

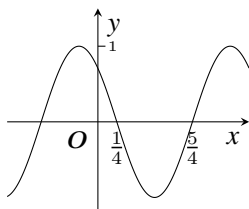
三角函数

目录

1 选择	1
2 填空	3
3 简答题	4

1 选择

1. 已知 $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$, 则 $\cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$ ()
(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$
2. 若 $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \frac{1}{3}$, 则 $\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2\alpha\right) =$ ()
(A) $-\frac{7}{9}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{7}{9}$
3. 若 $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = 4$, 则 $\sin 2\theta =$ ()
(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$
4. 函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的单调递减区间为 ()



- (A) $\left(k\pi - \frac{1}{4}, k\pi + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$ (B) $\left(2k\pi - \frac{1}{4}, 2k\pi + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$
(C) $\left(k - \frac{1}{4}, k + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$ (D) $\left(2k - \frac{1}{4}, 2k + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$
5. 设 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $\tan \alpha = \frac{1 + \sin \beta}{\cos \beta}$, 则 ()
(A) $3\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ (B) $3\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$
(C) $2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ (D) $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$
6. 函数 $f(x) = \cos 2x + 6 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ 的最大值为 ()
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

7. 将函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 图象上的点 $P\left(\frac{\pi}{4}, t\right)$ 向左平移 s ($s > 0$) 个单位长度得到点 P' . 若 P' 位于函数 $y = \sin 2x$ 的图象上, 则 ()
- (A) $t = \frac{1}{2}$, s 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$ (B) $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, s 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$
 (C) $t = \frac{1}{2}$, s 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$ (D) $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, s 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$
8. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$), $x = -\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点, $x = \frac{\pi}{4}$ 为 $y = f(x)$ 图象的对称轴, 且 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36}\right)$ 单调, 则 ω 的最大值为 ()
- (A) 11 (B) 9 (C) 7 (D) 5
9. 已知 $\omega > 0$, 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递减, 则 ω 的取值范围是 ()
- (A) $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right]$ (B) $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ (C) $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ (D) $(0, 2]$
10. 已知 $\omega > 0$, $0 < \varphi < \pi$, 直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 和 $x = \frac{5\pi}{4}$ 是函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象的两条相邻对称轴, 则 $\varphi =$ ()
- (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$
11. 将函数 $f(x) = \sin(2x + \theta)$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$) 的图象向右平移 φ ($\varphi > 0$) 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象, 若 $f(x)$, $g(x)$ 的图象都经过点 $P\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 则 φ 的值可以是 ()
- (A) $\frac{5\pi}{3}$ (B) $\frac{5\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{6}$
12. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 $\omega > 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, 若 $f(x)$ 的最小正周期为 6π , 且当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x)$ 取得最大值, 则 ()
- (A) $f(x)$ 在区间 $[-2\pi, 0]$ 上是增函数 (B) $f(x)$ 在区间 $[-3\pi, -\pi]$ 上是增函数
 (C) $f(x)$ 在区间 $[3\pi, 5\pi]$ 上是减函数 (D) $f(x)$ 在区间 $[4\pi, 6\pi]$ 上是减函数
13. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) + \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的最小正周期为 π , 且 $f(-x) = f(x)$, 则 ()
- (A) $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减 (B) $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ 上单调递减
 (C) $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增 (D) $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ 上单调递增
14. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = \frac{\pi}{3}$, $BC = 3$, 则 $\triangle ABC$ 的周长为 ()
- (A) $4\sqrt{3}\sin\left(B + \frac{\pi}{3}\right) + 3$ (B) $4\sqrt{3}\sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right) + 3$
 (C) $6\sin\left(B + \frac{\pi}{3}\right) + 3$ (D) $6\sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right) + 3$
15. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 若 $a \sin A \sin B + b \cos^2 A = \sqrt{2}a$, 则 $\frac{b}{a} =$ ()
- (A) $2\sqrt{3}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{2}$

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin^2 A + \sin^2 B < \sin^2 C$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 ()
 (A) 钝角三角形 (B) 直角三角形 (C) 锐角三角形 (D) 不能确定
17. 已知锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $23 \cos^2 A + \cos 2A = 0$, $a = 7$, $c = 6$, 则 $b =$ ()
 (A) 10 (B) 9 (C) 8 (D) 5
18. 设 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若三边的长为连续的三个正整数, 且 $A > B > C$, $3b = 20a \cos A$, 则 $\sin A : \sin B : \sin C =$ ()
 (A) 4 : 3 : 2 (B) 5 : 6 : 7 (C) 5 : 4 : 3 (D) 6 : 5 : 4

