

Elvira Fleig, Rolf Jongebroed

Rechenübung Signale & Systeme (WiSe 2023/2024)

## Zeitdiskrete Signale (10. Termin)

22.01 - 28.01.2024

### Hinweise

- Die Aufgabenblätter zur Rechenübung stehen jeweils vor dem jeweiligen Termin auf dem ISIS-Portal zum Download bereit.
- Aufgaben, die mit [HA] bzw. [AK] beginnen, sind Hausaufgaben bzw. alte Klausuraufgaben, die als Hausaufgabe bearbeitet werden sollen. Diese werden zusätzlich in den freiwilligen Tutorien vorge-rechnet bzw. besprochen.

## 1 Zeitdiskrete Signale

**1.1 Gegeben sei das Signal  $u = \{0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\}$ . Die Abtastfrequenz betrage  $f_T = 8\text{kHz}$ .**

- a) Skizziere  $u(n)$ .
- b) Gib zwei mögliche Werte für die Frequenz des ursprünglichen zeitkontinuierlichen Sinussignals an.
- c) Gib weiterhin die entsprechenden normierten Kreisfrequenzen an.

## 2 Eigenschaften zeitdiskreter Signale

**2.1 Skizziere die folgenden Signale. Gib jeweils Mittelwert, Energie, Leistung und Varianz im Bereich  $0 \leq n \leq 5$  an.**

- a)  $u_1 = \{0, 2, -2, 0, 1, -1\}$
- b)  $u_2(n) = (\frac{1}{2})^n \cdot \sigma(n)$
- c) [HA]:  $u_3(n) = \sqcap_3(n-1)$

## 3 Kreuzkorrelation und Autokorrelation

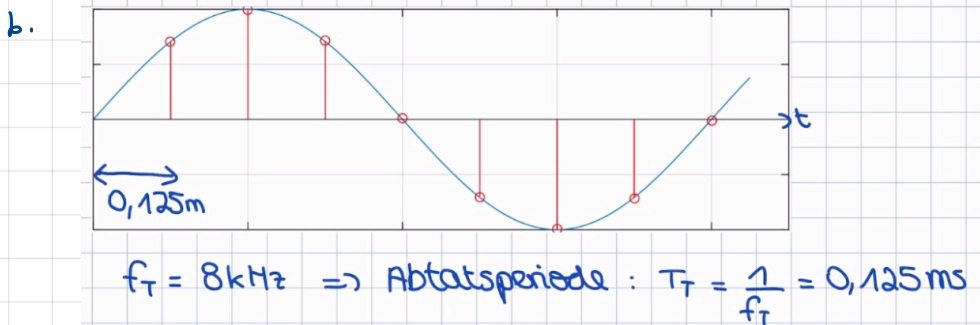
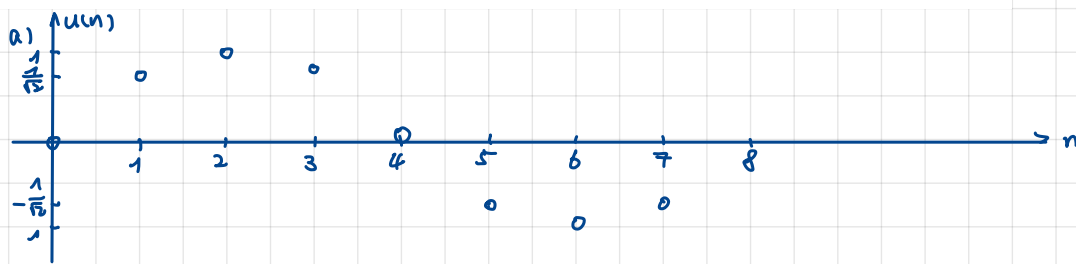
**3.1 Bestimme die KKF  $r_{uv}(k)$  sowie die AKF  $r_{vv}(k)$  für folgende Signalaare.**

- a)  $u = \{1, -1, 1, -1\}, v = \{1, 0, 2, 0\}$
- b) [HA]:  $u = \{1, 2, 2, 1\}, v = \{1, 0, 0, -1\}$

# 1 Zeitdiskrete Signale

1.1 Gegeben sei das Signal  $u = \{0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\}$ . Die Abtastfrequenz betrage  $f_T = 8\text{kHz}$ .

