排列组合

DonQ

目录

1 基本计数原理

1.1 加法原理和分类计数法

1) 加法原理：做一件事，完成它可以有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种不同的方法，在第二类办法中有 m_2 种不同的方法，$\cdots$，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n$ 种不同方法.

2) 分类的要求：每一类中的每一种方法都可以独立地完成此任务；两类不同办法中的具体方法，互不相同（即分类不重）；完成此任务的任何一种方法，都属于某一类 (即分类不漏)

1.2 乘法原理和分步计数法

1) 乘法原理：做一件事，完成它需要分成 n 个步骤，做第一步有 m_1 种不同的方法，做第二步有 m_2 种不同的方法，$\cdots$，做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N = m_1 \times m_2 \times m_3 \times \cdots \times m_n$ 种不同的方法.

2) 合理分步的要求：任何一步的一种方法都不能完成此任务，必须且只须连续完成这 n 步才能完成此任务；各步计数相互独立；只要有一步中所采取的方法不同，则对应的完成此事的方法也不同.

2 排列组合

2.1 排列

排列的定义：从 n 个不同元素中，任取 m ($m \leqslant n, m$ 与 n 均为自然数, 下同）个元素按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列；从 n 个不同元素中取出 m ($m \leqslant n$）个元素的所有排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用符号 A_n^m 表示.

计算公式：

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

其中：$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1$. 此外规定：$0! = 1$.

2.2 组合

组合的定义：从 n 个不同元素中，任取 m ($m \leqslant n$) 个元素并成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合；从 n 个不同元素中取出 m ($m \leqslant n$) 个元素的所有组合的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数。用符号 C_n^m 表示. 计算公式：

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

根据公式可得 $C_n^m = C_n^{n-m}$.

3 二项式定理

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + C_n^n b^n \ (n \in \mathbf{N}).$$

其中 C_n^k 叫做二项式系数，用 T_{k+1} 表示通项，即 $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k$.

3.1 二项式系数的关系

1) 和首尾两端等距离的二项式系数相等；

2) 当二项式指数 n 是奇数时，中间两项最大且相等；当二项式指数 n 是偶数时，中间一项最大; 二项式系数最大为：$\begin{cases} C_n^{\frac{n}{2}}, & n\text{为偶数} \\ C_n^{\frac{n+1}{2}}\text{或}C_n^{\frac{n-1}{2}}, & n\text{为奇数} \end{cases}$

3) 二项式展开式中所有二项式系数总和为 2^n，即 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots C_n^n=2^n$

4) 二项式展开式中奇数项和偶数项总和相同，都是 2^{n-1}，即 $\begin{cases} C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots C_n^{2k-1}+\cdots=2^{n-1} \\ C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots C_n^{2k}+\cdots=2^{n-1} \end{cases}$；

3.2 系数

令 $g(x)=(a+bx)^n$，则：

1) $(a+bx)^n$ 的展开式中的各项系数和为 $g(1)$;

2) $(a+bx)^n$ 展开式中的奇数项的系数和为 $\dfrac{g(1)+g(-1)}{2}$；

3) $(a+bx)^n$ 展开式中的偶数项的系数和为 $\dfrac{g(1)-g(-1)}{2}$.

4　排列组合常用解法

4.1　分析总纲

- 一套二分

  (1) 套：套类型

  (2) 分：$\begin{cases}\text{分类}\\ \text{分步}\end{cases}$

- 正难则反：正面较难，反面思考

- 特殊优先：特殊元素，特殊位置优先考虑

4.2　元素受限法

优先考虑 (先排) 受限特殊元素、后排非受限元素的方法.

例 1: 从 $0-9$ 十个数字中，可以组成多少个没有重复数字的四位数？

解. 先考虑受限元素“0”

1) 不含“0”：A_9^4

2) 含有“0”：“0”不在首位：3 种, 其他元素：A_9^3

共有 $A_9^4+3A_9^3$ 种排法 □

4.3　位置受限法

从特殊位置入手先排，再排非特殊位置.

例 2: 从 8 人中选 3 人站成一排，其中甲不站在首位，有多少种排法？

解. 首先受限位置：有 A_7^1 种，余下的位置有 A_7^2 种，共有 $A_7^1\times A_7^2$ 种 □

4.4　“捆绑”法

主要解决某些元素“相邻”的排列问题.

