operations research
QUANTITATIVE INFRASTRUKTURSYSTEMMODELLIERUNG

Tutorium

Operations Research – Grundlagen

Technische Universität Berlin
Fachgebiet **W**irtschafts- und **I**nfrastruktur**P**olitik

Organisatorisches

Inhaltliche und organisatorische Fragen:

- Auf ISIS im Teilnehmerforum stellen
- Ihr dürft und sollt auf Fragen euer Kommilitonen im Forum antworten!

Persönliche Fragen:

- E-Mail an or@wip.tu-berlin.de schicken

Prüfungsanmeldung:

- Generell: Moses

Klausurvorbereitung:

- Videos zur Vorlesung und den Tutorien gucken, freiwillige Hausaufgaben machen, Quizze auf ISIS machen, bei Bedarf Videos zu bestimmten Themen gucken, Aufgabenkatalog durchrechnen, Altklausuren rechen

Sprechstunden:

- Termine findet ihr auf ISIS, Online-Tool: meet@ISIS

Lineare Programmierung:

Einführung Modellbildung und Graphische Lösung

Tutoriumsaufgaben:

2.1	Einführung in die lineare Programmierung
2.10	Modellbildung: Erdgas-Problematik
2.17 a	Der Eisenwarenproduzent
2.11	Einführung in die graphische Lösung

Freiwillige Hausaufgaben:

2.3	Matrizen
2.5	Modellbildung: Der Whisky-Importeur
2.6	Modellbildung: Die Personalplanung
2.9	Modellbildung: Studentenfutter
2.12	Graphische Lösung

2.1 Einführung in die lineare Programmierung

a) **Was versteht man unter einem LP?**

b) **Wie sieht die „allgemeine Form“ eines LP aus?**

c) **Was sind Schlupf- und Strukturvariablen?**

d) **Nehmen Sie Stellung zu den folgenden Aussagen:**

- Ein LP besitzt genau eine optimale Basislösung.
- Ein LP besitzt keine optimale Basislösung.
- Ein LP besitzt unendlich viele optimale Basislösungen.
- Ein LP besitzt genau zwei optimale Basislösungen.
- Ein LP besitzt genau 734.982.726 optimale Basislösungen.

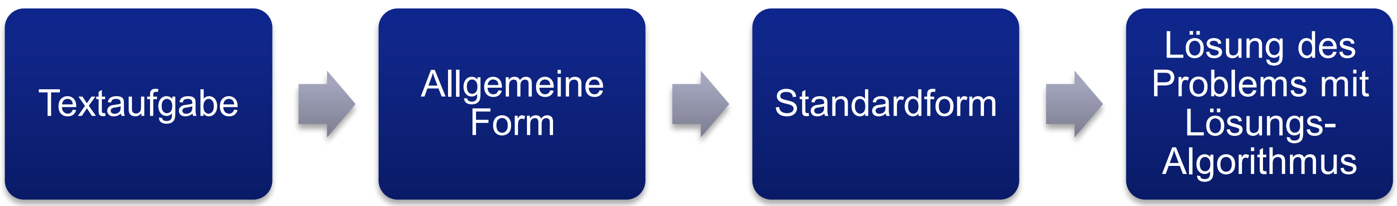
2.1 Einführung in die lineare Programmierung

a) Was versteht man unter einem LP?

- LP = Lineares Optimierungs- oder Programmierungsproblem
- Maximierung oder Minimierung einer linearen Zielfunktion (ZF) unter Beachtung von linearen Nebenbedingungen (NB)/Restriktionen

b) Wie sieht die „allgemeine Form“ eines LPs aus?

- Transformation eines *verbalen* Problems in ein *mathematisches* Problem



- Aufbau / Bestandteile eines LPs
  - ➢ Zielfunktion (ZF)
  - ➢ Nebenbedingungen (NB)
  - ➢ Definitionsbereich

2.1 Einführung in die lineare Programmierung

b) Wie sieht die „allgemeine Form“ eines LPs aus?

