

Elvira Fleig, Rolf Jongebroed

Rechenübung Signale & Systeme (WiSe 2023/2024)

## Signaleigenschaften, Signaltransformationen (2. Termin)

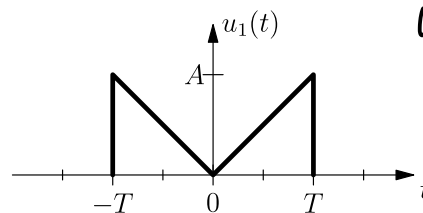
### Hinweise

- Die Aufgabenblätter zur Rechenübung stehen jeweils vor dem jeweiligen Termin auf dem ISIS-Portal zum Download bereit.
- Aufgaben, die mit [HA] bzw. [AK] beginnen, sind Hausaufgaben bzw. alte Klausuraufgaben, die als Hausaufgabe bearbeitet werden sollen. Diese werden zusätzlich in den freiwilligen Tutorien vorge-rechnet bzw. besprochen.

### 1 Energiesignale

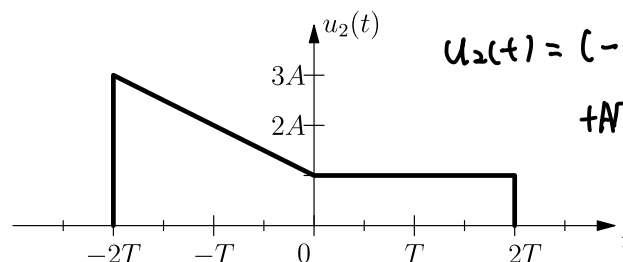
#### 1.1 Gib mathematische Repräsentationen der folgenden Signale unter Verwendung von Elementarsignalen an.

a)



$$u_1(t) = -\frac{A}{T} \cdot t \cdot \Pi_T(t + \frac{1}{2}T) + \frac{A}{T} \cdot t \cdot \Pi_T(t - \frac{1}{2}T)$$

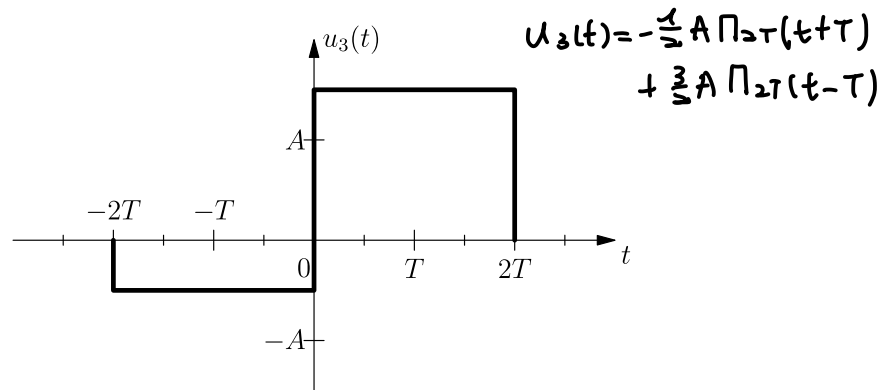
b) [HA]:



$$u_2(t) = (-\frac{A}{T} \cdot t + A) \cdot \Pi_{2T}(t + T) + A \Pi_{2T}(t - T)$$

c)

$$\frac{2A}{-2T}$$

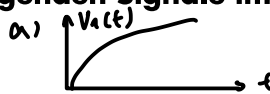


**1.2** Gib für die Signale  $u_1(t)$  und  $u_3(t)$  aus Aufgabe 1.1 die Energie sowie den Mittelwert im Bereich  $-2T \leq t \leq 2T$  an.

## 2 Leistungssignale

**2.1** Skizziere die folgenden Signale im Bereich  $-4T \leq t \leq 4T$

a)  $v_1(t) = (1 - e^{-\frac{t}{T}}) \sigma(t)$



b) [HA]:  $v_2(t) = \delta_{2T}(t) * u_2(t)$  periodische Überlagerung von  $u_2(t)$  mit  $T_p = 2T$

