Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen
(Hausaufgabe 1)

Abgabe: 29. April – 3. Mai 2024

Sommersemester 2024

- *Wenn nicht anders angegeben, sind alle Hausaufgaben dieses Moduls ohne elektronische Hilfsmittel zu lösen. Insbesondere müssen alle Rechenwege nachvollziehbar sein, um die volle Punktzahl zu erreichen.*
- *Die Abgabe der Hausaufgaben soll über das gesamte Semester in festen Gruppen von 2-3 Personen erfolgen. Alle Lösungsblätter müssen mit Namen und Matrikel aller Gruppenmitglieder versehen werden.*
- *Die Abgaben am 1. Mai können in einem beliebigen anderen Tutorium oder in der Vorlesung eingereicht werden.*

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Finde alle Lösungen der Differentialgleichung

$$x'(t) = \frac{x(t)}{t(t-3)}.$$

Auf welchem Definitionsbereich ist die Lösung definiert?

Aufgabe 2

(6 Punkte)

Wir betrachten die folgende Differentialgleichung

$$(1+t^2)\, x'(t) + 2t\, x(t) = 7.$$

Finde alle Lösungen.

Aufgabe 3

(5 Punkte)

Ein Schneeball schmilzt unter dem Einfluss der Wintersonne und wird kleiner. Wir nehmen an, dass der Schneeball zu jedem Zeitpunkt kugelförmig ist. Seien $V(t)$ das Volumen und $F(t)$ die Oberfläche zum Zeitpunkt t, so werde dieser Abschmelzvorgang durch die Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda F(t)$$

mit einer vorgegebenen positiven Konstanten λ beschrieben.

(a) Ermittele die zeitliche Abhängigkeit des Radius $R(t)$ des Schneeballs. Nehme dabei den Radius $R(0)$ zum Zeitpunkt 0 als bekannt an.

(b) Zu welchem Zeitpunkt t_1 besitzt der Schneeball das Volumen $\frac{1}{8}V(0)$?

(c) Ermittele die Funktion $R(t)$ für $t \geq 0$, wenn nicht der Anfangswert $R(0)$, sondern nur der Wert von $R(t_0)$ zu irgendeinem anderen Zeitpunkt $t_0 > 0$ bekannt ist.

(d) Wie verändert sich der Radius des Schneeballs in gleichen Zeitspannen? Was passiert nach langer Zeit?

Linwei Li 501123
Xiangfeng Yang 505399
Yilong Wang 483728

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Finde alle Lösungen der Differentialgleichung

$$x'(t) = \frac{x(t)}{t(t-3)}.$$

Auf welchem Definitionsbereich ist die Lösung definiert?

$$x'(t) = \frac{1}{t(t-3)}\, x(t)$$

$$\Rightarrow a(t) = \frac{1}{t(t-3)} = \frac{A}{t-3} + \frac{B}{t} = \frac{\frac{1}{3}}{t-3} + \frac{\frac{1}{-3}}{t} = \frac{1}{3(t-3)} - \frac{1}{3t}$$

$$A(x) = \int a(t)dt = \int \frac{1}{3(t-3)} - \frac{1}{3t}\, dt = \frac{1}{3}\ln|3(t-3)| - \frac{1}{3}\ln|3t|$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{3t-9}{3t}\right|$$

$$x(t) = c\cdot e^{A(x)} = c\cdot e^{\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3t-9}{3t}\right|} = c\cdot\left|\frac{3t-9}{3t}\right|^{\frac{1}{3}}$$

1.) $M_1 =]\infty,0[\cap]0,3[\cap]3,\infty[$

2.) $M_2 =]\infty,0[\cap]0,\infty[$

3.) $M_1 \cap M_2 =]\infty,0[\cap]0,3[\cap]3,\infty[$

4.) $I_1 =]\infty,0[\quad I_2 =]0,3[\quad I_3 =]3,\infty[$

Aufgabe 2

(6 Punkte)

Wir betrachten die folgende Differentialgleichung

$$(1+t^2)\,x'(t) + 2t\,x(t) = 7.$$

Finde alle Lösungen.

$$x'(t) = -\frac{2t}{1+t^2}x(t) + \frac{7}{1+t^2}$$

1. homogen DGL: $x_H'(t) = -\frac{2t}{1+t^2}x_H(t)$

$$a(t) = -\frac{2t}{1+t^2}$$

$$A(t) = \int a(t)dt = -\int\frac{2t}{1+t^2}dt \;\; \frac{u=1+t^2}{\frac{du}{dt}=2t} \;\; -\int\frac{1}{u}du$$

$$= -\ln|u| = -\ln|1+t^2|$$

$$x_H(t) = c\cdot e^{-\ln|1+t^2|} = c\cdot\frac{1}{1+t^2}$$

2. Vdk: 2.1) $x_p(t) = c(t) \cdot \frac{1}{1+t^2}$

2.2) $x'_p(t) = c'(t) \cdot \frac{1}{1+t^2} - c(t) \cdot \frac{2t}{(1+t^2)^2}$

2.3) $c'(t) \cdot \frac{1}{1+t^2} - c(t) \cdot \frac{2t}{(1+t^2)^2} = -\frac{2t}{1+t^2} c(t) \cdot \frac{1}{1+t^2} + \frac{7}{1+t^2}$

