Diskrete Strukturen
Großübung

Amelie Heindl

Lehrstuhl für Logik und Semantik

Technische Universität Berlin

Sommersemester 2024

Themenüberblick

Themenüberblick: Vorlesungswoche 4

- Definitionen
- Binärbäume
- Catalan-Zahlen
- Permutationen
- Stirling-Zahlen

Schubfachprinzip

Schubfachprinzip: Grundlagen

Das Schubfachprinzip ist eine Methode, mithilfe derer Aussagen über Mengen getroffen werden können.

Schubfachprinzip

Sei X eine Menge mit n Elementen und sei $r < n$ eine natürliche Zahl. Wenn alle Elemente aus X in r Schubfächer gelegt werden, enthält mindestens eines der Schubfächer mehr als ein Element.

抽屉原理是一种可以用于对集合进行推论的方法。

抽屉原理

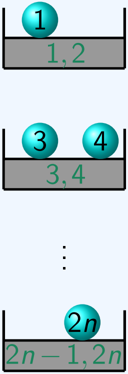
设 X 是一个包含 n 个元素的集合，且 $r < n$ 是一个自然数。如果将 X 中的所有元素放入 r 个抽屉中，则至少有一个抽屉包含多个元素。

Schubfachprinzip: Beispiel I

Sei n eine natürliche Zahl. Wir betrachten die Menge $M = \{1, \ldots, 2n\}$. Nun werden zufällig $n+1$ Elemente aus M gezogen ohne Zurücklegen. Wir wollen zeigen, dass unter den gezogenen Elementen zwei teilerfremde Zahlen sind.

Beobachtung: Für $k \in \mathbb{N}$ gilt stets $\mathrm{ggT}(k, k+1) = 1$.
Wir konstruieren nun n Schubfächer und für $1 \leq i \leq n$ benennen wir das i+te Schubfach mit "2i-1,i". Jede Zahl die wir ziehen, legen wir in das Fach, das mit dieser Zahl beschriftet ist. Da wir $n+1$ mal ziehen, aber nur n Fächer haben, folgt nach dem Schubfachprinzip, dass mindestens ein Fach doppelt belegt ist. Die beiden gezogenen Zahlen im gleichen Fach sind teilerfremd.

我们现在构造 n 个抽屉，对于 $1 \leq i \leq n$，我们将第 i 个抽屉命名为"$2i-1, i$"。每次抽取一个数，我们将其放入用该数命名的抽屉中。因为我们抽取 $n+1$ 个数，但只有 n 个抽屉，因此根据抽屉原理，至少有一个抽屉被放了两个数。这两个数必然互质。



Schubfachprinzip: Beispiel II

Sei n eine natürliche Zahl. Wir betrachten erneut die Menge $M = \{1, \ldots, 2n\}$. Nun werden zufällig $n+1$ Elemente aus M gezogen ohne Zurücklegen. Wir wollen zeigen, dass unter den gezogenen Elementen zwei Zahlen sind, von denen eine die andere teilt.

Die gezogenen Zahlen bezeichnen wir mit $a_1, \ldots, a_{n+1}$.
Dann schreiben wir für $1 \leq i \leq n+1$ diese Zahlen in der Form $a_i = 2^{k_i} \cdot u_i$, wobei $k_i \in \mathbb{N}$ gilt und u_i eine ungerade natürliche Zahl ist.
Dann gilt $u_i \leq a_i \leq 2n$ für $1 \leq i \leq n+1$. Es gibt nur n viele ungerade Zahlen, die kleiner als 2n sind. Also gibt es nach dem Schubfachprinzip Indizes $1 \leq i < j \leq n+1$ mit $u_i = u_j$. Es folgt $a_j = 2^{k_j} \cdot u_j = 2^{k_j} \cdot u_i = 2^{k_j - k_i} \cdot 2^{k_i} \cdot u_i = 2^{k_j - k_i} \cdot a_i$ und damit $a_i \mid a_j$.

