Makroökonomik (AVWL II)
Übung 4: Wachstum I

Tutoriumswoche 4

Aufgabe 1 – Cobb-Douglas Produktionsfunktion

1928 publizierten Charles W. Cobb und Paul H. Douglas einen Artikel, in dem sie die Beziehung zwischen Kapital, Arbeit und Produktion statistisch schätzten. Sie benutzen dafür eine spezielle funktionale Form, die später als „Cobb-Douglas“ Produktionsfunktion bekannt wurde. Diese ist nun eine der bekanntesten und am häufigsten verwendeten Produktionsfunktionen.

1928年，查尔斯·W·科布和保罗·H·道格拉斯发表了一篇文章，他们在其中统计估计了资本、劳动和生产之间的关系。他们使用了一种特殊的功能形式，后来被称为“科布-道格拉斯”生产函数。现在，这是最著名和最常用的生产函数之一。

a) Zeigen Sie für die folgende Cobb-Douglas Funktion $\boldsymbol{Y = K^{\alpha} N^{1-\alpha}}$ mit $\alpha \in (0,1)$, dass die drei Eigenschaften **i) - iii)** erfüllt sind. Geben Sie jeweils auch eine **ökonomische Interpretation** dieser Eigenschaften.

a）对于以下科布-道格拉斯函数$\boldsymbol{Y = K\alpha N1{-}\alpha}$，其中$\alpha \in$（0,1），请证明满足i）- iii）三个属性。请为每个特性提供一个经济解释。

i. 对于所有的K，N > 0，边际产出递减且为正数。ii. F具有恒定的规模收益。iii. 满足所谓的Inada条件。

i. Die Grenzerträge sind für alle K, N > 0 positiv und abnehmend.

ii. F hat konstante Skalenerträge.

iii. Die sogenannten Inada-Bedingungen sind erfüllt

Aufgabe 1 – Cobb-Douglas Produktionsfunktion

$\boldsymbol{Y = K^{\alpha} N^{1-\alpha}}$ mit α ∈ (0,1)

i. Die Grenzerträge sind für alle K, N > 0 positiv und abnehmend.

Lösung:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha K^{\alpha-1} N^{1-\alpha} = \alpha \left(\frac{N}{K}\right)^{1-\alpha} > 0$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = -(1-\alpha)\alpha \frac{N^{1-\alpha}}{K^{2-\alpha}} = -(1-\alpha)\alpha \frac{N^{1-\alpha}}{K^{-\alpha} K^2} = -(1-\alpha)\alpha \frac{Y}{K^2} < 0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial N} = (1-\alpha) K^{\alpha} N^{1-\alpha-1} = (1-\alpha)\left(\frac{K}{N}\right)^{\alpha} > 0$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial N^2} = -\alpha(1-\alpha) K^{\alpha} N^{-\alpha-1} = -\alpha(1-\alpha) K^{\alpha} N^{-\alpha-1} N^1 N^{-1} = -\alpha(1-\alpha) \frac{Y}{N^2} < 0$$

Aufgabe 1 – Cobb-Douglas Produktionsfunktion

$\boldsymbol{Y = K^{\alpha} N^{1-\alpha}}$ mit $\alpha \in (0,1)$

i. Die Grenzerträge sind für alle K, N > 0 positiv und abnehmend. Ökonomische Interpretation?

Lösung:

- Erhöhung des Einsatzes eines der Inputfaktoren erhöht das Produktionsniveau
- Faktoren werden zunächst dort eingesetzt, wo sie am produktivsten sind
- Folge: Grenzprodukt nimmt mit zunehmendem Faktoreinsatz ab

增加某个输入因素的投入会提高生产水平。因素首先被用于最具生产力的地方。结果是：随着因素投入的增加，边际产量会下降。

Aufgabe 1 – Cobb-Douglas Produktionsfunktion

$\boldsymbol{Y = K^{\alpha} N^{1-\alpha}}$ mit $\alpha \in (0,1)$

ii. F hat konstante Skalenerträge.

Lösung:

- Definition konstante Skalenerträge: $\mathrm{F}(\lambda\mathrm{K}, \lambda\mathrm{N}) = \lambda\mathrm{F}(\mathrm{K}, \mathrm{N})$ für $\forall\, \lambda > 0$
- sinkende Skalenerträge: $\mathrm{F}(\lambda\mathrm{K}, \lambda\mathrm{N}) < \lambda\mathrm{F}(\mathrm{K}, \mathrm{N})$
- steigende Skalenerträge: $\mathrm{F}(\lambda\mathrm{K}, \lambda\mathrm{N}) > \lambda\mathrm{F}(\mathrm{K}, \mathrm{N})$
- für unsere Cobb-Douglas Funktion:

$$\mathrm{F}(\mathrm{K}, \mathrm{N}) = \mathrm{K}^{\alpha}\mathrm{N}^{1-\alpha}$$

$$\mathrm{F}(\lambda\mathrm{K}, \lambda\mathrm{N}) = (\lambda\mathrm{K})^{\alpha}(\lambda\mathrm{N})^{1-\alpha} = \lambda^{\alpha+(1-\alpha)}\,(\mathrm{K})^{\alpha}(\mathrm{N})^{1-\alpha} = \lambda\mathrm{Y} = \lambda\mathrm{F}(\mathrm{K}, \mathrm{N})$$

Aufgabe 1 – Cobb-Douglas Produktionsfunktion

$\boldsymbol{Y = K^{\alpha} N^{1-\alpha}}$ mit $\alpha \in (0,1)$

ii. F hat konstante Skalenerträge.

