三角函数性质整理

目录

1 基本性质

1.1 任意角的三角函数

1.1.1 任意角的概念

1) 以 x 轴正方向为角度的起始边，把终边按逆时针方向旋转所成的角叫做正角；按顺时针旋转的角叫做负角，没有旋转所成的角叫零角;

2) 终边相同的角：所有与 α 终边相同的角连同 α 在内可以构建一个集合 $S=\left\{\beta \middle| \beta=\alpha+k\cdot 360^\circ, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

1.1.2 弧度制

把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角，用符号 rad 表示，读作弧度.

一般的，正角的弧度是正数，负角的弧度是负数，零角的弧度是 0. 如果半径为 r 的圆的圆心角 α 所对的弧的长为 l，那么角 α 的弧度数的绝对值是:

$$|\alpha|=\frac{l}{r}.$$

角度与弧度对应关系：

$$\begin{aligned}&360^\circ=2\pi\ rad,\quad 180^\circ=\pi\ rad;\\&1^\circ=\frac{\pi}{180}rad\qquad 1\ rad=\frac{180^\circ}{\pi}\approx 57.30^\circ\end{aligned}$$

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

1.1.3 任意角的三角函数

$P(x,y)$ 是角 α 终边上异于原点的一点，$|OP|=r=\sqrt{x^2+y^2}$，则

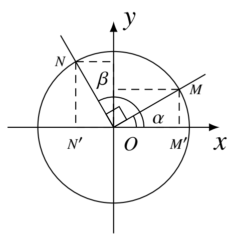
$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\cos\alpha=\frac{x}{r},\tan\alpha=\frac{y}{x}.$$

其中 x,y 都是带符号数，所以可以根据各象限内 x,y 的正负性得到三角函数的符号规律：一全正，二正弦，三两切 (余切高考不涉及)，四余弦.

1.1.4 同角三角函数关系

两个重要的三角函数关系式：① $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; ② $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

1.1.5 诱导公式



如上图所示，当$\beta=\dfrac{\pi}{2}+\alpha$时, $\triangle OMM'$ 和 $\triangle ONN'$ 全等，根据三角函数定义，可以得到：

$$\cos\beta=\frac{ON'}{ON}=-\frac{MM'}{OM}=-\sin\alpha$$

即：

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$$

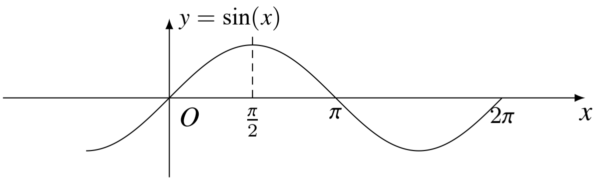
以此类推，可得：

$$\sin\left(\frac{k\pi}{2}\pm\alpha\right)=\begin{cases}+/-\sin\alpha & k\text{为偶数},\\ +/-\cos\alpha & k\text{为奇数}.\end{cases}\text{(奇变偶不变，符号看象限)}$$

此公式为自创精简写法，分析如下：当 k 为奇数时，正 (余) 弦仍对应正 (余) 弦，当 k 为偶数时，正 (余) 弦对应余 (正) 弦，右侧的正负号根据 $\dfrac{k\pi}{2}\pm\alpha$ 所在象限的正 (余) 弦值决定.

1.2 函数图象

1.2.1 正弦函数图象



(1) 定义域：$x\in\mathbf{R}$; 值域：$[-1,1]$; 奇偶性：奇函数;

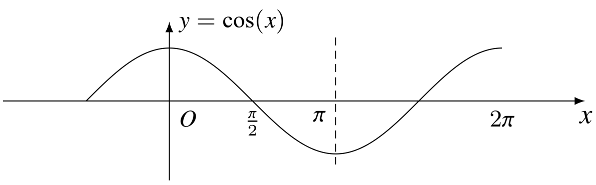
(2) 对称轴：$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\,(k\in\mathbf{Z})$; 对称中心：$(k\pi,0)\,(k\in\mathbf{Z})$; 最小正周期：$T=2\pi$;

(3) 单调区间：

(i) 单调递增区间：$\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$;

(ii) 单调递减区间：$\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$.

