2 Integraltransformationen

Gegeben $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Integraltransformation

e^{itk}

$$F(s) := \int_a^b f(t)\, K(s,t)\, dt$$

wobei $K(s,t)$ die Kernfunktion ist.

2.1 Laplacetransformation

Def 38 $\quad f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$

Die Laplacetransformation ist

$$F(s) = \mathcal{L}[f](s) := \int_0^\infty f(t)\, \underbrace{e^{-st}}_{=k(s,t)}\, dt, \qquad s \in \mathbb{C}.$$

→ Def 38 ist die einseitige Laplacetransformation

→ Ersetzt man die untere Grenze durch $-\infty$ erhält man die zweiseitige Laplacetransformation.

Beispiel 39 (Exponentialfunktion)

$$f(t) := e^{at}, \qquad a \in \mathbb{C}$$

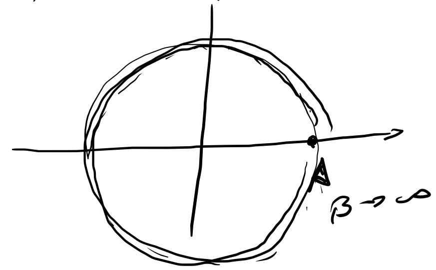
$$F(s) := \mathcal{L}[f](s) = \lim_{\beta \to \infty} \int_0^\beta e^{at} e^{-st}\, dt = \lim_{\beta \to \infty} \int_0^\beta e^{(a-s)t}\, dt$$

$$= \lim_{\beta \to \infty} \left[\frac{1}{(a-s)} e^{(a-s)t} \right]_0^\beta = \lim_{\beta \to \infty} \frac{1}{s-a} \left(1 - e^{(a-s)\beta}\right)$$

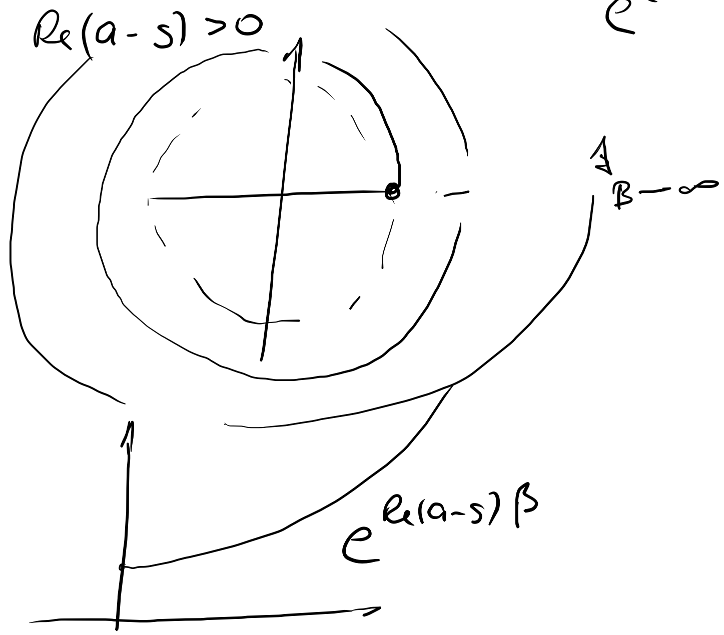
Grenzwert für $\beta \to \infty$

$$e^{(a-s)\beta} = e^{\mathrm{Re}(a-s)\beta}\, e^{i\,\mathrm{Im}(a-s)\beta}$$

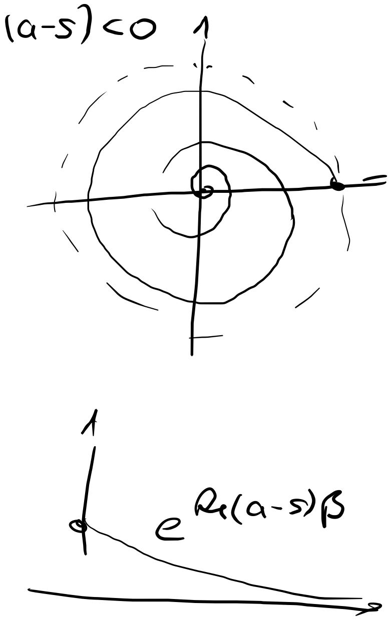
$\mathrm{Re}(a-s) = 0$



$\mathrm{Re}(a-s) > 0$

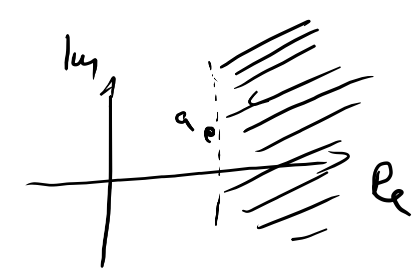


$\mathrm{Re}(a-s) < 0$



$\Rightarrow \quad F(s) = \dfrac{1}{s-a} \quad$ für $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)$.

