Elvira Fleig, Rolf Jongebloed

Rechenübung Signale & Systeme (WiSe 2023/2024)

Abtastung (9. Termin)

08.01 - 14.01.2024

Hinweise

- Die Aufgabenblätter zur Rechenübung stehen jeweils vor dem jeweiligen Termin auf dem ISIS-Portal zum Download bereit.
- Aufgaben, die mit **[HA]** bzw. **[AK]** beginnen, sind Hausaufgaben bzw. alte Klausuraufgaben, die als Hausaufgabe bearbeitet werden sollen. Diese werden zusätzlich in den freiwilligen Tutorien vorgerechnet bzw. besprochen.

1 Abtastung und Rekonstruktion

1.1 Das Signal $u_1(t) = A \cdot \sin(\omega_u \cdot t)$, $\omega_u = \frac{2\pi}{T_u}$, soll mit der Abtastfrequenz ω_T ideal abgetastet und übertragen werden. Zur Rekonstruktion steht ein idealer Tiefpass mit der Grenzfrequenz $\omega_g = \frac{3}{2}\omega_u$ zur Verfügung.

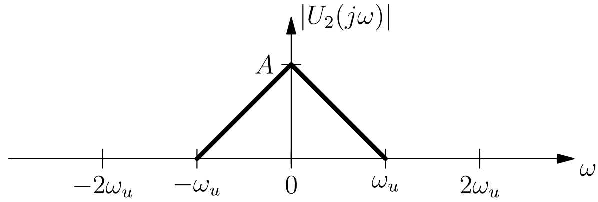
a) Skizziere das Frequenzspektrum $U_1(j\omega)$ von $u_1(t)$.

b) Es sei $\omega_T = 3\omega_u$. Skizziere das Spektrum des abgetasteten Signals sowie den Verlauf des rekonstruierten Signals im Zeitbereich.

c) **[HK]:** Es sei $\omega_T = 1{,}5\omega_u$. Skizziere das Spektrum des abgetasteten Signals sowie den Verlauf des rekonstruierten Signals im Zeitbereich.

d) Mit welcher Frequenz $\omega_{T,min}$ muss mindestens abgetastet werden, damit das Signal fehlerfrei rekonstruiert werden kann? Was geschieht bei $\omega_T = 2\omega_u$?

1.2 Gegeben sei das folgende Amplitudenspektrum $|U_2(j\omega)|$. Das dazugehörige Phasenspektrum sei $\varphi_2(\omega) = -2\pi\frac{\omega}{\omega_u}, \omega_u = \frac{2\pi}{T_u}$.



a) Bestimme das Zeitsignal $u_2(t)$ mit Hilfe der inversen Fouriertransformation.

b) Das Signal werde nun ideal abgetastet mit $\omega_T = 3\omega_u$. Skizziere für das abgetastete Signal das Amplitudenspektrum sowie den Signalverlauf im Zeitbereich.

c) Skizziere bei Abtastung mittels Signalausblendung für das abgetastete Signal das Amplitudenspektrum sowie den Signalverlauf im Zeitbereich ($\omega_T = 3\omega_u$).

1 Abtastung und Rekonstruktion

1.1 Das Signal $u_1(t) = A \cdot \sin(\omega_u \cdot t)$, $\omega_u = \frac{2\pi}{T_u}$, soll mit der Abtastfrequenz ω_T ideal abgetastet und übertragen werden. Zur Rekonstruktion steht ein idealer Tiefpass mit der Grenzfrequenz $\omega_g = \frac{3}{2}\omega_u$ zur Verfügung.

a) Skizziere das Frequenzspektrum $U_1(j\omega)$ von $u_1(t)$.

b) Es sei $\omega_T = 3\omega_u$. Skizziere das Spektrum des abgetasteten Signals sowie den Verlauf des rekonstruierten Signals im Zeitbereich.

c) **[HK]:** Es sei $\omega_T = 1{,}5\omega_u$. Skizziere das Spektrum des abgetasteten Signals sowie den Verlauf des rekonstruierten Signals im Zeitbereich.

