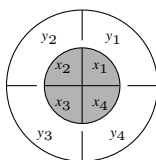
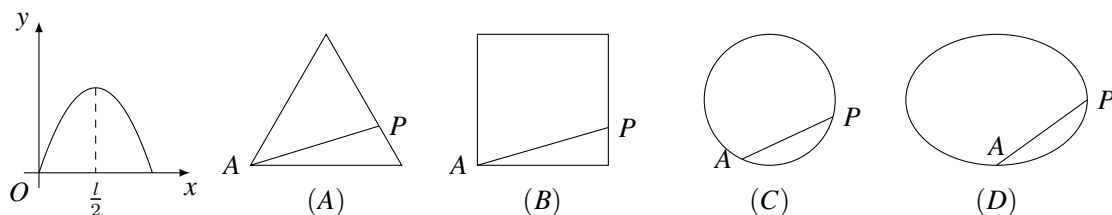


1 选填

1. 已知两个半径不等的圆盘叠放在一起 (有一轴穿过它们的圆心), 两圆盘上分别有互相垂直的两条直径将其分为四个区域, 小圆盘上缩写的实数分别记为 x_1, x_2, x_3, x_4 , 大圆盘上所写的实数分别记为 y_1, y_2, y_3, y_4 , 如图所示, 将小圆盘逆时针旋转 $i (i = 1, 2, 3, 4)$ 次, 每次旋转 90° , 记 $T_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 为转动 i 次后各区域内两数乘积之和, 例如 $T_1 = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1$. 若 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 0, y_1 + y_2 + y_3 + y_4 < 0$, 则下列结论正确的是 ()



- (A) T_1, T_2, T_3, T_4 中至少有一个为正数
(B) T_1, T_2, T_3, T_4 中至少有一个为负数
(C) T_1, T_2, T_3, T_4 中至多有一个为正数
(D) T_1, T_2, T_3, T_4 中至多有一个为负数
2. 动点 P 从 A 出发, 按逆时针方向沿周长为 l 的平面图形运动一周, A, P 两点间的距离 y 与动点 P 所走过的路程 x 的关系如图所示, 那么动点 P 所走的图形可能是 ()



3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_a x, & x > 0, \\ |x + 3|, & -4 \leq x < 0. \end{cases} (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$. 若函数 $f(x)$ 的图象上有且仅有两个点关于 y 轴对称, 则 a 的取值范围是 ()

- (A) $(0, 1)$ (B) $(1, 4)$ (C) $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ (D) $(0, 1) \cup (1, 4)$
4. $S(A)$ 表示集合 A 中所有元素的和, 且 $A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 若 $S(A)$ 能被 3 整除, 则符合条件的非空集合 A 的个数是 ()

- (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13
5. 已知一位手机用户前四次输入四位数字手机密码均不正确, 第五次输入密码正确, 手机解锁. 事后发现前四次输入的密码中, 每次都有两个数字正确, 但它们各自的位置均不正确. 已知前四次输入的密码分别为 3406, 1630, 7364, 6173, 则正确的密码中一定含有的数字为 ()

- (A) 4, 6 (B) 3, 6 (C) 3, 7 (D) 1, 7
6. 据统计某超市两种蔬菜 A, B 连续 n 天价格分别为 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 和 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$, 令 $M = \{m | a_m < b_m, m = 1, 2, \dots, n\}$, 若 M 中元素个数大于 $\frac{3}{4}n$, 则称蔬菜 A 在这 n 天的价格低于蔬菜 B 的价格, 记作 $A < B$, 现有三种蔬菜 A, B, C , 下列说法正确的是 ()

(A) 若 $A < B, B < C$, 则 $A < C$

(B) 若 $A < B, B < C$ 同时不成立, 则 $A < C$ 不成立

(C) $A < B, B < A$ 可同时不成立

(D) $A < B, B < A$ 可同时成立

7. 已知甲、乙两个容器, 甲容器的容量为 x , 装满纯酒精, 乙容器容量为 z , 其中装有体积为 y 的水 ($x, y < z$, 单位: L). 现将甲容器中的液体倒入乙容器中, 直至甲容器中液体倒完或乙容器盛满, 搅拌使乙容器中两种液体充分混合, 再将乙容器中的液体倒入甲容器中直至倒满, 搅拌使甲容器中液体充分混合, 如此称为一次操作, 假设操作过程中溶液体积变化忽略不计, 设经过 $n (n \in \mathbf{N}^+)$ 次操作之后, 乙容器中含有纯酒精 a_n (单位: L). 下列关于数列 $\{a_n\}$ 的说法正确的是 ()

(A) 当 $x = y = a$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 有最大值 $\frac{a}{2}$

