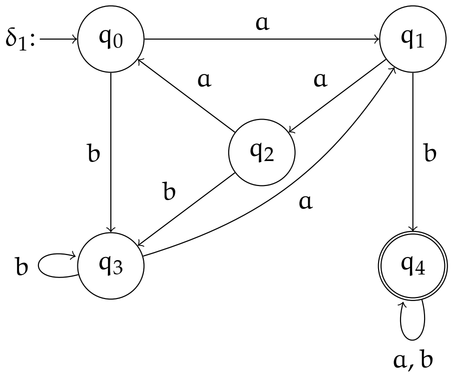
Zusatzaufgaben 8

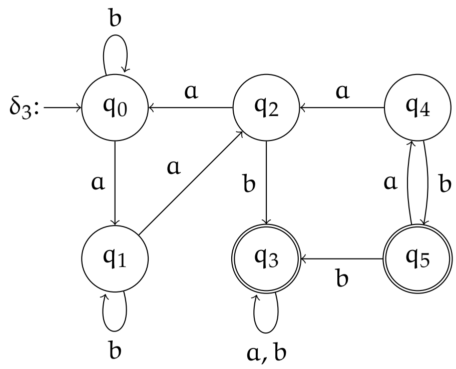
Aufgabe 1: Minimierung von DFAs

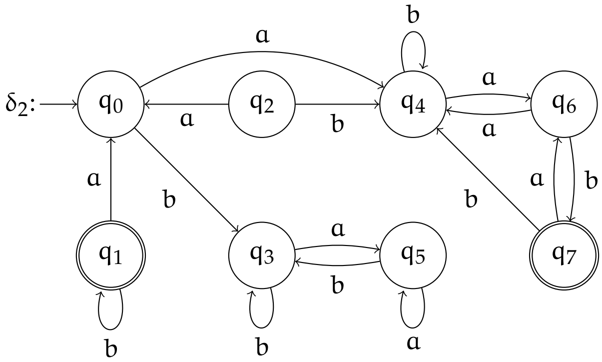
Gegeben seien das Alphabet $\Sigma \triangleq \{\, a,\ b \,\}$ und die DFAs

$$M_1 \triangleq (\{\, q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4 \,\}, \Sigma, \delta_1, q_0, \{\, q_4 \,\}),$$
$$M_2 \triangleq (\{\, q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5,\ q_6,\ q_7 \,\}, \Sigma, \delta_2, q_0, \{\, q_1,\ q_7 \,\}) \text{ und}$$
$$M_3 \triangleq (\{\, q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5 \,\}, \Sigma, \delta_3, q_0, \{\, q_3,\ q_5 \,\}),$$

wobei δ_1, δ_2 und δ_3 durch die folgenden Graphen gegeben sind:







	q_0	q_1	q_2	q_3
q_1				
q_2				
q_3				
q_4				

1.a) *Berechne:* Minimiere den DFA M_1.

Lösung

Schritt 1 (eliminiere nicht erreichbare Zustände): alle Zustände sind erreichbar

Schritt 2 (Table-Filling):

Schritt 2.1 (stelle eine Tabelle der Zustandspaare auf):

	q_0	q_1	q_2	q_3
q_1				
q_2				
q_3				
q_4				

Schritt 2.2 (markiere Paare von Endzuständen und Nicht-Endzuständen):

	q_0	q_1	q_2	q_3
q_1				
q_2				
q_3				
q_4	x	x	x	x

Schritt 2.3 (wende die Regel FS 4.3.8.3 so oft wie möglich an):

	q_0	q_1	q_2	q_3
q_1	x			
q_2	x	x		
q_3		x	x	
q_4	x	x	x	x

Schritt 2.4 (markiere die verschmelzbaren Paare):

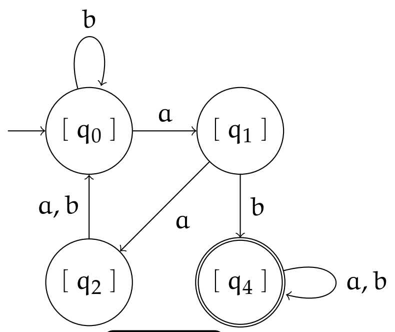
	q_0	q_1	q_2	q_3
q_1	x			
q_2	x	x		
q_3	o	x	x	
q_4	x	x	x	x