d) Mit welcher Frequenz $\omega_{T,min}$ muss mindestens abgetastet werden, damit das Signal fehlerfrei rekonstruiert werden kann? Was geschieht bei $\omega_T = 2\omega_u$?

a) $u(t) = A \cdot \sin(W_u \cdot t) = \frac{A}{2j}\left(e^{jW_ut} - e^{-jW_ut}\right)$

Fouriertabelle

$\delta(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-jwt_0}$

Vertauschsatz

$u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ 2\pi\, U(-jw)$

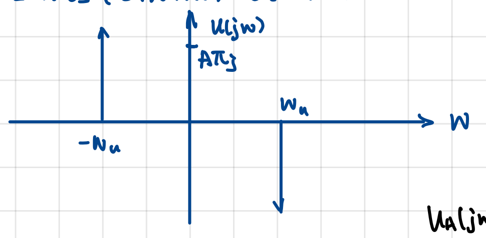
$e^{jW_ut} \circ\!\!-\!\!\bullet\ 2\pi\, \delta(W-W_u)$

$$U(jw) = \frac{A}{2j}\left(\delta\cdot(W-W_u) - \delta(W+W_u)\right)\cdot 2\pi$$

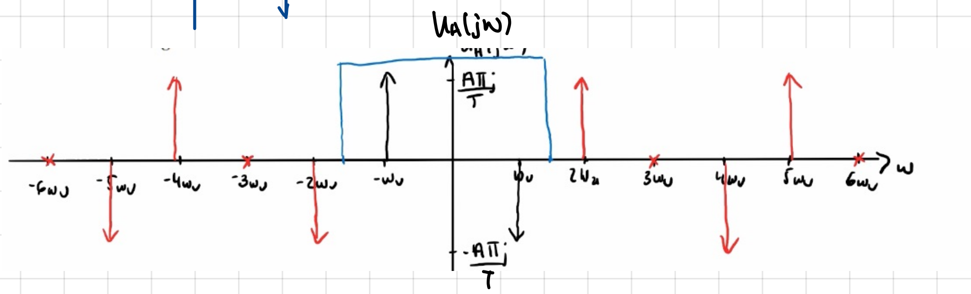
$$= \frac{A\pi}{j}\left(\delta(W-W_u) - \delta(W+W_u)\right)$$

$$= -A\pi j\left(\delta(W-W_u) - \delta(W+W_u)\right)$$

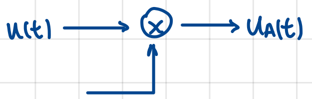
$$= A\pi j\left(\delta(W+W_u) - \delta(W-W_u)\right)$$



b)



ideale Abtastung



$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$

$u_A(t) = u(t)\cdot\delta_T(t)$

$$U_A(jw) = \frac{1}{2\pi}\left(U(jw) * \delta_{W_T}(w)\cdot W_T\right) \qquad \frac{2\pi}{T} = W_T$$

$$= \frac{1}{T}\, U(jw) * \delta_{W_T}(w)$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} U(j(w-kW_T))$$

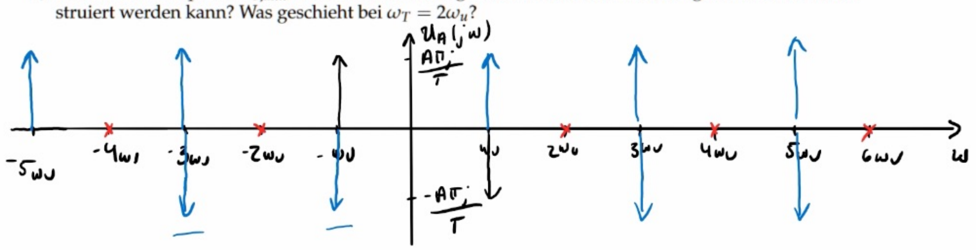
$$U_{T_P}(jw) = \frac{A\pi j}{T}\left(\delta(W+W_u) - \delta(W-W_u)\right)$$

$$u(t) = \frac{A\pi j}{T}\left(\frac{1}{2\pi}e^{-jW_ut} - \frac{1}{2\pi}e^{jW_ut}\right)$$

$$= \frac{A}{2jT}\left(e^{jW_ut} - e^{-jW_ut}\right)$$

$$= \frac{A}{T}\sin(W_ut)$$

d) Mit welcher Frequenz $\omega_{T,min}$ muss mindestens abgetastet werden, damit das Signal fehlerfrei rekonstruiert werden kann? Was geschieht bei $\omega_T = 2\omega_u$?



