$$ 问题一:

x^2 与 $x|x|$ 在 $C[-1,1]$ 是否线性相关?

解答: $c_1x^2+c_2x|x|=0$

在 $[0,1]$ 上 c_1=1, c_2=-1

在 $[-1,0]$ 上 c_1=1, c_2=1

所以它们在 $C[-1,1]$ 是线性相关的;

问题二:

$$R\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}=R\begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix}^T$$

矩阵的转置法则拓展:先整体转置, 再转置子矩阵

若有 $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, 则可知: $X^T=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}^T=\left(x_1^T,x_2^T,\ldots,x_m^T\right)^T$

问题三:

和式恒等变换

$$<1>\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}+2\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j$$

$$<2>\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_i-a_j\right)^2=n\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}-\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$$

$$<3>\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j$$

$$<4>\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_i\, a_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_i\, a_j\right)$$

$$<5>\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_i b_j+a_j b_i\right)$$

$$<6>\sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)=a_n-a_1$$

$$<7>\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_j=\sum_{i=1}^{n-1}(a_i-a_{i+1})\,B_i+a_n B_n$$

$$[\text{拓展}]\sum_{i=m}^{n} a_i\, b_j=\sum_{i=m}^{n-1}(a_i-a_{i+1})\,B_i+a_n B_n-a_m B_{m-1}$$

注：此式即为阿贝尔变换

$$<8>(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)\cdot(\sum_{i=1}^{n} b_i^2)=(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2+\sum_{1\le i<j\le n}(a_i b_j-a_j b_i)^2$$

注：此式即为Lagrange恒等式

证明：

首先说明一个式子的几何意义，这对下面的证明有帮助

$$\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j$$

它的几何意义如下：

$$\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij} = \begin{vmatrix} a_1a_2 & +a_1a_3 & & +a_1a_n \\ +a_2a_3 & \cdots & +a_2a_n & \\ \vdots & \cdots & & \\ +a_{n-1}a_n & & & \end{vmatrix}$$

注：（$n-1$）行，（$n-1$）列；

$$\text{不妨令A=}\begin{vmatrix} a_1a_1 & & & \cdots & \\ a_2a_1 & a_2a_2 & \cdots & & \\ \cdots & \cdots & a_3a_3 & & \\ a_{n-1}a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_na_{n-1} & a_na_n \end{vmatrix}$$

A旋转即可得到

那么$\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}$就是它的左下部分的旋转

<1>

证明：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$$

$=（a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n)^2$

$=a_1(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n)+a_2(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n)+\cdots+a_n(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n)$

$$=\begin{vmatrix} a_1a_1 & +a_1a_2 & +a_1a_3 & \cdots & +a_1a_n \\ +a_2a_1 & +a_2a_2 & \cdots & & \\ \cdots & \cdots & +a_3a_3 & & \\ +a_{n-1}a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \\ +a_na_1 & +a_na_2 & \cdots & +a_na_{n-1} & +a_na_n \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j$$

注：〈第i行为第i项〉

$<2>$

证明：

$$\sum_{1\le i<j\le n}^{n}(a_i-a_j)^2$$

$$=\sum_{1\le i<j\le n}^{n}(a_i^{\ 2}-2a_ia_j+a_j^{\ 2})$$

$$=[(a_1^{\ 2}-2a_1a_2+a_2^{\ 2})+\cdots+(a_1^{\ 2}-2a_1a_n+a_n^{\ 2})]$$

$$+[(a_2^{\ 2}-2a_2a_3+a_3^{\ 2})+\cdots+(a_2^{\ 2}-2a_2a_n+a_n^{\ 2})]$$

$$\cdots$$

$$+[(a_{n-1}^{\ 2}-2a_{n-1}\,a_n+a_n^{\ 2})]$$

$$=(n-1)\sum_{i=1}^{n}a_i^{\ 2}-2\left|\begin{array}{llll} a_1a_2 & +a_1a_3 & & +a_1a_n \\ +a_2a_3 & \cdots & +a_2a_n & \\ \vdots & \cdots & & \\ +a_{n-1}a_n & & & \end{array}\right|$$

$$=(n-1)\sum_{i=1}^{n}a_i^{\ 2}-2\sum_{1\le i<j\le n}^{n}a_ia_j$$

$$=n\sum_{i=1}^{n}a_i^{\ 2}-(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\ 2}+2\sum_{1\le i<j\le n}^{n}a_ia_j)$$

$$=n\sum_{i=1}^{n}a_i^{\ 2}-(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2\rightarrow$$由$\langle 1\rangle$易知

