Tutorium 9

Aufgabe 1: Myhill-Nerode für nicht reguläre Sprachen

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma \triangleq \{ a,\ b,\ c \}$ und die Sprache

$$A \triangleq \{ a^n w \mid n \in \mathbb{N} \land w \in \{ b,\ c \}^* \land |w|_b = |w|_c \}$$

1.a) *Gib* alle Äquivalenzklassen der Myhill-Nerode-Relation bzgl. A *an*.

Lösung

$$\begin{aligned}
[\,\varepsilon\,]_{\equiv_A} &= \{ a^n \mid n \in \mathbb{N} \} \\
[\,bc\,]_{\equiv_A} &= \left\{ a^n w \mid n \in \mathbb{N} \land w \in \{ b,\ c \}^+ \land |w|_b = |w|_c \right\} \\
[\,b^l\,]_{\equiv_A} &= \left\{ a^n w \mid n \in \mathbb{N} \land w \in \{ b,\ c \}^+ \land |w|_b - |w|_c = l \right\} \quad \text{für } l \in \mathbb{N}^+ \\
[\,c^m\,]_{\equiv_A} &= \left\{ a^n w \mid n \in \mathbb{N} \land w \in \{ b,\ c \}^+ \land |w|_c - |w|_b = m \right\} \quad \text{für } m \in \mathbb{N}^+ \\
[\,ba\,]_{\equiv_A} &= \{ xbay, xcay \mid x, y \in \Sigma^* \} \\
&= \Sigma^* \setminus \left([\,\varepsilon\,]_{\equiv_A} \cup [\,bc\,]_{\equiv_A} \cup \left(\bigcup_{l \in \mathbb{N}^+} [\,b^l\,]_{\equiv_A} \right) \cup \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}^+} [\,c^m\,]_{\equiv_A} \right) \right)
\end{aligned}$$

Hinweis: Die erste Zeile beschreibt mit $[\,a\,]_{\equiv_A}$ eine Klasse mit unendlich vielen Wörtern. Die zweite und dritte Zeilen beschreiben unendlich viele verschiedene Klassen, was man an dem Index im Bezeicher der Klassen (also an dem l und m auf den linken Seiten) erkennt. Die Klassen in der zweiten und dritten Zeile enthalten jeweils unendlich viele Wörter. $[\,ba\,]_{\equiv_A}$ beschreibt eine einzelne Klasse, die unendlich viele Wörter enthält. Sie enthält alle Wörter, die 'falsch' anfangen. Also jene Wörter, bei denen bereits klar ist, dass, egal um was man sie verlängert, sie können nicht in der Sprache A enthalten sein. Diese Klasse (falls sie vorhanden ist) entspricht intuitiv einem Fangzustand (d.h. Senke) im Automaten. Also einem Zustand, der nicht akzeptiert und aus dem man nicht mehr entkommen kann. Gibt es in Σ^* zu einer Sprache Wörter mit der Eigenschaft, dass egal wie man sie verlängert, man kommt nicht mehr zurück in die Sprache, dann liegen alle diese Wörter in einer einzigen Klasse. Da diese Klasse quasi 'alle restlichen Wörter' (alle Wörter, die nicht in einer anderen Klasse sind) enthält, kann man sie auch explizit als Klasse alle Wörter aus Σ^* ohne die Wörter der anderen Klassen beschreiben. Das haben wir oben in der allerletzten Zeile getan. Natürlich genügt als Beschreibung für $[\,ba\,]_{\equiv_A}$ eine der beiden angegebenen Mengen.

/Lösung

1.b) *Beweise* mit Hilfe der Myhill-Nerode-Relation, dass A nicht regulär ist.