- Transformation eines *verbalen Problems* in ein *mathematisches Problem*
- Aufbau / Bestandteile
  - Zielfunktion (ZF)
  - Nebenbedingungen (NB)
  - Definitionsbereich

Zielfunktion (ZF)

$$max/min\ z = \sum_{j=1}^{p} c_j * x_j$$

$$(max/min\ z = c_1 * x_1 + c_2 * x_2 + c_3 * x_3 + \ldots + c_p * x_p)$$

max/min - Optimierungsrichtung

z - ZF-Wert

c_j - ZF-Koeffizient

x_j - Strukturvariable

2.1 Einführung in die lineare Programmierung

s. t. (Subject to = „gemäß“)

Nebenbedingungen (NB)

$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} * x_j \leq b_i$ für $1 \leq i \leq m_1$

$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} * x_j \geq b_i$ für $m_1 + 1 \leq i \leq m_2$

$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} * x_j = b_i$ für $m_2 + 1 \leq i \leq m_3$

a_{ij} - Koeffizient

x_j - Strukturvariable

b_i - Ressourcenbeschränkung

Definitionsbereich

$x_j \in \mathbb{R}$

$x_j \geq 0$ (Nicht-Negativitätsbedingung)

2.1 Einführung in die lineare Programmierung

__Allgemeine Form eines LPs:__

Zielfunktion (ZF)

$$max/min\ z = \sum_{j=1}^{p} c_j * x_j$$

s. t. (Subject to = „gemäß“)

Nebenbedingungen (NB)

$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} * x_j \leq b_i$ für $1 \leq i \leq m_1$

$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} * x_j \geq b_i$ für $m_1 + 1 \leq i \leq m_2$

$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} * x_j = b_i$ für $m_2 + 1 \leq i \leq m_3$

Definitionsbereich

$x_j \in \mathbb{R}$

$x_j \geq 0$ (Nicht-Negativitätsbedingung) für $1 \leq j \leq p$

2.1 Einführung in die lineare Programmierung

c) Was sind Schlupf- und Strukturvariablen?

➢ **Was ist die Standardform?**

- Einheitliche Form von LPs
- Notwendig für Anwendung von Lösungsalgorithmus (→ Simplex Algorithmus)
- Jedes LP kann von der *Allgemeinen Form* in die *Standardform* transformiert werden

Zielfunktion (ZF)

- Optimierungsrichtung muss max sein!
- Term nach Konstanten umstellen
  - $max\ z = c_1 * x_1 + c_2 * x_2 \Leftrightarrow max\ z - c_1 * x_1 - c_2 * x_2 = 0$

Nebenbedingungen (NB)

- Müssen mit Gleichheit (=) erfüllt werden
- Bei der Transformation von Ungleichtsbedingungen (≤/≥) in Gleichheitsbedingungen (=) werden *Schlupfvariablen* eingesetzt

Definitionsbereich

- Nur Nichtnegativitätsbedingung ($x_j \geq 0$) ist zulässig

2.1 Einführung in die lineare Programmierung

Standardform eines LPs:

Zielfunktion (ZF)

$$max\ z - \sum_{j=1}^{p} c_j * x_j - \sum_{j=p+1}^{n} 0 * x_j = 0$$

s. t.

Nebenbedingungen (NB)

$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} * x_j + x_{p+1} = b_i$ für $1 \leq i \leq m_1$

$\sum_{j=1}^{p} - a_{ij} * x_j + x_{p+1} = -b_i$ für $m_1 + 1 \leq i \leq m_2$

Definitionsbereich

$x_j \geq 0$ (Nicht-Negativitätsbedingung) für $1 \leq j \leq p$

2.1 Einführung in die lineare Programmierung

Bsp. Umwandlung eines LPs von der allgemeinen Form in die Standardform

<u>Allgemeine Form</u>

$max\ z = 5x_1 + 3x_2 + 5$

s. t.

$x_1 + x_2 \leq 3$

$4x_1 \geq 2 \qquad \Leftrightarrow -4x_1 \leq -2$

$x_1, x_2 \geq 0$

<u>Standardform</u>

$max\ z\ - 5x_1 - 3x_2 = \ 5$

s. t.

$x_1 + x_2 + x_3 = 3$

$-4x_1 + x_4 = -2$

$x_1, x_{2,} x_{3,} x_4 \geq 0$

- **Allgemeines Vorgehen bei der Transformation von NB:**
  Nebenbedingungen in ≤ - NB umformen und dann eine positive Schlupfvariable einfügen!

在转换非标准形式时的一般步骤是：将约束条件转换为≤-非标准形式，然后插入一个正的松弛变量！

2.1 Einführung in die lineare Programmierung

c) Was sind Schlupf- und Strukturvariablen?

