14.

Diskrete Signale im Frequenzbereich

14.1. Fouriertransformationen für zeitdiskrete Signale

Definieren die Spektren für ideal abgetastete Signale u*(t) und für Zahlenfolgen u(n).

Die Spektren sind periodisch und frequenzkontinuierlich.

14.1.1. Abgetastete Signale

Ein im Abtastabstand T abgetastetes Signal u(t) läßt sich als

$$u^*(t) = u(t)\,\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT)\,\delta(t-kT)$$

darstellen.

PAM-Signal in der Nachrichtentechnik

14.1.1. Abgetastete Signale

$$u^*(t) = u(t)\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT)\delta(t-kT)$$

Fouriertransformation (Analysegleichung)

als Fouriertransformierte des rechten Terms

$$\mathrm{U}^*(\mathrm{j}\omega) = \mathbf{F}\{\mathrm{u}^*(\mathrm{t})\} = \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} \mathrm{u}(\mathrm{kT})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{jk}\omega \mathrm{T}}$$

$$\delta(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}, \qquad t_0 = kT$$

U*(jω) ist frequenzperiodisch und auch darstellbar als:

$$\mathrm{U}^*(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{\mathrm{T}} \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} \mathrm{U}\big(\mathrm{j}(\omega - \mathrm{k}\omega_{\mathrm{T}})\big)$$

14.1.1. Abgetastete Signale

$$U^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U\big(j(\omega - k\omega_T)\big)$$

skalierte periodische Fortsetzung des Grundbereichspektrums $U(j\omega)$ der Funktion $u(t)$.

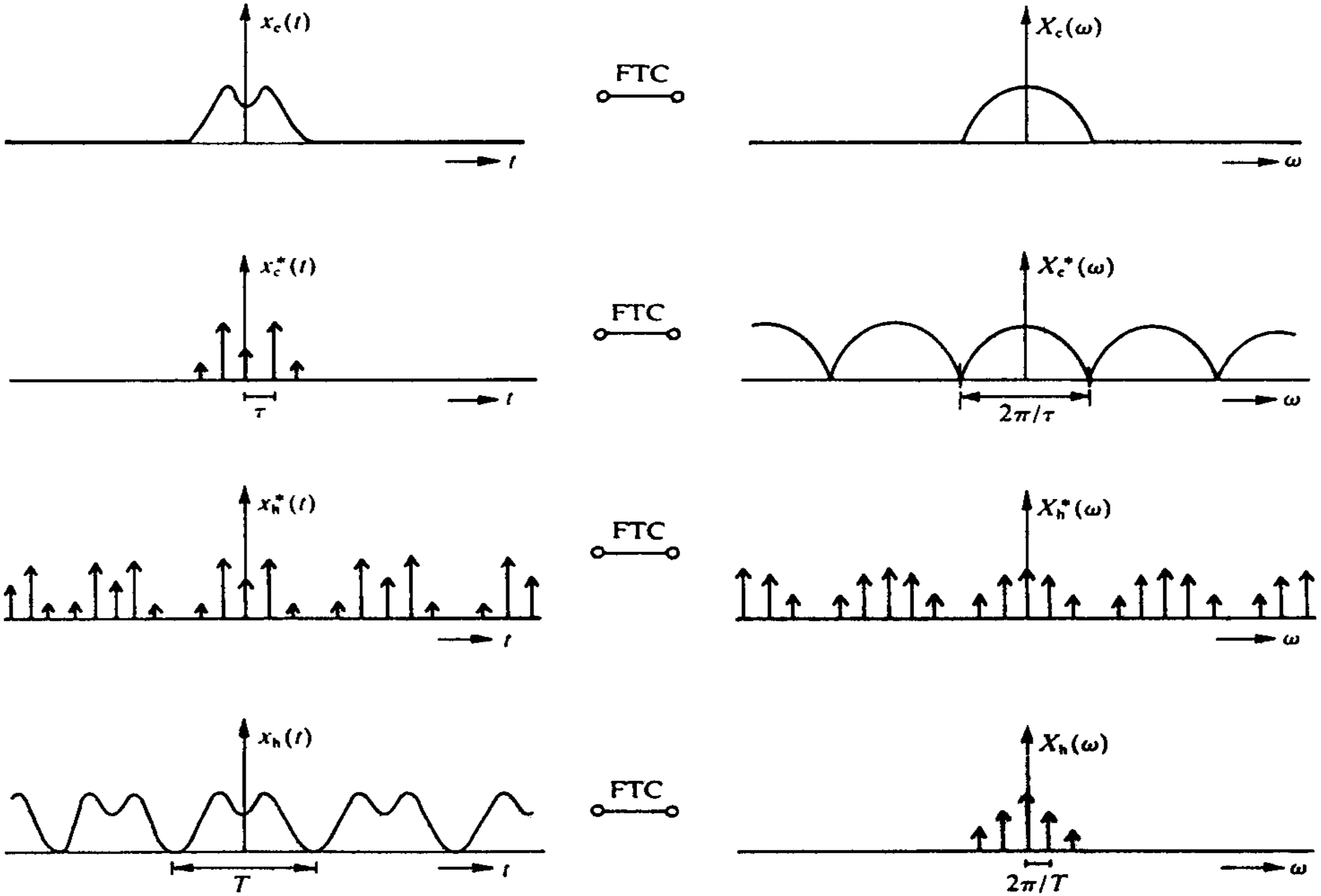
Das Periodizitätsintervall ist $\omega_T = 2\pi/T$ [s^{-1}],

- das Spektrum wiederholt sich damit im Frequenzabstand $f_T = 1/T$ [Hz],

- also im Abstand der Abtastfrequenz.

