

高压油管的压力控制

摘要

本文通过
针对问题一，
针对问题二，
针对问题三，

关键词： 关键词

一、问题重述

1.1 问题背景

燃油发动机使燃料燃烧并产生动力，是驱动汽车各部分正常工作或行驶的保障。而燃油进入和喷出高压油管是燃油发动机工作的基础，其进入和喷出的过程会导致高压油管内压力的变化，进而导致喷嘴喷油量的偏差，从而影响发动机的工作效率。因此，通过理论分析和计算，给出合理的高压油管控制方案对发动机高效工作有着积极影响。

1.2 问题的提出

燃油经高压油泵进入油管，再由喷口喷出。根据高压油管工作原理（图13），回答以下问题：

（1）已知高压油管尺寸、初始压力及喷油嘴工作次数和工作时间，高压油泵在入口 A 处提供 160MPa 稳定压力，为使管内压力尽可能稳定在 100MPa 不变，应如何设置单向阀每次开启时长？若经过 2s、5s 和 10s 的调整后，管内压力从 100MPa 增加到 150MPa 并稳定，又应如何调整开启时长？

（2）若高压油管入口处燃油来自油泵的柱塞腔出口，柱塞运动由凸轮驱动，喷油由油嘴的针阀控制。已知各部分的工作原理和相关参数，在问题 1 喷油器工作次数、高压油管尺寸和初始压力下，确定凸轮工作的角速度，使得油管内压力尽可能稳定在 100MPa。

（3）在问题 2 的基础上增加一个相同的喷油嘴，应如何调整喷油和供油策略？若安装单向减压阀来更好地控制油管压力，请给出油泵和减压阀的控制方案。

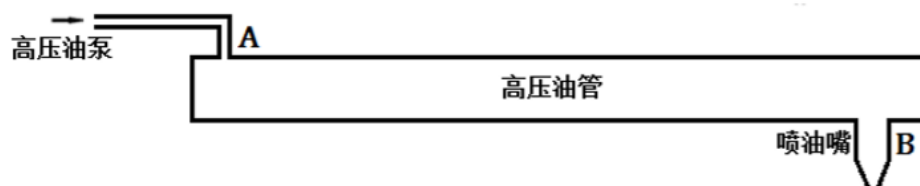


图 1 高压油管工作原理示意图

二、问题分析

2.1 问题一的分析

问题一要求我们在已知高压油管尺寸、初始压力，喷油嘴工作次数和工作时间，高压油泵在入口 A 处提供 160MPa 稳定压力的情况下，通过设置单向阀每次开启时长使管

内压力尽可能稳定在 100MPa 不变；再调整开启时长，使管内压力经过 2s、5s 和 10s 后从 100MPa 增加到 150MPa 并稳定。首先根据燃油压力、密度与弹性模量之间的关系求出 160MPa 下的燃油密度。其次结合高压油管流量的计算公式与波义尔定律，得出高压油管内压力 P 与燃油进入量 q 、排出量 e 之间的函数关系 (这里要不要说方程复杂无法求解所以离散)。为求得管内压力尽可能稳定在 100MPa 时单向阀开启时间 $t_{\text{开}}$ 的最优取值，以 $\Delta t = 0.01 \text{ ms}$ 为时间间隔，1s 内各时刻油管压力与 100MPa 的残差平方和 SSR 为目标函数建立单目标优化模型，并用模拟退火算法求出全局最优解。为使管内压力经过 2s、5s 和 10s 后从 100MPa 增加到 150MPa 并稳定，将单向阀开启时长分增压过程和稳压过程两个部分分别调整。增压时以增压结束点油管压力最接近 150MPa 为目标函数，稳压时以增压结束到 20s 中各时刻油管压力与 150MPa 的残差平方和 SSR 为目标函数，分别建立单目标优化模型。由模拟退火算法求出的解即单向阀开启时长的最优取值。

2.2 问题二的分析

2.3 问题三的分析

三、基本假设

- (1) 假设高压油管与油泵内的气体均为理想气体，且压缩、膨胀过程中无温度变化。
- (2) 假设供给和喷出燃油的过程中油管与油泵内气体与外界气体均无交换。

四、符号说明

符号	意义
E	弹性模量
ρ	燃油密度
P	燃油压力
C	流量系数
A	小孔面积
V	体积
q	燃油进入量
e	燃油排出量
t	时刻
$t_{\text{开}}$	单向阀开启时间
T	单向阀工作周期
d	孔洞直径

五、问题一的求解

5.1 高压油管内的压力

因燃油的压力变化量与密度变化量成正比，且比例系数为 $\frac{E}{\rho}$ ，可以得到燃油密度的计算公式

$$\frac{\Delta P}{\Delta \rho} = \frac{E}{\rho} \quad (1)$$

其中， P 为当前压力， ρ 为燃油密度， E 为弹性模量，且其与压力的关系如附件 3 所示。设初始压力 $P_0 = 100 \text{ MPa}$ ，此时燃油密度 $\rho_0 = 0.850 \text{ mg/mm}^3$ ，则 $\Delta P = P - P_0$ ， $\Delta \rho = \rho - \rho_0$ ，带入公式 (1) 中可得

$$\frac{P - P_0}{\rho - \rho_0} = \frac{E}{\rho} \quad (2)$$

整理得

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - \frac{P - P_0}{E}} \quad (3)$$

