

Zusatzaufgaben 13

Aufgabe 1: Grammatiken und reguläre Ausdrücke

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma \triangleq \{a, b\}$, die regulären Sprachen

$$A_1 \triangleq \{w \in \Sigma^* \mid |w| \leq 3\} \quad (e + a + b + c)^3$$

$$A_2 \triangleq \{wab \mid w \in \Sigma^* \wedge |w|_b \bmod 2 = 0\} \quad (a + ba^*b)^*ab$$

$$A_3 \triangleq \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \wedge (n + m) \bmod 3 = 0\} \quad (aaa)^* (bbb)^* + (aaa)^* a (bbb)^* bb + (aaa)^* aa (bbb)^* b \dots$$

$$A_4 \triangleq \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \wedge n \bmod 3 < m \bmod 3\}$$

und die Grammatiken $G_5 = (\{S, T, U\}, \Sigma, P_5, S)$ und $G_6 = (\{S, T, U\}, \{a, b, c\}, P_6, S)$ mit

$$\begin{aligned} P_5: \quad S &\rightarrow aS \mid aT \\ T &\rightarrow aT \mid bT \mid bU \\ U &\rightarrow a \mid aU \mid bU \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_6: \quad S &\rightarrow \varepsilon \mid aT \mid bS \\ T &\rightarrow aT \mid bS \mid cU \\ U &\rightarrow aS \mid aU \end{aligned}$$

1.a) Gib einen regulären Ausdruck e_1 so an, dass $L(e_1) = A_1$.

Lösung

$$\begin{aligned} e_1 &= \varepsilon + a + b + aa + ab + ba + bb + aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb \\ &= (\varepsilon + a + b) \cdot (\varepsilon + a + b) \cdot (\varepsilon + a + b) \end{aligned}$$

/Lösung

1.b) Gib eine Grammatik G_1 so an, dass $L(G_1) = A_1$.

Lösung

$G_1 = (\{S, T, U\}, \Sigma, P_1, S)$ mit P_1 :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow T \mid aT \mid bT \\ T &\rightarrow U \mid aU \mid bU \\ U &\rightarrow \varepsilon \mid a \mid b \end{aligned}$$

/Lösung

1.c) Gib einen regulären Ausdruck e_2 so an, dass $L(e_2) = A_2$.

Lösung

$$e_2 = (a + ba^*b)^* ab$$

/Lösung

1.d) Gib Eine Grammatik G_2 an, sodass $L(G_2) = A_2$.

Lösung

$G_2 = (\{S, T\}, \Sigma, P_2, S)$ mit P_2 :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aS \mid bT \mid ab \\ T &\rightarrow aT \mid bS \end{aligned}$$

/Lösung

1.e) Gib einen regulären Ausdruck e_3 so an, dass $L(e_3) = A_3$.

Lösung

$$e_3 = ((aaa)^* (bbb)^*) + ((aaa)^* a (bbb)^* bb) + ((aaa)^* aa (bbb)^* b)$$

/Lösung

- 1.f) Gib eine Grammatik G_3 so an, dass $L(G_3) = A_3$.

Lösung

$G_3 = (\{S, T, U, V\}, \Sigma, P_3, S)$ mit P_3 :

$S \rightarrow \varepsilon \mid aaaS \mid T \mid aU \mid aaV$

$T \rightarrow \varepsilon \mid bbbT$

$U \rightarrow bb \mid bbbU$

$V \rightarrow b \mid bbbV$

/Lösung

- 1.g) Gib einen regulären Ausdruck e_4 so an, dass $L(e_4) = A_4$.

Lösung

$e_4 = ((aaa)^* (bbb)^* b(\varepsilon + b)) + ((aaa)^* a(bbb)^* bb)$

/Lösung

- 1.h) Gib eine Grammatik G_4 an, sodass $L(G_4) = A_4$.

Lösung

$G_4 = (\{S, T, U, V\}, \Sigma, P_4, S)$ mit P_4 :

$S \rightarrow aaaS \mid aT \mid U \mid V$

$T \rightarrow aaaT \mid V$

$U \rightarrow b \mid bbbU$

$V \rightarrow bb \mid bbbV$

/Lösung

- 1.i) Gib einen regulären Ausdruck e_5 so an, dass $L(e_5) = L(G_5)$.

