Makroökonomik (AVWL II)
Übung 5: Wachstum II

Tutoriumswoche 5

Aufgabe 1 – Bevölkerungswachstum und technischer Fortschritt im Solow Modell

Betrachten Sie eine Volkswirtschaft, deren Produktion durch die Produktionsfunktion:

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t N_t)^{1-\alpha}$$

beschrieben wird. Dabei bezeichnet Y_t die reale Produktion, K_t den Kapitalstock, A_t die Arbeitsproduktivität und N_t die Erwerbsbevölkerung. Die Sparquote ist $0 < s < 1$, die Abschreibungsrate $\delta > 0$, die Wachstumsrate der Arbeitseffizienz (technischer Fortschritt) ist $g > 0$ und die Bevölkerungswachstumsrate beträgt $n > 0$. Es gilt $0 < \alpha < 1$.

Aufgabe 1a

a) Stellen Sie die Produktionsfunktion in der Intensitätsform dar (Produktion je Arbeitseffizienzeinheit).

Lösung:

$$f(k_t) = y_t \equiv \frac{Y_t}{A_t N_t} = \frac{K_t^{\alpha}(A_t N_t)^{1-\alpha}}{A_t N_t} = \frac{K_t}{A_t N_t}^{\alpha} = k_t^{\alpha}$$

wo $k_t \equiv \frac{K_t}{A_t N_t}$

Aufgabe 1b

b) Berechnen Sie den Kapitalstock $k*$, die Produktion $y*$, und die Ersparnis $s*$ (jeweils pro Arbeitseffizienzeinheit) im Steady State.

Lösung:

Im Steady State gilt:

$$s\, f(k^*) = (n + g + \delta)k^*$$

Was sich mittels der oben genannten Werte und funktionalen Form schreiben lässt als:

$$s\, k_t^{\alpha} = (n + g + \delta)k^* \Rightarrow k^* = \left(\frac{s}{n + g + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Daraus folgt die Produktion pro Arbeitseffizienzeinheit als:

$$y^* = (k^*)^{\alpha} = \left(\frac{s}{n + g + \delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Und die Ersparnis pro Arbeitseffizienzeinheit als:

$$s^* = s\, y^* = s\left(\frac{s}{n + g + \delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Aufgabe 1c

Gehen Sie nun davon aus, dass die Bevölkerung in jeder Periode um $n = 3\%$ wächst. Die Kapitalquote beträgt $\alpha = 40\%$, die Rate des technischen Fortschritts beträgt $g = 2\%$. Die Bevölkerung konsumiert in jeder Periode einen Anteil von 70% der gesamten Produktion.

Aufgabe 1c

c) Die Volkswirtschaft befindet sich im langfristigen Gleichgewicht. Wie hoch ist die Wachstumsrate der Produktion? Wie hoch ist die Wachstumsrate des Konsums pro Kopf? Wie hoch ist die Wachstumsrate der Nettoinvestitionen je Arbeitseffizienzeinheit? Begründen Sie kurz. (Hinweis: Rechnungen sind an dieser Stelle nicht zwingend notwendig, Sie können auch verbal Ihre Ergebnisse begründen.)

Lösung:

Produktion: die Wachstumsrate der Produktion beträgt im langfristigen Gleichgewicht n+g, also 3%+2%=5%.

Konsum pro Kopf: die Wachstumsrate des Konsums pro Kopf beträgt im langfristigen Gleichgewicht n=3%.

Nettoinvestitionen je AE: die Wachstumsrate der Nettoinvestitionen je Arbeitseffizienzeinheit beträgt im langfristigen Gleichgewicht gleich 0%.

Begründung: Variablen pro Arbeitseffizienzeinheit wachsen im Steady State nicht. Pro-Kopf-Größen wachsen hingegen mit der Rate des technischen Fortschritts g, währenddessen Größen wie die gesamte Produktion oder der gesamte Konsum (weder pro Kopf noch pro AE) mit n+g wachsen.

