8.

Beschreibung linearer Systeme durch Pol- und Nullstellen

8.

Beschreibung linearer Systeme durch Pol- und Nullstellen

线性系统的描述有时可以通过 Laplace 变换简化。
由此得到的极点-零点表示法使得对 LTI 系统的重要参数和特性进行几何直观的解释成为可能。此外，也可以轻松考虑线性系统的初始条件。

Die Beschreibung linearer Systeme kann manchmal durch die Laplace-Transformation vereinfacht werden

Die so erzielbare *Pol-Nullstellen-Darstellung* ermöglicht eine geometrisch-anschauliche Deutung wichtiger Parameter und Eigenschaften von LTI-Systemen ermöglicht.

Daneben lassen sich Anfangsbedingungen der linearen Systeme einfach berücksichtigen.

8.1. Herleitung der s-Übertragungsfunktion

Differentialgleichung für LTI System

$$\sum_{q=0}^{Q} a_q \frac{d^q y(t)}{dt^q} = \sum_{r=0}^{R} b_r \frac{d^r u(t)}{dt^r}$$

Mit der Eigenschaft der Laplacetransformation

$$\boxed{\frac{d^r u(t)}{dt^r} \leftrightarrow s^r\, U(s)}$$

für Eingangssignale ohne Singularität bei t = 0 geht die Differentialgleichung in eine algebraische Gleichung über.

8.1. Herleitung der s-Übertragungsfunktion

damit ergibt sich

$$\sum_{q=0}^{Q} a_q \frac{d^q y(t)}{dt^q} = \sum_{r=0}^{R} b_r \frac{d^r u(t)}{dt^r}$$

$$\sum_{q=0}^{Q} a_q s^q Y(s) = \sum_{r=0}^{R} b_r s^r U(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{r=0}^{R} b_r s^r}{\sum_{q=0}^{Q} a_q s^q}$$

u(t) → h(t) → y(t)

U(s) → H(s) → Y(s)

gebrochen rationale Übertragungsfunktion des linearen Systems

"非线性系统的破损合理传输函数，是复频率s的两个多项式的商。"

Quotient von zwei Polynomen der komplexen Frequenz s

8.2. Eigenschaften der s-Übertragungsfunktion

8.2.1 Pol-Nullstellen-Darstellung

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\sum_{r=0}^{R} b_r s^r}{\sum_{q=0}^{Q} a_q s^q}$$

Ein Polynom k-ter Ordnung hat *k* (i.a. komplexe) Nullstellen. Zähler- und Nennerpolynom der Übertragungsfunktion werden in Linearfaktoren zerlegt.

$$H(s)=H\cdot\frac{\prod_{r=1}^{R}(s-s_{0r})}{\prod_{q=1}^{Q}(s-s_{xq})}$$

Nullstellen s_{0r}

Pole s_{xq} der Übertragungsfunktion

8.2.1 Pol-Nullstellen-Darstellung

$$H(s) = H \cdot \frac{\prod_{r=1}^{R}(s - s_{0r})}{\prod_{q=1}^{Q}(s - s_{xq})}$$

Nullstellen s_{0r}

Pole s_{xq} der Übertragungsfunktion

H(s) wird bis auf einen Vorfaktor $H = b_R/a_Q$ durch die Pole (P) und Nullstellen (N) vollständig beschrieben (PN-Darstellung).

H(s)将被描述为由极点（P）和零点（N）完全确定的形式，即H(s) = bR/aQ的比例尺度除外（PN-表示）。

Beispiel: Unbelasteter RC-Tiefpaß (mit $\tau = RC$)

Aus der DGL

$$u(t) = \tau \cdot y'(t) + y(t)$$

folgt die Übertragungsfunktion in s:

$$\boxed{H(s) = \frac{1/\tau}{s + 1/\tau}}$$

Der Tiefpass hat also einen Pol $s_{x1} = -1/\tau$.

Physikalische Bedeutung

Die *Nullstellen* s_{0r} sind die komplexen Frequenzen s_0, für die das Übertragungssystem kein Ausgangssignal liefert, wenn ein Eingangssignal der Form

$$u(t) = e^{s_0 t}$$

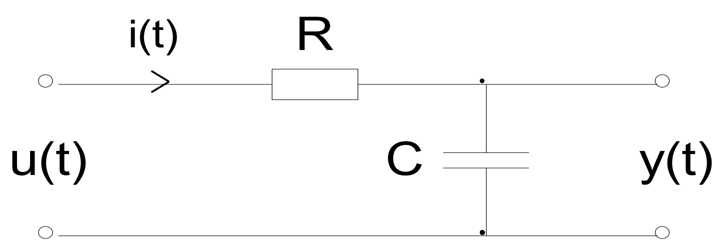
lange genug anliegt.

图片中的文字描述了零点 s_{0r} 的定义。它说零点是复频域中的那些频率 s_0，对于这些频率，当输入信号 $u(t) = e^{s_0 t}$ 长时间作用于传递系统时，系统不会产生输出信号。简而言之，零点是系统不响应的频率点。

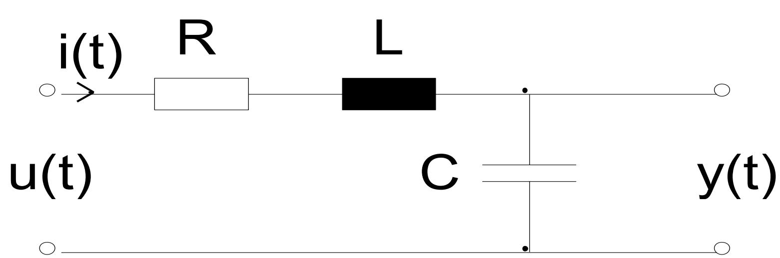
Physikalische Bedeutung

Die *Pole* s_{xq} sind die *<u>Eigenfrequenzen</u>* des Systems.

