2018 期末

1. 若 $\log_2 a + \log_{\frac{1}{2}} b = 2$，则有 ( )

(A) $a = 2b$　(B) $b = 2a$　(C) $a = 4b$　(D) $b = 4a$

2. 已知直线 $x - y + m = 0$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 相交于 A, B 两点，且 $\triangle OAB$ 为正三角形，则实数 m 的值为 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$或$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$或$-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

3. 从编号分别为 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 的六个大小完全相同的小球中，随机取出三个小球，则恰有两个小球编号相邻的概率是 ( )

(A) $\dfrac{1}{5}$　(B) $\dfrac{2}{5}$　(C) $\dfrac{3}{5}$　(D) $\dfrac{4}{5}$

4. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC = 1$, D 是 AC 边的中点，则 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CD}$ 的取值范围是 ( )

(A) $\left(-\dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$　(B) $\left(-\infty, \dfrac{1}{4}\right)$　(C) $\left(-\dfrac{3}{4}, +\infty\right)$　(D) $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}\right)$

5. 已知 M 为曲线 $C: \begin{cases} x = 3 + \cos\theta, \\ y = \sin\theta \end{cases}$ $(\theta$为参数$)$ 上的动点，设 O 为原点，则 $|OM|$ 的最大值是 ( )

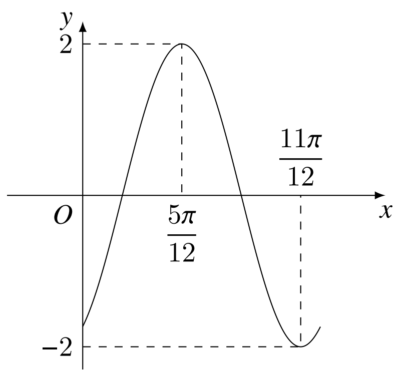
(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

6. 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是非零向量，且 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线，则“$|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$”是“$|\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}| = |2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|$”的 ( )

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

7. 函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)\left(\omega > 0, |\varphi| < \dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则 ω, φ 的值分别是 ( )



(A) $2, -\dfrac{\pi}{3}$　(B) $2, -\dfrac{\pi}{6}$　(C) $4, -\dfrac{\pi}{6}$　(D) $4, \dfrac{\pi}{3}$

8. 以角 θ 的顶点为坐标原点，始边为 x 轴的非负半轴，建立平面直角坐标系，角 θ 终点过点 $P(2, 4)$，则 $\tan\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) =$ ( )

(A) $-\dfrac{1}{3}$　(B) -3　(C) $\dfrac{1}{3}$　(D) 3

9. 实数 x,y 满足 $\begin{cases} x-1\geqslant 0, \\ x+y-1\geqslant 0, \\ x-y+1\geqslant 0. \end{cases}$ 则 $2x-y$ 的取值范围是 ( )

(A) $[0,2]$ (B) $(-\infty,0]$ (C) $[-1,2]$ (D) $[0,+\infty)$

10. 已知函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)$ 的图象记为曲线 C，则“$f(0)=f(\pi)$”是“曲线 C 关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称”的 ( )

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

11. “$m>10$”是“方程 $\dfrac{x^2}{m-10}+\dfrac{y^2}{m-8}=1$ 表示双曲线”的 ( )

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

12. 已知点 F 为抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点，点 K 为 F 关于原点的对称点，点 M 在抛物线 C 上，则下列说法错误的是 ( )

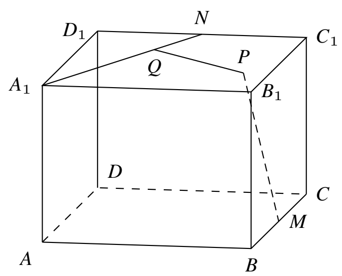
(A) 使得 $\triangle MFK$ 为等腰三角形的点 M 有且仅有 4 个

(B) 使得 $\triangle MFK$ 为直角三角形的点 M 有且仅有 4 个

(C) 使得 $\angle MKF=\dfrac{\pi}{4}$ 的点 M 有且仅有 4 个

(D) 使得 $\angle MKF=\dfrac{\pi}{6}$ 的点 M 有且仅有 4 个

13. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，M,N 分别是棱 BC, C_1D_1 的中点，点 P 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内，点 Q 在线段 A_1N 上. 若 $PM=\sqrt{5}$，则 PQ 长度的最小值是 ( )



(A) $\sqrt{2}-1$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}-1$ (D) $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

