Elvira Fleig, Rolf Jongebloed

Rechenübung Signale & Systeme (WiSe 2023/2024)

Fouriertransformation, Amplituden- und Phasenspektren (4. Termin)

13.11 - 19.11.2023

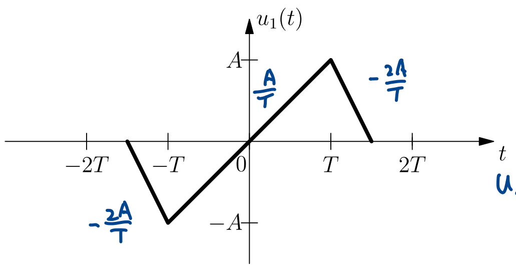
Hinweise

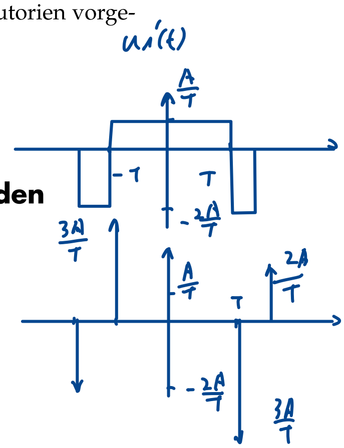
- Die Aufgabenblätter zur Rechenübung stehen jeweils vor dem jeweiligen Termin auf dem ISIS-Portal zum Download bereit.
- Aufgaben, die mit **[HA]** bzw. **[AK]** beginnen, sind Hausaufgaben bzw. alte Klausuraufgaben, die als Hausaufgabe bearbeitet werden sollen. Diese werden zusätzlich in den freiwilligen Tutorien vorgerechnet bzw. besprochen.

1 Fouriertransformation

1.1 Berechne die jeweiligen Fouriertransformierten der folgenden Signale.

a) **[AK]:**





$u_1''(t) = -\frac{2A}{T}\delta(t+\frac{3}{2}T) + \frac{3A}{T}\delta(t+T) - \frac{3A}{T}\delta(t-T) + \frac{2A}{T}\delta(t-\frac{3}{2}T)$

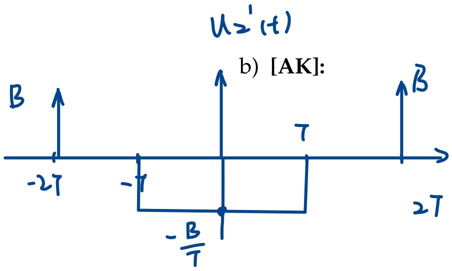
$(j\omega)^2 U(j\omega) = -\frac{2A}{T}e^{j\omega\frac{3}{2}T} + \frac{3A}{T}e^{j\omega T} - \frac{3A}{T}e^{-j\omega T} + \frac{2A}{T}e^{-j\omega\frac{3}{2}T}$

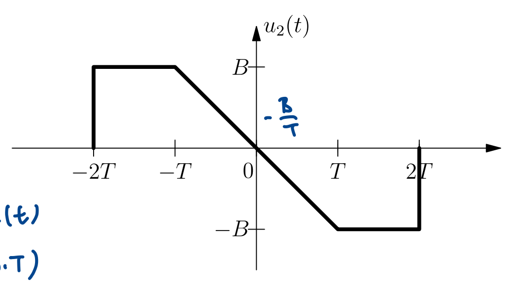
$= -\frac{2A}{T}(e^{j\omega\frac{3}{2}T} - e^{j\omega\frac{3}{2}T}) + \frac{3A}{T}(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T})$

$= -\frac{2A}{T}\cdot 2j\sin(\omega\frac{3}{2}T) + \frac{3A}{T}\cdot 2j\sin(\omega T)$

$U(j\omega) = \frac{4Aj}{T\omega^2}\sin(\omega\frac{3}{2}T) - \frac{6Aj}{T\omega^2}\sin(\omega T)$

b) **[AK]:**





$u_2'(t) = B\delta(t+2T) + B\delta(t-2T) - \frac{B}{T}\sqcap_{2T}(t)$

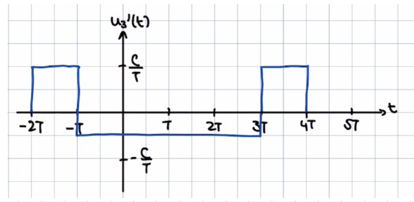
$(j\omega)U_2(j\omega) = Be^{j\omega 2T} + Be^{-j\omega 2T} - \frac{B}{T}\cdot 2T\cdot si(\omega\cdot T)$