Eigenschwingungen entstehen, wenn das System geladene Energiespeicher besitzt und der Eingang kurzgeschlossen wird.



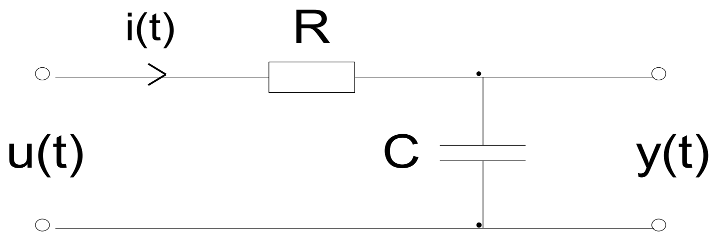
homogene Lösung der linearen Differentialgleichung



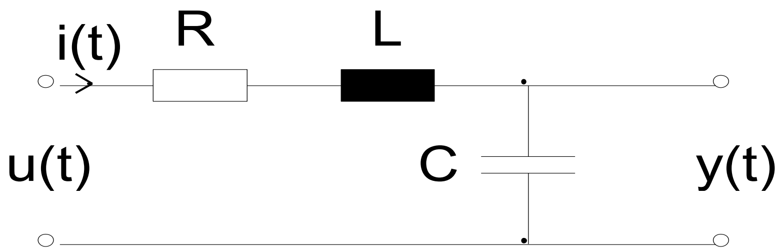
第二张图片讨论了极点 s_{xq} 的概念，它是系统的特征频率。极点与系统自由振荡的频率有关，当系统的输入端短路（即输入信号为零），只有能量存储元件（电容器或电感器）中的能量时，系统会发生自由振荡。这些振荡是微分方程的齐次解。

图上的电路示意图展示了一个简单的RC电路和RLC电路，它们分别有电阻（R）、电容（C）以及电阻（R）、电感（L）和电容（C）。这些电路元件可以存储能量（电容器存储电能，电感器存储磁能），并且在没有外部激励的情况下，它们能够在电路中产生振荡。这些振荡的频率就对应于系统的极点。

Physikalische Bedeutung



homogene Lösung der linearen Differentialgleichung



Pole

$$y_h(t) = k_1 e^{s_{x1} t} + k_2 e^{s_{x2} t} + \ldots + k_Q e^{s_{xQ} t}$$

是一个线性系统齐次解的一般形式，其中$k_1, k_2, \ldots, k_Q$是常数，$s_{x1}, s_{x2}, \ldots, s_{xQ}$是系统极点。

Die Pole in stabilen Systemen müssen negative Realteile haben !!!

为了系统稳定，每个极点的实部必须是负的。这是因为极点的实部决定了指数解的增长或衰减。如果极点的实部是正的，则对应的项会随着时间指数增长，导致系统输出不稳定；而负实部则意味着随着时间的推移，解将指数衰减，最终稳定到零，这是物理系统稳定性的一个重要条件。

Zusammenhang mit der Impulsantwort

第一张图片的标题“Zusammenhang mit der Impulsantwort”翻译为“与冲激响应的关系”。图片中提到，考虑一个只有极点的系统（没有零点），并且应用部分分式展开来表示其传递函数 $H(s)$。传递函数的形式如下：

$$H(s) = H \cdot \frac{\prod_{r=1}^{R} (s - s_{0r})}{\prod_{q=1}^{Q} (s - s_{xq})}$$

Wir betrachten dazu ein System, welches nur Pole hat ($R = 0$) und wenden eine Teilbruchzerlegung an.

$$H(s) = \frac{c_1}{s - s_{x1}} + \frac{c_2}{s - s_{x_2}} + \ldots + \frac{c_Q}{s - s_{x_Q}}$$

Wir setzen zur Vereinfachung voraus, dass alle Pole einfach sind, d.h. daß keine Pole übereinander liegen.

Zusammenhang mit der Impulsantwort

$$H(s) = \frac{c_1}{s - s_{x1}} + \frac{c_2}{s - s_{x_2}} + \ldots + \frac{c_Q}{s - s_{x_Q}}$$

mit

$$\boxed{e^{at} \cdot \sigma(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a}} \qquad \text{für } \mathrm{Re}\{s\} = \sigma > a$$

ergibt sich

$$\boxed{h(t) = \mathbf{L}^{-1}\left\{H(s)\right\} = c_1 e^{s_{x1}t} + c_2 e^{s_{x2}t} + \ldots c_Q e^{s_{xQ}t}}$$

für $t \geq 0$

Zusammenhang mit der Impulsantwort

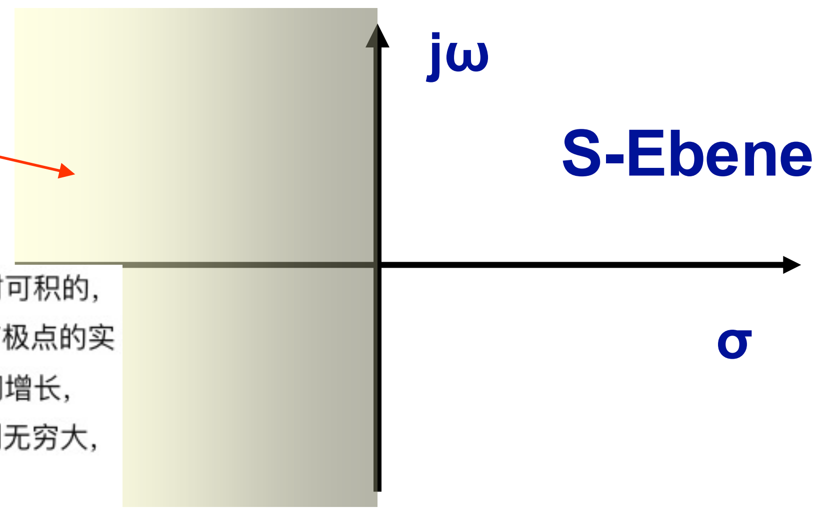
第二张图片进一步解释了传递函数的冲激响应 $h(t)$ 是由这些极点确定的一系列指数函数的叠加，其形式是：

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = c_1 e^{s_{x1}t} + c_2 e^{s_{x2}t} + \ldots c_Q e^{s_{xQ}t}$$

$$\text{für } t \geq 0$$

Überlagerung von Exponentialsignalen mit den komplexen Eigenfrequenzen (Polen) s_x

Die Impulsantwort eines stabilen Systems muss absolut integrierbar sein, daher müssen die Pole in der linken s-Halbebene liegen.

