Prof. Dr. Frank Heinemann

MAKROÖKONOMIK (AVWL II)

5. Übung

(Wachstum 2)

Der Abgabetermin für die mit * gekennzeichneten Aufgaben ist
Dienstag, 23.05.2023, 10:00 Uhr.
Zu spät abgegebene Hausaufgaben werden nicht gewertet!

Aufgabe 1* – Bevölkerungswachstum und technischer Fortschritt im Solow Modell

Betrachten Sie eine Volkswirtschaft, deren Produktion durch die Produktionsfunktion:

$$Y_t = \mathrm{K}_t^{\alpha}(A_t N_t)^{1-\alpha}$$

beschrieben wird. Dabei bezeichnet Y_t die reale Produktion, K_t den Kapitalstock, A_t die Arbeitsproduktivität und N_t die Erwerbsbevölkerung. Die Sparquote ist $0 < s < 1$, die Abschreibungsrate $\delta > 0$, die Wachstumsrate der Arbeitseffizienz (technischer Fortschritt) ist $g > 0$ und die Bevölkerungswachstumsrate beträgt $n > 0$. Es gilt $0 < \alpha < 1$.

a) Stellen Sie die Produktionsfunktion in der Intensitätsform dar (Produktion je Arbeitseffizienzeinheit).
b) Berechnen Sie den Kapitalstock k^*, die Produktion y^*, und die Ersparnis s^* (jeweils pro Arbeitseffizienzeinheit) im Steady State.

Gehen Sie nun davon aus, dass die Bevölkerung in jeder Periode um $n = 3\%$ wächst. Die Kapitalquote beträgt $\alpha = 40\%$, die Rate des technischen Fortschritts beträgt $g = 2\%$. Die Bevölkerung konsumiert in jeder Periode einen Anteil von 70% der gesamten Produktion.

c) Die Volkswirtschaft befindet sich im langfristigen Gleichgewicht. Wie hoch ist die Wachstumsrate der Produktion? Wie hoch ist die Wachstumsrate des Konsums pro Kopf? Wie hoch ist die Wachstumsrate der Nettoinvestitionen je Arbeitseffizienzeinheit? Begründen Sie kurz. *(Hinweis: Rechnungen sind an dieser Stelle nicht zwingend notwendig, Sie können auch verbal Ihre Ergebnisse begründen.)*
d) Ist das langfristige Wachstumsgleichgewicht der Volkswirtschaft bei der ursprünglichen Sparquote dynamisch effizient? Argumentieren Sie und gehen Sie dabei auf das Konzept der dynamischen Effizienz ein.

Nehmen Sie nun an, dass die Sparquote der Volkswirtschaft gleich der optimalen Sparquote der goldenen Regel ist ($s = s^*$).

e) Welche Auswirkung hat die Anpassung der Sparquote an die goldene Regel auf die Nettokapitalrendite (Realzins) im langfristigen Wachstumsgleichgewicht im Vergleich zur Ausgangssituation? Leiten Sie zur Beantwortung der Frage den Realzins formal her und erläutern Sie.

Nehmen Sie nun an, dass aufgrund von künstlicher Intelligenz die Wachstumsrate des technischen Fortschritts dauerhaft ansteigt.

f) Veranschaulichen Sie die Ausgangssituation sowie die Veränderung der Wachstumsrate des technischen Fortschritts auf Kapitalintensität, Output pro Arbeitseffizienzeinheit mithilfe einer Grafik im ($k_t = \frac{K_t}{A_t N_t}$, $y_t = \frac{Y_t}{A_t N_t}$)-Raum. Beschriften Sie alle Kurven und Achsen und kennzeichnen Sie die langfristigen Wachstumsgleichgewichte. Erläutern Sie, wie sich der Pro-Kopf-Konsum während der Anpassung an den neuen Steady State und im neuen Steady State im Vergleich zur Ausgangssituation verändert. Wie wirkt sich die Veränderung auf den Realzins aus?

Aufgabe 2 – Faktornachfrage

Betrachten Sie ein Unternehmen, das mit der Produktionsfunktion $Y = F(K, N)$ und unter vollkommenem Wettbewerb produziert. Preisniveau P, nominaler Lohnsatz w und Kapitalkosten r (realer Zinssatz) sind exogen gegeben und konstant. Die Produktionsfunktion besitzt die aus Aufgabe 1 beschriebenen Eigenschaften (i-iii) des Übungsblatts 4.