结构变量
- 已包含在一般形式中
- 代表任务文本中的“具体”对象（例如汽车、气体量等）

滑差变量
- 在转换为标准形式时添加到一般形式中
- 每个不等式都有一个自己的滑差变量
- 不影响目标函数（相关目标函数系数=0）
- 辅助变量：指示每个不等式未利用的能力量

Strukturvariablen
- Bereits in allgemeinen Form enthalten
- Repräsentieren „konkrete“ Gegenstände (z. B. Autos, Menge Gas etc.) aus dem Aufgabentext

Schlupfvariablen
- Werden der allg. Form bei der Transformation in die Standardform hinzugefügt
  - Jede NB bekommt eine eigene Schlupfvariable
  - Haben keinen Einfluss auf die Zielfunktion (dazugehörige ZF-Koeffizienten = 0)
- Hilfsvariablen: Geben an, wie viel Kapazität einer NB nicht ausgeschöpft wird

Bsp.:

NB: $5x_1 + x_2 \leq 5$

Lösung des LPs: $x_1 = 0; x_2 = 1$

$5 * 0 + 1 \leq 5 \Leftrightarrow 1 \leq 5$

Wie viel Kapazität der Nebenbedingung haben wir nicht ausgeschöpft?

Antwort: 4

2.1 Einführung in die lineare Programmierung

c) Was sind Schlupf- und Strukturvariablen?

Bsp.:

NB: $5x_1 + x_2 \leq 5$

Lösung des LPs: $x_1 = 0; x_2 = 1$

$5 * 0 + 1 \leq 5 \Leftrightarrow 1 \leq 5$

Wie viel Kapazität der Nebenbedingung haben wir nicht ausgeschöpft?

Antwort: 4

NB mit Schlupfvariable: $5x_1 + x_2 + x_3 = 5$

Lösung des LPs: $x_1 = 0; x_2 = 1$

$5 * 0 + 1 + x_3 = 5 \Leftrightarrow x_3 = 4$

Wie viel Kapazität der Nebenbedingung haben wir nicht ausgeschöpft?

Antwort: 4

2.1 Einführung in die lineare Programmierung

Besondere Fälle bei der Umwandlung in die Standardform

<u>“min ZF“ in eine “max ZF“ umwandeln</u>

- Bsp.

  $\min z = x_1 + x_2$

  $\Leftrightarrow \max -z = -x_1 - x_2$

  $\Leftrightarrow \max -z + x_1 + x_2 = 0$

<u>“=“-NB in Standardform umwandeln</u>

- Aus einer “=“-NB werden zunächst zwei neue NB ($\leq und \geq$)

- Bsp.

  $x_3 = 5 \implies x_3 \leq 5 \, und \, x_3 \geq 5$

  Beide neuen NB mit dem allgemeinen Vorgehen zur Transformation von NB umformen: Nebenbedingungen in $\leq$ - NB umformen und dann eine positive Schlupfvariable einfügen!

2.1 Einführung in die lineare Programmierung

Besondere Fälle bei der Umwandlung in die Standardform

“$x \in \mathbb{R}$“-Def. Bereich in Standardform umwandeln

- Bsp.

  $x_3 \ \in \ \mathbb{R} \ \Longrightarrow \ x_3' \geq 0 \; und \; x_3'' \geq 0$

  Substituiere x_3 mit $x_3' \ - x_3''$

2.1 Einführung in die lineare Programmierung

d) Nehmen Sie Stellung zu den folgenden Aussagen:

Ein LP besitzt genau eine optimale Basislösung.	→ möglich
Ein LP besitzt keine optimale Basislösung.	→ möglich
Ein LP besitzt unendlich viele optimale Basislösungen.	→ möglich
Ein LP besitzt genau zwei optimale Basislösungen.	→ unmöglich
Ein LP besitzt genau 734.982.726 optimale Basislösungen.	→ unmöglich

Da bei einem LP immer ein **konvexer Lösungsraum** vorliegt, sind ausschließlich die folgenden Szenarien möglich:

- Die Zielfunktion tangiert im Optimum den Lösungsraum nur in einem Punkt.
- Die Zielfunktion liegt im Optimum direkt auf einer Nebenbedingung.
- Es gibt keine optimale Lösung.

