Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. Nikolas Tapia, Claudia Drygala

SoSe 2024
Probeklausur

Klausur

Stochastik für Informatiker 6LP

Vorname: .... Name: ....

Matrikel-Nr. .... Studiengang: ....

Füllen Sie bitte zuerst dieses Deckblatt vollständig und leserlich aus. Vergewissern Sie sich, dass das Aufgabenblatt vollständig ist.

Schreiben Sie auf jedes von Ihnen benutzte Blatt Papier sofort Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Beginnen Sie bitte jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.

Bei der Klausur sind 50 Punkte erreichbar. Mit 25 Punkten ist die Klausur bestanden. Als Hilfsmittel dürfen – wie angekündigt – ein beidseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt und ein nicht-programmierbarer Taschenrechner benutzt werden. Es sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.

Die Tabelle der Standardnormalverteilung befindet sich am Ende der Klausur.

Die Lösungen sind leserlich und verständlich auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen, wenn es nicht anders in der Aufgabenstellung vorgegeben wird.

Geben Sie immer den vollständigen Rechenweg an. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

Aufgabe 1 **10=1+3+3+1.5+1.5 Punkte**

Es seien X und Y Zufallsvariablen, deren gemeinsame Verteilung gemäß folgender Tabelle gegeben ist:

$X \setminus Y$	0	1	2
-15	0	$\frac{2}{36}$	0
-1	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	0
0	$\frac{1}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{1}{36}$

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X+Y=0)$.

(b) Berechnen Sie die Randverteilungen von X und Y.

(c) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ und $\mathbb{E}[XY]$. Bestimmen Sie anschließend die Kovarianz $\mathrm{Cov}(X,Y)$. Entscheiden Sie mithilfe der Kovarianz, ob X und Y korreliert sind.

(d) Sind X und Y unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem kurzen Beweis oder einem Gegenbeispiel.

(e) Berechnen Sie die bedingte Verteilung von X gegeben $Y=0$.

Aufgabe 2 **10=2+2+4+2 Punkte**

Es sei eine homogene Markov-Kette auf dem Zustandsraum $S=\{1,2,3\}$ mit der folgenden Übergangsmatrix gegeben:

$$P=(p_{i,j})_{i,j\in S}:=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie den Übergangsgraphen der Markov-Kette dar.

(b) Ist die Markov-Kette irreduzibel? Ist sie aperiodisch? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Bestimmen Sie eine invariante Verteilung der Markov-Kette. Ist diese eindeutig?

(d) Die Kette startet im Zustand 3, d.h. $\mathbb{P}(X_0=3)=1$. Bestimmen Sie

$$\mathbb{P}(X_2=2) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_n].$$

Aufgabe 3 **10=2.5+2+4.5+1 Punkte**

Eine Fluggesellschaft plant den Verkauf eines Fluges mit einem Flugzeug mit 180 Sitzplätzen. Jedes verfügbare Ticket wird von Kunden gekauft, die jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 9/10 unabhängig voneinander am Reisetag ihr Ticket beanspruchen und somit zu Passagieren werden.

(a) Sei Y die zufällige Anzahl an Passagieren. Wie viele Flugscheine N muss die Fluggesellschaft verkaufen, damit Y im Mittel der Zahl der verfügbaren Plätze im Flugzeug entspricht? Bestimmen Sie dazu die Verteilungsfunktion von Y und deren Erwartungswert $\mathbb{E}[Y]$.

Für die Beantwortung der nachfolgenden Fragen setzen Sie für N den Wert ein, den Sie in in Teilaufgabe (a) bestimmt haben. Falls Sie (a) nicht lösen konnten, dürfen Sie N als Parameter ohne konkreten Wert verwenden.

(b) Berechnen Sie die Varianz und die Standardabweichung von Y.

(c) Dank der Raffinesse eines Konstrukteurs verfügt das Flugzeug über eine Anzahl $z \geq 1$ zusätzlicher Sitze. Verwenden Sie den zentralen Grenzwertsatz, um die Wahrscheinlichkeit einer Überbuchung zu approximieren, wobei Sie auch diese zusätzlichen Sitzplätze z berücksichtigen. Dabei ist mit einer Überbuchung gemeint, dass das Flugzeug mehr Passagiere als Sitzplätze hat.

