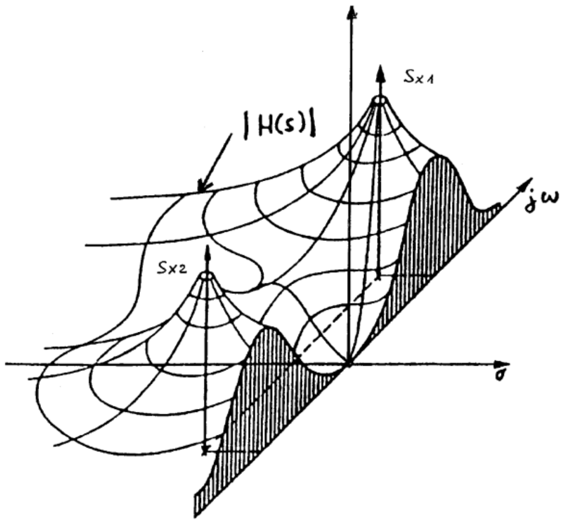
5. Laplace Transformation



<u>Laplacetransformation</u>

• 傅立叶变换的扩展
• 线性传输系统的稳定性分析
• 线性系统的极点/零点描述（参见第8章）

- Erweiterung der Fourier-Transformation
- Stabilitätsuntersuchung linearer Übertragungssysteme
- Pol-/ Nullstellenbeschreibung linearer Systeme (vergl. Kapitel 8)

5.1 Einseitige Laplace-Transformation: Definition

Für kausale Signale [u(t)=0, t<0] gilt:

$$\mathbf{F}\{u(t)\} = U(j\omega) = \int_0^\infty u(t) e^{-j\omega t}\, dt;$$

$$u(t) = \mathbf{F}^{-1}\{U(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$$

Konvergenzfaktor:

$$\boxed{u_\sigma(t) = u(t)\, e^{-\sigma t}}$$

Ergibt sich:

$$\boxed{\mathbf{F}\{u_\sigma(t)\} = \int_0^\infty u(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t}\, dt}$$

5.1 Einseitige Laplace-Transformation: Definition

$$\mathbf{F}\{u_\sigma(t)\} = \int_0^\infty u(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t}\, dt$$

Mit $\boxed{s = \sigma + j\omega}$ folgt die

Analysegleichung der einseitigen Laplace-Transformation:

$$\mathbf{L_I}\{u(t)\} = U_I(s) := \int_0^\infty u(t) e^{-st}\, dt$$

Wegen ggf. Singularitäten 0+ oder 0-

Dabei muss gelten:

$$\int_0^\infty |u_\sigma(t)|\, dt = \int_0^\infty |u(t)|\, e^{-\sigma t}\, dt < \infty$$

5.1 Einseitige Laplacetransformation: Notation

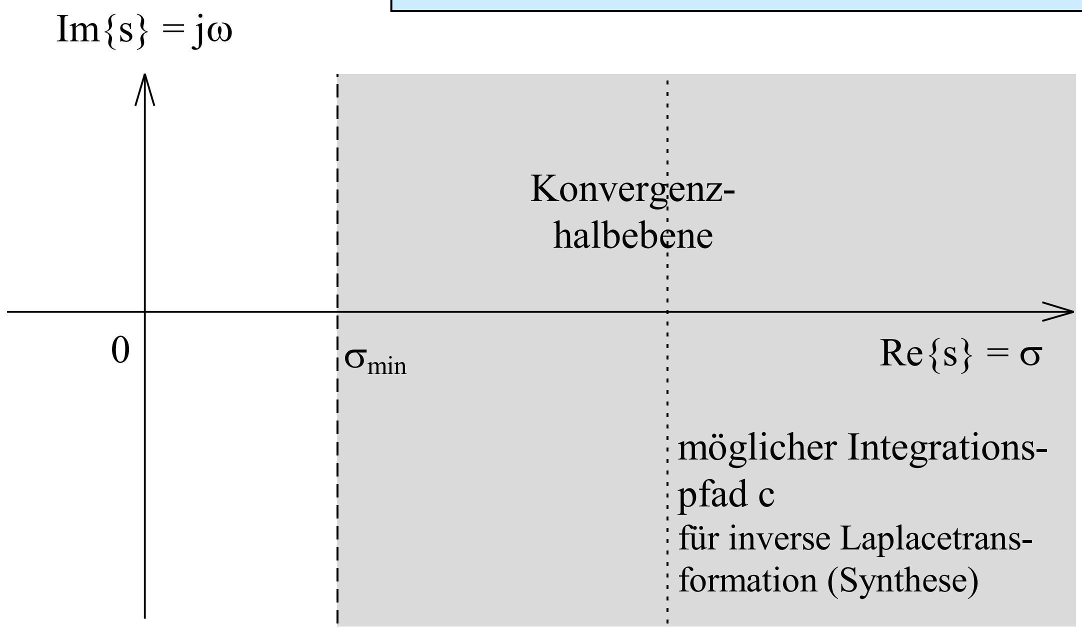
Als Transformationspaar verwenden wir die Notation

$$u(t) \leftrightarrow U_I(s)$$

s - komplexe Frequenz

Konvergenzkriterium:

$$\lim_{t \to \infty} u(t) \cdot e^{-\sigma t} = 0 \quad \forall \quad \sigma > \sigma_{min}$$



