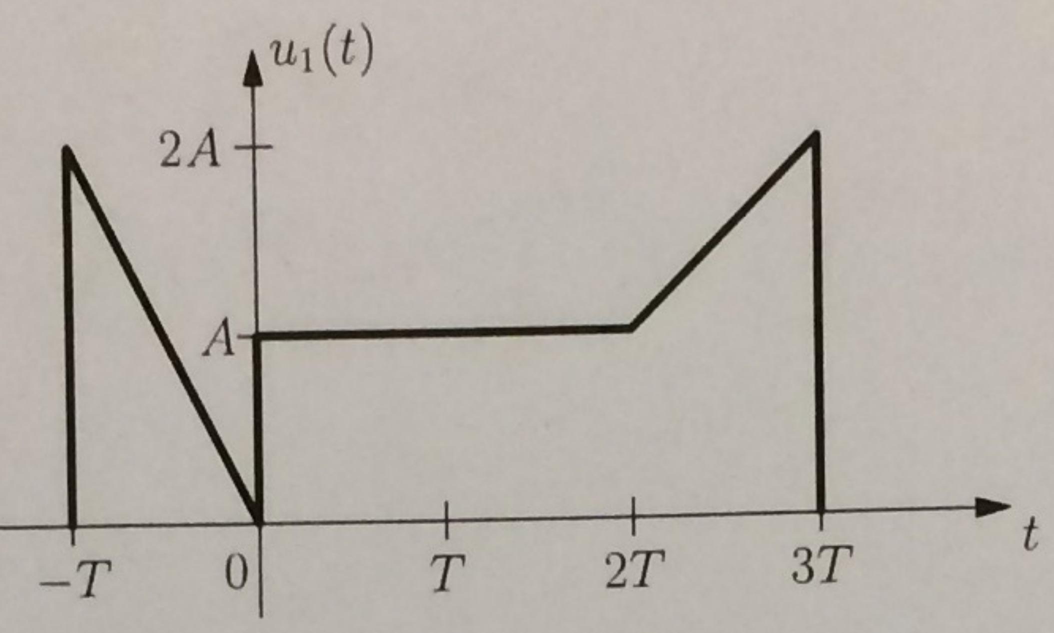
1 Zeitkontinuierliche Signale **16,5 Punkte**

1.1 Gegeben sei das folgende, zeitkontinuierliche Signal $u_1(t)$: 4,5 P



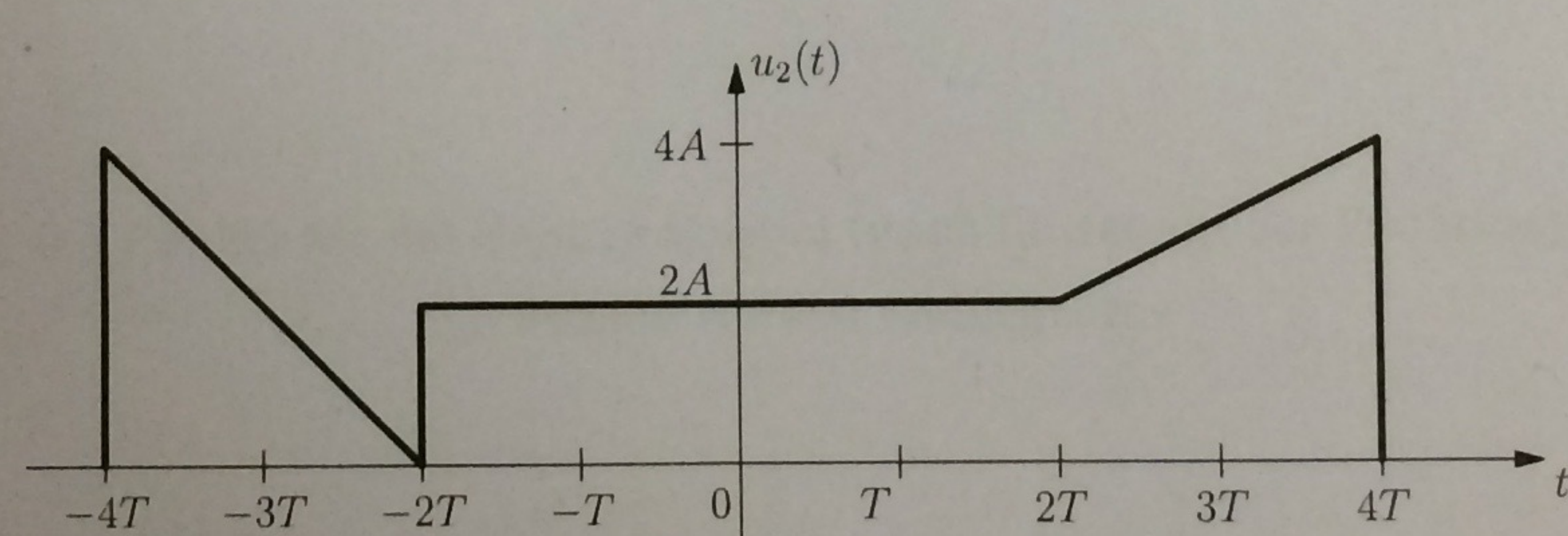
a) Geben Sie eine geschlossene mathematische Beschreibung von $u_1(t)$ unter Zuhilfenahme von Elementarsignalen an. 1 P

$$u_1(t) = \sqcap_T(t+\tfrac{1}{2}T)(-\tfrac{2A}{T}t) + A\sqcap_{2T}(t-T) + \tfrac{A}{T}(t-T)\sqcap_T(t-2{,}5T)$$

0,5 Punkte je Rechteck und Gerade

max. 0,5 Punkte bei Fehlern

b) Skizzieren Sie das Signal $u_2(t) = 2 \cdot u_1(\frac{1}{2}(t+2T))$. 1,5 P



0,5 Punkte für die Amplitude

0,5 Punkte für die Verschiebung

-0,5 Punkte je falsche Achsenbeschriftung

max. 0,5 Punkte bei Fehlern

c) Das Signal $u_1(t)$ werden mit $T_P = 4T$ periodisch fortgesetzt. Berechnen Sie den Mittelwert des periodisch fortgesetzten Signals $u_P(t)$. 1 P

$$
\begin{aligned}
m_{u_P} &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u_P(t)dt \\
&= \frac{1}{4T} \left(\int_{-T}^{0} (-\frac{2A}{T} t)dt + \int_{0}^{2T} Adt + \int_{2T}^{3T} \frac{A}{T}(t-T)dt \right) \\
&= \frac{9}{8} A
\end{aligned}
$$

0,5 Punkte für die richtige Formel (nach Einsetzen der Funktion)

0,5 Punkte für das Endergebnis

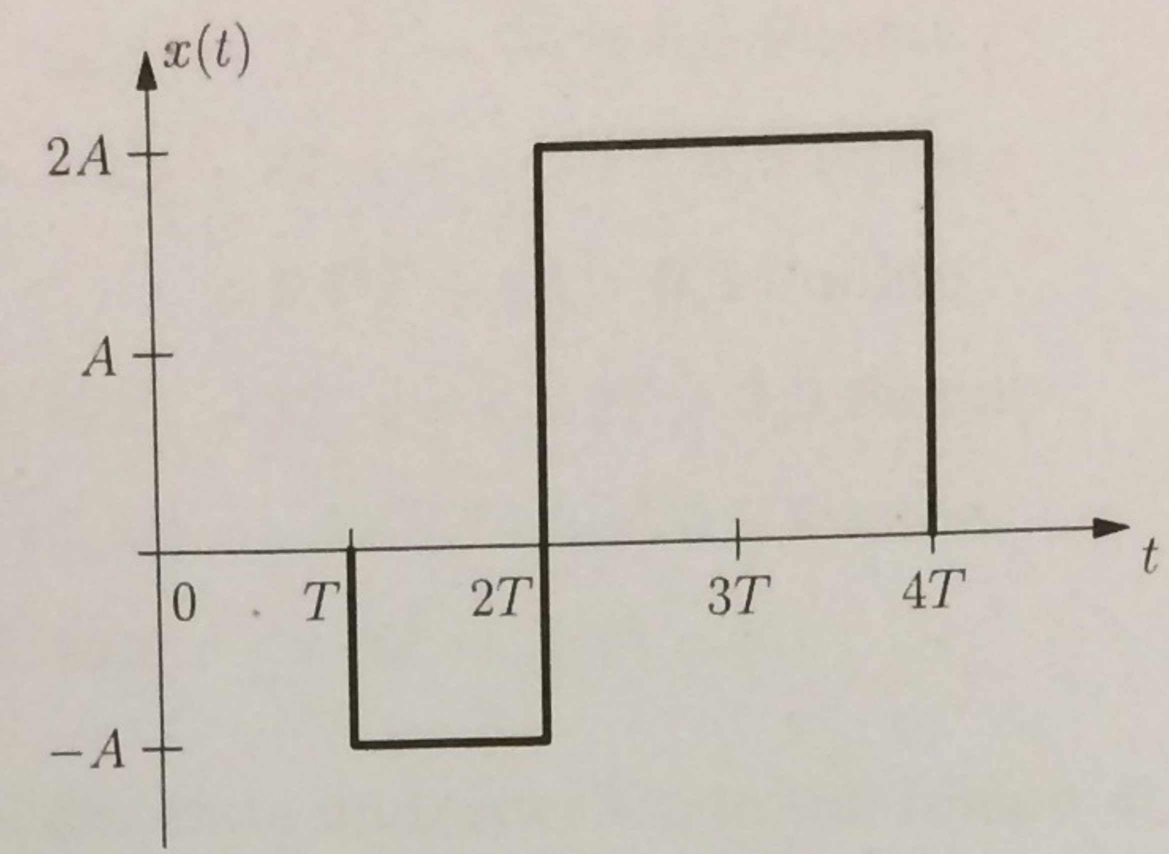
d) Berechnen Sie außerdem die Varianz. *(Hinweis: Die Leistung von $u_P(t)$ ist $\frac{17}{12}A^2$)* 1 P

$$\sigma^2_{u_P} = P_{u_P} - m^2_{u_P} = \frac{17}{12}A^2 - \left(\frac{9}{8}A\right)^2 = \frac{29}{192}A^2$$

