TU Berlin - Institut für Mathematik
Sommersemester 2024
Dozent: Dr. Nikolas Tapia
Assistentin: M.Sc. Claudia Drygala

Stochastik für Informatik(er) – Übung 9

Abgabe bis Freitag, den 28.06.2024 um 23:59

Hinweise zur Bearbeitung des Übungsblattes:

- Das Übungsblatt enthält Haus- und Tutoriumsaufgaben.
- Die Tutoriumsaufgaben werden in den Tutorien der KW 25 besprochen (17.06.-21.06.).
- Die Abgabe der Hausaufgaben erfolgt über ISIS in festen Gruppen von 2-3 Personen. Die Gruppen bilden sich aus Studierenden, die das gleiche Tutorium besuchen bzw. mindestens dieselbe/denselben Tutor*in haben. Laden Sie Ihre handschriftlichen Lösungen (z.B. Scan Ihrer Lösungen oder Erstellung Ihrer Lösungen über Tablet) als eine PDF-Datei bei dem enstprechenden Übungsblatt hoch. LaTeX-Abgaben sind auch willkommen (in diesem Fall die kompilierte PDF)! Achten Sie darauf, dass die Abgaben gut lesbar und verständlich verfasst sind. Bitte Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe auf der Abgabe mit angeben!
- Bitte beachten Sie: Für das Hausaufgaben-Kriterium sind nur die Blätter 1-8 von Relevanz. Es gilt somit: Haben Sie 80 Punkte erreicht, sind Sie zur Klausur zugelassen. Auf diesem Blatt befinden sich 2 Hausaufgaben (9.1 und 9.2) mit welchen Sie bis zu 10 Bonuspunkte sammeln können. Sollten Sie die 80 Punkte somit knapp noch nicht erreicht haben, können Sie diese beiden Aufgaben bearbeiten und zur Korrektur abgeben. Wichtig ist: Die Punkte werden drauf gerechnet, d.h. die Bestehensgrenze für das HA-Kriterium liegt weiterhin bei 80 Punkten. Beispielrechnung: Sollte es für Sie mit 76 Punkten knapp werden und Sie nehmen die Chance wahr und erarbeiten sich mindestens 4 Punkte erreichen Sie damit die 80 Punkte und die Zulassung. Hausaufgaben 9.3 und 9.4 werden nicht abgegeben und dienen Ihnen lediglich zur Übung des Vorlesungsstoffes. Sie werden nicht korrigiert.

Tutoriumsaufgaben

Tutoriumsaufgabe 9.1

Ein Glücksspiel besteht darin, dass ein*e Spieler*in einen fairen Würfel (ein Würfel mit den Zahlen 1 bis 6) wirft. Der/Die Spieler*in gewinnt den Betrag in Euro, welcher der geworfenen Zahl entspricht. Also gewinnt ein*e Spieler*in bei einer gewürfelten eins genau einen Euro, bei einer gewürfelten zwei genau zwei Euro u.s.w.

(i) Berechnen Sie den Erwartungswert $E[X]$ des Gewinns bei einem einzelnen Wurf.

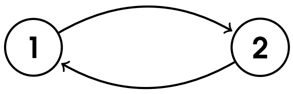
(ii) Angenommen, der/die Spieler*in wirft den Würfel n Mal. Sei $\bar{X}_n$ der durchschnittliche Gewinn nach n Würfen. Wonach konvergiert $\bar{X}_n$ nach dem Gesetz der Großen Zahlen für größer werdende n?

(iii) Sei $n = 1000$. Geben Sie mit der Chebbychev-Ungleichung eine Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit ab, dass der durchschnittliche Gewinn X_n um mehr als 0.25 Euro vom Erwartungswert abweicht. Berechnen Sie dazu die Varianz von $\bar{X}_n$

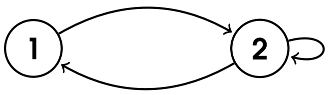
Tutoriumsaufgabe 9.2

Welche der Markovketten zu den folgenden Übergangsgraphen sind irreduzibel bzw. aperiodisch? Begründen Sie Ihre Aussage!

