Laplace-Transformation

$e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a}$, $\boxed{\forall t>0}$

$f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s\cdot F(s)-f(0)$

$\int_0^t f(t)dt \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}\cdot F(s)$

Spannung über Widerstand, Spule und Kondensator

Widerstand: $u_R(t)=R\cdot i(t)$

Spule: $u_L(t)=L\cdot\frac{di_L(t)}{dt}$, es gilt $i_L(t=0)=0$

Kondensator: $i_C(t)=C\cdot\frac{du_C(t)}{dt} \Rightarrow u_C(t)=\frac{1}{C}\cdot\int_0^t i_C(t)\,dt+\underbrace{u_C(0)}_{=0}$

Impedanzen 阻抗

$Z_L=s\cdot L$

$Z_C=\frac{1}{s\cdot C}$

$Z_R=R$

z为阻抗、s为拉普拉斯变换参数

Reihenschaltung: $Z_{ges}=Z_1+Z_2+\dots+Z_n$

Parallelschaltung: $Z_{ges}=\frac{1}{\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\dots+\frac{1}{Z_n}}$

↳ bei zwei Bauteilen: $Z_{ges}=\frac{1}{\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}}=\frac{Z_1\cdot Z_2}{Z_1+Z_2}$

→ allgemein gilt dann: $U(s)=Z\cdot I(s)$

6. Tutorium : Laplace-Trafo, Netzwerke

Laplace-Trafo

$U(s)=\mathcal{L}[u(t)](s)=\int_0^\infty u(t)\cdot e^{-st}\,dt \quad (s=\sigma+j\omega,\ \sigma\neq 0)$

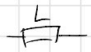
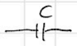
Fourier-Trafo

$U(j\omega)=\mathcal{F}[u(t)](j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt$

Laplace Korrespondenzen

Zeitbereich	S-Bereich
$\frac{d}{dt}u(t)$	$s\cdot U(s)-u(0)$
$\int u(t)\,dt$	$\frac{1}{s}\cdot U(s)$
$\delta(t)$	1
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

Passive Komponenten

	Spannung	komplexe Impedanzen
	$U_R=R\cdot i_R(t)$	$Z_R=R$
	$U_L=L\cdot\frac{d}{dt}i_L(t)$	$Z_L=s\cdot L$
	$U_C=\frac{1}{C}\cdot\int i_C(t)\,dt$	$Z_C=\frac{1}{sC}$

☆ Übertragungsfkt. $\mathcal{H}(s)\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}h(t)$

Technische Universität Berlin
Fakultät IV
Fachgebiet Nachrichtenübertragung
Prof. Dr.-Ing. Sikora

Elvira FLeig, Rolf Jongebloed

Rechenübung Signale & Systeme (WiSe 2023/2024)

Laplacetransformation, Netzwerke (6. Termin)

27.11 - 3.12.2023

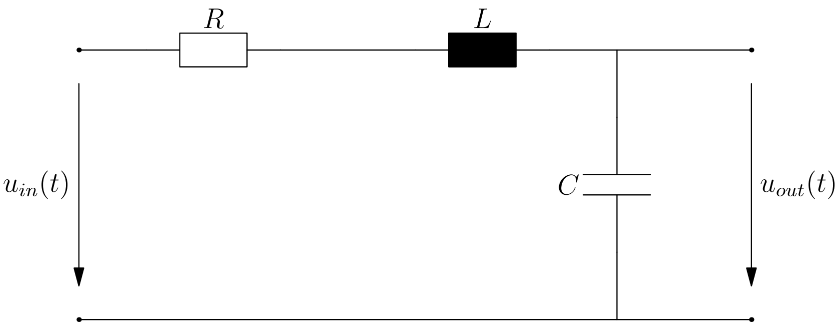
Hinweise

- Die Aufgabenblätter zur Rechenübung stehen jeweils vor dem jeweiligen Termin auf dem ISIS-Portal zum Download bereit.
- Aufgaben, die mit **[HA]** bzw. **[AK]** beginnen, sind Hausaufgaben bzw. alte Klausuraufgaben, die als Hausaufgabe bearbeitet werden sollen. Diese werden zusätzlich in den freiwilligen Tutorien vorgerechnet bzw. besprochen.

