魔方与群

Eureka

2023 年 6 月 12 日

1 历史进程

魔方的基本知识

- 1978 年 12 月 *Singmaster notation*(辛马斯) 发明魔方的转动符号系统。
- 初始状态：每一个面均为同色; 可还原状态：有限次操作可复原（**拧角块**）
- 旋转的方向问题：对着相应的面按照顺时针进行旋转
- 魔方的影响因素：**朝向**和**位置**

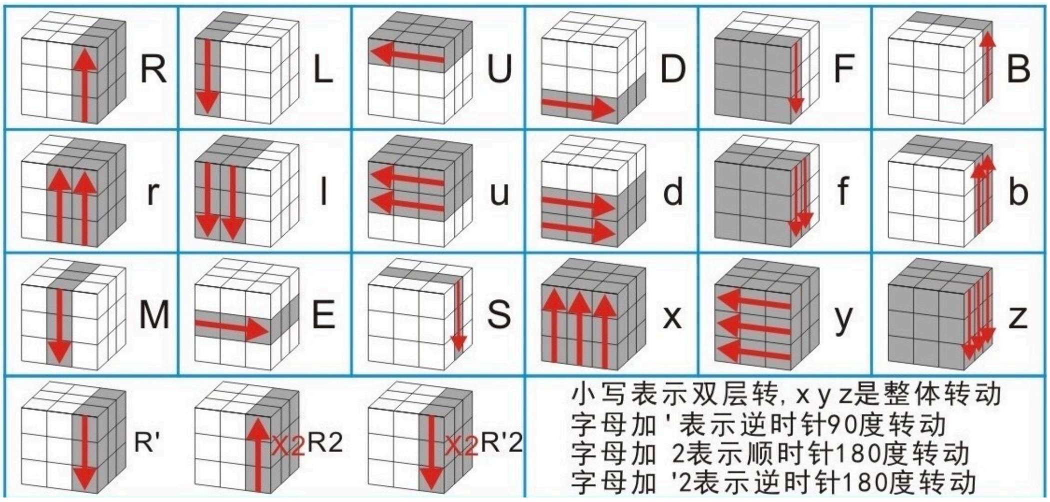

图 1: 转动符号系统说明

2 几个问题

(1) 魔方处于什么状态可以被还原?

(2) 魔方有多少种状态?

(3) **怎么定义魔方的数学结构**？$\longrightarrow$ 这样的数学结构有什么性质?

实际上魔方的**可还原状态**大概有 $8! \times 12! \times 2^{10} \times 3^7 \approx 4.3 \times 10^{19}$, 但是如果我们从不严谨的角度来看待这个问题，我们可以从如下的角度思考: 魔方的种类数计算公式, 12 个棱块，8 个角块; 每个棱块 2 个朝向，每一个角块 3 个朝向; 同时有一个限制 $\longrightarrow$ 个棱块, 角块是无法单独翻转 [6] 的, 于是计算公式如下

$$N = \frac{8! \times 12! \times 2^{12} \times 3^8}{12} = 43252003274489856000 \tag{1}$$

1. 如果不考虑朝向, 只考虑色块的位置，那么我们拧魔方的操作实际上是全体色块位置的一个**偶置换 [2]**
2. 色块朝向是一个 2(3) 阶循环群 $G_e =< g >, G_v =< g' >$

2.1 定理与定义

(魔方第一基本定理) 一个魔方的状态由以下的条件唯一确定:

- 每一个棱块的位置
- 每一个角块的位置
- 每一个棱块的朝向
- 每一个角块的朝向

看起来似乎就是一句废话 ~~~

下面就是一些规定：每一个棱色块的正方向为：魔方处于初始状态时这个位置棱块的正面色（自己选取，一般使用还原魔方的自然定义）的朝向.

下面我们为了方便，我们对魔方的全体棱块与角块进行排序 (随意排序均可)，从而确定每一个色块的方向是 G_e^{12}(全体 12 个棱块的朝向的所有情况) 或 G_v^8 的几个分量。

2.2 群定义

首先定义**魔方群** G, 其中的乘法 $x \circ y$ 定义为: 先进行 x 操作，然后再进行 y 操作, 我们称这个群 G 为魔方群 (Rubik's Group).

$$G = \langle R, L, F, B, U, D \rangle \tag{2}$$

定义群 H 为将魔方从初始状态变换到任意状态 (包括可还原和不可还原) 的全体, 其中的乘法 $x \circ y$ 定义为: 先进行 x 操作，然后再进行 y 操作.

令 $S_E(= S_{12})$ 表示棱块的位置变换全体, $S_v(= S_8)$ 表示角块的位置变换全体, 其中的乘法 $x \circ y$ 定义为: 先进行 x 操作，然后再进行 y 操作.

为了把 (操作) $g \in H$ 对色块的作用**提取**出来，于是我们建立以下的两个群同态.

$$\sigma : H \longrightarrow S_E \qquad \rho : H \longrightarrow S_v \tag{3}$$

σ 将魔方的变换 $g \in H$ 映射到这个变换对全体**棱块**的位置变换, 而 ρ 将对魔方的全体变换 $g \in H$ 映射到这个变换对全体**角块**的位置变换.

> 比如我做一个 R, 本质上对于 S_E 来说就是一个四轮换。

定义两个映射

$$\begin{aligned} w: H &\longrightarrow G_e^{12} & \qquad z: H &\longrightarrow G_v^{8} \\ g &\longmapsto w(g) & g &\longmapsto z(g) \end{aligned} \tag{4}$$

其中 $w(g)$ 的第 i 个分量表示初始状态下的第 i 个棱块在经过变换 g 后改变的方向, 也可以认为就是初始状态下位于第 i 个位置的棱块经过变换 g 后改变的方向。比如

g	$w(g)$
F	$\{1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0\}$

实际上这个就和群的外半直积比较相似了，可以用这个方向的思路来处理：如果有两个群 N 和 H，以及群同态 $\psi : H \longrightarrow Aut(N)$, 则定义 N 与 H 的外半直积 $N \rtimes H$ 成为一个群。

但是在这里我们采用的是**降群法** (Schreire-Sims-Minktwits) 来处理的。