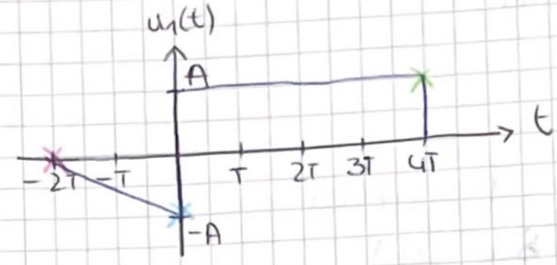
Altklausuraufgaben

Teil 1, Zeitkontinuierliche Signale

Aufgabe 1.1. → aus Klausur am 02.03.2022



a) Beschreibung von $u_1(t)$:

$$u_1(t) = -\frac{A}{2T}(t+2T)\cdot \sqcap_{2T}(t+T) + A\cdot \sqcap_{4T}(t-2T)$$

b) Skizze: $u_2(t) = \frac{1}{2} u_1(-t+T)$

$t_{alt} = -t_{neu} + T$

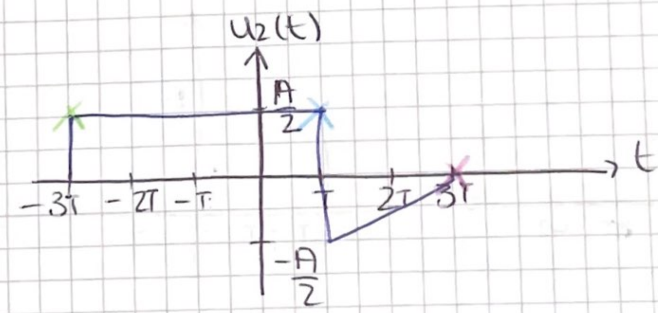
$\Leftrightarrow t_{neu} = -t_{alt} + T$

$-2T \longrightarrow 3T$

$0 \longrightarrow T$

$4T \longrightarrow -3T$

Amplitude wird um Faktor $\frac{1}{2}$ kleiner



c) Energie von $u_1(t)$

$$W_{u1} = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t)^2\, dt$$

$$= \int_{-2T}^{0} \left(-\frac{A}{2T}(t+2T)\right)^2 dt + \int_{0}^{4T} A^2\, dt$$

$$= \int_{-2T}^{0} \frac{A^2}{4T^2}(t^2 + 4Tt + 4T^2)\, dt + \left[A^2\cdot t\right]_0^{4T}$$

$$= \frac{A^2}{4T^2} \cdot \left[\frac{1}{3}t^3 + 4T \cdot \frac{1}{2}t^2 + 4T^2 \cdot t \right]_{-2T}^{0} + A^2 \cdot 4T$$

$$= \frac{A^2}{4T^2} \cdot \left[+ \frac{1}{3} 8T^3 - 4T \cdot 2T^2 + 4T^2 \cdot 2T \right] + A^2 \cdot 4T$$