0,5 Punkte für die richtige Formel (nach Einsetzen der Funktion)

0,5 Punkte für das Endergebnis

1.2 Gegeben sei das Signal $x(t)$. **10 P**



a) Berechnen Sie für das gegebene Signal $x(t)$ die Autokorrelationsfunktion $r_{xx}(\tau)$. Fassen Sie das Ergebnis soweit wie möglich zusammen. **7,5 P**

$$r_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt$$

1. Fall: $\tau > 3T : r_{xx}(\tau) = 0$

2. Fall: $2T < \tau \leq 3T :$ **0,5 Punkte**

$$r_{xx}(\tau) = \int_{T}^{4T-\tau} (-2A^2)dt = \textbf{0,5 Punkte}$$

$$= -2A^2(3T-\tau) \textbf{ 0,5 Punkte}$$

3. Fall: $T < \tau \leq 2T :$ **0,5 Punkte**

$$r_{xx}(\tau) = \int_{2T}^{4T-\tau} (4A^2)dt + \int_{T}^{2T} (-2A^2)dt = \textbf{0,5 Punkte}$$

$$= 6A^2T - 4A^2\tau \textbf{ 0,5 Punkte}$$

4. Fall: $0 < \tau \leq T :$ **0,5 Punkte**

$$r_{xx}(\tau) = \int_{T}^{2T-\tau} (A^2)dt + \int_{2T-\tau}^{2T} (-2A^2)dt + \int_{2T}^{4T-\tau} (4A^2)dt = \textbf{0,5 Punkte}$$

$$= 9A^2T - 7A^2\tau \textbf{ 0,5 Punkte}$$

5. Fall: $-T < \tau \leq 0:$ **0,5 Punkte**

$r_{xx}(\tau) = r_{xx}(-\tau)$ **(AKF achenssymetrisch)**

$r_{xx}(\tau) = 9A^2T + 7A^2\tau$ **0,5 Punkte**

6. Fall: $-2T < \tau \leq -T:$ **0,5 Punkte**

$= 6A^2T + 4A^2\tau$ **0,5 Punkte**

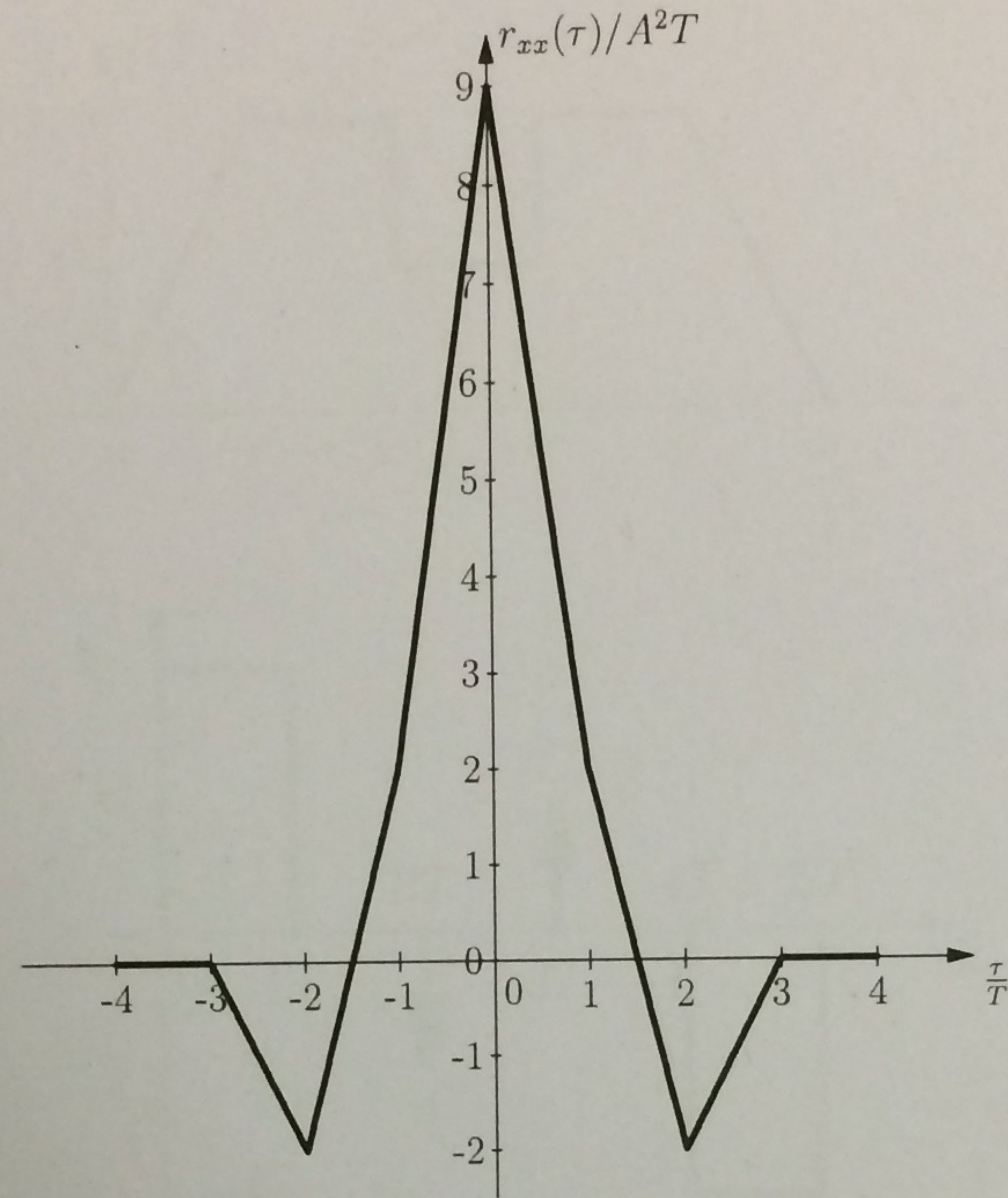
7. Fall: $-3T < \tau \leq -2T:$ **0,5 Punkte**

$r_{xx}(\tau) = -2A^2(3T + \tau)$ **0,5 Punkte**

8. Fall: $\tau \leq -3T : r_{xx}(\tau) = 0$

Falls bei voller Punktzahl der erste und/oder letzte Fall fehlen -0,5 Punkte

b) Skizzieren Sie $r_{xx}(\tau)$ im Bereich $-4T \leq \tau \leq 4T$. 1,5 P



0,5 Punkte für die richtigen Nullstellen

0,5 Punkte für die maximale Amplitude

0,5 Punkte für den Kurvenverlauf

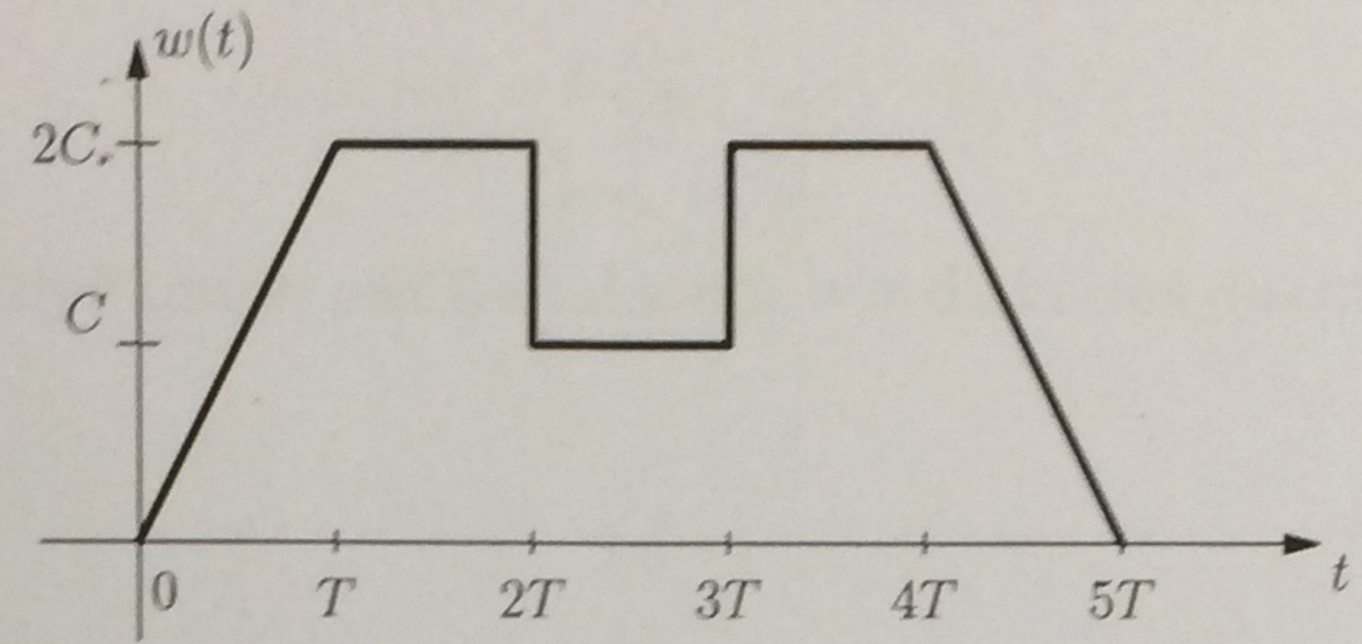
-0,5 Punkte für fehlende oder falsche Achsenbeschriftung