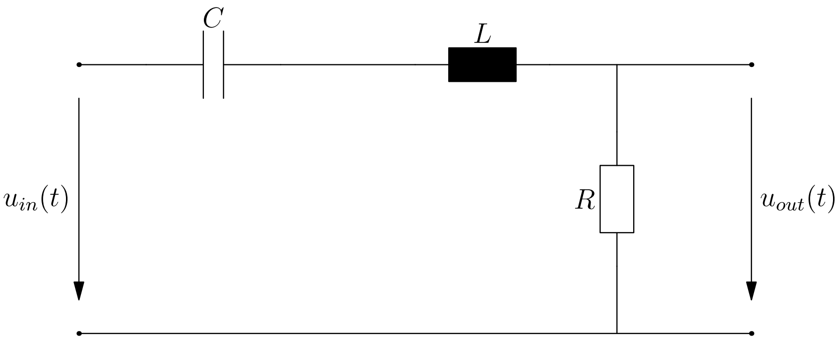
1 Laplacetransformation, Differentialgleichungen im Zeitbereich

1.1 Bestimme die Impulsantworten der folgenden Systeme durch Lösung der Zeitbereichsdifferentialgleichungen.

a)



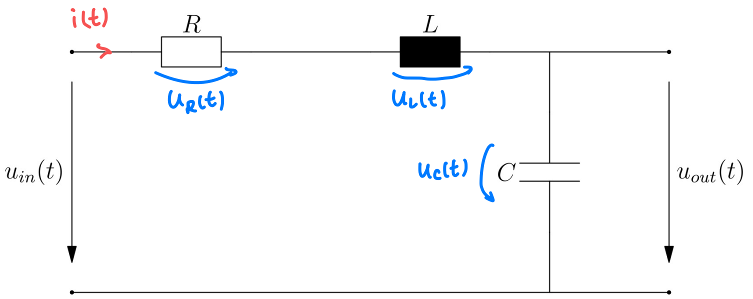
b) **[AK]:**



1.1 Bestimme die Impulsantworten der folgenden Systeme durch Lösung der Zeitbereichsdifferentialgleichungen.

[illegible] $u(t) = \delta(t)$

a)



$i(t) = i_R(t) = i_L(t) = i_C(t)$

$H(s) = \frac{U_{out}(s)}{U_{in}(s)}$ ●—○ $h(t)$

$u_{out}(t) = u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt$

Maschengleichung: $U_R(t) + U_L(t) + U_C(t) - u_{in}(t) = 0$

$u_{in}(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$

$u_{in}(t) = R\cdot i(t) + L\cdot\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\cdot\int_0^t i(t)dt$

$U_{out}(s) = \frac{1}{C}\cdot\frac{1}{S}\cdot I(s)$ i(t)的拉普拉斯变换 U_{out} 是C的电压

$U_{in}(s) = R\cdot I(s) + L\cdot(s\cdot I(s) - \underbrace{i_L(0)}_{=0}) + \frac{1}{C}\cdot\frac{1}{S}\cdot I(s)$

$= I(s)\cdot\left(R + s\cdot L + \frac{1}{s\cdot C}\right)$

Laplace-Transformation

e^{at} ○—● $\frac{1}{s-a}$, $\boxed{\forall t>0}$

$f'(t)$ ○—● $s\cdot F(s) - f(0)$

$\int_0^t f(t)dt$ ○—● $\frac{1}{s}\cdot F(s)$

$H(s) = \frac{U_{out}(s)}{U_{in}(s)} = \frac{\frac{1}{sC}\cdot\cancel{I(s)}}{\cancel{I(s)}\cdot\left(R + s\cdot L + \frac{1}{sC}\right)}\cdot\frac{sC}{sC} = \frac{1}{sRC + s^2\cdot LC + 1}\cdot\frac{\frac{1}{LC}}{\frac{1}{LC}}$