$$= \frac{2}{3} A^2 T + A^2 \cdot 4T$$

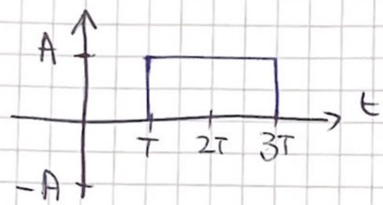
$$= \frac{14}{3} A^2 \cdot T$$

d) gegeben: $u_3(t) = A \cdot \Pi_{2T}(t)$

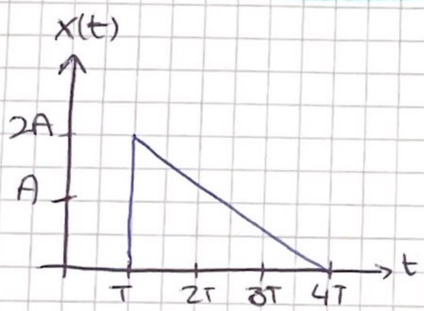
gesucht $u_3(t) * \delta(t-2T)$

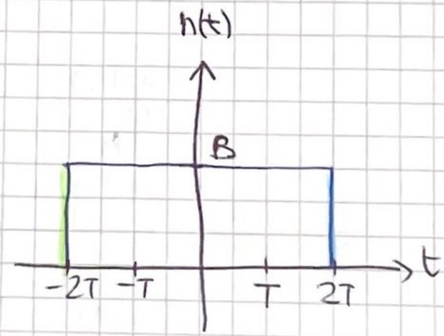
→ Faltung mit einem Deltaimpuls ($\neq$ Faltung mit Deltakamm) ⇒ Verschiebung an der Stelle vom Deltaimpuls

$$u_3(t) * \delta(t-2T) = u_3(t-2T) = A \cdot \Pi_{2T}(t-2T)$$



Aufgabe 1.2. → aus Klausur am 22.07.2015





a) gesucht: $y(t)$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

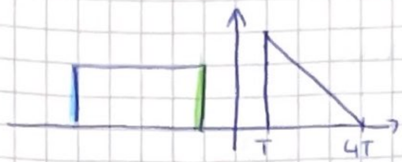
$$x(t) = -\frac{2A}{3T}(t-4T) \cdot \Pi_{3T}\left(t - \frac{5}{2}T\right)$$