Satz von Ramsey

Satz von Ramsey: Aussage

Ramsey的特殊定理

存在一个函数 $R : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得对于所有图 $G = (V, E)$ 和所有 $c, i \geq 0$ 成立：如果 $|V| \geq R(c, i)$，那么

- 存在一个 $X \subseteq V$ 满足 $|X| = i$ 且 X 是图 G 中的一个独立集，或者
- 存在一个 $X \subseteq V$ 满足 $|X| = c$ 且 X 在图 G 中诱导了一个团（clique），即对于所有 $u \neq v \in X$ 成立 $\{u, v\} \in E$。

Der spezielle Satz von Ramsey

Es gibt eine Funktion $R : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass für alle Graphen $G = (V, E)$ und alle $c, i \geq 0$ gilt: Wenn $|V| \geq R(c, i)$, dann

- gibt es ein $X \subseteq V$ mit $|X| = i$ und X ist eine unabhängige Menge in G oder
- es gibt ein $X \subseteq V$ mit $|X| = c$ und X induziert eine Clique in G, d.h. für alle $u \neq v \in X$ gilt $\{u, v\} \in E$.

Der Satz besagt, dass immer eine Mindestgröße $R(c, i)$ existiert, ab der alle Graphen, deren Knotenmenge diese Größe erreicht oder übersteigt, eine der beiden Eigenschaften, eine unabhängige Menge der Größe i oder eine Clique der Größe c zu haben, erfüllt. Für feste Werte i, c kann es also nicht beliebig große Graphen geben, die beide Eigenschaften nicht erfüllen.

该定理表明，总是存在一个最小大小 $R(c, i)$，从而所有顶点数达到或超过这个大小的图，必定满足两个性质之一，即有一个大小为 i 的独立集，或者有一个大小为 c 的团。对于固定的 i, c 值，不能有任意大的图同时不满足这两个性质。

Satz von Ramsey: Aussage

Der Satz sagt nichts über $R(c, i)$ aus, abseits der Existenz.

Die kleinsten Zahlen ab denen die Aussage des Satzes stimmt, werden Ramsey-Zahlen genannt. Sie zu finden oder ihre Größe abzuschätzen ist ein schwieriges Problem. Genaue Ergebnisse sind nur für sehr kleine Werte für i und c bekannt.

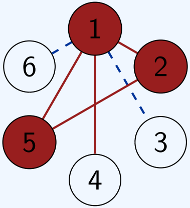
定理并没有说明 $R(c,i)$ 的具体值，只说明了其存在性。

满足定理所述性质的最小数称为Ramsey数。找到这些数或估计它们的大小是一个困难的问题。对于 i 和 c 的很小的值，才有精确的结果。

Satz von Ramsey: Beispiel

Für $i = 3, c = 3$ ist die zugehörige Ramsey-Zahl 6. Das bedeutet, alle Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 6$ haben entweder eine unabhängige Menge der Größe 3 oder eine Clique der Größe 3.

Sei G ein beliebiger solcher Graph. Wir betrachten sechs seiner Knoten. Knoten 1 ist mit jedem der anderen fünf Knoten entweder verbunden (rote Kante) oder nicht verbunden (blaue 'Nicht-Kante'). Nach dem Schubfachprinzip gibt es mindestens drei Knoten, sodass 1 entweder mit allen oder mit keinem davon verbunden ist. Sei 1 mit 2,4 und 5 verbunden. Falls eine der Kanten zwischen 2,4, und 5 existiert, bildet 1 mit den beiden Endpunkten dieser Kante eine Clique.



