北京科技大学学生学习与发展指导中心系列丛书

高等数学教材解析与习题指导

——配套《高等数学》第二版

这个图书模板是在群主网站上的一个封面模板的基础上改写而成的，设定了一些图书出版要素，设计了封面、扉页及版权页和封底的样式，修改了 chapter 的样式，并提供了几个选项可切换色彩风格，其余则维持 book 基本文档类的设定，并将选项用 xkeyval 进行重新设定，提供了键值对的设置模式。

图书模板部分代码的完成得到了林莲枝大神、夜神的帮助，在此表示感谢。由于作者水平有限，模板代码编写不恰当之处还请用户提出批评和指正。

感谢造字工坊提供了刻宋、郎宋和黄金时代三种非商业可免费下载使用的字体。

感谢谷歌提供自由使用的思源宋体、思源黑体。

感谢文泉驿提供的开源的文泉驿等宽微米黑字体。

编委会 编著

LaTeXStudio 出版社

第一版

Edition I

高等数学教材解析与习题指导

编委会 编著

图书在版编目（CIP）数据

高等数学教材解析与习题指导/编委会编著.—1—北京：LaTeXStudio 出版社，2018.9

ISBN 978-7-302-11622-6

I. 0811··· II. 编委会 ··· III. 书籍—模板—LaTeXStudio IV.I213

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 666666 号

高等数学教材解析与习题指导

编委会 编著

* * *

LaTeXStudio 出版社

https://htharoldht.com

htharoldht@Gmail.com

开本：210 mm×297 mm **字数**：666 千字

2018 年 9 月第 1 版 第 1 次印刷

印数：001 ∼ 100 册 **定价**：80.6 元

前　言

水厂共当而面三张，白家决空给意层般，单重总歼者新。每建马先口住月大，究平克满现易手，省否何安苏京。两今此叫证程事元七调联派业你，全它精据间属医拒严力步青。厂江内立拉清义边指，况半严回和得话，状整度易芬列。再根心应得信飞住清增，至例联集采家同严热，地手蠡持查受立询。统定发几满斯究后参边增消与内关，解系之展习历李还也村酸。制周心值示前她志长步反，和果使标电再主它这，即务解早八战根交。是中文之象万影报头，与劳工许格主部确，受经更奇小极准。形程记持件志各质天因时，据据极清总命所风式，气太束书家秀低垃也。期之才引战对已公派及济，间究办儿转情革统将，周类弦具调除声坑。两了济素料切要压，光采用级数本形，管县任其坚。切易表候完铁今断土马他，领先往样拉口重把处千，把证建后苍交码院眼。较片的集节片合构进，入化发形机已斯我候，解肃飞口严。技时长次土员况属写，器始维期质离色，个至村单原否易。重铁看年程第则于去，且它后基格并下，每收感石形步而。

太研认发影们毛消义飞，传立观极思工观查反，响八露加杨适克励受布例子东适进式数，连生片很门都说响今，领该术护家老支。许半相部加最都力只段，石半增热议务断天，布传孟青水足办认定。提加听置即明听报，达表那革连极型列局，社磨百处备的。做表果育改干里管张完，九听取便常则建。书改压马米本强，确已起今或，很扯呈。中化品况声人收和土又，成据便先花儿结先，身法材不组雨马。治方二没那始按知点，安住强际林维识整，转体医京型期。片需周油省育角式叫，么专光自青状维月者，老满形百清局刷，都要往严同从义。求候较件声之问条算，海识层用样油习，林布。京安时治千照议权走热那，地置基员据更些板杨。车能权大率与，用建须称外角造，情陕求领华。论精七度得员程划小，前必领定包次世，位出届打系杰出。团矿该面而山石红收收时外在安商，过率但体划励半根斯却清。来青回引何有起统断统外，何它性都辰些茄。设合当她要近地事才少音，而他路或引件打识说原入，土个车图命辆该。

编委会

2018 年 9 月

目录

目

录

目录

目录

目

录

目 录

第一篇

教材课后解析

目录

第一章　函数与极限

☞ 习题见第 102 页

第一节　改成节标题

☞ 教材见页

第二节　改成节标题

☞ 教材见页

添加内容

第三节　改成节标题

☞ 教材见页

添加内容

第二章 导数与微分

☞ 习题见第 110 页

第一节 改成节标题

☞ 教材见页

第二节 改成节标题

☞ 教材见页

添加内容

第三节 改成节标题

☞ 教材见页

添加内容

第三章 微分中值定理与导数的应用

☞ 习题见第 113 页

第一节 微分中值定理

☞ 教材见 181 页

(A)

1. 证明：显然 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上连续、可导，且 $f(2)=f(3)$

$\because f'(x)=3x^2-12x+11$, 显然 $f'(x)$ 在 $[2,3]$ 连续.

$f'(2)=12-24+11=-1, f'(3)=27-36+11=1$

则由介值定理可知，在 $[2,3]$ 区间上 $f'(x)$ 必存在一点 ξ 使得 $f'(\xi)=0$

所以罗尔定理对 $f(x)$ 在区间 $[2,3]$ 上成立.

2. 证明: 显然函数在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续, 可导,

$\dfrac{f(\pi/2)-f(0)}{\pi/2-0}=-\dfrac{2}{\pi}, f'(x)=-\sin x$

又 $f'(0)=0, f'(1)=-1$，而 $-1<-\dfrac{2}{\pi}<0$

所以由介值定理可知必存在一点 ξ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(\pi/2)-f(0)}{\pi/2-0}$

所以拉格朗日中值定理对 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上成立.

3. 证明: 令 $p(x)=f(x)-\ln 2g(x)$, 显然其在 [0,1] 上连续, 可导

$p(0)=-\ln 2, p(1)=-\ln 2$, 由罗尔定理知，在 $[0,1]$ 上必存在一点 ξ 使得 $f'(\xi)=0$, 即 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\ln 2=\dfrac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)}$

所以在 $[0,1]$ 上柯西中值定理对 $f(x)$ 和 $g(x)$ 成立.

4. 证明: 令 $f(x)=\arctan x-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

则 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})^2}}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-x\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=0$, 即 $f(x)$ 恒等于一常数, 又 $f(0)$=0, 所以 $\arctan x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

5. 证明: 令 $f(x)=2\arctan(\sec x+\tan x)-x$, 则

$f'(x)=2\dfrac{\sec x\tan x+\sec^2 x}{1+(\sec x+\tan x)^2}-1=2(\sec x\tan x+\sec^2 x)\dfrac{\cos^2 x}{2}-1=0$

即 $f(x)=C$, 又 $f(0)=2\arctan 1-0=2\times\pi/4=\pi/2$.

6. 解: 因为 $f(0)=f(1)=f(2)=f(3)=f(4)$, 由罗尔定理可知，在 $[0,1],[1,2],[2,3],[3,4]$ 区间分别存在四个点 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4, 使得 $f'(\xi_i)=0$

7. 证明:

(1) 设 $f(x)=\sin x$ 显然函数在整个定义域内连续、可导，则由拉格朗日中值定理可知:
$\dfrac{\sin x-\sin y}{x-y}=f'(\xi)=\cos(\xi)\Rightarrow\left|\dfrac{\sin x-\sin y}{x-y}\right|\leqslant 1$, 即 $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$.
(2) 设 $f(x)=\arctan(x)$, 显然函数在整个定义域内连续、可导，则由拉格朗日中值定理可知：在 $[a,b]$ 区间上有
$\left|\dfrac{\arctan(a)-\arctan b}{a-b}\right|=|f'(\xi)|=\left|\dfrac{1}{1+\xi^2}\right|\leqslant 1$, 即 $|\arctan a-\arctan b|\leqslant|a-b|$.
(3 设 $f(x)=\ln x, f'(\xi)=\dfrac{1}{\xi}=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=\dfrac{\ln\frac{a}{b}}{a-b}$
又因为 $b<\xi<a$, 所以 $\dfrac{1}{a}<f'(\xi)<\dfrac{1}{b}$, 即 $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$.
8. 证明:$f(x)=e^x, g(x)=\cos x$, 二者在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上均连续、可导，并且对任意 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 都有 $g(x)\neq 0$, 由柯西中值定理，存在 $\xi\in(x_1,x_2)$, 使得 $\dfrac{e^{x_2}-e^{x_1}}{\cos x_1-\cos x_2}=-\dfrac{e^{\xi}}{(-\sin\xi)}>\dfrac{e^{\xi}}{1}>e^{x_1}$, 即 $e^{x_2}-e^{x_1}>(\cos x_1-\cos x_2)e^{x_1}$
9. 证明: 设 $f(x)=x^p$, 则由拉格朗日中值定理知,$\exists\xi\in(y,x)$, 使得 $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=\dfrac{x^p-y^p}{x-y}=p\xi^{p-1}$
$\therefore py^{p-1}(x-y)<x^p-y^p<px^{p-1}(x-y)$
10. 证明: 设 $F(x)=f(x)e^{-kx}$, 函数在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导, 则 $F(a)=f(a)e^{-ka}=0=F(b)$ 由罗尔定理可知，在 (a,b) 内至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得:
$F'(\xi)=f'(\xi)e^{-k\xi}+f(\xi)e^{-k\xi}(-k)=0$, 即 $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=k$.
11. 证明: 设 $F(x)=f(x)(1-e^{-x})$ 其在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导. 又 $F(0)=f(0)(1-1)=0=F(1)$, 由罗尔定理可得 $\exists\xi\in(0,1), F'(\xi)=f'(\xi)(1-e^{-\xi})+f(\xi)(e^{-\xi})=0$
12. 证明: 设 $f(x)=e^x-ax^2-bx-c$, 利用反证法, 设若方程有至少 4 个根，$x_1,x_2,x_3,x_4,\ldots$, 则 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)=0$; 又 $f(x)$ 在定义域内至少 4 阶连续、可导，则由罗尔定理可知，至少存在点 ξ_1,ξ_2,ξ_3, 使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$. 再次利用罗尔定理, 至少存在点 α,β, 使得 $f''(\alpha)=f''(\beta)=e^x-2a=0$ 由罗尔定理可知，在（α,β）内至少存在一点使得 $f'''(\gamma)=0$.
而 $f'''(x)=e^x>0$ 即不可能找到一点使得 $f(x)$ 的三阶导数为零，所以假设不成立，即方程至多有 3 个根.
13. 证明: 令 $F(x)=f(x)\tan x$ 其在 $[0,\dfrac{\pi}{4}]$ 上连续，在 $(0,\dfrac{\pi}{4})$ 内可导. 又 $F(0)=F(\dfrac{\pi}{4})=0$, 所以由罗尔定理可知, 至少存在一点 $c\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 时, 使得 $F'(c)=0$, 即 $2f(c)+\sin 2cf'(c)=0$.
14. 证明: 令 $F(x)=f(x)-x$, 此函数在此函数在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，又因为 $F(0)=0, F(1/2)=1/2, F(1)=-1$, 由介值定理可知，在 $[\dfrac{1}{2},1]$ 之间存在 c 使得 $Fc=0=F(0)$ 由罗尔定理可知，在 $[0,c]$ 内至少存在一点 ξ 使得 $f'(\xi)=1$.
15. 提示：令 $g(x)=x^2$，对 $f(x)$ 和 $g(x)$ 用柯西中值定理即可得证.
16 提示：令 $g(x)=\ln x$，$f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上用柯西中值定理可证.
(B)
17. 证明: 证明：因为 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且在 $[0,2]$ 上必有最大值 M 和最小值 m，于是 $m\leqslant f(0)\leqslant M, m\leqslant f(1)\leqslant M, m\leqslant f(2)\leqslant M$

故 $m \leqslant \dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3} \leqslant M$

因为 $f(c)=1=f(3)$，且 $f(x)$ 在 $[c,3]$ 上连续，在 $(c,3)$ 内可导，所以由罗尔定理可知，必存在 $\xi \in (c,3) \subset (0,3)$，使 $f'(\xi)=0$

18. 证明: 因为 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上存在三阶函数, 所以 $F(x)=x^3 f(x)$ 在 $[0,a]$ 上存在三阶函数, 且 $F(0)=F(a)=0$, 则 $F(x),F'(x),F''(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续, 在 $(0,a)$ 上可导; $F'(x)=3x^2f(x)-x^3f'(x),F''(x)=6xf(x)-x^3f''(x)$;

由罗尔定理知在 $(0,a)$ 内至少存在一点 c 使得 $F'(c)=0$ 又 $F'(0)=0$

由罗尔定理可知在 $(0,c)$ 内至少存在一点 z 使得 $F''(z)=0$, 又 $F''(0)=0$,

由罗尔定理可知, 在 $(0,z)$ 内至少存在一点 ξ 使得 $F'''(\xi)=0$;

又 $(0,z)\subset(0,c)\subset(0,a)$, 得证.

19. 证明: 因为 $y=f(x)$ 在 x=0 的某邻域内具有 n 阶导数, 由柯西中值定理, 得:$\exists\xi_1\in(0,x)$, 使

$\dfrac{f(x)}{x^n}=\dfrac{f(x)-f(0)}{x^n-0^n}=\dfrac{f'(\xi_1)}{n{\xi_1}^{n-1}}=\dfrac{f'(\xi_1)-f'(0)}{n{\xi_1}^{n-1}-0}$

反复运用柯西中值定理, 得:$\exists\xi_2\in(0,\xi_1),\xi_3\in(0,\xi_2),\ldots,\xi\in(0,\xi_{n-1})\subset(0,x)$

使得:$\dfrac{f(x)}{x^n}=\dfrac{f'(\xi_1)-f'(0)}{n{\xi_1}^{n-1}-0}=\dfrac{f''(\xi_1)-f''(0)}{n(n-1){\xi_2}^{n-2}-0}=\ldots=\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n}$

即 $\exists\theta\in(0,1)$, 使得 $\theta x=\xi\in(0,x)$, 使得 $\dfrac{f(x)}{x^n}=\dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!},(0<\theta<1)$

20. 证明: 设 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, 由题知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导, 则

$F'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ 又 $\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}\equiv 0$

即 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)\equiv0$, 即 $F'(x)\equiv0\Rightarrow F(x)=C$

即 $f(x)=Cg(x)$.

第二节 洛必达法则

☞ 教材见 190 页

(A)

1, 解析:

(1)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sec^2x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\cos x}{\cos^2x}=2$

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\tan(ax)}{\ln\tan(bx)}(a>0,b>0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{\tan(ax)}\cdot\frac{a}{\cos^2(ax)}}{\frac{1}{\tan(bx)}\cdot\frac{b}{\cos^2(bx)}}=\dfrac{a}{b}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin2bx}{\sin2ax}=\dfrac{a}{b}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cos(2bx)}{\cos(2ax)}\cdot\dfrac{2b}{2a}=1$

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan3x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{3\sec^23x}{\sec^2x}=3\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\dfrac{\cos x}{\cos3x})^2=3(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{3\sin3x})^2=\dfrac{1}{3}$

(4)$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}(a\neq0)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\dfrac{m}{n}a^{m-n}$

(5)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\ln(1+x)-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{1+x}}{2}=-\dfrac{1}{2}$

(6) $\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{x^x-x}{\ln x-x+1})=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^x(\ln x+1)-1}{\dfrac{1}{x}-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}}{-\dfrac{1}{x^2}}=-2$

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2-\tan^2 x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4}{(x+\tan x)(x-\tan x)}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x+\tan x}\cdot\dfrac{x^3}{x-\tan x}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2}{1-\sec^2 x}=-\dfrac{3}{4}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\tan^2 x}=-\dfrac{3}{4}.$

(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arctan x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{3x^2(1+x^2)}=\dfrac{1}{3}$

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\cdot\cos x}{1-\cos^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sin^2 x}=1$

(10) $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x})=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^2 x-x^2}{x^2\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\tan x+x)(\tan x-x)}{x^4}=$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x+x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan^2 x}{x^2}=\dfrac{2}{3}$

(11) $\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1})=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-\ln x-1}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{(x-1)+x\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{1+1+\ln x}=\dfrac{1}{2}$

(12) $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\tan x}{x})^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x^2}\cdot\ln\dfrac{\tan x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x}{\tan x}\cdot\dfrac{\sec^2 x\cdot x-\tan x}{x^2}}{2x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sec^2 x\cdot(x-\sin x\cos x)}{2x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{6x^2}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(2x)^2}{6x^2}}=e^{\frac{1}{3}}$

(13) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\tan\frac{\pi x}{2}}{\frac{1}{1-x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-x)^2\cdot\dfrac{\pi}{2}}{\cos^2\dfrac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2(1-x)}{\sin\pi x}=-2\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\cos\pi x\cdot\pi}=\dfrac{2}{\pi}$

(14) $\lim\limits_{x\to0^+}e^{-\tan\ln x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{-\frac{\sin x\ln x}{\cos x}}=e^0=1$

2. 解析:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}}{\cos x}$ 此极限不存在，洛必达法则不适用.

原极限 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=1\cdot0=0$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ 此极限不存在，洛必达法则不适用.

原极限 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=1$

3. 解析: 因 $f(x)$ 具有一阶连续导数, 从而 $f(x)$ 连续,$x\to0$ 时,$f(1-\cos x)\to f(0)=0$,

则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(1-\cos x)\cdot\sin x}{\sec^2 x^2\cdot 2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}f'(1-\cos x)=\dfrac{1}{2}f'(0)=1$

4. 证明: 当 $h\to0$ 时,$f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\to0$, 以及 $h^2\to0$ 且分子、分母（视为 h 的函数）都有导数，又注意到分母的导数,$2h\neq0,(h\to0,h\neq0)$, 故对

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}$$
$$=4\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2}{\pi^2e^{\sin\pi x}(\cos^2\pi x-\sin\pi x)-9\pi^2e^{-\sin 3\pi x}(\cos^2 3\pi x+\sin 3\pi x)}$$
$$=4\cdot\frac{2}{-\pi^2e+9\pi^2e}=\frac{1}{\pi^2e}$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})\cdot[\ln(1+x)-x]}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\dfrac{1}{1+x}-1}=-\frac{1}{2}$$

(3) $$\lim_{x\to 0^+}\left(2-3^{\arctan^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{2}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2}{\sin x}\left(2-3^{\arctan^2\sqrt{x}}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2}{\sin x}\left(1-3^{\arctan^2\sqrt{x}}\right)}$$
$$=e^{-2\ln 3\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{3\arctan^2\sqrt{x}\cdot 2\arctan\sqrt{x}}{\cos x}\cdot\frac{1}{1+x}}$$
$$=e^0=1$$

(4) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(a+be^x)}{\sqrt{m+nx^2}}(b>0,n>0)=\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{\frac{a}{e^x}+b}\cdot\frac{\sqrt{m+nx^2}}{nx}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{nx}{\sqrt{m+nx^2}}}{n}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{m}{x^2}+n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$$

(5) $$\lim_{n\to\infty}n^2\ln(n\sin\frac{1}{n})=\lim_{x\to+\infty}x^2\ln(x\sin\frac{1}{x})=\lim_{x\to+\infty}x^2(x\sin\frac{1}{x}-1)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}(\frac{\sin x}{x}-1)$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{6x}=-6$$

(6) $$\lim_{x\to 0}(\frac{a^x-x\ln a}{b^x-\ln b})^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln(a^x-x\ln a)-\ln(b^x-\ln b)}{x^2}}=e^{\frac{1}{2}(\ln^2a-\ln^2b)}$$

(7) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{\mathrm{x}}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\ln(\frac{\arcsin x}{x})}=e^{\lim\frac{1}{1-\cos x}(\frac{\arcsin x}{x}-1)}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x-x}{x(1-\cos x)}}=e^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x-x}{x^3}}=e^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{3x^2}}$$
$$=e^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{3x^2\sqrt{1-x^2}}}=e^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}}$$
$$=e^{2\cdot\frac{1}{6}}=\sqrt[3]{e}$$

(8) $$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})^x=\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{x+1}{x^2})^{\frac{x^2}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}}=e$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2})^n=e$

5. 解: 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}-1]=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\dfrac{1}{2}$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}]^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}=f(0)$ 即函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

6. 解析: 若使 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1)$ 连续, 则满足 $f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$;

$$
\begin{aligned}
\text{又}\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \frac{1}{\pi}+\lim_{x\to 1^-}[\frac{1}{\sin \pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}]=d\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to 1^-}\frac{\pi(1-x)-\sin \pi x}{\pi(1-x)\sin \pi x}\\
&=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to 1^-}\frac{-\pi-\pi\cos \pi x}{-\pi\sin \pi x+\pi^2(1-x)\cos \pi x}\\
&=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to 1^-}\frac{\pi^2\sin \pi x}{-\pi^2\cos \pi x+\pi^2+\pi^2(1-x)\sin \pi x}\\
&=\frac{1}{\pi}
\end{aligned}
$$

故当 $f(1)=\frac{1}{\pi}$ 时,$f(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1)$ 上连续.

第三节　泰勒公式

☞ 教材见 199 页

1. 解析:$f(x)=1+3x+5x^2-2x^3, f(-1)=5; f'(x)=3+10x-6x^2, f'(-1)=22;$
$f''(x)=10-12x, f''(-1)=-12; f'''(x)=-12, f'''(-1)=-12;$

$$\therefore f(x)=5-13(x+1)+11(x+1)^2-2(x+1)^3$$

.

2. 解析: 令 $f(x)=\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt{1-3x+x^2}, f(0)=0;$
$f'(x)=\frac{1}{2}(1-2x+x^3)^{-\frac{1}{2}}(-2+3x^2)-\frac{1}{3}(1-3x+x^2)^{-\frac{2}{3}}(-3+2x), f'(0)=0;$
同理可得 $f''(0)=\frac{1}{3}; f'''(0)=6$
故

$$f(x)=\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt{1-3x+x^2}=\frac{1}{6}x^2+x^3+o(x^3)$$

.

3. 解析:$f(x)=\sqrt{x}, f(1)=1; f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, f'(1)=\frac{1}{2}; f''(x)=-\frac{1}{4}(x)^{-\frac{3}{2}}, f''(1)=-\frac{1}{4};$

$$\therefore f(x)=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+o[(x-1)^2]$$

.

4. 解析:$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}, f(-3)=\frac{1}{2}; f'(x)=\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}, f'(-3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^3};$
$f''(x)=\frac{3}{4}(1-x)^{-\frac{5}{2}}, f''(-3)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2^5}; f'''(x)=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}(1-x)^{-\frac{7}{2}}, f'''(-3)=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2^7};$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^3}(x+3)+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2^5}(x+3)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2^7}(x+3)^3+o[(x+3)^3]$$

.

5. 解析:$f(x)=\arctan x, f(0)=0; f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}, f'(0)=1;$

$f''(x)=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}, f''(0)=0; f'''(x)=-\dfrac{2}{(1+x^2)^2}-\dfrac{4x^2}{(1+x^2)^3}, f'''(0)=-2;$

$$\therefore f(x)=x-\frac{2}{3!}x^3+o(x^3).$$

6. 解析:$f(x)=xe^x, f'(x)=e^x+xe^x, f''(x)=2e^x+xe^x,\cdots,f^{(n)}(x)=ne^x+xe^x;$

$f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=2,\cdots f^{(n)}(n)=n;$ 并得到 $f^{(n)}(\xi)=(n+1+\xi)e^{\xi}$

$$\therefore f(x)=x+x^2+\frac{1}{2!}x^3+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}x^n+\frac{(n+1+\xi)e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}(\xi\quad 0\ x\quad)$$

7. 解析:$f(x)=\dfrac{1}{1-x},$

因为 $f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}, f''(x)=-\dfrac{2(1-x)}{(1-x)^4}=-\dfrac{2}{(1-x)^3}, f'''(x)=\dfrac{2\cdot3\cdot(1-x)^2}{(1-x)^6}=\dfrac{2\cdot3}{(1-x)^4}$

$f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot n!}{(1-x)^{n+1}}, f^{(n+1)}(\xi)=\dfrac{(-1)^{n+2}(n+1)!}{(1-\xi)^{n+2}}$

所以 $f(0)=1, f'(0)=1, f''(0)=-2, f'''(0)=3!\cdots f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}n!$

$$\therefore f(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots+(-1)^{n+1}x^n+\frac{(-1)^{n+2}}{(1-\xi)^{n+2}}x^{n+1}(\xi\quad 0\ x\quad)$$

8. 解析: 由已知 $\ln(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+\cdots+\dfrac{(-1)^{2n-1}}{2n}x^{2n}+o(x^{2n})$

$\ln(1-x)=-x-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x^3+\cdots+\dfrac{(-1)^{2n-1}}{2n}x^{2n}+o(x^{2n})$

$$\therefore \ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=2(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1})+o(x^{2n})$$

9. 解析:

(1) 令 $f(x)=\sin x$, 则 $f^{(n)}(x)=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})(n=0,1,2,\cdots)$, 所以

$f^{(n)}(0)=0(n=2m,m=0,1,2,\cdots), f^{(n)}(0)=(-1)^n(n=2m+1,m=0,1,2,\cdots),$

故而 $\sin x=x-\dfrac{1}{3!}x^3+\dfrac{1}{5!}x^5-\cdots+\dfrac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1}+R_{2m}(x)$

$R_{2m}(x)=\dfrac{\sin[\theta x+(2m+1)\cdot\frac{\pi}{2}]}{(2m+1)!}x^{2m+1}=(-1)^m\dfrac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1}(0<\theta<1)$

当 $m=2$ 时, 得近似 $\sin x\approx x-\dfrac{x^3}{6}$, 又 $|x|\leqslant\dfrac{1}{2}$

此时误差

$$|R_4(x)|=\left|\frac{\sin[\theta x+\frac{5\pi}{2}]}{5!}x^5\right|\leqslant\frac{|x^5|}{5!}<2.6\times10^{-4}$$

(2) 因为 $(1+x)^a=1+ax+\dfrac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)$ 其中 $R_n(x)=\dfrac{a(a-1)\cdots(a-n+1)(a-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{a-n-1}x^{n+1}(0<\theta<1).$

所以 $(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2+\cdots+\dfrac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)$

当 $n=2$ 时, 得近似值 $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$,

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, 此时误差 $R_3(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3!}(1+\theta x)^{-\frac{1}{2}}x^3<6.25\times 10^{-2}$

10. 解析:$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}+R_{2m+1}(x)$,

其中 $R_{2m+1}(x)=\frac{\cos[\theta x+(m+1)\pi]}{(2m+2)!}x^{2m+2}=(-1)^{m+1}\cdot\frac{\cos(\theta x)}{(2m+2)!}x^{2m+2}(0<\theta<1)$

此时有 $\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2!}$,

则 $|R_3(x)|=\frac{\cos(\theta x)}{4!}\cdot x^4\leqslant\frac{x^4}{4!}\leqslant 0.0001,\therefore |x|<0.22134$

11. 解析:

(1)$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+0(x^4),e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{8}x^4+0(x^4)$,

所以 $\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)-1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-o(x^4)=-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=-\frac{1}{12}$

(2) 因为 $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+0(x^2),\sin x=x+o(x)$,

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\frac{x+x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)-x-x^2}{x^3}=\frac{1}{2}$

(3)$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+0(x^2),\therefore e^{\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+0(\frac{1}{x^3})$,

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}[(x^3-x^2+\frac{x}{2})e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6-1}]=\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-x^2+\frac{x}{2})\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+0(\frac{1}{x^3})\right)=-\sqrt{x^6-1}=\frac{1}{6}$

(4)$\sin x=x+0(x),\therefore\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x})=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+0(x)})=0$

13. 解析: 由题意可得:$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(x)}{2}$

14. 题目有误, 无法证明.

15. 证明:$\because f(1)=f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2})+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)(1-\frac{1}{2})^2$,

$f(0)=f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})(0-\frac{1}{2})+\frac{1}{2!}f''(\xi_2)(0-\frac{1}{2})^2$, 其中 $\frac{1}{2}<\xi_1<1,0<\xi_2<\frac{1}{2}$

$\therefore f(1)+f(0)=2f(\frac{1}{2})+\frac{1}{8}[f''(\xi_1)+f(\xi_2)]$, 即 $\frac{1}{2}=\frac{1}{8}[f''(\xi_1)+f(\xi_2)]$.

令 $\xi=\{\xi_1,\xi_2\}$, 使得 $4f''(\xi)=\max\{f''(\xi_1),f''(\xi_2)\}$

则有 $\frac{1}{2}=\frac{1}{8}[f''(\xi_1)+f(\xi_2)]\leqslant\frac{1}{8}\cdot 2\cdot f''(\xi)$, 即 $2\leqslant f''(\xi),(0<\xi_2<\frac{1}{2})$,

在 $(0,1)$ 内至少有一点 ξ 使得 $f''(\xi)\leqslant 2$.

(B)

16. 解析:$\because e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$,

$\therefore e^{2x-x^2}=1+2x-x^2+\frac{1}{2}(2x-x^2)^2+\frac{1}{6}(2x-x^2)^3+o(x^6)=1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+o(x^5)$

18. 解:$f^k(x)=chx,k=2n;f^k(x)=shx,k=2n+1$;

$ch(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{2n!}f^{(2n)}(0)x^{2n}+\frac{1}{(2n+1)!}f^{(2n+1)}(0)x^{2n+1}+\frac{ch\xi}{(2n+2)!}x^{2n+2}$

$=1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+\frac{1}{2n!}x^{2n}+\frac{ch\xi}{(2n+2)!}x^{2n+2}.(\xi\quad 0\ x\quad)$

20. 解析: 要使得 $x-(a+b\cos x)\sin x$ 为关于 x 的 5 阶无穷小, 即使得

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(a+b\cos x)\sin x}{x^5}=c(c\neq 0)$,

$\cos x=1-\dfrac{1}{2!}x+\dfrac{1}{4!}x^4+o(x^5),\sin x=x-\dfrac{1}{3!}x^3+\dfrac{1}{5!}x^5+o(x^5)$,

原式 $=\dfrac{x-a(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5))-b(x-\frac{1}{2!}x^3+\frac{1}{4!}x^5-\frac{1}{3!}x^3-90\frac{1}{2!3!}x^5+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5))}{x^5}$

欲使得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-(a+b\cos x)\sin x}{x^5}=c(c\neq 0)$ 即 $,1-a-b=0,\dfrac{1}{3!}a+\dfrac{1}{2!}b+\dfrac{1}{3!}b=0,a=\dfrac{4}{3},b=-\dfrac{1}{3}$.

$\therefore a=\dfrac{4}{3},b=-\dfrac{1}{3}$ 时 $x-(a+b\cos x)\sin x$ 为 x 的 5 阶无穷小.

第四节　函数的单调性与极值判定

☞ 教材见 214 页

1. 解析:1.（1） A（2） D（3） B（4） A（5） A（6)B（7） B.

2. 解析:

(1)$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, $f'(x)=3-3x^2$.

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\pm 1$

当 $-1<x<1$ 时,$f'(x)>0$ 故在 $f(x)(-1,1)$ 上单调增加;

当 $x<-1$ 或 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1),(1,+\infty)$ 上单调减少.

(2)$f(x)$ 的定义域为 $x\geqslant 0,f'(x)=\dfrac{100-x}{2\sqrt{x}(x+100)^2}$

故 $f(x)$ 在 $[0,100)$ 上单调增加，在 $(100,+\infty)$ 上单调减少.

(3) 由于 $f'(x)=\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, 易知 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调增加, 在 $(-\infty,-1),(1,+\infty)$ 上单调减少.

(4) 当 $x\in\left(k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in Z)$ 时,$f'(x)=1+2\cos 2x$, 令 $f'(x)=0$, 得 $x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi$

当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\pi+k\pi\right)(k\in Z)$ 时,$f'(x)=1-2\cos 2x$, 令 $f'(x)=0$, 得 $x=\dfrac{5}{6}\pi+k\pi$

由极值的第一充分条件知:$f(x)$ 在 $\left(\dfrac{k\pi}{2},\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2}\right)(k\in Z)$ 内单调增加, 在 $\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{k\pi}{2}\right)(k\in Z)$ 内单调减少.

(5)$f'(x)=\dfrac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1),(3,+\infty)$ 上单调增加, 在 $(-1,1),(1,3)$ 上单调减少.

(6)$f'(x)=\dfrac{2x-x^2\ln 2}{2^x}$, 故 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{2}{\ln 2}\right)$ 上单调增加，在 $(-\infty,0),\left(\dfrac{2}{\ln 2},+\infty\right)$ 上单调减少.

(7)$f'(x)=x^{n-1}e^{-x}(n-x)$, 故 $f(x)$ 在 $[0,n)$ 上单调增加，在 $(n,+\infty)$ 上单调减少.

(8) 利用对数求导法，得 $f'(x)=\dfrac{2(3x-2a)}{3(2x-a)^{\frac{2}{3}}(x-a)^{\frac{1}{3}}}$.

故 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{2}{3}a,a\right)$ 上单调减少，在 $\left(-\infty,\dfrac{2a}{3}\right),(a,+\infty)$ 上单调增加.

3. 解析:

(1)$f'(x)=4x^3-4x=4x(x^2-1)$

令 $f'(x)=0$, 得 $x=0,\pm 1.f''(x)=4(3x^2-1),f''(0)<0,f''(\pm 1)>0$, 故该函数在 $x=0$ 处取得极大值 5，在 $x=\pm 1$ 处该函数取得极小值 4.

(2)$f'(x)=\dfrac{x(x+4)(x-1)}{(x+1)^3}$ 令 $f'(x)=0$ 得 $x=0,-4,1.x=-1$ 处导数不存在. 列表讨论易知：极大值为，$f(-4)=-\dfrac{32}{3}$，$f(0)=0$, 极小值为 $f(1)=-\dfrac{1}{4}$.

(3)$f'(x)=\begin{cases}3-3x^2 & x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})\\ 3x^2-3 & x\in(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)\end{cases}$

根据极值的第一充分条件知：$x=0,\pm\sqrt{3}$ 处该函数取得极小值 0，$x=\pm1$ 处该函数取得极大值 2.

(4)$f'(x)=e^x(\cos x+\sin x)$.

$f'(x)=0\Rightarrow x=\dfrac{3}{4}\pi+k\pi\,(k\in Z)$

易知极大值为 $f\left(\dfrac{3}{4}\pi+2k\pi\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}$, 极小值为 $f\left(-\dfrac{1}{4}\pi+2k\pi\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{4}\pi+2k\pi}$

(5)$f'(x)=2x+\dfrac{54}{x^2}.f'(x)=0\Rightarrow x=-3$ 易知极小值为 $f(-3)=27$.