2.10 Modellbildung: Erdgas-Problematik

Deutschland besitzt eine jährliche Nachfrage von Gas in Höhe von 80 Mrd. m^3. Zurzeit beziehen wir 30 Mrd. m^3 aus Russland, während die übrige Nachfrage durch Gasimporte aus Norwegen in Höhe von 30 Mrd. m^3 und 20 Mrd. m^3 aus den Niederlanden gedeckt wird.
Durch die aktuellen politischen Entwicklungen, ausgelöst durch die Krim-Krise, haben sich Spannungen zwischen der EU und Russland aufgebaut. Nachdem die Krim bereits an Russland angegliedert wurde, drohen neue Unruhen in der Ostukraine den Konflikt zu verschärfen. Die Bundesregierung fordert den Verzicht Russlands auf einen militärischen Einsatz in der Ukraine. Inmitten dieser Ereignisse hat Russland bereits die Gaspreise für die Ukraine um 80% erhöht. Stellen Sie sich nun vor, Russland stellt aufgrund dieser Entwicklungen seinen Gasexport in die EU ein. Um die Nachfrage zuverlässig decken zu können besteht die Möglichkeit, zusätzlich zu den Importen aus den Niederlanden und Norwegen, ein neues Flüssiggas-Terminal in Wilhelmshaven zu nutzen. Hierdurch ist auch der Gasimport aus Übersee möglich.

Wie können wir möglichst kostenminimal unseren Bedarf decken?

2.10 Modellbildung: Erdgas-Problematik

Transformation eines *verbalen* Problems in ein *mathematisches* Problem

Textaufgabe → Allgemeine Form → Standardform → Lösung des Problems mit Lösungs-Algorithmus

2.10 Modellbildung: Erdgas-Problematik

Wie können wir möglichst kostenminimal unseren Bedarf decken?

Aus politischen Gründen müssen wir mindestens 50% unserer Nachfrage aus EU-Mitgliedstaaten und Norwegen beziehen.

x_{NL} – Menge des bezogenen Gas aus den Niederlanden (NL) in Mrd. m^3
x_{NOR} – Menge des bezogenen Gas aus Norwegen (NOR) in Mrd. m^3
x_{LNG} – Menge des bezogenen Liquified Natural Gas (LNG) in Mrd. m^3

Land	Kapazität (Mrd. m^3 pro Jahr)	Importkosten (Mio. USD/Mrd. m^3)
Niederlande	22	68
Norwegen	33	72
LNG	35	59

- Nachfrage von Deutschland: 80 Mrd. m^3 pro Jahr

2.10 Modellbildung: Erdgas-Problematik

Zielfunktion (ZF)

„Wie können wir möglichst *kostenminimal* unseren Bedarf decken?“ → Minimiere Importkosten

→ $\min z = 68x_{NL} + 72x_{NOR} + 59x_{LNG}$

Nebenbedingungen (NB)

Kapazitätsrestriktionen (“mehr können wir nicht importieren“)

→ $x_{NL} \leq 22$

→ $x_{NOR} \leq 33$

→ $x_{LNG} \leq 35$

Nachfragerestriktion (“unser Bedarf muss durch die Importe gedeckt werden“); Nachfrage von Deutschland: 80 Mrd. m^3 pro Jahr

→ $x_{NL} + x_{NOR} + x_{LNG} \geq 80$

„Aus politischen Gründen müssen wir mindestens 50% unserer Nachfrage aus EU-Mitgliedstaaten und Norwegen beziehen.“ → Summe der Importe aus NL und NOR ≥ 0,5 * unsere Nachfrage

→ $x_{NL} + x_{NOR} \geq \frac{1}{2} * 80 \Leftrightarrow x_{NL} + x_{NOR} \geq 40$