< 3 >

证明：

$$(\sum_{i=1}^{n}a_i)\times(\sum_{j=1}^{n}b_j)$$

$$=\begin{vmatrix} a_1b_1 & +a_1b_2 & +a_1b_3 & \cdots & +a_1b_n \\ +a_2b_1 & +a_2b_2 & \cdots & & \\ \cdots & \cdots & +a_3b_3 & & \\ +a_{n-1}b_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \\ +a_nb_1 & +a_nb_2 & \cdots & +a_nb_{n-1} & +a_nb_n \end{vmatrix}$$

$$=a_1\sum_{j=1}^{n}b_j+a_2\sum_{j=1}^{n}b_j+\cdots+a_n\sum_{j=1}^{n}b_j$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[a_i(\sum_{j=1}^{n}b_j)]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[(\sum_{j=1}^{n}a_ib_j)]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j\overset{i\leftrightarrow j}{=}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_jb_i$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_ib_j$$ <此式说明多重求和时可以改变求和次序>

<4>

证明：

$$\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j = \left| \begin{array}{lllll} a_1a_2 & +a_1a_3 & \cdots & & +a_1a_n \\ +a_2a_3 & a_2a_4 & \cdots & +a_2a_n & \\ +a_3a_4 & \cdots & +a_3a_n & & \\ \vdots & \iddots & & & \\ +a_{n-1}a_n & & & & \end{array} \right|$$

$$= a_1\sum_{j=1+1}^{n} a_j + a_2\sum_{j=2+1}^{n} a_j + \cdots + a_{n-1}\sum_{j=(n-1)+1}^{n} a_j \text{ <以前标为基准，i为前标>}$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}[a_i(\sum_{j=i+1}^{n} a_j)]$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}[(\sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j)]$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j$$

以45^o线为行有：<以斜标为基准，j为前标>

LHS

$$= \left| \begin{array}{lllll} a_1a_2 & & \cdots & & \\ +a_1a_3 & a_2a_3 & \cdots & & \\ +a_1a_4 & +a_2a_4 & +a_3a_4 & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ +a_1a_n & a_2a_n & \cdots & & +a_{n-1}a_n \end{array} \right|$$

$$=[a_1]a_2 + [a_1 + a_2]a_3 + \cdots + [a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}]a_n$$

$$= a_2\sum_{j=1}^{2-1} a_j + a_3\sum_{j=1}^{3-1} a_j + \cdots + a_n\sum_{j=1}^{n-1} a_j$$

$$=\sum_{i=2}^{n}[a_i(\sum_{j=1}^{i-1} a_j)]$$

$$=\sum_{i=2}^{n}[(\sum_{j=1}^{i-1} a_i a_j)]$$

$$=\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} a_i a_j \rightarrow \text{注：【先取定外面的i值再展开内层】}$$

若以后标为基准即有：

若将方阵变化一下即有：

LHS

$$= \left| \begin{array}{lllll} +a_1a_2 & +a_2a_3 & +a_3a_4 & \cdots & a_{n-1}a_n \\ +a_1a_3 & +a_2a_4 & \vdots & \iddots & \\ +a_1a_4 & \vdots & +a_3a_n & & \\ \vdots & +a_2a_n & & & \\ +a_1a_n & & & & \end{array} \right|$$

由对偶性知：

LHS

$$=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n} a_i a_j$$

综上：<i, j只是一个记号而已>

<5>

证明：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_jb_i\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_ib_j+a_jb_i\right)$$

