Klausur im Lehrgebiet

Signale und Systeme

- Prof. Dr.-Ing. Thomas Sikora -

Name: ....

Vorname: ....

Matr.Nr: ....

☐ Bachelor ☐ ET
☐ Master ☐ TI
☐ Diplom ☐ WiIng
☐ Magister ☐ PI
☐ Erasmus ☐ ....

☐ Ich bin mit der Veröffentlichung des Klausurergebnisses im Web unter meiner verkürzten Matrikelnummer einverstanden.

A1	A2	A3	BP	Summe

Hinweise:

1. Füllen Sie vor Bearbeitung der Klausur das Deckblatt **vollständig** und **sorgfältig** aus.
2. Schreiben Sie die Lösungen jeweils direkt auf den freien Platz unterhalb der Aufgabenstellung.
3. Die **Rückseiten** können bei Bedarf zusätzlich beschrieben werden. Sollte der Platz auf der Rückseite nicht ausreichen, ist dennoch **kein eigenes Papier zu verwenden**. Die Klausuraufsicht teilt auf Anfrage **zusätzliche leere Blätter** aus.
4. Ein **nicht programmierbarer** Taschenrechner und ein **einseitig handbeschriebenes DIN-A4-Blatt** sind als Hilfsmittel erlaubt.
5. Bearbeitungszeit: **90 min**.
6. **Keinen Bleistift** und auch **keinen Rotstift** verwenden!
7. Bei Multiple-Choice-Fragen gibt es je richtiger Antwort einen halben Punkt, je falscher Antwort wird ein halber Punkt abgezogen. Im schlechtesten Fall wird die Aufgabe mit null Punkten bewertet.
8. Grundsätzlich müssen bei allen Skizzen die **Achsen vollständig beschriftet** werden.

Ich habe die Hinweise gelesen und verstanden: .... (Unterschrift)

Erklärung zur Prüfungsfähigkeit

Ich erkläre, dass ich mich prüfungsfähig fühle. (§ 7 (10) Satz 5+6 AllgPO vom 13. Juni 2012)

. . . .
(Datum und Unterschrift der Studentin/ des Studenten)

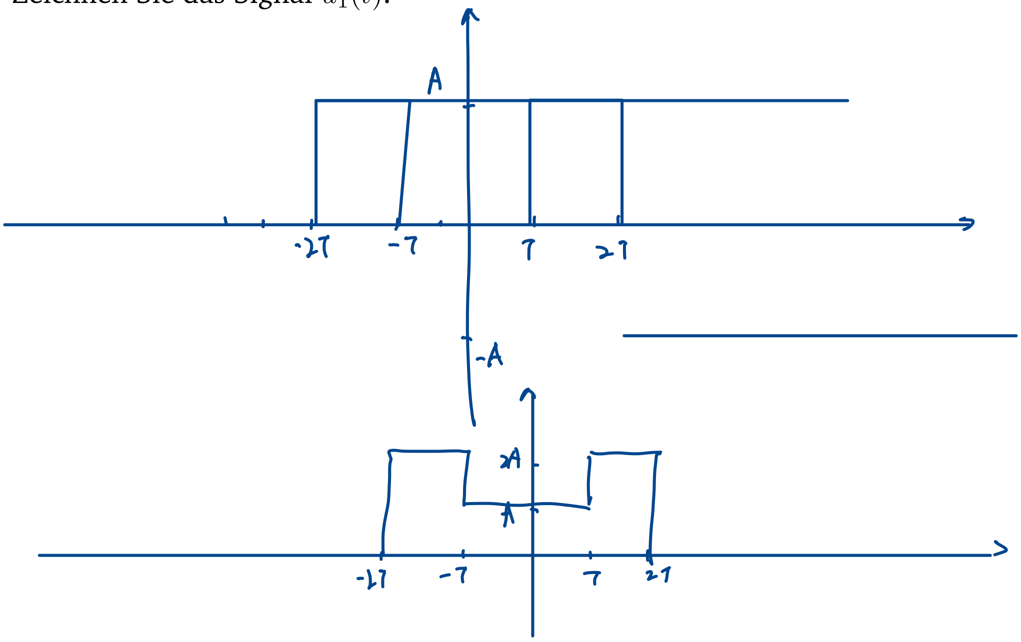
Inhaltsverzeichnis

1 Zeitkontinuierliche Signale **11,5 Punkte**

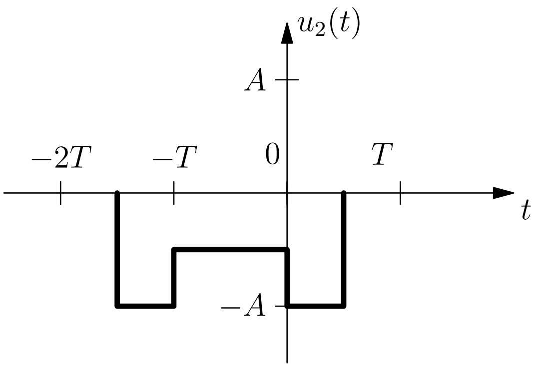
1.1 Gegeben sei das zeitkontinuierliche Signal $u_1(t)$ mit: 3,5 P