(6)$f'(x)=\dfrac{1-x}{1+x^2}.f'(x)=0\Rightarrow x=1$ 故极大值为 $f(1)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\ln 2$

4. 证明:

(1) 令 $f(x)=e^x-xe^x-1,f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(0)=0$. $x>0$ 时，$f'(x)=-xe^x$，显然 $f'(x)<0$. 故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调减少，$x>0$ 时，$f(x)<f(0)=0$，即 $e^x-1<xe^x$.

(2) 令 $f(x)=\sin x+\cos x-1-x+x^2,f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且 $f(0)=0$.

$x>0$ 时,$f'(x)=\cos x-\sin x+2x-1$, 显然 $f'(0)=0$. 故 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加, 即 $f'(x)>f'(0)=0$,

进而有 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调增加,$x>0$ 时,$f(x)>f(0)$, 即 $\sin x+\cos x>1+x-x^2$.

(3) 令 $f(x)=\tan x-x-\dfrac{1}{3}x^3,f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上连续, 且 $f(0)=0$.

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时,$f'(x)=\sec^2x-1-x^2=\tan^2x-x^2>0$, 故 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加, 从而 $f(x)>f(0)=0$, 即 $\tan x>x+\frac{1}{3}x^3$.

(4) 令 $f(x)=2^x-x^2,f(x)$ 在 $(4,+\infty)$ 上连续, 且 $f(4)=0.x>4$ 时,$f'(x)=2^x\ln 2-2x,f'(4)>0,f''(x)=2^x(\ln 2)^2-2>0$, 故而 $f'(x)$ 在 $[4,+\infty)$ 内单调增加, 即当 $x>4$ 时,$f(x)>f(4)=0$, 于是 $2^x>x^2$, 得证.

(5) 令 $f(x)=\ln(1+x)-\dfrac{\arctan x}{1+x},f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续, 且 $f(0)=0$.

$x>0$ 时,$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{\arctan x}{(1+x)^2}-\dfrac{1}{(1+x)(1+x^2)}=\dfrac{\arctan x}{(1+x)^2}+\dfrac{x^2}{(1+x)(1+x^2)}>0$

即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加,$f(x)>f(0)=0$, 即 $\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}$.

(6) 令 $f(x)=1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2},f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续, 且 $f(0)=0$.

$x>0$ 时,$f'(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)>0$, 即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加,$f(x)>f(0)=0$, 即 $1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)>\sqrt{1+x^2}$.

5. 解析:

(1) 函数 $f(x)$ 在 $[-3,10]$ 上连续，必能取得最大值和最小值.

$f'(x)=2x-4=2(x-2),f(x)$ 有一个驻点 $x=2$. 因为 $f(-3)=27,f(2)=2,f(10)=66$ 比较后知 $f(x)$ 在 $[-3,10]$ 上的最大值为 $f(10)=66$, 最小值为 $f(2)=2$.

(2)$f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$,$f'(x)=0\Rightarrow x=\pm1$. 又因为 $x>0$, 所以 $x=1$ 是唯一的驻点.$f(1)=\dfrac{1}{2}$ 是极大值点即是最大值点. 又因为对任意的 $x>0$ 有 $f(x)>0$, 故 $f(0)=0$ 即为最小值点.

(3) 当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时,$f(x)=-x^2+3x-2$;

当 $-10\leqslant x<1$ 或 $2<x\leqslant 10$ 时,$f(x)=x^2-3x+2$;

$f'(x)=0\Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$,$f(-10)=132$,$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$,$f(10)=72$, 比较得 $f(x)$ 的最大值为 $f(-10)=132$,, 最小值为 $f(1)=f(2)=0$.

(4)$f'(x)=1-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$, $f'(x)=0\Rightarrow x=\dfrac{3}{4}$

由 $f(-5)=-5+\sqrt{6}$,$f\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{5}{4}$,$f(1)=1$ 得, 函数 $f(x)$ 的最大值为 $f\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{5}{4}$, 最小值为 $f(-5)=-5+\sqrt{6}$.

6. 解析:$f(x)=x^3-6x^2+9x-10\Rightarrow f'(x)=3x^2-12x+9$,

$f'(x)=0\Rightarrow x_1=3,x_2=1$, 易得 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 内单调减少, 在 $(-\infty,1],[3,+\infty)$ 内单调增加,$f(1)=-6<0$,$f(3)=-10<0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, 所以 $f(x)$ 仅在 $(3,+\infty)$ 内又一个实根.

7. 解析: 令 $f(x)=\ln x-ax\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x}-a$.$f'(x)=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{a}$,$f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调增加, 在 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调减少,$f\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln a-1$,$f(x)$ 的根的数目取决于 a 的取值范围.

当 $0<a<\dfrac{1}{e}$ 时,$f\left(\dfrac{1}{a}\right)>0$, 此时 $\ln x=ax$ 有两个实根;

当 $a=\dfrac{1}{e}$ 时,$f\left(\dfrac{1}{a}\right)=0$, 此时 $\ln x=ax$ 有唯一实根 $x=e$;

当 $a>\dfrac{1}{e}$ 时,$f\left(\dfrac{1}{a}\right)<0$, 此时 $\ln x=ax$ 无实根.

8. 证明:$f(x)=e^x-x-1\Rightarrow f'(x)=e^x-1$.

$f'(x)=0\Rightarrow x=0$. 当 $x<0$ 时,$f'(x)<0$, 当 $x>0$ 时,$f'(x)>0$, 且 $f(0)=0$, 故而 $e^x=x+1$ 只有一个实根.

9. 解析:$f(x)=x^5+2ax^3+3bx+4c\Rightarrow f'(x)=5x^4+6ax^2+3b$,$\Delta=36a^2-60b<0$, 故 $f'(x)>0$, 即 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内为增函数.

又 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, 所以方程 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0$ 有且仅有一个实根.

10. 解析:$f'(x)=\dfrac{x(2b^2-3x^2)}{\sqrt{b^2-x^2}}$.$f'(x)=0\Rightarrow x_1=0,x_2=\dfrac{\sqrt{6}b}{3}$ $(0\leqslant x\leqslant b)$.

又因为 $f(0)=f(b)=0$, $f\left(\dfrac{\sqrt{6}b}{3}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}b^3$. 比较知 $f(x)$ 的最大值为 $f\left(\dfrac{\sqrt{6}b}{3}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}b^3$, 最小值为 $f(0)=f(b)=0$.

11. 解析:$f(x)=\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$,$f'(x)=-\dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$

当 n 为偶数时,$f'(x)\leqslant 0$ 恒成立, 故此时 $f(x)$ 无极值;

当 n 为奇数时, 令 $f'(x)=0\Rightarrow x=0$, 由极值的第一充分条件知: $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内为增函数, 在 $(0,+\infty)$ 内为减函数, 该函数在 $x=0$ 处取得极大值 $f(0)=1$.

12. 解析: 设内接矩形与椭圆在第一象限的交点为 $P(a\cos\theta,b\sin\theta)\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 内接矩形的面积记为

S, 则

$$S=4ab\sin\theta\cos\theta=2ab\sin 2\theta$$

显然当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 时 , $S_{\max}=2ab$, 即为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的内接矩形中面积的最大值.

13. 解析: 设切点坐标为 $P\left(\dfrac{1}{2}\cos\alpha,\sin\alpha\right)$, 所求的三角形面积为 S, 则切线的直线方程为

$$(2\cos\alpha)\,x+(\sin\alpha)\,y=1$$

切线与坐标轴的交点为 $A\left(\dfrac{1}{2\cos\alpha},0\right),B\left(0,\dfrac{1}{\sin\alpha}\right)$, 于是该切线与坐标轴所围成的三角形的面积为

$S=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2\cos\alpha}\times\dfrac{1}{\sin\alpha}=\dfrac{1}{2\sin 2\alpha}$

显然当 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$, 即切点坐标为 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时,$S_{\min}=\dfrac{1}{2}$.

14. 解析: 设圆锥形漏斗的高为 h, 体积为 V, 由题意知

$V=\dfrac{1}{3}\pi\left(400-h^2\right)h,0<h<20\Rightarrow V'=\dfrac{1}{3}\pi\left(400-3h^2\right)$

$V'=0\Rightarrow h=\dfrac{20}{\sqrt{3}}$ 因为 $V=-2\pi h<0$, 故当 $h=\dfrac{20}{\sqrt{3}}$ 时取得极大值同时也是最大值.

15. 解析: 设漏斗的高度为 h, 体积为 V, 由题意得

$V=\dfrac{1}{3}\pi\left(R^2-h^2\right)h\Rightarrow V'=\dfrac{1}{3}\pi\left(R^2-3h^2\right)$

令 $V'=0\Rightarrow h=\frac{R}{\sqrt{3}}$, 截取的扇形弧长为 $l=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi R$, 此时留下的扇形中心角为 $\phi=2\pi-\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$.

16. 解析: 物体受到桌面的支持力为 F_N 由力的正交分解原理有

$\begin{cases}F\sin\alpha+F_N=mg\\F\cos\alpha=\mu F_N\end{cases}$ 解得 $F=\dfrac{\mu mg}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}$

$$\Rightarrow F'=\frac{-\mu mg\left(\mu\cos\alpha-\sin\alpha\right)}{\left(\cos\alpha+\mu\sin\alpha\right)^2}$$

令 $F'=0\Rightarrow\tan\alpha=\mu=\dfrac{1}{4}$, 即力与水平线的夹角为 $\alpha=\arctan\dfrac{1}{4}$ 时, 力 F 最小.

17. 解析:$f\left(x\right)=\left(x-5\right)^2\sqrt[3]{\left(x+1\right)^2}$ 运用对数求导法

$f'\left(x\right)=\left(\dfrac{2}{x-5}+\dfrac{2}{3\left(x+1\right)}\right)\left(x-5\right)^2\sqrt[3]{\left(x+1\right)^2}=\dfrac{4\left(2x-1\right)\left(x-5\right)}{3\sqrt[3]{x+1}}$

$f'\left(x\right)=0\Rightarrow x_1=\dfrac{1}{2},x_2=5,x=-1$ 时该函数不可导.

所以该函数在 $\left(-1,\dfrac{1}{2}\right),(5,+\infty)$ 上为单调递增函数, 在 $(-\infty,-1)\,,\left(\dfrac{1}{2},5\right)$ 为单调递减函数.

18. 解析:$f\left(x\right)=|x|\,e^{-|x-1|}\Rightarrow f'\left(x\right)=\begin{cases}\left(1-x\right)e^{-(x-1)} & x>1\\\left(1+x\right)e^{x-1} & 0<x<1\\-\left(1+x\right)e^{x-1} & x<0\end{cases}$

显然 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)\,,(0,1)$ 内为增函数;$f(x)$ 在 $(-1,0)\,,(1,+\infty)$ 故该函数取得极大值为 $f\left(-1\right)=e^{-2},f\left(1\right)=1$, 取得极小值为 $f\left(0\right)=0$.

19. 证明:$f\left(x\right)=1+\dfrac{x^2}{2}-e^{-x}-\sin x,f'\left(x\right)=x+e^{-x}-\cos x$

$f'(0)=0$,$f'(x)$ 在 $=0$ 处连续. 当 $0<x<1$ 时,$f''(x)=1-e^{-x}+\sin x>0$,, 故 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上也为增函数, 从而 $f'(x)>0$, 即可表明 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上也为增函数,$f(x)>f(0)=0$.

所以当 $0<x<1$ 时,$e^{-x}+\sin x<1+\dfrac{x^2}{2}$.

20. 证明: 对任意的 $x\neq 0$ 有,

$e^{-\frac{3}{|x|}}\leqslant e^{-\frac{1}{|x|}\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right)}\leqslant e^{-\frac{1}{|x|}}, \lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{3}{|x|}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{1}{|x|}}=0.$

由极限的夹逼性可知,$\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{1}{|x|}\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)}=f(0)=0$, 从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

当 $x\neq 0$ 时,$f(x)$ 可导, 又因为

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}\left(2+\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)}\mathrm{sgn}x\neq 0$$

$x=0$ 显然为该函数的极值点, 也为唯一的极值点.

21. 证明:$f(x)=\dfrac{1}{p}x^p+\dfrac{1}{q}-x, f'(x)=x^{p-1}-1$

$f'(x)=0\Rightarrow x=1$

当 $0<x<1$ 时,$f'(x)<0$,, 故 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为递增函数.$f(1)=0$ 为函数的唯一的极值点同时也是最小值点. 所以 $x>0$ 时有 $f(x)\geqslant f(1)=0$, 即 $\dfrac{1}{p}x^p+\dfrac{1}{q}\geqslant x$.

22. 证明:$f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2, f(1)=0$.

$f'(x)=2x\ln x-x-\dfrac{1}{x}+2, f'(1)=0$, 由函数表达式易知, 当 $0<x<1$ 时,$f'(x)<0$, 即 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上为减函数;

由 $f''(x)=1+2\ln x+\dfrac{1}{x^2}$ 易知当 $x>1$ 时,$f''(x)>0$, 即 $f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数,$f'(x)>0$, 进而 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内为增函数.

综上,$f(1)=0$ 该函数的极小值也为最小值, 于是 $x>0$ 时,$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$ 得证.

23. 证明:$f(x)=x^m(a-x)^n, f'(x)=x^{m-1}(a-x)^{n-1}[ma-(m+n)x]$

令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=\dfrac{ma}{m+n}, x_2=0, x_3=a.x=\dfrac{ma}{m+n}$ 是函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上的唯一极大值点即是最大值点, 此时 $f\left(\dfrac{ma}{m+n}\right)=\dfrac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}a^{m+n}$

24. 证明: 记 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x, f'(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}\right]$

令 $\varphi(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}, \varphi'(x)=-\dfrac{1}{x(x+1)^2}$, 当 $x<-1$ 时,$\varphi'(x)>0$ 即 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 内单调增加, 又因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=0$, 所以 $\varphi(x)>0$.

进而 $f'(x)>0,\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 内单调增加.

第五节 曲线的凹凸性与拐点

☞ 教材见 221 页

1. 解析:

(1) 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, $y'=6x-3x^2, y''=6-6x.y''=0\Rightarrow x=1$.

$x\in(-\infty,1)\,,y''>0;x\in(1,+\infty)\,,y''<0$, 所以在 $(-\infty,1)$ 内是凹的, 在 $(1,+\infty)$ 内是凸的, 拐点为 $(1,2)$

(2)$y=\dfrac{a^2}{a^2+x^2}\,(a>0)\Rightarrow y'=a^2\left[-\dfrac{2x}{(a^2+x^2)^2}\right],y''=-2a\dfrac{a^4-2a^2x^2-3x^4}{(a^2+x^2)^4}$

$y''=0\Rightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

$x\in\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}a\right),y''>0;x\in\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}a,\dfrac{\sqrt{3}}{3}a\right),y''<0;x\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}a,+\infty\right),y''>0$

当 $x\in\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}a\right),x\in\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a,+\infty\right)$ 时, 曲线是凹的; 当 $x\in\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}a,\dfrac{\sqrt{3}}{3}a\right)$ 时曲线是凹的。拐点为 $\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}a,\dfrac{3a^2}{4}\right)$

(3) 函数的定义域为 $x\neq 0$

$y'=1+\dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}},y''=\dfrac{5}{3}\times\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}},x=0$ 时二阶导数不存在.

当 $x\in(-\infty,0)\,,y''<0$, 曲线是凸的; 当 $x\in(0,+\infty)\,,y''>0$, 曲线是凹的. 拐点为 $(0,0)$.

(4) 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$

$y'=1+\cos x,y''=-\sin xy''=0\Rightarrow x=k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\pm3......$

$x\in(2k\pi,2\,(k+1)\,\pi)\,,y''<0$, 曲线是凸的;$x\in(2\,(k+1)\,\pi,2\,(k+2)\,\pi)\,,y''>0$, 曲线是凹的. 拐点为 $(k\pi,k\pi)$

(5) 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$

$y'=\dfrac{2x}{1+x^2},y''=\dfrac{2\,(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\dfrac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2}=\dfrac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$

$x\in(-\infty,-1)\,,y''<0;x\in(-1,1)\,,y''>0;x\in(1,+\infty)\,,y''<0$

故而曲线在 $(-1,1)$ 内是凹的, 在 $(-\infty,-1)\,,(1,+\infty)$ 内是凸的, 拐点为 $(\pm1,\ln 2)$

(6) 函数的定义域为 $x>0$

$y'=\sin(\ln x)+x\cos(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}=\sin(\ln x)+\cos(\ln x)\,,y''=\cos(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}-\sin(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}$

$y''=0\Rightarrow\cos(\ln x)-\sin(\ln x)=0,\ln x=k\pi+\dfrac{\pi}{4},x=e^{k\pi+\dfrac{\pi}{4}}$

当 $x\in\left(e^{2k\pi-\frac{3\pi}{4}},e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}\right)$ 时,$y''>0$, 曲线是凹的;

当 $x\in\left(e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}},e^{2k\pi+\frac{5\pi}{4}}\right)$ 时,$y''<0$, 曲线是凸的.

曲线拐点为 $\left(e^{k\pi+\frac{\pi}{4}},\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\right)$

3. 证明:$x\in(-\infty,+\infty)$

$y'=\dfrac{(x^2+1)-(x-1)\,2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$

$y''=\dfrac{(-2x+2)\,(x^2+1)^2-(x^2+2x+1)\cdot 2\,(x^2+1)\,2x}{(x^2+1)^4}=\dfrac{2x^3-6x^2-6x+2}{(x^2+1)^3}$

$y''=0\Rightarrow 2x^3-6x^2-6x+2=2\,(x^3-3x^2-3x+1)=2\,[(x+1)\,(x^2-x+1)-3x\,(x+1)]=(x+1)\,(x^2-4x+1)=0$

得 $x_1=-1,x_{2,3}=2\pm\sqrt{3}$, 相应地 $y_1=-1,y_2=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4},y_3=-\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$

$\because\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1},\therefore$ 曲线

$y=\frac{x-1}{x^2+1}$ 有三个拐点在同一条直线上.

5. 证明:$y=x^n\,(n>1)\,,y'=nx^{n-1},y''=n\,(n-1)\,x^{n-2},x\in(0,+\infty)$

当 $n>1$ 时,$y''>0$, 故是凹的; 当 $0<n<1$ 时,$y''<0$, 故是凸的;

$y=e^x$, $y'=e^x$, $y''=e^x$, 当 $x\in(0,+\infty)\,4$ 时, $y''>0$ 故是凹的;

$y=x\ln x,y'=\ln x+1,y''=\frac{1}{x}$, 当 $x\in(0,+\infty)$ 时 $y''>0$, 故是凹的

$y=\ln x,y'=\frac{1}{x},y''=-\frac{1}{x^2}$, 当 $4x\in(0,+\infty)$ 时,$y''<0$, 故是凸的.

6. 解析:$f'\,(x)=3ax^2+2bx+c,f''\,(x)=6ax+2b$

由题意可知,

$$\begin{cases}f'(2)=0\\f''(1)=0\\f(1)=-10\\f(-2)=44\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}12a+4b+c=0\\6a+2b=0\\a+b+c=-10\\-8a+4b-2c+d=44\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\b=9\\c=0\\d=-16\end{cases}$$

7. 解析:

(1) 可知函数 $f(x)=x^n$ 的定义域为 $(0,+\infty)$

则 $f'(x)=nx^{n-1},f''(x)=n(n-1)x^{n-2},n>1,f''(x)>0$, 曲线是凹的,

根据定义可知对任意的 $x,y>0$ 都有等式 $\frac{(x^n+y^n)}{2}>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n$ 成立.

(2) 可知 $f(x)=e^x$, 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,

则 $f'(x)=e^x,f''(x)=e^x.f''(x)>0$, 时, 曲线是凹的.

根据定义可知对于任意的 $x\neq y$, 都有等式 $\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}$ 成立.

(3) 可知 $f(x)=x\ln x$, 函数的定义域为 $(0,+\infty)$

则 $f'(x)=\ln x+1,f''(x)=\frac{1}{x}$, 当 $x>0$ 时,$f''(x)>0$, 曲线是凹的

根据定义可知对任意的 $x,y>0$ 且 $x\neq y$ 都有等式 $\frac{(x\ln x+y\ln y)}{2}>\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2}$ 成立,

即 $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$ 成立.

9. 解析: 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$

则 $y'=4(x+1)^3+e^x,y''=12(x+1)^2+e^x,y''>0$

故函数的图形没有拐点，处处是凹的.

第六节　函数图形的描绘

☞ 教材见 229 页

2. 解析:$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+x}{(x-2)\,(x+3)}=\infty\ \lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+x}{(x-2)\,(x+3)}=\infty$, 故 $x=2,x=-3$ 为曲线的铅直渐近线;

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{(x-2)\,(x+3)}=1$, 故 $y=1$ 为曲线的水平渐近线.

4. 解析:$\lim\frac{y}{x}=\lim\frac{y}{x+1}=1,\lim\,(y-x)=\lim\frac{-x}{x+1}=1$, 故 $y=x-1$ 是一条渐近线;

$x\to-1,y\to\infty$, 故 $x=-1$ 杀一条垂直渐近线

$y' = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2$

8. 解析:$2x \neq k\pi - \dfrac{\pi}{2}$

$y' = \dfrac{-\sin x\cos 2x + 2\sin 2x\cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{-\sin x\left(1-2\sin^2 x\right)+4\sin x\left(1-\sin^2 x\right)}{\sin^2 x} = \dfrac{\sin x\left(3-2\sin^2 x\right)}{\sin^2 x} = 0$

第七节　曲　率

☞ 教材见 239 页

1. 解析:$f(x) = x^2+3x+2; f'(x) = 2x+3; f''(x) = 2$

$\therefore K(x) = \dfrac{|f''(x)|}{\left[1+f'(x)^2\right]^{3/2}} = \dfrac{2}{\left[1+(2x+3)^2\right]^2}$

$\therefore K(1) = \dfrac{2}{26^{3/2}} \Rightarrow R(1) = \dfrac{1}{K(x)} = 13\sqrt{26}$

2. 解析:$y = \ln x; y' = \dfrac{1}{x}; y'' = -\dfrac{1}{x^2}$

$\therefore K(x) = \dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{\frac{1}{x^2}}{(1+\frac{1}{x^2})} = \dfrac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}(x>0)$

$K'(x) = \dfrac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}} - x\cdot\dfrac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x}{(x^2+1)^3} = \dfrac{1-2x^2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}(x>0)$

则有:$0<x\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时,$K'(x)\geqslant 0$;$x\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时,$K'(x)\leqslant 0$

$\therefore x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时,$K(x)_{\max} = K(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

3. 解析: 对 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 两边对 x 求导, 得:$\dfrac{2x}{a^2} - \dfrac{2yy'}{b^2} = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{b^2x}{a^2y}$

$\therefore y'' = \dfrac{\mathrm{d}\,y'}{\mathrm{d}\,x} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(\frac{b^2x}{a^2y}) = \dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{y-xy'}{y^2} = \dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{y-\dfrac{b^2x^2}{a^2y}}{y^2} = -\dfrac{b^4}{a^2y^3}$

$\therefore K = \dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{a^4b^4}{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{ab}{(\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow R = \dfrac{(\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}$

4. 解析: 由 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 得 $b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$

两边对 x 求导, 得 $\dfrac{2x}{a^2} + \dfrac{2yy'}{b^2} = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x}{y}$

$\therefore y'' = \dfrac{\mathrm{d}\,y'}{\mathrm{d}\,x} = -\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{y-xy'}{y^2} = -\dfrac{b^4}{a^2}\dfrac{1}{y^3}$

$\Rightarrow K = \dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{\frac{b^4}{a^2}\frac{1}{|y^3|}}{(1+\dfrac{b^4}{a^4}\dfrac{x^2}{y^2})^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{a^4b^4}{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{ab}{(a^2-\dfrac{a^2-b^2}{a^2}x^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\Rightarrow R = \dfrac{1}{K} = \dfrac{(a^2-\dfrac{a^2-b^2}{a^2}x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}$

5. 解析: 由 $\begin{cases} x(t) = a(t-\sin t) \\ y(t) = a(1-\cos t) \end{cases}$ $\begin{cases} x'(t) = a(1-\cos t) \\ y'(t) = a\sin t \end{cases}$;$\begin{cases} x''(t) = a\sin t \\ y''(t) = a\cos t \end{cases}$

$$\Rightarrow K=\frac{|x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)|}{\left[x'(t)^2+y'(t)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{|a^2\cos t(1-\cos t)-a^2\sin^2 t|}{\left[a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{a^2(1-\cos t)}{[2a^2(1-\cos t)]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{4a}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\cos t}}=\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{ay}}$$

$\Rightarrow R=\frac{1}{K}=\frac{4\sqrt{ay}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2ay}$

6. 解析:$r=a(1+\cos\varphi)\Rightarrow r'=-a\sin\varphi;r''=-a\cos\varphi$

$$\Rightarrow K=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|a^2(1+\cos^2\varphi)+2a^2\sin^2\varphi-a(1+\cos\varphi)(-a\cos\varphi)|}{\left[a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{3a^2(1+\cos\varphi)}{a^3\cdot 2\sqrt{2}(1+\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{2\sqrt{2}a\sqrt{1+\cos\varphi}}=\frac{3}{2\sqrt{2}\sqrt{ar}}$$

$$\Rightarrow R=\frac{1}{K}=\frac{2\sqrt{2ar}}{3}$$

7. 解析:$r^2=a^2\cos 2\varphi\Rightarrow 2rr'=-a^2\sin(2\varphi)\cdot 2\Rightarrow r'=-\frac{a^2}{r}\sin(2\varphi)$

$$\Rightarrow r''=\frac{d(-\frac{a^2}{r}\sin(2\varphi))}{d\varphi}=-\frac{r^2\cdot 2a^2\cos(2\varphi)+a^4\sin^2(2\varphi)}{r^3}=-\frac{a^4(1+\cos^2(2\varphi))}{r^3}$$

$$\Rightarrow K=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{r^4+2a^4\sin^2(2\varphi)+a^4(1+\cos^2(2\varphi))}{\frac{1}{r}(r^4+a^4\sin^2(2\varphi))^{\frac{3}{2}}}=\frac{3r}{a^2}$$

$$\Rightarrow R=\frac{1}{K}=\frac{a^2}{3r}$$

8. 证明: 由 $y=a\cdot ch\frac{x}{a}\Rightarrow y'=a\cdot sh\frac{x}{a}\cdot\frac{1}{a}=sh\frac{x}{a};y''=\frac{1}{a}\cdot ch\frac{x}{a}$

$$\therefore K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|\frac{1}{a}ch\frac{x}{a}|}{(1+sh^2\frac{x}{a})^{\frac{3}{2}}}=\frac{|\frac{1}{a}ch\frac{x}{a}|}{|ch\frac{x}{a}|^3}=\frac{\frac{1}{a}}{ch^2\frac{x}{a}}=\frac{a}{ch^2\frac{x}{a}}=\frac{a}{y^2}$$

$\therefore R=\frac{1}{K}=\frac{y^2}{a}$ 得证.

9. 解析:$y^2=2px\Rightarrow x=\frac{y^2}{2p}\Rightarrow x'=\frac{y}{p};x''=\frac{1}{p}$

根据 $\begin{cases}\alpha=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}\\ \beta=y+\frac{1+y'^2}{y''}\end{cases}$ 得

渐屈线参数方程为:

$$\begin{cases}\alpha=y-\frac{x'(1+x'^2)}{x''}=-\frac{y^3}{p^2}\\ \beta=x+\frac{1+x'^2}{x''}=3x+p\end{cases}$$

$\Rightarrow\alpha^2=\frac{y^6}{p^4}=\frac{(2px)^3}{p^4}=\frac{8p^3(\frac{\beta-p}{3})^3}{p^4}$

即:$27p\alpha^2=8(\beta-p)^3$

10. 解析:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow y'=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y};y''=-\frac{b^4}{a^2y^3}$

$$\text{由}\begin{cases}\alpha=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=x+\frac{\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}(1+\frac{b^4}{a^4}\frac{x^2}{y^2})}{-\frac{b^4}{a^2y^3}}=x-\frac{x(a^4y^2+b^4x^2)}{a^4b^2}=\frac{a^2-b^2}{a^4}x^3\\ \beta=y+\frac{1+y'^2}{y''}=y+\frac{1+\frac{b^4}{a^4}\frac{x^2}{y^2}}{-\frac{b^4}{a^2y^3}}=y-\frac{y}{a^2b^4}(a^4y^2+b^4x^2)=-\frac{a^2-b^2}{b^4}y^3\end{cases}\text{得}$$

渐屈线参数方程为:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{a^2-b^2}{a^4}x^3 \\ \beta = -\dfrac{a^2-b^2}{b^4}y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (\dfrac{a^4\alpha}{a^2-b^2})^{\frac{1}{3}} \\ y = -(\dfrac{b^4\beta}{a^2-b^2})^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

所以渐屈线方程为

$$\frac{(\frac{a^4\alpha}{a^2-b^2})^{\frac{2}{3}}}{a^2} + d\frac{(\frac{b^4\beta}{a^2-b^2})^{\frac{2}{3}}}{b^2} = 1$$

即

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}} + (b\beta)^{\frac{2}{3}} = (a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$$

11. 解析:$y = \tan x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, y'' = \dfrac{2\tan x}{\cos^2 x}$

$\therefore y'|_{x=\frac{\pi}{4}} = 2, y''|_{x=\frac{\pi}{4}} = 4$

根据公式得:

$$\begin{cases} \alpha|_{x=\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2(1+2^2)}{4} = \dfrac{\pi-10}{4} \\ \beta|_{x=\frac{\pi}{4}} = 1 + \dfrac{1+2^2}{4} = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

根据 K 的公式可得:$K|_{x=\frac{\pi}{4}} = \dfrac{4}{(1+2^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow R|_{x=\frac{\pi}{4}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{4}$

则有所求曲率圆方程为:

$$(x - \frac{\pi-10}{4})^2 + (y - \frac{9}{4})^2 = \frac{125}{16}$$

12. 解析:$y = \dfrac{x^2}{10000} \Rightarrow y' = \dfrac{2x}{10000}, y'' = \dfrac{2}{10000}$

$\therefore R|_{x=0} = \dfrac{1}{K}|_{x=0} = \dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}|_{x=0} = \dfrac{1}{\frac{2}{10000}} = 5000$

根据 $N - G = m\dfrac{v^2}{R}$ 得:

$$N = G + m\frac{v^2}{R} = m(g + \frac{v^2}{R}) = 1246(N).$$

第八节　总 习 题 三

☞ 教材见 247 页

2. 解析: 设 $f(x) = 3arccosx - arccos(3x-4x^3)$ 则 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}\right]$, 在 $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ 上可导, 所以 $f'(x) = 0$, 即 $f(0) = \pi$, 即 $f(x) = \pi$. 得证.

4, 解析:$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$

设 $F(x) = f(x)f(1-x)$

$F'(x) = f'(x)f(1-x) - f(x)f'(1-x)$

因为 $f(0) = 0, \therefore F(1) = 0, F(0) = 0$,

由罗尔定理得, 在 $[0,1]$ 内必有 ξ 使得 $F'(\xi) = 0, \therefore f'(x)f(1-x) - f(x)f'(1-x) = 0$

$\therefore \dfrac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \dfrac{f'(1-\zeta)}{f(1-\zeta)}$ 在 $[0,1]$ 内 $f(x) \neq 0$ 此式成立.

5. 证明: 设 $F(x) = f(x) \cdot \sin(x) \Rightarrow F'(x) = \cos(x)f(x) + \sin(x)f'(x)$

$\because f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0, \therefore F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0, F(0) = 0$

且 $f(x)$, $\sin x$ 在 $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ 连续在 $(0, \dfrac{\pi}{2})$ 内可导 $\therefore F(x)$ 在此区间上有同样的性质, 根据罗尔定理得在 $(0, \dfrac{\pi}{2})$ 上必有一点 ξ 使得 $F'(x) = 0$, 即 $\cos(\xi)f(\xi) + \sin(\xi)f'(\xi) = 0$.

整理后即得结果为

$$f(\xi) + \tan(\xi) f'(\xi) = 0$$

7. 证明: 构造函数 $f'(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}, g'(x) = \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}$

因为 $|f'(x)| < g'(x)$, 所以

$$\left|\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right| < \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

又因为 $x > a$, 得

$$|f(x) - f(a)| < g(x) - g(a).$$

8. 解析:

(1)$\cos x = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2), e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + x^2 + o(x^2) - 1 + \dfrac{1}{2}x^2 - o(x^2)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 + \frac{1}{2}x^2}{x^2} = \dfrac{3}{2}$

(2)$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1+1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right) = 1 + \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}\right)$

应用洛必达法则得 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{(x-1)}{x} + \ln x}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\frac{1-x}{x}}{\frac{(x-1)+x\ln x}{x}}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1-x}{(x-1) + x\ln x}\right)$

洛必达法则得 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1-x}{(x-1) + x\ln x}\right) = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ 原式 $= 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln x \ln(1-x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}}$

由洛必达法则得原式 $= \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-\frac{1}{1-x}}{-\frac{1}{\ln^2 x \cdot x}} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\ln^2 x \cdot x}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\ln^2 x + 2\ln x}{-1} = 0$

(4) 利用等价无穷小, 得 $\ln(1 + \dfrac{1}{x}) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x^2} + o(\dfrac{1}{x^2})$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\left(x - x^2\ln(1 + \dfrac{1}{x})\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(x - x + \dfrac{1}{2} + o(\dfrac{1}{x^2})\right) = \dfrac{1}{2}$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{\pi}{2}\arctan x)^x = \lim\limits_{x\to\infty} e^{x\ln(\frac{\pi}{2}\arctan x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln(\frac{\pi}{2}\arctan x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(\frac{\pi}{2}\arctan x)}{\frac{1}{x}}}$

应用洛必达法则得, 原式 $= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2}\arctan x}\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} -\frac{x^2}{1+x^2}\frac{1}{\arctan x}} = e^{-\frac{2}{\pi}}$

(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{2x-\pi} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} e^{(2x-\pi)\ln(\tan x)} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{(2x-\pi)}}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{(2x-\pi)^2}\cdot 2}}$

$= e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} -\frac{(2x-\pi)^2}{2\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} -\frac{(2x-\pi)^2}{2\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{8x-4\pi}{2\sin x}} = e^o = 1$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+n)}{\sqrt{n}}}$

应用洛必达法则得, 原式 $= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{1+n}} = e^0 = 1$

(8)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(\frac{1}{x}-\cot x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\frac{1}{x}-\cot x)}{x}$

应用洛必达法则, 得原式 =

$\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+\csc^2 x\right)=\lim\limits_{x\to 0}(-\frac{1}{x^2}+d\frac{1}{\sin^2 x})=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\right)$

应用洛必达法则得原式 =

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2x-2\sin x\cos x)}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2x-2\sin x\cos x)}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+\sin^2 x-\cos^2 x)}{6x^2}=\frac{1}{3}$

12. 解析:

(1)$y'=2-\frac{2\cdot 4x\cdot 4}{(4x)^2}=2-\frac{2}{x}$

$y'>0\Rightarrow 2-\frac{2}{x}>0$ 解得 $x\in(1,+\infty)\cup(-\infty,0)$,

$y'<0\Rightarrow 2-\frac{2}{x}<0$ 解得 $x\in(0,1)$

所以该函数的增区间为 $x\in(1,+\infty)\cup(-\infty,0)$, 减区间为 $x\in(0,1)$

(2)$y'=\frac{1+\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$

故函数在整个定义域内单调递增，该函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，所以该函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递增.