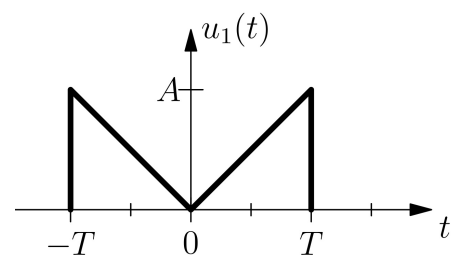
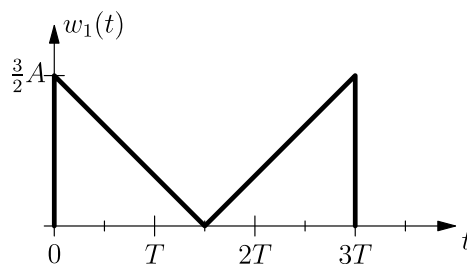
c)  $v_3(t) = \delta_{3T}(t) * u_3(t)$  periodische Überlagerung von  $u_3(t)$  mit  $T_p = 3T$

**2.2** Gib für die Signale  $v_1(t)$  und  $v_3(t)$  aus Aufgabe 2.1 Mittelwert, Leistung und Varianz an.

## 3 Signaltransformationen

**3.1** Gib mathematische Beschreibungen der folgenden Signale unter Verwendung der Signale aus Aufgabe 1.1 an.

a)



b) [HA]:

$$w_1(t) = \frac{3}{2} u_1\left(\frac{2}{3}\left(t - \frac{3}{2}T\right)\right)$$

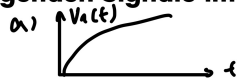
## 2 Leistungssignale

### 2.1 Skizziere die folgenden Signale im Bereich $-4T \leq t \leq 4T$

$\sigma(t)$   
Sprungfunktion

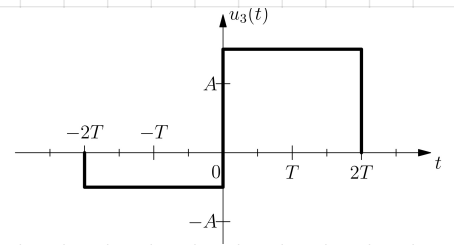
$$\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}$$

a)  $v_1(t) = (1 - e^{-t}) \sigma(t)$

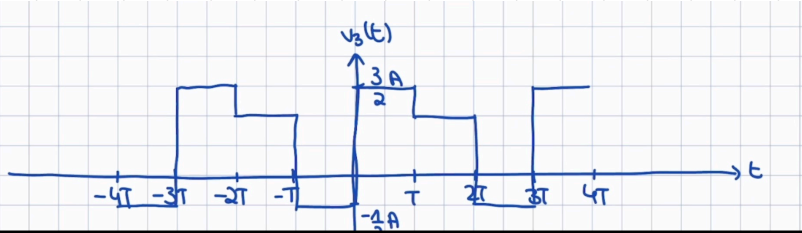
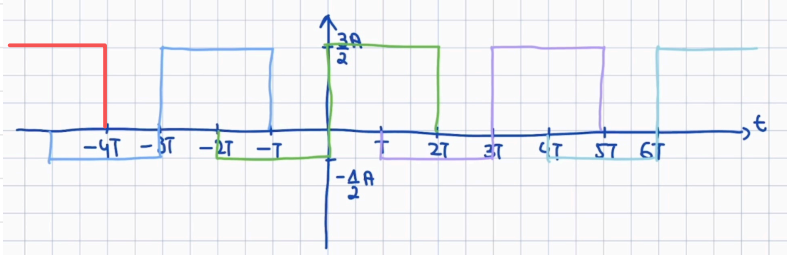


b) [HA]:  $v_2(t) = \delta_{2T}(t) * u_2(t)$  periodische Überlagerung von  $u_2(t)$  mit  $T_p = 2T$

c)  $v_3(t) = \delta_{3T}(t) * u_3(t)$  periodische Überlagerung von  $u_3(t)$  mit  $T_p = 3T$