Ökonomische Interpretation?

Lösung:

- Erhöhung des Einsatzes aller Produktionsfaktoren mit Faktor λ erhöht die Produktion ebenfalls um den Faktor λ
- Beispiel: alle Inputfaktoren (Arbeitskräfte, Gebäude, Maschinen, etc.) werden verdoppelt -> Output verdoppelt sich

Aufgabe 1 – Cobb-Douglas Produktionsfunktion

$\boldsymbol{Y = K^{\alpha} N^{1-\alpha}}$ mit $\alpha \in (0,1)$

iii. Die sogenannten Inada-Bedingungen sind erfüllt, d.h.

$$\lim_{K \to \infty} F_K = 0 \ , \lim_{N \to \infty} F_L = 0,$$

$$\lim_{K \to 0} F_K = \infty \ , \lim_{N \to 0} F_L = \infty,$$

wobei F_K die erste Ableitung von F nach K kennzeichnet und F_N die erste Ableitung von F nach N ist.

Inada条件包括两个方面：

Inada边际生产力条件（Inada marginal productivity condition）：该条件要求生产函数的边际产出递减，即在每单位投入增加时，额外产出的增加逐渐减少。这可以表示为生产函数的边际产出随着投入因素的增加而逐渐减小。

Inada边际效用条件（Inada marginal utility condition）：该条件要求效用函数的边际效用递减，即消费者对每单位商品的额外满足感逐渐减少。这可以表示为效用函数的边际效用随着消费量的增加而逐渐减小。

Aufgabe 1 – Cobb-Douglas Produktionsfunktion

Inada-Bedingungen:

$$\lim_{K\to\infty} F_K = 0 \; , \lim_{N\to\infty} F_L = 0,$$

$$\lim_{K\to 0} F_K = \infty \; , \lim_{N\to 0} F_L = \infty,$$

Lösung:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha \left(\frac{N}{K}\right)^{1-\alpha}$$

$$\lim_{K\to 0} \frac{\partial Y}{\partial K} = \lim_{K\to 0} \alpha \left(\frac{N}{K}\right)^{1-\alpha} = \infty$$

$$\lim_{K\to\infty} \frac{\partial Y}{\partial K} = \lim_{K\to\infty} \alpha \left(\frac{N}{K}\right)^{1-\alpha} = 0$$

Aufgabe 1 – Cobb-Douglas Produktionsfunktion

Technische Universität Berlin

Inada-Bedingungen:

$$\lim_{K\to\infty} F_K = 0 \ , \lim_{N\to\infty} F_L = 0,$$

$$\lim_{K\to 0} F_K = \infty \ , \lim_{N\to 0} F_L = \infty,$$

Lösung:

$$\frac{\partial Y}{\partial N} = (1-\alpha)\left(\frac{K}{N}\right)^{\alpha}$$

$$\lim_{N\to 0}\frac{\partial Y}{\partial N} = \lim_{N\to 0}(1-\alpha)\left(\frac{K}{N}\right)^{\alpha} = \infty$$

$$\lim_{N\to \infty}\frac{\partial Y}{\partial N} = \lim_{N\to \infty}(1-\alpha)\left(\frac{K}{N}\right)^{\alpha} = 0$$

Aufgabe 1 – Cobb-Douglas Produktionsfunktion

Technische Universität Berlin

$Y = K^{\alpha} N^{1-\alpha}$ mit $\alpha \in (0,1)$

iii. Die sogenannten Inada-Bedingungen sind erfüllt

Ökonomische Interpretation?

Lösung:

- Grenzerträge gehen gegen Unendlich, wenn der Faktoreinsatz gegen Null geht
- Grenzerträge gehen gegen Null, wenn der Faktoreinsatz gegen Unendlich geht
- Ertrag der ersten Einheit jedes Inputfaktors „extrem“ (unendlich) hoch
- Ertrag nimmt mit zunehmenden Faktoreinsatz ab (wenn anderer Faktor konst)

- Folge: im Marktgleichgewicht besteht immer eine positive, endliche Nachfrage nach beiden Inputfaktoren

 Output in einer Volkswirtschaft kann nicht beliebig gesteigert werden, indem der Arbeitseinsatz immer weiter erhöht wird (bei gegebener Technologie)

- 当要素投入趋近于零时，边际产出趋近于无限大
- 当要素投入趋近于无限大时，边际产出趋近于零
- 每个输入要素的第一单位产出“极端”（无限大）
- 当另一个要素保持不变时，随着要素投入的增加，产出逐渐减少
- 结果：在市场平衡中，两个输入要素总是存在正的有限需求

在给定技术的情况下，通过不断增加劳动投入来无限制地增加经济产出是不可能的。

Aufgabe 2 – Robinsonade

失事的鲁滨逊 · 克鲁索于1659年9月30日被冲到了一座无人居住的热带岛屿的海岸上。
他将部分发现的、部分漂来的资本（包括椰子树、谷物、绳索、木板等）汇总起来，使他有了总值为K10 = 10的资本以用于生产。
利用现有的资本，他能够生产新的商品（椰子、谷物、小屋等）。）生产产出。
输出和投入的比率（总和）由以下生产函数给出：$F(Kt) = Kt$ 。
Crusoe每次节省新生产的货物的一半（$s = 0, 5$），以增加他的谦虚资本库存。
同时，每年在热带气候的影响下，他的现有资本存量的10%（$\delta = 0, 1$）会腐烂。

Der verunglückte Robinson Crusoe wird am 30. September 1659 an die Küste einer unbewohnten tropischen Insel gespült.

