$
$$-2 \cdot x_1 - x_2 + x_{3,neu} + 1 = -6$$
$$-2 \cdot x_1 - x_2 + x_{3,neu} = -7$$
$$2 \cdot x_1 + x_2 \geq 7$$

Gleiches lässt sich für **L**ockerung einer NB aussagen:

$s_{alt} \geq 0 \Rightarrow s_{neu} \geq 1 \Leftrightarrow s_{neu} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow s_{alt} = s_{neu} - 1 \geq 0$

Für NB I würde also $x_{3,alt} = x_{3,neu} - 1$.

Einsetzen liefert dann die in Fall 2 bestimmt NB:

$$2 \cdot x_1 + x_2 \geq 6$$
$$-2 \cdot x_1 - x_2 + x_{3,alt} = -6$$
$$-2 \cdot x_1 - x_2 + x_{3,neu} - 1 = -6$$
$$-2 \cdot x_1 - x_2 + x_{3,neu} = -5$$
$$2 \cdot x_1 + x_2 \geq 5$$

Beispielrechnung Substitutionskoeffizienten für die Erhöhung der NBV x_3 um eine Einheit:

Da x_3 die Schlupfvariable der NB I, entspricht eine Erhöhung von x_3 einer Verschärfung der NB I um eine Einheit.

$x_{3,alt} \geq 0 \Rightarrow x_{3,neu} \geq -1 \Leftrightarrow x_{3,neu} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x_{3,alt} = x_{3,neu} + 1 \geq 0$

Einsetzen in NB I ergibt:

$$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + x_2 - x_{3,alt} &= 6 \\ x_{3,alt} &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + x_2 - (x_{3,neu} + 1) &= 6 \\ \Leftrightarrow \qquad 2 \cdot x_1 + x_2 - x_{3,neu} &= 7 \\ x_{3,neu} &\geq 0 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir als neue Untergrenze für Kalium 7 Gramm pro Tag.

Die Substitutionskoeffizienten zu x_3 befinden sich in der dritten Spalte des Optimaltableaus.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	-2/3	1/6	0	2
x_2	0	1	1/3	-1/3	0	2
x_5	0	0	4/3	-4/3	1	4
$-z_j$	0	0	1	3/2	0	-24

Wir betrachten Zeile $i = 1$. Die Gleichung aus dem Optimaltableau lautet:

$$x_1 - 2/3 \cdot x_3 + 1/6 \cdot x_4 = 2$$

Da $x_4^* = 0$ und $x_{3,neu}^* = 1$ bekannt sind, folgt für die Basisvariable $x_{1,neu}^*$:

$$x_{1,neu}^* = 2 + 2/3 \cdot x_{3,neu}^* - 1/6 \cdot x_4^* = 2 + 2/3 \cdot 1 - 1/6 \cdot 0 = 8/3 \;\; [= \underbrace{2}_{b_1} - (\underbrace{-2/3}_{a_{13}})]$$

Im Vergleich zu $x_{1,alt}^* = 2$ **erhöht** sich die Basisvariable also um $2/3$ Einheiten. Im Optimaltableau sehen wir in der x_1-Zeile und der markierten x_3-Spalte den Wert $-2/3$. Laut Definition entspricht das einer Erhöhung um den absoluten Wert, d.h. der berechnete Wert und der Substitutionskoeffizient im Tableau stimmen überein.

Analog können die Änderung von x_2 und x_5 berechnet werden:

$x_{2,neu}^* = 5/3$
$x_{5,neu}^* = 8/3$

Interpretation: Um den Kaliumbedarf einer Pflanze pro Tag zu decken und zusätzlich dem Boden eine überschüssige Einheit x_3 (Kalium) hinzuzuführen, müssen mindestens $7g$ Kalium hinzugeführt werden. Dazu müssen circa $x_1 = 2,66$ kg fester Dünger und $x_2 = 1,66$ l flüssiger Dünger verwendet werden. Gleichzeitig werden dadurch nun nur noch insgesamt $x_5 = 2,33$ Gramm Phosphat zusätzlich hinzugeführt (vorher wurden $4g$ zusätzlich hinzugeführt).

Analog kann die Untersuchung für die Substitutionskoeffizienten von x_4 durchgeführt werden.

2.19 Der Nährstoffpillenhersteller

Definition der Variablen:

x_1 : Preis für 1g Kalium

x_2 : Preis für 1g Stickstoff

x_3 : Preis für 1g Phosphat

Aufstellen des LPs:

$$\max z = 6 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3$$
$$\text{s.t. } 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 5$$
$$x_1 + 4 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 \leq 7$$
$$x_{1,\dots,3} \geq 0$$

I1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_4	2	2	0	1	0	5
x_5	1	4	4	0	1	7
z_j	-6	-12	-4	0	0	0

I2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_4	3/2	0	-2	1	-1/2	3/2
x_2	1/4	1	1	0	1/4	7/4
z_j	-3	0	8	0	3	21

Optimaltableau:

I3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	-4/3	2/3	-1/3	1
x_2	0	1	4/3	-1/6	1/3	6/4
z_j	0	0	4	2	2	24

2.20 Dualitätssätze

a) **Starke Dualität**

Sei $(x_1, ..., x_k)$ optimale Lösung von A und $(u_1, ..., u_n)$ optimale Lösung des dualen Problems B von A. Dann gilt $z(x_1, ..., x_k) = z_D(u_1, ..., u_n)$.

b) **Schwache Dualität**

Sei $(x_1, ..., x_k)$ zulässige Lösung von A und $(u_1, ..., u_n)$ zulässige Lösung des dualen Problems B von A. Dann gilt $z(x_1, ..., x_k) \leq z_D(u_1, ..., u_n)$ unter der Voraussetzung, dass A ein Maximierungsproblem ist.

c) Lockert man eine Nebenbedingung im Dualproblem um eine Einheit, so ändert sich auch der zugehörige Zielfunktionskoeffizient im primalen Problem. Dies bedeutet, dass sich die Steigung der Zielfunktion ändert. Diese Veränderung kann zwei mögliche Folgen haben:

- Die Veränderung der Steigung der Zielfunktion führt zu keiner Veränderung in der optimalen Lösung. Somit kann man den veränderten Zielfunktionswert berechnen, indem man die bereits gefundene optimale Lösung in die neue Zielfunktion einsetzt.

- Die Veränderung der Steigung der Zielfunktion führt dazu, dass die bereits gefundene optimale Lösung unter den neuen Voraussetzungen nicht mehr optimal ist. In diesem Fall muss das Problem erneut gelöst werden, um den veränderten Zielfunktionswert zu bestimmen.

Um heraus zu finden, in welchem der beiden Fälle man sich befindet, muss man eine Sensitivitätsanalyse durchführen.

2.21 Begriffsdefinitionen

a) **Primalproblem**

Ausgangsproblem (LP), wird aus dem Zusammenhang direkt abgelesen

Dualproblem

Umgewandeltes Ausgangsproblem

Duale und Primale Probleme stehen in einem Verhältnis zueinander und können unter Anwendung bestimmter Regeln ineinander umgewandelt werden.

Primaler Simplex

Lösungsverfahren / Optimierungsverfahren für LP

Voraussetzung: eine zulässige Basislösung ist bekannt

Ergebnis: ein optimales Ergebnis sofern dieses existiert

Dualer Simplex

Findet eine beliebige zulässige Basislösung

2-Phasen-Methode

Eine zulässige Baislösung wird durch den Dualen Simplex gefunden (1.Phase). Durch die anschließende Verwendung des Primalen Simplex kann die optimale Lösung ermittelt werden (2.Phase)

Primale Degeneration

Primale Degeneration liegt vor, wenn im Optimaltableau ein Eintrag der rechten Seite den Wert 0 erhält. Es ist eine besondere Form der Redundanz.

Duale Degeneration

Duale Degeneration liegt vor, wenn im Optimaltableau ein Zielfunktionskoeffizient für eine Nicht-Basis-Variable den Wert 0 erhält.

b)

Primales Problem...		Duales Problem...
...besitzt eine optimale Lösung	$\Leftrightarrow$	...besitzt eine optimale Lösung
...hat keine zulässige Lösung	$\Leftarrow$	...ist unbeschränkt
...ist unbeschränkt	$\Rightarrow$	...hat keine zulässige Lösung
...hat keine zulässige Lösung	$\Rightarrow$	...ist unbeschränkt oder hat keine zul. Lösung
...ist unbeschränkt oder hat keine zul. Lösung	$\Leftarrow$	...hat keine zul. Lösung

2.22 Dualproblem I

Gegeben ist folgendes primales LP. Bitte stellen Sie das duale LP auf.

$$\max z_P = 2 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + 11 \cdot x_3 + 13 \cdot x_4 + 2 \cdot x_5$$

$$\begin{array}{lrrrrrl}
\text{s.t.} & 0 \cdot x_1 - & 0 \cdot x_2 - & 2 \cdot x_3 + & 0 \cdot x_4 - & 1 \cdot x_5 & \leq 3 \\
& 3 \cdot x_1 + & 7 \cdot x_2 + & 5 \cdot x_3 - & 2 \cdot x_4 + & 0 \cdot x_5 & \leq 6 \\
& 0 \cdot x_1 - & 15 \cdot x_2 - & 0 \cdot x_3 + & 0 \cdot x_4 - & 2 \cdot x_5 & \leq 7 \\
& 6 \cdot x_1 - & 0 \cdot x_2 - & 2 \cdot x_3 + & 2 \cdot x_4 + & 3 \cdot x_5 & \geq -4 \\
& 4 \cdot x_1 + & 12 \cdot x_2 + & 7 \cdot x_3 - & 1 \cdot x_4 - & 4 \cdot x_5 & = -1
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
x_{1,3} & \leq 0 \\
x_{2,4} & \geq 0 \\
x_5 & \in \mathbb{R}
\end{array}$$

Lösung:

$$\min z_D = 3 \cdot u_1 + 6 \cdot u_2 + 7 \cdot u_3 - 4 \cdot u_4 - 1 \cdot u_5$$

$$\begin{array}{lrrrrrl}
\text{s.t.} & 0 \cdot u_1 + & 3 \cdot u_2 + & 0 \cdot u_3 + & 6 \cdot u_4 + & 4 \cdot u_5 & \leq 2 \\
& 0 \cdot u_1 + & 7 \cdot u_2 - & 15 \cdot u_3 - & 0 \cdot u_4 + & 12 \cdot u_5 & \geq -4 \\
& -2 \cdot u_1 + & 5 \cdot u_2 - & 0 \cdot u_3 - & 2 \cdot u_4 + & 7 \cdot u_5 & \leq 11 \\
& 0 \cdot u_1 - & 2 \cdot u_2 + & 0 \cdot u_3 + & 2 \cdot u_4 - & 1 \cdot u_5 & \geq 13 \\
& -1 \cdot u_1 + & 0 \cdot u_2 - & 2 \cdot u_3 + & 3 \cdot u_4 - & 4 \cdot u_5 & = 2
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
u_{1,2,3} & \geq 0 \\
u_4 & \leq 0 \\
u_5 & \in \mathbb{R}
\end{array}$$

2.23 Dualproblem II

Stellen Sie jeweils das zugehörige duale Problem auf.

a)

$$\max z_D = 2 \cdot u_1 - 0{,}5 \cdot u_2 + 23 \cdot u_3 + 17 \cdot u_4 + 4 \cdot u_5$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad & 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 2 \cdot u_3 + 0 \cdot u_4 + 0 \cdot u_5 && \leq 2 \\
& 0 \cdot u_1 - 2 \cdot u_2 + 3 \cdot u_3 + 0 \cdot u_4 + 4 \cdot u_5 && \leq 3 \\
& 4 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 + 4 \cdot u_4 + 0 \cdot u_5 && \leq 0{,}5 \\
& 1 \cdot u_1 + 15 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 + 2 \cdot u_4 + 0 \cdot u_5 && \geq -2 \\
& 2 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3 + 0 \cdot u_4 - 7 \cdot u_5 && = 7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{1,4} & \leq 0 \\
u_{2,5} & \geq 0 \\
u_3 & \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

b)

$$\min z_D = 27 \cdot u_1 - 5 \cdot u_2 + 13 \cdot u_3 - 12 \cdot u_4$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad & 3 \cdot u_1 - 2 \cdot u_2 - 3 \cdot u_3 + 6 \cdot u_4 && \geq 8 \\
& 4 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 - 8 \cdot u_3 - 9 \cdot u_4 && = -3 \\
& -2 \cdot u_1 + 7 \cdot u_2 - 6 \cdot u_3 + 4 \cdot u_4 && \geq -7 \\
& 2 \cdot u_1 - 6 \cdot u_2 + 3 \cdot u_3 - 4 \cdot u_4 && \leq 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{1,4} & \leq 0 \\
u_2 & \geq 0 \\
u_3 & \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

c)

$$
\begin{array}{lrrrrl}
\min z_D = & 15 \cdot u_1 + & 2 \cdot u_2 - & 2 \cdot u_3 + & 5 \cdot u_4 & \\
& & & & & \\
\text{s.t.} & 2 \cdot u_1 - & 3 \cdot u_2 - & 1 \cdot u_3 + & 3 \cdot u_4 & \geq -2 \\
& 3 \cdot u_1 + & 3 \cdot u_2 - & 6 \cdot u_3 + & 9 \cdot u_4 & \leq 5 \\
& 6 \cdot u_1 + & 8 \cdot u_2 - & 2 \cdot u_3 - & 3 \cdot u_4 & \leq -6 \\
& 5 \cdot u_1 + & 3 \cdot u_2 + & 1 \cdot u_3 - & 2 \cdot u_4 & = 4 \\
& & & & & \\
& & & & u_{1,4} & \leq 0 \\
& & & & u_2 & \geq 0 \\
& & & & u_3 & \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

d)

$$
\begin{array}{lrrrrl}
\min z_D = & -19 \cdot u_1 + & 20 \cdot u_2 + & 5 \cdot u_3 - & 5 \cdot u_4 & \\
& & & & & \\
\text{s.t.} & 9 \cdot u_1 - & 2 \cdot u_2 - & 3 \cdot u_3 + & 4 \cdot u_4 & \geq -1 \\
& 8 \cdot u_1 + & 2 \cdot u_2 - & 9 \cdot u_3 + & 4 \cdot u_4 & \leq 2 \\
& 2 \cdot u_1 + & 3 \cdot u_2 - & 7 \cdot u_3 - & 9 \cdot u_4 & = -3 \\
& 2 \cdot u_1 + & 4 \cdot u_2 + & 6 \cdot u_3 - & 1 \cdot u_4 & \geq 5 \\
& & & & & \\
& & & & u_1 & \in \mathbb{R} \\
& & & & u_{2,4} & \leq 0 \\
& & & & u_3 & \geq 0
\end{array}
$$

2.24 Oriana baut Lithium-Ionen-Batterien

a) Das Modell sieht wie folgt aus:

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
\max z = & 21.000x_1 & + & 16.000x_2 & & & \\
\text{s.t.} & 22x_1 & + & 18x_2 & \leq & 4.000 & \perp u_1 \\
& 1x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5.000 & \perp u_2 \\
& & & 1x_2 & \geq & 50 & \perp u_3 \\
& & & x_1, x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

b) Daraus folgt die Standardform:

$$\begin{array}{lccccccc}
\max z & -21.000x_1 & -16.000x_2 & & & & = & 0 \\
\text{s.t} & 22x_1 & +18x_2 & +x_3 & & & = & 4.000 \\
 & 1x_1 & +2x_2 & & +x_4 & & = & 5.000 \\
 & & -1x_2 & & & +x_5 & = & -50 \\
 & & & & & x_{1\ldots5} & \geq & 0
\end{array}$$

c) Im Folgenden die Lösung des Problems mit dem Simplex-Verfahren.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	22	18	1	0	0	4.000
x_4	1	2	0	1	0	5.000
x_5	0	-1	0	0	1	-50
z_j	-21.000	-16.000	0	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	22	0	1	0	18	3.100
x_4	1	0	0	1	2	4.900
x_2	0	1	0	0	-1	50
z_j	-21.000	0	0	0	-16.000	800.000

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	0,045	0	0,82	140,91
x_4	0	0	-0,045	1	1,18	4.759,09
x_2	0	1	0	0	-1	50
z_j	0	0	954,55	0	1.181,82	3.759.090,91

d) Das duale Problem sieht wie folgt aus:

$$\begin{array}{lcccccccc}
\min z_D = & 4.000u_1 & + & 5.000u_2 & + & 50u_3 & & \\
\text{s.t.} & 22u_1 & + & 1u_2 & & & \geq & 21.000 \\
 & 18u_1 & + & 2u_2 & + & 1u_3 & \geq & 16.000 \\
 & & & & & u_1, u_2 & \geq & 0 \\
 & & & & & u_3 & \leq & 0
\end{array}$$

e) Im Folgenden die Lösung des Dualproblems mit dem Simplex-Verfahren:

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	b_i
u_4	-22	-1	0	1	0	-21.000
u_5	-18	-2	-1	0	1	-16.000
$-z_D$	4.000	5.000	-50	0	0	0

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	b_i
u_1	1	0,045	0	-0,045	0	954,55
u_5	0	-1,18	-1	-0,82	1	1.181,82
$-z_D$	0	4.818,18	-50	181.82	0	-3.818.181,82

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	b_i
u_1	1	0,045	0	-0,045	0	954,55
u_3	0	-1,18	-1	-0,82	1	1.181,82
$-z_D$	0	4.759,09	0	140,91	50	-3.759.090,91

f)
- Der Zielfunktionswert des Dualen Problems ist ist $z_D = 3.759.090,91$. Da das Tableau optimal ist, ist auch der Wert der optimalen primalen Lösung: $z_P = z_D = 3.759.090,91$ (Starke Dualität).

- Die Dualvariablen $u_1 = 954,55 > 0$ und $u_3 = 1.181,82 > 0$, damit sind die zugehörigen Bedingungen des Primalproblems mit Gleichheit erfüllt. Alle anderen Nebenbedingung sind Ungleichheitsbedingungen und besitzen damit Schlupf $s > 0$.

- Die Werte in der z_D-Zeile unter u_4 und u_5 geben die Primalvariablen $x_1 = 140,91$ und $x_2 = 50$ an.

- Die Strukturvariablen des Dualproblems sind gleich den Dualvariablen des Primalproblems (und umgekehrt).