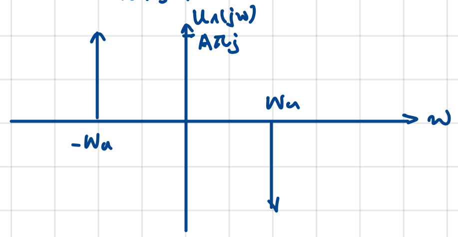
Abtasttheorem: $f_T \overset{!}{\geq} 2 f_u$

c) **[HK]:** Es sei $\omega_T = 1,5\omega_u$. Skizziere das Spektrum des abgetasteten Signals sowie den Verlauf des rekonstruierten Signals im Zeitbereich.

Spektrum: $u_1(t) = A \cdot \sin(\omega_u \cdot t)$

$\mathcal{F}$

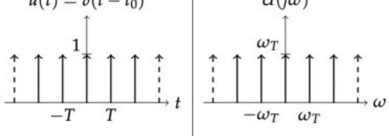
$U_1(j\omega) = A \cdot j\pi(\delta(\omega+\omega_u) - \delta(\omega-\omega_u))$



Deltakamm

$\delta_T(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ | $\omega_T \cdot \delta_{\omega_T}(\omega)$, mit $\omega_T = \frac{2\pi}{T}$

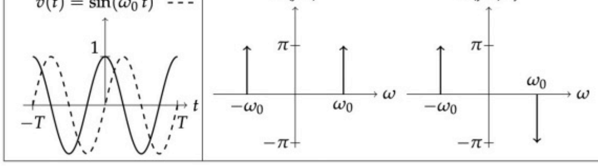
$u(t) = \delta(t - t_0)$ | $U(j\omega)$



Sinus / Kosinus

$\cos(\omega_0 t)$, $\sin(\omega_0 t)$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ | $\pi(\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0))$, $j\pi(\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0))$

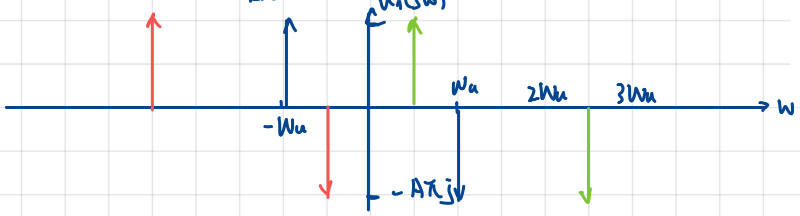
$u(t) = \cos(\omega_0 t)$ ——
$v(t) = \sin(\omega_0 t)$ - - -



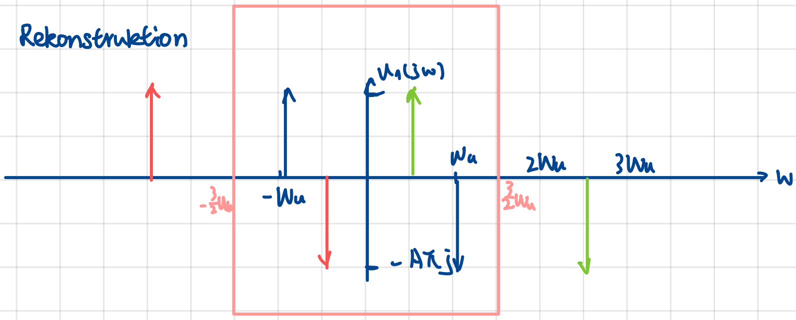
Abtastung: $u_1(t) \cdot \delta_T(t) = A \cdot \sin(\omega_u t) \cdot \delta_T(t)$