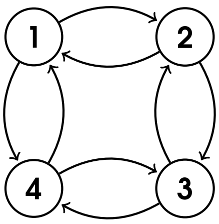
A



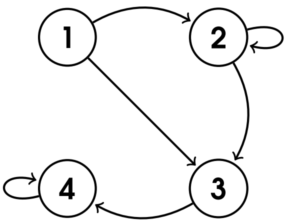
B



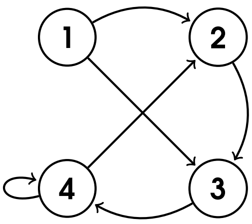
C



D



E



F

Tutoriumsaufgabe 9.3

Sei P die Übergangsmatrix der homogenen Markov-Kette $(X_n)_{n\geq 0}$ auf $S = \{1,2,3,4\}$,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(i) Ist $(X_n)_{n\geq 0}$ irreduzibel?

(ii) Bestimmen Sie alle invariante Verteilungen der Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$.

Tutoriumsaufgabe 9.4

Wir nehmen an, das Wetter an einem Tag kann einen der beiden Zustände “sonnig”(s) und “regnerisch”(r) annehmen und entwickle sich wie eine Markovkette wie folgt: falls es an einem Tag sonnig ist, ist es am nächsten Tag mit Wahrscheinlichkeit 0.8 sonnig und mit Wahrscheinlichkeit 0.2 regnerisch, und falls es an einem Tag regnerisch ist, ist es am nächsten Tag mit Wahrscheinlichkeit 0.4 sonnig und mit Wahrscheinlichkeit 0.6 regnerisch. Am Montag ist es sonnig.

(i) Geben Sie einen geeigneten Zustandsraum, den Übergangsgraphen und die Übergangsmatrix an.

(ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit regnet es am Mittwoch?

(iii) Angenommen, am Mittwoch regnet es. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war es am Tag zuvor ebenfalls regnerisch?

Schwache Gesetz der großen Zahlen

Satz der großen Zahlen

Theorem 1

Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ und $\mathbb{V}[X_i] = \sigma^2$. Dann gilt

$\mathbb{V}[X_i] < \infty$

$$\vec{X}_n := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \mu, \qquad \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1]$$

in dem Sinne, dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \mu \right| > \varepsilon \right) = 0.$$

d.h. $\varepsilon \to 0$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mathbb{E}[X_1]| \geq \varepsilon) = 0$$

starkes Gesetz der großen Zahlen

[illegible], …, $\mathbb{E}[X_1]$ existiert

gilt $\vec{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{\text{fast sicher}} \mathbb{E}[X_1]$

d.h. $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} \vec{X}_n = \mathbb{E}[X_1]) = 1$

d.h. $\lim_{n\to\infty} \vec{X}_n = \mathbb{E}[X_1]$ für fast alle $\omega \in \Omega$

Chebbychev-Ungleichung

Sei $a > 0$ es gilt $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{a^2} \xrightarrow[a\to\infty]{} 0$

Tutoriumsaufgabe 9.1

Ein Glücksspiel besteht darin, dass ein*e Spieler*in einen fairen Würfel (ein Würfel mit den Zahlen 1 bis 6) wirft. Der/Die Spieler*in gewinnt den Betrag in Euro, welcher der geworfenen Zahl entspricht. Also gewinnt ein*e Spieler*in bei einer gewürfelten eins genau einen Euro, bei einer gewürfelten zwei genau zwei Euro u.s.w.

(i) Berechnen Sie den Erwartungswert $E[X]$ des Gewinns bei einem einzelnen Wurf.