$$u_1(t) = A \cdot \sqcap_T(t + 1,5T) + A \cdot \sqcap_T(t - 1,5T) + A \cdot \sigma(t + 2T) - A \cdot \sigma(t - 2T)$$

a) Zeichnen Sie das Signal $u_1(t)$. 1 P



b) Bestimme die Funktion des zeittransformierten Signals $u_2(t)$ in Abhängigkeit von $u_1(t)$. 1,5 P



$$u_2(t) = -\frac{1}{2} u_1\left(2\left(t + \frac{1}{2}T\right)\right)$$

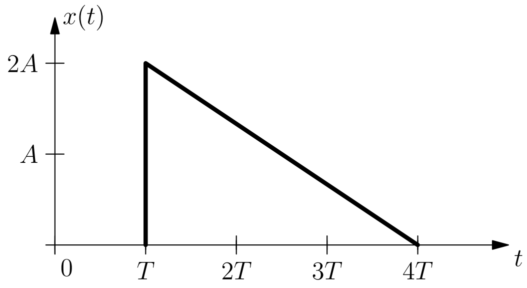
c) Bestimmen Sie die Energie des Signals $u_2(t)$. 1 P

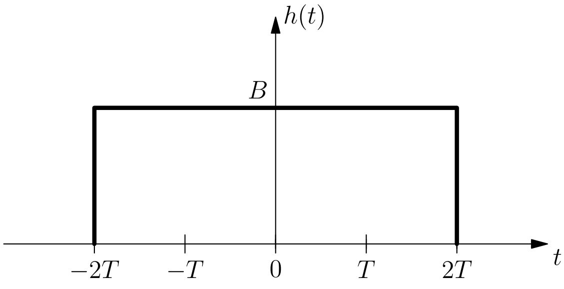
$$W_u = \int_{-\frac{3}{2}T}^{-T} (-A)^2 dt + \int_{-T}^{0} \left(-\frac{A}{2}\right)^2 dt + \int_{0}^{\frac{1}{2}T} (A)^2 dt$$

$$= A^2 \cdot \left(\frac{1}{2}T\right) + \frac{A^2}{4} \cdot T + A^2 \cdot \frac{1}{2} T$$

$$= \frac{5}{4} A^2 T$$

1.2 Gegeben seien das Eingangssignal $x(t)$ und ein Filter mit der Impulsantwort $h(t)$. **6 P**





a) Bestimmen Sie das Ausgangssignal $y(t)$. **4,5 P**

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

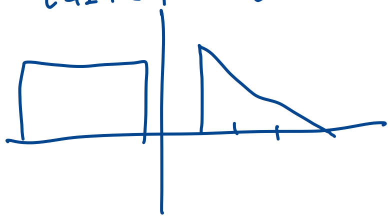
$$x(t) = \left(-\frac{2A}{3T}\cdot t + \frac{8}{3}A\right)\cdot \sqcap_{3T}\left(t - \frac{5}{2}T\right)$$

$t - \tau = -2T \Rightarrow \tau = t + 2T$

$t - \tau = 2T \Rightarrow \tau = t - 2T$

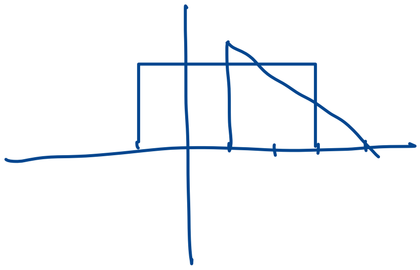
$$h(t) = B\, \sqcap_{4T}(t)$$

① $t + 2T < T \Rightarrow t < -T$



$y(t) = 0$

② $t + 2T \geq T \wedge t + 2T < 4T \Rightarrow -T \leq t < 2T$



$$y(t) = \int_T^{t+2T} AB\left(-\frac{2}{3T}\tau + \frac{8}{3}\right) d\tau$$

$$= AB\cdot\left(-\frac{1}{3T}\cdot\tau^2 + \frac{8}{3}\tau\right)\Big|_T^{t+2T}$$

$$= AB\cdot\left[-\frac{1}{3T}\cdot\left(t^2 + 4T^2 + 4tT - T^2\right) + \frac{8}{3}\cdot(t+T)\right]$$

$$= AB\cdot\left[-\frac{t^2}{3T} - \cancel{\frac{4}{3}T} - \frac{4}{3}t + \cancel{\frac{T}{3}} + \frac{8}{3}t + \cancel{\frac{8}{3}}T\right]$$

$$= AB\left[-\frac{t^2}{3T} + \frac{5}{3}T + \frac{4}{3}t\right]$$

$y(-T) = AB\left[-\frac{1}{3}T + \frac{5}{3}T - \frac{4}{3}T\right]$
$= 0$
$y(2T) = AB\left[-\frac{4T}{3} + \frac{5}{3}T + \frac{8}{3}T\right]$
$= 3ABT$

