水平集方程数值求解方法

黄胤强

June 9, 2025

目录

水平集方法基本概念

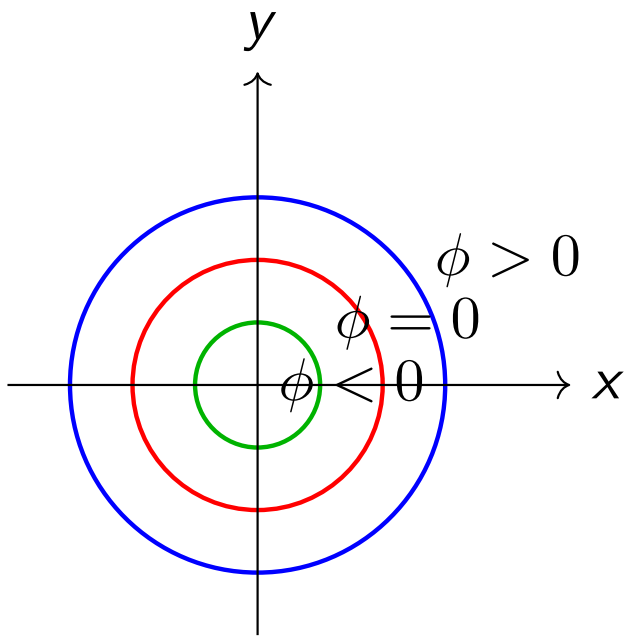
水平集函数定义

对于 n 维空间中的 $(n-1)$ 维界面 Γ，水平集函数 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 定义为：

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} < 0 & \text{if } \mathbf{x} \text{ is inside } \Gamma \\ = 0 & \text{if } \mathbf{x} \text{ is on } \Gamma \\ > 0 & \text{if } \mathbf{x} \text{ is outside } \Gamma \end{cases}$$

核心优势

- 隐式表示：避免参数化复杂界面
- 自动处理拓扑变化（分裂、合并）
- 数值稳定：固定网格上的欧拉方程
- 扩展性好：高维问题处理直观



水平集函数等值线示意

水平集方程的物理意义

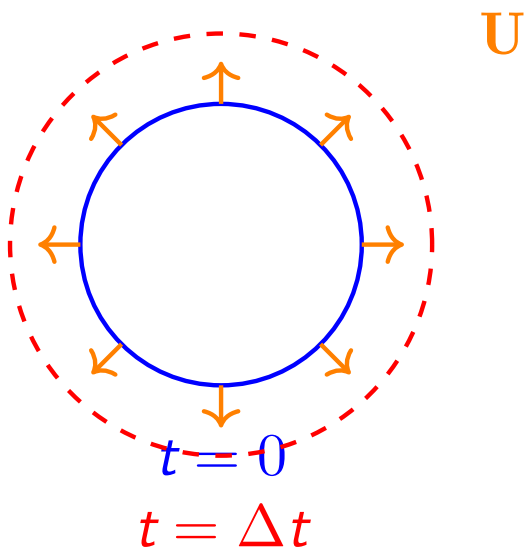
Hamilton-Jacobi 型水平集方程

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \phi = 0$$

其中 $\mathbf{U} = (U_x, U_y, U_z)$ 是速度场

几何解释:

- $\nabla \phi$: 水平集函数的梯度
- $\mathbf{U}$: 速度场
- 零水平集 $\{\phi = 0\}$ 随时间演化



界面在速度场作用下的演化

空间离散化：迎风格式

核心挑战

水平集方程是双曲型 PDE，需要满足熵条件以保证解的唯一性

一阶迎风格式：

$$\mathbf{U}\cdot\nabla\phi \approx \begin{cases} U_x \frac{\phi_i-\phi_{i-1}}{\Delta x} & \text{if } U_x > 0 \\ U_x \frac{\phi_{i+1}-\phi_i}{\Delta x} & \text{if } U_x < 0 \end{cases} + \begin{cases} U_y \frac{\phi_j-\phi_{j-1}}{\Delta y} & \text{if } U_y > 0 \\ U_y \frac{\phi_{j+1}-\phi_j}{\Delta y} & \text{if } U_y < 0 \end{cases}$$

