Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen
(Tutorium 1)

Vorlesungswoche: 22. – 26. April 2024 DG $x'(t) = a(t)\,x(t)$ Sommersemester 2024

Ansatz $x(t) := c\, e^{A(t)}$

Aufgabe 1

Finde alle Lösungen $x(t)$ für die folgengen Differentialgleichungen:

(a) $x'(t) - t^{-2}\,x(t) = 0$, a) $x'(t) = t^{-2}\,x(t)$ $a(t) = t^{-2}$ $A(t) = -t^{-1}$
$x(t) = c\, e^{-t^{-1}}$ $c \in \mathbb{R}$

(b) $\frac{x'(t)}{\sin(t)} = x(t)$, b)

(c) $(1+t)\,x'(t) + \frac{2x(t)}{1-t} = 0$.

Aufgabe 2

Löse die folgenden Anfangswertsprobleme mit Hilfe der *Variation der Konstanten*:

(a) $x'(t) - x(t)\sin(t) = \mathrm{e}^{t-\cos(t)}$, $x(0) = 1$;

(b) $x'(t) + 2t\,x(t) = t^{-1}\,\mathrm{e}^{-t^2}$, $x(\mathrm{e}) = 0$.

Aufgabe 3

Das für Menschen schädliche radioaktive Cäsium-137 wird als Nebenprodukt radioaktiven Zerfalls in die Atmosphäre entlassen. Wir nehmen an, dass das Cäsium kontinuierlich mit einer konstanten Rate β entlassen wird. (Über ein Zeitintervall Δt wird $\beta\,\Delta t$ Cäsium entlassen.) Dort zerfällt das Cäsium radioaktiv mit einer Zerfallskonstanten von etwa 0,023. (Über einen kleinen Zeitraum Δt zerfällt etwa ein Anteil von $0{,}023\,\Delta t$ des vorhandenen Cäsiums.) Stelle die zugehörige Differentialgleichung auf, und zeige, dass sich in der Atmosphäre schließlich ein stabiler Vorrat von Cäsium-137 ansammelt.

任务 3 对人体有害的放射性铯-137 作为放射性衰变的副产品释放到大气中。
我们假设铯以恒定的速率持续释放。
(在 Δt Δt 的时间间隔内，铯会被释放出来。) 在这里，铯会发生放射性衰变，衰变常数约为 0.023。
(在一小段Δt时间内，大约有 0.023 Δt的铯衰变) 建立相应的微分方程，并证明铯-137 的稳定供应最终会在大气中积累。

linear/nichtlinear:

↳ $x(t)$ ist nicht Teil eines Verkettung

↳ $x(t)$ ist Teil eines Verkettung

↳ Nicht alle Komponente enthaltend $x(t)$

homogen/inhomogen DGL

↳ Alle Komponente aus DGL enthalten $x(t)$

n-ter Ordnung

linear homogen DGL 1. Ordnung

$$\boxed{x'(t) = a(t)\,x(t)} \Rightarrow x(t) = c\,e^{\int a(t)\,dt} \quad c \in \mathbb{R} \quad = c\,e^{A(t)}$$

Aufgabe 1

Finde alle Lösungen $x(t)$ für die folgengen Differentialgleichungen:

(a) $x'(t) - t^{-2}\,x(t) = 0$,

(b) $\frac{x'(t)}{\sin(t)} = x(t)$,

(c) $(1+t)\,x'(t) + \frac{2x(t)}{1-t} = 0$.

a) $x'(t) = t^{-2}x(t)$

$a(t) = t^{-2}$ $\quad A(t) = \int t^{-2}\,dt = -t^{-1}$

$x(t) = c \cdot e^{-t^{-1}}$

b) $x'(t) = \sin(t)\,x(t)$

$a(t) = \sin(t)$ $\quad A(t) = \int \sin(t)\,dt = -\cos(t)$

$x(t) = c \cdot e^{-\cos(t)}$

c) $(1+t)\,x'(t) = -\frac{2x(t)}{1-t} \Rightarrow x'(t) = -\frac{2}{1-t^2}\,x(t)$

$a(t) = \frac{2}{t^2-1}$ $\quad A(t) = \int \frac{2}{(t+1)(t-1)}\,dt = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt$

$= \ln|t-1| - \ln|t+1|$

$x(t) = c \cdot e^{\ln|t-1| - \ln|t+1|} = c\,e^{\frac{\ln|t-1|}{\ln|t+1|}}$

NR: Zuhaltemethode

$$\frac{2}{(t+1)(t-1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} \qquad A = \frac{2}{1+1} \qquad B = \frac{2}{-1-1} = -1$$

Linear inhomogen DGL 1. Ordnung

$x'(t) = a(x)\,x(t) + \underbrace{b(t)}_{}$ ↳ inhomogengewicht

Aufgabe 2

Löse die folgenden Anfangswertsprobleme mit Hilfe der *Variation der Konstanten*:

(a) $x'(t) - x(t)\sin(t) = e^{t-\cos(t)}, \qquad x(0) = 1;$

(b) $x'(t) + 2t\,x(t) = t^{-1}e^{-t^2}, \qquad x(e) = 0.$

a) 1 Schritte: Zugehörige homogen DGL lösen $(b(t)=0)$

$x'(t) = \sin(t)\,x(t)$

$x(t) = c \cdot e^{-\cos(t)}$

$x'(t) = \underbrace{\sin(t)}_{a(t)} x(t) + \underbrace{e^{t-\cos(t)}}_{b(t)}$

$x_H'(t) = \sin(t)\,x_H(t) \Rightarrow x_H(t) = c \cdot e^{-\cos(t)}$

2 Schritte: Variation der Kostanten (VdK)

2.1) Ansatz $x_p(t) = c(t)\,e^{-\cos(t)}$

2.2) Ableitung:

$x_p'(t) = c'(t)\,e^{-\cos(t)} + c(t)\,e^{-\cos(t)} \cdot \sin(t)$

2.3) Ergebnisse aus 2.1) und 2.2) in der inhomogene DGL einsetzen

$x_p'(t) = \sin(t)\,x_p(t) + e^{t-\cos(t)}$

$c'(t)e^{-\cos(t)} + c(t)\sin(t)e^{-\cos(t)} = \sin(t)\,c(t)\,e^{-\cos(t)} + e^{t-\cos(t)}$

$c'(t)e^{-\cos(t)} = e^{t-\cos(t)}$

$c'(t) = e^{t}$

$c(t) = e^{t} + c$

2.4) Partikuläre Lösung: $x_p(t) = c(t) \cdot e^{-\cos t} = e^{t-\cos t}$

3. Allgemeine Lösung: $\boxed{x(t) = x_H(t) + x_p(t)} = ce^{-\cos(t)} + e^{t-\cos t}$

Geg: $x(0) = 1$ Anfangswert

$x(0) = ce^{-\cos(0)} + e^{-\cos(0)} = ce^{-1} + e^{-1} = 1$

$\frac{c+1}{e} = 1$

$c = e - 1$

$x(t) = (e-1)e^{-\cos t} + e^{t-\cos t}$

Maximaler Definitionsraum

a) was darf man für t in DGL einsetzen? M_1

b) was darf man für t in die Lösung einsetzen? M_2

c) Schnittmenge $M_1 \cap M_2$

4) Zusammenhängende in die Teilintervall zu bilden

5) Falls Anfangswert (Aw) $x(t_0)=x_0$ gegeben

$\Rightarrow$ Das Teilintervall, das t_0 existiert, ist D_{max}

(b) $x'(t) + 2t\,x(t) = t^{-1}\,\mathrm{e}^{-t^2}, \qquad x(\mathrm{e}) = 0.$

$$x'(t) = -2t\,x(t) + t^{-1}e^{-t^2}$$

1) Homo DGL: $x_H'(t) = -2t\,x_H(t) \Rightarrow x_H(t) = c\,e^{-t^2}$

2) Vdk: 2.1) $x_p(t) = c(t)e^{-t^2}$

2.2) $x'_p(t) = c'(t)e^{-t^2} + c(t)\cdot e^{-t^2}\cdot(-2t)$

2.3)
$$c'(t)e^{-t^2} + c(t)\cdot e^{-t^2}\cdot(-2t) = -2t\cdot c(t)e^{-t^2} + t^{-1}e^{-t^2}$$
$$c'(t)e^{-t^2} = t^{-1}e^{-t^2}$$
$$c'(t) = t^{-1} \qquad c(t) = \ln|t|$$

$$x_p(t) = \ln|t|\,e^{-t^2}$$

3. Allgemein Lsg: $x(t) = x_H(t) + x_p(t) = c\,e^{-t^2} + \ln|t|\,e^{-t^2}$

Aw $x(e) = c\,e^{-e^2} + \ln e\cdot e^{-e^2} = 0$

$$\Rightarrow c = -\ln e = -1$$

$$x(t) = -e^{-t^2} + \ln|t|\,e^{-t^2}$$

Max Def. bereichen: 1) $M_1 = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

2) $M_2 = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

3) $M_1 \cap M_2 = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

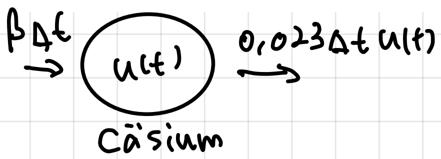
4) $I_1 =]-\infty, 0[\qquad I_2 =]0, \infty[$

5) $e \in I_2 \rightarrow D_{max} =]0, \infty[$

Aufgabe 3

Das für Menschen schädliche radioaktive Cäsium-137 wird als Nebenprodukt radioaktiven Zerfalls in die Atmosphäre entlassen. Wir nehmen an, dass das Cäsium kontinuierlich mit einer konstanten Rate β entlassen wird. (Über ein Zeitintervall Δt wird $\beta\,\Delta t$ Cäsium entlassen.) Dort zerfällt das Cäsium radioaktiv mit einer Zerfallskonstanten von etwa 0,023. (Über einen kleinen Zeitraum Δt zerfällt etwa ein Anteil von $0{,}023\,\Delta t$ des vorhandenen Cäsiums.) Stelle die zugehörige Differentialgleichung auf, und zeige, dass sich in der Atmosphäre schließlich ein stabiler Vorrat von Cäsium-137 ansammelt.

任务 3 对人体有害的放射性铯-137 作为放射性衰变的副产品释放到大气中。
我们假设铯以恒定的速率持续释放。
(在 Δt Δt 的时间间隔内，铯会被释放出来。) 在这里，铯会发生放射性衰变，衰变常数约为 0.023。
(在一小段Δt时间内，大约有 0.023 Δt的铯衰变) 建立相应的微分方程，并证明铯-137 的稳定供应最终会在大气中积累。



$$u(t+\Delta t) = u(t) + \beta\Delta t - 0{,}023\,\Delta t\, u(t)$$

$$u(t+\Delta t) - u(t) = \beta\Delta t - 0{,}023\,\Delta t\, u(t) \quad \Big| :\Delta t$$

$$\frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t} = \beta - 0{,}023\, u(t)$$

$$\xrightarrow{\Delta t \to 0} \quad u'(t) = \beta - 0{,}023\, u(t)$$

$$= \underbrace{-0{,}023}_{a(t)}\, u(t) + \underbrace{\beta}_{b(t)}$$