

恒星物理 & 宇宙学

滕一鸣^a

^a *Université Paris-Saclay*

ABSTRACT: Lecturers: M. Civelli & A. Barthelemy

Contents

1 恒星的形成与演化	1
1.1 星际介质	2
1.2 气体云的稳定性与坍缩过程	3
1.2.1 引力不稳定性判据	3
1.2.2 自由落体和准静态收缩	5
1.3 主序星	8
1.3.1 恒星内部的能量输运	8
1.3.2 赫罗图	10
1.4 末期恒星	11
2 宇宙学	12
2.1 宇宙学原理	12
2.2 红移与 Hubble 定律	12
2.3 广义相对论与 FRW 度规	13
2.4 宇宙学红移	15
2.5 自然单位	15
2.6 相对论宇宙学	16
2.7 宇宙的玩具模型	19
2.7.1 物质主导的宇宙	19
2.7.2 辐射主导的宇宙	20
2.7.3 Λ 主导的宇宙	20
2.8 Λ -CDM 宇宙	21
2.9 宇宙中的距离	22
2.9.1 理论中的距离	22
2.9.2 实验测量的距离	24

1 恒星的形成与演化

恒星起源于星际介质中气体云的坍缩, 而在这一过程中气体云中质子密度 n_{H} 的变化可达 20 个数量级. 在我们所处的银河系中恒星生成的速率大约为 $1M_{\odot}/\text{yr}$, 而在星爆星系 (starburst galaxy) 中这一速率可达 $10M_{\odot} \sim 100M_{\odot}/\text{yr}$. 观测表明, 几个 M_{\odot} 的低质量恒星的形成率高于 $10 \sim 100M_{\odot}$ 的大质量恒星, 并且这可以被恒星形成时的质量分布曲线所刻画, 我们称之为初始质量函数 (Initial Mass Function, IMF) 并且其一般满足

$$\frac{dN}{dM} \sim M^{-2.35}. \quad (1.1)$$

银河系中的恒星存储的能量 (辐射能和机械能) 大约占据了总能量的 $2/3$, 并且恒星还是银河系中重要化学元素的加工厂, 恒星的形成因此便是我们在星系演化之始重点关心的主要过程.

1.1 星际介质

天文观测表明我们银河系的总质量约为 $10^{12} M_{\odot}$, 其中 $2 \times 10^{11} M_{\odot}$ 原子恒星而剩下的质量则主要来自暗物质. 银河系中星际介质的总质量仅占恒星总质量的 3%, 即 $6 \times 10^9 M_{\odot}$; 而其中有 $2 \times 10^9 M_{\odot}$ 属于分子云. 星际介质各组分的质量分数为:

- 氢占据了 78%.
- 氦占据了 21%.
- 粒径 $1 \sim 100 \text{ nm}$ 的尘埃颗粒占据了约 1%.
- 痕量的重元素, 主要为氧, 氮, 碳, 硅.

因此我们可以推断气体云的质量密度满足

$$\rho = \frac{1}{0.78} \rho_{\text{H}} \approx 1.3 n_{\text{H}} m_{\text{H}}. \quad (1.2)$$

其中 n_{H} 为氢原子数密度, 并且我们经常将其称为质子数密度

$$n_{\text{H}} \equiv n(\text{H}) + n(\text{H}^+) + 2n(\text{H}_2). \quad (1.3)$$

根据大爆炸核合成理论, 宇宙中丰度最高的元素为氢, 因而我们会使用数密度与氢元素数密度的比值来衡量元素 X 的丰度, 即

$$\eta(X) \equiv \frac{n(X)}{n_{\text{H}}}. \quad (1.4)$$

我们根据质量密度 (1.2) 可以计算平均质子数

$$\mu \equiv \frac{\rho}{m_{\text{H}} \sum_i n_i}, \quad (1.5)$$

其中 n_i 为星际介质中组分 i 的数密度. 如果气体云是离子云 ($\text{H}, \text{He}^+, \text{He}^{2+}$ 加上电子), 那么 $\mu = 0.64$; 如果是原子云 (H 加上 He), 那么 $\mu = 1.27$; 分子云 (H_2 和 He) 的 μ 则是 2.33.

形成恒星的气体云大多为 $n_{\text{H}} \geq 10^4 \text{ cm}^{-3}$ 以及初始温度 $T \sim 10 \text{ K}$ 的稠密寒冷气体云. 这样的气体云在宇宙中会被宇宙射线中携带 MeV 量级动能的质子加热, 与此同时也会通过其组分尘埃和分子的热辐射冷却. 由于宇宙射线能够轻松穿过星际介质, 因而我们常常会假设热平衡态下的分子云各个部分被均匀地加热并是等温的.

为简便起见, 我们将气体云处理为半径为 R 的球体, 记其表面温度为 $T(R)$ 并且其辐射率为 q , 那么 Stefan-Boltzmann 定律给出热辐射功率为

$$L_q = 4\pi R^2 q \sigma_s T^4(R). \quad (1.6)$$

我们常称辐射率 q 为气体云的透明度 (opacity), 并且根据 Krichhoff 辐射定律这一数值等于气体云对电磁波的吸收率, 而这和气体云中尘埃粒子对电磁波的散射截面有关. 我们不加证明地给出通常使用的平均每个质子给出的尘埃颗粒对波长为 λ 的光的散射截面

$$\sigma_{\text{H}}(\lambda) = \left(\frac{300 \mu\text{m}}{\lambda} \right)^{\beta} \times 10^{-25} \text{ cm}^2, \quad (1.7)$$

其中

$$\beta = \begin{cases} 1, & \lambda \leq 1 \mu\text{m}, \\ 2, & \lambda > 1 \mu\text{m}. \end{cases} \quad (1.8)$$

进而气体云的辐射率便可以估计为气体云表面处的质子数 $\bar{N}_H(R)$ 乘以平均单质子散射截面 σ_H , 并且

$$q = \bar{N}_H(R)\sigma_H \approx \frac{3\bar{n}_H}{10^4 \text{ cm}^{-3}} \frac{R}{0.1 \text{ pc}} \times 10^{-4}, \quad (1.9)$$

其中 \bar{n}_H 为气体云的平均质子密度.

1.2 气体云的稳定性与坍缩过程

星际介质中的分子云是恒星的前体. 一开始, 这些气体云处于吸收的能量等于辐射的能量热力学平衡态并同时处于力学平衡态. 随后气体云会不可避免地受到扰动并出现坍缩: 为简便起见我们可以假设气体云出现的是球对称的径向坍缩. 在这个过程中, 引力势能会转化为组分微粒的动能并使之温度上升; 同时气体云会变得愈发稠密以至于辐射率 q 也会逐渐增大. 随着坍缩的不断进行, 气体云内部的热力学压强会变得足够与引力相抗衡, 终结了近似自由落体的坍缩过程并开启了准静态演化阶段: 此时气体云会缓慢地收缩并利用这一过程释放的引力势能来为其发光发热提供能量.

1.2.1 引力不稳定性判据

Jeans 判据: 密度均匀的情况 最常用的气体云的引力不稳定性判据是 Jeans 判据, 这一判据基于一团质量为 M , 处处温度为 T 的半径为 R 的球对称气体云的能量分析. 我们先假设其密度 ρ 均匀分布.