Den teilweise vorgefundenen, teilweise ebenfalls angeschwemmten **Kapitalstock** (bestehend aus Kokospalmen, Getreidekörnern, Tauen, Brettern, etc.) aggregiert er, sodass ihm ein Kapitalstock in Höhe von $\boldsymbol{K_0 = 10}$ zu Produktionszwecken zur Verfügung steht.

Unter Einsatz des vorhandenen Kapitals ist er in der Lage neue Güter (Kokosnüsse, Getreide, eine Hütte, etc.) zu produzieren.

Das Verhältnis zwischen dem (aggregierten) Output und dem eingesetzten (aggregierten) Kapital ist durch folgende **Produktionsfunktion** gegeben: $\boldsymbol{F(K_t) = \sqrt{K_t}}$.

Crusoe spart jeweils die Hälfte der neu produzierten Güter ($\boldsymbol{s = 0,5}$), um seinen bescheidenen Kapitalstock zu erhöhen.

Gleichzeitig verrottet ihm jedes Jahr ein Anteil von 10% des bestehenden Kapitalstocks ($\boldsymbol{\delta = 0,1}$) unter Einwirkung des tropischen Klimas.

Aufgabe 2 – Robinsonade

a) Berechnen Sie, wie sich der Kapitalstock in den ersten 5 Perioden entwickelt. Wie entwickelt sich dabei die Differenz K_{t+1} - K_t?

Lösung:

$$\boldsymbol{K_0 = 10;\ F(K_t) = \sqrt{K_t};\ s = 0,5;\ \delta = 0,1}$$

Periode	*Formel*	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Kapitalstock	K_t	10	10,58113	11,14945	11,70405	12,24420
Bruttoinvestition	$s \cdot \sqrt{K_t}$	1,581138	1,626433	1,669540	1,710559	1,749586
Nettoinvestition	$s \cdot \sqrt{K_t} - \delta K_t$	0,581138	0,568319	0,554594	0,540154	0,525165

Die Differenz K_{t+1} - K_t wird immer kleiner.

Aufgabe 2 – Robinsonade

b) Erläutern Sie, weshalb sich das Wachstum des Kapitalstocks verlangsamt. Bei welchem Wert bleibt der Kapitalstock konstant (langfristiges Wachstumsgleichgewicht bzw. Steady State)? Wie hoch ist bei diesem Wert die Produktion und der Konsum?

解释为什么资本存量的增长会减缓。在什么值处，资本存量保持不变（长期增长均衡或稳态）？在这个值处，生产和消费是多少?

Lösung:

- Wachstum des Kapitalstocks durch die Nettoinvestitionen $s \cdot \sqrt{K_t} - \delta K_t$ bestimmt
- $\lim_{K \to \infty} F_K = 0 \rightarrow$ Bruttoinvestitionen wachsen immer langsamer je größer *K* wird
- Bruttoinvestitionen werden schließlich von den anfallenden Abschreibungen aufgezehrt

• 资本存量的增长由净投资 s • K-δKt 决定
• lim FK = 0 → 随着 K 的增长，总投资增长速度变得越来越慢
K→∞
• 总投资最终会被折旧所消耗
→ 何时?

$\rightarrow$ wann?

$\rightarrow$ Bruttoinvestitionen und Abschreibungen gleichsetzen und nach *K* auflösen:

$$s \cdot \sqrt{K_t} = \delta K_t \;\rightarrow\; 0{,}5\sqrt{K} = 0{,}1K \;\rightarrow\; 5\sqrt{K} = K \;\rightarrow\; 5 = \sqrt{K} \;\rightarrow\; K^* = 25$$