14. 现有 n 个小球，甲、乙两位同学轮流且不放回抓球，每次最少抓 1 个球，最多抓 3 个球，规定谁先抓到最后一个球谁赢. 如果甲先抓，那么以下推断正确的是 ( )

(A) 若 $n=4$，则甲有必赢的策略 (B) 若 $n=6$，则乙有必赢的策略

(C) 若 $n=9$，则甲有必赢的策略 (D) 若 $n=11$，则乙有必赢的策略

15. 已知 A,B 是函数 $y=2^x$ 的图象上的相异两点，若点 A,B 到直线 $y=\dfrac{1}{2}$ 的距离相等，则点 A,B 的横坐标之和的取值范围是 ( )

(A) $(-\infty,-1)$ (B) $(-\infty,-2)$ (C) $(-\infty,-3)$ (D) $(-\infty,-4)$

16. 函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\leqslant 0\\ x(2-x), & x>0\end{cases}$ 的最大值为______; 若函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=k(x-1)$ 有且只有一个公共点，则实数 k 的取值范围是______.

17. 若 $a=\ln\dfrac{1}{2}$, $b=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{0.8}$，$c=2^{\frac{1}{3}}$，则 a,b,c 的大小关系是______.

18. 设常数 $a\in\mathbf{R}$，若 $\left(x^2+\dfrac{a}{x}\right)^5$ 的二项展开式中 x^7 的系数为 -10，则 $a=$______.

19. 在 $\triangle ABC$ 中，H 为 BC 上异于 B, C 的任一点，M 为 AH 的中点，若 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$, 则 $\lambda+\mu=$______.

20. 若集合 $\{a,b,c,d\}=\{1,2,3,4\}$，且下列四个关系：

①$a=1$　　②$b\neq 1$　　③$c=2$，　　④$d\neq 4$ 有且只有一个是正确的.

请写出满足上述条件的一个有序数组 (a,b,c,d)=______; 符合条件的全部有序数组 (a,b,c,d) 的个数是______.

21. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 $4\sqrt{2}$，点 M 是棱 BC 的中点，点 P 在底面 $ABCD$ 内，点 Q 在线段 A_1C_1 上，若 $PM=1$，则 PQ 的长度的最小值为______.

22. 设抛物线 $C: y^2=4x$ 的顶点为 O，经过抛物线 C 的焦点且垂直于 x 轴的直线和抛物线 C 交于 A, B 两点，则 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|$=______.

23. 已知 $(5x-1)^n$ 展开式中，各项系数的和与各项二项式系数的和之比为 $64:1$，则 n=______.

24. 已知点 $M(x,y)$ 的坐标满足条件 $\begin{cases}x-1\leqslant 0,\\ x+y-1\geqslant 0,\\ x-y+1\geqslant 0.\end{cases}$ 设 O 为原点，则 $|OM|$ 的最小值是______.

25. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x-3, & x>a,\\ -x, & x\leqslant a.\end{cases}$ 当 $a=0$ 时，$f(x)$ 的值域为______; 当 $f(x)$ 有两个不同的零点时，实数 a 的取值范围是______.

26. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+x, & -x\leqslant x\leqslant c,\\ \dfrac{1}{x}, & c<x\leqslant 3.\end{cases}$ 若 $c=0$，则 $f(x)$ 的值域是______; 若 $f(x)$ 的值域是 $\left[-\dfrac{1}{4},2\right]$, 则实数 c 的取值范围是______.

27. 对任意实数 k，定义集合 $D_k=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}x-y+2\geqslant 0\\ x+y-2\leqslant 0\\ kx-y\leqslant 0\end{cases}, x,y\in\mathbf{R}\right\}$.

①若集合 D_k 表示的平面区域是一个三角形，则实数 k 的取值范围是______;

②当 $k=0$ 时，若对任意的 $(x,y)\in D_0$，有 $y\geqslant a(x+3)-1$ 恒成立，且存在 $(x,y)\in D_0$，使得 $x-y\leqslant a$ 成立，则实数 a 的取值范围是______.

28. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_2=5, S_3=a_7$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $b_n=2^{a_n}$, 求数列 $\{a_n+b_n\}$ 的前 n 项和 S_n

29. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列，且 a_2+6 是 a_1 和 a_3 的等差中项.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 T_n，求 T_n 的最大值.

30. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 为边 BC 上一点，$AD=6,\ BD=3,\ DC=2$.