2 填空

19. 设 θ 为第二象限角, 若 $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$, 则 $\sin \theta + \cos \theta =$ _____.
20. 已知 $\sin \alpha = \frac{1}{2} + \cos \alpha$, 且 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}$ 的值为_____.
21. 函数 $f(x) = \sin(x + 2\varphi) - 2 \sin \varphi \cos(x + \varphi)$ 的最大值为_____.
22. 设当 $x = \theta$ 时, 函数 $f(x) = \sin x - 2 \cos x$ 取得最大值, 则 $\cos \theta =$ _____.
23. 已知函数 $f(x) = 2 \sin \omega x$ ($\omega > 0$) 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最小值是 -2 , 则 ω 的最小值是_____.
24. 设函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ (A, ω, φ 是常数, $A > 0, \omega > 0$). 若 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上具有单调性, 且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -f\left(\frac{\pi}{6}\right)$, 则 $f(x)$ 的最小正周期是_____.
25. 将函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$) 图像上每个点的横坐标缩短为原来的一半, 纵坐标不变, 再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到 $y = \sin x$ 的图象, 则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) =$ _____.
26. 已知点 $A\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$, $C\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, 若这三个点中有且仅有两个点在函数 $f(x) = \sin \omega x$ 的图象上, 则正数 ω 的最小值为_____.
27. 函数 $y = \cos(2x + \varphi)$ ($-\pi < \varphi < \pi$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位后, 与函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象重合, 则 $\varphi =$ _____.
28. 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 与角 β 均以 Ox 为始边, 它们的终边关于 y 轴对称. 若 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\cos(\alpha - \beta) =$ _____.
29. 把函数 $y = \sin 2x$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 纵坐标伸长到原来的 2 倍 (横坐标不变) 后得到函数 $y = f(x)$ 的图象, 对于函数 $y = f(x)$ 有以下四个判断:
 ① 该函数的解析式为 $y = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$;
 ② 该函数图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 对称;
 ③ 该函数在 $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ 上是增函数;
 ④ 若函数 $y = f(x) + a$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为 $\sqrt{3}$, 则 $a = 2\sqrt{3}$.
 其中, 正确判断的序号是_____.

30. 在三角形 $\triangle ABC$ 中, $B = 60^\circ$, $AC = \sqrt{3}$, 则 $AB + 2BC$ 的最大值为_____.
31. 在三角形 $\triangle ABC$ 中, $a = 3, b = \sqrt{6}$, $\angle A = \frac{2\pi}{3}$, 则 $\angle B =$ _____.
32. 在三角形 $\triangle ABC$ 中, 若 $a = 2, b + c = 7$, $\cos B = -\frac{1}{4}$, 则 $b =$ _____.
33. 在三角形 $\triangle ABC$ 中, $a = 4, b = 5, c = 6$, 则 $\frac{\sin 2A}{\sin C} =$ _____.
34. 若 $\triangle ABC$ 的内角满足 $\sin A + \sqrt{2} \sin B = 2 \sin C$, 则 $\cos C$ 的最小值是_____.
35. 在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = \angle B = \angle C = 75^\circ$, $BC = 2$, 则 AB 的取值范围是_____.
36. 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 边上的一点, $BC = 3BD$, $AD = \sqrt{2}$, $\angle ADB = 135^\circ$. 若 $AC = \sqrt{2}AB$, 则 $BD =$ _____.
37. 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, $a = 2$, 且 $(2 + b)(\sin A - \sin B) = (c - b) \sin C$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为_____.

3 简答题

38. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{a^2}{3 \sin A}$.

(1) 求 $\sin B \sin C$;

(2) 若 $6 \cos B \cos C = 1, a = 3$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

39. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin A + \sqrt{3} \cos A = 0$, $a = 2\sqrt{7}$, $b = 2$.

(1) 求 c ;

(2) 设 D 为 BC 边上的一点, 且 $AD \perp AC$, 求 $\triangle ABD$ 的面积.

40. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin(A + C) = 8 \sin^2 \frac{B}{2}$.

(1) 求 $\cos B$;

(2) 若 $a + c = 6$, $\triangle ABC$ 的面积为 2, 求 b .

41. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 2 \sin x \cos x$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求证: 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, $f(x) \geq -\frac{1}{2}$.

42. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ, c = \frac{3}{7}a$.

(1) 求 $\sin C$ 的值;

(2) 若 $a = 7$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

43. 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边, $\sin^2 B = 2 \sin A \sin C$.

