Hausaufgaben 06

Ana II Ing
Gruppe: Nico 6

Aufgabe 6.1

(i)

$$q(x,y) = (x,y)\cdot A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (x,y)\cdot\begin{pmatrix}-3 & 5\\5 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

Wir untersuchen die quadratischen Formen auf Definitheit mit Hauptminorenkriterium:

$$A_{1,1} = -3 < 0 \qquad \det A = \det\begin{pmatrix}-3 & 5\\5 & -8\end{pmatrix} = 27-25 = 2 > 0$$

Hieraus folgt, dass q negativ definit ist.

(ii)

$$Q(x,y,z) = (x,y,z)\cdot B\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (x,y,z)\cdot\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\1 & 6 & 0\\2 & 0 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

$$B_{1,1} = 5 > 0 \qquad \det\begin{pmatrix}5 & 1\\1 & 6\end{pmatrix} = 30-1 = 29 > 0$$

$$\det B = 7\det\begin{pmatrix}5 & 1\\1 & 6\end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix}1 & 2\\6 & 0\end{pmatrix} = 7\times 29 + 2\times(0-12) = 203-24 = 179 > 0$$

Hieraus folgt, dass q positiv definit ist.

Aufgabe 6.2

(i) $$f'(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x+3y \quad 3x+6y+6y^2) \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$$\text{Hess}\, f(x,y) = \begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3\\3 & 6+12y\end{pmatrix} \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$$T_1(x,y) = f(x_0,y_0) + f'(x_0,y_0)\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$$

$$= f(1,0) + f'(1,0)\begin{pmatrix}x-1\\y\end{pmatrix} \qquad \Big|\ (x_0,y_0) = (1,0)$$

$$= 1 + (2 \quad 3)\begin{pmatrix}x-1\\y\end{pmatrix} = 1+2x-2+3y$$

$$= 2x+3y-1$$

$$T_2(x,y) = f(x_0,y_0) + f'(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 \end{pmatrix} \cdot \text{Hess}\, f(x_0,y_0) \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

$$= T_1(x,y) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-1 & y \end{pmatrix} \text{Hess}\, f(1,0) \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$$

$$= 2x+3y-1+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-1 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$$

$$= 2x+3y-1+\frac{1}{\cancel{2}}\left[\cancel{2}(x-1)^2 + \overset{3}{\cancel{6}}(x-1)y + \overset{3}{\cancel{6}}y^2\right]$$

$$= \cancel{2x}+\cancel{3y}-\cancel{1}+x^2-\cancel{2x}+\cancel{1}+3xy-\cancel{3y}+3y^2$$

$$= x^2+3y^2+3xy$$

(ii)

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y & 3x+6y+6y^2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \vec{0}$$

$\text{I}: 2x+3y=0$ $\quad\Rightarrow x = -\frac{3y}{2}$

$\text{II}: 3x+6y+6y^2=0$ $\quad\Rightarrow 6y^2+6y-\frac{9}{2}y = 6y^2+\frac{3}{2}y = 0$

$\Rightarrow y=0 \quad x = -\frac{3}{2}y = 0$

oder $y = -\frac{1}{4} \quad x = -\frac{3}{2}y = \frac{3}{8}$

$\Rightarrow P_1 = (0,0) \quad P_2 = (3/8, -1/4)$

Für $P_1 = (0,0)$ gilt es: $\text{Hess}\, f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 12-9 = 3 > 0$ und $2 > 0$

$\Rightarrow$ Hess $f(0,0)$ ist positiv definit

$\Rightarrow$ f hat ein lokales Minimum in $(0,0)$

Für $P_2 = (3/8, -1/4)$ gilt es: $\text{Hess}\, f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 6-9 = -3 < 0$ und $2 > 0$

$\Rightarrow$ Hess $f(3/8, -\frac{1}{4})$ ist indefinit

$\Rightarrow$ f hat kein lokales Extremum in $(3/8, -1/4)$

Hieraus folgt, dass f kein lokales und globales Maximum hat

$$f(0,y) = 3y^2+2y^3 = y^2(3+2y) \to -\infty \quad \text{für } y \to -\infty$$

Daraus folgt, dass f kein globales Minimum