operations research
QUANTITATIVE INFRASTRUKTURSYSTEMMODELLIERUNG

Tutorium

Operations Research – Grundlagen

Technische Universität Berlin
Fachgebiet Wirtschafts- und Infrastruktur Politik
WIP

Tutorium 11

Dynamische Optimierung

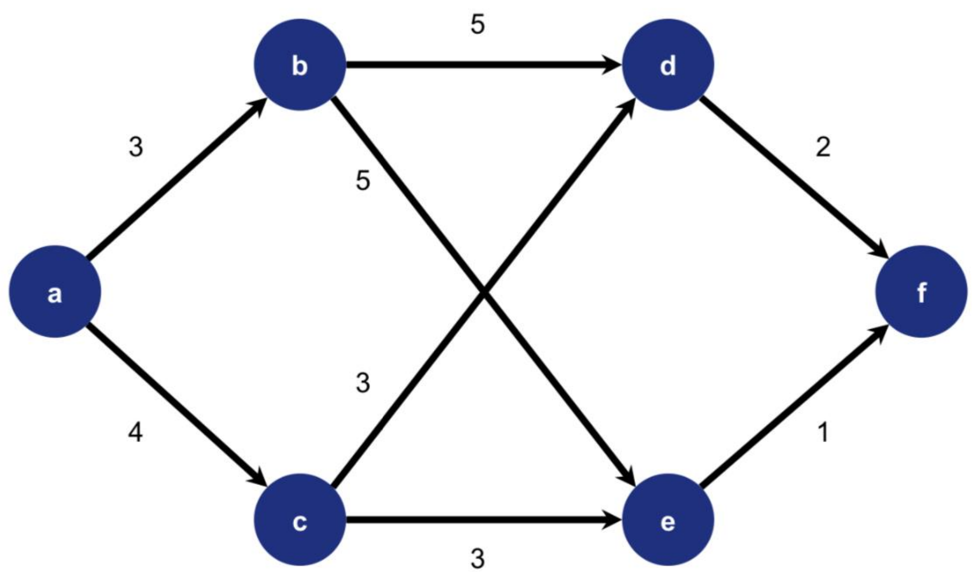
Tutoriumsaufgaben:

3.19 Dynamische Optimierung
3.22 Lagerhaltung

Freiwillige Hausaufgabe:

3.20 Dynamische Optimierung: Kernkraftwerke
3.21 Dynamische Optimierung: Nahverkehr in Stockholm
3.23 Lagerhaltung: Fertigungsauftrag
3.24 Lagerhaltung von Kupfersulfat

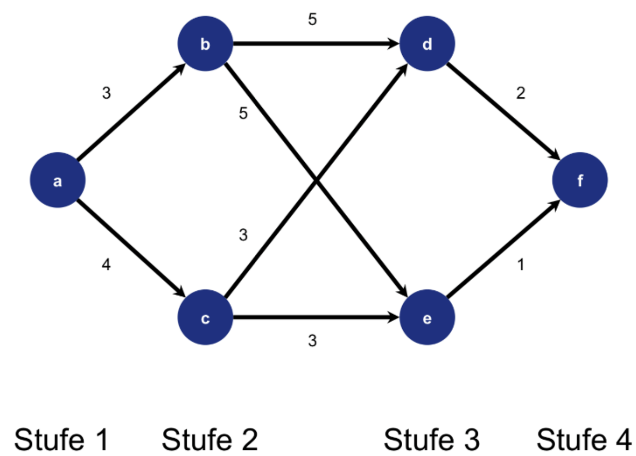
Was ist dynamische Optimierung?



Stufe 1 Stufe 2 Stufe 3 Stufe 4

Mit Hilfe von dynamischer Optimierung können wir den kürzesten (bzw. längsten) Weg von Knoten a nach f finden.

Was ist dynamische Optimierung?



