# Tutorium 3

Gegeben seien die Mengen $A \triangleq \{\, a,\ b,\ c,\ d \,\}$, $B \triangleq \{\, e,\ f \,\}$, $C \triangleq A \cup B$ und die Relationen:

$$\begin{array}{lll} R_1 : (A,\ A) & \text{mit} & R_1 \triangleq \{\, (a,\ b),\ (b,\ c),\ (a,\ c),\ (a,\ a),\ (d,\ d) \,\} \\ R_2 : (B,\ B) & \text{mit} & R_2 \triangleq \nabla_{B,B} \\ R_3 : (C,\ C) & \text{mit} & R_3 \triangleq R_1 \cup R_2 \cup \{\, (c,\ a) \,\} \end{array}$$

**Aufgabe 1: Homogene Relationen und Ordnungen**

1.a) *Gib an:* Stelle die Relationen $R_1$ und $R_2$ graphisch dar.

Lösung


$R_1$ $R_2$

/Lösung

1.b) *Gib* in der Tabelle *an* welche der aufgelisteten Eigenschaften $R_1$ und $R_2$ haben. *Beweise oder widerlege* deine Auswahl für die eingefärbten Felder.

| | $R_1$ | $R_2$ |
|---|---|---|
| reflexiv | | |
| irreflexiv | | |
| symmetrisch | | |
| antisymmetrisch | | |
| transitiv | | |
| linear | | |

Lösung

| | $R_1$ | $R_2$ |
|---|---|---|
| reflexiv | X | O |
| irreflexiv | X | X |
| symmetrisch | X | O |
| antisymmetrisch | O | X |
| transitiv | O | O |
| linear | X | O |

- $R_2$ reflexiv:

$$\Delta_B \overset{\text{Def. }\Delta}{=} \{\, (e,\ e),\ (f,\ f) \,\} \overset{\text{Def. }\subseteq}{\subseteq} R_2$$

  Also ist $R_2$ reflexiv.

- $R_1$ nicht irreflexiv:
  $a \in A$ aber $(a,\ a) \in R_1$. Also ist $R_1$ nicht irreflexiv.

- $R_1$ nicht symmetrisch:
  $a, c \in A$ und $(a,\ c) \in R_1$ aber $(c,\ a) \notin R_1$. Also ist $R_1$ nicht symmetrisch.

- $R_1$ antisymmetrisch:

$$\begin{aligned} R_1^{-1} \cap R_1 &\overset{\text{Def. }^{-1}}{=} \{\, (b,\ a),\ (c,\ b),\ (c,\ a),\ (a,\ a),\ (d,\ d) \,\} \cap R_1 \\ &\overset{\text{Def. }\cap}{=} \{\, (a,\ a),\ (d,\ d) \,\} \overset{\text{Def. }\subseteq}{\subseteq} \Delta_A \end{aligned}$$

  Also ist $R_1$ antisymmetrisch.

- $R_2$ transitiv:

  $$R_2R_2 \overset{\text{Def. };}{=} R_2 \overset{\text{Def. }\subseteq}{\subseteq} R_2$$

  Also ist $R_2$ transitiv.

- $R_1$ linear:
  $a, d \in A$ und $a \neq d$ aber $(a,\ d) \notin R_1$ und $(d,\ a) \notin R_1$. Also ist $R_1$ nicht linear.

/Lösung

1.c) Sei X eine beliebige Menge. *Gib* für jede der Relationen $\nabla_{X,X}$, $\emptyset_{X,X}$ und $\Delta_X$ *an*, welche der Eigenschaften (ir-)reflexiv, (anti-)symmetrisch, transitiv und linear erfüllt ist.

Lösung

$\nabla_{X,X}$ ist immer reflexiv, symmetrisch, transitiv und linear aber nur dann irreflexiv, wenn $\#(X) = 0$, und nur dann antisymmetrisch, wenn $\#(X) < 2$.
$\emptyset_{X,X}$ ist immer irreflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch und transitiv aber nur dann reflexiv, wenn $\#(X) = 0$, und nur dann linear, wenn $\#(X) < 2$.
$\Delta_X$ ist immer reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch und transitiv aber nur dann irreflexiv, wenn $\#(X) = 0$, und nur dann linear, wenn $\#(X) < 2$.