③

$t + 2T \geq 4T \wedge t - 2T < T$

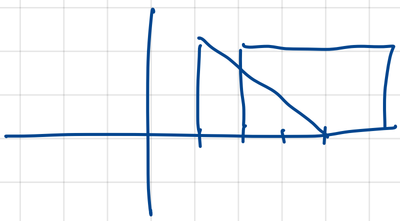
$\Rightarrow 2T \leq t < 3T$

$$y(t) = \int_T^{4T} AB\left(-\frac{2}{3T}\tau + \frac{8}{3}\right) d\tau$$

$$= AB\cdot\left[-\frac{1}{3T}(8T^2) + \frac{8}{3}\cdot 3T\right]$$

$$= AB\cdot 3T$$

4



$t - 2T \geq T \wedge t - 2T < 4T$

$\Rightarrow 3T \leq t < 6T$

$$y(t) = \int_{t-2T}^{4T} AB\left(-\frac{2}{3T}\tau + \frac{8}{3}\right)d\tau$$

$$= AB\left[-\frac{1}{3T}\cdot\left[16T^2 - t^2 - 4T^2 + 4tT\right] + \frac{8}{3}(6T - t)\right]$$

$$= \frac{AB}{3T}\left[-\cancel{16T^2} + t^2 + 4T^2 - 4tT + 4\cancel{8T^2} - 8tT\right]$$