Lösung

Zu den Äquivalenzklassen von $\equiv_A$ gehören u.A. die Klassen:

$$[\,b^l\,]_{\equiv_A} = \left\{ a^n w \mid n \in \mathbb{N} \land w \in \{ b,\ c \}^+ \land |w|_b - |w|_c = l \right\} \quad \text{für } l \in \mathbb{N}^+$$

(Diese Zeile repräsentiert bereits unendlich viele Klassen, wir zeigen noch, dass diese Klassen tatsächlich bzgl. $\equiv_A$ unterschieden werden müssen.D.h. wir zeigen:
$\forall n, m \in \mathbb{N}^+ .\ n \neq m \rightarrow b^n \not\equiv_A b^m$.)
Seien $n, m \in \mathbb{N}^+$ beliebig mit
Annahme: $n \neq m$.
Zu Zeigen: $b^n \not\equiv_A b^m$
Betrachte $z = c^n$.
Dann ist $b^n z = b^n c^n \in A$ und $b^m z = b^m c^n \notin A$, weil $|b^m c^n|_b \neq |b^m c^n|_c$ mit $n \neq m$.
Mit der Definition von $\equiv_A$ gilt damit $b^n \not\equiv_A b^m$ (und damit $[\,b^n\,]_{\equiv_A} \neq [\,b^m\,]_{\equiv_A}$).
Damit ist der Index von $\equiv_A$ unendlich. Nach Theorem 2.4.1 ist A damit nicht regulär.

/Lösung

Aufgabe 2: Pumping Lemma

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma \triangleq \{ a, b, c \}$ und die Sprachen

$$A_1 \triangleq \{ a^n w \mid n \in \mathbb{N} \wedge w \in \{ b, c \}^* \wedge |w|_b = |w|_c \}$$
$$A_2 \triangleq \{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leqslant 2 \}$$
$$A_3 \triangleq \left\{ (ab^n a)^n \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$
$$A_4 \triangleq \{ a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \wedge n \leqslant m \}$$

2.a) Für jede reguläre Sprache A gilt **PUMP-REG** (A). *Begründe:* Ist **PUMP-REG** $()$ damit eine hinreichende oder nur eine notwendige Bedingung für reguläre Sprachen?

------------------------------ Lösung ------------------------------

Für jede reguläre Sprache A gilt **PUMP-REG** (A). Aber nicht jede Sprache A', für die **PUMP-REG** (A') gilt, ist regulär. So gilt zum Beispiel für die Sprache

$$A_p = \{ a^m b^n c^n \mid m, n \in \mathbb{N} \wedge m \geqslant 0 \wedge n \geqslant 1 \} \cup \{ b^m c^n \mid m, n \in \mathbb{N} \wedge m \geqslant 0 \wedge n \geqslant 0 \}$$

PUMP-REG (A_p), aber die Sprache A_p ist nicht regulär. Damit ist **PUMP-REG** $()$ nur eine notwendige und keine hinreichende Bedingung.

—————————————— /Lösung ——————————————

2.b) *Begründe:* Möchte man das Pumping Lemma nutzen, um zu zeigen, dass eine Sprache nicht regulär ist, was muss man dann für diese Sprache zeigen?

------------------------------ Lösung ------------------------------

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein Wort w der Sprache mit $|w| \geqslant n$, so dass es für alle Zerlegungen $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon$ und $|xy| \leqslant n$ ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass xy^kz nicht in der Sprache liegt.

—————————————— /Lösung ——————————————

2.c) *Beweise oder widerlege,* dass die Sprache A_1 regulär ist.

------------------------------ Lösung ------------------------------

Sei $n \in \mathbb{N}$ (beliebig aber fest). Wir wählen das Wort $w = b^n c^n$ mit $w \in A_1$, denn $0 \in \mathbb{N}$ und $|w|_b = n = |w|_c$, und $|w| \geqslant n$. Sei $w = xyz$ eine beliebige Zerlegung mit $y \neq \varepsilon$ und $|xy| \leqslant n$. Dann ist $x = b^i$, $y = b^j$ und $z = b^{n-i-j}c^n$ für ein $j \neq 0$ und $i + j \leqslant n$. Wir wählen $k = 0$. Dann ist $xy^0z = b^{n-j}c^n$. $xy^0z \notin A_1$, denn $|b^{n-j}c^n|_b = n - j \neq n = |b^{n-j}c^n|_c$ für $j \neq 0$. Da $\neg$ **PUMP-REG** (A_1), ist A_1 nach dem Pumping-Lemma nicht regulär.

