Agenda

1. Einführung und Übersicht

2. Lineare Optimierung

3. Graphentheorie

4. **Ganzzahlige Optimierung**

5. Dynamische Optimierung

Lehrevaluation

- Dieses Semester steht wieder die Lehrevaluation des Moduls an.
- Bitte geht auf den folgenden Link oder scannt den QR-Code, um an der Umfrage teilzunehmen.
- Es handelt sich hier lediglich um den Vorlesungsteil der Veranstaltung. Für die Evaluation der Tutorien wird es eine gesonderte Umfrage geben, die in den Tutorien verlinkt sein wird.
- Sämtliches Feedback ist willkommen. Wir wollen euch eine bestmögliche Veranstaltung anbieten und freuen uns über Verbesserungsvorschläge, Kritikpunkte oder ein Lob.

https://befragung.tu-berlin.de/evasys/online.php?p=Q9T2C

Ganzzahlige Optimierung

In der Realität haben viele Probleme nur ganzzahlige Lösungen

- Anzahl der Schiffe in einem Konvoi
- Produktionsmenge gemessen in Stückzahlen (Losgrößenplanung)
- Gegenstände, die man in einen Rucksack packt

Wir unterscheiden in ganzzahlige und binäre Probleme

- Binär:
  - Wird die Maschine des Typs *i* beschafft?
  - Wird Gegenstand *i* eingepackt? (Rucksackproblem)
- Ganzzahlig:
  - Wie viele Maschinen des Typs *i* werden beschafft?
  - Welche Kombination aus Produkten soll produziert werden?

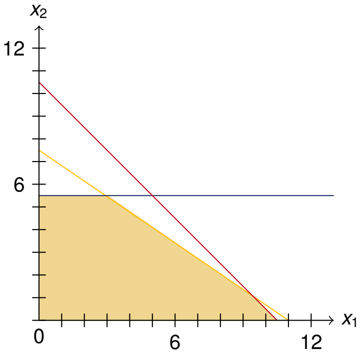
整数优化

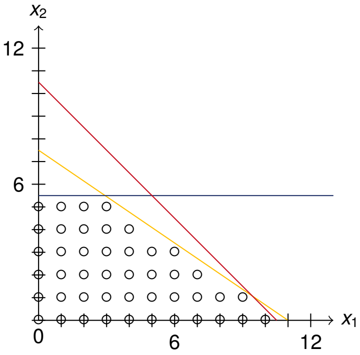
在现实中，许多问题只有整数解决方案。

- 船队中的船只数量
- 以件数为单位的生产量（批量生产计划）
- 装进背包的物品

我们区分整数问题和二进制问题

- 二进制：
  - 是否采购类型为i的机器?
  - 是否将物品i放入背包中? （背包问题）
- 整数：
  - 要采购多少台类型为i的机器?
  - 应该生产哪种产品组合?


x_2
12
6
0
6
12
x_1


x_2
12
6
0
6
12
x_1

Agenda

4. Ganzzahlige Optimierung

4.1 Branch-and-Bound-Algorithmus

4.2 Gomory-Algorithmus

4.3 Binäre Variablen

Branch-and-Bound-Algorithmus – Grundidee

- Lösung einer Folge von relaxierten Problemen um das ursprüngliche ganzzahlige Problem zu lösen
- Zerlegung des Optimierungsproblems in kleinere Teilprobleme (Branching)
- Entscheidung, welches Teilproblem weitergeführt wird oder durch ein anderes dominiert wird (Bounding)
- Die ganzzahlige, optimale Lösung einer linearen Relaxation eines ganzzahligen Problems ist auch die optimale Lösung des ganzzahligen Problems
- Der Zielfunktionswert eines übergeordneten (Teil-)Problems stellt immer eine obere Schranke für die Zielfunktionswerte der untergeordneten Probleme dar

Definition

Ein **relaxiertes Problem** ist ein einfacheres Problem, dessen Lösungsmenge alle Lösungen des Ursprungsproblems enthält. Ferner steht die Lösung des relaxiertenProblems in einem nicht-trivialen Zusammenhang mit der Lösung des Ausgangsproblems.

