Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen
(Hausaufgabe 6)

Abgabe: 3. – 7. Juni 2024

Sommersemester 2024

Aufgabe 16

(6 Punkte)

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2t^{-2} & 0 \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{x}'(t), \quad t > 0; \qquad \vec{x}(2) = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Finde mit Hilfe des Ansatzes

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \alpha t^r \\ t^s \end{pmatrix}, \quad \alpha, r, s \in \mathbb{R},$$

ein Fundamentalsystem. Weise die Unabhängigkeit explizit nach.

(b) Ermittele eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung.

(c) Löse das Anfangswertproblem.

Aufgabe 17

(4 Punkte)

Ermittele die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 9t^{-1} & -12 \\ 4t^{-2} & -6t^{-1} \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} 4 \\ 2t^{-1} \end{pmatrix}, \quad t > 0.$$

Ein Fundamentalsystem ist gegeben durch

$$\vec{x}_1(t) \coloneqq \begin{pmatrix} 3t \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{x}_2(t) \coloneqq \begin{pmatrix} 2t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 18

(5 Punkte)

Bestimme die allgemeine Lösung von

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{e}^{3t} - 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 16

(6 Punkte)

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2t^{-2} & 0 \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{x}'(t), \quad t > 0; \qquad \vec{x}(2) = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Finde mit Hilfe des Ansatzes

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \alpha t^r \\ t^s \end{pmatrix}, \quad \alpha, r, s \in \mathbb{R},$$

ein Fundamentalsystem. Weise die Unabhängigkeit explizit nach.

(b) Ermittele eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung.

(c) Löse das Anfangswertproblem.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2t^{-2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} at^r \\ t^s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^s \\ 2at^{r-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} art^{r-1} \\ st^{s-1} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} t^s + t = art^{r-1} \\ 2at^{r-2} - 1 = st^{s-1} \\ 2at^s - t = st^s \end{cases} \Rightarrow \quad ar = 1, \quad s = r-1$

$1 + 2a = ar + s = 1 + s \quad \Rightarrow 2a = s \quad \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{r} = r - 1 \Rightarrow r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1) = 0$

$\Rightarrow r = -1$ oder 2

Für $r = -1$: $a = \frac{1}{r} = -1 \quad s = r - 1 = -2$

$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} -t^{-1} \\ t^{-2} \end{pmatrix}$

Für $r = 2$: $a = \frac{1}{2} \quad s = 1$

$\vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ t \end{pmatrix}$

FS: $\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} -t^{-1} \\ t^{-2} \end{pmatrix} \quad \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ t \end{pmatrix}$

$\det(W(t)) = \det \begin{pmatrix} -t^{-1} & \frac{1}{2}t^2 \\ t^{-2} & t \end{pmatrix} = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \neq 0$

$\Rightarrow \vec{x}_1 \; \vec{x}_2$ unabhängig

b) ① homogene Lösung: $\vec{x}_H(t) = C_1 \begin{pmatrix} -t^{-1} \\ t^{-2} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ t \end{pmatrix}$

② VdK: $\vec{x}_p(t) = C_1(t) \begin{pmatrix} -t^{-1} \\ t^{-2} \end{pmatrix} + C_2(t) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ t \end{pmatrix}$

$W(t)\, c'(t) = b(t) \Rightarrow \begin{pmatrix} -t^{-1} & \frac{1}{2}t^2 \\ t^{-2} & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix}$ | $W^{-1}(t) = \frac{1}{-1-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} t & -\frac{1}{2}t^2 \\ -t^{-2} & -t^{-1} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} t & -\frac{1}{2}t^2 \\ -t^{-2} & -t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} t^2 + \frac{1}{2}t^2 \\ -t^{-1} + t^{-1} \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} \frac{3}{2}t^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$C_1(t) = \int -t^2 dt = -\frac{1}{3}t^3$

$C_2(t) = \int 0 \, dt = 0$

$\vec{x}_p(t) = -\frac{t^3}{3} \begin{pmatrix} -t^{-1} \\ t^{-2} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}$

c) allg. Lösung: $\vec{x}(t) = \vec{x}_H(t) + \vec{x}_p(t) = C_1 \begin{pmatrix} -t^{-1} \\ t^{-2} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ t \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}$

