Solution to the 3th Homework

Yimeng Zhu

November 24, 2019

Contents

1 群的性质 (2 分，约 1 小时)

课上我们讲解了什么是群。请根据群定义，求解以下问题:

1. $(\mathbb{Z}, +)$ 是否为群? 若是，验证其满足群定义; 若不是，说明理由。
2. $(\mathbb{N}, +)$ 是否为群? 若是，验证其满足群定义; 若不是，说明理由。

其中 $\mathbb{Z}$ 为整数集，$\mathbb{Z}$ 为自然数集。

Solution:

1. $(\mathbb{Z}, +)$ is a group.
   - closure: $a, b \in \mathbb{Z} \implies a + b \in \mathbb{Z}$;
   - associativity: $a, b, c \in \mathbb{Z} \implies (a + b) + c = a + (b + c)$
   - identity: 0 is the identity element. $\forall a \in \mathbb{Z}, 0 \in \mathbb{Z} : (a + 0) = a$
   - invertibility: $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists (-a) \in \mathbb{Z} : (a + (-a)) = 0$
2. $\mathbb{N}, +$ is a not group. As 0 is the identity element and for $a \in \mathbb{N}, \nexists (-a) \in \mathbb{N} : a + (-a) = 0$

2 验证向量叉乘的李代数性质 (2 分，约 1 小时)

我们说向量和叉乘运算构成了李代数，现在请你验证它。书中对李代数的定义为: 李代数由一个集合 $\mathbb{V}$，一个数域 $\mathbb{F}$ 和一个二元运算 $[,]$ 组成。如果它们满足以下几条性质，称 $(\mathbb{V}, \mathbb{F}, [,])$ 为一个李代数，记作 $\mathfrak{g}$。

1. 封闭性 $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{V}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \in \mathbb{V}$.
2. 双线性 $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathbb{V}, a, b \in \mathbb{F}$, 有:
$$[a\mathbf{X} + b\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] = a[\mathbf{X}, \mathbf{Z}] + b[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}], [\mathbf{Z}, a\mathbf{X} + b\mathbf{Y}] = a[\mathbf{Z}, \mathbf{X}] + b[\mathbf{Z}, \mathbf{Y}].$$
3. 自反性 $\forall \mathbf{X} \in \mathbb{V}, [\mathbf{X}, \mathbf{X}] = 0$.
4. 雅可比等价 $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathbb{V}, [\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]] + [\mathbf{Y}, [\mathbf{Z}, \mathbf{X}]] + [\mathbf{Z}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]] = 0$. 其中二元运算被称为**李括号**。

现取集合 $\mathbb{V} = \mathbb{R}3$，数域 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$，李括号为:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \tag{1}$$

请验证 $\mathfrak{g} = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, \times)$ 构成李代数。

Solution:

1. closure: let $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \implies [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$
2. bilinearity: According to vector arithmetic, one can have:
$$\begin{aligned} \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3, x, y \in \mathbb{R} &\implies (x\mathbf{a} + y\mathbf{b}) \times \mathbf{c} = x(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + y(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \\ &\implies [x\mathbf{a} + y\mathbf{b}, \mathbf{c}] = x[\mathbf{a}, \mathbf{c}] + y[\mathbf{b}, \mathbf{c}] \\ &\qquad\text{and} \\ \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3, x, y \in \mathbb{R} &\implies \mathbf{c} \times (x\mathbf{a} + y\mathbf{b}) = x(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + y(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \\ &\implies [\mathbf{c}, x\mathbf{a} + y\mathbf{b}] = x[\mathbf{c}, \mathbf{a}] + y[\mathbf{c}, \mathbf{b}] \end{aligned}$$
   Thus, the bilinearity is proven.
3. alternating: $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$
4. Jacobi identity: According to triple product expansion, one can have:
$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \\ \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) &= \mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \\ \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \end{aligned}$$
   Accumulating the above 3 equation, one can have:
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$$
   That is:
$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] + [\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] + [\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = 0$$

