Hausaufgaben 8

Gruppen Nico 6

Aufgabe 8.1 本题写法与Lösung不同

(i) Wir benutzen nun Kugelkoordinaten $x = r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi$ $\quad y = r\sin\theta\sin\varphi$ $\quad z = r\cdot\cos\theta$

$$\vec{v}(x,y,z) = 6e^{3x^2+3y^2+3z^2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 6e^{3r^2}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} = 6re^{3r^2}\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

mit Einheitsvektoren $\vec{e_r} = \frac{1}{r}(x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}) = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

$$\vec{e_\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{e_1} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{e_2} - \sin\theta\,\vec{e_3} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e_\varphi} = \frac{1}{r\sin\theta}(-y\vec{e_1} + x\vec{e_2}) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(r,\theta,\varphi) = 6re^{3r^2}\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = 6re^{3r^2}\vec{e_r} + 0\cdot\vec{e_\theta} + 0\cdot\vec{e_\varphi}$$

Eine Skalare Funktion $u: G \to \mathbb{R}$ ist die Potential von $\vec{v}$, wenn gilt:

$$\vec{v} = -\operatorname{grad} u \text{ auf } G := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}\}$$

G ist nicht konvex. Das hinreichende Kriterium für Existenz eines Potentials ist nicht anwendbar.

$$\operatorname{grad} u(r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cdot\cos\theta) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\vec{e_\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{e_\theta}$$

$$= -\vec{v}(r,\theta,\varphi) = -(6re^{3r^2}\vec{e_r} + 0\cdot\vec{e_\theta} + 0\cdot\vec{e_\varphi})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = -6re^{3r^2} \qquad \frac{\partial u}{\partial\varphi} = 0 = \frac{\partial u}{\partial\theta}$$

$\Rightarrow$ Die zweite Gleichung ist erfüllt wenn u unabhängig von φ und θ.

$\Rightarrow$ Jetzt wir setzen $u(x,y,z) = g(r^2) = g(x^2+y^2+z^2)$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial g}{\partial r} = -6re^{3r^2} \quad \Rightarrow g(r^2) = -e^{3r^2} = u(x,y,z) = -e^{3(x^2+y^2+z^2)}$$

$\vec{v}$ hat ein Potential $u(x,y,z) = -e^{3(x^2+y^2+z^2)}$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$

(ii) Wir benutzen nun Zylinderkoordinaten $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = 0$

$$\vec{f}(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}\begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} \rho\sin\varphi \\ -\rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \rho^2\begin{pmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e_\rho} = \cos\varphi\,\vec{e_1} + \sin\varphi\,\vec{e_2} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e_\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{e_1} + \cos\varphi\,\vec{e_2} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}(x,y,z) = \rho^2\begin{pmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -\rho^2\vec{e_\varphi} \qquad \Rightarrow f_\rho = f_z = 0 \quad f_\varphi = -\rho^2$$

$$\operatorname{div}\vec{f} = \frac{\partial f_\rho}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial f_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho}f_\rho = 0+0+0+0=0$$

Eine Skalare Funktion $F: G \to \mathbb{R}$ ist die Potential von $\vec{v}$, wenn gilt:

$$\vec{f} = \operatorname{rot}\vec{F} \quad \text{auf } G: \,]0,\infty[\, \times \mathbb{R}$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e_\rho} + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial\rho}\right)\vec{e_\varphi} + \left(\frac{\partial F_\varphi}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\rho}{\partial\varphi} + \frac{1}{\rho}F_\varphi\right)\vec{e_z}$$

$$= \vec{f} = -\rho^2\vec{e_\varphi}$$

Wir wählen $F_\varphi = 0$, haben wir: $\frac{\partial F_z}{\partial\varphi} = 0 \qquad \frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial\rho} = -\rho^2 \quad \frac{\partial F_\rho}{\partial\varphi} = 0$

$$\Rightarrow F_z = C_1(z,\rho) \qquad F_\rho = C_2(z,\rho)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial\rho} = \frac{\partial C_2}{\partial z} - \frac{\partial C_1}{\partial\rho} = -\rho^2$$

Wir wähle $C_1 = 0$: $\quad \frac{\partial C_2}{\partial z} = -\rho^2 \quad \Rightarrow C_2 = -\rho^2\cdot z + C_3$

C_3 kann 0 sein, nämlich: $\quad F = \begin{bmatrix} -\rho^2 z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ist Vektorpotential von $\vec{f}$

8.1

i)

$$\vec{e_r} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) = 6e^{3r^2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 6re^{3r^2}\vec{e_r} \qquad \theta\in[0,\pi[\quad r\in[0,\infty[, \varphi\in[0,2\pi]$$

$u: D\to\mathbb{R}$ ist genau dann Potential von $\vec{v}$, wenn gilt:

$$\vec{v} = -\text{grad } u \text{ auf } D := \mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\}$$