$$= \frac{AB}{3T}\left[36T^2 + t^2 - 12tT\right]$$

$$y(6T) = \frac{AB}{3T}\left[36T^2 + 36T^2 - 12\cdot 6T^2\right]$$

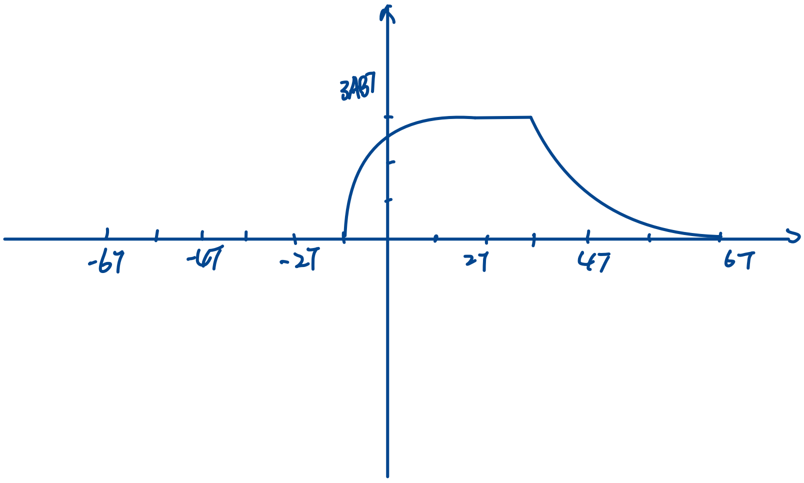
$6\times6\times2 - 6\times6\times2 = 0$

$=$

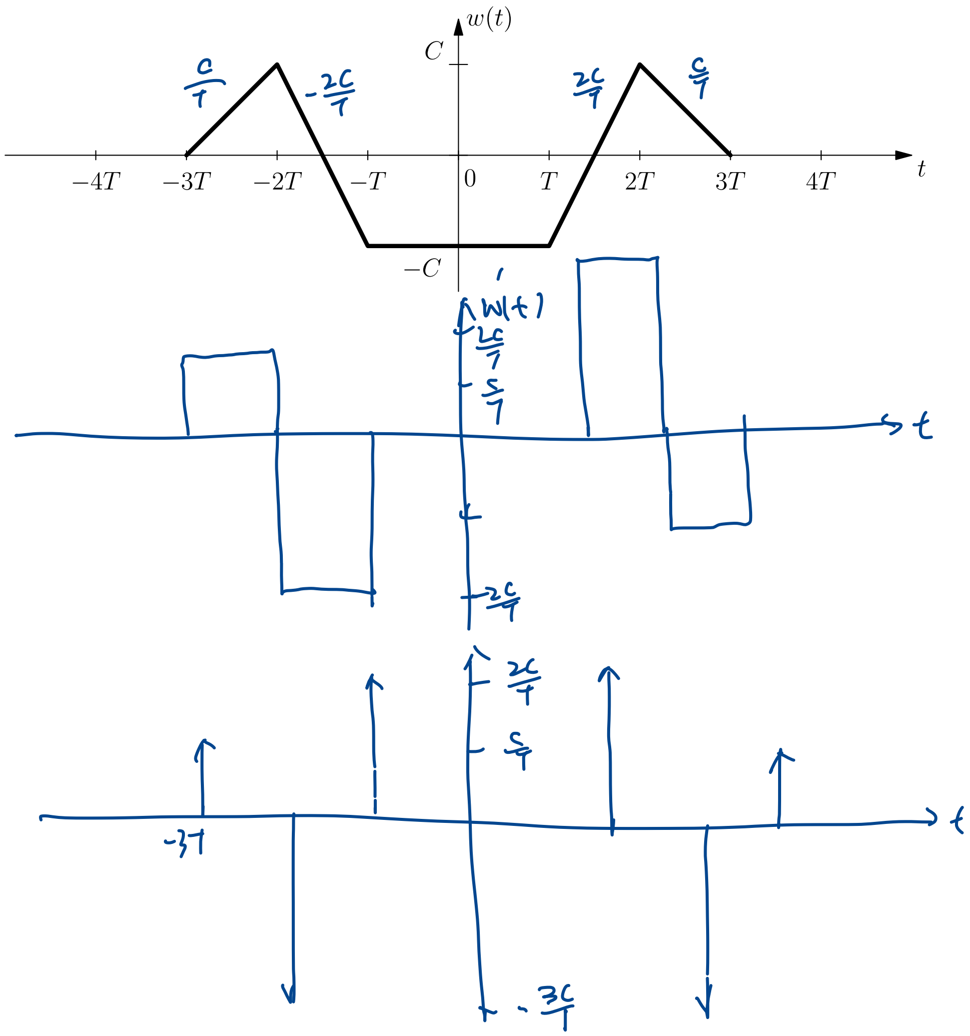
5 $t \geq 6T$

$y(t) = 0$

b) Skizzieren Sie das Ausgangssignal $y(t)$ im Bereich $-6T \leq t \leq 6T$ **1,5 P**



1.3 Berechnen Sie die Fouriertransformierte des folgenden Signals $w(t)$. Fassen Sie das Ergebnis so weit wie möglich zu trigonometrischen Funktionen zusammen. 2 P



$$w''(t) = \frac{C}{T}\cdot\delta(t+3T) - \frac{3C}{T}\cdot\delta(t+2T) + \frac{2C}{T}\delta(t+T) + \frac{2C}{T}\delta(t-T)$$

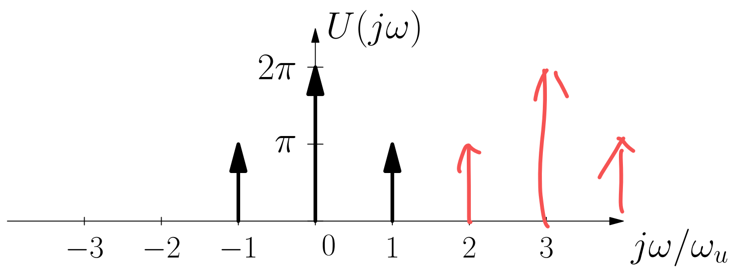
$$- \frac{3C}{T}\delta(t-2T) + \frac{C}{T}\delta(t-3T)$$

$$(j\omega)^2 W(j\omega) = \frac{C}{T}\cdot e^{j\omega 3T} - \frac{3C}{T}e^{j\omega 2T} + \frac{2C}{T}e^{j\omega T} + \frac{2C}{T}e^{-j\omega T} - \frac{3C}{T}e^{-j\omega 2T} + \frac{C}{T}e^{-j\omega 3T}$$

$$= \frac{2C}{T}\cos(3\omega T) - \frac{6C}{T}\cos(2\omega T) + \frac{4C}{T}\cos(j\omega T)$$

