1. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左，右焦点分别为 F_1, F_2,，椭圆 C 上的点 A 满足 $AF_2 \perp F_1F_2$. 若点 P 是椭圆 C 上的动点，则 $\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2A}$ 的最大值为 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (C) $\dfrac{9}{4}$ (D) $\dfrac{15}{4}$

2. “$m<8$”是“方程 $\dfrac{x^2}{m-10}-\dfrac{y^2}{m-8}=1$ 表示双曲线”的 ( )

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

3. 设抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 F, M 为抛物线 C 上一点，$N(2,2)$, 则 $|MF|+|MN|$ 的取值范围是______.

4. 设抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为 F，准线为 l，P 为抛物线上一点，$PA\perp l$，A 为垂足，若直线 AF 的斜率为 $-\sqrt{3}$，则 $|PF|=$ ( )

(A) $4\sqrt{3}$ (B) 6 (C) 8 (D) 16

5.

6. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，椭圆 C 与 y 轴交于 A, B 两点，且 $|AB|=2$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 设点 P 是椭圆 C 上的一个动点，且点 P 在 y 轴右侧，直线 PA, PB 与直线 $x=4$ 分别交于 M, N 两点，若以 MN 为直径的圆与 x 轴交于两点 E, F，求点 P 横坐标的取值范围及 $|EF|$ 的最大值.

7. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 椭圆 C 与 y 轴交于 A, B 两点，且 $|AB|=2$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 设点 P 是椭圆 C 上的一个动点，且直线 PA, PB 与直线 $x=4$ 分别交于 M, N 两点，是否存在点 P 使得以 MN 为直径的圆经过定点 $(2,0)$? 若存在，求出 P 点坐标；若不存在，说明理由.

8. 已知 $F_1\,(-1,0)$ 和 $F_2\,(1,0)$ 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的两个焦点，且点 $P\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$ 在椭圆上.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 直线 $l:y=kx+m\ (m>0)$ 与椭圆 C 有且仅有一个公共点，且与 x 轴和 y 轴分别交于点 M, N，当 $\triangle OMN$ 面积取最小值时，求此时直线 l 的方程.

9. 已知点 $A(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$ (其中$x_1 < x_2$) 是曲线 $y^2 = 4x$ $(y \geqslant 0)$ 上的两点，A, D 两点在 x 轴上的射影分别为 B, C，且 $|BC| = 2$.

(1) 当点 B 的坐标为 $(1, 0)$ 时，求直线 AD 的斜率；

(2) 记 $\triangle OAD$ 的面积为 S_1，梯形 $ABCD$ 的面积为 S_2，求证：$\dfrac{S_1}{S_2} < \dfrac{1}{4}$.

10. 已知椭圆 C：$mx^2 + 3my^2 = 1$ $(m > 0)$ 的长轴长为 $2\sqrt{6}$, O 为坐标原点.

(1) 求椭圆 C 的方程和离心率；

(2) 设点 $A(3, 0)$，动点 B 在 y 轴上，动点 P 在椭圆 C 上，且 P 在 y 轴右侧，若 $|BA| = |BP|$，求四边形 $OPAB$ 面积的最小值.

11. 已知椭圆 C：$mx^2 + 3my^2 = 1$ $(m > 0)$ 的长轴长为 $2\sqrt{6}$, O 为坐标原点.

(1) 求椭圆 C 的方程和离心率；

(2) 设动直线 l 与 y 轴相交于点 B， 点 $A(3, 0)$ 关于直线 l 的对称点 P 在椭圆 C 上，求 $|OB|$ 的最小值.

12. 设 F_1, F_2 分别为椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左右焦点，点 A 为椭圆 E 的左顶点，点 B 为椭圆 E 的上顶点，且 $|AB|=2$.

(1) 若椭圆 E 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，求椭圆 E 的方程；

(2) 设 P 为椭圆 E 上一点，且在第一象限内，直线 F_2P 与 y 轴相交于点 Q，若以 PQ 为直径的圆经过点 F_1，证明 $|OP|>\sqrt{2}$.

13. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的两个焦点和短轴的两个顶点构成的四边形是一个正方形，且其周长为 $4\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 设过点 $B(0,m)\ (m>0)$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于 E, F 两点，点 B 关于原点的对称点为 D，若点 D 总在以线段 EF 为直径的圆内，求 m 的取值范围.

14. 已知椭圆 M：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 过点 $A(0,-1)$，且离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 M 的方程；

(2) 若椭圆 M 上存在点 B,C 关于直线 $y=kx-1$ 对称，求 k 的所有取值构成的集合 S，并证明对于 $\forall k\in S$，BC 的中点恒在一条定直线上.

15. 已知椭圆 W：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，直线 l 与 W 相交于 M, N 两点，l 与 x 轴、y 轴分别相交于 C, D 两点，O 为坐标原点.

(1) 若直线 l 的方程为 $x+2y-1=0$，求 $\triangle OCD$ 外接圆的方程；

(2) 判断是否存在直线 l，使得 C, D 是线段 MN 的两个三等分点，若存在，求出直线 l 的方程；若不存在，说明理由.

16. 已知椭圆 W：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的焦距为 2，过右焦点和短轴的一个端点的直线的斜率为 -1，O 为坐标原点.