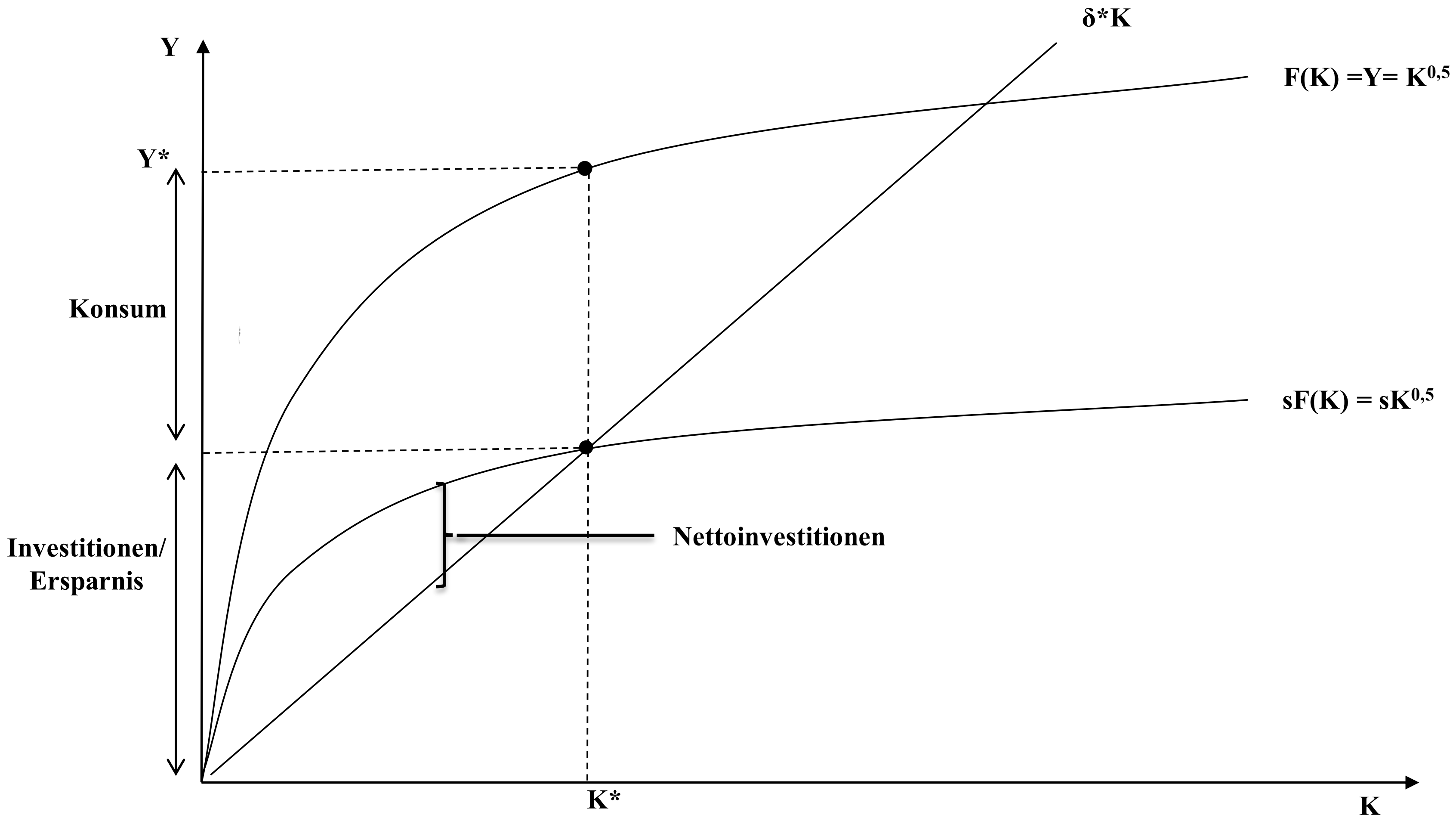
- Produktion im Steady State: $Y^* = \sqrt{K^*} = \sqrt{25} = 5$
- Konsum: $C *= 0{,}5 \cdot Y^* = 0{,}5 \cdot 5 = 2{,}5$

Aufgabe 2 – Robinsonade

c) Erstellen Sie für die Einmann-Ökonomie eine Grafik, die den Zusammenhang zwischen der Produktion, der Ersparnis, den Investitionen und den Abschreibungen jeweils mit dem Kapitalstock beschreibt. 为单人经济创建一张图表，描述生产、储蓄、投资和折旧与资本存量的关系。

Aufgabe 2 – Robinsonade

Lösung:



Aufgabe 2 – Robinsonade

d) Erläutern Sie: Warum ist das langfristige Wachstumsgleichgewicht stabil?

Hinweis: Überlegen Sie was passiert, wenn das Kapital vorübergehend kleiner/ größer ist als das Kapital im langfristigen Wachstumsgleichgewicht.

请解释：为什么长期增长均衡是稳定的?

提示：考虑当资本暂时小于/大于长期增长均衡资本时会发生什么。

解答：

当经济处于稳态左侧时：$K < K* t$

• 投资大于折旧 → 资本存量增加

Lösung:

Wenn sich die Volkswirtschaft links vom Steady State befindet: $K_t < K^*$

- Investitionen sind größer als Abschreibungen → Kapitalstock nimmt zu
- Anstieg von K geht mit einem Anstieg von Y einher
- K und Y steigen an, bis die Investitionen gerade ausreichen, um den verschlissenen Kapitalstock zu ersetzen (bei K^*)

• K 的增加伴随着 Y 的增加

• K 和 Y 增加，直到投资恰好足以替换磨损的资本存量（在 $K*$ 处）

Wenn sich die Volkswirtschaft rechts vom Steady State befindet: $K_t > K^*$

- Investitionen sind kleiner als Abschreibungen→ Kapitalstock nimmt ab
- Sinkt K, sinkt auch Y
- K und Y sinken, bis die Investitionen gerade ausreichen, um den verschlissenen Kapitalstock zu ersetzen (bei K^*).

