

Elvira Fleig, Rolf Jongebroed

Rechenübung Signale & Systeme (WiSe 2023/2024)

## Zeitdiskrete Filter, PN-Diagramme zeitdiskreter Systeme (13. Termin)

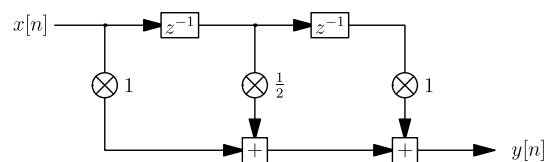
12.02 - 18.02.2024

### Hinweise

- Die Aufgabenblätter zur Rechenübung stehen jeweils vor dem jeweiligen Termin auf dem ISIS-Portal zum Download bereit.
- Aufgaben, die mit [HA] bzw. [AK] beginnen, sind Hausaufgaben bzw. alte Klausuraufgaben, die als Hausaufgabe bearbeitet werden sollen. Diese werden zusätzlich in den freiwilligen Tutorien vorge-rechnet bzw. besprochen.

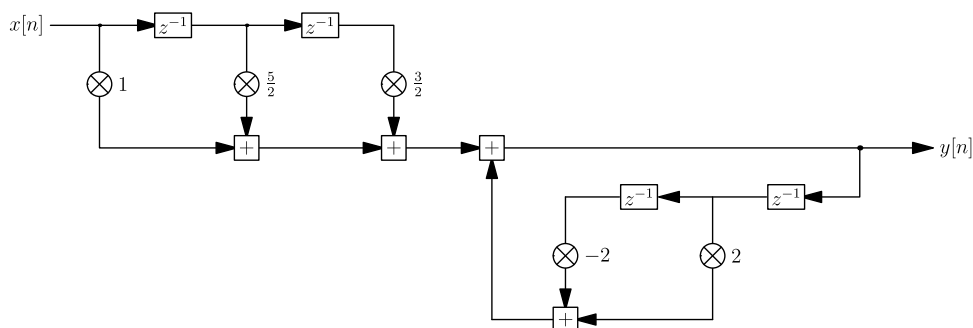
## 1 Zeitdiskrete Filter

### 1.1 Gegeben sei das folgende FIR-Filter



- a) Gib die Differenzengleichung des Filters an.
- b) Gib die Systemfunktion des Filters an.
- c) Bestimme die Lage der Pol- und Nullstellen des Filters und skizziere das resultierende PN-Diagramm.
- d) Skizziere Amplituden- und Phasengang des Filters.

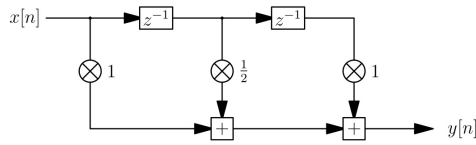
### 1.2 Gegeben sei das folgende IIR-Filter



- a) Gib die Differenzengleichung des Filters an.
- b) Gib die Systemfunktion des Filters an.

# 1 Zeitdiskrete Filter

## 1.1 Gegeben sei das folgende FIR-Filter



- Gib die Differenzengleichung des Filters an.
- Gib die Systemfunktion des Filters an.
- Bestimme die Lage der Pol- und Nullstellen des Filters und skizziere das resultierende PN-Diagramm.
- Skizziere Amplituden- und Phasengang des Filters.

a)  $y(n) = x(n) + \frac{1}{2} x(n-1) + x(n-2)$

b) z-rafo:

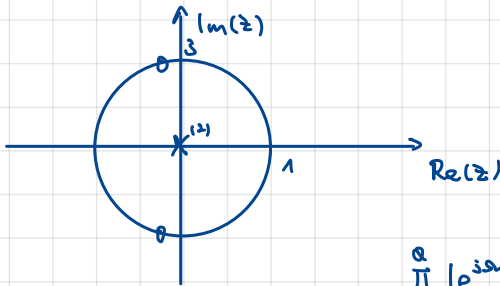
$$Y(z) = X(z) + \frac{1}{2} X(z) \cdot z^{-1} + X(z) z^{-2}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + \frac{1}{2} z^{-1} + z^{-2} = \frac{z^2 + \frac{1}{2} z + 1}{z^2}$$

c) Nullstellen:  $z^2 + \frac{1}{2} z + 1 = 0$

$$z_{0,1,2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{-1 + \frac{1}{16}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{-15} = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{15}}{4} j$$

