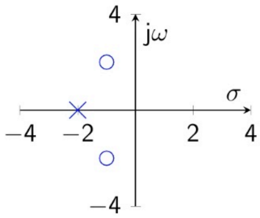
Aufgabe 1.1 a

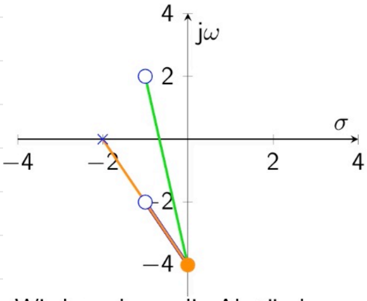


$A(j\omega)$	-4	-3	-2	-1	0

- Wir bestimmen Amplitudengang und Phasengang im Bereich $-4 \leq \omega \leq 4$
- Für reelwertige Systeme gilt:
  - $A(\omega) = A(-\omega)$, also ist der Amplitudengang achsensymetrisch
  - $\varphi(\omega) = -\varphi(\omega)$, also ist der Phasengang punktsymetrisch
- Es ist also ausreichend, den Phasengang und Amplitudengang graphisch im Intervall von $-4 \leq \omega \leq 0$ zu bestimmen

- $A(\omega) = H_0 \frac{\prod_{r=1}^{R} ||j\omega - s_{0r}||}{\prod_{q=1}^{Q} ||j\omega - s_{xq}||} = H_0 \frac{\prod_{r=1}^{R} d_{0r}}{\prod_{q=1}^{Q} d_{qx}}$

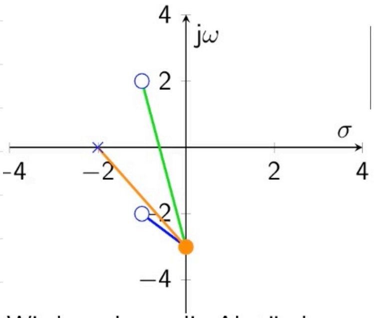
- d_{0r} ist dabei die euklidische Distanz des Aufpunktes zur r-ten Nullstelle und d_{xq} die Distanz zur q-ten Polstelle



$A(j\omega)$	-4	-3	-2	-1	0

Wir berechnen die Abstände zum Aufpunkt trigonometrisch:

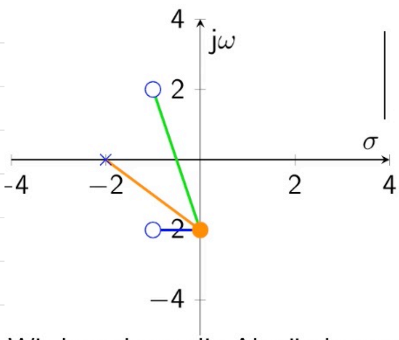
$A(-4) = \frac{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{2^2+4^2}}{\sqrt{1^2+6^2}} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{20}}{\sqrt{37}} \approx 2,98$



$A(j\omega)$	-4	-3	-2	-1	0
	2,98				

Wir berechnen die Abstände zum Aufpunkt trigonometrisch:

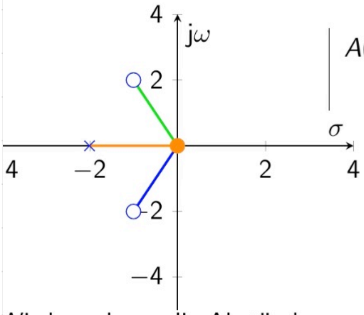
$A(-3) = \frac{\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{1^2+5^2}}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{26}}{\sqrt{13}} \approx 1,98$



$A(j\omega)$	-4	-3	-2	-1	0
	2,98	1,98			

Wir berechnen die Abstände zum Aufpunkt trigonometrisch:

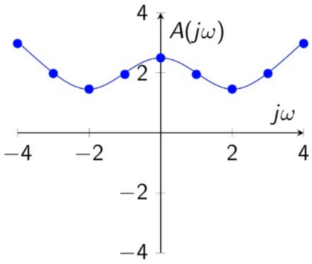
$A(-2) = \frac{\sqrt{1^2+0^2}\sqrt{1^2+4^2}}{\sqrt{2^2+2^2}} = \frac{\sqrt{1}\sqrt{17}}{\sqrt{8}} \approx 1,46$



