Introduction to Finite Element Method

Yiming

February 18, 2025

1 有限元方法

采用有限元方法求解如下椭圆方程，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = v(x,y), \quad u|_{x=\pm 1} = u|_{y=\pm 1} = 0 \tag{1}$$

其中，

$$v(x,y) = \Theta\left(0.25 - \sqrt{x^2+y^2}\right) \tag{2}$$

对应的拉格朗日量密度写为，

$$\mathcal{L} \equiv -(\nabla u)^2 + 2uv \tag{3}$$

我们希望最大化，

$$V[u] = \int \mathrm{d}x \mathcal{L} \tag{4}$$

关于网络，为确保分片线性，我们考虑结构网络为三角形，如图 (1)。从而 u 可以定义为，

$$u \equiv \sum_i^N u_i \phi_i(x,y) \tag{5}$$

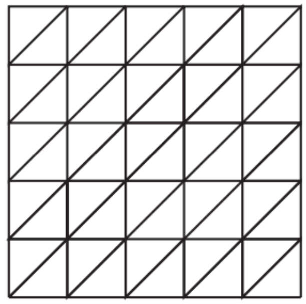
其中 N 为我们选取网络格点的数目，u_i 是我们的待定参数 (parameter)，$\phi_i(x,y)$ 为形函数 (shape function)。

我们考虑构成一最小三角形的三点 $A(x_a,y_a)$，$B(x_b,y_b)$ 和 $C(x_c,y_c)$。在该三角形内，对于点 A 形函数设为，

$$\phi_A(x,y) = px + qy + t \tag{6}$$

其应该满足的约束条件为，

$$\phi_A(x_a,y_a) = 1, \quad \phi_B(x_b,y_b) = 0, \quad \phi_C(x_c,y_c) = 0 \tag{7}$$



(b) 准结构网格

Figure 1: 网格划分示例，图摘自课程讲义

带入求得形函数为，

$$\phi_A(x_a, y_a) = \frac{(y_b - y_c)x + (x_c - x_b)y + x_b y_c - y_b x_c}{(y_b - y_c)x_a + (x_c - x_b)y_a + x_b y_c - y_b x_c} \equiv \frac{S_{PBC}}{S_{ABC}} \tag{8}$$

其中记 P 点为 (x, y)，S_{PBC} 和 S_{ABC} 分别为三角形 PBC 和 ABC 的面积。从而，点 A 的形函数自然得到定义。

2 刚度矩阵与载荷向量

对于有限元法，我们需要求解刚度矩阵与载荷向量，将偏微分方程问题转化为一个线性方程求解问题。

刚度矩阵 (stiffness matrix) 与载荷向量定义如下：

$$A_{i,j} = \int \nabla\phi_i \nabla\phi_j \mathrm{d}S \tag{9}$$

$$L_i = u_i \int \phi_i(x, y) \cdot v(x, y) \mathrm{d}S \tag{10}$$

其中 i, j 为我们网格格点的一维索引，因此刚度矩阵 $A_{i,j}$ 是一个 $N \times N$ 的矩阵，而载荷向量为一个 N 维的向量，我们希望求解的是如下的线性问题：

$$Au = L \tag{11}$$

我们注意到，无论是刚度矩阵还是载荷向量，它们的各个元素都是对积分域的面积分，因此，我们可以按照我们划分的各个三角形面元，计算各个三角形面元对于各个元素的贡献，累计起来即为全局的刚度矩阵与载荷向量。

考虑单个三角形面元，逆时针排序相邻的三个点 A，B，C。由于之前形函数类似于“正交性”的性质，我们知道这一三角形面元仅对于顶点相关的刚度矩阵有关，因此我们可以定义一个局部刚度矩阵，即 $A_{i,j}$, $i, j = A, B, C$。局部刚度矩阵是一个 3×3

矩阵，考虑我们的结构划分，经过进一步计算，这一局部刚度矩阵各元素为，积分计算得，

$$A_{i,i} = \frac{1}{4S_{ABC}}\left((x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2\right) \tag{12}$$

$$A_{i,j} = \frac{1}{4S_{ABC}}\left((x_j - x_k)(x_j - x_i) + (y_j - y_k)(y_k - y_i)\right) \tag{13}$$

这是一个三角形面元对于整个刚度矩阵的贡献，我们将局部刚度矩阵各元素对应到加到全局刚度矩阵上，遍历整个面元序列即可得到刚度矩阵。

之后计算负载向量 (load vector)，负载向量定义为一个 N 维矢量，各元素定义为，

$$L_i = u_i \int \phi_i(x,y) \cdot v(x,y)\mathrm{d}S \tag{14}$$

反复做数值积分并不现实，我们采取插值方法计算上述积分近似值，

$$L_i = u_i \bar{v}_i S \tag{15}$$

其中 S 为单个有限元面积，$\bar{v}_i$ 采取如下估计方式，

$$\bar{v}_i = v\left(\frac{x_i + x_j + x_k}{3}, \frac{y_i + y_j + y_k}{3}\right) \tag{16}$$

