量子场论的早期发展

滕一鸣

院系：物理学院　　学号：2000011380　　E-mail：tengyiming@stu.pku.edu.cn

引言

由于笔者在选修本课程前已经学习过“现代的”量子力学和量子场论，因此“原子物理学”这门课程最吸引笔者的地方并不在于它教授了多少技术性的操作而在于它作为量子力学的导论课程对人类向微观世界探索的这段澎湃历史的梳理与介绍。在笔者看来，对科学发展历史的回顾与对其未来发展的展望同等重要，唯此我们才能进行过去与现在的对话，才能根据现在反思过去、根据过去理解现在与未来并打开通向进一步探究的道路。

Thomas S.Kuhn 在《科学革命的结构》[S.K12] 中曾就现代教科书做出过如下论断：“这些教科书似乎经常这样暗示：科学的内容是唯一地由书中各页所述的观察、定律、理论所呈现的。这些书几乎总是使人认为，科学方法就是这些教科书资料中所使用的各种操作技巧，加上把这些资料与教科书中的理论概括相联系所使用的逻辑运作而已。”一学期的原子物理课程为笔者修复了认知与历史的差异而让人愈发认为 Kuhn 的文字可谓切中肯綮。现代教材的作用更多的是通过自下而上的建构让我们快速地掌握一个科学共同体所认可的方法以让我们尽早地开始使用这套方法进行扫尾工作以及（足够幸运地）发现反常现象，对学科发展历史的介绍从来不是这些教材的目的。但笔者认为对一个学科的真正理解离不开对它发展过程的把握。物理学作为自然科学，其任何分支的出现都必然有着与自然界直接相关的直观或动机——抛弃了这些动机而一昧将理论抽象化的人不可能被称为物理学家而只能算是一个数学家。[1]

笔者目前在物理学上的兴趣主要集中于暴胀宇宙中的量子场论过程，因此我作为一个场论学习者在通过原子物理学回顾了人类对微观物理的早期探索后想到了一个问题：量子场论这样一个有着海量的计算、无数的发散以及众多在数学上根本就没有良定义的概念与方法的物理学分支在它的原初阶段到底是什么样的？就像 Kuhn 所说，现行的大多数量子场论教材都认为这是个无关紧要的问题而不屑于回答。[2]但是在通过各种渠道简要了解到这段早期历史后，笔者吃惊地发现量子场论与量子力学的发展几乎平行，同时我们仅依靠原子物理课程中介绍过的概念就可以在一定程度上理解这段时期的量子场论。因此，笔者认为这非常适合作为本课程期末读书报告的主题：一方面，笔者通过撰写本报告可以对散见于浩繁卷轶的资料进行综合与整理，方便对这段历史感兴趣的读者参考；另一方面，笔者通过对这段历史的系统性梳理可以更扎实地从历史的视角把握这门学科的内在逻辑和动力并加深自己对这门学科的理解；并且，对这段历史的介绍可以让读者在原子物理学的课程之外对二十世纪早期人们不断深入微观世界的过程获得更加立体的认识、开拓自己在物理学上的视野，有所裨益于未来的物理学学习。

本报告主要参考了 Abraham Pais 的 *Inward Bound: Of Matter and Forces in the Physical World* [Pai88] 与曹天予的 *20 世纪场论的概念发展* [Cao08] 这两本书。Abraham Pais 曾是 Einstein 和 Bohr 的助手，他是二十世纪物理学发展的见证者并且和创立量子场论的核心人物有着密切的联系，其所著的 [Pai88] 是对从 Röntgen 发现 X-射线到 Dirac 逝世这段辉煌年代的物理学的 grand tour；曹天予作为科学哲学家，他所著的 [Cao08] 则更加偏向于从形而上的角度评述二十世纪物理学中场论的发展。为了避免引用原始文献时的鲁鱼亥豕之误，笔者在撰写本报告时已竭力对参考的这两本书的内容中引用的原始文献进行了考证，并且将笔者自行翻译的原始文段置于脚注之中以供感兴趣的读者检视。但是笔者水平有限，百密终难

[1] 在此需要批判一下 Carl Friedrich Gauß 的座右铭 *Pauca sed matura* 以及据称（我没有找到可以置信的原文）是源自他的引文 When the architect completes a fine building, he removes the scaffolding。能用只言片语把一个东西讲清楚固然是本事，但是故意只用只言片语讲事情对知识的传承而言却是灾难。

[2] Weinberg 的 [Wei95] 是个例外，但是他仅在第一章中对量子场论的发展史进行了流水账式的介绍而没有进行更深层的讨论——毕竟 Weinberg、Feynman 等人可是一批信奉“philosophy of science is as useful to scientists as ornithology is to birds”的物理学家。

免一疏，如有纰漏还望包涵。

动机

为什么我们会有量子场论？一个读过 Weinberg *The Quantum Theory of Fields* [Wei95] 的人可能会说这是调和量子力学和狭义相对论的唯一方式。[3] 但是这种高屋建瓴的观点并不是人们发展量子场论的动机。事实上，人们发展量子场论是为了弥补量子力学的一大缺陷：它不能描述存在粒子数变化的过程。一个高能态的原子可以通过发射光子回到低能态，但是在此之前光子在哪儿呢？一个低能态的原子也可以通过吸收光子到达高能态，但是在此之后光子跑哪里去了呢？对这一问题的探索促使人们在发展量子力学的同时开始发展辐射的量子理论。辐射的量子理论最终变成了量子电动力学，人们从量子电动力学中归纳出的理论体系则形成了现在的量子场论。

虽然 Planck 通过黑体辐射谱引入了量子思想并推开了量子论的大门，但是 Planck 在这一过程中始终坚持量子化手段只适用于“可称重的物质”并且声称他的推导只是对“物质与辐射间的相互作用”进行的。更准确地讲，对 Planck 而言量子化只是热辐射定律的要求、只是在原子中进行简谐振动的电子的统计行为中只有能量是量子的整数倍的振动态才需要考虑。而 Einstein 的“由局域在空间不同点的有限数目的能量子组成的光的能量，只能作为一个单元而被产生或吸收”的量子化思想是将电磁场作为一种物质本体的量子化而非对粒子或场的力学运动的量子化，因而他才应该被视作辐射的量子论的第一人。Einstein 于 1916 年在提出 A-B 系数 [Ein16] 时考察了存在同电磁辐射相互作用的原子气在热平衡下的行为。假设两个原子能级 $E_m > E_n$ 上分别有 N_m 和 N_n 个原子，同时记 $\rho\mathrm{d}\nu$ 为平衡态下辐射在单位体积和频率间隔 $\mathrm{d}\nu$ 中的能量，Einstein 假设单位时间间隔 $\mathrm{d}t$ 内发生跃迁的原子数 $\mathrm{d}W$ 应该形如

$$\begin{cases}\mathrm{d}W_{m\to n} = N_m(\rho B_{mn} + A_{mn})\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}W_{n\to m} = N_n\rho B_{nm}\mathrm{d}t\end{cases} \tag{1}$$