Polstellen  $z^2 = 0$   
 $z_{x,2} = 0$



d) Amplitudengang

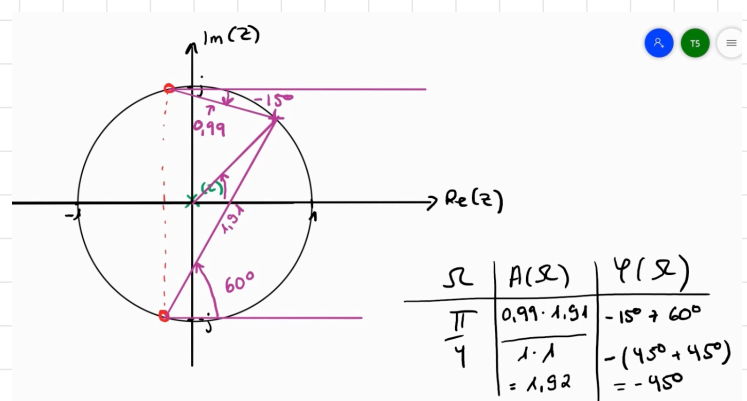
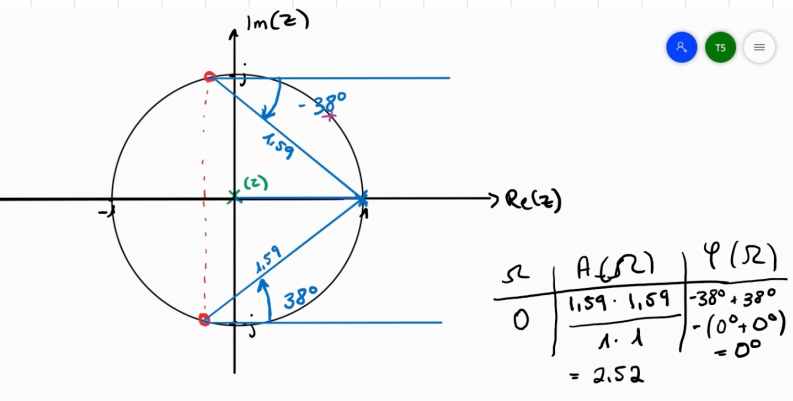
$$A(\omega) = |b_0| \frac{\prod_{q=1}^Q |e^{j\omega} - z_{0q}|}{\prod_{r=1}^R |e^{j\omega} - z_{xr}|} = |b_0| \frac{\prod_{q=1}^Q \frac{d\phi_q}{\frac{d\phi}{dx}}}{\prod_{r=1}^R \frac{d\phi_r}{\frac{d\phi}{dx}}} \quad \downarrow \quad \text{hier } = 1$$