$= \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + s\cdot\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$

↑ Normalform

$H(s) = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-b}$ => Partialbruchzerlegung

接下来，为了简化传递函数并找到冲激响应，进行了部分分式展开。然后计算了传递函数的极点，这些极点决定了系统的自然响应。对于这个二阶系统，极点是：

$s^2 + s\cdot\frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = 0$

$(s + \frac{R}{2L})^2 = (\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}$

$s = \pm\sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}} - \frac{R}{2L}$

Polstellen H(s): $s_{x1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$

$s_{x2} = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$

$H(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{(s-s_{x1})(s-s_{x2})} = \frac{A}{s-s_{x1}} + \frac{B}{s-s_{x2}}$

$\frac{1}{LC} = A(s-s_{x2}) + B\cdot(s-s_{x1})$

$s = s_{x1}$ einsetzen

$\frac{1}{LC} = A\cdot(s_{x1} - s_{x2})$

$\frac{1}{LC} = A\cdot\left(-\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} + \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\right)$

$\frac{1}{LC} = A\cdot 2\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$

$A = \frac{1}{2.LC.\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}}$

analog: $s = s_{x2}$ einsetzen:

$$\frac{1}{LC} = B(s_{x2}-s_{x1})$$

$$B = \frac{1}{-2LC\cdot\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}}$$

$$H(s) = \frac{A}{s-s_{x1}} + \frac{B}{s-s_{x2}}$$

analog: $s = s_{x2}$ einsetzen:

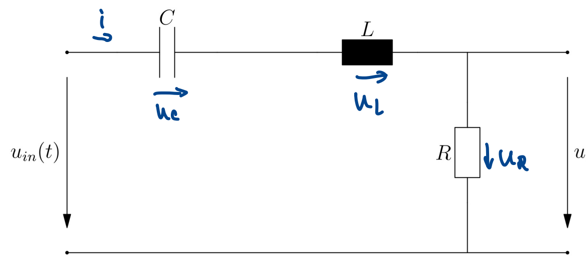
$$\frac{1}{LC} = B(s_{x2}-s_{x1})$$

$$B = \frac{1}{-2LC\cdot\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}}$$

$$H(s) = \frac{A}{s-s_{x1}} + \frac{B}{s-s_{x2}}$$

$$h(t) = A\cdot e^{s_{x1}\cdot t} + B\cdot e^{s_{x2}\cdot t}, \quad \forall t>0$$

b) **[AK]:**



ges : h(t)

$$\underset{=\delta(t)}{u(t)} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

= Impulsantwort

wenn u(t) ein Deltaimpuls ist

☆ Übergangsfunktion $H(s) \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\bullet\!\!-\!\!\circ} h(t)$

$$\boxed{H(s) = \frac{U_{out}(s)}{U_{in}(s)} = \frac{U_{out}(s)}{1} = U_{out}(s)}$$

也可用a)的方法

$$U_{in}(t) = U_c + U_L + U_R = \frac{1}{C}\int i(t)dt + L\cdot\frac{d}{dt}i(t) + R\cdot i(t)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathcal{L}$$

$U_{in}(s) = \frac{1}{C}\cdot\frac{1}{s}I(t) + L\cdot s\cdot I(t) + R\cdot I(s) = 1$ <u>da Uin ein Deltaimpuls sein soll ($\delta(t) \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} 1$)</u>

$$I(s)\cdot\left(Ls + \frac{1}{sC} + R\right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad I(s) = \frac{1}{Ls+\frac{1}{sC}+R} = \frac{sC}{1+CLs^2+RCs}$$

$$U_{out}(s) = R\cdot I(s) = \frac{sCR}{1+CLs^2+RCs} = \frac{\frac{sR}{L}}{s^2+\frac{Rs}{L}+\frac{1}{CL}} \overset{PBZ}{=} \frac{A}{(s-s_{x1})} + \frac{B}{(s-s_{x2})}$$

