3. Fourierreihendarstellung periodischer Signale

Ziel:

- Beschreibung zeitkontinuierlicher oder diskreter Signale in anderen Darstellungsformen
  - *bestimmte Eigenschaften des Zeitsignals treten klarer hervor*
- wichtigste Darstellung liefert die Fouriertransformation

Sonderfall der Fouriertransformation für zeitperiodische Signale ist die *Fourierreihenentwicklung*

3. Fourierreihendarstellung periodischer Signale

目标：
• 使用其他表示形式描述时域连续或离散信号

Ziel:

时域信号的某些特性更加清晰地呈现
• 最重要的表示形式是傅里叶变换
傅里叶变换的一种特殊情况是用于时域周期信号的傅里叶级数展开。

• Beschreibung zeitkontinuierlicher oder diskreter Signale in anderen Darstellungsformen

- *bestimmte Eigenschaften des Zeitsignals treten klarer hervor*

• wichtigste Darstellung liefert die Fouriertransformation

Sonderfall der Fouriertransformation für zeitperiodische Signale ist die *Fourierreihenentwicklung*

Fourierreihenentwicklung

周期信号，其周期为 T，可以用傅里叶级数描述。
– 由正弦信号叠加而成
包括直流分量，基波（基频为 f_P = ω_P/2π = 1/T），以及频率为 k·f_P（k = 2, 3, ...）的谐波。
频率为 k·f_P（k = 1, 2, 3 ...）的信号也被称为谐波。

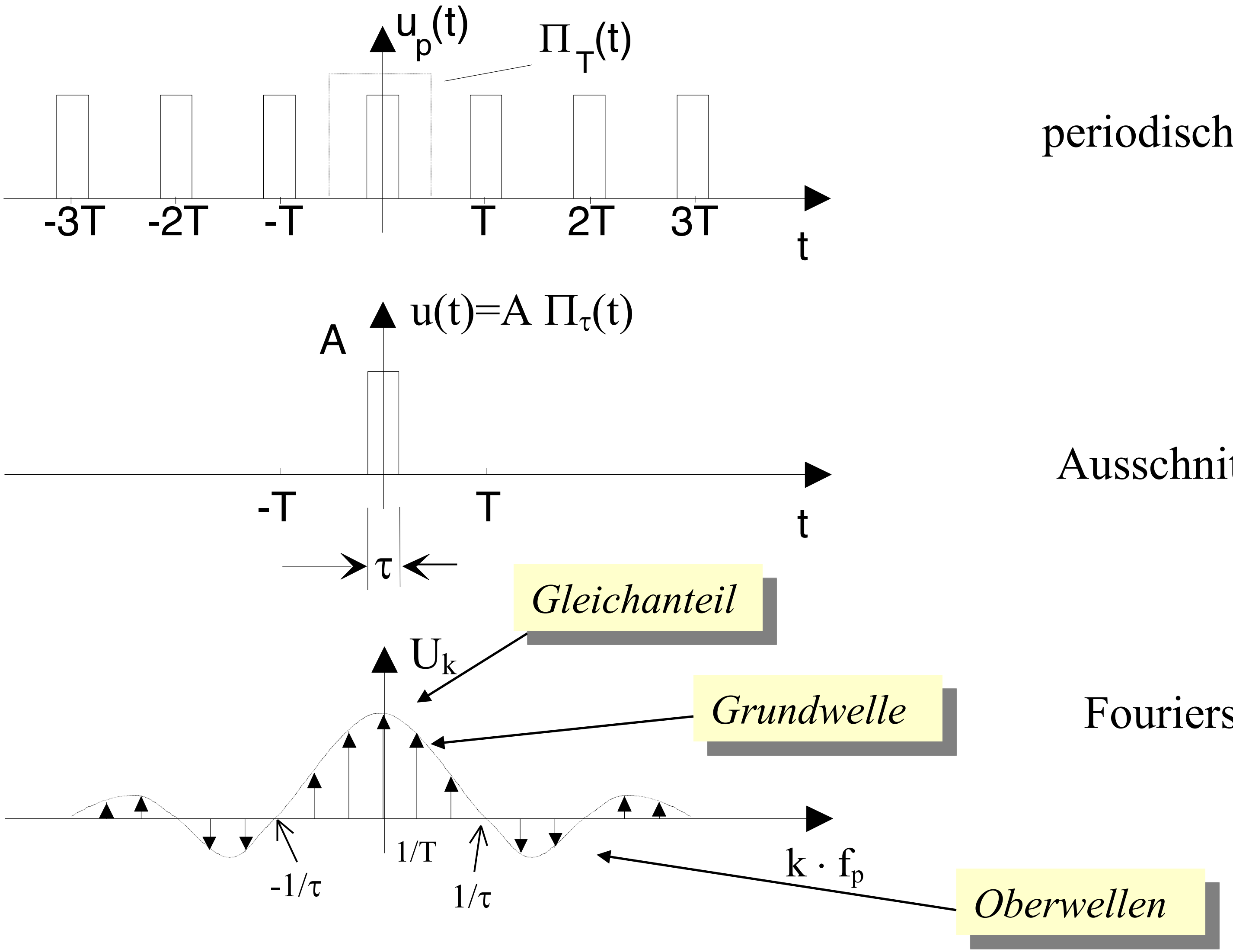
Periodische Signale mit Periodizitätsintervall T können durch Fourierreihen beschrieben werden

- Überlagerung von sinusförmigen Signalen

Gleichanteil, Grundwelle mit Grundfrequenz $f_P = \omega_P/2\pi = 1/T$ und Oberwellen k, k = 2, 3, ..., mit der Frequenz $k \cdot f_P$

Signale mit der Frequenz $k \cdot f_P$ (k = 1, 2, 3 ...) werden auch als Harmonische bezeichnet.