设高压侧燃油密度为 ρ ，流量系数 $C = 0.85$ ，小孔面积 $A = \pi r_A^2$ ，油泵在入口 A 处的压力 $P_1 = 160 \text{ MPa}$ ，小孔 A 两端的压力差 $\Delta P = P_1 - P$ 。则单位时间内经小孔 A 流入高压油管的燃油量为

$$Q = CA\sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}} = CA\sqrt{\frac{2(P_1 - P)}{\rho}} \quad (4)$$

将 $P = 160 \text{ MPa}$ 带入公式 (3) 中，求得 $\rho = 0.8687$ 。

假设高压油管内的气体为理想气体，且体积压缩和膨胀过程中无温度变化，则其压强与体积满足波义尔定律 $P_0 V_0 = PV$ 。其中， V_0 为高压油管内腔总体积， P_0 为油管初始压力 100 MPa 。设 t 时刻进入油管的燃油量为 q ，排出量为 e ，则管内体积变化量

$$\Delta V = V_{\text{进入}} - V_{\text{喷出}} = \int_0^t q dt - \int_0^t e dt \quad (5)$$

t 时刻高压油管内的压力 $P = P_0 V_0 / V$ ，气体体积 $V = V_0 - \Delta V$ ，代入公式 (5) 可以求得

$$P = \frac{P_0 V_0}{V_0 - \int_0^t q dt + \int_0^t e dt} \quad (6)$$

5.2 单目标优化模型

因高压油管内腔长 $L_{\text{油管}} = 500 \text{ mm}$ ，内直径 $d_{\text{油管}} = 10 \text{ mm}$ ，入口 A 的直径 $d_A = 1.4 \text{ mm}$ ，则 $V_0 = \pi(d_{\text{油管}}/2)^2 \cdot L_{\text{油管}} = 12500\pi \text{ mm}^3$ ， $A = \pi(d_A/2)^2 = 0.49\pi \text{ mm}^2$ 。已知小孔 A 通过单向阀开关控制供油时间，且每次打开后就要关闭 10 ms ，设每次开启时间为 $t_{\text{开}}$ ，则单向阀工作周期 $T = (t_{\text{开}} + 10) \text{ ms}$ ；喷油器每秒工作 10 次，每次喷油 2.4 ms 且喷油速率如图2所示。

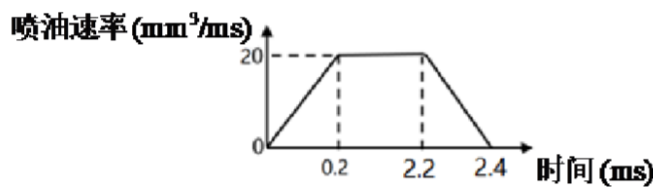


图 2 喷油速率示意图

则 t 时刻喷油量

$$e = \begin{cases} 100t & 0 \leq t \leq 0.2 \\ 20 & 0.2 < t \leq 2.2 \\ 240 - 100t & 2.2 < t \leq 2.4 \\ 0 & 2.4 < t < 100 \end{cases} \quad (7)$$

由公式 (4) 可知, 进入油管的燃油量 q 为 P 的函数 (这里有点问题), 将 q 和 e 代入公式 (6) 中进行求解即可得到油管内压力 P 与时间 t 的方程。因该方程过于复杂无法直接求解, 故采用如下方法计算:

Step1: 将时间段 $[0, t]$ 分割为若干个长度为 $\Delta t = 0.01 \text{ ms}$ 的小区间, 第 i 个区间内燃油的进入和喷出量分别记为 Δq_i 和 Δe_i ($i = 1, 2, \dots, n$)。

Step2: 在第 i 个区间上以起始点的 q_i 的值近似代替连续变化的 q 。因喷油量 e 为线性函数, 因此用每个区间喷油量的平均值的 \bar{e}_i 代替连续变化的 e , 即

$$\begin{cases} \Delta q_i \approx q_i \Delta t \\ \Delta e_i = \bar{e}_i \Delta t \end{cases} \quad (8)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, n$ 且 $n = \lfloor \frac{t}{\Delta t} \rfloor$ 。

Step3: 求 n 个时间段进入和喷出燃油量的和, 即

$$\begin{cases} V_{\text{进入}} = \int_0^t q dt \approx \sum_{i=1}^n \Delta q_i \\ V_{\text{喷出}} = \int_0^t e dt \approx \sum_{i=1}^n \Delta e_i \end{cases} \quad (9)$$