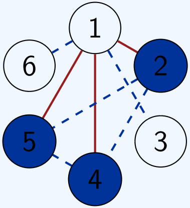
对于 $i = 3, c = 3$，对应的Ramsey数是6。这意味着所有顶点数 $|V| \geq 6$ 的图 $G = (V, E)$ 必有一个大小为3的独立集或一个大小为3的团。

设 G 是这样一个图。我们考虑其中的六个顶点。顶点1与其他五个顶点之间要么相连（红边），要么不相连（蓝“非边”）。根据抽屉原理，至少有三个顶点，要么全部与顶点1相连，要么都不与顶点1相连。设顶点1与2、4、5相连。如果2、4、5之间有一条边存在，则形成一个大小为3的团。

Satz von Ramsey: Beispiel

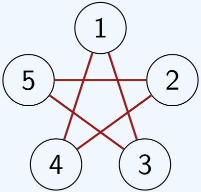
Für $i = 3, c = 3$ ist die zugehörige Ramsey-Zahl 6. Das bedeutet, alle Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 6$ haben entweder eine unabhängige Menge der Größe 3 oder eine Clique der Größe 3.

Sei G ein beliebiger solcher Graph. Wir betrachten sechs seiner Knoten. Knoten 1 ist mit jedem der anderen fünf Knoten entweder verbunden (rote Kante) oder nicht verbunden (blaue 'Nicht-Kante'). Nach dem Schubfachprinzip gibt es mindestens drei Knoten, sodass 1 entweder mit allen oder mit keinem davon verbunden ist. Sei 1 mit 2,4 und 5 verbunden. Falls eine der Kanten zwischen 2,4, und 5 existiert, bildet 1 mit den beiden Endpunkten dieser Kante eine Clique. Anderenfalls bilden 2,4 und 5 eine unabhängige Menge.



Satz von Ramsey: Beispiel

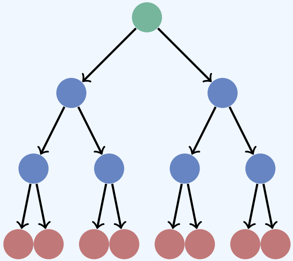
Die Zahl 6 ist in diesem Fall minimal, der folgende Graph mit $|V| = 5$ hat weder eine unabhängige Menge der Größe 3, noch eine Clique der Größe 3:



Binärbäume

Binärbäume: Grundlagen

Binärbäume sind spezielle Graphen.
Die Binärbäume, die wir betrachten, bestehen aus einem Wurzelknoten, gerichteten Kanten zu den Nachfolgern, die sich in innere Knoten und Blätter aufteilen. Jeder Knoten hat dabei höchstens 2 Nachfolger.
Er heißt balanciert, wenn alle Blätter den gleichen Abstand zur Wurzel haben (gemessen als Anzahl der Kanten auf dem kürzesten Pfad) und vollständig, wenn es jeder Knoten entweder 0 oder 2 Nachfolger hat.



Binärbäume: Rekursive Definition

Binärbäume können rekursiv definiert werden.

Definition: Binärbäume

- Der leere Graph $T = (\emptyset, \emptyset)$ ist ein Binärbaum
- Wenn $T_1 = (V_1, E_1)$ und $T_2 = (V_2, E_2)$ Binärbäume sind, ist auch $T_3 = (V_1 \,\dot{\cup}\, V_2 \,\dot{\cup}\, r, E_1 \,\dot{\cup}\, E_2 \,\dot{\cup}\, E_3)$ ein Binärbaum. Hierbei ist r ein neuer Knoten (Wurzel von T_3). E_3 enthält eine Kante von r zu der Wurzel von T_1, falls diese Wurzel existiert, eine Kante von r zu der Wurzel von T_2, falls diese Wurzel existiert, und keine weiteren Kanten.

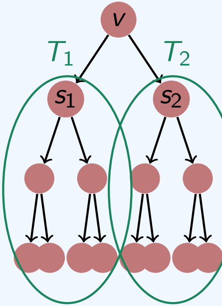
Binärbäume: Blätterzahl

Satz: Ein vollständiger, balancierter Binärbaum $T = (V, E)$ der Höhe h enthält genau 2^h Blätter.

Beweis: Wir beweisen die Aussage per Induktion über h.