/Lösung

1.d) *Gib* für die Relationen $R_1$ und $R_2$ *an*, ob es sich um eine Quasiordnung, partielle Ordnung oder weder noch handelt.

Lösung

$R_1$ ist weder eine Quasi- noch eine partielle Ordnung. $R_2$ ist eine Quasiordnung aber keine partielle.

/Lösung

1.e) *Gib an:* Welche der beiden Relationen $R_1$ und $R_2$ werden zu partiellen Ordnungen wenn man sie mit $\Delta_A$ bzw. $\Delta_B$ vereinigt?

Lösung

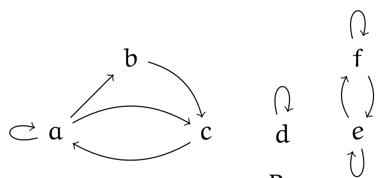
Durch die Vereinigung mit $\Delta_A$ wird $R_1$ zu einer partiellen Ordnung. $R_2$ wird durch die Vereinigung mit $\Delta_B$ nicht zu einer partiellen Ordnung.

/Lösung

**Aufgabe 2: Äquivalenzrelationen und Abschlüsse**

2.a) *Gib an:* Stelle die Relation $R_3$ graphisch dar.

Lösung




$R_3$

/Lösung

2.b) *Berechne:* $r(R_3)$

Lösung

$$\begin{aligned} r(R_3) &\overset{\text{Def. } r(\cdot)}{=} R_3 \cup \Delta_C \overset{\text{Def. }\Delta}{=} R_3 \cup \{\, (a,\ a),\ (b,\ b),\ (c,\ c),\ (d,\ d),\ (e,\ e),\ (f,\ f)\,\} \\ &\overset{\text{Def. }\cup}{=} R_3 \cup \{\, (b,\ b),\ (c,\ c)\,\} \end{aligned}$$

/Lösung

2.c) *Berechne:* $t(R_3)$

Lösung

$$R_3^1 \overset{\text{FS 0.10.3}}{=} R_3$$
$$R_3^2 \overset{\text{FS 0.10.3}}{=} R_3R_3 \overset{\text{Def. ;}}{=} (R_3 \setminus (b,\ c)) \cup \{\ (b,\ a),\ (c,\ c),\ (c,\ b)\ \}$$
$$R_3^3 \overset{\text{FS 0.10.3}}{=} R_3R_3^2 \overset{\text{Def. ;}}{=} R_3^2 \cup \{\ (b,\ b),\ (b,\ c)\ \}$$
$$R_3^4 \overset{\text{FS 0.10.3}}{=} R_3R_3^3 \overset{\text{Def. ;}}{=} R_3^3$$

und damit

$$t(R_3) \overset{\text{Def. } t(\cdot)}{=} \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} R_3^n = R_3 \cup R_3^2 \cup R_3^3$$
$$\overset{\text{Def. } \cup}{=} \nabla_{\{\ a,\ b,\ c\ \},\{\ a,\ b,\ c\ \}} \cup R_2 \cup \{\ (d,\ d)\ \}$$

/Lösung

2.d) *Beweise oder widerlege:* $t(R_3)$ ist eine Äquivalenzrelation.

Lösung

reflexiv: $\Delta_C \overset{\text{Def. } \Delta}{=} \{\ (a,\ a),\ (b,\ b),\ (c,\ c),\ (d,\ d),\ (e,\ e),\ (f,\ f)\ \} \overset{\text{Def. } \subseteq}{\subseteq} t(R_3)$
transitiv: $t(R_3)\,t(R_3) \overset{\text{Def. ;}}{=} t(R_3) \overset{\text{Def. } \subseteq}{\subseteq} t(R_3)$
symmetrisch: $t(R_3)^{-1} \overset{\text{Def. } ^{-1}}{=} t(R_3) \overset{\text{Def. } \subseteq}{\subseteq} t(R_3)$

Da $t(R_3)$ reflexiv, transitiv und symmetrisch ist, ist $t(R_3)$ eine Äquivalenzrelation.

/Lösung

2.e) Falls $t(R_3)$ eine Äquivalenz ist, *gib* $C/t(R_3)$ und alle Äquivalenzklassen in $C/t(R_3)$ jeweils elementweise *an*. *Gib* die Anzahl der Äquivalenzklassen in $C/t(R_3)$ *an*.