Lösung

$e_5 = a(a+b)^* b(a+b)^* a$

/Lösung

$P_5 : \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aS \mid aT \\ T & \rightarrow & aT \mid bT \mid bU \\ U & \rightarrow & a \mid aU \mid bU \end{array}$

- 1.j) Gib eine reguläre Sprache A_5 so an, dass $A_5 = L(G_5)$.

Lösung

$A_5 = \{ axbya \mid x, y \in \Sigma^* \}$

/Lösung

$a a^* (a+b)^* b (a+b)^* a$

- 1.k) Gib einen regulären Ausdruck e_6 so an, dass $L(e_6) = L(G_6)$.

Lösung

$e_6 = ((a+b)^* acaa^*)^* (\varepsilon + (a+b)^* b)$

/Lösung

$P_6 : \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & \varepsilon \mid aT \mid bS \\ T & \rightarrow & aT \mid bS \mid cU \\ U & \rightarrow & aS \mid aU \end{array}$

- 1.l) Gib eine reguläre Sprache A_6 so an, dass $A_6 = L(G_6)$.

Lösung

$A_6 = \{ xy \mid x \in \{ uaca^n \mid u \in \{ a, b \}^* \wedge n \in \mathbb{N}^+ \}^* \wedge y \in \{ \varepsilon, vb \mid v \in \{ a, b \}^* \} \}$

/Lösung

$(a+b)^* a c a a^* (\varepsilon + (a+b)^* b)$

- 1.m) Gib einen regulären Ausdruck e so an, dass $L(e) = \{ \diamond^m \square^n \square^n \mid n, m \in \mathbb{N}^+ \} \cup \{ \square \diamond, \varepsilon \}$.

Lösung

$e = \diamond \diamond^* \square \square (\square \square)^* + \square \square \diamond + \varepsilon$

/Lösung

- 1.n) Gib die Sprache $L(((\diamond \diamond^*) + \varepsilon) \square \square \square^* \diamond)$ explizit an.

Lösung

$\{ \diamond^n \square \square \square^m \diamond \mid n, m \in \mathbb{N} \}$

/Lösung

1.o) Gib die Sprache $L(\epsilon + ((\diamond \diamond)^* \square)^*)$ explizit an.

Lösung

$(\{\diamond \diamond\}^* \cdot \{\square\})^*$

/Lösung

Aufgabe 2: Pumping-Lemma

Beweise oder widerlege, dass die Sprache $A \triangleq \{a^r b^s c^t \mid r, s, t \in \mathbb{N} \wedge r \leq s \leq t\}$ regulär ist.

Lösung

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und fest. Wir wählen das Wort $w = a^n b^{n+1} c^{n+2}$ mit $w \in A$, denn $n \leq n+1 \leq n+2$, und $|w| \geq n$. Sei $w = xyz$ eine beliebige Zerlegung mit $y \neq \epsilon$ und $|xy| \leq n$. Dann ist $x = a^i$, $y = a^j$ und $z = a^{n-i-j} b^{n+1} c^{n+2}$ für ein $j \neq 0$ und $i+j \leq n$. Wir wählen $k=3$. Dann ist $xy^3z = a^{n+2j} b^{n+1} c^{n+2}$. $xy^3z \notin A$, denn $n+2j > n+1$ für $j \neq 0$. Da $\neg \text{PUMP-REG}(A)$, ist A nach dem Pumping-Lemma nicht regulär.

Hinweis: Man hätte hier zum Beispiel auch das Wort $w = b^n c^n$ mit $k=2$ oder das Wort $w = b^n c^{n+1}$ mit $k=3$ oder das Wort $w = a^n b^n c^n$ mit $k=2$ und jeweils den entsprechenden Zerlegungen wählen können. Die Variante $w = b^n c^n$ mit $k=2$ ist wahrscheinlich die einfachste Möglichkeit.

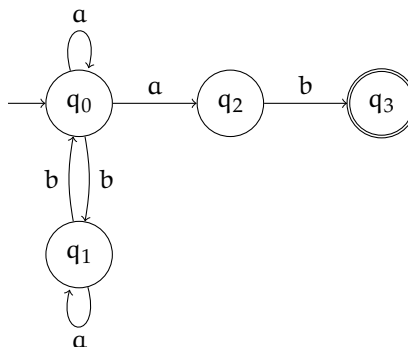
/Lösung

Aufgabe 3: DFA und NFA

3.a) Gegeben sei die Sprache A_2 aus Aufgabe 1. Gib einen NFA M_2 so an, dass $L(M_2) = A_2$.