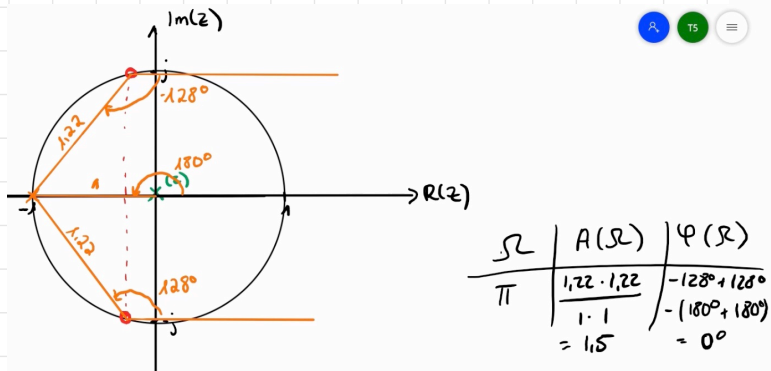
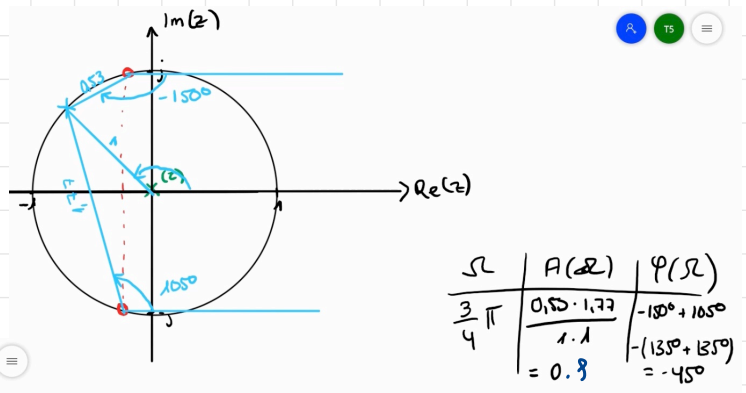
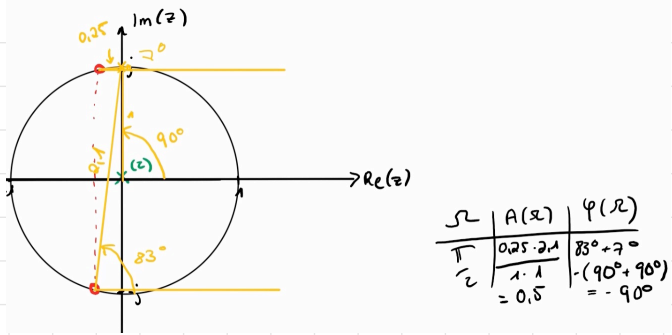
Phasengang

$$\varphi(\omega) = \underbrace{(R-Q)}_{=0} \cdot \omega + \sum_{q=0}^Q \varphi_{0q} + \sum_{r=0}^R \varphi_{xr}$$

für  $Q=R$

$$\varphi(\omega) = \sum_{q=1}^Q \varphi_{0q} - \sum_{r=1}^R \varphi_{xr}$$

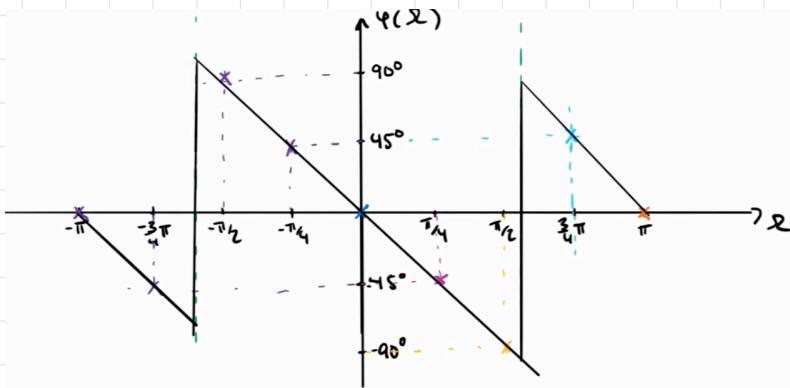




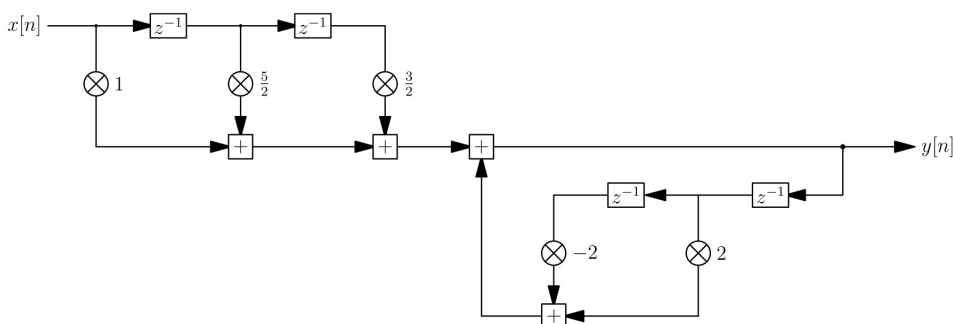
Ursprungsfunktion reell:

$$A(z) = A(-z)$$

$$\varphi(z) = -\varphi(-z)$$



## 1.2 Gegeben sei das folgende IIR-Filter



- Gib die Differenzengleichung des Filters an.
- Gib die Systemfunktion des Filters an.