Lösung

$C/t(R_3)$ hat 3 Äquivalenzklassen.
$C/t(R_3) = \{\ [a]_{t(R_3)},\ [d]_{t(R_3)},\ [e]_{t(R_3)}\ \}$ mit $[a]_{t(R_3)} = \{\ a,\ b,\ c\ \}$, $[d]_{t(R_3)} = \{\ d\ \}$ und $[e]_{t(R_3)} = \{\ e,\ f\ \}$.

/Lösung

2.f) *Gib* eine Funktion $f : C \to C$ *an*, sodass $\mathrm{Ker}(f) = t(R_3)$.

Lösung

Es gibt hier viele mögliche Lösungen.
Eine ist $f \triangleq \{\ (a,\ a),\ (b,\ a),\ (c,\ a),\ (d,\ d),\ (e,\ e),\ (f,\ e)\ \}$

/Lösung

**Aufgabe 3: Äquivalenzen und Quotienten**

Gegeben sei die Relation $\equiv_n$ aus FS 0.12.8

3.a) *Beweise:* Für alle $n \in \mathbb{N}^+$ ist die Relation $\equiv_n$ eine Äquivalenzrelation.

Lösung

Sei $n \in \mathbb{N}^+$.

- *Zu Zeigen:* $\forall x \in \mathbb{N}\ .\ x \equiv_n x$
  Sei $x \in \mathbb{N}$.
  *Zu Zeigen:* $x \equiv_n x$

  $$x \equiv_n x \overset{\text{Def. } \equiv_n}{\Leftrightarrow} x \bmod n = x \bmod n$$

  (Das gilt offensichtlich.) Damit ist $\equiv_n$ reflexiv.

- *Zu Zeigen (Z1):* $\forall x, y \in \mathbb{N} \,.\, x \equiv_n y \to y \equiv_n x$
  Sei $x, y \in \mathbb{N}$.
  *Zu Zeigen (Z2):* $x \equiv_n y \to y \equiv_n x$
  Annahme (A1): $x \equiv_n y$.
  *Zu Zeigen (Z3):* $y \equiv_n x$

  $$\text{(A1)} \overset{\text{Def. } \equiv_n}{\Rightarrow} x \bmod n = y \bmod n \overset{\text{Symmetrie} =}{\Rightarrow} y \bmod n = x \bmod n \overset{\text{Def. } \equiv_n}{\Rightarrow} \text{(Z3)}$$

  Damit ist $\equiv_n$ symmetrisch.
- *Zu Zeigen (Z1):* $\forall x, y, z \in \mathbb{N} \,.\, x \equiv_n y \wedge y \equiv_n z \to x \equiv_n z$
  Sei $x, y, z \in \mathbb{N}$.
  *Zu Zeigen (Z2):* $x \equiv_n y \wedge y \equiv_n z \to x \equiv_n z$
  Annahme (A1): $x \equiv_n y \wedge y \equiv_n z$.
  *Zu Zeigen (Z3):* $x \equiv_n z$
  Annahme (A2): $x \equiv_n y$.
  Annahme (A3): $y \equiv_n z$.
  Mit der Definition von $\equiv_n$ folgt aus (A3) die Annahme (A4): $y \bmod n = z \bmod n$.

  $$\begin{aligned} \text{(A2)} &\overset{\text{Def. } \equiv_n}{\Rightarrow} x \bmod n = y \bmod n \\ &\overset{\text{(A4) und Transitivität} =}{\Rightarrow} x \bmod n = z \bmod n \overset{\text{Def. } \equiv_n}{\Rightarrow} \text{(Z3)} \end{aligned}$$

  Damit ist $\equiv_n$ transitiv.

Nach FS 0.12.1 ist damit $\equiv_n$ eine Äquivalenz.

/Lösung

3.b) *Gib an:* Wie viele Äquivalenzklassen hat $\mathbb{N}/\equiv_n$?

Lösung

$\mathbb{N}/\equiv_n$ hat $n$ Äquivalenzklassen.

/Lösung

3.c) *Gib* $\mathbb{N}/\equiv_n$ für alle $n \in \mathbb{N}^+$ an.