例 3: 8 件不同的商品排成一行，其中甲、乙、丙、丁四件商品一定要排在一起，有多少种排法？

解. 把甲、乙、丙、丁四件“捆”在一起，当做一个元素参与排列，有 A_5^5 种方法，而甲、乙、丙、丁四件商品的排列有 A_4^4 种排列，共有 $A_5^5A_4^4=2880$ 种排列. □

4.5　“插空”法

适用于某些元素“分离”的排列问题 (即“不相邻”问题).

例 4: 三名男生与四名女生站成一排，按下列条件各有多少种不同的排法？

1) 男生互不相邻；　2) 男生、女生相间；

解. 1) 先将四名女生指定有 A_4^4 种方法，再将五个空档中插入三名男生有 A_5^3 种排列方法，共有 $A_4^4A_5^3=1440$ 种方法.

2) 男生比女生少一名，四名女生间只有 3 个空档，要使男女相间，只有在三个空档中插入三名男生，有 $A_4^4A_3^3=144$ 种不同的排法.

□

4.6 先组后排法

即先选取元素后进行排列的方法.

例 5: 从单词“eguation”中取 5 个不同字母排成一排，含有“gu”(其中“gu”相连且顺序不变) 的不同排列共有多少个？

解. 从单词中出“gu”之外的 6 个字母中选 3 个字母的取法有 C_6^3 种，再将这 3 个字母与“gu”排列有 A_4^4 种方法，故有 $C_6^3A_4^4=480$ 个 □

4.7 “去杂”法

当问题反向思考更简单时，采用此方法，即“正难则反”的思维方式，从整体中去除不符合要求的“事件”.

例 6: 若 $\{a, b, c\}\subseteq\{-3,-2,-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$，求符合条件的二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的解析式有多少种？

解. 八个数字中任选三个数字的排列有 A_8^3 种，但 $a=0$ 时的 A_7^2 种应去掉，所求解析式应有 $A_8^3-A_7^2$ 种 □

4.8 “插挡板”法

例 7: 一个由 10 人组成的球队，他们由七个学校的学生组成，每校至少一人，其分配方案共有多少种？

解. 10 人排成一列，用 6 块挡板分成 7 段，每段至少一人，所以两挡板不相邻，且不在边上，即放在 9 个空档里，有 $C_9^6=84$ 种分配方案. □

4.9 “集合”法

运用集合元素的个数及集合运算化难为易.

例 8: 5 人排成一排，甲不在中间，乙不在头，丙不在尾的排法有几种？

解. 设集合 $A=\{$甲在中间的排列$\}$, $B=\{$乙在头的排列$\}$, $C=\{$丙在尾的排列$\}$, 则符合条件的排列有：

$$A_5^5-\Big[n(A)+n(B)+n(C)\Big]+\Big[n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(A\cap C)\Big]-n(A\cap B\cap C)$$

$$=A_5^5-3A_4^4+3A_3^3-A_2^2=64\text{种}$$

□

4.10 “概率”法

从可能角度考虑问题，采用“概率”思想方法分析解决问题.

例 9: 6 人站成一排，甲在乙的右边 (不定相邻) 的排法有几种？

解. 6 人站成一排的全排列有 A_6^6 种，由于不是甲在乙的右边，就是乙在甲的右边，机会均等，故甲在乙的右边的排列有 $\dfrac{A_6^6}{2}=360$ 种. □

4.11 “住店”法

在解决允许重复的排列问题时，要注意区分两类元素，一类元素可以重复，另一类元素不能重复，把不能重复的元素看作“客”，能重复的元素看作“店”，客可以在任一店中住，再利用分步计数原理直接求解的方法称为“住店法”.

例 10: 1) 七名学生争夺五项冠军，获得冠军的可能的种数为 7^5;

2) 3 个班分别从 5 个风景点中选择 1 处游览，不同选法种数是 5^3.

4.12 “查字典”法

例 11: 由 0, 1, 2, 3, 4, 5 六个元素可以组成多少个没有重复数字且比 324105 大的数？

解. 要找出比 324105 大的数：

1) 查首位：首位有 4 或 5 共有 $2A_5^5$ 个;

2) 查头两位：有 34 和 35 共有 $2A_4^4$ 个;

3) 查头三位：有 325 共有 A_3^3 个;

4) 查头四位：有 3245 共有 A_2^2 个;

5) 查头五位：有 324510 这 1 个;

总计：$2A_5^5+2A_4^4+A_3^3+A_2^2+1=297$ 个. □

4.13 “消序”法

主要解决“均匀无序分组”的问题，即均匀分成组且组与组之间不存在顺序关系.

