Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen
(Tutorium 8)

Vorlesungswoche: 10. – 14. Juni 2024 Sommersemester 2024

Aufgabe 22

Berechne die Laplacetransformation der folgenden Funktionen:

$$\text{(a) } f(t) = 1, \quad \text{(b) } f(t) = t, \quad \text{(c) } f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 2, \\ t-2, & t > 2. \end{cases}$$

Aufgabe 23

Begründe ob die folgenden Funktionen von exponentieller Ordnung sind oder nicht:

$$\text{(a) } f(t) = \mathrm{e}^{t^2}, \qquad \text{(b) } f(t) = t\mathrm{e}^{3t-t^2}.$$

Aufgabe 24

Begründe ob die folgenden Funktionen von exponentieller Ordnung sind oder nicht:

$$\text{(a) } f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^t}, \qquad \text{(b) } f(t) = t^{1+\sin^2 t}.$$

Laplace-Transformation

Definition: $f(t): [0,\infty[\to \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ Laplace-Trafo von f: $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$

Aufgabe 22

Berechne die Laplacetransformation der folgenden Funktionen:

$$\text{(a) } f(t) = 1, \quad \text{(b) } f(t) = t, \quad \text{(c) } f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 2, \\ t-2, & t > 2. \end{cases}$$

a) $f(t) = 1$

für $t = b \to \infty$, $-st \to -\infty$ falls $s > 0$, $-st \to \infty$ falls $s < 0$ (divergiert)

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st}\, dt = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st}\, dt = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{s} e^{-sb} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}$$

konvergiert für $Re(s) > 0$

(b) $f(t) = t$

$$F(s) = \int_0^\infty \underset{u}{t}\, \underset{v'}{e^{-st}}\, dt = \lim_{b\to\infty} \left[t \cdot \frac{e^{-st}}{-s}\right]\Big|_0^b + \int_0^\infty -\frac{e^{-st}}{s}\, dt$$

$$= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{s} \cdot \frac{b}{e^{sb}} - \lim_{a\to\infty} \left[\frac{1}{s^2} e^{-st}\right]_0^a$$

$$= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{s} \frac{1}{s e^{sb}} + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} \quad \text{konvergiert für } Re(s) > 0$$

(c) $$F(s) = \int_0^2 0\, dt + \int_2^\infty (t-2) e^{-st}\, dt$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[(t-2) \cdot \frac{e^{-st}}{-s}\right]_2^b - \int_2^\infty -\frac{e^{-st}}{s}\, dt$$

$$= 0 - \lim_{a\to\infty} \left[\frac{e^{-st}}{s^2}\right]_2^a$$

$$= \frac{e^{-2s}}{s^2} \quad \text{konvergiert für } Re(s) > 0$$

Laplace-Transformierbarkeit

$f(t)$ ist laplace-transformierbar, falls $f(t)$ von exponentieller Ordnung ist

Exponentieller Ordnung

$f(t)$ ist von exp. O., falls es ein $\gamma \in \mathbb{R}$ & ein $c \in \mathbb{R}$ gibt sodass $\boxed{|f(t)| \leq c e^{\gamma t} \quad t \geq 0}$

Aufgabe 23

Begründe ob die folgenden Funktionen von exponentieller Ordnung sind oder nicht:

$$\text{(a) } f(t) = e^{t^2}, \qquad \text{(b) } f(t) = t e^{3t-t^2}.$$

a) $|e^{t^2}| \overset{?}{\leq} c e^{\gamma t}$ Vermutung: nicht von exp. Ord.

$e^{t^2} \leq e^{\ln c} \cdot e^{\gamma t} = e^{\ln c + \gamma t}$

$t^2 \leq \ln c + \gamma t$

$\underbrace{t^2 - \gamma t}_{\text{quadratisch}} \leq \underbrace{\ln c}_{\text{konstante}}$ falsch $\Rightarrow f(t)$ nicht von exp. Ord.

b) $|te^{3t-t^2}| \leq c\cdot e^{\gamma t}$ Vermutung: von exp. Ord.

$te^{3t-t^2} \leq te^{3t} \leq e^t \cdot e^{3t} \leq e^{4t} \leq c\cdot e^{\gamma t}$

$\Rightarrow f(t)$ ist von exp. Ord.

Aufgabe 24

Begründe ob die folgenden Funktionen von exponentieller Ordnung sind oder nicht:

(a) $f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^t}$, (b) $f(t) = t^{1+\sin^2 t}$.

a) $|e^{e^t}| \leq c\cdot e^{\gamma t}$

$e^{e^t} \leq e^{\ln c} \cdot e^{\gamma t} = e^{\ln c + \gamma t}$

$e^t \leq \ln c + \gamma t$

$\underbrace{e^t - \gamma t}_{\text{exponentiell}} \leq \underbrace{\ln c}_{\text{konstant}} \Rightarrow$ falsch!

b) $|t^{1+\sin^2 t}| \leq ce^{\gamma t}$ $\Rightarrow$ Vermutung: von exp. O.

$|t^{1+\sin^2 t}| \leq t\cdot t^{\sin^2 t} \leq e^t \cdot t^{\sin^2 t} \leq e^t \cdot e^t = e^{2t} \leq ce^{\gamma t}$

$\Rightarrow |t^{1+\sin^2 t}| \leq ce^{\gamma t}$

$\Rightarrow f(t)$ ist von exp. O.

$$\boxed{\begin{aligned} e^{(1+\sin^2 t)\ln t} &\leq ce^{\gamma t} = e^{\ln c + \gamma t} \\ (1+\sin^2 t)|\ln t| &\leq 2|\ln t| \leq \ln c + \gamma t \\ e^{2|\ln t|} &\leq e^{\ln c + \gamma t} \\ |t|e^2 &\leq e^{\ln c + \gamma t} \end{aligned}}$$