北京高考分项练习——圆锥曲线

1. (2018 理) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ 经过点 $P(1,2)$. 过点 $Q(0,1)$ 的直线 l 与抛物线 C 有两个不同的交点 A, B，且直线 PA 交 y 轴于 M，直线 PB 交 y 轴于 N.

   (1) 求直线 l 的斜率的取值范围;

   (2) 设 O 为原点，$\overrightarrow{QM} = \lambda\overrightarrow{QO}$, $\overrightarrow{QN} = \mu\overrightarrow{QO}$，求证：$\dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\mu}$ 为定值.

2. (2018 文) 已知椭圆 $M: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b > 0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，焦距为 $2\sqrt{2}$. 斜率为 k 的直线 l 与椭圆 M 有两个不同的交点 A, B.

   (1) 求椭圆 M 的方程;

   (2) 若 $k = 1$，求 $|AB|$ 的最大值;

   (3) 设 $P(-2,0)$. 直线 PA 与椭圆 M 的另一个交点为 C，直线 PB 与椭圆 M 的另一个交点为 D，若 C, D 和点 $Q\left(-\dfrac{7}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$ 共线，求 k.

3. (2017 理) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ 过点 $P(1,1)$，过点 $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ 作直线 l 与抛物线 C 交于不同的两点 M, N，过点 M 作 x 轴的垂线分别与直线 OP, ON 交于点 A, B，其中 O 为原点.

(1) 求抛物线 C 的方程，并求其焦点坐标和准线方程；

(2) 求证：A 为线段 BM 的中点.

4. (2017 文) 已知椭圆 C 的两个顶点分别为 $A(-2,0), B(2,0)$. 焦点在 x 轴上，离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 点 D 为 x 轴上一点，过 D 作 x 轴的垂线交椭圆 C 于不同的两点 M, N，过 D 作 AM 的垂线交 BN 于点 E. 求证：$\triangle BDE$ 与 $\triangle BDN$ 的面积之比为 $4:5$.

5. (2016 理) 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$A(a,0)$, $B(0,b)$, $O(0,0)$, $\triangle OAB$ 的面积为 1.

(1) 求椭圆的方程；

(2) 设 P 是椭圆 C 上一点，直线 PA 与 y 轴交与点 M，直线 PB 与 x 轴交与点 N, 求证：$|AN|\cdot|BM|$ 为定值.

6. (2016 文) 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $A(2,0)$,$B(0,1)$ 两点.

(1) 求椭圆 C 的方程及离心率；

(2) 设 P 为第三象限内一点且在椭圆 C 上，直线 PA 与 y 轴交于点 M，直线 PB 与 x 轴交于点 N，求证：四边形 $ABNM$ 的面积为定值.

7. (2015 理) 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，点 $P(0,1)$ 和点 $A(m,n)(m\neq 0)$ 都在椭圆 C 上，直线 PA 交 x 轴于点 M.

(1) 求椭圆 C 的方程，并求点 M 的坐标 (用 m,n 表示)；

(2) 设 O 为原点，点 B 与点 A 关于 x 轴对称，直线 PB 交 x 轴于点 N. 问：y 轴上是否存在点 Q，使得 $\angle OQM=\angle ONQ$? 若存在，求点 Q 的坐标；若不存在，说明理由.

8. (2015 文) 已知椭圆 C：$x^2+3y^2=3$，过点 $D(1,0)$ 且不过点 $E(2,1)$ 的直线与椭圆 C 交于 A，B 两点，直线 AE 与直线 $x=3$ 交于点 M.

(1) 求椭圆 C 的离心率；

(2) 若 AB 垂直于 x 轴，求直线 BM 的斜率；

(3) 试判断直线 BM 与直线 DE 的位置关系，并说明理由

9. (2014 理) 已知椭圆 C:$x^2+2y^2=4$.

(1) 求椭圆 C 的离心率；

(2) 设 O 为原点，若点 A 在椭圆 C 上，点 B 在直线 $y=2$ 上，且 $OA\perp OB$，求直线 AB 与圆 $x^2+y^2=2$ 的位置关系，并证明你的结论.

10. (2014 文) 已知椭圆 C:$x^2+2y^2=4$.

(1) 求椭圆 C 的离心率；

(2) 设 O 为原点，若点 A 在直线 $y=2$ 上，点 B 在椭圆 C 上，且 $OA\perp OB$，求线段 AB 长度的最小值.

11. (2013 理) 已知 A、B、C 是椭圆 W:$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上的三个点，O 是坐标原点.

(1) 当点 B 是 W 的右顶点，且四边形 $OABC$ 为菱形时，求此菱形的面积；

(2) 当点 B 不是 W 的顶点时，判断四边形 $OABC$ 是否可能为菱形，并说明理由.

12. (2013 文) 直线 $y=kx+m\ (m\neq 0)$ 与椭圆 W:$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 相交于 A，C 两点，O 是坐标原点.

(1) 当点 B 的坐标为 $(0,1)$，且四边形 $OABC$ 为菱形时，求 AC 的长；

(2) 当点 B 在 W 上且不是 W 的顶点时，证明四边形 $OABC$ 不可能为菱形.

13. (2012 理) 已知曲线 C：$(5-m)x^2+(m-2)y^2=8\ (m\in\mathrm{R})$.

