15.

Diskrete Laplace- und z-Transformation

z-Transformation hat für Zahlenfolgen die gleiche Bedeutung wie die Laplacetransformation für zeitkontinuierliche Signale;

Wert der z-Transformation liegt in der Beschreibungsmöglichkeit diskreter linearer Filter durch Nullstellen und Pole

z-变换对于数字序列的意义类似于Laplace变换对于时域连续信号的意义；
z-变换的价值在于通过零点和极点描述离散线性滤波器的能力。

14.1.1. Abgetastete Signale

Ein im Abtastabstand T abgetastetes Signal u(t) läßt sich als

$$u^*(t) = u(t)\,\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT)\,\delta(t-kT)$$

darstellen.

PAM-Signal in der Nachrichtentechnik

14.1.1. Abgetastete Signale

$$u^*(t) = u(t)\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT)\delta(t-kT)$$

Fouriertransformation (Analysegleichung)

als Fouriertransformierte des rechten Terms

$$\mathrm{U}^*(\mathrm{j}\omega) = \mathbf{F}\left\{\mathrm{u}^*(\mathrm{t})\right\} = \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} \mathrm{u}(\mathrm{kT})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{jk}\omega\mathrm{T}}$$

$$\delta(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}, \qquad t_0 = kT$$

U*(jω) ist frequenzperiodisch und auch darstellbar als:

$$\mathrm{U}^*(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{\mathrm{T}} \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} \mathrm{U}\big(\mathrm{j}(\omega - \mathrm{k}\omega_{\mathrm{T}})\big)$$

15.1. Darstellung von Abtastsignalen in der s-Ebene

$$U^*(j\omega) = \mathbf{F}\{u^*(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT)\, e^{-jk\omega T}$$

Zweiseitige Laplacetransformation

$$U^*(s) = \mathbf{L}_{\Pi}\{u^*(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT) e^{-skT}$$

---- *diskrete* Laplace-Transformation

U*(s) ist eine in ω periodische Funktion mit der Periode $\omega_T = 2\pi/T$

15.2. z-Transformation

Mit der neuen Variablen

$$U^*(s) = \mathbf{L}_{\Pi}\{u^*(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT)e^{-skT}$$

$$z = e^{Ts}$$

$$U(z) = \mathbf{Z}_{\Pi}\{u(kT)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT)z^{-k}$$

15.2. z-Transformation

$$U(z) = \mathbf{Z}_{\Pi}\{u(kT)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT) z^{-k}$$

einer Zahlenfolge u(k) wird eine z-Transformierte U(z) zugeordnet

Analysegleichung

Für T = 1

$$\boxed{U(z) \equiv \mathbf{Z}_{\mathrm{II}}\{u(k)\} \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)\, z^{-k}}$$

ZT

15.2. z-Transformation

Analysegleichung

$$U(z) \equiv \mathbf{Z}_{II}\left\{u(k)\right\} \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)\, z^{-k}$$