$A(j\omega)$	-4	-3	-2	-1	0
	2,98	1,98	1,46	1,95	

Wir berechnen die Abstände zum Aufpunkt trigonometrisch:

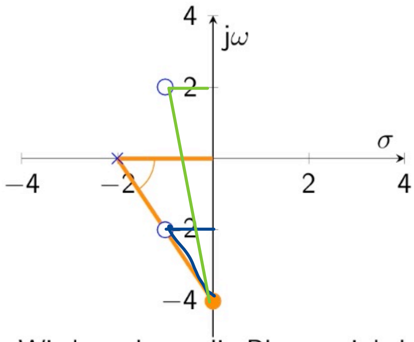
$A(0) = \frac{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{2^2+0^2}} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{5}}{\sqrt{4}} \approx 2,5$



Wenn wir das ganze tatsächlich plotten sehen wir, dass wir richtig gerechnet haben (bis auf kleine Rundungsfehler) .

Phasengang

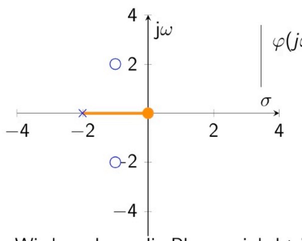
- $\varphi(\omega) = \sum_{r=1}^{R} \varphi_{0r} - \sum_{q=1}^{Q} \varphi_{xq}$
- φ_{0r} entspricht dabei dem Winkel den eine Linie vom Aufpunkt zur r-ten Nullstelle mit der σ- Achse einschließt, analog entspricht φ_{qx} dem Winkel zwischen einer Linie vom Aufpunkt zur q-ten Polstelle und der σ- Achse .



$\varphi(j\omega)$	-4	-3	-2	-1	0

Wir berechnen die Phasenwinkel trigonometrisch:

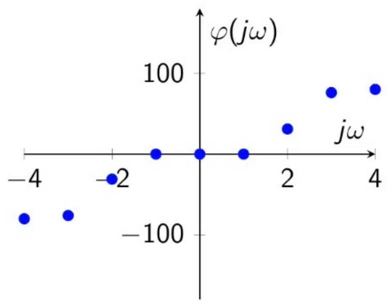
$\varphi(-4) = -64° - 80° - (-64°) = -80°$



$\varphi(j\omega)$	-4	-3	-2	-1	0
	$-80°$	$-76°$	$-31°$	$0°$	

Wir berechnen die Phasenwinkel trigonometrisch:

$\varphi(0) = 64° - 64° - (0°) = 0°$

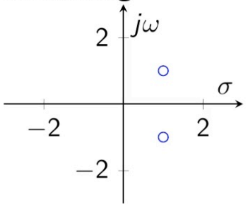


Wir nutzen die Punktsymetrie aus.

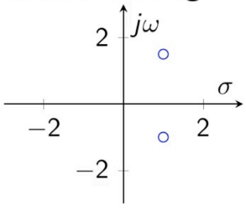
Reelwertige Systeme

Reelwertig :
Polstellen und Nullstellen sind reelwertig oder komplex konjugiert

Reelwertig



Nicht reelwertig

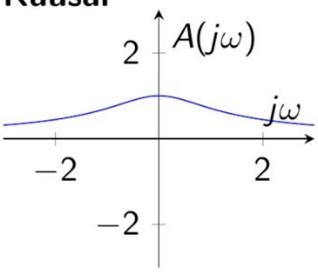


Linearphasigkeit :
Bei linearphasigen Systemen hängt die Phase linear von der Frequenz ab. Ein symetrisches Eingangssignal erhält als Antwort ein symetrisches Ausgangssignal. Für zeitkontinuierliche System ist das nicht möglich.

