Hausaufgaben 02

Ana II Ing
Gruppe: Nico 6

Aufgabe 2.1

(i) Bei f ist der Term im Nenner für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ immer positiv.

Somit ist f auf $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ als Kompositionen stetiger Funktionen stetig.

Kritisch ist hier nur der Nullpunkt.

Sei $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Nullstelle mit $(x_n, y_n) \neq (0,0)$

nämlich $\lim_{k\to\infty} x_k = 0 = \lim_{k\to\infty} y_k$

Wir wählen die spezielle Folge $x_k = \frac{1}{k}$ $y_k = 0$

dann gilt: $|f(\frac{1}{k}, 0)| = \dfrac{\frac{1}{k^2}\cdot 0}{(\frac{1}{k})^4 + 0} = 0 \longrightarrow 0$ für $k \to \infty$

Andere Folge: Sei $x_k = \frac{1}{k}$ $y_k = \frac{1}{k}$

Dann gilt: $|f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k})| = \left| \dfrac{\frac{1}{k^2}\sin(\frac{1}{k^2})}{\frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^4}} \right| = \frac{1}{2} k^2 \sin(\frac{1}{k^2}) = \frac{1}{2} \dfrac{\sin(\frac{1}{k^2})}{\frac{1}{k^2}}$

$\underset{\text{l'hospital}}{=} \frac{1}{2}\cos(\frac{1}{k^2}) \longrightarrow \frac{1}{2}$ für $k \to 0$

$\Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert nicht, da $\lim_{k\to\infty} f(\frac{1}{k}, 0) = 0$ und $\lim_{k\to\infty} f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ nicht übereinstimmt

(ii) Sei z.B $\vec{x_k} = (1, \frac{1}{k})$ mit $\lim_{k\to\infty} \vec{x_k} = (1,0)$

$$\Longrightarrow \lim_{k\to\infty} g(\vec{x_k}) = \lim_{k\to\infty} \frac{e^{3(1-1)^2} + 3(1/k)^2 - 1}{(1-1)^2 + (1/k)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{3 \cdot 1/k^2}{1/k^2} = 3$$

Wir können vermuten, dass $\lim_{(x,y)\to(1,0)} g(x,y) = 3 = a$ und g in $(1,0)$ stetig.

Sei $(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ mit $\lim_{k\to\infty} (x_k, y_k) = (1,0)$

Dann gilt: $0 \leq |g(x_k, y_k) - 3| = \left| \dfrac{e^{3(x_k-1)^2} + \cancel{3y_k^2} - 1 - 3(x_k-1)^2 - \cancel{3y_k^2}}{(x_k-1)^2 + y_k^2} \right| = \left| \dfrac{e^{3(x_k-1)^2} - 1 - 3(x_k-1)^2}{(x_k-1)^2 + y_k^2} \right|$

$\leq \left| \dfrac{e^{3(x_k-1)^2} - 1}{(x_k-1)^2} - 3 \right| \longrightarrow 0$ für $k \to \infty$

$\Longrightarrow \lim_{k\to\infty} |g(x_k, y_k) - 3| = 0$, d.h. $\lim_{k\to\infty} g(x_k, y_k) = 3$

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 3 = a$

Damit ist gezeigt, dass $a=3$ und g in $(1,0)$ stetig ist.

(iii) Sei $(x_k, y_k) = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k^3})$ $k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} (x_k, y_k) = (0,0)$

Dann gilt: $h(x_k, y_k) = h(1/k, 1/k^3) = \dfrac{\frac{1}{k} \cdot |\frac{1}{k^3}|^\alpha}{|1/k^3| + |1/k^3|} = \dfrac{|\frac{1}{k}|^{3\alpha+1}}{2\cdot|\frac{1}{k}|^3} = \frac{1}{2}|\frac{1}{k}|^{3\alpha-2}$

$= \frac{1}{2}|k|^{2-3\alpha}$

$\Rightarrow h(x_k, y_k) \longrightarrow \infty$ für $k\to\infty$ mit $0<\alpha<\frac{2}{3}$

$h(x_k, y_k) \to 1/2$ für $k\to\infty$ mit $\alpha = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow h$ ist in $(0,0)$ nicht stetig, wenn $0<\alpha\leq 2/3$

Danach möchten wir im Fall $\alpha > 2/3$ untersuchen:

$$|x||y|^\alpha = (|x|^3)^{\frac{1}{3}} \cdot |y|^\alpha \leq (|x|^3+|y|)^{\frac{1}{3}} \cdot (|x|^3+|y|)^\alpha = (|x|^3+|y|)^{\frac{1}{3}+\alpha}$$

für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

Sei $(u_k, v_k)\in\mathbb{R}^2$, $k\in\mathbb{N}$ eine beliebige Folge mit $\lim_{k\to\infty}(u_k, v_k) = (0,0)$

Dann gilt:

$$0 \leq |h(u_k, v_k)| = \frac{|u_k||v_k|^\alpha}{|u_k|^3+|v_k|} \leq \frac{(|u_k|^3+|v_k|)^{\frac{1}{3}+\alpha}}{|u_k|^3+|v_k|} = (|u_k|^3+|v_k|)^{\alpha-\frac{2}{3}}$$

$\longrightarrow 0$ für $k\to 0$

d.h. $\lim_{k\to\infty} h(u_k, v_k) = 0 = h(0,0)$ für $\alpha > 2/3$

Aufgabe 2.2

(i) Für alle $(x,y)\in D$, gilt:

$$0 = f(0,0) \leq f(x,y) = x^2+y^2 < \pi$$

$\Rightarrow f$ nimmt das Minimum 0 in $(0,0)$ an

Außerdem ist π eine obere Schranke für die Wert von f

Aber die obere Schrank π wird nicht als Funktionswert angenommen.

$\Rightarrow f$ nimmt auf D kein Maximum

(ii) Für alle $(x,y)\in D$ gilt:

$$0 = \sin(0) = g(0,0) \leq g(x,y) \leq 1 = \sin(\tfrac{\pi}{2}) = g(\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}, \tfrac{\sqrt{\pi}}{2})$$

d.h. g nimmt das Minimum 0 im Punkt $(0,0)$ an
und nimmt das Maximum 1 im Punkt $(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2})$ an

(iii) Für alle $(x,y) \in D$ gilt:

$$-1 = \cos(\pi) < \cos(x^2+y^2) = h(x,y) \leq 1 = \cos(0) = h(0,0)$$

d.h. h nimmt das Max. 1 im Punkt $(0,0)$ an

und nimmt kein Minimum, da die untere Schranke -1 nicht als Funktionswert angenommen wird.