Linda Li 458029
Xiang Li 478592
Yilong Wang 483728
Gruppen: Saef 1

Hausaufgabe 6.1 (4=1+1+1+1 Punkte)

Sei $\Omega = \{-1, 0, 1, 2\}$ und $\mathbb{P}$ gegeben durch

ω	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(\omega)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$

Berechnen Sie in jedem der nachfolgenden Fälle den Erwartungswert und die Varianz.

(i) $X(\omega) := \omega$,

(ii) $Y(\omega) := 5\omega - 3$,

(iii) $Z(\omega) := (\omega - 1)^2$,

(iv) $U(\omega) := 1_{\{2\}}(\omega)$.

i) $\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega=-1}^{2} \omega \cdot \mathbb{P}(X=\omega) = (-1)\cdot\frac{1}{10} + 0\cdot\frac{4}{10} + 1\cdot\frac{2}{10} + 2\cdot\frac{3}{10} = \frac{7}{10} = 0.7$

$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \sum_{\omega=-1}^{2} \omega^2 \mathbb{P}(X=\omega) - \left(\frac{7}{10}\right)^2$

$= \left((-1)^2\cdot\frac{1}{10} + 0^2\cdot\frac{4}{10} + 1^2\cdot\frac{2}{10} + 2^2\cdot\frac{3}{10}\right) - \left(\frac{7}{10}\right)^2$

$= \frac{15}{10} - \frac{49}{100} = \frac{101}{100} = 1.01$

ii) $\mathbb{E}[Y] = 5\cdot\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[3] = 5\cdot\sum_{\omega=-1}^{2}\omega\cdot\mathbb{P}(X=\omega) - 3 = 5\cdot\frac{7}{10} - 3 = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2 \quad \Big| \quad Y^2 = 25\omega^2 - 30\omega + 9$

$= 25\cdot\mathbb{E}[X^2] - 30\cdot\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[9] - (0.5)^2$

$= 25\cdot\frac{15}{10} - 30\cdot\frac{7}{10} + 9 - 0{,}25$

$= 25{,}25$

iii) $Z(\omega) = (\omega-1)^2 = \omega^2 - 2\omega + 1$

$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X^2] - 2\cdot\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[1]$

$= \frac{15}{10} - 2\cdot\frac{7}{10} + 1 = \frac{11}{10} = 1{,}1$

$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}[Z^2] - (\mathbb{E}[Z])^2$

Da $Z^2 = \omega^4 - 4\omega^3 + 6\omega^2 - 4\omega + 1$, gilt dann

$\mathbb{E}[Z^2] = \mathbb{E}[X^4] - 4\cdot\mathbb{E}[X^3] + 6\cdot\mathbb{E}[X^2] - 4\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[1]$

$\mathbb{E}[X^4] = \sum_{\omega=-1}^{2}\omega^4\cdot\mathbb{P}(X=\omega) = \frac{51}{10}$

$$\mathbb{E}[X^3] = \sum_{\omega=-1}^{2} \omega^3 \cdot \mathbb{P}(X=\omega) = \frac{25}{10}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[Z^2] = \frac{51}{10} - 4 \cdot \frac{25}{10} + 6 \cdot \frac{15}{10} - 4 \cdot \frac{7}{10} + 1 = \frac{23}{10}$$

$$\Rightarrow \mathbb{V}(Z) = \frac{23}{10} - \left(\frac{11}{10}\right)^2 = \frac{109}{100} = 1.09$$

iv) $U(\omega) = 1_{\{2\}}(\omega) = \begin{cases} 1 \,. & \text{wenn } \omega = 2 \\ 0 \,, & \text{sonst.} \end{cases}$

$$\mathbb{E}[U] = \sum_{\omega=-1}^{2} U(\omega) \cdot \mathbb{P}(U=\omega) = 1 \cdot \mathbb{P}(\omega=2) + 0 \cdot \left(\mathbb{P}(\omega=-1) + \mathbb{P}(\omega=0) + \mathbb{P}(\omega=1) \right)$$

$$= \frac{3}{10} = 0{,}3$$

$$\mathbb{V}(U) = \mathbb{E}[U^2] - (\mathbb{E}[U])^2$$

Da die einzige Werte von $U(\omega)$ nur 1 und 0, ist $U^2(\omega) = U(\omega)$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[U^2] = \mathbb{E}[U]$$

$$\Rightarrow \mathbb{V}(U) = \frac{3}{10} - \left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{21}{100} = 0.21$$

Hausaufgabe 6.2 (4=2+2 Punkte)

Sei $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$.

(i) Berechnen Sie $\mathbb{E}[\ln(u)^X]$ für $u \in (0, \infty)$.

