

**12. Vorlesung: Normalverteilung und Grenzwertsätze**Nikolas Tapia *Gauß (1809)*

30. Mai 2024, Stochastik für Informatik(er)

**12. Vorlesung: Normalverteilung und Grenzwertsätze**Nikolas Tapia *Gauß (1809)*

30. Mai 2024, Stochastik für Informatik(er)

## Definition 11.1

Eine Zufallsvariable  $X$  hat eine **Normalverteilung** mit Parametern  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $\sigma > 0$ , falls die Dichte von  $X$  gegeben ist durch

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

## Aussage 11.1

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit Normalverteilung mit Parametern  $\mu$  und  $\sigma$ . Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = \mu, \quad \mathbb{V}[X] = \sigma^2.$$

Hinc itaque per eliminationem problematis solutio plene determinata derivari poterit, quamprimum functionis  $\varphi'$  indoles innotuit. Quae quoniam a priori definiri nequit, rem ab altera parte aggredientes inquiremus, cuinam functioni, taceat quasi pro basi acceptae, proprie innixum sit principium trium, cuius praestantia generaliter agnoscitur. Axiomatis scilicet loco haberi solet hypothesis, si quae quantitas per plures observationes immediatas, sub aequalibus circumstantiis aequalique cura institutas, determinata fuerit, medium arithmeticum inter omnes valores observatos exhibere valorem maxime probabilem, si non absoluto rigore, tamen proxime saltem, ita ut semper tutissimum sit illi inhaerere. Statuendo itaque  $V = V' = V'' \text{ etc.} = p$ , generaliter esse debet  $\varphi'(M-p) + \varphi'(M'-p) + \varphi'(M''-p) + \text{etc.} = 0$ , si pro  $p$  substituitur valor  $\frac{1}{\mu} (M + M' + M'' + \text{etc.})$ , quemcunque integrum positivum exprimat  $\mu$ . Supponendo itaque  $M' = M'' = \text{etc.} = M - \mu N$ , erit generaliter, i. e. pro quovis valore integro positivo ipsius  $\mu$ ,  $\varphi'(\mu - 1)N = (1 - \mu)\varphi'(-N)$ , unde facile colligitur, generaliter esse debere  $\frac{\varphi' \Delta}{\Delta}$  quantitatem constantem, quam per  $k$  designabimus. Hinc fit  $\log \varphi \Delta = \frac{1}{2} k \Delta^2 + \text{Const.}$ , siue designando basin logarithmorum hyperbolicorum per  $e$ , supponendoque  $\text{Const.} = \log x$ ,

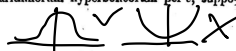
$$\Delta \varphi = x e^{\frac{1}{2} k \Delta^2} \quad x e^{\frac{1}{2} k \Delta^2}$$

Porro facile perspicitur,  $k$  necessario negativam esse debere, quo  $\Omega$  reuera fieri possit maximum, quamobrem statuemus  $\frac{1}{2} k = -\frac{h}{h}$ ; et quum per theorema elegantius primo ab ill. Laplace inuentum, integrale  $\int e^{-h \Delta^2} d\Delta$ , a  $\Delta = -\infty$  vsque ad  $\Delta = +\infty$ , fiat  $= \frac{\sqrt{\pi}}{h}$ , (denotando per  $\pi$  semicircumferentiam circuli cuius radius 1), functio nostra fiet

$$\varphi \Delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{h}{2} \Delta^2}$$

$h \sim \sigma$

$$\Omega = \varphi(M-p) \varphi(M'-p) \times \dots \times \varphi(M''-p) \text{ etc.}$$



$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{x-\mu}{\sigma} + \frac{\mu}{\sigma} \right) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
 &\stackrel{y = \frac{x-\mu}{\sigma}}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y e^{-y^2/2} dy}_{=0} + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \\
 &= \mu
 \end{aligned}$$

## Aussage 11.2

Sei  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Dann ist

$$\frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

↙ Standard normalverteilung.

