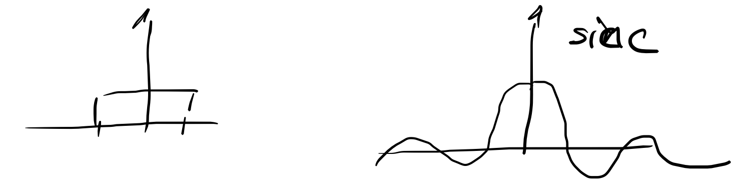
Def (Bandbeschränkte Funktion)

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ist bandbeschränkt mit Bandbreite M, wenn

$$\mathcal{F}[f](\omega)=0 \quad \text{für alle } |\omega|>M$$



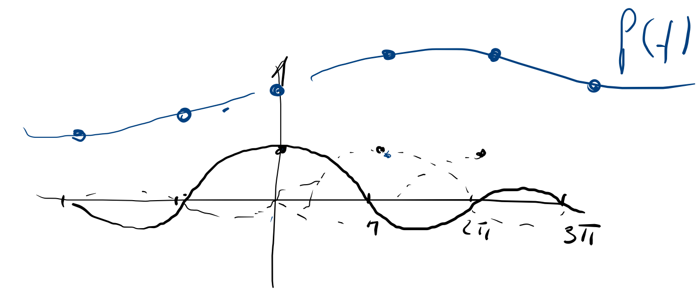
Satz 70 (Shannon-Whittaker-Kotelnikov)

f stetig, abs-intbar, bandbeschränkt mit Bandbreite M

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{M}\right)\operatorname{sinc}(Mt+k\pi)$$

$\to$ konvergiert punktweise, absolut, gleichmäßig

$M=1$



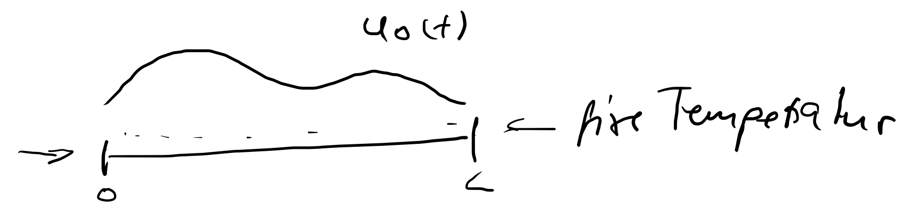
1. 带限函数定义：
   - $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 是带限函数，带宽为 M，当且仅当 $F[f](\omega)=0$ 对于所有 $|\omega|>M$ 成立。
2. Shannon-Whittaker-Kotelnikov定理：
   - 如果函数 f 是连续的、可积的，并且是带限的，带宽为 M，则它可以表示为：

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{M}\right)\operatorname{sinc}(Mt-k\pi)$$

   - 其中，sinc函数定义为 $\operatorname{sinc}(x)=\frac{\sin(x)}{x}$。
   - 这种表示收敛于逐点收敛、绝对收敛和均匀收敛。
3. 图示解释：
   - 右边的图示展示了sinc函数的形状和带限函数的重建过程。
   - 当 $M=1$ 时，带限函数 $f(t)$ 在时间域内通过其采样点和sinc函数加权和来重建。

3 Partielle Differentialgleichungen

3.1 Separationsansatz



Def 7.1 (Wärmeleitung) Stab der Länge L

gesucht: $u : [0,L] \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ (Temperatur an der Stelle x zur Zeit t)

so dass

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)$$

$$u(x,0) = u_0(t) \qquad \text{Anfangswert}$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad \text{Randwert}$$

Separationsansatz

$$u(x,t) = X(x)\,T(t) \qquad \text{mit} \qquad X : [0,L] \to \mathbb{R}, \quad T : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Einsetzen

$$\frac{\partial}{\partial t} X(x)T(t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x)T(t)$$

$$\Rightarrow \quad X(x)\, T'(t) = X''(x)\, T(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} =: \gamma \qquad \forall t\ \forall x$$

