

电动力学

授课教师：刘雄军 整理人：滕一鸣

前言

这大致是刘雄军老师电动力学讲义的学习笔记，相比原讲义而言我对一些内容进行了补全和扩充。由于我的水平有限，文档中可能会有不少纰漏与 typo。欢迎发送邮件至 ym_t@foxmail.com 指出这些问题或提出您对内容的宝贵建议。

目录

1 矢量与张量	1
1.1 基本定义与代数运算	1
1.2 矢量、张量分析	8
2 Maxwell 方程组	14
2.1 Maxwell 方程组	14
2.1.1 Maxwell 方程组	14
2.1.2 Gauss 单位制	15
2.1.3 宏观介质	17
2.1.4 均匀介质	19
2.1.5 边界条件	25
2.2 电磁理论中的守恒律	27
2.3 Maxwell 方程组的对称性	31
3 静电	35
3.1 唯一性定理	35
3.2 Green 定理	38
3.3 Green 函数与边值问题	40
3.4 电像法	43
3.4.1 无限大导体平面	43
3.4.2 无限大导体平面的 Dirichlet Green 函数与 Neumann Green 函数	43
3.4.3 球形导体	45
3.4.4 球形边界的 Dirichlet Green 函数	47
3.5 分离变量法	49
3.5.1 引言	49
3.5.2 笛卡尔系中的分离变量法	49
3.5.3 广义 Fourier 级数	50
3.6 Laplace 方程在曲线正交坐标系中的解	53
3.6.1 Laplace 在球坐标系中的轴对称解; Legendre 多项式	54
3.6.2 Laplace 方程在球坐标系中的通解; 连带 Legendre 多项式与球谐函数	64

3.6.3	球谐函数与球形边界的 Dirichlet Green 函数	68
3.7	多极展开	74
3.7.1	笛卡尔系中的多极展开	74
3.7.2	使用球谐函数的多极展开	76
3.7.3	外场中能量的多极展开	78
3.7.4	Van der Waals 相互作用	79
4	静磁	84
4.1	Biot-Savart 定律	84
4.2	Ampère 定律	86
4.3	磁介质与边界条件	88
4.4	利用磁矢势与磁标势求解边值问题	89
4.4.1	静磁中的边界条件	89
4.4.2	利用矢势处理边值问题	89
4.4.3	利用标势处理边值问题	91
4.5	磁场与局域电流	94
4.6	作用在外磁场中电流分布上的力	97
5	相对论与电动力学	99
5.1	Lorentz 变换与 Poincaré 变换	99
5.2	Lorentz 群的结构	103
5.3	4-速度与固有时	107
5.4	Maxwell 方程的四维形式与电磁场相对论变换	108
5.5	Lorentz 力	116
5.6	带电粒子的作用量原理	117
5.7	稳恒电磁场中带电粒子的运动	121
5.8	电磁场的作用量原理	124
5.8.1	电磁场的 Lorentz 不变量	124
5.8.2	电磁场的作用量	126
5.9	电磁场的能动量张量	129
5.9.1	场论中的作用量原理	129
5.9.2	标量场的能动量张量	130
5.9.3	无源电磁场的能动量张量	134
5.9.4	带电粒子与场的耦合	136

6 电磁辐射	138
6.1 平面电磁波	138
6.2 平面电磁波在介质界面处的行为: Fresnel 公式	140
6.3 导体中的电磁波: 趋肤效应	143
6.4 波导	147
6.5 运动电荷的场	153
6.5.1 推迟势	153
6.5.2 Lienard-Wiechert 势	155
6.5.3 运动电荷产生的电磁场	156
6.5.4 辐射问题	161
6.5.5 Larmor 公式	162
6.5.6 Larmor 公式的应用	166
6.5.6.1 直线加速器	166
6.5.6.2 回旋加速器	167
6.5.7 Thompson 散射	169
6.5.8 辐射功率的角分布	171
6.5.8.1 变速直线运动	171
6.5.8.2 匀速圆周运动	173
6.5.9 辐射的频谱	175
6.5.10 Cerenkov 辐射	179
6.6 辐射系统	183
6.6.1 振荡场源产生的场	183
6.6.2 多极展开	184
6.6.3 电偶极辐射	185
6.6.4 磁偶极辐射与电四极辐射	189
6.6.4.1 磁偶极项的贡献	190
6.6.4.2 电四极辐射	191

第 1 章 矢量与张量

1.1 基本定义与代数运算

流形 M^n 上某点处的逆变矢量是其切空间中的一个元素。如果我们在流形上选取了 n 个线性独立的坐标映射，那么我们便得到了一个坐标系，记为 $\{x^i\}$ 。这些坐标映射在各点处的切空间上诱导了一组坐标基 $\{\partial_i\}$ ，其中 $\partial_i = \partial/\partial x^i$ 。那么流形上的一个矢量 \mathbf{A} 便能在这组基下写成分量形式：

$$\mathbf{A} = A^i \partial_i$$

定义余切空间为切空间作为一个向量空间时的对偶空间，定义一个协变矢量为余切空间中的元素。选定这个空间中的一组对偶基矢 σ^i ，一个协变矢量 B 便可以表示为

$$B = B_i \sigma^i$$

向量空间 V 上的一个 (p, q) 型张量被定义为一个多重线性映射 T （记 V^* 为 V 的对偶空间）：

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_p \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_q \rightarrow \mathbb{R}$$

假设在 V^* 上选取基 σ^i 而在 V 上选取基 ∂ ，那么根据张量的多重线性性可得其分量表示为：

$$T = T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} \partial_{i_1} \otimes \partial_{i_2} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_p} \otimes \sigma^{j_1} \otimes \sigma^{j_2} \otimes \cdots \otimes \sigma^{j_q}$$

有时为了简便起见会略去张量积符号“ \otimes ”，同时我们常常会用张量的分量来代表一个张量。

我们定义 **Kronecker** 符号为

$$\delta_{ij} = \delta_j^i = \delta^{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Kronecker 符号就是一个单纯的数学记号而非张量。我们不会利用度规张量对其进行升降指标运算，但是会为了在计算中维持上下指标平衡而对其上下指标进行分配。在推导纯逆变形式的电磁场正则能动量张量时我们将会看到这一点。

流形上的度规张量场为一个非退化的 $(0, 2)$ 型对称张量 g_{ij} ，它为流形上各点处切空间赋予了内积结构。带有度规结构的流形可以（不严格地）叫

做 Riemann 流形。对于 Riemann 流形某点切空间中的上的逆变矢量 $\mathbf{A} = A^i \partial_i, \mathbf{B} = B^j \partial_j$ ，二者的内积便是

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \langle A^i \partial_i, B^j \partial_j \rangle = A^i B^j \langle \partial_i, \partial_j \rangle = A^i B^j g_{ij}$$

这也表明 $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$ 。

当不具备内积结构时，虽然向量空间 V 可以与其对偶空间 V^* 同构，但是这事建立的同构依赖于基的选取，是不自然的。但是具有内积结构后，根据 Riesz 表示定理，此时 V 与 V^* 之间有且仅有一个不依赖于基选取的自然同构。这也就是说，我们利用度规张量场能在流形上各点的切空间与余切空间之间建立唯一的自然同构关系，从而我们能够利用度规张量升降指标。比如 g_{ij} 把一个逆变矢量 $A^i \partial_i$ 变为协变矢量 $A_i \sigma^i$ ：

$$A_i = g_{ij} A^j$$

进而实现降指标。

度规张量 g_{ij} 的非退化性保证了其逆 g^{ij} 的存在性。而 g^{ij} 可以被理解为切空间上的度规张量在余切空间上诱导出的度规张量。这是因为 $A_i = g_{ij} A^j, B_k = g_{kl} B^l$ ，所以

$$A_i g^{ik} B_k = A^j g_{ij} g^{ik} g_{kl} B^l = A^j \delta_j^k g_{kl} B^l = A^k g_{kl} B^l = \langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle$$

从而我们通过 g^{ij} 可以升指标，把一个协变矢量变为逆变矢量。上式运用了度规张量的一个性质：因为 g^{ij} 与 g_{ij} 互逆，从而我们有

$$g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$$

下面将要引入 Levi-Civita 符号与 Levi-Civita 张量。

Levi-Civita 符号与 Levi-Civita 张量之间其实有显著区别。尽管物理学家常常忽略这种区别，但是我们仔细区分以下二者是有益的。下文中我们将使用 $\tilde{\varepsilon}$ 来表示 Levi-Civita 符号、采用 ε 来表示 Levi-Civita 张量。

首先我们给出 n 维的 Levi-Civita 符号的定义：

$$\tilde{\varepsilon}_{a_1 a_2 \dots a_n} = \begin{cases} +1, & \text{如果 } (a_1, \dots, a_n) \text{ 是 } (1, \dots, n) \text{ 的偶排列} \\ -1, & \text{如果 } (a_1, \dots, a_n) \text{ 是 } (1, \dots, n) \text{ 的奇排列} \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}$$

对于两个 Levi-Civita 符号 $\tilde{\varepsilon}_{i_1 \dots i_k}, \tilde{\varepsilon}_{j_1, \dots, j_k}$ ，其乘积具有下述关系：

$$\tilde{\varepsilon}_{i_1 \dots i_k} \tilde{\varepsilon}_{j_1 \dots j_k} = \begin{vmatrix} \delta_{i_1 j_1} & \delta_{i_1 j_2} & \cdots & \delta_{i_1 j_k} \\ \delta_{i_2 j_1} & \delta_{i_2 j_2} & \cdots & \delta_{i_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{i_k j_1} & \delta_{i_k j_2} & \cdots & \delta_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

这个关系的一个简单推论便是，对于三维 Levi-Civita 符号，我们有下面的关系：

$$\sum_{i=1}^3 \tilde{\varepsilon}_{ijk} \tilde{\varepsilon}_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$$

Levi-Civita 符号仅仅是个“符号”，它在任何坐标系中都按照相同的规则取相同的值。这也就是说，我们在坐标系 $\{x^j\}$ 上定义了一个 Levi-Civita 符号 $\tilde{\varepsilon}_{j_1 \dots j_n}$ ，它按照指标取值的方式符合其定义；我们在同一地点取另一个坐标系 $\{x^{j'}\}$ ，那么在这个坐标系上的 Levi-Civita 符号 $\tilde{\varepsilon}_{j'_1 \dots j'_n}$ 与指标 j'_k 的关系依旧符合定义而不符合张量在坐标系间分量的变换关系：对于 $n \times n$ 矩阵 $M^\mu_{\mu'}$ ，其行列式为

$$|M| = \tilde{\varepsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n} M^{\mu_1}_1 M^{\mu_2}_2 \cdots M^{\mu_n}_n$$

用 $\tilde{\varepsilon}_{\mu'_1 \dots \mu'_n}$ 去乘以 $|M|$ 相当于重排了下指标，得到：

$$\tilde{\varepsilon}_{\mu'_1 \dots \mu'_n} |M| = \tilde{\varepsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n} M^{\mu_1}_{\mu'_1} M^{\mu_2}_{\mu'_2} \cdots M^{\mu_n}_{\mu'_n}$$

我们用坐标变换使用的 Jacobi 矩阵替代 M ，即令 $M^\mu_{\mu'} = \partial x^\mu / \partial x^{\mu'}$ ，那么我们便得到

$$\tilde{\varepsilon}_{\mu'_1 \dots \mu'_n} = \left| \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \right| \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\mu'_1}} \frac{\partial x^{\mu_2}}{\partial x^{\mu'_2}} \cdots \frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x^{\mu'_n}} \tilde{\varepsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n}$$

显然 Levi-Civita 符号的变换规律与张量不符但又有些许相似：只要把那个行列式删去，它就符合张量变换律了。事实上遵循这种变换规律的量叫做张量密度。张量密度的一个例子便是度规张量的行列式 $g = |g_{\mu\nu}|$ ，不难验证其变换规律为

$$g(x^{\mu'}) = \left| \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \right|^{-2} g(x^\mu)$$

更一般的，一个张量密度 Ξ 在坐标变换下会表现出下列性质：

$$\Xi(x^{\mu'}) = \left| \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \right|^\alpha \Xi(x^\mu)$$

即它相比一般的张量变换而言总会额外乘以 Jacobi 行列式的 α 次幂：这个 α 便称为张量密度的权重 (weight)。显然，Levi-Civita 符号作为张量密度而

言时，其权重为 1。

我们可以通过将权重 α 的张量密度乘以 $|g|^{\alpha/2}$ 来构造一个张量，其中 g 为度规张量的行列式，取绝对值是为了避免根号下出现负数。因此，我们定义 Levi-Civita 张量为：

$$\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} = \sqrt{|g|} \tilde{\varepsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n}$$

因为 Levi-Civita 符号不是张量，我们不能升降其指标。但是对于现在构造的 Levi-Civita 张量，我们可以对其进行升降指标的操作。Levi-Civita 张量可以用来定义 Hodge 对偶，这在后面有必要用到时会提及。

有人用上指标定义 Levi-Civita 符号为 $\tilde{\varepsilon}^{\mu_1 \dots \mu_n}$ ，这样得到的便是一个权重为 -1 的张量密度。实际上有时我们也可以将其视为 Levi-Civita 符号 $\tilde{\varepsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n}$ 的倒数，这样便于应用 Einstein 求和约定。与之对应的 Levi-Civita 张量便是：

$$\varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} = \text{sgn}(g) \frac{1}{\sqrt{|g|}} \tilde{\varepsilon}^{\mu_1 \dots \mu_n}$$

这个式子可以通过暴力升指标证明：

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} &= g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_n \nu_n} \varepsilon_{\nu_1 \dots \nu_n} \\ &= g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_n \nu_n} \sqrt{|g|} \tilde{\varepsilon}_{\nu_1 \dots \nu_n} \\ &= \frac{1}{|g|} \sqrt{|g|} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} \\ &= \text{sgn}(g) \frac{1}{\sqrt{|g|}} \tilde{\varepsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n} \\ &= \text{sgn}(g) \frac{1}{\sqrt{|g|}} \tilde{\varepsilon}^{\mu_1 \dots \mu_n} \end{aligned}$$

（最后一步利用了作为两个 Levi-Civita 符号 $\tilde{\varepsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n}$ ， $\tilde{\varepsilon}^{\mu_1 \dots \mu_n}$ 的唯一区别仅是指标的上下位置不同。）

事实上，只有在可定向流形上 Levi-Civita 张量才是良定义的，不过我们一般不会关心这个事情。下指标形式的 Levi-Civita 张量有一个几何直观：它度量了 Riemann 流形上一个体积元的有向体积。

对于欧氏空间上的而言规范正交坐标系而言， $g_{ij} = \delta_{ij}$ ，此时 Levi-Civita 符号与 Levi-Civita 张量看起来其实并没有区别。物理学家喜欢用 Levi-Civita “符号”在 \mathbb{R}^3 上定义矢量的叉乘并用 Einstein 求和约定记为

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^i = \tilde{\varepsilon}_{ijk} A^j B^k$$

但是这样其实是不正确的，它成立纯粹是因为 \mathbb{R}^3 上规范正交坐标系所具有的欧氏度规性质过于良好——它在一般的坐标系下就失效了。事实上我们

在 \mathbb{R}^3 中叉乘时采用的是 Levi-Civita 张量:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^i = \varepsilon^i_{jk} A^j B^k = g^{il} \sqrt{|g|} \tilde{\varepsilon}_{ljk} A^j B^k$$

这其实对应着我们采用微分形式理论进行的叉乘运算: 假设我们有两个逆变矢量 $\mathbf{A} = A^j \partial_j, \mathbf{B} = B^k \partial_k$, 那么其对应的协变矢量为

$$A = A^i g_{ij} dx^j \quad B = B^k g_{kl} dx^l$$

我们取二者的楔积 (注意, 这个运算其实是对协变矢量定义的) 便得到

$$A \wedge B = A^i B^k g_{ij} g_{kl} dx^j \wedge dx^l$$

再取其 Hodge 对偶得到

$$\begin{aligned} \star(A \wedge B) &= A^i B^k g_{ij} g_{kl} \star(dx^j \wedge dx^l) \\ &= A^i B^k g_{ij} g_{kl} \sqrt{|g|} g^{jm} g^{ln} \tilde{\varepsilon}_{mnq} dx^q \\ &= A^i B^k \delta_i^m \delta_k^n \tilde{\varepsilon}_{mnq} \sqrt{|g|} dx^q \\ &= \sqrt{|g|} A^i B^k \tilde{\varepsilon}_{ikl} dx^l \end{aligned}$$

现在取 $\star(A \wedge B)$ 对应的逆变矢量便得到矢量 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \sqrt{|g|} A^i B^k \tilde{\varepsilon}_{ikl} g^{lm} \partial_m$$

整理指标后与我们用 Levi-Civita 张量计算得到的结果相同。

在三维欧氏空间上的规范正交坐标系中, 我们可以利用 Levi-Civita 张量来导出一些有用的矢量恒等式。此时 $g_{ij} = \delta_{ij}$ 而 $\det(g) = 1$ 。从而

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= A^j B^k g^{il} \varepsilon_{ljk} \partial_i \\ &= A^j B^k \varepsilon^i_{jk} \partial_i \end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= C^m (\mathbf{A} \times \mathbf{B})^n \varepsilon^s_{mn} \partial_s \\ &= C^m A^j B^k \varepsilon^s_{mn} \varepsilon^n_{jk} \partial_s \\ &= C^m A^j B^k \left[\sum_{n=1}^3 \tilde{\varepsilon}^s_{mn} \tilde{\varepsilon}_{njk} \right] \partial_s \\ &= C^m A^j B^k [\delta_j^s \delta_{mk} - \delta_k^s \delta_{mj}] \partial_s \\ &= (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A} - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} \end{aligned}$$

下面介绍一下 Hodge 对偶运算:

V 上的内积 g 自然诱导出了 $\wedge^p V$ 上的一个内积 (也记为 g), 这可以通过下述方式实现: 如果 $\lambda = v_1 \wedge \dots \wedge v_p, \mu = w_1 \wedge \dots \wedge w_p$, 我们可以定义

$$g(\lambda, \mu) = \det(g(v_i, w_j))$$

右手边是第 (i, j) 元素为 $g(v_j, w_j)$ 的矩阵的行列式。显然这个“内积”有双线性性，并且它是对称的。现在我们只需要验证 g 是非简并的。为此，令 $\{e_i\}$ 为 V 的规范正交基。也就是说，集合 $\{e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}\}$ 当 I 取遍所有可行的指标排列后便得到了由 g 诱导出来的 $\wedge^p V$ 上的规范正交基。记 $e_J = e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_p}$ ，定义 $(g_{IJ})_{kl} = g(e_{i_k}, e_{j_l})$ 。根据规范正交性，我们有 $(g_{IJ})_{kl} = \pm \delta_{i_k j_l}$ 于是就有

$$g(e_I, e_J) = \det((g_{IJ})_{kl}) = \det(\pm \delta_{i_k j_l})$$

如果 $\exists j_p \notin I$ ，则 $I \neq J$ 。从而 $(\delta_{i_k j_l})$ 的第 p 列等于零，上式最右边的那个行列式也为零。同理，只要 $I \neq J$ 便有 $g(e_I, e_J) = 0$ 。如果 $I = J$ 的话，那么 $g(e_I, e_J) = \pm 1$ ，从而我们完成了对他的非简并性的证明。

取定一个 $\lambda \in \wedge^p V$ ，那么我们便有了一个自然的从 $\wedge^{n-p} V$ 到 $\wedge^p V$ 的线性映射：

$$\mu \rightarrow \lambda \wedge \mu$$

但是同时 $\wedge^n V$ 是由某个元素 σ 张成的一维向量空间，于是

$$\lambda \wedge \mu = f_\lambda(\mu) \sigma$$

其中 f_λ 是由 λ 诱导出来的在 $\wedge^{n-p} V$ 上的线性泛函。既然我们前面以及通过 V 上的内积诱导出来了 $\wedge^{n-p} V$ 上的内积 g ，那么 Riesz 表示定理指出存在一个唯一的 $\star \lambda \in \wedge^{n-p} V$ 使得

$$g(\star \lambda, \mu) = f_\lambda(\mu)$$

这个 $\star \lambda \in \wedge^{n-p} V$ 叫做 λ 的 Hodge 对偶（或者叫 Hodge star）。现在我们可以写出

$$\lambda \wedge \mu = g(\star \lambda, \mu) \sigma$$

通过这个式子不难发现 Hodge 对偶依赖于内积 g 以及 $\wedge^n V$ 的基 σ 的选取。但是我们一般选取 σ 为体积形式 vol^n ，这也就是和 Levi-Civita 张量相关的 $\varepsilon_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} = \sqrt{|g|} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}$ 。

一般上我们其实没有必要记住 Hodge 对偶的通用公式，因为我们可以通过很初等的方式计算它：对于两个 p -形式 ω, ν 而言，我们知道 $\star \omega$ 被定义为使得下式成立的 $(n-p)$ -形式：

$$\nu \wedge \star \omega = \langle \nu, \omega \rangle \text{vol}$$

于是我们令 $\nu = \omega$ 便有

$$\omega \wedge \star \omega = \langle \omega, \omega \rangle \text{vol}$$

我们下面以 \mathbb{R}^3 为例具体展示计算方法。

不妨令 $\omega = dx$ ，那么 $\star\omega$ 必然是个 2-形式且不包含 dx （否则 $\omega \wedge \star\omega$ 为零）。于是我们设

$$\star\omega = k \, dy \wedge dz$$

从而

$$\omega \wedge \star\omega = k \, dx \wedge dy \wedge dz$$

又有

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu}$$

于是

$$\langle \omega, \omega \rangle = 1$$

$$\text{vol} = dx \wedge dy \wedge dz$$

进而

$$k \, dx \wedge dy \wedge dz = dx \wedge dy \wedge dz$$

于是我们有 $k = 1$ ， $\star dx = dy \wedge dz$ 。对于一般流形上的一般微分形式，我们比着葫芦画瓢就好。

但是在理论推导中通用公式还是有用的，我们不加证明地在此给出：

$$\begin{aligned} \star(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) &= \frac{1}{(n-k)!} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} \varepsilon_{j_1 \dots j_k, j_{k+1}, \dots, j_n} dx^{j_{k+1}} \wedge \dots \wedge dx^{j_n} \\ &= \frac{\sqrt{|g|}}{(n-k)!} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} \tilde{\varepsilon}_{j_1 \dots j_k, j_{k+1}, \dots, j_n} dx^{j_{k+1}} \wedge \dots \wedge dx^{j_n} \end{aligned}$$

1.2 矢量、张量分析

本节先采用一般的方式叙述梯度散度旋度，然后会推导欧氏空间规范正交系上的一些有用的恒等式。梯度与散度在 n 维空间上都能很好地定义，而旋度只有在三维情况下才能漂亮地定义¹。

n 维流形上一个函数的微分是一个协变矢量：

$$df = \partial_i f dx^i$$

这个协变矢量通过度规对偶的逆变矢量便是标量场的梯度矢量场：

$$\text{grad } f = g^{ij} \partial_j f \partial_i$$

即标量场的梯度矢量的分量为

$$(\text{grad } f)^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

注意，这样子得到的梯度矢量分量不同于传统矢量分析中的形式。例如，对于平面极坐标 (r, θ) 而言其度规为

$$g_{11} = 1 \quad g_{12} = 0 \quad g_{21} = 0 \quad g_{22} = r^2$$

根据这种做法得到的梯度矢量为

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} \partial_\theta$$

而传统上的矢量分析给出的结果为

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta$$

这是因为我们度规定义梯度矢量时采用的坐标映射自然诱导出的基矢并不是单位矢量，而传统的矢量分析的结果是在单位基矢上给出的。显然，因为

$$\langle \partial_\theta, \partial_\theta \rangle = r^2$$

我们有

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r} \partial_\theta$$

可见两种方法给出的结果是一样的。

考虑一个三维流形上的逆变矢量场 $\mathbf{A} = A^i \partial_i$ ，那么它对应着一个协变矢量场 $A = g_{ij} A^i dx^j$ 。我们对 A 取外微分便得到了一个 2-形式：

$$dA = \frac{\partial}{\partial x^k} [g_{ij} A^j] dx^k \wedge dx^i$$

¹在一些物理书中会看到对高维矢量求“旋度”能得到一个 (0,2) 型反对称张量，这里进行的操作实际上是对这个逆变矢量对应的协变 1-形式进行外微分运算。

对 dA 取 Hodge 对偶便有：

$$\begin{aligned}\star dA &= \frac{\partial}{\partial x^k} [g_{ij} A^j] \star (dx^k \wedge dx^i) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k} [g_{ij} A^j] \frac{\sqrt{|g|}}{(3-2)!} g^{kl} g^{im} \tilde{\epsilon}_{lmn} dx^n \\ &= \sqrt{|g|} \frac{\partial}{\partial x^k} [g_{ij} A^j] g^{kl} g^{im} \tilde{\epsilon}_{lmn} dx^n\end{aligned}$$

$\star dA$ 是一个 1-形式，我们取其对偶的逆变矢量便得到了矢量场 \mathbf{A} 的旋度矢量场 $\text{curl } \mathbf{A}$ ：

$$\text{curl } \mathbf{A} = \sqrt{|g|} g^{kl} g^{im} g^{qn} \tilde{\epsilon}_{lmn} \frac{\partial}{\partial x^k} [g_{ij} A^j] \partial_q$$

回到 n 维流形，现在考虑流形上一个矢量场 \mathbf{A} 的散度 $\text{div } \mathbf{A}$ 。它的定义为：

$$di_{\mathbf{A}} \text{vol}^n = \text{div } \mathbf{A} \text{vol}^n$$

其中 $i_{\mathbf{A}}$ 为“interior product”，即将矢量 \mathbf{A} 放入 vol^n 的第一个“槽位”作用而得到的一个 $(n-1)$ -形式。我们记

$$\text{vol}^n = \frac{\sqrt{|g|}}{n!} \tilde{\epsilon}_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}$$

那么

$$i_{\mathbf{A}} \text{vol}^n = \frac{\sqrt{|g|}}{n!} A^j \tilde{\epsilon}_{ji_2 \dots i_n} dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}$$

进而

$$\begin{aligned}di_{\mathbf{A}} \text{vol}^n &= \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \left[\frac{\sqrt{|g|}}{n!} A^j \tilde{\epsilon}_{ji_2 \dots i_n} \right] dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \left[\frac{\sqrt{|g|}}{n!} A^j \right] \tilde{\epsilon}_{ji_2 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}\end{aligned}$$

同时

$$di_{\mathbf{A}} \text{vol}^n = \text{div } \mathbf{A} \text{vol}^n = \text{div } \mathbf{A} \frac{\sqrt{|g|}}{n!} \tilde{\epsilon}_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}$$

因而

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \left[\sqrt{|g|} A^j \right] \tilde{\epsilon}_{ji_2 \dots i_n} \tilde{\epsilon}^{i_1 i_2 \dots i_n} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} [\sqrt{|g|} A^i]$$

我们可以定义一个 (p, q) 型张量场 $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ 的散度为取协变导数后再缩并，即：

$$\text{div } T = \nabla_{i_1} T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} := T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q / i_1}$$

注意，根据此定义纯协变形式的张量场没有散度。对于一个 (1,0) 型张量即逆变矢量 \mathbf{A} ，我们用这种定义可以算出其散度为

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla_i A^i = \frac{\partial}{\partial x^i} A^i + \Gamma_{ij}^j A^i$$

可以证明，这种定义得出的散度和前面的结果是一致的。对于一个 (2,0) 型张量 T^{ij} ，我们知道其协变导数为

$$\nabla_k T^{ij} = \frac{\partial}{\partial x^k} T^{ij} + \Gamma_{kl}^i T^{lj} + \Gamma_{kl}^j T^{il}$$

于是其散度是一个逆变矢量：

$$T^{ij}_{/i} = \frac{\partial}{\partial x^i} T^{ij} + \Gamma_{il}^i T^{lj} + \Gamma_{il}^j T^{il}$$

类似的，一个 (1,1) 型张量场 T^i_j 的散度是一个协变矢量：

$$T^i_{j/i} = \frac{\partial}{\partial x^i} T^i_j + \Gamma_{il}^i T^l_j - \Gamma_{ij}^l T^i_l$$

一般而言，一个 (p,q) 型张量场的散度是一个 (p-1,q) 型张量场，这自然要求 $p \geq 1$ 。

现在我们先证明梯度场的旋度等于零：

$$\begin{aligned} \operatorname{curl}(\operatorname{grad} f) &= \sqrt{|g|} g^{kl} g^{im} g^{qn} \tilde{\varepsilon}_{lmn} \frac{\partial}{\partial x^k} [g_{ij} g^{jp} \partial_p f] \partial_q \\ &= \sqrt{|g|} g^{kl} g^{im} g^{qn} \tilde{\varepsilon}_{lmn} \frac{\partial}{\partial x^k} [\delta_i^p \partial_p f] \partial_q \\ &= \sqrt{|g|} g^{kl} g^{im} g^{qn} \tilde{\varepsilon}_{lmn} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} \partial_q \end{aligned}$$

我们将 k 与 i 、 l 与 m 对调，得到：

$$\sqrt{|g|} g^{kl} g^{im} g^{qn} \tilde{\varepsilon}_{lmn} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} \partial_q = \sqrt{|g|} g^{im} g^{kl} g^{qn} \tilde{\varepsilon}_{mln} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \partial_q$$

因为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k}$$

因此

$$\begin{aligned} \sqrt{|g|} g^{kl} g^{im} g^{qn} \tilde{\varepsilon}_{lmn} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} \partial_q &= \sqrt{|g|} g^{kl} g^{im} g^{qn} \tilde{\varepsilon}_{mln} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} \partial_q \\ &= -\sqrt{|g|} g^{kl} g^{im} g^{qn} \tilde{\varepsilon}_{lmn} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} \partial_q \end{aligned}$$

从而

$$\sqrt{|g|} g^{kl} g^{im} g^{qn} \tilde{\varepsilon}_{lmn} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} \partial_q = 0$$

因此 $\operatorname{curl}(\operatorname{grad} f) = 0$ 。类似的也可以证明旋度场的散度等于零。

现在考虑平直空间上的规范正交坐标系。此时

$$\Gamma_{jk}^i = 0 \quad g_{ij} = \pm \delta_{ij} \quad \sqrt{|g|} = 1$$

那么此时梯度散度旋度便可以写为

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \partial_i \\ \text{curl } \mathbf{A} &= g^{kl} g^{im} g^{qn} \tilde{\epsilon}_{lmn} \frac{\partial}{\partial x^k} [g_{ij} A^j] \partial_q \\ \text{div } \mathbf{A} &= \frac{\partial A^j}{\partial x^{i_1}} \end{aligned}$$

现在考虑三维欧氏空间上的规范正交坐标系，此时度规为 $g_{ij} = \delta_{ij}$ 。于是此时

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_i \\ \text{curl } \mathbf{A} &= \delta^{kl} \delta^{im} \delta^{qn} \tilde{\epsilon}_{lmn} \frac{\partial}{\partial x^k} [\delta_{ij} A^j] \partial_q \\ &= \epsilon^{kin} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \partial_n \\ \text{div } \mathbf{A} &= \frac{\partial A^i}{\partial x^i} \end{aligned}$$

对于四维 Minkowski 时空，其度规在坐标 $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ 下为

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注意，现在的规范正交基是 $\{\partial_0, \partial_x, \partial_y, \partial_z\}$ 。从而在规范正交基下我们有

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= -\frac{\partial f}{\partial x^0} \partial_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \partial_x + \frac{\partial f}{\partial y} \partial_y + \frac{\partial f}{\partial z} \partial_z \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \partial_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \partial_x + \frac{\partial f}{\partial y} \partial_y + \frac{\partial f}{\partial z} \partial_z \\ \text{div } f &= \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \frac{\partial A^1}{\partial x} + \frac{\partial A^2}{\partial y} + \frac{\partial A^3}{\partial z} \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial A^0}{\partial t} + \frac{\partial A^1}{\partial x} + \frac{\partial A^2}{\partial y} + \frac{\partial A^3}{\partial z} \end{aligned}$$

我们在大于三维的空间中并不倾向于使用叉乘以及旋度，此时使用楔积与外微分运算将更加方便简洁。

在三维欧氏空间的规范正交坐标中可以引入一个纯粹形式化的矢量微分算符 ∇ ，它在推导三维空间中矢量分析恒等式时是相当有用的。我们记选取的规范正交（逆变）坐标基矢为 \mathbf{e}_i ，那么 ∇ 被定义为

$$\nabla = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

从而在笛卡尔系下我们可以把梯度、散度、旋度表示为：

$$\text{grad } f = \nabla f \quad \text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} \quad \text{curl } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$$

这种不严谨的表示方法可以用来方便地表示一些矢量分析恒等式（可能会出现破坏 Einstein 求和约定的情况）。下面便是个例子：

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla \times (\varepsilon^{kin} \partial_k A_i \partial_n) \\ &= \varepsilon^{qns} \varepsilon^{kin} \partial_q \partial_k A_i \partial_s \\ &= -\varepsilon^{qsn} \varepsilon^{kin} \partial_q \partial_k A_i \partial_s \\ &= (\delta_{qi} \delta_{sk} - \delta_{qk} \delta_{si}) \partial_q \partial_k A_i \partial_s \\ &= \partial_k \partial_i A^i \partial_k - \partial_k^2 A^i \partial_k \\ &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \end{aligned}$$

其中 Δ 为三维欧氏空间的 Laplace 算符。它在规范正交坐标系下的形式为：

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

它对标量场的作用相当于先求梯度再求散度。在一般的流形上它的分量形式为：

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right]$$

不难验证在前面的 Minkowski 时空上这等价于

$$-\frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

我们称其为 d'Alembert 算符，用 \square^2 表示：

$$\square^2 = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

\mathbb{R}^3 中的 Laplace 算符具有下述性质：

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

其中 $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ 为三维 Dirac δ 函数。

我们定义普通导数算符 ∂_μ 为:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

有时会出现它的“协变形式” ∂^μ ，这其实就是度规张量对它作用后的结果:

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu = g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

第 2 章 Maxwell 方程组

本章中采用 \mathbb{R}^3 中不甚严谨的传统的矢量分析记号。

2.1 Maxwell 方程组

2.1.1 Maxwell 方程组

Maxwell 方程组实际上在十九世纪经过了相当长时间的发展才最终定型。我们熟知的四个方程的 Maxwell 方程组其实并不是 Maxwell 最初提出的形式，但是 Maxwell 是把电场理论与磁场理论统一起来的第一人。并且在 Einstein 于 1915 年提出狭义相对论后，人们才明白 Maxwell 有多么厉害：他的 Maxwell 方程是 Lorentz 协变的，天生就完美地与狭义相对论相容。

首先我们采用 SI 单位制¹写出真空中的 Maxwell 方程组：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E}' = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho' \\ \nabla \cdot \mathbf{B}' = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B}' = \mu_0 \mathbf{J}' + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} \end{cases}$$

我们对第三个方程取旋度，得到

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}') = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}')$$

考虑到矢量分析恒等式

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

于是

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}') - \nabla^2 \mathbf{E}' = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\mu_0 \mathbf{J}' + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} \right]$$

再代入电场的 Gauss 定理并移向，我们得到

$$\nabla^2 \mathbf{E}' - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}'}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \rho' + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}'}{\partial t}$$

¹下文中带撇号的电磁场量表示 SI 单位制下的量，不加撇号的电磁场量表示 Gauss 单位制下的量。

类似的，我们取

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}') = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}') - \nabla^2 \mathbf{B}' = -\nabla^2 \mathbf{B}' = \mu_0 \nabla \times \mathbf{J}' + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}')$$

这表明

$$\nabla^2 \mathbf{B}' - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}'}{\partial t^2} = -\mu_0 \nabla \times \mathbf{J}'$$

在不存在电流、电荷的真空中 $\rho' = 0, \mathbf{J}' = 0$ 我们便有

$$\nabla^2 \mathbf{E}' - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}'}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{B}' - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}'}{\partial t^2} = 0$$

这便对应着电磁场的波动方程，正是这对方程在当年预言了电磁波的存在性；并且我们可以由此导出光速

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

不难验证，在无电流电荷的真空中 Maxwell 方程组在变换 $\mathbf{E}' \rightarrow \mathbf{B}', \mathbf{B}' \rightarrow -\mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{E}'$ 下不变，这实际上反映了电磁对偶性。

2.1.2 Gauss 单位制

SI 单位制固然有它的好处，但是实际用起来却常常不太方便，在电磁理论中尤其如此。因而我们常常会选取一个更方便地单位系统，Gauss 单位制。在这个单位制下电场和磁场的单位完全相同，此时，自由空间中的 Maxwell 方程组为：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \end{cases}$$

对于采用 Gauss 单位制的量，我们用不加撇的符号表示。事实上，我们在电动力学中将会更加倾向于使用 Gauss 单位制。不难看出，这个单位制在描述电磁理论时更加的简洁：我们这里只出现了一个“基本常数” c （即光速）而非两个（真空介电常数与真空磁导率）。Gauss 单位制中 4π 因子的引入看起来很多于，但是这样做的优点将会在接下来的内容中逐步体现。（事实上，这反映了单位球面表面积为 4π 的事实。）

为了方便起见，我们在此推导一下 SI 单位制下的物理量与 Gauss 单位

制下的物理量之间的关系。从而我们能在需要的时候快速地在两个单位制之间进行转换。首先我们假设

$$\mathbf{E}' = \alpha \mathbf{E} \quad \mathbf{B}' = \beta \mathbf{B} \quad \rho' = \gamma \rho \quad \mathbf{J}' = \delta \mathbf{J}$$

将其代入 SI 单位制下的 Maxwell 方程组中便得到

$$\begin{cases} \alpha \mathbf{E} = \frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho \\ \beta \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \alpha \nabla \times \mathbf{E} = -\beta \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \beta \nabla \times \mathbf{B} = \delta \mu_0 \mathbf{J} + \alpha \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

与 Gauss 单位制下的方程比较，我们便有

$$\begin{cases} \gamma = 4\pi \epsilon_0 \alpha \\ \alpha = c\beta \\ \delta \mu_0 c = 4\pi \beta \\ \alpha \mu_0 \epsilon_0 c = \beta \end{cases}$$

于是

$$\alpha = c\beta = \frac{\beta}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad \gamma = \delta = 4\pi \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \beta$$

为了确定常数 β ，我们需要考虑 Coulomb 定律。首先，根据我们前面的假设不难看出电荷量在 SI 单位制与 Gauss 单位制之间的关系为

$$q' = \gamma q$$

SI 单位制下的 Coulomb 定律给出

$$F = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q'_1 q'_2}{R^2} = \frac{\gamma^2}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R^2}$$

又因为我们根据 Gauss 单位制下的 Maxwell 方程 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho$ 可以得出

$$F = \frac{q_1 q_2}{R^2}$$

因此我们有

$$\gamma = \sqrt{4\pi \epsilon_0}$$

于是

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}$$

综上

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \quad \beta = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} \quad \gamma = \delta = \sqrt{4\pi\epsilon_0}$$

因此

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \mathbf{E} \quad \mathbf{B}' = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} \mathbf{B} \quad \rho' = \sqrt{4\pi\epsilon_0} \rho \quad \mathbf{J}' = \sqrt{4\pi\epsilon_0} \mathbf{J}$$

在 Gauss 单位制下我们发现电荷的量纲可以用长度、质量与时间的量纲来衡量： $[q] = [F]^{1/2}[r]$ 。并且我们发现 $[E]$ 和 $[B]$ 与电荷和电流直接相关。因而在 Gauss 单位制下所有电磁场量都能用长度、质量和时间的单位来刻画。这和 SI 单位制形成了鲜明对比——SI 单位制中电荷拥有一个独立于长度、质量和时间的量纲。

2.1.3 宏观介质

原则上，经典电磁学中的全部问题都可以被视为由一堆点电荷组成的自由空间中的电磁问题。但是在实际应用中一下子考虑那么多点电荷肯定是不现实的，因为我们要做出“宏观近似”。例如，我们处理含导体的静电问题时肯定不会考虑里面一堆自由电子的运动；相反，我们不管这些微观机制而仅仅考虑它的宏观性质：静电平衡时导体等势。在考虑电磁介质时这种思想也相当有用：我们固然可以从微观的角度出发去理解电磁介质具有这些性质的原因，但是每次都从微观出发去考虑问题是很麻烦的事。

为了给出介质中 Maxwell 理论的宏观描述，我们首先要把 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 处理成电磁场的平均值，取平均值的范围与介质中原子之间距离的数量级相同。这里的关键点是我们并不关心原子尺度上的场强变化，而取平均值后 \mathbf{E}, \mathbf{B} 的含义便和自由空间中一样了。例如， \mathbf{E} 仍然被用来度量空间中两点间电势的差异。不过此时我们还应该引入两个新的量，记为 \mathbf{D} 与 \mathbf{H} ，这两个量分别于 \mathbf{E}, \mathbf{B} 直接相关。。现在我们引入的四个电磁场参量的标准名称为：

\mathbf{E} : 电场强度 \mathbf{D} : 电位移 \mathbf{B} : 磁感应强度 \mathbf{H} : 磁场强度

在自由空间中

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mathbf{H}$$

而在介质中， \mathbf{D} 描述了被影响了 \mathbf{E} ：介质中的正负电荷在总电场 \mathbf{E} 的作用下发生了位移，而这种位移对 \mathbf{E} 进行了修正，修正的结果由 \mathbf{D} 描述。在一阶近似下，介质中的正负电荷对电场的扰动效果表现得像一个电偶极子，这

种影响用电极化矢量 \mathbf{P} 描述，并且我们有

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$$

类似的对磁介质而言我们有

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$$

其中 \mathbf{M} 是磁偶极项，它表征单位体积中的磁偶极矩数目。注意，在 SI 单位制下上面的等式形式为 $\mathbf{D}' = \epsilon_0\mathbf{E}'$, $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H}' + \mathbf{M}')$ 。与之相对应的变换为

$$\mathbf{D}' = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{4\pi}} \mathbf{D} \quad \mathbf{P}' = \sqrt{4\pi\epsilon_0} \mathbf{P} \quad \mathbf{H}' = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu_0}} \mathbf{H} \quad \mathbf{M}' = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} \mathbf{M}$$

此时介质中的 Maxwell 方程为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases}$$

注意，这里的电荷和电流密度不同于前面的真空中的 Maxwell 方程中的电荷、电流密度。前者中的 ρ 和 \mathbf{J} 是总电荷、电流密度，日后我们记为 ρ_t, \mathbf{J}_t ；而这里的是自由电荷、电流密度，日后记为 ρ_f, \mathbf{J}_f 。记 ρ_b 为束缚电荷， $\mathbf{J}_b = \partial\mathbf{P}/\partial t$ 为束缚电流密度，我们不难导出

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_b \quad \nabla \times \mathbf{M} = \frac{1}{c}(\mathbf{J}_t - \mathbf{J}_f) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{1}{c}(\mathbf{J}_t - \mathbf{J}_f - \mathbf{J}_b) = \frac{1}{c} \mathbf{J}_m$$

其中 \mathbf{J}_m 是扣除了约束电荷带来的电流影响的分子电流密度。

我们也可以这样来考虑介质问题：孤立电中性材料中各点处电荷在宏观上的均值都为零；对于铁磁材料以外的物质，其宏观上的电流密度也处处为零。进而，一块孤立的介质无法产生电磁场。可是如果我们引入“外禀”的自由电荷密度与自由电流密度 $\rho_f(\mathbf{r}, t)$ 与 $\mathbf{J}_f(\mathbf{r}, t)$ ，那么由这些源产生的场将诱导出介质中电荷与电流的重新分布，而这些诱导出的电荷和电流将对介质内外的电磁场均产生贡献。

习惯上使用矢量场 $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ 来刻画电介质的极化；类似的，对于磁介质的极化我们采用矢量场 $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ 进行刻画。那么此时介质中的总电荷密度、总电流密度将被修正为

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_f(\mathbf{r}, t) - \nabla \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}_f(\mathbf{r}, t) + c\nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

进而

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi(\rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}) \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \left[\mathbf{J}_f + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right] + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

如果定义

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$$

那么我们便有

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_f \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_f + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

这便根据 Maxwell 方程组解释了我们如此定义 \mathbf{D} 与 \mathbf{H} 的动机。

2.1.4 均匀介质

\mathbf{D}, \mathbf{H} 与 \mathbf{E}, \mathbf{B} 之间的关系刻画了介质的性质。一个常见的情形是介质均匀且各向同性，此时其电极化场与磁化强度与驱动的外场呈现线性的正比关系。但是对于一般的非线性介质，这些关系将会非常复杂。我们主要考虑线性介质。

假设介质对外场瞬间响应，那么我们有如下简单关系：

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

常数 ε 叫做介质的相对介电常数，而 μ 叫做相对磁导率。真空中显然有 $\varepsilon = \mu = 1$ 。根据

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$$

我们有

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E} \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

这四个关系式实际上是在频域空间给出的，不过一般我们不用在意这些细节。其中

$$\chi_e = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \quad \chi_m = \frac{\mu - 1}{4\pi}$$

二者分别叫做电极化率和磁极化率。

假设介质中不存在自由电荷与自由电流，那么我们根据 Maxwell 方程可以导出

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0$$

其中

$$n = \sqrt{\mu \varepsilon}$$

这便是介质的折射率。上面的两个方程表明介质中电磁波传播速度为 $v_p = c/n$ 。我们称 v_p 为介质的相速度。利用极化率我们可以将折射率写为

$$n = \sqrt{1 + 4\pi(\chi_e + \chi_m) + 16\pi^2 \chi_e \chi_m}$$

但是一般上一种材料不可能对施加在它上面的场作出瞬时响应。对于线性介质，其在外场下的电极化强度和磁化强度可以用对时间的卷积来描述：

$$\mathbf{P}(t) = \int_{-\infty}^t dt' \chi_e(t-t') \mathbf{E}(t') \quad \mathbf{M}(t) = \int_{-\infty}^t dt' \chi_m(t-t') \mathbf{H}(t')$$

这两个公式表明 t 时刻的电极化强度和磁化强度一般上与 t 时刻之前的外场施加情况有关。利用 Fourier 变换的卷积定理，我们能把这两个方程变到频域空间并得到

$$\mathbf{P}(\omega) = \chi_e(\omega) \mathbf{E}(\omega) \quad \mathbf{M}(\omega) = \chi_m(\omega) \mathbf{H}(\omega)$$

“线性”介质指的就是频域上的这种线性响应关系， χ 本身就是在频域上定义的。如此引入时域上的卷积关系看似破坏了因果律，实则不然。我们可以进行如下考虑：

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \varepsilon(\omega) e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t') e^{-i\omega t'} dt' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(t') e^{i\omega(t-t')} d\omega dt' \end{aligned}$$

记 $\tau = t - t'$ ，我们得到

$$\mathbf{D}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(t-\tau) e^{i\omega\tau} d\omega d\tau$$

注意，我们由介质的微观模型导出的 $\varepsilon(\omega)$ 具有如下形式：

$$\varepsilon(\omega) = \xi(\omega) + 1$$

进而

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\xi(\omega) + 1] \mathbf{E}(t - \tau) e^{i\omega\tau} d\omega d\tau \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t - \tau) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\omega d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\omega) \mathbf{E}(t - \tau) e^{i\omega\tau} d\omega d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t - \tau) \delta(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t - \tau) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega d\tau \\
 &= \mathbf{E}(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t - \tau) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega d\tau
 \end{aligned}$$

我们记

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

则

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{E}(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t - \tau) G(\tau) d\tau$$

下面要证明 $\tau < 0$ 时 $G(\tau) = 0$ 。我们就一个 toy model 说明这一点。最简单的电介质模型将电子看作受外电场驱动并同时发出电磁辐射的谐振子，此时其运动方程为

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + m\omega_0 r^2 - m\gamma \frac{d^3 \mathbf{r}}{dt^3} = eE_0 e^{i\omega t}$$

由此导出

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2}$$

因而

$$G(\tau) = \frac{\omega_p^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2} e^{i\tau\omega} d\omega$$

这个积分应用留数定理处理。注意被积函数的奇点为

$$\omega = \frac{i\gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

这都在上半平面中。而当 $\tau < 0$ 时我们的积分围道只能取包围下半平面，此时积分为零，进而 $G(\tau) = 0$ 。若 $\tau > 0$ ，我们使用留数定理得到

$$G(\tau) = \frac{\omega_p^2}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}} e^{-\gamma\tau/2} \sin\left(\tau \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}\right)$$

可见物理定律对 $\tau < 0$ 的 $G(\tau)$ 做出了截断，因果律没有被违背。

χ_e , χ_m 对频率的依赖关系给出了介质的色散关系。在色散介质中光的

相速度是其频率的函数:

$$v_p = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{1 + 4\pi[\chi_e(\omega) + \chi_m(\omega)] + 16\pi^2\chi_e(\omega)\chi_m(\omega)}}$$

光在这个介质中的波矢为

$$k = \frac{\omega}{v_p} = \frac{\omega}{c}n(\omega)$$

现在我们考虑一个由很多单色平面波复合而成的波包并假设它的波矢与频率分布范围很窄。我们可以记其为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

这里 $\mathbf{k} \in [\mathbf{k}_0 - \Delta\mathbf{k}, \mathbf{k}_0 + \Delta\mathbf{k}]$, $\omega \in [\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega]$, 其中 $|\Delta\mathbf{k}|$ 和 $\Delta\omega$ 标志围绕分布中心的小的弥散。现在我们可以将考虑的波包写为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\Delta\mathbf{k}} \mathbf{E}_{\Delta\mathbf{k}} e^{i(\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \Delta\omega t)} e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t)} = \mathbf{E}^{(0)}(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t)}$$

其中

$$\mathbf{E}^{(0)}(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}) = \sum_{\Delta\mathbf{k}} \mathbf{E}_{\Delta\mathbf{k}} e^{i\Delta\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - (\Delta\omega/\Delta k)t)}$$

不难看出 $\mathbf{E}^{(0)}(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k})$ 表征了波包的振幅的传播。注意, 这个振幅是频率和波矢分布的函数并且刻画了波包中心在空间中的运动。令 $\Delta\omega \rightarrow 0, \Delta\mathbf{k} \rightarrow 0$, 我们可以定义频率相对波矢的导数, 这便是光波包在色散介质中的群速度, 其形式为

$$v_g = \left. \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \right|_{\Delta k \rightarrow 0} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n(\omega) + \omega(dn/d\omega)}$$

群速度刻画了波包包络峰值位置的传播速度。

如果 $dn/d\omega > 0$, 那么在介质中 $v_g < v_p$, 这种材料叫做正常色散介质; 另一方面, 如果 $dn/d\omega < 0$, 那么 $v_g > v_p$, 这种材料叫做反常色散介质。当介质色散很强以至于 $dn/d\omega \gg 1$, 那么此时群速将远小于真空中的光速。特别的, 如果

$$\frac{dn}{d\omega} \rightarrow +\infty$$

那么群速消失了:

$$v_g \approx \frac{c}{\omega} \frac{d\omega}{dn} \rightarrow 0$$

在经典的介质中强色散通常与强耗散相关, 从而慢光或光静止现象不易观测到。这种实验的实现需要在一方面增强介质色散、另一方面压低其耗散。近二十年人们采用一种叫做“电磁诱导透明”的机制实现了这一点, 这是目前

量子光学研究的热点。

对于反常色散介质，如果 $n + \omega(dn/d\omega) < 1$ ，那么 $v_g > c$ ，此时这叫做 **superluminal regime**。此时群速超光速了。但是这并不意味着因果律的破坏：此时的群速不表征信息或能量的传播速度，它只反映了介质复杂的色散性质（虽然在正常色散介质中群速有时与信息 and 能量的传播速度等同）。

下面我们介绍 **Kramers-Kronig** 关系，这实际上是一个数学定理。一般上 $\chi(\omega)$ 是一个复函数，它可以被记为 $\chi(\omega) = \chi_1 + i\chi_2$ 。如果我们要求这个函数在闭上半平面解析（这通常能得到满足²），那么它的实部和虚部并不是独立的，二者的关系可以通过下面的方式导出：根据关系 $\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi\chi(\omega)$ 我们有

$$\begin{aligned}\varepsilon(\omega) &= 1 + 4\pi \int_0^\infty \chi(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \\ &= 1 + 4\pi \int_0^\infty d\tau \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \chi(\omega') e^{-i\omega'\tau} e^{i\omega\tau} d\omega' \\ &= 1 + 2 \int_0^\infty d\tau \int_{-\infty}^\infty \frac{\varepsilon(\omega') - 1}{4\pi} e^{-i(\omega' - \omega)\tau} d\omega'\end{aligned}$$

我们要求 $\varepsilon(\omega)$ 在闭上半复平面解析。为了使得积分收敛，我们将 ω 替换为 $\omega + i\delta^+$ ，其中 δ^+ 是一个正的无穷小量。³此时 τ 的积分上界对积分的贡献消失了，我们得到

