

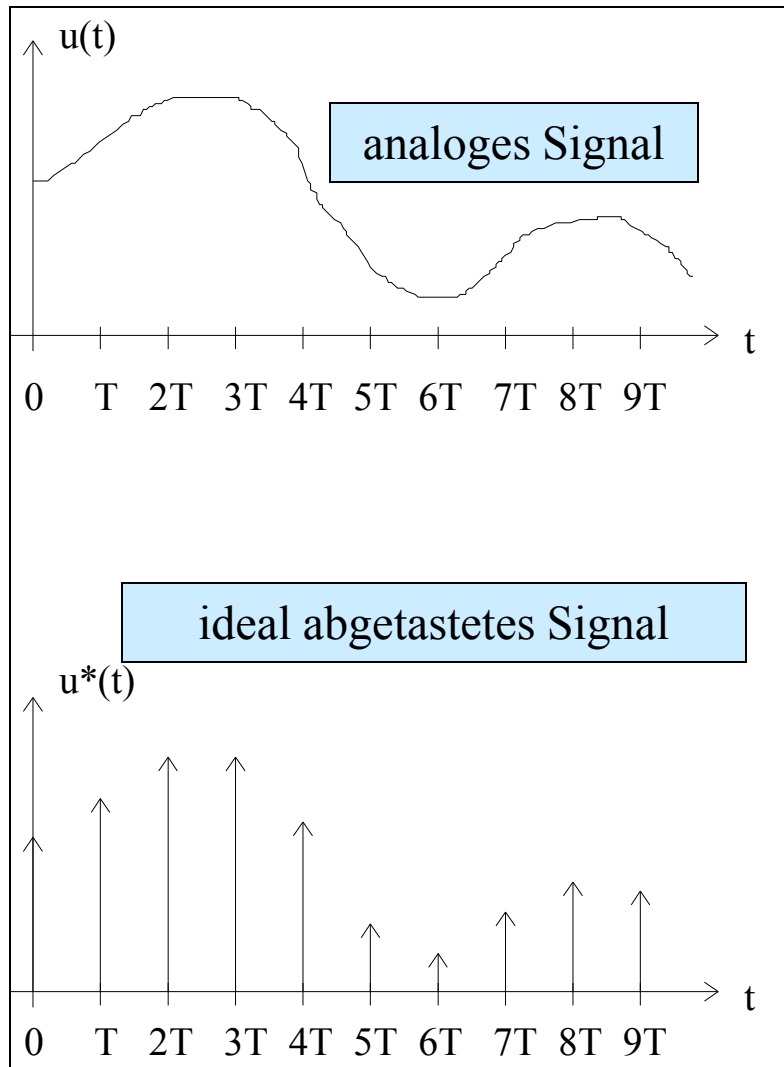
11. Abtastung

- Ideale Abtastung
- Nichtideale Abtastung
- Fehler durch Bandbegrenzung und Unterabtastung

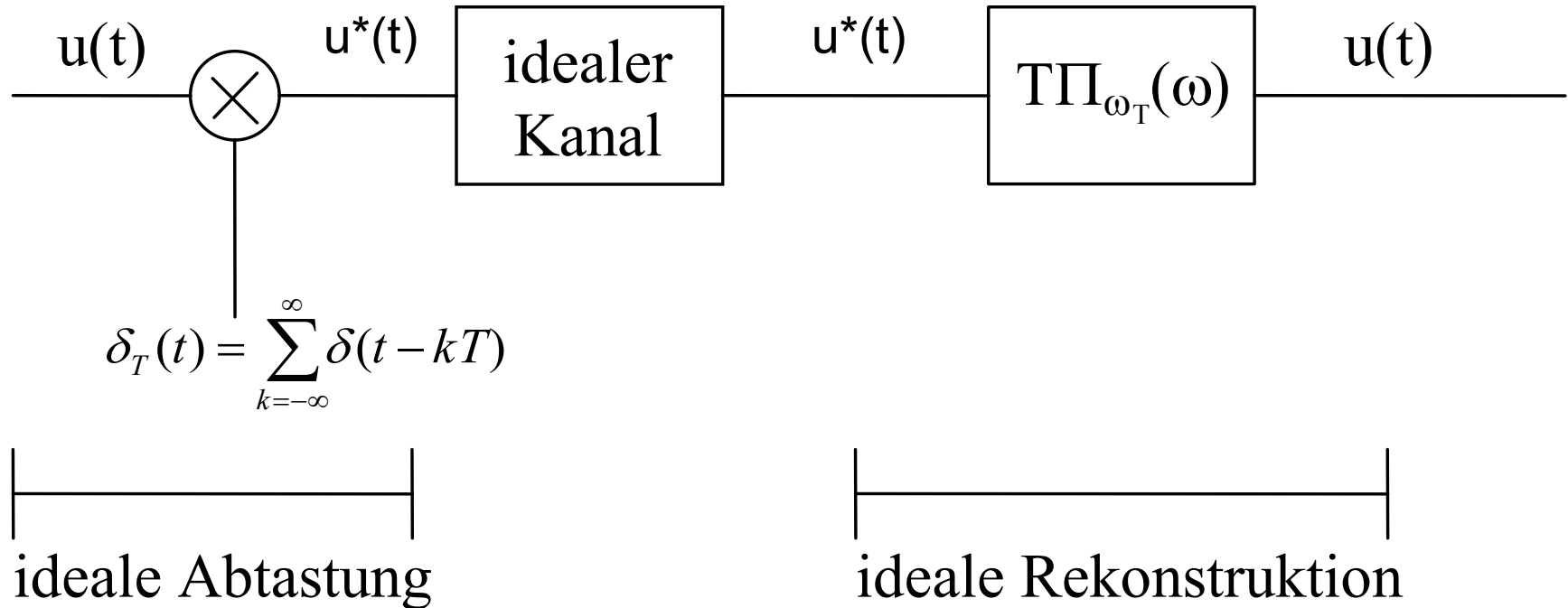
11. Abtastung

- Ideale Abtastung
 - 抽样
 - 理想抽样
 - 非理想抽样
 - 带宽限制和欠采样引起的误差
- Nichtideale Abtastung
- Fehler durch Bandbegrenzung und Unterabtastung