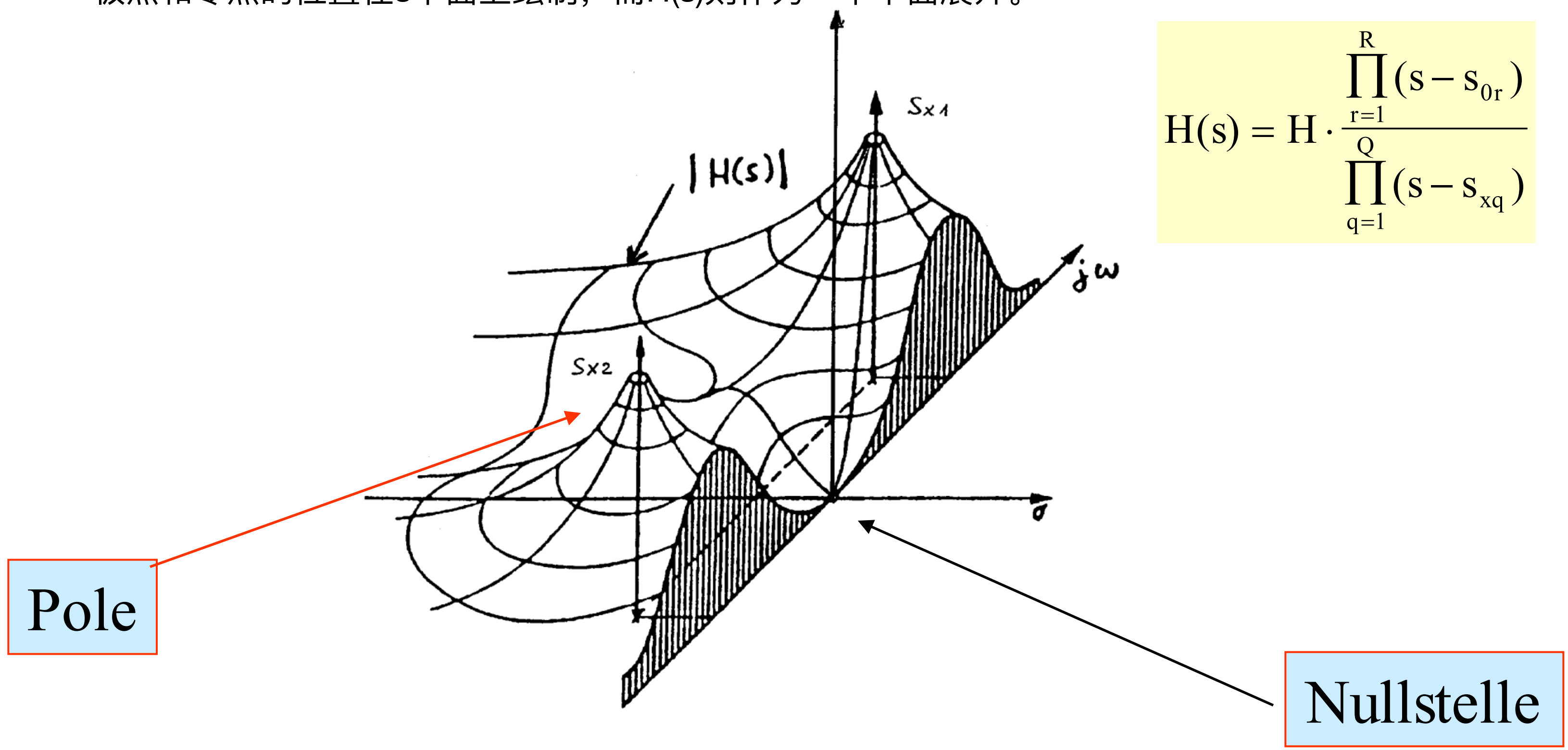


图片还指出，为了保证系统的稳定性，系统的冲激响应必须是绝对可积的，这意味着所有极点都必须位于 s 平面的左半部分。换句话说，所有极点的实部都必须是负的。这是因为只有当极点位于左半平面时，随着时间增长，$e^{s_x t}$ 形式的项才会衰减至零，从而确保系统输出随时间不会增长到无穷大，维持系统的稳定性。

8.2.2. Eigenschaften der Pole und Nullstellen

Die Lage von Polen und Nullstellen wird in der s-Ebene dargestellt, über die H(s) als Fläche aufgespannt ist.