(d) Sei nun die Anzahl an zusätzlichen Plätzen gegeben als $z = 12$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit einer Überbuchung mithilfe der Approximation aus (d). Runden Sie das Ergebnis auf 4 Nachkommastellen.

Aufgabe 4 **10=2+4+2+2 Punkte**

Eine kontinuierliche Zufallsvariable X habe die folgende Dichte mit $c \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2c}{3}, & \text{falls } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

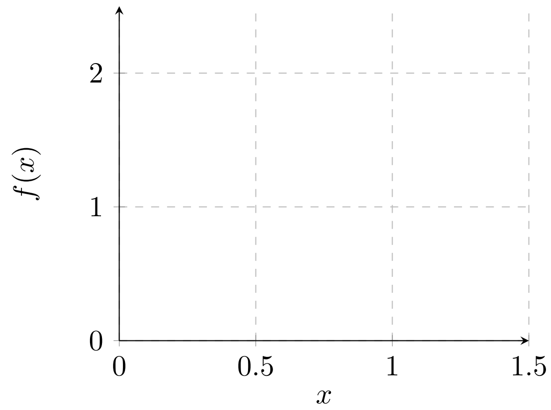
(a) Bestimmen Sie den Wert der Konstanten c.

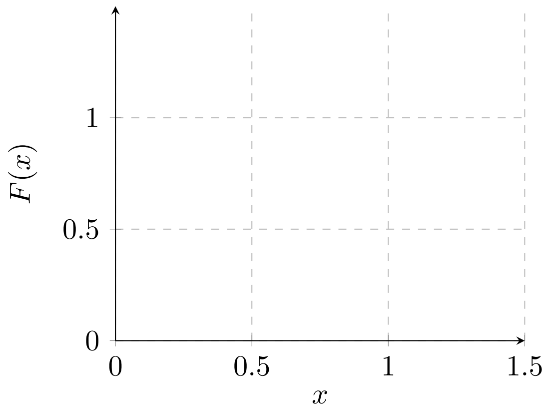
Nutzen Sie für die nachfolgenden Berechnungen den in (a) berechneten Wert für c. Falls Sie (a) nicht gelöst haben, dürfen Sie c weiterhin als Konstante ohne konkreten Wert nutzen.

(b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X.

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

(d) Skizzieren Sie in die nachfolgenden Koordinatensysteme die Dichte $f(x)$ und die Verteilungsfunktion $F(x)$.





Aufgabe 5 **10=3.5+2+4.5 Punkte**

Zwei Säcke mit Äpfeln sind vom Aussehen und vom Gewicht identisch, aber der erste Sack (S_1) enthält 2 faule Äpfel und 8 gute Äpfel, während der zweite Sack (S_2) 6 faule und 4 gute Äpfel enthält. Sie wählen einen Sack unter fairen Bedingungen, d.h. $\mathbb{P}(S_1) = \mathbb{P}(S_2) = \frac{1}{2}$ und nehmen einen Apfel heraus, untersuchen ihn und legen ihn nicht wieder hinein. Anschließend nehmen Sie aus demselben Sack noch einen zweiten Apfel.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der erste entnommene Apfel faul ist.

(b) Nehmen wir an, dass der erste gezogene Apfel faul ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Apfel aus dem zweiten Sack stammt.

(c) Nehmen wir an, dass der erste gezogene Apfel faul ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dass der zweite Apfel ebenfalls faul ist.

Gesamtpunktzahl: 50 Punkte

Aufgabe 1 **10=1+3+3+1.5+1.5 Punkte**

Es seien X und Y Zufallsvariablen, deren gemeinsame Verteilung gemäß folgender Tabelle gegeben ist:

$X \setminus Y$	0	1	2
-15	0	$\frac{2}{36}$	0
-1	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	0
0	$\frac{1}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{1}{36}$

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X+Y=0)$.

(b) Berechnen Sie die Randverteilungen von X und Y.

(c) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ und $\mathbb{E}[XY]$. Bestimmen Sie anschließend die Kovarianz $\mathrm{Cov}(X,Y)$. Entscheiden Sie mithilfe der Kovarianz, ob X und Y korreliert sind.

(d) Sind X und Y unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem kurzen Beweis oder einem Gegenbeispiel.