A_{mn} 对应自发辐射，B_{mn} 对应受激辐射，B_{nm} 则对应光吸收。通过一系列合理的假设，Einstein 直接导出了 Planck 黑体辐射公式。在推导的过程中，Einstein 通过分析存在辐射时原子的 Brown 运动发现自发辐射中释放的光子不仅有能量 $h\nu = E_m - E_n$，它还会在某个不确定的方向上拥有动量 $h\nu/c$——这是他在做出假设时所没有预料到的。Einstein 评论道“这一理论的缺陷在于将基本过程的时间和方向诉诸于概率”“这一理论中基本过程的性质……使得我们似乎必须要发展一个真正的量子化的辐射理论”。[4]

与量子电动力学真正有关的最早文献是 Born 和 Jordan 在 1925 年 12 月发表的 *Zur Quantenmechanik* [BJ25]。在这篇文章的最后一节中，他们写道：“真空中的电磁过程可以被表示为平面波的叠加。我们可以将这些平面波里的电场和磁场强度 $\vec{E}, \vec{H}$ 想象成**矩阵**，它们的矩阵元则是做简谐振动的平面波；例如，在合适的坐标下我们有

$$E = E_{nm}\exp\left[2\pi i\nu_{nm}\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \tag{2}$$

……此时 Maxwell 方程组应该被视为矩阵方程组”。[5]

[3] 原文见 [Wei95] 序言：Quantum field theory is the way it is because (aside from theories like string theory that have an infinite number of particle types) it is the only way to reconcile the principles of quantum mechanics (including the cluster decomposition property) with those of special relativity.

[4] The weakness of the theory lies, on the one hand, in its not bringing us closer to a union with the wave theory, and, on the other hand, that it leaves the time and direction of the elementary processes to chance.

[5] Die elektromagnetischen Vorgänge im Vakuum wird man darstellen können als Superposition ebener Wellen. In einer solchen ebenen Welle werden wir die elektrische und die magaetische Feldstärke $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$ als Matrizen ansehen, deren Elemente harmonisch schwingende ebene Wellen sind, also z. B. bei geeigneter Lage des Koordinatensystems

$$\mathfrak{E} = \left(\mathfrak{E}(nm)e^{2\pi i\nu(nm)\left(t-\frac{x}{c}\right)}\right)$$

. . . Die Maxwellschen Gleichungen wird man als Matrizengleichungen beibehalten.

Born 和 Jordan 并没有解释 (2) 中的 E_{nm} 和 ν_{nm} 的物理意义，他们只是考虑了纯辐射场的能量密度算符

$$W=\frac{1}{2}(\vec{E}^2+\vec{H}^2) \tag{3}$$

其中场 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 可以被写成

$$\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}^{\mathrm{tr}}}{\partial t},\qquad \vec{H}=\boldsymbol{\nabla}\times\vec{A}^{\mathrm{tr}} \tag{4}$$

$\vec{A}^{\mathrm{tr}}$ 是满足 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{A}^{\mathrm{tr}}=0$ 的纵向矢势。通过在进行微分时仔细处理算符的顺序，二人在矩阵力学框架下导出了 W 应该满足的连续性方程：

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{S}=0,\quad \vec{S}=\frac{c}{2}\{[\vec{E},\vec{H}]-[\vec{H},\vec{E}]\} \tag{5}$$

他们还讨论了量子化有源电磁场的必要性：一个由坐标 q 描述的带电简谐振子辐射的能量 $\int W\mathrm{d}^3x$ 正比于 $(\mathrm{d}^3q/\mathrm{d}t^2)^2$，考虑到 q 本身应该是量子力学的算符，因而这一电磁能量本质上也应该是量子力学算符。

这篇文章发表的一个月后，Heisenberg 在向 Pauli 的信中说道：“Jordan 用新理论根据我们的文章计算了固有振动的统计行为。Jordan 称我们可以得到正确的结果. . . 并且相信我们的计算与 Bose 统计之间有可类比之处。我对这样的结果不太高兴，因为我不懂多少统计学以判断这个结论的意义。”Heisenberg 所指的文章是 Born、Heisenberg 和 Jordan 三人在 1925 年 11 月合作完成的 *Zur Quantenmechanik. II.* [BHJ26]。Heisenberg 提到的这个统计问题首先由 Einstein 在 1909 年提出：在热平衡下，一个充满电磁辐射的腔体内部的能量涨落是多少？Einstein 利用 Planck 的黑体辐射公式推导出能量涨落为

$$\langle E^2\rangle-\langle E\rangle^2=\left(h\nu\rho+\frac{c^3}{8\pi\nu^2}\rho^2\right)v\mathrm{d}\nu \tag{6}$$

v 是我们考虑的区域体积，ρ 是 Planck 公式给出的能量密度分布。到了 1925 年，问题则变成了如何在不依赖于 Planck 公式的情况下从量子力学的第一性原理出发导出这个公式。因此三人在从量子力学出发导出了 Einstein 的结果后认为这“极大地鼓励了这一理论的进一步发展”。他们在这项工作里忽略了电磁波的偏振并考虑了一维的简化情况。限定坐标范围为 0 到 L，如果我们要求辐射场 $u(x,t)$ 在端点处为零，那么这可以等效于一根端点固定在 0 和 L 的弦。通过这种类比，我们不难得到其哈密顿量为

$$H=\frac{1}{2}\int_0^L\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x \tag{7}$$

为了化简这个表达式，考虑将这个场展开为与边界条件相容的 Fourier 级数：

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}q_k(t)\sin\left(\frac{\omega_k x}{c}\right),\qquad \omega_k=\frac{k\pi c}{L} \tag{8}$$