3.1 Fourierkoeffizientenspekrum



periodisches Signal

Ausschnitt Länge T

Fourierspektrum

3.1 Fourierkoeffizientenspekrum

3.1 傅里叶系数谱

傅里叶级数表示允许:
- 给出信号中包含的正弦频率成分及其权重的说明
- 通过有限数量的正弦波振荡进行周期信号的近似表示
- 在给定的区间内用正弦波振荡来表示任意信号。

Die Fourierreihendarstellung erlaubt

- die Angabe der in dem Signal enthaltenen sinusförmigen Frequenzanteile und ihrer Gewichte
- eine näherungsweise Darstellung von periodischen Signalen durch eine endliche Zahl von sinusförmigen Schwingungen
- die Darstellung beliebiger Signale durch Sinusschwingungen in einem vorgegebenen Intervall.

3.1 Fourierkoeffizientenspekrum

Es sei

periodisches, kontinuierliches Signal

$$u_P(t) = u_P(t+T) \tag{3.1}$$

$u_P(t)$ muß eine beschränkte, stückweise stetige Funktion sein.

Dann gilt die komplexe Fourierreihenentwicklung:

Kreisfrequenz d. Grundwelle

$$u_P(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k \cdot e^{jk\omega_P t} \qquad \omega_P = \frac{2\pi}{T} \tag{3.2}$$

die wir auch die *Synthesegleichung* nennen.

Diskretes Koeffizientenspktrum

3.1 Fourierkoeffizientenspekrum

$$u_P(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k \cdot e^{jk\omega_P t} \qquad \omega_P = \frac{2\pi}{T}$$

Die *Fourierkoeffizienten* U_k ergeben sich aus der *Analysegleichung* zu

$$U_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \cdot e^{-jk\omega_P t} dt \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{3.3}$$

Hier ist u(t) der *Grundbereich* des periodischen Signals:

$$u(t) = u_P(t) \cdot \prod\nolimits_T(t) \tag{3.4}$$

3.1 Fourierkoeffizientenspekrum

Beweis:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k \cdot e^{jk\omega_P t} \qquad \Big| \cdot e^{-jl\omega_P t}$$

$$u(t)\cdot e^{-jl\omega_P t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k \cdot e^{j(k-l)\omega_P t}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\cdot e^{-jl\omega_P t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} e^{j(k-l)\omega_P t} dt}_{=\begin{cases} 0 & k \neq l \\ T & k = l \end{cases}}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\cdot e^{-jl\omega_P t} dt = U_l \cdot T$$

$$U_l = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} u(t)\cdot e^{-jl\omega_P t} dt$$

Beispiel: Rechteckpuls(folge)

Es sei

$$u_p(t) = A \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi_\tau(t - kT)$$

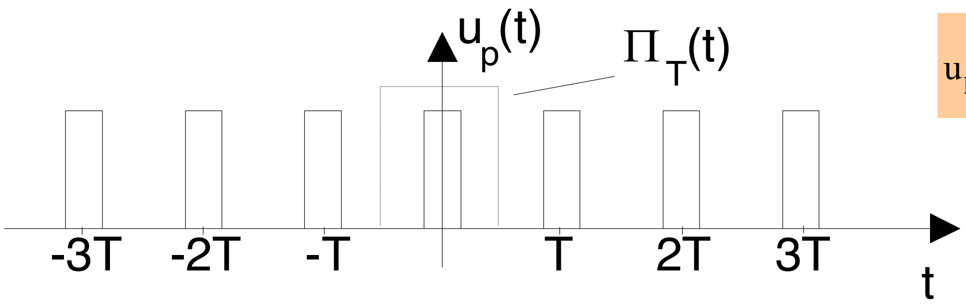
Die Grundfrequenz ist $f_p = 1/T$, ein Impuls hat die Breite τ.

Die <u>Fourierkoeffizienten</u> U_k ergeben sich zu:

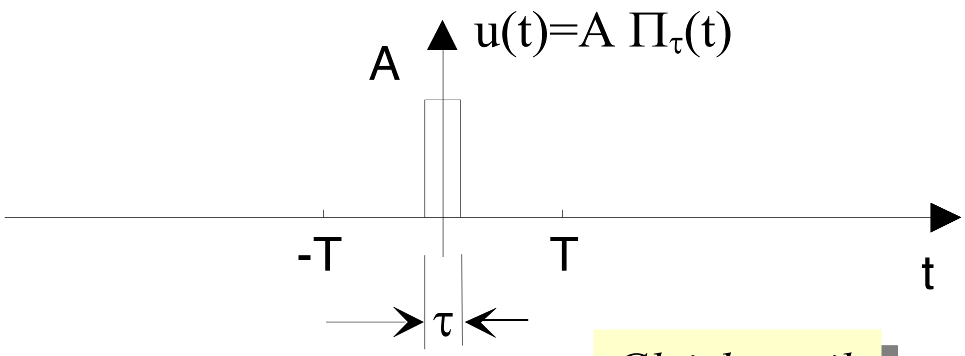
$$U_k = \frac{\tau A}{T} \mathrm{si}\left(k \frac{\omega \cdot \tau}{2}\right) = \frac{\tau A}{T} \mathrm{si}\left(k \frac{\tau \cdot \pi}{T}\right)$$