Lösung

$M_2 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \Delta_2, \{q_0\}, \{q_3\})$, wobei Δ_2 durch den folgenden Graph gegeben ist:

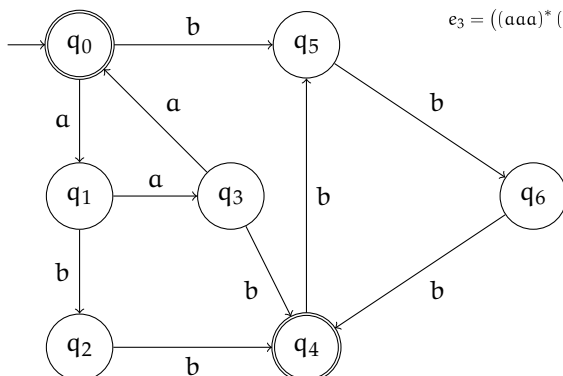


/Lösung

3.b) Gegeben sei die Sprache A_3 aus Aufgabe 1. Gib einen NFA M_3 so an, dass $L(M_3) = A_3$.

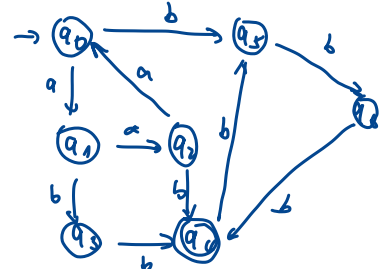
Lösung

$M_3 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}, \{a, b\}, \Delta_3, \{q_0\}, \{q_0, q_4\})$, wobei Δ_3 durch den folgenden Graph gegeben ist:



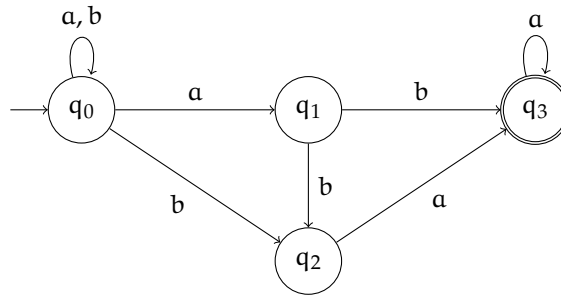
$$e_3 = ((aaa)^* (bbb)^*) + ((aaa)^* a (bbb)^* bb) + ((aaa)^* aa (bbb)^* b)$$

(1. Lösung)



/Lösung

- 3.c) Gegeben sei der NFA $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \Delta, \{q_0\}, \{q_3\})$, wobei Δ durch den folgenden Graph gegeben ist:

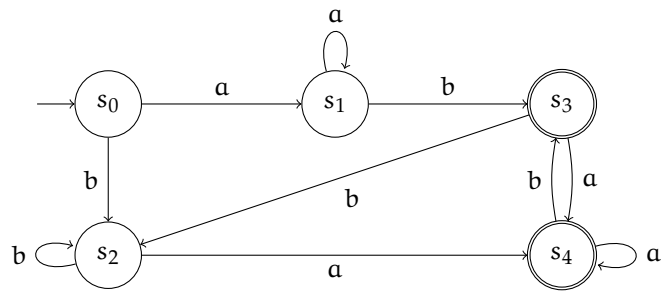


Berechne mit Hilfe der Untermengenkonstruktion einen DFA M' mit $L(M') = L(M)$.

Lösung

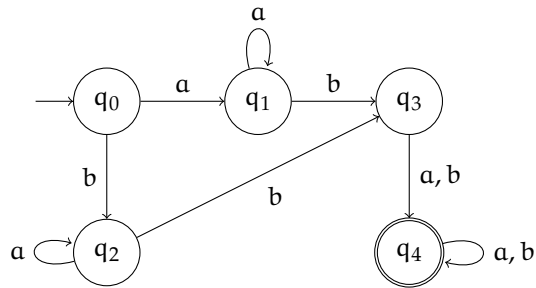
		a	b	
S	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$	s_0
	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2, q_3\}$	s_1
	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_2\}$	s_2
F	$\{q_0, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_2\}$	s_3
F	$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_2, q_3\}$	s_4

Damit ergibt sich der DFA $M' = (\{q_0, q_{01}, q_{023}, q_{02}, q_{013}\}, \{a, b\}, \delta', q_0, \{q_{023}, q_{013}\})$ mit δ' :



/Lösung

- 3.d) Gegeben sei der DFA $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_4\})$, wobei δ durch den folgenden Graph gegeben ist:



Berechne: Benutze den Table-Filling Algorithmus, um einen minimalen DFA M' zu erstellen, so dass $L(M') = L(M)$.

