Elvira Fleig, Rolf Jongebloed

Rechenübung Signale & Systeme (WiSe 2023/2024)

Zeitdiskrete Fouriertransformation, DFT (11. Termin)

29.01 - 04.02.2024

Hinweise

- Die Aufgabenblätter zur Rechenübung stehen jeweils vor dem jeweiligen Termin auf dem ISIS-Portal zum Download bereit.
- Aufgaben, die mit **[HA]** bzw. **[AK]** beginnen, sind Hausaufgaben bzw. alte Klausuraufgaben, die als Hausaufgabe bearbeitet werden sollen. Diese werden zusätzlich in den freiwilligen Tutorien vorgerechnet bzw. besprochen.

1 Fouriertransformierte zeitdiskreter Signale

1.1 Gegeben sei das Signal $u(t) = \delta(t) - 2\delta(t-T) + 2\delta(t-2T) + \delta(t-3T)$.

a) Bestimme die Fouriertransformierte $U(j\omega)$ des Signals $u(t)$ und skizziere das Amplitudenspektrum $|U(j\omega)|$. Welche Eigenschaften zeichnen $U(j\omega)$ aus?

b) Überführe allgemein die Fouriertransformierte einer zeitdiskreten Funktion in die Fouriertransformierte einer Zahlenfolge durch Einführung der normierten Kreisfrequenz $\Omega = \omega T$.

c) Gib die Fouriertransformierte der Zahlenfolge $\{1, -2, 2, 1\}$ in Abhängigkeit von der normierten Kreisfrequenz Ω an und skizziere das dazugehörige Amplitudenspektrum.

d) Welchen Einfluss hätte eine zeitliche Verschiebung τ (bspw. eine Verzögerung) auf die Fouriertransformierte einer zeitdiskreten Funktion?

2 Diskrete Fouriertransformation (DFT)

2.1 DFT und iDFT

a) Bestimme die DFT der Zahlenfolge $\{1, -2, 2, 1\}$ und skizziere das dazugehörige Amplitudenspektrum.

b) **[HA]:** Überprüfe das Ergebnis durch Rücktransformation des Signals mittels inverser DFT.

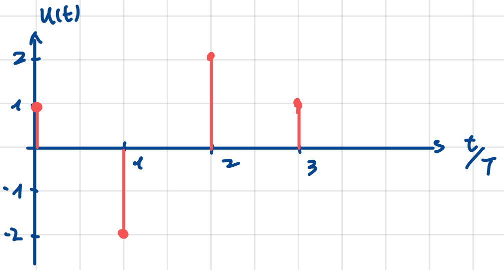
c) Welche Eigenschaften unterscheiden die DFT von der gewöhnlichen Fouriertransformation?

2.2 [HA]: Berechne die Faltung $y(n) = u(n) * v(n)$, $u = \{1, 0, 1\}$, $v = \{0, 2, 1\}$ mittels Multiplikation der entsprechenden DFT-Spektren im Frequenzbereich.

1 Fouriertransformierte zeitdiskreter Signale

1.1 Gegeben sei das Signal $u(t) = \delta(t) - 2\delta(t-T) + 2\delta(t-2T) + \delta(t-3T)$.

a) Bestimme die Fouriertransformierte $U(j\omega)$ des Signals $u(t)$ und skizziere das Amplitudenspektrum $|U(j\omega)|$. Welche Eigenschaften zeichnen $U(j\omega)$ aus?



Analyse gleichung:

$$U(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} (-2)\delta(t-T) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} 2\delta(t-2T) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-3T) e^{-j\omega t} dt$$

Ausblendeigenschaft: $u(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\delta(t-\tau)dt$

$$= e^{-j\omega 0} - 2e^{-j\omega T} + 2e^{-j\omega \cdot 2T} + e^{-j\omega \cdot 3T}$$

$$= e^{-j\omega \cdot \frac{3}{2}T} \cdot \left(e^{j\omega \cdot \frac{3}{2}T} - 2e^{j\omega \frac{T}{2}} + 2 \cdot e^{-j\omega \frac{T}{2}} + e^{-j\omega \frac{3}{2}T}\right)$$

$$= e^{-j\omega \cdot \frac{3}{2}T} \cdot \left(2\cos\left(\tfrac{3}{2}T\omega\right) - 4j\cos\left(\tfrac{1}{2}T\omega\right)\right)$$