2.10 Modellbildung: Erdgas-Problematik

Definitionsbereich

Importmengen können nicht negativ sein

→ $x_i \geq 0 \; f\text{ür}\; i \in \{NL, NOR, LNG\}$

2.10 Modellbildung: Erdgas-Problematik

$\min z = 68x_{NL} + 72x_{NOR} + 59x_{LNG}$

$s.t.$

$x_{NL} \leq 22$

$x_{NOR} \leq 33$

$x_{LNG} \leq 35$

$x_{NL} + x_{NOR} + x_{LNG} \geq 80$

$x_{NL} + x_{NOR} \geq 40$

$x_i \geq 0 \; für \; i \in \{NL, NOR, LNG\}$

$max -z + 68x_{NL} + 72x_{NOR} + 59x_{LNG} = 0$

$s.t.$

$x_{NL} + x_1 = 22$

$x_{NOR} + x_2 = 33$

$x_{LNG} + x_3 = 35$

$-x_{NL} - x_{NOR} - x_{LNG} + x_4 = -80$

$-x_{NL} - x_{NOR} + x_5 = -40$

$x_i \geq 0 \; für \; i \in \{NL, NOR, LNG, 1, 2, 3, 4, 5\}$

2.17a Eisenwarenproduzent

Ein Produzent fertigt unter anderem Nägel und Schrauben, und möchte den Deckungsbeitrag der Produktion organisieren. Dabei beträgt der Deckungsbeitrag je 10.000 Einheiten für Nägel 1.000 EUR, für Schrauben 3.000 EUR.
Insgesamt können höchstens 40.000 Einheiten pro Schicht gefertigt werden. Der Lagerplatz für die verpackte Produktion einer Schicht ist auf 50 Quadratmeter beschränkt. 1.000 Einheiten Nägel benötigen einen Quadratmeter, 1.000 Einheiten Schrauben benötigen zwei Quadratmeter. Die Verpackungsmaschinen können pro Schicht höchstens entweder 100.000 Nägel oder 25.000 Schrauben verpacken. Eine entsprechende Kombination beider Produkte ist ebenso möglich. Von den Nägeln sollen mindestens 10.000 Stück pro Schicht produziert werden. Außerdem sollen mindestens 5.000 Nägel mehr als Schrauben hergestellt werden.

Wie muss optimal produziert werden? Die aus der Aufgabenstellung offensichtliche Ganzzahligkeitsforderung an die Lösung soll vernachlässigt werden.

x_1: Produktionsmenge Nägel in 1.000 Stück pro Schicht
x_2: Produktionsmenge Schrauben in 1.000 Stück pro Schicht

a) Stellen Sie das Modell auf (alle Stückzahlen in Tausend).

2.17a Eisenwarenproduzent

x_1: Produktionsmenge Nägel in 1.000 Stück pro Schicht
x_2: Produktionsmenge Schrauben in 1.000 Stück pro Schicht

Zielfunktion (ZF)

„Ein Produzent fertigt unter anderem Nägel und Schrauben, und möchte den Deckungsbeitrag der Produktion organisieren. Dabei beträgt der Deckungsbeitrag je 10.000 Einheiten für Nägel 1.000 EUR, für Schrauben 3.000 EUR."

Maximiere den Deckungsbeitrag

→ $\max z = 100x_1 + 300x_2$

Nebenbedingungen (NB)

„Insgesamt können höchstens 40.000 Einheiten pro Schicht gefertigt werden."

→ $x_1 + x_2 \leq 40$

2.17a Eisenwarenproduzent

x_1: Produktionsmenge Nägel in 1.000 Stück pro Schicht
x_2: Produktionsmenge Schrauben in 1.000 Stück pro Schicht

Nebenbedingungen (NB)

„Der Lagerplatz für die verpackte Produktion einer Schicht ist auf 50 Quadratmeter beschränkt. 1.000 Einheiten Nägel benötigen einen Quadratmeter, 1.000 Einheiten Schrauben benötigen zwei Quadratmeter.“

→ $1\left[\frac{m^2}{1000\ Nägel}\right] * x_1[1000\ Nägel] + 2\left[\frac{m^2}{1000\ Schrauben}\right] * x_2[1000\ Schrauben] \leq 50\ [m^2]$

→ $x_1 + 2x_2 \leq 50$

„Die Verpackungsmaschinen können pro Schicht höchstens entweder 100.000 Nägel oder 25.000 Schrauben verpacken. Eine entsprechende Kombination beider Produkte ist ebenso möglich.“

→ $x_1 + 4x_2 \leq 100$

2.17a Eisenwarenproduzent

x_1: Produktionsmenge Nägel in 1.000 Stück pro Schicht
x_2: Produktionsmenge Schrauben in 1.000 Stück pro Schicht

Nebenbedingungen (NB)

„Von den Nägeln sollen mindestens 10.000 Stück pro Schicht produziert werden."

→ $x_1 \geq 10$

„Außerdem sollen mindestens 5.000 Nägel mehr als Schrauben hergestellt werden."

→ $x_1 \geq x_2 + 5 \;\Leftrightarrow\; x_1 - x_2 \geq 5$

Definitionsbereich

„Die aus der Aufgabenstellung offensichtliche Ganzzahligkeitsforderung an die Lösung soll vernachlässigt werden."

→ $x_{1,2} \geq 0 \; (Nicht - Negativitätsbedingung)$

2.17a Eisenwarenproduzent

$\max z = 100x_1 + 300x_2$

s. t.

$x_1 + x_2 \leq 40$

$x_1 + 2x_2 \leq 50$

$x_1 + 4x_2 \leq 100$

$x_1 \geq 10$

$x_1 - x_2 \geq 5$

$x_{1,2} \geq 0$

$\max z - 100x_1 - 300x_2 = 0$

s. t.