单位劳动效率的变量在稳态下不增长。而人均规模则随着技术进步率g增长，而总产出或总消费等规模（既非人均也非单位劳动效率）则随着n+g增长。

Aufgabe 1d

d) Ist das langfristige Wachstumsgleichgewicht der Volkswirtschaft bei der ursprünglichen Sparquote dynamisch effizient? Argumentieren Sie und gehen Sie dabei auf das Konzept der dynamischen Effizienz ein.

Lösung:

In der Volkswirtschaft werden 70% der gesamten Produktion in jeder Periode konsumiert, sodass die Sparquote s=0,3 (entspricht 30%) ist.

Um eine Aussage über dynamische Effizienz treffen zu können, müssen wir wissen wie hoch die Sparquote der Goldenen Regel ist.

α beträgt 0,4. Daraus folgt, dass die aktuelle Sparquote (s=0,3) unter der Sparquote der Goldenen Regel ($s^*= 0{,}4$) ist und somit dynamische Effizienz vorliegt.

Aufgabe 1e

Nehmen Sie nun an, dass die Sparquote der Volkswirtschaft gleich der optimalen Sparquote der goldenen Regel ist ($s = s^*$).

e) Welche Auswirkung hat die Anpassung der Sparquote an die goldene Regel auf die Nettokapitalrendite (Realzins) im langfristigen Wachstumsgleichgewicht im Vergleich zur Ausgangssituation? Leiten Sie zur Beantwortung der Frage den Realzins formal her und erläutern Sie.

Aufgabe 1e

$Y_t = K_t^{\alpha} (A_t N_t)^{1-\alpha}$

Technische Universität Berlin

Lösung:

Die Nettokapitalrendite entspricht dem Realzins und ist gegeben durch:

$$r = \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} - \delta = \alpha \left(\frac{K_t}{A_t N_t}\right)^{\alpha-1} - \delta = \alpha \, (k_t)^{\alpha-1} - \delta$$

Im Steady State gilt (einsetzen von k^* aus b):

$$\mathrm{r} = \alpha \, ((\frac{s}{n+g+\delta})^{\frac{1}{1-\alpha}})^{\alpha-1} - \delta = \alpha \, \frac{n+g+\delta}{s} - \delta$$

Um die Wirkung einer Änderung der Sparquote auf den Realzins zu bestimmen, nutzen wir die erste Ableitung:

$$\frac{\partial r}{\partial s} = -\alpha \frac{n+g+\delta}{s^2} < 0$$

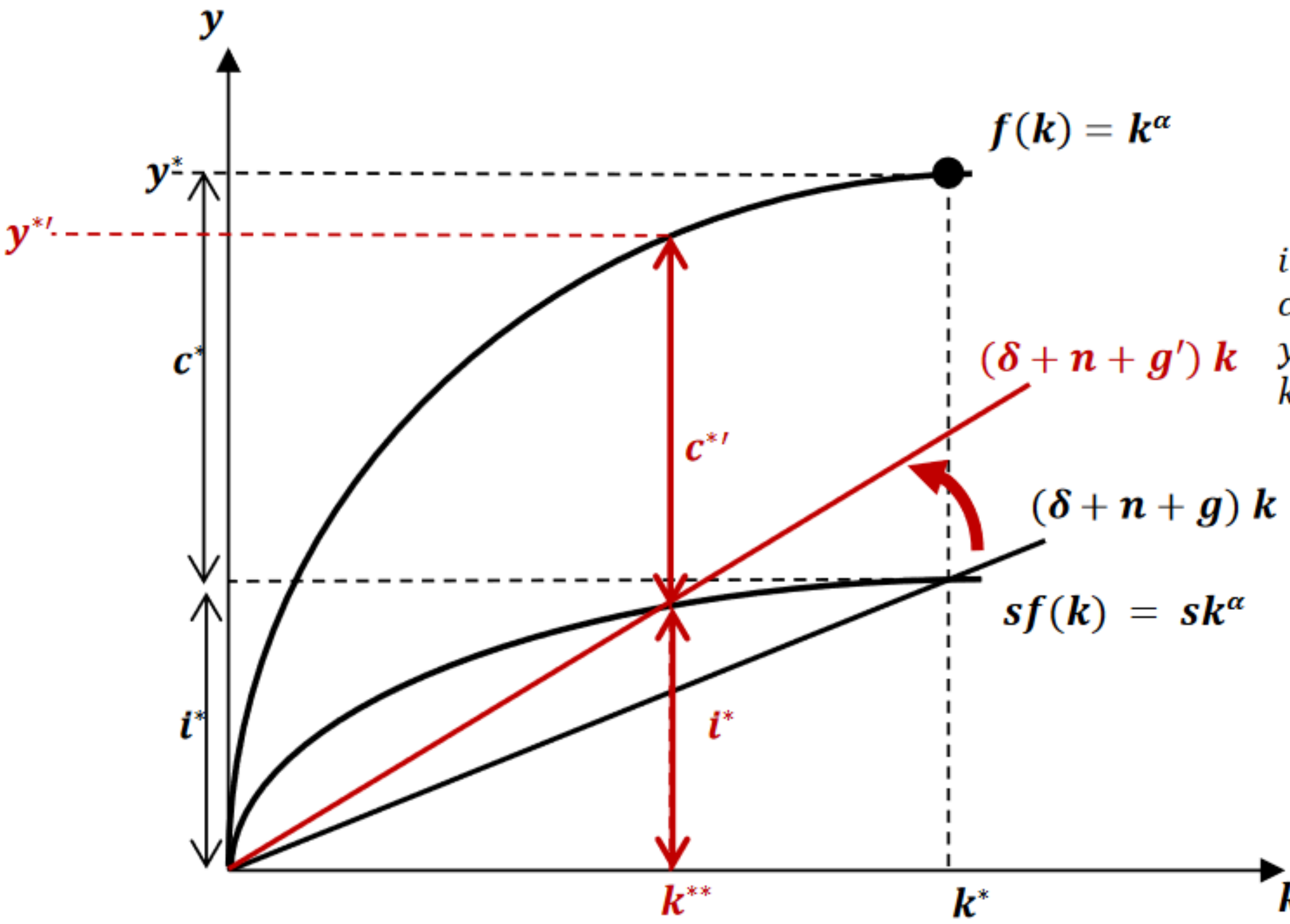
Da sowohl α, n, g, δ als auch s positiv sind, ist der Ausdruck negativ. Daher führt ein Anstieg der Sparquote zu einem Rückgang des Realzinses.

Aufgabe 1f

Nehmen Sie nun an, dass aufgrund von künstlicher Intelligenz die Wachstumsrate des technischen Fortschritts dauerhaft ansteigt.

f) Veranschaulichen Sie die Ausgangssituation sowie die Veränderung der Wachstumsrate des technischen Fortschritts auf Kapitalintensität, Output pro Arbeitseffizienzeinheit mithilfe einer Grafik im ($k_t = \frac{K_t}{A_t N_t}$, $y_t = \frac{Y_t}{A_t N_t}$)-Raum. Beschriften Sie alle Kurven und Achsen und kennzeichnen Sie die langfristigen Wachstumsgleichgewichte. Erläutern Sie, wie sich der Pro-Kopf-Konsum während der Anpassung an den neuen Steady State und im neuen Steady State im Vergleich zur Ausgangssituation verändert. Wie wirkt sich die Veränderung auf den Realzins aus?

Aufgabe 1f



i: Investitionen/Ersparnis pro AE
c: Konsum pro AE
y: Output pro AE
k: Kapitalintensität

Aufgabe 2 - Faktornachfrage

Aufgabe 2 – Faktornachfrage

Betrachten Sie ein Unternehmen, das mit der Produktionsfunktion $Y = F(K, N)$ und unter vollkommenem Wettbewerb produziert. Preisniveau P, nominaler Lohnsatz w und Kapitalkosten r (realer Zinssatz) sind exogen gegeben und konstant. Die Produktionsfunktion besitzt die aus Aufgabe 1 beschriebenen Eigenschaften (i-iii) des Übungsblatts 4.

