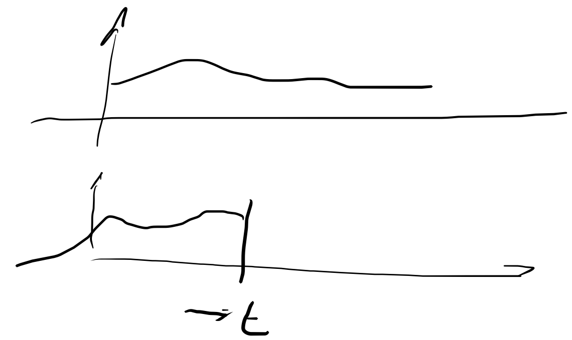
Def $f, g : [0,\infty) \to \mathbb{C}$

$$(f*g)(t) := \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \overset{t-\tau \mapsto t}{=} \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau = (g*f)(t)$$



Satz f stetig, g stückweise stetig, von exp Ord γ

- $\mathcal{L}(f*g)(s) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s)$
- $(f*g)(s)$ ist stetig
- $f*g$ von exp Ord $\gamma + \varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$

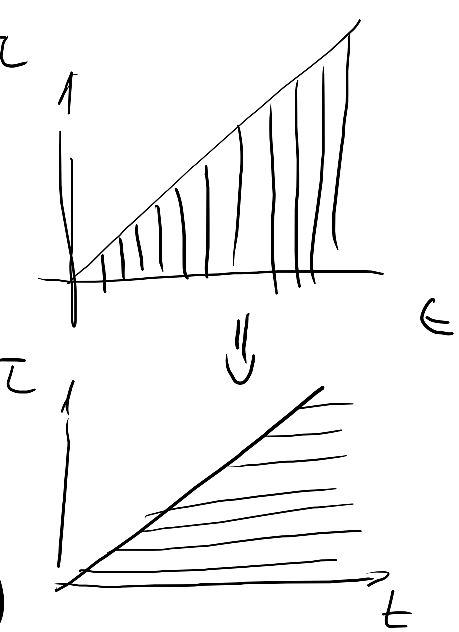
Beweis

Betrachte $|(f*g)(t_0) - (f*g)(t)|$ mit $t \to t_0$

Exp Ord:

$$|(f*g)(t)| \leq \int_0^t |f(\tau)|\,|g(t-\tau)|\, d\tau \leq \int_0^t c_1 e^{\gamma\tau}\, c_2\, e^{\gamma(t-\tau)}\, d\tau$$

$$= c_1 c_2\, e^{\gamma t} \int_0^t 1\, d\tau = c_1 c_2\, \underbrace{t}_{\leq c_3 e^{\varepsilon t}}\, e^{\gamma t} = C\, e^{(\gamma+\varepsilon)t}$$



Faltungseigenschaft:

$$\mathcal{L}[f*g](s) = \int_0^\infty \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, e^{-st}\, d\tau\, dt$$

$$= \int_0^\infty \int_\tau^\infty f(t-\tau)\, g(\tau)\, e^{-s(t-\tau)}\, e^{-s\tau}\, dt\, d\tau$$

Substitution $t - \tau \mapsto t$ bezüglich t

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty f(t)\, g(\tau)\, e^{-st}\, e^{-s\tau}\, dt\, d\tau = \left(\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt\right) \cdot \left(\int_0^\infty g(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau\right)$$

$$= \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s) \qquad \square$$

Beispiel 55 (Greensche Funktion)

$$\left.\begin{aligned} &x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n x(t) = h(t) \\ &x(0) = x'(0) = \dots = x^{n-1}(0) = 0 \end{aligned}\right\} (*)$$

Setze $X(s) := \mathcal{L}[x](s)$. Laplacetransformation liefert
$H(s) := \mathcal{L}[h](s)$

$$s^n X(s) + a_1 s^{n-1} X(s) + \dots + a_n X(s) = H(s)$$

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n) X(s) = H(s)$$

$$\Rightarrow \quad X(s) = \underbrace{(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n)^{-1}}_{G(s)} H(s)$$

Faltungssatz

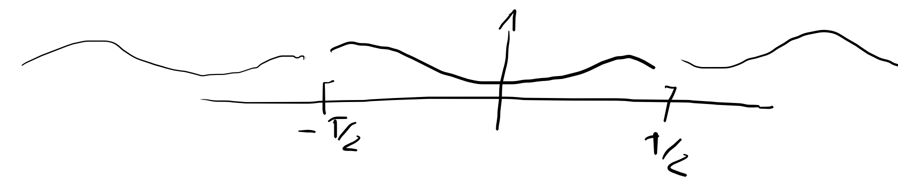
$$\Rightarrow \quad x(t) = (g * h)(t) \qquad \mid G(s) = \mathcal{L}[g](s)$$

greensche Funktion

→ sobald wir g haben, können wir das AWP (*) für alle h lösen.