那么我们便有

$$H=\frac{L}{4}\sum_{k=1}^{\infty}[\dot{q}_k^2(t)+\omega_k^2q_k^2(t)] \tag{9}$$

因此弦或场的行为就像独立谐振子的和，其频率分别为 ω_k。继而，正则共轭于 $q_k(t)$ 的“动量”$p_k(t)$ 便可以被确定为

$$\dot{q}_k(t)=\frac{\partial}{\partial p_k}H(p,q)\Rightarrow p_k(t)=\frac{L}{2}\dot{q}_k(t)$$

根据当时三人在矩阵力学框架下对谐振子的工作，他们认为此时可以直接考虑正则对易关系

$$[\dot{q}_k(t),q_j(t)]=\frac{2}{L}[p_k(t),q_j(t)]=-\frac{2\mathrm{i}\hbar}{L}\delta_{k,j},\qquad [q_k(t),q_j(t)]=0 \tag{10}$$

进一步，我们考虑哈密顿量给出的 q-矩阵运动方程

$$\ddot{q}_k(t)=\frac{2}{L}\dot{p}_k(t)=-\omega_k^2q_k(t) \tag{11}$$

进而它可以被写成

$$q_k(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{L\omega_k}}(a_k e^{-\mathrm{i}\omega_k t} + a_k^\dagger e^{\mathrm{i}\omega_k t}) \tag{12}$$

其中矩阵 $a_k, a_k^\dagger$ 满足

$$[a_k, a_j^\dagger] = \delta_{k,j}, \qquad [a_k, a_j] = 0 \tag{13}$$

Born，Heisenberg 和 Jordan 便利用这些推导出了能量涨落公式 (6)。但是他们的工作只是处理了自由场而对原子的自发辐射率这样的相互作用问题无能为力——Dirac 解决了这个问题。

奠基

场量子化方法的系统引入

Dirac 被认为是量子场论的奠基人，一方面是因为他的工作系统地引入了电磁场的量子化方法，另一方面是因为他对被量子化的实体进行了澄清。Schrödinger 在 1926 年提出 Schrödinger 方程与波函数之前，人们提到场时指的总是物质场；但是在此之后波函数成了被量子化的基本实体，电磁波也一度被视作了与光量子有关的波函数；人们也常常将对波函数的实在论与概率论诠释混为一谈。事实上，Jordan 在他处理辐射场的工作中就常常会混淆“场”和“波函数”，而 Dirac 则对这些概念做了清楚的区分：“首先，光波总是实的，而与光量子相联系的 de Broglie 波……必定包含一个虚指数。一个更重要的不同是：它们的强度是以不同的方式来解释的。与单色光波相联系的每单位体积的光量子数等于波的单位体积的能量除以单个光量子的能量 $h\nu$。另一方面，一个幅度为 a 的单色 de Broglie 波……必须被解释为表示每单位体积有 a^2 个光量子。”

Dirac 在 1926 年 8 月提出了一个计算受激跃迁系数 B 的量子理论 [DF26]，不过此时他仍在将由 Maxwell 方程组描述的电磁场视为经典体系；随后，他在 1927 年初发表了两篇关于量子电动力学的奠基性论文 [DB27][DF27]——这比 Dirac 方程的提出还要早一年。

Dirac 考虑了一个单电子原子同辐射场的相互作用，此时系统的总哈密顿量为

$$H = H^0 + H^I + H^{\mathrm{rad}} \tag{14}$$

其中 H^0 是原子（包含其内部的静电场）的哈密顿量；H^{rad} 是辐射场自身的哈密顿量

$$H^{\mathrm{rad}} = \int W \mathrm{d}^3 x \tag{15}$$

这里的 W 由 (3) 式给出；H^I 则是原子同辐射场的相互作用项，Dirac 考虑了经典意义上矢势同原子电偶极矩变化率的耦合而将它取成了

$$H^I = -\frac{e}{c}\vec{A}^{\mathrm{tr}} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} \tag{16}$$

其中 $\vec{x}$ 是电子的坐标。对于经典的自由辐射场，我们总可以做 Fourier 变换并将其经典哈密顿量写作诸多经典谐振子哈密顿量的叠加，即

$$H^{\mathrm{rad}}_{\mathrm{classical}} = \frac{1}{2}\sum_k (p_k^2 + \omega_k^2 q_k^2) \tag{17}$$

为了得到量子化的自由辐射场，我们猜测可以仿照量子化谐振子的方式将 p_k, q_ℓ 换成满足正则对易关系

$$[p_k, q_\ell] = -\mathrm{i}\hbar\delta_{k,\ell} \tag{18}$$

的算符。如果定义

$$a_k = \frac{\omega_k q_k + \mathrm{i}p_k}{\sqrt{2\hbar\omega_k}}, \qquad a_k^\dagger = \frac{\omega_k q_k - \mathrm{i}p_k}{\sqrt{2\hbar\omega_k}} \tag{19}$$

那么我们便可以将自由辐射场的哈密顿量写成

$$H^{\mathrm{rad}} = \sum_k \hbar\omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right), \qquad [a_k, a_\ell^\dagger] = \delta_{k,\ell} \tag{20}$$

这个哈密顿量的本征值则形如

$$E^{\mathrm{rad}} = \sum_k \hbar\omega_k \left(n_k + \frac{1}{2} \right) \tag{21}$$

接着 Dirac 向这些方程应用了 Born-Heisenberg-Jordan 诠释：一个由数组 $\{n_k\}$ 标识的 H^{rad} 本征态代表了由有 n_k 个动量为 $\vec{k}_k$、能量为 $\hbar\omega_k$ 的光子组成的系统，于是由 $H^0 + H^{\mathrm{rad}}$ 描述的系统本征态就是处于某个量子态的原子和一堆自由光子。如果没有 H^I 项，那么原子和光子的态都不会发生变化。

为了处理 H^I 项，Dirac 使用了微扰论并发现这一项的存在会导致保持能量和动量守恒的量子态跃迁。H^I 中的 $\mathrm{d}\vec{x}/\mathrm{d}t$ 项会带来原子态间的跃迁，而根据 (20) 式 $\vec{A}^{\mathrm{tr}}$ 会线性地依赖于 $a, a^\dagger$ 并会导致光子态的变化。在最低阶的微扰论中，Dirac 发现如果 n 光子态里的一个光子被湮灭了，那么这一过程的概率会正比于 n（因为 $a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$）；而如果原子发射了一个光子，那么 n 光子态会变成 $n+1$ 光子态，这一过程的概率会正比于 $n+1$（因为 $a^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$）。我们可以将原子辐射过程的概率所正比于的 $n+1$ 分为两部分诠释：“n”对应于受激辐射（类似 (1) 式中的参数 B），因为它正比于已有辐射场的强度；“1”则对应于同 n 无关的自发辐射（类似 (1) 式中的参数 A）。Dirac 便通过如此简洁优雅地方式统一描述了两种辐射的机制——这种从第一性原理出发解释 Einstein 关系的方式是量子电动力学取得的第一个重要成果。