11.1.1. Zeitdiskrete Signale



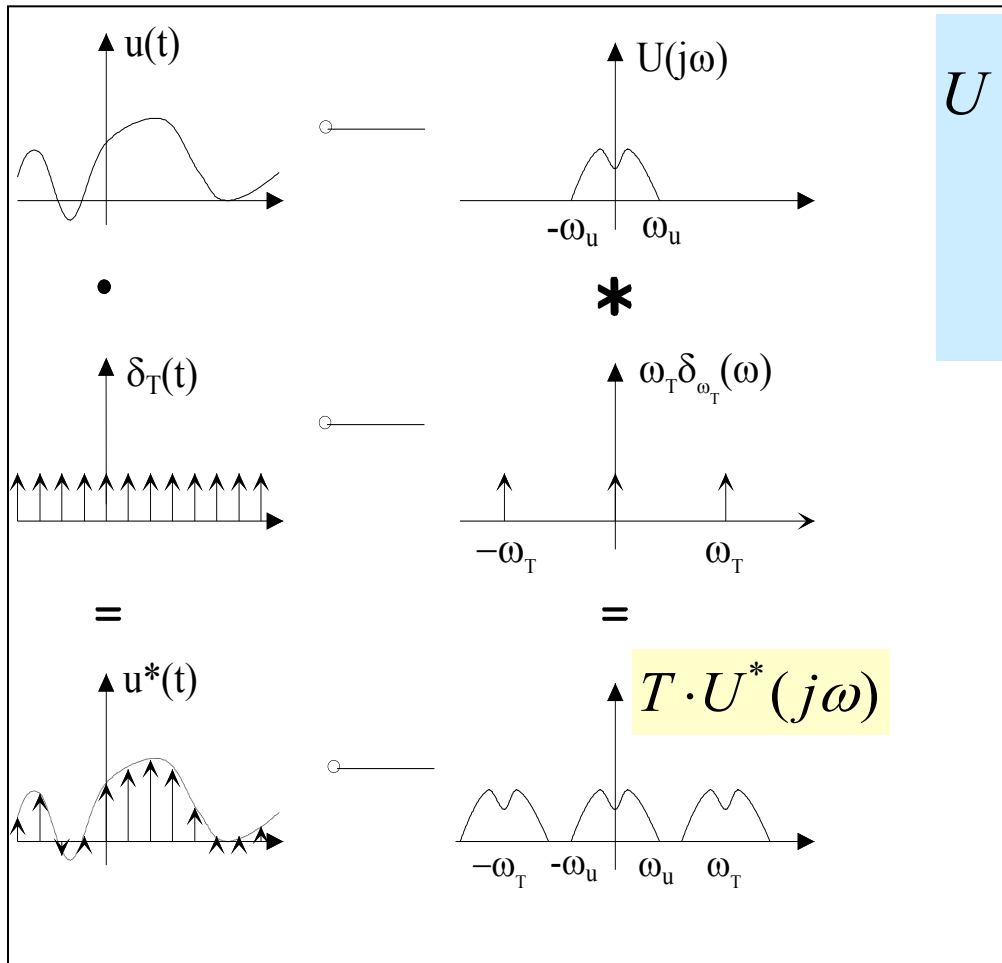
11.1.2. Ideale Abtastung und Rekonstruktion



$$u^*(t) = u(t) \delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT) \delta(t - kT)$$

11.1.2. Ideale Abtastung

$$u^*(t) = u(t) \delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT) \delta(t - kT)$$



$$U^*(j\omega) = \frac{1}{2\pi} U(j\omega) * \omega_T \delta_{\omega_T}(\omega)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(j\omega) * \delta(\omega - k\omega_T)$$

Abtastkreisfrequenz

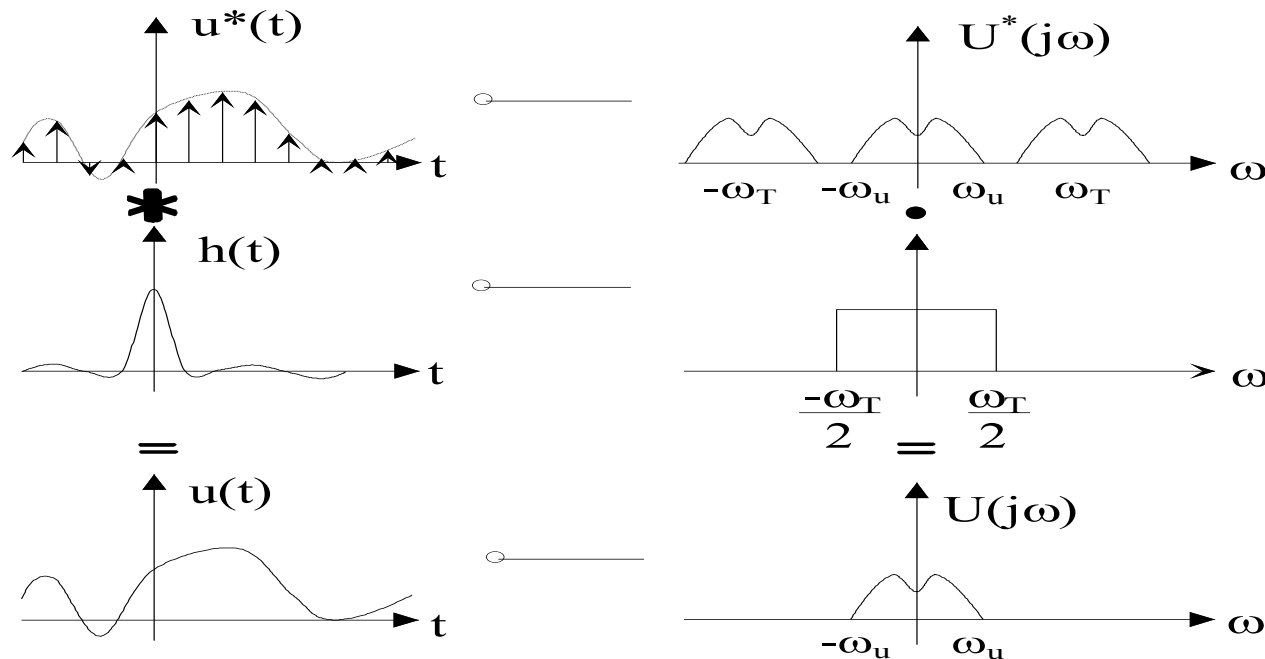
$$\omega_T = \frac{2\pi}{T}$$

11.1.3. Ideale Interpolation

理想插值

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= U^*(j\omega) \cdot T \cdot \Pi_{\omega_T}(\omega) \\ &= U(j\omega) \\ y(t) &= u(t) \end{aligned}$$