(ii) Angenommen, der/die Spieler*in wirft den Würfel n Mal. Sei $\bar{X}_n$ der durchschnittliche Gewinn nach n Würfen. Wonach konvergiert $\bar{X}_n$ nach dem Gesetz der Großen Zahlen für größer werdende n?

(iii) Sei $n = 1000$. Geben Sie mit der Chebbychev-Ungleichung eine Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit ab, dass der durchschnittliche Gewinn X_n um mehr als 0.25 Euro vom Erwartungswert abweicht. Berechnen Sie dazu die Varianz von $\bar{X}_n$

(i) $X \sim \text{Uniform}(\{1, 2, \dots, 6\})$

$\mathbb{E}[X] = \sum x\, \mathbb{P}(x) = (1+2+\dots+6) \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$

(ii) (X_n) Folge von unabh. identische Verteilung mit $X_i \sim \text{Uni}(\{1, \dots, 6\})$

$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum X_i$

Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen gilt: $\vec{X}_n \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}[X_1]$

d.h. $\bar{X}_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[X_1]$ für fast alle $\omega \in \Omega$

iii) $\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n]| \geq \frac{1}{4}) \leq \frac{\mathbb{V}[\bar{X}_n]}{\frac{1}{16}}$

$$\mathbb{V}[\bar{X}_n] = \mathbb{V}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}[\sum_{i=1}^{n} X_i] \underset{X_i \text{ unabhängig}}{=} \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}[X_i]$$

$$= \frac{n}{n^2}\mathbb{V}[X_i]$$

$$= \frac{1}{n}\mathbb{V}[X_i]$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\mathbb{E}[X_i^2] = \frac{1}{6}\cdot[1+4+9+16+25+36] = \frac{55+36}{6} = \frac{91}{6}$$

$$\mathbb{V}[X_i] = \mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}[X_i]^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = 2{,}916$$

$$= \frac{2{,}916}{1000}$$

Nach Chebychev

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \underset{\frac{7}{2}}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{E}[\bar{X}_n]}}| \geq \frac{1}{4}) \leq 0{,}002916 \times 16 = 0{,}0467$$

Makrovketten (zeitdiskret, homogene Zeit)

Sei $I \neq \emptyset$ höchstens abzählbar (Zustandsraum)

Stochastische Matrix

$P = [p_{ij}]_{i\in I, j\in I}$ mit $\sum_{j\in I} p_{ij} = 1$ $i,j\in I$ und $p_{ij}\in[0,1]$ $i,j\in I$ heißt stochastische Matrix

Makrov-Kette Sei P mit stoch. Matrix

sei (X_n) eine Folge von I-wertigen ZVen. Die heißt zeitlich homogene Makrovkette mit Übergangsmatrix P falls $n\in\mathbb{N}_0, i_0, i_1, \dots, i_{n+1}\in I$ mit $\mathbb{P}(X_0=i_0,\dots,X_n=i_n) > 0$ gilt:

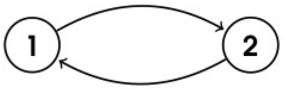
$$\mathbb{P}(X_{n+1}=s_{n+1} \mid X_0=i_0,\dots,X_n=i_n) = \mathbb{P}(X_{n+1}=s_{n+1} \mid X_n=i_n)$$

Der Vektor ν definiert durch $\nu_i = \mathbb{P}(X_0=i)$ $i\in I$ heißt Startverteilung von X_n

Tutoriumsaufgabe 9.2

任意两点间有路径

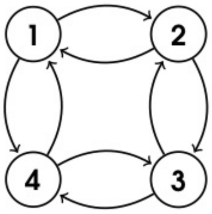
Welche der Markovketten zu den folgenden Übergangsgraphen sind irreduzibel bzw. aperiodisch? Begründen Sie Ihre Aussage!