$$h(t) = B \cdot \Pi_{4T}(t)$$

Grenze 1: $t-\tau=-2T \Leftrightarrow \tau=2T+t$

Grenze 2: $t-\tau=2T \Leftrightarrow \tau=-2T+t$

1. Fall:

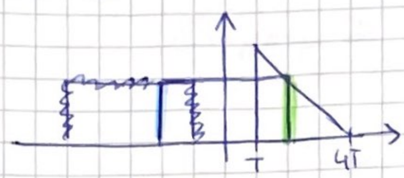


$t+2T<T$

$\Leftrightarrow t<-T$

$y(t)=0 \rightarrow$ keine Überlagerung

2. Fall

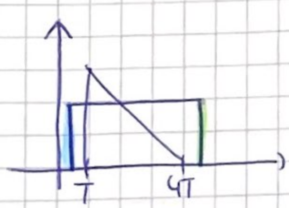


$t+2T \geq T$ und $t+2T<4T$

$\Leftrightarrow -T \leq t < 2T$

$$y(t)=\int_{T}^{t+2T} -\frac{2A}{3T}\cdot(\tau-4T)\cdot B\,d\tau$$

3. Fall

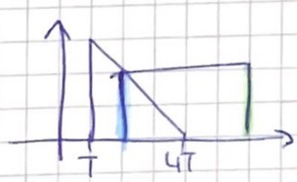


$t+2T \geq 4T$ und $t-2T<T$

$\Leftrightarrow 2T \leq t < 3T$

$$y(t)=\int_{T}^{4T} -\frac{2A}{3T}(\tau-4T)\cdot B\,d\tau$$

4. Fall:

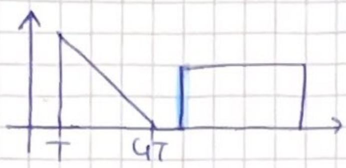


$t-2T \geq T$ und $t-2T<4T$

$\Leftrightarrow 3T \leq t < 6T$

$$y(t)=\int_{t-2T}^{4T} -\frac{2A}{3T}(\tau-4T)\cdot B\,d\tau$$

5. Fall

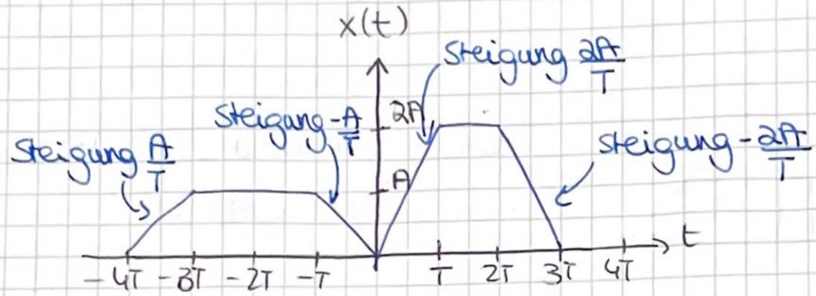


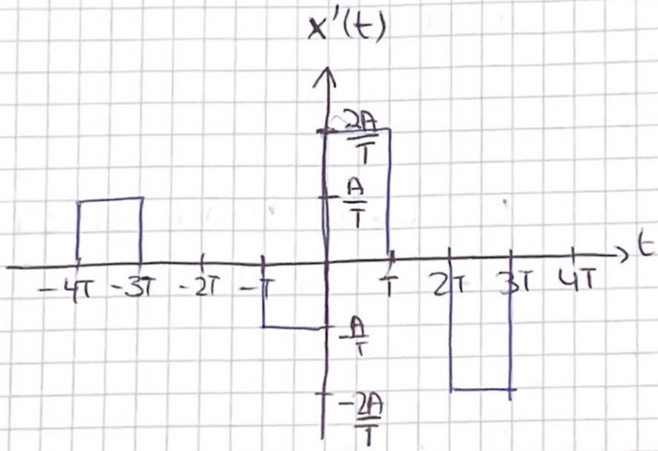
$t - 2T \geq 4T$

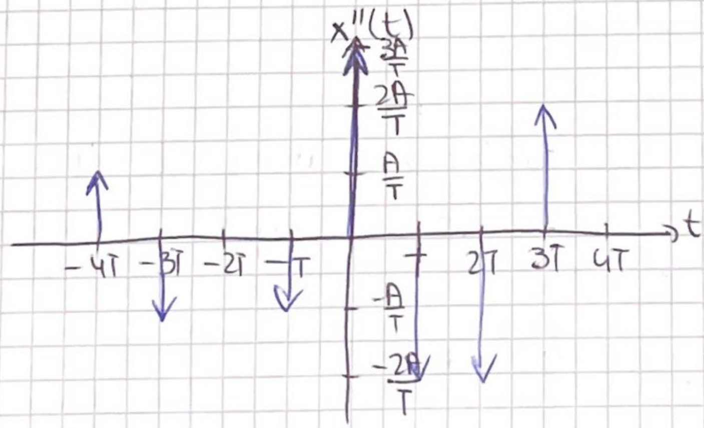
$(\Leftrightarrow)\ t \geq 6T$

$y(t) = 0$ → keine Überlagerung

Aufgabe 1.3. → aus Klausur am 02.03.2022







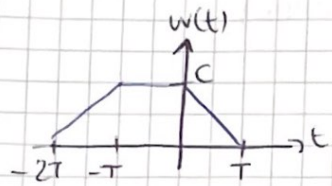
$$x''(t) = \frac{A}{T}\cdot\delta(t+4T) - \frac{A}{T}\cdot\delta(t+3T) - \frac{A}{T}\delta(t+T)$$
$$+ \frac{3A}{T}\cdot\delta(t) - \frac{2A}{T}\cdot\delta(t-T) - \frac{2A}{T}\cdot\delta(t-2T) + \frac{2A}{T}\delta(t-3T)$$

$$(j\omega)^2\cdot X(j\omega) = \frac{A}{T}\cdot\left[e^{j\omega 4T} - e^{j\omega 3T} - e^{j\omega T} + 3 - 2\cdot e^{-j\omega T} - 2\cdot e^{-j\omega 2T} + 2\,e^{-j\omega 3T}\right]$$

