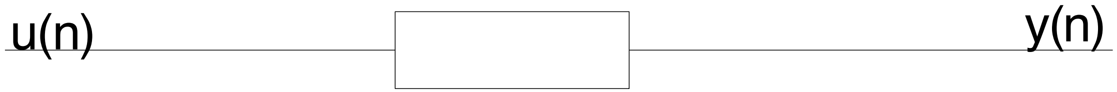
16.

Zeitdiskrete Lineare Systeme

16.

Zeitdiskrete Lineare Systeme

Differenzengleichung und Impulsantwort



zeitdiskretes Eingangssignal, beschrieben durch Eingangsfolge u(n)

zeitdiskretes Ausgangssignal, beschrieben durch Ausgangsfolge y(n)

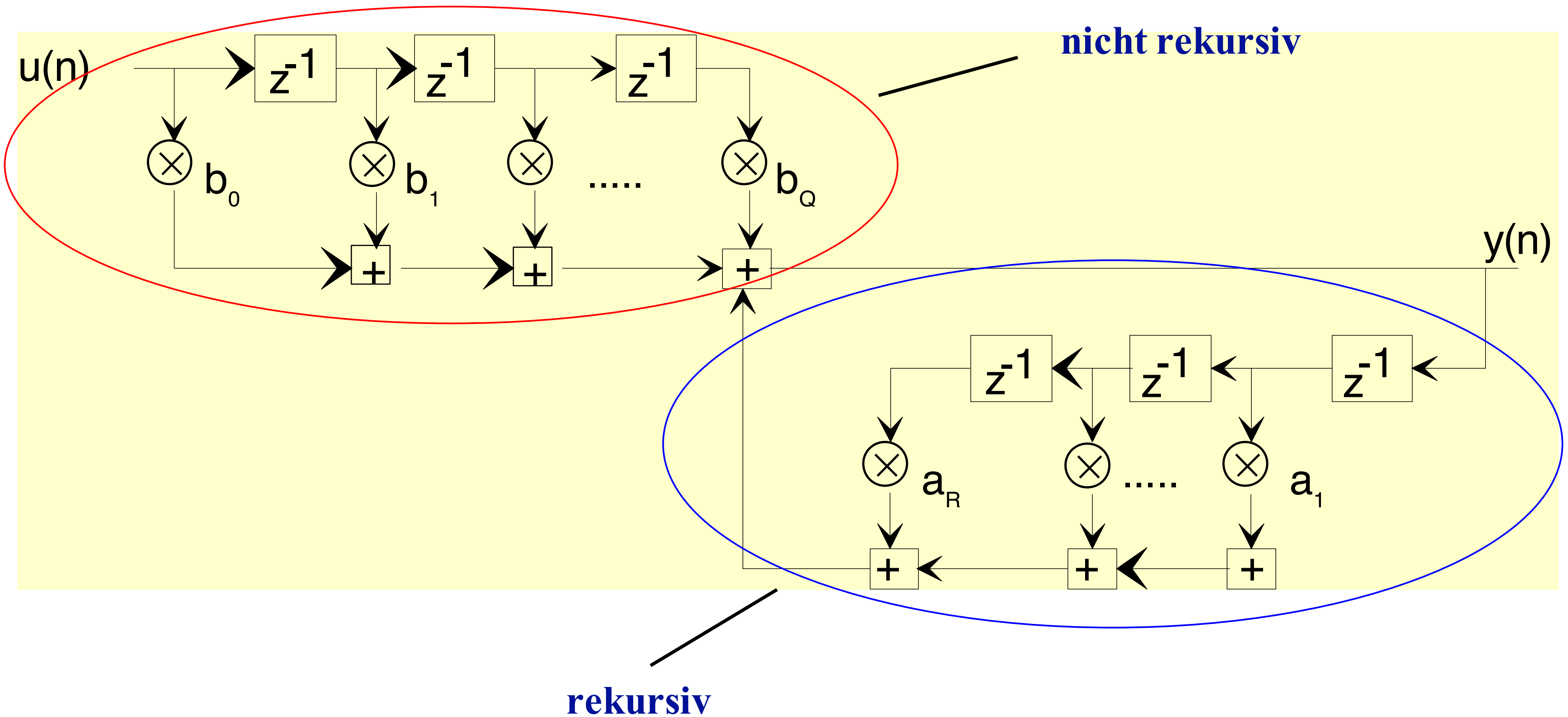
$$y(n) = \sum_{q=0}^{Q} b_q u(n-q) + \sum_{r=1}^{R} a_r y(n-r)$$

