13.

Diskrete Signale im Zeitbereich

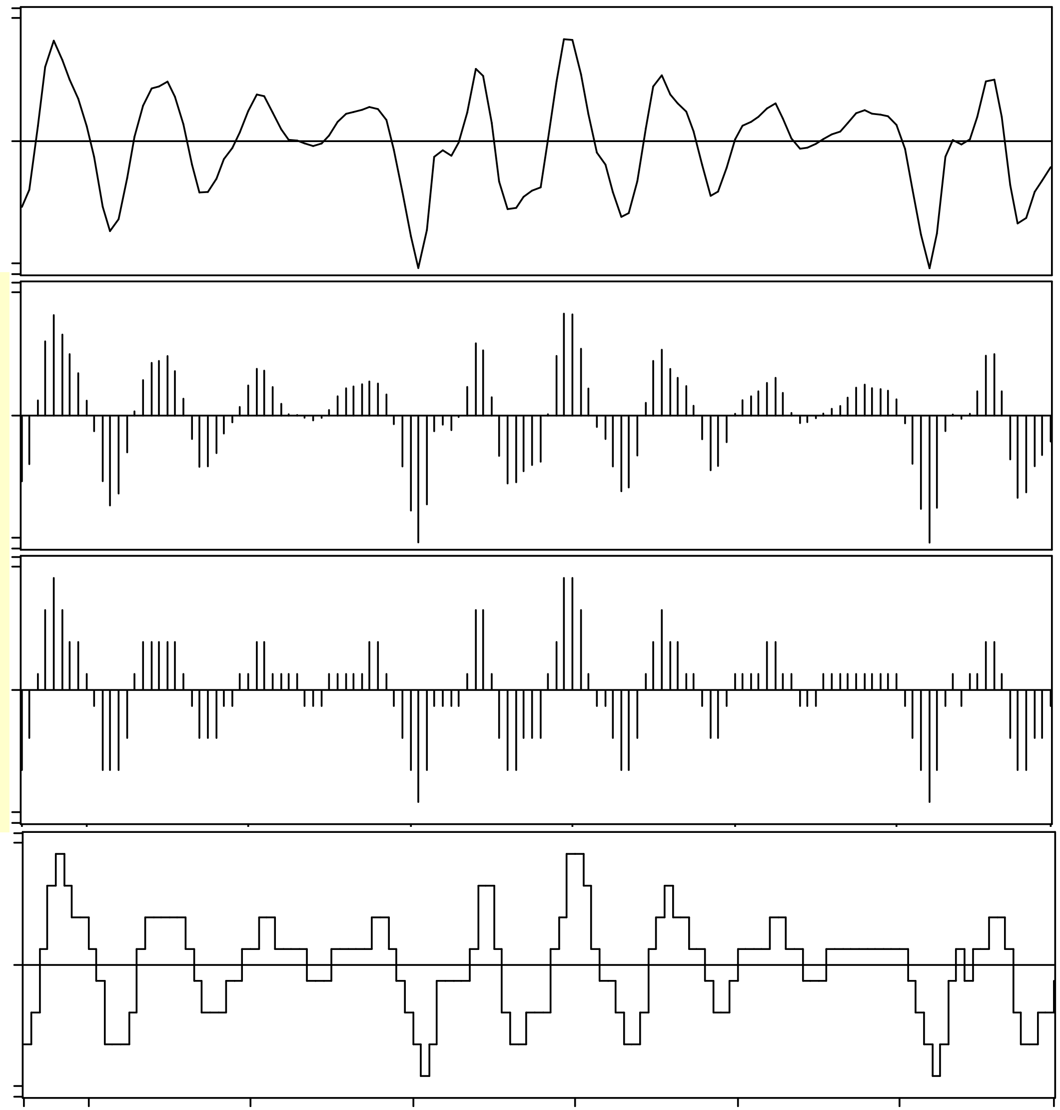
Zeitdiskrete Signale

zeit- und wertkontinuierlich

zeitdiskret und wertkontinuierlich

zeit- und wertdiskret

zeitkontinuierlich und wertdiskret



Darstellungsweise der digitalen Signalverarbeitung

T wird auf T = 1 normiert,

so dass aus der Zahlenfolge u(nT) eine Zahlenfolge u(n) entsteht.

Wir werden diese Notation ab jetzt immer benutzen!

Sie erlaubt eine einheitliche Darstellung für zeitdiskrete Signale, die durch Abtastung mit unterschiedlichen Abtastraten entstanden sind.