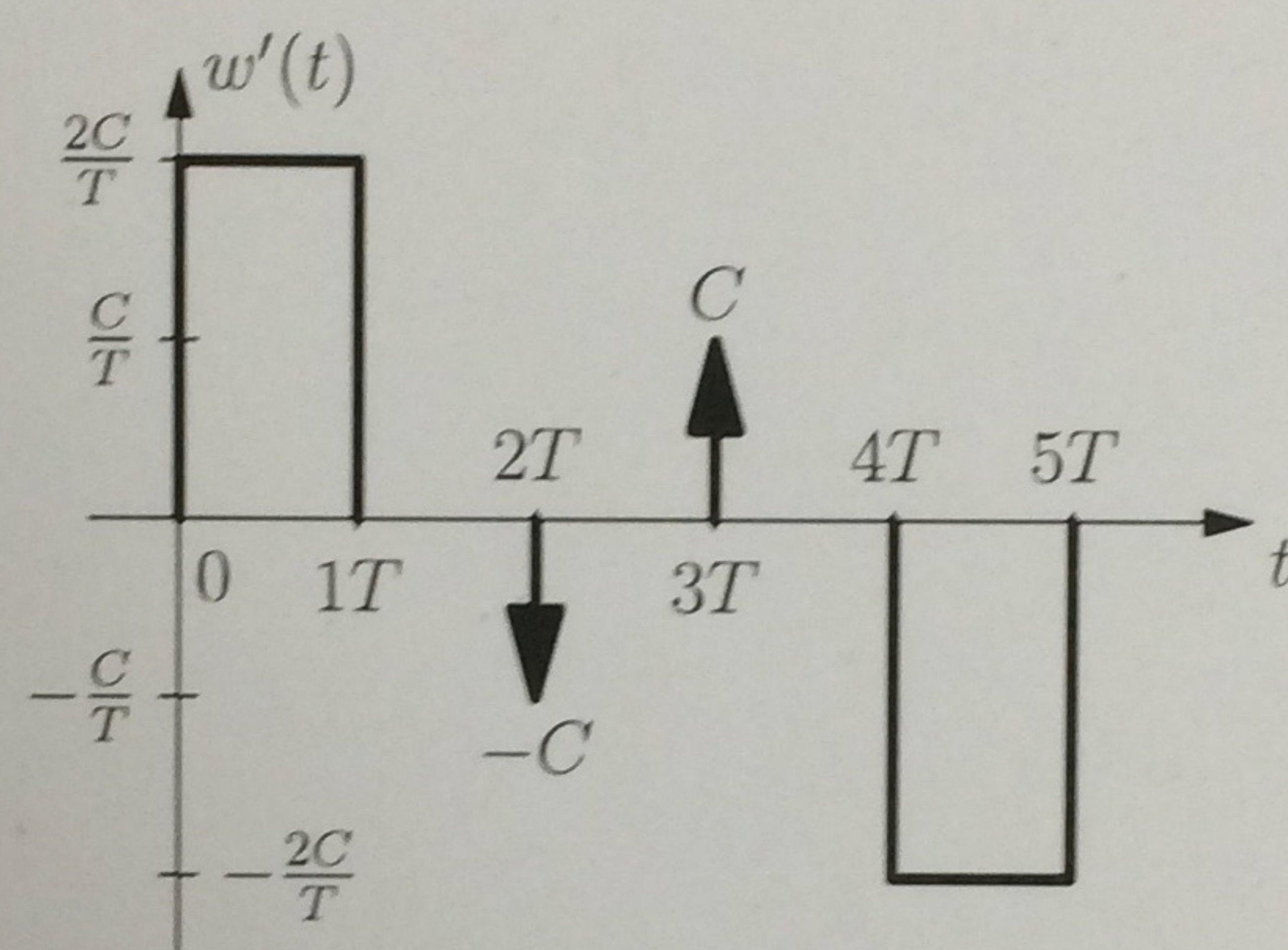
c) Wann wird $r_{xx}(\tau)$ maximal? Begründen Sie Ihre Antwort. 1 P

$r_{xx}(\tau)$ wird maximal bei $\tau = 0$ 0,5 Punkte

Signale liegen dann genau übereinander, Ähnlichkeit dann maximal. 0,5 Punkte

1.3 Berechnen Sie die Fouriertransformierte des folgenden Signals $w(t)$. Fassen Sie das Ergebnis so weit wie möglich zu trigonometrischen Funktionen zusammen. **2 P**





0,5 Punkte (Zeichnung, erste Ableitung)

$$w'(t) = \frac{2C}{T}\sqcap_T(t-\frac{1}{2}T) - C\delta(t-2T) + C\delta(t-3T) - \frac{2C}{T}\sqcap_T(t-\frac{9}{2}T) \quad \textbf{0,5 Punkte}$$

$$(j\omega)^1 W(j\omega) = \frac{2C}{T}\cdot T si(\frac{\omega T}{2})\cdot e^{-\frac{1}{2}j\omega T} - Ce^{-2j\omega T} + Ce^{-3j\omega T} - \frac{2C}{T}T si(\frac{\omega T}{2})\cdot e^{-\frac{9}{2}j\omega T} \quad \textbf{0,5 Punkte}$$

$$W(j\omega) = \frac{C}{j\omega}\cdot e^{-\frac{5}{2}j\omega T}\left(2\cdot si(\frac{\omega T}{2})(e^{2j\omega T} - e^{-2j\omega T}) - \left(e^{\frac{1}{2}j\omega T} - e^{-\frac{1}{2}j\omega T}\right)\right)$$

$$W(j\omega) = \frac{2C}{\omega}\cdot e^{-\frac{5}{2}j\omega T}\left(2\cdot si(\frac{\omega T}{2}) sin(2\omega T) - sin(\frac{1}{2}\omega T)\right) \quad \textbf{0,5 Punkte}$$

sur im Lehrgebiet

1.4 Zeigen Sie, dass periodische Signale ein frequenzdiskretes Spektrum aufweisen. 1* P

$u_P(t) = u(t) * \delta_{T_P}(t) \quad T_P$ **... Periodizitätsintervall**

$$U_P(j\omega) = U(j\omega) \cdot \omega_{T_P} \cdot \delta_{T_P}(\omega)$$

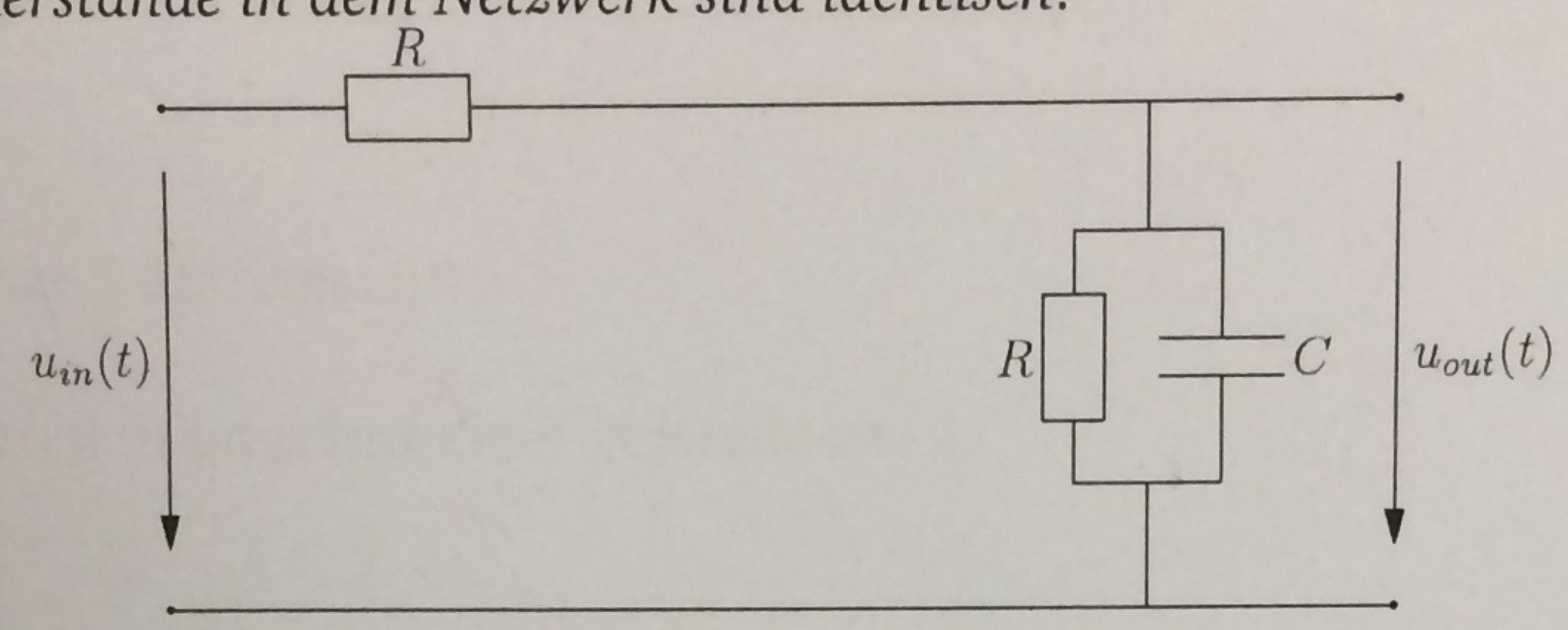
$$\omega_{T_P} = \frac{2\pi}{T_P}$$

Multiplikation mit Deltakamm => diskretes Spektrum

2 Zeitkontinuierliche Systeme und Abtastung — 8,5 Punkte

2.1 Gegeben sei das folgende Netzwerk. 2 P

Hinweis: Beide Widerstände in dem Netzwerk sind identisch!



