Agenda

2. Lineare Optimierung

2.1 Modellbildung
2.2 Graphische Lösung
2.3 Primaler Simplex
2.4 Dualer Simplex
2.5 Sonderfälle
2.6 Dualität
2.7 Sensitivitätsanalyse
2.8 Multikriterielle Optimierung

Graphische Lösung – Beispiel

Max betreibt einen Elektronikfachhandel und verdient sein Geld mit dem Verkauf von besonders hochwertigen Spülmaschinen des Typs MegaClean (M) und Kühlschränken des Typs Refrigerator XXL (R). Da er zurzeit eine Kreditlinie von 72.000 Euro nicht überschreiten darf, kann er nicht mehr als diesen Betrag in die Anschaffung von Verkaufsware investieren. Des Weiteren kann Max aufgrund von Lieferengpässen nicht mehr als 100 Geräte insgesamt für den Verkauf beziehen, von denen maximal 60 Kühlschränke sein dürfen.

	M	R
Anschaffungskosten*	6	9
Gewinn*	10	20

*Angaben in 100 Euro

图解解法 - 例子

Max经营一家电子零售店，主要通过销售特别高品质的MegaClean型洗碗机（M）和Refrigerator XXL型冰箱（R）来赚钱。由于他目前的信贷额度不能超过72,000欧元，因此他不能在采购销售商品上投入超过这个金额。此外，由于供应不足，Max最多只能采购100台设备进行销售，其中最多只能有60台冰箱。

Graphische Lösung – Beispiel

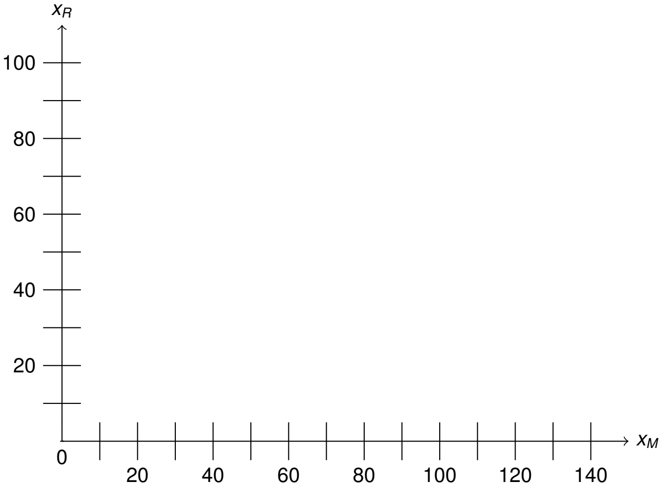
Die Variablen wählen wir wie folgt:

- x_M: Anzahl an Spülmaschinen des Typs MegaClean im Verkauf
- x_R: Anzahl an Kühlschränken des Typs Refrigerator XXL im Verkauf

Damit erhalten wir das folgende Modell:

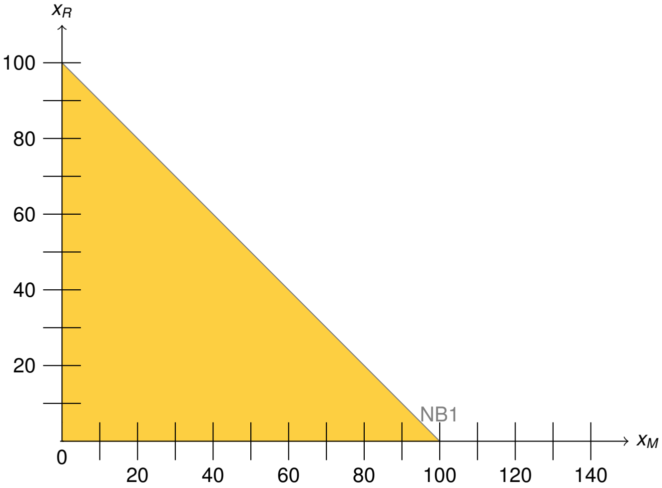
$$
\begin{aligned}
\max z = \quad & 10x_M + 20x_R \\
\text{s.t.} \quad & 1x_M + 1x_R \leq 100 \\
& 6x_M + 9x_R \leq 720 \\
& 1x_R \leq 60 \\
& x_{M,R} \geq 0
\end{aligned}
$$