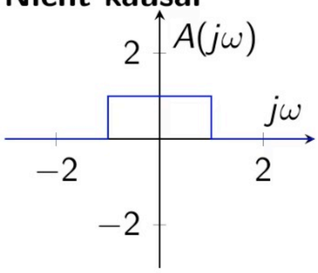
Kausal :

A($j\omega$) nur punktweise null

Kausal

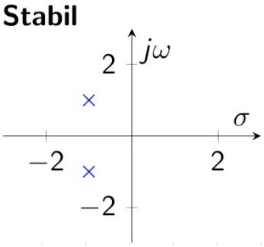


Nicht kausal

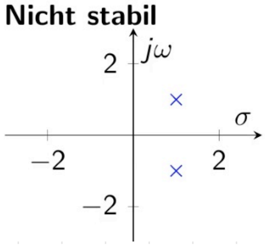


Stabilität :
Polstellen müssen in der linken Halbebene liegen, bedingt stabil wenn Polstellen auf der jw-Achse

Stabil

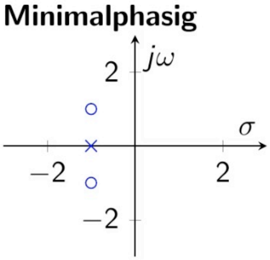


Nicht stabil

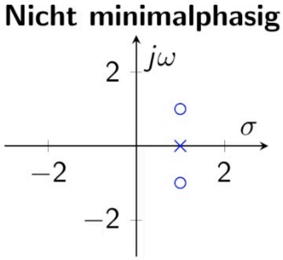


Minimalphasig :
Pol- und Nullstellen in der linken Halbebene

Minimalphasig

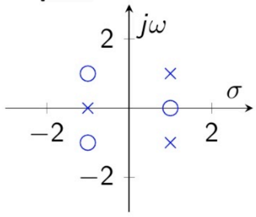


Nicht minimalphasig

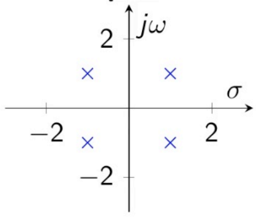


Allpass :
Pol- und Nullstellen symetrisch zur jw-Achse, es wird jede Nullstelle durch eine Polstelle gespiegelt und andersrum

Allpass



Kein Allpass



Elvira Fleig, Rolf Jongebloed

Rechenübung Signale & Systeme (WiSe 2023/2024)

PN-Diagramme zeitkontinuierlicher Systeme (8. Termin)

11.12 - 17.12.2023

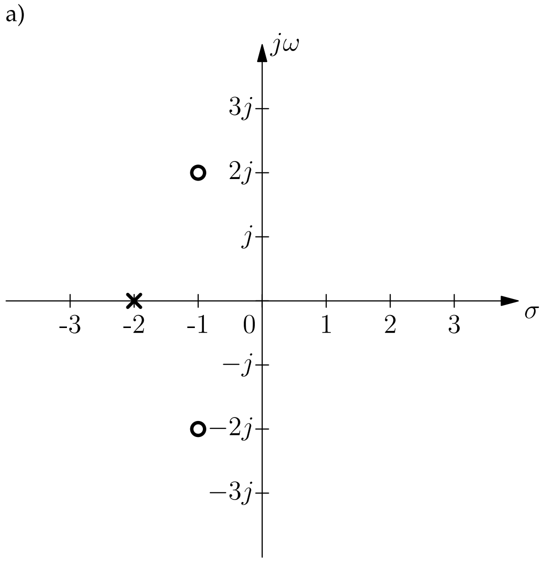
Hinweise

- Die Aufgabenblätter zur Rechenübung stehen jeweils vor dem jeweiligen Termin auf dem ISIS-Portal zum Download bereit.
- Aufgaben, die mit **[HA]** bzw. **[AK]** beginnen, sind Hausaufgaben bzw. alte Klausuraufgaben, die als Hausaufgabe bearbeitet werden sollen. Diese werden zusätzlich in den freiwilligen Tutorien vorgerechnet bzw. besprochen.