其中：

速度符号决定差分方向

Roe 格式求解通量

Roe 格式基本思想

Roe 格式是一种高分辨率迎风格式，通过求解局部 Riemann 问题计算界面通量：

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left[F(\phi_L) + F(\phi_R) - |A|(\phi_R - \phi_L)\right]$$

其中 A 是 Jacobian 矩阵 $\partial F/\partial \phi$ 的近似

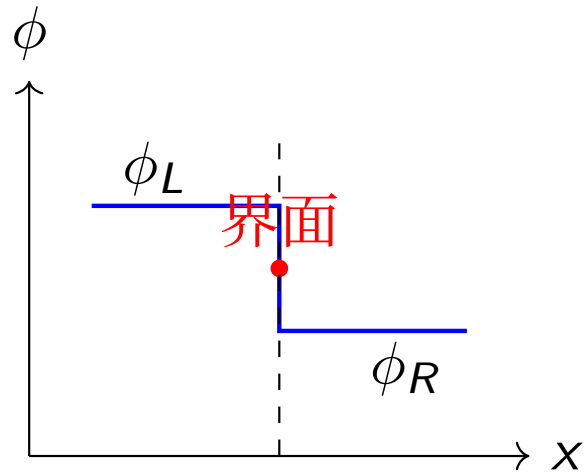
水平集方程应用：

$$F(\phi) = \mathbf{U}\phi, \quad A = \mathbf{U}$$

离散形式：

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left[U\phi_i + U\phi_{i+1} - |U|(\phi_{i+1} - \phi_i)\right]$$

$$= \begin{cases} U\phi_i & \text{if } U > 0 \\ U\phi_{i+1} & \text{if } U < 0 \end{cases}$$



MUSCL 格式高阶重构

MUSCL 基本思想

Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Laws (MUSCL):

- 使用分段线性重构提高空间精度
- 引入斜率限制器保证 TVD 性质
- 结合 Riemann 求解器计算通量

重构公式:

$$\phi^L_{i+1/2} = \phi_i + \frac{1}{2}\psi(r_i)(\phi_i - \phi_{i-1})$$

$$\phi^R_{i+1/2} = \phi_{i+1} - \frac{1}{2}\psi(r_{i+1})(\phi_{i+2} - \phi_{i+1})$$

其中:

$$r_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\phi_i - \phi_{i-1}}, \quad \text{minmod 限制器: } \psi(r) = \max(0, \min(1, r))$$

高阶 WENO 格式

WENO 基本思想

加权本质无振荡格式（Weighted Essentially Non-Oscillatory）通过自适应权重选择光滑模板，在光滑区域达到高精度，在间断附近保持稳定性。

五阶 WENO 重构（正向差分）：

$$\phi^{+}_{i+1/2} = \sum_{k=0}^{2} \omega_k^{+} \phi^{(k)}_{i+1/2}$$

三个候选模板：

$$\phi^{(0)}_{i+1/2} = \frac{1}{3}\phi_{i-2} - \frac{7}{6}\phi_{i-1} + \frac{11}{6}\phi_i$$

$$\phi^{(1)}_{i+1/2} = -\frac{1}{6}\phi_{i-1} + \frac{5}{6}\phi_i + \frac{1}{3}\phi_{i+1}$$

$$\phi^{(2)}_{i+1/2} = \frac{1}{3}\phi_i + \frac{5}{6}\phi_{i+1} - \frac{1}{6}\phi_{i+2}$$

权重计算：

$$\omega_k = \frac{\alpha_k}{\sum_j \alpha_j}$$

$$\alpha_k = \frac{d_k}{(\epsilon + \beta_k)^2}$$

其中 β_k 是光滑性指示子，d_k 是理想权重。

时间离散化方案

显式 Runge-Kutta 方法

三阶 TVD Runge-Kutta 格式:

$$\phi^{(1)} = \phi^n + \Delta t L(\phi^n)$$
$$\phi^{(2)} = \frac{3}{4}\phi^n + \frac{1}{4}\phi^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(\phi^{(1)})$$
$$\phi^{n+1} = \frac{1}{3}\phi^n + \frac{2}{3}\phi^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(\phi^{(2)})$$