Graphische Lösung – Beispiel



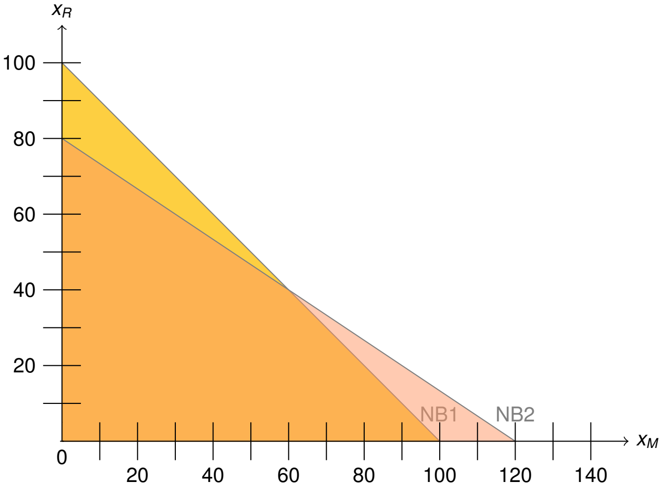
$$
\begin{aligned}
\max z = \quad & 10x_M + 20x_R \\
\text{s.t.} \quad & 1x_M + 1x_R \leq 100 \\
& 6x_M + 9x_R \leq 720 \\
& 1x_R \leq 60 \\
& x_{M,R} \geq 0
\end{aligned}
$$

Graphische Lösung – Beispiel



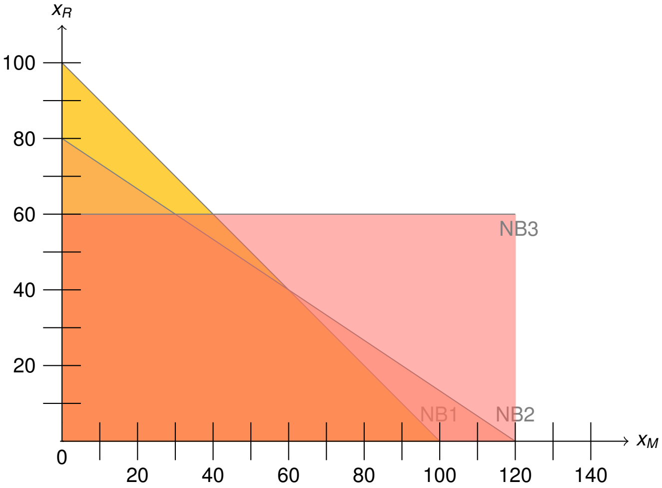
$$
\begin{aligned}
\max z = \quad & 10x_M + 20x_R \\
\text{s.t.} \quad & \boxed{1x_M + 1x_R \le 100} \\
& 6x_M + 9x_R \le 720 \\
& 1x_R \le 60 \\
& x_{M,R} \ge 0
\end{aligned}
$$

