

利用噪声测量来估算基本物理常量

滕一鸣*

北京大学物理学院 学号: 2000011380

(实验日期: 2024 年 3 月 21 日)

本实验使用低噪声放大器通过交叉相关性方法测量了不同阻值电阻上的热噪声与不同电流下光电二极管上的散粒噪声, 并分别使用二者计算出 Boltzmann 常数的实验值 $k_B = 1.3053 \times 10^{-23}$ J/K 与电子电荷的实验值 $e = 1.7606 \times 10^{-19}$ C, 二者分别与参考值在两位与一位有效数字的水平上相符.

关键词: 热噪声, 散粒噪声, 低噪声放大器

I. 引言

对物理系统中噪声的研究与现代物理学和电气工程的发展密切相关. 1905 年, Einstein 关于布朗运动的开创性工作标志着对热涨落的理解的开端, 为物理学中对随机过程的研究奠定了基础框架. 不过, 他介绍这项工作的论文不仅阐明了布朗运动, 而且暗示了其方法在理解电路热噪声方面的更广泛的应用 [1]. 然而, 直到 1912 年, Einstein 的理论才在 Geertruida de Haas-Lorentz 的博士论文中于该方面得到重要扩展和应用. 她将 Einstein 的框架扩展到了电子, 推导出了热涨落电流的均方值公式. 这标志着对噪声现象的探索迈出了重要一步.

进一步的进展发生在 1918 年, Walter H. Schottky 在使用 Einstein 的理论研究热噪声时偶然发现了另一种噪声: 散粒噪声. 这一发现进一步扩大了对噪声的研究范围. 而 1927 年 Frits Zernike 仔细研究了高灵敏电流计指针的随机偏转并将这一偏转的起源归结于电路中的热噪声, Geertruida de Haas-Lorentz 在十五年前的理论预言终于得到了实验证实. 与此同时, 贝尔实验室的 John B. Johnson 在研究通信系统中的噪声时独立地得到了类似的发现. 他在频域上研究了这些噪声并与同在贝尔实验室的 Harry Nyquist 合作系统地阐明了这些噪声现象的基本原理, 这标志着现代噪声理论的奠基.

噪声理论所预言的电路热噪声与 Boltzmann 常数有关, 而散粒噪声则同电子电荷有关. 因此, 对这些噪声的测量可以让我们反过来推算这些基本物理常量. 本实验便将通过交叉相关性方法对电阻热噪声与光电二极管散粒噪声进行测量, 进而估算 Boltzmann 常数与电子电荷的实验值.

II. 理论原理

A. 热噪声与散粒噪声

由于热涨落, 在温度为 T 时电阻为 R 的不含源串联电路中会存在涨落的电压. 为了研究这一电压涨落的性质, 我们可以将其等效为串联回路里的一个随机电压源 $V(t)$ 并引入一个与电阻 R 串联的电容器 C [2], 那么 Kirchhoff 电压定律便会要求

$$-R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V, \quad (1)$$

进而电容电荷 $Q(\omega)$ 的响应函数为

$$\chi_Q(\omega) = \frac{Q(\omega)}{V(\omega)} = \frac{1}{1/C - i\omega R}. \quad (2)$$

* tengyiming@stu.pku.edu.cn; (86)13287560665

根据涨落-耗散定理, 涨落电荷 $Q(t)$ 的功率谱密度在 $\omega \ll 1/RC$ 时便为

$$S_Q(\omega) = \frac{2k_B T}{\omega} \Im \chi_Q(\omega) \approx 2RC^2 k_B T. \quad (3)$$

进而涨落电压的功率谱密度为

$$S_V(\omega) = \frac{1}{C^2} S_Q(\omega) = 2Rk_B T. \quad (4)$$

考虑到我们测量的带宽为 $\Delta\nu = \Delta\omega/2\pi$ 内的涨落电压其实为频率为 $\omega = \pm\omega_0$ 附近的带宽为 $\Delta\omega$ 范围内的涨落电压, 故实际测得的电压涨落便为

$$\langle V_n^2 \rangle = 2\Delta\nu \times S_V(\omega) = 4k_B T R \Delta\nu. \quad (5)$$

可以看到, 这一电压涨落正比于 Boltzmann 常数.

以上对热噪声的分析只适用于无源电路, 而在有源的情况下如果载流子的数目足够少以至于其发射的时间满足 Poisson 分布, 那么此时散粒噪声将占据主导地位. 为了定量刻画散粒噪声, 我们可以假设在时间段 T 内电路中随机地流过了 N 个电子. 记第 i 个电子在一个不确定的时刻 t_i 流过电路, 那么这一个电子贡献的电流脉冲为

$$I_i(t) = e\delta(t - t_i), \quad (6)$$

这一表达式在时间段 T 上的 Fourier 级数便为

$$I_i(t) = \frac{e}{T} + \frac{2e}{T} \sum_m \cos \frac{2\pi m(t - t_i)}{T}. \quad (7)$$

总电流便为

$$I(t) = \sum_i I_i(t) = \frac{Ne}{T} + \frac{2e}{T} \sum_i \sum_{m_i} \cos \frac{2\pi m_i(t - t_i)}{T}. \quad (8)$$