例 12: 把 10 本书平均分成 5 堆，每堆 2 本，有多少种不同的分法？

解. 因为五堆之间无顺序关系，也就是 A_5^5 种关系视为一种关系，故有 $\dfrac{C_{10}^2C_8^2C_6^2C_4^2C_2^2}{A_5^5}=945$ 种分法. □

一般情况下，n 个元素分成无序的 m 组，每组 r 个元素，则分法总数为

$$\frac{C_n^rC_{n-r}^rC_{n-2r}^r\cdots C_r^r}{A_m^m}\text{种}\ (mr=n)$$

4.14 “逆向”法

运用“逆向思维”的方法去分析，解决排列组合应用题.

例 13: 某餐厅供应客饭，每位顾客可以在餐厅提供的菜肴这两个任选 2 荤 2 素共 4 种不同的品种，现在餐厅准备了 5 种不同的荤菜，若要保证每位顾客有 200 种以上的不同选择，则餐厅至少还需要准备不同的素菜品种多少种？

解. 设至少需要准备不同的素菜品种 n 种 ($n \geqslant 2,\ n \in \mathbf{N}$).

$$C_5^2 C_n^2 > 200$$

$$C_n^2 > 20,\ \frac{n(n-1)}{2} > 20.$$

$$n \geqslant 7.$$

故准备不同的素菜品种至少为 7 种. □

5 综合例题

例 14: 4 个男生、3 个女生排成一排.

1) 3 个女同学必须排在一起：$A_5^5 \times A_3^3$ (相邻、捆绑)

2) 任意两个女同学不相邻：$A_4^4 \times A_5^3$ (插空)

3) 其中甲乙两同学之间恰好有 3 人:$A_5^3 \times A_2^2 \times A_3^3$ (捆绑)

4) 甲乙相邻，但都不与丙相邻：$A_2^2 \times A_4^4 \times A_5^2$ (相邻、插空)

5) 女同学从左到右由高到矮按顺序排列

   - $\dfrac{A_7^7}{A_3^3}$(取消顺序)
   - $A_4^1 \times A_5^1 \times A_6^1 \times A_7^1$ (逐步插入)
   - A_7^4 (从七个位置中选取四个位置排男生)
   - $A_4^4 \times (C_5^1 + 2 \times C_5^2 + C_5^3)$ (女生占一空、二空、三空)
   - $A_4^4 \times (5+4+3+2+1+4+3+2+1+3+2+1+2+1+1)$ (列举法)

6) 甲不在排头、乙不在排尾

   - 乙在排头：A_6^6
   - 乙不在排头：$A_5^1 \times A_5^1 \times A_5^5$ (特殊位置、分类、分步)
   - $A_7^7 - 2A_6^6 + A_5^5$ (正难则反)

7) 从 7 名学生中选择 5 人排列，甲不在排头，乙不在排尾

   - 有甲无乙：$C_5^4 \times A_4^1 \times A_4^4$
   - 有乙无甲：$C_5^4 \times A_4^1 \times A_4^4$
   - 有甲有乙：$C_5^3 \times (A_5^5 - 2A_4^4 + A_3^3)$

   (分类，分步，特殊优先，正难则反)

8) 把此 7 人保送到 5 所学校，每校至少 1 人：$C_7^3 \times A_5^5 + \dfrac{C_7^2 \times C_5^2 \times A_5^5}{A_2^2}$

   (人数相同分类 n 类，除以 A_n^n)

9) 取 3 人，至少一男一女

- $C_4^1 \times C_3^2 + C_3^1 \times C_4^2$(一男两女 + 一女两男, 分类)
- $C_7^3 - C_4^3 - C_3^3$(正难则反)

6 环形涂色问题

环形涂色问题又称为多边形的涂色问题, 在一般的题型中, 可将题意抽象为环形涂色问题, 该问题的一般化为：用 $m(m \geqslant 3)$ 种不同颜色给 n 边形 $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ 各顶点涂色, 且相邻顶点不同色, 则不同的涂色方案有 a_n 种.