14.1.1. Abgetastete Signale

Zeit- und Frequenzbereich bei abgetasteten Funktionen
(FTC: kontinuierliche Fouriertransformation)



14.1.2. Zahlenfolgen

Wir können $U^*(j\omega)$ auch als Fouriertransformierte einer Zahlenfolge $u(kT)$ definieren

$$U^*(j\omega) = \mathbf{F}\{u^*(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT)\, e^{-jk\omega T}$$

Für $T = 1$ wird einer Zahlenfolge $u(k)$ eine Fouriertransformierte $U(j\Omega)$ zugeordnet

$$\boxed{U(j\Omega) = \mathbf{F}\{u(n)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)\, e^{-jk\Omega}}$$

14.1.2. Zahlenfolgen

$$U(j\Omega) = \mathbf{F}\{u(n)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)\, e^{-jk\Omega}$$

eine i.a. komplexe Funktion, die für jedes Ω definiert ist

Im Unterschied zur DFT

Da $T = 1$ ist die Abtastfrequenz $f_T = 1$ und die Abtastkreisfrequenz $\omega_T = 2\pi$

d.h. das Periodizitätsintervall des frequenzperiodischen Spektrums ist jetzt 2π, entspricht also der Abtastkreisfrequenz

14.1.2. Zahlenfolgen

Existenz

Die Fouriertransformierte $U(j\Omega)$ existiert zumindest für jede absolut summierbare Zahlenfolge u(n):

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |u(k)| < \infty$$

Ein diskreter Deltakamm (Deltapuls), also eine unendliche Folge von $\delta(n)$-Werten, genügt dieser Forderung nicht!

14.1.2. Zahlenfolgen

Synthesegleichung:

$$u(n) = \mathbf{F}^{-1}\left\{U(j\Omega)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(j\Omega)\, e^{jn\Omega}\, d\Omega$$

gewichtete Überlagerung von Exponentialfunktionen $e^{jn\Omega}$.

Die Spektralwerte $U(j\Omega)$ sind die Gewichte der Überlagerung.

Summenfaltung

$$w(n) = u(n) * v(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)\, v(n-k)$$

$$\leftrightarrow \quad W(j\Omega) = U(j\Omega) \cdot V(j\Omega)$$

Kreuz- und Autokorrelationsfolgen (KKF, AKF)

$$r_{uv}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)\, v(n+k) \quad \leftrightarrow \quad U(j\Omega)\, V^*(j\Omega)$$

$$r_{uu}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)\, u(n+k) \quad \leftrightarrow \quad \left|U(j\Omega)\right|^2$$

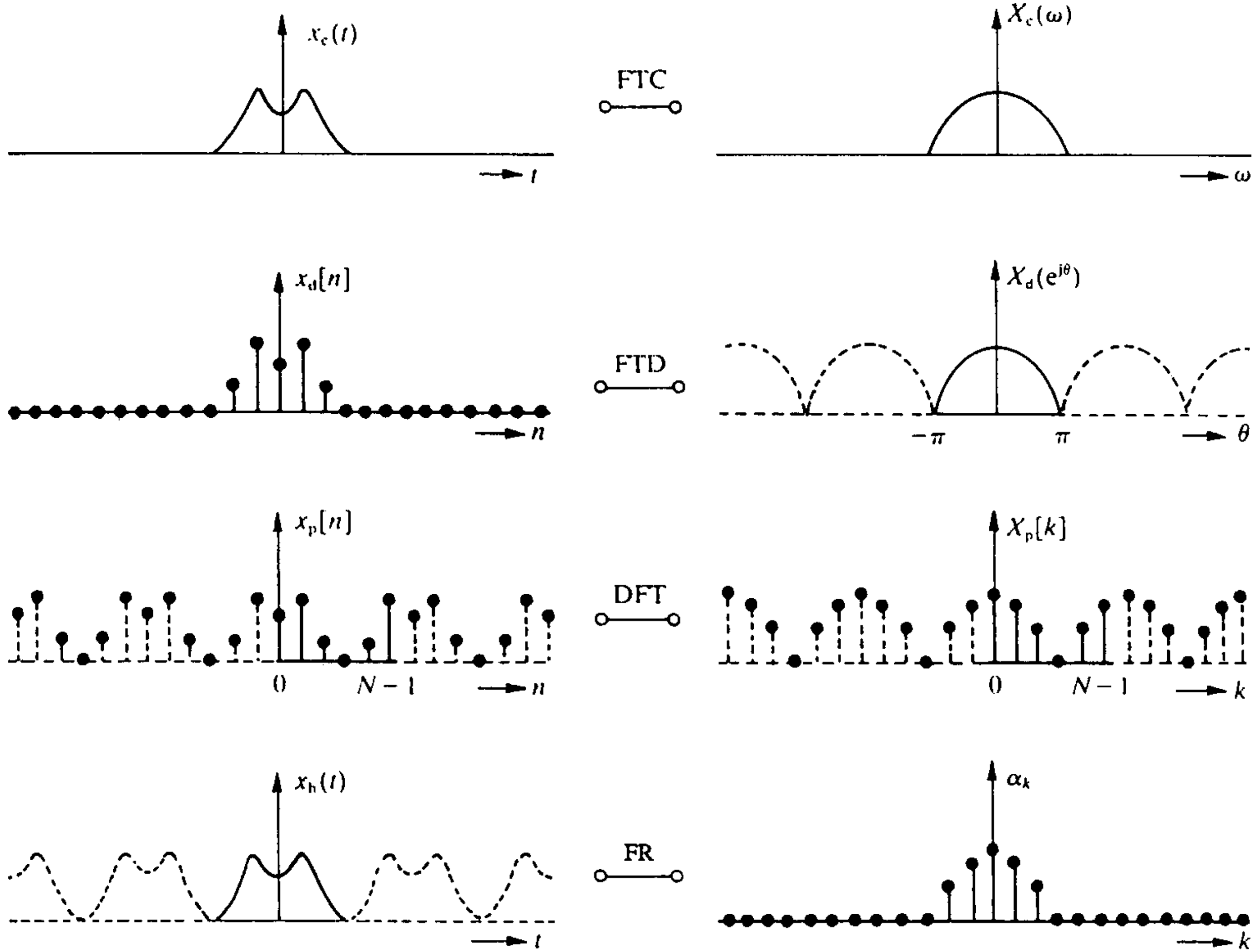
Energiedichtespektrum

Parseval-Theorem

Liefert die Energie in der Form

$$W_u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u^2(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|U(j\Omega)\right|^2 d\Omega$$