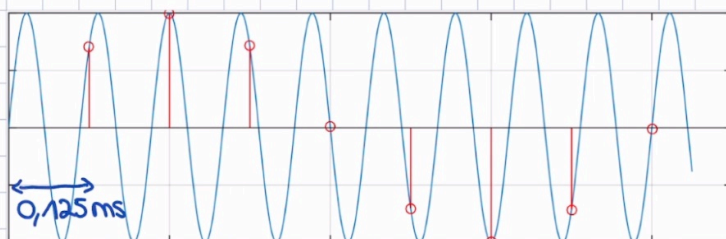
- Skizziere  $u(n)$ .
- Gib zwei mögliche Werte für die Frequenz des ursprünglichen zeitkontinuierlichen Sinussignals an.
- Gib weiterhin die entsprechenden normierten Kreisfrequenzen an.



1 Periode:  $8 \cdot T_T \Rightarrow T_u = 8 \cdot T_T = 1\text{ms}$

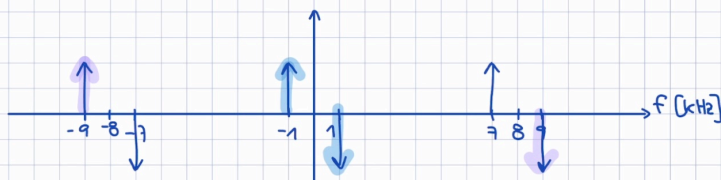
$f_u = \frac{1}{T_u} = 1\text{kHz}$

$\sin\left(\frac{2\pi}{T_u} \cdot t\right) = \sin(\omega_u \cdot t) = \sin(2\pi \cdot f_u \cdot t)$



$f_{u2} = 9\text{kHz}$

$\sin(2\pi \cdot 1\text{kHz} \cdot t)$



$\sin(2\pi \cdot 9\text{kHz} \cdot t)$

$\frac{1}{8} \cdot 8 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8} = \frac{1}{f_{u2}}$

c) normierte Kreisfrequenz:  $\omega_0 = 2\pi \cdot \frac{f_0}{f_T}$

$f_0$ : Signalfrequenz

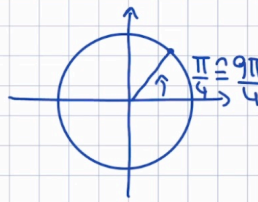
$f_T$ : Abtastfrequenz

$$f_1 = 1 \text{ kHz} \Rightarrow \Omega_1 = 2\pi \cdot \frac{1 \text{ kHz}}{8 \text{ kHz}} = \frac{\pi}{4}$$

$$f_2 = 9 \text{ kHz} \Rightarrow \Omega_2 = 2\pi \cdot \frac{9 \text{ kHz}}{8 \text{ kHz}} = \frac{9\pi}{4}$$

$$\Omega_n = 2\pi \cdot \frac{f_n}{f_T}$$

$$\text{Allgemein: } f_n = f_1 + (n-1) \cdot f_T$$



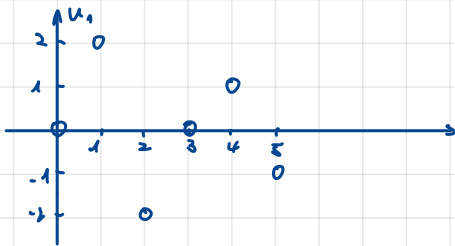
## 2 Eigenschaften zeitdiskreter Signale

### 2.1 Skizziere die folgenden Signale. Gib jeweils Mittelwert, Energie, Leistung und Varianz im Bereich $0 \leq n \leq 5$ an.

$$a) u_1 = \{0, 2, -2, 0, 1, -1\}$$

$$b) u_2(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sigma(n)$$

$$c) [\text{HA}]: u_3(n) = \Pi_3(n-1)$$



$$\text{Mittelwert: } \mu_{u_1}(n_1, n_2) = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} u(n)$$

$$\mu_{u_1}(0, 5) = \frac{1}{5 - 0 + 1} \sum_{n=0}^5 u(n)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (0 + 2 - 2 + 0 + 1 - 1) = 0$$

$$\text{Energie: } W_{u_1}(n_1, n_2) = \sum_{n=n_1}^{n_2} u^2(n)$$

$$W_{u_1}(0, 5) = \sum_{n=0}^5 u^2(n) = 4 + 4 + 1 + 1 = 10$$

$$\text{Leistung: } P_{u_1}(n_1, n_2) = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} u^2(n)$$

$$P_{u_1}(0, 5) = \frac{1}{6} \cdot 10 = \frac{5}{3}$$

$$\text{Varianz: } \sigma_{u_1}^2(n_1, n_2) = P_{u_1}(n_1, n_2) - \mu_{u_1}^2(n_1, n_2)$$