a)  $y(n) = x(n) + \frac{5}{2}x(n-1) + \frac{3}{2}x(n-2) + 2y(n-1) - 2y(n-2)$

b) z-Transform:

$$Y(z) = X(z) + \frac{5}{2}X(z)z^{-1} + \frac{3}{2}X(z)z^{-2} + 2Y(z)z^{-1} - 2Y(z)z^{-2}$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{X(z) \cdot (1 + \frac{5}{2}z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2})}{1 - 2z^{-1} + 2z^{-2}} = X(z) \cdot \frac{z^2 + \frac{5}{2}z + \frac{3}{2}}{z^2 - 2z + 2}$$

$$H_y(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2 + \frac{5}{2}z + \frac{3}{2}}{z^2 - 2z + 2}$$

c) Bestimme die Lage der Pol- und Nullstellen des Filters und skizziere das resultierende PN-Diagramm.

d) Skizziere Amplituden- und Phasengang des Filters.

c) Nullstellen:  $z^2 + \frac{5}{2}z + \frac{3}{2} = 0$

$$z_{0,1,2} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{-\frac{3}{2} + \frac{25}{16}} = -\frac{5}{4} \pm \frac{1}{4}$$

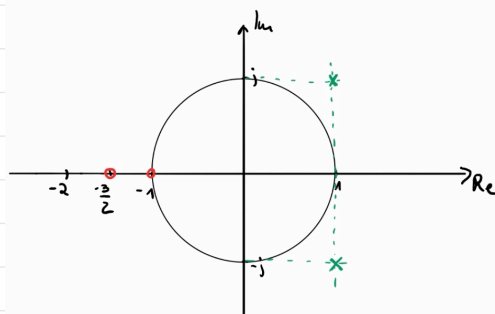
$$z_{01} = -1 \quad z_{02} = -\frac{3}{2}$$

Polstellen:  $z^2 - 2z + 2 = (z-1)^2 + 1 = 0$

$$(z-1)^2 = -1$$

$$z_{p1,2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm j$$

$$z_{p1} = 1+j \quad z_{p2} = 1-j$$



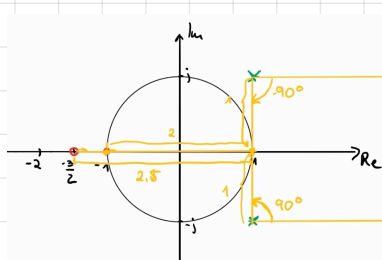
$$z_{01} = -1$$

$$z_{02} = -\frac{3}{2}$$

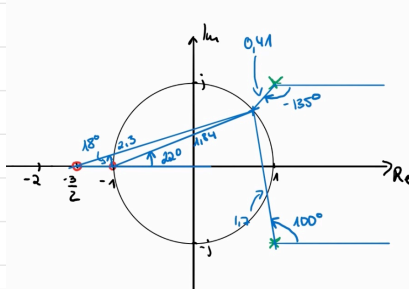
$$z_{p1} = 1+j$$

$$z_{p2} = 1-j$$

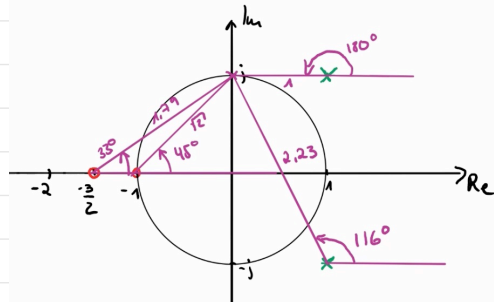
d)



