

用 β 粒子检验相对论的动量-动能关系

滕一鸣*

北京大学物理学院 学号: 2000011380

(实验日期: 2023 年 4 月 20 日)

本实验使用多道分析仪测量了 $^{90}\text{Sr} - ^{90}\text{Y}$ β 源产生的 β 射线在 0.1 Pa 的真空环境下经近似均匀的磁场作用后不同偏转距离处出射电子的道数分布; 在利用 ^{137}Cs γ 射线源的 0.662 MeV 光电峰与 0.148 MeV 反散射峰以及 ^{60}Co γ 射线源的 1.173 MeV 和 1.333 MeV 光电峰对多道分析仪的道数-能量关系进行定标后, 实验根据不同位置处测得的 β 能谱峰位得到了不同动量的 β 粒子的能量并对相对论性粒子的动量-动能关系 $E_k = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2$ 进行了验证, 最终发现在误差范围内实验结果与相对论动能-动量关系一致.

关键词: 狭义相对论, β 射线, 多道分析仪

I. 引言

Newton 机械论图景的巨大成功使得该理论及其伴随的绝对时空观成为了 Newton 以后数百年来物理学家刻画世界的基本范式, 但是十九世纪中叶 Maxwell 建立的电磁理论所预言的光速不变以及在 Maxwell 方程组中 Galileo 对称性的破缺使得传统的绝对时空观受到了严峻挑战. 为了调和 Maxwell 电磁理论与绝对时空观的矛盾, 旧范式下的物理学家引入了作为光的传播介质的绝对静止的“以太”并认为 Maxwell 方程组刻画了光在以太中的传播. 可惜这种解释并不能说明 Maxwell 方程组的非 Galileo 协变性, 并且 1887 年 Michelson-Morley 实验对地球相对以太运动速度的测量给出了零结果为以太理论带来了亟待解决的巨大困难. 即便如此, 当年的物理学家仍对以太理论情有独钟, 毕竟这是调和大家所坚信的绝对时空观与电磁理论的最自然的途径. 值得一提的是, Hendrik Lorentz, 一个以太理论的坚定支持者, 在 1892-1904 年间于探索保持 Maxwell 方程不变的参考系变换时发展出了我们如今熟悉的 Lorentz 变换; 1905 年, Henri Poincaré 则整理清楚了 Lorentz 变换背后的数学结构 [1]. 同年稍晚, Albert Einstein 才根据已有研究而提出了狭义相对论, 摒弃了以太和绝对静止系的概念而发展出了相对论时空观, 为物理学带来了一场范式革命.

狭义相对论对高速运动的经典世界给出了诸多违反我们经验的物理预言, 这使得它在被物理学家广泛接受前受到了诸多检验, 其中之一便是检验狭义相对论所预言的高速运动物体的动量-动能关系的 Kaufmann-Bucherer-Neumann 实验, 本实验其实可以视为该实验的现代化变种. 虽然该实验设置的初衷是检验以太范式下的 Lorentz 电子论所预言的电子能量关系, 但是在 Einstein 提出狭义相对论后其结果却成了早期支持相对论性能量关系的最重要的证据之一 [2]. 因而, 我们对本实验的复刻拥有相当的历史意义. 同时, 我们进行的现代化计算机化版本所使用的闪烁体探测器和多道分析仪是现代核物理实验的基本技术, 本实验对这些设备的接触可以让我们对现代核物理实验方法产生基本认识.

II. 理论原理

A. 相对论能量关系

记时空坐标为 $x^\mu = (ct, x, y, z)$ 并取 Minkowski 度规为

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

* tengyiming@stu.pku.edu.cn; (86)13287560665

那么由参考系的坐标时 t 参数化的一个运动的静质量为 m_0 的粒子的世界线可以被一般性地记为曲线 $x^\mu(t)$. 相对论动力学的 Lorentz 协变性要求该粒子的作用量应该是 Lorentz 标量并且在低速下应该退化为 Newton 力学中自由粒子的作用量, 进而我们可以将粒子的作用量构造为

$$S = -mc \int_{t_i}^{t_f} dt \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} \quad (1)$$

于是粒子的拉氏量为

$$\mathcal{L} = -mc \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} = -mc \sqrt{c^2 - |\vec{v}|^2} \quad (2)$$

与 \dot{x}^i 对偶的正则动量也就是

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = \frac{mc v_i}{\sqrt{c^2 - |\vec{v}|^2}} \quad (3)$$