(e) Berechnen Sie die bedingte Verteilung von X gegeben $Y=0$.

a) $\mathbb{P}(X+Y)=0 = \mathbb{P}(X=0, Y=0) + \mathbb{P}(X=-1, Y=1) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{1}{12}$

b) $\mathbb{P}(X=-15) = \frac{2}{36}$ $\quad \mathbb{P}(X=-1) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ $\quad \mathbb{P}(X=0) = \frac{28}{36} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$

$\mathbb{P}(Y=0) = \frac{5}{36}$ $\quad \mathbb{P}(Y=1) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$ $\quad \mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{36}$

c) $\mathbb{E}[X] = -15 \cdot \frac{2}{36} - 1 \cdot \frac{6}{36} + 0 = -\frac{36}{36} = -1$

$\mathbb{E}[Y] = \frac{30}{36} + \frac{2}{36} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$

$\mathbb{E}[XY] = -15 \cdot \frac{2}{36} - 1 \cdot \frac{2}{36} = -\frac{32}{36} = -\frac{8}{9}$

$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY) - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] = -\frac{8}{9} + \frac{8}{9} = 0$

$\Rightarrow$ unkorreliert

d) Nein $\quad \mathbb{P}(X=-15, Y=0) = 0 \neq \mathbb{P}(X=-15) \cdot \mathbb{P}(Y=0) = \frac{2}{36} \cdot \frac{5}{36}$

e) $\mathbb{P}(X=-15 \mid Y=0) = \frac{\mathbb{P}(X=-15, Y=0)}{\mathbb{P}(Y=0)} = 0$

$\mathbb{P}(X=-1 \mid Y=0) = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{4}{5}$

$\mathbb{P}(X=0 \mid Y=0) = \frac{1}{5}$

Aufgabe 2 **10=2+2+4+2 Punkte**

Es sei eine homogene Markov-Kette auf dem Zustandsraum $S = \{1, 2, 3\}$ mit der folgenden Übergangsmatrix gegeben:

$$P = (p_{i,j})_{i,j\in S} := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie den Übergangsgraphen der Markov-Kette dar.

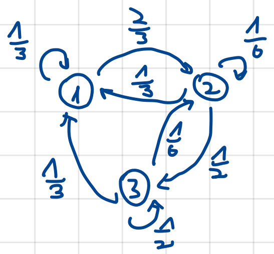
(b) Ist die Markov-Kette irreduzibel? Ist sie aperiodisch? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Bestimmen Sie eine invariante Verteilung der Markov-Kette. Ist diese eindeutig?

(d) Die Kette startet im Zustand 3, d.h. $\mathbb{P}(X_0 = 3) = 1$. Bestimmen Sie

$$\mathbb{P}(X_2 = 2) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n].$$

a)



b) Es gibt Pfade zwischen allen Zuständen und die Markov-Kette ist irreduzibel

aperiodisch, da $ggT(\underbrace{\{n \in \mathbb{N} \mid p_{ii}^{(n)} > 0\}}_{\ni 1}) = 1$

c)

$$P^T - I = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2v_1 = v_2 + v_3 \\ 4v_1 + v_3 = 5v_2 \\ v_2 = v_3 \end{cases} \Rightarrow \quad v_1 = v_2 = v_3 = \alpha$$

$$\sum v_i = 3\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow \pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ist die eindeutige invariante Verteilung der Markov-Ketten

da irreduzible Markov-Ketten auf endlichen Zustandsräume eine eindeutige invariante Verteilung besitzt

d)

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{?}{3} & \frac{?}{3} \end{pmatrix}$$

$$(0 \;\; 0 \;\; 1)P^2 = (0 \;\; 0 \;\; 1) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{?}{3} & \frac{?}{3} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{1}{3}$$

Da die Markov-Ketten irreduzibel $\underbrace{\text{und aperiodisch}}_{\text{und invariante Verteilung eindeutige bestimmt}}$, $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = i) = \pi_i = \frac{1}{3} \quad \forall i \in S$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{3} i \cdot \mathbb{P}(X_n = i) = \frac{1}{3} \cdot (1 + 2 + 3) = 2$$

Aufgabe 3 **10=2.5+2+4.5+1 Punkte**

Eine Fluggesellschaft plant den Verkauf eines Fluges mit einem Flugzeug mit 180 Sitzplätzen. Jedes verfügbare Ticket wird von Kunden gekauft, die jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 9/10 unabhängig voneinander am Reisetag ihr Ticket beanspruchen und somit zu Passagieren werden.