Step4: 记第 i 个区间起始时刻压强为 P_{i-1} , 结束时刻压强为 P_i , 则

$$q_i = \begin{cases} CA \sqrt{\frac{2(P_1 - P_{i-1})}{\rho}} & i - \lfloor \frac{t}{T} \rfloor \cdot T \leq t_{\text{开}} \\ 0 & t_{\text{开}} < i - \lfloor \frac{t}{T} \rfloor \cdot T < T \end{cases} \quad (10)$$

Step5: 将公式 (7-10) 依次代入公式 (6) 中可得关于压力的递推关系式

$$P_i = \frac{P_0 V_0}{V_0 - \sum_{i=1}^n CA \sqrt{\frac{2(P_1 - P_{i-1})}{\rho}} \cdot \Delta t + \sum_{i=1}^n \bar{e}_i \Delta t} \quad (11)$$

通过公式 (11) 不断迭代即可得到 $[0, t]$ 时间段内各区间对应的压强。

本题首先要求将高压油管内的压力尽可能稳定在 100 MPa 左右, 令

$$SSR = \sum_{i=1}^n (P_i - 100)^2 \quad (12)$$

其中, $n = \lfloor \frac{t}{\Delta t} \rfloor$, $t = 1000 \text{ ms}$ 。故单向阀每次开启时长的最优设置方案为各时刻压力与 100 MPa 的残差平方和 SSR 最小时。由此建立单目标优化模型, 目标函数为

$$\min \quad SSR \quad (13)$$

为求解上述问题的近似全局最优解, 采用模拟退火算法, 具体步骤如下:

Step1: 初始化目标函数值 SSR , 设置退火起点 $t_{\text{开}} = 0$, 降温系数 $\alpha = 0.999$, 终止温度 $T^n = 10^{-30}$, 当前时间为 T_1 。

Step2: 对当前开启时间 $t_{\text{开}}$ 进行变换得到新解 $t'_{\text{开}}$ ，并带入目标函数中求出函数值。

Step3: 计算增量 $\Delta SSR = SSR(t'_{\text{开}}) - SSR_{\text{开}}$ 。

Step4: 若 $\Delta SSR < 0$ ，则将 $t'_{\text{开}}$ 作为新的当前解，否则以概率 $\exp(-\Delta SSR/T_1)$ 接受 $t'_{\text{开}}$ 作为当前解。

Step5: 当 $T_1 \leq n$ 时，退火算法结束，当前解即近似全局最优解；否则返回 Step2。

5.3 油管压力稳定在 100MPa 的控制方案

用 MATLAB 求解 5.2 中的单目标优化模型，得到单向阀每次开启时间的最优解为 $t_{\text{开}} = 0.314 \text{ ms}$ ， $SSR(0.314 \text{ ms}) = 173.27$ 。代入公式 (11) 后作压力随时间变化的图像。

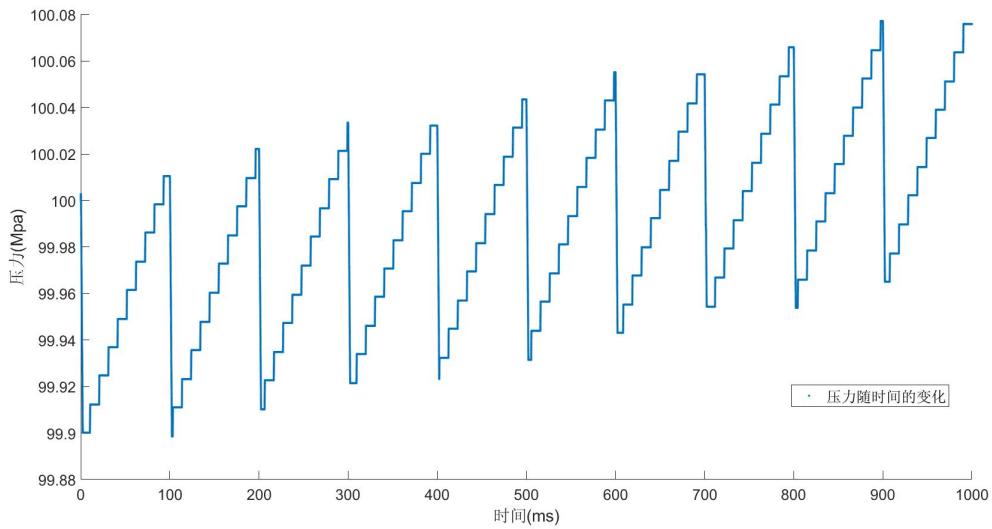


图 3 稳定在 100 MPa 时压力随时间变化示意图

由图3可以看出 1s 内高压油管的压力在 100 MPa 上下小幅度波动，且 100000 个区间的平均偏离量仅为 $1.7327e - 3$ ，说明压力较为稳定。