Dirac 将计算推进到了二阶微扰论后发现了更多有趣的现象。考虑初态 $|i\rangle$ 到末态 $|f\rangle$ 的跃迁矩阵元 $\mathcal{M}_{fi}$，微扰论会给出它的二阶项为

$$\mathcal{M}_{fi} = \sum_n \frac{H_{fn}^I H_{ni}^I}{E_i - E_n}, \qquad H_{mn}^I = \langle m|H^I|n\rangle \tag{22}$$

这表明 $|i\rangle \to |f\rangle$ 的跃迁需要通过“中间态”$|n\rangle$ 进行。Dirac 使用这一结果考虑了原子中束缚态电子对光子的散射并在 [DF27] 中写到：“散射的辐射……表现为两个过程的组合，其中一个过程必然是吸收、一个过程必然是发射，并且在这两个过程中能量甚至不会近似地守恒。”[6] 当然，整个过程依旧满足能量守恒，而这里不满足能量守恒的转瞬即逝的中间态则被称为“虚态”。(22) 式成了三十年代使用量子场论计算散射过程的核心方法。

顺便提一下，Dirac 这里使用的微扰论后来演化成了以 Lippmann-Schwinger 方程为核心的、如今被称为 OFPT (old-fashioned perturbation theory) 的方法，采用现代语言表述的形式如下：我们将哈密顿量分成两部分：

$$H = H_0 + V \tag{23}$$

其中算符 H_0 的本征态是已知的而 V 是提供微小修正的微扰项。我们对这样的情况感兴趣：我们知道一个系统早期的状态并且想知道未来系统将处于什么态。不妨假设系统的能量始终为 E，那么由于 H_0 的本征值连续并且 V 这一微扰项的影响不大，我们便能找到 H_0 的能量为 E 的本征态 $|\phi\rangle$ 并有

$$H_0\,|\phi\rangle = E\,|\phi\rangle, \quad (E - H_0)\,|\phi\rangle = 0 \tag{24}$$

由于精确的系统哈密顿量为 H，因而能量为 E 的系统应当对应总哈密顿量的一个本征态 $|\psi\rangle$，即

$$H\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle \tag{25}$$

进而

$$(E - H_0)\,|\psi\rangle = V\,|\psi\rangle$$

[6] The scattered radiation . . . thus appears as a result of the two processes one of which must be an absorption, the other an emission, in neither of which the total proper energy is even approximately conserved.

等号左边加 0、右边加 $(E-H_0)\left|\phi\right\rangle$ 即得

$$(E-H_0)\left|\psi\right\rangle=(E-H_0)\left|\phi\right\rangle+V\left|\psi\right\rangle$$

我们记 $(E-H_0)$ 的逆为 $\frac{1}{E-H_0}$，那么我们便有

$$\left|\psi\right\rangle=\left|\phi\right\rangle+\frac{1}{E-H_0}V\left|\psi\right\rangle \tag{26}$$

这便是 Lippmann-Schwinger 方程。在散射计算中修正项 V 只在中间阶段起作用并诱导系统使其态矢由从无穷远入射时的自由态 $\left|\phi\right\rangle$ 跃迁为出射到无穷远时的其它自由态。方程表明完整的波函数 $\left|\psi\right\rangle$ 是自由入射时的波函数 $\left|\phi\right\rangle$ 和一个散射项的和。现在我们要做的便是完全用 $\left|\phi\right\rangle$ 来表示 $\left|\psi\right\rangle$。为此我们先定义算符 T 使得

$$V\left|\psi\right\rangle=T\left|\phi\right\rangle \tag{27}$$

将这一定义代入 Lippmann-Schwinger 方程便有

$$\left|\psi\right\rangle=\left|\phi\right\rangle+\frac{1}{E-H_0}T\left|\phi\right\rangle \tag{28}$$

将 V 同时作用于等号两边并消去 $\left|\phi\right\rangle$ 便有

$$T=V+V\frac{1}{E-H_0}T \tag{29}$$

不断迭代下去便能给出 T 按 V 的阶数展开的微扰解：

$$T=V+V\frac{1}{E-H_0}V+V\frac{1}{E-H_0}V\frac{1}{E-H_0}V+\cdots \tag{30}$$

插入由 H_0 本征态给出的完备性关系 $\sum_j\left|\phi_j\right\rangle\left\langle\phi_j\right|=1$，那么我们便能得到跃迁矩阵的矩阵元为

$$\left\langle\phi_f|T|\phi_i\right\rangle=\left\langle\phi_f|V|\phi_i\right\rangle+\sum_j\left\langle\phi_f\right|V\frac{1}{E-H_0}\left|\phi_j\right\rangle\left\langle\phi_j|V|\phi_i\right\rangle+\cdots \tag{31}$$

如此我们便得到了 (22) 式给出的微扰论二阶项。

玻色场与费米场

Dirac 的奠基性工作不仅给出了量子化辐射场的方法，他还在 [DB27] 中指明了量子场和量子统计间的深刻联系：二次量子化方法会自动要求光子满足 Bose-Einstein 统计。1927 年，Jordan 和 Klein 则从一个更一般的角度上处理了二次量子化和 BE 统计间的关系 [JK27]。他们考虑了一个量子场 $\psi(\vec{x},t)$ 并假设它遵循某个 Schrödinger 方程

$$H\psi(\vec{x},t)=\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t) \tag{32}$$

我们总可以找到一族正交归一的函数族 $\{u_k(\vec{x})\}$ 以将 ψ 及其复共轭 ψ^* 展开为

$$\psi(\vec{x},t)=\sum_k a_k(t)u_k(\vec{x}),\qquad \psi^*(\vec{x},t)=\sum_k a_k^*(t)u_k^*(\vec{x}) \tag{33}$$

