Zusatzaufgaben 13

Aufgabe 1: Grammatiken und reguläre Ausdrücke

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma \triangleq \{ a, b \}$, die regulären Sprachen

$$A_1 \triangleq \{ w \in \Sigma^* \mid |w| \leqslant 3 \}$$
$$A_2 \triangleq \{ wab \mid w \in \Sigma^* \land |w|_b \mod 2 = 0 \}$$
$$A_3 \triangleq \{ a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \land (n + m) \bmod 3 = 0 \}$$
$$A_4 \triangleq \{ a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \land n \bmod 3 < m \bmod 3 \}$$

und die Grammatiken $G_5 = (\{ S, T, U \}, \Sigma, P_5, S)$ und $G_6 = (\{ S, T, U \}, \{ a, b, c \}, P_6, S)$ mit

$$\begin{array}{llll} P_5: & S & \rightarrow & aS \mid aT \\ & T & \rightarrow & aT \mid bT \mid bU \\ & U & \rightarrow & a \mid aU \mid bU \end{array} \qquad \begin{array}{llll} P_6: & S & \rightarrow & \varepsilon \mid aT \mid bS \\ & T & \rightarrow & aT \mid bS \mid cU \\ & U & \rightarrow & aS \mid aU \end{array}$$

1.a) *Gib* einen regulären Ausdruck e_1 so *an*, dass $L(e_1) = A_1$.

Lösung

$$\begin{aligned} e_1 &= \epsilon + a + b + aa + ab + ba + bb + aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb \\ &= (\epsilon + a + b) \cdot (\epsilon + a + b) \cdot (\epsilon + a + b) \end{aligned}$$

/Lösung

1.b) *Gib* eine Grammatik G_1 so *an*, dass $L(G_1) = A_1$.

Lösung

$G_1 = (\{ S, T, U \}, \Sigma, P_1, S)$ mit P_1:

$$S \rightarrow T \mid aT \mid bT$$
$$T \rightarrow U \mid aU \mid bU$$
$$U \rightarrow \varepsilon \mid a \mid b$$

/Lösung

1.c) *Gib* einen regulären Ausdruck e_2 so *an*, dass $L(e_2) = A_2$.

Lösung

$e_2 = (a + ba^*b)^* \, ab$

/Lösung

1.d) *Gib* Eine Grammatik G_2 *an*, sodass $L(G_2) = A_2$.

Lösung

$G_2 = (\{ S, T \}, \Sigma, P_2, S)$ mit P_2:

$$S \rightarrow aS \mid bT \mid ab$$
$$T \rightarrow aT \mid bS$$

/Lösung

1.e) *Gib* einen regulären Ausdruck e_3 so *an*, dass $L(e_3) = A_3$.

Lösung

$e_3 = \big((aaa)^* \, (bbb)^*\big) + \big((aaa)^* \, a \, (bbb)^* \, bb\big) + \big((aaa)^* \, aa \, (bbb)^* \, b\big)$

/Lösung

1.f) *Gib* eine Grammatik G_3 so *an*, dass $L(G_3) = A_3$.

Lösung

$G_3 = (\{ S, T, U, V \}, \Sigma, P_3, S)$ mit P_3:

$$\begin{aligned}
S &\to \varepsilon \mid aaaS \mid T \mid aU \mid aaV \\
T &\to \varepsilon \mid bbbT \\
U &\to bb \mid bbbU \\
V &\to b \mid bbbV
\end{aligned}$$

/Lösung

1.g) *Gib* einen regulären Ausdruck e_4 so *an*, dass $L(e_4) = A_4$.

Lösung

$e_4 = \big((aaa)^* \, (bbb)^* \, b \, (\epsilon + b)\big) + \big((aaa)^* \, a \, (bbb)^* \, bb\big)$

/Lösung

1.h) *Gib* eine Grammatik G_4 *an*, sodass $L(G_4) = A_4$.