- **Das Optimierungsproblem ist in Stufen eingeteilt**
- **Bei der Lösung des Problems wird mit der letzten Stufe begonnen**
  - ➢ Optimierungsproblem von „hinten nach vorne“ lösen
  - ➢ Grund: Entscheidungen auf der k-ten Stufe sind abhängig vom Optimalwert der Stufe k+1
- **Beobachtungen pro Stufe werden in Zustandstableaus gespeichert**
- **Abfolge von Entscheidungen nennt man „Politik“**
- Bsp: Lieferketten, Produktionskette über mehrere Schritte

Was ist dynamische Optimierung?

- **<u>OPTIMALITÄTSPRINZIP VON BELLMAN</u>**

  - Entscheidungen auf der k-ten Stufe sind abhängig vom Optimalwert der Stufe k+1

  - <u>RÜCKWARTSRECHNUNG</u>
    - „Von hinten nach vorne“ Zustandstableaus unter Berücksichtigung der bisher optimalen Entscheidung bestimmen

  - <u>VORWÄRTSRECHNUNG</u>
    - Ablesen der Lösung des Problems von „vorne nach hinten“

3.19 Dynamische Optimierung

Die CNC Werkstatt von Oriana möchte ihre Gleitlager zum niedrigsten Preis für ihre Kunden anbieten. Dabei verläuft die Lieferkette vom Einkauf des Rohmaterials zum Hersteller, welcher den Vorgang der Veredelung bei einem externen Partner ausgliedern möchte, über den Verkäufer zum Kunden. Finden Sie dafür im folgenden Graph den **kostengünstigsten Fluss vom Rohmaterialhersteller a zum Kunden j**. Nutzen Sie dazu eine geeignete Ausprägung der dynamischen Optimierung.

在这种情况下，您可以使用动态规划来找到从原材料制造商 a 到客户 j 的成本最低的路径。动态规划可以帮助您找到在整个供应链中的最低成本路径。您需要将该问题转化为一个适当的动态规划模型，并应用相应的算法来找到最优解。

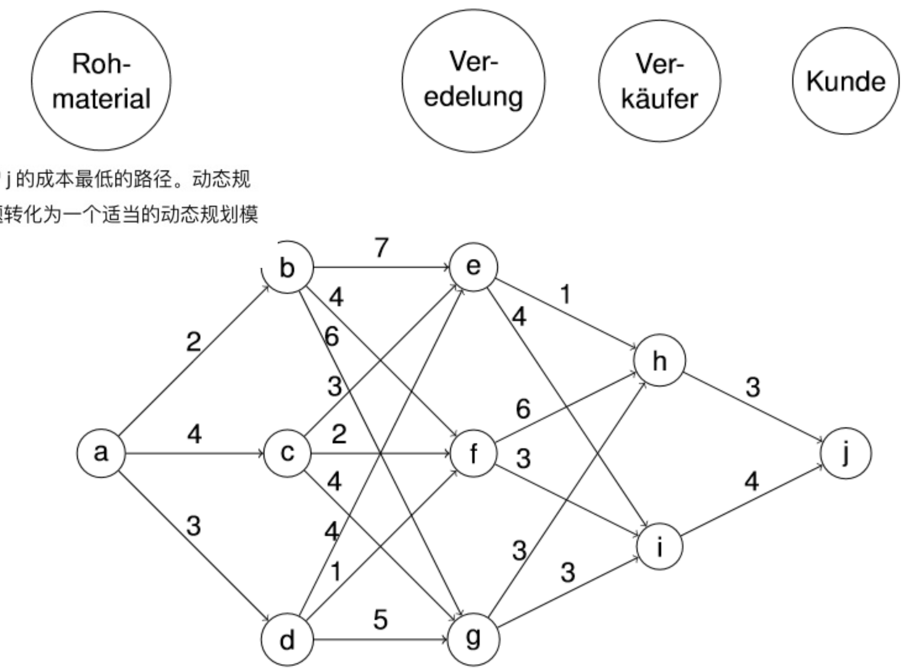


Abbildung 19: Netzspinne mit Produktionskosten in EUR je Stück

3.19 Dynamische Optimierung

- Ziel: Niedrigster Preis (Kantengewicht entspricht dem Preis)
- RÜCKWÄRTSRECHNUNG: **„Von hinten nach vorne“** Zustandstableaus unter Berücksichtigung der bisher optimalen Entscheidung bestimmen
  - Beginnt mit der letzten Stufe → k = 4