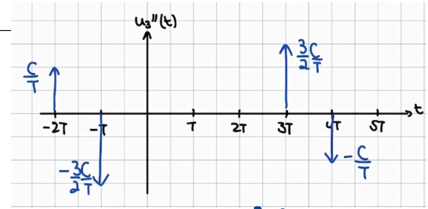
$= B\cdot 2\cos(\omega 2T) - 2B\, si(\omega T)$

$U_2(j\omega) = \frac{2B}{j\omega}\cdot(\cos(\omega 2T) - si(\omega T))$

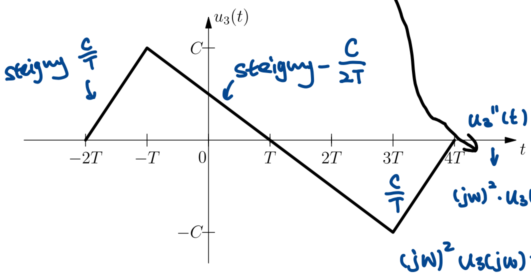
Ableitung im Zeitbereich	$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\, u(t)$	$(j\omega)^n \cdot U(j\omega)$

$e^{jx} - e^{-jx} = 2j\sin x$
$e^{jx} + e^{-jx} = 2 \cdot \cos x$





c)



$u_3''(t) = \frac{C}{T} \cdot \delta(t+2T) - \frac{3}{2}\frac{C}{T}(t+T) + \frac{3}{2}\frac{C}{T}(t-3T) - \frac{C}{T}(t-4T)$

$(j\omega)^2 \cdot U_3(j\omega) = \frac{C}{T} \cdot e^{j\omega 2T} - \frac{3}{2}\frac{C}{T} e^{j\omega T} + \frac{3}{2}\frac{C}{T} \cdot e^{-j\omega \cdot 3T} - \frac{C}{T} e^{-j\omega 4T}$

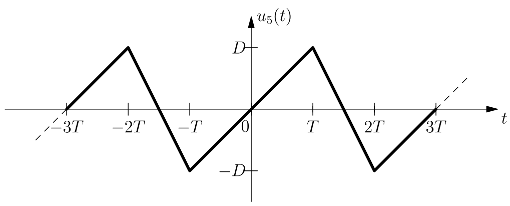
$(j\omega)^2 U_3(j\omega) = \frac{C}{T} e^{-j\omega T} \cdot \left(e^{j\omega 3T} - \frac{3}{2} e^{j\omega 2T} + \frac{3}{2} e^{-j\omega 2T} - \frac{C}{T} e^{-j\omega 3T}\right)$

$= \frac{C}{T} e^{-j\omega T} \cdot \left(2j\sin(\omega 3T) - \frac{3}{2} \cdot 2\sin(\omega 2T)\right)$

$U_3(j\omega) = -\frac{2Cj}{\omega^2 T} e^{-j\omega T} \left(\sin(\omega 3T) - \frac{3}{2}\sin(\omega 2T)\right)$

d) $u_4(t) = A\sqcap_T(3 \cdot (t - t_0))$

e)



2 Amplituden- und Phasenspektren

2.1 Bestimme die Amplituden- und Phasenspektren der folgenden Signale aus Aufgabe 1.1.

a) **[HA]:** $u_2(t)$

b) $u_4(t)$

c) $u_5(t)$

a) $U_2(j\omega) = \frac{2B}{j\omega} \cdot (\cos(2\omega T) - \mathrm{si}(\omega T))$

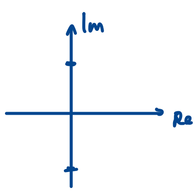
$= \frac{2B}{\omega}(\mathrm{si}(\omega T) - \cos(2\omega T)) \cdot j$