14.1.3. Eigenschaften der Fouriertransformierten von Zahlenfolgen

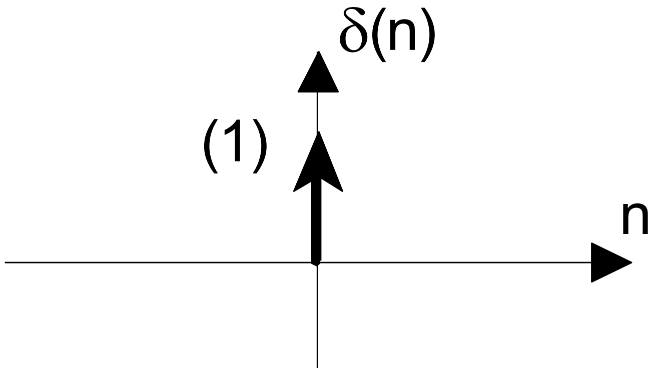


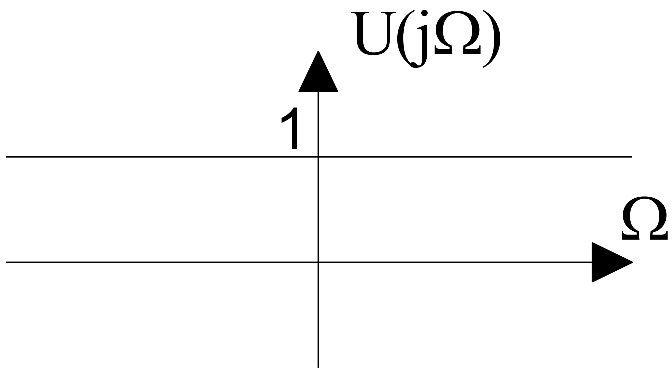
Zeit- und Frequenzbereich bei Zahlenfolgen (FTC: kontinuierl. FT, FTD: FT für zeitdiskrete Signale; DFT: diskrete FT; FR: Fourierreihe)

14.1.4. Beispiele (Elementarsignale)

Diskreter Deltaimpuls

$$U(j\omega) = \mathbf{F}\{\delta(n)\} = 1.$$





14.1.4. Beispiele (Elementarsignale)

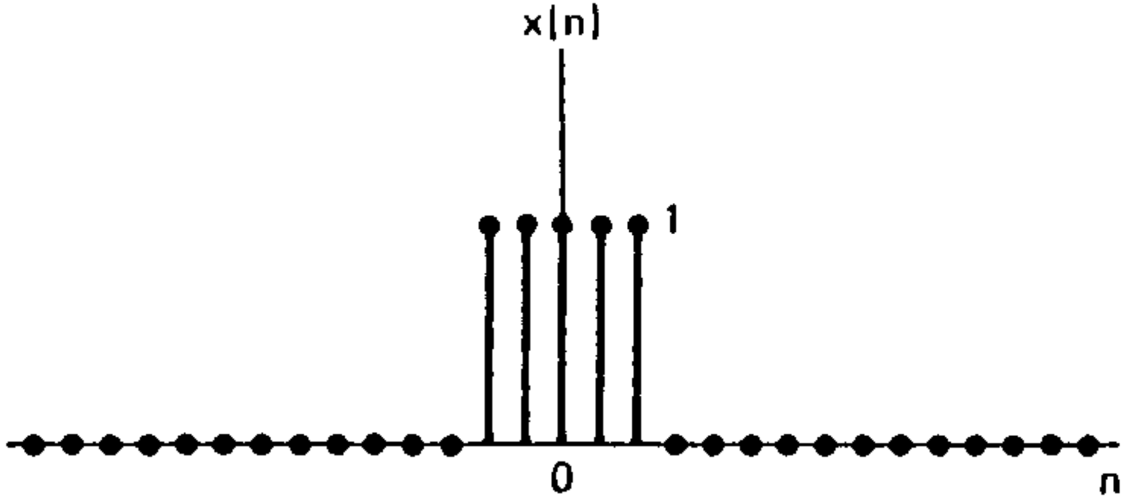
Diskreter Rechteckimpuls

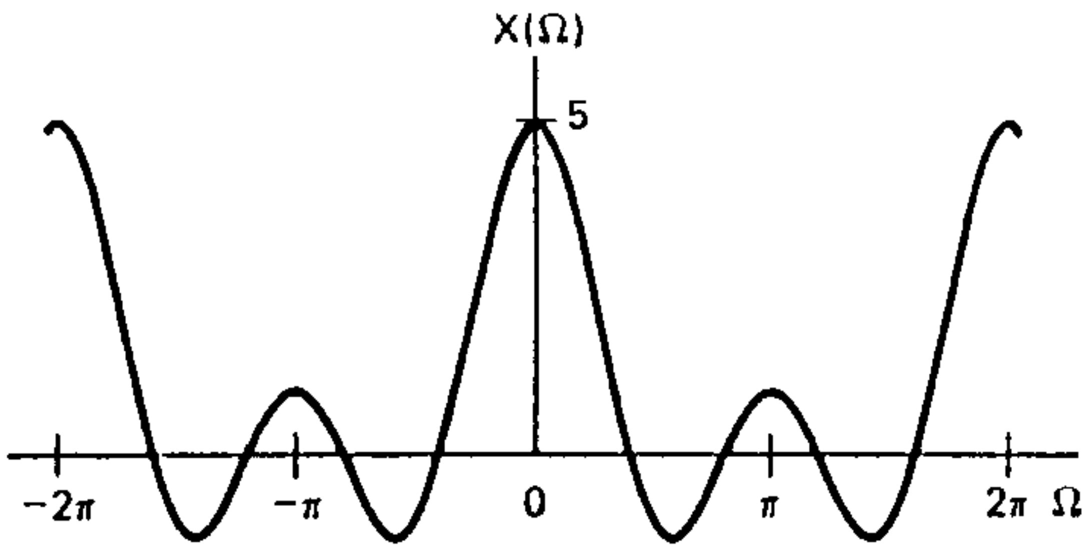
(mit ungeradem M)

$$F\left\{\Pi_M(n)\right\} = \frac{\sin\left(\frac{\Omega}{2}M\right)}{\sin\frac{\Omega}{2}}$$

kein sin(x)/x - Verlauf!

