Klausur im Lehrgebiet

Signale und Systeme

- Prof. Dr.-Ing. Thomas Sikora -

Name: ....

Vorname: ....

Matr.Nr: ....

☐ Bachelor ☐ ET
☐ Master ☐ TI
☐ Diplom ☐ KW
☐ Magister ☐ ....
☐ Erasmus

☐ Ich bin mit der Veröffentlichung des Klausurergebnisses im Web unter meiner verkürzten Matrikelnummer einverstanden.

A1	A2	A3	Summe

Hinweise:

1. Füllen Sie vor Bearbeitung der Klausur das Deckblatt **vollständig** und **sorgfältig** aus.
2. Schreiben Sie die Lösungen jeweils direkt auf den freien Platz unterhalb der Aufgabenstellung.
3. Die **Rückseiten** können bei Bedarf zusätzlich beschrieben werden. Sollte der Platz auf der Rückseite nicht ausreichen, ist dennoch **kein eigenes Papier zu verwenden**. Die Klausuraufsicht teilt auf Anfrage **zusätzliche leere Blätter** aus.
4. Ein **nichtprogrammierbarer** Taschenrechner und ein **einseitig handbeschriebenes DIN-A4-Blatt** sind als Hilfsmittel erlaubt.
5. Bearbeitungszeit: **90 min**.
6. **Keinen Bleistift** und auch **keinen Rotstift** verwenden!
7. Bei Multiple-Choice-Fragen gibt es je richtiger Antwort einen halben Punkt, je falscher Antwort wird ein halber Punkt abgezogen. Im schlechtesten Fall wird die Aufgabe mit null Punkten bewertet.
8. Grundsätzlich müssen bei allen Skizzen die **Achsen vollständig beschriftet** werden.

Ich habe die Hinweise gelesen und verstanden: .... (Unterschrift)

Erklärung zur Prüfungsfähigkeit

Ich erkläre, dass ich mich prüfungsfähig fühle. (§7 (10) Satz 5+6 AllgPO vom 13. Juni 2012)

. . . .
(Datum und Unterschrift der Studentin/ des Studenten)

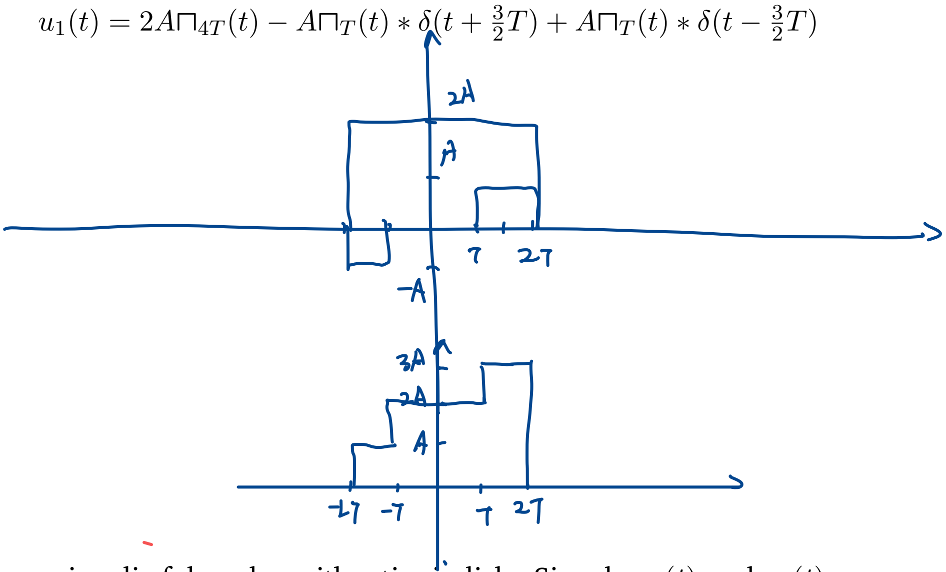
Inhaltsverzeichnis

1 Zeitkontinuierliche Signale 11 Punkte

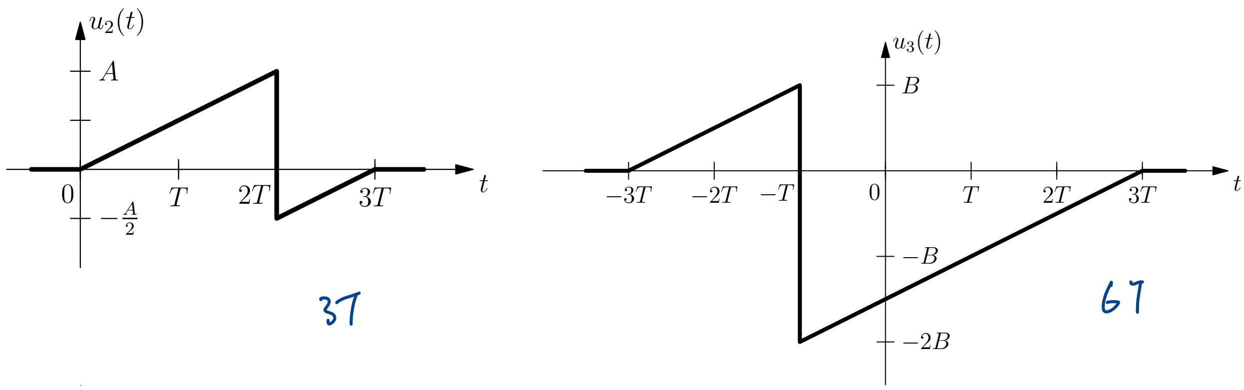
1.1 Zeichnen Sie das folgende Signal $u_1(t)$. Achten Sie auf eine vollständige Achsenbeschriftung. 1,5 P