2 Zeitkontinuierliche Systeme und Abtastung 9,5 Punkte

2.1 Gegeben sei das folgende Spektrum $U(j\omega)$. 5,5 P



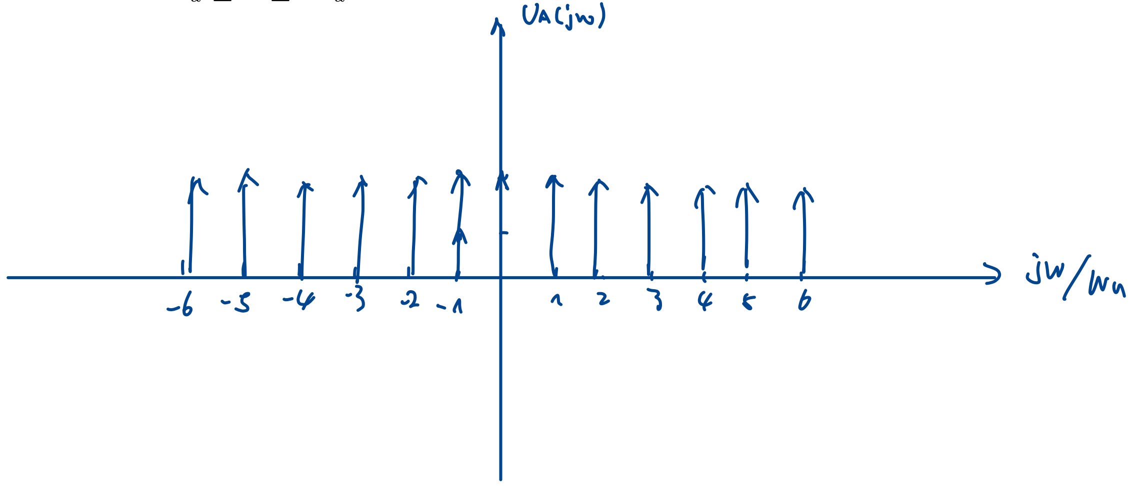
a) Bestimmen Sie $u(t)$. (*Hinweis:* $\mathcal{F}^{-1}\{2\pi\delta(\omega)\} = 1$) 1 P

$U(j\omega) = \pi\delta(\omega+\omega_u) + 2\pi\,\delta(\omega) + \pi\delta(\omega-\omega_u)$

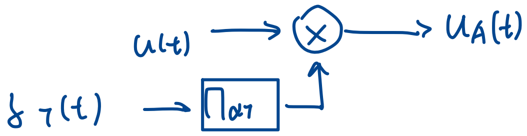
$u(t) = \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\pi e^{j\omega_u} + \pi e^{-j\omega_u} + 2\pi\right)$

$= \cos(\omega_u) + 1$

b) Das Signal werde ideal mit $\omega_T = 2\omega_u$ abgetastet. Zeichnen Sie $U_A(j\omega)$ im Bereich $-6\omega_u \leq \omega \leq 6\omega_u$. 1 P



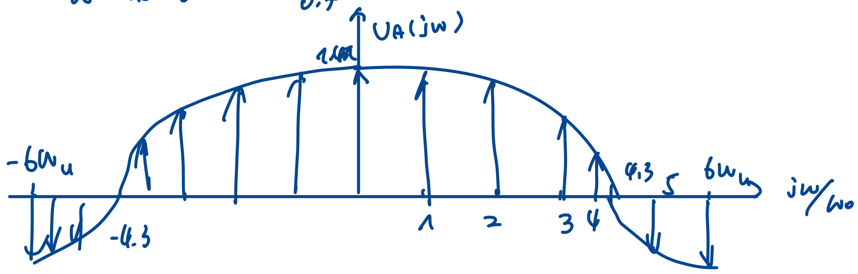
c) Zeichnen Sie das Blockschaltbild des Shape-Top-Samplings. 1 P

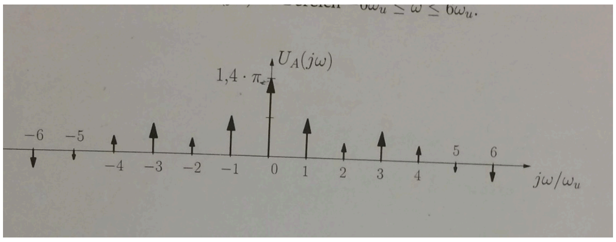


d) Nun werde das Signal u(t) mittels Shape-Top-Sampling ($\omega_T = 3\omega_u$, $\alpha = 0,7$) abgetastet. Skizzieren Sie $U_A(j\omega)$ im Bereich $-6\omega_u \leq \omega \leq 6\omega_u$. 1 P

max Amplituden $= \alpha U(j\omega) = 0.7 \cdot 2\pi = 1.4\pi$

Nullstellen: $\omega = k \cdot \frac{\omega_T}{\alpha} = k \cdot \frac{3\omega_u}{0.7} = 4.3\, k\, \omega_u$





e) Was ist Aliasing? Wie entsteht Aliasing?