Die Höhe eines Baumes ist die maximale Kantenzahl zwischen der Wurzel und einem Blatt

1. Induktionsanfang: Für $h = 0$, enthält T nur einen Knoten und dieser ist sowohl Wurzel als auch Blatt. T hat also $1 = 2^0$ Blätter.
2. Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an, die Behauptung gilt für ein h.
3. Induktionsschritt. Sei T ein balancierter, vollständiger Binärbaum der Höhe $h+1$. Sei v die Wurzel von T und s_1, s_2 die beiden Nachfolger. Seien T_1, T_2 die beiden Teilbäume von T mit Wurzel s_1, s_2. Dann haben T_1 und T_2 jeweils die Höhe h und, nach I.V. 2^h Blätter. Also hat T genau $2^h + 2^h = 2 \cdot 2^h = 2^{h+1}$ Blätter. □



Catalan-Zahlen

Catalan-Zahlen: Definition

Catalan-Zahlen

Die Catalan-Zahlen sind eine Folge natürlicher Zahlen $C_0, C_1, C_2, \ldots$.
Die i-te Catalan-Zahl C_i für $i \in \mathbb{N}$ hat hierbei den Wert $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Rekursive Berechnung: $C_i = \sum_{k=1}^{i} C_{k-1} C_{i-k}$
mit Anfangswert $C_0 = 1$.

Die ersten Folgenglieder sind
$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, \ldots$

Die Catalan-Zahlen tauchen bei verschiedenen Fragestellungen der Kombinatorik auf.

Catalan-Zahlen: Beispiel I

Dyck-Sprachen

Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Dyck-Sprache D_n die Menge aller korrekter Klammerausdrücke mit n unterschiedlichen Klammerarten. Die Klammerausdrücke werden entsprechend Dyck-Wörter genannt.

D_n kann folgendermaßen induktiv definiert werden:

- $\varepsilon \in D_n$
- für alle $u, v \in D_n$, gilt auch $uv \in D_n$ (uv ist die Konkatenation, also "Verkettung", von u und v)
- für alle $u \in D_n$, gilt auch $(_i u)_i \in D_n$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ ($(_i$ und $)_i$ sind die i-te Klammerart

Wir bauen induktiv D_1.
Es gibt eine Klammerart, das Alphabet ist $\Sigma = \{(,)\}$.

$$D_1 = \{\varepsilon, (), ()(), (()), (()()), ()()(), ()(()), (())(), \ldots\}$$

Dyck-Sprachen sind ein Beispiel für kontextfreie Sprachen.

Catalan-Zahlen: Beispiel I

Wenn wir in D_1 alle Wörter zählen wollen, die die gleiche Anzahl an Klammerpaaren verwenden, können wir die Catalan-Zahlen verwenden.

Für $i \in \mathbb{N}$ gibt es in D_1 genau C_i viele Wörter mit i Klammerpaaren ($=$ Wörter der Länge $2i$).

Dies wurde in der Vorlesung per vollständiger Induktion bewiesen.
Wiederholung: Die Beobachtung war, dass jeder Klammerausdruck mit i Klammerpaaren in der Form $(K)S$ dargestellt werden kann, wobei die schließende Klammer des ersten Paares an einer Position $2k$ ist und K ein Klammerausdruck aus $k-1$ Klammerpaaren ist und S ein Klammerausdruck aus $i-k$ Paaren. Es ergeben sich also $C_{k-1}C_{i-k}$ verschiedene Ausdrücke für jedes mögliche k und damit insgesamt $\sum_{k=1}^{i} C_{k-1}C_{i-k} = C_i$ viele.