$\longrightarrow$ ***„Differenzengleichung“***

Zeitdiskrete lineare Filter

Direkte Struktur:

$$y(n)=\sum_{q=0}^{Q} b_q u(n-q)+\sum_{r=1}^{R} a_r y(n-r)$$



Impuls- und Sprungantwort

Zeitdiskrete Übertragungssysteme werden durch eine eindeutige Transformationsvorschrift $\mathbf{T}\{.\}$ gekennzeichnet

$$y(n) = \mathbf{T}\{u(n)\}$$

Impulsantwort

$$h(n) := \mathbf{T}\{\delta(n)\}$$

Die Antwort eines Systems auf den diskreten Deltaimpuls $\delta(n)$ ist die *Stoß- oder Impulsantwort* $h(n)$.

Sprungantwort

$$h_\sigma(n) := \mathbf{T}\{\sigma(n)\}$$

Die Antwort eines Systems auf die diskrete Sprungfolge $\sigma(n)$ ist die Sprungantwort $h_\sigma(n)$.

Systemeigenschaften

Linearität

Ein diskretes System ist linear, wenn eine gewichtete Überlagerung von Eingangsfolgen zu einer gewichteten Überlagerung der Einzelantworten führt. → *Superpositionsprinzip*

$$T\{a u(n)+b v(n)\}=aT\{u(n)\}+bT\{v(n)\}$$

Zeitinvarianz

Die Signalform der Systemantwort hängt nicht vom Zeitpunkt des Anlegens einer Eingangsfolge ab:

$$T\{u(n)\}=y(n); \qquad T\{u(n-q)\}=y(n-q)$$

Kausalität

Ein diskretes System ist kausal, wenn:

$$h(n)=0 \qquad \text{für } n<0$$

Stabilität

Ein diskretes System ist stabil, wenn die Impulsantwort absolut summierbar ist. Dann ergibt sich bei einer beschränkten Eingangsfolge eine beschränke Ausgangsfolge.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|<\infty$$

Systemfunktion

- **Die z-Transformierte der Impulsantwort nennt man Systemfunktion.**
- **Zeitdiskrete lineare Systeme können durch die Systemfunktion beschrieben werden**

$$H(z) = \mathbf{Z}\{h(n)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot z^{-k}$$

Systemfunktion

Zusammenhang mit H(jω):

$$\mathrm{H}(\mathrm{j}\Omega) = \mathrm{H}(\mathrm{z})\Big|_{\mathrm{z}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}}$$

$$\mathrm{Y}(\mathrm{z}) = \mathrm{U}(\mathrm{z})\ \mathrm{H}(\mathrm{z})$$

Systemfunktion

$$y(n) = \sum_{q=0}^{Q} b_q u(n-q) + \sum_{r=1}^{R} a_r y(n-r)$$ Differenzengleichung

z-Tranformation:

$$x(n-k) \leftrightarrow z^{-k} X(z)$$

Verschiebungssatz d. z-Transformation

$$Y(z) = U(z)\sum_{q=0}^{Q} b_q z^{-q} + Y(z)\sum_{r=1}^{R} a_r z^{-r} = \frac{U(z)\sum_{q=0}^{Q} b_q z^{-q}}{1 - \sum_{r=1}^{R} a_r z^{-r}}$$

Pol-Nullstellen-Darstellung

$$y(n) = \sum_{q=0}^{Q} b_q u(n-q) + \sum_{r=1}^{R} a_r y(n-r)$$

Differenzengleichung

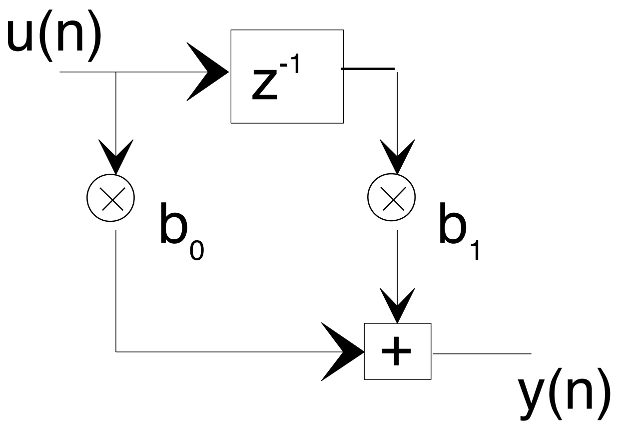
$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{q=0}^{Q} b_q z^{-q}}{1 - \sum_{r=1}^{R} a_r z^{-r}} = \frac{z^{-Q} b_0 \sum_{q=0}^{Q} \frac{b_q}{b_0} z^{Q-q}}{z^{-R}\left(z^R - \sum_{r=1}^{R} a_r z^{R-r}\right)}$$

$$= z^{R-Q} b_0 \frac{\prod_{q=1}^{Q} \left(z - z_{0q}\right)}{\prod_{r=1}^{R} \left(z - z_{xr}\right)}$$

