Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen
(Tutorium 11)

Vorlesungswoche: 1. – 5. Juli 2024 | Sommersemester 2024

Aufgabe 30

Berechne die Fouriertransformation der folgenden Funktionen:

$$\text{(a) } f(t) \coloneqq \mathrm{e}^{-2(t-2)^2}, \quad \text{(b) } f(t) \coloneqq t\,\mathrm{e}^{-t^2}, \quad \text{(c) } f(t) \coloneqq (t-1)\,\mathrm{e}^{-t^2}.$$

Aufgabe 31

Berechne die Fouriertransformierten der folgenden Funktionen:

$$\text{(a) } f(t) \coloneqq \mathrm{e}^{-|t|}, \quad \text{(b) } f(t) \coloneqq (1-t)\mathrm{e}^{-|t|}, \quad \text{(c) } f(t) \coloneqq \tfrac{5}{25t^2+20t+5}.$$

Aufgabe 32

Mit Hilfe der Fouriertransformation ermittele eine Lösung der Integralgleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\frac{1}{1+(t-\tau-2)^2}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{9+t^2}.$$

Korrespondenzen

$$\mathcal{F}[e^{-\frac{t^2}{2}}](w) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{w^2}{2}}$$

$$\mathcal{F}[\frac{1}{1+t^2}](w) = \pi e^{-|w|}$$

$$\mathcal{F}[e^{-|t|}](w) = \frac{2}{1+w^2}$$

Rechenregeln

Linearität
1) $\mathcal{F}[f(t)+g(t)](w) = \mathcal{F}[f(t)](w) + \mathcal{F}[g(t)](w)$
2) $\mathcal{F}[a \cdot f(t)](w) = a\,\mathcal{F}[f(t)](w)$

Multiplikationssatz $\mathcal{F}[t^n f(t)](w) = i^n \frac{d^{(n)}}{dw^{(n)}} \mathcal{F}[f(t)](w) \quad n\in\mathbb{N}$

Skalierungssatz $\mathcal{F}[f(\frac{t}{a})](w) = |a|\,\mathcal{F}[f(t)](aw)$

Verschiebungssatz
1) im Zeitbereich: $\mathcal{F}[f(t-t_0)](w) = e^{-iwt_0}\mathcal{F}[f(t)](w)$
2) im Frequenzbereich: $\mathcal{F}[f(t)\cdot e^{itw_0}](w) = \mathcal{F}[f(t)](w-w_0)$

Ableitungssatz $\mathcal{F}[f^{(n)}(t)](w) = (iw)^n\,\mathcal{F}[f(t)](w)$

Reihenfolge Skal. & Verschiebung

1. Mög $\mathcal{F}[f(\frac{1}{a}t - t_0)](w)$
→ erst Skal. mit a
→ dann Verschiebung mit t_0

2. Mög $\mathcal{F}[f(\frac{1}{a}(t-t_0))](w)$
→ erst Verschiebung mit t_0
→ dann Skal. mit a

Aufgabe 31

Berechne die Fouriertransformierten der folgenden Funktionen:

(a) $f(t) := e^{-|t|}$, (b) $f(t) := (1-t)e^{-|t|}$, (c) $f(t) := \frac{5}{25t^2+20t+5}$.

a)
$$\mathcal{F}[e^{-|t|}](w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-iwt}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|-iwt}$$
$$= \int_{-\infty}^{0} e^{t-iwt}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t-iwt}\, dt$$
$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-iw} e^{(1-iw)t}\Big|_{b}^{0} + \lim_{b\to\infty} \frac{1}{-1-iw} e^{(-1-iw)t}\Big|_{0}^{b}$$
$$= \frac{1}{1-iw} + \frac{1}{1+iw}$$
$$= \frac{2}{1+w^2}$$

b)
$$\mathcal{F}[(1-t)e^{-|t|}](w) = \mathcal{F}[e^{-|t|}](w) - \mathcal{F}[te^{-|t|}](w)$$
$$= \frac{2}{1+w^2} - i\frac{d}{dw}\mathcal{F}[e^{-|t|}](w)$$
$$= \frac{2}{1+w^2} - i\frac{d}{dw}\left(\frac{2}{1+w^2}\right)$$
$$= \frac{2}{1+w^2} + i\cdot\frac{4w}{(1+w^2)^2}$$
$$= \frac{2+2w^2+4wi}{(1+w^2)^2} = \frac{2(w^2+2wi+1)}{(1+w^2)^2}$$

c) $\mathcal{F}\left[\frac{5}{25t^2+20t+5}\right](w)$

$= \mathcal{F}\left[\frac{5}{(5t+2)^2+1}\right](w)$

$= 5\ \mathcal{F}\left[\frac{1}{(5t+2)^2+1}\right](w)$

$= 5 \cdot \left|\frac{1}{5}\right| \cdot \mathcal{F}\left[\frac{1}{(t+2)^2+1}\right](\tfrac{1}{5}w)$ | skar mit $a = \frac{1}{5}$