13.2. Mittelwerte, Energien und Leistungen

Zeitintervall (n_1,n_2)

Mittelwert:

$$m_u(n_1,n_2) := \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{k=n_1}^{n_2} u(k) \qquad (13.3)$$

Energie:

$$W_u(n_1,n_2) := \sum_{k=n_1}^{n_2} u^2(k) \qquad (13.4)$$

Leistung:

$$P_u(n_1,n_2) := \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{k=n_1}^{n_2} u^2(k) \qquad (13.5)$$

13.2. Mittelwerte, Energien und Leistungen

Varianz: $$\sigma_u^2(n_1,n_2) := \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{k=n_1}^{n_2} \left[u(k) - m_u(n_1,n_2)\right]^2$$

$$\sigma_u^2(n_1,n_2) = P_u(n_1,n_2) - m_u^2(n_1,n_2)$$

Wechselspannungsleistung =

Gesamtleistung - Gleichspannungsleistung

Grenzübergänge für m_u, W_u, P_u und σ_u^2

Kreuz- und Autokorrelationsfolgen (KKF, AKF) für Energiesignale

sind nun auch durch Summenausdrücke festgelegt:

KKF:

$$r_{uv}(k;n_1,n_2) := \sum_{n=n_1}^{n_2-k} u(n)\cdot v(n+k)$$

AKF:

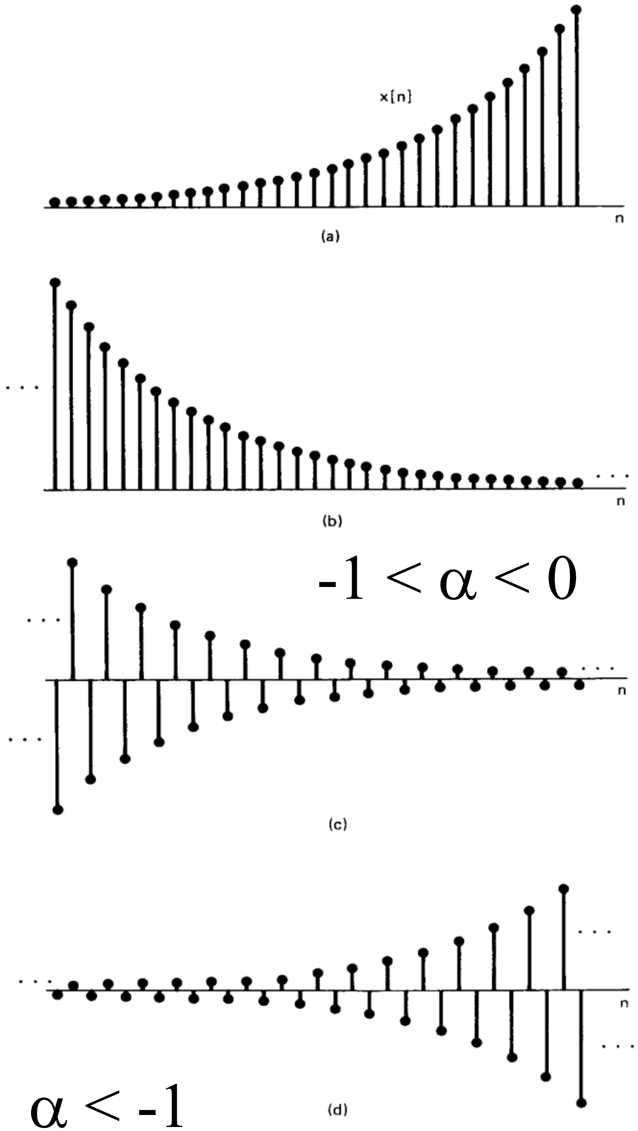
$$r_{uu}(k;n_1,n_2) := \sum_{n=n_1}^{n_2-k} u(n)\cdot u(n+k)$$

$$W_u(n_1,n_2) = r_{uu}(0;n_1,n_2)$$

13.3. Diskrete Elementarsignale

13.3.1 Exponentialsignalfolgen

$$u(n) = c \times \alpha^n$$



13.3.1. Exponentialsignalfolgen

$$u(n) = c \times \alpha^n$$

Cosinus- und Sinussignalfolgen

Z.B. ergibt sich mit $c = 1$ und $\alpha = e^{j\Omega_0}$ die komplexe Signalfolge

$$u(n) = e^{j\Omega_0 n} = \cos(n\Omega_0) + j\sin(n\Omega_0)$$

<u>Überlagerung zweier Signale</u> $c_1 = e^{j\Phi}$ $c_2 = e^{-j\Phi}$

bzw. $\alpha_1 = e^{j\Omega_0}$ $\alpha_2 = e^{-j\Omega_0}$

ergibt das (reelle) Cosinussignal

$$2\cos(n\Omega_0 + \Phi) = e^{j\Phi}e^{jn\Omega_0} + e^{-j\Phi}e^{-jn\Omega_0}$$

13.3.1. Exponentialsignalfolgen

Hinweis:

Die Schreibweise Ω_0 für die Kreisfrequenz muß näher erläutert werden.

Bei einer Abtastung im Abstand T würde

$$u(n) = e^{j\Omega_0 n} = \cos(n\Omega_0) + j\sin(n\Omega_0)$$

wie folgt lauten:

$$u(nT) = e^{jn\omega_0 T} = e^{jn2\pi f_0/f_T}$$

13.3.1. Exponentialsignalfolgen

$$u(nT) = e^{jn\omega_0 T} = e^{jn2\pi f_0/f_T}$$

Da Zeit normiert:

$$T = \frac{1}{f_T} = 1$$

Wird eine auf die Abtastfrequenz f_T normierte Kreisfrequenz definiert:

$$\Omega_0 = 2\pi \frac{f_0}{f_T}$$

$f_T = 1$ und die Abtastkreisfrequenz $\Omega_T = 2\pi$.
Die normierte Kreisfrequenz ist dimensionslos, sie wird in Bogengrad angegeben:
ist z.B. eine Signalfrequenz $f_0 = f_T/4$, so ist
$\Omega_0 = 2\pi/4 = \pi/2$.