13. 解析:

(1)$\ln y=\frac{1}{x}\ln x,(\ln y)'=\frac{y'}{y}=-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$y'=\frac{1-\ln x}{x^2}x^{\frac{1}{x}}=(1-\ln x)x^{(\frac{1}{x}-2)}$

$y'=0\Rightarrow(1-\ln x)x^{(\frac{1}{x}-2)}=0$ 因为 $x^{(\frac{1}{x}-2)}\neq 0$, 故 $1-\ln x=0,x=e$.

当 $x<e$ 时,$y'>0$, 为;$x>e$ 时,$y'<0$, 为减,

所以, 该函数存在极大值, 当 $x=e$ 时, 极大值为 $y=e^{\frac{1}{e}}$.

(2)$\ln y=\frac{1}{3}\ln x+\frac{2}{3}\ln(1-x)\Rightarrow(\ln y)'=\frac{y'}{y}=\frac{1}{3x}-\frac{2}{3(1-x)}$

$y'=[\frac{1}{3x}-\frac{2}{3(1-x)}][x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}]$

$y'=0\Rightarrow[\frac{1}{3x}-\frac{2}{3(1-x)}][x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}]=0$

即 $\frac{1}{3x}-\frac{2}{3(1-x)}=0\Rightarrow x=\frac{1}{3}$

且 $x=0$ 和 $x=1$ 时, 函数的导数不存在, 易知当 $x\in(-\infty,0),(0,\frac{1}{3}),(1,+\infty)$ 时, 导函数大于 0;$x\in(\frac{1}{3},1)$ 时, 导函数小于 0,

所以, 该函数在 $x=\frac{1}{3}$ 处存在极大值, 极大值为 $[y=\frac{1}{3}^{\frac{1}{3}}\frac{2}{3}^{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$; 在 $x=1$ 处存在极小值, 极小值为 0.

14, 解析: 先求 $y=\sqrt[x]{x}$ 的最大值;

$\ln y=\frac{1}{x}\ln x,(\ln y)'=\frac{y'}{y}=-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$\Rightarrow y'=\frac{1-\ln x}{x^2}x^{\frac{1}{x}}=(1-\ln x)x^{(\frac{1}{x}-2)}$

令 $y'=0$, 即 $(1-\ln x)x^{(\frac{1}{x}-2)}=0$, 因为 $x^{(\frac{1}{x}-2)}\neq 0$, 故 $1-\ln x=0,x=e$

当 $x<e$ 时,$y'>0$, 增; 当 $x>e$ 时,$y'<0$, 减.

所以, 当 $x=e$ 时. 函数有最大值, 因为数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 中, 取 $n=2$ 和 $n=3$ 分别代入原函数, 解得 $y=\sqrt{2}$ 和 $y=\sqrt[3]{3}$, 因为 $\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}$, 所以,$n=3$ 时, 数列的最大项为 $\sqrt[3]{3}$.

15. 证明:

因为 $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$(可以利用两式相减，通分后得到)

$\Rightarrow\dfrac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\dfrac{|a|}{1+|a|+|b|}+\dfrac{|b|}{1+|a|+|b|}\leqslant\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$

所以 $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$

17, 解析: 令 $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x+3}\Rightarrow\ln y=\dfrac{2}{3}\ln(x-1)-\ln(x+3)$

$\therefore(\ln y)'=\dfrac{y'}{y}=\dfrac{2}{3(x-1)}-\dfrac{1}{x+3},y'=[\dfrac{2}{3(x-1)}-\dfrac{1}{x+3}]\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x+3}$

$y'=0\Rightarrow x=9$, 不在闭区间 $[0,2]$ 上.y' 在 $x=-3$ 和 $x=1$ 处不存在, 所以 y' 在闭区间 $[0,2]$ 可能的极值点为 $x=1$.

$x=0$ 时,$y=\dfrac{1}{3}$;$x=1$ 时,$y=0$;$x=2$ 时,$y=\dfrac{1}{5}$

所以 $\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)}}{x+3}$ 在闭区间 $[0,2]$ 上的最大值和最小值分别是 $f(1)=\dfrac{1}{3}$ 和 $f(1)=0$.

19. 解析:

(1) 凹凸性:

$\ln y=3\ln(x+1)-2\ln(x-1),(\ln y)'=\dfrac{y'}{y}=\dfrac{3}{(x+1)}-\dfrac{2}{x-1}$

$\Rightarrow y'=[\dfrac{3}{x+1}-\frac{2}{x-1}]y$

$y''=[-\dfrac{3}{(x+1)^2}+\dfrac{2}{(x-1)^2}]y+(\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{x-1})^2y=6y(\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{x-1})^2$

令 $y''>0\Rightarrow 6y(\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{x-1})^2>0$, 即 $y>0\Rightarrow\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}\Rightarrow x\in(-1,1)\cup(1,+\infty)$

令 $y''<0\Rightarrow 6y(\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{x-1})^2<0$, 即 $y<0\Rightarrow\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}\Rightarrow x\in(-\infty,-1)$

所以,$x\in(-1,1)\cup(1,+\infty)$ 时, 函数为凹函数;

$x\in(-\infty,-1)$ 时, 函数为凸函数.

(2) 渐近线: 因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=\infty$, 所以 $x=1$ 为函数的垂直渐近线;

因为 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}}{\underset{x\to\infty}{x}}=1$

$b=\lim\limits_{x\to\infty}[\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}-ax]=\lim\limits_{x\to\infty}[\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}-x]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+2x+1}{x^2-2x+1}=5$

所以函数的斜渐近线为 $y=x+5$.

第四章 一元函数积分学及其应用

☞ 习题见第 124 页

第一节 定积分的概念

☞ 教材见 258 页

4. 解析:

(1) $\int_a^b x\,\mathrm{d}\,x=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(a+\frac{b-a}{n}i)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\left[na+\frac{b-a}{n}\frac{n(n+1)}{2}\right]=\frac{b^2-a^2}{2}$

(2) $\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}\,hx=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}e^{\frac{1}{n}i}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\frac{e^{\frac{n+1}{n}}-e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}}-1}=\lim\limits_{n\to+\infty}(e-1)\frac{\frac{1}{n}}{1-e^{-\frac{1}{n}}}=\lim\limits_{n\to+\infty}(e-1)\frac{t}{1-e^{-t}}=$ $e-1$

(3) $\int_0^b x^2\,\mathrm{d}\,x=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{b}{n}i)^2=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b^3}{n^3}\sum\limits_{i=1}^{n}i^2=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{b^3}{3}$

5. 解析:

(1) 由 $y=\sqrt{a^2-n^2}$ 得 $x^2+y^2=a^2(y\geqslant 0)$, 可知: 原式的几何意义为: 以原点为圆心, 啊为半径的圆在第一象限的面积, 即为:$\frac{\pi}{4}a^2$.

(2) 由 $f(x)=\sin(x)(x\in[-\pi,+\pi])$ 图象可知: 面积代数和为零. 所以:$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(x)\,\mathrm{d}\,x=0$

(3) 由 $f(x)=|x-\frac{a+b}{2}|$ 图象知:$f(a)=f(b)=\frac{b-a}{2}$

所以 $\int_a^b|x-\frac{a+b}{2}|\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}(b-a)f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}$

6. 解析: 金属丝的质量为 $m=\int_0^a kx\,\mathrm{d}\,x=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}k(0+\frac{a}{n}i)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{ka^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{ka^2}{2}$

8. 解析: 当为奇函数时, 函数关于原点对称, 则有 $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}\,x$ 与 $\int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}\,x$ 与 x 轴围成的图形面积相等, 符号相反, 所以有:$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}\,x=0$

当为偶函数时, 函数关于 y 轴对称, 则有 $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}\,x$ 与 $\int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}\,x$ 与 y 轴围成的图形面积相等, 符号相同, 所以有:$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}\,x=2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}\,x$

第二节 定积分的性质

☞ 教材见 265 页

1. 解析:

(1) 利用例 2.1 的结果, 当 $f(x)$ 不等于零时, 因为 $f(x)\geqslant 0$, 而 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ 是述职, 它只有是 0 和不是 0 两种可能, 设若 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x>0$, 则由已证明得例 2.1 结果, 在 $[a,b]$ 上必有 $f(x)\equiv 0$ 不恒等于 0 矛盾, 所以得出结论: 若在 $[a,b]$ 上,$f(x)\geqslant 0$ 且 $f(x)$ 不恒等于 0, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x>0$

$\int_0^1\left(e^x-e^{x^2}\right)\mathrm{d}\,x$ 在 $[0,1]$ 上 $e^x-e^{x^2}\geqslant 0$, 且 $e^x-e^{x^2}$ 不恒等于零, 所以 $\int_0^1\left(e^x-e^{x^2}\right)\mathrm{d}\,x>0$

(3)$\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}\,x-\int_1^2 x^3\,\mathrm{d}\,x=\int_1^2\left(x^2-x^3\right)\mathrm{d}\,x$, 因为在 $[1,2]$ 上 $x^2-x^3\leqslant 0$ 且 x^2-x^3 不恒等于零, 所以 $\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}\,x-\int_1^2 x^3\,\mathrm{d}\,x=\int_1^2\left(x^2-x^3\right)\mathrm{d}\,x$, 进而 $\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}\,x<\int_1^2 x^3\,\mathrm{d}\,x$.

(5) 构造函数 $f(x)=\ln(1+x)-\frac{\arctan x}{1+x}$, 在 [0,1] 上 $f'(x)\dfrac{x^2}{(1+x)(1+x^2)}+\dfrac{\arctan x}{(1+x)^2}>0$, 于是 $\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}\,x>\int_0^1\dfrac{\arctan x}{1+x}\,\mathrm{d}\,x$.

2. 解析:

(1) 只需求出 $f(x)$ 在区间上的最大和最小值 M 与 m, 便可用估值定理估计. 显见 x^2+1 在 $[1,4]$ 上单调增加, 有 m=2,M=17,$x\in(1,4]$, 所以 $6\leqslant\int_1^4\left(x^2+1\right)\mathrm{d}\,x\leqslant 51$.

(3) 记 $f(x)=e^{x^2-x},x\in[0,2]$, 因为 $f'(x)=(2x-1)\,e^{x^2-x}$, 令 $f'(x)=0$, 得到唯一驻点 $x=\dfrac{1}{2}$, 又 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=e^{-\frac{1}{4}},f(0)=1,f(2)=e^2$, 所以 $m=\min f(x)=e^{-\frac{1}{4}},M=\max f(x)=e^x$, 又因为 $b-a=-2$, 所以 $-2e^2\leqslant\int_2^0 e^{x^2-x}\,\mathrm{d}\,x\leqslant-2e^{-\frac{1}{4}}$.

4. 解析: 令 $L(x)=f(x)+\lambda g(x)$,, 则 $L^2(x)=f^2(x)+2\lambda f(x)g(x)+\lambda^2 g^2(x)\geqslant 0$, 从而有 $\int_a^b L^2(x)\,\mathrm{d}\,x\geqslant 0$. 将上式右边视为关于 λ 的二次多项式. 因为 $Ax^2+Bx+C\geqslant 0$,, 可知 $B^2-4AC\leqslant 0$, 从而有 $4(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x)^2\leqslant 4\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}\,x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}\,x$, 从而有 $(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}\,x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}\,x$.

5. 解析: 利用上题的结论, 令 $f(x)=\sqrt{e^{f(x)}},g(x)=\sqrt{e^{-f(x)}}$, 它们都是连续函数, 有

$$\left(\int_a^b e^{\sqrt{e^{f(x)}}}dx^2\right)\left(\int_a^b e^{\sqrt{e^{-f(x)}}}dx^2\right)\geqslant\left(\int_a^b\sqrt{e^{-f(x)}}\sqrt{e^{f(x)}}\,\mathrm{d}\,x\right)^2=(b-a)^2$$

7. 解析: 根据积分中值定理, 在 $[a,b]$ 上, 存在 ξ_1, 满足 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x=f(\xi_1)(a-b)=0$, 得到 $f(\xi_1)=0$ ξ_1 是 $f(x)$ 的一个零点. 假设 ξ_1 是唯一的一个零点, 那么在 (a,ξ_1) 和 (ξ_1,b) 内 $f(x)$ 异号.

假设 (a,ξ_1) 上 $f(x)>0,(\xi_1,b)$ 上 $f(x)<0$. 由 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}\,x=0$ 和 $f(\xi_1)=0$ 得 $0=\int_a^{\xi_1}f(x)(x-\xi_1)\,\mathrm{d}\,x+\int_{\xi_1}^b f(x)(x-\xi_1)\,\mathrm{d}\,x\neq 0$ 矛盾, 所以至少在 (a,b) 上还有一个零点.

第三节 微积分基本公式与基本定理

☞ 教材见 274 页

3. 解析:$\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=(\int_0^x\sin t\,\mathrm{d}\,t)'=\sin x,\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}|_{x=0}=\sin 0=0,\left.\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

5. 解析:

(1)$\int_0^1 4x^2\,\mathrm{d}\,x=\frac{4}{3}x^3\Bigg|_0^1=\frac{4}{3}$

(3)$\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}\,x=-\cos x\Bigg|_0^\pi=2$

(5)$\int_0^a (3x^2-x+1)\,\mathrm{d}\,x=(x^3-\frac{1}{2}x^2+x)\Bigg|_0^a=a^3-\frac{1}{2}a^2+a$

(7)$\int_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})\,\mathrm{d}\,x=\int_4^9 (\sqrt{x}+x)\,\mathrm{d}\,x=(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2)\Bigg|_4^9=\frac{271}{6}$

(9)$\int_0^{\sqrt{3}a} \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\Bigg|_0^{\sqrt{3}a}=\frac{\pi}{3a}$

(11)$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,\mathrm{d}\,x=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x-1)\,\mathrm{d}\,x=(\tan x-x)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$

(13)$\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}\,x+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_{-1}^0 x\,\mathrm{d}\,x+\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}x^2\Bigg|_{-1}^0+\frac{1}{3}x^3\Bigg|_0^1=-\frac{1}{6}$

6. 解析:

(1)$\arctan x$(3)$\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}(5)\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(1+x^3)$

7. 解析:

(1) 忘记了 x^3 对 x 的进一步求导. 正确解:$3x^2\sqrt{1+x^3}$

(3) 错误,$\frac{1}{x}$ 在 $[-1,1]$ 上无界, 不可积.

9. 解析:

(1) 左式 $=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(k+m)x+\sin(k-m)x]\,\mathrm{d}\,x=-\frac{1}{2}\,[\frac{\cos(k+m)x}{k+m}+\frac{\cos(k-m)x}{k-m}]\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$

(2) 左式 $=-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k+m)x-\cos(k-m)x]\,\mathrm{d}\,x=-\frac{1}{2}\,[\frac{\sin(k+m)x}{k+m}-\frac{sin(k-m)x}{k-m}]\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$

(3) 左式 $=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k+m)x+\cos(k-m)x]\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}\,[\frac{\sin(k+m)x}{k+m}+\frac{\sin(k-m)x}{k-m}]\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$

10. 解析:$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,s}=\sin^2 t,\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,s}=2t\cos t$

两式相比得 $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=2t\cot t\csc t$

13. 解析:

(1) 根据洛必达法则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}\,t}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\cos x^2=1$

(3) 根据洛必达法则和等价无穷小

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}dt}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}dt}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x\sqrt{\tan(\sin x)}}{\sec^2 x\sqrt{\sin(\tan x)}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{\tan(\sin x)}{\sin(\tan x)}}=1,(x\to 0^+,\tan x\sim\sin x\sim x)$$

(5) 根据洛必达法则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt}{\displaystyle\int_0^x e^{2t^2}dt}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x^2}}{e^{2x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^{x^2}}=0$

15. 解析: 根据洛必达法则,

$$\lim_{x\to1}\frac{\displaystyle\int_1^x\Big(t\int_t^1 f(u)\,\mathrm{d}\,u\Big)dt}{(1-x)^3}=\lim_{x\to1}\frac{x\displaystyle\int_1^x f(u)\,\mathrm{e}\,\mathrm{d}\,u}{3(1-x)^2}=\lim_{x\to1}\frac{\displaystyle\int_1^x f(u)\,\mathrm{d}\,u+xf(x)}{6(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{2f(x)+xf'(x)}{6}=$$
$$\frac{2f(1)+f'(1)}{6}=\frac{1}{6}$$

16. 解析:

(1) 原式 $=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}\cdot\dfrac{1}{n}=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$

(2) 原式 $=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\frac{i}{n}}{1+(\frac{i}{n})^2}\cdot\dfrac{1}{n}=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$

第四节　不定积分的基本积分法

☞ 教材见 298 页

4. 解析:

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}\,x=\int -d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}+C$

(3) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x}}=\int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\,x=2\sqrt{x}+C$

(5) $\displaystyle\int(1-x+x^3-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})\,\mathrm{d}\,x=\int 1\,\mathrm{d}\,x-\int x\,\mathrm{d}\,x+\int x^3\,\mathrm{d}\,x-\int\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}\,x$

$\displaystyle =x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4-3x^{\frac{1}{3}}+C$

(7) $\displaystyle\int(2^x+3^x)^2\,\mathrm{d}\,x=\int(4^x+9^x+2\times6^x)\,\mathrm{d}\,x=\frac{4^x}{2\ln2}+\frac{9^x}{2\ln3}+\frac{2\times6^x}{\ln6}+C$

(9) $\displaystyle\int\frac{x^2}{3\,(1+x^2)}\,\mathrm{d}\,x=\int(\frac{1}{3}-\frac{1}{3\,(1+x^2)})\,\mathrm{d}\,x=\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\arctan x+C$

(11) $\displaystyle\int\frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x=\int(\frac{1}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}+x^{\frac{3}{2}})\,\mathrm{d}\,x=2\sqrt{x}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$

(13) $\displaystyle\int\tan^2x\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{\sin^2x}{\cos^2x}\,\mathrm{d}\,x=\int(\frac{1}{\cos^2x}-1)\,\mathrm{d}\,x=\tan x-x+C$

(15) $\displaystyle\int\frac{\cos2x}{\cos x-\sin x}\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{2\cos^2x-\cos^2x+\sin^2x}{\cos x-\sin x}\,\mathrm{d}\,x=\int(\cos x+\sin x)\,\mathrm{d}\,x$

$=\sin x-\cos x+C$

(17) $\displaystyle\int 10^x\cdot3^{2x}\,\mathrm{d}\,x=\int 90^x\,\mathrm{d}\,x=\frac{90^x}{\ln90}+C$

(19) $\displaystyle\int\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)=\int\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x=2\arcsin x+C$

(21) $\displaystyle\int\cos x\cdot\cos2x\,\mathrm{d}\,x=\int\cos x\,(1-2\sin^2x)\,\mathrm{d}\,x=\int(\cos x-2\cos x\sin^2x)\,\mathrm{d}\,x$

$\displaystyle =\sin x-\frac{2}{3}\sin^3x+C$

(23) $\int \sec x\,(\sec x-\tan x)\,\mathrm{d}\,x=\int\left(\sec^2 x-\sec x\tan x\right)\mathrm{d}\,x=\tan x-\sec x+C$

(25) $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x=\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}\,x=\int\left(x^{\frac{3}{4}}-x^{-\frac{5}{4}}\right)\mathrm{d}\,x=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}-4x^{\frac{-1}{4}}+C$

6. 解析:$l=\int 3t^2\,\mathrm{d}\,x=t^3+C$

(1) 当 $t=0$ 时,$l=0$; 得 $C=0$, 故 $l=t^3$.

(2) 当经过的路程为 512m 时,$512=t^3, t=8s$.

7. 解析:

(1) $\int \cos(3x+5)\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{1}{3}\cos(3x+5)\,\mathrm{d}\,x\,(3x+5)=\frac{1}{3}\sin(3x+5)+C$

(3) $\int\frac{1}{2x+3}\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{1}{2}\times\frac{1}{2x+3}\,\mathrm{d}\,(2x+3)=\frac{\ln(2x+3)}{2}+C$

(5)
$$\begin{aligned}\int\left(\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}\right)\mathrm{d}\,x&=\int\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}\,\mathrm{d}\,x+\int\frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}\,\mathrm{d}\,x\\&=\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}}\,\mathrm{d}\,\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{3}\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{3}x\right)^2}}\,\mathrm{d}\,\sqrt{3}x\\&=\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{3}\arcsin\sqrt{3}x+C\end{aligned}$$

(7) $\int\sqrt{8-3x}\,\mathrm{d}\,x=-\int\frac{\sqrt{8-3x}}{3}d\,(8-3x)=-\frac{2(8-3x)^{\frac{3}{2}}}{9}+C$

(9) $\int x\cos x^2\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{1}{2}\cos x^2dx^2=\frac{1}{2}\sin x^2+C$

(11) $\int\frac{\mathrm{d}\,x}{1+\cos x}=\int\frac{\mathrm{d}\,x}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\int\sec^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}\,\frac{x}{2}=\tan\frac{x}{2}+C$

(13) $\int\frac{x}{4+x^4}\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{1}{2}\frac{dx^2}{4+x^4}=\frac{1}{4}\arctan\frac{x^2}{2}+C$

(15) $\int\frac{\mathrm{d}\,x}{x\ln x}=\int\frac{1}{\ln x}d\ln x=\ln|\ln x|+C$

(17) $\int\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}\,x=\int\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\cos x\right)\mathrm{d}\,x=-\frac{1}{\sin x}-\sin x+C$

(19) $\int\sin^2 x\cos^2 x\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{\sin^2 2x}{4}\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{1-\cos 4x}{8}\,\mathrm{d}\,x=\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}+C$

(21) $\int\csc^3 x\cot x\,\mathrm{d}\,x=\int\csc^2 x\csc x\cot x\,\mathrm{d}\,x=\int-\csc^2 x d\csc x=-\frac{\csc^3 x}{3}+C$

(23) $\int\frac{\mathrm{d}\,x}{1+\sin^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x+2\sin^2 x}\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{1+\tan^2 x}{1+2\tan^2 x}\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{1}{1+2\tan^2 x}d\tan x=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+C$

(25) $\int\frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{\mathrm{d}(e^x)}{1+e^{2x}}=\arctan e^x+C$

(27) $\int\frac{\mathrm{d}\,x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$

(29) 令 $x=3\sec t, 0<t<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\mathrm{d}\,x=3\sec t\tan t\,\mathrm{d}\,t$.

$\int\frac{\mathrm{d}\,x}{x^2\sqrt{x^2-9}}=\int\frac{3\sec t\tan t\,\mathrm{d}\,t}{9\sec^2 t\sqrt{9\sec^2 t-9}}=\frac{1}{9}\int\frac{\tan t\,\mathrm{d}\,t}{\sec t\tan t}=\frac{1}{9}\int\cos t\,\mathrm{d}\,t=\frac{1}{9}\sin t+C$

$\because x=3\sec t,\therefore\sin t=\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$

$$\therefore \int \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2\sqrt{x^2-9}}=\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x}+C.$$

8. 解析:

$$(1)\int \arccos x\,\mathrm{d}\,x=\arccos x-\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$$

$$\begin{aligned}(3)\int x^2\cos x\,\mathrm{d}\,x&=x^2\sin x-\int 2x\sin x\,\mathrm{d}\,x\\&=x^2\sin x-2x\cos x-\int 2\cos x\,\mathrm{d}\,x\\&=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5)\int(\ln x)^2\,\mathrm{d}\,x&=x(\ln x)^2-\int 2x\cdot\frac{1}{x}\ln x\,\mathrm{d}\,x=x(\ln x)^2-2\int \ln x\,\mathrm{d}\,x\\&=x(\ln x)^2-2x\ln x+2\int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x\\&=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C\end{aligned}$$

$$(7)\int x\tan^2 x\,\mathrm{d}\,x=\int x(\sec^2 x-1)\,\mathrm{d}\,x=-\frac{1}{2}x^2-\int x\sec^2 x\,\mathrm{d}\,x=-\frac{1}{2}x^2+x\tan x+ln\,|\cos x|+C$$

$$\begin{aligned}(9)\int \frac{x}{cos^2 x}\,\mathrm{d}\,x&=\int xcec2x\,\mathrm{d}\,x=x\tan x-\int \tan x\,\mathrm{d}\,x=x\tan x-\int\frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}\,x\\&=x\tan x+\ln|\cos x|+C\end{aligned}$$

$$(11)\int\frac{xe^x}{(1+e^x)^2}\,\mathrm{d}\,x=-\frac{1}{1+e^x}+\int\frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}\,x=-\frac{1}{1+e^x}+\int\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=-\frac{1}{1+e^x}-\ln\left(1+e^{-x}\right)+C$$

$$\begin{aligned}(13)\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}\,x&=x\arctan\sqrt{x}-\int\frac{x}{2\,(1+x)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x=x\arctan\sqrt{x}-\int\frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}\sqrt{x}\\&=x\arctan\sqrt{x}-\int\left(1-\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\right)d\sqrt{x}=(1+x)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(15)\int\frac{x^2\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x&=\int\arctan x\,\mathrm{d}\,x-\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x\\&=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x-\frac{1}{2}\arctan^2 x\\&=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\frac{1}{2}\arctan^2 x+C\end{aligned}$$

$$(17)\int\frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\,x=\frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int e^{\arctan x}\,\mathrm{d}\,\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)\frac{3}{2}}$$

于是有 $2\displaystyle\int\frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\,x=\frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}$

$$(19)\int\frac{\ln x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}\,x=\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}\,x=\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$$

(21) $\int\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}\,x=\int\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x}e^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}\,x=\int x'e^{x}e^{\frac{1}{x}}+x\left(e^{x}\right)'e^{\frac{1}{x}}-x\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'e^{x}\,\mathrm{d}\,x$

$=xe^{x}e^{\frac{1}{x}}+C$

第五节 有理函数的积分

☞ 教材见 311 页

1. 解析:

(1) $\int\frac{x^3}{x-1}\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{x^3+1-1}{x-1}\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{x^3-1}{x-1}\,\mathrm{d}\,x+\int\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}\,x=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|+C$

(3) $\int\frac{2x+3}{x^2+3x-10}\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{2x+3}{(x+5)(x-2)}\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{1}{(x+5)}+\frac{1}{(x-2)}\,\mathrm{d}\,x=\ln|x+5|+\ln|x-2|+C$

(5) $\int\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,\mathrm{d}\,x=-\int\frac{1}{2(x+1)}+\frac{2}{(x+2)}+\frac{1}{2(x+3)}\,\mathrm{d}\,x=-\frac{1}{2}\ln|x+1|+2\ln|x+2|-\frac{3}{2}\ln|x+3|+C$

(7) $\int\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{1}{x}+\frac{-x}{x^2+1}\,\mathrm{d}\,x=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$

(9) $\int\frac{x-2}{\left(2x^2+2x+1\right)^2}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{4}\int\frac{4x+2-10}{\left(2x^2+2x+1\right)^2}\,\mathrm{d}\,x$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{d\left(2x^2+2x+1\right)}{\left(2x^2+2x+1\right)^2}-\frac{10}{2}\int\frac{1}{(2x+1)^2+1}\,\mathrm{d}\,x$$

$$=-\frac{1}{4\left(2x^2+2x+1\right)}-\frac{5}{2}\arctan(2x+1)+C$$

(11) $\int\frac{1}{5-3\cos x}\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{8\sin^2\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{\tan^2\frac{x}{2}+1}{8\tan^2\frac{x}{2}+2}\,\mathrm{d}\,x$

令 $\tan\frac{x}{2}=t$, 则 $x=\arctan t,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}\,t$

代入得原式 $=\int\frac{t^2+1}{8t^2+2}\cdot\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}\,t=\int\frac{1}{4t^2+1}\,\mathrm{d}\,t=\frac{1}{2}\arctan 2t=\frac{1}{2}\arctan(2\tan\frac{x}{2})+C$

(13) $\int\frac{1}{\tan x+1}\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}\,x;$

$2\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{\cos x+\sin x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}\,x+\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}\,x=x+\ln|\sin x+\cos x|+C$

即 $\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}(x+\ln|\sin x+\cos x|)+C$

(15) $\int\frac{1}{1+\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}\,x$

$$=\int\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\int\frac{1}{1+\tan\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)$$

$$=\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

(17) $\int \frac{1}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}\,x = \int \left(\sec^2 x + \tan^2 x \sec^2 x\right)\mathrm{d}\,x = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C$

(19) 令 $\sqrt[6]{x} = t, x = t^6 \Rightarrow \mathrm{d}\,x = 6t^5 dt$

原式 $= \int \frac{6t^5}{t^3+t^2}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{6t^3}{t+1}\,\mathrm{d}\,t = 6\int \frac{t^3-1+1}{t+1}\,\mathrm{d}\,x = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln(t+1) + C$

将 $\sqrt[6]{x} = t$ 代入得

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}\,x = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right) + C$$

(21) 令 $\sqrt{\frac{1-x}{x+1}} = t$, 于是 $x = \frac{1-t^2}{t^2+1}, \mathrm{d}\,x = \frac{-4t}{(t^2+1)^2}$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= -4\int \frac{t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}\,t = 2\int \frac{1}{1+t^2}dt - 2\int \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}\,t \\
&= 2\arctan t + \ln|1-t| - \ln|1+t| + C \\
&= 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x+1}} + \ln\left|1-\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}\right| - \ln\left|1+\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}\right| + C \\
&= 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right| + C
\end{aligned}$$

(23) 令 $\cos x - \sin x = a(\cos x + 2\sin x) + b(\cos x + 2\sin x)'$

解得 $a = -\frac{1}{5}, b = \frac{3}{5}$

原式 $= \int -\frac{1}{5}\frac{\cos x + 2\sin x}{\cos x + 2\sin x}\,\mathrm{d}\,x + \int \frac{3}{5}\frac{(\cos x + 2\sin x)'}{\cos x + 2\sin x}\,\mathrm{d}\,x = -\frac{x}{5} + \frac{3\ln|\cos x + 2\sin x|}{5} + C$

第六节　定积分的计算法

☞ 教材见 317 页

1. 解析:

(1) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x+\frac{\pi}{3})\,\mathrm{d}(x+\frac{\pi}{3}) = \sin(x+\frac{\pi}{3})|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = -\sqrt{3}$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^3 x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\,x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}(3\pi - 4)$

(5) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}\,x = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\,x - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,\mathrm{d}\,2x)$

$= \frac{1}{2}(x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}) = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}$

(7) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}\,x \xrightarrow{x=\sin t} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}\,t = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{\sin^2 t} - 1)\,\mathrm{d}\,t = (-\cot t - t)|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{4}$

(9) $\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\,\mathrm{d}\,x \xrightarrow{t=x^2} \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t}\,\mathrm{d}\,t$

$\xrightarrow{t=\sin\theta} \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta}d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2\theta}{1+\sin\theta}\,\mathrm{d}\,\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\theta)\,\mathrm{d}\,\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

$$(11) \int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}\,x \xrightarrow{x=a\sin t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t a^2\cos^2 t\,\mathrm{d}\,t = a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t\cos t)^2\,\mathrm{d}\,t$$
$$= \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,\mathrm{d}\,t = \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{2}\,\mathrm{d}\,t$$
$$= \frac{a^4}{8}\times\frac{\pi}{2} - \frac{a^4}{8}\times\frac{1}{4}\sin 4t|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^4\pi}{16}$$

$$(13) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\sin x\,\mathrm{d}\,x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} d\cos x = \frac{2}{3}cox^{\frac{3}{2}}|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$(15) \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x \xrightarrow{t=1+\sqrt{x}} \int_1^3 \frac{2(t-1)}{t}\,\mathrm{d}\,x = \int_1^3 (2-\frac{1}{t})\,\mathrm{d}\,x = 4-2\ln t|_1^3 = 4-2\ln 3$$

$$(17) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\sin x}{1+\sin^2 x} = \arctan(\sin x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$(19) \int_0^1 e^{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}\,x \xrightarrow{\sqrt[3]{x}=t} = \int_0^1 3t^2e^t\,\mathrm{d}\,t = 3\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}\,e^t$$
$$= 3(e-2\int_0^1 te^t\,\mathrm{d}\,t) = 3e-6e^t t|_0^1 + 6\int_0^1 e^t\,\mathrm{d}\,t$$
$$= 3(e-2)$$

$$(21) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\sin x}\,\mathrm{d}\,x(\text{利用书 P302 例 6.5 的结论}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\,x| = \frac{\pi}{4}$$

$$(23) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,\mathrm{d}\,x \xrightarrow{x=t+\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} (t+\pi)\cos^2 t dt = \int_{-\pi}^{\pi} \pi\cos^2 t dt + \int_{-\pi}^{\pi} t\cos^2 t dt$$

$\because \int_{-\pi}^{\pi} t\cos^2 t dt = 0$(奇函数)