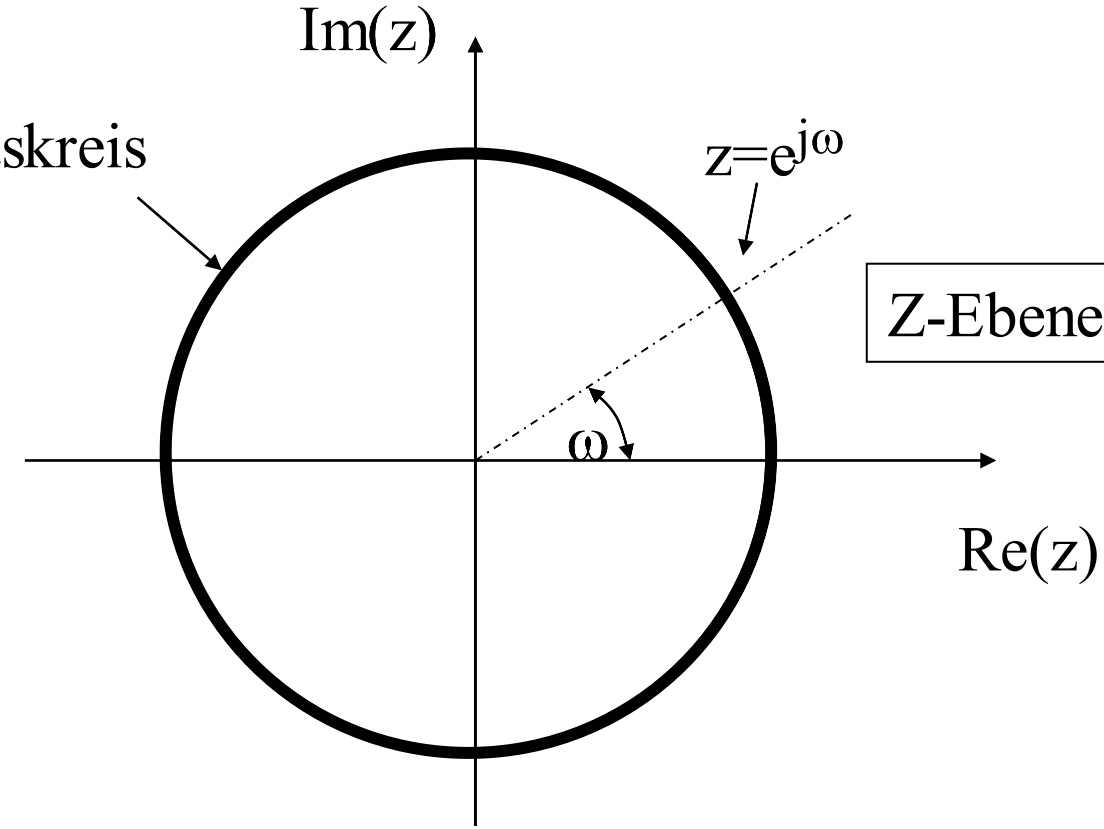
ZT

- U(z) ist ein Polynom in z,
- z ist eine komplexe Variable

$$z = \mathrm{Re}\{z\} + j\,\mathrm{Im}\{z\}$$

15.2. z-Transformation

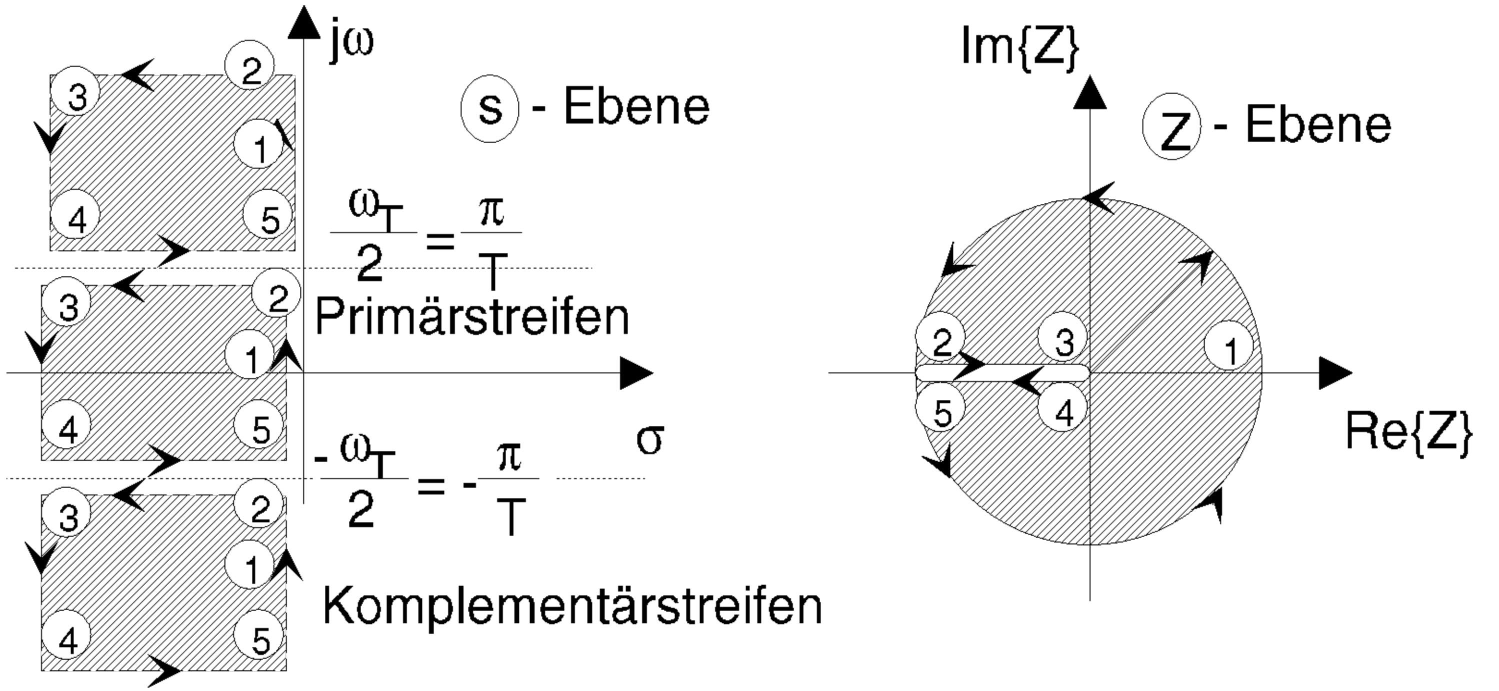
Die jω-Achse wird zum Einheitskreis $e^{j\omega T}$ in der z-Ebene.