ideale Rekonstruktion



11.1.3. Ideale Interpolation

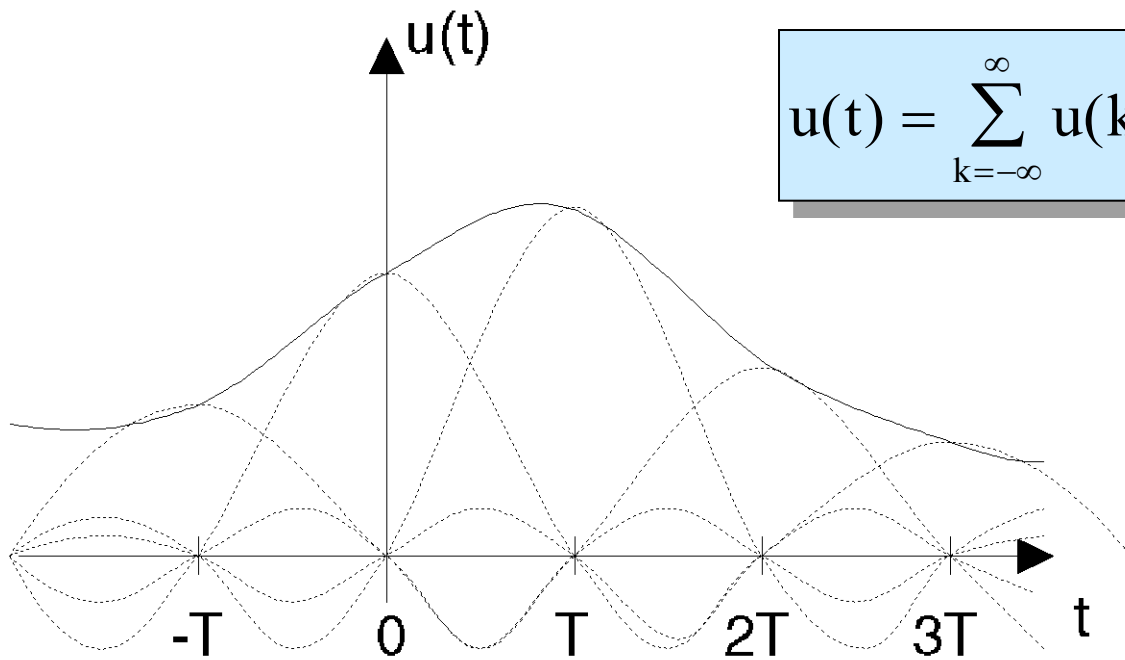
$$u^*(t) = u(t) \delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT) \delta(t - kT)$$

Interpolationstheorem:

$$U(j\omega) = T \cdot U^*(j\omega) \cdot \Pi_{\omega_T}(\omega)$$

$$u(t) = u^*(t) * \text{si}\left(\frac{\omega_T}{2} t\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT) [\delta(t - kT) * \text{si}\left(\frac{\omega_T}{2} t\right)]$$

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT) \cdot \text{si}\left(\frac{\omega_T}{2} (t - kT)\right)$$



11.1.2. Ideale Abtastung

Abtasttheorem:

$$f_T \geq 2f_u$$

Übertragungsrate R

$$R = \min\{f_T\}$$

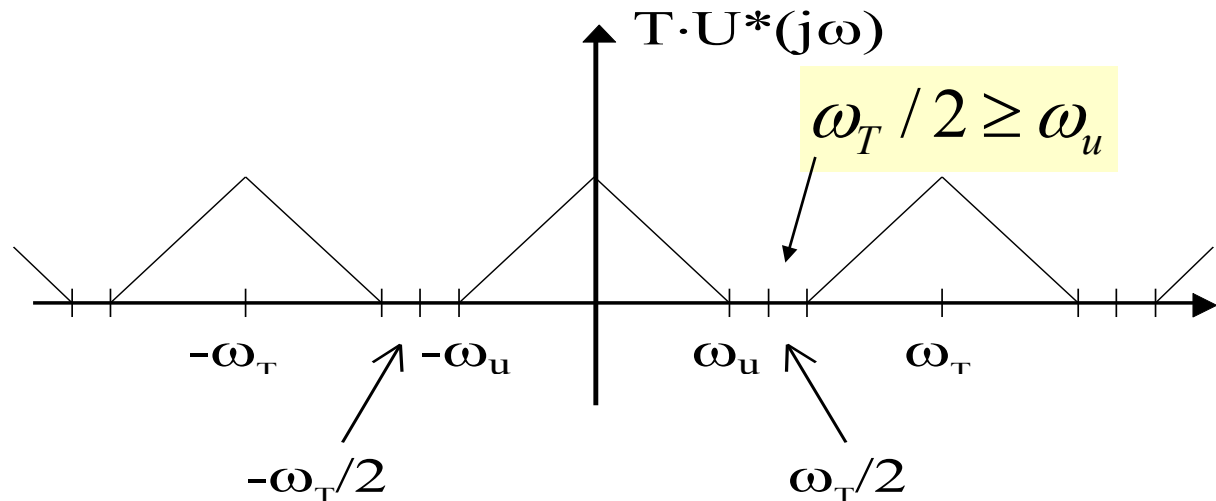
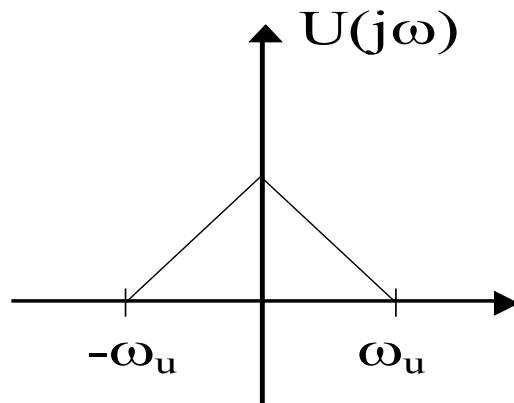
Bei : $= 2B_u$