$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} \pi\cos^2 t\,\mathrm{d}\,t = 2\pi\int_0^{\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}\,t = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} (\cos 2t+1)d2t = \pi^2$

5. 证明:

(1) $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^T f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_T^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}\,x$

对于等式右端第二个积分, 设 $x-T=t$, 则 $\int_T^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^a f(t+T)dt = \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}\,t$

于是 $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^T f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}\,x$

6. 证明: 令 $x=a+b-t, \mathrm{d}\,x = d(-t)$, 当 $x=a$ 时 $t=b$, 当 $x=b$ 时 $t=a$

于是: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_b^a f(a+b-t)(-1)dt = \int_a^b f(a+b-t)\,\mathrm{d}\,t$

而 $\int_a^b f(a+b-t)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}\,x$

所以 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}\,x$

(2) 令 $x^2=t$, 于是

$$\int_0^{a^2} t\sqrt{t}f(t)\,\mathrm{d}\,\sqrt{t} = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} tf(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)\,\mathrm{d}\,x$$

(3) 令 $x=t+\pi, t=x-\pi, t\in(-\pi,\pi)$, 于是

$$\int_0^{2\pi} f(|\cos x|)\,\mathrm{d}\,x = \int_{-\pi}^{\pi} f(|\cos(t+\pi)|)\,\mathrm{d}\,t = 2\int_0^{\pi} f(|\cos t|)\,\mathrm{d}\,t$$

再令 $t=x+\frac{\pi}{2}, x=t-\frac{\pi}{2}, x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, 于是

$$2\int_0^{\pi} f(|\cos t|)dt = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\left|\cos(x+\frac{\pi}{2})\right|)\,\mathrm{d}\,x = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\sin x|)\,\mathrm{d}\,x = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)\,\mathrm{d}\,x$$

10. 证明:

(1) 令 $1-x=t$, 则

$\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}\,x = -\int_1^0 (1-t)^m t^n\,\mathrm{d}\,t = \int_0^1 x^n(1-x)^m\,\mathrm{d}\,x$, 即 $\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 x^n(1-x)^m\,\mathrm{d}\,x$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^m x\,\mathrm{d}\,x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x\cos x)^m\,\mathrm{d}\,x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^m\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2^m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x)^m\,\mathrm{d}\,x$

令 $2x=\frac{\pi}{2}-t, x=\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}$, 得

$\frac{1}{2^m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x)^m\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2^m}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos^m t\,\mathrm{d}(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}) = -\frac{1}{2^{m+1}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos^m t\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2^m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m t\,\mathrm{d}\,t$

即 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^m x\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2^m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\,\mathrm{d}\,x$

11. 解:

$$\begin{aligned}
(1)\ \lim_{n\to+\infty} \ln\left[\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}\right]
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{2}{n})\right]\\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{n})\frac{1}{n} = \lim_{\xi\to0^+}\int_{\xi}^{1}\ln(1+x)\,\mathrm{d}\,x\\
&= [(x+1)\ln(x+1)-(x+1)]\,|_0^1\\
&= \ln 4-1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2)\ \lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{4n^2-2^2}+\frac{1}{4n^2-2^2}+\cdots+\frac{n-1}{4n^2-n^2}) &= \lim_{n\to+\infty}(\frac{\frac{1}{n}}{4-(\frac{2}{n})^2}+\frac{\frac{2}{n}}{4-(\frac{3}{n})^2}+\cdots+\frac{\frac{n-1}{n}}{4-(\frac{n}{n})^2})\times\frac{1}{n}\\
&= \int_0^1 \frac{x}{4-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx^2}{4-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

第七节 定积分的应用

☞ 教材见 338 页

1. 解析:

$(1) A=\int_2^4 (\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}x^2-2)\,\mathrm{d}\,x = \frac{3}{4}x^2|_2^4 - \frac{1}{12}x^3|_2^4 - 2x|_2^4 = 12-3-\frac{16}{4}-\frac{2}{3}-8+4=\frac{1}{3}$

$(3) A=\int_0^a (a+x-2\sqrt{ax})\,\mathrm{d}\,x = \frac{a^2}{6}.$

$$(5)A=\int_{\frac{1}{10}}^{10}|\ln x|=\int_{\frac{1}{10}}^{1}(-\ln x)\,\mathrm{d}\,x+\int_{1}^{10}(\ln x)\,\mathrm{d}\,x$$
$$=-[x\ln x|_{\frac{1}{10}}^{1}-\int_{\frac{1}{10}}^{1}xd\ln x+(x\ln x|_{1}^{10}-\int_{1}^{10}xd\ln x)$$
$$=\frac{90}{10}\ln 10-\frac{81}{10}.$$

$(7)y=x\sqrt{1-x^2}(x>0,y>0)$

从而 $A=4\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x=\frac{4}{2}\int_0^1\sqrt{1-x^2}d(1-x^2)=-\frac{4}{2}\times\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}|_0^1=\frac{4}{3}.$

(9) 由对称性可知,

$$S=2(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 1^2+2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\cdot 2\cos 2\theta d\theta)=\frac{\pi}{3}+2-\sqrt{3}$$

$$(11)S=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(ae^{\theta})^2\,\mathrm{d}\,\theta=\frac{a^2}{4}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2\theta}\,\mathrm{d}\,2\theta=\frac{a^2}{4}(e^{2\pi}-e^{-2\pi})$$

3. 解析:

(1) 绕 y 轴:

$$V_y=\int_{-|b|}^{|b|}\pi r^2\,\mathrm{d}\,y=\int_{-|b|}^{|b|}\pi a^2(1-\frac{y^2}{b^2}\,\mathrm{d}\,y=\pi a^2(y-\frac{y^3}{3b^2})|_{|b|-(-|b|)}=\frac{4}{3}|b|a^2\pi$$

绕 x 轴:

$$V_x=\int_{-|a|}^{|a|}\pi r^2\,\mathrm{d}\,x=\int_{-|b|}^{|b|}\pi b^2(1-\frac{y^2}{a^2})\,\mathrm{d}\,y=\pi b^2(y-\frac{y^3}{3a^2})|_{|a|-(-|a|)}=\frac{4}{3}|a|b^2\pi$$

$$(5)V=\int\mathrm{d}\,V=\int\pi x^2\,\mathrm{d}\,y=\int_{2\pi}^{\pi}\pi[a(t-\sin t)]^2\,\mathrm{d}\,a(1-\cos t)-\int_0^{\pi}\pi[a(t-\sin t)]^2\,\mathrm{d}\,a(1-\cos t)$$
$$=-\pi a^3\int_{\pi}^{2\pi}(t-\sin t)^2\sin t\,\mathrm{d}\,t-\pi a^3\int_0^{\pi}(t-\sin t)^2\sin t\,\mathrm{d}\,t$$
$$=\pi a^3\cdot[\frac{13\pi^2}{2}-\frac{8}{3}-(\frac{\pi^2}{2}-\frac{8}{3})]=6\pi^3a^3.$$

备注: $\int(t-\sin t)^2\sin t\,\mathrm{d}\,t=-\frac{t^2}{2}-(t^2-2)\cos t+2t\sin t+\frac{1}{2}t\sin 2t-\frac{3}{4}\cos t+\frac{1}{4}\cos 2t+\frac{1}{12}\cos 3t+C$

6. 解析: $\because x>0,y>0,\therefore y=x^2\Rightarrow x=\sqrt{y}$

求交点: $\sqrt{y}=y^2\Rightarrow y=0$ 或 $y=1$

$$\therefore V=\int_0^1\pi(y_1^2-y_2^2)\,\mathrm{d}\,x=\int_0^1\pi\left[(\sqrt{x})^2-x^4\right]\mathrm{d}\,x=\pi\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right]\Bigg|_0^1=\frac{3\pi}{10}$$

8. 解析:

(1) 弧长 $S=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}\,x=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,\mathrm{d}\,x$

设 $x=tan\theta,\theta\in\left[\arctan\sqrt{3},\arctan\sqrt{8}\right]$

$$S=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\sec\theta}{\tan\theta}d(\tan\theta)=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{\sin\theta\cos^2\theta}d\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\sin^2+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\,\theta$$
$$=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}+\csc\theta\right)\mathrm{d}\,\theta=\frac{1}{\cos\theta}\Big|_{\theta_1}^{\theta_2}+\ln\left|\tan\frac{\theta}{2}\right|\Big|_{\theta_1}^{\theta_2}=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

(3) 上半部分方程为 $y=\sqrt{\frac{2}{3}(x-1)^2}$

设 $t=x-1$ 则 $0\leqslant t\leqslant 1,y=\sqrt{\frac{2}{3}}t^{\frac{3}{2}}$

$$S=2\int_0^1\sqrt{(\frac{3}{2}t+1)^3}\,\mathrm{d}\,t=2\times\frac{2}{3\times\frac{3}{2}}\sqrt{\left(\frac{3}{2}t+1\right)^3}\Big|_0^1=\frac{8}{9}(\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1)$$

$$(5)S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\varphi'^2(t)+\phi'^2(t)}\,\mathrm{d}\,t=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2+\left(3a\sin^2 t\cos t\right)^2}\,\mathrm{d}\,t$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\cos t\sin t\,\mathrm{d}\,t=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,\mathrm{d}\,t=6a$$

函数要求 $\cos t>0$,t 从 $-\frac{\pi}{2}$ 开始, 故 x 的范围是 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

$$s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}\,x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}\,x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}\,x=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}\,x=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=4$$

13.解析: $=\int_0^{15}\pi y^2\,\mathrm{d}\,x\ell g(15-x)=\int_0^{15}\frac{4}{9}\ell g\pi x^2(15-x)\,\mathrm{d}\,x$

$$=\frac{4}{9}\ell g\pi\left(5x^3-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^{15}=5.8\times 10^7 J$$

13. 解析:

由题意易知 $F=4.9(1-x)$

$W=FS=\int_{0.6}^{0.8}4.9(1-x)\,\mathrm{d}\,x=0.294J$

15. 解析: 取椭圆底部中心为坐标点, 短轴为 y 轴, 椭圆方程为 $\frac{x^2}{1^2}+\frac{(y-0.75)^2}{0.75^2}=1$

深度为 h($0\leqslant h\leqslant 1.5$). 深为 $\mathrm{d}\,h$ 的一段水平端面积为 $\mathrm{d}\,s=2x\,\mathrm{d}\,h=2\sqrt{1-\frac{(y-0.75)^2}{0.75^2}}\,\mathrm{d}\,h$

$\mathrm{d}\,s$ 所受压力应为 $\mathrm{d}\,F=\rho gh\,\mathrm{d}\,s=2\rho gh\sqrt{1-\frac{(y-0.75)^2}{0.75^2}}\,\mathrm{d}\,h=\frac{8}{3}\rho gh\sqrt{0.75^2-(y-0.75)^2}\,\mathrm{d}\,h$

$\therefore F=\int\mathrm{d}\,F=\int_0^{1.5}\frac{8}{3}\rho gh\sqrt{0.75^2-(y-0.75)^2}\,\mathrm{d}\,h=\frac{8}{3}\rho g\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)\cdot\frac{3}{4}\cos t\cdot\frac{3}{4}\cos t\,\mathrm{d}\,t$

$=\frac{9}{4}\rho g\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}\,t=\frac{9\pi}{16}\rho g$

对水, 取 $\rho=10^3 kg\cdot m^{-3},g=10m/s^2$, 得 $F=17.67kN$.

18. 解析: 由对称性可知, 圆心电荷的受力方向在 x 轴方向

$$F=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{kqR\delta}{R^2}\cos\theta\,\mathrm{d}\,\theta=\frac{2kq\delta}{R}$$

第八节 反常积分

☞ 教材见 357 页

1. 解析:

(1)$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^5}\,\mathrm{d}\,x=\frac{-1}{4x^4}{}_1^{+\infty}=0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(x>1)$

(2)$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}\,x=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}{}_1^{+\infty}=+\infty$, 所以发散

(3)$\int_0^{+\infty}e^{-ax}\,\mathrm{d}\,x(a>0)=\frac{-e^{-ax}}{a}{}_0^{+\infty}=\frac{1}{a}$

(4) 令 $t=-\sqrt{x}$, 则 $\int_0^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x=\int_0^{-\infty}2te^t\,\mathrm{d}\,t=2te^t-\int_0^{-\infty}2t\,\mathrm{d}(e^t)=2(t-1)e^t{}_0^{-\infty}=2$

(5) 令 $t=\arctan x$, 则 $x=\tan t$

$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos t\,\mathrm{d}\,t=t\sin t+\cos t_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$

(6)$\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin\omega t\,\mathrm{d}\,t=\int_0^{+\infty}\frac{-1}{p}\sin\omega t\,\mathrm{d}(e^{-pt})=\frac{-e^{-pt}}{p}\sin\omega t+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-pt}}{p}\omega\cos\omega t\,\mathrm{d}\,t=$
$\frac{-e^{-pt}}{p}\sin\omega t+\int_0^{+\infty}\frac{-\omega}{p^2}\cos\omega t\,\mathrm{d}(e^{-pt})=\frac{-e^{-pt}}{p}\sin\omega t-\frac{\omega e^{-pt}}{p^2}+\int_0^{+\infty}\frac{-\omega^2}{p^2}e^{-pt}\sin\omega t\,\mathrm{d}\,t$

所以 $\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin\omega t\,\mathrm{d}\,t=\frac{p^2}{\omega^2+p^2}\left(\frac{-e^{-pt}}{p}\sin\omega t-\frac{\omega e^{-pt}}{p^2}\right)\Big|_0^{+\infty}=\frac{\omega}{\omega^2+p^2}$

(7)$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}\,x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^2+1}d(x+1)=\arctan(x+1)_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=\pi$

(8) 令 $x=\sin t$, 则 $\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\cos t}\cos tdt=-\cos t_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

(9)$\int_0^2\frac{1}{x^2-4x+3}\,\mathrm{d}\,x=\int_0^2\frac{1}{2}(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1})\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}\ln(\frac{x-3}{x-1})_0^1+\frac{1}{2}\ln(\frac{x-3}{x-1})_1^2$

因为 $\frac{1}{2}\ln(\frac{x-3}{x-1})_0^1$ 和 $\frac{1}{2}\ln(\frac{x-3}{x-1})_1^2$ 都是发散的, 所以原反常积分也是发散的.

(10) 令 $x=\sec t$, 则 $\int_1^2\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}\,x=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sec t\tan t}\sec t\tan tdt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\,\mathrm{d}\,t=\frac{\pi}{3}$

(11) 令 $t=\sqrt{x-1}\Rightarrow x=t^2+1$, 所以 $\int_1^2\frac{x}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}\,x=\int_0^1\frac{t^2+1}{t}2t\,\mathrm{d}\,t=\frac{2}{3}t^2+2t_0^1=\frac{8}{3}$

(12) 令 $t=\frac{1}{x}$, 则 $x=\frac{1}{t}$, 故而

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^4-1}}\,\mathrm{d}\,x=\int_1^0\frac{-t}{\sqrt{1-t^4}}\,\mathrm{d}\,t=\int_1^0\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-t^4}}\,\mathrm{d}(t^2)=-\frac{1}{2}\arcsin(t^2)_1^0=\frac{\pi}{4}$

(13)$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\infty}-\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}(\frac{1}{x})=\cos\frac{1}{x}{}_{-\frac{\pi}{4}}^{+\infty}$, 所以发散.

(14) 令 $t=\sqrt{x-1}\Rightarrow x=t^2+1$,, 则 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}\,x=\int_0^{+\infty}\frac{2}{1+t^2}dt=2\arctan t\Big|_0^{+\infty}=\pi$

2. 解析:

(1)$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}\,x=x\ln\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}\,\mathrm{d}\,x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}\,\mathrm{d}\,x=-\frac{\pi}{2}\ln$

所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}\,\mathrm{d}\,x=\frac{\pi}{2}\ln 2$

(2) 令 $x=\sin t$, 则 $\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin t}{\cos t}\cos t\,\mathrm{d}\,t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,\mathrm{d}\,t=-\frac{\pi}{2}\ln 2$

(3)$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1-\cos x}\,\mathrm{d}\,x=\int_0^{\pi}\frac{x2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}\,x=\int_0^{\pi}\frac{x}{\tan\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}\,x,$

令 $t=\frac{x}{2}\Rightarrow x=2t$, 则 $\int_0^{\pi}\frac{x}{\tan\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}\,x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t}{\tan t}\,\mathrm{d}\,t$, 由一式得 $=2\pi\ln 2$.

4. 解析:

(1) 令 $x=\tan t$, 则 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}\,x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\sec t)^4}(\sec t)^2\,\mathrm{d}\,t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^2\,\mathrm{d}\,x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t)\,\mathrm{d}\,t=$
$\left.\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

(2) 令 $u=\sqrt{\tan x}\Rightarrow x=\arctan(u^2)$, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{\tan x}}=\int_0^{+\infty}\frac{2}{1+u^4}\,\mathrm{d}\,u$

再令 $t=\frac{1}{u}\Rightarrow u=\frac{1}{t}$, 则原式 $=\int_0^{+\infty}\frac{2t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}\,t$,

因为 $\int_0^{+\infty}\frac{2}{1+u^4}\,\mathrm{d}\,u=\int_0^{+\infty}\frac{2t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}\,t$

所以$2\int_0^{+\infty}\frac{2}{1+u^4}\,\mathrm{d}\,u=\int_0^{+\infty}\frac{2+2u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}\,u=2\int_0^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{u^2}}{u^2+\dfrac{1}{u^2}}\,\mathrm{d}\,u=2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(u-\frac{1}{u})}{(u-\frac{1}{u})^2+2}$

$$=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{u-\frac{1}{u}}{\sqrt{2}})_0^{+\infty}=\sqrt{2}\pi$$

所以原式等于 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{\tan x}}=\int_0^{+\infty}\frac{2}{1+u^4}\,\mathrm{d}\,u=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$

5. 解析:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\cdot\frac{1}{x^3+x^2+1}=1$, 由柯西判别法可知, 原积分收敛.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}}=1$, 由柯西判别法可知, 原积分发散.

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p\cdot\frac{\arctan x}{x^p}=\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=1$, 由柯西判别法可知, 当 $p>1$ 时, 原积分收敛; 当 $p<1$ 时, 原积分发散.

(7)$\int_0^2\frac{\mathrm{d}\,x}{\ln x}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}\,x}{\ln x}+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\mathrm{d}\,x}{\ln x}+\int_1^2\frac{\mathrm{d}\,x}{\ln x}$

$\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)\cdot\frac{1}{\ln x}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x-1}{\ln x}=\lim\limits_{x\to1^+}x=1$ 由柯西判别法得, 积分 $\int_1^2\frac{\mathrm{d}\,x}{\ln x}$ 发散;

$\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)\cdot\frac{1}{\ln x}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1-x}{\ln x}=-1$, 由柯西判别法可知, 积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\mathrm{d}\,x}{\ln x}$ 发散;

$\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{1}{2}}\cdot\left|\frac{1}{\ln x}\right|=-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\ln x}=0$, 由柯西判别法可知, 积分 $\int_0^{\frac{1}{2}}\left|\frac{1}{\ln x}\right|\mathrm{d}\,x$ 收敛, 积分 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}\,x}{\ln x}$ 绝对收敛. 故原积分发散.

(9)$\int_0^1\frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}$

$\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 由柯西判别法可知, 积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}$ 收敛;

$\lim\limits_{x\to0^+}(x-0)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1$ 由柯西判别法可知, 积分 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}$ 收敛. 故而原积分收敛.

(11)$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}\,\mathrm{d}\,x=\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^3\sqrt{(x-1)(x-2)}}\,\mathrm{d}\,x=\int_2^3\frac{1}{x^3\sqrt{(x-1)(x-2)}}\,\mathrm{d}\,x+\int_3^{+\infty}d\frac{1}{x^3\sqrt{(x-1)(x-}$

$\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3\sqrt{(x-1)(x-2)}}=\lim\limits_{x\to2^+}\cdot\frac{1}{x^3\sqrt{(x-1)}}=\frac{1}{8}$, 由柯西判别法可知, 积分 $\int_2^3\frac{1}{x^3\sqrt{(x-1)(x-2)}}\,\mathrm{d}\,x$ 收敛;

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 \cdot \dfrac{1}{x^3\sqrt{(x-1)(x-2)}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}} = 0$ 由柯西判别法可知, 积分 $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^3\sqrt{(x-1)(x-2)}}\,\mathrm{d}\,x$ 收敛; 故原积分收敛.

(13) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}} \cdot \left|\dfrac{x\sin x}{x^3+2x^2+5}\right| = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{x^3+2x^2+5} \cdot |\sin x| = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{-\frac{1}{2}}}{1+2x^{-1}+5x^{-3}} \cdot |\sin x| = 0$ 由柯西判别法可知, 积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{x\sin x}{x^3+2x^2+5}\right|\mathrm{d}\,x$ 收敛, 原积分绝对收敛.

(15) $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\frac{3}{4}} \cdot \dfrac{\ln\sin x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln\sin x}{x^{-\frac{1}{4}}} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\cos x}{-\frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}}\sin x} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\cos x}{-\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{4}}} = 0$ 由柯西判别法可知, 原积分收敛.

(17) $$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(1+x)}{x^n} = \begin{cases} 0, 0<n<1 \\ 1, n=1 \\ +\infty, n>1 \end{cases}$$

$0<n\leqslant 1$ 时,$x=0$ 不是瑕点, 只需讨论无穷限广义积分的敛散性.

$$\lim_{x\to+\infty} x^m \frac{\ln(1+x)}{x^n} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x^{n-m}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(n-m)x^{n-m-1}(1+x)} = 0, n>m \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^{m-n}\ln(1+x) = +\infty, n\leqslant m \end{cases}$$

当 $m>1$ 且 $n>m$, 即 $n>1$ 时, 广义积分收敛; 当 $m\leqslant 1, n\leqslant m$, 即 $0<n\leqslant 1$ 时, 广义积分发散;

$\therefore 0<n\leqslant 1$ 时, 积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,\mathrm{d}\,x$ 发散.

$n>1$ 时,$x=0$ 杀瑕点,$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,\mathrm{d}\,x + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,\mathrm{d}\,x$

$$\lim_{x\to0^+} (x-0)^q \frac{\ln(1+x)}{x^n} = \begin{cases} 0, n-m<1 \\ 1, n-m=1 \\ +\infty, n-m>1 \end{cases}$$

当 $0<m<1, n-m<1$, 即 $0<n\leqslant 1$ 时, 广义积分收敛;

当 $m\geqslant 1, n-m=1$, 即 $n\geqslant 2$ 时, 广义积分发散;

当 $m\geqslant 1, n-m>1$, 即 $n>2$ 时, 广义积分发散.

综上所述, 当 $1<n<2$ 时, 积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,\mathrm{d}\,x$ 收敛, 其余情况发散.

第九节 总 习 题 四

☞ 教材见 374 页

1, 解析:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\dfrac{i}{n}} = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}\,\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}) = \displaystyle\int_0^1 \sin x\pi\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sin x\pi\,\mathrm{d}\,x\pi = \frac{-1}{\pi}(\cos\pi x)\,\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}$

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f(a+i\dfrac{b-a}{n}) = \dfrac{1}{b-a}\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f(a+i\dfrac{b-a}{n}) = \dfrac{1}{b-a}\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$

(x_i 为区间 (a,b) 上一点)

$$(7)\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}\,\mathrm{d}t}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2\sqrt{\tan x}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\cos x}{\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\cos x}=\lim_{x\to0^+}\sqrt{\cos x}=1$$

2. 解析:

$$(1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(1+\cos x)}{1+\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}xd(\tan\frac{x}{2})-\ln(1+cox)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=(x\tan\frac{x}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x+\ln2=\frac{\pi}{2}$$

$$(3)\ 令\ t=\sqrt{\frac{x}{1+x}}\Rightarrow x=\frac{t^2}{1-t^2}$$

当 $x=0$ 时,$t=0$;$x=3$ 时,$t=\dfrac{\sqrt3}{2}$

$$\therefore 原式=\int_0^{\frac{\sqrt3}{2}}\arcsin t\,\mathrm{d}\frac{t^2}{1-t^2}=\arcsin t\frac{t^2}{1-t^2}\Big|_0^{\frac{\sqrt3}{2}}-\int_0^{\frac{\sqrt3}{2}}\frac{t^2}{1-t^2}\,\mathrm{d}\arcsin t$$

$$=\pi-\int_0^{\frac{\sqrt3}{2}}\frac{t^2}{1-t^2}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

再令 $t=\sin y$,$t=0$ 时,$y=0$;$t=\dfrac{\sqrt3}{2}$ 时,$y=\dfrac{\pi}{3}$

$$\therefore 原式=\pi-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y-\cos y}\cos y\,\mathrm{d}y=\pi-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos^2 y}{\cos^2 y}\,\mathrm{d}x=\frac{4\pi}{3}-\sqrt3$$

$$(5)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-2\cos x}{3\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{10}(3\sin x+\cos x)-\frac{7}{10}(3\cos x-\sin x)}{(3\sin x+\cos x)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{10}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x-\frac{7}{10}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3\sin x+\cos x}$$

$$=\frac{\pi}{20}-\frac{7}{10}\ln3=\frac{1}{20}(\pi-14\ln3)$$

4. 证明:

$(1)F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}$

由题目得 $\mathrm{F}'(x)=[\sqrt{f(x)}-\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}]^2+2\geqslant2$

$(2)F(a)=\displaystyle\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t+\int_b^a\frac{\mathrm{d}t}{f(t)}=-\int_a^b\frac{\mathrm{d}t}{f(t)}<0F(b)=\int_a^b f(t)dt+\int_b^b\frac{\mathrm{d}t}{f(t)}=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t>0$

由定理可知,$F(x)$ 在 [a, b] 上连续, 又有零点定理可知, 方程 $F(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根.

6. 证明:$\left[\displaystyle\int_a^b f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x\right]^2+\left[\int_a^b f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2$

$$\Rightarrow\left(\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}f(a+i\frac{b-a}{n})\cos k(a+i\frac{b-a}{n})\right)^2+\left(\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}f(a+i\frac{b-a}{n})\sin k(a+i\frac{b-a}{n})\right)^2\leqslant\left(\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}f(a+i\frac{b-a}{n})\right)^2$$

不妨设

$$p_i=f(a+i\frac{b-a}{n})\cos k(a+i\frac{b-a}{n}),q_i=f(a+i\frac{b-a}{n})\sin k(a+i\frac{b-a}{n}),r_i=f(a+i\frac{b-a}{n})$$

则只需证明 $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n p_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^n q_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^n r_i\right)^2$,

则只需证明再取极限即可证明原不等式.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p_ip_j, \left(\sum_{i=1}^{n} q_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} q_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} q_iq_j, \left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} r_ir_j$$

且 $p_i^2 + q_i^2 = r_i^2$

$$\therefore \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} q_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p_ip_j + \sum_{i=1}^{n} q_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} q_iq_j = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p_ip_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} q_iq_j$$

所以只需证明对 $\forall i \neq j, p_ip_j + q_iq_j \leqslant r_ir_j$

若 $r_i = 0$ 或 $r_j = 0$, 此时有 $p_i = q_i = 0$ 或 $p_j = q_j = 0$, 上式成立.

反之, 令 $\sin A = \dfrac{p_i}{r_i}, \cos A = \dfrac{q_i}{r_i}, \sin B = \dfrac{p_j}{r_j}, \cos B = \dfrac{q_j}{r_j}$, 则上式等价于 $\sin A \sin B + \cos A \cos B \leqslant 1 \Rightarrow \cos(B - A) \leqslant 1$

$$\therefore \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} q_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right)^2, \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} p_i = \int_a^b f(x)\cos kx \,\mathrm{d}\,x, \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} q_i = \int_a^b f(x)\sin kx \,\mathrm{d}\,x,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} r_i = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

$$\therefore \left[\int_a^b f(x)\cos kx \,\mathrm{d}\,x\right]^2 + \left[\int_a^b f(x)\sin kx \,\mathrm{d}\,x\right]^2 \leqslant \left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x\right]^2.$$

8. 解析:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} x \geqslant 0 \\ 1 + x^2 x < 0 \end{cases}$$

令 $t = x + 1 \therefore x \geqslant 0$ 时 $t \geqslant 1$;$x < 0$ 时 $t < 1$

$$f(t-1) = \begin{cases} e^{1-t} t \geqslant 1 \\ 1 + (t-1)^2 t < 1 \end{cases}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(t-1)\,\mathrm{d}\,t = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} [1 + (t-1)^2]\,\mathrm{d}\,t + \int_1^2 e^{1-t}\,\mathrm{d}\,t = \frac{29}{8} - \frac{1}{e}$$

20. 证明: 令 $F(t) = \displaystyle\int_a^t xf(x)\,\mathrm{d}\,x - \frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}\,x, t \in [a,b]$

则 $F'(t) = tf(t) - \dfrac{a+t}{2} f(t) - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}\,x$

$$F''(t) = f(t) + tf'(t) - \frac{1}{2}f(t) - \frac{a+t}{2}f'(t) - \frac{1}{2}f(t) = \frac{t-a}{2}f'(t).$$

$\therefore f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增

$\therefore f'(t) \geqslant 0, \dfrac{t-a}{2} \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{t-a}{2}f'(t) \geqslant 0, t \in [a,b]$

$\therefore F'(t)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加, 又 $F'(a) = 0$, 故 $F'(t) \geqslant 0, t \in [a,b]$

$\therefore F(t)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加, 又 $F(a) = 0$, 故 $F(b) = \displaystyle\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}\,x - \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \geqslant 0$

即 $\displaystyle\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}\,x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$. 得证.

25. 证明: 先证数列 $\{a_n\}$ 为单调的:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\therefore a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}\,x = f(n+1) - f(\xi)[(n+1) - n] = f(n+1) - f(\xi), \xi \in (n, n+1)$$

又 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调减少且非负连续, 故 $f(n+1) < f(\xi)$.

$\therefore a_{n+1} - a_n < 0$, 即数列 $\{a_n\}$ 单调递减. 下面证明数列 $\{a_n\}$ 有界:

$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}\,x=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)\,\mathrm{d}\,x=f(n)+\sum_{k=1}^{n-1}[f(k)-\int_k^{k+1}f(x)\,\mathrm{d}\,x]$

$=f(n)+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}[f(k)-f(x)]\,\mathrm{d}\,x$

又 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调减少且非负,

$\therefore f(k)-f(x)>0, x\in(k,k+1), f(n)>0$

$\therefore a_n=f(n)+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}[f(k)-f(x)]\,\mathrm{d}\,x>0$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 单调递减且有下界, 故 $\{a_n\}$ 的极限存在.

第五章 无穷级数

☞ 习题见第 136 页

第一节 常数项级数的概念与性质

☞ 教材见 387 页

1、单项选择题

（1）B 解析：由例 1.1 知几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^n$ 收敛的条件是 $-1<q<1$。

（2）B 解析：由级数收敛的必要条件知该级数发散。

（3）B 解析：取 k=0 时，该级数收敛，取 k=1 时，该级数发散。

（4）D 解析：取 $\mu_n=\dfrac{1}{n}$ 时，级数发散但 $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu_n=0$。取 μ_n=n 时，$\lim\limits_{n\to+\infty}\mu_n=\infty$。

（5）C 解析：由级数收敛的必要条件知道，所以级数发散。

（6）C 解析：

$$2=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\mu_n=\mu_1-\mu_2+\mu_3+\cdots \tag{1-1}$$

$$5=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_{2n-1}=\mu_1+\mu_3+\mu_4+\cdots \tag{1-2}$$

式 (1-1) － 式 (1-2) ＝ $3=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_{2n}=\mu_2+\mu_4+\mu_6+\cdots$

式 (1-1) ＋ 式 (1-2) ＝ 8.

2、填空题

（1）$1,\dfrac{4}{3},\dfrac{31}{21}$；（2）$1,\dfrac{3}{2},\dfrac{31}{18}$；（3）$\dfrac{1}{5},-\dfrac{1}{25},\dfrac{1}{125}$.

3、解析

$s_n=\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{n-1}+\mu_n s_{n-1}=\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{n-2}+\mu_{n-1}$

所以 $\mu_n=s_n-s_{n-1}$

因为 $s_n=\dfrac{3^n-1}{3^n}$ 所以解得 $\mu_n=\dfrac{2}{3^n}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n=\lim\limits_{n\to+\infty}s_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3^n-1}{3^n}=1$

4、解析：

(1)$\because \dfrac{n}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$,

$s_n=\sum\limits_{n=1}^{n}(\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!})=1-\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}=1-\dfrac{1}{(n+1)!}$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to+\infty}s_n=1$

(2) 解析: $ln\dfrac{n^2-1}{n^2}=\ln\dfrac{n-1}{n}-\ln\dfrac{n}{n+1}, s_n=\sum\limits_{n=2}^{n}\ln\dfrac{n-1}{n}-\ln\dfrac{n}{n+1}=\ln\dfrac{1}{2}-\ln\dfrac{n}{n+1}$

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\dfrac{n^2-1}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln\dfrac{1}{2}-\ln\dfrac{n}{n+1})=\ln\dfrac{1}{2}$

(3) 解析: $a_n+a_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}\,x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+2}x\,\mathrm{d}\,x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}\,x$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}\tan x=\dfrac{1}{n+1}$

(4) 解析: 在判断一个级数时必须先判断他的通项是否在 n 趋于无穷大时趋于 0，又 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n}}{(1+\frac{1}{n})^n}=\dfrac{1}{e}\neq 0$ 由收敛级数的必要条件知该级数发散。

(5) 解析: $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2\ln(1+\frac{1}{n^2})=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}=1$, 由收敛级数的必要条件可知该级数发散.

(6)$\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{15}-\dfrac{1}{2^3}\cdots+\dfrac{1}{5n}-\dfrac{1}{2^n}+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{5n}-\dfrac{1}{2^n})$

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{5n}$ 发散, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 收敛, 故原级数发散.

5、解析: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n$ 的前 2n 项和为: $S_{2n}=\sum\limits_{n=1}^{n}(\mu_{2n-1}+\mu_{2n})=\mu_1+\mu_2+\mu_3+\cdots+\mu_{2n-1}+\mu_{2n}$.

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n$ 的前 (2n + 1) 项和为: $S_{2n+1}=\sum\limits_{n=1}^{n}(\mu_{2n-1}+\mu_{2n})+\mu_{2n+1}$ 所以 $S_{2n+1}=S_{2n}+\mu_{2n+1}$①.