(1) 求椭圆 W 的方程；

(2) 设斜率为 k 的直线 l 与 W 相交于 A, B 两点，记 $\triangle AOB$ 面积的最大值为 S_k，证明：$S_1=S_2$.

17. 设 A, B 是椭圆 $W:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上不关于坐标轴对称的两个点，直线 AB 交 x 轴于点 M（与点 A, B 不重合），O 为坐标原点.

(1) 如果点 M 是椭圆 W 的右焦点，线段 MB 的中点在 y 轴上，求直线 AB 的方程；

(2) 设 N 为 x 轴上一点，且 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=4$，直线 AN 和椭圆 W 的另外一个交点为 C，证明：点 B 与点 C 关于 x 轴对称.

18. 已知 A, B 是椭圆 $C: 2x^2+3y^2=9$ 上两点，点 M 的坐标为 $(1,0)$.

(1) 当 A, B 两点关于 x 轴对称，且 $\triangle MAB$ 为等边三角形时，求 AB 的长；

(2) 当 A, B 两点不关于 x 轴对称时，证明：$\triangle MAB$ 不可能为等边三角形.

19. 已知椭圆 G 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，其短轴两端点为 $A(0,1)$, $B(0,-1)$.

(1) 求椭圆 G 的方程；

(2) 若 C, D 是椭圆 G 上关于 y 轴对称的两个不同点，直线 AC, BD 与 x 轴交于点 M, N, 判断以 MN 为直径的圆是否经过点 A. 并说明理由.

20. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 右焦点为 F, 点 $P(0,1)$ 在椭圆 C 上.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 过点 F 的直线交椭圆 C 于 M, N 两点，交直线 $x=2$ 于点 P, 设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{MF}$, $\overrightarrow{PN}=\mu\overrightarrow{NF}$, 求证:$\lambda+\mu$ 为定值.

21. 已知 $A(0,2)$, $B(3,1)$ 是椭圆 G：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 上的两点.

(1) 求椭圆 G 的离心率；

(2) 已知直线 l 过点 B，且与椭圆 G 交于另一点 C(不同于点 A)，若以 BC 为直径的圆经过点 A，求直线 l 的方程.

22. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 上的点到它的两个焦点的距离之和为 4，以椭圆 C 的短轴为直径的圆 O 经过这两个焦点，点 A, B 分别是椭圆 C 的左、右顶点.

(1) 求圆 O 和椭圆 C 的方程；

(2) 已知 P, Q 分别是椭圆 C 和圆 O 上的动点 (P, Q 位于 y 轴两侧)，且直线 PQ 与 x 轴平行，直线 AP, BP 分别于 y 轴交于点 M, N. 求证：$\angle MQN$ 为定值.

23. 已知椭圆的中心为坐标原点 O，焦点在 x 轴上，离心率 $e=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，斜率为 1 且过椭圆右焦点 F 的直线交椭圆于 A, B 两点，M 为椭圆上任一点，且 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，证明 $\lambda^2+\mu^2$ 为定值.

24. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 的左右顶点分别为 A, B, 右焦点为 F, 设过点 $T(9,m)$ 的直线 TA, TB 与椭圆分别交于点 $M(x_1,\ y_1)$, $N(x_2,\ y_2)$, 其中 $m>0$, $y_1>0$, $y_2<0$. 求证：直线 MN 必过 x 轴上的一定点.

25. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1\ (a>1)$，离心率 $e=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. 直线 $l: x=my+1$ 与 x 轴交于点 A，与椭圆 C 交于点 E, F 两点. 自点 E, F 分别向直线 $x=3$ 做垂线，垂足分别为 E_1, F_1.

(1) 求椭圆 C 的方程及焦点坐标；

(2) 记 $\triangle AEE_1$, $\triangle AE_1F_1$, $\triangle AFF_1$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3, 试证明 $\dfrac{S_1S_3}{S_2^2}$ 为定值.

26. 已知点 P 是椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 上一点，点 P 到椭圆 C 的两个焦点的距离之和为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 设 A, B 是椭圆 C 上异于点 P 的两点，直线 PA 与直线 $x=4$ 交于点 M, 是否存在点 A, 使得 $S_{\triangle ABP}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABM}$? 若存在，求出点 A 的坐标；若不存在，说明理由.

27. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，短半轴长为 1.

(1) 求椭圆 G 的方程；

(2) 设椭圆 G 的短轴端点分别为 A, B，点 P 是椭圆 G 上异于点 A, B 的一动点，直线 PA, PB 分别与直线 $x=4$ 交于 M, N 两点，以线段 MN 为直径作圆 C.

① 当点 P 在 y 轴的左侧时，求圆 C 半径的最小值；

② 问：是否存在一个圆心在 x 轴上的定圆与圆 C 相切？若存在，指出该定圆的圆心和半径，并证明你的结论；若不存在，说明理由.

28. 已知 A, B, C 为椭圆 $x^2+2y^2=2$ 上的三个点，O 为坐标原点.

(1) 若 A, C 所在的直线方程为 $y=x+1$，求 AC 的长；

(2) 设 P 为线段 OB 上一点，且 $OB=3\,|OP|$，当 AC 中点恰为点 P 时，判断 $\triangle OAC$ 的面积是否为常数，并说明理由.