Frage **1**
Richtig
Erreichte Punkte 1,00 von 1,00
Frage markieren

Gegeben seien die Mengen
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-1)^2 + y^2 \leq 4\}$
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$
Welche Form hat die Menge $A \setminus B$?

- ○ Halbkreis in der rechten Halbebene
- ○ Kreis mit Radius $R = 2$
- ◉ Kreisring ✔
- ○ Halbkreis in der linken Halbebene
- ○ Kreis mit Radius $R = 1$

Die Antwort ist richtig.
Die richtige Antwort ist:
Kreisring

Frage **2**
Richtig
Erreichte Punkte 3,00 von 3,00
Frage markieren

Welche Eigenschaften haben die angegebenen Mengen A, B, C?
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \; x + y^2 < 4\}$
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \; y - 3x = 1\}$
$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \; 1 < 3x^2 + 4y^2 \leq 9\}$

A ist [unbeschränkt und offen.] ✔
B ist [unbeschränkt und abgeschlossen.] ✔
C ist [beschränkt, aber weder offen noch abgeschlossen.] ✔

Die Antwort ist richtig.
Die richtige Antwort ist: A ist

→ unbeschränkt und offen., B ist

→ unbeschränkt und abgeschlossen., C ist

→ beschränkt, aber weder offen noch abgeschlossen.

Frage **3**
Richtig
Erreichte Punkte 1,00 von 1,00
Frage markieren

Jede Menge, die nicht kompakt ist, ist offen.

Bitte wählen Sie eine Antwort:
- ○ Wahr
- ◉ Falsch ✔

Die richtige Antwort ist 'Falsch'.

Frage **4**
Richtig
Erreichte Punkte 1,00 von 1,00
Frage markieren

Die Folge $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$\vec{x}_n = \left(e^{-n}, \frac{1}{2n-1}, \cos(n\pi)\right)$
ist konvergent.

Bitte wählen Sie eine Antwort:
- ○ Wahr
- ◉ Falsch ✔

Die richtige Antwort ist 'Falsch'.

$$\frac{3\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2}}{\frac{2}{k^2}} = 1$$

Frage **5**
Teilweise richtig
Erreichte Punkte 2,00 von 4,00
Frage markieren

Entscheiden Sie, ob und ggf. wann die folgenden Funktionen stetig sind:

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \begin{Bmatrix} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 1 & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ a & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{Bmatrix}$

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x,y) = \begin{Bmatrix} \frac{3xy - y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ a & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{Bmatrix}$

$$\frac{3\frac{1}{k^2}}{\frac{2}{k^2}} = \frac{3}{2k} - 1$$

f ist [stetig für a=-1.] ✔
g ist [stetig für a=0.] ✘

Die Antwort ist teilweise richtig.
Sie haben 1 richtig ausgewählt.
Die richtige Antwort ist: f ist

→ stetig für a=-1., g ist

→ für kein a stetig.

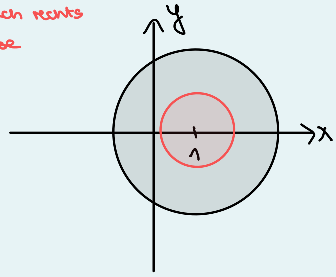
Frage **1**
Richtig
Erreichte Punkte 1,00 von 1,00
Frage markieren

Gegeben seien die Mengen — verschoben um 1 nach rechts

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-1)^2 + y^2 \leq 4\}$ $\frac{x}{4}$ ... => Ellipse

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$

Welche Form hat die Menge $A \setminus B$? — A ohne B



- ○ Halbkreis in der rechten Halbebene
- ○ Kreis mit Radius $R = 2$
- ◉ Kreisring
- ○ Halbkreis in der linken Halbebene
- ○ Kreis mit Radius $R = 1$

✔

Die Antwort ist richtig.
Die richtige Antwort ist:
Kreisring

Frage **2**
Richtig
Erreichte Punkte 3,00 von 3,00
Frage markieren

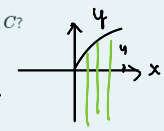
Welche Eigenschaften haben die angegebenen Mengen A, B, C?