<6>

证明：

$$\sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)$$

$$=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$$

$$=(a_n-a_{n-1})+\cdots+(a_3-a_2)+(a_2-a_1)$$

$$=a_n-a_1$$

注：

此式即为伸缩求和

<7>

阿贝尔恒等变换，如右图

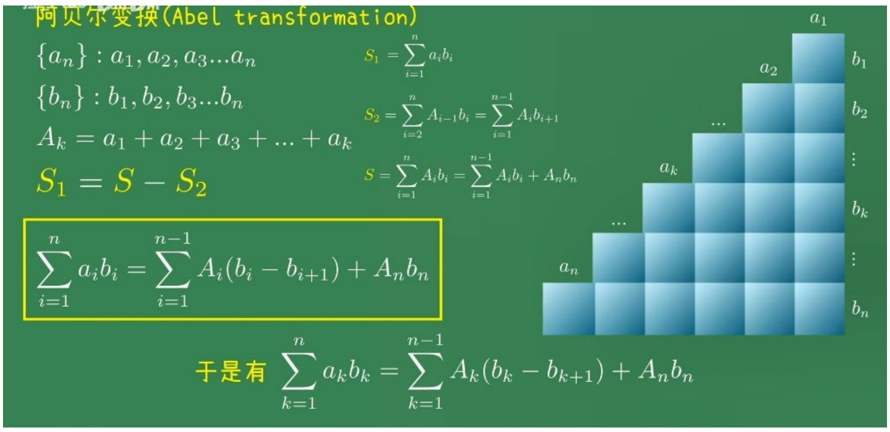
证法一：

注：

$$\sum_{i=2}^{n}A_{i-1}b_i=\sum_{i=1}^{n-1}A_ib_{i+1}$$

把所有的$i\to i+1$

但是$n\to n-1$



证法二：

$$\sum_{i=m}^{n} a_i b_i$$

$$=\sum_{i=m}^{n}[(A_i - A_{i-1})b_i]$$

$$=\sum_{i=m}^{n} A_i b_i - \sum_{i=m}^{n} A_{i-1} b_i$$

$$=(\sum_{i=m}^{n-1} A_i b_i + A_n b_n) - \sum_{i=m-1}^{n-1} A_i b_{i+1} \to \{\text{把}A_{i-1}\text{变为}A_i,\text{方便后边提取公因式}\}$$

$$=\sum_{i=m}^{n-1} A_i b_i + A_n b_n - (\sum_{i=m}^{n-1} A_i b_{i+1} + \mathrm{A}_{\mathrm{m}-1}\mathrm{b}_m) \to \{\text{把求和范围变为相同}\}$$

$$=\sum_{i=m}^{n-1}(A_i b_i - A_i b_{i+1}) + A_n b_n - \mathrm{A}_{\mathrm{m}-1}\mathrm{b}_m$$

$$=\sum_{i=m}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}) + A_n b_n - \mathrm{A}_{\mathrm{m}-1}\mathrm{b}_m$$

注：此式即为Abel分部求和

〈1〉若定义A_0=0，那么当$m=1$时即有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}) + A_n b_n$$

〈2〉若a_i不便于求和，那么便有

$$\sum_{i=m}^{n}(A_i - A_{i-1}) b_i = \sum_{i=m}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}) + A_n b_n - \mathrm{A}_{\mathrm{m}-1}\mathrm{b}_m$$

此式即为Abel和差变换

证法三：

设A_i为a_i的前n项和

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots + a_n b_n$$

$$= b_1(A_1 - A_0) + b_2(A_2 - A_1) + b_3(A_3 - A_2) + \cdots + b_n(A_{n-1} - A_n)$$

$$= (b_1 - b_2)A_1 + (b_2 - b_3)A_2 + (b_4 - b_3)A_3 + \cdots + (b_{n-1} - b_n)A_{n-1} + b_n A_n - b_1 A_0$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}) + b_n A_n$$

$<8>$

证明：

$$(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\ 2})(\sum_{i=1}^{n}b_i^{\ 2})-\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i^{\ 2}b_j^{\ 2}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_ia_jb_j$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i^{\ 2}b_j^{\ 2}-2a_ib_ia_jb_j+a_j^{\ 2}b_i^{\ 2})$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j-a_jb_i)^2$$