$x_1 + x_2 + x_3 = 40$

$x_1 + 2x_2 + x_4 = 50$

$x_1 + 4x_2 + x_5 = 100$

$-x_1 + x_6 = -10$

$-x_1 + x_2 + x_7 = -5$

$x_{1,2,3,4,5,6,7} \geq 0$

2.11 Einführung in die graphische Lösung

a) Formulieren Sie folgende Probleme als lineares Programm und lösen Sie sie graphisch:

$$\max\ x + y \text{ so, dass}$$

$$|x| \leqslant 1$$

$$|y| \leqslant 1$$

$$x, y \in \mathbb{R}$$

1) Lineares Problem aufstellen

$$\max \quad \mathbf{z} = \mathrm{x} + \mathrm{y}$$

Zielfunktionsvariable z hinzufügen

s.t.

$$\left.\begin{aligned} x &\leq 1 && \text{NB1} \\ x &\geq -1 && \text{NB2} \end{aligned}\right\} \text{Aus } |x| \leq 1$$

$$\left.\begin{aligned} y &\leq 1 && \text{NB3} \\ y &\geq -1 && \text{NB4} \end{aligned}\right\} \text{Aus } |y| \leq 1$$

$$x, y \in \mathbb{R}$$

2.11 Einführung in die graphische Lösung

2) Graphische Lösung

1. Koordinatensystem einzeichnen
   – 2 Strukturvariablen (x und y) → 2 dimensionales Koordinatensystem

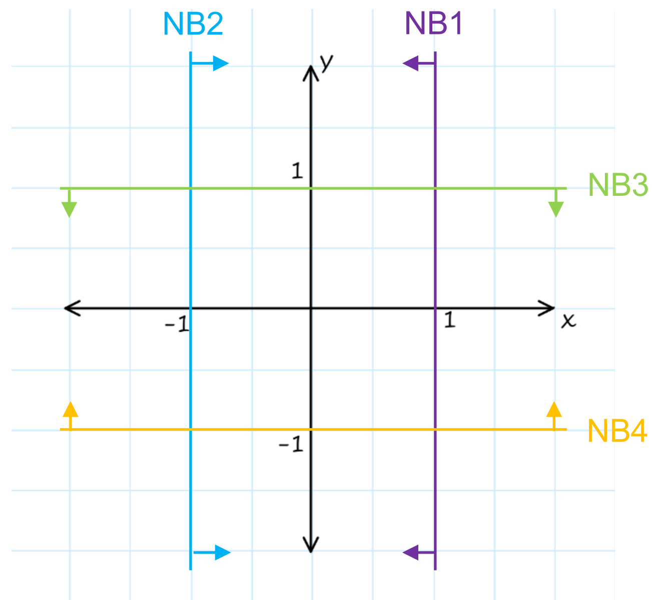
2. Nebenbedingungen mit Richtungen einzeichnen

$$\max \quad \mathbf{z} = \mathrm{x} + \mathrm{y}$$

s.t.

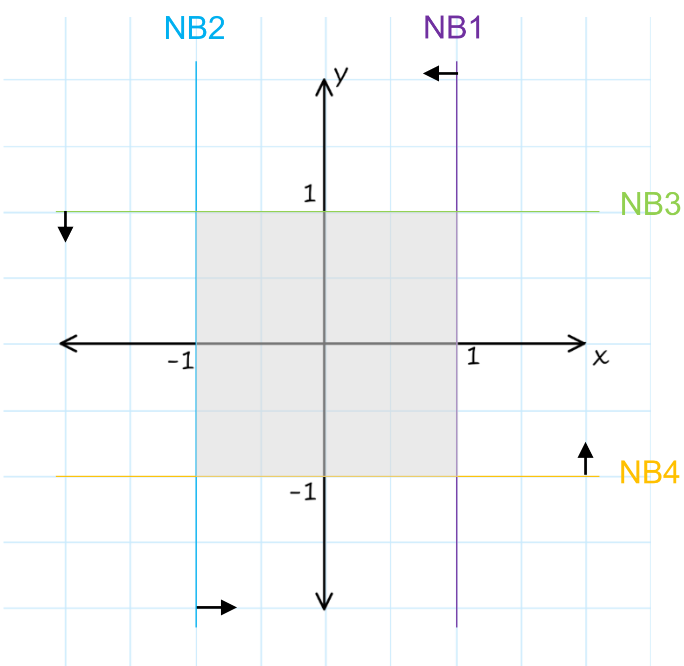
$x \leq 1$ NB1
$x \geq -1$ NB2
$y \leq 1$ NB3
$y \geq -1$ NB4