对于我们选取的结构划分，我们计算到，单个三角形面元 ABC 对于各个顶点的载荷向量元素的贡献为，

$$\frac{1}{3} v\left(\frac{x_i + x_j + x_k}{3}, \frac{y_i + y_j + y_k}{3}\right) S_{ABC} \tag{17}$$

遍历整个面元序列即可得到载荷向量。

之后求解线性方程问题得到最终结果，如图 (2) 所示。源函数式 (2) 的展示如图 (3) 所示。

相关代码附于附件，参考了如下文献的代码[1][2]。最终实现的代码并非是一个对网络适配性极强的代码，大部分计算都仅限于我所选取的结构网格。

[1]https://github.com/daleroberts/poisson

[2]https://zhuanlan.zhihu.com/p/429107744

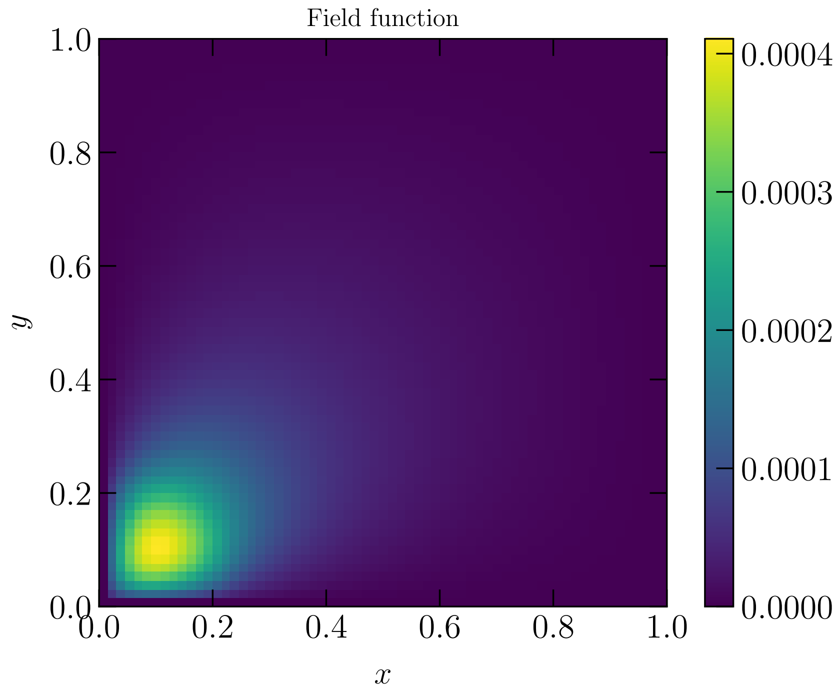


Figure 2: 有限元求解结果

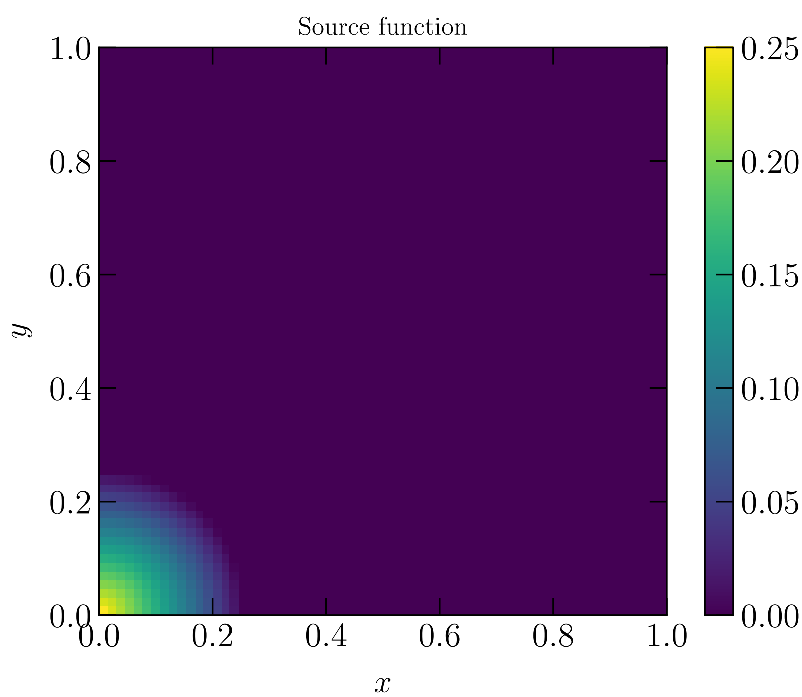


Figure 3: 源函数式 (2) 的展示