(a) Sei Y die zufällige Anzahl an Passagieren. Wie viele Flugscheine N muss die Fluggesellschaft verkaufen, damit Y im Mittel der Zahl der verfügbaren Plätze im Flugzeug entspricht? Bestimmen Sie dazu die Verteilungsfunktion von Y und deren Erwartungswert $\mathbb{E}[Y]$.

$$Y \sim Bin\left(N, \frac{9}{10}\right)$$

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{9}{10} N = 180 \quad \Rightarrow N = 200$$

Für die Beantwortung der nachfolgenden Fragen setzen Sie für N den Wert ein, den Sie in in Teilaufgabe (a) bestimmt haben. Falls Sie (a) nicht lösen konnten, dürfen Sie N als Parameter ohne konkreten Wert verwenden.

(b) Berechnen Sie die Varianz und die Standardabweichung von Y.

(c) Dank der Raffinesse eines Konstrukteurs verfügt das Flugzeug über eine Anzahl $z \geq 1$ zusätzlicher Sitze. Verwenden Sie den zentralen Grenzwertsatz, um die Wahrscheinlichkeit einer Überbuchung zu approximieren, wobei Sie auch diese zusätzlichen Sitzplätze z berücksichtigen. Dabei ist mit einer Überbuchung gemeint, dass das Flugzeug mehr Passagiere als Sitzplätze hat.

(d) Sei nun die Anzahl an zusätzlichen Plätzen gegeben als $z = 12$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit einer Überbuchung mithilfe der Approximation aus (d). Runden Sie das Ergebnis auf 4 Nachkommastellen.

b) $$\mathbb{V}[Y] = Np(1-p) = 200 \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} = 18$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{18}$$

c) $$\mathbb{P}(Y > 180 + z) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 180 + z)$$

$$= 1 - \Phi\left(Z \leq \frac{180 + z - 180}{\sqrt{18}}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(Z \leq \frac{z}{\sqrt{18}}\right)$$

d) $$\mathbb{P}(Y > 180 + 12) = 1 - \Phi\left(Z \leq \frac{12}{3\sqrt{2}}\right) = 1 - \Phi(Z \leq 2\sqrt{2})$$

$$= 1 - \Phi(Z \leq 2.828)$$

$$= 1 - 0.9977 = 0.0023$$

Aufgabe 4 **10=2+4+2+2 Punkte**

Eine kontinuierliche Zufallsvariable X habe die folgende Dichte mit $c \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2c}{3}, & \text{falls } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

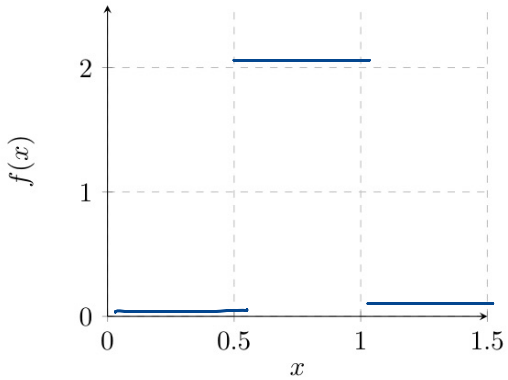
(a) Bestimmen Sie den Wert der Konstanten c.

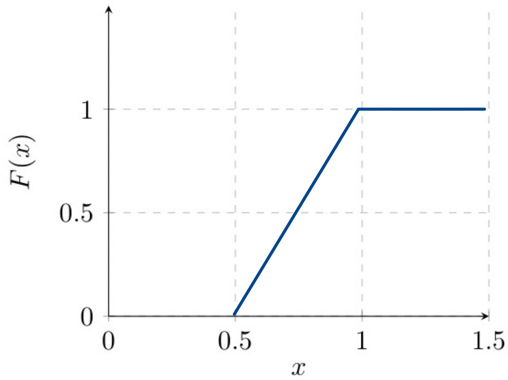
Nutzen Sie für die nachfolgenden Berechnungen den in (a) berechneten Wert für c. Falls Sie (a) nicht gelöst haben, dürfen Sie c weiterhin als Konstante ohne konkreten Wert nutzen.