由于各 t_i 随机分布, 故上式第二项的期望为零. 但是这一项会对电流的涨落带来非平凡的影响:

$$\langle \Delta I^2 \rangle = \frac{4e^2}{T^2} \left\langle \sum_{i,j} \sum_{m_i, n_j} \cos \frac{2\pi m_i(t - t_i)}{T} \cos \frac{2\pi n_j(t - t_j)}{T} \right\rangle. \quad (9)$$

非平凡的贡献只来自 $m_i = n_j, i = j$ 的情况, 此时我们便有

$$\langle \Delta I^2 \rangle = \frac{4e^2}{T^2} \left\langle \sum_i \sum_{m_i} \cos^2 \frac{2\pi m_i(t - t_i)}{T} \right\rangle = \frac{2e^2}{T} \sum_{m_i} \frac{1}{T} = \sum_{m_i} 2eI\Delta\nu. \quad (10)$$

可以看到, 此时散粒噪声也是在各个频率上均匀分布的白噪声, 并且

$$\langle \Delta I^2 \rangle = 2eI\Delta\nu, \quad (11)$$

可以看到, 此时电流涨落正比于电子电荷.

B. 交叉相关性测量

实验待测的噪声信号极其微弱 (可弱至 nV 量级), 并且测量仪器本身的噪声可能会掩盖待测噪声. 为了避免这一问题, 我们采取交叉相关性的方法进行测量. 该方法的关键是使用两台相同的设备测量同一待测信号 (在频域上记作 $Ae^{i\theta_A}$), 那么仪器 1 的测量结果在频域上为

$$s_1 = Ae^{i\theta_A} + N_1 e^{i\theta_1}, \quad (12)$$

仪器 2 的结果为

$$s_2 = Ae^{i\theta_A} + N_2e^{i\theta_2}, \quad (13)$$

其中 N_1, N_2 为两个设备的相位随机的噪声. 接下来我们可以考虑

$$s^2 = s_1^* s_2 = A^2 + N_1 N_2 e^{i(\theta_2 - \theta_1)} + AN_1 e^{i(\theta_A - \theta_1)} + AN_2 e^{i(\theta_2 - \theta_A)}. \quad (14)$$

既然两探测器的噪声独立并且相位随机, 我们便可以考虑多次测量取 s^2 的平均值来压低后三项的贡献并筛选出待测的信号幅度 A .

III. 实验设备

实验采用两台 5186 差分前置电压放大器进行交叉相关性测量, 该放大器的噪声特征见 图 1. 实验使用的产生光电二极管散粒噪声的电路见 图 2. 在散粒噪声实验中, 我们会通过调节电位器 R_p 调节灯泡亮度, 进而调节光电二极管串联电路中的电流; 并且我们会通过使用万用表测量电阻为 $100 \text{ k}\Omega$ 的电阻 R_5 两端的电压来间接测量电路中的电流.

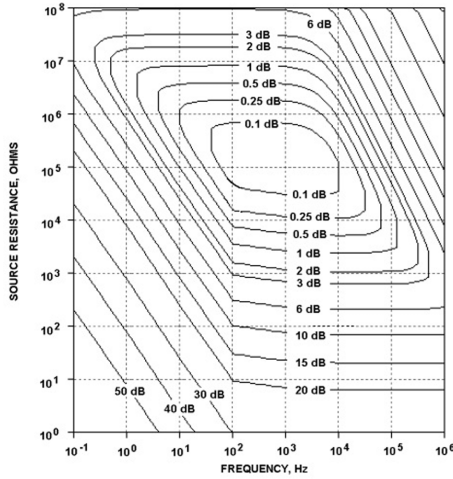


图 1: 5186 低噪声放大器的噪声特征图.

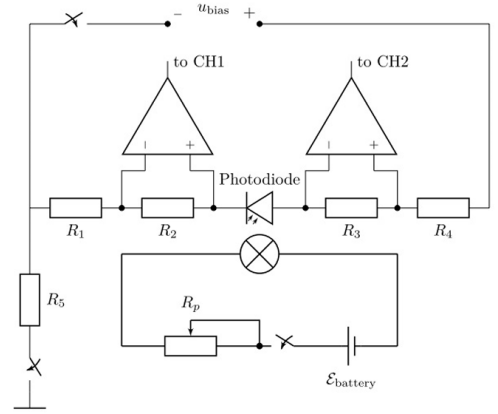


图 2: 产生散粒噪声的电路图.