5.4 油管压力增加到在 150MPa 的调整方法

针对题目中要求的经过 2 s 调整后管内压力增加到 150 MPa 并保持稳定，采用与 5.2 中相似的计算方法，并将单向阀开启时长的调整分为两个部分。首先是增压过程，显然 $t_{\text{开}}$ 越大，压力增加得越快。2 s 时刻压力达到 150 MPa，即 $|P_{2s} - 150 \text{ MPa}|$ 最小。令 $\Delta P = |P_{2s} - 150 \text{ MPa}|$ ，则调整单目标优化模型的目标函数为

$$\min \Delta P \quad (14)$$

通过模拟退火算法求得近似全局最优解为 $t_{\text{开}} = 15.046 \text{ ms}$ ，代入公式 (11) 中经迭代求出 $P_{2s} = 149.3 \text{ MPa}$ 。增压阶段结束后进入稳压阶段，压力尽可能维持在 150 MPa，即

t 时间内各时刻压力与 150 MPa 的残差平方和 SSR 。考虑将 20 s 内的最优解作为最佳开启时间，调整优化模型目标函数为

$$\min \sum_{i=2000}^{20000} (P_i - 150)^2 \quad (15)$$

经计算，稳压阶段单向阀每次开启的时长为 $t_{\text{开}} = 0.753$ ，求得的目标函数值为 9478.16 。作 20 s 内管内压力随时间变化的图像，由局部放大图可知，管内压力增大到 150 MPa 后， $t_{\text{开}}$ 经调整可以使得压力在 150 MPa 附近小幅度波动，且波动量不超过 0.2 MPa 。因此可以得出单向阀开启时长的调整方案较为合理的结论。

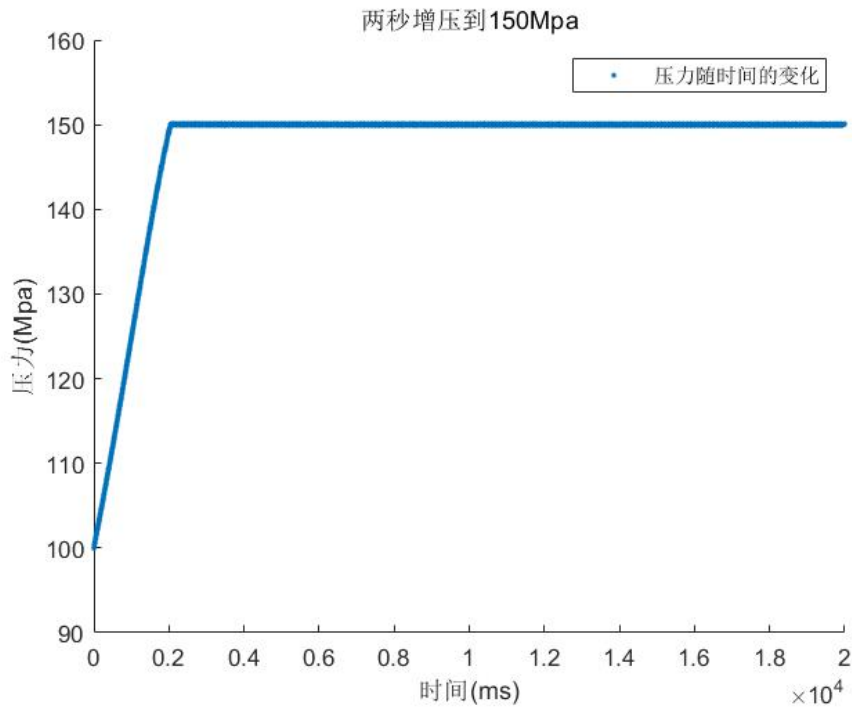


图 4 增压过程为 2 s 的压力变化示意图

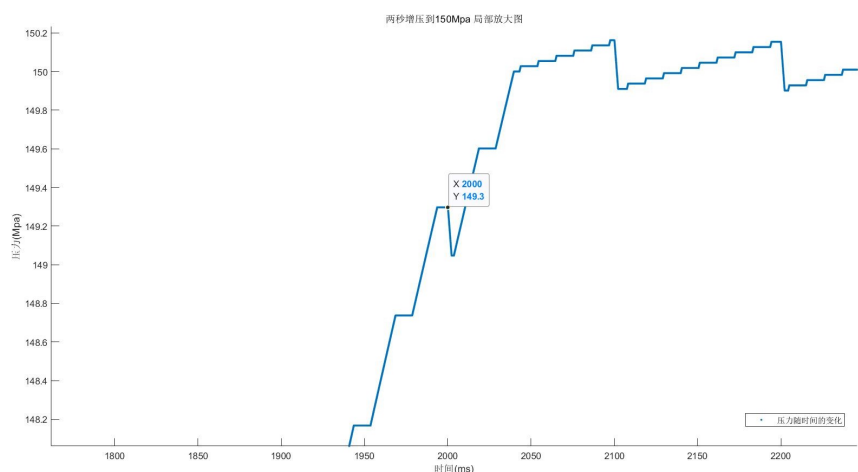


图 5 增压过程为 2 s 的压力变化局部放大图

用相同的方法求出增压过程为 5 s 和 10 s 时单向阀开启时长调整方案列于表3中, 并作 20 s 内管内压力随时间变化的图像。

表 1 单向阀开启时长调整方案

增压时长 $t_{\text{增}}$	增压过程 $t_{\text{开}}$	压力 $P_{t_{\text{增}}}$	稳压过程 $t_{\text{开}}$	目标函数 SSR
2 s	15.046 ms	149.3MPa	0.753 ms	9478.16
5 s	3.707 ms	150MPa	0.754 ms	8780.90
10 s	1.849 ms	150.1MPa	0.754 ms	5098.11