1.2.2 余弦函数图象



(1) 定义域：$x\in\mathbf{R}$; 值域：$[-1,1]$; 奇偶性：偶函数;

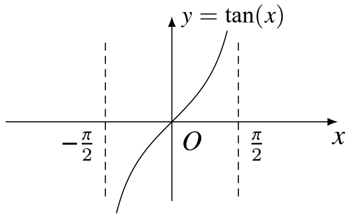
(2) 对称轴：$x=k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$; 对称中心：$\left(k\pi+\dfrac{\pi}{2},0\right)(k\in\mathbf{Z})$; 最小正周期：$T=2\pi$;

(3) 单调区间：

(i) 单调递增区间：$[2k\pi-\pi,2k\pi]\,(k\in\mathbf{Z})$;

(ii) 单调递减区间：$[2k\pi,2k\pi+\pi]\,(k\in\mathbf{Z})$.

1.2.3 正切函数图象



(1) 定义域：$\left\{x \middle| x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right\}(k \in \mathbf{Z})$； 值域：$\mathbf{R}$； 奇偶性：奇函数；

(2) 对称中心：$(k\pi, 0)\ (k \in \mathbf{Z})$； 最小正周期：$T = \pi$；

(3) 单调区间：单调递增区间：$\left(k\pi - \dfrac{\pi}{2}, k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)(k \in \mathbf{Z})$；

1.3 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$

$y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 图象

1) 用“五点法”作图：设 $z = \omega x + \varphi$，由 z 取 $0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}, 2\pi$ 来求出相应的 x，通过描点连线的方法画出图象.

(注：此处使用的 $z = \omega x + \varphi$ 的方法同样可以应用于求单调区间、最值等问题)

2) 由函数 $y = \sin(x)$ 的图象经过变换得到 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象，有两种主要的途径：“先平移后伸缩”和“先伸缩后平移”

i) 先平移后伸缩

$$
\begin{aligned}
y = \sin x &\xrightarrow[\text{平移}|\varphi|\text{个单位}]{\text{向左}(\varphi>0)\text{或向右}(\varphi<0)} y = \sin(x + \varphi) \\
&\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标变为原来的}\frac{1}{\omega}} y = \sin(\omega x + \varphi) \\
&\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{纵坐标变为原来的}A\text{倍}} y = A\sin(\omega x + \varphi)
\end{aligned}
$$

ii) 先伸缩后平移

$$
\begin{aligned}
y = \sin x &\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标变为原来的}\frac{1}{\omega}} y = \sin\omega x \\
&\xrightarrow[\text{平移}\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|\text{个单位}]{\text{向左}(\varphi>0)\text{或向右}(\varphi<0)} y = \sin(\omega x + \varphi) \\
&\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{纵坐标变为原来的}A\text{倍}} y = A\sin(\omega x + \varphi)
\end{aligned}
$$

3) 由图象求函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的解析式一般步骤：

i) 由函数的最值确定 A 的取值；

ii) 由函数的周期确定 ω 的值, 周期：$T = \dfrac{2\pi}{|\omega|}$；

iii) 由函数图象最高点 (最低点) 的坐标得到关于 φ 的方程，再由 φ 的范围求 φ 的值.

4) 最值：当 x 没有范围要求时，A 和 $-A$ 分别为最大值和最小值；当 x 有范围时，切忌将范围两端分别代入得到所谓取值范围.

$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的单调区间问题

1) 对于选择填空题，可以直接作图得到单调区间 (不推荐);

2) 通用流程：

   1) 确定 ω 为正，若为负，则用诱导公式转化为正；
   2) 确定 A 为正，若为负，去掉负号反向取值 (求 ↗ 改成求 ↘，求 ↘ 改成求 ↗.)
   3) 令 $t=\omega x+\varphi$，得到 $y=\sin t$，根据 $y=\sin t$ 增区间和减区间得到 $\omega x+\varphi$ 的范围，进而得到 x 的取值范围.

$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 在给定区间最值问题

对于给定区间 $x\in[x_1,x_2]$，有:

1. 设 $t=\omega x+\varphi$;
2. 将 x 的取值代入 $\omega x+\varphi$ 中计算 t 的取值范围;
3. 根据 $y=\sin t$ 的图象 (标准图象) 得到 y 的最值及此时 x 的取值 x_0.