A


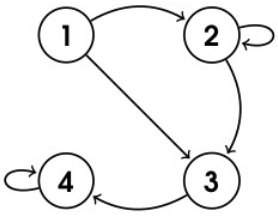
irreduzibel Periode 2

B

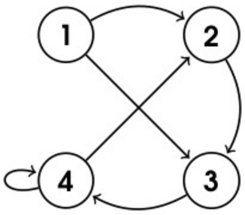

irreduzibel aperiodisch

C


irreduzibel Periode 2

D


nicht irreduzibel

E


nicht

F


nicht

Tutoriumsaufgabe 9.3

Sei P die Übergangsmatrix der homogenen Markov-Kette $(X_n)_{n\geq 0}$ auf $S = \{1,2,3,4\}$,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(i) Ist $(X_n)_{n\geq 0}$ irreduzibel?

(ii) Bestimmen Sie alle invariante Verteilungen der Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$.

(i) Nein (X_n) ist nicht irreduzibel denn es existiert z.B kein Pfad von 2 nach 3, da $\mathbb{P}(X_n=3 \mid X_0=2)=0$

(ii) d.h. für alle Lösungen von v

a) $(P^T - I)v = 0$

b) $\sum_{i\in I} v_i = 1$

c) $\forall i \in I,\ v_i \in [0,1]$

invariante Verteilung

$$P^T - I = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Das LGS lautet: $-\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 = \alpha$

$-\frac{1}{2}v_3 + \frac{1}{2}v_4 = 0 \qquad v_3 = v_4 = \beta$

$\sum v_i = 1 = 2\alpha + 2\beta \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = \frac{1}{2} - \alpha$

$\alpha, \frac{1}{2} - \alpha \in [0,1] \Rightarrow$ d.h. $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$

$$v = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 1-\alpha \\ 1-\alpha \end{bmatrix} \quad \text{mit } \alpha \in [0, \tfrac{1}{2}]$$

Wir nehmen an, das Wetter an einem Tag kann einen der beiden Zustände "sonnig"(s) und "regnerisch"(r) annehmen und entwickle sich wie eine Markovkette wie folgt: falls es an einem Tag sonnig ist, ist es am nächsten Tag mit Wahrscheinlichkeit 0.8 sonnig und mit Wahrscheinlichkeit 0.2 regnerisch, und falls es an einem Tag regnerisch ist, ist es am nächsten Tag mit Wahrscheinlichkeit 0.4 sonnig und mit Wahrscheinlichkeit 0.6 regnerisch. Am Montag ist es sonnig.

(i) Geben Sie einen geeigneten Zustandsraum, den Übergangsgraphen und die Übergangsmatrix an.

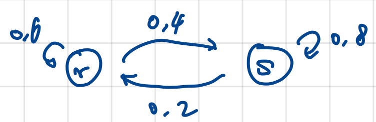
(ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit regnet es am Mittwoch?

(iii) Angenommen, am Mittwoch regnet es. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war es am Tag zuvor ebenfalls regnerisch?

$X_0 =$ „Wetter am Montag" d.h. $\mathbb{P}(X_0 = s) = 1 \quad \mathbb{P}(X_0 = r) = 0$

(i) Zustandsraum $I = \{r, s\}$ „r" für regen „s" für Sonne

Übergangsgraph



Übergangsmatrix
$$P = \begin{array}{c|cc} & r & s \\ \hline r & 0{,}6 & 0{,}4 \\ s & 0{,}2 & 0{,}8 \end{array}$$

(ii) wir berechnen $P^2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} r & s \\ \end{array} \begin{bmatrix} \frac{11}{25} & \frac{14}{25} \\ \frac{7}{25} & \frac{18}{25} \end{bmatrix}$

