7.

Kontinuierliche lineare Systeme im Frequenzbereich

$$y(t) = u(t) * h(t)$$

<u>Sonderfall der Faltung</u>

zeitlich beidseitig unbegrenzte Exponentialsignale als Eingangssignal

Ergeben Exponentialsignale als Ausgangssignal, bewertet mit dem *Übertragungsfaktor*.

卷积的特殊情况
时间上双向无限延伸的指数信号作为输入信号
导致以传递函数为评价标准的指数信号作为输出信号。

7.1.1. Die Übertragungsfunktion

Wenn Exponentialsignale als Eingangssignal wieder Exponentialsignale als Ausgangssignal liefern, dann muss es im Frequenzbereich eine allgemeine Beziehung zwischen Eingangs- und Ausgangssignalen eines linearen zeitinvarianten Systems geben!!!!

如果指数信号作为输入信号再次产生指数信号作为输出信号，那么在频率域中必须存在线性时不变系统的输入和输出信号之间的一般关系！！

$u(t), U(j\omega)$ → Lineares System $h(t), H(j\omega)$ → $y(t), Y(j\omega)$

7.1.1. Die Übertragungsfunktion

Ein Eingangssignal u(t) mit Spektrum U(jω) führt auf ein Ausgangssignal mit Spektrum Y(jω)

$$Y(j\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \big(u(t) * h(t)\big) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) h(t-\tau) d\tau \right) e^{-j\omega t} dt$$

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right) d\tau$$

7.1.1. Die Übertragungsfunktion

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \left(\underline{\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{-j\omega t} dt} \right) d\tau$$

Impulsantwort h(t) des linearen Systems im Fourierbereich:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

Fouriertransformierte der um τ zeitverschobenen Impulsantwort $h(t-\tau)$

7.1.1. Die Übertragungsfunktion

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j\omega t}dt\right)d\tau$$

Es gilt das Transformationspaar

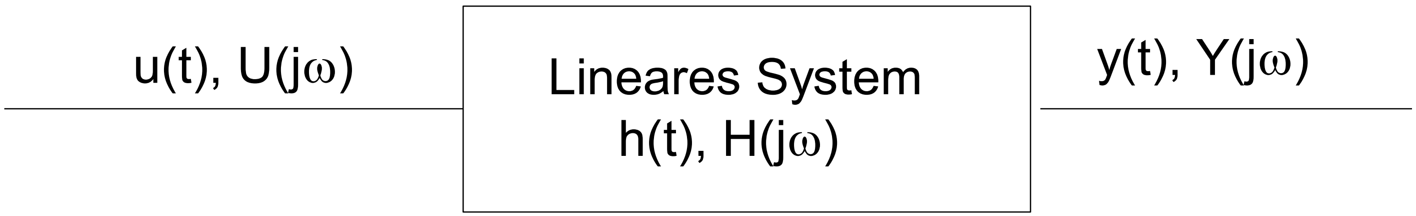
$$h(t-\tau) \leftrightarrow H(j\omega)\, e^{-j\omega\tau}$$

(Verschiebungssatz; in $h(t-\tau)$ ist t die eigentliche Variable und τ eine Konstante).

<u>Damit ergibt sich</u>

$$Y(j\omega) = H(j\omega)\cdot\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = H(j\omega)\cdot U(j\omega) \qquad (7.4)$$

7.1.1. Die Übertragungsfunktion



$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot U(j\omega)$$

(komplexe) *<u>Übertragungsfunktion</u>*

7.1.1. Die Übertragungsfunktion

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = H(j\omega) \cdot U(j\omega)$$

Für beliebige Exponentialsignale gilt entsprechend

$$Y(s) = U(s) \times H(s)$$

(komplexer) ***Übertragungsfaktor*** *(*bei gegebenem, festen $j\omega$ bzw. s)

(komplexe) ***Übertragungsfunktion*** (bei variablem $j\,\omega$ bzw. s)

$H(j\omega)$ wird auch als (komplexer) ***Frequenzgang*** bezeichnet.

7.1.1. Die Übertragungsfunktion

在频率域中，输入信号和输出信号之间存在乘积关系，而在时域中则需要执行卷积操作。因此，频率域的表示通常更容易处理，也更易于解释。这一特性是频率域表示信号和系统有用的原因之一。

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot \int_{-\infty} u(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = H(j\omega) \cdot U(j\omega)$$

Im Frequenzbereich besteht eine Produktbeziehung zwischen Eingangssignal und Ausgangssignal, während im Zeitbereich eine Faltungsoperation durchzuführen ist.

Darstellungen im Frequenzbereich sind daher vielfach einfacher zu handhaben und oft auch anschaulicher zu interpretieren.