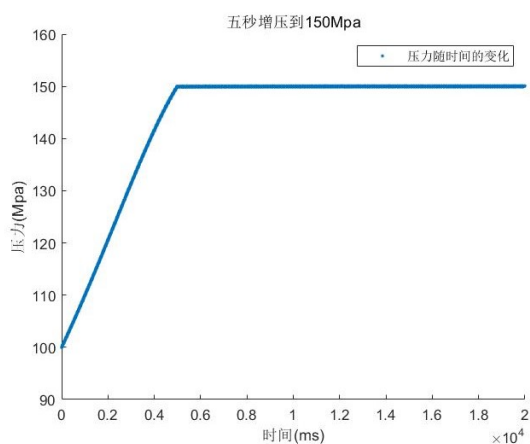


图 6 增压 5 s 的压力变化示意图

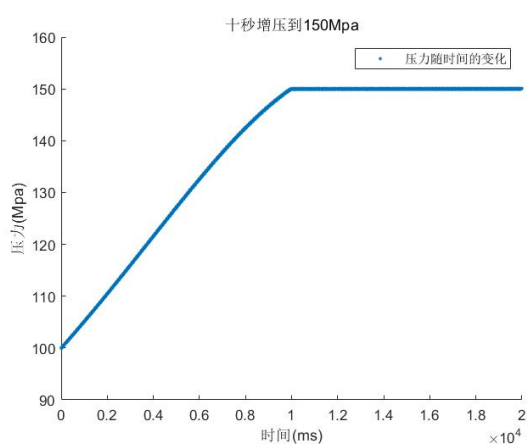
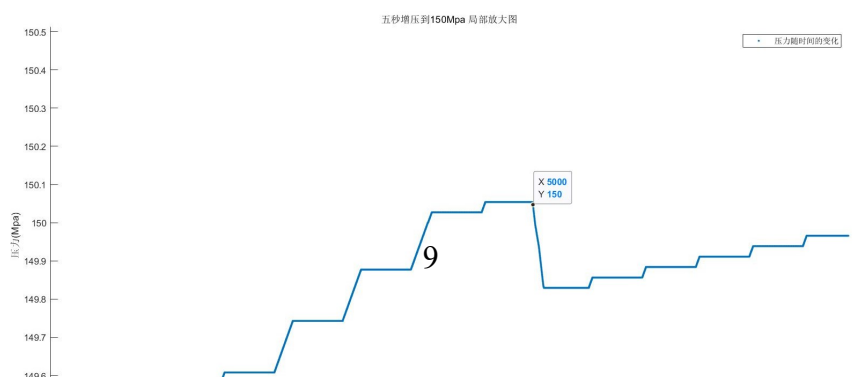