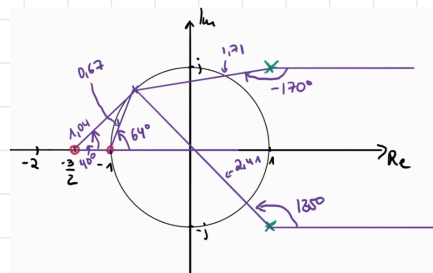
$\Omega$	$ A(\Omega) $	$\varphi(\Omega)$
0	$\frac{2 \cdot 2,5}{1 \cdot 1} = 5$	$\frac{0^\circ + 0^\circ}{-(90^\circ - 90^\circ)} = 0^\circ$



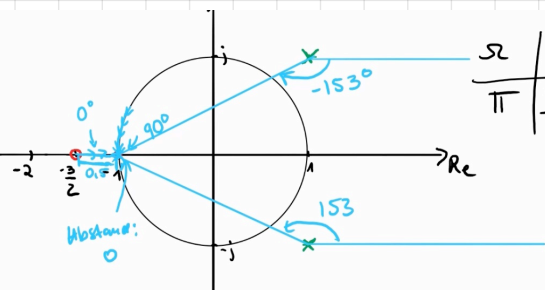
$\Omega$	$ A(\Omega) $	$\varphi(\Omega)$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2,3 \cdot 1,84}{0,44 \cdot 1,7} = 6,07$	$\frac{180^\circ + 22^\circ}{-(135^\circ + 100^\circ)} = 75^\circ$



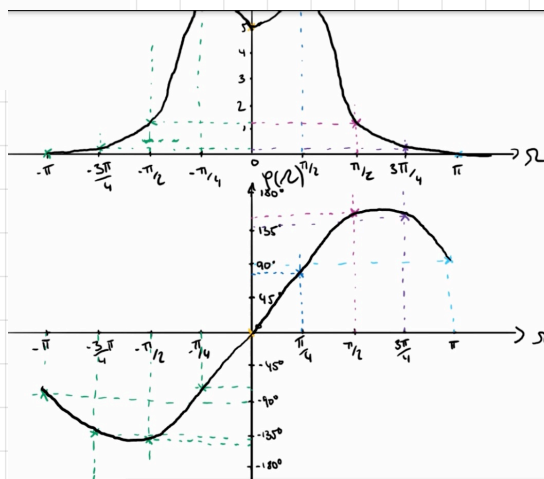
$\Omega$	$ A(\Omega) $	$\varphi(\Omega)$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1,41 \cdot 1,71}{1 \cdot 2,23} = 1,13$	$\frac{38^\circ + 45^\circ}{-(180^\circ + 116^\circ)} = -218^\circ = 142^\circ$



$\Omega$	$ A(\Omega) $	$\varphi(\Omega)$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{1,04 \cdot 0,62}{1,71 \cdot 2,41} = 0,17$	$\frac{40^\circ + 64^\circ}{+120^\circ - 135^\circ} = 139^\circ$



$\Omega$	$ A(\Omega) $	$\varphi(\Omega)$
$\pi$	$\frac{0 \cdot 0,5}{\dots} = 0$	$\frac{0^\circ + 90^\circ}{-(153^\circ + 153^\circ)} = 90^\circ$



$\Omega$	$ A(\Omega) $	$\varphi(\Omega)$
0	5	0°
$\frac{\pi}{4}$	6,07	75°
$\frac{\pi}{2}$	1,13	142°
$\frac{3\pi}{4}$	0,17	139°
$\pi$	0	90°

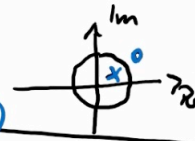
# Eigenschaften in z-Ebene

Minimales Phasengang  
(kleinst mögl. Phasengang)

Pst & Nst nicht außerhalb  
des Einheitskreises  
(auf ist ok)

Allpass eigenschaft  
(konst. Amplitudengang)

Pst - Nst liegen spiegelbildlich  
zum Einheitskreis  
(reziprok:  $r_{Pst} = \frac{1}{r_{Nst}}$ )  
(Pst & Nst im EK erlaubt, mit  $d=1$ )