(1) 若 $a = b$, 求 $\cos B$;

(2) 若 $B = 90^\circ$, 且 $a = \sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

44. 在 $\triangle ABC$ 中, $a^2 + c^2 = b^2 + \sqrt{2}ac$.

(1) 求 $\angle B$ 的大小;

(2) 求 $\sqrt{2}\cos A + \cos C$ 的最大值.

45. 已知函数 $f(x) = 2\sin \omega x \cos \omega x + \cos 2\omega x$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π .

(1) 求 ω 的值;

(2) 求 $f(x)$ 的单调递增区间.

46. 已知函数 $f(x) = \sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \sqrt{2} \sin^2 \frac{x}{2}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, 0]$ 上的最小值.

47. 已知函数 $f(x) = \sin x - 2\sqrt{3} \sin^2 \frac{x}{2}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上的最小值.

48. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边 a, b, c . 已知 $2 \cos C(a \cos B + b \cos A) = c$.

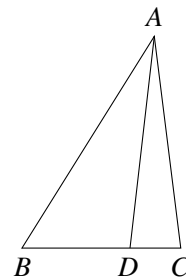
(1) 求 C ;

(2) 若 $c = \sqrt{7}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

49. 如图, 在三角形 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = \frac{\pi}{3}$, $AB = 8$, 点 D 在 BC 边上, 且 $CD = 2$, $\cos \angle ADC = \frac{1}{7}$

(1) 求 $\sin \angle BAD$;

(2) 求 BD, AC 的长.



50. 已知函数 $f(x) = (2 \cos^2 x - 1) \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 4x$

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期及最大值;

(2) 若 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 且 $f(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 求 α 的值.

51. 已知函数 $f(x) = 4 \cos x \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

52. 已知函数 $f(x) = 2 \cos 2x + \sin^2 x - 4 \cos x$.

(1) 求 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 的值;

(2) 求 $f(x)$ 的最大值和最小值.

53. 在三角形 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C , 对边的边长分别是 a, b, c , 已知 $c = 2, C = \frac{\pi}{3}$.

(1) 若三角形 $\triangle ABC$ 的面积等于 $\sqrt{3}$, 求 a, b ;

(2) 若 $\sin C + \sin(B - A) = 2 \sin 2A$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

54. 已知函数 $f(x) = \sin^2 \omega x + 2\sqrt{3} \sin \omega x \cdot \cos \omega x - \cos^2 \omega x + \lambda$ 的图象关于直线 $x = \pi$ 对称, 其中 ω, λ 为常数, 且 $\omega \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 若 $y = f(x)$ 的图象经过点 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$, 求函数 $f(x)$ 的值域.

55. 在三角形 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C , 所对的边长分别是 a, b, c , 且 $a \cos B = 3, b \sin A = 4$.

(1) 求边长 a ;

(2) 若三角形 $\triangle ABC$ 的面积 $S = 10$, 求 $\triangle ABC$ 的周长 l .

56. 在三角形 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C ，所对的边长分别是 a, b, c ，已知 $\cos C + (\cos A - \sqrt{3} \sin A) \cos B = 0$.

(1) 求角 B 的大小；

(2) 若 $a + c = 1$ ，求 b 的取值范围.

57. 在锐角三角形 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C ，所对的边长分别是 a, b, c ，且 $\sqrt{3}a = 2c \sin A$

(1) 确定角 C 的大小；

(2) 若 $c = \sqrt{7}$ ，且三角形 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，求 $a + b$ 的值.

58. 四边形 $ABCD$ 的内角 A 与 C 互补, $AB = 1$, $BC = 3$, $CD = DA = 2$.

(1) 求 C 和 BD ;

(2) 求四边形 $ABCD$ 的面积.

59. 在三角形 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C , 所对的边长分别是 a, b, c , 已知 $A = \frac{\pi}{4}$, $b \sin(\frac{\pi}{4} + C) - c \sin(\frac{\pi}{4} + B) = a$.
求证: $B - C = \frac{\pi}{2}$.

60. $\triangle ABC$ 中的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a = b \cos C + c \sin B$.

(1) 求 B ;

(2) 若 $b = 2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

61. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边长分别为 a, b, c , 已知 $a^2 - c^2 = 2b$, 且 $\sin B = 4 \cos A \sin C$, 求 b .

62. 在三角形 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C ，所对的边长分别是 a, b, c ，已知 $\cos(A - C) + \cos B = 1$, $a = 2c$, 求 C .