矩阵

特殊矩阵

单位矩阵
A = E

零矩阵
零矩阵

零矩阵对应零变换，可以快速将矩阵清 0 ： $OX = XO = O$;不可逆;

对角矩阵
只有对角线上有元素

对角矩阵

对角矩阵对应于伸缩算子： $diag\{\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n\}$ 的效果使得矩阵每一个行/列变成对应倍数

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} ; \quad Adiag\{a,b,c\} = \begin{pmatrix} 1a & 2b & 3c \\ 4a & 5b & 6c \\ 7a & 8b & 9c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}$$

显然只要再把每一行/列缩小倍数即可回到矩阵 A ； 当主对角线元素不为 0 时可逆，逆矩阵为 $diag\{\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1} \cdots \lambda_n^{-1}\}$

伴随矩阵
伴随矩阵

伴随矩阵是元素均为代数余子式的矩阵；记作 A 的伴随矩阵为 A^* ；其中 A^* 的 (i,j) 位置元素为 A_{ji} ；

注意到有 $AA^* = A^*A = |A|I$;需要注意的是 $|cI_n| = c^n|I_n|$;这相当于每个向量扩大 c 倍，则是把的 n 维度量纲积扩大了 c^n 倍.

分块的方式求伴随矩阵：先求简单的 $C = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$; A, B 为方阵,则

$$C^* = \begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$$

对于一般矩阵 A 化为等价标准型： $PAQ = \Lambda = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$; 则 $(PAQ)^* = \Lambda^*$;且

则 r 的取决反伴随矩阵；当 $r = n-1; \Lambda^* = \begin{pmatrix} O & O \\ O & 1 \end{pmatrix}, r(A^*) = 1$;

$r \le n-2, \Lambda^* = \begin{pmatrix} O & O \\ O & O \end{pmatrix}; r(A^*) = 0$;

取行列式，有 $|A^*| = |A|^{n-1}$;类似的进一步： $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$

对称矩阵
对称矩阵

即满足 $A' = A$ 的矩阵

对于任意矩阵 B ， $B + B'$ 是对称矩阵;

斜对称矩阵（也称反对称矩阵，交错矩阵）

即满足 $A' = -A$ 的矩阵;

对于任意矩阵 B ， $B - B'$ 是斜对称矩阵（反称矩阵）

显然，有 $B = \frac{1}{2}(B + B') + \frac{1}{2}(B - B')$;这意味着任意矩阵都可以表示为对称矩阵和反称矩阵的和，并且这样的表示证明是唯一的。

初等矩阵
初等矩阵

(1) 记作 P_{ij}

交换 i, j 行/列：在单位矩阵上作这样的操作，则单位矩阵变为交换行/列操作对应的矩阵

$$I_3 \to I_3 P_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = I_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$;由于 I_3 列满秩，可以左消去;

$$\text{故 } P_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} : P_{3,2}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

显然，算子可逆：再第一次就等于恢复算子；故逆矩阵就是本身

(2)数乘 $P_{(k)}$

即把第 i 行/列元素变为 k 倍，其余不变. 显然逆矩阵 $P_{(frac{1}{k})}$

(3)消元 $P_{(ijk)}$ 是最重要的初等矩阵

即第 i 行/列的 k 倍数加到第 j 行/列.

逆矩阵 $P_{(i,-k)}$

A^2=E
对合矩阵

满足 $A^2 = I$ 的矩阵称对合矩阵；这一表达式就可以看出对合算子作用两次等价于恒等算子。

例如平面向量关于x轴对称算子 ψ ，它是线性算子；任意平面向量只要这样作两次，回到本身.这线性算子 ψ 对应矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;任意平面向量 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;列向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 对应终点为 $(1,0)$ 的向量，列向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 对应终点为 $(0,1)$ 的向量.则任意向量的做可以这样做:

$$\psi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \psi(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = x\psi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\psi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$;

或者，使用表示矩阵， $\psi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$;

此时的对合矩阵是形式非常简单的对角矩阵（其实是特殊的镜像矩阵）；对角矩阵（对应于伸缩算子）在处理各种数学问题上都非常方便，计算一般矩阵的幂次方程,特征值,特殊算都相当整洁。而对角矩阵则非常简单。

同一个东西
幂等矩阵
幂等矩阵

满足 $A^2 = A$ 的矩阵 A 称为幂等矩阵。取伴随，幂等矩阵的伴随矩阵仍旧是幂等矩阵。取幂次，幂等矩阵的幂次仍旧是幂等矩阵。满足 $\varphi^2 = \varphi$ 的线性变换 φ 称为幂等变换。幂等矩阵对应幂等变换。