Nullstellen

Polstellen

Beispiel: Summenfilter



- Nichtrekursives zeitdiskretes Filter
- Ordnung Q=1
- $b_0 = b_1 = 1$

$$h(n) = \sum_{q=0}^{Q} b_q \, \delta(n-q) = \delta(n) + \delta(n-1)$$

$$\boxed{H(z) = 1 + z^{-1} = \frac{z+1}{z}}$$

Pol-/Nullstellen:

$$z_{01} = -1$$

$$z_{x1} = 0$$

Graphische Interpretation: Frequenzgang

$$H(z) = z^{R-Q} b_0 \frac{\prod_{q=1}^{Q} \left(z - z_{0q}\right)}{\prod_{r=1}^{R} \left(z - z_{xr}\right)}$$

$$\boxed{H(j\Omega) = H(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}}}$$

Frequenzgang

$$H(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{U(j\Omega)} = b_0 \; e^{j(R-Q)\Omega} \frac{\prod_{q=1}^{Q} \left(e^{j\Omega} - z_{0q}\right)}{\prod_{r=1}^{R} \left(e^{j\Omega} - z_{xr}\right)}$$

Amplitudengang

$$A(\Omega) = \left|H(j\Omega)\right| = \left|b_0\right| \frac{\prod_{q=1}^{Q} \left|e^{j\Omega} - z_{0q}\right|}{\prod_{r=1}^{R} \left|e^{j\Omega} - z_{xr}\right|} = \left|b_0\right| \frac{\prod_{q=1}^{Q} d_{0q}}{\prod_{r=1}^{R} d_{xr}}$$

Der Amplitudengang bei der Frequenz Ω ergibt sich als Quotient

- der Produkte der Abstände d_{0q} von den Nullstellen
- und der Produkte der Abstände d_{xr} von den Polen

zu dem Ω-Aufpunkt.

Phasengang

$$H(j\Omega) = A(\Omega)\, e^{j\varphi(\Omega)} = b_0 \frac{\prod_{q=1}^{Q} \left| e^{j\Omega} - z_{0q} \right| e^{j\varphi_{0q}}}{\prod_{r=1}^{R} \left| e^{j\Omega} - z_{xr} \right| e^{j\varphi_{xr}}}$$

Phasenwinkel der Übertragungsfunktion

$$\boxed{\varphi(\Omega) := \arg\left\{H(j\Omega)\right\} = (R-Q)\cdot\Omega + \sum_{q=0}^{Q} \varphi_{0q} - \sum_{r=0}^{R} \varphi_{xr}}$$

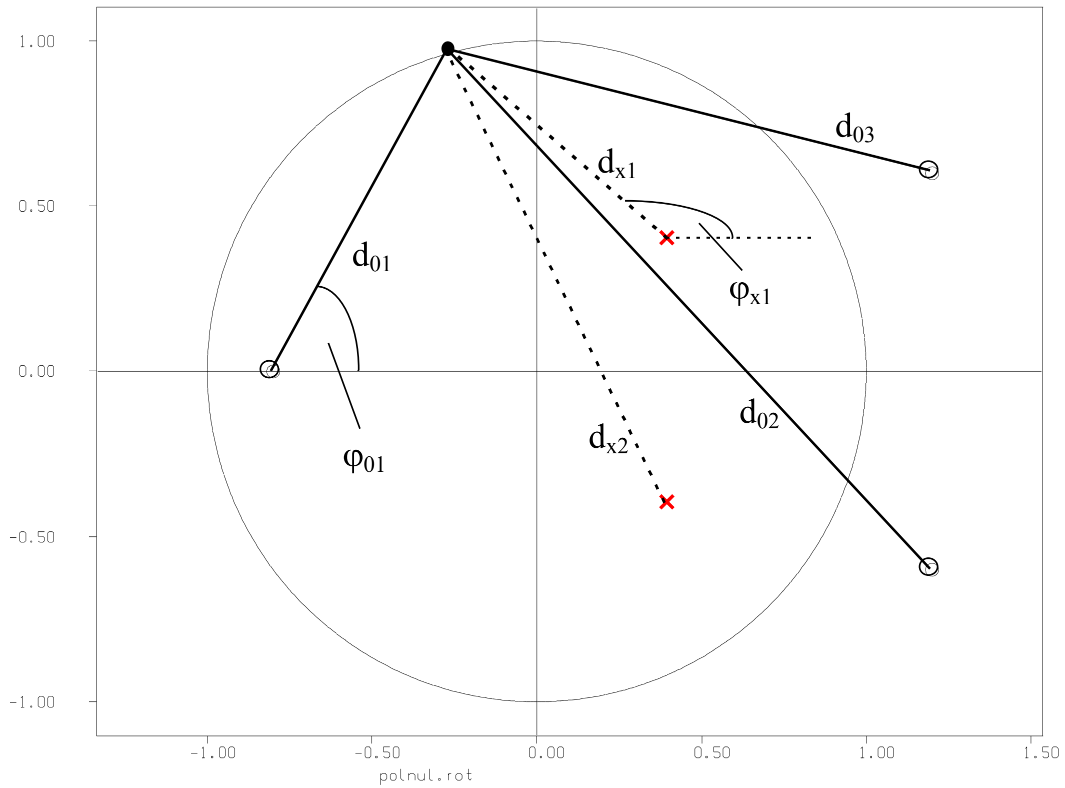
für R=Q, also die gleiche Anzahl an Pol- und Nullstellen, ergibt sich:

$$\varphi(\Omega) = \sum_{q=1}^{Q} \varphi_{0q} - \sum_{r=1}^{R} \varphi_{xr}$$

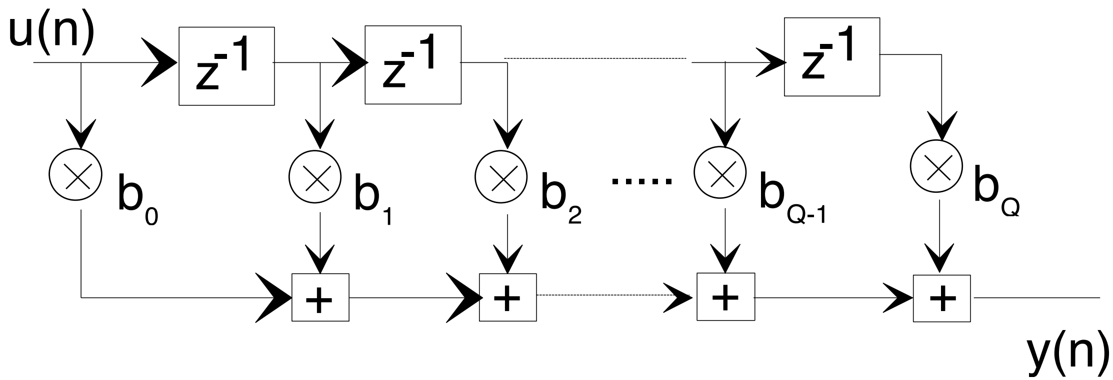
Phasengang: Beispiel

$$A(\Omega) = |b_0| \frac{d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03}}{d_{x1} \cdot d_{x2}}$$

$$\varphi(\Omega) = \varphi_{01} + \varphi_{02} + \varphi_{03} - \varphi_{x1} - \varphi_{x2} - \Omega$$



Nichtrekursive zeitdiskrete Filter (FIR)



