求和符号使用方法

Eureka

2023 年 7 月 1 日

Introduce

Mathematicians just love sigma notation for two reasons. First, it provides a convenient way to express a long or even infinite series. But even more important, it looks really cool and scary, which frightens nonmathematicians into revering mathematicians and paying them more money.

—Calculus II for Dummies

目录

1 前言

常见的求和符号的出处或者说是形式，主要有如下三个:

- 纯粹的代数求和表达式，形如 $\sum_n \frac{1}{n(n+1)}$，通常在 求和 & 求积中出现，
- 包含组合数的形式出现，常常含有 $\binom{n}{k}$, 通常在组合求和中出现
- 和数论中的乘性函数 φ, μ 等结合出现，形如 $\sum_{d|n}$ 等，通常在乘法数论中出现

尽管在表面上这三个形式不同，但是它们背后有着同样的核心思想: 交换求和

假设有一个二元函数 $f(a,b)$, 那么就有

$$\sum_{a\in A}\sum_{b\in B} f = \sum_{b\in B}\sum_{a\in A} f \tag{1}$$

这个看似显然的结果在超过一般的情况下都是十分具有创造性的，所以任何情况下你看到双重求和都应该考虑交换求和顺序。如果遇到单重的求和，考虑把它转化成双重求和，比如后面的生成函数。还有一些情况下，你应该考虑改变求和的变量（表达式）比如下面这几个例子:

$$\sum_{a\geq 0}\sum_{b\geq 0} f = \sum_{k\geq 0}\sum_{\substack{a,b \\ a+b=k}} f$$

$$\sum_{a\in A}\sum_{b\in B} a^2(b+1) = \sum_{a\in A} a^2\left(\sum_{b\in B}(b+1)\right) = \left(\sum_{a\in A} a^2\right)\cdot\left(\sum_{b\in B}(b+1)\right)$$

2 代数求解

2.1 伸缩 & 部分 求和

这个是最没有挑战和难度的求和，只要看到多项式分母（polynomial denominators）就可以考虑。下面是一个 Stanford 考试题目:

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}\frac{7n+32}{n(n+2)}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n &= \sum_{n\geq 1}\left(\frac{16}{n}-\frac{9}{n+2}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{16}{1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^1+\frac{16}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2-\frac{16}{n+1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-\frac{16}{n+2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n+2} \\ &= \frac{33}{2}\end{aligned}$$

2.2 交换求和顺序

下面是一个概率论中的例子：Let X and Y be random variables (不一定独立)，那么有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X+Y) &= \sum_{n\geq 0} nP(X+Y=n) = \sum_{n\geq 0}\sum_{a+b=n} nP(X=a,Y=b) \\ &= \sum_{a,b\geq 0}(a+b)nP(X=a,Y=b) \\ &= \sum_{a\geq 0}\sum_{b\geq 0} aP(X=a,Y=b) + \sum_{a\geq 0}\sum_{b\geq 0} bP(X=a,Y=b) \\ &= \sum_{a\geq 0} aP(X=a) + \sum_{b\geq 0} bP(Y=b) \\ &= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(b)\end{aligned}$$

下面我们来看一个在数论中关于整除的求和式子，实际上这个引理我们还会在后面用到。

Let $n \geq 1$ be an Integer, 那么

$$\sum_{d\mid n} \varphi(d) = n \tag{2}$$

注意：其中 φ 满足 $\varphi * 1 = \mathrm{id}$

又一个使用交换求和的例子, 设 n 是一个整数，证明：

$$\sum_{k\geq 1} \varphi(k)\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor = \frac{1}{2}n(n+1)$$

2.3 Fourier 有限和

一个经典的例子就是计算

$$\sum_{k\geq 1} \binom{1000}{2k}$$

求解思路：注意到 $\dfrac{1^n+(-1)^n}{2} = \begin{cases} 1, & n\text{是偶数} \\ 0, & n\text{是奇数}\end{cases}$ 于是我们有：

$$\begin{aligned}&\sum_{k\geq 1}\binom{1000}{2k} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0}\binom{1000}{n} + \sum_{n\geq 0}\binom{1000}{n}\times(-1)^n\right) \\ &= (1+1)^{1000} + (1-1)^{1000} \\ &= 2^{999}\end{aligned}$$