- Die Schlupfvariablen des Dualproblems geben Auskunft darüber, ob die zugehörigen Primalvariablen größer oder gleich 0 sind: $w_s \geq 0 \Rightarrow x_s = 0$ und $u_s = 0 \Rightarrow x_s \geq 0$

2.25 Sensitivitätsanalyse

Sensitivitätsintervalle der Zielfunktionskoeffizienten:

$c_1 \in \boxed{[48;80]}$ $c_2 \in \boxed{[30;70]}$ $c_3 \in \boxed{[-\infty;110]}$ $c_4 \in \boxed{[-\infty;10/3]}$

$c_5 \in \boxed{[-\infty;80/3]}$

2.26 Die Hamburger Wollfabrik

a)

$$\begin{array}{rrrrl}
\max\ z = & 5 \cdot x_1 & +20 \cdot x_2 & +40 \cdot x_3 & \\
\text{s.t.} & 6 \cdot x_1 & +10 \cdot x_2 & +16 \cdot x_3 & \leq 420 \\
& 0,1 \cdot x_1 & +0,2 \cdot x_2 & +0,4 \cdot x_3 & \leq 8 \\
& & x_2 & & \leq 12 \\
& & & 2 \cdot x_3 & \leq 18 \\
& & & x_{1,2,3} & \geq 0
\end{array}$$

b) Optimaltableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
x_4	0	0	0	1	-60	2	4	36
x_1	1	0	0	0	10	-2	-2	20
x_2	0	1	0	0	0	1	0	12
x_3	0	0	1	0	0	0	0,5	9
z_j	0	0	0	0	50	10	10	700

c) Sensitivitätsanalyse für die Zielfunktionskoeffizienten:

Beispielrechnungen:

- c_1: x_1 Basisvariable der Optimallösung mit positiven und negativen a_{2j}, also Berechnung:
  c_1^- = min { 50/10 } = 5, also c_1 - c_1^- = 5 - 5 = 0
  c_1^+ = min { -10/(-2); -10/(-2) } = 5, also c_1 + c_1^- = 5 + 5 = 10
  Das bedeutet inhaltlich, dass sich die Optimallösung für einen Deckungsbeitrag von Baumwolle zwischen 0 und 10 EUR/kg nicht ändert.

- c_3: x_3 Basisvariable der Optimallösung mit ausschließlich nichtnegativen a_{4j}, also Berechnung:
  c_3^- = min { 10/0,5 } = 20, also c_3 - c_1^- = 40 - 20 = 20
  c_3^+ = ∞, also c_3 + c_3^+ = 40 + ∞ = ∞
  Das bedeutet inhaltlich, dass sich die Optimallösung für einen Deckungsbeitrag von Kaschmirwolle ab 20 EUR/kg nicht ändert.

- c_6: x_6 Nichtbasisvariable der Optimallösung, also Berechnung:
  c_6^- = ∞, also c_6 - c_6^- = 0 - ∞ = −∞
  c_6^+ = 10 (s. z_6 im Tableau), also c_6 + c_6^+ = 0 + 10 = 10
  Das bedeutet inhaltlich, dass sich die Optimallösung nicht ändert, würde x_6 mit einem Wert von bis zu 10 EUR/kg in die Zielfunktion eingehen (unrealistisch).

Lösung:

$c_1 \in \boxed{[0;10]}$ $c_2 \in \boxed{[10;\infty]}$ $c_3 \in \boxed{[20;\infty]}$ $c_4 \in \boxed{[-2,5;5/6]}$

$c_5 \in \boxed{[-\infty;50]}$ $c_6 \in \boxed{[-\infty;10]}$ $c_7 \in \boxed{[-\infty;10]}$

d) Sensitivitätsanalyse für die Ressourcenbeschränkung:

Beispielrechnungen:

- b_1: x_4 (die Schlupfvariable der **ersten** NB) ist Basisvariable der Optimallösung, also Berechnung:
  b_1^- = 36, also b_1 - b_1^- = 420 - 36 = 384
  b_1^+ = ∞, also b_1 + b_1^+ = 420 + ∞ = ∞
  Das bedeutet inhaltlich, dass kein Basiswechsel und somit eine andere Optimallösung eintritt, solange die Beschränkung b_1 der ersten Nebenbedingung größer gleich 384 ist.

- b_3: x_6 (die Schlupfvariable der **dritten** NB) ist Nichtbasisvariable der Optimallösung mit sowohl positiven, als auch negativen a_{i6}, also Berechnung:
  b_3^- = min{36/2; 12/1} = 12, also b_3 - b_3^- = 12 - 12 = 0
  b_3^+ = min{-20/(-2)} = 10, also b_3 + b_3^+ = 12 + 10 = 22
  Das bedeutet inhaltlich, dass kein Basiswechsel und somit eine andere Optimallösung eintritt, solange der Wert b_3 größer gleich 0 und kleiner gleich 22 ist.

Lösung:

$b_1 \in$ $\boxed{[384; \infty]}$ $b_2 \in$ $\boxed{[6; 8,6]}$ $b_3 \in$ $\boxed{[0; 22]}$ $b_4 \in$ $\boxed{[9; 28]}$

2.27 Komplementärer Schlupf I

a)

$$\begin{aligned}
\min z_P = \quad & 10.000x_1 + & 8.000x_2 + & \quad 11.000x_3 & & \\
\text{s.t.} \quad & 10x_1 + & 20x_2 + & \quad 30x_3 - x_4 & &= 300 \perp u_1 \\
& 20x_1 + & 10x_2 + & \quad 20x_3 - x_5 & &= 500 \perp u_2 \\
& & & \quad x_{1\ldots3} & &\geq 0
\end{aligned}$$

Wegen der Dualität muss gelten:

$$u_1 \cdot x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = 0 \tag{1}$$

$$u_2 \cdot x_5 = 0 \Rightarrow x_5 = 0 \tag{2}$$

Aus der Aufgabenstellung ist bekannt, dass u_1 und u_2 ungleich Null sind. Daher müssen die Schlupfvariablen des primalen Problems x_4 und x_5 den Wert Null annehmen. Daher sind nun zwei Gleichungen mit nur noch drei unbekannten Variablen bekannt:

$$10x_1 + 20x_2 + 30x_3 = 300 \perp u_1 \tag{3}$$

$$20x_1 + 10x_2 + 20x_3 = 500 \perp u_2 \tag{4}$$

Die fehlende Formel wird durch das Aufstellen des dualen Problems erreicht:

$$\begin{aligned}
\max z_D = \quad & 300u_1 + & 500u_2 & & \\
\text{s.t.} \quad & 10u_1 + & 20u_2 & &\leq 10.000 \perp x_1 \\
& 20u_1 + & 10u_2 & &\leq 8.000 \perp x_2 \\
& 30u_1 + & 20u_2 & &\leq 11.000 \perp x_3 \\
& & u_{1,2} & &\geq 0
\end{aligned}$$

Es werden die Schlupfvariablen eingefügt, um Gleichheit zu erzeugen:

$$10u_1 + 20u_2 + u_3 = 10.000 \tag{5}$$
$$20u_1 + 10u_2 + u_4 = 8.000 \tag{6}$$
$$30u_1 + 20u_2 + u_5 = 11.000 \tag{7}$$

Die Werte von u_1 und u_2 sind bekannt, daher ergeben sich für die Schlupfvariablen die folgenden Ergebnisse:

$$\text{aus } 5 \Rightarrow u_3 = 0 \tag{8}$$
$$\text{aus } 6 \Rightarrow u_4 = 2250 \tag{9}$$
$$\text{aus } 7 \Rightarrow u_5 = 0 \tag{10}$$

Auch hier muss die Dualität gelten:

$$u_3 \cdot x_1 = 0 \Rightarrow x_1 \geq 0 \tag{11}$$
$$u_4 \cdot x_2 = 2250 \Rightarrow x_2 = 0 \tag{12}$$
$$u_5 \cdot x_3 = 0 \Rightarrow x_3 \geq 0 \tag{13}$$

Die Schlupfvariable u_4 ist definitiv nicht 0, aus diesem Grund muss aber die dazugehörige Dualvariable x_2 0 werden.
Wegen dieser Kenntnis ist nun ein Gleichungssystem bestehend aus 2 Gleichungen und 2 Variablen vorhanden:

$$10x_1 + 30x_3 = 300 \tag{14}$$
$$20x_1 + 20x_3 = 500 \tag{15}$$

Auflösen dieser Gleichungen ergibt dann die Werte $x_1 = 22,5$ und $x_3 = 2,5$.

b)

$$u_1 = 22{,}5 \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad 10x_1 + 20x_2 = 10000 \tag{16}$$
$$u_3 = 2{,}5 \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad 30x_1 + 20x_2 = 11000 \tag{17}$$

(16) − (17):

$$\begin{aligned}
& (10-30)x_1 + (20-20)x_2 && = 10000 - 11000 \\
\Leftrightarrow\quad & -20x_1 && = -1000 \\
\Leftrightarrow\quad & x_1 && = 50 && (18)
\end{aligned}$$

(18) → (17):

$$\begin{aligned}
& 30 \cdot 50 + 20x_2 && = 11000 \\
\Leftrightarrow\quad & x_2 && = \frac{1100 - 30 \cdot 50}{20} \\
\Leftrightarrow\quad & x_2 && = 475 && (19)
\end{aligned}$$

Die Zielfunktion des Dualen Problems ist:

$$\begin{aligned}
& z_D = 10000u_1 + 8000u_2 + 11000u_3 \\
\Leftrightarrow\quad & z_D = 10000 \cdot 22{,}5 + 8000 \cdot 0 + 11000 \cdot 2{,}5 \\
\Leftrightarrow\quad & z_D = 252500
\end{aligned}$$

Nach der starken Dualität gilt im Optimum $z_D = z_P$ und die Lösung des primalen Problems ist dann:

$$z_P = 252500$$

2.28 Komplementärer Schlupf II

Zuerst wird das Ausgangsproblem in ein ausschließlich gleichungsbeschränktes Problem umformuliert, indem Schlupfvariablen eingefügt werden:

$$\begin{array}{rrrrrll}
\min z_P = & 100x_1+ & 200x_2+ & 300x_3 & & & \\
\text{s.t.} & 15x_1+ & 5x_2+ & 20x_3- & x_4 & = 100 & \perp u_1 \\
& 20x_1+ & 0x_2+ & 10x_3- & x_5 & = 300 & \perp u_2 \\
& & & & x_{1,\dots,5} & \geq 0 &
\end{array}$$

Duales Problem aufstellen:

$$\begin{array}{rrrll}
\max z_D = & 100u_1 + & 300u_2 & & \\
\text{s.t.} & 15u_1 + & 20u_2 & \leq 100 & \perp x_1 \\
 & 5u_1 + & 0u_2 & \leq 200 & \perp x_2 \\
 & 20u_1 + & 10u_2 & \leq 300 & \perp x_3 \\
 & & u_{1,2} & \geq 0 &
\end{array}$$

Wegen der Dualität und der vorgegebenen Optimallösung des dualen Problems muss gelten:

$$\begin{aligned}
u_1 \cdot x_4 &= 0 \\
u_2 \cdot x_5 = 0 \Rightarrow x_5 &= 0 \\
u_3 \cdot x_1 &= 0 \\
u_4 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x_2 &= 0 \\
u_5 \cdot x_3 = 0 \Rightarrow x_3 &= 0
\end{aligned}$$

Über x_4 und x_1 kann keine Aussage getroffen werden, weil die dazugehörige Dualvariable den Wert 0 hat. Mit der gewonnenen Information können jedoch bereits die Nebenbedingungen der Standardform des primalen Problems deutlich vereinfacht werden.
Da $x_{2,3,5} = 0$ gilt:

$$\begin{array}{rrl}
15x_1 - & x_4 & = 100 \\
20x_1 & & = 300
\end{array}$$

Die Auflösung des Gleichungssystems ergibt: $x_1 = 15$ und $x_4 = 125$.
Die vollständige Lösung des primalen Problems lautet demnach: $x_1 = 15$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 125$, $x_5 = 0$.

2.29 Sonderfälle I

Tableau A: keine zulässige Basislösung, keine optimale Basislösung

Tableau B: zulässige Basislösung, optimale Basislösung, duale Degeneration

Tableau C: zulässige Basislösung, keine optimale Basislösung

Tableau D: zulässige Basislösung, optimale Basislösung, primale Degeneration

Tableau E: zulässige Basislösung, keine optimale Basislösung, unbeschränkt

Tableau F: unzulässiges Problem

Tableau G: zulässige Basislösung, optimale Basislösung

2.30 Sonderfälle II

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	0.2	-1	0	2
x_1	1	0	0	1	0	4
x_5	0	0	-1	-5	1	0
z_j	0	0	0.6	0	0	18

a) Geben Sie Besonderheiten an, die Ihnen am gegebenen finalen Tableau auffallen.

- Besonderheiten im Tableau:
  - Primale Degeneration:
    * Graphisch: Im $\mathbb{R}^n$ schneiden sich mindestens $n+1$ Nebenbedingungen, wobei n die Anzahl der Strukturvariablen ist.
    * Es gibt eine optimale Basislösung, die mehrere Basen besitzt, die alle denselben optimalen Punkt beschreiben; der Zielfunktionswert ändert sich dabei nicht.
  - Duale Degeneration:
    * Graphisch: Die Zielfunktion ist parallel zu einer Nebenbedingung und das Optimum befindet sich auf der Nebenbedingung.
      (Beachte im Fall von gleichzeitigem Vorliegen von primaler und dualer Degeneration, dass die Zielfunktion nicht parallel zu der redundanten NB sein darf, da dann nur ein optimaler Punkt vorliegen würde, und damit das Problem nicht dual degeneriert wäre.)
    * Man spricht von einem Optimum, weil sich der Zielfunktionswert nicht ändert, aber unendlich viele optimale Punkte exisitieren. Das liegt daran, dass die Werte der Variablen sich ändern können.

b) Welche Sonderfälle kennen Sie noch? Nennen und erklären Sie diese kurz.

- Redundanz:
  - Eine $\leq oder \geq$ - Nebenbedingung ist redundant, wenn eine Linearkombination anderer $\leq oder \geq$ - Nebenbedingung die selbe linke Seite und eine kleinere (größere) rechte Seite besitzt.
  - Kann beim Rechnen des Simplex weggelassen werden.
- Unbeschränktheit:

  - Es existieren zulässige Basislösungen, aber es kann keine optimale Basislösung angegeben werden.
  - Pivotspalte des primalen Simplex enthält nur Elemente kleiner-gleich Null.

- Unzulässigkeit:
  - Es existieren keine zulässige Basislösungen, d.h. es gibt keinen Bereich, in dem sich alle Halbebenen überlappen (der zulässige Bereich ist leer).
  - Im Initialisierungstableau enthält die b-Spalte negative Werte, damit ist der Punkt (0,0) nicht im zulässigen Bereich enthalten.
  - Die Pivotzeile des dualen Simplex enthält nur Elemente größer-gleich Null.

2.31 Sonderfall: Redundanz

Für die Untersuchung auf Redundanz in Tableauschreibweise werden nur die NBV betrachtet, zudem sind ausschließlich positive Linearkombinationen gestattet.

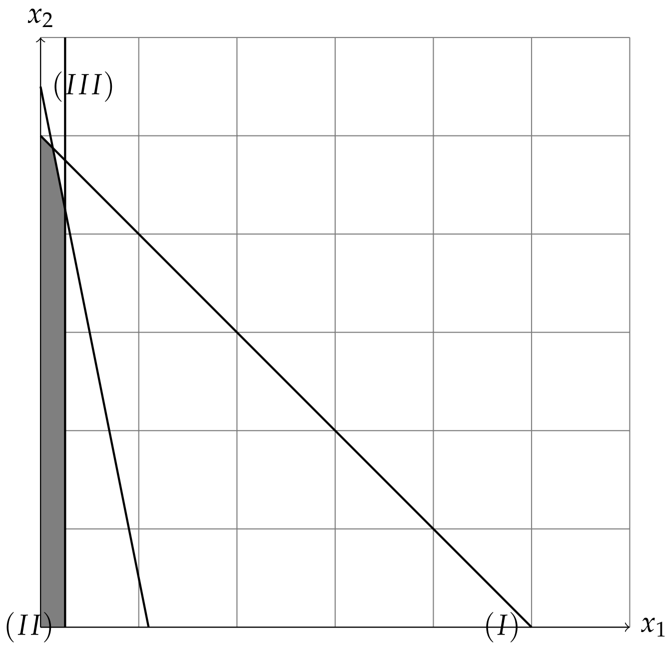
Tableau A: zulässige Lösung, keine optimale Lösung, 2. Nebenbedingung ist redundant (Begründung: Im zulässigen Simplextableau sind die Koeffizienten a_{ij} ausgenommen der Einheitsvektoren einer Zeile alle ≤ 0, somit beschreibt diese Zeile eine redundante Nebenbedingung.)

Tableau B: unzulässige Lösung, daher Prüfung auf mögliche Linearkombination der Nebenbedingungen nötig:

- 2·I + III: $-3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 33$ vergleiche mit II
- I + II: keine Möglichkeit x_2 zu eliminieren, (vergleiche mit III)
- II + III: $2,5x_1 + 2x_2 \leq -16$ vergleiche mit I

$\Rightarrow$ keine redundante Nebenbedingung

Tableau C: zulässige Lösung, keine optimale Lösung, daher Prüfung auf mögliche Linearkombination der Nebenbedingungen nötig (oder alternativ: graphische Veranschaulichung da Problem im $\mathbb{R}^2$):



$\Rightarrow$ keine Nebenbedingung redundant

Tableau D: optimale Lösung , 2. Nebenbedingung ist redundant. (Begründung: Im zulässigen Simplextableau sind die Koeffizienten a_{ij} ausgenommen der Einheitsvektoren einer Zeile alle ≤ 0, somit beschreibt diese Zeile eine redundante Nebenbedingung.)