$-A\sqcap_T(t+\frac{3}{2}T)$ $A\sqcap_T(t-\frac{3}{2}T)$

$$u_1(t) = 2A\sqcap_{4T}(t) - A\sqcap_T(t) * \delta(t+\tfrac{3}{2}T) + A\sqcap_T(t) * \delta(t-\tfrac{3}{2}T)$$

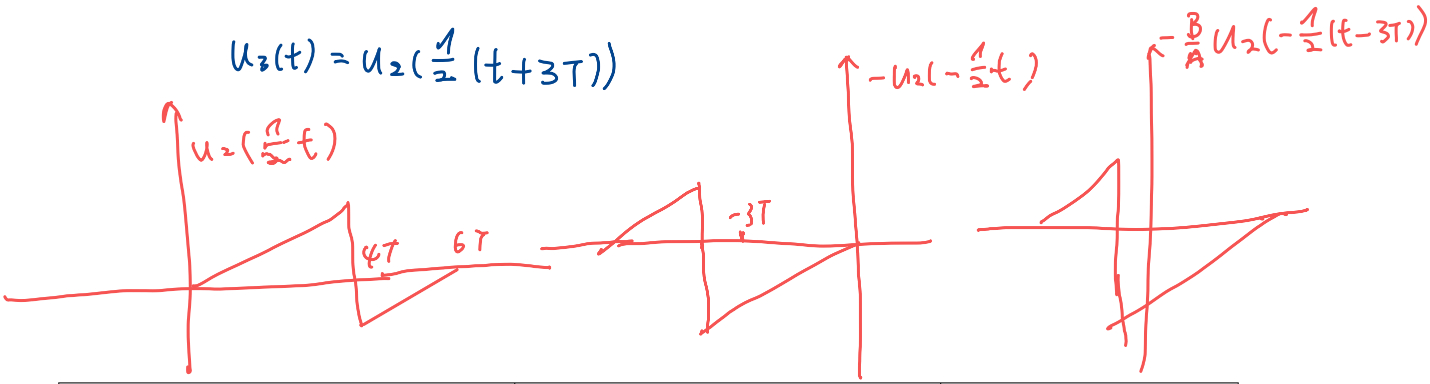


1.2 Gegeben seien die folgende, zeitkontinuierliche Signale $u_2(t)$ und $u_3(t)$: 2 P



a) Bestimmen Sie die Funktion des zeittransformierten Signals $u_3(t)$ in Abhängigkeit zu $u_2(t)$. 1,5 P

$u_3(t) = u_2(\frac{1}{2}(t+3T))$



b) Bestimmen Sie die Gesamtleistung des Signals $u_2(t)$. 0,5 P

$$P_u = \frac{1}{3T}\int_0^{2T} A^2\left(\frac{t}{2T}\right)^2 dt + \frac{1}{3T}\int_{2T}^{3T} A^2\left(-\frac{t}{2T}+\frac{3}{2}\right)^2 dt$$

$$= \frac{1}{3T}\cdot\int_0^{2T} A^2\cdot\frac{t^2}{4T^2}\,dt + \frac{1}{3T}\int_{2T}^{3T} A^2\left(\frac{t^2}{4T^2}+\frac{9}{4}-\frac{3}{2T}t\right)dt$$

$$= \frac{1}{3T}\cdot A^2\cdot\frac{1}{4T^2}\cdot\frac{1}{3}t^3\Big|_0^{2T} + \frac{1}{3T}\cdot A^2\cdot\left(\frac{1}{4T^2\cdot 3}t^3+\frac{9}{4}t-\frac{3}{2T}\cdot\frac{t^2}{2}\right)\Big|_{2T}^{3T}$$

$$= \frac{A^2}{36T^3}\cdot 8T^3 + \frac{A^2}{3T}\cdot\left(\frac{1}{12T^2}\cdot(27T^3-8T^3)+\frac{9}{4}T-\frac{3}{4T}5T^2\right)$$

$$= \frac{2A^2}{9} + \frac{A^2}{3T}\cdot\left(\frac{19}{12}T+\frac{9}{4}T-\frac{15}{4}T\right)$$