$= \mathrm{Im}\{U_2(j\omega)\}$

$\mathrm{Re}\{U_2(j\omega)\} = 0$

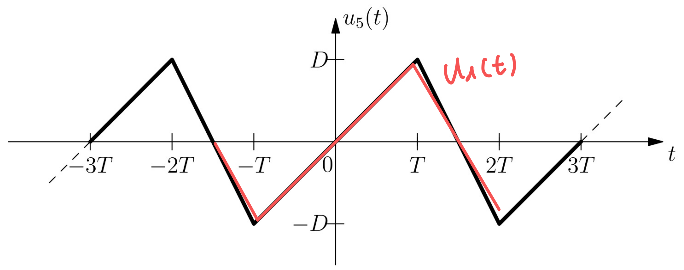
Amplitudenspektren: $|U_2(j\omega)| = \left|\frac{2B}{\omega}\right| \cdot \left|\mathrm{si}(\omega T) - \cos(2\omega T)\right|$

Phasenspektren: $\begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \frac{2B}{\omega}(\mathrm{si}(\omega T) - \cos(2\omega T)) > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \frac{2B}{\omega}(\mathrm{si}(\omega T) - \cos(2\omega T)) < 0 \end{cases}$



d) $u_4(t) = A\sqcap_T(3\cdot(t-t_0))$

e)



d)

Zeitbereich		Frequenzbereich
$u(a\cdot t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\cdot U(j\frac{\omega}{a})$
$u(t-t_0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$U(j\omega)\cdot e^{-j\omega t_0}$
$\sqcap_T(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$T\cdot si(\omega\cdot\frac{T}{2})$

$$
\begin{aligned}
U_4(j\omega) &= \mathcal{F}\{u_4(t)\} = \mathcal{F}\{A\cdot\sqcap_T(3\cdot(t-t_0))\}\\
&= A\cdot e^{-j\omega t_0}\,\mathcal{F}\{\sqcap_T(3t)\}\\
&= A\cdot e^{-j\omega t_0}\cdot\frac{1}{\lvert 3\rvert}\,\mathcal{F}\{\sqcap_T(t)\}(\tfrac{\omega}{3})\\
&= A\cdot e^{-j\omega t_0}\cdot\frac{1}{3}\,T\cdot si(\tfrac{\omega}{3}\cdot\tfrac{T}{2})\\
&= \frac{AT}{3}\,e^{-j\omega t_0}\,si(\tfrac{\omega T}{6})
\end{aligned}
$$

e.)

$$u_5(t) = \frac{D}{A}\,u_1(t) * \delta_{3T}(t)$$

$$U_5(j\omega) = \frac{D}{A}\cdot U_1(j\omega)\cdot \omega_T\cdot\delta_{\omega_T}(\omega) \qquad \omega_T = \frac{2\pi}{T_T} \quad \text{hier } T_T = 3T$$

$$= \frac{D}{A}\cdot\frac{2Aj}{\omega^2 T}\cdot\left(2\cdot\sin(\tfrac{3}{2}\omega T) - 3\cdot\sin(\omega T)\right)\cdot\frac{2\pi}{3T}\cdot\delta_{\frac{2\pi}{3T}}(\omega)$$

$$= D\cdot\frac{4A\pi j}{3\omega^2 T^2}\left(2\sin(\tfrac{3}{2}\omega T) - 3\sin(\omega T)\right)\delta_{\frac{2\pi}{3T}}(\omega)$$

2.1

b. $U_4(j\omega) = \frac{AT}{3}\cdot e^{-j\omega t_0}\cdot si(\frac{\omega T}{6})$

$$A(\omega) = \left\lvert \frac{AT}{3}\cdot si(\tfrac{\omega T}{6})\right\rvert$$

$$\varphi(\omega) = -\omega t_0 + \begin{cases} 0, & Re>0 \\ \pi, & Re<0, Im\geq 0 \\ -\pi, & Re<0, Im<0 \end{cases}$$

c. $U_5(j\omega) = \underbrace{D\cdot\frac{4A\pi j}{3\omega^2 T^2}\left(2\sin(\tfrac{3}{2}\omega T) - 3\sin(\omega T)\right)}_{u_1}\underbrace{\delta_{\frac{2\pi}{3T}}(\omega)}_{u_2}$

$$\boxed{\begin{aligned} u_1(j\omega)\cdot u_2(j\omega) &= A_1(\omega)\cdot e^{j\varphi_1(\omega)}\cdot A_2(\omega)\cdot e^{j\varphi_2(\omega)}\\ &= A_1(\omega)\cdot A_2(\omega)\cdot e^{j(\varphi_1(\omega)+\varphi_2(\omega))}\end{aligned}}$$