$$s^2+\frac{R}{L}\cdot s+\frac{1}{CL} = 0 \Rightarrow \quad s_{x1}, s_{x2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{CL}}$$

$$\frac{sR}{L} = A(s-s_{x1}) + B(s-s_{x2})$$

$s = s_{x1}$ einsetzen: $\frac{s_{x1}R}{L} = A(s_{x1}-s_{x2}) \Rightarrow A = \frac{-\frac{R}{2L}+\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{CL}}}{2\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{CL}}}\cdot\frac{R}{L}$

$$H(s) = \frac{A}{(s-s_{x1})} + \frac{B}{(s-s_{x2})}$$

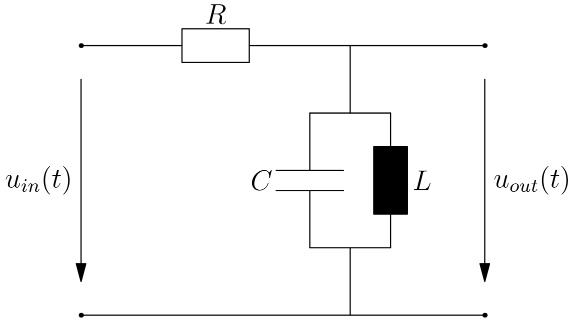
$$B = \frac{\frac{R}{2L}+\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{CL}}}{2\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{CL}}}\cdot\frac{R}{L}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ\ \mathcal{L}^{-1}$$

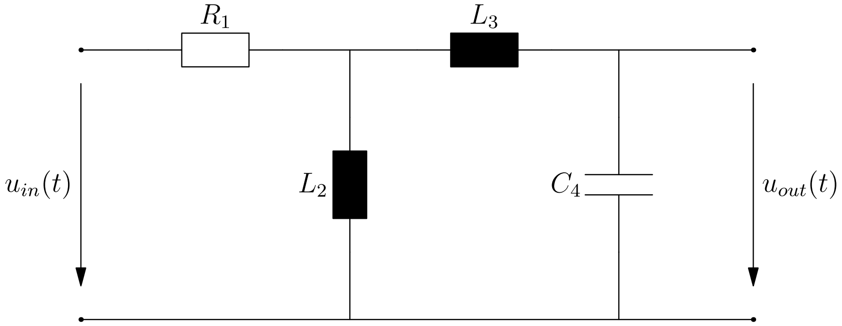
$$h(t) = Ae^{s_{x1}t} + B\cdot e^{s_{x2}t}$$

2 Übertragungsfunktion, komplexe Impedanzen

2.1 Berechne die Impulsantwort des folgenden Systems durch Rücktransformation der Übertragungsfunktion.



2.2 [AK]: Gegeben sei folgendes Netzwerk.



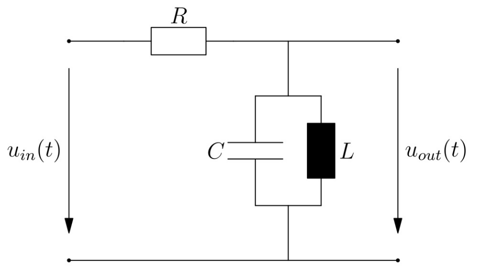
a) Bestimme die Gesamtübertragungsfunktion $H(s)$ des gegebenen Netzwerks.

b) Gegeben seien folgende Bauteilwerte: $R_1 = \frac{125}{2}\Omega$, $L_2 = 125\text{H}$, $L_3 = 25\text{H}$, $C_4 = 0.01\text{F}$
Berechne die Polstellen (s_1,s_2,s_3) der Übertragungsfunktion. Gib sie in aufsteigender Reihenfolge an (erst nach Realteil, dann nach Imaginärteil ordnen).

c) Berechne nun die Impulsantwort und gib die Werte bei $t_1 = 0.10\text{s}$, $t_2 = 1.92\text{s}$, $t_3 = 3.74\text{s}$, $t_4 = 5.48\text{s}$ und $t_5 = 7.30\text{s}$ an.