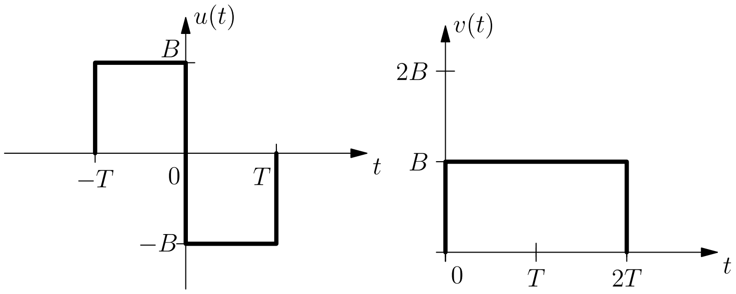
$$= \frac{2}{9}A^2 + \frac{A^2}{3}\cdot\left(\frac{19+27-45}{12}\right) = \frac{8}{36}A^2+\frac{1}{36}A^2 = \frac{1}{4}A^2$$

$P_u = 0$ da nicht periodisch

c) Wie kann mittels Verknüpfung mit einem anderen Signal aus einem Energiesignal ein Leistungssignal werden? *1 P

$$P_u = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot W_u$$

1.3 Gegeben seien die folgenden Signale $u(t)$ und $v(t)$. 7 P



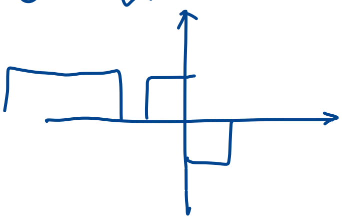
a) Berechnen Sie die Kreuzkorrelationsfunktion $r_{uv}(\tau)$. 4,5 P

$r_{uv}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t+\tau)dt$

links: $t+\tau = 0 \Rightarrow t = -\tau$

rechts: $t+\tau = 2T \Rightarrow t = -\tau + 2T$

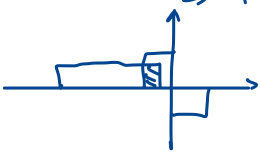
① $-\tau+2T < -T \Rightarrow \tau > 3T$



$r_{uv}(\tau) = 0$

② $-\tau+2T \geq -T \wedge -\tau+2T < 0$

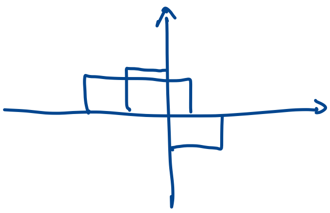
$\Rightarrow 2T < \tau \leq 3T$



$r_{uv}(\tau) = \int_{-T}^{-\tau+2T} AB\,dt$

$= AB \cdot (-\tau+3T)$

③ $-\tau+2T \geq 0 \wedge -\tau+2T < T \Rightarrow T < \tau \leq 2T$

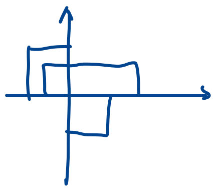


$r_{uv}(\tau) = \int_{-T}^{0} AB\,dt + \int_{0}^{-\tau+2T} -AB(dt)$

$= ABT + (-AB)(-\tau+2T)$

$= AB(\tau - T)$

④ $-\tau+2T \geq T \wedge -\tau < 0$



$\Rightarrow 0 < \tau \leq T$

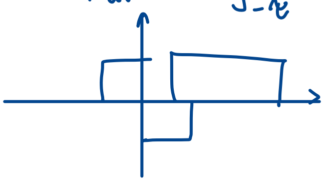
$r_{uv}(\tau) = \int_{-\tau}^{0} AB\,dt + \int_{0}^{T} -AB\,dt$