$$u_1 = \underbrace{0}_{=Re(\omega)} + j\cdot\underbrace{\frac{D\cdot 4\pi}{3\omega^2 T^2}\cdot\left(2\cdot\sin(\tfrac{3}{2}\omega\cdot T) - 3\cdot\sin(\omega T)\right)}_{=Im(\omega)}$$

$$A_1(\omega) = \left\lvert\frac{D\cdot 4\pi}{3\omega^2 T^2}\cdot\left(2\sin(\tfrac{3}{2}\omega T) - 3\cdot\sin(\omega T)\right)\right\rvert$$

1. Eine Ableitung im Zeitbereich entspricht ...

- ● einer Multiplikation des Spektrums U(jω) mit jω im Frequenzbereich. → Abbildungssatz
- ○ einer Addition des Spektrums U(jω) mit jω im Frequenzbereich.
- ○ einer Division des Spektrums U(jω) mit jω im Frequenzbereich.

2. Die Fouriertransformierte eines zur y-Achse symmetrischen Deltaimpulspaares ist ...

- ○ eine Sinusfunktion.
- ● eine Cosinusfunktion.
- ○ ein Deltaimpulspaar.

3. Die Fouriertransformierte einer Rechteckfunktion ist eine ...

- ○ Sinus-Funktion
- ○ Konstantwert-Funktion
- ● Si-funktion

$$\varphi_1(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & Im > 0 \quad \Rightarrow \frac{D \cdot 4\pi}{3\omega^2 T^2} \cdot \left(2\sin\left(\frac{3}{2}\omega T\right) - 3 \cdot \sin(\omega T)\right) > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & Im < 0 \\ \text{unbestimmt}, & Im = 0 \end{cases}$$

$$U_2(j\omega) = \delta_{\frac{2\pi}{3T}}(\omega) = A_{\delta_{\frac{2\pi}{3T}}}(\omega) = A_2(\omega)$$

$$\varphi_2(\omega) = 0$$

$$A_5(\omega) = A_1(\omega) \cdot A_2(j\omega)$$

$$\varphi_5(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) = \varphi_1(\omega)$$

Signale & Systeme

Fouriertransformation

9. November 2016

Voraussetzungen: $\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| \mathrm{d}t < \infty, \qquad u(t) \in \mathbb{C}, \qquad$ absolut integrierbar

Definition: Analyse $\quad U(j\omega) \equiv \mathcal{F}\{u(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-j\omega t}\, \mathrm{d}t$

Synthese $\quad u(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}\{U(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega)\, e^{j\omega t}\, \mathrm{d}\omega$

$U(j\omega)$ ist die *Fouriertransformierte* bzw. das *Fourierspektrum* der Zeitfunktion $u(t)$. Funktionen im Frequenzbereich werden (hier) mit Großbuchstaben, Zeitfunktion mit Kleinbuchstaben gekennzeichnet.

Amplitudenspektrum, Phasenspektrum:

komplexes Spektrum	Amplitudenspektrum	Phasenspektrum
$U(j\omega) \equiv A(j\omega)\, e^{j\,\varphi(w)}$	$A(\omega) \equiv \lvert U(j\omega)\rvert$	$\varphi(\omega) \equiv \arg\{U(j\omega)\}$

Abbildungssätze:

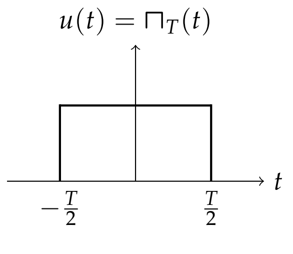
Eigenschaft	**Zeitbereich**	**Frequenzbereich**
Linearität	$a \cdot u(t) + b \cdot v(t)$	$a \cdot U(j\omega) + b \cdot V(j\omega)$
Ähnlichkeitssatz	$u(a \cdot t)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} \cdot U\left(j\,\frac{\omega}{a}\right)$
Zeitverschiebung	$u(t - t_0)$	$U(j\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$
Modulation	$u(t) \cdot e^{j\omega_0 t}$	$U(j(w - w_0))$
Vertauschungssatz	$u(t)$ $U(t)$	$U(j\omega)$ $2\pi \cdot u(-j\omega)$
Produkt im Zeitbereich	$u(t) \cdot v(t)$	$\frac{1}{2\pi}\, U(j\omega) * V(j\omega)$
Faltung im Zeitbereich	$u(t) * v(t)$	$U(j\omega) \cdot V(j\omega)$
Ableitung im Zeitbereich	$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\, u(t)$	$(j\omega)^n \cdot U(j\omega)$
Integration im Zeitbereich	$\int_{-\infty}^{t} u(t) \mathrm{d}t$	$\frac{U(j\omega)}{j\omega} + \pi\, U(0)\, \delta(\omega)$
Symmetrieeigenschaften	$u(t) \in \mathcal{R}$ $u(-t) = u(t)$ $u(-t) = -u(t)$	$U(-j\omega) = U^*(j\omega)$ $U(-j\omega) = U(j\omega)$ $U(-j\omega) = -U(j\omega)$