Linienspektrum

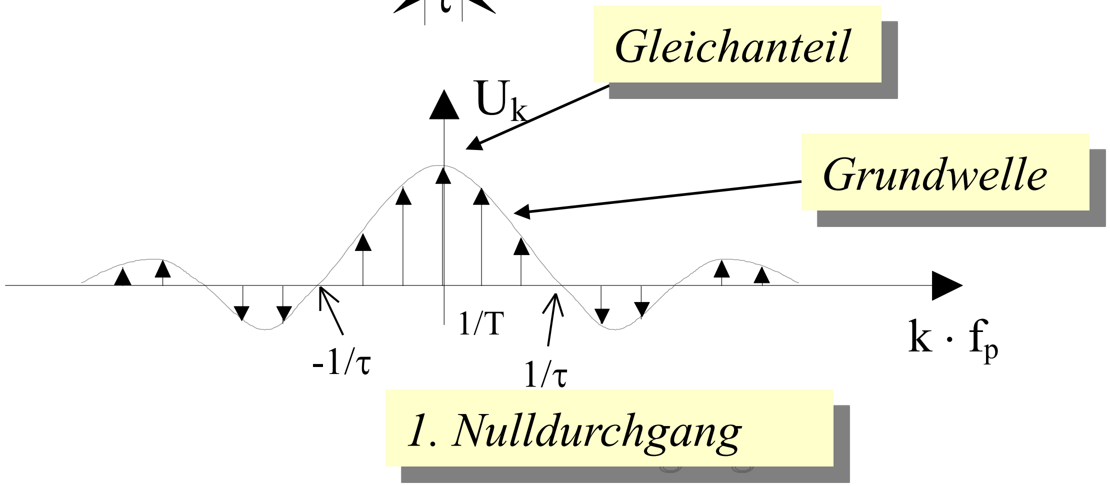
$$u_p(t) = A \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi_\tau(t-kT)$$



periodisches Signal



Ausschnitt Länge T



Fourierspektrum

3.1 Fourierkoeffizientenspekrum

Darstellung eines zeitperiodisches Signal durch seine Fourierkoeffizienten (eine abzählbare Menge diskreter Zahlen)

- zusätzliche Einsichten in die Eigenschaften eines Signals.

Die Fourierkoeffizienten U_k sind i. allg. komplex, ihre Darstellung über k bzw. $\omega = k\omega_P$ liefert das *Fourierkoeffizientenspektrum*

Fourier系数谱

通过其傅立叶系数（一组可数的离散数字）来表示时间周期信号,
- 提供了对信号特性的额外洞察。
傅里叶系数U通常是复数，它们通过k或ω = kw的表示提供了傅立叶系数谱。

$$\boxed{U_k = R_k + jX_k = \left|U_k\right| \cdot e^{j\varphi_k}} \qquad (3.6)$$

3.1 Fourierkoeffizientenspekrum

Amplitudenspektrum

幅度谱和相位谱

$$\left|U_k\right| = \sqrt{R^2{}_k + X^2{}_k}$$

在“Amplitudenspektrum”（幅度谱）部分，$|U_k|$ 表示第 k 个傅立叶系数的幅度，可以通过计算 R_k（实部的平方）和 X_k（虚部的平方）的和的平方根得到，数学公式为：$|U_k| = \sqrt{R_k^2 + X_k^2}$，这里 R_k 和 X_k 分别是傅立叶系数在复平面上的实部和虚部。

$$\varphi_k = \arctan(\mathrm{Im}\{U_k\}/\mathrm{Re}\{U_k\})$$

在“Phasenspektrum”（相位谱）部分，ϕ_k 是第 k 个傅立叶系数的相位角，可以通过 $\arg(U_k)$ 计算，其中 U_k 是复数形式的傅立叶系数。如果 U_k 的实部 R_k 大于零，那么相位角 ϕ_k 是 $\arctan(X_k/R_k)$。如果 R_k 小于零，相位角是 $\arctan(X_k/R_k)+\pi$。如果 R_k 等于零，那么相位角取决于 X_k 的符号，如果 X_k 大于零，相位角是 $\pi/2$，如果 X_k 小于零，相位角是 $-\pi/2$。

Phasenspektrum

$$\varphi_k = \arg(U_k) = \arctan\frac{X_k}{R_k} + \begin{cases} 0 & \text{für } R_k > 0 \\ \pi & \text{für } R_k < 0 \end{cases}$$

$$\varphi_k = \begin{cases} \pi/2 & \text{für } R_k = 0 \text{ und } X_k > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } R_k = 0 \text{ und } X_k < 0 \end{cases}$$

通过添加π到反正切的（主）值，是因为反正切只提供了介于-π/2和π/2之间的值，即只提供了长度为π的一个区间，而Uk的相位角可以在0到2π的整个范围内。

Addition von π zum (Haupt-)Wert des arcustangens ergibt sich daraus, dass dieser nur Werte zwischen -π/2 und π/2, d.h. nur aus einem Intervall der Länge π liefert, der Phasenwinkel von U_k aber im gesamten Bereich von 0 bis 2π liegen kann.

3.1 Fourierkoeffizientenspekrum

$$U_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\cdot e^{-jk\omega_P t}dt \qquad k = 0,\pm1,\pm2,\dots$$

公式 $U_{-k} = U_k^* = R_k - jX_k$ 说明，对于一个实数信号 $u(t)$，其傅立叶变换的负频率分量 U_{-k} 等于正频率分量 U_k 的共轭复数。在这里，R_k 是 U_k 的实部，X_k 是 U_k 的虚部。共轭复数的意思是，实部不变，虚部的符号取反。

在信号处理中，这个性质非常重要，因为它告诉我们对于实数信号，其傅立叶变换是共轭对称的。这意味着我们只需要知道一半的频谱信息（比如正频率部分），就可以完整地重构整个频谱。

Aus Gl. (3.3) folgt auch

$$U_{-k} = U_k^* = R_k - jX_k \qquad (3.9)$$

wenn u(t) ein reelles Signal ist.