----- Lösung -----

Schritt 1 (eliminiere nicht erreichbare Zustände): alle Zustände sind erreichbar

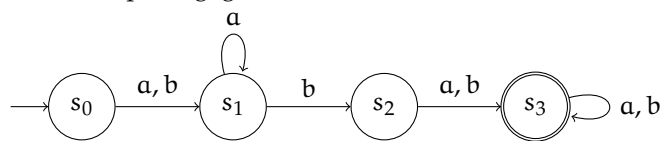
Schritt 2 (Table-Filling):

q1	x			
q2	x	o		
q3	x	x	x	
q4	x	x	x	x
	q0	q1	q2	q3

Schritt 3 (gib alle Äquivalenzklassen von Zuständen und eine Umbenennung an):

$[q_0] = \{q_0\}$	s_0
$[q_1] = \{q_1, q_2\}$	s_1
$[q_3] = \{q_3\}$	s_2
$[q_4] = \{q_4\}$	s_3

Schritt 4 (gib den minimierten DFA an): $M' = (\{s_0, s_1, s_2, s_3\}, \Sigma, \delta', s_0, \{s_3\})$, wobei δ' durch den folgenden Graphen gegeben ist:



/Lösung

Aufgabe 4: Myhill-Nerode

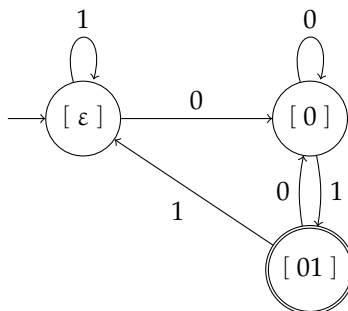
- 4.a) Gegeben sei die Sprache $A \triangleq \{ w01 \mid w \in \{0, 1\}^* \}$. Gib die Äquivalenzklassen der Myhill-Nerode Relation bezüglich A an und den A -Äquivalenzklassenautomaten M_A an.

Lösung

$$\begin{aligned} [\varepsilon] &= \{ \varepsilon, 1, w11 \mid w \in \{0, 1\}^* \} \\ [0] &= \{ w0 \mid w \in \{0, 1\}^* \} \\ [01] &= A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\varepsilon]_{\equiv_A} &= \{ \varepsilon, 1, w11 \} \\ [0]_{\equiv_A} &= \{ w0 \} \\ [01]_{\equiv_A} &= A \end{aligned}$$

$M_A = (\{ [\varepsilon], [0], [01] \}, \{0, 1\}, \delta_A, [\varepsilon], \{ [01] \})$ mit δ_A :



/Lösung

- 4.b) Gegeben seien das Alphabet $\Sigma \triangleq \{ a, b, c \}$ und die Sprache $B \triangleq \{ a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N} \}$. Gib die Äquivalenzklassen der Myhill-Nerode Relation bezüglich B an und beweise, dass B nicht regulär ist.

Lösung

$$\begin{aligned} [a^i] &= \{ a^i \} \quad \text{für } i \in \mathbb{N} \\ [a^j b^k] &= \{ a^j b^k \} \quad \text{für } j, k \in \mathbb{N}^+ \text{ und } k < j \\ [a^l b^l] &= \{ a^{l+n} b^{l+n} c^n \mid n \in \mathbb{N} \} \quad \text{für } l \in \mathbb{N}^+ \\ [abc] &= B \setminus \{ \varepsilon \} \\ [b] &= \{ xbay, xca y, xcb y \mid x, y \in \Sigma^* \} \\ &\quad \cup \{ a^n b^m, a^o b^p c^q \mid n, m, o, p, q \in \mathbb{N} \wedge n < m \wedge ((o \neq p \wedge q \neq 0) \vee p < q) \} \\ &= \Sigma^* \setminus \left(\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} [a^i] \right) \cup \left(\bigcup_{j, k \in \mathbb{N}^+, k < j} [a^j b^k] \right) \cup \left(\bigcup_{l \in \mathbb{N}^+} [a^l b^l] \right) \cup [abc] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\varepsilon] &= [a^n] \\ [a^j b^k] \\ [a^n b^n] \\ [a^n b^n c^n] \end{aligned}$$

Zu den Äquivalenzklassen von \equiv_B gehören u.A. die Klassen:

$$[a^n] = \{ a^n \} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

Annahme: $n \neq m$.