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, x + y^2 < 4\}$ — offen; Kurve nicht dabei

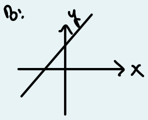
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, y - 3x = 1\}$

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, 1 < 3x^2 + 4y^2 \leq 9\}$

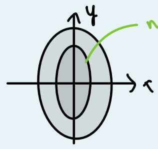
A: $y < \sqrt{4-x}$



B:



A ist	unbeschränkt und offen. ✔
B ist	unbeschränkt und abgeschlossen. ✔
C ist	beschränkt, aber weder offen noch abgeschlossen. ✔



nicht mit drin

Die Antwort ist richtig.
Die richtige Antwort ist: A ist

→ unbeschränkt und offen., B ist

→ unbeschränkt und abgeschlossen., C ist

→ beschränkt, aber weder offen noch abgeschlossen.

Frage **3**
Richtig
Erreichte Punkte 1,00 von 1,00
Frage markieren

Jede Menge, die nicht kompakt ist, ist offen.
→ beschränkt u. abgeschlossen

Bitte wählen Sie eine Antwort:
- ○ Wahr
- ◉ Falsch ✔

Die richtige Antwort ist 'Falsch'.

Frage **4**
Richtig
Erreichte Punkte 1,00 von 1,00
Frage markieren

Die Folge $(\vec{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit — jede Folge muss konvergieren

$\vec{x}_n = \left(e^{-n}, \frac{1}{2n-1}, \cos(n\pi)\right)$

ist konvergent. $\lim_{n \to \infty}$ $x \to 0$, $y \to 0$, $\cos(n\pi)$ ↳ 1

Bitte wählen Sie eine Antwort:
- ○ Wahr
- ◉ Falsch ✔

Die richtige Antwort ist 'Falsch'.

Frage **5**
Teilweise richtig
Erreichte Punkte 2,00 von 4,00
Frage markieren

Entscheiden Sie, ob und ggf. wann die folgenden Funktionen stetig sind: $\frac{1}{k}$ einsetzen, $\frac{1}{k}$ u. $\frac{1}{k^2}$ einsetzen ...

$k \to \infty$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 1 & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ a & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$ — Sandwich-Theorem: muss gegen 0 gehen => a = −1

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x,y) = \begin{cases} \frac{3xy-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ a & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

$\lim_{x,y \to 0} \quad 0 \leq \left| \frac{3\boxed{x^2}y}{\boxed{x^2+y^2}} \right| \leq 3y$

$\to 0 \qquad \to 0$

f ist: stetig für a=-1. ✔

g ist: stetig für a=0. ✖
nicht stetig

f: $\frac{3\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2}}{\frac{2}{k^2}} = \frac{\frac{2}{k^2}}{\frac{2}{k^2}} \Rightarrow 1$

$1 \neq 0 \Rightarrow$ kein Grenzwert

$k \to \infty \Rightarrow 0$

$\frac{3\frac{1}{k^3} - \frac{1}{k^4}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4}} = \frac{\frac{3}{k^3} - \frac{1}{k^4}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4}} = \frac{\cancel{\frac{1}{k^2}}\left(\frac{3}{k} - \frac{1}{k^2}\right)}{\cancel{\frac{1}{k^2}}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)} = \frac{\frac{3}{k} - \frac{1}{k^2}}{1 + \frac{1}{k^2}}$

Die Antwort ist teilweise richtig.
Sie haben 1 richtig ausgewählt.
Die richtige Antwort ist: f ist

→ stetig für a=-1., g ist

→ für kein a stetig.

Frage **6**
Falsch
Erreichte Punkte 0,00 von 1,00
Frage markieren

Gegeben Sei die Abbildung $\vec{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ mit

$$\vec{f}(x,y,z)=\begin{bmatrix}\sin(x)y+y\cos(z)\\ x^2y-xye^{2z}\end{bmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob $\vec{f}$ (total) differenzierbar ist und begründen Sie Ihre Antwort.