这团气体的内能为

$$K = \frac{3}{2} N k_B T = \frac{3}{2} \frac{M}{\mu m_H} k_B T, \quad (1.10)$$

注意 M/m_H 给出了气体云的总质子数, 而其除以平均质子数 μ 便会给出平均粒子数 N . 同时系统的引力势能为

$$U = - \int_0^R dr \, 4\pi r^2 \rho \frac{4\pi}{3} \rho r^3 \frac{G}{r} = - \frac{16\pi^2}{3} G \rho^2 \frac{R^5}{5} = - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}. \quad (1.11)$$

Jeans 通过流体静力学的分析指出引力不稳定性要求 $K + U < 0$, 因而引力不稳定时

$$\frac{3}{2} \frac{M}{\mu m_H} k_B T < \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}. \quad (1.12)$$

我们据此可以导出引力不稳定地临界密度为

$$\frac{n_H}{1 \text{ cm}^{-3}} > 788 \frac{T^3}{\mu^3} \left(\frac{1 M_\odot}{M} \right)^2 \sim 3336 \frac{T}{\mu} \left(\frac{0.1 \text{ pc}}{R} \right)^2, \quad (1.13)$$

而这恰能够解释为什么 IMF 中低质量恒星出现的概率更高: 大质量气体云的坍缩会围绕内部的多个密度涨落中心进行并使之破碎为多个低质量小块气体云. 类似的, 我们可以导出

$$M > M_J = \frac{5}{2} \frac{R}{\mu m_H G} k_B T. \quad (1.14)$$

考虑到

$$R = \left(\frac{3M_J}{4\pi\rho} \right)^{1/3}, \quad (1.15)$$

我们便有

$$M_J^{2/3} = \frac{5}{2} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/3} \frac{k_B}{\mu m_H G} \frac{T}{\rho^{1/3}}, \quad (1.16)$$

即

$$M_J \propto \frac{T^{3/2}}{\rho^{1/2}}. \quad (1.17)$$

位力定理：确定密度分布 然而现实世界中气体云的密度并不一定均匀分布，那么我们可以借助位力定理来确定球对称的密度分布的形式。我们再次考虑一个质量为 M ，半径为 R ，温度为 T 的气体云，但是其密度不再均匀分布。根据位力定理，平衡态时这一系统内能与引力能的系综平均满足

$$2K + U = 0. \quad (1.18)$$

我们假设势能的形式¹满足

$$U = -q \frac{GM^2}{R}, \quad (1.19)$$

那么位力定理给出

$$\frac{3M}{\mu m_H} k_B T = q \frac{GM^2}{R}. \quad (1.20)$$

记等温声速为

$$c_s = \sqrt{\frac{k_B T}{\mu m_H}}, \quad (1.21)$$

那么我们便发现

$$\frac{M}{R} = \frac{3c_s^2}{qG} = \text{Const.} \quad (1.22)$$

因而我们得到了积分方程

$$\int_0^R dr \, 4\pi r^2 \rho(r) = \frac{3c_s^2}{qG} R, \quad (1.23)$$

这便给出

$$\rho(r) = \frac{M}{R} \frac{1}{4\pi r^2}. \quad (1.24)$$

根据这一密度分布，我们可以具体计算出系统的引力势能为

$$U = - \int_0^R dr \, 4\pi r^2 \rho(r) \frac{GMr}{Rr} = - \frac{GM^2}{R} \Rightarrow q = 1. \quad (1.25)$$

虽然一般情况下气体云其实不是等温的，但是我们可以根据位力定理来定义平均温度

$$\bar{T} = \frac{G\mu m_H}{3k_B} \frac{M}{R}. \quad (1.26)$$

我们可以将 \bar{T} 视为气体云核心的温度。

¹事实上这也是最符合观测结果的 ansatz.

位力判据 既然位力定理刻画了平衡态的稳定情况, 那么引力不稳定性应该和位力定理不再成立有关. 特别的, 引力坍缩意味着引力势过强, 那么我们便会期待此时

$$2K + U < 0. \quad (1.27)$$

这也就是说此时

$$\frac{M}{R} > \frac{3c_s^2}{qG}. \quad (1.28)$$

具体计算表明, Jeans 判据给出的不稳定半径为

$$R > 1.42c_s\tau_{\text{ff}}, \quad (1.29)$$

其中 τ_{ff} 为后面将要介绍的自由落体时间; 而位力判据则给出

$$R > 1.56c_s\tau_{\text{ff}}, \quad (1.30)$$

可以看到二者相当接近.

绝热假设 我们通常可以假设气体云绝热演化. 理想气体在绝热演化中满足

$$p^{1-\gamma}T^\gamma = \text{Const}. \quad (1.31)$$

记质量密度为 ρ , 那么理想气体状态方程则给出

$$p = \frac{\rho}{\mu m_{\text{H}}} k_B T, \quad (1.32)$$

进而我们有

$$T = C\rho^{-1}p \Rightarrow p \propto \rho^\gamma. \quad (1.33)$$

根据 Jeans 判据, Jeans 质量满足

$$M_J \propto \frac{T^{3/2}}{\rho^{1/2}}, \quad (1.34)$$

进而在绝热演化的假设下

$$M_J \propto \rho^{\frac{3}{2}\gamma-2}. \quad (1.35)$$

如果气体云出现了收缩, 那么 ρ 会增大. 而如果 $\gamma < 4/3$, 那么增大的 ρ 会使得 M_J 减小, 从而密度涨落会使得原本处于临界质量下的气体云到达引力坍缩的临界点并带来引力不稳定性.

1.2.2 自由落体和准静态收缩

气体云达到引力不稳定态并触发坍缩后会依次进入自由落体和准静态收缩两个阶段, 并且会持续以大约 $1 \times 10^{-5} M_\odot/\text{yr}$ 的速率获得质量. 自由落体会使得中心部分密度越来越高以至于最终形成了辐射率近似为 1 从而可以被处理为黑体的第一静流体核心²(the first hydrostatic core), 此后这一核心会准静态地积蓄质量并升高温度直至温度高到能够激发氢分子的振动谱, 而此时系统会再次变得引力不稳定并出现坍缩. 气体云的核心温度会继续升高, 氢分子会解离并使得绝热指数 $\gamma < 4/3$. 渐渐地系统会达到第二个平衡态: 第二静流

²质量约为 $10^{-3} M_\odot$, 半径约为 $100 R_\odot$.

体核心³(the second hydrostatic core), 我们又称之为原恒星 (protostar). 这一核心会从包围它的正在坍缩的气体处获得质量, 同时其核心会如此之高以至于氢原子会发生电离. 渐渐地, 原恒星的质量和半径会达到太阳的量级, 中心温度会达到几百万开尔文: 此时星体内开始出现了核聚变, 我们获得了一颗主序星. 从初态气体云到主序星大约要经历 10^6 年.

自由落体 我们考虑一团孤立的质量为 M , 初始半径为 R_0 的球对称气体云. 考虑半径 r 处 dr 厚球壳内的物质, 其质量为

$$dm = 4\pi r^2 \rho dr. \quad (1.36)$$

在自由落体中这团物质会在引力的单独作用下进行径向运动, 其能量便为

$$dE = \frac{1}{2} \dot{r}^2 dm + \phi(r) dm. \quad (1.37)$$

其中 $\phi(r)$ 为引力势. 我们假设球对称坍缩并且不存在径向对流, 那么在坍缩过程中 dm 球壳内的质量守恒, 其平均密度会按 r^{-2} 增长 (假设位力定理成立).

我们在研究恒星形成时感兴趣的是初态位于半径 R_0 处的最外层球壳的坍缩. 记气体云半径随时间的变化为 $R(t)$, 那么我们根据能量守恒可以得到⁴

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{GM}{R} - \frac{GM}{R_0} \quad (1.38)$$

因此这层球壳上的物质坍缩到球心所需的时间便为

$$\tau_{\text{ff}} = \sqrt{\frac{R_0}{2GM}} \int_0^{R_0} dR \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{R-R_0}} = \sqrt{\frac{\pi^2 R_0^3}{8GM}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}}. \quad (1.39)$$

我们称这一参数为自由落体时间.

自由落体中的引力势能转化为动能, 我们记这一动能为

$$K_{\text{ff}} = \frac{GM^2}{R} - \frac{GM^2}{R_0}, \quad (1.40)$$

这一参数的变化率便为

$$\frac{dK_{\text{ff}}}{dt} = -\frac{GM^2}{R^2} \frac{dR}{dt} \equiv U(R) \frac{\dot{R}}{R}. \quad (1.41)$$

在 $R \ll R_0$ 的自由落体阶段末期, 我们近似有

$$\frac{dK_{\text{ff}}}{dt} \approx -\frac{\pi}{2} \frac{U(R)}{\tau_{\text{ff}}}. \quad (1.42)$$

这一动能的增量会转化为分子热运动动能并最终变成热辐射, 因而这一功率可以被视为辐射亮度

$$L_{\text{ff}} = \frac{dK_{\text{ff}}}{dt} = -\frac{GM\dot{M}_{\text{ff}}}{R}, \quad (1.43)$$

其中我们定义了自由落体质量堆积率 (accretion rate)

$$\dot{M}_{\text{ff}} \equiv -\frac{\pi}{2} \frac{M}{\tau_{\text{ff}}}. \quad (1.44)$$

³质量约为 $10^{-2} M_{\odot}$, 半径约为 $10 R_{\odot}$.

⁴注意我们没有假设密度均匀而是使用了位力定理给出的势能.