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \frac{\varepsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega - i\delta^+} d\omega'$$

因为 $\varepsilon(\omega)$ 在上半平面解析，从而我们可以将上式变为包括了整个上半平面的围道积分：

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\varepsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega - i\delta^+} d\omega'$$

下面我们先证明恒等式

$$\lim_{\delta^+ \rightarrow 0} \frac{1}{\omega' - \omega - i\delta^+} = \mathcal{P} \left(\frac{1}{\omega' - \omega} \right) + i\pi\delta(\omega' - \omega)$$

其中 \mathcal{P} 表示主值积分。首先我们把它的实部和虚部分开：

$$\frac{1}{\omega - \omega' - i\delta^+} = \frac{\omega - \omega' + i\delta^+}{(\omega - \omega')^2 + (\delta^+)^2}$$

²事实上这是因果律的要求。对于函数

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \chi(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

因果律要求 $t < 0$ 时 $\chi(t) = 0$ 。而对于小于零的 t 而言积分围道只能取上半平面，进而我们必须要求 $\chi(\omega)$ 在上半平面解析。

³这种数学上的 **trick** 在量子力学和量子场论中很常用。

在 $\delta^+ \rightarrow 0$ 时, 其虚部按照 δ 函数的定义而趋向于 $i\pi\delta(\omega - \omega')$ 。而对于实部, 我们给它乘上一个在 ω 点光滑的函数并主值积分:

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta^+ \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega' - \omega}{(\omega' - \omega)^2 + (\delta^+)^2} f(\omega') d\omega' \\ &= \lim_{\delta^+ \rightarrow 0} \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\eta} + \int_{-\eta}^{+\eta} + \int_{+\eta}^{\infty} \right] \frac{\omega' - \omega}{(\omega' - \omega)^2 + (\delta^+)^2} f(\omega') d\omega' \end{aligned}$$

右边第二个积分等于零, 从而

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta^+ \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega' - \omega}{(\omega' - \omega)^2 + (\delta^+)^2} f(\omega') d\omega' \\ &= \lim_{\delta^+ \rightarrow 0} \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\eta} + \int_{+\eta}^{\infty} \right] \frac{\omega' - \omega}{(\omega' - \omega)^2 + (\delta^+)^2} f(\omega') d\omega' = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \end{aligned}$$

将之代入原式并整理便得

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi i} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega'$$

这给出

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{\varepsilon(\omega)\} &= 1 + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\{\varepsilon(\omega')\}}{\omega' - \omega} d\omega' \\ \operatorname{Im}\{\varepsilon(\omega)\} &= -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\{\varepsilon(\omega') - 1\}}{\omega' - \omega} d\omega' \end{aligned}$$

这两个公式便给出了 $\varepsilon(\omega)$ 的实部和虚部彼此的依赖关系。据此我们可以导出极化率实部和虚部的依赖关系:

$$\begin{aligned} \chi_1(\omega) &= \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_2(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \\ \chi_2(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_1(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \end{aligned}$$

我们也可以使用留数定理证明这个关系。如果 $\chi(\omega')$ 在上半平面解析, 那么对于一个实数 ω , 我们做绕开 ω 点的包含整个上半平面内部的围道后会发现 $\chi(\omega')/(\omega' - \omega)$ 在围道内部解析, 从而根据 Cauchy 定理

$$\oint_C \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = 0$$

将围道分段积分, 我们发现

$$0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{\omega - \varepsilon} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' + \int_{\omega + \varepsilon}^{\infty} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' + \int_{C_\varepsilon} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \right]$$

其中 C_ε 是顺时针绕极点 ω 半周的圆弧形围道, 根据小圆弧定理我们知道

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = -i\pi\chi(\omega)$$

从而

$$0 = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' - i\pi\chi(\omega)$$

因此

$$\chi(\omega) = \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$

分别取实部和虚部便能得到我们想要的结果。

2.1.5 边界条件

我们在研究电磁相关的物理问题时经常会碰到两种材料或介质之间存在界面的情况。最简单的情形便是静电问题中的导体表面；还有一些例子，比如有着不同介电常数的两种材料形成的界面——真空中的导体可以被看成这种情况的特例，其中真空的 $\varepsilon = 1$ 而导体的 $\varepsilon = \infty$ 。

我们可以通过对 Maxwell 方程组做合适的积分来导出电磁场在两种介质界面上的边界条件。我们记两种介质为介质 1 与介质 2。首先考虑 \mathbf{D} ， $\mathbf{D} = 4\pi\rho_f$ 。此时我们可以在界面处做一个小圆柱作为积分的空间区域，而我们知道

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV = \int_{\partial V} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$

因此

$$\int_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V 4\pi\rho_f dV = 4\pi q_f$$

取积分区域为一个圆柱，并且把它的高度取得极小，那么我们可以忽略 \mathbf{D} 在圆柱侧面的积分的贡献；同时我们也可以把积分的有效区域近似看成面元。令 \mathbf{n} 为由介质 1 指向介质 2 的单位法向矢量，记积分的有效截面面积为 ΔA ，则现在我们有

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} \Delta A = 4\pi\sigma_f \Delta A$$

其中 σ_f 为自由电荷的面电荷密度。因此我们最终得到

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 4\pi\sigma_f$$

类似地，我们考虑 \mathbf{B} ， $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 。因此

$$\int_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0$$

进而我们不难得到

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$$

这个结果其实是相当自然的，毕竟不存在磁单极子。

我们选取恰当的方式积分 Maxwell 方程组便能得到另两个边界条件。首先考虑 \mathbf{E} , $\nabla \times \mathbf{E} = -(1/c)(\partial \mathbf{B}/\partial t)$ 。我们在界面上取一个与界面正交的环路，记其包围的区域为 Σ ，那么因为

$$\int_{\partial \Sigma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S}$$

因此

$$\int_{\partial \Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \int_{\Sigma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

我们取环路“紧挨着”界面以至于面积趋于零，那么

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot d\mathbf{l} = 0$$

这表明 $\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1$ 与 \mathbf{n} 平行，进而

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$

最后考虑 \mathbf{H} , $\nabla \times \mathbf{H} = (1/c)(\partial \mathbf{E}/\partial t) + (4\pi/c)(\partial \mathbf{J}/\partial t)$

$$\int_{\partial \Sigma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{c} \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

我们记界面上的“线”自由电流密度为 \mathbf{K}_f ，那么

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}_f \cdot d\mathbf{l}$$

这也就是

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}_f$$

真空中的金属表面是一个常见的“特例”。在真空中我们有 $\mathbf{E} = \mathbf{D}$ ，而导体可以被视为介电常数无穷大的介质，这意味着它的内部 $\mathbf{E} = 0$ 。从而此时在界面上

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = 4\pi\sigma_t \quad \mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$$

第二个方程表明导体表面的电场只有法向分量而没有切向分量；第一个方程表明此处电场的法向分量等于 $4\pi\sigma_t$ 。值得注意的是，电位移矢量 \mathbf{D} 在导体内一般不为零。

2.2 电磁理论中的守恒律

2.2.0.0.1 电荷守恒：考虑

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_t \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \end{cases}$$

取第二个的散度，我们有

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) + \frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \\ \frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} &= 0 \end{aligned}$$

2.2.0.0.2 能量守恒： 电磁场可以通过对物质中的带电粒子做功来实现物质和电磁场间能量的传递。我们考虑以速度 \mathbf{v} 在电场 \mathbf{E} 中运动的带电 q 的粒子，那么电场做功的功率便是 $q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$ 。现在考虑物质中的电荷流密度 \mathbf{J}_t ，那么电场做功的总功率为

$$W = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{J}_t \cdot \mathbf{E}$$

因为

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_t \\ \mathbf{J}_t &= \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

所以

$$W = \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{E} \cdot \left[c \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] = \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{x} \left[c \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right]$$

因为

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

同时考虑到

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

从而

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) &= -\frac{1}{c} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \\ W &= - \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] \end{aligned}$$

这个等式的左边代表了电磁场做功的功率，那么等号右边应该代表电磁场能量的变化（我们假设介质没有耗散）。类似电荷守恒方程，我们引入电磁场的能量密度为

$$u = \frac{1}{8\pi} (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2)$$

定义电磁场的能流密度矢量（Poynting 矢量）为

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

对于电磁波而言，我们不难证明 Poynting 矢量的模长等于能量密度和光速的乘积，那么我们有

$$-\int d^3\mathbf{x} \mathbf{J}_t \cdot \mathbf{E} = \int d^3\mathbf{x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} \right)$$

因此

$$\int d^3\mathbf{x} \frac{\partial u}{\partial t} = -\int d^3\mathbf{x} \mathbf{J}_t \cdot \mathbf{E} - \int d^3\mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{S} = -\int d^3\mathbf{x} \mathbf{J}_t \cdot \mathbf{E} - \int_{\partial} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S}$$

这个等式表明电磁场的能量改变可以被归结到两个方面：一方面是电磁场对介质中带电粒子做的功；另一方面是通过边界的能流。如果空间中不存在电荷流，那么显然我们有

$$\int d^3\mathbf{x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} \right) = 0$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0$$

此时这也就是电磁场的能量守恒式。

2.2.0.0.3 动量守恒： 动量守恒式也可以用类似的方式导出。作用在电磁场中运动电荷上的力在 Gauss 单位制下为

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right)$$

其中 \mathbf{v} 是粒子的速度。类似的，我们也可以考虑带电粒子组成的体系，其电荷密度为 ρ ，电流密度为 \mathbf{J}_t 。记其总动量为 $\mathbf{P}^{(src)}$ ，那么

$$\frac{d\mathbf{P}^{(src)}}{dt} = \int d^3\mathbf{x} \left(\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J}_t \times \mathbf{B} \right)$$

因为

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{E} \\ \frac{1}{c} \mathbf{J}_t &= -\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} \end{aligned}$$

因此

$$\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J}_t \times \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{4\pi c} \mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

因为

$$\mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

从而

$$\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J}_t \times \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

因为

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \mathbf{E}$$

因此

$$\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J}_t \times \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

进而

$$\frac{d\mathbf{P}^{(src)}}{dt} = \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{4\pi} \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

移项便得到

$$\frac{d\mathbf{P}^{(src)}}{dt} + \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

因为 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ，我们可以将其加在上式等号右边，得到

$$\frac{d\mathbf{P}^{(src)}}{dt} + \frac{1}{4\pi c} \int d^3\mathbf{x} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

下面证明

$$\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \partial_j \left[\delta^{jk} (\mathbf{E} \otimes \mathbf{E})_{ik} - \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 \delta_i^j \right] \hat{e}^i$$

考虑其分量：

$$\begin{aligned}
& E_i \partial^j E_j - \varepsilon_i^{jk} E_j (\varepsilon_k^{mn} \partial_m E_n) \\
&= E_i \partial_j \delta^{jk} E_k - (\delta_i^m \delta^{jn} - \delta_i^n \delta^{jm}) E_j \partial_m E_n \\
&= E_i \partial_j E_k \delta^{jk} - \delta_i^m E_j \delta^{jn} \partial_m E_n + E_j \delta^{jm} \partial_m E_n \delta_i^n \\
&= E_i \partial_j E_k \delta^{jk} + E_j \delta^{jm} \partial_m E_n \delta_i^n - \frac{1}{2} \partial_m |\mathbf{E}|^2 \delta_i^m \\
&= \delta^{jk} E_i \partial_j E_k + \delta^{jm} E_j \partial_m E_i - \frac{1}{2} \partial_m |\mathbf{E}|^2 \delta_i^m \\
&= \delta^{jk} E_i \partial_j E_k + \delta^{jk} E_k \partial_j E_i - \frac{1}{2} \partial_j |\mathbf{E}|^2 \delta_i^j \\
&= \partial_j \delta^{jk} (E_i E_k) - \frac{1}{2} \partial_j |\mathbf{E}|^2 \delta_i^j \\
&= \partial_j \left[\delta^{jk} E_i E_k - \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 \delta_i^j \right]
\end{aligned}$$

对于磁场也有类似的恒等式，那么现在我们有

$$\frac{d\mathbf{P}^{(src)}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{P}^{(field)}}{\partial t} = - \int d^3 \mathbf{x} \partial_j T_i^j \hat{e}^i$$

其中 T_i^j 是 Maxwell 应力张量：

$$T_i^j = -\frac{1}{4\pi} \left[(\mathbf{E} \otimes \mathbf{E})_{ik} \delta^{kj} + (\mathbf{B} \otimes \mathbf{B})_{ik} \delta^{kj} - \frac{1}{2} (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2) \delta_i^j \right]$$

其中电磁场的总动量被定义为

$$\mathbf{P}^{(field)} = \frac{1}{4\pi c} \int d^3 \mathbf{x} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \int d^3 \mathbf{x} \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

我们在这里定义了动量密度 $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})/(4\pi c)$ ，不难看出它和 Poynting 矢量有关：

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{S}}{c^2}$$

这一关系有一个直观的解释：Poynting 矢量的量纲为 $[\rho_E][v] = [\rho_P][v]^2$ ，其中 ρ_E, ρ_P 分别指能量密度、动量密度；同时注意电磁波的波速为 c ，这便解释了为什么这里出现了 $1/c^2$ 项。我们在相对论形式的电动力学中将会看到动量密度、能量通量密度（Poynting 矢量）与 Maxwell 应力张量能够被一个四维的能动量张量统一地描述。

2.3 Maxwell 方程组的对称性

下面将要讨论的 Maxwell 电磁理论中的对称性包括线性、镜像对称与时间反演对称两种分立对称性、洛伦兹不变性与规范不变性。

2.3.0.0.1 线性：显然 Maxwell 方程组是四个线性偏微分方程，因而它的解满足线性叠加原理。换句话说，如果 $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ 都是 Maxwell 方程的解，那么 $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ 也是方程的解。线性性还意味着如果空间中的场由多个电荷和电流产生，我们可以分别考虑不同电荷和电流单独产生的场并将它们叠加得到总的电磁场。这一点在处理边值问题时是很重要的。

2.3.0.0.2 镜像对称：Maxwell 方程在镜像对称变换 $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ 下应当是不变的，因为在这样的变换下 $\nabla \rightarrow -\nabla$ ，从而 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_t$ 不变要求 $\mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{E}$ 。进而此时

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \rightarrow -\nabla \times \mathbf{B} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

这意味着 $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ 。这表明磁感应强度矢量其实是 \mathbb{R}^3 中的赝矢量（轴矢量）。事实上我们知道 \mathbf{B} 可以被定义为矢势 \mathbf{A} 的旋度 $\nabla \times \mathbf{A}$ ，从而 \mathbf{A} 在反射变换下的规律为 $\mathbf{A} \rightarrow -\mathbf{A}$ 。

2.3.0.0.3 时间反演对称：Maxwell 方程在时间反演变换 $t \rightarrow -t$ 下也应该是不变的。此时因为 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_t$ 不变，从而 $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ 不变。因为此时显然 $\mathbf{J} \rightarrow -\mathbf{J}$ 而 $\partial_t \mathbf{E} \rightarrow -\partial_t \mathbf{E}$ ，从而根据 $\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi\mathbf{J}/c + \partial_t \mathbf{E}/c$ 可得 $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$ 。事实上根据 $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}/c$ 我们不难看出，在时间反演变换下 $\mathbf{A} \rightarrow -\mathbf{A}$ 。由此不难看出磁场 \mathbf{B} 的存在破坏了时间反演对称，进而我们可以推知，如果一个方程中含有和磁场相关的项，这个方程一定不具有时间反演对称性。据此我们可以得出一些有趣的结论，如出现了 Hall 效应的系统一定不具有时间反演对称性。

时间反演变换在量子力学中也是相当重要的，磁场在时间反演变换下变号具有明显的意义：磁场影响了量子系统波函数的相位（准确地讲，磁场通过矢势 \mathbf{A} 的路径积分影响了波函数的相位）。事实上量子力学中的时间反演对称性对应着复共轭变换，而这将波函数的相位反号了。由此我们也可以看出，在时间反演变换下矢势和磁感应强度应该反号。

磁场的时间反演对称破缺性质也表明，如果我们想打破一个物理系统的时间反演对称性，那么我们可以在系统上施加一个磁场并引入磁场和系

统的相互作用。此时，系统的时间反演对称便破缺了。

2.3.0.0.4 Lorentz 不变性： Lorentz 不变性是 Maxwell 方程组中最重要的连续对称性之一。相对性原理表明描述物理定律的方程在所有惯性参考系中都具有相同的形式。而不同惯性参考系之间的关系由 Lorentz 变换给出。因此，Maxwell 方程在 Lorentz 变换下不变。我们将在狭义相对论电动力学中仔细考虑这个问题。

2.3.0.0.5 规范不变性： 由于 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ，从而我们可以考虑引入一个矢势 \mathbf{A} 使得

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

因为

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

从而

$$\nabla \times \left[\mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = 0$$

这表明 $\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}/c$ 可以用一个标势 ϕ 的负梯度 $-\nabla\phi$ 来描述（取负梯度可以使我们在仅考虑静电时得到原来的结果）。于是

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

虽然标势 ϕ 和矢势 \mathbf{A} 在 \mathbb{R}^3 中看起来毫不相干，但是它们在四维 Minkowski 时空实际上是不可分离的，二者共同组成了 Minkowski 时空中的四维势矢量。

标势和矢势的选取不是唯一的。电场和磁场在如下变换下不变：

$$\begin{cases} \phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \\ \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \lambda \end{cases}$$

这个变换叫做规范变换，并且 Maxwell 方程组是规范不变的。在电动力学中引入标势和矢势可以便于求解某些条件下的 Maxwell 方程，但是这并不是必须的。然而，到了量子力学中我们则必须引入规范势 (ϕ, \mathbf{A}) ，而这会影响到带电粒子波函数的相位因子并产生非常重要的物理效应。最著名的例子便是 Aharonov-Bohm 效应，我们无法仅依靠磁场而不依赖矢量规范势 \mathbf{A} 来解释这个效应。这表明电场和磁场不足以完整描述电磁理论，即它们是 underdetermined 的。但是另一方面讲，我们引入了 \mathbf{A} 和 ϕ 后，由规范变换给出的不同规范势都导致相同的物理预言。我们选定一对矢势和标势便意味

着我们确定了一个“规范”，可是不同规范间本身并没有高下之别，从而任意一组规范势 (ϕ, \mathbf{A}) 都是 overdetermine 的。

我们常常会为了方便研究问题而选择特定的规范条件，这叫做 gauge fixing。考虑到协变四维规范势矢量为

$$A_\mu = (-\phi, \mathbf{A})$$

于是

$$A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu = (\phi, \mathbf{A})$$

鉴于

$$\partial_\mu B^\mu = \frac{\partial B^0}{\partial(ct)} + \nabla \cdot \mathbf{B}$$

因此我们有 Lorenz 规范条件

$$\partial_\mu A^\mu = \partial^\mu A_\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

在此规范下将 $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}/c$ 代入 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$ 便可得到

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho_t$$

因为

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_t + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

而

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= \varepsilon_i^{jk} \partial_j \varepsilon_k^{mn} \partial_m A_n \sigma^i \\ &= (\delta_i^m \delta^{jn} - \delta_i^n \delta^{jm}) \partial_j \partial_m A_n \sigma^i \\ &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi) - \nabla^2 \mathbf{A} \end{aligned}$$

又有

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi) - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

进而

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi) - \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_t - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi) - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

这也就是

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_t$$

可见在 Lorenz 规范条件下矢势和标势遵循独立的方程，而在给出合适的边

界条件后我们可以独立的解出两个规范势、从而解除电场和磁场。另一个广为使用的规范条件是 Coulomb 规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ，这也叫做 *transverse gauge*。在此规范下

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2 \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = -\nabla^2 \phi = 4\pi \rho_t$$

可见此时标势便是静电中的 Coulomb 势，这（可能）也就是“Coulomb 规范”名字的由来。

第 3 章 静电

在静电问题中我们忽略 Maxwell 方程对时间的依赖性而主要研究 Poisson 方程 $\nabla^2\phi = -4\pi\rho$ 。我们要做的事情其实就是在恰当的边界条件下解这个方程，进而研究系统的电场和电荷分布。

3.1 唯一性定理

微分方程理论的一个关键问题是我们必须施加怎样的边界条件才能得到唯一解；更物理地讲，这也就是在问我们必须明确多少关于边界的信息才能完全确定这个系统的解的性质。对于 Poisson 方程而言，一旦我们确定了 ϕ 在 ∂V 上各点处的值，那么它在区域 V 内的解也就唯一确定了。例如，假设我们要在一个球形区域内求解 $\nabla^2\phi = -4\pi\rho_t$ ，那么只要我们确定在边界球面上 ϕ 的取值，我们就能唯一确定方程在边界球面内部的解。这种 ϕ 在 ∂V 上取值确定的边界条件叫做 Dirichlet 边界条件。还有一种边界条件，此时我们不研究 ϕ 在边界上的行为，我们研究它在边界上沿着边界法向的导数 $\partial\phi/\partial n$ 。这便是 Neumann 边界条件。在 Neumann 边界条件下 Poisson 方程的解也是唯一的，不过相比 Dirichlet 边界条件，此时的解会多出来一个相加的常数。我们也可以考虑混合边界条件的情况：在边界的一部分上是 Dirichlet 边界条件、另一部分上是 Neumann 边界条件。

为了证明上面这些论断，我们假设对 ∂V 上给定的边界条件而言 $\nabla\phi = -4\pi\rho$ 存在两组不同的解 1、2，我们记

$$\nabla^2\phi_1 = -4\pi\rho \quad \nabla^2\phi_2 = -4\pi\rho$$

记 $\psi = \phi_1 - \phi_2$ ，那么它在区域 V 中满足 Laplace 方程：

$$\nabla^2\psi = 0$$

。因为 ϕ_1, ϕ_2 按照定义满足相同的边界条件，因此 ψ 在边界 ∂V 上应该满足 $\psi = 0$ (Dirichlet 边界条件) 或 $\partial\psi/\partial n = 0$ (Neumann 边界条件)。

现在我们便有

$$\nabla \cdot (\psi \nabla \psi) - |\nabla \psi|^2 = \psi \nabla^2 \psi = 0$$

在区域 V 中积分便有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V \nabla \cdot (\psi \nabla \psi) - |\nabla \psi|^2 dV \\ &= \int_{\partial V} \psi \nabla \psi \cdot d\vec{S} - \int_V |\nabla \psi|^2 dV \end{aligned}$$

无论是 Dirichlet 边界条件还是 Neumann 边界条件, 我们都有 $\psi \nabla \psi \cdot d\vec{S} = 0$ 。(边界上要么 $\psi = 0$, 要么法向导数 $\partial \psi / \partial n = \vec{n} \cdot \nabla \psi = 0$ 。) 因此我们得到

$$\int_V |\nabla \psi|^2 dV = 0$$

由于被积函数处处非负, 因而当且仅当它在 V 内处处为零时才有积分为零。但是 $|\nabla \psi|^2 = 0$ 表明在 V 内处处有

$$\nabla \psi = 0$$

进而 ψ 在 V 内处处为常数, 进而我们证明了

$$\phi_1 = \phi_2 + k$$

其中 k 为一常数。

- 在 Dirichlet 边界条件下我们知道 ∂V 上 $\phi_1 = \phi_2$, 进而常数 k 必须等于零。于是 V 内处处有 $\phi_1 = \phi_2$, 方程的解是唯一的。
- 在 Neumann 边界条件下, ∂V 上仅有法向导数是唯一确定的, 因此我们无论如何也没法确定常数 k 。但是这并不会影响我们的物理预言, 因为势能中的常数项并不会影响实际的电场。因而此时我们的“物理解”也是唯一的。

其实我们得到的这些结论不仅适用于 V 有限的情况, 它无限时也同样适用。一个典型的例子就是我们有一个有限大小的闭合曲面, 而区域 V 取曲面外界的无限大空间。此时无限远处并没有一个实在的边界, 但是我们可以想象在某个很大的半径 R 处引入一个球面边界曲面 S_2 并取极限 $R \rightarrow \infty$ 。当 R 很大但是有限时, 我们便得到了由两个分立的曲面 S_1, S_2 组成的有限体积 V 。

我们对唯一性定理的讨论可以用在这个情形下, 此时我们需要考虑两个面积分的和, 一个在 S_1 上一个在 S_2 上。Dirichlet 边界条件或 Neumann 边界条件仅在 S_1 上作用, 从而在 S_1 上的面积分为零。如果 ϕ 在趋于无穷时以足够快的速度趋向于零, 那么在趋于无穷的极限下 S_2 上的面积分也会趋于零¹。从而在实际应用中我们总是会把 S_2 视为“在无限远的球面”, 然后施加 ϕ 在无限远处趋于零的边界条件, 从而面积分的 S_2 分量会等于零。从而此

¹事实上这是可以满足的, 例如, 可以证明电荷分布在一个有限区域中时这个面积分项总会消失。

时我们又只剩下了对体积的积分，对唯一性定理的证明又和前面的一样了。

注意，在唯一性定理的证明中我们也允许有限远处多个不连通曲面的存在，此时我们要对它们每一个都施加 Dirichlet 边界条件或者 Neumann 边界条件。总而言之，我们在使用涉及无限大区域的唯一性定理时应该注意给各个有限远处的边界曲面施加 Dirichlet 或 Neumann 边界条件，同时还应该考虑势函数在无限远处的渐进行为是否符合要求。

我们建立上述唯一性定理时假设的是一个边界上的点要么全是 Dirichlet 条件、要么全是 Neumann 条件，或者一个边界上的点有的是施加了 Dirichlet 边界条件的点、有的是使用了 Neumann 边界条件的点。无论如何，我们不会在一个点上同时规定 Dirichlet 边界条件和 Neumann 边界条件。当问题的边界条件满足我们的假设时，我们称这个问题是 **well posed**。这意味着这样的边界条件既不太弱以至于问题不定；又不过强以至于问题过度约束而无解。

我们对 ∂V 上的各点同时施加 Dirichlet 边界条件和 Neumann 边界条件时有可能出现过度约束。换句话说，即同时规定势函数及其法向导数在 ∂V 上的取值。同时规定 ∂V 上的 ϕ 和 $\partial\phi/\partial n$ 的边界条件被称为 Cauchy 边界条件。既然单靠 Dirichlet 边界条件就能确定唯一的解，我们不难看出 Cauchy 边界条件是一个过度约束的条件。与此同时，Neumann 边界条件自身也足以给出另一组唯一解。除非我们碰巧选取了会导致相同解的 Dirichlet 边界条件和 Neumann 边界条件，否则两种边界条件所确定的解之间会产生矛盾，进而此时 Cauchy 边界条件下的问题是无解的。

3.2 Green 定理

假设真空中的电荷密度分布为 $\rho(\mathbf{r})$ ，那么此时空间中电势的表达式为

$$\phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'$$

应用这一表达式要求 $\rho(\mathbf{r})$ 能够“完整地”描述空间中的电荷分布。倘若它只描述了某一种体电荷密度分布而忽视了边界上的面电荷分布，那么这个公式肯定是不能被直接使用的。在实际应用中，我们经常会碰到存在导体的静电问题，这时我们只知道“体电荷分布”而不知道面电荷分布，但是边界上的条件是可以明确确定的。在这种情况下，我们下面介绍的方法将相当有用。

令 ϕ 和 ψ 为两个标量函数，那么

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) &= \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \nabla^2 \psi - \nabla \psi \cdot \nabla \phi - \psi \nabla^2 \phi \\ &= \phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi \end{aligned}$$

将其在区域 V 上积分并应用 Stokes 定理便得到

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) d^3 r = \int_{\partial V} (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\vec{S}$$

这个等式便是 Green 定理。

我们取 ϕ 为满足 Poisson 方程的静电势

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho$$

并取

$$\psi = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

现令积分变量为 \mathbf{r}' ，从而梯度运算也是相对 \mathbf{r}' 进行的，下面用 ∇' 表示它。注意

$$\nabla'^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

因此

$$\int_V \left[-4\pi\phi(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{4\pi\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] d^3 r' = \int_{\partial V} \left[\phi(\mathbf{r}')\nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \phi(\mathbf{r}') \right] \cdot d\vec{S}$$

考虑到

$$\int_V \phi(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 r' = \phi(\mathbf{r})$$

整理便得

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \phi(\mathbf{r}') - \phi(\mathbf{r}') \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] \cdot d\vec{S}$$

等号右边第一项就是我们熟悉的表达式，而第二项则描述了边界 ∂V 上的面

电荷密度分布对 V 内部电势的贡献。

注意，这个等式并不能被视作一般静电问题中电势的解。不难看出，为了得到 V 内部的 $\phi(\mathbf{r})$ ，我们需要同时代入 ϕ 和 $\partial\phi/\partial n$ 在边界上的取值。但是通过唯一性定理我们知道同时约束电势在边界上的取值和法向导数会导致一个过度约束的问题，这有可能无解。从而我们只能把上式视为一个积分方程，把我们已知的边界条件代入后会返回一个描述内部电势的函数。为了处理一般的边值问题，我们需要引入一个新工具：**Green 函数**。

3.3 Green 函数与边值问题

我们利用 Green 定理配合 $\psi = 1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 导出势函数的关键是 ψ 满足方程

$$\nabla'^2 \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

然而事实上有很多函数具有这个性质。注意这个方程是一个有 δ 函数在等号右侧作为“源”的非齐次方程，因此我们可以取 ψ 为这样的形式：

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

其中 F 是齐次方程

$$\nabla'^2 F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$$

的解。即 $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 相对 \mathbf{r}' 变量而言是一个调和函数。函数 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 自然满足

$$\nabla'^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

那么接下来我们要做的就是选取合适的 $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 以使得 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ （我们下面将其称为 Green 函数）满足恰当的边界条件。为了展示具体过程，我们注意将 Green 定理

$$\int_V \phi \nabla'^2 \psi - \psi \nabla'^2 \phi d^3 r' = \int_{\partial V} (\phi \nabla' \psi - \psi \nabla' \phi) \cdot d\vec{S}$$

中的 ψ 替换为 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 并考虑 $\nabla'^2 \phi = -4\pi\rho(\mathbf{r}')$ 便得到

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3 r' + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \phi - \phi \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \cdot d\vec{S}$$

假设我们的势函数满足 Dirichlet 边界条件，即 ϕ 在 ∂V 上的取值已知，那么我们自然会希望选取合适的调和函数 $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 使得 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 在 ∂V 上的取值为零。此时我们记这个 Green 函数为 $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ，它应该满足

$$\begin{cases} \nabla'^2 G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\partial V} = 0 \end{cases}$$

此时，我们的势函数便为

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3 r' - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \phi(\mathbf{r}') \nabla' G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot d\vec{S}$$

这表明，一旦我们知道了此时的 Green 函数 $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 、区域内电荷分布 $\rho(\mathbf{r})$ 以及电势在边界 ∂V 上的取值，区域 V 内各点处的电势 $\phi(\mathbf{r})$ 便能被唯一确定。从而我们可以说，我们在形式上解决了 Dirichlet 边值问题。

有人可能会觉得我们用 Green 函数法和直接求解 Poisson 方程同样困难，然而这种观点其实有失偏颇。Green 函数法的一个优点是对于一个特定的几

何结构, 我们只需要求解一次 Green 函数就可以处理很多与之相关的边值问题。例如, 对于 Dirichlet 问题, 我们针对给定的几何结构解出了 $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 后便能利用任意给定的电荷密度分布 $\rho(\mathbf{r}')$ 和 ∂V 上的势函数 $\phi(\mathbf{r}')$ 确定区域内的电势 $\phi(\mathbf{r})$ 。针对特定区域解出的 Green 函数就像一部机器, 我们只要给它喂入电荷和边界上的电势信息, 它就能吐出我们想要知道的电势分布。

Neumann 边界条件下的处理方式也大抵相似, 但是有一点点微妙之处。有人可能想选择 $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 以使得 Green 函数在 ∂V 上的法向导数法向导数²消失:

$$\left. \frac{\partial G_N}{\partial n} \right|_{\partial V} = 0$$

但是这会和下式矛盾:

$$\int_V \nabla^2 G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3 r = \int_{\partial V} \nabla' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot d\vec{S} = -4\pi \int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 r = -4\pi$$

因此选择 Green 函数法向导数为零的边界条件是不合理的。记 ∂V 面积为 A , 那么由上式可知我们能想到的最简单的边界条件就是

$$\nabla' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\partial V} = -\frac{4\pi}{A}$$

从而 Neumann 边界条件对应的 Green 函数应该满足:

$$\begin{cases} \nabla^2 G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ \nabla' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\partial V} = -\frac{4\pi}{A} \end{cases}$$

此时区域 V 内的势函数便是

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \int_V \rho(\mathbf{r}') G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3 r' + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} [G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \phi(\mathbf{r}') - \phi(\mathbf{r}') \nabla' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \cdot d\vec{S} \\ &= \int_V \rho(\mathbf{r}') G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3 r' + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \phi(\mathbf{r}') \cdot d\vec{S} + \frac{1}{A} \int_{\partial V} \phi(\mathbf{r}') dS' \end{aligned}$$

注意, 最后一项是一个常数, 而我们知道势函数中的一个常数在 Neumann 边值问题中是无关紧要的。从而我们得到了两种边值问题的 Green 函数解法:

- Dirichlet 边值问题:

- Green 函数定解条件为

$$\begin{cases} \nabla^2 G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\partial V} = 0 \end{cases}$$

²注意, 我们选取的法向的正方向为从我们研究的区域内指向区域外

- 区域内势函数的形式解为：

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3r' - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \phi(\mathbf{r}') \nabla' G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot d\vec{S}$$

- Neumann 边值问题：

- Green 函数定解条件为：

$$\begin{cases} \nabla'^2 G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ \nabla' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\partial V} = -\frac{4\pi}{A} \end{cases}$$

- 区域内势函数的形式解为：

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}') G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3r' + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \phi(\mathbf{r}') \cdot d\vec{S}$$

然而，Green 函数法是否实用强烈依赖于具体问题中几何结构的特征——解出 $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 和 $G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 才是问题的关键。大多数情况下解出它其实是相当困难的，但在一些特殊情况下我们可以找到形式漂亮的 Green 函数——我们后面马上就会考虑无限大导体平面和球形边界的情况。下面我们关心的重点是 Green 函数的物理诠释。

最简单的 Green 函数便是

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

我们现在知道这实际上是边界为“无限远处球面”的 Dirichlet 问题对应的 Green 函数。然而，我们也可以将其视为在 \mathbf{r}' 处的单位点电荷于 \mathbf{r} 处产生的势。我们注意到这个 Green 函数对 \mathbf{r}, \mathbf{r}' 是对称的，从而它也能被视为 \mathbf{r}' 处的单位点电荷在 \mathbf{r} 处产生的势。

更一般的情形下 Green 函数为

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

其中 $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 是一个调和函数。这表明 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 仍然可以被视为 \mathbf{r} 处的单位电荷在 \mathbf{r}' 处产生的势，但是此时 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 或其法向导数在 ∂V 上满足约束条件。事实上利用 Green 定理可以证明，Dirichlet 边界条件下的 Green 函数中 \mathbf{r}, \mathbf{r}' 对称，即在交换操作下不变：

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$$

而在 Neumann 边界条件下 \mathbf{r}, \mathbf{r}' 并不一定对称，但是我们总能选取适当的附加条件“强迫”解出的 $G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 相对 \mathbf{r}, \mathbf{r}' 对称。

下面我们将会看到 Green 函数法是如何解决具体静电问题的。

3.4 电像法

如果边界条件足够简单，那么我们有可能使用电像法来解出边值问题。假设在真空中有一个电势为零的曲面 S ，曲面外有一个点电荷，我们想计算曲面外空间 V 中各点的电势。如果 S 足够对称，那么我们可以通过向整个真空中除 V 以外的区域内添加一些像电荷来“伪造”出相同的零势能面。而根据唯一性定理，我们知道此时这些像电荷加上原电荷在 V 中产生的势场就是我们原先想要求得的势场。

能通过电像法处理的问题其实是相当有限的，我们下面便要讨论两类情况。在讨论完电像法后我们会引入由它衍生出来的 **Green** 函数，从而我们能进而处理相同几何结构下更一般的问题。

3.4.1 无限大导体平面

电像法最简单的应用场景便是无限大导体平面。为简便起见我们记导体平面对应着 $z = 0$ ，而我们感兴趣的空间 V 为整个 $z > 0$ 的上半空间。假设导体平面的势能恒等于零。

如果 V 中有一个点电荷，那么显然其像电荷便是在其镜像位置的电荷 $-q$ 。我们记电荷 q 的位置为

$$\mathbf{r} = (x_1, y_1, z_1) \quad z_1 > 0$$

那么像电荷 $-a$ 的位置便是

$$\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2) = (x_1, y_1, -z_1)$$

于是 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 处的电势便是

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}} - \frac{q}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z+z_1)^2}}$$

3.4.2 无限大导体平面的 Dirichlet Green 函数与 Neumann Green 函数

有了前面的铺垫，我们现在可以立即构造 Dirichlet Green 函数和 Neumann Green 函数。我们知道，Dirichlet Green 函数就是边界上取值为零的情况下在 \mathbf{r}' 处的单位点电荷于 \mathbf{r}' 处产生的电势，从而根据电像法我们立马就能看出

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}}$$

有了这个 Green 函数，我们就可以套路式地求解同一几何结构下的 Dirichlet 边界问题了。我们来看一下它在边界上的法向导数：

$$-\left. \frac{\partial G_D}{\partial z'} \right|_{z'=0} = -\frac{2z}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{3/2}}$$

前面的负号是很重要的：我们研究的是上半空间，边界的法向由我们研究的空体内指向研究的空体外，从而此时是指向 z' 的负方向。假设上半空间中电荷分布为 $\rho(\mathbf{r}')$ ，那么我们便得到了研究的空体内的电势为

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) = & \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} d^3r' \\ & - \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} d^3r' \\ & + \frac{z}{2\pi} \int \frac{\phi(x', y', 0)}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{3/2}} dx' dy' \end{aligned}$$

可以看出势函数分为三个部分：一个是上半平面中电荷产生的电势、一个是像电荷产生的电势、一个是平面上电势分布 $\phi(x', y', 0)$ 产生的贡献。最后一项可以被写为

$$\phi_3(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho_s(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} d^3r'$$

其中

$$\rho_s(\mathbf{r}') = -\frac{1}{2\pi} \phi(x', y', 0) \frac{d\delta(z')}{dz'}$$

从而这一项可以被视为 $z' = 0$ 平面上电荷分布 $\rho_s(\mathbf{r}')$ 对电势的贡献。

Neumann Green 函数也不难构造。 $G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 相当于在 \mathbf{r}' 处的单位电荷在 \mathbf{r} 处的势，并且其法向导数在 ∂V 上为零。此时我们只需要对电像法做一点点修改，然后便能得到想要的结果：

$$G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}}$$

不难验证（实际上很显然）：

$$-\left. \frac{\partial G_N}{\partial z'} \right|_{z'=0} = 0$$

注意，这其实满足我们对法向导数等于 $-4\pi/A$ 的要求：无限大导体平面面积无限大，从而 $-4\pi/A \rightarrow 0$ 。将 $G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 代入公式便得到 Neumann 边界条

件下的解:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) = & \int \frac{\rho(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} d^3r' \\ & + \int \frac{\rho(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} d^3r' \\ & - \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z'} \Big|_{z'=0} \right) dx' dy'\end{aligned}$$

因为 $\vec{E} = -\nabla\phi$, 从而最后一项可以被写成

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{E_z(x', y', 0)}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}} dx' dy'$$

但是它又可以被写成

$$\int \frac{\sigma(x', y', 0)}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}} dx' dy'$$

从而我们发现

$$\sigma(x', y', 0) = \frac{E_z(x', y', 0)}{2\pi}$$

这反映了边界上电荷密度分布。

3.4.3 球形导体

电像法也可以用于处理球形导体问题。假设半径为 a 的球面电势保持为零, 而电荷 q 被放在了球外距离球心为 b 的位置处。此时我们的像电荷位于球心和电荷连线上距离球心为 c 的位置处, 电荷量为 q' 。下面我们来计算出 c 和 q' 的具体值。

最简便的计算方法如下: 把球心设为坐标原点。电荷 q 位于 z 轴上的距离 b 处, 记其位置为 $(0, 0, b)$ 。像电荷也应该在 z 轴上, 我们记其位置为 $(0, 0, c)$ 。两个电荷共同作用形成的零势能面应该是一个半径为 a 的球面, 从而点 $(0, 0, a)$ 与 $(0, 0, -a)$ 处的电势也应该为零。于是我们可以写出

$$\begin{cases} \frac{q}{b+a} + \frac{q'}{a+c} = 0 \\ \frac{q}{b-a} + \frac{q'}{a-c} = 0 \end{cases}$$

由此我们解得

$$c = \frac{a^2}{b} \quad q' = -\frac{a}{b}q$$

因为 $b > a$, 从而 $c < a$, 这反映像电荷的确在球面内。下面我们还要验证球面上任意一点的电势都为零。根据球面相对 z 轴的旋转对称性, 我们可以仅

考虑 θ 方向。取与 z 轴正向夹角为 θ 的一点 P ，那么 q 到 P 的距离 l_q 与 q' 到 P 的距离 $l_{q'}$ 分别为

$$l_q^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \quad l_{q'}^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \theta$$

不难看出

$$l_{q'} = \frac{a}{b} l_q$$

因此我们有

$$\frac{q}{l_q} + \frac{q'}{l_{q'}} = 0$$

因而球面上各点处势能都为零。

不难进行下面的推广：假设初始电荷 q 被放在了球面外任意一点 \mathbf{r}_1 处，那么 q' 的距离和电荷量便为

$$\mathbf{r}_2 = \frac{a^2}{r_1^2} \mathbf{r}_1 \quad q' = -\frac{a}{r_1} q$$

从而此时球面外 \mathbf{r} 处的电势便是

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} - \frac{qa/r_1}{|\mathbf{r} - (a^2/r_1^2)\mathbf{r}_1|}$$

我们还能进一步推广：考虑到 Maxwell 方程组的线性性，我们可以推广至导体球具有非零电势的情况。我们要做的无非是在势能式中额外添加一项以使得导体球电势符合要求：

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} - \frac{qa/r_1}{|\mathbf{r} - (a^2/r_1^2)\mathbf{r}_1|} + \frac{Q}{r}$$

球面上的电势为 $\phi = Q/a$ ，因而对于给定电势为 V 的情况，我们取 $Q = Va$ 即可。

我们可以考虑的另一个推广是计算接地导体球放入一个原本均匀的电场后发生的情况。不失一般性地，我们取原先的电场沿着 z 轴。我们可以将其视为两个处于 $z = \mp b$ 的电荷 $\pm Q$ 在 origin 处产生的电场的近似， $E_0 \approx 2Q/b^2$ ，方向沿着 z 轴正向。一个整体均匀的电场可以视为 $b \rightarrow \infty$ 同时保持 $E_0 = 2Q/b^2$ 不变的极限过程。

对于接地导体球而言上述两个电荷均可以用电像法处理： $-b$ 处的电荷 $+Q$ 的像为 $-a^2/b$ 处的 $-aQ/b$ ；而 $+b$ 处的电荷 $-Q$ 的像为 $+a^2/b$ 处的电荷 $+aQ/b$ 。如果使用球坐标系，我们有

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$$

从而系统的总势能为

$$\begin{aligned}\phi(r, \theta, \phi) = & \frac{Q}{\sqrt{r^2 + b^2 + 2rb \cos \theta}} - \frac{Q}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta}} \\ & - \frac{Qa/b}{\sqrt{r^2 + a^4/b^2 + 2a^2r/b \cos \theta}} + \frac{Qa/b}{\sqrt{r^2 + a^4/b^2 - 2a^2r/b \cos \theta}}\end{aligned}$$

将其展开为 $1/b$ 的幂级数, 我们有:

$$\phi(r, \theta, \phi) = -\frac{2Q}{b^2} r \cos \theta + \frac{2Q}{b^2} \frac{a^3}{r^2} \cos \theta$$

更高阶项因为含有 b 的更高幂次, 从而在保持 $E_0 = 2Q^2/b$ 固定不变的情况下使 $b \rightarrow \infty$ 时会趋于零。在这一极限下我们有

$$\phi(r, \theta, \phi) = -E_0(r - \frac{a^3}{r^2}) \cos \theta$$

第一项在笛卡尔坐标系下就是 $-E_0 z$, 对应了接地球不存在时的原电场。而第二项描述了电偶极子对势能的贡献——而这来源于对两个假想点电荷的像电荷取极限。

3.4.4 球形边界的 Dirichlet Green 函数

我们可以用上一节得到的结果来构造出涉及球面的边值问题的 Dirichlet Green 函数。我们只需要取 $q = 1$, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'$ 便能得到

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{a/r'}{|\mathbf{r} - (a^2/r'^2)\mathbf{r}'|}$$

如果我们记 \mathbf{r} 与 \mathbf{r}' 夹角为 γ , 那么上式可以被写为

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2 r'^2/a^2 - 2rr' \cos \gamma}}$$

此时我们不难看出在 $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 中 \mathbf{r}, \mathbf{r}' 地位是对称的, 同时如果 \mathbf{r} 或 \mathbf{r}' 在球面上, 那么 $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ 。

然而为了在处理边值问题时实际应用 G_D , 我们还应该计算它在交界球面上相对 \mathbf{r}' 的法向导数。注意, 我们的法向方向为从研究的区域指向外界, 因而在这里的“法向”是指向球心的。于是我们有

$$\left. \frac{\partial G_D}{\partial n'} \right|_{r'=a} = - \left. \frac{\partial G_D}{\partial r'} \right|_{r'=a} = \frac{a^2 - r^2}{a[r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma]^{3/2}}$$

为了简便起见这里取电荷密度 $\rho = 0$, 我们便得到

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{a(r^2 - a^2)}{4\pi} \int \frac{\phi(a, \theta', \phi')}{[r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma]^{3/2}} d\Omega'$$

在边界上的积分中我们把势函数 ϕ 用球坐标写了出来, 于是我们知道半径

为 a 的球面上的面元为

$$\vec{n} \cdot d\vec{S} = a^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' = a^2 d\Omega'$$

这便是上式中出现立体角元的原因，这一公式便给出了半径为 a 的球面外任意一点处的电势。

注意，这个积分实际上很复杂——在 $\phi(a, \theta', \phi')$ 本身是一个很简单的函数时也是如此，分母中的 $\cos \gamma$ 便是罪魁祸首。利用球坐标，我们可以得到 \mathbf{r}, \mathbf{r}' 在笛卡尔系中的分量为

$$\mathbf{r} = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$$

$$\mathbf{r}' = (r' \sin \theta' \cos \phi', r' \sin \theta' \sin \phi', r' \cos \theta')$$

从而我们可以算出

$$\cos \gamma = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{rr'} = \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') + \cos \theta \cos \theta'$$

下面我们举个例子：考虑半个球面电势为 $+V$ 而另半个球面电势为 $-V$ 的情况。由于我们使用标准的球坐标，一个很自然的想法便是选取合适的坐标系使得这两个半球分别对应 $z > 0$ 与 $z < 0$ 。从而此时我们有

$$\phi(a, \theta, \phi) = \begin{cases} +V & 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ -V & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

那么此时解出来的 ϕ 便是

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{a}{4\pi} V(r^2 - a^2) \int_0^{2\pi} d\phi' \left\{ \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta'}{[r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma]^{3/2}} d\theta' - \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin \theta'}{[r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma]^{3/2}} d\theta' \right\}$$

通过在第二个积分中作变量代换 $\theta' \rightarrow \pi - \theta'$ 与 $\phi' \rightarrow \phi' + \pi$ ，我们得到

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{a}{4\pi} V(r^2 - a^2) \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{\sin \theta'}{[r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma]^{3/2}} - \frac{\sin \theta'}{[r^2 + a^2 + 2ar \cos \gamma]^{3/2}} \right\} d\theta'$$

不幸的是，这个积分仍然太复杂了。我们现在能手算出来的只有 z 轴上的 ϕ ，此时 $\theta = 0$ 并且 $\cos \gamma = \cos \theta'$ ，于是我们可以轻易地算出上述积分。例如，对 $z > a$ 我们有

$$\phi(\mathbf{r}) = V \left(1 - \frac{z^2 - a^2}{z\sqrt{z^2 + a^2}} \right)$$

但是对于一般的离轴点，我们无法得到紧凑的势函数表达式。一种处理方法是把这个积分的被积函数用 $\cos \gamma$ 展开并逐项积分，但是这太麻烦了。我们未来会引入一种能让我们不那么麻烦地算出离轴处势函数级数展开式的方法。

3.5 分离变量法

3.5.1 引言

静电中的边值问题其实等价于在某个区域 V 中附加某些边界条件求解 Poisson 方程 $\nabla^2 \phi = -4\pi\rho$ 。我们常常会对 $\rho = 0$ 的区域感兴趣，从而这样的区域 V 中的势 ϕ 完全由它和它的法向导数在 ∂V 上的条件确定。

∂V 的几何形状决定了我们应该选取哪种坐标系。例如，倘若 ∂V 由平面组成，那么笛卡尔系一般会是最好用的最方便的坐标系；如果 ∂V 是个球面，我们则要考虑球坐标系了；对于柱面，直观上柱坐标会是更好的选择。

这些坐标系都有一个共同特点：它们的 Laplace 算子都是可分离变量的。一般上任意取定的坐标系可不一定具有这个优秀的性质。分离变量法能把一个偏微分方程分解为数个常微分方程，进而让我们能求得方程的解。我们下面将会在笛卡尔坐标、球坐标、柱坐标中分别讨论分离变量法，此时我们将会遇到特殊函数。对于笛卡尔系而言，我们得到的特殊函数其实就是正余弦函数，而在球坐标中我们会遇到 Legendre 函数与连带 Legendre 函数，在柱坐标中我们则会遇到 Bessel 函数。

3.5.2 笛卡尔系中的分离变量法

笛卡尔系中的 Laplace 方程就是

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

现在分离变量：

$$\phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

那么我们将其代入方程并除以 ϕ 便得到

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

分离变量后便得到

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \alpha^2 = 0 \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \beta^2 = 0 \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} - \gamma^2 = 0$$

其中

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

显然方程解的形式为

$$X \sim e^{\pm i\alpha x} \quad Y \sim e^{\pm i\beta y} \quad z \sim e^{\pm \gamma z}$$

我们可以把 X, Y 表示为正余弦函数的叠加, 而将 Z 用双曲函数写出。

原方程的通解便可以表示为各个本征解的叠加。由于 α, β 是任意常数, 从而通解的形式为

$$\phi(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\beta e^{i(\alpha x + \beta y)} [a(\alpha, \beta) e^{\gamma z} + b(\alpha, \beta) e^{-\gamma z}]$$

其中 $a(\alpha, \beta)$ 与 $b(\alpha, \beta)$ 是任意函数, 而 $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ 。如果施加了边界条件, 那么我们会看到这个对连续指标的积分会变成离散的求和。

3.5.2.0.1 例: 长方体空腔 假设我们想在一个长方体空腔中求解 Laplace 方程, x, y, z 方向空腔的长度分别为 a, b, c 。我们总可以选取合适的坐标系以使得空腔的六面分别对应着 $x = 0, x = a, y = 0, y = b, z = 0, z = c$ 。假设除了 $z = c$ 面以外各个面电势都是零, 而在 $z = c$ 处

$$V(x, y, z = c) = V(x, y)$$

显然 x, y 方向的约束会使得 $X(x), Y(y)$ 取

$$X(x) = \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \quad Y(y) = \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \quad m, n \in \mathbb{Z}_+$$

而 $z = 0$ 处 $\phi = 0$ 表明 $Z(z)$ 只能取 $\sinh \gamma z$ 的形式, 而

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

从而势函数解的形式为

$$\phi(x, y, z) = \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sinh \left(\pi z \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \right)$$

其中 A_{mn} 是任意常数。

考虑 $z = c$ 时边界条件 $V(x, y, z = c) = V(x, y)$, 将其展开为 $X(x)$ 与 $Y(y)$ 的 Fourier 级数后比较系数便能确定 A_{mn} 的值。我们下面先回顾一下使用正交函数完备集展开的相关内容。

3.5.3 广义 Fourier 级数

假设函数族 $u_n(x)$, $n \geq 1$ 组成了区间 $\leq x \leq b$ 上的完备集。它们可以是实函数, 也可以是复函数, 并且为了一般性我们将假设它们为复函数。我们