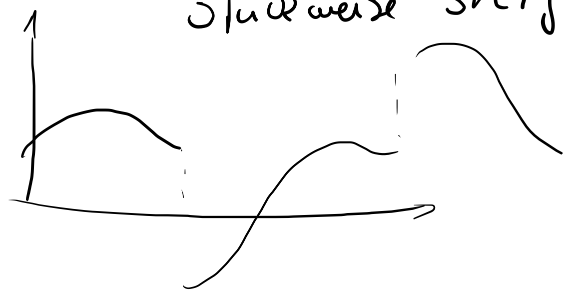
$\rightarrow$ Die Laplacetransformation existiert nur für s in

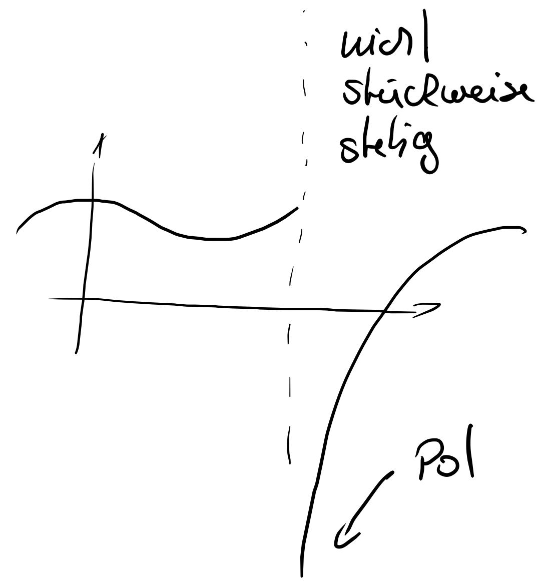


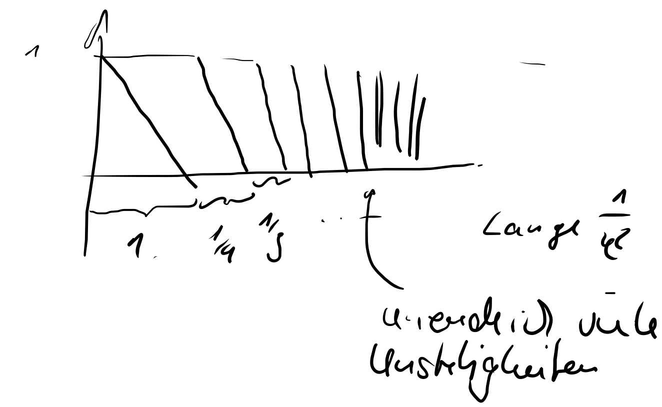
Def 40 $f:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ ist stückweise stetig, wenn auf jedem beschränkten Intervall nur endlich viele Unstetigkeitsstellen existieren und wenn $f(t+)$ und $f(t-)$ existieren.

$$f(t+) = \lim_{h\searrow 0} f(t+h) \qquad f(t-) = \lim_{h\searrow 0} f(t-h)$$

stückweise stetig





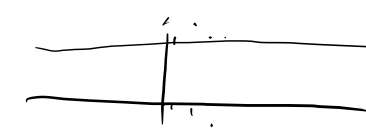


→ Stückweise Stetigkeit sichert, dass das Integral

$$\int_0^\beta f(t)\, e^{-st}\, dt$$

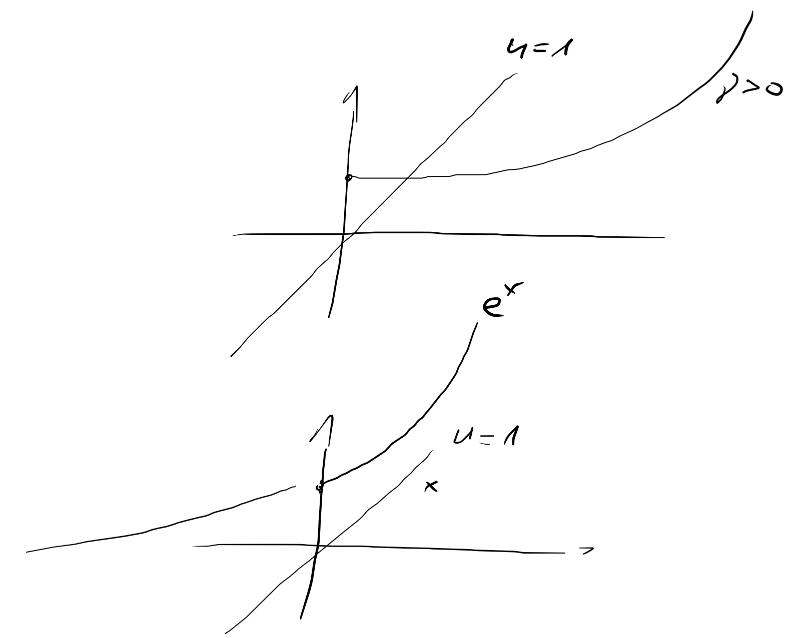
existiert.