Satz von Parseval: $W_u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\lvert U(j\omega)\rvert^2}_{\text{EDS}} \mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)\, \mathrm{d}t \qquad$ EDS: Energiedichtespektrum

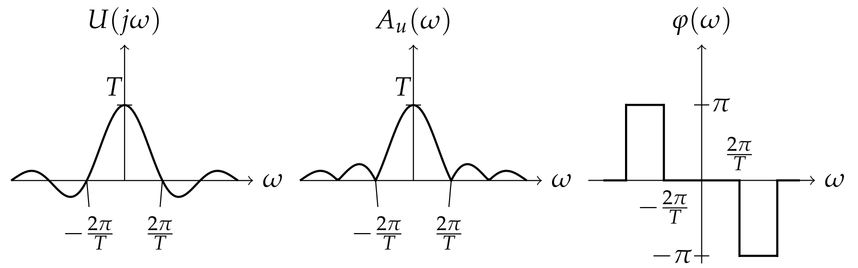
Wiener-Khintchine Beziehung: $r_{uu}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot u(t + \tau)\, \mathrm{d}t \quad \leftrightarrow \quad \lvert U(j\omega)\rvert^2$

Rechteckfunktion

$\sqcap_T(t)$

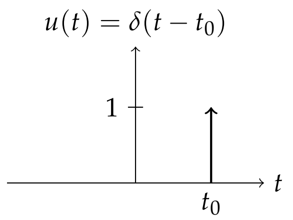


$T \cdot \mathrm{si}\left(\omega \frac{T}{2}\right)$

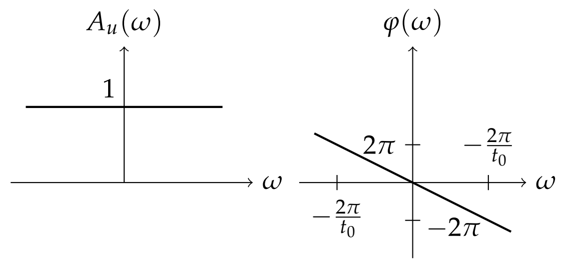


Deltaimpuls (Dirac-Stoß)

$\delta(t)$
$\delta(t - t_0)$

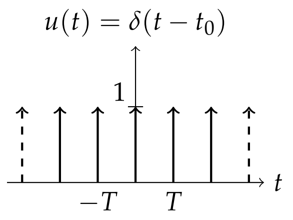


1
$e^{-j\omega t_0}$

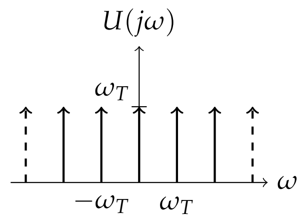


Deltakamm

$\delta_T(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$



$\omega_T \cdot \delta_{\omega_T}(\omega), \qquad \text{mit } \omega_T = \frac{2\pi}{T}$

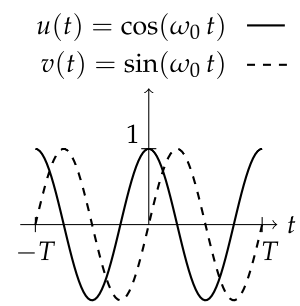


Eulersche Formel:

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$
$$\sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

Sinus / Kosinus

$\cos(\omega_0 t), \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
$\sin(\omega_0 t)$



$\pi\left(\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)\right)$
$j\pi\left(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)\right)$