进一步假设这些函数是正交的，即

$$\int_a^b u_m^*(x)u_n(x)dx = 0, \quad m \neq n$$

当 $m = n$ 时积分非零且有限，从而我们完全可以为函数赋予合适的系数以使得 $m = n$ 时积分的结果为 1。于是我们可以假设有一族规范正交函数满足

$$\int_a^b u_m^*(x)u_n(x)dx = \delta_{mn}$$

假设我们有一个在区间 $[a, b]$ 上平方可积的任意函数 $f(x)$ ，从而我们可以用 $u_n(x)$ 展开 $f(x)$ ，即

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} a_n u_n(x)$$

其中 a_n 是特定的常数。显然，它可以用下面的方式算出：

$$a_n = \int_a^b u_n^*(x)f(x)dx$$

进而我们不难看出

$$f(x) = \int_a^b \left[\sum_{n \geq 1} u_n^*(x')u_n(x) \right] f(x')dx'$$

进而显然

$$\sum_{n \geq 1} u_n^*(x')u_n(x) = \delta(x - x')$$

这些内容向高维的推广是显然的。例如，对于二维的情况应该有

$$f(x, y) = \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} a_{mn} u_m(x) u_n(y)$$

$$a_{mn} = \int_a^b dx \int_c^d dy u_m^*(x) u_n^*(y) f(x, y)$$

现在我们可以继续考虑矩形盒子里的边值问题了。既然势函数的一般形式为

$$\phi(x, y, z) = \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sinh \left(\pi z \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \right)$$

那么我们取 $z = c$ 时的边界条件便有

$$V(x, y) = \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sinh \left(\pi c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \right)$$

进而

$$A_{mn} = \frac{4}{ab \sinh\left(\pi c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}\right)} \int_0^a dx \int_0^b dy V(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

现在我们可以考虑使用分离变量法来构造长宽高为 (a, b, c) 的长方体区域 U 的 Dirichlet Green 函数。注意我们其实就是要求解方程

$$\begin{cases} \nabla^2 G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r} \in \partial U} = 0 \end{cases}$$

为此我们考虑将 Green 函数用下述本征函数集展开：

$$\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{c}z\right)$$

首先，我们将三维的 δ 函数用这族函数展开。简单计算得到

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{8}{abc} \sum_{k,m,n} \sin\left(\frac{k\pi}{a}x'\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y'\right) \sin\left(\frac{n\pi}{c}z'\right) \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{c}z\right)$$

我们记

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{k,m,n} \alpha_{k,m,n} \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{c}z\right)$$

它自然满足边界条件。代入方程便得到

$$\begin{aligned} & \sum_{k,m,n} \alpha_{k,m,n} \left[-\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 \right] \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{c}z\right) \\ &= -\frac{32\pi}{abc} \sum_{k,m,n} \sin\left(\frac{k\pi}{a}x'\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y'\right) \sin\left(\frac{n\pi}{c}z'\right) \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{c}z\right) \end{aligned}$$

解得

$$\alpha_{k,m,n} = \frac{32}{\pi abc \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right)} \sin\left(\frac{k\pi}{a}x'\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y'\right) \sin\left(\frac{n\pi}{c}z'\right)$$

于是

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{k,m,n} \frac{32}{\pi abc \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right)} \sin\left(\frac{k\pi}{a}x'\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y'\right) \sin\left(\frac{n\pi}{c}z'\right) \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{c}z\right)$$

进而，如果区域内体电荷分布为 $\rho(\mathbf{r})$ ，边界上电势分布为 $\phi(\mathbf{r})$ ，我们将求得的 Green 函数代入下面的式子便得到了区域内任意一点 \mathbf{r}' 处的电势 $\phi(\mathbf{r}')$ ：

$$\phi(\mathbf{r}') = \int_U \rho(\mathbf{r}) G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r} - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial U} \phi(\mathbf{r}) \nabla G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}$$

3.6 Laplace 方程在曲线正交坐标系中的解

一般而言，在三维欧氏空间的曲线正交坐标系中我们可以将三个坐标函数记为 u^1, u^2, u^3 。此时，三个坐标线对应的线元与坐标函数的微分的关系可以被写为

$$dl_1 = h_{11} du^1 \quad dl_2 = h_{22} du^2 \quad dl_3 = h_{33} du^3$$

那么对于标量场 $\psi(u^1, u^2, u^3)$ 和协变矢量场 $\vec{f} = f_1 du^1 + f_2 du^2 + f_3 du^3$ ，我们套用矢量分析部分的公式便能得到：

$$\begin{aligned} \nabla \psi &= \frac{1}{h_{11}} \frac{\partial \psi}{\partial u^1} \partial_1 + \frac{1}{h_{22}} \frac{\partial \psi}{\partial u^2} \partial_2 + \frac{1}{h_{33}} \frac{\partial \psi}{\partial u^3} \partial_3 \\ \nabla \cdot \vec{f} &= \frac{1}{h_{11} h_{22} h_{33}} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} (h_{11} h_{22} h_{33} f^1) + \frac{\partial}{\partial u^2} (h_{11} h_{22} h_{33} f^2) + \frac{\partial}{\partial u^3} (h_{11} h_{22} h_{33} f^3) \right] \\ &= \frac{1}{h_{11} h_{22} h_{33}} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} (f_1 h_{22} h_{33}) + \frac{\partial}{\partial u^2} (h_{11} f_2 h_{33}) + \frac{\partial}{\partial u^3} (h_{11} h_{22} f_3) \right] \\ \nabla \times \vec{f} &= \begin{vmatrix} \frac{1}{h_{22} h_{33}} \partial_1 & \frac{1}{h_{11} h_{33}} \partial_2 & \frac{1}{h_{11} h_{22}} \partial_3 \\ \frac{\partial}{\partial u^1} & \frac{\partial}{\partial u^2} & \frac{\partial}{\partial u^3} \\ h_{11} f^1 & h_{22} f^2 & h_{33} f^3 \end{vmatrix} \\ \nabla^2 \psi &= \nabla \cdot \nabla \psi = \frac{1}{h_{11} h_{22} h_{33}} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{h_{22} h_{33}}{h_{11}} \frac{\partial \psi}{\partial u^1} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{h_{11} h_{33}}{h_{22}} \frac{\partial \psi}{\partial u^2} \right) + \frac{\partial}{\partial u^3} \left(\frac{h_{22} h_{11}}{h_{33}} \frac{\partial \psi}{\partial u^3} \right) \right] \end{aligned}$$

下面来看两个相当重要的例子（也是本节的核心内容）：

1. 球坐标：

此时三个坐标函数为 (r, θ, ϕ) ，对应的对角度规分量为

$$h_{11} = 1 \quad h_{22} = r^2 \quad h_{33} = r^2 \sin^2 \theta$$

那么现在我们有

$$\begin{aligned} \nabla \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial r} \partial_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \partial_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \partial_\phi \\ \nabla \cdot \vec{f} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta f_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (f_\phi) \\ \nabla \times \vec{f} &= \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_r & \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta & \frac{1}{r} \partial_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ f_r & r f_\theta & r \sin \theta f_\phi \end{vmatrix} \\ \nabla^2 \psi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \end{aligned}$$

2. 柱坐标：

此时三个坐标为 (ρ, θ, z) ，此时

$$h_{11} = 1 \quad h_{22} = \rho \quad h_{33} = 1$$

现在我们有

$$\begin{aligned} \nabla \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \partial_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \partial_\theta + \frac{\partial \psi}{\partial z} \partial_z \\ \nabla \cdot \vec{f} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho f_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \\ \nabla^2 \psi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \end{aligned}$$

3.6.1 Laplace 在球坐标系中的轴对称解；Legendre 多项式

待求解的 Laplace 方程为

$$\nabla^2 \phi = 0$$

利用球坐标系，我们可以把方程写为

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \nabla_{\theta, \varphi}^2 \phi = 0$$

其中

$$\nabla_{\theta, \varphi}^2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

下面进行分离变量

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r} R(r) Y(\theta, \varphi)$$

从而

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial r} &= -\frac{1}{r^2} R Y + \frac{1}{r} Y \frac{dR}{dr} \\ r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} &= -R Y + r Y \frac{dR}{dr} \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= -Y \frac{dR}{dr} + Y \frac{dR}{dr} + r Y \frac{d^2 R}{dr^2} \\ &= r Y \frac{d^2 R}{dr^2} \end{aligned}$$

于是原方程变为

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{Y} \nabla_{\theta, \varphi}^2 Y &= 0 \\ \frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} &= -\frac{1}{Y} \nabla_{\theta, \varphi}^2 Y \end{aligned}$$

我们令

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} = -\frac{1}{Y} \nabla_{\theta, \varphi}^2 Y = \lambda$$

那么

$$\nabla_{\theta, \varphi}^2 Y = -\lambda Y \quad \frac{d^2 R}{dr^2} = \frac{\lambda}{r^2} R$$

对于第一个方程，我们可以进一步分离变量，令

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

从而

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \Theta(\theta)\Phi(\varphi) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Theta(\theta)\Phi(\varphi) = -\lambda \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

两边同乘 $\sin^2 \theta / Y(\theta, \varphi)$ ，我们有

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \lambda \sin^2 \theta + \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = 0$$

于是

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \lambda \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = m^2$$

进而

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi(\varphi) = 0 \quad \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + (\lambda \sin^2 \theta - m^2) \Theta(\theta) = 0$$

从而我们现在得到了分离变量后的方程：

$$\begin{cases} \frac{d^2 R}{dr^2} = \frac{\lambda}{r^2} R \\ \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0 \\ \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + (\lambda \sin^2 \theta - m^2) \Theta = 0 \end{cases}$$

先看第二个方程，其通解为

$$\Phi(\varphi) = Ae^{im\varphi} + Be^{-im\varphi}$$

周期性边界条件要求

$$\phi(0) = \phi(2\pi) \quad \left. \frac{d\Phi}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = \left. \frac{d\Phi}{d\varphi} \right|_{\varphi=2\pi}$$

因此

$$\begin{cases} (e^{2\pi im} - 1)A + (e^{-2\pi im} - 1)B = 0 \\ (e^{2\pi im} - 1)A - (e^{-2\pi im} - 1)B = 0 \end{cases}$$

有非平凡解要求

$$\begin{vmatrix} e^{2\pi im} - 1 & e^{-2\pi im} - 1 \\ e^{2\pi im} - 1 & 1 - e^{-2\pi im} \end{vmatrix} = 0$$

此即

$$e^{2\pi im} = 1$$

于是

$$m \in \mathbb{Z}$$

我们得到了 ϕ 方向两组线性无关的本征函数:

$$\Phi_{1m} = e^{im\varphi} \quad \Phi_{2m} = e^{-im\varphi}$$

再看第三个方程

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + (\lambda \sin^2 \theta - m^2) \Theta = 0$$

换元, 令 $x = \cos \theta$, 那么

$$\frac{d}{dx} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta}$$

于是

$$\sin^2 \theta \frac{d}{dx} \left(\sin^2 \theta \frac{d\Theta}{dx} \right) + (\lambda \sin^2 \theta - m^2) \Theta = 0$$

此即

$$(1-x^2) \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right] + [\lambda(1-x^2) - m^2] \Theta = 0$$

即

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) \Theta = 0$$

显然这是关于 x 的连带 Legendre 方程。我们先考虑 $m = 0$ 的情况, 此时方程退化为 Legendre 方程, 这实际上对应着 Laplace 方程在球坐标系下的轴对称解::

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right] + \lambda \Theta = 0$$

我们知道, 为了使这个方程的解在 $[-1, 1]$ 上有界, 我们必须要求

$$\lambda = l(l+1) \quad l \in \mathbb{Z}$$

此时采用幂级数方法可知方程的解为 l 阶 Legendre 多项式:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l} \sum_{k=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} (-1)^k \frac{1}{k!(l-k)!} \frac{(2l-2k)!}{(l-2k)!} x^{l-2k}$$

同时对 l 阶 Legendre 多项式, 我们有 Rodrigues 公式:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

并且其生成函数为

$$\frac{1}{\sqrt{1 - xt + t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^l$$

实际上我们也可以这样理解 Legendre 多项式: 它是 $[-1, 1]$ 上有有限间断点的函数张成的函数空间的一组完备正交基, 并且满足下述条件:

- $P_0(x) = 1$
- $P_l(1) = 1$
- $\int_{-1}^1 P_k(x) P_l(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{kl}$

其中我们用到了 Legendre 多项式的模:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_l(x) P_l(x) dx &= \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^1 P_l(x) \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l dx \\ &= \frac{(-1)^l}{2^l l!} \int_{-1}^1 P_l^{(l)}(x) (x^2 - 1)^l dx \end{aligned}$$

注意到

$$P_l(x) = \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2} x^l + \dots$$

从而

$$P_l^{(l)}(x) = \frac{(2l)!}{2^l l!}$$

进而

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_l(x) P_l(x) dx &= (-1)^l \frac{(2l)!}{2^{2l} (l!)^2} \int_{-1}^1 (x+1)^l (x-1)^l dx \\ &= \frac{(2l)!}{2^{2l} (l!)^2} \int_{-1}^1 (1+x)^l (1-x)^l dx \end{aligned}$$

换元, 令 $2u = 1 + x$, 我们便有

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 (1+x)^l (1-x)^l dx &= 2 \int_0^1 (1+x)^l (1-x)^l dx \\
 &= 2 \int_{1/2}^1 2^l u^l 2^l (1-u)^l 2 du \\
 &= 2^{2l+1} \int_0^1 u^l (1-u)^l du \\
 &= 2^{2l+1} B(l+1, l+1) \\
 &= 2^{2l+1} \frac{\Gamma(l+1)\Gamma(l+1)}{\Gamma(2l+2)} \\
 &= 2^{2l+1} \frac{(l!)^2}{(2l+1)!}
 \end{aligned}$$

从而

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_l(x) dx = \frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} \frac{2^{2l+1}(l!)^2}{(2l+1)!} = \frac{2}{2l+1}$$

现在回头看分离变量得到的第一个方程:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} = \frac{\lambda}{r^2} R$$

现在 θ 方向函数的限制使得 $\lambda = l(l+1)$, 因而方程化为

$$\frac{d^2 R_l}{dr^2} = \frac{l(l+1)}{r^2} R_l$$

现在换元, 令

$$r = e^t$$

那么

$$\frac{d}{dr} = e^{-t} \frac{d}{dt}$$

进而原方程化为

$$e^{-t} \frac{d}{dt} \left(e^{-t} \frac{dR_l}{dt} \right) = l(l+1) e^{-2t} R_l$$

整理得

$$\frac{d^2 R_l}{dt^2} - \frac{dR_l}{dt} - l(l+1) R_l = 0$$

若 $l = 0$, 那么

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 R_0}{dt^2} - \frac{dR_0}{dt} &= 0 \\
 \frac{dR_0}{dt} &= D_0 e^t
 \end{aligned}$$

$$R_0 = C_0 + D_0 e^l = C_0 + D_0 r$$

若 $l > 0$, 那么我们设方程的解为

$$R_l = e^{mt}$$

从而

$$m^2 - m - l(l+1) = 0$$

进而解得

$$m_1 = -l \quad m_2 = l+1$$

进而

$$R_l = C_l e^{-lt} + D_l e^{(l+1)t} = C_l r^{-l} + D_l r^{l+1}$$

可见我们可以统一地写, 对于 $l \geq 0$ 有

$$R_l(r) = C_l r^{-l} + D_l r^{l+1}$$

于是我们得到球坐标系下 Laplace 方程的轴对称解为

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{r} R(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(C_l \frac{1}{r^{l+1}} + D_l r^l \right) P_l(\cos \theta)$$

其中的系数 C_l, D_l 要利用给定的边界条件来确定。

下面便是一些例子。

1. 考虑一个半径 $r = a$ 的球面, 并且我们要求 $r \rightarrow \infty$ 时 $\phi \rightarrow 0$ 。已知球面上电势分布为 $\phi(a, \theta)$, 那么:

- (a). 对于 $r < a$ 的区域, 因为我们要求势函数在 $r = 0$ 处非奇异, 从而 $C_l = 0$, 势函数展开式为

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} D_l r^l P_l(\cos \theta)$$

根据边界条件, 我们有

$$\begin{aligned} D_l &= \frac{2l+1}{2} a^{-l} \int_{-1}^1 \phi(a, \theta) P_l(\cos \theta) d(\cos \theta) \\ &= a^{-l} \frac{2l+1}{2} \int_0^\pi \phi(a, \theta) \sin \theta P_l(\cos \theta) d\theta \end{aligned}$$

- (b). 对于 $r > a$, 因为 $r \rightarrow \infty$ 时 ϕ 不发散, 从而 $D_l = 0$, 此时

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

此时根据边界条件便有

$$C_l = a^{l+1} \frac{2l+1}{2} \int_0^\pi \phi(a, \theta) \sin \theta P_l(\cos \theta) d\theta$$

假设此时有外电场, 那么 $r \rightarrow \infty$ 时 ϕ 并不趋于零, 此时 $D_1 \neq 0$, 但是更高阶的 D_l 仍然为零。

2. 对于两个球形导体之间的区域 $a < r < b$, 我们有

$$C_l a^{-l-1} + D_l a^l = \frac{2l+1}{2} \int_0^\pi \phi(a, \theta) \sin \theta P_l(\cos \theta) d\theta$$

$$C_l b^{-l-1} + D_l b^l = \frac{2l+1}{2} \int_0^\pi \phi(b, \theta) \sin \theta P_l(\cos \theta) d\theta$$

联立求解便能得到 C_l, D_l , 进而我们能够求得 $a < r < b$ 区域中势函数 $\phi(r, \theta)$ 的表达式。

3. 考虑一个介质球, 其相对介电常数为 ϵ 。现将其置于一均匀外电场 $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_z$ 中, 求解全空间的电势分布。

此时我们分别考虑球外和球内空间, 记对应的电势分布分别为 ϕ_1, ϕ_2 。那么二者总可以被写成

$$\phi_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta)$$

$$\phi_2(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_n r^n + \frac{d_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta)$$

边界条件为:

- 对于球外区域, $r \rightarrow \infty$ 时 $\mathbf{E} \rightarrow E_0 \mathbf{e}_z$, 这要求

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi_1(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta = -E_0 r P_1(\cos \theta)$$

进而 $a_1 = -E_0$ 。而对于 $n > 1$, $a_n = 0$ 。于是

$$\phi_1(r, \theta) = -E_0 r P_1(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

- 对于球内区域, $r \rightarrow 0$ 时 ϕ_2 不应发散, 从而 $d_n = 0$, 因此

$$\phi_2(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n P_n(\cos \theta)$$

- 在球面 $r = a$ 上, 电势应该连续, 即 $\phi_1(a, \theta) = \phi_2(a, \theta)$:

$$-E_0 a P_1(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{a^{n+1}} P_n(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n P_n(\cos \theta)$$

同时电位移矢量法向连续:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial r} = \epsilon \frac{\partial \phi_2}{\partial r}$$

此即

$$-E_0 P_1(\cos \theta) - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{b_n}{a^{n+2}} P_n(\cos \theta) = \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} n c_n a^{n-1} P_n(\cos \theta)$$

现在我们比较等号两边同一 $P_n(\cos \theta)$ 的系数, 得:

$$\begin{aligned} -E_0 a + \frac{b_1}{a^2} &= c_1 a \\ \frac{b_n}{a^{n+1}} &= c_n a^n \quad (n \neq 1) \\ -E_0 - \frac{2b_1}{a^3} &= \epsilon c_1 \\ -\frac{b_0}{a^2} &= 0 \\ -(n+1) \frac{b_n}{a^{n+2}} &= \epsilon n c_n a^{n-1} \quad (n > 1) \end{aligned}$$

从而解得当 $n \neq 1$ 时

$$b_n = c_n = 0$$

而 $n = 1$ 时

$$b_1 = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} E_0 a^3 \quad c_1 = -\frac{3}{\epsilon + 2} E_0$$

从而我们解得

$$\begin{aligned} \phi_1(r, \theta) &= -E_0 r P_1(\cos \theta) + \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} E_0 a^3 \frac{1}{r^2} P_1(\cos \theta) \\ \phi_2(r, \theta) &= -\frac{3}{\epsilon + 2} E_0 r P_1(\cos \theta) \end{aligned}$$

此时我们发现, 如果取 $\epsilon \rightarrow \infty$ 的极限, 那么便能得到接地导体球的情形:

$$\begin{aligned} \phi_1(r, \theta) &= -E_0 r \cos \theta + E_0 a^3 \frac{1 \cos \theta}{r^2} \\ \phi_2(r, \theta) &= 0 \end{aligned}$$

同时也可以算出介质球的电极化强度矢量为

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}_2 = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E}_2 = \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} E_0 \mathbf{e}_z$$

进而可以算出介质球的电偶极矩为

$$\mathbf{p} = \frac{4\pi}{3} a^3 \mathbf{P} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} E_0 a^3 \mathbf{e}_z$$

从而不难发现球外空间的电势其实就等于

$$\phi_1(\mathbf{r}) = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

进而对于这里的介质球情况, 我们可以将问题转化为下述情景: 在点

$\mathbf{r}_{\pm} = \pm b\mathbf{e}_z$ 处分别有点电荷 $\pm Q$ ，此时它对应着两个像电荷

$$q_{\pm} = \mp Q \frac{a}{b} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}$$

分别位于点

$$\mathbf{r}'_{\pm} = \pm \frac{a^2}{b} \mathbf{e}_z$$

下面我们令 $b \rightarrow \infty$ 的同时保持 $2Q/b^2 = E_0$ 不变便能得到待求的结果。对于导体球，球外空间电势为

$$\phi_1(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta$$

进而可以算出导体球表面电场强度的法向分量为

$$E_n = - \left. \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right|_{r=a} = 3E_0 \cos \theta$$

进而

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{4\pi} E_n(\theta) = \frac{3}{4\pi} E_0 \cos \theta$$

4. 设有一个均匀带电细圆环，半径为 a ，总电荷为 Q ，求它在空间中任意一点的静电势。

此时系统具有旋转各向同性，我们可以分别考虑 $r > a$ 与 $r < a$ 的情况。记两个区域分别为 1, 2，记通解为

$$\phi_1(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + b_l \frac{1}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

$$\phi_2(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(c_l r^l + d_l \frac{1}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

要求 $r \rightarrow 0$ 时 ϕ_2 非奇异，并且 $r \rightarrow \infty$ 时 ϕ_1 趋于零。从而

$$a_l = 0 \quad d_l = 0$$

于是

$$\phi_1(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad \phi_2(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l r^l P_l(\cos \theta)$$

现在考虑 $\theta = 0$ 的特殊情况，此时

$$\phi(r, 0) = \frac{Q}{\sqrt{a^2 + r^2}} = \frac{Q}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\pi/2)}}$$

于是 $r < a$ 时

$$\phi_2(r, 0) = \frac{Q}{a} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r}{a} \cos \frac{\pi}{2} + \left(\frac{r}{a}\right)^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{Q}{a^{l+1}} P_l(0) r^l$$

此即

$$c_l = \frac{Q}{a^{l+1}} P_l(0)$$

因为只有 l 为偶数时 $P_l(0) \neq 0$, 从而

$$\phi_2(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{Q}{a^{2l+1}} r^{2l} P_{2l}(0) P_{2l}(\cos \theta)$$

类似的, $r > a$ 时

$$\phi_1(r, 0) = \frac{Q}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{a}{r} \cos \frac{\pi}{2} + \left(\frac{a}{r}\right)^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{Q a^l}{r^{l+1}} P_l(0)$$

与上题同理, 仅有 l 的偶数项有贡献 (这实际上是因为系统对赤道面有镜像对称性, 从而电势为偶宇称, 因而参与构成电势的 Legendre 多项式也应该具有偶宇称), 因此

$$\phi_1 = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{Q}{r^{2l+1}} a^{2l} P_{2l}(0) P_{2l}(\cos \theta)$$

当然我们也可以暴力求解这个题, 此时电荷密度的分布函数为

$$\rho(r, \theta) = \frac{Q}{2\pi a^2} \delta(r - a) \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

并且根据边界条件, 我们知道 $r < a$ 的区域 1 和 $r > a$ 的区域 2 中势函数的形式分别为

$$\phi_1(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \quad \phi_2(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

一方面, $r = a$ 时电势连续, 从而 $\phi_1(a, \theta) = \phi_2(a, \theta)$, 因此

$$B_l = A_l a^{2l+1}$$

又因为

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{a-0}^{a+0} = -\frac{Q}{2\pi a^2} \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

并且

$$\delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(0) P_l(\cos \theta)$$

从而我们便能解出各个系数的值。

利用后面将要引入的球谐函数加法公式, 这个问题还可以这样求解: 记圆环上一点 $(a, \pi/2, \varphi')$ 到原点的径矢 \mathbf{r}' 与空间中考察点 (r, θ, φ) 的径矢 \mathbf{r} 之间的夹角为 γ , 显然我们有

$$\cos \gamma = \sin \theta \cos(\varphi - \varphi')$$

显然在 (r, θ, φ) 处的电势的积分表达式为

$$V(r, \theta, \varphi) = \frac{Q}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \gamma}}$$

在 $r > a$ 时这可以被展开为

$$V(r, \theta, \varphi) = \frac{Q}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^l P_l(\cos \gamma) d\varphi' = \frac{Q}{2\pi r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^l \int_0^{2\pi} P_l(\cos \gamma) d\varphi'$$

考虑到球谐函数的加法公式, 我们有

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{n=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} [Y_l^n]^* \left(\frac{\pi}{2}, \varphi'\right) Y_l^n(\theta, \varphi) = \sum_{n=-l}^l (-1)^n P_l^{-n}(0) P_l^n(\cos \theta) e^{in(\varphi-\varphi')}$$

进而

$$\int_0^{2\pi} P_l(\cos \gamma) d\varphi' = 2\pi P_l^0(0) P_l^0(\cos \theta)$$

进而

$$V(r, \theta, \varphi) = \frac{Q}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^l P_l(\cos \theta) P_l(0) = \frac{Q}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{2l} P_{2l}(0) P_{2l}(\cos \theta)$$

3.6.2 Laplace 方程在球坐标系中的通解; 连带 Legendre 多项式与球谐函数

$m \neq 0$ 时, Θ 所满足的方程为

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) \Theta = 0$$

这是连带 Legendre 方程。现在先令 $\Theta = (1-x^2)^{m/2} w$, 代入原方程便得

$$(1-x^2) \frac{d^2 w}{dx^2} - 2(m+1)x \frac{dw}{dx} + [\lambda - m(m+1)]w = 0$$

现在考虑 Legendre 方程

$$(1-x^2)u'' - 2xu' + \lambda u = 0$$

并考虑函数乘积的求导法则:

$$\frac{d^m}{dx^m} (fg) = \sum_{n=0}^m \frac{m!}{n!(m-n)!} \frac{d^n f}{dx^n} \frac{d^{m-n} g}{dx^{m-n}}$$

那么我们对 Legendre 方程求 m 阶导便能得到

$$(1-x^2) \frac{d^{m+2} u}{dx^{m+2}} - 2mx \frac{d^{m+1} u}{dx^{m+1}} - m(m-1) \frac{d^{m+1} u}{dx^{m+1}} - 2m \frac{d^m u}{dx^m} - 2x \frac{d^{m+1} u}{dx^{m+1}} + \lambda \frac{d^m u}{dx^m} = 0$$

整理便得到

$$(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{d^m u}{dx^m} \right] - 2(m+1)x \frac{d}{dx} \left[\frac{d^m u}{dx^m} \right] + [\lambda - m(m+1)] \frac{d^m u}{dx^m} = 0$$

这表明

$$w = \frac{d^m u}{dx^m}$$

进而我们知道, 取 $\lambda = l(l+1)$ 时连带 Legendre 方程的解为

$$(1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

但是我们希望解的字称只和 l 有关, 从而我们定义 (l, m) 阶连带 Legendre 多项式为

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

代入 Legendre 多项式的 Rodrigues 公式显然可得

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l$$

据此公式显然可得, 为了使 P_l^m 良定义, m 的取值范围应该为 $[-l, l]$ 间的整数。

根据推广的 Rodrigues 公式, 我们有

$$\begin{aligned} P_l^{-m}(x) &= \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{-m/2} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (x^2-1)^l \\ &= \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{1}{(1-x^2)^m} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (x^2-1)^l \\ &= (-1)^m \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{1}{(x^2-1)^m} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (x^2-1)^l \end{aligned}$$

注意

$$\begin{aligned} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (x^2-1)^l &= \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} [(x+1)^l (x-1)^l] \\ &= \sum_{n=0}^{l-m} \frac{(l-m)!}{n!(l-m-n)!} \frac{l!}{(l-n)!} \frac{l!}{(m+n)!} (x+1)^{l-n} (x-1)^{m+n} \end{aligned}$$

进而

$$\begin{aligned} P_l^{-m}(x) &= (-1)^m \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \sum_{n=0}^{l-m} \frac{(l-m)!(l!)^2}{n!(l-n)!(m+n)!(l-m-n)!} \frac{(x+1)^{l-n} (x-1)^{m+n}}{(x+1)^m (x-1)^m} \\ &= (-1)^m \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \sum_{n=0}^{l-m} \frac{(l-m)!(l!)^2}{n!(l-n)!(m+n)!(l-m-n)!} (x+1)^{l-n-m} (x-1)^n \end{aligned}$$

同时注意

$$\begin{aligned}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l &= \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}[(x+1)^l(x-1)^l] \\ &= \sum_{n=0}^{l+m} \frac{(l+m)!}{n!(l+m-n)!} \frac{l!}{(l-n)!} \frac{l!}{(n-m)!} (x+1)^{l-n}(x-1)^{n-m} \\ &= \sum_{n=m}^l \frac{(l+m)!(l!)^2}{n!(l+m-n)!(l-n)!(n-m)!} (x+1)^{l-n}(x-1)^{n-m}\end{aligned}$$

记 $k = n - m$, 那么

$$\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l = \sum_{k=0}^{l-m} \frac{(l+m)!(l!)^2}{k!(l-k)!(l-k-m)!} (x+1)^{l-k-m}(x-1)^k$$

可见

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$$

同时, 与 Legendre 多项式一样, 连带 Legendre 多项式也是区间 $[-1, 1]$ 上的正交函数族:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_k^m(x) dx &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^m P_l^{(m)}(x) P_k^{(m)}(x) dx \\ &= (-1)^m \int_{-1}^1 P_l(x) \frac{d^m}{dx^m} \left[(1-x^2)^m P_k^{(m)}(x) \right] dx\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}P_k(x) &= \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2-1)^k \\ &= \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{k!}{n!(k-n)!} x^{2k-2n} \\ &= \frac{1}{2^k} \sum_{n=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{1}{n!(k-n)!} \frac{(2k-2n)!}{(k-2n)!} x^{k-2n} \\ &= \frac{(2k)!}{2^k (k!)^2} x^k + \frac{1}{2^k} \sum_{n=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{(2k-2n)!}{n!(k-n)!(k-2n)!} x^{k-2n}\end{aligned}$$

从而

$$P_l^{(m)}(x) = \frac{(2k)!}{2^k k!(k-m)!} x^{k-m} + \frac{1}{2^k} \sum_{n=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{(2k-2n)!}{n!(k-n)!(k-2n-m)!} x^{k-2n-m}$$

考虑到

$$(1-x^2)^m = \sum_{r=0}^m (-1)^m \frac{m!}{r!(m-r)!} x^{2m-2r}$$

从而

$$(1-x^2)^m P_l^{(m)}(x) = (-1)^m \frac{(2k)!}{2^k k! (k-m)!} x^{k+m} + \dots$$

进而

$$\frac{d^m}{dx^m} \left[(1-x^2)^m P_k^{(m)}(x) \right] = (-1)^m \frac{(2k)!}{2^k (k!)^2} \frac{(k+m)!}{(k-m)!} x^k + \dots$$

从而将该式用 Legendre 多项式展开得到的最高阶项为 $P_k(x)$, 其系数为

$$(-1)^m \frac{(k+m)!}{(k-m)!}$$

若 $k \neq l$, 那么显然便有

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_k^m(x) dx = 0$$

而如果 $k = l$, 我们有

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_l^m(x) dx = \frac{(k+m)!}{(k-m)!} \int_{-1}^1 P_l(x) P_l(x) dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1}$$

于是

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_k^m(x) dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{kl}$$

现在回到最初分离变量的第一步, 我们得到的方程形式为

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r} R(r) Y(\theta, \varphi)$$

那么现在我们便可以定义球谐函数为

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

显然我们要求 $l \geq 0$ 与 $-l \leq m \leq l$ 。

球谐函数满足

$$\nabla_{\theta, \varphi}^2 Y_l^m(\theta, \varphi) = l(l+1) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

$$Y_l^{-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m [Y_l^m]^*(\theta, \varphi)$$

它是单位球面上的正交归一化函数族:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta [Y_l^m]^*(\theta, \varphi) Y_{l'}^{m'}(\theta, \varphi) d\theta = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

那么现在 Laplace 方程在球坐标下的通解便可以被写为

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

在给某一球面 $r = a$ 上的电势的边值问题中, 我们利用球谐函数的正交归一性便能确定各个系数 A_{lm}, B_{lm} 的值。下面我们来看一个有趣的例子:

考虑这样一个情形：平面 $z = 0$ 上的电势分布为

$$\phi(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1] \\ 0 & (x, y) \in \mathbb{R}^2 / [-1, 1] \times [-1, 1] \end{cases}$$

利用 Green 函数法不难算出空间中某点 (x, y, z) 处的电势为

$$\phi(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \int_{-1}^1 dy' \int_{-1}^1 \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{3/2}} dx'$$

我们可以换到球坐标系中并用 $1/r$ 对结果进行展开，经过一系列利用 Mathematica 的冗长复杂的计算，我们得到

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta, \varphi) = & \frac{4}{\sqrt{3}\pi} \frac{1}{r^2} Y_1^0(\theta, \varphi) - \frac{4}{\sqrt{7}\pi} \frac{1}{r^4} Y_3^0(\theta, \varphi) \\ & + \frac{1}{r^6} \left[\frac{14}{3\sqrt{11}\pi} Y_5^0(\theta, \varphi) - \sqrt{\frac{14}{55\pi}} (Y_5^4(\theta, \varphi) + Y_5^{-4}(\theta, \varphi)) \right] \\ & + \frac{1}{r^8} \left[-2\sqrt{\frac{3}{5\pi}} Y_7^0(\theta, \varphi) + \sqrt{\frac{22}{35\pi}} (Y_7^4(\theta, \varphi) + Y_7^{-4}(\theta, \varphi)) \right] \\ & + \dots \end{aligned}$$

有趣的地方在于展开式中的前两项是不依赖于 φ 的，而依赖于 φ 的项只有在不低于 $1/r^6$ 阶的项中才会出现。这实际上反映了系统的一个对称性：系统在绕 z 轴旋转 $\pi/2$ 的变换操作下是不变的，这意味着展开式里出现的 Y_l^m 的 m 要么为零，要么为 4 的倍数。因此，展开式中只有 $l \geq 4$ 的项才会表现出 φ 的依赖性。从而，展开式对 φ 的依赖性仅表现在 $1/r$ 的高阶项中也就不足为奇了。

3.6.3 球谐函数与球形边界的 Dirichlet Green 函数

首先，我们考虑位于 $(r', 0, 0)$ 处的单位点电荷产生的电势 $\phi(r, \theta)$ ，此时系统是不依赖于 φ 的：

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}}$$

如果 $r > r'$ ，那么我们有

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta) &= \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r} \cos \theta + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \end{aligned}$$

而如果 $r < r'$ ，用类似的方式便能得到

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r'^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

然而我们现在要考虑更加一般的情况：如果电荷位于点 (r', θ', φ') ，那么电势展开式应该具有怎样的形式呢？首先我们记 γ 为 \mathbf{r}, \mathbf{r}' 的夹角，那么

$$\cos \gamma = \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi') + \cos \theta \cos \theta'$$

同时，我们显然有

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}}$$

考虑到 Legendre 多项式的生成函数，我们便有

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \gamma) & r > r' \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r'^{l+1}} P_l(\cos \gamma) & r < r' \end{cases}$$

注意，其中的 γ 是一个和 θ, φ 有关的函数。与此同时我们知道这个解一定可以被展开为下述形式：

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{r^{l+1}} B_{lm}(r', \theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi) & r > r' \\ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l r^l A_{lm}(r', \theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi) & r < r' \end{cases}$$

现在我们的目标便是找到系数 A_{lm} 与 B_{lm} 。事实上，对于连带 Legendre 函数我们有加法公式：

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{n=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} [Y_l^n]^*(\theta', \varphi') Y_l^n(\theta, \varphi)$$

我们可以这样考虑这个等式的证明：在球坐标系中用分离变量法解 Laplace 方程

$$\nabla^2 V = 0$$

在 $V(0)$ 有界的条件下可以得到本征解为

$$V_{lm}(r, \theta, \varphi) = r^l Y_l^m(\theta, \varphi)$$

现在我们改变球坐标系的极轴，从 z 轴换到 \mathbf{r}' 方向上的 z' 轴，此时 Laplace 方程的形式不变而 γ 角取代了原来的 θ 角的地位。记此时取代 φ 地位的角

为 δ ，考虑到 r 在这个坐标变换下不变，我们有此时的本征解为

$$U_{lm}(r, \gamma, \delta) = r^l Y_l^m(\gamma, \delta)$$

由于球谐函数的完备性， U_{lm} 一定可以被 Y_{kn} 展开，从而我们记

$$r^l Y_l^m(\gamma, \delta) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=-k}^k A_{kn} r^k Y_k^n(\theta, \varphi)$$

比较 r 的幂次可得

$$A_{kn} = A_{ln} \delta_{kl}$$

进而我们现在有

$$\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \gamma) = Y_l^0(\gamma, \delta) = \sum_{n=-l}^l A_n Y_l^n(\theta, \varphi)$$

根据正交归一关系我们有

$$A_m = \int Y_l^0(\gamma, \delta) [Y_l^m]^*(\theta, \varphi) d\Omega$$

注意立体角元 $d\Omega$ 在坐标变换下不变，即

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi = \sin \gamma d\gamma d\delta$$

进而如果我们记

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \sum_{n=-l}^l B_n Y_l^n(\gamma, \theta)$$

那么

$$A_m = \int Y_l^0(\gamma, \delta) \sum_{n=-l}^l B_n^* [Y_l^n]^*(\gamma, \delta) d\Omega = B_0^*$$

当 $\gamma = 0$ 时 $\theta = 0, \varphi = \varphi'$ ，进而

$$Y_l^n(0, \delta) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{n0}$$

$$Y_l^m(\theta', \varphi') = B_0 \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$$

进而

$$B_0 = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_l^m(\theta', \varphi')$$

$$A_m = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} [Y_l^m]^*(\theta', \varphi')$$

于是

$$P_l(\cos \gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \sum_{n=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} [Y_l^n]^* (\theta', \varphi') Y_l^n(\theta, \varphi)$$

此即

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{n=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} [Y_l^n]^* (\theta', \varphi') Y_l^n(\theta, \varphi)$$

从而

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} [Y_l^m]^* (\theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi) & r > r' \\ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r^l}{r'^{l+1}} [Y_l^m]^* (\theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi) & r < r' \end{cases}$$

引入单位阶跃函数

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

那么展开式可以被写为

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \left[\eta(r-r') \frac{r'^l}{r^{l+1}} + \eta(r'-r) \frac{r^l}{r'^{l+1}} \right] [Y_l^m]^* (\theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi)$$

下面我们来看这一展开式和球形边界的 Dirichlet Green 函数的关系。注意，我们其实已经知道这个 Dirichlet Green 函数为

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{a/r'}{|\mathbf{r} - (a^2/r'^2)\mathbf{r}'|}$$

那么对于区域 $r > r'$ ，其展开式为

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \left[\frac{r'^l}{r^{l+1}} - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1} r'^{l+1}} \right] [Y_l^m]^* (\theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi)$$

对于区域 $r < r'$ ，其展开式为

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \left[\frac{r^l}{r'^{l+1}} - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1} r'^{l+1}} \right] [Y_l^m]^* (\theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi)$$

但是现在我们想换一种方式直接计算出这个展开式。首先我们需要一点 Sturm-Liouville 理论上的结论：定义算子

$$\hat{L} = p(x) \frac{d^2}{dx^2} + \frac{dp}{dx} \frac{d}{dx} + b(x)$$

我们考虑方程 $\hat{L}y(x) = 0$ 在 $[x_1, x_2]$ 上的解。如果 $u(x), v(x)$ 分别满足 x_1, x_2

处的边界条件且有

$$\hat{L}u(x) = 0 \quad \hat{L}u(y) = 0$$

那么这个微分方程的 Green 函数为

$$G(x, x') = \frac{u(x)v(x')\eta(x' - x) + u(x')v(x)\eta(x - x')}{p(x')W(u, v; x')}$$

其中 $W(u, v; x')$ 为 Wronskian 行列式:

$$W(u, v; x') = \begin{vmatrix} u(x') & v(x') \\ u'(x') & v'(x') \end{vmatrix} = u(x')v'(x') - u'(x')v(x')$$

我们将 Laplace 方程分离变量得到的“径向方程”为

$$\frac{d^2 R}{dr^2} = \frac{\lambda}{r^2} R$$

但是注意, 真正的径向函数为

$$\tilde{R} = \frac{R}{r}$$

从而真正的径向方程为

$$r^2 \frac{d^2 \tilde{R}}{dr^2} + 2r \frac{d\tilde{R}}{dr} - \lambda \tilde{R} = 0$$

于是此时

$$p(r) = r^2$$

并且方程的两个解

$$\tilde{R}(r) = r^l \quad \tilde{R}(r) = r^{-l-1}$$

分别满足 $r \rightarrow 0$ 与 $r \rightarrow \infty$ 的边界条件。进而

$$W(r^l, r'^{-l-1}; r') = -(l-1)r'^{-2} - lr'^{-2} = -(2l+1)r'^{-2}$$

于是

$$p(r')W(r^l, r'^{-l-1}; r') = -(2l+1)$$

进而 Green 函数的径向部分为

$$g(r, r') = -\frac{1}{2l+1} \left[\frac{r^l}{r'^{l+1}} \eta(r' - r) + \frac{r'^l}{r^{l+1}} \eta(r - r') \right]$$

另一方面, 我们有

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [Y_l^m]^*(\theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sin \theta'} \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi')$$

于是可得

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \left[\frac{r^l}{r'^{l+1}} \eta(r' - r) + \frac{r'^l}{r^{l+1}} \eta(r - r') \right] [Y_l^m]^*(\theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi)$$

而这其实就是 $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 用球谐函数展开得到的展开式。如果我们进一步要求 Dirichlet Green 函数满足的边界条件

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')_{r' > r=a} = 0 \quad G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')_{r > r'=a} = 0$$

那么我们能做如下代换：

$$\frac{r^l}{r'^{l+1}} \rightarrow \frac{r^l}{r'^{l+1}} - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1} r^{l+1}} \quad \frac{r'^l}{r^{l+1}} \rightarrow \frac{r'^l}{r^{l+1}} - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1} r^{l+1}}$$

进而得到

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \left[\eta(r' - r) \left(\frac{r^l}{r'^{l+1}} - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1} r^{l+1}} \right) + \eta(r - r') \left(\frac{r'^l}{r^{l+1}} - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1} r^{l+1}} \right) \right] [Y_l^m]^*(\theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi)$$

这正是用电像法构造出的 Dirichlet Green 函数在球谐函数下的展开式。

如果我们有了 Dirichlet Green 函数，那么空间中任意一点 \mathbf{r} 处的电势便等于

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \phi(\mathbf{r}') \nabla' G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}'$$

利用展开式我们可以比较轻松地算出 $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 的法向导数（为方便起见，仅考虑区域 $r' \geq a$ ）：

$$-\frac{\partial G_D}{\partial r'} \Big|_{r'=a} = -\frac{4\pi}{a^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} [Y_l^m]^*(\theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi)$$

因而如果假设空间中没有电荷分布，即 $\rho(\mathbf{r}') = 0$ ，那么

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[\int \phi(a, \theta', \varphi') [Y_l^m]^*(\theta', \varphi') d\Omega' \right] \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} Y_l^m(\theta, \varphi)$$

3.7 多极展开

多极展开可以将定域电荷分布在某一点产生的电势表示为一个级数，而级数中的各项依次正比于电荷分布的总电荷、偶极矩、四极矩、八极矩等等。

3.7.1 笛卡尔系中的多极展开

考虑由 N 个分别位于点 \mathbf{r}_α 的点电荷 q_α 在 \mathbf{r} 处产生的电势，显然这个表达式可以写成

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{q_\alpha}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|}$$

如果这些电荷是一个连续的体分布，那么此时我们只需要把求和过渡为积分：

$$\phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$$

由于我们假设电荷定域在某个有限大小的区域中，从而我们可以考虑将上式用考察的点到原点的距离的倒数 $1/r$ ，这样对于足够远的点我们只需要考察展开式中的前几项就能得到很好的电势近似值。而我们现在要做的实际上就是想办法把 $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 展开为 $1/r$ 的 Taylor 级数。

众所周知，一元函数的 Taylor 公式为

$$f(a+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) x^n$$

这推广到多元函数便是

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{r}) = f(\mathbf{a}) + r^i \partial_i f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2!} r^i r^j \partial_i \partial_j f(\mathbf{a}) + \frac{1}{3!} r^i r^j r^k \partial_i \partial_j \partial_k f(\mathbf{a}) + \dots$$

进而如果我们记 \mathbf{r}' 的各个分量为 x'^i ，那么 $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 可以被展开为

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} - x'^i \partial_i \frac{1}{r} + \frac{1}{2!} x'^i x'^j \partial_i \partial_j \frac{1}{r} - \frac{1}{3!} x'^i x'^j x'^k \partial_i \partial_j \partial_k \frac{1}{r} + \dots$$

因为 $r^2 = x^i x_i$ ，进而

$$\partial_i r = \frac{x_i}{r}$$

而在 $r \neq 0$ 时我们有

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \partial^i \partial_i \frac{1}{r} = -\partial^i \frac{x_i}{r^3} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3x_i x^i}{r^3} = 0$$

因而对于下述张量

$$\partial_i \partial_j \frac{1}{r}, \quad \partial_i \partial_j \partial_k \frac{1}{r}, \quad \partial_i \partial_j \partial_k \partial_l \frac{1}{r}$$

我们缩并其任意两个指标得到的结果都将是零。于是为了简化后面的计算, 我们可以将张量 $x^i x'^j, x^i x'^j x'^k$ 等等约化为无迹张量而不对最终结果产生任何影响:

$$x^i x'^j - \frac{1}{3} \delta^{ij} r'^2 \quad x^i x'^j x'^k - \frac{1}{5} (x^i \delta^{jk} + x'^j \delta^{ik} + x'^k \delta^{ij}) r'^2 \quad \dots$$

其中 $r'^2 = x^i x'_i$ 。我们在这里可以将原来的张量化为无迹张量是因为它的迹同 $\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} (1/r)$ 缩并得到的结果为零。进而我们可以将展开式写为

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{r} - p^i \partial_i \frac{1}{r} + \frac{1}{3} \frac{1}{2!} Q^{ij} \partial_i \partial_j \frac{1}{r} - \frac{1}{5} \frac{1}{3!} Q^{ijk} \partial_i \partial_j \partial_k \frac{1}{r} + \dots$$

。其中 Q, p^i, Q^{ij}, Q^{ijk} 为总电荷、偶极矩、四极矩、八极矩, 其定义为

$$Q = \int \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'$$

$$p^i = \int x^i \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'$$

$$Q^{ij} = \int (3x^i x'^j - \delta^{ij} r'^2) \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'$$

$$Q^{ijk} = \int [5x^i x'^j x'^k - (x^i \delta^{jk} + x'^j \delta^{ik} + x'^k \delta^{ij}) r'^2] \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'$$

根据构造方式可以看出, 大于等于二阶的多极张量都是对称无迹的。

显然多极展开中的各阶项分别与 r 的某一幂次成反比。例如, 偶极项为

$$\phi_{dipole}(r) = -p^i \partial_i \frac{1}{r} = \frac{p^i x_i}{r^3} = \frac{p^i n_i}{r^2}$$

它与 r 成平方反比, 其中 $n_i = x_i/r$ 为 \mathbf{r} 方向单位矢量的分量。电四极项则为

$$\phi_{quadrupole} = \frac{1}{6} Q^{ij} \partial_i \partial_j \frac{1}{r} = \frac{1}{6} Q^{ij} \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} = \frac{1}{2} Q^{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} = \frac{1}{2} Q^{ij} \frac{n_i n_j}{r^3}$$

它与 r 则成立立方反比。

总而言之, 定域电荷分布产生电势的多极展开形式为

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{Q^{ij} n_i n_j}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{Q^{ijk} n_i n_j n_k}{r^4} + \dots$$

众所周知, 电单极子产生的电场为

$$\mathbf{E}_{monopole} = \frac{Q}{r^3} \mathbf{r} = \frac{Q}{r^2} \mathbf{n}$$

它与 r 呈平方反比关系。对于偶极子而言, 我们可以算出其产生的电场为

$$\begin{aligned} E_i &= -\partial_i \phi_{dipole}(\mathbf{r}) = -\partial_i \frac{p^j x_j}{r^3} \\ &= -\frac{p^j j \delta_{ij}}{r^3} + \frac{3p^j x_j x_i}{r^5} = \frac{3p^j n_j n_i - p^j \delta_{ij}}{r^3} \end{aligned}$$

可见它和距离呈立方反比。

总电荷(电单极矩)显然只是一个数。偶极矩是一个三维的矢量, 从而一

般上它有三个独立的分量。四极矩 Q^{ij} 是一个对称的二阶无迹张量, 进而三维空间中它有五个独立的分量。八极矩是对称三阶无迹张量, 进而它有七个独立分量。一般而言, 三维空间里 2^l 极矩的独立分量数为 $C_{l+2}^l - C_l^2 = 2l + 1$ 。其中 C_{l+2}^l 给出了三维 l 阶对称张量的独立分量数, 而 C_l^2 给出了迹的取法数目。

3.7.2 使用球谐函数的多极展开

事实上电势的多极展开等价于在球坐标系中使用球谐函数 $Y_l^m(\theta, \varphi)$ 对势函数进行展开:

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} Y_l^m(\theta, \varphi)$$

可以看到, l 等于某一定值的项产生的电势与距离的 $(l+1)$ 次方成反比衰减并且有 $(2l+1)$ 重简并。事实上对于每一个定值 l , $(2l+1)$ 个系数 B_{lm} 与该阶电多极矩的 $(2l+1)$ 个分量之间有着线性的对应关系。类似的, 对于给定的 l 而言各个 $r^{-l-1} Y_l^m(\theta, \varphi)$ 与各个 $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_l}(1/r)$ 之间也有线性的对应关系。

例如, 对于 $l=1$ 的项而言三个函数 $Z_i = \partial_{i_i}(1/r) = -x_i/r^3$ 在球坐标系中为

$$Z_1 = -\frac{\sin \theta \cos \varphi}{r^2} \quad Z_2 = -\frac{\sin \theta \sin \varphi}{r^2} \quad Z_3 = -\frac{\cos \theta}{r^2}$$

另一方面, $l=1$ 的三个球谐函数为

$$\begin{cases} Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi} \\ Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \\ Y_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi} \end{cases}$$

进而

$$\begin{cases} Z_1 = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{Y_1^1 - Y_1^{-1}}{2r^2} \\ Z_2 = -\sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{Y_1^1 + Y_1^{-1}}{2ir^2} \\ Z_3 = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{Y_1^0}{r^2} \end{cases}$$

事实上，考虑到展开式

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} [Y_l^m]^*(\theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi)$$

我们能直接做下述展开：

$$\phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{q_{lm}}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_l^m(\theta, \varphi)$$

其中

$$q_{lm} = \int \rho(\mathbf{r}') r'^l [Y_l^m]^*(\theta', \varphi') d^3\mathbf{r}'$$

考虑到球谐函数的性质

$$[Y_l^m]^*(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_l^m(\theta, \varphi)$$

我们显然有

$$q_{lm}^* = (-1)^m q_{l,-m}$$

进而我们可以看出，对于给定的 l 而言各个 q_{lm} 总共编码了 $(2l+1)$ 个实数，而这个数刚好等于 l 阶多极矩张量 $Q_{i_1 \dots i_l}$ 的独立分量数。使用前几阶球谐函数的表达式，我们可以看出 $l=0, 1, 2$ 的 q_{lm} 对应着 Q, p^i 与 Q^{ij} ：

$$\begin{aligned} q_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} Q \\ q_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_1 - ip_2) \\ q_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_3 \\ q_{22} &= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (Q_{11} - Q_{22} - 2iQ_{12}) \\ q_{21} &= -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (Q_{13} - iQ_{23}) \\ q_{20} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} Q_{23} \end{aligned}$$