定理 6.1. 设环形涂色的方案数为，则 a_n 的递推公式为:

$$\begin{cases} a_n = m(m-1)^{n-1} - a_{n-1} \\ a_3 = m(m-1)(m-2) \end{cases}$$

证明. 如图所示: 在 A_1 处有 m 种涂色方案，在 $A_2, A_3 \ldots A_{n-1}$ 处有 $m-1$ 种涂色方案, 此时考虑 A_n 也有 $m-1$ 种涂色方案在此情况下, 有两种情况：

1) A_n 与 A_1 同色, 此时相当于 A_n 与 A_1 重合, 这时问题转化为 m 种不同颜色给 $n-1$ 边形涂色, 即为 a_{n-1} 种涂色方案;

2) A_n 与 A_1 不同色, 此时问题就转化为用 m 种不同颜色给 n 边形的各顶点涂色, 且相邻顶点不同色, 即此时的情况就是 a_n。根据分类原理可知 $m(m-1)^{n-1} = a_n + a_{n-1}$ ，且满足初始条件:$a_3 = m(m-1)(m-2)$ 即递推公式为:

$$\begin{cases} a_n = m(m-1)^{n-1} - a_{n-1} \\ a_3 = m(m-1)(m-2) \end{cases}$$

□

定理 6.2. 设环形涂色的方案数为 a_n，则 a_n 的通项公式为 $a_n = (m-1)^n + (-1)^n(m-1)$

证明. 根据定理一的递推公式，有：

$$\begin{aligned} a_n =& m(m-1)^{n-1} - a_{n-1} \\ =& (m-1+1)(m-1)^{n-1} - a_{n-1} \\ =& \frac{(m-1)^n}{(m-1)^{n-1}} - a_{n-1} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} a_n - (m-1)^n =& -[a_{n-1} - (m-1)^{n-1}] \\ =& [m(m-1)(m-2) - (m-1)^3](-1)^{n-3} \\ =& (m-1)(-1)^n \end{aligned}$$

所以

$$a_n = (m-1)^n + (-1)^n(m-1)$$

□

7 练习

1. 将 2 名老师、4 名学生分成两个小组，分别安排到甲、乙两个地方参加社会实践活动，每个小组由 1 名教师和 2 名学生组成，不同的分配方案共有 ( )

(A) 12 种 (B) 10 种 (C) 9 种 (D) 8 种

2. 5 名志愿者分到 3 所学校支教，每个学校至少有一名志愿者，则不同的分法共有 ( )

(A) 150 种 (B) 180 种 (C) 270 种 (D) 540 种

3. A, B, C, D, E 五个人并排站成一排，如果 B 必须站在 A 的右边 (A, B 可以不相邻)，那么不同的排法共有 ( )

(A) 24 种 (B) 60 种 (C) 90 种 (D) 120 种

4. 在数字 1, 2, 3, 4, 5 组成的所有没有重复数字的 5 位数中，大于 23145 且小于 43521 的数共有 ( )

(A) 56 个 (B) 57 个 (C) 58 个 (D) 60 个

5. 某小型节目由 6 个节目组成，安排顺序如下：节目甲必须排在前面两位，节目乙不能排在第一位，节目丙必须排在最后一位，则不同的排法有 ( )

(A) 36 (B) 42 (C) 48 (D) 54

6. 12 名同学合影，站成前排 4 人后排 8 人，现摄影师要求从后排 8 人中抽 2 人调整到前排，若其他人的相对顺序不变，则不同的调整方案的总数是 ( )

(A) $C_8^2A_6^6$ (B) $C_8^2A_3^2$ (C) $C_8^2A_6^2$ (D) $C_8^2A_5^2$

7. 3 位男生和 3 位女生共 6 位同学站成一排，若男生甲不站两端，3 位女生有且只有 2 位女生相邻，则不同的排法的种数是 ( )

(A) 360 (B) 288 (C) 216 (D) 96

8. 小明和父母、爷爷奶奶一同参加《中国诗词大会》的现场录制，5 人坐成一排. 若小明的父母至少有一人与他相邻，则不同的坐法的总数为 ( )

(A) 60 (B) 72 (C) 84 (D) 96

9. 甲、乙、丙、丁、戊五人排成一排，甲和乙都排在丙的同一侧，排法种数为 ( )

(A) 12 (B) 40 (C) 60 (D) 80

10. 在手绘涂色本上的某页上画有排成一列的 6 条未涂色的鱼，小明用红、蓝两种颜色给这些鱼涂色，每条鱼只能涂一种颜色，两条相邻的鱼不都涂成红色，涂色后，既有红色鱼又有蓝色鱼的涂色方法种数为 ( )

