Diskrete Strukturen
Großübung

Amelie Heindl

Lehrstuhl für Logik und Semantik

Technische Universität Berlin

Sommersemester 2024

Themenüberblick

Themenüberblick: Vorlesungswoche 3

- Binomialkoeffizienten
- Produktregel
- Summenregel
- Inklusion-Exklusion
- Beweise
- Schubfachprinzip
- Handshakelemma
- Satz von Ramsey

Lemmata, Sätze, Korollare

引理、定理、推论：术语

引理、定理和推论都是指真且被证明的数学命题。这些类别的划分并不明确，也不完全客观。通常的分类如下：

- **引理：** 相对于定理来说是一个“较小”的结果。通常作为定理证明中的重要中间步骤/关键思想。有时在多个情景/证明中有用，有时本身并不重要。
- **定理：** 在一个数学理论中具有重要意义的基本结论。
- **推论：** 从定理中推导出的结论，证明过程通常非常简单/平凡。

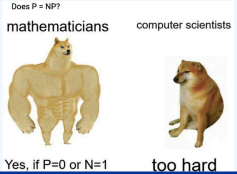
此外，还有**猜想**，这个术语与其他不同之处在于，猜想是被认为可能为真的数学命题，但尚未被证明。

Lemmata, Sätze, Korollare: Begriffe

Lemma, Satz und Korollar sind alles Begriffe, die wahre und bewiesene mathematische Aussagen bezeichnen. Die Abgrenzung dieser Kategorien ist unscharf und nicht ganz objektiv. Die übliche Einteilung ist folgende:

- Lemma: Ein 'kleineres' Resultat (im Vergleich zu Sätzen). Oft als wichtiger Zwischenschritt/Schlüsselgedanke im Beweis eines Satzes. Teilweise in mehreren Situationen/Beweisen nützlich, teilweise von geringem inhärenten Interesse.
- Satz/Theorem: Wesentliche Erkenntnis von zentraler Bedeutung innerhalb einer mathematischen Theorie.
- Korollar: Folgerung aus einem Satz mit sehr einfachem/trivialem Beweis.

Außerdem gibt es noch Vermutungen, dieser Begriff ist von den anderen dadurch abgegrenzt, dass eine Vermutung eine mathematische Aussage ist, die für wahr gehalten wird, jedoch unbewiesen ist.



Lemmata, Sätze, Korollare: Beispiel I

Binomialsatz — Satz

Seien $x, y \in \mathbb{Z}$. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}$$

Erste binomische Formel — Korollar

Für $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Lemmata, Sätze, Korollare: Beispiel II

Lemma von Euklid

Lemma

Sei p eine Primzahl und $x, y \in \mathbb{N}$. Es gilt:

$$\text{aus } p \mid x \cdot y \text{ folgt } p \mid x \vee p \mid y$$

Fundamentalsatz der Arithmetik

Satz

Jede natürliche Zahl z besitzt eine, bis auf die Reihenfolge der Faktoren, eindeutige Darstellung der Form

$$z = \prod_{k=1}^{n} p_k^{e_k}$$

Wobei $p_i \neq p_j$ für $1 \leq i < j \leq n$ gilt und $e_i \geq 1$ für $1 \leq i \leq n$ gilt.

Bijektionen und Anordnungen

Bijektionen: Grundlagen

Bijektion

Eine Funktion $f : M \to N$ zwischen zwei Mengen M und N ist eine Bijektion (bijektiv), falls das Urbild jedes Elements aus N genau ein Element enthält, also falls $\forall n \in N \exists! m \in M : f(m) = n$ gilt.

Funktionen sind genau dann bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv sind.

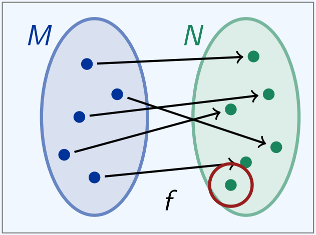
Injektion

$f : M \to N$ ist eine Injektion (injektiv), falls das Urbild jedes Elements aus N höchstens ein Element enthält.

