Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen
(Hausaufgabe 4)

Abgabe: 20. – 24. Mai 2024 Sommersemester 2024

Aufgabe 10
(5 Punkte)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x''(t) + x(t) = 0.$$

(a) Schreibe die Differentialgleichung mittels der Hilffunktion $y(t) \coloneqq x'(t)$ in ein System 1. Ordnung um. Wie sieht die Matrixform des Systems aus?

(b) Zeige, dass $(x(t), y(t)) = (\sin(t), \cos(t))$ und $(x(t), y(t)) = (\cos(t), -\sin(t))$ Lösungen des erhaltenen Systems sind.

(c) Zeige mittels der Differentialgleichung, dass $\sin(t)$ und $\cos(t)$ keine gemeinsamen Nullstellen haben.

Aufgabe 11
(5 Punkte)

Betrachte die reelle Differentialgleichung

$$(1 - x(t))\, x'(t) = (1 + x(t))\, x(t).$$

1. Bestimme alle konstanten Lösungen der Differentialgleichung.
2. Ermittele alle Punkte (t_0, x_0), durch die keine Lösungskurve der Differentialgleichung geht. Dass heißt, alle Punkte (t_0, x_0), sodass es keine Lösung $x(t)$ mit $x(t_0) = x_0$ gibt.

Aufgabe 12
(5 Punkte)

Ermittle die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$(1 - t)\, x''(t) + t x'(t) - x(t) = 0.$$

Mache die Ansätze $x(t) = t^r$ und $x(t) = \mathrm{e}^{rt}$ mit $r \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 10

(5 Punkte)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x''(t) + x(t) = 0.$$

(a) Schreibe die Differentialgleichung mittels der Hilffunktion $y(t) := x'(t)$ in ein System 1. Ordnung um. Wie sieht die Matrixform des Systems aus?

(b) Zeige, dass $(x(t), y(t)) = (\sin(t), \cos(t))$ und $(x(t), y(t)) = (\cos(t), -\sin(t))$ Lösungen des erhaltenen Systems sind.

(c) Zeige mittels der Differentialgleichung, dass $\sin(t)$ und $\cos(t)$ keine gemeinsamen Nullstellen haben.

a) ① $x''(t) = -x(t)$

② $\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \vec{y}$

③ $\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ -y_1(t) \end{pmatrix}$

$\vec{y}\,'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\vec{y}(t)$ ← DGL-System in 1. Ordnung

b) $\vec{y}_1(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$ $\quad\vec{y}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$

$\vec{y}_1\,'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\vec{y}_1(t) \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$

$\vec{Y}_1$ löst das DGL-System

$\vec{Y}_2\,'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\vec{y}_2(t) \Rightarrow \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}$

$\vec{Y}_2$ löst das DGL-System

c) Annahme: $\sin(t_0) = \cos(t_0) = 0$

AWP: $\vec{y}\,'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\vec{y}(t) \Rightarrow \vec{y}_1(t_0) = \begin{pmatrix} \sin(t_0) \\ \cos(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{y}_2(t_0) = \begin{pmatrix} \cos(t_0) \\ -\sin(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

EES: ① Einträge von Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ auf $D = \mathbb{R}$ stetig

② $t_0 \in D = \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Das AWP hat eine eindeutige Lösung.

Wiederspruch zu b): Wir haben 2 Lösungen gefunden

→ Annahme falsch

→ $\sin(t_0) = \cos(t_0) = 0$ hat keine Lösung

→ $\sin(t)$. $\cos(t)$ haben keine gemeinsamen Nullstellen

Aufgabe 11 (5 Punkte)

Betrachte die reelle Differentialgleichung

$$(1 - x(t))\, x'(t) = (1 + x(t))\, x(t).$$

1. Bestimme alle konstanten Lösungen der Differentialgleichung.
2. Ermittele alle Punkte (t_0, x_0), durch die keine Lösungskurve der Differentialgleichung geht. Dass heißt, alle Punkte (t_0, x_0), sodass es keine Lösung $x(t)$ mit $x(t_0) = x_0$ gibt.

$$x'(t) = \frac{(1+x(t))\,x(t)}{1-x(t)}$$

1. Sei $f(t) = 1$, $g(x) = \frac{(1+x)x}{1-x}$

$$g(x) = \frac{(1+x)x}{1-x} = 0 \quad \Rightarrow x_1(t) = 0 \quad x_2(t) = -1$$

2.

AWP: ① $x'(t) = \frac{(1+x)x}{(1-x)} = F(t,x)$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{(2x+1)(1-x)+(1+x)x}{(1-x)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(1-x)^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

$D: \mathbb{R} \times]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$

F auf D stetig diffizierbar

② D ist offen

③ $(t_0, x_0) \in D$

⇒ Das AWP hat auf D eine eindeutige Lösung, unabhängig davon in welchem Punkt (t_0, x_0)

⇒ Es gibt keine Punkt (t_0, x_0) durch die keine Lösungskurve verläuft

Aufgabe 12

(5 Punkte)

Ermittle die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$(1-t)\,x''(t) + tx'(t) - x(t) = 0.$$

Mache die Ansätze $x(t) = t^r$ und $x(t) = e^{rt}$ mit $r \in \mathbb{R}$.

Ansatz: $x(t) = t^r \quad r \in \mathbb{R}$

$\frac{\partial}{\partial t} t^r = r t^{r-1}$

$\frac{\partial^2}{\partial t^2} t^r = r(r-1) t^{r-2}$

→ in DGL:

$$(1-t) r(r-1) t^{r-2} + t \cdot r t^{r-1} - t^r = 0$$

$$r(1-t)(r-1)\, t^{r-2} + (r-1) t^r = 0$$

$$t^{r-2} \underline{(r-1)} (r - rt + t^2) = 0$$

$$r - 1 = 0 \Rightarrow r = 1$$

FS: $x(t) = t$

Allgemeine Lösungen: $x(t) = c \cdot t$

Ansatz: $x(t) = e^{rt} \quad r \in \mathbb{R}$

$\frac{\partial}{\partial t} e^{rt} = r e^{rt}$

$\frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{rt} = r^2 e^{rt}$

in DGL: $(1-t) r^2 e^{rt} + t r e^{rt} - e^{rt} = 0$

$$e^{rt}\left[(1-t) r^2 + t r - 1\right] = 0$$

$$e^{rt} \left((1-t) r + 1\right)(r-1) = 0 \quad \Big| \; e^{rt} > 0$$

$$\left((1-t) r + 1\right)(r-1) = 0$$

$\Rightarrow r = 1$ unabhängig von t

FS $\Rightarrow x(t) = e^t$

Allgemeine Lösungen $\Rightarrow x(t) = c e^t, \; c \in \mathbb{R}$