# 6. Tutorium : Laplace-Trafo, Netzwerke

## Laplace-Trafo

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)](s) = \int_0^{\infty} u(t) \cdot e^{-st} \, dt \quad (s = \sigma + j\omega, \ \sigma \neq 0)$$

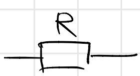
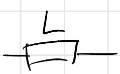
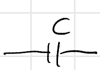
## Fourier-Trafo

$$U(j\omega) = \mathcal{F}[u(t)](j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot e^{-j\omega t} \, dt$$

## Laplace Korrespondenzen

| Zeitbereich | s-Bereich |
|---|---|
| $\frac{d}{dt} u(t)$ | $s \cdot U(s) - u(0)$ |
| $\int u(t) \, dt$ | $\frac{1}{s} \cdot U(s)$ |
| $\delta(t)$ | $1$ |
| $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a}$ |

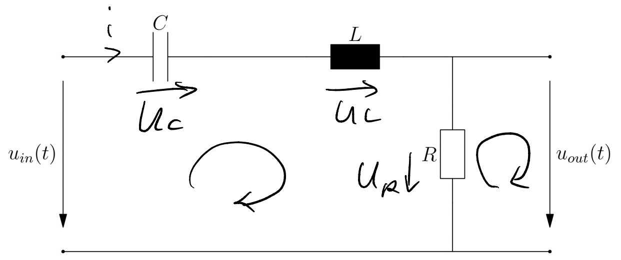
## Passive Komponenten

| | Spannung | komplexe Impedanzen |
|---|---|---|
|  | $u_R = R \cdot i_R(t)$ | $Z_R = R$ |
|  | $u_L = L \cdot \frac{d}{dt} i_L(t)$ | $Z_L = s \cdot L$ |
|  | $u_C = \frac{1}{C} \cdot \int i_C(t) \, dt$ | $Z_C = \frac{1}{sC}$ |

☆ Übertragungsfkt. $\mathcal{H}(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h(t)$

1. b)

[AK]:




ges.: $h(t)$

$$\underset{=\delta(t)}{u(t)} \longrightarrow \boxed{\underset{=\text{Impulsantwort}}{h(t)}} \longrightarrow y(t)$$

wenn $u(t)$ ein Deltaimpuls ist

☆ Übertragungsfunktion $\mathcal{H}(s) \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\bullet\!\!-\!\!\circ} h(t)$

$$\mathcal{H}(s) = \frac{U_{out}(s)}{U_{in}(s)} = \frac{U_{out}(s)}{1} = U_{out}(s)$$

Spannung

$U_R = R \cdot i_R(t)$

$U_L = L \cdot \frac{d}{dt} i_L(t)$

$U_C = \frac{1}{C} \cdot \int i_C(t)\,dt$

$$U_{in}(t) = U_C + U_L + U_R$$

$$= L \cdot i'(t) + \frac{1}{C} \cdot \int i(t)\,dt + R \cdot i(t)$$

$\mathcal{L}$

$$U_{in}(s) = L \cdot S \cdot I(s) + \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{S} \cdot I(s) + R \cdot I(s)$$

| Zeitbereich | S-Bereich |
|---|---|
| $\frac{d}{dt} u(t)$ | $S \cdot U(s) - u(0)$ |
| $\int u(t)\,dt$ | $\frac{1}{S} \cdot U(s)$ |
| $\delta(t)$ | $1$ |
| $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a}$ |

$$U_{out}(t) = U_R = R \cdot i(t)$$

$\mathcal{L}$

$$U_{out}(s) = R \cdot I(s)$$

← Da $U_{in}$ ein Deltaimpuls sein soll ( $\delta(t) \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} 1$ )

$$U_{in}(s) = 1 = L \cdot S \cdot I(s) + \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{S} \cdot I(s) + R \cdot I(s)$$

$$I(s) \cdot \left( LS + \frac{1}{SC} + R \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad I(S) = \frac{1}{LS + \frac{1}{SC} + R} \quad \left| \frac{\cdot SC}{\cdot SC} \right. = \frac{SC}{1 + CLS^2 + RCS}$$

$$U_{out}(S) = R \cdot I(s) = \frac{SCR}{1 + CLS^2 + RCS}$$

$$U_{out}(S) = \frac{SCR}{1+CLS^2+RCS} \quad \Big| \begin{array}{l} :\frac{1}{CL} \\ :\frac{1}{CL} \end{array}$$

$$= \frac{\frac{SR}{L}}{s^2+\frac{R}{L}\cdot s+\frac{1}{CL}} \overset{PBZ}{=} \frac{A}{(S-S_{x1})}+\frac{B}{(S-S_{x2})}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{pq Formel} \\ x^2+px+q=0 \\ x_{1,2} = -\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \end{array}}$$

$$S_{x1,x2} = -\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{CL}}$$

A und B ?

