3. Tutoriumsblatt – Diskrete Strukturen

(Besprechung in den Tutorien in der Woche vom 13.05.2024)

Aufgabe 1

Ihr wurdet im Tel entdeckt und die Suchenden schwärmen die Treppe hinauf. Aus dem Treppenhaus schallen euch kaum zu verstehende, fanatische Schreie entgegen. Verstehen kannst du nur Bruchstücke wie "Mutation" und "Catalan". Euch ist klar, dass ihr euch so schnell wie möglich etwas überlegen müsst, um nicht überrannt zu werden. Zum Glück scheinen sie die Treppen recht langsam zu erklimmen.

(i) Michaela bemerkt, dass die Suchenden die Treppe alle in einem bestimmten Muster erklimmen zu scheinen. Sie scheinen alle jede 3., 5. und 7. Stufe zu meiden, da diese jeweils nass sind. Bis zu euch sind es 200 Stufen. Wenn sich auf jeder Stufe nur einer befindet, Wie viele können sich maximal auf der Treppe befinden?

Aufgabe 2

Ihr merkt, dass ihr es mit euren Kräften nicht schaffen werdet so viele aufzuhalten. Während die anderen eine Lösungen suchen, lenkst du die Suchenden ab, indem du sie Kombinatorik Fragen fragst, die sie eifrig bearbeiten. Wie viele Wörter der Länge n können jeweils über dem Alphabet $\{0, 1\}$ gebildet werden unter den folgenden Bedingungen:

(i) Das Wort enthält ungerade viele Einsen.

(ii) Die Zeichenfolge 01 kommt genau zwei mal im Wort vor.

(iii) Es kommen genau 5 Einsen im Wort vor und keine Einsen sind benachbart.

Aufgabe 3

Die Anderen haben in der Not die Wasserleitung im 15. Stock gelockert und so das Treppenhaus geflutet. Die Suchenden scheinen wasserscheu zu sein und sind geflüchtet. Ihr seid jetzt wieder allein, aber werdet wohl auch bald das TEL verlassen müssen, da ihr nicht sicher seid, ob die Baumasse des Gebäudes der Überflutung standgehalten hat.

Nachdem sich das Chaos gelegt hat, entscheiden du und Arbi sich dazu etwas zu spielen. Doch beim Aufbauens des Schachbrettes stellt sich dir unvermittelt eine Frage:

(i) Wenn ihr auf alle Felder eines 3x7-Schachbrettes schwarze und weiße Figuren platziert, gibt es dann immer ein Rechteck der Größe mindestens 2x2, auf dessen Eckfeldern einheitlich gefärbte Figuren stehen.

(ii) Wenn ihr Figuren mit k Farben nutzt, und jede Spalte aus $k + 1$ Feldern besteht. Wie viele Spalten werden benötigt, um ein solches Rechteck sicher zu finden?

Aufgabe 1

Ihr wurdet im Tel entdeckt und die Suchenden schwärmen die Treppe hinauf. Aus dem Treppenhaus schallen euch kaum zu verstehende, fanatische Schreie entgegen. Verstehen kannst du nur Bruchstücke wie "Mutation" und "Catalan". Euch ist klar, dass ihr euch so schnell wie möglich etwas überlegen müsst, um nicht überrannt zu werden. Zum Glück scheinen sie die Treppen recht langsam zu erklimmen.

(i) Michaela bemerkt, dass die Suchenden die Treppe alle in einem bestimmten Muster erklimmen zu scheinen. Sie scheinen alle jede 3., 5. und 7. Stufe zu meiden, da diese jeweils nass sind. Bis zu euch sind es 200 Stufen. Wenn sich auf jeder Stufe nur einer befindet, Wie viele können sich maximal auf der Treppe befinden?

你们在建筑物中被发现了，搜寻者们蜂拥而至，沿着楼梯向上涌来。从楼梯间传来难以理解的狂热喊叫声，你只能听懂一些零碎的词语如"变异"和"加泰罗尼亚"。你们意识到必须尽快想出对策以免被抓住。幸运的是，他们似乎爬楼梯的速度相当慢。

(i) Michaela注意到，搜寻者们似乎按照一定的模式在爬楼梯。他们每3、5和7个台阶都会停下，因为这些台阶都很湿滑。楼梯共有200个台阶。如果每个台阶上只能站一个人，最多可以有多少人同时在楼梯上?