Die Firma existiert für eine Periode, kauft zu Beginn Kapitalgüter, mit denen sie produziert. Durch die Abnutzung der Maschinen geht ein Anteil δ der Kapitalgüter während der Nutzung kaputt. Am Ende der Periode verkauft die Firma ihre produzierten Güter und die verbliebenen Kapitalgüter.

Die Firma maximiert ihren Gewinn und fragt entsprechend Arbeit N und Kapital K nach. Die Kosten bestehen aus Lohn- und Kapitalkosten.

Wir nehmen an, dass neu produzierte Güter und Kapitalgüter zum gleichen Preis bewertet werden.

Aufgabe 2a

a) Stellen Sie das Gewinnmaximierungsproblem der Firma auf.

Lösung:

Die Produzenten sind am maximalen Gewinn interessiert:

$$\max_{K,N} \pi\,(K,N) = [\underbrace{P * F(K,N)}_{\textit{Verkaufserlös}} + \underbrace{P(1-\delta)K}_{\substack{\textit{Restbestand an} \\ \textit{Kapitalgütern}}} - \underbrace{wN}_{\textit{Arbeitskosten}} - \underbrace{P(1+r)K}_{\substack{\textit{Rückzahlung + Verzinsung des} \\ \textit{eingesetzten Kapitals}}}]\,,$$

Aufgabe 2b

$\max_{K,N} \pi(K,N) = [P \cdot F(K,N) + P(1-\delta)K - wN - P(1+r)K]$

b) Bestimmen und interpretieren Sie die Bedingungen erster Ordnung für die Gewinnmaximierung, wenn die Firma ihren Kapital- und Arbeitseinsatz wählen kann.

Lösung: Kapitalnachfrage

$$\frac{\partial \pi\,(K, N)}{\partial K} = P * F_K + P(1-\delta) - P(1+r) = 0$$

$$\Leftrightarrow P * F_K + P(1-\delta) = P(1+r)$$

$$\Leftrightarrow F_K + 1 - \delta = 1 + r$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{F_K}_{\substack{\textit{Grenzprodukt des} \\ \textit{Kapitals (brutto)}}} = \underbrace{\delta}_{\substack{\textit{Abschreibungs-} \\ \textit{rate}}} + \underbrace{r}_{\textit{Realzins}}$$

→**Brutto**kapitalrendite = Abschreibungsrate + Realzins

总资本回报率 = 折旧率 + 实际利率

$$\Leftrightarrow \underbrace{F_K - \delta}_{\substack{\textit{Grenzprodukt des} \\ \textit{Kapitals (netto)}}} = \underbrace{r}_{\textit{Realzins}}$$

→**Netto**kapitalrendite = Realzins

(Entlohnung für den Produktionsfaktor Kapital)

Aufgabe 2b

b) Bestimmen und interpretieren Sie die Bedingungen erster Ordnung für die Gewinnmaximierung, wenn die Firma ihren Kapital- und Arbeitseinsatz wählen kann.

Lösung: Arbeitsnachfrage

$$\frac{\partial \pi\,(K, N)}{\partial N} = P * F_N - w = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{F_N(K, N)}_{\textit{Grenzprodukt der Arbeit}} = \underbrace{\frac{w}{P}}_{\textit{Reallohn}}$$

→ Der Reallohn entspricht dem Grenzprodukt der Arbeit.

Aufgabe 2c

c) Nehmen Sie an, der Kapitalstock wurde bereits in der Vorperiode beschafft. (Der Kapitalinput ist nun exogen festgelegt). Zeigen sie, dass die Nachfrage nach Arbeit bei gegebenen Preis P negativ vom Lohn abhängt.

Lösung:

假设资本存量已在前期获得。（资本投入现在是外生的）。请证明，在给定价格P的情况下，对工资的需求是负相关的。

Die Arbeitsnachfrage resultiert aus $F_N(\mathrm{K},\mathrm{N}) = \frac{w}{P}$. Auflösen der Gleichung nach N ergibt die Arbeitsnachfrage. Da die zweite Ableitung F_{NN} negativ ist, fällt die Arbeitsnachfrage bei gegebenem Kapitalinput mit steigendem Lohn. (Die zweite Ableitung negativ, da die Produktionsfunktion Eigenschaft i) erfüllt ist.)

$$\mathrm{F_{NN}(K,N)dN + F_{NK}(K,N)dK = \frac{1}{P}dw} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{\frac{dN}{dw} = \frac{1}{F_{NN}P}} < 0$$

Wobei dK = 0 per Annahme

Aufgabe 2d

d) Nehmen Sie nun umgekehrt an, dass bereits Arbeiter mit festen Arbeitsverträgen eingestellt wurden. (Der Arbeitsinput ist exogen festgelegt). Zeigen Sie, dass die Nachfrage nach Kapital negativ vom Zins abhängt.