2 Übertragungsfunktion, komplexe Impedanzen

2.1 Berechne die Impulsantwort des folgenden Systems durch Rücktransformation der Übertragungsfunktion.



$$H(S) = \frac{U_{out}(S)}{U_{in}(S)} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad h(t)$$

$$U_{out}(S) = Z_{C,L} \cdot I(S)$$

$$U_{in}(S) = Z_{R,C,L} \cdot I(S)$$

$$Z_{C,L} = Z_C /\!/ Z_L = \frac{\frac{1}{SC} \cdot SL}{\frac{1}{SC} + SL} = \frac{SL}{S^2LC+1}$$

$$Z_{R,C,L} = Z_R + Z_{C,L} = R + \frac{SL}{S^2LC+1} = \frac{S^2RLC+SL+R}{S^2LC+1}$$

$$H(s) = \frac{U_{out}(s)}{U_{in}(s)} = \frac{\frac{SL}{S^2LC+1}}{\frac{S^2RLC+SL+R}{S^2LC+1}} = \frac{SL}{S^2RLC+SL+R} \cdot \frac{\frac{1}{RLC}}{\frac{1}{RLC}} \overset{\text{Normalform}}{=} \frac{\frac{S}{RC}}{S^2 + S \cdot \frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}}$$

$$H(s) = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-b}$$

Polstellen: $S_{x1/2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$

$$H(s) = \frac{S \cdot \frac{1}{RC}}{(s-S_{x1})(S-S_{x2})} = \frac{A}{s-S_{x1}} + \frac{B}{s-S_{x2}}$$

$$\frac{S}{RC} = A(s-S_{x2}) + B(s-S_{x1})$$

$s = S_{x1}$ einsetzen: $A(S_{x1} - S_{x2}) = \frac{S_{x1}}{RC} \Rightarrow A \cdot 2\sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \left(-\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\right) \cdot \frac{1}{RC}$

$$\Rightarrow A = \frac{-\frac{1}{2R^2C^2}}{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}} + \frac{1}{2RC}$$

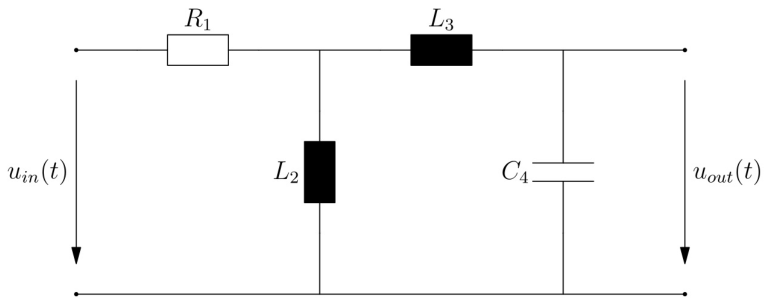
$s = S_{x2}$ einsetzen: $B = \frac{\frac{1}{2R^2C^2}}{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}} + \frac{1}{2RC}$

$$H(s) = \frac{A}{s-S_{x1}} + \frac{B}{s-S_{x2}}$$

$$\bullet$$
$$|$$
$$\circ$$

$$h(t) = A e^{S_{x1} \cdot t} + B \cdot e^{S_{x2} \cdot t} \quad , \forall t > 0$$

2.2 [AK]: Gegeben sei folgendes Netzwerk.

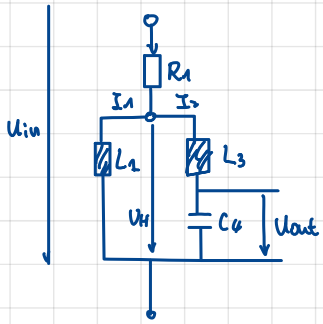


a) Bestimme die Gesamtübertragungsfunktion $H(s)$ des gegebenen Netzwerks.