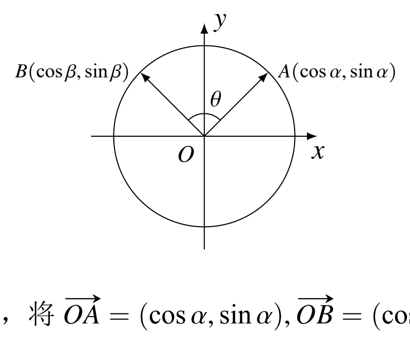
注：对于类似 $y=f\left[g(x)\right]$ 类型的复合函数的相关计算问题 (定义域、单调区间、比较大小等)，一般可以分解为 $\begin{cases}y=f(u)\\u=g(x)\end{cases}$，通过两个基本函数的性质解题.

例如:$y=sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 可以分解为 $\begin{cases}y=sin(t)\\t=2x+\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$,根据 $y=sin(t)$ 单调增区间有 $t\in\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$,代入 $t=2x+\dfrac{\pi}{3}$ 即可以得到 y 关于 x 的单调区间.

1.4 三角恒等变换

1.4.1 和差公式

如下图，在半径为 1 的圆内，构建向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$.



根据向量夹角公式 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|}$，将 $\overrightarrow{OA}=(\cos\alpha,\sin\alpha),\overrightarrow{OB}=(\cos\beta,\sin\beta)$ 代入解得：

$$\cos\theta=\cos(\beta-\alpha)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

分别令 $\alpha=-\alpha$, $\alpha=\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha$, 由诱导公式可得：

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

在 $\sin(\alpha+\beta)$和 $\cos(\alpha+\beta)$ 中令 $\beta=\alpha$ 得到倍角公式：

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha =&2\sin\alpha\cos\alpha\\ \cos 2\alpha =&\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\ =&2\cos^2\alpha-1\\ =&1-2\sin^2\alpha.\end{aligned}$$

1.4.2 半角公式

1) $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

2) $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

1.4.3 辅助角公式

对于 $y=a\sin x+b\cos x$ 类型的三角函数的性质需要先化简为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 形式，所以引入角 φ 使其正余弦和 a,b 对应，根据 $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$ 可得到如下形式：

$$\begin{aligned}a\sin x+b\cos x&=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)\\&=\sqrt{a^2+b^2}\,(\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi)\\&=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)\quad\left(\tan\varphi=\frac{b}{a}\right)\end{aligned}$$

由此公式可看出 $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$;
可根据实际情况令 $\cos\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 得到辅助角公式的余弦形式.

1.5 三角函数化简求值问题

1.5.1 化简“三看”原则

(1) 一看“角”, 通过看角之间的差别与联系 (比如出现了 α 和 2α 就会使用倍角公式), 正确的使用公式;

(2) 二看“函数名称”, 看函数名称之间的差异，从而确定使用的公式，例如：切化弦，正余弦互化;

(3) 三看“结构特征”, 分析结构特征可以帮助我们找到变形的方向，常见的有“遇到分式要通分”等.

1.5.2 求最值问题

(1) $y=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega x+\varphi)$，利用有界性处理 (参考1.3);

(2) $y=a\sin^2 x+b\sin x\cos x+\cos^2 x\xrightarrow{\text{降次, 整理}}y=A\sin 2x+B\cos 2x+C=\sqrt{A^2+B^2}\sin(2x+\varphi)+C$, 其中 $\tan\varphi=\dfrac{B}{A}$. 再利用有界性;

(3) $y=a\sin^2 x+b\sin x+c$或$y=a\cos^2 x+b\cos x+c(a\neq 0)$, 通过 $t=\sin x$ 或 $t=\cos x$ 转化为求关于 t 的二次函数在区间 $[-1,1]$ 上的最值问题；

(4) $y=a\left(\sin x\pm\cos x\right)+b\sin x\cdot\cos x$, 可令 $t=\sin x\pm\cos x$, 则 $\sin x\cdot\cos x=\pm\dfrac{t^2-1}{2}$, 把三角问题转化为代数问题解决；

(5) $y=\dfrac{a\sin x+c}{b\sin x+d}$ 或 $y=\dfrac{a\cos x+c}{b\cos x+d}$ 可转化为只有分母含有 $\sin x$ 或 $\cos x$ 的函数式，还可以转化为 $\sin x=f(y)$ 或 $\cos x=f(y)$ 的形式，由正、余弦函数的有界性求解.