根据 $q_{l,-m} = (-1)^m q_{lm}^*$ 便能依据上面的式子得到其他项。对于其它 q_{lm} 而言我们的计算方法与之完全相同。

3.7.3 外场中能量的多极展开

定域电荷分布的静电相互作用能为

$$U_{internal} = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$$

这个式子给出的是电荷分布与自身产生的静电场相互作用而具有的相互作用能。存在因子 1/2 是因为积分中将每对电荷间的相互作用都算了两次。

现在我们要改变一下问题，转而研究电荷分布与外加静电场之间的相互作用能。如果我们记这个外加静电场产生的电势为 $\Phi(\mathbf{r})$ ，那么电荷分布与这个场的相互作用能便直接由下述积分给出：

$$U_{external} = \int \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$$

假设外电场 $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ 由很远处的源产生，从而我们可以在存在电荷分布的地方取 $\nabla^2\Phi = 0$ 。选择坐标系的原点位于定域电荷分布附近并假设外场电势 Φ 在该区域中是 \mathbf{r} 的缓变函数，那么我们可以把 $\Phi(\mathbf{r})$ 展开为 Taylor 级数并得到

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(0) + x^i \partial_i \Phi(0) + \frac{1}{2} x^i x^j \partial_i \partial_j \Phi(0) + \dots$$

上述展开式中 $\partial_i \Phi(0)$ 诸项代表如 $\partial_i \Phi(\mathbf{r})$ 诸项在 $\mathbf{r} = 0$ 处的取值。利用电场的表达式上式还能被写为

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(0) - x^i E_i(0) - \frac{1}{2} x^i x^j \partial_i E_j(0) + \dots$$

由于我们假设在所考虑的区域中外电场无源，从而 $\partial_i E_i = 0$ 并且采取和前面引入电多极矩时相似的方法，我们可以把上式写为

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(0) - x^i E_i(0) - \frac{1}{6} (3x^i x^j - \delta^{ij} r^2) \partial_i E_j + \dots$$

和前面的原因一样，我们构造无迹电多极张量主要是为了方便计算。

现在我们又可以引入多极矩的定义了。如果把上面的展开式插入到 $U_{external}$ 的表达式中，我们有

$$U_{external} = Q\Phi(0) - p^i E_i(0) - \frac{1}{6} Q^{ij} \partial_i E_j(0) + \dots$$

第一项便是我们熟知的点电荷和静电场的相互作用能。第二项用矢量内积写出来便是 $-\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ ，这反映了偶极子和电场的相互作用。第三个和电场梯度有关的项反映了四极子和电场的相互作用能。事实上，高阶电多极矩与电场的相互作用能与电场的高阶导数直接相关。

作为这个展开的应用，我们下面可以来计算一对偶极子 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 的相互作用能，假设二者的位置分别为 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ ，那么我们知道 \mathbf{r}_2 处的 \mathbf{p}_2 在 \mathbf{r}_1 处产生

的电场为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_1) = \frac{3(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{p}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$$

于是偶极-偶极相互作用能为

$$U_{12} = -\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_1) = \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{n})}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$$

可见这个表达式对 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 而言是完全对称的。我们可以考虑两个特例：其一是 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 平行且与 \mathbf{n} 垂直，那么

$$U_{12} = \frac{p_1 p_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} > 0$$

这表明同向的偶极子相斥。如果 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{n}$ 三者平行，那么显然此时的相互作用能为

$$U_{12} = -2 \frac{p_1 p_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} < 0$$

这表明此时偶极子之间互相吸引。从而我们发现偶极相互作用是高度各向异性的；对于一个偶极系统我们可以通过控制它在外场中的极化来调制它和外场相互作用的程度。这一性质有很多有趣的应用。

3.7.4 Van der Waals 相互作用

不考虑相互作用的情况下介质中位于基态的各个原子之间不存在偶极相互作用。但是量子场论表明电磁场的基态仍然有涨落和零点能，进而电子和电磁场的耦合会让原本基态的原子受到微扰并有一定概率自发跃迁到轨道角动量较高的态且自发产生电偶极矩。一旦有一个原子这样产生了偶极矩，那么其他原子会受这个偶极矩电场的影响而产生诱导偶极矩。进而介质中的各个原子之间将产生偶极相互作用并带来 Van der Waals 力。

简便起见我们下面只考虑两个原子之间的相互作用且考虑线性介质。

记原子 1 自发产生的电偶极矩为 \mathbf{d}_1^{sp} ，那么这个自发产生的偶极矩带来的电场在原子 2 处的值为

$$\mathbf{E}_1^{sp}(\mathbf{r}) = \frac{3(\mathbf{d}_1^{sp} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{d}_1^{sp}}{|\mathbf{r}_{12}|^3}$$

这个电场会让原子 2 产生诱导偶极矩，对于线性介质而言这个诱导偶极矩和外加电场在频域上有简单的线性关系：

$$\mathbf{d}_2^{in} = \alpha_2(\omega) \mathbf{E}_1^{sp}(\mathbf{r}_2)$$

于是两个偶极子之间的相互作用能便为

$$V_1(\mathbf{r}_{12}) = -\frac{1}{2} \mathbf{d}_2^{in} \cdot \mathbf{E}_1^{sp}(\mathbf{r}_2) = -\frac{1}{2} \alpha_2(\omega) |\mathbf{E}_1^{sp}(\mathbf{r}_2)|^2$$

与此同时, 原子 2 存在独立于诱导偶极矩的自发涨落偶极矩, 进而我们可以类似的写出它对 1 的影响带来的相互作用能:

$$V_2(\mathbf{r}_{21}) = -\frac{1}{2} \mathbf{d}_1^{in} \cdot \mathbf{E}_2^{sp}(\mathbf{r}_1) = -\frac{1}{2} \alpha_1(\omega) |\mathbf{E}_2^{sp}(\mathbf{r}_1)|^2$$

总相互作用能便为

$$V = V_1(\mathbf{r}_{12}) + V_2(\mathbf{r}_{21}) = -\frac{\alpha_1(\omega) |\mathbf{E}_2^{sp}(\mathbf{r}_1)|^2 + \alpha_2(\omega) |\mathbf{E}_1^{sp}(\mathbf{r}_2)|^2}{2}$$

由于量子涨落是随机的, 从而自发涨落出的偶极矩的方向、大小都是不定的, 我们可观察到的作用能实际上是在态中的一个平均值。进而

$$\begin{aligned} V &= -\frac{\alpha_1(\omega) \langle |\mathbf{E}_2^{sp}(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle + \alpha_2(\omega) \langle |\mathbf{E}_1^{sp}(\mathbf{r}_2)|^2 \rangle}{2} \\ \langle |\mathbf{E}_1^{sp}(\mathbf{r}_2)|^2 \rangle &= \frac{1}{r^6} \left[9 \langle |\mathbf{d}_1^{sp} \cdot \mathbf{n}|^2 \rangle + \langle |\mathbf{d}_1^{sp}|^2 \rangle - 6 \langle |\mathbf{d}_1^{sp} \cdot \mathbf{n}|^2 \rangle \right] \\ &= \frac{1}{r^6} \left[3 \langle |\mathbf{d}_1^{sp} \cdot \mathbf{n}|^2 \rangle + \langle |\mathbf{d}_1^{sp}|^2 \rangle \right] \end{aligned}$$

假设介质各向同性, 那么

$$\langle |\mathbf{d}_1^{sp} \cdot \mathbf{n}|^2 \rangle = \langle d_n^2 \rangle = \langle d_z^2 \rangle \quad \langle |\mathbf{d}|^2 \rangle = 3 \langle d_z^2 \rangle$$

于是

$$\langle |\mathbf{E}_1^{sp}(\mathbf{r}_2)|^2 \rangle = \frac{6}{r^6} \langle d_{1z}^2 \rangle$$

进而

$$V = -\frac{3}{r_{12}^6} [\alpha_2(\omega) \langle d_{1z}^2 \rangle + \alpha_1(\omega) \langle d_{2z}^2 \rangle]$$

涨落耗散定理表明涨落和耗散直接相关。考虑到电极化率的虚部与耗散有关, 我们便能根据这个定理给我们的直观来理解下述量子统计给出的结果:

$$\langle d_{1z(sp)}^2 \rangle = \hbar \operatorname{Im}\{\alpha_1(\omega)\} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \quad \langle d_{2z(sp)}^2 \rangle = \hbar \operatorname{Im}\{\alpha_2(\omega)\} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right)$$

考虑到各个频率电磁波的贡献, 我们进而有

$$V = -\frac{3}{r^6} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} [\hbar \operatorname{Im}\{\alpha_1(\omega)\} \alpha_2(\omega) + \hbar \operatorname{Im}\{\alpha_2(\omega)\} \alpha_1(\omega)] \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right)$$

频域上的 $\alpha(\omega)$ 一般是一个复数, 但是时域上的 $\alpha(t)$ 是一个实数, 这意味着下述 Fourier 变换的结果应当为实数:

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \alpha(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

取其复共轭便有

$$\alpha^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \alpha^*(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

两式相减给出

$$\int \alpha(\omega) e^{i\omega t} d\omega - \int \alpha^*(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = 0$$

对于第一个积分, 换元 $\omega \rightarrow -\omega$ 并整理后不难发现它等价于

$$\int \alpha(-\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

进而我们有

$$\int [\alpha(-\omega) - \alpha^*(\omega)] e^{-i\omega t} d\omega = 0$$

这意味着

$$\alpha(-\omega) = \alpha^*(\omega)$$

从而

$$\operatorname{Re}\{\alpha(-\omega)\} = \operatorname{Re}\{\alpha(\omega)\} \quad \operatorname{Im}\{\alpha(-\omega)\} = -\operatorname{Im}\{\alpha(\omega)\}$$

进而各个电极化率函数的实部都是偶函数、虚部都是奇函数。考虑到双曲正切函数是奇函数, 从而上式在实轴上的积分可以化为

$$\begin{aligned} V &= -\frac{3}{r^6} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} [\hbar \operatorname{Im}\{\alpha_1(\omega)\} \operatorname{Re}\{\alpha_2(\omega)\} + \hbar \operatorname{Im}\{\alpha_2(\omega)\} \operatorname{Re}\{\alpha_1(\omega)\}] \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \\ &= -\frac{3\hbar}{r^6} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \operatorname{Im}\{\alpha_1(\omega)\alpha_2(\omega)\} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \end{aligned}$$

取低温近似 $k_B T \ll \hbar\omega$, 此时

$$\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \simeq \operatorname{sgn}(\omega)$$

根据 2.1.4 节中的经典谐振子模型, 我们有

$$\mathbf{p} = \frac{e^2}{m} \frac{\mathbf{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$$

进而记粒子数密度为 N , 则

$$\alpha(\omega) = \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$$

假设电磁波中电场矢量在 z 方向上振动, 我们利用含时微扰论得到的更精确的结果为

$$\alpha(\omega) = \sum_n \frac{e^2}{m} \frac{f_{0n}}{\omega_{0n}^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$$

其中 f_{0n} 为微扰在基态 $|\phi_0\rangle$ 与态 $|\phi_n\rangle$ 之间的矩阵元，表达式为

$$f_{0n} = \frac{2m}{\hbar} \omega_{0n} \sum_i |\langle \phi_0 | Z_i | \phi_n \rangle|^2$$

其中 Z_i 是第 i 个电子的 z 坐标算符， ω_{0n} 为 $|\phi_0\rangle$ ， $|\phi_n\rangle$ 两态对应的 Bohr 频率。进而此时

$$\begin{aligned} V &= -\frac{3\hbar}{r^6} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \operatorname{Im} \sum_{n,n'} \frac{e^4 f_{0n} f_{0n'} \operatorname{sgn}(\omega)}{m^2 [(\omega_{0n} + \omega)(\omega_{0n} - \omega) + i\gamma\omega][(\omega_{0n'} + \omega)(\omega_{0n'} - \omega) + i\gamma\omega]} \\ &= -\frac{3\hbar}{r^6} \times \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \sum_{n,n'} \frac{e^4 f_{0n} f_{0n'}}{m^2 \left(\sqrt{\omega_{0n}^2 - \frac{1}{4}\gamma^2} + \omega - \frac{\gamma}{2} \right) \left(\sqrt{\omega_{0n}^2 - \frac{1}{4}\gamma^2} - \omega + \frac{\gamma}{2} \right)} \\ &\quad \times \frac{1}{\left(\sqrt{\omega_{0n'}^2 - \frac{1}{4}\gamma^2} + \omega - \frac{\gamma}{2} \right) \left(\sqrt{\omega_{0n'}^2 - \frac{1}{4}\gamma^2} - \omega + \frac{\gamma}{2} \right)} \\ &= -\frac{3\hbar e^4}{m^2 r^6} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \sum_{n,n'} f_{0n} f_{0n'} \frac{1}{\left(\sqrt{\omega_{0n}^2 - \frac{1}{4}\gamma^2} + \omega - \frac{\gamma}{2} \right) \left(-\sqrt{\omega_{0n}^2 - \frac{1}{4}\gamma^2} + \omega - \frac{\gamma}{2} \right)} \times \\ &\quad \frac{1}{\left(\sqrt{\omega_{0n'}^2 - \frac{1}{4}\gamma^2} + \omega - \frac{\gamma}{2} \right) \left(-\sqrt{\omega_{0n'}^2 - \frac{1}{4}\gamma^2} + \omega - \frac{\gamma}{2} \right)} \end{aligned}$$

利用留数定理并取极限

$$\frac{\gamma}{\omega_{0n'}} \rightarrow 0$$

我们便得到

$$\begin{aligned} V &= \frac{3\hbar e^4}{m^2 r^6} \sum_{n,n'} f_{0n} f_{0n'} \left[\frac{1}{2\omega_{0n}} \frac{1}{\omega_{0n} - \omega_{0n'}} \frac{1}{\omega_{0n} + \omega_{0n'}} + \frac{1}{2\omega_{0n}} \frac{1}{\omega_{0n} + \omega_{0n'}} \frac{1}{\omega_{0n} - \omega_{0n'}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\omega_{0n} - \omega_{0n'}} \frac{1}{\omega_{0n} + \omega_{0n'}} \frac{1}{2\omega_{0n'}} + \frac{-1}{\omega_{0n} - \omega_{0n'}} \frac{1}{\omega_{0n} + \omega_{0n'}} \frac{1}{2\omega_{0n'}} \right] \\ &= \frac{3\hbar e^4}{m^2 r^6} \sum_{n,n'} f_{0n} f_{0n'} \left[\frac{1}{\omega_{0n}(\omega_{0n} + \omega_{0n'})(\omega_{0n} - \omega_{0n'})} - \frac{1}{\omega_{0n'}(\omega_{0n} + \omega_{0n'})(\omega_{0n} - \omega_{0n'})} \right] \\ &= -\frac{3\hbar e^4}{m^2 r^6} \sum_{n,n'} f_{0n} f_{0n'} \frac{1}{\omega_{0n} \omega_{0n'} (\omega_{0n} + \omega_{0n'})} \\ &= -\frac{12e^4}{\hbar r^6} \sum_{n,n'} \sum_{i,j} \frac{|\langle \phi_0 | Z_i | \phi_n \rangle|^2 |\langle \phi_0 | Z_j | \phi_{n'} \rangle|^2}{\omega_{0n} + \omega_{0n'}} \end{aligned}$$

可见 Van der Waals 力对应的势能和距离的六次方成反比。取其负梯度我们

便能得知 Van der Waals 力表现为吸引力，并且和距离的七次方成反比。

在以上推导中我们假设电磁相互作用是超距的。如果考虑到光速有限带来的效应，我们会发现此时相互作用能与距离的七次方成反比，对应的力和距离的八次方成反比。

第 4 章 静磁

4.1 Biot-Savart 定律

历史上 Biot-Savart 定律是根据实验结果总结出来的，在这个定律提出后才有的 Maxwell 方程组。但是我们现在可以使用 Maxwell 方程组导出 Biot-Savart 定律。

根据 Maxwell 方程组，我们发现仅存在磁场和电流时仅有的两个非平凡的方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

磁场的散度为零暗示我们可以将其写为一个矢势 \mathbf{A} 的旋度，即

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

我们在第二章中曾看到，矢势的选取不是唯一的：我们可以取任意关于位置 \mathbf{r} 的光滑函数 λ 并做如下规范变换：

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \lambda$$

不难验证我们在静磁问题中利用的两个方程在这个规范变换下不变。

利用规范不变性，我们可以人为选取一个适用于静磁问题的规范条件：Coulomb 规范

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

这个规范条件是合理的：假设我们一开始使用的是任意一个非 Coulomb 规范的规范势 $\tilde{\mathbf{A}}$ ，那么我们可以做规范变换并记

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}} + \nabla \lambda$$

为了使 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ，我们只需要

$$\nabla^2 \lambda = -\nabla \cdot \tilde{\mathbf{A}}$$

这个 Poisson 方程总是有解的。事实上我们在静电中处理的问题就是解 Poisson 方程

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho$$

这个方程的解显然是

$$\phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$$

两个 Poisson 方程的形式是完全一样的，进而把 $\rho(\mathbf{r}')$ 换成 $\nabla' \cdot \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}')$ 后我们可以立即写出 Coulomb 规范变换使用的函数 λ 应该为

$$\lambda(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \cdot \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$$

因而我们可以自如地使用 Coulomb 规范条件而不必担心这个条件会产生过度约束。

下面我们可以始终假设 \mathbf{A} 是 Coulomb 规范下的矢势。考虑到

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \varepsilon_i^{jk} \partial_j \varepsilon_k^{mn} \partial_m A_n dx^i \\ &= (\delta_i^m \delta^{jn} - \delta_i^n \delta^{jm}) \partial_j \partial_m A_n dx^i \\ &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A} \end{aligned}$$

以及

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

我们有

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

我们又能立马解出这个方程：写成三维欧氏空间笛卡尔系中的分量后我们得到的其实就是三个 Poisson 方程。于是其解为

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$$

对这个式子取旋度后便能得到磁场 \mathbf{B} 。注意到对于一个标量场 f 和一个矢量场 \mathbf{v} ，我们有

$$\begin{aligned} \nabla \times (f\mathbf{v}) &= \varepsilon^{ij}_k \partial_j (f v^k) \partial_i \\ &= \varepsilon^{ij}_k \left(\partial_i f v^k + f \partial_j v^k \right) \partial_i \\ &= (\nabla f) \times \mathbf{v} + f \nabla \times \mathbf{v} \end{aligned}$$

进而对 \mathbf{A} 取和 \mathbf{r} 相关的旋度便能得到

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c} \nabla \times \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \\ &= \frac{1}{c} \int \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \\ &= -\frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \\ &= \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' \end{aligned}$$

下面我们考虑一个无穷小电流元 $I d\mathbf{l}$ 与其产生的磁场 $d\mathbf{B}$ ，其中 I 为电流而 $d\mathbf{l}$ 为指向电流方向的无穷小线元。不失一般性地，我们记这一小段载

流细导线上各点的径矢为 \mathbf{r}_l ，从而此时利用 δ -函数可以将电流密度写为

$$d\mathbf{J}(\mathbf{r}) = I\delta_2^\perp(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l)\hat{\mathbf{e}}_l$$

脚标“2”表明这是三维空间内的二维 δ -函数；上标“ \perp ”表明这个函数定义的区域是和 $d\mathbf{l}$ 正交的平面； $\hat{\mathbf{e}}_l$ 是沿着 $d\mathbf{l}$ 方向的单位矢量。这也就是说，电流密度在除了沿着无穷小线元以外的地方都为零。将其代入 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 的积分式中并在和 $d\mathbf{l}$ 正交的平面上积分，我们便得到

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \frac{I d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_l)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_l|^3}$$

方便起见，我们将相对位矢 $\mathbf{r} - \mathbf{r}_l$ 记为 \mathbf{r} ，那么原式可以被写为

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I}{c} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

这便是 Biot-Savart 定律。我们可以对一个载流环形线圈的一段线元应用这个定理，将上式沿着这个环积分便能得到这个线圈产生的磁场。

如果一个电荷量为 q 的点电荷以速度 \mathbf{v} 运动，那么我们便可以将其视为电流。假设在某一瞬时电荷位于原点处，那么它对应的电流密度便为

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = q\mathbf{v}\delta(\mathbf{r})$$

进而我们可以算出运动电荷产生的磁场为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{q}{c} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2}$$

注意这里的 \mathbf{r} 指的是相对运动电荷的位置矢量。不过注意这里得到的结果并没有考虑光速有限的相对论效应，即仅适用于 \mathbf{v} 很小的情况。

4.2 Ampère 定律

假设电流元 $I_1 d\mathbf{l}_1$ 被放到了磁场 \mathbf{B} 中，Ampère 在十九世纪的实验表明电流元受到的力为

$$d\mathbf{F} = \frac{I_1}{c} d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{B}$$

如果磁场本身由一段无限小电流元 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 产生，那么第一个无穷小电流元受到的力元为

$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

其中 $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ 。将这个式子沿着两个环路积分，我们便得到两个线圈间的相互作用力：

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint \oint \frac{d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

考虑到

$$d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}_{12}) = (d\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{r}_{12})d\mathbf{l}_2 - (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)\mathbf{r}_{12}$$

那么我们有

$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2} d\mathbf{l}_2 \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} - \frac{I_1 I_2}{c^2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12}$$

如果我们仅考虑对环路 1 的积分，那么上式的第一项可以被写为一个正合形式：

$$-\frac{I_1 I_2}{c^2} d\mathbf{l}_2 d\left(\frac{1}{r_{12}}\right)$$

进而积分得到的结果为零。于是我们得到了相互作用力的另一个表达式：

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{I_1 I_2}{c^2} \oint \oint \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12}$$

此时我们显然可以看出相互作用力对两个线圈而言完全是对称的。

我们可以将对电流元写出的 Ampère 定律推广应用到磁场中的电流密度。那么此时力元的表达式便为

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{c} \mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$$

于是电流分布带来的合力便为

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$$

同时，体元 $d^3\mathbf{r}$ 内的电流密度在磁场中产生的相对原点的力矩元为

$$d\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = \frac{1}{c} \mathbf{r} \times [\mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})] d^3\mathbf{r}$$

进而总力矩便为

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{c} \int \mathbf{r} \times [\mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})] d^3\mathbf{r}$$

Ampère 定律还能被应用到带电 q 的粒子以速度 \mathbf{v} 运动在磁场 \mathbf{B} 中的情况。我们记电荷在某一时刻的位置为 \mathbf{r}_q ，那么此时全空间电流密度分布便可以写为

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = q\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q)$$

考虑

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{c} \mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$$

我们便有

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c} \int \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q) d^3\mathbf{r} = \frac{1}{c} q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_q)$$

这便为 Lorentz 力公式。不过我们这里还是没有考虑相对论效应，因而只适

用于 \mathbf{v} 远小于光速的情况。

4.3 磁介质与边界条件

我们曾在静电学中唯象地描述了电介质，当时我们在基本的电场 \mathbf{E} 之外又引入了一个宏观的电位移矢量场 \mathbf{D} 。这里的关键想法是出于众多目的，我们总是可以在宏观上平均地考虑介质中每个原子或分子在微观上的贡献，进而在大尺度上我们可以以一个比较简单的方式来描述介质的电磁性质。

和静电中相似，在静磁中我们也能比较简单地描述磁介质在宏观上的电磁性质。在第二章中我们就曾介绍，在磁介质中我们可以在 \mathbf{B} 场之余唯象地引入一个场 \mathbf{H} ，并且这两个场满足下面的两个方程：

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_f$$

其中 \mathbf{J}_f 是介质中的自由电流密度。这里的 \mathbf{H} 叫做磁场强度而 \mathbf{B} 叫做磁感应强度，这么叫的原因是当年 William Thomson 认为由 Faraday 电磁感应定律产生的“磁场”与介质中恒定电流产生的“磁场”具有差异。

介质中原子分子集合带来的效应在宏观上表现为磁偶极密度 $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ ，而 \mathbf{B} 和 \mathbf{H} 的关系为

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$$

进而

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_f + 4\pi \nabla \times \mathbf{M}$$

注意此时磁感应强度 \mathbf{B} 仍满足散度为零，进而我们仍可以写出

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

在 Coulomb 规范下我们根据上式便能得到

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_f - 4\pi \nabla \times \mathbf{M}$$

这个方程的解显然是

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}_f(\mathbf{r}') + c \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$$

进而磁偶极密度场的旋度可以被视为介质提供的有效电流密度

$$\mathbf{J}_M(\mathbf{r}) = c \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r})$$

为了唯象地处理静磁学问题，我们还需要知道 \mathbf{B} 和 \mathbf{H} 之间的关系。一般而言这个关系是相当复杂的（尤其对于铁磁体），但是对于简单的顺磁或

抗磁介质，两个场之间具有简单的线性关系：

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

其中 μ 为一个常数，叫做磁导率。顺磁介质的 μ 稍大于 1，抗磁介质的 μ 稍小于 1。（这里的“稍大于”“稍小于”指相对于 1 的偏差大约在 10^{-5} 量级。）

对于铁磁体而言上面的线性关系仅在外场充分弱时才近似成立。在这些材料中 μ 的量级范围为 $10 \sim 10^4$ 。我们在后面的内容中将始终假设 \mathbf{B} 和 \mathbf{H} 之间具有上述简单的线性关系。

4.4 利用磁矢势与磁标势求解边值问题

4.4.1 静磁中的边界条件

我们在第二章中其实就已经提及过这些边界条件。我们在边界处考虑方程

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_f$$

便能得到

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}_f$$

其中 \mathbf{n} 是由介质 2 指向介质 1 的单位法向矢量， \mathbf{K}_f 是界面上的自由电流密度。第一个方程表明边界处磁感应强度矢量的法向分量连续；同时在很多常见情况下界面上不存在自由电流，那么此时第二个方程便表明边界处 \mathbf{H} 的切向分量连续。

其实人们发展出了很多求解静磁边值问题的方法。为了简单起见，我们仅考虑 \mathbf{B} 和 \mathbf{H} 有前面提及过的简单正比关系的介质，并且我们假设在所研究区域的任意一个单连通分支中 μ 都是一个不变的常数。

4.4.2 利用矢势处理边值问题

我们前面已经推导过，利用

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_f + 4\pi \nabla \times \mathbf{M}$$

与

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

并结合 Coulomb 规范条件可以得到方程

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_f - 4\pi \nabla \times \mathbf{M}$$

这个方程的解为

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}_f(\mathbf{r}') + c \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}'$$

在真空中 $\mathbf{M} = 0$ ，进而上式便退化为

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}'$$

下面来看一个例子：

考虑沿着 z 轴的无限长细导线，其载流为 I 。此时我们可以利用上式求解出磁场分布。首先，电流密度分布显然为

$$\mathbf{J} = I \delta(x) \delta(y) \hat{e}_z$$

记 $\rho = x^2 + y^2$ ，那么矢势便为

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\rho) &= \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}' \\ &= \frac{I}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \hat{e}_z \end{aligned}$$

这个积分的结果是发散的¹。为了消除这种发散，我们人为选取 $\rho = \rho_0$ 处为 \mathbf{A} 的零点，那么我们便得到

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\rho) &= \hat{e}_z \frac{I}{c} \ln \left(z + \sqrt{z^2 + \rho^2} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \hat{e}_z \frac{I}{c} \ln \left(z + \sqrt{z^2 + \rho_0^2} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &= \hat{e}_z \frac{I}{c} \ln \frac{z + \sqrt{z^2 + \rho_0^2}}{z + \sqrt{z^2 + \rho^2}} \Big|_{z=-\infty} \\ &= \hat{e}_z \frac{I}{c} \ln \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \hat{e}_z \\ &= \frac{2I}{c} \ln \frac{\rho_0}{\rho} \end{aligned}$$

上式中的第二个等式成立是因为 $+\infty$ 处的两个发散抵消了，而第三个

¹这是因为我们的电流分布一直延伸到了无穷远

等式来源如下：

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{z + \sqrt{z^2 + \rho_0^2}}{z + \sqrt{z^2 + \rho^2}} &= \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho_0}{z}\right)^2} - 1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{z}\right)^2} - 1} \\ &= \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_0}{z}\right)^2 - 1}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{z}\right)^2 - 1} \\ &= \frac{\rho_0^2}{\rho^2}\end{aligned}$$

进而磁场为

$$\begin{aligned}B_x &= \partial_y A_z \\ &= -\frac{2I}{c\rho^2}y \\ B_y &= -\partial_x A_z \\ &= \frac{2I}{c\rho^2}x \\ B_z &= 0\end{aligned}$$

这可以被写为

$$\mathbf{B} = \frac{2I}{c\rho} \hat{e}_\varphi$$

其中

$$\hat{e}_\varphi = -\sin \varphi \hat{e}_x + \cos \varphi \hat{e}_y$$

显然此时对于包含电流的环路，我们有

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi I}{c}$$

4.4.3 利用标势处理边值问题

如果问题中不存在自由电流，那么 Maxwell 方程组给出

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0$$

这表明 \mathbf{H} 可以被表示为某一个标势的梯度矢量场，进而我们记

$$\mathbf{H} = -\nabla \Phi_M$$

其中 Φ_M 被称为磁标势。如果我们假设 \mathbf{B} 与 \mathbf{H} 的关系为简单的 $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ ，那么 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 给出

$$\nabla^2 \Phi_M = 0$$

于是我们发现 $\mathbf{J}_f = 0$ 的静磁边值问题与静电边值问题高度相似，我们此时在不同区域中求解 Laplace 方程并在界面处应用边界条件便能得到最终结果。

作为这一方法的简单应用，我们考虑一个磁导率为 μ 的球壳，其内径为 a 而外径为 b 并且球壳内外的区域都是真空。我们取球壳外的磁场为渐进均匀的，即在无穷远处 $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}_0$ ，其中 \mathbf{B}_0 为 z 方向上的均匀矢量场。现在我们希望求解出全空间的磁场分布，特别是计算球壳内的磁场——这和磁屏蔽现象有关。

在区域 $0 \leq r \leq a$ 和 $r \geq b$ 中，我们有 $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ ，在区域 $a \leq r \leq b$ 中我们则有 $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ 。由于我们并没有外加自由电流，从而我们可以应用磁标势方法求解这个问题。问题沿着 z 轴具有旋转对称性，进而磁标势仅依赖于 r 和 θ 。现在我们可以立即写出全空间磁标势 Laplace 方程的解：

$$\Phi_M = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l r^l P_l(\cos \theta) & 0 \leq r \leq a \\ \sum_{l=0}^{\infty} \left(\beta_l r^l + \frac{\gamma_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) & a \leq r \leq b \\ -B_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\delta_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) & r \geq b \end{cases}$$

$r = a$ 和 $r = b$ 处的边界条件要求 \mathbf{B} 的径向分量连续。由于 $\mathbf{K}_f = 0$ ，从而我们要求 \mathbf{H} 的切向分量连续。考虑到 $\mathbf{H} = -\nabla \Phi_M$ ，我们便有

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \Phi_M}{\partial r} \Big|_{r=a+0} &= \frac{\partial \Phi_M}{\partial r} \Big|_{r=a-0} \\ \mu \frac{\partial \Phi_M}{\partial r} \Big|_{r=b-0} &= \frac{\partial \Phi_M}{\partial r} \Big|_{r=b+0} \\ \frac{\partial \Phi_M}{\partial \theta} \Big|_{r=a-0} &= \frac{\partial \Phi_M}{\partial \theta} \Big|_{r=a+0} \\ \frac{\partial \Phi_M}{\partial \theta} \Big|_{r=b-0} &= \frac{\partial \Phi_M}{\partial \theta} \Big|_{r=b+0} \end{aligned}$$

代入 Φ_M 的表达式, 我们得到

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=1}^{\infty} l \alpha_l a^{l-1} P_l(\cos \theta) &= \mu \sum_{l=1}^{\infty} l \beta_l a^{l-1} P_l(\cos \theta) \\
 &\quad - \mu \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) a^{-l-2} \gamma_l P_l(\cos \theta) \\
 -B_0 \cos \theta - \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \delta_l b^{-l-2} P_l(\cos \theta) &= \mu \sum_{l=1}^{\infty} l \beta_l b^{l-1} P_l(\cos \theta) \\
 &\quad - \mu \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) b^{-l-2} \gamma_l P_l(\cos \theta) \\
 \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l a^l P'_l(\cos \theta) (-\sin \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\beta_l a^l + \gamma_l a^{-l-1} \right) P'_l(\cos \theta) (-\sin \theta) \\
 B_0 b \sin \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \delta_l b^{-l-1} P'_l(\cos \theta) (-\sin \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\beta_l b^l + \gamma_l b^{-l-1} \right) P'_l(\cos \theta) (-\sin \theta)
 \end{aligned}$$

考虑到 Legendre 多项式及其导数的线性无关性, 我们比较系数便得到边界条件对各个待定系数的要求:

$$\begin{aligned}
 \mu l \beta_l a^{l-1} - \mu (l+1) a^{-l-2} \gamma_l &= l \alpha_l a^{l-1} \\
 \mu l \beta_l b^{l-1} - \mu (l+1) b^{-l-2} \gamma_l &= -B_0 \delta_{l,1} - (l+1) \delta_l b^{-l-2} \\
 \beta_l a^l + \gamma_l a^{-l-1} &= \alpha_l a^l \\
 \beta_l b^l + \gamma_l b^{-l-1} &= \delta_l b^{-l-1} - b B_0 \delta_{l,1}
 \end{aligned}$$

其中 $\delta_{l,1}$ 为 Kronecker δ 函数, 它在 $l=1$ 时取 1, 其他情况取 0. 解上述方程组, 我们得到 $l \neq 1$ 时

$$\alpha_l = \beta_l = \gamma_l = \delta_l = 0$$

而当 $l=1$ 时我们有

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= -\frac{9\mu}{(\mu+2)(2\mu+1) - 2a^3b^{-3}(\mu-1)^2} B_0 \\
 \beta_1 &= -\frac{3(2\mu+1)}{(\mu+2)(2\mu+1) - 2a^3b^{-3}(\mu-1)^2} B_0 \\
 \gamma_1 &= -\frac{3(\mu-1)a^3}{(\mu+2)(2\mu+1) - 2a^3b^{-3}(\mu-1)^2} B_0 \\
 \delta_1 &= \frac{(2\mu+1)(\mu-1)(b^3 - a^3)}{(\mu+2)(2\mu+1) - 2a^3b^{-3}(\mu-1)^2} B_0
 \end{aligned}$$

可见, 球壳内的磁场平行于 \mathbf{B}_0 且是均匀的, 其模长为 $-\alpha_1$. 如果 $\mu \gg 1$, 那

么我们此时近似有

$$\alpha_1 = -\frac{9}{2\mu(1-a^3b^{-3})}B_0$$

这表明即使球壳很薄，我们采用高磁导率材料也能达到好的磁屏蔽效果。在球壳外，我们发现总磁场其实就是均匀磁场 \mathbf{B}_0 加上偶极矩为 α_1 的磁偶极项的贡献。

值得注意的是，对于外磁场中的超导体，我们可以将其处理为 $\mu = 0$ 的磁介质。进而我们发现此时

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 0 \\ \beta_1 &= -\frac{3}{2} \frac{b^3}{b^3 - a^3} B_0 \\ \gamma_1 &= -\frac{3}{2} \frac{a^3 b^3}{b^3 - a^3} B_0 \\ \delta_1 &= -\frac{1}{2} b^3 B_0\end{aligned}$$

因为 $\alpha_1 = 0$ ，因而超导球壳内的磁场强度为零，即超导体能够完全排出其内部的磁场，这就是 **Meissner 效应**。

不过对于超导体而言，一个更方便的做法是将超导体视为 $\mu = 1$ 的系统，然后把由外磁场极化出的面电流视为“自由电流”。此时我们需要使用边界条件 $B_r(r = b^+) = \partial_r \Phi_M(b^+) = 0$ 来求解磁标势方程。

4.5 磁场与局域电流

和电多极展开类似，当电流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ 定域分布在某个区域中时我们可以使用磁多极展开来研究电流产生的磁场。我们假设在研究磁场的区域处 $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ ，那么我们便能用和电多极展开中一样的方法来处理这个问题。

考虑磁矢势的表达式

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$$

我们可以将积分号内的 $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 用 $1/r$ 展开，保留前两阶项²便能得到

$$A_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{cr} \int J_i(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' + \frac{x_j}{cr^3} \int x'_j J_i(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' + \dots$$

展开式中的第一项其实等于零：稳恒情况下电流密度守恒要求 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ ，从

²在实际应用中我们一般把电多极展开保留到四极项，而磁多极展开一般仅保留到偶极项。这是因为磁相互作用比电相互作用要弱得多。

而

$$\partial_i(x_j J_i) = J_i \partial_i x_j + x_j \partial_i J_i = \delta_{ij} J_i = J_j$$

进而如果我们在全空间中对 $\partial_i(x_j J_i)$ 积分, 那么由于 \mathbf{J} 不为零的区域有限大, 根据散度定理可得

$$\int J_i(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = \int \partial_i(x_j J_i) d^3 \mathbf{r} = \int_{\partial \rightarrow \infty} x_j J_i dS^i = 0$$

其中 $\partial \rightarrow \infty$ 代表包含全空间的一个无穷大的球形边界。

对于展开式中的第二项, 我们再次考虑 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ 这个条件, 于是

$$\partial_i(x_j x_k J_i) = x_j J_k + x_k J_j$$

利用散度定理并考虑到电流定域分布, 我们便能得到

$$\int x_j J_k d^3 \mathbf{r} = - \int x_k J_j d^3 \mathbf{r}$$

进而多极展开式中的第二项便可以写为

$$\int x'_j J_i(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' = -\frac{1}{2} \int (x'_i J_j - x'_j J_i) d^3 \mathbf{r}' = -\frac{1}{2} \int \epsilon_{ijk} (\mathbf{r}' \times \mathbf{J})_k d^3 \mathbf{r}'$$

从而展开式中的第二项可以被写为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

其中磁矩 \mathbf{m} 被定义为

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'$$

同时我们也可以定义磁化强度矢量为

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c} \mathbf{r} \times \mathbf{J}$$

现在我们可以看出, 在定域电流分布的磁矢势多极展开中领头阶项为磁偶极项。下面我们可以根据 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 来计算出磁偶极子带来的磁场:

$$\begin{aligned} B_i &= \epsilon_i^{jk} \epsilon_k^{lm} \partial_j \left(\frac{m_l x^m}{r^3} \right) \\ &= \left(\delta_i^l \delta_m^j - \delta_{im} \delta^{jl} \right) \partial_j \left(\frac{m_l x^m}{r^3} \right) \\ &= m_i \partial_j \left(\frac{x^j}{r^3} \right) - m_j \partial_j \left(\frac{x^i}{r^3} \right) \end{aligned}$$

因为对于 $r > 0$ 的点, 我们有

$$\partial_j \left(\frac{x^j}{r^3} \right) = 0 \quad \partial_j \left(\frac{x^i}{r^3} \right) = \frac{\delta_j^i}{r^3} - \frac{3x^i x_j}{r^5}$$

因此写成矢量形式便有

$$\mathbf{B} = \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{m}}{r^3}$$

其中 $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ 。现在可以看出，磁偶极子产生的磁场和电偶极子产生的电场有着相同的形式。

我们还可以考虑包含 $r = 0$ 点的磁场表达式。我们只有将偶极子视为一个没有体积的点时这样做才有意义。因为

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r})$$

从而

$$\partial_j \left(\frac{x^j}{r} \right) = 4\pi\delta(\mathbf{r})$$

这表明考虑 $r = 0$ 的点时 B_i 式中的第一项会给出一个 δ -函数。对于 B_i 表达式中的第二项 $\partial_j(x^i/r^3)$ ，如果 $i \neq j$ ，那么

$$\partial_j \left(\frac{x^i}{r^3} \right) = \frac{\delta_j^i}{r^3} - \frac{3x^i x_j}{r^5}$$

仍然成立。但是如果 $i = j$ ，那么 $r \neq 0$ 时我们有 $\partial_i(x^i/r^3) = 0$ 。从而 $i = j$ 时我们要单独考虑 $r = 0$ 这个点。因为取 $\partial_j(x^i/r^3)$ 的迹会得到 $\partial_j(x^j/r^3) = 4\pi\delta(\mathbf{r})$ ，从而考虑 $r = 0$ 时 $\partial_j(x^i/r^3)$ 的表达式中必然会出现 δ -函数。如果我们定义一个矩阵为

$$M_{ij} = \partial_j \left(\frac{x^i}{r^3} \right)$$

那么我们有

$$\text{Tr } M = 4\pi\delta(\mathbf{r})$$

由于我们考虑的是各向同性的三维欧氏空间，进而 x, y, z 三个方向其实都是一样的。于是我们可以推断

$$\partial_1 \left(\frac{x_1}{r^3} \right) = \partial_2 \left(\frac{x_2}{r^3} \right) = \partial_3 \left(\frac{x_3}{r^3} \right) = \frac{4\pi}{3}\delta(\mathbf{r})$$

进而

$$\partial_j \left(\frac{x_i}{r^3} \right) = \frac{\delta_{ij}}{r^3} - \frac{3x_i x_j}{r^5} + \frac{4\pi}{3}\delta_{ij}\delta(\mathbf{r})$$

综上，我们便得到了考虑原点时的 \mathbf{B} 的表达式：

$$\mathbf{B} = \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{m}}{r^3} + \frac{8\pi}{3}\mathbf{m}\delta(\mathbf{r})$$

如果电流分布的形式为一个闭合的平面电流环，那么这个电流环的磁偶极矩的一般表达式为

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2c} \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$$

其中 I 为电流。注意磁偶极矩的方向和电流环所在的平面垂直。由于 $(1/2)\mathbf{r} \times$

$d\mathbf{r}$ 代表了环路里的一个面元，从而我们发现 $\int (1/2)\mathbf{r} \times d\mathbf{r}$ 给出了环路的总面积，因此平面电流环磁矩的模长就是

$$m = \frac{IA}{c}$$

注意这一结果仅当电流环为一个平面时才成立。

4.6 作用在外磁场中电流分布上的力

假设在外磁场 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 中有一个局域电流分布，如果我们再假设磁场随空间位置的变化十分缓慢，那么我们可以将 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 在某点附近进行 Taylor 展开。方便起见，我们在原点附近进行 Taylor 展开并取头两阶项，那么

$$\mathbf{B}_i(\mathbf{r}) = B_i(0) + \mathbf{r} \cdot \nabla B_i(0) + \dots$$

再考虑到

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$$

我们便得到了 \mathbf{F} 的局域展开式：

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{c} \mathbf{B}(0) \times \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' + \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times [(\mathbf{r}' \cdot \nabla B_i(0)) \mathbf{e}^i] d^3\mathbf{r}' + \dots$$

我们前面已经看到，展开式中的第一个积分等于零，进而第二项便成了有贡献的领头阶项。保留至这一项，那么电流分布受到的力便为

$$F_i = \frac{1}{c} \epsilon_{ijk} \left. \frac{\partial B_k}{\partial x^l} \right|_0 \int x'_l J_j(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'$$

进而考虑到 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ，我们便得到

$$\begin{aligned} F_i &= -\epsilon_{ijk} \epsilon_{jlk} m_k \left. \frac{\partial B_k}{\partial x^l} \right|_0 \\ &= -m_i \left. \frac{\partial B_k}{\partial x^k} \right|_0 + m^k \left. \frac{\partial B_k}{\partial x^i} \right|_0 \\ &= m_k \left. \frac{\partial B_k}{\partial x^i} \right|_0 \end{aligned}$$

因为 \mathbf{m} 为一个常矢量，我们便有

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$$

这表明对于磁场中的磁偶极子，我们可以定义其势能为

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad \mathbf{F} = -\nabla U$$

进而，考虑两个磁偶极子 $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ 并且假设二者间的相对位矢为 $\mathbf{r}_{12} = r_{12}\mathbf{n}$ ，那么二者间的相互作用能便为

$$U_{12} = \frac{\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 - 3(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n})}{r_{12}^3}$$

这和电偶极相互作用的能量表达式一模一样。如果两个偶极子方向平行且垂直于 \mathbf{n} ，那么

$$U_{12} = \frac{\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2}{r_{12}^3} = \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} > 0$$

这表明二者间相互排斥。如果两个磁偶极子方向相同且平行于 \mathbf{n} ，那么

$$U_{12} = -\frac{2\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2}{r_{12}^3} = -\frac{2m_1 m_2}{r_{12}^3} < 0$$

从而此时偶相互作用将表现为相互吸引。如果两个偶极子反向平行但是方向都和 \mathbf{n} 共线，那么显然此时的相互作用能便是

$$U_{12} = \frac{2m_1 m_2}{r_{12}^3} > 0$$

进而此时磁偶极相互作用表现为相互排斥。

类似于涨落产生电偶极矩，自发涨落也可以产生磁偶极矩并带来和 Van der Waals 效应类似的作用。但是由于和静电相互作用相比静磁相互作用的影响要弱得多，进而我们现在并不会去深入研究它。

第 5 章 相对论与电动力学

5.1 Lorentz 变换与 Poincaré 变换

狭义相对论依赖于三条基本假设：

- (1) 所有惯性参考系中的物理定律都相同。
- (2) 所有惯性参考系中的光速都相同。
- (3) 空间是各向同性且均匀的，时间也是均匀的。

首先，我们可以利用假设 (3) 说明狭义相对论中惯性系之间的变换操作是线性的。我们考虑坐标为 x^μ 的惯性系 K 与坐标为 x'^ν 的惯性系 K' ，那么两个坐标间的变换关系可以用一个可逆映射 $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ 表示：

$$x'^\nu = f^\nu(x)$$

现在考虑 K 系中的两个点 x^μ, y^μ ，那么在 K' 系中这两个点对应的坐标为 $x'^\nu = f^\nu(x), y'^\nu = f^\nu(y)$ 。根据假设 (3)，我们可以任意选取时空的原点，因而我们对时空原点进行任意的平移操作将不会改变事件之间的时空距离。记平移为

$$x^\mu \mapsto x^\mu + b^\mu \quad y^\mu \mapsto y^\mu + b^\mu$$

那么对任意的 b 都应该有

$$x'^\nu - y'^\nu = f^\nu(x) - f^\nu(y) = f^\nu(x + b) - f^\nu(y + b)$$

将这个式子相对 x^μ 求导便有

$$\frac{\partial f^\nu(x)}{\partial x^\mu} = \frac{\partial f^\nu(x + b)}{\partial x^\mu}$$

这对任意 b 均成立意味着这等于一个和 x^μ 无关的常数，即

$$\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu} = \text{常数} := \Lambda^\mu{}_\nu$$

将这个式子积分我们便发现， K' 和 K 之间最一般的变换关系可以由一个非齐次的线性变换描述：

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$$

四维时空中的四个 a^μ 对应着空间和时间的任意平移，而我们下面将要通过假设 (2) 引入对 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 的约束。

首先，我们应当将假设 (2) 数学化。为此我们考虑两个彼此以恒定速度做相对运动的参考系 K 和 K' ，并且我们选择 x 轴和 x' 轴重合、 y, z 轴分

别与 y', z' 轴平行, 记两个参考系中的时间分别为 t, t' 。现在我们假设在 K 系中于 t_1 时刻在 (x_1, y_1, z_1) 点发射一个光信号, 这个信号在 t_2 时刻到达点 (x_2, y_2, z_2) , 那么我们有

$$c(t_2 - t_1) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

从而在 K 系中这两个事件之间的关系为

$$-c^2(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = 0$$

在 K' 系中考虑相同的过程, 我们不难得到

$$-c^2(t'_2 - t'_1)^2 + (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 = 0$$

因此根据光速不变原理, 我们可以推断, 如果按照上面这样定义的量在某一个坐标系内为零, 那么它在所有其他坐标系中也为零。这暗示我们这样定义出的一个量很可能是一个在参考系变换操作下的不变量, 我们称它为两个事件的间隔。下面我们便要対这一点进行证明, 为此我们先写出两个无限接近的事件之间间隔的表达式:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

可见无论是在那个参考系中, ds^2 始终是关于 $|d\mathbf{x}|$ 的二次多项式。因为光速不变原理表明 $ds'^2 = 0$ 当且仅当 $ds^2 = 0$, 而

$$ds^2 = 0 \Leftrightarrow dt = \pm |d\mathbf{x}| \Leftrightarrow dt' = \pm |d\mathbf{x}'| \Leftrightarrow ds'^2 = 0$$

因此如果我们将 ds'^2 视为关于 dt 的二次多项式, 那么其零点必然为 $dt = \pm |d\mathbf{x}|$, 于是 ds'^2 应当满足如下分解:

$$ds'^2 = \alpha(v) (dt + |d\mathbf{x}|) (dt - |d\mathbf{x}|) = \alpha(|v|) ds^2$$

即 ds'^2 应该正比于 ds^2 并且比例系数应当只和两个惯性系相对速度的绝对值有关——因为假设 (3) 所描述的时空各向同性要求我们的参考系变换不含时且具有旋转不变性。如果互换上面两个参考系的角色, 那么我们便能得到

$$ds^2 = \alpha(|v|) ds'^2$$

因此我们有

$$\alpha^2(|v|) = 1 \Rightarrow \alpha(|v|) = \pm 1$$

再考虑到两个参考系之间的相对速度为零时这两个系实际上完全一样, 从而 $\alpha(0) = 1$ 。因此我们根据 $\alpha(|v|)$ 的连续性便能推断 $\alpha(|v|) = 1$ 。于是对于任意两个参考系 $ds'^2 = ds^2$ 应当始终成立, 这表明狭义相对论中的参考系变换操作应当保持我们定义的间隔 ds^2 不变。不难看出, ds^2 表明我们研究的

背景时空的度规为

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

定义

$$x^0 = ct \quad x^1 = x \quad x^2 = y \quad x^3 = z$$

那么时空间隔不变便要求

$$x'^{\alpha} \eta_{\alpha\beta} x'^{\beta} = x^{\mu} \Lambda^{\alpha}_{\mu} \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\beta}_{\nu} x^{\nu} = x^{\mu} \eta_{\mu\nu} x^{\nu}$$

即

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^{\alpha}_{\mu} \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\beta}_{\nu} \Leftrightarrow \Lambda^T \eta \Lambda = \eta$$

可以验证满足这一条件的矩阵 Λ 构成了一个非 Abel 群，我们称之为 Lorentz 群，记为

$$O(1, 3) = \{ \text{实 } 4 \times 4 \text{ 矩阵 } \Lambda : \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \}$$

同时显然可见

$$(\det \Lambda) (-1) (\det \Lambda) = -1 \Rightarrow (\det \Lambda)^2 = 1 \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1$$

考虑到我们一开始的时候根据假设 (3) 导出了最一般的参考系变换形式为

$$x' = \Lambda x + a$$

其中 Λ 为 Lorentz 群的群元而 a 为任意常矢量。我们称这种最一般的变换为 Poincaré 变换，这些变换便组成了 Poincaré 群 \mathcal{P} ，我们记其群元为 (Λ, a) ，即

$$\mathcal{P} = \{ (\Lambda, a) : \Lambda \in O(1, 3), a \in \mathbb{R}^4 \}$$

这个群也是非 Abel 的，我们不难看出其群乘法 \circ 的定义应该为

$$(\Lambda_1, a_1) \circ (\Lambda_2, a_2) = (\Lambda_1 \Lambda_2, a_1 + \Lambda_1 a_2)$$

Lorentz 群同构于 \mathcal{P} 中由群元 $(\Lambda, 0)$ 张成的子群，而 \mathcal{P} 中元素 $(1, a)$ 张成的子群同构于平移变换群。

现在我们先利用间隔的不变性以一个比较初等的方式导出我们熟知的（特殊）Lorentz 变换。假设 K' 相对 K 系的速度为 v 且方向平行于 x 轴，那么我们应该有

$$y' = y \quad z' = z$$

考虑到 Lorentz 变换是线性的，我们便可以假设

$$x' = Ax + Bt \quad t' = Cx + Dt$$

如果 $x' = 0$ ，那么在 K 系中便有 $x = vt$ 并且我们有

$$Avt + Bt = 0 \Rightarrow B = -Av$$

进而我们应该有

$$x' = A(x - vt)$$

类似的，如果我们取 $x = 0$ ，那么 $x' = -vt'$ ，进而

$$x = A'(x' + vt')$$

因为狭义相对论中各个惯性参考系平权，我们必须有 $A = A'$ 并且记其为 γ 。下面根据光速不变假设，我们可以推知如果 $x = ct$ ，那么对应的必然有 $x' = ct'$ ，于是我们得到了两个方程：

$$ct' = \gamma(c - v)t$$

$$ct = \gamma(c + v)t'$$

于是我们可以解得

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

于是

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$x = \gamma(x' + vt')$$

下面考虑间隔不变，我们有

$$-c^2t^2 + x^2 = -c^2t'^2 + x'^2$$

因此我们可以导出

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2}x \right) \quad t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2}x \right)$$

对于速度沿任意方向的 Lorentz 变换，我们可以考虑如下直观的推导：假设 K 系和 K' 系的相对速度为 \mathbf{v} ，记 $v = |\mathbf{v}|$ ，那么如果一个点在 K 系中的位矢为 \mathbf{r} ，那么我们在 K 系中观察到这个点相对 K' 系原点的位置便应该是

$$\mathbf{r}_{K'} = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$$

Lorentz 变换只影响 $\mathbf{r}_{K'}$ 平行于 \mathbf{v} 的分量，从而我们考虑将其分解为

$$\mathbf{r}_{K'} = \mathbf{r}_{K'//} + \mathbf{r}_{K'\perp} = \frac{1}{v^2} [\mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{v}t)] \mathbf{v} + (\mathbf{r} - \mathbf{v}t) - \frac{1}{v^2} [\mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{v}t)] \mathbf{v}$$

