1 交点和距离问题

1.1 直线交点

设两条直线的方程为 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$，两条直线是否有交点，就看这两条直线所组成的方程组 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$ 是否有为唯一解.

1) 若方程组无解，则直线 l_1, l_2 平行；反之，也成立;

2) 若方程组有无穷多个解，则直线 l_1, l_2 重合；反之，也成立;

3) 当有交点时 $(A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0)$，方程组的解就是交点坐标.

1.2 距离公式

1.2.1 两点间距离公式

平面内两点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 间的距离公式为 $|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

若 P_1, P_2 在直线 $y = kx + b$ 上，则可根据 $y_1 = kx_1 + b$, $y_2 = kx_2 + b$ 代入两点间的距离公式得到距离公式：

$$d = \sqrt{(1 + k^2)(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(1 + k^2)\left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right]}$$

如果用 y 置换 x，则有 $d = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)(y_1 - y_2)^2}$

1.2.2 点到直线的距离

点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $Ax + By + C = 0(A, B\text{不同时为零})$ 的距离为 $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

1.2.3 平行直线间的距离

两条平行直线 $l_1: Ax + By + C_1 = 0$ 和 $l_2: Ax + By + C_2 = 0(C_1 \neq C_2)$ 间的距离为 $d = \dfrac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

可以在直线 l_1 上取点 $P(x_0, y_0)$，代入点到直线的公式中得到证明

2 对称性问题

2.1 求点关于点对称的点

求点 $P(x_0, y_0)$ 关于点 $A(a, b)$ 的对称点 P' 的问题，主要根据 A 是线段 PP' 的中点来解决. 设点 $P'(x_1, y_1)$，则由中点性质有: $\begin{cases} \dfrac{x_0 + x_1}{2} = a, \\ \dfrac{y_0 + y_1}{2} = b. \end{cases}$ 解得 $P'(2a - x_0, 2b - y_0)$.

2.2 求点关于直线对称的点

设点 $P(x_0, y_0)$ 关于直线 $y = kx+b$ 的对称点为 $P'(x', y')$，则由：$\begin{cases} \dfrac{y'-y_0}{x'-x_0} \cdot k = -1, \\ \dfrac{y'+y_0}{2} = k \cdot \dfrac{x'+x_0}{2} + b. \end{cases}$ 可求出 x', y'.

几种特殊位置的对称：

点	对称轴	对称点坐标
$P(a,b)$	x 轴	$(a, -b)$
	y 轴	$(-a, b)$
	$y = x$	(b, a)
	$y = -x$	$(-b, -a)$
	$x = m(m \neq 0)$	$(2m - a, b)$
	$y = n(n \neq 0)$	$(a, 2n - b)$

2.3 求直线关于点对称的直线

求直线 l 关于点 $M(m, n)$ 对称直线 l' 的问题，主要依据 l' 上任一点 $T(x, y)$ 关于 $M(x, y)$ 的对称点 $T'(2m - x, 2n - y)$ 在 l 上来求解.

2.4 直线关于直线对称的直线

曲线 $f(x, y) = 0$ 关于直线 $y = kx + b$ 的对称曲线求法：

设曲线 $f(x, y) = 0$ 上任意一点为 $P(x_0, y_0)$，P 点关于直线 $y = kx + b$ 的对称点为 $P'(x, y)$，则 P 与 P' 的坐标满足

$$\begin{cases} \dfrac{y-y_0}{x-x_0} \cdot k = -1, \\ \dfrac{y+y_0}{2} = k \cdot \dfrac{x+x_0}{2} + b. \end{cases}$$

从而解出 x_0, y_0，代入已知曲线 $f(x, y) = 0$，应有 $f(x_0, y_0) = 0$. 利用坐标代换法就可求出曲线 $f(x, y) = 0$ 关于直线 $y = kx + b$ 对称的曲线方程.

曲线 $f(x, y) = 0$ 关于直线 $x + y + c = 0$ 的对称方程为 $f(-y - c, -x - c) = 0$，关于直线 $x - y + c = 0$ 的对称曲线的方程为 $f(y - c, x + c) = 0$.

3 轨迹

轨迹问题基本步骤：(直译法)

1) **建系设点**

建立适当坐标系，用有序数对 (x, y) 表示曲线上任意一点 M 的坐标;

2) **列式**

写出适合条件 p 的点 M 的集合 $P = \left\{M \middle| p(M)\right\}$;

3) **代换**

用坐标表示条件 $p(M)$，列出方程 $f(x, y) = 0$;

4) 化简

把方程 $f(x, y) = 0$ 化简为最简形式；

5) 查漏除杂

验证方程表示的曲线是否为已知曲线，重点检查方程表示的曲线是否有多余的点，或者曲线上是否有遗漏的点.

3.1 定义法

若动点运动的几何条件恰好与某圆锥曲线的定义吻合，可直接根据定义建立动点的轨迹方程. 用定义法可以先确定曲线的类型与方程的具体结构式，再用待定系数法求之.

3.2 直译法

直接将动点满足的几何等量关系“翻译”成动点坐标所满足的关系式，得方程 $f(x, y) = 0$，即为所求动点的轨迹方程.

3.3 相关点法

若所求轨迹上的动点 $P(x, y)$ 与另一个已知曲线 $C : F(x, y) = 0$ 上的动点 $Q(x_1, y_1)$ 存在某种联系，可把点 Q 的坐标用点 P 的坐标表示出来，然后代入已知曲线 C 的方程 $F(x, y) = 0$，化简即得所求轨迹方程.

3.4 参数法

如果动点 $P(x, y)$ 的坐标之间的关系不易找到，可先考虑将 x, y 用一个或几个参数来表示，消去参数得轨迹方程，此法称为参数法.

3.5 交轨法

在求动点的轨迹问题时，有时会出现求两动曲线交点的轨迹问题，这类问题常常通过解方程组得出交点（含参数）的坐标，再消去参数得出所求轨迹的方程，该方程经常与参数法并用.