Lösung

$\mathbb{N}/\equiv_n = \{ [0]_{\equiv_n}, \ldots, [n-1]_{\equiv_n} \}$

/Lösung

3.d) Wähle ein Repräsentantensystem $S$ für $\mathbb{N}/\equiv_2$. *Beweise*, dass $S$ ein Repräsentantensystem von $\mathbb{N}/\equiv_2$ ist..

Lösung

Wir wählen $S \triangleq \{ 0, 1 \}$.
$\equiv_2$ ist eine Äquivalenz und $\{ 0, 1 \} \subseteq \mathbb{N}$. Es bleibt zu zeigen (FS 0.12.10), dass

$$\forall n \in \mathbb{N} \,.\, \exists! s \in \{ 0, 1 \} \,.\, s \in [n]_{\equiv_2}$$

Sei $n \in \mathbb{N}$.
*Zu Zeigen (Z1):* $\exists! s \in \{ 0, 1 \} \,.\, s \in [n]_{\equiv_2}$
Nach der Definition von $\exists!$ ist zu Zeigen:
*Zu Zeigen (Z2):*

$$\left(\exists z \in \{ 0, 1 \} \,.\, z \in [n]_{\equiv_2}\right) \wedge \left(\forall x, y \in \{ 0, 1 \} \,.\, x \in [n]_{\equiv_2} \wedge y \in [n]_{\equiv_2} \to x = y\right)$$

<u>Teil 1:</u> *Zu Zeigen (Z1.1):* $\exists z \in \{ 0, 1 \} \,.\, z \in [n]_{\equiv_2}$
Wir unterscheiden zwei Fälle für (Z1.1):

**$n \bmod 2 = 0$:** In diesem Fall ist $[n]_{\equiv_2} = [0]_{\equiv_2}$.
*Zu Zeigen:* $\exists z \in \{ 0, 1 \} \,.\, z \in [0]_{\equiv_2}$
Wähle $z = 0$ mit $0 \in \{ 0, 1 \}$.
*Zu Zeigen:* $0 \in [0]_{\equiv_2}$

$$0 \in [0]_{\equiv_2} \overset{\text{Def. } [\cdot]_{\equiv_2}}{\Leftrightarrow} 0 \equiv_2 0 \overset{\text{Def. } \equiv_2}{\Leftrightarrow} 0 \bmod 2 = 0 \bmod 2$$

($0 \bmod 2 = 0 \bmod 2$ gilt offensichtlich.)

$n \mod 2 = 1$: In diesem Fall ist $[n]_{\equiv_2} = [1]_{\equiv_2}$.
*Zu Zeigen:* $\exists z \in \{ 0, 1 \} . z \in [1]_{\equiv_2}$
Wähle $z = 1$ mit $1 \in \{ 0, 1 \}$.
*Zu Zeigen:* $1 \in [1]_{\equiv_2}$

$$1 \in [1]_{\equiv_2} \overset{\text{Def. } [\cdot]_{\equiv_2}}{\Leftrightarrow} 1 \equiv_2 1 \overset{\text{Def. } \equiv_2}{\Leftrightarrow} 1 \mod 2 = 1 \mod 2$$

($1 \mod 2 = 1 \mod 2$ gilt offensichtlich.)

Teil 2: *Zu Zeigen (Z2.1):* $\forall x, y \in \{ 0, 1 \} . x \in [n]_{\equiv_2} \wedge y \in [n]_{\equiv_2} \to x = y$
Seien $x, y \in \{ 0, 1 \}$.
*Zu Zeigen (Z2.2):* $x \in [n]_{\equiv_2} \wedge y \in [n]_{\equiv_2} \to x = y$
Annahme (A2.1): $x \in [n]_{\equiv_2} \wedge y \in [n]_{\equiv_2}$.
*Zu Zeigen (Z2.3):* $x = y$

$$\begin{aligned}
\text{(A2.1)} &\overset{\text{Def. } [\cdot]_{\equiv_2}}{\Rightarrow} n \equiv_2 x \wedge n \equiv_2 y \\
&\overset{\text{Def. } \equiv_2}{\Rightarrow} n \mod 2 = x \mod 2 \wedge n \mod 2 = y \mod 2 \\
&\overset{\text{Def. } \wedge}{\Rightarrow} x \mod 2 \, (= n \mod 2) = y \mod 2 \overset{x, y \in \{ 0, 1 \}}{\Rightarrow} \text{(Z2.3)}
\end{aligned}$$

/Lösung