14.1.4. Beispiele (Elementarsignale)





14.1.4. Beispiele (Elementarsignale)

Beispiel: Für M = 3 ergibt sich eine Fouriertransformierte

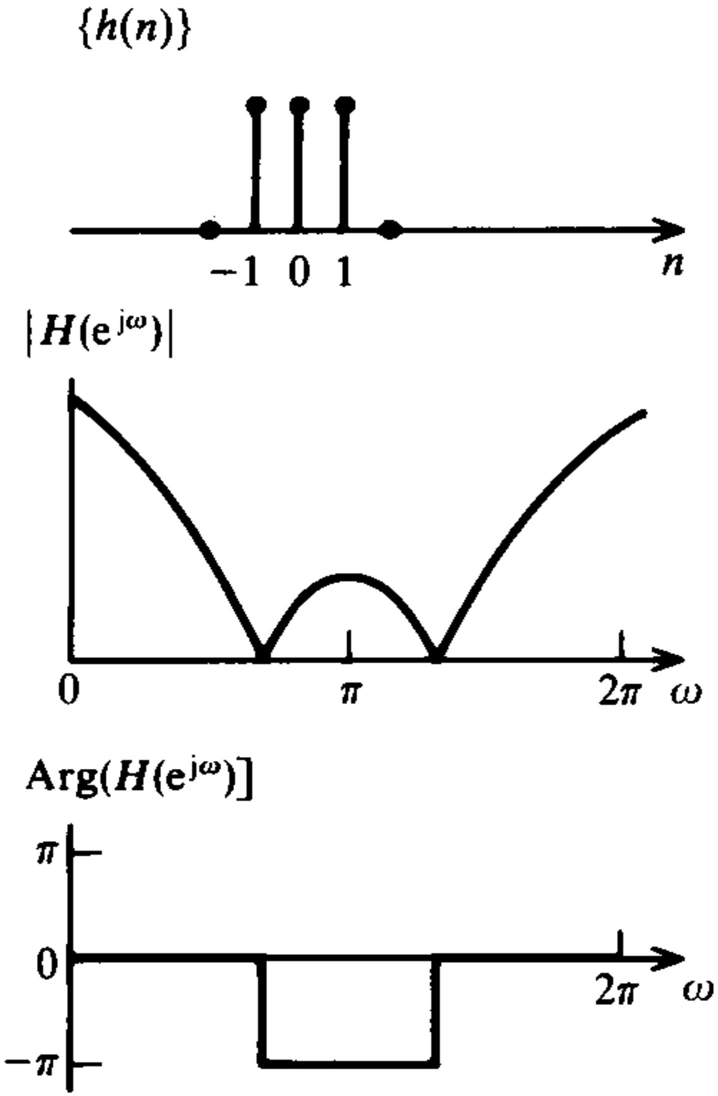
$$= \frac{\sin(\frac{\Omega}{2} \cdot 3)}{\sin(\frac{\Omega}{2})}$$

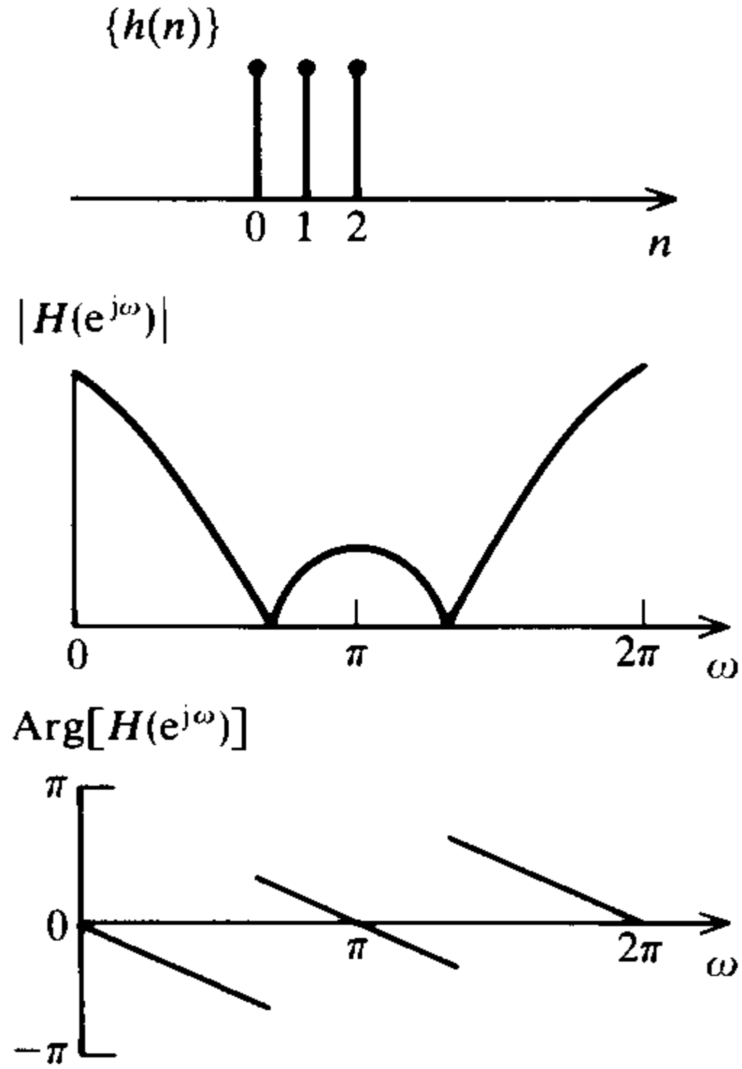
$$U(j\Omega) = F\{\Pi_3(n)\} = 1 + 2\cos(\Omega)$$

$$\phi_u(\Omega) = \arg[U(j\Omega)]$$

So zu wählen, dass Symmetrie (gerade – ungerade) berücksichtigt Wird!!!

14.1.4. Beispiele (Elementarsignale)





14.2. Diskrete Fouriertransformation

- definiert ein *diskretes* Spektrum einer Signalfolge u(n)
- das Spektrum ist nicht länger frequenzkontinuierlich
  - *sondern nur durch Stützstellen gegeben*

• 定义了信号序列u(n)的离散频谱
• 该频谱不再是频率连续的
- 而是只由支持点确定的
因此，数字计算变得可能

damit sind Digitalrechnerbestimmungen möglich

14.2.1 Definition, Existenz und Eigenschaften

<u>Definition</u>

Werden genau N Stützstellen äquidistant im Abstand

$\Delta\Omega = 2\Pi/N$ $\quad\quad$ $n\,\Delta\Omega\,;\quad n = 0,1,2,\ldots,N-1$

gewählt,

dann wird die <u>Fouriertransformierte</u>

$$U(j\Omega) = \mathbf{F}\{u(n)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)\, e^{-jk\Omega}$$

zur *<u>Diskreten Fouriertransformation</u> (DFT)*.