Stetig partiell differenzierbar → total differenzierbar ↗ stetig ↘ partiell differenzierbar

→ Ausschlusskriterium

- a. Ja, weil f stetig und partiell differenzierbar ist. ✗
- b. Ja, weil f partiell differenzierbar ist.
- c. Nein, weil der Definitionsbereich nicht offen ist.
- d. Ja, weil f stetig ist.
- e. Ja, weil f partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen stetig sind.

komposition stetiger Funktionen

Die Antwort ist falsch.

Die richtige Antwort ist:
Ja, weil f partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen stetig sind.

Frage **7**
Falsch
Erreichte Punkte 0,00 von 4,00
Frage markieren

Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^3-y^3}{x^2+y^2}-3x+2y, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen im Punkt $(0,0)$.

$\frac{\partial}{\partial x}f(0,0)=$ 0 -1 ✗

$\frac{\partial}{\partial y}f(0,0)=$ 0 1 ✗

Formel: $\lim_{h\to 0}\frac{f(\binom{0}{0}+\binom{h}{0})+f\binom{0}{0}}{h}=\frac{df}{dx}$ in $(0,0)$ $=\frac{\frac{2h^3-0}{h^2}-3h}{h}=\frac{-h}{h}=-1$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(\binom{0}{0}+\binom{0}{h})+f\binom{0}{0}}{h}=\frac{df}{dy}$ in $(0,0)$ $=\frac{\frac{-h^3}{h^2}+2h}{h}=\frac{-h+2h}{h}=1$

$$\frac{f((0,0)+(h,0))+f\binom{0}{0}}{h}=\frac{\frac{2h^3}{h^2}-3h}{h}=-1$$

für $(1,1)$: $\frac{f(\binom{1}{1}+\binom{0}{h})+f\binom{1}{1}}{h}$

$$\frac{f(0,h)+f(0,0)}{h}=\frac{\frac{-h^3}{h^2}+2h}{h}=1$$

Die richtigen Antworten sind:
$\frac{\partial}{\partial x}f(0,0)=-1$ und $\frac{\partial}{\partial y}f(0,0)=1$

Frage **8**
Teilweise richtig
Erreichte Punkte 1,00 von 2,00
Frage markieren

Sei $B\subseteq\mathbb{R}^n$ offen und $f:B\to\mathbb{R}$ eine beliebige Funktion.

Ergänzen Sie die folgende (logische) Grafik duch Einsetzen einer geeigneten Auswahl aus den folgenden Textbausteinen, so dass die angezeigten Implikationen wahr sind:

[f ist (total) differenzierbar] ✓

⇓

[f ist stetig] ✗ alle Richtungsableitungen

⇓

[f ist partiell differenzierbar] ✓

⇒ stetig (kleinerer Begriff)

Sie müssen nicht alle Textbausteine verwenden!

[alle Richtungsableitungen von f existieren] [f ist streng monoton]

Die Antwort ist teilweise richtig.

Sie haben 2 richtig ausgewählt.
Die richtige Antwort lautet:
Sei $B\subseteq\mathbb{R}^n$ offen und $f:B\to\mathbb{R}$ eine beliebige Funktion.

Ergänzen Sie die folgende (logische) Grafik duch Einsetzen einer geeigneten Auswahl aus den folgenden Textbausteinen, so dass die angezeigten Implikationen wahr sind:

[f ist (total) differenzierbar]

⇓

[alle Richtungsableitungen von f existieren]

⇓

[f ist partiell differenzierbar]

Sie müssen nicht alle Textbausteine verwenden!

Kommentar:
Aus der Stetigkeit einer Funktion kann leider noch nicht gefolgert werden, dass alle partiellen Ableitungen existieren.

Frage **9**
Teilweise richtig
Erreichte Punkte 6,00 von 10,00
Frage markieren

Die Funktion $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\mathrm{grad}_{(x,y)}\, f = \begin{bmatrix} 4xy + 8x \\ 2x^2 + 4y^2 + 10y \end{bmatrix}$$

hat vier kritische Punkte, darunter $(0,0)$, $(0,-\frac{5}{2})$ und $(\sqrt{2},-2)$.