(B) 设 $b_n = a_{n+1} - a_n (n \in \mathbf{N}^+)$, 则数列 $\{b_n\}$ 为递减数列

(C) 对任意的 $n \in \mathbf{N}^+$, 始终有 $a_n \leq \frac{xy}{z}$

(D) 对任意的 $n \in \mathbf{N}^+$, 始终有 $a_n \leq \frac{xy}{x+y}$

8. 中国古代儒家要求学生掌握六种基本才艺, 礼、乐、射、御、书、数, 简称“六艺”. 某中学为弘扬“六艺”的传统文化, 分别进行了主题为“礼、乐、射、御、书、数”六场传统文化知识的比赛. 现有甲、乙、丙三位选手进入了前三名的最后角逐, 规定: 每场知识竞赛前三名的得分都分别是 $a, b, c (a > b > c \text{ 且 } a, b, c \in \mathbf{N}^*)$; 选手最后得分为各场得分之和. 在六场比赛后, 已知甲最后得分为 26 分, 乙和丙最后得分都为 11 分, 且乙在其中一场比赛中获得第一名, 则下列说法中正确的是 ()

(A) 每次比赛第一名得分 a 为 4

(B) 甲可能有一场比赛获得第二名

(C) 乙有四场比赛获得第三名

(D) 丙可能有一场比赛获得第一名

9. 有三只股票 A, B, C , 共 28 位股民的持有情况如下: 每位股民至少持有其中一支股票, 在不持有 A 股票的人中, 持有 B 股票的人数是持有 C 股票的人数的 2 倍. 在持有 A 股票的人中, 只持有 A 股票的人数比除了持有 A 股票外, 同时还持有其它股票的人数多 1. 在只持有一支股票的人中, 有一半持有 A 股票. 则只持有 B 股票的股民人数是 ()

(A) 7

(B) 6

(C) 5

(D) 4

10. 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = 2$. 若 $\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} =$ _____.

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 当 $x < 0$ 时, $f(x) = \ln(-x) + x$; 当 $-e \leq x \leq e$ 时, $f(-x) = -f(x)$; 当 $x > 1$ 时, $f(x+2) = f(x)$, 则 $f(8) =$ _____.

12. 已知 O 为坐标原点, 点 P 为直线 $2x + y - 2 = 0$ 上的任意一点, 非零向量 $\mathbf{a} = (m, n)$. 若 $\overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{a}$ 恒为定值, 则 $\frac{m}{n} =$ _____.

13. 已知函数 $f(x) = \ln x + 2x - 6$ 的零点在区间 $\left(\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right) (k \in \mathbf{Z})$ 内, 那么 $k =$ _____.

14. 已知 O 为 $\triangle ABC$ 的外心, 且 $\overrightarrow{BO} = \lambda \overrightarrow{BA} + \mu \overrightarrow{BC}$.

- ① 若 $\angle C = 90^\circ$, 则 $\lambda + \mu =$ _____;
 ② 若 $\angle ABC = 60^\circ$, 则 $\lambda + \mu$ 的最大值是 _____.

15. 已知椭圆 $G: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < b < \sqrt{6}$) 的两个焦点分别为 F_1, F_2 , 短轴的两个端点分别为 B_1, B_2 , 点 P 在椭圆 G 上, 且满足 $|PB_1| + |PB_2| = |PF_1| + |PF_2|$. 当 b 变化时, 给出下列三个命题:

- ① 点 P 的轨迹关于 y 轴对称;
 ② 存在 b 使得椭圆 G 上满足条件的点 P 仅有 2 个;
 ③ $|OP|$ 的最小值为 2.

其中, 所有正确命题的序号是 _____.

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + 2, & x \leq 1, \\ \frac{1}{x} + 1, & x > 1. \end{cases}$ 下列四个命题:

- ① $f(f(1)) > f(3)$;
 ② $\exists x_0 \in (1, +\infty), f'(x_0) = -\frac{1}{3}$;
 ③ $f(x)$ 的极大值点为 $x = 1$;
 ④ $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty), |f(x_1) - f(x_2)| \leq 1$.

其中正确的有 _____. (写出所有正确命题的序号)

17. 若 x, y 满足 $\begin{cases} y \geq 1, \\ y \leq x - 1, \\ x + y \leq m. \end{cases}$ 且 $z = x^2 + y^2$ 的最大值为 10, 则 $m =$ _____.

18. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 M 不与点 O 重合, 称射线 OM 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的交点 N 为点 M 的“中心投影点”.

- (1) 点 $M(1, \sqrt{3})$ 的“中心投影点”为 _____;
 (2) 曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 上的“中心投影点”构成的曲线的长度是 _____.