Amplitudenspektrum: $|U(j\omega)| = \sqrt{Re^2 + Im^2} = \sqrt{(2\cos(\frac{3}{2}T\omega))^2 + (4\cos(\frac{1}{2}T\omega))^2}$

$$= \sqrt{2(\cos(3T\omega)+1) + 8(1-\cos(T\omega))}$$

$$= \sqrt{10 + 2\cos(3T\omega) - 8\cos(T\omega)}$$

$|U(0)| = 2$ mit $W_T = \frac{2\pi}{T}$

$|U(\frac{W_T}{4})| = \sqrt{10 + 2\cos(3\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\pi}) - 8\cos(\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\pi})} = \sqrt{10}$

$|U(\frac{W_T}{2})| = 4$

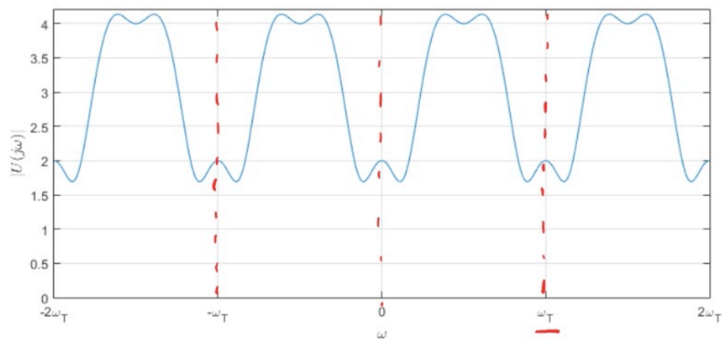
$|U(\frac{3W_T}{4})| = \sqrt{10}$

$|U(W_T)| = 2$

$|U(\frac{5}{4}W_T)| = \sqrt{10}$

$u(t)$ reell wertig: $A_U(\omega) = A_U(-\omega)$

$\varphi_U(\omega) = -\varphi_U(-\omega)$



Perioden dauer von $[-\frac{W_T}{2}, \frac{W_T}{2}]$

b) Überführe allgemein die Fouriertransformierte einer zeitdiskreten Funktion in die Fouriertransformierte einer Zahlenfolge durch Einführung der normierten Kreisfrequenz $\Omega = \omega T$.

$$u_A(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT) \cdot \delta(t-kT)$$

$$U_A(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_A(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT)\delta(t-kT) e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT) \cdot e^{-j\omega kT}$$

Einführung normierte Kreisfrequenz Ω

$\Omega = \frac{2\pi f}{f_T} = \frac{\omega}{f_T} = \omega T \rightarrow$ periodisch zu 2π!

$$U(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) e^{-jk\Omega}$$

$k = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$

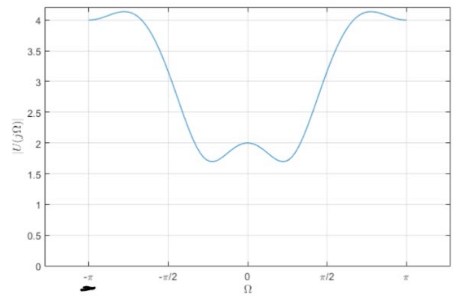
c) Gib die Fouriertransformierte der Zahlenfolge $\{1, -2, 2, 1\}$ in Abhängigkeit von der normierten Kreisfrequenz Ω an und skizziere das dazugehörige Amplitudenspektrum.

$$U(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) e^{-jk\Omega} = 1 \cdot e^{-j \cdot 0 \cdot \Omega} - 2e^{-j\Omega} + 2e^{-j \cdot 2\Omega} + e^{-j \cdot 3\Omega}$$

$$= e^{-j \cdot \frac{3}{2}\Omega} \cdot \left(e^{j \cdot \frac{3}{2}\Omega} - 2e^{j \cdot \frac{1}{2}\Omega} + 2e^{-j \cdot \frac{1}{2}\Omega} + e^{-j \cdot \frac{3}{2}\Omega}\right)$$

$$= e^{-j \cdot \frac{3}{2}\Omega} \cdot \left(2\cos(\tfrac{3}{2}\Omega) - 4j\sin(\tfrac{1}{2}\Omega)\right)$$

$$|U(j\Omega)| = \left(4\cos^2(\tfrac{3}{2}\Omega) + 16\sin^2(\tfrac{1}{2}\Omega)\right)^{1/2}$$



d) Welchen Einfluss hätte eine zeitliche Verschiebung τ (bspw. eine Verzögerung) auf die Fouriertransformierte einer zeitdiskreten Funktion?