图 7 增压 10 s 的压力变化示意图



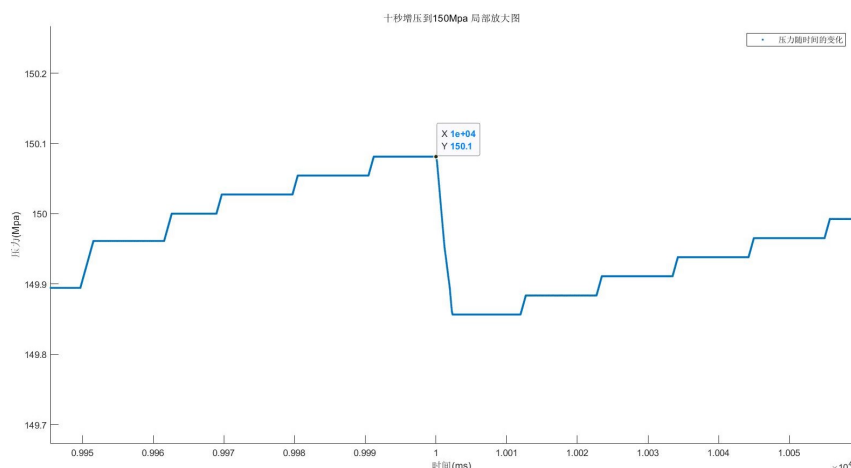


图 9 增压过程为 10 s 的压力变化局部放大图

六、问题二的求解

6.1 柱塞运动方程

将附件 1 中凸轮极角与对应的极径输入 MATLAB 中，拟合曲线即可得到凸轮的外形 (图10) 及其极径与角度的关系 (图11)。图

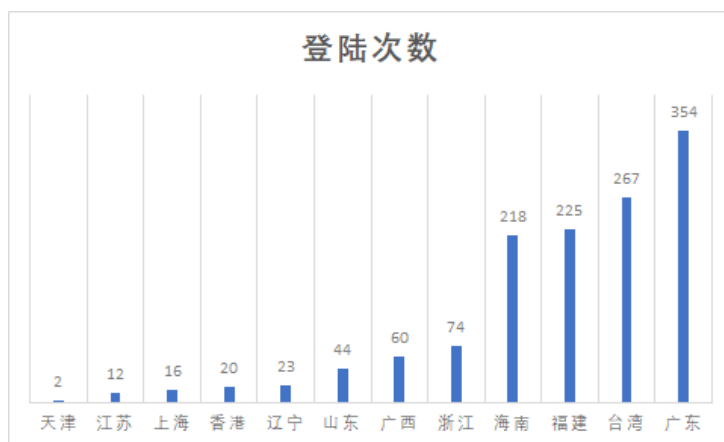


图 10 凸轮边缘轮廓

拟合后曲线的方程为 $L(\theta) = \text{equation}$ ，其中 θ 为旋转角度， L 为角度 θ 所对应的的极径。对 $L(\theta)$ 进行什么检验，不会写。经检验，曲线对离散点的拟合度较好，因此建立柱塞上升距离与角度的函数关系

$$d = L(\theta) - L_{min} = \text{equation} \quad (16)$$

其中， L_{min} 为柱塞运动到下止点时凸轮旋转角度所对应的的极径， d 为柱塞相对于下止点的位移。设 ω 为凸轮旋转角速度， $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 为旋转周期， $t_r = t - \lfloor \frac{t}{T} * T \rfloor$ 为凸轮在某个旋转周期内的旋转时间，则 $\theta = \omega t_r$ 。代入公式 (17) 可得到柱塞上升距离与旋转时间

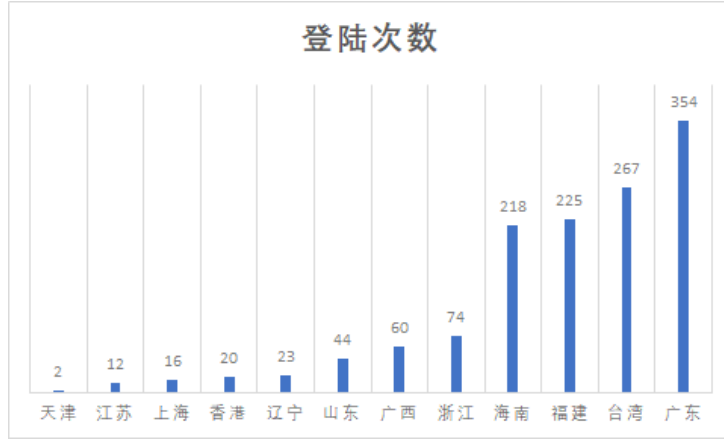


图 11 凸轮极径与角度的关系曲线

t_r 的关系式

$$d(t_r) = L(t_r) - L_{min} = \text{equation} \quad (17)$$

记柱塞运动速度为 u ，则

$$u(t_r) = d'(t_r) = \text{equation} \quad (18)$$

6.2 高压油泵中燃油的压强

ART（代数迭代法） 考虑到柱塞运动时柱塞腔内体积变化
压缩系数

$$\kappa = -\frac{dV/V_0}{dP} = -\frac{1}{V_0} \frac{dV}{dP}$$

压缩系数的倒数为体积弹性系数 E

$$E = \frac{1}{\kappa} = -V_0 \frac{dP}{dV}$$

$$E = kP + b$$

$$kP + b = -V_0 \frac{dP}{dV}$$

即

$$-\frac{1}{V_0} dV = \frac{1}{kP + b} dP$$

两边求积分可得

$$\int_{V_0}^V -\frac{1}{V_0} dV = \int_{P_0}^P \frac{1}{kP + b} dP$$

即

$$-\frac{1}{V_0} (V - V_0) = \frac{1}{k} \ln(kP + b) - \frac{1}{k} \ln(kP_0 + b)$$

$$kP + b = (kP_0 + b) e^{-\frac{k}{V_0} (V - V_0)}$$

所以

$$P = \frac{(k\rho_0 + b)e^{-\frac{k}{V_0}(V-V_0)} - b}{k}$$

另一种化简方式

$$V = V_0 \left\{ 1 - \frac{1}{k} [\ln(kP + b) - \ln(kP_0 + b)] \right\}$$

腔内体积

$$V = V_0 - S \cdot d(t)$$

$$S = \pi r_{\text{腔}}^2$$

流量系数

$$Q = CA \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}$$

$$\Delta P = P - P_{\text{油管}}$$

密度表达式

$$\frac{dP}{d\rho} = \frac{E}{\rho}$$

代入 $E = kP + b$ ，整理后求定积分得

$$\int_{P_0}^P \frac{dP}{kP + b} = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho}$$

