4. Fouriertransformation

4.1 Definition, Existenz

Einer Zeitfunktion u(t) kann eine Fouriertransformierte $U(j\omega) = \mathbf{F}\{u(t)\}$ zugeordnet werden.

Die Definitionsgleichung (*Analysegleichung*) der Fouriertransformation lautet

Kurzform

$$u(t) \leftrightarrow U(j\omega) = \mathbf{F}\{u(t)\}$$

$$U(j\omega) = \mathbf{F}\{u(t)\} := \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \qquad (4.1)$$

(Fourier-) Spektrum mit Dimension Amplitude · Zeit
[also Vs, wenn u(t) eine Spannung in V und t die Zeit in s ist].

4.1 Definition, Existenz

Fouriertransformation

$$U(j\omega) = \mathbf{F}\{u(t)\} := \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

Fourierreihe

$$U_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \cdot e^{-jk\omega_P t} dt \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Die Analysegleichung ergibt sich (bis auf den Vorfaktor 1/T) auch aus der Definitionsgleichung für die Fourierkoeffizienten U_k, indem man $T \to \infty$ ansetzt, also keine Wiederholung des Signals (Grundintervalls) „zuläßt“. Dann wird $u_P(t)$ zu $u(t)$, $\omega_P = 2\pi/T$ wird zu $d\omega$ und $k\omega_P$ zu ω.

分析方程（除以 1/T 的比例因子）也可以通过对傅里叶系数 Uk 的定义方程进行分析，将 T->∞，即不允许信号（基本间隔）的重复。然后 up(t) 变为 u(t)，p = 2/T 变为 dω，kap 变为 ω。

4.1 Definition, Existenz

Durch das Fourierintegral wird für jedes vorgegebene ω die *Ähnlichkeit* des Signals u(t) mit dem Exponentialsignal $e^{-j\omega t}$ festgestellt, denn U(jω) ist die Kreuzkorrelierte von u(t) und $v(t) = e^{-j\omega t}$:

$$U(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot v(t)\, dt = r_{uv}(0) \tag{4.2}$$

Existenz

Eine Fouriertransformierte U(jω) existiert (d.h. ist endlich), wenn u(t) absolut integrabel ist, denn aus

Gl. (4.1) $$U(j\omega) = \mathbf{F}\{u(t)\} := \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

folgt dafür mit der Ungleichung $$\left|\int x(t)\, dt\right| \le \int |x(t)|\, dt$$

und mit $$\left|e^{-j\omega t}\right| = 1$$

die Forderung $$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|\, dt < \infty$$

Existenz

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|\, dt < \infty$$

Existenzforderung

Offensichtlich werden aber mit der obigen hinreichenden Bedingung viele in der Elektrotechnik wichtige Funktionen nicht erfaßt

- *so kann danach z.B. keine Fouriertransformierte einer Gleichspannung angegeben werden!*

显然，通过上述充分条件，许多在电气工程中重要的函数都无法被涵盖。例如，无法给出直流电压的傅里叶变换！在第 4.5 节中，通过分布理论，甚至可以将这些函数关联到傅里叶变换。

Abschnitt 4.5. - über Distributionen kann auch solchen Funktionen eine Fouriertransformierte zugeordnet werden

Synthesegleichung

合成方程：如果存在傅里叶变换，那么逆傅里叶变换会给出傅里叶逆变换。

Existiert die Fouriertransformierte, so liefert die inverse Fouriertransformation die Fourierrücktransformierte

$$u(t) = \mathbf{F}^{-1}\{U(j\omega)\} := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$$

Synthese

(4.5)

$$U(j\omega) = \mathbf{F}\{u(t)\} := \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

Analysegleichung

$$u(t) = \mathbf{F}^{-1}\{U(j\omega)\} := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

Ein Signal u(t) kann also näherungsweise als unendliche Summe von gewichteten Exponentialschwingungen mit Kreisfrequenz $m\Delta\omega$ interpretiert werden:

这意味着一个信号u(t)可以被近似看作是无限多个权重指数振荡的和，每个振荡都有一个特定的圆频率mΔω

$$u(t) \approx \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta\omega \to 0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} U(jm\Delta\omega)\, e^{jm\Delta\omega t}\, \Delta\omega \qquad (4.6)$$

Eine Funktion u(t) kann fehlerfrei als eine unendlich dichte Überlagerung von gewichteten Exponentialschwingungen mit Kreisfrequenz ω dargestellt werden. U(jω) bestimmt Amplitude und Phase jeder Teilschwingung $e^{j\omega t}$

u(t) andererseits auch als eine unendlich dichte Überlagerung von Diracimpulsen

Phase jeder Teilschwingung $e^{j\omega t}$": 这表明一个函数$u(t)$可以被完美地表示为无限密集的加权指数振荡的叠加，每个振荡有一个特定的圆频率ω，并且$U(j\omega)$确定了每个分量振荡$e^{j\omega t}$的振幅和相位。
"u(t) andererseits auch als eine unendlich dichte Überlagerung von Diracimpulsen": 这是信号处理中的一个概念，表明信号也可以被视为狄拉克冲击（Dirac delta function）的无限密集的叠加，这是在数学上描述连续信号的一种方法。

Beispiel: Rechteckfunktion

Die Fouriertransformierte der Rechteckfunktion läßt sich einfach berechnen:

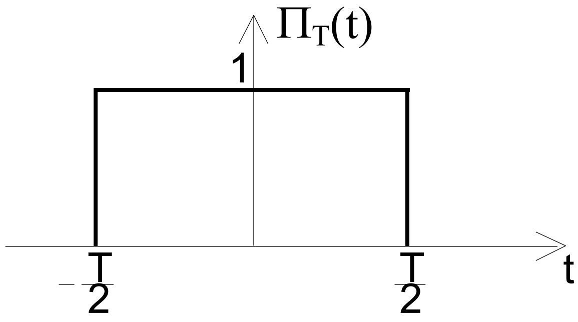
$$\mathbf{F}\left\{\Pi_T(t)\right\} := \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_T(t)\, e^{-j\omega t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega t) dt = T\,\mathrm{si}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \qquad (4.7)$$

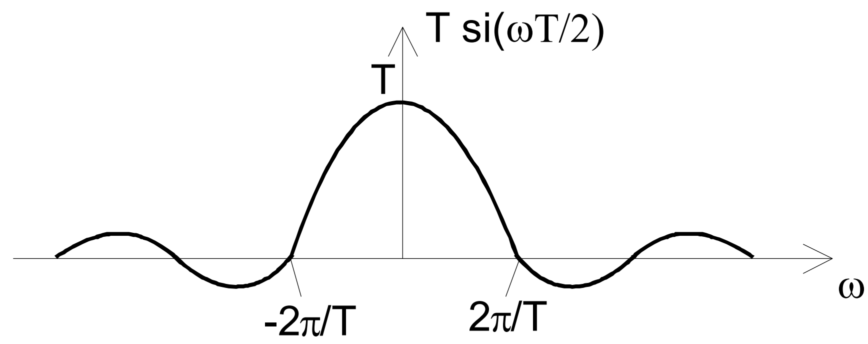
Es ergibt sich damit das Transformationspaar

$$\Pi_T(t) \leftrightarrow T\,\mathrm{si}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \qquad (4.8)$$

Beispiel (Fortsetzung)

Darstellung von Realteil ausreichend! – da Imaginärteil = 0!!!





Spektrum einer Rechteckfunktion ist offensichtlich unendlich ausgedehnt.

矩形函数的频谱显然是无限延伸的。然而，通常通过将频谱仅考虑到第一个零点来定义一个截止频率。这种所谓的零带宽

Oft wird aber eine Grenzfrequenz definiert, indem das Spektrum nur bis zum ersten Nulldurchgang berücksichtigt wird. Diese sogenannte Null-Bandbreite ist

$$\boxed{B_0 = \frac{1}{T} \quad [\mathrm{Hz}]} \qquad \omega_0 = {}^{2\pi}\!/_{T} \tag{4.9}$$

Unschärferelation der Nachrichtentechnik

通信技术的不确定关系
零带宽 × 脉冲持续时间 的乘积也被称为通信技术中的不确定关系（或时间规律）。
它还可以通过许多其他函数和边界频率的定义来证明。

Das Produkt

Null-Bandbreite × Impulsdauer

$$B_0 \cdot T = 1 = \frac{\omega_0}{2\pi} \cdot T$$

wird auch *Unschärferelation* (oder *Zeitgesetz*) *der Nachrichtentechnik* genannt.

Sie kann auch mit vielen anderen Funktionen und Definitionen der Grenzfrequenz nachgewiesen werden.

4.2 Eigenschaften

Amplituden- und Phasenspektrum:

Die Fouriertransformierte $U(j\omega)$ hat Real- und Imaginäranteile:

$$U(j\omega) = \mathrm{Re}\{U(j\omega)\} + j\,\mathrm{Im}\{U(j\omega)\} = R_u(\omega) + j\,I_u(\omega) \qquad (4.10)$$

Amplituden- und Phasenspektrum

Üblicherweise werden stattdessen das *Amplitudenspektrum* $|U(j\omega)|$ und das *Phasenspektrum* $\varphi_u(\omega)$ verwendet:

$$U(j\omega) = A_u(\omega) \cdot e^{j\varphi_u(\omega)} \qquad (4.11)$$

mit

$$\mathrm{A}_u(\omega) = \left|\mathrm{U}(j\omega)\right| = \sqrt{\mathrm{R}_u^2(\omega) + \mathrm{I}_u^2(\omega)} \qquad (4.12)$$

und

$$\varphi_u(\omega) = \arg\left\{\mathrm{U}(j\omega)\right\} = \arctan\frac{\mathrm{I}_u(\omega)}{\mathrm{R}_u(\omega)} \qquad (4.13)$$

Gleichung mit arctan gilt - da dessen Wertebereich nur das Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ ist - nur bedingt.

Amplituden- und Phasenspektrum:

Aus der Analysegleichung der FT folgt:

$$R_u(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\cos(\omega t)\,dt \qquad \text{und} \qquad I_u(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\sin(\omega t)\,dt$$

(4.14)

<u>Für Reellwertige Funktionen</u> u(t) (die wir in dieser Vorlesung fast immer voraussetzen) gilt:

Re{U(jω)} eine *gerade Funktion* und Im{U(jω)} eine *ungerade Funktion*:

$$R_u(\omega) = R_u(-\omega) \quad \text{und } I_u(\omega) = -I_u(-\omega)$$

(4.15)

Amplituden- und Phasenspektrum:

Damit gilt für <u>reellwertige</u> u(t):

$U(-j\omega) = U^*(j\omega)$ (4.16)

Gleiches gilt für den Amplituden- bzw. Phasengang:

$$A_u(\omega) = A_u(-\omega) \quad \text{und} \quad \varphi_u(\omega) = -\varphi_u(-\omega) \qquad (4.17)$$

Symmetrie!!!

Frage: warum eigentlich?