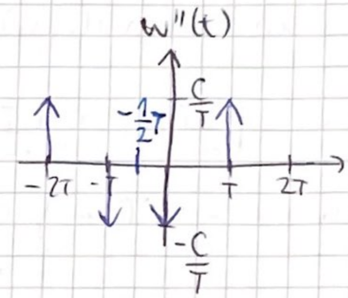
$$X(j\omega) = -\frac{A}{T\cdot\omega^2}\cdot\left[e^{j\omega 4T} - e^{j\omega 3T} - e^{j\omega T} + 3 - 2e^{-j\omega T} - 2e^{-j\omega 2T} + 2\cdot e^{-j\omega 3T}\right]$$

↳ hier wurde nicht gefragt, dass man ~~als~~ zu trigonometrischen Funktionen zusammenfasst

→ anderes Bsp: Aufgabe 1.3. von Klausur am 8.10.2012



$\Rightarrow$

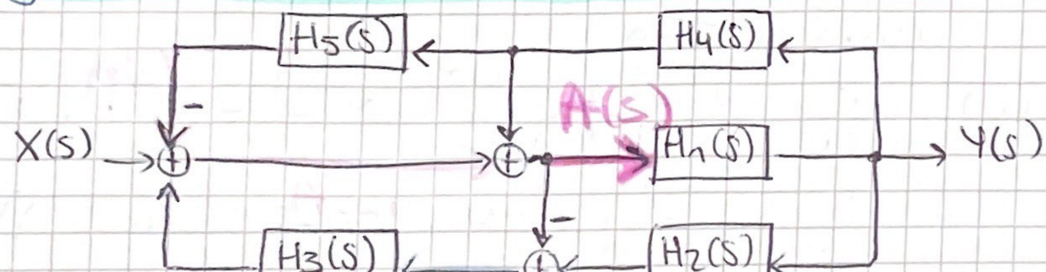


$$W(j\omega) = -\frac{C}{T\omega^2}\cdot\left[e^{j\omega 2T} - e^{j\omega T} - 1 + e^{-j\omega T}\right]$$

↳ e-Term ausklammern: Trick „Mittelpunkt" ausklammern

$$W(j\omega) = -\frac{C}{T\omega^2}\cdot e^{j\omega\frac{1}{2}T}\cdot\left[e^{j\omega\frac{3}{2}T} - e^{j\omega\frac{1}{2}T} - e^{-j\omega\frac{1}{2}T} + e^{-j\omega\frac{3}{2}T}\right]$$
$$= -\frac{C}{T\cdot\omega^2}\cdot e^{j\omega\frac{1}{2}T}\cdot\left(2\cos(\omega\tfrac{3}{2}T) - 2\cos(\omega\tfrac{1}{2}T)\right)$$

Aufgabe 2.2. → aus Klausur vom 25.02.2021



$Y(S) = H_1 \cdot A(S)$ $\qquad H_i(S) = H_i$

$A(S) = H_4 \cdot Y + X - H_5 \cdot H_4 \cdot Y + H_3 \cdot (H_2 \cdot Y - A)$

$A(1 + H_3) = H_4 \cdot Y + X - H_5 \cdot H_4 \cdot Y + H_3 \cdot H_2 \cdot Y$

$$A = \frac{H_4 \cdot Y + X - H_5 \cdot H_4 \cdot Y + H_3 \cdot H_2 \cdot Y}{1 + H_3}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{H_1 \cdot H_4 \cdot Y + H_1 \cdot X - H_1 \cdot H_5 \cdot H_4 \cdot Y + H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot Y}{1 + H_3}$$

$Y(1 + H_3) = Y(H_1 \cdot H_4 - H_1 \cdot H_4 \cdot H_5 + H_1 \cdot H_2 \cdot H_3) + H_1 \cdot X$