Startverteilung: $\lambda = (0 \quad 1)$

$$\lambda P^2 = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{11}{25} & \frac{14}{25} \\ \frac{7}{25} & \frac{18}{25} \end{bmatrix} = [\tfrac{7}{25} \quad \tfrac{18}{25}]$$

$$\mathbb{P}(X_2 = r \mid X_0 = s) = \frac{7}{25}$$

(iii) $$\mathbb{P}(X_1 = r \mid X_2 = r) = \frac{\mathbb{P}(X_2 = r, X_1 = r)}{\mathbb{P}(X_2 = r)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_2 = r \mid X_1 = r) \cdot \mathbb{P}(X_1 = r)}{\mathbb{P}(X_2 = r)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_2 = r \mid X_1 = r) \cdot \mathbb{P}(X_1 = r \mid X_0 = s)\, \overset{=1}{\mathbb{P}(X_0 = s)}}{\mathbb{P}(X_2 = r \mid X_0 = s)\, \underset{=1}{\mathbb{P}(X_0 = s)}}$$

$$= \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{7}{25}} = \frac{3}{7}$$

Hausaufgaben - Bonuspunkte

Hausaufgabe 9.1 (4=2+2 Punkte)

Ein Fan behauptet, dass seine Mannschaft bei den Europa-Meisterschaften im Fußball in der Vergangenheit durchschnittlich 2 Tore pro Spiel erzielt hat. Um diese Behauptung zu überprüfen, beschließt ein Statistiker, die Tore der nächsten 100 Spiele dieser Mannschaft zu beobachten.

Sei X_i die Anzahl der Tore, die die Mannschaft im i-ten Spiel erzielt, wobei angenommen wird, dass $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit dem Erwartungswert $E[X_i] = 2$ sind. Sei $\overline{X}_{100} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i$ der Stichprobenmittelwert der Tore über die 100 Spiele.

(i) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der durchschnittliche Tore-Wert $\overline{X}_{100}$ um mehr als 0,5 Tore vom erwarteten Wert abweicht, unter der Annahme, dass die Varianz der Anzahl der Tore pro Spiel $\sigma^2 = 1$ beträgt.

(ii) Erklären Sie kurz, wie das Ergebnis die Behauptung des Fans unterstützt oder widerlegt, indem Sie das Gesetz der großen Zahlen nutzen.

Hausaufgabe 9.2 (6=2+2+2 Punkte)

Gegeben sei eine Markov-Kette auf dem Zustandsraum $S = \{1, 2, 3, 4\}$ mit den Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{1,2} = 1/2, \quad p_{1,3} = p_{1,4} = 1/4, \quad p_{2,1} = p_{3,1} = p_{4,1} = 1.$$

(i) Stellen Sie diese Kette mit einem Übergangsgraphen dar.

(ii) Geben Sie alle Pfade der Längen 2 und 3 an.

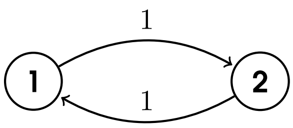
(iii) Geben Sie die invariante Verteilung an.

Hinweis: Ein Pfad der Länge 2 *mit Startknoten* k *hat die Form:* (k, i, j) *mit* $k, i, j \in S$.

Hausaufgaben - Keine Abgabe

Hausaufgabe 9.3 (0 Punkte)

Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ die Markov-Ketten mit dem folgenden Übergangsgraphen



(i) Berechnen Sie die Übergangsmatrix P and die Matrix-Potenz P^n für $n \geq 1$.

(ii) Bestimmen Sie alle invariante Verteilungen der Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$. Wie viele gibt es und warum?

(iii) Betrachten Sie die Folgen $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}$ mit

$$a_n = \mathbb{P}(X_n = 1 | X_0 = 1)\,, \quad b_n = \mathbb{P}(X_n = 2 | X_0 = 1)\,.$$

Betrachten Sie die Grenzwerte $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim_{n\to\infty} b_n$ der Folgen und vergleichen Sie dieses Ergebnis mit der Konvergenz gegen die invariante Verteilung einer Markov-Kette.

