Hausaufgaben 8
Gruppen Nico 6

Aufgabe 8.1

(i) $\operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 3x^2y + z^5 + 0 + 5$

$$= 3x^2y + z^5 + 5$$

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{f}) = \operatorname{grad}(3x^2y + z^5 + 5) = \begin{pmatrix} 6xy \\ 3x^2 \\ 5z^4 \end{pmatrix}$$

(Lösung 解法不同)

(ii) $$\operatorname{rot}\vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 0 \\ y^4 + 5z^4x - 3 \\ 0 - x^3 - 4y^3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ y^4 + 5xz^4 - 3 \\ -x^3 - 4y^3z \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{f}) = \operatorname{rot}\begin{pmatrix} 4 \\ y^4 + 5xz^4 - 3 \\ -x^3 - 4y^3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12y^2z - 20xz^3 \\ 0 + 3x^2 \\ 5z^4 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12y^2z - 20xz^3 \\ 3x^2 \\ 5z^4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.2

(i) $\vec{v}$ besitzt ein Potential auf $\mathbb{R}^3$ (offen, konvex), wenn: $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \operatorname{rot}\begin{pmatrix} 3x^2yz^3 \\ ax^3z^3 - 2y \\ bx^3yz^2 + 3z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bx^3z^2 - 3ax^3z^2 \\ 9x^2yz^2 - 3bx^2yz^2 \\ 3ax^2z^3 - 3x^2z^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b-3a)x^3z^2 \\ (9-3b)x^2yz^2 \\ (3a-3)x^2z^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{matrix} b - 3a = 0 \\ 9 - 3b = 0 \\ 3a - 3 = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} a = 1 \\ b = 3 \end{matrix}$$

(ii) $$\vec{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2yz^3 \\ x^3z^3 - 2y \\ 3x^3yz^2 + 3z^2 \end{pmatrix}$$

Für ein Potential $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ des Vektorfeldes $\vec{v}$ gilt:

$$-\operatorname{grad}\varphi = \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2yz^3 \\ x^3z^3 - 2y \\ 3x^3yz^2 + 3z^2 \end{pmatrix}$$

Integration nach x:

$$-\varphi(x,y,z) = x^3yz^3 + C_1(y,z)$$

Ableitung nach y: $-\frac{\partial\varphi}{\partial y} = x^3z^3 + \frac{\partial}{\partial y}C_1(y,z) = x^3z^3 - 2y$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}C_1(y,z) = -2y$$

Integration nach y: $C_1(y,z) = -y^2 + C_2(z)$

$$-\varphi(x,y,z) = x^3yz^3 - y^2 + C_2(z)$$

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y,z) = 3x^3yz^2 + \frac{\partial}{\partial z}C_2(z) = 3x^3yz^2 + 3z^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}C_2(z) = 3z^2$$

Integration nach z: $C_2(z) = z^3 + C_4$

$\varphi(x,y,z) = -x^3yz^3 + y^2 - z^3 - C_4$ mit konstante C_4

ist ein Potential für $\vec{v}$

Aufgabe 8.3

$\vec{v}$ besitzt ein Vektorpotential wenn $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ auf $\mathbb{R}^3$ (Notwendige Bedingung)

$$\operatorname{div}\vec{v} = 9x^2y^2 - 4xz + 3ax^2y^2 + 2bxz = 0$$

$$\Rightarrow (9+3a)x^2y^2 + (2b-4)xz = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = -3 \qquad b = 2$$