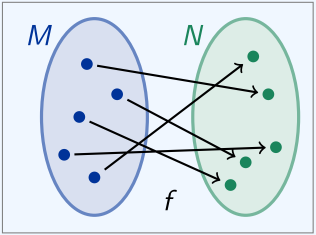
Surjektion

$f : M \to N$ ist eine Surjektion (surjektiv), falls das Urbild jedes Elements aus N mindestens ein Element enthält.

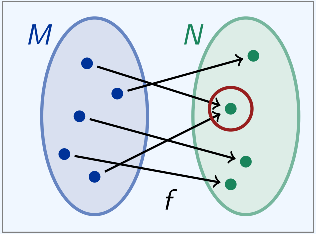
Ist das eine Bijektion?



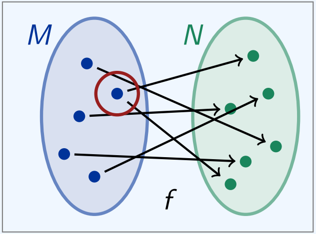
Nein, nicht surjektiv.



Ja.



Nein, nicht injektiv.

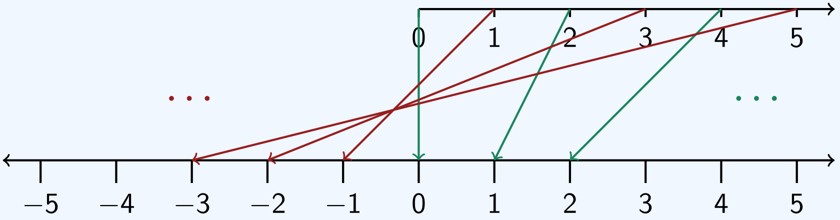


Nein, keine Funktion.

Bijektionen: Beispiel II

Wir betrachten die beiden Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ und die folgende Funktion:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$
$$n \mapsto (-1)^n \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$



Bijektionen: Beispiel II

Wir wollen zeigen, dass f eine Bijektion ist.
Dafür zeigen wir, dass f surjektiv und injektiv ist.

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$
$n \mapsto (-1)^n \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

Surjektivität: Sei $z \in \mathbb{Z}$ beliebig. Falls $z \geq 0$ gilt, betrachten wir die Zahl $2 \cdot z$. Es gilt $(2 \cdot z) \in \mathbb{N}$ und $f(2 \cdot z) = (-1)^{2 \cdot z} \cdot \left\lceil \frac{2 \cdot z}{2} \right\rceil = 1 \cdot \lceil z \rceil = z$. Falls andererseits $z < 0$ gilt, betrachten wir die Zahl $-2 \cdot z - 1$. Es gilt $(-2 \cdot z - 1) \in \mathbb{N}$ und
$f(-2 \cdot z - 1) = (-1)^{(-2 \cdot z - 1)} \cdot \left\lceil \frac{-2 \cdot z - 1}{2} \right\rceil = -1 \cdot \left\lceil (-z - \frac{1}{2}) \right\rceil = z$.

Injektivität: Seien $x, y \in \mathbb{N}$ mit $f(x) = f(y)$. Es gilt also $(-1)^x \cdot \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil = (-1)^y \cdot \left\lceil \frac{y}{2} \right\rceil$. Beide Seiten der Gleichung müssen das gleiche Vorzeichen haben, weshalb x und y die gleiche Parität haben müssen. Falls x gerade ist, muss also $\frac{x}{2} = \left\lceil \frac{y}{2} \right\rceil$ gelten. Also folgt $y \in \{x - 1, x\}$ und da y gerade sein muss, folgt weiter $y = x$. Falls andererseits x ungerade ist, muss $\frac{x+1}{2} = \left\lceil \frac{y}{2} \right\rceil$ gelten. Also folgt $y \in \{x, x + 1\}$ und da y ungerade sei muss, folgt weiter $y = x$.

Insbesondere wurde $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ gezeigt. □

Anordnungen: Grundlagen

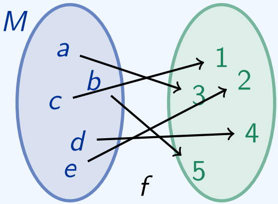
Anordnung

Sei $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$ eine Menge der Größe n. Eine Anordnung von M ist eine Folge $(m_{i_1}, \ldots, m_{i_n})$, die alle Elemente aus M enthält und jedes genau einmal. Die Elemente aus M werden also in einer Reihenfolge angeordnet.

