

Elvira Fleig, Rolf Jongebroed

Rechenübung Signale & Systeme (WiSe 2023/2024)

z-Transformation, zeitdiskrete Filter (12. Termin)

05.02 - 11.02.2024

Hinweise

- Die Aufgabenblätter zur Rechenübung stehen jeweils vor dem jeweiligen Termin auf dem ISIS-Portal zum Download bereit.
- Aufgaben, die mit [HA] bzw. [AK] beginnen, sind Hausaufgaben bzw. alte Klausuraufgaben, die als Hausaufgabe bearbeitet werden sollen. Diese werden zusätzlich in den freiwilligen Tutorien vorge-rechnet bzw. besprochen.

1 z-Transformation

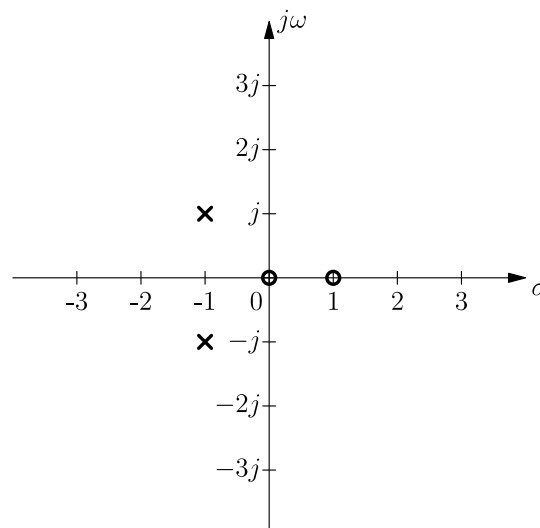
1.1 Herleitung der z-Transformation

- a) Überführe allgemein die Fouriertransformierte eines zeitdiskreten Signals

$$u_A(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT) \cdot \delta(t - kT)$$

zunächst in die zeitdiskrete Laplacetransformierte und schließlich in die z-Transformierte.

- b) Bestimme das Abbild der $j\omega$ -Achse aus der Laplace-Ebene in der z-Ebene.
- c) Gegeben sei das folgende PN-Diagramm eines zeitkontinuierlichen Systems. Skizziere das PN-Diagramm, das das System nach einer Abtastung des Ausgangssignals charakterisiert ($\omega_T = 6$).



- d) Skizziere die entsprechende PN-Verteilung des zeitdiskreten Systems in der z-Ebene.
- e) Wo in der z-Ebene lägen die beiden Polstellen, wenn ihr Imaginärteil ursprünglich ± 2 betragen hätte?

1.2 Bestimme die z-Transformierten der folgenden zeitdiskreten Signale. Gib jeweils auch den Konvergenzbereich an, auf dem die z-Transformierte definiert ist.

a) $u_1 = \{4, 3, 2, 1\}$

b) $u_2(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \sigma(n)$

1.3 Bestimme jeweils das zugehörige Signal im Zeitbereich für die folgenden z-Transformierten.

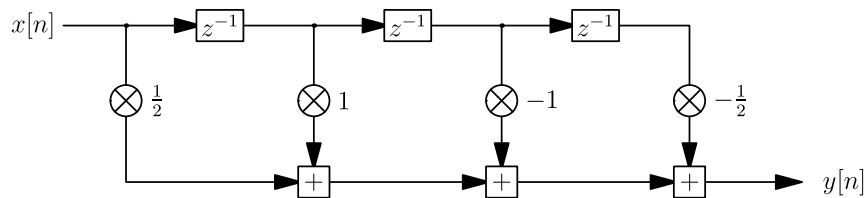
a) $U_1(z) = z + 2 + z^{-1}$

b) $U_2(z) = \frac{z^2 + 4z}{z + 2}$

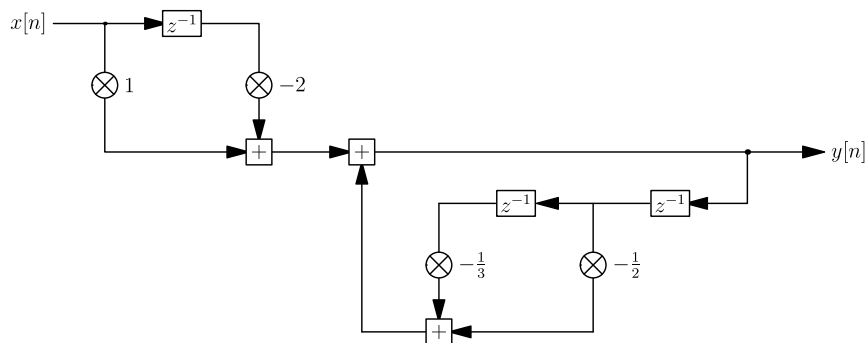
2 Zeitdiskrete Filter

2.1 Skizziere für die folgenden Filter die ersten fünf Werte der Impulsantwort und gib die jeweilige Differenzengleichung an. Bestimme weiterhin die z-Transformierte der Differenzengleichung.