进而我们便可得到粒子的能量为

$$E = \pi_i v^i - \mathcal{L} = mc \left(\frac{|\vec{v}|^2}{\sqrt{c^2 - |\vec{v}|^2}} + \sqrt{c^2 - |\vec{v}|^2} \right) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - |\vec{v}|^2/c^2}} = \sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (4)$$

B. β 磁谱仪与闪烁体探测器

本实验使用 $^{90}_{38}\text{Sr} - ^{90}_{39}\text{Y}$ β 射线源产生的能量在 $0 \sim 2.27 \text{ MeV}$ 间连续分布的电子作为磁谱仪的 β 射线源. 简单计算表明, 能量在 1 MeV 左右的电子运动速度大约在 $0.9c$, 属于相对论性粒子并且适用于相对论能动量关系的研究. 电子以近乎垂直的方向射入磁谱仪的均匀磁场中后会受到 Lorentz 力作用并使其运动方程满足

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{v} \times \vec{B} \quad (5)$$

因为 $|\vec{v}|$ 不变并且磁场始终垂直于粒子的运动平面, 我们便得到

$$m \sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}} \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| = eBv$$

考虑到

$$\left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| = \frac{v^2}{R}$$

于是

$$p = eBR \quad (6)$$

因而在 β 磁谱仪中, 我们根据探测器相距 β 射线源的距离便能通过上式换算出对应的电子的动量大小.

实验采用 NaI(Tl) 闪烁体探测器对出射电子的能量进行测量. 射入闪烁体的电子会激发其中的原子, 这些被激发的原子在跃迁回基态时又会释放光子; 这些光子被闪烁体外的光反射层反射后会汇聚到光电倍增管的光阴极上并打出光电子, 光电子在经过光电倍增管内一系列次阴极的作用倍增后会在阳极上形成一个大小可观的电压脉冲, 这一个电压脉冲的幅度在经过多道分析仪中的模数转换后会对应某一个道数并会使得该道数上的计数加一. 由于该脉冲幅度的大小正比于倍增前光电子数目, 倍增前光电子数目正比于闪烁体产生的光强, 这一光强又正比于入射粒子在闪烁体内消耗的能量, 进而最终多道分析仪上记录的某次事件的道数便正比于该事件对应的入射粒子能量.

为了确定记录的事件道数和事件能量的确切关系, 我们需要用一些能量已知的事件对多道分析仪进行定标. 本实验的定标使用的是 ^{137}Cs γ 源的 0.662 MeV 光电峰与 0.184 MeV 反散射峰以及 ^{60}Co 的能量为 1.173 MeV 和 1.333 MeV 的两个光电峰. 反散射峰的形成源自于穿过闪烁体的 γ 射线

与光电倍增管内的电子相互作用发生散射角为 π 的 Compton 散射后再激发闪烁体产生的事件信号. 根据 Compton 散射的能量-散射角公式

$$E(\theta) = \frac{E_0}{1 + \frac{E_0}{m_e c^2}(1 - \cos \theta)} \quad (7)$$

可以计算出反散射峰能量的确等于 [3] 中给出的标称值.

III. 实验结果与分析

A. 实验结果

本实验使用的 β 磁谱仪为同济大学制造的相对论效应实验谱仪, 偏转腔内的两块永磁铁提供了近似均匀的磁场, 仪器上的标称磁场大小为

$$B = 655.5 \text{ G} \quad (8)$$

同时实验使用了基于 DV4096 多道脉冲幅度分析仪的射线探测系统, 为了节约测量时间, 我们选用 512 道的模式进行采谱. 开始为偏转腔抽真空并将仪器预热 20 min 后, 我们先将探测器移到距离 $^{90}_{38}\text{Sr} - ^{90}_{39}\text{Y}$ 源最远的出射窗口处并通过桌面上的控制盒调节施加在光电倍增管阴阳极间的电压 HV 以及对光电倍增管输出信号的增益 GAIN 使得计算机上显示出明显的 β 射线能谱线型并尽量令计数曲线在横向填满整个窗口. 实际操作发现, 增大 HV 会保持计数曲线中各个峰对应的通道数大致不变而会使各个通道的计数率增大; 这是因为增大 HV 会使得管内各个次阴极上的电子更易逸出, 这既会提高灵敏度又会导致本底脉冲增多, 最终使得各个通道的计数率变大. 与增大 HV 不同, 增大 GAIN 会使计数曲线中的峰值整体向高通道处移动, 这是因为 GAIN 增大会使得输入模数转换器的信号脉冲幅度变大, 这自然会导致计数曲线整体右移. 最终我们为实验确定的电压和增益的值为:

$$\text{HV} = 597 \text{ V}, \quad \text{GAIN} = 9.510$$

实验室提供的指导手册上提供的辐射源位置为

$$x_{\text{源}} = 6.0 \text{ cm} \quad (9)$$

并且标记探测器位置的指针位于探头入射狭缝的右侧, 狭缝宽度为

$$d = 3 \text{ mm} \quad (10)$$

实验中对指针位置的测量采用的是最小分度值为 1 mm 的钢尺. 对于 β 粒子在真空中偏转的情况, 探测器位于不同位置处测得的 β 能谱峰值位置, 峰值计数与半高宽见 表 I. 由于笔者在实验时的疏忽, 此阶段实验中探测器在各个位置处测得的射线能谱的原始数据文件未能得到保留. 为了使读者对此时测得的 β 峰值线型有一个较为直观的认识, 我们在 图 1 中展示了利用实验室提供的程序模拟得到的探测器位于 2 到 8 窗口时测量得到的能谱, 据此亦可直观看出在 2 号窗口处 β 峰的半高宽的确无法测出.

我们使用 ^{60}Co γ 源的 1.33 MeV 和 1.173 MeV 两个光电峰以及 ^{137}Cs γ 源的 0.662 MeV 光电峰和 0.184 MeV 反散射峰对多道分析仪的道数-能量关系进行定标, 实验测量到的峰值位置见 表 II, 对应的原始能谱曲线已绘制在 图 2 中. 由于我们使用的放射源活度较低, Co 源的两个光电峰以及 Cs 源的反散射峰在实验数据中并不是十分显著; 为了确定定标使用的峰值位置, 我们参考了实验室提供的程序模拟出的 ^{60}Co 和 ^{137}Cs 的 γ 能谱 图 3.

表 I: 探测器在不同位置处测得的 β 能谱峰值位置, 峰值计数与半高宽, 其中 “—” 代表由于该位置处测得的 β 能谱峰与本底峰存在较大重叠而未能得到对应的数据.

窗口编号	指针位置 (cm)	狭缝中心位置 $x_{\text{缝}}$ (cm)	峰值位置 (道)	峰值计数	半高宽 (道)
8	30.70	30.55	279	207	25
7	28.22	28.07	243	1483	26
6	25.55	25.40	203	2123	25
5	23.10	22.95	169	2199	26
4	20.42	20.27	132	2288	22
3	17.93	17.78	97	2225	22
2	15.50	15.35	63	2313	—
1	13.07	12.92	—	—	—

表 II: 定标使用的对 ^{60}Co 源和 ^{137}Cs 源的参考峰位置测量结果, “—” 表示对应数据由于峰的展宽过大或与本底信号重叠较大而未能测出.

核素	参考峰能量	峰值位置 (道)	峰值计数	半高宽 (道)
^{60}Co	1.33 MeV	192	219	—
	1.173 MeV	168	352	—
^{137}Cs	0.662 MeV	95	1676	12
	0.184 MeV	24	2395	—

最后, 我们令磁谱仪的偏转腔内充满空气并于一个大气压下测量各个窗口处出射 β 粒子的能谱, 于窗口 2 到窗口 7 处测量得到的各个 β 能谱见 图 4; 多道分析仪上记录的峰值位置, 峰值计数以及半高宽见 表 III. 实验发现, 在大气中进行实验得到的各通道计数率显著低于真空中的情况, 并且 β 峰展宽更大、峰值位置也发生了左移. 这是因为电子在大气中平均自由程很小 (约为 μm 量级), 进而电子会和空气分子频繁碰撞而导致能谱展宽变大、最终进入探测器的粒子数变少以使计数率降低; 碰撞带来的能量损失也会使进入探测器粒子能量的期望值变小, 这便会使得 β 峰的位置略微左移.

表 III: 探测器在不同位置处测得的大气中 β 能谱峰值位置, 峰值计数与半高宽, 其中 “—” 代表由于该位置处测得的 β 能谱峰展宽过大或过于杂乱而未能测出对应数据.