Zu Zeigen: $a^n \not\equiv_B a^m$

Betrachte $z = b^n c^n$. Dann ist $a^n z \in B$ und $a^m z \notin B$, weil $n \neq m$.

Mit der Definition von \equiv_B gilt damit $a^n \not\equiv_B a^m$ (und damit $[a^n] \neq [a^m]$).

Damit ist der Index von \equiv_B unendlich. Nach Theorem 2.4.1 ist B damit nicht regulär.

/Lösung

Aufgabe 5: CYK-Algorithmus

Gegeben sei eine Menge Nicht-Terminals $V \triangleq \{ A, B, C \}$, ein Alphabet $\Sigma \triangleq \{ a, b \}$, sowie eine CNF-Grammatik $G \triangleq (V, \{ a, b \}, P, S)$ mit

$P: S \rightarrow AB \mid AC$
 $A \rightarrow a$
 $B \rightarrow b$
 $C \rightarrow SB$

- 5.a) *Berechne:* Gegeben sei ein Wort $w_1 \triangleq aaabbb$. Löse mit dem CYK-Algorithmus das Wortproblem: $w_1 \in L(G)$ oder $w_1 \notin L(G)$?

----- Lösung -----

$CYK_w(i, j)$	1	2	3	4	5	6
1: a	{ A }	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	{ S }
2: a	{ A }	\emptyset	\emptyset	{ S }	{ C }	
3: a	{ A }	{ S }	{ C }	\emptyset		
4: b	{ B }	\emptyset	\emptyset			
5: b	{ B }	\emptyset				
6: b	{ B }					

Es gilt also $w_1 \in L(G)$, da $S \in CYK_w 1, 6$.

/Lösung

- 5.b) *Berechne:* Gegeben sei ein Wort $w_2 \triangleq aab$. Löse mit dem CYK-Algorithmus das Wortproblem: $w_2 \in L(G)$ oder $w_2 \notin L(G)$?

----- Lösung -----

$CYK_w(i, j)$	1	2	3
1: a	{ A }	\emptyset	\emptyset
2: a	{ A }	{ S }	
3: b	{ B }		

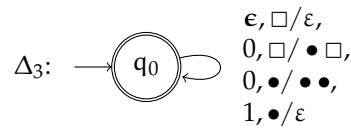
Es gilt also $w_2 \notin L(G)$, da $S \notin CYK_w 1, 3$.

/Lösung

Aufgabe 6: Kellerautomaten

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, die kontextfreie Sprache $A_1 \triangleq \{0w1w^R0 \mid w \in \Sigma^*\}$, die Grammatik $G_2 \triangleq (\{S, T\}, \Sigma, P_2, S)$ und der PDA $M_3 \triangleq (\{q_0\}, \Sigma, \{\square, \bullet\}, \square, \Delta_3, q_0, \{q_0\})$, wobei P_2 und Δ_3 wie folgt gegeben sind:

$P_2:$ $S \rightarrow \varepsilon \mid T$
 $T \rightarrow 0 \mid 1 \mid 00 \mid 11 \mid 0T0 \mid 1T1$



- 6.a) Gib eine kontextfreie Grammatik G_1 so an, dass $L(G_1) = A_1$.

Lösung

$G_1 = (\{S, T\}, \Sigma, P_1, S)$ mit $P_1:$

$S \rightarrow 0T0$

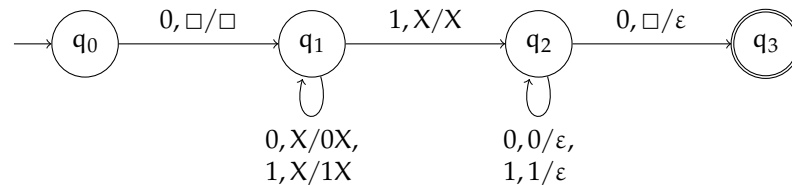
$T \rightarrow 1 \mid 0T0 \mid 1T1$

/Lösung

- 6.b) Gib einen PDA M_1 so an, dass $L_{\text{End}}(M_1) = L_{\text{Kel}}(M_1) = A_1$.

