Tutorium 4

Aufgabe 1: Wörter

Seien $\Sigma \triangleq \{\, a,\ b,\ c \,\}$ und $\Sigma' \triangleq \{\, aa,\ bb \,\}$.

1.a) Sind Σ und Σ' jeweils Alphabete?

Lösung

Ja, denn Σ und Σ' sind beides endliche nicht-leere Mengen.

/Lösung

1.b) *Gib an:* $|abbac|, |\varepsilon|, (accba)_4, \#(\Sigma^*), ((abc) \cdot (bb)) \cdot (ac)$ für das Alphabet Σ

Lösung

$|abbac| = 5, |\varepsilon| = 0, (accba)_4 = b, \#(\Sigma^*) = \infty, ((abc) \cdot (bb)) \cdot (ac) = abcbbac$

/Lösung

1.c) *Gib an:* $|aaaa|$ für das Alphabet Σ'

Lösung

$|aaaa| = 2$

/Lösung

1.d) *Gib* die Menge aller Präfixe von $acbb \in \Sigma^*$ *an.*

Lösung

$\{\, \varepsilon,\ a,\ ac,\ acb,\ acbb \,\}$

/Lösung

Aufgabe 2: Sprachen

Sei A eine Sprache über einem beliebigem Alphabet.
Beweise: $(\forall v \in A \,.\, |v| \bmod 2 = 0) \rightarrow (\forall w \in A^2 \,.\, |w| \bmod 2 = 0)$
Hinweis: $\forall x, y \,.\, |x \cdot y| \bmod 2 = ((|x| \bmod 2) + (|y| \bmod 2)) \bmod 2$ (H)

Lösung

Annahme (A1): $\forall v \in A \,.\, |v| \bmod 2 = 0$.
Zu Zeigen (Z1): $\forall w \in A^2 \,.\, |w| \bmod 2 = 0$
Sei $w \in A^2$ (beliebig aber fest).
Zu Zeigen (Z2): $|w| \bmod 2 = 0$
Mit der Definition der Komposition folgt aus $w \in A^2$:
Annahme (A2): $\exists x, y \in A \,.\, w = xy$.
Seien $x, y \in A$ (beliebig aber fest).
Annahme (A3): $w = xy$.
Wähle $v \triangleq x$ in A1.
Annahme (A4): $|x| \bmod 2 = 0$.
Wähle $v \triangleq y$ in A1.
Annahme (A5): $|y| \bmod 2 = 0$.
Wir zeigen Z2:

$$\begin{aligned} |w| \bmod 2 &\overset{A3}{=} |xy| \bmod 2 \overset{H}{=} ((|x| \bmod 2) + (|y| \bmod 2)) \bmod 2 \\ &\overset{A4}{=} (0 + (|y| \bmod 2)) \bmod 2 \overset{A5}{=} (0 + 0) \bmod 2 = 0 \end{aligned}$$

/Lösung

Aufgabe 3: Reguläre Ausdrücke

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma \triangleq \{\, a,\ b,\ c \,\}$ und die Sprache $A_1 \triangleq \{\, w \in \Sigma^* \mid (|w|_a + |w|_b) \bmod 2 = 0 \,\}$.

3.a) *Gib an:* Welche Sprachen beschreiben die regulären Ausdrücke $\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\epsilon}$, $\mathbf{0}ab$, $(a + ab)(a + ab)^*$, $(b + \boldsymbol{\epsilon})^*$ und $\mathbf{0}a + aba$?

Lösung

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{0}) &= \emptyset \\
L(\boldsymbol{\epsilon}) &= \{\ \varepsilon\ \} \\
L(\mathbf{0}ab) &= \emptyset \\
L\big((a+ab)\,(a+ab)^*\big) &= \big\{\ w \in \{\ a,\ b\ \}^+ \mid \text{direkt vor jedem } b \text{ steht mindestens ein } a\ \big\} \\
L\big((b+\boldsymbol{\epsilon})^*\big) &= \{\ b\ \}^* = \{\ b^n \mid n \in \mathbb{N}\ \} \\
L(\mathbf{0}a + aba) &= L(aba) = \{\ aba\ \}
\end{aligned}$$

/Lösung

3.b) *Gib* je einen regulären Ausdruck *an*, der die Sprachen $\{\ ab\ \}$ und Σ^* beschreibt.