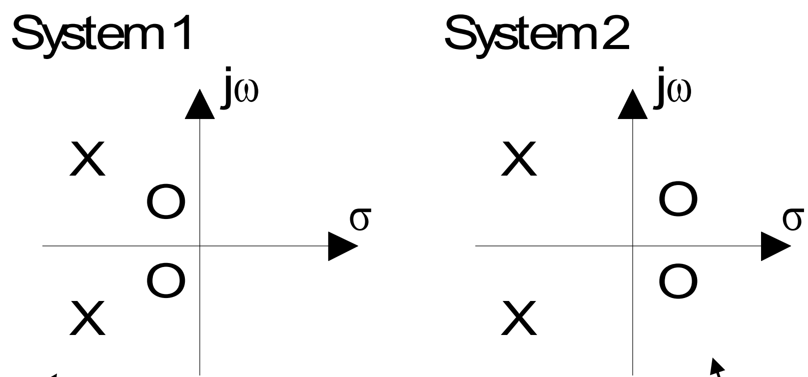
极点和零点的位置在s平面上绘制，而H(s)则作为一个平面展开。



$$H(s) = H \cdot \frac{\prod_{r=1}^{R}(s - s_{0r})}{\prod_{q=1}^{Q}(s - s_{xq})}$$

Vereinfachte Darstellung

第一张图片标题“Vereinfachte Darstellung”意味着“简化表示”。它展示了两个系统的极点（用“X”标记）和零点（用“O”标记）在s平面上的位置。文本指出，在稳定的系统中，所有极点都位于左半平面。这意味着为了系统的稳定，所有极点的实部必须是负的。这是因为极点的实部决定了系统响应的增长或衰减；负实部保证了随时间衰减，从而保证了系统稳定。同时，图中指出零点可以位于s平面的任何位置。



Pole

Nullstellen

bei stabilen Systemen nur in der linken Halbebene

überall

$$H(s) = H \cdot \frac{\prod_{r=1}^{R} (s - s_{0r})}{\prod_{q=1}^{Q} (s - s_{xq})}$$

其中，H是增益常数，s_{0r}是零点，s_{xq}是极点。

文本解释了为了保证当s趋向于无穷大时传递函数$H(s)$不变得无限大，零点的数量R必须小于或等于极点的数量Q。这意味着传递函数的分子的阶数不能超过分母的阶数，从而不会有s^{α}（对于任何正的α）这样的项出现。

Damit H(s) für $s \to \infty$ nicht unendlich groß wird, muß $R \leq Q$ sein, d.h. die Ordnung des Zählerpolynoms darf die des Nennerpolynoms nicht überschreiten (es entstehen also keine Terme $s^{R-Q} = s^{\alpha}$ für $\alpha > 0$).

Das Übertragungssystem ist von Ordnung Q; sie entspricht der Anzahl der Pole (die ggf. auch übereinander liegen können (Mehrfachpole)).

传输系统是Q阶的；它对应于极点的数量（可能也包括重叠的极点，即多重极点）。”这表明系统的阶数由极点的数量决定，即使一些极点在s平面上的位置相同（也就是多重极点）

Reihenschaltung von Teilsystemen

Zerlegung in Teilsysteme niedriger Ordnung, die in Reihe geschaltet sind.

将系统分解为串联的低阶子系统。

每个子系统中的极点和零点必须是实数或共轭复数。

$$H(s) = H \cdot H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot H_3(s) \cdot \ldots = \prod_i H_i(s)$$

In jedem Teilsystem müssen die Pole und Nullstellen reell oder konjugiert-komplex auftreten.

8.2.3. Amplituden- und Phasengang

Komplexer Frequenzgang (Übertragungsfunktion)

