概率

- **概率**
  - 概率 $\mathbb{P}$ ：定义在 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{F}$ 上的一个一个非负的，规范的，可列可加的 集合 函数
- **随机变量**
  - 随机变量 ξ 或者是 $\xi(\omega)$ ：从事件空间 Ω （含有事件 ω ）到实数集 $\mathbb{R}$ 的一个函数
- **概率空间**
  - 概率空间是一个三元组 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$
    1. 由一系列结果构成的集合 Ω
    2. 在 Ω 的一组子集上定义的概率函数 $\mathbb{P}$
    3. 事件域 $\mathscr{F}$ ：这些子集构成了 $\sigma-$ 代数
- **概率密度函数 PDF (probability density function)**
  - 定义
    - **离散型随机变量的概率密度函数：** 设 X 是一个随机变量, 它定义在离散的结果空间 Ω 上 (Ω 是有限的或至多可数的). 那么 X 的**概率密度函数** (常记作 f_X) 就是 X 取某个特定值的概率：

      $$f_X(x) = \mathrm{Prob}(\omega \in \Omega: \ X(\omega) = x).$$

      注意, 有些教材用**概率质量函数**的说法, 而非概率密度函数. **概率密度函数的值总是大于或等于 0, 并且和始终为 1.**
  - 具体例子
    - 三枚硬币的正反面情况
      - 我们考虑更一般的情况, 它会给出关于累积分布函数的一般结论. 假设现在有 n 枚硬币, 每一枚硬币掷出正面的概率都是 p, 掷出反面的概率都是 $1-p$. 设 X 是一个随机变量, 等于正面出现的次数. 我们已经讨论过 X 的概率密度函数, 它就是

        $$f_X(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{如果 } k \in \{0, 1, \cdots, n\} \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$
    - 两枚骰子的和
      - $$\mathrm{Prob}(R = r) = \begin{cases} \dfrac{6-|r-7|}{36} & \text{若 } r \in \{2, 3, \cdots, 12\} \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$
  - 联系
    - **离散型随机变量的累积分布函数：** 设 X 是一个随机变量, 它定义在一个有限的或至多可数的离散结果空间 Ω 上. 回忆一下, X 的**概率密度函数** (常记作 f_X) 就是 X 取某个特定值的概率. **累积分布函数** (常记作 F_X) 则表示 X 不超过某个特定值的概率. 它们分别记作

      $$f_X(x) = \mathrm{Prob}(\omega \in \Omega: \ X(\omega) = x)$$
      $$F_X(x) = \mathrm{Prob}(\omega \in \Omega: \ X(\omega) \leqslant x).$$
- **累积分布函数 CDF (cumulative distribution func-tion)**
  - 定义：累积分布函数,又叫分布函数,是概率密度函数的积分
    - **连续型随机变量、概率密度函数和累积分布函数：** 设 X 是一个随机变量. 如果存在一个实值函数 f_X 满足
      (1) f_X 是一个分段连续函数
      (2) $f_X(x) \geqslant 0$
      (3) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\mathrm{d}t = 1$,
      那么 X 是一个**连续型随机变量**, f_X 是 X 的**概率密度函数**. 有时候, f_X 也被误称为**密度函数**.

      X 的**累积分布函数** $F_X(x)$ 就是 X 不大于 x 的概率：

      $$F_X(x) = \mathrm{Prob}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t.$$

      更一般地, 我们还可以考察定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续型随机变量. 这种一般情形要求我们理解多元函数可积的含义 (换句话说, 把一个分段连续的可积函数推广到多维情形是什么样的; 参见习题 8.6.4); 幸运的是, 在很多情况下, 密度函数都是连续且非负的, 并且其积分显然为 1.
  - 符号理解
    - 累积分布函数是把某个给定点之前的所有概率都加起来,这与积分非常相似,从而解释了我们采用符号 F 的原因
  - **累积分布函数法**
    - CDF 是一种非常有用的工具, 使用CDF，我们能利用熟悉的随机变量来了解一个新的随机变量
- **中心极限定理**
  - 随着骰子数量的增加, 这些计算概率公式会变得非常复杂. 幸运的是, 在很多问题中, 我们不需要知道每个结果的确切概率, 只要了解某个特定范围内结果的概率就行了.

    —— 中心极限定理