→ Funktioniert auch für andere Anfangswerte (anderes Polynom mit Anfangswerten)

2.2 Fouriertransformation



Fourierreihe: gegeben $f:[-T/2,T/2] \longrightarrow \mathbb{C}$

mit $f(t+nT) = f(t)$ $\quad n \in \mathbb{N}$

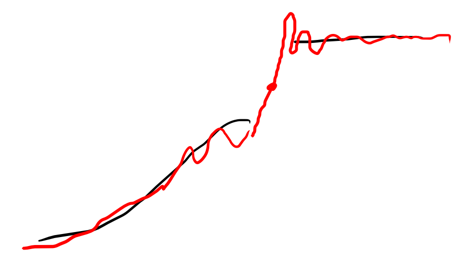
$$S[f](t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{T,k}[f] \; e^{2\pi i k t/T}$$

$$c_{T,k}[f] := \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \; e^{-2\pi i k t/T} \, dt$$

f ist absolut-integrierbar wenn

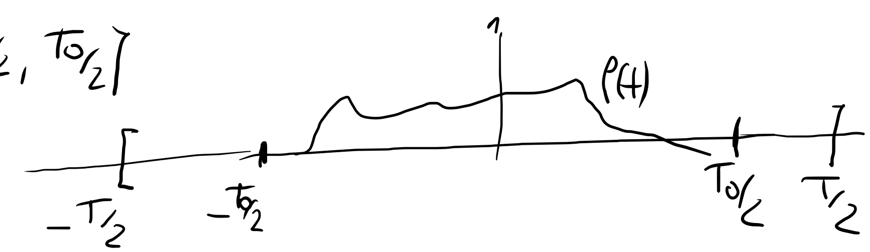
$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)| \, dt < \infty$$

$\longrightarrow$ $S[f]$ konvergiert z.B wenn f stückweise stetig differenzierbar.



$$S[f](t) = \frac{1}{2}\big(f(t+) + f(t-)\big)$$

Betrachte $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\quad f(x) = 0 \quad x \notin [-T_0/2, T_0/2]$



Entwickle f auf dem Intervall $[-T/2, T/2]$ $\quad T > T_0$
in eine Fourierreihe mit

$$c_{T,k}[f] = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \; e^{-2\pi i k t/T} \, dt = \frac{1}{T} \, \hat{f}\left(\frac{2\pi k}{T}\right)$$

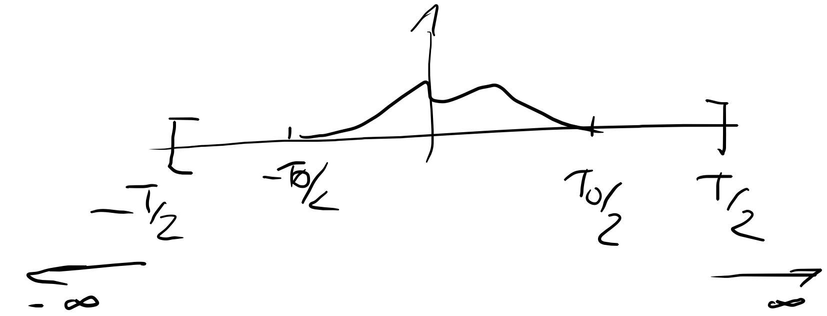
$$\hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \; e^{-i\omega t} \, dt$$

Fourierintegral

kontinuierliche Fouriertransformation

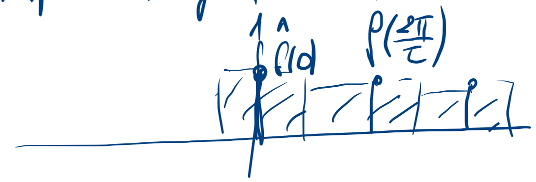
Einsetzen in $S[f]$. (f stückweise stetig, diffbar, $S[f]$ konvergent)

$$f(t) := S[f](t) = \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\frac{2\pi k}{T}\right) e^{2\pi i k t / T}$$



$\lim T \to \infty$

Mittelpunktregel

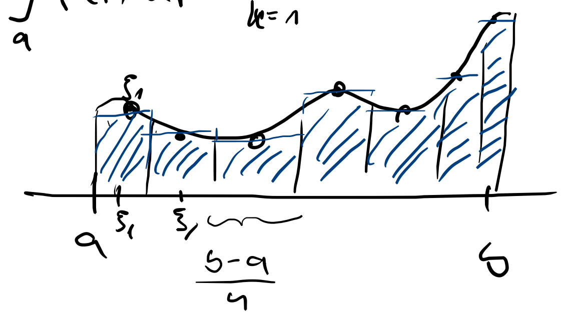


$$\overset{T \to \infty}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega$$

inverse Fourier transformation

Mittelpunktregel

$$\int_a^b f(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \frac{b-a}{n}$$



Def 56 (Fouriertransformation) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\hat{f}(\omega) := \mathcal{F}[f](\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt, \qquad \omega \in \mathbb{R}$$

kont. Spectrum