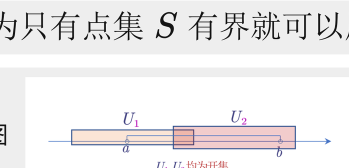
# 平面点集

**平面点集**：$S$ 为 $R^n$ 上的点集， $S$ 的补集 $R^n\backslash S$ 记作 $S^c$

- 点
  - 内点
    - 存在 $\vec{x}$ 的一个 $\delta$ 邻域 $O(\vec{x},\delta)$ 完全落在 $S$ 中
    - 全体的点记作： $intS$ 或 $S^o$
    - 内点 $\vec{x}$ 一定属于 $S$ ，因为邻域没有去心
  - 界点
    - 存在 $\vec{x}$ 的一个 $\delta$ 邻域 $O(\vec{x},\delta)$ 完全不落在 $S$ 中
    - 全体的点记作： $\partial S$
    - 理解：可以认为界点的定义不太精确，本来界点就是指边界上的点，但是由于定义的原因，界点包含了孤立点
    - 界点 $\vec{x}$ 可能属于 $S$ 或者是 $S^c$
  - 外点
    - $\vec{x}$ 不存在具有上述性质的一个 $\delta$ 邻域，即 $\vec{x}$ 的任何一个 $\delta$ 邻域中既包含属于 $S$ 的点，又包含不属于 $S$ 的点
    - 外点 $\vec{x}$ 一定不属于 $S$
  - 孤立点
    - 存在 $\vec{x}$ 的一个邻域 $O(\vec{x},\delta)$, 只有点 $\vec{x}\in S$
    - 直观理解:也就是说 $\vec{x}$ 是一个 孤零零 的点，没有邻居点
    - 所以孤立点一定是界点，即孤立点∈界点
    - 因为孤立点 $\vec{x}$ 存在一个邻域 $O(\vec{x},\delta)$, 在这个邻域里面， $\vec{x}\in S$, 但是 $\forall\vec{x'}\in S\setminus\vec{x}$, 均有 $\vec{x'}\notin S$
  - 聚点【极限点，累积点】
    - 定义
      - 定义 1 — $\vec{x}$ 的任意一个邻域都包含 $S$ 中无穷多个点
      - 定义 2 — $\vec{x}$ 任意邻域都至少包含 $S$ 中一个非 $\vec{x}$ 的点
    - 全体的点记作： $S^d$ 或 $S'$
    - 直观理解：也就是 $\vec{x}$ 附近是否 聚集 了很多属于 $S$ 的点
    - 内点一定是聚点，界点（非孤立点）一定是聚点
    - 有限集没有聚点
    - 一些例子
      - $E=\emptyset$
        1. 是闭集．因为 $E$ 没有聚点，所以它包含所有的极限点．
        2. 是开集．因为 $E$ 中没有点，所以它的所有点都是内点．
        3. 是完备集． $E$ 是闭集并且 $E$ 中没有点，所以它的所有点都是聚点
      - $E=(-3,3]$
        1. 不是闭集． $E$ 的一个聚点 $-3$ 不包含在 $E$ 中，所以 $E$ 不是闭集
        2. 不是开集． $E$ 中的点 $3$ 不是内点
        3. 不是完备集． $E$ 不是闭集．
- 点集【在度量空间 $X$ 上】
  - 开集 — $S$ 中的每一个点都是它的内点，那么 $S$ 就是开集
  - 闭集
    - $S$ 包含了它的所有聚点，那么 $S$ 就叫做闭集
    - 聚点包含了界点 (非孤立点) 和内点
    - 两个定理
      - 度量空间 $X$ 的子集 $E$ 是开集当且仅当 $E$ 的补集 $E^c$ 是闭集
      - 度量空间 $X$ 的子集 $F$ 是闭集当且仅当 $F$ 的补集 $F^c$ 是开集
    - 开集的无限并与并集的无限交
      - 任意一组开集的并仍是开集． $\forall\alpha$ $G_\alpha$ 是开集$\Rightarrow\bigcup_\alpha G_\alpha$ 是开集
      - 任意一组闭集的交仍是闭集． $\forall\alpha$ $G_\alpha$ 是闭集$\Rightarrow\bigcap_\alpha G_\alpha$ 是闭集
    - 开集的有限交与并集的有限并
      - 任意有限个开集的并仍是开集．对于 $1\le i\le n$ $G_i$ 是开集$\Rightarrow\bigcap_i^n G_i$ 是开集
      - 任意有限个闭集的并仍是闭集．对于 $1\le i\le n$ $G_i$ 是闭集$\Rightarrow\bigcup_i^n G_i$ 是闭集
    - 注意事项：
      1. 前面的定理和推论为我们提供了一个将闭集和开集联系起来的好方法
      2. 但是始终记住，开集不是闭集的反义词因为集合可以既是开集又是闭集，也可以两者都不是
      3. 集合的大多数拓扑特征完全取决于该集合所在的度量空间．
         例如开区间 $(-3,3)$ 是 $R$ 中的开集，但在 $R^2$ 中它就不是开集了
         因为 $R^2$ 中的邻域是一个圆盘，并且任何圆盘都包含具有二维坐标的点，而这些点不属于一维开区间 $(-3,3)$
  - 相对开集
  - 相对闭集
  - 稠密集 — 定义
    - 设 $E$ 是度量空间 $X$ 的一个子集．如果 $X$ 的每一点均属于 $E$ 或是 $E$ 的聚点，那么 $E$ 在 $X$ 中是稠密的
    - 符号描述： $\forall x\in X, x\in E$ 或 $x$ 是 $E$ 的极限点，那么 $E\subset X$ 在 $X$ 中是稠密的
  - 完备集
    - 定 义 ： 如果度量空间中的一个子集是闭集并且它的所有点都是聚点，那么这个子集就是一个完备集
    - $\Longleftrightarrow$ 如果度量空间中的一个子集的极限点恰好是它的所有点，那么这个子集就是完备集．
  - 导集
    - $S$ 的全体聚点的集合
    - 记作： $S^d$ 或 $S'$
  - 闭包
    - $S$ 与它全体聚点的并集【恒为闭集】
    - 记作： $\overline{S}=S^d\cup S$
    - 因为聚点包含了界点（非孤立点）和内点，所以闭包就是增加了孤立点和边界点（因某些边界点不一定属于 $S$ ）
    - 理解：实际上就是'封闭'，把 $S$ 的所有和'额外的点'点都封闭在这个'闭集'里边。包含孤立点和可能不属于 $S$ 的界点
    - 性质
      - 对于度量空间 $X$ 的任意子集 $E$ ， $E=\overline{E}$ 当且仅当 $E$ 是闭集.
      - 闭包是每个闭超集的子集:设 $E$ 是度量空间 $X$ 的任意一个子集， $F\subset X$ 是任意一个闭集．如果 $E\subset F$ ，那么 $\overline{E}\subset F$
  - 紧集
    - 开覆盖
      - 如果 $R^n$ 中的一组开集 $\{U_\alpha\}$ 满足 $\bigcup_\alpha U_\alpha\supset S$, 那么称 $\{U_\alpha\}$ 为 $S$ 的一个开覆盖
      - 设 $E$ 是任意一个度量空间的子集，为每个 $p\in E$ 选择一个半径 $r_p$ （半径可以是不同的）．那么集族 $N_{r_p}(p)|p\in E$ 是 $E$ 的一个开覆盖
    - 紧集 — 如果 $S$ 的任何一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 中总存在一个有限的子覆盖，即存在 $\{U_\alpha\}$ 中的有限个开集 $\{U_{\alpha_i}\}_i^p$, 满足 $\bigcup_{i=1}^p U_{\alpha_i}\supset S$ ，那么称 $S$ 为紧集
    - $Heine-Borel$ 定理
      - 定义： $R^n$ 上的点集 $S$ 是紧集的充分必要条件是：它是有界闭集
      - 错误理解
        - 认为只有点集 $S$ 有界就可以用有限个的开集 $U_\alpha$ 去覆盖。
        - 如图 