$= AB\tau - ABT$

⑤ $T \geq -\tau \geq 0$

$-T < \tau \leq 0$

$r_{uv}(\tau) = \int_{-\tau}^{T} -AB\,dt = -AB(T+\tau)$

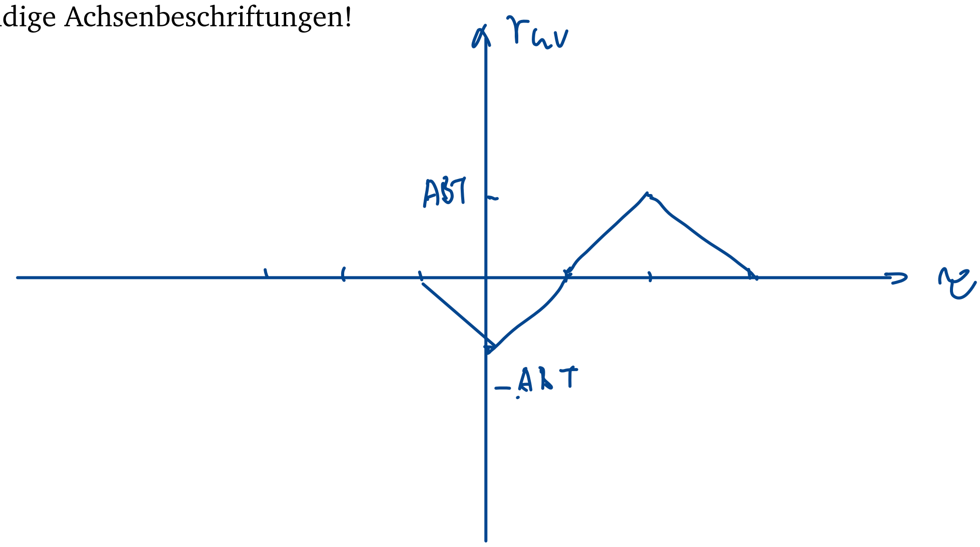


⑥ $-\tau \geq T$

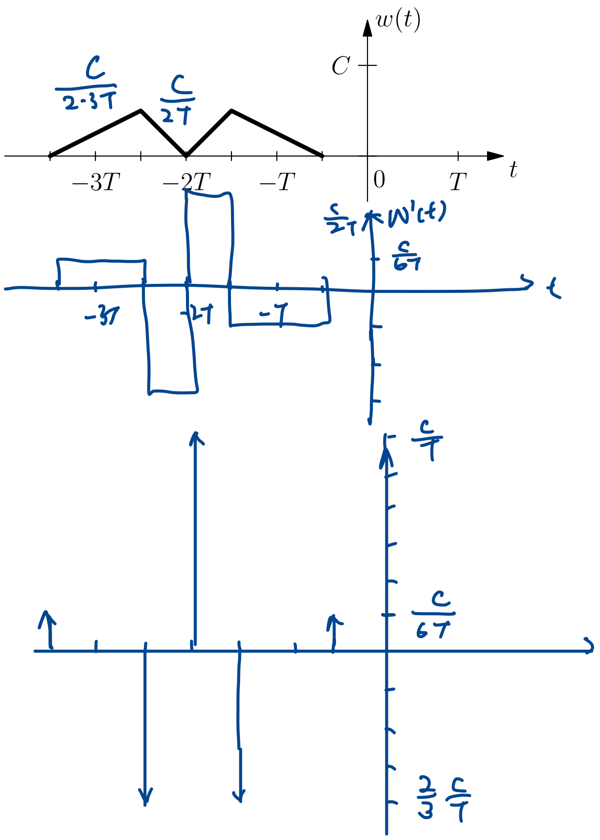
$\Rightarrow \tau \leq -T$

$r_{uv}(\tau) = 0$

b) Skizzieren Sie $r_{uv}(\tau)$ im Bereich $-3T \leq \tau \leq 3T$. Achten Sie dabei auf vollständige Achsenbeschriftungen! 1 P



1.4 Berechnen Sie die Fouriertransformierte des folgenden Signals $w(t)$. Fassen Sie das Ergebnis so weit wie möglich zu trigonometrischen Funktionen zusammen. **2 P**



$$w''(t) = \frac{C}{6T}\delta(t+3{,}5T) - \frac{2}{3}\frac{C}{T}\delta(t+2{,}5T) + \frac{C}{T}\delta(t+2T)$$

$$- \frac{2}{3}\frac{C}{T}\delta(t+1{,}5T) + \frac{C}{6T}\delta(t+0{,}5T)$$

$$(j\omega)^2 W(j\omega) = \frac{C}{6T}e^{j\omega 3{,}5T} - \frac{2C}{3T}e^{j\omega 2{,}5T} + \frac{C}{T}e^{j\omega 2T} - \frac{2C}{3T}e^{j\omega 1{,}5T} + \frac{C}{6T}e^{j\omega 0{,}5T}$$

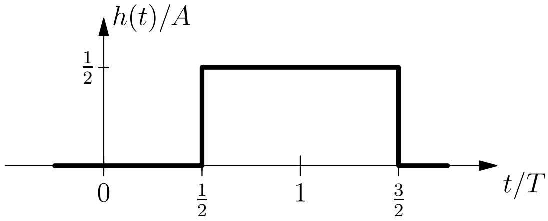
$$= \frac{C}{T}\cdot e^{j\omega 2T}\cdot\left(\frac{1}{6}e^{j\omega 1{,}5T} - \frac{2}{3}e^{j\omega 0{,}5T} + 1 - \frac{2}{3}e^{-j\omega 0{,}5} + \frac{1}{6}e^{-j\omega 1{,}5T}\right)$$

$$= \frac{C}{T}e^{j\omega 2T}\cdot\left(\frac{1}{3}\cos\left(\frac{3}{2}\omega T\right) - \frac{4}{3}\cos\left(\frac{1}{2}\omega T\right) + 1\right)$$