Lösung zu Aufgabe 1

Wir nutzen das Prinzip der Inklusion und Exklusion für die Zahlen zwischen 1 und 200. Es gibt $\lfloor 200/3 \rfloor = 66$ durch 3 teilbare Zahlen. Es gibt $\lfloor 200/5 \rfloor = 40$ durch 5 teilbare Zahlen. Es gibt $\lfloor 200/7 \rfloor = 28$ durch 7 teilbare Zahlen. Es gibt $\lfloor 200/15 \rfloor = 13$ durch 3 und 5 teilbare Zahlen. Es gibt $\lfloor 200/21 \rfloor = 9$ durch 3 und 7 teilbare Zahlen. Es gibt $\lfloor 200/35 \rfloor = 5$ durch 5 und 7 teilbare Zahlen. Es gibt $\lfloor 200/105 \rfloor = 1$ durch 3, 5 und 7 teilbare Zahlen. Insgesamt also $66 + 40 + 28 - 13 - 9 - 5 + 1 = 108$ nasse Stufen und somit $200 - 108 = 92$ Suchende.

Aufgabe 2

Ihr merkt, dass ihr es mit euren Kräften nicht schaffen werdet so viele aufzuhalten. Während die anderen eine Lösungen suchen, lenkst du die Suchenden ab, indem du sie Kombinatorik Fragen fragst, die sie eifrig bearbeiten. Wie viele Wörter der Länge n können jeweils über dem Alphabet $\{0, 1\}$ gebildet werden unter den folgenden Bedingungen:

(i) Das Wort enthält ungerade viele Einsen.

(ii) Die Zeichenfolge 01 kommt genau zwei mal im Wort vor.

(iii) Es kommen genau 5 Einsen im Wort vor und keine Einsen sind benachbart.

你意识到，凭你们的力量不可能阻止这么多搜寻者。在其他人寻找解决方案的同时，你通过提问组合学问题来分散搜寻者们的注意力。长度为 n 的单词在字母表 {0, 1} 上的情况下，满足以下条件的单词有多少个:

(i) 单词包含奇数个1。

(ii) 子串"01"恰好出现两次。

(iii) 单词中恰好包含5个1，并且没有相邻的1。

(i) 2^{n-1}

(ii) 01 01

111 00 11 00 11 00

事件

(ii) Es gibt $n - 4$ Zeichen, die zwischen die zwei Vorkomnisse von 01 verteilt werden müssen. Vor dem ersten 01 kann es erst beliebig viele Einsen und dann beliebig viele Nullen geben. Genauso zwischen den beieden 01 und nach den beiden 01. Insgesamt werden also $n - 4$ Zeichen auf 6 unterschiedliche Kategorien aufgeteilt: $\binom{n-4+6-1}{n-4} = \binom{n+1}{n-4} = \binom{n+1}{5}$. $\binom{n-4+6-1}{6-1} = \binom{n+1}{5}$

(iii) Wenn das Wort mit 1 endet: $\binom{n-5}{4}$. Wenn das Wort nicht mit 1 endet: $\binom{n-5}{5}$. Insgesamt: $\binom{n-5}{4} + \binom{n-5}{5} = \binom{n-4}{5}$

_ 10 _ 10 _ 10 _ 10 _ 1 _

$\binom{(n-8)+6-1}{6-1} = \binom{n-4}{5}$

für 2,2:

Nun wollen wir eine allgemeine Antwort auf die Frage finden.

Antwort:

Für $n, r \in \mathbb{N}_+$ gibt es $\binom{n+r-1}{r-1}$ verschiedene Möglichkeiten, die Zahl n als Summe von r Summanden zu schreiben.

Beweisidee: Die gesuchten Summanden benennen wir i_1 bis i_r. Wir stellen die Zahl n unär mit dem Symbol ● dar und teilen dann die n 'Kugeln' auf die r Summanden auf. Die Darstellungen von n mit r Summanden entsprechen also genau den $n+r-1$ stelligen Zeichenketten mit n mal dem Zeichen ● und $r-1$ mal dem Zeichen +. Jede Zeichenkette ist dabei eindeutig festgelegt durch die Wahl der Positionen mit +.