$= e^{2i\frac{w}{5}}\ \mathcal{F}\left[\frac{1}{t^2+1}\right](\tfrac{1}{5}w)$ | Verschiebung mit $t_0 = -2$ 容易错

$= e^{\frac{2}{5}iw} \cdot \pi \cdot e^{-|\frac{1}{5}w|}$

Aufgabe 30

Berechne die Fouriertransformation der folgenden Funktionen:

$$\text{(a) } f(t) := e^{-2(t-2)^2}, \quad \text{(b) } f(t) := t\,e^{-t^2}, \quad \text{(c) } f(t) := (t-1)\,e^{-t^2}.$$

a) $\mathcal{F}\left[e^{-\frac{4(t-2)^2}{2}}\right](w)$

$= e^{-iw\cdot 2}\mathcal{F}\left[e^{-\frac{4t^2}{2}}\right](w)$ | Verschiebung mit $t_0 = 2$

$= e^{-2iw} \cdot \left|\frac{1}{2}\right| \cdot \mathcal{F}\left[e^{-\frac{t^2}{2}}\right](\tfrac{1}{2}w)$ | Skar mit $a = \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}e^{-2iw}\ \sqrt{2\pi}\ e^{-\frac{\frac{1}{4}w^2}{2}}$

$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\ e^{-2iw - \frac{1}{8}w^2}$

b) $\mathcal{F}[te^{-t^2}](w)$

$= i\ \frac{d}{dw}\ \mathcal{F}[e^{-t^2}](w)$

$= i\ \frac{d}{dw}\left(\mathcal{F}\left[e^{-\frac{(\sqrt{2}t)^2}{2}}\right](w)\right)$

$= i\ \frac{d}{dw}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \mathcal{F}\left[e^{-\frac{t^2}{2}}\right](\tfrac{1}{\sqrt{2}}w)\right)$

$= i\ \frac{d}{dw}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2\pi}\ e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{w^2}{2}}\right)$

$= i\ \frac{d}{dw}\left(\sqrt{\pi} \cdot e^{-\frac{w^2}{4}}\right)$

$= i \cdot \sqrt{\pi} \cdot e^{-\frac{w^2}{4}} \cdot \left(-\frac{2w}{4}\right)$

$= -i\sqrt{\pi} \cdot e^{-\frac{w^2}{4}} \cdot \frac{w}{2}$

c) $\mathcal{F}[(t-1)e^{-t^2}](w)$

$= \mathcal{F}[te^{-t^2}](w) - \mathcal{F}[e^{-t^2}](w)$

Rücktransformation $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega)$ geg $f(t) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[F(\omega)](-t)$

Fourier - Faltung

Def $f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau$

Faltungssatz $\mathcal{F}[f * g](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) \cdot \mathcal{F}[g](\omega)$

Aufgabe 32

Mit Hilfe der Fouriertransformation ermittele eine Lösung der Integralgleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \frac{1}{1 + (t - \tau - 2)^2} \, d\tau = \frac{1}{9 + t^2}.$$

$$= f(t) * \frac{1}{1 + (t-2)^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left[f(t) * \frac{1}{1+(t-2)^2}\right](\omega) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{9+t^2}\right](\omega)$$

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) \cdot \mathcal{F}\left[\frac{1}{1+(t-2)^2}\right](\omega) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{9(1+(\frac{t}{3})^2)}\right](\omega)$$

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) \cdot e^{-i\omega \cdot 2}\, \mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](\omega) = \frac{1}{9} \cdot |3|\, \mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](3\omega)$$

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) \cdot e^{-2i\omega}\, \pi e^{-|\omega|} = \frac{1}{3}\pi \cdot e^{-|3\omega|}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[f(t)](\omega) = e^{2i\omega} \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{-2|\omega|}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left[\frac{1}{3} e^{2i\omega - 2|\omega|}\right](-t)$$

$$= \frac{1}{6\pi}\mathcal{F}\left[e^{-|2\omega|} e^{2i\omega}\right](-t)$$

$$= \frac{1}{6\pi}\mathcal{F}\left[e^{-|2\omega|}\right](-t-2) \quad \Big|\ \text{Verschiebung mit } t_0 = 2$$

$$= \frac{1}{6\pi} \cdot \left|\frac{1}{2}\right| \mathcal{F}\left[e^{-|\omega|}\right]\left(\frac{1}{2}(-t-2)\right) \quad \Big|\ \text{Skal mit } a = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{12\pi} \cdot \frac{2}{1 + (-\frac{1}{2}(t+2))^2}$$

$$= \frac{1}{12\pi} \cdot \frac{8}{4 + (t+2)^2}$$