(1) 若 $\angle ADB=\dfrac{\pi}{2}$，求 $\angle BAC$ 的大小；

(2) 若 $\angle ADB=\dfrac{2\pi}{3}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

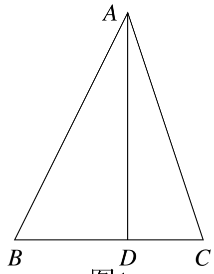


图1

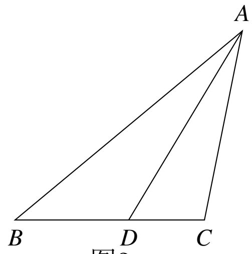


图2

31. 已知函数 $f(x)=\cos 2x\cdot\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的定义域；

(2) 求函数 $f(x)$ 的值域.

32. 已知函数 $f(x)=2\sin^2 x-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

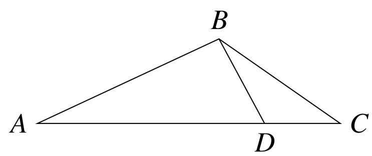
(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期；

(2) 求证：当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)\geqslant-\dfrac{1}{2}$.

33. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在 AC 边上，且 $AD=3DC$, $AB=\sqrt{7}$, $\angle ADB=\dfrac{\pi}{3}$, $\angle C=\dfrac{\pi}{6}$.

(1) 求 DC 的值；

(2) $\tan\angle ABC$ 的值.



34. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 过点 $A(2,0),B(0,1)$ 两点.

(1) 求椭圆 C 的方程及离心率；

(2) 设点 Q 在椭圆上，试问直线 $x+y-4=0$ 上是否存在点 P，使得四边形 $PAQB$ 是平行四边形？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，说明理由.

35. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 过点 $A(2,0)$，且离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 设直线 $y=kx+\sqrt{3}$ 与椭圆 C 交于 M,N 两点，若直线 $x=3$ 上存在点 P，使得四边形 $PAMN$ 是平行四边形，求 k 的值.

36. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率等于 $\dfrac{1}{2}$，$P(2,3)$, $Q(2,-3)$ 是椭圆 C 上的两点.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) A,B 是椭圆 C 上位于直线 PQ 两侧的动点，当 A,B 运动时，满足 $\angle APQ=\angle BPQ$，试问直线 AB 的斜率是否为定值？如果为定值，请求出此定值，如果不是定值，说明理由.

37. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{3m}+\dfrac{y^2}{m}=1$，直线 $l:x+y-2=0$ 与椭圆 C 相交于 P,Q 两点，与 x 轴交于点 B，点 P,Q 与点 B 不重合.

(1) 求椭圆 C 的离心率；

(2) 当 $S_{\triangle OPQ}=2$ 时，求椭圆 C 的方程；

(3) 过原点 O 作直线 l 的垂线，垂足为 N，若 $|PN|=\lambda\left|BQ\right|$，求 λ 的值.

38. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2，点 $B\left(0,\sqrt{3}\right)$ 在椭圆 C 上，$\triangle F_1BF_2$ 是等边三角形.

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 点 A 在椭圆 C 上，线段 AF_1 与线段 BF_2 交于点 M，若 $\triangle MF_1F_2$ 与 $\triangle AF_1F_2$ 的面积之比为 $2:3$，求点 M 的坐标.

39. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的右焦点 $F(1,0)$ 与短轴两个端点的连线互相垂直.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 设点 Q 为椭圆 C 上一点，过原点 O 且垂直于 QF 的直线与直线 $y=2$ 交于点 P，求 $\triangle OPQ$ 面积 S 的最小值.

40. 已知函数 $f(x)=x^2\ln x-2x$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(1,f(1)\right)$ 处的切线方程；

(2) 求证：存在唯一的 $x_0\in(1,2)$，使得曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(x_0,f(x_0)\right)$ 处的切线的斜率为 $f(2)-f(1)$;

(3) 比较 $f(1.01)$ 与 -2.01 的大小，并加以证明.

41. 已知函数 $f(x)=e^{ax}\cdot\sin x-1$，其中 $a>0$.

(1) 当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(0,f(0)\right)$ 处的切线方程；

(2) 证明：$f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上恰有 2 个零点.

42. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln(x-a)}{x}$.

(1) 若 $a=1$，确定函数 $f(x)$ 的零点；

(2) 若 $a=-1$，证明：函数 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的减函数；

(3) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(1,f(1)\right)$ 处的切线与直线 $x-y=0$ 平行，求 a 的值.

43. 已知函数 $f(x)=(x-1)\,e^x+ax^2$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(0,f(0)\right)$ 处的切线方程；

(2) 求证：“$a<0$”是“函数 $f(x)$ 有且仅有一个零点”的充分不必要条件.