3 推导 SE(3) 的指数映射 (2 分，约 1 小时)

课上给出了 SO(3) 的指数映射推导，但对于 SE(3)，仅介绍了结论，没有给出详细推导。请你完成 SE(3) 指数映射部分，有关左雅可比的详细推导。

设 $\boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{\rho}, \phi]^T \in \mathfrak{se}(3)$，它的指数映射为:

$$\exp(\hat{\boldsymbol{\xi}}) = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\hat{\boldsymbol{\phi}})^n & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\hat{\boldsymbol{\phi}})^n \boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

令 $\phi = \theta \mathbf{a}$，那么:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\hat{\boldsymbol{\phi}})^n = \frac{\sin\theta}{\theta}\boldsymbol{I} + (1 - \frac{\sin\theta}{\theta})\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T + \frac{1-\cos\theta}{\theta}\boldsymbol{a}\hat{} \triangleq \boldsymbol{J} \tag{3}$$

这也正是课件里提到的左雅可比。

提示: 类比于 SO(3) 的泰勒展开，然后合并奇偶数项级数即得。

Solution:

Proof: According to the Definition in Lecture, one have:

$$\hat{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \hat{\phi} & \boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \quad and \quad \exp(\hat{\boldsymbol{\xi}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\hat{\boldsymbol{\xi}})^n$$

Thus, the above exponential can be written as:

$$\begin{aligned}
\exp(\hat{\boldsymbol{\xi}}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{bmatrix} \hat{\phi} & \boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{bmatrix} \hat{\phi}^n & \hat{\phi}^{(n-1)}\boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{bmatrix} \hat{\phi}^n & \hat{\phi}^{(n-1)}\boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{I} + \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\hat{\phi}^n & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\hat{\phi}^{(n-1)}\boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\hat{\phi}^n & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\hat{\phi}^{(n-1)}\boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\hat{\boldsymbol{\phi}})^n & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\hat{\boldsymbol{\phi}})^n \boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Furthermore, according to lecture,

$$\mathbf{a}\hat{}\mathbf{a}\hat{}\mathbf{a}\hat{} = -\mathbf{a}\hat{}$$

and

$$\mathbf{a}\hat{}\mathbf{a}\hat{} = \mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathbf{T}} - \mathbf{I}$$

Thus,

$$\mathbf{I} = \mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathbf{T}} - \mathbf{a}\hat{}\mathbf{a}\hat{}$$

For $\phi = \theta\mathbf{a}$, one can have:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(\boldsymbol{\phi}^{\wedge})^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\theta^n(\mathbf{a}^{\wedge})^n \\
&= \mathbf{I} + \frac{1}{2!}\theta\mathbf{a}^{\wedge} + \frac{1}{3!}\theta^2\mathbf{a}^{\wedge}\mathbf{a}^{\wedge} + \frac{1}{4!}\theta^3\mathbf{a}^{\wedge}\mathbf{a}^{\wedge}\mathbf{a}^{\wedge} + \frac{1}{5!}\theta^4\mathbf{a}^{\wedge}\mathbf{a}^{\wedge}\mathbf{a}^{\wedge}\mathbf{a}^{\wedge} + ... \\
&= \mathbf{I} + \frac{1}{2!}\theta\mathbf{a}^{\wedge} + \frac{1}{3!}\theta^2\mathbf{a}^{\wedge}\mathbf{a}^{\wedge} - \frac{1}{4!}\theta^3\mathbf{a}^{\wedge} - \frac{1}{5!}\theta^4\mathbf{a}^{\wedge}\mathbf{a}^{\wedge} + ... \\
&= \mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathbf{T}} - \hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}} + \frac{1}{2!}\theta\mathbf{a}^{\wedge} + \frac{1}{3!}\theta^2\mathbf{a}^{\wedge}\mathbf{a}^{\wedge} - \frac{1}{4!}\theta^3\mathbf{a}^{\wedge} - \frac{1}{5!}\theta^4\mathbf{a}^{\wedge}\mathbf{a}^{\wedge} + ... \\
&= \mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}(-\frac{1}{\theta})(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - ...) + \mathbf{a}^{\wedge}(-\frac{1}{\theta})(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - ...) + \frac{1}{\theta}\mathbf{a}^{\wedge} \\
&= \mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathbf{T}} - \mathbf{a}^{\wedge}\mathbf{a}^{\wedge}\frac{\sin\theta}{\theta} - \mathbf{a}^{\wedge}\frac{\cos\theta}{\theta} + \frac{1}{\theta}\mathbf{a}^{\wedge} \\
&= \mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathbf{T}} - (\mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathbf{T}} - \mathbf{I})\frac{\sin\theta}{\theta} - \mathbf{a}^{\wedge}\frac{\cos\theta}{\theta} + \frac{1}{\theta}\mathbf{a}^{\wedge} \\
&= \frac{\sin\theta}{\theta}\boldsymbol{I} + (1 - \frac{\sin\theta}{\theta})\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T + \frac{1 - \cos\theta}{\theta}\boldsymbol{a}^{\wedge} \\
&\triangleq \boldsymbol{J}
\end{aligned}
$$

