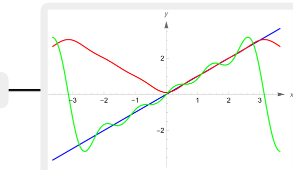
Fourier级数

- Fourier级数
  - 函数的Fourier级数展开
    - 函数Fourier级数的定义和条件
      - $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上 $Reimann$ 可积或者是反常积分下的绝对可积
      - 备注：此时的 $Fourier$ 级数不一定收敛于原函数 $f(x)$ ，但是它就是 $f(x)$ 的 $Fourier$ 级数
      - 展开背景 — 三角函数列的正交性
      - 具体的展开形式 — $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$
        - $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad n = 0,1,2,3,\cdots$
        - $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \quad n = 1,2,3,\cdots$
    - 对称区间的Fourier级数展开
      - 周期为 $2T$
        - $a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos(\frac{n\pi}{T}x)dx \quad n = 0,1,2,3,\cdots$
        - $b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin(\frac{n\pi}{T}x)dx \quad n = 1,2,3,\cdots$
      - 周期为 2π
        - $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad n = 0,1,2,3,\cdots$
        - $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \quad n = 1,2,3,\cdots$
    - 非对称区间的Fourier级数展开 — 对原函数f(x)进行奇偶延拓
      - 奇延拓 — 把函数f(x)当作奇函数，此时的展开式为一个正弦级数
      - 偶延拓 — 把函数f(x)当作偶函数，此时的展开式为一个余弦级数
      - 示例中:红色为偶延拓，绿色为奇延拓，f(x)=x
      - 虽然两种延拓方式下的 $Fourier$ 级数形式完全不同，但是在给定的原区间 $[0,\pi]$ 上，它们均收敛于 $f(x) = x$
      - 举例



  - $Fourier$ 级数的 (点态) 收敛判别法
    - 背景：由于 $Fourier$ 级数对函数的要求较弱，所以 $Fourier$ 级数的收敛性很复杂
    - 要研究 $Fourier$ 级数的收敛性实际上就是研究 $Fourier$ 级数的部分和数列 S_m
      - $S_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m}\cos n(t-x)]dt$
        - 进一步化解可得 — $S_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+u)+f(x-u)]\frac{\sin\frac{2m+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}du$
          - (1) $u = x - t$
          - (2) $f(t)$ 为 $Fourier$ 级数的展开对象
          - (3) x 为傅里叶级数部分和函数 $S_m(x)$ 在 x 处的值
          - (4) t 与 u 均为自变量，是一种换元关系
          - (5) x 为一个固定的自变量 (常量)
        - 引入目标收敛函数
          - 研究 $Fourier$ 级数 (函数列 S_m) 是否收敛于某个函数 $\sigma(x)$. 为此就使用余项法则求取 S_m 与 $\sigma(x)$ 的差 $S_m - \sigma(x)$ 在 $m \to \infty$ 时是否趋于 0
          - 此时 $S_m - \sigma(x)$ 的具体形式为
            - $\varphi_\sigma(u,x) = f(x+u) + f(x-u) - 2\sigma(x)$
            - $\lim_{m\to\infty}(S_m - \sigma(x)) = \lim_{m\to\infty}\int_0^{\pi}\varphi_\sigma(u,x)\frac{\sin\frac{2m+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}du \quad (*)$
        - 由于 $(*)$ 式还是比较复杂，所以我们要对其进行化简
      - 化简使用到的相关引理
        - $Reimann$ 引理 — 设函数 $\psi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积或绝对可积，则成立 $\lim_{p\to\infty}\int_a^b \psi(x)\sin pxdx = \lim_{p\to\infty}\int_a^b \psi(x)\cos pxdx = 0$
        - 局部性原理 — 可积或者是绝对可积的函数 $f(x)$ 的 $Fourier$ 级数在 x 点是否收敛只与 $f(x)$ 在 $(x-\delta, x+\delta)$ 的性质有关，其中 δ 是任意小的正常数
        - $Dini$ 条件 — $\frac{\psi_\sigma(u,x)}{u} = \frac{f(x+u)+f(x-u)-2\sigma(x)}{u}$ 关于 u 在 $[0,\delta]$ 上可积或者是绝对可积的条件
        - $Dirichlet$ 引理 — 设函数 $\psi(x)$ 在 $[0,\delta]$ 上单调，则成立 $\lim_{p\to+\infty}\int_0^{\delta}\frac{\psi(u)-\psi(0+)}{u}\sin pudu = 0$
      - 每一步的简化过程
        - 第一步 — 使用局部性原理把积分上限化简为 δ — $S_m - \sigma(x) = \lim_{m\to\infty}\int_0^{\delta}\varphi_\sigma(u,x)\frac{\sin\frac{2m+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}du$
        - 第二步 — 使用有 $Reimann$ 引理，把分母的 $2\sin\frac{u}{u}$ 化简为 $\sin u$, 同时稍加整理 — $S_m - \sigma(x) = \lim_{m\to\infty}\int_0^{\delta}\frac{\varphi_\sigma(u,x)}{u}\sin[\frac{2m+1}{2}u]du$
        - 第三步 — 由于第二部的结果是符合Reimann引理 — 所以只要 $\frac{\psi_\sigma(u,x)}{u} = \frac{f(x+u)+f(x-u)-2\sigma(x)}{u}$ 关于 u 在 $[0,\delta]$ 上可积或者是绝对可积即可
        - 第四步 — 要满足Dini条件，首先必须满足一个必要条件
          - $\lim_{u\to 0}[f(x+u)+f(x-u)-2\sigma(x)] = 0$ 那么就必须有 $\sigma(x) = \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}$
          - 于是原式可以化简为 — $S_m(x) - \sigma(x) = \lim_{p\to+\infty}\int_0^{\delta} f(x+u)+f(x-u) - 2\frac{f(x+)-f(x-)}{2}\frac{\sin pu}{u}du = 0$