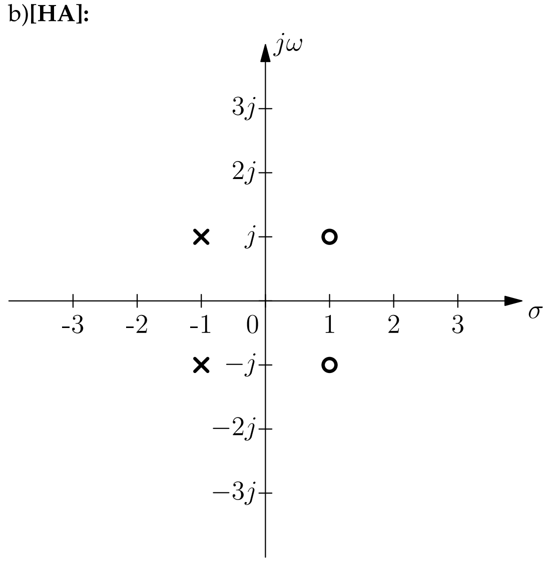
1 Amplituden- und Phasengang

1.1 Skizziere für die folgenden Systeme Amplituden- und Phasengang im Bereich $-4 \leq \omega \leq 4$. Der Vorfaktor H sei 1.

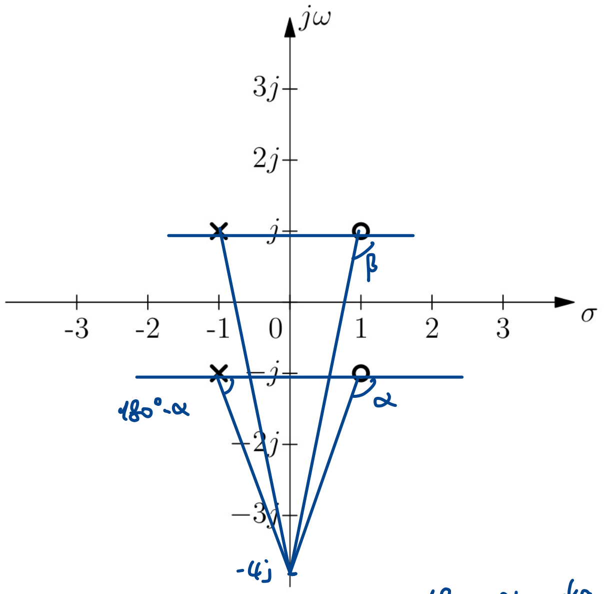
a)



b)**[HA]:**



b)[HA]:



• Frequenzgang

$$H(j\omega) = \underbrace{|H(j\omega)|}_{\substack{\text{Amplitudengang} \\ A(\omega)}} \cdot e^{\angle H(j\omega)}$$

Phasengang $\varphi(\omega)$

• Amplitudengang

Abstand des Punktes jw von der NS S_{or}

$$A(\omega) = |H_0| \cdot \frac{\prod_{r=1}^{R} |j\omega - S_{or}|}{\prod_{q=1}^{Q} |j\omega - S_{zq}|}$$

Abstand des Punktes jw von der PS S_{zq}

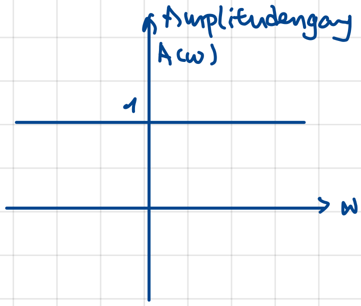
• Phasengang

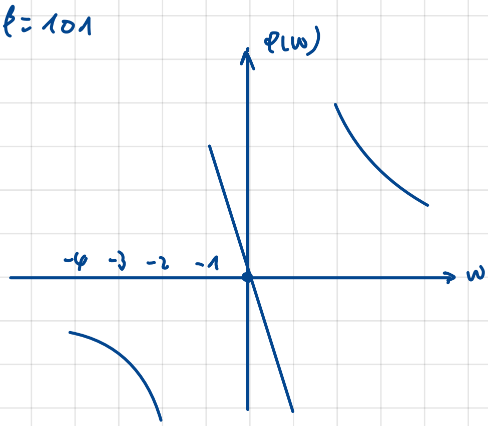
$$\varphi(\omega) = \sum \varphi(j\omega - S_{or}) - \sum \varphi(j\omega - S_{zq})$$