## Aussage 11.3

Seien  $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$  und  $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$  unabhängige Zufallsvariablen. Dann ist

$$Z = X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

↙  
Hinweis:

$$F_{X+Y}(z) = \mathbb{P}(X + Y \leq z) = \int_{-\infty}^z f_X(z-y) f_Y(y) dy$$

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \leadsto \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$F_{\frac{X - \mu}{\sigma}}(x) = \mathbb{P}\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq x\right) = \mathbb{P}(X \leq \mu + \sigma x)$$

$$= F_X(\mu + \sigma x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\mu + \sigma x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t - \mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

$$u = \frac{t - \mu}{\sigma}$$

$$du = \frac{dt}{\sigma}$$

$$\leadsto$$

$$= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = F_Z(x), \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

## Standard Normalverteilung

## Definition 11.2

Eine Zufallsvariable  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$  heißt **standarnormalverteilt**. Ihre Verteilungsfunktion ist gegeben durch

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. = \overline{F}_X(x)$$

## Anmerkung 1

Für alle  $x \geq 0$  gilt

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$



$$\Phi(0) = \int_{-\infty}^0 f_x(x) dx = \frac{1}{2}$$

TABLE 5.1 AREA  $\Phi(x)$  UNDER THE STANDARD NORMAL CURVE TO THE LEFT OF  $x$ 

$x$	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

 $x \approx 2,10 \quad 2,11$  $\rightarrow$ 

$$P(X \leq 2,25) = \Phi(2,25)$$

$$\approx 0,9875$$

$$P(X \leq -1,43)$$

$$= \Phi(-1,43)$$

$$= 1 - \Phi(1,43)$$

$$\approx 0,0764$$

$$\text{Std}(X) = \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\mathbb{P}(X \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma]) = \mathbb{P}(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$$

$$Z := \frac{X - \mu}{\sigma} \rightarrow \mathbb{P}(-1 \leq Z \leq 1)$$

$$\sim N(0, 1) \quad = \Phi(1) - \Phi(-1)$$

$$= 2\Phi(1) - 1$$

$$\approx 2 \times 0.8413 - 1$$

aus der Tabelle

$$\approx 0.6827 \approx \frac{2}{3}$$

$$\leftarrow 1 - \Phi(1)$$

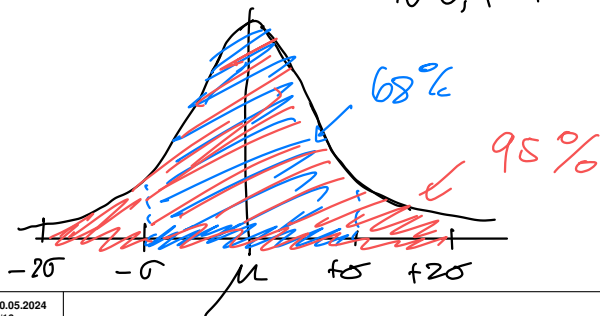
$$z := \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$\mathbb{P}(X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]) \stackrel{\downarrow}{=} \mathbb{P}(-2 \leq Z \leq 2)$$

$$= 2\Phi(2) - 1$$

$$\approx 2 \times 0,9772 - 1$$

$$\approx 0,9545$$



$$\mathbb{P}(X \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma])$$

$$\approx 0,9973$$

## Mehrdimensionale Verteilung

## Definition 11.3

Seien  $X_1, \dots, X_n$  mit  $X_i(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ . Die **gemeinsame Verteilungsfunktion** ist die Funktion  $F_{X_1, \dots, X_n}: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  definiert durch

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(\{X_1 \leq x_1\} \cap \dots \cap \{X_n \leq x_n\})$$

Die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  besitzen eine **gemeinsame Dichte**  $f_{X_1, \dots, X_n}$ , falls