分支定界算法 - 基本思想

- 解决一系列放宽的问题来解决原始的整数问题
- 将优化问题分解为较小的子问题（分支）
- 决定哪个子问题继续，或者被其他问题所主导（界定）
- 整数问题的线性放宽的最优解也是整数问题的最优解
- 更高级（部分）问题的目标函数值始终是下级问题的目标函数值的上限

定义

放宽的问题是一个较简单的问题，其解集包含原始问题的所有解。此外，放宽问题的解与原始问题的解有着非平凡的关系。

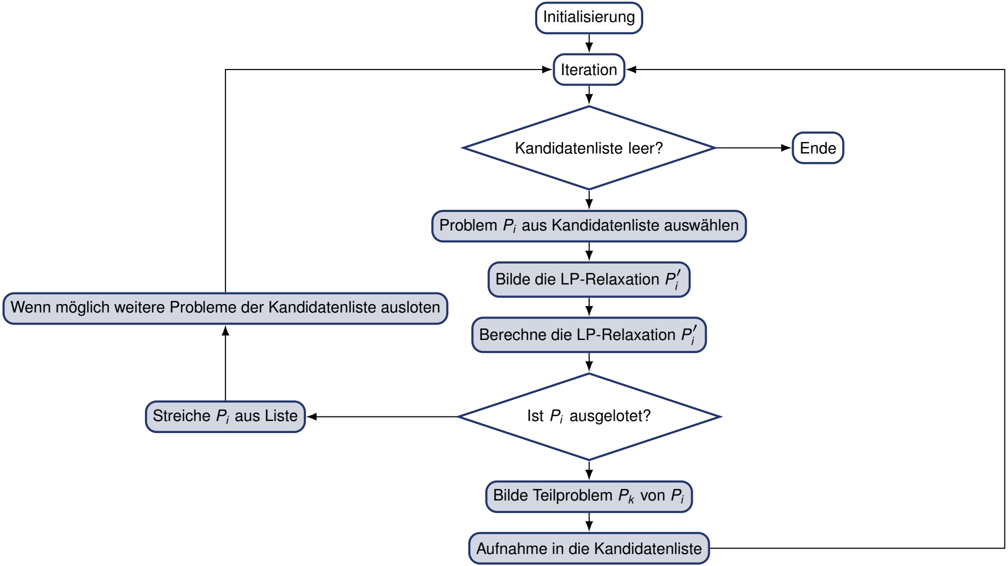
Branch-and-Bound-Algorithmus

LP-Relaxation: Die Forderung der Ganzzahligkeit wird aufgegeben

Prozedur Branch-and-Bound

- Input:
  - Ganzzahliges lineares Problem P_0
  - Kandidatenliste K
- Initialisierung:
  - $K = \{P_0\}$
  - Untere Schranke $U = -\infty$
  - Obere Schranke $O = +\infty$
- Weitere Schritte siehe nächste Folie

Branch-and-Bound-Algorithmus



Untersuchen der Teilprobleme: Ausloten nach . . .

- . . . Ganzzahligkeit: Das Teilproblem ist bereits optimal ganzzahlig gelöst
- . . . Unzulässigkeit: Der zulässige Bereich ist leer
- . . . Beschränkung: Die obere Schranke eines Teilproblems ist kleiner als eine bereits gefundene ganzzahlige Lösung (untere Schranke)

Wenn ein Teilproblem ausgelotet ist, muss es nicht weiter verzweigt werden.

检查子问题：查看是否...

- ...整数解：子问题已经以最优整数解解决
- ...不可行性：可行解空间为空
- ...受限制：子问题的上界小于已找到的整数解（下界）

当一个子问题被查明后，就不需要再进行分支了。

Produktion von Stühlen und Tischen

Tisch:

- 1 h Arbeit
- $9m^2$ Holz
- 8 Euro Erlös

Stuhl:

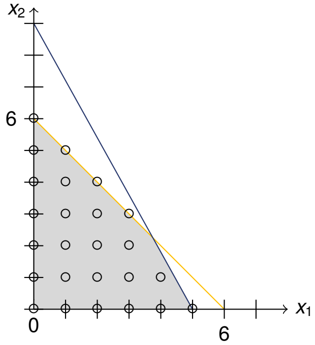
- 1 h Arbeit
- $5m^2$ Holz
- 5 Euro Erlös

Momentan verfügbar:

- $6h$ Arbeit
- $45m^2$ Holz

Initialisierung:

- $K = \{P_0\}$
- Obere Schranke $O = +\infty$



$$
\begin{aligned}
\max z = \quad & 8x_1 + 5x_2 & \\
\text{s.t.} \quad & 1x_1 + 1x_2 & \leq 6 \\
& 9x_1 + 5x_2 & \leq 45 \\
& x_{1,2} & \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Ganzzahlige Optimierung – Beispiel: LP-Relaxation P_0

LP-Relaxation: Entfernung der Ganzzahligkeitsbedingung

Ergebnis der Berechnung

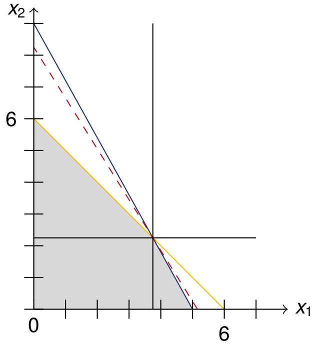
- $x_1 = 3{,}75$
- $x_2 = 2{,}25$
- z = 41,25

Schlussfolgerungen

- Obere Schranke $O = 41{,}25$
- Kein Ausloten möglich

Neue Teilprobleme bilden

- Auswahl einer beliebigen nicht-ganzzahligen Variablen



$$
\begin{aligned}
\max z = \quad & 8x_1 + 5x_2 & \\
\text{s.t.} \quad & 1x_1 + 1x_2 & \leq 6 \\
& 9x_1 + 5x_2 & \leq 45 \\
& x_{1,2} & \geq 0
\end{aligned}
$$

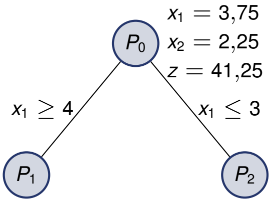
Ganzzahlige Optimierung – Beispiel: Teilprobleme bilden

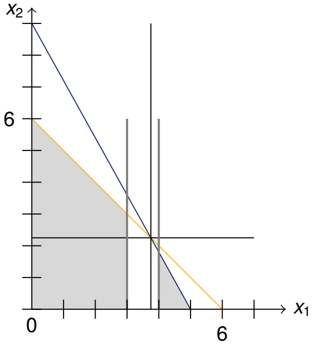
Auswahl einer beliebigen nicht-ganzzahligen Variablen

- $x_1 = 3{,}75$
- Feststellen der ganzzahligen Nachbarn $3 \leq x_1 \leq 4$

Bildung von zwei neuen Teilproblemen durch Einführung neuer Neben-bedingungen

- Teilproblem P_1: $x_1 \geq 4$
- Teilproblem P_2: $x_1 \leq 3$





$$
\begin{aligned}
\max z = \quad & 8x_1 + 5x_2 & \\
\text{s.t.} \quad & 1x_1 + 1x_2 & \leq 6 \\
& 9x_1 + 5x_2 & \leq 45 \\
& x_{1,2} & \geq 0
\end{aligned}
$$

Ganzzahlige Optimierung – Beispiel: Teilproblem 1

Einfügen der neuen Nebenbedingung

- $x_1 \geq 4$

Ergebnis der Berechnung

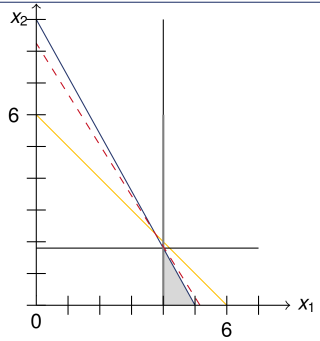
- $x_1 = 4$
- $x_2 = 1{,}8$
- z = 41

Schlussfolgerungen

- Obere Schranke $O_1 = 41$
- Kein Ausloten möglich

Neue Teilprobleme bilden

- Auswahl einer beliebigen nicht-ganzzahligen Variable



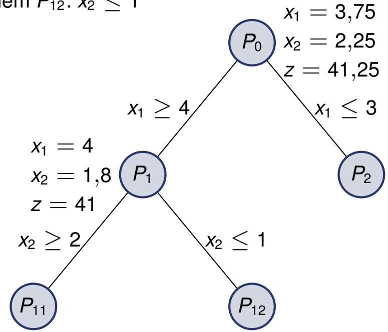
$$
\begin{aligned}
\max z = \quad & 8x_1 + 5x_2 & \\
\text{s.t.} \quad & 1x_1 + 1x_2 & \leq 6 \\
& 9x_1 + 5x_2 & \leq 45 \\
& x_1 & \geq 4 \\
& x_{1,2} & \geq 0
\end{aligned}
$$