Bester Knoten bei dem wir landen wollen (Wahl aus Zielknoten in dieser Stufe mit der besten Weglänge)

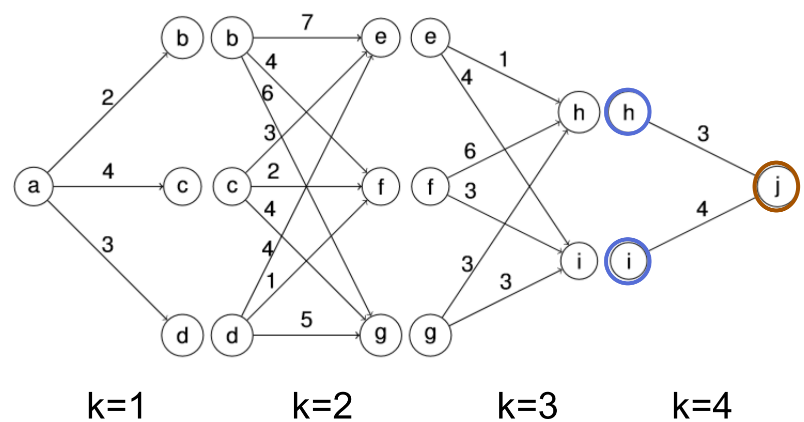
Länge des bisher gefundenen optimalsten Weges ausgehend vom betrachteten Zustand (Startknoten in dieser Stufe)

Zielknoten in dieser Stufe

k = 4	j	x_4^*	$c_4^*(x)$
h	3	j	3
i	4	j	4

Startknoten in dieser Stufe bzw. Zielknoten in der vorherigen Stufe k-1

! Zielknoten der Stufe k = Startknoten der Stufe k+1

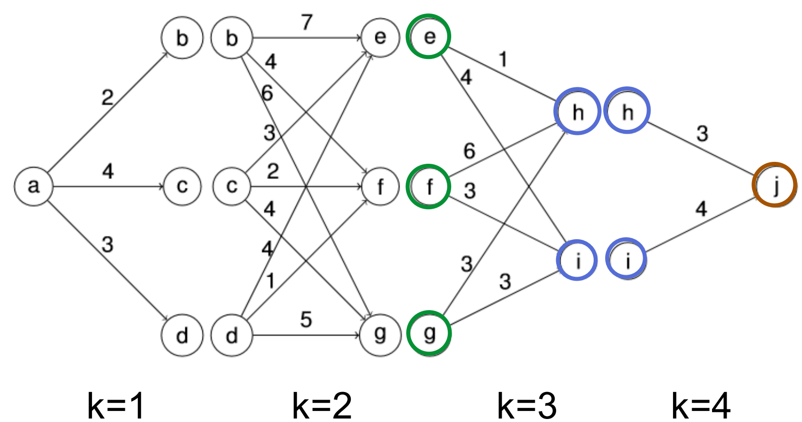


3.19 Dynamische Optimierung

k = 4	j	x_4^*	$c_4^*(x)$
h	3	j	3
i	4	j	4

k = 3	h	i	x_3^*	$c_3^*(x)$
e	$1+c_4^*(h) = 1+3$ 4	$4+c_4^*(i) = 4+4$ 8	h	4
f	$6+c_4^*(h) = 6+3$ 9	$3+c_4^*(i) = 3+4$ 7	i	7
g	$3+c_4^*(h) = 3+3$ 6	$3+c_4^*(i) = 3+4$ 7	h	6

Gesucht: Minimale Kosten in jeder Zeile!