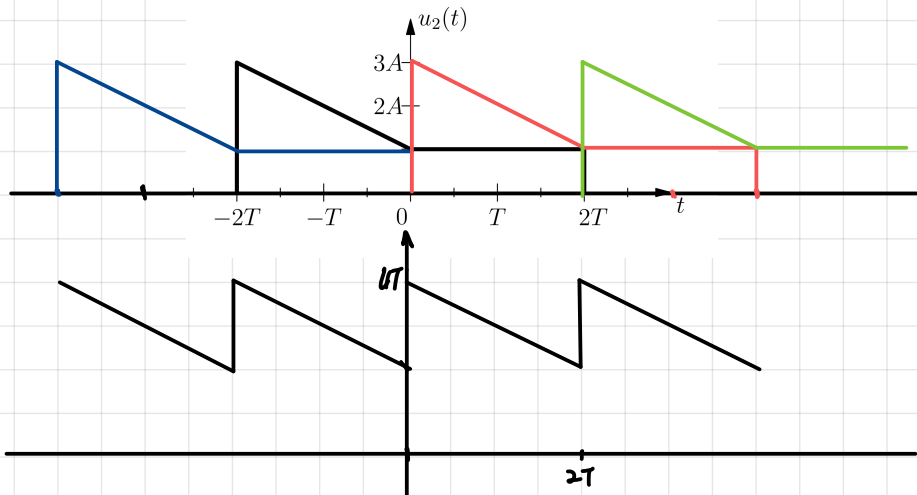


c)  $v_3(t) = \delta_{3T}(t) * u_3(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_3(t - k \cdot 3T)$

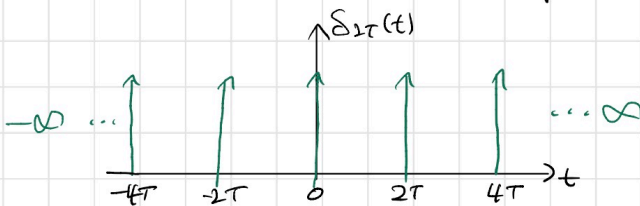


b.)  $v_2(t) = \delta_{2T}(t) * u_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_2(t - k \cdot 2T)$

$= \dots + u_2(t + 4T) + u_2(t + 2T) + u_2(t) + u_2(t - 2T) + \dots$



◦ Delta-kamm : Deltaimpulse mit Perioden



$\delta_{T_p}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k \cdot T_p)$   
Periodendauer

$\delta_{2T}(t) = \dots + \delta(t + 4T) + \delta(t + 2T) + \delta(t) + \delta(t - 2T) + \delta(t - 4T) + \dots$

✱ Faltung mit Deltaimpuls

Eigenschaften:  $\begin{cases} \delta(t) * u(t) = u(t) \\ \delta(t - T) * u(t) = u(t - T) \end{cases}$

**2.2 Gib für die Signale  $v_1(t)$  und  $v_3(t)$  aus Aufgabe 2.1 Mittelwert, Leistung und Varianz an.**

	nicht periodisch	periodisch
Energie	$W_u = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)^2 dt$	$\rightarrow \infty$
Leistung	$P_u = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \int_x u(t)^2 dt$	$P_u = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} u_p(t)^2 dt$
Mittelwert	$m_u(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} u(t) dt$	$m_u = \frac{1}{T_p} \cdot \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} u_p(t) dt$
Varianz	$\sigma_u^2 = P_u - m_u^2$	$\sigma_u^2 = P_u - m_u^2$

Energiesignale: . endliche Gesamtenergie ( $\neq \infty$ )  
 . Leistung = 0

Leistungssignale: . Energie  $\rightarrow \infty$   
 . endliche Leistung ( $\neq \infty$ )

$$m_{v3} = \frac{1}{3T} \int_0^{3T} v_3(t) dt = \frac{1}{3T} \left[ \int_0^T \frac{3}{2} A dt + \int_T^{2T} A dt + \int_{2T}^{3T} -\frac{1}{2} A dt \right]$$

$$= \frac{2}{3} A$$

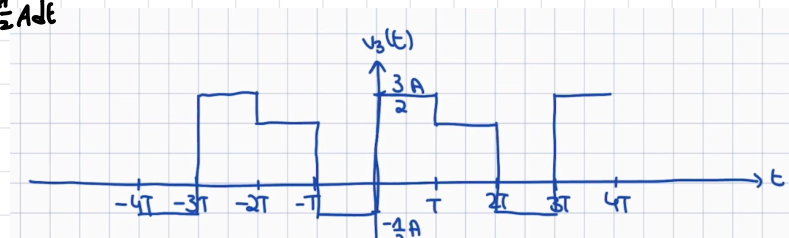
$$P_{v3} = \frac{1}{3T} \int_0^{3T} v_3^2(t) dt$$

$$= \frac{1}{3T} \left( \int_0^T \left(\frac{3}{2} A\right)^2 dt + \int_T^{2T} A^2 dt + \int_{2T}^{3T} \left(-\frac{1}{2} A\right)^2 dt \right)$$