Catalan-Zahlen: Beispiel I

Wir betrachten das Vorgehen für $i = 4$.
Es gilt $C_4 = \sum_{k=1}^{4} C_{k-1} C_{4-k} = C_0 C_3 + C_1 C_2 + C_2 C_1 + C_3 C_0$
Die schließende Klammer des ersten Klammerpaares kann an den Positionen 2,4,6 und 8 stehen. Die anderen drei Klammerpaare können jeweils entweder innerhalb oder außerhalb des ersten Paares stehen.

$$\boxed{\begin{array}{ll} (\; K \;) & S \\ 1 \quad 2k & \end{array}}$$

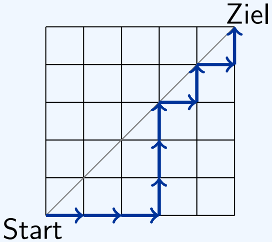
k	Position $2k$	Zahl der Klammerpaare			Zahl der Möglichkeiten		
		in K	in S	gesamt	in K	in S	gesamt
1	2	0	3	4	C_0	C_3	$C_0 \cdot C_3$
2	4	1	2	4	C_1	C_2	$C_1 \cdot C_2$
3	6	2	1	4	C_2	C_1	$C_2 \cdot C_1$
4	8	3	0	4	C_3	C_0	$C_3 \cdot C_0$

Catalan-Zahlen: Beispiel II

Ein weiteres Zählproblem, bei dem Catalan-Zahlen eine Anwendung finden, ist folgendes:

Gegeben sei ein $n \times n$-Gitter. Wie viele mögliche Wege entlang der Gitterlinien gibt es von der unteren linken zur oberen rechten Ecke, wenn jeder Schritt entweder nach rechts oder oben gehen muss und die Diagonale nicht überschritten werden darf?

Wir betrachten $n = 5$.



Die Antwort ist C_n.

Beweisidee: Betrachte die Wege als Klammerausdrücke. Schritte nach rechts sind öffnende Klammern und Schritte nach oben sind schließende Klammern. Jeder Weg muss genauso viele Schritte nach rechts wie Schritte nach oben enthalten und zu jedem Zeitpunkt mindestens so viele Schritte nach rechts gemacht haben wie nach oben. Damit entspricht die Anzahl der Wege der Anzahl der Dyck-Wörter aus n Klammerpaaren.

Permutationen

Permutationen: Grundlagen

Permutation

Sei $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$ eine Menge. Eine Permutation auf M ist eine bijektive Abbildung $\pi : M \to M$.

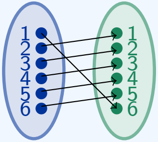
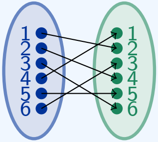
Eine Permutation bildet also jedes Element auf ein Anderes ab. Wenn man die Indizierung als Reihenfolge auffasst, entspricht die Permutation einer Umsortierung. Es gibt verschiedene Schreibweisen für Permutationen.

- als Funktion
- in Zweizeilenschreibweise
- in Zyklenschreibweise

Da sich n-elementige Mengen, bis auf die Elementnamen, nicht von der Menge der ersten n natürlichen Zahlen unterscheidet, kann man auch die Menge $\{1, \ldots, n\}$ und Bijektionen darauf betrachten.

Permutationen: Beispiele I

Wir betrachten beispielhaft Permutationen der Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ in den verschiedenen Schreibweisen.

Funktion	$\pi(m) = \begin{cases} 6 & \text{, falls } m = 1 \\ m-1 & \text{, sonst} \end{cases}$	$\pi(m) = \begin{cases} 2m & \text{, falls } m < 4 \\ 5 & \text{, falls } m = 5 \\ m-3 & \text{, sonst} \end{cases}$
Bild		
Zweizeilig	$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$
Zyklen	(1 6 5 4 3 2)	(1 2 4)(3 6)(5)

- Anagramme: Betrachte die Menge $M = \{B, E, G, R, T, U\}$. Die Worte $GEBURT$, $ERBGUT$ und $BETRUG$ entstehen alle durch Permutation von M.
- Ceasar Cypher: Als Menge wird das Alphabet einer natürlichen Sprache genommen. Eine Permutation definiert dann eine Verschlüsselung, indem jeder Buchstabe der zu verschlüsselnden Nachricht durch sein Bild ersetzt wird.