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\mu_{2n-1}+\mu_{2n})$ 收敛于 s, 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_{2n}=s$②,

又因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu_n=0$，对①两侧求极限得 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_{2n+1}=s$③

综合②③得 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=s$. 证毕.

第二节 常数项级数的审敛法

☞ 教材见 403 页

1. 解析:

(1)$\dfrac{1}{4n+1}>\dfrac{1}{4n+1+3}=\dfrac{1}{4(n+1)}$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散, 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4(n+1)}$ 发散. 由比较审敛法得原式发散.

(3)$\dfrac{n}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{n+1-1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{n+2}-(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2})=\dfrac{2}{n+2}-\dfrac{1}{n+1}>\dfrac{2}{n+2}-\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{1}{n+2}$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散, 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+2}$ 发散. 由比较审敛法得原式发散.

(5)$n\geqslant 1$ 时,$2^n>n$, 得 $\leqslant\sqrt[n]{n}\leqslant 2$. 当 $n=1$ 时,$\sin\dfrac{\pi}{n\sqrt[n]{n}}=0$

当 $n\geqslant 2$ 时, 又正弦函数在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递增,$\sin\dfrac{\pi}{n\sqrt[n]{n}}\geqslant\sin\dfrac{\pi}{2n}$. 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{n}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{2n}$ 发散, 得原式发散.

(7)$(\sqrt{n}+1)\ln(1+\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2})=\ln(1+\dfrac{1}{n^2})^{\sqrt{n}+1}\leqslant(\frac{1}{n^2})^{\sqrt{n}+1}\leqslant\dfrac{1}{n^2}$

由 p 级数易得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛, 所以原式收敛.

注:$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$

2. 解析:(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{n^3}{3^n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^3}{3n^3}=\frac{1}{3}<1$

由比值审敛法可知原级数收敛.

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{n\sin\frac{\pi}{2^n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\frac{\pi}{2^{n+1}}}{n\frac{\pi}{2^n}}=\frac{1}{2}<1$

由比值审敛法可知原级数收敛.

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{n+1}}{\frac{n!}{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1)n}{n+1}=\infty>1$

由比值审敛法可知原级数收敛.

3. 解析:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{(\sqrt[n]{3}-1)^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{3}-1)=0<1$

由根值审敛法可知原级数收敛.

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{a}{[\ln(1+n)]^n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{a}}{\ln(1+n)}=0<1$

由根值审敛法可知原级数收敛.

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-1}\cdot\frac{-n}{n+1}}=e^{-1}<1$

由根值审敛法可知原级数收敛.

4. 解析:

(1)$\frac{1}{an+b}>\frac{1}{an}$ 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{an}$ 发散. 由比较审敛法得原式发散.

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}}{\frac{n^3}{n!}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3=0<1$

由比值审敛法可知原级数收敛.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+a^n}{1+b^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+b^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{1+b^n}$

当 $b\leqslant 1$ 时,$b^n\leqslant 1$, $\frac{1}{1+b^n}\geqslant\frac{1}{2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+b^n}$ 发散.

当 $b>1$ 时,$\frac{1}{1+b^n}<\frac{1}{b^n}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+b^n}$ 收敛.

(a)$\frac{a^n}{1+b^n}<\frac{a^n}{b^n}$, 易得 $a<b$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{1+b^n}$ 收敛

(b)$a\geqslant b$ 时, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a^n}{1+b^n}\geqslant\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b^n}{1+b^n}=1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{1+b^n}$ 发散.

综上可知当 $b>1$ 且 $0<a<b$ 时原式收敛, 其余情况皆发散.

5. 解析:

(1)$\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$, 由莱布尼兹审敛法得原式收敛. 由 p 级数易得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, 所以原式条件收敛.

(3)$\sin\frac{1}{n}>\sin\frac{1}{n+1}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\frac{1}{n}=0$ 由莱布尼兹审敛法得原式收敛. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 发散易得原式条件收敛.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ 收敛.

$\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, 由莱布尼兹审敛法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ 收敛, 则原式收敛.

$\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2+1}>\frac{1}{n}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 得原级数条件发散.

6. 解析:$\frac{\sqrt{a_n}}{n}=\sqrt{\frac{a_n}{n^2}}\leqslant\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{n^2})$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{n^2})$ 收敛.$\therefore$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 收敛.

7. 证明:

(1) 必要性:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛, 且 $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 也收敛.

又 $-|a_n|\leqslant a_n{}^+\leqslant|a_n|,-|a_n|\leqslant a_n{}^-\leqslant|a_n|$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$ 同时收敛.

充分性: 正部与负部同时收敛, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+,\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$ 收敛.

$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^++\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+-\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛, 故而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛的充要条件是其正部与负部同时收敛, 得证.

(2) 必要性:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

反证法: 如果其正部与负部不同时发散, 有下列情况:

(a) 同时收敛, 此时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛, 这与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛矛盾.

(b) 一格收敛一个发散, 得正部与负部之和发散, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 这与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛矛盾.

综上得证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛的必要条件是其正部与负部同时发散.

充分性: 正部与负部同时发散, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^++\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-=0$$

时成立, 此时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$, 故有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+-\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-=2\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+=-2\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$$

$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛.$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛的充要条件是其正部与负部同时发散.

得证.

第三节 幂级数

☞ 教材见 415 页

1. 解析:

(1) 原式在 $x=0$ 处收敛, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{n^2+n}{(n+1)^2+n+1}\right|=1$

在 $x=\pm1$ 处 $\left|\frac{1}{n^2+n}\right|<\frac{1}{n^2}$, 所以收敛. 因此, 收敛域为 $[-1,1]$.

(3) 令 $t=(x+1)^2$, 原式变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^nt^n$, 该式在 $(0,\frac{1}{2})$ 上收敛, 所以原式在 $(-1-\frac{\sqrt{2}}{2},-1+\frac{\sqrt{2}}{2})$ 收敛.

(5) 令 $t=x+1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\dfrac{n^p}{(n+1)^p}=1$, 当 $1\geqslant p>0$ 时, 在 $t=1$ 处发散,$p<1$ 时, 在 $t=1$ 处收敛,$t=-1$ 时函数都收敛.

因此原函数的收敛域为

$$\begin{cases}[-2,0)\,,0<p\leqslant 1\\ \quad [-2,0]\,,p>1\end{cases}$$

(7) 设 $t=x^3$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\dfrac{1}{2}$, 在 $t=2$ 时收敛, 在 $t=-2$ 时发散, 因此原式收敛域为 $(-\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2}]$

2. 解析:

(1) 当 $x=0$ 时,$s(x)=0$; 当 $x\neq 0$ 时,$s(x)=x^2\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{-nx}=\dfrac{x^2}{1-e^{-x}}$

(3)$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\displaystyle\int x^{2n-2}=\int\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-2}=\int\frac{1}{1+x^2}=\arctan xx\in[-1,1]$

(5) 当 $x=1$ 时,$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}=1$

$x\neq 1$ 时,$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\displaystyle\int\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\iint x^{n-1}=\int\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=(1-x)\ln(1-x)+x,x\in[-1,1)$

3. 解析:

(1)$x=\pm 1$ 时, 级数发散;

$x\neq\pm 1$ 时,$rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\left|\dfrac{x(1+x^{2n})}{1+x^{2n+2}}\right|$

$|x|<1$ 时,$\rho=|x|<1|x|>1$ 时,$\rho=0<1$

因此, 级数收敛域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

(2)$\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\left|\dfrac{x^2+n^3}{x^2+(n+1)^3}\right|=1$ 因此, 收敛域为 $(-\infty,+\infty)$

4. 解析:$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{2^n n!}x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}(\frac{x}{2})^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$

由 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=e^x$ 得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n=e^{\frac{x}{2}},\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n=\dfrac{x}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{n-1}$

令 $G(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n-1)!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{n-1}$,

$$\text{则}\int G(x)\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\int n\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}\mathrm{d}\,x$$
$$=\frac{2}{(n-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n+C=2\cdot\frac{x}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}+C=xe^{\frac{x}{2}}+C$$

$\therefore\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}(\frac{x}{2})^n=\dfrac{x}{2}\cdot G'(x)=(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x}{2})e^{\frac{x}{2}}$

$\therefore\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{2^n n!}x^n=(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x}{2})e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{2}}=(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x}{2}+1)e^{\frac{x}{2}}$.

3. 解析:

(1)$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\,(2n-1)}x^n$

$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n-\frac{1}{2}}x^n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$

设 $u(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n-\dfrac{1}{2}}x^n,v(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$

设 $x=t^2$

$u(t^2)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{2n-1}t^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}t\frac{2(-1)^{n-1}}{2n-1}t^{2n-1}=2t\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int(-t^2)^{n-1}=2t\int\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t=2t\arctan t$

$v(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int(-x)^{n-1}=\ln(1+x)$

$s(x)=2\sqrt{x}\arctan\sqrt{x}-\ln(1+x),s(\frac{1}{3})=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\ln\frac{4}{3}$

(3) 令 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)(x)^n,x=t^2$

$s(t^2)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)t^{2n}=t^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)t^{2n-2}=t^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(t^{2n-1})'=t^2(\frac{t}{1-t^2})t^{2n-1}=t^2\frac{1+t^2}{(1-t)^2}t^2$

$$s(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+\cdots=3$$

第四节 函数展开成幂级数及其应用

☞ 教材见 433 页

1. 解析:

$(1)e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$

$e^{-x}=1+x+\frac{(-x)^2}{2!}+\frac{(-x)^3}{3!}+\cdots$®′]]

$\mathrm{sh}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},x\in(-\infty,+\infty)$

$(3)\sin^2x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^{2n}}{2(2n)!},x\in(-\infty,+\infty)$

$(5)\frac{1}{(1+x)^2}=-(\frac{1}{1+x})'=-(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n,x\in(-1,1)$

$(7)((1+x)\ln(1+x))'=\ln(1+x)+1=1+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{n+1}}{n+1}$

$(1+x)\ln(1+x)=x+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$,$x\in(-1,1]$

2. 解析’’

$$(1)\sqrt{x}=(1+(x-1))^{1/2}=1+\frac{x-1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})\times(-\frac{3}{2})\times\cdots(-\frac{2n-1}{2})}{n!}(x-1)^n$$

$$=1+\frac{x-1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}(x-1)^n,x\in[0,2]$$

$$(3)\cos x=\cos(x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}\cos(x+\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x+\frac{\pi}{3})$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(x+\frac{\pi}{3})^{2n}}{(2n)!}+\sqrt{3}\frac{(x+\frac{\pi}{3})^{2n+1}}{(2n+1)!}\right],x\in(-\infty,+\infty)$$

$$(5)\sin 2x=-\sin 2(x-\frac{\pi}{2})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+1}(x-\frac{\pi}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!},x\in(-\infty,+\infty)$$

第五节　傅里叶级数

☞ 教材见 449 页

1. 解析: 由题意可知,$f(x)$ 在 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2\ldots)$ 处有间断点, 满足收敛定理,

$\therefore f(\pi)=\frac{1}{2}(f(\pi^+)-f(\pi^-))=\frac{1}{2}(-1+1+\pi^2)=\frac{1}{2}\pi^2$

同理可知 $f(5\pi)=\frac{1}{2}\pi^2$

2. 解析:

$(1)a_0=2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\,\mathrm{d}\,x=2\times2\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\,\mathrm{d}\,x=4\times(\frac{1}{2}-\frac{1}{24})=\frac{11}{6}$

$a_1=2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\cos2n\pi\,\mathrm{d}\,x=2\times2\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\cos2n\pi\,\mathrm{d}\,x=4(\int_0^{\frac{1}{2}}\cos2n\pi\,\mathrm{d}\,x-\int_0^{\frac{1}{2}}x^2\cos2n\pi\,\mathrm{d}\,x$

$=4(0-\frac{1}{4n^2\pi^2}\cos n\pi)=-\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi=\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}$

$b_n=0$

$$\therefore f(x)=\frac{11}{12}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\cos2n\pi x$$

$(3)f(x)$ 为偶函数,$\therefore b_n=0$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{\pi}[2\pi^3+2\pi]=2\pi^2+2$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\cos nx\,\mathrm{d}\,x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(3x^2+1)\cos nx\,\mathrm{d}\,x=\frac{12(-1)^n}{n^2}$

$$\therefore f(x)=\pi^2+1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

3. 解析:$2l=2-0=2,\therefore l=1$

将 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 外补充定义, 将 $f(x)$ 延拓为周期为 2 的周期函数

$\therefore a_0=\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_0^1 x\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}$

$a_n=\int_0^2 f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}\,x=\int_0^1 x\cos n\pi x\,\mathrm{d}\,x=d\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}$

$b_n=\int_0^2 f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}\,x=\int_0^1 x\sin n\pi\,\mathrm{d}\,x=\frac{(-1)^{1+n}}{n\pi}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}[\frac{(-1)^n-1}{n\pi}\cos n\pi x+(-1)^{n+1}\sin n\pi x]$

$f(0)=\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\cdot\frac{(-1)^n-1}{n\pi}=\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=0$

$\therefore\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$

5. 解析:

(1) 将 $f(x)$ 偶延拓得 $b_n=0$, $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{\pi}{2}-x)\,\mathrm{d}\,x=\frac{2}{\pi}(\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{2})=0$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{\pi}{2}-x)\cos nx\,\mathrm{d}\,x=\frac{2}{\pi}[0-\frac{1}{n^2}(\cos n\pi-1)]=\frac{2}{\pi}[\int_0^{\pi}\frac{\pi}{2}\cos nx\,\mathrm{d}\,x-\int_0^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}\,x]$$

$$=-\frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}\frac{4}{\pi n^2}(n=2k)\\ 0(n=2k)\end{cases}\quad(k=\pm1,\pm2\dots)$$

$\therefore f(x)=\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x.$

(3)a. 正弦级数

$$b_n=\frac{2}{l}\int 0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}\,x=\frac{2}{l}(\int 0^{\frac{l}{2}}x\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}\,x+\int\frac{l}{2}^l(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}\,x)$$

$$=\int\frac{4l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\,\mathrm{d}\,x=\frac{4l(-1)^{k-1}}{\pi^2(2k-1)}$$

$$\therefore f(x)=\frac{4l}{\pi^2}$$

$\therefore f(x)=\frac{4l}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{l}.$

b. 余弦级数

$$a_0=\frac{2}{l}\int 0^l f(x)\,\mathrm{d}\,x=\frac{2}{l}(\int 0^{\frac{l}{2}}x\,\mathrm{d}\,x+\int\frac{l}{2}^l(l-x)\,\mathrm{d}\,x)=\frac{l}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}\,x=\frac{2}{l}(\int_0^{\frac{l}{2}}x\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}\,x+\int_{\frac{l}{2}}^l(l-x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx)=\frac{(-1)^{k-1}l}{\pi^2(2k-1)^2}$$

$$\therefore f(x)=\frac{l}{4}+\frac{l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{l}$$

7. 解析: 令 $f(x)=x(\pi-x)$, 对其进行奇延拓, 得:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\sin nx\,\mathrm{d}\,x=\frac{2}{\pi}[\int_0^{\pi}x\pi\sin nx\,\mathrm{d}\,x-\int_0^{\pi}x^2\sin nx\,\mathrm{d}\,x]$$

$$=\frac{2}{\pi}[-\frac{\pi^2}{n}\cos n\pi+\frac{\pi^2}{n}\cos n\pi-\frac{2}{n^3}\cos n\pi+\frac{2}{n^3}]=\frac{2}{\pi}[\frac{2}{n^3}-\frac{2}{n^3}\cos n\pi]$$

$$=\frac{4}{n^3\pi}[1-(-1)^n]=\begin{cases}\frac{8}{n^3\pi}(n=2k-1)\\ 0(n=2k)\end{cases}\quad k=0,\pm1,\pm2\dots$$

$\therefore f(x)=\frac{8}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^3}$

8. 解析: 将 $f(x)$ 偶延拓得:

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$

$f(x+\frac{\pi}{2})=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n(x+\frac{\pi}{2})=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx+\frac{\pi}{2}n)$

$f(x-\frac{\pi}{2})=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n(x-\frac{\pi}{2})=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx-\frac{\pi}{2}n)$

$-f(x-\frac{\pi}{2})=-\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx-\frac{\pi}{2}n)\times(-1)$

$\because f(x+\frac{\pi}{2})=-f(x-\frac{\pi}{2}),\therefore a_0=0$

$\therefore \cos(nx+\frac{\pi}{2}n) = -\cos(nx-\frac{\pi}{2}n) \Rightarrow \cos(nx+\frac{\pi}{2}n)+\cos(nx-\frac{\pi}{2}n)=0$

$\therefore 2\cos nx\cos\frac{n\pi}{2}=0 \Rightarrow \cos\frac{n\pi}{2}=0$

$\therefore n=2k+1(k=0,\pm1,\pm2\ldots)$

即 $f(x)$ 得所有偶数项为 0, 即 $a_{2k}=0$

第六节 总习题五

☞ 教材见 459 页

2. 解析:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[n]{3}-1}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{3}-1\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} n\dfrac{1}{n}\ln 3 = \ln 3 > 0$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{3}-1\right)$ 有相同的敛散性

又因为调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{3}-1\right)$ 发散.

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{\ln^5 n}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\ln^5 n} = +\infty$(由洛必达法则易知)

又因为调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^{n+1}n^s}{a^n(n+1)^s} = a\begin{cases} >1, \text{级数发散} \\ =1 \\ <1, \text{级数收敛}\end{cases}$

当 $a=1$ 时, 级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^s}$p 级数, 当 $s>1$ 时, 级数收敛; 当 $s\leqslant 1$ 时, 级数发散.

3. 解析:

(1) 因为 $|u_n| = \dfrac{\sin(n+2)}{\pi^n} \leqslant \dfrac{1}{\pi^n}$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^n}$ 收敛

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛.

(3) 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{\cos\frac{1}{n}-n\sin\frac{1}{n}}{\dfrac{1}{n^2}}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|n^2\cos\frac{1}{n}-n^3\sin\dfrac{1}{n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|n^2\cos\dfrac{1}{n}-n^3\sin\dfrac{1}{n}\right|$

$\xrightarrow{x=\frac{1}{n}} \lim\limits_{x\to0}\left|\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}\right| = \dfrac{2}{3} > 0$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\cos\dfrac{1}{n}-n\sin\dfrac{1}{n}\right|$ 有相同的敛散性;

又因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\cos\dfrac{1}{n}-n\sin\dfrac{1}{n}\right|$ 收敛

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\dfrac{1}{n}-n\sin\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

(5) 因为 $u_n = (-1)^n\ln\dfrac{n+1}{n}, |u_n| = \ln\dfrac{n+1}{n} = \ln(n+1)-\ln n$

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 的部分和为 $\lim\limits_{n\to+\infty}s_n = \lim\limits_{n\to+\infty}[\ln(n+1)-\ln n+\ln n-\ln(n-1)+\ldots+\ln 2-\ln 1] = \lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+1) = +\infty$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散;

又 $|u_n| \geqslant |u_{n+1}|$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n| = 0$, 所以交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛;

综上所述, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

第六章　向量代数与空间解析几何

☞ 习题见第 143 页

第一节　向量及其线性运算

☞ 教材见 9 页

3. 证明: 设 AB 中点为 E, AC 中点为 F, 连接 EF

则 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, 则 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, 即 $\overrightarrow{EF}\parallel\overrightarrow{BC}$, $\left|\overrightarrow{EF}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right|$.

5. 证明: (1) 由三角形不等式 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\geqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 有 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|$

即 $|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$, 当且仅当 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 时取等.

(2) 由三角形不等式 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 有 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|\geqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$

则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{c}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|$, 当且仅当 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{c}$ 时取等.

7. 证明: ① 充分性: 不妨设 $\lambda=0$, 则必有 $\mu\neq0$, 那么 $\boldsymbol{b}=\frac{\lambda}{\mu}\boldsymbol{a}$, 即 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$;

② 必要性: $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, 即 $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$, 则有 $\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 即存在不全为零的实数 $\lambda=1,\mu=k$, 使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

9. 证明: ① 充分性: 若 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{O}$, 则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CO}$

又 D 是 AB 中点, 则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OD}$, 即 O 在中线 CD 上

同理可得 O 在中线 AE 上, 以及 O 在中线 BF 上, 则有 O 是 $\triangle ABC$ 的重心, 充分性证毕.

② 必要性: 取 AB,AC,BC 中点分别为 D,E,F 连接 AD,BE,CF 交于点 O, 即为重心, 则 $\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{OD}$

又 D 是 BC 中点, 则 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OD}$ 则 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}$ 即证得 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{O}$.

第二节　向量的坐标

☞ 教材见 18 页

3. 解: 距 x 轴 $\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$, 距 y 轴 $\sqrt{34}$, 距 z 轴 $\sqrt{13}$; 距 xOy 面 5, 距 xOz 面 2, 距 yOz 面 3.

5. 解: (1) $(-3,2,-1)$;

(2) 关于 x 轴 $(3,2,-1)$, 关于 y 轴 $(-3,-2,-1)$, 关于 z 轴 $(-3,2,1)$;

(3) 关于 xOy $(3,-2,-1)$, 关于 xOz $(3,2,1)$, 关于 yOz $(-3,-2,1)$.

7. 解: $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=(-1,-2,1)$, 则 $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{1+2+1}=2$;

$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\gamma=-\frac{1}{2}$;　$\alpha=120^\circ$, $\beta=135^\circ$, $\gamma=60^\circ$;　$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})$.

9. 解: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$, 则 $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}\right)$, 则 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$
设 $M(x,y,z)$, 则 $(x,y,z)=\frac{1}{3}(-1,3,-2)+\frac{2}{3}(1,2,3)=\left(\frac{1}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right)$, 即

$$M(\frac{1}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}).$$

11. 解:$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(1,1,1)$ 又 AC 中点为 M, 所以 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$ 而 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$
$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM}$, 则 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$, 同理 $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})$, 则

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})=(3,2,-4).$$

12. 解: 由题 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{\pi}{4}$ 有 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 设 $A(x,y,z)$ $x=\left|\overrightarrow{OA}\right|\cos\alpha=3$, $y=3\sqrt{2}$
又 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=6$, 则 $z=3$, $\therefore$ $A(3,3\sqrt{2},3)$.

第三节 向量的乘积

☞ 教材见 28 页

3. 解: (1) $(2\boldsymbol{a})\cdot(3\boldsymbol{b})=6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6$; (2) $(2\boldsymbol{a})\times(3\boldsymbol{b})=6\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(-30,-18,6)$;
(3) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{c})=-15$; (4) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=(-15,-9,3)$;
(5) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})=0$, 则 $4k+3+2(3k-1)\cos\left\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\right\rangle=0$, 解得 $k=2$.
7. 解: $\overrightarrow{MA}=(-3,1,2)$, $\overrightarrow{MB}=(0,-1,3)$
则 (1) $S=\frac{1}{2}\times\left|\overrightarrow{MA}\times\overrightarrow{MB}\right|=|(5,9,3)|=\frac{\sqrt{115}}{2}$; (2) $S'=\left|\overrightarrow{MA}\times\overrightarrow{MB}\right|=\sqrt{115}$;
(3) $\hat{a}=\pm\frac{\overrightarrow{MA}\times\overrightarrow{MB}}{\left|\overrightarrow{MA}\times\overrightarrow{MB}\right|}=\pm\frac{1}{\sqrt{115}}(5,9,3)$.
9. 证明: 设有三角形 ABC, 三边分别为向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $S=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|$
则 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\left\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\right\rangle=|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\sin\left\langle\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}}\right\rangle=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{c}|\sin\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}}\rangle$, 即 $ab\sin C=bc\sin A=ac\sin B$
则证得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.
11. 证明: $\overrightarrow{AB}=(1,-3,-2)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,9,4)$, $\overrightarrow{AD}=(3,-6,-6)$
设 A,B,C,D 在同一个平面上, 则 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}+\mu\overrightarrow{AD}$, 即 $(1,-3,-2)=(-2\lambda,9\lambda,4\lambda)+(3\mu,-6\mu,-6\mu)$

$$\begin{cases}1=-2\lambda+3\mu\\-3=9\lambda-6\mu\\-2=4\lambda-6\mu\end{cases}\Rightarrow\ \lambda=-\tfrac{1}{5},\mu=\tfrac{1}{5},\text{ 则假设成立, 共面.}$$

第四节 平面与直线

☞ 教材见 42 页

2. 解: (1) 由题意, 设所求平面方程为 $By+Cz=0$

将点 $(4,-3,-1)$ 代入, 得 $C=-3B$, 即得 $y-3z=0$;

(2) 平面法向量 $\vec{n}=\overrightarrow{OP}=(3,-6,2)$, $3x-6y+2z+D=0$, 代入 $P(3,-6,2)$ 得 $3x-6y+2z-49=0$;

(3) 设平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$, 代入得 $2x-3y+2z-10=0$.

4. 解: $\begin{cases} x+3y+z-1=0 \\ 2x-y-z=0 \\ x-2y-2z+3=0 \end{cases} \Rightarrow\ x=1, y=-1, z=3$, 则交点为 $(1,-1,3)$.

6. 解: 过 π_1 与 π_2 的平面为 $(1+\lambda)x+5y+(1-\lambda)+4\lambda=0$

$\dfrac{(1+\lambda,5,1-\lambda)\cdot(1,-4,-8)}{|(1+\lambda,5,1-\lambda)\cdot(1,-4,-8)|}=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\ \lambda=-\dfrac{3}{4}$, 则所求平面为 $x+20y+7z-12=0$

又 π_2 与已知平面恰好成 $\dfrac{\pi}{4}$ 角

$\therefore$ 所求平面为 $x+20y+7z-12=0$ 或 $x-z+4=0$.

8. 解: 取 $x=0$, 由 $\begin{cases} -2y+4z+1=0 \\ 2y-z+2=0 \end{cases}$, 解得 $y=-\dfrac{3}{2}$, $z=-1$

即直线 L 过点 $M(0,-\dfrac{3}{2},-1)$, $\vec{n}_1=(3,-2,4)$, $\vec{n}_2=(1,2,-1)$, $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(-6,7,8)$

从而所求直线对称式为 $\dfrac{x}{-6}=\dfrac{y+\frac{3}{2}}{7}=\dfrac{z+1}{8}$, 参数式方程为 $\begin{cases} x=-6t \\ y=7t-\dfrac{3}{2} \\ z=8t-1 \end{cases}$.

10. 解: 设过直线 L 的平面束方程为 $4x-y+3z-1+\lambda(x+5y-z+2)=0$

即 $(4+\lambda)x+(-1+5\lambda)y+(3-\lambda)z+(-1+2\lambda)=0\Rightarrow 2(4+\lambda)-(-1+5\lambda)+5(3-\lambda)=0, \lambda=3$

则投影平面方程为 $7x+14y+5=0$, 则投影直线为 $\begin{cases} 7x+14y+5=0 \\ zx-y+5z-3=0 \end{cases}$.

第五节　空间曲面与空间曲线

☞ 教材见 64 页

2. 解: (1) 双曲柱面;　(2) 椭圆柱面;　(3) 抛物柱面;

(4) 球面;　(5) 圆锥面 (下半部分);　(6) 旋转单叶双曲面.

注: 用电脑进行图形绘制难度过大, 故图略, 下同.

3. 解: (1) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转形成的;　(2) $\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{4} \\ z=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转形成的.

4. 解: (1) $4x^2+9y^2+9z^2=36$, 为旋转椭球面;　(2) $x^2+y^2=6z$, 为旋转抛物面;　(3) $y^2-x^2-z^2=1$, 为旋转双叶双曲面.

6. 解: 直线方程一式乘以二加上二式消去 z 得到该柱面方程为 $4x^2+7y^2=8$ 则该柱面在 xOy 上的投影为 $\begin{cases}4x^2+7y^2=8\\ z=0\end{cases}$.

9. 解: 设此动弦的中点为 (x_0,y_0,z_0)

$\because$ 此动弦的一个端点为 $(0,0,0)$

$\therefore$ 另一个端点为 $(2x_0,2y_0,2z_0)$

又该端点在球面上, 则有 $(2x_0)^2+(2y_0)^2+(2z_0)^2=R^2$

即此动弦中点轨迹为

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{R}{2}\right)^2=\frac{R^2}{4}.$$

总 习 题 六

☞ 教材见 75 页

4. 解: 假设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面, 设 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$

代入 $(-3,12,6)=\lambda(-1,3,2)+\mu(2,-3,-4)$, 解得 $\lambda=5,\mu=1$, 则共面, $\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

6. 解: 设 $C(0,0,2)$, $\overrightarrow{AB}=(-1,2,1)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,0,z)$, 则 $\cos\angle BAC=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}$

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\sqrt{5z^2-2z+5}$$

当且仅当 $z=\dfrac{1}{2}$ 时, 取最小值, $C(0,0,\dfrac{1}{5})$

8. 解: 设 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{\lambda}=t_1$, $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}=t_2$

则 $\begin{cases}x=t_1+1\\ y=2t_1-1\\ z=\lambda t_1+1\end{cases}$, $\begin{cases}x=t_2-1\\ y=t_2+1\\ z=t_2\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}t_1=4\\ t_2=6\\ \lambda=\dfrac{5}{4}\end{cases}$.

10. 解: L_1 方向向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,2)$, 过点 $A\,(-1,0,1)$, L_2 方向向量为 $\boldsymbol{n}_2=(1,3,4)$, 过点 $B\,(0,-1,2)$

$$\left[\boldsymbol{n}_1\ \boldsymbol{n}_2\ \overrightarrow{AB}\right]=(-2,-2,2)\cdot(1,-1,1)=-2+2+2=2\neq0$$

则 L_1 与 L_2 异面; 两者间的距离 $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2)\right|}{\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

12. 解: $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|}{x}\xlongequal[\text{分子的共轭}]{\text{分子分母乘以}}\lim_{x\to0}\frac{2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+x\,|\boldsymbol{b}|^2}{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}|}=\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{2}.$

14. 解: 设公垂线过 L_1 上的点为 $P\,(3t-1,2t-3,t)$, 过 L_2 上的点为 $Q\,(m,2m-5,7m+2)$,

则公垂线的方向向量为 $\overrightarrow{AB}=(m-3t+1,2m-2t-2,7m-t+2)$

又 L_1 方向向量为 $(3,2,1)$, L_2 方向向量为 $(1,2,7)$

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot(3,2,1)=0\\ \overrightarrow{AB}\cdot(1,2,7)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m=-\dfrac{1}{4}\\ t=-\dfrac{5}{28}\end{cases}$，即 $Q\left(-\dfrac{1}{4},-\dfrac{11}{2},\dfrac{1}{4}\right), P\left(-\dfrac{43}{28},-\dfrac{47}{14},-\dfrac{5}{28}\right)$

又公垂线的方向向量为 $(3,2,1)\times(1,2,7)=(3,-5,1)$

$\therefore$ 公垂线方程为 $\dfrac{x+\frac{1}{4}}{3}=\dfrac{y+\frac{11}{2}}{-5}=\dfrac{z-\frac{1}{4}}{1}$ 或 $\dfrac{x+\frac{43}{28}}{3}=\dfrac{y+\frac{47}{14}}{-5}=\dfrac{z-\frac{5}{28}}{1}$.

16. 解: 过直线 L 的平面为 $(1+2\lambda)x+(1+\lambda)y+(1+\lambda)z=0$, 原点到该平面的距离为

$$d=\frac{1}{\sqrt{(1+2\lambda)^2+(1+\lambda)^2+(1+\lambda)^2}}=\frac{1}{\sqrt{6\lambda^2+8\lambda+3}}$$

当且仅当 $\lambda=-\dfrac{8}{2\times 6}=-\dfrac{2}{3}$ 时, 取最小值 $d_{\min}=\sqrt{3}$

而平面 $2x+y+z=0$ 到原点的距离 $d'=\dfrac{0}{\sqrt{6}}=0<d_{\min}=\sqrt{3}$

$\therefore$ 所求平面应为 $\lambda=-\dfrac{2}{3}$ 的平面, 即 $x-y-z-3=0$.

18. 解: 考虑 z 轴上一点 $(0,0,z_0)$(不妨设 $z_0>0$) 绕直线 $x=y=z$ 旋转形成该圆锥面, 圆锥面的底面在平面 $x+y+z-z_0=0$ 上, 圆心在直线 $x=y=z$ 上

则显然圆心 O 为 $\left(\dfrac{z_0}{3},\dfrac{z_0}{3},\dfrac{z_0}{3}\right)$

那么, (x,y,z) 须满足以下两个条件:

① 到原点的距离相等, 即 $z_0^2=x^2+y^2+z^2$

② 到 O 点的距离相等, 即 $\left(x-\dfrac{z_0}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{z_0}{3}\right)^2+\left(z-\dfrac{z_0}{3}\right)^2=\left(\dfrac{z_0}{3}\right)^2$

整理以上二式可得该圆锥面方程为 $xy+yz+xz=0$.

第七章 多元函数微分学及其应用

☞ 习题见第 143 页

第一节 平面点集与多元函数

☞ 教材见 86 页

2. 解: $f\left(\frac{x}{y}, \sqrt{xy}\right) = \dfrac{x^3 - 2xy^2\sqrt{xy} + 3xy^4}{y^3} = \dfrac{x^3}{y^3} - 2 \times \dfrac{x}{y} \times \sqrt{xy} + 3xy$, 则

$$f(x, y) = x^3 - 2xy + 3y^2$$

则有

$$f\left(\frac{1}{x}, \sqrt{xy}\right) = \frac{1}{x^3} - \frac{4}{xy} + \frac{12}{y^2}.$$

4. 解: 套定义式即可得出答案 $f(x+y, x-y, xy) = (x+y)^{xy} + (xy)^{2x}$.

