一致收敛的性质

- 一致收敛的性质
  - 连续性
    - 判定条件： 函数序列 $\{S_n(x)\}$ 的每一项 $S_n(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续，且在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 那么 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。
    - $\lim\limits_{x\to x_0} S(x) = S(x_0)$
      - $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$
      - $S(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0)$ — $S(x_0)$ 一定存在 — 默认不可以这样表示：因为这就是我们要证明的，但前一种表述就是可行的 — $\lim\limits_{x\to x_0} S(x)$
        - 比如 $S_n(x) = x^n$, 则可知 $S(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$
        - 例如： $0.9^1, 0.9^2, \cdots, 0.9^n$, 此时 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} 0.9^n = 0$
        - 但是 $\lim\limits_{x\to 1} S(x) = DNE$
      - $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0} S_n(x_0)$
        - 序列：换序
        - 级数：整体-拆开
  - 逐项积分
    - 判定条件： 设函数序列 $\{S_n(x)\}$ 的每一项 $S_n(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续，且在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 那么 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。
    - $\int_a^b S(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx$
      - $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$
      - $\int_a^b S_n(x)dx$ 一定存在, 故取极限 $\lim\limits_{n\to\infty}$ 后也存在（条件较好的时候）
        - 如 $S_n(x) = \begin{cases} 1 & 当\ x.n!\ 为整数 \\ 0 & 当\ x\ 为其他值 \end{cases}$
        - 显然 $S_n(x)$ 可积，但是 $S(x)$ 就是 $Dirichlet$ 函数，不可积
      - $\int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx$
        - 序列：换序
        - 级数：拆开-整体
    - 拓展:把原来的上界替换为变量 — 对任意固定的 $x_0 \in [a,b]$ ，函数序列 $\{\int_{x_0}^x S_n(t)dt\}$(或函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^x u_n(t)dt$) 在 $[a,b]$ 上 一致收敛于 $\int_{x_0}^x S(t)dt$
  - 逐项求导
    - 判定条件 $\begin{cases} S_n(x)(n=1,2,\cdots,n)\ 在\ [a,b]\ 上由连续的导函数 \\ \{S_n(x)\}\ 在\ [a,b]\ 上\ 点态\ 收敛于\ S(x) \\ \{S_n'(x)\}\ 在\ [a,b]\ 上\ 一致\ 收敛于\ \sigma(x) \end{cases}$
    - $\frac{d}{dx}S(x) = \sigma(x)$
      - $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$
      - $S'(x) = \sigma(x)$
      - $\frac{d}{dx}\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{d}{dx}S_n(x)$
        - 序列：换序
        - 级数：整体-拆开
  - 备注
    - 以上的三种性质都能够从区间上的内闭一致收敛能够推出一致收敛目标在开区间上性质
    - 以上的判定条件均为充分不必要条件
      - 也就是说 $S(x)$ 可导并且连续，那么 $S_n(x)$ 不一定一致收敛于 $S(x)$ — 如 $S_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$
      - $S(x)$ 可导，但是 $S_n(x)$ 不一定一致连续 — 如 $f_n(x) = \ln(1+n^2x^2)$
      - $Dini$ 定理 (弥补判定定理的必要条件) — 前提： $\{S_n(x)\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上 点态 收敛于 $S(x)$
        - (1)$S_n(x)(n=1,2,\cdots,n)$ 在 $[a,b]$ 上连续
(2)$S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续
(3)$\forall x\in[a,b], S_n(x)$ 关于 n 单调 (换做级数就是正负项级数的情况)
        - 则 $S_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$
    - 求解极限函数的时候x时固定的
  - 应用
    - 使用无穷级数构造处处连续，但是处处不可导的函数 — 略