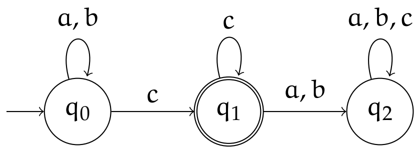
Tutorium 6

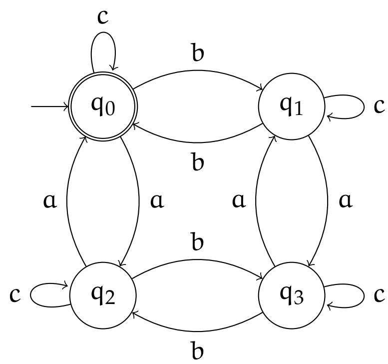
Aufgabe 1: Berechnungen und Sprachen einfacher Automaten

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma \triangleq \{ a, b, c \}$ und die DFAs $M_1 \triangleq (\{ q_0, q_1, q_2 \}, \Sigma, \delta_1, q_0, \{ q_1 \})$ und $M_2 \triangleq (\{ q_0, q_1, q_2, q_3 \}, \Sigma, \delta_2, q_0, \{ q_0 \})$ wobei δ_1 und δ_2 durch die folgenden Graphen gegeben sind:

δ_1:



δ_2:



1.a) *Gib* die Berechnung von M_1 für die Eingabeworte ccc, bca, cab *an*. Welche dieser Wörter gehören zu $L(M_1)$?

Lösung

$(q_0, ccc) \vdash_{M_1} (q_1, cc) \vdash_{M_1} (q_1, c) \vdash_{M_1} (q_1, \varepsilon) \nvdash_{M_1}$ und damit $ccc \in L(M_1)$.
$(q_0, bca) \vdash_{M_1} (q_0, ca) \vdash_{M_1} (q_1, a) \vdash_{M_1} (q_2, \varepsilon) \nvdash_{M_1}$ und damit $bca \notin L(M_1)$.
$(q_0, cab) \vdash_{M_1} (q_1, ab) \vdash_{M_1} (q_2, b) \vdash_{M_1} (q_2, \varepsilon) \nvdash_{M_1}$ und damit $cab \notin L(M_1)$

/Lösung

1.b) *Gib* die Sprache $L(M_1)$ *an*.

Lösung

$L(M_1) = L\big((a+b)^* \, cc^*\big) = \{ xcc^n \mid x \in \{ a, b \}^* \wedge n \in \mathbb{N} \} = \{ xc^n \mid x \in \{ a, b \}^* \wedge n \in \mathbb{N}^+ \}$

/Lösung

1.c) *Gib* die Berechnung von M_2 für die Eingabeworte ε, bb, ba, ac *an*. Welche dieser Wörter gehören zu $L(M_2)$?

Lösung

$(q_0, \varepsilon) \nvdash_{M_2}$ und damit $\varepsilon \in L(M_2)$.
$(q_0, bb) \vdash_{M_2} (q_1, b) \vdash_{M_2} (q_0, \varepsilon) \nvdash_{M_2}$ und damit $bb \in L(M_2)$.
$(q_0, ba) \vdash_{M_2} (q_1, a) \vdash_{M_2} (q_3, \varepsilon) \nvdash_{M_2}$ und damit $ba \notin L(M_2)$.
$(q_0, ac) \vdash_{M_2} (q_2, c) \vdash_{M_2} (q_2, \varepsilon) \nvdash_{M_2}$ und damit $ac \notin L(M_2)$.

/Lösung

1.d) *Gib* die Sprache $L(M_2)$ *an*.

Lösung

$L(M_2) = \{ w \in \Sigma^* \mid |w|_a \bmod 2 = |w|_b \bmod 2 = 0 \}$

/Lösung

Aufgabe 2: Erstellen einfacher Automaten

Gegeben sei das Alphabet $\Sigma \triangleq \{ 0, 1 \}$.

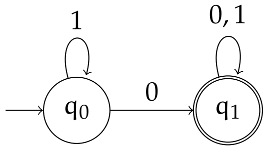
2.a) *Gib* einen DFA M_3 so *an*, dass $L(M_3) = \{ w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } 0 \}$.

