Dr. Robert Beinert

Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen
(Hausaufgabe 2)

Abgabe: 6. – 10. Mai 2024

Sommersemester 2024

Aufgabe 4

(5 Punkte)

Löse das Anfangswertsproblem

$$x'(t) = \mathrm{e}^{-x(t)}(10t - 6), \qquad x(\tfrac{6}{5}) = 0$$

und gebe für die Lösung den maximalen Definitionsbereich an.

Aufgabe 5

(5 Punkte)

Löse das Anfangswertsproblem

$$\frac{2x(t)\,x'(t)}{1 + 2t} = 1 + x^2(t), \qquad x(2) = \sqrt{\mathrm{e}^4 - 1}.$$

Bestimme den maximalen Definitionsbereich der Lösung.

Aufgabe 6

(5 Punkte)

Zeige, dass das Anfangswertsproblem

$$x'(t) = \frac{1}{(x(t) - 1)(t - 3)}, \qquad x(2) = 2,$$

eindeutig lösbar ist. (Die Lösung muss nicht berechnet werden.)

Linwei Li 501123
Xiangfeng Yang 505399
Yilong Wang 483728

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Löse das Anfangswertsproblem

$$x'(t) = e^{-x(t)}(10t-6), \quad x(\tfrac{6}{5}) = 0$$

und gebe für die Lösung den maximalen Definitionsbereich an.

$x'(t) = (10t-6)e^{-x(t)}$

$f(t) = 10t-6 \qquad g(x) = e^{-x}$

① $g(x) = e^{-x} > 0 \quad \Rightarrow$ es gibt keine konstante lsg.

② $\int \frac{1}{g(x)}\,dx = \int f(t)\,dt$

$\int \frac{1}{e^{-x}}\,dx = \int 10t-6\,dt$

$e^x = 5t^2 - 6t + c$

$x(t) = \ln(5t^2-6t+c) \quad \rightarrow$ Allgemeine lsg

AW: $x(\frac{6}{5}) = \ln(5\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{5} - 6\cdot\frac{6}{5}+c) = \ln(\frac{36}{5} - \frac{36}{5}+c) = \ln c = 0$

$\Rightarrow c = 1$

$\Rightarrow x(t) = \ln(5t^2-6t+1)$ AWP-Lösung

Maximale Definitionsbereich: ① $M_1 = \mathbb{R}$

② $5t^2-6t+1 = (5t-1)(t-1) > 0$

$\Rightarrow t \in \,]-\infty,\frac{1}{5}[\, \cup \,]1,\infty[$

$M_2 = \,]-\infty,\frac{1}{5}[\, \cup \,]1,\infty[$

③ $M_1 \cap M_2 = \,]-\infty,\frac{1}{5}[\, \cup \,]1,\infty[$

④ $I_1 = \,]-\infty,\frac{1}{5}[\qquad I_2 = \,]1,\infty[$

⑤ $\frac{6}{5} \in I_2 = \,]1,\infty[\quad \Rightarrow D_{max} = \,]1,\infty[$

Aufgabe 5

Löse das Anfangswertsproblem

$$\frac{2x(t)\,x'(t)}{1+2t} = 1 + x^2(t), \qquad x(2) = \sqrt{e^4-1}.$$

Bestimme den maximalen Definitionsbereich der Lösung.

$x'(t) = (1+2t)\cdot\frac{1+x^2(t)}{2x(t)} = (1+2t)\cdot\frac{1+x^2}{2x} = (1+2t)\cdot(\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}x)$

$f(t) = 1+2t \qquad g(x) = \frac{1}{2x}+\frac{1}{2}x$

① $g(x) \neq 0 \quad \Rightarrow$ keine konstante lsg.

② $\int \frac{1}{g(x)}\,dx = \int f(t)\,dt$

Linwei Li 501123
Xiangfeng Yang 505399
Yilong Wang 483728

$\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,d(1+x^2) = \ln(1+x^2) = \int 1+2t\,dt = t+t^2+c$

$\ln(1+x^2) = t^2+t+c$

$1+x^2 = e^{t^2+t+c}$

$x^2 = e^{t^2+t+c}-1 \Rightarrow x(t) = \pm\sqrt{e^{t^2+t+c}-1}$

AW: $x(2) = \sqrt{e^{4+2+c}-1} = \sqrt{e^4-1} \Rightarrow c=-2$

$\Rightarrow x(t) = \sqrt{e^{t^2+t-2}-1} \rightarrow$ AWP-Lsg

Maximale Definitionsbereich: ① $M_1 = \mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\}$

② $e^{t^2+t-2}-1 \geq 0 \Rightarrow t^2+t-2 \geq 0 \Rightarrow t \in]-\infty,-2[\cup]1,\infty[$

$M_2 =]-\infty,-2[\cup]1,\infty[$

③ $M_1 \cap M_2 =]-\infty,-2[\cup]-2,-\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2},1[\cup]1,\infty[$

④ $I_1 =]-\infty,-2[\quad I_2 =]-2,-\frac{1}{2}[$

$I_3 =]-\frac{1}{2},1[\quad I_4 =]1,\infty[$

⑤ $2 \in I_4 =]1,\infty[\Rightarrow D_{max} =]1,\infty[$

Aufgabe 6

Zeige, dass das Anfangswertsproblem

$$x'(t) = \frac{1}{(x(t)-1)(t-3)}, \qquad x(2) = 2,$$

eindeutig lösbar ist. (Die Lösung muss nicht berechnet werden.)

$x'(t) = \frac{1}{(x-1)(t-3)} = F(t,x)$

EES: ① $\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{(x-1)} \cdot \frac{-1}{(t-3)^2} = \frac{-1}{(x-1)(t-3)^2}$

$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{-1}{(x-1)^2(t-3)}$ F stetig differenzierbar

$D = \mathbb{R}\setminus\{3\} \times \mathbb{R}\setminus\{1\}$ $F: D \to \mathbb{R}$ $\frac{\partial F}{\partial t}: D \to \mathbb{R}$ $\frac{\partial F}{\partial x}: D \to \mathbb{R}$

② D ist offen

③ $(2,2) \in D$ $\rightarrow$ AWP hat nur eine Lsg.