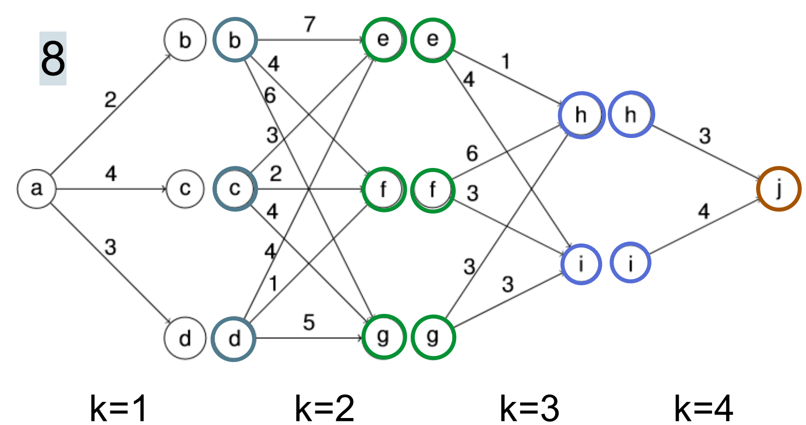
3.19 Dynamische Optimierung

k = 4	j	x_4^*	$c_4^*(x)$
h	3	j	3
i	4	j	4

k = 3	h	i	x_3^*	$c_3^*(x)$
e	4	8	h	4
f	9	7	i	7
g	6	7	h	6

k = 2	e	f	g	x_2^*	$c_2^*(x)$
b	$7+c_3^*(e) = 7+4$ 11	$4+c_3^*(f) = 4+7$ 11	$6+c_3^*(g) = 6+6$ 12	e	11
c	$3+c_3^*(e) = 3+4$ 7	$2+c_3^*(f) = 2+7$ 9	$4+c_3^*(g) = 4+6$ 10	e	7
d	$4+c_3^*(e) = 4+4$ 8	$1+c_3^*(f) = 1+7$ 8	$5+c_3^*(g) = 5+6$ 11	e	8

Kann entweder e oder f wählen mit Kosten von 8 (analog für Startknoten b mit Kosten von 11)



3.19 Dynamische Optimierung

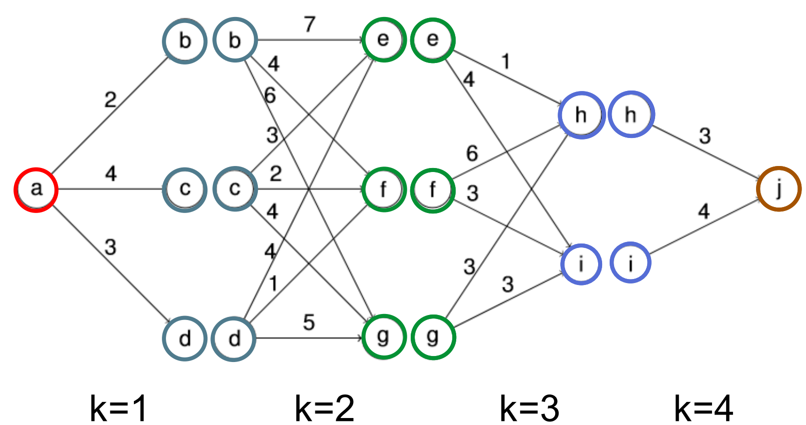
k = 4	j	x_4^*	$c_4^*(x)$
h	3	j	3
i	4	j	4

k = 3	h	i	x_3^*	$c_3^*(x)$
e	4	8	h	4
f	9	7	i	7
g	6	7	h	6

k = 2	e	f	g	x_2^*	$c_2^*(x)$
b	11	11	12	e	11
c	7	9	10	e	7
d	8	8	11	e	8

k = 1	b	c	d	x_1^*	$c_1^*(x)$
a	2+11=13	4+7=11	3+8=11	c	11

Kürzester Weg von a nach j : $a \rightarrow c \rightarrow e \rightarrow h \rightarrow j$ mit $l_{a\rightarrow j} = 11$