Schritt 3 (gib alle Äquivalenzklassen von Zuständen an):

$$[\,q_0\,] = \{\,q_0,\ q_3\,\}$$
$$[\,q_1\,] = \{\,q_1\,\}$$
$$[\,q_2\,] = \{\,q_2\,\}$$
$$[\,q_4\,] = \{\,q_4\,\}$$

Schritt 4 (gib den minimierten DFA an):

$M_1' = \big(\{\,[\,q_0\,],\ [\,q_1\,],\ [\,q_2\,],\ [\,q_4\,]\,\}, \Sigma, \delta_1', [\,q_0\,], \{\,[\,q_4\,]\,\}\big)$, wobei δ_1' durch den folgenden Graphen gegeben ist:



/Lösung

1.b) *Gib an:* $L(M_1)$

Lösung

$L(M_1) = L\big((b + aa\,(a+b))^*\,ab\,(a+b)^*\big) = \{\,xaby \mid x \in \{\,b,\ aaa,\ aab\,\}^* \wedge y \in \Sigma^*\,\}$

Hinweis: Der Minimierungs-Algorithmus ändert die Sprache des Automaten nicht (siehe Lemma 4.3.9). Wenn wir den Algorithmus korrekt anwenden, gilt daher $L(M_1) = L(M_1')$. Sind wir uns also sicher, dass wir den Algorithmus korrekt angewendet haben, dann können wir die Sprache an dem minimierten (und somit einfacherem) DFA bestimmen.

/Lösung

1.c) *Berechne:* Minimiere den DFA M_2.

Lösung

Schritt 1 (eliminiere nicht erreichbare Zustände): nur q_1 und q_2 sind nicht erreichbar

Schritt 2 (Table-Filling):

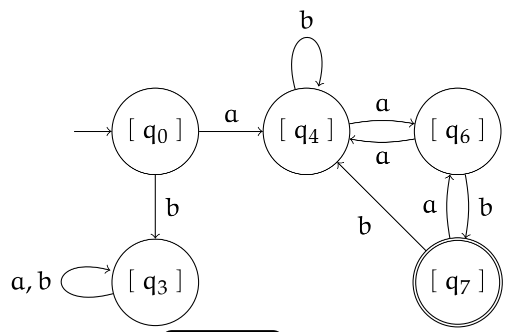
q_3	x				
q_4	x	x			
q_5	x	o	x		
q_6	x	x	x	x	
q_7	x	x	x	x	x
	q_0	q_3	q_4	q_5	q_6

Schritt 3 (gib alle Äquivalenzklassen von Zuständen an):

$$[\, q_0 \,] = \{ q_0 \}$$
$$[\, q_3 \,] = \{ q_3,\ q_5 \}$$
$$[\, q_4 \,] = \{ q_4 \}$$
$$[\, q_6 \,] = \{ q_6 \}$$
$$[\, q_7 \,] = \{ q_7 \}$$

Schritt 4 (gib den minimierten DFA an):

$M_2' = \big(\{ [\, q_0 \,],\ [\, q_3 \,],\ [\, q_4 \,],\ [\, q_6 \,],\ [\, q_7 \,] \}, \Sigma, \delta_2', [\, q_0 \,], \{ [\, q_7 \,] \}\big)$, wobei δ_2' durch den folgenden Graphen gegeben ist:



/Lösung

1.d) *Gib an:* $L(M_2)$

Lösung

$$\begin{aligned} L(M_2) &= L\big(a\,\big(b + aa + ab\,(ab)^*\,(b + aa)\big)^*\,ab\,(ab)^*\big) \\ &= \big\{\, axaby \mid x \in \{\, b, aa, abvw \mid v \in \{\, ab \,\}^* \wedge w \in \{\, b,\ aa \,\}\,\}^* \wedge y \in \{\, ab \,\}^* \,\big\} \end{aligned}$$

/Lösung

1.e) *Berechne:* Minimiere den DFA M_3.