$|a_k|^2$ 可以被诠释为发现系统处于第 k 个态的概率，而 $\{u_k(\vec{x})\}$ 的完备性要求

$$\sum_k u_k^*(\vec{x})u_k(\vec{y})=\delta(\vec{x}-\vec{y}) \tag{34}$$

我们在二次量子化中应该将复数 a 和 a^* 换成算符 a 和 $a^\dagger$，同时参考 Dirac 的 (20) 式而假设

$$[a_k(t),a_\ell^\dagger(t)]=\delta_{k,\ell},\qquad [a_k(t),a_\ell(t)]=[a_k^\dagger(t),a_\ell^\dagger(t)]=0 \tag{35}$$

进而此时概率 $|a_k|^2$ 应该被换成 $a_k^\dagger a_k$，而这个算符的本征值是一个非负整数 n_k。我们遂可以将 n_k 诠释为态 k 上的粒子数目，进而这些粒子会自动满足 BE 统计。

在 [JK27] 完成前，Jordan 就根据 Dirac 的工作提出了一个问题：是否存在会导致 Fermi-Dirac 统计的二次量子化方法？ Jordan 和 Wigner 从 (33) 式出发解决了这个问题。我们只需要定义反对易子为

$$\{x, y\} = xy + yx \tag{36}$$

然后将正则对易关系换成

$$\{a_k, a_\ell\} = \delta_{k,\ell}, \qquad \{a_k, a_\ell\} = \{a_k^\dagger, a_\ell^\dagger\} = 0 \tag{37}$$

此时粒子数算符会满足

$$n_k = a_k^\dagger a_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

这刚好会给出遵循 FD 统计的粒子。如此，人们便补齐了正则量子化方法的最后一块拼图。

对称性的引入

Lorentz 对称性

Lorentz 对称性是人们向量子电动力学引入的第一个对称性。1928 年，Pauli 和 Jordan 首先验证了当时的 QED 理论中自由电磁场在不同时空点上的对易子同狭义相对论的相容性 [JP28]；几乎同时，Pauli 和 Heisenberg 也开始了对含源情况下相对论性的量子电动力学理论的探索。他们第一次将 Lagrange 力学与 Hamilton 力学中的方法应用到了量子场论中。他们考虑了场 $Q_\alpha(\vec{x}, t)$ 并将每个点 $\vec{x}$ 处的每个 α 对应的场都视作了动力学变量，进而一个场成了无穷个动力学变量的集合。在 Lagrange 力学中，我们可以根据拉氏量 $L(q, \dot{q})$ 定义 q 的共轭动量 $p = \partial L/\partial \dot{q}$；与之类似的，Pauli 和 Heisenberg 证明了我们可以根据

$$L = \int \mathscr{L} \mathrm{d}^3 x, \qquad \mathscr{L} = \mathscr{L}\left(Q_\alpha, \dot{Q}_\alpha, \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}\right) \tag{38}$$

构造出一个场论并定义“共轭于 Q_α 的动量场 P_α”为

$$P_\alpha(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{Q}_\alpha(\vec{x}, t)} \tag{39}$$

同时 Q_α 和 P_β 会满足对易关系

$$[P_\alpha(\vec{x}, t), Q_\beta(\vec{y}, t)] = \delta_{\alpha,\beta}\delta(\vec{x} - \vec{y}), \qquad [Q_\alpha(\vec{x}, t), Q_\beta(\vec{y}, t)] = [P_\alpha(\vec{x}, t), P_\beta(\vec{y}, t)] = 0 \tag{40}$$

随后，他们从一个相当一般的层面上证明了这一理论体系的 Lorentz 协变性，之后他们便开始处理电动力学问题了。

为了构造出相对论性量子电动力学，Heisenberg 和 Pauli 抛弃了先前 Dirac 等人的做法，毕竟 $\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{A}^{\mathrm{tr}} = 0$ 看起来并不协变。他们转而考虑了 Maxwell 方程组

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi \tag{41}$$

$$\vec{H} = \boldsymbol{\nabla} \times \vec{A} \tag{42}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \tag{43}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{44}$$

其中 ϕ,ρ 和 $\vec{j}$ 分别为 Coulomb 势、电荷和电流密度。四个场 $\vec{A},\phi$ 被取成了“Q”，而拉氏量被取作了被 Born 在 1908 年证明了 Lorentz 不变性的形式

$$\mathscr{L}_{\mathrm{rad}}=\frac{1}{2}(\vec{E}^2-\vec{H}^2) \tag{45}$$

此时他们遇到了一个问题：共轭于 ϕ 的正则动量场始终是零！这一问题在 1929 年困扰了 Heisenberg 和 Pauli 许久，直到 Heisenberg 找到了解决方案：向拉氏量 (45) 中引入一个正比于小参数 ε 的 $\varepsilon(\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{A}+\dot{\phi}/c)^2$ 项以使得 ϕ 获得共轭动量，然后进行我们感兴趣的计算并在最终结果里取 $\varepsilon\to 0$。利用这种方法，二人终于在 1929 年 3 月完成了这项工作 [HP29]。他们在当年 12 月发表了第二篇文章 [HP30]，此时他们找到了不依赖于 ε 的处理方法——这和人们向量子场论引入的第二个对称性有关：规范对称性。

规范对称性

Maxwell 方程组不能唯一地确定 $\vec{A}$ 和 ϕ 是当时经典电动力学中人尽皆知的事实，人们最晚在 1903 年就已经知道电动力学在变换

$$\vec{A}=\vec{A}_0-\nabla\chi,\qquad \phi=\phi_0+\frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} \tag{46}$$

下的不变性。但是“规范”(gauge) 一词直到 1919 年才由 Hermann Weyl 引入到物理中。当时 Weyl 正在物理学的几何纲领下发展他的统一引力和电磁力的理论，这套理论中的基本场是描述引力的对称度规张量 $g_{\mu\nu}$ 以及 4-电磁势 $A_\mu=(\vec{A},\mathrm{i}\phi)$。记四维时空坐标为 $x_\mu=(\vec{x},\mathrm{i}ct)$，Weyl 理论的关键是在变换

$$g'_{\mu\nu}=e^{\chi}g_{\mu\nu},\qquad A'_\mu=A_\mu-\frac{\partial\chi}{\partial x^\mu} \tag{47}$$