Beispiel: Rechteckfunktion (Fortsetzung)

Amplitudenspektrum und Phasenspektrum. Ein negativer Wert einer Fouriertransformierten ergibt sich durch eine Phase $\varphi(\omega) = \pi$ oder $\varphi(\omega) = -\pi$ (denn $e^{j\pi} = e^{-j\pi} = -1$).

Wir wählen den Wert $-\pi$. Für negative Frequenzen gilt dann $j(-\omega) = -j(\omega) = \pi$.

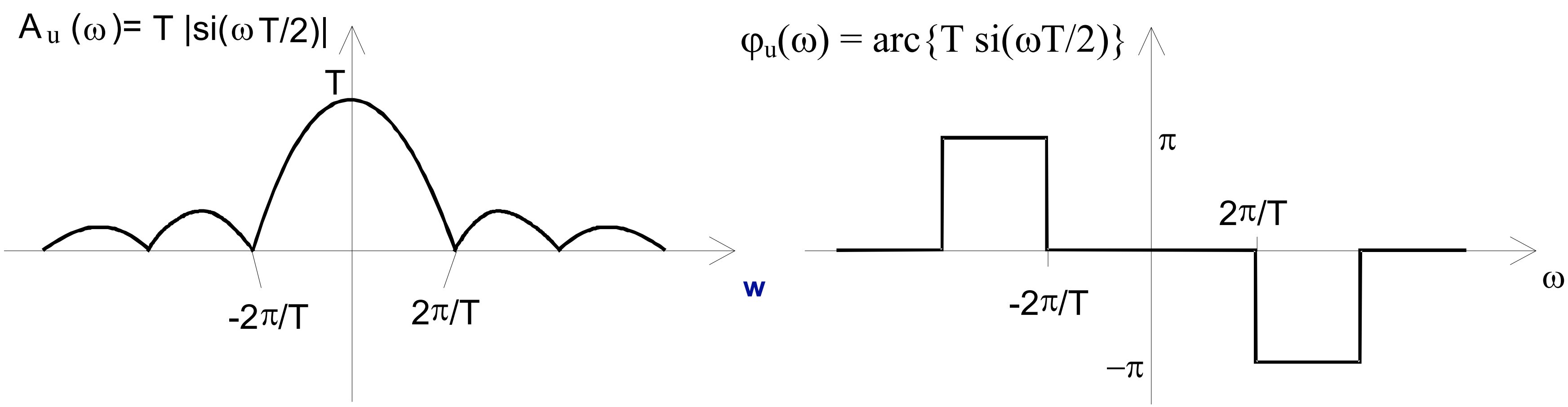


Bild 4.2: Amplituden- und Phasengang der Rechteckfunktion

Linearität:

Mit

$$u(t) \leftrightarrow U(j\omega) \text{ und } v(t) \leftrightarrow V(j\omega)$$

gilt bei Linearität

$$a\,u(t) + b\,v(t) \leftrightarrow a\,U(j\omega) + b\,V(j\omega) \qquad (4.18)$$

Das Spektrum der gewichteten Summe mehrerer Signale ist also gleich der gewichteten Summe der Einzelspektren.

Zeitverschiebung:

Bei Verschiebung eines Signals u(t) um t_0 entsteht ein Transformationspaar

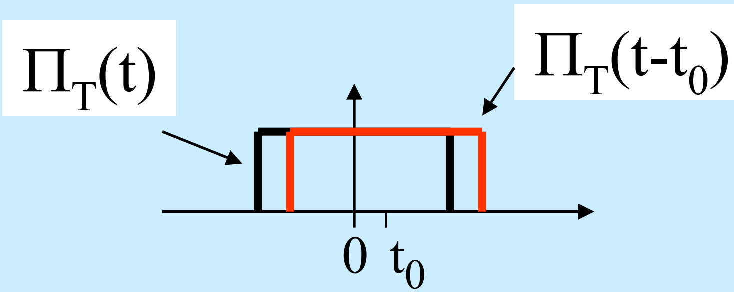
$$v(t) = u(t - t_0) \leftrightarrow V(j\omega) = U(j\omega)\, e^{-j\omega t_0} \qquad (4.19)$$

Eine Verzögerung der Zeitfunktion um t_0 entspricht einer Drehung des Spektrums um $e^{-j\omega t_0}$, d.h. es entsteht eine zusätzliche lineare Phasendrehung $\varphi(\omega) = -\omega t_0$.

Das Amplitudenspektrum ändert sich nicht!

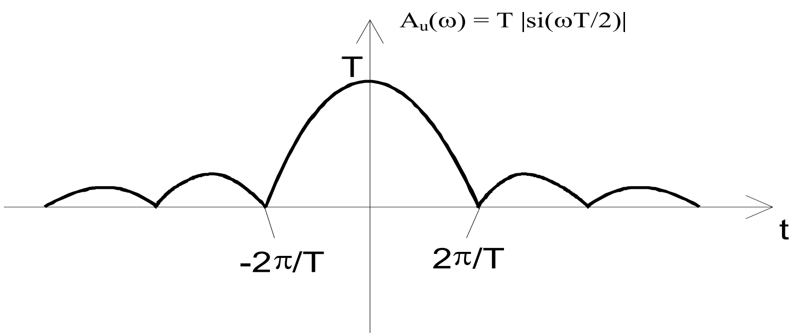
Beispiel: Rechteckfunktion (Fortsetzung)

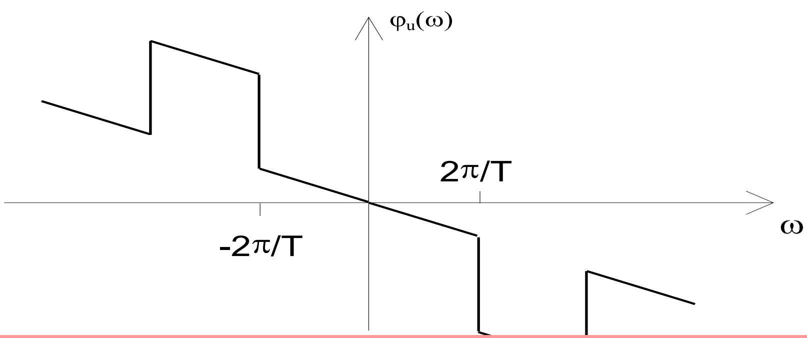
Aus $v(t) = \Pi_T(t-t_0)$



folgt $V(j\omega) = T\,\mathrm{si}(\omega T/2)\, e^{-j\omega t0}$,

also $A_v(j\omega) = A_u(j\omega)$, $\varphi_v(j\omega) = \varphi_u(j\omega) - \omega t_0$.





Das Rechteck ist immer noch ein Rechteck – bei linearer Phasenverzerrung

Zeitinvertierung:

Für ein zeitinvertiertes Signal u(-t) gilt:

$$u(-t) \leftrightarrow U^*(j\omega) \qquad = \; U(-j\omega) \tag{4.20}$$

Der Amplitudengang ändert sich also *nicht*.

Frequenzverschiebung (Modulationstheorem):

Wird ein Spektrum um eine Kreisfrequenz ω_0 verschoben, so entsteht ein Transformationspaar

当一个信号的频谱在频域内沿频率轴移动了特定的距离时，就发生了频谱偏移。这可以通过将信号乘以一个复指数函数来实现，该复指数函数的指数部分包含了偏移的圆频率

$$u(t)\, e^{j\omega 0 t} \leftrightarrow U[j(\omega - \omega_0)] \qquad (4.21)$$

Eine Multiplikation der Zeitfunktion mit $e^{j\omega 0 t}$ (komplex!) entspricht also einer Verschiebung des Spektrums um ω_0.

“时域函数乘以复指数 $e^{j\omega_0 t}$ 相当于频域中的频谱移动了 ω_0。”

最后一段德文提到：

“为了得到一个实时信号，除了 $U(j\omega - \omega_0)$，还必须将 $U(j\omega + \omega_0)$ 加到频谱中。”

Um ein reelles Zeitsignal entstehen zu lassen, muß zum Spektrum zusätzlich ein Anteil $U[j(\omega+\omega_0)]$ addiert werden.

Beispiel: Cosinusburst

Für den Cosinusburst

$$u(t) = \cos(\omega_1 t)\Pi_T(t) \qquad (4.22)$$

ergibt sich mit

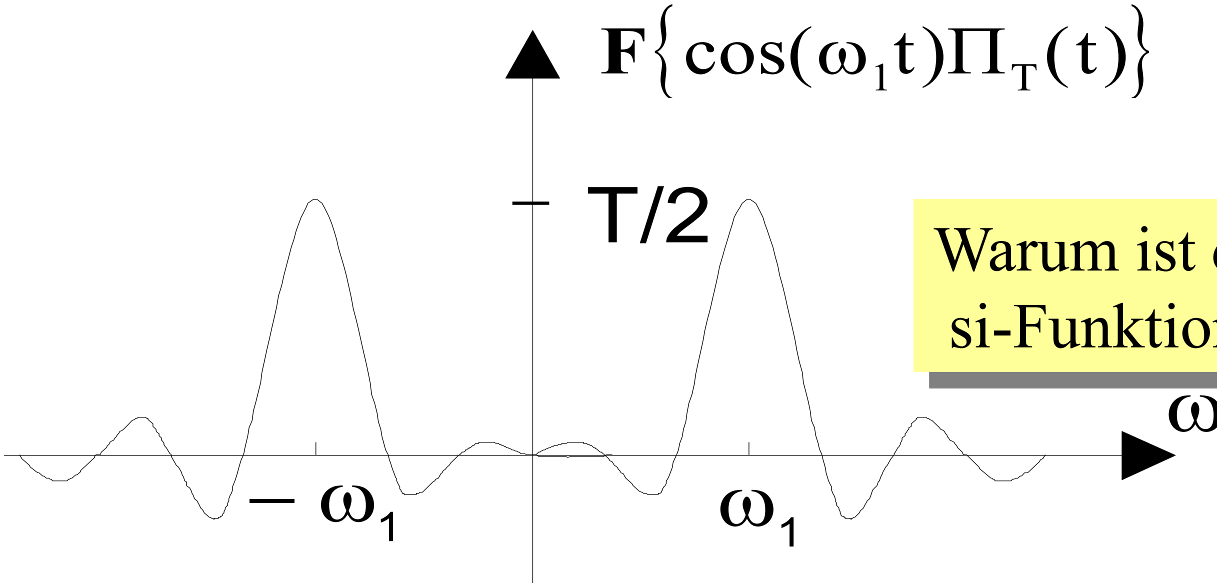
$$\cos(\omega_1 t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}\right) \qquad (4.23)$$

bei Anwendung der Eigenschaften der Linearität und Frequenzverschiebung das Transformationspaar

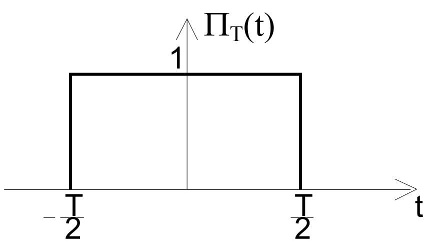
$$\boxed{\cos(\omega_1 t)\cdot\Pi_T(t) \leftrightarrow \frac{T}{2}\left[\mathrm{si}\left(\frac{T}{2}(\omega-\omega_1)\right) + \mathrm{si}\left(\frac{T}{2}(\omega+\omega_1)\right)\right]} \qquad (4.24)$$