K' 系中观察到的 $\mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{K'\perp}$, 而 $\mathbf{r}_{K'//}$ 则是 $\mathbf{r}'_{//}$ 经过尺缩后的结果, 因此我们可以推知在 K' 系中观察到的该点位置为

$$\mathbf{r}' = \gamma \mathbf{r}_{K'//} + \mathbf{r}_{K'\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{v}t + \frac{\gamma - 1}{v^2} [\mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{v}t)] \mathbf{v} = \mathbf{r} + \frac{\gamma - 1}{v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{v} - \gamma \mathbf{v}t$$

这也就是

$$r'_i = r_i + \frac{\gamma - 1}{v^2} v_i v_j r_j - \gamma t v^i$$

考虑到间隔不变可以写为

$$-c^2 t^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = -c^2 t'^2 + \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'$$

从而我们可以推出速度沿任意方向的时间变换为

$$t' = \sqrt{t^2 + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{c^2}} \\ = \gamma \left(t - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c^2} \right)$$

定义 $\beta = v/c$, 那么我们不难看出这种相对速度沿任意方向的 (特殊) Lorentz 变换所对应的 Λ 的各个分量为:

$$\Lambda^0_0 = \gamma \quad \Lambda^0_i = \Lambda^i_0 = -\beta_i \gamma \quad \Lambda^i_j = \delta_{ij} + \frac{\gamma - 1}{v^2} v_i v_j$$

5.2 Lorentz 群的结构

对于任意 $\Lambda \in O(1, 3)$, 我们通过 $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ 可以导出

$$|\det \Lambda| = 1$$

考虑到 $\eta_{00} = -1$ 而 $\eta_{ij} = \delta_{ij}$, 因此我们还可以导出对 Λ 的另一个约束为:

$$-1 = \eta_{00} = \Lambda^0_0 \eta_{00} \Lambda^0_0 + \Lambda^i_0 \eta_{ij} \Lambda^j_0 = -(\Lambda^0_0)^2 + \Lambda^i_0 \Lambda^i_0 \\ \Rightarrow 1 = (\Lambda^0_0)^2 - \Lambda^i_0 \Lambda^i_0$$

因此

$$(\Lambda^0_0)^2 = 1 + \Lambda^i_0 \Lambda^i_0 \geq 1 \Rightarrow |\Lambda^0_0| \geq 1$$

从而对于任意 $\Lambda \in O(1, 3)$, 其矩阵元应该满足 $\Lambda^0_0 \geq 1$ 或 $\Lambda^0_0 \leq -1$ 以及 $\det \Lambda = 1$ 或 $\det \Lambda = -1$ 。于是我们可以将 Lorentz 群分解出四个互不连通的子集:

$$O(1, 3) = SO(1, 3)_c \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$$

其中

$$\begin{aligned} SO(1,3)_c &= \{\Lambda \in O(1,3) : \det \Lambda = 1, \Lambda^0_0 \geq 1\} \\ \Sigma_1 &= \{\Lambda \in O(1,3) : \det \Lambda = -1, \Lambda^0_0 \geq 1\} \\ \Sigma_2 &= \{\Lambda \in O(1,3) : \det \Lambda = -1, \Lambda^0_0 \leq -1\} \\ \Sigma_3 &= \{\Lambda \in O(1,3) : \det \Lambda = 1, \Lambda^0_0 \leq -1\} \end{aligned}$$

显然这些子集中只有 $SO(1,3)_c$ 构成了 $O(1,3)$ 的子群，我们称之为正规 Lorentz 群。其下标“c”表明 $SO(1,3)_c$ 的任意群元都能连续地连通到恒等元。下面我们先来重点看 $SO(1,3)_c$ ，然后再考虑 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ 的意义。

我们记 $\forall R \in SO(3)$ 的矩阵元为 R^i_j ，那么我们现在便可以构造出 $SO(1,3)_c$ 的一类群元：这类群元刻画了空间部分的旋转，其各个分量为

$$\Lambda^0_0 = 1 \quad \Lambda^i_j = R^i_j \quad \Lambda^0_i = \Lambda^i_0 = 0$$

$SO(1,3)_c$ 的另一类群元代表了特殊 Lorentz 变换，又叫做 Lorentz 推促，这便对应着我们在上一节中导出的相对匀速运动的两个惯性系之间的变换。

现在我们引入的空间旋转和特殊 Lorentz 变换总共有六个独立参数，从而一个一般的四阶 Λ 矩阵的十六个矩阵元可以使用六个独立的参数刻画，亦即 $SO(1,3)_c$ 的维数为六。实际上我们也可以用下述方式证明这一点：对 Λ 的约束可以改写为

$$H = \Lambda^T \eta \Lambda - \eta = 0$$

因此这给出了十六个方程。但是因为我们构造出的 H 是对称矩阵，因此它的独立元素个数为 $4 \times (4+1)/2 = 10$ ，因此约束其元素的线性独立方程的个数为十个，进而 Λ 的线性独立矩阵元个数为 $16 - 10 = 6$ 。

为了确定这六个参数的选取方式，我们应该考虑恒等元附近的 Lorentz 变换：

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \Omega^\mu_\nu \quad |\Omega^\mu_\nu| \ll 1, \forall \mu, \forall \nu$$

对 Λ 保度规的约束现在便等价于

$$\left(\delta^\alpha_\mu + \Omega^\alpha_\mu \right) \eta_{\alpha\beta} \left(\delta^\beta_\nu + \Omega^\beta_\nu \right) - \eta_{\mu\nu} = 0$$

将这个式子展开并保留到 Ω 的一阶项，我们便得到

$$\eta_{\nu\alpha} \Omega^\alpha_\mu + \eta_{\mu\beta} \Omega^\beta_\nu = 0$$

如果我们定义 $\omega_{\mu\nu} = \eta_{\mu\beta} \Omega^\beta_\nu$ ，那么我们有

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$$

亦即 ω 是个反对称张量，它只有六个独立分量。于是我们现在便得到恒等

元附近的无穷小 Lorentz 变换依赖于六个任意参数并且可以写为

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \eta^{\mu\alpha} \omega_{\alpha\nu}$$

我们现在可以套路式地用无限小 Lorentz 变换的生成元 Ω 来表示一般的 $\Lambda \in SO(3, 1)_c$:

$$\Lambda = e^\Omega$$

问题的关键是如何去理解 $\omega_{\mu\nu}$ 的六个独立参数的物理意义。利用 $\omega_{\mu\nu}$ 的反对称性，我们可以将其各个分量部分地写出：

$$\omega_{00} = 0 \quad \omega_{i0} = -\omega_{0i} = -V_i \quad \omega_{ij} = \varphi \epsilon_{ijk} u^k$$

其中我们定义 $|\mathbf{u}| = 1$ 。因为无穷小 Lorentz 变换对应的坐标变换可以写为

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = (\delta^\mu{}_\nu + \eta^{\mu\alpha} \omega_{\alpha\nu}) x^\nu = x^\mu + \eta^{\mu\alpha} \omega_{\alpha\nu} x^\nu$$

从而

$$ct' = ct + \eta^{0\alpha} \omega_{\alpha\nu} x^\nu = ct - \mathbf{V} \cdot \mathbf{x}$$

$$x'^i = x^i + \eta^{i\alpha} \omega_{\alpha\nu} x^\nu = x^i + \omega_{i\nu} x^\nu = x^i - V_i t + \varphi \epsilon_{ijk} u^j x^k = x^i - cV_i t + \varphi (\mathbf{u} \times \mathbf{x})^i$$

对于 $\mathbf{V} = 0$ ，这个变换显然就是以 \mathbf{u} 方向为轴旋转一个无限小角度 φ 的空间旋转，而对于 $\varphi = 0$ ，这就是在小量近似下相对速度为 \mathbf{V}/c 的无限小特殊 Lorentz 变换，这里没有出现 γ 项是因为我们只考虑到线性项。

在获知 $\omega_{\mu\nu}$ 各个分量的物理意义后，我们便可以考虑使用 e^Ω 导出一般的特殊 Lorentz 变换。为简便起见我们仅考虑相对速度沿 x 方向的情况，此时我们取 $\varphi = 0$ ， $\mathbf{V} = (V(v), 0, 0)$ ，那么 ω 矩阵为

$$\omega = V(v) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是

$$\Omega = V(v) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对于矩阵

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

我们有

$$L^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

进而

$$L^3 = -L \quad L^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned} e^{\Omega} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} V^n(v) L^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k)!} V^{4k}(v) L^{4k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)!} V^{4k+1}(v) L^{4k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+2)!} V^{4k+2}(v) L^{4k+2} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+3)!} V^{4k+3}(v) L^{4k+3} \\ &= L^4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k)!} V^{4k}(v) + L \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)!} V^{4k+1}(v) - L^4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+2)!} V^{4k+2}(v) \\ &\quad - L \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+3)!} V^{4k+3}(v) \\ &= \begin{pmatrix} \cosh V(v) & -\sinh V(v) & 0 & 0 \\ -\sinh V(v) & \cosh V(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

如果我们令

$$V(v) = \arctan\left(\frac{v}{c}\right)$$

那么这个矩阵刚好就是我们前面写下的 Lorentz 变换矩阵。现在我们可以看出，具有沿 x 轴的相对速度 v 的 Lorentz 变换可以被看作在 $ct - x$ 平面上转过“角度” $\arctan(v/c)$ 的“双曲旋转”操作。

现在我们来考察 Lorentz 群中除正规 Lorentz 群之外的部分。可以证明，各个 Σ_i 其实是任取 Σ_i 中的一个群元 Λ_i 与正规 Lorentz 群作用生成的陪集。最简单的 Λ_i 的选取方案为

$$\Lambda_1 = P \quad \Lambda_2 = T \quad \Lambda_3 = -1$$

其中 P 是和宇称变换对应的矩阵：

$$P^0_0 = 1 \quad P^i_j = -\delta^i_j \quad P^0_i = P^i_0 = 0$$

T 是和时间反演变换对应的矩阵：

$$T^0_0 = -1 \quad T^i_j = \delta^i_j \quad T^0_i = T^i_0 = 0$$

可以看出我们选取的 Λ_3 其实就对应着 $PT = TP$ 。通常我们称 P, T 与 PT 为 Lorentz 群的分立对称性。

5.3 4-速度与固有时

从现在开始采用规定 $c = 1$ 的自然单位制。

我们可以将 Minkowski 时空视为一个配备有 Minkowski 度规 $\eta_{\mu\nu}$ 的四维 Riemann 流形 M^4 ，那么我们平常所讨论的 4-矢量指的是这个流形的 Lorentz 协变的切向量以及余切向量。质点的世界线是它的运动在 M^4 中对应的曲线，为了根据粒子的世界线定义出一个 4-矢量，我们应当考虑如何不依赖于坐标系地将它参数化，而此时能选取的最佳方案便是使用世界线的弧长构造自然坐标。“固有时”指的便是这个弧长参数。我们记自然坐标为 τ ，参数化结果为 $x^\mu(\tau)$ ，那么这样得到的切矢便是

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

我们称 U^μ 为 4-速度。如果使用某一惯性系中的时间参数 t 将粒子的世界线参数化为 $x^\mu(t)$ ，那么世界线线元 $d\tau$ 便可以用这个坐标系中的 dt 表示为：

$$d\tau = \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} dt = \sqrt{1 - v^2} dt = \gamma^{-1} dt$$

进而

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt}$$

这表明如果我们记粒子在某一惯性系中的经典三维速度为 \mathbf{u} ，那么粒子的

4-速度可以被这个参考系中的量刻画为

$$\mathbb{U} = \gamma(1, \mathbf{u})^T$$

不难看出 4-速度的模为

$$U_\mu U^\mu = \eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = \gamma^2(u^2 - 1) = -1$$

有了 4-速度，我们便能利用 Λ 写出速度的特殊 Lorentz 变换。我们设粒子在原参考系 K 中的三维速度为 \mathbf{u} ，并且出于简便起见我们仅考虑参考系 K, K' 相对速度 v 沿 x 轴的情况。因为

$$U'^\mu = \Lambda^\mu_{\nu} x^\nu$$

从而我们有

$$U'^0 = \gamma_v(U^0 - vU^1)$$

$$U'^1 = \gamma_v(U^1 - vU^0)$$

$$U'^2 = U^2$$

$$U'^3 = U^3$$

如果我们记粒子在 K' 系中速度为 \mathbf{u}' ，并且定义

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \quad \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1-u'^2}}$$

那么我们现在便有

$$\gamma' = \gamma_v \gamma (1 - v u_x)$$

$$\gamma' u'_x = \gamma_v \gamma (u_x - v)$$

$$\gamma' u'_y = \gamma u_y$$

$$\gamma' u'_z = \gamma u_z$$

此即

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - v u_x} \\ u'_y &= \frac{u_y}{\gamma_v(1 - v u_x)} = \frac{u_y \sqrt{1 - v^2}}{1 - v u_x} \\ u'_z &= \frac{u_z}{\gamma_v(1 - v u_x)} = \frac{u_z \sqrt{1 - v^2}}{1 - v u_x} \end{aligned}$$

5.4 Maxwell 方程的四维形式与电磁场相对论变换

定义 4-矢势为

$$\mathbb{A} = (\phi, \mathbf{A})$$

其中 ϕ, \mathbf{A} 分别为三维的标势、矢势。我们选取的 Lorentz 规范 $\partial_\mu A^\mu = 0$ 是 Lorentz 不变的, 进而我们可以确保 4-矢势 \mathbb{A} 的确是个良定义的 Lorentz 协变的 4-矢量。

逆变矢量 \mathbb{A} 对应的 1-形式为

$$A = -\phi dt + A_i dx^i$$

于是我们可以定义电磁场 2-形式为

$$F = dA = -\frac{\partial \phi}{\partial x^i} dx^i \wedge dt + \frac{\partial A_i}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge dx^i = -\left(\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\right) dx^i \wedge dt + \frac{\partial A_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i$$

因为

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

而 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \Rightarrow B_k = \epsilon_{ijk} \partial_i A_j$ 给出

$$\begin{aligned} \epsilon_{klm} B_k &= \epsilon_{klm} \epsilon_{ijk} \partial_i A_j \\ &= (\delta_{li} \delta_{mj} - \delta_{lj} \delta_{mi}) \partial_i A_j \\ &= \frac{\partial A_m}{\partial x^l} - \frac{\partial A_l}{\partial x^m} \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} F &= E_i dx^i \wedge dt + \frac{\partial A_i}{\partial x^j} (dx^j \otimes dx^i - dx^i \otimes dx^j) \\ &= E_i dx^i \otimes dt + \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i}\right) dx^j \otimes dx^i \\ &= E_i dx^i \wedge dt + \epsilon_{jik} B_k dx^j \otimes dx^i \\ &= E_i dx^i \wedge dt + \epsilon_{ijk} B_k dx^i \otimes dx^j \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} B_k dx^i \otimes dx^j &= \frac{1}{2} (\epsilon_{ijk} B_k dx^i \otimes dx^j + \epsilon_{jik} B_k dx^j \otimes dx^i) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} B_k (dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} B_k dx^i \wedge dx^j \end{aligned}$$

从而

$$F = E_i dx^i \wedge dt + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} B_k dx^i \wedge dx^j$$

显然 F 是个正合形式, 因此

$$dF = d^2 A = 0$$

又因为

$$\begin{aligned}
 dF &= d \left(E_i dx^i \wedge dt + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} B_k dx^i \wedge dx^j \right) \\
 &= \frac{\partial E_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i \wedge dt + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial B_k}{\partial t} dt \wedge dx^i \wedge dx^j + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial B_k}{\partial x^l} dx^l \wedge dx^i \wedge dx^j \\
 &= \left(\frac{\partial E_j}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial B_k}{\partial t} \right) dx^i \wedge dx^j \wedge dt + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial B_k}{\partial x^l} dx^l \wedge dx^i \wedge dx^j \\
 &= \left(\frac{\partial E_j}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial B_k}{\partial t} \right) dx^i \wedge dx^j \wedge dt + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon^{ijl} \frac{\partial B_k}{\partial x^l} dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3 \\
 &= \left(\frac{\partial E_j}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial B_k}{\partial t} \right) dx^i \wedge dx^j \wedge dt + \frac{\partial B_k}{\partial x^k} dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3 \\
 &= \left(\frac{\partial E_j}{\partial x^i} - \frac{\partial E_i}{\partial x^j} + \epsilon_{ijk} \frac{\partial B_k}{\partial t} \right) (dx^i \otimes dx^j) \wedge dt + \frac{\partial B_k}{\partial x^k} dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3
 \end{aligned}$$

可见 $dF = 0$ 等价于两个方程：

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial B_k}{\partial x^k} &= 0 \\
 \frac{\partial E_j}{\partial x^i} - \frac{\partial E_i}{\partial x^j} + \epsilon_{ijk} \frac{\partial B_k}{\partial t} &= 0
 \end{aligned}$$

第一个方程显然就是 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 。对于第二个方程，我们将其与 ϵ_{ijl} 缩并得到

$$\epsilon_{ijl} \left(\frac{\partial E_j}{\partial x^i} - \frac{\partial E_i}{\partial x^j} \right) + 2\delta_{kl} \frac{\partial B_k}{\partial t} = 0$$

此即

$$\epsilon_{ijl} \frac{\partial E_j}{\partial x^i} = -\frac{\partial B_l}{\partial t}$$

显然这就是 $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ 。

可见 Maxwell 方程组中的两个方程可以统一地写为 $dF = 0$ 。为了写出另外两个方程，我们需要先定义 4-电流密度矢量 \mathbb{J} 。记经典的三维电流密度矢量为 \mathbf{J} ，电荷密度为 ρ ，那么 \mathbb{J} 的定义为

$$\mathbb{J} = (\rho, \mathbf{J})^T$$

我们可以先使用 4-电流密度将电荷守恒改写成

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J^i}{\partial x^i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

根据电荷守恒，我们可以立即看出 \mathbb{J} 是个良定义的 4-矢量：

$$\partial'_\mu J'^\mu = \Lambda^\nu{}_\mu \partial_\nu J'^\mu = 0$$

所以

$$J^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu J'^\mu$$

下面我们观察一下原 Maxwell 方程组的形式：

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{B} &= 4\pi \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi \rho\end{aligned}$$

这两组方程组中 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的地位发生了互换，因此我们推测为了将 Maxwell 方程组中的另两个方程写为四维形式，我们应当先想办法互换 F 中 E_i 和 B_i 的地位。为此，我们考虑取 Hodge 对偶：

$$\star F = E_i \star (dx^i \wedge dt) + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} B_k \star (dx^i \wedge dx^j)$$

根据 Hodge 对偶的定义，我们设

$$\star (dx^i \wedge dt) = \alpha dx^j \wedge dx^k \quad \star (dx^i \wedge dx^j) = \beta dx^k \wedge dt$$

那么

$$\begin{aligned}(dx^i \wedge dt) \wedge \star (dx^i \wedge dt) &= \alpha dx^i \wedge dt \wedge dx^j \wedge dx^k = -\alpha dt \wedge dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \\ &= \langle dx^i \wedge dt, dx^i \wedge dt \rangle dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3\end{aligned}$$

而

$$\langle dx^i \wedge dt, dx^i \wedge dt \rangle = \begin{vmatrix} \delta_{ii} & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

因此

$$-\alpha dt \wedge dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = -3 dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

可见

$$\alpha = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk}$$

从而

$$\star (dx^i \wedge dt) = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} dx^j \wedge dx^k$$

又因为

$$(dx^i \wedge dx^j) \wedge \star (dx^i \wedge dx^j) = \beta dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \wedge dt = \langle dx^i \wedge dx^j, dx^i \wedge dx^j \rangle dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

而

$$\langle dx^i \wedge dx^j, dx^i \wedge dx^j \rangle = \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{ij} \\ \delta_{ji} & \delta_{jj} \end{vmatrix} = \delta_{ii} \delta_{jj} - \delta_{ij} \delta_{ji} = \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk}$$

于是

$$-\beta dt \wedge dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = \epsilon_{ijk} dt \wedge dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$$

即

$$\star(dx^i \wedge dx^j) = -\epsilon_{ijk} dx^k \wedge dt$$

因此

$$\begin{aligned}\star F &= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} E_k dx^i \wedge dx^j - \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} B_k dx^l \wedge dt \\ &= \delta_{kl} B_k dt \wedge dx^l + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} E_k dx^i \wedge dx^j \\ &= -B_k dx^l \wedge dt + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} E_k dx^i \wedge dx^j\end{aligned}$$

下面我们考虑 $\star F$ 的外微分:

$$\begin{aligned}d\star F &= -\frac{\partial B_k}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^k \wedge dt + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial t} dt \wedge dx^i \wedge dx^j + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial x^l} dx^l \wedge dx^i \wedge dx^j \\ &= \left(\frac{1}{2}\epsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial t} - \frac{\partial B_j}{\partial x^i} \right) dt \wedge dx^i \wedge dx^j + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial x^l} dx^l \wedge dx^i \wedge dx^j \\ &= \left(\frac{1}{2}\epsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial t} - \frac{\partial B_j}{\partial x^i} \right) dt \wedge dx^i \wedge dx^j + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} \frac{\partial E_k}{\partial x^l} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &= \left(\frac{1}{2}\epsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial t} - \frac{\partial B_j}{\partial x^i} \right) dt \wedge dx^i \wedge dx^j + \frac{\partial E_k}{\partial x^k} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3\end{aligned}$$

可见我们的确算出了类似电场散度、磁场旋度的项。但是现在的问题是 $d\star F$ 是个 3-形式，而 J 自身顶多对应着一个 1-形式 $J = -\rho dt + J_i dx^i$ 。为此，我们可以考虑对 $d\star F$ 取 Hodge 对偶：

$$\star d\star F = \left(\frac{1}{2}\epsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial t} - \frac{\partial B_j}{\partial x^i} \right) \star(dt \wedge dx^i \wedge dx^j) + \frac{\partial E_k}{\partial x^k} \star(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)$$

我们设

$$\begin{aligned}\star(dt \wedge dx^i \wedge dx^j) &= a dx^k \\ \star(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) &= b dt\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}adt \wedge dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k &= \langle dt \wedge dx^i \wedge dx^j, dt \wedge dx^i \wedge dx^j \rangle dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{ii} & \delta_{ij} \\ 0 & \delta_{ji} & \delta_{jj} \end{vmatrix} dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &= -\epsilon_{ijk} dt \wedge dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k\end{aligned}$$

于是

$$a = -\epsilon_{ijk}$$

而

$$\begin{aligned} b dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dt &= -b dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &= \langle dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \rangle dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &= dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \end{aligned}$$

因此

$$b = -1$$

从而我们得到

$$\star(dt \wedge dx^1 \wedge dx^j) = -\epsilon_{ijk} dx^k \quad \star(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = -dt$$

于是

$$\begin{aligned} \star d \star F &= -\frac{\partial E_k}{\partial x^k} dt - \epsilon_{ijl} \left(\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial t} - \frac{\partial B_j}{\partial x^i} \right) dx^l \\ &= -\frac{\partial E_k}{\partial x^k} dt - \left(\frac{\partial E_l}{\partial t} - \epsilon_{ijl} \frac{\partial B_j}{\partial x^i} \right) dx^l \end{aligned}$$

可见我们的确在一个 1-形式中得到了电场的散度项以及磁场的旋度项。同时我们注意到

$$4\pi J = -4\pi \rho dt + 4\pi J_i dx^i$$

从而如果我们令 $\star d \star F = 4\pi J$ ，那么我们便有

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_k}{\partial x^k} &= 4\pi \rho \\ \epsilon_{ijl} \frac{\partial B_j}{\partial x^i} &= 4\pi J_l + \frac{\partial E_l}{\partial t} \end{aligned}$$

这正是

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho \quad \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

因此 Maxwell 方程组中的另外两个方程可以写为

$$\star d \star F = 4\pi J$$

于是我们可以将 Maxwell 方程组的四个方程在 Minkowski 时空中写为相当紧凑的两个方程：

$$\star d \star F = 4\pi J$$

$$dF = 0$$

现在我们已经用微分形式的语言重述了 Maxwell 方程。考虑到微分形式和全反对称协变张量相对应，因此我们可以考虑将以上两个方程用张量的分量再重述一遍：

因为

$$F = dA = \partial_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu = \partial_\mu A_\nu dx^\mu \otimes dx^\nu - \partial_\nu A_\mu dx^\nu \otimes dx^\mu = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \otimes dx^\nu$$

于是我们可以定义电磁场张量为

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

写成矩阵形式便是

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

这是一个反对称张量。我们接下来便有

$$F = F_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

于是 $dF = 0$ 现在便可以写成

$$\partial_\alpha F_{\mu\nu} dx^\alpha \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = 0$$

这便意味着

$$\partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} = 0$$

同时我们考虑

$$F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

那么另一个方程便可以写为

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -4\pi J^\nu$$

根据 $F^{\mu\nu}$ 的 Lorentz 协变性，我们可以推知在两个惯性系 K, K' 中的 $F^{\mu\nu}, F'^{\mu\nu}$ 将有如下关系：

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta}$$

其中 Λ 为 K 系到 K' 系的特殊 Lorentz 变换矩阵。考虑到

$$\Lambda^0_0 = \gamma \quad \Lambda^0_i = \Lambda^i_0 = -\gamma v_i \quad \Lambda^i_j = \delta_{ij} + \frac{\gamma - 1}{v^2} v_i v_j$$

于是对于电场，我们有

$$\begin{aligned}
 E'_i &= \Lambda^0_\alpha \Lambda^i_\beta F^{\alpha\beta} = \gamma \Lambda^i_\beta F^{0\beta} + \Lambda^0_j \Lambda^i_\beta F^{j\beta} = \gamma \Lambda^i_j F^{0j} + \Lambda^0_j \Lambda^i_0 F^{j0} + \Lambda^0_j \Lambda^i_k F^{jk} \\
 &= \gamma \left(\delta_{ij} + \frac{\gamma-1}{v^2} v_i v_j \right) E_j - \gamma^2 v_i v_j E_j - \gamma v_j \left(\delta_{ik} + \frac{\gamma-1}{v^2} v_i v_k \right) \epsilon_{jkm} B_m \\
 &= \gamma E_i + \left(\frac{\gamma^2-1}{v^2} - \gamma^2 \right) v_i v_j E_j - \gamma v_j \epsilon_{jim} B_m - \frac{\gamma(\gamma-1)}{v^2} v_i v_j v_k \epsilon_{jkm} B_m \\
 &= \gamma E_i + \gamma \epsilon_{ijk} v_j B_k + \frac{1-\gamma}{v^2} v_i v_j E_j
 \end{aligned}$$

这也就是

$$\mathbf{E}' = \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma-1}{v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{v}$$

对于磁场，我们则有

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{ijk} B'_k &= F^{ij} = \Lambda^i_\mu \Lambda^j_\nu F^{\mu\nu} \\
 &= \Lambda^i_0 \Lambda^j_l F^{0l} + \Lambda^i_k \Lambda^j_0 F^{k0} + \Lambda^i_k \Lambda^j_l F^{kl} \\
 &= -\gamma v_i \left(\delta_{jl} + \frac{\gamma-1}{v^2} v_j v_l \right) E_l + \gamma v_j \left(\delta_{ik} + \frac{\gamma-1}{v^2} v_i v_k \right) E_k \\
 &\quad + \left(\delta_{ik} + \frac{\gamma-1}{v^2} v_i v_k \right) \left(\delta_{jl} + \frac{\gamma-1}{v^2} v_j v_l \right) \epsilon_{klm} B_m \\
 &= -\gamma (v_i E_j - v_j E_i) + \epsilon_{ijm} B_m + \frac{\gamma-1}{v^2} v_j v_l \epsilon_{ilm} B_m + \frac{\gamma-1}{v^2} v_i v_k \epsilon_{kjm} B_m
 \end{aligned}$$

两边同时缩并 ϵ_{ijn} 便有

$$\begin{aligned}
 2\delta_{nk} B'_k &= -\gamma v_i E_j \epsilon_{ijn} + \gamma v_j E_i \epsilon_{ijn} + 2\delta_{nm} B_m + \frac{\gamma-1}{v^2} v_j v_l (\delta_{jl} \delta_{nm} - \delta_{jm} \delta_{nl}) B_m \\
 &\quad + \frac{\gamma-1}{v^2} v_i v_k (\delta_{ik} \delta_{nm} - \delta_{im} \delta_{nk}) B_m \\
 &= -2\gamma \epsilon_{ijn} v_i E_j + 2B_n + (\gamma-1)B_n - \frac{\gamma-1}{v^2} v_n v_m B_m + (\gamma-1)B_n - \frac{\gamma-1}{v^2} v_n v_i B_i \\
 &= -2\gamma \epsilon_{ijn} v_i E_j + 2\gamma B_n - \frac{2(\gamma-1)}{v^2} v_n v_m B_m
 \end{aligned}$$

此即

$$B'_n = \gamma (B_n - \epsilon_{ijn} v_i E_j) - \frac{\gamma-1}{v^2} v_n v_m B_m$$

写成矢量形式也就是

$$\mathbf{B}' = \gamma (\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma-1}{v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{v}$$

5.5 Lorentz 力

我们前面导出过一个粒子的 4-速度为

$$\mathbf{U} = (\gamma, \gamma \mathbf{u})$$

记这个粒子的静质量为 m ，那么我们可以定义 4-动量为

$$\mathbf{P} = m\mathbf{U} = (m\gamma, m\gamma \mathbf{u}) = (m\gamma, \mathbf{p})$$

显然这是良定义的。4-动量的时间分量 $P^0 = m\gamma$ 是粒子的相对论性能量，而空间分量 P^i 叫做相对论性 3-动量。因为 $U^\mu U_\mu = -1$ ，我们便有

$$P^\mu P_\mu = -m^2$$

现在我们可以定义 4-力为

$$\mathbb{F} = \frac{d\mathbf{P}}{d\tau}$$

考虑到

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \gamma^3 \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{d\tau}$$

因此

$$\mathbb{F} = \left(m\gamma^3 \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{d\tau}, m\gamma \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} + m\gamma^3 \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \mathbf{u} \right)$$

可见如果我们在和粒子瞬时相对静止的惯性系中观察，那么此时 $\mathbf{u} = 0$ 且 τ 等于我们参考系的坐标时 t ，于是此时便有

$$\mathbb{F}_{\text{瞬时静止系}} = (0, \mathbf{F})$$

其中 \mathbf{F} 就是我们熟悉的经典力：

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

从而在物理上我们应该把 4-力理解为描述加速粒子在瞬时静止系中所受到的三维力的量。

如果一个粒子带有电荷 q ，它所在的电磁场的场张量为 $F_{\mu\nu}$ ，那么它所受的逆变形式的四维力由 Lorentz 力方程给出：

$$f^\mu = q\eta^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} U^\nu = qF^{\mu\nu} U_\nu$$

我们可以考虑计算这个方程给出的 4-力的空间分量：

$$\begin{aligned} f^i &= qF^{i\nu} U_\nu = -q\gamma(-E^i) + q\gamma F^{ij} u_j \\ &= q\gamma \left(E^i + \epsilon^i_{jk} u^j B^k \right) \end{aligned}$$

这也就是

$$\mathbb{F}_{\text{空间}} = \gamma q (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

考虑到 4-力的空间分量为

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

从而与之对应的在三维动量的变化率为

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

可见这正好是经典的 Lorentz 力公式。

5.6 带电粒子的作用量原理

由电磁场和带电粒子所组成的整个体系的作用量 S 应当分为三个部分：

$$S = S_p + S_f + S_i$$

其中 S_p 是仅和粒子本身性质有关的作用量， S_f 是仅和电磁场本身性质有关的作用量， S_i 是描述粒子和电磁场相互作用的项。本节我们将构造 S_p 与 S_i ，而 S_f 则将在 5.8 节中讨论。

考虑狭义相对论后作用量应当是一个 Lorentz 不变量，而我们能通过自由粒子构造出的 Lorentz 不变量只有其世界线的弧长，即

$$S = \alpha \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau$$

为了确定比例系数 α ，我们需要考虑体系取非相对论极限时的行为。我们设在某个惯性参考系中粒子的速度为 v ，那么其固有时和坐标时的关系为

$$d\tau = \sqrt{1 - v^2} dt$$

进而我们可以把作用量写为

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \alpha \sqrt{1 - v^2} dt$$

于是我们可以将这个惯性系中粒子的 Lagrange 量取为

$$\mathcal{L} = \alpha \sqrt{1 - v^2}$$

取低速极限，那么我们便有

$$\mathcal{L} \approx \alpha - \frac{1}{2} \alpha v^2 + \dots$$

经典力学中自由粒子的 Lagrange 量应该为

$$\mathcal{L}_{\text{Classical}} = \frac{1}{2} m v^2 + \text{Const}$$

因此我们猜测自由粒子的相对论性作用量中系数 α 应该取 $-m$ ，进而我们推测自由粒子的作用量应该取

$$S = -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau$$

我们承认最小作用量原理的正确性，那么为了验证这样定义的确是粒子的作用量，我们应该期待对其进行变分能够得到和经典情况相似的结论。因为变分得到的结果是曲线重参数化下不变的，从而我们可以在变分中始终用世界线的弧长参数 τ 将其参数化并得到独立于坐标的结果。

首先，粒子的作用量实际上应该被写为

$$S = -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau$$

因为我们取 τ 为未变分曲线的弧长参数，从而没有变分时

$$\sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} = 1$$

但是对于变分后的曲线而言虽然原曲线的弧长参数仍足以参数化这条曲线，但是此时

$$\sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} \neq 1$$

因此我们在变分操作中并不能忽略这一项。于是我们有

$$\begin{aligned} \delta S &= m \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right)^{-1/2} \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \delta \left(\frac{dx^\nu}{d\tau} \right) d\tau \\ &= m \int_{\tau_1}^{\tau_2} \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \delta \left(\frac{dx^\nu}{d\tau} \right) d\tau \\ &= m \int_{\tau_1}^{\tau_2} U_\nu \frac{d}{d\tau} [\delta x^\nu] d\tau \\ &= P_\nu \delta x^\nu \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{dP_\nu}{d\tau} \delta x^\nu d\tau \end{aligned}$$

因为变分固定端点不动，从而 $P_\nu \delta x^\nu \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} = 0$ ，进而 $\delta S = 0$ 便要求

$$\frac{dP_\nu}{d\tau} = 0$$

这看起来很像对自由粒子写下的 Newton 第二定律。如果只考虑空间分量，那么 $P_i = m\gamma v_i$ 给出 $\delta S = 0$ 会使得相对论性三维动量具有如下性质：

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$$

在低速极限下这正好和经典力学的情况对应，进而有力地支持了我们构造作用量的方式。

现在我们考虑耦合进电磁场的情况，此时粒子的作用量应该写为

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} -m \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau + \int_{x_i}^{x_f} q A_\mu dx^\mu$$

于是

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} m \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) d\tau + \int_{x_i}^{x_f} q \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta x^\nu dx^\mu + \int_{x_i}^{x_f} q A_\mu \delta (dx^\mu) \\ &= - \int_{\tau_1}^{\tau_2} m \frac{dU_\nu}{d\tau} \delta x^\nu d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} q \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} U^\mu \delta x^\nu d\tau + \int_{x_i}^{x_f} q A_\mu \delta \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) d\tau \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[-\frac{dP_\nu}{d\tau} + q \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} U^\mu - q \frac{dA_\nu}{d\tau} \right] \delta x^\nu d\tau \end{aligned}$$

于是 $\delta S = 0$ 便要求

$$\frac{dP_\nu}{d\tau} = q \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} U^\mu - q \frac{dA_\nu}{d\tau} = q \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) U^\mu = q F_{\nu\mu} U^\mu$$

这正好是 Lorentz 力公式。

事实上，尽管我们选取 τ 参数化世界线时有

$$\sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} = 1$$

但是我们在作用量的定义式中保留它是很有必要的。否则我们会非常容易混淆单纯作为积分参数的 $d\tau$ 与参与构成世界线线元的 $d\tau$ 。存在电磁场时带电粒子的作用量也可以写成

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(-m \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} + q A_\mu U^\mu \right) d\tau$$

而我们只有保留未变分时等于 1 的线元项才能清楚地表明作用量的定义式不是

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (-m + q A_\mu U^\mu) \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau$$

由于在带电粒子的作用量项中出现了 4-电磁势 A_μ ，而我们可以通过时空中的任意标量场 λ 对 A_μ 做规范变换 $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$ 。从而我们的作用量并不是规范不变的，因此它并不是一个物理上可观测的量。但是规范变换后

的作用量为

$$\begin{aligned}
 S' &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(-m \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} + q A_\mu U^\mu + q \partial_\mu \lambda U^\mu \right) d\tau \\
 &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(-m \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} + q A_\mu U^\mu \right) d\tau + \int_{x_i}^{x_f} q \partial_\mu \lambda dx^\mu \\
 &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(-m \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} + q A_\mu U^\mu \right) d\tau + q [\lambda(x_f) - \lambda(x_i)] \\
 &= S + q [\lambda(x_f) - \lambda(x_i)]
 \end{aligned}$$

可见规范变换仅使得作用量变化了一个常数，这并不会改变变分的结果，进而它并不会影响我们的物理预言。

我们可以将和电磁场耦合的带电粒子的作用量用某一惯性系中的坐标时写出：

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(-m \sqrt{1 - \dot{x}_i \dot{x}^i} + e A_i \dot{x}^i - e \phi \right) dt$$

那么我们在这个惯性系中观察到的粒子的 **Lagrange** 量便为

$$\mathcal{L} = -m \sqrt{1 - \dot{x}_i \dot{x}^i} + e A_i \dot{x}^i - e \phi = -m \gamma^{-1} + e A_i \dot{x}^i - e \phi$$

据此我们可以导出粒子的正则动量为

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = \frac{m}{\sqrt{1 - \dot{x}_i \dot{x}^i}} \dot{x}_i + e A_i = \gamma m \dot{x}_i + e A_i$$

那么现在我们利用 **Legendre** 变换便能导出我们在此惯性系中的 **Hamilton** 量为

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} &= \pi_i \dot{x}^i - \mathcal{L} = \gamma m \dot{x}_i \dot{x}^i + e A_i \dot{x}^i + m \gamma^{-1} - e A_i \dot{x}^i + e \phi \\
 &= \left(\frac{\dot{x}_i \dot{x}^i}{\sqrt{1 - \dot{x}_j \dot{x}^j}} - \sqrt{1 - \dot{x}_k \dot{x}^k} \right) m + e \phi \\
 &= \gamma m + e \phi
 \end{aligned}$$

Hamilton 量应该被写成正则动量和广义坐标的函数，于是我们考虑

$$m \frac{\dot{x}_i}{\sqrt{1 - \dot{x}_j \dot{x}^j}} = \pi_i - e A_i$$

进而

$$m^2 \frac{1}{1 - \dot{x}_j \dot{x}^j} = m^2 + m^2 \frac{\dot{x}_i \dot{x}^i}{1 - \dot{x}_j \dot{x}^j} = m^2 + (\pi_i - e A_i)(\pi^i - e A^i) := m^2 + (\pi - e A)^2$$

从而 **Hamilton** 量便是

$$\mathcal{H} = \sqrt{(\pi - e A)^2 + m^2} + e \phi$$

如果我们取 $(\pi - eA)^2 \ll m^2$ 的低速极限, 那么我们做展开便能得到

$$\mathcal{H} = m\sqrt{1 + \frac{(\pi - eA)^2}{m^2}} + e\phi \approx m + \frac{(\pi - eA)^2}{2m} + e\phi + \dots$$

舍去第一个常数项与高阶项后我们得到的结果和经典力学一致。

5.7 稳恒电磁场中带电粒子的运动

根据我们导出的电磁场中相对论性带电粒子的 Hamilton 量, 如果我们的外场恒定, 那么 \mathcal{H} 不显含时间, 进而

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$$

于是

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i} \dot{x}^i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_i} \dot{\pi}_i$$

考虑到 Hamilton 正则方程给出

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{x}^i} = -\dot{\pi}_i \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_i} = \dot{x}^i$$

于是我们发现, 对于恒定电磁场而言

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0$$

即 \mathcal{H} 是一个守恒量, 我们可以将其视为粒子的总能量。因为 $\mathcal{H} = m\gamma + e\phi$, 于是我们便有

$$\frac{d}{dt}(m\gamma) + e \frac{d\phi}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\gamma) = -e \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \dot{x}^i = e \dot{x}^i E_i = e \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$$

这给出了相对论性带电粒子能量守恒的一个表达式。

首先我们考虑仅存在电场时相对论性带电粒子的运动。根据 Lorentz 力公式, 此时我们有

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E}$$

为方便起见我们设电场仅沿 x 方向, 那么

$$\frac{dp_x}{dt} = eE \quad \frac{dp_y}{dt} = 0 \quad \frac{dp_z}{dt} = 0$$

我们可以不失一般性地选取 xyz 三个正交坐标轴的方向使得 p_z 始终为零, 进而解得

$$p_x(t) = p_{x0} + eEt \quad p_y(t) = p_{y0} \quad p_z(t) = 0$$

考虑到

$$-m^2 = P_\mu P^\mu = -\mathcal{E}^2 + p_i p^i$$

于是总能量为

$$\mathcal{E} = \sqrt{m^2 + p_{y0}^2 + (p_{x0} + eEt)^2} = m\gamma$$

进而因为 $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$ ，我们便有

$$\frac{dx}{dt} = \frac{eEt + p_{x0}}{\sqrt{m^2 + p_{y0}^2 + (p_{x0} + eEt)^2}} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{p_{y0}}{\sqrt{m^2 + p_{y0}^2 + (p_{x0} + eEt)^2}}$$

积分便得到

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{eE} \left[\sqrt{m^2 + p_{y0}^2 + (eEt + p_{x0})^2} - \sqrt{m^2 + p_{x0}^2 + p_{y0}^2} \right]$$

$$y(t) = y_0 + \frac{p_{y0}}{eE} \left[\operatorname{arcsinh} \left(\frac{p_{x0} + eEt}{\sqrt{m^2 + p_{y0}^2}} \right) - \operatorname{arcsinh} \left(\frac{p_{x0}}{\sqrt{m^2 + p_{y0}^2}} \right) \right]$$

通过取适当的初始条件，我们可以将上式化为

$$x(t) = \frac{1}{eE} \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + e^2 E^2 t^2}$$

$$y(t) = \frac{p_0}{eE} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{eEt}{\mathcal{E}_0} \right)$$

于是

$$eEt = \mathcal{E}_0 \sinh \left(\frac{eEy}{p_0} \right)$$

进而粒子运动的轨迹为

$$x = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \cosh \left(\frac{eEy}{p_0} \right)$$

在低速极限下取 $p_0 = mv_0$, $\mathcal{E}_0 = m$ ，我们将上式展开便能得到经典 Newton 力学下的粒子轨迹

$$x = \text{Const} + \frac{eE}{2mv_0^2} y^2 + \dots$$

如果仅存在磁场，那么 Lorentz 力公式给出

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

此时不存在电场表明

$$\frac{d}{dt}(m\gamma) = m \frac{d\gamma}{dt} = 0$$

即 γ 为一个常数，因此

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \Rightarrow \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{m\gamma} \mathbf{v} \times \mathbf{B} := \frac{e}{\mathcal{E}} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

其中 $\mathcal{E} = m\gamma + e\phi = m\gamma$ ，此时为一个守恒量。

我们不失一般性地假设 \mathbf{B} 沿 z 轴并且定义

$$\omega = \frac{eB}{\mathcal{E}} = \frac{eB}{m\gamma}$$

那么我们便有

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega v_y \quad \frac{dv_y}{dt} = -\omega v_x \quad \frac{dv_z}{dt} = 0$$

显然 v_z 应该是一个常数。对于 v_x 和 v_y ，我们有

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -i\omega(v_x + iv_y)$$

进而

$$v_x + iv_y = v_0 e^{-i(\omega t + \varphi)}$$

此即

$$v_x = v_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad v_y = -v_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

因此

$$x(t) = x_0 + r_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad y(t) = y_0 + r_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad z(t) = z_0 + v_z t$$

其中

$$r_0 = \frac{v_0}{\omega} = \frac{m\gamma v_0}{eB} = \frac{|p_{xy}|}{eB}$$

可见一般上粒子的轨迹是一个螺旋线。

最后我们考虑同时存在电场和磁场的情况。此时我们可以不失一般性地选取坐标系使得磁场沿 z 轴且电场仅在 y, z 轴上有非零分量，即

$$\mathbf{B} = (0, 0, B) \quad \mathbf{E} = (0, E_y, E_z)$$

我们假设粒子是非相对论性的，于是

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

于是我们有

$$m\ddot{x} = eB\dot{y}$$

$$m\ddot{y} = eE_y - eB\dot{x}$$

$$m\ddot{z} = eE_z$$

我们选择坐标使得 $t = 0$ 时粒子位于原点，那么 z 方向上的情况可以立即解出：

$$z = \frac{eE_z}{2m} t^2 + v_{z0} t$$

对于 x, y 方向我们仍可以引入虚数 i ，那么便有

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\dot{y}) = -i\frac{eB}{m}(\dot{x} + i\dot{y}) + i\frac{eE_y}{m} := -i\omega(\dot{x} + i\dot{y}) + i\frac{eE_y}{m}$$

于是

$$\dot{x} + i\dot{y} = ae^{-i\omega t} + \frac{eE_y}{m\omega} = ae^{-i\omega t} + \frac{E_y}{B}$$

进而

$$\dot{x} = a \cos \omega t + \frac{E_y}{B}$$

$$\dot{y} = -a \sin \omega t$$

积分便得到

$$x = \frac{a}{\omega} \sin \omega t + \frac{E_y}{B} t$$

$$y = \frac{a}{\omega} (\cos \omega t - 1)$$

这描述了粒子轨迹在 $x - y$ 平面上的投影，为一条摆线。

我们还可以对前面得到的粒子的速度方程取时间平均并得到

$$\langle \dot{x} \rangle = \frac{E_y}{B} \quad \langle \dot{y} \rangle = 0$$

我们称不为零的 $\langle \dot{x} \rangle$ 为粒子的漂移速度，它的方向和 \mathbf{E}, \mathbf{B} 垂直。一般上我们可以将漂移速度写为

$$\mathbf{v}_{drift} = \frac{1}{B^2} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

为了保证我们忽略相对论效应的低速近似仍然有效，我们应该有 $|\mathbf{E} \times \mathbf{B}| \ll B^2$ ，在我们计算的情形中便是 $|E_y| \ll |B|$ 。

5.8 电磁场的作用量原理

5.8.1 电磁场的 Lorentz 不变量

利用 $F_{\mu\nu}$ 可以构造出两个二次型 Lorentz 不变量。我们将会看到，在这两个 Lorentz 不变量中有一个适用于电磁场作用量的构造。

第一个不变量为

$$I_1 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

这是 Lorentz 不变的：

$$F_{\mu'\nu'} F^{\mu'\nu'} = \Lambda_{\mu'}^{\mu} \Lambda_{\nu'}^{\nu} \Lambda^{\mu'}_{\mu} \Lambda^{\nu'}_{\nu} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

考虑到

$$F_{0i} = -F_{i0} = -E_i \quad F_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k$$

因此我们可以将 I_1 用电场和磁场写为

$$\begin{aligned} I_1 &= F_{0i} F^{0i} + F_{i0} F^{i0} + F_{ij} F^{ij} \\ &= -2E_i E_i + \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijl} B_k B_l \\ &= 2\delta_{kl} B_k B_l - 2E_i E_i \\ &= 2(|\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{E}|^2) \end{aligned}$$

第二个不变量被定义为

$$I_2 = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}$$

其中 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 是我们在 1.1 中定义过的逆变形式的 Levi-Civita 张量, $\epsilon^{0123} = -1$ 。这个不变量可以被写为

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} [\epsilon^{0\nu\rho\sigma} E_{0\nu} E_{\rho\sigma} + \epsilon^{\mu 0\rho\sigma} F_{\mu 0} F_{\rho\sigma} + \epsilon^{\mu\nu 0\sigma} F_{\mu\nu} F_{0\sigma} + \epsilon^{\mu\nu\rho 0} F_{\mu\nu} F_{\rho 0}] \\ &= 2\epsilon^{0ijk} F_{0i} F_{jk} \\ &= 2\epsilon^{0ijk} (-E_i) \epsilon_{jkl} B_l \\ &= 2\epsilon^{ijk} \epsilon_{jkl} E_i B_l \\ &= 4\delta_{il} E_i B_l = 4E_i B^i = 4\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

事实上我们可以将这个不变量的定义和电磁场张量的外积联系在一起:

$$\begin{aligned} F \wedge F &= (E_i dx^i \wedge dt + \epsilon_{ijk} B_k dx^i \wedge dx^j) \wedge (E_i dx^i \wedge dt + \epsilon_{ijk} B_k dx^i \wedge dx^j) \\ &= \epsilon_{ijk} B_k E_l dx^l \wedge dt \wedge dx^i \wedge dx^j + \epsilon_{ijk} B_k E_l dx^i \wedge dx^j \wedge dx^l \wedge dt \\ &= -2\epsilon_{ijk} B_k E_l dt \wedge dx^l \wedge dx^i \wedge dx^j \\ &= -2\epsilon_{ijk} \epsilon_{jkl} B_k E_l dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &= -4B_i E^i dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \end{aligned}$$

利用这个定义我们可以轻易的看出 I_2 的 Lorentz 不变性: 在 Lorentz 变换下我们有

$$\begin{aligned} F \wedge F &= -4B_i E^i dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &= -4B_i E^i \Lambda^0_\mu \Lambda^1_\nu \Lambda^2_\alpha \Lambda^3_\beta dx'^\mu \wedge dx'^\nu \wedge dx'^\alpha \wedge dx'^\beta \\ &= -4B_i E^i \Lambda^0_\mu \Lambda^1_\nu \Lambda^2_\alpha \Lambda^3_\beta \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} dt' \wedge dx'^1 \wedge dx'^2 \wedge dx'^3 \\ &= -4 \det \Lambda B_i E^i dt' \wedge dx'^1 \wedge dx'^2 \wedge dx'^3 \end{aligned}$$

我们前面已经看到过，对于特殊 Lorentz 变换而言 $\det \Lambda = 1$ ，因此我们有

$$-4B_i E^i dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = -4B_i E^i dt' \wedge dx'^1 \wedge dx'^2 \wedge dx'^3$$

因此 $B_i E^i$ 的确为一个 Lorentz 不变量。

$|\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{E}|^2$ 和 $\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}$ 的 Lorentz 不变性会带来很多结果，比如：

- 如果 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 在某一个惯性系中正交，那么二者在其他惯性系中也互相正交。
- 如果在某一个惯性系中电磁场表现为纯电场或纯磁场，那么在任何一个其它惯性系中 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 均正交。
- 如果在某个惯性系中 $|\mathbf{E}| > |\mathbf{B}|$ ，那么在任何一个惯性系中电场和磁场的相对大小都会保持这个相对关系，反之亦然。
- 通过选择合适的惯性系并做恰当的 Lorentz 变换，我们可以使一点处的电场或磁场在 I_1, I_2 不变的情况下取到任意值。

5.8.2 电磁场的作用量

我们平常根据 Lagrange 量定义的作用量形式为

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L dt$$

我们记所研究的区域为 U ，那么 Lagrange 量可以写为体积分的形式：

$$L = \int_V \mathcal{L} d^3x$$

其中 \mathcal{L} 叫做 Lagrange 密度。那么现在作用量便能被写为四维的积分：

$$S = \int_U \mathcal{L} d^4x$$

根据我们目前已经构造出的 Lorentz 不变量，我们可以猜测电磁场作用量可能有两种形式。首先我们先说明使用 I_2 构造的作用量变分得到的结果是平凡的：记

$$S' = \int_U \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} d^4x = \int_U \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} \partial_\rho A_\sigma d^4x$$

考虑对矢势 A_σ 进行变分，并且规定矢势在 ∂U 上的变分为零，那么我们便

有

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \int_U \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho A_\sigma \delta F_{\mu\nu} + \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} \delta \partial_\rho A_\sigma d^4x \\
 &= \int_U \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho A_\sigma \partial_\mu (\delta A_\nu) d^4x + \int_U \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu A_\nu \partial_\rho (\delta A_\sigma) d^4x \\
 &= \underbrace{\int_U \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho A_\sigma \delta A_\sigma d\Sigma_\mu + \int_U \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu A_\nu \delta A_\sigma d\Sigma_\rho}_0 \\
 &\quad + \int_U \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \delta A_\sigma \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma d^4x + \int_U \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \delta A_\sigma \partial_\rho \partial_\mu A_\nu d^4x \\
 &= \int_U (\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} + \epsilon^{\rho\nu\mu\sigma}) \delta A_\sigma \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma d^4x = 0
 \end{aligned}$$