a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Systems $H(s)$ im Laplacebereich unter Verwendung komplexer Impedanzen. 1 P

$$H(s) = \frac{U_{OUT}(s)}{U_{IN}(s)} = \frac{\frac{R\cdot\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}}}{\frac{R\cdot\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}} + R} = \frac{R}{sR^2C + 2R} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{2}{RC}}$$

b) Geben Sie die Impulsantwort des Systems $h(t)$ im Zeitbereich an. 1 P

$$H(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{2}{RC}} = \frac{1}{RC}\frac{1}{s - (-\frac{2}{RC})}$$

$$\leftrightarrow h(t) = \frac{1}{RC}e^{-\frac{2}{RC}t};\ \forall t \geq 0$$

0,5 Punkte für Impulsantwort

0,5 Punkte für t größer 0

2.2 Von einem realen, zeitkontinuierlichen System seien nachfolgende Eigenschaften bekannt. Skizzieren Sie das PN-Diagramm des Systems. Erläutern Sie Ihre Schlussfolgerungen aus den genannten Eigenschaften. 2,5 P

a) Das System hat 5 Extremstellen.

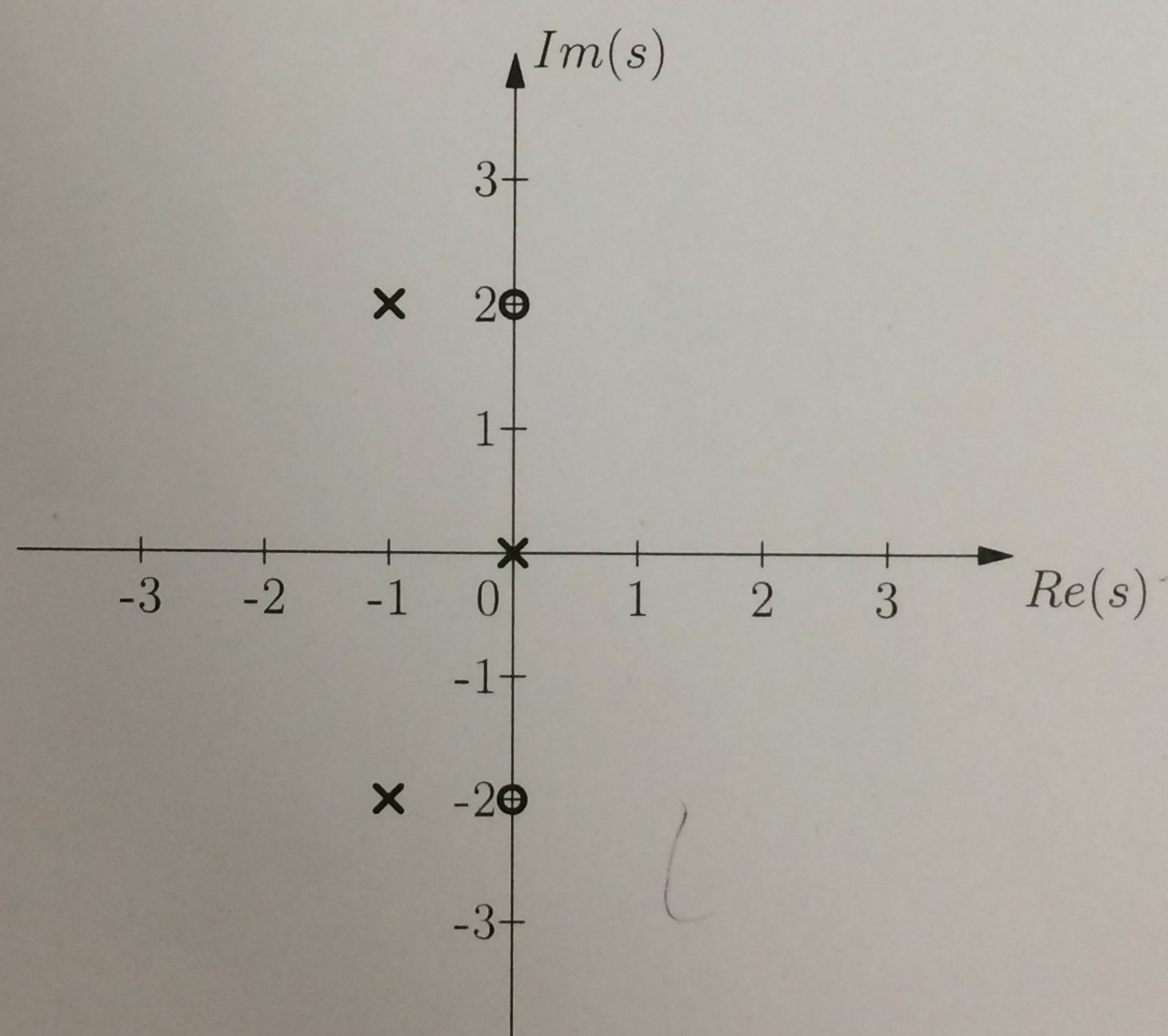
b) Der Imaginärteil mindestens einer Polstelle ist -2.

c) $\lim_{\omega \to \infty} |H(j\omega)| \to 0$

d) Das System ist bedingt stabil.

e) $H(2j) = 0$

f) $H(1) = \frac{5}{8}$; $(H_0 = 1)$



a) (#Nst|#Pst)=(5|0),(4|1),(3|2),(2|3),(1|4),(0|5)

b) Pst: (Re,-2jx) +reales System: (Re,+2jx).

c) Mehr Pst, als Nst: +b: (2|3), (1|4),(0|5)

d) mindestens 1 Pst auf jw-Achse

e) Nst bei (0,2j)+reales System: Nst bei: (0,-2j); Anzahl Nst|Pst: (2|3); bedingt stabil: 3. Pst bei (0,0)

f) $H(jw) = \frac{(jw-2j)(jw+2j)}{(jw+0)(jw-(Re+2j))(jw-(Re-2j))}$

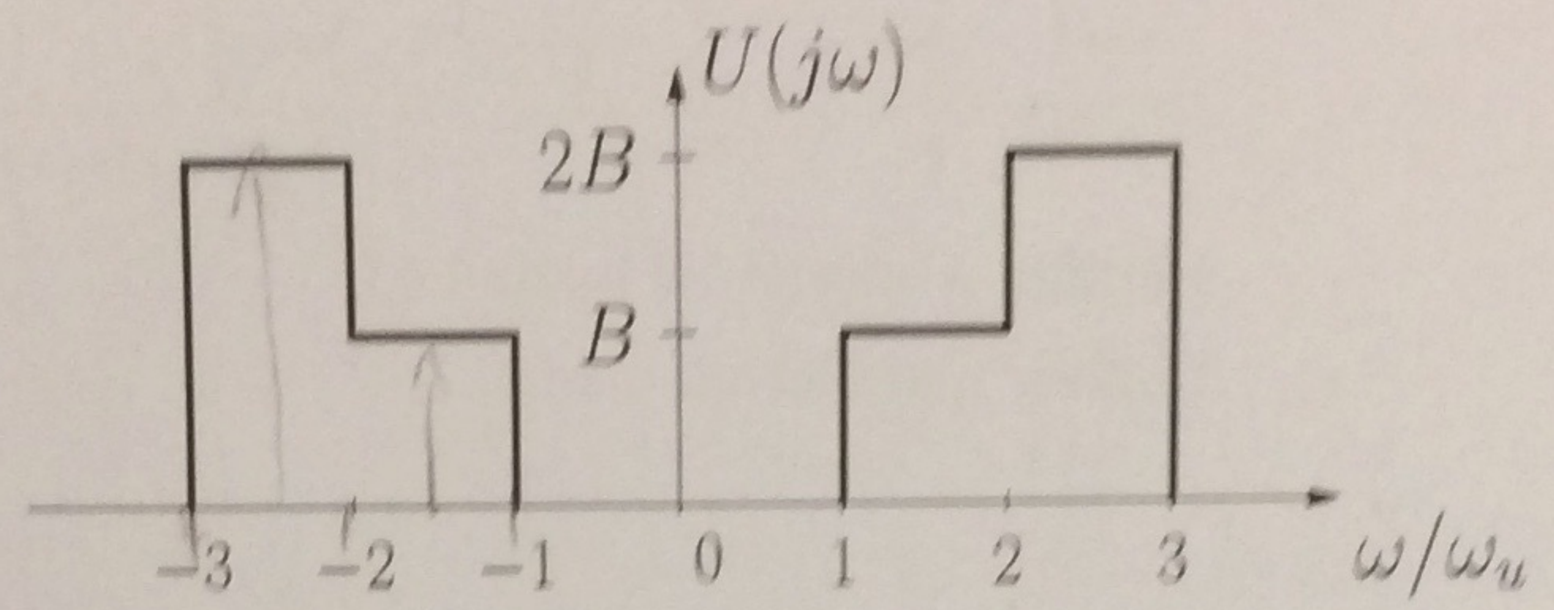
$$H(1) = \frac{(1-2j)(1+2j)}{(1)(1-(Re+2j))(1-(Re-2j))} = \frac{5}{Re^2-2Re+5} = \frac{5}{8} \Leftrightarrow Re = -1$$