对任意向量幂等算子作两次和一次结果相同。

另外，将全空间 V 作分解 $V = V_1 + V_2 + \cdots + V_k$ 后向量 $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_k$， $v_i \in V_i$;

V 到 V_i 的投影变换 $\phi_i(v) = v_i$ ，投影变换将全空间的向量变到同一个子空间，也可以说 ϕ_i 是平行于 $V_s(s \ne i)$ 在当前空间 V_i 的投影变换。可以证明投影变换与幂等变换是一致的

投影矩阵

幂零矩阵
幂零矩阵

对于方阵 N ，存在 k 使得 $N^k = O$ ；这样的方阵 N 是幂零矩阵；最小的正整数 k 称幂零指数

上述 n 阶基本移位矩阵是幂零矩阵；幂零指数为 n

过度矩阵
过渡矩阵

过渡矩阵的主要作用在于表现基的变换：当线性空间经过一组基后，空间向量对应坐标；当更换新的基时，对应坐标也变化.设 $\{e_1, e_2, \cdots e_n\}$ $\{f_1, f_2, \cdots f_n\}$ 为空间的两组基；则 $\{f_1, f_2, \cdots f_n\} = \{e_1, e_2, \cdots e_n\}A$ ，A 称为从基 $\{e \cdots\}$ 到基 $\{f \cdots\}$ 的过渡矩阵;它的每一列是新基的在旧基的坐标。反映了基变换过程。向量在 $\{e \cdots\}$ 下的坐标为 $X = (x_1, x_2 \cdots, x_n)'$;在新基 $\{f \cdots\}$ 下坐标为 $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)'$;则 $X = AY; Y = A^{-1}X$;

基变换则表示矩阵也变化。在子空间一节详述。

度量矩阵
度量矩阵

在欧式空间上选择基向量作成Gram矩阵，称度量矩阵。选择基不同，度量矩阵往往不同，度量矩阵不唯一。

根据欧式空间的内积定义，度量矩阵是实对称矩阵。

(半)正定矩阵
正定矩阵（与半正定矩阵）

设实二次型 $X'AX$ ，对应实对称矩阵为 A ；当 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 赋值时， $X'AX$ 是一个实数；如果 $X'AX = 0 \Leftrightarrow X = 0$;或者说任意赋值非零向量二次型恒正，则称此时的矩阵 A 是正定矩阵。

如果任意赋值非零向量二次型非负，则称为半正定矩阵。还有类似的负定矩阵等，略。

正交矩阵
正交矩阵

欧式空间为度量空间和内积空间

在欧式空间中如果线性变换作用后保向量之间内积不改变，则称这线性变换为正交变换.

定义满足 $AA^T = A^TA = I$ 的矩阵 A 为正交矩阵。正交变换对应的矩阵是正交矩阵。特别的由内积空间中对应矩阵的是标准线性变换由标准正交基下的矩阵。

取行列式，则正交矩阵 A 的行列式 $|A| = \pm 1$;则第行列式为 1 称为第一类正交矩阵， -1 称第二类正交矩阵

欧式空间到欧式空间是正交映射过渡矩阵是正交矩阵，而正交矩阵是特殊的满秩矩阵。

特别的， $\mathbb{R}^2$ 中旋转是一种正交变换。例如将 x 轴旋转角度 θ ，显然对矩阵 A 是正形的，且每一个单位矩阵空间 α 轴， α 轴对重合旋转下不变，所特征值为 1 ；由于平面 $\mathbb{R}^2$ 与 α 轴交叉于原点，故空间的可逆图。特征值等值占解对角阵。在 α 轴之外，二维空间的平面 xy 平面上旋转 θ 对应 $\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$;而 $A = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ；当然 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$ 也是矩阵旋转，旋转轴不同或者说基向量顺序不同罢了。

Gram矩阵
Gram矩阵

在实（复）线性空间的基础上，定义额外的度量结构(用四条性质定义内积)，称为欧式空间（酉空间）；依靠内积可以定义向量的范数，向量的夹角，将向量 α, β 的内积写成 (α, β) ;

向量组 $v_1, v_2, v_3, \cdots, v_m$ 的 Gram矩阵定义为:

$$G(v_1, v_2, v_3, \cdots, v_m) = \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) & (v_1, v_3) & \cdots & (v_1, v_m) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) & (v_2, v_3) & \cdots & (v_2, v_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (v_m, v_1) & (v_m, v_2) & (v_m, v_3) & \cdots & (v_m, v_m) \end{pmatrix}$$;即

每个元素都是对应的向量内积.