$$f(t)=\begin{cases}1 & t\in\mathbb{Q}\\ 0 & t\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$



Def 41 $f:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ ist von exponentieller Ordnung γ, wenn $C>0$ existiert, so dass

$$|f(t)| \le C e^{\gamma t} \qquad \text{für alle } t \ge 0.$$



$\longrightarrow$ $f(t)=t^n$ $\longleftarrow$ exp Ord $\gamma>0$

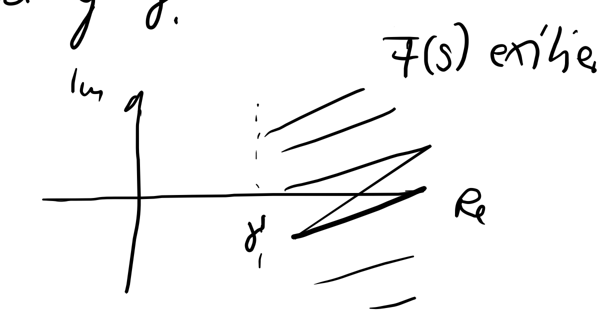
$f(t)=e^{at}$ $\longleftarrow$ exp. Ord $\gamma=\mathrm{Re}(a)$

$$\left.\begin{array}{l} f(t)=\cos(t) \\ f(t)=\sin(t) \end{array}\right\} \text{ exp Ord } \gamma=0$$

$\longrightarrow$ e^{t^2} $\longleftarrow$ nicht von exp Ord

Satz 42 Sei $f:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ. Dann existiert $F(s)$ für $\mathrm{Re}(s)>\gamma$ und

$$\lim_{\mathrm{Re}(s)\to\infty} F(s) = \mathcal{L}[f](s) = 0$$



Beweis: Sei C und γ aus der Def der exp. Ord.

Für $s := \sigma + i\omega$ und $\sigma > \gamma$ erhalten wir

$$|e^{-st}| = |e^{-\sigma - i\omega t}| = |e^{-\sigma t}|\,|e^{-i\omega t}| = e^{-\sigma t}\, 1$$

$$\left| \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt \right| \leq \int_0^\infty |f(t)\, e^{-st}|\, dt = \int_0^\infty |f(t)|\, e^{-\sigma t}\, dt \leq \int_0^\infty C e^{\gamma t} e^{-\sigma t}\, dt$$

Dreiecksungl. für Integrale

$$= C \int_0^\infty e^{(\gamma - \sigma)t}\, dt = \frac{C}{\sigma - \gamma}.$$

$$|F(s)| \leq \frac{C}{\sigma - \gamma} \longrightarrow 0 \quad \text{wenn } \sigma \to \infty.$$

$\square$

Satz 43 (Lerch) $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ stückweise stetig, exp Ord γ.

gilt

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g](s), \qquad \mathrm{Re}[s] > \gamma$$

dann ist $f(t) = g(t)$ in allen Stetigkeitspunkten.

<u>Satz 44</u> existiert $\mathcal{L}[f]$ und $\mathcal{L}[g]$ an der Stelle $s \in \mathbb{C}$, dann gilt

$$\mathcal{L}[af + bg](s) = a\,\mathcal{L}[f](s) + b\,\mathcal{L}[g](s) \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{C}.$$

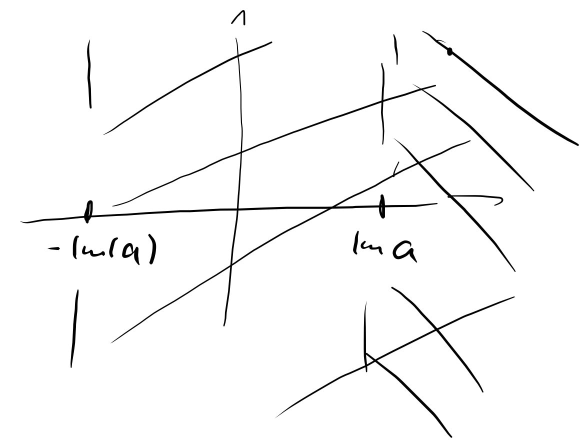
<u>Beispiel 45</u> $a \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}[\sin(at)](s) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}\right](s)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}[e^{iat}] - \mathcal{L}[e^{-iat}]\right)$$

existiert für $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(ia) = -\mathrm{Im}(a)$

existiert für $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(-ia) = \mathrm{Im}(a)$



$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s - ia} - \frac{1}{s + ia}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{2ia}{s^2 + a^2}\right) = \frac{a}{s^2 + a^2} \qquad \mathrm{Re}(s) > |\mathrm{Im}(a)|$$

$$\mathcal{L}[\cos(at)](s) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2}\right] = \frac{s}{s^2 + a^2} \qquad \mathrm{Re}(s) > |\mathrm{Im}(a)|.$$