—————————————— /Lösung ——————————————

2.d) *Begründe:* Wo liegt der Fehler in folgendem Versuch das Pumping Lemma anzuwenden, um zu zeigen, dass die Sprache A_2 nicht regulär ist?

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen das Wort $w = a^n b^n$ mit $w \in A_2$ und $|w| \geqslant n$. Sei $w = xyz$ eine beliebige Zerlegung mit $y \neq \varepsilon$ und $|xy| \leqslant n$. Dann ist $x = a^i$, $y = a^j$ und $z = a^{n-i-j}b^n$ für ein $j \neq 0$ und $i + j \leqslant n$. Wir wählen $k = 2$. Dann ist $xy^2z = a^{n+j}b^n$. $xy^2z \notin A_2$, denn $n + j \neq n$ für $j \neq 0$. Da $\neg$ **PUMP-REG** (A_2), ist A_2 nach dem Pumping-Lemma nicht regulär.

------------------------------ Lösung ------------------------------

Für $n > 2$ ist $w = a^n b^n$ nicht Element der Sprache A_2. Die Aussage $w \in A_2$ gilt also nicht für ein beliebiges n. (Aus diesem Grund fehlt hier auch die Begründung dafür, dass $w \in A_2$ tatsächlich gilt.)

Hinweis: Die Frage „Beweise oder widerlege, dass die Sprache A_2 regulär ist. " können wir so beantworten:

$$
\begin{aligned}
L(\epsilon + ab + aabb) &\overset{\text{FS 1.2.8}+}{=} L(\epsilon) \cup L(ab) \cup L(aabb) \overset{\text{FS 1.2.8}\epsilon}{=} \{\, \varepsilon \,\} \cup L(ab) \cup L(aabb) \\
&\overset{\text{FS 1.2.8}\,\cdot}{=} \{\, \varepsilon \,\} \cup (L(a) \cdot L(b)) \cup (L(a) \cdot L(a) \cdot L(b) \cdot L(b)) \\
&\overset{\text{FS 1.2.8}\ a,b \in \Sigma}{=} \{\, \varepsilon \,\} \cup (\{\, a \,\} \cdot \{\, b \,\}) \cup (\{\, a \,\} \cdot \{\, a \,\} \cdot \{\, b \,\} \cdot \{\, b \,\}) \\
&\overset{\text{Def.}\,\cdot}{=} \{\, \varepsilon \,\} \cup \{\, ab \,\} \cup \{\, aabb \,\} \overset{\text{Def.}\,\cup}{=} \{\, \varepsilon,\ ab,\ aabb \,\} \\
&\overset{\text{Def. } A_2,\, n \leqslant 2}{=} A_2
\end{aligned}
$$

Damit wird A_2 durch einen regulären Ausdruck beschrieben. Mit Theorem 1.4.5 gibt es dann eine reguläre Grammatik G mit $L(G) = A_2$. Nach Definition 1.4.3 ist A_2 damit regulär.

/Lösung

2.e) *Begründe:* Wo liegt der Fehler in folgendem Versuch das Pumping Lemma anzuwenden, um zu zeigen, dass die Sprache A_3 nicht regulär ist?

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen das Wort $w = \left(ab^{n+1}a\right)^{n+1}$ mit $w \in A_3$, denn $n+1 \in \mathbb{N}$, und $|w| \geqslant n$. Sei $w = xyz$ eine beliebige Zerlegung mit $y \neq \varepsilon$ und $|xy| \leqslant n$. Dann ist $x = a$, $y = b^j$ und $z = b^{n+1-j}a\left(ab^{n+1}a\right)^n$ für ein $j \neq 0$ und $j \leqslant n$. Wir wählen $k = 2$. Dann ist $xy^2z = \left(ab^{n+1+j}a\right)\left(ab^{n+1}a\right)^n \notin A_3$, denn $n+1+j \neq n+1$ für $j \neq 0$. Da $\neg$ **PUMP-REG** (A_3), ist A_3 nach dem Pumping-Lemma nicht regulär.