6. 解: (1) $\begin{cases} 4x - y^2 \geqslant 0 \\ 1 - x^2 - y^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \{(x,y)\,|0 < x^2 + y^2 < 1, y^2 \leqslant 4x\}$;

(2) $\begin{cases} y \geqslant 0 \\ x - \sqrt{y} \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \{(x,y)\,|x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 \geqslant y\}$;

(3) $(x^2 + y^2 - a^2)(2a^2 - x^2 - y^2) \geqslant 0 \Rightarrow \{(x,y)\,|a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2a^2\}$;

(4) $\begin{cases} -1 \leqslant \dfrac{x}{y^2} \leqslant 1 \\ y \geqslant 0 \\ 1 - \sqrt{y} > 0 \end{cases} \Rightarrow \{(x,y)\,|-y^2 \leqslant x \leqslant y^2, 0 < y < 1\}$;

(5) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ -1 \leqslant \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \{(x,y)\,|x^2 + y^2 - z^2 \geqslant 0, x^2 + y^2 \neq 0\}$.

第二节 多元函数的极限与连续性

☞ 教材见 92 页

1. 解: (1) 原式 $= \dfrac{1 \times 2}{1^2 + 1} = 1$.

(2) 令 $xy = u$, 则原式 $= \lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\sqrt{u+1} - 1}{u} = \dfrac{1}{2}$.

(3) 令 $x^2+y^2=u$, 则原式 $=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1-\cos u}{u^2}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\frac{u^2}{2}}{u^2}=\dfrac{1}{2}$.

(4) 原式 $=\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(1+\dfrac{y}{x})^{\frac{x}{y}\times\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{2}{x}}=e^2$.

2. 解: (1) 先令 $y=x$, 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x+y}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2}=0$

再令 $y=x^2-x$, 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x+y}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{x^2+x-x}=1$

因为两条路径上所得的极限不相等, 所以极限不存在.

(2) 令 $y=kx,(k\in R)$ 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(1-k^2)}{x^2(1+k^2)}=\dfrac{1-k^2}{1+k^2}$

当 k 值发生变化时, 极限值会发生相应的变化, 所以极限不存在.

4. 解: $\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2=k\pi+\dfrac{1}{2}\pi(k\in N)\right\}$.

5. 解: 先令 $y=0$, 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\times 0}{x^2+0}=0$

再令 $y=x$, 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\Leftrightarrow\dfrac{2x^2}{x^2+x^2}=1$

当 $x\neq 0$ 时, 函数极限不存在, 所以 $f(x,y)$ 在 $x=0$ 处不连续.

7. 解: (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^0-1}{1}=0$.

(3) 因为 $|\sin\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{y^2}|\leqslant 1$, 所以原式 $=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}0\times\sin\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{y^2}=0$.

(5) 原式 $=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2y^2}\times\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}=e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}=e^0=1$.

第三节　全微分与偏导数

☞ 教材见 106 页

3. 解: (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$;　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}(x+\sqrt{x^2+y^2})}$.

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\times xy(1+xy)^{y-1}=y^2(1+xy)^{y-1}$; 所以 $\ln z=y\ln(1+xy)$.

且 $\dfrac{\partial\ln z}{\partial z}=z\dfrac{\partial z}{\partial y}$, 所以 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\dfrac{xy}{1+xy}\right]$.

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\cos\left(\frac{x+a}{\sqrt{y}}\right)}{\sin\frac{x+a}{\sqrt{y}}}\times\dfrac{1}{\sqrt{y}}=\dfrac{\cos\left(\frac{x+a}{\sqrt{y}}\right)}{\sqrt{y}}$;

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\cos\left(\frac{x+a}{\sqrt{y}}\right)\times(-\frac{x+a}{2})\times y\times\frac{3}{2}}{\sin\left(\frac{x+a}{\sqrt{y}}\right)}=\cos\frac{x+a}{\sqrt{y}}\times(\frac{x+a}{2})y^{-\frac{3}{2}}.$$

(4) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=yzx^{yz-1}$;　$\dfrac{\partial u}{\partial y}=zx^{yz}\ln x$;　$\dfrac{\partial u}{\partial z}=yx^{yz}\ln x$.

(5) $u_x=x^2$, 所以 $u_{x(x,1)}=2x|_{x=1}=2$.

5. 解: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=(y-z)\left[-2x+(y-z)\right]$;　$\dfrac{\partial u}{\partial y}=(z-x)\left[-2y+(x-z)\right]$;　$\dfrac{\partial u}{\partial z}=(x-y)\left[-2z+(x-y)\right]$.

6. 解: (1)$\mathrm{d}\,u=y^2x^{y^2-1}\,\mathrm{d}\,x+2yx^{y^2}\ln x\,\mathrm{d}\,y$;

(2)$\mathrm{d}\,u=yzx^{yz-1}\,\mathrm{d}\,x+zx^{yz}\ln x\,\mathrm{d}\,y-yx^{yz}\ln x\,\mathrm{d}\,z$;

(3) 因为 $\mathrm{d}\ln u=\dfrac{\mathrm{d}\,u}{u}=\dfrac{y}{xz}\,\mathrm{d}\,x+\dfrac{1}{z}(\ln\dfrac{x}{y}-1)\,\mathrm{d}\,y-\dfrac{y}{z^2}\ln\dfrac{x}{y}\,\mathrm{d}\,z$,

所以 $\mathrm{d}\,u=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}\left[\frac{y}{xz}\,\mathrm{d}\,x+\frac{1}{z}\left(\ln\frac{x}{y}-1\right)\mathrm{d}\,y-\frac{y}{z^2}\ln\left(\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}\,z\right]$.

9. 解: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{2x}{x^2+y})=\frac{-2x^2+2y}{(x^2+y)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{2x}{x^2+y})=\frac{-2x}{(y+x^2)^2}$;
$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{x^2+y})=-\frac{1}{(x^2+y)}$.

11. 解: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial z}(\frac{yz}{x^2+y^2})=-\frac{2yzx}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{-zx}{x^2+y^2})=\frac{2yzx}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$;
所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

13. 解: 曲线的参数方程为 $\begin{cases}x=1\\ y=y\\ z=\sqrt{2+y^2}\end{cases}$, 因为 $\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y}=0,\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,y}=1,\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,y}=\frac{y}{\sqrt{2+y^2}}$
所以在点 $(1,1,\sqrt{3})$ 处的切线方向向量为 $\vec{m}=(\frac{\partial x}{\partial y},\frac{\partial y}{\partial y},\frac{\partial z}{\partial y})=(0,1,\frac{1}{\sqrt{3}})$
所以 $\vec{m}$ 与 y 轴正向的夹角余弦 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $\alpha=30°$.

第四节 多元复合函数的微分法

☞ 教材见 118 页

1. 解: 易知 $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=2u\times u'+2v\times v'=4x\frac{\partial z}{\partial y}=2u\times u'+2v\times v'=4y\end{cases}$.

3. 解: 因为 $z=\arctan(3t-4t^3)$, 所以 $\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t}=\frac{(3t-4t^3)'}{1+(3t-4t^3)}=\frac{3(1-4t^2)}{1+(3t-4t^3)^2}$.

5. 解: $z=ye^{y^2}\times xe^x+\sin\frac{x}{y^2}$, 所以 $\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,x}=ye^{y^2}\times(x+1)e^x+\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y^2}=x\,(y+1)\,e^{x+y^2}+\frac{1}{y^2}\cos\frac{x}{y^2}$.

7. 解: $f_x=e^{-(x+ay)^2}-e^{-x^2}$, 所以 $\begin{cases}f_{xx}=-2\,(x+ay)\,e^{-(x+ay)^2}+2xe^{-x^2}\\ f_{xx(1,1)}=(2a-2)e^{-(1-a)^2}+\frac{2}{e}\end{cases}$.

9. 解: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left({f_1}'+y{f_2}'\right)={f_{11}}''+2y{f_{12}}''+y^2{f_{22}}''$.

11. 解: $\frac{\partial z}{\partial x}=f'\left(x+\varphi\left(y\right)\right)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''\left(x+\varphi\left(y\right)\right)$,
同理可得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\phi'\left(y\right)f'\left(x+\phi\left(y\right)\right)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\phi'(y)f''\left(x+\phi\left(y\right)\right)$.
所以 $\frac{\partial z}{\partial x}\times\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'\left(x+\phi\left(y\right)\right)f''\left(x+\phi\left(y\right)\right)\phi' y=\frac{\partial z}{\partial y}\times\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

13. 解: $u=\int\mathrm{d}\,u=\int[\varphi(x+ay)\,\mathrm{d}\,x+a\varphi(x+ay)\,\mathrm{d}\,y-\varphi(x+ay)\,\mathrm{d}\,x+a\varphi(x-ay)\,\mathrm{d}\,y]$

$$=a\left[\varphi\left(x+ay\right)+\varphi\left(x-ay\right)\right]+\varphi\left(x+ay\right)-\varphi\left(x-ay\right)+c$$

故而易得 $\begin{cases}u_{xx}=a\left[\varphi''\left(x+ay\right)+\varphi''\left(x-ay\right)\right]+\varphi''\left(x+ay\right)-\varphi''\left(x-ay\right)]\\ \left[\varphi''\left(x+ay\right)+\varphi''\left(x-ay\right)\right]+\varphi''\left(x+ay\right)-\varphi''\left(x-ay\right)\end{cases}$, 所以 $u_{yy}=a^2u_{xx}$.

15. 解: 令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 得 $\dfrac{\mathrm{d}\,\rho\sin\theta}{\mathrm{d}\,t}=-\rho\cos\theta+k\rho^3\sin\theta$.

进而得 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\,\theta}{\mathrm{d}\,t}\rho\cos\theta=-\rho\cos\theta\dfrac{\mathrm{d}\,\rho}{\mathrm{d}\,t}\sin\theta=k\rho^3\sin\theta\end{cases}$, 所以 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\,\theta}{\mathrm{d}\,t}=-1\dfrac{\mathrm{d}\,\rho}{\mathrm{d}\,t}=k\rho^3.\end{cases}$

16. 证明:$\mathrm{d}\,F\,(tx+ty+tz)=\mathrm{d}\,t^kF\,(x,y,z)$(对 t 求微分)

$\Leftrightarrow [xF_1'+yF_2'+zF_3']\,\mathrm{d}\,t=kt^{k-1}F(x,y,z)\,\mathrm{d}\,t$ 对上式两侧同时对 t 积分, 得

$$xF_x+yF_y+zF_z=kt^{k-1}F\,(x,y,z)$$

当 $t=1$ 时, 符合题意. 证毕.

第五节　隐函数的微分法

☞ 教材见 129 页

1. 解: $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=-\dfrac{F_x}{F_y}=\dfrac{y^2-e^x}{\cos y-2y}$.

3. 解: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z}{x+z}$, $\quad\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z^2}{y\,(z+x)}$.

5. 解: 因为 $x=x\,(y,z)$, 所以 $F\,[x\,(y,z)\,,y,z]=0$, 两侧微分, 得 $F_1'\times\dfrac{\partial x}{\partial y}+F_2'=0$; 从而 $\dfrac{\partial x}{\partial y}=-\dfrac{F_2'}{F_1'}$

同理 $\dfrac{\partial y}{\partial z}=-\dfrac{F_3'}{F_2'}, \dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_1'}{F_3'}$, $\therefore\ \dfrac{\partial x}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1$.

9. 解: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=\left(f_1'\dfrac{\partial x}{\partial z}+f_3'\right)\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_{1'}+f_{3'}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_{1'}+f_{3'}\left(-\dfrac{5y}{5z^4+5}\right)=f_{1'}-f_{3'}\times\dfrac{y}{z^4+1}$.

11. 解: 令 $u=x+\dfrac{z}{y}, v=y+\dfrac{z}{x}$, 所以 $F\,(u,v)=0$

易知 $\begin{cases}F_x=\dfrac{\partial F}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial u}+\dfrac{\partial F}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial F}{\partial u}-\dfrac{z}{x^2}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial v}.F_y=-\dfrac{z}{y^2}\dfrac{\partial F}{\partial u}+\dfrac{\partial F}{\partial v},F_z=\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial F}{\partial u}+\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial F}{\partial v}\end{cases}$, 故令 $s=\dfrac{\partial F}{\partial u}, t=\dfrac{\partial F}{\partial v}$,

则 $F_x=s-\dfrac{z}{x^2}t$, $F_y=-\dfrac{z}{y^2}s+t$, $F_z=\dfrac{s}{y}+\dfrac{t}{x}$, 又 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=-\dfrac{s-\frac{z}{x^2}t}{\dfrac{s}{y}+\dfrac{t}{x}}=\dfrac{-xys+\frac{zy}{x}t}{xs+yt}$

故而 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\dfrac{-xsy+\frac{zy}{x}t}{xs+ty}+y\dfrac{\frac{xz}{y}t-xyt}{xs+ty}=\dfrac{(xs+yt)\,(z-xy)}{xs+yt}=z-xy$.

13. 解: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{Fx}{F_z}\right)=-\dfrac{F_{xy}{F_z}^2-F_{xz}F_yF_z-F_{yz}F_xF_z+yF_{zz}F_xF}{{F_z}^3}$

易知 $F_x=-3xy$, $F_y=-3xz$, $F_z=3z^2-3xy$

$\Rightarrow F_{xx}=F_{yy}=0$, $F_{zz}=6z$, $F_{xy}=-3z$, $F_{xz}=-3y$, $F_{yz}=-3x$. $\Rightarrow\ \dfrac{\partial z}{\partial x\partial y}=\dfrac{z^5-2xyz^3-x^2y^2z}{(z^2-xy)^3}$.

15. 解: (1)$\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=-\dfrac{F_x}{F_y}=-\dfrac{x(6z+1)}{2y(3z+1)}$; 因为 $\mathrm{d}\,z=2x\,\mathrm{d}\,x+2y\,\mathrm{d}\,y$, 所以 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=2x+2y\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\dfrac{x}{3z+1}$.

(3) 由 $\begin{cases}x=e^u\cos v\\ y=e^u\sin v\end{cases}$ 得 $x^2+y^2=e^{2u}$, 所以 $u=\dfrac{1}{2}\ln\,(x^2+y^2)$, 由 $\dfrac{①^2}{②^2}$, 得 $\tan v=\dfrac{y}{x}$

$v=\arctan\dfrac{y}{x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=v\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{2x\arctan\frac{y}{x}-y\ln\,(x^2+y^2)}{2\,(x^2+y^2)}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y\arctan\dfrac{y}{x}-x\ln\,(x^2+y^2)}{2\,(x^2+y^2)}$, 将①②式代回, 得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{v\cos v-u\sin v}{e^u}$, $\quad\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{u\cos v+v\sin v}{e^u}$.

第六节 方向导数与梯度

☞ 教材见 137 页

2. 解: 计算得 $u'_x(A) = -2$, $u'_y(A) = 4$, $u'_z(A) = -2$, 因此 $\mathrm{grad}\ u(A) = (-2, 4, -2)$

又 $\overrightarrow{AB} = (1, 2, -2)$, 因此其方向余弦向量为 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{AB}}\Big|_A = (-2, 4, -2) \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{10}{3}$.

4. 解: (1)$\mathrm{grad}\ z(2,1) = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(2,1)} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(2,1)} \vec{j} = (16, 18)$;

(3)$\mathrm{grad}\ z\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)} \vec{i} = \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)} \vec{j} = \left(-\frac{9\sqrt{3}}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

(5)$\mathrm{grad}\ u(1,1,0) = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(1,1,0)} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(1,1,0)} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}|_{(1,1,0)} \vec{k} = (1, 1, 1)$.

6. 解: 将 $y^2 = 4x$ 两侧对 x 求微分, 得: $2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{y}$, 所以 $\tan\theta = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{(1,2)} = 1$

$\Rightarrow \vec{e_1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 所以 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)} = \frac{1}{3}, \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)} = \frac{1}{3}$, 所以 $z(1,2) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \cdot \vec{e_1} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

8. 解: 易知方向向量 $\vec{e_1} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$

$\cos\alpha = 0$ 时, $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(0,0)} = \lim\limits_{\rho \to 0} \frac{f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) - f(0,0)}{\rho} = 0 = \cos\alpha\sin\alpha|_{\alpha = \frac{\pi}{2}}$

$\cos\alpha \neq 0$ 时, $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(0,0)} = \lim\limits_{\rho \to 0} \frac{f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) - f(0,0)}{\rho} = \cos\alpha\sin\alpha$

所以 $\frac{\partial f}{\partial l} = \cos\alpha\sin\alpha$.

第七节 微分法在几何上的应用

☞ 教材见 146 页

1. 解: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sin t$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos t$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\sec\left(\frac{t}{2}\right)^2}{2}$, 易知 $t = \frac{\pi}{2}$

所以切线方程为 $\begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y = 1 \end{cases}$, 法平面方程为 $-x + z - 1 = 0$

3. 解: 平面的一个法向量为 $\vec{m} = (1, 2, 1)$, 且 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2t$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 3t^2$

所以切线的法向量为 $\vec{n} = (1, 2t, 3t^2)$.

因为 $\vec{n} \parallel$ 平面, 所以 $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow 3t^2 + 4t + 1 = 0$

解得 $t = -1$ 或 $t = -\frac{1}{3}$, 所以点为 $P_1(-1, 1, -1)$ 或 $P_2(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27})$.

5. 易知 $z = \frac{2}{xy}$ $\quad \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(2,1,1)} = -\frac{1}{2}$ $\quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(2,1,1)} = -1$

所以切平面方程为 $z - 1 + \frac{1}{2}(x - 2) + y - 1 = 0 \Rightarrow x + 2y + 2z = 6$

所以该切平面的法向量为 $\vec{n}_1 = (1, 2, 2)$, 面 $x - y - z = 0$ 的一个法向量为 $\vec{n}_2 = (1, -1, -1)$

所以切向量 $\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \Rightarrow \vec{n} = (0, 3, -3)$ 或 $(0, -3, 3)$, 易知 $\vec{n} = (0, -3, 3)$ 符合题意

设 y 轴正向的一个方向向量 $\vec{p}=(0,1,0)$

所以 $\cos\langle\vec{p},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{n}}{|\vec{p}||\vec{n}|}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 所以切向量与 y 轴正向夹角为 $\dfrac{3}{4}\pi$, 所以 $F_x=0,F_y=1,F_z=1$

所以在点 $(2,1,1)$ 处的法线方程为 $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$, 即 $\begin{cases} y-z=0 \\ x=2 \end{cases}$.

9. 解: 且平面方程为 $F_x(x-x_0)+F_y(y-y_0)+F_z(z-z_0)=0\Rightarrow 3x+2y-3z-4=0$

所以平面法向量 $\vec{m}=(3,2,-3)$, 易知平面 xOy 的法向量 $\vec{n}=(0,0,1)$

所以 $cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=-\dfrac{3}{\sqrt{22}}$, 易知切平面上有点 $H(1,2,1)$, 面 xOy 上有点 $(0,1,0)$

所以 $\overrightarrow{OH}=(1,1,1)$, $\begin{cases} \overrightarrow{OH}\cdot\vec{m}=2>0 \\ \overrightarrow{OH}\cdot\vec{n}=1>0 \end{cases}$, 所以夹角余弦值 $cos\alpha=-\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{3\sqrt{22}}{22}$.

11. 解: $x=\dfrac{\cos te^t}{2}+\dfrac{\sin te^t}{2}-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}=\cos te^t$, $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}=2\cos t-sint$, $\dfrac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t}=3e^{3t}$

所以切线为 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$, 法平面方程为 $x+2(y-1)+3(z-2)=0\Rightarrow x+2y+3z-8=0$.

第八节　多元函数的极值

☞ 教材见 159 页

1. 解: (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x+y-2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+2y-1$, $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$, 则驻点 $P(1,0)$

$$H_f(P)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}_{(1,0)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$, 则 $A>0,AC-B^2>0$

所以 $H_f(P)$ 是正定矩阵, $f(x,y)$ 在 $(1,0)$ 处有最小值.

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=18x^2y^2-4x^3y^2-3x^2y^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=12x^3y-2x^4y-3x^3y^2$

易知当 $x=0$ 或 $y=0$ 时, z 无法取得极值

所以 $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 18-4x-3y=0 \\ 12-2x-3y=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$, 所以一个可能驻点为 $(3,2)$

$$H_f=\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$, 则 $A<0,AC-B^2>0$

所以 $H_f(P)$ 是负定矩阵, 在 $(3,2)$ 处有极大值 108.

(3) 令 $U(x,y)=x^2+y^2$, 易知 $\delta(x,y)$ 与 $U(x,y)$ 的增减性恰好相反

对于 $U(x,y)$, $\dfrac{\partial U}{\partial x}=2x$, $\dfrac{\partial U}{\partial y}=2y$, 所以 $\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial y}=0 \end{cases}\Rightarrow$ 驻点 $(0,0)$

由 $U(x,y)=x^2+y^2$ 的几何意义知

$U(x,y)=x^2+y^2$ 是开口向上的一个旋转抛物面, 顶点为 $(0,0,0)$

所以极小值点为 $(0,0)$,$z=f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处取得最大值 1.

(4) 有基本不等式且 $x>0, y>0$ 得,$z \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{8}{x}\times\frac{x}{y}\times y}=6$

当且仅当 $\frac{8}{x}=\frac{x}{y}=y$ 时, 即 $\begin{cases} y^2=x \\ \delta y=x^2 \end{cases}$ 时取等, 此时极小值点 $P(4,2)$, 极小值为 6.

3. 解: $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F_z}=-\frac{2x-2}{2z-4}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{2y+2}{2z-4}$, $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases} \Rightarrow$ 有驻点 $(1,-1)$

将 $x=1, y=1$ 代入 $F(x,y,z)=0$ 得 $z^2-4z-12=0z=2$ 或 $z=6$

所以易知 z 的极大值为 6, 极小值为-2.

5. 解: 令 $z=f(x,y), \frac{\partial z}{\partial x}=4-2x\frac{\partial z}{\partial y}=-4-2y$, 所以 $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases} \Rightarrow$ 驻点 $(2,-2)$,

$H_f(2,-2)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, 则 $A<, AC-B^2>0$

所以 H_f 是负定矩阵,$f(x,y)$ 在 $(2,-2)$ 处有极大值 16.

7. 解: $\begin{cases} 2p=2x+2y \\ z=x^2\pi xy \end{cases}$, $p=x+y=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+y \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{4}y}$, 当且仅当 $\frac{x}{2}=\frac{x}{2}=y$ 时取等,

所以 $\frac{x^2}{4}y \leqslant \frac{p^3}{27}$, 所以 $z \leqslant \frac{\pi p^3}{27}$, 所以长与宽分别是 $\frac{2}{3}p$ 与 $\frac{1}{3}p$.

9. 解: 椭球的参数方程为 $\begin{cases} x=sin\varphi cos\theta \\ y=sin\varphi sin\theta, & 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ z=2cos\varphi, & 0<\varphi<\frac{\pi}{2} \end{cases}$

易知切平面方程为 $2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+\frac{z_0}{2}(z-z_0)=0$

令 $y,z=0$, 得 $zx_0x=\frac{z_0^2}{2}+2{y_0}^2+2{x_0}^2=2$; 令 $x_0=\frac{1}{x_0}$, 同理得 $y=\frac{1}{y_0}, z=\frac{4}{z_0}$

所以 $f(x,y,z)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{16}{z^2}$

$L=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{16}{z^2}+a(x^2+y^2+\frac{{z_0}^2}{4}-1), x_0>0, y_0>0, z_0>0$

$\begin{cases} L_x=-\frac{2}{{x_0}^3}+2ax_0=0 \\ L_y=-\frac{2}{{y_0}^3}+2ay_0=0 \\ L_z=-\frac{32}{{z_0}^3}+\frac{az_0}{2}=0 \\ {x_0}^2+{y_0}^2-\frac{{z_0}^2}{4}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=\frac{1}{2} \\ y_0=\frac{1}{2} \\ z_0=\sqrt{2} \end{cases}$, 所以点为 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\sqrt{2})$.

13. 解: 易知切平面方程为 $\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0$

令 $y,z=0$ 得 $x=\frac{a^2}{x_0}$, 同理得 $y=\frac{b^2}{y_0}, z=\frac{c^2}{z_0}$, 所以 $V=\frac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}$, $1=\frac{x_0}{a^2}+\frac{y_0}{b^2}+\frac{z_0}{c^2} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{x_0y_0z_0}{abc}}$

所以 $\sqrt[3]{\frac{x_0y_0z_0}{abc}} \leqslant \frac{1}{3}$, 当且仅当 $\frac{x_0}{a}=\frac{y_0}{b}=\frac{z_0}{c}$ 时取等, 且 $\frac{x_0}{a^2}+\frac{y_0}{b^2}+\frac{z_0}{c^2}=1$

所以 $\begin{cases} x_0 = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \\ y_0 = \dfrac{b}{\sqrt{3}} \\ z_0 = \dfrac{c}{\sqrt{3}} \end{cases}$，即点 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{b}{\sqrt{3}}, \dfrac{c}{\sqrt{3}}\right)$.

总 习 题 七

☞ 教材见 176 页

2. 证明: 易知函数等价于 $z^2 = x^2 + y^2$, 在空间中为顶点在 $(0,0,0)$ 处的椭圆锥面.
故函数在 $(0,0)$ 的各个方向均连续, 又有 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
二者在 $(0,0)$ 处均无意义. 所以两个一阶偏导数均不存在.
4. 解: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y^z x^{y^z-1}$;　　$\dfrac{\partial u}{\partial y} = zx^{y^z} y^{z-1} \ln x$;　　$\dfrac{\partial u}{\partial z} = y^z x^{y^z} \ln x \cdot \ln y$.
6. 解: 对组中两个式子分别对 x,z 求导, 得:

$$\begin{cases} 1 = -2uu_x + v_x \,(1) \\ 0 = u_x + zv_x \,(2) \\ 0 = -2uu + v_z + 1 \,(3) \\ 0 = u_z + v + zv_z \,(4) \end{cases}$$

由 (1) (2) 解得:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{z}{2uz+1}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2uz+1}$$

由 (3) (4) 解得:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z-v}{2uz+1}.$$

8. 解:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{4x+2y-2}{4-2z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{2y+2x-2}{4-2z}.$$

令两偏导均等于零, 得 $x = 0, y = 1$. 代回, 得 $z^2 - 4z + 3 = 0$ 解得 $z = 1$ 或 $z = 3$

对方程左右求二阶偏导, 得:

$$\begin{cases} z_{xx} = \dfrac{2{z_x}^2 + 4}{4-2z}; \\ z_{yy} = \dfrac{2{z_y}^2 + 2}{4-2z}; \\ z_{xy} = \dfrac{2 + z_x z_y}{4-2z}. \end{cases}$$

$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{pmatrix}$, 所以 $H_f(0,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0, z_{xx} > 0$
所以 $z = 1$ 为 $z(x,y)$ 的极小值;

因为 $Hf(0,1,3)=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=1>0, z_{xx}<0$, 所以 z=3 为 $z(x,y)$ 的极大值.

10. 解: $f(x,y,z)=\ln(xyz^3)$

所以 $5r^2=x^2+y^2+\dfrac{z^2}{3}+\dfrac{z^2}{3}+\dfrac{z^2}{3}\geqslant 5\sqrt[5]{\dfrac{(xyz^3)^2}{27}}$, 所以 $xyz^3\leqslant 3\sqrt{3}r^5$

所以 $f(x,y,z)\leqslant \ln\left(3\sqrt{3}r^5\right)=\ln\left[3\sqrt{3}\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{5}\right)^{\frac{5}{2}}\right]\Rightarrow x^2y^2z^6\leqslant 27\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{5}\right)^5$

当 $x^2=a, y^2=b, z^2=c$, 有

$$abc^3\leqslant 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5.$$

12. 解: $V=\dfrac{1}{3}a\pi h^2=\dfrac{4\pi p(p-a)(p-b)(p-c)}{3a}$.

两侧取对数, 得

$$\ln V=\ln(p-a)+\ln(p-b)+\ln(p-c)-\ln a+\ln\frac{4\pi p}{3}.$$

令 $f(a,b,c)=\ln(p-a)+\ln(p-b)+\ln(p-c)-\ln a$.

记 $L=\ln(p-a)+\ln(p-b)+(p-c)-\ln a+\lambda(a+b+c-2p)$

$$\therefore\begin{cases}L_a=-\dfrac{1}{p-a}+\lambda-\dfrac{1}{a}=0\\ L_b=-\dfrac{1}{p-b}+\lambda\\ L_c=-\dfrac{1}{p-c}+\lambda\\ a+b+c-2p=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{p}{2}\\ b=c=\dfrac{3p}{4}\end{cases}\text{, 则 } V_{\max}=V\left(\frac{p}{2},\frac{3p}{4},\frac{3p}{4}\right)=\frac{\pi}{12}p^3.$$

第八章 重积分

☞ 习题见第 150 页

第一节 二重积分的概念及性质

☞ 教材见 184 页

2. 解: (1) 该积分表示的是以 R 为半径的上半球的体积, 则

$$\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\,\sigma=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\pi R^3=\frac{2}{3}\pi R^3.$$

(2) 该积分表示的是以 R 为底面半径,H 为高的圆锥的体积, 则

$$\iint_D H-\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,\sigma=\frac{1}{3}\times\pi R^2\times H=\frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

3. 解: (1) $\sin^2 x\leqslant x^2$, 则 $\sin^2(x+y)\leqslant(x+y)^2$, 则

$$\iint_D \sin^2(x+y)\,\mathrm{d}\,\sigma<\iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\,\sigma.$$

(2) $1\leqslant x+y\leqslant 2$, 则 $0\leqslant\ln(x+y)\leqslant 1$, 则 $\ln(x+y)\geqslant\ln^2(x+y)$, 则

$$\iint_D \ln(x+y)\,\mathrm{d}\,\sigma>\iint_D \ln^2(x+y)\,\mathrm{d}\,\sigma.$$

(3) $3\leqslant x+y\leqslant 6$, 则 $\ln(x+y)>1$, 则 $\ln(x+y)<\ln^2(x+y)$, 则

$$\iint_D \ln(x+y)\,\mathrm{d}\,\sigma<\iint_D \ln^2(x+y)\,\mathrm{d}\,\sigma.$$

(4) $e^x\geqslant 1+x$, 则 $e^{x^2+y^2}\geqslant 1+x^2+y^2$, 则

$$\iint_D e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,\sigma>\iint_D 1+x^2+y^2\,\mathrm{d}\,\sigma.$$

4. 解: (1) $0\leqslant\sin^2 x\sin^2 y\leqslant 1$, 则 $\iint_D 0\,\mathrm{d}\,\sigma\leqslant I\leqslant\iint_D 1\,\mathrm{d}\,\sigma$, 则

$$0\leqslant I\leqslant\pi^2.$$

(2) $1\leqslant x+y+1\leqslant 4$, 则 $\iint_D 1\,\mathrm{d}\,\sigma\leqslant I\leqslant\iint_D 4\,\mathrm{d}\,\sigma$, 则

$$2\leqslant I\leqslant 8.$$

(3) $0 \leqslant \sqrt[4]{xy(x+y)} \leqslant 2$, 则 $\iint\limits_D 0\,\mathrm{d}\sigma \leqslant I \leqslant \iint\limits_D 2\,\mathrm{d}\sigma$, 则

$$0 \leqslant I \leqslant 8.$$

(4) $1 \leqslant x^2+y^2+1 \leqslant 17$, 则 $\iint\limits_D 1\,\mathrm{d}\sigma \leqslant I \leqslant \iint\limits_D 17\,\mathrm{d}\sigma$, 则

$$12\pi \leqslant I \leqslant 204\pi.$$

第二节　二重积分的计算

☞ 教材见 201 页

1. 解: (1) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma = 4\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$

$$= 4\int_0^1 \left(x^2+\frac{1}{3}y^3\Big|_0^1\right)\mathrm{d}x = 4\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x$$
$$= 4\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}.$$

(2) $\iint\limits_D x\cos(x+y)\,\mathrm{d}\sigma = 4\int_0^\pi \mathrm{d}x\int_0^x x\cos(x+y)\,\mathrm{d}y = 4\int_0^\pi x\,\sin(x+y)|_0^x\,\mathrm{d}x$

$$= \left(-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x + x\cos x - \sin x\right)\Big|_0^\pi$$
$$= -\frac{\pi}{2}-\pi = -\frac{3\pi}{2}.$$

(3) $\iint\limits_D xe^{x^2+y}\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^4 \mathrm{d}x\int_1^3 xe^{x^2+y}\,\mathrm{d}y = \int_0^4\left(x\,e^{x^2+y}\Big|_1^3\right)\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 e^{x^2+3}-e^{x^2+1}\,\mathrm{d}(x^2) = \frac{1}{2}\left(e^{19}-e^{17}-e^3+e\right).$$

(4) $\iint\limits_D x^2y\sin\left(xy^2\right)\mathrm{d}\sigma = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^2 x^2y\sin\left(xy^2\right)\mathrm{d}y = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\cos(xy^2)|_0^2\,\mathrm{d}x$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{4}\sin 4x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16}.$$

2. 解: (1) $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2-x} xy\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1\left(x\,y^2\big|_{\sqrt{x}}^{2-x}\right)\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\left(x^3-5x^2+4x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+2x^2\right)\Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{3}+2\right) = \frac{7}{24}.$$

(2) $$\iint\limits_D x\sqrt{y}\,\mathrm{d}\,\sigma=\int_0^1\mathrm{d}\,y\int_{y^2}^{\sqrt{y}}x\sqrt{y}\,\mathrm{d}\,y=\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^2\sqrt{y}\big|_{y^2}^{\sqrt{y}}\right)\mathrm{d}\,y=\frac{1}{2}\int_0^1\left(y^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{9}{2}}\right)\mathrm{d}\,y$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{11}\right)=\frac{6}{55}.$$

(3) $$\iint\limits_D\left(x^2+y^2-y\right)\mathrm{d}\,\sigma=\int_0^2\mathrm{d}\,y\int_y^{2y}\left(x^2+y^2-y\right)\mathrm{d}\,x=\int_0^2\left(\frac{10}{3}y^3-y^2\right)\mathrm{d}\,y$$
$$=\frac{5}{3}\times 8-\frac{8}{3}=\frac{32}{3}.$$

(4) $$\iint\limits_D xy^2\,\mathrm{d}\,\sigma=2\int_0^2\mathrm{d}\,y\int_0^{\sqrt{4-y^2}}xy^2\,\mathrm{d}\,x=2\int_0^2\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_0^{\sqrt{4-y^2}}\mathrm{d}\,y$$
$$=\left(\frac{4}{3}y^3-\frac{1}{5}y^5\right)\Big|_0^2=\frac{4}{3}\times 8-\frac{32}{5}=\frac{64}{15}.$$

4. 解: (1) $$\int_0^{\sqrt{\pi}}\mathrm{d}\,x\int_x^{\sqrt{\pi}}\sin\left(y^2\right)\mathrm{d}\,y=\int_0^{\sqrt{\pi}}\mathrm{d}\,y\int_0^y\sin\left(y^2\right)\mathrm{d}\,x=\int_0^{\sqrt{\pi}}y\sin\left(y^2\right)\mathrm{d}\,y$$
$$=-\frac{1}{2}\cos\left(y^2\right)\big|_0^{\sqrt{\pi}}=-\frac{1}{2}\times(-2)=1.$$

(2) $$\int_2^4\mathrm{d}\,y\int_{\frac{y}{2}}^2 e^{x^2-2x}\,\mathrm{d}\,x=\int_1^2\mathrm{d}\,x\int_2^{2x}e^{x^2-2x}\,\mathrm{d}\,y=2\int_1^2(x-1)\,e^{x^2-2x}\,\mathrm{d}\,x=\int_1^2 e^{x^2-2x}\,\mathrm{d}\left(x^2-2x\right)$$
$$=e^{x^2-2x}\Big|_1^2=1-e^{-1}.$$

(3) $$\int_1^2\mathrm{d}\,x\int_{\sqrt{x}}^x\sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)\mathrm{d}\,y+\int_2^4\mathrm{d}\,x\int_{\sqrt{x}}^2\sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)\mathrm{d}\,y=\int_1^2\mathrm{d}\,y\int_y^{y^2}\sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)\mathrm{d}\,x$$
$$=-\frac{2}{\pi}\int_1^2\left(y\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right)\mathrm{d}\,y$$
$$=-\frac{2}{\pi}\times\left(-\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi^2}\right)=\frac{4}{\pi^3}\left(\pi+2\right).$$

(4) $$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\,y\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}\,x+\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}\,y\int_y^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}\,x=\int_{\frac{1}{2}}^1\mathrm{d}\,x\int_{x^2}^x e^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}\,y$$
$$=\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{\frac{y}{x}}\Big|_{x^2}^x\,\mathrm{d}\,x=\int_{\frac{1}{2}}^1\left(ex-xe^x\right)\mathrm{d}\,x=\frac{3}{8}e-\frac{\sqrt{e}}{2}.$$

5. 证明:

$$\iint\limits_D f_1(x)\cdot f_2(y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\int_a^b\mathrm{d}\,x\int_c^d f_1(x)\cdot f_2(y)\,\mathrm{d}\,y$$
$$=\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}\,x\int_c^d f_2(y)\,\mathrm{d}\,y$$
$$=\left[\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}\,x\right]\cdot\left[\int_c^d f_2(y)\,\mathrm{d}\,y\right].$$

6. 解: (1) $V=\iint\limits_{D}(6-2x-3y-0)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\int_0^1\mathrm{d}\,x\int_0^1(6-2x-3y)\,\mathrm{d}\,y=\int_0^1\left(6-2x-\frac{3}{2}\right)\mathrm{d}\,x=\frac{7}{2}.$

(2) $V=\iint\limits_{D}(6-x^2-y^2-0)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\int_0^1\mathrm{d}\,y\int_0^{1-x}(6-x^2-y^2)\,\mathrm{d}\,y$

$$=\int_0^1\left(6-6x-x^2+x^3+\frac{1}{3}(x-1)^3\right)\mathrm{d}\,x=3-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{17}{6}.$$

(3) 由 $x^2+2y^2=6-2x^2-y^2$ 可知 D 为: $x^2+y^2\leqslant 2$.