0,5 Punkte je richtige Extremstelle mit Begründung

0,5 je zwei Extremstellen, falls Begründung fehlt

max. 1,5 Punkte ohne Begründung

2.3 Gegeben sei das folgende Spektrum $U(j\omega)$. 4 P



a) Bestimmen Sie $u(t)$. Fassen Sie das Ergebnis so weit wie möglich zu trigonometrischen Termen zusammen. 1,5 P

$$
\begin{aligned}
U(j\omega) &= 2B \cdot \sqcap_{\omega_u}(\omega + 2,5\omega_u) + B \cdot \sqcap_{\omega_u}(\omega + 1,5\omega_u) + B \cdot \sqcap_{\omega_u}(\omega - 1,5\omega_u) \\
&\quad + 2B \cdot \sqcap_{\omega_u}(\omega - 2,5\omega_u) \\
u(t) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-3\omega_u}^{-2\omega_u} 2Be^{j\omega t}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-2\omega_u}^{-1\omega_u} Be^{j\omega t}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{1\omega_u}^{2\omega_u} Be^{j\omega t}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\omega_u}^{3\omega_u} 2Be^{j\omega t}d\omega \quad \textbf{0,5 Punkte} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[2B\frac{1}{jt}e^{j\omega t}\right]_{-3\omega_u}^{-2\omega_u} + \frac{1}{2\pi}\left[B\frac{1}{jt}e^{j\omega t}\right]_{-2\omega_u}^{-1\omega_u} + \frac{1}{2\pi}\left[B\frac{1}{jt}e^{j\omega t}\right]_{1\omega_u}^{2\omega_u} + \frac{1}{2\pi}\left[2B\frac{1}{jt}e^{j\omega t}\right]_{2\omega_u}^{3\omega_u} \\
&= \frac{B}{jt2\pi}\left[2 \cdot e^{-2\omega_u jt} - 2 \cdot e^{-3\omega_u jt} + \cdot e^{-1\omega_u jt} - \cdot e^{-2\omega_u jt} + \cdot e^{2\omega_u jt} - \cdot e^{1\omega_u jt} + 2 \cdot e^{3\omega_u jt} - 2 \cdot e^{2\omega_u jt}\right] \\
&= \frac{B}{\pi t}\left[2 \cdot sin(3\omega_u t) - sin(2\omega_u t) - sin(\omega_u t)\right] \quad \textbf{1 Punkt}
\end{aligned}
$$

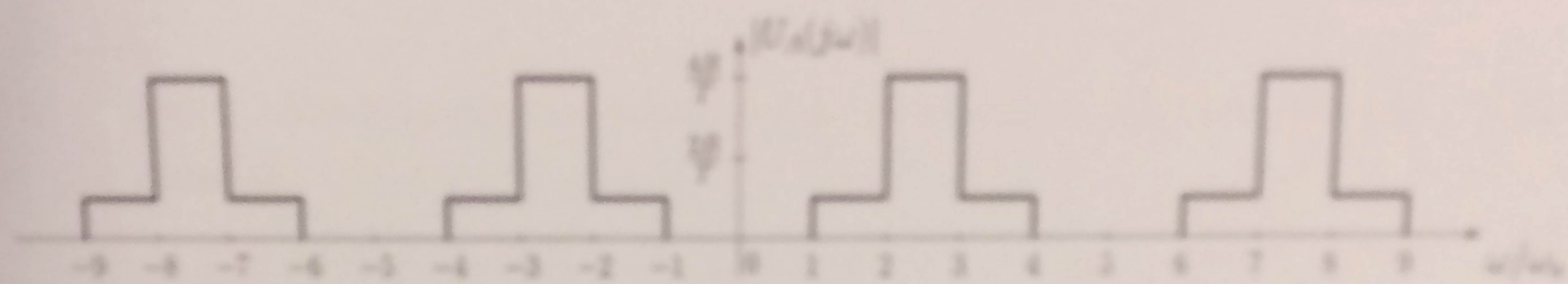
alg

alternativ:

$$
\begin{aligned}
F^{-1}\{\sqcap_{\omega_u}(\omega)\} &= \frac{\omega_u}{2\pi} si\left(\frac{\omega_u t}{2}\right) \\
F^{-1}\{\delta(\omega - \omega_u)\} &= \frac{1}{2\pi}e^{jt\omega_u}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u(t) &= 2B\frac{\omega_u}{2\pi} si\left(\frac{\omega_u t}{2}\right)\frac{1}{2\pi}e^{-jt2,5\omega_u} + B\frac{\omega_u}{2\pi} si\left(\frac{\omega_u t}{2}\right)\frac{1}{2\pi}e^{-jt1,5\omega_u} \\
&\quad + B\frac{\omega_u}{2\pi} si\left(\frac{\omega_u t}{2}\right)\frac{1}{2\pi}e^{jt1,5\omega_u} + 2B\frac{\omega_u}{2\pi} si\left(\frac{\omega_u t}{2}\right)\frac{1}{2\pi}e^{jt2,5\omega_u} \quad \textbf{0,5 Punkte} \\
&= B\frac{\omega_u}{2\pi^2} si\left(\frac{\omega_u t}{2}\right)\left[2 \cdot cos(2,5\omega_u t) + cos(1,5\omega_u t)\right]) \quad \textbf{1 Punkt}
\end{aligned}
$$

b) Das Signal werde ideal mit $\omega_T = 5\omega_u$ abgetastet. Zeichnen Sie $|U_A(j\omega)|$ im Bereich $-9\omega_u \leq \omega \leq 9\omega_u$. Achten Sie auf eine vollständige Achsenbeschriftung. 1 P



-0,5 Punkte für falsche Amplitude

-0,5 Punkte für falschen Verlauf

c) Welche Abtastfrequenz muss mindestens gewählt werden, damit kein Aliasing entsteht? 0,5 P

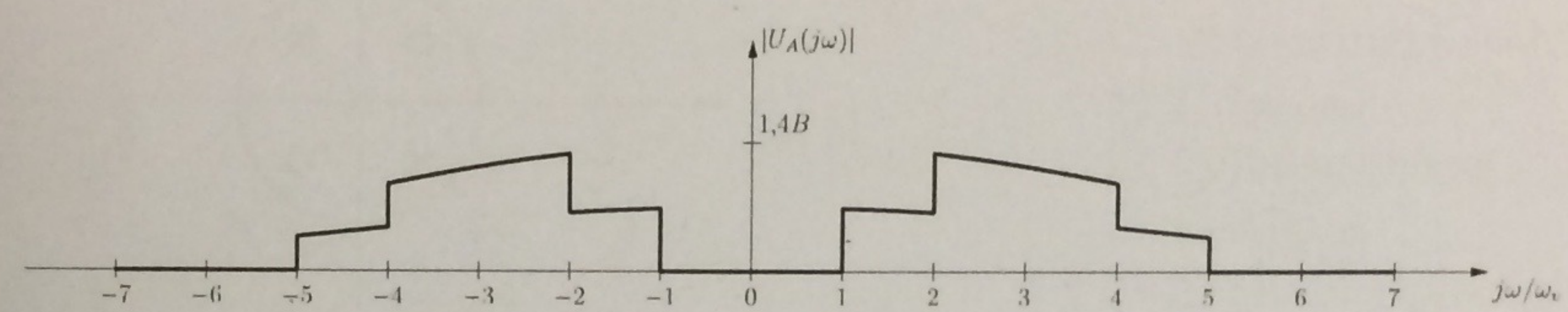
$$\omega_T = 6\omega_u$$

oder

Allgemein: $f_T = 2f_u$ (Nyquistbedingung erfüllt)

d) Nun werde das Signal u(t) mittels Flat-Top-Sampling ($\omega_T = 6\omega_u$, $\alpha = 0,7$) abgetastet. Skizzieren Sie $|U_A(j\omega)|$ im Bereich $-7\omega_u \leq \omega \leq 7\omega_u$. Achten Sie auf eine vollständige Achsenbeschriftung. 1 P

$T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{6\omega_u}$



-0,5 Punkte für falsche Amplitude

-0,5 Punkte für falschen Verlauf

e) Kann bei einer Abtastung mittels Flat-Top-Sampling das Signal perfekt mithilfe eines idealen Tiefpasses rekonstruiert werden? Begründen Sie Ihre Antwort 1* P