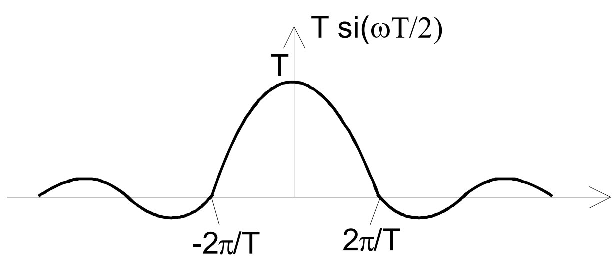
Spektrale Darstellung eines Cosinusbursts

$$\cos(\omega_1 t)\cdot \Pi_T(t) \;\leftrightarrow\; \frac{T}{2}\left[\mathrm{si}\left(\frac{T}{2}(\omega-\omega_1)\right)+\mathrm{si}\left(\frac{T}{2}(\omega+\omega_1)\right)\right]$$



Warum ist das keine
si-Funktion links und rechts?





$$\Pi_T(t) \leftrightarrow T\,\mathrm{si}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

Maßstabsänderung (Ähnlichkeitssatz)

Maßstabsänderung (相似性定理)
时间域的缩短对应着振幅的减小和频率域中谱的扩展，反之亦然：模糊不确定原理！！！

Einer Verkürzung im Zeitbereich entspricht eine Verringerung der Amplitude und eine Verbreiterung des Spektrums im Frequenzbereich und umgekehrt:

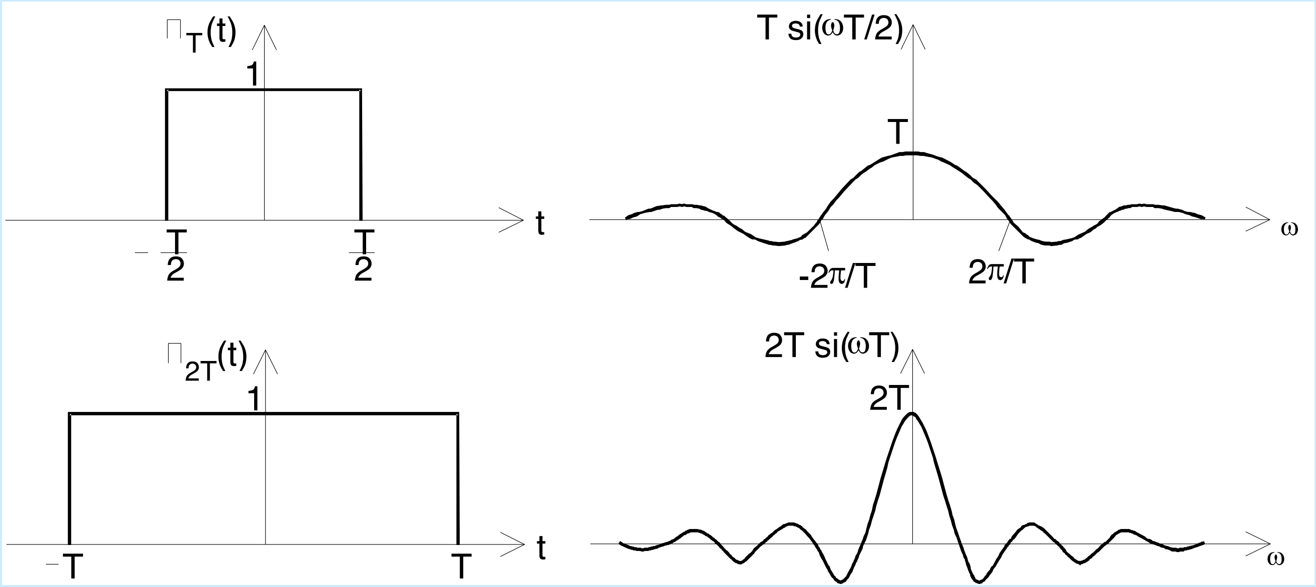
$$u(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} U\left(j\frac{\omega}{a}\right) \tag{4.25}$$

Unschärferelation!!!

Beispiel: Rechteckfunktion (Fortsetzung)

Für a = 1/2 ergibt sich aus Gl. (4.25) mit Gl. (4.8) das Transformationspaar

$$\Pi_T(t/2) = \Pi_{2T}(t) \;\; <-> \;\; 2T \, \mathrm{si}\,(\omega T) \qquad (4.26)$$



Welche Spektren erwarten Sie, wenn $T \to 0$ bzw. $T \to \infty$ geht?

Symmetrie (Vertauschungssatz):

Für ein Signal $u(t) \leftrightarrow U(j\omega)$ gilt

$$U(+t) \leftrightarrow 2\pi\, u(-j\omega) \tag{4.27}$$

这表示如果你将一个函数的时间变量和频率变量互换，并对应调整变换中的常数因子，你会得到原始函数的傅里叶变换的一个版本。

图片下方的德语文本解释说：“时间和频率的依赖性交换后，会得到类似的函数行为。”这意味着在时域和频域之间存在一种对称性，你可以通过在这两个域之间转换来利用这种对称性。

Bei einer Vertauschung von Zeit- und Frequenzabhängigkeit entstehen also wieder gleichartige Funktionsverläufe.

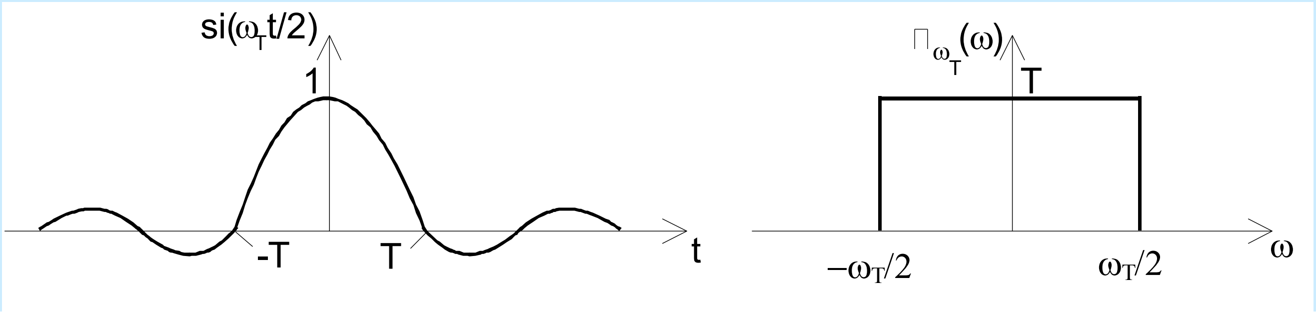
Beispiel: Rechteckfunktion (Fortsetzung)

Aus Gl. (4.8)

$$\Pi_T(t) \leftrightarrow T\,\mathrm{si}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

ergibt sich durch Ersetzen von T durch $\omega_T = 2\pi/T$ und Anwendung des Vertauschungssatzes das Transformationspaar

$$\mathrm{si}\left(\omega_T \frac{t}{2}\right) \leftrightarrow T \cdot \Pi_{\omega_T}(\omega) \qquad (4.28)$$



Faltung im Zeitbereich:

Für eine Faltung (siehe Abschnitt 6.5) der beiden Zeitfunktionen u(t) ↔ U(jω) und h(t) ↔ H(jω), also für

$$v(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \qquad (4.29)$$

gilt, daß sich die Fourierspektren multiplizieren:

$$\boxed{V(j\omega) = U(j\omega)\, H(j\omega)} \qquad (4.30)$$

Beispiel: Dreieckfunktion

Eine symmetrische Dreieckfunktion $\Lambda_T(t)$ der Höhe 1 und der Breite T läßt sich als Faltung von zwei Rechteckfunktionen darstellen:

$$\Lambda(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\,\Pi_{T/2}(t) * \sqrt{\frac{2}{T}}\,\Pi_{T/2}(t) \qquad (4.31)$$

Damit ergibt sich die Fouriertransformierte als Quadrat der Fouriertransformierten der die Dreieckfunktion erzeugenden Rechteckfunktion:

Frage: Weshalb eigentlich?

$$\mathbf{F}\left\{\Lambda_T(t)\right\} = \frac{T}{2}\left[\mathrm{si}\left(\frac{\omega T}{4}\right)\right]^2 \qquad (4.32)$$

Produktbildung im Zeitbereich:

Werden zwei Zeitsignale multipliziert, so ergibt sich die Fouriertransformierte des Produkts durch Faltung der Spektren der beiden beteiligten Produktterme:

$$\boxed{u(t)\,h(t) \;\leftrightarrow\; \frac{1}{2\pi} U(j\omega) * H(j\omega)} \qquad (4.33)$$

Beispiel: Cosinusburst (Fortsetzung)