Lösung

$G_4 = (\{ S, T, U, V \}, \Sigma, P_4, S)$ mit P_4:

$$\begin{aligned}
S &\to aaaS \mid aT \mid U \mid V \\
T &\to aaaT \mid V \\
U &\to b \mid bbbU \\
V &\to bb \mid bbbV
\end{aligned}$$

/Lösung

1.i) *Gib* einen regulären Ausdruck e_5 so *an*, dass $L(e_5) = L(G_5)$.

Lösung

$e_5 = a \, (a + b)^* \, b \, (a + b)^* \, a$

/Lösung

1.j) *Gib* eine reguläre Sprache A_5 so *an*, dass $A_5 = L(G_5)$.

Lösung

$A_5 = \{ axbya \mid x, y \in \Sigma^* \}$

/Lösung

1.k) *Gib* einen regulären Ausdruck e_6 so *an*, dass $L(e_6) = L(G_6)$.

Lösung

$e_6 = \big((a + b)^* \, acaa^*\big)^* \, \big(\epsilon + (a + b)^* \, b\big)$

/Lösung

1.l) *Gib* eine reguläre Sprache A_6 so *an*, dass $A_6 = L(G_6)$.

Lösung

$A_6 = \big\{ xy \mid x \in \{ uaca^n \mid u \in \{ a, b \}^* \land n \in \mathbb{N}^+ \}^* \land y \in \{ \varepsilon, vb \mid v \in \{ a, b \}^* \} \big\}$

/Lösung

1.m) *Gib* einen regulären Ausdruck e so *an*, dass $L(e) = \{ \diamond^m \square^n \square^n \mid n, m \in \mathbb{N}^+ \} \cup \{ \square\square\diamond, \varepsilon \}$.

Lösung

$e = \diamond\diamond^* \square\square(\square\square)^* + \square\square\diamond + \epsilon$

/Lösung

1.n) *Gib* die Sprache $L(((\diamond\diamond^*) + \epsilon) \, \square\square\square^*\diamond)$ *explizit an*.

Lösung

$\{ \diamond^n \square\square\square^m \diamond \mid n, m \in \mathbb{N} \}$

/Lösung

1.o) *Gib* die Sprache $L\left(\epsilon + \left((\diamond\diamond)^* \,\square\right)^*\right)$ *explizit an*.

Lösung

$(\{\,\diamond\diamond\,\}^* \cdot \{\,\square\,\})^*$

/Lösung

Aufgabe 2: Pumping-Lemma

Beweise oder widerlege, dass die Sprache $A \triangleq \{\, a^r b^s c^t \mid r, s, t \in \mathbb{N} \land r \leqslant s \leqslant t \,\}$ regulär ist.

Lösung

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und fest. Wir wählen das Wort $w = a^n b^{n+1} c^{n+2}$ mit $w \in A$, denn $n \leqslant n+1 \leqslant n+2$, und $|w| \geqslant n$. Sei $w = xyz$ eine beliebige Zerlegung mit $y \neq \varepsilon$ und $|xy| \leqslant n$. Dann ist $x = a^i$, $y = a^j$ und $z = a^{n-i-j} b^{n+1} c^{n+2}$ für ein $j \neq 0$ und $i + j \leqslant n$. Wir wählen $k = 3$. Dann ist $xy^3z = a^{n+2j} b^{n+1} c^{n+2}$. $xy^3z \notin A_4$, denn $n + 2j > n + 1$ für $j \neq 0$. Da $\neg$ **PUMP-REG** (A), ist A nach dem Pumping-Lemma nicht regulär.

Hinweis: Man hätte hier zum Beispiel auch das Wort $w = b^n c^n$ mit $k = 2$ oder das Wort $w = b^n c^{n+1}$ mit $k = 3$ oder das Wort $w = a^n b^n c^n$ mit $k = 2$ und jeweils den entsprechenden Zerlegungen wählen können. Die Variante $w = b^n c^n$ mit $k = 2$ ist wahrscheinlich die einfachste Möglichkeit.