Graphische Lösung – Beispiel



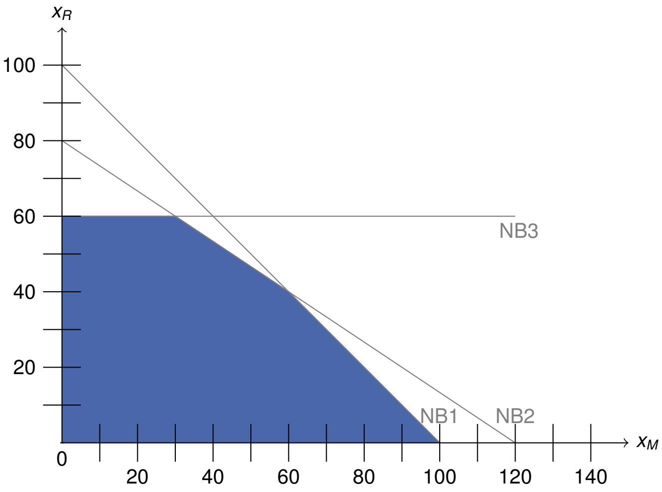
$$
\begin{aligned}
\max z = \quad & 10x_M + 20x_R & \\
\text{s.t.} \quad & 1x_M + 1x_R & \leq 100 \\
& 6x_M + 9x_R & \leq 720 \\
& 1x_R & \leq 60 \\
& x_{M,R} & \geq 0
\end{aligned}
$$

Graphische Lösung – Beispiel



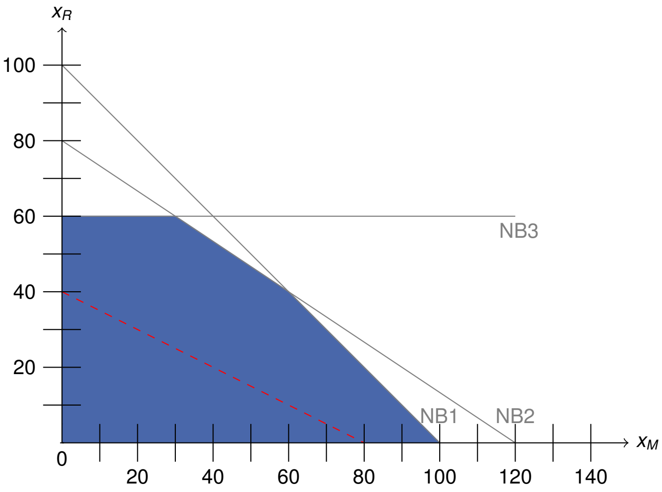
$$
\begin{aligned}
\max z = \quad & 10x_M + 20x_R \\
\text{s.t.} \quad & 1x_M + 1x_R \leq 100 \\
& 6x_M + 9x_R \leq 720 \\
& 1x_R \leq 60 \\
& x_{M,R} \geq 0
\end{aligned}
$$

Graphische Lösung – Beispiel



$$
\begin{aligned}
\max z = \quad & 10x_M + 20x_R \\
\text{s.t.} \quad & 1x_M + 1x_R \leq 100 \\
& 6x_M + 9x_R \leq 720 \\
& 1x_R \leq 60 \\
& x_{M,R} \geq 0
\end{aligned}
$$

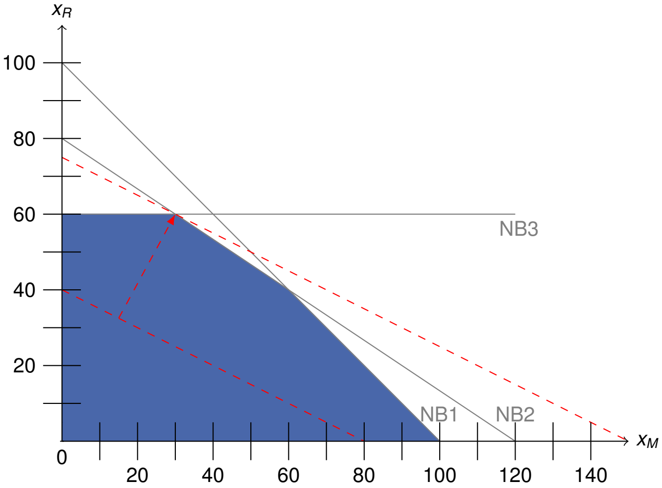
Graphische Lösung – Beispiel



$$\boxed{\max z = 10x_M + 20x_R}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad 1x_M + 1x_R &\leq 100 \\ 6x_M + 9x_R &\leq 720 \\ 1x_R &\leq 60 \\ x_{M,R} &\geq 0 \end{aligned}$$