变分结果是平凡的，这表明 I_2 并不适合电磁场作用量的构造。

我们依据 I_1 构造的作用量的形式为

$$S = \int_U F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x$$

对其变分则能得到

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \int_U F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} d^4x \\
 &= \int_U F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \delta (\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}) d^4x \\
 &= \int_U F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \delta F_{\alpha\beta} d^4x \\
 &= 2 \int_U F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} d^4x \\
 &= 2 \int_U F^{\mu\nu} \delta (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) d^4x \\
 &= 4 \int_U F^{\mu\nu} \partial_\mu (\delta A_\nu) d^4x \\
 &= 4 \underbrace{\int_U F^{\mu\nu} \delta A_\nu d\Sigma_\mu - 4 \int_U \partial_\mu F^{\mu\nu} \delta A_\nu d^4x}_0 \\
 &= -4 \int_U \partial_\mu F^{\mu\nu} \delta A_\nu d^4x
 \end{aligned}$$

因此 $\delta S = 0$ 便对应着 $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ ，这正是无源的 Maxwell 方程。另一个方程 $dF = 0$ 源于 F 自身的性质，和场变分无关。

我们其实还可以构造出一个新的作用量：

$$S_{f.o.} = \int_U \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - F^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu \right) d^4x$$

这里我们把 F 与 A 视作互相独立的量。将这个作用量对 $F^{\mu\nu}$ 变分，我们可以得到

$$\begin{aligned}\delta S_{f.o.} &= \int_U \left(\frac{1}{2} F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} - \partial_\mu A_\nu \delta F^{\mu\nu} \right) d^4x \\ &= \int_U \frac{1}{2} [F_{\mu\nu} - (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)] \delta F^{\mu\nu} d^4x\end{aligned}$$

于是 $\delta S_{f.o.} = 0$ 对应着

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

变分中第二个等式来源于我们变分 $F^{\mu\nu}$ 时应当要求 $\delta F^{\mu\nu}$ 应该有全反对称性。将 $S_{f.o.}$ 对 A_ν 变分，我们可以得到

$$\begin{aligned}\delta S_{f.o.} &= \int_U F^{\mu\nu} \delta(\partial_\mu A_\nu) d^4x \\ &= \underbrace{\int_{\partial U} F^{\mu\nu} \delta A_\nu d\Sigma_\mu - \int_U \partial_\mu F^{\mu\nu} \delta A_\nu d^4x}_0 \\ &= - \int_U \partial_\mu F^{\mu\nu} \delta A_\nu d^4x\end{aligned}$$

因此此时 $\delta S_{f.o.} = 0$ 也会给出 $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ 。不过我们下面并不倾向于使用这个作用量。

为了通过变分原理得到含源的 Maxwell 方程 $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -4\pi J^\nu$ ，我们需要对作用量做出一些改动。一方面，我们为不含源的作用量增添一个系数：

$$S = -\frac{1}{16\pi} \int_U F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x$$

那么现在变分得到的结果将是

$$\delta S = \int_U \frac{1}{4\pi} \partial_\mu F^{\mu\nu} \delta A_\nu d^4x$$

可见为了引入电流密度项，我们只需要将作用量改写成

$$S = \int_U \left(-\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + J^\mu A_\mu \right) d^4x$$

那么便有

$$\delta S = \int_U \left(\frac{1}{4\pi} \partial_\mu F^{\mu\nu} + J^\nu \right) \delta A_\nu d^4x$$

于是 $\delta S = 0$ 给出的正是 $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -4\pi J^\nu$ 。

5.9 电磁场的能动量张量

5.9.1 场论中的作用量原理

我们最好在引入电磁场的能动量张量之前对场论进行一个系统性的介绍。

经典场论的核心是时空中的 N 个函数 $\varphi_r(t, \mathbf{x}) = \varphi_r(x^\mu)$, $r = 1, \dots, N$, 我们称各个 φ_r 为 **Lagrange 场** 并简记为 φ 。我们认为这些场可以从动力学的角度完整地描述整个系统, 即系统中的所有物理可观测量都能用 φ_r 进行刻画, 尽管一般上各个 **Lagrange 场** 并不一定是物理可观测的。我们已经看到, 在电动力学中我们刻画电磁场使用的 **Lagrange 场** 并非是电场或者磁场, 而是 4-矢势这个非规范不变的不可直接观测的场。

经典场论中我们可以在 **Lagrange 场** 和经典力学中的广义坐标间做如下类比:

$$\varphi_r(t, \mathbf{x}) \leftrightarrow q_{r,\mathbf{x}}(t)$$

即我们将连续的参数 (r, \mathbf{x}) 视作离散的对广义坐标的编号的连续化, 进而我们研究的场的集合 $\varphi = \{\varphi_r(x^\mu)\}$ 在某种意义上可以被看出一个拥有不可数无限个自由度的 **Lagrange 系统**。因此我们可以期望用 φ 构造出一个系统的作用量泛函 $I[\varphi]$ 并利用最小作用量原理来推算出整个系统的动力学演化情况。

如同 **Lagrange 力学** 的核心是系统的 **Lagrange 量**, 场论的核心是系统的 **Lagrange 密度** \mathcal{L} 。如果仅限于和经典力学的类比, 我们可能会 naive 地认为 \mathcal{L} 应当仅仅是各个 **Lagrange 场** φ_r 与其关于时间的导数 $\dot{\varphi}_r = \partial_0 \varphi_r$ 的泛函。但是因为我们希望作用量应该是 **Lorentz 不变**的, 那么 \mathcal{L} 肯定不能仅仅依赖于 φ 关于时间的导数, 因为 **Lorentz 变换**会导致对其它坐标导数的出现:

$$\partial_0 \varphi = \Lambda_0^\nu \partial'_\nu \varphi$$

因此 \mathcal{L} 必须依赖于各个 φ 相对于各个坐标的偏导数, 即

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x))$$

真实的 **Lagrange 量**应该对所有自由度求和, 这也就是将 **Lagrange 密度**对所有空间坐标进行积分:

$$L(t) = \int \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x)) d^3x$$

那么现在系统的作用量便能被自然地定义为

$$I[\varphi] = \int_{t_i}^{t_f} L(t) dt = \int \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x)) d^4x$$

现在我们便能期待利用 $I[\varphi]$ 构造出和有限自由度系统相似的作用量原理了。我们假设各个函数 $\varphi_r(x^\mu)$ 和泛函 $\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi)$ 的性质都足够地好。我们还要求各个 Lagrange 场 φ_r 及其导数在 t 固定不变而空间参数趋于无穷时减小地足够快, 即

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \varphi_r(t, \mathbf{x}) = 0$$

同时我们还要求 $\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi)$ 在 $\varphi \rightarrow 0$ 时减小地足够快以使得给出 Lagrange 密度在全空间的积分收敛。

那么现在我们便可以考虑以各个 φ_r 为变分参量对 I 进行变分:

$$\begin{aligned} \delta I &= \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_r} \delta \varphi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_r)} \delta (\partial_\mu \varphi_r) \right) d^4x \\ &= \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_r} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_r)} \right) \right] \delta \varphi_r d^4x + \underbrace{\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_r)} \delta \varphi_r d\Sigma_\mu}_0 \\ &= \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_r} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_r)} \right) \right] \delta \varphi_r d^4x \end{aligned}$$

因此 $\delta I = 0$ 要求各个 Lagrange 场满足的条件为

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_r} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_r)} \right) = 0 \quad r = 1, 2, \dots, N$$

注意, 由于我们将 Lagrange 密度视作各个 Lagrange 场及其一阶导的泛函, 它并不显式地依赖各个 x^μ , 因此和 \mathcal{L} 相关的坐标导数都应该被理解为复合函数求导, 例如

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi_r)} \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

5.9.2 标量场的能动量张量

Heuristically, 我们先来看仅有一个 Lagrange 场 φ (即标量场) 的情况。此时 Lagrange 密度是 φ 及其相对各个坐标导数 $\partial_\mu \varphi$ 的泛函, 此时最小作用量原理给出

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) = 0$$

同时我们有

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \partial_\mu \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi)} \partial_\mu \partial_\nu \varphi$$

因此便有

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi)} \right) \partial_\mu \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi)} \partial_\mu \partial_\nu \varphi = \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi)} \partial_\mu \varphi \right)$$

这可以被化成

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi)} \partial_\mu \varphi - \delta_\mu^\nu \mathcal{L} \right) = 0$$

我们可以据此定义一个二阶张量：

$$\Theta_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi)} \partial_\mu \varphi$$

那么原式便等价于 $\partial_\nu \Theta_\mu^\nu = 0$ ，即 Θ_μ^ν 散度为零。我们使用度规升降指标引入纯逆变形式的 $\Theta^{\mu\nu} = \eta^{\mu\delta} \Theta_\delta^\nu$ 并称之为正则能动量张量。

因为 $\partial_\nu \Theta_\mu^\nu = 0$ ，于是对于正则能动量张量而言我们有

$$\partial_\nu \Theta^{\mu\nu} = \partial_0 \Theta^{\mu 0} + \partial_i \Theta^{\mu i} = 0$$

这表明指标 μ 不变时，正则能动量张量的散度为零具有连续性方程的形式。因此 $\Theta^{\mu 0}$ 很可能描述了某种局域守恒荷，而 $\Theta^{\mu i}$ 描述了对应的流。 $\Theta^{\mu\nu}$ 的散度为零可以被视为 μ 取定值时对应的 4-矢量 $j^{(\mu)\nu}$ 散度为零。

下面我们考察 $\Theta^{\mu\nu}$ 各个分量的物理意义。首先对于 Θ^{00} ，我们有

$$\begin{aligned} \Theta^{00} &= \eta^{00} \Theta_0^0 = -\mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi)} \partial_0 \varphi \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - \mathcal{L} \end{aligned}$$

注意 $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{\varphi}$ 正好是场 Lagrange 密度对应的正则动量密度，进而 Θ^{00} 正是 Hamilton 密度，即系统的能量密度。

$\partial_\nu \Theta^{\mu\nu} = 0$ 还意味着

$$\frac{\partial \Theta^{i0}}{\partial t} + \partial_j \Theta^{ij} = 0$$

首先，我们可以看出 Θ^{i0} 是空间平移不变性对应的守恒量，因此我们很自然地将其诠释为场的三维动量密度。将这个式子在三维区域 V 上积分，我们便得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \Theta^{i0} d^3x = - \int_V \partial_j \Theta^{ij} d^3x = - \int_{\partial V} \Theta^{ij} d\Sigma_j$$

等式最左边代表了三维动量的变化率，从而我们现在可以推知 Θ^{ij} 为三维动量流密度张量，或者叫三维应力张量。 Θ^{ij} 描述了单位时间内流过和 x^j 轴垂

直的单位二维面元的三维动量的第 i 个分量。

考虑到 $\partial_0 \Theta^{\mu 0} + \partial_i \Theta^{\mu i} = 0$ ，我们现在有：

$$\frac{\partial \Theta^{00}}{\partial t} + \frac{\partial \Theta^{0i}}{\partial x^i} = 0$$

做体积分便有

$$\int_U \frac{\partial \Theta^{00}}{\partial t} + \frac{\partial \Theta^{0i}}{\partial x^i} d^3x = \int_U \frac{\partial \Theta^{00}}{\partial t} d^3x + \int_{\partial U} \Theta^{0i} d\Sigma_i = 0$$

因此我们发现 Θ^{0i} 在边界上的面积分描述了区域内总能量的减少量，即 Θ^{0i} 描述了能流密度，用 Lagrange 密度写出便是

$$\Theta^{0i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)} \partial_0 \varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)} \dot{\varphi}$$

虽然我们可以为正则能动量张量的各个分量赋予明确的物理意义，但是这里却存在很严重的问题：

- 一般 $\Theta^{\mu\nu}$ 并非无迹的，即 $\eta_{\mu\nu} \Theta^{\mu\nu}$ 一般并不为零。这意味着它并不具有共形不变性。
- 一般 $\Theta^{\mu\nu}$ 不是规范不变的。这表明它的各个分量并非物理可观测量，这意味着 Θ^{00} 所代表的“能量密度”、 Θ^{i0} 代表的“动量密度”以及 Θ^{0i} 、 Θ^{ij} 代表的“能动量流密度”并非我们实际观测的能量密度、动量密度与能动量流密度。
- 一般 $\Theta^{\mu\nu}$ 并不是对称的，这会带来如下困难：
 - 相对论语境下质量与能量的对应关系意味着动量与能流的对应。尤其是在我们使用的自然单位制下 $E = Mc^2 = M$ ，而这意味着

$$\begin{aligned} \Theta^{0i} &= \text{能流密度} \\ &= \text{能量密度} \times \text{能流平均速度的 } j \text{ 分量} \\ &= \text{质量密度} \times \text{质量流平均速度的 } j \text{ 分量} \\ &= \text{动量密度} = \Theta^{i0} \end{aligned}$$

即 Θ^{0i} 应当与 Θ^{i0} 相同。如果正则能动量张量的非对称性表现在 $\Theta^{0i} \neq \Theta^{i0}$ ，那么这将和我们的相对论世界观相矛盾。

- 我们考虑空间中的一个很小的立方体元，记其边长为 L ，那么它的质量为 $\Theta^{00} L^3$ ，其转动惯量将正比于 $\Theta^{00} L^5$ 。我们可以使用应力张量描述作用在这个体元上的力矩，例如，力矩的 z 分量为

$$\begin{aligned} \tau_z &= (-\Theta^{yx} L^2) \frac{L}{2} + (\Theta^{yx} L^2) \left(-\frac{L}{2}\right) - (-\Theta^{xy} L^2) \frac{L}{2} - (\Theta^{xy} L^2) \left(-\frac{L}{2}\right) \\ &= (\Theta^{xy} - \Theta^{yx}) L^3 \end{aligned}$$

如果正则能动量张量的不对称性表现为空间应力张量部分不对称,那么我们会发现场对于我们选取的这个体元存在非零的合力矩,并且这个合力矩正比于 L^3 。因为体元的转动惯量正比于 L^5 ,因此我们会发现正则能动量张量的不对称性会使得 $L \rightarrow 0$ 时选取的体元会获得一个无穷大的角加速度,这显然是不自然的。

因此我们通过场变分得到的正则能动量张量事实上并不能用来描述与实验相符的能动量张量(我们记为 $T^{\mu\nu}$)。不过正则能动量张量也不是一无是处——鉴于它或多或少还是和场有点关系的,我们便可以期望在 $\Theta^{\mu\nu}$ 的基础上想办法构造出符合实验的 $T^{\mu\nu}$ 。同时我们还希望 $T^{\mu\nu}$ 能够继承 $\Theta^{\mu\nu}$ 的散度为零带来的结果,因此我们可以考虑如下构造¹: 寻找一个对 $\nu\rho$ 指标呈反对称的三阶张量场 $\psi^{\mu\nu\rho}$ 使得

$$T^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + \partial_\rho \psi^{\mu\nu\rho} \quad T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$$

那么我们有

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = \partial_\nu \Theta^{\mu\nu} + \partial_\nu \partial_\rho \psi^{\mu\nu\rho} = \partial_\nu \Theta^{\mu\nu} = 0$$

同时我们要求 $\psi^{\mu 0k}$ 在空间坐标趋于无穷时衰减的足够快,于是这种变换不会对全空间总 4-动量的值产生影响:

$$P^\mu = \int T^{\mu 0} d^3x = \int \left(\Theta^{\mu 0} + \partial_0 \psi^{\mu 00} + \partial_k \psi^{\mu 0k} \right) d^3x = \int \Theta^{\mu 0} d^3x + \underbrace{\int \partial_k \psi^{\mu 0k} d^3x}_0$$

最后一项为零是因为它等价于无穷远处的面积分

$$\int_{\partial} \psi^{\mu 0k} d\Sigma_k$$

我们对 $\psi^{\mu\nu k}$ 的要求保证了这一项为零。对于具体的场,我们只需要寻找合适的 $\psi^{\mu\nu\rho}$ 使得 $T^{\mu\nu}$ 对称并且其各个分量都是和实验结果相对应的物理可观测量。

当然,直接通过场变分的方法导出“正确的”能动量张量也是有可能的¹,这种方法由 Erich Bessel-Hagen 于 1921 年提出,不过我们在此先不赘述了。

¹这个构造方式最早由 J. Belinfante 于 1939 年提出,系统性的湊 $\psi^{\mu\nu\rho}$ 项的方法可以参见 Grenier 的 Field Quantization 第 47 页。

¹Noether's first theorem and the energy-momentum tensor ambiguity problem, <https://arxiv.org/abs/2107.10329>

5.9.3 无源电磁场的能动量张量

我们前面就仅有一个 Lagrange 场的标量场讨论了其能动量张量的形式。对于含有 N 个 Lagrange 场 ϕ_r 的情况，我们可以很容易地得到其正则能动量张量为

$$\Theta_{\rho}{}^{\nu} = \delta_{\rho}{}^{\nu} \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu}\phi_r)} \partial_{\rho}\phi_r$$

对于无源电磁场，我们知道其 Lagrange 密度为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

因此我们便可得到其正则能动量张量为

$$\begin{aligned} \Theta_{\rho}{}^{\nu} &= \delta_{\rho}{}^{\nu} \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu}A_{\sigma})} \partial_{\rho}A_{\sigma} = -\frac{1}{16\pi} \delta_{\rho}{}^{\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{8\pi} F^{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_{\nu}A_{\sigma})} \partial_{\rho}A_{\sigma} \\ &= -\frac{1}{16\pi} \delta_{\rho}{}^{\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{8\pi} F^{\alpha\beta} \left(\delta_{\alpha}{}^{\nu} \delta_{\beta}{}^{\sigma} - \delta_{\alpha}{}^{\sigma} \delta_{\beta}{}^{\nu} \right) \partial_{\rho}A_{\sigma} \\ &= \frac{1}{4\pi} F^{\nu\sigma} \partial_{\rho}A_{\sigma} - \frac{1}{16\pi} \delta_{\rho}{}^{\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

写成纯逆变形式便是

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \eta^{\mu\rho} F^{\nu\sigma} \partial_{\rho}A_{\sigma} - \frac{1}{16\pi} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

我们可以很明显地看出这个正则能动量张量既不对称也不具有规范不变性，因此我们需要考虑使用上一节提到的“Belinfante 方法”在 $\Theta^{\mu\nu}$ 的基础上凑出和实验结果相符的 $T^{\mu\nu}$ 。实验告诉我们张量场 $\psi^{\mu\nu\rho}$ 可以被选为

$$\psi^{\mu\nu\rho} = -\frac{1}{4\pi} A^{\mu} F^{\nu\rho}$$

于是

$$\partial_{\rho}\psi^{\mu\nu\rho} = -\frac{1}{4\pi} F^{\nu\rho} \partial_{\rho}A^{\mu} - \frac{1}{4\pi} A^{\mu} \underbrace{\partial_{\rho}F^{\nu\rho}}_0 = -\frac{1}{4\pi} F^{\nu\rho} \partial_{\rho}A^{\mu}$$

其中 $\partial_{\rho}F^{\nu\rho} = 0$ 正是无源情况下的 Maxwell 方程。进而我们凑出的“真实”电磁场能动量张量为

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi} \eta^{\mu\rho} F^{\nu\sigma} \partial_{\rho}A_{\sigma} - \frac{1}{4\pi} \eta^{\mu\rho} F^{\nu\sigma} \partial_{\sigma}A_{\rho} - \frac{1}{16\pi} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{4\pi} \eta^{\mu\rho} F^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma} - \frac{1}{16\pi} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{4\pi} F^{\mu}{}_{\sigma} F^{\nu\sigma} - \frac{1}{16\pi} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

显然这个 $T^{\mu\nu}$ 是对称的和规范不变的，进而它看起来就满足我们对具有物理实在意义的能动量张量的要求。更进一步，我们可以计算一下它的各个分量：

$$\begin{aligned}
T^{00} &= \frac{1}{4\pi} F^0{}_\sigma F^{0\sigma} + \frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \\
&= -\frac{1}{4\pi} F_{0\sigma} F^{0\sigma} + \frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{4\pi} E_j E^j + \frac{1}{16\pi} (F_{0i} F^{0i} + F_{i0} F^{i0} + F_{ij} F^{ij}) \\
&= \frac{1}{4\pi} |\mathbf{E}|^2 - \frac{1}{8\pi} |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{8\pi} |\mathbf{B}|^2 \\
&= \frac{1}{8\pi} (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2)
\end{aligned}$$

这刚好是经典电磁理论中电磁场的能量密度。

$$\begin{aligned}
T^{0i} &= T^{i0} = \frac{1}{4\pi} F^0{}_\sigma F^{i\sigma} \\
&= -\frac{1}{4\pi} F_{0j} F^{ij} \\
&= \frac{1}{4\pi} \epsilon^{ijk} E_j B_k \\
&= \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i
\end{aligned}$$

可见这正是 Poynting 矢量的第 i 个分量。据此我们可以再次看到, Poynting 矢量不仅代表了电场的能流密度, 它还代表了电场的动量密度。

$$\begin{aligned}
T^{ij} &= \frac{1}{4\pi} F^i{}_\sigma F^{j\sigma} - \frac{1}{16\pi} \delta^{ij} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{4\pi} (F^i{}_0 F^{j0} + F^i{}_k F^{jk}) - \frac{1}{16\pi} \delta^{ij} (F_{0\beta} F^{0\beta} + F_{\alpha 0} F^{\alpha 0} + F_{ij} F^{ij}) \\
&= -\frac{1}{4\pi} E^i E^j + \frac{1}{4\pi} \epsilon^i{}_{km} \epsilon^{jk}{}_n B^m B^n - \frac{1}{16\pi} \delta^{ij} (-2E_k E^k + \epsilon_{ijk} \epsilon^{ijl} B^k B_l) \\
&= -\frac{1}{4\pi} E^i E^j + \frac{1}{4\pi} \delta^{ij} B_n B^n - \frac{1}{4\pi} B^i B^j - \frac{1}{16\pi} \delta^{ij} (-2E_k E^k + 2B_k B^k) \\
&= -\frac{1}{4\pi} (E^i E^j + B^i B^j) + \frac{1}{8\pi} \delta^{ij} (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2) \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[-E^i E^j - B^i B^j + \frac{1}{2} (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2) \delta^{ij} \right]
\end{aligned}$$

这正是电磁场的 Maxwell 应力张量。

由此可见我们凑出的 $T^{\mu\nu}$ 的各个分量与我们对电磁场能动量的经典认识相一致。

5.9.4 带电粒子与场的耦合

首先我们考虑质量为 m 的运动质点的能动量张量。在和质点瞬时相对静止的惯性参考系中，其位于 $\mathbf{r}_0(t)$ 处时系统的质量密度分布为

$$\varepsilon_0 = m\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t))$$

如果在我们考虑的参考系中质点的速度为 v ，那么能量密度应该为

$$T^{00} = \gamma\varepsilon = \varepsilon \frac{dt}{d\tau}$$

3-动量密度为

$$T^{0i} = T^{i0} = \varepsilon \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^i}{dt}$$

我们可以统一地写成

$$T^{0\nu} = \varepsilon \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^\nu}{dt}$$

根据 Lorentz 协变性，我们可以进而推知这个粒子的能动量张量的形式应该为

$$T^{\mu\nu} = \varepsilon \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{dt} = \frac{\varepsilon}{\gamma} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

下面我们假设质点带有电荷 q 并且正在电磁场中运动。由于此时粒子和场之间存在能动量的交换，因此粒子和场的能动量张量不可能分别守恒。但是总系统的能动量张量还是守恒的：

$$T_{\text{总}}^{\mu\nu} = T_{\text{场}}^{\mu\nu} + T_{\text{粒子}}^{\mu\nu}$$

其中

$$T_{\text{场}}^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} F^\mu{}_\sigma F^{\nu\sigma} - \frac{1}{16\pi} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

$$T_{\text{粒子}}^{\mu\nu} = \frac{\varepsilon}{\gamma} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

我们下面便要考察 $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ 带来的结果。

对于有源的情况，我们对电磁场能动量张量求散度会得到

$$\begin{aligned}
 \partial_\nu T_{\text{场}}^{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi} \partial_\nu (F^\mu{}_\rho F^{\nu\rho}) - \frac{1}{16\pi} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left(\partial_\nu F^\mu{}_\rho F^{\nu\rho} + F^\mu{}_\rho \partial_\nu F^{\nu\rho} - \frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \partial^\mu F_{\alpha\beta} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left(\partial_\nu F^\mu{}_\rho F^{\nu\rho} + F^\mu{}_\rho \partial_\nu F^{\nu\rho} + \frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \partial_\alpha F_\beta{}^\mu + \frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \partial_\beta F^\mu{}_\alpha \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left(\partial_\nu F^\mu{}_\rho F^{\nu\rho} + F^\mu{}_\rho \partial_\nu F^{\nu\rho} - \partial_\alpha F^\mu{}_\beta F^{\alpha\beta} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi} F^\mu{}_\rho \partial_\nu F^{\nu\rho} = -F^\mu{}_\rho J^\rho
 \end{aligned}$$

可见有源时场能动量张量散度并不是零，即它并不守恒。

对粒子的能动量张量求散度则有

$$\begin{aligned}
 \partial_\nu T_{\text{粒子}}^{\mu\nu} &= \partial_\nu \left(\varepsilon \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} + \varepsilon \frac{dx^\nu}{d\tau} \partial_\nu \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \\
 &= \varepsilon \frac{dx^\nu}{d\tau} \partial_\nu \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \\
 &= \varepsilon \frac{dU^\mu}{dt}
 \end{aligned}$$

因此 $\partial_\nu T_{\text{总}}^{\mu\nu} = 0$ 便意味着

$$\varepsilon \frac{dU^\mu}{dt} - F^\mu{}_\rho J^\rho = 0$$

注意到

$$J^\rho = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t))U^\rho$$

而 $\varepsilon = m\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t))$ ，因此这正是 Lorentz 力公式：

$$m \frac{dU^\mu}{dt} = q F^\mu{}_\nu U^\nu$$

第 6 章 电磁辐射

本章中前三节采用 Gauss 单位制，此后采用自然单位制。

6.1 平面电磁波

考虑真空中的 Maxwell 方程：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

将第四个方程代入取旋度的第二个方程便有：

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \underbrace{\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E})}_0 - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

于是我们得到了电场的波动方程：

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

类似的，第四个方程取旋度后将第二个方程代入便有

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0$$

为了寻找方程的波动解，我们可以将时间变量分离而设解的形式为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$$

代入两组波动方程便得到了 Helmholtz 方程：

$$\nabla^2 \mathbf{E}_0 + k^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{B}_0 + k^2 \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = 0$$

其中 $k = \omega/c$ 。方程的平面波解便为

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

对应的平面波为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

现在考虑

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$$

并考虑到

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= \epsilon_{ijm} \partial_j e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} E_0^m \hat{e}^i \\ &= i \epsilon_{ijm} k^j E_0^m \hat{e}^i e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ &= i \mathbf{k} \times \mathbf{E} \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -i \omega \mathbf{B} \end{aligned}$$

我们便有

$$i \mathbf{k} \times \mathbf{E} - \frac{i \omega}{c} \mathbf{B} = 0$$

同理可得

$$i \mathbf{k} \times \mathbf{B} + \frac{i \omega}{c} \mathbf{E} = 0$$

因此

$$\mathbf{B} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \quad \mathbf{E} = -\frac{c}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{B}$$

我们记 \mathbf{k} 方向的单位矢量为 \hat{n}_k , 那么 $\mathbf{k} = k \hat{n}_k$, 于是

$$\mathbf{B} = \frac{kc}{\omega} \hat{n}_k \times \mathbf{E} \quad \mathbf{E} = -\frac{kc}{\omega} \hat{n}_k \times \mathbf{B}$$

由此可以看出, 对平面电磁波而言 \mathbf{E} 与 \mathbf{B} 始终正交并且二者都与电磁波传播的方向垂直。因此我们可以断定 \mathbf{E} 与 \mathbf{B} 各自只有两个独立分量, 并且我们可以记

$$\mathbf{E}_0 = E_{01} \hat{e}_1 + E_{02} \hat{e}_2 \quad \mathbf{B}_0 = B_{01} \hat{e}_1 + B_{02} \hat{e}_2$$

其中 \hat{e}_1 与 \hat{e}_2 均和 \hat{n}_k 正交。

对于相对介电常数和相对磁导率分别为 $\epsilon(\omega)$ 和 $\mu(\omega)$ 的线性介质, 考虑介质中的 Maxwell 方程并采用和前面相似的推导能轻松得到

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\mu \epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

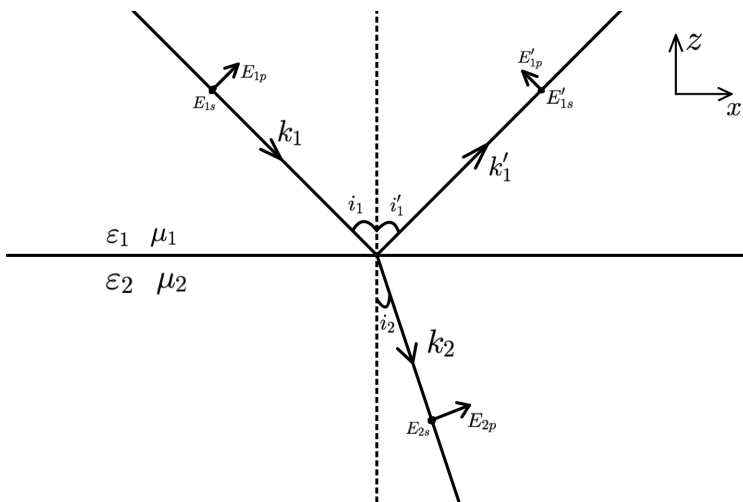
$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{\mu \epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{E}_0 + \frac{\mu \epsilon \omega^2}{c^2} \mathbf{E}_0 = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{B}_0 + \frac{\mu \epsilon \omega^2}{c^2} \mathbf{B}_0 = 0$$

可见介质的存在使得电磁波的传播速度从 c 变为了 $c/\sqrt{\mu\varepsilon}$ ，并使得波矢变大了 $\sqrt{\mu\varepsilon}$ 倍。

6.2 平面电磁波在介质界面处的行为：Fresnel 公式



如图所示，电磁波在不同介质的界面处会发生折射与反射。由于电磁波在界面处折射时应满足相位连续，于是我们应该有

$$k_{1x} = k'_{1x} = k_{2x}$$

所以

$$k_1 \sin i_1 = k'_1 \sin i'_1 = k_2 \sin i_2$$

由于电磁波的角频率 ω 在折射中不变，因此我们有

$$k_1 = k'_1 = \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} \frac{\omega}{c} \quad k_2 = \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} \frac{\omega}{c}$$

从而

$$i_1 = i'_1 \quad \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} \sin i_1 = \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} \sin i_2$$

按照光学中的做法，我们定义折射率为

$$n_1 = \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} \quad n_2 = \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}$$

于是我们便得到了光学中的 Snell 定律：

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

在介质界面处我们有电磁场的边界条件

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}'_1 - \mathbf{D}_2) &= 0 & \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}'_1 - \mathbf{E}_2) &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}'_1 - \mathbf{B}_2) &= 0 & \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}'_1 - \mathbf{H}_2) &= 0\end{aligned}$$

线性介质中 $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ ，因此边界条件可以被写为

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \cdot [\varepsilon_1 (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}'_1) - \varepsilon_2 \mathbf{E}_2] &= 0 & \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}'_1 - \mathbf{E}_2) &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}'_1 - \mathbf{B}_2) &= 0 & \mathbf{n} \times \left[\frac{1}{\mu_1} (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}'_1) - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2 \right] &= 0\end{aligned}$$

再考虑到电磁波中 $\mathbf{B} = c \mathbf{k} \times \mathbf{E}/\omega$ ，我们便有

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \cdot [\varepsilon_1 (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}'_1) - \varepsilon_2 \mathbf{E}_2] &= 0 & \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}'_1 - \mathbf{E}_2) &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{k}_1 \times \mathbf{E}_1 + \mathbf{k}'_1 \times \mathbf{E}'_1 - \mathbf{k}_2 \times \mathbf{E}_2) &= 0 & \mathbf{n} \times \left[\frac{1}{\mu_1} (\mathbf{k}_1 \times \mathbf{E}_1 + \mathbf{k}'_1 \times \mathbf{E}'_1) - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{k}_2 \times \mathbf{E}_2 \right] &= 0\end{aligned}$$

由于电磁波中电矢量的方向始终与 \mathbf{k} 垂直，因此我们可以如图中所示将各部分电矢量分解为垂直于入射平面与平行于入射平面的两部分，进而电磁场的边界条件对垂直入射面的电矢量的约束为：

$$\begin{aligned}E_{1s} + E'_{1s} &= E_{2s} \\ -\frac{k_1}{\mu_1} E_{1s} \cos i_1 + \frac{k_1}{\mu_1} E'_{1s} \cos i_1 &= -\frac{k_2}{\mu_2} E_{2s} \cos i_2\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}E_{1s} + E'_{1s} &= E_{2s} \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (E_{1s} - E'_{1s}) \cos i_1 &= \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E_{2s} \cos i_2\end{aligned}$$

此即

$$\begin{aligned}E'_{1s} - E_{2s} &= -E_{1s} \\ \frac{n_1}{\mu_1} \cos i_1 E'_{1s} + \frac{n_2}{\mu_2} \cos i_2 E_{2s} &= \frac{n_1}{\mu_1} \cos i_1 E_{1s}\end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned}E'_{1s} &= \frac{\frac{n_1}{\mu_1} \cos i_1 - \frac{n_2}{\mu_2} \cos i_2}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos i_1 + \frac{n_2}{\mu_2} \cos i_2} E_{1s} \\ E_{2s} &= \frac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2 \cos i_2} E_{1s}\end{aligned}$$

边界条件对平行于入射面的电矢量约束为：

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 (E_{1p} + E'_{1p}) \sin i_1 &= \varepsilon_2 E_{2p} \sin i_2 \\ E_{1p} \cos i_1 - E'_{1p} \cos i_1 &= E_{2p} \cos i_2\end{aligned}$$

此即

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 \sin i_1 E'_{1p} - \varepsilon_2 \sin i_2 E_{2p} &= -\varepsilon_1 \sin i_1 E_{1p} \\ \cos i_1 E'_{1p} + \cos i_2 E_{2p} &= \cos i_1 E_{1p}\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}E'_{1p} &= \frac{\varepsilon_2 \cos i_1 \sin i_2 - \varepsilon_1 \sin i_1 \cos i_2}{\varepsilon_1 \sin i_1 \cos i_2 + \varepsilon_2 \cos i_1 \sin i_2} E_{1p} \\ E_{2p} &= \frac{2\varepsilon_1 \sin i_1 \cos i_1}{\varepsilon_1 \sin i_1 \cos i_2 + \varepsilon_2 \cos i_1 \sin i_2} E_{1p}\end{aligned}$$

我们可以来考虑正入射这一特殊情况，此时 $i_1 = i_2 = 0$ ，我们有

$$\mathbf{E}'_1 = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2 \varepsilon_1}{\mu_1 \varepsilon_2}} - 1}{\sqrt{\frac{\mu_2 \varepsilon_1}{\mu_1 \varepsilon_2}} + 1} \mathbf{E}_1 \quad \mathbf{E}_2 = \frac{2}{\sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_2}{\mu_2 \varepsilon_1}} + 1} \mathbf{E}_1$$

同时不难看出存在一个特殊的角度使得

$$\varepsilon_2 \cos i_1 \sin i_2 - \varepsilon_1 \sin i_1 \cos i_2 = 0$$

即

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 \frac{n_1}{n_2} \cos i_1 - \varepsilon_1 \cos i_2 &= 0 \\ \frac{1}{\mu_2} n_2 \cos i_1 - \frac{1}{\mu_1} n_1 \cos i_2 &= 0\end{aligned}$$

对于 $\mu_1 = \mu_2$ 的情况，这便为

$$n_2 \cos i_1 - n_1 \cos i_2 = 0$$

又因为

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

从而

$$\frac{\cos i_1}{\sin i_2} = \frac{\cos i_2}{\sin i_1}$$

即

$$\sin 2i_1 = \sin 2i_2$$

进而

$$2i_1 = \pi - 2i_2 \Rightarrow i_1 + i_2 = \frac{\pi}{2}$$

我们称这个特殊的角度为 **Brewster 角**，此时反射光线和折射光线垂直，并且反射光是电矢量仅沿 s 方向的线偏振光。

6.3 导体中的电磁波：趋肤效应

我们可以认为导体中存在两类电荷：一类是不能自由移动的电荷，我们记其密度为 ρ_b ，这类电荷使得导体表现出具有相对介电常数 ε_b ；一类是能自由移动的电荷，我们记为 ρ_f ，正是这类电荷带来了导体中的自由电流密度 \mathbf{J}_f 。于是导体中的 Maxwell 方程

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_f$$

现在便可以写成

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\varepsilon_b}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_f$$

记导体的电导率为 σ ，那么

$$\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E}$$

进而

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\varepsilon_b}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E}$$

考虑波动解，于是

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$$

进而

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B}_0 + \frac{i\omega\varepsilon_b}{c} \mathbf{E}_0 = \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E}_0$$

改写一下便是

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B}_0 + \frac{i\omega}{c} \left(\varepsilon_b + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right) \mathbf{E}_0 = 0$$

可见能够传导自由电流的导体相当于一个拥有复相对介电常数的电介质，我们记等效的复相对介电常数为

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_b + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

可见此时频率为 ω 的电磁波对应的波矢模长为

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\varepsilon_b \left(1 + i \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_b\omega} \right)}$$

等效的复折射率便为

$$\tilde{n}(\omega) = \sqrt{\mu\varepsilon_b \left(1 + i \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_b\omega} \right)}$$

可见折射率与电磁波的频率有关，这便是电磁波在导体中传播时的色散关系。

如果

$$\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_b\omega} \ll 1$$

那么这便对应着高频电磁波在低电导率的不良导体中传播的情况，此时

$$\tilde{k} \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\varepsilon_b} \left(1 + i \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon_b\omega} \right) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\varepsilon_b} + i \frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_b}}$$

可见此时虚部几乎不依赖于 ω 。

如果

$$\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_b\omega} \gg 1$$

那么这对应着低频电磁波在高电导率的良导体中传播的情况，此时

$$\tilde{k} \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\varepsilon_b} \sqrt{i \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_b\omega}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\varepsilon_b} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_b\omega}} = (1+i) \sqrt{\frac{2\pi\mu\sigma\omega}{c^2}}$$

可见此时 \tilde{k} 的虚部正比于 $\sqrt{\omega}$ 。

复波矢 \tilde{k} 的虚部刻画了电磁波在导体中的衰减，进而对于由外界入射导体的电磁波，其振幅只会在导体内靠近界面的部分具有显著的值，此即趋肤效应。如果记

$$\tilde{k} = k_1 + ik_2$$

则电磁波穿透深度的特征长度可以取为

$$\delta = \frac{1}{k_2} = \begin{cases} \frac{c}{2\pi\sigma} \sqrt{\frac{\varepsilon_b}{\mu}} & \text{不良导体} \\ \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}} & \text{良导体} \end{cases}$$

不难看出，不良导体和良导体中电磁波的穿深的特征长度对 ω 的依赖性有显著的区别。下面将对金属解释这个现象，不过我们需要先来看色散介质的经典模型。

我们可以将微观电子在平衡位置附近的行为在领头阶近似下视为受到阻尼的简谐振动。存在电场 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ 时，电子的运动方程便为

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) + \gamma \dot{\mathbf{x}}(t) + \omega_0^2 \mathbf{x}(t) = \frac{e}{m} \mathbf{E}(t)$$

其中 ω_0 为简谐振动的特征频率而 γ 为衰减系数。即使考虑量子力学，这种近似也是合理的：量子力学中我们可以认为不存在电场时原子中的电子处于基态，而外电场激发了电子到激发态的跃迁。即使跃迁表现的行为迥异于谐振子，在大粒子数平均下电子也只是略微偏离了基态，进而这等价于认为

电子在平衡位置附近做小幅度简谐运动。

电场激发出的电偶极矩为

$$\mathbf{p} = e\mathbf{x}$$

进而描述偶极矩演化的方程便为

$$\ddot{\mathbf{p}} + \gamma\dot{\mathbf{p}} + \omega_0^2\mathbf{p} = \frac{e^2}{m}\mathbf{E}$$

因为 $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ ，我们可以寻找形式为 $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 e^{-i\omega t}$ 的解，于是

$$(-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2)\mathbf{p}_0 = \frac{e^2}{m}\mathbf{E}_0$$

进而偶极矩振荡的振幅为

$$\mathbf{p}_0 = \frac{e^2}{m} \frac{\mathbf{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}$$

现在我们考虑原子数密度为 N 的介质，各个原子含有电子数相同，为 $\sum_i f_i = Z$ 。其中 f_i 为该原子中本征频率为 ω_i 而衰减系数为 γ_i 的电子的数目。那么宏观上该介质的电极化强度矢量为

$$\mathbf{P} = N \sum_i f_i \mathbf{p}_0^i = \frac{Ne^2}{m} \sum_i \frac{f_i \mathbf{E}_0}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_i}$$

又因为

$$\mathbf{P} = \chi(\omega)\mathbf{E}(\omega)$$

于是

$$\chi(\omega) = \frac{Ne^2}{m} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_i}$$

进而相对介电常数为

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi\chi(\omega) = 1 + 4\pi \frac{Ne^2}{m} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_i}$$

事实上使用量子力学计算得到的电极化率为

$$\chi(\omega) = \frac{Ne^2}{m} \sum_n \frac{f_{0n}}{\omega_{n0}^2 - \omega^2 - i\omega\delta}$$

其中

$$\omega_{0n} = \frac{E_n - E_0}{\hbar}$$

E_0, E_n 分别为基态和第 n 激发态的能量。同时

$$f_{0n} = \frac{2m}{\hbar} \omega_{0n} \sum_i |\langle \phi_0 | Z_i | \phi_n \rangle|^2$$

代表了从基态到第 n 激发态跃迁的强度，这对应着经典公式中的 f_i 。

现在考虑金属，此时我们按照本节开始时的方式将电子分为两类：

- 非束缚态的自由电子，其特征频率 $\omega_0 = 0$ 。
- 束缚态的电子，其特征频率为 $\omega_i \neq 0$

我们将束缚态电子的贡献全部归纳到 ε_b 中，那么总相对介电常数便为

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_b(\omega) + \frac{4\pi N e^2}{m} \frac{f_0}{-\omega^2 - i\omega\gamma_0} = \varepsilon_b(\omega) + i \frac{4\pi N e^2}{m} \frac{f_0}{\omega(\gamma_0 - i\omega)}$$

再考虑到导体中等效介电常数表达式为

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_b(\omega) + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

比较两式，我们可以认为导体的电导率为

$$\sigma(\omega) = \frac{N e^2 f_0}{m(\gamma_0 - i\omega)}$$

到这里我们其实已经导出了电导率的 Drude 公式。 ω 较小时， $\sigma(\omega)$ 可以被视作实数。而对于 ω 远大于各个 ω_i 的高频极限，我们直接有

$$\varepsilon(\omega) \approx 1 - \frac{4\pi N Z e^2}{m\omega^2}$$

不妨定义

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N Z e^2}{m}$$

这其实描述了等离子体振荡的特征频率。

对于 $\omega^2 \gg \omega_p^2$ 的极高频电磁波， $\varepsilon(\omega) \rightarrow 1$ ，进而导体对电磁波近似透明，穿深的特征长度自然对 ω 依赖不明显；而 $\omega^2 < \omega_p^2$ 时 $\varepsilon(\omega) < 0$ ，进而 k 将表现为一个模长与 ω 有关的纯虚数，进而电磁波的穿深将明显表现出和 ω 的依赖。事实上对于第二种情况，电磁波将会被完全反射回金属外。

对于 $\omega = \omega_i$ ， $\chi(\omega)$ 将会是一个纯虚数，这意味着介质回表现出剧烈吸收电磁波。在量子力学中这便意味着能量为 $\hbar\omega_{0n}$ 的入射光子诱导出了从基态到第 n 激发态的共振跃迁。

6.4 波导

设想一个由理想导体制成的沿 z 方向无限长的均匀波导管，并且我们假设波导管的截面形状任意且管中为真空，那么 Maxwell 方程给出

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

以及此时电磁场的波动方程为

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0$$

设电磁波沿着波导管传播，那么我们可以考虑寻找如下形式的解：

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x, y)e^{i(kz - \omega t)} \quad \mathbf{B}(x, y, z, t) = \mathbf{B}(x, y)e^{i(kz - \omega t)}$$

注意，一般上 $k \neq \omega$ （注意在自然单位制下 $c = 1$ ）。鉴于 z 方向的特殊性，我们考虑进行如下分解：

$$\mathbf{E}_\perp = E_x(x, y)\hat{e}_x + E_y(x, y)\hat{e}_y$$

$$\mathbf{B}_\perp = B_x(x, y)\hat{e}_x + B_y(x, y)\hat{e}_y$$

$$\nabla_\perp = \frac{\partial}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\hat{e}_y$$

此时电磁场的波动方程便化为 Helmholtz 方程

$$\nabla_\perp^2 \mathbf{E} + (\omega^2 - k^2) \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla_\perp^2 \mathbf{B} + (\omega^2 - k^2) \mathbf{B} = 0$$

理论上我们可以在 Maxwell 方程组的约束下直接求解这两个方程来了解波导管中电磁场的行为，但是下面我们将会看到，利用电磁场的基本方程可以让我们更加直接地看出波导管中电磁场 x, y 分量与 z 分量的关系。进而我们只需求解

$$\nabla_\perp^2 E_z + (\omega^2 - k^2) E_z = 0$$

$$\nabla_\perp^2 B_z + (\omega^2 - k^2) B_z = 0$$

便可以完全确定波导管中电磁场的各个分量。

将 Maxwell 方程中的 z 方向分离出来, 我们便有

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{\perp} = -ikE_z(x, y)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{B}_{\perp} = -ikB_z(x, y)$$

同时

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{B} e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{E} e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= (\nabla_{\perp} + \partial_z \hat{e}_z) \times (\mathbf{E}_{\perp} e^{i(kz - \omega t)} + E_z e^{i(kz - \omega t)} \hat{e}_z) \\ &= (\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp}) e^{i(kz - \omega t)} + (\partial_y E_z \hat{e}_x - \partial_x E_z \hat{e}_y) e^{i(kz - \omega t)} + ik(\hat{e}_z \times \mathbf{E}_{\perp}) e^{i(kz - \omega t)} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= (\nabla_{\perp} + \partial_z \hat{e}_z) \times (\mathbf{B}_{\perp} e^{i(kz - \omega t)} + B_z e^{i(kz - \omega t)} \hat{e}_z) \\ &= (\nabla_{\perp} \times \mathbf{B}_{\perp}) e^{i(kz - \omega t)} + (\partial_y B_z \hat{e}_x - \partial_x B_z \hat{e}_y) e^{i(kz - \omega t)} + ik(\hat{e}_z \times \mathbf{B}_{\perp}) e^{i(kz - \omega t)} \end{aligned}$$

因此另两个 Maxwell 方程现在可以表示为

$$\begin{aligned} (\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp}) e^{i(kz - \omega t)} + (\partial_y E_z \hat{e}_x - \partial_x E_z \hat{e}_y) e^{i(kz - \omega t)} + ik(\hat{e}_z \times \mathbf{E}_{\perp}) e^{i(kz - \omega t)} \\ = i\omega \mathbf{B} e^{i(kz - \omega t)} \\ (\nabla_{\perp} \times \mathbf{B}_{\perp}) e^{i(kz - \omega t)} + (\partial_y B_z \hat{e}_x - \partial_x B_z \hat{e}_y) e^{i(kz - \omega t)} + ik(\hat{e}_z \times \mathbf{B}_{\perp}) e^{i(kz - \omega t)} \\ = -i\omega \mathbf{E} e^{i(kz - \omega t)} \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp} + (\partial_y E_z \hat{e}_x - \partial_x E_z \hat{e}_y) + ik\hat{e}_z \times \mathbf{E}_{\perp} &= i\omega \mathbf{B} \\ \nabla_{\perp} \times \mathbf{B}_{\perp} + (\partial_y B_z \hat{e}_x - \partial_x B_z \hat{e}_y) + ik\hat{e}_z \times \mathbf{B}_{\perp} &= -i\omega \mathbf{E} \end{aligned}$$

等号两边同时对 \hat{e}_z 做内积便得到

$$\begin{aligned} \hat{e}_z \cdot (\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp}) &= i\omega B_z \\ \hat{e}_z \cdot (\nabla_{\perp} \times \mathbf{B}_{\perp}) &= -i\omega E_z \end{aligned}$$

同时又乘 \hat{e}_z 则有

$$\begin{aligned} i\omega \hat{e}_z \times \mathbf{B} &= \partial_y E_z \hat{e}_z \times \hat{e}_x - \partial_x E_z \hat{e}_z \times \hat{e}_y + ik\hat{e}_z \times (\hat{e}_z \times \mathbf{E}_{\perp}) \\ &= \partial_x E_z \hat{e}_x + \partial_y E_z \hat{e}_y - ik\mathbf{E}_{\perp} \\ &= \nabla_{\perp} E_z - ik\mathbf{E}_{\perp} \\ -i\omega \hat{e}_z \times \mathbf{E} &= \partial_y B_z \hat{e}_z \times \hat{e}_x - \partial_x B_z \hat{e}_z \times \hat{e}_y + ik\hat{e}_z \times (\hat{e}_z \times \mathbf{B}_{\perp}) \\ &= \partial_x B_z \hat{e}_x + \partial_y B_z \hat{e}_y - ik\mathbf{B}_{\perp} \\ &= \nabla_{\perp} B_z - ik\mathbf{B}_{\perp} \end{aligned}$$

于是对于波导管中的电磁波，Maxwell 方程组可以写为

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{\perp} &= -ikE_z \\
 \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{B}_{\perp} &= -ikB_z \\
 \hat{e}_z \cdot (\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp}) &= i\omega B_z \\
 \hat{e}_z \cdot (\nabla_{\perp} \times \mathbf{B}_{\perp}) &= -i\omega E_z \\
 \nabla_{\perp} E_z - ik\mathbf{E}_{\perp} &= i\omega \hat{e}_z \times \mathbf{B} \\
 \nabla_{\perp} B_z - ik\mathbf{B}_{\perp} &= -i\omega \hat{e}_z \times \mathbf{E}
 \end{aligned}$$

写成分量形式，我们便有

$$\begin{aligned}
 \partial_x E_x + \partial_y E_y &= -ikE_z \\
 \partial_x B_x + \partial_y B_y &= -ikB_z \\
 \partial_x E_y - \partial_y E_x &= i\omega B_z \\
 \partial_x B_y - \partial_y B_x &= -i\omega E_z \\
 ikE_x - i\omega B_y &= \partial_x E_z \\
 ikE_y + i\omega B_x &= \partial_y E_z \\
 i\omega E_y + ikB_x &= \partial_x B_z \\
 -i\omega E_x + ikB_y &= \partial_y B_z
 \end{aligned}$$

利用后面四组方程，我们可以将 E_x, E_y, B_x, B_y 用 E_z 和 B_z 的偏导数表示出来：

$$\begin{aligned}
 E_x &= \frac{i}{\omega^2 - k^2} (k\partial_x E_z + \omega\partial_y B_z) \\
 E_y &= \frac{i}{\omega^2 - k^2} (k\partial_y E_z - \omega\partial_x B_z) \\
 B_x &= \frac{i}{\omega^2 - k^2} (-\omega\partial_y E_z + k\partial_x B_z) \\
 B_y &= \frac{i}{\omega^2 - k^2} (\omega\partial_x E_z + k\partial_y B_z)
 \end{aligned}$$

目前我们已经得到了电磁场基本理论给出的波导管中电场和磁场的方程，下面便需要考虑给这些方程定解所需的边界条件。

由于我们假设波导管管壁为理想导体，因此在边界处电场的切向分量为零。如果我们记边界为 ∂ 而边界的单位法向量为 \hat{n} ，那么这个条件可以被表示为

$$\hat{n} \times \mathbf{E}|_{\partial} = 0$$

由于 $\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}$ ，因此在边界处我们有

$$i\omega \hat{n} \cdot \mathbf{B}|_{\partial} = \hat{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})|_{\partial} = \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \hat{n})|_{\partial} = 0$$

此即

$$\hat{n} \cdot \mathbf{B}|_{\partial} = 0$$

我们再考虑到

$$\nabla_{\perp} B_z - ik \mathbf{B}_{\perp} = -i\omega \hat{e}_z \times \mathbf{E}$$