下的不变性。上式中的第二个变换实质上和 (46) 一致，而第一个变换则会将线元的平方 $\mathrm{d}s^2=g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$ 变成 $e^\chi\mathrm{d}s^2$。Weyl 注意到了这种长度的改变并将这种变换称为“规范变换”。Weyl 那篇奠基性文章 [Wey23] 最重要的意义在于首次通过不变性原理导出了电荷守恒，这在 Weyl 看来是“对这一理论的最强支持之一”。虽然后来人们发现其他统一场论也具有类似的性质并且 Weyl 不久后便放弃了这个理论，但是他并没有放弃“规范不变性”并在十年后重又将其引入到了物理中。

后来人们在量子力学中也意识到了规范对称性的存在。1926 年，Schrödinger 在他的第四篇关于波动力学的通信 [Sch26] 中第一次写下了明显包含电磁场的相对论协变的场方程

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\frac{\mathrm{i}e}{\hbar c}A_\mu\right)^2-\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\psi=0 \tag{48}$$

在 Dirac 关于 Dirac 方程的第一篇文章 [DF28] 中则出现了

$$\left[\gamma^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\frac{\mathrm{i}e}{\hbar c}A_\mu\right)+\frac{mc}{\hbar}\right]\psi=0 \tag{49}$$

我们有理由相信 Schrödinger 和 Dirac 二人已经注意到了他们的方程在变换 (46) 和

$$\psi'=e^{-\frac{\mathrm{i}e}{\hbar c}\chi}\psi \tag{50}$$

的结合下的不变性。Weyl 在 1928 年出版的 *Gruppentheorie und Quantenmechanik* [Wey28] 讨论了这种崭新的规范变换：“我现在相信……规范不变性不会联系电磁场和引力而会联系电磁场和物质。”对这一问题的进一步思考让他在 1929 年 3 月发表了 *Gravitation and the Electron* [Wey29a]，其中他做出了堪称对现代物理影响最深远的贡献：“（规范）不变性和电守恒的关系与之前完全一样”。Weyl 注意到我们可以通过假设 χ 是不依赖于 $\vec{x}$ 和 t 的无穷小变换来看到这一点：要求

$$\delta\psi=-\frac{\mathrm{i}e}{\hbar c}\chi\psi\Rightarrow\delta L=0 \tag{51}$$

会直接给出流守恒方程。他对 ψ 是 Dirac 波函数的情况证明了这一点，但最后得到的其实是一个相当一般的结论。

Heisenberg 和 Pauli 在第二篇文章 [HP30] 中的主要观点可以被归结为一句话：使用 Coulomb 规范，即 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{A}^{\mathrm{tr}}=0$。他们指出我们可以直接将 ϕ 取为零，虽然这看起来会破坏 Lorentz 不变性，但事实上我们通过选择合适的规范变换函数 χ 总能将 ϕ 变成零。接着，他们通过将 Lorentz 变换和规范变换相对应而证明了此时理论的规范不变性。他们将相互作用写成了静态 Coulomb 项与同纵波（光子）的耦合项之和——这和 Dirac 在他的非相对论理论中的做法如出一辙。这几乎成了人们在三十年代和四十年代早期处理量子电动力学问题的标准方法，人们直到后来发展出重整化理论后才抛弃了 Coulomb 规范而广泛使用 Lorenz 规范。

正电子的发现与后续发展

Dirac 在 1928 年初提出的 Dirac 方程取得了极大的成功：它自然地带来了自旋的概念、正确地给出了电子磁矩、自动地给出了 Thomas 进动的修正、精确地刻画了氢原子的精细结构。Dirac 在他的第一篇文章 [DF28] 中意识到相对论性质能关系 $E^2=c^2p^2+m^2c^4$ 包含两个解：

$$E=\pm c\sqrt{p^2+m^2c^2} \tag{52}$$

我们在经典理论中可以直接把负能解舍去，毕竟经典上由正能量态出发的演化不会到达负能量态；但是在量子理论中，我们必须严肃地对待负能解的问题，因为此时作用于系统的微扰可能会带来正能态到负能态的跃迁。Dirac 敏锐地意识到 E 的符号的不确定性可能是造成我们必须用二元组来描述电子波函数的原因。他同时猜测负能解或许同电荷与电子相反的粒子有关。他一开始认为“我们必须舍弃一半的解，因为它表明电子拥有电荷 $+e$”。而在 1928 年 7 月于莱比锡的一次报告中，他不再谈及舍弃一半的解了。他转而认为我们没法忽略到负能态的跃迁，因为“现有理论只是一个近似”。

在 Dirac 和 Heisenberg 等人为 Dirac 方程的负能解而焦头烂额之际，Klein 和 Yoshio Nishina 在 1928 年 10 月基于 Dirac 方程发展了他们的 Compton 散射理论 [KN29]，当时实验技术的限制使得人们到 1931 年才意识到描述 Compton 散射截面的 Klein-Nishina 公式是这一新理论最伟大的早期成就之一。Klein 和 Nishina 将 Dirac 发展的非相对论性量子电动力学中的 H^I 项 (16) 换成了

$$H^I=-\int\vec{j}\vec{A}^{\mathrm{tr}}\mathrm{d}^3x,\qquad \vec{j}=\mathrm{i}e\bar{\psi}\vec{\gamma}\psi \tag{53}$$

并使用半经典的方式处理了辐射场。第一个完整的量子电动力学的处理则分别由乌普萨拉的 Ivar Waller 和莫斯科的 Evgenievich Tamm 独立给出。他们用 (22) 式研究了初态波矢为 $\vec{k}$ 的光子被静止电子散射的过程。由于中间态能量不守恒，因此这里的虚电子既可以有正能量又可以有负能量。Waller 和 Tamm 都注意到了非常关键的一点：只有在对中间态求和时计入了正负能态后 Klein-Nishina 公式才能在低能下退化为 Tomson 公式。亦即，存在负能态是 Dirac 理论与经典理论相容的必要条件！

1928 年 12 月，Klein 在 *Die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der relativistischen Dynamik von Dirac* [Kle29] 报道了一个至关重要的“悖论”：他根据 Dirac 方程考虑了在距离 $\sim\hbar/mc$ 的尺度上变化量大于 mc^2 的势垒对能量为 E、密度流为 j 的电子的散射并发现此时会出现反射流 j_1 以及量子隧穿带来的透射流 j_2，二者自然地满足 $j=j_1+j_2$。但是 Dirac 方程会给出 $j_1>j$，进而 $j_2<0$——这在当时看来是非常奇怪的。后来的一系列事件才让人们意识到了正电子的存在，不过直到 1929 年 5 月，Weyl 还在他处理规范不变性的其中一篇文章 [Wey29b] 里写到：“我们或可以预料，Dirac 数的两对分量分别对应着电子和质子”。[7]

[7]Es ist naheliegend, zu erwarten, daß von den beiden Komponentenpaaren der Diracschen Größen das eine dem Elektron, das andere dem Proton zugehört.