$V=\iint\limits_{D}(6-2x^2-y^2-x^2-2y^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=3\iint\limits_{D}(2-x^2-y^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2-\rho^2)\,\rho\,\mathrm{d}\,\rho=6\pi\times(2-1)=6\pi.$$

8. 解: (1) $\int_0^2\mathrm{d}\,x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\,y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^3\,\mathrm{d}\,\rho$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\,\theta=4\times\frac{3}{4\times 2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}.$$

(2) $\int_0^a\mathrm{d}\,x\int_0^x\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{\frac{a}{\cos\theta}}\rho^2\,\mathrm{d}\,\rho$

$$=\frac{a^3}{3}\int_1^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\,\mathrm{d}\,\theta=\frac{a^3}{3}\left(\sec\theta\tan\theta-\frac{1}{2}\sec^2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{a^3}{3}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right).$$

注: 该题结果与答案不一样, 经检验, 未发现错误, 如果发现请联系本节作者.

(3) $\int_0^1\mathrm{d}\,x\int_{x^2}^x(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\,y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}\mathrm{d}\,\rho$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\,\theta=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\,(\cos\theta)=\sqrt{2}-1.$$

(4) $\int_0^a\mathrm{d}\,y\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\,x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\,\theta\int_0^a\rho^3\,\mathrm{d}\,\rho=\frac{\pi}{2}\times\frac{a^3}{4}=\frac{\pi}{8}a^4.$

9. 解: (1) 由题可知

$$\iint\limits_{D}\ln(1+x^2+y^2)\,\mathrm{d}\,\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\,\theta\int_0^1\rho\ln(1+\rho^2)\,\mathrm{d}\,\rho=\frac{\pi}{4}\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}\,x=\frac{\pi}{4}(2\ln 2-1).$$

(2) 由题可知

$$\iint\limits_{D}\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}\,\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\,\theta\int_1^2\rho\arctan\left(\frac{\rho\sin\theta}{\rho\cos\theta}\right)\mathrm{d}\,\rho=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\,\mathrm{d}\,\theta\int_1^2\rho\,\mathrm{d}\,\rho=\frac{\pi^2}{32}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{64}\pi^2.$$

(3) 由题可知

$$\iint\limits_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\,\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^1(\cos\theta+\sin\theta)\,\mathrm{d}\,\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta-1)\,\mathrm{d}\,\theta=2-\frac{\pi}{2}.$$

(4) 由题可知

$$\iint\limits_D\left(\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\,\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\,\theta\int_0^1\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1-\rho^2}}\rho\,\mathrm{d}\,\rho=\frac{\pi}{4}\int_0^1\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}\,t$$

$$\xlongequal[\text{再三角换元}]{\text{分子分母同时乘以}1-t}\frac{\pi}{4}\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}\,\mathrm{d}(\sin\alpha)=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

10. 解: (1) 由题可知 D: $\begin{cases}x^2+y^2\leqslant ax\\ z=0\end{cases}$

$$V=\iint\limits_D\left(x^2+y^2-0\right)\mathrm{d}\,\sigma=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{a\cos\theta}\rho^3\,\mathrm{d}\,\rho=\frac{a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\,\theta=\frac{a^4}{2}\times\frac{3}{4\times2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{64}a^4.$$

(2) 由题可知 D: $\begin{cases}x^2+y^2\leqslant\dfrac{1}{2}\\ z=0\end{cases}$

$$V=\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,\sigma=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\rho\sqrt{1-\rho^2}-\rho^2\right)\mathrm{d}\,\rho$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}\,t-2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\rho^2\,\mathrm{d}\,\rho=\frac{2\pi}{3}\times\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)-\frac{2\pi}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right).$$

第三节 三重积分

☞ 教材见 220 页

3. 解: (1) $\displaystyle\iiint\limits_\Omega xz\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z=\int_{-1}^1\mathrm{d}\,x\int_{x^2}^1\mathrm{d}\,y\int_0^y xz\,\mathrm{d}\,z=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}\,x\int_{x^2}^1 xy^2\,\mathrm{d}\,y=\frac{1}{6}\int_{-1}^1\left(x-x^7\right)\mathrm{d}\,x=0.$

法二: 由于积分区间关于平面 yOz 对称, 同时被积函数是关于 x 的奇函数, 则根据“偶倍奇零”可直接得出答案 0.

(2) $\displaystyle\iiint\limits_\Omega\frac{1}{(1+x+y)^3}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z=\int_0^1\mathrm{d}\,x\int_0^{1-x}\mathrm{d}\,y\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y)^3}\,\mathrm{d}\,z$

$$=\int_0^1\mathrm{d}\,x\int_0^{1-x}\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2(1+x+y)^2}\right)\mathrm{d}\,y=-\int_0^1\left(\frac{1-x}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2(1+x)}\right)\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}\left(\ln2-\frac{5}{8}\right).$$

(3) $\displaystyle\iiint\limits_\Omega xyz\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z=\int_0^1\mathrm{d}\,x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}\,y\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}xyz\,\mathrm{d}\,z=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}\,x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}xy\left(1-x^2-y^2\right)\mathrm{d}\,y$

$$=\frac{1}{8}\int_0^1\left(x-2x^3+x^5\right)\mathrm{d}\,x=\frac{1}{48}.$$

(4) $\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^h z\,\mathrm{d}z \iint\limits_{D} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \dfrac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h z^3\,\mathrm{d}z = \dfrac{\pi}{4}RH.$

(5) 令 $u=\dfrac{x}{a}$, $v=\dfrac{y}{b}$, $w=\dfrac{z}{c}$, 则 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = abc\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$, Ω 为 $u^2+v^2+w^2\leqslant 1$

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iiint\limits_{\Omega}\left(u^2+v^2+w^2\right)abc\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\\ &= abc\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^{1-u^2}\mathrm{d}v\int_0^{1-u^2-v^2}\left(u^2+v^2+w^2\right)\mathrm{d}w\\ &\xlongequal[\text{采用球坐标系求解}]{\text{鉴于计算复杂}} abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\,\mathrm{d}r\\ &= abc\times 2\pi\times 2\times\frac{1}{5} = \frac{4\pi}{5}abc.\end{aligned}$$

4. 解: (1) $$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^3\rho^3\,\mathrm{d}\rho\int_0^{9-\rho^2}\mathrm{d}z\\ &= 2\pi\int_0^3\left(9\rho^3-\rho^5\right)\mathrm{d}\rho = 2\pi\left(\frac{9}{4}\times 81-\frac{243}{2}\right) = \frac{243}{2}\pi.\end{aligned}$$

(2) $$\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} z\,\mathrm{d}z = \pi\int_0^1\left(2\rho-\rho^3-\rho^5\right)\mathrm{d}\rho = \pi\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) = \frac{7}{12}\pi.$$

(3) $$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^4\rho^2\,\mathrm{d}\rho\int_0^{4-\rho\sin\theta}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^4\left(4-\rho\sin\theta\right)\mathrm{d}\rho\\ &= \frac{8\pi}{3}\times 64 = \frac{512}{3}\pi.\end{aligned}$$

5. 解: (1) $$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} x e^{\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^3e^{r^2}\sin^2\varphi\cos\theta\,\mathrm{d}r\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^3e^{r^2}\,\mathrm{d}r\\ &= a^4\times 1\times\frac{\pi}{4}\times\frac{1}{2}\left(a^2e^{a^2}-a^{a^2}+1\right) = \frac{\pi a^4}{8}\left(a^2e^{a^2}-a^{a^2}+1\right).\end{aligned}$$

注: 该题结果与答案不一样, 经检验, 未发现错误, 如果发现请联系本节作者.

(2) $$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi} r^3\,\mathrm{d}r\\ &= -\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,\mathrm{d}(\cos\varphi) = \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{5} = \frac{\pi}{10}.\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi} r^3\,\mathrm{d}r\\ &= -8\pi a^4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^5\varphi\,\mathrm{d}(\cos\varphi) = \frac{4}{3}\pi a^4\times\left(1-\frac{1}{8}\right) = \frac{7}{6}\pi a^4.\end{aligned}$$

6. 解: $M = 2 \times \frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}} r^4\,\mathrm{d}r$

$= \pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\frac{1}{5}\times 4\sqrt{2} = \frac{4}{5}\pi\left(\sqrt{2}-1\right).$

7. 解: (1) $\iiint\limits_{\Omega}\sin z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi}\sin z\,\mathrm{d}z\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi\int_0^{\pi} z^2\sin z\,\mathrm{d}z = \pi^3-4\pi.$

(2) $\iiint\limits_{\Omega} e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{1} r^2e^r\,\mathrm{d}r$

$= 2\pi\left(e-2e+2e-2\right)\times\frac{1}{5}\times 4\sqrt{2} = \pi\left(2-\sqrt{2}\right)(e-2).$

(3) $\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2}\rho^3\,\mathrm{d}\rho\int_{\frac{5}{2}\rho}^{5}\mathrm{d}z = 10\pi\int_0^{2}\left(\rho^3-\frac{1}{2}\rho^4\right)\mathrm{d}\rho = 40\pi-32\pi = 8\pi.$

(4) $\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_a^{A} r^4\,\mathrm{d}r = 2\pi\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}\left(A^5-a^5\right) = \frac{4\pi}{15}\left(A^5-a^5\right).$

8. 解: (1) $V = \iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2}\rho\,\mathrm{d}\rho\int_{\rho}^{6-\rho^2}\mathrm{d}z = 2\pi\int_0^{2}\left(6\rho-\rho^3-\rho^2\right)\mathrm{d}\rho$

$= 2\pi\times\left(12-4-\frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}\pi.$

(2) $V = \iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi} r^2\,\mathrm{d}r = -\frac{4}{3}\pi a^3\times\left(1-\frac{1}{4}\right) = \pi a^3.$

(3) $V = \iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2}\rho\,\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{4}}^{\sqrt{5-\rho^2}}\mathrm{d}z$

$= \pi\int_0^{2}\left(\sqrt{5-\rho^2}-\frac{\rho^2}{4}\right)\mathrm{d}\left(\rho^2\right)$

$= \pi\times\left(\frac{2}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right)-2\right) = \frac{2\pi}{3}\left(5\sqrt{5}-4\right).$

第四节 重积分的应用

☞ 教材见 234 页

1. 解: (1) $S=\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\leqslant 1}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}\sigma=\sqrt{2}\pi\times 1^2=\sqrt{2}\pi.$$

(2) $S=\iint\limits_{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2\leqslant\frac{a^2}{4}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{a^2-x^2-y^2}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{1}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=(\pi-2)\,a^2.$$

2. 解: (1) $\bar{y}=\frac{1}{A}\iint\limits_{D}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi ab}\iint\limits_{D}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{4}{\pi ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 ab^2\rho^2\,\mathrm{d}\rho=\frac{2}{\pi ab}\cdot 2\cdot ab^2\frac{1}{3}=\frac{4b}{3\pi}.$

由"偶倍奇零"可得 $\bar{x}=0$, 则质心为 $\left(0,\frac{4b}{3\pi}\right)$.

(2) $V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$

$$=\int_0^a\left[x^2(a-x)+\frac{1}{3}(a-x)^3\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\times\frac{a^4}{2}=\frac{a^4}{6}$$

$$\bar{x}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{1}{V}=\int_0^a x\,\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z=\frac{1}{V}\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{1}{3V}\int_0^a(4x^4-6ax^3+3a^2x^2-a^3x)\,\mathrm{d}x=\frac{a^5}{15}\times\frac{6}{a^4}=\frac{2}{5}a$$

$$\bar{y}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{1}{V}=\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^{a-y}y\,\mathrm{d}x\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z=\frac{1}{V}\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^{a-y}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{3V}\int_0^a(4y^4-6ay^3+3a^2y^2-a^3y)\,\mathrm{d}y=\frac{a^5}{15}\times\frac{6}{a^4}=\frac{2}{5}a$$

$$\bar{z}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{1}{V}=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}z\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2V}\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\left(x^2+y^2\right)^2\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2V}\int_0^a\left[x^4(a-x)-\frac{2}{3}x^2(a-x)^3+\frac{1}{5}(a-x)^5\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{5a^4}\times\frac{-25+54-45+20+3}{6}a^6=\frac{7}{30}a^2$$

则质心为 $\left(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a, \frac{7}{30}a^2\right)$.

4. 解: (1) $I_y = \iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^1 \rho^2 a^2\cos^2\theta\rho ab\,\mathrm{d}\,\rho$

$$= a^3 b\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\,\theta\int_0^1\rho^3\,\mathrm{d}\,\rho = a^b\times\pi\times\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\pi a^3 b.$$

(2) $I = \rho_0\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z = \rho_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^R\rho^3\,\mathrm{d}\,\rho\int_{\frac{H}{R}\rho}^H\mathrm{d}\,z$

$$= \frac{3M}{\pi R^2 H}\times 2\pi H\times\int_0^R\left(1-\frac{\rho}{R}\right)\rho^3\,\mathrm{d}\,\rho = \frac{6M}{R^2}\times\frac{1}{20}R^4 = \frac{3}{10}MR^2.$$

总 习 题 八

☞ 教材见 256 页

2. 解: (1) $\iint\limits_D \left|x^2+y^2-4\right|\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^3\left|\rho^2-4\right|\rho\,\mathrm{d}\,\rho = \pi\left[\int_0^4(4-t)\,\mathrm{d}\,t + \int_4^9(t-4)\,\mathrm{d}\,t\right]$

$$= \pi\left(16-8+\frac{65}{2}-20\right) = \frac{41}{2}\pi.$$

(2) $\iint\limits_D |\cos(x+y)|\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}y\int_y^{\frac{\pi}{2}-y}\cos(x+y)\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{x}\cos(x+y)\,\mathrm{d}y$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}[1-\sin(2y)]\,\mathrm{d}y - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}[\sin(2x)-1]\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[1-\sin(2x)]\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}(-1-1) = \frac{\pi}{2}-1.$$

(3) $\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{a(1-\cos\theta)}\rho^3\cos^2\theta\,\mathrm{d}\,\rho$

$$= \frac{a^2}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\theta(1-\cos\theta)^4\,\mathrm{d}\,\theta = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^6\theta+6\cos^4\theta+\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\,\theta$$

$$= a^2\left(\frac{5\times 3}{6\times 4\times 2}+6\times\frac{3}{4\times 2}+\frac{1}{2}\right)\times\frac{\pi}{2} = \frac{49}{32}\pi.$$

(4) 积分区间关于 y 轴对称, 被积函数是关于 x 的奇函数, 由 “偶倍奇零” 可知积分值为 0.

3. 证明: 对左边交换程序可得

$$\int_0^1\mathrm{d}\,y\int_y^1 f(y)(x-y)^{a-1}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1\frac{1}{a}(1-y)^a f(y)\,\mathrm{d}\,y = \frac{1}{a}\int_1^0 t^a f(1-t)\,\mathrm{d}(1-t)$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^1 t^a f(1-t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{a}\int_0^1 y^a f(1-y)\,\mathrm{d}\,y$$

证毕.

4. 证明: 将 D 分为关于原点对称的两个部分, 记作 D_1, D_2, 则有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,\sigma = \iint_{D_1} f(x,y) + \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\,\sigma$$

又 $\iint_{D_2} = \iint_{D_1} f(-x,-y)\,\mathrm{d}\,\sigma$

则有 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,\sigma = \iint_{D_1} f(x,y) - \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\,\sigma = 0$

$\displaystyle\iint\limits_D (x^2y+xy^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \iint\limits_D 1\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + 0 = 2\times 2 = 4.$

5. 解: (1) $\displaystyle\iiint\limits_D \left|z^2\right|\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi\int_0^R r^4\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\,r + \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi\int_{2R\cos\varphi}^R r^4\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\,r\\
&= \frac{2}{5}\pi R^5\left[\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\sin\varphi\cos^2\varphi\right)\mathrm{d}\,\varphi + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\varphi\cos^2\varphi\right)\mathrm{d}\,\varphi - 32\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\varphi\cos^7\varphi\right)\mathrm{d}\,\varphi\right]\\
&= \frac{2}{5}\pi R^5\left(\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}\,t - 32\int_0^{\frac{1}{2}} t^7\,\mathrm{d}\,t\right) = \frac{2}{5}\pi R^5\times\left(\frac{1}{3}-\frac{32}{8}\times\frac{1}{256}\right) = \frac{59}{480}\pi R^5.
\end{aligned}$$

(2) 积分区间关于面 xOy 对称, 被积函数是关于 z 的奇函数, 由 "偶倍奇零" 可知积分值为 0.

(3) $\displaystyle\iiint\limits_\Omega (y^2+z^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z = \int_0^5\mathrm{d}\,x\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{\sqrt{2x}}\rho^3\,\mathrm{d}\,\rho = 2\pi\int_0^5 x^2\,\mathrm{d}\,x = \frac{250}{3}\pi.$

6. 证明: 对左边交换次序可得

$$\begin{aligned}
\int_0^1\mathrm{d}\,x\int_0^x\mathrm{d}\,y\int_0^y f(z)\,\mathrm{d}\,z &= \int_0^1 f(z)\,\mathrm{d}\,z\int_z^1\mathrm{d}\,y\int_z^y\mathrm{d}\,x = \int_0^1 f(z)\,\mathrm{d}\,z\int_z^1 (y-z)\,\mathrm{d}\,y\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-z)^2 f(z)\,\mathrm{d}\,z
\end{aligned}$$

8. 解: $\displaystyle S = \frac{1}{a}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a}\sqrt{4x^2+4y^2+a^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a}\sqrt{2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$

$$= \frac{1}{2a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^a\sqrt{4\rho^2+a^2}\,\mathrm{d}\,\rho^2 + \sqrt{2}\pi a^2 = \pi a^2\left(\frac{5\sqrt{5}-1}{6}+\sqrt{2}\right).$$

10. 解: $\displaystyle J = \mu\iint\limits_D (y+1)^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_0^1 (y+1)^2\,\mathrm{d}\,y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}\,x$

$$= 2\mu\int_0^1 (y+1)^2\sqrt{y}\,\mathrm{d}\,y = \frac{368}{105}\mu.$$

12. 解: $\displaystyle F(t) = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^t\rho\,\mathrm{d}\,\rho\int_0^h\left(z^2+f(\rho^2)\right)\mathrm{d}\,z = 2\pi\int_0^t\left[\frac{1}{3}\rho h^3 + h\rho f(\rho^2)\right]\mathrm{d}\,\rho$

$$\Rightarrow F'(t) = \frac{2\pi}{3}h^3t + 2\pi htf(t^2).$$

第九章 曲线积分与曲面积分

☞ 习题见第 168 页

第一节 第一型曲线积分——对弧长的曲线积分

☞ 教材见 265 页

1. (1) 解: $I=\int_C (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s=\left\{\int_{\overline{OA}}+\int_{\overline{AB}}+\int_{\overline{BO}}\right\}(x+y)\,\mathrm{d}s.$

在直线 $\overline{OA}$ 上 $y=0,\mathrm{d}s=\mathrm{d}x$, 得 $\int_{\overline{OA}}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x=\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{8}{3}$;

在直线段 $\overline{AB}$ 上 $y=-\frac{1}{2}x+1,\mathrm{d}s=\frac{\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{d}x$,

得 $\int_{\overline{AB}}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}s=\int_2^0\left(x^2+\left(-\frac{1}{2}x+1\right)^2\right)\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{d}x=-\frac{5\sqrt{5}}{3}$;

在直线段 $\overline{BO}$ 上 $x=0,\mathrm{d}s=\mathrm{d}y$ 得 $\int_{\overline{BO}}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}y=\frac{1}{3}$;

故 $I=\frac{8}{3}+\frac{5\sqrt{5}}{3}+\frac{1}{3}=3+\frac{5\sqrt{5}}{3}$.

(2) 解: $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}\left(\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^2-2x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right)\mathrm{d}s\\&=a^{\frac{4}{3}}\cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sin t\cos t\,\mathrm{d}t-8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(a^{\frac{2}{3}}\cos^2 t\right)\left(a^{\frac{2}{3}}\sin^2 t\right)(3a\sin t\cos t)\,\mathrm{d}t\\&=12a^{\frac{7}{3}}\cdot\frac{1}{2}-24a^{\frac{7}{3}}\cdot\frac{1}{12}=4a^{\frac{7}{3}}.\end{aligned}$$

(3) 解: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{4}$

弧段积分为: $I_1=\int_0^{\pi/4}e^a\sqrt{\left((a\sin t)^2+(a\cos t)^2\right)}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}ae^a$

直线段为: $I_2+I_3=\int_0^a e^x\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}a}^0 e^{\sqrt{2}x}\,\mathrm{d}\left(\sqrt{2}x\right)=2\left(e^a-1\right).\qquad\therefore I=2\left(e^a-1\right)+\frac{\pi}{4}ae^a.$

(4) 解: $I=\int_C y^2\,\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}(a(1-\cos t))^2\sqrt{(a(1-\cos t))^2+(a\sin t)^2}\,\mathrm{d}t$

$$=a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\sqrt{(1-\cos t)^2+(\sin t)^2}\,\mathrm{d}t=a^3\int_0^{2\pi}4\sin^4\frac{t}{2}\cdot 2\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{256}{15}a^3.$$

(5) 解: $I=\int_C xyz\,\mathrm{d}s=\int_0^1\left(t\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}t^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}t^2\right)\sqrt{1+2t+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1 t^{\frac{9}{2}}(t+1)\,\mathrm{d}t=\frac{16\sqrt{2}}{143}.$

4. 解: 由积分轮换性可知 $\int x^2\,\mathrm{d}x=\int y^2\,\mathrm{d}y=\int z^2\,\mathrm{d}z$

$\therefore I=\frac{1}{3}\int_C\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}s=\frac{a^2}{3}\int_C\mathrm{d}s=\frac{2\pi a^3}{3}.$

5.解：$I=\int_0^2 x\cdot\sqrt{2x}\cdot\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^2 x\cdot\sqrt{2x}\cdot\sqrt{\frac{2x+1}{2x}}\,\mathrm{d}x$

$=\int_0^2 x\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x=\int_0^2\left(\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{3}x\,(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2-\frac{1}{3}\int_0^2(2x+1)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{5\sqrt{5}}{3}+\frac{1}{15}.$

6. 解：$I=\int_{-\infty}^0\rho\cos\theta\cdot\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,\mathrm{d}\theta=a^2\sqrt{1+k^2}\int_{-\infty}^0 e^{2k\theta}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$

下面计算 $\int_{-\infty}^0 e^{2k\theta}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=e^{2k\theta}\sin\theta|_{-\infty}^0-2k\int_{-\infty}^0 e^{2k\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=2k\int_{-\infty}^0 e^{2k\theta}\,\mathrm{d}\cos\theta$

$=2ke^{2k\theta}\cos\theta|_{-\infty}^0-4k^2\int_{-\infty}^0 e^{2k\theta}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=2k-4k^2\int_{-\infty}^0 e^{2k\theta}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$

$\therefore\int_{-\infty}^0 e^{2k\theta}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{2k}{4k^2+1}$, $\therefore I=\frac{2ka^2\sqrt{1+k^2}}{4k^2+1}.$

7. 解:$I=\int_L\rho\,\mathrm{d}s=\int_0^1 t\sqrt{(a)^2+(at)^2+(at^2)^2}\,\mathrm{d}t$

$=\frac{a}{2}\int_0^1\sqrt{1+t^2+t^4}\,\mathrm{d}\left(t^2\right)=\frac{a}{2}\int_0^1\sqrt{1+h+h^2}\,\mathrm{d}h=\frac{a}{16}\left(6\sqrt{3}-2+3\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right).$

第二节 第一型曲面积分——对面积的曲面积分

☞ 教材见 271 页

1.(2) 解：$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$\therefore I=\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{1}{(1+x+y)^2}\,\mathrm{d}y=\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln 2\right).$

(4) 解：$\mathrm{d}S=\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}\varphi=\sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}\varphi$

$\therefore I=\pi^2\left(a\sqrt{1+a^2}+\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\right).$

(6) 解：$\iint\limits_{\Sigma}xyzdS=\sqrt{3}\,\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{3}}{120}.$

(8) 解：曲面 Σ 在 xOy 平面的投影区域 $Dxy:x^2+y^2\leqslant 2ax,z=0$

$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$I=\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zs)\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{\mathrm{d}xy}\sqrt{2}\left(xy-(y+x)\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho^2\left(\sin\theta\cos\theta-\sin\theta-\cos\theta\right)\rho\,\mathrm{d}\rho=-\frac{64}{15}\sqrt{2}a^3.$

(10) 解析：由于积分轮换性可知 $\iint x^2\,\mathrm{d}S=\iint y^2\,\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\iint\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}S=\frac{1}{2}a^2\iint\limits_{\mathrm{d}xy}\mathrm{d}S=\pi a^3h$

(12) 解：$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

2. 解析：$\because \mathrm{d}\, m=\rho \mathrm{d}\, S, \therefore m=\iint_{\Sigma} \rho \mathrm{d}\, S$

$$m=\frac{1}{2} \iint_{\mathrm{d}\, xy}\left(x^{2}+y^{2}\right) \sqrt{1+x^{2}+y^{2}} \mathrm{d}\, x \mathrm{d}\, y=\frac{1}{2} \int_{0}^{2 \pi} \mathrm{d}\, \theta \int_{0}^{1} \rho^{2} \sqrt{1+\rho^{2}} \rho \mathrm{d}\, \rho=\frac{2 \pi}{15}\left(6 \sqrt{3}+1\right)$$

第三节　第二型曲线积分——对坐标的曲线积分

☞ 教材见 281 页

1.(2) 解析：$I=\int_{C}\left(x^{2}-2 x^{3}\right) \mathrm{d}\, x+2 x\left(x^{4}-2 x^{3}\right) \mathrm{d}\, x=\int_{-1}^{1}\left(-4 x^{4}+x^{2}\right) \mathrm{d}\, x=-\frac{14}{15}$.

(4) 解析：$x=y=z, I=\int_{0}^{1} 3 x^{2} d x=1$.

(6) 解析：$\oint_{C} x y^{2} \mathrm{d}\, x-x^{2} y \mathrm{d}\, x=\int_{0}^{2 \pi}\left(R^{4} \cos t \sin ^{2} t\,(-\sin t)-R^{4} \cos ^{2} t \sin t \cos t\right) \mathrm{d}\, t$

$=R^{4} \int_{0}^{2 \pi} \sin t \cos t \mathrm{d}\, t=0$

(8)$\because y=\begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2-x, & 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$

$\therefore I=\int_{0}^{1} 2 x^{2} \mathrm{d}\, x+0 \mathrm{d}\, x+\int_{1}^{2}\left(x^{2}+(2-x)^{2}\right) \mathrm{d}\, x+\left(x^{2}-(2-x)^{2}\right)(-\mathrm{d}\, x)=\frac{4}{3}$

(10) 解：$\oint_{C} \frac{(x+y) \mathrm{d}\, x-(x-y) \mathrm{d}\, y}{x^{2}+y^{2}}=\int_{0}^{2 \pi}(\cos \theta+\sin \theta) \mathrm{d}\,(\cos \theta)-(\cos \theta-\sin \theta) \mathrm{d}\,(\sin \theta)$

$=\int_{0}^{2 \pi}\left(-\cos \theta \sin \theta-\sin ^{2} \theta-\cos ^{2} \theta+\sin \theta \cos \theta\right) \mathrm{d}\, \theta=-2 \pi$.

2. 解析：观察可知 $|x|+|y|=1$.

$\therefore \oint_{ABCDA} \frac{d x+\mathrm{d}\, y}{|x|+|y|}=\oint_{ABCDA} d x+\mathrm{d}\, y=0$(对称性)

3. 解析：$\oint_{C} \sqrt{x^{2}+y^{2}+1} \mathrm{d}\, x+y\left(x y+\ln \left(x+\sqrt{x^{2}+y^{2}+1}\right)\right) \mathrm{d}\, y$

原式 $=\int_{0}^{2 \pi} a \sqrt{1+a^{2}} d\,(\cos \theta)+a^{2} \sin \theta\left(a^{2} \cos \theta \sin \theta+\ln \left(a \cos \theta+\sqrt{1+a^{2}}\right)\right) d\,(\sin \theta)$

根据对称性以及倍角公式可得：

原式 $=\int_{0}^{2 \pi}\left(-a \sqrt{1+a^{2}} \sin \theta+a^{4} \cos ^{2} \theta \sin ^{2} \theta\right) \mathrm{d}\, \theta=\frac{\pi a^{4}}{4}$.

第四节　格林公式及其应用

☞ 教材见 299 页

1. 解：(1) 原式 $=\iint_{D}(2 x-x) \mathrm{d}\, x \mathrm{d}\, y=\iint_{D} x \mathrm{d}\, x \mathrm{d}\, y=0$.

(3) 原式 $=\iint_{D}\left(-\frac{1}{x^{2}}+\frac{1}{y^{2}}\right) \mathrm{d}\, x \mathrm{d}\, y=\int_{1}^{4} \mathrm{d}\, x \int_{1}^{\sqrt{x}}\left(-\frac{1}{x^{2}}+\frac{1}{y^{2}}\right) \mathrm{d}\, y=\frac{3}{4}$.

(5) 原式 $=\iint\limits_{D} e^{x}(-y+\sin y-\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\int_{0}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sin x}e^{x}\cdot y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{5}(1-e^{\pi})$.

2. 解: $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{x^{2}}=\frac{\partial Q}{\partial x}\ (x\neq 0)$ 只要积分路径不通过 y 轴, 则该曲线积分与路径无关.

$\therefore\int_{(2,1)}^{(1,2)}\frac{y}{x^{2}}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{x^{2}}\,\mathrm{d}y=\int_{(2,1)}^{(2,2)}-\frac{1}{2}\,\mathrm{d}y+\int_{(2,2)}^{(1,2)}\frac{2}{x^{2}}\,\mathrm{d}x=-\frac{3}{2}$.

3. 解: $\because\frac{\partial P}{\partial y}=-ax\sin y-2y\sin x=\frac{\partial Q}{\partial x}=-by-2x\sin y,\therefore a=2,b=2$.

$I=\int_{(0,0)}^{(0,1)}2y\,\mathrm{d}y+\int_{(0,1)}^{(1,1)}(2x\cos 1-\sin x)\,\mathrm{d}x=2\cos 1$.

4. 解: $\because\frac{\partial P}{\partial y}=e^{x}+f(x)=\frac{\partial Q}{\partial x}=f'(x),\therefore e^{x}=f'(x)-f(x)$.

5. 解: 原式 $=\iint\limits_{D}(2x-2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{1-x^{2}}}(2x-2y)\,\mathrm{d}y=-1$

6. 解: 原式 $=\iint\limits_{D}\left(2xe^{2y}-1-2xe^{2y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{2}^{0}x\,\mathrm{d}x-\int_{2}^{0}\left(4e^{2y}-y\right)\mathrm{d}y=\pi+2e^{4}-2$.