窗口编号	指针位置 (cm)	狭缝中心位置 $x_{\text{缝}}$ (cm)	峰值位置 (道)	峰值计数	半高宽 (道)
7	28.22	28.07	226	150	48
6	25.55	25.40	195	253	—
5	23.10	22.95	162	462	47
4	20.42	20.27	127	509	43
3	17.93	17.78	93	608	—
2	15.50	15.35	—	—	—

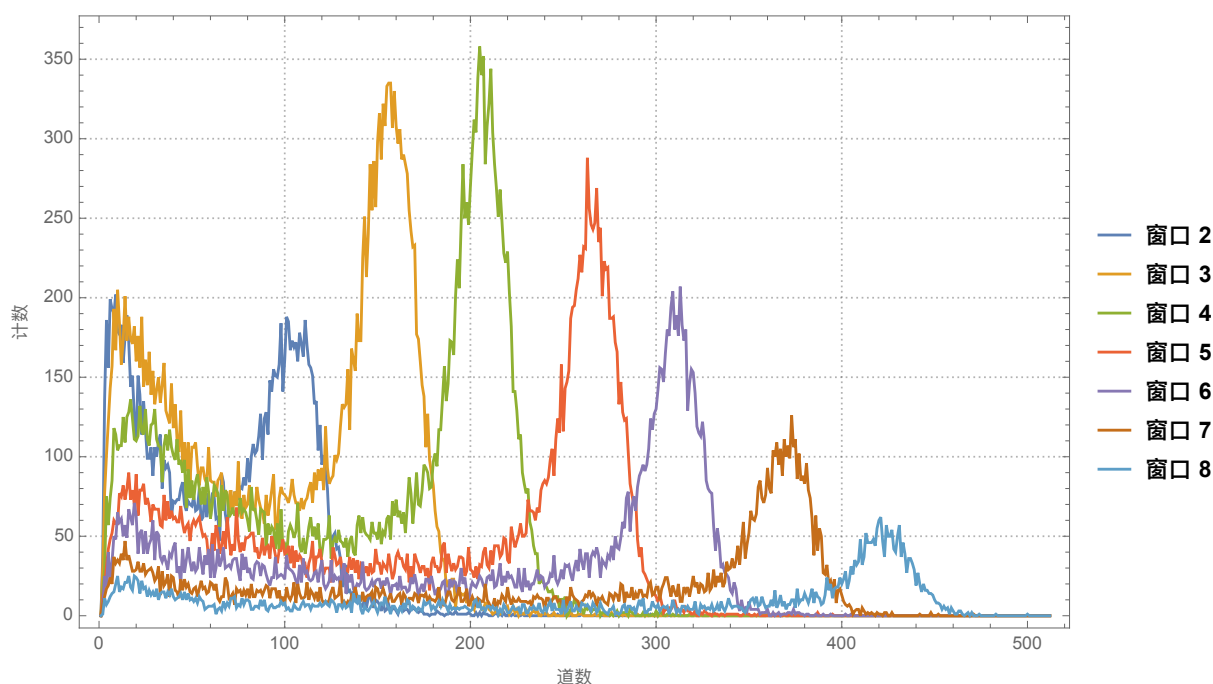


图 1: 利用实验室提供的程序模拟得到的探测器狭缝中心处于 表 I 中的七个非平凡位置时测量得到的 β 能谱, 不同能谱对应的探测器所在窗口编号已在图中标出.