等号两边同时与 \hat{n} 做内积便有

$$\hat{n} \cdot (\nabla_{\perp} B_z)|_{\partial} - ik \hat{n} \cdot \mathbf{B}_{\perp}|_{\partial} = -i\omega \hat{n} \cdot (\hat{e}_z \times \mathbf{E})|_{\partial} = -i\omega \hat{e}_z \cdot (\mathbf{E} \times \hat{n})|_{\partial} = 0$$

因此我们确定的三个边界条件为

$$\hat{n} \times \mathbf{E}|_{\partial} = 0$$

$$\hat{n} \cdot \mathbf{B}|_{\partial} = 0$$

$$\hat{n} \cdot (\nabla_{\perp} B_z)|_{\partial} - ik \hat{n} \cdot \mathbf{B}_{\perp}|_{\partial} = 0$$

注意，我们对波导管几何结构的要求使得 $\hat{n} \perp \hat{e}_z$ ，因此

$$\hat{n} \times \mathbf{E} = E_z \hat{n} \times \hat{e}_z \quad \hat{n} \cdot \mathbf{B} = \hat{n} \cdot \mathbf{B}_{\perp} \quad \hat{n} \cdot (\nabla_{\perp} B_z) = \hat{n} \cdot (\nabla B_z) = \frac{\partial B_z}{\partial n}$$

因此三个边界条件就是

$$E_z|_{\partial} = 0$$

$$\hat{n} \cdot \mathbf{B}_{\perp}|_{\partial} = 0$$

$$\left. \frac{\partial B_z}{\partial n} \right|_{\partial} = 0$$

现在我们可以考虑依据 E_z 和 B_z 将波导管中电磁场解的模式分为三大类：**TEM** 波模、**TE** 波模与 **TM** 波模。波导管中一般的电磁波解总可以分解为这三类解的叠加。

- **TEM** 波模：此时 $E_z = 0, B_z = 0$ ，那么显然我们有

$$E_x = E_y = 0 \quad B_x = B_y = 0$$

因此这个波模对应着电磁场均为零的平凡解¹。

¹如果我们不考虑波导管而考虑同轴电缆，那么可能会出现非平凡的 **TEM** 波模。这是因为和界面处处等势的波导管不同，同轴电缆的内外柱面并不等势，而这相当于在边界处引入了源。

- TE 波模：此时 $E_z = 0$ 而 $B_z \neq 0$ ，于是

$$\left. \begin{aligned} B_x &= \frac{ik}{\omega^2 - k^2} \partial_x B_z \\ B_y &= \frac{ik}{\omega^2 - k^2} \partial_y B_z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{B}_\perp = \frac{ik}{\omega^2 - k^2} \nabla B_z$$

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{i\omega}{\omega^2 - k^2} \partial_y B_z \\ E_y &= -\frac{i\omega}{\omega^2 - k^2} \partial_x B_z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp = -\frac{i\omega}{\omega^2 - k^2} \hat{e}_z \times (\nabla B_z) = -\frac{\omega}{k} \hat{e}_z \times \mathbf{B}_\perp$$

对应的边界条件为

$$E_z = 0 \text{ 处处成立} \quad \hat{n} \cdot \mathbf{B}_\perp|_\partial = 0 \quad \left. \frac{\partial B_z}{\partial n} \right|_\partial = 0$$

- TM 波模：此时 $B_z = 0$ 而 $E_z \neq 0$ ，于是

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{ik}{\omega^2 - k^2} \partial_x E_z \\ E_y &= \frac{ik}{\omega^2 - k^2} \partial_y E_z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{E}_\perp = \frac{ik}{\omega^2 - k^2} \nabla E_z$$

$$\left. \begin{aligned} B_x &= -\frac{i\omega}{\omega^2 - k^2} \partial_y E_z \\ B_y &= \frac{i\omega}{\omega^2 - k^2} \partial_x E_z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp = \frac{i\omega}{\omega^2 - k^2} \hat{e}_z \times (\nabla E_z) = \frac{\omega}{k} \hat{e}_z \times \mathbf{E}_\perp$$

对应的边界条件为

$$B_z = 0 \text{ 处处成立} \quad \hat{n} \cdot \mathbf{B}_\perp|_\partial = 0 \quad E_z|_\partial = 0$$

在对波模进行分类后，我们便有：

- 对 TE 波模，我们只需求解 B_z 的二维 Helmholtz 方程

$$\nabla_\perp^2 B_z + \Omega^2 B_z = 0 \quad \Omega^2 = \omega^2 - k^2$$

边界条件为

$$\left. \frac{\partial B_z}{\partial n} \right|_\partial = 0$$

- 对 TM 波模，我们只需求解 E_z 的二维 Helmholtz 方程

$$\nabla_\perp^2 E_z + \Omega^2 E_z = 0 \quad \Omega^2 = \omega^2 - k^2$$

对应的边界条件为

$$E_z|_\partial = 0$$

两种情况其实都是二维紧致闭区域上的本征值问题，因此本征值 Ω^2 必然是离散的并且无上界。我们下面便来详细讨论一种情况：矩形波导中的 TM 波模。

矩形域为：

$$0 \leq x \leq a \quad 0 \leq y \leq b$$

那么我们用分离变量法可以轻松解出 $E_z(x, y)$ 的本征解为

$$E_x(x, y) = e_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

对应的本征值为

$$\Omega_{mn}^2 = \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}$$

进而

$$k_{mn}^2 = \omega^2 - \Omega_{mn}^2$$

这表明在波导管中能以 (m, n) 态传播的 TM 波存在一个最低角频率

$$\omega_{min} = \Omega_{mn}$$

低于这个角频率时以 (m, n) 态传播的电磁波将有一个虚数波矢，这会导致电磁波在 z 方向上传播时呈指数衰减，这便是隐失波。

根据 k_{mn}^2 的表达式我们还可以得知此矩形波导管存在一个能够传导 TM 波的角频率下限：

$$\omega_{Min} = \Omega_{11} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

低于这个角频率的电磁波入射波导管后总会表现为隐失波。

因为

$$k_{mn} = \sqrt{\omega^2 - \Omega_{mn}^2}$$

进而这给出了电磁波在波导管中传播时的色散关系，而这意味着相速 v_{ph} 与群速 v_g 的差异：

$$v_{ph(m,n)} = \frac{\omega}{k_{mn}} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \Omega_{mn}^2}} = \left(1 - \frac{\Omega_{mn}^2}{\omega^2}\right)^{-1/2}$$

$$v_{g(m,n)} = \frac{d\omega}{dk_{mn}} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \Omega_{mn}^2}}{\omega} = \left(1 - \frac{\Omega_{mn}^2}{\omega^2}\right)^{1/2}$$

可见我们有

$$v_{ph(m,n)} v_{g(m,n)} = 1 \quad v_{g(m,n)} \leq 1 \quad v_{ph(m,n)} \geq 1$$

这意味着波导管中 TM 波的相速度超光速了，但是这并不会违背狭义相对论：因为这里电磁波的能量和信息传递速度由群速度表征，而这始终不会超过光速。

6.5 运动电荷的场

6.5.1 推迟势

考虑真空中的 Maxwell 方程

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -4\pi J^\nu \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

我们有

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = -4\pi J^\nu$$

采用 Lorenz 规范条件

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

则 Maxwell 方程便对应着

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = -4\pi J^\nu$$

考虑到

$$A^\mu = (\phi, \mathbf{A}) \quad J^\mu = (\rho, \mathbf{J})$$

因此真空中的 Maxwell 方程便对应着

$$\square \phi = -4\pi \rho \quad \square \mathbf{A} = -4\pi \mathbf{J}$$

此即

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -4\pi \rho \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -4\pi \mathbf{J} \end{aligned}$$

我们在前面已经求出过上述两个方程在不含时稳恒条件下的形式解：

$$\phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}' \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}'$$

对于现在考虑的含时情况，我们则必须计入电磁相互作用传播速度有限（在我们现在使用的自然单位制下传播速度为 1）带来的效应： t 时刻 \mathbf{r} 处的电磁场应该由 \mathbf{r}' 处的场源于 $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 时刻产生。

因此我们大胆猜测含时情况下标势和矢势的形式解应该为

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}' \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}' \end{aligned}$$

下面我们将证明以上两式确是正确的解，Maxwell 方程的这组解便叫做推迟

势。

我们先验证 $\phi(\mathbf{r}, t)$ 满足方程

$$\nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi \rho(\mathbf{r}, t)$$

考虑到将 Laplace 算符作用到两个函数 f, g 乘积上的结果为

$$\nabla^2(fg) = g\nabla^2 f + f\nabla^2 g + 2\nabla f \cdot \nabla g$$

因此我们有

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla^2 \rho(\mathbf{r}', t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d^3 \mathbf{r}' \\ &\quad + \int \rho(\mathbf{r}', t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3 \mathbf{r}' + 2 \int \nabla \rho \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3 \mathbf{r}' \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} \nabla \rho &= \frac{\partial \rho}{\partial t'} \nabla t' = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \nabla (|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ \nabla^2 \rho &= -\nabla \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\partial \rho}{\partial t} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \\ &= -\frac{\partial^2 \rho}{\partial t \partial t'} \nabla t' \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\partial \rho}{\partial t} \left(\frac{3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) &= -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) &= -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}' - \int \frac{2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3 \mathbf{r}' \\ &\quad - 4\pi \int \rho(\mathbf{r}', t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' + \int \frac{2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3 \mathbf{r}' \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - 4\pi \rho(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

因此 ϕ 的确满足

$$\nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi \rho$$

由于推迟势中 \mathbf{A} 的各个分量的形式解实际上和 ϕ 没有根本区别, 并且 \mathbf{A} 的各个分量所要满足的方程和 ϕ 的方程具有相同的形式, 从而我们可以

断定

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$$

就是方程

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -4\pi \mathbf{J}$$

的解。

6.5.2 Lienard-Wiechert 势

现在我们利用推迟势来研究沿着任意路径 $\mathbf{r}_0(t)$ 运动的点电荷产生的电磁场。首先，我们可以通过引入关于时间变量的 δ 函数来将推迟势公式改写为：

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}, t) &= \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}', t'')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(t'' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dt'' d^3\mathbf{r}' \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \iiint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t'')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(t'' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dt'' d^3\mathbf{r}'\end{aligned}$$

对于位于 $\mathbf{r}_0(t)$ 的点电荷 e ，空间中电荷密度分布为

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t))$$

而电流密度为

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = e\dot{\mathbf{r}}_0(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t))$$

进而

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}, t) &= \iint \frac{e\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t''))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(t'' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dt'' d^3\mathbf{r}' \\ &= \int \frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t'')|} \delta(t'' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t'')|) dt'' \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \iint \frac{e\dot{\mathbf{r}}_0(t'')\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t''))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(t'' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dt'' d^3\mathbf{r}' \\ &= \int \frac{e\dot{\mathbf{r}}_0(t'')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t'')|} \delta(t'' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t'')|) dt''\end{aligned}$$

现在我们需要利用一个关于 δ 函数的恒等式：如果 $f(x)$ 有有限个零点 $\{x_n\}$ 并且各个 x_i 处 $f(x)$ 的一阶导数 $f'(x_i)$ 均不为零，那么

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$$

这个式子的证明是很直接的：考虑任意函数 $h(x)$ 并做换元令 $z = f(x)$ ，那么

$$\int h(x)\delta(f(x))dx = \int h(x) \left| \frac{df}{dx} \right|^{-1} \delta(z) dz = \sum_i h(x_i) \left| \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i}^{-1} = \int h(x) \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|} dx$$

其中对 $f'(x)$ 取绝对值是因为对 z 积分的方向应该由负到正, 如果 $f'(x)$ 是负的我们则需要加入一个负号来实现这一点, 因而一般上我们需要取 $f'(x)$ 的绝对值。

回到 Lienard-Wiechert 势, 在 $\phi(\mathbf{r}, t)$ 和 $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ 的积分表达式中 δ 函数内的关于 t'' 的函数为

$$f(t'') = t'' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t'')|$$

我们设其仅有一个零点并记之为 t' , 即 $t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')| = 0$, 那么

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t''} \right|_{t''=t'} = 1 - \frac{\dot{\mathbf{r}}_0(t') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} = \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')| - \dot{\mathbf{r}}_0(t') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}$$

进而

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t'')|} \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')| - \dot{\mathbf{r}}_0(t') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t'))} \delta(t'' - t') dt'' \\ &= \frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')| - \dot{\mathbf{r}}_0(t') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t'))} \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{e \dot{\mathbf{r}}_0(t'')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t'')|} \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')| - \dot{\mathbf{r}}_0(t') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t'))} \delta(t'' - t') dt'' \\ &= \frac{e \dot{\mathbf{r}}_0(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')| - \dot{\mathbf{r}}_0(t') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t'))} \end{aligned}$$

其中 t' 是 $t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|$ 的零点, t 便据此隐含在 t' 中。我们得到的 $\phi(\mathbf{r}, t)$ 与 $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ 便叫做 Lienard-Wiechert 势。

6.5.3 运动电荷产生的电磁场

我们记 $\mathbf{R}(\mathbf{r}, t') = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')$, $R(\mathbf{r}, t') = |\mathbf{R}(t')| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|$, 那么 Lienard-Wiechert 势便为

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{R(\mathbf{r}, t') - \dot{\mathbf{r}}_0(t') \cdot \mathbf{R}(\mathbf{r}, t')} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{e \dot{\mathbf{r}}_0(t')}{R(\mathbf{r}, t') - \dot{\mathbf{r}}_0(t') \cdot \mathbf{R}(\mathbf{r}, t')}$$

下面我们便可以根据

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

求出运动电荷产生的电磁场的具体表达式。

对于电场 \mathbf{E} , 我们先考虑标势项的贡献:

$$-\nabla\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{[R(\mathbf{r}, t') - \dot{\mathbf{r}}_0(t') \cdot \mathbf{R}(\mathbf{r}, t')]^2} \nabla [R(\mathbf{r}, t') - \dot{\mathbf{r}}_0(t') \cdot \mathbf{R}(\mathbf{r}, t')]$$

而

$$\nabla R(\mathbf{r}, t') = \nabla (|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')) \cdot \dot{\mathbf{r}}_0(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|^2} \nabla t'$$

考虑到 $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|$, 我们便有

$$\nabla t' = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} + \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')) \cdot \dot{\mathbf{r}}_0(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} \nabla t'$$

因此

$$\nabla t' = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')| - \dot{\mathbf{r}}_0(t') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t'))} = -\frac{\mathbf{R}(\mathbf{r}, t')}{R(\mathbf{r}, t') - \dot{\mathbf{r}}_0(t') \cdot \mathbf{R}(\mathbf{r}, t')}$$

进而

$$\begin{aligned} \nabla R(\mathbf{r}, t') &= \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} + \frac{\dot{\mathbf{r}}_0(t') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')| - \dot{\mathbf{r}}_0(t') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t'))} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} \\ &= \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')| - \dot{\mathbf{r}}_0(t') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t'))} \\ &= \frac{\mathbf{R}(\mathbf{r}, t')}{R(\mathbf{r}, t') - \dot{\mathbf{r}}_0(t') \cdot \mathbf{R}(\mathbf{r}, t')} \end{aligned}$$

记 $\dot{\mathbf{r}}_0(t') = \mathbf{v}(t')$, 则

$$\nabla R(\mathbf{r}, t') = \frac{\mathbf{R}(\mathbf{r}, t')}{R(\mathbf{r}, t') - \mathbf{v}(t') \cdot \mathbf{R}(\mathbf{r}, t')}$$

同时我们有

$$\nabla [\dot{\mathbf{r}}_0(t') \cdot \mathbf{R}(\mathbf{r}, t')] = \nabla [\mathbf{v}(t') \cdot \mathbf{R}(\mathbf{r}, t')]$$

考察其分量形式, 我们有

$$\begin{aligned} \partial_i [v^j(t') R^j(t')] &= R^j \partial_i v^j + v^j \partial_i R^j = R^j \dot{v}^j \partial_i t' + v^j \partial_i (r^j - r_0^j(t')) \\ &= v^j \delta_{ij} - v^j v^j \partial_i t' + R^j \dot{v}^j \partial_i t' \end{aligned}$$

此即

$$\begin{aligned} \nabla [\dot{\mathbf{r}}_0(t') \cdot \mathbf{R}(\mathbf{r}, t')] &= \mathbf{v}(t') - v^2 \nabla t' + \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{R} \nabla t' \\ &= \mathbf{v}(t') - \frac{(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{R} - v^2) \mathbf{R}(\mathbf{r}, t')}{R(\mathbf{r}, t') - \mathbf{v}(t') \cdot \mathbf{R}(\mathbf{r}, t')} \end{aligned}$$

进而

$$-\nabla \phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e \mathbf{R}}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3} - \frac{e}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^2} \left[\mathbf{v} - \frac{(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{R} - v^2) \mathbf{R}}{R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}} \right]$$

现在考虑矢势项的贡献:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} \\ &= -\left[\frac{e \dot{\mathbf{r}}_0(t')}{R(\mathbf{r}, t') - \dot{\mathbf{r}}_0(t') \cdot \mathbf{R}(\mathbf{r}, t')} \right. \\ &\quad \left. - \frac{e \dot{\mathbf{r}}_0(t')}{[R(\mathbf{r}, t') - \dot{\mathbf{r}}_0(t') \cdot \mathbf{R}(\mathbf{r}, t')]^2} \frac{\partial}{\partial t'} (R(\mathbf{r}, t') - \dot{\mathbf{r}}_0(t') \cdot \mathbf{R}(\mathbf{r}, t')) \right] \frac{\partial t'}{\partial t} \end{aligned}$$

同时我们有

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R}{\partial t'} &= -\frac{\dot{\mathbf{r}}_0(t') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} \\
 \frac{\partial}{\partial t'} (\dot{\mathbf{r}}_0(t') \cdot \mathbf{R}(\mathbf{r}, t')) &= \frac{\partial}{\partial t'} (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}_0(t')) - \frac{\partial}{\partial t'} (\dot{\mathbf{r}}_0(t') \cdot \mathbf{r}_0(t')) \\
 &= \mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}}_0(t') - \dot{\mathbf{r}}_0(t') \cdot \ddot{\mathbf{r}}_0(t') - \dot{\mathbf{r}}_0^2(t') \\
 &= \ddot{\mathbf{r}}_0(t') \cdot \mathbf{R}(\mathbf{r}, t) - \dot{\mathbf{r}}_0^2(t')
 \end{aligned}$$

因此

$$-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\left[\frac{e\dot{\mathbf{v}}}{R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}} - \frac{e\mathbf{v}(-\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}/R - \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{R} + v^2)}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^2} \right] \frac{\partial t'}{\partial t}$$

又因为 $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|$, 于是

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1 + \frac{\dot{\mathbf{r}}_0(t') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} \frac{\partial t'}{\partial t}$$

因此

$$\left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{R}\right) \frac{\partial t'}{\partial t} = 1$$

此即

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{R}{R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}$$

进而

$$-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{eR\dot{\mathbf{v}}}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^2} - \frac{e\mathbf{v}R(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{R} - v^2)}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3} - \frac{e\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{R})}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3}$$

记 $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}$, 于是我们求得电场为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\
 &= \frac{e\mathbf{R}}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3} - \frac{e\mathbf{v}}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^2} + \frac{e\mathbf{R}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{R} - v^2)}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3} - \frac{eR\mathbf{a}}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^2} - \frac{eR\mathbf{v}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{R} - v^2)}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3} \\
 &\quad - \frac{e\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{R})}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3} \\
 &= \frac{e}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3} [\mathbf{R} - \mathbf{v}(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}) - \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}) - v^2\mathbf{R} + v^2R\mathbf{v}] \\
 &\quad - \frac{e}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3} [-\mathbf{R}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{R}) + R\mathbf{a}(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}) + R\mathbf{v}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{R})] \\
 &= \frac{e(1 - v^2)}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3} (\mathbf{R} - R\mathbf{v}) - \frac{e}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3} [\mathbf{a}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{R})\mathbf{R} - R(\mathbf{v} \cdot \mathbf{R})\mathbf{a} + R(\mathbf{a} \cdot \mathbf{R})\mathbf{v}] \\
 &= \frac{e(1 - v^2)}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3} (\mathbf{R} - R\mathbf{v}) - \frac{e}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3} [\mathbf{R} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{R}) + R\mathbf{R} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{a})] \\
 &= \frac{e(1 - v^2)}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3} (\mathbf{R} - R\mathbf{v}) + \frac{e}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3} [\mathbf{R} \times (\mathbf{R} \times \mathbf{a}) - \mathbf{R} \times (R\mathbf{v} \times \mathbf{a})] \\
 &= \frac{e(1 - v^2)}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3} (\mathbf{R} - R\mathbf{v}) + \frac{e}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3} \mathbf{R} \times [(\mathbf{R} - R\mathbf{v}) \times \mathbf{a}]
 \end{aligned}$$

其中 \mathbf{v}, \mathbf{R} 的时间变量均为 t' , 即 $t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')| = 0$ 的根。

至于磁场, 我们考虑其分量形式:

$$B_i(\mathbf{r}, t) = \epsilon_{ijk} \partial_j A^k$$

因为

$$A^k = \frac{ev^k}{R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}$$

从而

$$\begin{aligned}
 \partial_j A^k &= \frac{ea^k}{R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}} \frac{\partial t'}{\partial r^j} - \frac{ev^k}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^2} \frac{\partial}{\partial r^j} (R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}) \\
 &= -\frac{ea^k R^j}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^2} - \frac{ev^k}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^2} \left[\frac{R^j}{R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}} - v^j + \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{R} - v^2) R^j}{R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}} \right] \\
 &= -\frac{ea^k R^j}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^2} - \frac{ev^k R^j}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3} + \frac{ev^j v^k}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^2} - \frac{eR^j v^k (\mathbf{a} \cdot \mathbf{R} - v^2)}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3}
 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
 B_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j A^k \\
 &= -\frac{e\epsilon_{ijk} R^j a^k}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^2} - \frac{e\epsilon_{ijk} R^j v^k}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3} - \frac{e\epsilon_{ijk} R^j v^k (\mathbf{a} \cdot \mathbf{R} - v^2)}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3}
 \end{aligned}$$

此即

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= -\frac{e\mathbf{R} \times \mathbf{a}}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^2} - \frac{e\mathbf{R} \times \mathbf{v}}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3} - \frac{e(\mathbf{a} \cdot \mathbf{R})\mathbf{R} \times \mathbf{v}}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3} + \frac{ev^2\mathbf{R} \times \mathbf{v}}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3} \\
 &= -\frac{e(1 - v^2)}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3}\mathbf{R} \times \mathbf{v} + \frac{-e(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})\mathbf{R} \times \mathbf{a} - e(\mathbf{a} \cdot \mathbf{R})\mathbf{R} \times \mathbf{v}}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3} \\
 &= -\frac{e(1 - v^2)}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3}\mathbf{R} \times \mathbf{v} + \frac{e}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3}[-R\mathbf{R} \times \mathbf{a} + \mathbf{R} \times (\mathbf{a}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}) - \mathbf{v}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{R}))] \\
 &= -\frac{e(1 - v^2)}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3}\mathbf{R} \times \mathbf{v} - \frac{e}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3}[R\mathbf{R} \times \mathbf{a} - \mathbf{R} \times (\mathbf{R} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{v}))]
 \end{aligned}$$

考虑到我们前面曾经导出

$$\mathbf{E} = \frac{e(1 - v^2)}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3}(\mathbf{R} - R\mathbf{v}) - \frac{e}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3}[R^2\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{R})\mathbf{R} - R(\mathbf{v} \cdot \mathbf{R})\mathbf{a} + R(\mathbf{a} \cdot \mathbf{R})\mathbf{v}]$$

从而比较该式与 \mathbf{B} 的表达式, 我们显然可得

$$\mathbf{B} = \frac{1}{R}\mathbf{R} \times \mathbf{E}$$

进而我们可以看出, \mathbf{B} 与 \mathbf{E} 处处正交。

我们回过头来看电场的表达式

$$\mathbf{E} = \frac{e(1 - v^2)}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3}(\mathbf{R} - R\mathbf{v}) + \frac{e}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3}\mathbf{R} \times [(\mathbf{R} - R\mathbf{v}) \times \mathbf{a}]$$

显然, 等号右边的第一项与加速度 \mathbf{a} 无关, 并且 $R \rightarrow \infty$ 时此项近似以 $1/R^2$ 衰减。我们不妨来考察一下电荷以速度 \mathbf{v} 匀速运动的情况, 此时

$$\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{r}_0(t') + (t - t')\mathbf{v}$$

进而由于

$$t' - t + R(t') = 0 \Rightarrow R(t') = t - t'$$

我们便有

$$\mathbf{R}(t') - R(t')\mathbf{v} = \mathbf{r} - \mathbf{r}(t') - (t - t')\mathbf{v} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t) = \mathbf{R}(t)$$

这表明 $\mathbf{R}(t') - R(t')\mathbf{v}$ 等于连接观察时刻电荷位置与研究的场点的位矢。进而我们有

$$\begin{aligned}
 R(t') - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}(t') &= R(t') - \mathbf{v} \cdot [R(t')\mathbf{v} + \mathbf{R}(t)] \\
 &= (1 - v^2)R(t') - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}(t)
 \end{aligned}$$

我们记 \mathbf{v} 和 $\mathbf{R}(t)$ 的夹角为 θ , 则

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}(t) = vR(t) \cos \theta$$

并且

$$\mathbf{R}(t') = R(t')\mathbf{v} + \mathbf{R}(t) \Rightarrow R^2(t') = R^2(t')v^2 + R^2(t) + 2R(t')R(t)v \cos \theta$$

进而

$$(1 - v^2)R^2(t') - 2R(t)v \cos \theta R(t') - R^2(t) = 0$$

其唯一正根为

$$R(t') = \frac{v \cos \theta + \sqrt{1 - v^2 \sin^2 \theta}}{1 - v^2} R(t)$$

进而

$$R(t') - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}(t') = \left(v \cos \theta + \sqrt{1 - v^2 \sin^2 \theta} \right) R(t) - v R(t) \cos \theta = \sqrt{1 - v^2 \sin^2 \theta} R(t)$$

因此

$$\mathbf{E} = \frac{e(1 - v^2)}{(1 - v^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \frac{\mathbf{R}(t)}{R^3(t)}$$

这与我们从匀速运动电荷参考系中的 Coulomb 定律出发利用电磁场的相对论变换得到的结果一致。

6.5.4 辐射问题

现在我们已经求得了点电荷运动时产生的电磁场为

$$\mathbf{E} = \frac{e(1 - v^2)}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3} (\mathbf{R} - R\mathbf{v}) + \frac{e}{(R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^3} \mathbf{R} \times [(\mathbf{R} - R\mathbf{v}) \times \mathbf{a}]$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{R} \mathbf{R} \times \mathbf{E}$$

于是标志着电磁场能流密度的 Poynting 矢量为

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi R} \mathbf{E} \times (\mathbf{R} \times \mathbf{E}) = \frac{1}{4\pi} E^2 \frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{1}{4\pi R} \mathbf{E} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{R})$$

定义

$$\hat{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}$$

则

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} E^2 \hat{n} - \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \cdot \hat{n}) \mathbf{E}$$

于是通过半径为 r 的球面的能流为

$$I(r) = \int_{R=r} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{\Sigma} = \int_{R=r} \mathbf{S} \cdot \hat{n} R^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_{R=r} R^2 [E^2 - (\mathbf{E} \cdot \hat{n})^2] d\Omega$$

我们所说的“辐射”指的是电磁场不可逆地将能量传输至无穷远的现象，

因此存在电磁辐射便等价于

$$P_{rad} = \lim_{r \rightarrow \infty} I(r) \neq 0$$

这便要求 $E^2 - (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2$ 中存在有衰减速度不高于 $1/R^2$ 的项。

根据电场的公式，我们有

$$\begin{aligned} E^2 &= \underbrace{\frac{e^2(1-v^2)^2}{(R-\mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^6} (\mathbf{R}-R\mathbf{v})^2}_{\propto R^{-4}} + \underbrace{\frac{2e^2(1-v^2)}{(R-\mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^6} (\mathbf{R}-R\mathbf{v}) \cdot \{\mathbf{R} \times [(\mathbf{R}-R\mathbf{v}) \times \mathbf{a}]\}}_{\propto R^{-3}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{e^2}{(R-\mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^6} \{\mathbf{R} \times [(\mathbf{R}-R\mathbf{v}) \times \mathbf{a}]\}^2}_{\propto R^{-2}} \\ (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 &= \underbrace{\frac{e^2(1-v^2)^2}{(R-\mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^6} [(\mathbf{R}-R\mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}}]^2}_{\propto R^{-4}} \end{aligned}$$

可见在真空中仅当加速度 \mathbf{a} 不为零时 $E^2 - (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2$ 中才具有衰减速度不高于 R^{-2} 的项，进而真空中电荷具有加速度时才会发出电磁辐射。

不过值得注意的是，存在介质时情况将会大不相同。介质中光速一般小于 1，进而粒子可能会出现超光速运动的现象并使得自然单位制下 $v > 1$ ，于是此时可能会出现分母中 $R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R} = 0$ 的情况。进而介质中原先衰减速度大于 R^{-2} 的项在无穷远处球面上的积分也可能不是零，这便对应着 Cherenkov 辐射。

6.5.5 Larmor 公式

我们先考虑电荷运动速度远小于光速的简单情况：此时电场中的加速度项为

$$\mathbf{E}_{acc} = \frac{e\mathbf{R} \times (\mathbf{R} \times \mathbf{a})}{R^3} = \frac{e\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{a})}{R}$$

进而我们不难发现 $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_{acc} = 0$ 且 \mathbf{E}_{acc} 与 $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{a}$ 垂直，这表明 \mathbf{E}_{acc} 在 $\hat{\mathbf{n}}$ 与 \mathbf{a} 张成的平面中并且和 $\hat{\mathbf{n}}$ 垂直。现在我们可以写出低速近似下的加速度带来的磁场：

$$\mathbf{B}_{acc} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_{acc} = \frac{e\hat{\mathbf{n}} \times [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{a})]}{R}$$

注意，这里 \mathbf{E}_{acc} 与 \mathbf{B}_{acc} 表达式中 R 以及 $\hat{\mathbf{n}}$ 均为 t' 时刻的 $R(t'), \hat{\mathbf{n}}(t')$ ，而 t' 为 $t' - t + R(t') = 0$ 的根。

Poynting 矢量为

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E}_{acc} \times \mathbf{B}_{acc} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E}_{acc} \times (\hat{n} \times \mathbf{E}_{acc}) = \frac{1}{4\pi} E_{acc}^2 \hat{n} - \frac{1}{4\pi} \mathbf{E}_{acc} (\mathbf{E}_{acc} \cdot \hat{n}) = \frac{1}{4\pi} E_{acc}^2 \hat{n}$$

定义 θ 为单位矢量 \hat{n} 与加速度 \mathbf{a} 的夹角, 那么我们有

$$\mathbf{E}_{acc} = \frac{e}{R} [(\hat{n} \cdot \mathbf{a}) \hat{n} - \mathbf{a}] = \frac{e}{R} (a \cos \theta \hat{n} - \mathbf{a})$$

进而

$$E_{acc}^2 = \frac{e^2}{R^2} (a^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2a^2 \cos^2 \theta) = \frac{e^2 a^2}{R^2} \sin^2 \theta$$

$$\mathbf{S} = \frac{e^2 a^2}{4\pi R^2} \sin^2 \theta \hat{n}$$

进而我们在场点处于 t 时刻接收到的加速电荷辐射功率的立体角密度为

$$dP = \mathbf{S} \cdot \hat{n} R^2 d\Omega = \frac{e^2 a^2}{4\pi} \sin^2 \theta d\Omega$$

因此, 电荷此时辐射的总功率为

$$P = \frac{e^2 a^2}{4\pi} \int \sin^2 \theta d\Omega = \frac{e^2 a^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{2}{3} e^2 a^2$$

此即非相对论性加速运动电荷的 Larmor 公式。

对于相对论性粒子, 我们可以考虑采取相同的方式进行计算: 如果我们依旧记 $\hat{n} = \vec{R}/R$, 那么加速运动电荷电场中对电磁辐射有贡献的一项便为

$$E_{acc}^2 = \frac{e^2}{R^2 (1 - \mathbf{v} \cdot \hat{n})^6} \{\hat{n} \times [(\hat{n} - \mathbf{v}) \times \mathbf{a}]\}^2$$

此时电子高速运动会使得电场的推迟效应不可忽略, 我们通过 $E_{acc}^2/4\pi$ 计算出的是在 R 处我们观察者于 t 时刻接收到的电子电磁辐射能流密度, 即

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{4\pi} E_{acc}^2$$

可是这个辐射是电子在 t' 时刻发出的。因此为了计算出电子在 t' 时刻辐射的总功率, 我们需要考虑

$$\frac{dI}{dt'} = \frac{dI}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{1}{4\pi} E_{acc}^2 \frac{dt}{dt'}$$

进而电子辐射的总功率为

$$P = \int \frac{dI}{dt'} R^2 d\Omega = \frac{e^2}{4\pi} \int \frac{\{\hat{n} \times [(\hat{n} - \mathbf{v}) \times \mathbf{a}]\}^2}{(1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v})^6} \frac{dt}{dt'} d\Omega$$

注意到

$$\frac{dt}{dt'} = 1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v}$$

我们便有

$$P = \frac{e^2}{4\pi} \int \frac{\{\hat{n} \times [(\hat{n} - \mathbf{v}) \times \mathbf{a}]\}^2}{(1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v})^5} d\Omega$$

因为

$$\hat{n} \times [(\hat{n} - \mathbf{v}) \times \mathbf{a}] = (\hat{n} \cdot \mathbf{a})(\hat{n} - \mathbf{v}) - (1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a}$$

于是

$$\begin{aligned} & \{\hat{n} \times [(\hat{n} - \mathbf{v}) \times \mathbf{a}]\}^2 \\ &= (\hat{n} \cdot \mathbf{a})^2(\hat{n} - \mathbf{v})^2 + (1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v})^2 a^2 - 2(\hat{n} \cdot \mathbf{a})(1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v})(\hat{n} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \\ &= (\hat{n} \cdot \mathbf{a})^2(1 + v^2 - 2\hat{n} \cdot \mathbf{v}) + (1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v})^2 a^2 - 2(\hat{n} \cdot \mathbf{a})^2(1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v}) + 2(\hat{n} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})(1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v}) \\ &= -(1 - v^2)(\hat{n} \cdot \mathbf{a})^2 + (1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v})^2 a^2 + 2(\hat{n} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})(1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v}) \end{aligned}$$

进而 P 可以分解为三个积分:

$$P = \frac{e^2}{4\pi} \left[a^2 \int \frac{1}{(1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v})^3} d\Omega + 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \int \frac{\hat{n} \cdot \mathbf{a}}{(1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v})^4} d\Omega - \frac{1}{\gamma^2} \int \frac{(\hat{n} \cdot \mathbf{a})^2}{(1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v})^5} d\Omega \right]$$

先计算第一个积分: 考虑球坐标系并取 \mathbf{v} 的方向为 $\theta = 0$, 进而 $\hat{n} \cdot \mathbf{v} = v \cos \theta$, 同时 $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$, 因此

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v})^3} d\Omega &= 2\pi \int_0^\pi \frac{1}{(1 - v \cos \theta)^3} \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 \frac{1}{(1 - vx)^3} dx \\ &= \frac{4\pi}{(1 - v^2)^2} = 4\pi\gamma^4 \end{aligned}$$

对于第二个积分, 我们考虑

$$\frac{d}{dt'} \left[\frac{1}{(1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v})^3} \right] = \frac{3(\hat{n} \cdot \mathbf{a})}{(1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v})^4}$$

因此

$$\begin{aligned} \int \frac{\hat{n} \cdot \mathbf{a}}{(1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v})^4} d\Omega &= \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \int \frac{1}{(1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v})^3} d\Omega = \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \left[\frac{4\pi}{(1 - v^2)^2} \right] \\ &= \frac{16\pi}{3} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{(1 - v^2)^3} = \frac{16\pi}{3} \gamma^6 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$ 来自于

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\frac{d}{dt} (v^2) = \frac{d}{dt} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = 2(v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z) = 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$$

至于第三个积分, 我们先考虑

$$\frac{d^2}{dt'^2} \left[\frac{1}{(1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v})^3} \right] = \frac{3(\hat{n} \cdot \dot{\mathbf{a}})}{(1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v})^4} + \frac{12(\hat{n} \cdot \mathbf{a})^2}{(1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v})^5}$$

从而

$$\int \frac{(\hat{n} \cdot \mathbf{a})^2}{(1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v})^5} d\Omega = \frac{1}{12} \frac{d^2}{dt'^2} \left[\frac{4\pi}{(1 - v^2)^2} \right] - \frac{1}{4} \int \frac{\hat{n} \cdot \dot{\mathbf{a}}}{(1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v})^4} d\Omega$$

等号右边的第一项比较简单：

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} \frac{d^2}{dt'^2} \left[\frac{4\pi}{(1 - v^2)^2} \right] &= \frac{4\pi}{3} \frac{d}{dt'} \left[\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{(1 - v^2)^3} \right] \\ &= \frac{4\pi}{3} \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{a}}}{(1 - v^2)^3} + \frac{4\pi}{3} \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}{(1 - v^2)^3} + 8\pi \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2}{(1 - v^2)^4} \\ &= \frac{4\pi}{3} \gamma^6 (\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{a}}) + \frac{4\pi}{3} \gamma^6 a^2 + 8\pi \gamma^8 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2 \end{aligned}$$

至于第二项积分，我们的计算如下：

$$\begin{aligned} \int \frac{\hat{n} \cdot \dot{\mathbf{a}}}{(1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v})^4} d\Omega &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\dot{a}_x \sin \theta \cos \varphi + \dot{a}_y \sin \theta \sin \varphi + \dot{a}_z \cos \theta}{(1 - v \cos \theta)^4} \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi \dot{a}_z \int_0^\pi \frac{\cos \theta}{(1 - v \cos \theta)^4} \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi \dot{a}_z \int_{-1}^1 \frac{x}{(vx - 1)^4} dx \\ &= \frac{16\pi}{3} \dot{a}_z v \frac{1}{(1 - v^2)^3} = \frac{16\pi}{3} (\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{a}}) \gamma^6 \end{aligned}$$

因此

$$\int \frac{(\hat{n} \cdot \mathbf{a})^2}{(1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v})^5} d\Omega = 8\pi \gamma^8 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2 + \frac{4\pi}{3} \gamma^6 a^2$$

于是我们求得电荷于 t' 时刻辐射的功率为

$$\begin{aligned} P &= \frac{e^2}{4\pi} \left[4\pi a^2 \gamma^4 + \frac{32\pi}{3} \gamma^6 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2 - 8\pi \gamma^6 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2 - \frac{4\pi}{3} \gamma^4 a^2 \right] \\ &= \frac{e^2}{4} \left[\frac{8}{3} a^2 \gamma^4 + \frac{8}{3} \gamma^6 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2 \right] \\ &= \frac{2}{3} e^2 \gamma^6 [a^2 (1 - v^2) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2] \\ &= \frac{2}{3} e^2 \gamma^6 [a^2 - a^2 v^2 (1 - \cos^2 \alpha)] \\ &= \frac{2}{3} e^2 \gamma^6 (a^2 - a^2 v^2 \sin^2 \alpha) \\ &= \frac{2}{3} e^2 \gamma^6 [a^2 - (\mathbf{v} \times \mathbf{a})^2] \end{aligned}$$

这便是考虑相对论效应的 Larmor 公式，Lienard 最早得到了这个结果。

我们也可以利用一些奇技淫巧导出这个公式：首先我们要注意到 \mathbf{P} 一定正比于加速度的平方；其次， \mathbf{P} 在 Lorentz 变换下是不变的，这是因为它描述了单位时间内释放的能量，而时间和能量都是 4-矢量的 0 分量。因此我们

可以尝试寻找 P 的 Lorentz 不变、且在 $v \rightarrow 0$ 的非相对论极限下退化为经典 Larmor 公式的表达式。

首先，非相对论的 Larmor 公式可以被写成

$$P = \frac{2}{3} e^2 a^2 = \frac{2e^2}{3m^2} \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^2$$

而在 $v \rightarrow 0$ 时能退化为这个形式的 Lorentz 不变量只有

$$P = \frac{2e^2}{3m^2} \frac{dP^\mu}{d\tau} \frac{dP_\mu}{d\tau}$$

注意到 $\mathbb{P} = m(\gamma, \gamma \mathbf{v})$ ，于是我们有

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\tau} = \gamma \frac{d\mathbb{P}}{dt} = m\gamma \left(\gamma^3 \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}, \gamma^3 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{v} + \gamma \mathbf{a} \right)$$

进而

$$\begin{aligned} \frac{dP^\mu}{d\tau} \frac{dP_\mu}{d\tau} &= m^2 \gamma^2 \left[\gamma \mathbf{a} + \gamma^3 \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \right]^2 - m^2 \gamma^8 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2 \\ &= m^2 \gamma^4 a^2 + m^2 \gamma^8 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2 v^2 - m^2 \gamma^8 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2 + 2m^2 \gamma^6 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2 \\ &= m^2 \gamma^4 a^2 + m^2 \gamma^6 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} P &= \frac{2e^2}{3m^3} m^2 \gamma^6 \left[a^2 (1 - v^2) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2 \right] \\ &= \frac{2}{3} e^2 \gamma^6 \left[a^2 - (\mathbf{v} \times \mathbf{a})^2 \right] \end{aligned}$$

这和我们前面的结果一致。

6.5.6 Larmor 公式的应用

6.5.6.1 直线加速器

在直线加速器中速度与加速度共线。如果定义 $p = |\mathbf{p}| = \gamma m v$ ，那么我们有

$$\frac{dp}{dt} = m\gamma \frac{dv}{dt} + mv \frac{d\gamma}{dt}$$

考虑到 $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ ，因此

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 v a$$

进而

$$\frac{dp}{dt} = m\gamma^3 a v^2 + m\gamma a = m\gamma^3 a (v^2 + 1 - v^2) = m\gamma^3 a$$

又因为此时修正的 Larmor 公式为

$$P = \frac{2}{3} e^2 \gamma^6 a^2$$

因此

$$P = \frac{2e^2}{3m^2} \left(\frac{dp}{dt} \right)^2$$

这个公式描述了带电粒子在直线加速器中加速时辐射带来的能量损耗。

我们记粒子的相对论性能量为 \mathcal{E} ，则

$$\mathcal{E}^2 = p^2 + m^2$$

于是

$$\mathcal{E} \frac{d\mathcal{E}}{dx} = p \frac{dp}{dx}$$

进而

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{p}{\mathcal{E}} \frac{dp}{dx} = \frac{m\gamma v}{m\gamma} \frac{dp}{dx} = \frac{dx}{dt} \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dt}$$

因此辐射的功率还可以被写成

$$P = \frac{2e^2}{3m^2} \left(\frac{d\mathcal{E}}{dx} \right)^2$$

加速器的“能量损失因子”被定义为粒子辐射能量功率与我们提供给粒子的功率之比，同时根据能量守恒可知，我们提供给粒子的功率等于 \mathcal{E} 的变化率（能量还没来得及通过电磁辐射耗散），因此我们有

$$\frac{\text{辐射的功率}}{\text{提供的功率}} = \frac{P}{d\mathcal{E}/dt} = \frac{P}{d\mathcal{E}/dx} \frac{dt}{dx} = \frac{P}{v(d\mathcal{E}/dx)} = \frac{2e^2}{3m^2 v} \frac{d\mathcal{E}}{dx}$$

在 $v \rightarrow 1$ 的相对论极限下，我们便有

$$\frac{\text{辐射的功率}}{\text{提供的功率}} \approx \frac{2e^2}{3m^2} \frac{d\mathcal{E}}{dx}$$

一个典型的直线加速器可以将电子在一米距离内加速至 10 MeV，而这对应的能量损耗因子大约为 $10^{-13}/\text{m}$ 。这也就是说，在比较短的直线加速器中加速电子的能量只有很少一部分被 Larmor 辐射耗散掉了。

6.5.6.2 回旋加速器

回旋加速器中粒子加速度在垂直于速度方向的分量远大于其在速度方向上的分量。这也就是说，粒子三维动量 \mathbf{p} 的方向在迅速改变，但是粒子的能量（也是 \mathbf{p} 的模长）改变的速度却相对较慢。事实上在旋转一周的过程中 $|\mathbf{p}|$ 的改变量非常小，因此我们可以通过假设粒子以一个固定的角频率 ω 做

圆周运动并研究其能量的耗散。于是我们有

$$\left| \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right| = \omega |\mathbf{p}|$$

进而

$$\left| \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \right| = \gamma \omega |\mathbf{p}|$$

我们认为粒子动能不变，进而有

$$\frac{dP^0}{d\tau} = 0$$

进而

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} \frac{dP_\mu}{d\tau} = \left(\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \right)^2 = \gamma^2 \omega^2 p^2$$

如果加速器的半径为 R ，那么角速度便为 $\omega = v/R$ ，进而粒子通过辐射损失能量的功率为

$$P = \frac{2e^2}{3m^2} \omega^2 \gamma^2 p^2 = \frac{2}{3} e^2 \gamma^4 \omega^2 v^2 = \frac{2e^2 \gamma^4 v^4}{3R^2} = \frac{2}{3} e^2 \gamma^4 a^2$$

进而粒子在运动一周中损失的能量为

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{2\pi R}{v} P = \frac{4\pi e^2 v^3 \gamma^4}{3R}$$

一个典型的 10 GeV 电子回旋加速器半径为 $R = 100$ m，我们可以算得绕行一周的过程中电子通过辐射损失的能量大约为 10 MeV，亦即 0.1%。同时注意到电子绕行一周的时间是很短的，因此回旋加速器的功率一般很大。

同时我们应该注意到粒子在直线加速器中的辐射功率正比于 γ^6 ，而回旋加速器中粒子的辐射功率正比于 γ^4 。 $\gamma^6 > \gamma^4$ 似乎意味着加速度相同时直线加速器的能量损耗会更大。这样比较其实有失公允，事实上我们最好比较施加相同大小的力 $|d\mathbf{p}/dt|$ 时能量的损耗。对于回旋加速器而言

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\gamma \mathbf{a}$$

因此其能量耗散功率为

$$P = \frac{2e^2 \gamma^2}{3m^2} \left| \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right|^2$$

而对于直线加速器，我们有

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\gamma \mathbf{a} + m\gamma^3 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{v} = m\gamma^3 \mathbf{a}$$

进而

$$P = \frac{2e^2}{3m^2} \left| \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right|^2$$

因而如果我们对粒子施加相同的驱动力，那么在回旋加速器中粒子通过电磁辐射耗散能量的功率将比直线加速器中的情况大。

6.5.7 Thompson 散射

我们假设平面电磁波照射到了一个电荷为 e 、质量为 m 的粒子上，那么此时粒子会在电磁波的电场中来回振动并发出电磁波，而这看起来就像是粒子散射了入射波。

大多数情况下，我们可以假设粒子的运动是非相对论的，从而如果记参考方向的单位矢量 \hat{n} 与粒子加速度 \mathbf{a} 的夹角为 Θ ，那么 Larmor 公式给出单位立体角内辐射的功率为

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2 a^2}{4\pi} \sin^2 \Theta$$

我们假设入射平面电磁波中电场的复矢量为

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{\epsilon} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

并且我们假设波矢 \mathbf{k} 沿 z 轴，进而描述偏振方向的矢量 $\hat{\epsilon}$ 在 (x, y) 中，我们可以记其为

$$\hat{\epsilon} = (\cos \psi, \sin \psi, 0)$$

在球坐标系下参考方向上的单位矢量为

$$\hat{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

进而

$$\hat{n} \cdot \hat{\epsilon} = \sin \theta \cos(\varphi - \psi)$$

电子的加速度为

$$m\mathbf{a} = e\mathbf{E}$$

因此

$$\mathbf{a} = \frac{eE_0}{m} \hat{\epsilon} e^{i\omega(z-t)}$$

因此

$$\hat{n} \cdot \mathbf{a} = \frac{eE_0}{m} \hat{n} \cdot \hat{\epsilon} e^{i\omega(z-t)} = \frac{eE_0}{m} e^{i\omega(z-t)} \sin \theta \cos(\varphi - \psi)$$

因此

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi} \left(a^2 - (\hat{n} \cdot \mathbf{a})^2 \right)$$

即

$$\frac{dP}{d\Omega}(t) = \frac{e^4 E_0^2}{4\pi m^2} \sin^2(\omega(z-t)) [1 - \sin^2 \theta \cos^2(\varphi - \psi)]$$

在一个周期内做平均, 我们便得到

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle_t = \frac{e^4 E_0^2}{8\pi m^2} [1 - \sin^2 \theta \cos^2(\varphi - \psi)]$$

对于一般的非偏振入射自然光, 我们还需要在上式中对 ψ 做平均, 得到的结果为

$$\left\langle \left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle_t \right\rangle_\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle_t d\psi = \frac{e^4 E_0^2}{16\pi m^2} (2 - \sin^2 \theta) = \frac{e^4 E_0^2}{16\pi m^2} (1 + \cos^2 \theta)$$

粒子对电磁波的微分散射截面被定义为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{粒子在单位时间内于单位立体角中辐射的能量}}{\text{单位时间单位面积上入射的能量}}$$

对 Thompson 散射而言微分散射截面公式中的分母就是入射电磁波 Poynting 矢量的模长, 即 $E_0^2/(8\pi)$, 进而其微分散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{2m^2} (1 + \cos^2 \theta)$$

散射的总截面为微分散射截面对立体角的积分, 即

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{e^4}{2m^2} \int_0^\pi 2\pi \sin \theta (1 + \cos^2 \theta) d\theta = \frac{8\pi e^4}{3m^2}$$

注意, 这是在自然单位制下的表达式, 为了将其转换成 Gauss 单位制下的表达式我们只需要做一下量纲分析: 总散射截面的量纲为 m^2 , 而目前等号右边的量纲为 $\text{m}^6 \cdot \text{s}^{-4}$, 进而我们在等号右边除以 c^4 即得到 Gauss 单位制下的散射截面为

$$\sigma_{\text{Gauss}} = \frac{8\pi e^4}{3m^2 c^4}$$

而为了得到 SI 单位制下的散射截面, 我们只需要进一步考虑将 e 换为 $e/\sqrt{4\pi\epsilon_0}$, 进而

$$\sigma_{\text{SI}} = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0^2 m^2 c^4}$$

在经典力学的硬球散射中, 我们知道半径为 r 的靶的散射截面为

$$\sigma = \pi r^2$$

因此我们可以由电子的 Thompson 散射截面估计出电子的经典半径为

$$r_e = \sqrt{\frac{e^4}{6\pi^2 \epsilon_0^2 m^2 c^4}} = \frac{e^2}{\sqrt{6}\pi\epsilon_0 m c^2}$$

6.5.8 辐射功率的角分布

我们前面已经看到, 对于非相对论性带电粒子而言, 其加速运动时辐射功率与 \mathbf{a} 和位矢 \mathbf{R} 的夹角 θ 的关系为

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2 a^2}{4\pi} \sin^2 \theta$$

如果考虑相对论效应, 那么我们便有

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S} = \frac{e^2}{4\pi R^2} \left| \frac{\hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \mathbf{v}) \times \mathbf{a}]}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v})^3} \right|^2$$

和 6.5.5 节中一样, 我们在这里计算的仍然是 t 时刻于场点处观察到的能流, 我们不妨将其记为 $[\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}]_{ret}$, 进而

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = [R^2 \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}]_{ret}$$

从而在 $t = T_1$ 到 $t = T_2$ 这段时间中我们观察到的粒子辐射的能量为

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} = \int_{T_1}^{T_2} [R^2 \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}]_{ret} d\Omega$$

我们记 $t = T_1$ 对应的 t' 为 T'_1 , $t = T_2$ 对应的 t' 为 T'_2 , 那么这个积分等价于

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} = \int_{T'_1}^{T'_2} [R^2 \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}]_{ret} \frac{dt}{dt'} dt'$$

从而对于被加速的粒子而言, 我们用 t' 描述的其在单位立体角内辐射的功率为

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = [R^2 \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}]_{ret} \frac{dt}{dt'} = (1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}) [R^2 \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}]_{ret}$$

如果我们再假设电荷短时间内做匀加速运动, 忽略加速过程中 $\hat{\mathbf{n}}$, \mathbf{a} 和 \mathbf{v} 的变化, 那么 t' 时刻电荷辐射功率的角分布便为

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi} \frac{|\hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \mathbf{v}) \times \mathbf{a}]|^2}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v})^5}$$