$180 - \alpha = \tan^{-1}(3) = 72$ $\quad$ $180 - \beta = \tan^{-1}(5) = 79$

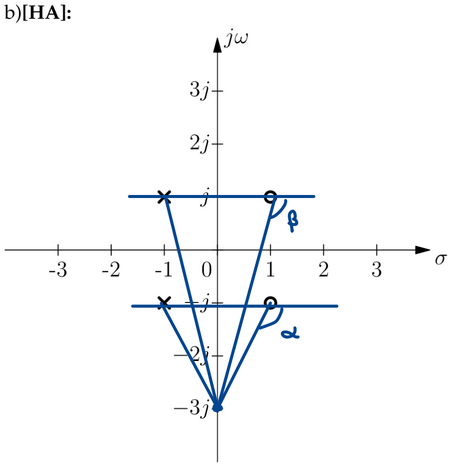
$\alpha = 108$ $\quad$ $\beta = 101$

w	-4	-3	-2	-1	0
H(w)	1	1	1	1	1
φ(w)	-108 -(-72) -101 -(-79) = -58°	-82°	-128°	126°	0°





b)[HA]:



$180 - \alpha = \tan^{-1}(2) = 63$ $\quad$ $180 - \beta = \tan^{-1}(4) = 76$

$\alpha = 117$ $\quad$ $\beta = 104$

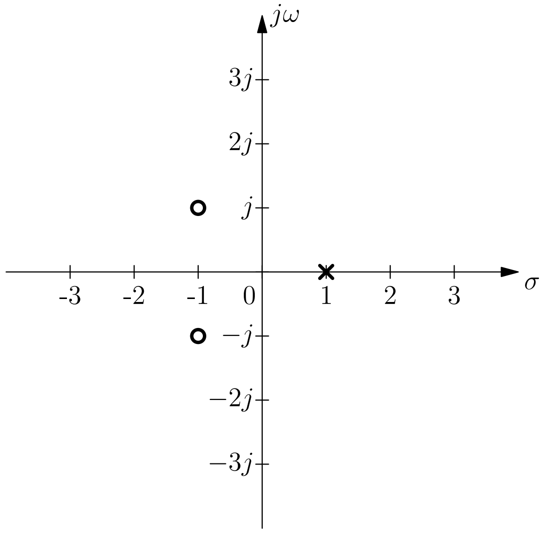
$\varphi(w=-3) = -117 - (-63) - 104 - (-76)$

$= -82°$

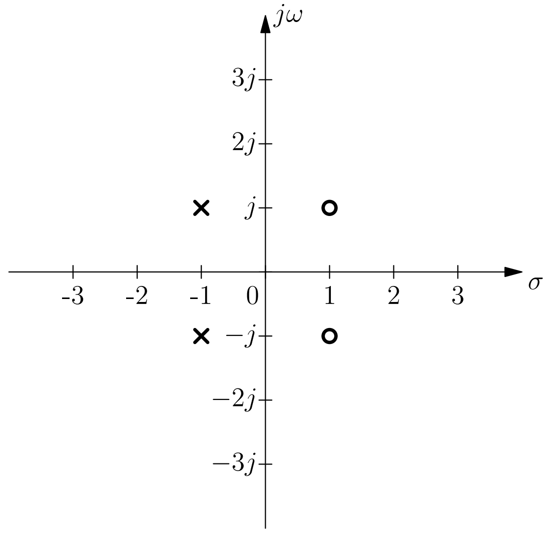
2 Systemeigenschaften

2.1 Untersuche die folgenden Systeme auf Minimalphasigkeit, Allpasseigenschaft, Linearphasigkeit, Kausalität und Stabilität. Gib weiterhin jeweils an, ob es sich um ein reales reellwertiges System handelt.