5.1 Einseitige Laplace-Transformation: Beispiele

- Sprungfunktion

$$\mathbf{L}_{\mathbf{I}}\left\{\sigma(t)\right\} = \int_{0+}^{\infty} \sigma(t)\, e^{-st} dt = \frac{1}{s}$$

$$\boxed{\sigma(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \qquad mit\ \sigma_{\min} = 0}$$

- Deltafunktion

$$\mathbf{L}_{\mathbf{I}}\left\{\delta(t)\right\} = \int_{0-}^{\infty} \delta(t)\, e^{-st} dt = 1$$

$$\boxed{\delta(t) \leftrightarrow 1}$$

5.1 Laplace- und Fouriertransformation

Nach Definition gilt:

$$F\{u(t)\} = U(j\omega) = L\{u(t)\}_{\sigma=0}$$

$$\sigma = 0 \quad \wedge \quad \sigma_{\min} < 0$$

- Fouriertransformierte folgt aus Laplacetransformierten
- Die $j\omega$-Achse muss im Konvergenzbereich liegen
- Bei $\sigma_{\min} = 0$ ergeben sich Probleme, wenn Pole auf der $j\omega$ – Achse liegen

- 傅里叶变换是拉普拉斯变换的结果
- jω轴必须位于收敛区域内
- 当 σmin= 0 时，如果极点位于jω轴上，会出现问题

5.1 Inverse Laplacetransformation

Erweiterung der Fourierrücktransformation:

$$u(t) \cdot e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_\sigma(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$\Leftrightarrow \qquad u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_\sigma(j\omega)\, e^{(\sigma + j\omega)t}\, d\omega$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$ds = j\, d\omega$$

$$d\omega = \tfrac{1}{j}\, ds$$

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} U_I(s)\, e^{st}\, ds}$$

Synthesegleichung der Laplacetransformation

5.1 Inverse Laplacetransformation

- Integrationspfad muss in der Konvergenzebene liegen
- Verschiedene Pfade möglich, z.B. σ = konst.
- Berechnung im einfachen Fall mittels Tabellen, i.a. aber mit funktionentheoretischen Verfahren
- Synthesegleichung wird im Rahmen der Vorlesung nicht verwendet

• 积分路径必须位于收敛平面内
• 不同的路径可能，例如 σ = 常数
• 在简单情况下，通过表格计算，但通常使用函数论方法
• 在讲座范围内不使用综合方程

5.2 Zweiseitige Laplacetransformation

$$\mathbf{L}_{\mathrm{II}}\left\{u(t)\right\} = U_{\mathrm{II}}(s) := \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-st}\, dt$$

Analysegleichung

$$u(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} U_{\mathrm{II}}(s)\, e^{st}\, ds$$

Synthesegleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|u_{\sigma}(t)\right| dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|u(t)\right| e^{-\sigma t}\, dt < \infty$$

absolut integrierbar

5.2 Zweiseitige Laplacetransformation: Eigenschaften

Ansatz

$$\boxed{u(t) = u(t)\,\sigma(t) + u(t)\,\sigma(-t)}$$

Konvergenzhalbebene $\longrightarrow$ Konvergenzbereich

(Streifen parallel jω-Achse)

kausale Zeitfunktionen:

gleiche Ergebnisse wie für einseitige Laplacetransformation

endliche Zeitfunktionen:

Konvergenzgebiet umfasst gesamte *s* - Ebene

⇨ die Fouriertransformierte existiert

收敛半平面 -
• 收敛区域
（与jo轴平行的条带）
因果时间函数：
与单边拉普拉斯变换得到相同的结果
有限时间函数：
收敛区域涵盖整个s平面
• 傅里叶变换存在

5.2 Zweiseitige Laplacetransformation: Eigenschaften

$$\mathbf{L}\left\{\frac{d}{dt}u(t)\right\} = s \cdot U(s)$$

Differentiation

$$\mathbf{L}\left\{y(t)\right\} = \mathbf{L}\left\{\int_{-\infty}^{t} u(t)dt\right\} = \frac{1}{s}U(s)$$

Integration

Differentialgleichung $\Rightarrow$ Algebraische Gleichung