Lösung

$\{\ ab\ \} = L(ab)$, also beschreibt $e_1 = ab$ die Sprache $\{\ ab\ \}$, und $\Sigma^* = L\big((a+b+c)^*\big)$, also beschreibt $e_2 = (a+b+c)^*$ die Sprache Σ^*.

/Lösung

3.c) *Gib* einen regulären Ausdruck e_1 so *an*, dass $L(e_1) = A_1$.

Lösung

$e_1 = ((a+b)\,c^*\,(a+b)+c)^*$
Hinweis: $((a+b)\,c^*\,(a+b)+c)^* = (((a+b)\,c^*\,(a+b))+c)^*$

/Lösung

Aufgabe 4: Induktion über Wörter

Gegeben sei ein Alphabet Σ. *Beweise per Induktion:* $\forall w \in \Sigma^*\ .\ |w| = \sum_{a\in\Sigma} |w|_a$.

Lösung

Sei

$$P(w) \triangleq \left(|w| = \sum_{a\in\Sigma} |w|_a\right)$$

Wir verwenden das Induktionsschema:

$$\Big(\underbrace{P(\varepsilon)}_{\text{IA}} \land \underbrace{(\forall w \in \Sigma^*\ .\ P(w) \to \forall x \in \Sigma\ .\ P(wx))}_{\text{IS}}\Big) \to (\forall v \in \Sigma^*\ .\ P(v))$$

IA ($P(\varepsilon)$):

$$|\varepsilon| \overset{\text{Def. }|\cdot|}{=} 0 \overset{\text{Def. }|\cdot|.}{=} \sum_{a\in\Sigma} |\varepsilon|_a$$

Sei $w \in \Sigma^*$.

IV ($P(w)$): $|w| = \sum_{a\in\Sigma} |w|_a$

Sei $x \in \Sigma$.

IS ($P(wx)$): *Zu Zeigen:* $|wx| = \sum_{a\in\Sigma} |wx|_a$

$$\begin{aligned}
\sum_{a\in\Sigma} |wx|_a &\overset{x\in\Sigma}{=} |wx|_x + \sum_{a\in\Sigma\setminus\{\ x\ \}} |wx|_a \overset{\text{Def. }|\cdot|.}{=} |w|_x + 1 + \sum_{a\in\Sigma\setminus\{\ x\ \}} |w|_a \\
&\overset{x\in\Sigma}{=} 1 + \sum_{a\in\Sigma} |w|_a \overset{\text{IV}}{=} 1 + |w| \overset{\text{Def. }|\cdot|}{=} |wx|
\end{aligned}$$

/Lösung

Aufgabe 5: Ordnen von Wörtern

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma \triangleq \{ a, b, c \}$ und die totale Ordnung $R_1 : (\Sigma, \Sigma)$ mit $R_1 \triangleq \{ (a, a), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, c) \}$.

5.a) Ordne die Wörter $\varepsilon, c, cc, ccc, ca, abc, bac$ nach der lexikographischer Ordnung bzgl. R_1.

Lösung

$\varepsilon \ll_{R_1} bac \ll_{R_1} abc \ll_{R_1} c \ll_{R_1} ca \ll_{R_1} cc \ll_{R_1} ccc$

/Lösung

5.b) Ordne die Wörter $\varepsilon, c, cc, ccc, ca, abc, bac$ nach der Standardordnung bzgl. R_1.

Lösung

$\varepsilon \ll^S_{R_1} c \ll^S_{R_1} ca \ll^S_{R_1} cc \ll^S_{R_1} bac \ll^S_{R_1} abc \ll^S_{R_1} ccc$

/Lösung