Nyquistrate R

Nyquistfrequenz B_u

Nyquist率 (Nyquist Rate) : 是指信号的抽样频率必须至少是信号中最高频率的两倍以上, 以避免出现混叠。

Nyquist频率 (Nyquist Frequency) : 是指信号抽样率的一半, 也是信号的最高频率。

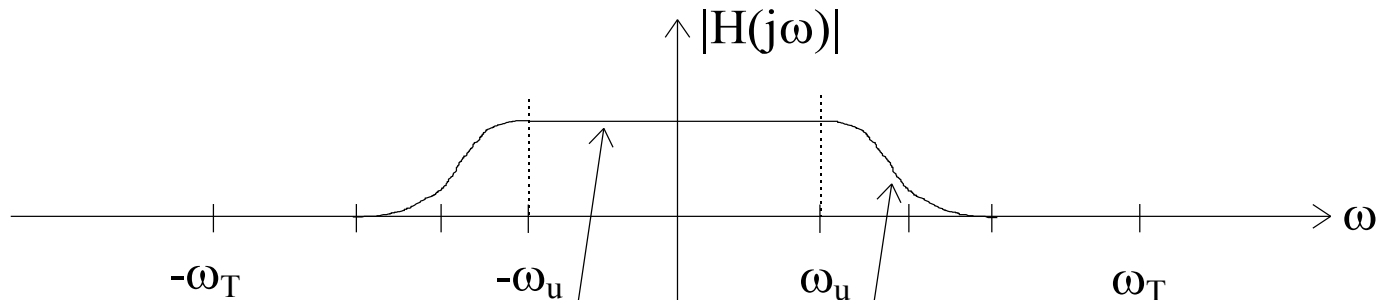
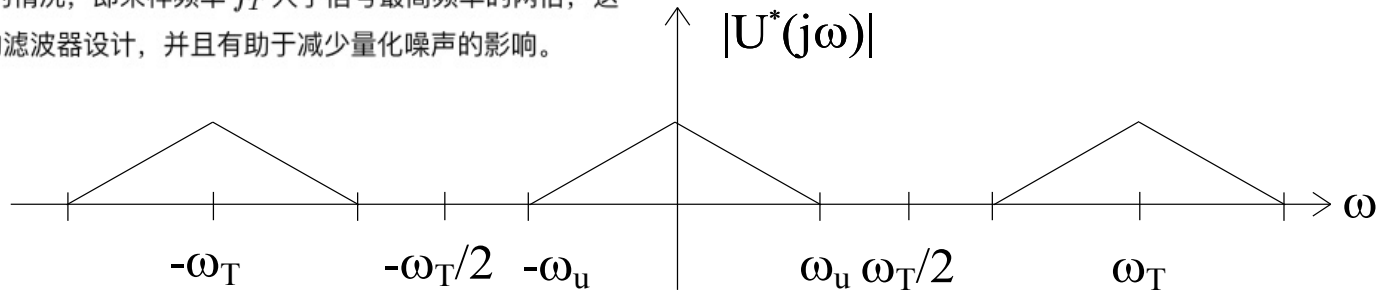


11.1.4. Überabtastung und Interpolation

Überabtastung:

$$f_T > 2f_u$$

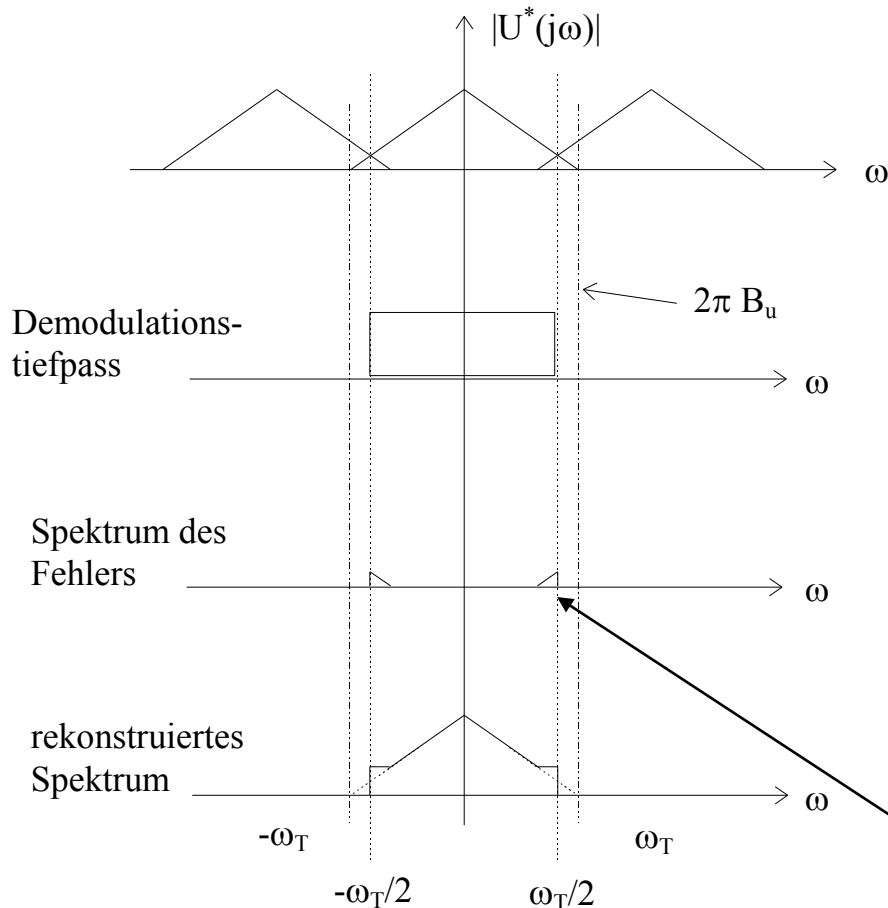
第二张图片标题“11.1.4. Überabtastung und Interpolation”意为“11.1.4. 过采样和插值”，展示了过采样的情况，即采样频率 f_T 大于信号最高频率的两倍，这可以简化信号恢复时的滤波器设计，并且有助于减少量化噪声的影响。



$H(j\omega) = \text{const.}$

$H(j\omega)$ beliebig

Unterabtastung



Spiegelungsfehler
Rückfaltungsfehler
aliasing errors

第三张图片标题“Unterabtastung”意为“欠采样”，讨论了采样频率低于理想采样率时可能出现的问题。这会导致信号频谱的混叠，称为镜像误差或折叠误差（Spiegelungsfehler / Rückfaltungsfehler，英文为 *aliasing errors*），这是因为高频信号的频谱被错误地映射到低频区域。图片下方解释了这个现象，表示混叠引起的误差导致了频谱的倒置（*spektrale Kehrlage*）。

spektrale Kehrlage

11.3.3. Spiegelungsfehler-Effekte

Unterabtastung eines stimmlosen Sprachlautes

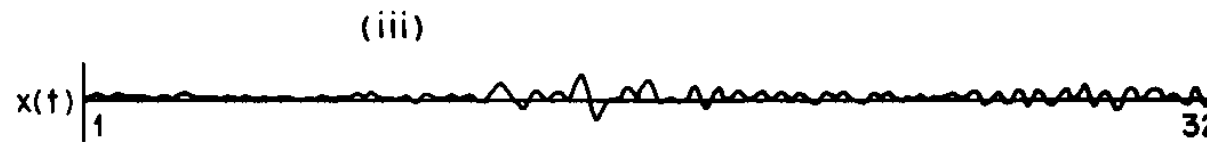
11.3.3. 映射错误效应
对无声语音的欠采样
比较 → 主要是映射错误!