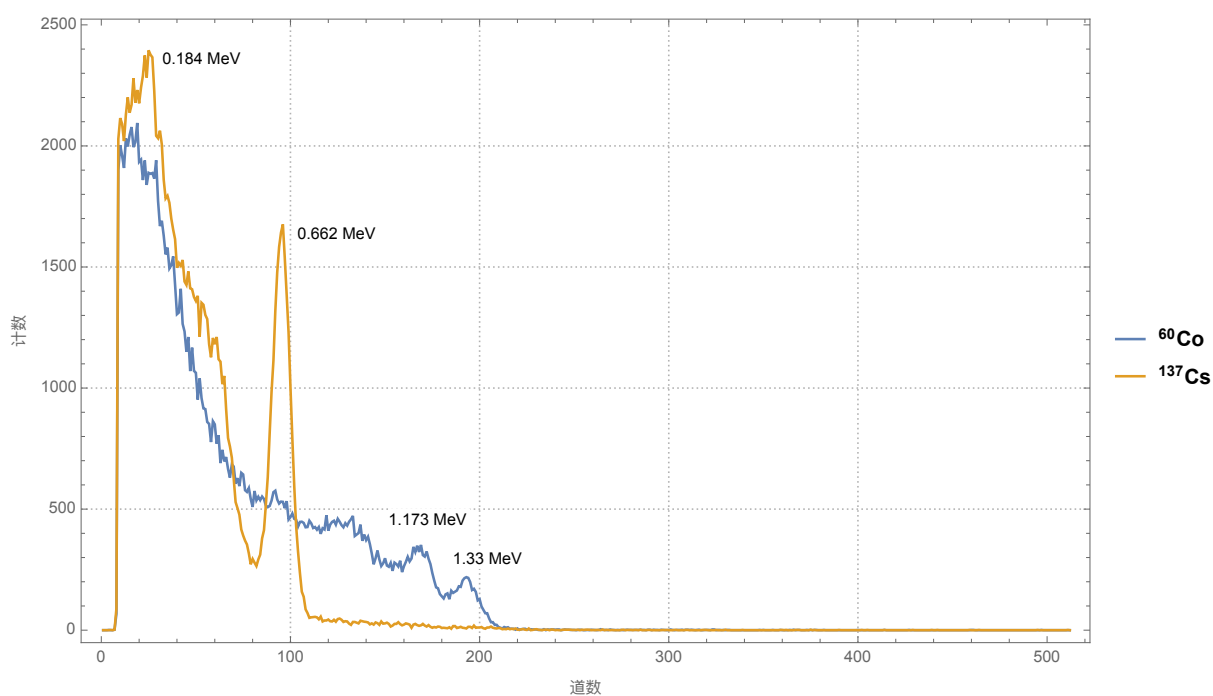


图 2: 定标过程中测量到的 ^{60}Co 源和 ^{137}Cs 源的 γ 能谱.

B. 数据处理

1. 多道分析仪的定标

假设 表 II 中记录的参考峰能量以及峰值位置是精确值 (毕竟实验获得的半峰宽数据太少不足以用来做误差分析), 由于 γ 射线在穿透闪烁体前 Al 窗时损失的能量很少, 我们可以将参考峰的能

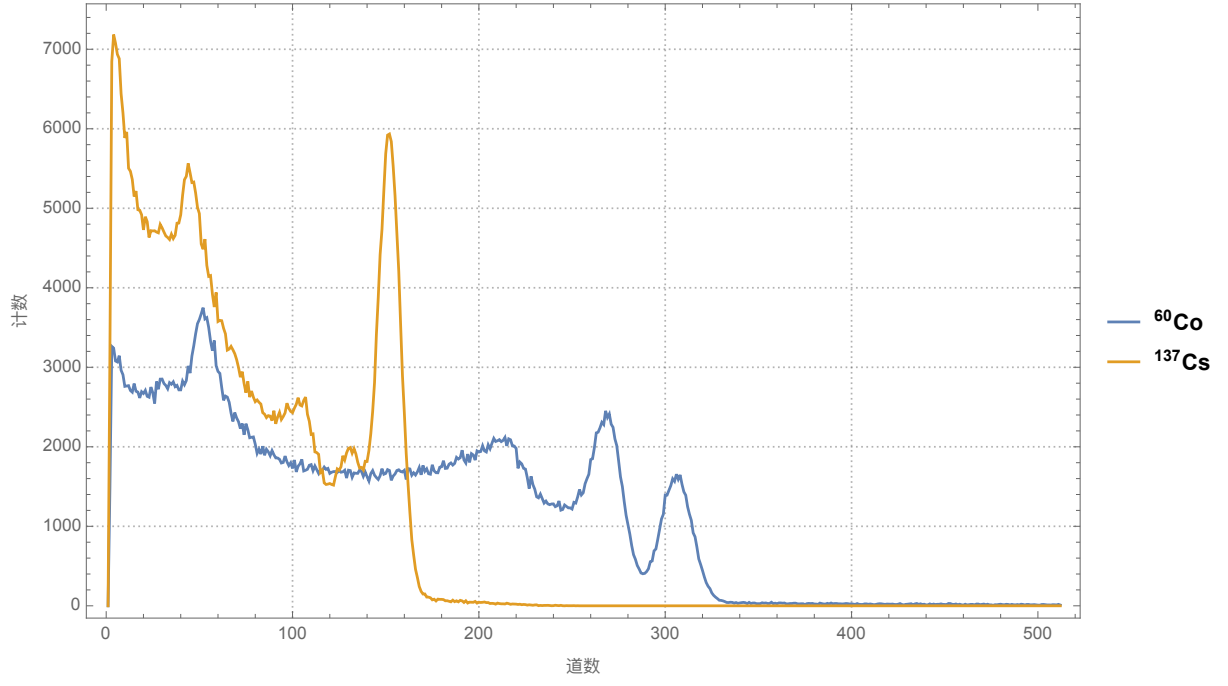


图 3: 模拟得到的 ^{60}Co 源和 ^{137}Cs 源的 γ 能谱.