一个偶数（even）信号只包含余弦项（cosine terms），而一个奇数（odd）信号只包含正弦项（sine terms）。在数学中，一个偶数信号是关于时间原点对称的，而一个奇数信号是关于时间原点反对称的。

Es gilt weiterhin, dass ein gerades (ungerades) Signal nur aus cos-Termen (sin-Termen) besteht.

$$U_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\cdot e^{-jk\omega_P t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\cdot\left[\cos(-k\omega_P t) - j\sin(-k\omega_P t)\right]dt$$

3.1 Fourierkoeffizientenspekrum

Beispiele

$U_0 = 3,\ U_k = 0$ für $k \neq 0$ $\Rightarrow u_P(t) = 3$

$U_0 = 3,\ U_{-1} = U_1 = 0{,}5$ $\Rightarrow u_P(t) = 3 + \cos(\omega_P t)$

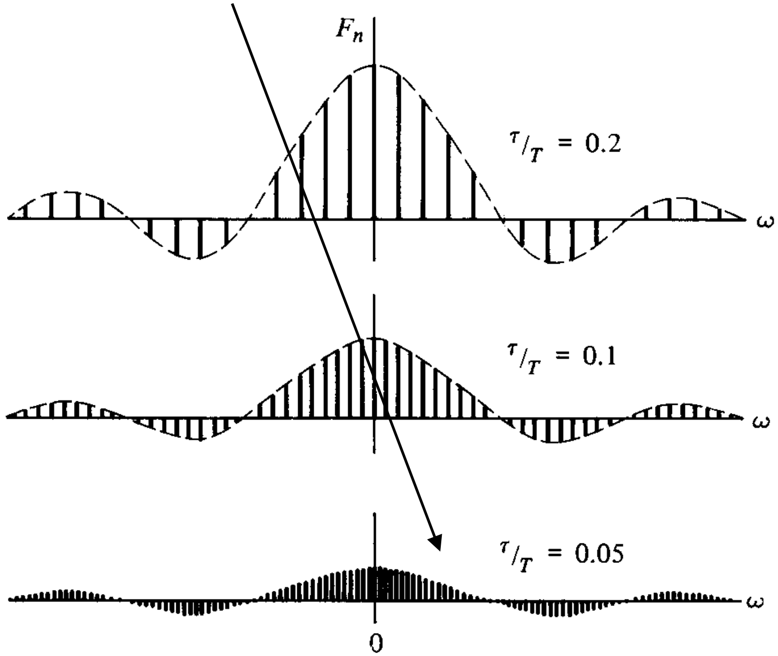
$U_0 = 3,\ U_{-1} = 1 - j0{,}5\ ;\ U_1 = 1 + j0{,}5$

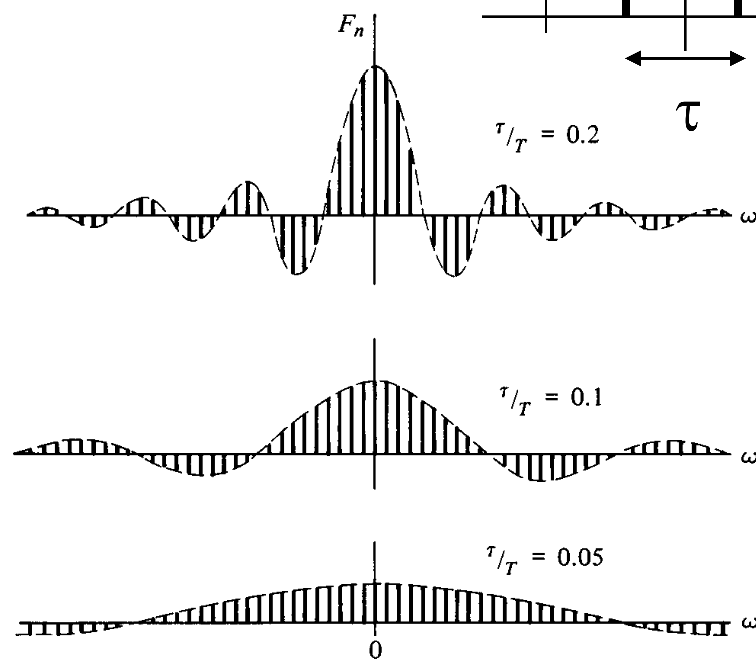
$\Rightarrow u_P(t) = 3 + 2\cos(\omega_P t) - \sin(\omega_P t)$

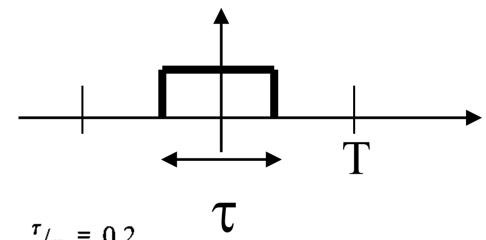
Frage: Welcher Parameter wurde in dem folgenden Bild geändert?