13.3.1. Exponentialsignalfolgen

Frequenzperiodizität komplexer Exponentialsignalfolgen

Jede komplexe Exponentialsignalfolge u(n) ist *frequenzperiodisch*,

d.h. sie ergibt sich nicht nur für Ω_0, sondern auch für andere Frequenzen $\Omega_0 \pm k \cdot 2\pi$,

标题：13.3.1. 复数指数信号序列（Exponentialsignalfolgen）

文本提到了复数指数信号序列（u(n)）的一个特性，即频率周期性（Frequenzperiodizität）。这意味着对于复数指数信号，不仅频率Ω_0对应的信号是周期的，而且任何频率$\Omega_0 + k \cdot 2\pi$（k是整数）对应的信号也是周期的。

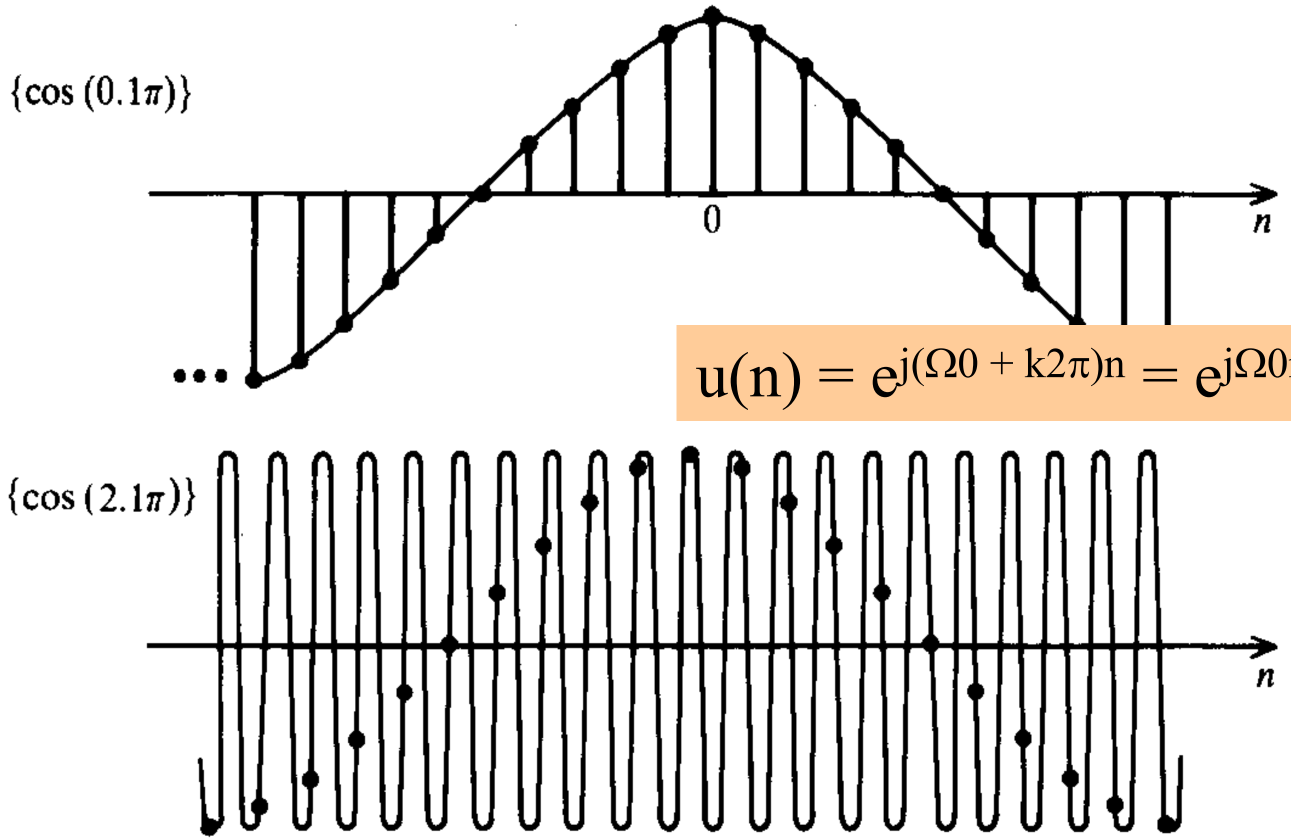
denn

$$u(n) = e^{j(\Omega 0 + k2\pi)n} = e^{j\Omega 0n}$$

Ein um $k \cdot 2\pi$ höherfrequentes komplexes Exponentialsignal hat die gleichen Abtastwerte wie seine tieffrequente Version.

13.3.1. Exponentialsignalfolgen

Beispiel: Identität der Abtastwerte von zwei Cosinussignalen



$$u(n) = e^{j(\Omega 0 + k2\pi)n} = e^{j\Omega 0n}$$

Beide Signale haben die gleichen Abtastwerte.