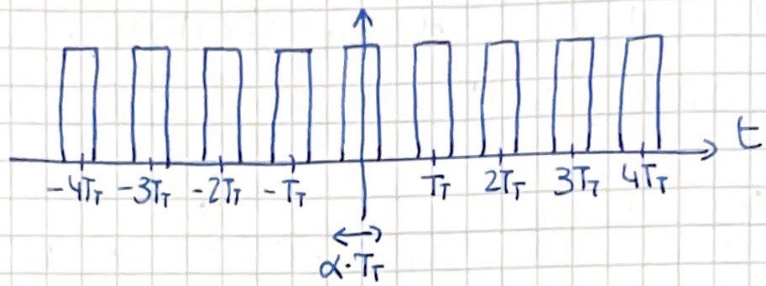
$Y(1 + H_3 - H_1 \cdot H_4 + H_1 \cdot H_4 \cdot H_5 - H_1 \cdot H_2 \cdot H_3) = H_1 \cdot X$

$$\Rightarrow H_{ges}(s) = \frac{Y}{X} = \frac{H_1}{1 + H_3 - H_1 \cdot H_4 + H_1 \cdot H_4 \cdot H_5 - H_1 \cdot H_2 \cdot H_3}$$

Wiederholung Abtastung

Shape-Top Abtastung

$$u_{A,ST}(t) = u(t) \cdot (\underbrace{\sqcap_{\alpha \cdot T_T}(t) * \delta_{T_T}(t)}) $$



→ durch die Multiplikation ~~von~~ mit $u(t)$ nehmen die Rechtecke die Form von $u(t)$ an

im Frequenzbereich

$$U_{A,ST}(j\omega) = \alpha \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} (si(k\pi\alpha) \cdot U(j(\omega - k \cdot \omega_T)))$$

→ si-Fkt. in der Summe ⇒ hat ~~ei~~ nur einen Einfluss auf die Amplitude von $\sum_{k=-\infty}^{\infty} U(j(\omega - k \cdot \omega_T))$

Flat-Top Abtastung

$$u_{A,FT}(t) = (u(t) \cdot \delta_{T_T}(t)) * \sqcap_{\alpha \cdot T_T}(t)$$

→ dadurch, dass erst später mit dem Rechteck gefaltet wird, behalten die Rechtecke ihre Form

im Frequenzbereich:

$$U_{A,FT}(j\omega) = \alpha \cdot si\left(\frac{\omega \alpha T_T}{2}\right) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(j(\omega - k \cdot \omega_T))$$

→ si-Fkt außerhalb der Summe ⇒ hat einen Einfluss auf die Amplitude UND die Form von $\sum_{k=-\infty}^{\infty} U(j(\omega - k \cdot \omega_T))$

Aufgabe 2.3. → aus Klausur vom 16.02.2016

gesucht: Flat-Top Sampling mit $\omega_T = 6\omega_u$, $\alpha = 0{,}7$

$$U_{A,FT}(j\omega) = \alpha\, si\left(\frac{\alpha \cdot T_T \cdot \omega}{2}\right) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(j(\omega - k \cdot \omega_T))$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} U(j(\omega - k \cdot \omega_T))$$

$$\alpha \cdot si\left(\frac{\alpha \cdot T_T \cdot \omega}{2}\right) = 0{,}7 \cdot si\left(\omega \cdot \frac{0{,}7 \cdot T_T}{2}\right) \text{ wobei } T_T = \frac{2\pi}{\omega_T}$$

→ Nullstellen suchen: $si(x) = 0 \iff x = k \cdot \pi,\ \forall k \neq 0$

$$\omega \cdot \frac{0{,}7\, T_T}{2} = k \cdot \pi \iff \omega \cdot \frac{0{,}7 \cdot \cancel{2}\cancel{\pi}}{\cancel{2}\, \omega_T} = k \cdot \cancel{\pi}$$

$$\iff \omega \cdot \frac{0{,}7}{\omega_T} = k$$

$$\iff \omega = k \cdot \frac{\omega_T}{0{,}7} = k \cdot \frac{6\omega_u}{0{,}7},\ \forall k \neq 0$$

$\frac{6}{0{,}7} \approx 8{,}6$