线性变换与测度

04-15

1 题目

(题源[1]) 假定 T 是 $\mathbb{R}^d$ 上的线性变换，若 E 是 $\mathbb{R}^d$ 的可测子集，证明

1. $T(E)$ 可测
2. $m(T(E)) = \left|\det(T)\right| \cdot m(E)$

一些记号：

1. B 为方体

$$B = \left\{ x \in \prod_{i=1}^{d} (\alpha_i, \beta_i] \,\middle|\, \alpha_i \leq \beta_i \right\}$$

2. A 为一零测集，即 $m^*(A) = 0$

[1]题目来源：Stein 实分析 P32 习题 8

2 解法 1

定义一个映射 $T:\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$

Definition 0.1 引理 1

E 可测 $\Longleftrightarrow \exists \{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 1}$ 与 A，使

$$E = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} \mathcal{F}_n \bigcup A \tag{1}$$

其中 $\mathcal{F}_n$ 是闭集，A 是零测度集

Definition 0.2 引理 2

先假设以下的这个引理成立

$$\begin{aligned} A \subset B &\Longrightarrow T(A) \subset T(B) \\ T(A \cup B) &= T(A) \cup T(B) \end{aligned} \tag{2}$$

2.1 引理证明

E 可测，则可以知道 $\forall A > 0, \exists$ 闭集 $\mathcal{F}$, 使得 $m^*(E - F) < \varepsilon$，$F \in E$ 。我们可以知道: $\exists \mathcal{F}_n$ 使得 $m^*(E - \mathcal{F}_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$，令 $F = \cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n$, 则 $m^*(E - F) = m^*(E - \cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n) \leq \varepsilon$. 记 $A = E - F$ 即可。

另一方面：若 $E = \cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n \bigcup A$, 显然 E 可测。□

(1) 证明

根据引理 (1) 可知，$\exists$ 紧集列 $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 1}$ 与零测集 A，使 $E = \cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n \bigcup A$, 那么就有

$$T(E) = \cup_{n=1}^{\infty} T(\mathcal{F}_n) \bigcup T(A) \tag{3}$$

此时显然可以知道 $T(E)$ 可测。

(2) 证明

$\forall \varepsilon > 0, \exists \{C_n\}_{n\geq 1} \supset E$, 根据外侧度的次可加性有：

$$\begin{aligned} m^*(E) + \frac{\varepsilon}{\left|\det T\right|} &\geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(C_n) \\ \Longrightarrow \left|\det T\right| \cdot m^*(E) + \varepsilon &\geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(T(C_n)) \\ \overset{\varepsilon\to 0}{\Longrightarrow} \left|\det T\right| \cdot m^*(E) &\geq m^*(T(E)) \end{aligned}$$

对于零测集 A，则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \{C_n\}_{n\geq 1}$，$C_n \in B$, 有如下限制

$$\frac{\varepsilon}{\left|\det T\right|} \geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(C_n) \Longrightarrow \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\det T\right| \cdot m^*(C_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(T(C_n)) \geq m^*(T(A))$$

使用 T 的逆变换 T^{-1} ，自然就可以得到反向的不等式

$$\left|\det T^{-1}\right|\sum_{n=1}^{\infty} m^*(T(C_n)) \geq \cdot m^*(E)$$

于是就有

$$\left|\det T\right| \cdot m^*(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(T(C_n))$$

3 解法 2

(1) 证明

E 是一个紧集，则根据线性变换的连续性可以知道 $T(E)$ 也是一个紧集，于是根据紧集的性质，如下的关系成立:

$$E = \bigcup_{n=1}^{N} \mathcal{F}_n = \bigcup_{n=1}^{N}\left(\bigcup_{k=1}^{K} \mathcal{F}_{n,k}\right)$$

其中的 $\mathcal{F}_n$ 为紧集 (因为：紧集可以使用有限个开覆盖覆盖，我们自然可以找到这样的有限个紧集覆盖) 因为 E 可测，于是 R^d 中所有可测集构成一个 F_σ 集。应用线性变换后有：

$$\begin{aligned} T(E) &= \bigcup_{n=1}^{N}\left(\underbrace{\bigcup_{k=1}^{K} T\left(\mathcal{F}_{n,k}\right)}_{F_\sigma\text{集}}\right) \\ &= \bigcup_{n=1}^{N} \underbrace{T(\mathcal{F}_n)}_{F_\sigma\text{集}} \\ &\Longrightarrow T(E)\text{可测(因为可数个}F_\sigma\text{仍然为}F_\sigma\text{集)} \end{aligned}$$

(2) 证明

因为显然有 $\left|T(x)-T(x')\right| \leq \sqrt{d}ML$, 其中的 M 方体 B 的**直径**, 即 $M = \max_{x_i,x_j\in B}|x_i - x_j|$。所以线性变换 T 实际上进行了如下的操作：对 $\forall x \in B$

$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2, \cdots, x_d) &\xrightarrow{T} x' = (\delta_1 x_1, \delta_2 x_2, \cdots, \delta_d x_d) \\ &\subset x'' = (\sqrt{d}Mx_1, \sqrt{d}Mx_2, \cdots, \sqrt{d}Mx_d) \end{aligned}$$

于是根据第 (7) 题类似的论证可以知道有：

$$\left|\det T\right| m^*(E) \geq m^*(T(E))$$

仿照第一种证明方法，我们进行相应的逆变换即可得到反向的不等式，于是即有：

$$\left|\det T\right| \cdot m^*(E) = m^*(T(E))$$