静流体核心 引力不稳定的星际介质云在坍缩后会形成一个被自由落体的介质云包围的不透明的核心. 这一等温的核心处于静流体平衡态并能被其质量 M , 半径 R 以及平均质子数 μ 这三个参数所刻画. 这一核心处于平衡态意味着其热辐射功率由自由落体给出的引力势能提供, 因而

$$4\pi R^2 \sigma_S T^4 = \frac{\pi}{2} \frac{GM^2}{R\tau_{\text{ff}}}. \quad (1.45)$$

同时系统处于位力平衡意味着

$$\frac{GM^2}{R} = \frac{3Mk_B T}{\mu m_H}, \quad (1.46)$$

因此我们有

$$GM = \frac{3k_B T}{\mu m_H} R, \quad (1.47)$$

进而我们可以得到静流体核心的半径满足的方程

$$4\pi\sigma_S^2 T^4 R^2 = \frac{\pi}{2} \frac{3k_B T}{\mu m_H \tau_{\text{ff}}} \frac{M}{R}, \quad \tau_{\text{ff}} = \sqrt{\frac{\pi^2 R^3}{8GM}}. \quad (1.48)$$

求解这一方程便可得到

$$R \approx 1.7 \times 10^{-3} \times \frac{T^{-3/4}}{\mu^{5/4}} \text{ pc}, \quad M \approx 10.1 \times 10^{-3} \times \frac{T^{1/4}}{\mu^{9/4}} M_{\odot}. \quad (1.49)$$

准静态收缩 初始质量为 M_0 且初始半径为 R_0 的球对称气体云在准静态收缩过程中会通过辐射损失能量, 其辐射功率为

$$L = 4\pi R^2 \sigma_S T^4(R). \quad (1.50)$$

我们假设 L 保持为常数并且位力定理始终成立, 那么气体云的密度分布满足 $\rho \sim r^{-2}$, 并且其动能满足

$$K = -\frac{1}{2}U = \frac{GM^2}{2R}. \quad (1.51)$$

动能的变化量被辐射所补偿, 因而此时我们有

$$L = \frac{dK}{dt} = \frac{GM^2}{2R} \left(\frac{2}{M} \frac{dM}{dt} - \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right). \quad (1.52)$$

我们定义准静态演化的特征时间 (Kelvin-Helmholtz 时间) 为

$$\tau_{\text{K-H}} \equiv \frac{GM_0^2}{2R_0 L}, \quad (1.53)$$

并且假设的亮度不变要求 $T(R) \sim R^{-1/2}$. 现在我们有

$$\frac{G}{2} \frac{d}{dt} \frac{M^2}{R} = L, \quad (1.54)$$

因此

$$\frac{M^2}{R} - \frac{M_0^2}{R_0} = \frac{2Lt}{G}, \quad (1.55)$$

此即

$$\frac{M^2}{R} = \frac{M_0^2}{R_0} \left(1 + \frac{t}{\tau_{K-H}} \right). \quad (1.56)$$

由于准静态收缩中的特征时间 τ_{K-H} 远大于微观热运动过程的弛豫时间, 因而我们可以认为此时气体云各层均处于热力学平衡态, 并且我们常常会假设这是个绝热过程并满足

$$p \sim \rho^\gamma. \quad (1.57)$$

1.3 主序星

1.3.1 恒星内部的能量输运

刚刚形成的恒星属于主序星, 此时其中央核心处的核聚变主要是通过 pp 链实现的氢-氦聚变:

$$4p \rightarrow {}^4\text{He}, \quad Q = 25.71 \text{ MeV}. \quad (1.58)$$

此时核心密度大约为 $\rho = 150 \text{ g/cm}^{-3}$, 温度为 $T = 1.5 \times 10^7 \text{ K}$, 并且这一过程的反应率正比于 T^4 . 这个反应会把四个质子的质能的 $\epsilon \sim 0.7\%$ 释放为热能, 并且其持续的特征时间 τ_H 叫做主序时间 (main sequence time), 对太阳而言这一时间大约为 10^{10} yr . 注意到核聚变释放的能量 ϵMc^2 大约是引力能 GM^2/R 的 5500 倍, 但是其释放所需的时间为 $\tau_{K-H} \times 10^3$.

我们记 f_H 为组成恒星的物质中参与氢聚变的百分比, 并且假设在 τ_H 内氢聚变发生速率恒定; 那么核聚变提供的功率便为

$$L_n = \frac{\epsilon f_H M c^2}{\tau_H}. \quad (1.59)$$

在平衡态下, 恒星的辐射功率 $L = 4\pi R^2 \sigma_s T^4(R)$ 便应该由 L_n 提供. 对于太阳而言 $T(R) \approx 5800 \text{ K}$ 而 $R = 1R_\odot$, 我们可以估算出

$$f_H \sim 0.1. \quad (1.60)$$

恒星的性质与其质量密切相关. 核心处的聚变反应维持了一个恒定不变的核心温度 \bar{T} , 同时内部的核聚变在时间 τ_H 内以恒定速率 L_n 释放能量并在温度为 $T(R)$ 的表面处将之辐射出去. 此时恒星处于静流体平衡态并且其内部的平均压强满足

$$\bar{p} = -\frac{1}{3} \frac{U}{V}, \quad (1.61)$$

我们常用平均压强来估计其中心压强. 只要恒星中的主导核反应还是氢核聚变, 我们便可认为其核心处于一个恒定的温度. 对于一个主要由热压强对抗引力坍缩的恒星, 我们有如下关系:

$$R \sim M, \quad \rho \sim M^{-2}, \quad L \sim M^3, \quad \tau_H \sim M^{-2}, \quad T(R) \sim M^{1/4}. \quad (1.62)$$

对于大于 $1.2M_\odot$ 的恒星, 其中心温度是如此之高以至于 He 会被进一步通过 CNO 循环聚变为 C, N 和 O; 这一过程的特征时间为 $\tau_{\text{He}} \sim 5 \times 10^8 \text{ yr}$, 并且反应率会正比于 T^{18} .

其中质量-亮度关系 $L \sim M^3$ 对于测量天体的质量而言非常重要, 其推导涉及中心核聚变产生的能量输运到表面的主要机制 (辐射和对流) 中的辐射过程. 根据 Fick 扩散定律, 记光子能量密度为 u 而扩散系数为 D , 那么光子的能流密度满足

$$\frac{L(r)}{4\pi r^2} = -D \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (1.63)$$

假设恒星为黑体, 那么 Stefan-Boltzmann 定律给出

$$u = \frac{4}{c}\sigma_s T^4, \quad (1.64)$$

同时根据扩散理论, D 和光速与平均自由程 ℓ 的关系为

$$D = \frac{1}{3}c\ell, \quad (1.65)$$

进而我们有

$$\frac{L(r)}{4\pi r^2} = -\frac{16}{3}\sigma_s \ell c^2 T^3 \frac{dT}{dr}. \quad (1.66)$$

注意到

$$\ell = \frac{1}{n_H \sigma_\gamma}, \quad (1.67)$$

其中 σ_γ 为 Thompson 散射截面, 并且

$$n_H = \frac{3M}{4\pi\mu m_H R^3}, \quad (1.68)$$

于是

$$\ell = \frac{4\pi\mu m_H R^3}{3\sigma_\gamma M}. \quad (1.69)$$

在恒星表面处我们近似有

$$\frac{L(R)}{4\pi R^2} = -\frac{64\pi\mu m_H \sigma_s c^2 R^3}{9\sigma_\gamma M} T^3 \frac{T}{R}, \quad (1.70)$$

同时根据位力平衡我们有

$$\frac{3Mk_B T}{\mu m_H} = \frac{GM^2}{R} \Rightarrow T = \frac{\mu m_H GM}{3k_B R}, \quad (1.71)$$

进而我们便得到

$$L \sim M^3. \quad (1.72)$$

注意到辐射压⁵

$$p_\gamma = \frac{1}{3}u, \quad (1.74)$$

因而我们根据 Fick 定律还能得到

$$c\ell \frac{\partial p_\gamma}{\partial r} = \frac{L(r)}{4\pi r^2}. \quad (1.75)$$

如果

$$\left| \frac{dp_\gamma}{dr} \right| > \frac{GM\rho(r)}{r^2}, \quad (1.76)$$

⁵星体内的总压强是辐射压和热力学压强之和:

$$p = \frac{1}{3}u + \frac{\rho k_B T}{\mu m_H}. \quad (1.73)$$

那么辐射压足以与引力相抗衡并使得系统能够维持静流体平衡, 这便要求

$$L(r) > 4\pi GM\rho c\ell. \quad (1.77)$$

如果我们定义不透明度 (opacity) 为

$$\kappa = \frac{1}{\rho\ell}, \quad (1.78)$$

那么我们便有

$$L > \frac{4\pi GMc}{\kappa} \equiv L_{\text{edd}}. \quad (1.79)$$

我们称临界亮度 L_{edd} 为 Eddington 亮度.