当经济处于稳态右侧时：$K > K*$

• 投资小于折旧 → 资本存量减少

• K 下降，Y 也下降

• K 和 Y 下降，直到投资恰好足以替换磨损的资本存量（在 $K*$ 处）。

Aufgabe 2 – Robinsonade

e) Gehen Sie davon aus, dass sich Robinson und seine Ein-Kopf Volkswirtschaft im langfristigen Wachstumsgleichgewicht befinden. Nun zieht ein schwerer Hurrikan über die Insel und zerstört <u>einmalig</u> ein Drittel des Kapitalstocks. Erläutern Sie die kurzfristigen und langfristigen Auswirkungen auf den Kapitalstock, die Produktion und den Konsum und zeichnen Sie die Situation in Ihre Grafik aus c).

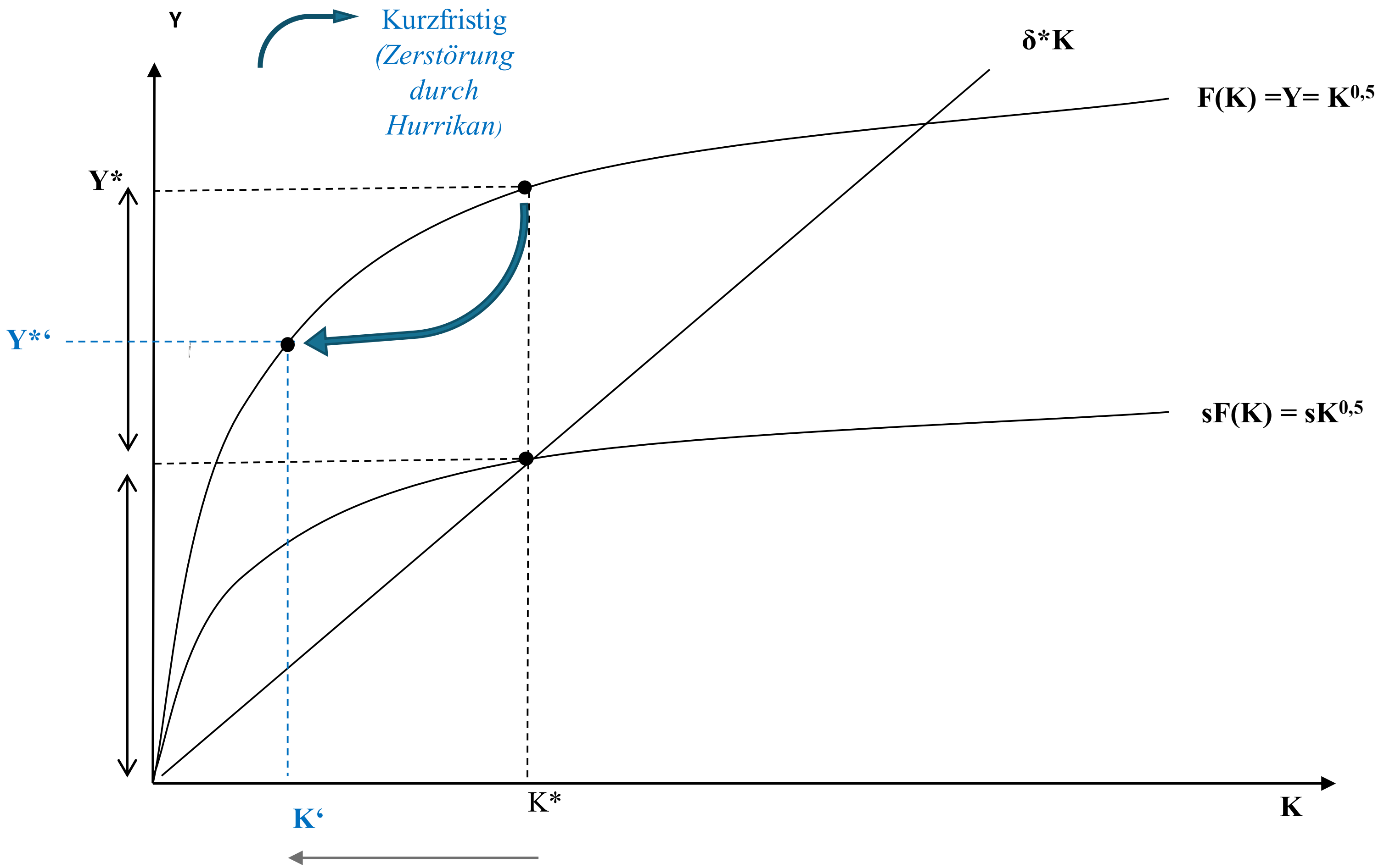
假设罗宾逊和他的单一经济体处于长期增长平衡状态。现在，一场强烈的飓风袭击了这个岛屿，摧毁了三分之一的资本存量。请说明对资本存量、生产和消费的短期和长期影响，并在图c中描述这种情况。
解决方案：
- 由于资本存量减少了三分之一，经济体已经脱离了稳态。• 生产、资本存量和消费短期内低于稳态水平
- 图形上我们处于稳态左侧 (K‘)
- 这里投资/储蓄大于折旧 → 资本存量再次增加
- 长期内将再次达到旧的增长均衡状态

Lösung:

- Durch die Reduktion des Kapitalstocks um ein Drittel wurde die Wirtschaft aus dem Steady State befördert.
- Produktion, Kapitalstock und Konsum sind kurzfristig auf einem geringeren Niveau als im Steady State
- Grafisch befinden wir uns links vom Steady State bei (K‘)
- Hier sind Investitionen/Ersparnis größer als Abschreibungen → Kapitalstock steigt wieder an
- Langfristig wird wieder das alte Wachstumsgleichgewicht erreicht