$\mathcal{F}$

$\frac{A}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(j\omega - k\omega_T)$ $\qquad \omega_T = 1{,}5\,\omega_u$



Rekonstruktion



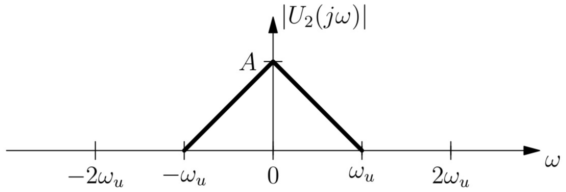
$\omega_g = \frac{3}{4}\omega_u$

$U_1(j\omega) = \frac{A\pi j}{T}(\delta(\omega+\omega_u) - \delta(\omega-\omega_u) + \delta(\omega-\frac{\omega_u}{2}) - \delta(\omega+\frac{\omega_u}{2}))$

$\mathcal{F}^{-1}$

$u_1(t) = \frac{A}{T}(\sin(\omega_u t) - \sin(\frac{\omega_u}{2}t))$

1.2 Gegeben sei das folgende Amplitudenspektrum $|U_2(j\omega)|$. Das dazugehörige Phasenspektrum sei $\varphi_2(\omega) = -2\pi\frac{\omega}{\omega_u}, \omega_u = \frac{2\pi}{T_u}$.



a) Bestimme das Zeitsignal $u_2(t)$ mit Hilfe der inversen Fouriertransformation.

b) Das Signal werde nun ideal abgetastet mit $\omega_T = 3\omega_u$. Skizziere für das abgetastete Signal das Amplitudenspektrum sowie den Signalverlauf im Zeitbereich.

c) Skizziere bei Abtastung mittels Signalausblendung für das abgetastete Signal das Amplitudenspektrum sowie den Signalverlauf im Zeitbereich ($\omega_T = 3\omega_u$).

a) $\varphi_2(w) = -2\pi\frac{w}{w_u} = -2\pi\,\frac{wT_u}{2\pi} = -wT_u$

$u(jw) = A_u e^{j\varphi_u(w)} = A_u \cdot e^{-jwT_u}$

$u(t) = \mathcal{F}^{-1}\{A_u \cdot e^{-jwT_u}\} = \mathcal{F}^{-1}\{A_u(w)\} * \mathcal{F}^{-1}\{e^{-jwT_u}\}$

Synthesegleichung: $\mathcal{F}^{-1}\{A_u(w)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A_u(w)e^{jwt}\,dw$

$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-w_u}^{0}\frac{A}{w_u}(w+w_0)\cdot e^{jwt}\,dw + \int_{0}^{w_u}(-\frac{A}{w_u})(w-w_u)\cdot e^{jwt}\,dw\right)$

$= \frac{A}{2\pi}\left(\int_{-w_u}^{0}\frac{w}{w_u}e^{jwt} + \int_{-w_u}^{0}e^{jwt}\,dw + \int_{0}^{w_u}(-\frac{w}{w_u})e^{jwt}\,dw + \int_{0}^{w_u}e^{jwt}\,dw\right.$

Nebenrechnung partielle Integration

$\int e^{jwt}\,dw = \frac{1}{jt}e^{jwt}$

$u = \frac{w}{w_u}$ $\quad v' = e^{jwt}$

$u' = \frac{1}{w_u}$ $\quad v = \frac{1}{jt}e^{jwt}$

$\int\frac{w}{w_u}e^{jwt}\,dw = \int uv' = uv - \int u'v$

$= \frac{w}{jw_ut}\cdot e^{jwt} - \int\frac{1}{jw_ut}e^{jwt}\,dw$

$= \frac{w}{jw_ut}e^{jwt} + \frac{1}{w_ut^2}e^{jwt}$

$= \frac{A}{2\pi}\left(\left[\frac{w}{jw_ut}e^{jwt} + \frac{1}{w_ut^2}e^{jwt}\right]\Big|_{-w_u}^{0} + \left[\frac{1}{jt}e^{jwt}\right]_{-w_u}^{0}\right.$

