

平面向量

1. 已知向量 $\vec{a} = (1, m)$, $\vec{b} = (3, -2)$, 且 $(\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{b}$, 则 $m =$ ()
 (A) -8 (B) -6 (C) 6 (D) 8
2. 若向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 满足 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ 且 $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$, 则 $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) =$ ()
 (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 0
3. 若向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 满足: $|\mathbf{a}| = 1$, $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \perp \mathbf{a}$, $(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$, 则 $|\mathbf{b}| =$ ()
 (A) 2 (B) $\sqrt{2}$ (C) 1 (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
4. 已知两个非零向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 满足 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$, 则下面结论正确的是 ()
 (A) $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ (B) $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$
 (C) $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ (D) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$
5. 若向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 不共线, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \neq 0$, 且 $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}\right) \cdot \mathbf{b}$, 则向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{c} 的夹角为 ()
 (A) 0 (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$
6. 设向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{10}$, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{6}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ ()
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5
7. 已知 O, A, B 是平面上的三个点, 直线 AB 上有一点 C , 满足 $2\vec{AC} + \vec{CB} = \mathbf{0}$, 则 $\vec{OC} =$ ()
 (A) $2\vec{OA} - \vec{OB}$ (B) $-\vec{OA} + 2\vec{OB}$
 (C) $\frac{2}{3}\vec{OA} - \frac{1}{3}\vec{OB}$ (D) $-\frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OB}$
8. 设 D 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, $\vec{BC} = 3\vec{CD}$, 则 ()
 (A) $\vec{AD} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{4}{3}\vec{AC}$ (B) $\vec{AD} = \frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{4}{3}\vec{AC}$
 (C) $\vec{AD} = \frac{4}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$ (D) $\vec{AD} = \frac{4}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}$
9. 平面上 O, A, B 三点不共线, 设 $\vec{OA} = \mathbf{a}$, $\vec{OB} = \mathbf{b}$, 则 $\triangle OAB$ 的面积等于 ()
 (A) $\sqrt{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}$ (B) $\sqrt{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}$
 (C) $\frac{1}{2} \sqrt{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}$ (D) $\frac{1}{2} \sqrt{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}$
10. 已知 $\mathbf{a} = (\sqrt{3}, 1)$, 若将向量 $-2\mathbf{a}$ 绕坐标原点逆时针旋转 120° 得到向量 \mathbf{b} , 则 \mathbf{b} 的坐标为 ()
 (A) $(0, 4)$ (B) $(2\sqrt{3}, -2)$
 (C) $(-2\sqrt{3}, 2)$ (D) $(2, -2\sqrt{3})$
11. 设 \mathbf{m}, \mathbf{n} 是非零向量, 则“存在负数 λ , 使得 $\mathbf{m} = \lambda \mathbf{n}$ ”是“ $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} < 0$ ”的 ()
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

12. 设 \vec{a}, \vec{b} 是向量, 则 “ $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ” 是 “ $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ” 的 ()
- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
13. \vec{a}, \vec{b} 为非零向量, “ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ” 是 “函数 $f(x) = (x\vec{a} + \vec{b}) \cdot (x\vec{b} - \vec{a})$ 为一次函数” 的 ()
- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
14. 设 \vec{a}, \vec{b} 是非零向量, “ $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$ ” 是 “ $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ” 的 ()
- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
15. 设平面向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 均为非零向量, 则 “ $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$ ” 是 “ $\vec{b} = \vec{c}$ ” 的 ()
- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
16. 设 E, F 分别是正方形 $ABCD$ 的边 AB, BC 上的点, 且 $AE = \frac{1}{2}AB, BF = \frac{2}{3}BC$, 如果 $\vec{EF} = m\vec{AB} + n\vec{AC}$ (m, n 为实数), 那么 $m + n$ 的值为 ()
- (A) $-\frac{1}{2}$ (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1
17. 已知三角形 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的等边三角形, 点 D, E 分别是边 AB, BC 的中点, 连接 DE 并延长到点 F , 使得 $DE = 2EF$, 则 $\vec{AF} \cdot \vec{BC}$ 的值是 ()
- (A) $-\frac{5}{8}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{11}{8}$
18. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2, $\angle BAD = 120^\circ$, 点 E, F 分别在边 BC, DC 上, $BE = \lambda BC, DF = \mu DC$, 若 $\vec{AE} \cdot \vec{AF} = 1, \vec{CE} \cdot \vec{CF} = -\frac{2}{3}$, 则 $\lambda + \mu =$ ()
- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{7}{12}$
19. 已知 $\triangle ABC$ 和点 M 满足 $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$. 若存在实数 m 使得 $\vec{AB} + \vec{AC} = m\vec{AM}$ 成立, 则 $m =$ ()
- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
20. 已知 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, D 为 BC 边中点, 且 $2\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$. 那么 ()
- (A) $\vec{AO} = \vec{OD}$ (B) $\vec{AO} = 2\vec{OD}$ (C) $\vec{AO} = 3\vec{OD}$ (D) $2\vec{AO} = \vec{OD}$
21. 在平行四边形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 交于点 O , E 是线段 OD 的中点, AE 的延长线与 CD 交于点 F . 若 $\vec{AC} = \vec{a}, \vec{BD} = \vec{b}$, 则 $\vec{AF} =$ ()
- (A) $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ (B) $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$
(C) $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$ (D) $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$
22. 已知平面上三点 A, B, C 满足 $|\vec{AB}| = 6, |\vec{AC}| = 8, |\vec{BC}| = 10$, 则 $\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{CA} + \vec{CA} \cdot \vec{AB} =$ ()
- (A) 48 (B) -48 (C) 100 (D) -100