即

$$\ln \rho - \ln \rho_0 = \frac{1}{k} [\ln(kP + b) - \ln(kP_0 + b)]$$

经整理得

$$\rho = \rho_0 \cdot \left(\frac{kP + b}{kP_0 + b} \right)^{\frac{1}{k}}$$

6.3 喷油嘴的喷油速率

$$Q_2 = CA \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}$$

$$A = \begin{cases} S & t < t_0 \\ S_1 & t \geq t_0 \end{cases} \quad (19)$$

$$S = \pi(r^2 - r_0^2)$$

$$r = h \cdot \tan 9^\circ + r_0$$

$$S_1 = (0.7)^2 \pi$$

6.4 凸轮角速度与高压油管内压力的关系

七、问题三的求解

7.1 模型的建立与求解

八、灵敏度检验

九、模型的评价

9.1 模型的评价

9.1.1 模型的优点

9.1.2 模型的缺点

十、模型的改进

1、传感器计算该开启时间下 10 s 内各时刻的油管压力并作压力随时间变化的图像，可以看出管内压力总体呈上升趋势，但偏离 100 MPa 的最大值仅为 100.7 MPa ，

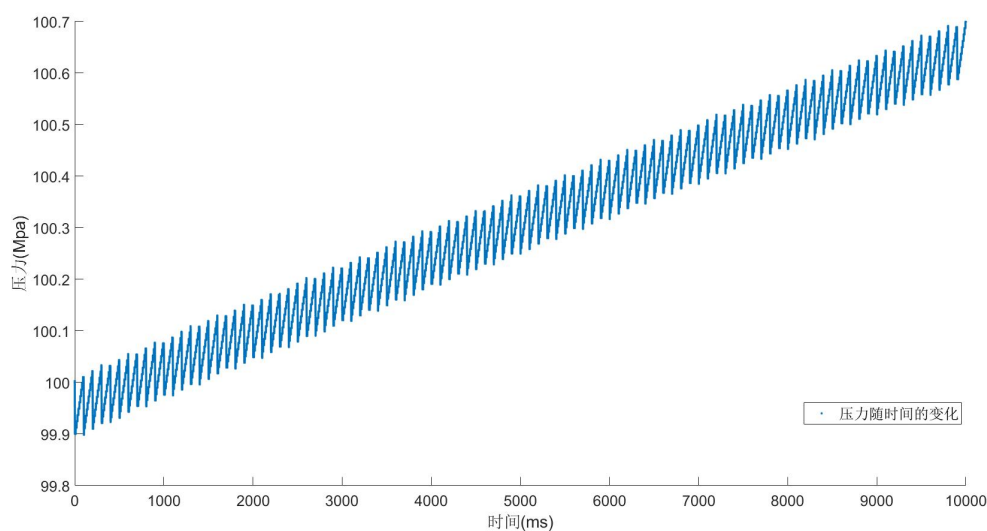


图 12 10s 内压力随时间变化示意图

2、流量系数 C 的取值

3、修正高压油管内的密度

十一、参考文献

[1] 曾文军, 曾小雨, 郑娟, 朱金伟. 多雷达定位误差简析 [J]. 高等函授学报 (自然科学版), 2008(05):57-59.

[2]

附录 A 引用

问题一要求我们根据 CMA 热带气旋最佳路径数据集和其他相关资料，对中国各省（以地级市为单位）**进行**进行热带气旋的风险评估。首先统计出 1949 年-2018 年登录我国沿海各省份的热带气旋数量，并选取其中登录次数最多的四个省份作为评估对象。其次确定评定热带气旋风险等级的八个因素：**受热带气旋**影响过程中的平均降雨量、日最大降雨量、平均风速、日最低气压、热带气旋的登陆频次、持续时间、造成的人员伤亡数和直接经济损失。接着确定四个热带气旋风险等级分别为：灾情较轻，灾情一般，灾情较重，灾情严重。由于对热带气旋风险的评估属于模糊决策，故采用模糊综合评价法求出各省受热带气旋影响的评价结果。[1] 最后在四个受灾最严重的省份中各选取四个典型城市，采用相同的方法进行风险评估，并结合地理、气候因素分析其对风险等级的影响。

附录 B 排队算法-matlab 源程序

```
kk=2; [mdd, ndd] = size(dd);
while ~isempty(V)
    [tmpd, j] = min(W(i, V)); tmpj = V(j);
    for k = 2: ndd
        [tmp1, jj] = min(dd(1, k) + W(dd(2, k), V));
        tmp2 = V(jj); tt(k-1, :) = [tmp1, tmp2, jj];
    end
    tmp = [tmpd, tmpj, j, tt]; [tmp3, tmp4] = min(tmp(:, 1));
    if tmp3 == tmpd, ss(1:2, kk) = [i; tmp(tmp4, 2)];
    else, tmp5 = find(ss(:, tmp4) ~= 0); tmp6 = length(tmp5);
    if dd(2, tmp4) == ss(tmp6, tmp4)
        ss(1:tmp6+1, kk) = [ss(tmp5, tmp4); tmp(tmp4, 2)];
    else, ss(1:3, kk) = [i; dd(2, tmp4); tmp(tmp4, 2)];
    end; end
    dd = [dd, [tmp3; tmp(tmp4, 2)]]; V(tmp(tmp4, 3)) = [];
    [mdd, ndd] = size(dd); kk = kk + 1;
end; S = ss; D = dd(1, :);
```