$- \left[\frac{w}{jw_ut}e^{jwt} + \frac{1}{w_ut^2}e^{jwt}\right]\Big|_{0}^{w_u} + \left[\frac{1}{jt}e^{jwt}\right]_{0}^{w_u}$

$= \frac{A}{2\pi}\cdot\left(\cancel{\frac{1}{w_ut^2}} + \cancel{\frac{e^{-jw_ut}}{jt}} - \frac{e^{-jw_ut}}{w_ut^2} + \cancel{\frac{1}{jt}} - \cancel{\frac{e^{-jw_ut}}{jt}}\right.$

$\left. - \left(\cancel{\frac{e^{jw_ut}}{jt}} + \frac{e^{jw_ut}}{w_ut^2} - \cancel{\frac{1}{w_ut^2}}\right) + \cancel{\frac{e^{jw_ut} - 1}{jt}}\right)$

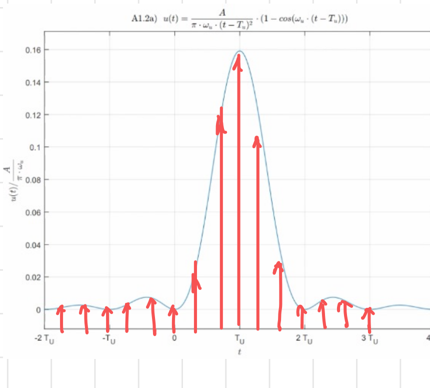
$= \frac{A}{2\pi}\left(\frac{2 - e^{jw_ut} - e^{-jw_ut}}{w_ut^2}\right)$

$= \frac{A}{2\pi}\cdot\frac{1}{w_ut^2}\left(2 - 2\cos(w_ut)\right) = \frac{A}{\pi w_ut^2}(1-\cos(w_ut))$

$\mathcal{F}^{-1}\{e^{-jwT_u}\} ○\!\!-\!\!\bullet\ \delta(t-T_u)$

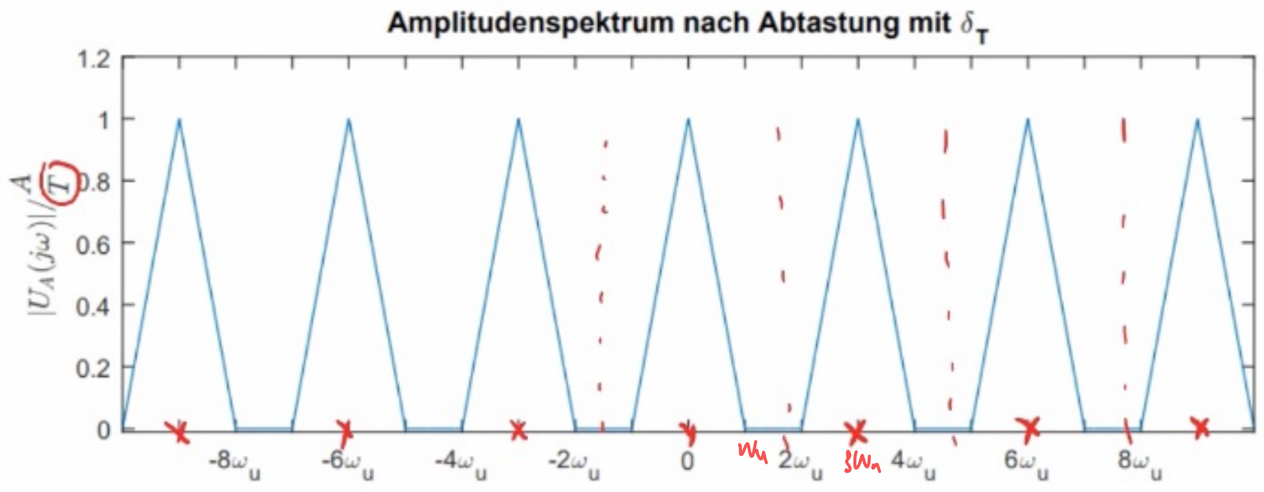
Zusammenfassung: $u(t) = \frac{A}{\pi w_ut^2}(1-\cos(w_ut)) * \delta(t-T_u)$