$x, y \in \mathbb{R}$



2.11 Einführung in die graphische Lösung

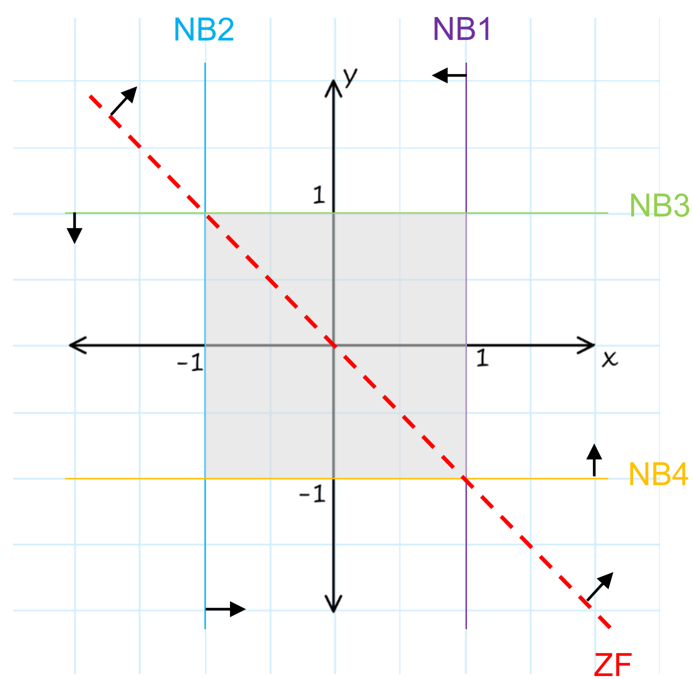
3. Zulässigen Bereich bestimmen



4. Zielfunktion mit Optimierungsrichtung einzeichnen

$$\max z = x + y$$

Sei z = 0 , dann gilt $x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$



Optimierungsrichtung (max)