CFL 稳定性条件:

$$\Delta t \leq C \frac{\Delta x}{\max |\mathbf{U}|}$$

隐式格式（Backward Euler）:

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \phi^{n+1} = 0$$

方法	精度	稳定性
Forward Euler	$O(\Delta t)$	CFL 限制
RK3-TVD	$O(\Delta t^3)$	CFL 限制
Backward Euler	$O(\Delta t)$	无条件稳定
Crank-Nicolson	$O(\Delta t^2)$	无条件稳定

Crank-Nicolson 方法

方法特点

- 二阶精度时间离散方法
- 无条件稳定（线性问题）
- 结合了显式和隐式方法的优点
- 在计算流体力学和热传导问题中广泛应用

离散形式

$$\frac{\phi^{n+1}-\phi^{n}}{\Delta t}=-\frac{1}{2}\left[L(\phi^{n})+L(\phi^{n+1})\right]$$

其中 $L(\phi)=\mathbf{U}\cdot\nabla\phi$ 是空间离散算子。

矩阵形式

$$\left(I+\frac{\Delta t}{2}A\right)\phi^{n+1}=\left(I-\frac{\Delta t}{2}A\right)\phi^{n}$$

Crank-Nicolson 方法实现

数值求解步骤

1. 组装空间离散矩阵 A
2. 构造左端矩阵：$L = I + \frac{\Delta t}{2} A$
3. 构造右端向量：$b = \left(I - \frac{\Delta t}{2} A\right) \phi^n$
4. 求解线性系统：$L\phi^{n+1} = b$

优势：

- 比后向欧拉方法更高的时间精度
- 比显式方法更好的稳定性
- 适用于中等规模问题

挑战：

- 需要求解线性系统
- 非线性问题需要迭代求解
- 矩阵条件数影响求解效率

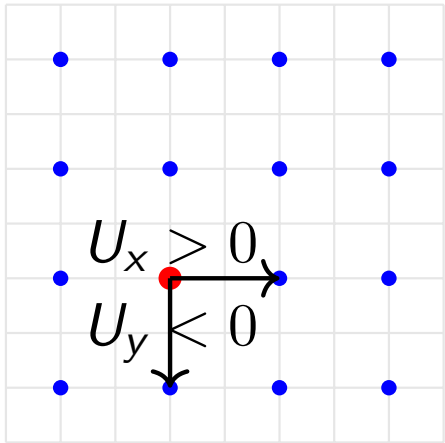
Backward Euler 方法实现

离散化方程

$$(I - \Delta t \cdot L)\phi^{n+1} = \phi^n$$
$$L(\phi) = \mathbf{U} \cdot \nabla\phi$$

矩阵组装关键步骤：

1. 边界点处理：对角元素设为 1.0
2. 内部点处理：根据速度方向添加非对角元素
3. OpenMP 并行组装：线程局部 Triplet 列表
4. 合并线程局部数据



双时间步方法实现

双时间步进策略

- 物理时间步：大时间步长 Δt
- 伪时间步：小时间步长 τ
- 内迭代：每个物理时间步内进行伪时间迭代

离散方程：

$$\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1+\gamma}{\Delta t}\right)\Delta\phi+L(\phi)=\frac{\phi_m}{\tau}+\frac{(1+\gamma)\phi_n+\gamma(\phi_n-\phi_{n-1})}{\Delta t}$$

矩阵特点：

- 包含物理时间和伪时间项
- 迎风通量离散
- 数值粘性项 ϵ 增强稳定性

重初始化的必要性

问题提出

水平集函数在演化过程中会逐渐偏离符号距离函数（SDF），导致：

- 梯度 $|\nabla\phi| \neq 1$，数值误差累积
- 界面厚度变化，精度下降

重初始化方程：

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} + \mathrm{sign}(\phi)(|\nabla\psi| - 1) = 0$$