$$v(t) = u_A(t-\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT)\,\delta(t-\tau-kT)$$

$$V(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT)\,\delta(t-\tau-kT) \cdot e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau-kT)\, e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT)\, e^{-j\omega\tau} \cdot e^{-j\omega kT}$$

$$= e^{-j\omega\tau} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT) \cdot e^{-j\omega kT}$$

$$= e^{-j\omega\tau}\, U(j\omega)$$

2 Diskrete Fouriertransformation (DFT)

2.1 DFT und iDFT

a) Bestimme die DFT der Zahlenfolge $\{1, -2, 2, 1\}$ und skizziere das dazugehörige Amplitudenspektrum.

b) **[HA]:** Überprüfe das Ergebnis durch Rücktransformation des Signals mittels inverser DFT.

c) Welche Eigenschaften unterscheiden die DFT von der gewöhnlichen Fouriertransformation?

a) Allgemein: $u_{DFT}(n) = U(jn\Delta\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) e^{-jkn\Omega}$

$\Delta\Omega = \frac{2\pi}{N} \qquad 0 \leq n \leq N-1$

$N = 4 \rightarrow \Delta\Omega = \frac{\pi}{2}$

$$u_{DFT}(n) = \sum_{k=0}^{3} u(k) e^{-jkn\Delta\Omega} = u(0)e^{-j0n\cdot\frac{\pi}{2}} + u(1)e^{-jn\cdot\frac{\pi}{2}} + u(2)e^{-j\cdot 2\cdot n\cdot\frac{\pi}{2}} + u(3)e^{-j\cdot 3n\cdot\frac{\pi}{2}}$$

$$= 1 - 2e^{-\frac{1}{2}jn\pi} + 2e^{-jn\pi} + e^{-\frac{3}{2}jn\pi}$$

$$U_{DFT}(0) = 1-2+2+1 = 2$$

$$U_{DFT}(1) = 1-2e^{-\frac{1}{2}j\pi} + 2e^{-j\pi} + e^{-\frac{3}{2}j\pi}$$

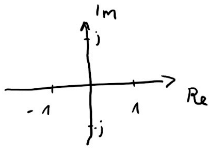
$$= 1-2\cdot(-j)+2\cdot(-1)+(j) = -1+3j$$

$$U_{DFT}(2) = 1-2e^{-j\pi}+2e^{-2j\pi}+e^{-3j\pi}$$

$$= 1-2(-1)+2\cdot(1)+(-1) = 4$$

$$U_{DFT}(3) = 1-2e^{-j\frac{3}{2}\pi}+2e^{-3j\pi}+e^{-\frac{9}{2}\pi}$$

$$= 1-2(j)+2(-1)+(-j) = -1-3j$$



$\pi = 180°$
$-\pi = -180°$
$\pi/2 = 90°$
$-\pi/2 = -90°$

Es müssen damit (bei geradem N) nur die Werte $U_{DFT}(n)$ von n = 0 bis N/2 berechnet werden.

Bei reellen Zahlen folgen

$$U_{DFT}(n) = U_{DFT}(-n)$$
$$U_{DFT}(-n) = U^*_{DFT}(n)$$

$$\Rightarrow \text{mit } U_{DFT}(-n) = U_{DFT}(-n+N)$$

$$\Rightarrow U_{DFT}(N-n) = U^*_{DFT}(n)$$

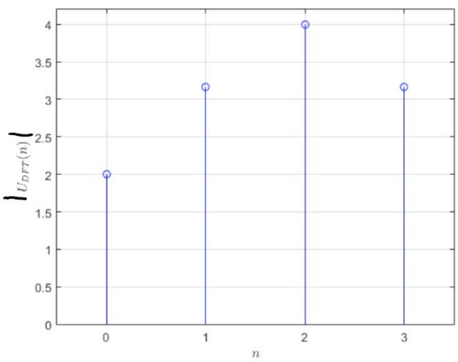
$$U^*_{DFT}(1) = U_{DFT}(4-1) = U_{DFT}(3) = -1-3j$$

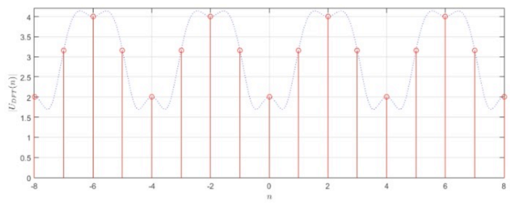
在这张图片中，星号（*）通常用来表示共轭复数（complex conjugate）。在数学中，一个复数的共轭是将其虚部的符号取反，如果复数是 a + bi 的形式（其中 a 和 b 是实数，i 是虚数单位），那么它的共轭是 a - bi。

Amplitudenspektrum

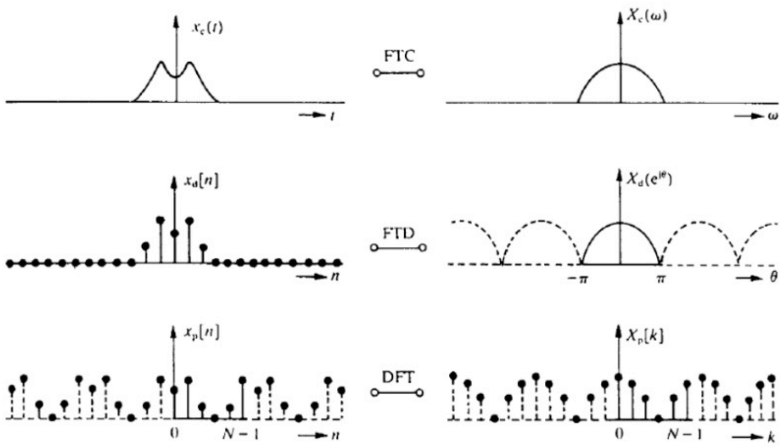
$$|U_{DFT}(n)| = \left(Re\{U_{DFT}(n)\}^2 + Im\{U_{DFT}(n)\}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$|U_{DFT}(0)| = 2$$
$$|U_{DFT}(1)| = \sqrt{10}$$
$$|U_{DFT}(2)| = 4$$
$$|U_{DFT}(3)| = \sqrt{10}$$





c) Welche Eigenschaften unterscheiden die DFT von der gewöhnlichen Fouriertransformation?



Zeit- und Frequenzbereich bei Zahlenfolgen
FTC: kontinuierl.FT,
FTD:FT für zeitdiskrete Signale; DFT: diskrete FT;

b) **[HA]:** Überprüfe das Ergebnis durch Rücktransformation des Signals mittels inverser DFT.

aus a) $U_{DFT}(n) = \{2, -1+3j, 4, -1-3j\}$
$n = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$

Rücktransformation:

$N = 4, \Delta\Omega = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$\boxed{\text{iDFT (inverse DFT)} \quad u(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} U_{DFT}(n) \cdot e^{jkn\Delta\Omega}}$

$u(k) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} U_{DFT}(n) \cdot e^{jkn\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{4} \cdot \left(2 + (-1+3j)e^{jk\cdot\frac{\pi}{2}} + 4 \cdot e^{jk\cdot\pi} + (-1-3j)e^{jk\cdot\frac{3}{2}\pi}\right.$

$u(0) = \frac{1}{4} \cdot (2 + (-1+3j) + 4 - 1 - 3j) = 1$

$u(1) = \frac{1}{4} \cdot (2 + (-1+3j)j + 4 \cdot (-1) + (-1-3j) \cdot (-j))$

$= \frac{1}{4}(2 - \cancel{j} - 3 - 4 + \cancel{j} - 3) = -2$

$u(2) = \frac{1}{4}(2 + (-1+3j)(-1) + 4 \cdot 1 + (-1-3j)(-1))$

$= \frac{1}{4}(2 + 1 - \cancel{3j} + 4 + 1 + \cancel{3j}) = 2$

$u(3) = \ldots = 1$

$u(k) = \{1, -2, 2, 1\}$

2.2 [HA]: Berechne die Faltung $y(n) = u(n) * v(n)$, $u = \{1, 0, 1\}$, $v = \{0, 2, 1\}$ mittels Multiplikation der entsprechenden DFT-Spektren im Frequenzbereich.

Vorgehensweise: ① DFT $\rightarrow U_{DFT}(n), V_{DFT}(n)$
② $Y_{DFT}(n) = U_{DFT}(n) \cdot V_{DFT}(n)$
③ iDFT $\rightarrow y(n)$

① DFT

$U_{DFT}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} u(k) e^{-jkn\Delta\Omega}$ $\quad u(n) = \{1, 0, 1\}$

$N = 3 \quad \Delta\Omega = \frac{2\pi}{N} = \frac{2}{3}\pi$

$U_{DFT}(n) = 1 + 0 + 1 \cdot e^{-2jn\frac{2}{3}\pi}$

$V_{DFT}(n) = 2 \cdot e^{-jn\cdot\frac{2}{3}\pi} + e^{-jn\cdot\frac{4}{3}\pi}$

$U_{DFT}(0) = 1 + 1 = 2$

$U_{DFT}(1) = 1 + e^{-\frac{4}{3}j\pi} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$

$U_{DFT}(2) = U^*_{DFT}(N-2) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j$

$U_{DFT}(n) = \{2, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j\}$

$V_{DFT}(0) = 3$

$V_{DFT}(1) = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right)$

$= -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j$

$V_{DFT}(2) = V^*_{DFT}(3-2) = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$

$V_{DFT}(n) = \{3, -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j, -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\}$

② $Y_{DFT}(n) = U_{DFT}(n) \cdot V_{DFT}(n)$

$Y_{DFT}(0) = U_{DFT}(0) \cdot V_{DFT}(0) = 2 \cdot 3 = 6$

$Y_{DFT}(1) = U_{DFT}(1) \cdot V_{DFT}(1) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) \cdot \left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}j - \frac{3}{4}\sqrt{3}j + \frac{3}{4} = -\sqrt{3}j$

$Y_{DFT}(2) = Y^*_{DFT}(3-2) = \sqrt{3}j$ $\quad \therefore Y_{DFT}(n) = \{6, -\sqrt{3}j, \sqrt{3}j\}$

③ iDFT $\rightarrow$ y(n)

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{iDFT (inverse DFT)}\\ u(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} U_{DFT}(n)\cdot e^{jkn\Delta\Omega}\end{array}}$$

$\Delta\Omega = \frac{2\pi}{3}$

$$y(k) = \frac{1}{3}\cdot\left(6 - \sqrt{3}j e^{jk\cdot\frac{2\pi}{3}} + \sqrt{3}j e^{jk\frac{4}{3}\pi}\right)$$

$y(0) = 2$

$y(1) = \frac{1}{3}\cdot\left(6 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) = 3$

$y(2) = \frac{1}{3}(6-3) = 1$

$y(n) = \{2, 3, 1\}$

$\rightarrow$ Hinweis: für die Faltung im Zeitbereich muss man die zyklische Faltung ausrechnen

AR - Aufgabe

geg.: $u = \{-1, 0, 2\}$

ges.: $U_{DFT}(n)$

$$U_{DFT} = \sum_{k=0}^{N-1} u(k)\cdot e^{-jkn\Delta\Omega}$$

$N = 3$

$\Delta\Omega = \frac{2\pi}{N}$

$$U_{DFT} = \left(-1 + 0 + 2e^{-jn\frac{4\pi}{3}}\right)$$

$$U_{DFT}(0) = (-1+2) = 1$$

$$U_{DFT}(1) = -1 + 2e^{-j\frac{4\pi}{3}} = -1 + 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) = -2 + \sqrt{3}j$$

$$U_{DFT}(2) = -2 - \sqrt{3}j$$

$$\therefore U_{DFT}(n) = \{1, -2+\sqrt{3}j, -2-\sqrt{3}j\}$$