$$= \frac{5}{3} - 0^2 = \frac{5}{3}$$

$$b) u_2(n) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots\right\}$$

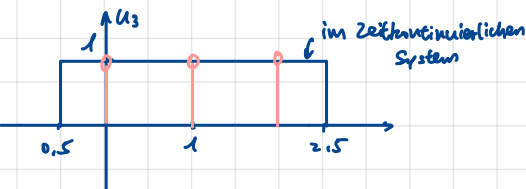
$$\mu_{u_2} = \frac{1}{6} \cdot (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{32}) = \frac{21}{64}$$

$$W_{u_2} = 1^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{32^2} = \frac{1365}{1024}$$

$$P_{u_2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1365}{1024} = \frac{1365}{6144}$$

$$\sigma_{u_2}^2(0, 5) = \frac{1365}{6144} - \left(\frac{21}{64}\right)^2 = \frac{469}{4096}$$

$$c) u_3(n) = \Pi_3(n-1)$$



$$\mu_{u_3}(0, 5) = \frac{1}{6} \cdot (1 + 1 + 1) = \frac{1}{2}$$

$$W_{u_3}(0, 5) = 3$$

$$P_{u_3}(0, 5) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_{u_3}^2(0, 5) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

### 3 Kreuzkorrelation und Autokorrelation

#### 3.1 Bestimme die KKF $r_{uv}(k)$ sowie die AKF $r_{vv}(k)$ für folgende Signalpaare.

a)  $u = \{1, -1, 1, -1\}, v = \{1, 0, 2, 0\}$

b) [HA]:  $u = \{1, 2, 2, 1\}, v = \{1, 0, 0, -1\}$

a)

KKF:

$$r_{uv}(k; n_1, n_2) := \sum_{n=n_1}^{n_2-k} u(n) \cdot v(n+k)$$

AKF:

$$r_{uu}(k; n_1, n_2) := \sum_{n=n_1}^{n_2-k} u(n) \cdot u(n+k)$$

$$W_u(n_1, n_2) = r_{uu}(0; n_1, n_2)$$

Papierstreifenmethode:

		$u(k):$							
		1	-1	1	-1				
	1	0	2	0	0				
						1	0	2	0
						0	2	0	
						1	0	2	0
	1	0	2	0	0				
						0	2	0	
						1	0	2	0
						0	2	0	

KNF	K
-1	-3
1	-2
-3	-1
3	0
-2	1
2	2
0	3

$$r_{uv}(k) = \{-1, 1, -3, 3, -2, 2, 0\}$$

$$v(n) = \{1, 0, 2, 0\}$$

Faltungsmethode:

1	0	2	0	
1	0	2	0	k=3
0	0	0	0	k=2
2	0	0	0	k=1
0	0	0	0	k=0
0	0	0	0	k=-1
0	0	0	0	k=-2
0	0	0	0	k=-3

$$r_{vv}(k) = \{0, 2, 0, 5, 0, 2, 0\}$$

b)  $u = \{1, 2, 2, 1\}, v = \{1, 0, 0, -1\}$

		$u(k):$							
		1	2	2	1				
	1	0	0	-1	0				
						1	0	0	-1
						0	0	0	-1
						1	0	0	-1
	1	0	0	-1	0				
						0	0	0	-1
						1	0	0	-1
						0	0	0	-1

$$r_{uv}(k) = \{1, 2, 2, 0, -2, -2, -1\}$$

1	0	0	-1	
1	0	0	-1	k=3
0	0	0	0	k=2
0	0	0	0	k=1
0	0	0	0	k=0
0	0	0	0	k=-1
0	0	0	0	k=-2
0	0	0	0	k=-3

$$r_{vv}(k) = \{-1, 0, 0, 2, 0, 0, -1\}$$

## 4 Faltung und zyklische Faltung

4.1 Bestimme Faltung und zyklische Faltung der Signale  $u = \{1, 2, 3, 4\}$  und  $v = \{1, 0, -1, 0\}$ .

注意. Faltung 需改变方向

Faltung:

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
0	0	0	0	0
-1	-1	-2	-3	-4
0	0	0	0	0

$$u \star v(k) = \{1, 2, 2, 2, -3, -4, 0\}$$

↑  
 $k=0$

zyklische Faltung:

	1	2	3	4		k
0	1	0	-1	0	1	0
0	0	1	0	-1	0 1	1
0	-1	0	1	0	-1 0 1	2
	0	-1	0	1		3

$$u \star_{\text{zykl}} v(k) = \{-2, -2, 2, 2\}$$