a)



b)



1.2 Bestimme die z-Transformierten der folgenden zeitdiskreten Signale. Gib jeweils auch den Konvergenzbereich an, auf dem die z-Transformierte definiert ist.

a) $u_1 = \{4, 3, 2, 1\}$

b) $u_2(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \sigma(n)$

$$a) \quad U_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)z^{-k} = 4z^{-0} + 3z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3} \\ = \frac{4z^3 + 3z^2 + 2z + 1}{z^3}$$

Konvergenzbereich: $\forall z \neq \{0\}, |z| > 0$

$$b) \quad U_2(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3z}\right)^k$$

Geometrische Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, |q| < 1$

$$U_2(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3z}} = \frac{3z}{3z - 1}, \left|\frac{1}{3z}\right| < 1 \Leftrightarrow |3z| > 1 \Leftrightarrow |z| > \frac{1}{3}$$

$$U(z) \equiv Z_{II}\{u(k)\} \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)z^{-k}$$

1.3 Bestimme jeweils das zugehörige Signal im Zeitbereich für die folgenden z-Transformierten.

a) $U_1(z) = z + 2 + z^{-1}$

b) $U_2(z) = \frac{z^2 + 4z}{z + 2}$

a) $\delta(k-9) \rightarrow z^{-9}$

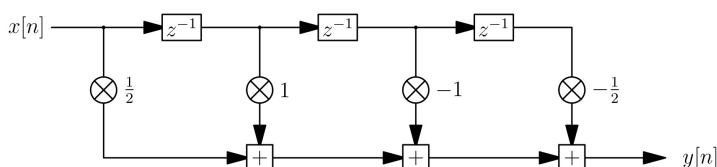
$$u_1(k) = \delta(k+1) + 2 \cdot \delta(k) + \delta(k-1)$$

b)
$$U_2(z) = \frac{(z+2) \cdot z + 2z}{z+2} = z + \frac{2z}{z+2} \\ = z + 2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{z}} \\ = z + 2 \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{2}{z})} \\ = \delta(k+1) + 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{z}\right)^k \\ = \delta(k+1) + 2 \cdot (-2)^k \cdot \delta(k)$$

2 Zeitdiskrete Filter

2.1 Skizziere für die folgenden Filter die ersten fünf Werte der Impulsantwort und gib die jeweilige Differenzengleichung an. Bestimme weiterhin die z-Transformierte der Differenzengleichung.

a)



$$y(n) = \frac{1}{2}x(n) + 1 \cdot x(n-1) - 1x(n-2) - \frac{1}{2}x(n-3) \leftarrow \text{Differenzengleichung}$$

n	x(n)	x(n-1)	x(n-2)	x(n-3)	y(n)
0	1	0	0	0	1/2
1	0	1	0	0	1
2	0	0	1	0	-1
3	0	0	0	1	-1/2
4	0	0	0	0	0

$$x(n-1) = x(n) \cdot z^{-1}$$

$$\downarrow \\ X(z) \cdot z^{-1}$$

$$h(n) = \left\{ \frac{1}{2}, 1, -1, -\frac{1}{2} \right\} \quad \leftarrow \text{Impulsantwort}$$

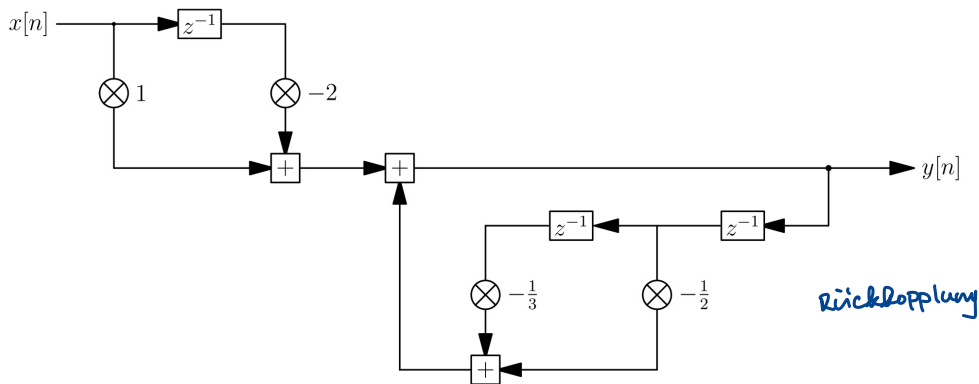
$$Y(z) = \frac{1}{2} X(z) + 1 \cdot X(z) \cdot z^{-1} - 1 \cdot X(z) \cdot z^{-2} - \frac{1}{2} X(z) \cdot z^{-3}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \left(\frac{1}{2} + z^{-1} - z^{-2} - \frac{1}{2} z^{-3} \right) \cdot \frac{z^3}{z^3}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} z^3 + z^2 - z - \frac{1}{2}}{z^3}$$