Aliasing sind Spiegelungseffekte beim rekonstruierten Signal. 0,5 Punkte
Überlappen der Spektren im Frequenzbereich, zu kleine Abtastfrequenz 0,5 Punkte
Die gespiegelten Spektren wurden nicht ausreichend gefiltert, Flankensteilheit des Tiefpasses zu gering 0,5 Punkte

f) Zeichnen Sie das Blockschaltbild des Flat-Top-Samplings. 1* P

g) Leiten Sie aus dem Blockschaltbild die Beschreibung von $v_A(t)$ ab und bestimmen Sie daraus das Spektrum $V_A(j\omega)$. Vereinfachen Sie so weit wie möglich, lösen Sie dabei die Faltung vollständig auf. 2* P

$$u_a(t) = (u(t) \cdot \delta_T(t)) * \sqcap_{\alpha T}(t)$$

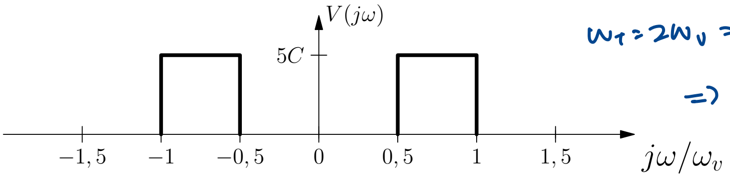
$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$V_A(j\omega) = \left(\frac{1}{2\pi} U(j\omega) * \omega_T \cdot \delta_{\omega_T}(t) \right) \cdot \alpha \cdot T \cdot si\left(\frac{\omega \alpha T}{2}\right) \quad \text{mit } \omega_T > \frac{2\pi}{T}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2\pi}} \cdot \frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{T}} \cdot \alpha \cancel{T} \cdot \sum_{k=\infty}^{\infty} V(j(\omega - k\omega T) \cdot si\left(\frac{\omega \alpha T}{2}\right))$$

$$= \alpha\, si\left(\frac{\omega \alpha T}{2}\right) \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} u(j(\omega - k\omega T))$$

h) Gegeben sei das Spektrum $V(j\omega)$. Nun werde das Signals mittels Flat-Top-Sampling ($\omega_T = 2\omega_v$, $\alpha = 0{,}9$) abgetastet. Skizzieren Sie $V_A(j\omega)$ im Bereich $-6\omega_v \leq \omega \leq 6\omega_v$. 1* P



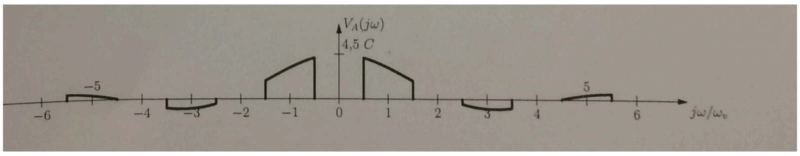
$\omega_T = 2\omega_v = \frac{2\pi}{T}$

$\Rightarrow T = \frac{\pi}{\omega_v}$

$u_a = \alpha \, si\left(\frac{\omega\alpha T}{2}\right)\left(V(0.5\,\omega_v)\right)$

$= 0.8\, si\left(\frac{0.5\,\omega_u \cdot 0.8 \cdot \frac{\pi}{\omega_u}}{2}\right) \cdot 5C$

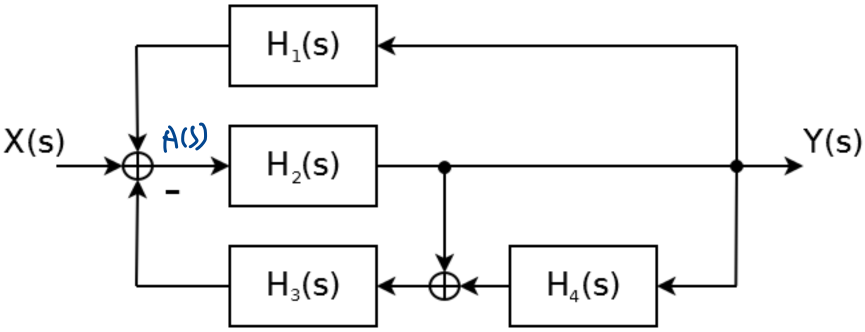
Nullstellen: $\frac{\omega\alpha T}{2} = k\pi \Rightarrow \frac{2k\pi}{\alpha T} = \frac{2k\omega_u}{\alpha} \approx 1.1111 \frac{k\omega_0}{\alpha}$



i) Lässt sich das Signal $v(t)$ perfekt rekonstruieren? Begründen Sie Ihre Antwort. 1* P

ja Abtasttheorem erfüllt

2.2 Gegeben sei das folgende Blockschaltbild. Geben Sie die Gesamtübertragungsfunktion $H_{\text{Ges}}(s)$ in Abhängigkeit von den Einzelübertragungsfunktionen $H_i(s)$, $i = 1, ..., 4$ an. Fassen Sie das Ergebnis so weit wie möglich zusammen. **2 P**



$$Y(s) = H_2(s) \cdot A(s)$$

$$A(s) = X(s) + H_1(s) \cdot Y(s) - H_3(s) \cdot \left(Y(s) + H_4(s) \cdot Y(s)\right)$$

$$Y(s) = X(s) H_2(s) + H_1(s) Y(s) H_2(s) - H_2(s) H_3(s) Y(s) - H_2(s) H_3(s) H_4(s) Y(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_2(s)}{1 - H_1(s)H_2(s) + H_2(s)H_3(s) + H_2(s)H_3(s)H_4(s)}$$