Tableau E: zulässige Lösung, keine optimale Lösung, daher Prüfung auf mögliche Linearkombination der Nebenbedingungen nötig:

- II + 0,5·III: $x_1 \leq 4$ vergleiche mit I
  $\rightarrow$ gleiche linke Seite bezogen auf die NBV, gleiches Relationszeichen, rechte Seite von NB I ist echt größer als die rechte Seite der Linearkombination

$\Rightarrow$ Nebenbedingung I ist redundant

2.32 Kürzeste Wege

a)

$$\begin{array}{rlll}
\min z = & \sum_{(i,j)\in E} & w_{i,j} \cdot x_{i,j} & \\
\text{s.t.} & & & \\
\sum_{i:(i,s)\in E} x_{i,s} - & \sum_{i:(s,i)\in E} x_{s,i} & = & -1 \\
\sum_{i:(i,j)\in E} x_{i,j} - & \sum_{i:(j,i)\in E} x_{j,i} & = & 0 \quad \text{für } i \in V \\
\sum_{i:(i,t)\in E} x_{i,t} - & \sum_{i:(t,i)\in E} x_{t,i} & = & 1 \\
& x_{i,j} & \in & \{0,1\} \quad \text{für } (i,j) \in E \\
& w_{i,j} & \in & \mathbb{R}
\end{array}$$

b)

$$\begin{aligned}
\min z = \quad & 3 \cdot (x(a,b) + x(b,a)) && +4 \cdot (x(a,c) + x(c,a)) \\
& +1 \cdot (x(c,d) + x(d,c)) && +3 \cdot (x(b,d) + x(d,b)) \\
& +5 \cdot (x(b,e) + x(e,b)) && +2 \cdot (x(d,e) + x(e,d)) \\
& +6 \cdot (x(d,f) + x(f,d)) && +1 \cdot (x(e,f) + x(f,e))
\end{aligned}$$

Beispielhafte Nebenbedingung für den Transportknoten d:

$$x(c,d) + x(b,d) + x(f,d) + x(e,d) - (x(d,c) + x(d,b) + x(d,f) + x(d,e)) \quad = 0$$

Nebenbedingung für den Startknoten a:

$$x(c,a) + x(b,a) - (x(a,b) + x(a,c)) \quad = -1$$

Nebenbedingung für den Zielknoten f:

$$x(d,f) + x(e,f) - (x(f,d) + x(f,e)) \quad = 1$$

Definitionsbereich der Variablen z(i,j):

$$x(i,j) \quad \in \quad \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in E$$

2.33 Minimale Spannbäume

a) Sei $g(V,E,w)$ ein Graph mit n Knoten. Für Teilmengen $S \subseteq V$ von Knoten bezeichne E(S) die Menge der Kanten, deren (beide) Endpunkte in S liegen. Daher gilt: Die Lösung des folgenden Optimierungsproblems beschreibt einen minimalen Spannbaum für $g(V,E,w)$.

$$\begin{array}{lllll}
\min z = & \sum_{(i,j)\in E} & w(i,j)\cdot x(i,j) & & \\
\text{s.t.} & & & & \\
& \sum_{(i,j)\in E} & x(i,j) & = & n-1 \\
& \sum_{(i,j)\in E(S)} & x(i,j) & \leq & |S|-1 \quad \text{für jede Teilmenge } S \subseteq V \\
& & w(i,j) & \in & \mathbb{R} \\
& & x(i,j) & \in & \{0,1\}
\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{llllllll}
\min z = & 3\cdot x(a,b) & +5\cdot x(a,c) & +1\cdot x(a,d) & +2\cdot x(b,c) & +3\cdot x(c,d) & +1\cdot x(c,e) & \\
\text{s.t.} & & & & & & & \\
& x(a,b) & +x(a,c) & +x(a,d) & +x(b,c) & +x(c,d) & +x(c,e) & =4 \\
& x(a,b) & +x(a,c) & & +x(b,c) & & & \leq 2 \\
& & x(a,c) & +x(a,d) & & +x(c,d) & & \leq 2 \\
& x(a,b) & +x(a,c) & +x(a,d) & +x(b,c) & +x(c,d) & & \leq 3 \\
& & & & & & x(i,j) \in & \{0,1\}
\end{array}$$

2.34 Graphentheoretische Probleme als LP

Um die Darstellung zu vereinfachen werden die Batteriehersteller wie folgt benannt:

Tesla Motors: a

Samsung SDI: b

Panasonic: c

LG Chem: d

a) Der kürzeste Weg:

Teil (a):

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
\min z = & 8\cdot x(a,b) & +6\cdot x(a,c) & +7\cdot x(a,d) & +3\cdot x(b,c) & -1\cdot x(b,d) & +2\cdot x(c,d) & \\
 & +8\cdot x(b,a) & +6\cdot x(c,a) & +7\cdot x(d,a) & +3\cdot x(c,b) & -1\cdot x(d,b) & +2\cdot x(d,c) & \\
\text{s.t.} & -x(a,b) & -x(c,b) & -x(d,b) & +x(b,a) & +x(b,c) & +x(b,d) & =1 \\
 & x(a,c) & +x(b,c) & +x(d,c) & -x(c,a) & -x(c,b) & -x(c,d) & =1 \\
 & x(c,a) & +x(b,a) & +x(d,a) & -x(a,c) & -x(a,b) & -x(a,d) & =0 \\
 & x(a,d) & +x(b,d) & +x(c,d) & -x(d,a) & -x(d,b) & -x(d,c) & =0 \\
 & & & & & & x(i,j) & \leq 1 \\
 & & & & & & x(i,j) & \geq 0
\end{array}
$$

$$\forall i,j \in \{a,b,c,d\}$$

Teil (b):Da die Kanten des Graphen nicht das gleiche Gewicht haben und damit keine "halben"Kanten gewählt werden würden.

b) Der minimale Spannbaum:

Teil (a):

$$
\begin{array}{rrrrrrrcl}
\min z = & 8\cdot x(a,b) & +6\cdot x(a,c) & +7\cdot x(a,d) & +3\cdot x(b,c) & -1\cdot x(b,d) & +2\cdot x(c,d) & & \\
\text{s.t.} & x(a,b) & +x(a,c) & +x(a,d) & +x(b,c) & +x(b,d) & +x(c,d) & = & 3 \\
 & x(a,b) & +x(b,d) & +x(d,a) & & & & \leq & 2 \\
 & x(a,c) & +x(c,b) & +x(b,a) & & & & \leq & 2 \\
 & x(c,d) & +x(d,b) & +x(b,c) & & & & \leq & 2 \\
 & x(a,c) & +x(c,d) & +x(d,a) & & & & \leq & 2 \\
 & & & & & & x(i,j) & \leq & 1 \\
 & & & & & & x(i,j) & \geq & 0
\end{array}
$$

$$\forall i,j \in \{a,b,c,d\}$$

Teil (b):

- alle Kanten haben das gleiche Gewicht (möglicherweise nicht-ganzzahliger Lösungsvektor)

- der Graph ist nicht zusammenhängend (es existiert kein Spannbaum)
- der Graph ist gerichtet (Bestimmung eines Spannbaums ist nur für ungerichtete Graphen definiert)

c) Das TSP:

Teil (a):

$$\begin{array}{rcccccc}
\min z = & 8\cdot x(a,b) & +6\cdot x(a,c) & +7\cdot x(a,d) & +3\cdot x(b,c) & -1\cdot x(b,d) & +2\cdot x(c,d) \\
& +8\cdot x(b,a) & +6\cdot x(c,a) & +7\cdot x(d,a) & +3\cdot x(c,b) & -1\cdot x(d,b) & +2\cdot x(d,c) \\
\text{s.t.} & x(a,b) & +x(a,d) & +x(a,c) & = & 1 & \\
& x(b,a) & +x(d,a) & +x(c,a) & = & 1 & \\
& x(b,a) & +x(b,c) & +x(b,d) & = & 1 & \\
& x(a,b) & +x(c,b) & +x(d,b) & = & 1 & \\
& x(c,a) & +x(c,b) & +x(c,d) & = & 1 & \\
& x(a,c) & +x(b,c) & +x(d,c) & = & 1 & \\
& x(d,a) & +x(d,b) & +x(d,c) & = & 1 & \\
& x(a,d) & +x(b,d) & +x(c,d) & = & 1 & \\
& x(a,b) & +x(b,d) & +x(d,a) & \leq & 2 & \\
& x(a,c) & +x(c,b) & +x(b,a) & \leq & 2 & \\
& x(c,d) & +x(d,b) & +x(b,c) & \leq & 2 & \\
& x(a,c) & +x(c,d) & +x(d,a) & \leq & 2 & \\
& x(b,a) & +x(a,d) & +x(d,b) & \leq & 2 & \\
& x(c,a) & +x(a,b) & +x(b,c) & \leq & 2 & \\
& x(d,c) & +x(c,b) & +x(b,d) & \leq & 2 & \\
& x(c,a) & +x(a,d) & +x(d,c) & \leq & 2 & \\
& x(a,b) & +x(b,a) & & \leq & 1 & \\
& x(a,c) & +x(c,a) & & \leq & 1 & \\
& x(a,d) & +x(d,a) & & \leq & 1 & \\
& x(c,b) & +x(b,c) & & \leq & 1 & \\
& x(d,b) & +x(b,d) & & \leq & 1 & \\
& x(c,d) & +x(d,c) & & \leq & 1 & \\
& & & x(i,j) & \leq & 1 & \\
& & & x(i,j) & \geq & 0 & \\
& & & & & \forall i,j \in \{a,b,c,d\} &
\end{array}$$

Teil (b): Auf einem vollständigem Digraph existiert immer eine zulässige und auch eine optimale Lösung für das TSP.

3 Graphentheorie

3.1 Minimale Spannbäume

a) Nein.

b) Ja.

3.2 Kruskal-Algorithmus: Der befreundete Busunternehmer

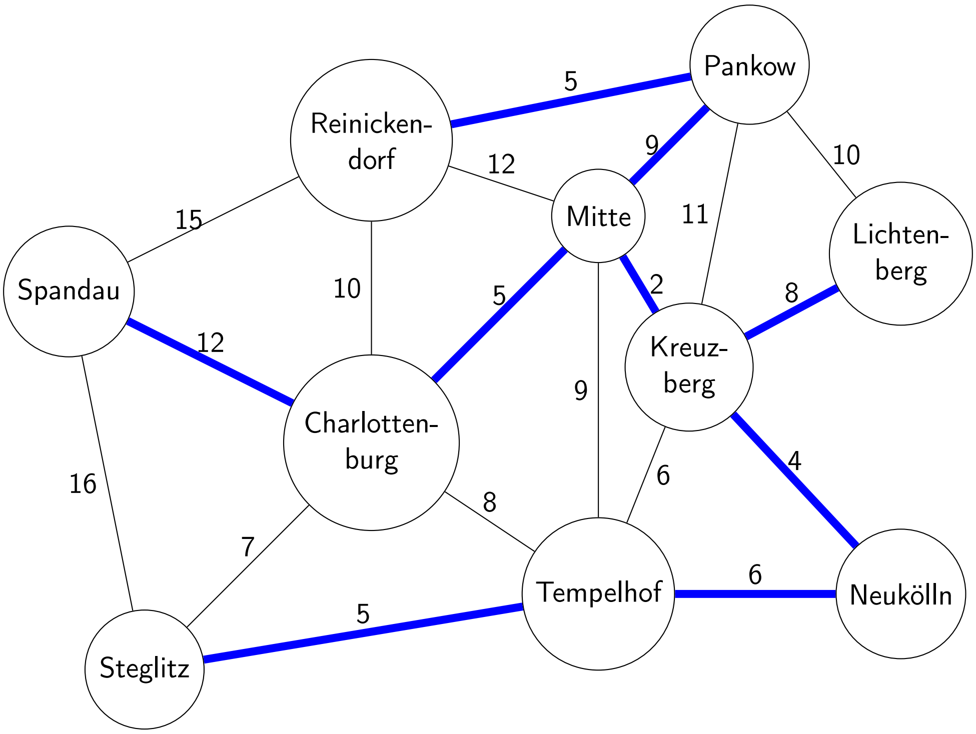


Abbildung 5: Ungerichteter Graph

3.3 Kruskal-Algorithmus: Lok um Lok

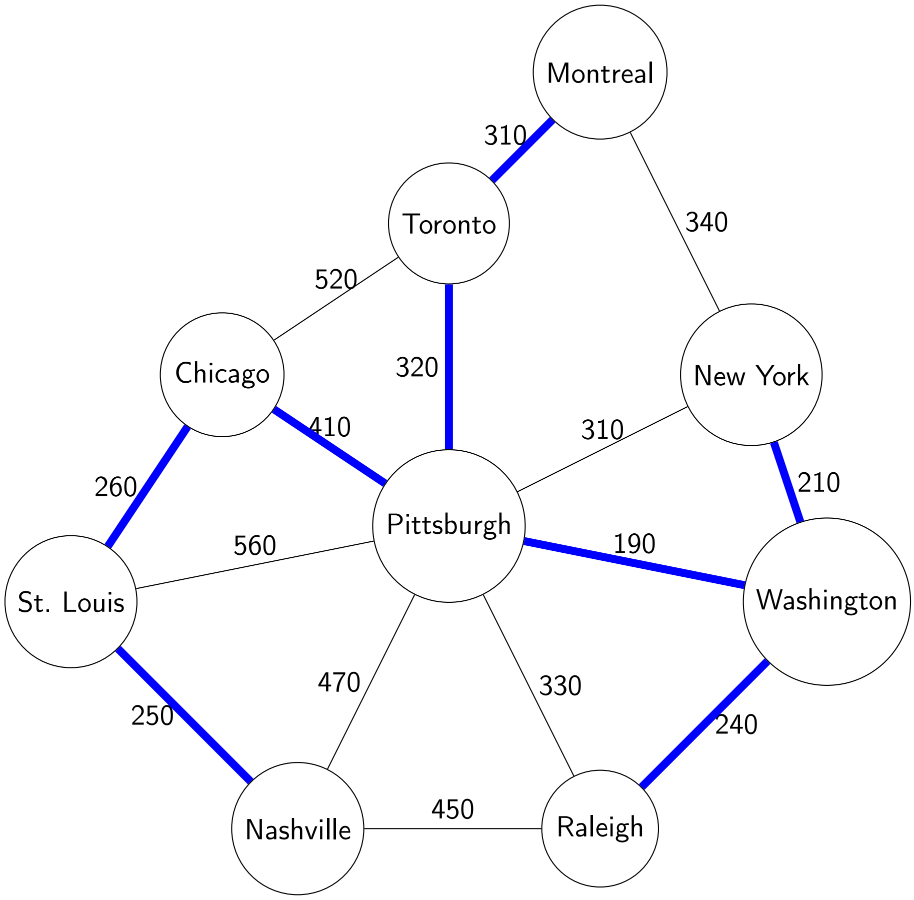


Abbildung 6: Ungerichteter Graph

Das kostengünstigste Netz ist in der Abbildung dunkel markiert. Die Gesamtlänge des Schienennetzes ist $190 + 210 + 240 + 250 + 260 + 310 + 320 + 410 = 2190$. In der Graphentheorie nennt man diesen Wert auch „Gewicht des (Spann-)Baums“.

3.4 Kruskal-Algorithmus: Internet in der Lausitz

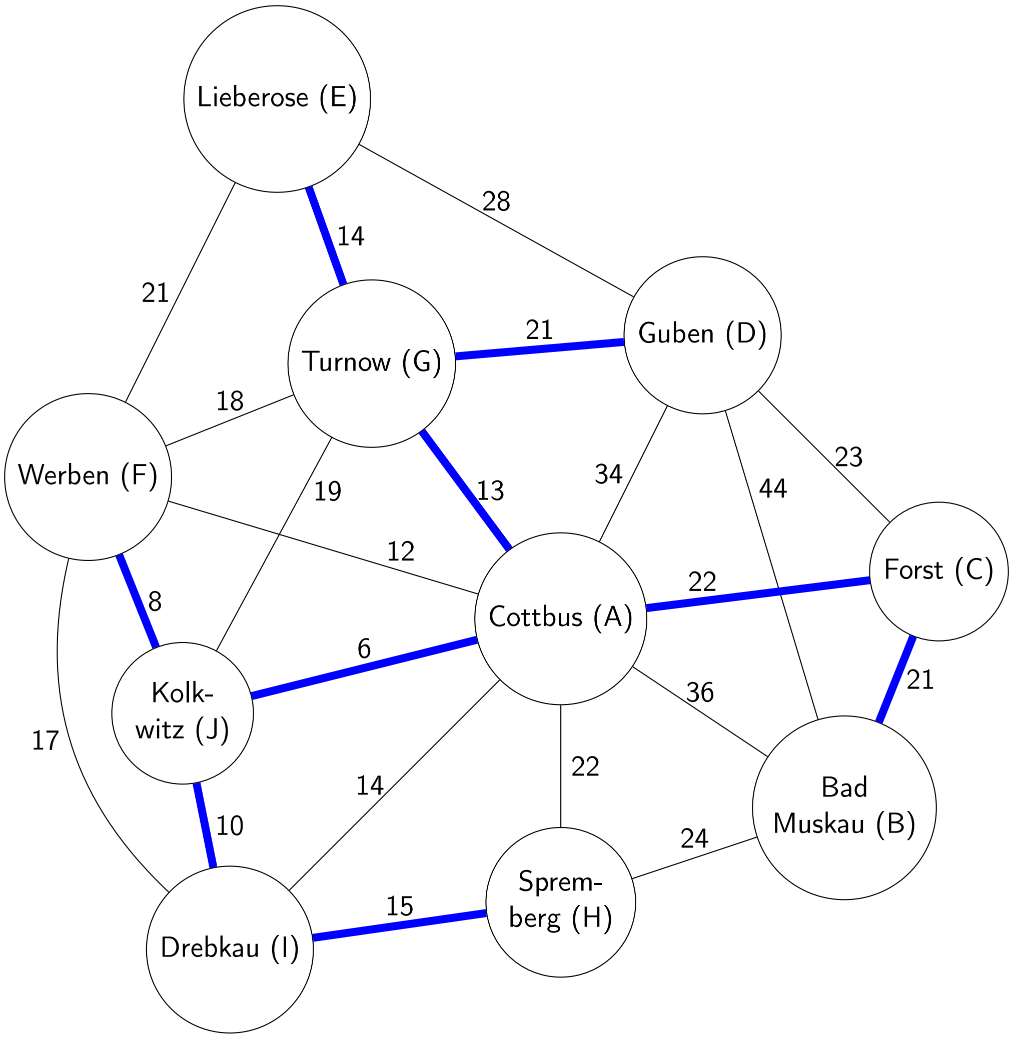


Abbildung 7: Region um Cottbus, Entfernung in km

Gewicht des minimalen Spannbaumes:	130

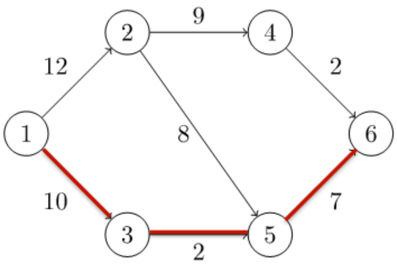
Gesamtkosten:	4.680.000 EUR

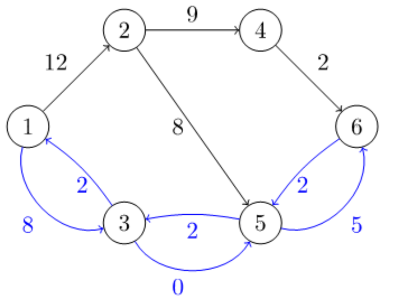
3.5 Greedy- und Dijkstra-Algorithmus in ungerichteten Graphen