Systemfunktion
(Die z-Transformierte
der Impulsantwort)

b)



→ IIR: Infinite Impulse
Response

$$y(n) = 1 \cdot x(n) - 2 \cdot x(n-1) - \frac{1}{2} y(n-1) - \frac{1}{3} y(n-2)$$

n	x(n)	x(n-1)	y(n-1)	y(n-2)	y(n)
0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	$-2 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 = -5/2$
2	0	0	$-\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2} \cdot (-\frac{5}{2}) - \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{5}{4} - \frac{1}{3} = \frac{11}{12}$
3	0	0	$\frac{11}{12}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2} \cdot \frac{11}{12} - \frac{1}{3} \cdot (-\frac{5}{2}) = -\frac{11}{24} + \frac{5}{6} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$
4	0	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{11}{12}$	$-\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} - \frac{1}{3} \cdot \frac{11}{12} = -\frac{31}{144}$

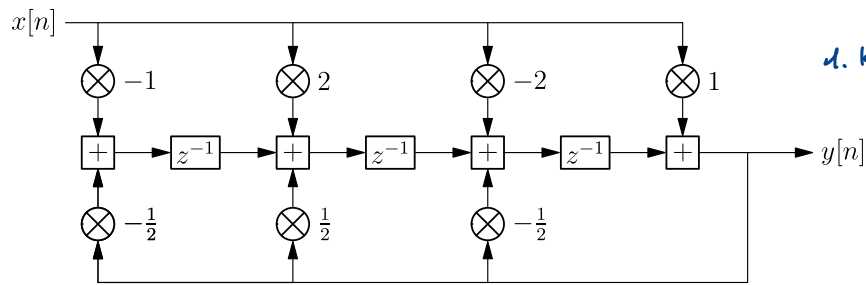
$$h(n) = \left\{ 1, -\frac{5}{2}, \frac{11}{12}, \frac{3}{8}, -\frac{31}{144}, \dots \right\}$$

$$Y(z) = 1X(z) - 2X(z) \cdot z^{-1} - \frac{1}{2} Y(z) \cdot z^{-1} - \frac{1}{3} Y(z) \cdot z^{-2}$$

$$Y(z) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} z^{-1} + \frac{1}{3} z^{-2} \right) = X(z) \cdot (1 - 2z^{-1})$$

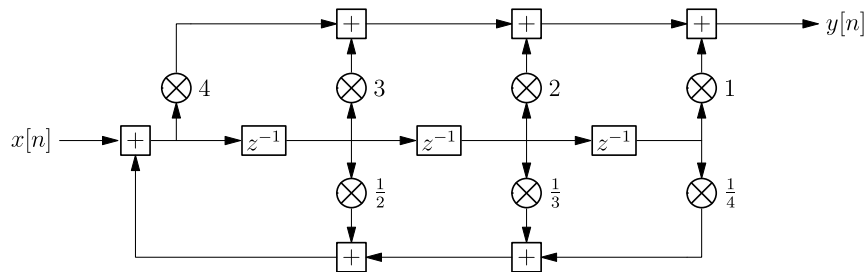
$$H(z) = \frac{\cancel{X(z)} \cdot (1 - 2z^{-1})}{1 + \frac{1}{2} z^{-1} + \frac{1}{3} z^{-2}} = \frac{\cancel{X(z)} (z^2 - 2z)}{z^2 + \frac{1}{2} z + \frac{1}{3}}$$

c)



d. kanonische Form

d)



$$c) y(n) = 1 \cdot x(n) - 2 \cdot x(n-1) + 2 \cdot x(n-2) - 1 \cdot x(n-3) - \frac{1}{2} y(n-1) + \frac{1}{2} y(n-2) - \frac{1}{2} y(n-3)$$