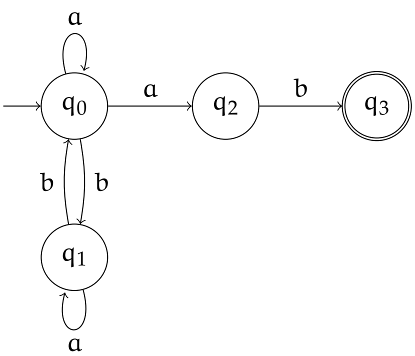
/Lösung

Aufgabe 3: DFA und NFA

3.a) Gegeben sei die Sprache A_2 aus Aufgabe 1. *Gib* einen NFA M_2 so *an*, dass $L(M_2) = A_2$.

Lösung

$M_2 = (\{\, q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3 \,\}, \{\, a,\ b \,\}, \Delta_2, \{\, q_0 \,\}, \{\, q_3 \,\})$, wobei Δ_2 durch den folgenden Graph gegeben ist:

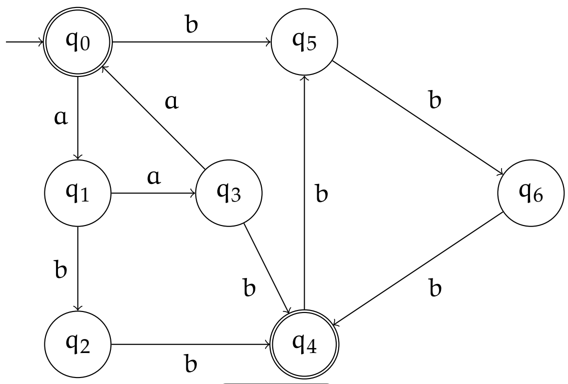


/Lösung

3.b) Gegeben sei die Sprache A_3 aus Aufgabe 1. *Gib* einen NFA M_3 so *an*, dass $L(M_3) = A_3$.

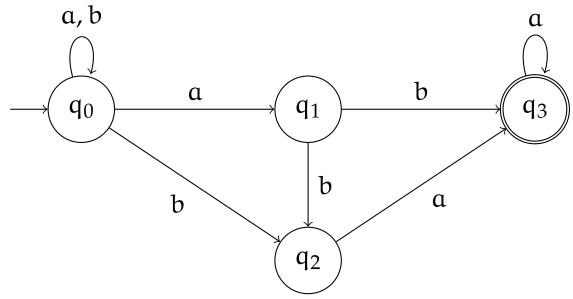
Lösung

$M_3 = (\{\, q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5,\ q_6 \,\}, \{\, a,\ b \,\}, \Delta_3, \{\, q_0 \,\}, \{\, q_0,\ q_4 \,\})$, wobei Δ_3 durch den folgenden Graph gegeben ist:



/Lösung

3.c) Gegeben sei der NFA $M = (\{ q_0, q_1, q_2, q_3 \}, \{ a, b \}, \Delta, \{ q_0 \}, \{ q_3 \})$, wobei Δ durch den folgenden Graph gegeben ist:

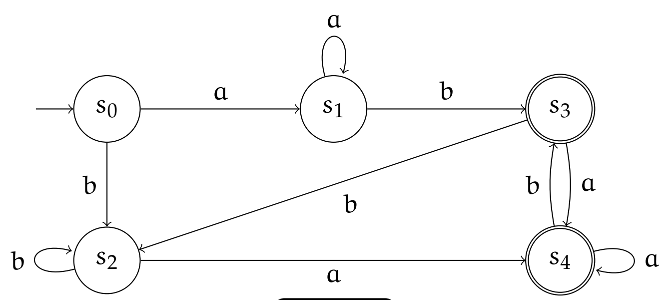


Berechne mit Hilfe der Untermengenkonstruktion einen DFA M' mit $L(M') = L(M)$.