Greedy-Algorithmus

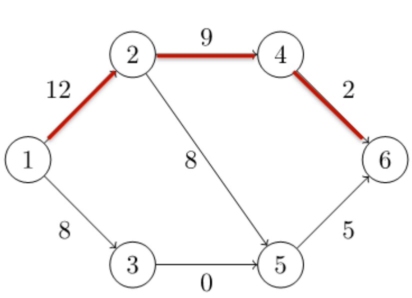
„Kürzester“Weg von a nach e: a $\rightarrow$ d $\rightarrow$ e. $L = 21$

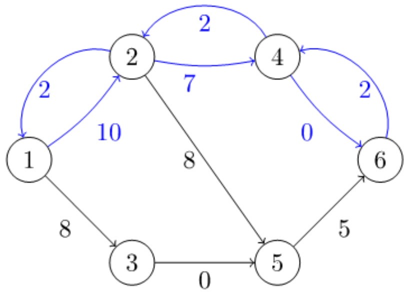
3.6 Ford Fulkerson Algorithmus



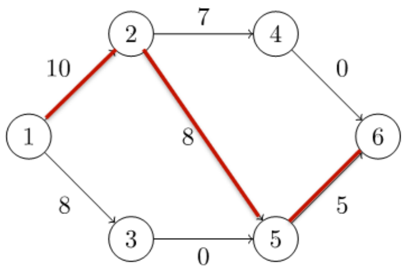


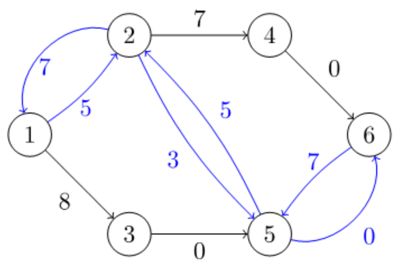
Kapazität Pfad 1 = 2



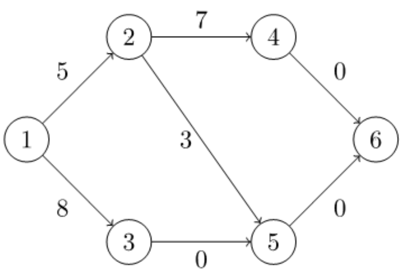


Kapazität Pfad 2 = 2





Kapazität Pfad 3 = 5



Abbruch, da kein möglicher Pfad mehr Kapazität hat.

Gesamtkapazität

= 2 (P1) + 2 (P2) + 5 (P3)
= 9

3.7 Ford Fulkerson Algorithmus 2

Gesamtkapazität:

= 1 (P1) + 3 (P2) + 2 (P3)

= 6

3.8 Ford Fulkerson Algorithmus 3

Gesamtkapazität:

= 3 (P1) + 2 (P2)

= 5

3.9 Flussmaximierungsproblem

a) Spezielles Problem:

$$\min z = g(s,2) + g(s,3) \tag{20}$$

$$\text{s.t. } g(s,2) \leq 5 \tag{21}$$

$$g(s,3) \leq 4 \tag{22}$$

$$g(2,4) \leq 2 \tag{23}$$

$$g(3,4) \leq 3 \tag{24}$$

$$g(3,t) \leq 1 \tag{25}$$

$$g(4,t) \leq 4 \tag{26}$$

$$-g(s,2) + g(2,4) = 0 \tag{27}$$

$$-g(s,3) + g(3,4) + g(3,t) = 0 \tag{28}$$

$$-g(2,4) - g(3,4) + g(4,t) = 0 \tag{29}$$

$$g(i,j) \geq 0 \; \forall i \in E \tag{30}$$

$$\tag{31}$$

b) Allgemeine Darstellung:

$$\min z = \sum_{j \in V:(s,j)} g(s,j) \tag{32}$$

$$\text{s.t.} \tag{33}$$

$$g(i,j) \leq u(i,j) \; \forall (i,j) \in E \tag{34}$$

$$\sum_{j \in V:(i,j) \in E} g(i,j) - \sum_{j \in V:(j,i) \in E} g(j,i) = 0 \; \forall i \in E \backslash s,t \tag{35}$$

$$g(i,j) \geq 0 \; \forall i \in E \tag{36}$$

$$u(i,j) \geq 0 \tag{37}$$

$$\tag{38}$$

3.10 Modellierung mit Max-Flow

Ja es ist möglich, falls der Maximum Flow ≥ 9

ist. Das Netzwerk:

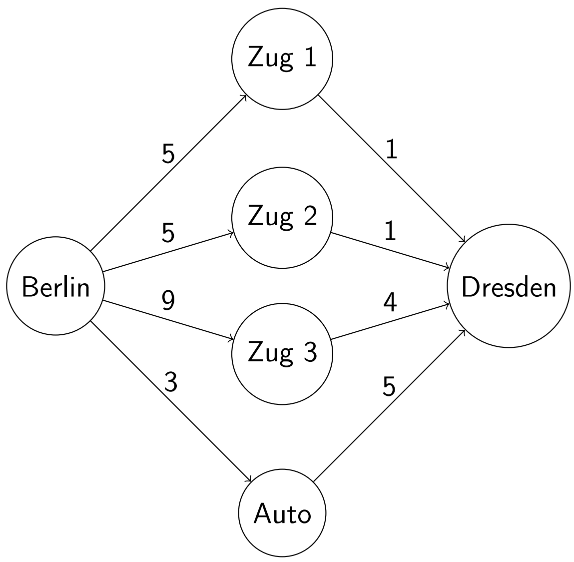


Abbildung 8: Modellierung Max-Flow

3.11 Max-Flow Min-Cut

Minimaler Schnitt mit einer Gesamtkapazität von 18:

a) Min-Cut:

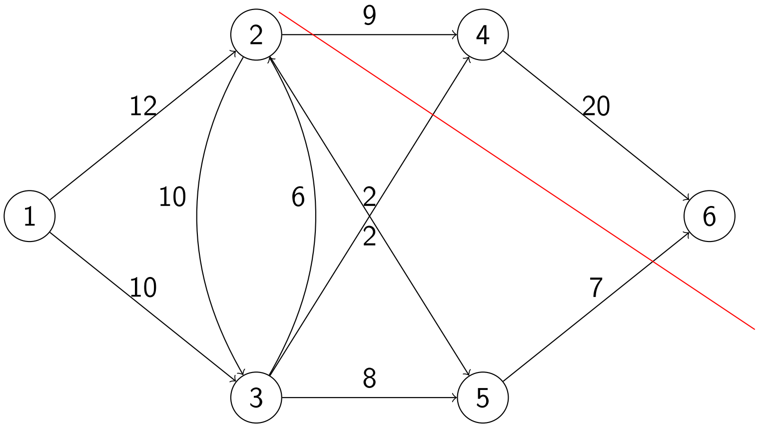


Abbildung 9: Min-Cut Netzwerk II

b) Schnitt: Nein dieser Schnitt ist nicht gültig, da die Quelle s (1) und Senke t (6) auf derselben Seite des Schnittes sind!

3.12 Min-Cost Flow als Optimierungsproblem

a) Spezielles Problem:

$$\min z = 3g(1,2) + 2g(1,3) + 4g(2,3) + 4g(3,2) \tag{39}$$

$$+2g(2,4) + 2g(3,4) + 3g(3,5) + 1g(4,6) + 1g(5,6) \tag{40}$$

$$\text{s.t. } g(1,2) \leq 12 \tag{41}$$

$$g(1,3) \leq 10 \tag{42}$$

$$g(2,3) \leq 10 \tag{43}$$

$$g(3,2) \leq 6 \tag{44}$$

$$g(2,4) \leq 9 \tag{45}$$

$$g(2,5) \leq 2 \tag{46}$$

$$g(3,4) \leq 2 \tag{47}$$

$$g(3,5) \leq 8 \tag{48}$$

$$g(4,6) \leq 20 \tag{49}$$

$$g(5,6) \leq 7 \tag{50}$$

$$g(1,2) + g(1,3) = 12 \tag{51}$$

$$g(2,3) + g(2,4) + g(2,5) - g(3,2) - g(1,2) = 0 \tag{52}$$

$$g(3,2) + g(3,4) + g(3,5) - g(2,3) = 0 \tag{53}$$

$$g(4,6) - g(2,4) - g(3,4) = 0 \tag{54}$$

$$g(5,6) - g(2,5) - g(3,5) = -5 \tag{55}$$

$$-g(4,6) - g(5,6) = -7 \tag{56}$$

$$g(i,j) \geq 0 \ \forall i \in E \tag{57}$$

$$\tag{58}$$

b) Allgemeine Darstellung:

$$\min z = \sum_{(i,j)\in E} g(i,j) \cdot c(i,j) \tag{59}$$

$$\text{s.t.} \tag{60}$$

$$g(i,j) \leq u(i,j) \ \forall (i,j) \in E \tag{61}$$

$$\sum_{j\in V:(i,j)\in E} g(i,j) - \sum_{j\in V:(j,i)\in E} g(j,i) = b(i) \ \forall i \in V \tag{62}$$

$$g(i,j) \geq 0 \tag{63}$$

$$u(i,j) \geq 0 \tag{64}$$

$$c(i,j) \geq 0 \tag{65}$$

$$b(i) \in \mathbb{R} \tag{66}$$

$$\tag{67}$$

3.13 Geschenkepipeline im Kamine

Das Netzwerk:

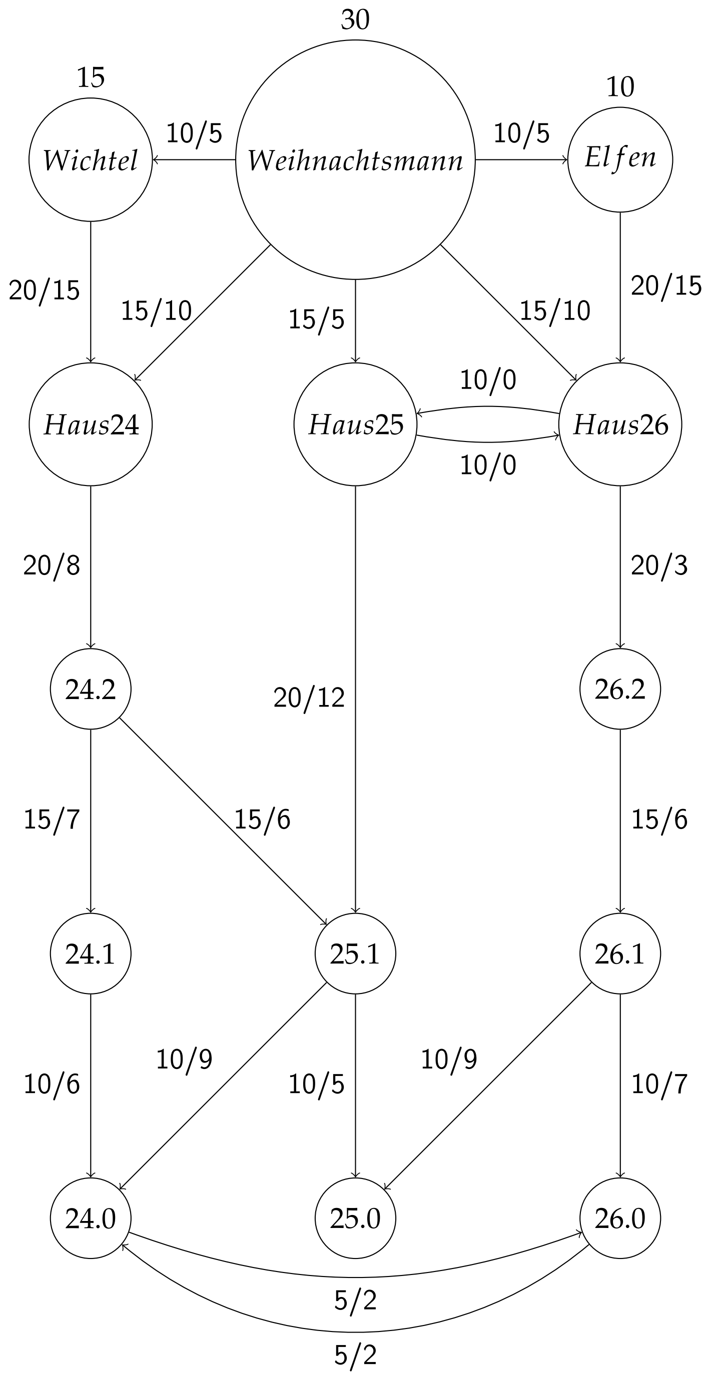


Abbildung 10: Geschenkepipeline Netzwerk

3.14 Flüsse in Netzwerken

a) Maximaler Fluss: 13 Einheiten

b) Kapazität des minimalen Schnittes = Gesamtkapazität des maximalen Flusses

=> Minimalester Schnitt hat eine Kapazität von 13

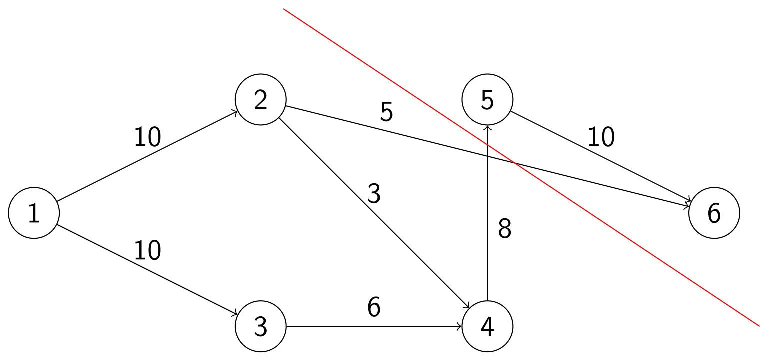


Abbildung 11: Flüsse in Netzwerken

c)

$$g(4,5) - g(2,4) - g(3,4) = -2$$

3.15 Adjazenz- und Inzidenzmatrix: Das Bus- und Bahnnetz Tegel

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10	e11	e12
a	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
c	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0
d	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
e	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0
f	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1
g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Tabelle 1: Inzidenzmatrix

	a	b	c	d	e	f	g
a	0	1	1	1	0	0	0
b	1	0	1	0	1	0	0
c	1	1	0	1	1	1	0
d	1	0	1	0	0	1	0
e	0	1	1	0	0	1	1
f	0	0	1	1	1	0	1
g	0	0	0	0	1	1	0

Tabelle 2: Adjazenzmatrix

3.16 Bellman-Ford-Algorithmus I

a) 1. Iteration

$$U^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & -2 & \infty \\ \infty & 3 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} ; T^1 = \begin{pmatrix} -1 & A & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & B & -1 \\ -1 & C & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & D & -1 & D \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Iteration

$$U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & -2 & \infty \\ \infty & 3 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & -2 & \infty \\ \infty & 3 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix};$$

$$U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \text{-1} & \infty \\ \infty & 0 & \text{0} & -2 & \text{-4} \\ \infty & 3 & 0 & \text{1} & \infty \\ \infty & \text{5} & 2 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} ; T^2 = \begin{pmatrix} -1 & A & -1 & \text{B} & -1 \\ -1 & -1 & \text{D} & B & \text{D} \\ -1 & C & -1 & \text{B} & -1 \\ -1 & \text{C} & D & -1 & D \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Iteration

$$U^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & -1 & \infty \\ \infty & 0 & 0 & -2 & -4 \\ \infty & 3 & 0 & 1 & \infty \\ \infty & 5 & 2 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & -2 & \infty \\ \infty & 3 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix};$$

$$U^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \text{1} & -1 & \text{-3} \\ \infty & 0 & 0 & -2 & -4 \\ \infty & 3 & 0 & 1 & \text{-1} \\ \infty & 5 & 2 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} ; T^3 = \begin{pmatrix} -1 & A & \text{D} & B & \text{D} \\ -1 & -1 & D & B & D \\ -1 & C & -1 & B & \text{D} \\ -1 & C & D & -1 & D \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Iteration

$$U^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ \infty & 0 & 0 & -2 & -4 \\ \infty & 3 & 0 & 1 & -1 \\ \infty & 5 & 2 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & -2 & \infty \\ \infty & 3 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix};$$

$$U^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ \infty & 0 & 0 & -2 & -4 \\ \infty & 3 & 0 & 1 & -1 \\ \infty & 5 & 2 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}; T^4 = \begin{pmatrix} -1 & \mathsf{A} & D & \mathsf{B} & \mathsf{D} \\ -1 & -1 & D & B & D \\ -1 & C & -1 & B & D \\ -1 & C & D & -1 & D \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

In der letzten Iteration trat keine Verbesserung auf.

Der kürzeste von a nach e lautet: $a \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow e$

b)

$$U^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 & -3 \\ \infty & -1 & -4 & -2 & -4 \\ \infty & 3 & -1 & 1 & -1 \\ \infty & 1 & -2 & -1 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Es existieren keine kürzesten Wege, weil negative Einträge auf der Hauptdiagonalen vorhanden sind.

c) Die Durchführung der Bellmann-Multiplikation ergibt folgendes Ergebnis

$$\min\left[\infty + \infty; 1 + (-2); (-2) + \infty; 0 + 0; (-2) + \infty\right] = -1 \tag{68}$$

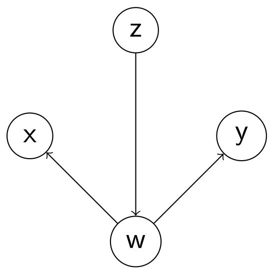
Es befindet sich in der neuen U-Matrix nun ein negativer Eintrag auf der Hauptdiagonalen. Das bedeutet es entsteht ein negativer Zyklus und der Algorithmus muss abgebrochen werden.