附录 C 长表格

表 2 abcd

增益介质	功率	波长
HeNe	000	
HeNe	1mW	633nm
000	1mW	633nm
	1mW	633nm
HeNe	1mW	633nm
HeNe	1mW	633nm
HeNe	1mW	633nm
HeNe	1mW	633nm
HeNe	1mW	633nm
HeNe	1mW	633nm
HeNe	1mW	633nm
HeNe	1mW	633nm
HeNe	1mW	633nm
HeNe	1mW	633nm
HeNe	1mW	633nm
HeNe	1mW	633nm
HeNe	1mW	633nm
HeNe	1mW	633nm
HeNe	1mW	633nm
HeNe	1mW	633nm
HeNe	1mW	633nm
HeNe	1mW	633nm
HeNe	1mW	633nm
HeNe	1mW	633nm
HeNe	1mW	633nm
HeNe	1mW	633nm
HeNe	1mW	633nm
HeNe	1mW	633nm
HeNe	1mW	633nm
HeNe	1mW	633nm
HeNe	1mW	633nm
HeNe	1mW	633nm
HeNe	1mW	633nm
HeNe	1mW	633nm

表 2 abcd(绪)

增益介质	功率	波长
HeNe	1mW	633nm
HeNe	1mW	633nm
HeNe	1mW	633nm

附录 D 表格

省份	城市			
浙江	杭州	湖州	金华	丽水
福建广东海南	福州	厦门	宁德	福鼎
	徐闻	广州	汕头	湛江
	三亚	东方	儋县	海口

表 3 风险评估对象（地级市）

附录 E 图片

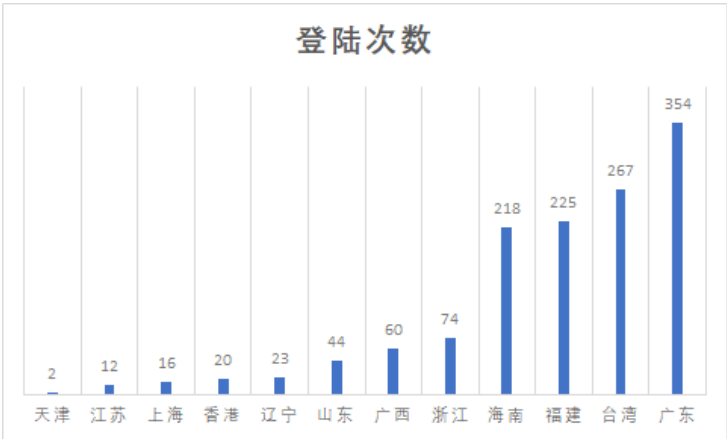


图 13 1949 年到 2018 年我国沿海各省份热带气旋的登陆次数柱状图

附录 F 并排图片、表格

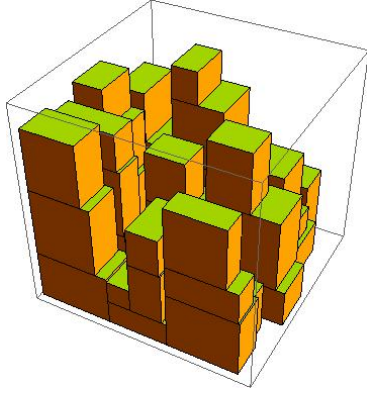


图 14 2

表 4 3

a	b	c
1	2	3

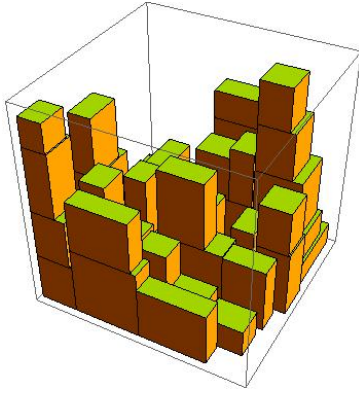


图 16 1

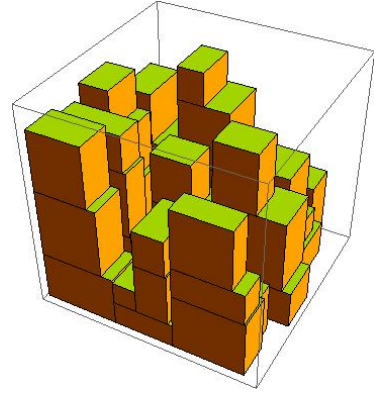


图 17 2

附录 G 数学公式

$$\sum_{n=1}^N a_n \quad (20)$$

$$\begin{matrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{81} & \cdots & r_{8n} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{81} & \cdots & r_{8n} \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{81} & \cdots & r_{8n} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\left\{ \begin{matrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{81} & \cdots & r_{8n} \end{matrix} \right\} \quad \left| \begin{matrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{81} & \cdots & r_{8n} \end{matrix} \right| \quad \left\| \begin{matrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{81} & \cdots & r_{8n} \end{matrix} \right\| \quad (22)$$