$$\pi = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k & l & m & n & o & p & q & r & s & t & u & v & w & x & y & z \\ e & f & g & h & i & j & k & l & m & n & o & p & q & r & s & t & u & v & w & x & y & z & a & b & c & d \end{pmatrix}$$

ds ist der weg

Verschlüsselte Nachricht: *hw mwx hiv aik*

Permutationen: Beispiele III

$$M = \{3, 5, 1, 56, 19, 293, 6, 22\}.$$
$$1, 3, 5, 6, 19, 22, 56, 293$$

- Sortieren: Betrachte die Menge $M = \{3, 5, 1, 56, 19, 293, 6, 22\}$. Die aufsteigend sortierte Liste $1, 3, 5, 6, 19, 22, 56, 293$ erhält man aus der gegebenen Reihenfolge durch Anwenden der Permutation $\pi = (3\ 1\ 5)(56\ 6)(19)(293\ 22)$.
- Spielkarten: Als Menge wird ein Spielkartenset genommen. Jeder Mischvorgang führt zu einer Permutation der Kartenmenge.
- Rubik's Cube: Die einzelnen Felder des Würfels bilden die Menge. Ausgehend von der Startstellung des Würfels ist jeder "Spielzug" eine Permutation auf dieser Menge.

Permutationen: Verknüpfung

Permutationen der gleichen Menge können durch Komposition ("Hintereinanderausführen") verknüpft werden.
Seien π, ρ Permutationen auf der Menge M. Dann ist $\rho \circ \pi$ diejenige Permutation auf M, die ein Element $m \in M$ abbildet auf das Bild bezüglich ρ des Bildes bezüglich π von m, also auf $\rho(\pi(m))$.

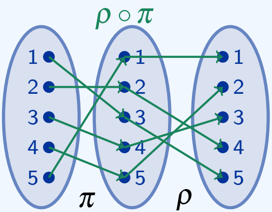
Wichtig: Die Permutation rechts des Verknüpfungssymbols $\circ$ wird zuerst angewendet.

Beispiel:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rho \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



Stirling-Zahlen

Stirling-Zahlen: Grundlagen

Stirling-Zahlen erster Art

Seien $n, k \in \mathbb{N}$. Die Stirling-Zahl erster Art $s_{n,k}$ gibt an, wie viele Permutationen einer n-elementigen Menge mit genau k Zyklen es gibt.

Rekursive Berechnung: $s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1) \cdot s_{n-1,k}$
mit Anfangswerten $s_{n,k} = 0$ für $k > n$, $s_{n,n} = 1$ und $s_{n,0} = 0$.

Stirling-Zahlen zweiter Art

Seien $n, k \in \mathbb{N}$. Die Stirling-Zahl zweiter Art $S_{n,k}$ gibt an, auf wie viele Arten eine n-elementige Menge in k nicht-leere, disjunkte Teilmengen aufgeteilt werden kann.

Rekursive Berechnung: $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}$
mit Anfangswerten $S_{n,k} = 0$ für $k > n$, $S_{n,n} = 1$ und $S_{n,0} = 0$.

Stirling-Zahlen: Beispiel

Wir betrachten die Menge $M = \{a, b, c\}$. Also ist $n = 3$. Nun wollen wir einige Stirling-Zahlen berechnen.

k	Permutationen in k Zykel	$s_{n,k}$	Partitionen in k Mengen	$S_{n,k}$
0	/	0	/	0
1	$(a\ b\ c)$ $(a\ c\ b)$	2	$\{a, b, c\}$	1
2	$(a\ b)(c)$ $(a\ c)(b)$ $(b\ c)(a)$	3	$\{a, b\}, \{c\}$ $\{a, c\}, \{b\}$ $\{b, c\}, \{a\}$	3
3	$(a)(b)(c)$	1	$\{a\}, \{b\}, \{c\}$	1
4	/	0	/	0

Feedback, Fragen und Vorschläge zur Großübung gerne an:

a.heindl@tu-berlin.de