14.2.1 Definition, Existenz und Eigenschaften

Um eine hohe Frequenzauflösung zu erreichen, ist eine große Zahl N von Stützstellen zu wählen.

Analysegleichung (DFT)

$$U_{DFT}(n) \equiv U(jn\Delta\Omega) = \sum_{k=0}^{N-1} u(k) \cdot e^{-jkn\Delta\Omega} \qquad n = 0,1,2,\ldots,N\text{-}1$$

Grundfrequenz $\Delta\Omega$

$U_{DFT}(n)$ stimmen also mit den Stützstellen der zeitdiskreten Fouriertransformierten $U(j\Omega)$ bei den Kreisfrequenzen $n\Delta\Omega$, $n = 0,1,\ldots,N\text{-}1$, überein.

14.2.1 Definition, Existenz und Eigenschaften

$$U_{DFT}(n) \equiv U(jn\Delta\Omega) = \sum_{k=0}^{N-1} u(k) \cdot e^{-jkn\Delta\Omega}$$

$n = 0,1,2,\ldots,N\text{-}1$

Grundfrequenz $\Delta\Omega$

Aus N Signalwerten entstehen <u>maximal</u> N Spektralwerte!!!

Aus der Analysegleichung ergeben sich aber 2N Werte, da die Spektralwerte ja komplex sind.

$$\boxed{U_{DFT}(N-n) = U^{*}_{DFT}(n)}$$

Konjugiert komplexes Spektrum

14.2.1 Definition, Existenz und Eigenschaften

$$\boxed{U_{DFT}(N-n) = U^{*}_{DFT}(n)}$$

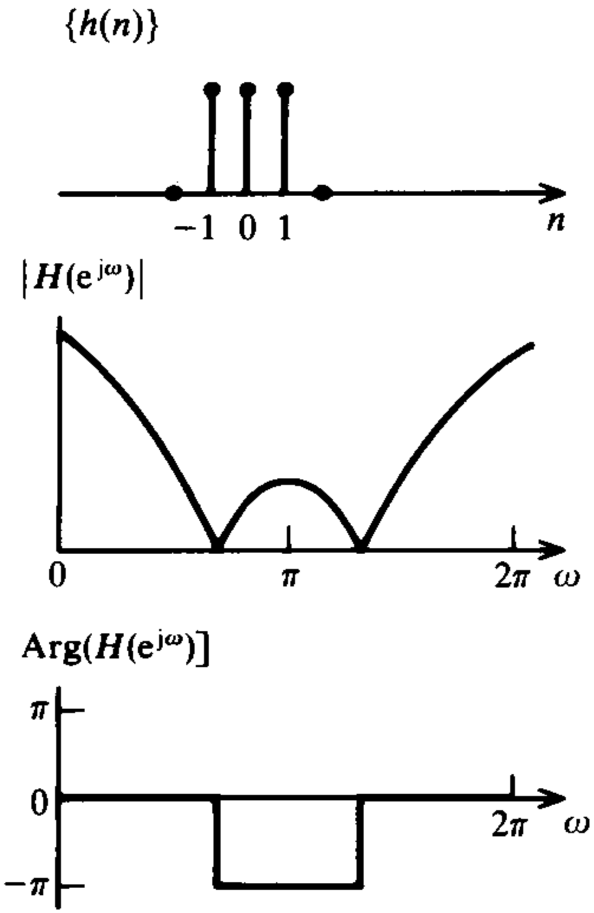
Periodisches Spektrum

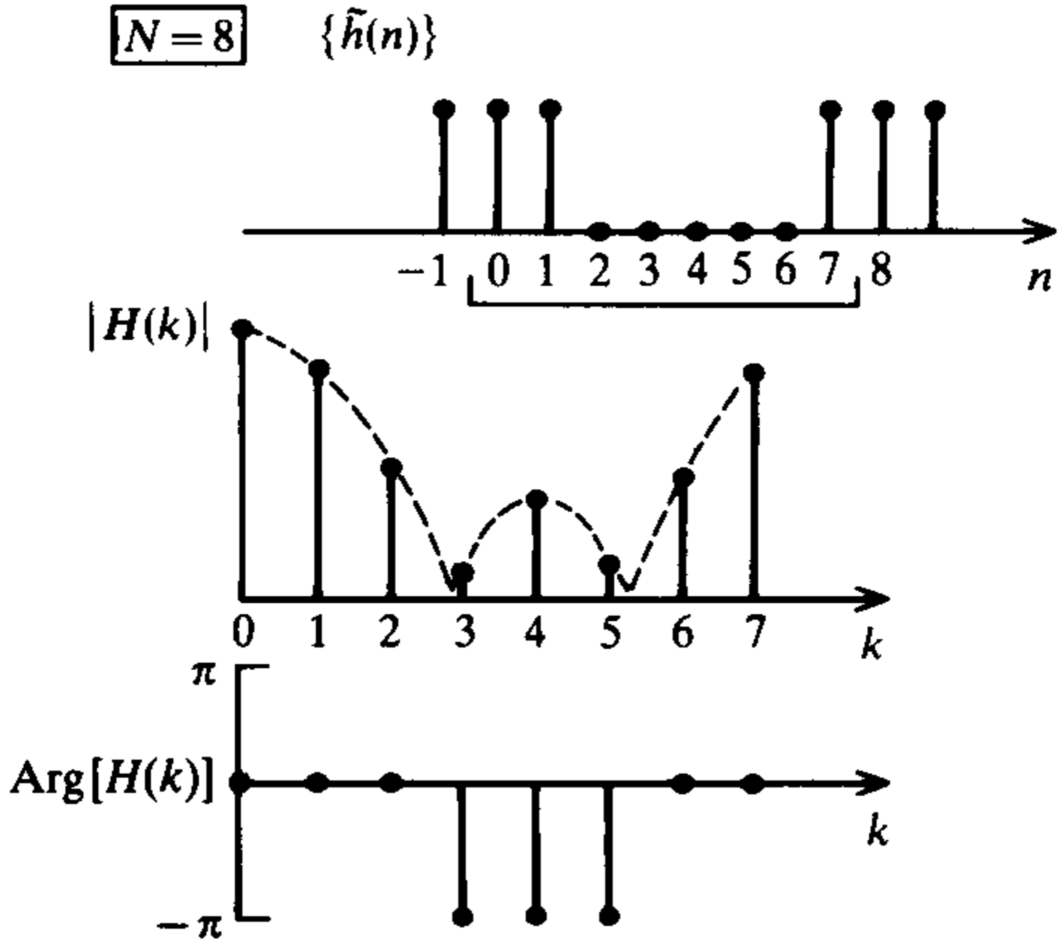
Es müssen damit (bei geradem N) nur die Werte $U_{DFT}(n)$ von $n = 0$ bis $N/2$ berechnet werden.