(6) $y=\dfrac{a\sin x+c}{b\cos x+d}\left(\text{或}y=\dfrac{a\cos x+c}{b\sin x+d}\right)$，其中 $ab\neq 0$，先化为 $y=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{\sin x+\frac{c}{a}}{\cos x+\frac{d}{b}}$或$y=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{\cos x+\frac{c}{a}}{\sin x+\frac{d}{b}}$, 则转化为求圆上的动点与定点连线斜率的最值问题.

2 解三角形

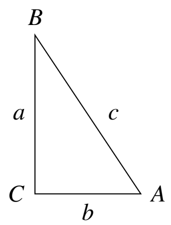
2.1 正弦、余弦定理

2.1.1 正弦定理

在三角形 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边为 a,b,c, 有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\ (R\text{为外接圆半径, 高考没考过半径})$$

证明. 此处以直角三角形为例. 如下图, 设角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，则有：



由直角三角形对应的三角函数定义知

$$\sin A=\frac{a}{c},\ \sin B=\frac{b}{c},\ \sin C=\frac{c}{c}=1$$

即：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=c=2R$$

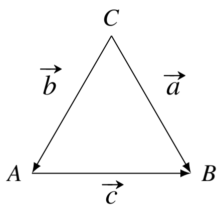
非直角三角形推导过程类似，通过构建高线得到直角三角形. □

正弦定理的主要作用是方程和分式中的边角互化. 其原则为关于边，或是角的正弦值是否具备齐次的特征. 如果齐次则可直接进行边化角或是角化边，否则不可行.

2.1.2 余弦定理

- $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 或 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$
- 另外两个一样，我不想写了.

证明. 在三角形 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，如图所示，构建向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.



由向量减法知:$\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$ 两边平方得到

$$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{c}^2$$

展开得到

$$a^2+b^2-2ab\cos C=c^2$$

(这里直接将向量模长写成边长了，代码太多了 ...) □

2.2 解三角形常用结论

1) $A+B+C=\pi$; $\sin(A+C)=\sin B$; $\cos(A+C)=-\cos B$.

2) $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$;

3) $\sin^2 A+\sin^2 B-\sin A\sin B=\sin^2 C\Leftrightarrow a^2+b^2-ab=c^2$

4) $b\cos C+c\cos B=a\Rightarrow\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin A$ (恒等式)

5) $A>B>C\Leftrightarrow a>b>c\Leftrightarrow\sin A>\sin B>\sin C\Leftrightarrow\cos A<\cos B<\cos C$

2.3 解三角形问题主要思路

2.3.1 公式适用类型

1) 已知两角一边，用正弦定理，有解时，只有一解；

2) 已知两边及一边对角，用正弦定理，有解的情况 (设已知 a,b 和角 A)：

   a) A 为锐角，当 $a<b\sin A$ 时无解；若 A 为钝角，当 $a=b,a<b$ 时均无解；

   b) 若为求第三边问题，也可以通过余弦定理构造一元二次方程求解.

3) 已知三边，用余弦定理，有解时，只有一解；

4) 已知两边及夹角，用余弦定理，必有一解.

2.3.2 解三角形最值问题

(1) 利用正弦定理将边转化为角，通过三角恒等变换转化为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，在满足内角和为 π 的范围内求最值.

(2) 对于某些乘法的最值 (例如面积最大值) 利用余弦定理转化为边的形式，利用基本不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 求最值.

3 练习

1. 已知 $\sin 2\alpha=\dfrac{2}{3}$，则 $\cos^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{6}$ (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{2}{3}$

2. 若 $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)=\dfrac{1}{3}$, 则 $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}+2\alpha\right)=$ ( )

(A) $-\dfrac{7}{9}$ (B) $-\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{1}{3}$ (D) $\dfrac{7}{9}$

3. 若 $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=4$, 则 $\sin 2\theta=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{5}$ (B) $\dfrac{1}{4}$ (C) $\dfrac{1}{3}$ (D) $\dfrac{1}{2}$

4. 设 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right),\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $\tan\alpha=\dfrac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$，则 ( )

(A) $3\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$ (B) $3\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$

(C) $2\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$ (D) $2\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$

