Abel和Dirichlet

- Abel和Dirichlet
  - 瑕积分 — $I=\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$
    - $Abel$ 判别法: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛， $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界
    - $Dirichlet$ 判别法: $F(\eta)=\int_a^{\eta} f(x)dx$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界， $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调趋于 0
  - 任意项级数散敛性 — $I=\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$
    - $Abel$ 判别法: a_n 单调有界, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛
    - $Dirichlet$ 判别法: a_n 单调趋于 0, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 有界
  - 函数项级数一致收敛性 — $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x), x\in D$
    - $Abel$ 判别法
      - 1. 函数序列 $\{a_n(x)\}$ 对每一固定的 $x\in D$ 关于 n 是单调的，且 a_n 在 D 上一致有界:即 $|a_n(x)|\le M, x\in D, n\in N^+$
      - 2. 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 在 D 上一致收敛
    - $Dirichlet$ 判别法
      - 1. 函数序列 $\{a_n(x)\}$ 对每一固定的 $x\in D$ 关于 n 是单调的，且 a_n 在 D 上一致收敛于 0
      - 2. 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 在 D 上一致有界
    - 区别
      - 1.多了一个固定的x
      - 2.有界，收敛前边加了个一致
  - $Dini$ 定理 — 前提： $\{S_n(x)\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上 点态 收敛于 $S(x)$
    - (1) $S_n(x)(n=1,2,\cdots,n)$ 在 $[a,b]$ 上连续
      (2) $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续
      (3) $\forall x\in[a,b], S_n(x)$ 关于 n 单调 (换做级数就是正负项级数的情况)
    - 则 $S_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$
  - 二者的联系：满足Abel条件时，用迪利克雷判别法进行判断 — 因为 a_n 单调有界，所以令 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$， 对于 $\sum_{i=1}^{\infty}[(a_n-a)b_n]$
    - $c_n=a_n-a$ 单调趋于 0
    - $\sum b_n$ 收敛，必定有界
      - 满足Dirichlet条件，此级数收敛
    - $\sum[(a_n-a)b_n]$ 收敛，又因为 $\sum[a(b_n)]$ 收敛，所以 $\sum a_n b_n$ 收敛