



10.

Frequenzselektive Filter

Unterdrückung unerwünschter Signalanteile

- Bandbegrenzung
- Kanaltrennung
- Störunterdrückung

抑制不需要的信号成分：

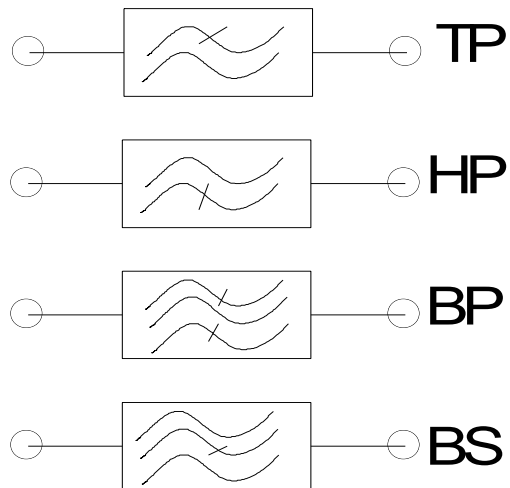
- 频带限制
- 通道分离
- 抗干扰

在设计选择性滤波器时，通常会重点考虑幅频响应。通过在通行区域后接全通滤波器，可以近似线性化相位响应。

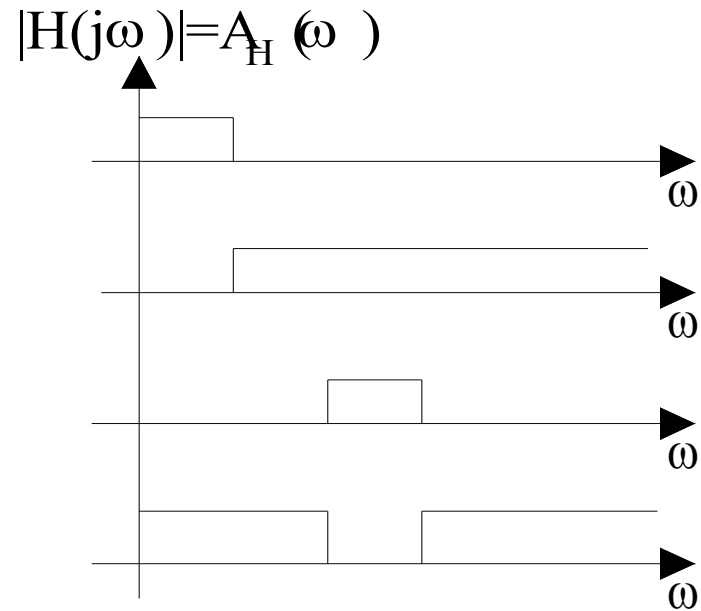
Bei dem Entwurf selektiver Filter steht oft der Amplitudengang im Vordergrund.

Der Phasengang im Durchlaßbereich kann ggf. durch Nachschalten eines Allpasses angenähert linearisiert werden.

Filterklassen



Symbolische Darstellung



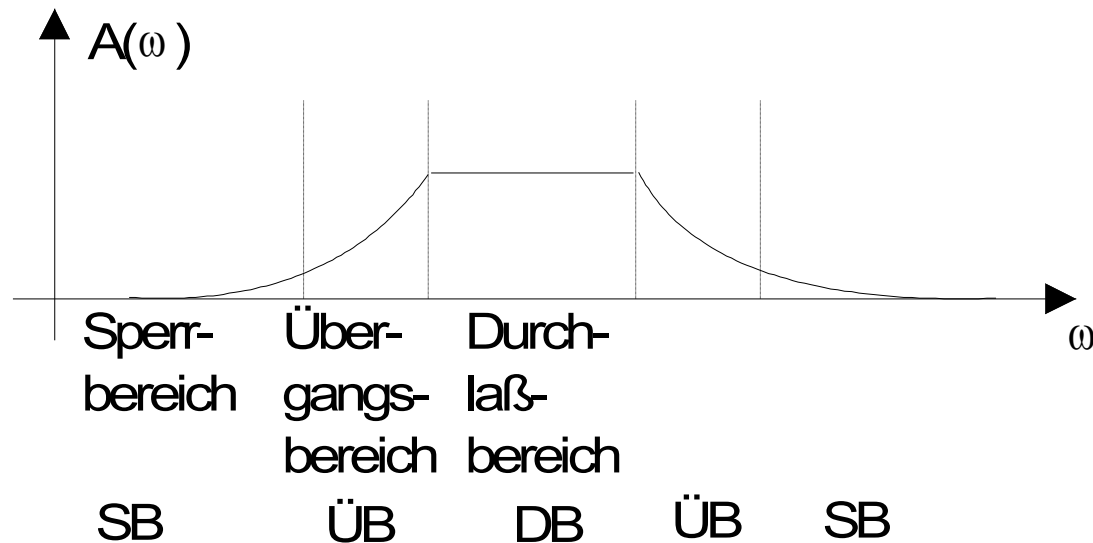
Amplitudengang (ideal)

Übergangsbereiche

Ideales Sperrverhalten ist nicht erreichbar. Der Amplitudengang realer Filter wird daher in Durchlass-, Sperr- und Übergangsbereiche aufgeteilt.

过渡区域

理想的阻止特性是不可达的。因此，实际滤波器的幅频响应被划分为通带、阻带和过渡带。



Bandbreite - Definition

Da ein ideales Sperrverhalten nicht erreichbar ist, muss eine Grenzfrequenz zwischen Durchlass- und Sperrbereich festgelegt werden.

Bandbreite - 定义

由于理想的阻止特性是不可达到的，必须确定一个在通带和阻带之间的边界频率。

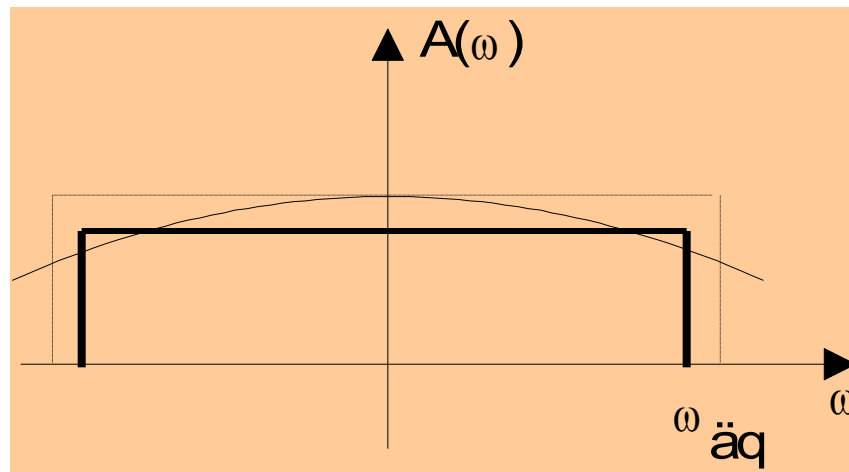
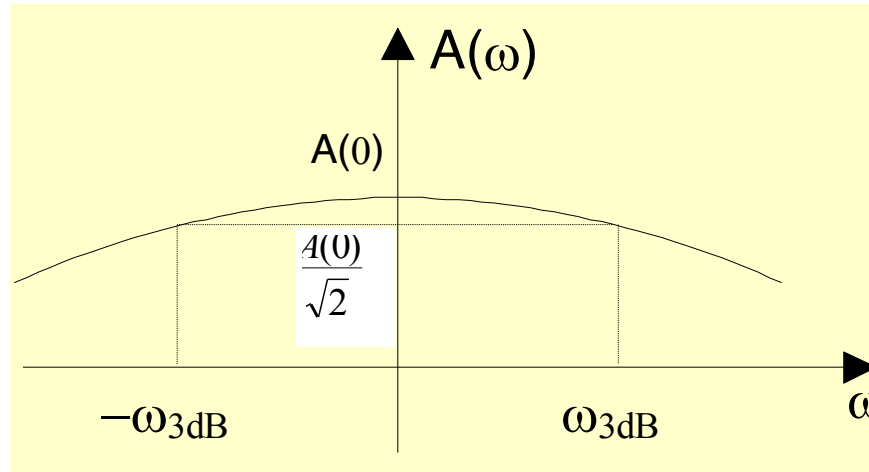
在3dB带宽中，指定了幅频响应下降到//，即功率下降到50%的频率。

通过与一个具有相同面积的理想滤波器进行比较，可以得到等效带宽!!!

Bei der *3dB-Bandbreite* wird die Frequenz angegeben, bei der der Amplitudengang auf $1/\sqrt{2}$, die Leistung also auf 50% abgefallen ist.

Die *äquivalente Bandbreite* ergibt sich durch Vergleich mit einem flächengleichen idealen Filter!!!

Bandbreite - Definition



为了说明许多滤波操作，通常使用理想化的滤波器，它们允许对滤波效果进行简化分析，而不考虑滤波功能的可实现性。例如，在通带中具有恒定幅度和线性相位响应的滤波器（例如理想低通滤波器）。

- 滤波器通常呈非因果性行为

Idealisierte Filter

Zur Verdeutlichung vieler Filteroperationen werden *idealisierte Filter* verwendet, die eine vereinfachte Analyse der Wirkung der Filterung zulassen, ohne Rücksicht auf die Realisierbarkeit der Filterfunktion zu nehmen.

z.B. mit im Durchlaßbereich konstantem Amplitudengang und linearem Phasengang (z.B. *idealer Tiefpaß*)

- meistens nichtkausales Verhalten des Filters

Realisierbare Filter

传输函数通常表示为分式形式的传输函数 $H(s)$ 。

例如，作为：

- 无源滤波器（RLC元件和理想变压器）
- 有源滤波器（RC元件和运算放大器）实现。

Übertragungsfunktion werden als gebrochen rationale Übertragungsfunktion $H(s)$ angegeben.

z.B. als

- *passive Filter* (RLC-Komponenten und ideale Übertrager)
- *aktive Filter* (RC-Komponenten und Operationsverstärker) realisiert.

Realisierbare Filter

Toleranzschema vorgegeben

das von dem Filter eingehalten werden soll.

Gefordert wird z.B.