Lösung

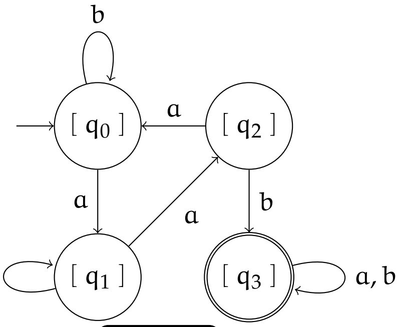
Schritt 1 (eliminiere nicht erreichbare Zustände): nur q_4 und q_5 sind nicht erreichbar
Schritt 2 (Table-Filling):

q_1	x		
q_2	x	x	
q_3	x	x	x
	q_0	q_1	q_2

Schritt 3 (gib alle Äquivalenzklassen von Zuständen an):

$$[\, q_0 \,] = \{\, q_0 \,\}$$
$$[\, q_1 \,] = \{\, q_1 \,\}$$
$$[\, q_2 \,] = \{\, q_2 \,\}$$
$$[\, q_3 \,] = \{\, q_3 \,\}$$

Schritt 4 (gib den minimierten DFA an):
$M_3' = \big(\{\, [\, q_0 \,],\ [\, q_1 \,],\ [\, q_2 \,],\ [\, q_3 \,] \,\}, \Sigma, \delta_3', [\, q_0 \,], \{\, [\, q_3 \,] \,\}\big)$, wobei δ_3' durch den folgenden Graphen gegeben ist:



/Lösung

1.f) *Gib an:* $L(M_3)$

Lösung

$$\begin{aligned} L(M_3) &= L\big((b + ab^*aa)^*\ ab^*ab\ (a+b)^*\big) \\ &= \big\{\ xab^n aby \mid x \in \{\, b, ab^m aa \mid m \in \mathbb{N} \,\}^* \wedge n \in \mathbb{N} \wedge y \in \Sigma^*\ \big\} \end{aligned}$$

/Lösung

Aufgabe 2: Myhill-Nerode für reguläre Sprachen

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma = \{ a, b \}$ und die Sprachen $D \triangleq \{ ab^n a \mid n \in \mathbb{N}^+ \}$, $E \triangleq \{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \land n \leqslant 2 \}$ und $F \triangleq \{ w \in \{ a, b \}^* \mid |w|_a \mod 2 = 0 \}$.

2.a) *Gib* alle Äquivalenzklassen der Myhill-Nerode-Relation bzgl. D *an*.

Lösung

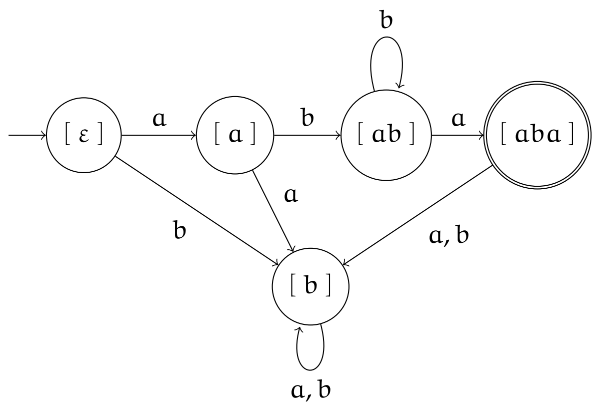
$$\begin{aligned}
[\, \varepsilon \,]_{\equiv_D} &= \{ \varepsilon \} \\
[\, a \,]_{\equiv_D} &= \{ a \} \\
[\, ab \,]_{\equiv_D} &= \left\{ ab^n \mid n \in \mathbb{N}^+ \right\} \\
[\, aba \,]_{\equiv_D} &= D \\
[\, b \,]_{\equiv_D} &= \left\{ bx, aax, ab^n ay \mid x \in \Sigma^* \land y \in \Sigma^+ \land n \in \mathbb{N}^+ \right\}
\end{aligned}$$

/Lösung

2.b) *Gib* den D-Äquivalenzklassenautomaten M_D *an*.