Da ein Cosinusburst

$$z(t) = \cos(\omega_1 t)\ \prod_T(t) \quad (4.34)$$

因为一个余弦波脉冲

$z(t) = \cos(\omega_1 t)\Pi_T(t)$

具有乘积形式，我们也可以通过两个乘数的频谱的卷积来得到整个信号的频谱。

我们将在第4.5节 - 傅里叶变换和分布 - 推导出余弦信号具有两个在 $\pm\omega_1$ 处的δ函数组成的频谱：

$\cos(\omega_1 t) \leftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)]$

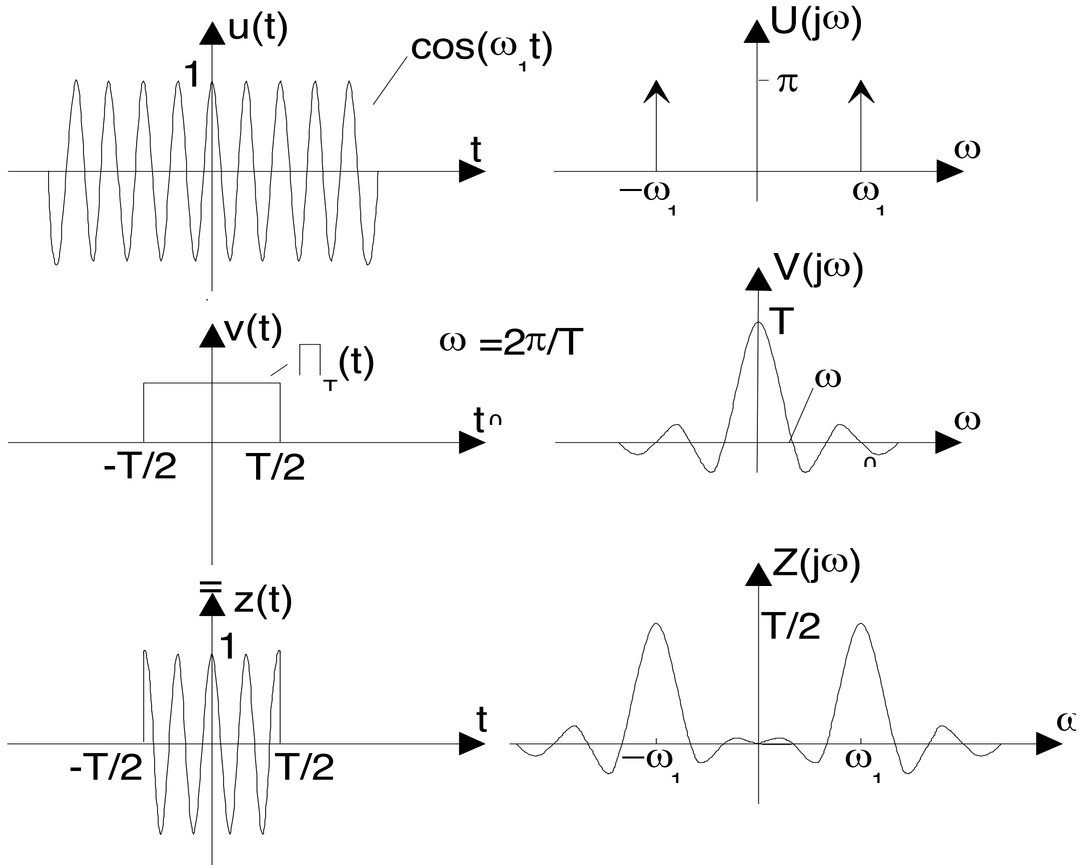
这个等式展示了时间域中的余弦波信号 $\cos(\omega_1 t)$ 与其频域中的表示形式之间的关系。在频域中，这个信号被表示为两个在 ω_1 和 $-\omega_1$ 处的狄拉克δ函数，每个δ函数前都有一个因子 π。这表示信号中有两个频率成分，分别对应于正的和负的 ω_1，这与余弦波的频域特性相一致，它在 ω_1 和 $-\omega_1$ 处有频谱线。

eine Produktform hat, können wir das Spektrum auch durch Faltung der Spektren der beiden Produktterme erhalten.

Wir werden im Abschnitt 4.5. - Fouriertransformation und Distributionen - ableiten, daß das Cosinussignal ein Spektrum hat, das aus zwei Deltaimpulsen bei $\pm\omega_1$ besteht:

$$\cos(\omega_1 t) \leftrightarrow \pi\left[\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)\right] \qquad (4.35)$$

Aus Gl. (4.8) und Gl. (4.33) folgt dann, daß die Fouriertransformierte eines Cosinusbursts eine Überlagerung von zwei bei $\pm\omega_1$ auftretenden si-Funktionen ist.



Ableitung:

Eine Ableitung einer Funktion im Zeitbereich entspricht einer Multiplikation des Spektrums mit jω.

$$\frac{d}{dt}u(t) \leftrightarrow j\omega\, U(j\omega) \qquad (4.36)$$

Bei einer n-ten Ableitung muß entsprechend mit $(j\omega)^n$ multipliziert werden. Auf diese Weise werden aus Differentialgleichungen algebraische Funktionen.

Integration:

Hat ein Signal $u(t) \leftrightarrow U(j\omega)$ keinen Gleichanteil, $U(0) = 0$, so wird

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\, d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} U(j\omega)} \qquad (4.37)$$

Bei einem vorhandenen Gleichanteil ergibt sich ein zusätzlicher Frequenzanteil: $\pi\, U(0)\, \delta(\omega)$

Parsevalsches Theorem:

Die Energie kann im Zeitbereich oder im Frequenzbereich berechnet werden:

$$W_u = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|U(j\omega)\right|^2 d\omega \tag{4.38}$$

$|U(j\omega)|^2$ wird als *spektrale Energiedichte* oder als *Energiedichtespektrum* bezeichnet.

Verteilung der Energie über der Frequenz

Parsevalsches Theorem:

$$W_u = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|U(j\omega)\right|^2 d\omega$$

Der Term $|U(j\omega)|^2\,d\omega$ ist ein Maß für den Energieanteil im Bereich $(\omega,\omega+d\omega)$.

Im Frequenzbereich $(\omega 1,\omega 2)$ liegt daher die Energie

$$W_u(\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\int_{\omega_1}^{\omega_2} \left|U(j\omega)\right|^2 d\omega\,; \quad \omega_1,\omega_2 \geq 0 \qquad (4.39)$$

AKF und Energiedichtespektrum:

Die Energie-Autokorrelationsfunktion und das Energiedichtespektrum eines Energiesignals sind Fouriertransformierte zueinander (siehe Abschnitt 4.9.4. - Wiener-Khintchine Beziehung).

AKF 和能量密度谱:
能量信号的能量自相关函数和能量密度谱是彼此的傅里叶变换（见第 4.9.4 节 - 维纳-欣钦关系）。

$$r_{uu}(\tau) \leftrightarrow |U(j\omega)|^2 \qquad (4.45)$$

4.4 Hilberttransformierte

<u>Geg:</u> Funktionen bzw. Signale u mit $u(t) = 0$ für $t < 0$ (*rechtsseitige* oder *kausale* Funktionen)

<u>Frage:</u> welche Besonderheiten zeigen die Spektren solcher Signale

u(t) als Summe aus einer geraden und einer ungeraden Funktion:

$$u(t) = u_g(t) + u_u(t) \tag{4.48}$$

mit

$$u_g(t) = [u(t) + u(-t)] \quad \text{und} \quad u_u(t) = [u(t) - u(-t)] \tag{4.49}$$

4.4 Hilberttransformierte

$$u(t) = u_g(t) + u_u(t) \qquad (4.48)$$

mit

$$u_g(t) = [u(t) + u(-t)] \quad \text{und} \quad u_u(t) = [u(t) - u(-t)]$$

$$(4.49)$$

Für $t > 0$ ist damit $u_g(t) = u_u(t)$, für $t < 0$ ist $u_g(t) = -u_u(t)$,

d.h. es gilt

$$\boxed{u_u(t) = u_g(t) \cdot \operatorname{sgn}(t).}$$

(Dies gilt auch für $t = 0$, selbst wenn $u(t)$ dort unstetig ist!).

4.4 Hilberttransformierte

Die Spektrum einer geraden Funktion sind rein reell (das Signal hat nur cos-Anteile),

das einer ungeraden rein imaginär (das Signal hat nur sin-Anteile),

d.h.

$$\boxed{\forall\omega \text{ ist } U_g(j\omega) \in \mathbf{R} \text{ und } j\cdot U_u(j\omega) \in \mathbf{R},}$$

weiterhin ist natürlich

$$\boxed{U(j\omega) = U_g(j\omega) + U_u(j\omega).}$$

4.4 Hilberttransformierte

$$u_g(t) \cdot \mathrm{sgn}(t) = u_u(t) \quad \leftrightarrow \quad 1/(2\pi)\, U_g(j\omega) * \mathbf{F}\{\mathrm{sgn}(t)\} = U_u(j\omega).$$

mit $\mathbf{F}\{\mathrm{sgn}(t)\} = 2/(j\omega)$

$$U_u(j\omega) = 1/\pi\, U_g(j\omega) * 1/(j\omega)$$

Man sagt, Real- und Imaginärteil des Spektrums $U(j\omega)$ von $u(t)$ - nichts anderes sind ja U_g und U_u - sind *Hilberttransformierte* (nach dem Mathematiker David Hilbert) zueinander.

4.4 Hilberttransformierte

Definiert ist sie als Faltung der gegebenen Funktion mit x^{-1},

d.h. wenn g die Hilberttransformierte von f ist, gilt

$$g(x) = f(x) * \frac{1}{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y}\,dy$$

$$U_u(j\omega) = 1/\pi\ U_g(j\omega) * 1/(j\omega)$$

4.5 Fouriertransformation und Distributionen

Wegen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|\,dt < \infty$$

können

- sinusförmigen Signalen
- Konstantwertfunktionen
- Sprungfunktionen

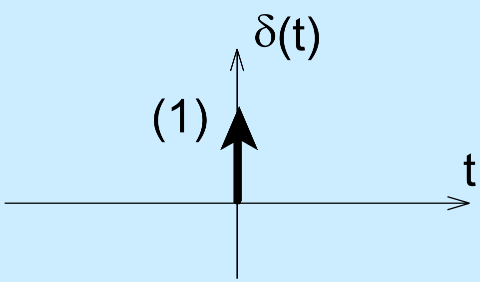
keine Fouriertransformierten zugeordnet werden!

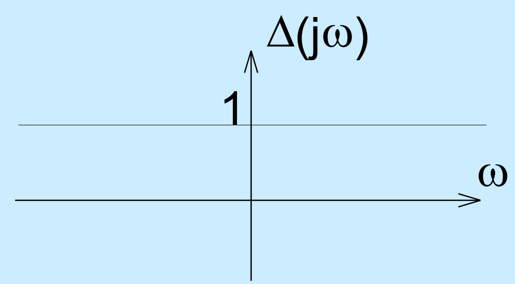
4.5 Fouriertransformation und Distributionen

Deltaimpuls: $\Delta(j\omega) := \mathbf{F}\{\delta(t)\}$

$$\mathbf{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

$$\delta\,(t) \quad \leftrightarrow \quad 1$$

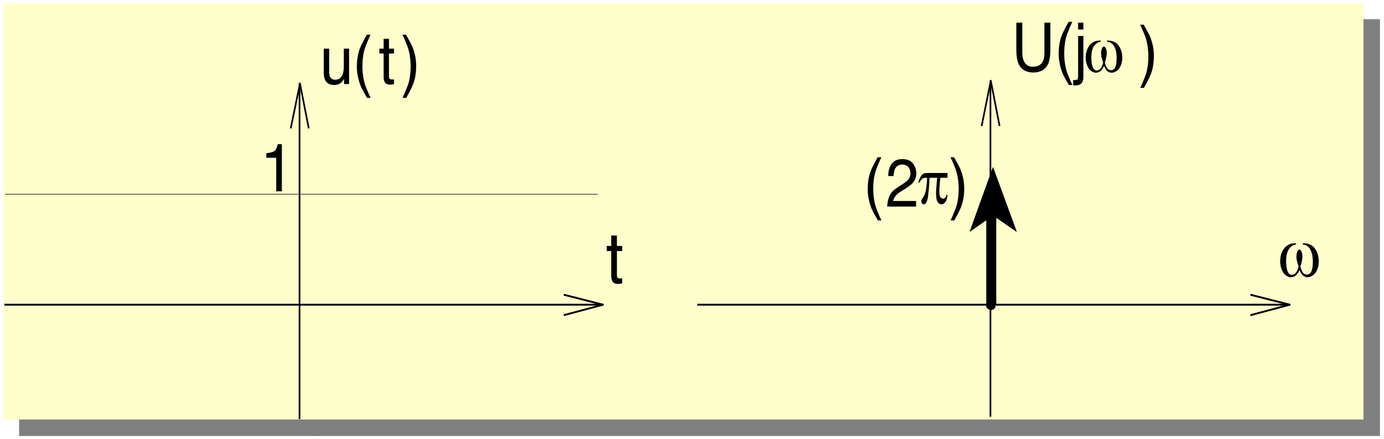




4.5 Konstantwertfunktion

Zeitverschiebung: $\boxed{\delta(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}}$