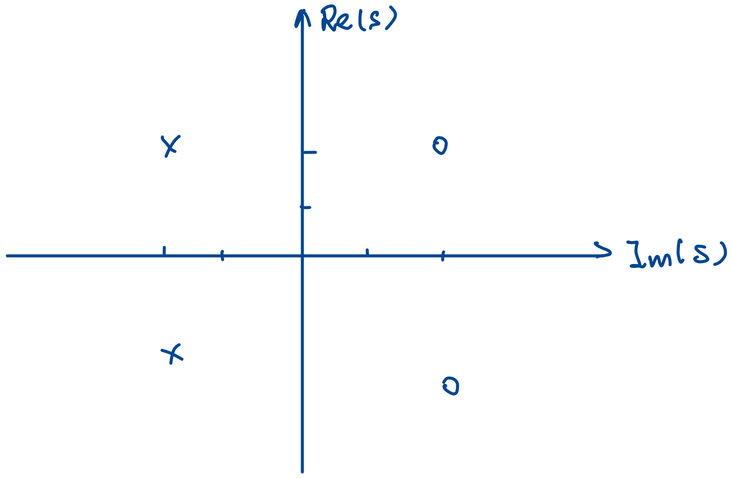
2.3 Von einem realen, zeitkontinuierlichen System seien nachfolgende Eigenschaften bekannt. Skizzieren Sie das PN-Diagramm des Systems. Erläutern Sie Ihre Schlussfolgerungen aus den genannten Eigenschaften. 2 P

a) $|H(j\omega)| = \text{konst.}$

b) Es gibt genau vier Extremstellen.

c) Der Imaginärteil einer Polstelle ist 2.

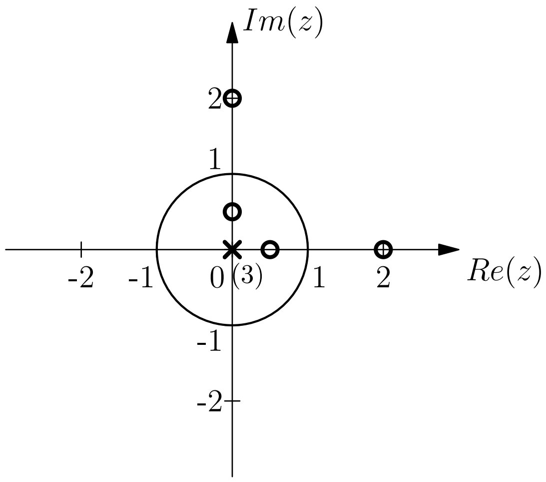
d) Der Realteil mindestens einer Nullstelle ist 2.



3 Zeitdiskrete Signale und Systeme — 11 Punkte

3.1 PN-Diagramme zeitdiskreter Systeme — 4 P

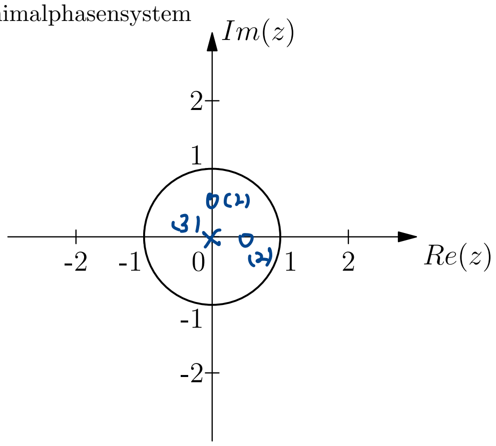
a) Gegeben sei das folgende PN-Diagramm eines zeitdiskreten Systems. Kreuzen Sie rechts die entsprechenden Eigenschaften des Systems an. — 3 P