5. 函数 $f(x)=\cos 2x+6\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ 的最大值为 ( )

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

6. 将函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 图象上的点 $P\left(\dfrac{\pi}{4},t\right)$ 向左平移 s $(s>0)$ 个单位长度得到点 P'. 若 P' 位于函数 $y=\sin 2x$ 的图象上，则 ( )

(A) $t=\dfrac{1}{2}$, s的最小值为$\dfrac{\pi}{6}$ (B) $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, s的最小值为$\dfrac{\pi}{6}$

(C) $t=\dfrac{1}{2}$, s的最小值为$\dfrac{\pi}{3}$ (D) $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, s的最小值为$\dfrac{\pi}{3}$

7. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $\left(\omega>0,\ |\varphi|\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$, $x=-\dfrac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点，$x=\dfrac{\pi}{4}$ 为 $y=f(x)$ 图象的对称轴，且 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{18},\dfrac{5\pi}{36}\right)$ 单调，则 ω 的最大值为 ( )

(A) 11 (B) 9 (C) 7 (D) 5

8. 已知 $\omega>0$, 函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减，则 ω 的取值范围是 ( )

(A) $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{4}\right]$ (B) $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right]$ (C) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ (D) $(0,2]$

9. 已知 $\omega>0$, $0<\varphi<\pi$, 直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 和 $x=\dfrac{5\pi}{4}$ 是函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的两条相邻对称轴，则 $\varphi=$ ( )

(A) $\dfrac{\pi}{4}$ (B) $\dfrac{\pi}{3}$ (C) $\dfrac{\pi}{2}$ (D) $\dfrac{3\pi}{4}$

10. 将函数 $f(x)=\sin(2x+\theta)\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象向右平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象，若 $f(x)$, $g(x)$ 的图象都经过点 $P\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 则 φ 的值可以是 ( )

(A) $\dfrac{5\pi}{3}$ (B) $\dfrac{5\pi}{6}$ (C) $\dfrac{\pi}{2}$ (D) $\dfrac{\pi}{6}$

11. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$，$x\in\mathbf{R}$, 其中 $\omega>0$, $-\pi<\varphi\leqslant\pi$, 若 $f(x)$ 的最小正周期为 6π，且当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最大值，则 ( )

(A) $f(x)$ 在区间 $[-2\pi,0]$ 上是增函数

(B) $f(x)$ 在区间 $[-3\pi,-\pi]$ 上是增函数

(C) $f(x)$ 在区间 $[3\pi,5\pi]$ 上是减函数

(D) $f(x)$ 在区间 $[4\pi,6\pi]$ 上是减函数

12. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)+\cos(\omega x+\varphi)$ $\left(\omega>0,\ |\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期为 π, 且 $f(-x)=f(x)$, 则 ( )

(A) $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减

(B) $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$ 上单调递减

(C) $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增

(D) $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$ 上单调递增

13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sin(x+\alpha), x\leqslant 0\\ \cos(x+\alpha), x>0\end{cases}$ 则“$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$”是“函数 $f(x)$ 是偶函数”的 ( )

(A) 充分不必要条件

(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既不充分也不必要条件

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sin(x+a), x\leqslant 0\\ \cos(x+b), x>0\end{cases}$ 是偶函数，则下列结论可能成立的是 ( )

(A) $a=\dfrac{\pi}{4}, b=-\dfrac{\pi}{4}$

(B) $a=\dfrac{2\pi}{3}, b=\dfrac{\pi}{6}$

(C) $a=\dfrac{\pi}{3}, b=\dfrac{\pi}{6}$

(D) $a=\dfrac{5\pi}{6}, b=\dfrac{2\pi}{3}$

15. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$, $BC=3$，则 $\triangle ABC$ 的周长为 ( )

(A) $4\sqrt{3}\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)+3$

(B) $4\sqrt{3}\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)+3$

(C) $6\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)+3$

(D) $6\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)+3$

16. $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c. 若 $a\sin A\sin B+b\cos^2 A=\sqrt{2}a$, 则 $\dfrac{b}{a}=$ ( )

(A) $2\sqrt{3}$

(B) $2\sqrt{2}$

(C) $\sqrt{3}$

(D) $\sqrt{2}$

17. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\sin^2 A+\sin^2 B<\sin^2 C$，则 $\triangle ABC$ 的形状是 ( )