2 Zeitkontinuierliche Systeme und Abtastung 10,5 Punkte

UE 4

2.1 Gegeben sei die folgende Impulsantwort $h(t)$. Bestimmen Sie den Amplituden- und Phasengang des Systems. 2 P



$$h(t) = \frac{A}{2} \sqcap_T(t - T)$$

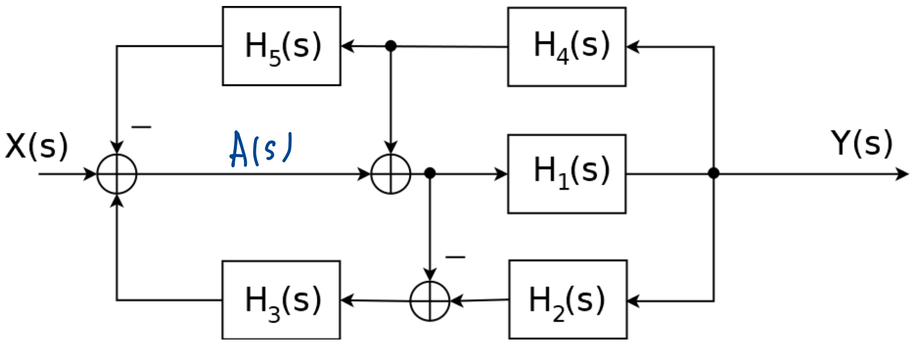
$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$H(j\omega) = \frac{A}{2} \cdot T \cdot si\left(\frac{j\omega}{2}\right) e^{-j\omega T}$$

$$A(\omega) = \left| \frac{A}{2} T si\left(\frac{j\omega}{2}\right) \right|$$

$$\varphi(\omega) = -\omega T + \begin{cases} 0 & Re > 0 \\ \pi & Re < 0,\ Im > 0 \\ -\pi & Re < 0,\ Im < 0 \end{cases}$$

2.2 Gegeben sei das folgende Blockschaltbild. Geben Sie die Gesamtübertragungsfunktion $H_{\text{Ges}}(s)$ in Abhängigkeit von den Einzelübertragungsfunktionen $H_i(s)$, $i = 1, \ldots, 5$ an. Fassen Sie das Ergebnis so weit wie möglich zusammen. 2 P



$$Y(S) = \left(A(S) + H_4(S)Y(S)\right) H_1(S)$$

$$A(S) = X(S) - H_4(S) \cdot H_5(S) \cdot Y(S) + H_3(S) \cdot \left(Y(S)H_2(S) - \left(A(S) + H_4(S)Y(S)\right)\right)$$

$$= X - H_4H_5Y + H_3[H_2Y - A - H_4Y]$$

$$= X - H_4H_5Y + H_2H_3Y - AH_3 - H_3H_4Y$$

$$A(S) = \frac{1}{1+H_3} \cdot (X - H_4H_5Y + H_2H_3Y - H_3H_4Y)$$

$$Y(S) = \frac{1}{1+H_3} \cdot (X - H_4H_5Y + H_2H_3Y \cancel{- H_3H_4Y} + H_4Y + \cancel{H_3H_4}Y)\, H_1$$

$$Y(S) \cdot (1 + H_3 + H_1H_4H_5 - H_1H_2H_3 - H_1H_4) = XH_1$$

$$H(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{H_1}{1 + H_3 + H_1H_4H_5 - H_1H_2H_3 - H_1H_4}$$

2.3 Von einem realen zeitkontinuierlichen System mit 5 Extremstellen (Pol- und Nullstellen zusammen) seien die folgenden Eigenschaften bekannt. Skizzieren Sie das PN-Diagramm des Systems. **Erläutern Sie Ihre Schlussfolgerungen aus den genannten Eigenschaften**. 2,5 P

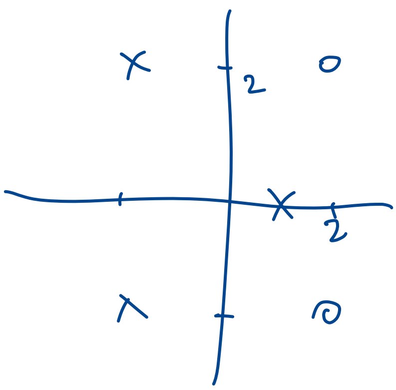
a) Der Imaginärteil einer Nullstelle sei 2.

b) Der minimalphasige Anteil besteht aus einer Polstelle.

c) Der Allpassanteil besitzt mindestens eine Nullstelle mit dem Realteil -2.

d) $|H(0)| = \frac{1}{3}, H_0 = 1$.

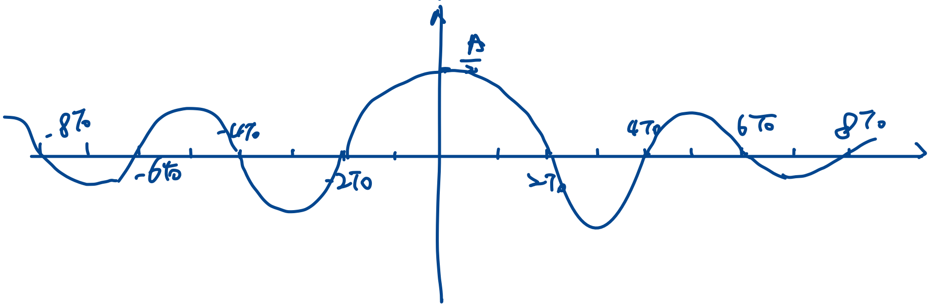
e) Das System ist nicht stabil.



