Diskrete Strukturen
Großübung

Amelie Heindl

Lehrstuhl für Logik und Semantik

Technische Universität Berlin

Sommersemester 2024

Organisatorisches

Organisatorisches: Modulübersicht

Das Modul besteht aus:

- Vorlesung
- Tutorien
- Freiwillige Hausaufgaben
- Lernräume
- Großübung

↳ Konzept der Großübung:

- Veranschaulichung des Vorlesungsstoffs durch Beispiele
- Wiederholung/Vertiefung der gelernten Konzepte
- Alternative Erklärungen
- Kein neuer Stoff, kein Vorrechnen der Hausaufgaben

Themenüberblick: Vorlesungswoche 2

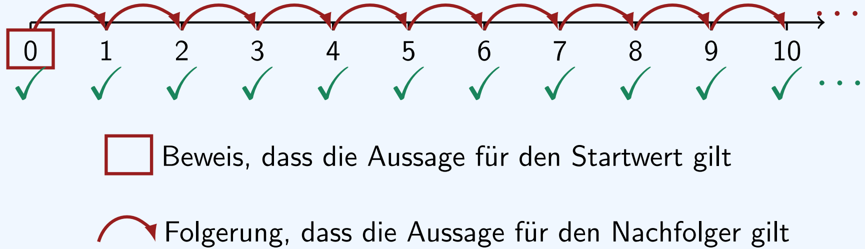
- Mengen
- Graphen
- Unabhängige Mengen
- Teilmengen und Potenzmengen
- Induktionsbeweise
- Permutationen
- Auswählen aus einer Menge
- Binomialkoeffizienten

Induktionsbeweise

Induktionsbeweise: Idee

Vollständige Induktion

Die vollständige Induktion ist eine Beweismethode, um Aussagen für natürliche Zahlen zu beweisen. Dabei wird die gewünschte Aussage für einen Startwert bewiesen und es wird bewiesen, dass sie auch für den Nachfolger von Zahlen gilt, wenn sie für diese Zahlen gilt.



Induktionsbeweise: Ablaufschema

Es soll gezeigt werden, dass eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Die vollständige Induktion besteht aus drei Schritten:

1. Induktionsanfang:
   $A(0)$ wird explizit als eigenständige Aussage bewiesen.
2. Induktionsvoraussetzung:
   Es wird angenommen, dass $A(n)$ für ein n gilt.
3. Induktionsschluss/Induktionsschritt:
   $A(n+1)$ wird unter Zuhilfenahme der Gültigkeit von $A(n)$, also der Induktionsvoraussetzung, bewiesen.

Alternativer Anfang: $A(n_0)$ zeigen, falls die Aussage nur für alle natürlichen Zahlen $\geq n_0$ gelten soll.

Alternative Voraussetzung: zusätzlich gilt $A(i)$ für alle $i \leq n$.

Induktionsbeweise: Beispiel I

Kleiner Gauß

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}}_{\text{Aussage } A(n)} \quad \text{mit } n \geq \underbrace{1}_{\text{Startwert } n_0}$$

Die Gaußsche Summenformel kann mit vollständiger Induktion bewiesen werden.

1. Induktionsanfang:
   $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2}$
2. Induktionsvoraussetzung:
   $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ gilt für n.
3. Induktionsschritt:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i \sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1) + \sum_{i=1}^{n} i$$

$$\stackrel{\text{I.V.}}{=} (n+1) + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{2(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$\square$

Induktionsbeweise: Beispiel II

Wir beweisen per vollständiger Induktion über n die Aussage
$A(n)$: in jeder n-elementigen Menge von Personen sind alle gleich groß.

1. Induktionsanfang: Offensichtlich sind alle Personen in einer 1-elementigen Menge von Personen gleich groß. Also gilt $A(1)$.
2. Induktionsvoraussetzung: $A(n)$ ist schon bewiesen.
3. Induktionsschritt: Zu zeigen ist $A(n+1)$.
   Sei $M := \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ eine beliebige $n+1$-elementige Personenmenge.
   Wir bilden $M_1 := \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ und $M_2 := \{a_2, \ldots, a_{n+1}\}$.
   Es gilt $|M_1| = |M_2| = n$.
   Also folgt aus der Induktionsvoraussetzung, dass alle Personen in M_1 und alle Personen in M_2 gleich groß sind.
   Insbesondere ist also einerseits a_1 gleich groß wie $a_2, \ldots, a_n$ und andererseits ist a_{n+1} gleich groß wie $a_2, \ldots, a_n$.
   Somit haben auch alle Personen in M die gleiche Größe.

Wo ist der Fehler?

Unabhängige Mengen

Unabhängige Mengen: Grundlagen

Unabhängige Menge

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine unabhängige Menge in G ist eine Menge $X \subseteq V$, für die $\{u, v\} \notin E$ für alle $u, v \in X$ gilt.

Independent Set Problem

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \geq 1$. Es soll eine unabhängige Menge der Größe k in G gefunden werden. Falls es keine solche Menge in G gibt, soll eine verneinende Antwort gegeben werden.

Der Algorithmus rec-IS löst das Independent Set Problem.

Unabhängige Mengen: Algorithmus

Algorithm: rec-IS$((\{v_0, \ldots, v_n\}, E),\ k)$

rufe rec-ind$((\{v_0, \ldots, v_n\}, E), k, 0, \emptyset)$ auf

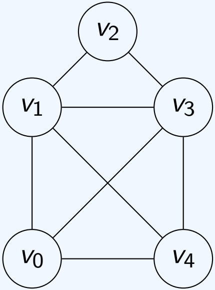
Die Ausgabe des Algorithmus ist eine unabhängige Menge X in G mit $|X| = k$, falls diese existiert und nein andernfalls.