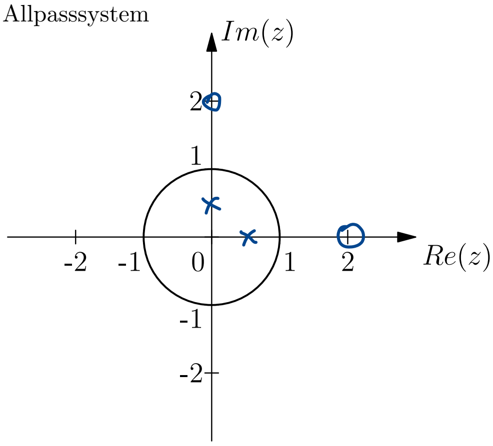
ja	nein	
☐	☒	reellwertig
☒	☐	(bedingt) stabil
☐	☒	kausal
☒	☐	linearphasig
☐	☒	Allpass
☐	☒	minimalphasig

b) Zerlegen Sie, falls möglich, das System aus Teilaufgabe 3.1 a) in ein Allpass- und Minimalphasensystem. Zeichnen Sie die resultierenden Extremstellen in das passende PN-Diagramm. — 1 P

Minimalphasensystem



Allpasssystem



3.2 Gegeben sei die Systemfunktion $H(z) = \frac{z^2+2z+1}{z^3+z}$. 3 P

a) Bestimmen Sie die Differenzengleichung $y(n)$. 2 P

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$Y(z) = X(z) \cdot \frac{z^2+2z+1}{z^3+z} = \frac{z^{-1}+2z^{-2}+z^{-3}}{1+z^{-2}} X(z)$$

$$Y(z) + Y(z) \cdot z^{-2} = z^{-1} X(z) + 2z^{-2} X(z) + z^{-3} X(z)$$

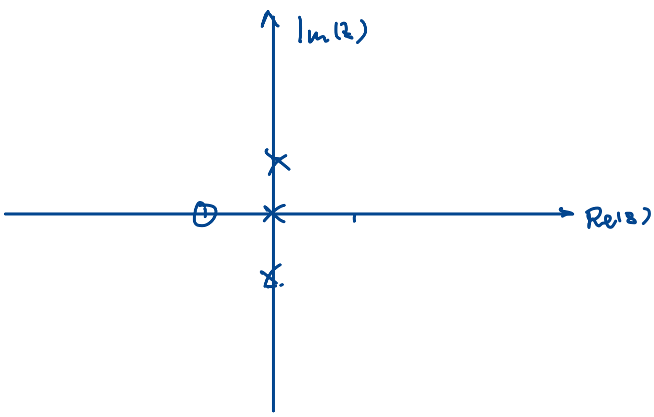
$$y(n) = x(n-1) + 2x(n-2) + x(n-3) - y(n-2)$$

$z(z^2+1)$ $\quad z^2 = -1$ $\quad z = \pm\sqrt{i^2} = \pm i$

b) Bestimmen Sie die Lage der Pol- und Nullstellen von $H(z)$ und zeichnen Sie das zugehörige PN-Diagramm. 1 P

$$H(z) = \frac{(z+1)^2}{z(z+i)(z-i)}$$

$z_0 = -1$ $\quad z_{p0,1,2} = 0, -i, i$



$n = 0\ 1\ 2\ 3$

3.3 Gegeben sei die Folge $\{2; 0; 1; 2\}$. 4 P

a) Berechnen Sie die DFT der Folge. 2 P

$\Delta\Omega = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{2}$

$U_{DFT}(n) = \sum_{k=0}^{3} u(k)\, e^{-jkn\cdot\frac{\pi}{2}}$

$= u(0) + u(1)\, e^{-jn\cdot\frac{\pi}{2}} + u(2)\, e^{-jn\pi} + u(3)\, e^{-jn\frac{3}{2}\pi}$

$U_{DFT}(0) = 2 + 0 + 1 + 2\cdot 1 = 5$

$U_{DFT}(1) = 2 + 0 + 1\cdot e^{-j\pi} + 2\cdot e^{-jn\frac{3}{2}\pi} = 2 + (-1) + 2\cdot(j) = 1 + 2j$

$U_{DFT}(2) = 2 + 0 + 1\cdot e^{-j2\pi} + 2\cdot e^{-j3\pi} = 2 + 1 + 2\cdot(-1) = 1$

$U_{DFT}(3) = 1 - 2j$

b) Welche Eigenschaften unterscheiden die DFT von der gewöhnlichen Fourier-transformation? 1 P

Zeitsignale werden so interpretiert, als ob sie periodisch wären

das Spektrum periodisch fortgesetzt

- 时间信号被解释为好像它们是周期性的。0.5 分
- 频谱被周期性地延续。0.5 分

Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora	Klausur im Lehrgebiet **Signale und Systeme** am 22.07.2015	Blatt: 17

c) Beweisen Sie allgemein die Symmetrieeigneschaft $U_{DFT}(N-n) = U_{DFT}^*(n)$ der diskreten Fouriertransformation. 1 P