(1) 若曲线 C 是焦点在 x 轴上的椭圆，求 m 的取值范围；

(2) 设 $m=4$，曲线 C 与 y 轴的交点为 A，B(点 A 位于点 B 的上方)，直线 $y=kx+4$ 与曲线 C 交于不同的两个点 M, N，直线 $y=1$ 与直线 BM 交于点 G，求证：A，G，N 三点共线.

14. (2012 文) 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点为 $A(2,0)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，直线 $y=k(x-1)$ 与椭圆 C 交于不同的两点 M，N.

(1) 求椭圆 C 的方程

(2) 当 $\triangle AMN$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ 时，求 k 的值.

15. (2011 理) 已知椭圆 G：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. 过点 $(m,0)$ 作圆 $x^2+y^2=1$ 的切线 I 交椭圆 G 于 A，B 两点.

(1) 求椭圆 G 的焦点坐标和离心率；

(2) 将 $|AB|$ 表示为 m 的函数，并求 $|AB|$ 的最大值.

16. (2011 文) 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，右焦点为 $(2\sqrt{2},0)$，斜率为 1 的直线 l 与椭圆 G 交于 A，B 两点，以 AB 为底边作等腰三角形，顶点为 $P(-3,2)$.

(1) 求椭圆 G 的方程；

(2) 求 $\triangle PAB$ 的面积.

17. (2010 理) 在平面直角坐标系 xOy 中，点 B 与点 $A(-1,1)$ 关于原点 O 对称，P 是动点，且直线 AP 与 BP 的斜率之积等于 $-\dfrac{1}{3}$.

(1) 求动点 P 的轨迹方程；

(2) 设直线 AP 和 BP 分别与直线 $x=3$ 交于点 M,N，问：是否存在点 P 使得 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PMN$ 的面积相等？若存在，求出 P 的坐标；若不存在，说明理由.

18. (2010 文) 已知椭圆 C 的左、右焦点分别是 $(-\sqrt{2},0),(\sqrt{2},0)$，离心率是 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，直线 $y=t$ 与椭圆 C 交于不同的两点 M、N，以线段 MN 为直径做圆 P，圆心为 P.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 若圆 P 与 x 轴相切，求圆心 P 的坐标；

(3) 设 $Q(x,y)$ 是圆 P 上的动点，当 t 变化时，求 y 的最大值.

19. 设 F_1, F_2 分别是椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点，M 是 C 上一点且 MF_2 与 x 轴垂直，直线 MF_1 与 C 的另一个交点为 N.

(1) 若直线 MN 的斜率为 $\dfrac{3}{4}$，求 C 的离心率；

(2) 若直线 MN 在 y 轴上的截距为 2，且 $|MN|=5|F_1N|$，求 a, b.

20. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，点 $(2, \sqrt{2})$ 在 C 上.

(1) 求 C 的方程；

(2) 直线 l 不经过原点 O，且不平行于坐标轴，l 与 C 有两个交点 A, B，线段 AB 中点为 M，证明：直线 OM 的斜率与直线 l 的斜率乘积为定值.

21. 已知椭圆 C：$9x^2+y^2=m^2\ (m>0)$，直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴，l 与 C 有两个交点 A,B，线段 AB 的中点为 M.

(1) 证明：直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值；

(2) 若 l 过点 $\left(\frac{m}{3},m\right)$，延长线段 OM 与 C 交于点 P，四边形 $OAPB$ 能否为平行四边形？若能，求此时 l 的斜率；若不能，说明理由

22. 在平面直角坐标系 xOy 中，过椭圆 M：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的右焦点的直线 $x+y-\sqrt{3}=0$ 交 M 于 A,B 两点，P 为 AB 的中点，且 OP 的斜率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求 M 的方程；

(2) C,D 为 M 上的两点，若四边形 $ABCD$ 的对角线 $CD\perp AB$，求四边形 $ABCD$ 面积的最大值.

23. 已知圆 $M:(x+1)^2+y^2=1$，圆 $N:(x-1)^2+y^2=9$，动圆 P 与圆 M 外切并与圆 N 内切，圆心 P 的轨迹为曲线 C.

(1) 求 C 的方程；

(2) l 是与圆 P，圆 M 都相切的一条直线，l 与曲线 C 交于 A,B 两点，当圆 P 的半径最长时，求 $|AB|$.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(0,-1)$，B 点在直 $y=-3$ 上，M 点满足 $\overrightarrow{MB}\parallel\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{BA}$，$M$ 点的轨迹为曲线 C.

(1) 求 C 的方程；

(2) P 为 C 上动点，l 为 C 在 P 点处的切线，求 O 点到 l 距离的最小值.

25. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的一个焦点为 $(\sqrt{5},0)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 若动点 $P(x_0,y_0)$ 为椭圆外一点，且点 P 到椭圆 C 的两条切线相互垂直，求点 P 的轨迹方程.

26. 如图所示，在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$. 斜率为 $k(k>0)$ 且不过原点的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点，线段 AB 的中点为 E，射线 OE 交椭圆于点 G，交直线 $x=-3$ 于点 $D(-3,m)$，若 $|OG|^2=|OD|\cdot|OE|$，求证：直线 l 过定点.