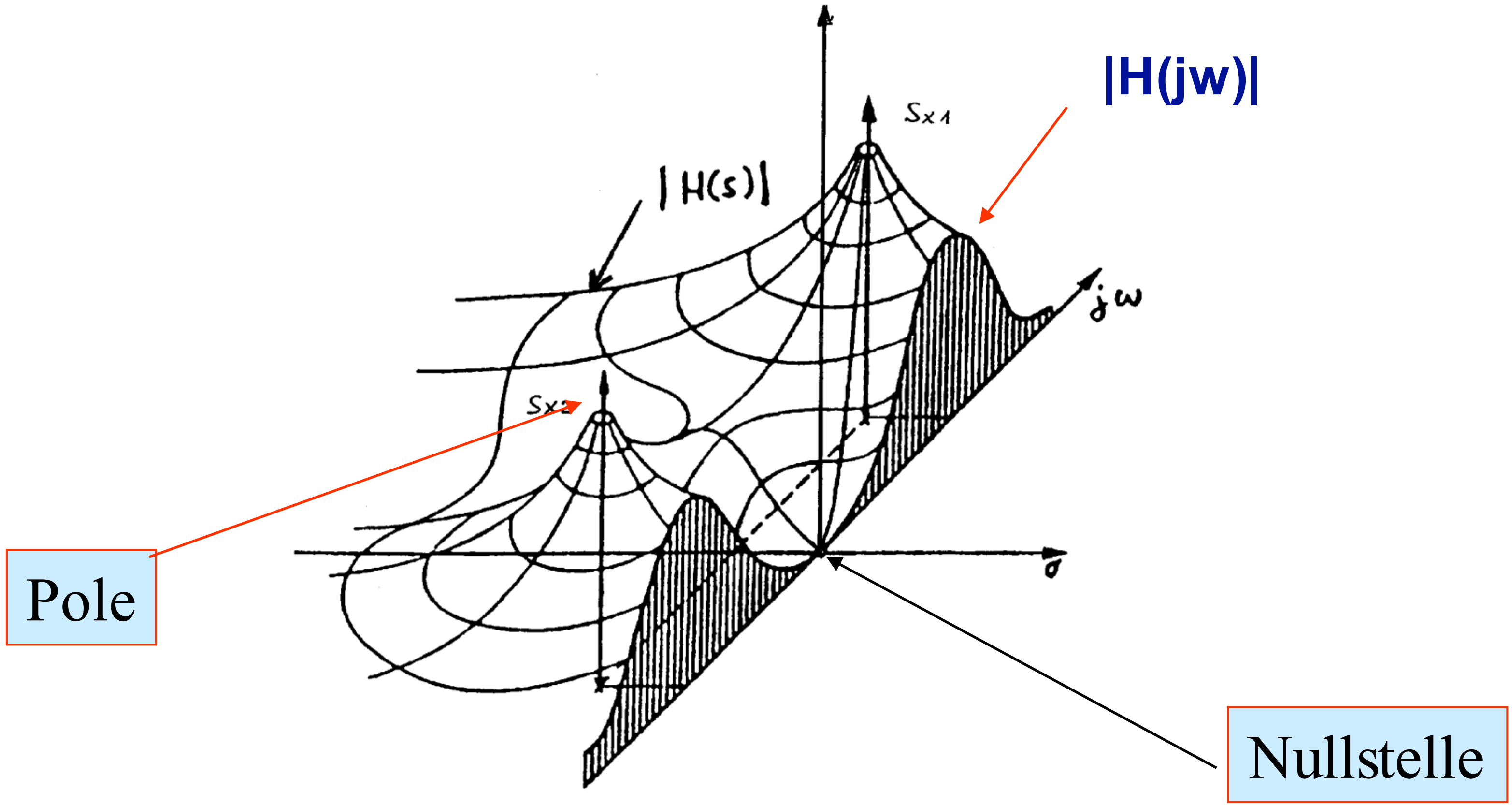
wegen $s = \sigma + j\omega$

$$H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega} = H \frac{\prod_{r=1}^{R} \left|j\omega - s_{0r}\right| e^{j\varphi_{0r}(\omega)}}{\prod_{q=1}^{Q} \left|j\omega - s_{xq}\right| e^{j\varphi_{xq}(\omega)}}$$

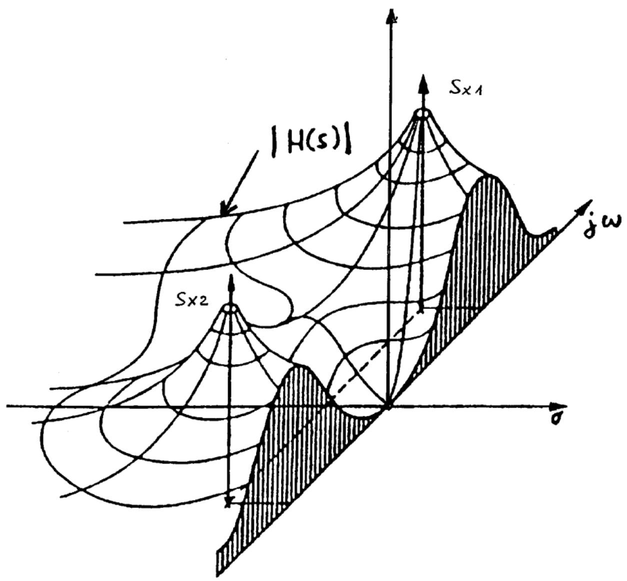
(soweit er existiert)

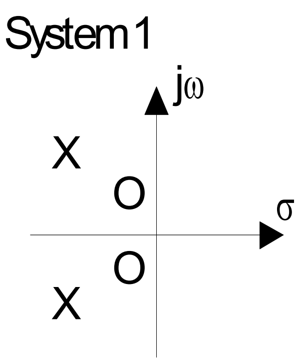
$$H(s) = H \cdot \frac{\prod_{r=1}^{R} (s - s_{0r})}{\prod_{q=1}^{Q} (s - s_{xq})}$$

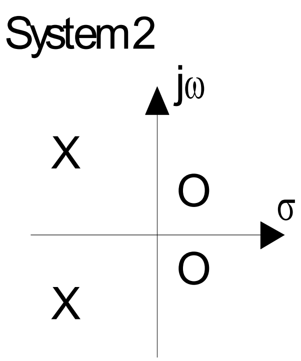
Amplitudengang als Schnitt H(s) längs der jω-Achse



Aus der Pol-Nullstellen-Darstellung können auf graphischem Wege der Amplituden- und Phasengang interpretiert werden.







$$H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega} = H \frac{\prod_{r=1}^{R} \left|j\omega - s_{0r}\right| e^{j\varphi_{0r}(\omega)}}{\prod_{q=1}^{Q} \left|j\omega - s_{xq}\right| e^{j\varphi_{xq}(\omega)}}$$