$B_u = 3.2 \text{ kHz}$



$f_T = 4 \text{ kHz}$



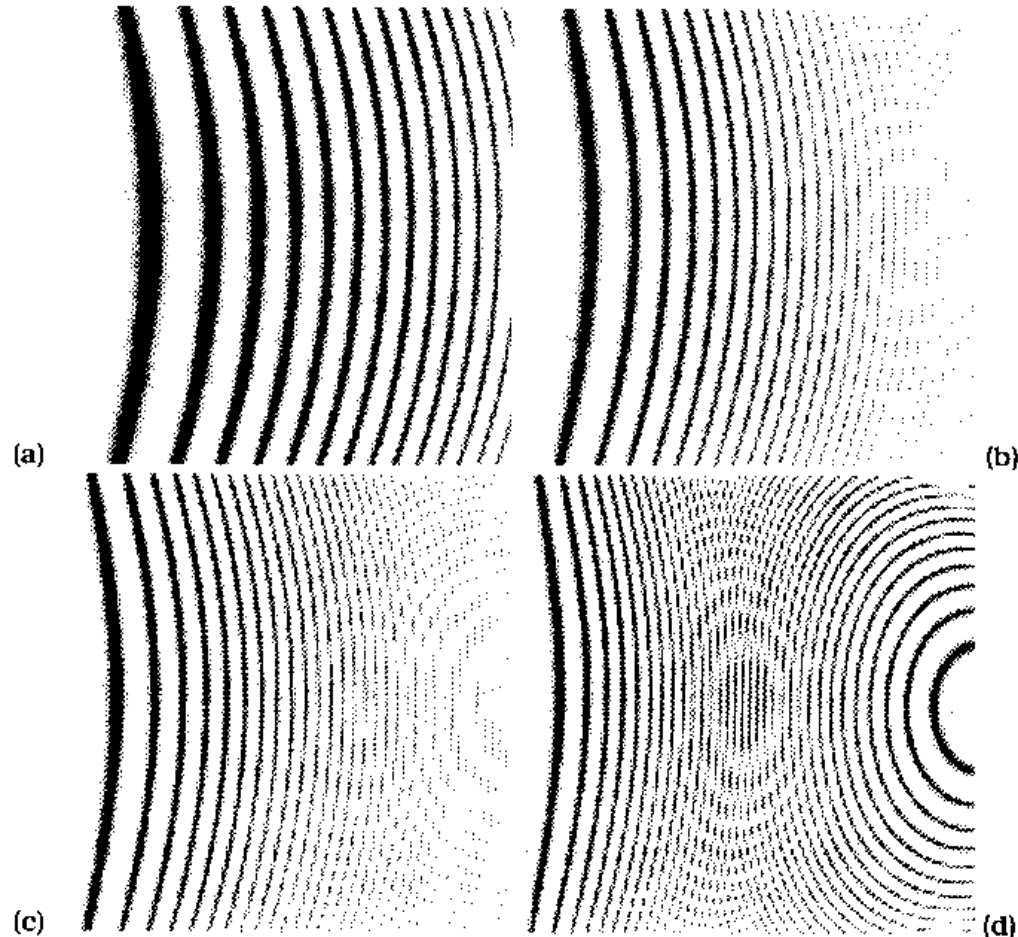
$B_u = 2 \text{ kHz}$

TIME t (ms)

Vergleich → hauptsächlich Spiegelungsfehler !