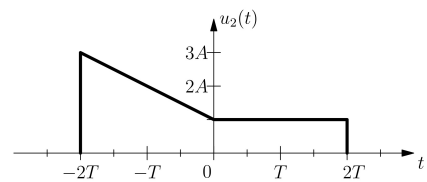
$$= \frac{1}{3T} \left[ \frac{9}{4} A^2 \cdot t \Big|_0^T + A^2 t \Big|_T^{2T} + \frac{1}{4} A^2 t \Big|_{2T}^{3T} \right]$$

$$= \frac{1}{3T} \left[ \frac{9}{4} A^2 T + A^2 \cdot T + \frac{1}{4} A^2 T \right]$$

$$= \frac{7}{6} A^2$$



$$\sigma_{v3}^2 = P_{v3} - m_{v3}^2 = \frac{7}{6} A^2 - \left(\frac{2}{3} A\right)^2 = \frac{13}{18} A^2$$



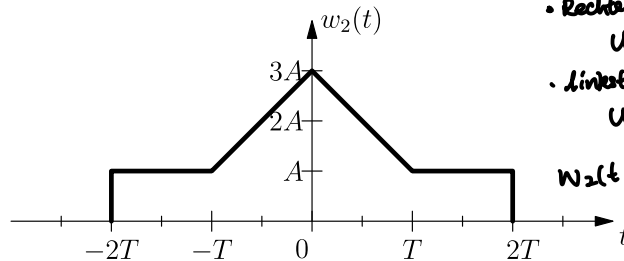
• Rechter Teil:

$$u_2(2(t-T))$$

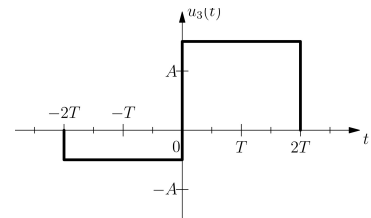
• Linker Teil:

$$u_2(2(-t+T))$$

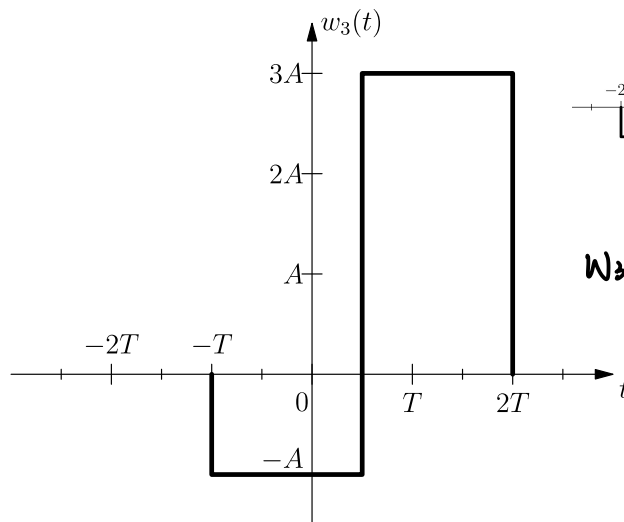
$$w_2(t) = u_2(2(t-T)) + u_2(2(-t+T))$$



c)

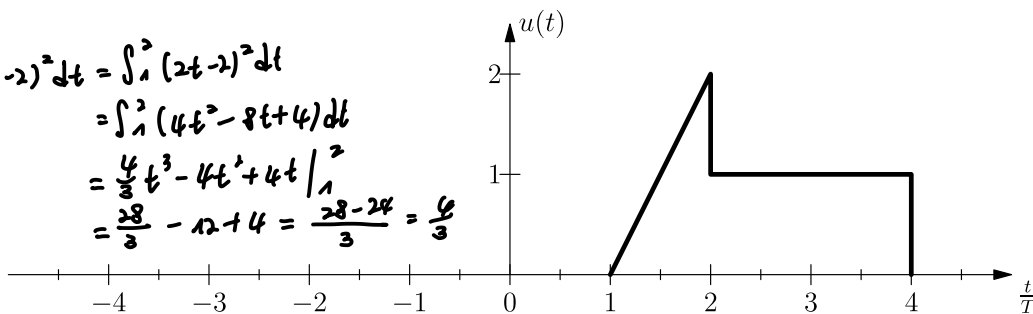


$$w_3(t) = 2u_3\left(\frac{4}{3}\left(t - \frac{1}{2}T\right)\right)$$



**4 [AK]:** Gegeben sei das folgende zeitkontinuierliche Signal  $u(t)$ .

$$\begin{aligned} \int_{-T}^{2T} \left(\frac{2}{T}t - 2\right)^2 dt &= \int_1^2 (2t - 2)^2 dt \\ &= \int_1^2 (4t^2 - 8t + 4) dt \\ &= \left. \frac{4}{3}t^3 - 4t^2 + 4t \right|_1^2 \\ &= \frac{28}{3} - 12 + 4 = \frac{28-24}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$