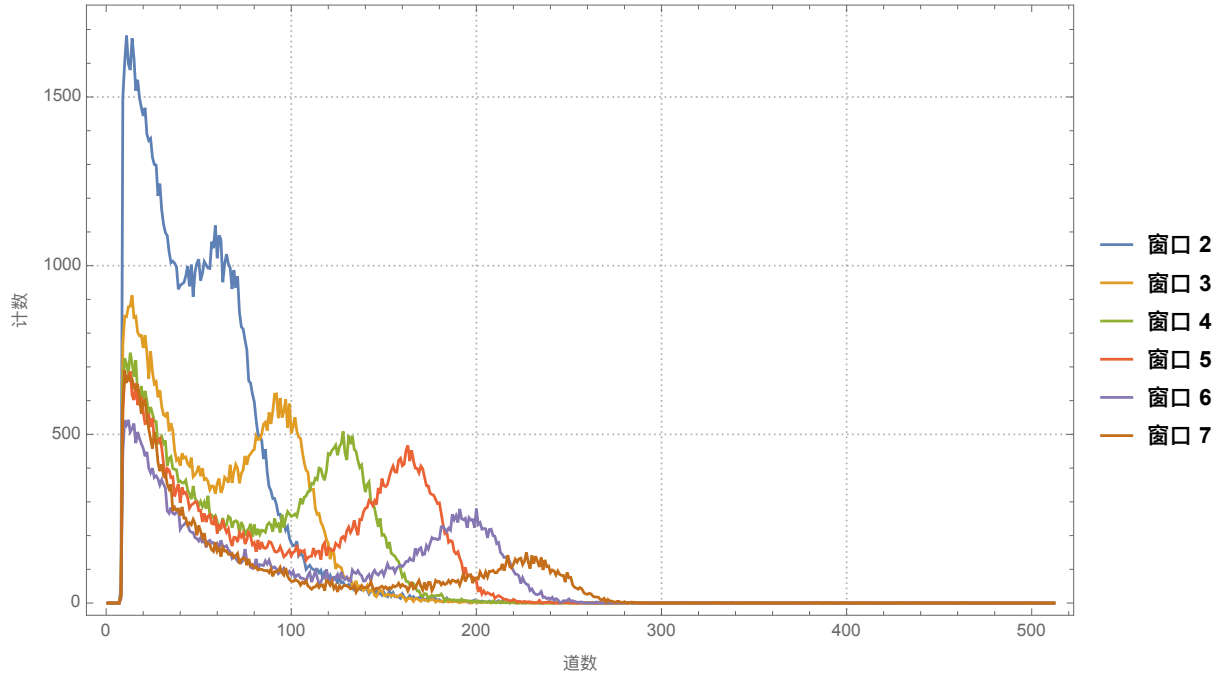


图 4: 偏转腔内充满空气后测量的得到的各窗口处出射的 β 能谱.

量视为探测器记录到的事件能量. 直接使用 表 II 中的数据做线性拟合便可得到事件能量 E 与事件在多道分析仪上被记录的道数 n 间的关系:

$$E = (6.6491524 \times 10^{-3} \text{ MeV})n + 0.0170639976 \text{ MeV}$$

拟合的相关系数为 $r = 0.9999559115$. 进而我们可以计算出 $E = an + b$ 中各参数的标准差为:

$$\sigma_a = a \sqrt{\frac{1/r^2 - 1}{4 - 2}} \approx 4 \times 10^{-5} \text{ MeV}, \quad \sigma_b = 0$$

于是我们可以将最终定标公式取作

$$E = (6.64 \pm 0.04) \times 10^{-3} \times n + 0.00171 \text{ MeV} \quad (11)$$

2. 确定 β 粒子的动能-动量关系

我们认为仪器上标称的磁场大小

$$B = 655.5 \text{ G}$$

为精确值, 标称的放射源位置

$$x_{\text{源}} = 6.0 \text{ cm}$$

也为精确值. 对于狭缝中心位置的测量, 我们可以将允差 e 取作刻度尺的最小分度值 1 mm 并假设误差在允差范围内均匀分布, 进而我们得到狭缝中心位置的不确定度为

$$\sigma = \frac{e}{\sqrt{3}} \approx 0.06 \text{ cm}$$

利用

$$R = \frac{1}{2}(x_{\text{缝}} - x_{\text{源}}) \quad (12)$$

与

$$p = eBR \quad (13)$$

我们即可得到各个位置探测到的 β 峰值对应的电子的动量 表 IV.

表 IV: 探测器在不同位置处测得的 β 能谱峰值对应的电子动量, 其中 c 代表光速.