如果我们假设恒星内部绝热演化, 那么绝热方程

$$T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{Const} \quad (1.80)$$

表明温度梯度应该满足

$$\frac{dT}{dr} = \frac{(1-\gamma)T}{\gamma p} \frac{dp}{dr}. \quad (1.81)$$

而如果实际的温度梯度大于这个关系给出的值, 那么恒星内部将出现对流. 假设对流区域的温度梯度呈线性, 那么它产生的能流密度可以被近似取为

$$F_{\text{conv}} = \rho v_c c_p (T - T_a), \quad (1.82)$$

其中 v_c 为平均对流速度,

$$c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{k_B}{\mu m_H} \quad (1.83)$$

为单位质量热容, T_a 为绝热温度. 特别的, 我们通常有

$$v_c \sim \sqrt{\frac{g k_B T}{\mu m_H}}, \quad (1.84)$$

进而 $F_{\text{conv}} \sim T^{1.5}$. 特别的, 我们可以导出对流开始占主导时的临界亮度

$$L_{\text{conv}}(r) = \frac{64\pi}{3} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{G\mu m_H \sigma_s}{k_B} \frac{m(r)T^3}{\rho\kappa}, \quad (1.85)$$

其中 $m(r)$ 为半径 r 内包围的质量. 因而在低温度且不透明度大的低质量恒星中对流更可能占据主导地位. 一般来说, 恒星内部更靠近核心的部分会存在一个热辐射主导的区域, 而这一区域之外会存在一个对流主导的区域.

1.3.2 赫罗图

恒星所处的演化阶段可以从它在赫罗图 ($L - T$ 关系图) 上的位置中推断出来. 不同质量的恒星会分别以不同的方式趋向于赫罗图上的主序, 并且它们在到达主序后会停留在这里直到核心的氢聚变停止. 根据观测得到的赫罗图, 其主序星的亮度-温度关系为 $L \sim T^8$, 这会给出质量-亮度关系 $L \sim M^4$. 赫罗图中水平演化路径上辐射主导, 而竖直演化路径由对流主导.

1.4 末期恒星

主序星的核心将氢聚变为氦, 而当核心内的氢被耗尽后其内部的辐射压会减小并会导致星体再度收缩. 中心温度会上升并会点燃氦核心外围的氢聚变, 此时发生聚变的体积更大并且亮度更高, 因而辐射压也会更大并使得恒星剧烈膨胀, 而这又会使它的表面温度降低. 此时恒星会离开主序而来到红巨星支: 它会在此停留大约 $0.1\tau_{\text{H}}$. 随着核心温度和密度的升高, 核心中的氦开始参与 $3-\alpha$ 聚变并让恒星在 $0.01\tau_{\text{H}}$ 的时间段内沿着水平分支先向左后向右地水平运动. 氦燃烧殆尽后, 恒星又会收缩并点燃第一壳层内的氦-4 以及第二壳层内的氢, 而这一双壳层燃烧会让恒星在 $10^{-3}\tau_{\text{H}}$ 内沿着红巨星支运动. 红巨星中巨大的温度梯度带来了巨大的对流以及核心与外层的物质交换, 这不仅让它外层有更多重元素还为内层的核聚变补充了燃料. 一旦双壳层聚变的燃料被耗尽, 红巨星会进一步收缩以提高核心密度和温度并开启了最重可达铁的重元素合成, 并且陡峭的温度梯度会造成恒星外层物质的抛射从而让恒星变成了行星状星云. 一旦恒星把所有元素都聚变成了其质量允许的最重的元素, 其内部的核聚变会停止并且会在核心坍缩的同时向外抛射物质, 其核心便会在赫罗图中先向左再向下运动.

这一核心的最终命运和恒星质量有关. 如果恒星初始质量 $M > 8M_{\odot}$, 那么核心会进一步坍缩并形成超新星; 如果 $M < 8M_{\odot}$, 那么核心会收缩直至电子简并压能够与引力相抗衡并形成白矮星. 能形成超新星的核心的临界质量为 Chandrasekhar 极限 $M_{\text{ch}} \approx 1.4M_{\odot}$, 此极限之上电子简并压无法与引力相抗衡, 并会继续坍缩形成中子星或者黑洞.

2 宇宙学

根据观测, 我们的宇宙是均匀且各向同性的. 特别的, CMB 的各向同性暗示了额早期宇宙中等离子体温度 ($\Delta T/T \sim 10^{-6}$) 和密度的均匀性; 对宇宙中大尺度结构的观测亦验证了均匀和各向同性的假设. 同时, 对遥远天体 (一般指遥远的河外星系) 光谱的观测表明其谱线均存在红移, 我们称之为**宇宙学红移 (Cosmological Redshift)**.

根据 Einstein 的广义相对论, 引力起源于时空的几何结构; 同时粒子物理的标准模型普遍被认为在实验所能涉及的能标下成立. 因而, 现代宇宙学基于如下三大基石:

- 宇宙学原理 (Cosmological Principle).
- 广义相对论.
- 标准模型.

2.1 宇宙学原理

宇宙学原理约等于哥白尼原理加上局域各向同性. 所谓哥白尼原理即是称我们所处的地球参考系并不是宇宙的中心, 并且在给定时间处宇宙中各个位置都是建立参考系的同样好的基点; 而局域各向同性便指从宇宙中一点看来其各个方向均互相等价. 因此, **对宇宙中处于任意位置的任意一个观测者而言, 宇宙在任意方向上看起来都完全一样.**

练习

证明在物理上感兴趣的一般情况下, 我们这里指出的宇宙学原理约等于均匀和各向同性假设

2.2 红移与 Hubble 定律

我们一般将天体的宇宙学红移记为 z , 其定义为

$$z + 1 \equiv \frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{ref}}}. \quad (2.1)$$

其中 λ_{ref} 为天体中某一元素特征谱线的参考波长, 而 λ_{obs} 为实际观测到的这一谱线的波长. 对于遥远的天体, z 总是大于零, 这意味着它们总在互相远离. 特别的, Hubble 定律指出这些天体远离我们的速度 v_0 正比于它们与我们的距离 D_0 :

$$v_0 = H_0 D_0, \quad (2.2)$$

其中 H_0 为 Hubble 常数 ($\sim 70 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$), 而下标 0 意味着这些数值都是在当今的值. 我们通常称 v_0 为相对我们的退行速率 (recession velocity) 或 Hubble 速率.

练习: Hubble-Lemaître 膨胀定律

记 t 为宇宙时间, 即某一时刻的宇宙年龄. 假设 Hubble 定律始终成立, 那么我们仍会有 Hubble 定律

$$\vec{v}(t) = H(t) \vec{D}(t). \quad (2.3)$$

证明其仍与宇宙学原理相容:

根据这一 Hubble 定律 ansatz, 我们有

$$\frac{d\vec{D}}{dt} = \vec{v}(t) = H(t)\vec{D}(t), \quad (2.4)$$

$$\vec{D}(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t dt H(t)\right) \vec{D}_0 \equiv a(t)\vec{D}_0. \quad (2.5)$$

其中 $a(t)$ 叫做尺度因子. 我们会采用约定 $a(t_0) \equiv a_0 = 1$, 并且 \vec{D}_0 被称为共动坐标下的位矢, 而 $a(t)\vec{D}_0$ 才是反映了真实物理距离的物理位矢. 特别的, 我们可以根据共动位矢为宇宙建立一个共动坐标系 χ , 那么在共动坐标系中系统的度规便会正比于尺度因子 $a(t)$. 由于我们约定今日的尺度因子 $a(t_0) = 1$, 因而我们会使用天体在今天的物理位置作为建立共动坐标系的标度, 并且我们有 t_0 时共动坐标 χ 等价于物理坐标 $\vec{D}(t_0)$.

2.3 广义相对论与 FRW 度规

根据 (包含宇宙常数项的) Einstein 场方程

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}, \quad (2.6)$$

宇宙中所有物质的能动量张量 $T_{\mu\nu}$ 决定了宇宙的时空结构. 对于理想流体, 其能动量张量的形式十分简单:

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(\varepsilon, p, p, p), \quad (2.7)$$

其中 ε 为总能量密度而 p 为压强. 将宇宙常数项移到等号右边, 我们发现 Λ 的贡献相当于一个能量为正而压强为负的物质, 我们称之为暗能量.