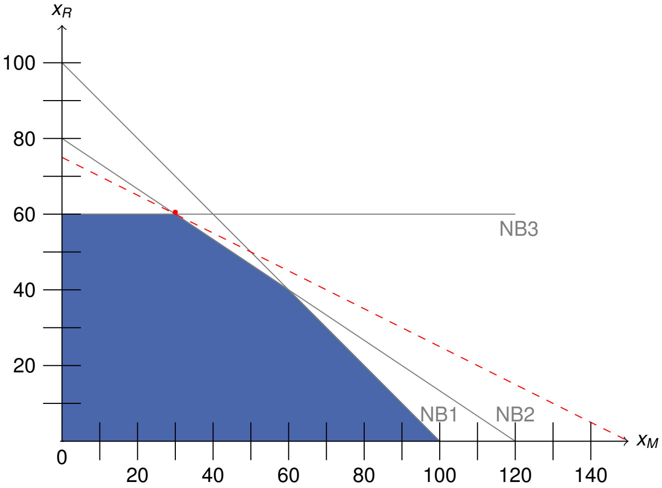
Graphische Lösung – Beispiel



$$\boxed{\max z = 10x_M + 20x_R}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 1x_M + 1x_R \leq 100 \\ & 6x_M + 9x_R \leq 720 \\ & 1x_R \leq 60 \\ & x_{M,R} \geq 0 \end{aligned}$$

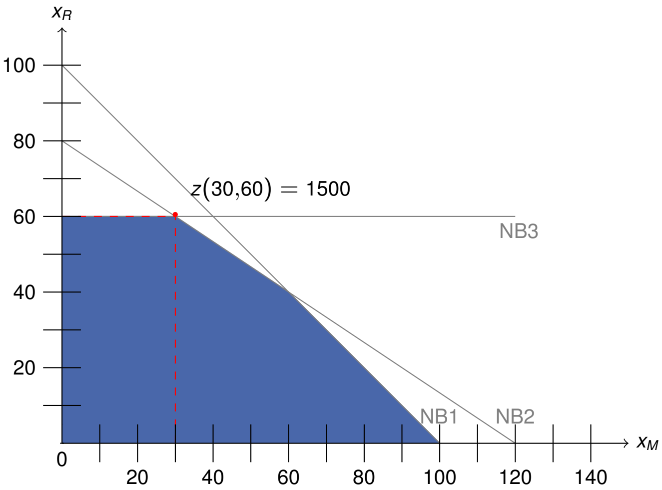
Graphische Lösung – Beispiel



$$\boxed{\max z = 10x_M + 20x_R}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad 1x_M + 1x_R &\leq 100 \\ 6x_M + 9x_R &\leq 720 \\ 1x_R &\leq 60 \\ x_{M,R} &\geq 0 \end{aligned}$$

Graphische Lösung – Beispiel



$$\begin{array}{lrl} \boxed{\max z = \quad 10x_M + 20x_R} & & \\ \text{s.t.} & 1x_M + 1x_R & \leq 100 \\ & 6x_M + 9x_R & \leq 720 \\ & 1x_R & \leq 60 \\ & x_{M,R} & \geq 0 \end{array}$$