3.17 Bellman-Ford-Algorithmus mit Tree-Matrix

a) Die Matrix ändert sich in der 4.Iteration nicht und es liegen keine negativen Einträge auf der Hauptdiagonalen vor.

$$U^{Test} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

b) Es ist nur möglich den kürzesten Wege-Baum von einem Startknoten aus zu zeichen. Hier beispielhaft für den Startknoten z.



3.18 Bellman-Ford-Algorithmus II

Finden Sie zum Graphen in Abbildung 12 alle kürzesten Wege mit Hilfe des Bellman-Ford-Algorithmus. Tragen Sie die Lösung in die Lösungsmatritzen ein!

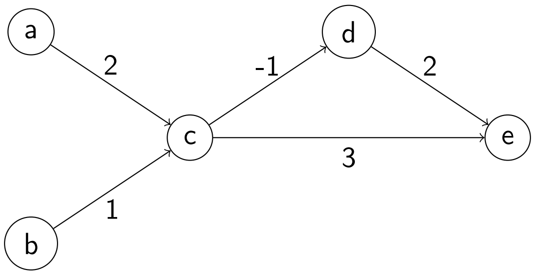


Abbildung 12: Graph mit negativen Kantengewichten

1. Iteration

$$U^1 = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & -1 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} ; T^1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & A & -1 & -1 \\ -1 & -1 & B & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & C & C \\ -1 & -1 & -1 & -1 & D \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Iteration

$$U^2 = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & -1 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & -1 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix};$$

$$U^2 = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 2 & 1 & 5 \\ \infty & 0 & 1 & 0 & 4 \\ \infty & \infty & 0 & -1 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} ; T^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & A & \mathrm{C} & \mathrm{C} \\ -1 & -1 & B & \mathrm{C} & \mathrm{C} \\ -1 & -1 & -1 & C & \mathrm{D} \\ -1 & -1 & -1 & -1 & D \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Iteration

$$U^3 = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 2 & 1 & 5 \\ \infty & 0 & 1 & 0 & 4 \\ \infty & \infty & 0 & -1 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & -1 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix};$$

$$U^3 = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 2 & 1 & 3 \\ \infty & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 0 & -1 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} ; T^3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & A & C & \mathrm{D} \\ -1 & -1 & B & C & \mathrm{D} \\ -1 & -1 & -1 & C & D \\ -1 & -1 & -1 & -1 & D \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

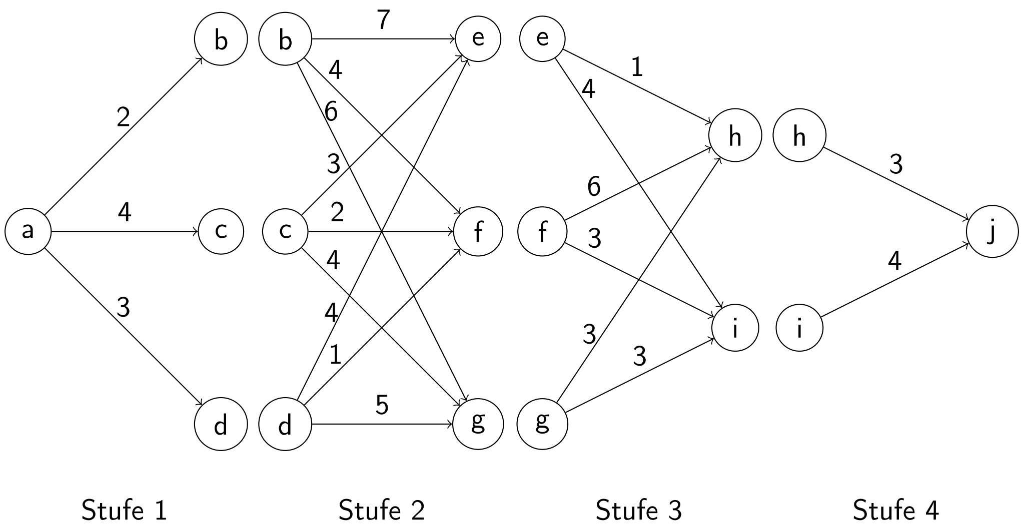
4. Iteration

$$U^4 = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 2 & 1 & 3 \\ \infty & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 0 & -1 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & -1 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix};$$

$$U^4 = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 2 & 1 & 3 \\ \infty & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 0 & -1 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}; T^4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & A & C & D \\ -1 & -1 & B & C & D \\ -1 & -1 & -1 & C & D \\ -1 & -1 & -1 & -1 & D \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

In der letzten Iteration trat keine Verbesserung auf.

3.19 Dynamische Optimierung



- k=4

	j	$x_4{}^*$	$c_4{}^*(x)$
h	3	j	3
i	4	j	4

- k=3

	h	i	$x_3{}^*$	$c_3{}^*(x)$
e	1+3=4	4+4=8	h	4
f	6+3=9	3+4=7	i	7
g	3+3=6	3+4=7	h	6

- k=2

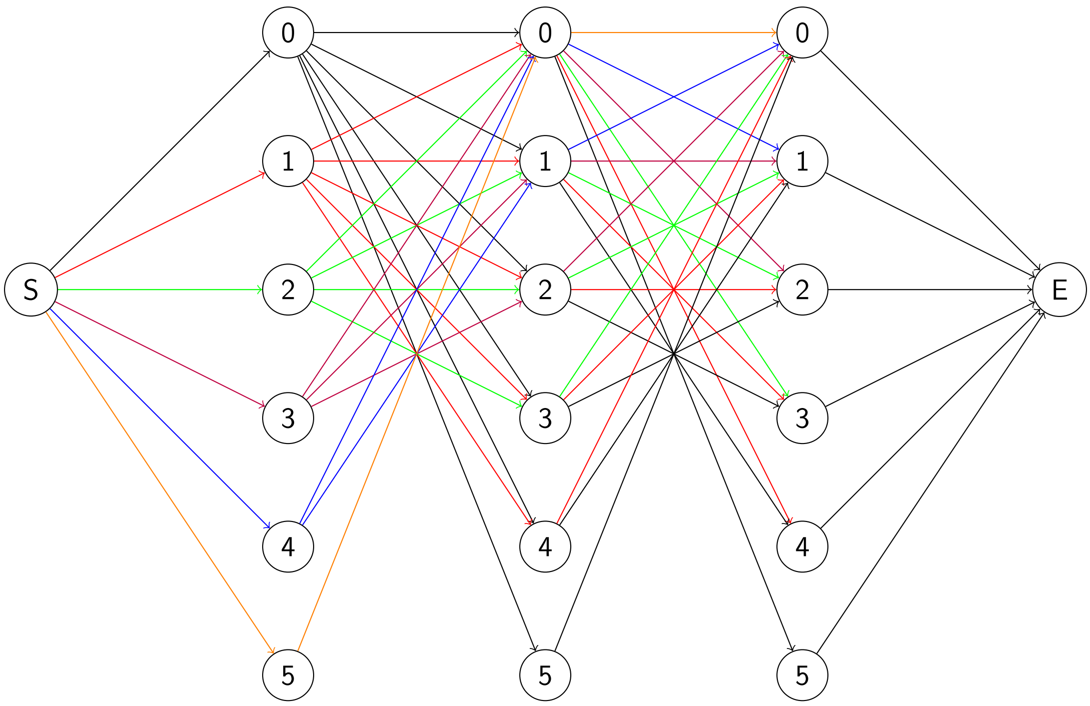
	e	f	g	$x_2{}^*$	$c_2{}^*(x)$
b	7+4=11	4+7=11	6+6=12	e	11
c	3+4=7	2+7=9	4+6=10	e	7
d	4+4=8	1+7=8	5+6=11	e	8

- k=1

s	b	c	d	$x_1{}^*$	$c_1{}^*(x)$
a	2+11=13	4+7=11	3+8=11	c	11

Kürzester Weg von a nach j: $a \to c \to e \to h \to j$, Länge $l_{a-j} = 11$.

3.20 Dynamische Optimierung: Kernkraftwerke



- k = 3 Neckarwestheim 2

	0	$x_3{}^*$	$c_3{}^*(s)$
4	5	0	5
3	4,2	0	4,2
2	3	0	3
1	1,7	0	1,7
0	0	0	0

- k=2 Brokdorf

	0	1	2	3	4	$x_2{}^*$	$c_2{}^*(s)$
4	4	5,4	6,3	7	5	3	7
3	3,7	5	5,8	4,2		2	5,8
2	3,3	4,5	3			1	4,5
1	2,8	1,7				0	2,8
0	0					0	0

- k=1 Isar 2

	0	1	2	3	4	$x_1{}^*$	$c_1{}^*(s)$
4	6	7,8	8	7,3	7	2	8

- Isar 2 = 2 Teams

  Brokdorf = 1 Team

  Neckarwestheim 2 = 1 Team

- Der Personaldienstleister erhält mit dieser Einteilung der Teams 8 Geldeinheiten.

3.21 Dynamische Optimierung: Nahverkehr in Stockholm

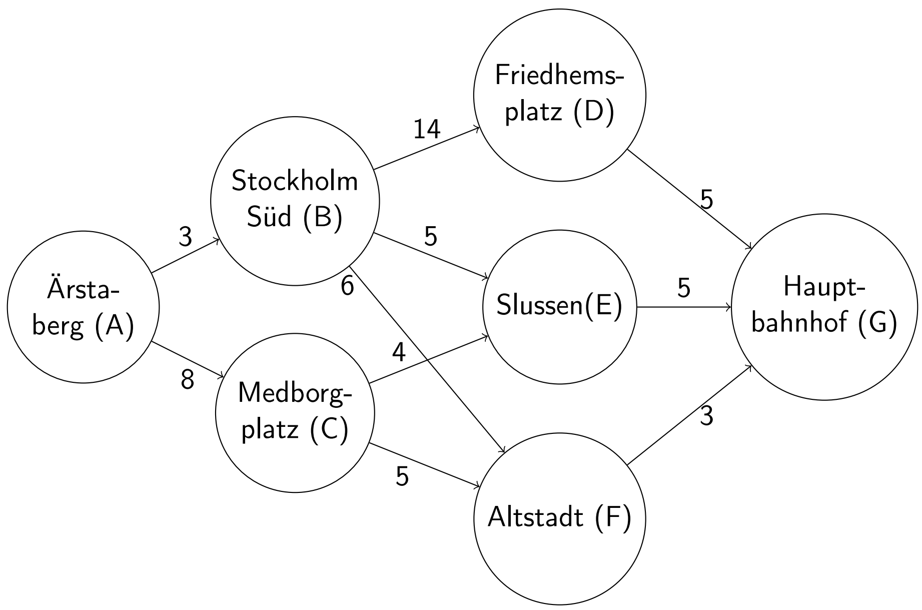


Abbildung 13: Netzspinne mit Fahrzeiten

- k=3

	g	$x_3{}^*$	$c_3{}^*(s)$
d	5	g	5
e	5	g	5
f	3	g	3

- k=2

	d	e	f	$x_2{}^*$	$c_2{}^*(s)$
b	14+5=19	5+5=10	6+3=9	f	9
c	-	4+5=9	5+3=8	f	8

- k=1

	b	c	x_1^*	$c_1^*(s)$
a	3+9=12	8+8=16	b	12

Weg von a nach g:	a - b - f - g	Fahrtzeit:	12

3.22 Lagerhaltung

- k=3

	0	x_3^*	$c_3^*(x)$
0	12	0	12
1	10	0	10
2	8	0	8
3	0	0	0

- k=2

	0	1	2	3	x_2^*	$c_2^*(x)$
0	20	21	22	17	3	17
1	12	19	20	15	0	12
2	-	11	18	13	1	11
3	-	-	10	11	2	10

- k=1

	0	1	2	3	x_1^*	$c_1^*(x)$
0	31	29	31	-	1	29

3.23 Lagerhaltung: Fertigungsauftrag

- k=5

	0	x_5^*	$c_5^*(x)$
0	1800	0	1800
5	1450	0	1450
10	1100	0	1100
15	750	0	750
20	0	0	0

- k=4

	0	5	10	15	20	$x_4{}^*$	$c_4{}^*(x)$
0	2900	2950	3000	3050	2700	20	2700
5	2550	2600	2650	2700	2350	20	2350
10	1800	2250	2300	2350	2000	0	1800
15	-	1500	1950	2000	1650	5	1500
20	-	-	1200	1650	1300	10	1200

- k=3

	0	5	10	15	20	$x_3{}^*$	$c_3{}^*(x)$
0	-	-	-	-	-	-	-
5	-	-	-	-	-	-	-
10	5900	-	-	-	-	0	5900
15	5550	5600	-	-	-	0	5550
20	5200	5250	5100	-	-	10	5100

- k=2

	0	5	10	15	20	$x_2{}^*$	$c_2{}^*(x)$
0	-	-	7800	7850	7800	10/20	7800
5	-	-	7450	7500	7450	10/20	7450
10	-	-	7100	7150	7100	10/20	7100
15	-	-	6750	6800	6750	10/20	6750
20	-	-	6000	64500	6400	10	6000

- k=1

	0	5	10	15	20	$x_1{}^*$	$c_1{}^*(x)$
0	9600	9650	9700	9750	9400	20	9400

Folgende Anzahl an Trockentoiletten befinden sich im Lager:

Januar: 40 Stück

Februar: keine

März: 40 Stück

April: 30 Stück

Mai: kein

Die optimalen Gesamtkosten betragen: 9400 Geldeinheiten

3.24 Lagerhaltung von Kupfersulfat

- k = 3

	0	$x_3{}^*$	$c_3{}^*(x)$
0	5+4.5=9.5	0	9.5
1	5+3=8	0	8
2	5+1.5=6.5	0	6.5
3	0	0	0

- k=2

	0	1	2	3	$x_2{}^*$	$c_2{}^*(x)$
0	-	-	-	-	-	-
1	5+6 +9.5=20.5	-	-	-	0	20.5
2	5+4.5+9.5=19	5+6+0.5+8=19.5	-	-	0	19
3	5+3 +9.5=17.5	5+4.5+0.5+8=18	5+6+1+6.5=18.5	-	0	17.5

- k=1

	0	1	2	3	$x_1{}^*$	$c_1{}^*(x)$
0	-	5+3+0.5+20.5=29	5+4.5+1+19=29.5	5+6+1.5+17.5=30	1	29

Gesamtkosten 1. Quartal: 29000

1.Monat:

produzierte Einheiten im Optimum: 2 gelagerte Einheiten im Optimum: 1

2.Monat:

produzierte Einheiten im Optimum: 4 gelagerte Einheiten im Optimum: 0

3.Monat:

produzierte Einheiten im Optimum: 3 gelagerte Einheiten im Optimum: 0

3.25 Yen-Algorithmus

k	p^{k-1}	Abzweig	Ausschluss	min Alternative
1	-	-	-	abef (3)
2	abef	a	ab	acef (7)
		b	abe	abcef (8)
		e	abef	abedf (17)
3	acef	a	ab,ac	-
		c	ace	-
		e	acef	acedf (21)

Kandidatenliste
abef (3)
acef (7)
abcef (8)
abedf (17)
acedf (21)

3.26 Yen-Algorithmus: Castor Transport

Aufgrund einer Ankündigung, dass der kürzeste Weg für einen Castortransport abschnittsweise von Demonstranten blockiert sein wird, ist es Ihre Aufgabe, alternative Wege zu finden und gleichzeitig die Transportkosten so gering wie möglich zu halten. Dabei sind die Transportkosten direkt proportional zu der Weglänge. Der Castor startet in La Hague (Knoten a) und muss Isar (Knoten g) erreichen. Der kürzeste Weg ist bereits markiert (Abbildung 14); geben Sie bitte die zwei nächst günstigsten Routen mit den zugehörigen Kosten an.

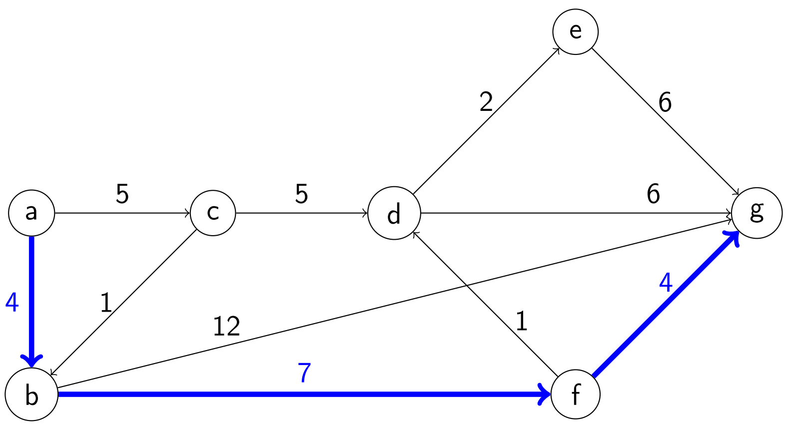


Abbildung 14: Gerichteter Graph

k	p^{k-1}	Abzweig	Ausschluss	min Alternative
1	-	-	-	abfg (15)
2	abfg	a b f	ab abf abfg	acdg (16) abg (16) abfdg (18)
3	abg	a b	ab, ac abf, abg	- -
4	acdg	a c d	ab, ac acd acdg	- acbfg (17) acdeg (18)

Kandidatenliste
abfg (15)
abg (16)
acdg (16)
acbfg (17)
abfdg (18)
acdeg (18)

4 Ganzzahlige Optimierung

4.1 Einführung

a) Schildern Sie die Grundidee des Branch-and-Bound-Algorithmus.

