Hausaufgaben 01

Ana II Ing
Gruppe: Nico 6

Aufgabe 1.1 $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: -1\le y<3,\ \frac{-3-y}{2}\le x<1+\sqrt{4-(y-1)^2}\}$

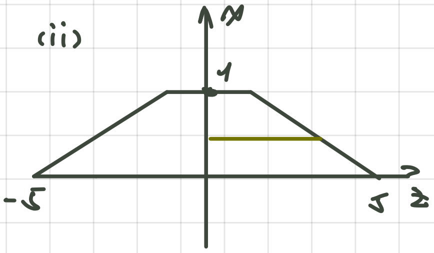
(i) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+(y-1)^2<4,\ 1<x<3\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1<-2x-3<y\le 3,\ -3\le x\le 1\}$

A ist weder offen noch abgeschlossen, weil manche Randpunkte zu A gehören und andere nicht.

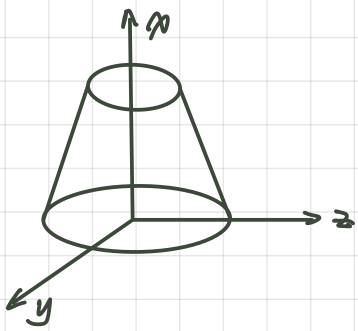
A ist beschränkt, da $A\subset K_r(\vec{0})$ (z.B wählen wir $x^2+y^2\le 36$)

A ist nicht kompakt, weil A nicht abgeschlossen ist.

(ii)



$$r(0)=5,\quad r(1)=1 \Rightarrow r(x)=-4x+5$$



$C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y^2+z^2\le r^2(x),\ 0\le x\le 1 \text{ mit } r(x)=-4x+5\}$

C ist abgeschlossen, denn alle Randpunkte gehören zu C.

C ist beschränkt, denn $C\subset K_r(\vec{0})$ (z.B wählen wir $x^2+y^2\le 100$)

C ist kompakt, da C abgeschlossen und beschränkt ist

Aufgabe 1.2

(i) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^5(e^{1/n}-1)+n^4+n^3}{n^4+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^4}}{\cancel{n^4}}\cdot\frac{n(e^{1/n}-1)+1-\frac{1}{n}}{1+3/n^4}=\frac{1+1}{1}=2$$

$$\lim_{n\to\infty} n(e^{1/n}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\ \underset{=}{\text{l'hospital}}\ \frac{e^{\frac{1}{n}}\cdot\cancel{(-\frac{1}{n^2})}}{\cancel{-\frac{1}{n^2}}}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+3)}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\cos(\tfrac{1}{n})=1$$

Alle Komponentenfolgen konvergieren. Die Grenzwert: $\lim_{n\to\infty}\vec{a_n}=(2,0,1)$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 2k \text{ mit } k \in \mathbb{N} \\ -1 & \text{für } n = 2k-1 \text{ mit } k \in \mathbb{N} \end{cases}$

$\lim\limits_{n\to\infty} (n^a - 1)\sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} n^a - 1 & \text{für } n = 2k \text{ mit } k \in \mathbb{N} \\ \lim\limits_{n\to\infty} -(n^a - 1) & \text{für } n = 2k-1 \text{ mit } k \in \mathbb{N} \end{cases}$

für $a = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} (n^a - 1)\sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$

für $a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} |n^a - 1| = \infty$

für $a < 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} n^a - 1 = -1$,

nämlich: $\lim\limits_{n\to\infty} (n^a - 1)\sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) = \begin{cases} -1 & \text{für } n = 2k \text{ mit } k \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{für } n = 2k-1 \text{ mit } k \in \mathbb{N} \end{cases}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+n}{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+1}{n^2} = 0$

Teilfolge $(\overrightarrow{b_{n_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $n_k = 2k$ gegeben konvergiert gegen $(0,0)$ für $a = 0$

und gegen $(-1,0)$ für $a < 0$

Analog für Teilfolge $n_k = 2k-1$

$(\overrightarrow{b_{n_k}})$ konvergiert gegen (0.0) für $a = 0$

gegen $(1,0)$ für $a < 0$