$$U_k = \frac{\tau A}{T}\,\mathrm{si}\left(k\frac{\omega\cdot\tau}{2}\right) = \frac{\tau A}{T}\,\mathrm{si}\left(k\frac{\tau\cdot\pi}{T}\right)$$

für $T \rightarrow \infty$ ein kontinuierliches Spektrum



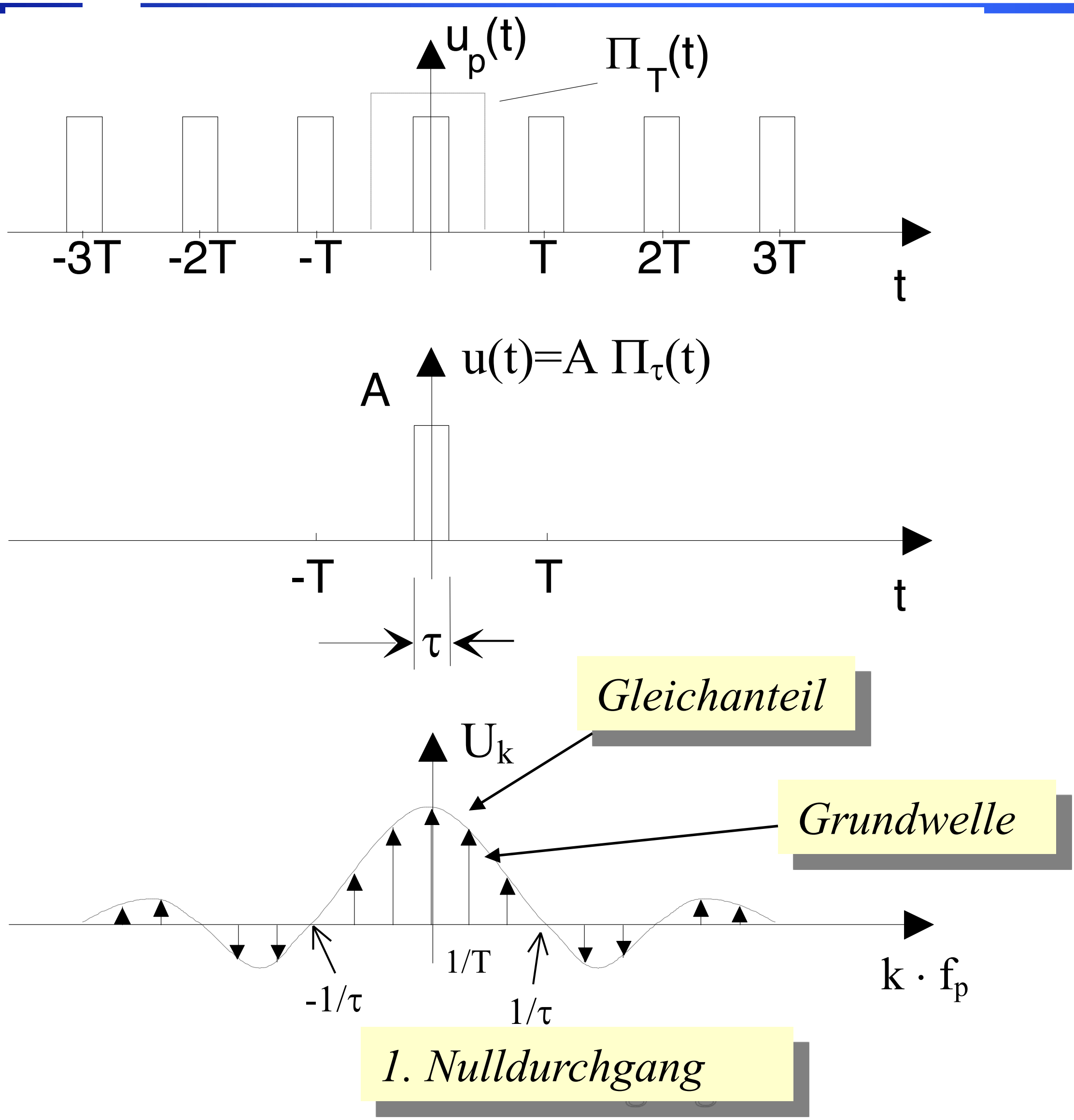




T wird größer, τ const.

τ wird kleiner, T const.

Linienspektrum



periodisches Signal

Ausschnitt Länge T

Fourierspektrum

Beispiel: Deltakamm

Der Deltakamm ist eine periodische Funktion und daher als Fourierreihe darstellbar.

$$\begin{aligned}\delta_T(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k e^{jk\omega_P t}\end{aligned} \qquad (3.10)$$