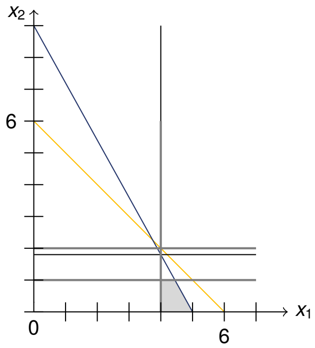
Auswahl einer beliebigen nicht-ganzzahligen Variablen

- $x_2 = 1{,}8$
- Feststellen der ganzzahligen Nachbarn $1 \leq x_2 \leq 2$

Bildung von zwei neuen Teilproblemen durch Einführung neuer Nebenbedingungen

- Teilproblem P_{11}: $x_2 \geq 2$
- Teilproblem P_{12}: $x_2 \leq 1$





$$
\begin{aligned}
\max z = \quad & 8x_1 + 5x_2 & \\
\text{s.t.} \quad & 1x_1 + 1x_2 & \leq 6 \\
& 9x_1 + 5x_2 & \leq 45 \\
& x_1 & \geq 4 \\
& x_{1,2} & \geq 0
\end{aligned}
$$

Ganzzahlige Optimierung – Beispiel: Teilproblem 11

Einfügen der neuen Nebenbedingung

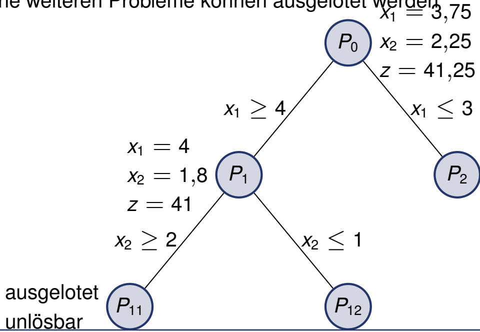
- $x_2 \geq 2$

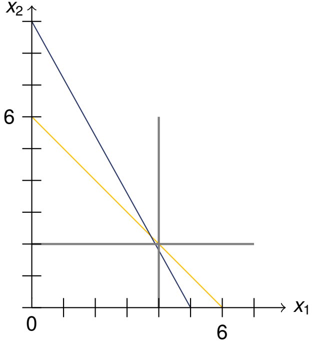
Ergebnis der Berechnung

- Problem nicht lösbar

Schlussfolgerungen

- Ausloten von P_{11}
- Keine weiteren Probleme können ausgelotet werden





$$
\begin{array}{rrl}
\max z = & 8x_1 + 5x_2 & \\
\text{s.t.} & 1x_1 + 1x_2 & \leq 6 \\
 & 9x_1 + 5x_2 & \leq 45 \\
 & x_1 & \geq 4 \\
 & x_2 & \geq 2 \\
 & x_{1,2} & \geq 0
\end{array}
$$

Einfügen der neuen Nebenbedingung

- $x_2 \leq 1$

Ergebnis der Berechnung

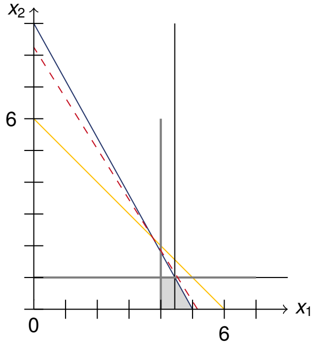
- $x_1 = 4{,}44$
- $x_2 = 1$
- $z = 40{,}56$

Schlussfolgerungen

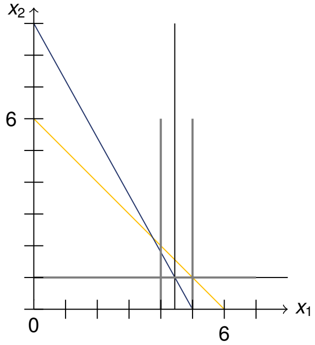
- Kein Ausloten möglich

Neue Teilprobleme bilden

- Auswahl einer beliebigen nicht-ganzzahligen Variablen



$$
\begin{aligned}
\max z = \quad & 8x_1 + 5x_2 & \\
\text{s.t.} \quad & 1x_1 + 1x_2 & \leq 6 \\
& 9x_1 + 5x_2 & \leq 45 \\
& x_1 & \geq 4 \\
& x_2 & \leq 1 \\
& x_{1,2} & \geq 0
\end{aligned}
$$