AW: $\vec{x}(2) = C_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}C_1 + 2C_2 + \frac{4}{3} = 6 \\ \frac{1}{4}C_1 + 2C_2 - \frac{2}{3} = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}C_1 + 2C_2 = \frac{14}{3} \\ \frac{1}{4}C_1 + 2C_2 = \frac{23}{3} \end{cases}$$

$$\frac{3}{4}C_1 = \frac{9}{3} = 3 \quad \Rightarrow C_1 = 4$$

$$\frac{1}{4} \cdot 4 + 2C_2 = \frac{23}{3} \quad \Rightarrow C_2 = \frac{10}{3}$$

AWS-Lösung: $x(t) = 4\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \frac{10}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}$

Aufgabe 17

(4 Punkte)

Ermittele die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 9t^{-1} & -12 \\ 4t^{-2} & -6t^{-1} \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} 4 \\ 2t^{-1} \end{pmatrix}, \qquad t > 0.$$

Ein Fundamentalsystem ist gegeben durch

$$\vec{x}_1(t) := \begin{pmatrix} 3t \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{x}_2(t) := \begin{pmatrix} 2t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

① hom. Lösung: $\vec{x}_H(t) = c_1\begin{pmatrix} 3t \\ 2 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$

② VdK: $\vec{x}_p(t) = c_1(t)\begin{pmatrix} 3t \\ 2 \end{pmatrix} + c_2(t)\begin{pmatrix} 2t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$

$W(t) \cdot \vec{c}\,'(t) = b(t) \Rightarrow \begin{pmatrix} 3t & 2t^3 \\ 2 & t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2t^{-1} \end{pmatrix}$ $\qquad W(t)^{-1} = \frac{1}{3t^3 - 4t^3}\begin{pmatrix} t^2 & -2t^3 \\ -2 & 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t} & 2 \\ \frac{2}{t^3} & -\frac{3}{t^2} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t} & 2 \\ \frac{2}{t^3} & -\frac{3}{t^3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2t^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4t^{-1} + 4t^{-1} \\ 8t^{-3} - 6t^{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2t^{-3} \end{pmatrix}$$

$c_1(t) = \int 0 \, dt = 0 \qquad c_2(t) = \int 2t^{-3} \, dt = -t^{-2}$

$\Rightarrow \vec{x}_p(t) = -t^{-2}\begin{pmatrix} 2t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$

② allg. Lösung: $\vec{x}(t) = c_1\begin{pmatrix} 3t \\ 2 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2t^3 \\ t^2 \end{pmatrix} - t^{-2}\begin{pmatrix} 2t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 18

(5 Punkte)

Bestimme die allgemeine Lösung von

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ e^{3t} - 1 \end{pmatrix}.$$

① $\underline{\text{EW}}$: $\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = 2$

② $\underline{\text{EV}}$: EV zu $\lambda = 4$: $(A - 4I)\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = v_2$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \underset{=}{\overset{v_1 = 1}{}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EV zu $\lambda = 2$: $(A - 2I)\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = -v_2$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \underset{=}{\overset{v_2 = -1}{}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

③ $\underline{\text{FS}}$: $\vec{x}_1(t) = e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

④ Allg. Lsg: $\vec{x}_H(t) = c_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(hom. Lsg)

⑤ $\underline{\text{Vdk}}$: $\vec{x}_p(t) = c_1(t) e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(t) e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$W(t) c'(t) = b(t) \Rightarrow \begin{pmatrix} e^{4t} & e^{2t} \\ e^{4t} & -e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{3t} - 1 \end{pmatrix}$ | $W^{-1}(t) = \frac{1}{(-1-1)e^{6t}} \begin{pmatrix} -e^{2t} & -e^{2t} \\ -e^{4t} & e^{4t} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{2e^{6}} \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t} \\ e^{4t} & -e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{3t} - 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2e^{6}} \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 2e^{4t} - e^{7t} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-2t} - e^{t} \end{pmatrix}$$

$c_1(t) = \int \frac{1}{2} e^{-t} \, dt = -\frac{1}{2} e^{-t}$

$c_2(t) = \int \frac{1}{2}(2e^{-2t} - e^{t}) \, dt = \frac{1}{2} \cdot (-2e^{-t} - e^{t}) = -e^{-t} - \frac{1}{2} e^{t}$

$$\Rightarrow \vec{x}_p(t) = -\frac{1}{2} e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(e^{t} + \frac{1}{2} e^{3t}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

⑥ allg. Lsg:

$$x(t) = c_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(e^{t} + \frac{1}{2} e^{3t} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$