Linearphasigkeit  
(lin. Phasengang)

Nst spiegelbildlich zum  
EK  
(Nst auf EK erlaubt sind,  
aber doppelt, vielfach, etc.  
Nst im Ursprung  
alle Pst im Ursprung)



Kausalität  
 $h(t) = 0 \quad \forall t < 0$

mehr Pol- als Nullstellen  
oder gleiche Anzahl

Stabilität  
(bedingte)

Polstellen im EK  
Polstellen auf EK

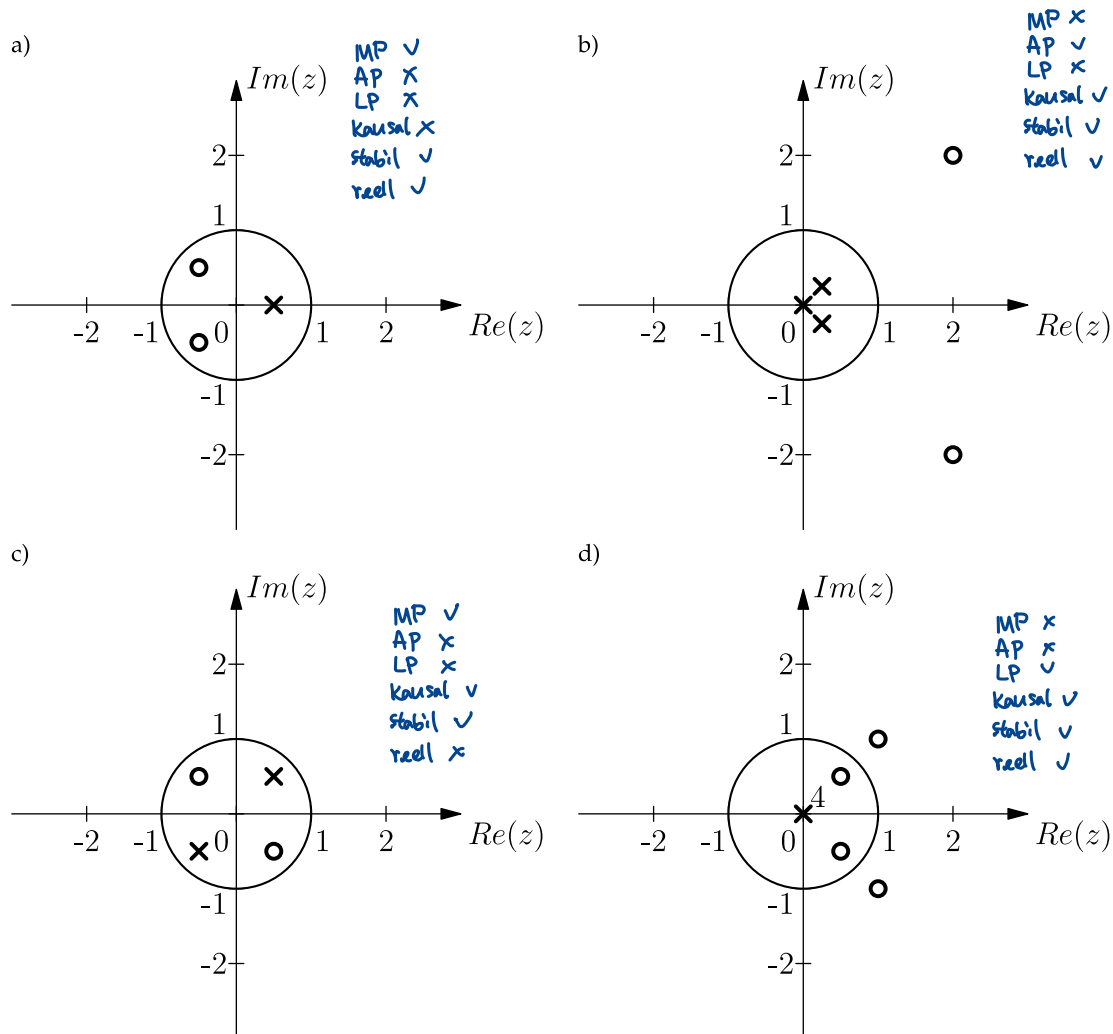
reellwertiges / reelles Filter

Pst & Nst rein reell  
oder komplex konjugiert

- c) Bestimme die Lage der Pol- und Nullstellen des Filters und skizziere das resultierende PN-Diagramm.  
d) Skizziere Amplituden- und Phasengang des Filters.