事情在 1929 年 12 月出现了转机。此时 Dirac 在 *A theory of electrons and protons* [DF30] 中写到“我们不能简单地将负能的电子视作质子”，因为电子从正能态到负能态的跃迁会破坏电荷守恒。“让我们假设……除了一些具有非常小速度的态，所有负能态都被占据了”，此时不相容原理会要求一个电子只能占据一个态。如果我们移除一个负能量的电子，那么初态的分布里便会出现一个空穴。这一操作的效果便等效于升高单位能量与单位电荷，并且这一空穴表现得就像拥有正能量和正电荷的粒子：“我们……便需要假设负能量电子分布中的空穴是质子”。

此时 Dirac 距离预言正电子只有一步之遥了，但是当时的人们确信只有电子和质子才是自然界中的基本粒子——在 1929 年原子核的质子-电子模型遇到了一些困难，但是并未被人们所抛弃。虽然当时 Dirac 也注意到了在不考虑相互作用时他的空穴会和电子拥有相同的质量，但是他却认为电磁相互作用的存在可以改变空穴的质量进而对应于质子。前面 Waller 以及 Tamm 关于 Klein-Nishina 公式的工作表明中间态电子向负能态电子的跃迁是至关重要的，但是 Dirac 的空穴诠释似乎表明不相容原理会禁止正能态电子向几乎被填充满的负能态电子的跃迁。不过 Dirac 认为双跃迁可以解决这个问题：一个负能态电子先通过光子的吸收或发射跃迁到了合适的末态并留出空穴，而后正能态电子通过吸收或发射光子跃迁下来并填补上这个空穴。一种“双跃迁”的图像为：初态光子 + 初态正能量电子 + 一个负能量电子 $\to$ 初态正能量电子 + 末态正能量电子 + 空穴 $\to$ 末态正能量电子 + 末态光子。

1930 年 2 月，Robert Oppenheimer 指出了 Dirac 空穴理论的一大困难：它会允许电子质子湮灭为两个光子的过程，因此氢原子会自发湮灭为辐射——如此可以估计得到一般物质的寿命只有 10^{-10} 秒。同年 4 月，Tamm 也发现了这个问题。11 月，Weyl 则对空穴理论中质子和电子质量相同以及“正负电性的等价性”问题展开来批判。次年 5 月，Dirac 在考虑了众多反对意见后终于做出了划时代的假设：“一个空穴，如果的确存在的话，会是一种实验物理尚不知晓的新粒子，它拥有同电子相同的质量和相反的电荷。”1932 年 12 月，Carl Anderson 向 *Science* 提交了名为 *The apparent existence of easily deflectable positives* 的论文。

到 1932 年人们确认了正电子的存在时，量子电动力学已经取得极为辉煌的成就。人们在领头阶微扰论下得到的 Klein-Nishina 公式以及对正负电子对产生做出的理论预言和实验高度相符。但不久后人们便发现更高阶的计算简直是一场灾难：几乎所有的修正都变成了无穷大。人们，特别是 Dirac，在三十年代开始深深怀疑整套量子电动力学理论。直到四十年代晚期人们发展出了能够绕过无穷大以从高阶修正中提取出物理信息的重整化方法后，量子电动力学才重新回归到人们的视野中并在无可比拟的精度上给出了与实验相符的预言。

在人们被高阶修正中的发散所困扰之际，人们发现了第一个介子并发展出了量子场论的新分支，介子场论。四十年代末的人们对处理电磁相互作用的重整化方法寄予了相当高的期望并认为它也能将介子问题处理得很好。但是他们的希望又一次破灭了——不仅在唯象上非常成功的 4-Fermi 理论是不可重整的，Glashow 提出的 4-Fermi 理论对应的“紫外完备理论”因为存在有质量矢量玻色子而同样是不可重整的。虽然在现在的我们看来不可重整性只意味着理论的紫外非完备性并且不可重整理论仍旧可以给出精确的物理预言，但是五十和六十年代的大部分专家都认为量子场论根本没法处理介子散射、核力这样的过程。

人们在六十年代开始了对公理化场论的发展。这套理论旨在寻找这些问题的答案：当我们谈到量子场论时，我们知道自己在说什么吗？我们能够将适用于有限自由度系统的量子力学原理直接用到无穷多自由度的场上吗？他们对第一个问题的答案是“否”，对第二个问题的答案是“是”。接着，他们开始考虑引入其他不会破坏量子力学和狭义相对论原理的公理以处理场论问题，虽然公理化场论在量子场论的“失落年代”里得到了蓬勃发展并取得了一些非平凡的结果，但是它对可观测量的计算却没有多少帮助。直到七十年代，人们对重整化获得了更深的理解、’t Hooft 证明了通过自发对称破缺赋予电弱理论中规范玻色子质量的 Weinberg-Salam 理论的可重整性、量子色动力学的渐近自由性也得到了证明，物理学家才重新拾得了对量子场论的信心并让它蓬勃发展成了今天的模样。

后记

Richard Feynman 的一句“shut up and calculate”早已被绝大多数物理学生奉为圭臬，但是当我们在 calculate 的时候，我们知道自己到底在 calculate 什么吗？在笔者这种对物理学抱有工具主义的怀疑论者看来，我们并不知道，我们也永远无法知道。Hilbert 在退休时所做的豪言壮语“wir müssen wissen, wir werden wissen”（我们必将知道，我们终将知道）只是理想的理性主义者的杜鹃啼血之鸣罢了。在笔者看来，虽然存在一个确定的自然律，但是物理科学只是基于实验现象满足人类对其所生活其中的宇宙本质的好奇心、满足我们对拥有对物理世界的融会贯通的概念的希望的对这个自然律的插值而已；虽然不同的插值方式会拥有不同的精度，但是无论如何插值的结果都不会是自然律本身：我们可以无限趋近于自然律，但是我们得到的结果无论如何在质上都不是真的。那么从这种意义上讲，我们根本就没有理由因自己对现代物理学理论的了解而以傲慢的态度对待那些过时的理论——大家都一样“愚蠢”。无论是 Aristotle 的目的论形而上学、Ptolemy 的本轮均轮还是燃素与以太，这些在受过现代物理学训练的人看来荒诞不经的理论其实都是一个时代的智力佼佼者们的杰作、都是人类为理解自然和宇宙而做的伟大尝试，这些理论都值得我们的尊敬与从当今视角出发的仔细审视，都值得我们去思考为什么在当时的人们看来这些理论会是真的。我们只是比前人积累了更多的知识，而非比他们更聪明。