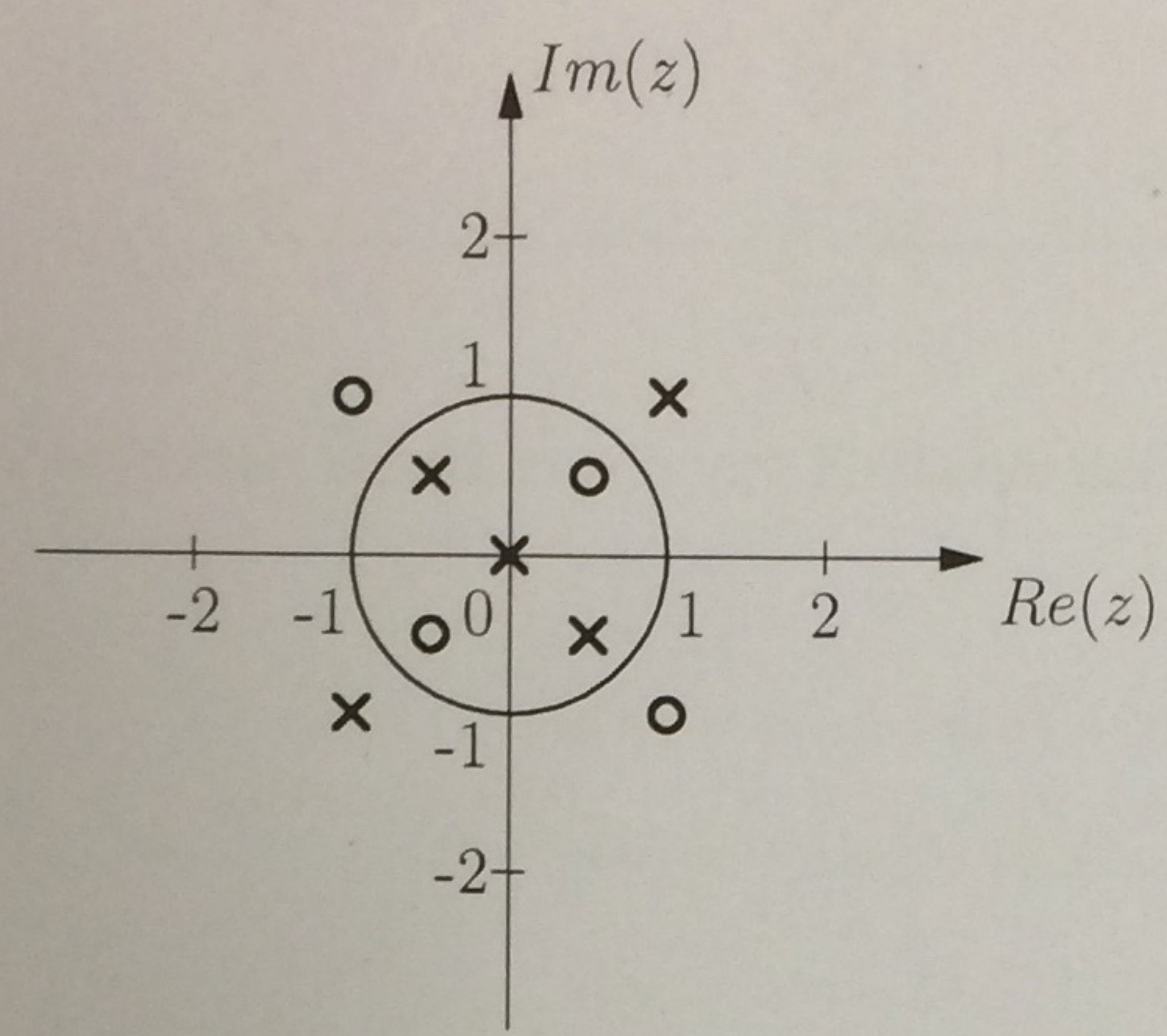
Nein. 0,5 Punkte

Amplitudenverzerrung muss ausgeglichen werden (si-Korrektur, Präemphase) 0,5 Punkte

3 Zeitdiskrete Signale und Systeme — 13 Punkte

3.1 PN-Diagramme zeitdiskreter Systeme — 4 P

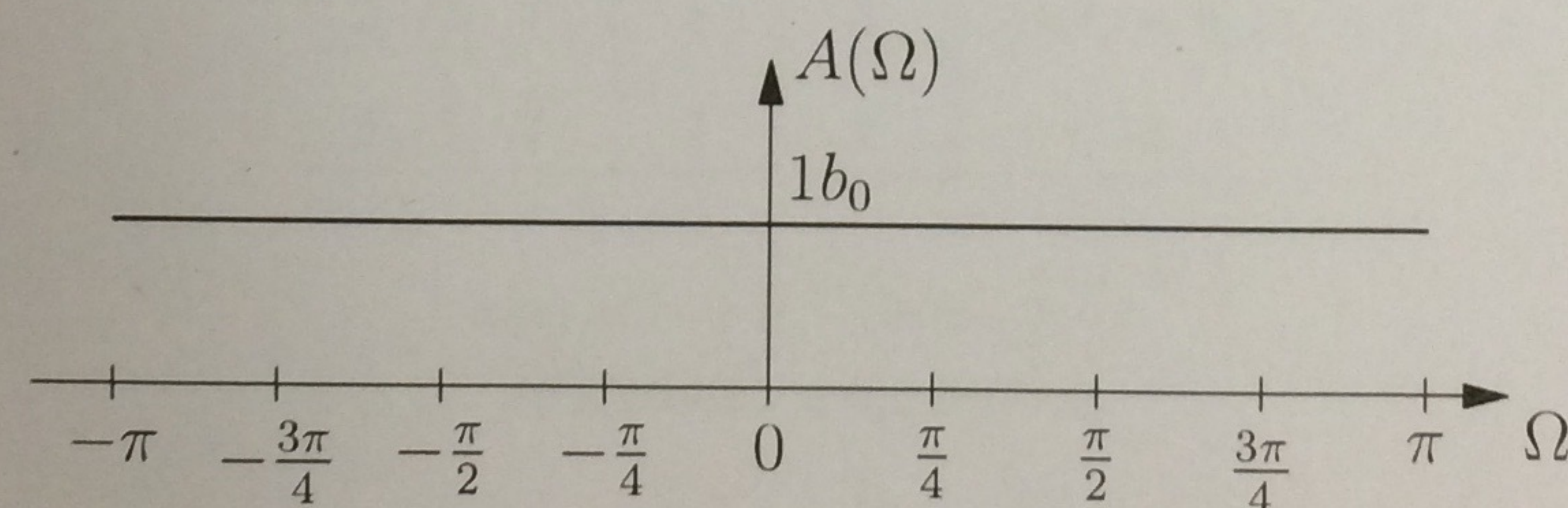
a) Gegeben sei das folgende PN-Diagramm eines zeitdiskreten Systems. Kreuzen Sie rechts die entsprechenden Eigenschaften des Systems an. — 3 P



ja	nein	
☐	☒	reellwertig
☐	☒	(bedingt) stabil
☒	☐	kausal
☐	☒	linearphasig
☒	☐	Allpass
☐	☒	minimalphasig

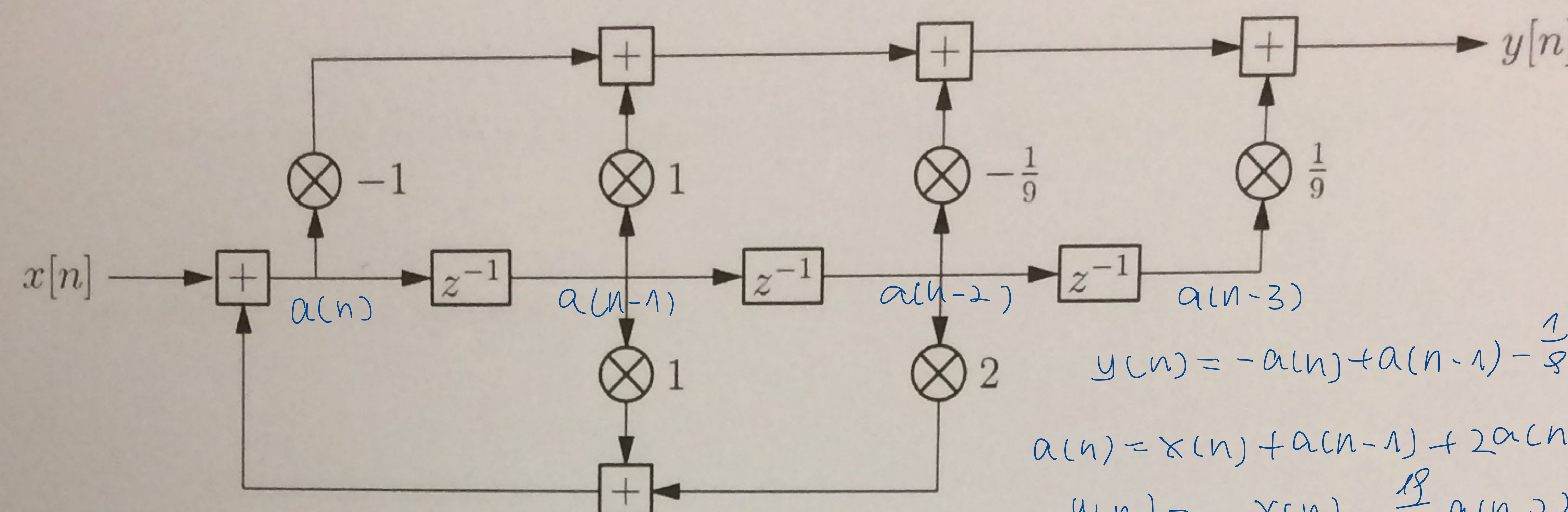
0,5 Punkte pro richtigem Kreuz
-0,5 Punkte pro falschem Kreuz
insgesamt: Minimum 0 Punkte

b) Skizzieren Sie den Amplitudengang des Systems. Achten Sie auf eine vollständige Achsenbeschriftung. — 1 P