2.4 Gegeben sei das Signal $u(t) = \frac{A}{2} \cdot \mathrm{si}\left(\omega_0 \frac{t}{4}\right)$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$. **4 P**

a) Skizzieren Sie $u(t)$ im Bereich $-8T_0 \leq t \leq 8T_0$. **1 P**

$\frac{2\pi}{\omega_0} \cdot 4 = \frac{2\pi \cdot 4}{2\pi} \cdot T_0 = 4T_0$



b) Geben Sie das Spektrum $U(j\omega)$ an. **1 P**

Beispiel: Rechteckfunktion (Fortsetzung)

Aus Gl. (4.8) $\Pi_T(t) \leftrightarrow T\,\mathrm{si}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$

ergibt sich durch Ersetzen von T durch $\omega_T = 2\pi/T$ und Anwendung des Vertauschungssatzes das Transformationspaar

$$\mathrm{si}\left(\omega_T \frac{t}{2}\right) \leftrightarrow T \cdot \Pi_{\omega_T}(\omega) \qquad (4.28)$$

$u(t) = \frac{A}{2}\,\mathrm{si}\left(\frac{W_0}{2} \cdot \frac{t}{2}\right)$

$U(j\omega) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{A}{2}\,\mathrm{si}\left(\frac{W_0}{2} \cdot \frac{t}{2}\right)\right\} = \frac{A}{2} \cdot \frac{1}{|1/2|}\,\mathcal{F}^{-1}\left\{\mathrm{si}\left(\omega_0 \frac{t}{2}\right)\right\}\left(\frac{\omega}{1/2}\right)$

$= A \cdot T \cdot \Pi_{W_0}(2\omega)$

c) Das Signal werde mittels Shapetop-Sampling ($\alpha = \frac{1}{2}$, $\omega_T = \omega_0$) abgetastet. Skizzieren Sie den Verlauf des abgetasteten Signals $u_A(t)$ im Zeitbereich $-8T_0 \leq t \leq 8T_0$. **2 P**

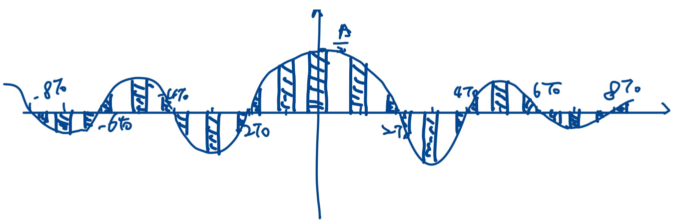
max Amplituden: $\frac{A}{2}$

Nullstellen: $t = 2kT_0$ mit $k \neq 0$

$\omega_T = \omega_0$

$\frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{T_0}$

$T_1 = T_0$



3 Zeitdiskrete Signale und Systeme — 11,5 Punkte

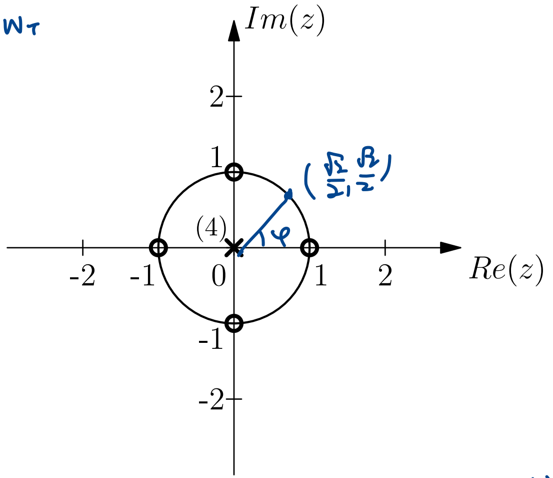
3.1 PN-Diagramme zeitdiskreter Systeme — 4 P

a) Gegeben sei das folgende PN-Diagramm eines zeitdiskreten Systems. Kreuzen Sie rechts die entsprechenden Eigenschaften des Systems an. — 3 P

$z = e^{j\omega} = e^{TS} = e^{\frac{2\pi}{\omega_T}s}$

$\Rightarrow s = \frac{j\omega}{2\pi}\omega_T$

$s = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$



ja	nein	
☒	☐	reellwertig
☒	☐	(bedingt) stabil
☒	☐	kausal
☐	☒	linearphasig
☐	☒	Allpass
☒	☐	minimalphasig

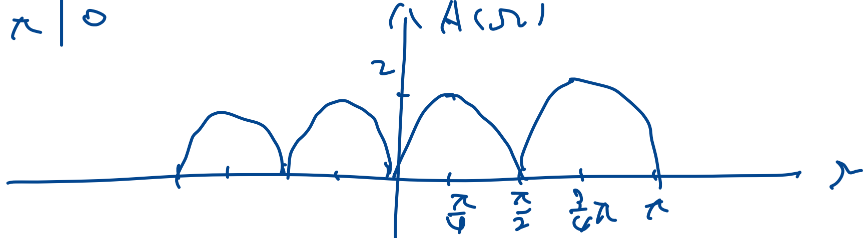
$H(z) = \frac{(z+1)(z-1)(z+i)(z-i)}{z^4}$