11.3.3. Spiegelungsfehler-Effekte

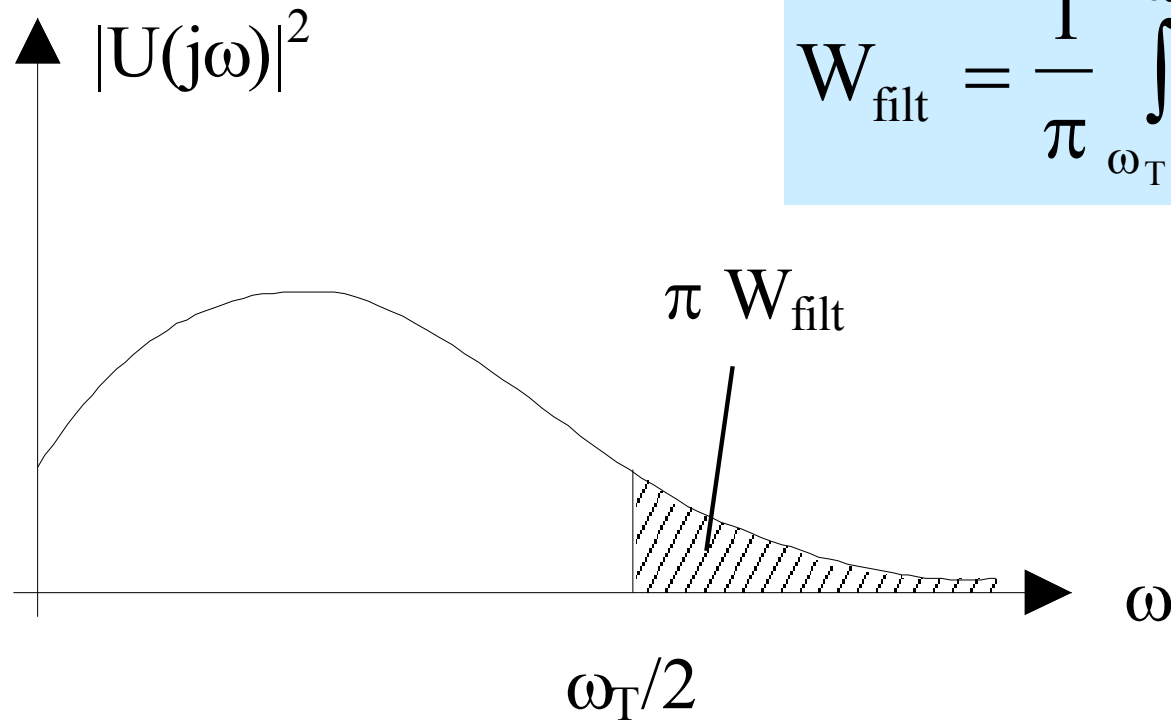
Spiegelungsfehler bei einer Bildvorlage



11.3. Fehler durch Bandbegrenzung & Unterabtastung

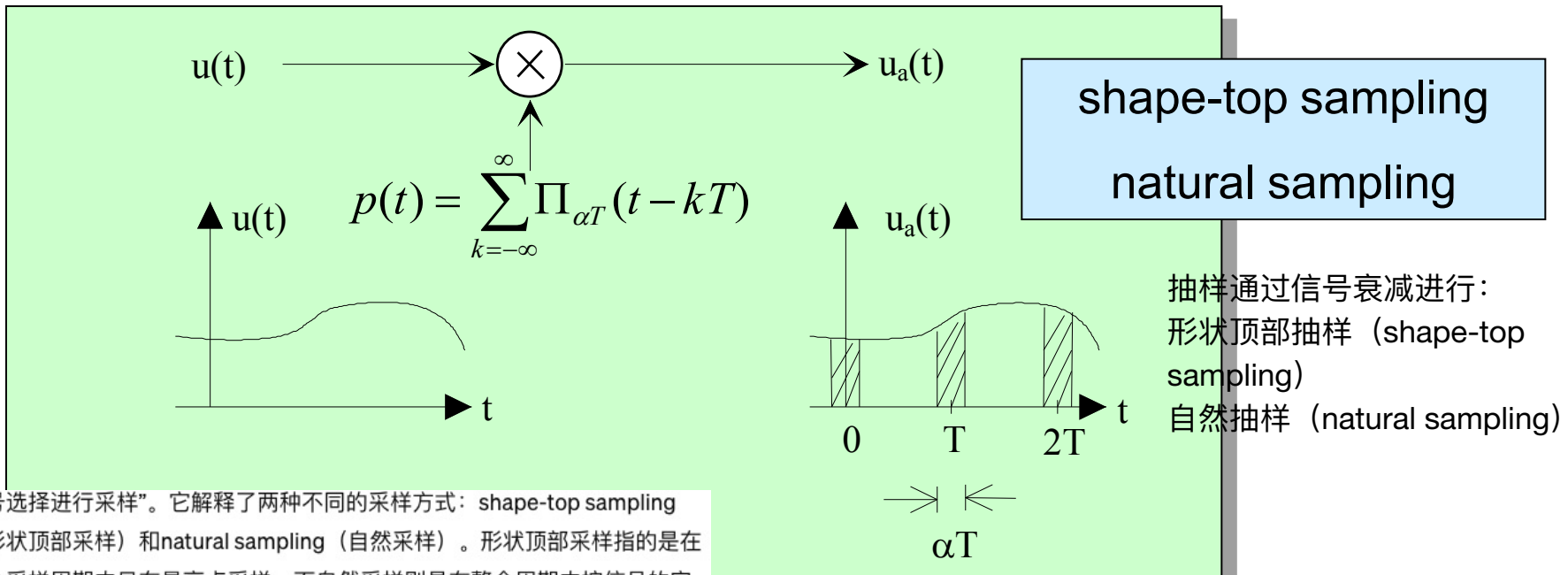
Bandbegrenzung durch Vorfilterung

误差由带宽限制和欠采样引起
通过预滤波进行带宽限制



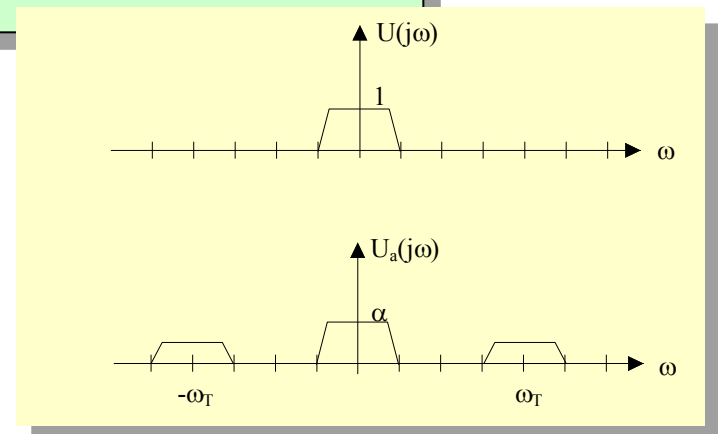
$$W_{\text{filt}} = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_T/2}^{\infty} |U(j\omega)|^2 d\omega$$

11.2.1. Abtastung durch Signalausblendung



信号选择进行采样”。它解释了两种不同的采样方式：shape-top sampling（形状顶部采样）和natural sampling（自然采样）。形状顶部采样指的是在每个采样周期内只在最高点采样，而自然采样则是在整个周期内按信号的实际形状进行采样。数学表达式 $u_a(t) = u(t)(\Pi_{\alpha T} * \delta_T(t))$ 展示了一个通过乘以窗函数 (Π) 和脉冲序列 ($\delta_T(t)$) 的卷积来获取采样信号的过程。

$$u_a(t) = u(t)(\Pi_{\alpha T}(t) * \delta_T(t))$$



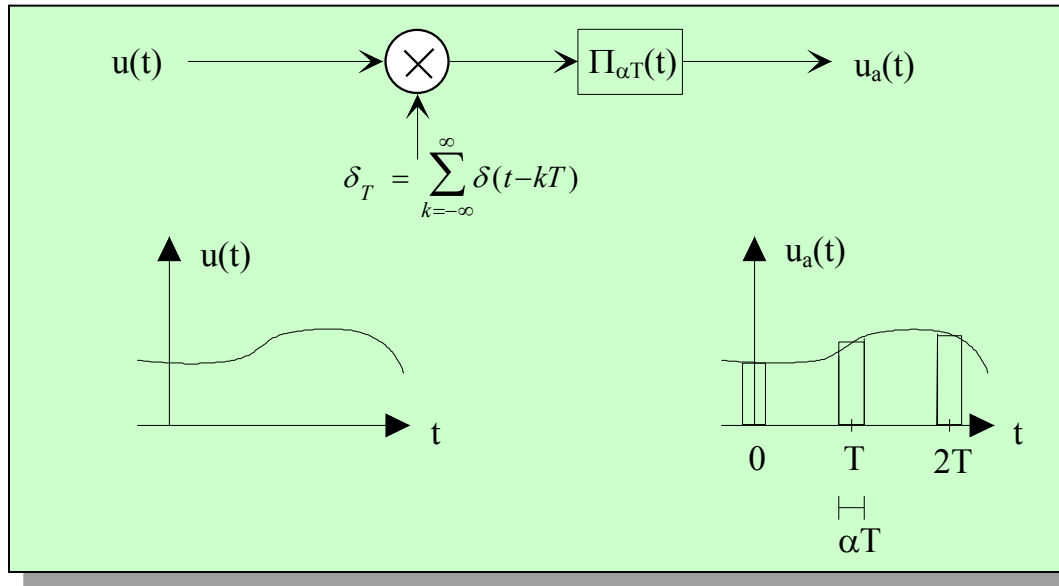
11.2.1. Abtastung durch Signalausblendung