Aufgabe 2 – Robinsonade

Lösung grafisch:



Aufgabe 2 – Robinsonade

Technische Universität Berlin

f) Erläutern Sie grafisch und verbal, wie sich das Szenario in Aufgabenteil e) von einer Situation unterscheidet, in der durch permanente Klimaveränderungen die Abschreibungsrate auf $\delta = 0{,}2$ steigt

f) 请用图形和语言解释，任务e)的情景与折旧率$\delta = 0.2$永久上升的情况下有何不同

解答：

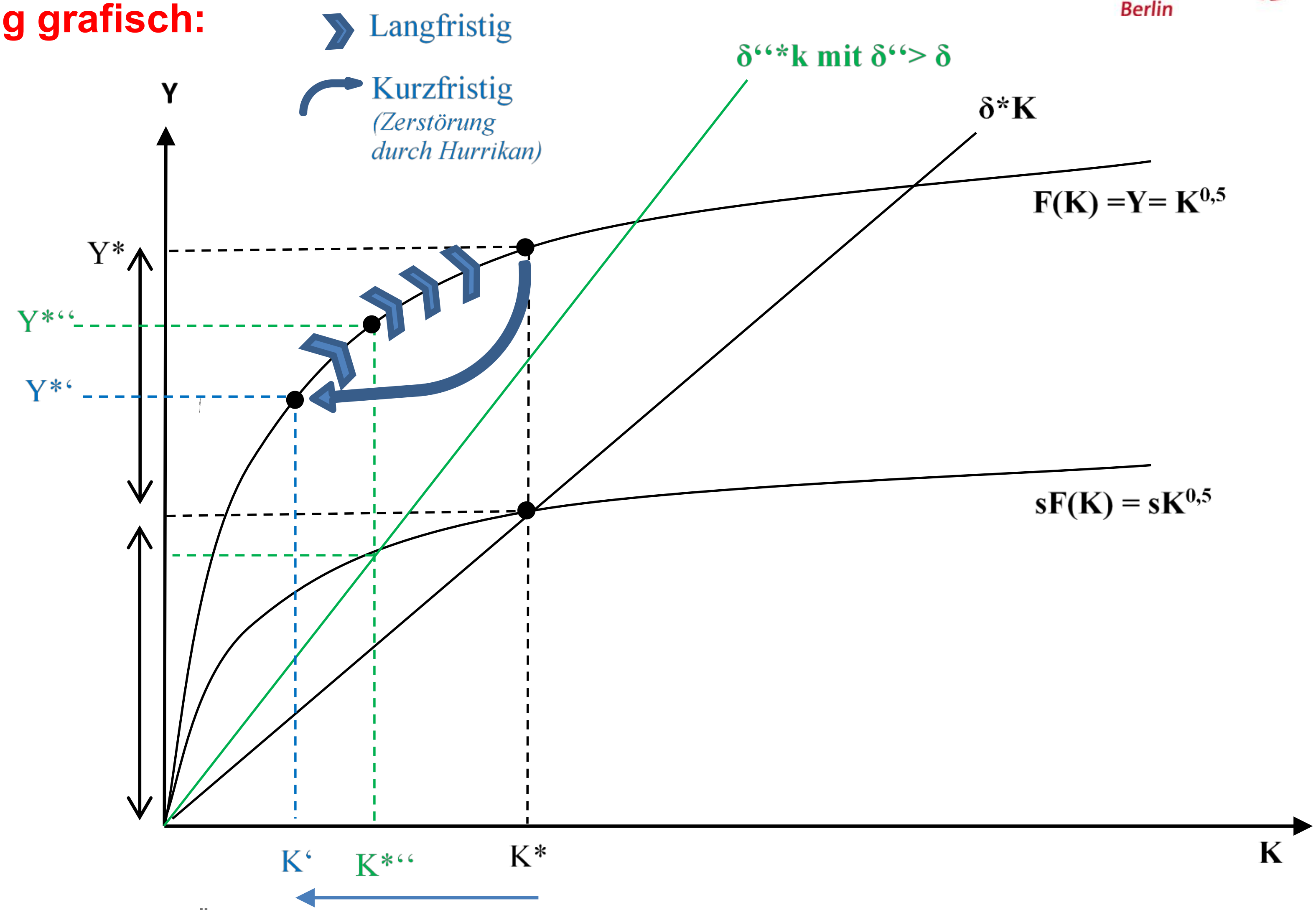
- 永久变化的折旧率 → 新的长期增长均衡
- 资本、生产和消费减少
- 在给定的生产和相同的消费和总投资函数下，由于折旧率上升导致净投资率下降，现在可以累积更少的资本。

Lösung:

- Permanente Veränderung der Abschreibungsrate → neues langfristiges Wachstumsgleichgewicht
- mit geringerem Kapital, geringerer Produktion und niedrigerem Konsum
- Bei gegebener Produktions- und gleicher Konsum- und Bruttoinvestitionsfunktion kann nun weniger Kapital akkumuliert werden, da die Nettoinvestitionsquote durch die gestiegene Abschreibungsrate gesunken ist.