$= \frac{A}{\pi w_ut^2}(1-\cos(w_u(t-T_u))$



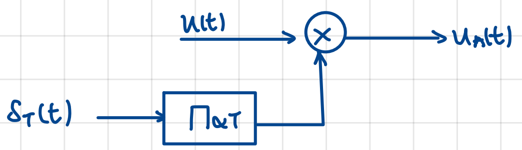
b) Das Signal werde nun ideal abgetastet mit $\omega_T = 3\omega_u$. Skizziere für das abgetastete Signal das Amplitudenspektrum sowie den Signalverlauf im Zeitbereich.

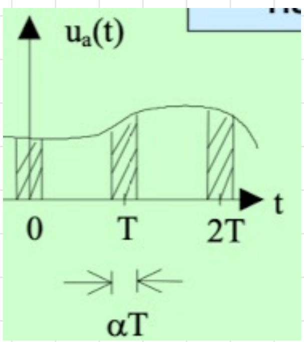
$$\omega_T = 3\omega_u \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T_T} = \frac{2\pi}{T_u} = 3 \Rightarrow T_T = \frac{1}{3} T_u$$



= Shape top sampling

c) Skizziere bei Abtastung mittels Signalausblendung für das abgetastete Signal das Amplitudenspektrum sowie den Signalverlauf im Zeitbereich ($\omega_T = 3\omega_u$).





$$u_A(t) = u(t) \cdot (\Pi_{\alpha T}(t) * \delta_T(t))$$

$$u(j\omega) = \frac{1}{2\pi} u(j\omega) * \left(\alpha T \cdot si\left(\frac{\omega \alpha T}{2}\right) \cdot \omega_T \delta_{\omega_T}(\omega)\right)$$

$$= \underbrace{\alpha \cdot u(j\omega) * \left(\underbrace{si\left(\frac{\omega \alpha T}{2}\right) \cdot \delta_{\omega_T}(\omega)}_{\mathrm{I}}\right)}_{\mathrm{II}}$$

I: mit si-Fkt gewichteter Deltakamm

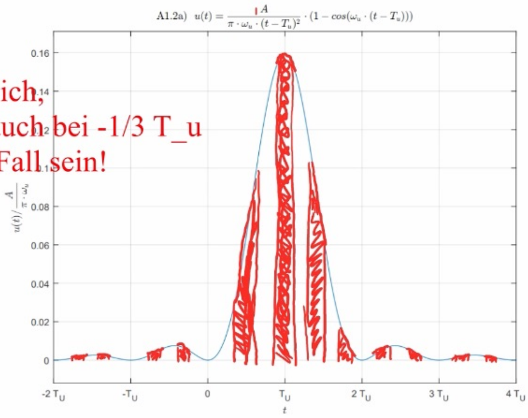
II: period. Fortsetzung mit unterschiedlichen Gewichten.

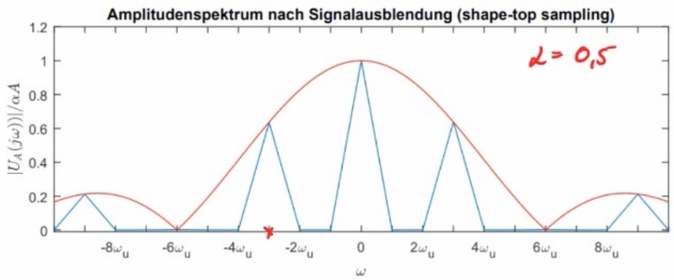
$$= \alpha \sum_{k=-\infty}^{\infty} si(k\pi\alpha)\, u(j(\omega - k\omega_T))$$

im Basisband $k=0$

$$u_A(j\omega) = \alpha U(j\omega)$$

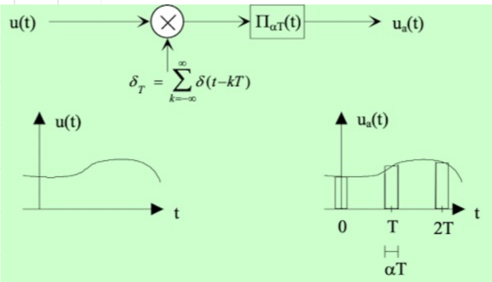
Das müsste natürlich, wie besprochen, auch bei -1/3 T_u und -2/3 T_u der Fall sein!