Die Firma existiert für eine Periode, kauft zu Beginn Kapitalgüter, mit denen sie produziert. Durch die Abnutzung der Maschinen geht ein Anteil δ der Kapitalgüter während der Nutzung kaputt. Am Ende der Periode verkauft die Firma ihre produzierten Güter und die verbliebenen Kapitalgüter[1].

Die Firma maximiert ihren Gewinn und fragt entsprechend Arbeit N und Kapital K nach. Die Kosten bestehen aus Lohn- und Kapitalkosten.

a) Stellen Sie das Gewinnmaximierungsproblem der Firma auf.

b) Bestimmen und interpretieren Sie die Bedingungen erster Ordnung für die Gewinnmaximierung, wenn die Firma ihren Kapital- und Arbeitseinsatz wählen kann.

c) Nehmen Sie an, der Kapitalstock wurde bereits in der Vorperiode beschafft (Der Kapitalinput ist nun exogen festgelegt). Zeigen sie, dass die Nachfrage nach Arbeit bei gegebenen Preis P negativ vom Lohn abhängt.

d) Nehmen Sie nun umgekehrt an, dass bereits Arbeiter mit festen Arbeitsverträgen eingestellt wurden. (Der Arbeitsinput ist exogen festgelegt). Zeigen Sie, dass die Nachfrage nach Kapital negativ vom Zins abhängt.

e) Nutzen Sie das Euler-Theorem (vgl. Vorlesung Wachstum Teil 1) und die Ergebnisse aus dem Aufgabenteil b) um zu zeigen, dass die Summe der (Brutto-) Faktoreinkommen dem Wert der produzierten Güter entspricht. Erläutern Sie das Ergebnis.

Aufgabe 3 – Stilisierte Fakten

a) In der Wirtschaftswissenschaft, insbesondere in der Wachstumstheorie wird häufig auf stilisierte Fakten Bezug genommen. Erläutern Sie kurz, was man unter einem stilisierten Faktum versteht und warum diesen eine besondere Rolle zukommt.

Der Ökonom Nicholas Kaldor formulierte 1961 folgende Liste stilisierter Fakten[2], die die langfristige ökonomische Entwicklung entwickelter, kapitalistischer Gesellschaften beschreiben:

i. Die Arbeitsproduktivität $\frac{Y}{N}$ wächst mit konstanter Rate.

---

[1] Wir nehmen an, dass neu produzierte Güter und Kapitalgüter zum gleichen Preis bewertet werden.

[2] Kaldor, Nicholas. *Capital accumulation and economic growth*. Macmillan, 1961.

ii. Das Verhältnis $\frac{K}{N}$ nimmt im Zeitverlauf zu.

iii. Die Kapitalrendite ist annähernd konstant.

iv. Der Kapitalkoeffizient $\frac{K}{Y}$ ist annähernd konstant.

v. Die Einkommensanteile der Arbeit und des Kapitals sind annähernd konstant.

b) Zeigen Sie, dass im Solow-Modell die Annahme einer konstanten Rate des technischen Fortschritts die Fakten i., ii. und iv. impliziert.

c) Die Kapitalrendite ergibt sich als Differenz aus realer Bruttoentlohnung des Kapitaleinsatzes und Abschreibungen pro Kapitaleinheit. Beurteilen Sie inwiefern die Aussagen des Solow-Modell mit Fakt iii. zu vereinbaren sind.

d) Ist die Beobachtung v. mit dem Modell vereinbar, wenn wir eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion unterstellen?

e) Für welche der 5 stilisierten Fakten ist technischer Fortschritt notwendig?

Aufgabe 1* – Bevölkerungswachstum und technischer Fortschritt im Solow Modell

Betrachten Sie eine Volkswirtschaft, deren Produktion durch die Produktionsfunktion:

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t N_t)^{1-\alpha}$$

beschrieben wird. Dabei bezeichnet Y_t die reale Produktion, K_t den Kapitalstock, A_t die Arbeitsproduktivität und N_t die Erwerbsbevölkerung. Die Sparquote ist $0 < s < 1$, die Abschreibungsrate $\delta > 0$, die Wachstumsrate der Arbeitseffizienz (technischer Fortschritt) ist $g > 0$ und die Bevölkerungswachstumsrate beträgt $n > 0$. Es gilt $0 < \alpha < 1$.

a) Stellen Sie die Produktionsfunktion in der Intensitätsform dar (Produktion je Arbeitseffizienzeinheit).
b) Berechnen Sie den Kapitalstock k^*, die Produktion y^*, und die Ersparnis s^* (jeweils pro Arbeitseffizienzeinheit) im Steady State.