$$y(n) = \sum_{q=0}^{Q} b_q \, u(n-q)$$

$$h(n) = \sum_{q=0}^{Q} b_q \, \delta(n-q)$$

Die Impulsantwort nicht rekursiver Filter ist endlich

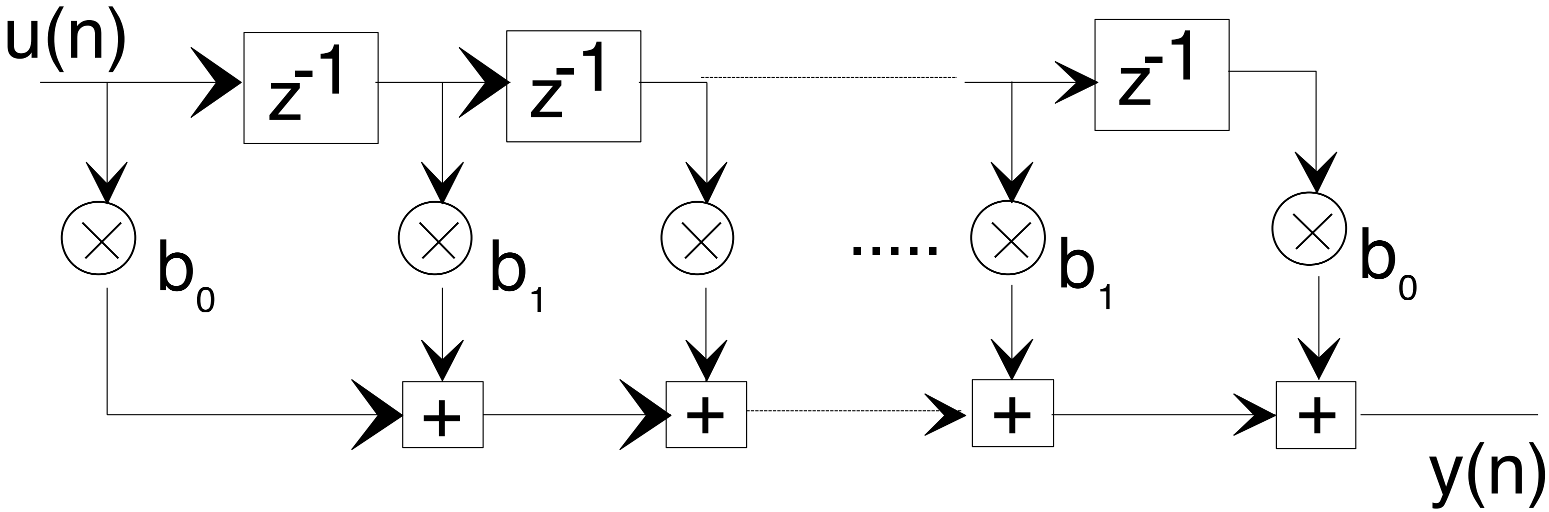
$\longrightarrow$ **FIR-Filter (finite impulse response)**

- **FIR-Filter sind immer stabil**
- **Linearphasige Filter können realisiert werden**
- **Polstellen nur im Ursprung**

FIR: Filter linearer Phase

lineare Phase: Phasen- und Gruppenlaufzeit müssen konstant sein

Ansatz:
Impulsantwort symmetrisch/antisymmetrisch zu Q/2



$$h(n) = h(Q - n) \quad \text{oder} \quad h(n) = - h(Q - n)$$

FIR: Filter linearer Phase (weiter)

$$H(j\Omega)=\sum_{q=0}^{Q} b_q e^{-jq\Omega} = e^{-jQ\Omega/2}\sum_{q=0}^{Q}\left(b_q e^{-jq\Omega} e^{jQ\Omega/2}\right)$$

$$= e^{-jQ\Omega/2}\begin{bmatrix} b_0 e^{j\Omega Q/2} + b_1 e^{j\Omega(Q/2-1)} + b_2 e^{j\Omega(Q/2-2)} + \ldots \\ \ldots + b_{Q-2} e^{j\Omega(2-Q/2)} + b_{Q-1} e^{j\Omega(1-Q/2)} + b_Q e^{j\Omega(-Q/2)} \end{bmatrix}$$

Symmetrie der Filterkoeffizienten

$$\mathbf{b_0 = b_q}$$

$$= e^{-jQ\Omega/2}\begin{bmatrix} b_0 (e^{j\Omega Q/2} + e^{j\Omega(-Q/2)}) + b_1 (e^{j\Omega(Q/2-1)} + e^{j\Omega(1-Q/2)}) \\ + b_2 (e^{j\Omega(Q/2-2)} + e^{j\Omega(2-Q/2)}) + \ldots \end{bmatrix}$$

$$= 2e^{-jQ\Omega/2}\left[b_0 \cos\left(\Omega\frac{Q}{2}\right) + b_1 \cos\left(\Omega\left(\frac{Q}{2}-1\right)\right) + \right.$$

$$\left. + b_2 \cos\left(\Omega\left(\frac{Q}{2}-2\right)\right) + \ldots \right]$$

FIR: Filter linearer Phase (weiter)

$$\varphi(\Omega) = -\frac{Q}{2}\Omega$$

(da der Klammerausdruck reell ist)

$$t_{ph} = t_{gr} = \frac{\varphi(\Omega)}{\Omega} = -\frac{Q}{2}$$

konstant

FIR-Filter mit symmetrischer, oder antisymmetrischer Impulsantwort haben eine lineare Phase!