Lösung:

Die Kapitalnachfrage resultiert aus $F_K(\mathrm{K}, \mathrm{N}) = \delta + \mathrm{r}$. Auflösen der Gleichung nach K ergibt die Kapitalnachfrage. Da die zweite Ableitung F_{KK} negativ ist (Eigenschaft i) aus Aufgabe 1.), fällt die Kapitalnachfrage mit steigendem Zins.

$$\mathrm{F_{KK}}(\mathrm{K}, \mathrm{N})\mathrm{dK} + \mathrm{F_{KN}}(\mathrm{K}, \mathrm{N})\mathrm{dN} = \mathrm{dr} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{dK}}{\mathrm{dr}} = \frac{1}{\mathrm{F_{KK}}} < 0$$

Wobei dN = 0 per Annahme

Aufgabe 2e

Technische Universität Berlin

e) Nutzen Sie das Euler-Theorem (vgl. Vorlesung Wachstum Teil 1) und die Ergebnisse aus dem Aufgabenteil b) um zu zeigen, dass die Summe der (Brutto-) Faktoreinkommen dem Wert der produzierten Güter entspricht. Erläutern Sie das Ergebnis.

Lösung:

Das Euler-Theorem besagt, dass bei konstanten Skalenerträgen folgende Beziehung gilt:

$$\mathrm{K} \cdot \mathrm{F_K}(\mathrm{K}, \mathrm{N}) + \mathrm{N} \cdot \mathrm{F_N}(\mathrm{K}, \mathrm{N}) = \mathrm{F}(\mathrm{K}, \mathrm{N})$$

Aus b) wissen wir:

$$F_K(\mathrm{K}, \mathrm{N}) = \delta + \mathrm{r} \quad \text{und} \quad F_N(\mathrm{K}, \mathrm{N}) = \frac{w}{P}$$

Daraus ergibt sich:

$$\Rightarrow \mathrm{K} \cdot \mathrm{F_K} + \mathrm{N} \cdot \mathrm{F_N} = \underbrace{\mathrm{K} \cdot (\mathrm{r} + \delta)}_{\substack{\textit{Kapitaleinkünfte,} \\ \textit{inklusive Abschreibungen}}} + \underbrace{\mathrm{N} \cdot \frac{\mathrm{w}}{\mathrm{P}}}_{\substack{\textit{aggregierte} \\ \textit{Lohneinkünfte}}} = \mathrm{F}(\mathrm{K}, \mathrm{N}) = \underbrace{\mathrm{Y}}_{\substack{\textit{Gesamt-} \\ \textit{einkommen}}}$$

Bei konstanten Skalenerträgen und Entlohnung gemäß Grenzprodukt (die sich bei vollständigem Wettbewerb ergibt) verteilt sich das gesamte Einkommen auf die Produktionsfaktoren.

在固定的规模收益和根据边际产品报酬率分配收入的情况下（在完全竞争的情况下），整个收入分配给生产要素。

Aufgabe 3a

在经济学中，特别是在增长理论中，经常涉及到“风格化事实”。请简要解释一下什么是“风格化事实”，以及为什么它们具有特殊的作用。
解答：
“风格化事实”一词源于尼古拉斯·卡尔多尔。根据卡尔多尔的观点，解释某一现象的理论应该从“风格化”的事实开始，这些事实提供了对该现象的大致概述，而不会陷入细节。对于增长理论非常有用，因为它是针对特定国家的（存在很大差异），并且是长期现象
通过抽象出的具体事实来识别共同模式

Technische Universität Berlin

a) In der Wirtschaftswissenschaft, insbesondere in der Wachstumstheorie wird häufig auf stilisierte Fakten Bezug genommen. Erläutern Sie kurz, was man unter einem stilisierten Faktum versteht und warum diesen eine besondere Rolle zukommt.