Lösung

Die Zerlegung ist nicht allgemein, das heißt es wird nur ein Teil der möglichen Zerlegungen betrachtet. Die Sprache A_3 ist nicht regulär. Um den Beweis zu vervollständigen müssen alle anderen möglichen Zerlegungen (in einer Fallunterscheidung) ergänzt und der Beweis für jede dieser Zerlegungen vervollständigt werden.
Hinweis: Der vollständige Beweis folgt:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen das Wort $w = \left(ab^{n+1}a\right)^{n+1}$ mit $w \in A_3$, denn $n+1 \in \mathbb{N}$, und $|w| \geqslant n$. Sei $w = xyz$ eine beliebige Zerlegung mit $y \neq \varepsilon$ und $|xy| \leqslant n$. Dann gibt es 2 Fälle:

Fall 1: $x = \varepsilon$, $y = ab^j$ und $z = b^{n+1-j}a\left(ab^{n+1}a\right)^n$ für ein $j < n$. Wir wählen $k = 2$. Dann ist $xy^2z = \left(ab^jab^{n+1}a\right)\left(ab^{n+1}a\right)^n \notin A_3$, denn $j \neq n+1$ für $j < n$.

Fall 2: $x = ab^i$, $y = b^j$ und $z = b^{n+1-i-j}a\left(ab^{n+1}a\right)^n$ für ein $j \neq 0$ und $i+j < n$. Wir wählen $k = 2$. Dann ist $xy^2z = \left(ab^{n+1+j}a\right)\left(ab^{n+1}a\right)^n \notin A_3$, denn $n+1+j \neq n+1$ für $j \neq 0$.

Da $\neg$ **PUMP-REG** (A_3), ist A_3 nach dem Pumping-Lemma nicht regulär.

/Lösung

2.f) *Begründe:* Wo liegt der Fehler in folgendem Versuch das Pumping Lemma anzuwenden, um zu zeigen, dass die Sprache A_4 nicht regulär ist?

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen das Wort $w = a^nb^n$ mit $w \in A_4$, denn $n \leqslant n$, und $|w| \geqslant n$. Sei $w = xyz$ eine beliebige Zerlegung mit $y \neq \varepsilon$ und $|xy| \leqslant n$. Dann ist $x = a^i$, $y = a^j$ und $z = a^{n-i-j}b^n$ für ein $j > 0$ und $i+j \leqslant n$. Wir wählen $k = 0$. Dann ist $xy^0z = a^{n-j}b^n$. $xy^0z \notin A_4$. Da $\neg$ **PUMP-REG** (A_4), ist A_4 nach dem Pumping-Lemma nicht regulär.

Lösung

k wurde falsch gewählt, so dass $xy^0z \in A_4$, da $n - j \leqslant n$.
Hinweis: Der vollständige Beweis folgt:
Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen das Wort $w = a^nb^n$ mit $w \in A_4$, denn $n \leqslant n$, und $|w| \geqslant n$. Sei $w = xyz$ eine beliebige Zerlegung mit $y \neq \varepsilon$ und $|xy| \leqslant n$. Dann ist $x = a^i$, $y = a^j$ und $z = a^{n-i-j}b^n$ für ein $j > 0$ und $i+j \leqslant n$. Wir wählen $k = 2$. Dann ist $xy^2z = a^{n+j}b^n$. $xy^2z \notin A_4$, denn $n+j \nleqslant n$ für $j > 0$. Da $\neg$ **PUMP-REG** (A_4), ist A_4 nach dem Pumping-Lemma nicht regulär.

/Lösung