水平集方程数值求解方法

黄胤强

June 4, 2025

目录

水平集方法基本概念

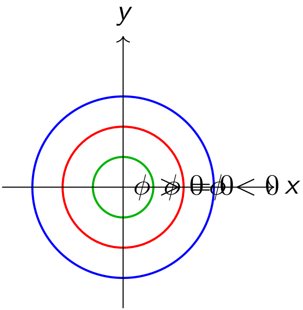
水平集函数定义

对于 n 维空间中的 $(n-1)$ 维界面 Γ，水平集函数 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 定义为:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} > 0 & \text{if } \mathbf{x} \text{ is inside } \Gamma \\ = 0 & \text{if } \mathbf{x} \text{ is on } \Gamma \\ < 0 & \text{if } \mathbf{x} \text{ is outside } \Gamma \end{cases}$$

核心优势

- 隐式表示：避免参数化复杂界面
- 自动处理拓扑变化（分裂、合并）
- 数值稳定：固定网格上的欧拉方程
- 扩展性好：高维问题处理直观



水平集函数等值线示意

水平集方程的物理意义

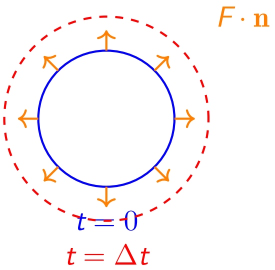
Hamilton-Jacobi 型水平集方程

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + F|\nabla \phi| = 0$$

其中 F 是速度函数，决定界面运动的法向速度

几何解释：

- $|\nabla \phi|$：水平集函数的梯度模
- F：法向速度场
- 零水平集 $\{\phi = 0\}$ 随时间演化



界面在法向速度作用下的演化

空间离散化：迎风格式

核心挑战

水平集方程是双曲型 PDE，需要满足熵条件以保证解的唯一性

一阶迎风格式:

$$
\begin{aligned}
|\nabla\phi|^2 \approx\ & \max(D_x^- \phi, 0)^2 + \min(D_x^+ \phi, 0)^2 \\
& + \max(D_y^- \phi, 0)^2 + \min(D_y^+ \phi, 0)^2
\end{aligned}
$$

其中：

$$
\begin{aligned}
D_x^+ \phi_{i,j} &= \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta x} \\
D_x^- \phi_{i,j} &= \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{\Delta x}
\end{aligned}
$$

高阶 WENO 格式

WENO 基本思想

加权本质无振荡格式（Weighted Essentially Non-Oscillatory）通过自适应权重选择光滑模板，在光滑区域达到高精度，在间断附近保持稳定性。

五阶 WENO 重构（正向差分）:

$$\phi_{i+1/2}^{+} = \sum_{k=0}^{2} \omega_k^{+} \phi_{i+1/2}^{(k)}$$

三个候选模板:

$$\phi_{i+1/2}^{(0)} = \frac{1}{3}\phi_{i-2} - \frac{7}{6}\phi_{i-1} + \frac{11}{6}\phi_i$$

$$\phi_{i+1/2}^{(1)} = -\frac{1}{6}\phi_{i-1} + \frac{5}{6}\phi_i + \frac{1}{3}\phi_{i+1}$$

$$\phi_{i+1/2}^{(2)} = \frac{1}{3}\phi_i + \frac{5}{6}\phi_{i+1} - \frac{1}{6}\phi_{i+2}$$

权重计算:

$$\omega_k = \frac{\alpha_k}{\sum_j \alpha_j}$$

$$\alpha_k = \frac{d_k}{(\epsilon + \beta_k)^2}$$

其中 β_k 是光滑性指示子，d_k 是理想权重。

时间离散化方案

显式 Runge-Kutta 方法

三阶 TVD Runge-Kutta 格式：

$$\phi^{(1)} = \phi^n + \Delta t L(\phi^n)$$
$$\phi^{(2)} = \frac{3}{4}\phi^n + \frac{1}{4}\phi^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(\phi^{(1)})$$
$$\phi^{n+1} = \frac{1}{3}\phi^n + \frac{2}{3}\phi^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(\phi^{(2)})$$