$$\frac{\frac{SR}{L}}{\cancel{s^2+\frac{R}{L}\cdot s+\frac{1}{CL}}}\cancel{(S-S_{x1})(S-S_{x2})} = \frac{A}{(S-S_{x1})}+\frac{B}{(S-S_{x2})} \quad (S-S_{x1})(S-S_{x2})$$

$$\frac{SR}{L} = A(S-S_{x2})+B(S-S_{x1})$$

$S=S_{x1}$ einsetzen

$$\frac{S_{x1}R}{L} = A(S_{x1}-S_{x2})$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{S_{x1}R}{L(S_{x1}-S_{x2})} = \frac{-\frac{R}{2L}+\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}}{2\cdot\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}}\cdot\frac{R}{L}$$

$$B = \frac{+\frac{R}{2L}+\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}}{2\cdot\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}}\cdot\frac{R}{L}$$

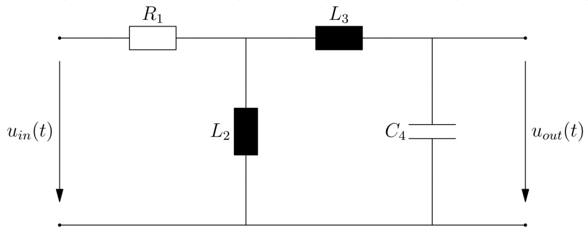
$$\mathcal{H}(s) = \frac{U_{out}(s)}{\underbrace{\cancel{U_{in}(s)}}_{=1}} = \frac{A}{(S-S_{x1})}+\frac{B}{(S-S_{x2})}$$

| Zeitbereich | S-Bereich |
| --- | --- |
| $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a}$ |

$$\mathcal{L}^{-1} \; \circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$\therefore \; h(t) = A\cdot e^{S_{x1}t}+B\cdot e^{S_{x2}t}$$

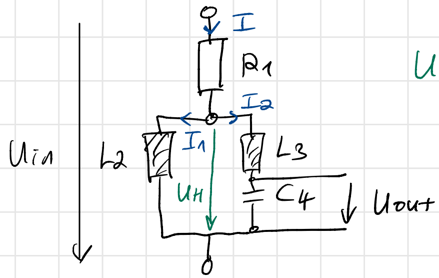
# 2.2




a) Bestimme die Gesamtübertragungsfunktion $H(s)$ des gegebenen Netzwerks.

b) Gegeben seien folgende Bauteilwerte: $R_1 = \frac{125}{2}\Omega$, $L_2 = 125\text{H}$, $L_3 = 25\text{H}$, $C_4 = 0.01\text{F}$
Berechne die Polstellen ($s_1$,$s_2$,$s_3$) der Übertragungsfunktion. Gib sie in aufsteigender Reihenfolge an (erst nach Realteil, dann nach Imaginärteil ordnen).

c) Berechne nun die Impulsantwort und gib die Werte bei $t_1 = 0.10\text{s}$, $t_2 = 1.92\text{s}$, $t_3 = 3.74\text{s}$, $t_4 = 5.48\text{s}$ und $t_5 = 7.30\text{s}$ an.




$$U_{Hilfe} = I_1 \cdot Z_{L2} = I_2 \cdot Z_{L3C4} = I \cdot Z_{L2L3C4}$$

komplexe Impedanzen

$Z_R = R$

$Z_L = s \cdot L$

$Z_C = \frac{1}{sC}$

$\underset{\text{Spannung}}{U} = \underset{\text{Impedanz}}{Z} \cdot \underset{\text{Strom}}{I}$

$$a)\ H(s) = \frac{U_{out}(s)}{U_{in}(s)} = \frac{Z_{C4} \cdot I_2}{Z_{R1L2L3C4} \cdot I} \cdot \frac{U_{Hilfe}}{U_{Hilfe}}$$

$$\frac{Z_{C4} \cdot \cancel{I_2}}{Z_{R1L2L3C4} \cdot \cancel{I}} \cdot \frac{\cancel{I} \cdot Z_{L2L3C4}}{\cancel{I_2} \cdot Z_{L3C4}} = \frac{Z_{C4} \cdot Z_{L2L3C4}}{Z_{R1L2L3C4} \cdot Z_{L3C4}}$$

