Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen
(Hausaufgabe 10)

Abgabe: 1. – 5. Juli 2024

Sommersemester 2024

Aufgabe 28

(5 Punkte)

Untersuche das inhomogene Anfangswertproblem

$$x''(t) + x(t) = h(t), \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 0.$$

(a) Bestimme die zugehörige Greensche Funktion.

(b) Löse das Anfangswertproblem in Abhängigkeit von $t_0 \geq 0$ für

$$h(t) \coloneqq \begin{cases} (t - t_0), & t \geq t_0 \\ 0, & t < t_0. \end{cases}$$

Werte das Faltungsintegral explizit aus.

Aufgabe 29

(4 Punkte)

Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ berechne

$$\int_0^1 t^n\,(1-t)^m \mathrm{d}t.$$

Hinweis: Verwende die Laplacetransformation.

Aufgabe 30

(6 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine absolut-integrierbare gerade Funktion. Zeige

$$\mathcal{F}[f](\omega) = 2\,\mathrm{Re}\big(\mathcal{L}[f](\mathrm{i}\omega)\big).$$

Berechne mit dieser Identität die Fouriertransformierte von $t \mapsto \mathrm{e}^{-|t|}\cos(t)$. Zeige hierfür, dass die gegebene Funktion die benötigten Voraussetzungen erfüllt.

Aufgabe 28

(5 Punkte)

Untersuche das inhomogene Anfangswertproblem

$$x''(t) + x(t) = h(t), \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 0.$$

(a) Bestimme die zugehörige Greensche Funktion.

(b) Löse das Anfangswertproblem in Abhängigkeit von $t_0 \geq 0$ für

$$h(t) := \begin{cases} (t - t_0), & t \geq t_0 \\ 0, & t < t_0. \end{cases}$$

Werte das Faltungsintegral explizit aus.

a) Greensche Fkt: $X(s) = \underline{(s^2+1)^{-1}} H(s)$

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)](s) = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow g(t) = \sin(t)$$

b) $$x(t) = g(t) * h(t) = \int_0^t g(t-\tau) h(\tau)\, d\tau = \int_0^t \sin(t-\tau) h(\tau)\, d\tau$$

für $t < t_0$: $$x(t) = \int_0^t \sin(t-\tau) \cdot 0\, d\tau = 0$$

für $t \geq t_0$: $$x(t) = \int_{t_0}^t \sin(t-\tau) \cdot (\tau - t_0)\, d\tau$$

$$= \cos(t-\tau)\cdot(\tau-t_0)\Big|_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} \cos(t-\tau)\, d\tau$$

$$= (t-t_0) + \sin(t-\tau)\Big|_{t_0}^{t}$$

$$= t - t_0 - \sin(t-t_0)$$

Aufgabe 29

(4 Punkte)

Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ berechne

$$\int_0^1 t^n (1-t)^m \mathrm{d}t.$$

Hinweis: Verwende die Laplacetransformation.

Sei $f(a) = a^n \qquad g(a) = a^m$

$$f(a) * g(a) = \int_0^a f(t)\, g(a-t)\, dt$$
$$= \int_0^a t^n (a-t)^m \, dt$$

$$\mathcal{L}[f(a) * g(a)](s) = \mathcal{L}[f(a)](s) \cdot \mathcal{L}[g(a)](s)$$
$$= \frac{n!}{s^{n+1}} \cdot \frac{m!}{s^{m+1}}$$
$$= \frac{n!\,m!}{s^{m+n+2}}$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{n!\,m!}{s^{m+n+2}}\right] = m! \cdot n! \cdot \frac{1}{(m+n+1)!}\, \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(m+n+1)!}{s^{m+n+1+1}}\right]$$
$$= \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!} \cdot a^{m+n+1}$$

d.h. $f(a) * g(a) = \underline{\int_0^a t^n (a-t)^m \, dt = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!} \cdot a^{m+n+1}}$

Also falls $a = 1$ die Obergrenz ist,
$$\int_0^1 t^n (1-t)^m \, dt = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$$

Aufgabe 30 (6 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine absolut-integrierbare gerade Funktion. Zeige

$$\mathcal{F}[f](\omega) = 2\,\mathrm{Re}\big(\mathcal{L}[f](\mathrm{i}\omega)\big).$$

Berechne mit dieser Identität die Fouriertransformierte von $t \mapsto \mathrm{e}^{-|t|}\cos(t)$. Zeige hierfür, dass die gegebene Funktion die benötigten Voraussetzungen erfüllt.