Graphische Lösung – Beispiel II

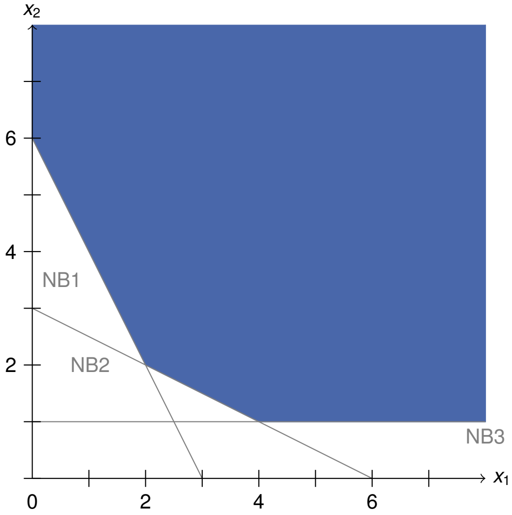
Ein Viehzuchtbetrieb füttert Rinder mit einer Kraftfuttermischung und Milch. Die Tagesration eines Rindes muss Rohfett, Rohprotein und Kalzium im Umfang von mindestens 600, 1200 bzw. 400 Gramm enthalten. Die Nährstoffgehalte in Gramm pro kg und Preise in GE pro kg der beiden Futtersorten zeigt die Tabelle.

	Kraftfuttermischung	Milch	Mindesmenge
Rohfett in 100 g	2	1	6
Rohprotein in 100 g	2	4	12
Kalzium in 100 g	0	4	4
Preis in GE/kg	5	7	

Wie viele kg von der Kraftfuttermischung (Variable x_1) bzw. Milch (Variable x_2) muss jede Tagesration enthalten, wenn sie unter Einhaltung der Nährstoffbedingungen kostenminimal sein soll?

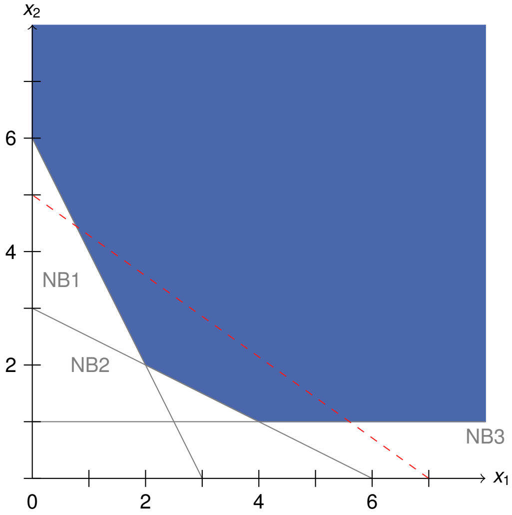
一家养牛场用一种饲料混合物和牛奶喂养牛。每头牛的日粮必须至少含有600克的粗脂肪、1200克的粗蛋白质和400克的钙。下表显示了两种饲料的每公斤营养含量（以克计）和每公斤价格（以GE计）。

Graphische Lösung – Beispiel II



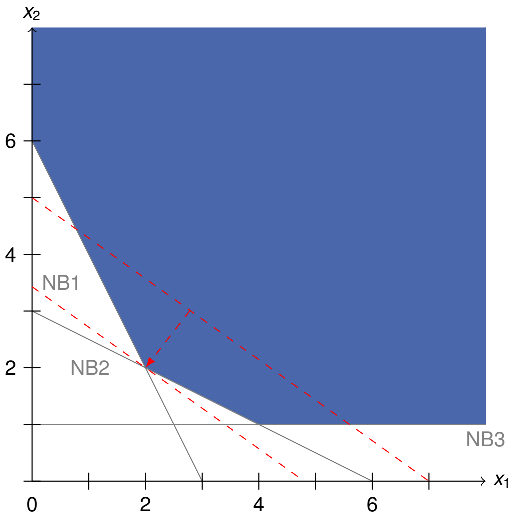
$$
\begin{aligned}
\min z = \quad & 5x_1 + 7x_2 & \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 & \geq 6 \\
& 2x_1 + 4x_2 & \geq 12 \\
& 4x_2 & \geq 4 \\
& x_{1,2} & \geq 0
\end{aligned}
$$