Hausaufgabe 9.4 (0 Punkte)

(i) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Markovkette mit Zustandsraum S und für $n \in \mathbb{N}$ seien $x_k \in S$ für $k \in \{0, ..., n\}$ beliebige Zustände. Zeigen Sie, dass die Formel

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., X_n = x_n) = \nu(x_0) \prod_{k=1}^{n} p_{x_{k-1}, x_k}$$

gilt. [2 Punkte]
Hinweis: Nutzen Sie hierfür bedingte Wahrscheinlichkeiten, die Formel der Gesamtwahrscheinlichkeit und die Markov-Eigenschaft aus.

(ii) Für den Rest der Aufgabe betrachten wir nun eine Markovkette X_n auf dem Zustandsraum $S = \{1, 2, 3\}$ mit Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ p_{1,2} & 0 & p_{2,1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

die aus den Einträgen $p_{i,j}$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ besteht und welche einer beliebigen Startverteilung ν auf S folgt. Die Zufallsvariable T_3 sei auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum Ω der Markov Kette definiert durch

$$T_3(\omega) := \min\{n \in \mathbb{N}_0 \,|X_n(\omega) = 3\} \;\forall \omega \in \Omega\,,$$

also beschreibt T_3 die erste Ankunftszeit im Zustand 3.

- Berechnen sie $\mathbb{P}(T_3 = n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. [4 Punkte]
- Es gelte nun $p_{1,2} = p_{2,1} = \frac{1}{2}$ und $\nu(2) > 0$. Berechnen Sie den bedingten Erwartungswert (siehe Definition 9.1) gegeben durch $\mathbb{E}[T_3 \,|X_i = 1]$ für ein beliebige **ungerade** Zahl $i \in \mathbb{N}$. [4 Punkte]

  Tipp: Hierbei dürfen Sie (ohne Beweis) verwenden, dass die Summenformel

  $$\sum_{k>j} (2k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{2(k-j-1)} = \frac{4}{9}(6j+5)$$

  für beliebige $j \in \mathbb{N}$ gilt, wobei $k \in \mathbb{N}$ der Summenindex ist.

Hausaufgabe 9.1 (4=2+2 Punkte)

Ein Fan behauptet, dass seine Mannschaft bei den Europa-Meisterschaften im Fußball in der Vergangenheit durchschnittlich 2 Tore pro Spiel erzielt hat. Um diese Behauptung zu überprüfen, beschließt ein Statistiker, die Tore der nächsten 100 Spiele dieser Mannschaft zu beobachten.

Sei X_i die Anzahl der Tore, die die Mannschaft im i-ten Spiel erzielt, wobei angenommen wird, dass $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit dem Erwartungswert $E[X_i] = 2$ sind. Sei $\overline{X}_{100} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i$ der Stichprobenmittelwert der Tore über die 100 Spiele.

(i) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der durchschnittliche Tore-Wert $\overline{X}_{100}$ um mehr als 0,5 Tore vom erwarteten Wert abweicht, unter der Annahme, dass die Varianz der Anzahl der Tore pro Spiel $\sigma^2 = 1$ beträgt.

(ii) Erklären Sie kurz, wie das Ergebnis die Behauptung des Fans unterstützt oder widerlegt, indem Sie das Gesetz der großen Zahlen nutzen.

一位球迷声称，他的球队过去在欧洲足球锦标赛上平均每场比赛打进2球。为了验证这一说法，统计学家决定观看球队接下来的100场比赛。设 习 是球队在第一场比赛中的进球数，假设 X1， X2， . . ， X100 是独立且相同分布的随机变量，期望值 E[习] = 2。设 X100 = 1 P100 习 100 场比赛中进球的样本平均值。(i) 假设每场比赛进球数的方差为 σ2 = 1，计算平均进球值 X100 与预期值相差 0.5 球以上的概率。(ii) 简要说明结果如何使用大数定律来支持或反驳粉丝的主张。