(A) 钝角三角形

(B) 直角三角形

(C) 锐角三角形

(D) 不能确定

18. 已知锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$23\cos^2 A+\cos 2A=0$，$a=7$，$c=6$，则 $b=$( )

(A) 10

(B) 9

(C) 8

(D) 5

19. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{3}\right)$, 点 $A(m,n)$, $B(m+\pi,n)$($|n|\neq 1$) 都在曲线 $y=f(x)$ 上，且线段 AB 与曲线 $y=f(x)$ 有五个公共点，则 ω 的值为 ( )

(A) 4

(B) 2

(C) $\dfrac{1}{2}$

(D) $\dfrac{1}{4}$

20. 函数 $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)-2$ 的图像 F 关于向量 $\boldsymbol{a}$ 平移得到 F_1，F_1 的解析式为 $y=f(x)$，当 $y=f(x)$ 为奇函数时，向量 $\boldsymbol{a}$ 等于 ( )

(A) $\left(\dfrac{\pi}{6},-2\right)$ (B) $\left(\dfrac{\pi}{6},2\right)$ (C) $\left(-\dfrac{\pi}{6},-2\right)$ (D) $\left(-\dfrac{\pi}{6},2\right)$

21. 设 θ 为第二象限角，若 $\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$, 则 $\sin\theta+\cos\theta$=______.

22. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}+\cos\alpha$, 且 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则 $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)}$ 的值为______.

23. 函数 $f(x)=\sin(x+2\varphi)-2\sin\varphi\cos(x+\varphi)$ 的最大值为______.

24. 设当 $x=\theta$ 时，函数 $f(x)=\sin x-2\cos x$ 取得最大值，则 $\cos\theta=$______.

25. 已知函数 $f(x)=2\sin\omega x\ (\omega>0)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的最小值是 -2，则 ω 的最小值是______.

26. 已知函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$，若 $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)-f\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)=2$，则函数 $f(x)$ 的单调增区间为______.

27. 设函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $\left(A,\omega,\varphi\text{是常数，}A>0,\omega>0\right)$. 若 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上具有单调性，且 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=-f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，则 $f(x)$ 的最小正周期是______.

28. 将函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $\left(\omega>0,-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 图像上每个点的横坐标缩短为原来的一半，纵坐标不变，再向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度得到 $y=\sin x$ 的图象，则 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=$______.

29. 已知点 $A\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\dfrac{\pi}{4},1\right)$, $C\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$，若这三个点中有且仅有两个点在函数 $f(x)=\sin\omega x$ 的图象上，则正数ω 的最小值为______.

30. 函数 $y=\cos(2x+\varphi)\ (-\pi<\varphi<\pi)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位后，与函数 $y=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$ 的图象重合，则 $\varphi=$______.

31. 把函数 $y=\sin 2x$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位，纵坐标伸长到原来的 2 倍 (横坐标不变) 后得到函数 $y=f(x)$ 的图象，对于函数 $y=f(x)$ 有以下四个判断：

① 该函数的解析式为 $y=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$;

② 该函数图象关于点 $\left(\dfrac{\pi}{3},0\right)$ 对称；

③ 该函数在 $\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]$ 上是增函数；

④ 若函数 $y=f(x)+a$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为 $\sqrt{3}$, 则 $a=2\sqrt{3}$.

其中，正确判断的序号是______.

32. 在三角形 $\triangle ABC$ 中，$B=60^\circ$，$AC=\sqrt{3}$，则 $AB+2BC$ 的最大值为______.

33. 在三角形 $\triangle ABC$ 中，$a=3,b=\sqrt{6}$，$\angle A=\dfrac{2\pi}{3}$，则 $\angle B=$______.

34. 在三角形 $\triangle ABC$ 中，若 $a=2,\ b+c=7,\ \cos B=-\dfrac{1}{4}$，则 $b=$______.

35. 在三角形 $\triangle ABC$ 中，$a=4,b=5,c=6$，则 $\dfrac{\sin 2A}{\sin C}=$______.

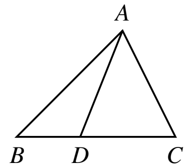
36. 若 $\triangle ABC$ 的内角满足 $\sin A+\sqrt{2}\sin B=2\sin C$，则 $\cos C$ 的最小值是______.