Symmetrie: $\boxed{e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)}$



4.5 Sinus- und Cosinussignale

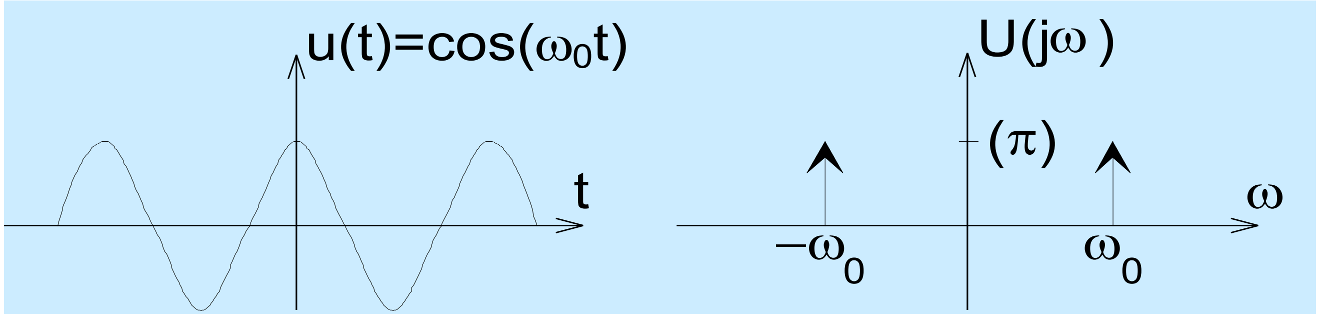
Eulersche Formel:

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

$$\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \pi\,[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]$$

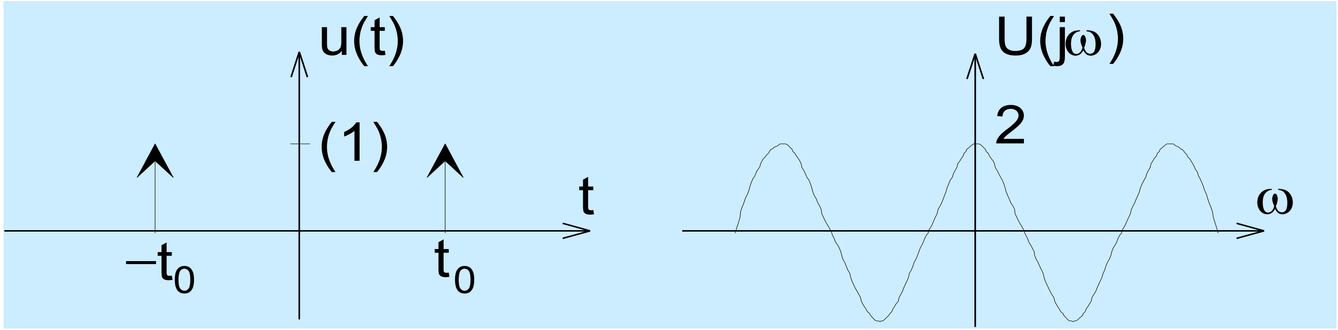
$$\sin(\omega_0 t) \leftrightarrow j\pi\,[-\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)]$$



4.5 Sinus- und Cosinussignale

Symmetrie:

$$\delta(t + t_0) + \delta(t - t_0) \leftrightarrow 2 \cos(\omega t_0)$$
$$\delta(t + t_0) - \delta(t - t_0) \leftrightarrow 2j \sin(\omega t_0)$$



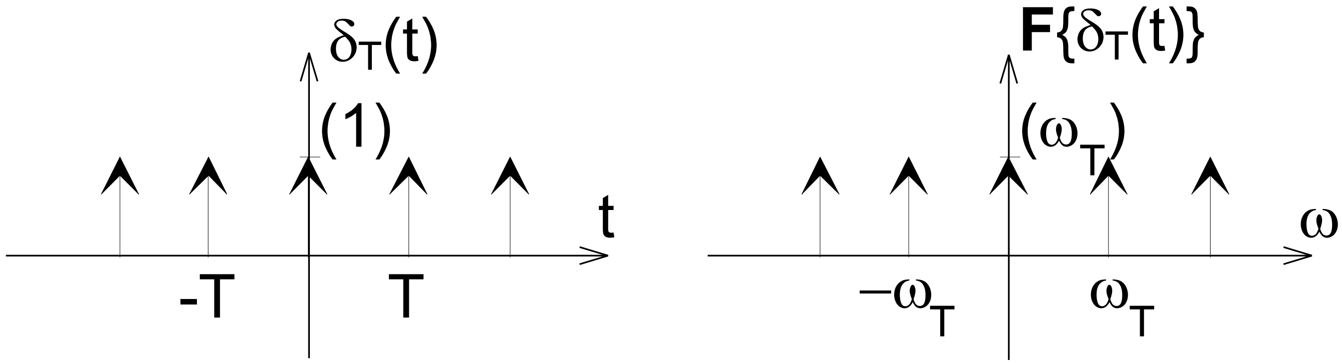
4.5 Deltakamm

Definition:

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

ohne Beweis:

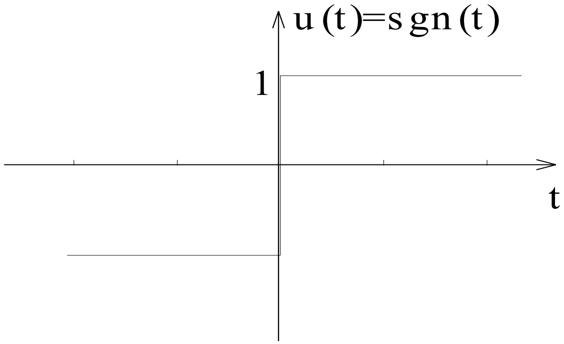
$$\delta_T(t) \leftrightarrow \omega_T\, \delta_{\omega_T}(\omega)$$

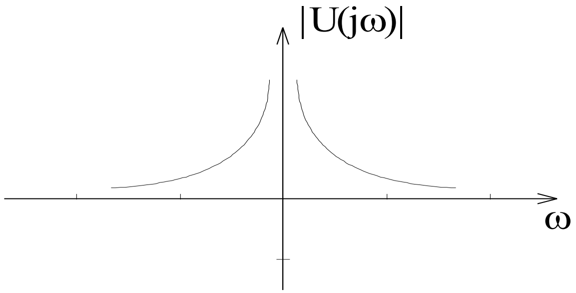


4.5 Signumfunktion / Sprungfunktion

Signumfunktion:

$$\mathrm{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$





Sprungfunktion:

$$\sigma(t) = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{sgn}(t)\right)$$

$$\sigma(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

4.6 Derivierung zur Bestimmung der Fouriertransformierten

- *Ableitungen* werden *Derivierte* genannt

- Es gilt:

$$\boxed{\frac{d^n u(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n U(j\omega)}$$

- Besondere Verwendung von:

$$\boxed{\delta(t) = \frac{d}{dt}\sigma(t) \leftrightarrow 1}$$

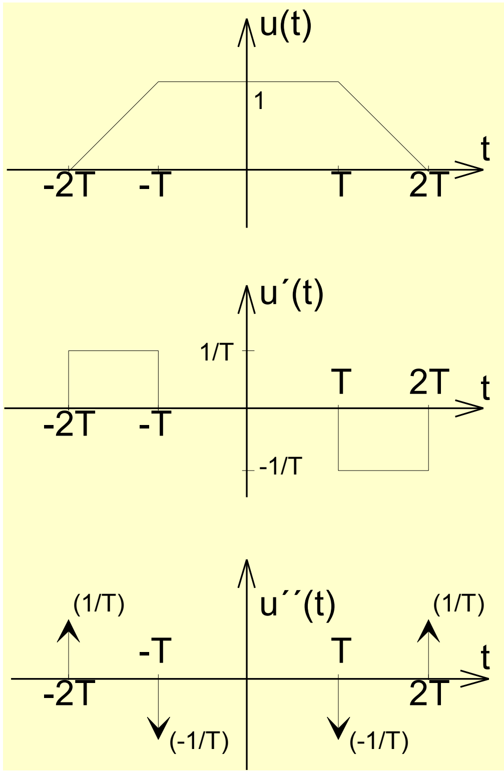
4.6 Derivierung: Beispiel

$$= T\cdot(1+2\cos wT)\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{wT}{2}\right)}{\frac{w^2T^2}{4}}$$

$$= \frac{-2}{T\cdot w^2 j^2}(1+2\cos wT)\cdot 2\sin^2\left(\frac{wT}{2}\right)$$

$$= \frac{-2}{T\cdot w^2 j^2}(1+2\cos wT)(1-2\cos wT)$$

- Beispiel Trapezfunktion:



$$u''(t)=\frac{1}{T}\left[\delta(t+2T)-\delta(t+T)-\delta(t-T)+\delta(t-2T)\right]$$

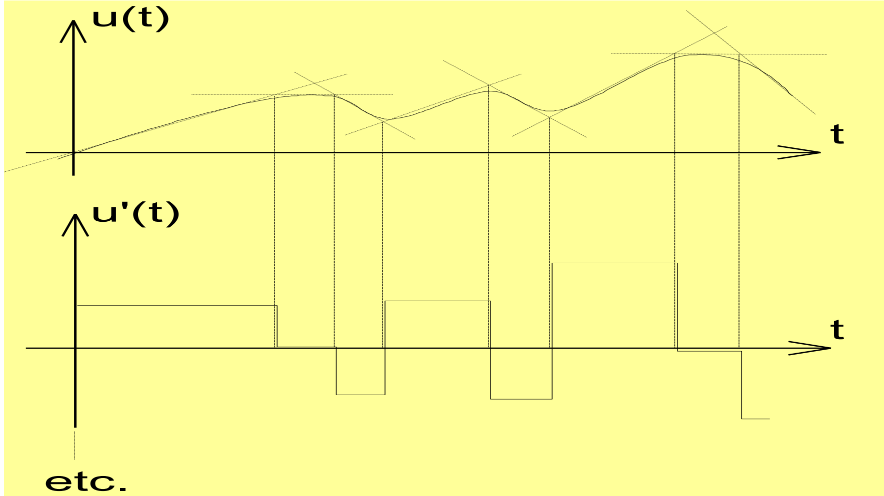
$$(j\omega)^2U(j\omega)=\frac{1}{T}\left(e^{j\omega 2T}-e^{j\omega T}-e^{-j\omega T}+e^{-j\omega 2T}\right)$$

$$=\frac{2}{T}\left(\cos 2\omega T-\cos\omega T\right)$$

$$U(j\omega)=T(1+2\cos\omega T)si^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

4.6 Transformation durch Geradenapproximation

- Approximation beliebiger Signale durch Geraden
  - Transformation durch Derivierung