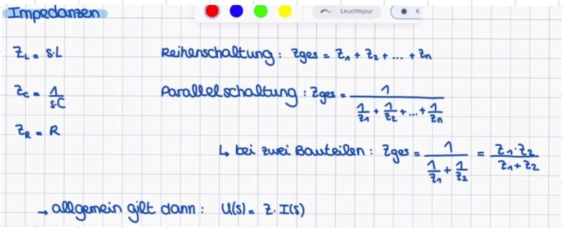
b) Gegeben seien folgende Bauteilwerte: $R_1 = \frac{125}{2}\Omega$, $L_2 = 125\text{H}$, $L_3 = 25\text{H}$, $C_4 = 0.01\text{F}$
Berechne die Polstellen (s_1,s_2,s_3) der Übertragungsfunktion. Gib sie in aufsteigender Reihenfolge an (erst nach Realteil, dann nach Imaginärteil ordnen).

c) Berechne nun die Impulsantwort und gib die Werte bei $t_1 = 0.10\text{s}$, $t_2 = 1.92\text{s}$, $t_3 = 3.74\text{s}$, $t_4 = 5.48\text{s}$ und $t_5 = 7.30\text{s}$ an.

a)



$$U_H = I_1 \cdot Z_{L2}$$
$$= I_2 \cdot Z_{L3,C4}$$
$$= I \cdot Z_{L2,L3,C4}$$



Impedanzen

$Z_L = s \cdot L$

$Z_C = \frac{1}{s \cdot C}$

$Z_R = R$

Reihenschaltung: $Z_{ges} = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$

Parallelschaltung: $Z_{ges} = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \ldots + \frac{1}{Z_n}}$

↳ bei zwei Bauteilen: $Z_{ges} = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$

→ allgemein gilt dann: $U(s) = Z \cdot I(s)$

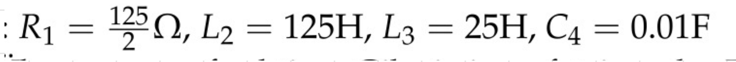
$$H(s) = \frac{U_{out}(s)}{U_{in}(s)} = \frac{Z_{C4} \cdot I_2}{Z_{R1L2L3C4} \cdot I} \cdot \frac{U_H}{U_H} = \frac{Z_{C4} \cdot \cancel{I_2}}{Z_{R1L2L3C4} \cdot \cancel{I}} \cdot \frac{\cancel{I} \cdot Z_{L2L3C4}}{\cancel{I_2} \cdot Z_{L3C4}}$$

$$Z_{R1L2L3C4} = Z_{R1} + Z_{L2L3C4} = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{sL_2} + \left(\frac{1}{sL_3 + \frac{1}{sC_4}}\right)} = R_1 + \frac{sL_2\left(sL_3 + \frac{1}{sC_4}\right)}{sL_2 + sL_3 + \frac{1}{sC_4}}$$

$$H(s) = \frac{\frac{1}{sC_4}}{R_1 + \frac{sL_2\left(sL_3 + \frac{1}{sC_4}\right)}{sL_2 + sL_3 + \frac{1}{sC_4}}} \cdot \frac{sL_2\cancel{\left(sL_3 + \frac{1}{sC_4}\right)}}{sL_2 + sL_3 + \frac{1}{sC_4}} \cdot \frac{1}{\cancel{sL_3 + \frac{1}{sC_4}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{sC_4} \cdot sL_2}{R_1 sL_2 + R_1 sL_3 + R_1/sC_4 + s^2 L_2 L_3 + L_2/C_4}$$

$$= \frac{sL_2}{s^2 R_1 L_1 C_4 + s^2 R_1 L_3 C_4 + R_1 + s^3 L_2 L_3 C_4 + L_2 s}$$