IV. 实验结果与分析

A. 测量电阻的热噪声并估算 Boltzmann 常数

实验选取的频率范围为 $1000 \sim 1500 \text{ Hz}$, 放大器增益取为 10^3 倍. 测量得到的不同阻值电阻上的热噪声见 表 I. 可以看到, 我们在小于等于 200Ω 的电阻上测量到的热噪声涨落大小几乎一致, 并且测量结果会偏离理论预言. 根据放大器的噪声特征图 图 1 可以看出, 这是因为此时电阻热噪声过于微弱以至于被仪器噪声所彻底淹没并且无法通过交叉相关性方法测出. 我们选择剔除在 $5 \sim 200 \Omega$ 电阻上测得的数据并对 表 II 中的数据进行线性拟合, 结果为

$$\langle V_n^2 \rangle = 1.56193 \times 10^{-20} R(\Omega) + 1.97927 \times 10^{-17} (\text{nV}^2/\text{Hz}). \quad (15)$$

进而 Boltzmann 常数的实验值为

$$k_B = \frac{1.56193 \times 10^{-20} \text{ nV}^2 \cdot \text{Hz}^{-1} \cdot \Omega^{-1}}{4T} = 1.3053 \times 10^{-23} \text{ J/K}. \quad (16)$$

表 I: 电阻热噪声的测量结果 (室温 $T = 299.15$ K) .

电阻 (k Ω)	$\sqrt{\langle V_n^2 \rangle} \times 10^3$ ($\mu\text{V}/\sqrt{\text{Hz}}$)	电阻 (Ω)	$\sqrt{\langle V_n^2 \rangle} \times 10^3$ ($\mu\text{V}/\sqrt{\text{Hz}}$)	电阻 (Ω)	$\sqrt{\langle V_n^2 \rangle} \times 10^3$ ($\mu\text{V}/\sqrt{\text{Hz}}$)
100	39.580	1000	13.62	50	3.3616
50	28.842	500	4.1411	20	2.7948
20	18.059	200	3.3449	10	3.2136
10	13.620	100	3.3384	5	3.6306

表 II: 线性拟合使用的数据 (室温 $T = 299.15$ K) .

电阻 (k Ω)	$\langle V_n^2 \rangle$ (nV^2/Hz)	电阻 (k Ω)	$\langle V_n^2 \rangle$ (nV^2/Hz)
100	1566.58	10	185.504
50	831.861	1	26.4484
20	326.127	0.5	17.1487

可以看到, 实验测得的 Boltzmann 常数与其参考值 (1.3806×10^{-23} J/K) 在两位有效数字的水平上一致. 我们怀疑误差可能来源于对热噪声的测量: 实验中传输线阻抗非完美匹配会导致测量到的热噪声电压小于其真实值, 进而使 Boltzmann 常数的实验值偏低.

B. 测量光电二极管的散粒噪声并估算电子电荷

保持测量设备的参数不变, 我们通过调节小灯泡亮度测量到的不同电流下光电二极管的散粒噪声见 表 III. 可以看到, 此时散粒噪声比热噪声大约一个数量级. 实验发现, 电流大于 $20 \mu\text{A}$ 时测量得到的散粒噪声会严重偏离理论预言. 这是因为此时电流过大以至于电子的发射时间不能再被视作 Poisson 分布. 剔除这三个数据点后线性拟合出的结果为

$$\langle \Delta I^2 \rangle = 3.53928 \times 10^{-19} I(\text{A}) - 1.30603 \times 10^{-25} (\text{A}^2/\text{Hz}). \quad (17)$$

因此电子电荷的实验值为

$$e = 1.7696 \times 10^{-19} \text{ C}. \quad (18)$$

这一结果仅和参考值 (1.6022×10^{-19} C) 在一位有效数字的水平上相符. 我们暂未能为这一误差的来源提出理论解释.

表 III: 光电二极管散粒噪声的测量结果 ($R = 100 \text{ k}\Omega$) .

U (V)	$I = U/R$ (μA)	$\sqrt{\langle \Delta I^2 \rangle} R$ ($\text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}$)	U (V)	$I = U/R$ (μA)	$\sqrt{\langle \Delta I^2 \rangle} R$ ($\text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}$)
2.37	23.7	449.57	1.04	10.4	196.35
2.20	22.0	341.62	0.85	8.5	165.92
2.06	20.6	287.06	0.65	6.5	144.56
1.88	18.8	256.90	0.44	4.4	120.08
1.70	17.0	242.15	0.25	2.5	85.581
1.42	14.2	221.05	0.10	1.0	54.808
1.21	12.1	198.40	—	—	—

V. 结论

本实验使用两台低噪声放大器通过交叉相关性方法测量了不同阻值电阻上的热噪声和不同电流下光电二极管的散粒噪声，并发现实验设备仅能比较好地测量 $500\ \Omega$ 及以上电阻的热噪声与电流小于 $20.6\ \mu\text{A}$ 时的散粒噪声. 我们根据测量到的有效数据通过电阻的热噪声计算得到的 Boltzmann 常数为 $k_B = 1.3053 \times 10^{-23}\ \text{J/K}$ ，与参考值在两位有效数字水平上相符；同时根据散粒噪声计算得到的电子电荷为 $e = 1.7696 \times 10^{-19}\ \text{C}$ ，与参考值仅在一位有效数字水平上一致.

-
- [1] Wikipedia contributors. Johnson–Nyquist noise — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Johnson%E2%80%93Nyquist_noise&oldid=1214036160, 2024. [Online; accessed 21-March-2024].
 - [2] Wikipedia contributors. Fluctuation-dissipation theorem — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Fluctuation-dissipation_theorem&oldid=1212372261, 2024. [Online; accessed 22-March-2024].