$c'(t) \cdot \frac{1}{\cancel{1+t^2}} = \frac{7}{\cancel{1+t^2}}$

$c'(t) = 7$

$c(t) = 7t$

$x_p(t) = 7t \cdot \frac{1}{1+t^2}$

3. Allgemein lsg: $x(t) = x_H(t) + x_p(t) = c \cdot \frac{1}{1+t^2} + 7t \cdot \frac{1}{1+t^2}$

$= \frac{7t+c}{1+t^2}$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Ein Schneeball schmilzt unter dem Einfluss der Wintersonne und wird kleiner. Wir nehmen an, dass der Schneeball zu jedem Zeitpunkt kugelförmig ist. Seien $V(t)$ das Volumen und $F(t)$ die Oberfläche zum Zeitpunkt t, so werde dieser Abschmelzvorgang durch die Beziehung

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\lambda F(t)$$

mit einer vorgegebenen positiven Konstanten λ beschrieben.

(a) Ermittele die zeitliche Abhängigkeit des Radius $R(t)$ des Schneeballs. Nehme dabei den Radius $R(0)$ zum Zeitpunkt 0 als bekannt an.

(b) Zu welchem Zeitpunkt t_1 besitzt der Schneeball das Volumen $\frac{1}{8}V(0)$?

(c) Ermittele die Funktion $R(t)$ für $t \geq 0$, wenn nicht der Anfangswert $R(0)$, sondern nur der Wert von $R(t_0)$ zu irgendeinem anderen Zeitpunkt $t_0 > 0$ bekannt ist.

(d) Wie verändert sich der Radius des Schneeballs in gleichen Zeitspannen? Was passiert nach langer Zeit?

a) $V(t) = \frac{4}{3}\pi R^3(t)$ $\quad F(t) = 4\pi R^2(t)$

$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{dV}{dR} \cdot \frac{dR}{dt} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \cancel{\pi} \cdot \cancel{3} R^2(t) \cdot \frac{dR(t)}{dt} = -\lambda F(t) = -\lambda \cdot \cancel{4\pi} R^2(t)$

$\Rightarrow \quad R'(t) = -\lambda$

$\Rightarrow R(t) = -\lambda t + c$

Da R(0) zum t=0 schon bekannt sein, haben wir $R(0) = c$

Dadurch können wir c bestimmen. nämlich $R(t) = -\lambda t + R(0)$

b) $V(0) = \frac{4}{3}\pi R^3(0) = \frac{4}{3}\pi c^3$

$V(t_1) = \frac{4}{3}\pi R^3(t_1) = \cancel{\frac{4}{3}}\cancel{\pi}(-\lambda t_1 + c)^3 = \frac{1}{8} \cdot V(0) = \frac{1}{8} \cdot \cancel{\frac{4}{3}}\cancel{\pi} c^3$

$$(-\lambda t_1 + c)^3 = \frac{1}{8} c^3$$

$$-\lambda t_1 + c = \frac{1}{2} c \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{c}{2\lambda}$$

(b) Wenn das Volumen auf ein Achtel sinkt, so muss sich der Radius halbiert haben. Es gilt also $R(t_1) = \frac{1}{2}R(0)$. Dann hat man:

$$R(t_1) = -\lambda t_1 + R(0) \text{ und } R(t_1) = \tfrac{1}{2}R(0) \quad \Rightarrow \quad \lambda t_1 = \tfrac{1}{2}R(0) \quad \Rightarrow \quad t_1 = \tfrac{1}{2\lambda}R(0)$$

c) $R(t_0) = -\lambda t_0 + c \Rightarrow c = R(t_0) + \lambda t_0$

$$\Rightarrow R(t) = -\lambda t + c = -\lambda t + R(t_0) + \lambda t_0$$

$$= -\lambda(t - t_0) + R(t_0)$$

d) $R'(t) = -\lambda < 0$, da $\lambda > 0$

Der Radius sinkt im gleiche Ausmaß in gleichen Zeitspannen, bis er null ist.

(d) Ganz offensichtlich wird es, wenn man schreibt:

$$R(t) - R(t_0) = -\lambda(t - t_0).$$

Daraus liest man ab, dass in gleichen Zeitspannen der Radius des Schneeballs um den gleichen Betrag abnimmt. Zu einem gewissen Zeitpunkt ist der Schneeball einfach verschwunden.