$: R_1 = \frac{125}{2}\Omega, L_2 = 125\text{H}, L_3 = 25\text{H}, C_4 = 0.01\text{F}$

b)

$$H_s = \frac{\cancel{125}s}{\frac{\cancel{125 \cdot 25}}{100}s^3 + \frac{\cancel{125}}{200} \cdot 150s^2 + \cancel{125}s + \frac{\cancel{125}}{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{4s}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2}$$

$$s+1 \;\big|\; s^3 + 3s^2 + 4s + 2 = (s+1)(s^2 + 2s + 2) = 0 \qquad s^2 + 2s + 2$$
$$s^3 + s^2$$
$$2s^2 + 4s$$
$$2s^2 + 2s$$
$$2s + 2$$

$$s_1 = -1$$

$$s_{2,3} = -1 \pm \sqrt{-1}$$
$$= -1 \pm \sqrt{j^2} = -1 \pm j$$

$$H(s) = \frac{4s}{(s+1)(s+1-j)(s+1+j)}$$

c) $H(s) \xrightarrow{L^{-1}} h(t)$ Impulsantwort

$$H(s) = -4\,\frac{1}{s+1} + \frac{2-2j}{s+1-j} + \frac{2+2j}{s+1+j}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ$$

$$h(t) = -4e^{-t} + (2-2j)e^{(-1+j)t} + (2+2j)\,e^{(-1-j)t}$$

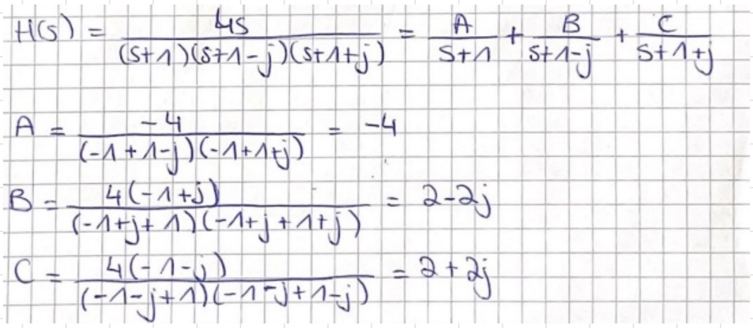
$$= e^{-t}(-4 + 2e^{jt} - 2je^{jt} + 2e^{-jt} + 2je^{-jt})$$