Anordnungen entsprechen Bijektionen zwischen der Menge M und der Menge $\{1, \ldots, n\}$. Elemente aus M werden dabei auf ihre Position in der Folge abgebildet.

Beispiel: Betrachte die Menge $M = \{a, b, c, d, e\}$. Die Anordnung (c, e, a, d, b) entspricht der Bijektion

$$
\begin{aligned}
f : M &\to \{1,2,3,4,5\} \\
a &\mapsto 3 \\
b &\mapsto 5 \\
c &\mapsto 1 \\
d &\mapsto 4 \\
e &\mapsto 2
\end{aligned}
$$



Anordnungen: Grundlagen

Genau wie im Beispiel, können wir auch im allgemeinen Fall eine Bijektion zu einer gegebenen Anordnung finden.
Sei $M = \{m_1, \dots, m_n\}$ eine Menge und $(m_{i_1}, \dots, m_{i_n})$ eine Anordnung von M.
Dann definiert

$$f(m_k) = j, \text{ sodass } i_j = k$$

eine Bijektion zwischen M und $\{1, \dots, n\}$.

Umgekehrt lässt sich auch zu jeder Bijektion zwischen M und $\{1, \dots, n\}$ eine Anordnung finden.
Sei $M = \{m_1, \dots, m_n\}$ eine Menge und $f : M \to \{1, \dots, n\}$ eine Bijektion.
Dann ist $(m_{f^{-1}(1)}, \dots, m_{f^{-1}(n)})$ eine Anordnung von M.

Es ist also eine 1-zu-1-Entsprechung und man kann eine Bijektion zwischen den Anordnungen von M und den Bijektionen von M nach $\{1, \dots, n\}$ angeben.

Binomialkoeffizient

Binomialkoeffizient: Grundlagen

Binomialkoeffizient

Für natürliche Zahlen n, k mit $n \geq k$ ist der Binomialkoeffizient definiert als

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Die Binomialkoeffizienten können mithilfe des Pascalschen Dreiecks veranschaulicht werden. Der Wert von $\binom{n}{k}$ steht dabei in der n-ten Zeile und k-ten Spalte (Nummerierung beginnt bei 0).

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Binomialkoeffizient: Rekursionsformel

Dem Pascalschen Dreieck liegt die folgende Rekursionsformel zugrunde, mit der man Binomialkoeffizienten berechnen kann.

Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten

Für alle $n \geq k > 0$ gilt $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Erinnerung: $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$ mit n Elementen.
Wieviele Mengen $X \subseteq M$ mit $|X| = k$ gibt es?
Beobachtung: Für jedes $X \in \mathscr{P}_k(M)$ gilt entweder $a_n \in X$ oder $a_n \notin X$.
Die Anzahl der Mengen in $\mathscr{P}_k(M)$ ist daher die Summe aus der Anzahl der Mengen $X \in \mathscr{P}_k(M)$ mit $a_n \in X$ und der Anzahl der Mengen $X \in \mathscr{P}_k(M)$ mit $a_n \notin X$.

Binomialkoeffizient: Rekursionsformel

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}$$

Wir wollen nun $|\{X \in \mathscr{P}_k(M) \mid a_n \in X\}|$ und $|\{X \in \mathscr{P}_k(M) \mid a_n \notin X\}|$ berechnen.

1. Mengen X, die a_n enthalten: Sei $X' := X \setminus \{a_n\}$ und sei $M' := M \setminus \{a_n\}$.
   Damit ist X' eine $(k-1)$-elementige Teilmenge der $(n-1)$-elementigen Menge M'.
   Es gibt also $\binom{n-1}{k-1}$ solcher Mengen X'.
2. Mengen X, die a_n nicht enthalten: Dann ist X eine k-elementige Teilmenge der $(n-1)$-elementigen Menge $M' := M \setminus \{a_n\}$.
   Es gibt $\binom{n-1}{k}$ solcher Mengen.

