立体几何

DonQ

目录

1 平面的基本性质 **2**

2 平行 **2**

2.1 直线与平面平行判定 2

2.2 平面和平面平行 3

3 垂直 **3**

3.1 直线和平面垂直 3

3.2 平面与平面垂直的判定和性质 4

4 空间向量 **4**

4.1 基本定理 4

4.2 空间向量基本运算 4

4.3 方向向量和法向量 5

4.4 平行和垂直的证明 5

4.5 夹角问题 5

1 平面的基本性质

公理 1: 如果一条直线的两点在一个平面内，那么这条直线上的所有点都在这个平面内

公理 2: 如果两个平面有一个公共点，那么它们还有其他公共点，且所有这些公共点的集合是一条过这个公共点的直线

公理 3: 经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面.

推论 1.1. 经过一条直线和直线外的一点有且只有一个平面

推论 1.2. 经过两条相交直线有且只有一个平面

推论 1.3. 经过两条平行直线有且只有一个平面

公理 4: 平行于同一条直线的两条直线互相平行.

定理 1.1 (等角定理)**.** 若一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，则这两个角相等.

推论 1.4 (等角定理的推论)**.** 若两条相交直线和另两条相交直线分别平行，则这两条直线所成的锐角（或直角）相等.

定理 1.2 (异面直线定理)**.** 连结平面内一点与平面外一点的直线，和这个平面内不经过此点的直线是异面直线.

定理 1.3 (异面直线垂直)**.** 如果两条异面直线所成的角是直角，则叫两条异面直线垂直.

2 平行

2.1 直线与平面平行判定

2.1.1 相关定理

定理 2.1 (判定定理)**.** 平面外一条直线和此平面内的一条直线平行，则该直线与此平面平行 (线线平行 $\Rightarrow$ 线面平行).

定理 2.2 (性质定理)**.** 一条直线与一个平面平行，则过这条直线的任一平面与此平面的交线与该直线平行 (线面平行 $\Rightarrow$ 线线平行).

2.1.2 证明线面平行的常用方法

(1) 利用线面平行的定义；

(2) 利用线面平行的判定定理：找到平面内与已知直线平行的直线. 首先确定能否直接找到此直线，如果没有则可以根据以下方法：

   i) **中位线法**：当题目中给出中点时，考虑用三角形中位线；

   ii) **平行四边形法**：无明显三角形构造时，用平行四边形法则，利用平行四边形的对边平行且想等证明；

   iii) **性质定理**：利用线面平行的性质定理证明.

2.2 平面和平面平行

2.2.1 相关定理

定理 2.3 (判定定理)**.** 一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行，则这两个平面平行. (线面平行 $\Rightarrow$ 面面平行).

定理 2.4 (性质定理)**.** 如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行.

2.2.2 面面平行证明常用方法

1) **利用定义** 说明平面和平面没有公共点 (常用反证法)

2) **判定定理** 在其中一个面内找到两条相交直线，证明线面平行. 要证明线面平行，也就需要线线平行. 最终也就是**中位线性质**或者**平行四边形性质**

3 垂直

3.1 直线和平面垂直

如果一条直线和一个平面相交，并且和这个平面内的任意一条直线都垂直，我们就说这条直线和这个平面互相垂直. 其中直线叫做平面的**垂线**，平面叫做直线的**垂面**. 交点叫做**垂足**.

3.1.1 常用定理

定理 3.1 (判定定理 1)**.** 如果一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直，则该直线与此平面垂直.

定理 3.2 (判定定理 2)**.** 如果在两条平行直线中有一条垂直于平面，则另一条直线也垂直于这个平面.

定理 3.3 (性质定理)**.** 垂直于同一个平面的两条直线平行.

定理 3.4 (三垂线定理)**.** 在平面内的一条直线，如果它和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直.

定理 3.5 (三垂线定理逆定理)**.** 在平面内的一条直线，若和这个平面的一条斜线垂直，则它也和这条斜线的射影垂直.

3.1.2 线线垂直证明方法

1) **勾股定理**: 同一平面内两直线相交成直角；

2) **三垂线**: 异面直线所成的角为直角时，两条异面直线垂直；

3) **线面垂直**: 一条直线与一平面垂直，则这条直线垂直于平面内任一直线.

3.1.3 证明线面垂直的方法

1) **面面垂直性质定理**: 两平面垂直，在一个平面内垂直于交线的直线必垂直于另一个平面；

2) **线面垂直的判定定理**: 一条直线与平面内的两条相交直线都垂直.

3.2 平面与平面垂直的判定和性质

3.2.1 相关定理

定理 3.6 (判定定理)**.** 一个平面过另一个平面的一条垂线，则这两个平面相互垂直.

定理 3.7 (性质定理)**.** 两个平面互相垂直，则一个平面内垂直于交线的直线与另一个平面垂直.

3.2.2 证明面面垂直的方法

线面垂直、面面垂直最终归纳为线线垂直，共面直线垂直常用勾股定理的逆定理、等腰三角形的性质；异面直线垂直的通常利用线面垂直 (三垂线定理) 或者空间向量.

4 空间向量

4.1 基本定理

1) 共线向量: 对空间中任意两个向量 $\vec{a}, \vec{b}(\vec{b} \neq \vec{0}), \vec{a} \parallel \vec{b}$ 的充要条件是: 存在唯一的实数 λ, 使得 $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.
2) 共面向量定理：如果两个向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 不共线，那么向量 $\vec{p}$ 与向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 共面的充要条件是存在唯一的有序数对 (x, y)，使得 $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$.
3) 空间向量基本定理：如果三个向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 不共面，那么对空间任一向量 $\vec{p}$, 存在有序实数组 x, y, z，使得 $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. 其中 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 叫做空间的一组基底 (空间直角坐标系就是其中的一个特例，注意坐标系需要满足右手定则)

4.2 空间向量基本运算

设点 $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$，非零向量 $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$:

1) $\overrightarrow{AB}$ 表示: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$;
2) 距离公式: $d_{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$;
3) 向量数量积: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \cos\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$;
4) 夹角公式: $\cos\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \dfrac{\vec{a}\,\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$
5) 垂直判定: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$;
6) 平行判定: $\vec{b} = \lambda\vec{a} \Leftrightarrow \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{y_2}{y_1} = \dfrac{z_2}{z_1}$

4.2.1 点线面证明问题

1) 三点 P, A, B 共线：对空间任意一点 O, 有 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + (1 - x)\overrightarrow{OB}$(平面中也有相同性质，称作定比分点问题，部分地方省份仍然作为高考内容)
2) 四点 M, P, A, B 共面：对空间任意一点 O, 有 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + (1 - x - y)\overrightarrow{OM}$.

4.3 方向向量和法向量

定理 4.1 (直线方向向量). l 是空间一直线，A,B 是直线 l 上任意两点，则称 $\overrightarrow{AB}$ 为直线 l 的方向向量，与 $\overrightarrow{AB}$ 平行的任意非零向量也是直线 l 的方向向量

定理 4.2 (平面法向量). 与一个给定平面垂直的向量，称作此平面的一个法向量.

设 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 是给定平面 α 内两不共线向量，$\vec{n}$ 是平面 α 的法向量，则求法向量的方程组为 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{a}=0\\ \vec{n}\cdot\vec{b}=0\end{cases}$

注：高中部分法向量主要目的为计算夹角，法向量长度并不会影响角度计算，故而在解上述方程时，可以令某一非零坐标分量为 1(或其他非零数值)，进而求得另外两个坐标分量的数值.

4.4 平行和垂直的证明

4.4.1 平行的证明

1) 设直线 l_1 和 l_2 的方向向量分别为 $\vec{v_1}$ 和 $\vec{v_2}$，则 $l_1 /\!/ l_2$(或 l_1 与 l_2 重合)$\Leftrightarrow \vec{v_1} /\!/ \vec{v_2}$;

2) 设直线 l 的方向向量为 $\vec{v}$，与平面 α 共面的两个不共线向量 $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$，$l /\!/ \alpha$ 或 $\subset\alpha \Leftrightarrow$ 存在两个实数 x, y 使得 $\vec{v}=x\vec{v_1}+y\vec{v_2}$;

3) 设直线 l 的方向向量为 $\vec{v}$，平面 α 的法向量为 $\vec{u}$，则 $l /\!/ \alpha$ 或 $l\subset\alpha \Leftrightarrow \vec{v}\perp\vec{u}$;

4) 设平面 α 和 β 的法向量分别为 $\vec{u_1},\vec{u_2}$，则 $\alpha /\!/ \beta \Leftrightarrow \vec{u_1} /\!/ \vec{u_2}$

4.4.2 垂直的证明

1. 设直线 l_1 和 l_2 的方向向量分别为 $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$，则 $l_1\perp l_2 \Leftrightarrow \vec{v_1}\perp\vec{v_2} \Leftrightarrow \vec{v_1}\cdot\vec{v_2}=0$;
2. 设直线 l 的方向向量为 $\vec{v}$，平面 α 的法向量为 $\vec{u}$，则 $l\perp\alpha \Leftrightarrow \vec{v} /\!/ \vec{u}$;
3. 设平面 α和β 的法向量分别为 $\vec{u_1}$和$\vec{u_2}$，则 $\alpha\perp\beta \Leftrightarrow \vec{u_1}\perp\vec{u_2} \Leftrightarrow \vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=0$.

线线平行	$l /\!/ m \Leftrightarrow \boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}\,(k\in\mathbf{R})$
线面平行	$l /\!/ \alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{u} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}=0$
面面平行	$\alpha /\!/ \beta \Leftrightarrow \boldsymbol{u} /\!/ \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \boldsymbol{u}=k\boldsymbol{v}$
线线垂直	$l\perp m \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$
线面垂直	$l\perp\alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{u} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}=k\boldsymbol{u}\,(k\in\mathbf{R})$
面面垂直	$\alpha\perp\beta \Leftrightarrow \boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v} \Leftrightarrow \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0$

4.5 夹角问题

4.5.1 异面直线夹角

设 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 分别是两异面直线 l_1,l_2 的方向向量，设 l_1和l_2 的夹角为 $\theta\left(\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$，$\vec{a}$和$\vec{b}$ 的夹角为 $\beta\left(\beta\in[0,\pi]\right)$，则有

$$\cos\theta=\left|\cos\beta\right|=\left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}\right|$$

4.5.2 直线与平面所成角

设直线 l 的方向向量为 $\vec{a}$，平面 α 的法向量为 $\vec{n}$，直线 l 与平面 α 所成的角为 θ，$\vec{a}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角为 β，则

$$\sin\theta = |\cos\beta| = \left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{|\vec{a}||\vec{n}|}\right|$$

4.5.3 二面角的大小

1. **几何法**: 设 AB, CD 分别是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的两个面内与棱 l 垂直的直线，则二面角的大小 $\theta = \left\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right\rangle$
2. **向量法**: 设 $\vec{n_1}, \vec{n_2}$ 分别是二面角 $\alpha - l - \beta$ 的两个半平面 α, β 的法向量，则二面角的大小 θ 满足 $|\cos\theta| = \left|\cos\langle\vec{n_1}, \vec{n_2}\rangle\right|$，二面角的平面角大小是向量 $\vec{n_1}$ 与 $\vec{n_2}$ 的夹角 (或其补角，视觉判断是最快而方便的).

4.5.4 点到平面的距离

已知点 A 在平面 α 上，AB 为平面 α 的一条斜线段，$\vec{n}$ 为平面 α 的法向量，则 B 到平面 α 的距离为

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}$$