Beispiel: $n = 7, r = 5$

●●●●●●●

●●● + + ●● + ● + ●

i_1 i_2 i_3 i_4 i_5

3 + 0 + 2 + 1 + 1

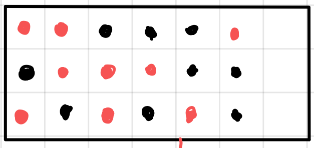
Aufgabe 3

Die Anderen haben in der Not die Wasserleitung im 15. Stock gelockert und so das Treppenhaus geflutet. Die Suchenden scheinen wasserscheu zu sein und sind geflüchtet. Ihr seid jetzt wieder allein, aber werdet wohl auch bald das TEL verlassen müssen, da ihr nicht sicher seid, ob die Baumasse des Gebäudes der Überflutung standgehalten hat.

Nachdem sich das Chaos gelegt hat, entscheiden du und Arbi sich dazu etwas zu spielen. Doch beim Aufbauens des Schachbrettes stellt sich dir unvermittelt eine Frage:

(i) Wenn ihr auf alle Felder eines 3x7-Schachbrettes schwarze und weiße Figuren platziert, gibt es dann immer ein Rechteck der Größe mindestens 2x2, auf dessen Eckfeldern einheitlich gefärbte Figuren stehen.

(ii) Wenn ihr Figuren mit k Farben nutzt, und jede Spalte aus $k+1$ Feldern besteht. Wie viele Spalten werden benötigt, um ein solches Rechteck sicher zu finden?



其他人在紧急情况下弄松了15楼的水管，导致楼梯间被淹。搜寻者们似乎怕水，已经逃走了。但你们也不得不很快离开这个建筑物，因为不确定建筑的结构能否承受住洪水的压力。

混乱平息后，你和Arbi决定玩点游戏。当你们摆放棋盘时，突然冒出了一个问题：

(i) 如果你们在一个3x7的棋盘上放置黑白棋子，总会有一个至少为2x2的矩形，它的四个角上都是同色的棋子。

(ii) 如果你们用 k 种颜色的棋子，每列有 $k+1$ 个格子，那么需要多少列才能确保总能找到一个这样的矩形？

Lösung zu Aufgabe 3

(i) Ja, da jede Spalte des Feldes aus drei Feldern besteht, muss immer mindestens ein Paar von Feldern mit Figuren der gleichen Farbe besetzt sein. Wir nutzen das Schubfachprinzip für die Spalten, wobei jede Spalte danach eingeordnet wird in welchem Paar von Reihen dieser Spalte Figuren gleicher Farbe stehen und welche Farbe diese Figuren haben. Da es 2 Farben und 3 Paare von Reihen gibt, gibt es somit insgesamt 6 Kategorien. Da es 7 Spalten gibt, folgt nach dem Schubfachprinzip, dass es zwei Spalten in der gleichen Kategorie gibt. Das Paar von Spalten was zur gleichen Kategorie gehört, bildet ein Rechteck wie in der Aufgabe beschrieben.

$2\cdot\binom{3}{2}$

(ii) Im Fall für k Farben und $k+1$ Reihen entsteht auch in jeder Spalte mindestens ein Paar von Positionen. Insgesamt gibt es $k \cdot \binom{k+1}{2}$ mögliche Kombinationen von Farbe und Reihenpaaren. Somit werden $k \cdot \binom{k+1}{2} + 1$ Spalten benötigt.

$k\binom{k+1}{2}+1$

FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

SoSe 2024
Veröffentlichung: 13. Mai 2024

3. freiwillige Übung – Diskrete Strukturen

Abgabe: bis 10:30 am 23.05.2024 im ISIS-Kurs [SoSe 2024] Diskrete Strukturen

Aufgabe 4

Wie viele Wörter über das Alphabet $\{a, b\}$ existieren, die genauso viele a enthalten wie b und die Zeichenfolge aa kommt genau so häufig vor wie die Zeichenfolge ab.

Tipp: Welche Eigenschaften unterscheiden Wörter, die auf a enden und Wörter, die auf b enden?

Aufgabe 5

Sei $a_1, a_2, ..., a_{21}$ eine aufsteigende Folge paarweise verschiedener natürlicher Zahlen ≤ 100. Wir betrachten alle Differenzen $a_i - a_j$ für $1 \leq j < i \leq 21$. Beweisen Sie, dass hierbei ein Wert mindestens dreimal vorkommt.

Aufgabe 6

Beweise, dass

(i) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$

(ii) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$