$(\ln s)^4 \quad s_p = 1$

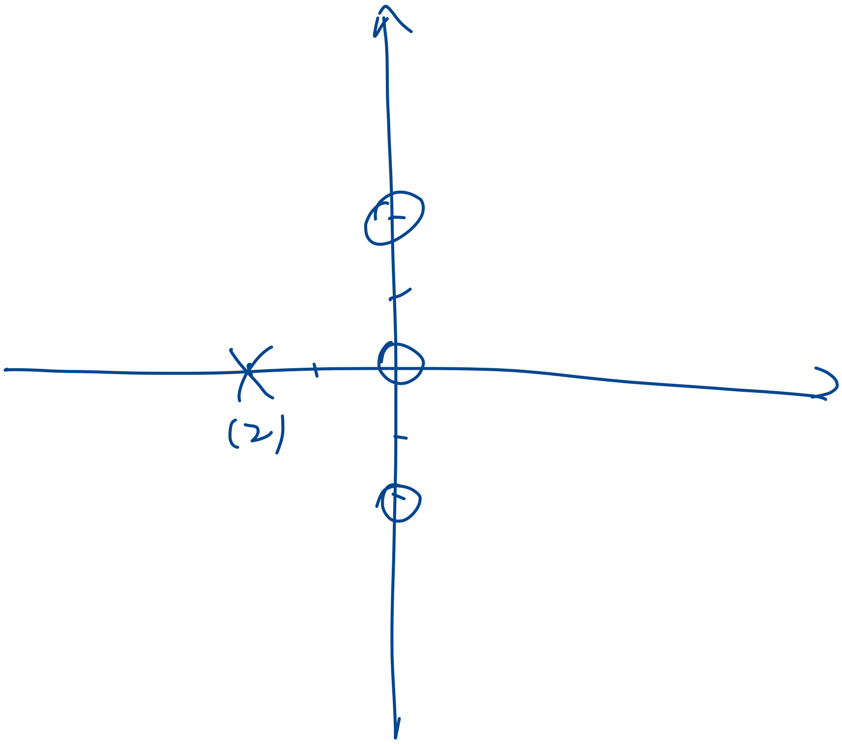
$\ln s = -1, 1, i, -i$

b) Skizzieren Sie qualitativ den Amplitudengang des Systems im Bereich $-\pi \leq \Omega \leq \pi$. — 1 P

Ω	$A(\Omega)$
0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{(1-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}^2 \cdot \sqrt{(1+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}^2 = (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\sqrt{2})\cdot(1+1+\sqrt{2}) = 4-2 = 2$
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3}{4}\pi$	2
π	0



c) Gehen Sie davon aus, dass das PN-Diagramm aus Teilaufgabe 3.1 a) die Pol- und Nullstellen eines entsprechenden zeitkontinuierlichen Systems nach der Abtastung zeigt. Skizzieren Sie im untenstehenden Koordinatensystem die PN-Verteilung des Systems **vor** der Abtastung. 1,5* P



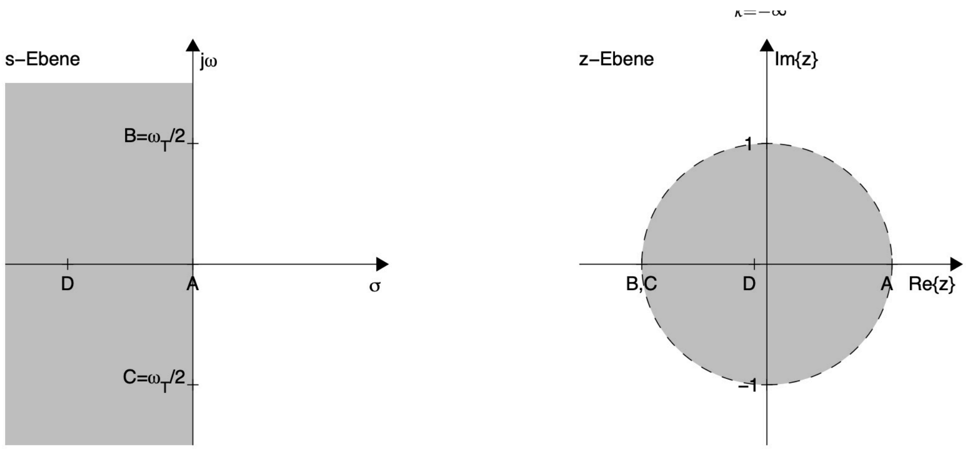
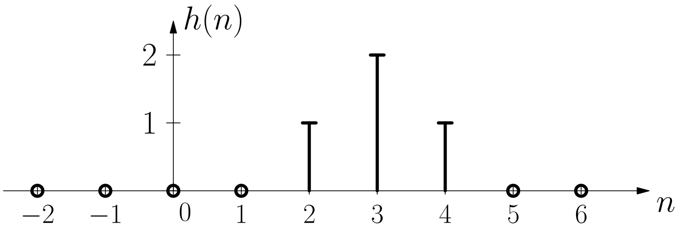