Auswahl einer beliebigen nicht-ganzzahligen Variablen

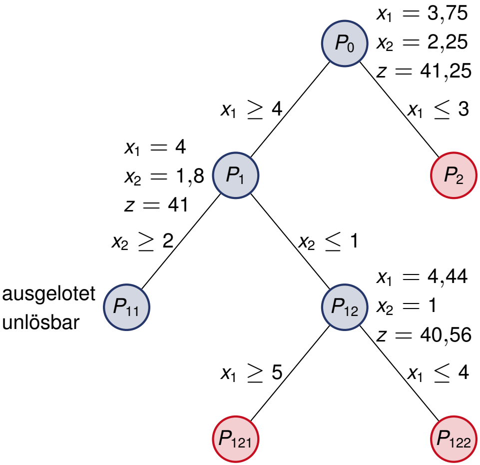
- $x_1 = 4{,}44$
- Feststellen der ganzzahligen Nachbarn $4 \leq x_1 \leq 5$

Bildung von zwei neuen Teilproblemen durch Einführung neuer Nebenbedingungen

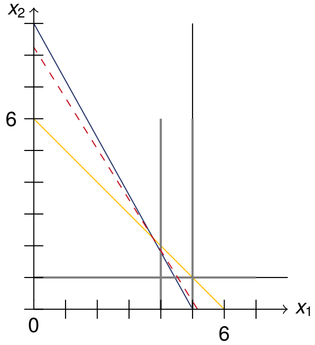
- Teilproblem P_{121}: $x_1 \geq 5$
- Teilproblem P_{122}: $x_1 \leq 4$

$$\begin{aligned} \max z = \quad & 8x_1 + 5x_2 & \\ \text{s.t.} \quad & 1x_1 + 1x_2 & \leq 6 \\ & 9x_1 + 5x_2 & \leq 45 \\ & x_1 & \geq 4 \\ & x_2 & \leq 1 \\ & x_{1,2} & \geq 0 \end{aligned}$$

Ganzzahlige Optimierung – Beispiel: Teilprobleme bilden



Ganzzahlige Optimierung – Beispiel: Teilproblem 121



Einfügen der neuen Nebenbedingung

- $x_1 \geq 5$

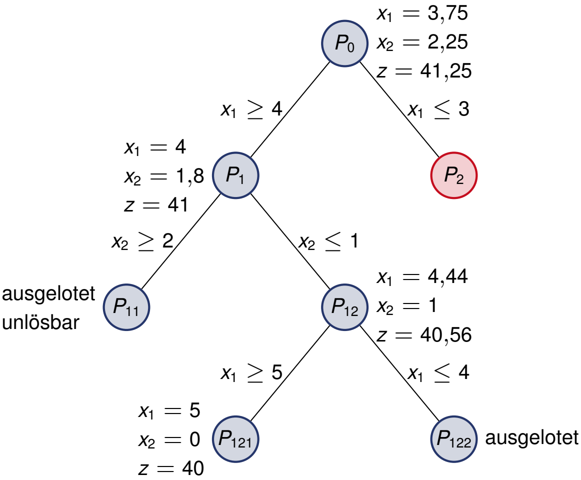
Ergebnis der Berechnung

- $x_1 = 5$
- $x_2 = 0$
- $z = 40$

Schlussfolgerungen

- Untere Schranke $U = 40$
- Ausloten: Ganzzahlige Lösung
- P_{122} kann ebenfalls ausgelotet werden. (Da Zielfunktionswert aufgrund der ganzzahligen Koeffizienten und ganzzahligen Variablen ebenfalls ganzzahlig sein muss und damit maximal $U = 40$ ist.)

$$
\begin{array}{rrl}
\max z = & 8x_1 + 5x_2 & \\
\text{s.t.} & 1x_1 + 1x_2 & \leq 6 \\
 & 9x_1 + 5x_2 & \leq 45 \\
 & x_1 & \geq 4 \\
 & x_2 & \leq 1 \\
 & x_1 & \geq 5 \\
 & x_{1,2} & \geq 0
\end{array}
$$


