Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen
(Tutorium 12)

Vorlesungswoche: 8. – 12. Juli 2024 Sommersemester 2024

Aufgabe 33

Gegeben ist die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) - \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) = 0.$$

(a) Finde alle Lösungen der Form $u(x,t) = X(x)\,T(t)$.

(b) Berechne eine Lösung mit $u(x,0) = 2\mathrm{e}^{3x} + 5\mathrm{e}^{4x}$.

Aufgabe 34

Gegeben ist die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\, u(x,y) - 2\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\, u(x,y) = 8u(x,y).$$

Ermittele alle Lösungen der Form $u(x,y) = X(x) + Y(y)$.

Aufgabe 35

Bestimme eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial}{\partial t}\, u(x,t) + x\,\frac{\partial}{\partial x}\, u(x,t) = 0, \quad u(x,0) = 5x^2, \qquad x > 0,\ t \in \mathbb{R}.$$

1) DGL
2) Ansatz
3) Einsetzen
4) Seperation
5) gewöhnliche DGLs lösen
6) allg. Lsg zusammensetzen

Aufgabe 33

Gegeben ist die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = 0.$$

(a) Finde alle Lösungen der Form $u(x,t) = X(x)\,T(t)$.

(b) Berechne eine Lösung mit $u(x,0) = 2e^{3x} + 5e^{4x}$.

(a)

2 $\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = X(x)T'(t) \qquad \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) = X'(x)T(t)$

3 $X(x)T'(t) = X'(x)\,T(t)$

4 $\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X'(t)}{X(t)} = \gamma$

5 $\begin{cases} T'(t) = \gamma\, T(t) \\ X'(x) = \gamma\, X(x) \end{cases} \qquad \begin{matrix} T_\gamma(t) = B_\gamma e^{\gamma t} \\ X_\gamma(t) = A_\gamma e^{\gamma x} \end{matrix}$

6 $u_\gamma(x,t) = X_\gamma(t)\,T_\gamma(t) = C_\gamma\, e^{\gamma(t+x)} \qquad C_\gamma \in \mathbb{R} \qquad \text{mit } C_\gamma = A_\gamma B_\gamma$

$u(x,t) = \sum_\gamma u_\gamma(x,t) = \sum_\gamma C_\gamma e^{\gamma(t+x)}$

(b) $u_\gamma(x,0) = C_\gamma e^{\gamma x}$

$u(x,0) = 2e^{3x} + 5e^{4x} = \sum_\gamma C_\gamma e^{\gamma x}$

$\Rightarrow \quad C_3 = 2\,, \quad C_4 = 5\,, \quad C_\gamma = 0 \;\; \forall \gamma \notin \{3,4\}$

$\Rightarrow \quad u(t,x) = 2e^{3(t+\gamma)} + 5e^{4\gamma(t+x)}$

Aufgabe 34

Gegeben ist die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x,y) - 2\,\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) = 8u(x,y).$$

Ermittele alle Lösungen der Form $u(x,y) = X(x) + Y(y)$.

2 $\quad \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) = X'(x) \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) = Y''(y)$

3 $\quad X'(x) - 2Y''(y) = 8X(x) + 8Y(y)$

4 $\quad X'(x) - 8X(x) = 2Y''(y) + 8Y(y) := \gamma$

5 $\quad \begin{cases} X'(x) - 8X(x) = \gamma \\ Y''(y) + 4Y(y) = \frac{1}{2}\gamma \end{cases} \qquad \begin{cases} P(\lambda) = \lambda - 8 = 0 & \lambda = 8 & X_\gamma(x) = A_\gamma e^{8x} \\ P(\lambda) = \lambda^2 + 4 = 0 & \lambda_{1,2} = \pm 2i & Y_\gamma(y) = B_\gamma \cos(2y) + C_\gamma \sin(2y) \end{cases}$

Resonanzansatz: $\quad X_p(x) = D \overset{DGL}{\Rightarrow} -8D = \gamma \qquad D = -\frac{\gamma}{8}$

$\qquad Y_{p(y)} = E \overset{DGL}{\Rightarrow} 4E = \frac{1}{2}\gamma \qquad E = \frac{1}{8}\gamma$

6 allg. Lsg $\quad X_\gamma(x) = Ae^{8x} - \frac{\gamma}{8} \qquad Y_\gamma(y) = B\cos(2y) + C\sin(2y) + \frac{\gamma}{8}$

$$u_\gamma(x,y) = X_\gamma(x) + Y_\gamma(y)$$

$$= A_\gamma e^{8x} + B_\gamma \cos(2y) + C_\gamma \sin(2y)$$

$$u(x,y) = \sum_\gamma \left(A_\gamma e^{8x} + B_\gamma \cos(2y) + C_\gamma \sin(2y) \right)$$

Aufgabe 35

Bestimme eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) + x\,\frac{\partial}{\partial x} u(x,t) = 0, \quad u(x,0) = 5x^2, \qquad x > 0,\ t \in \mathbb{R}.$$

Seperationsansatz: $u(x,t) = X(x)T(t)$

$X(x)T'(t) + x \cdot X'(x)T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{xX'(x)}{X(x)} = -\frac{T'(t)}{T(t)} = \gamma$

$f'(t) = a(t)f(t)$

$f(t) = ce^{\int a(t)dt}$

$\begin{cases} T'(t) = -\gamma T(t) \\ X'(t) = \frac{1}{x}\gamma X(x) \end{cases} \qquad \begin{aligned} T_\gamma(t) &= A_\gamma e^{-\gamma t} \\ X_\gamma(t) &= B_\gamma e^{\int \frac{\gamma}{x} dx} = B_\gamma e^{\gamma \cdot \ln|x|} = B_\gamma \cdot x^\gamma \end{aligned}$

$u_\gamma(t,x) = T_\gamma(t)X_\gamma(x) = \underbrace{A_\gamma B_\gamma}_{C_\gamma} x^\gamma e^{-\gamma t} \qquad C_\gamma \in \mathbb{R}$

$u(t,x) = \sum_\gamma C_\gamma x^\gamma e^{-\gamma t}$

$u(0,x) = 5x^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 2,\ C_2 = 5$

$\qquad C_\gamma = 0 \quad \gamma \notin \{2\}$

$u(t,x) = 5x^2 e^{-2t}$