Introduction to Particle Mesh Method

Yiming

February 18, 2025

1 粒子网格方法

我原本计划是通过粒子网格方法模拟从高红移开始到红移为 0 的宇宙大尺度结构，期望看到宇宙的纤维状结构，不过经过调研发现这个问题无论是在物理角度以及数值模拟角度都有一定难度。因此我将主要的精力放在了粒子网格方法的构建上，运行了一个星系并合的例子，并试图通过对牛顿引力下高斯扰动的均匀密度点粒子的模拟探究纤维形成。

代码部分包括本 pdf 文件，星系并合代码 HW4_GalaxyMerger.ipynb 代码，星系并合结果 Merger.gif；纤维模拟代码 HW4_Web.ipynb 和结果 Web.gif。

1.1 粒子网格方法的实现思路

粒子网格方法目的是为了解决 N 体问题，N 个粒子之间的相互作用会自然携带着 $\mathcal{O}(N^2)$ 的时间复杂度代价，导致我们无法通过数值模拟精确求解。粒子网格方法通过将粒子转记为密度，求解泊松方程的方式来计算粒子下一步的演化。粒子网格方法避免了直接求解 N 个粒子的相互作用，而是求解网格格点内的泊松方程问题，记每维度网格格点数目为 M，那么时间复杂度是与 M 相关的，考虑到 M 远小于 N，这种计算代价我们可以接受。

我构建了基于傅立叶变换的粒子网格方法，代码中写为 ParMesh 类。粒子网格方法的步骤分为四步，如下所示，

1. 将粒子的质量分摊到背景网格中，获得密度场。本部分我采取的窗函数是一个与格点立方体等大的正方体块。对应 ParMesh 类的 Par2dens 函数。

2. 通过求解泊松方程，获得引力势场，进而计算加速度场。关于泊松方程的求解，我采取傅立叶变换方式求解。对应 ParMesh 类的 dens2phi 和 phi2acc 函数。

3. 将网络格点加速度场组合归还给粒子。这里的窗函数仍然是第一步相同的窗函数，为了保证牛顿第三定律。对应 ParMesh 类的 acc2par 函数。

4. 更新粒子的位置与状态，这里采取蛙跳法。对应 ParMesh 类的 forward 函数。

接下来分为三个部分，第一个部分是模拟选用的无量纲化方式；第二个部分是星系并合的数值模拟展示，为了粗浅验证方法是否正确；第三部分简要总结了与我宇宙纤维模拟的目标还差多少以及我目前基于牛顿引力的，高斯扰动的均匀密度场演化的结果示例。

1.2 无量纲化方式

首先对系统进行无量纲化，我们规定，

$$\tilde{r} \equiv \frac{r}{r_0} \quad \tilde{m} \equiv \frac{m}{m_0} \quad \tilde{t} \equiv \frac{t}{t_0} \tag{1}$$

其中，

$$t_0 = \left(\frac{Gm_0}{r_0^3}\right)^{-1/2} \tag{2}$$

对应的，我们都可以将物理量 v 定义为无量纲量 $\tilde{v}$。此时，泊松方程写为，

$$\nabla_{\tilde{r}}\tilde{\phi} = 4\pi\tilde{\rho} \tag{3}$$

以及我们的加速度公式写为，

$$\tilde{a} = \frac{\mathrm{d}\tilde{\phi}}{\mathrm{d}\tilde{r}} \tag{4}$$

为了与其他结果做对照，这里我们并不选取 $G = 1$，而是选取 $G = 1/4\pi^2$，可等效视为模拟中的质量要变大为现实的 $4\pi^2$ 倍。

$$m_0 = \frac{10^{10}}{4096} M_\odot \times G^{-1} \tag{5}$$

这里的 4096 意味我们将一个星系质量均摊到 4096 个粒子上。

$$r_0 = 1\,\mathrm{kpc} \tag{6}$$

如果我们选取 m_0 和 r_0 如上，此时的时间单位为，

$$t_0 = 0.05\,\mathrm{Myr} \tag{7}$$

我们把每个粒子的质量都固定为 $m = 1$；三维网格的空间尺度设置为 $x = 512$，每维度网格精度设为 512；时间我们积分 $t \in (0, 8)$，步长为 $\Delta t = 0.1$。选取不同的引力常数 G，我们所研究的时间尺度就意味着不同。

1.3 双星系并合的模拟

我们采取的星系是一个球对称星系，径向密度服从幂律，速度分布认为有一个速度弥散，具体参数选取与初态生成参考了项目[1]。最终得到的结果上传为 Merger.gif 文件。