P_0
$x_1 = 3{,}75$
$x_2 = 2{,}25$
$z = 41{,}25$
$x_1 \geq 4$
$x_1 \leq 3$
P_1
$x_1 = 4$
$x_2 = 1{,}8$
$z = 41$
P_2
$x_2 \geq 2$
$x_2 \leq 1$
ausgelotet
unlösbar
P_{11}
P_{12}
$x_1 = 4{,}44$
$x_2 = 1$
$z = 40{,}56$
$x_1 \geq 5$
$x_1 \leq 4$
$x_1 = 5$
$x_2 = 0$
$z = 40$
P_{121}
P_{122}
ausgelotet

Ganzzahlige Optimierung – Beispiel: Teilproblem 2

Einfügen der neuen Nebenbedingung

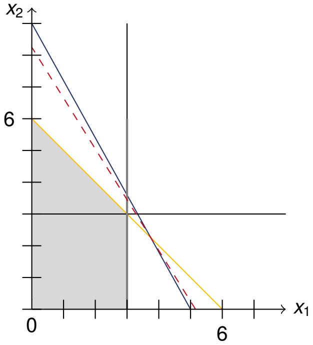
- $x_1 \leq 3$

Ergebnis der Berechnung

- $x_1 = 3$
- $x_2 = 3$
- $z = 39$

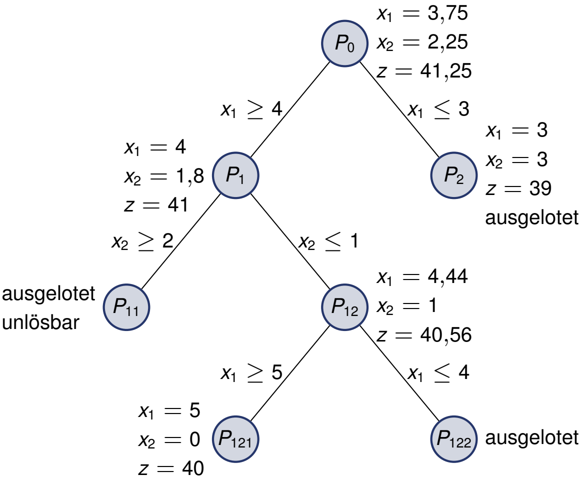
Schlussfolgerungen

- Untere Schranke $U = 40$
- Zielfunktionswert geringer als untere Schranke
- P_2 kann ausgelotet werden



$$
\begin{aligned}
\max z = \quad & 8x_1 + 5x_2 & \\
\text{s.t.} \quad & 1x_1 + 1x_2 & \leq 6 \\
& 9x_1 + 5x_2 & \leq 45 \\
& x_1 & \leq 3 \\
& x_{1,2} & \geq 0
\end{aligned}
$$

Ganzzahlige Optimierung – Beispiel: Teilproblem 2



Branch-and-Bound-Algorithmus: Auswahlregeln

Auswahlregel für Variable

- Zufallsauswahl
- Fraktionellste Variable ($\frac{1}{2}$-Regel)
  Wähle diejenige Variable zum Einschränken, deren aktueller, nicht ganzzahliger Anteil näher an $\frac{1}{2}$ liegt.
- Strong Branching
  Aufstellung und Berechnung von Teilproblemen für alle nicht ganzzahligen Variablen und schließlich Wahl der Variable, die den Zielfunktionswert am meisten verändert; Verwerfung der nicht ausgewählten Variablen

Auswahlstrategie für Teilprobleme:

- Maximum Upper Bound (MUB)
  Wähle Problem mit bestem Zielfunktionswert aus der Liste (beachte die Optimierungsrichtung)
- Tiefensuche
  Wähle Problem aus der Liste, welches als letztes eingefügt wurde (LIFO
- Breitensuche
  Wähle Problem aus der Liste, welches als erstes eingefügt wurde (FIFO

Branch-and-Bound算法：选择规则

变量选择规则：

- 随机选择
- 分数最大的变量（12-规则）：选择当前非整数部分距离12最近的变量。
- 强分支：为所有非整数变量建立和计算子问题，最后选择对目标函数值影响最大的变量；选择的变量。

子问题选择策略：

- 最大上界（MUB）：从列表中选择具有最佳目标函数值的问题（考虑优化方向）。
- 深度优先搜索：从列表中选择最后插入的问题（LIFO）。
- 广度优先搜索：从列表中选择最先插入的问题（FIFO）。