13.3.1. Exponentialsignalfolgen

Wegen dieser Eigenschaft brauchen sinusförmige Vorgänge daher nur im Intervall $(-\pi, +\pi)$ oder $(0, 2\pi)$ betrachtet zu werden.

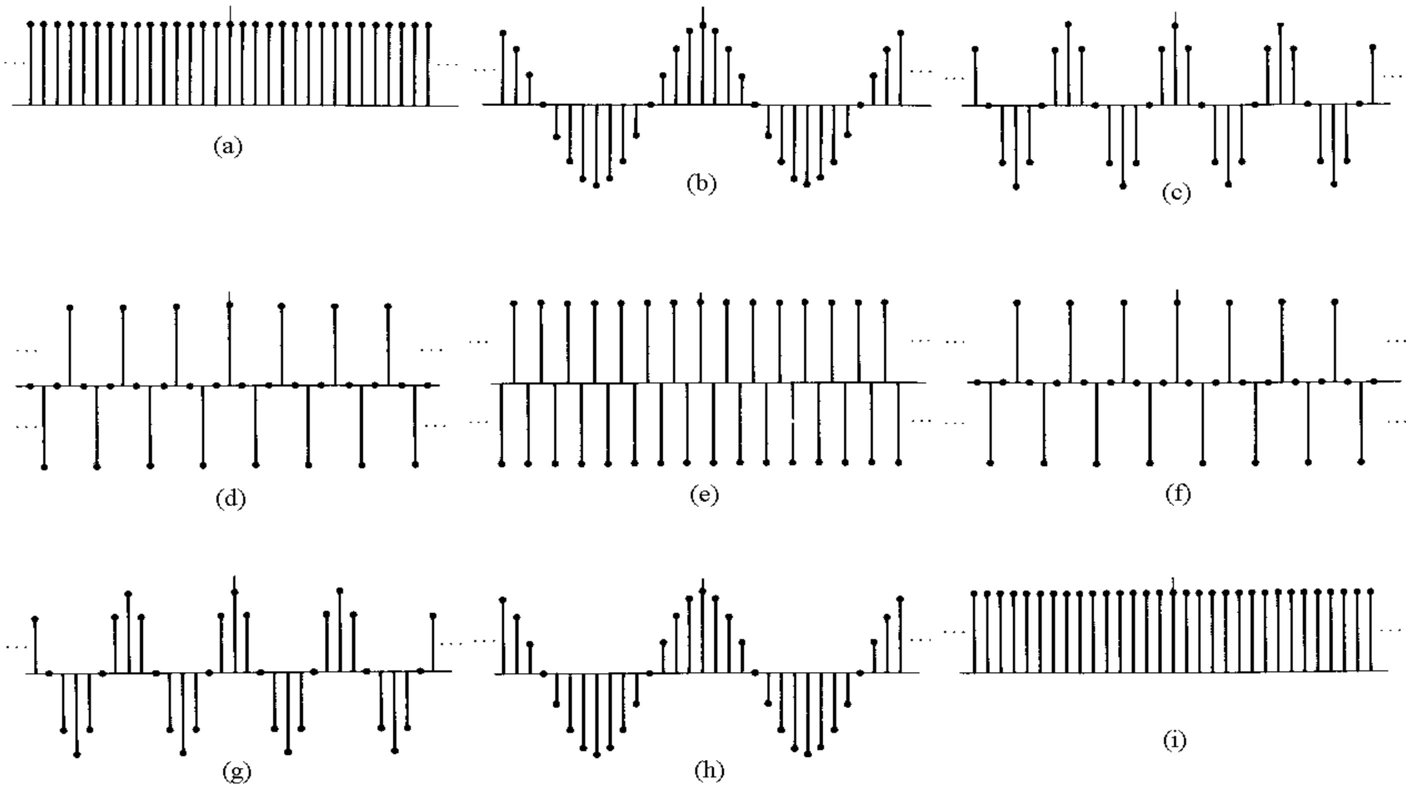
Beispiel:

Cosinussignale mit zunehmender Frequenz können nach Abtastung zu identischen Abtastwertfolgen (diskreten Cosinussignalen) führen.

Hier liegt ein *wesentlicher Unterschied zu zeitkontinuierlichen komplexen Exponentialfunktionen*, bei denen die Zahl der Schwankungen pro Sekunde mit wachsender Frequenz eindeutig zunimmt.