宇宙学原理暗示了宇宙的结构必然是最大对称时空, 因此其度规形式必然为 FRW 度规:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (2.8)$$

其中 $R(t)$ 为空间的曲率半径; $K = -1, 0, +1$, 分别对应双曲, 平坦与球对称时空.

练习

计算二维球面的度规张量.

不过我们会定义坐标 χ 使得

$$R^2(t) \frac{dr^2}{1 - Kr^2} \equiv a^2(t) d\chi^2, \quad (2.9)$$

其中 $a(t)$ 为使得

$$R(t) = R_0 a(t) \quad (2.10)$$

的尺度因子. 进而我们有

$$d\left(\frac{\chi}{R_0}\right) = \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (2.11)$$

积分⁶可得 $r(\chi)$ 为

$$r(\chi) \equiv f_K(\chi) = R_0 \begin{cases} \sin \frac{\chi}{R_0}, & K = +1, \\ \frac{\chi}{R_0}, & K = 0, \\ \sinh \frac{\chi}{R_0}, & K = -1. \end{cases} \quad (2.12)$$

并且我们可以将 FRW 度规的另一形式为

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)[d\chi^2 + f_K^2(\chi)d\Omega^2]. \quad (2.13)$$

值得注意的是, 不同的时空几何会让 $f_K(\chi)$ 有着不同的值域. 我们称 χ 为径向共动距离 (radial comoving distance).

练习: Fun with FRW

1. 考虑某一给定的 χ 值在 FRW 时空中给出的一组曲面 $S_K(\chi)$, 验证 FRW 在 $S_K(\chi)$ 上的诱导度规为

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2 f_K^2(\chi) d\Omega^2. \quad (2.14)$$

2. 验证 $S_K(\chi)$ 上的空间面元为

$$dS_K = a^2(t) f_K^2(\chi) \sin \theta d\theta d\phi. \quad (2.15)$$

3. 验证 $S_K(\chi)$ 的总空间面积为

$$A_K(\chi) = 4\pi a^2(t) f_K^2(\chi). \quad (2.16)$$

在球对称时空中, 由距离原点空间距离最远的点定义的曲面的空间面积为零; 而面积最大的曲面由到原点的距离为最大距离的一半的点给出. 我们也可以计算不同 χ 给出的空间曲面所包含的空间的体积:

$$V_K(\chi) = \int_0^\chi d\chi S_K(\chi) a(t) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} [a(t)\chi]^3, & K = 0, \\ \frac{4\pi}{3} [a(t)R_0]^3 \frac{3}{4} \left(\sinh \frac{2\chi}{R_0} - \frac{2\chi}{R_0} \right), & K = -1, \\ \frac{4\pi}{3} [a(t)R_0]^3 \frac{3}{4} \left(\frac{2\chi}{R_0} - \sin \frac{2\chi}{R_0} \right), & K = +1. \end{cases} \quad (2.17)$$

特别的, 我们据此可以发现, 在球对称时空中包围的体积最大的球面对应着等于零的球面面积.

注意在 Hubble 定律里

$$D(t) = a(t)\chi, \quad (2.18)$$

进而退行速率为

$$\frac{dD}{dt} = \dot{a}(t)\chi = \dot{a}(t) \frac{D(t)}{a(t)}. \quad (2.19)$$

⁶注意我们在积分时不需要考虑积分的边界条件, 因为我们在度规表达式里只需要考虑 χ 和 r 的小幅度变化关系.

进而 Hubble 定律还能被表示为

$$v(t) = \frac{\dot{a}}{a} D(t), \quad (2.20)$$

并且我们有

$$H_0 \equiv \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}. \quad (2.21)$$

2.4 宇宙学红移

现在我们考虑 FRW 度规中光子的红移. 光子的测地线满足

$$ds^2 = 0, \quad (2.22)$$

于是我们在径向会得到

$$cds = a(t)d\chi. \quad (2.23)$$

因而对于一个我们今天观测到的由共动距离位于 χ 的天体发出的光子, 我们有

$$\chi = c \int_{t_{\text{emi}}}^{t_o} dt \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.24)$$

特别的, 我们可以另外假设这一天体在 $t_{\text{emi}} + \delta t_{\text{emi}}$ 发出的光子在 $t_o + \delta t_o$ 时被接收, 那么我们有

$$\int_{t_{\text{emi}} + \delta t_{\text{emi}}}^{t_o + \delta t_o} dt \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_{\text{emi}}}^{t_o} dt \frac{dt}{a(t)} = 0. \quad (2.25)$$

进而我们有

$$\frac{\delta t_o}{a(t_o)} = \frac{\delta t_{\text{emi}}}{a(t_{\text{emi}})}. \quad (2.26)$$

考虑到

$$\delta t = \frac{1}{\nu} = \frac{\lambda}{c}, \quad (2.27)$$

我们便有

$$\frac{\lambda_o}{\lambda_{\text{emi}}} = \frac{a(t_o)}{a(t_{\text{emi}})}. \quad (2.28)$$

考虑到我们规定 $a(t_o) = a(t_0) = 1$, 进而红移因子为

$$z = \frac{1}{a(t_{\text{emi}})} - 1. \quad (2.29)$$

2.5 自然单位

我们在宇宙学中常会利用 Hubble 时间

$$t_{H_0} \equiv \frac{1}{H_0} = \frac{a(t_0)}{\dot{a}(t_0)} \quad (2.30)$$

来衡量宇宙学中各种过程的时间. 而为了衡量空间尺度, 我们会使用 Hubble 半径

$$R_{H_0} = ct_{H_0} = \frac{c}{H_0}. \quad (2.31)$$

2.6 相对论宇宙学

我们可以将 FRW 度规代入到 Einstein 场方程中并得到尺度因子的演化方程, 即 Friedmann 方程:

$$\begin{cases} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2(t) = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon(t) + \frac{\Lambda c^2}{3} - K\frac{c^2}{R^2(t)} \\ \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}[\varepsilon(t) + 3p(t)] + \frac{\Lambda c^2}{3} \end{cases} \quad (2.32)$$

其中

$$R(t) = R_0 a(t). \quad (2.33)$$

注意能动量守恒要求 $T_{\mu\nu}$ 守恒, 即

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.34)$$

进而我们可以得到 (物质的连续性方程)

$$\dot{\varepsilon}(t) + 3H(t)[\varepsilon(t) + p(t)] = 0. \quad (2.35)$$

不过事实上这一方程并不独立于 Friedmann 方程. 为了实际求解 Friedmann 方程, 我们需要的是宇宙中物质的状态方程, 而这会给出 ε 和 p 的关系. 我们可以假设物质 i 状态方程的形式为

$$p_i(t) = w_i(t)\varepsilon_i(t), \quad (2.36)$$

我们还可以进一步假设 $w_i(t)$ 与时间无关, $w_i(t) = w_i$.

对于辐射 (光子, 中微子等极端相对论性粒子, 或者叫热物质), 我们有

$$w_\gamma = \frac{1}{3}. \quad (2.37)$$

对于一般的 (冷) 物质, 其能量密度由静质量主导, 并且

$$\varepsilon = n\gamma mc^2 = nmc^2 + \frac{1}{2}nmv^2 + \mathcal{O}(v^4). \quad (2.38)$$

与此同时其压强由理想气体给出:

$$p = nk_B T. \quad (2.39)$$

鉴于

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3k_B T}{m}, \quad (2.40)$$

我们可以将头两阶能量写作

$$\varepsilon = nmc^2 + \frac{3}{2}nk_B T. \quad (2.41)$$

在冷极限下我们有 $p \sim 0$, 进而此时

$$w_{\text{cold}} = 0. \quad (2.42)$$

我们可以先根据物态方程求解连续性方程 (2.35), 这给出

$$\dot{\varepsilon} + 3(1 + w_i)H\varepsilon = 0, \quad (2.43)$$

于是

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} = -3(1+w_i)\frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.44)$$

进而

$$\frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_0} = \left(\frac{a(t)}{a_0}\right)^{-3(1+w_i)}, \quad (2.45)$$

此即

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 a^{-3(1+w_i)}(t), \quad (2.46)$$

注意我们取了当今的 $a_0 = 1$.