Flat top Sampling

d) Skizziere bei Abtastung mittels Signalverbreiterung für das abgetastete Signal das Amplitudenspektrum sowie den Signalverlauf im Zeitbereich ($\omega_T = 3\omega_u$).



$$\boxed{u_a(t) = \left(u(t)\cdot\delta_T(t)\right) * \Pi_{\alpha T}(t)}$$

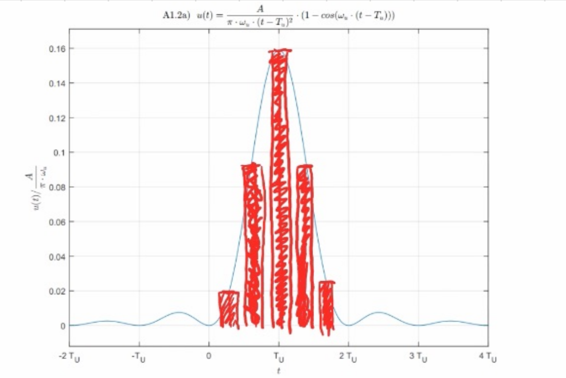
$$U_a(j\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}U(j\omega) * \omega_T \cdot \delta_{\omega_T}(\omega)\right)\cdot \alpha T si\left(\frac{\omega\alpha T}{2}\right)$$

$$= \alpha si\left(\frac{\omega\alpha T}{2}\right)\cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(j(\omega - k\omega_T))$$

$$\underbrace{= \alpha \underbrace{\left(U(j\omega) * \delta_{\omega_T}(\omega)\right)}_{I} \cdot si\left(\frac{\omega\alpha T}{2}\right)}_{II}$$

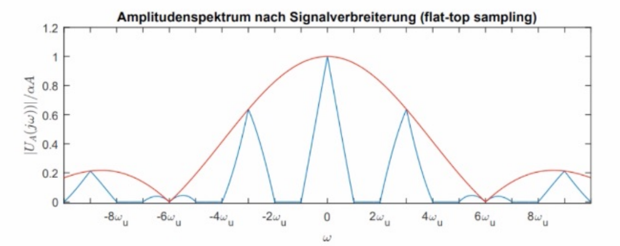
I: periode Wdh. des Spektrums

II: Gewichtung an jedem Fkt-Wert mit si - Fkt



Basisband: $U_a(j\omega) = \alpha si\left(\frac{\omega\alpha T}{2}\right) U(j\omega)$

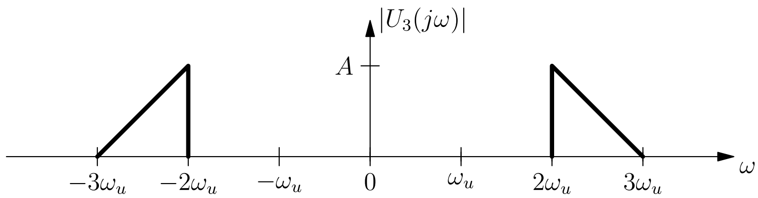
$k=0$



d) Skizziere bei Abtastung mittels Signalverbreiterung für das abgetastete Signal das Amplitudenspektrum sowie den Signalverlauf im Zeitbereich ($\omega_T = 3\omega_u$).