Lösung:

Der Ausdruck ‚stilisiertes Faktum' geht auf Nicholas Kaldor zurück.

Nach Kaldors Auffassung sollte eine Theorie zur Erklärung eines bestimmten Phänomens mit „stilisierten" Fakten beginnen, die einen groben Überblick über das Phänomen geben, ohne sich in Details zu verlieren.

⇒ Nützlich für Wachstumstheorie, da diese länderspezifisch ist (große Unterschiede)

Und es sich um langfristiges Phänomen handelt

⇒ Mit stilisierten Fakten von Details abstrahieren und gemeinsame Muster erkennbar machen

Aufgabe 3b

Der Ökonom Nicholas Kaldor formulierte 1961 folgende Liste stilisierter Fakten, die die langfristige ökonomische Entwicklung entwickelter, kapitalistischer Gesellschaften beschreiben:

i. Die Arbeitsproduktivität $\frac{Y}{N}$ wächst mit konstanter Rate.
ii. Das Verhältnis $\frac{K}{N}$ nimmt im Zeitverlauf zu.
iii. Die Kapitalrendite ist annähernd konstant.
iv. Der Kapitalkoeffizient $\frac{K}{Y}$ ist annähernd konstant.
v. Die Einkommensanteile der Arbeit und des Kapitals sind annähernd konstant.

Kaldor, Nicholas. *Capital accumulation and economic growth*. Macmillan, 1961.

Aufgabe 3b

b) Zeigen Sie, dass im Solow-Modell die Annahme einer konstanten Rate des technischen Fortschritts die Fakten i., ii. und iv. impliziert.

Lösung:

i. Im langfristigen Wachstumsgleichgewicht ist y = $\frac{Y}{AN}$ konstant. Somit wächst Y/N = A y ebenfalls mit der Rate des technischen Fortschritts.

ii. Im langfristigen Wachstumsgleichgewicht ist k = $\frac{K}{AN}$ konstant. Somit wächst K/N = A k ebenfalls mit der Rate des technischen Fortschritts.

iv. Wir haben gezeigt, dass Y/N sowie K/N mit derselben Rate wachsen. Da N mit der Rate n wächst, müssen Y und K ebenfalls mit der gleichen Rate wachsen. Dies impliziert, dass das Verhältnis $\frac{K/N}{Y/N} = \frac{K}{Y}$ konstant ist.

Aufgabe 3c

资本回报率是实际资本投入的毛收入和每个资本单位的折旧之差。评估
Solow 模型的陈述与第三个因素的因素程度相符。

c) Die Kapitalrendite ergibt sich als Differenz aus realer Bruttoentlohnung des Kapitaleinsatzes und Abschreibungen pro Kapitaleinheit. Beurteilen Sie inwiefern die Aussagen des Solow-Modell mit Fakt iii. zu vereinbaren sind.

Lösung:

iii. Die Kapitalrendite ist annähernd konstant.

Die Kapitalrendite (bzw. der Realzins) ist: $r = \frac{dY}{dK} - \delta$

Nehmen wir eine ganz allgemeine linear homogene Funktion $Y(aK, aAN) = aY(K, AN)$ mit $a = 1/AN$ und $f(k) = Y(k, 1)$.

(怀疑：$f'(k)$ 应是 >0，$f''(k) < 0$

$f'(k)\downarrow$

$$Y(K, AN) = AN * Y(\frac{K}{AN}, 1) \text{, so ist: } \frac{\partial Y}{\partial K} = AN * f'(k) * \frac{1}{AN} = f'(k) < 0$$

➔ Die Kapitalrendite nimmt mit steigender Kapitalintensität $k = \frac{K}{AN}$ ab.

➔ Im Steady State ist k konstant, damit $f'(k)$, $\partial Y / \partial K$ und r (weil auch δ konstant)!