对于均匀的冷物质, 我们有 $w_i = 0$, 进而 $\varepsilon_m \propto a^{-3}$, 这恰好反映了宇宙膨胀对物质的稀释; 而对于光子, $w_i = \frac{1}{3}$ 并且 $\varepsilon_\gamma \propto a^{-4}$, 这则同时反映了空间膨胀带来的稀释和宇宙学红移的影像.

如果我们将 (2.46) 代入第一 Friedmann 方程, 那么我们便有

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}[\varepsilon_m(t) + \varepsilon_\gamma(t) + \dots] + \frac{\Lambda c^2}{3} - K \frac{c^2}{R^2(t)}. \quad (2.47)$$

我们可以将宇宙学常数项诠释为有着常能量密度

$$\varepsilon_\Lambda = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \quad (2.48)$$

的物质⁷, 进而我们可以形式上把第一 Friedmann 方程写作

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}[\varepsilon_m(t) + \varepsilon_\gamma(t) + \varepsilon_\Lambda] - K \frac{c^2}{R^2(t)}. \quad (2.50)$$

现在我们来考虑第二 Friedmann 方程

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} \sum_i (\varepsilon_i + 3p_i). \quad (2.51)$$

可以看到, 如果我们想获得宇宙加速膨胀的预言, 那么我们需要存在某种奇怪的物质以使得 $\varepsilon + 3p < 0$. 特别的, 我们需要这一物质满足 $w_i < -\frac{1}{3}$ 并且我们称之为暗能量. 最经济的做法便是将这一暗能量取作宇宙学常数项 ε_Λ , 并且由此给出的便是现代宇宙学最常用的 Λ CDM 宇宙模型.

在这个宇宙模型中, 宇宙的物质组分包含宇宙常数项, 物质 (冷暗物质, 重子冷物质) 以及辐射. 进而此时两个 Friedmann 方程为

$$\begin{cases} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}[\varepsilon_m(t) + \varepsilon_\gamma(t) + \varepsilon_\Lambda] - K \frac{c^2}{R^2(t)} \\ \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}[\varepsilon_m(t) + 2\varepsilon_\gamma(t) - 2\varepsilon_\Lambda]. \end{cases} \quad (2.52)$$

⁷值得注意的是, 我们可以根据连续性方程得到宇宙学常数对应的压强为

$$p_\Lambda = -\varepsilon_\Lambda = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G}. \quad (2.49)$$

可以看到, 这有着非常奇怪的负压强.

根据第一 Friedmann 方程, 我们可以得到一个守恒量 (我们用 ε 表示总能量)

$$Kc^2 = R^2(t) \left[\frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon(t) - H^2(t) \right] = R_0^2 \left[\frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon_0 - H_0^2 \right]. \quad (2.53)$$

鉴于 K 的取值范围只有 $0, \pm 1$, 进而我们得到了决定宇宙曲率的临界能量密度为

$$\varepsilon_c = \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G}. \quad (2.54)$$

如果总能量恰好等于这个值, 那么我们生活的宇宙在宏观上便有着欧氏几何; 如果 $\varepsilon > \varepsilon_c$, 那么 $K = +1$ 对应球面几何; $\varepsilon < \varepsilon_c$ 则会使 $K = -1$, 对应双曲几何.

现在我们可以将第一 Friedmann 方程改写为

$$H^2 = H_0^2 \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_c} - K \frac{c^2}{R^2} \equiv H_0^2 \Omega_T(t) - K \frac{c^2}{R^2(t)}. \quad (2.55)$$

其中我们定义约化能量密度

$$\Omega_T(t) \equiv \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_c} = \Omega_m(t) + \Omega_\gamma(t) + \Omega_\Lambda + \dots \quad (2.56)$$

其中各物质的约化能量密度随尺度因子的变化行为与原能量密度一致:

$$\Omega_i(t) = \Omega_i(0) a^{-3(1+w_i)}. \quad (2.57)$$

我们常称一个宇宙学模型中的宇宙学参数 (cosmological parameters) 为 $\{\Omega_i, H_0\}$. 我们还可以进一步将第一 Friedmann 方程化为

$$H^2(t) = H_0^2 [\Omega_T(t) + \Omega_K(t)], \quad (2.58)$$

其中

$$\Omega_K(t) \equiv -K \frac{c^2}{R^2 H_0^2}. \quad (2.59)$$

注意 Ω_K 项完全来自时空的几何而与物质无关, 我们并不能将它视为某种能量密度. 特别的, 注意 c/H_0 就是 Hubble 长度 R_{H_0} , 进而我们可以将这一项写作

$$\Omega_K(t) = -K \left[\frac{R_{H_0}}{R(t)} \right]^2, \quad (2.60)$$

即它正比于 Hubble 长度与当今时空空间曲率半径比值的平方.

对于 $t = t_0$, 我们发现在今天

$$\Omega_T(t_0) + \Omega_K(t_0) = 1. \quad (2.61)$$

因而我们可以通过测量今天的总能量密度来获悉宇宙的几何, 反之亦然. 进而 $\Omega_T = 1$ 会给出 $K = 0$ 的欧式时空; $\Omega_T > 1$ 会给出 $K = +1$ 的球面时空; $\Omega_T < 1$ 会给出 $K = -1$ 的双曲时空. 这一时空的宏观几何特征不会随时间改变.

对于第二 Friedmann 方程, 我们可以将其写作

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}[\varepsilon_T(t) + 3p_T(t)] = -\frac{1}{2}H_0^2 \sum_i (1 + 3w_i)\Omega_i(t). \quad (2.62)$$

不过它并不独立于第一 Friedmann 方程与物态方程, 进而我们不必过度关注它.

既然我们知道物质能量密度的演化满足

$$\Omega_i(t) = \Omega_i(t_0)a^{-3(1+w_i)}(t), \quad (2.63)$$

进而随着宇宙的演化, 我们会先后经历辐射主导, 物质主导以及宇宙常数主导的截断. 从辐射主导到物质主导的转换点叫做物质-辐射平衡点, 我们记对应的时间为 t_{eq} 并且此时 $\Omega_m(t_{\text{eq}}) = \Omega_\gamma(t_{\text{eq}})$, 对应的尺度因子为 a_{eq} , 而对应的红移为 z_{eq} . 根据当今的观测值, 我们可以计算得到 $a_{\text{eq}} \sim 2.7 \times 10^{-4}$, 对应红移为 $z \sim 3749$, 这大于 CMB 的红移 (~ 1100). 类似的, 我们可以计算得到物质- Λ 平衡点, 这对应的 $a \sim 0.75$, 红移为 $z \sim 0.3$. 我们活在 cosmological constant era.

2.7 宇宙的玩具模型

我们现在根据物质组分的不同来考虑宇宙的几个玩具模型.

2.7.1 物质主导的宇宙

第一个玩具模型中的宇宙被普通的物质所填充. 特别的, 如果物质组分的能量密度恰好为临界值 ($\Omega_{\text{matter}}(0) = 1$), 那么宇宙在几何上便是平坦的, 这种宇宙模型便叫做 Einstein-de Sitter 宇宙 (EdS 宇宙). 根据 Friedmann 方程, 我们便有

$$H^2(t) = H_0^2 \Omega_{\text{matter}}(a) = H_0^2 a^{-3}, \quad (2.64)$$

$$a\dot{a}^2 = H_0^2 \Rightarrow \sqrt{a}\dot{a} = H_0, \quad (2.65)$$

$$\frac{2}{3}a^{3/2} = H_0 t + C. \quad (2.66)$$

为了确定积分常数的值, 我们注意到存在一个 $t = 0$ 使得宇宙的尺度因子 $a(t = 0) = 0$, 此即大爆炸的起点, 并且在这一时间原点的选择下尺度因子的演化满足

$$a^{3/2} = \frac{3}{2}H_0 t. \quad (2.67)$$

考虑到我们规定当今时刻 $t_0 = \frac{2}{3H_0} = \frac{2}{3}t_{H_0}$ 时 $a(t_0) = 1$, 进而我们有

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}. \quad (2.68)$$

特别的, 这里的 t_0 给出了 EdS 宇宙模型中当今宇宙的年龄.

关键结论

物质主导的阶段中 $a \propto t^{2/3}$.

2.7.2 辐射主导的宇宙

我们考虑辐射主导的宇宙, 并且此时的能量密度也是临界能量密度, 继而此时

$$H^2(t) = H_0^2 a^{-4}. \quad (2.69)$$

将 $a = 0$ 的时刻取作时间原点, 我们便得到

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}, \quad t_0 = \frac{1}{2}t_{H_0}. \quad (2.70)$$

关键结论

辐射主导的阶段中 $a \propto t^{1/2}$.