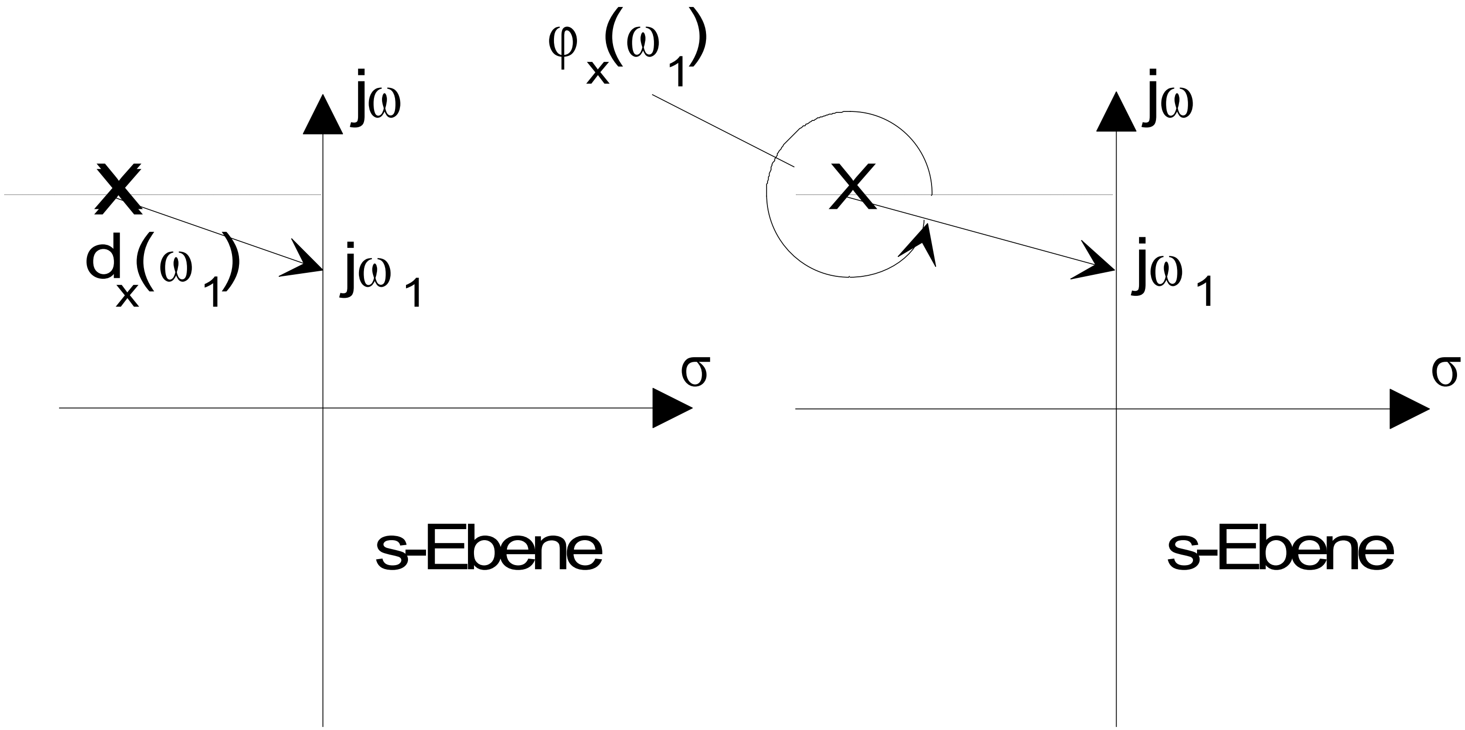
Amplitudengang:

$$H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega} = H\frac{\prod_{r=1}^{R}\left|j\omega - s_{0r}\right|e^{j\varphi_{0r}(\omega)}}{\prod_{q=1}^{Q}\left|j\omega - s_{xq}\right|e^{j\varphi_{xq}(\omega)}}$$

$$A_h(j\omega) = \left|H(s)\big|_{s=j\omega}\right| = |H|\frac{\prod_{r=1}^{R}\left|j\omega - s_{0r}\right|}{\prod_{q=1}^{Q}\left|j\omega - s_{xq}\right|} = H\frac{\prod_{r=1}^{R} d_{0r}(\omega)}{\prod_{q=1}^{Q} d_{xq}(\omega)}$$

Der Amplitudengang ist also durch die Abstände von dem jeweiligen ω–Frequenzaufpunkt zu den Pol- und Nullstellen bestimmt 因此，振幅响应由频率ω处的各个点到极点和零点的距离确定。

Amplitudengang:



$$A_h(j\omega) = \left| H(s)\big|_{s=j\omega} \right| = |H| \frac{\prod_{r=1}^{R} |j\omega - s_{0r}|}{\prod_{q=1}^{Q} |j\omega - s_{xq}|} = H \frac{\prod_{r=1}^{R} d_{0r}(\omega)}{\prod_{q=1}^{Q} d_{xq}(\omega)}$$

Phasengang

Bei positivem Vorfaktor *H* gilt mit $\varphi_0 = \arg\{j\omega - s_0\}$ und $\varphi_x = \arg\{j\omega - s_x\}$

$$\varphi_h(\omega) = \arg\left\{ H(s)\Big|_{s=j\omega} \right\} = \arg\left\{ \frac{\prod_{r=1}^{R} e^{j\varphi_{0r}(\omega)}}{\prod_{q=1}^{Q} e^{j\varphi_{xq}(\omega)}} \right\}$$

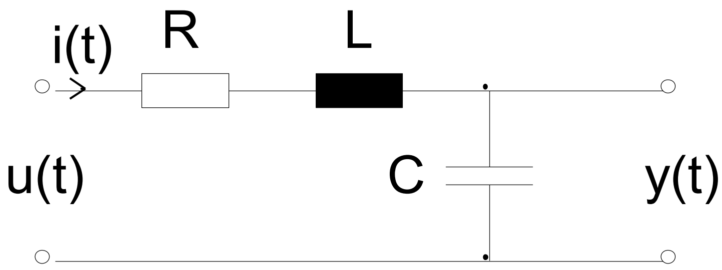
$$= \varphi_{01} + \varphi_{02} + \varphi_{03} + \ldots - \left(\varphi_{x1} + \varphi_{x2} + \varphi_{x3} + \ldots \right)$$