a) $Y_t = K_t^{\alpha}(A_t N_t)^{1-\alpha}$

$$y_t = \frac{Y_t}{A_t N_t} = \frac{K_t^{\alpha}(A_t N_t)^{1-\alpha}}{A_t N_t} = K_t^{\alpha} \cdot (A_t N_t)^{-\alpha} = \left(\frac{K_t}{A_t N_t}\right)^{\alpha} = k_t^{\alpha}$$

b) Steady State: $s f(k^*) = (\delta + n + g) k^*$

$$s k^{*\alpha} = (\delta + n + g) k^*$$

$$k^{*(\alpha-1)} = \frac{\delta + n + g}{s}$$

Kapitalstock: $k^* = \left(\frac{s}{\delta+n+g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Produktion: $y^* = f(k^*) = k^{*\alpha} = \left(\frac{s}{\delta+n+g}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$

Ersparnis: $s^* = s y^* = s\left(\frac{s}{\delta+n+g}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$

Gehen Sie nun davon aus, dass die Bevölkerung in jeder Periode um $n = 3\%$ wächst. Die Kapitalquote beträgt $\alpha = 40\%$, die Rate des technischen Fortschritts beträgt $g = 2\%$. Die Bevölkerung konsumiert in jeder Periode einen Anteil von 70% der gesamten Produktion.

c) Die Volkswirtschaft befindet sich im langfristigen Gleichgewicht. Wie hoch ist die Wachstumsrate der Produktion? Wie hoch ist die Wachstumsrate des Konsums pro Kopf? Wie hoch ist die Wachstumsrate der Nettoinvestitionen je Arbeitseffizienzeinheit? Begründen Sie kurz. *(Hinweis: Rechnungen sind an dieser Stelle nicht zwingend notwendig, Sie können auch verbal Ihre Ergebnisse begründen.)*

d) Ist das langfristige Wachstumsgleichgewicht der Volkswirtschaft bei der ursprünglichen Sparquote dynamisch effizient? Argumentieren Sie und gehen Sie dabei auf das Konzept der dynamischen Effizienz ein.

c) Anteil von Konsum: $c = 0.7 = 70\%$

$\Rightarrow s = 1 - c = 30\%$

Wenn es konstante Skalenerträge gibt, dann ist die Wachstumsrate der Produktion pro Kopf tatsächlich gleich der Wachstumsrate der Gesamtproduktion.

Wachstumsrate der Produktion: $n + g = 3\% + 2\% = 5\%$

Wachstumsrate des Konsums pro Kopf: $5\% - 3\% = 2\%$

(Wachstumsrate der Produktion − Wachstumsrate der Bevölkerung)

Wachstumsrate der Nettoinvestitionen je Arbeitseffizienzeinheit: $5\% - 2\% = 3\%$

(Wachstumsrate der Produktion − WR des Konsums pro Kopf.)

d) Steady state der goldenen Regel:

$$f'(k) = \delta + g + n \Rightarrow \alpha k^{\alpha - 1} = \delta + g + n \Rightarrow k^{**} = \left(\frac{\alpha}{\delta + g + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Wir können k^* aus b) und k^{**} vergleichen: Falls dynamisch effizient dann $\alpha = s^*$

$\alpha: 40\% \neq s = 1 - c = 30\% \Rightarrow$ undynamisch effizient

---

Wachstumsrate des Konsums pro Kopf:

$$\text{Aus b.: } k^* = \left(\frac{s}{\delta + n + g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{1-c}{\delta + n + g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Steady state:

totales differential der Gleichung

$$(1-c) f(k^*(c, n, g)) = (\delta + n + g) k^*$$

$$(1-c)\left(\frac{1-c}{\delta + n + g}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = (\delta + n + g) \cdot \left(\frac{1-c}{\delta + n + g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow (1-c)^{\frac{1}{1-\alpha}} = (\delta + n + g)(1-c)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$C_t = (1-s) Y_t = (1-s) K_t^{\alpha} (A_t N_t)^{1-\alpha}$$

$$c = \frac{C}{N} = (1-s) A_t f(k^*) = \quad c A_t \cdot \left(\frac{1-c}{\delta + n + g}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Nehmen Sie nun an, dass die Sparquote der Volkswirtschaft gleich der optimalen Sparquote der goldenen Regel ist ($s = s^*$).

e) Welche Auswirkung hat die Anpassung der Sparquote an die goldene Regel auf die Nettokapitalrendite (Realzins) im langfristigen Wachstumsgleichgewicht im Vergleich zur Ausgangssituation? Leiten Sie zur Beantwortung der Frage den Realzins formal her und erläutern Sie.