- Integration:
  – Division durch $(j\omega)$
  – Vorherige Abspaltung des Gleichanteils
  – Berücksichtigung als $\delta(\omega)$ -Spektrallinie

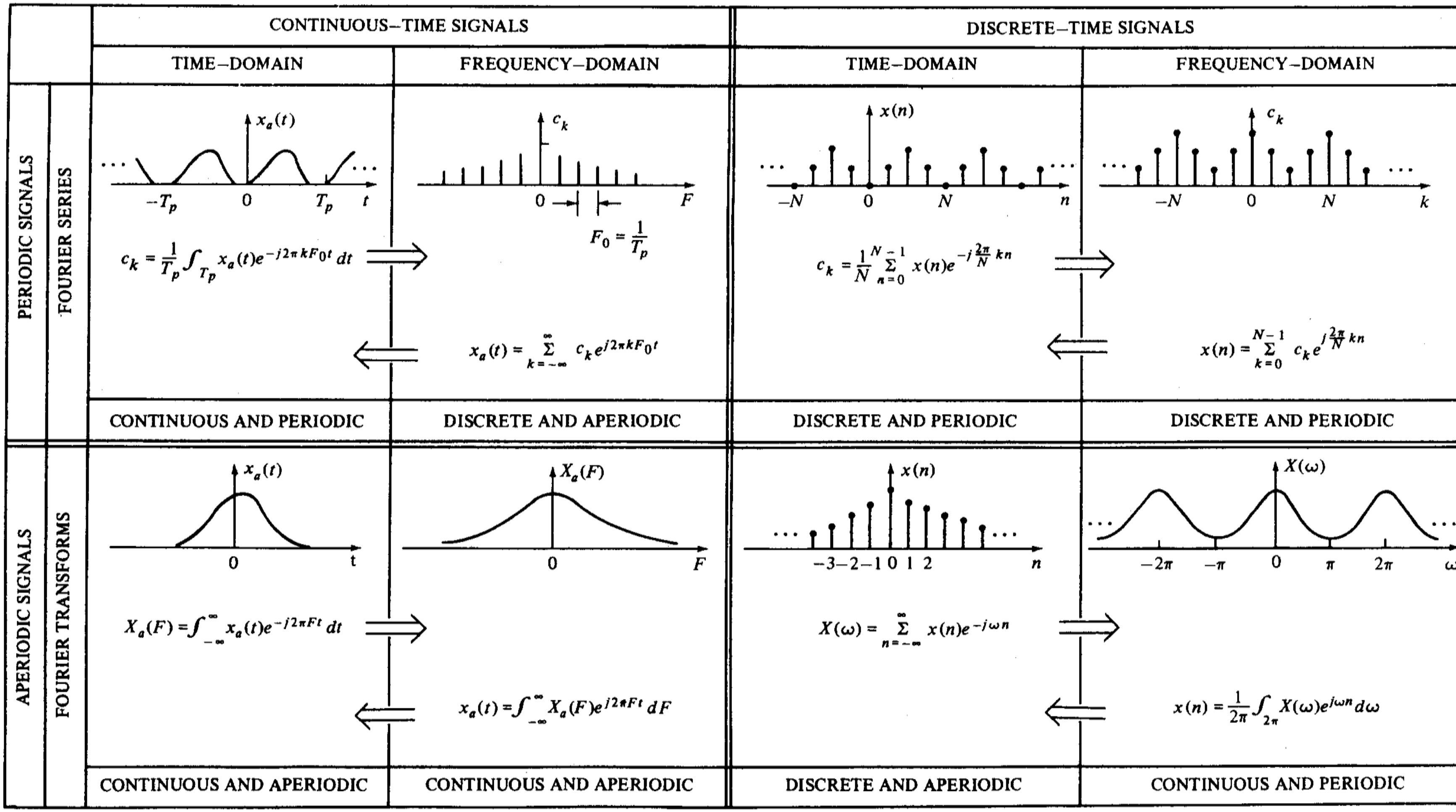
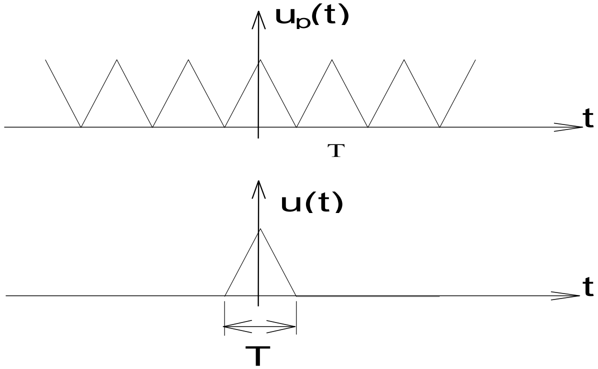


FIGURE 4.27 Summary of analysis and synthesis formulas.

4.7 Zeitperiodische Funktionen



$$u_P(t) = u(t) * \delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(t - kT)$$

$$\omega_P = 2\pi / T$$

$$U_p(j\omega) = U(j\omega) \cdot \omega_p \cdot \delta_{\omega_p}(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(jk\omega_p) \cdot \delta(\omega - k\omega_p)$$

Mit den Stützstellen:

$$U(jk\omega_p) = \int_{-T/2}^{T/2} u(t)\, e^{-jk\omega_p t}\, dt = T \cdot U_k$$

$$u_P(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(jk\omega_p)\, e^{-jk\omega_p t}$$

Fourierreihenentwicklung

4.7 Frequenzperiodische Funktionen

$$U_p(j\omega) = U(j\omega) * \delta_{\omega_P}(\omega)$$

Grundbereichsfunktion Deltakamm

Rücktransformation:

$$u_p(t) = F^{-1}\{U_p(j\omega)\} = 2\pi\, u(t)\, \delta_T(t)$$

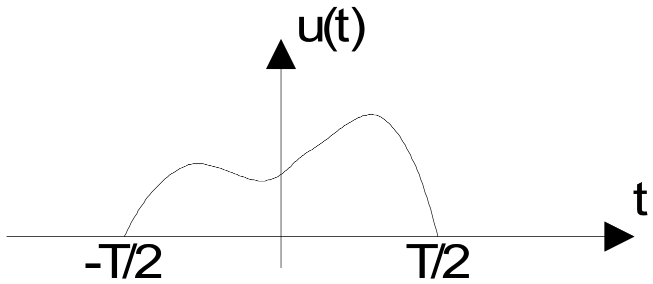
$$= \mathrm{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{u(kT)}\, \delta(\mathrm{t - kT})$$

权重系列的δ脉冲

- 采样的时间函数具有周期性谱

- Gewichtete Folge von Deltaimpulsen
- Abgetastete Zeitfunktionen haben ein periodisches Spektrum

4.8 Zeitbegrenzte Funktionen



$$u(t) = u_p(t)\,\Pi(t)$$
$$= \left[u(t) * \delta_T(t)\right]\Pi_T(t)$$

$$\mathrm{U}(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(\mathrm{U}(j\omega)\cdot\omega_T\cdot\delta_{\omega_T}(\omega)\right) \;*\; \mathrm{T}\,\mathrm{si}\left(\frac{\omega\mathrm{T}}{2}\right) \qquad \omega_T = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{U}(jk\omega_T)\,\delta(\omega - k\omega_T)\right) \;*\; \mathrm{si}\left(\frac{\omega\mathrm{T}}{2}\right)$$

$$\boxed{\mathrm{U}(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{U}(jk\omega_T)\,\mathrm{si}\left(\frac{\mathrm{T}}{2}(\omega - k\omega_T)\right)}$$

⇨ kontinuierlich und unendlich ausgedehnt

4.8 Frequenzbegrenzte Funktionen

bandbegrenzten Frequenzfunktion:

$$U(j\omega)=0 \qquad |\omega|>\omega_g$$

analog zu begrenzten Zeitfunktionen:

$$u(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT)\,\mathrm{si}\left(\frac{\omega_T}{2}(t-kT)\right) \qquad \omega_T=\frac{2\pi}{T}$$

Rekonstruktion aus äquidistanten Funktionswerten

从等间距函数值重建

4.9 Energiedichtespektrum

Parsevalsches Theorem:

$$W_u = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |U(j\omega)|^2 d\omega$$

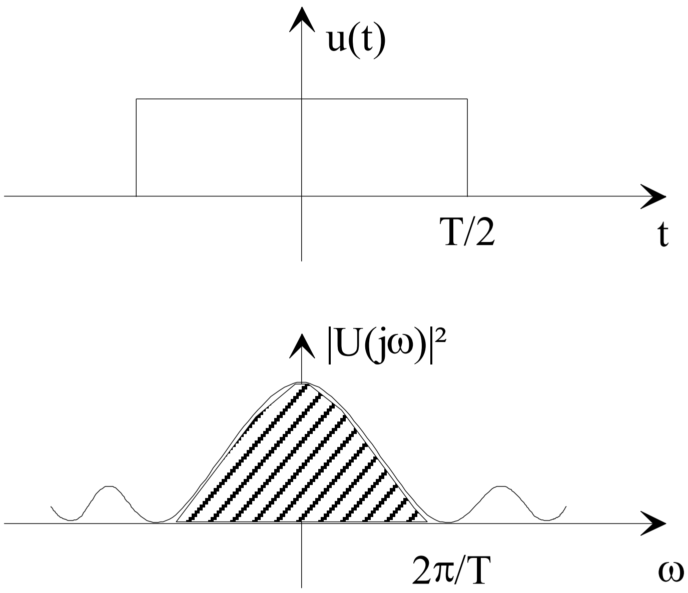
$$\boxed{|\mathrm{U}(\mathrm{j}\omega)|^2}$$

- Spektrale Energiedichte
- Energiedichtespektrum (EDS)

Energie des Frequenzbereichs (ω_1, ω_2) :

$$W_u(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2\pi} 2 \int_{\omega_1}^{\omega_2} |U(j\omega)|^2 d\omega \qquad \omega_1, \omega_2 \geq 0$$

4.9 Beispiel: Energiedichtespektrum



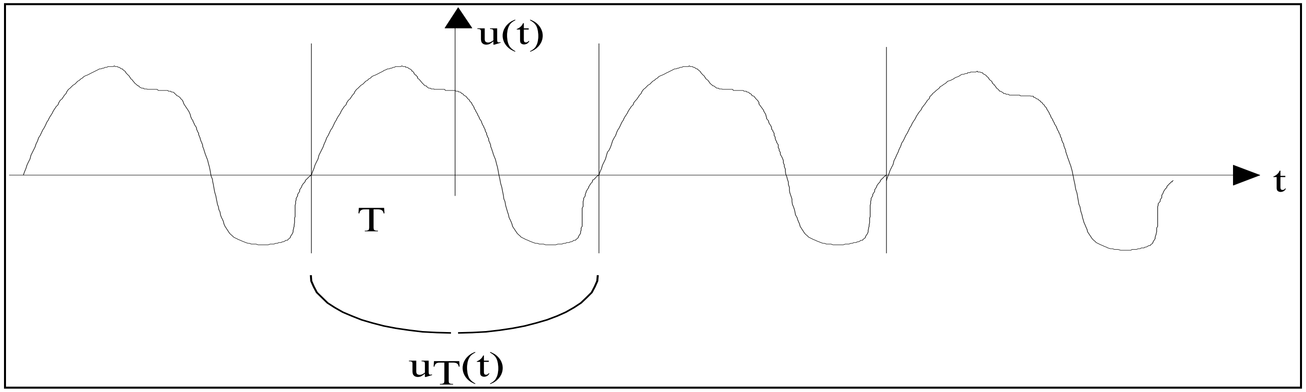
Unschärferelation der Nachrichtentechnik:

$$B_0 = {}^{1}\!/_{T}$$

- ➢ Dimension des Energiedichtespektrums: Ws² = Ws/Hz
- ➢ Energie in Ws pro Hz Bandbreite