Die Fourierkoeffizienten Uk ergeben sich zu

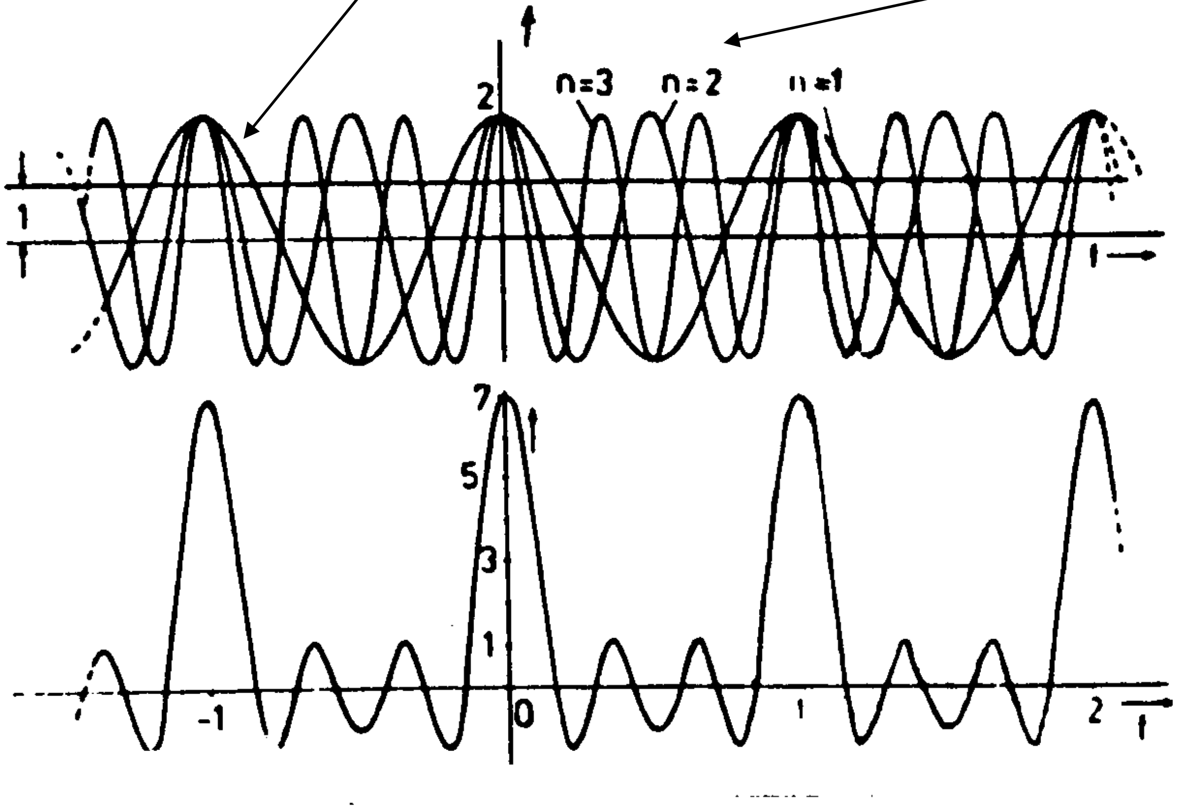
$$U_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_P t} dt = \frac{1}{T} \qquad (3.11)$$

daraus folgt

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum e^{jk\omega_P t} = \frac{1}{T}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\omega_P t)\right] \qquad (3.12)$$

Fourierreihen-Approximation des Deltakamms

Grundwelle und die ersten beiden Oberwellen (n=k=2, 3)

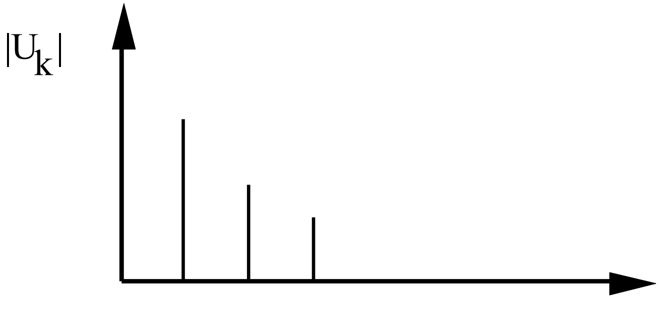


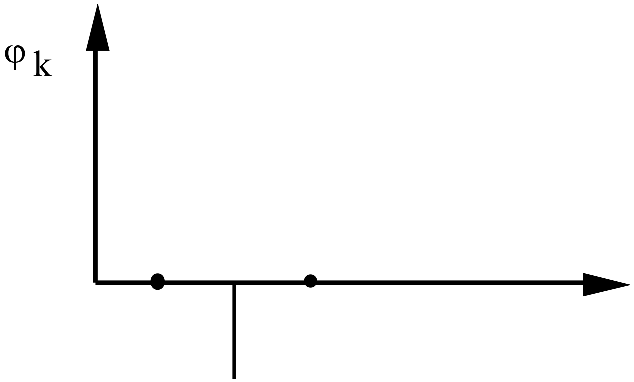
Beispiel: Phasenverzerrung

Gegeben sei ein Signal $u_1(t)$:

$$u_1(t) = \cos(\omega_1 t) - \frac{1}{3}\cos(3\omega_1 t) + \frac{1}{5}\cos(5\omega_1 t)$$

Sein Phasenspektrum hat die Werte 0, -π, 0.





$$\left|U_k\right| = \sqrt{R^2{}_k + X^2{}_k}$$

$$\varphi_k = \arctan(\mathrm{Im}\{U_k\}/\mathrm{Re}\{U_k\})$$

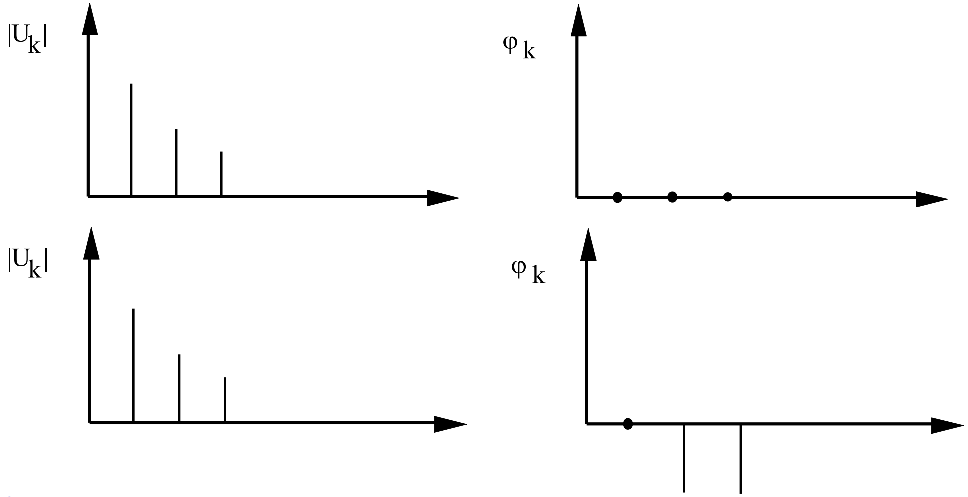
arctan(0)=0

Beispiel: Phasenverzerrung

Wir vergleichen mit *zwei verzerrten Versionen* $u_2(t)$ und $u_3(t)$, bei denen der Amplitudengang erhalten bleibt, der Phasengang aber die Werte 0, 0, 0 bzw. 0, -π, -π erhält:

$$u_2(t) = \cos(\omega_1 t) + \frac{1}{3}\cos(3\omega_1 t) + \frac{1}{5}\cos(5\omega_1 t)$$

$$u_3(t) = \cos(\omega_1 t) - \frac{1}{3}\cos(3\omega_1 t) - \frac{1}{5}\cos(5\omega_1 t)$$



Beispiel: Phasenverzerrung

Beispiel einer Phasenverzerrung

a) $\cos(\omega t) - \cos(3\omega t)/3 + \cos(5\omega t)/5$

b) $\cos(\omega t) + \cos(3\omega t)/3 + \cos(5\omega t)/5$

c) $\cos(\omega t) - \cos(3\omega t)/3 - \cos(5\omega t)/5$

对于数据传输来说很重要，但对于声音播放来说几乎无关紧要，因为至少在语音信号中，内耳主要只评估振幅谱。

für Datenübertragung schwerwiegend, für eine akustische Wiedergabe jedoch fast irrelevant, da das Innenohr zumindest bei Sprachsignalen im wesentlichen nur das Amplitudenspektrum auswertet.

3.2. Parseval-Theorem

Parseval 定理指出，一个周期性信号的归一化功率可以表示为其傅里叶系数的模的平方之和。

Die normierte Leistung eines zeitperiodischen Signals kann als Summe der Betragsquadrate der Fourierkoeffizenten angegeben werden

$$P_{u_P} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_P^{\,2}(t)\,dt = \sum_{\forall k} \left| U_k \right|^2 \qquad (3.13)$$

Beweis:

$$P_{u_P} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u_P^{\,2}(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u_P(t)\sum_{\forall k} U_k \cdot e^{jk\omega_P t}\,dt$$

$$P_{u_P} = \sum_{\forall k} U_k \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u_P(t)\cdot e^{jk\omega_P t}\,dt = \sum_{\forall k} U_k \cdot U_k^*$$

$$P_{u_P} = \sum_{\forall k} \left|U_k\right|^2$$

(3.14)

3.4. Approximation periodischer Zeitsignale

$$u_P(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k \cdot e^{jk\omega_P t} \qquad \omega_P = \frac{2\pi}{T}$$

Periodische Signale $u_p(t)$ lassen sich mit Hilfe einer endlichen Fourierreihe näherungsweise darstellen:

$$\hat{u}_P(t) = \sum_{k=-N}^{N} U_k e^{jk\omega_P t} \qquad \text{mit } \omega_P = \frac{2\pi}{T} \qquad (3.15)$$

3.4. Approximation periodischer Zeitsignale

$$u_P(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k \cdot e^{jk\omega_P t} \qquad \omega_P = \frac{2\pi}{T}$$

$$\hat{u}_P(t) = \sum_{k=-N}^{N} U_k e^{jk\omega_P t}$$

Das Fehlersignal ist auch periodisch und hat eine Fehlerleistung (=mittlerer quadratischer Fehler)

$$e_P(t) = u_P(t) - \hat{u}_P(t)$$

$$P_{\text{Fehlerleistung}} = \frac{1}{T}\int_T e_P^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_T \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k e^{jk\omega_P t} - \sum_{k=-N}^{N} U_k e^{jk\omega_P t} \right\}^2 dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_T \left\{ \sum_{|k|>N} U_k e^{jk\omega_P t} \right\}^2 dt = \frac{1}{T}\int_T \sum_{|k|>N} \sum_{|l|>N} U_k e^{jk\omega_P t} U_l e^{jl\omega_P t} dt \, ; \tag{3.16}$$

3.4. Approximation periodischer Zeitsignale

mit Vertauschung von Integration und Summation(en) und der Orthogonalitätseigenschaft

$$\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jk\omega t} e^{jl\omega t} dt = \begin{cases} T & k = -l \\ 0 & k \neq -l \end{cases} \qquad (3.17)$$