$$= \sum_{r=1}^{R} \varphi_{0r}(\omega) - \sum_{q=1}^{Q} \varphi_{xq}(\omega)$$

8.3. Beispiel Unbelasteter RLC-Tiefpaß

$$H(s) = \frac{1}{1 + RCs + LCs^2} = \frac{1}{LC(s - s_{x1})(s - s_{x2})}$$

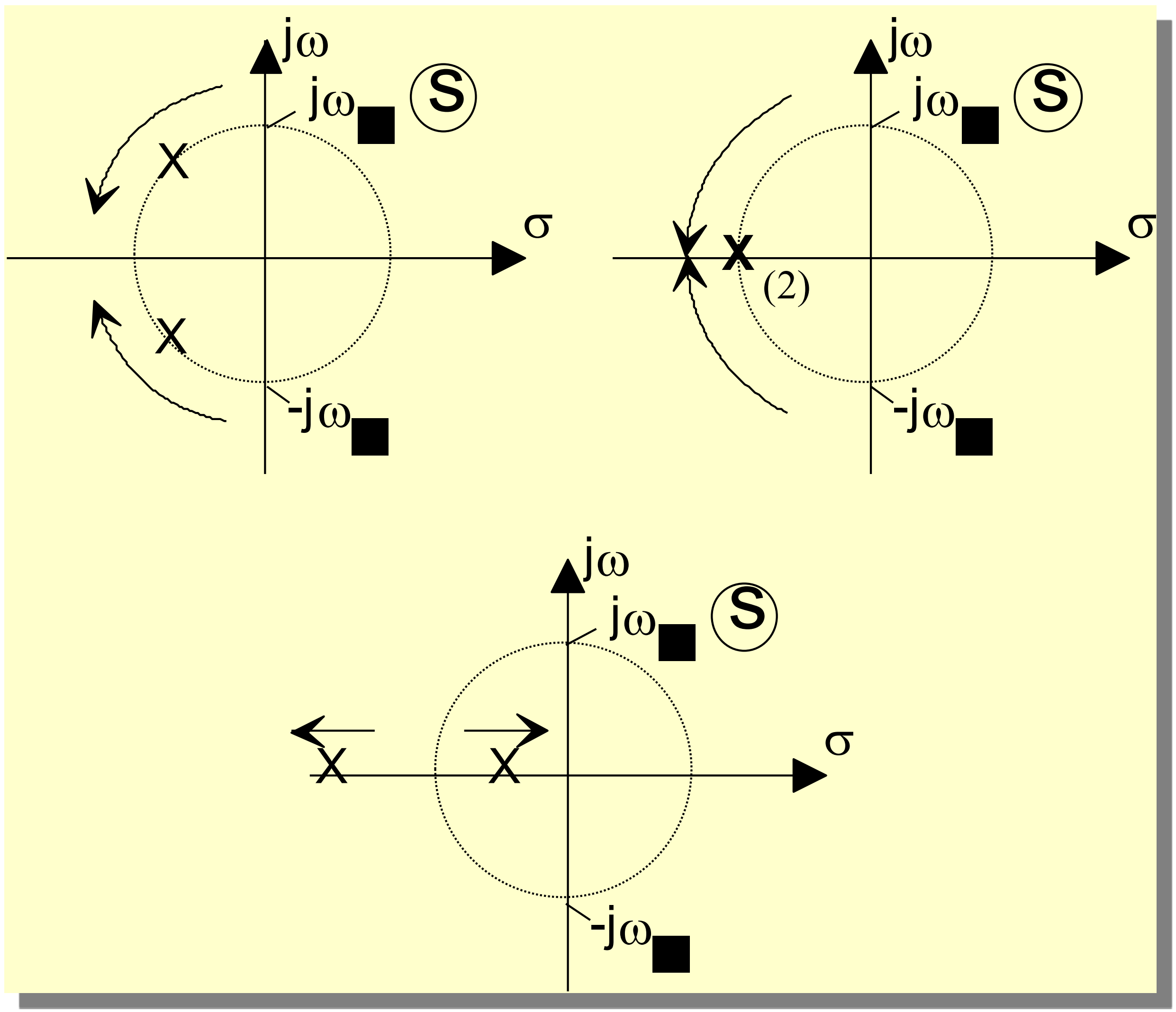
$$s_{x1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$



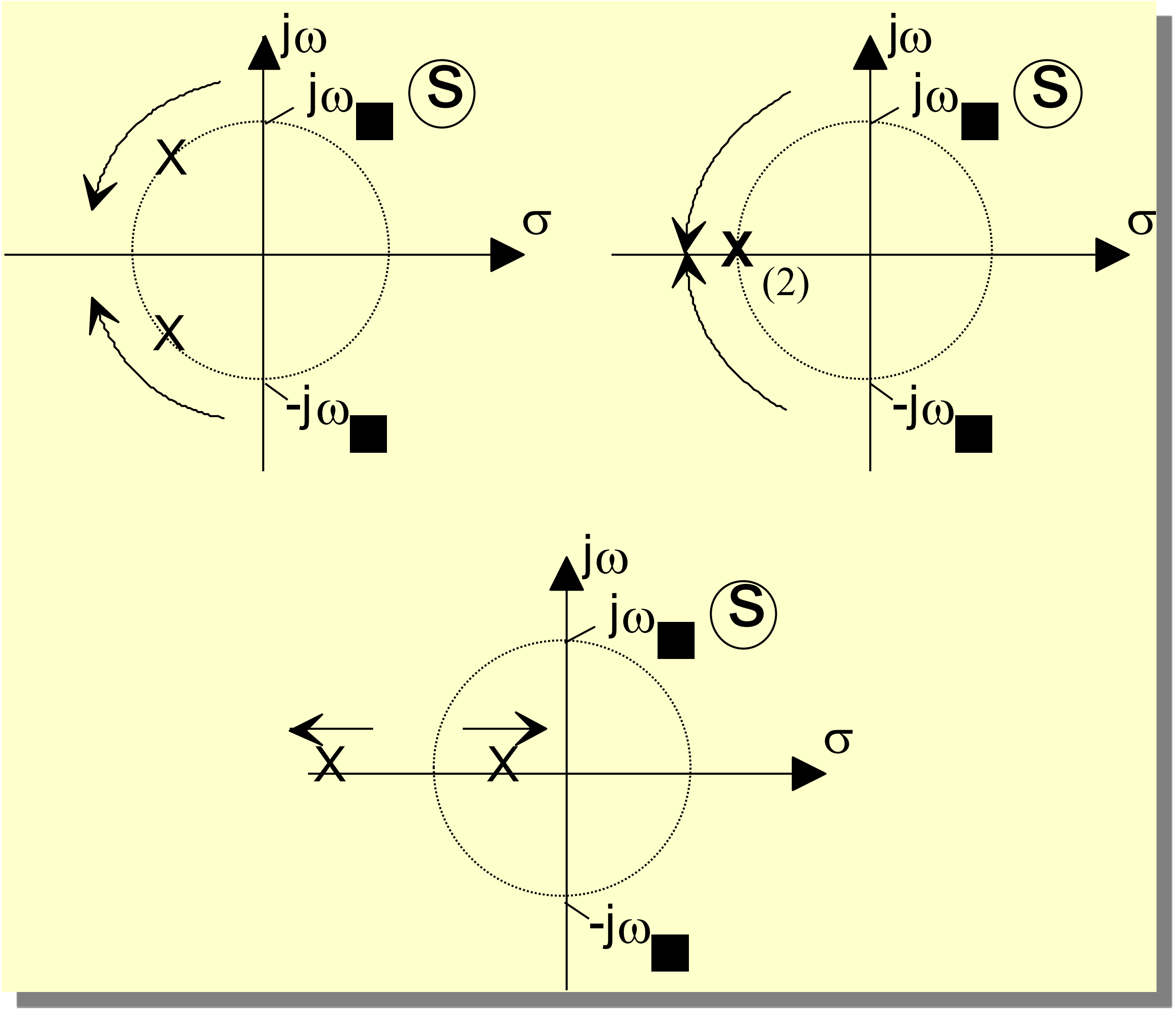
(a) konjugiert-komplexes Polstellenpaar (bei imaginärem Wurzelterm)
(b) zwei identische, negative und reelle Pole (Wurzelterm verschwindet),
oder
(c) zwei negativ-reelle Pole (Wurzelterm ist positiv und reell).