Wir machen $u(x,y,z) = g(x^2+y^2+z^2) = g(r^2)$ mit $g:]0,\infty[\to\mathbb{R}$

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial r}\vec{e_r} = 2rg'(r^2)\vec{e_r}$$

Somit ist jetzt u genau dann Potential von $\vec{v}$, wenn gilt:

$$2rg'(r^2)\vec{e_r} = -6re^{3r^2} \text{ für alle } r>0 \implies g'(t) = -3e^{3t} \text{ für alle } t>0$$

$$\implies g(t) = -e^{3t}+K$$

$$\implies u(x,y,z) = g(x^2+y^2+z^2) = -e^{3(x^2+y^2+z^2)}+K$$

ii)

$$\vec{e_\rho} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e_\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z) = \rho\begin{pmatrix} \rho\sin\varphi \\ -\rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -\rho^2\vec{e_\varphi} \qquad \rho\in[0,\infty[\quad \varphi\in[0,2\pi[\quad z\in\mathbb{R}$$

Wir machen $\vec{a}(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z) = F(\rho,z)\vec{e_z}$ mit einer stetig ..... $F:]0,\infty[\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Damit hat $\vec{a}$ somit nur eine von Null verschiedene z-Komponente, die zudem unabhängig von φ ist.

$$\text{rot } \vec{a} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial\varphi}\vec{e_\rho} - \frac{\partial a_z}{\partial\rho}\vec{e_\varphi} = \frac{\partial F(\rho,z)}{\partial\rho}\vec{e_\varphi}$$

Somit ist $\vec{a}$ genau ein Vektorpotential von $\vec{f}$, wenn gilt:

$$-\rho^2\vec{e_\varphi} = \vec{f} = -\text{rot } \vec{a} = -\frac{\partial F(\rho,z)}{\partial\rho}\vec{e_\varphi} \text{ auf } G := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2>0\}$$

Dies gilt genau dann, wenn: $\frac{\partial F(\rho,z)}{\partial\rho} = \rho^2$, was für $F(\rho,z) = \frac{\rho^3}{3}$ $\rho\in[0,\infty[, z\in\mathbb{R}$ erfüllt ist. Damit hat $\vec{f}$ ein Vektorpotential

$$\vec{a}(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z) = F(\rho,z)\vec{e_z} = \frac{\rho^3}{3}\vec{e_z} \qquad \rho\in[0,\infty[, \varphi\in[0,2\pi[, z\in\mathbb{R}$$

Aufgabe 8.2

i) $\int_{\vec{r}} \vec{v} \cdot \vec{ds} = \int_0^2 \langle \vec{v}(\vec{r}(t)), \dot{\vec{r}}(t) \rangle dt = \int_0^2 \left\langle \begin{pmatrix} -t \cdot t^3 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3t^2 \end{pmatrix} \right\rangle dt$

$= \int_0^2 (t^4 + 3t^3) dt = \frac{1}{5}t^5 + \frac{3}{4}t^4 \Big|_0^2 = \frac{32}{5} + 12 = \frac{92}{5}$

$\int_{\vec{\varepsilon}} \vec{v} \cdot \vec{ds} = \int_0^2 \langle \vec{v}(\vec{\varepsilon}(t)), \dot{\vec{\varepsilon}}(t) \rangle dt = \int_0^2 \left\langle \begin{pmatrix} -4t^2 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle dt$

$= \int_0^2 4t^2 + 4t \; dt = \frac{4}{3}t^3 + 2t^2 \Big|_0^2 = \frac{32}{3} + 8 = \frac{56}{3} \neq \frac{92}{5}$

$\Rightarrow$ $\vec{v}$ kann kein Potential haben, sonst wäre Integral wegunabhängig, nur von Anfangspunkt und Endpunkt abhängig.

ii) $\| \vec{\varepsilon}(t) \| = \left\| \begin{pmatrix} -t \\ 4t \end{pmatrix} \right\| = t\sqrt{1+16} = \sqrt{17}\, t \qquad t \in [0,2]$

X $\int_{\vec{\varepsilon}} y^3 ds = \int_0^2 (4t)^3 \| \vec{\varepsilon}(t) \| dt = \int_0^2 48t^3 \cdot \sqrt{17}\, t = \cancel{48}^{12} \sqrt{17} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} t^4 \Big|_0^2 = 192\sqrt{17}$

$\| \dot{\vec{\varepsilon}}(t) \| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{17} \quad t \in [0,2]$

Länge Kurve ε: $L = \int_0^2 \| \dot{\vec{\varepsilon}}(t) \| dt = \int_0^2 \sqrt{17}\, dt = 2\sqrt{17}$

$\int_{\vec{\varepsilon}} y^3 ds = \int_0^2 (4t)^3 \cdot \sqrt{17}\, dt = 64\sqrt{17} \cdot \frac{1}{4}t^4 \Big|_0^2 = 4^4\sqrt{17}$