3.22 Lagerhaltung

Als Produktionsleiter eines mittelständischen Unternehmens für Präzisionswerkzeug möchten Sie im kommenden Quartal die anfallenden Lager- und Produktionskosten minimieren. In jeder Periode, in der Ihr Unternehmen produziert, entstehen **6.000 EUR an Fixkosten**. Darüber hinaus fallen pro gefertigtem Werkzeug **2.000 EUR an variablen Kosten** an. Die **Lagerkosten belaufen sich auf 1.000 EUR pro Stück** pro Periode. Hierbei muss beachtet werden, dass pro Periode nicht mehr als **6 Einheiten produziert** und nur **3 Einheiten gelagert** werden können. Die Nachfrage in jedem Monat kann der folgenden Tabelle entnommen werden:

Periode	Nachfrage
1	4
2	1
3	3

3.22 Lagerhaltung

Produktion

- **Fixkosten (FK): 6T€**
- **Variable Kosten (VK): 2T€**

Lagerhaltung

- **Lagerhaltungskosten (LK): 1T€**

Kapazitäten

- **Max. Produktion 6E**
- **Max. Lagerhaltung: 3E**

Pro Periode

x_i^*: „Bester Knoten bei dem wir landen wollen“

$c_i^*(x)$: „Länge des bisher gefundenen kürzesten (bzw. längsten) Weges ausgehend von dem betrachteten Zustand (Knoten)“

Nachfrage (NF)

Periode	Nachfrage
1	4
2	1
3	3

3.22 Lagerhaltung

Berechnung eines Tabelleneintrags bei Lagerhaltungsproblemen

$$\begin{aligned} \mathrm{GK} &= \mathrm{FK}(\text{falls produziert werden}) \\ &+ \text{produzierte Menge} \cdot \mathrm{VK} \\ &+ \text{gelagerte Menge} \cdot \mathrm{LK} \\ &+ \text{Nachfolgende optimale Kosten} \end{aligned}$$

$$\text{Produzierte Menge} = \mathrm{NF} + \mathrm{L}_{k+1} - \mathrm{L}_{k}$$

- FK → Fixkosten
- VK → Variable Kosten
- LK → Lagerkosten
- $c_k^*(x)$ → Nachfolgende optimale Kosten
- NF → Nachfrage
- L_{k+1} → Lagermenge für die nächste Periode
- L_k → Lagermenge der Vorperiode

3.22 Lagerhaltung

$$\begin{aligned} GK &= FK(\text{falls produziert werden}) \\ &\quad + \text{produzierte Menge} \cdot VK \\ &\quad + \text{gelagerte Menge} \cdot LK \\ &\quad + \text{Nachfolgende optimale Kosten} \end{aligned}$$

Kosten in 1000 €
Produktionskapazität : 6
Lagerkapazität : 3

$$\text{Produzierte Menge} = NF + L_{k+1} - L_k$$

Produzierte Menge = 3 + 0 – 0 = 3

Annahme:
Am Ende wird nichts gelagert

k = 3 NF_3 oder d_3 = 3	0	x_3^*	$c_3^*(x)$
0	6+2(3)+1(0)+0 = 12	0	12
1	6+2(2)+1(0)+0 = 10	0	10
2	6+2(1)+1(0)+0 = 8	0	8
3	0+2(0)+1(0)+0 = 0	0	0

Lagerkapazität ist 3, d.h. entweder 0,1,2, oder 3 Einheiten lagern

Keine Fixkosten anfallen, da nichts produziert wird
Produzierte Menge = 3 + 0 – 3 = 0

Periode	Nachfrage
1	4
2	1
3	3

3.22 Lagerhaltung

$$
\begin{aligned}
GK\ =\ & FK(\text{falls produziert werden}) \\
& + \text{produzierte Menge} \cdot VK \\
& + \text{gelagerte Menge} \cdot LK \\
& + \text{Nachfolgende optimale Kosten}
\end{aligned}
$$