Lösung

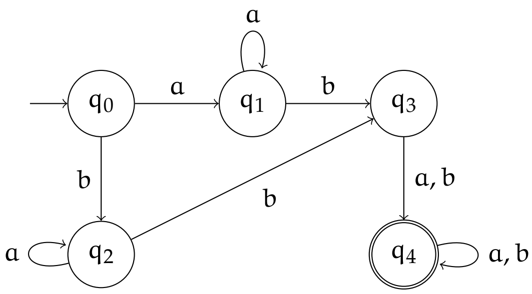
		a	b	
S	$\{ q_0 \}$	$\{ q_0, q_1 \}$	$\{ q_0, q_2 \}$	s_0
	$\{ q_0, q_1 \}$	$\{ q_0, q_1 \}$	$\{ q_0, q_2, q_3 \}$	s_1
	$\{ q_0, q_2 \}$	$\{ q_0, q_1, q_3 \}$	$\{ q_0, q_2 \}$	s_2
F	$\{ q_0, q_2, q_3 \}$	$\{ q_0, q_1, q_3 \}$	$\{ q_0, q_2 \}$	s_3
F	$\{ q_0, q_1, q_3 \}$	$\{ q_0, q_1, q_3 \}$	$\{ q_0, q_2, q_3 \}$	s_4

Damit ergibt sich der DFA $M' = (\{ q_0, q_{01}, q_{023}, q_{02}, q_{013} \}, \{ a, b \}, \delta', q_0, \{ q_{023}, q_{013} \})$ mit δ':



/Lösung

3.d) Gegeben sei der DFA $M = (\{ q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 \}, \{ a, b \}, \delta, q_0, \{ q_4 \})$, wobei δ durch den folgenden Graph gegeben ist:



Berechne: Benutze den Table-Filling Algorithmus, um einen minimalen DFA M' zu erstellen, so dass $L(M') = L(M)$.

Lösung

Schritt 1 (eliminiere nicht erreichbare Zustände): alle Zustände sind erreichbar

Schritt 2 (Table-Filling):

q_1	x			
q_2	x	o		
q_3	x	x	x	
q_4	x	x	x	x
	q_0	q_1	q_2	q_3

Schritt 3 (gib alle Äquivalenzklassen von Zuständen und eine Umbenennung an):

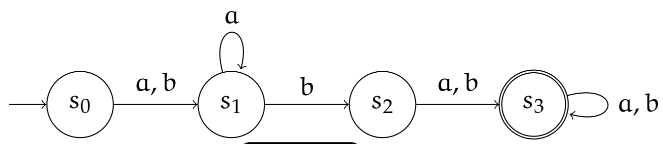
$[q_0] = \{ q_0 \}$ $\quad s_0$

$[q_1] = \{ q_1, q_2 \}$ $\quad s_1$

$[q_3] = \{ q_3 \}$ $\quad s_2$

$[q_4] = \{ q_4 \}$ $\quad s_3$

Schritt 4 (gib den minimierten DFA an): $M' = (\{ s_0, s_1, s_2, s_3 \}, \Sigma, \delta', s_0, \{ s_3 \})$, wobei δ' durch den folgenden Graphen gegeben ist:



/Lösung

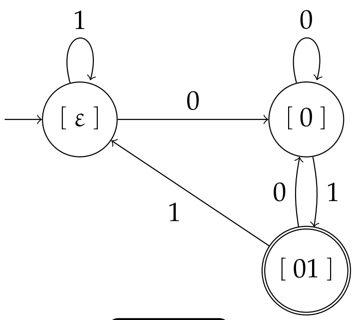
Aufgabe 4: Myhill-Nerode

4.a) Gegeben sei die Sprache $A \triangleq \{ w01 \mid w \in \{ 0,\ 1 \}^* \}$. *Gib* die Äquivalenzklassen der Myhill-Nerode Relation bezüglich A und den A-Äquivalenzklassenautomaten M_A *an*.