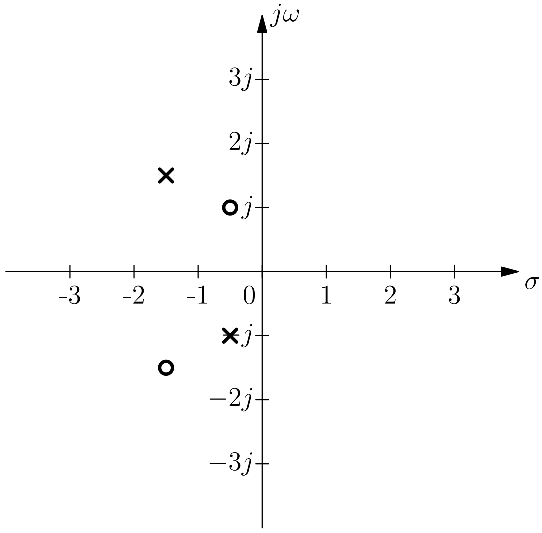
a)



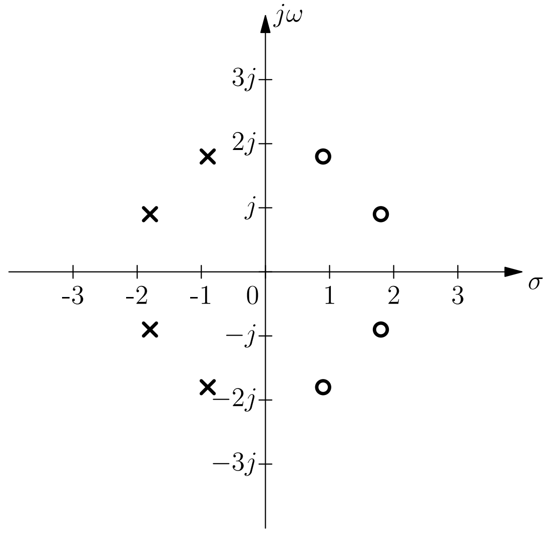
b)

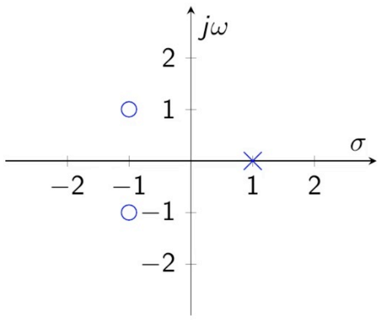


c)



d)**[HA]:**





Minimalphasigkeit	×
Allpass	×
Linearphasigkeit	×
Kausal	✓
Stabil	×
Reelwertig	✓

- **Minimalphasigkeit**: 系统的极点和零点都在左半s平面。这样的系统
们的相位变化是所有同幅度响应系统中最小的。
- **Allpass**: 所有通滤波器（全通滤波器）。其极点和零点在s平面上是
通滤波器的振幅响应是恒定的，但是它会改变输入信号的相位。
- **Linearphasigkeit**: 线性相位意味着系统的相位响应与频率成线性关
通常意味着系统的冲激响应是对称的。然而，图片中标记为不可能
zeitkontinuierliche Systeme"），这可能是因为在实际的连续时间系
响应通常是不可能的，或者该系统具有某种理想化条件，使其在现
- **Kausal**: 因果系统。对于这样的系统，$H(j\omega)$ 只有在某些点上为零，
当前和过去的输入，而不取决于未来的输入。
- **Stabil**: 稳定的系统。极点都在左半s平面，确保系统输出随时间不会
- **Reelwertig**: 实值系统。其极点和零点要么是实数，要么是复数共轭

Definition

Minimalphasigkeit: Pol- und Nullstellen in linker Halbebene

Allpass : Pol- und Nullstellen spiegelsymetrisch zu $j\omega$-Achse

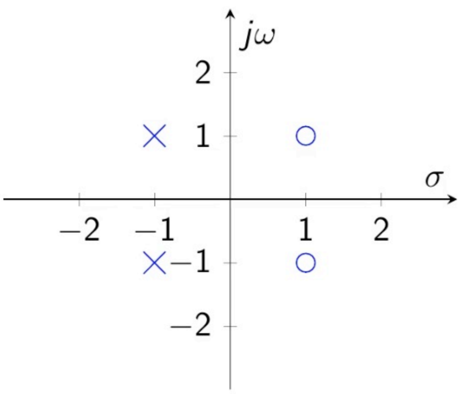
Linearphasigkeit: Nicht möglich für zeitkontinuierliche Systeme