窗口编号	指针位置 (cm)	狭缝中心位置 $x_{\text{缝}}$ (cm)	电子运动半径 R (cm)	电子动量 p (MeV/c)
8	30.70±0.06	30.55±0.06	12.28±0.03	2.413 ± 0.006
7	28.22±0.06	28.07±0.06	11.04±0.03	2.170 ± 0.006
6	25.55±0.06	25.40±0.06	9.70±0.03	1.906 ± 0.006
5	23.10±0.06	22.95±0.06	8.48±0.03	1.666 ± 0.006
4	20.42±0.06	20.27±0.06	7.14±0.03	1.403 ± 0.006
3	17.93±0.06	17.78±0.06	5.89±0.03	1.157 ± 0.006
2	15.50±0.06	15.35±0.06	4.68±0.03	0.920 ± 0.006

对于粒子的能量, 我们可以先通过 表 I 给出的 β 峰道数经过 式 (11) 定标后得到到达闪烁体内时粒子的能量, 然后利用 [3] 给出的电子穿透 Al 膜和的能量关系 (表 2-6-2) 经插值后换算出电子从窗口出射时的能量, 接着使用 [3] 中给出的电子穿透单层塑料膜前后的能量关系 (表 2-6-1) 经插值后校准出在磁场中的电子能量. 值得注意的是, 电子从磁场中到探测器只穿透了一层塑料膜, 因而我们只需要做一次这样的校准而无需顾及电子从放射源运动到磁场中时穿透一层塑料膜的影响. 同时我们需要考虑测量峰值位置的不确定度, 经验直观告诉我们, 峰的半高宽越小、峰值计数越大, 测量峰值位置的误差越小, 因而我们可以将峰值位置的不确定度估计为

$$\sigma_{\text{峰}} = \frac{\text{半高宽}}{\sqrt[3]{\text{峰值计数}}} \quad (14)$$

对于 2 号窗口未测出半高宽的情况, 我们为保守起见将其半高宽取作实验中遇到的最大值 26 道. 据此, 我们得到的各个位置处 β 峰对应的磁场中电子能量见 表 V. 据此, 我们在 图 5 中得到了绘制

于动量 (pc , 单位 MeV)-动能 (E , 单位 MeV) 关系图上的实验数据点. 我们同时在图中绘制出了 [3] 中提供的相对论动能-动量关系

$$pc/\text{MeV} = \sqrt{(E/\text{MeV} + 0.511)^2 - 0.511^2} \quad (15)$$

和非相对论能-动量关系

$$pc/\text{MeV} = \sqrt{1.022E/\text{MeV}} \quad (16)$$

给出的理论曲线, 可以看到, 狭义相对论的动能-动量关系在误差范围内的确与实验结果相符.

表 V: 探测器在不同位置处测得的 β 能谱峰值对应的电子能量.

窗口编号	峰值位置 (道)	闪烁体中的电子能量 (MeV)	出射后的电子能量 (MeV)	磁场中的电子能量 (MeV)
8	279 ± 5	1.85 ± 0.04	1.94 ± 0.04	1.94 ± 0.05
7	243 ± 3	1.62 ± 0.03	1.71 ± 0.04	1.72 ± 0.04
6	203 ± 2	1.35 ± 0.02	1.44 ± 0.02	1.45 ± 0.02
5	169 ± 2	1.12 ± 0.02	1.20 ± 0.03	1.21 ± 0.04
4	132 ± 2	0.88 ± 0.02	0.97 ± 0.03	0.98 ± 0.03
3	97 ± 2	0.64 ± 0.02	0.73 ± 0.02	0.74 ± 0.02
2	63 ± 2	0.42 ± 0.02	0.52 ± 0.02	0.53 ± 0.02