Die Nullstellen liegen spiegelbildlich zum Einheitskreis.
Zu jeder Nullstelle z_0 gehört eine Nullstelle:

$$\boxed{z_0' = \frac{1}{z_0^*}}$$

FIR: Linearphasigkeit-Nullstellen

$$H(z) = \sum_{k=0}^{Q} h(k)\, z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{Q} h(Q-k)\, z^{-k} \qquad mit\;\; l = Q-k$$

$$= \sum_{l=Q}^{0} h(l)\, z^{l} z^{-Q} = z^{-Q} \sum_{l=Q}^{0} h(l)\, z^{l}$$

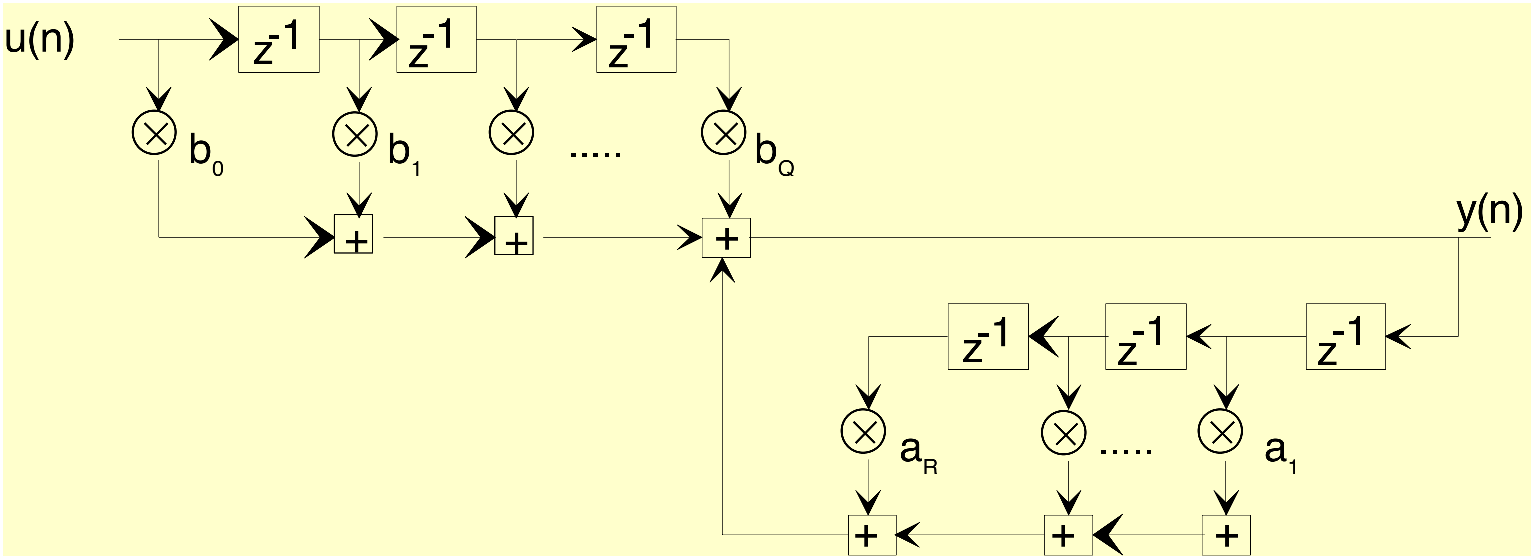
$$= z^{-Q} H(z^{-1})$$

Wenn $H(z_0)=0$ ist dann muss auch $H(z_0^{-1})=0$ sein.
Mit $z_0=re^{j\varphi}$ folgt die Spiegelsymmetrie zum Einheitskreis!