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$
$$\mathcal{L}[f](i\omega) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$
$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt}_{\text{Substition mit } u=-t} + \int_0^\infty f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$
$$= \int_{\infty}^{0} - f(-u)\, e^{i\omega u}\, du + \mathcal{L}[f](\omega)$$
$$= \int_0^\infty f(-u)\, e^{i\omega u}\, du + \mathcal{L}[f](\omega)$$
$$\overset{f \text{ gerade}}{=} \int_0^\infty f(u)\, e^{i\omega u}\, du + \mathcal{L}[f](\omega)$$

$$= \overline{\int_0^\infty \bar{f}(u) e^{-i\omega u}} du + \mathcal{L}[f](i\omega)$$

$$= \overline{\mathcal{L}[\bar{f}](i\omega)} + \mathcal{L}[f](i\omega)$$

$$= \overline{\mathcal{L}[f](i\omega)} + \mathcal{L}[f](i\omega) \qquad \Big| \; f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \; \bar{f} = f$$

$$= 2\,\mathrm{Re}(\mathcal{L}[f](i\omega))$$

für $f(t) = e^{-|t|}\cos(t)$ gerade, da $e^{-|t|}$ und $\cos(t)$ gerade

$$|f(t)| = |e^{-|t|}\cos(t)| \leq e^{-|t|}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| < \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} dt = 2\int_0^\infty e^{-t} dt = 2 \cdot \lim_{b\to\infty} -e^{-t}\Big|_0^b = 2 < \infty$$

$\Rightarrow f(t)$ ist absolut-integrierbar

$$\mathcal{L}[f](i\omega) = \int_0^\infty f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^\infty e^{-|t|}\cos(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_0^\infty \cos(t) \cdot e^{-(1+i\omega)t} dt$$

$$= \lim_{b\to\infty} \sin(t) \cdot e^{-(1+i\omega)t}\Big|_0^b + \int_0^\infty (1+i\omega)\sin(t) e^{-(1+i\omega)t} dt$$

$$= 0 + \int_0^\infty (1+i\omega)\sin(t) e^{-(1+i\omega)t} dt$$

$$= (1+i\omega) \cdot \left[\lim_{b\to\infty} -\cos(t) e^{-(1+i\omega)t}\Big|_0^b - \int_0^\infty (1+i\omega)\cos(t) e^{-(1+i\omega)t} \right]$$

$$= (1+i\omega)\left[1 - (1+i\omega)\int_0^\infty \cos(t) \cdot e^{-(1+i\omega)t} dt\right]$$

$$\left[(1+i\omega)^2 + 1\right]\int_0^\infty \cos(t) \cdot e^{-(1+i\omega)t} dt = 1 + i\omega$$

$$\int_0^\infty \cos(t) \cdot e^{-(1+i\omega)t} dt = \frac{1+i\omega}{(1+i\omega)^2+1} = \frac{1+i\omega}{2 + i^2\omega^2 + 2i\omega} = \frac{(1+i\omega)(2-\omega^2-2i\omega)}{(2-\omega^2+2i\omega)(2-\omega^2-2i\omega)}$$

$$= \frac{2 - \omega^2 - 2i\omega + 2i\omega - i\omega^3 - 2i^2\omega^2}{4 - 2\omega^2 - 4i\omega - 2\omega^2 + \omega^4 + 2i\omega^3 + 4i\omega - 2i\omega^3 - 4i^2\omega^2}$$

$$= \frac{2+\omega^2 - i\omega^3}{4+\omega^4} = \mathcal{L}[f](i\omega)$$

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = 2\,\mathrm{Re}(\mathcal{L}[f](i\omega)) = \frac{4+2\omega^2}{4+\omega^4}$$