酉矩阵【幺正矩阵】
酉矩阵(幺正矩阵)

类似正交矩阵，在酉空间中如果线性变换作用后任意向量之间内积不改变，则称该线性变换为酉变换.

可以将酉矩阵理解为正交矩阵随着实数域扩充为复数域而推广。

定义满足 $UU^H = U^HU = I$ 的矩阵 U 为酉矩阵（一般用符号 U ），酉变换在标准正交基下的矩阵是酉矩阵。当考虑内积空间时，使用记号 A^T 表示矩阵的转置， U^H 表示矩阵的共轭转置 $\bar{U}^T$ 。

酉空间的两组标准正交基之间的过渡矩阵是酉矩阵。即酉矩阵是特殊的基变换矩阵。

正规矩阵
正规矩阵

满足 $A^HA = AA^H = I$ 的矩阵 A 称为复正规的.满足 $A^TA = AA^T = I$ 的矩阵 A 称为实正规的

正规矩阵对应正规算子。在内积空间中引入算子的伴随后，转置/共轭转置矩阵对应于伴随算子。

伴随矩阵与伴随算子没有任何关系。

在内积空间的讨论中，将欧式空间看做特殊的酉空间，有重要定理：酉空间上的正规算子在适当的标准正交基下表示矩阵为对角矩阵。

Hermite矩阵
Hermite矩阵

即复数域上满足共轭转置等于本身的矩阵. Hermite矩阵对角线上各元素必为实数。实对称矩阵是特殊的Hermite矩阵。可以将Hermite矩阵看作实对称矩阵随着数域扩充至复数的推广。

可逆的Hermite矩阵的逆仍然是Hermite矩阵。Hermite矩阵的幂次仍旧是Hermite矩阵。

法式
法式

类似于数字矩阵的等价标准形，一个 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 可以相抵（等价）对角矩阵 $diag\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda), 0 \cdots, 0\}$ ，并且每一项是非零首一多项式，前项整除后项。

当 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 退化为数字矩阵，则特征矩阵 $\lambda I - A$ 相抵（等价） $diag\{1, \cdots, 1, d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_{m-1}(\lambda), d_m\}$ ，并且每一项是非零首一多项式，前项整除后项。

分别称为 $A(\lambda)$ 和数字矩阵 A 的法式

Jordan块
Jordan块

$$J_{r_i}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & \\ & \lambda_i & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{r_i \times r_i} = \lambda_i I_{r_i} + N ;$$

Frobenius块
Frobenius块

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & \gamma \\ I_{n-1} & -a_{n-1} \end{pmatrix} ; \gamma = \begin{pmatrix} -a_0 \\ -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_{n-1} \end{pmatrix} ;$$

上述矩阵也称为多项式 $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0$ 的友矩阵

矩阵的分解

满秩分解
定理内容
（一）满秩分解：

一个 $s \times n$ 矩阵 A ，它的秩为 r ，则可将 A 分解为 $A = BC$,其中 B 为 $s \times r$ 列满秩矩阵， C 为 $r \times n$ 行满秩矩阵。

证明
证明：设 A 的一个极大线性无关行向量组为 $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir})'$;

则

$$A = \begin{pmatrix} k_{11}\alpha_{i1} + k_{12}\alpha_{i2} + \cdots + k_{1r}\alpha_{ir} \\ k_{21}\alpha_{i1} + k_{22}\alpha_{i2} + \cdots + k_{2r}\alpha_{ir} \\ \vdots \\ k_{s1}\alpha_{i1} + k_{s2}\alpha_{i2} + \cdots + k_{sr}\alpha_{ir} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1r} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{s1} & k_{s2} & \cdots & k_{sr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \\ \vdots \\ \alpha_{ir} \end{pmatrix}$$

分别将等号右边的两个矩阵记为 B, C

由： $r = rank(A) = rank(BC) \le rank(B) \le r$

知 B, C 分别列、行满秩;

QR分解【正交三角形分解】
定理内容
（二）：QR分解（正交三角分解）：

一个列向量线性无关的， $m \times n$ $(m > n)$ 级实矩阵 A ，可分解为 $A = QR$,其中 Q 的列向量组为正交单位向量组， R 是主对角元全为正数的上三角矩阵。

证明
证明：记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$.