CFL 稳定性条件：

$$\Delta t \leq C\frac{\Delta x}{\max|F|}$$

隐式格式（Backward Euler）：

$$\frac{\phi^{n+1}-\phi^n}{\Delta t} + F|\nabla\phi^{n+1}| = 0$$

方法	精度	稳定性
Forward Euler	$O(\Delta t)$	CFL 限制
RK3-TVD	$O(\Delta t^3)$	CFL 限制
Backward Euler	$O(\Delta t)$	无条件稳定

重初始化的必要性

问题提出

水平集函数在演化过程中会逐渐偏离符号距离函数（SDF），导致：

- 梯度 $|\nabla\phi| \neq 1$，数值误差累积
- 界面厚度变化，精度下降
- 质量守恒性能恶化

重初始化方程：

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} + \mathsf{sign}(\phi)(|\nabla\psi| - 1) = 0$$

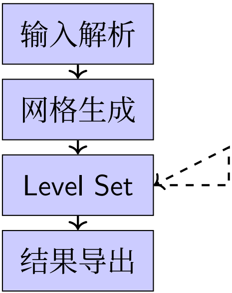
重初始化频率

通常每 3-5 个时间步执行一次重初始化，平衡精度与计算效率

核心模块架构

主要模块：

- **DFISEParser**：文件解析与数据结构构建
- **LevelSetMethod**：水平集数值方法核心
- **BackwardEulerScheme**：隐式时间推进
- **GeometryProcessor**：几何处理与格式转换



模块间数据流向

数据流：

输入文件 → 解析 → 网格 → 演化 → 输出

关键技术特点

- 多材料支持：不同区域材料属性动态设置
- 并行计算：OpenMP 并行组装稀疏矩阵

Backward Euler 隐式格式实现

离散化方程

$$
\begin{aligned}
\frac{\phi^{n+1}-\phi^{n}}{\Delta t} + F|\nabla\phi^{n+1}| &= 0 \\
\Rightarrow (I-\Delta t L)\phi^{n+1} &= \phi^{n}
\end{aligned}
$$

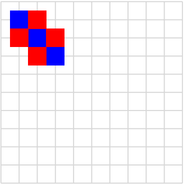
其中 L 是空间离散算子

稀疏矩阵组装：

- 使用 Eigen::SparseMatrix 存储
- 基于五点/七点差分模板
- OpenMP 并行组装提高效率

线性系统求解：

- BiCGSTAB 迭代求解器
- 不完全 LU 预条件（ILU）
- 收敛判据：相对残差 $< 10^{-6}$



稀疏矩阵结构

EDA 竞赛数值求解框架

整体流程概览

1. **输入处理**：DF-ISE/OBJ 结构文件解析，几何信息提取，材料属性映射
2. **数据预处理**：网格生成与细化，SDF 初始化，多材料区域标识
3. **数值演化**：Level Set Method 演化计算，材料界面追踪，几何约束处理
4. **结果导出**：界面提取与网格重构，格式转换，几何质量验证

主要技术挑战：

- 多材料界面的精确追踪
- 复杂几何结构的网格适应
- 大规模稀疏线性系统高效求解
- 数值稳定性与精度平衡

核心模块：

- DFISEParser
- LevelSetMethod
- BackwardEulerScheme
- GeometryProcessor

数值求解流程实现

主程序执行步骤

1. 解析输入文件：`DFISEParser parser(inputFile); parser.parse();`
2. 网格与 SDF 初始化：`levelSet.generateGrid(); levelSet.initializeSignedDistanceField();`
3. 材料属性设置：`levelSet.setMaterialProperties(); levelSet.updateU();`
4. 数值演化：`levelSet.evolve();` (内部调用 Backward Euler)
5. 结果导出：`levelSet.extractSurfaceMeshCGAL(); ConvertOBJToDFISE();`

关键技术实现

稀疏矩阵并行组装（OpenMP）+ BiCGSTAB 迭代求解（Eigen 库）+ 多格式转换支持

水平集方法优缺点总结

主要优势

- **拓扑灵活性**：自动处理分裂与合并
- **几何精度**：高精度曲率和法向量计算
- **扩展性强**：易于推广至高维问题
- **数值稳定**：基于欧拉框架，固定网格
- **物理意义**：符号距离函数几何直观

主要挑战

- **质量守恒**：数值耗散导致体积损失
- **计算开销**：全域计算，效率相对较低
- **重初始化**：需要定期维护 SDF 性质
- **细节保持**：小尺度特征可能丢失
- **参数调节**：多个数值参数需要调优