Abbildung 1: Transformation von der s-Ebene in die z-Ebene

- Z平面上的单位圆会映射到S平面的虚轴上。
- Z平面内的点会映射到S平面左半部（表明稳定性）。
- Z平面外的点会映射到S平面右半部（表明不稳定性）。

3.2 Gegeben sei nachfolgende Impulsantwort $h(n)$. 3 P



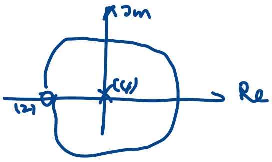
a) Bestimmen Sie die Systemfunktion $H(z)$. 0,5 P

$$h(n) = \delta(n-2) + 2\delta(n-3) + \delta(n-4)$$

$$H(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4} = \frac{z^2+2z+1}{z^4} = \frac{(z+1)^2}{z^4}$$

b) Ist das System stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. 1 P

$z_{0\,1,2} = -1, -1$ $\quad z_{p\,1,2,3,4} = 0, 0, 0, 0$



ja, da alle Polstellen in EK liegen

c) Bestimmen Sie den Frequenzgang $H(j\Omega)$. Fassen Sie das Ergebnis so weit wie möglich zu trigonometrischen Funktionen zusammen. 1 P

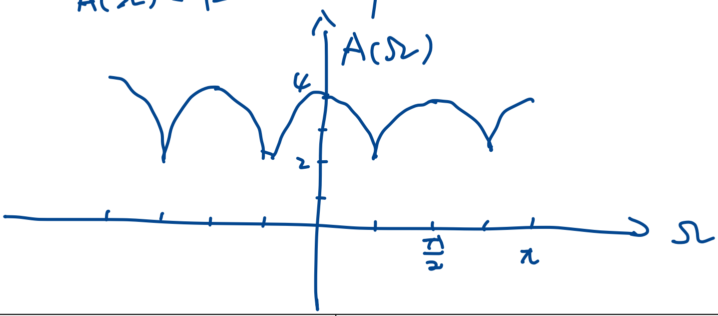
$$H(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\, e^{-jk\Omega} = e^{-2j\Omega} + 2e^{-3j\Omega} + e^{-4j\Omega}$$

$$= e^{-3j\Omega} \cdot \left(e^{j\Omega} + 2 + e^{-j\Omega}\right)$$

$$= e^{-3j\Omega} \cdot (2\cos\Omega + 2)$$

d) Zeichnen Sie den Amplitudengang $A(\Omega)$. 0,5 P

$$A(\Omega) = |2\cos\Omega + 2|$$



$k = 0\ 1\ 2\ 3$

3.3 Gegeben sei die Folge $\{2; 0; 1; 2\}$. 4,5 P

a) Berechnen Sie die DFT der Folge. 2 P

$$U_{DFT}(n) = \sum_{k=0}^{3} u(k) e^{-jkn\Delta\Omega} \qquad \Delta\Omega = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{2}$$

$$= 2e^{0} + 0 + e^{-2jn\frac{\pi}{2}} + 2e^{-3jn\cdot\frac{\pi}{2}}$$

$$U_{DFT}(0) = 2 + 1 + 2 = 5$$

$$U_{DFT}(1) = 2 + e^{-j\pi} + 2e^{-\frac{3}{2}j\pi}$$

$$= 2 - 1 + 2\cdot j = 1 + 2j$$

$$U_{DFT}(2) = 2 + e^{-2j\pi} + 2e^{-3jn\pi}$$

$$= 2 + 1 - 2 = 1$$

$$U_{DFT}(3) = 1 - 2j$$

b) Welche Eigenschaften unterscheiden die DFT von der gewöhnlichen Fourier-transformation? 1 P

Zeitsignale werden so interpretiert, als ob sie periodisch wären

das Spektrum periodisch fortgesetzt

c) Gegeben sei nun die diskrete Fouriertransformierte $U_{DFT} = \{2; \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\}$. Bestimmen Sie mithilfe der inversen DFT (IDFT) die Zahlenfolge u(k). 1,5 P

$$U(k) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{2} U_{DFT}(n)\cdot e^{jkn\Delta\Omega} \qquad \Delta\Omega = \frac{2\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{2} U_{DFT}(n)\cdot e^{jkn\cdot\frac{2}{3}\pi}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(2e^{0} + \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{jk\cdot\frac{2}{3}\pi} + \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{jk\cdot\frac{4}{3}\pi}\right)$$

$$u(0) = \frac{1}{3}\cdot(2+1) = 1$$

$$u(1) = \frac{1}{3}\cdot\left(2 + \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(2 + \left(-\cancel{\frac{1}{4}}\right) + \frac{2\sqrt{3}}{4}j + \cancel{\frac{3}{4}} - \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{2\sqrt{3}}{4}j + \frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(3) = 1$$

$$u(2) = \frac{1}{3}\left(2 + \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(2 - \frac{1}{4} - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{4}j} + \cancel{j^2\frac{3}{4}} - \frac{1}{4} + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{4}j} + \cancel{j^2\frac{3}{4}}\right)$$

$$= 0$$