因为其列向量线性无关，则经过施密特正交变换后，

可得到一个正交向量组： $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$

其中 $\alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(\alpha_i, \beta_j)\beta_j}{(\beta_j, \beta_j)} + \beta_i$ （$i > 1$）. $\alpha_1 = \beta_1$.

则有： $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)\begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

其中 $b_{ji} = \frac{(\alpha_i, \beta_j)}{(\beta_j, \beta_j)}$.

再将 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ 单位化，得到:

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)\begin{pmatrix} |\beta_1| & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & |\beta_2| & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |\beta_n| \end{pmatrix}$$

等号右边两个矩阵即为所求的 Q, R ;

LDLT分解法【对称矩阵特征分解】
定理内容
（三）：实对称矩阵的特征分解：

一个实对称矩阵 A ,一定可以分解为正交矩阵 T 和对角矩阵 D 的乘积形式： $A = T'DT$

证明

SVD分解【奇异值分解】
定理内容
（四）：奇异值分解：

$m \times n$ 实矩阵 A 可分解为 $A = QDT'$,其中:

Q 是列向量组为正交单位向量组的 $m \times n$ 矩阵;

D 是主对角元 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 全为非负数，且 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_n^2$ 全是 $A'A$ 的特征值;

T 是 n 级正交矩阵，它的第 j 列 η_j 是属于 $A'A$ 的属于特征值 λ_j^2 的一个特征向量;

证明
证明:

由于 A 是实矩阵，因此 $A'A$ 是实对称矩阵。

由于任意 $\alpha \in R^n$， $\alpha'A'A\alpha = |A\alpha|^2 \ge 0$

所以 $A'A$ 是半正定矩阵，从而其特征值全非负，把它的特征值记为 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_n^2$.

存在可逆矩阵 $T = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$,使得:

$$T'A'AT = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$$

所以对于任意列向量组为正交单位向量组的 $m \times n$ 矩阵 Q :

$$A'A = \left[Q\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}T'\right]'\left[Q\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}T'\right] ;$$

令 $A = Q\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}T'$

即:

有 $AT = Q\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$

记： $Q = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$. $Y_iY_j = \delta_{ij}, i, j = 1, 2, \ldots, n;$

则：解得： $Y_i = \frac{1}{\lambda_i}A\eta_i$;

于是我们得到了符合条件的 $A = QDT'$

LU分解【上下三角分解】
定理内容
（五）：LU分解：

对于一个可逆方阵 A ，如果它的所有顺序主子式都不为零时，他可以分解为一个上三角矩阵和一个下三角矩阵的乘积形式。

证明
对于一个可逆方阵 A ，如果它的所有顺序主子式都不为零时，他可以分解为一个上三角矩阵和一个下三角矩阵的乘积形式。

$A = LU$ ，其中 L, U 分别是下三角矩阵和上三角矩阵;

证明:

对于可逆方阵 A 经过一系列初等行变换（不包括两行互换）后，可化为上三角矩阵，且每行都有一个主元。

所用到的初等矩阵 E_{ij} 均为下三角矩阵，这些初等矩阵的逆矩阵还是下三角矩阵（不包括两行互换）

所以有:

$E_1E_2 \ldots E_kA = U$ (其中的 E_k 为二、三类型的初等矩阵)

所以： $A = E_k^{-1} \ldots E_1^{-1}U$;由下三角矩阵的乘积仍是下三角矩阵，所以

$A = LU$;

证明过程同时给出了LU的求法;

矩阵关系

等价【相抵】
1.若矩阵 A, B 同型，且存在可逆矩阵 P, Q ，使得 $PAQ = B$,则称 A, B 等价

相似
相似
3.若矩阵 A, B 同型，且存在可逆矩阵 P ，使得 $P^TAP = B$,则称 A, B 相似。

若此时 B 为对角矩阵，则称 A 可相似对角化。

相似对角化
3.若矩阵 A, B 同型，且存在可逆矩阵 P ，使得 $P^TAP = B$,则称 A, B 相似。

若此时 B 为对角矩阵，则称 A 可相似对角化。

合同
3.若矩阵 A, B 同型，且存在可逆矩阵 P ，使得 $P^TAP = B$,则称 A, B 相似

正交相似
4.若矩阵 A, B 同型，且存在可逆矩阵 P ，使得 $PAP^{-1} = B$,且 $P^TAP = B$.

即此时有 $P^{-1}P^T = E$,则称 A, B 相似