$z = e^{Ts}$

Die z-Transformation reduziert die FT auf Werte von z auf dem Einheitskreises

15.2. z-Transformation



Die jω-Achse wird zum Einheitskreis $e^{j\omega T}$ in der z-Ebene.

Inverse z-Transformation

$$u(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C U(z) \cdot z^{n-1} dz$$

IZT

积分路径c必须包含U(z)的奇点。

Der Integrationspfad c muß singuläre Punkte von U(z) einschließen.

15.3. Bestimmung der Zeitfolge aus der Systemfunktion

Systemfunktion $U(z) = \mathbf{Z}\{u(n)\}$

- u(n) mittels Durchführung der inversen z-Transformation
- einfacher oft durch Teilbruchzerlegung von U(z)

Rücktransformierte der Teilbrüche kann dann aus Tabellen der z-Transformation entnommen werden

通过执行逆z变换将u(n)反变换为时域信号。
通常通过对U(z)进行部分分式分解来简化这一过程。
然后，从z变换表中提取出部分分式的反变换。

<u>Beispiel: Diskreter 3-Werte-Rechteckimpuls</u> $\Pi_3(n)$,

die Folge $\{0,0,1,1,1,0,0\}$ hat eine z-Transformierte

$$U(z) \equiv \mathbf{Z}_{II}\left\{u(k)\right\} \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)\, z^{-k}$$

$$+ u(-2)z^{2} + u(-1)z^{1} + u(0)z^{0} + u(1)z^{-1} + u(2)z^{-2} +$$

$$Z_{II}\{\Pi_3\,(n)\} = z + 1 + z^{-1}$$

Bezug zur Fouriertransformation

与傅立叶变换的关系
z变换是数字序列傅立叶变换的一种扩展，
– 就像Laplace变换可以被解释为对于时域连续信号的傅立叶变换的扩展一样。

Die z-Transformation stellt eine Erweiterung der Fouriertransformation von Zahlenfolgen dar,

- so wie die Laplace-Transformation als Erweiterung der Fouriertransformation für zeitkontinuierliche Signale interpretiert werden kann.

Polarkoordinaten: $U(z)$ für $z = r\,e^{j\Omega}$

$$U(z) = U(re^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) r^{-k} e^{-jk\Omega} = \mathbf{F}\left\{u(k) r^{-k}\right\}$$

15.3. Bestimmung der Zeitfolge aus der Systemfunktion

$U(z)$ für $z = r\,e^{j\Omega}$ also identisch mit der Fouriertransformierten der Folge $u(k)\,r^{-k}$.

$\mathbf{F}\{u(k)\cdot r^{-k}\}$ für alle Folgen $u(k)$ mit exponentieller Gewichtung r^{-k}.