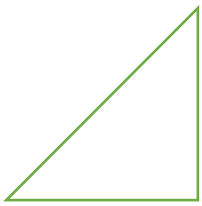
$$=\sum_{1\le i<j\le n}(a_ib_j-a_jb_i)^2$$

注：柯西不等式即证毕

$$\text{欲证}:\arccos\frac{1}{x}=\operatorname{arcsec}x$$

$$\text{即证}:\cos[\arccos\frac{1}{x}]=\cos[\operatorname{arcsec}x]$$

$$\text{即证}:\frac{1}{x}=\cos[\operatorname{arcsec}x]$$



$$\text{另有}\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\cdots x\in(0,\frac{\pi}{2})$$

(1.1)

$$\text{其中}:\beta\sim\tilde{\beta}$$

$$\text{证明}:\lim_{x\to\bullet}\alpha^{\beta}==\lim_{x\to\bullet}\alpha^{\tilde{\beta}}$$

$$\text{证}:\lim_{x\to\bullet}e^{\beta\ln\alpha}=e^{\lim\limits_{x\to\bullet}\beta\ln\alpha}=e^{\lim\limits_{x\to\bullet}\beta\ln\alpha}=e^{\lim\limits_{x\to\bullet}\tilde{\beta}\ln\alpha}=\lim_{x\to\bullet}\alpha^{\tilde{\beta}}$$

证毕

$$I=\int_0^1\frac{\ln x}{x^2-x-1}dx$$

$$Answer: I=\frac{\pi^2}{5\sqrt{5}}$$

P判别法

函数$f(x)$在$[a, +\infty)$的任意区间可积，其中a>0.

记$\gamma=\lim\limits_{x\to+\infty}x^p f(x)$，其中$0\le\gamma<+\infty$

若p>1, 则积分收敛

若P$\le$1则积分发散

5. 下列积分中收敛的是（　　）

A. $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$　　B. $\int_1^{2}\frac{dx}{(x-1)^3}$

C. $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln\sqrt{x})^2}dx$　　D. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)}dx$

例题

答案：B

$A:\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=0, p=1,$积分发散

B: $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2f(x)=1, p=2,$积分收敛

$C:\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=0, p=1,$积分发散

$D:$拆分为两项$\int_0^1\frac{1}{x(x+1)}dx$和$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)}dx$

其中第二项收敛，第一项中$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2f(x)=0$

$p=2,$故积分发散$\to$注：此时积分区间是（0,1），

与上边的结论相反

问题：

比如A有特征值λ_i,对应的特征向量为p_i

我把p_i正交化后的得到的正交基记为ξ_i

疑问一：那么ξ_i是对应于A的特征值为λ_i的特征向量吗？

疑问二：还有就是为什么把p_i单位正交化后的得到的ξ_i组合为

$\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots\xi_i)$.就有$A=\xi^T diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_i)\xi$？

解答：

当A是对称实矩阵时，只有当λ_i为重根时才需要对求出的特征向量正交化，

且正交化后的向量仍然是原矩阵的特征向量。

证明：

如λ_i为二重根，则有p_1, p_2两个特征向量与之对应。

正交化后即有$\xi_1=p_1$；$\xi_2=p_2-\frac{[p_1,\ \xi_1]}{[\xi_1,\ \xi_1]}\xi_1=p_2-kp_1$

故$A\xi_2=A(p_2-kp_1)=Ap_2-kAp_1=\lambda_i p_2-k\lambda_i p_2=\lambda_i(p_2-kp_1)$

当A不是对称矩阵时，正交化后的向量就不是原矩阵的特征向量

至于为何是这样的结构，记住就行！

题目：$f''(x)+2[f'(x)]^2-10$

解：令$p=p(x)=f'(x)$,则有以下式子

$p'+2p^2-10=0$

$\because p'(x)=\dfrac{dp}{dx}$

$\therefore \dfrac{dp}{dx}=10\text{-}2p^2$

分离变量后有

$\int\dfrac{dp}{10\text{-}2p^2}=\int dx$,积分后有----->注：关于x的恒等式两边对x积分后仍然相等

$$\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-p}{\sqrt{5}+p}\right|=x+c$$