23. 已知 e_1, e_2 为平面上的单位向量, e_1 与 e_2 的起点均为坐标原点 O , e_1 与 e_2 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 平面区域 D

由所有满足 $\overrightarrow{OP} = \lambda e_1 + \mu e_2$ 的点 P 组成, 其中 $\begin{cases} \lambda + \mu \leq 1, \\ \lambda \geq 0, \\ \mu \geq 0. \end{cases}$ 那么平面区域 D 的面积为 ()

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\sqrt{3}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

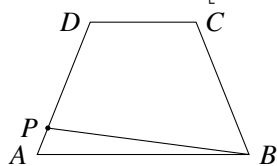
24. 如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB = 8, BC = 4, CD = 4$, 点 P 在线段 AD 上运动, 则 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}|$ 的取值范围是 ()

(A) $[6, 4 + 4\sqrt{3}]$

(B) $[4\sqrt{2}, 8]$

(C) $[4\sqrt{3}, 8]$

(D) $[6, 12]$



25. 已知向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}| = 1, \vec{b} = (2, 1)$, 且 $\lambda \vec{a} + \vec{b} = \mathbf{0} (\lambda \in \mathbf{R})$, 则 $|\lambda| =$ _____.

26. 已知 A, B, C 是圆 O 上的三点, 若 $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, 则 \overrightarrow{AB} 与 \overrightarrow{AC} 的夹角为_____.

27. 已知两个单位向量 \vec{a}, \vec{b} 的夹角为 60° , $\vec{c} = t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$, 若 $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$, 则 $t =$ _____.

28. 平面向量 $\mathbf{a} = (1, 2), \mathbf{b} = (4, 2), \mathbf{c} = m\mathbf{a} + \mathbf{b} (m \in \mathbf{R})$ 且 \mathbf{c} 与 \mathbf{a} 的夹角等于 \mathbf{c} 与 \mathbf{b} 的夹角, 则 $m =$ _____.

29. 已知点 P 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上, 点 A 的坐标为 $(-2, 0)$, O 为原点, 则 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AP}$ 的最大值为_____.

30. 已知单位向量 e_1 与 e_2 的夹角为 α , 且 $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, 向量 $\mathbf{a} = 3e_1 - 2e_2$ 与 $\mathbf{b} = 3e_1 - e_2$ 的夹角为 β , 则 $\cos \beta =$ _____.

31. 在三角形 $\triangle ABC$ 中, 点 M, N 满足 $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC}$. 若 $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 则 $x =$ _____; $y =$ _____.

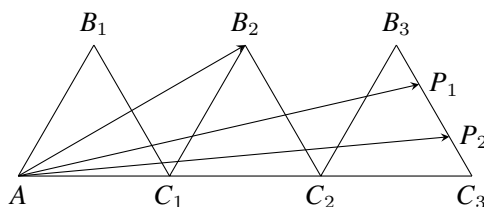
32. 已知点 $A(1, -1), B(3, 0), C(2, 1)$. 若平面区域 D 由所有满足 $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} (1 \leq \lambda \leq 2, 0 \leq \mu \leq 1)$ 的点 P 组成, 则 D 的面积为_____.

33. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 点 E 是 AB 边上的动点, 则 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CB}$ 的值为_____; $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC}$ 的最大值为_____.

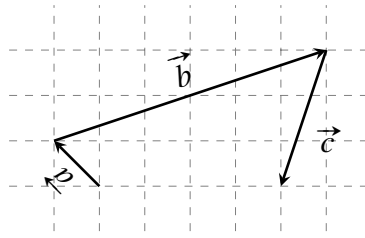
34. 已知 M 为 $\triangle ABC$ 所在平面内的一点, 且 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$. 若点 M 在 $\triangle ABC$ 内部 (不含边界), 则实数 n 的取值范围是_____.

35. 已知向量序列: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n, \dots$ 满足如下条件: $|\mathbf{a}_1| = 4, |\mathbf{d}| = 2, 2\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{d} = -1$ 且 $\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_{n-1} = \mathbf{d} (n = 3, 4, \dots)$. 若 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_k = 0$, 则 $k =$ _____; $|\mathbf{a}_1|, |\mathbf{a}_2|, |\mathbf{a}_3|, \dots, |\mathbf{a}_n|, \dots$ 中第_____项最小.

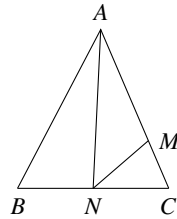
36. 如图, $\triangle AB_1C_1, \triangle C_1B_2C_2, \triangle C_2B_3C_3$ 是三个边长为 2 的等边三角形, 且有一条边在同一直线上, 边 B_3C_3 上有两个不同的点 P_1, P_2 , 则 $\overrightarrow{AB_2} \cdot (\overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_2}) =$ _____.



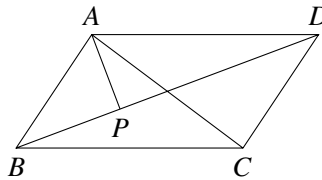
37. 向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 在正方形网格中的位置如图所示, 若 $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$), 则 $\frac{\lambda}{\mu} =$ _____.



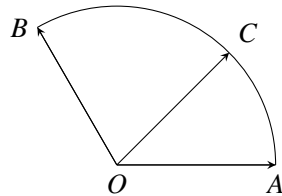
38. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 M, N 满足 $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC}$. 若 $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 则 $x =$ _____;
 $y =$ _____.



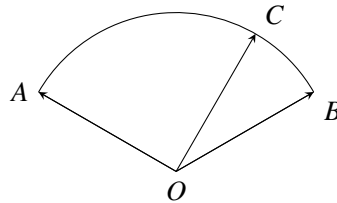
39. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AP \perp BD$, 垂足为 P , 且 $AP = 3$, 则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} =$ _____.



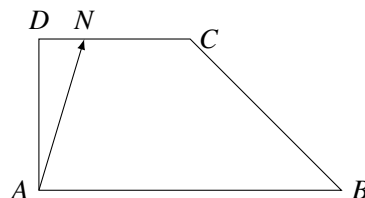
40. 给定两个长度为 1 的平面向量 \overrightarrow{OA} 和 \overrightarrow{OB} , 它们的夹角为 120° . 如图所示, 点 C 在以 O 为圆心的圆弧 \widehat{AB} 上变动, 若 $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$, 其中 $x, y \in \mathbf{R}$, 则 $x + y$ 的最大值是_____.



41. 如图, 半径为 $\sqrt{3}$ 的扇形 AOB 的圆心角为 120° , 点 C 在弧 AB 上, 且 $\angle COB = 30^\circ$. 若 $\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$, 则 $\lambda + \mu =$ _____.



42. 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $AD \perp AB$, $AD = DC = \frac{1}{2}AB = 2$. 点 N 是 CD 边上的一动点, 则 $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的最大值为_____.



43. 如图，在直角梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$, $AB \perp BC$, $AB = 2$, $CD = 1$, $BC = a$ ($a > 0$), P 为线段 AD 上一个动点，设 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = y$, 对于函数 $y = f(x)$, 给出以下三个结论：

- ① 当 $a = 2$ 时，函数 $f(x)$ 的值域为 $[1, 4]$;
- ② $\forall a \in (0, +\infty)$, 都有 $f(1) = 1$ 成立;
- ③ $\forall a \in (0, +\infty)$, 函数 $f(x)$ 的最大值都等于 4.

其中所有正确结论的序号是_____.