Kausal: H($j\omega$) nur punktweise null ← 有零点且不可和极点相互抵消

Stabil: Polstellen in linker Halbebene

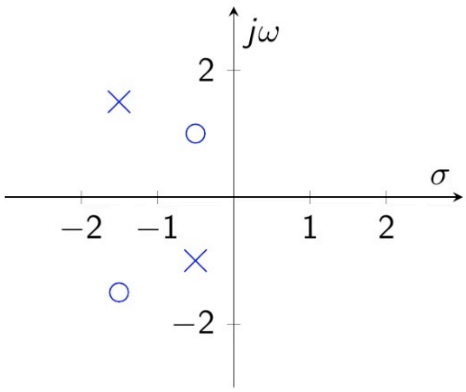
Reelwertig: Pol- und Nullstellen reel oder komplex konjugiert

Aufgabe 2.1 b



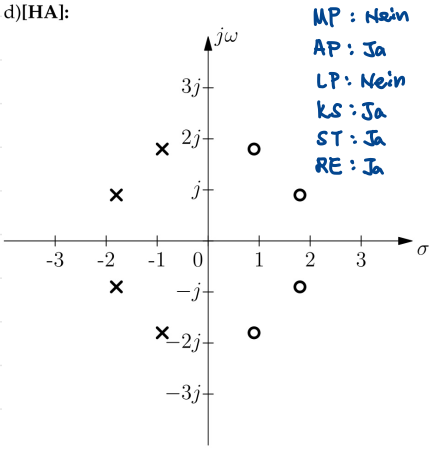
Minimalphasigkeit	×
Allpass	✓
Linearphasigkeit	×
Kausal	✓
Stabil	✓
Reelwertig	✓

Aufgabe 2.1 c



Minimalphasigkeit	✓
Allpass	×
Linearphasigkeit	×
Kausal	✓
Stabil	✓
Reelwertig	×

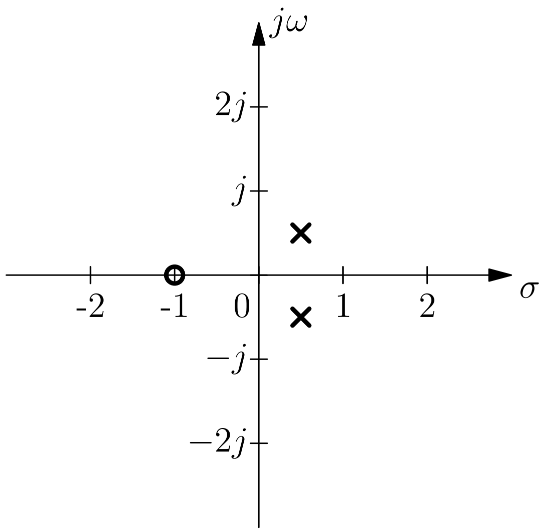
d)[HA]:



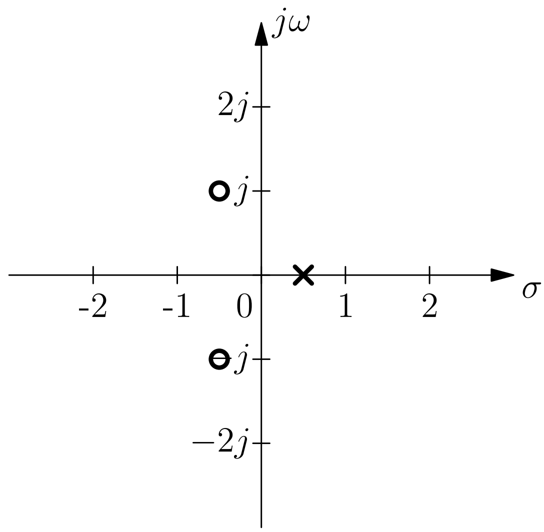
MP : Nein
AP : Ja
LP : Nein
KS : Ja
ST : Ja
RE : Ja