Lokale Extrema
grad f = 0

$$\mathrm{I}: \begin{bmatrix} 4xy+8x \\ 2x^2+4y^2+10y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad x(4y+8) \quad x_1 = 0$$

$4y^2 + 10y = 0$
$y(4y+10) = 0$
$y_1 = 0\ ;\ y_2 = -\frac{5}{2}$
$(0,0)$
$(0,-5/2)$

$y_{3,4} = -2$
$\Rightarrow 2x^2 + 16 - 20 = 0$
$2x^2 = 4$
$x = \pm\sqrt{2}$
$\Rightarrow (\sqrt{2},-2)$

a) Berechnen Sie den vierten kritischen Punkt $\vec{x}_4$ und geben Sie ihn in der Form (a,b) an.
[**HINWEIS**: Schreiben Sie Wurzel(t) für $\sqrt{t}$.]

$4xy+8x=0 \quad 4x(y+2)=0$
$2x^2+4y^2+10y=0$
$2x^2+16-20=0 \quad (\pm\sqrt{2},-2)$

$\vec{x}_4 =$ (-wurzel(2),-2) ✔.

b) Berechnen Sie die fehlenden Einträge der Hesse-Matrix $H_f(x,y)$ von f:

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} \text{4y+8} ✔ & \text{4x} ✔ \\ 4x & \text{8y+10} ✔ \end{bmatrix}$$

Ableitung

$$0: \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Minimum}$$
pos. definit

$\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$

c) Entscheiden Sie, ob in den kritischen Punkten ein lokales Extremum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

Definitheiten

Der kritische Punkt $(0,0)$ ist ein lokales Minimum ✔.

Der kritische Punkt $(0,-\frac{5}{2})$ ist ein Sattelpunkt Max ✖. lokales Min.

$(0,-\frac{5}{2})$: $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Maximum
negativ definit

Der kritische Punkt $(\sqrt{2},-2)$ ist Es ist keine Angabe möglich ✖. Sattelpunkt
Sattelpunkt

$(\sqrt{2},-2)$: $\begin{bmatrix} 0 & 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Sattelpunkt
indefinit

b) Für die oben genannte Funktion gilt $f(0,0)=3$.
Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(x,y)$ zweiter Ordnung von f im Entwicklungspunkt $(0,0)$:

$T_2(x,y) =$ 0 ✖. $4x^2 + 5y^2 + 3$

$$= 3 + \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = 3 + \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8x \\ 10y \end{pmatrix} \right\rangle = 3 + 4x^2 + 5y^2$$

Die korrekte Antwort sehen Sie, wenn Sie mit dem Mauszeiger über die Antwortfelder fahren.

$$3 + (0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x\ y)\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3 + \frac{1}{2}(8x^2 + 10y^2)$$

Frage **10**
Teilweise richtig
Erreichte Punkte 2,00 von 5,00
Frage markieren

Gegeben sei die differenzierbare Funktion $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\mathrm{grad}_{(x,y)}\, f = \begin{bmatrix} 2(x-1) \\ 2y \end{bmatrix},$$

$\Rightarrow$ partiell differenzierbar $\Rightarrow$ stetig

grad f = λ grad g
g(x⃗) = 0

$$\begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4x \\ 8y \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{matrix}$$

sowie die Menge

$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \boxed{2x^2 + 4y^2 = 12}\}$.

$g(x,y) = 2x^2 + 4y^2 - 12 = 0$

$\Rightarrow 2y = \lambda 8y$
$\lambda = \frac{1}{4} \Rightarrow$
$2x - 2 = x$
$x = 2$
in NB
$\Rightarrow 8 + 4y^2 - 12 = 0$
$4y^2 = 4$
$y^2 = 1$
$y = \pm 1$
$(2,-1)$
$(2,1)$

a) Nimmt f auf M ein globales Minimum und ein globales Maximum an?

$$\text{grad}\, g = \begin{bmatrix} 4x \\ 8y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (x,y) = (0,0)$$

Ja, weil f stetig und M kompakt ist. ✔

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Lagrange-Verfahren alle Kandidaten für Extremstellen von f auf der Menge M:
[**HINWEIS:** Scheiben Sie Wurzel(t) für $\sqrt{t}$. Geben Sie ggf. mehrere Kandidaten hintereinander durch Komma getrennt ein, z.B. (a,b),(c,d),(e,f).]

Lagrange: Extrema + Nebenbedingungen

(0,0),(wurzel(5),0),(-wurzel(5),0) ✖

$(2,1), (2,-1)$
$(\sqrt{6},0), (-\sqrt{6},0)$

$\begin{bmatrix} 4x \\ 8y \end{bmatrix}$

$2y = \lambda 8y$
$\Rightarrow y = 0$ in NB
$2x^2 = 12$
$x^2 = 6$
$x = \sqrt{6}$
$(\sqrt{6},0)$
$(-\sqrt{6},0)$

$0 - 12 \neq 0$
$2x - 2 = 4\lambda x$
$2y = 8\lambda y$
$x = 2$
$\lambda = \frac{1}{4}$
$y = \pm 1$

Die korrekten vier Punkte sind $(\sqrt{6},0)$, $(-\sqrt{6},0)$, $(2,1)$ und $(2,-1)$.

Kommentar:
Rechenfehler im zweiten Kandidaten, daruch ist der dritte Kandidat folgerichtig, daher noch 1 Punkt für b). C.Mehl

Frage **11**
Richtig
Erreichte Punkte 2,00 von 2,00
Frage markieren

Gegeben sei die Funktion $\vec{v}: D \to \mathbb{R}^3$ mit $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]0,\infty[$ und

$$\vec{v}(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_3^2 x_1 \\ \sin(x_2) x_3 \\ \ln(x_3) x_1 \end{pmatrix}.$$

Div = skalarprodukt aus dem Nablaoperator mit dem Vektorfeld

$$x_3^2 + \cos(x_2)\, x_2 + \frac{1}{x_3} x_1$$
$$= 1^2 + \cos(0)\cdot 1 + \frac{2}{1} = 1 + 1 + 2 = 4$$

Berechnen Sie die Divergenz von $\vec{v}$ im Punkt $\vec{x} = (2,0,1)^\top$:

$\mathrm{div}_{\vec{x}}\, \vec{v} =$

$$x_3^2 + \cos x_2 \cdot x_3 + \frac{x_1}{x_3} = 1 + 1 + 2$$

Antwort: 4 ✔

Richtig
Die richtige Antwort ist: 4

Divergenz: Vektorfeld $\vec{v}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; $\mathrm{div}\, \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \langle \nabla, \vec{v} \rangle = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$, $\mathrm{div}\, \vec{v}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$(1,0,1)$:

$$\left\langle \begin{pmatrix} \frac{dv}{dx} \\ \frac{dv}{dy} \\ \frac{dv}{dz} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z^2 x \\ \sin(y) z \\ \ln(z) x \end{pmatrix} \right\rangle = z^2 + \cos(y) z + \frac{1}{z} x$$

$$= 1 + \underbrace{\cos(0)}_{=1} \cdot 1 + \frac{1}{1}$$

$$= 1 + 1 + 2 = 4$$

3

$$3e^{t(1-t)}(t-1)^2 + 2\sin(t(1-t))(t-1)^4$$

Frage **12**
Teilweise richtig
Erreichte Punkte 2,00 von 3,00
Frage markieren

Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$f(x, y, z) = 3e^{xz}y^2 + 2\sin(xz)y^4, \quad \vec{v} = \operatorname{grad} f.$

a) Gegeben sei die Kurve $\vec{x}_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{x}_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ t-1 \\ 1-t \end{bmatrix}.$$

$\vec{x}_1(0) = AP$
$\vec{x}_1(1) = EP$

$AP = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad EP = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$u(\text{Anfang}) - u(\text{Ende})$

$\int_{\vec{x}_1} \vec{v}\, ds = -3e^0 1 - (-3e^0 \cdot \underbrace{0}_{=0} - 0)$

$= -3$

$\leftarrow$ - ist sehen $\Rightarrow$ +

$\vec{v} = -\operatorname{grad} u$
$\vec{v} = \operatorname{grad} f \Rightarrow -f = u \Rightarrow \text{pot} = -f$

Berechnen Sie das vektorielle Kurvenintegral von $\vec{v}$ über $\vec{x}_1$:

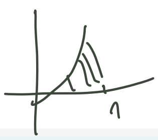
$\int_{\vec{x}_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} =$ 3 -3

b) Sei $\vec{x}_2$ eine Parametrisierung des geschlossenen Einheitskreises in der x-y-Ebene, so dass der Kreis mathematisch positiv durchlaufen wird. Berechnen Sie das vektorielle Kurvenintegral von $\vec{v}$ über $\vec{x}_2$:

$\int_{\vec{x}_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} =$ 0 ✓ $\rightarrow$ Formel drunter

a) Für die korrekte Antwort 3 gibt es zwei Punkte, bei falschem Vorzeichen noch einen. Hier ist f nämlich kein Potential, sondern eine Stammfunktion, d.h. -f wäre ein Potential.

b) Die Antwort ist Null, da das Kurvenintegral eines Gradientenfeldes über eine geschlossene Kurve immer Null sein muss.



Frage **13**
Teilweise richtig
Erreichte Punkte 3,00 von 5,00
Frage markieren

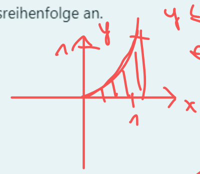
Gegeben sei eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

a) Geben Sie für das folgende Integral die Integrationsgrenzen bei geänderter Integrationsreihenfolge an.

[HINWEIS: Schreiben Sie Wurzel(s) für $\sqrt{s}$ und s^t für s^t.**]**

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} f(x, y)\,dy\,dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dx\,dy$$

$0 \le x \le 1$
$0 \le y \le x^2$
$\Leftarrow x \ge \sqrt{y}$
$y = 1$



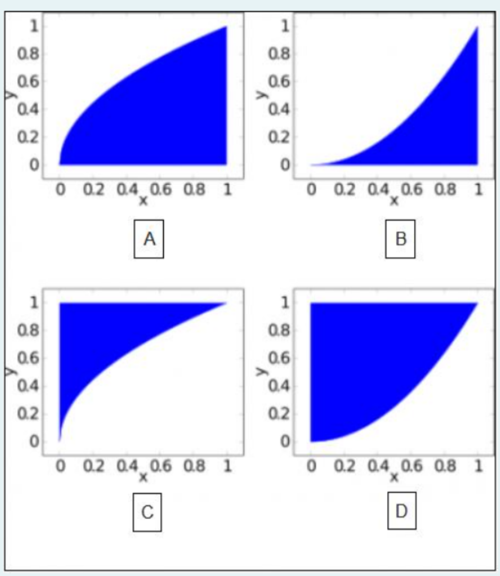
$y \le x^2$
$0 \le y \le 1$

wobei

$a =$ 0 ✓ , $b =$ 1 ✓

$c =$ 0 $\sqrt{y}$ ✗ , $d =$ wurzel(x) 1 ✗

b) Welcher der vier im Folgenden abgebildeten blauen Bereiche skizziert den Integrationsbereich des Integrals aus a)? B ✓



Es handelt sich hier um den Bereich B. Das korrekte Integral bei geänderter Integrationsreihenfolge ist die ...

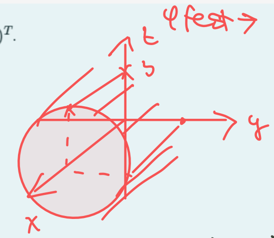
$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y)\,dx\,dy$$

Frage **14**
Teilweise richtig
Erreichte Punkte 3,00 von 6,00
Frage markieren

Sei $\vec{x} : [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\vec{x}(t,\varphi) = (1-t, 3\sin(\varphi), 3\cos(\varphi))^T$.

$t=0: \; 1 \quad 0 \quad 3$
$t=1: \; 0$

φ fest → dreht sich nicht



i) Welche geometrischen Objekte werden durch $\vec{x}$ beschrieben,
a) wenn t variabel und φ fest ist?