Rekursive Filter

$$y(n) = \sum_{q=0}^{Q} b_q u(n-q) + \sum_{r=1}^{R} a_r y(n-r)$$

Differenzengleichung



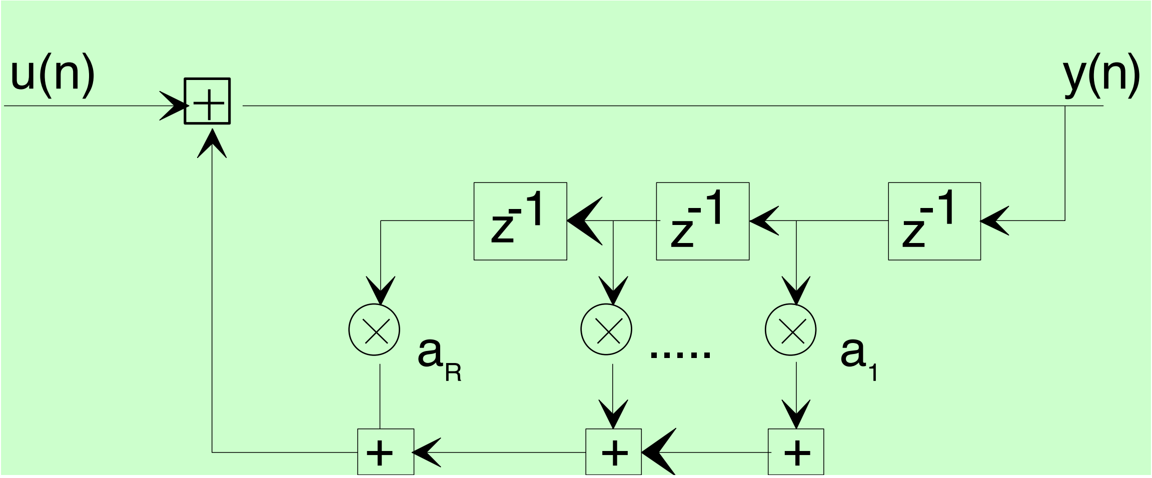
Infinite Impulse Response – IIR Filter

IIR - Filter: Eigenschaften

- Polstellen nicht nur im Ursprung
- Stabil, wenn der Einheitskreis im Konvergenzbereich liegt
- bei kausalen Systemen:
  - Konvergenzbereich außerhalb eines Kreises, mit dem Radius der am weitesten vom Ursprung entfernten Polstelle
  - Stabil, wenn alle Polstellen innerhalb des Einheitskreises
  - bedingte Stabilität bei Polstellen auf dem EK

·极点不仅在原点
·当单位圆位于收敛区域时稳定
·对于因果系统:
  - 收敛区域在远离原点最远的极点半径之外的圆外
  - 所有极点在单位圆内时稳定
  - 当极点位于单位圆上时稳定性有条件

Rein Rekursive Filter



$$y(n) = u(n) + \sum_{r=1}^{R} a_r y(n-r)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{1 - \sum_{r=1}^{R} a_r z^{-r}} = \frac{z^R}{\prod_{r=1}^{R} (z - z_{xr})}$$

Rein rekursive Filter

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{1 - \sum_{r=1}^{R} a_r z^{-r}} = \frac{z^R}{\prod_{r=1}^{R} (z - z_{xr})}$$

- IIR – Filter
  - stabil, wenn der EK im Konvergenzbereich liegt
    - d.h. für kausale Systeme:
      stabil, wenn alle Polstellen innerhalb d. EK

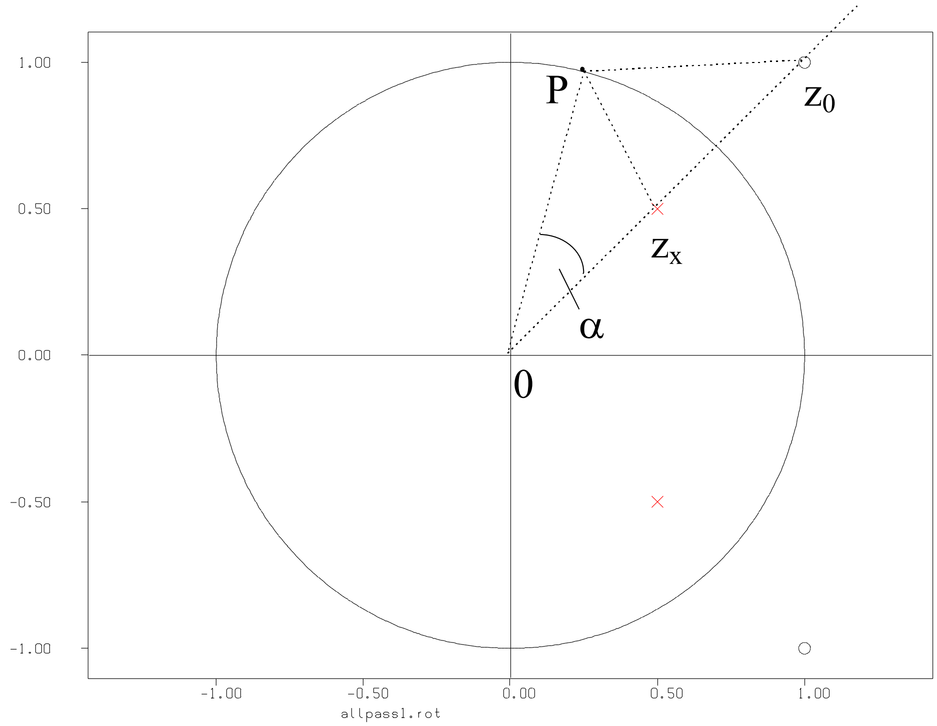
- Alle Nullstellen im Ursprung
- Linearphasigkeit nicht realisierbar
- Allpassverhalten realisierbar

- IIR - 滤波器
- 当单位圆位于收敛区域时稳定
  - 对于因果系统：
- 所有极点在单位圆内时稳定
  - 所有零点在原点
  - 无法实现线性相位特性
  - 可以实现全通特性