Lösung

$M_D = (\{ [\, \varepsilon \,], [\, a \,], [\, ab \,], [\, aba \,], [\, b \,] \}, \Sigma, \delta_D, [\, \varepsilon \,], \{ [\, aba \,] \})$, wobei δ_D durch den folgenden Graphen gegeben ist:



/Lösung

2.c) *Gib* alle Äquivalenzklassen der Myhill-Nerode-Relation bzgl. E *an*.

Lösung

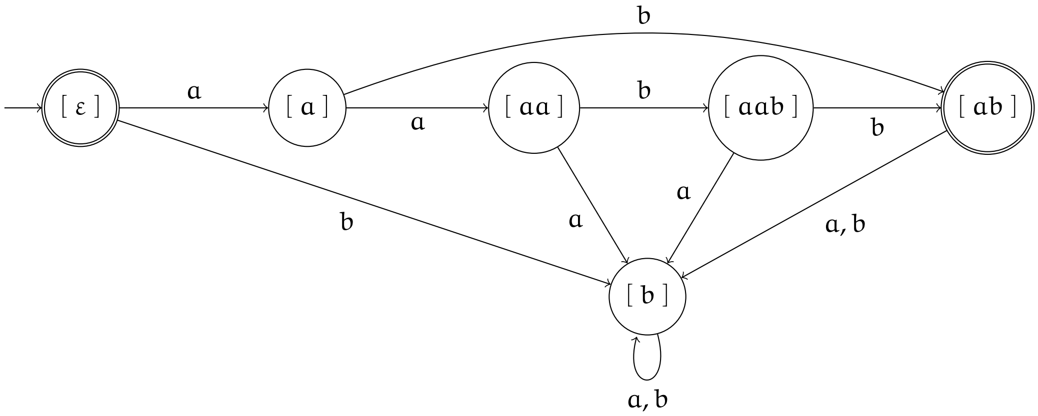
$$\begin{aligned}
[\, \varepsilon \,]_{\equiv_E} &= \{ \varepsilon \} \\
[\, a \,]_{\equiv_E} &= \{ a \} \\
[\, aa \,]_{\equiv_E} &= \{ aa \} \\
[\, aab \,]_{\equiv_E} &= \{ aab \} \\
[\, ab \,]_{\equiv_E} &= \{ ab, aabb \} \\
[\, b \,]_{\equiv_E} &= \left\{ bx, aaax, aabax, aby, aabby \mid x \in \Sigma^* \land y \in \Sigma^+ \right\}
\end{aligned}$$

/Lösung

2.d) *Gib* den E-Äquivalenzklassenautomaten M_E *an*.

Lösung

$M_D = (\{ [\, \varepsilon \,], [\, a \,], [\, aa \,], [\, aab \,], [\, ab \,], [\, b \,] \}, \Sigma, \delta_E, [\, \varepsilon \,], \{ [\, \varepsilon \,], [\, ab \,] \})$, wobei δ_E durch den folgenden Graphen gegeben ist:



/Lösung

2.e) *Gib* alle Äquivalenzklassen der Myhill-Nerode-Relation bzgl. F *an*.

Lösung

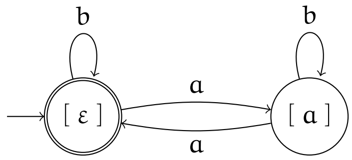
$$[\, \varepsilon \,]_{\equiv_F} = F$$
$$[\, a \,]_{\equiv_F} = \{ w \in \{ a, b \}^* \mid |w|_a \mod 2 = 1 \}$$

/Lösung

2.f) *Gib* den F-Äquivalenzklassenautomaten M_F *an*.

Lösung

$M_F = (\{ [\, \varepsilon \,], [\, a \,] \}, \Sigma, \delta_F, [\, \varepsilon \,], \{ [\, \varepsilon \,] \})$, wobei δ_F durch den folgenden Graphen gegeben ist:



/Lösung