(A) 14 (B) 16 (C) 18 (D) 20

11. $\left(x^2+x+y\right)^5$ 的展开式中，x^5y^2 的系数为 ( )

(A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) 60

12. 在 $\left(\sqrt{x}+\dfrac{2}{x}\right)^n$ 的二项式展开式中，若常数项为 60，则 n 等于 ( )

(A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 12

13. $\left(x+\dfrac{a}{x}\right)\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中各项系数的和为 2，则该展开式中的常数项为 (　　)

(A) -40　　(B) -20　　(C) 20　　(D) 40

14. 若对于任意的实数 x，有 $x^3=a_0+a_1(x-2)+a_2(x-2)^2+a_3(x-2)^3$，则 a_2 的值为 (　　)

(A) 3　　(B) 6　　(C) 9　　(D) 12

15. $\left(2-\sqrt{x}\right)^8$ 的展开式中不含 x^4 的项的系数的和为 (　　)

(A) -1　　(B) 0　　(C) 1　　(D) 2

16. 设 m 是正整数，$(x+y)^{2m}$ 展开式的二项式系数的最大值为 a，$(x+y)^{2m+1}$ 展开式的二项式系数的最大值为 b，若 $13a=7b$，则 $m=$ (　　)

(A) 5　　(B) 6　　(C) 7　　(D) 8

17. 现有 6 人要排成一排照相，其中甲与乙两人不相邻，且甲不站在两端，则不同的排法有______ 种.

18. 把 5 件不同的产品摆成一排，若产品 A 与产品 B 相邻，且产品 A 不与产品 C 相邻，则不同的摆法有______ 种.

19. 用 $1,2,3,4,5,6,7,8$ 组成没有重复数字的八位数，要求 $1,2$ 相邻，$3,4$ 相邻，$5,6$ 相邻，7和8 不相邻，这样的八位数共有______ 个.

20. 某工程队有 6 项工程需要单独完成，其中工程乙必须在工程甲完成后才能进行，工程丙必须在工程乙完成后才能进行，工程丁必须在工程丙完成后立即进行，那么安排这 6 项工程的不同排法种数是______.

21. 一次数学会议中，有五位教师来自 A, B, C 三所学校，其中 A 学校有 2 位，B 学校有 2 位，C 学校有 1 位. 现在五位老师排成一排照相，若要求来自同一学校的老师不相邻，则共有______ 种不同的站队方案.

22. 有 5 名男医生和 3 名女医生，现要从其中选 6 名医生组成 2 个地震医疗小组，每组 2 名男医生和 1 名女医生组成，那么有______ 种不同的组合方法.

23. 从 $1,3,5,7$ 中任取 2 个数字，从 $0,2,4,6,8$ 中任取 2 个数字，组成没有重复数字的四位数，其中能被 5 整除的四位数共有______ 种.

24. 小明吃桃，在周一和周日时每天吃 3 个桃，周二到周六比前一天只能是“多一个”，“少一个”，“持平”三种选择，一共有______ 种吃法.

25. 某种产品的加工需要 A,B,C,D,E 五道工艺，其中 A 必须在 D 的前面完成 (不一定相邻)，其他工艺的顺序可以改变，但不能同时进行，为了节省加工时间，B 与 C 必须相邻，那么完成加工该产品的不同工艺的排列顺序有______ 种.(用数字做答)

26. $(2+x)^n$ 的展开式中的第 4 项与第 11 项的二项式系数相等，则 $n=$______.

27. $(x-y)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^7 的系数为______.

28. 若 $\left(x^3+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中的常数项为 84，则 $n=$______.

29. 在 $\left(1+x+\dfrac{1}{x^{2015}}\right)^{10}$ 的展开式中，x^2 项的系数为______(结果用数值表示).

30. 设 $n\in\mathbf{N}^*$，则 $C_n^1+C_n^2 6+C_n^3 6^2+\cdots+C_n^n 6^{n-1}=$______.

31. 已知 $(5x-1)^n$ 的展开式中，各项系数和与各项二项式系数的和之比为 $64:1$，则 $n=$______.

32. 已知 $(1-x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，则 $(a_0+a_2+a_4)(a_1+a_3+a_5)$ 的值等于______.

33. 用 $0,1,2,3,4,5$ 这 6 个数能组成多少个满足下列条件的无重复的数字:

(1) 6 位奇数；

(2) 个位数字不是 5 的六位数；

(3) 不大于 4310 的四位偶数.