37. 在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle B=\angle C=75^{\circ}$, $BC=2$, 则 AB 的取值范围是______.

38. 在 $\triangle ABC$ 中，D 为 BC 边上的一点，$BC=3BD$, $AD=\sqrt{2}$, $\angle ADB=135^{\circ}$. 若 $AC=\sqrt{2}AB$，则 $BD=$______.

39. 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边，$a=2$，且 $(2+b)(\sin A-\sin B)=(c-b)\sin C$，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为______.

40. 在三角形 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAD=30^{\circ}, \angle CAD=45^{\circ}$, $AB=2$, $AC=2$ 则 $\dfrac{BD}{DC}=$______.



41. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)-2\sin x\cos x$

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期；

(2) 求证：当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 时，$f(x)\geqslant-\dfrac{1}{2}$.

42. 已知 a,b,c 分别为 $\triangle ABC$ 内角 A,B,C 的对边，$\sin^2 B=2\sin A\sin C$.

(1) 若 $a=b$，求 $\cos B$;

(2) 若 $B=90^{\circ}$，且 $a=\sqrt{2}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

43. 在 $\triangle ABC$ 中，$a^2+c^2=b^2+\sqrt{2}ac$.

(1) 求 $\angle B$ 的大小；

(2) 求 $\sqrt{2}\cos A+\cos C$ 的最大值.

44. 已知函数 $f(x)=2\sin\omega x\cos\omega x+\cos 2\omega x(\omega>0)$ 的最小正周期为 π.

(1) 求 ω 的值；

(2) 求 $f(x)$ 的单调递增区间.

45. 已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}-\sqrt{2}\sin^2\dfrac{x}{2}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,0]$ 上的最小值.

46. 已知函数 $f(x)=\sin x-2\sqrt{3}\sin^2\dfrac{x}{2}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期；

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 上的最小值.

47. $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边 a,b,c . 已知 $2\cos C(a\cos B+b\cos A)=c$.

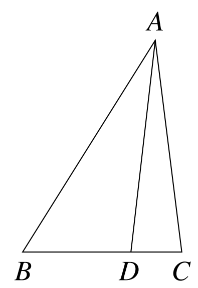
(1) 求 C；

(2) 若 $c=\sqrt{7}$，$\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

48. 如图，在三角形 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=\dfrac{\pi}{3}$, $AB=8$，点 D 在 BC 边上，且 $CD=2$, $\cos\angle ADC=\dfrac{1}{7}$

(1) 求 $\sin\angle BAD$;

(2) 求 BD, AC 的长.



49. 已知函数 $f(x)=\left(2\cos^2 x-1\right)\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 4x$

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期及最大值；

(2) 若 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，且 $f(\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，求 α 的值.

50. 已知函数 $f(x)=4\cos x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

51. 已知函数 $f(x)=2\cos 2x+\sin^2 x-4\cos x$.

(1) 求 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的值；

(2) 求 $f(x)$ 的最大值和最小值.

52. 在三角形 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C, 对边的边长分别是 a, b, c, 已知 $c=2, C=\dfrac{\pi}{3}$.

(1) 若三角形 $\triangle ABC$ 的面积等于 $\sqrt{3}$, 求 a, b;

(2) 若 $\sin C+\sin(B-A)=2\sin 2A$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

53. 已知函数 $f(x)=\sin^2\omega x+2\sqrt{3}\sin\omega x\cdot\cos\omega x-\cos^2\omega x+\lambda$ 的图象关于直线 $x=\pi$ 对称，其中 ω,λ 为常数，且 $\omega\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

(2) 若 $y=f(x)$ 的图象经过点 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$, 求函数 $f(x)$ 的值域.

54. 在三角形 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C, 所对的边长分别是 a, b, c, 且 $a\cos B=3$, $b\sin A=4$.

(1) 求边长 a;

(2) 若三角形 $\triangle ABC$ 的面积 $S=10$, 求 $\triangle ABC$ 的周长 l.

55. 在三角形 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C, 所对的边长分别是 a, b, c, 已知 $\cos C+(\cos A-\sqrt{3}\sin A)\cos B=0$.

(1) 求角 B 的大小；

(2) 若 $a+c=1$, 求 b 的取值范围.