(b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X.

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

(d) Skizzieren Sie in die nachfolgenden Koordinatensysteme die Dichte $f(x)$ und die Verteilungsfunktion $F(x)$.





a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{2}{3}c\,dx = \frac{2}{3}cx\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{3}c = 1 \Rightarrow c = 3$

b) $F(x) = \begin{cases} \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{2}{3}c\,dt = 2\cdot(x-\frac{1}{2}) & \text{für } x \in [\frac{1}{2},1] \\ 0 & \text{für } x \in]-\infty,\frac{1}{2}[\\ 1 & \text{für } x \in]1,\infty[\end{cases}$

c) $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x\cdot 2\,dx = x^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{3}{4}$

Aufgabe 5 **10=3.5+2+4.5 Punkte**

Zwei Säcke mit Äpfeln sind vom Aussehen und vom Gewicht identisch, aber der erste Sack (S_1) enthält 2 faule Äpfel und 8 gute Äpfel, während der zweite Sack (S_2) 6 faule und 4 gute Äpfel enthält. Sie wählen einen Sack unter fairen Bedingungen, d.h. $\mathbb{P}(S_1) = \mathbb{P}(S_2) = \frac{1}{2}$ und nehmen einen Apfel heraus, untersuchen ihn und legen ihn nicht wieder hinein. Anschließend nehmen Sie aus demselben Sack noch einen zweiten Apfel.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der erste entnommene Apfel faul ist.

(b) Nehmen wir an, dass der erste gezogene Apfel faul ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Apfel aus dem zweiten Sack stammt.

(c) Nehmen wir an, dass der erste gezogene Apfel faul ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dass der zweite Apfel ebenfalls faul ist.

a) Sei ZV X_1, X_2 den 1. und 2. gezogenen Apfel mit Werte $\{f, g\}$

$$\mathbb{P}(X_1 = f \mid S_1 = 1) = \frac{2}{10} \qquad \mathbb{P}(X_1 = g \mid S_1 = 1) = \frac{8}{10}$$

$$\mathbb{P}(X_1 = f \mid S_2 = 1) = \frac{6}{10} \qquad \mathbb{P}(X_1 = g \mid S_2 = 1) = \frac{4}{10}$$

$$\mathbb{P}(S_1 = 1) = \mathbb{P}(S_2 = 1) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(X_1 = f) = \mathbb{P}(X_1 = f \mid S_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(S_1 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = f \mid S_2 = 1)\mathbb{P}(S_2 = 1)$$

$$= \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$$

b)

$$\mathbb{P}(S_2 = 1 \mid X_1 = f) = \frac{\mathbb{P}(S_2 = 1, X_1 = f)}{\mathbb{P}(X_1 = f)} = \frac{\mathbb{P}(X_1 = f \mid S_2 = 1) \cdot \mathbb{P}(S_2 = 1)}{\mathbb{P}(X_1 = f)}$$

$$= \frac{\cancel{\frac{6}{10}}^{3}_{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{4}$$

c) z.z $\mathbb{P}(X_2 = f \mid X_1 = f) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = f, X_2 = f)}{\mathbb{P}(X_1 = f)}$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_1 = f, X_2 = f \mid S_1 = 1)\mathbb{P}(S_1 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = f, X_2 = f \mid S_2 = 1)\mathbb{P}(S_2 = 1)}{\mathbb{P}(X_1 = f)}$$

$$= \frac{\frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{5}}$$

$$= \frac{\frac{\cancel{32}\ 16}{\cancel{182}\ 36}}{\frac{3}{5}} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

Verteilungstabelle der Standardnormalverteilung:
Wertetabelle der Verteilungsfunktion $\Phi(z_\alpha) = \mathbb{P}(Z \leq z_\alpha)$ der Standardnormalverteilung, d.h. für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable $Z \sim N(0,1)$. Für negative Werte von z_α gilt: $\Phi(z_\alpha) = 1 - \Phi(-z_\alpha)$.

z_α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.60	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.70	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.80	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.90	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.00	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.10	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.20	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.30	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.40	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.50	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.60	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.70	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.80	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.90	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.00	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.10	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.20	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.30	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.40	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998