Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Multiple-Choice-Test Diskrete Strukturen (A)
TU Berlin, 01.06.2023

(Weller/Froese/Kunz/Peters Sommersemester 2023)

Arbeitszeit: 45 Minuten, Gesamtpunktzahl: 25

Hinweise:

- Je Aufgabe ist **mindestens** eine Antwortmöglichkeit korrekt.
- Auch Fragen der Form „Wieviele ... gibt es?“ können **mehrere** richtige Antworten haben!
- Wenn eine **falsche** Antwortmöglichkeit angekreuzt wurde, so gibt es **Null** Punkte für die betroffene Aufgabe.

Wir erinnern an folgende Definitionen aus der Vorlesung:

- Die Null ist eine natürliche Zahl.
- Die Reihenfolge der Buchstaben eines Wortes ist wichtig! Z.B. sind die Wörter `aba` und `aab` nicht identisch.
- $n^{\underline{k}} := \frac{n!}{(n-k)!}$ und $\binom{n}{k} := \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Es gelten die folgenden Formeln für das Ziehen von k Elementen aus einer n-elementigen Menge, beziehungsweise die Anzahl totaler Funktionen f von $\{1, \ldots, k\}$ auf $\{1, \ldots, n\}$

	Zurücklegen mit	Zurücklegen ohne
geordnet	n^k	$n^{\underline{k}}$
ungeordnet	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

	f total	f total & injektiv
Funktionengleichheit	n^k	$n^{\underline{k}}$
Gleichheit nach Umsortieren	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

- Die Stirling-Zahl 1. Art $s(n, k)$ ist die Anzahl der Permutationen von n Elementen mit genau k Zyklen.
- Die Stirling-Zahl 2. Art $S(n, k)$ ist die Anzahl der k-Partitionen einer n-elementigen Menge.

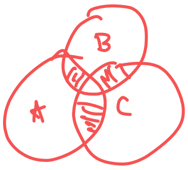
  Eine k-Partition einer Menge M ist eine Menge von genau k nichtleeren, disjunkten Teilmengen $M_i \subseteq M$ mit $M = \biguplus_{i=1}^{k} M_i$.

Aufgabe 1: **Relationen** (4 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- [ ] Jede Bijektion vom Typ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist reflexiv.
- [X] Relationen können gleichzeitig symmetrisch und antisymmetrisch sein.
- [ ] Eine Äquivalenzrelation ist reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch.
- [X] Jede reflexive Relation vom Typ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist surjektiv.

$|a \cap B \cap c| = |a \cup B \cup c| - |a| - |b| - |c|$
$+ |a \cap B| + |a \cap c|$
$+ |b \cap c|$



Aufgabe 2: **Wörter** (4 Punkte)

Sie möchten ein Passwort der Länge 8 aus den Buchstaben `a`, `b` und `c` erstellen. Dabei muss jeder Buchstabe mindestens einmal vorkommen. Wieviele Möglichkeiten gibt es?

[ ] 3^8	[ ] $8^3 - 3$	[ ] $3^8 - 3 \cdot 2^8 - 3$
[ ] 8^3	[X] $3^8 - 3 \cdot 2^8 + 3$	[ ] $8^{\underline{3}}$

Aufgabe 3: **Stirling-Zahlen** (3 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

$s(2,2) = 1$

$S(n+1,2) = S(n,1) + 2S(n,2)$
$= 1 + 2^n - 1$

- [X] Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt $S(n, n-1) = s(n, n-1)$.
- [ ] Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $S(n, 1) = s(n, 1)$.
- [X] Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt $S(n, 1) \leq s(n, 1)$.
- [ ] Für alle $1 \leq k \leq n \in \mathbb{N}$ gilt $S(n, k) = s(n, k)$.
- [X] Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$.
- [ ] Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt $s(n, 2) = 2^{n-1} - 1$.

$s(2,2) = 2 - 1 = 1$
$s(n+1,2) = s(n,1) + n\,s(n,2)$
$= 1 + n(2^{n-1} - 1)$

Aufgabe 4: **Wörter** (4 Punkte)

Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$. Wieviele Wörter der Länge $n + m$ über dem Alphabet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ gibt es, in denen n mal der Buchstabe `a` und m mal der Buchstabe `b` enthalten ist und keine zwei `a`'s aufeinander folgen?

[X] $\binom{m+1}{n}$	[X] $\frac{(m+1)!}{(m+1-n)!n!}$	[X] $\binom{m+1}{m+1-n}$
[X] $\binom{m}{n} + \binom{m}{n-1}$	[ ] $\binom{m}{n}$	[ ] $\binom{m+n}{n}$

$\_\, n_1 \,\_\,\_\, n_2 \,\_\,\_\, n_3 \,\_\,\_\, n_6 \,\_$

$\_\, n_1 m_1 \,\_\, n_2 m_2 \,\_ \cdots n_n$

$\binom{m-n+1 \quad +n+1 \quad -1}{n+1-1}$

Aufgabe 5: **Funktionen** (3 Punkte)

Seien A, B nichtleere endliche Mengen mit $|A| < |B|$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- [X] Es gibt keine surjektive Funktion von A auf B.
- [X] Es gibt eine Teilmenge $B' \subseteq B$, sodass eine Bijektion zwischen A und B' existiert.
- [ ] Es gibt eine Teilmenge $A' \subseteq A$, sodass eine Bijektion zwischen A' und B existiert.
- [X] Für jede totale Funktion $f\colon B \to A$ existiert ein $y \in A$, sodass $|\{x \in B \mid f(x) = y\}| \geq \frac{|B|}{|A|}$.
- [ ] Für jede totale Funktion $f\colon B \to A$ existiert ein $x \in B$, sodass $|\{y \in A \mid f(x) = y\}| \geq \frac{|B|}{|A|}$.

Aufgabe 6: **Wörter** (4 Punkte)

Seien $x, y, z \in \mathbb{N}$. Wieviele Wörter der Länge $x+y+z$ über dem Alphabet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$ gibt es, in denen x mal der Buchstabe `a`, y mal der Buchstabe `b` und z mal der Buchstabe `c` enthalten ist?

[X] $\binom{x+y+z}{x} \cdot \binom{y+z}{y} \cdot \binom{z}{z}$	[ ] $\binom{x+y+z}{x+z}$	[ ] $(x+y+z)!$
[ ] $x \cdot y \cdot z$	[ ] 3^{x+y+z}	[ ] $\binom{x}{y} + \binom{y}{z}$

Aufgabe 7: **Wörter** (3 Punkte)

Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2n$. Wieviele Wörter der Länge $n + m$ über dem Alphabet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ gibt es, in denen n mal der Buchstabe `a` und m mal der Buchstabe `b` enthalten ist und zwischen je zwei `a`'s mindestens zwei `b`'s stehen? (Das Wort `babbab` ist also erlaubt, das Wort `bababb` jedoch nicht.) *Hinweis*: Genau eine Antwort ist korrekt.

[ ] $\binom{m+n}{2n}$	[X] $\binom{m-n+2}{m-2(n-1)}$	[ ] $\frac{m!}{n!}$
[ ] $m^{\underline{n}}$	[ ] m^{2n}	[ ] $\binom{m+n}{n}$

n-mal   m-mal

a   bb b   a

$\_\,ab\,\_\,bab\,\_\,bab\,\_\,ba\,\_$

$\binom{m-2n+2 \quad +n+1 \quad -1}{n+1-1} = \binom{m-n+2}{n}$