4 伴随 (2 分，约 1 小时)

在 SO(3) 和 SE(3) 上，有一个东西称为伴随 (Adjoint)。下面请你证明 SO(3) 伴随的性质。

对于 SO(3)，有:

$$\mathbf{R}\exp(\mathbf{p}^\wedge)\mathbf{R}^T = \exp((\mathbf{R}\mathbf{p})^\wedge) \tag{4}$$

此时称 $Ad(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$。

提示: 首先你需要证明 $\forall a \in \mathbb{R}^3, \mathbf{R}\mathbf{a}^\wedge\mathbf{R}^T = (\mathbf{R}\mathbf{a})^\wedge$, 页面`https://math.stackexchange.com/questions/2190603/derivation-of-adjoint-for-so3` 提示了一种简洁的途径。

对于 SE(3)，有:

$$\mathbf{T}\exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge)\mathbf{R}^T = \exp((Ad(\mathbf{T})\boldsymbol{\xi})^\wedge) \tag{5}$$

其中 Ad(T) 定义为:

$$Ad(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t}^\wedge \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \tag{6}$$

这个性质将在后文的 Pose Graph 优化中用到。但是 SE(3) 的证明较为复杂，不作要求。

完整的 SO(3) 和 SE(3) 性质见 1 和 2。

Solution

Proof: For an arbitrary vector $\mathbf{v}$, multiply it from left with $(\mathbf{Ra})^\wedge$, we have:

$$(\mathbf{Ra})^\wedge\mathbf{v} = (\mathbf{Ra}) \times \mathbf{v} = (\mathbf{Ra}) \times (\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{v}) = \mathbf{R}[\mathbf{a} \times (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{v})] = \mathbf{R}\mathbf{a}^\wedge\mathbf{R}^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{a}^\wedge\mathbf{R}^{\mathbf{T}}\mathbf{v}$$

Thus, $(\mathbf{Ra})^\wedge = \mathbf{R}\mathbf{a}^\wedge\mathbf{R}^{\mathbf{T}}$

Further, according to definition of exponential, we have:

$$\exp(\mathbf{p}^\wedge) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{p}^{\wedge n}}{n!}$$

Take this into $\mathbf{R}\exp(\mathbf{p}^\wedge)\mathbf{R}^T$:

$$\mathbf{R}\exp(\mathbf{p}^\wedge)\mathbf{R}^T = \mathbf{R}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{p}^{\wedge n}}{n!}\mathbf{R}^T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{R}\mathbf{p}^\wedge\mathbf{R}^T)^n}{n!} = \exp(\mathbf{R}\mathbf{p}^\wedge\mathbf{R}^T) = \exp((\mathbf{R}\mathbf{p})^\wedge)$$