Lösung

$$
\begin{aligned}
[\,\varepsilon\,] &= \{ \varepsilon, 1, w11 \mid w \in \{ 0,\ 1 \}^* \} \\
[\,0\,] &= \{ w0 \mid w \in \{ 0,\ 1 \}^* \} \\
[\,01\,] &= A
\end{aligned}
$$

$M_A = (\{ [\,\varepsilon\,],\ [\,0\,],\ [\,01\,] \}, \{ 0,\ 1 \}, \delta_A, [\,\varepsilon\,], \{ [\,01\,] \})$ mit δ_A:



/Lösung

4.b) Gegeben seien das Alphabet $\Sigma \triangleq \{ a,\ b,\ c \}$ und die Sprache $B \triangleq \{ a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N} \}$. *Gib* die Äquivalenzklassen der Myhill-Nerode Relation bezüglich B *an* und *beweise*, dass B nicht regulär ist.

Lösung

$$
\begin{aligned}
[\,a^i\,] &= \{ a^i \} \quad \text{für } i \in \mathbb{N} \\
[\,a^j b^k\,] &= \{ a^j b^k \} \quad \text{für } j, k \in \mathbb{N}^+ \text{ und } k < j \\
[\,a^l b^l\,] &= \left\{ a^{l+n} b^{l+n} c^n \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{für } l \in \mathbb{N}^+ \\
[\,abc\,] &= B \setminus \{ \varepsilon \} \\
[\,b\,] &= \{ xbay, xcay, xcby \mid x, y \in \Sigma^* \} \\
&\quad \cup \{ a^n b^m, a^o b^p c^q \mid n, m, o, p, q \in \mathbb{N} \land n < m \land ((o \neq p \land q \neq 0) \lor p < q) \} \\
&= \Sigma^* \setminus \left(\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} [\,a^i\,] \right) \cup \left(\bigcup_{j,k \in \mathbb{N}^+, k<j} [\,a^j b^k\,] \right) \cup \left(\bigcup_{l \in \mathbb{N}^+} [\,a^l b^l\,] \right) \cup [\,abc\,] \right)
\end{aligned}
$$

Zu den Äquivalenzklassen von $\equiv_B$ gehören u.A. die Klassen:

$$[\,a^n\,] = \{ a^n \} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

Annahme: $n \neq m$.
Zu Zeigen: $a^n \not\equiv_B a^m$
Betrachte $z = b^n c^n$. Dann ist $a^n z \in B$ und $a^m z \notin B$, weil $n \neq m$.
Mit der Definition von $\equiv_B$ gilt damit $a^n \not\equiv_B a^m$ (und damit $[\,a^n\,] \neq [\,a^m\,]$).
Damit ist der Index von $\equiv_B$ unendlich. Nach Theorem 2.4.1 ist B damit nicht regulär.

/Lösung

Aufgabe 5: CYK-Algorithmus

Gegeben sei eine Menge Nicht-Terminale $V \triangleq \{ A, B, C \}$, ein Alphabet $\Sigma \triangleq \{ a, b \}$, sowie eine CNF-Grammatik $G \triangleq (V, \{ a, b \}, P, S)$ mit

$$\begin{array}{llll} P: & S & \to & AB \mid AC \\ & A & \to & a \\ & B & \to & b \\ & C & \to & SB \end{array}$$

5.a) *Berechne:* Gegeben sei ein Wort $w_1 \triangleq aaabbb$. Löse mit dem CYK-Algorithmus das Wortproblem: $w_1 \in L(G)$ oder $w_1 \notin L(G)$?