Aufgabe 2 – Robinsonade

Lösung grafisch:



Aufgabe 3 – Fortsetzung Robinsonade: Robinson bekommt Gesellschaft

Ein Schiff der englischen Marine erreicht nach einigen Jahren die Insel von Robinson Crusoe.
Da einige Matros*innen sich auf der Insel sehr wohl fühlen, bleiben sie dort. Die Bevölkerungszahl N erhöht sich somit sprunghaft.
Allerdings bringen die Matros*innen keine Kapitalgüter mit. Die grundlegende Struktur der Ökonomie bleibt gleich und lässt sich verallgemeinern durch folgende Produktionsfunktion $F(K_t, N) = K_t^{\alpha} N^{1-\alpha}$.

a) Für die Analyse der Ökonomie sind im Folgenden Pro-Kopf-Größen relevant. Bestimmen Sie daher die Produktionsfunktion in Pro-Kopf-Einheiten, sodass sie nur von der Kapitalintensität abhängt *(Intensitätsform)*.

英国海军的一艘船在几年后到达了鲁滨逊·克鲁索的岛屿。
由于一些水手在岛上感到非常舒适，他们留了下来。因此，人口数量N急剧增加。
然而，水手们没有带来任何资本货物。经济的基本结构保持不变，可以通过以下生产函数$F(K,N)$=$K\alpha N$1−$\alpha.tt$进行概括。
a) 对于经济分析，以下人均指标是相关的。因此，确定每人生产函数，使其仅取决于资本密集度（密集度形式）。

Lösung:

$$F(K,N) = Y = K^{\alpha} N^{1-\alpha}$$

$$\frac{F(K,N)}{N} = \frac{Y}{N} = y = \frac{K^{\alpha} N^{1-\alpha}}{N} = \frac{K^{\alpha}}{N^{\alpha}} = \left(\frac{K}{N}\right)^{\alpha} = k^{\alpha} = f(k) \qquad \text{mit } k = \frac{K}{N}$$

Aufgabe 3 – Fortsetzung Robinsonade

b) Berechnen Sie die Kapitalintensität, die Produktion pro Kopf und den Konsum pro Kopf im langfristigen Wachstumsgleichgewicht in Abhängigkeit von α, s und δ.

根据α、s和δ计算长期增长平衡下的资本密集度、人均生产和人均消费。
解：
• •
当资本密集度$k = K / N$保持不变时，经济处于增长平衡状态。
这是因为每人投资$s\ f(k)$与每人折旧δk相等，即投资函数与折旧函数相交。"

Lösung:

- Die Volkswirtschaft befindet sich im Wachstumsgleichgewicht, wenn die Kapitalintensität $k = \frac{K}{N}$ **konstant** ist
- Dies ist der Fall, wenn die **Investitionen pro Kopf $s\ f(k)$** den **Abschreibungen pro Kopf δk entsprechen**, wenn also die Investitionsfunktion die Abschreibungsfunktion schneidet

Aufgabe 3 – Fortsetzung Robinsonade

b) Berechnen Sie die Kapitalintensität, die Produktion pro Kopf und den Konsum pro Kopf im langfristigen Wachstumsgleichgewicht in Abhängigkeit von α, s und δ.

Lösung:

- Kapitalintensität:

$$sf(k^*) = \delta k^* \Leftrightarrow s{k^*}^{\alpha} = \delta k^* \Leftrightarrow {k^*}^{1-\alpha} = \frac{s}{\delta}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{k^*} = \left(\boldsymbol{\frac{s}{\delta}}\right)^{\boldsymbol{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

- Produktion: $y^* = \boldsymbol{k^*}^{\alpha} = \left(\left(\boldsymbol{\frac{s}{\delta}}\right)^{\boldsymbol{\frac{1}{1-\alpha}}}\right)^{\alpha} = \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$

- Konsum: $c^* = (1-s)\boldsymbol{y} = (1-s)\left(\boldsymbol{\frac{s}{\delta}}\right)^{\boldsymbol{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$

Aufgabe 3 – Fortsetzung Robinsonade

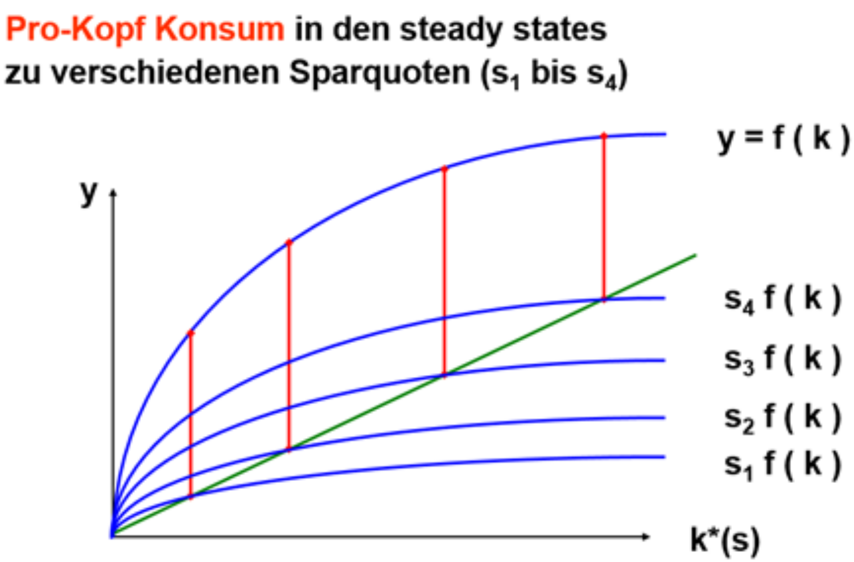
c) Auf der Insel entfacht eine Diskussion über die optimale Verwendung der produzierten Güter für Konsum und Investitionen. Zeigen Sie formal, dass die optimale Sparquote (s^*), welche den Pro-Kopf-Konsum im langfristigen Gleichgewicht maximiert (Goldene Regel), für die gegebene Produktionsfunktion dem Wert α entspricht!