5 轨迹的描绘 (2 分，约 1 小时)

我们通常会记录机器人的运动轨迹，来观察它的运动是否符合预期。大部分数据集都会提供标准轨迹以供参考，如 kitti、TUM-RGBD 等。这些文件会有各自的格式，但首先你要理解它的内容。记世界坐标系为 W，机器人坐标系为 C，那么机器人的运动可以用 $\mathbf{T}_{WC}$ 或 $\mathbf{T}_{CW}$ 来描述。现在，我们希望画出机器人在世界当中的运动轨迹，请回答以下问题:

1. 事实上，$\mathbf{T}_{WC}$ 的平移部分即构成了机器人的轨迹。它的物理意义是什么? 为何画出 $\mathbf{T}_{WC}$ 的平移部分就得到了机器人的轨迹?
2. 我为你准备了一个轨迹文件 (code/trajectory.txt)。该文件的每一行由若干个数据组成，格式为

$$[t, t_x, t_y, t_z, q_x, q_y, q_z, q_w],$$

其中 t 为时间，t_x, t_y, t_z 为 $\mathbf{T}_{WC}$ 的平移部分，q_x, q_y, q_z, q_w 是四元数表示的 $\mathbf{T}_{WC}$ 的旋转部分，q_w 为四元数实部。同时，我为你提供了画图程序 draw_trajectory.cpp 文件。该文件提供了画图部分的代码，请你完成数据读取部分的代码，然后书写 CMakeLists.txt 以让此程序运行起来。注意我们需要用到 Pangolin 库来画图，所以你需要事先安装 Pangolin(如果你做了第一次作业，那么现在已经安装了)。CMakeLists.txt 可以参照 ORB-SLAM2 部分。

Solution:

1. T_{WC} means the world coordinate system in the view of robot. The rotation part means the orientation of robot and the translation part means the position. By finding the position, which comes from the translation part of T_{WC}, at different time t, we can draw the trajectory.
2. see folder 5.2

6 * 轨迹的误差 (2 分，约 1 小时)

本题为附加题。

除了画出真实轨迹以外，我们经常需要把 SLAM 估计的轨迹与真实轨迹相比较。下面说明比较的原理，请你完成比较部分的代码实现。

设真实轨迹 (ground-truth) 为 Tg，估计轨迹 Te。它们都以 TW C 的形式存储，格式同上题。现在，你需要计算估计轨迹的误差。我们假设每一个 Tg 都与给定的 Te 对应。那么，对于任意第 i 个位姿，它的误差可定义为:

$$e_i = ||\log\left(\mathbf{T}_{gi}^{-1}\mathbf{T}_{ei}\right)^{\vee}||_2. \tag{7}$$

即两个位姿之差的李代数二范数。于是，可以定义两条轨迹的均方根 (Root-Mean-Square-Error, RMSE) 误差为:

$$RMSE(g, e) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i^2} \tag{8}$$

我为你准备了 code/ground-truth.txt 和 code/estimate.txt 两条轨迹。请你根据上面公式，实现 RMSE 的计算代码，给出最后的 RMSE 结果。作为验算，参考答案为:2.207。

注:

1. 公式 (7) 满足度量的定义: 非负性、同一性、对称性、三角不等式，故形成距离函数。类似的，可以定义 SO(3) 上的距离为:

   $$d(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = ||\ln(\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{R}_2)^{\vee}||_2$$

   关于距离定义可以参见拓扑学或者泛函教材。

2. 实际当中的轨迹比较还要更复杂一些。通常 ground-truth 由其他传感器记录 (如 vicon)，它的采样频率通常高于相机的频率，所以在处理之前还需要按照时间戳对齐。另外，由于传感器坐标系不一致，还需要计算两个坐标系之间的差异。这件事也可以 ICP 解得，我们将在后面的课程中讲到。

3. 你可以用上题的画图程序将两条轨迹画在同一个图里，看看它们相差多少。

Solution: see folder 6.