反解有:$p(x)=\dfrac{\sqrt{5}\left(-1+\mathrm{e}^{2\sqrt{5}(2x-c)}\right)}{1+\mathrm{e}^{2\sqrt{5}(2x-c)}}=f'(x)$

故$f(x)=\int f'(x)dx=\int\dfrac{\sqrt{5}\left(-1+\mathrm{e}^{2\sqrt{5}(2x-c)}\right)}{1+\mathrm{e}^{2\sqrt{5}(2x-c)}}dx=\sqrt{5}\{-x+\dfrac{\ln[1+e^{2\sqrt{5}(2x-c)}]}{2\sqrt{5}}\}+c^*$

其中c, c^*为任意常数

//***//

以下为 Mathematica 的验算过程

DSolve[y''[x] + 2*y'[x]^2 - 10 == 0, y[x], x]
求解微分方程

$\left\{\left\{y[x]\to c_2+\sqrt{5}\left(-x+\frac{\text{Log}\left[1+e^{2\sqrt{5}(2x-c_1)}\right]}{2\sqrt{5}}\right)\right\}\right\}$ // 令f (x) = y[x]

In[13]:= DSolve[p'[x] + 2*p[x]^2 - 10 == 0, p[x], x]
求解微分方程

$\left\{\left\{p[x]\to\frac{\sqrt{5}\left(-1+e^{2\sqrt{5}(2x-c_1)}\right)}{1+e^{2\sqrt{5}(2x-c_1)}}\right\}\right\}$ // 其中p (x) 为f (x) 的一阶导

Integrate$\left[\frac{\sqrt{5}\left(-1+e^{2\sqrt{5}(2x-c_1)}\right)}{1+e^{2\sqrt{5}(2x-c_1)}}, x\right]$ // 验算过程 //
积分

Out[14]= $\sqrt{5}\left(-x+\frac{\text{Log}\left[1+e^{2\sqrt{5}(2x-c_1)}\right]}{2\sqrt{5}}\right)$

In[15]:= D$\left[\frac{\sqrt{5}\left(-1+e^{2\sqrt{5}(2x-c_1)}\right)}{1+e^{2\sqrt{5}(2x-c_1)}}, x\right]$
偏导

$-\frac{20e^{2\sqrt{5}(2x-c_1)}\left(-1+e^{2\sqrt{5}(2x-c_1)}\right)}{\left(1+e^{2\sqrt{5}(2x-c_1)}\right)^2}+\frac{20e^{2\sqrt{5}(2x-c_1)}}{1+e^{2\sqrt{5}(2x-c_1)}}$ // 此式即为f (x) 的二阶导

In[16]:= Simplify$\left[-\frac{20e^{2\sqrt{5}(2x-c_1)}\left(-1+e^{2\sqrt{5}(2x-c_1)}\right)}{\left(1+e^{2\sqrt{5}(2x-c_1)}\right)^2}+\frac{20e^{2\sqrt{5}(2x-c_1)}}{1+e^{2\sqrt{5}(2x-c_1)}}+2\left(\frac{\sqrt{5}\left(-1+e^{2\sqrt{5}(2x-c_1)}\right)}{1+e^{2\sqrt{5}(2x-c_1)}}\right)\text{^}2\right]$
化简

Out[16]= 10

110%

问题：

$$|A-\lambda E|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

$$=\lambda^n+[(-1)^n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i]\lambda^{n-1}+\cdots$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_1 & & & & \\ & a_{22}-\lambda_2 & & & \\ & & a_{33}-\lambda_3 & & \\ & & & \cdots & \\ & & & & a_{nn}-\lambda_n \end{vmatrix}$$

$$=(a_{11}-\lambda_1)(a_{22}-\lambda_2)(a_{33}-\lambda_3)\cdots(a_{nn}-\lambda_n)+\cdots$$

$$=(-1)^n\lambda^n+(-1)^n\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\lambda^{n-1}+\cdots$$

故有$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$

当λ=0时，即有$|-1A|=(-1)^n|A|=(-1)^n\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$

故有$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|$