2.7.3 Λ 主导的宇宙

我们考虑正宇宙常数 $\Lambda > 0$ 主导的宇宙 (dS 宇宙)⁸, 并且此时的能量密度也是临界能量密度. 于是

$$H^2(t) = H_0^2, \quad (2.71)$$

这便给出

$$\ln \frac{a(t)}{a(T_0)} = H_0(t - T_0), \quad (2.72)$$

$$a(t) = a(T_0)e^{H_0(t-T_0)}. \quad (2.73)$$

特别的, 我们发现此时不存在某个有限的初始时间 T_0 使得尺度因子等于零. 这个宇宙中在有限的过去内不存在大爆炸. 此时我们会选用当今时间 t_0 作为确定 T_0 的参考点, 进而

$$a(t_0) = 1 = e^{H_0(t_0-T_0)} \Rightarrow T_0 = t_0, \quad (2.74)$$

$$a(t) = e^{H_0(t-t_0)} = e^{\frac{t-t_0}{t_{H_0}}}. \quad (2.75)$$

关键结论

宇宙常数主导的阶段中 $a \propto e^{t/t_{H_0}}$.

练习

考虑由某种流体 α 主导的能量密度为临界值的平坦宇宙, 假设该流体的能量密度表现为 $\Omega_\alpha(a) \propto a^{-n}$, 计算这个宇宙中 $a(t)$ 与 t 的关系.

⁸负宇宙常数主导的宇宙被称为 AdS 宇宙

2.8 Λ -CDM 宇宙

观测表明我们所处的宇宙中 $|\Omega_{K,0}| \leq 10^{-3}$, 进而我们在绝大多数情况下都可以将其忽略. 同时观测给出

$$\Omega_{m,0} \approx 0.3, \quad \Omega_{\Lambda} \approx 0.7, \quad \Omega_{\gamma,0} \approx 8 \times 10^{-5}. \quad (2.76)$$

尽管 $\Omega_{\gamma,0}$ 的当今值很小, 但是它在过去可能发挥重要的作用并且我们不能将其忽略. 现在我们有

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0 \sqrt{\Omega_{\Lambda} + \Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{\gamma,0}a^{-4}} \equiv H_0 E(a). \quad (2.77)$$

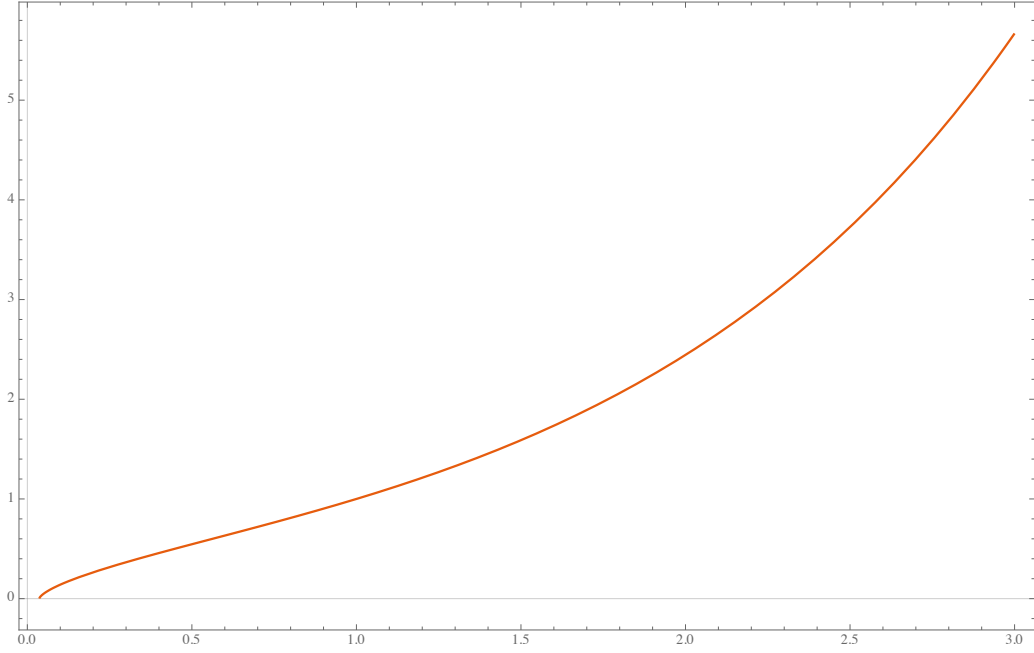


Figure 1. 数值求解 (2.77) 得到的 Λ -CDM 宇宙中尺度因子随时间的演化, 其中我们取当今时刻 $t_0 = 1$.

特别的, 我们据此可以计算得到任一时刻宇宙的年龄为 (假设存在大爆炸)

$$t = t_{H_0} \int_0^a \frac{da}{aE(a)}, \quad (2.78)$$

特别的, 宇宙的当今年龄便为

$$t_0 = t_{H_0} \int_0^1 \frac{da}{aE(a)}. \quad (2.79)$$

练习

在 $K = 0$ 的平坦的 EdS 宇宙, 辐射主导的宇宙以及前面由 Λ 主导的宇宙中计算 t_0 .

解答

我们可以考虑一般情况下 $\Omega \propto a^{-n}$ 的物质, 此时

$$t_0 = t_{H_0} \int_0^1 \frac{da}{a^{1-n/2}} = t_{H_0} \int_0^1 da a^{\frac{n-2}{2}}. \quad (2.80)$$

对于 $n \geq 0$, 我们有

$$t_0 = \frac{2}{n} t_{H_0}. \quad (2.81)$$

对于 $n < 0$ 的情况, 我们有

$$t_0 = t_{H_0} \int_0^1 \frac{da}{a} \rightarrow \infty. \quad (2.82)$$

进而此时宇宙不存在大爆炸.

2.9 宇宙中的距离

在目前的观测宇宙学中几乎所有的观测信息都只能通过光子传递. 光子在时空中沿零测地线运动, 进而根据 FRW 度规我们应该有

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)[d\chi^2 + f_K^2(\chi)d\Omega^2] = 0. \quad (2.83)$$

2.9.1 理论中的距离

径向距离 第一个常用的距离为径向距离 (radial distance), 其中我们记二者的径向共动距离为

$$D_c = \int_0^{D_c} d\chi, \quad (2.84)$$

那么其径向 (物理) 距离便为

$$D_{\text{physics}}(t) = a(t) D_c. \quad (2.85)$$

考虑到光子满足

$$d\chi = \frac{c}{a(t)} dt, \quad (2.86)$$

进而

$$D_c = c \int_t^{t_f} \frac{dt}{a(t)} \Rightarrow D_{\text{physics}}(t) = a(t) c \int_t^{t_f} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.87)$$

其中 t_i 为光子从源天体发射的事件, t 是我们今天接收到光子的时间.

注意到我们可以将径向共动距离的测度改写为

$$\frac{dt}{a(t)} = \frac{da}{a\dot{a}} = \frac{da}{a^2 H(a)} = \frac{da}{a^2 H_0 E(a)}, \quad (2.88)$$

进而我们有

$$D_c = \frac{c}{H_0} \int_{a(t_i)}^1 \frac{da}{a^2 E(a)} = R_{H_0} \int_{a(t_i)}^1 \frac{da}{a^2 E(a)}. \quad (2.89)$$

注意到我们可以根据测得的红移 z 计算得到

$$a(t_i) = \frac{1}{z+1}, \quad (2.90)$$

这一表达式便给出了使用观测结果计算共动距离的方案; 特别的, 我们可以将径向共动距离记作红移的函数 $D_c(z)$. 我们甚至可以将整个积分变量换成红移 z 并得到

$$D_c(z) = R_{H_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)}. \quad (2.91)$$

特别的, 注意到我们当今 $a(t_0) = 1$, 并且在今日我们有

$$D_{\text{physics}}(t_0) = D_c(z) = R_{H_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)}. \quad (2.92)$$

而在光子被发出时, 星系离我们的物理距离为

$$D_{\text{physics}}(t_e) = a(t_e)D_c(z) = a(t_e)D_{\text{physics}}(t_0) = \frac{1}{1+z}D_{\text{physics}}(t_0). \quad (2.93)$$