(ii) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{1+X}\right] = \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda}\right) .$$

i) $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$, $\mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k = 0,1,2,3\dots$

$$\mathbb{E}[\ln(u)^X] = \sum_{k=0}^{\infty} \ln(u)^k \, \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \ln(u)^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln(u)\cdot\lambda)^k}{k!} \qquad \Big| \; e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda \cdot \ln(u)} \qquad = e^{-\lambda} u^{\lambda}$$

$$= e^{\lambda(\ln(u) - 1)}$$

ii) $$\mathbb{E}\left[\frac{1}{1+X}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k} \cdot \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \qquad \Big| \; \frac{1}{1+k} = \int_0^1 t^k \, dt$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{\lambda^k}{k!} \cdot t^k \, dt$$

$$= e^{-\lambda} \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \, dt \qquad \Big| \; e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \int_0^1 e^{\lambda t} \, dt$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} \Big|_0^1$$

$$= e^{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda}(e^{\lambda} - 1)$$

$$= \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda})$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(1+k)!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{k!} - \frac{1}{\lambda})$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} - 1\right)$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot (e^{\lambda} - 1)$$

Hausaufgabe 6.3 (6=2+2+2 Punkte)

Ein Student macht einen Multiple-Choice-Test, der aus 3 Aufgaben besteht. Die erste Aufgabe hat 2 mögliche Antworten, die zweite 5 Antworten und die letzte 4 Antworten. Bei jeder Aufgabe wählt der Student seine Antwort zufällig und unabhängig. Sei X die Anzahl der richtigen Antworten.

(i) Geben Sie die Verteilung von X an.

(ii) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$ und $\mathrm{Var}(X)$.

(iii) Verallgemeinern Sie die Antworten in (i) und (ii), wobei Sie nun annehmen, dass der Test $N \geq 1$ Fragen und jede Frage $M \geq 1$ Antworten enthält.

(i) Sei X_i eine ZV mit $i = 1, 2, 3$. $X_1 \sim \mathrm{Ber}(\underset{p}{\tfrac{1}{2}})$ $X_2 \sim \mathrm{Ber}(\tfrac{1}{5})$ $X_3 \sim \mathrm{Ber}(\tfrac{1}{4})$

Sei $X = X_1 + X_2 + X_3$

(ii) $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + X_3] = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{3} p_i$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{10+4+5}{20} = \frac{19}{20}$

$\mathbb{V}[X] = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{V}[X_i] = \sum_{i=1}^{3} p_i(1-p_i)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{4}{25} + \frac{3}{16} = \frac{239}{400} = 0{,}5975$

(iii) Sei X_i eine ZV mit $i = 1, 2, 3, \dots N$ $X_i \sim \mathrm{Ber}(p_i)$ mit $p_j = \frac{1}{M}$

Sei $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$

$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{N} p_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{M} = \frac{N}{M}$

$\mathbb{V}[X] = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{V}[X_i] = \sum_{i=1}^{N} p_i(1-p_i) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{M}\left(1-\frac{1}{M}\right) = \frac{N}{M}\left(1-\frac{1}{M}\right)$

Hausaufgabe 6.4 (6=2+2+2 Punkte)

Seien S und T zwei unabhängige geometrisch-verteilte Zufallsvariablen. S hat Parameter p und T Parameter q mit $0 < p, q \leq 1$.

(i) Zeigen Sie, dass $U = \min\{S, T\}$ geometrisch verteilt ist, indem Sie $\mathbb{P}(U > n)$ bestimmen. Wie lautet der Parameter der geometrischen Verteilung von U?

(ii) Berechnen Sie $\mathbb{E}[U]$ und $\mathrm{Var}(U)$.

(iii) Berechnen Sie für den Fall $p = q$

$$p_{S|S+T=n}(k) := \mathbb{P}(S = k | S + T = n)\,.$$

(i) Für $X \sim \mathrm{Geo}(p)$ $\quad \mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1} p$

$$\mathbb{P}(X \leq n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n} (1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=0}^{n-1} (1-p)^k = p \cdot \frac{(1-p)^n - 1}{1-p-1} = 1-(1-p)^n$$

$$\mathbb{P}(X > n) = 1 - \mathbb{P}(S \leq n) = (1-p)^n$$

$$\mathbb{P}(U>n) = \mathbb{P}(\min\{S,T\} > n) = \mathbb{P}(S>n, T>n) = \mathbb{P}(S>n) \cdot \mathbb{P}(T>n)$$
$$= (1-p)^n (1-q)^n$$
$$= [(1-p)(1-q)]^n$$
$$= [1-p-q+pq]^n$$

$\Rightarrow U \sim \mathrm{geo}(p+q-pq) \qquad$ Parameter $= p+q-pq$

(ii) $$\mathbb{E}[U] = \frac{1}{p+q-pq}$$

$$\mathbb{V}[U] = \frac{1-p-q+pq}{(p+q-pq)^2}$$

(iii) $$\mathbb{P}(S=k | S+T=n) = \frac{\mathbb{P}(S=k, T=n-k)}{\mathbb{P}(S+T=n)}$$
$$= \frac{\mathbb{P}(S=k) \cdot \mathbb{P}(T=n-k)}{\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(S=k)\mathbb{P}(T=n-k)}$$
$$= \frac{(1-p)^{k-1} p \cdot (1-p)^{n-k-1} p}{\sum_{k=1}^{n-1} (1-p)^{n-2} p^2}$$
$$= \frac{(1-p)^{n-2} p^2}{(n-1)(1-p)^{n-2} p^2} = \frac{1}{n-1}$$