Dies lässt sich auch anhand der uns bekannten Cobb-Douglas Produktionsfunktion $Y = K^{\alpha}(A \cdot N)^{1-\alpha}$ zeigen.:

$$r = \frac{dY}{dK} - \delta = \alpha K^{\alpha-1}(AN)^{1-\alpha} - \delta = \alpha \left(\frac{1}{k}\right)^{1-\alpha} - \delta = \alpha\, k^{\alpha-1} - \delta$$

Aufgabe 3d

Technische Universität Berlin

d) Ist die Beobachtung v. mit dem Modell vereinbar, wenn wir eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion unterstellen?

如果我们假设科布-道格拉斯生产函数，观测值 v. 是否与模型兼容?

Lösung: 1. Teil

Die Bruttoentlohnung des Kapitals ergibt sich aus dem Grenzprodukt des Kapitals

资本的总报酬取决于资本的边际产出。

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha K^{\alpha-1}(AN)^{1-\alpha} = \alpha k^{\alpha-1}.$$

Die Bruttokapitaleinkommen (inklusive Abschreibungen) sind folglich $\frac{\partial Y}{\partial K} \cdot K = \alpha K^{\alpha}(AN)^{1-\alpha}$ $= \alpha Y$

Der Reallohn berechnet sich folgendermaßen: $\frac{w}{p} = \frac{\partial Y}{\partial N} = (1-\alpha)K^{\alpha}(AN)^{-\alpha}A = (1-\alpha)\left(\frac{K}{AN}\right)^{\alpha} A$

Die Lohnsumme $\frac{w}{p} \cdot N$ ist folglich $(1-\alpha)\left(\frac{K}{AN}\right)^{\alpha} A \cdot N = (1-\alpha)K^{\alpha}(AN)^{1-\alpha} = (1-\alpha)Y$.

Für die CD-Produktionsfunktion gilt also, dass der Anteil der Bruttokapitaleinkommen am BIP α beträgt. Der Anteil der Löhne am BIP beträgt $1-\alpha$.

Abschreibungen sind jedoch kein Einkommen. Die gesamtwirtschaftlichen Einkommen werden durch das NIP beschrieben: $Y - \delta K$.

Aufgabe 3d

d) Ist die Beobachtung v. mit dem Modell vereinbar, wenn wir eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion unterstellen?

Lösung: 2. Teil

Für die Nettoentlohnung pro Kapitaleinheit (d.h. den ‚Realzins') ergibt sich aus Aufgabe c)

$$r = \alpha k^{\alpha-1} - \delta$$

und als Summe der Nettokapitaleinkommen ergibt sich

$$r \cdot K = \alpha K^{\alpha}(AN)^{1-\alpha} - \delta K = \alpha Y - \delta K.$$

Der Anteil der Nettokapitaleinkommen am NIP beträgt folglich $\frac{\alpha Y - \delta K}{Y - \delta K}$.

Der Anteil der Löhne am NIP beträgt entsprechend $\frac{(1-\alpha)Y}{Y - \delta K}$.

Aufgabe 3d

d) Ist die Beobachtung v. mit dem Modell vereinbar, wenn wir eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion unterstellen?

Lösung: 3. Teil

Sind diese Einkommensanteile im langfristigen Wachstumsgleichgewicht konstant?

Da Y und K mit der gleichen Rate wachsen, ist K/Y konstant (Faktum iv.)

Den Anteil der Löhne am NIP können wir auch schreiben als $\frac{(1-\alpha)Y}{Y-\delta K} = \frac{(1-\alpha)}{1-\delta K/Y}$.

Entsprechend ist der Anteil Nettokapitaleinkommen am NIP $\frac{\alpha-\delta K/Y}{1-\delta K/Y}$.

Aufgabe 3d

Technische Universität Berlin

e) Für welche der 5 stilisierten Fakten ist technischer Fortschritt notwendig?

Lösung:

[siehe a)]

damit $\frac{K}{N}$ und $\frac{Y}{N}$ dauerhaft wachsen muss $g > 0$ gelten,

da beide Terme mit g wachsen.