- Lösung einer Folge von relaxierten Problemen, um das ursprüngliche ganzzahlige Problem zu lösen
- Zerlegung des Optimierungsproblems in kleinere Teilprobleme (Branching)
- Entscheidung, welches Teilproblem weitergeführt wird oder durch ein anderes dominiert wird (Bounding)
- Die ganzzahlige, optimale Lösung einer linearen Relaxation eines ganzzahligen Problems kann auch die optimale Lösung des ganzzahligen Problems sein
- Der Zielfunktionswert eines übergeordneten (Teil-)Problems stellt immer eine obere Schranke für die Zielfunktionswerte der untergeordneten Probleme dar

b) Hilfsregeln
Auswahlregel für Variable

- **Zufallsauswahl**
- **Fraktionellste Variable:** Wähle diejenige Variable zum Einschränken, deren aktueller, nicht ganzzahliger Anteil näher an $\frac{1}{2}$ liegt
- **Strong Branching:** Aufstellung und Berechnung von Teilproblemen für alle nicht ganzzahligen Variablen und schließlich Wahl der Variable, die den Zielfunktionswert am meisten verändert; Verwerfung der nicht ausgewählten Variablen

Auswahlregel für Teilprobleme

- **Maximum Upper Bound:** Wähle Problem mit größtem Zielfunktionswert aus der Liste (beachte die Optimierungsrichtung)
- **Tiefensuche:** Wähle Problem aus der Liste, welches als letztes eingefügt wurde (LIFO)
- **Breitensuche:** Wähle Problem aus der Liste, welches als erstes eingefügt wurde (FIFO)

c) Eliminierung von Teilproblemen

- **Ganzzahligkeit:** Das Teilproblem ist optimal ganzzahlig gelöst
- **Beschränkung:** Die obere Schranke eines Teilproblems ist kleiner als eine bereits gefundene ganzzahlige Lösung (untere Schranke)
- **Unzulässigkeit:** Der zulässige Bereich ist leer

4.2 Branch-and-Bound-Algorithmus: Die Raffinerie in Karlsruhe

Es lässt sich folgende Standardform aufstellen.

$$x_1 = \text{Produzierter Diesel in Barrel pro Tag}$$
$$x_2 = \text{Produziertes Benzin in Barrel pro Tag}$$

$$\begin{array}{rll} max\ z = & 180 \cdot x_1 & +210 \cdot x_2 \\ s.t. & 1 \cdot x_1 & +2 \cdot x_2 \leq 7 \\ & 3 \cdot x_1 & +2 \cdot x_2 \leq 10 \\ & x_{1,2} & \in \mathbb{N}_0 \end{array}$$

Zu Beginn wird die LP-Relaxion P_0 aufgestellt und gelöst.

$$\begin{array}{rll} max \quad 0 = z- & 180 \cdot x_1 & -210 \cdot x_2 \\ s.t. & 1 \cdot x_1 & +2 \cdot x_2 \leq 7 \\ & 3 \cdot x_1 & +2 \cdot x_2 \leq 10 \\ & x_{1,2} & \geq 0 \end{array}$$

Danach wird P_0 mit Hilfe des Simplex gelöst.

P_0	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_3	1	2	1	0	7
x_4	3	2	0	1	10
z_j	-180	-210	0	0	0

P_0	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_2	0,5	1	0,5	0	3,5
x_4	2	0	-1	1	3
z_j	-75	0	105	0	735

P_0	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_2	0	1	0,75	-0,25	2,75
x_1	1	0	-0,5	0,5	1,5
z_j	0	0	67,5	37,5	847,5

Eine optimale Lösung für P_0 wurde gefunden. Da diese jedoch nicht ganzzahlig ist, muss das Problem verzweigt werden. Unter Verwendung der 1/2 Regel wird zunächst x_1 eingeschränkt.

Das Problem P_1 erhält die zusätzliche Nebenbedingung: $x_1 \leq 1$

Das Problem P_2 erhält die zusätzliche Nebenbedingung: $x_1 \geq 2$

Bilde die LP-Relaxierung P_1:

$$\begin{aligned}
max\ z = \quad & 180 \cdot x_1 & +210 \cdot x_2 \\
s.t. \quad & 1 \cdot x_1 & +2 \cdot x_2 \leq 7 \\
& 3 \cdot x_1 & +2 \cdot x_2 \leq 10 \\
& & x_1 \leq 1 \\
& x_{1,2} & \geq 0
\end{aligned}$$

Nun muss das Optimaltableau aus P_0 um eine Zeile und eine Spalte erweitert werden und die Nebenbedingung samt neuer Schlupfvariable wird in das Tableau übernommen.

Im ersten Schritt wird der Einheitsvektor für die Basisvariablen wieder hergestellt werden.

P_1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	0,75	-0,25	0	2,75
x_1	1	0	-0,5	0,5	0	1,5
x_5	1	0	0	0	1	1
z_j	0	0	67,5	37,5	0	847,5

P_1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	0,75	-0,25	0	2,75
x_1	1	0	-0,5	0,5	0	1,5
x_5	0	0	0,5	-0,5	1	-0,5
z_j	0	0	67,5	37,5	0	847,5

P_1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	0,5	0	-0,5	3
x_1	1	0	0	0	1	1
x_4	0	0	-1	1	-2	1
z_j	0	0	105	0	75	810

P_1 hat eine ganzzahlige Lösung. Als nächstes wird P_2 gelöst mit NB: $x_1 \geq 2$

$$\begin{aligned} max\ z = \quad & 180 \cdot x_1 && +210 \cdot x_2 \\ s.t. \quad & 1 \cdot x_1 && +2 \cdot x_2 \leq 7 \\ & 3 \cdot x_1 && +2 \cdot x_2 \leq 10 \\ & && x_1 \geq 2 \\ & x_{1,2} && \geq 0 \end{aligned}$$

P_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	0,75	-0,25	0	2,75
x_1	1	0	-0,5	0,5	0	1,5
x_5	-1	0	0	0	1	-2
z_j	0	0	67,5	37,5	0	847,5

P_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	0,75	-0,25	0	2,75
x_1	1	0	-0,5	0,5	0	1,5
x_5	0	0	-0,5	0,5	1	-0,5
z_j	0	0	67,5	37,5	0	847,5

P_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	0	0,5	1,5	2
x_1	1	0	0	0	-1	2
x_3	0	0	1	-1	-2	1
z_j	0	0	0	105	135	780

P_2 hat eine ganzzahlige Lösung.

Durch die Anwendung des Branch-and-Bound Algorithmus entsteht dieser verzweigte Lösungsbaum:

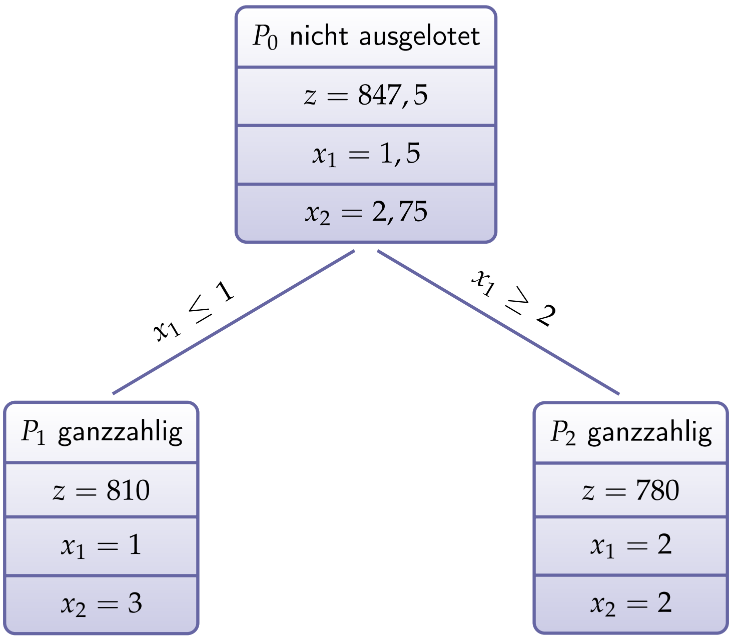


Abbildung 15: Die Raffinerieproduktion gelöst nach Breitensuche

P_1 und P_2 haben jeweils eine ganzzahlige Lösung. Da der Zielfunktionswert von P_1 größer ist als der von P_2, ist P_1 unsere optimale Lösung.
Der Algorithmus ist beendet.

4.3 Branch-and-Bound-Algorithmus: Die Raffinerie in Karlsruhe 2.0

Es lässt sich folgendes Optimierungsproblem aufstellen.

x_1 = Produzierter Biodiesel auf Rapsbasis in 10 Liter

x_2 = Produziertes Bioethanol - Lignocellulose in 10 Liter

x_3 = Produzierte Schlempe in Liter

$$
\begin{array}{lrrrcr}
\max\ z = & 6{,}5 \cdot x_1 & +11{,}3 \cdot x_2 & +0{,}63 \cdot (x_3 - 40) & & \\
\text{s.t.} & (\frac{1}{49} \cdot 0{,}3265) \cdot x_1 & +(\frac{1}{55} \cdot 0{,}2117) \cdot x_2 & & \leq & 1 \\
 & & 100 \cdot x_2 & -1 \cdot x_3 & = & 0 \\
 & & & x_3 & \leq & 5020 \\
 & & & x_3 & \geq & 40 \\
 & & & x_{1,2,3} & \in \mathbb{N}_0 &
\end{array}
$$

Zu Beginn wird die LP-Relaxion P_0 der Standardform aufgestellt.

$$
\begin{array}{llllllll}
\max\ 0 = z & -6,5 \cdot x_1 & -11,3 \cdot x_2 & -0,63 \cdot (x_3 - 40) & & & \\
\text{s.t.} & (\frac{1}{49} \cdot 0,3265) \cdot x_1 & +(\frac{1}{55} \cdot 0,2117) \cdot x_2 & & +x_4 & = & 1 \\
 & & 100 \cdot x_2 & -1 \cdot x_3 & +x_5 & = & 0 \\
 & & -100 \cdot x_2 & +1 \cdot x_3 & +x_6 & = & 0 \\
 & & & x_3 & +x_7 & = & 5020 \\
 & & & -x_3 & +x_8 & = & -40 \\
 & & & x_{1,\ldots,8} & \geq 0 & &
\end{array}
$$

Danach wird P_0 gelöst bspw. mit Hilfe des Simplex.

Nachdem eine optimale Lösung für P_0 gefunden wurde, muss das Problem verzweigt werden, da diese nicht ganzzahlig ist. Unter Verwendung der 1/2 Regel wird zunächst x_2 eingeschränkt.
Das Problem P_1 erhält die zusätzliche Nebenbedingung: $x_2 \leq 50$
Das Problem P_2 erhält die zusätzliche Nebenbedingung: $x_2 \geq 51$

Nach der Breitensuchen wird dann als nächstes P_1 und dann P_2 verzweigt...

Durch die Anwendung des Branch-and-Bound Algorithmus entsteht dieser verzweigte Lösungsbaum, siehe Abbildung 16.

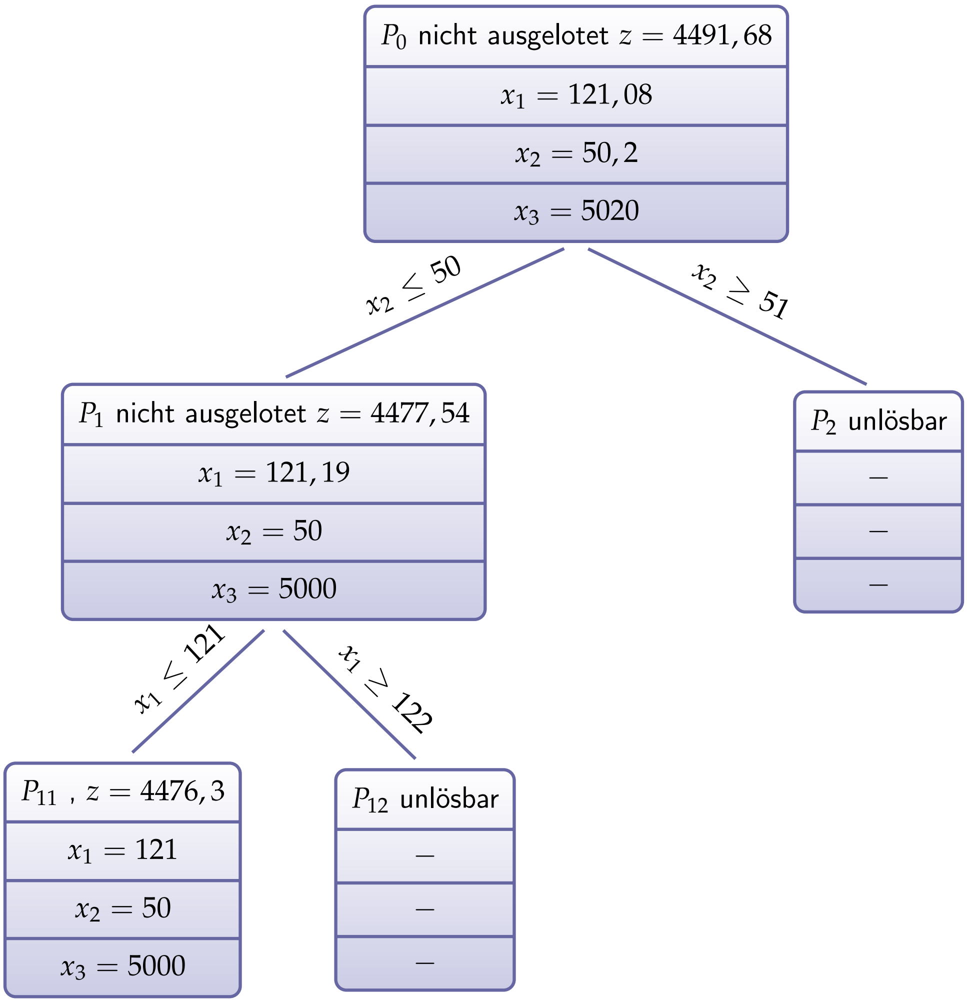


Abbildung 16: Branch-and-Bound Baum

4.4 Branch-and-Bound-Algorithmus I

Je nachdem welche Variable und welches Teilproblem gewählt wird, entstehen unterschiedliche Branch and Bound Bäume. Es entstehen zwei Bäume. Die Lösung sollte als Teil eines der beiden Bäume vorliegen. Im Optimum gilt: $x_1 = 21$, $x_2 = 0$, $z = 105$.