给定了一个滤波器应该遵循的容差方案。

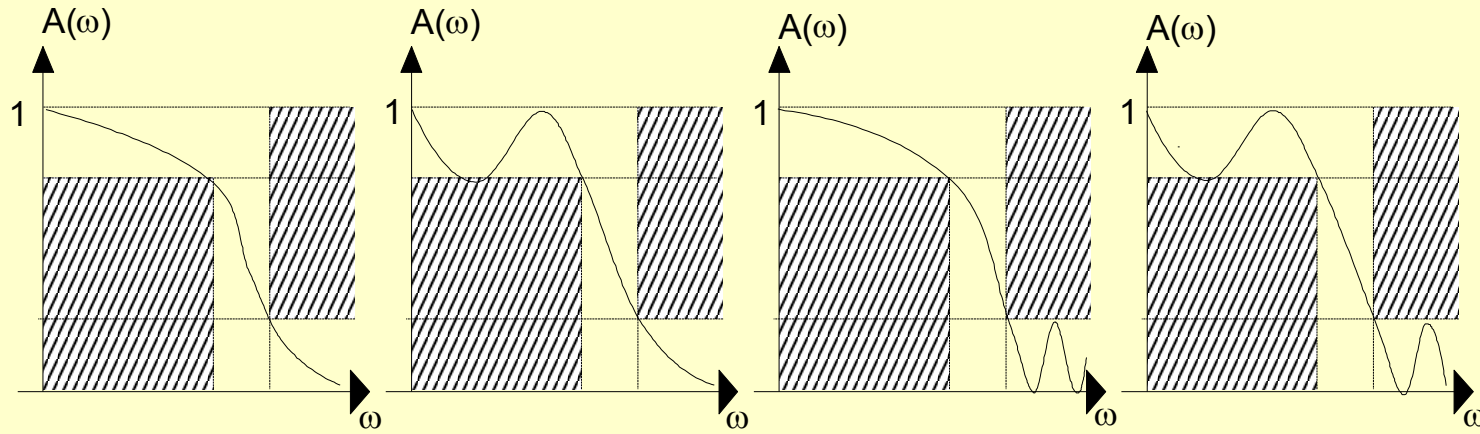
例如，要求：

- 特定的时间响应（冲激响应）
- 特定的幅频响应，不考虑相位
- 特定的幅频响应，考虑相位

- ein bestimmtes Zeitverhalten (Impulsantwort)
- ein bestimmter Amplitudengang ohne Berücksichtigung der Phase
- ein bestimmter Amplitudengang mit Berücksichtigung der Phase.

Filtertypen

1. **Butterworth (Potenzfilter):** 巴特沃斯滤波器（又称幂率滤波器），它的特点是在通带内有最平坦的幅频响应，没有波纹，但在通带和阻带之间的过渡区域较渐进。它只有极点。
2. **Tschebyscheff Typ I:** 切比雪夫滤波器类型 I 有一个波纹的通带和较陡峭的过渡带，但在阻带内是平坦的。它也只有极点。
3. **Inv. Tschebyscheff Typ II:** 逆切比雪夫滤波器类型 II 在阻带内有波纹而通带是平坦的，过渡带较其他滤波器更陡峭。它有极点和零点。
4. **Cauerfilter (Ellipt. Filter):** 考尔滤波器（也称为椭圆滤波器），它在通带和阻带内都有波纹，提供最陡峭的过渡带宽度。这种滤波器也有极点和零点。



nur Polstellen

nur Polstellen

Pol- und Nullstellen

Pol- und Nullstellen

Butterworth
(Potenzfilter)

Tschebyscheff Typ I

Inv. Tschebyscheff
Typ II

Cauerfilter
(Ellipt. Filter)

“逼近问题在于寻找一个可实现的传递函数 $H(s)$ ，它满足容差方案。传递函数 $H(s)$ 的阶数决定了元件的成本。”

这段文字强调，在设计滤波器时，需要找到一个既能满足性能标准（如通带和阻带的幅度要求）又能实际构造出来的传递函数。传递函数的阶数越高，滤波器设计越复杂，需要的电子元件也就越多，这会影响成本和实现的复杂性。

Die *Approximationsaufgabe* besteht darin, eine realisierbare Übertragungsfunktion $H(s)$ zu suchen, die das Toleranzschema einhält. Die Ordnung von $H(s)$ bestimmt den Aufwand an Bauelementen.

Nullstellenfreie Filter

(Potenzfilter und Tschebyscheff-Filter Typ I)

Aussage über den Verlauf der Sperrdämpfung bei hohen Frequenzen möglich

Aus der graphischen Interpretation im PN-Diagramm folgt, dass der Amplitudengang mit wachsender Frequenz gegen Null geht (die Abstände von den Polstellen zu dem ω -Aufpunkt erhöhen sich monoton).

对于无零点的滤波器（如幂次滤波器和Chebyshev Type I滤波器），可以对高频时的阻抑情况做出描述。
根据在PN图中的图形解释，随着频率的增加，幅频响应趋近于零（极点到的距离单调增加）。

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{\sum_{q=0}^N a_q s^q}$$

Nullstellenfreie Filter

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{\sum_{q=0}^N a_q s^q}$$

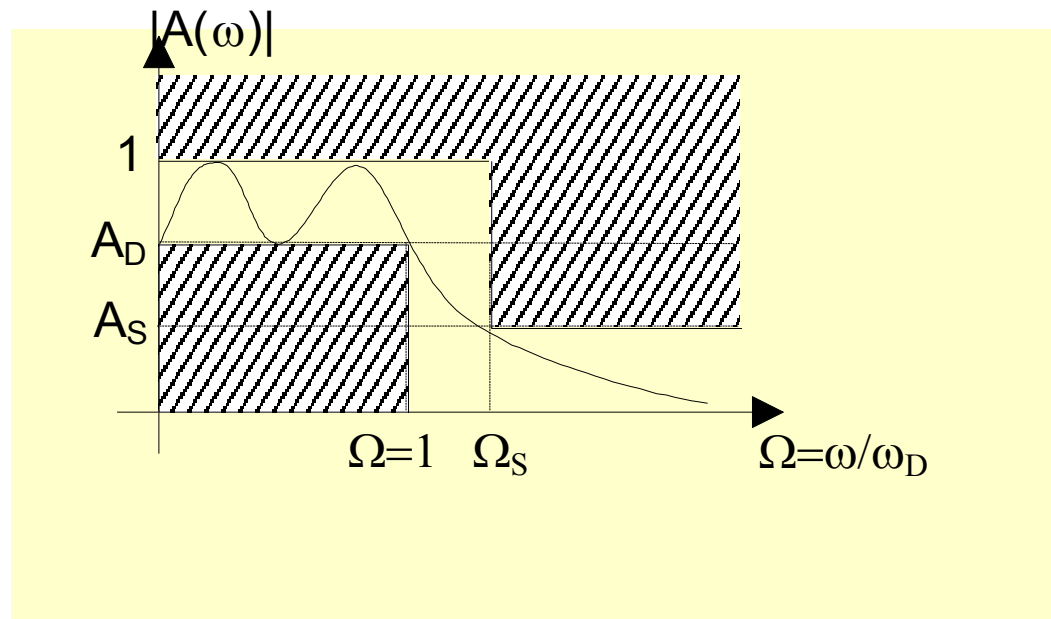
Mit $s = j\omega$ erhalten wir für den Amplitudengang bei hohen Frequenzen die Näherung

$$A(\omega) = |H(j\omega)| \approx \left| \frac{b_0}{a_N} \right| \cdot \frac{1}{\omega^N}$$

Der Amplitudengang im Sperrbereich nullstellenfreier Filter folgt damit $A(\omega) \approx \omega^{-N}$ bei genügend hohen Frequenzen

Beispiel: Tiefpass-Toleranzschema

Mit zwei Frequenzangaben und zwei Toleranzangaben können bei zusätzlicher Angabe des Filtertyps der Grad N des Filters bestimmt und seine weiteren Parameter angegeben werden, insbesondere seine Pole und Nullstellen.



Zur Bestimmung solcher Filter stehen *Tiefpaß-Filterkataloge* zur Verfügung.

10.4. Filtertyp Potenzfilter (Butterworth-Filter)

Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{\omega_D^N}{\prod_{m=1}^N (s - s_{xm})}$$

3-dB-Grenzfrequenz

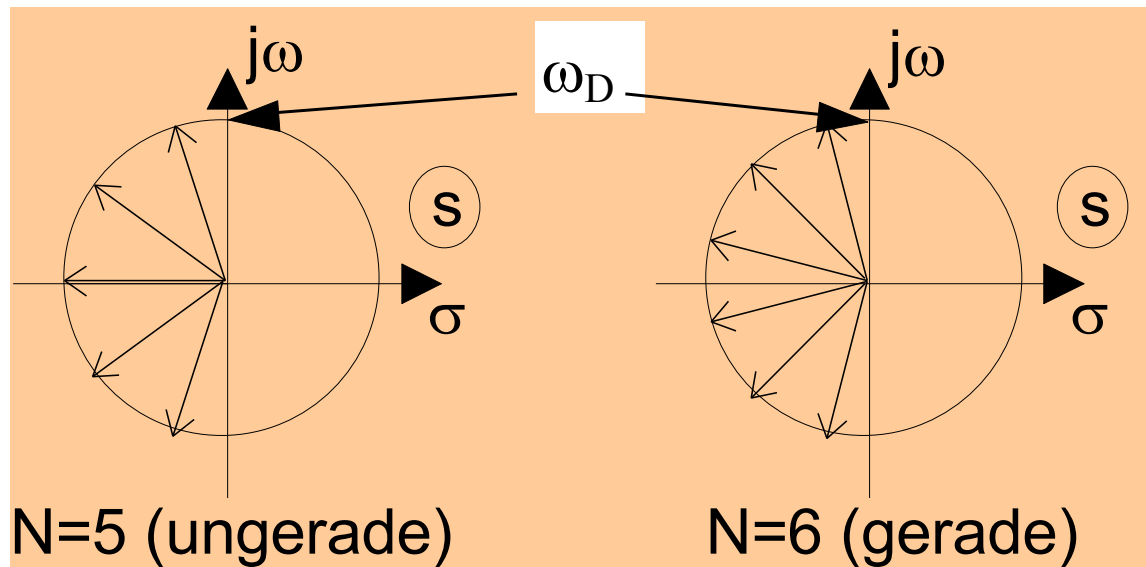
Die Pole sind gleichmäßig auf einem Halbkreis mit Radius ω_D verteilt, ihr Winkelabstand ist π/N

$$s_{xm} = \omega_D \exp \left[j\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{2m-1}{2N} \right) \right]; \quad m = 1, 2, \dots, N$$