-0,5 Punkte falscher Verlauf
-0,5 Punkte fehlende Achsenbeschriftung

3.2 Gegeben sei das folgende zeitdiskrete Filter. **7 P**



$y(n) = -a(n) + a(n-1) - \frac{1}{9}a(n-2) + \frac{1}{9}a(n-3)$

$a(n) = x(n) + a(n-1) + 2a(n-2)$

$y(n) = -x(n) - \frac{19}{9}a(n-2) + \frac{1}{9}a(n-3)$

a) Bestimmen Sie die ersten vier Elemente der Impulsantwort. 2 P

	x(n)	a(n)	a(n-1)	a(n-2)	a(n-3)	y(n)
n = 0	1	1	0	0	0	−1
1	0	1	1	0	0	0
2	0	3	1	1	0	$-\frac{19}{9}$
3	0	5	3	1	1	$-5+3-\cancel{9}$ = −2

$$a(n) = x(n) + b(n) + 2c(n)$$

$$y(n) = -a(n) + b(n) - \frac{1}{9}c(n) + \frac{1}{9}d(n)$$

$$b(n) = a(n-1)$$

$$c(n) = b(n-1)$$

$$d(n) = c(n-1)$$

$Y(z) = A(z)(-1 + z^{-1} - \frac{1}{9}z^{-2} + \frac{1}{9}z^{-3})$

$A(z) = X(z) + A(z)(z^{-1} + 2z^{-2})$

$\Rightarrow A(z) = \frac{X(z)}{1 - z^{-1} - 2z^{-2}}$

$Y(z) = \frac{X(z)(-1 + z^{-1} - \frac{1}{9}z^{-2} + \frac{1}{9}z^{-3})}{1 - z^{-2} - 2z^{-2}}$

$y(n) = -x(n) + x(n-1) - \frac{1}{9}x(n-2) + \frac{1}{9}x(n-3)$
$+ y(n-1) + 2y(n-2)$

a(n)	b(n)	c(n)	d(n)	h(n)
1	0	0	0	-1
1	1	0	0	0
3	1	1	0	-19/9 ≈ 2,11
5	3	1	1	-2

$$h(n) = \{-1; 0; -19/9; -2; ...\}$$

Je Element je 0,5 Punkte

b) In welcher Filterstruktur ist das Filter dargestellt? 0,5 P

Zweite Kanonische Form

c) Bestimmen Sie die Differenzengleichung. Verwenden Sie **keine** Hilfssignale. 0,5 P

$$y(n) = -x(n) + x(n-1) - \frac{1}{9}x(n-2) + \frac{1}{9}x(n-3) + y(n-1) + 2y(n-2)$$

d) Berechnen Sie die Systemfunktion. 1 P

z-Transformation:

$$Y(z) = -X(z) + z^{-1}X(z) - \frac{1}{9}z^{-2}X(z) + \frac{1}{9}z^{-3}X(z) + z^{-1}Y(z) + 2z^{-2}Y(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{-1 + z^{-1} - \frac{1}{9}z^{-2} + \frac{1}{9}z^{-3}}{1 - z^{-1} - 2z^{-2}} = \frac{-z^3 + z^2 - \frac{1}{9}z + \frac{1}{9}}{z^3 - 1z^2 - 2z}$$

Richtige z-Transformation 0,5 Punkte

Gesamtübertragungsfunktion 0,5 Punkte

e) Berechnen Sie die Pol- und Nullstellen der Systemfunktion. 1,5 P

$$H(z) = \frac{-z^3 + z^2 - \frac{1}{9}z + \frac{1}{9}}{z^3 - z^2 - 2z} = \frac{-(z-1)(z-j/3)(z+j/3)}{z(z+1)(z-2)}$$

$$z_0 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$z_{o1} = 1; \; z_{o2} = \frac{1}{3}j; \; z_{o3} = -\frac{1}{3}j;$$

$$z_{x1} = 0; \; z_{x2} = -1; \; z_{x3} = 2;$$

$-z^2 - \frac{1}{8}$

$z-1 \;/\; -z^3+z^2-\frac{1}{8}z+\frac{1}{8}$

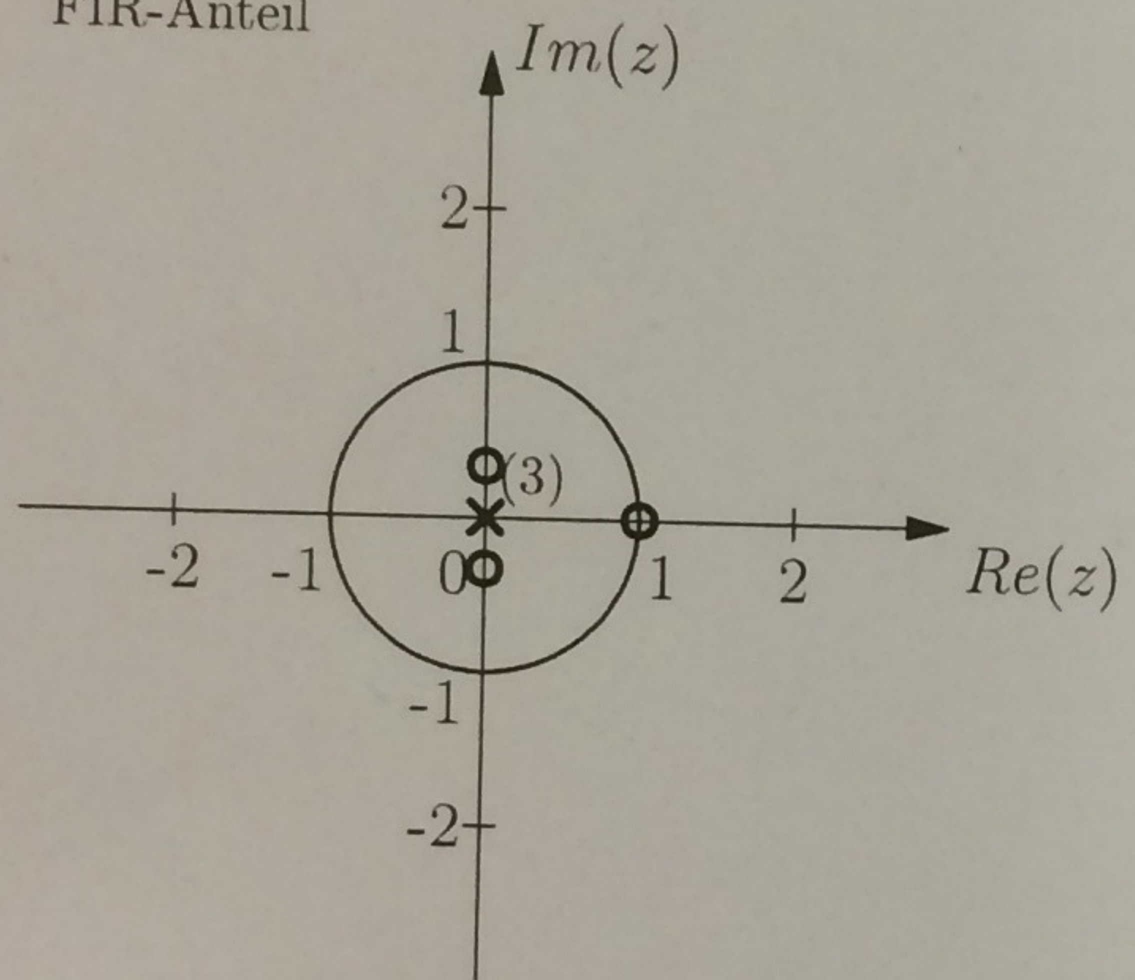
$-z^3+z^2$

$-\frac{1}{8}z+\frac{1}{8}$

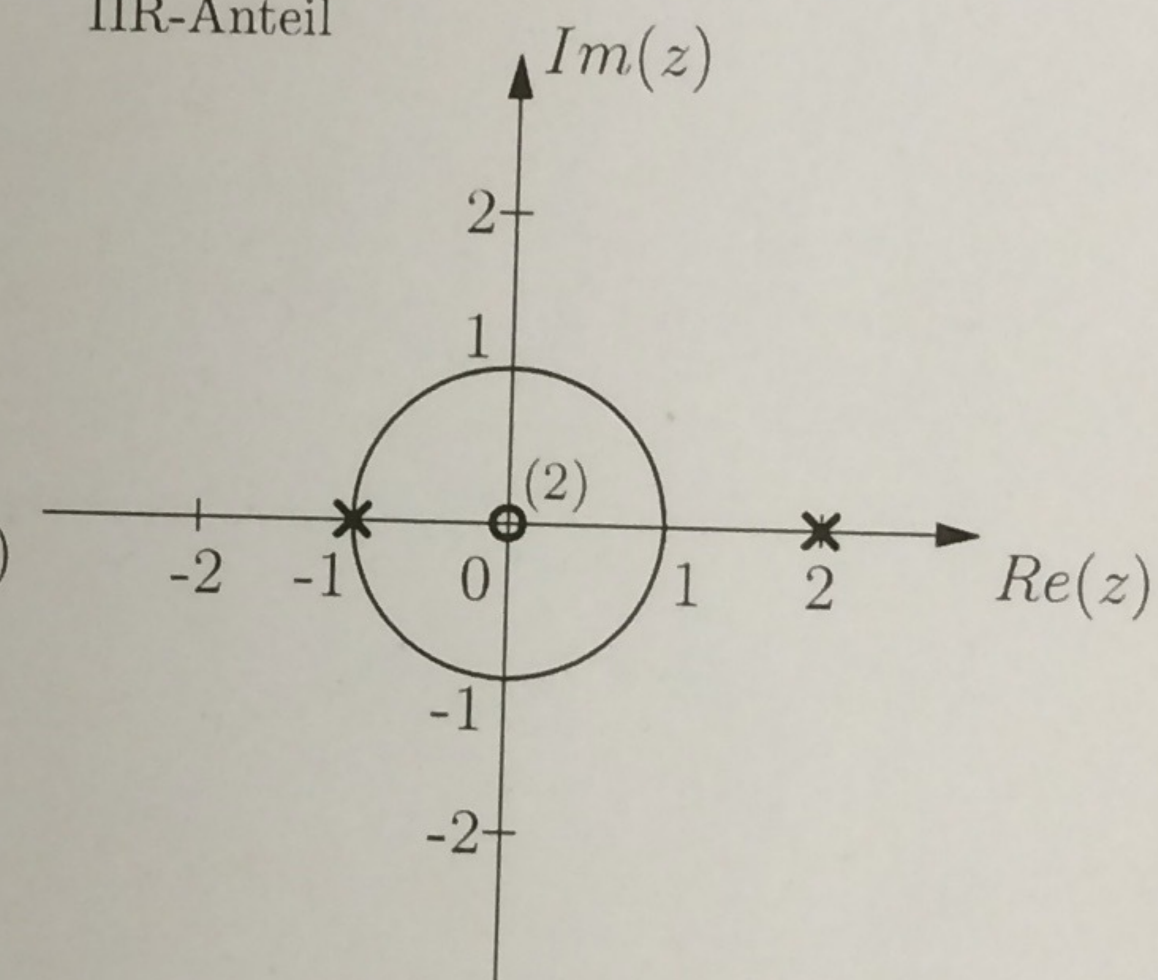
Je zwei Extremstellen je 0,5 Punkte

f) Zeichnen Sie ein PN-Diagramm jeweils für den FIR- und den IIR-Anteil des Filters. *(Hinweis: Falls Sie keine Pol- und Nullstellen berechnen konnten, verwenden Sie die Systemfunktion* $H(z) = \frac{z(z+2)(z-2)}{(z-1)(z+2j)(z-2j)}$*)* 0,5 P