Eine Kurve ✔ und zwar

eine Ellipse in der x-z Ebene ✖ Eine Strecke

b) wenn t und φ variabel sind?

Eine Fläche ✔ und zwar

ein Zylindermantel ✔

1 Variable: Strecke, Kurve
2 Variable: Fläche
3 Variable: Volumen

$$dO = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3\cos\varphi \\ -3\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3\sin\varphi \\ -3\cos\varphi \end{pmatrix}$$

ii) Berechnen Sie das vektorielle Oberflächenelement $\vec{dO}$, sowie das skalare Oberflächenelement dO von der durch die Parametrisierung $\vec{x}$ beschriebenen Fläche.

[**HINWEIS**: Schreiben Sie f für φ. Schreiben Sie einen Vektor $[a,b,c]^\top$ in der Form (a,b,c).]

$\vec{dO} =$ 0 (0,-3sin(t), -3cos(t)) ✖ $dtd\varphi$

$dO =$ 0 3 ✖ $dtd\varphi$ 3

$$d_O = \left\| \frac{d\vec{x}}{dt} \times \frac{d\vec{x}}{d\varphi} \right\| = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3\cos(\varphi) \\ -3\sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3\sin(\varphi) \\ -3\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{0 + (3\sin(\varphi))^2 + (3\cos(\varphi))^2} = \sqrt{3^2} = 3$$

Die korrekten Antworten sehen Sie, wenn Sie mit dem Mauszeiger über die Antwortenfelder fahren.

Frage **15**
Falsch
Erreichte Punkte 0,00 von 2,00
Frage markieren

Gegeben sei die Fläche $F \subseteq \mathbb{R}^3$ mit der Parametrisierung

$\vec{x}_1 : [0,1] \times [0,1] \to F,\ \vec{x}_1(u,v) = (uv^2 - u,\ u,\ v)^\top$

und dem Oberflächenelement

$\vec{dO} = (1, -v^2+1, -2uv)^\top dudv.$ ⊖

↳ neg. Vorzeichen

a) Geben Sie das Oberflächenelement von F bzgl. der Parametrisierung

$\vec{x}_2 : [0,1] \times [0,1] \to F,\ \vec{x}_2(v,u) = \vec{x}_1(u,v)$ an:

① $\frac{dx}{dv} \times \frac{dx}{du}$ ② $\frac{dx}{du} \times \frac{dx}{dv}$

$\vec{dO} =$ (-1, v²-1, 2uv) ✖ $^\top dvdu$

b) Welcher der Vektoren

$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

liegt in der Tangentialebene von F im Punkt $\vec{x}_1(0,1)$?

Skalarprodukt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

$v_1 = 0$

Antwort: $\vec{v}_i$ mit dem Index $i =$ 3 2 ✖

a) Da in der Parametrisierung u und v nur vertauscht wurden, erhalten wir bis auf das veränderte Vorzeichen dasselbe Oberflächenelement.
b) Den Tangentialvektor erkennt man daran, dass er orthogonal zum Oberflächenelement ist, da letzteres senkrecht auf der Tangentialebene in $\vec{x}_1(0,1)$ steht.

Frage **16**

Teilweise richtig

Erreichte Punkte 2,00 von 10,00

Frage markieren

Betrachten Sie die Menge

$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 \le 1, x \ge 0, y \le 0, z \ge 0\}$

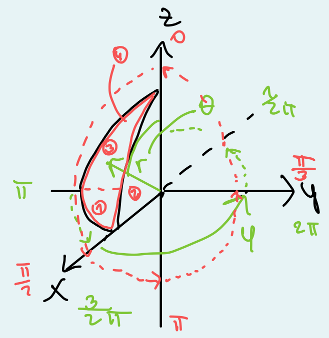
Kugel $r=1$ — vierter Kugel — hintere Kugel — Achtel Kugel

sowie die Funktion $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und das Vektorfeld $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

Einsetzen

$$g(x,y,z) = yz, \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{bmatrix} 3xyz \\ \sin(xz) + e^{x+z} \\ xe^{x+y^2} + 2yz^2 \end{bmatrix}.$$

Koordinatentransformation: $\begin{pmatrix} r \sin\theta \cos\varphi \\ r\sin\theta \sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}$ $r \in (0,1)$, $\varphi \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$



a) Stellen Sie das folgende Integral in Kugelkoordinaten dar.