10.4. Filtertyp Potenzfilter

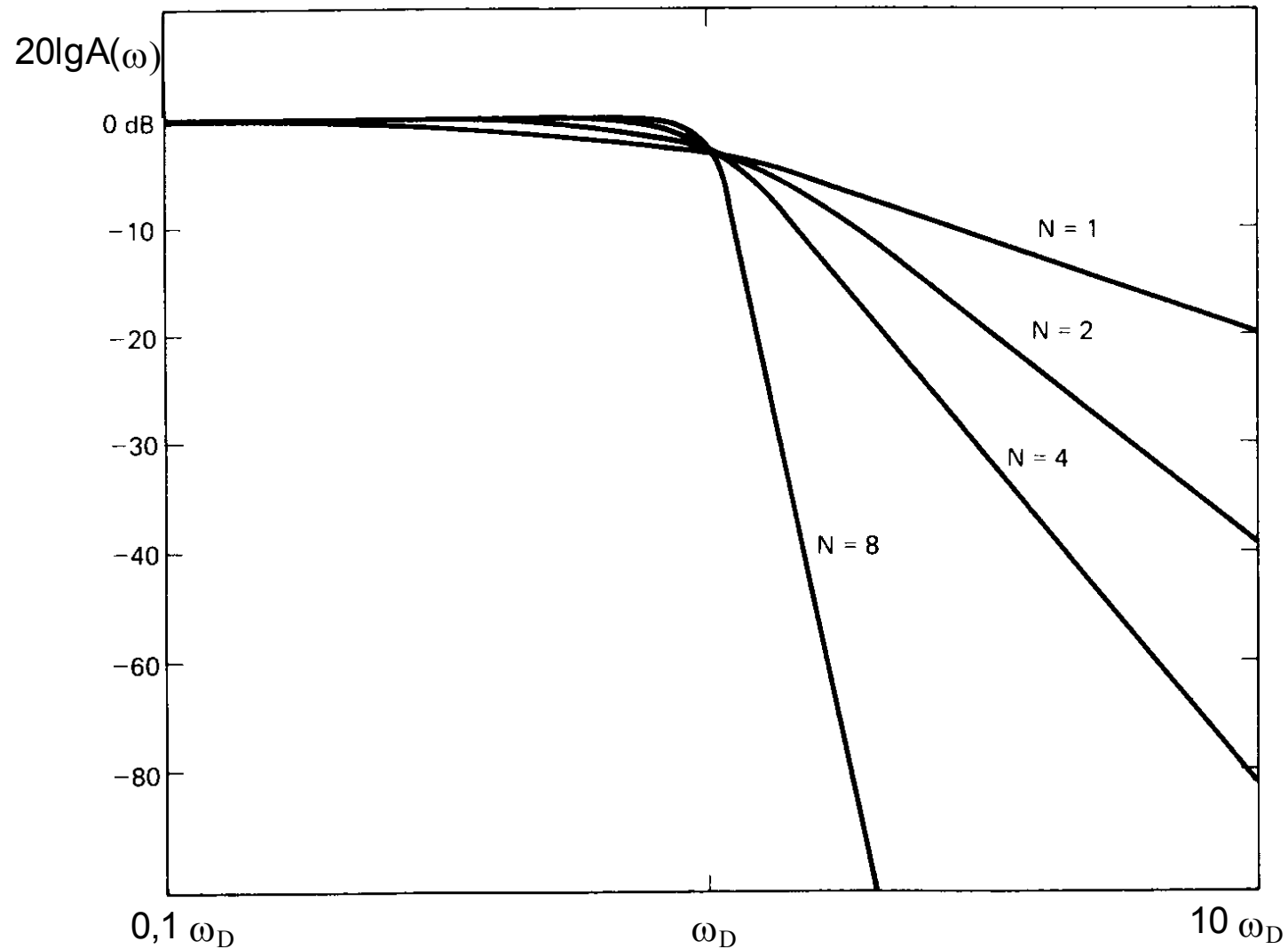
$$H(s) = \frac{\omega_D^N}{\prod_{m=1}^N (s - s_{xm})}$$

$$s_{xm} = \omega_D \exp\left[j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{2m-1}{2N}\right)\right]; \quad m = 1, 2, \dots, N$$



Potenzfilter sind also durch die Angabe der Ordnung N und der Grenzfrequenz ω_D vollständig definiert.

10.4. Filtertyp Potenzfilter



10.4. Filtertyp Potenzfilter

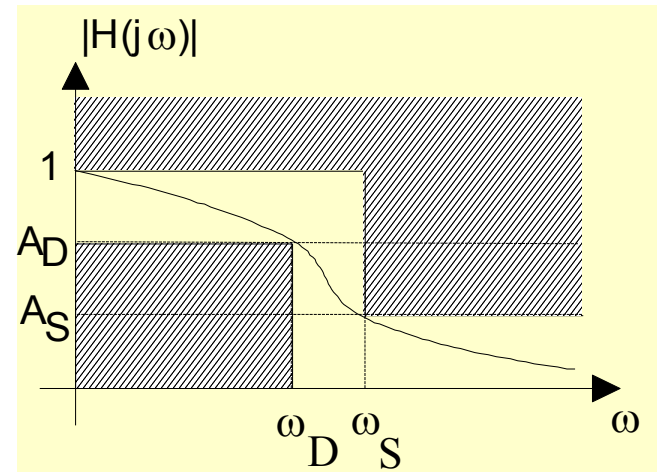
对于高频（阻带）情况，阻抑增益以每个八度增加6N dB。
要计算滤波器的阶数，给定了参数 A_g 、 A_D 、 W 和 w_s ，可以从中确定所需的阶数。

Bei hohen Frequenzen (Sperrbereich) folgt ein Anstieg der Sperrdämpfung mit 6N dB pro Oktave.

Zur Berechnung der Ordnung eines Filters sind die Parameter A_S , A_D , ω_D und ω_S gegeben, woraus die notwendige Ordnung ermittelt werden kann:

$$A(\omega_D) = |H(j\omega_D)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = A_D$$

$$N \geq \frac{1}{2} \frac{\lg(A_S^{-2} - 1)}{\lg(\omega_S / \omega_D)}$$



Beispiel: Tiefpaß elfter Ordnung

Ein Potenzfilter soll eine 3-dB-Frequenz von 500 Hz haben; die Mindestdämpfung bei 1000 Hz soll 66 dB sein.

Damit ist $20 \lg A(\omega) = -66 \text{ dB}$ ($A_S = 0,0005012$) und $\omega_S / \omega_D = 2$.

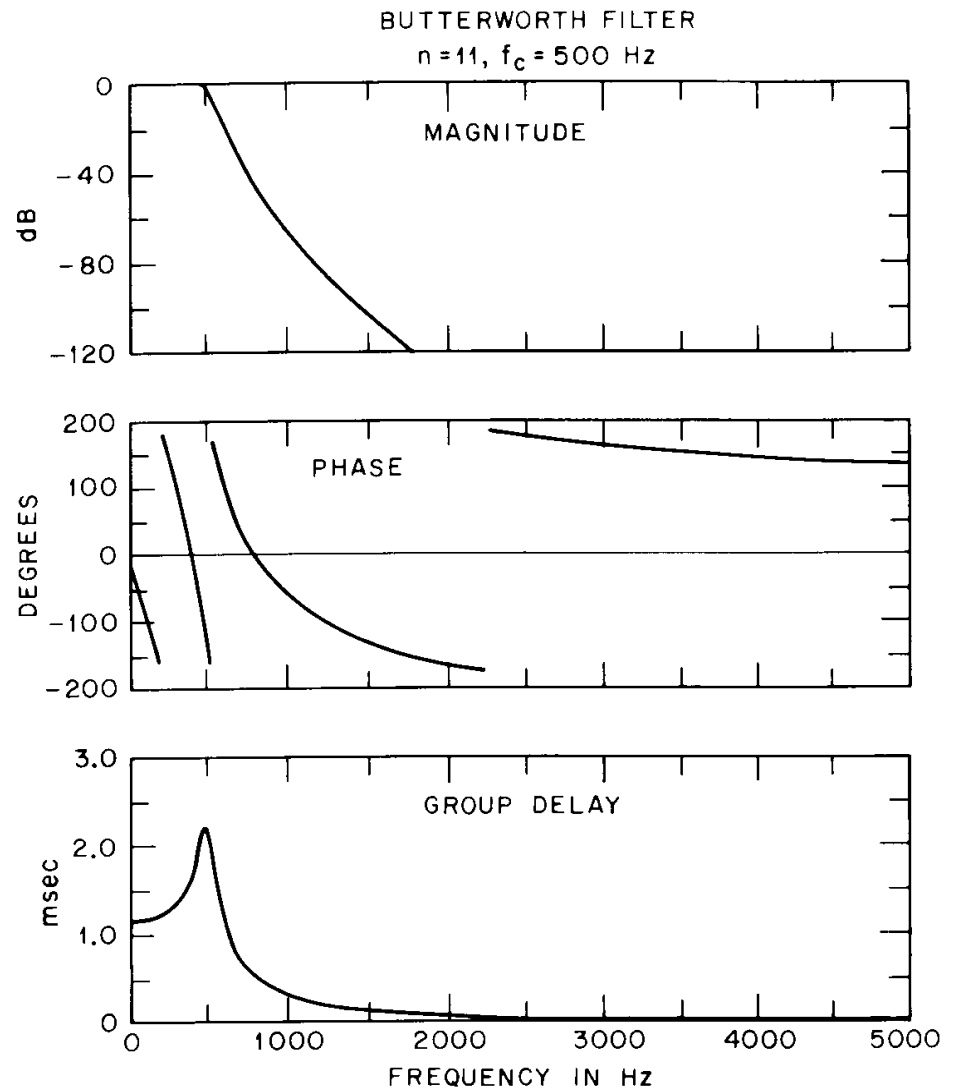
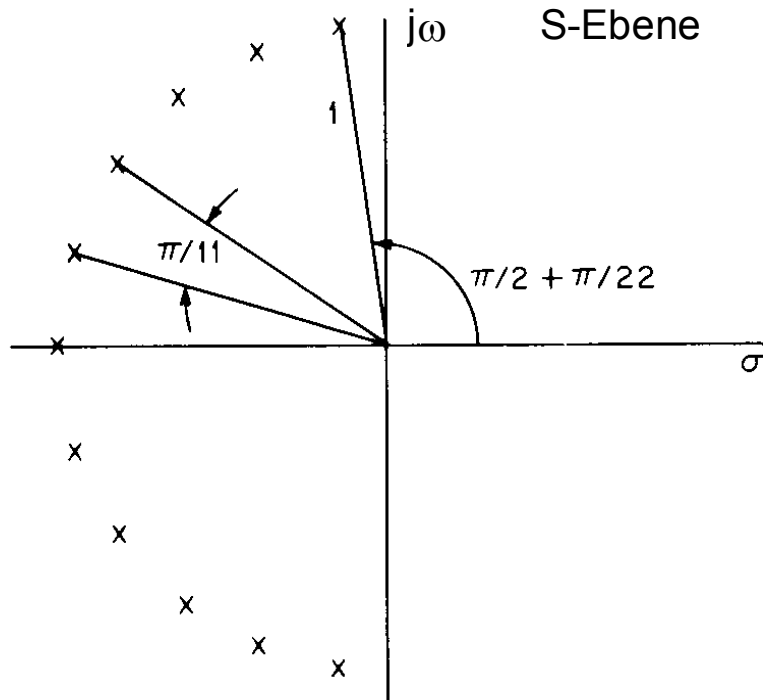
Die erforderliche Ordnung des Filters ist $N = 11$.