4.9 Leistungsdichtespektrum

Ausschnitt $u_T(t)$ eines Leistungssignals:



$$u_T(t) = u(t) \cdot \Pi_T(t) \quad \leftrightarrow \quad U_T(j\omega)$$

$$P_{u_T} = \frac{1}{T}\int_T u_T^2(t)\,dt = \frac{1}{T} W_u(t)$$

$$P_{u_T} = \frac{1}{T}\int_T u_T^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|U_T(j\omega)\right|^2}{T}\,d\omega$$

(Parseval-Theorem)

4.9 Kurzzeit Leistungsdichtespektrum (LDS)

Kurzzeit - *EDS*

$$\boxed{\left|U_T(j\omega)\right|^2}$$

Kurzzeit - *LDS*

$$\boxed{S_{u_T}(\omega) = \frac{\left|U_T(j\omega)\right|^2}{T}}$$

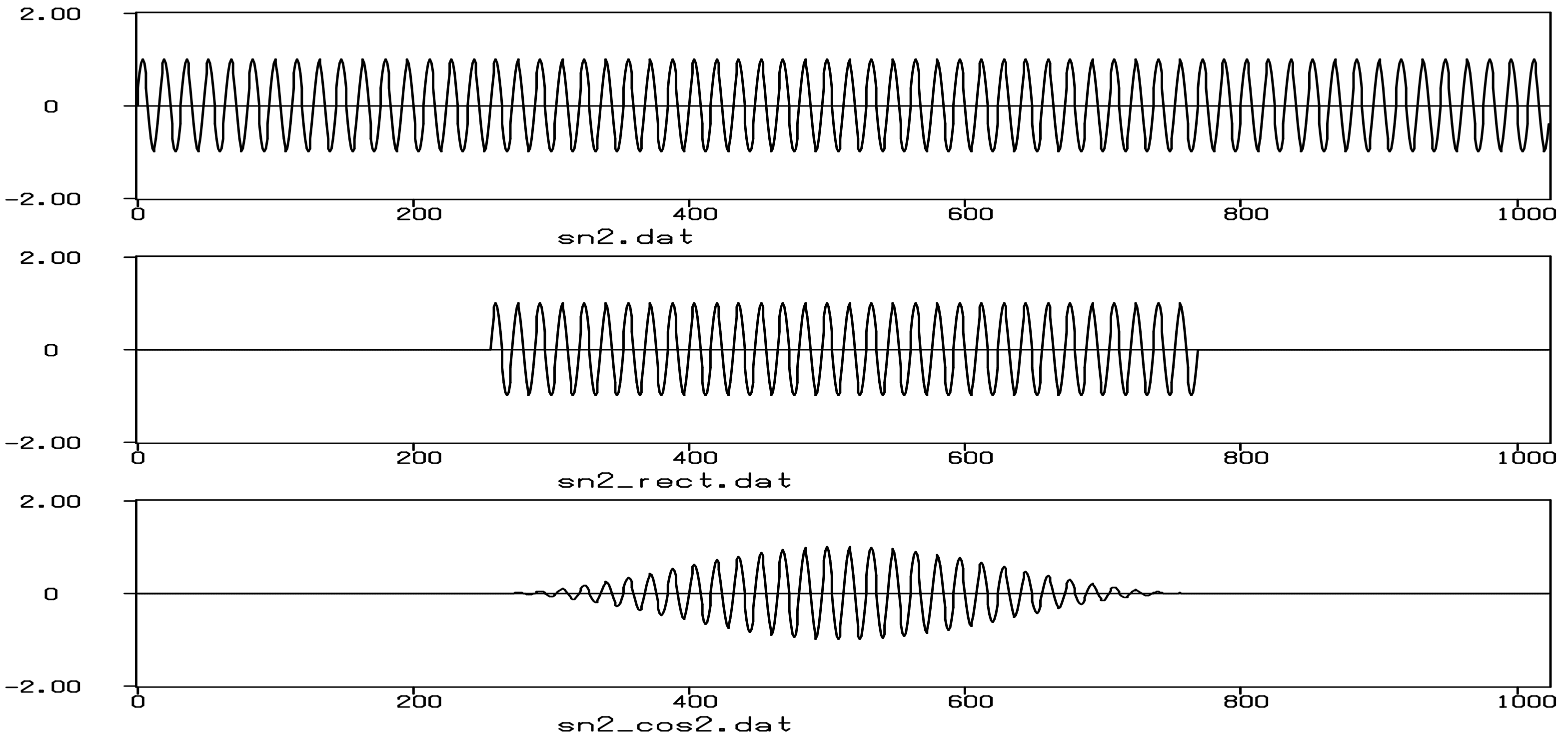
LDS

$$\boxed{S_{uu}(\omega) = \lim_{T\to\infty} S_{u_T}(\omega)}$$

Leistung im Frequenzbereich (ω_1, ω_2) :

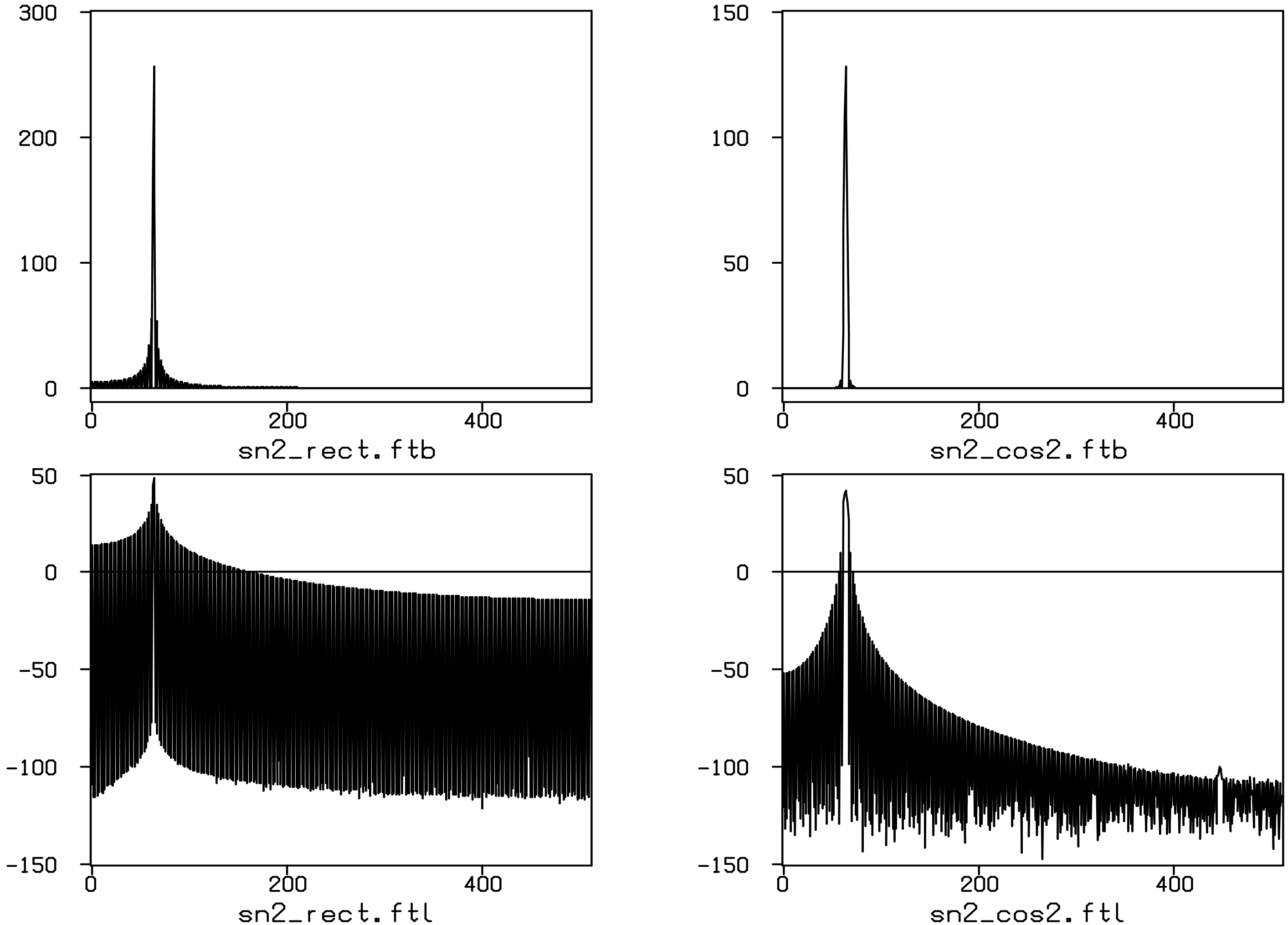
$$\boxed{P_u(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} S_{uu}(\omega)\, d\omega \qquad \omega_1, \omega_2 \geq 0}$$