$$= e^{-4}(-4 + 4\cos(t) - 2j\cdot(2j\sin t))$$

$$= e^{-4}(-4 + 4\cos t + 4\sin t)$$

$h(t_1 = 0{,}10s) = 0{,}343$

$h(t_2 = 1{,}925) = -0{,}236$



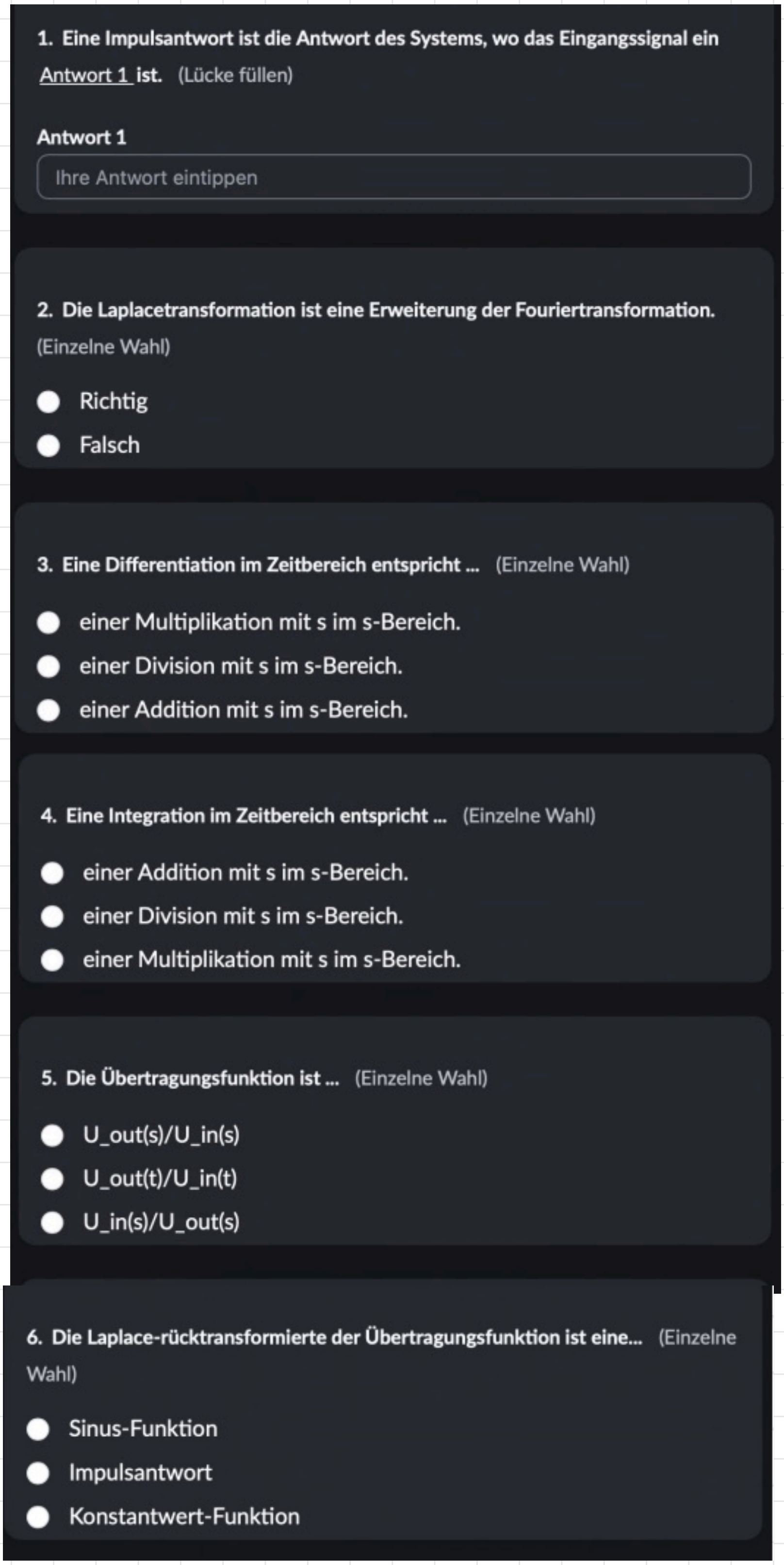
$$H(s) = \frac{4s}{(s+1)(s+1-j)(s+1+j)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+1-j} + \frac{C}{s+1+j}$$

$$A = \frac{-4}{(-1+1-j)(-1+1+j)} = -4$$

$$B = \frac{4(-1+j)}{(-1+j+1)(-1+j+1+j)} = 2-2j$$

$$C = \frac{4(-1-j)}{(-1-j+1)(-1-j+1-j)} = 2+2j$$

$$\boxed{\begin{aligned} e^{jt} - e^{-jt} &= 2j\sin t \\ e^{jt} + e^{-jt} &= 2\cos t \end{aligned}}$$



1. Eine Impulsantwort ist die Antwort des Systems, wo das Eingangssignal ein Antwort 1 ist. (Lücke füllen)

Antwort 1

Ihre Antwort eintippen

2. Die Laplacetransformation ist eine Erweiterung der Fouriertransformation. (Einzelne Wahl)

● Richtig
● Falsch

3. Eine Differentiation im Zeitbereich entspricht ... (Einzelne Wahl)

● einer Multiplikation mit s im s-Bereich.
● einer Division mit s im s-Bereich.
● einer Addition mit s im s-Bereich.

4. Eine Integration im Zeitbereich entspricht ... (Einzelne Wahl)

● einer Addition mit s im s-Bereich.
● einer Division mit s im s-Bereich.
● einer Multiplikation mit s im s-Bereich.

5. Die Übertragungsfunktion ist ... (Einzelne Wahl)

● U_out(s)/U_in(s)
● U_out(t)/U_in(t)
● U_in(s)/U_out(s)

6. Die Laplace-rücktransformierte der Übertragungsfunktion ist eine... (Einzelne Wahl)

● Sinus-Funktion
● Impulsantwort
● Konstantwert-Funktion

Lösung : 1. Deltaimpuls 2. Richtig 3. Multiplikation
4. Division 5. Uout (s) / Uin (s)
6. Impulsantwort