Graphische Lösung – Beispiel II



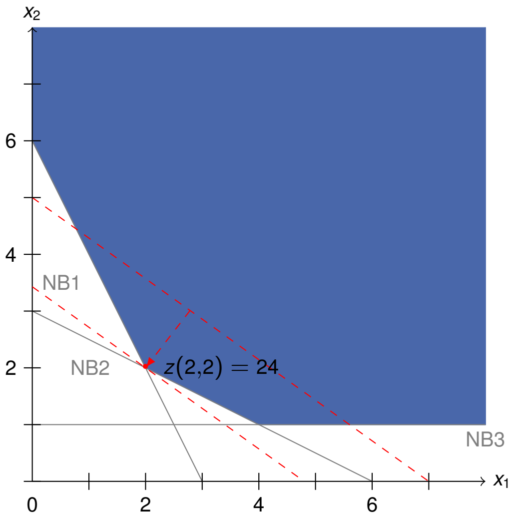
$$
\begin{array}{lrl}
\boxed{\min z = \quad 5x_1 + 7x_2} & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 & \geq 6 \\
 & 2x_1 + 4x_2 & \geq 12 \\
 & 4x_2 & \geq 4 \\
 & x_{1,2} & \geq 0
\end{array}
$$

Graphische Lösung – Beispiel II



$$
\begin{array}{llll}
\boxed{\min z = 5x_1 + 7x_2} & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 & \geq 6 \\
 & 2x_1 + 4x_2 & \geq 12 \\
 & 4x_2 & \geq 4 \\
 & x_{1,2} & \geq 0
\end{array}
$$

Graphische Lösung – Beispiel II



$$\begin{array}{lrl} \boxed{\min z = \quad 5x_1 + 7x_2} & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 & \geq 6 \\ & 2x_1 + 4x_2 & \geq 12 \\ & 4x_2 & \geq 4 \\ & x_{1,2} & \geq 0 \end{array}$$

Zusammenfassung - Graphische Lösung

- Lineare Probleme können entweder algorithmisch oder graphisch gelöst werden.
- Die graphische Lösung bietet sich lediglich für Probleme mit maximal zwei Dimensionen (= Entscheidungsvariablen) an, da höhere Dimensionen nicht sinnvoll graphisch abgebildet werden können.
- Die Schnittmenge aller Nebenbedingungen ergibt den zulässigen Bereich eines LPs. Graphisch sind es die Punkte, die alle Nebenbedingungen erfüllen.
- Durch verschieben der Zielfunktion (in Optimierungsrichtung) kann man die optimale Lösung des LPs ermitteln. Dazu verschiebt man die Zielfunktion so lange, bis der zulässige Bereich gerade so noch berührt wird.

Beispiel: Zulässiger Lösungsraum

Man betrachte das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \max z = \quad & x + y \\ \text{s.t.} \quad & sx + ty \leq 1 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Für welche Werte s,t hat das Problem ...

- ... genau eine optimale Lösung?
- ... unendliche viele optimale Lösungen?
- ... keine Lösung?
- ... keine Beschränkung?

	$s < 0$	$s > 0$	$s = 0$
$t < 0$	Fall 1	Fall 2	–
$t > 0$	Fall 3	Fall 4: $s \neq t$ / Fall 5: $s = t$	–
$t = 0$	–	–	Fall 6

Beispiel: Zulässiger Lösungsraum

Man betrachte das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \max z = \quad & x + y & \\ \text{s.t.} \quad & sx + ty & \leq 1 \\ & x,y & \geq 0 \end{aligned}$$

Für welche Werte s,t hat das Problem ...

- ... genau eine optimale Lösung?
- ... unendliche viele optimale Lösungen?
- ... keine Lösung?
- ... keine Beschränkung?

	$s < 0$	$s > 0$	$s = 0$
$t < 0$	Fall 1	Fall 2	–
$t > 0$	Fall 3	Fall 4: $s \neq t$ / Fall 5: $s = t$	–
$t = 0$	–	–	Fall 6