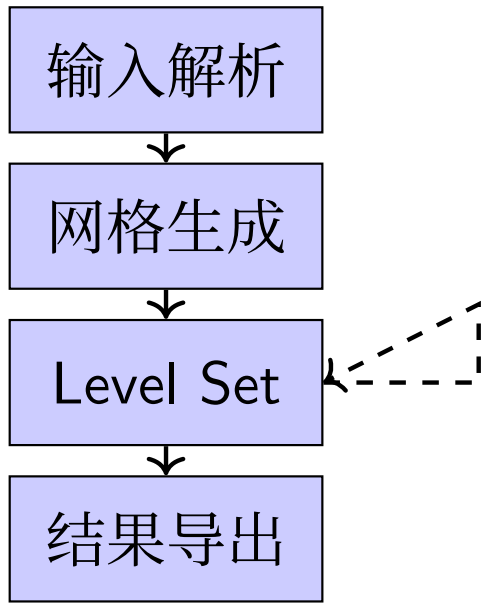
数值实现：

- 伪时间步进方法
- 迭代求解至稳态

核心模块架构

主要模块：

- **DFISEParser**：文件解析与数据结构构建
- **LevelSetMethod**：水平集数值方法核心
- **BackwardEulerScheme**：隐式时间推进
- **implicitLUSGS**：双时间步进方法
- **GeometryProcessor**：几何处理与格式转换



模块间数据流向

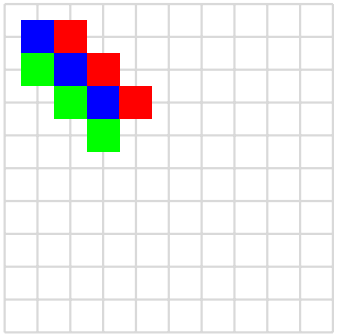
数据流：

输入 → 网格 → 演化 → 输出

稀疏矩阵并行组装

优化策略:

1. 使用 Triplet 列表存储非零元素
2. OpenMP 多线程并行计算
3. 线程局部存储避免锁竞争
4. 预分配内存减少开销



矩阵非零元素分布

关键代码

```
#pragma omp parallel
thread_triplets[thread_id].reserve(...)
#pragma omp for nowait
tripletList.insert(tripletList.end(), ...)
```

EDA 竞赛数值求解框架

整体流程概览

1. **输入处理**：DF-ISE/OBJ 结构文件解析，几何信息提取
2. **数据预处理**：网格生成，SDF 初始化，材料属性映射
3. **数值演化**：Level Set 方法，界面追踪，几何约束处理
4. **结果导出**：界面提取，网格重构，格式转换

主要技术挑战：

- 多材料界面的精确追踪
- 复杂几何结构的网格适应
- 大规模稀疏系统高效求解
- 数值稳定性与精度平衡

核心模块：

- DFISEParser
- LevelSetMethod
- BackwardEulerScheme
- GeometryProcessor

数值求解流程实现

主程序执行步骤

1. 解析输入文件：`DFISEParser parser(inputFile); parser.parse();`
2. 网格与 SDF 初始化：`levelSet.generateGrid(); levelSet.initializeSDF();`
3. 材料属性设置：`levelSet.setMaterialProperties();`
4. 速度场计算：`levelSet.updateVelocityField();`
5. 数值演化：`levelSet.evolve();` (内部调用时间推进方案)
6. 结果导出：`levelSet.extractSurfaceMesh(); ConvertToDFISE();`

关键技术实现

稀疏矩阵并行组装（OpenMP）+ BiCGSTAB 迭代求解（Eigen 库）+ 多格式转换支持

水平集方法优缺点总结

主要优势

- **拓扑灵活性**：自动处理分裂与合并
- **隐式格式稳定**：大时间步长，无条件稳定
- **并行性好**：OpenMP 加速关键计算
- **扩展性强**：易于推广至高维问题

主要挑战

- **内存消耗**：三维问题内存需求大
- **收敛速度**：迭代求解器效率问题
- **重初始化**：额外计算开销
- **边界处理**：复杂边界条件实现

水平集方法优缺点总结

未来工作方向

- GPU 加速计算
- 自适应网格细化 (AMR)
- 混合显式-隐式格式
- 机器学习加速求解