Lösung

$M_1 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \Sigma, \{\square, \bullet\}, \square, \Delta_1, q_0, \{q_3\})$, wobei Δ_1 für $X \in \{0, 1, \square\}$ durch den folgenden Graph gegeben ist:



/Lösung

- 6.c) Gib an: Welchen Typ hat die Grammatik G_2 ?

Lösung

G_2 ist nicht regulär (Typ-3), aber kontextfrei (Typ-2) und damit auch kontextsensitiv (Typ-1) und allgemein (Typ-0).

Hinweis: Die beiden Regeln $T \rightarrow 0T0 \mid 1T1$ verhindern hier, dass G_2 regulär ist.

/Lösung

- 6.d) Gib alle Ableitungen für das Wort 01010 in G_2 an.

Lösung

Es gibt nur die Ableitung:

$S \Rightarrow T \Rightarrow 0T0 \Rightarrow 01T10 \Rightarrow 01010$

Hinweis: Damit gilt $01010 \in L(G_2)$.

/Lösung

- 6.e) Gib an: $L(G_2)$

Lösung

$L(G_2) = \{w \in \Sigma^* \mid w = w^R\}$

/Lösung

- 6.f) Gib an: Welchen Typ hat $L(G_2)$?

Lösung

$L(G_2)$ ist nicht regulär (Typ-3), aber kontextfrei (Typ-2, minimaler Typ) und damit auch kontextsensitiv (Typ-1) und allgemein (Typ-0).

/Lösung

6.g) Gib an: Ist M_3 deterministisch, also ein DPDA?

Lösung

Nein.

Hinweis: Die beiden Übergänge $\epsilon, \square/\epsilon$ und $0, \square/\bullet\square$ erlauben es hier einen Weg zu wählen, wenn der Keller nur das Symbol \square enthält, deshalb ist M_3 nicht deterministisch.

/Lösung

6.h) Gib alle Ableitungen in M_3 für das Wort 1 an.

Lösung

Es gibt nur die Ableitung:

$$(q_0, 1, \square) \not\vdash$$

Hinweis: Damit gilt $1 \notin L_{\text{End}}(M_3)$ und $1 \notin L_{\text{Kel}}(M_3)$.

/Lösung

6.i) Gib alle Ableitungen in M_3 für das Wort 010 an.

Lösung

$$(q_0, 010, \square) \vdash (q_0, 010, \epsilon) \not\vdash$$

$$(q_0, 010, \square) \vdash (q_0, 10, \bullet\square) \vdash (q_0, 0, \square) \vdash (q_0, 0, \epsilon) \not\vdash$$

$$(q_0, 010, \square) \vdash (q_0, 10, \bullet\square) \vdash (q_0, 0, \square) \vdash (q_0, \epsilon, \bullet\square) \not\vdash$$

Hinweis: Damit gilt $010 \notin L_{\text{Kel}}(M_3)$ aber die 3. Ableitung zeigt, dass $010 \in L_{\text{End}}(M_3)$.

/Lösung

6.j) Gib die Sprachen $L_{\text{End}}(M_3)$ und $L_{\text{Kel}}(M_3)$ an.

Lösung

$$L_{\text{End}}(M_3) = \{ w \in \Sigma^* \mid \text{für jedes Präfix } v \text{ von } w \text{ gilt: } |v|_0 \geq |v|_1 \}$$

$$L_{\text{Kel}}(M_3) = \{ w \in \Sigma^* \mid |w|_0 = |w|_1 \text{ und für jedes Präfix } v \text{ von } w \text{ gilt: } |v|_0 \geq |v|_1 \}$$

Hinweis: Beide Sprachen sind nicht regulär aber kontextfrei.

/Lösung

6.k) Gib an: Gibt es einen DPDA für die Sprache $L_{\text{End}}(M_3)$?

Lösung

Ja.

Hinweis: Es genügt, den Übergang $\epsilon, \square/\epsilon$ zu entfernen, um einen solchen DPDA mit der Sprache $L_{\text{End}}(M_3)$ zu erhalten.

/Lösung

6.l) Gib an: Gibt es einen DPDA für die Sprache $L_{\text{Kel}}(M_3)$?

Lösung

Nein.

Hinweis: Die beiden Wörter 0 und 01 sind beide Element der Sprache $L_{\text{Kel}}(M_3)$. Da die Sprache also Wörter enthält, bei denen ein Wort ein echtes Präfix eines anderen Wortes ist, kann diese Sprache nicht deterministisch über einen leeren Keller akzeptiert werden.

/Lösung