Hausaufgaben 7
Gruppen Nico 6

Aufgabe 7.1

(i) $g(x,y) = x^4 + y^4 - 1$

$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3y^2 \\ 2x^4y \end{pmatrix}$ $\quad \operatorname{grad} g(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 \\ 4y^3 \end{pmatrix}$

① Es gilt: $\operatorname{grad} g(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 \\ 4y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff (x,y) = (0,0)$

$g(0,0) = -1 \neq 0$, also gibt es keine singuläre Punkt

② Löse $\operatorname{grad} f(x,y) = \lambda \operatorname{grad} g(x,y)$ und $g(x,y) = 0$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 4x^3y^2 \\ 2x^4y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4x^3 \\ 4y^3 \end{pmatrix} \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x^3y^2 &= \lambda x^3 \\ x^4 y &= \lambda y^3 \\ x^4 + y^4 &= 1 \end{aligned}$$

1. Fall $xy = 0 \Rightarrow x = 0 = y \Rightarrow x^4 + y^4 = 0 \neq 1$

Dies führt auf einen Widerspruch. Dort kann kein Extrema liegen

2. Fall $xy \neq 0 \Rightarrow$ $\begin{aligned} y^2 &= \lambda \\ x^4 &= 2\lambda y^2 \\ x^4 + y^4 &= 1 \end{aligned}$ $\quad \Rightarrow x^4 = 2\lambda^2$

$\Rightarrow 2\lambda^2 + \lambda^2 = 1 \quad \lambda^2 = 1/3 \Rightarrow \lambda = \sqrt{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow x^2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad y^2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad x^4 = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \left(\pm \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4}}, \pm \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}}\right)$

Damit erhalten wir 4 kritische Punkte: $(\pm 2^{-\frac{1}{4}}, \pm 2^{-\frac{1}{4}})$

(ii) Die Menge $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 1\}$ ist kompakt.

Man hat 4 Punkt mit globales Minimum $f(x,y) = 2^{-\frac{4}{4}} \cdot 2^{-\frac{2}{4}} = 2^{-\frac{3}{2}}$

$f\left(\pm\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4}}, \pm\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}}\right) = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$

globales Maximum

Aufgabe 7.2

(i)

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x e^{x^2+3y-5z} \\ 3 e^{x^2+3y-5z} \\ -5 e^{x^2+3y-5z} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \operatorname{div} \begin{pmatrix} 2x e^{x^2+3y-5z} \\ 3 e^{x^2+3y-5z} \\ -5 e^{x^2+3y-5z} \end{pmatrix} =$$

$$= (2+4x^2) e^{x^2+3y-5z} + 9 e^{x^2+3y-5z} + 25 e^{x^2+3y-5z}$$

$$= (4x^2+36) e^{x^2+3y-5z}$$

(ii)

$$\operatorname{div} \vec{u} = \cos x + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) + y e^{yz} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = -\cos x - y e^{yz}$$

$$\Longrightarrow g(x,y,z) = -y\cos x - \frac{y}{z} e^{yz} + \frac{1}{z^2} e^{yz} + c(x,z)$$

$c(x,z)$ kann 0 gesetzt werden

d.h. $g(x,y,z) = -y\cos x - \frac{y}{z} e^{yz} + \frac{1}{z^2} e^{yz}$

$$g(x,y,z) = -\int_0^y (\cos x + t e^{tz})\, dt$$

$$= -y\cos x - \left(\frac{t}{z} e^{tz} - \frac{1}{z^2} e^{tz}\right)_{t=0}^{t=y}$$

$$= -y\cos x - \frac{y}{z} e^{yz} + \frac{1}{z^2} e^{yz} - \frac{1}{z^2}$$