n	x(n)	x(n-1)	x(n-2)	x(n-3)	y(n-1)	y(n-2)	y(n-3)	y(n)
0	1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	0	$-2 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{5}{2}$
2	0	0	1	0	$-\frac{5}{2}$	1	0	$2 \cdot 1 - \frac{5}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} = \frac{15}{4}$
3	0	0	0	1	$\frac{15}{4}$	$-\frac{5}{2}$	1	$-1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{4} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{37}{8}$
4	0	0	0	0	$-\frac{37}{8}$	$\frac{15}{4}$	$-\frac{5}{2}$	$+\frac{1}{2} \cdot \frac{37}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{89}{16}$

$$h(n) = \left\{ 1, -\frac{5}{2}, \frac{15}{4}, -\frac{37}{8}, \frac{89}{16}, \dots \right\}$$

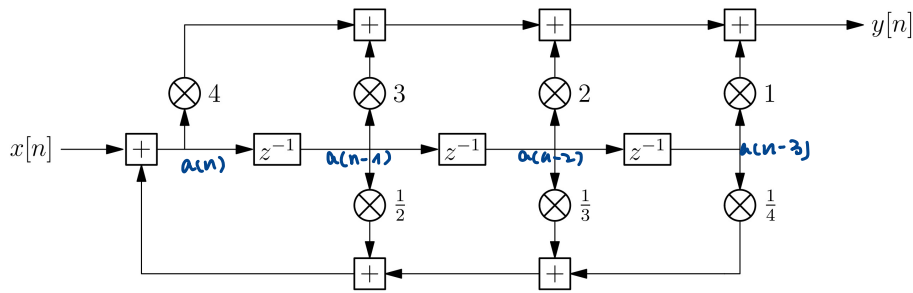
$$y(z) = 1 \cdot X(z) - 2 \cdot X(z) \cdot z^{-1} + 2 \cdot X(z) \cdot z^{-2} - X(z) \cdot z^{-3} - \frac{1}{2} Y(z) \cdot z^{-1} + \frac{1}{2} Y(z) \cdot z^{-2} - \frac{1}{2} Y(z) \cdot z^{-3}$$

$$Y(z) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} z^{-1} - \frac{1}{2} z^{-2} + \frac{1}{2} z^{-3} \right) = X(z) \cdot (1 - 2 \cdot z^{-1} + 2 \cdot z^{-2} - z^{-3})$$

$$Y(z) = \frac{X(z) \cdot (1 - 2 \cdot z^{-1} + 2 \cdot z^{-2} - z^{-3})}{1 + \frac{1}{2} z^{-1} - \frac{1}{2} z^{-2} + \frac{1}{2} z^{-3}} = \frac{X(z) \cdot (z^3 - 2 \cdot z^2 - 2 \cdot z - 1)}{z^3 + \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{2} z + \frac{1}{2}}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^3 - 2 \cdot z^2 - 2 \cdot z - 1}{z^3 + \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{2} z + \frac{1}{2}}$$

d)



2. kanonische Form

$$y(n) = 4 \cdot a(n) + 3 \cdot a(n-1) + 2 \cdot a(n-2) + 1 \cdot a(n-3)$$

$$a(n) = x(n) + \frac{1}{2} a(n-1) + \frac{1}{3} a(n-2) + \frac{1}{4} a(n-3)$$

n	x(n)	a(n)	a(n-1)	a(n-2)	a(n-3)	y(n)
0	1	1	0	0	0	4
1	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{4}{2} + 3 = 5$
2	0	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ $= \frac{3}{12}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{5}{3} + \frac{3}{2} + 2 = \frac{14+9+12}{6} = \frac{35}{6}$
3	0	$\frac{13}{24}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{79}{12}$
4	0	$\frac{87}{144}$	$\frac{13}{24}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{467}{64}$

$$h(n) = \left\{ 4.5, \frac{35}{6}, \frac{79}{12}, \frac{467}{62}, \dots \right\}$$

$$Y(z) = 4A(z) + 3A(z) \cdot z^{-1} + 2A(z) \cdot z^{-2} + A(z) \cdot z^{-3}$$

$$A(z) = X(z) + \frac{1}{2} A(z) z^{-1} + \frac{1}{3} A(z) \cdot z^{-2} + \frac{1}{4} A(z) \cdot z^{-3}$$

$$A(z) = \frac{X(z)}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2} - \frac{1}{4}z^{-3}}$$

$$Y(z) = (4 + 3z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3})A(z)$$

$$= \frac{4 + 3z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-2} - \frac{1}{4}z^{-3}} \quad x(z)$$

$$f(z) = \frac{4z^3 + 3z^2 + 2z + 1}{z^3 - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z - \frac{7}{6}}$$