$$u_a(t) = u(t)(\Pi_{\alpha T}(t) * \delta_T(t))$$

$$\begin{aligned} U_a(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} U(j\omega) * \left[\alpha T \operatorname{si}\left(\frac{\omega \alpha T}{2}\right) \omega_T \delta_{\omega_T}(\omega) \right] \\ &= \alpha U(j\omega) * \left(\operatorname{si}\left(\frac{\omega \alpha T}{2}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_T) \right) \\ &= \alpha U(j\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\operatorname{si}(k\pi\alpha) \delta(\omega - k\omega_T)) \\ &= \alpha \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\operatorname{si}(k\pi\alpha) U(j(\omega - k\omega_T))] \end{aligned}$$

11.2.2. Abtastung mit Signalverbreiterung

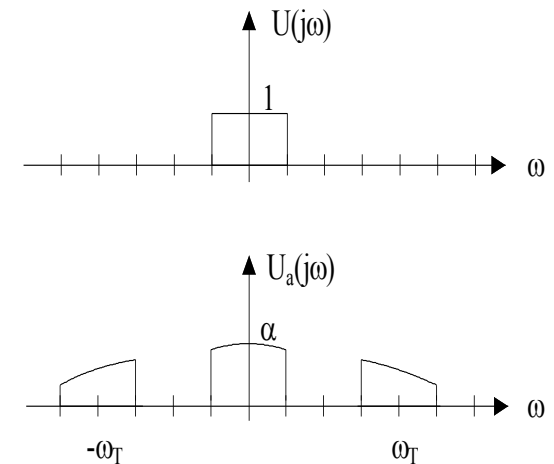
第二张图片标题“11.2.2. Abtastung mit Signalverbreiterung”意为“11.2.2. 通过信号扩展进行采样”。这种采样方法使用了flat-top sampling（平顶采样），其中每个采样值不是一个瞬时值，而是在一个小的时间窗口内信号的平均值。公式 $u_a(t) = (u(t) * \delta_T(t)) * \Pi_{\alpha T}(t)$ 描述了信号通过一个狄拉克脉



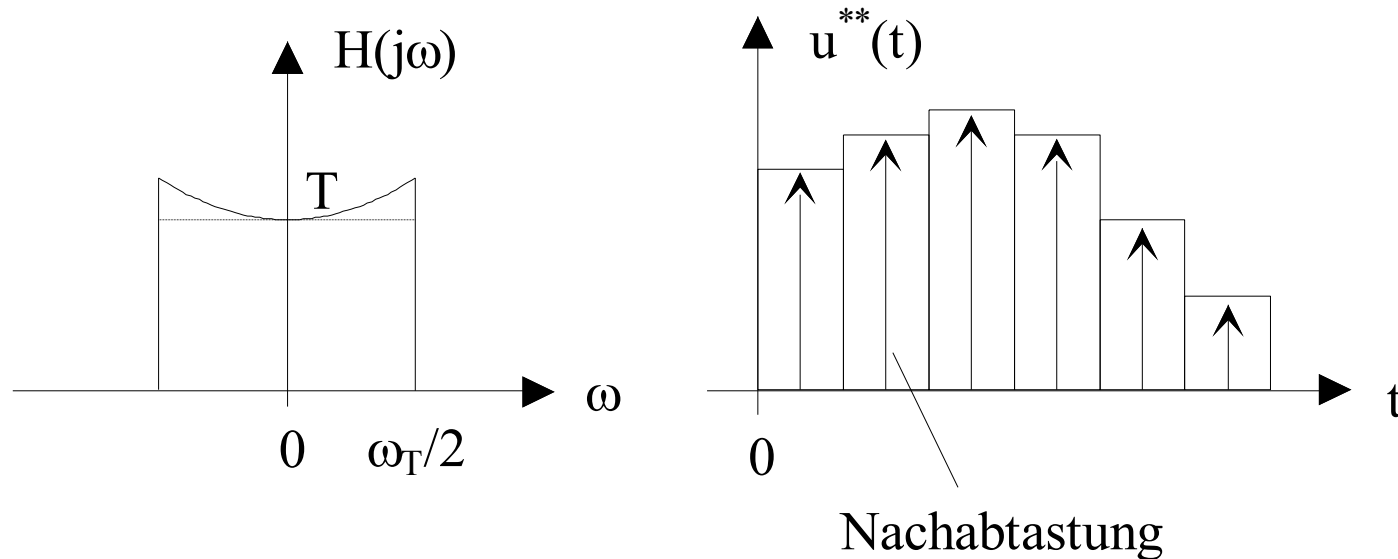
flat-top sampling

$$u_a(t) = (u(t) \cdot \delta_T(t)) * \Pi_{\alpha T}(t)$$

$$\begin{aligned} U_a(j\omega) &= \left(\frac{1}{2\pi} U(j\omega) * \omega_T \cdot \delta_{\omega_T}(\omega) \right) \cdot \alpha T \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega \alpha T}{2}\right) \\ &= \alpha \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega \alpha T}{2}\right) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(j(\omega - k\omega_T)) \end{aligned}$$