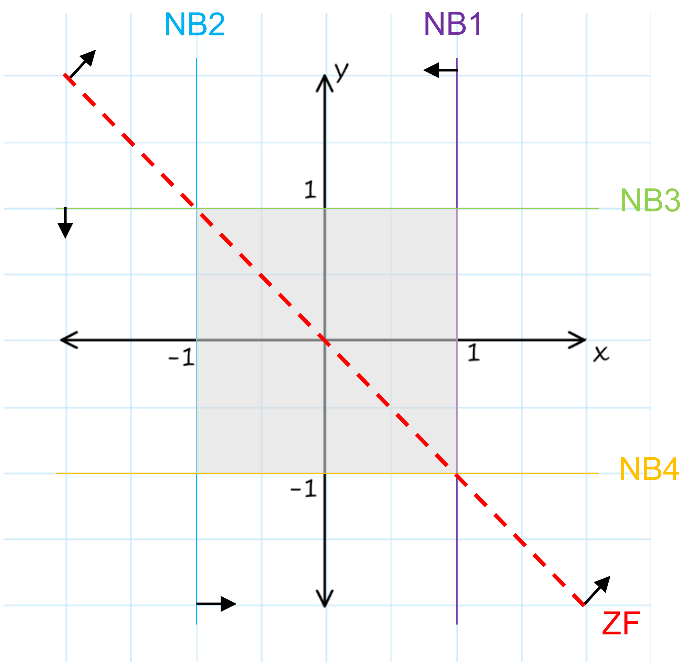
$x \uparrow \Rightarrow z \uparrow$

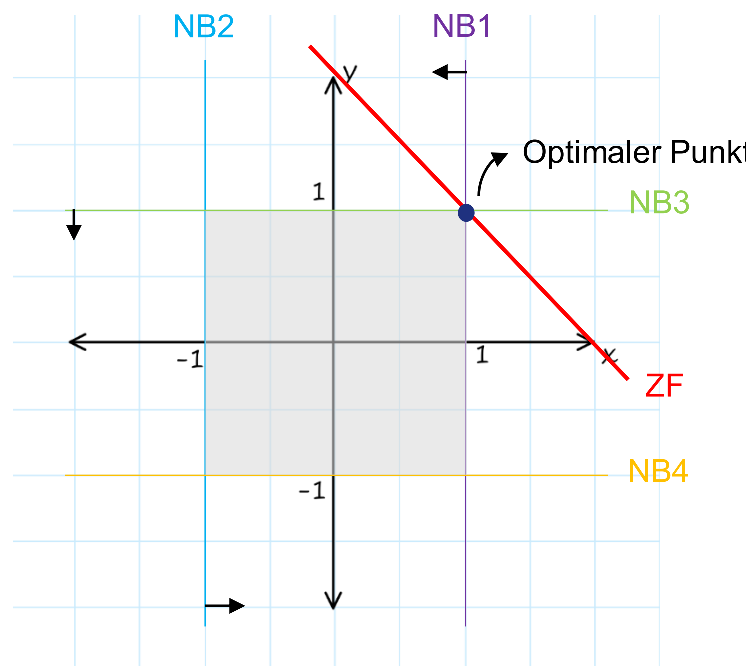
$y \uparrow \Rightarrow z \uparrow$

d.h. nach rechts (für x) und nach oben (für y), also zeigt die Optimierungsrichtung nach Nordosten

2.11 Einführung in die graphische Lösung

5. Zielfunktion in Optimierungsrichtung verschieben





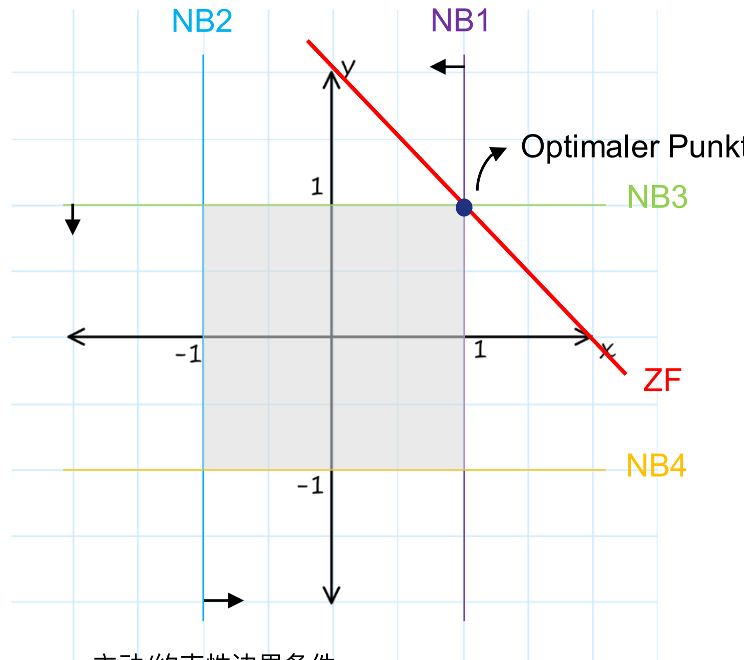
- Zielfunktion in Optimierungsrichtung verschieben, bis die Zielfunktionsgerade den äußersten zulässigen Punkt berührt

Wichtige Begriffe am Beispiel 2.11 a)

- **Strukturvariablen** : x , y
- **Schlupfvariablen** : noch nicht definiert
- **Zulässiger Bereich** : $\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ und } -1 \leq y \leq 1\}$
- **Zulässige Basislösung** : (-1,-1); (-1,1); (1,-1); (1,1)
- **Optimale Basislösung** : (1,1)
- **Optimaler ZF-Wert** : $z^* = x^*+y^* = 1+1 = 2$

- **Aktive/Bindende Nebenbedingungen**
  - Eine NB ist aktiv/bindend, wenn die zugehörige Schlupfvariable den Wert **0** annimmt.
  - Die zugehörige Schlupfvariable nimmt den Wert 0 an, wenn das Optimum auf der NB liegt.
  - Hier : NB1 und NB3

- **Passive/Nicht Bindende Nebenbedingungen**
  - Eine NB ist passiv/nicht bindend, wenn die zugehörige Schlupfvariable einen Wert **echt größer (>) 0** annimmt, wenn das Optimum nicht auf dieser NB liegt.
  - Hier: NB2 und NB4



- 主动/约束性边界条件
- 如果相关的滑差变量取值为0，则边界条件是活跃/约束性的。
- 当最优解在边界条件上时，相关的滑差变量取值为0。
- 这里：NB1和NB3
- 被动/非约束性边界条件
- 如果相关的滑差变量在最优解不在该边界条件上时取一个大于0的真实值，则该边界条件是被动/非约束性的。
- 这里：NB2和NB4

Fragen zum Tutorium?