这其实就是我们前面计算相对论修正后的 Larmor 公式时使用的公式。下面我们将据此分别考察电子做变速直线运动和做圆周运动时的辐射情况。

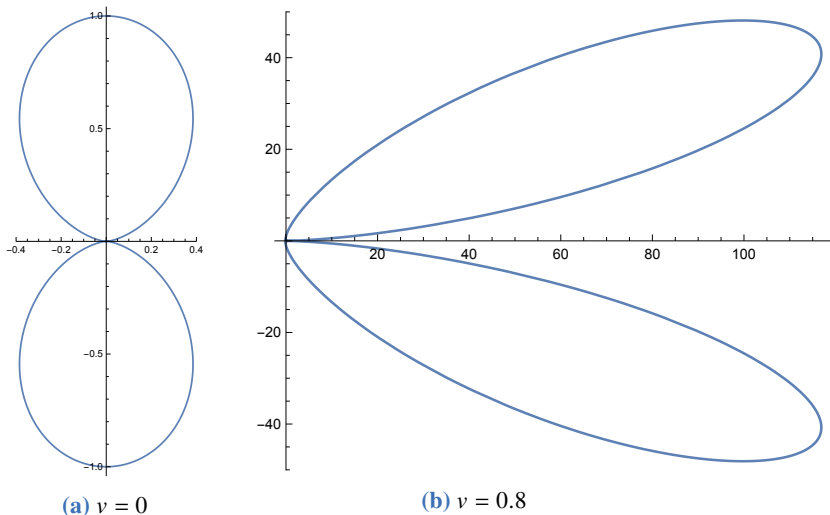
6.5.8.1 变速直线运动

此时 \mathbf{v} 与 \mathbf{a} 平行。如果定义 $\hat{\mathbf{n}}$ 和 \mathbf{a} 的夹角为 θ , 那么我们可以求得辐射功率的角分布为

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2 a^2}{4\pi} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - v \cos \theta)^5}$$

如果 $v \ll 1$ ，显然这个式子退化成了非相对论情况下的

$$\frac{dP(r')}{d\Omega} = \frac{e^2 a^2}{4\pi} \sin^2 \theta$$



两幅图中加速度的方向均水平向右。由图 (a) 可见，此时辐射功率在加速度的方向上为零，而峰值位于和加速度正交的方向上。而通过图 (b) 可以看到，速度变大时两个辐射瓣会向加速度的方向倾斜，不过在加速度的方向上辐射强度仍然为零。

为了计算出高速运动下辐射的峰值位置，我们应该考虑求解

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{dP}{d\Omega} \right) = 0$$

不过注意到

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2 a^2}{4\pi} \frac{1 - \cos^2 \theta}{(1 - v \cos \theta)^5}$$

我们可以先考虑求解峰值处对应的 $\cos \theta$ ，即

$$\frac{d}{d(\cos \theta)} \left(\frac{dP}{d\Omega} \right) = 0$$

对应的方程便为

$$-3v \cos^2 \theta - 2 \cos \theta + 5v = 0$$

此即

$$\cos \theta = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 15v^2}}{-3v}$$

舍去大于 1 的解，我们便得到

$$\theta_{max} = \pm \arccos \left(\frac{\sqrt{1 + 15v^2} - 1}{3v} \right)$$

对于极端相对论性粒子， $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ 远比 v 好用，进而辐射的峰值位置可以被改写为

$$\theta_{max} = \arccos \left(\frac{\sqrt{16 - 15\gamma^{-2}} - 1}{3\sqrt{1 - \gamma^{-2}}} \right)$$

γ 很大时我们可以将 θ_{max} 近似为

$$\theta_{max} \approx \arccos \left(1 - \frac{1}{8\gamma^2} \right)$$

这表明随着粒子速度不断逼近光速，辐射峰值的角度将逼近于零。在超高速运动的情况下我们可以考虑使用 $\cos \theta \approx 1 - \theta_{max}^2/2$ 来进一步近似，得到的结果为

$$\theta_{max} \approx \frac{1}{2\gamma}$$

我们下面可以进一步考虑极端相对论极限下直线运动时粒子辐射功率的角分布。此时我们可以取

$$v = \sqrt{1 - \gamma^{-2}} \quad \sin \theta \approx \theta \quad \cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$$

那么我们有

$$\frac{dP}{d\Omega} \approx \frac{e^2 a^2}{4\pi} \frac{\theta^2}{(1 - \sqrt{1 - \gamma^{-2}} (1 - \theta^2/2))^5}$$

再将其对 γ^{-2} 展开，我们便有

$$\frac{dP}{d\Omega} \approx \frac{8e^2 a^2 \theta^2}{\pi(\gamma^{-2} + \theta^2)^5} = \frac{8e^2 a^2 \gamma^8}{\pi} \frac{(\gamma\theta)^2}{[1 + (\gamma\theta)^2]^5}$$

由此可见两个辐射瓣的特征宽度为 $\Delta\theta \sim \gamma^{-1}$ 。

6.5.8.2 匀速圆周运动

下面我们考虑电荷做匀速圆周运动的情况，我们假设电荷瞬时处于这样的状态：电荷的整体轨迹可能并不是圆，但是在某一瞬时附近我们可以将电子的运动视为匀速圆周运动。

匀速圆周运动意味着 \mathbf{v} 与 \mathbf{a} 垂直。在运动的某一瞬时，我们可以选择一套 Cartesian 坐标系使得速度 \mathbf{v} 沿 z 轴、加速度 \mathbf{a} 沿 x 轴，进而 $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{R}/R$ 便

可以用球坐标系下的极角 (θ, φ) 标志。因此我们有

$$\hat{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \quad \mathbf{v} = (0, 0, v) \quad \mathbf{a} = (a, 0, 0)$$

此时我们有 $\hat{n} \cdot \mathbf{v} = v \cos \theta$ 。

现在考虑辐射功率分布的一般形式：

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi} \frac{|\hat{n} \times [(\hat{n} - \mathbf{v}) \times \mathbf{a}]|^2}{(1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v})^5}$$

考虑到匀速圆周运动时 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0$ ，于是我们有

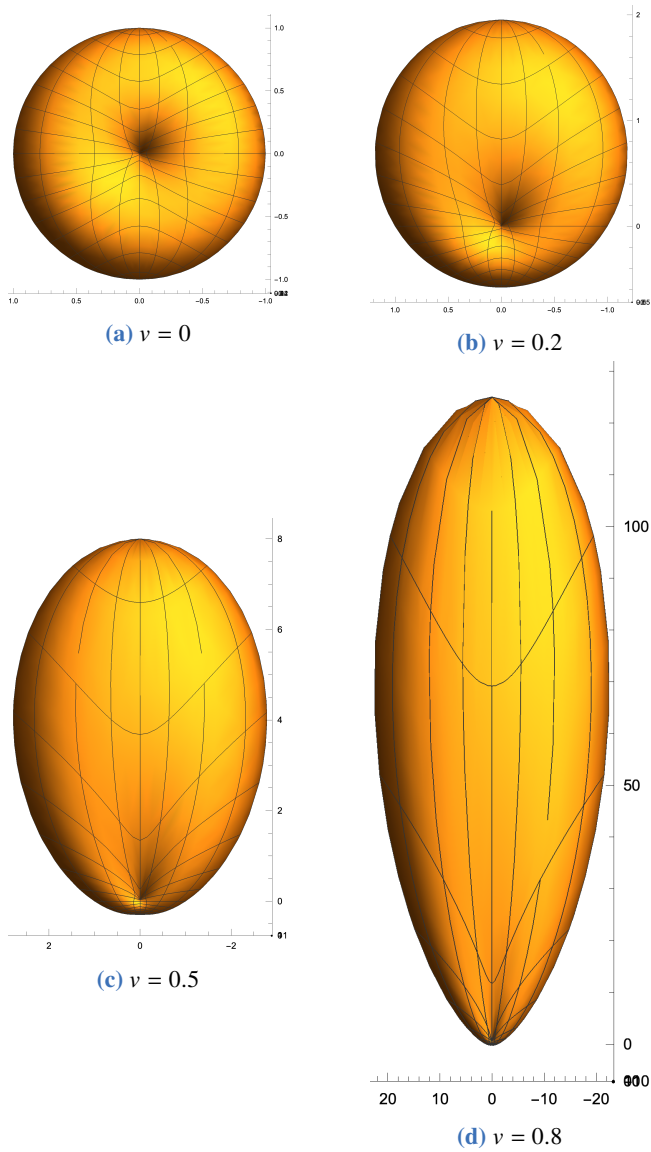
$$\begin{aligned} |\hat{n} \times [(\hat{n} - \mathbf{v}) \times \mathbf{a}]|^2 &= [(\hat{n} \cdot \mathbf{a})(\hat{n} - \mathbf{v}) - (1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a}]^2 \\ &= (\hat{n} \cdot \mathbf{a})^2(1 - 2\hat{n} \cdot \mathbf{v} + v^2) + (1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v})^2 a^2 - 2(\hat{n} \cdot \mathbf{a})^2(1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v}) \\ &= -(1 - v^2)(\hat{n} \cdot \mathbf{a})^2 + (1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v})^2 a^2 \\ &= (1 - v \cos \theta)^2 a^2 - \gamma^{-2} a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \end{aligned}$$

于是我们有

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2 a^2}{4\pi} \frac{\gamma^2 (1 - v \cos \theta)^2 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\gamma^2 (1 - v \cos \theta)^5}$$

可以看到， $v \rightarrow 1$ 时辐射功率将在 \mathbf{v} 的方向上汇聚。

我们在下面绘制了 $v = 0, 0.2, 0.5, 0.8$ 时辐射功率的分布图。



6.5.9 辐射的频谱

现在考虑存在加速度的电荷发出的电磁辐射谱分布，我们要做的无非是 Fourier 变换。

已知在一般的情况下

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = [R^2 \hat{n} \cdot \mathbf{S}]_{ret} = \frac{1}{4\pi} |[\mathbf{RE}]_{ret}|^2$$

我们记

$$\mathbf{G}(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} [\mathbf{RE}]_{ret}$$

那么便有

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = |\mathbf{G}(t)|^2$$

注意我们这里的时间变量为观察者的时间 t ，而不是被推迟的时间 t' 。这是因为我们感兴趣的是观察者观测到的电磁辐射频谱，而非粒子在某一时刻发出的辐射的频谱。

我们假设电荷仅在有限长的时间内存在加速，因此粒子辐射出的总能量是有限的。我们还假设观察点离电荷足够远，以使得在观察者看来电荷加速运动的空间区域仅张成了一个很小的角。

在以上假设之下，于场点处观察到的单位立体角内辐射出的总能量为

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP}{d\Omega} dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{G}(t)|^2 dt$$

我们取 $\mathbf{G}(t)$ 的 Fourier 变换为

$$\mathbf{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(t) e^{i\omega t} dt$$

与之相对的逆变换则为

$$\mathbf{G}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{g}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

于是

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{G}(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{g}^*(\omega') \cdot \mathbf{g}(\omega) e^{i(\omega' - \omega)t} d\omega$$

考虑到

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega' - \omega)t} dt = 2\pi \delta(\omega' - \omega)$$

因此我们有

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\Omega} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{g}^*(\omega') \cdot \mathbf{g}(\omega) \delta(\omega' - \omega) d\omega' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{g}^*(\omega) \cdot \mathbf{g}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{g}(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

这其实就是 Parseval 恒等式。

我们记单位立体角中单位频率间隔内辐射出的能量为

$$\frac{d^2 I(\omega, \hat{n})}{d\Omega d\omega} = |\mathbf{g}(\omega)|^2 + |\mathbf{g}(-\omega)|^2$$

那么我们可以将单位立体角中辐射的能量写为

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_0^\infty \frac{d^2 I(\omega, \hat{n})}{d\Omega d\omega} d\omega$$

如果 $\mathbf{G}(t) = [\mathbf{R}\mathbf{E}]_{ret} / \sqrt{4\pi}$ 属于实向量空间, 那么

$$\mathbf{g}(-\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \mathbf{G}(t) e^{-i\omega t} dt = \mathbf{g}^*(\omega)$$

进而

$$\frac{d^2 I(\omega, \hat{n})}{d\Omega d\omega} = 2 |\mathbf{g}(\omega)|^2$$

考虑到我们前面曾得到

$$\mathbf{E} = \frac{e}{R(1 - \mathbf{v} \cdot \hat{n})^3} \hat{n} \times [(\hat{n} - \mathbf{v}) \times \mathbf{a}]$$

于是

$$\mathbf{G}(t) = \frac{e}{\sqrt{4\pi}} \frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \mathbf{v}) \times \mathbf{a}]}{(1 - \mathbf{v} \cdot \hat{n})^3}$$

进而我们有

$$\mathbf{g}(\omega) = \frac{e}{2\pi\sqrt{2}} \int_{-\infty}^\infty \frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \mathbf{v}) \times \mathbf{a}]}{(1 - \mathbf{v} \cdot \hat{n})^3} e^{i\omega t} dt$$

注意到被积函数的主体仍是 t' 的直接函数, 因此我们考虑将积分变量换为 t' 。注意到 $t = t' + R(t')$ 并且

$$\frac{dt'}{dt} = 1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v}$$

我们便有

$$\mathbf{g}(\omega) = \frac{e}{2\pi\sqrt{2}} \int_{-\infty}^\infty \frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \mathbf{v}) \times \mathbf{a}]}{(1 - \mathbf{v} \cdot \hat{n})^2} e^{i\omega(t' + R(t'))} dt'$$

由于我们先前假设观察的场点离电荷很远并且电荷加速运动的距离很短, 以至于 $\hat{n} = \mathbf{R}(t')/R(t')$ 在全过程中可以近似看做不变。那么为了方便起见, 我们可以考虑将坐标原点选在加速运动中的电荷附近, 这意味着 $\mathbf{r}_0(t')$ 的模长很小。于是在远场条件下我们可以做如下近似:

$$R^2(t') = r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0(t') + r_0^2(t') \approx r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0(t')$$

进而

$$R(t') \approx r \left(1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0(t')}{r^2} \right)^{1/2} \approx r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0(t')}{r}$$

我们再近似认为

$$\hat{n} = \frac{\mathbf{R}}{R} \approx \frac{\mathbf{r}}{r}$$

那么我们便有

$$\mathbf{R}(t') \approx \mathbf{r} - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}_0(t')$$

进而

$$\mathbf{g}(\omega) \approx \frac{e}{2\pi\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t'+r-\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}_0(t'))} \frac{\hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \mathbf{v}) \times \mathbf{a}]}{(1 - \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2} dt'$$

注意到积分中存在一个与 t' 无关的相位因子 $e^{i\omega r}$ ，而这会在取 $|\mathbf{g}(\omega)|^2$ 的过程中被消去而不会对我们的物理结果造成影响，因此我们可以直接取

$$\mathbf{g}(\omega) = \frac{e}{2\pi\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t'-\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}_0(t'))} \frac{\hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \mathbf{v}) \times \mathbf{a}]}{(1 - \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2} dt'$$

进而

$$\frac{d^2 I(\omega, \hat{\mathbf{n}})}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2}{4\pi^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t'-\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}_0(t'))} \frac{\hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \mathbf{v}) \times \mathbf{a}]}{(1 - \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2} dt' \right|^2$$

我们现在其实已经得到了单位立体角、单位频率间隔内辐射能量，不过这个式子还可以被化简：注意到在 $\hat{\mathbf{n}}$ 不变的假设下我们有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'} \left[\frac{\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v})}{1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}} \right] &= \frac{\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{a})}{1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}} + \frac{(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{a})\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v})}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v})^2} \\ &= \frac{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v})((\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{a})\hat{\mathbf{n}} - \mathbf{a}) + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{a})((\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v})\hat{\mathbf{n}} - \mathbf{v})}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v})^2} \\ &= \frac{(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{a})(\hat{\mathbf{n}} - \mathbf{v}) - (1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a}}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v})^2} \\ &= \frac{\hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \mathbf{v}) \times \mathbf{a}]}{(1 - \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2} \end{aligned}$$

从而我们可以做分部积分：

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t'-\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}_0(t'))} \frac{\hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \mathbf{v}) \times \mathbf{a}]}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v})^2} dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t'-\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}_0(t'))} \frac{d}{dt'} \left[\frac{\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v})}{1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}} \right] dt' \\ &= \underbrace{e^{i\omega(t'-\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}_0(t'))} \frac{\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v})}{1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}} \Big|_{-\infty}^{\infty}}_0 - i\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t'-\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}_0(t'))} (1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}) \frac{\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v})}{1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}} dt' \end{aligned}$$

进而

$$\frac{d^2 I}{d\Omega d\omega} = \frac{\omega^2 e^2}{4\pi^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t'-\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}_0(t'))} \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v}) dt' \right|^2$$

我们在这里进行的部分积分使得加速度 \mathbf{a} 不再出现在最终的表达式中。之所以能这样做是因为我们一开始就假设加速度只在有限的时间内非零，从而对 t' 在 \mathbb{R} 上的积分可以被截断为在 \mathbf{a} 非零的有限时间间隔上的积分。在

我们做了分部积分后，新的被积函数在加速度为零的区间上仍有非零的值，从而有人可能会担心积分的收敛问题以及我们取边界项等于零的合法性。不过实践证明我们大可不必担心，如果积分出现了发散，我们总可以通过在被积函数中引入一个收敛因子 $e^{-\epsilon|t'|}$ 后积分并取 $\epsilon \rightarrow 0$ 的极限来解决这个问题。

同时，我们最后得到的表达式没有显含 \mathbf{a} 也不代表真空中匀速运动的电子具有非平凡的辐射谱：如果电子处于匀速运动，那么我们有

$$\mathbf{r}_0(t') = \mathbf{v}t'$$

进而我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v}) e^{i\omega(1-\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v})t'} dt' = 2\pi \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v}) \delta(\omega(t' - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}))$$

由于我们采用自然单位制，真空中我们恒有 $\mathbf{v} < 1$ ，因此我们的积分结果最终是零。不过在下一节中我们将看到，如果粒子在介质中匀速运动的速度超过了光在此介质中的相速度，那么它将有非平凡的辐射谱，这便是 Cerenkov 辐射。

6.5.10 Cerenkov 辐射

本节中为了方便起见我们并不直接取 $c = 1$ 。

众所周知，在相对介电常数为 ϵ 、相对磁导率为 μ 的介质中电磁波的传播速度为

$$\tilde{c} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

因此介质中的带电粒子运动速度可能会超过介质中光的传播速度，而这会使得我们在上一节中导出的积分在粒子匀速运动时不再给出等于零的平凡值。现实中我们所研究的能产生 Cerenkov 辐射的介质基本都是玻璃、水这样的相对磁导率 μ 很接近 1、相对介电常数 ϵ 很大的透明介质。因此我们在下面的讨论中可以取 $\mu = 1$ 。

首先，我们写出 Gauss 单位制下 $d^2I/d\Omega d\omega$ 的表达式，而这其实是一个简单的量纲分析工作： e 指数上的量应该没有量纲，因此我们应当有

$$e^{i\omega(t' - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}_0(t'))} \rightarrow e^{i\omega(t' - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}_0(t')/c)}$$

等号左边 $d^2I/d\Omega d\omega$ 的量纲应当是 $\text{J} \cdot \text{s}$ ，而等号右边的量纲为 $\text{J} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ ，因此我们应该在等号右边除以 c^3 。从而 Gauss 单位制下单位立体角、单位频率

间隔内辐射的能量为

$$\frac{d^2 I}{d\Omega d\omega} = \frac{\omega^2 e^2}{4\pi^2 c^3} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t' - \hat{n} \cdot \mathbf{r}_0(t')/c)} \hat{n} \times (\hat{n} \times \mathbf{v}) dt' \right|$$

我们知道, 在相对介电常数为 ϵ 的电介质中 Maxwell 方程组和真空中相比会发生如下变化 (其中 c 为真空中的光速):

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho/\epsilon \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

可以看到, 我们对真空中 Maxwell 方程的物理量做如下代换便能使之满足介质中的 Maxwell 方程:

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}\sqrt{\epsilon} \quad \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B} \quad c \rightarrow c/\sqrt{\epsilon} \quad \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J}/\sqrt{\epsilon} \quad \rho \rightarrow \rho/\sqrt{\epsilon}$$

因此我们在使用真空中的 Maxwell 方程得到的公式中做如下代换便能使我们的公式满足相对介电常数为 ϵ 的介质中的 Maxwell 方程。同时注意到, 我们应该对电荷 e 做和电荷密度 ρ 相同的代换, 即

$$e \rightarrow e/\sqrt{\epsilon}$$

进而我们可得在介质中的运动带电粒子在单位立体角、单位频率间隔内辐射的能量为

$$\frac{d^2 I}{d\Omega d\omega} = \frac{\omega^2 e^2 \sqrt{\epsilon}}{4\pi^2 c^3} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t' - \sqrt{\epsilon} \hat{n} \cdot \mathbf{r}_0(t')/c)} \hat{n} \times (\hat{n} \times \mathbf{v}) dt' \right|^2$$

对于以恒定速度 \mathbf{v} 匀速运动的电子, 我们有

$$\mathbf{r}_0(t') = \mathbf{v}t'$$

进而

$$\begin{aligned} \frac{d^2 I}{d\Omega d\omega} &= \frac{\omega^2 e^2 \sqrt{\epsilon}}{4\pi^2 c^3} |\hat{n} \times (\hat{n} \times \mathbf{v})|^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(1 - \sqrt{\epsilon} \hat{n} \cdot \mathbf{v}/c)t'} dt' \right|^2 \\ &= \frac{\omega^2 e^2 \sqrt{\epsilon}}{c^3} |\hat{n} \times \mathbf{v}|^2 \left| \delta \left(\omega \left(1 - \frac{\sqrt{\epsilon}}{c} \hat{n} \cdot \mathbf{v} \right) \right) \right|^2 \end{aligned}$$

如果我们记 \hat{n} 与 \mathbf{v} 的夹角为 θ , 那么

$$|\hat{n} \times \mathbf{v}| = v \sin \theta \quad \hat{n} \cdot \mathbf{v} = v \cos \theta$$

进而

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{\omega^2 e^2 \sqrt{\epsilon}}{c^3} v^2 \sin^2 \theta \left| \delta \left(\omega \left(1 - \frac{\sqrt{\epsilon}}{c} v \cos \theta \right) \right) \right|^2$$

考虑到

$$\delta\left(\omega\left(1 - \frac{\sqrt{\epsilon}}{c}v\cos\theta\right)\right) = \frac{1}{\omega}\delta\left(1 - \frac{\sqrt{\epsilon}}{c}v\cos\theta\right)$$

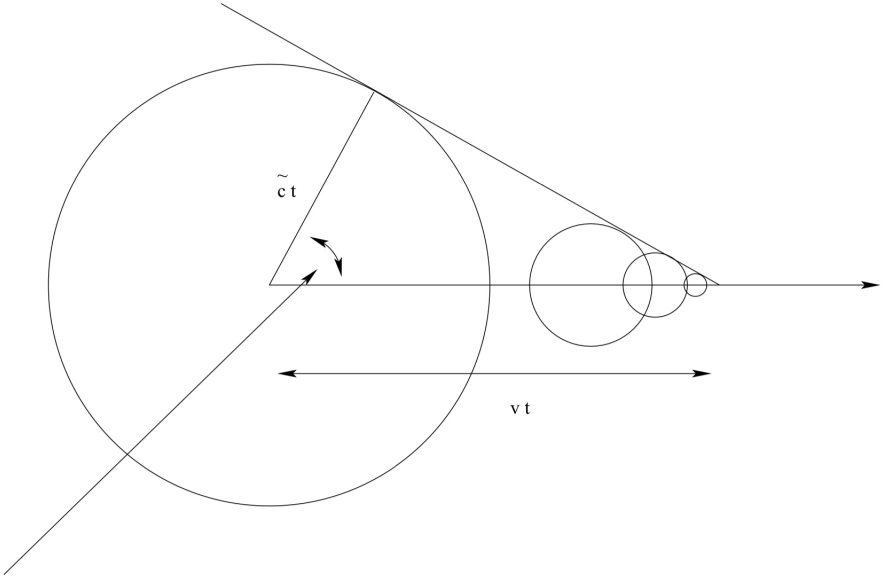
于是我们便得到

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2\sqrt{\epsilon}}{c^3}v^2\sin^2\theta\left|\delta\left(1 - \frac{\sqrt{\epsilon}}{c}v\cos\theta\right)\right|^2$$

据此我们可以看出，辐射出现的角度为

$$\theta_c = \arccos \frac{c}{\sqrt{\epsilon}v} = \arccos \frac{\tilde{c}}{v}$$

这显然表明 Cerenkov 辐射只有在粒子速度 $v > \tilde{c}$ 时才能出现。实际上我们可以将 Cerenkov 辐射视为高速运动的带电粒子在冲破“光障”时的某种激波，而辐射的 Cerenkov 角则可以被认为对应着粒子超过介质中光速运动时辐射的波前方向。



值得注意的是，我们前面得到的 $d^2I/d\Omega d\omega$ 表达式中存在 δ -函数的平方，这会使得我们在计算粒子于 θ_c 方向上辐射的能量时得到发散的结果。这是因为我们在前面的计算中做了粒子始终在介质中运动的假设。如果我

们假设粒子在 $-T$ 时进入介质而在 $+T$ 时离开介质，那么我们应当计算

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 I}{d\Omega d\omega} &= \frac{\omega^2 e^2 \sqrt{\epsilon}}{4\pi^2 c^3} \left| \int_{-T}^{+T} \hat{n} \times (\hat{n} \times \mathbf{v}) e^{i\omega(1-\sqrt{\epsilon}\hat{n}\cdot\mathbf{v}/c)t'} dt' \right|^2 \\
 &= \frac{\omega^2 e^2 \sqrt{\epsilon}}{4\pi^2 c^3} v^2 \sin^2 \theta \left| \int_{-T}^{+T} e^{i\omega(1-\sqrt{\epsilon}\hat{n}\cdot\mathbf{v}/c)t'} dt' \right|^2 \\
 &= \frac{e^2 v^2 \sqrt{\epsilon}}{4\pi^2 c^3} \sin^2 \theta \left| \frac{e^{i\omega(1-\sqrt{\epsilon}\hat{n}\cdot\mathbf{v}/c)T} - e^{-i\omega(1-\sqrt{\epsilon}\hat{n}\cdot\mathbf{v}/c)T}}{1 - \sqrt{\epsilon}v \cos \theta/c} \right|^2 \\
 &= \frac{e^2 v^2 \sqrt{\epsilon}}{\pi^2 c^3} \sin^2 \theta \left[\frac{\sin(\omega T(1 - \sqrt{\epsilon}v \cos \theta/c))}{1 - \sqrt{\epsilon}v \cos \theta/c} \right]^2
 \end{aligned}$$

进而

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{e^2 v^2 \sqrt{\epsilon}}{\pi^2 c^3} \int_0^\pi \sin^2 \theta \left[\frac{\sin(\omega T(1 - \sqrt{\epsilon}v \cos \theta/c))}{1 - \sqrt{\epsilon}v \cos \theta/c} \right]^2 2\pi \sin \theta d\theta$$

由于被积函数的第二部分是 θ_c 处的一个尖峰，因此我们可以将 $\sin^2 \theta$ 近似取为 $\sin^2 \theta_c$ 而移出积分号，得到

$$\frac{dI}{d\omega} \approx \frac{2e^2 v^2 \sqrt{\epsilon}}{\pi c^3} \sin^2 \theta_c \int_0^\pi \left[\frac{\sin(\omega T(1 - \sqrt{\epsilon}v \cos \theta/c))}{1 - \sqrt{\epsilon}v \cos \theta/c} \right]^2 \sin \theta d\theta$$

记 $\cos \theta = x$ ，那么积分可以化为

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{\sin(\omega T(1 - \sqrt{\epsilon}vx/c))}{1 - \sqrt{\epsilon}vx/c} \right]^2 dx$$

因为被积函数是 $\cos \theta_c$ 处的尖峰而在其他地方的值很小，因此我们可以近似取

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{\sin(\omega T(1 - \sqrt{\epsilon}vx/c))}{1 - \sqrt{\epsilon}vx/c} \right]^2 dx \approx \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin(\omega T(1 - \sqrt{\epsilon}vx/c))}{1 - \sqrt{\epsilon}vx/c} \right]^2 dx = \frac{\omega T \pi c}{\sqrt{\epsilon}v}$$

因此

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{2\omega T v e^2}{c^2} \sin^2 \theta_c$$

由于粒子在介质中行进的长度为 $2vT$ ，于是我们便得到粒子在单位频率间隔内单位长度路径上释放的能量为

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\ell} = \frac{e^2 \omega}{c^2} \sin^2 \theta_c = \frac{2e^2 \omega}{c^2} \left(1 - \frac{c^2}{\epsilon v^2} \right)$$

此即 **Franck-Tamm** 关系。可以看到，这一关系随 ω 线性增长，表明辐射中大量的能量将集中在高频部分。不过在现实中介质的相对介电常数将随着频率的升高而出现下降，从而 **Cerenkov** 辐射的频谱将在足够高的频率处出现截断。实验中观察到的 **Cerenkov** 辐射谱的峰值出现在极紫外波段。

6.6 辐射系统

6.6.1 振荡场源产生的场

我们可以利用 Fourier 变换将任意非自治系统中的电荷、电流密度写成

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int \tilde{\rho}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

由于电动力学的基本方程是线性的，因此我们只需要考虑源以单一频率 ω 振荡的情况；对于一般的情况，我们要做的无非是利用 Fourier 变换将各个 ω 下的解线性叠加起来。

现在我们考虑电荷和电流以单一角频率 ω 定域振荡的情况，那么电荷和电流密度可以记为

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$$

因此推迟势便为

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = e^{-i\omega t} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{i\omega|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = e^{-i\omega t} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{i\omega|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \end{aligned}$$

注意，在更一般的情况下我们应当将被积函数中的 ω 换为波矢 k ，即

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= e^{-i\omega t} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= e^{-i\omega t} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \end{aligned}$$

可以看出，对于场源单频振荡的情况我们可以将矢势和标势场中的时间变量分离，记

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$$

于是

$$\phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$$

我们关心的是离源点足够远处场的情况，因此在场点处不存在源。为方便起见，我们选取坐标系的原点在电荷和电流源的附近，进而在积分区域中 $|\mathbf{r}'|$ 远小于 $|\mathbf{r}|$ 。同时根据 ϕ 和 \mathbf{A} ，我们可以根据 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 以及 $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}$ 求得电场和磁场。由于计算磁场只要求一个旋度、计算电场却要求梯度和对时间的导数，因此一个通行的做法是先求出磁场，然后利用 Maxwell 方程

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi \mathbf{J}$$

考虑到我们研究的场点处 $\mathbf{J} = 0$ ，并且电磁波的单频性允许我们做如下变量分离：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$$

因此我们便有

$$\mathbf{E} = \frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{B}$$

从而我们可以只关心矢势的计算并仅依赖矢势求出电场和磁场。

6.6.2 多极展开

由于我们假设 $|\mathbf{r}'| \ll |\mathbf{r}|$ ，因此我们可以考虑将积分中的 $e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ 对 \mathbf{r}' 展开。记

$$f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

那么我们便有

$$f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = f(\mathbf{r}) - r'^i \partial_i f(\mathbf{r}) + r'^i r'^j \partial_i \partial_j f(\mathbf{r}) - r'^i r'^j r'^k \partial_i \partial_j \partial_k f(\mathbf{r}) + \dots$$

我们先具体计算出前两阶近似：

零阶近似显然为

$$f(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{r}$$

对于一阶近似，我们有

$$\begin{aligned} \partial_i f(\mathbf{r}) &= e^{ikr} \partial_i \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{ik}{r} e^{ikr} \partial_i(r) \\ &= -\frac{r_i}{r^3} e^{ikr} + \frac{ikr_i}{r^2} e^{ikr} \\ &= -\left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} \right) \frac{r_i}{r} e^{ikr} \end{aligned}$$

我们记 \mathbf{r} 方向上的单位矢量为 \hat{n} ，那么便有

$$\partial_i f(\mathbf{r}) = -\left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} \right) n_i e^{ikr}$$

因此第二项 $-r'^i \partial_i f(\mathbf{r})$ 便为

$$\left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} \right) (\hat{n} \cdot \mathbf{r}') e^{ikr}$$

即

$$f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{r} e^{ikr} + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} \right) (\hat{n} \cdot \mathbf{r}') e^{ikr} + \dots$$

6.6.3 电偶极辐射

现在考虑多极展开中领头阶项的贡献，此时我们有

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{r} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'$$

为了计算这一项，我们需要考虑

$$\partial'_i(x'^j J_i) = J_j + x^j \partial_i J_i = J_j + x^j \nabla \cdot \mathbf{J} = J_j - x^j \partial_i \rho$$

因此

$$J_j = \partial'_i(x^j J_i) + \frac{\partial \rho}{\partial t} x'^j$$

从而

$$\begin{aligned} \int J_j(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' &= \int \partial'_i(x^j J_i) + \frac{\partial \rho}{\partial t} x'^j d^3\mathbf{r}' \\ &= \int_{\partial} x^j J_i d\Sigma^i + \int \frac{\partial \rho}{\partial t} x'^j d^3\mathbf{r}' \end{aligned}$$

由于我们假设电荷与电流仅分布在有限大的区域内，因此等号右边的第一个在无穷远边界上的积分等于零。对于第二个积分，由于我们假设电荷密度分布的形式为 $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ ，因此我们便有

$$\int J_j(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = -i\omega \int \rho(\mathbf{r}') x'^j d^3\mathbf{r}'$$

进而

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -i\omega \frac{e^{ikr}}{r} \int \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' d^3\mathbf{r}'$$

注意，由于在 $c \neq 1$ 的单位制下矢势的表达式为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$$

因而在 $c \neq 1$ 时我们应该有

$$\mathbf{A} = -i \frac{\omega e^{ikr}}{cr} \int \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' d^3\mathbf{r}' = -i \frac{k e^{ikr}}{r} \int \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' d^3\mathbf{r}'$$

可以看出，现在矢势表达式中的积分其实正对应着电偶极矩，我们记之为 \mathbf{p} 。那么我们便有

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{ik\mathbf{p}}{r} e^{ikr}$$

可以看出，辐射场展开式中的领头阶项对应着电偶极子而非单极子，这其实很好理解：如果要求存在单极项，那么场源区域的总电荷必须随时间变化，而这会违背电荷守恒。

因为 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ，于是

$$\begin{aligned} B_i &= \epsilon_{ijm} \partial_j A_m = -ik p^m \epsilon_{ijm} \partial_j \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \\ &= -ik p^m \epsilon_{ijm} \left(-\frac{r^j}{r^3} e^{ikr} + \frac{ikr^j}{r^2} e^{ikr} \right) \\ &= k^2 e^{ikr} \epsilon_{ijm} r^j p^m \left(\frac{1}{r^2} + \frac{i}{kr^3} \right) \end{aligned}$$

进而

$$\mathbf{B} = k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{p}}{r} \left(1 + \frac{i}{kr} \right)$$

如果定义 $\hat{n} = \mathbf{r}/r$ ，那么我们便有

$$\mathbf{B} = k^2 (\hat{n} \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 + \frac{i}{kr} \right)$$

又因为我们前面导出了

$$\mathbf{E} = \frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{B}$$

于是

$$\begin{aligned}
E^i &= \frac{i}{k} \epsilon_{ij\ell} \partial_j B^\ell = ik \epsilon_{ij\ell} \partial_j \left[\frac{e^{ikr}}{r} \epsilon_{\ell qs} n^q p^s \left(1 + \frac{i}{kr} \right) \right] \\
&= ik \epsilon_{ij\ell} \epsilon_{\ell qs} \partial_j \left[n^q p^s \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 + \frac{i}{kr} \right) \right] \\
&= ik (\delta_{iq} \delta_{js} - \delta_{is} \delta_{jq}) p^s \partial_j \left[\frac{r^q e^{ikr}}{r^2} \left(1 + \frac{i}{kr} \right) \right] \\
&= ik p^j \partial_j \left[\frac{r^i e^{ikr}}{r^2} \left(1 + \frac{i}{kr} \right) \right] - ik p^i \partial_j \left[\frac{r^j e^{ikr}}{r^2} \left(1 + \frac{i}{kr} \right) \right] \\
&= ik p^i \frac{e^{ikr}}{r^2} \left(1 + \frac{i}{kr} \right) + ik p^j r^i \partial_j \left[e^{ikr} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{i}{kr^3} \right) \right] - 3ik p^i \frac{e^{ikr}}{r^2} \left(1 + \frac{i}{kr} \right) \\
&\quad - ik p^i r^j \partial_j \left[e^{ikr} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{i}{kr^3} \right) \right] \\
&= -2ik p^i \frac{e^{ikr}}{r^2} \left(1 + \frac{i}{kr} \right) + ik (p^j r^i - p^i r^j) \partial_j \left[e^{ikr} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{i}{kr^3} \right) \right] \\
&= -2ik p^i \frac{e^{ikr}}{r^2} \left(1 + \frac{i}{kr} \right) + ik (p^j r^i - p^i r^j) e^{ikr} \left[\frac{ikr^j}{r} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{i}{kr^3} \right) - \frac{2r^j}{r^4} - \frac{3ir^j}{kr^5} \right] \\
&= -2ik p^i \frac{e^{ikr}}{r^2} \left(1 + \frac{i}{kr} \right) + ik (p^j r^i - p^i r^j) e^{ikr} \left(\frac{ikr^j}{r^3} - \frac{3r^j}{r^4} - \frac{3ir^j}{kr^5} \right) \\
&= -2ik p^i \frac{e^{ikr}}{r^2} \left(1 + \frac{i}{kr} \right) + ik p^j r^i e^{ikr} \left(\frac{ikr^j}{r^3} - \frac{3r^j}{r^4} - \frac{3ir^j}{kr^5} \right) - ik p^i e^{ikr} \left(\frac{ik}{r} - \frac{3}{r^2} - \frac{3i}{kr^3} \right) \\
&= ik p^i \frac{e^{ikr}}{r} \left(\frac{3i}{kr^2} + \frac{3}{r} - ik - \frac{2}{r} - \frac{2i}{kr^2} \right) + ik p^j r^i \frac{e^{ikr}}{r} \left(\frac{ikr^j}{r^2} - \frac{3r^j}{r^3} - \frac{3ir^j}{kr^4} \right) \\
&= ik p^i \frac{e^{ikr}}{r} \left(\frac{i}{kr^2} + \frac{1}{r} - ik \right) + ik p^j r^j n^i \frac{e^{ikr}}{r} \left(\frac{ik}{r} - \frac{3}{r^2} - \frac{3i}{kr^3} \right) \\
&= ik p^i \frac{e^{ikr}}{r} \left(-ik + \frac{1}{r} + \frac{i}{kr^2} \right) + ik p^j n^j n^i \frac{e^{ikr}}{r} \left(ik - \frac{3}{r} - \frac{3i}{kr^2} \right) \\
&= k^2 (p^i - p^j n^j n^i) \frac{e^{ikr}}{r} + ik (p^i - 3p^j n^j n^i) \frac{e^{ikr}}{r^2} - (p^i - 3p^j n^j n^i) \frac{e^{ikr}}{r^3}
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= k^2 (\mathbf{p} - (\hat{n} \cdot \mathbf{p}) \hat{n}) \frac{e^{ikr}}{r} + (3(\hat{n} \cdot \mathbf{p}) \hat{n} - \mathbf{p}) \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) e^{ikr} \\
&= k^2 \hat{n} \times (\mathbf{p} \times \hat{n}) \frac{e^{ikr}}{r} + (3(\hat{n} \cdot \mathbf{p}) \hat{n} - \mathbf{p}) \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) e^{ikr}
\end{aligned}$$

由此可见，电场和磁场均有以不同速率随距离衰减的项线性组合而来。我们

可以将电场和磁场改写为下面的形式：

$$\mathbf{E} = k^3 \hat{n} \times (\mathbf{p} \times \hat{n}) \frac{e^{ikr}}{kr} + k^3 (3(\hat{n} \cdot \mathbf{p})\hat{n} - \mathbf{p}) \left(\frac{1}{(kr)^3} - \frac{i}{(kr)^2} \right) e^{ikr}$$

$$\mathbf{B} = k^3 (\hat{n} \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikr}}{kr} \left(1 + \frac{i}{kr} \right)$$

据此可以看出，电场和磁场随距离的衰减可以用无量纲量 kr 进行刻画，进而我们可以通过 kr 的大小将整个空间分为三部分：

- 近场： $kr \ll 1$
- 中间场： $kr \sim 1$
- 远场： $kr \gg 1$

在远场区中随 $1/r$ 衰减的电磁场分量占据主导地位，事实上根据我们前面点对电荷辐射的讨论也可以看出正是这部分电磁场描述了电磁辐射：

$$\mathbf{E}_{rad} = k^2 \hat{n} \times (\mathbf{p} \times \hat{n}) \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\mathbf{B}_{rad} = k^2 \hat{n} \times \mathbf{p} \frac{e^{ikr}}{r}$$

于是电偶极辐射的 Poynting 矢量为

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \cos^2(\omega t) \mathbf{E}_{rad} \times \mathbf{B}_{rad}$$

在一个周期内的平均便为

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}_{rad} \times \mathbf{B}_{rad} \\ &= \frac{1}{8\pi} [(-\hat{n} \times \mathbf{B}_{rad}) \times \mathbf{B}_{rad}] \\ &= \frac{1}{8\pi} |\mathbf{B}_{rad}|^2 \hat{n} \end{aligned}$$

进而辐射功率的角分布便为

$$\frac{dP}{d\Omega} = \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{n} r^2 = \frac{k^4}{8\pi} (\hat{n} \times \mathbf{p})^2$$

记 \hat{n} 与 \mathbf{p} 的夹角为 θ ，那么我们便有

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{p^2 k^4}{8\pi} \sin^2 \theta$$

总辐射功率便为

$$P = \frac{p^2 k^4}{8\pi} \int \sin^2 \theta d\Omega = \frac{p^2 k^4}{4} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{1}{3} p^2 k^4$$

事实上，如果只关心电磁场中描述电磁辐射的项的话，我们可以用下面的方法简化计算：根据矢势的表达式

$$\mathbf{A} = -\frac{ik\mathbf{p}}{r} e^{ikr}$$

我们可以看到其本身就存在 $1/r$ 的衰减。如果我们取其旋度计算 \mathbf{B} ，那么能给出 $1/r$ 衰减的项只能是由对 e^{ikr} 的微分得到。因此计算辐射项时我们可以简单地取

$$\nabla \rightarrow ik\hat{n}$$

进而我们可以立即看出

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{rad} &= k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \hat{n} \times \mathbf{p} \\ \mathbf{E}_{rad} &= -k^2 \hat{n} \times (\hat{n} \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikr}}{r}\end{aligned}$$

6.6.4 磁偶极辐射与电四极辐射

现在我们考虑多极展开中第二项的贡献：

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = e^{ikr} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} \right) \int (\hat{n} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'$$

为了计算这个积分，我们需要考虑

$$\begin{aligned}n_j x'_j J_i &= \frac{1}{2} (J_i x'_j - J_j x'_i) n_j + \frac{1}{2} (J_i x'_j + J_j x'_i) n_j \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} J_l x'_m n_j + \frac{1}{2} (J_i x'_j + J_j x'_i) n_j \\ &= -\epsilon_{ijk} n_j M_k + \frac{1}{2} (J_i x'_j + J_j x'_i) n_j\end{aligned}$$

其中我们定义电流分布 \mathbf{J} 产生的磁化强度矢量为

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') \Rightarrow M_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} x'_j J_k$$

至于 $(J_i x'_j + J_j x'_i) n_j / 2$ ，我们则有

$$\begin{aligned}\partial'_k (x'_i x'_j n_j J_k) &= \delta_{ik} x'_j n_j J_k + \delta_{jk} x'_i n_j J_k + x'_i x'_j n_j \partial'_k J_k \\ &= (x'_i J_j + x'_j J_i) n_j + ix'_i x'_j n_j \omega \rho\end{aligned}$$

在全空间中积分后等号左边会化成一个在无穷远边界上的积分并等于零，进而

$$\int (x'_i J_j + x'_j J_i) n_j d^3 \mathbf{r}' = -i\omega \int x'_i x'_j n_j \rho d^3 \mathbf{r}'$$

进而积分现在可以化为

$$\int (\hat{n} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' = -\hat{n} \times \int \mathbf{M} d^3 \mathbf{r}' - \frac{i\omega}{2} \int \mathbf{r}' (\hat{n} \cdot \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'$$

我们定义磁偶极矩为

$$\mathbf{m} = \int \mathbf{M} d^3 \mathbf{r}' = \frac{1}{2} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'$$

因此我们求得矢势为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = e^{ikr} \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \hat{n} \times \mathbf{m} + \frac{ik}{2} e^{ikr} \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \int \mathbf{r}' (\hat{n} \cdot \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'$$

6.6.4.1 磁偶极项的贡献

首先我们考虑矢势表达式中磁偶极项的贡献：

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = e^{ikr} \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \hat{n} \times \mathbf{m}$$

我们记

$$f(r) = e^{ikr} \left(\frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3} \right)$$

那么我们有

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = f(r) \mathbf{r} \times \mathbf{m}$$

进而由于 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ，我们便有

$$\begin{aligned} B_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j A_k = \epsilon_{ijk} \epsilon_{k\ell m} \partial_j (f x_\ell) m_m \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{k\ell m} \left(f'(r) x_\ell \frac{x_j}{r} + f(r) \delta_{j\ell} \right) m_m \\ &= (\delta_{i\ell} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{j\ell}) \left(f'(r) x_\ell \frac{x_j}{r} + f(r) \delta_{j\ell} \right) m_m \\ &= r f'(r) n_i \hat{n} \cdot \mathbf{m} - r f'(r) m_i - 2f(r) m_i \end{aligned}$$

考虑到

$$f'(r) = e^{ikr} \left(\frac{3}{r^4} - \frac{3ik}{r^3} - \frac{k^2}{r^2} \right) = -\frac{k^2}{r^2} e^{ikr} - \frac{3}{r} f(r)$$

进而

$$\mathbf{B} = -k^2 \hat{n} \times (\hat{n} \times \mathbf{m}) \frac{e^{ikr}}{r} + [3\hat{n}(\hat{n} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}] \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) e^{ikr}$$

可以看到，这个表达式的形式和电偶极辐射的电场完全相同，唯一区别就是电偶极矩 \mathbf{p} 被换成了磁偶极矩 \mathbf{m} ，而电场 \mathbf{E} 被换成了磁场 \mathbf{B} 。

我们接下来可以使用 $\mathbf{E} = i\nabla \times \mathbf{B}/k$ 来导出磁偶极辐射对应的电场。不过一个更简单的方法是考虑到 $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$ 并进而有

$$\nabla \times \mathbf{E} = ik\mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{B} = -\frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{E}$$

因此根据电偶极辐射电磁场表达式，我们可以看到磁偶极辐射的电场表达式应该形式上和加一个负号的电偶极辐射的磁场相同。因此，磁偶极辐射的

电场为

$$\mathbf{E} = -k^2(\hat{n} \times \mathbf{m}) \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 + \frac{i}{kr}\right)$$

6.6.4.2 电四极辐射

现在我们考虑多极展开二阶项里的电四极项积分：

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{ik}{2} e^{ikr} \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \int \mathbf{r}' (\hat{n} \cdot \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'$$

为简单起见，我们仅考虑这一项里的领头阶项：

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{k^2}{2} \frac{e^{ikr}}{r} \int \mathbf{r}' (\hat{n} \cdot \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'$$

可以看到，这里的 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 正比于 $1/r$ ，从而根据我们前面提到的简化操作，在计算辐射场时可以做如下简单替换：

$$\nabla \rightarrow ik\hat{n}$$

进而我们可立即得出辐射磁场为

$$\mathbf{B}_{rad} = -\frac{ik^3}{2} \frac{e^{ikr}}{r} \int (\hat{n} \times \mathbf{r}') (\hat{n} \cdot \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'$$

对于辐射的电场，我们便有

$$\mathbf{E} = \frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{E}_{rad} = -\hat{n} \times \mathbf{B}_{rad} = -ik\hat{n} \times (\hat{n} \times \mathbf{A})$$

我们定义电四极张量为

$$Q_{ij} = \int (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}$$

同时我们定义矢量 $\mathbf{Q}(\hat{n})$ 为

$$\mathbf{Q}(\hat{n})_i = Q_{ij} n_j$$

那么我们便有

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{3} \hat{n} \times \mathbf{Q}(\hat{n}) \right]_i &= \frac{1}{3} \epsilon_{ijk} n_j Q_{k\ell} n_\ell \\ &= \frac{1}{3} \epsilon_{ijk} n_j n_\ell \int (3x_k x_\ell - r^2 \delta_{k\ell}) \rho(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} \\ &= \int (\hat{n} \times \mathbf{r})_i (\hat{n} \cdot \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} \end{aligned}$$

其中最后一个等号来自于电四极张量无迹的特性。进而电四极辐射的磁场可以被写为

$$\mathbf{B}_{rad} = -\frac{ik^3}{6r} e^{ikr} \hat{n} \times \mathbf{Q}(\hat{n})$$

因为 $\mathbf{E}_{rad} = -\mathbf{B}_{rad} \times \hat{n}$ ，于是我们可得单位立体角内辐射的功率为

$$\begin{aligned}\frac{dP}{d\Omega} &= \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}_{rad} \times \mathbf{B}_{rad}^*) \cdot \hat{n} r^2 \\ &= \frac{k^6}{288\pi} |(\hat{n} \times \mathbf{Q}(\hat{n})) \times \hat{n}|^2 = \frac{k^6}{288\pi} (|\mathbf{Q}(\hat{n})|^2 - |\hat{n} \cdot \mathbf{Q}(\hat{n})|^2)\end{aligned}$$

此即

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{k^6}{288\pi} |\hat{n} \times \mathbf{Q}(\hat{n})|^2 = \frac{k^6}{288\pi} (Q_{ki}Q_{kj}^* n_i n_j - Q_{ij}Q_{kl}^* n_i n_j n_k n_\ell)$$

为了计算总辐射功率，我们需要对全立体角积分，进而我们需要计算

$$\int n_i n_j d\Omega \quad \int n_i n_j n_k n_\ell d\Omega$$

为此我们可以将 \hat{n} 在球坐标系下写出，得到

$$\hat{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

并取 $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ 。不过我们其实有一种更优雅的处理方式：对于积分

$$\int n_i n_j d\Omega$$

我们需要注意到结果必然是一个二阶对称张量。并且由于我们对整个立体角进行了积分，因此结果还应该是各向同性的，而既对称还各向同性的张量只能是 Kronecker δ 符号的整数倍，即

$$\int n_i n_j d\Omega = c \delta_{ij}$$

由于取迹会得到 $n_i n_i = 1$ ，而

$$4\pi = \int d\Omega = 3c$$

进而

$$\int n_i n_j d\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij}$$

至于第二个积分，我们可以采取相似的论证方式：积分结果必然是一个各向同性的四阶对称张量，而事实上这样的张量只能是 Kronecker δ 符号乘积的线性组合，即

$$\int n_i n_j n_k n_\ell d\Omega = b(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

我们可以通过左右同时缩并 $\delta_{ij}\delta_{kl}$ 来确定 b 的取值：

$$4\pi = \int d\Omega = 15b$$

进而

$$\int n_i n_j n_k n_\ell d\Omega = \frac{4\pi}{15} (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

于是

$$\begin{aligned}
 P &= \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = \frac{k^6}{288\pi} \left[Q_{ki} Q_{kj}^* \int n_i n_j d\Omega - Q_{ij} Q_{k\ell}^* \int n_i n_j n_k n_\ell d\Omega \right] \\
 &= \frac{k^6}{288\pi} \left[\frac{4\pi}{3} Q_{ki} Q_{kj}^* \delta_{ij} - \frac{4\pi}{15} Q_{ij} Q_{k\ell}^* (\delta_{ij} \delta_{k\ell} + \delta_{ik} \delta_{j\ell} + \delta_{i\ell} \delta_{jk}) \right] \\
 &= \frac{k^6}{300} Q_{ij} Q_{ij}^*
 \end{aligned}$$

有些电荷分布的四极张量是对称的，从而我们总能选取合适的坐标系将其对称化，进而我们可以设

$$(Q_{ij}) = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 \\ 0 & 0 & Q_3 \end{pmatrix} \quad Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$$

此时辐射功率的角分布便为

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{k^6}{288\pi} \left(Q_1^2 n_1^2 + Q_2^2 n_2^2 + Q_3^2 n_3^2 - (Q_1 n_1^2 + Q_2 n_2^2 + Q_3 n_3^2)^2 \right)$$

我们考虑 $Q_1 = Q_2 = -Q_3/2$ 这一比较简单的情形，我们有

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{k^6 Q_3^2}{128\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{k^6 Q_3^2}{512\pi} \sin^2 2\theta$$

可以看到，和正比于 ω^4 的偶极辐射不同，四极辐射正比于 ω^6 。同时我们在下面画出了电四极辐射功率的角分布图，可以看到其具有旋转对称性。

