$\vec{x}'(t) = A(t)\,\vec{x}(t) + \vec{b}(t)$

↳ homogene DGL $\vec{x}'(t) = A(t)\,\vec{x}(t)$

→ n unabhängige Lösungen für n Gleichungen

→ Für A konstant → Exponentialansatz

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\,\vec{v}$$

→ Wenn $\vec{v}$ Eigenvektor von A zum Eigenwert λ,
dann ist $\vec{x}$ eine Lösung

→ Wronski-Test: Berechnete Lösungen unabhängig

Probleme:

1. Zu wenig reelle Eigenwerte
2. Algebraische Vielfachheit ≠ geometrische Vielfachheit

Defizite bei den Eigenwerten

→ Die komplexen Nullstellen treten in Paaren $\lambda, \bar{\lambda}$ auf.

→ Die Eigenvektoren sind auch komplex-konjugiert $\vec{v}, \bar{\vec{v}}$

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \bar{A}\bar{\vec{v}} = A\bar{\vec{v}} = \bar{\lambda}\bar{\vec{v}}.$$

→ komplexe Lösungsfunktionen

$$x_1(t) = e^{\lambda t}\vec{v} \qquad x_2(t) = e^{\bar{\lambda} t}\bar{\vec{v}} \qquad (\lambda \in \mathbb{C},\ \vec{v} \in \mathbb{C}^n)$$

(Einsetzen $\lambda e^{\lambda t}\vec{v} = A e^{\lambda t}\vec{v}$)

→ $$\left.\begin{aligned} x_1(t) + x_2(t) &= 2\,\mathrm{Re}(x_1(t)) = 2\,\mathrm{Re}(x_2(t)) \\ x_1(t) - x_2(t) &= 2\,\mathrm{Im}(x_1(t)) = 2\,\mathrm{Im}(x_2(t)) \end{aligned}\right\} \text{unabhängig}$$

Beispiel 22 (komplexe Nullstellen)

Euler
$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

$\longrightarrow$ charakteristische Gleichung

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 \overset{!}{=} 0$$

$z \in \mathbb{C}$

$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$

$\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

Nullstellen: $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1+i$

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow -iv_1 - v_2 \overset{!}{=} 0$$

$$\longrightarrow v_1 = i v_2$$

wähle $v_2 = 1$: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ zweiter Eigenvektor $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$

komplexwertige Lösung

$$e^{(1\pm i)t} \begin{pmatrix} \pm i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t\left(\cos(t) \pm i\sin(t)\right) \begin{pmatrix} \pm i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{e^t \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}}_{\text{Realteil}} \pm i \underbrace{e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}}_{\text{Imaginärteil}}$$

Reelle Lösung

$$x(t) := c_1 e^t \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Defizite bei den Eigenvektoren

$\longrightarrow$ mehrfache Nullstelle und zu wenig Eigenvektoren

Definition 23 (Hauptvektor)

λ k-facher Eigenwert. Ein Hauptvektor ist eine Lösung von

$$(A-\lambda I)^k \vec{v} = 0 \qquad (\vec{v} \neq 0)$$

Eigenvektoren sind Hauptvektoren.

Satz 24 (Hauptvektorlösung)

λ k-facher Eigenwert, $\vec{v}$ Hauptvektor von A zu λ.

Dann löst

$$\vec{x}(t) := e^{\lambda t} \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} (A-\lambda I)^j \vec{v}}_{\vec{s}(t)}$$

$$(A-\lambda I)(A-\lambda I)^{k-1}\vec{v}$$

$$\vec{s}\,'(t) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} (A-\lambda I)^j \vec{v}$$

$$= (A-\lambda I) \sum_{j=1}^{k-1} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} (A-\lambda I)^{j-1} \vec{v}$$

$$= (A-\lambda I)\, s(t)$$

Beweis nachrechnen.

$$\lambda e^{\lambda t} \vec{s}(t) + e^{\lambda t} \vec{s}\,'(t) = \lambda e^{\lambda t} \vec{s}(t) + e^{\lambda t} (A-\lambda I) \vec{s}(t) \overset{!}{=} A e^{\lambda t} \vec{s}(t)$$

$$\longrightarrow \quad \lambda \vec{s}(t) - \lambda \vec{s}(t) + A\vec{s}(t) = A\vec{s}(t) \quad \checkmark$$

<u>Doppelte Eigenwerte</u>

λ 2-fache Eigenwert, $\vec{v}_1$ Eigenvektor zu λ

$\longrightarrow$ kein zweiter unabhängiger Eigenvektor

$\longrightarrow$ Wir brauchen einen Hauptvektor v_2

$$0 = (A - \lambda I)^2 \vec{v}_2 = (A - \lambda I) \underbrace{(A - \lambda I)\vec{v}_2}_{\vec{w}}$$

$\longrightarrow$ $\vec{w}$ muss ein Eigenvektor sein

$$\Longrightarrow \vec{w} = c\,\vec{v}_1$$

Wir können $\vec{v}_2$ durch

$$(A - \lambda I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$$

berechnen.

$\longrightarrow$ Lösung

$$x(t) = e^{\lambda t}\Big(\vec{v}_2 + t\,\underbrace{(A - \lambda I)\vec{v}_2}_{=\vec{v}_1}\Big)$$

$$= e^{\lambda t}\left(\vec{v}_2 + t\,\vec{v}_1\right)$$

Beispiel 25 (Doppelte Eigenwerte)

$$x'(t) = A\,x(t)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \lambda_{1,2} = 1, \quad \lambda_3 = 2$$

$$(A - 1I)\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow v_3 = 0, \quad v_1 = v_2$$

Eigenvektor $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (kein zweiter unabhängiger Eigenvektor)

Berechnung Hauptvektor $\vec{v}_2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow -v_3 = 1, \quad v_1 = v_2$$

$$\longrightarrow \vec{v}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \vec{x}_1(t) = e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2(t) = e^{t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\vec{x}_3(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$