$$\frac{Z_{C4} \cdot Z_{L2L3C4}}{Z_{R1L2L3C4} \cdot Z_{L3C4}} = \frac{\frac{1}{sC_4} \cdot sL_2 \cdot \left(sL_3 + \frac{1}{sC_4}\right)}{R_1 + sL_2 \cdot sL_2 \cdot \left(sL_3 + \frac{1}{sC_4}\right) \cdot \left(sL_3 + \frac{1}{sC_4}\right)}$$

$$= \frac{sL_2}{L_2L_3C_4 \cdot s^3 + C_4R_1(L_2+L_3) \cdot s^2 + L_2 \cdot s + R}$$

b) Polstellen  Bsp. $\mathcal{H}(s) = \dfrac{s}{s^2 - 3s + 2} = 0$

$(s-1)(s-2) = 0$

PS: $s_1 = 1, \; s_2 = 2$

$$\mathcal{H}(s) = \frac{125 \cdot s}{\frac{125}{4}s^3 + \frac{375}{4}s^2 + 125s + \frac{125}{2}} \quad \Big| \cdot \frac{4}{125}$$

$$= \frac{4s}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2} = 0$$

$s^3 + 3s^2 + 4s + 2 = 0$ ?

$(s+1)(s^2 + 2s + 2) = 0$

$s_{2,3} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{1-2}$

$= -1 \pm \sqrt{\underbrace{-1}_{j^2}} = -1 \pm j$

$\therefore s_1 = -1, \quad s_{2,3} = -1 \pm j$

c) Impulsantwort $h(t)$

$$\mathcal{H}(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h(t)$$

| Zeitbereich | s-Bereich |
| --- | --- |
| $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a}$ |

$$\mathcal{H}(s) = -4 \cdot \frac{1}{s+1} + (2-2j)\frac{1}{s+1-j} + (2+2j)\cdot\frac{1}{s+1+j}$$

$\mathcal{L}^{-1}$

$$h(t) = -4 \cdot e^{-t} + (2-2j)\cdot e^{(-1+j)t} + (2+2j)\cdot e^{(-1-j)t}$$

$$= e^{-t}\left(-4 + \underbrace{(2-2j)\, e^{jt} + (2+2j)\, e^{-jt}}_{2e^{jt} - 2j e^{jt} + 2e^{-jt} + 2j e^{-jt}}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(t) &= \frac{1}{2j}\left(e^{jt} - e^{-jt}\right) \\ \cos(t) &= \frac{1}{2}\cdot\left(e^{jt} + e^{-jt}\right) \end{aligned}}$$

$$-2j\left(e^{jt} - e^{-jt}\right)$$

$$4\cos(t) \quad -2j \cdot 2j \cdot \sin(t)$$

$$= 4\sin(t)$$

$$= e^{-t}\left(-4 + 4\cos(t) + 4\sin(t)\right)$$

$$h(t = 0{,}10\,s) = 0{,}343$$

$\vdots$

$$h(t = 7{,}20\,s) = 0{,}001$$

Quiz

1. **Eine Impulsantwort ist die Antwort des Systems, wo das Eingangssignal ein Antwort 1 ist.** (Lücke füllen)

**Antwort 1**

Ihre Antwort eintippen

2. **Die Laplacetransformation ist eine Erweiterung der Fouriertransformation.** (Einzelne Wahl)

- Richtig
- Falsch

3. **Eine Differentiation im Zeitbereich entspricht ...** (Einzelne Wahl)

- einer Multiplikation mit s im s-Bereich.
- einer Division mit s im s-Bereich.
- einer Addition mit s im s-Bereich.

4. **Eine Integration im Zeitbereich entspricht ...** (Einzelne Wahl)

- einer Addition mit s im s-Bereich.
- einer Division mit s im s-Bereich.
- einer Multiplikation mit s im s-Bereich.

5. **Die Übertragungsfunktion ist ...** (Einzelne Wahl)

- U_out(s)/U_in(s)
- U_out(t)/U_in(t)
- U_in(s)/U_out(s)

6. **Die Laplace-rücktransformierte der Übertragungsfunktion ist eine...** (Einzelne Wahl)

- Sinus-Funktion
- Impulsantwort
- Konstantwert-Funktion

Lösung: 1. Deltaimpuls 2. Richtig 3. Multiplikation
4. Division 5. $U_{out}(s) / U_{in}(s)$
6. Impulsantwort