die höheren Werte $U_{DFT}(N - n)$ aus konjugiert-komplexen Werten errechenbar

Insgesamt werden also in der Tat nur N unabhängige Spektralwerte definiert.

14.2.1 Definition, Existenz und Eigenschaften





$$\boxed{U_{DFT}(N-n) = U^*_{DFT}(n)}$$

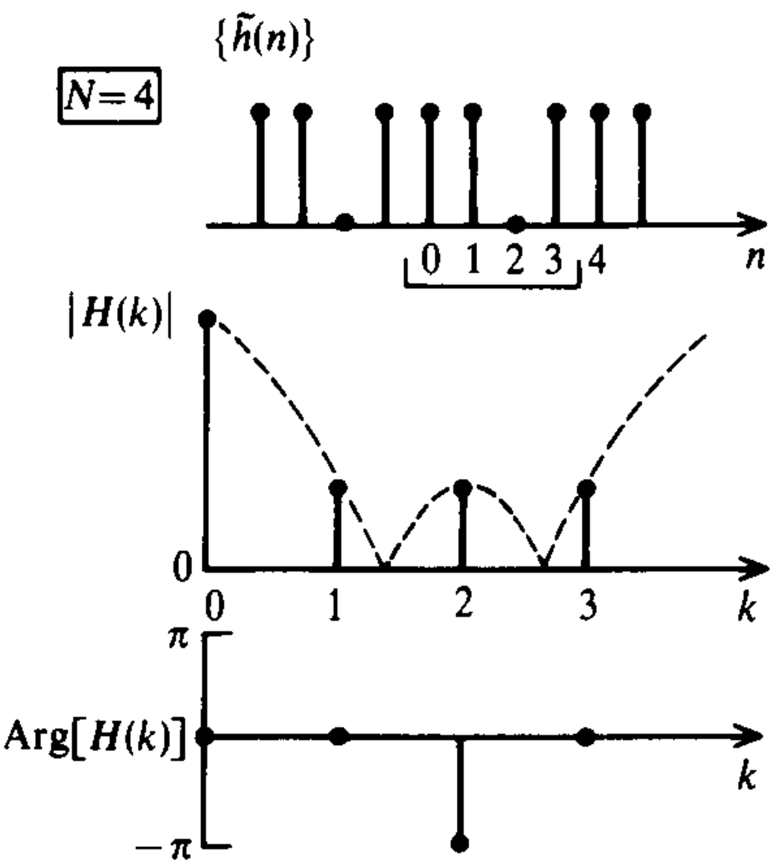
14.2.1 Definition, Existenz und Eigenschaften

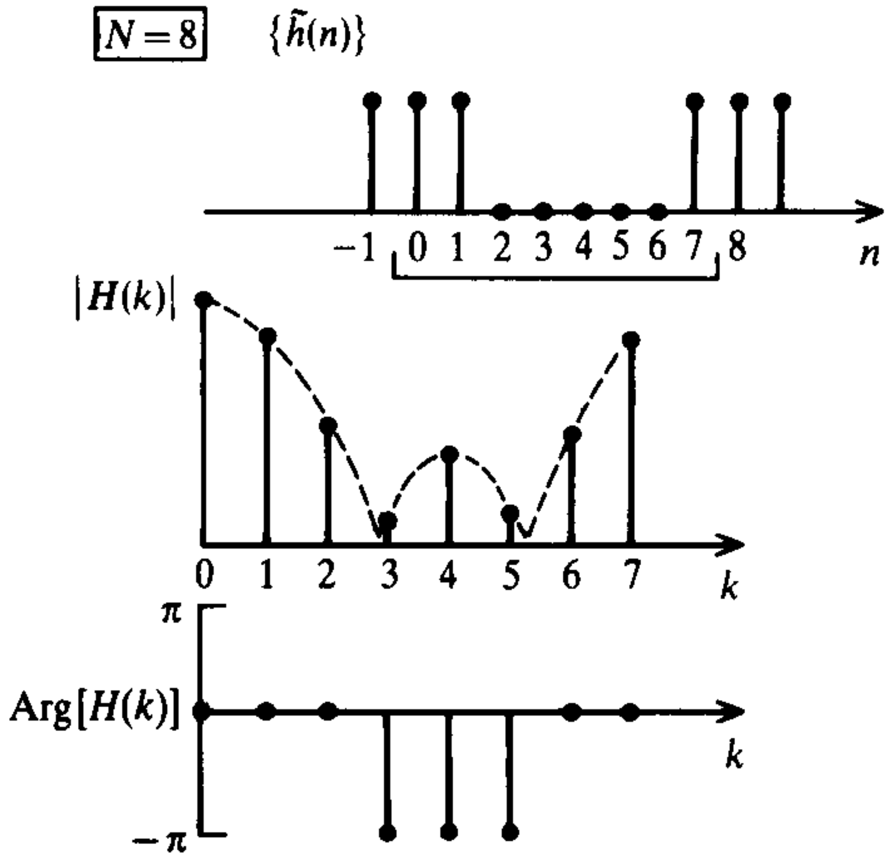
deshalb:

Graphisch werden häufig die Werte UDFT(n) von 0 bis N/2 (oder $\Omega = \pi$) ...