Allpass

Annahme: $$z_x = r_x\, e^{j\varphi} \qquad \text{und} \qquad z_0 = \frac{1}{r_x} e^{j\varphi} = \frac{1}{z_x^*}$$

Pol- / Nullstellen liegen spiegelbildlich zum EK



Allpass

Annahme: $z_x = r_x\, e^{j\varphi} \quad \text{und} \quad z_0 = \frac{1}{r_x} e^{j\varphi} = \frac{1}{z_x^*}$

Pol- / Nullstellen liegen spiegelbildlich zum EK

$$H(z) = b_0 \prod_{q=1}^{Q} \frac{z - 1/z_{xq}^*}{z - z_{xq}}$$

Systemfunktion H(z)

konstanter Amplitudengang:

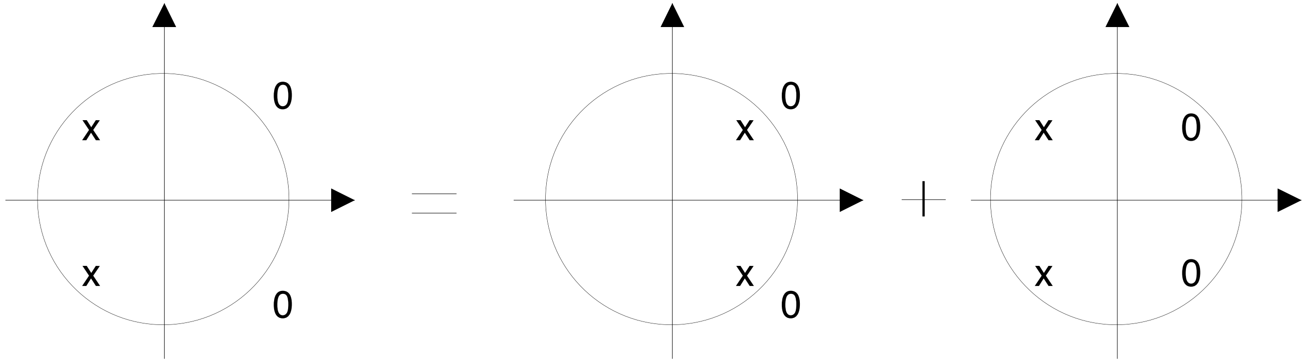
$$A(\Omega) = b_0 \prod_{q=1}^{Q} \frac{\left|z - 1/z_{xq}^*\right|}{\left|z - z_{xq}\right|} = b_0 \prod_{q=1}^{Q} \frac{1}{r_{xq}}$$

Die Filterkoeffizienten sind gegenläufig identisch.

Herleitung: Skript S. 238

Minimalphasige Filter

- gegebener Amplitudengang
- Phasengang: kleinstmögliche Abweichung von Null
- alle Pol- und Nullstellen liegen innerhalb des EK



Aufspaltung in Allpass und Filter minimaler Phase

Eigenschaften zeitdiskreter Systeme

Kausalität	
Impulsantwort $h(n) = 0$ für $n<0$	Zählergrad <= Nennergrad
Stabilität	
Impulsantwort $h(n)$ ist absolut summierbar	Alle Polstellen liegen innerhalb des EK
Linearphasigkeit	
endl. sym. Impulsantwort, FIR-Filter	Nullstellen spiegelbildlich zum Einheitskreis

Eigenschaften zeitdiskreter Systeme II

Linearphasigkeit	
endl. sym. Impulsantwort, FIR-Filter	Nullstellen spiegelbildlich zum Einheitskreis
Allpass	
IIR – Filter gegenläufig symm. Koef.	Pol- und Nullstellen spiegelbildlich zum EK
minimale Phase	
	Nullstellen nicht außerhalb des Einheitskreises

Eigenschaften zeitdiskreter Systeme II

Linearphasigkeit	
endl. sym. Impulsantwort, FIR-Filter	Nullstellen spiegelbildlich zum Einheitskreis
Allpass	
IIR – Filter gegenläufig symm. Koef.	Pol- und Nullstellen spiegelbildlich zum EK
minimale Phase	
	Nullstellen nicht außerhalb des Einheitskreises

Eigenschaften zeitdiskreter Systeme II

Linearphasigkeit	
endl. sym. Impulsantwort, FIR-Filter	Nullstellen spiegelbildlich zum Einheitskreis
Allpass	
IIR – Filter gegenläufig symm. Koef.	Pol- und Nullstellen spiegelbildlich zum EK
minimale Phase	
	Nullstellen nicht außerhalb des Einheitskreises