Das Signal werde mit der Periodendauer  $16T$  periodisch fortgesetzt. Bestimme die Leistung des periodischen Signals für  $T = 1$

$$u_t = \Pi_{2T}(t-3T) + \left(\frac{2}{T}t - 2\right)\Pi_T\left(t - \frac{3}{2}T\right)$$

$$P_u = \frac{1}{16T} \int_0^{16T} u^2(t) dt = \frac{1}{16T} \left[ \int_{-T}^{2T} \left(\frac{2}{T}t - 2\right)^2 dt + \int_{2T}^{4T} dt \right]$$

$$(T=1) = \frac{1}{16} \left[ \frac{4}{3} + 2 \right] = \frac{1}{8} \cdot \frac{10}{3} = \frac{5}{24}$$

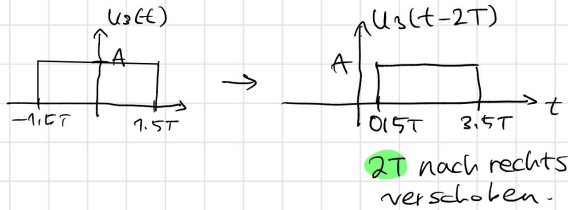
## Extra Aufgaben zum Üben

1. Skizziere  $2\mathcal{T}(t-1)$

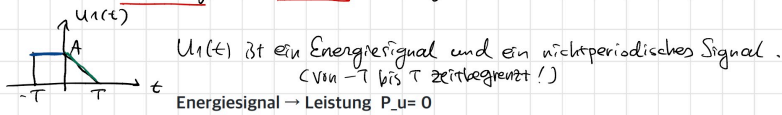


2. geg.:  $U_3(t) = A \cdot \Pi_{2T}(t)$   
Skizziere  $\delta(t-2T) * U_3(t)$

$$\delta(t-2T) * U_3(t) = U_3(t-2T)$$



3. Gib Leistung und Energie des Signals  $U_1(t)$



$$U_1(t) = A \Pi_T(t + \frac{T}{2}) + (-\frac{A}{T}t + A) \Pi_T(t - \frac{T}{2})$$

$$\begin{aligned} \underset{\text{Energie}}{W_u} &= \int_{-\infty}^{+\infty} U_1(t)^2 dt = \int_{-T}^0 A^2 dt + \int_0^T \left( -\frac{A}{T}t + A \right)^2 dt \\ &= A^2 T + \int_0^T \left( A^2 - \frac{2A^2}{T}t + \frac{A^2}{T^2}t^2 \right) dt \\ &= A^2 T + \left[ A^2 t - \frac{A^2}{T}t^2 + \frac{A^2}{3T^2}t^3 \right]_0^T \\ &= A^2 T + \left( A^2 T - \frac{A^2}{T}T^2 + \frac{A^2}{3T^2}T^3 \right) \\ &= A^2 T + \frac{A^2}{3}T \\ &= \frac{4A^2}{3}T \end{aligned}$$

1. Welche der folgenden Signale sind Leistungssignale?

- ☒ Exponentialfunktion  $e^x$
- ☐ Rechtecksignale
- ☒ Periodische Signale

2. Die Energie von Leistungssignalen ist unendlich.

- ☒ Wahr
- ☐ Falsch

3. Energiesignale besitzen eine unendliche Energie.

- ☒ Falsch
- ☐ Wahr

4. Der Deltakamm ist eine (A) Fortsetzung von Deltaimpulsen. Welches Wort passt zu A?

- ☐ gleichmäßige
- ☐ stetige
- ☒ periodische

5. Ein Sinussignal ist...

- ☐ Ein Energiesignal
- ☒ Ein Leistungssignal
- ☒ Ein Periodisches Signal