56. 在锐角三角形 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C, 所对的边长分别是 a, b, c, 且 $\sqrt{3}a = 2c\sin A$

(1) 确定角 C 的大小；

(2) 若 $c = \sqrt{7}$, 且三角形 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, 求 $a+b$ 的值.

57. 四边形 $ABCD$ 的内角 A 与 C 互补，$AB = 1$, $BC = 3$, $CD = DA = 2$.

(1) 求 C 和 BD;

(2) 求四边形 $ABCD$ 的面积.

58. 在三角形 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C, 所对的边长分别是 a, b, c, 已知 $\cos(A-C)+\cos B = 1$, $a = 2c$, 求 C.

59. 在三角形 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C, 所对的边长分别是 a, b, c, 已知 $A=\dfrac{\pi}{4}$, $b\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+C\right)-c\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+B\right)=a$.

(1) 求证：$B-C=\dfrac{\pi}{2}$;

(2) 若 $a=\sqrt{2}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

60. $\triangle ABC$ 中的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $a=b\cos C+c\sin B$.

(1) 求 B;

(2) 若 $b=2$，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

61. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边长分别为 a, b, c，已知 $a^2-c^2=2b$，且 $\sin B=4\cos A\sin C$，求 b.

62. 已知函数 $f(x)=-2\sin x-\cos 2x$.

(1) 比较 $f(\frac{\pi}{4})$, $f(\frac{\pi}{6})$ 的大小；

(2) 求函数 $f(x)$ 的最大值.

63. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，已知 $a=\sqrt{7}$, $b=3$, $\sqrt{7}\sin B+\sin A=2\sqrt{3}$.

(1) 求角 A 的大小；

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积

64. 在三角形 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c，且 $\sin^2 A=\sin B\sin C$.

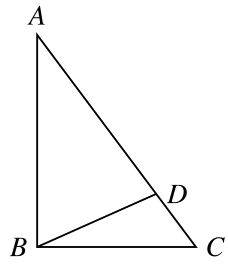
(1) 若 $\angle A=\frac{\pi}{3}$, 求 $\angle B$ 的大小；

(2) 若 $bc=1$, 求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值.

65. 如图，在三角形 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90^\circ, AB=4, BC=3$, 点 D 在线段 AC 上，且 $AD=4DC$.

(1) 求 BD 的长；

(2) 求 $\sin CBD$ 的值.



66. 已知函数 $f(x)=\left(1+\sqrt{3}\tan x\right)\cos^2 x$.

(1) 若 α 是第二象限角，且 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，求 $f(\alpha)$ 的值；

(2) 求函数 $f(x)$ 的定义域和值域.

67. 在三角形 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, 已知 $b^2+c^2=a^2+bc$.

(1) 求 A 的大小；

(2) 如果 $\cos B=\dfrac{\sqrt{6}}{3}, b=2$, 求三角形 $\triangle ABC$ 的面积.

68. 已知函数 $f(x)=2\sin\dfrac{\pi}{6}x\cos\dfrac{\pi}{6}x$, 过两点 $A\big(t,f(t)\big)$, $B\big(t+1,f(t+1)\big)$ 的直线的斜率记为 $g(t)$.

(1) 求 $g(0)$ 的值；

(2) 写出函数 $g(x)$ 的解析式，求 $g(t)$ 在 $\left[-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right]$ 上的取值范围.

69. 已知函数 $f(x)=\sin\omega x(\cos\omega x-\sqrt{3}\sin\omega x)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $(\omega>0)$ 的最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$.

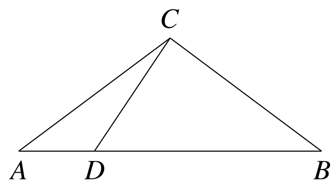
(1) 求 ω 的值；

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调递减区间.

70. 如图，在三角形 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AB 上，且 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{1}{3}$. 记 $\angle ACD=\alpha$ $\angle BCD=\beta$.

(1) 求证：$\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{\sin\beta}{3\sin\alpha}$;

(2) 若 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$, $AB=\sqrt{19}$, 求 BC 的长.



71. 已知函数 $f(x)=\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期及其图象的对称轴方程;

(2) 求 $f\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$ 的单调递减区间.