          - $u \to 0$, 也就是 $t \to x$ 。和我们平时的 $f(x)$ 中， $x \to x_0$ 类似。
        - 第五步 — 运用 $Dini$ 条件得出函数 $f(x)$ 的 $Fourier$ 级数在点 x 处收敛的条件和目标函数
          - $Dirichlet - Jordan$ 判别法
            - 满足条件1(单调)
            - $\lim_{p\to+\infty}\int_0^{\delta}\frac{f(x+u)-f(x+)}{u}\sin pudu = 0 \quad (1)$
$\lim_{p\to+\infty}\int_0^{\delta}\frac{f(x-u)-f(x-)}{u}\sin pudu = 0 \quad (2)$
把 (1)(2) 两式相加即为 $S_m(x) - \sigma(x) = 0$
          - $Dini - Lipschitz$ 判别法
            - 满足条件2
            - 因为 $\frac{|f(x\pm u)-f(x\pm)|}{u} < \frac{L}{u^{\alpha-1}}$
所以 $\frac{\varphi_\sigma(u,x)}{u} = \frac{f(x+u)-f(x+)}{u} + \frac{f(x-u)-f(x-)}{u}$
$< |\frac{f(x+u)-f(x+)}{u}| + |\frac{f(x-u)-f(x-)}{u}|$
$< \frac{2L}{u^{\alpha-1}}$
由于 $\frac{2L}{u^{\alpha-1}}$ 在 $[0,\delta]$ 上可积或绝对可积.
所以有 $Reimann$ 引理可知
$\lim_{p\to+\infty} S_m(x) - \sigma(x) = \lim_{p\to+\infty}\int_0^{\delta} f(x+u)+f(x-u) - 2\frac{f(x+)-f(x-)}{2}\frac{\sin pu}{u}du = 0$
    - 判定定理
      - 设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或者是绝对可积，且满足下边两个条件之一，则 $f(x)$ 的 $Fourier$ 级数在点 x 处收敛于 $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$
        - $Dirichlet - Jordan$ 判别法 — $f(x)$ 在 x 的某个邻域 $O(x,\delta)$ 是分段单调的有界函数
        - $Dini - Lipschitz$ 判别法 — $f(x)$ 在 x 处满足指数为 α 的 $Holder$ 条件
      - 推论
        - 设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或者是绝对可积，在 x 的两个单侧导数 $f_+^{'}(x)$ 和 $f_-^{'}(x)$ 都存在，或者是更进一步，只要两个拟单侧导数: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x\pm h)-f(x\pm)}{h}$ 存在，则 $f(x)$ 的 $Fourier$ 级数在点 x 处收敛于 $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$
        - 有这个推论的原因：'可导' 强于 ' 满足 $Lipschitz$ 条件'。即：前者能够推出后者
      - 若收敛条件满足
        - $f(x)$ 的 $Fourier$ 级数在 $f(x)$ 的连续点收敛于函数值本身
        - $f(x)$ 的 $Fourier$ 级数在 $f(x)$ 的第一类不连续点收敛于它左右极限的算数平均值
      - 备注：以上的判定定理均为充分条件
  - $Fourier$ 级数的性质
    - $Fourier$ 级数的分析性质
      - $Fourier$ 级数系数性质
        - 有 $Reimann$ 引理可以知道
        - $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$
        - $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$
      - 逐项求导定理
        - 条件
          - (1) $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续
          - (2) $f(-\pi) = f(\pi)$
          - (3) 除有限个点外， $f(x)$ 可导
          - (4) $f'(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或者是绝对可积
        - 结论 — $f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}[-a_n n\sin nx + b_n n\cos nx]$ — 右边的级数即为 $f(x)$ 的 $Fourier$ 级数逐项求导得到的
      - 逐项积分定理
        - 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或者是绝对可积，即有: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx + b_n\sin nx]$ 那么对任意的 $x, c \in [-\pi,\pi]$, 一定有 $\int_c^x f(t)dt = \int_c^x \frac{a_0}{2}dt + \sum_{n=1}^{\infty}[\int_c^x(a_n\cos nt + b_n\sin nt)dx]$
        - 推论
          - $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx + b_n\sin nx]$ 是某个在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或者是绝对可积函数的 $Fourier$ 级数的必要条件是: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ 收敛
          - 由此可以得出 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ ，不可能是某个可积或绝对可积函数的 $Fourier$ 级数
    - $Fourier$ 级数的逼近性质
      - $Fourier$ 级数的平方逼近性质
        - 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或者是 平方 可积 (平方可积的条件比绝对可积更强)
        - 则发 $f(x)$ 在 T 中的最佳平方逼近元素恰为 $f(x)$ 的 $Fourier$ 级数的部分和函数 $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}[a_k\cos kx + b_k\sin kx]$
        - 逼近的余项为 $||f - S_n|| = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - [\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)]$
      - $Bessel$ 不等式 — $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$ — 即 $Fourier$ 级数的系数平方组成了一个收敛的级数
      - $Parseval$ 等式（能量恒等式） — 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或者是 平方 可积，则成立： $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$