(i)

z.z $P(|\overline{X}_{100} - E[\overline{X}_{100}]| \geq 0{,}5)$

$$V[\overline{X}_{100}] = V\left[\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i\right]$$

$$= \frac{1}{100^2}\sum_{i=1}^{100} V[X_i]$$

$$= \frac{100}{100^2} \cdot V[X_i]$$

$$= \frac{\sigma^2}{100} = \frac{1}{100}$$

$$P(|\overline{X}_{100} - E[\overline{X}_{100}]| \geq 0{,}5) \leq \frac{V[\overline{X}_{100}]}{(0{,}5)^2} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

(ii) Sei $\overline{X}_n$ der Stichprobenmittelwert der Tore über n Spiele. Nach dem Gesetz der großen Zahlen gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \mathbb{E}[X_1] = 2,$$

wobei genutzt wird, dass $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = \cdots = 2$. Für $n \to \infty$ konvergiert der Stichprobenmittelwert der Tore über n Spiele also gegen 2. Konkreter haben wir in (i) gezeigt, dass für $n = 100$, die Wahrscheinlichkeit, dass der Stichprobenmittelwert um $0,5$ oder mehr Tore von 2 abweicht, höchstens 4% ist.

Das heißt, die Behauptung des Fans kann unterstützt werden, wenn in den nächsten 100 Spielen die durchschnittliche Anzahl der Tore nicht mehr als $0,5$ von 2 abweicht. Sollte die durchschnittliche Anzahl der Tore mehr als das von 2 abweichen, dann ist es unwahrscheinlich (aber möglich), dass der Fan recht hat.

Hausaufgabe 9.2 (6=2+2+2 Punkte)

Gegeben sei eine Markov-Kette auf dem Zustandsraum $S = \{1, 2, 3, 4\}$ mit den Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{1,2} = 1/2, \quad p_{1,3} = p_{1,4} = 1/4, \quad p_{2,1} = p_{3,1} = p_{4,1} = 1.$$

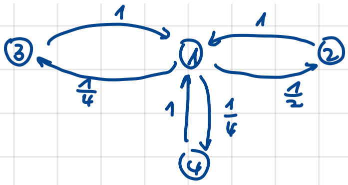
(i) Stellen Sie diese Kette mit einem Übergangsgraphen dar.

(ii) Geben Sie alle Pfade der Längen 2 und 3 an.

(iii) Geben Sie die invariante Verteilung an.

Hinweis: Ein Pfad der Länge 2 *mit Startknoten* k *hat die Form:* (k, i, j) *mit* $k, i, j \in S$.

i)



ii) Pfade der Länge 2: Pfade, die in 1 starten, gehen in einen der anderen Knoten und kommen dann immer zurück zur 1, also ist ein möglicher Pfad

$$(1, i, 1), \text{ wobei } i = 2, 3, 4.$$

Alternativ kann ein Pfad in einem Knoten, der nicht 1 ist starten, dann muss der Pfad zum Knoten 1 gehen, und ladet am Ende des zweiten Schritt bei einem der Knoten, die nicht 1 sind, potentiell dem Startknoten. Also,

$$(j, 1, k), \text{ wobei } j, k = 2, 3, 4.$$

Pfade der Länge 3: Ähnlich zu der Argumentatin zu Pfaden der Länge 2, ergeben sich die folgenden Pfade:

$$(1, i, 1, j), \text{ wobei } i, j = 2, 3, 4,$$
$$(k, 1, \ell, 1), \text{ wobei } k, \ell = 2, 3, 4.$$

iii) Übergangsmatrix:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^T - I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = v_2 + v_3 + v_4 \\ v_1 = 2v_2 \\ v_1 = 4v_3 \\ v_1 = 4v_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \alpha \\ v_2 = \frac{1}{2}\alpha \\ v_3 = \frac{1}{4}\alpha \\ v_4 = \frac{1}{4}\alpha \end{cases}$$

$$\sum v_i = 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow v = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$