Die elf Pole liegen in der linken Halbebene im Winkelabstand $\pi/11$, der erste Pol liegt bei $\pi/2 + \pi/22$

$$N \geq \frac{1}{2} \frac{\lg(A_S^{-2} - 1)}{\lg(\omega_S / \omega_D)}$$

$$A(\omega_D) = |H(j\omega_D)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = A_D$$

Beispiel: Tiefpaß elfter Ordnung



10.2. Idealisierte Tiefpasssysteme

10.2.1 Rechteck-Tiefpassfilter

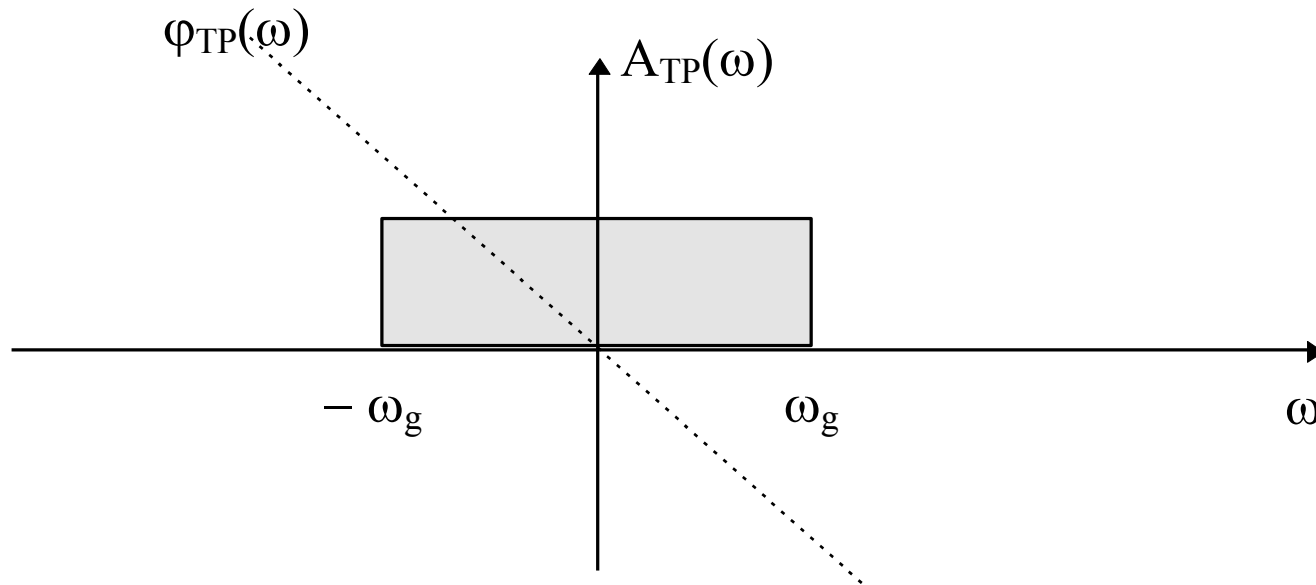
Übertragungsfunktion

Idealer Tiefpasses mit Grenzfrequenz ω_g und Laufzeit t_0 ist definiert durch

$$A_{\text{TP}}(\omega) = \Pi_{2\omega_g}(\omega)$$

$$\varphi_{\text{TP}}(\omega) = -\omega t_0$$

10.2.1 Rechteck-Tiefpassfilter

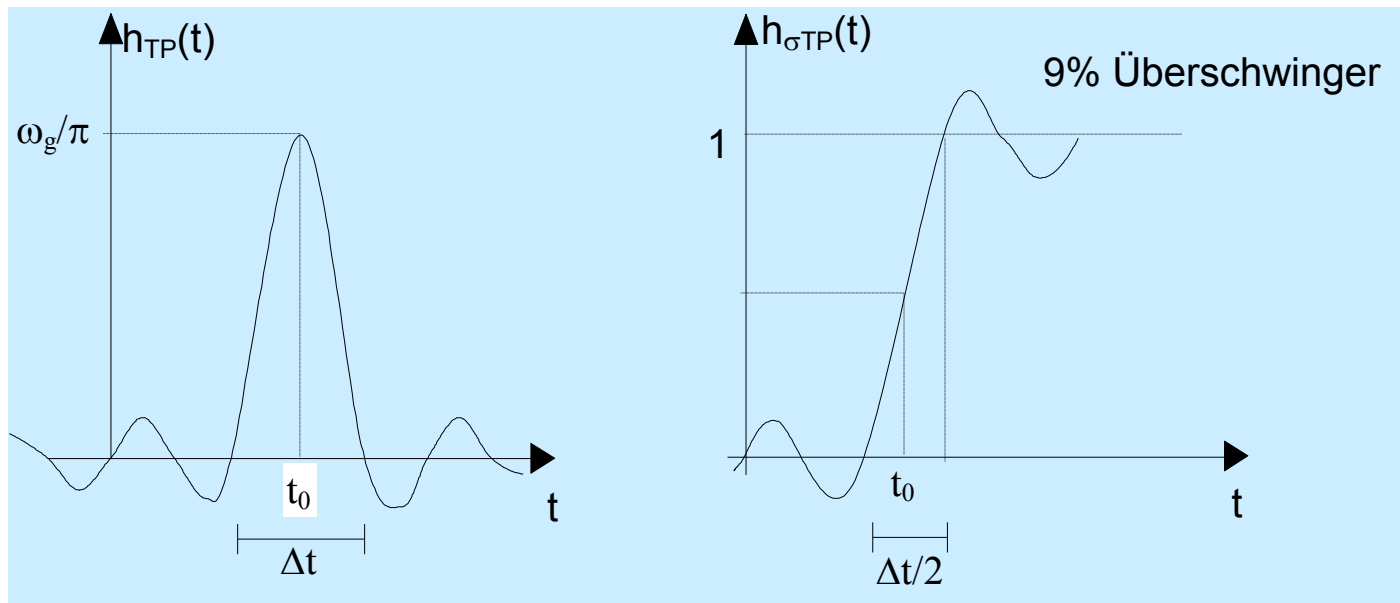


Nicht kausal!!!

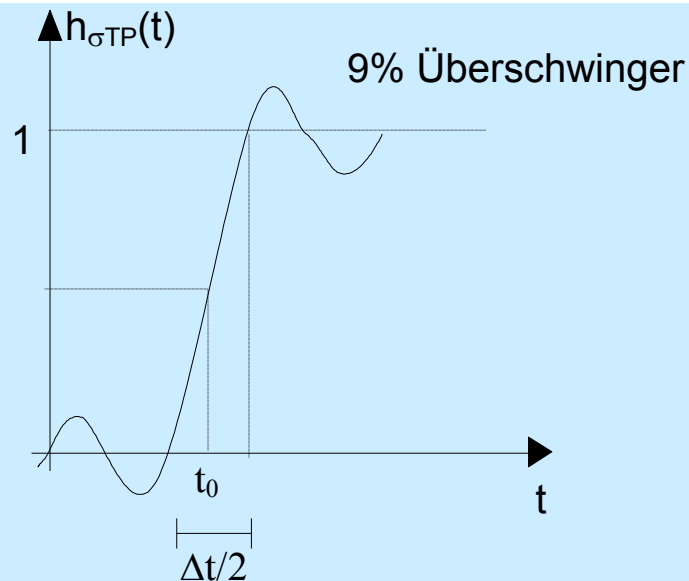
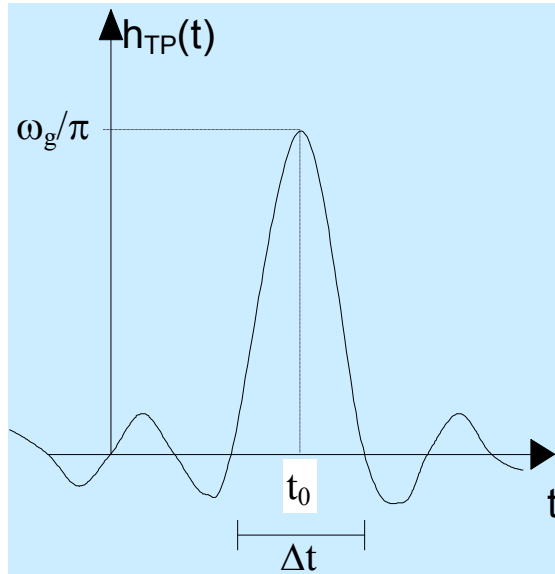
Impuls- und Sprungantwort

Bei Berücksichtigung der Laufzeit t_0

$$h_{\text{TP}}(t) = \frac{\omega_g}{\pi} \cdot \text{si}\left(\omega_g(t - t_0)\right)$$