Für $r = 1$ (Einheitskreis)

$$U(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}} = U(e^{j\Omega}) = \mathbf{F}\{u(k)\}$$

z-Transformation mit der Fouriertransformation identisch

15.4. Eigenschaften

Frequenzgang

Aus der Analysegleichung folgt, dass der Frequenzgang $U(j\Omega)$ sich aus $U(z)$ für $z = e^{j\Omega}$ bestimmen läßt:

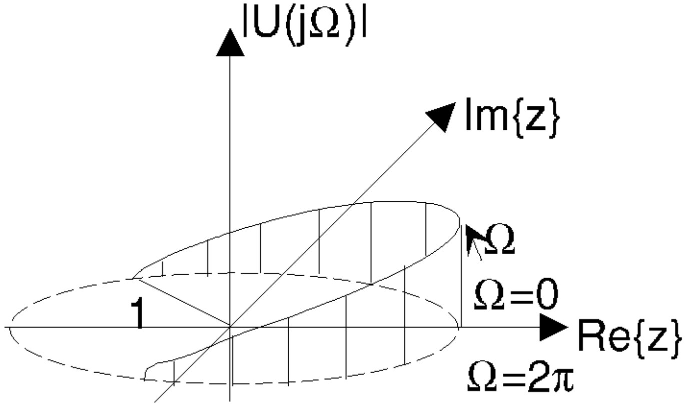
Für r = 1 (Einheitskreis)

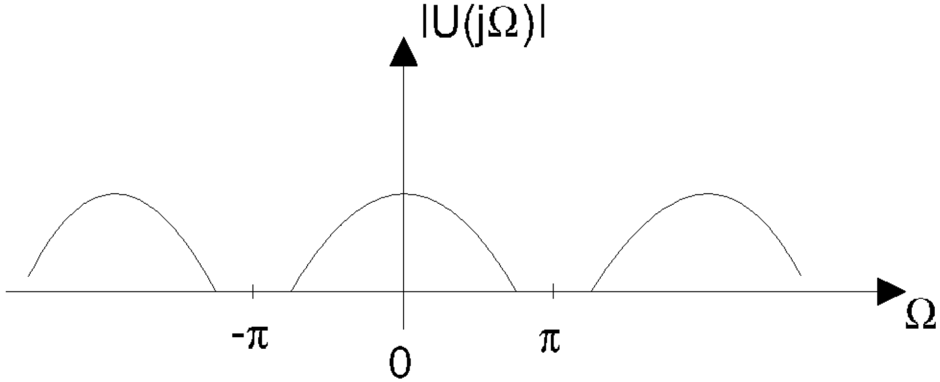
$$U(j\omega) = U(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}} = U(e^{j\Omega}) = \mathbf{F}\{u(k)\}$$

15.4. Eigenschaften

Der geometrische Ort für den Frequenzgang ist damit der Einheitskreis, da $|z| = |e^{j\Omega}| = 1$ ist.

Er entspricht also der $j\omega$-Achse bei der Laplacetransformation.





Beispiel: Diskreter 3-Werte-Rechteckimpuls (Fortsetzung)

Der diskrete Rechteckimpuls hat eine z-Transformierte

$$\mathbf{Z}_{II}\{\Pi_3(n)\} = z + 1 + z^{-1}$$

und damit eine Fouriertransformierte

$$\mathbf{F}\{\Pi_3(n)\} = U(j\Omega) = e^{j\Omega} + 1 + e^{-j\Omega} = 1 + 2\cos(\Omega)$$

Existenz und Konvergenzbereich

Die z-Transformierte U(z) existiert, wenn $u(k)\cdot z^{-k}$ absolut summierbar,

- also eine stabile Folge ist!!!

mit $z = r\cdot e^{j\Omega}$ folgt:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| u(k) \cdot r^{-k} \right| < \infty$$

15.4. Eigenschaften

Linearität.

$a\, u_1(n) + b \times u_2(n) \leftrightarrow a \times U_1(z) + b \times U_2(z)$

Zeitinvertierung.

$u(-n) \leftrightarrow U(z^{-1})$

Verschiebung im Zeitbereich.

$u(n-q) \leftrightarrow z^{-q} \times U(z)$

Faltung im Zeitbereich:

$u(n) * v(n) \leftrightarrow U(z) \times V(z)$

15.4. Eigenschaften

Linearität.

$a\, u_1(n) + b \times u_2(n) \leftrightarrow a \times U_1(z) + b \times U_2(z)$

Zeitinvertierung.

$u(-n) \leftrightarrow U(z^{-1})$

Verschiebung im Zeitbereich.

$u(n-q) \leftrightarrow z^{-q} \times U(z)$

Faltung im Zeitbereich:

$u(n) * v(n) \leftrightarrow U(z) \times V(z)$