Aufgabe 4: Induktion über Wörter

Gegeben sei ein Alphabet Σ. *Beweise per Induktion:* $\forall w \in \Sigma^* \,.\, |w| = \sum_{a \in \Sigma} |w|_a$.

Sei $P(w) \triangleq \left(|w| = \sum_{a \in \Sigma} |w|_a \right)$

Wir verwenden das Induktionsschema: $\Big(\underbrace{P(\varepsilon)}_{IA} \land \big(\underbrace{\forall w \in \Sigma^* .\, P(w) \to \forall x \in \Sigma .\, P(wx)}_{IS} \big) \Big) \to \left(\forall v \in \Sigma^* .\, P(v) \right)$

$IA(P(\varepsilon))$:

$$|\varepsilon| = 0 = \sum_{a \in \Sigma} |\varepsilon|_a$$

Sei $w \in \Sigma^*$.

$IV(P(w))$: $|w| = \sum_{a \in \Sigma} |w|_a$

Sei $x \in \Sigma$. 某个词

$IS(P(wx))$: zu zeigen: $|wx| = \sum_{a \in \Sigma} |wx|_a$.

$$\begin{aligned}
\sum_{a \in \Sigma} |wx|_a &= |wx|_x + \sum_{a \in \Sigma \setminus \{x\}} |wx|_a \\
&= |w|_x + 1 + \sum_{a \in \Sigma \setminus \{x\}} |w|_a \\
&= 1 + \sum_{a \in \Sigma} |w|_a = 1 + |w| = |wx|
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Zeige, dass eine Sprache regulär ist.

Beweise, dass die Sprache $A \triangleq \{ w \mid w \in \Sigma^* \}$ mit Alphabet $\Sigma = \{ a,\ b \}$ regulär ist.

---------------------------------- Lösung ----------------------------------

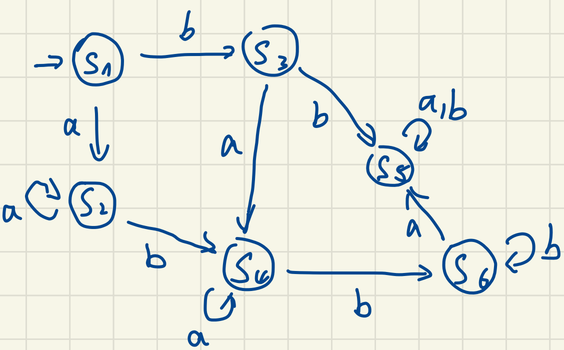
Wir zeigen, dass die Sprache A gleich der Sprache $L\big((a+b)^*\big)$ ist.

$$\begin{aligned}
L((a+b)^*) &\overset{\text{FS 1.2.8 } *}{=} L(a+b)^* \overset{\text{FS 1.2.8+}}{=} (L(a) \cup L(b))^* \overset{\text{FS 1.2.8 } a,b \in \Sigma}{=} (\{ a \} \cup \{ b \})^* \\
&\overset{\text{Def. } \cup}{=} \{ a,\ b \}^* \overset{\text{Prop. 0.3.5}}{=} \{ w \mid w \in \{ a,\ b \}^* \} \overset{\text{Def. } A}{=} A
\end{aligned}$$

Da A durch einen regulären Ausdruck beschrieben wird, gibt es nach Theorem 1.4.5 eine reguläre Grammatik G mit $L(G) = A$. Nach Definition 1.4.3 ist A damit regulär.

---------------------------------- /Lösung ----------------------------------

		a	b	
S	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_1, q_5, q_2\}$	$\{q_3\}$	S_1
	$\{q_1, q_2, q_5\}$	$\{q_1, q_2, q_5\}$	$\{q_3, q_4\}$	S_2
	$\{q_3\}$	$\{q_3, q_4\}$	$\emptyset$	S_3
F	$\{q_3, q_4\}$	$\{q_3, q_4\}$	$\{q_4, q_5\}$	S_4
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	S_5
F	$\{q_4, q_5\}$	$\emptyset$	$\{q_4, q_5\}$	S_6



Aufgabe 2: Pumping Lemma

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma \triangleq \{ a, b, c \}$ und die Sprachen

$A_1 \triangleq \{ a^n w \mid n \in \mathbb{N} \wedge w \in \{ b, c \}^* \wedge |w|_b = |w|_c \}$ ← zu zeigen nicht regulär

$A_2 \triangleq \{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leqslant 2 \}$

$A_3 \triangleq \{ (ab^n a)^n \mid n \in \mathbb{N} \}$

$A_4 \triangleq \{ a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \wedge n \leqslant m \}$

Sei $n \in \mathbb{N}$ (beliebig aber fest) Wir wählen das Wort $w = b^n c^n$ mit $w \in A_1$, denn $0 \in \mathbb{N}$ und $|w|_b = n = |w|_c$. Sei $w = xyz$ eine beliebige Zerlegung mit $y \neq \varepsilon$ und $|xy| \leq n$.
Dann ist $x = b^i$ $y = b^j$ und $z = b^{n-i-j} c^n$ für ein $j \neq 0$ und $i + j \leq n$
wir wählen $k = 0$. Dann ist $xy^0 z = b^{n-j} c^n \notin A_1$
Da $\neg$Pump-REG(A_1), ist A_1 nicht regulär