Impuls- und Sprungantwort

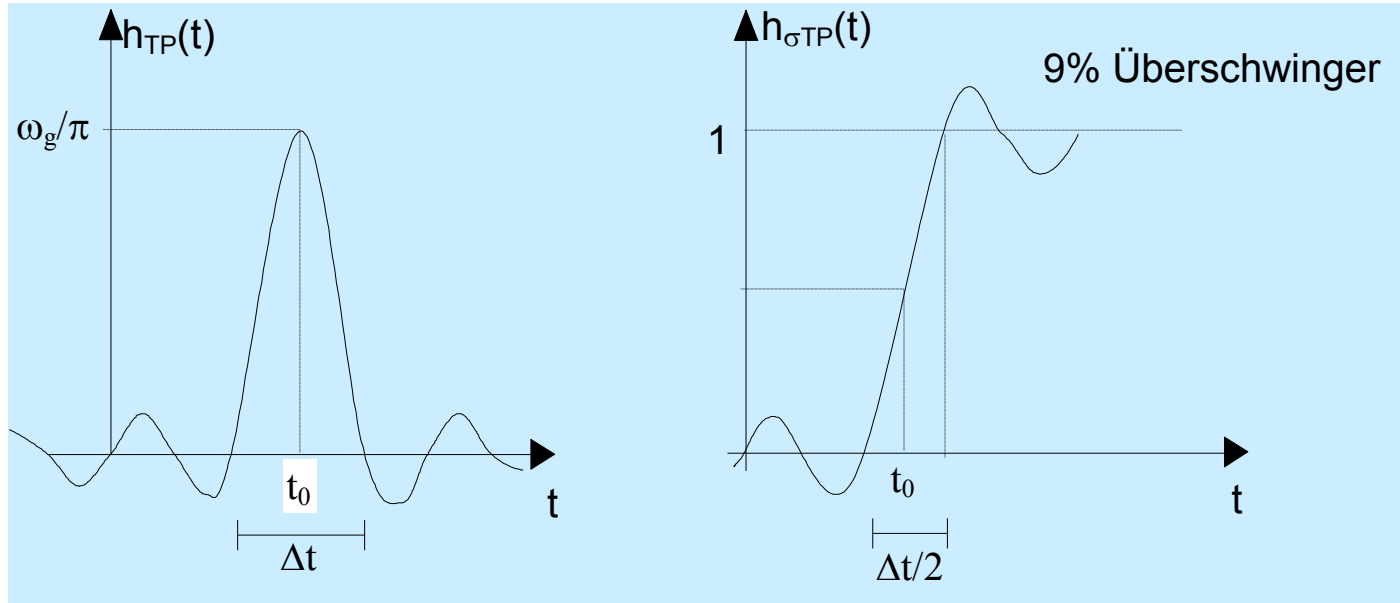


Das Amplitudenverhältnis von erstem Neben- zum Hauptmaximum wird als Überschwingen \ddot{u} der Impulsantwort bezeichnet.

第一个旁瓣与主要最大值的幅度比称为脉冲响应的超调。
- 与截止频率无关
- 由缝隙函数的特性确定，通常表示为 $\ddot{u}=21.7\%$ 。

- unabhängig von der Grenzfrequenz
- ergibt sich aus den Eigenschaften der Spaltfunktion zu $\ddot{u} = 21,7\%$.

Impuls- und Sprungantwort



Als (praktische) *Impulsdauer* Δt wird z.B. die Zeit zwischen den ersten Nulldurchgängen definiert. Sie ergibt sich zu

$$\Delta t = 1/f_g$$

作为（实际）脉冲持续时间 Δt ，例如被定义为首次过零的时间间隔。它可表示为 $\Delta t = 1/f_g$ 。
 $\Delta t \times f_g = 1$ 是信息技术中的时间规律（或不确定性原理）。

$\Delta t \times f_g = 1$ ist das *Zeitgesetz*

(oder *Unschärferelation*) der Nachrichtentechnik

Sprungantwort

Die **Sprungantwort** $h_{\sigma}(t)$ eines Systems ergibt sich aus dem laufenden Integral der Impulsantwort $h(t)$.

Damit wird

$$h_{\sigma TP} = \int_{-\infty}^t h_{TP}(\tau) d\tau = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(\omega_g(t - t_0))$$

Integralsinus

$$\int_0^x \text{si}(\alpha) d\alpha = \text{Si}(x)$$

Mit Eigenschaft:

$$\text{Si}(-x) = -\text{Si}(x) \quad \text{und} \quad \text{Si}(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

Sprungantwort

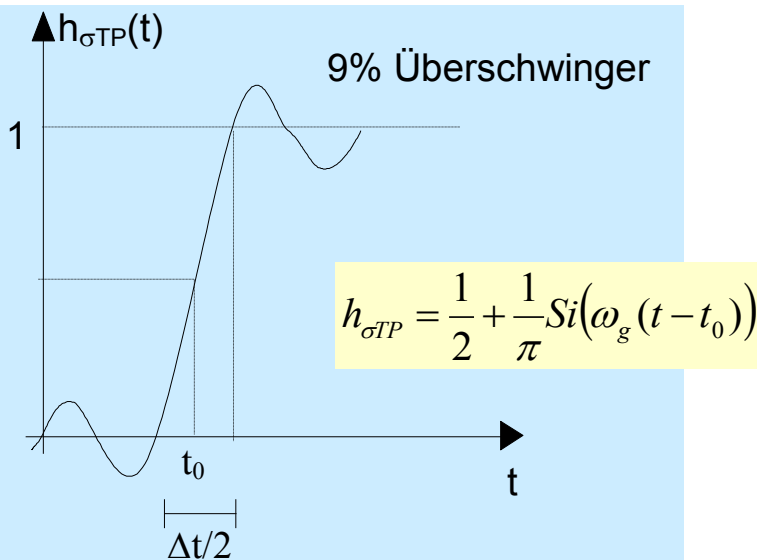
Das Überspringen beträgt 9,0%.

Die Einschwingzeit Δt_σ ist bestimmt durch die Tangente an die Sprungantwort im Punkte t_0 (die Sprungantwort hat dort einen Anstieg von ω_g/π):

$$\Delta t_\sigma = \frac{\pi}{\omega_g} = \frac{1}{2f_g} = \frac{\Delta t}{2}$$

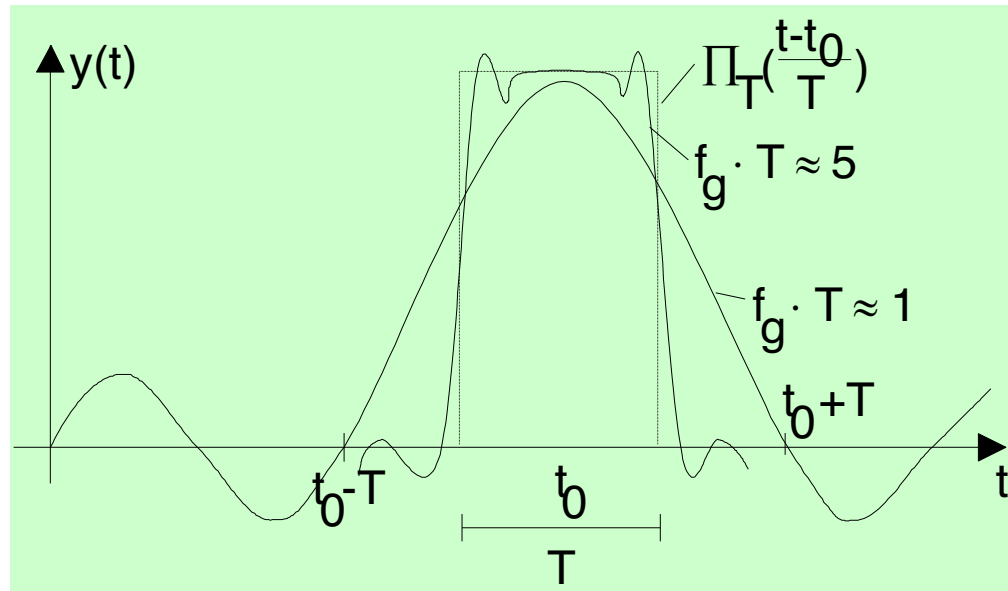
因此，启动时间与冲激响应的上升时间从最后一个过零点到冲激响应的最大值之间相同。

Die Einschwingzeit ist also mit der Anstiegszeit der Impulsantwort vom letzten Nulldurchgang bis zum Maximum der Impulsantwort identisch.



Beispiel: Einschwingvorgang eines Rechteckimpulses

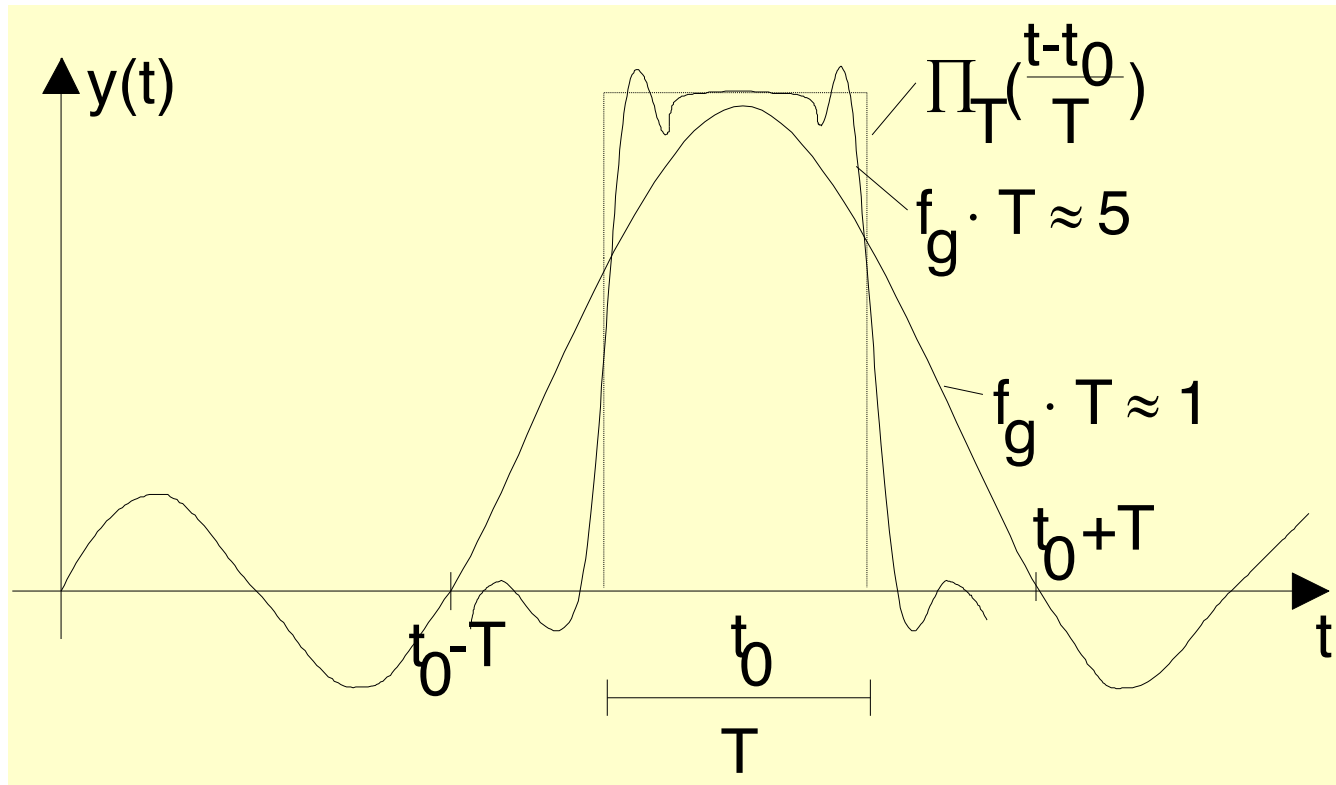
Es soll die Systemantwort eines idealen Tiefpasses mit der Phasenlaufzeit t_0 auf einen Rechteckimpuls der Länge T berechnet werden.