1.4 宇宙纤维模拟

为了实现宇宙大尺度结构模拟，我目前想到要改两个非常重要的地方，第一个地方是此时应该谨慎考虑宇宙学效应，即我们的泊松方程不在是牛顿力学的形式，而应该改为，

$$\nabla_r^2\phi = 4\pi G\rho(r) \tag{8}$$

这里的 r 是物理坐标，转化为共动坐标 x 下，记尺度因子为 a，结果应为，

$$\nabla_x^2\phi = 4\pi Ga^2\rho(ax) \tag{9}$$

进而需要引入宇宙学参数探讨 a 如何演化。将密度 ρ 写为，

$$\rho \equiv \bar{\rho} + \Delta\rho \tag{10}$$

并定义，

$$\delta \equiv \frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}} \tag{11}$$

这里的 $\bar{\rho}$ 为宇宙饱和密度。除了均匀密度场造成的引力势外，密度扰动对引力势的贡献 $\Delta\phi$ 为，

$$\nabla^2\Delta\phi = \frac{3H_0^2}{2a}\Omega_{m,0}\delta \tag{12}$$

然后的话要修改泊松求解的部分，并妥善处理宇宙饱和密度。

第二个问题是，我需要妥善给出宇宙学初始状态，目前我还不是调研的很明白，所以这部分我就完全没有实现。我对它的目前的理解在于，密度涨落 δ 应该写成一个空间频率频谱的形式，即 δ_k，然后在演化过程中某些空间频率长起来了，从而带来了孔洞与纤维的结构，所以我猜测初始条件，即某种密度涨落的引入也应该是通过 δ_k 来引入的，目前我应该是没有解决这个问题。

所以我尝试做一个超级简化版纤维模拟，即我认为密度是均匀的，按照均匀密度来随机生成粒子，我在 $512 \times 512 \times 512$ 的网格中生成了 8192 个粒子，这引入了某种我不太可控的随机涨落。并且我给了每个粒子一个服从高斯分布的各向同性的初始的微小的速度。

初态与终态结构如图 (1) 和如图 (2)，比起初始状态，终态确实也出现了孔洞与纤维状结构的征兆 (不过这或许与宇宙学角度的结构并没有什么关系)。我也将形成的 Web.gif 一并附上。

[1] https://github.com/BetaGem/N-body-galaxy

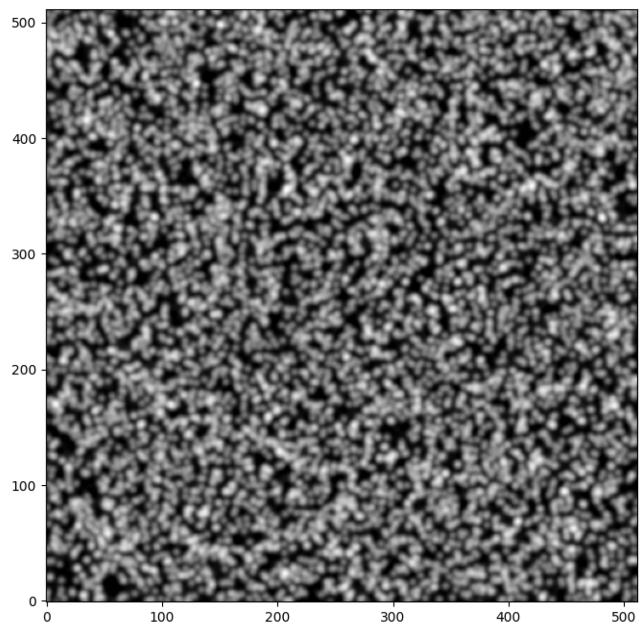

Figure 1: 纤维模拟初态

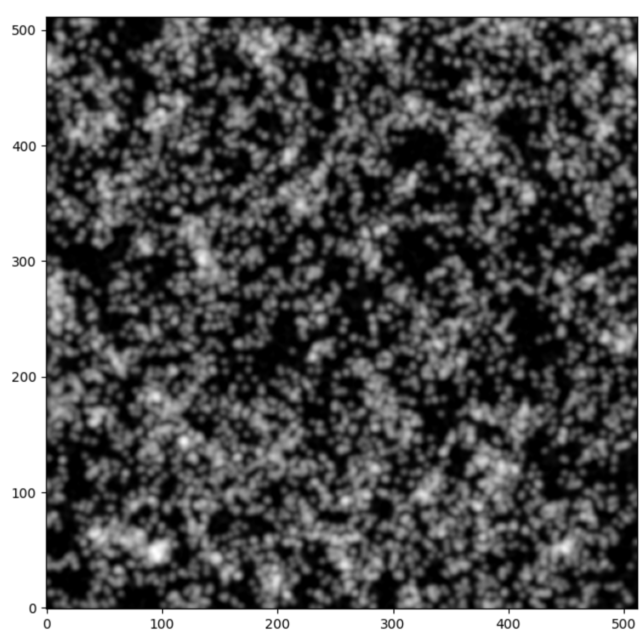

Figure 2: 纤维模拟终态