... und die Werte UDFT(N - n) von 0 bis $\Omega = -\pi$ aufgetragen.

14.2.1 Definition, Existenz und Eigenschaften





14.2.1 Definition, Existenz und Eigenschaften

Synthesegleichung (IDFT)

$$u(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_{DFT}(n) \cdot e^{jkn\Delta\Omega}$$

$$k = 0,1,2,\ldots,N\text{-}1$$

Transformationspaar

$$\boxed{u(n) \leftrightarrow U_{DFT}(n).}$$

14.2.1 Definition, Existenz und Eigenschaften

Eigenschaften der DFT

- Symmetriebedingungen für Amplituden- und Phasengang, Linearität
- Maßstabsänderung
- Symmetrie-Eigenschaften

DFT的特性
- 幅度和相位响应的对称性条件，线性性
- 尺度变换
- 对称性质

这些特性在很大程度上与傅立叶变换的特性相似，适用于时域连续信号和抽样信号。需要注意的是关于时间和频率偏移以及应用循环卷积操作的情况。

entsprechen weitgehend denen der Fouriertransformation für zeitkontinuierliche Signale und für abgetastete Signale.

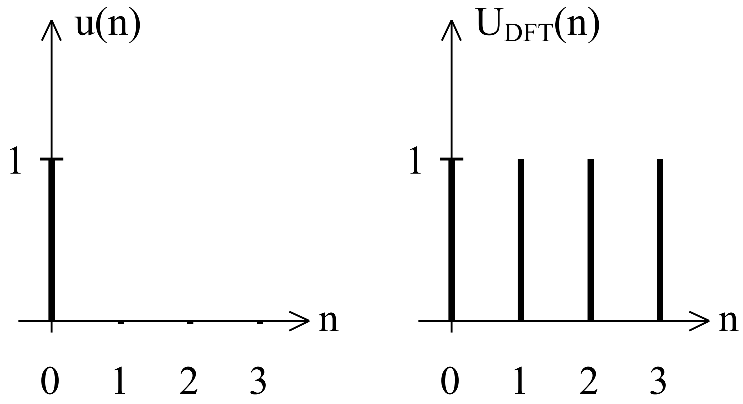
Vorsicht erfordern Sätze über zeitliche und frequenzmäßige Verschiebungen und die Anwendung von Faltungsoperationen, die zyklisch verlaufen.

Beispiel: DFT eines diskreten Deltaimpulses für N = 4

$u(n) = \{1,0,0,0\}$

$U_{DFT}(n) = \{1,1,1,1\}.$

Rücktransformation ergibt ein periodisches Signal $\{\mathbf{1},0,0,0,\mathbf{1},0,0,0,\mathbf{1},0,0,0,\mathbf{1},0,0,0,...).$



14.2.3 Hinweise zur DFT

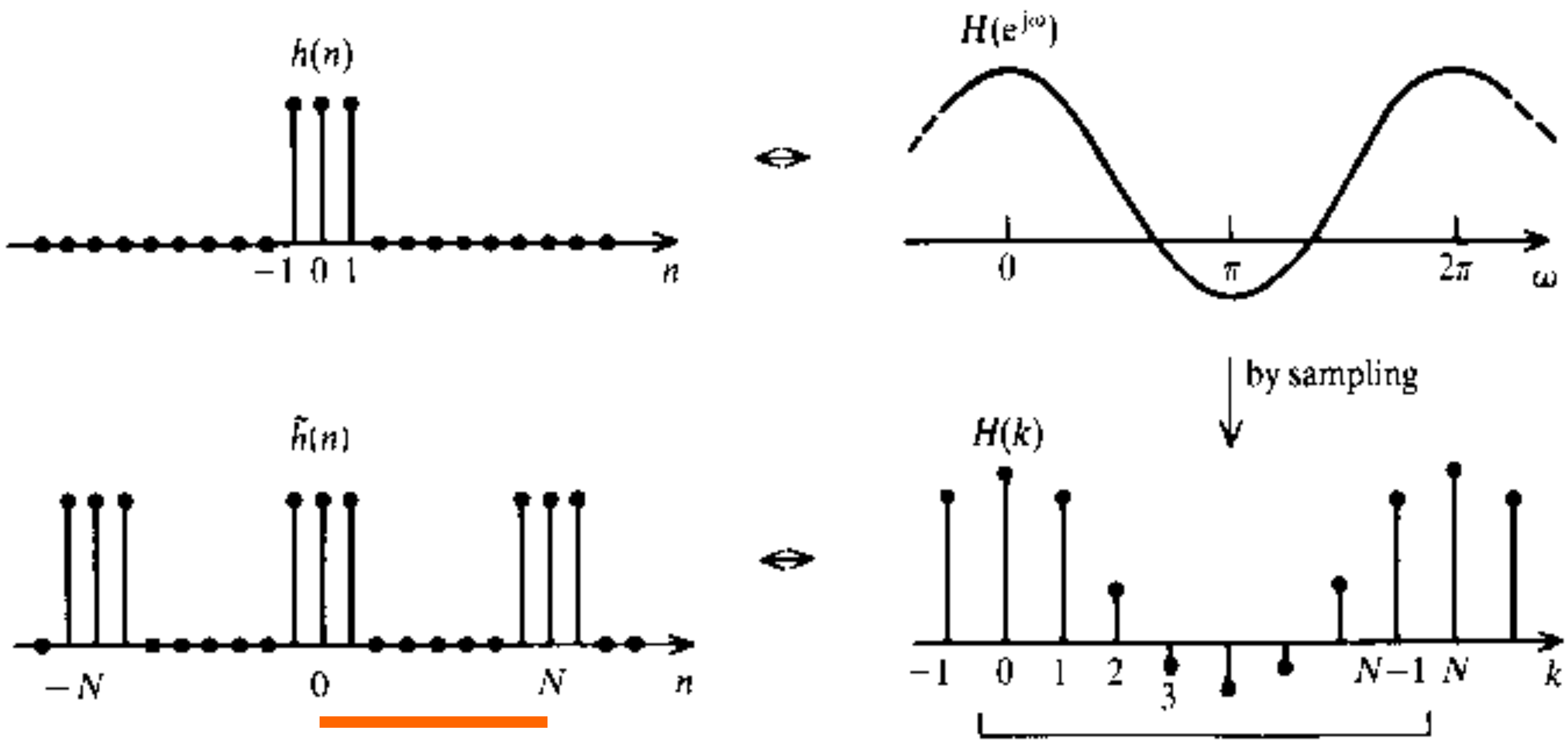
Die DFT beschreibt eine Transformation zwischen periodischen Funktionen.