$$u(t) = \Pi_T(t) = \sigma(t + T/2) - \sigma(t - T/2)$$

$$y(t) = [\text{Si}\{\omega_g(t + T/2 - t_0)\} - \text{Si}\{\omega_g(t - T/2 - t_0)\}]$$

Verformung eines Rechtecksignals durch einen idealen Tiefpass

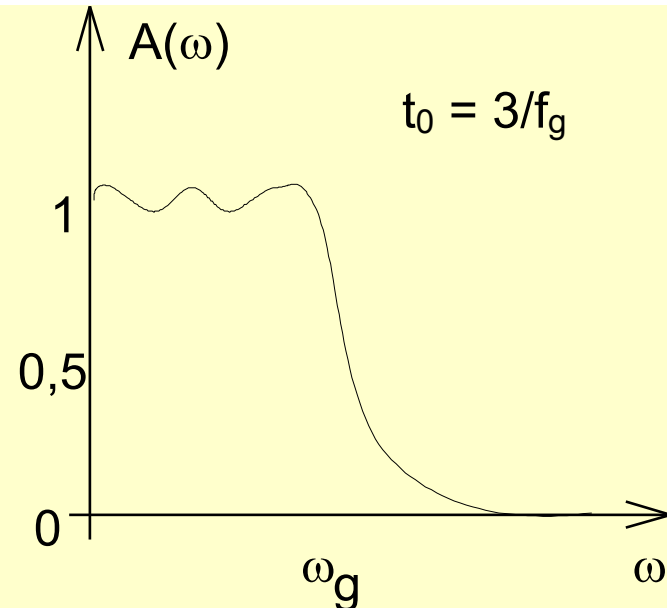
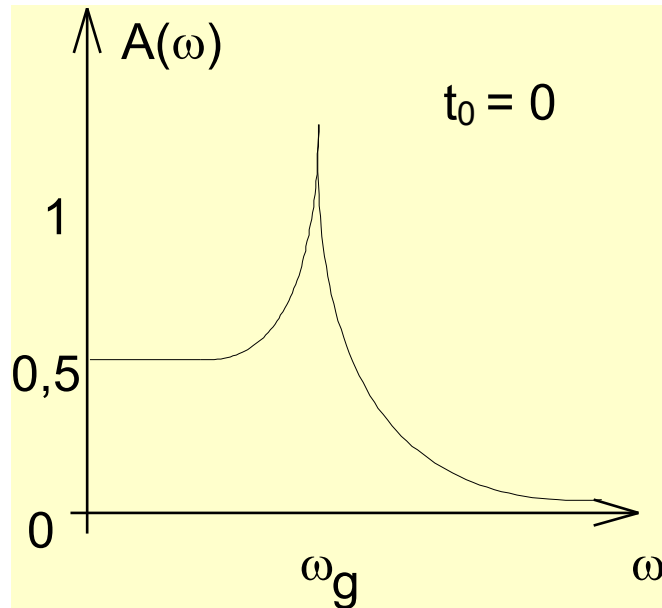


Die Länge des Rechteckimpulses sollte also etwa das Zehnfache der Einschwingzeit des Tiefpasses sein, wenn die Rechteckform erhalten bleiben soll.

Beispiel: Erzwungene Kausalität

Die Impulsantwort $h_{\text{TP}}(t)$ des idealen Tiefpasses kann kausal gemacht werden, indem ihr Anteil für negative Zeiten zu Null gesetzt wird:

$$h_{\text{TP(kausal)}}(t) = h_{\text{TP}}(t - t_0) \sigma(t)$$



10.2.2. Tiefpass mit \cos^2 -förmigem Amplitudengang

Impulsantwort soll bei gegebener Bandbreite ein geringes Überspringen bei kurzer Signaldauer liefern

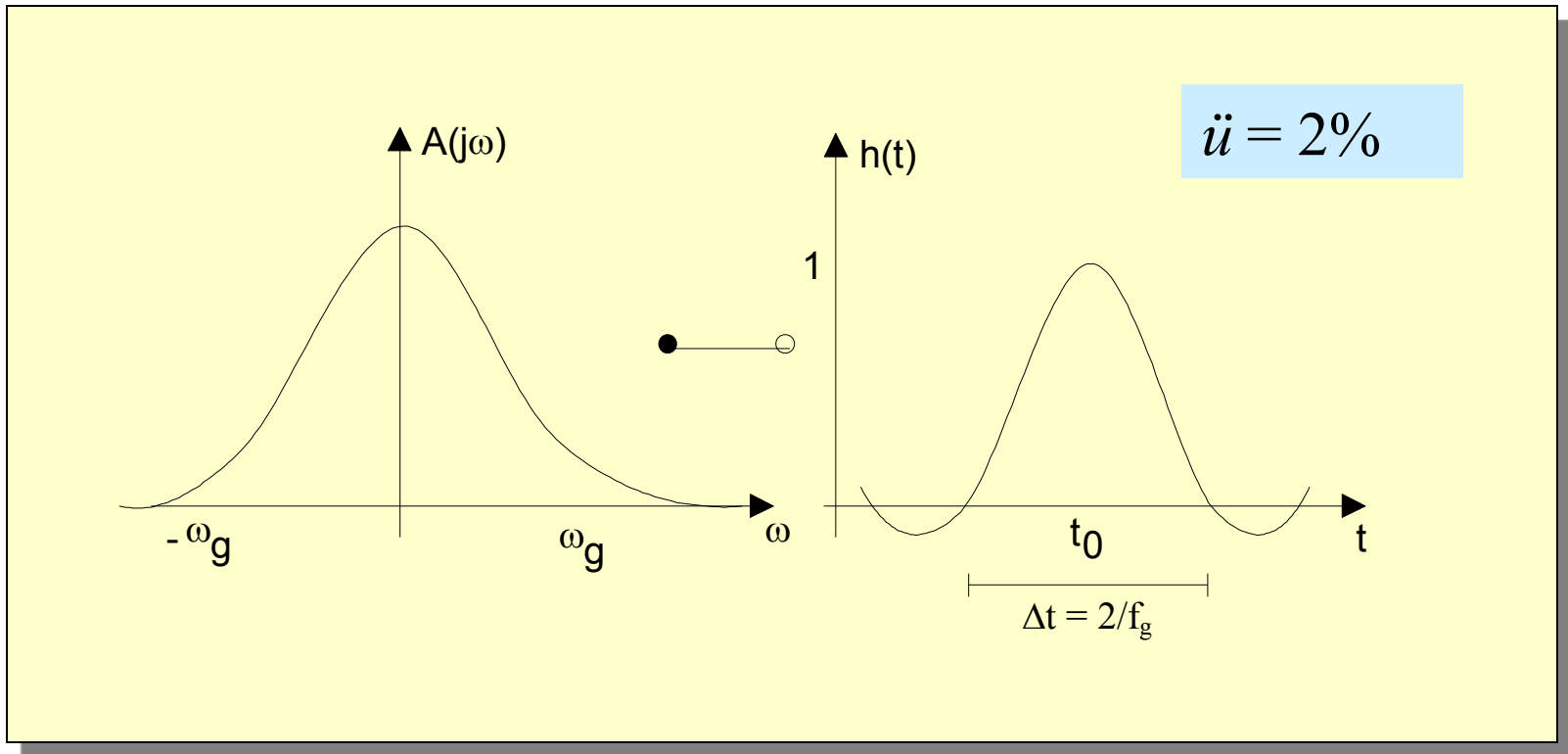
在给定的带宽下，冲激响应应该在信号持续时间较短的情况下产生较小的过冲。

\cos^2 -förmiger Amplitudengang

$$H(j\omega) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\omega_g}\right) \Pi_{2\omega_g}(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

$$h(t) = \frac{\frac{\omega_g}{2\pi}}{1 - \left(\omega_g \frac{t - t_0}{\pi}\right)^2} \cdot \text{si}\left(\omega_g (t - t_0)\right)$$

10.2.2. Tiefpass mit \cos^2 -förmigem Amplitudengang



Aber: Impulsdauer Δt und die Einschwingzeit Δt_σ verdoppelt

10.3. Realisierbare Tiefpasssysteme

Tiefpasscharakter kann nur entstehen, wenn bei $\omega = 0$ keine Nullstelle auftritt.

Durch reelle oder konjugiert-komplexe Polstellen in der Umgebung von $\omega = 0$ entsteht ein Tiefpasscharakter.

