

北京高考分项练习——导数

1. (2017 文理) 已知函数 $f(x) = e^x \cos x - x$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

2. (2016 理) 设函数 $f(x) = xe^{a-x} + bx$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程为 $y = (e - 1)x + 4$.

(1) (5 分) 求 a, b 的值;

(2) (8 分) 求 $f(x)$ 的单调区间.

3. (2016 文) 设函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

(1) (3 分) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) (5 分) 设 $a = b = 4$, 若函数 $y = f(x)$ 有三个不同零点, 求 c 的取值范围;

(3) (5 分) 求证: $a^2 - 3b > 0$ 是 $y = f(x)$ 有三个不同零点的必要而不充分条件.

4. (2015 理) 已知函数 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$.
- (1) (3 分) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;
- (2) (5 分) 求证: 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) > 2\left(x + \frac{x^3}{3}\right)$;
- (3) (5 分) 设实数 k 使得 $f(x) > k\left(x + \frac{x^3}{3}\right)$ 对 $x \in (0, 1)$ 恒成立, 求 k 的最大值.

5. (2015 文) 设函数 $f(x) = \frac{x^2}{2} - k \ln x, k > 0$.
- (1) (5 分) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值;
- (2) (8 分) 证明: 若 $f(x)$ 存在零点, 则 $f(x)$ 在区间 $(1, \sqrt{e}]$ 上仅有一个零点.

6. (2014 理) 已知函数 $f(x) = x \cos x - \sin x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- (1) (5 分) 求证: $f(x) \leq 0$;
- (2) (8 分) 若 $a < \frac{\sin x}{x} < b$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上恒成立, 求 a 的最大值和 b 的最小值.

7. (2014 文) 已知函数 $f(x) = 2x^3 - 3x$.

(1) (3 分) 求 $f(x)$ 在区间 $[-2, 1]$ 上的最大值;

(2) (5 分) 若过点 $P(1, t)$ 存在 3 条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切, 求 t 的取值范围;

(3) (5 分) 问过点 $A(-1, 2), B(2, 10), C(0, 2)$ 分别存在几条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切?(只需写出结论)

8. (2013 理) 设 l 为曲线 $C: y = \frac{\ln x}{x}$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线.

(1) (5 分) 求 l 的方程;

(2) (8 分) 证明: 除切点 $(1, 0)$ 之外, 曲线 C 在直线 l 的下方.

9. (2013 文) 已知函数 $f(x) = x^2 + x \sin x + \cos x$.

(1) (5 分) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(a, f(a))$ 处与直线 $y = b$ 相切, 求 a 与 b 的值;

(2) (8 分) 若曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = b$ 有两个不同的交点, 求 b 的取值范围.

10. (2012 理) 已知函数 $f(x) = ax^2 + 1$ ($a > 0$), $g(x) = x^3 + bx$.

(1) (5 分) 若曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = g(x)$ 在它们的交点 $(1, c)$ 处具有公共切线, 求 a, b 的值;

(2) (8 分) 当 $a^2 = 4b$ 时, 求函数 $f(x) + g(x)$ 的单调区间, 并求其在区间 $(-\infty, -1)$ 上的最大值.

11. (2012 文) 已知函数 $f(x) = ax^2 + 1$ ($a > 0$), $g(x) = x^3 + bx$.

(1) (5 分) 若曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = g(x)$ 在它们的交点 $(1, c)$ 处具有公共切线, 求 a, b 的值;

(2) (8 分) 当 $a = 3$, $b = -9$ 时, 若函数 $f(x) + g(x)$ 在区间 $[k, 2]$ 上的最大值为 28, 求 k 的取值范围.

12. (2011 理) 已知函数 $f(x) = (x - k)^2 e^{\frac{x}{k}}$.

(1) (5 分) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) (8 分) 若对于任意的 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $f(x) \leq \frac{1}{e}$, 求 k 的取值范围

13. (2011 文) 已知函数 $f(x) = (x - k)e^x$.

(1) (5 分) 求 $f(x)$ 的单调区间

(2) (8 分) 求 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最小值.

14. (2010 理) 已知函数 $f(x) = \ln(1 + x) - x + \frac{k}{2}x^2$ ($k \geq 0$)

(1) (5 分) 当 $k = 2$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) (8 分) 求 $f(x)$ 的单调区间.

15. (2010 文) 设定函数 $f(x) = \frac{a}{3}x^3 + bx^2 + cx + d$ ($a > 0$), 且方程 $f'(x) - 9x = 0$ 的两个根分别为 1, 4.

(1) (5 分) 当 $a = 3$ 且曲线 $y = f(x)$ 过原点时, 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) (8 分) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 无极值点, 求 a 的取值范围.

16. (2013 新课标理) 已知函数 $f(x) = e^x - \ln(x + m)$.

(1) 设 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 求 m , 并讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $m \leq 2$ 时, 证明 $f(x) > 0$

17. (2012 新课标理) 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f'(1)e^{x-1} - f(0)x + \frac{1}{2}x^2$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式及单调区间;

(2) 若 $f(x) \geq \frac{1}{2}x^2 + ax + b$, 求 $(a + 1)b$ 的最大值.

18. (2014 新课标理) 设函数 $f(x) = ae^x \ln x + \frac{be^{x-1}}{x}$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = e(x - 1) + 2$.

(1) 求 a, b ;

(2) 证明: $f(x) > 1$.

19. 设函数 $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = e^x(cx + d)$, 若曲线 $y = f(x)$ 和曲线 $y = g(x)$ 都过点 $P(0, 2)$, 且在点 P 处有相同的切线 $y = 4x + 2$.

(1) 求 a, b, c, d 的值;

(2) 若 $x \geq -2$ 时, $f(x) \leq kg(x)$, 求 k 的取值范围.

20. 已知函数 $f(x) = (x - 2)e^x + a(x - 1)^2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

21. 已知函数 $f(x) = (x + 1) \ln x - a(x - 1)$.

(1) 当 $a = 4$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$, 求 a 的取值范围.

22. 已知函数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3x + 1$.

- (1) 当 $a = -\sqrt{2}$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 若 $x \in [2, +\infty)$ 时, $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.

23. 设函数 $f(x) = e^x - ax - 2$.

- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
- (2) 若 $a = 1$, k 为整数, 且当 $x > 0$ 时, $(x - k)f'(x) + x + 1 > 0$, 求 k 的最大值.

24. 已知函数 $f(x) = x - \ln(x + a)$ 的最小值 0, 其中 $a > 0$.

- (1) 求 a 的值;
- (2) 若对任意的 $x \in [0, +\infty)$, 有 $f(x) \leq kx^2$ 成立, 求实数 k 的最小值.

25. 已知函数 $f(x) = e^x - ax - 2$. 求 $f(x)$ 的单调区间.

26. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax + (a-1)\ln x$, $a > 1$. 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

27. 设函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2 + 1$, 其中 $a > 0$, 若过点 $(0, 2)$ 可作曲线 $y = f(x)$ 的三条不同切线, 求 a 的取值范围.

28. 设函数 $f(x) = 1 - e^{-x}$, 设当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \leq \frac{x}{ax+1}$, 求 a 的取值范围.

29. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - (2a+1)x + 2\ln x$ ($a \in \mathbf{R}$), $g(x) = x^2 - 2x$, 若对任意的 $x_1 \in (0, 2]$, 均存在 $x_2 \in (0, 2]$ 使得 $f(x_1) < g(x_2)$, 求 a 的取值范围.