13.3.1. Exponentialsignalfolgen

Frequenzperiodizität eines abgetasteten Cosinussignals bei fester Abtastfrequenz und zunehmender Signalkreisfrequenz $\Omega_0 = 0, \pi/8, \pi/4, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 7\pi/4, 15\pi/8, 2\pi$



identische Abtastwertfolgen

Zeitperiodizität komplexer Exponentialsignalfolgen

Komplexe Exponentialsignalfolgen sind *frequenzperiodisch*, aber *nicht immer zeitperiodisch!*

Hier liegt ein weiterer Unterschied zu zeitkontinuierlichen Exponentialsignalen

Bedingung für die Zeitperiodizität einer abgetasteten Exponentialsignalfolge

nach N Abtastwerten ergibt sich die Forderung

$$e^{j\Omega 0(n+N)} = e^{j\Omega 0 n}$$

13.3.1. Exponentialsignalfolgen

$$e^{j\Omega 0(n+N)} = e^{j(\Omega 0 n + \Omega 0 N)} = e^{j\Omega 0 n}$$

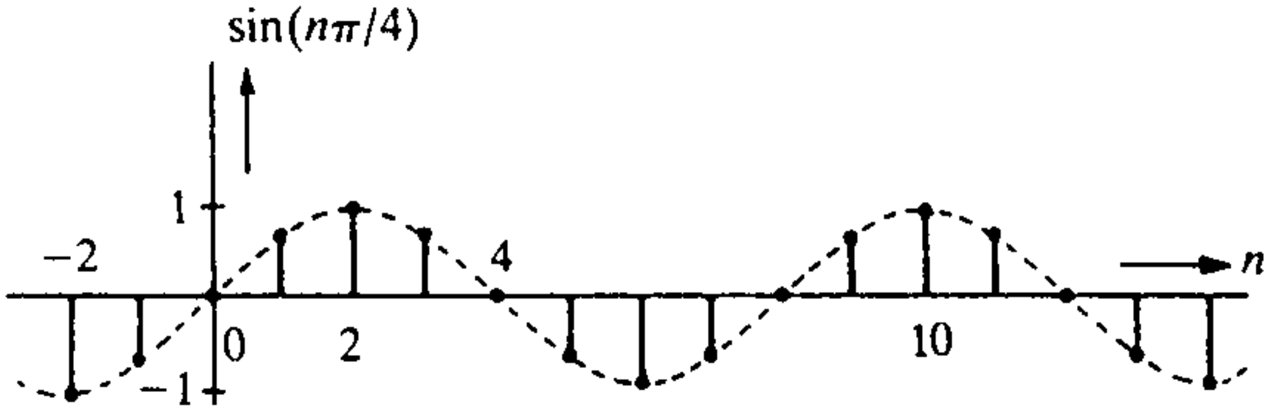
Damit muß gelten:

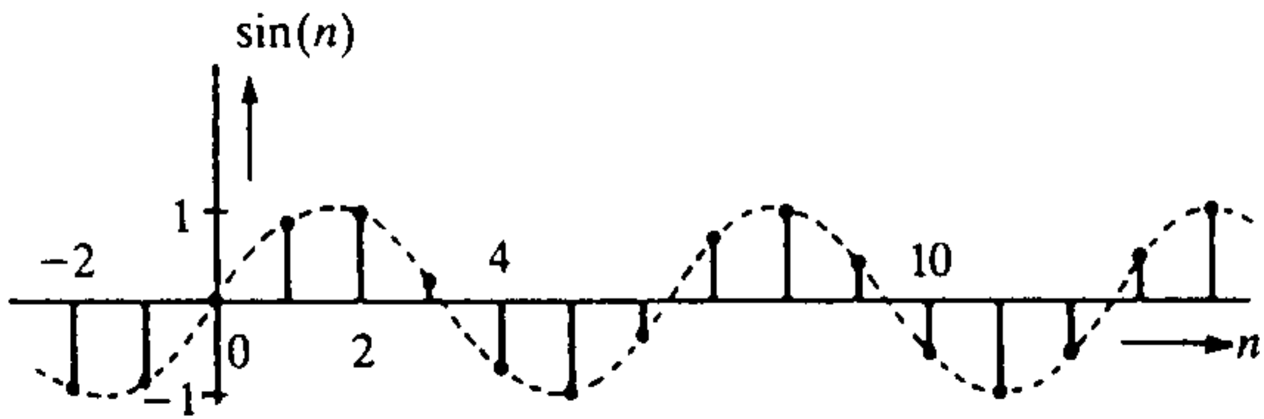
$e^{j\Omega 0 N} = 1$ oder $\Omega_0 \times N = k \times 2\pi$

Die Frequenz $f_0 = \Omega_0/2\pi$ muss also eine rationale Zahl k/N sein.
Beispielsweise sind Signale mit den Kreisfrequenzen $\Omega_0 = \pi/1.14$ oder $\Omega_0 = 1$ nicht periodisch.

13.3.1. Exponentialsignalfolgen

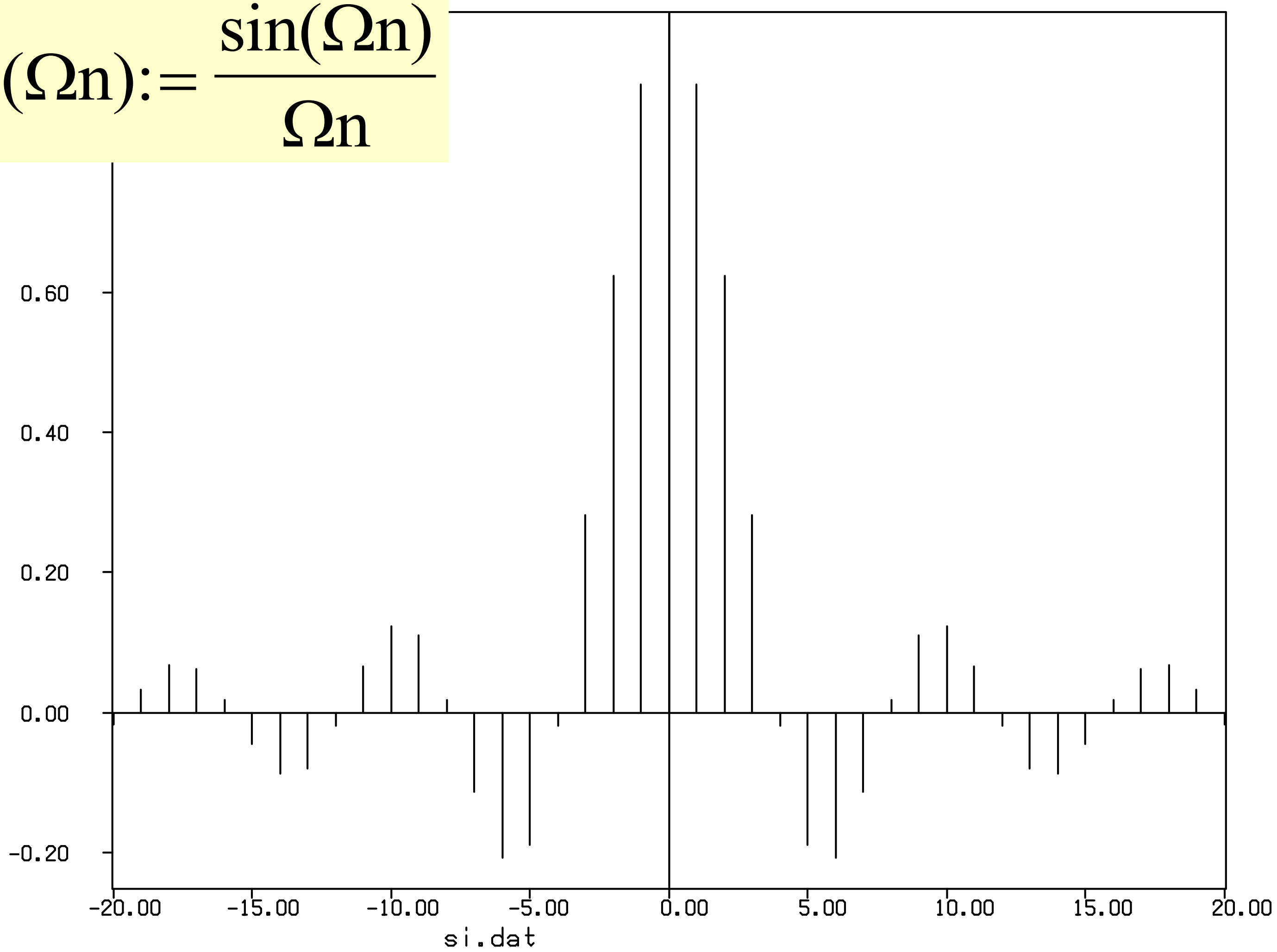
Zeitperiodizität von diskreten Sinussignalen



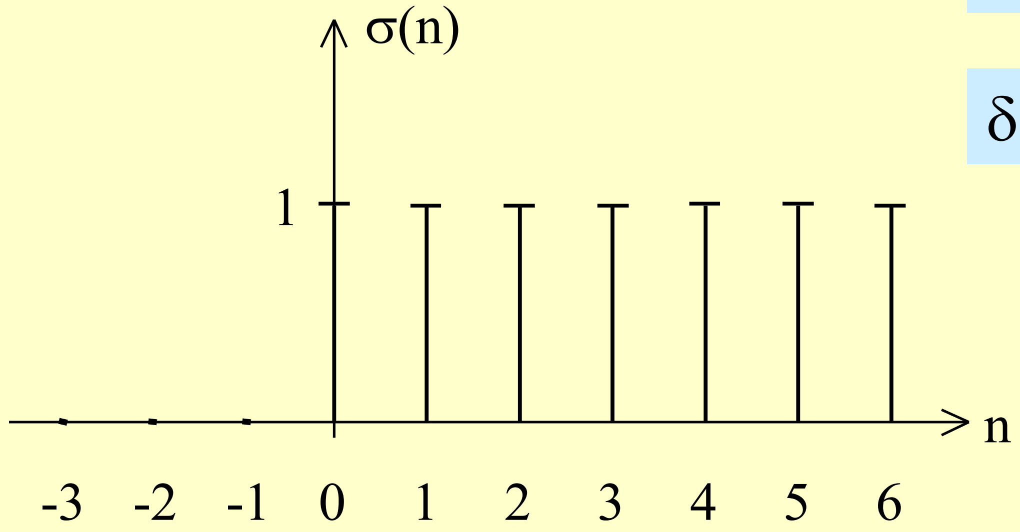


13.3.2. Diskrete si-Folge

$$\mathrm{si}(\Omega n) := \frac{\sin(\Omega n)}{\Omega n}$$



Diskrete Sprungfolge

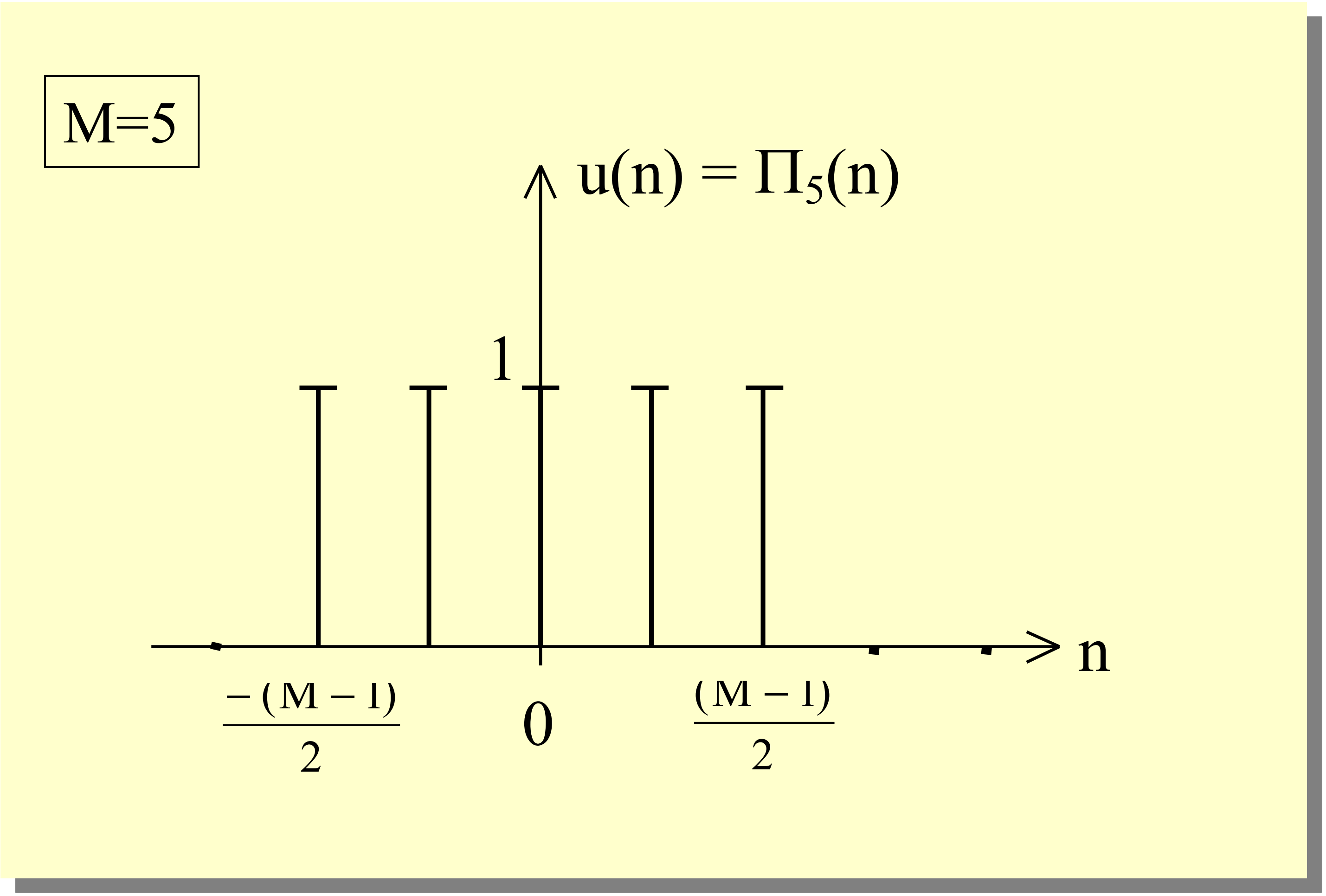


$$\sigma(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$$

$$\delta(n) = \sigma(n) - \sigma(n-1)$$

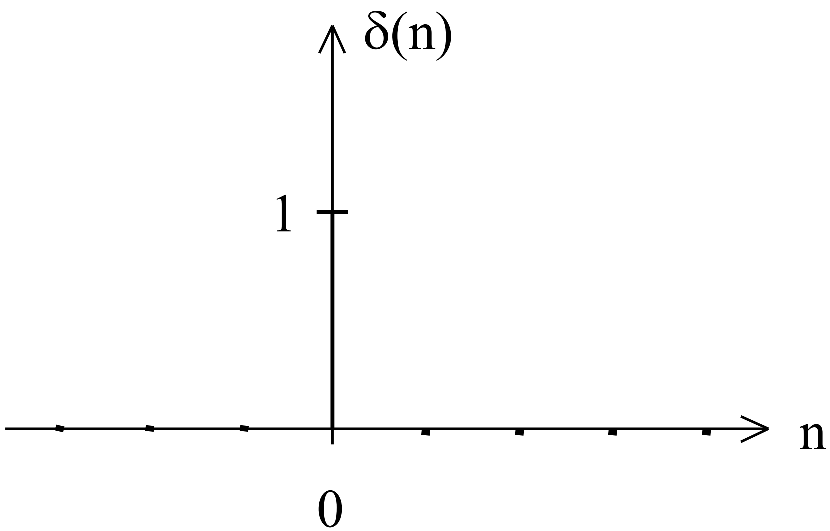
Derivierte

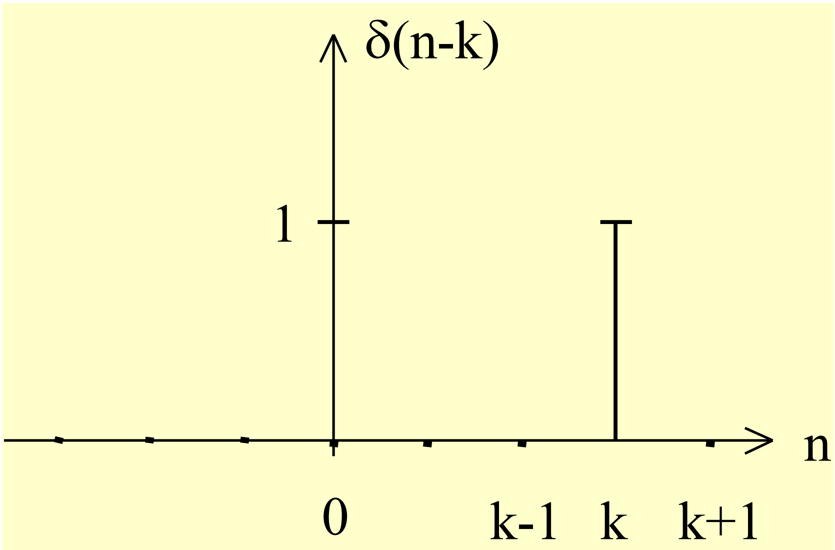
Diskreter Rechteckimpuls $\Pi_M(n)$



Diskreter Deltaimpuls (*Einheitsimpuls* oder *Kronecker-Delta*)

$$\delta(n-k)=\delta(k-n)=\delta_{nk}=\begin{cases}0 & \text{für } n\neq k\\ 1 & \text{für } n=k\end{cases}$$

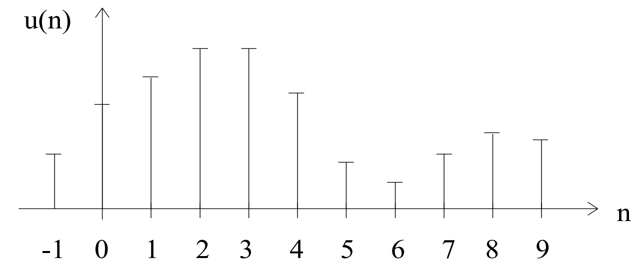




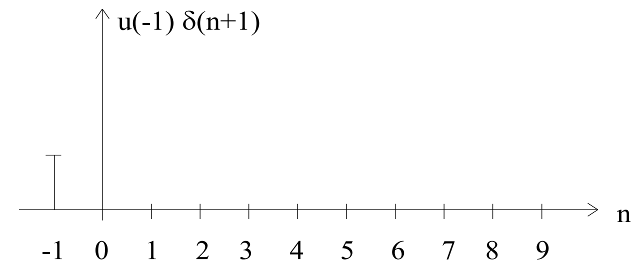
Nicht definiert unter dem Integral!!!

Ausblendeigenschaft des Deltaimpulses δ(n-k)

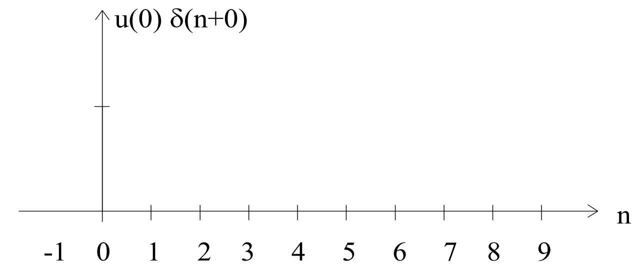
$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) \cdot \delta(n-k)$$



ist gleich der Summe aus



und



etc.

Diskreter Deltakamm

$$\delta_N(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN)$$

13.4. Verknüpfungen und Ähnlichkeiten von Signalen

Faltungsoperation (Summenfaltung)

$$w(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) \cdot v(n-k) = u(n) * v(n)$$

13.4. Verknüpfungen und Ähnlichkeiten von Signalen

<u>Faltungsmethode</u>

u(n) \ v(n):	1	3	-4
2	2	6	-8
5	5	15	-20

w(n):	2	11	7	-20	0
n :	0	1	2	3	4

<u>Papierstreifenmethode</u>

u(k): $\boxed{2 \quad 5}$

v(−k): $\boxed{-4 \quad 3 \quad 1}$ $\longrightarrow$ n

						w(n)
n=0:	2	+	0	=		2
n=1:	6	+	5	=		11
n=2:	-8	+	15	=		7
n=3:	0	+	-20	=		-20
n=4:	0	+	0	=		0

$$w(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) \cdot v(n-k) = u(n) * v(n)$$