可实现的低通系统

-

只有当 $\omega = 0$ 时没有零点出现时, 低通特性才会出现。

通过 $\omega = 0$ 附近的实数或共轭复数极点, 可以产生低通特性。

例如:

- 无负载的RC低通滤波器 (一个实数极点)
- 无负载的RLC低通滤波器 (在参数选择合适的情况下, 一个共轭复数极点对)

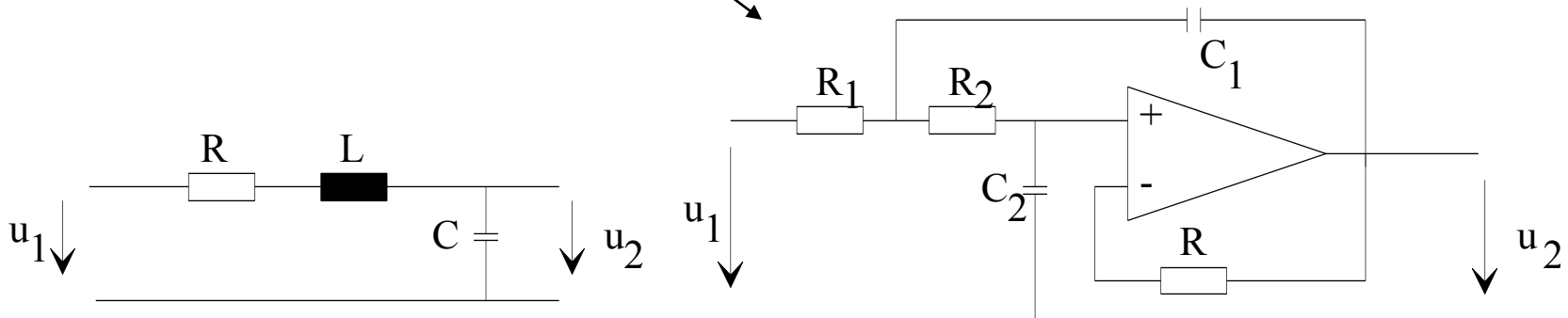
z.B.:

- unbelasteter RC-Tiefpaß (ein reeller Pol)
- unbelasteter RLC-Tiefpaß (ein konjugiert-komplexes Polpaar bei geeigneter Wahl der Parameter)

10.3. Realisierbare Tiefpasssysteme

Passives bzw. aktives Filter, das ein konjugiert-komplexes Polpaar realisieren kann

keine Spulen, kleine Abmessungen und einfach abzugleichen



被称为“有源滤波器”的RLC电路可以实现具有共轭复数极点的滤波器。

这些滤波器没有电感，体积小，易于调节。

利用RLC电路（也称为被动滤波器），可以实现图10.5中列出的所有滤波器类型。低通滤波器手册可以简化这些滤波器的设计。

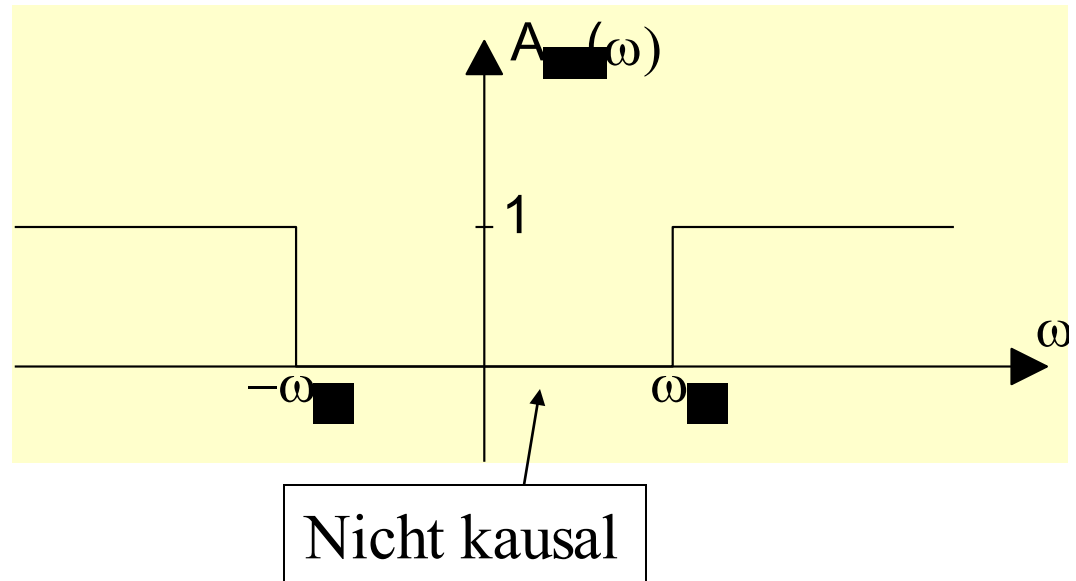
Mit RLC-Schaltungen (sog. *passiven* Filtern) können alle in Bild 10.5 aufgeführten Filtertypen realisiert werden. Tiefpass-Filterkataloge erleichtern den Entwurf solcher Filter.

10.5. Hochpasssysteme

Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion $H_{HP}(j\omega)$ eines idealen Hochpasses kann aus der des idealen Tiefpasses abgeleitet werden.

高通系统
传递函数
理想高通滤波器的传递函数 $H_{hp}(j\omega)$ 可以从理想低通滤波器的传递函数中导出。



10.5. Hochpasssysteme

$$A_{\text{HP}}(\omega) = 1 - A_{\text{TP}}(\omega) = 1 - \Pi_{2\omega_g}(\omega)$$

$$\varphi_{\text{HP}}(\omega) = -\omega t_0 \quad \text{für } |\omega| > \omega_g$$

Impulsantwort

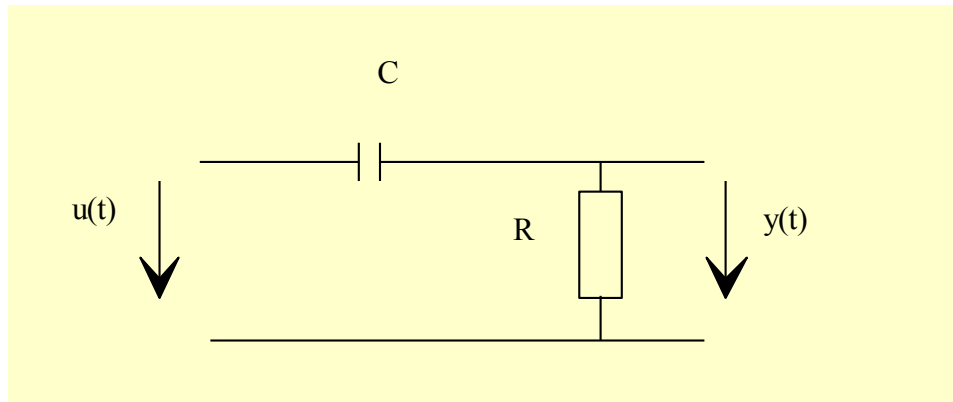
$$H_{\text{HP}}(j\omega) = \left(1 - \Pi_{2\omega_g}(\omega)\right) e^{-j\omega t_0}$$



$$h_{\text{HP}}(t) = \delta(t - t_0) - \frac{\omega_g}{\pi} \text{si}\left(\omega_g(t - t_0)\right)$$