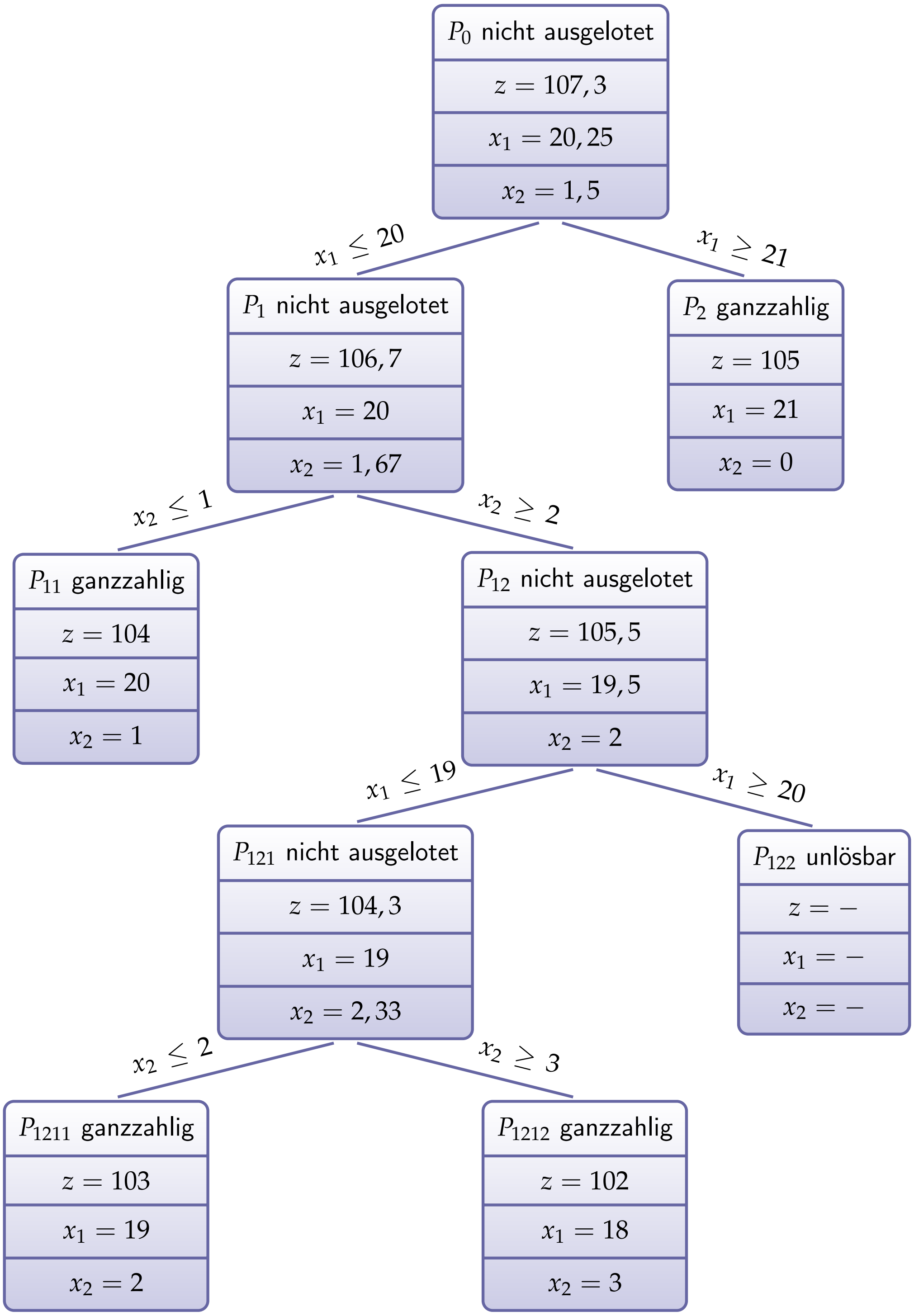


Abbildung 17: Verzweigung von Strukturvariable eins im ersten Schritt

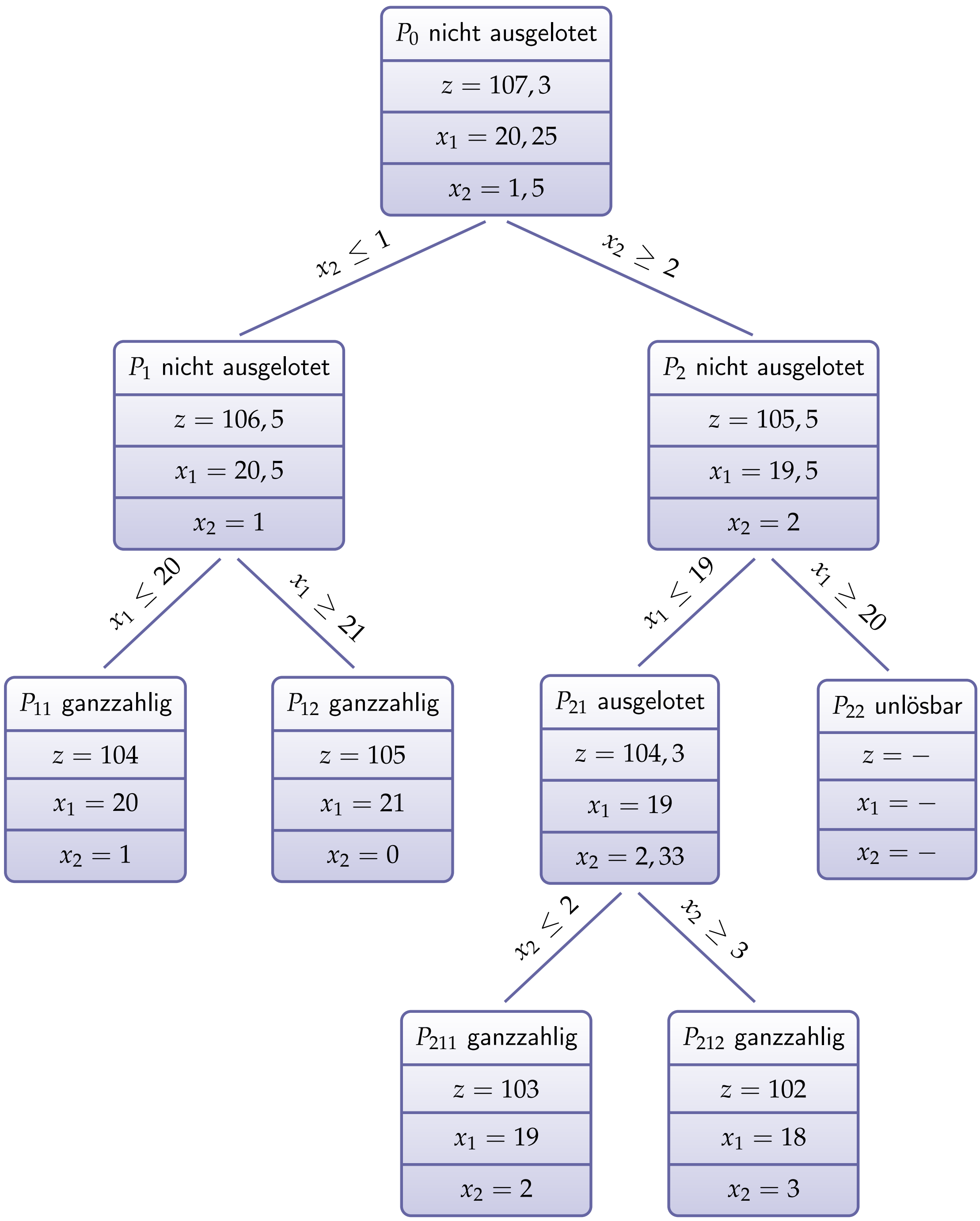
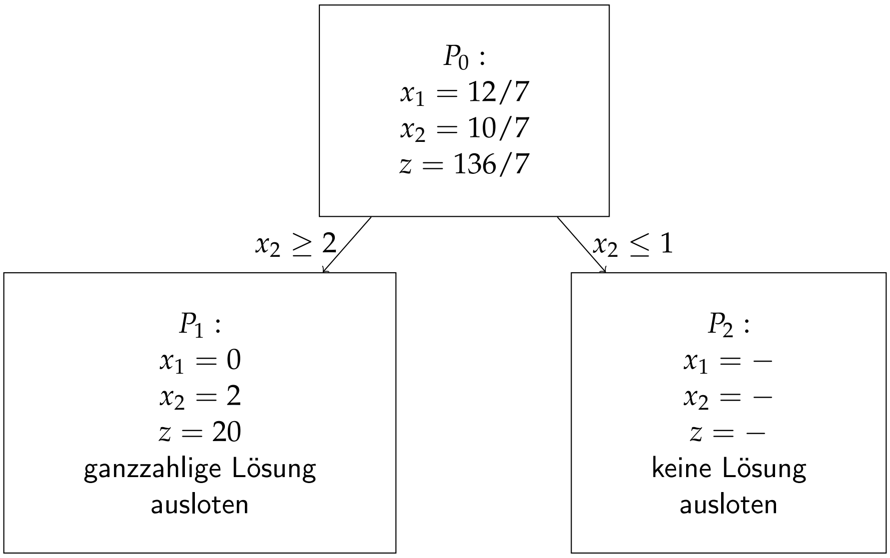


Abbildung 18: Verzweigung von Strukturvariable zwei im ersten Schritt

4.5 Branch-and-Bound-Algorithmus II

Lösen Sie das folgende Problem mithilfe des Branch-and-Bound-Algorithmus! Benutzen Sie die 1/2-Regel und MUB!

$$
\begin{array}{lrrcr}
\min\ z_p = & 3 \cdot x_1 + & 10 \cdot x_2 & & \\
\text{s.t.} & 1/3 \cdot x_1 + & 1 \cdot x_2 & \geq & 2 \\
 & -2 \cdot x_1 + & 1 \cdot x_2 & \geq & -2 \\
 & & 1 \cdot x_2 & \leq & 8 \\
 & 1 \cdot x_1 & & \leq & 3 \\
 & & x_{1,2} & \in & \mathbb{N}
\end{array}
$$



Optimum:

x_1: 0 x_2: 2 z: 20

P_0:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_3	-1/3	-1	1	0	0	0	-2
x_4	2	-1	0	1	0	0	2
x_5	0	1	0	0	1	0	8
x_6	1	0	0	0	0	1	3
$-z$	3	10	0	0	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_1	1	3	-3	0	0	0	6
x_4	0	-7	6	1	0	0	-10
x_5	0	1	0	0	1	0	8
x_6	0	-3	3	0	0	1	-3
$-z$	0	1	9	0	0	0	-18

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_1	1	0	-3/7	3/7	0	0	12/7
x_2	0	1	-6/7	-1/7	0	0	10/7
x_5	0	0	6/7	1/7	1	0	46/7
x_6	0	0	3/7	-3/7	0	1	9/7
$-z$	0	0	69/7	1/7	0	0	-136/7

P_1 :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
x_1	1	0	-3/7	3/7	0	0	0	12/7
x_2	0	1	-6/7	-1/7	0	0	0	10/7
x_5	0	0	6/7	1/7	1	0	0	46/7
x_6	0	0	3/7	-3/7	0	1	0	9/7
x_7	0	-1	0	0	0	0	1	-2
$-z$	0	0	69/7	1/7	0	0	0	-136/7

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
x_1	1	0	-3/7	3/7	0	0	0	12/7
x_2	0	1	-6/7	-1/7	0	0	0	10/7
x_5	0	0	6/7	1/7	1	0	0	46/7
x_6	0	0	3/7	-3/7	0	1	0	9/7
x_7	0	0	-6/7	-1/7	0	0	1	-4/7
$-z$	0	0	69/7	1/7	0	0	0	-136/7

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
x_1	1	0	-3	0	0	0	3	0
x_2	0	1	0	0	0	0	-1	2
x_5	0	0	0	0	1	0	1	6
x_6	0	0	3	0	0	1	-3	3
x_4	0	0	6	1	0	0	-7	4
$-z$	0	0	9	0	0	0	1	-20

P_2 :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
x_1	1	0	-3/7	3/7	0	0	0	12/7
x_2	0	1	-6/7	-1/7	0	0	0	10/7
x_5	0	0	6/7	1/7	1	0	0	46/7
x_6	0	0	3/7	-3/7	0	1	0	9/7
x_7	0	1	0	0	0	0	1	1
$-z$	0	0	69/7	1/7	0	0	0	-136/7

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
x_1	1	0	-3/7	3/7	0	0	0	12/7
x_2	0	1	-6/7	-1/7	0	0	0	10/7
x_5	0	0	6/7	1/7	1	0	0	46/7
x_6	0	0	3/7	-3/7	0	1	0	9/7
x_7	0	0	6/7	1/7	0	0	1	-3/7
$-z$	0	0	69/7	1/7	0	0	0	-136/7

Keine Pivotspalte wählbar → keine Lösung existiert.

4.6 Branch-and-Bound-Algorithmus III

Zu Beginn wird das Problem P_0 gelöst:

$$\max\ F = x_1 + x_2$$
$$\text{s.t. } x_1 \leq 3$$
$$5x_1 + 12x_2 \leq 36$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

P_0	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_3	1	0	1	0	3
x_4	5	12	0	1	36
z_j	-1	-1	0	0	0

P_0	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_3	1	0	1	0	3
x_2	5/12	1	0	1/12	3
z_j	-4/12	0	0	1/12	3

P_0	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_1	1	0	1	0	3
x_2	0	1	-5/12	1/12	7/4
z_j	0	0	7/12	1/12	19/4

Das optimales Ergebnis ist nicht ganzzahlig. Daher wird P_0 weiter verzweigt:

$P_1 : x_2 \leq 1$ und $P_2 : x_2 \geq 2$

Als nächstes wird Problem P_1 gelöst.

P_1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	1	0	0	3
x_2	0	1	-5/12	1/12	0	7/4
x_5	0	1	0	0	1	1
z_j	0	0	7/12	1/12	0	19/4

P_1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	1	0	0	3
x_2	0	1	-5/12	1/12	0	7/4
x_5	0	0	5/12	-1/12	1	-3/4
z_j	0	0	7/12	1/12	0	19/4

P_1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	1	0	0	3
x_2	0	1	0	0	1	1
x_4	0	0	-5	1	-12	9
z_j	0	0	1	0	1	4

Hier könnte man eigentlich bereits aufhören, weil (durch scharfes Hinsehen) der Zielfunktionswert nicht mehr besser werden kann.

Als nächstes wird P_2 gelöst:

P_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	1	0	0	3
x_2	0	1	-5/12	1/12	0	7/4
x_5	0	-1	0	0	1	-2
z_j	0	0	7/12	1/12	0	19/4

P_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	1	0	0	3
x_2	0	1	-5/12	1/12	0	7/4
x_5	0	0	-5/12	1/12	1	-1/4
z_j	0	0	7/12	1/12	0	19/4

P_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	0	1/5	12/5	12/5
x_2	0	1	0	0	-1	2
x_3	0	0	1	-1/5	-12/5	3/5
z_j	0	0	0	1/5	7/5	22/5

Das optimale Ergebnis ist nicht ganzzahlig. Daher wird P_2 weiter verzweigt:

$P_{21} : x_1 \leq 2$ und $P_{22} : x_1 \geq 3$

Das Starttableau für P_{21} wird aufgestellt.

P_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_1	1	0	0	1/5	12/5	0	12/5
x_2	0	1	0	0	-1	0	2
x_3	0	0	1	-1/5	-12/5	0	3/5
x_6	1	0	0	0	0	1	2
z_j	0	0	0	1/5	7/5	0	22/5

Das Ergebnis von P_{21} kann dem Lösungsbaum entnommen werden. Das Problem P_{22} ist nicht lösbar.

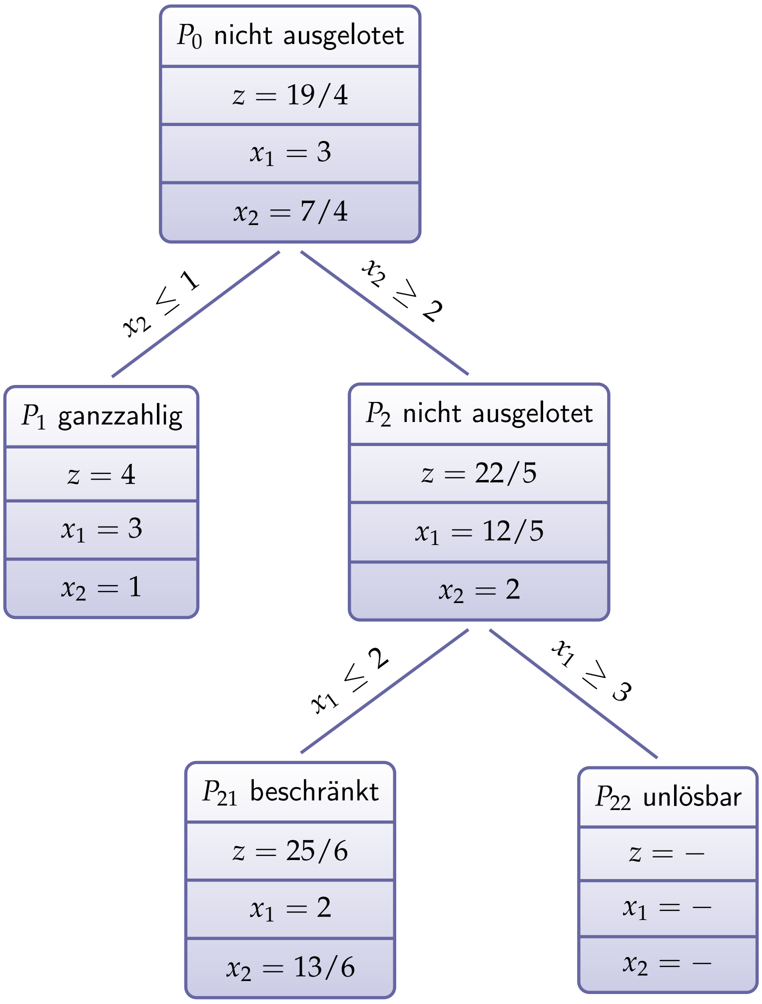
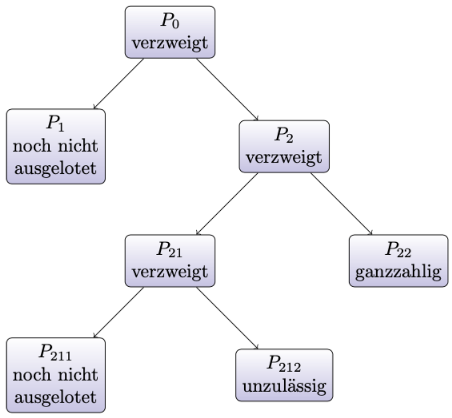


Abbildung 19: Ganzzahlige Optimierung

Eigentlich müsste das Teilproblem P_{21} weiter verzweigt werden. Jedoch lässt sich erkennen, dass der Zielfunktionswert nicht besser als in P_1 werden kann. Es ist die Zielfunktion $z = x_1 + x_2$ gegeben. Ferner ist bekannt, dass $x_2 \geq 2$ bei der Verzweigung nach P_2 ist. Wird nun P_{21} in die Teilprobleme P_{211} mit $x_2 \leq 2$ und P_{212} mit $x_2 \geq 3$ aufgespalten. Für x_1 würde ein Wert von 2 erhalten bleiben. Daher ergibt sich für den linken Zweig der Zielfunktionswert von höchstens $2 + 2 = 4$ und für den rechten Zweig $2 + 3 = 5$. Der Zielfunktionswert 5 kann nicht erreicht werden, weil der Zielfunktionswert der vorhergehenden Problem immer eine obere Schranke für die nachgelagerten Teilprobleme darstellt und bei 4 würde sich keine Verbesserung zu P_1 einstellen. Aus diesem Grund liegt die Optimal Lösung im Teilproblem P_1

4.7 Branch-and-Bound-Algorithmus IV

Gegeben ist folgender Branch-and-Bound Baum. Für dieses Minimierungsproblem wurde die Maximum-Upper-Bound-Regel verwendet. 1) Was können Sie über das Verhältnis der folgenden Zielfunktionswerte aussagen? Begründen Sie jeweils ihre Antwort in maximal einem Satz:



1.1) $z_1 \geq z_{21}$ MUB, Minimierungsproblem und z_{21} wurde zuerst verzweigt.

1.2) $z_0 \leq z_{21}$ z_0 ist obere Schranke, < wegen Minimierungsproblem.

2) Nehmen sie an, dass das Problem zwei Strukturvariablen hat und die Auswahlregel Fraktionellste Variable angewandt wurde. In P_2 ist $x_1^* = 5{,}7$ und $x_2^* = 6{,}6$. Welche Variable wurde dann in P_2 verzweigt?
x_2 da 0,6 näher an 0,5 als 0,7

3) Vervollständigen Sie den Satz:

Damit P_{22} P_1 und/oder P_{211} dominieren würde, müsste dessen Zielfunktionswert **kleiner** sein.

4.8 Binäre Variablen: Bei IKEA

Wähle einen Parameter BIG als hinreichend große Zahl, sowie Variablen:

$$y_n = \begin{cases} 1, & \text{falls Produkt } n \text{ produziert wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3$$

$$q = \begin{cases} 1, & \text{falls Summe aus } x_1 \text{ und } x_2 \text{ 70 Einheiten nicht übersteigt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

$$
\begin{array}{lccccccccccl}
\max z = & 500 & x_1 & + & 50 & x_2 & + & 100 & x_3 & -\overbrace{150y_1}^{(I)} - \overbrace{50y_2}^{(II)} - \overbrace{80y_3}^{(III)} & & \\
\text{s.t.} & 3 & x_1 & + & 1 & x_2 & + & 2 & x_3 & \leq & 200 & \\
 & & x_1 & & & & & & & \leq & BIG \cdot y_1 & \textbf{(I)} \\
 & & & & & x_2 & & & & \leq & BIG \cdot y_2 & \textbf{(II)} \\
 & & & & & & & & x_3 & \leq & BIG \cdot y_3 & \textbf{(III)} \\
 & 35- & x_1 & & & & & & & \leq & BIG \cdot (1 - y_1) & \textbf{(IV)} \\
 & & x_1 & + & & x_2 & - & & 70 & \leq & BIG \cdot (1 - q) & \textbf{(V)} \\
 & - & x_3 & & & & + & & 10 & \leq & BIG \cdot q & \textbf{(V)} \\
 & & & & & & & & x_{1,\ldots,3} & \in & \mathbb{N}_0 & \\
 & & & & & & & & y_{1,\ldots,3} & \in & \{0,1\} & \textbf{(I- IV)} \\
 & & & & & & & & q & \in & \{0,1\} & \textbf{(V)}
\end{array}
$$

4.9 Binäre Variablen: Oriana beim Süßigkeiten-Wettbewerb in NYC

x_1: Anzahl der gegessenen Snickers

x_2: Anzahl der gegessenen Mars

x_3: Anzahl der gegessenen Bounty

Wähle BIG als hinreichend große Variable.