        - 错误在理解有限，因为存在一个开覆盖 $\{G_n\}=\{(a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n})\}$. 但是这个开覆盖 $\{G_n\}$ 没有有限的子覆盖。
      - 实际上，任何包含有限多个点 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的集合 $K$ 都是紧集．为什么？对于任意开覆盖 $\{G_\alpha\}$，从中选取一个包含 $p_1$ 的集合 $G_{\alpha_1}\in\{G_\alpha\}$．按照同样的方法继续下去：对于每一个 $p_i\in K$，如果目前选取的集合都不包含 $p_i$，那就取一个包含 $p_i$ 的 $G_{\alpha_i}\in\{G_\alpha\}$．经过最多 $n$ 步之后，我们得到了一族有限多个开集 $\{G_{\alpha_1},G_{\alpha_2},\cdots,G_{\alpha_n}\}$，并且 $K$ 包含在它们的并集中．
  - 凸集
    - $\forall x_1,x_2\in S$, 有 $x=tx_1+(1-t)x_2\in S,(0\le t\le 1)$
    - 即线段 $x_1x_2$ 位于 $S$ 内
- 连通集，区域
  - 开域（区域）
    - 非空连通开集
    - 若集合 $S$ 具有连通性，即 $S$ 中的任意两点都可以用一条完全含于 $S$ 的有限折线连接
  - 闭域
    - 开区域的闭包
    - 开域 $\cup$ 边界
- 基本定理
  - 闭矩形套定理
  - $Cantor$ 闭区域套定理
  - 凝聚定理（ $Bolzano-Weierstrass$ 定理） — $R^n$ 中的有界点列一定有收敛子列（有界无限点集一定有聚点）
  - $Cauchy$ 原理 — 收敛点列$\Longleftrightarrow$基本点列
  - 紧性定理（ $Heine-Borel$ 定理） — $R^n$ 中的点集 $S$ 为紧集的充分必要条件是 $S$ 为有界闭集
  - 相互等价