2 Abtastung von Bandpasssignalen

2.1 Gegeben sei das folgende Amplitudenspektrum $|U_3(j\omega)|$. Das Phasenspektrum sei konstant $\varphi(\omega) = 0$.

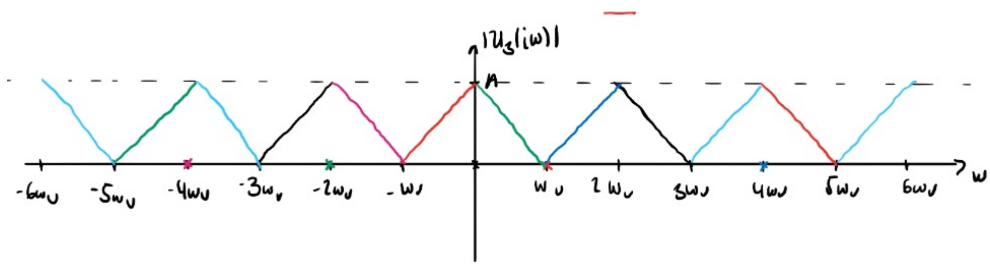


a) Skizziere das Spektrum des abgetasteten Signals für den Fall $\omega_T = 2\omega_u$.

b) **[HA]:** Skizziere das Spektrum des abgetasteten Signals für den Fall $\omega_T = 3\omega_u$.

c) **[HA]:** Skizziere das Spektrum des abgetasteten Signals für den Fall $\omega_T = 5\omega_u$.

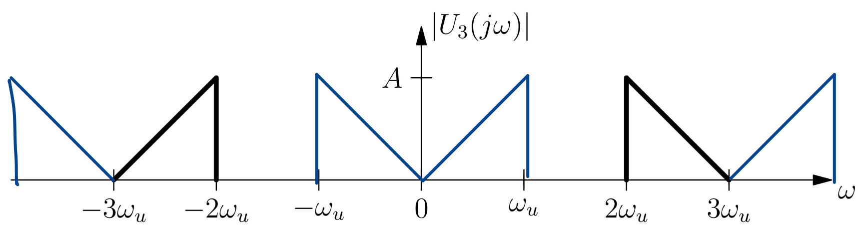
a)



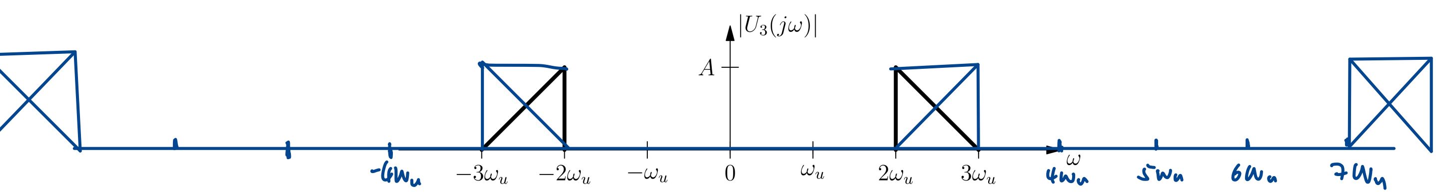
$$U_A(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} U(j(\omega - k\omega_T))$$

k=0 k=-1
k=1 k=-2
k=2 sonstige k

b)



c)



1. Bei der idealen Abtastung wird das kontinuierliche Signal u(t) mit ... (Einzelne Wahl)

- ○ einem Deltakamm multipliziert.
- ○ einem Deltakamm multipliziert und anschließend einem Halteglied zugeführt.
- ○ einer Rechteckpulsfolge multipliziert.

2. Durch die Abtastung eines kontinuierlichen Signals wird das resultierende Signal ...

(Einzelne Wahl)

- ○ wert- und zeitdiskret.
- ○ zeitdiskret.
- ○ wertdiskret.

3. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? (Mehrfachauswahl)

- ☐ Beim Nyquist-Abtast-Theorem ist die Abtastfrequenz ist größer als w_u
- ☐ Beim Nyquist-Abtast-Theorem ist die zweifache w_u ist kleiner als die Abtastfrequenz.
- ☐ Ein idealer Tiefpass kann nicht mehr zur fehlerfreien Rekonstruktion des ursprünglichen Signals verwendet werden.

Lösung: 1 – Deltakamm multipliziert
2 – zeitdiskret
3 – Abtastfrequenz ist größer als w_u,
zweifache w_u kleiner als w_T