In dieser Eigenschaft liegt einer der Gründe für den Nutzen der frequenzmäßigen Darstellung von Signalen und Systemen.

7.1.1. Die Übertragungsfunktion

Aus dem Ergebnis $Y(j\omega) = U(j\omega) \cdot H(j\omega)$ folgt auch, dass sich das Ausgangs-Zeitsignal zu

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega) \cdot H(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \tag{7.6}$$

ergibt.

Unendlich dichte Überlagerung von Exponentialsignalen $e^{j\omega t}$ mit den Gewichten $U(j\omega)\ H(j\omega)$.

7.1.2. Amplituden- und Phasengang

$$H(j\omega) = A_h(\omega) \cdot e^{j\varphi_h(\omega)}$$

$$A_h(\omega) = |H(j\omega)|$$

$$\varphi_h(\omega) = \arg\left\{H(j\omega)\right\} \quad \left(= \arctan \frac{I_h(\omega)}{R_h(\omega)} \right)$$

Index *h* am Amplituden- und Phasengang wird nur verwendet, wenn Unterscheidungen erforderlich sind.

7.1.2. Amplituden- und Phasengang

Statt des ***Amplitudenganges***

$$A_h(\omega) = |H(j\omega)|$$

wird oft auch die ***Dämpfung***

通常使用"衰减"这个术语来代替振幅衰减。

$$a_h(\omega) = -\,20 \lg |\, H(j\omega)\,| \qquad [\mathrm{dB}] \tag{7.10}$$

verwendet.

Betrag und Phase

Betrag und Phase des Ausgangsspektrums $Y(j\omega)$

$$|Y(j\omega)| = |H(j\omega)| \times |U(j\omega)| \qquad \text{bzw.} \quad A_y(\omega) = A_h(\omega)\, A_u(\omega) \tag{7.11}$$

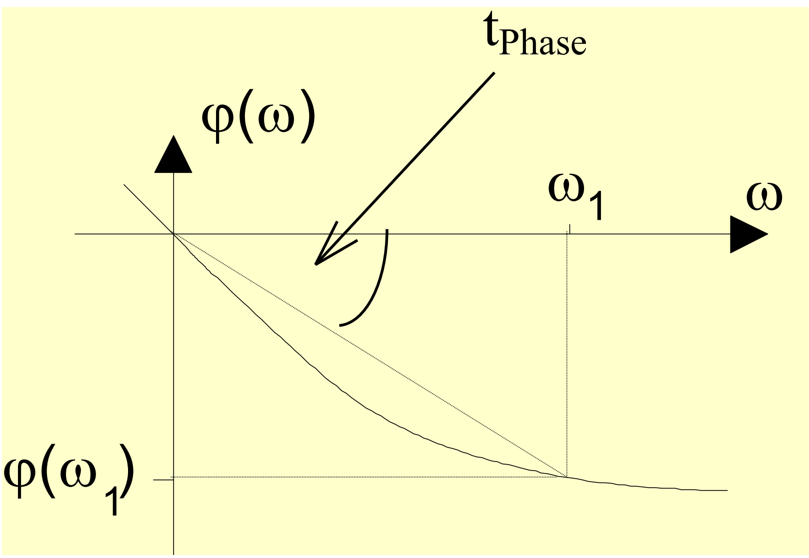
$$\varphi_y(\omega) = \varphi_h(\omega) + \varphi_u(\omega) \tag{7.12}$$

Phasenlaufzeit

<u>Phasenlaufzeit</u> $t_{phase}(\omega)$

gibt die Laufzeit für eine einzelne Sinusschwingung (z.B. der Kreisfrequenz $\boldsymbol{\omega}_1$) an

"Laufzeit"指的是单个正弦波（例如，圆频率 ω1）的传播时间。



definiert aus dem Phasengang $\varphi(\omega)$

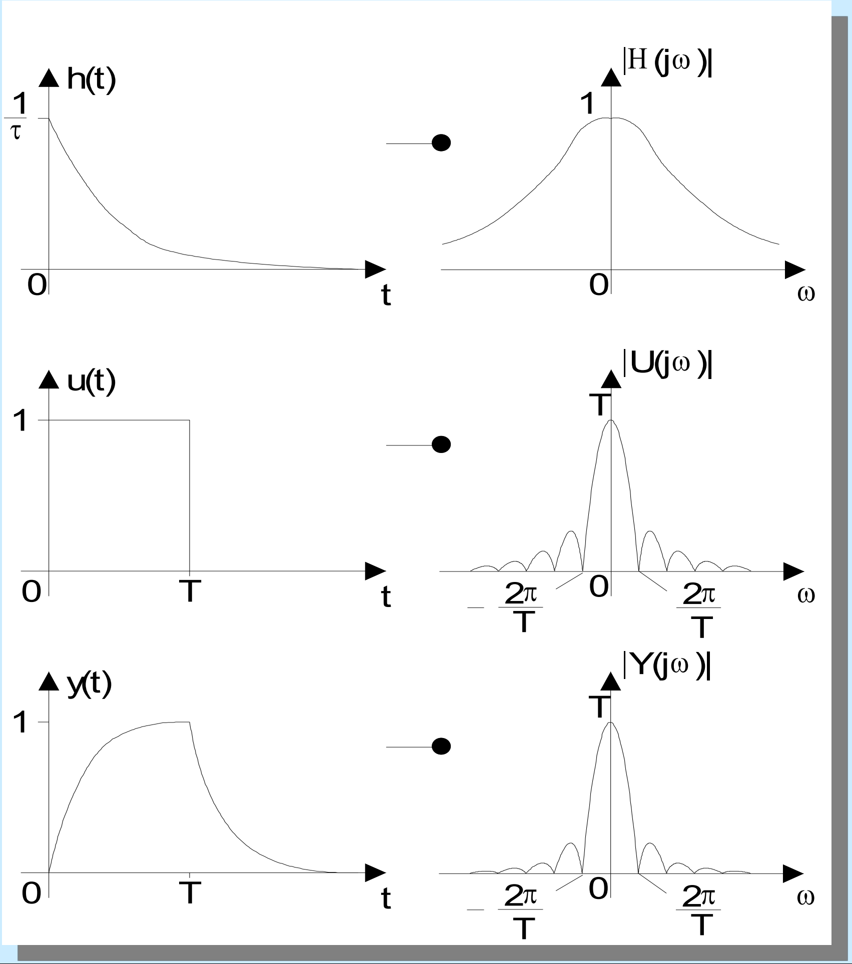
$$t_{phase}(\omega) := -\ \varphi(\omega)/\ \omega$$

negative Sekantensteigung des Phasenganges

"负斜率"指的是相位响应图中斜率为负的部分，通常用于描述系统响应中频率的变化率。

Beispiel: Spektrum eines Rechteckimpulses nach Filterung mit RC-Tiefpaß

Ein Rechteckimpuls u(t) der Länge T durchlaufe einen unbelasteten RC-Tiefpass mit der Zeitkonstanten τ.



7.1.3. Messung von H(jω)-Parameter

Ein beidseitig unendlich ausgedehntes (komplexes) Exponentialsignal

$$u(t) = U(\omega_1) e^{j\omega_1 t}$$

Liefert als Eingangssignal ein Ausgangssignal

$$y(t) = H(j\omega_1) \times U(\omega_1) e^{j\omega 1 t}$$

das wiederum ein Exponentialsignal ist.

(komplexe Amplitude)

7.1.3. Messung von H(jω)-Parameteren

$$y(t) = H(j\omega_1) \times U(\omega_1)e^{j\omega_1 t}$$

mit

$$y(t) = Y(\omega_1)e^{j\omega_1 t} \quad und \quad Y(\omega_1) = \hat{y}(\omega_1)e^{j\varphi_y(\omega_1)}$$

$$u(t) = U(\omega_1)e^{j\omega_1 t} \quad und \quad U(\omega_1) = \hat{u}(\omega_1)e^{j\varphi_u(\omega_1)}$$

ergibt sich ein Übertragungsfaktor als Quotient der komplexen Amplituden Y und U

$$H(j\omega_1) = \frac{Y(\omega_1)}{U(\omega_1)} = \frac{\hat{y}(\omega_1)}{\hat{u}} e^{j[\varphi_y(\omega_1) - \varphi_u(\omega_1)]}$$

7.1.3. Messung von H(jω)-Parametern

Amplituden- und Phasengang

$$A_h(\omega_1) = \frac{\hat{y}(\omega_1)}{\hat{u}}$$

$$\varphi_h(\omega 1) = \varphi_y(\omega_1) - \varphi_u(\omega_1)$$

H(jω) kann damit durch einen Amplituden- und Phasenvergleich zwischen Eingang und Ausgang des linearen Systems bestimmt werden, indem ungedämpfte Exponentialsignale als Anregungssignal verwendet werden.

通过使用未衰减的指数信号作为激励信号，可以通过输入和输出之间的振幅和相位比较来确定H(jω)。

7.1.3. Messung von $H(j\omega)$-Parametern

$$A_h(\omega_1) = \frac{\hat{y}(\omega_1)}{\hat{u}}$$

$$\varphi_h(\omega 1) = \varphi_y(\omega_1) - \varphi_u(\omega_1)$$

Meßtechnisch

benötigen wir natürlich reelle Signale.

$$u(t) = \hat{u}\cos[\omega_1 t + \varphi_u(\omega_1)]$$

$$y(t) = \hat{y}\cos[\omega_1 t + \varphi_y(\omega_1)]$$

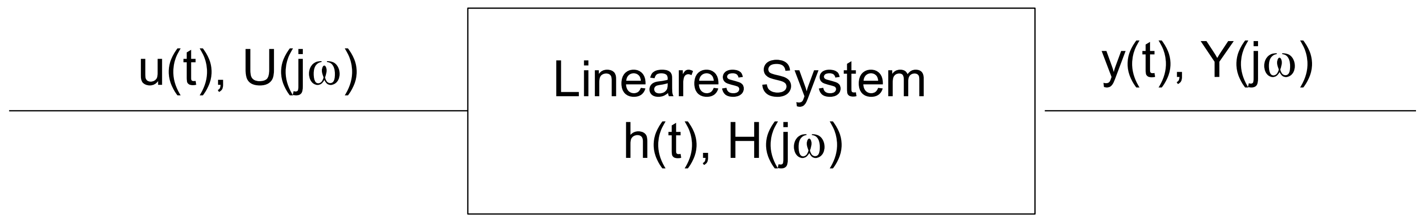
Messungen erfolgen entweder für einzelne ω_1-Werte oder für nacheinander erzeugte Frequenzen ω in einem vorzugebenden Bandbereich durch einen *Wobbelmeßplatz*, getrennt nach $A_h(\omega)$ und $\varphi_h(\omega)$.

测量可以通过单个ω1值或通过一个预定的频段中连续产生的频率ω，通过一个频率扫描仪分别测量Ah(ω)和φh(ω)进行。

7.1.3. Messung von H(jω)-Parametern

$$u(t) = \hat{u}\cos\left[\omega_1 t + \varphi_u(\omega_1)\right]$$

$$y(t) = \hat{y}\cos\left[\omega_1 t + \varphi_y(\omega_1)\right]$$



Bei der punktweisen Messung werden dazu ein Pegelsender und -empfänger und ein Phasenmesser benötigt.

在点对点测量中，需要使用一个功率发送器和接收器以及一个相位测量仪。振幅响应直接通过y(t)的有效值进行测量，相位测量则通过确定u(t)和y(t)的正零穿越来进行；这些零穿越之间的距离是相位的度量。

Der Amplitudengang wird direkt als Effektivwert von y(t) gemessen, zur Phasenmessung werden die positiven Nulldurchgänge von u(t) und y(t) bestimmt; der Abstand zwischen diesen Nulldurchgängen ist ein Maß für die Phase.

7.1.3. Messung von H(jω)-Parametern

Beispiel: Unbelasteter RC-Tiefpass (Struktur bekannt)

Aus

$$H(j\omega_1) = \frac{Y(\omega_1)}{U(\omega_1)} = \frac{\hat{y}(\omega_1)}{\hat{u}} e^{j[\varphi_y(\omega_1) - \varphi_u(\omega_1)]}$$

ergibt sich der Übertragungsfaktor

$$H(j\omega_1) = \frac{Y(j\omega_1)}{U(j\omega_1)} = \frac{\frac{1}{j\omega_1 C}}{R + \frac{1}{j\omega_1 C}} = \frac{1}{1 + j\omega_1 RC}$$

als Quotient der komplexen Amplituden von Ausgang und Eingang.

Spannungsteiler-Verhältnis

Drei Interpretationen für H(jω) eines LTI Systems

I.)

sie ist für beliebige Eingangssignale u(t) das Verhältnis der Fouriertransformierten von Ausgang zu Eingang:

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}$$

Drei Interpretationen für H(jω) eines LTI Systems

II.)

它描述了在足够长时间的指数信号情况下，输出与输入的复振幅之比，因为

sie beschreibt bei hinreichend lang anliegenden Exponentialsignalen das Verhältnis der komplexen Amplituden von Ausgang zu Eingang, denn aus

$$u(t) = \hat{u} e^{j\varphi_u(\omega_1)} \cdot e^{j\omega_1 t} = U(\omega_1) e^{j\omega_1 t}$$

folgt ,

$$y(t) = H(j\omega_1)\, U(\omega_1) e^{j\omega_1 t}$$

d.h.

$$H(j\omega_1) = \frac{Y(j\omega_1)}{U(j\omega_1)}$$

Drei Interpretationen für H(jω) eines LTI Systems

III.)

sie ist die Fouriertransformierte der Impulsantwort h(t).

$$\boxed{h(t) \leftrightarrow H(j\omega)}$$

7.1.4. Energiedichtespektrum und AKF

Wir hatten bereits gezeigt, dass jedem Energiesignal u(t) mit der Fouriertransformierten $U(j\omega)$ ein Energiedichtespektrum

$$|U(j\omega)|^2 = U(j\omega)U^*(j\omega) \qquad (7.20)$$

zugeordnet werden kann.

7.1.4. Energiedichtespektrum und AKF

$$|U(j\omega)|^2 = U(j\omega)U^*(j\omega)$$

Aus Gl. (7.4)

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = H(j\omega) \cdot U(j\omega)$$

ergibt sich das Energiedichtespektrum am Ausgang eines LTI Systems zu

$$|Y(j\omega)|^2 = |U(j\omega)|^2 \times |H(j\omega)|^2 \qquad (7.21)$$

输出能量密度谱等于输入能量密度谱和传递函数的模的平方的乘积。

Das Ausgangs-Energiedichtespektrum ist gleich dem Produkt aus dem Eingangs-Energiedichtespektrum und dem Betragsquadrat der Übertragungsfunktion.

7.1.4. Energiedichtespektrum und AKF

$$|Y(j\omega)|^2 = |U(j\omega)|^2 \times |H(j\omega)|^2$$

<u>andererseits:</u>

Autokorrelationsfunktion $r_{uu}(\tau)$ und Energiedichtespektrum $|U(j\omega)|^2$, ebenso natürlich auch $r_{yy}(\tau)$ und $|Y(j\omega)|^2$ sind Fouriertransformierte zueinander!!!

$$r_{yy}(\tau) = r_{uu}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) = r_{uu}(\tau) * r_{hh}(\tau)$$

7.2. Einfaches Beispiel: Unbelasteter RC-Tiefpaß

Impulsantwort:

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \sigma(t)$$

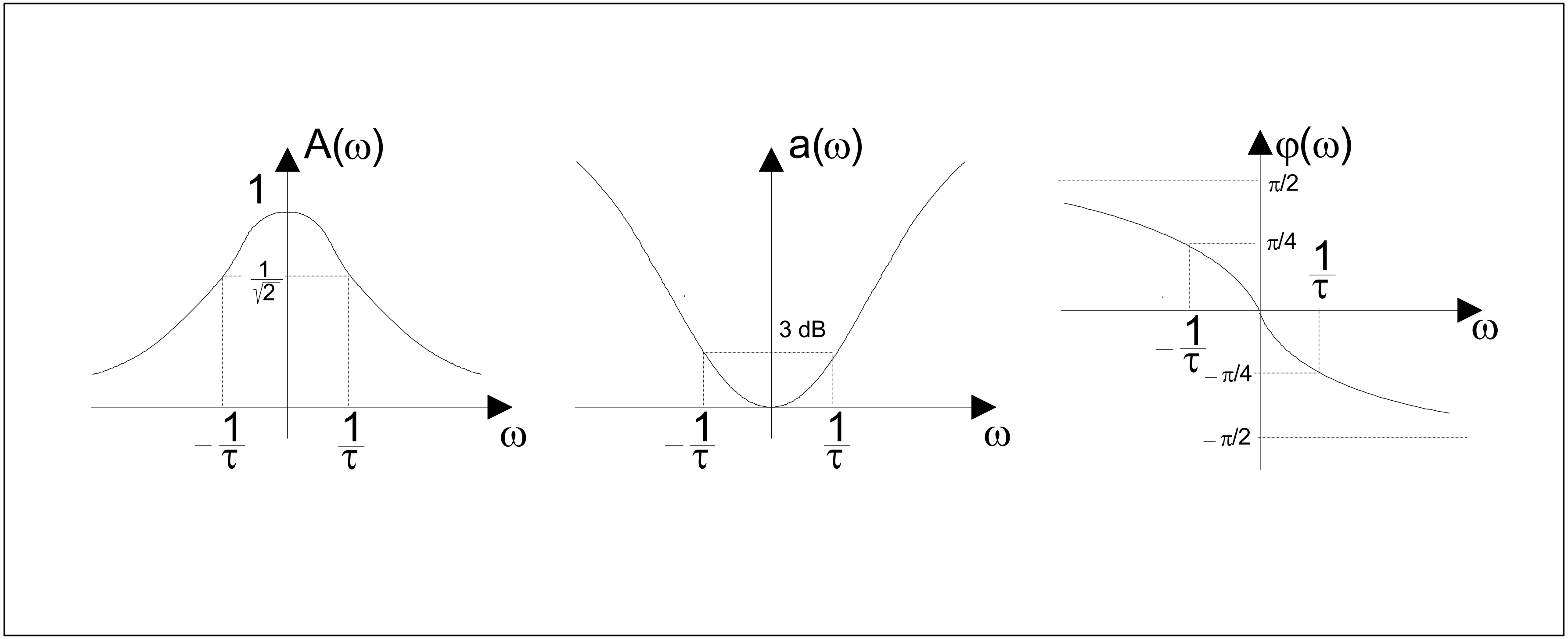
Sprungantwort:

$$h_\sigma(t) = \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \sigma(t)$$

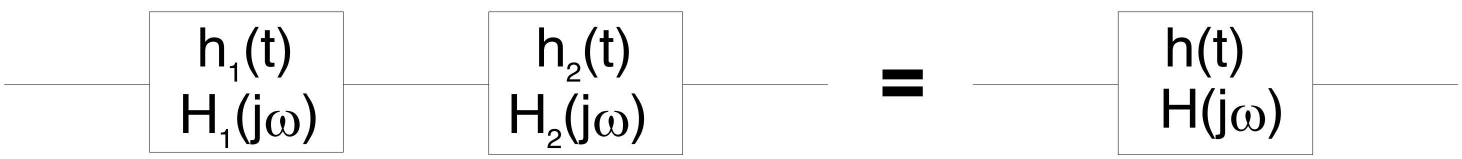
Übertragungsfunktion:

$$H(j\omega) = A_h(\omega) \cdot e^{j\varphi_h(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1 - j\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}$$

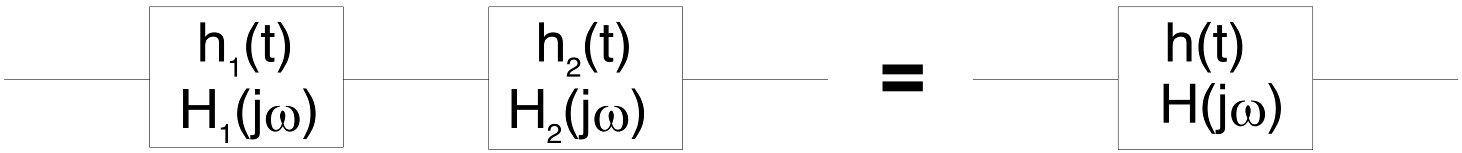
Andere Größen siehe Skript!!!



7.3.1 Reihenschaltung



7.3.1 Reihenschaltung



$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

Antwort auf Deltapuls

<u>Gesamt-Übertragungsfunktion</u>

$$H(j\omega) = H_1(j\omega) \times H_2(j\omega)\,, \qquad (7.31)$$

$$A_h(\omega) = A_{h1}(\omega) \times A_{h2}(\omega)$$

7.3.1 Reihenschaltung

$$A_h(\omega) = A_{h1}(\omega) \times A_{h2}(\omega) \qquad (7.32)$$

bzw.

$$a_h(\omega) = a_{h1}(\omega) + a_{h2}(\omega) \qquad (7.33)$$

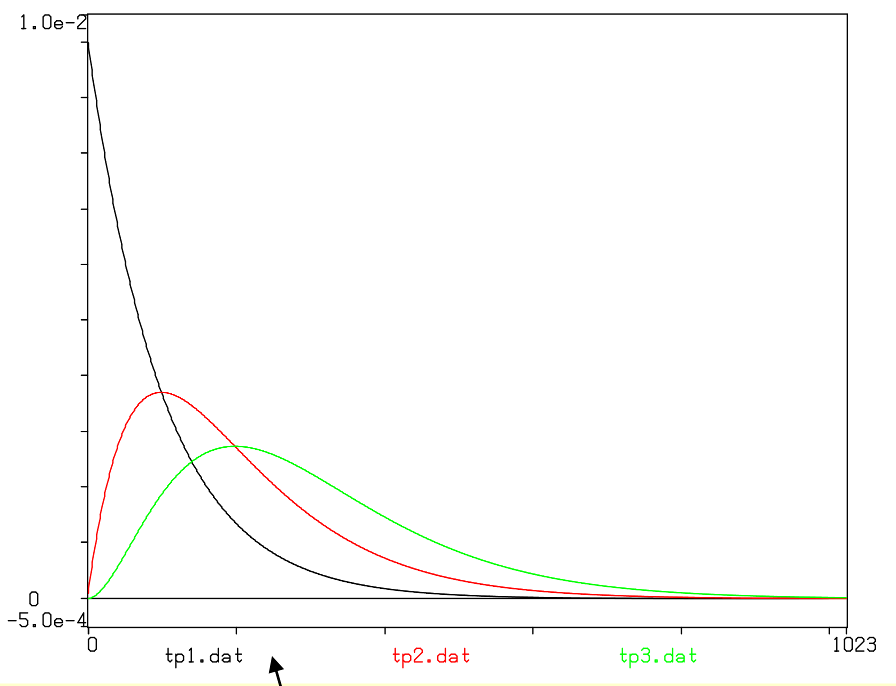
und

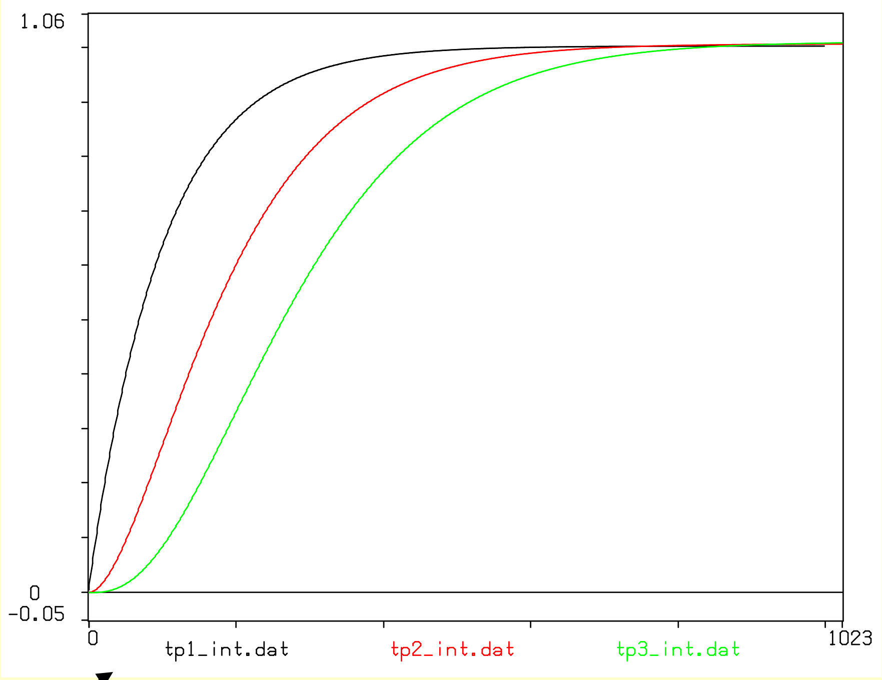
$$\varphi_h(\omega) = \varphi_{h1}(\omega) + \varphi_{h2}(\omega)$$

Bei Reihenschaltungen addieren sich also <u>Dämpfungsmaße</u> und <u>Phasengänge</u>.

7.3.1 Reihenschaltung

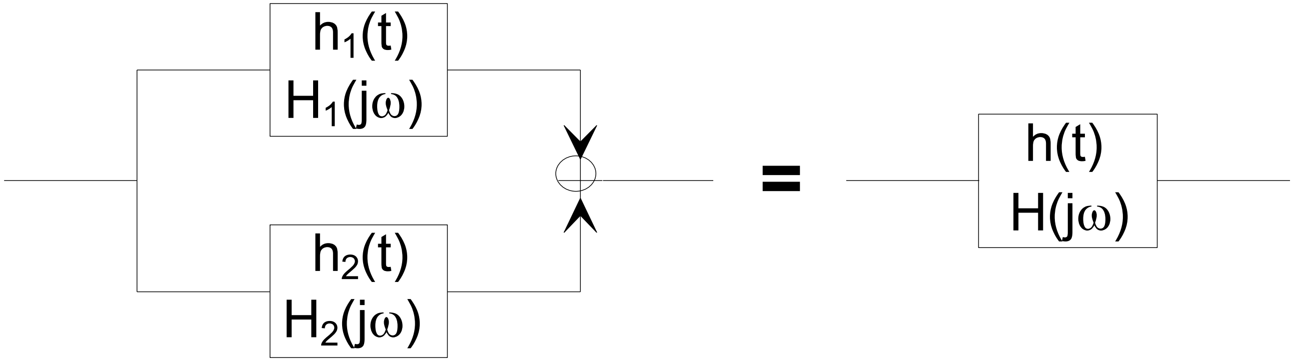
Beispiel: Hintereinandergeschaltete RC-Tiefpässe





Impuls- und Sprungantwort für 1, 2 bzw. 3 rückwirkungsfrei hintereinandergeschaltete RC-Tiefpässe

7.3.2. Parallelschaltung

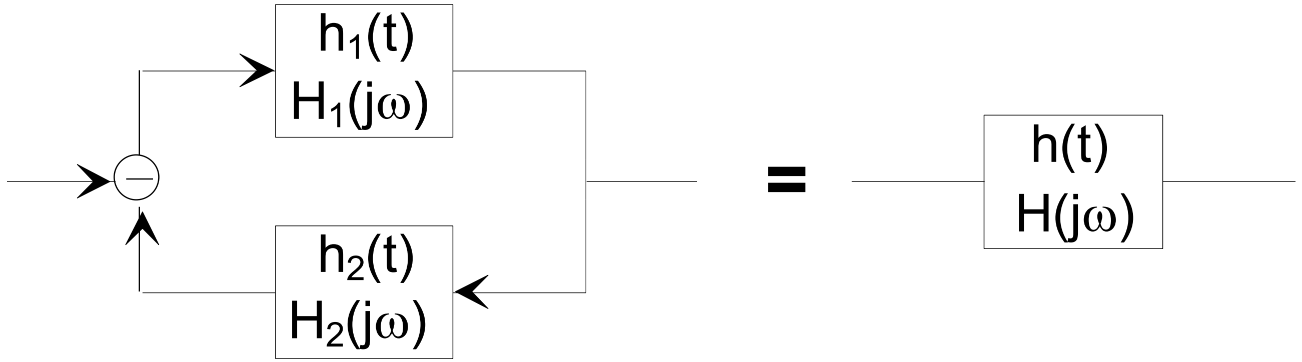


$$y(t) = u(t) * h_1(t) + u(t) * h_2(t)$$

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

$$H(j\omega) = H_1(j\omega) + H_2(j\omega)$$

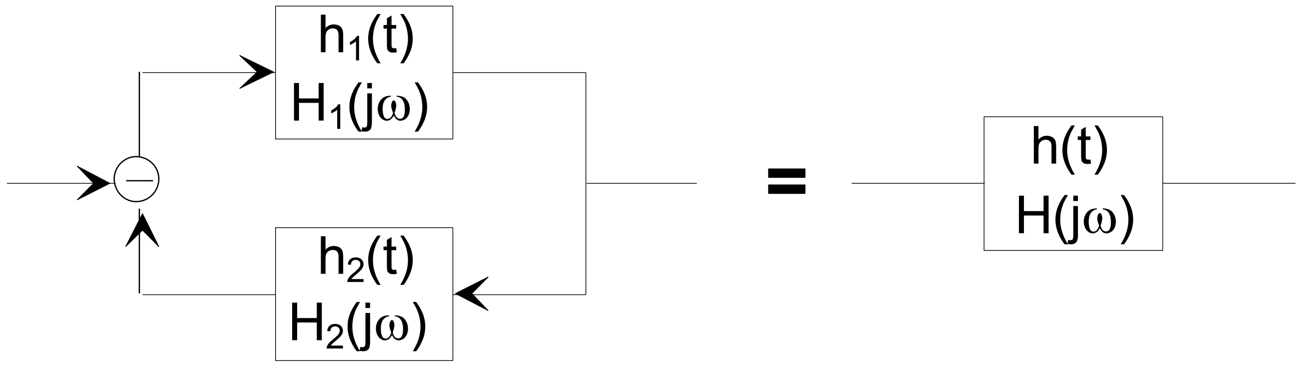
7.3.3. Rückkopplung



$$H(j\omega) = \frac{H_1(j\omega)}{1 + H_1(j\omega) \cdot H2(j\omega)}$$

Keine Ableitung für Impulsantwort möglich

7.3.3. Rückkopplung

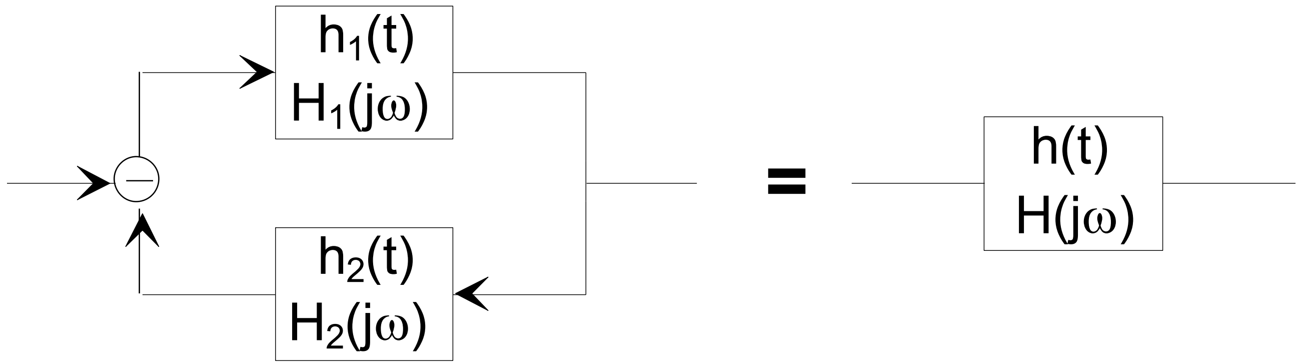


$$H(j\omega) = \frac{H_1(j\omega)}{1 + H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)}$$

$$H(j\omega) \rightarrow \infty \quad ?$$

Keine Ableitung für Impulsantwort möglich

7.3.3. Rückkopplung



$$H(j\omega) = \frac{H_1(j\omega)}{1 + H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)}$$

$$H(j\omega) \to \infty \quad ?$$

Keine Ableitung für Impulsantwort möglich