11.2.2. Abtastung mit Signalverbreiterung



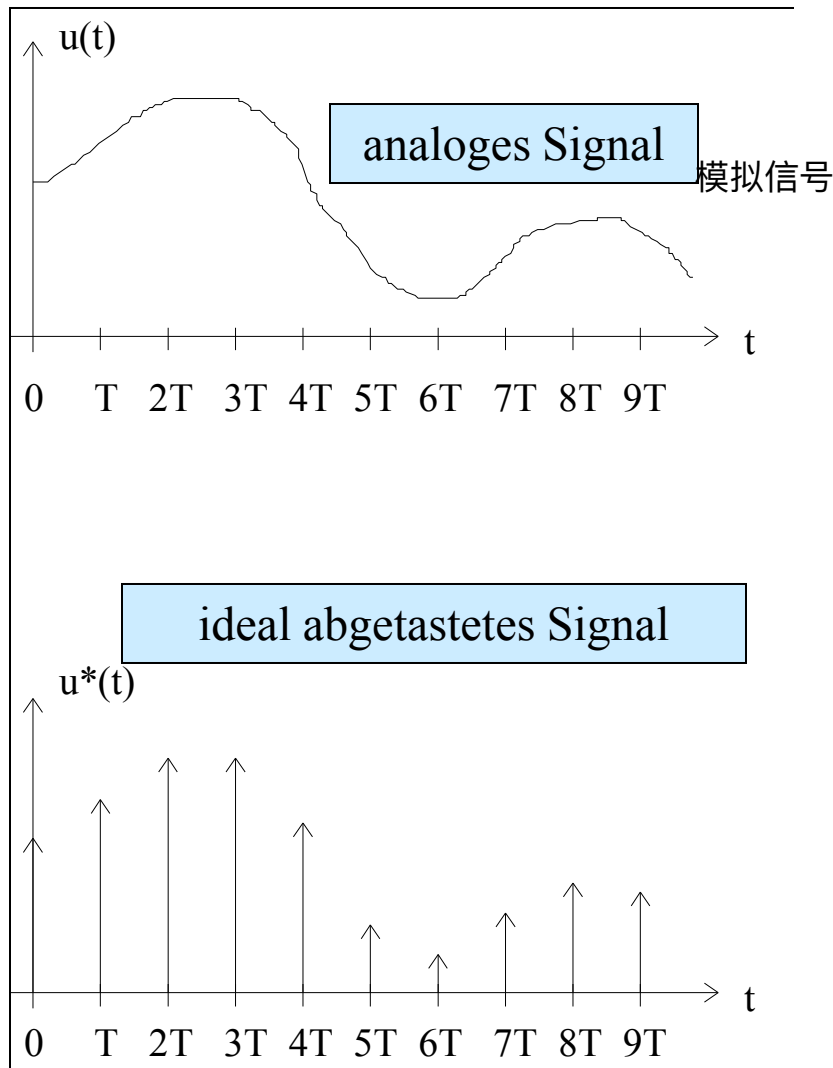
Fehlerkorrektur

- si-Korrektur
- Nachabtastung
- Präemphasis (senderseitig)

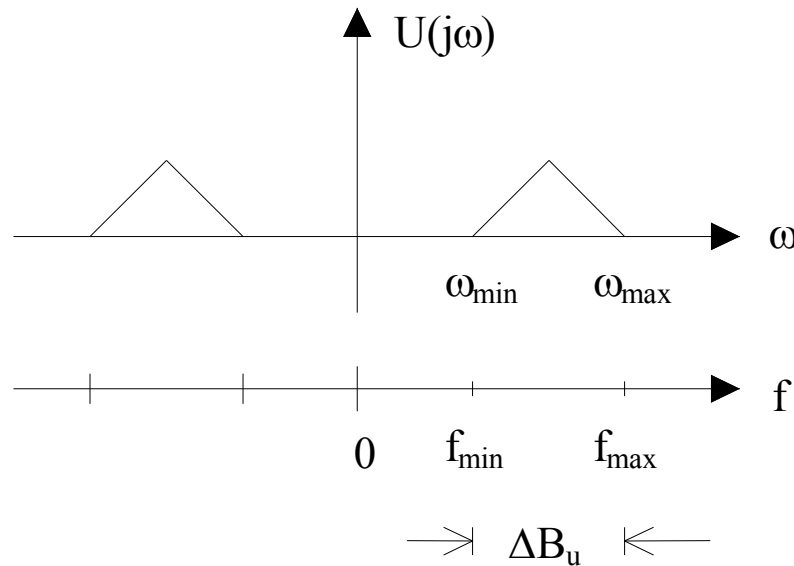
错误校正

- SI校正 (si-correction)
- 后采样 (post-sampling)
- 预加重 (sender-side preemphasis)

11.1.1. Zeitdiskrete Signale



11.4. Abtastung von Bandpaßsignalen



$$f_T = \frac{2}{m} f_{\max}$$

$$\frac{f_{\max}}{\Delta B_u} - 1 < m \leq \frac{f_{\max}}{\Delta B_u}$$

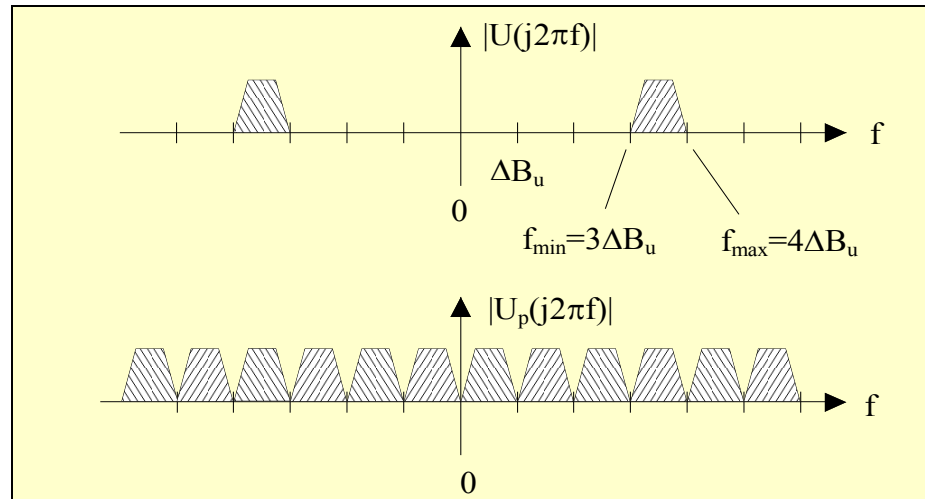
integer band sampling

$$f_T = 2 \cdot \Delta B_u$$

$$f_{\max} = n \cdot \Delta B_u$$

$$f_{\min} = m \cdot \Delta B_u$$

11.4. Beispiel: Integer Band Sampling



$$f_T = 2 \cdot \Delta B_u$$