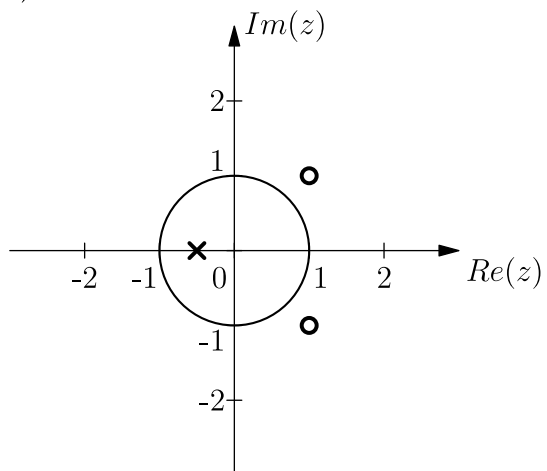
## 2 Eigenschaften zeitdiskreter Filter

**2.1 Untersuche die folgenden Systeme auf Minimalphasigkeit, Allpasseigenschaft, Linearphasigkeit, Kausalität und Stabilität. Gib weiterhin jeweils an, ob es sich um ein reales reellwertiges System handelt.**

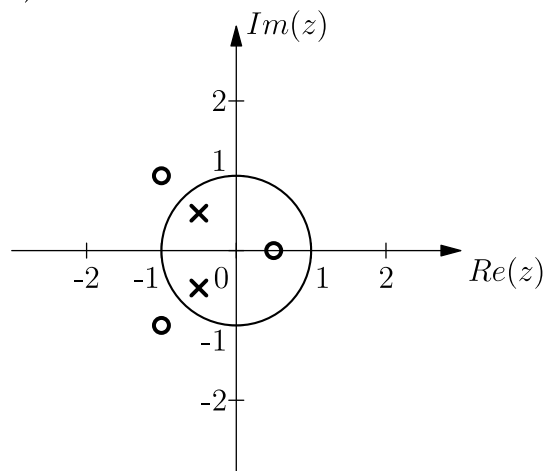


## 2.2 Zerlege die folgenden Systeme in eine Reihenschaltung aus Allpass und minimalphasigem System.

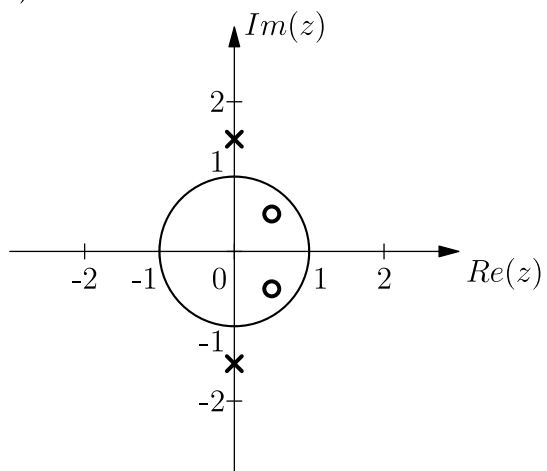
a)



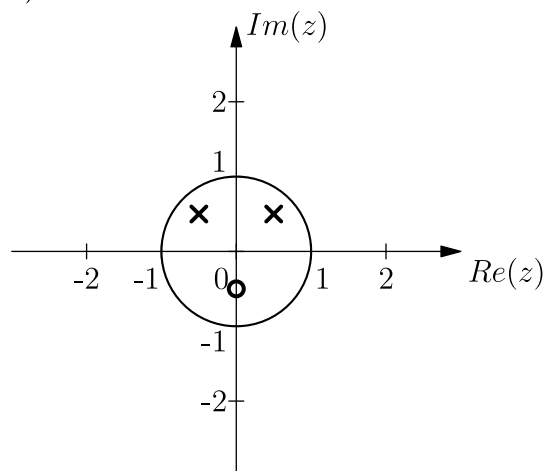
b)