Die Zielfunktion lautet nur auf den Gewinn bezogen:

$$\max z = \quad 1 \cdot x_1 \quad + \quad 2 \cdot x_2 \quad + \quad 3 \cdot x_3$$

"Wenn Oriana am Wettbewerb teilnimmt, dann muss sie 10 Euro Grundeinsatz zahlen."

Die Zielfunktion wird erweitert:

$$\max z = \quad 1 \cdot x_1 \quad + \quad 2 \cdot x_2 \quad + \quad 3 \cdot x_3 \quad -10 \cdot y_{ges}$$

Zudem fügt man folgende Nebenbedingungen ein:

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & BIG \cdot y_{ges} \\
 & & & & y_{ges} & \in & \{0,1\}
\end{array}
$$

$$y_{ges} = \begin{cases} 1, & \text{falls Oriana an dem Gesamtwettbewerb teilnimmt} \\ 0, & \text{falls nicht} \end{cases}$$

"Wenn Oriana am Snickers-Wettessen teilnimmt, dann muss sie 15 Euro zahlen."
Die Zielfunktion wird erweitert:

$$\max z = \quad 1 \cdot x_1 \quad + \quad 2 \cdot x_2 \quad + \quad 3 \cdot x_3 \quad -10 \cdot y_{ges} \quad -15 \cdot y_1$$

Zudem fügt man folgende Nebenbedingungen ein:

$$\begin{aligned} x_1 &\leq BIG \cdot y_1 \\ y_1 &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

$$y_1 = \begin{cases} 1, & \text{falls Oriana an dem Snickers-Wettessen teilnimmt} \\ 0, & \text{falls nicht} \end{cases}$$

Analog folgen für das Mars- und Bounty-Wettessen:

$$\max z = \quad 1 \cdot x_1 \quad + \quad 2 \cdot x_2 \quad + \quad 3 \cdot x_3 \quad -10 \cdot y_{ges} \quad -15 \cdot y_1 \quad -24 \cdot y_2 \quad -30 \cdot y_3$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} x_2 &\leq BIG \cdot y_2 \\ y_2 &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

$$y_2 = \begin{cases} 1, & \text{falls Oriana an dem Mars-Wettessen teilnimmt} \\ 0, & \text{falls nicht} \end{cases}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} x_3 &\leq BIG \cdot y_3 \\ y_3 &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

$$y_3 = \begin{cases} 1, & \text{falls Oriana an dem Bounty-Wettessen teilnimmt} \\ 0, & \text{falls nicht} \end{cases}$$

"Wenn Oriana am Snickers-Wettessen teilnimmt, dann kann sie nicht am Mars-Wettessen teilnehmen."
→ Wenn $f(x) = x_1 > 0$, dann $g'(x) = x_2 \leq 0$ (d.h. $g(x) = -x_2 \geq 0$):

$$\begin{aligned} x_1 &\leq BIG \cdot (1 - y_2) \\ x_2 &\leq BIG \cdot y_2 \end{aligned} \tag{69}$$

Alternativ könnte man auch den umgekehrten Fall modellieren:

$$\begin{aligned} x_2 &\leq BIG \cdot (1 - y_1) \\ x_1 &\leq BIG \cdot y_1 \end{aligned}$$

"Wenn Oriana am Snickers-Wettessen teilnimmt, dann muss sie mindestens 4 Snickers essen."
→ Entweder $f(x) = x_1 \leq 0$ oder $g'(x) = x_1 \geq 4$ (d.h. $g(x) = -x_1 + 4 \leq 0$):

$$\begin{aligned} x_1 &\leq BIG \cdot y_1 \\ -x_1 + 4 &\leq BIG \cdot (1 - y_1) \end{aligned}$$

Analog folgt für das Mars-Wettessen:

$$\begin{aligned} x_2 &\leq BIG \cdot y_2 \\ -x_2 + 6 &\leq BIG \cdot (1 - y_2) \end{aligned}$$

"Der Magen von Oriana verträgt maximal 30 Riegel während eines Wettbewerbs."

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 30$$

Das vollständige Modell sieht somit folgend aus:

$$\begin{array}{rrcrcrrrrr}
\max z = & 1 \cdot x_1 & + & 2 \cdot x_2 & + & 3 \cdot x_3 & -10 \cdot y_{ges} & -15 \cdot y_1 & -24 \cdot y_2 & -30 \cdot y_3 \\
\text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & \leq & BIG \cdot y_{ges} & \\
& x_1 & & & & & & \leq & BIG \cdot y_1 & \\
& & & x_2 & & & & \leq & BIG \cdot y_2 & \\
& & & & & x_3 & & \leq & BIG \cdot y_3 & \\
& x_1 & & & & & & \leq & BIG \cdot (1 - y_2) & \\
& -x_1 & & & & & +4 & \leq & BIG \cdot (1 - y_1) & \\
& & & -x_2 & & & +6 & \leq & BIG \cdot (1 - y_2) & \\
& x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & \leq & 30 & \\
& & & & & & x_{1,\ldots,3} & \in & \mathbb{N}_0 & \\
& & & & & & y_{ges} & \in & \{0,1\} & \\
& & & & & & y_{1,\ldots,3} & \in & \{0,1\} &
\end{array}$$

4.10 Rucksackproblem: Oriana geht aufs Festival

	Volumen	Zweckhaftigkeit	Zweckhaftigkeit/Volumen	Rang
Zelt(x_1)	8	6	6/8	3
Bettdecke(x_2)	6	3	3/6	4
Bier(x_3)	9	8	8/9	2
Gummistiefel(x_4)	3	4	4/3	1

			P_0		$P_1 : x_1 = 0$		$P_2 : x_1 = 1$		$P_{11} : x_1 = 0, x_2 = 0$	
	Zweckhaftigkeit	Volumen	Menge	$\sum$	Menge	$\sum$	Menge	$\sum$	Menge	$\sum$
x_4	4	3	1	3	1	3	1	11	1	3
x_3	8	9	1	12	1	12	6/9	17	1	12
x_1	6	8	5/8	17	0	0	1	8	0	0
x_2	3	6	0	17	5/6	17	0	17	0	0
z			15,75		14,5		46/3		12	

	$P_{12} : x_1 = 0, x_2 = 1$		$P_{21} : x_1 = 1, x_3 = 0$		$P_{22} : x_1 = 1, x_3 = 1$		$P_{121} : x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0$	
	Menge	$\sum$	Menge	$\sum$	Menge	$\sum$	Menge	$\sum$
x_4	1	9	1	11	0	17	1	9
x_3	8/9	17	0	8	1	17	0	0
x_1	0	0	1	8	1	8	0	0
x_2	1	6	1	17	0	17	1	6
z	127/9		13		14		7	

	$P_{122}: x_1 = 0, x_2 = x_3 = 1$		$P_{1221}: x_1 = x_4 = 0, x_2 = x_3 = 1$		$P_{1222}: x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_4 = 1$	
	Menge	$\sum$	Menge	$\sum$	Menge	$\sum$
x_4	2/3	17	0	0	1	18
x_3	1	15	1	15	1	15
x_1	0	0	0	0	0	0
x_2	1	6	1	6	1	6
z	41/3		11		unzulässig	

Optimal Lösung:

x_1: $\boxed{1}$ x_2: $\boxed{0}$ x_3: $\boxed{1}$ x_4: $\boxed{0}$ z: $\boxed{14}$

4.11 Rucksackproblem: Orianas Handtasche

$$
\begin{array}{lccccl}
\max\ z = & 9x_1+ & 6x_2+ & 4x_3+ & 3x_4 & \\
\text{s.t.} & 100x_1+ & 800x_2+ & 700x_3+ & 400x_4 & \leq \quad 1200 \\
 & & & & x_{1,\dots,4} & \in \quad \{0,1\}
\end{array}
$$

Sie entscheidet sich für den Kugelschreiber, die Wasserflasche und die Sonnenbrille.

Gomory-Algorithmus I

Die Ganzzahligkeit des Ausgangsproblem wird aufgehoben und durch eine Nichtnegativitätsbedingung ersetzt. Danach wird das Problem in das Simplextableau überführt und gelöst:

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_3	3	2	1	0	6
x_4	-3	2	0	1	0
z_j	0	-1	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_3	6	0	1	-1	6
x_2	-3/2	1	0	1/2	0
z_j	-3/2	0	0	1/2	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_1	1	0	1/6	-1/6	1
x_2	0	1	1/4	1/4	3/2
z_j	0	0	1/4	1/4	3/2

Der Simplex terminiert hier, da eine optimale Lösung gefunden wurde. Diese Lösung ist jedoch nicht ganzzahlig (siehe x_2) und somit wird der Gomory Algorithmus angewendet.

Wähle erste Basisvariable mit nichtganzzahligem Wert (hier x_2) und schreibe die zugehörige Nebenbedingung aus dem Optimaltableau:

$$0x_1 + 1x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{3}{2}$$

Danach runde die Zeileneinträge auf die nächste ganze Zahl ab:

$$0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 \leq 1$$

Nun ziehe hiervon die ursprüngliche Nebenbedingung aus dem Optimaltableau ab:

$$\begin{aligned} (0-0)x_1 + (1-1)x_2 + (0-\frac{1}{4})x_3 + (0-\frac{1}{4})x_4 \leq (1-\frac{2}{3}) \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 \leq -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Zum Schluss bringe diese neue Nebenbedingung in Standardform:

$$-\frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 + x_5 = -\frac{1}{2}$$

Füge die neue Nebenbedingung in das erweiterte Tableau ein und löse mit dem Simplex:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	1/6	-1/6	0	1
x_2	0	1	1/4	1/4	0	3/2
x_5	0	0	-1/4	-1/4	1	-1/2
z_j	0	0	1/4	1/4	0	3/2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	0	-1/3	2/3	2/3
x_2	0	1	0	0	1	1
x_3	0	0	1	1	-4	2
z_j	0	0	0	0	1	1

Der Simplex terminiert hier, da eine optimale Lösung gefunden wurde. Diese Lösung ist jedoch nicht ganzzahlig (siehe x_1) und somit wird der Gomory Algorithmus erneut angewendet.

Wähle x_1 und schreibe die zugehörige Nebenbedingung aus dem Optimaltableau:

$$1x_1 + 0x_2 + 0x_3 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 = \frac{2}{3}$$

Danach runde die Zeileneinträge auf die nächste ganze Zahl ab:

$$1x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 1x_4 + 0x_5 \leq 0$$

Nun ziehe hiervon die ursprüngliche Nebenbedingung aus dem Optimaltableau ab:

$$-\frac{2}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 \leq -\frac{2}{3}$$

Zum Schluss bringe diese neue Nebenbedingung in Standardform:

$$-\frac{2}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 + x_6 = -\frac{2}{3}$$

Füge die neue Nebenbedingung in das erweiterte Tableau ein und löse mit dem Simplex:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_1	1	0	0	-1/3	2/3	0	2/3
x_2	0	1	0	0	1	0	1
x_3	0	0	1	1	-4	0	2
x_6	0	0	0	-2/3	-2/3	1	-2/3
z_j	0	0	0	0	1	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_1	1	0	0	0	1	-0,5	1
x_2	0	1	0	0	1	0	1
x_3	0	0	1	0	-5	1,5	1
x_4	0	0	0	1	1	-1,5	1
z_j	0	0	0	0	1	0	1

Somit ist die optimale ganzzahlige Lösung bestimmt.

Gomory-Algorithmus: Schnittebenenbestimmung

a) Fall 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	0	0	1	5
x_2	0	1	0	0,5	0,5	7,5
x_3	0	0	1	0,5	2,5	12,5
z_j	0	0	0	0,5	1,5	12,5

Die erste nicht ganzzahlige Basisvariable ist $x_2 = 7,5$. Diese Zeileneinträge werden aus dem Tableau gezogen.

$$0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0,5x_4 + 0,5x_5 = 7,5 \tag{1}$$

Es müssen nun die Zeileneinträge aus Formel 1 auf die nächste ganzzahlige Zahl abgerundet werden.

$$0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \leq 7 \tag{2}$$

Zieht man nun Gleichung 1 von Gleichung 2 ab erhält man.

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 0,5x_4 - 0,5x_5 \leq -0,5 \tag{3}$$

Um die notwendige Gleichheitsbedingung zu erfüllen, muss eine Schlupfvariable x_6 hinzugefügt werden.

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 0,5x_4 - 0,5x_5 + 1x_6 = -0,5 \tag{4}$$

Die Gleichung 4 kann jetzt in das ursprüngliche Simplex-Tableau eingefügt werden. Es ist zu beachten, dass auch die neue Schlupfvariable x_6 hinzugefügt werden muss.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_1	1	0	0	0	1	0	5
x_2	0	1	0	0,5	0,5	0	7,5
x_3	0	0	1	0,5	2,5	0	12,5
x_6	0	0	0	-0,5	-0,5	1	-0,5
z_j	0	0	0	0,5	1,5	0	12,5

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_1	1	0	0	0	1	0	5
x_2	0	1	0	0	0	1	7
x_3	0	0	1	0	2	1	12
x_4	0	0	0	1	1	-2	1
z_j	0	0	0	0	1	1	12

b) Fall 2

Die Vorgehensweise ist analog zu Fall 1, es wird daher nur das erweiterte Tableau angegeben. Die erste nicht-ganzzahlige Basisvariable ist x_2.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_1	1	0	0	1	1	0	4
x_2	0	1	0	1,5	2,5	0	9,5
x_3	0	0	1	2,5	0,5	0	12,5
x_6	0	0	0	-0,5	-0,5	1	-0,5
z_j	0	0	0	1	0,5	0	13,5

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_1	1	0	0	0	0	2	3
x_2	0	1	0	-1	0	5	7
x_3	0	0	1	2	0	1	12
x_5	0	0	0	1	1	-2	1
z_j	0	0	0	1/2	0	1	13

c) Fall 3 Die vorgehensweise ist analog zu Fall 1, es wird daher nur das erweiterte Tableau angegeben. Die erste nicht-ganzzahlige Basisvariable ist x_2.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_1	1	0	0	1	1	0	4
x_2	0	1	0	1,6	-2,4	0	9,2
x_3	0	0	1	2,3	0,4	0	12,6
x_6	0	0	0	-0,6	-0,6	1	-0,2
z_j	0	0	0	1	0,8	0	13,4

Die vorgehensweise ist analog zu Fall 1, es wird daher nur das erweiterte Tableau angegeben. Die erste nicht-ganzzahlige Basisvariable ist x_2.

Gomory-Algorithmus II

Lösen Sie das folgende Problem mit dem Gomory-Algorithmus:

$$
\begin{array}{rrrcr}
\max\ z_p = & 17 \cdot x_1 + & 35 \cdot x_2 & & \\
\text{s.t.} & 3 \cdot x_1 - & 1 \cdot x_2 & \geq & -7 \\
 & 2 \cdot x_1 + & 1 \cdot x_2 & \leq & 13 \\
 & & x_{1,2} & \in & \mathbb{N}
\end{array}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_3	-3	1	1	0	7
x_4	2	1	0	1	13
z	-17	-35	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_2	-3	1	1	0	7
x_4	5	0	-1	1	6
z	-122	0	35	0	245

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_2	0	1	0.4	0.6	10.6
x_1	1	0	-0.2	0.2	1.2
z	0	0	10.6	24.4	391.4

Die erste nichtganzzahlige Strukturvariable ist $x_2 = 10,6$. Diese Zeileneinträge werden aus dem Tableau gezogen.

$$0x_1 + 1x_2 + 0,4x_3 + 0,6x_4 = 10,6$$

Es müssen nun die Koeffizienten auf die nächste ganzzahlige Zahl abgerundet werden.

$$0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 \leq 10$$

Zieht man nun von der zweiten Gleichung die erste Gleichung ab erhält man:

$$0x_1 + 0x_2 - 0,4x_3 - 0,6x_4 \leq -0,6$$

Um die notwendige Gleichheitsbedingung zu erfüllen, muss eine Schlupfvariable x_5 hinzugefügt werden.

$$0x_1 + 0x_2 - 0,4x_3 - 0,6x_4 + 1x_5 = -0,6$$

Die Gleichung kann jetzt in das ursprüngliche Simplex-Tableau eingefügt werden. Es ist zu beachten, dass auch die neue Schlupfvariable x_5 hinzugefügt werden muss.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	0.4	0.6	0	10.6
x_1	1	0	-0.2	0.2	0	1.2
x_5	0	0	-0,4	-0.6	1	-0.6
z	0	0	10.6	24.4	0	391.4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	0	0	1	10
x_1	1	0	0	0.5	-0.5	1.5
x_3	0	0	1	1.5	- 2.5	1.5
z	0	0	0	8.5	26.5	375.5

Es wurde keine ganzzahlige Lösung gefunden. Die nächste nicht ganzzahlige Strukturvariable die gewählt werden muss ist $x_1 = 1,5$.Diese Zeileneinträge werden aus dem Tableau gezogen.

$$1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0,5x_4 - 0,5x_5 = 1,5$$

Es müssen nun die Koeffizienten auf die nächste ganzzahlige Zahl abgerundet werden.

$$1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 1x_5 \leq 1$$

Zieht man nun von der zweiten Gleichung die erste Gleichung ab erhält man:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 0,5x_4 - 0,5x_5 \leq -0,5$$

Um die notwendige Gleichheitsbedingung zu erfüllen, muss eine Schlupfvariable x_6 hinzugefügt werden.

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 0,5x_4 - 0,5x_5 + x_6 = -0,5$$

Die Gleichung kann jetzt in das ursprüngliche Simplex-Tableau eingefügt werden. Es ist zu beachten, dass auch die neue Schlupfvariable x_6 hinzugefügt werden muss.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_2	0	1	0	0	1	0	10
x_1	1	0	0	0.5	-0.5	0	1.5
x_3	0	0	1	1.5	- 2.5	0	1.5
x_6	0	0	0	-0.5	- 0.5	1	-0.5
z	0	0	0	8.5	26.5	0	375.5

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_2	0	1	0	0	1	0	10
x_1	1	0	0	0	-1	1	1
x_3	0	0	1	0	-4	3	0
x_4	0	0	0	1	1	-2	1
z	0	0	0	0	18	17	367

Es wurde eine ganzzahlige Lösung gefunden: $x_1 = 1$, $x_2 = 10$, $z = 367$