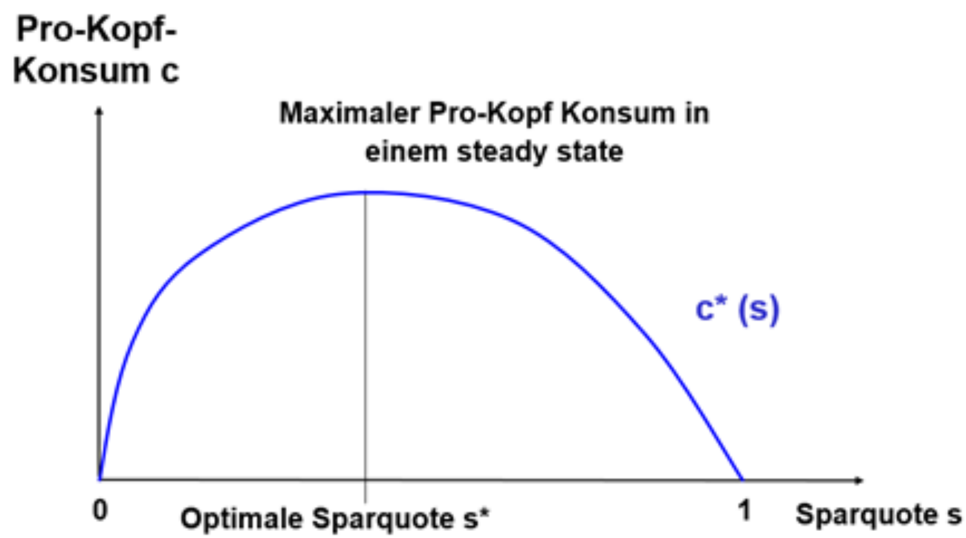
在岛上引发了一场关于如何最优地使用生产出的商品进行消费和投资的讨论。正式证明，在给定的生产函数下，最优储蓄率s*（即长期均衡下最大化人均消费的黄金法则）对应于参数α的值！

Aufgabe 3 – Fortsetzung Robinsonade

Lösung:

- Die *Goldene Regel* der Kapitalakkumulation definiert die Sparquote, bei der der Konsum pro Kopf im Steady State maximiert wird
- Verschiedene Sparquoten führen zu verschiedenen Steady States:





Aufgabe 3 – Fortsetzung Robinsonade

Lösung:

- mehrere Möglichkeiten zur Bestimmung der langfristig optimalen Sparquote
- Einfachste Möglichkeit:

1. im Aufgabenteil b) hergeleiteten Konsum pro Kopf im Steady State nach Sparquote ableiten
2. Ableitung Null setzen

→ wir maximieren den Konsum im Steady State

Aus Aufgabenteil b): Konsum pro Kopf im Steady State $c^* = (1-s)y = (1-s)\left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$

Konsum über s maximieren:

$$\max_s c^* = \frac{\partial c^*}{\partial s} = -\left[\frac{s}{\delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + (1-s)\frac{\alpha}{1-\alpha}\left[\frac{s}{\delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1}\frac{1}{\delta} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-s)\frac{\alpha}{1-\alpha}\left[\frac{s}{\delta}\right]^{-1}\frac{1}{\delta} = 1$$

$$\Leftrightarrow 1-s = s\frac{1-\alpha}{\alpha} \Leftrightarrow s^* = \alpha$$

Aufgabe 3 – Fortsetzung Robinsonade

Lösung:

- mehrere Möglichkeiten zur Bestimmung der langfristig optimalen Sparquote
- Einfachste Möglichkeit:

1. im Aufgabenteil b) hergeleiteten Konsum pro Kopf im Steady State nach Sparquote ableiten
2. Ableitung Null setzen

→ wir maximieren den Konsum im Steady State

Aus Aufgabenteil b): Konsum pro Kopf im Steady State $c^* = (1-s)y = (1-s)\left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$

Konsum über s maximieren:

$$\max_s c^* = \frac{\partial c^*}{\partial s} = -\left[\frac{s}{\delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + (1-s)\,\frac{\alpha}{1-\alpha}\,\left[\frac{s}{\delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1}\frac{1}{\delta} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-s)\,\frac{\alpha}{1-\alpha}\left[\frac{s}{\delta}\right]^{-1}\frac{1}{\delta} = 1$$

$$\Leftrightarrow 1-s = s\,\frac{1-\alpha}{\alpha} \Leftrightarrow s^* = \alpha$$