Lösung

$M_3 \triangleq (\{ q_0, q_1 \}, \Sigma, \delta_3, q_0, \{ q_1 \})$, wobei δ_3 wie folgt gegeben ist:
Hinweis: Eine der folgenden drei Varianten genügt.

als Funktion: $\delta_3(q,x) = \begin{cases} q_1 & \text{falls } q = q_0 \wedge x = 0 \\ q_0 & \text{falls } q = q_0 \wedge x = 1 \\ q_1 & \text{falls } q = q_1 \end{cases}$

als Graph: δ_3 ist durch den folgenden Graphen gegeben



als Tabelle: δ_3 wird in der folgenden Tabelle definiert

δ_3	0	1
S q_0	q_1	q_0
F q_1	q_1	q_1

/Lösung

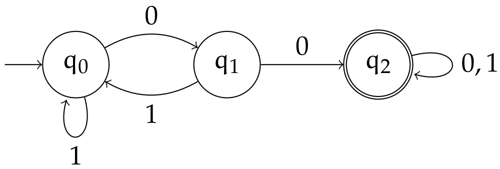
2.b) *Gib* einen DFA M_4 so *an*, dass $L(M_4) = \{ w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } 00 \}$. $1^*(00)^+1^*$

Lösung

$M_4 \triangleq (\{ q_0, q_1, q_2 \}, \Sigma, \delta_4, q_0, \{ q_2 \})$ mit δ_4 wie folgt definiert:
Hinweis: Eine der folgenden drei Varianten genügt.

als Funktion: $\delta_4(q,x) = \begin{cases} q_1 & \text{falls } q = q_0 \wedge x = 0 \\ q_0 & \text{falls } q = q_0 \wedge x = 1 \\ q_2 & \text{falls } q = q_1 \wedge x = 0 \\ q_0 & \text{falls } q = q_1 \wedge x = 1 \\ q_2 & \text{falls } q = q_2 \end{cases}$

als Graph: δ_4 ist durch den folgenden Graphen gegeben ist:



als Tabelle: δ_4 ist durch die Tabelle definiert

δ_4	0	1
S q_0	q_1	q_0
q_1	q_2	q_0
F q_2	q_2	q_2

/Lösung

2.c) Wie müsste man den Automaten $M_4 = (Q_4, \Sigma, \delta_4, q_0, F_4)$ aus 2.b) zu M_4' modifizieren, damit er genau die Sprache $A_4' = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält nicht das Teilwort } 00\}$ akzeptiert?
Hinweis: Es gilt $A_4 \subseteq \Sigma^*$ und $A_4' \subseteq \Sigma^*$.

Lösung

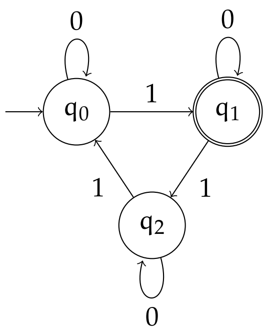
Es gilt $A_4' = \Sigma^* \setminus A_4$. Mit diesem Wissen lässt sich M_4' aus M_4 durch die Komplementbildung der Endzustände konstruieren:
$M_4' = (\{ q_0, q_1, q_2 \}, \Sigma, \delta_4, q_0, \{ q_0, q_1, q_2 \} \setminus \{ q_2 \}) = (\{ q_0, q_1, q_2 \}, \Sigma, \delta_4, q_0, \{ q_0, q_1 \})$

/Lösung

2.d) *Gib* einen DFA M_5 so *an*, dass $L(M_5) = \{ w \in \Sigma^* \mid |w|_1 \mod 3 = 1 \}$.

Lösung

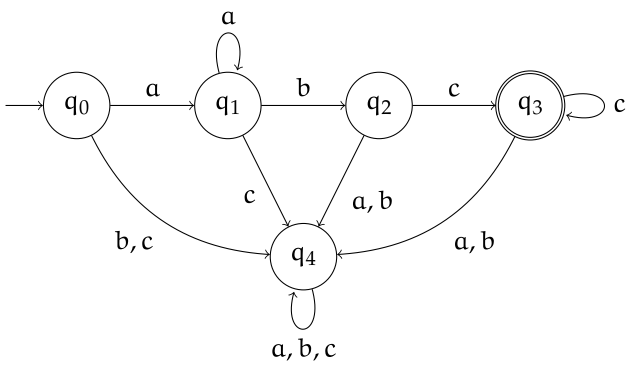
$M_5 \triangleq (\{ q_0, q_1, q_2 \}, \Sigma, \delta_5, q_0, \{ q_1 \})$, wobei δ_5 durch den folgenden Graphen gegeben ist:



/Lösung

Aufgabe 3: Erstellen einer Grammatik aus einem Automaten

Gegeben seien $\Sigma \triangleq \{ a, b, c \}$ und der DFA $M_6 \triangleq (\{ q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 \}, \Sigma, \delta_6, q_0, \{ q_3 \})$, wobei δ_6 durch den folgenden Graphen gegeben ist:



3.a) *Gib* die Sprache $L(M_6)$ *an*.

Lösung

$L(M_6) = L(aa^*bcc^*) = \{ a^n bc^m \mid n, m \in \mathbb{N}^+ \}$

/Lösung

3.b) *Gib* eine reguläre Grammatik G_6 so an, dass $L(G_6) = L(M_6)$.

Lösung

$G_6 \triangleq (\{ Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \}, \Sigma, P_6, Q_0)$, mit P_6:

$$
\begin{aligned}
Q_0 &\to aQ_1 \mid bQ_4 \mid cQ_4 \\
Q_1 &\to aQ_1 \mid bQ_2 \mid cQ_4 \\
Q_2 &\to aQ_4 \mid bQ_4 \mid cQ_3 \mid c \\
Q_3 &\to aQ_4 \mid bQ_4 \mid cQ_3 \mid c \\
Q_4 &\to aQ_4 \mid bQ_4 \mid cQ_4
\end{aligned}
$$

Hinweis: Um diese Grammatik zu erzeugen sind wir nach einem Algorithmus vorgegangen, der aus einem beliebigen DFA eine reguläre Grammatik erzeugt. Dazu erzeugen wir zunächst für jeden Zustand q_i im DFA eine eigene Variable Q_i in der Grammatik. Die Variable Q_0, die sich aus dem Startzustand q_0 ergeben hat, wird zum Startsymbol. Für jeden Übergang $\delta_6(q_i, x) = q_j$ im DFA erzeugen wir die Regel $Q_i \to xQ_j$ in der Grammatik. Außerdem fügen wir für jeden Übergang $\delta_6(q_i, x) = q_j$, bei dem q_j ein Endzustand ist, auch noch eine Regel $Q_i \to x$ hinzu. (Wenn der Startzustand q_0 auch ein Endzustand ist, müssen wir noch eine weitere Variable S hinzufügen, statt Q_0 die Variable S als Startsymbol wählen, die Regel $S \to \varepsilon$ ergänzen und für jeden Übergang $\delta_6(q_0, x) = q_i$ die Regel $S \to xQ_i$ hinzufügen.) Dieser Algorithmus zur Überführung von DFAs in reguläre Grammatiken findet sich z.B. auf Seite 30 des Buches „Theoretische Informatik – kurzgefasst" von Uwe Schöning.

/Lösung

Aufgabe 4: Zeige, dass eine Sprache regulär ist.

4.a) *Beweise,* dass die Sprache $A \triangleq \{ w \mid w \in \{ a, b \}^* \}$ regulär ist.

Lösung

Wir zeigen, dass die Sprache A gleich der Sprache $L\big((a+b)^*\big)$ ist.

$$
\begin{aligned}
L((a+b)^*) &\overset{\text{FS 1.2.8 } *}{=} L(a+b)^* \overset{\text{FS 1.2.8+}}{=} (L(a) \cup L(b))^* \overset{\text{FS 1.2.8}\{a,\,b\}}{=} (\{ a \} \cup \{ b \})^* \\
&\overset{\text{Def. } \cup}{=} \{ a, b \}^* \overset{\text{Prop. 0.3.5}}{=} \{ w \mid w \in \{ a, b \}^* \} \overset{\text{Def. } A}{=} A
\end{aligned}
$$

Da A durch einen regulären Ausdruck beschrieben wird, gibt es nach Theorem 1.4.5 eine reguläre Grammatik G mit $L(G) = A$. Nach Definition 1.4.2 ist A damit regulär.

/Lösung