Endliche, nichtperiodische Zahlenfolgen $u(n)$ DFT-transformiert liefern das gleiche Ergebnis wie die FT.

Berücksichtigt werden muss, dass diese Folgen von der DFT behandelt werden, als seien sie periodisch fortgesetzt !!!

14.2.4 Diskrete Drei-Werte-Rechteckfolge

Drei-Werte-Rechteckfolge mit ZDFT-Spektrum und DFT- Spektrum für N=8



14.2.5. Hanning-Fenster

Hinweis:

Hanning窗是一种广泛使用的数列，用于修改信号u(n)，得到v(n) = u(n)w(n)，以减弱信号片段u(n)的傅里叶变换中的边缘效应。

Das Hanningfenster ist eine viel verwendete Zahlenfolge, mit der Signale u(n) modifiziert werden,

$$v(n) = u(n)\ w(n)$$

um bei Fouriertransformierten von Ausschnitten u(n) eines Signals Randeffekte abzuschwächen.

14.2.5. Hanning-Fenster

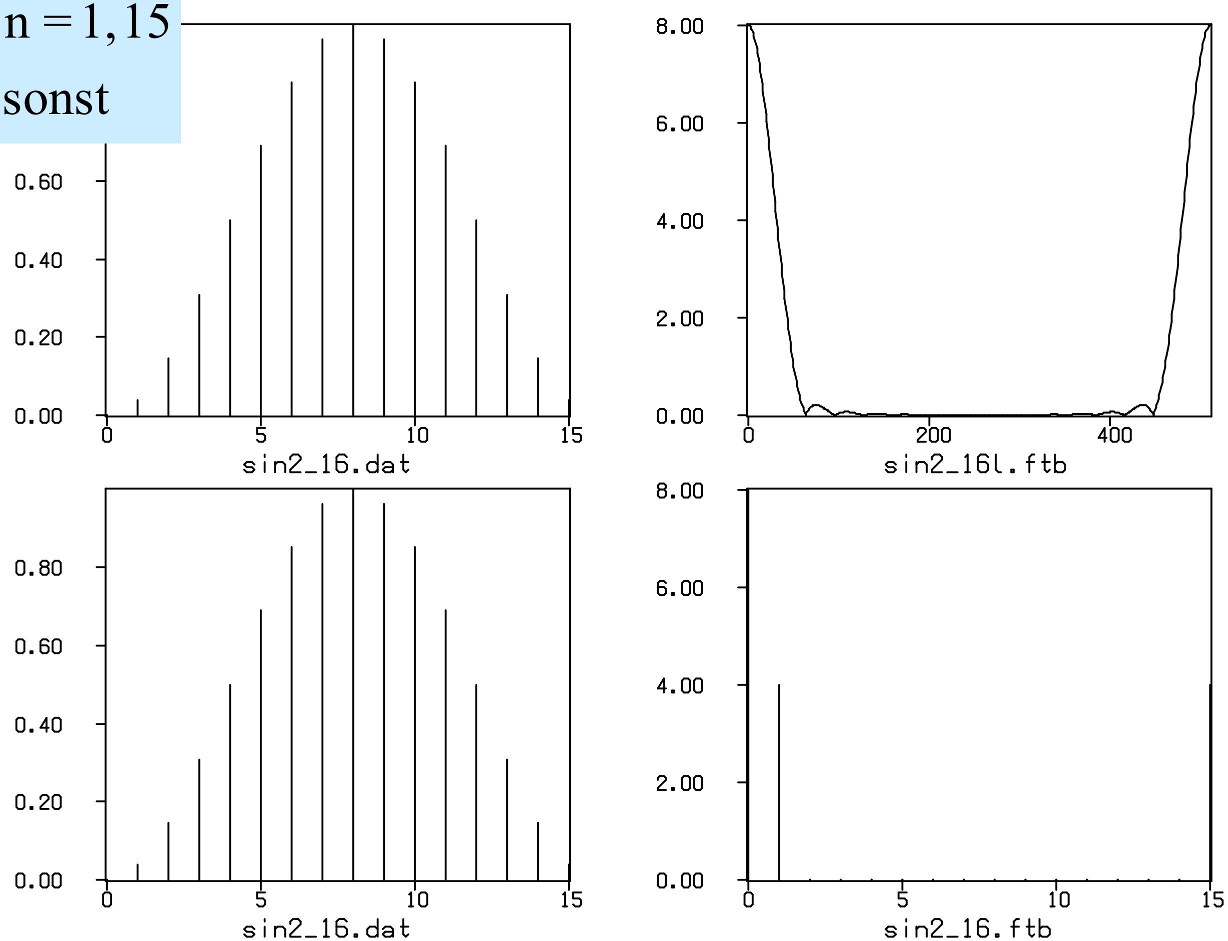
$$w(n) = \begin{cases} 0.5 \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)\right) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zahlenfolge

(auch raised-cosine- oder $\cos^2$-Fenster)

14.2.5. Hanning-Fenster

$$W_{DFT}(n) = \begin{cases} = 8 & n = 0 \\ = 4 & n = 1, 15 \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



ZDFT

DFT

Bei der DFT wird von einer periodischen Signalfolge $w_{DFT}(n)$ ausgegangen

14.2.7. Schnelle Fourier-Transformation (FFT)

Optimierter Algorithmus zur Berechnung der DFT für Digitalrechner

DFT vs FFT: N Spektrallinien

$$N \times N = N^2 \quad \text{vs} \quad N \times \mathrm{ld}\,(N)$$

komplexe Multiplikationen und Additionen!

$$G = \frac{T_{direkt}}{T_{FFT}(2)} = \frac{N}{\mathrm{ld}(N)}$$

Rechenzeitgewinn

N	G
16	4
1024	102