19. 设 P 为曲线 C_1 上的动点, Q 为曲线 C_2 上的动点, 则称 $|PQ|$ 的最小值为曲线 C_1, C_2 之间的距离, 记作 $d(C_1, C_2)$. 若 $C_1: x^2 + y^2 = 2, C_2: (x-3)^2 + (y-3)^2 = 2$, 则 $d(C_1, C_2) =$ _____; 若 $C_3: e^x - 2y = 0, C_4: \ln x + \ln 2 = y$, 则 $d(C_3, C_4) =$ _____.

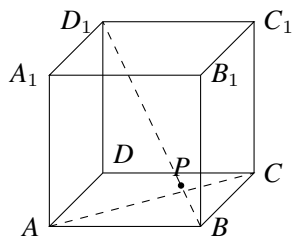
20. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x-1|, & x \in (0, 2], \\ \min\{|x-1|, |x-3|\}, & x \in (2, 4], \\ \min\{|x-3|, |x-5|\}, & x \in (4, +\infty). \end{cases}$

- ① 若 $f(x) = a$ 有且只有 1 个实根, 则实数 a 的取值范围是 _____;
 ② 若关于 x 的方程 $f(x+T) = f(x)$ 有且只有 3 个不同的实根, 则实数 T 的取值范围是 _____.

21. 已知两个集合 A, B 满足 $B \subseteq A$. 若对任意的 $x \in A$, 存在 $a_i, a_j \in B (i \neq j)$, 使得 $x = \lambda_1 a_i + \lambda_2 a_j (\lambda_1, \lambda_2 \in \{-1, 0, 1\})$, 则称 B 为 A 的一个基集. 若 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, 则其基集 B 的元素个数的最小值是 _____.

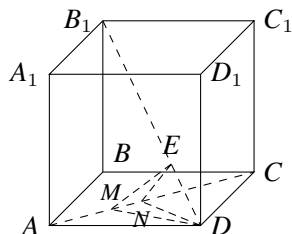
22. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 是线段 BD_1 上的动点, 当 $\triangle PAC$ 在平面 DC_1, BC_1, AC 上的正投影都为三角形时, 将它们的面积分别记为 S_1, S_2, S_3 .

- (1) 当 $BP = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, S_1 _____ S_2 (填 “>” 或 “=” 或 “<”);
 (2) $S_1 + S_2 + S_3$ 的最大值是_____.



23. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是对角线 B_1D 上的一点, M, N 为对角线 AC 上的两个动点, 且线段 MN 的长度为 1.

- (1) 当 N 为对角线 AC 的中点且 $DE = \sqrt{2}$ 时, 则三棱锥 $E - DMN$ 的体积是_____;
 (2) 当三棱锥 $E - DMN$ 的体积为 $\frac{1}{3}$ 时, 则 $DE =$ _____.



2 解答题

24. 已知动点 M 到点 $N(1,0)$ 和直线 $l: x = -1$ 的距离相等.

(1) 求动点 M 的轨迹 E 的方程;

(2) 已知不与 l 垂直的直线 l' 与曲线 E 有唯一公共点 A , 且与直线 l 的交点为 P , 以线段 AP 为直径的作圆 C . 判断点 N 和圆 C 的位置关系, 并证明你的结论.

25. 已知 $F_1(-1,0), F_2(1,0)$ 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1 (a > 0)$ 的左、右焦点.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若 A, B 分别在直线 $x = -2$ 和 $x = 2$ 上, 且 $AF_1 \perp BF_1$.

(i) 当 $\triangle ABF_1$ 为等腰三角形时, 求 $\triangle ABF_1$ 的面积;

(ii) 求点 F_1, F_2 到直线 AB 距离之和的最小值.

26. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短轴长为 $2\sqrt{3}$, 右焦点为 $F(1,0)$, 点 M 是椭圆 C 上异于左、右顶点 A, B 的一点.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若直线 AM 与直线 $x = 2$ 交于点 N , 线段 BN 的中点为 E . 证明: 点 B 关于直线 EF 的对称点在直线 MF 上.

27. 已知椭圆 $E: mx^2 + y^2 = 1 (m > 0)$.

(1) 若椭圆 E 的右焦点坐标为 $(\sqrt{3}, 0)$, 求 m 的值;

(2) 由椭圆 E 上不同三点构成的三角形称为椭圆的内接三角形. 若以 $B(0, 1)$ 为直角顶点的椭圆 E 的内接等腰直角三角形恰有三个, 求 m 的取值范围.

28. 已知椭圆 E 的右焦点与抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点重合, 点 $M\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 在椭圆 E 上.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 设 $P(-4, 0)$, 直线 $y = kx + 1$ 与椭圆 E 交于 A, B 两点, 若直线 PA, PB 均与圆 $x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 相切, 求 k 的值.

29. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 点 $P(4, 0)$, 过右焦点 F 作与 y 轴不垂直的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 求证: 以坐标原点 O 为圆心与直线 PA 相切的圆, 必与直线 PB 相切.

30. 已知椭圆 $W: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的上下顶点分别为 A, B , 且点 $B(0, -1)$. F_1, F_2 分别为椭圆 W 的左、右焦点, 且 $\angle F_1BF_2 = 120^\circ$.

(1) 求椭圆 W 的方程;

(2) 点 M 是椭圆上异于 A, B 的任意一点, 过点 M 作 $MN \perp y$ 轴于 N , E 为线段 MN 的中点. 直线 AE 与直线 $y = -1$ 交于点 C , G 为线段 BC 的中点, O 为坐标原点, 求 $\angle OEG$ 的大小.

31. 已知椭圆 $W: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一个焦点坐标为 $(\sqrt{3}, 0)$.

(1) 求椭圆 W 的方程和离心率;

(2) 若椭圆 W 与 y 轴交于 A, B 两点 (A 点在 B 点上方), M 是椭圆上异于 A, B 的任意一点, 过点 M 作 $MN \perp y$ 轴于点 N , E 为线段 MN 的中点. 直线 AE 与直线 $y = -1$ 交于点 C , G 为线段 BC 的中点, O 为坐标原点, 求 $\angle OEG$ 的大小.

32. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 C 的顶点是原点, 以 x 轴为对称轴, 且经过点 $P(1, 2)$.

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 设点 A, B 在抛物线 C 上, 直线 PA, PB 分别与 y 轴交于点 M, N , $|PM| = |PN|$. 求直线 AB 的斜率.

33. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $0 < a < \frac{5}{2}$ 时, 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ 上的最大值.

34. 已知函数 $f(x) = e^{ax} - x$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线 l 与直线 $x + 2y + 3 = 0$ 垂直, 求 a 的值;

(2) 当 $a \neq 1$ 时, 求证: 存在实数 x_0 使 $f(x_0) < 1$.

35. 设函数 $f(x) = (x^2 + ax - a)e^{-x} (a \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程;

(2) 设 $g(x) = x^2 - x - 1$, 若对任意的 $t \in [0, 2]$, 存在 $s \in [0, 2]$ 使得 $f(s) \geq g(t)$ 成立, 求 a 的取值范围.

36. 设函数 $f(x) = (x - a)e^x, a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 试求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 试求 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的最大值;

(3) 当 $a = 1$ 时, 求证: 对于 $\forall x \in [-5, +\infty), f(x) + x + 5 \geq -\frac{6}{e^5}$ 恒成立.

37. 已知函数 $f(x) = e^x - a \ln x - a$.

(1) 当 $a = e$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 证明: 对于 $\forall a \in (0, e), f(x)$ 在区间 $(\frac{a}{e}, 1)$ 上有极小值, 且极小值大于 0.

38. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{ax} (a > 0)$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若 $f(x) < \frac{1}{\sqrt{x}}$ 恒成立, 求 a 的取值范围;

(3) 证明: 总存在 x_0 , 使得当 $x \in (x_0, +\infty)$, 恒有 $f(x) < 1$.

39. 已知函数 $f(x) = e^x + x^2 - x$, $g(x) = x^2 + ax + b (a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求函数 $F(x) = f(x) - g(x)$ 的单调区间;

(2) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线 l 与曲线 $y = g(x)$ 切于点 $(1, c)$, 求 a, b, c 的值;

(3) 若 $f(x) > g(x)$ 恒成立, 求 $a + b$ 的最大值.

40. 已知函数 $f(x) = x \ln x$, $g(x) = \frac{a}{2}x^2 + x - a (a \in \mathbf{R})$.

(1) 若直线 $x = m (m > 0)$ 与曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 分别交于 M, N 两点. 设曲线 $y = f(x)$ 在点 M 处的切线为 l_1 , $y = g(x)$ 在点 N 处的切线为 l_2 .

(i) 当 $m = e$ 时, 若 $l_1 \perp l_2$, 求 a 的值;

(ii) 若 $l_1 \parallel l_2$, 求 a 的最大值;

(2) 设函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 在其定义域内恰有两个不同的极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$. 若 $\lambda > 0$, 且 $\lambda \ln x_2 - \lambda > 1 - \ln x_1$ 恒成立, 求 λ 的取值范围.

41. 已知函数 $f(x) = (x^2 + ax - a) \cdot e^{1-x}$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 求函数 $f'(x)$ 的零点个数;

(2) 证明: $a \geq 0$ 是函数 $f(x)$ 存在最小值的充分而不必要条件.