从这个意义上讲，我们在这里对一段物理学发展史的回顾的意义又不仅限于引言中提到的“从历史视角把握这门学科的内在逻辑与动力并加深自己对这门学科的理解”以及“获得更加立体的认识、开拓物理学视野”了，我们还可以从中获得关于科学增长的认识并根据前人的探索为学科未来的发展寻找灵感。我们可以看到，与现代教科书通行的非常结构化的先介绍场量子化方法，接着从 Lorentz 对称性出发构造电磁场和电子旋量场、导出 Dirac 方程，然后用 Schwinger-Dyson 方程或者 Feynman 路径积分导出 Feynman 规则以引入量子电动力学的连续积累的单线发展方法不同，真实的物理学发展总是充满了逻辑的跳跃与概念的转换：人们在对场进行量子化时甚至还没有理解量子化、在发展量子电动力学时甚至还不理解电子。我们还发现，与二十世纪初的物理学家不同，众多现代物理学家似乎常会对物理学中的本体论和形而上学问题持回避乃至诋毁态度；虽然这的确可以让物理学家集中精力于学科前沿的问题并快速推动学科的发展，但是这似乎背弃了人们做物理以探索自然本质的初心。

在撰写本报告时，笔者的一大缺憾是没能获得足够多的时间与精力来对这段时期内发展辐射的量子论的其它尝试进行了解与总结——我认为这些“不成功”的尝试与我们在这里介绍的作为未来发展的模型的“成功”尝试同样有趣与有意义。因为物理学理论未来发展的基础并不是已有的成功理论而是已有理论的综合[8]，我们应该对各种可能性保持开放的心态。这对于身处高能物理学“盛宴已过”时代的我们而言意义会更加重大，可惜自己只能将这项工作留待以后完成了。

参考文献

[BHJ26] M. Born, W. Heisenberg, and P. Jordan. Zur quantenmechanik. ii. *Zeitschrift für Physik*, 35(8):557–615, 1926.

[BJ25] M. Born and P. Jordan. Zur quantenmechanik. *Zeitschrift für Physik*, 34(1):858–888, 1925.

[Cao08] Tianyu Cao. *20 世纪场论的概念发展*. 上海世纪出版集团, 2008.

[8] 一个例子便是 Copernicus 的日心说。他的理论没有被同时代人立即接受的原因并不在于这一体系与基督教教义相悖（事实上，Copernicus 终生在罗马天主教会担任教士，他甚至将《天球运行论》题献给了当时的教皇保罗三世），而在于他的体系并不像 Ptolemy 体系一样能够做出高度精确的预言并且从各个方面都不能与当时公认的 Aristotle 物理学相容。从这个角度讲，Copernicus 的理论在它被提出时显然是不成功的，但如今我们没人会否认几十年后 Kepler 在 Copernicus 体系的基础上发展出的新一代数理天文学的巨大成功。对这段有趣历史的介绍可以参见 [J.O20] 这本介绍近代科学萌芽阶段的小册子。

[DB27] Paul Adrien Maurice Dirac and Niels Henrik David Bohr. The quantum theory of the emission and absorption of radiation. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 114(767):243–265, 1927.

[DF26] Paul Adrien Maurice Dirac and Ralph Howard Fowler. On the theory of quantum mechanics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 112(762):661–677, 1926.

[DF27] Paul Adrien Maurice Dirac and Ralph Howard Fowler. The quantum theory of dispersion. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 114(769):710–728, 1927.

[DF28] Paul Adrien Maurice Dirac and Ralph Howard Fowler. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 117(778):610–624, 1928.

[DF30] Paul Adrien Maurice Dirac and Ralph Howard Fowler. A theory of electrons and protons. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 126(801):360–365, 1930.

[Ein16] Albert Einstein. Zur quantentheorie der strahlung. *Physikalische Zeitschrift*, 18:121–128, 1916.

[HP29] W. Heisenberg and W. Pauli. Zur quantendynamik der wellenfelder. *Zeitschrift für Physik*, 56(1):1–61, 1929.

[HP30] W. Heisenberg and W. Pauli. Zur quantentheorie der wellenfelder. ii. *Zeitschrift für Physik*, 59(3):168–190, 1930.

[JK27] P. Jordan and O. Klein. Zum mehrkörperproblem der quantentheorie. *Zeitschrift für Physik*, 45(11):751–765, 1927.

[J.O20] Margaret J.Osler. *重构世界*. 商务印书馆, 2020.

[JP28] P. Jordan and W. Pauli. Zur quantenelektrodynamik ladungsfreier felder. *Zeitschrift für Physik*, 47(3):151–173, 1928.

[Kle29] O. Klein. Die reflexion von elektronen an einem potentialsprung nach der relativistischen dynamik von dirac. *Zeitschrift für Physik*, 53(3):157–165, 1929.

[KN29] O. Klein and Y. Nishina. Über die streuung von strahlung durch freie elektronen nach der neuen relativistischen quantendynamik von dirac. *Zeitschrift für Physik*, 52(11):853–868, 1929.

[Pai88] Abraham Pais. *Inward Bound: Of Matter and Forces in the Physical World*. Oxford University Press, 1988.

[Sch26] E. Schrödinger. Quantisierung als eigenwertproblem. *Annalen der Physik*, 386(18):109–139, 1926.

[S.K12] Thomas S.Kuhn. *科学革命的结构*. 北京大学出版社, 2012.

[Wei95] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*, volume 1. Cambridge University Press, 1995.

[Wey23] H. Weyl. *Gravitation und Elektrizität*, pages 147–159. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 1923.

[Wey28] Hermann Weyl. *Gruppentheorie und Quantenmechanik*. S. Hirzel, Leipzig, 1928.

[Wey29a] H. Weyl. Gravitation and the electron. *Proceedings of the National Academy of Sciences - PNAS*, 15(4):323–334, 1929.

[Wey29b] Hermann Weyl. Elektron und gravitation. i. *Zeitschrift für Physik*, 56(5):330–352, 1929.