Kosten in 1000 €
Produktionskapazität : 6
Lagerkapazität : 3

$$\boxed{\text{Produzierte Menge} = NF + L_{k+1} - L_k}$$

Periode	Nachfrage
1	4
2	1
3	3

k = 3 $d_3 = 3$	0	x_3^*	$c_3^*(x)$
0	12	0	12
1	10	0	10
2	8	0	8
3	0	0	0

k = 2 $d_2 = 1$	0	1	2	3	x_2^*	$c_2^*(x)$
0	6+2(1)+1(0)+12 = 20	6+2(2)+1(1)+10 = 21	6+2(3)+1(2)+8 = 22	6+2(4)+1(3)+0 = 17	3	17
1	0+2(0)+1(0)+12 = 12	6+2(1)+1(1)+10 = 19	6+2(2)+1(2)+8 = 20	6+2(3)+1(3)+0 = 15	0	12
2	-	0+2(0)+1(1)+10 = 11	6+2(1)+1(2)+8 = 18	6+2(2)+1(3)+0 = 13	1	11
3	-	-	0+2(0)+1(2)+8 = 10	6+2(1)+1(3)+0 = 11	2	10

Produzierte Menge = 1 + 0 – 3 = -2
2 Einheiten warden verschwendet, damit nichts
in k = 3 gelagert wird ϟ

3.22 Lagerhaltung

$$\begin{aligned} GK &= FK(\text{falls produziert werden}) \\ &+ \text{produzierte Menge} \cdot VK \\ &+ \text{gelagerte Menge} \cdot LK \\ &+ \text{Nachfolgende optimale Kosten} \end{aligned}$$

Kosten in 1000 €
Produktionskapazität : 6
Lagerkapazität : 3

$$\text{Produzierte Menge} = NF + L_{k+1} - L_k$$

k = 3 $d_3 = 3$	0	x_3^*	$c_3^*(x)$
0	12	0	12
1	10	0	10
2	8	0	8
3	0	0	0

k = 2 $d_2 = 1$	0	1	2	3	x_2^*	$c_2^*(x)$
0	20	21	22	17	3	17
1	12	19	20	15	0	12
2	-	11	18	13	1	11
3	-	-	10	11	2	10

k = 1 $d_1 = 4$	0	1	2	3	x_1^*	$c_1^*(x)$
0	6+2(4)+1(0)+17 = 31	6+2(5)+1(1)+12 = 29	6+2(6)+1(2)+11 = 31	-	1	29

Produzierte Menge = 4 + 3 – 0 = 7 > 6 = Kapazität ↯

Periode	Nachfrage
1	4
2	1
3	3

3.22 Lagerhaltung

$$\begin{aligned} GK &= FK(\text{falls produziert werden}) \\ &+ \text{produzierte Menge} \cdot VK \\ &+ \text{gelagerte Menge} \cdot LK \\ &+ \text{Nachfolgende optimale Kosten} \end{aligned}$$

Kosten in 1000 €
Produktionskapazität : 6
Lagerkapazität : 3

$$\text{Produzierte Menge} = NF + L_{k+1} - L_k$$

k = 3, d_3 = 3	0	x_3^*	$c_3^*(x)$
0	12	0	12
1	10	0	10
2	8	0	8
3	0	0	0

k = 2, d_2 = 1	0	1	2	3	x_2^*	$c_2^*(x)$
0	20	21	22	17	3	17
1	12	19	20	15	0	12
2	-	11	18	13	1	11
3	-	-	10	11	2	10

k = 1, d_1 = 4	0	1	2	3	x_1^*	$c_1^*(x)$
0	31	29	31	-	1	29

Minimale Kosten in 3 Perioden = 29

Optimaler Produktions- und Lagerhaltungsplan:

Periode	Nachfrage
1	4
2	1
3	3

	k = 1	k = 2	k = 3
Nachfrage	4	1	3
Lagerhaltung	1	0	0
Produktion	5	0	3

Bsp: $\text{Produktion}_1 = NF_1 + L_1 - L_0 = 4 + 1 - 0 = 5$

$\text{Produktion}_2 = NF_2 + L_2 - L_1 = 1 + 0 - 1 = 0$

Fragen zum Tutorium?