Lösung

$CYK_w(i,j)$	1	2	3	4	5	6
1: a	$\{ A \}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{ S \}$
2: a	$\{ A \}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{ S \}$	$\{ C \}$	
3: a	$\{ A \}$	$\{ S \}$	$\{ C \}$	$\emptyset$		
4: b	$\{ B \}$	$\emptyset$	$\emptyset$			
5: b	$\{ B \}$	$\emptyset$				
6: b	$\{ B \}$					

Es gilt also $w_1 \in L(G)$, da $S \in CYK_w 1, 6$.

/Lösung

5.b) *Berechne:* Gegeben sei ein Wort $w_2 \triangleq aab$. Löse mit dem CYK-Algorithmus das Wortproblem: $w_2 \in L(G)$ oder $w_2 \notin L(G)$?

Lösung

$CYK_w(i,j)$	1	2	3
1: a	$\{ A \}$	$\emptyset$	$\emptyset$
2: a	$\{ A \}$	$\{ S \}$	
3: b	$\{ B \}$		

Es gilt also $w_2 \notin L(G)$, da $S \notin CYK_w 1, 3$.

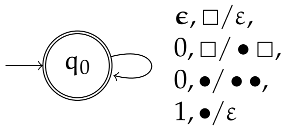
/Lösung

Aufgabe 6: Kellerautomaten

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma = \{\ 0,\ 1\ \}$, die kontextfreie Sprache $A_1 \triangleq \{\ 0w1w^R0 \mid w \in \Sigma^*\ \}$, die Grammatik $G_2 \triangleq (\{\ S,\ T\ \}, \Sigma, P_2, S)$ und der PDA $M_3 \triangleq (\{\ q_0\ \}, \Sigma, \{\ \square,\ \bullet\ \}, \square, \Delta_3, q_0, \{\ q_0\ \})$, wobei P_2 und Δ_3 wie folgt gegeben sind:

$$\begin{array}{llll} P_2: & S & \rightarrow & \varepsilon \mid T \\ & T & \rightarrow & 0 \mid 1 \mid 00 \mid 11 \mid 0T0 \mid 1T1 \end{array}$$

Δ_3:



6.a) *Gib* eine kontextfreie Grammatik G_1 so *an*, dass $L(G_1) = A_1$.

Lösung

$G_1 = (\{\ S,\ T\ \}, \Sigma, P_1, S)$ mit P_1:

$S \rightarrow 0T0$

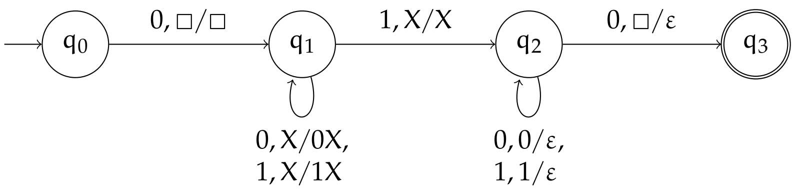
$T \rightarrow 1 \mid 0T0 \mid 1T1$

/Lösung

6.b) *Gib* einen PDA M_1 so *an*, dass $L_{End}(M_1) = L_{Kel}(M_1) = A_1$.

Lösung

$M_1 = (\{\ q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3\ \}, \Sigma, \{\ 0,\ 1,\ \square\ \}, \square, \Delta_1, q_0, \{\ q_3\ \})$, wobei Δ_1 für $X \in \{\ 0,\ 1,\ \square\ \}$ durch den folgenden Graph gegeben ist:



/Lösung

6.c) *Gib an:* Welchen Typ hat die Grammatik G_2?

Lösung

G_2 ist nicht regulär (Typ-3), aber kontextfrei (Typ-2) und damit auch kontext-sensitiv (Typ-1) und allgemein (Typ-0).

Hinweis: Die beiden Regeln $T \rightarrow 0T0 \mid 1T1$ *verhindern hier, dass* G_2 *regulär ist.*

/Lösung

6.d) *Gib* alle Ableitungen für das Wort 01010 in G_2 *an*.