Da beide Seiten nur von einer Variablen abhängen, müssen beide Seiten konstant sein. ($\gamma \in \mathbb{R}$)

wir bekommen

$$\text{I} \quad X''(x) - \gamma X(x) = 0, \qquad X(0) = X(L) = 0$$

$$\text{II} \quad T'(t) - \gamma T(t) = 0 \qquad X(x)\,T(0) = u_0(x)$$

Lösung von I

Polynom $\lambda^2 - \gamma = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\gamma}$

allgemeine Lösung

$$X(x) = \begin{cases} c_1 e^{\sqrt{\gamma}x} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma}x} & \gamma > 0 \\ c_1 + c_2 x & \gamma = 0 \\ c_1 \cos(\sqrt{|\gamma|}\,x) + c_2 \sin(\sqrt{|\gamma|}\,x) & \gamma < 0 \end{cases}$$

anpassen an Anfangswerte

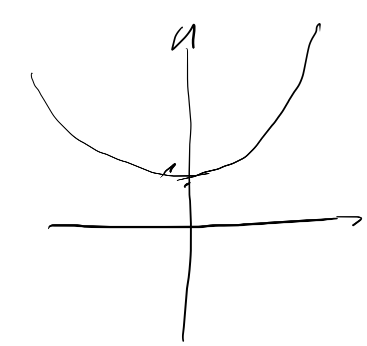
$\underline{\gamma > 0}$:

$$c_1 + c_2 = 0 \longrightarrow c_2 = -c_1$$

$$c_1 e^{\sqrt{\gamma}L} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma}L} = 0 \longrightarrow c_1 e^{\sqrt{\gamma}L} - c_1 e^{-\sqrt{\gamma}L} = 0$$

$$\longrightarrow c_1\, 2 \underbrace{\sinh(\sqrt{\gamma}L)}_{\neq 0} = 0$$

$$\longrightarrow c_1 = 0 \longrightarrow c_2 = 0$$



↯ triviale Lösung

$\underline{\gamma = 0}$:

$$c_1 = 0$$

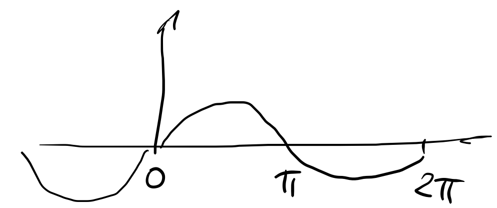
$$c_2 L = 0, \quad c_2 = 0$$

$c_1 \cos(\sqrt{|\gamma|}\, x) + c_2 \sin(\sqrt{|\gamma|}\, x) \qquad \gamma < 0$

<u>$\gamma < 0$</u>

$c_1 = 0$

$c_2 \sin(\sqrt{|\gamma|}\, L) = 0$



Nicht triviale Lösungen für

$\sqrt{|\gamma_k|}\, L = k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\gamma_k = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \qquad k \in \mathbb{N}}$$

Nicht triviale Lösungen

$X_k(x) = A_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \qquad k \in \mathbb{N} \qquad A_k \in \mathbb{R}$

Lösung von II

$$T'(t) - \gamma T(t) = 0, \quad \underbrace{X(x)\,T(0)}_{u(x,0)} = u_0(x)$$

$$T_k'(t) - \gamma_k T(t) = 0$$

Fundamental Lösung

$$T_k(t) = B_k e^{\gamma_k t} = B_k e^{-k^2\pi^2 t/L^2}$$

Gesamtlösung

$$u_k(x,t) = X_k(x) \cdot T_k(t) = C_k \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right) e^{-k^2\pi^2 t/L^2} \qquad \Big| \; C_k = A_k \cdot B_k$$

$\longrightarrow$ Linearkombinationen sind auch Lösungen.

Superpositionsansatz

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\,T_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right) e^{-k^2\pi^2 t/L^2}$$

Anfangswert

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right) \overset{!}{=} u_0(x)$$

Fourierreihe

$$\longrightarrow C_k = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{2\pi k}{L} x\right) dx$$

$\longrightarrow$ gleichmäßig Konvergenz, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |C_k| < \infty$