宇宙学视界 我们可以计算在大爆炸时刻发出的光子能够传播的距离, 这便会给出宇宙学视界 (或称为宇宙学粒子视界): 被视界分隔的两个天体在宇宙的历史中不可能有任何因果联系. 我们可以直接计算得到 t 时刻视界的共动尺寸为

$$\chi_{\text{hor}}(t) = c \int_0^t \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.94)$$

注意到我们可以将其变形为

$$\begin{aligned} \chi_{\text{hor}}(t) &= \int_0^a \frac{c}{a\dot{a}} da = c \int_0^a \frac{da}{a^2 H(a)} \\ &= \frac{c}{H_0} \int_0^a \frac{da}{a^2 E(a)} = R_{H_0} \int_0^a \frac{da}{a^2 E(a)}, \end{aligned} \quad (2.95)$$

其中我们引入了 Hubble 半径并且根据第一 Friedmann 方程引入了

$$E(a) = \sqrt{\sum_{i \in \text{物质组分}} \Omega_i(a) + \Omega_K(a)}. \quad (2.96)$$

于是我们可以得到 t 时刻视界的物理尺寸

$$D_{\text{hor}} = a(t)R_{H_0} \int_0^a \frac{da}{a^2 E(a)}. \quad (2.97)$$

注意, 根据我们的约定, 今日的 $a(t_0) = 1$ 进而共动尺寸数值上等于物理尺寸. 不过很多时候对视界的计算可以根据红移参数 z 进行, 此时我们只需考虑

$$a = \frac{1}{1+z} \Rightarrow \frac{da}{a^2 E(a)} = -\frac{dz}{E(z)}, \quad (2.98)$$

进而

$$\chi_{\text{hor}}(t) = R_{H_0} \int_{z(t)}^{+\infty} \frac{dz}{E(z)}. \quad (2.99)$$

练习

1. 计算在物质主导的 EdS 宇宙中今日视界的大小.
2. 计算 $\Lambda - \text{CDM}$ 模型中 z_{CMB} 处的视界的物理尺寸.
3. 计算 $\Lambda - \text{CDM}$ 模型中今日视界的尺寸.
4. 在一个充斥着 $\Omega(a) \propto a^{-3(1+w)}$ 的宇宙中计算视界大小, 说明 $w \leq -\frac{1}{3}$ 时视界会发散: 这表明了无穷大的因果联系范围.

上述练习表明如果早期宇宙曾被 $w \leq -\frac{1}{3}$ 的物质主导, 那么 CMB 的视界问题可以得到解决: 这带来了暴胀的概念.

宇宙学中的另一个视界概念是宇宙学事件视界, 这给出了今日的两个天体能通过光线产生因果联系的最远距离. 显然我们有

$$\chi_{\text{eve}} = c \int_{t_0}^{t_\infty} \frac{dt}{a(t)} = R_{H_0} \int_1^\infty \frac{da}{a^2 E(a)}. \quad (2.100)$$

在 $\Lambda - \text{CDM}$ 模型中, 这一数值大约为 4885.15 Mpc.

2.9.2 实验测量的距离

无论是共同距离还是物理距离都仅仅存在于理论计算之中. 而观测宇宙学能给我们的往往只是角直径距离 (angular diameter distance) 或亮度距离 (luminosity distance).

角直径距离 实验可以观测到一个天体在天球上投影出的角度大小 θ . 如果我们能在理论上推断天体本身的尺度 ℓ , 那么我们便得到一个可供使用的距离定义

$$D_A \equiv \frac{\ell}{\theta}. \quad (2.101)$$

此即角直径距离. 为了在角直径距离与宇宙学模型里的共动/物理距离间转换, 我们可以考虑在理论上计算 FRW 宇宙中共动坐标 χ_z 处的红移为 z 的固定天体的角距离理论值. 那么我们根据 FRW 度规便有

$$d\ell^2 = a^2(t_z) f_K^2(\chi_z) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.102)$$

不妨取 $\phi = 0$ 并将天体想象成沿 θ 方向的棒棒, 于是

$$\ell = a(t_z) f_K(\chi_z) \theta. \quad (2.103)$$

这个 θ 值与我们观测到的 θ 一致, 因此我们有

$$D_A = a(t_z) f_K(\chi_z) = \frac{f_K(\chi_z)}{1+z}. \quad (2.104)$$

值得注意的是, 在 $K = 0$ 的欧氏宇宙里 $f_K(\chi_z) = \chi_z$, 因而角直径距离等于物理距离.

练习

1. 在物质主导的 EdS 宇宙里计算临界红移值 z_c 使得 $z > z_c$ 的天体的退行速度超过光速.
2. 在辐射主导的宇宙里计算上述问题.
3. 在 EdS 宇宙中, 如果有一个 $z = z_c = 3$ 的天体在今天朝我们发射光子, 那么我们能否在未来收到它? 如果可以, 我们会在多久后收到?
4. 计算 EdS 宇宙的年龄.

亮度距离 在日常生活中, 一个本征亮度为 L_s 的点源在距离 d 处的测得到光通量为

$$\mathcal{F} = \frac{L_s}{4\pi d^2}. \quad (2.105)$$

因而, 如果我们能够在理论上确定某个天体的本征亮度并在实验上测量其通量, 我们便可以定义亮度距离为

$$D_L = \sqrt{\frac{L_s}{4\pi\mathcal{F}}}. \quad (2.106)$$

为了在理论上确定这一距离与其它距离参数的关系, 我们需要注意 L_s 与 \mathcal{F} 的定义所基于的参照系并不相同: 记天体的固有时为 t_s 而我们观测者的为 t_o , 那么

$$L_s = \frac{dE_{\text{emi}}}{dt_s}, \quad L_o = \mathcal{F}S = \frac{dE_{\text{obs}}}{dt_o}. \quad (2.107)$$

其中 S 为传感器大小. 假设天体的辐射谱单色, 那么宇宙学红移使得天体发射的 $\delta E_{\text{emi}} = h\nu_{\text{emi}}$ 光子的能量的观测值为

$$\delta E_{\text{obs}} = h\nu_{\text{obs}} = \frac{h\nu_{\text{emi}}}{1+z} = \frac{\delta E_{\text{emi}}}{1+z}. \quad (2.108)$$

又注意到

$$\frac{\delta t_s}{\delta t_o} = \frac{a(t_s)}{a(t_o)} = \frac{1}{1+z}, \quad (2.109)$$

故我们发现

$$\frac{L_s}{L_o} = (1+z)^2. \quad (2.110)$$

在观察者系中, 我们看到的便是一个亮度为 $L_o = \frac{L_s}{(1+z)^2}$ 的天体均匀地将能量散发到中心位于天体的共动坐标 χ_s 处的球面 Σ 上. 鉴于其面积为

$$S_\Sigma = 4\pi a^2(t_o) f_K^2(\chi_s) = 4\pi f_K^2(\chi_s), \quad (2.111)$$

我们便有

$$\mathcal{F} = \frac{L_o}{4\pi(1+z)^2 f_K^2(\chi_s)}. \quad (2.112)$$

于是我们发现

$$D_L = (1+z) f_K(\chi_s) = (1+z) f_K(D_{\text{phy},s}). \quad (2.113)$$

我们可以观察到对偶关系

$$D_L = (1+z)^2 D_A. \quad (2.114)$$

这其实在一般的度规下也成立.

人们在实验上常常通过测光来拟合处各个天体的 D_L 并进而计算宇宙学参数. 不过我们永远无法测量天体在全波段的完整亮度, 因此需要引入 K -修正. 为了定义亮度, 人们要么用相对星等 (apparent magnitude) m 要么用绝对星等 M . 相对星等选择某颗恒星的通量作为参考通量 \mathcal{F}_{ref} , 而一颗通量为 \mathcal{F} 的天体的相对星等便为

$$m \equiv -2.5 \log_{10} \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}_{\text{ref}}}. \quad (2.115)$$

最常用的参考星为织女星 (α -Lyrae). 绝对星等的定义则是设想的天体距离我们 10 pc 时的相对星等. 我们可以定义距离模 (distance modulus) 为

$$\mu \equiv m - M, \quad (2.116)$$

那么我们根据星等的定义便有

$$\mu(z) = 5 \log_{10} \frac{D_L(z)}{10 \text{ pc}} = 5 \log_{10} \frac{D_L(z)}{1 \text{ Mpc}} + 25. \quad (2.117)$$

宇宙中 $\mu(z) \sim z$ 的关系与诸宇宙学常数有关, 其关系图叫做 Hubble 图.