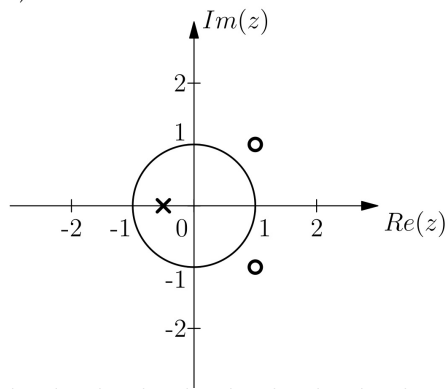
c)



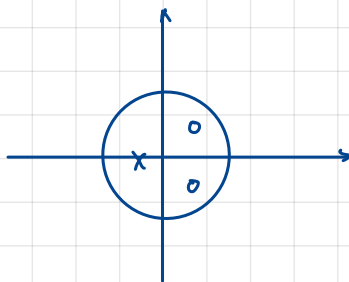
d)



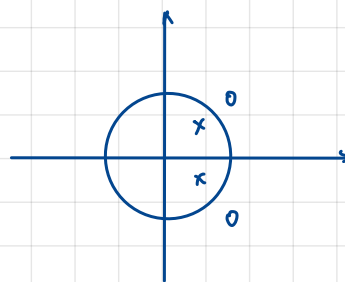
a)



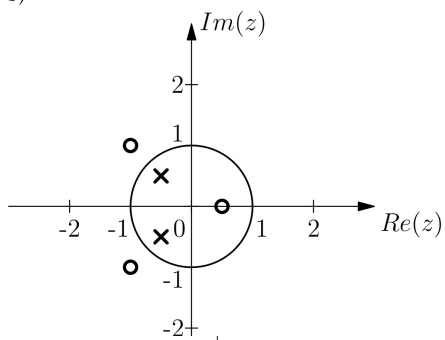
MP



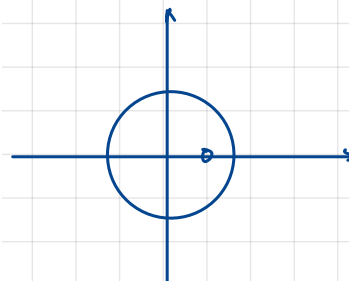
AP



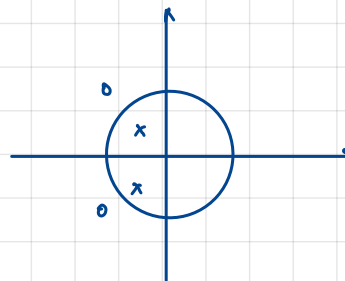
b)



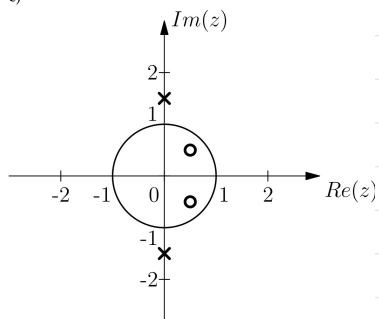
MP



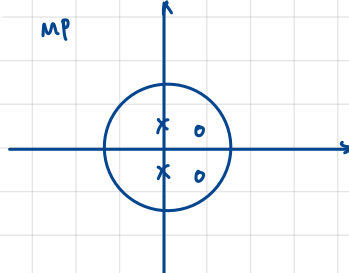
AP



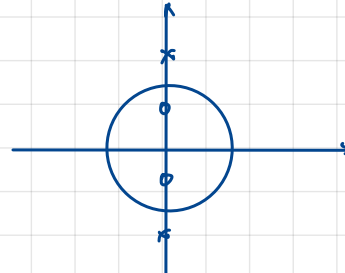
c)



MP



AP



d)