Das einfachste realisierbare Hochpaßfilter

unbelasteter CR-Hochpass

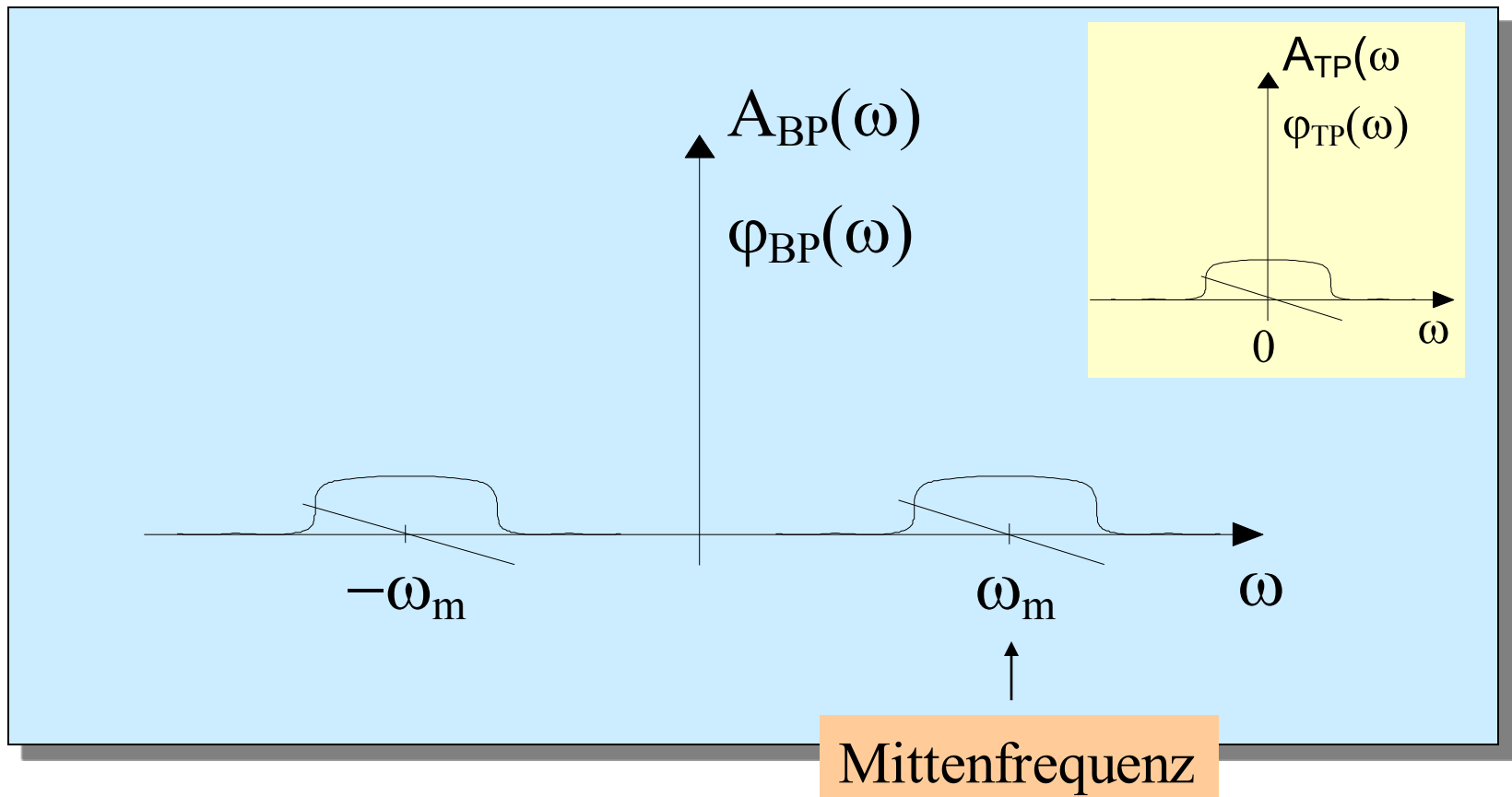


$$H(s) = \frac{\tau s}{1 + \tau s}$$

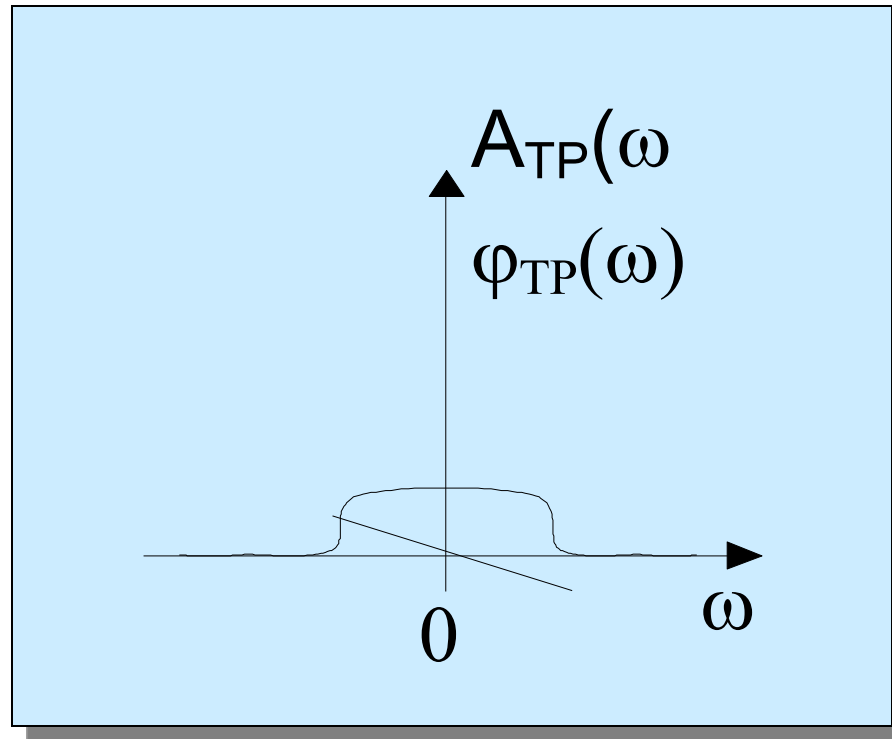
Ein Pol bei $s = -1/\tau = 1/CR$ und eine Nullstelle im Ursprung ($s = 0$)

10.6. Bandpasssysteme

10.6.1 Idealisierte Bandpasssysteme



Äquivalentes Tiefpasssystem



$$H_{BP}(j\omega) = H_{TP}[j(\omega - \omega_m)] + H_{TP}[j(\omega + \omega_m)]$$

$$H_{BP}(j\omega) = H_{TP}(j\omega) * [\delta(\omega - \omega_m) + \delta(\omega + \omega_m)]$$

Impulsantwort

$$H_{BP}(j\omega) = H_{TP}(j\omega) * [\delta(\omega - \omega_m) + \delta(\omega + \omega_m)]$$

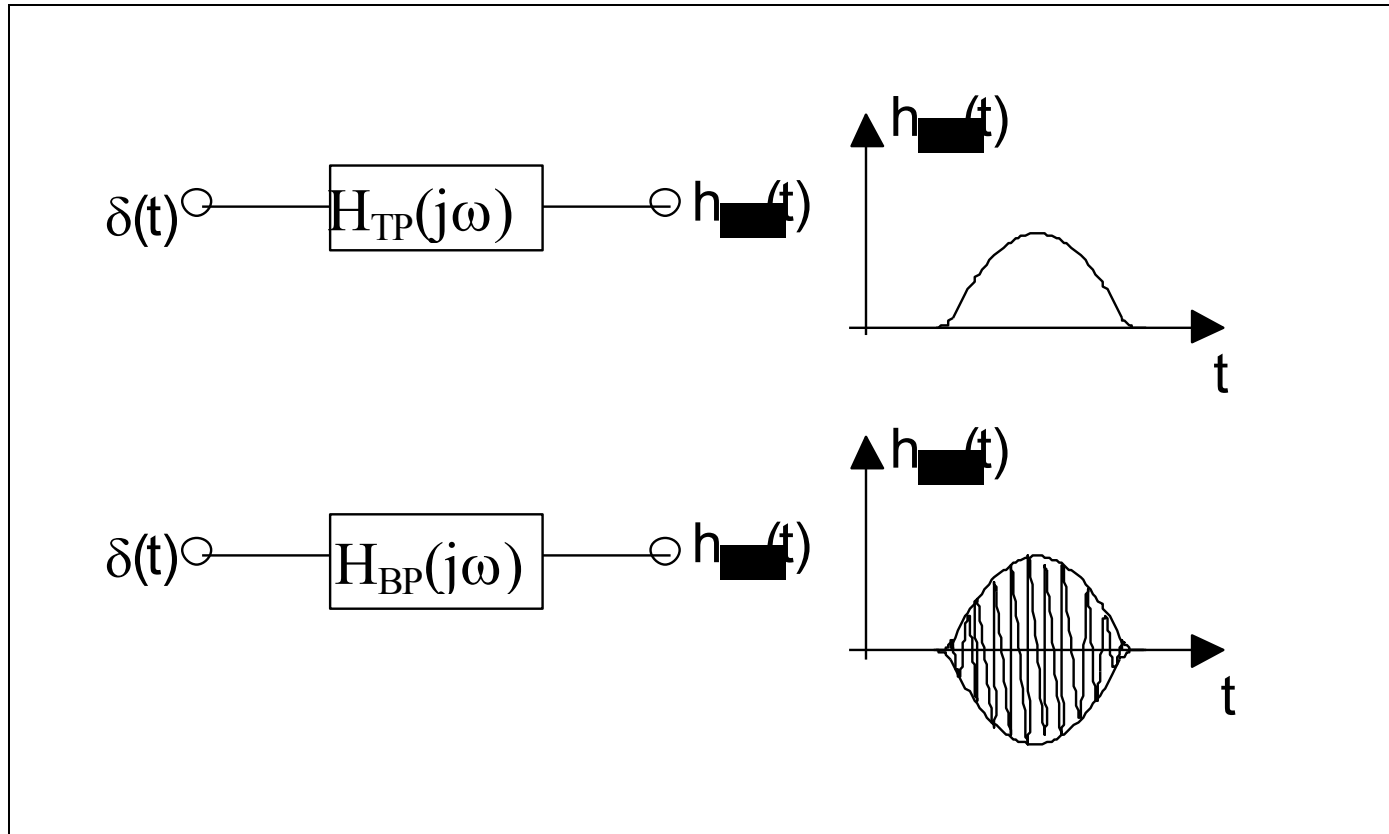
Aus der Übertragungsfunktion ergibt sich durch Rücktransformation für die Impulsantwort

$$h_{BP}(t) = 2 h_{TP}(t) \cos(\omega_m t)$$

Die Einhüllende der Impulsantwort des Bandpasssystems ist (bis auf einen Faktor 2) der Impulsantwort des zugehörigen äquivalenten Tiefpasses gleich!!!

帶通系統的脈沖響應的包絡（除了一個因子2之外）等於相應的等效低通系統的脈沖響應！！！！

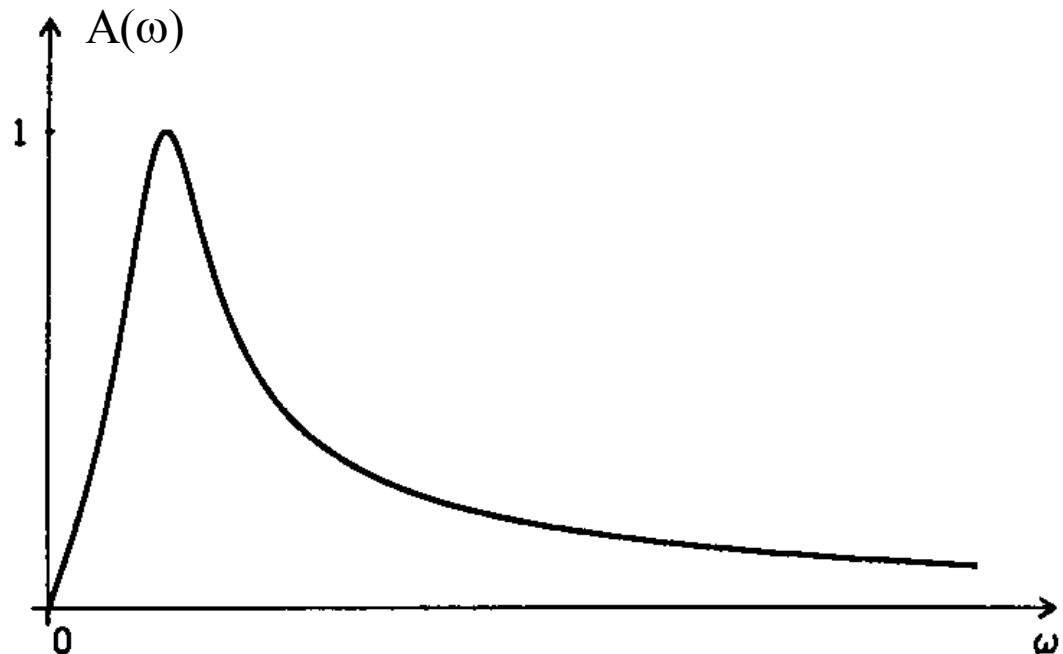
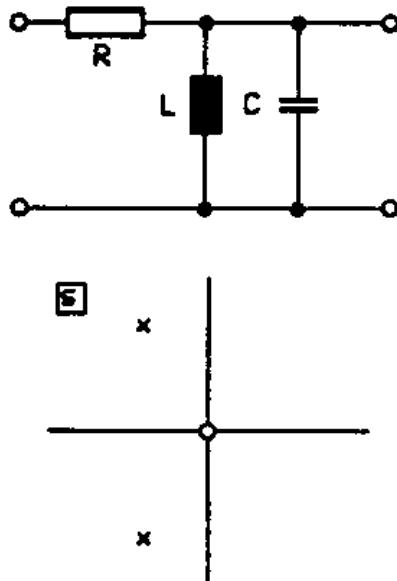
Impulsantwort von Bandpaß und äquivalentem Tiefpaß



$$h_{BP}(t) = 2 h_{TP}(t) \cos(\omega_m t)$$

10.6.2. Realisierbare Bandpaßfilter

- aus PN-Diagramm eines Tiefpasses
- aber Pole um ω_m bzw. um $-\omega_m$ verschoben
- NSt. $\omega=0$ Sperrverhalten bei niedrigen Frequenzen



10.7. Bandsperren

$$H(s) = \frac{1 + \beta s^2}{1 + \tau s + \beta s^2}$$

$$\tau = RC$$
$$\beta = LC$$