Lösung

Es gibt nur die Ableitung:

$S \Rightarrow T \Rightarrow 0T0 \Rightarrow 01T10 \Rightarrow 01010$

Hinweis: Damit gilt $01010 \in L(G_2)$.

/Lösung

6.e) *Gib an:* $L(G_2)$

Lösung

$L(G_2) = \{\ w \in \Sigma^* \mid w = w^R\ \}$

/Lösung

6.f) *Gib an:* Welchen Typ hat $L(G_2)$?

Lösung

$L(G_2)$ ist nicht regulär (Typ-3), aber kontextfrei (Typ-2, minimaler Typ) und damit auch kontextsensitiv (Typ-1) und allgemein (Typ-0).

/Lösung

6.g) *Gib an:* Ist M_3 deterministisch, also ein DPDA?

Lösung

Nein.

Hinweis: Die beiden Übergänge $\epsilon, \square/\varepsilon$ *und* $0, \square/\bullet\square$ *erlauben es hier einen Weg zu wählen, wenn der Keller nur das Symbol* $\square$ *enthält, deshalb ist* M_3 *nicht deterministisch.*

/Lösung

6.h) *Gib* alle Ableitungen in M_3 für das Wort 1 *an*.

Lösung

Es gibt nur die Ableitung:

$$(q_0, 1, \square) \nvdash$$

Hinweis: Damit gilt $1 \notin L_{End}(M_3)$ *und* $1 \notin L_{Kel}(M_3)$.

/Lösung

6.i) *Gib* alle Ableitungen in M_3 für das Wort 010 *an*.

Lösung

$$\begin{aligned}
&(q_0, 010, \square) \vdash (q_0, 010, \varepsilon) \nvdash \\
&(q_0, 010, \square) \vdash (q_0, 10, \bullet\square) \vdash (q_0, 0, \square) \vdash (q_0, 0, \varepsilon) \nvdash \\
&(q_0, 010, \square) \vdash (q_0, 10, \bullet\square) \vdash (q_0, 0, \square) \vdash (q_0, \varepsilon, \bullet\square) \nvdash
\end{aligned}$$

Hinweis: Damit gilt $010 \notin L_{Kel}(M_3)$ *aber die 3. Ableitung zeigt, dass* $010 \in L_{End}(M_3)$.

/Lösung

6.j) *Gib* die Sprachen $L_{End}(M_3)$ und $L_{Kel}(M_3)$ *an*.

Lösung

$$\begin{aligned}
L_{End}(M_3) &= \{\, w \in \Sigma^* \mid \text{ für jedes Päfix } v \text{ von } w \text{ gilt: } |v|_0 \geqslant |v|_1 \,\} \\
L_{Kel}(M_3) &= \{\, w \in \Sigma^* \mid |w|_0 = |w|_1 \text{ und für jedes Päfix } v \text{ von } w \text{ gilt: } |v|_0 \geqslant |v|_1 \,\}
\end{aligned}$$

Hinweis: Beide Sprachen sind nicht regulär aber kontextfrei.

/Lösung

6.k) *Gib an:* Gibt es einen DPDA für die Sprache $L_{End}(M_3)$?

Lösung

Ja.

Hinweis: Es genügt, den Übergang $\epsilon, \square/\varepsilon$ *zu entfernen, um einen solchen DPDA mit der Sprache* $L_{End}(M_3)$ *zu erhalten.*

/Lösung

6.l) *Gib an:* Gibt es einen DPDA für die Sprache $L_{Kel}(M_3)$?

Lösung

Nein.

Hinweis: Die beiden Wörter 0 *und* 01 *sind beide Element der Sprache* $L_{Kel}(M_3)$. *Da die Sprache also Wörter enthält, bei denen ein Wort ein echtes Präfix eines anderen Wortes ist, kann diese Sprache nicht deterministisch über einen leeren Keller akzeptiert werden.*

/Lösung