Aus d) können wir wissen: $s = 30\% < s^* = \alpha = 40\%$

Für Realzins gilt: $r = f'(k) - \delta$

Für steady state der Goldenen Regel gilt: $f'(k) = \delta + g + n$

$$\Rightarrow r = f'(k) - \delta = \delta + g + n - \delta = g + n$$

$\Rightarrow$ Realzins = Wachstumsrate von Y

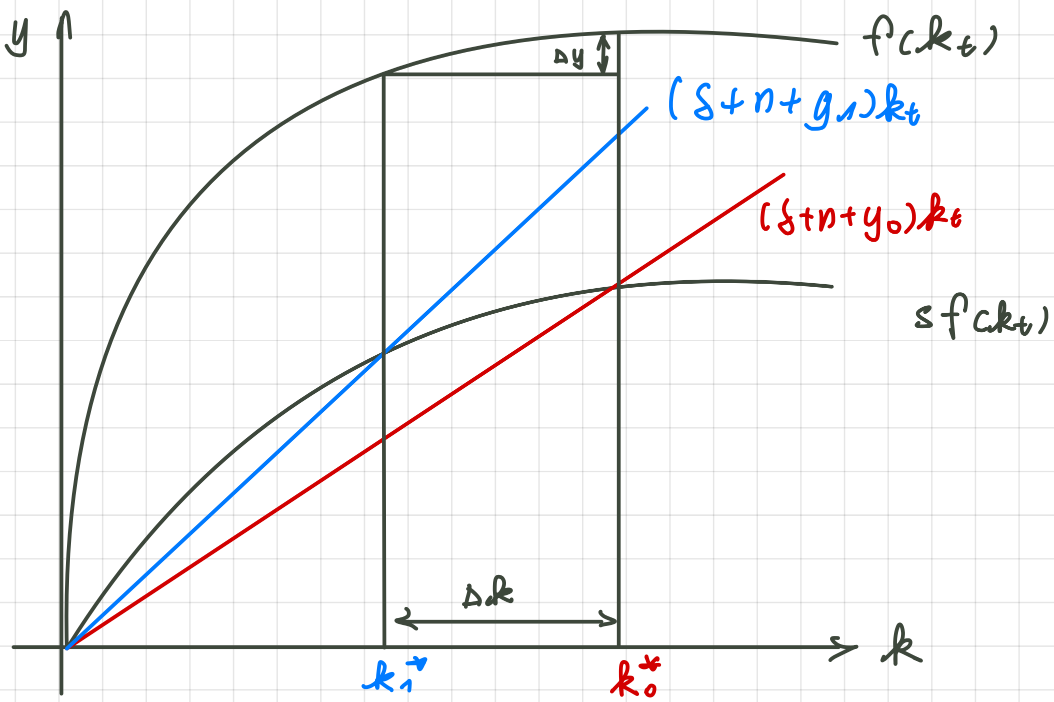
Aber für $s < s^*$, gilt $f'(k) > \delta + g + n$

$\Rightarrow r > g + n$

nämlich Realzins > Wachstumsrate von Y

D. h. Wenn s auf s^* steigt, sinkt Realzins auf $g + n$

f) Veranschaulichen Sie die Ausgangssituation sowie die Veränderung der Wachstumsrate des technischen Fortschritts auf Kapitalintensität, Output pro Arbeitseffizienzeinheit mithilfe einer Grafik im ($k_t = \frac{K_t}{A_t N_t}$, $y_t = \frac{Y_t}{A_t N_t}$)-Raum. Beschriften Sie alle Kurven und Achsen und kennzeichnen Sie die langfristigen Wachstumsgleichgewichte. Erläutern Sie, wie sich der Pro-Kopf-Konsum während der Anpassung an den neuen Steady State und im neuen Steady State im Vergleich zur Ausgangssituation verändert. Wie wirkt sich die Veränderung auf den Realzins aus?



Währen der Anpassung ......

$g\uparrow \rightarrow k\downarrow \rightarrow f(k) = y \downarrow$

Der Pro-Kopf-Konsum sinkt während der Anpassung .....

da die niedrieger Output pro Arbeitseffizienzeinheit zu weniger Konsum führen

$\left(\frac{C}{N} = (1-s) A_t f(k_1^*) \right)$

Realzins bleibt unverändert. Da die Verzinsung des Kapitalstocks ist nahem konstant in steady state ($r = f'(k) - \delta$)