FIR-Anteil

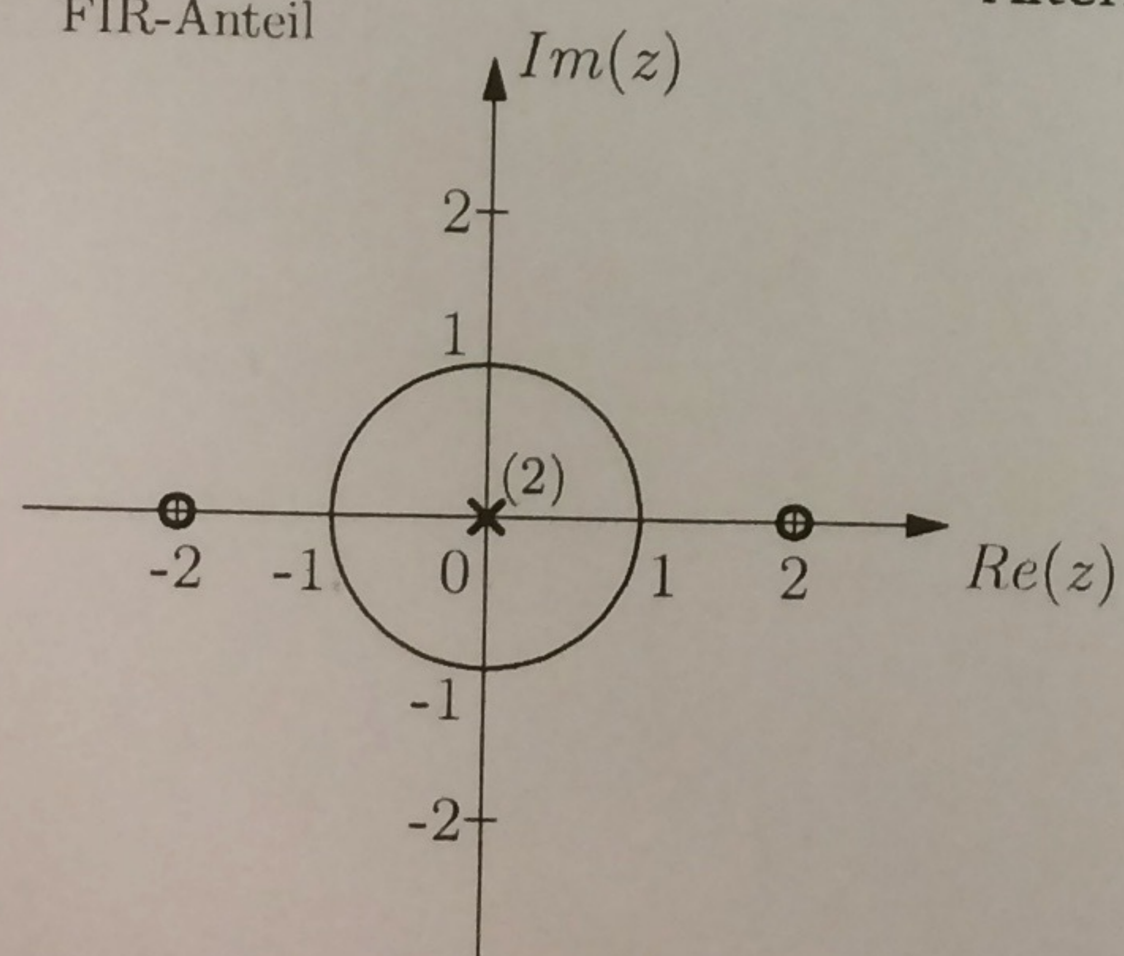


IIR-Anteil

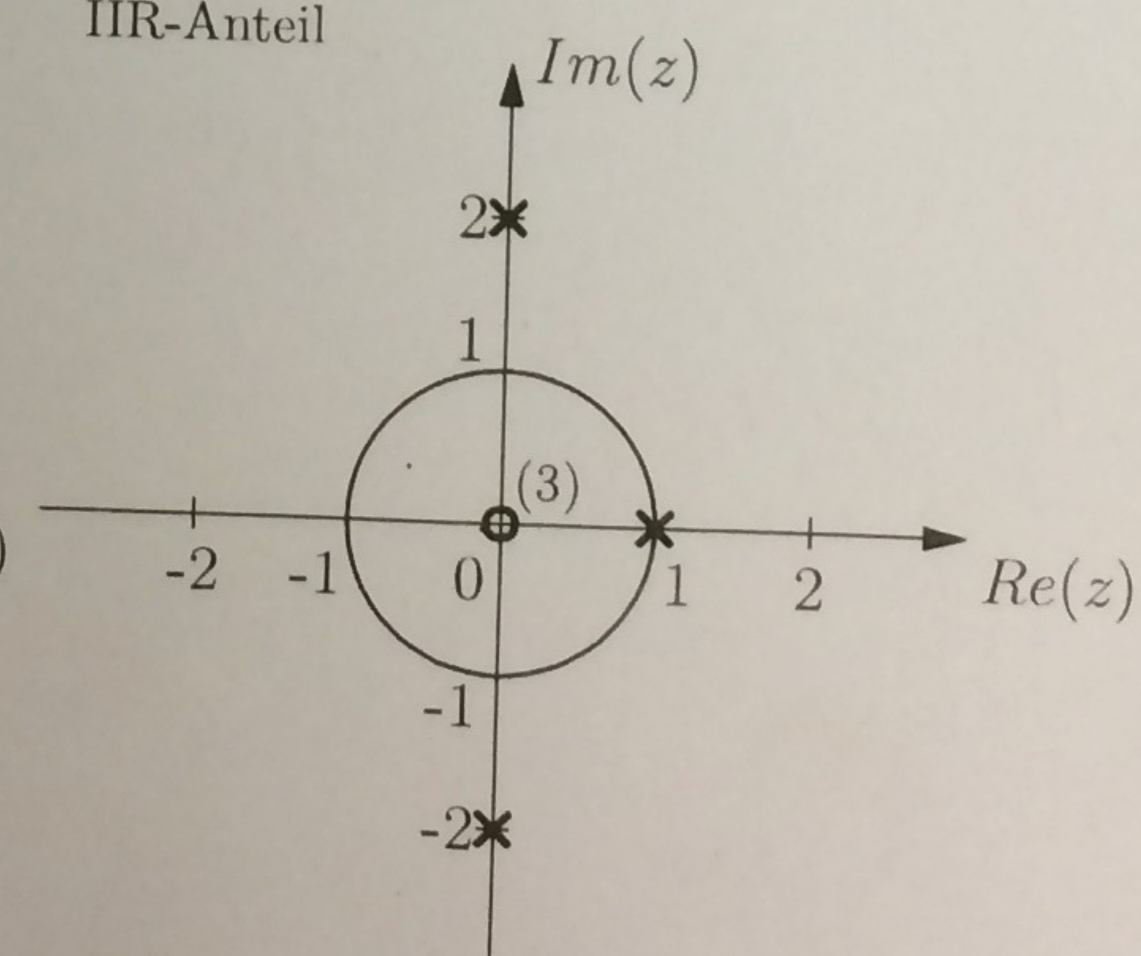


Alternative:

FIR-Anteil



IIR-Anteil



IIR-Anteil+FIR-Anteil: 0,5 Punkte

g) Ist das Filter stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. 1 P

Nein (0,5 Punkte)

Pst außerhalb des Einheitskreises. (0,5 Punkte)

3.3 Ein FIR-Filter habe die Impulsantwort $h(n) = \{3; 1; 2\}$.Bestimmen Sie die Antwort des Filters auf das Eingangssignal $x(n) = \{4; -1; -3\}$ mittels zeitdiskreter Faltung. 2 P

3	1	2	h(n)
4			12
-1	4		1
-3	-1	4	-2
	-3	-1	-5
		-3	-6

	3	1	2
4	12	4	8
-1	-3	-1	-2
-3	-9	-3	-6

12, 1, -2, -5, -6

$$h(n) = \{12; 1; -2; -5; -6\}$$

je falsches/fehlendes Element -0,5 Punkte

3.4 Beweisen Sie allgemein den Zusammenhang $r_{uv}(k) = u(-n) * v(n)|_{n=k}$. 1* P

$$u(-k) * v(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(-n)v(k-n)$$

Substitution: $-n = m$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)v(k+m) = r_{uv}(k)$$