Insgesamt ergibt sich also die gewünschte Summe.

Zerlegung positiver ganzer Zahlen

Zerlegung positiver ganzer Zahlen: Fragestellung

Frage:

Auf wieviele Arten kann eine Zahl $n \in \mathbb{N}_+$ als Summe von $r \in \mathbb{N}_+$ Summanden geschrieben werden, wenn die Reihenfolge der Summanden eine Rolle spielt?

Beispiel: Sei $n = 3$ und $r = 2$. Es gilt:

$$\begin{array}{ccccc} 3 & = & 0 & + & 3 \\ 3 & = & 1 & + & 2 \\ 3 & = & 2 & + & 1 \\ 3 & = & 3 & + & 0 \end{array}$$

Man kann 3 also auf vier verschiedene Arten als Summe von 2 Zahlen aufschreiben.

Zerlegung positiver ganzer Zahlen: Fragestellung

Nun wollen wir eine allgemeine Antwort auf die Frage finden.

Antwort:

Für $n, r \in \mathbb{N}_+$ gibt es $\binom{n+r-1}{r-1}$ verschiedene Möglichkeiten, die Zahl n als Summe von r Summanden zu schreiben.

Beweisidee: Die gesuchten Summanden benennen wir i_1 bis i_r. Wir stellen die Zahl n unär mit dem Symbol $\bullet$ dar und teilen dann die n 'Kugeln' auf die r Summanden auf. Die Darstellungen von n mit r Summanden entsprechen also genau den $n+r-1$ stelligen Zeichenketten mit n mal dem Zeichen $\bullet$ und $r-1$ mal dem Zeichen $+$. Jede Zeichenkette ist dabei eindeutig festgelegt durch die Wahl der Positionen mit $+$.

Beispiel: $n = 7, r = 5$

$$\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$$

$$\underbrace{\bullet\bullet\bullet}_{i_1} + \underbrace{}_{i_2} + \underbrace{\bullet\bullet}_{i_3} + \underbrace{\bullet}_{i_4} + \underbrace{\bullet}_{i_5}$$

$$3 + 0 + 2 + 1 + 1$$

Zerlegung positiver ganzer Zahlen: Beweis

Für einen formalen Beweis müssen folgende Teilaussagen bewiesen werden:

1. Das Repräsentieren von Folgen $(i_1, \ldots, i_r)$ durch Zeichenketten aus "$\bullet$" und "$+$" ist möglich.
   Wir repräsentieren Folgen $(i_1, \ldots, i_r)$ von Zahlen mit Summe n durch Zeichenketten mit einer bestimmten Form, so dass
   (*i*) jeder Folge $(i_1, \ldots, i_r)$ von Zahlen mit Summe n eine Zeichenkette dieser Form und umgekehrt
   (*ii*) jeder Zeichenkette dieser Form auch eine solche Zahlenfolge entspricht.

   Zusammen folgt dann, dass die Anzahl solcher Zeichenketten gleich der Anzahl der Zahlenfolgen $(i_1, \ldots, i_r)$ mit Summe n ist.
2. Das Zählen der Zeichenketten ergibt das gewünschte Resultat.
   Wir zeigen, dass die Anzahl dieser Zeichenketten gleich $\binom{n+r-1}{r-1}$ ist, woraus dann folgt, dass dies auch die Anzahl der gesuchten Folgen ist.

Zerlegung positiver ganzer Zahlen: Beweis

Wir beweisen zunächst Teil 1. Dazu definieren wir

- $\mathscr{I} := \{(i_1, \dots, i_r) \mid i_j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq r, \sum_{j=1}^{r} i_j = n\}$
- $\mathscr{Z} := \{a_1 \dots a_{n+r-1} \in \{\bullet, +\}^{n+r-1} \mid$ es gibt genau $r-1$ Indizes $j_1, \dots, j_{r-1}$ mit $a_{j_1} = \cdots = a_{j_{r-1}} = +\}$.

Wir müssen nun $|\mathscr{I}| = |\mathscr{Z}|$ zeigen.