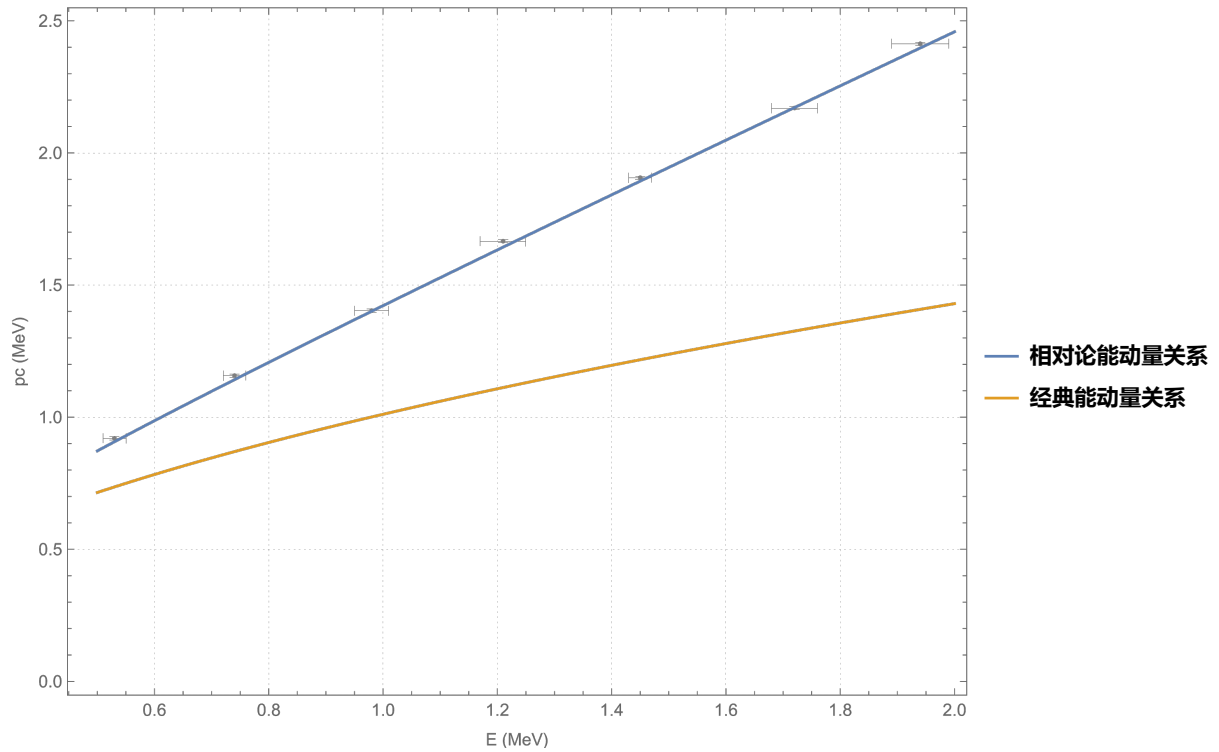


图 5: 实验得到的动量-动能关系数据点与相对论和非相对论动力学给出的理论曲线.

IV. 结论

本实验使用 β 磁谱仪结合经 ^{137}Cs 源和 ^{60}Co 源定标后的 512 道模式的多道分析仪测量了 $^{90}_{38}\text{Sr}$ — $^{90}_{39}\text{Y}$ β 射线源产生的电子的动量-能量关系并对实验误差进行了估计, 最终发现在误差范围内实验结

果与狭义相对论动能-动量关系高度相符.

- [1] Wikipedia contributors. Lorentz transformation — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Lorentz_transformation&oldid=1145880301, 2023. [Online; accessed 22-April-2023].
- [2] Wikipedia contributors. Kaufmann–bucherer–neumann experiments — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Kaufmann%E2%80%93Bucherer%E2%80%93Neumann_experiments&oldid=1137496085, 2023. [Online; accessed 22-April-2023].
- [3] 吴思诚, 荀坤. 近代物理实验. 高等教育出版社, 4 edition, 2015.

附录 A: 思考题

实验中射入均匀磁场中的 β 粒子速度方向实际上有一定的角分布, 请考虑这一因素对实验结果的影响.

在入射 β 粒子速度分布全部垂直于真空盒边缘的理想情况下, 实验观测到的能谱应该是在低道数处存在一定展宽的本底脉冲峰与道数较高处极为尖锐的 β 粒子信号峰的叠加, 这是因为此时只有动量刚好满足 $p = eBR$ 的 β 粒子才能射入到探测器中. 实际实验中射入磁场的 β 粒子速度方向存在的角分布则会使一些动量不满足 $p = eBR$ 的 β 粒子也能射入到探测器中, 这会使入射探测器的粒子能量分布范围变大并使得能谱中 β 粒子的信号峰展宽增大, 并最终让我们测量峰值位置时的误差增大.

磁体边缘的磁场强度较中心区域弱, 请半定量分析其对 β 粒子动量测量的影响.

如果磁场不均匀, 那么对于用偏转角度 θ 参数化的粒子运动轨迹, 我们可以得到粒子动量 p 和偏转半径 R 的关系 [3]

$$p = eR\bar{B}, \quad \bar{B} = \frac{\int_0^\pi \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi \sin \theta / B(\theta) d\theta}$$

可以看到, 如果偏转区域边缘的磁场较中心区域弱, 那么我们会得到实际等效作用于粒子的 \bar{B} 小于仪器上的标称值 B_0 , 这进而会使我们在数据处理中计算出的动量值略大于动量的真实值. 我们在图 5 中也可以看到, 实验数据点的中心值大多落在了理论曲线的上方, 这在一定程度上验证了我们这里的结论.