Hausaufgaben 03

Ana II Ing
Gruppe: Nico 6

Aufgabe 3.1

(i) partielle Ableitung:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[f(h,0) - f(0,0)\right]$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{h^3}{h^2} - 0\right] = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[f(0,h) - f(0,0)\right]$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[0 - 0\right] = 0$$

Richtungsableitung:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[f((0,0)+h(v_1,v_2)) - f(0,0)\right]$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{(hv_1)^3}{(hv_1)^2 + (hv_2)^4} - 0\right]$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h^3}}{\cancel{h}\cdot\cancel{h^2}} \cdot \frac{v_1^3}{v_1^2 + h^2 v_2^4} = \frac{v_1^3}{v_1^2} = v_1 \neq 0$$

(ii) partiellen Ableitung:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[g(h,0) - g(0,0)\right]$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{0}{h^2} - 0\right] = 0 = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$$

Richtungsableitung:

$$\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[g(\vec{0} + h\vec{v}) - g(0,0)\right] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[g(hv_1, hv_2) - g(0,0)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{(hv_1)^2 \cdot |hv_2|^\alpha}{(hv_1)^2 + (hv_2)^6} - 0\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h^2}\cdot|h|^\alpha}{h\cdot\cancel{h^2}} \cdot \frac{v_1^2 \cdot |v_2|^\alpha}{v_1^2 + h^4 v_2^6}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|h|^\alpha}{h} \cdot \frac{v_1^2 \cdot |v_2|^\alpha}{v_1^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|h|^\alpha}{h} |v_2^\alpha| = \begin{cases} |v_2| & \text{für } \alpha = 1 \\ 0 & \text{für } \alpha > 1 \\ \text{existiert nicht} & \text{für } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

Für $\alpha \in]0,1[$ ist g im Punkt $(0,0)$ nicht totale differenzierbar.

Für $\alpha = 1$ gilt:

$$\langle \operatorname{grad} g(0,0), \vec{v} \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$= 0 \neq |v_2| = \frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0,0) \text{ im Fall } \alpha = 1$$

$\Longrightarrow$ g ist im $(0,0)$ für $\alpha = 1$ nicht totale differenzierbar

Für $\alpha > 1$ können wir betrachten für $\vec{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ das Fehlerglied:

$$r(\vec{h}) = g((0,0) + \vec{h}) - g(0,0) - g'(0,0) \cdot \vec{h}$$

$$= \frac{h_1^2 \cdot |h_2|^\alpha}{h_1^2 + h_2^6} - 0 - \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{h_1^2 \cdot |h_2|^\alpha}{h_1^2 + h_2^6}$$

$$\frac{|r(\vec{h})|}{\|\vec{h}\|} = \frac{h_1^2 \cdot |h_2|^\alpha}{\|\vec{h}\| (h_1^2 + h_2^6)} \leqslant \frac{h_1^2 \cdot \|\vec{h}\|^\alpha}{\|\vec{h}\| \cdot h_1^2} = \|\vec{h}\|^{\alpha - 1} \longrightarrow 0$$

für $\vec{h} \to (0,0)$
$\alpha > 1$

$\Longrightarrow$ g ist im $(0,0)$ für $\alpha > 1$ totale differenzierbar

Aufgabe 3.2

(i) $9 - y^2 > 0 \Rightarrow y^2 < 9 \Rightarrow -3 < y < 3$

$D_{max} = \mathbb{R} \times]-3,3[\times \mathbb{R}$

partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial \vec{f_1}}{\partial x} = 2e^{2x} \qquad \frac{\partial \vec{f_1}}{\partial y} = -\cos 3z \qquad \frac{\partial \vec{f_1}}{\partial z} = 3y \sin(3z)$$

$$\frac{\partial \vec{f_2}}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial \vec{f_2}}{\partial y} = \frac{-2y}{9 - y^2} \qquad \frac{\partial \vec{f_2}}{\partial z} = 0$$

Ableitungsmatrix:

$$\vec{f}'(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2x} & -\cos 3z & 3y\sin(3z) \\ 0 & \frac{-2y}{9-y^2} & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) $\vec{f}_1'(1,0,0) = \begin{pmatrix} 2e^2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\operatorname{grad} \vec{f}(1,0,0) = \begin{pmatrix} 2e^2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

die Richtung des steilsten Anstiegs: $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{(2e^2)^2+(-1)^2+0^2}} \begin{pmatrix} 2e^2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4e^4+1}} \begin{pmatrix} 2e^2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

die Richtungsableitung:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{v}}(1,0,0) = f'(1,0,0) \cdot \vec{v}$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(2e^2-2) = \frac{2}{\sqrt{5}}(e^2-1)$$