$r\sin\theta\sin\varphi \cdot r\cos\theta \cdot r^2\sin\theta = r^4 \sin^2\theta \sin\varphi \cos\theta$

[HINWEIS: Schreiben Sie nach $(\theta :)$, bzw. $(\varphi :)$ und $(r :)$, die Glieder die von θ, bzw. φ und r, abhängig sind.**]**

[HINWEIS: Scheiben Sie t für θ, f für φ, pi für π. **]**

$\iiint_B g(x,y,z)dxdydz = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_1}^{r_2}$ $(\theta :)$ $(\sin(t))^2\cos(t)$ ✗ $(\varphi :)$ $\sin f$ ✗ $(r :)$ r^2 r^4 ✗ $dr d\varphi d\theta$

mit den Grenzen

$r\sin\theta\sin\varphi \, r\cos \cdot r^2 \sin\theta$

$\sin^2\theta\cos\theta \quad \sin\varphi \quad r^4$

[HINWEIS: Geben Sie die Grenzen als Zeilenvektoren in der Form (a,b) an: **]**

(θ_1, θ_2)= (0,pi) $(0, \frac{\pi}{2})$ ✗

(φ_1, φ_2)= (0,2pi) $(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ ✗

(r_1, r_2)= (0,1) ✓

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\int_0^1 r^4\sin^2\theta\sin\varphi\cos\theta \, dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$\frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta \cdot \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\sin^3\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot -\cos\varphi\Big|_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} = \frac{1}{15}\cdot(-1)$$

Berechnen Sie den Wert des Volumenintegrals $\iiint_B g(x,y,z)dxdydz =$ (1/24)pi ✗ . $-\frac{1}{15}$ ✓

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\int_0^1 \sin^2\theta\cos\theta \cdot \sin\varphi \, r^4 \, dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi \left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^1 d\varphi\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos\theta\left[-\cos\varphi\right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} d\theta$$

$$= -\frac{1}{5}\int \sin^2\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= -\frac{1}{5}\left[\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{15}$$

b) Aus wie vielen glatten Flächen besteht der Rand von B mindestens? D.h. in wieviele Teilintegrale muss man das Flussintegral $\iint_{\partial B}\vec{v}\cdot d\vec{O}$ zerlegen, wenn man es berechnen will? 4 ✓

$\operatorname{div}\vec{v} = 3yz + 4yz = 7yz$

Berechnen Sie das Flussintegral. Sie dürfen dazu den vorherigen Aufgabenteil zu Hilfe nehmen.

$\iint_{\partial B}\vec{v}\cdot d\vec{O} =$ 0 $-\frac{7}{15}$ ✗

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\int_0^1 7r^4\sin^2\theta\sin\varphi\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot(-1)$$

Die korrekten Antworten sehen Sie, wenn Sie mit dem Mauszeiger über die Antwortenfelder fahren.

$\frac{1}{3}\sin^3\theta \quad -\cos\varphi\Big|_{\frac{3}{2}\pi}$

Kommentar:
Hier stimmen leider nur die Integrationsgrenzen für r und die Anzahl der Flächenstücke in b). Die anderen Ergebnisse sind leider falsch bzw. fehlen.

Satz von Gauß: $\iiint_B \operatorname{div}\vec{v} \cdot dv$

Divergenz: Vektorfeld $\vec{v}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; $\operatorname{div}\vec{v} = \nabla\cdot\vec{v} = \langle\nabla, \vec{v}\rangle = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$, $\operatorname{div}\vec{v}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

hier:

$\operatorname{div}\vec{v} = 3yz + 0 + 4yz = \underline{7yz}$

$7\iiint_B g(x,y,z) \Rightarrow S) \cdot 7$