(a) 共轭复极点对（具有虚根项）
(b) 两个相同的负实数极点（根项消失），
或者
(c) 两个负实数极点（根项为正且实数）

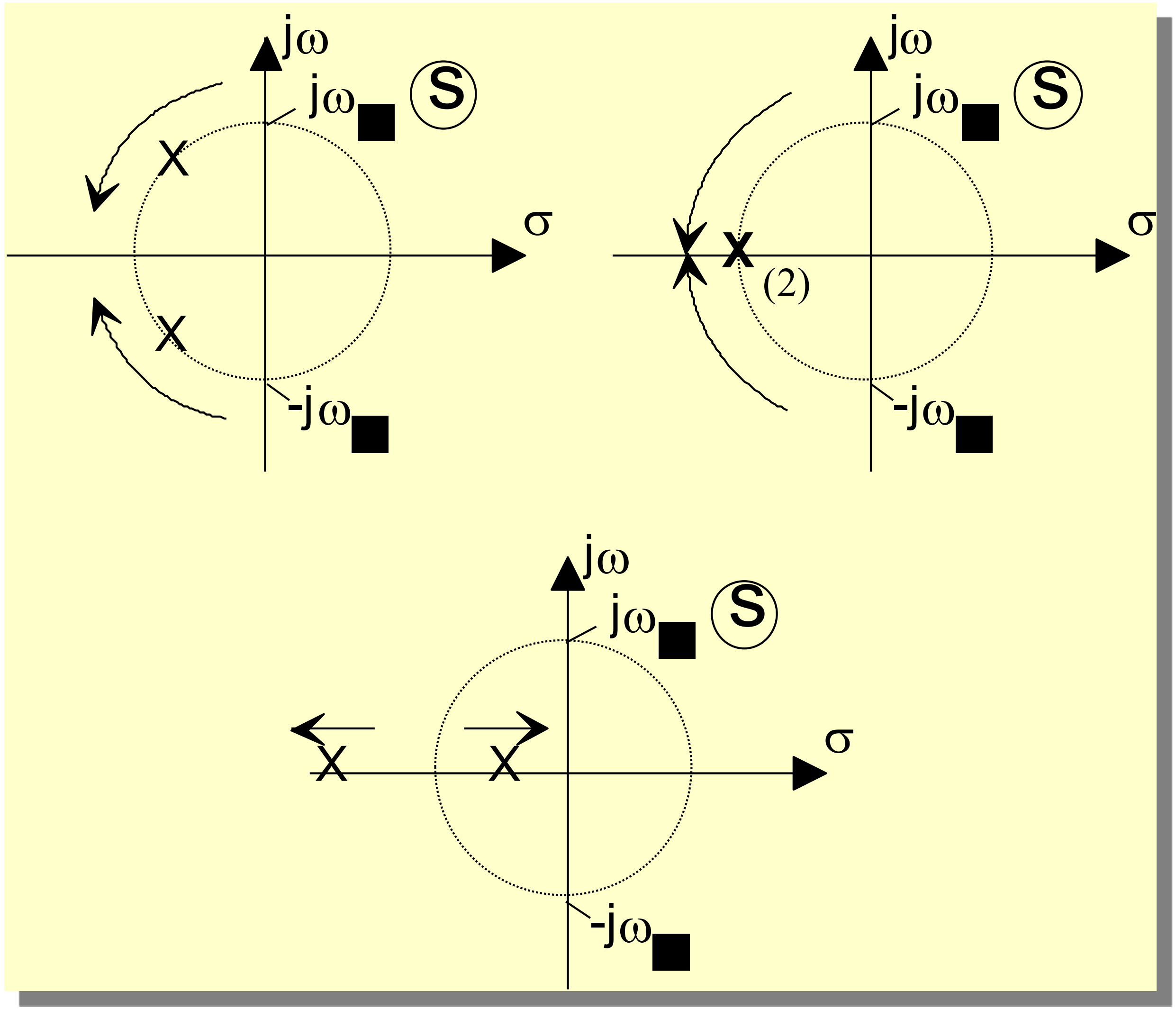
Pollagen beim RLC-Tiefpaß



Pollagen beim RLC-Tiefpaß



Pollagen beim RLC-Tiefpaß



Pollagen beim RLC-Tiefpaß