Algorithm: rec-ind(G, k, i, X)

if $(n-1)-i < k$ *or* $i \geq n$ **then**
  return nein
if $k = 0$ **then**
  if X *ist eine unabhängige Menge* **then**
    return X
  else
    return nein
if *rec-ind*$(G, k-1, i+1, X \cup \{v_i\})$ *gibt eine Menge* X' *zurück* **then**
  return X'
else
  return Rückgabe von rec-ind$(G, k, i+1, X)$

Unabhängige Mengen: Beispiel I

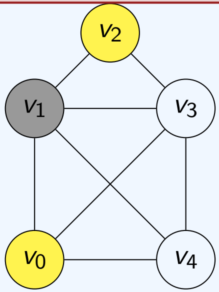
Wir betrachten einen Lauf von rec-IS für $k = 2$ und den folgenden Graphen G:



Unabhängige Mengen: Beispiel I

Algorithm: rec-ind(G,k,i,X)

if $(n-1)-i<k$ *or* $i\geq n$ **then**
  return nein
if $k=0$ **then**
  if X *ist eine unabhängige Menge* **then**
    return X
  else
    return nein
if *rec-ind*$(G,k-1,i+1,X\cup\{v_i\})$ *gibt eine Menge* X' *zurück* **then**
  return X'
else
  return Rückgabe von rec-ind$(G,k,i+1,X)$

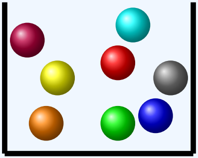


- rec-IS$(G,2)\rightsquigarrow\{v_0,v_2\}$
  - rec-ind$(G,2,0,\emptyset)\rightsquigarrow\{v_0,v_2\}$
    - $(5-1)-0\not<2$ und $0\not\geq5$
    - $2\neq0$
    - rec-ind$(G,1,1,\{v_0\})\rightsquigarrow\{v_0,v_2\}$
      - $(5-1)-1\not<1$ und $1\not\geq5$
      - $1\neq0$
      - rec-ind$(G,0,2,\{v_0,v_1\})\rightsquigarrow$ nein
        - $(5-1)-2\not<0$ und $2\not\geq5$
        - $0=0$
        - $\{v_0,v_1\}$ ist keine unabhängige Menge. $\rightsquigarrow$ nein
      - rec-ind$(G,1,2,\{v_0\})\rightsquigarrow\{v_0,v_2\}$
        - $(5-1)-2\not<1$ und $2\not\geq5$
        - $1\neq0$
        - rec-ind$(G,0,3,\{v_0,v_2\})\rightsquigarrow\{v_0,v_2\}$
          - $(5-1)-3\not<0$ und $3\not\geq5$
          - $0=0$
          - $\{v_0,v_2\}$ ist eine unabhängige Menge. $\rightsquigarrow\{v_0,v_2\}$

Ziehen aus einer Menge

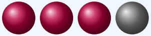
Ziehen von Elementen aus einer Menge

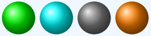
Sei M eine Menge mit n Elementen. Es sollen k Elemente aus M gezogen werden. Die Art des Ziehens wird danach unterschieden, ob gezogene Elemente zurückgelegt werden und, ob die Reihenfolge betrachtet wird.



Es ergeben sich vier Arten des Ziehens:

1. mit Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge 

2. mit Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge 
3. ohne Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge 

4. ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge 

Ziehen aus einer Menge: Grundlagen

Von besonderem Interesse ist die Frage, wie viele mögliche Ergebnisse es bei jeder Art des Ziehens gibt.

	Mit Beachtung der Reihenfolge	Ohne Beachtung der Reihenfolge
Mit Zurücklegen	n^k	$\binom{k+n-1}{k}$
Ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!} = n^{\underline{k}}$	$\binom{n}{k}$

Ziehen aus einer Menge: Beispiele I

- Bei einer Wahl stehen 5 Kandidaten zur Auswahl. 100 Wahlberechtigte dürfen je eine Stimme abgeben. Wie viele mögliche Stimmenverteilungen gibt es?

Art: mit Zurücklegen, ohne Reihenfolge

Lösung: $\binom{100+6-1}{100}$

- Wie viele Möglichkeiten gibt es, die beiden Damen und Könige eines Schachspiels auf Felder des Schachbretts zu platzieren, sodass kein Feld doppelt besetzt ist?

Art: ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge

Lösung: $64^{\underline{4}}$

- Wie viele verschiedene Symbole können mit einer 8-bit-Codierung codiert werden?

Art: mit Zurücklegen, mit Reihenfolge

Lösung: 2^8

Ziehen aus einer Menge: Beispiele II

- Wie viele verschiedene einfache Graphen gibt es mit der Knotenmenge $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

Art: mit Zurücklegen, mit Reihenfolge

Lösung: $2^{\binom{6}{2}}$

- Wie viele verschiedene Sitzordnungen gibt es für 300 Studenten in einem Hörsaal mit 300 Plätzen?

Art: ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge

Lösung: $300^{\underline{300}}$

- Ein Kartenspieldeck besteht aus 32 verschiedenen Karten. Ein Spieler bekommt 10 Karten auf die Hand. Wie viele verschiedene Möglichkeiten für seine Hand gibt es?

Art: ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge

Lösung: $\binom{32}{10}$

Feedback, Fragen und Vorschläge zur Großübung gerne an:

a.heindl@tu-berlin.de

Feedback, Fragen und Vorschläge zur Großübung gerne an:

a.heindl@tu-berlin.de