4.9 Leistungsdichtespektrum: Beispiel



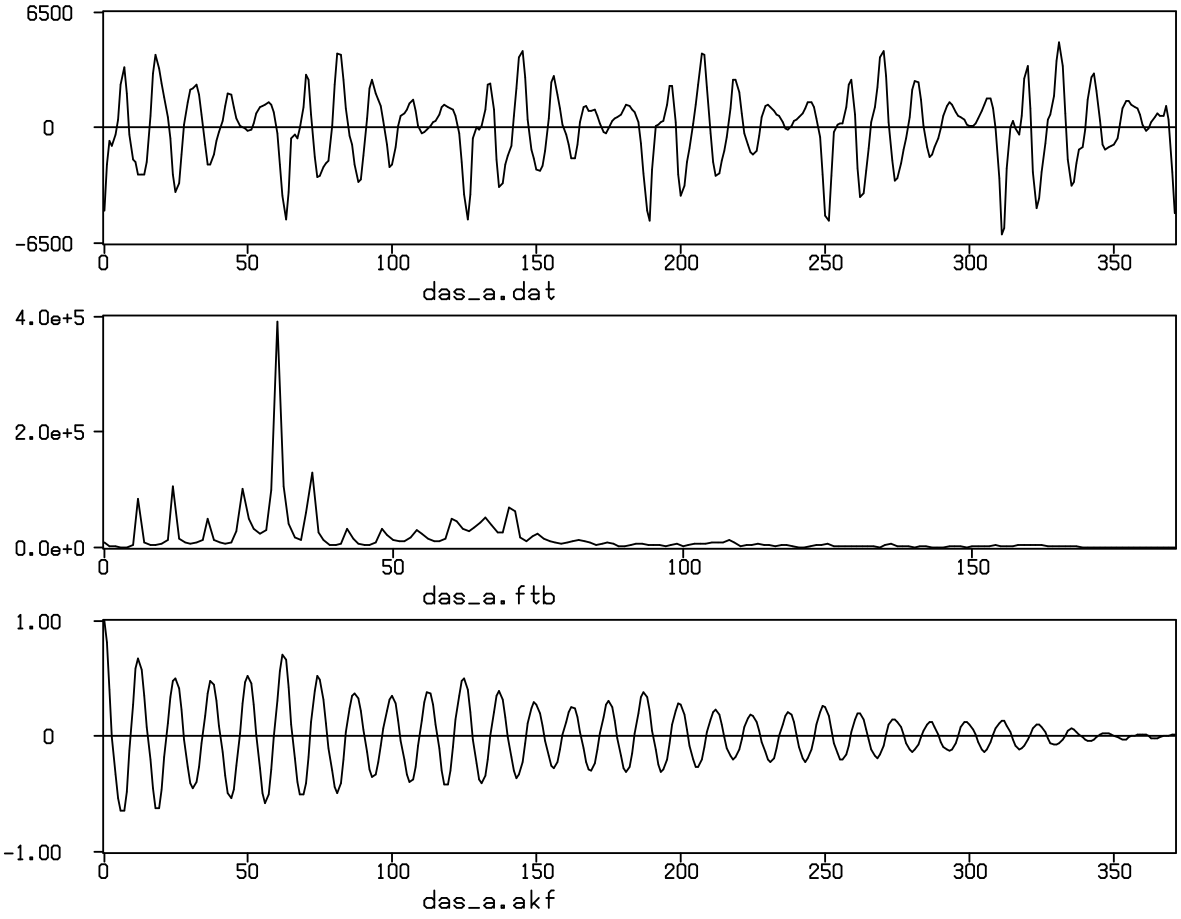
- Original Signal
- Rechteck-Fensterung
- $\cos^2$ - Fensterung

4.9 Auswirkung der Fensterfunktion



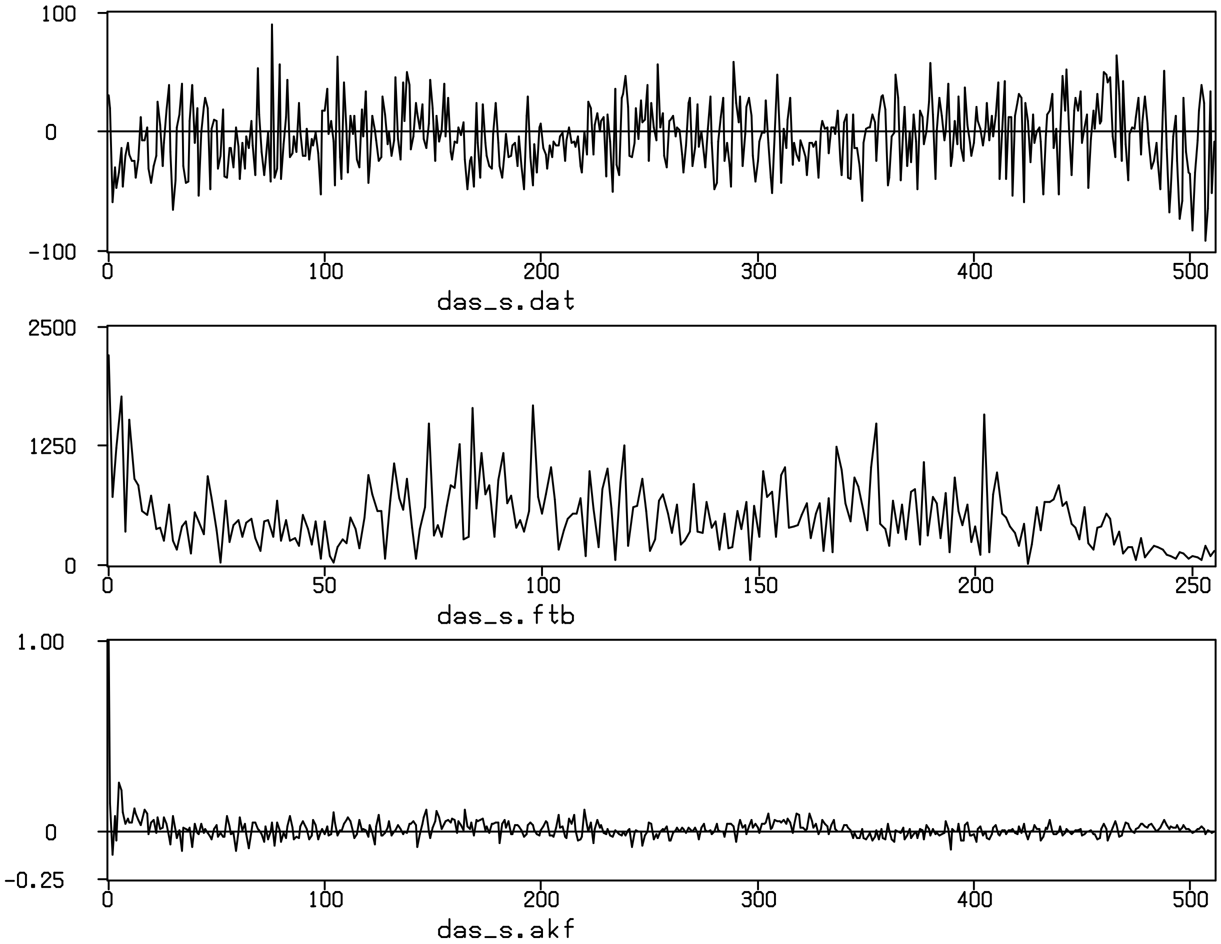
rect-Fensterung $\cos^2$-Fensterung

4.9 Kurzzeit-LDS: stimmhafter Laut



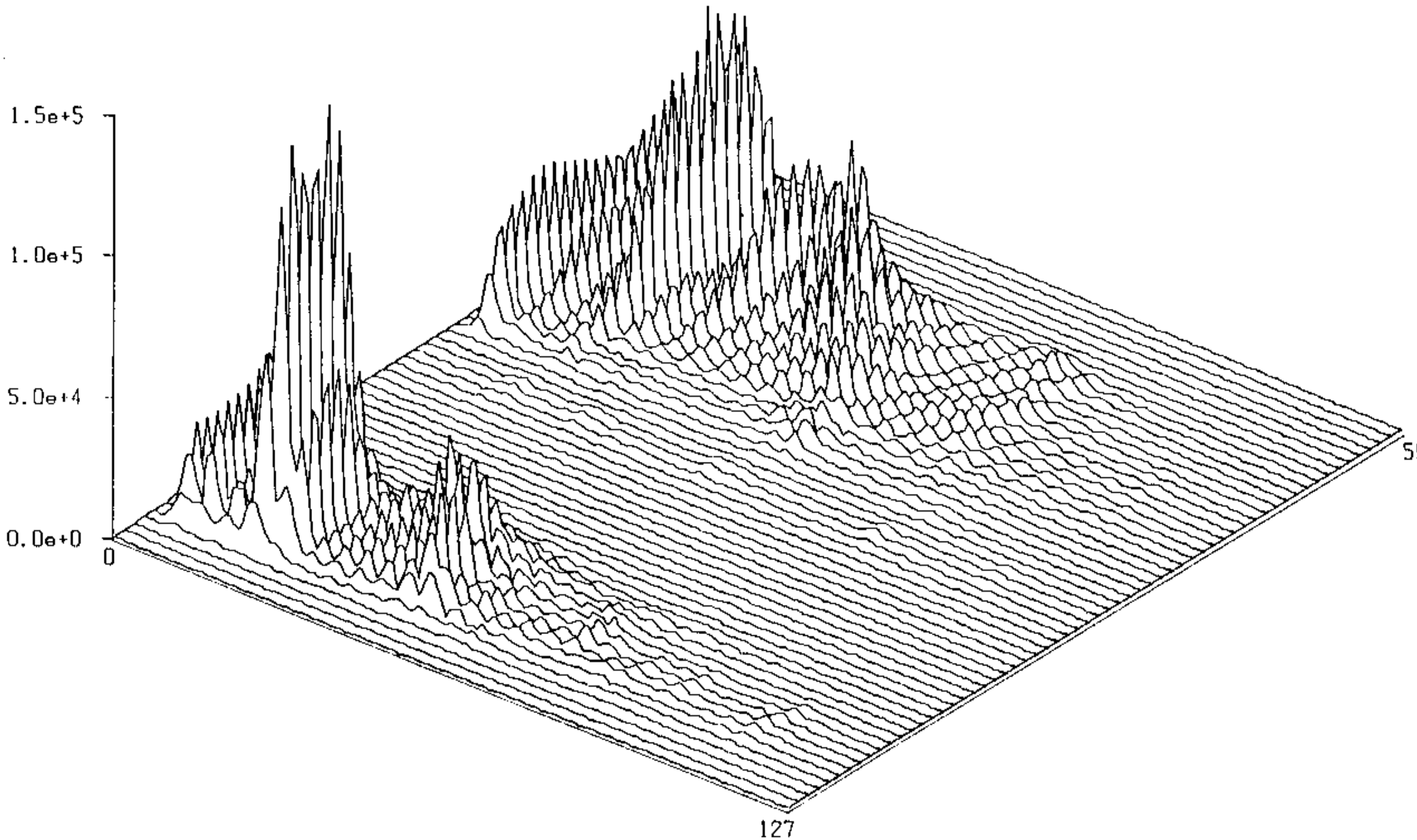
- Original Signal
- Kurzzeit-LDS
- normierte AKF

4.9 Kurzzeit-LDS: stimmloser Laut



- Original Signal
- Kurzzeit-LDS
- normierte AKF

4.9 Kurzzeit-LDS: Wasserfalldarstellung



4.9 Wiener-Khintchine Beziehung

AKF:

$$\boxed{{}^{E}r_{uu}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot u(t+\tau)\,dt}$$

Wiener-Khintchine Beziehung:

$$\boxed{{}^{E}r_{uu}(\tau) \quad \leftrightarrow \quad |U(j\omega)|^2}$$

Gilt entsprechend für Leistungssignale:

$$\boxed{{}^{L}r_{uu}(\tau) \leftrightarrow S_{uu}(\omega)}$$

4.9 Wiener-Khintchine: Beispiel

Definition „weißes Rauschen“ :

$$\boxed{{}^{L}r_{uu}(\tau) = \sigma_u^2 \cdot \delta(\tau)}$$

$$\boxed{S_{uu}(\omega) = \sigma_u^2}$$

- unendliche Ausdehnung
- alle Frequenzanteile mit gleichem Gewicht