2.2 Zerlege die folgenden Systeme in eine Reihenschaltung aus Allpass und minimalphasigem System.

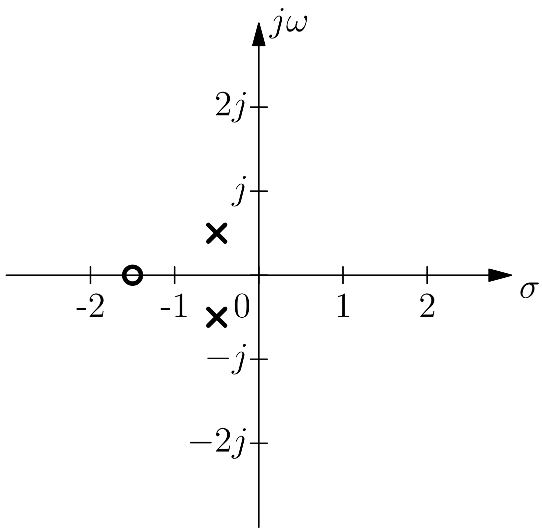
a)



b)**[HA]:**



c)



2.3 Von einem realen Filter mit insgesamt vier Extremstellen (Pol- und Nullstellen zusammen) seien die nachfolgend aufgelisteten Eigenschaften bekannt. Skizziere die Pol-Nullstellenverteilung des Filters.

a) Der minimalphasige Anteils des Filters bestehe aus zwei Polstellen.

b) Der Realteil einer Nullstelle sei 1.

c) Der Imaginärteil mindestens einer Polstelle sei 2.

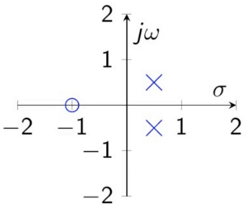
d) $A(0) = \frac{1}{5}, H_0 = 1$

e) $A(\omega \to \infty) = 0$

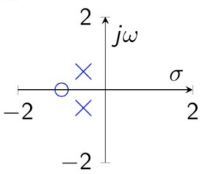
Zerlegung in Allpass- und Minimalphasigenanteil

- LTI-Systeme können in einen Allpass- und minimalphasigen Anteil zerlegt werden
- $H(j\omega) = A(j\omega) \cdot M(j\omega)$
- $A(j\omega)$ ist der Allpassanteil und $M(j\omega)$ der minimalphasige Anteil

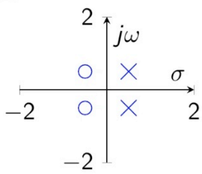
Aufgabe 2.2a



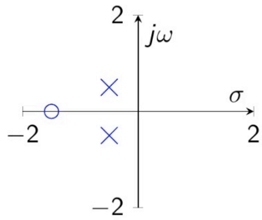
MP:



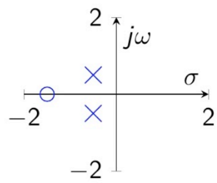
AP:



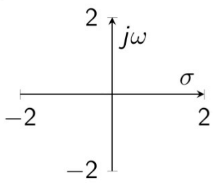
Aufgabe 2.2b



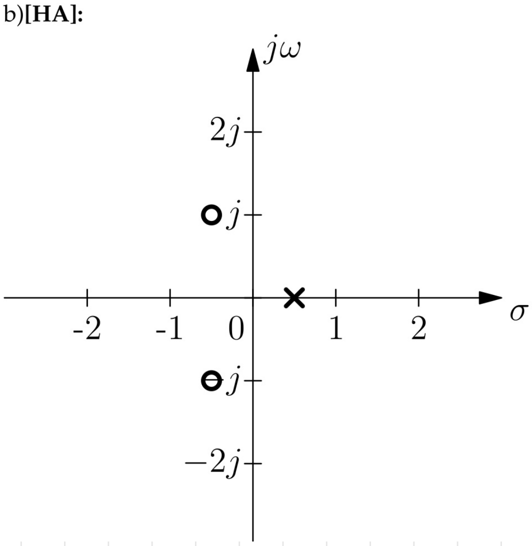
MP:



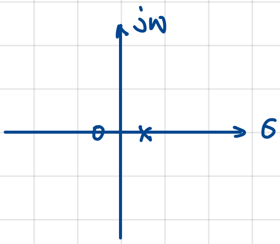
AP:



b)**[HA]:**



AP



MP: