新课标习题分类

目录

1 函数 **1**

2 三角函数 **3**

3 向量 **5**

4 圆锥曲线 **5**

5 导数 **8**

6 排列组合二项式 **10**

7 数列 **10**

8 不等式 **11**

9 逻辑与命题 **11**

1 函数

1. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递减，且为奇函数，若 $f(1)=-1$，则满足 $-1\leqslant f(x-2)\leqslant 1$ 的 x 的取值范围是 (　　)

(A) $[-2,2]$　　(B) $[-1,1]$　　(C) $[0,4]$　　(D) $[1,3]$

2. 设 x,y,z 为正数，且 $2^x=3^y=5^z$，则 (　　)

(A) $2x<3y<5z$　　(B) $5z<2x<3y$　　(C) $3y<5z<2x$　　(D) $3y<2x<5z$

3. 已知函数 $f(x)=\ln x+\ln(2-x)$，则 (　　)

(A) $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增　　(B) $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减

(C) $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称　　(D) $y=f(x)$ 的图像关于点 $(1,0)$ 对称

4. 函数 $f(x)=\ln\left(x^2-2x-8\right)$ 的单调递增区间是 (　　)

(A) $(-\infty,-2)$　　(B) $(-\infty,-1)$　　(C) $(1,+\infty)$　　(D) $(4,+\infty)$

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 0,\\ 2^x, & x>0.\end{cases}$ 则满足 $f(x)+f(x-\dfrac{1}{2})>1$ 的 x 的取值范围是______.

6. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，,$f(x)=2x^3+x^2$，则 $f(2)=$ ______.

7. 若 $a>b>1,\ 0<c<1$，则 ( )

(A) $a^c<b^c$

(B) $ab^c<ba^c$

(C) $a\log_b c<b\log_a c$

(D) $\log_a c<\log_b c$

8. 已知 $a=2^{\frac{4}{3}},b=4^{\frac{2}{5}},c=25^{\frac{1}{3}}$，则 ( )

(A) $b<a<c$ (B) $a<b<c$ (C) $b<c<a$ (D) $c<a<b$

9. 从区间 $[0,1]$ 随机抽取 $2n$ 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n$，构成 n 个数对 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，其中两数的平方和小于 1 的数对共有 m 个，则用随机模拟的方法得到的圆周率 π 的近似值为 ( )

(A) $\dfrac{4n}{m}$ (B) $\dfrac{2n}{m}$ (C) $\dfrac{4m}{n}$ (D) $\dfrac{2m}{n}$

10. 若函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，则 a 的取值范围是 ( )

(A) $[-1,1]$ (B) $\left[-1,\dfrac{1}{3}\right]$ (C) $\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right]$ (D) $\left[-1,-\dfrac{1}{3}\right]$

11. 已知函数 $f(x)\ (x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(-x)=2-f(x)$,若函数 $y=\dfrac{x+1}{x}$ 与 $y=f(x)$ 图象的交点为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_m,y_m)$，则 $\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=$ ( )

(A) 0 (B) m (C) $2m$ (D) $4m$

12. 已知函数 $f(x)\ (x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(x)=f(2-x)$，若函数 $y=\left|x^2-2x-3\right|$ 与 $y=f(x)$ 图像的交点为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots(x_n,y_n)$，则 $\sum\limits_{i=1}^{m}x_i=$ ( )

(A) 0 (B) m (C) $2m$ (D) $4m$

13. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1+\log_2(2-x), & x<1\\ 2^{x-1}, & x\geqslant 1.\end{cases}$，$f(-2)+f\left(\log_2 12\right)=$ ( )

(A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 12

14. 已知 $f(x)$ 为偶函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=\ln(-x)+3x$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,-3)$ 处的切线方程是______.

15. 若 $f(x)=x\ln(x+\sqrt{a+x^2})$ 为偶函数，则 $a=$______.

2　三角函数

1. 已知曲线 $C_1: y=\cos x$, $C_2: y=\sin\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$，则下面结论正确的是　(　　)

(A) 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到曲线 $C2$

(B) 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

(C) 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

(D) 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

2. 设函数 $f(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，则下列结论错误的是　(　　)

(A) $f(x)$ 的一个周期为 -2π　　(B) $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{8\pi}{3}$ 对称

(C) $f(x+\pi)$ 的一个零点为 $x=\dfrac{\pi}{6}$　　(D) $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递减

3. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c，已知 $\sin B+\sin A(\sin C-\cos C)=0$, $a=2, c=\sqrt{2}$, 则 $C=$　(　　).

(A) $\dfrac{\pi}{12}$　(B) $\dfrac{\pi}{6}$　(C) $\dfrac{\pi}{4}$　(D) $\dfrac{\pi}{3}$

4. 已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{4}{3}$, 则 $\sin 2\alpha=$　(　　)

(A) $-\dfrac{7}{9}$　(B) $-\dfrac{2}{9}$　(C) $\dfrac{2}{9}$　(D) $\dfrac{7}{9}$

5. 若 $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$, 则 $\cos^2\alpha+2\sin 2\alpha=$　(　　)

(A) $\dfrac{64}{25}$　(B) $\dfrac{48}{25}$　(C) 1　(D) $\dfrac{16}{25}$

6. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{5}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的最大值为　(　　)

(A) $\dfrac{6}{5}$　(B) 1　(C) $\dfrac{3}{5}$　(D) $\dfrac{1}{5}$

7. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $\left(\omega>0, |\varphi|\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right), x=-\dfrac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点，$x=\dfrac{\pi}{4}$ 为 $y=f(x)$ 图象的对称轴，且 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{18},\dfrac{5\pi}{36}\right)$ 单调，则 ω 的最大值为　(　　)

(A) 11　(B) 9　(C) 7　(D) 5

8. 若 $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{3}{5}$，则 $\sin 2\alpha=$　(　　)

(A) $\dfrac{7}{25}$　(B) $\dfrac{1}{5}$　(C) $-\dfrac{1}{5}$　(D) $-\dfrac{7}{25}$

9. 若 $\tan\theta=\dfrac{1}{3}$，则 $\cos 2\theta=$　(　　)

(A) $-\dfrac{4}{5}$　(B) $-\dfrac{1}{5}$　(C) $\dfrac{1}{5}$　(D) $\dfrac{4}{5}$

10. 函数 $f(x)=\cos 2x+6\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ 的最大值为 ( )

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

11. 在 $\triangle ABC$ 中，$B=\frac{\pi}{4}$, BC 边上的高等于 $\frac{1}{3}BC$，则 $\sin A=$ ( )

(A) $\frac{3}{10}$ (B) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (D) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

12. 已知 θ 是第四象限角，且 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$，则 $\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=$______.

13. 函数 $f(x)=2\cos x+\sin x$ 的最大值为______.

14. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c，若 $2b\cos B=a\cos C+c\cos A$，则 $B=$ ______.

15. 函数 $f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x-\frac{3}{4},\left(x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$ 的最大值是______.

16. 已知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\tan\alpha=2$，则 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$______.

17. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c，若 $\cos A=\frac{4}{5}$, $\cos C=\frac{5}{13}$, $a=1$. 则 $b=$ ______.

18. 在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle B=\angle C=75^\circ$, $BC=2$, 则 AB 的取值范围是______.

19. 函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的图像可由函数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 的图像至少向右平移______ 个单位长度得到.

20. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c，已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{a^2}{3\sin A}$.

(1) 求 $\sin B\sin C$.

(2) 若 $6\cos B\cos C=1, a=3$. 求 $\triangle ABC$ 的周长.

21. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c，已知 $\sin(A+C)=8\sin^2\frac{B}{2}$.

(1) 求 $\cos B$;

(2) 若 $a+c=6, \triangle ABC$ 的面积为 2，求 b.

22. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c，已知 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=0$, $a=2\sqrt{7}, b=2$.

(1) 求 c;

(2) 设 D 为 BC 边上的一点，且 $AD\perp AC$，求 $\triangle ABD$ 的面积.

23. $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边 a,b,c . 已知 $2\cos C(a\cos B+b\cos A)=c$.

(1) 求 C;

(2) 若 $c=\sqrt{7}$，$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

24. 在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 上的点，AD 平分 $\angle BAC$, $\triangle ABD$ 是 $\triangle ADC$ 面积的两倍.

(1) 求 $\frac{\sin\angle B}{\sin\angle C}$;

(2) 若 $AD=1$, $DC=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 求 BD 和 AC 的长.

3 向量

1. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，P 为平面 ABC 内一点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)$ 的最小值是 (　　)

(A) -2　　(B) $-\dfrac{3}{2}$　　(C) $-\dfrac{4}{3}$　　(D) -1

2. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=1,\ AD=2$，动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上，若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，则 $\lambda+\mu$ 的最大值为 (　　)

(A) 3　　(B) $2\sqrt{2}$　　(C) $\sqrt{5}$　　(D) 2

3. 设向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $\left|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\right|=\sqrt{10},\ \left|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\right|=\sqrt{6}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ (　　)

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 5

4. 已知向量 $\overrightarrow{BA}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{BC}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，则 $\angle ABC=$ (　　)

(A) 30°　　(B) 45°　　(C) 60°　　(D) 120°

5. 设非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $\left|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\right|=\left|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\right|$，则 (　　)

(A) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$　　(B) $|\boldsymbol{a}|=\left|\boldsymbol{b}\right|$　　(C) $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$　　(D) $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$

6. 设 D 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$，则 (　　)

(A) $\overrightarrow{AD}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AC}$　　(B) $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

(C) $\overrightarrow{AD}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　(D) $\overrightarrow{AD}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

7. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°，$|\boldsymbol{a}|=2,\left|\boldsymbol{b}\right|=1$，则 $\left|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{2b}\right|=$______.

8. 设向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 不平行，向量 $\lambda\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}+2\vec{b}$ 平行，则实数 $\lambda=$ ______.

4 圆锥曲线

1. 若双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的一条渐近线被圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 所截得的弦长为 2，则 C 的离心率为 (　　)

(A) 2　　(B) $\sqrt{3}$　　(C) $\sqrt{2}$　　(D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

2. 已知 F 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，过 F 作两条互相垂直的直线 l_1,l_2，直线 l_1 与 C 交于 A,B 两点，直线 l_2 与 C 交于 D,E 两点，则 $|AB|+|DE|$ 的最小值为 (　　)

(A) 16　　(B) 14　　(C) 12　　(D) 10

3. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1,A_2，且以线段 A_1, A_2 为直径的圆于直线 $bx-ay+2ab=0$ 相切，则 C 的离心率为 (　　)

(A) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　(D) $\dfrac{1}{3}$

4. 已知 O 为坐标原点，F 是椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左焦点，A,B 分别是 C 的左、右顶点. P 为 C 上一点，且 $PF\perp x$ 轴，且过点 A 的直线 l 与线段 PF 交于点 M，与 y 轴交于点 E，若直线 BM 经

过 OE 的中点，则 C 的离心率为　（　　）

(A) $\frac{1}{3}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{2}{3}$　(D) $\frac{3}{4}$

5. 设 A, B 是椭圆 $C:\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{m}=1$ 长轴的两个端点，若 C 上存在点 M 满足 $\angle AMB=120°$，则 m 的取值范围是　（　　）

(A) $(0,1]\cup[9,+\infty)$　(B) $\left(0,\sqrt{3}\right]\cup[9,+\infty)$

(C) $(0,1]\cup[4,+\infty)$　(D) $\left(0,\sqrt{3}\right]\cup[4,+\infty)$

6. 设点 $M(x_0,1)$，若在圆 $O:x^2+y^2=1$ 上存在点 N，使得 $\angle OMN=45°$，则 x_0 的取值范围是　（　　）

(A) $[-1,1]$　(B) $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$　(C) $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$　(D) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

7. 过抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点 F，且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交 C 于点 $M\left(M在x轴上方\right)$，l 为 C 的准线，点 N 在 l 上，且 $MN\perp l$, 则 M 到直线 NF 的距离为　（　　）

(A) $\sqrt{5}$　(B) $2\sqrt{2}$　(C) $2\sqrt{3}$　(D) $3\sqrt{3}$

8. 已知 $M(x_0,y_0)$ 是双曲线 $C:\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 上的一点，F_1, F_2 是 C 上的两个焦点，若 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}<0$，则 y_0 的取值范围是　（　　）

(A) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$　(B) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$

(C) $\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$　(D) $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

9. 已知 A, B 为双曲线 E 的左、右顶点，点 M 在 E 上，$\triangle ABM$ 为等腰三角形，且顶角为 $120°$，则 E 的离心率为　（　　）

(A) $\sqrt{5}$　(B) 2　(C) $\sqrt{3}$　(D) $\sqrt{2}$

10. 已知方程 $\frac{x^2}{m^2+n}-\frac{y^2}{3m^2-n}=1$ 表示双曲线,且该双曲线两焦点间的距离为 4,则 n 的取值范围是（　　）

(A) $(-1,3)$　(B) $\left(-1,\sqrt{3}\right)$　(C) $(0,3)$　(D) $\left(0,\sqrt{3}\right)$

11. 设 F 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，曲线 $y=\frac{k}{x}\,(k>0)$ 与 C 交于点 P, $PF\perp x$ 轴，则 $k=$______.

12. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的右顶点为 A，以 A 为圆心，b 为半径做圆 A，圆 A 与双曲线 C 的一条渐近线交于 M,N 两点. 若 $\angle MAN=60°$，则 C 的离心率为______.

13. 已知直线 $l:mx+y+3m-\sqrt{3}=0$ 与圆 $x^2+y^2=12$ 交于 A, B 两点，过 A, B 分别做 l 的垂线与 x 轴交于 C, D 两点，若 $AB=2\sqrt{3}$，则 $|CD|=$______.

14. 已知 F 是抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点,M 是 C 上一点,FM 的延长线交 y 轴于点 N. 若,M 为 FN 的中点，则 $|FN|=$ ______.

15. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，四点 $P_1(1,1),P_2(0,1),P_3\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right),P_4\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 中恰有三点在椭圆 C 上.

(1) 求 C 的方程；

(2) 设直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于点 A, B 两点，若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1，证明：l 过定点.

16. 设 O 为坐标原点，动点 M 在椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 上，过 M 做 x 轴的垂线，垂足为 N，点 P 满足 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$.

(1) 求点 P 的轨迹方程；

(2) 设点 Q 在直线 $x=-3$ 上，且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$. 证明：过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.

17. 已知抛物线 $C: y^2=2x$，过点 $(2,0)$ 的直线 l 交 C 与 A, B 两点，圆 M 是以线段 AB 为直径的圆.

(1) 证明：坐标原点 O 在圆 M 上;

(2) 设圆 M 过点 $P(4,-2)$，求直线 l 与圆 M 的方程.

18. 设 A, B 为曲线 $C: y=\dfrac{x^2}{4}$ 上两点，A 与 B 的横坐标之和为 4.

(1) 求直线 AB 的斜率；

(2) 设 M 为曲线 C 上一点，C 在 M 处的切线与直线 AB 平行，且 $AM\perp BM$，求直线 AB 的方程.

19. 在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 $y=x^2+mx-2$ 与 x 轴交于 A, B 两点，点 C 的坐标为 $(0,1)$. 当 m 变化时，解答下列问题：

(1) 能否出现 $AC\perp BC$ 的情况？说明理由；

(2) 证明过 A, B, C 三点的圆在 y 轴上截得的弦长为定值.

20. 设圆 $x^2+y^2+2x-15=0$ 的圆心为 A，直线 l 过点 $B(1,0)$ 且与 x 轴不重合，l 交圆 A 与 C ,D 两点，过 B 作 AC 的平行线交 AD 于点 E.

(1) 证明 $|EA|+|EB|$ 为定值，并写出点 E 的轨迹方程；

(2) 设点 E 的轨迹为曲线 C_1，直线 l 交 C_1 于 M, N 两点，过 B 且与 l 垂直的直线与圆 A 交于 P, Q 两点，求四边形 $MPNQ$ 面积的取值范围.

21. 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{t}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的焦点在 x 轴上，A 是 E 的左顶点，斜率为 $k\,(k>0)$ 的直线交 E 于 A, M 两点，点 N 在 E 上，$MA\perp NA$.

(1) 当 $t=4$, $|AM|=|AN|$ 时，求 $\triangle AMN$ 的面积；

(2) 当 $2|AM|=|AN|$ 时，求 k 的取值范围.

22. 已知抛物线 $C: y^2=2x$ 的焦点为 F，平行于 x 轴的两条直线 l_1, l_2 分别交 C 于 A, B 两点，交 C 的准线于 P, Q 两点.

(1) 若 F 在线段 AB 上，R 是 PQ 的中点，证明 $AR\parallel FQ$;

(2) 若 $\triangle PQF$ 的面积是 $\triangle ABF$ 的面积的两倍，求 AB 中点的轨迹方程.

23. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $l: y=t\,(t\neq 0)$ 交 y 轴于点 M，交抛物线 $C: y^2=2px\,(p>0)$ 于点 P，M 关于 P 的对称点为 N，连接 ON 并延长交 C 于点 H.

(1) 求 $\dfrac{|OH|}{|ON|}$;

(2) 除 H 以外，直线 MH 与 C 是否有其它公共点？并说明理由.

24. 已知 A 是椭圆 E：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左顶点，斜率为 $k\,(k>0)$ 的直线交 E 于 A, M 两点，点 N 在 E 上，$MA\perp NA$.

(1) 当 $|AM|=|AN|$ 时，求 $\triangle AMN$ 的面积；

(2) 当 $2\,|AM|=|AN|$ 时，证明：$\sqrt{3}<k<2$.

25. 在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 $C:y=\dfrac{x^2}{4}$ 与直线 $l:y=kx+a(a>0)$ 交于 M, N 两点.

(1) 当 $k=0$ 时，分别求 C 在点 M, N 处的切线方程；

(2) y 轴上是否存在点 P，使得当 k 变动时，总有 $\angle OPM=\angle OPN$？说明理由.

26. 已知椭圆 $C:9x^2+y^2=m^2(m>0)$，直线 l 不过原点 O 且不平行与坐标轴，l 与 C 有两个交点 A, B，线段 AB 的中点为 M.

(1) 证明：直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值；

(2) 若 l 过点 $\left(\dfrac{m}{3},m\right)$，延长线段 OM 与 C 交于点 P，四边形 $OAPB$ 能否为平行四边形？若能，求此时 l 的斜率；若不能，说明理由.

5 导数

1. 若 $x=-2$ 是函数 $f(x)=\left(x^2+ax-1\right)e^{x-1}$ 的极值点，则 $f(x)$ 的极小值为 ( )

(A) -1 (B) $-2e^{-3}$ (C) $5e^{-3}$ (D) 1

2. 已知函数 $f(x)=x^2-2x+a(e^{x-1}+e^{-x+1})$ 有唯一零点，则 $a=$ ( )

(A) $-\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) 1

3. 已知函数 $f(x)=kx-\ln x$ 在区间 $(1,+\infty)$ 单调递增，则 k 的取值范围是 ( )

(A) $(-\infty,-2]$ (B) $(-\infty,-1]$ (C) $[2,+\infty)$ (D) $[1,+\infty)$

4. 设函数 $f(x)=e^x(2x-1)-ax+a$，其中 $a<1$，若存在唯一的整数 x_0，使得 $f(x_0)<0$，则 a 的取值范围是 ( )

(A) $\left[-\dfrac{3}{2e},1\right)$ (B) $\left[-\dfrac{3}{2e},\dfrac{3}{4}\right)$ (C) $\left[\dfrac{3}{2e},\dfrac{3}{4}\right)$ (D) $\left[\dfrac{3}{2e},1\right)$

5. 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$ 的导函数，$f(-1)=0$，当 $x>0$ 时，$xf'(x)-f(x)<0$，则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是 ( )

(A) $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ (B) $(-1,0)\cup(1,+\infty)$

(C) $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ (D) $(0,1)\cup(1,+\infty)$

6. 若直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=\ln x+2$ 的切线，也是曲线 $y=\ln(x+1)$ 的切线，$b=$______.

7. 已知函数 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^x-x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围.

8. 已知函数 $f(x)=ax^2-ax-x\ln x$，且 $f(x)\geqslant 0$.

(1) 求 a;

(2) 证明：$f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0，且 $e^{-2} < f(x_0) < 2^{-3}$.

9. 已知函数 $f(x) = x - 1 - a\ln x$.

(1) 若 $f(x) \geqslant 0$，求 a 的值；

(2) 设 m 为整数，且对于任意正整数 n，$\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right) < m$，求 m 的最小值.

10. 已知函数 $f(x) = e^x\left(e^x - a\right) - a^2 x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $f(x) \geqslant 0$，求 a 的取值范围.

11. 设函数 $f(x) = (1 - x^2)e^x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 当 $x \geqslant 0$ 时，$f(x) < ax + 1$，求 a 的取值范围.

12. 已知函数 $f(x) = \ln x + ax^2 + (2a+1)\,x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 当 $a < 0$ 时，证明 $f(x) \leqslant -\dfrac{3}{4a} - 2$.

13. (1) 讨论函数 $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}e^x$ 的单调性，并证明当 $x > 0$ 时，$(x-2)\,e^x + x + 2 > 0$.

(2) 当 $a \in [0,1)$ 时，函数 $g(x) = \dfrac{e^x - ax - a}{x^2}\ (x > 0)$ 有最小值，设 $g(x)$ 的最小值为 $h(a)$. 求函数 $h(a)$ 的值域.

14. 设函数 $f(x) = a\cos 2x + (a-1)\,(\cos x + 1)$，其中 $a > 0$，记 $\left|f(x)\right|$ 的最大值为 A.

(1) 求 $f'(x)$;

(2) 求 A；

(3) 证明 $\left|f'(x)\right| \leqslant 2A$.

15. 已知函数 $f(x) = (x+1)\ln x - a\,(x-1)$.

(1) 当 $a = 4$ 时，求曲线 $y = f(x)$ 在 $\left(1, f(1)\right)$ 处的切线方程；

(2) 若当 $x \in (1, +\infty)$ 时，$f(x) > 0$，求 a 的取值范围.

16. 设函数 $f(x) = \ln x - x + 1$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 证明当 $x \in (1, +\infty)$ 时，$1 < \dfrac{x-1}{\ln x} < x$;

(3) 设 $c > 1$，证明当 $x \in (0,1)$ 时，$1 + (c-1)\,x > c^x$.

17. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax + \dfrac{1}{4}, g(x) = -\ln x$

(1) 当 a 为何值时，x 轴为 $y = f(x)$ 的切线；

(2) 用 $\min\{m,n\}$ 表示 m,n 中的最小值，设函数 $h(x) = \min\left\{f(x), g(x)\right\}(x > 0)$，讨论 $h(x)$ 零点的个数.

18. 设函数 $f(x) = e^{mx} + x^2 - mx$.

(1) 证明：$f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减，在 $(0, +\infty)$ 单调递增；

(2) 若对于任意 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$，都有 $\left|f(x_1) - f(x_2)\right| \leqslant e - 1$，求 m 的取值范围.

6 排列组合二项式

1. 安排 3 名志愿者完成 4 项工作，每人至少完成 1 项，每项工作由 1 人完成，则不同的安排方式共有(　　)

(A) 12 种　(B) 18 种　(C) 24 种　(D) 36 种

2. $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)(1+x)^6$ 展开式中 x^2 的系数为 (　　)

(A) 15　(B) 20　(C) 30　(D) 35

3. $(x+y)(2x-y)^5$ 的展开式中 x^3y^3 的系数是 (　　)

(A) -80　(B) -40　(C) 40　(D) 80

4. $\left(x^2+x+y\right)^5$ 的展开式中，x^5y^2 的系数为 (　　)

(A) 10　(B) 20　(C) 30　(D) 60

5. $(a+x)(1+x)^4$ 的展开式中 x 的奇数次幂项的系数之和为 32，则 $a=$ ______.

7 数列

1. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．若 $a_4+a_5=24$, $S_6=48$, 则 $\{a_n\}$ 的公差为 (　　)

(A) 1　(B) 2　(C) 4　(D) 8

2. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_3=3, S_4=10$, 则 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=$ ______.

3. 我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题：“远望巍巍塔七层，红光点点倍加增，共灯三百八十一，请问尖头几盏灯？”意思是：一座 7 层塔共挂了 381 盏灯，且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的 2 倍，则塔的顶层共有灯 (　　)

(A) 1 盏　(B) 3 盏　(C) 5 盏　(D) 9 盏

4. 等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，$a_1+a_3+a_5=21$，则 $a_3+a_5+a_7=$ (　　)

(A) 21　(B) 42　(C) 63　(D) 84

5. 等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_3=10$, $a_2+a_4=5$, 则 $a_1a_2\cdots a_n$ 的最大值为______.

6. 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_1=-1$，$a_{n+1=S_nS_{n+1}}$，则 $S_n=$ ______.

7. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+3a_2+\cdots+(2n-1)a_n=2n$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求数列 $\left\{\frac{a_n}{2n+1}\right\}$ 的前 n 项和.

8. S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_1=1, S_7=28$, 记 $b_n=[\lg a_n]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，如 $[0.9]=0$, $[\lg 99]=1$.

(1) 求 b_1, b_{11}, b_{101};

(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 1000 项和.

9. 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 3 的等差数列，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1,\ b_2=\dfrac{1}{3},\ a_nb_{n+1}+b_{n+1}=nb_n$.

    (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

    (2) 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

10. S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_n>0$，$a_n^2+2a_n=4S_n+3$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$.

    (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

    (2) 设 $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

8 不等式

1. 设 $x,\ y$ 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y\leqslant 1 \\ 2x+y\geqslant -1 \\ x-y\leqslant 0 \end{cases}$，则 $z=3x-2y$ 的最小值为______.

2. 设 $x,\ y$ 满足约束条件 $\begin{cases} x-1\geqslant 0, \\ x-y\leqslant 0, \\ x+y-4\leqslant 0 \end{cases}$ 则 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值为______.

9 逻辑与命题

1. 设有下面四个命题：
    p_1：若复数 z 满足 $\dfrac{1}{z}\in\mathbf{R}$，则 $z\in\mathbf{R}$;
    p_2：若复数 z 满足 $z^2\in\mathbf{R}$，则 $z\in\mathbf{R}$;
    p_3：若复数 $z_1,\ z_2$ 满足 $z_1z_2\in\mathbf{R}$，则 $z_1=\overline{z_2}$;
    p_4：若复数 $z\in\mathbf{R}$，则 $\bar{z}\in\mathbf{R}$.
    其中真命题为 (　　)

    (A) p_1,p_3　　(B) p_1,p_4　　(C) p_2,p_3　　(D) p_2,p_4

2. 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数存在，若 $p:f'(x_0)=0,\ q:x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极值点，则 (　　)

    (A) p 是 q 的充分必要条件

    (B) p 是 q 的充分条件，但不是 q 的必要条件

    (C) p 是 q 的必要条件，但不是 q 的充分条件

    (D) p 既不是 q 的充分条件，也不是 q 的必要条件

3. 设命题 $P:\exists n\in\mathbf{N},n^2>2^n$，则 $\neg P$ 为 (　　)

    (A) $\forall n\in\mathbf{N},\ n^2>2^n$

    (B) $\exists n\in\mathbf{N},\ n^2\leqslant 2^n$

    (C) $\forall n\in\mathbf{N},\ n^2\leqslant 2^n$

    (D) $\exists n\in\mathbf{N},\ n^2=2^n$