folgt

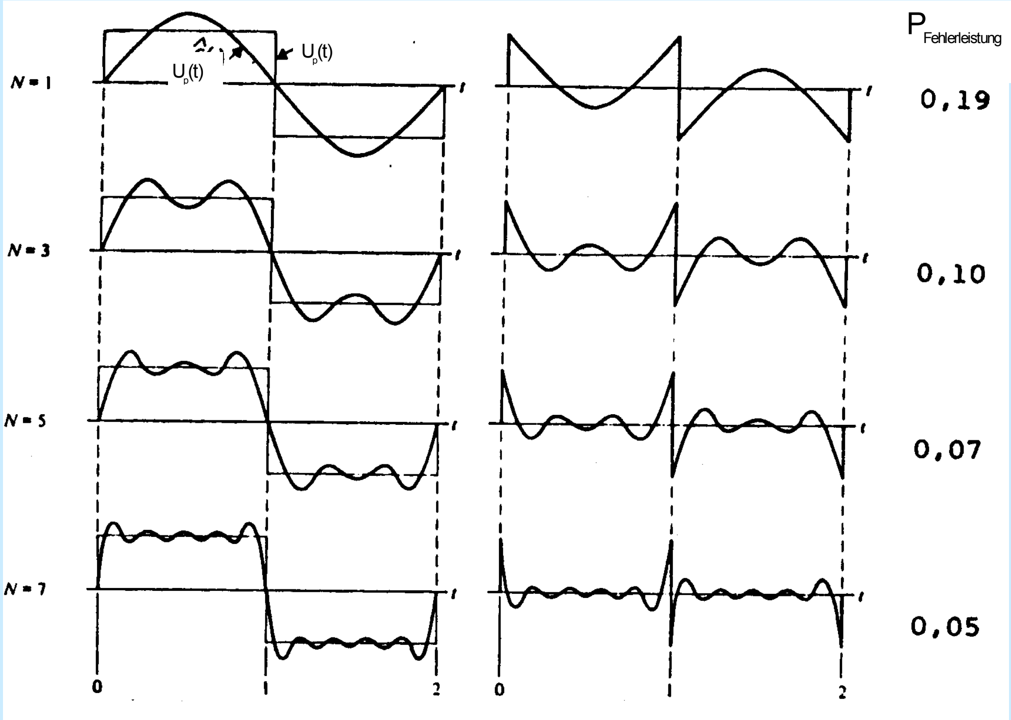
$$\boxed{P_{\text{Fehlerleistung}} = \sum_{|k|>N} \left(U_k U_k^* \right) = \sum_{|k|>N} \left| U_k \right|^2} \qquad (3.18)$$

因此，误差功率是未在近似中使用的傅里叶系数的模的平方之和。

Die Fehlerleistung ist also die Summe der Betragsquadrate der Fourierkoeffizienten, die in der Approximation nicht verwendet wurden.

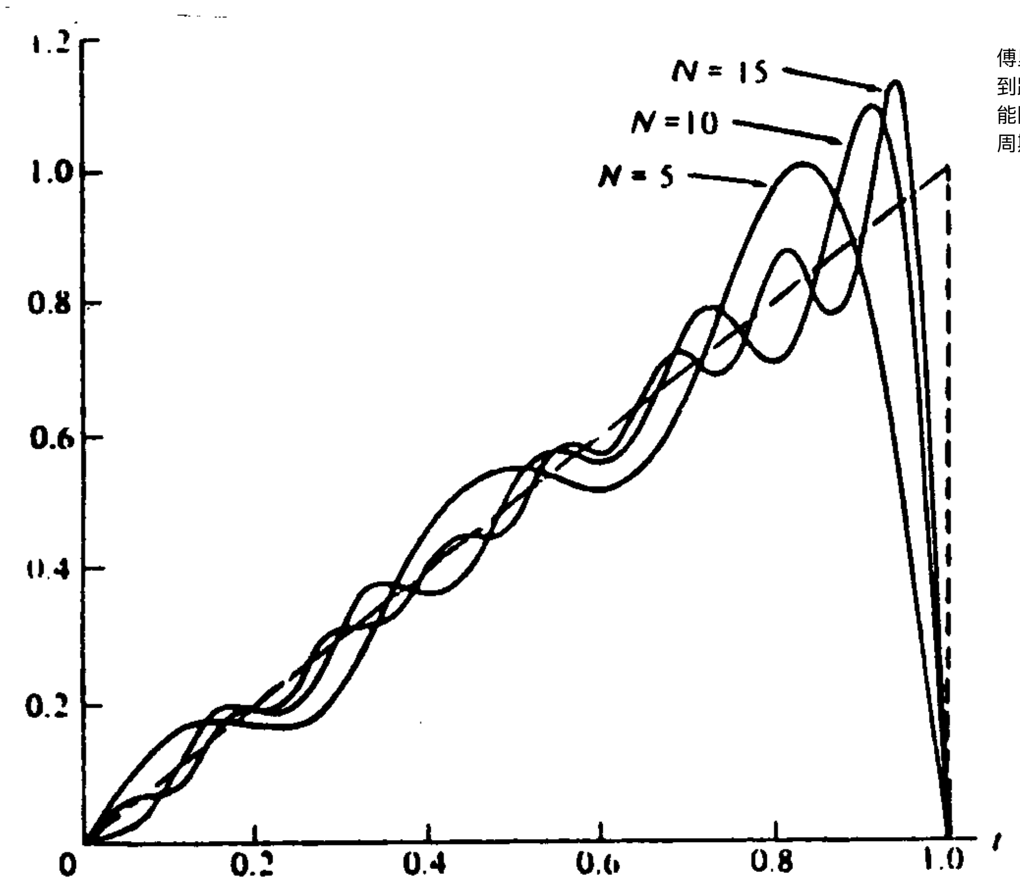
Beispiel: Approximation eines bipolaren Rechteckimpulses

mittels N = 1, 3, 5, 7 Sinusschwingungen



links: Approximation; Mitte: Fehlersignal; rechts: Fehlerleistung

Beispiel: Approximation eines Sägezahnverlaufs



傅里叶级数近似在平方意义上收敛。在具有有限大小跃变的位置，它收敛到跃变幅度的平均值，在跃变附近的区域会出现约 9% 的过冲，其高度不能随着 N 的增长而减小。
周期锯齿波形。

Die Fourierreihenapproximation konvergiert im <u>quadratischen</u> Sinne. An Stellen mit Sprüngen endlicher Größe konvergiert sie zu dem Mittelwert der Sprungamplitude, in der Umgebung des Sprunges kommt es zu einem Überschwingen von etwa 9%, dessen Höhe mit wachsendem N nicht verringert werden kann

Periodischer Sägezahnverlauf