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n.$$

Dichte

$$F_X(x) := \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

### Aussage 11.4

Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige Zufallsvariablen mit Dichten  $f_{X_1}, \dots, f_{X_n}$ . Dann ist die gemeinsame Dichte von  $X_1, \dots, X_n$  gegeben durch

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n).$$

$$\Rightarrow F_X(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1}(t_1) \cdots f_{X_n}(t_n) dt_1 \cdots dt_n$$

### Definition 11.4

Seien  $X_1, \dots, X_n$  Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte  $f_{X_1, \dots, X_n}$ . Dann ist die **Randdichte** von  $X_i$  gegeben durch

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n.$$

$$\begin{aligned} &= \left( \int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1}(t_1) dt_1 \right) \cdots \left( \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_n}(t_n) dt_n \right) \\ &= F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n). \end{aligned}$$

Entsprechend gilt

$$\mathbb{E}[X_i] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x_i f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_i f_{X_i}(x_i) dx_i$$

## Definition 11.5

Die **Kovarianz** zwei Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  ist definiert durch

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}(X))(y - \mathbb{E}(Y)) f_{X,Y}(x,y) dx dy$$

## Definition 11.6

Seien  $X_1, \dots, X_n$  Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte. Der Vektor  $(\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_n]) \in \mathbb{R}^n$  heißt **Erwartungswertvektor** und die Matrix

$$\text{cov}(X_i, X_j) := (\mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])])_{i,j=1}^n =$$

heißt **Kovarianzmatrix**.

$$\begin{pmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) & \dots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \text{Var}(X_2) & \dots & \text{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \text{Cov}(X_n, X_2) & \dots & \text{Var}(X_n) \end{pmatrix}$$

## Mehrdimensionale Normalverteilung

## Definition 11.7

Sei  $\mu \in \mathbb{R}^n$  und  $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische, positiv definite Matrix. Ein Zufallsvektor  $X \in \mathbb{R}^n$  hat eine **multivariate Normalverteilung** mit Parametern  $\mu$  und  $\Sigma$ , falls die Dichte von  $X$  gegeben ist durch

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)}$$

$e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)} \Rightarrow e^{-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$   
 $\Rightarrow \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sigma_1^2 \dots \sigma_n^2}$

## Aussage 11.5

Ist die Zufallsvektor  $X \in \mathbb{R}^n$  mehrdimensional normalverteilt, so sind seine Komponenten  $X_1, \dots, X_n$  genau dann unabhängig, wenn die Kovarianzmatrix  $\Sigma$  diagonal ist.

Hinweis:  $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu) = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}$

# Satz der großen Zahlen

## Theorem 1

Seien  $X_1, X_2, \dots$  unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit  $\mathbb{E}[X_i] = \mu$  und  $\mathbb{V}[X_i] = \sigma^2$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \mu,$$

in dem Sinne, dass für alle  $\varepsilon > 0$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right| > \varepsilon \right) = 0.$$

$$\sum_{i=1}^n X_i \approx n \mathbb{E}[X] \Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \approx \mathbb{E}[X]$$



$$I = \int_a^b f(x) dx, \quad f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}.$$

$N = \#$  Realisierung

$$\vec{U} = (U_1, \dots, U_N), \quad U_i \sim \text{Unif}([a, b]), \quad f_{U_i}(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$\vec{X} = (X_1, \dots, X_N), \quad X_i := f(U_i), \quad \mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{I}{b-a}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^N X_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

# Zentraler Grenzwertsatz

## Theorem 2

Seien  $X_1, X_2, \dots$  unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit  $\mathbb{E}[X_i] = \mu$  und  $\mathbb{V}[X_i] = \sigma^2$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu}{\sigma} \leq x \right) = \Phi(x),$$

wobei  $\Phi$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n X_i}_{\text{Satz der großen Zahlen}} \approx n \mathbb{E}[X] + \underbrace{\sqrt{n} \cdot \sigma \cdot Z}_{\text{Zentraler Grenzwertsatz}}, \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$