Weiter definieren wir $f : \mathscr{I} \to \mathscr{Z}$ mit $f((i_1, \dots, i_r)) = a_1 \dots a_{n+r-1}$,

wobei $a_j = +$ genau dann gilt, wenn es ein $1 \leq s \leq r-1$ gibt mit $j = s + \sum_{l=1}^{s} i_l$. Alle anderen a_j sind also $\bullet$

Für $s = 1, \dots, r-1$ ergibt die Summe $s + \sum_{l=1}^{s} i_l$ die Position im Wort, an der das Trennzeichen $+$ zwischen dem s-ten und $s+1$-ten Summanden steht.

Beispiel: $f((2,0,1,1,2)) = \underset{a_1}{\bullet}\,\underset{a_2}{\bullet}\,\underset{a_3}{+}\,\underset{a_4}{+}\,\underset{a_5}{\bullet}\,\underset{a_6}{+}\,\underset{a_7}{\bullet}\,\underset{a_8}{+}\,\underset{a_9}{\bullet}\,\underset{a_{10}}{\bullet}$

s	1	2	3	4
$s + \sum_{l=1}^{s} i_l$	$1+2=3$	$2+2+0=4$	$3+2+0+1=6$	$4+2+0+1+1=8$

Zerlegung positiver ganzer Zahlen: Beweis

Für Teil 1 ist also zu zeigen, dass f eine Bijektion ist.

> $f : \mathscr{N} \to \mathscr{Z}$ mit $f((i_1, \dots, i_r)) = a_1 \dots a_{n+r-1}$, wobei $a_j = +$ gdw. $j = s + \sum_{l=1}^{s} i_l$ für ein $1 \leq s \leq r-1$

Injektivität: Für $(i_1, \dots, i_r) \neq (i'_1, \dots, i'_r)$, sei $s = \min\{j \mid i_j \neq i'_j\}$.

Ein solches s muss es geben, da sonst die Zahlenfolgen gleich wären.

Wegen der Minimalität von s gilt aber $s + \sum_{l=1}^{s} i_l \neq s + \sum_{l=1}^{s} i'_s$ und somit $f((i_1, \dots, i_r)) \neq f((i'_1, \dots, i'_r))$.

Surjektivität: Sei $w = a_1 \dots a_{n+r-1} \in \{\bullet, +\}^{n+r-1}$.

Seien $j_1 < \dots < j_{r-1}$ die Indizes mit $a_{j_1} = \dots a_{j_{r-1}} = +$ und sei $j_0 = 0$ und $j_r = n + r$.

Für $1 \leq l \leq r$ sei $i_l = j_l - j_{l-1} - 1$. Dann gilt $f((i_1, \dots, i_r)) = w$.

Also ist f sowohl injektiv als auch surjektiv und somit eine Bijektion.

Zerlegung positiver ganzer Zahlen: Beweis

Nun ist noch Teil 2 zu beweisen. Dafür müssen wir die Zahl der Elemente in $\mathscr{Z}$ zählen.

$\mathscr{Z} := \{a_1 \dots a_{n+r-1} \in \{\bullet, +\}^{n+r-1} \mid$ es gibt genau $r-1$ Indizes $j_1, \dots, j_{r-1}$ mit $a_{j_1} = \dots = a_{j_{r-1}} = +\}$

Jedes Element $a_1 \dots a_{n+r-1}$ ist eindeutig durch die $r-1$ Positionen bestimmt, an denen das Symbol $+$ steht.
Die Anzahl der Elemente entspricht also der Zahl der Möglichkeiten, $r+1$ aus $n+r-1$ Positionen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge zu ziehen.

	Mit Beachtung der Reihenfolge	Ohne Beachtung der Reihenfolge
Mit Zurücklegen	n^k	$\binom{k+n-1}{k}$
Ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{n-k!} = n^{\underline{k}}$	$\frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \binom{n}{k}$

Also gibt es genau $\binom{n+r-1}{r-1}$ Elemente in $\mathscr{Z}$.

□

Feedback, Fragen und Vorschläge zur Großübung gerne an:

a.heindl@tu-berlin.de