7. 解: $\because\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^{2}-2xy-x^{2}}{(x^{2}+y^{2})}=\frac{\partial Q}{\partial x},\therefore$ 只要不经过原点, 积分就与路径无关

故原积分 $=\int_{-1}^{1}\frac{x+1}{x^{2}+1}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^{2}+1}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

9. 解: 做小椭圆域 $x^{2}+4y^{2}\leqslant r^{2}$ 使得椭圆区域包含在积分圆周内

$\therefore\oint_{L}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^{2}+4y^{2}}=\oint_{\Gamma}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^{2}+4y^{2}}=\int_{0}^{2\pi}\frac{\frac{1}{2}r\cos\varphi r\cos\varphi-\frac{1}{2}r\sin\varphi(-r\sin\varphi)}{r^{2}}=\pi$.

第五节 第二型曲面积分——对坐标的曲面积分

☞ 教材见 308 页

1. 解: (1) $\iint\limits_{\Sigma}\left(x^{2}+y^{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint\limits_{\mathrm{d}xy}\rho^{2}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=-2\pi\int_{0}^{R}\rho^{3}\,\mathrm{d}\rho=-\frac{\pi R^{4}}{2}$.

(3) 原式 $=\iint\limits_{\Sigma}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(z^{2}-2z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

注意到 $z_{x}=\frac{x}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}},z_{y}=\frac{y}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}$

$I=\iint\limits_{\Sigma}\left(x,y,\left(z^{2}-2z\right)\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}},\frac{y}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}},1\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$\therefore I=\iint\limits_{\Sigma}\left(z^{2}-z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}\rho\left(\rho^{2}-\rho\right)\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=\frac{3}{2}\pi$.

(7) 由轮换性可知 $\iint\limits_{\Sigma}x^{3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}y^{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}z^{3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

$\therefore I=3\iint\limits_{D_{xy}}z^{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=3\iint\limits_{D_{xy}}\rho\left(a^{2}-\rho^{2}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=\frac{12}{5}\pi a^{5}$.

(9) $x=a\sin\theta\cos\varphi,y=b\sin\theta\sin\varphi,z=c\cos\varphi$

$$\therefore\begin{bmatrix}x'_{\varphi} & y'_{\varphi} & z'_{\varphi}\\ x'_{\theta} & y'_{\theta} & z'_{\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\cos\theta\cos\varphi & b\sin\theta\sin\varphi & -c\sin\varphi\\ -a\sin\theta\sin\varphi & b\cos\theta\sin\varphi & 0\end{bmatrix}$$

$\therefore A = bc\cos\theta\sin^2\varphi, B = ac\sin\theta\cos^2\varphi, C = ab\sin\theta\sin\varphi.$

$\because \iint\limits_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma} (PA+QB+RC)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$

$\therefore I = \iint\limits_{D_{xy}} \left(\frac{bc}{a}\sin\varphi + \frac{ac}{b}\sin\varphi + \frac{ab}{c}\sin\varphi\right)\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = \frac{4\pi}{abc}\left(a^2b^2+c^2b^2+a^2c^2\right).$

2. 解: (1)$\because z_x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, z_y = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \frac{5}{2\sqrt{3}}$

$\therefore \cos\alpha = \frac{3}{5}, \cos\beta = \frac{2}{5}, \cos\gamma = \frac{2\sqrt{3}}{5}$

$I = \iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{3}{5}P + \frac{2}{5}Q + \frac{2\sqrt{3}}{5}R\right)\mathrm{d}S.$

(2) $\because z_x = -2x, z_y = -2y, \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{1+4x^2+4y^2}$

$\therefore \cos\alpha = \frac{-2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}, \cos\beta = \frac{-2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$

$\therefore I = \iint\limits_{\Sigma} \frac{2xP+2yQ+R}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\,\mathrm{d}S.$

第六节　高斯公式与斯托克斯公式

☞ 教材见 319 页

1. 解: (1) 原式 $= \iiint\limits_{\Omega}\left(z^2+x^2+y^2\right)\mathrm{d}v + \iint\limits_{D_{xy}} 2xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{2\pi a^5}{5}.$

(2) 原式 $= -\iiint\limits_{\Omega} 3\,\mathrm{d}v = -2\pi R^3.$

(3) 原式 $= \iiint\limits_{\Omega} -3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iint\limits_{z=1,\mathrm{d}xy}\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\frac{15}{4}\pi.$

(4) (i) 原式 $= \iiint\limits_{\Omega}\left(3x^2-2x^2+1\right)dv = \iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{1}{3}a^5 + a^3.$

(ii) 补上平面 $z=0, z=1$ 形成封闭曲面

$I = \iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iint\limits_{z=1,D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\pi R^4 + \pi R^2.$

(5) 补上 $\sum_1 : z=0$ 形成封闭曲面

$\therefore \iiint\limits_{\Omega}(2x+2y+2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho^2}\rho\left(\rho\left(\cos\theta+\sin\theta\right)+1\right)\mathrm{d}z = \frac{2\pi}{3}.$

(6) 原式 $= \iiint\limits_{\Omega}(2x+2y+2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 3\times 2\iiint\limits_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 3a^4.$

(7) $\iiint\limits_{\Omega}(2x+2y)\,\mathrm{d}v = 2\iiint\limits_{\Omega}((x-a)+a)\,\mathrm{d}v + 2\iiint\limits_{\Omega}((y-b)+b)\,\mathrm{d}v$

$$= 2(a+b)\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{8}{3}\pi R^3(a+b).$$

2. 解: (1)$= \iint\limits_{D_{xy}} -3x^2y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -3\int_0^{2\pi} a^6\sin^2\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = -\frac{\pi}{8}a^6.$

(2) 原式 $=\iint\limits_{\Sigma}\left(z^{2}-x\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-(z+3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iiint\limits_{\Omega}2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

$=-2\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{\sqrt{2}}\rho\,\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^{2}}{2}}^{2}\mathrm{d}z=-20\pi.$

(4) 原式 $=\iint\limits_{\Sigma}(2y-2z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(2z-2x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z+(2x-2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$I=\iint\limits_{\Sigma}\left((y-z)\frac{x-R}{R}+(z-x)\frac{y}{R}+(x-y)\frac{z}{R}\right)\mathrm{d}S=2\iint\limits_{\Sigma}(z-y)\,\mathrm{d}S$

$\because \mathrm{d}S=\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\times\frac{R}{z},\mathrm{d}S=\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\times\frac{R}{y}\ \therefore z\,\mathrm{d}S=R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,y\,\mathrm{d}S=R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$

$\therefore I=2R\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-2R\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z=2R\pi r^{2}.$

(6) 原式 $=-\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z+\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=-3\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\sqrt{3}\pi a^{2}.$

3. 解: $\sum_{1}:z=e^{a},x^{2}+y^{2}\leqslant a^{2}$

$\therefore I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_{1}}4xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2yz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z+\left(1-z^{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_{1}}4xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2yz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z+\left(1-z^{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$=\iiint\limits_{\Omega}(4z-2z-2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\iint\limits_{\mathrm{d}xy}\left(1-e^{2a}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\left(e^{2a}-1\right)\pi a^{2}.$

第七节 场论初步

☞ 教材见 328 页

1. 解: (1) $F=\left(P_{1},Q_{1},R_{1}\right),G=\left(P_{2},Q_{2},R_{2}\right)$

$\therefore \operatorname{div}(F+G)=\frac{\partial\left(P_{1}+P_{2}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(Q_{1}+Q_{2}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(R_{1}+R_{2}\right)}{\partial z}$

原式 $=\frac{\partial P_{1}}{\partial x}+\frac{\partial Q_{1}}{\partial y}+\frac{\partial R_{1}}{\partial z}+\frac{\partial P_{2}}{\partial x}+\frac{\partial Q_{2}}{\partial y}+\frac{\partial R_{2}}{\partial z}=\operatorname{div}F+\operatorname{div}G.$

(2) $\operatorname{div}(UF)=\frac{\partial(UF)}{\partial x}+\frac{\partial(UF)}{\partial y}+\frac{\partial(UF)}{\partial z}$

原式 $=U\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)+F\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\right)=U\operatorname{div}F+F\operatorname{div}U.$

$$\textbf{(3)}\mathbf{rot}(F+G)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ f_{x}+g_{x} & f_{y}+g_{y} & f_{z}+g_{z}\end{vmatrix}$$

$$\mathbf{rot}F+\mathbf{rot}G=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ f_{x} & f_{y} & f_{z}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ g_{x} & g_{y} & g_{z}\end{vmatrix}=\mathbf{rot}(F+G).$$

$$(4)\mathbf{rot}(UF)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ UF & UF & UF\end{vmatrix}=U\mathbf{rot}F+\mathbf{grad}U\times F$$

2. 解: (1)$\operatorname{div}(\mathbf{gradU})=\nabla\cdot(\nabla U)=\nabla^2 U=\Delta U$.

(2) $\operatorname{div}(U\mathbf{gradU})=U\operatorname{div}(\mathbf{gradU})+\mathbf{gradU}\cdot\mathbf{gradU}=U\Delta U+\mathbf{gradU}\cdot\mathbf{gradU}$.

(3) $\mathbf{rot}(\mathbf{gradU})=\nabla\times(\nabla U)=(0,0,0)$.

(4) $\operatorname{div}(\mathbf{rot}F)=\nabla\cdot(\nabla\times A)=(\nabla\times\nabla)\cdot F=0$.

3. 解: $$\begin{aligned}\operatorname{div}F&=\lim_{\Delta\tau\to 0}\lim,\frac{1}{\Delta\tau}\iint\limits_{\sigma}F\cdot n\,\mathrm{d}\,S\\&=\lim_{\Delta\tau\to 0}\lim\frac{1}{\Delta\tau}\iint\limits_{\sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}\,S\\&=\lim_{\Delta\tau\to 0}\lim\frac{1}{\Delta\tau}\iint\limits_{\sigma}P\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z+Q\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z+R\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=0\end{aligned}$$

$\therefore\operatorname{div}F=0\Leftarrow\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$.(反推可证充分性)

总 习 题 九

☞ 教材见 339 页

1. 解: (1) 原式 $=\displaystyle\int_C\sqrt{2y^2+z^2}\,\mathrm{d}\,s=\int_C\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}\,s=2\pi a^2$.

(3) 原式 $=\displaystyle\int_3^8\frac{2}{3}x\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}\,x=\frac{2152}{45}$.

(5) 补上 x 轴使曲线封闭，而后使用格林公式

原式 $=-\displaystyle\iint\limits_D(2x+1)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=-\int_0^2\mathrm{d}\,x\int_0^{2x-x^2}(2x+1)\,\mathrm{d}\,y=-4$.

(7) $\displaystyle\int_L(2a-a(1-\cos t)\,a(1-\cos t)+a(t-\sin t)\,a\sin t)\,\mathrm{d}\,t$

原式 $=\displaystyle\int_0^{2\pi}a^2t\sin t\,\mathrm{d}\,t=-2\pi a^2$.

(9) $\because y=z,\therefore x^2+2y^2=1\to x=\cos t,y=\dfrac{1}{\sqrt2}\sin t$

$\displaystyle\int_L xyz\,\mathrm{d}\,x=\int_0^{2\pi}\cos t\cdot\frac{1}{2}\sin^2 t\cdot\frac{1}{\sqrt2}\cos t\,\mathrm{d}\,t=\frac{\sqrt2\pi}{16}$.

2. 解: $m=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}\,s=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+t^2}\sqrt2\,\mathrm{d}\,t=\sqrt2\left(\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac12\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)\right)$.

4. 解: (1) 原式 $=\displaystyle\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\iint\limits_D y^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\int_1^4\mathrm{d}\,x\int_0^2 y^2\,\mathrm{d}\,y=8$.

(2) 原式 $=\displaystyle\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\iint\limits_D y^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\int_0^a\rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\,\rho\int_0^{2\pi}\cos^2\theta=\frac{a^4}{4}\pi$.

6. 解: $I=-2\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z+\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y+\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z=-2\sigma\left(\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}+\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\right)=-2\pi a(a+h)$.

7. 解: (1) 补充平面 $\sum_1 z=0, \sum_2 z=h$ 构成封闭曲面

$$原式=\iint\limits_{\Omega} 0\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z-\iint\limits_{\sum_1}\left(x^2-y\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y-\iint\limits_{\sum 2}\left(x^2-y\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

$$=-\int_0^{2\pi}\int_0^h \rho\left(\rho^2\cos^2\theta-\rho\sin\theta\right)\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta=-\frac{\pi}{4}h^4.$$

(3) 取 $\varepsilon>0$ 充分小, $S_{\varepsilon}: x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2\,(z\geqslant 0)\,, D_{\varepsilon}: x^2+y^2=\varepsilon^2\,(z=0)$

$$\therefore I=\iint\limits_{S_{\varepsilon}+D_{\varepsilon}}\frac{x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z+y\,\mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,x+z\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}=\frac{1}{\varepsilon^3}\iint_{S_{\varepsilon}}\frac{1}{\varepsilon}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}\,s=2\pi.$$

(5) 补平面 $\sum_1: z=0$ 构成封闭曲面

$$原式=\frac{1}{a}\iint\limits_{\sum+\sum_1-\sum_1} ax\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z+(z+a)^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=-\iiint\limits_{\Omega}\left[a+2\,(z+a]\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z+\iint\limits_{D_{xy}} a^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

$$=-3a\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z-2\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z+a^2\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=-\frac{1}{2}\pi a^3.$$

8. 解: (1) $原式=-\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z+\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z+\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=-\iint\limits_{D}(1,1,1)\,(1,1,1)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=-\iint\limits_{D}\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$

$D_{xy}: x^2+y^2+(x+y-1)^2=1$

$\therefore I=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi.$

第十章 常微分方程

☞ 习题见第 176 页

第一节 微分方程的基本概念

☞ 教材见 348 页

2. (1) 解：将 $y = C_1 \cos \omega x$ 代入左边得：$y'' + \omega^2 y = -C_1\omega^2 \cos \omega x + C_1\omega^2 \cos \omega x = 0$

符合原方程，故 $y = C_1 \cos \omega x$ 是所给方程 $y'' + \omega^2 y = 0$.

(3) 解：将 $y = 3s \ln x - 4\cos x$ 代入方程左边得 $y'' + y = -3s \ln x + 4\cos x + 3s \ln x - 4\cos x = 0$

符合原方程，故 $y = 3s \ln x - 4\cos x$ 是所给方程 $y'' + y = 0$ 的解.

(5) 解: $y = x^2 e^x$ 求导得 $y' = 2xe^x + x^2e^x$, 再次求导得 $y'' = 2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2e^x = 2e^x + 4xe^x + x^2e^x$

代入左边得 $y'' - 2y' + y = 2e^x + 4xe^x + x^2e^x - 4xe^x - 2x^2e^x + x^2e^x = 2e^x \neq 0$

故 $y = x^2e^x$ 不是所给方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解.

3. (1) 解：设所求曲线方程为 $y = y(x)$

根据题意可知函数应满足如下关系：$\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = x^2$, 即 $y' = x^2$.

(3) 解：设所求曲线方程为 $y = y(x)$, 该曲线在 x 处斜率为 y', 可得切线方程为 $y = y'x + s$

又根据题意，$s = x$, 故 $y = y'x + x$，也即 $xy' = y - x$.

(5) 解：设所求曲线方程为 $y = y(x)$, 该曲线在 x 处斜率为 y'

设其在 (x, y) 处切线的截距为 b, 则切线方程为 $y = y'x + b$

又根据题意，$b = \dfrac{x+y}{2}$, 故 $y = y'x + \dfrac{x+y}{2}$, 也即 $y - xy' = \dfrac{x+y}{2}$.

4. 解：设物体与空气的温差是 T, 在冷却过程中所需时间 t 是温差 T 的函数 $t = T(t)$

设其冷却速度为 v, 根据题意，设比例系数为 k, 则 $v = kT$

又因为冷却表示为温度的下降，即 v 是表示 T 递减速率的函数，故 $v = -\dfrac{\mathrm{d}\,T}{\mathrm{d}\,t}$

联立以上各式可得 $-\dfrac{\mathrm{d}\,T}{\mathrm{d}\,t} = kT$

解此微分方程可得：$t = -\dfrac{\ln kT}{k} + C$($C$ 为常数)

根据题意，物体在 20 分钟内由 100 度冷却到 60 度，温差 T 应为物体温度减去空气温度

开始时 $\begin{cases} t = 0 \\ T = 100 - 20 = 80 \end{cases}$，结束时 $\begin{cases} t = 20 \\ T = 60 - 20 = 40 \end{cases}$

代入 t 与 T 的函数关系式，得 $\begin{cases} -\dfrac{\ln 80k}{k} + C = 0 \\ -\dfrac{\ln 40k}{k} + C = 20 \end{cases}$，解方程得 $\begin{cases} k = \dfrac{\ln 2}{20} \\ C = -\dfrac{20\ln(4\ln 2)}{\ln 2} \end{cases}$

故 $t=\dfrac{20}{\ln 2}\ln\dfrac{80}{T}$ (单位: 分钟), 则物体达到 30 度时，需要 60 分钟.

第二节 可变量分离的微分方程

☞ 教材见 354 页

1. (2) 解：分离变量得 $\dfrac{\tan y}{\ln(\cos y)}\,\mathrm{d}\,y=-\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x\Rightarrow-\dfrac{s\ln y}{\cos y\ln(\cos y)}\,\mathrm{d}\,y=\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x$

两边积分得 $\ln[\ln(\cos y)]=\ln x+C\Rightarrow\ln(\cos y)=xe^{C}\Rightarrow\cos y=e^{xe^{C}}$

令 $C_1=e^{C},\cos y=e^{xC_1}$，$y=\arccos e^{C_1x}$, 即 $y=\arccos e^{Cx}$.

(4) 解：分离变量得 $\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}\,\mathrm{d}\,y=-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}\,x$

两边积分得 $\sqrt{1+y^2}=-\sqrt{1+x^2}+C$, 即 $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C$.

(6) 解：分离变量得 $\dfrac{5e^x}{1-e^x}\,\mathrm{d}\,x=-\dfrac{\sec^2 y}{\tan y}\,\mathrm{d}\,y$，两边积分得 $-5\ln(1-e^x)+C=-\ln(\tan y)$

$\Rightarrow(1-e^x)^5e^{-C}=\tan y$，令 $C_1=e^{-C}$

故 $(1-e^x)^5C_1=\tan y$ $,y=\arctan C_1(1-e^x)^5$, 即 $y=\arctan C(1-e^x)^5$.

(8) 解：变换得 $e^x(e^y-1)\,\mathrm{d}\,x+e^y(e^x+1)\,\mathrm{d}\,y=0$，分离变量得 $\dfrac{e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}\,x=-\dfrac{e^y}{e^y-1}\,\mathrm{d}\,y$

两边积分得

$$\ln(e^x+1)+C=-\ln(e^y-1)\Rightarrow(e^x+1)e^{C}=\frac{1}{e^y-1}$$

令 $C_1=\dfrac{1}{e^C}$，$C_1=(e^x+1)(e^y-1)$，即 $(e^x+1)(e^y-1)=C$.

(10) 解：变换得 $y'+s\ln x\cos y+\cos xs\ln y=s\ln x\cos y-\cos xs\ln y$

$$\Rightarrow y'+2\cos xs\ln y=0\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}+2\cos x\ln y=0$$

两边积分得 $\ln\left|\tan\dfrac{y}{2}\right|=-2s\ln x+C$, 故 $2s\ln x+\ln\left|\tan\dfrac{y}{2}\right|=C$.

2. (1) 解：$\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}s\ln x=y\ln y$, 分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{y\ln y}=\frac{\mathrm{d}\,x}{s\ln x}$$

两边积分得 $\ln(\ln y)=\ln(\tan\dfrac{x}{2})+C\Rightarrow\ln y=\tan\dfrac{x}{2}e^{C}$

代入初始条件得 $C=0$，故 $\ln y=\tan\dfrac{x}{2}$.

(3) 解：$\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\cos x=\dfrac{y}{\ln y}$，分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}\,x}{\cos x}=-\dfrac{\ln y}{y}\,\mathrm{d}\,y$，两边积分得

$$\ln\left|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right|+C=\frac{1}{2}\ln^2 y$$

代入初始条件得 $C=0$，故 $\ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=\dfrac{1}{2}\ln^2 y$.

(5) 解：分离变量得 $\dfrac{3e^x\,\mathrm{d}\,x}{1+e^x}=-\dfrac{\sec^2 y}{\tan y}\,\mathrm{d}\,y$，两边积分得 $3\ln(1+e^x)+C=-\ln(\tan y)$

变换得 $(1+e^x)^3\tan ye^{C}=0$，代入初始条件得 $C=-3\ln 2$，故 $(1+e^x)^3\tan y=8$.

(7) 解：$x\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}+x+s\ln(x+y)=0$，变换得

$$x(\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}+1)+s\ln(x+y)=0\Rightarrow x\frac{\mathrm{d}\,y+\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,x}+s\ln(x+y)=0$$

注意到 $\frac{\mathrm{d}\,y+\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,x}=\frac{\mathrm{d}(x+y)}{\mathrm{d}\,x}$，因此令 $u=x+y$, 故 $x\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}+s\ln u=0$

分离变量得 $\frac{\mathrm{d}\,x}{x}=-\frac{\mathrm{d}\,u}{s\ln u}$，两边积分得

$$\ln x+C=-\ln\left|\tan\frac{u}{2}\right|\Rightarrow xe^{C}=\frac{1}{\tan\frac{u}{2}}$$

把初始条件代入得 $C=\ln\frac{2}{\pi}$，故 $x\tan\frac{x+y}{2}=\frac{2}{\pi}$.

4. (2) 解：原方程可写为 $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{y}{x}-\frac{1}{s\ln\frac{y}{x}}$，令 $u=\frac{y}{x}$, 得 $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{x\,\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}+u$

故 $\frac{x\,\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}+u=-\frac{1}{s\ln u}$，分离变量得 $s\ln\mathrm{d}\,u=-\frac{\mathrm{d}\,x}{x}$

两边积分得 $\cos u+C_1=\ln x$, 变形得 $e^{\cos u}e^{C_1}=x$, 即 $x=Ce^{\cos\frac{y}{x}}$

(4) 解：原方程可写为 $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{y}{x}+tan\frac{y}{x}$，令 $u=\frac{y}{x}$, 得 $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{x\,\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}+u$

故 $\frac{x\,\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}+u=\tan u$, 分离变量得 $\frac{1}{tanu}\mathrm{d}\,u=-\frac{\mathrm{d}\,x}{x}$

两边积分得 $s\ln x=xe^{C}$，故 $s\ln\frac{y}{x}=xC$.

(6) 解：原方程化为 $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{2x-5y+3}{2x+4y-6}$, 注意到 $\Delta=18\neq 0$

解方程组 $\begin{cases}2x-5y+3=0\\2x+4y-6=0\end{cases}$ 得到交点 $\begin{cases}x_0=\alpha=1\\y_0=\beta=1\end{cases}$，令 $\begin{cases}x=X+\alpha=X+1\\y=Y+\beta=Y+1\end{cases}$

原方程化为 $\frac{\mathrm{d}\,Y}{\mathrm{d}\,X}=\frac{2X-5Y}{2X+4Y}=\frac{2-5\frac{Y}{X}}{2+4\frac{Y}{X}}$ 令 $\frac{\mathrm{d}\,Y}{\mathrm{d}\,X}=u$

$\frac{\mathrm{d}\,Y}{\mathrm{d}\,X}=\frac{X\,\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,X}+u$, 代入原方程得 $\frac{X\,\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,X}+u=\frac{2-5u}{2+4u}$，变形得

$$\frac{1}{\frac{2-5u}{2+4u}-u}\mathrm{d}\,u=\frac{\mathrm{d}\,X}{X}\Rightarrow(\frac{4u+\frac{7}{2}}{2-7u-4u^2}+\frac{\frac{2}{3}}{4(u+2)}-\frac{\frac{2}{3}}{4u-1})\mathrm{d}\,u=\frac{\mathrm{d}\,X}{X}$$

两边积分得 $-\frac{1}{2}\ln(2-7u-4u^2)+\frac{1}{6}\ln(u+2)-\frac{1}{6}\ln(4u-1)=\ln X+C'$

整理得 $(4y-x-3)(y+2x-3)^2=C$.

(8) 解：原方程化为 $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{x^2y^2+1}{2x^2}$，令 $u=xy$, $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{\mathrm{d}\,u}{x\,\mathrm{d}\,x}+\frac{u}{x^2}$, 代入原方程得

$$\frac{\mathrm{d}\,u}{x\,\mathrm{d}\,x}+\frac{u}{x^2}=\frac{u^2+1}{2x^2}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\,x}{x}=\frac{2\,\mathrm{d}\,u}{(u-1)^2}$$

两边积分, 得 $x=Ce^{\frac{2}{xy-1}}$.

5. (2) 解：$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{y}{x}+s\ln\frac{y}{x}$，令 $u=\frac{y}{x}$, $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{x\,\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}+u$，则 $\frac{\mathrm{d}\,u}{s\ln u}=\frac{\mathrm{d}\,x}{x}$

两边积分得

$$y=2x\arctan(xe^{C'})$$

代入初始条件得 $y=2x\arctan x$.

(4) 解: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{1+6(\frac{y}{x})^2+(\frac{y}{x})^4}{4\frac{y}{x}+4\frac{y}{x}^3}$, 令 $u=\dfrac{x}{y}, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x\,\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$, 则 $\dfrac{4u+4u^3}{1+10u^2+5u^4}\mathrm{d}u=-\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

两边积分得 $(1+10u^2+5u^4)^{\frac{1}{5}}=\dfrac{e^{C'}}{x}$, 代入初始条件得 $x^5+10x^3y^2+5xy^4=1$.

第三节　一阶线性微分方程与常数变易法

☞ 教材见 359 页

1. 解: (1) 将方程改写为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\cos x=e^{-s\ln x}$, 对应齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\cos x=0$ 的通解

齐次方程通解为 $y=Ce^{-s\ln x}$, 应用常数变易法, 令 $y=C(x)e^{-s\ln x}$, 代入原方程得 $C'(x)=1$

积分后得 $C(x)=x+C_1$, 代入得 $y=(x+C)e^{-s\ln x}$.

(3) 解: 将方程改写为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y\,\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x+\ln y}$, 令 $u=\ln y, \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{y\,\mathrm{d}x}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x+u}$

令 $t=x+u$, 则 $\dfrac{t\,\mathrm{d}t}{t+1}=\mathrm{d}x$, 两边积分得

$$t-\ln(t+1)=x+C'\Rightarrow x=Cy-\ln y-1.$$

(5) 解: 将方程改写为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\dfrac{2x}{y}=-y$, $P(y)=-\dfrac{2}{y}, Q(y)=-y$, 则 $x=y^2(C-\ln y)$.

(6) 解: 将方程改写为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+xy=x^3y^3$, 令 $z=y^{-2}$, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-2xz=-2x^3$

代入通解得 $z=Ce^{x^2}+x^2+1$, 原方程为

$$\frac{1}{y^2}=Ce^{x^2}+x^2+1.$$

(7) 解: 将方程改写为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{y}{x}=ay^2\ln x$, 令 $z=xy, \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{az^2\ln x}{x}$, 得

$$xy\left[C-\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]=1.$$

2. (1) 解: 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{e^x}{x}$, 令 $z=xy, \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=e^x$, 则 $xy=e^x+C$, 代入初始条件得 $xy=e^x$.

(3) 解: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\cot x=5e^{\cos x}$, 对应齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-y\cot x$ 通解为 $y=\dfrac{C}{s\ln x}$

应用常数变易法, 令 $y=\dfrac{C(x)}{s\ln x}$, 代入得

$$y=\frac{-5e^{\cos x}+C_1}{s\ln x}\Rightarrow y=\frac{-5e^{\cos x}+1}{s\ln x}.$$

(5) 解: 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}\,\mathrm{d}x}+\sqrt{y}=e^{\frac{x}{2}}$, 令 $z=\sqrt{y}, \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+\dfrac{z}{2}=\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{2}$

对应齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+\dfrac{z}{2}=0$ 通解为 $z=Ce^{-\frac{x}{2}}$, 应用常数变易法, 得 $\sqrt{y}=(\dfrac{e^x}{2}+C_1)e^{-\frac{x}{2}}$

$\Rightarrow \sqrt{y}=\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}$.

第四节 全微分方程

☞ 教材见 364 页

1. (2) 解：$M=\dfrac{y^2}{(x-y)^2}-\dfrac{1}{x}\quad N=\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{(x-y)^2},\quad \dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{2xy}{(x-y)^3}$

原方程化为 $\dfrac{y^2\,\mathrm{d}\,x-x^2\,\mathrm{d}\,y}{(x-y)^2}=\mathrm{d}(\dfrac{xy}{x-y})$，则 $\dfrac{xy}{x-y}=\ln\left|\dfrac{x}{y}\right|+C.$

(4) 解：$M=y(x-2y),N=-x^2,\quad \dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$，方程不是全微分方程.

(6) 解：$M=x^2+y^2,N=xy,\quad \dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$，方程不是全微分方程.

(8) 解：$M=xy+\dfrac{1}{4}y^4\quad N=\dfrac{1}{2}x^2-xy^3,\quad \dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$

原方程化为 $2\,\mathrm{d}(x^2y)+\mathrm{d}(xy^4)=0$，则 $2x^2y+xy^4+C=0.$

2. (1) 解：原方程变形为 $\mathrm{d}(\dfrac{x^2}{y^3})-\mathrm{d}(\dfrac{1}{y})=0$，积分得 $\dfrac{x^2}{y^3}-\dfrac{1}{y}=C.$

(3) 解：$M=x+y^2\quad N=-2xy,\quad \dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$，原方程化为 $\mathrm{d}(\ln x)-\mathrm{d}(\dfrac{y^2}{x})=0$，积分得 $x=Ce^{\frac{y^2}{x}}.$

(5) 解：$\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=-\dfrac{4}{y},\quad \left(\dfrac{3x^2}{y^3}-\dfrac{a}{y^2}\right)\mathrm{d}\,x-\left(\dfrac{3x^2}{y^4}-\dfrac{2ax}{y^3}\right)\mathrm{d}\,y=0$

变形为 $\mathrm{d}(\dfrac{x^3}{y^3})+\mathrm{d}(-\dfrac{ax}{y^2})=0$，得 $x^3-axy=Cy^3.$

(7) 解：$\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=-\dfrac{2}{x}\Rightarrow(x^2e^x+3x^2y^2)\,\mathrm{d}\,x+2x^3y\,\mathrm{d}\,y=0$

$x^2e^x\,\mathrm{d}\,x+\mathrm{d}(x^3y^2)=0\Rightarrow(x^2-zx+2)e^x+x^3y^2=C.$

3. (1) 解：设所求曲线方程为 $y=y(x)$，根据题意可知未知函数应满足如下关系：$\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=x^2$，即 $y'=x^2.$

(3) 解：设所求曲线方程为 $y=y(x)$，切线方程为 $y=y'x+s$，根据题意 $s=x$，则 $xy'=y-x.$

(5) 解：设所求曲线方程为 $y=y(x)$，切线方程为 $y=y'x+b$，根据题意 $b=\dfrac{x+y}{2}$，故 $y-xy'=\dfrac{x+y}{2}.$

第五节 某些特殊类型的高阶方程

☞ 教材见 369 页

1. (1) 解：记 $y'=p\,(y)$，$\therefore y''=p\dfrac{\mathrm{d}}{p}\,\mathrm{d}\,y$，原方程化为

$$yp\frac{\mathrm{d}}{p}\,\mathrm{d}\,y+p^2=0\Rightarrow p=\frac{C_0}{y}$$

$$\therefore\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{C_0}{y}\Rightarrow y\,\mathrm{d}\,y=C_0\,\mathrm{d}\,x$$

两侧积分得

$$y^2=C_1x+C_2\,(C_1=2C_0)\,.$$

(3) 解：记 $y'=p\,(x)\Rightarrow y''=p'$，故原式化为

$$p'=x+p$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x}-p=x$$

设积分因子 $\mu=e^{-x}$, 则在上式两边同乘积分因子 μ 得

$$\frac{\mathrm{d}\,p}{e^{x}\,\mathrm{d}\,x}-\frac{p}{e^{x}}=\frac{x}{e^{x}}$$

凑微分得

$$\mathrm{d}\left(pe^{-x}\right)=xe^{-x}$$

两侧积分得

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=p=-x+C_1e^{x}-1$$

再次积分, 得

$$y=-\frac{1}{2}x^2-x+C_1e^{x}+C_2.$$

(5) 解：记 $y'=p\,(y)$, 则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,y}$，代入原式得

$$y\,(1+y)\times p\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,y}=-\left(1+\ln y\right)p^2\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\,p}{p}=-\frac{1+\ln y}{y(1-\ln y)}\,\mathrm{d}\,y$$

两侧积分得

$$\ln p=\ln y+2\ln(1-\ln y)+\ln C_0$$

整理得

$$p=\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=C_0y(1-\ln y)^2\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\,y}{y(1-\ln y)^2}=C_0x$$

再次积分得

$$\frac{1}{1-\ln y}=C_0x+C$$

整理得

$$-\ln y=\frac{-C_0x-C+1}{C_0x+C}\Rightarrow y=e^{\frac{x+C_2}{x+C_1}}\quad(C_1=\frac{C}{C_0},C_2=\frac{C-1}{C_0}).$$

(7) 解：记 $y''=p(x)\Rightarrow y'''=p'$，代入原式得

$$2xpp'=p^2-a^2\Rightarrow 2p\frac{\mathrm{d}\,p}{p^2-a^2}=\frac{\mathrm{d}\,x}{x}$$

两侧积分并整理得

$$p^2=Cx+a^2$$

$$\therefore y=\int\left(\int p\,\mathrm{d}\,x\right)\mathrm{d}\,x=C_2x+C_3\pm\frac{4\left(C_1x+{C_1}^2\right)^{\frac{5}{2}}}{15C_1^2}.$$

2. (1) 解：记 $y'=p\,(x)\Rightarrow y''=p'$，代入原式得

$$p'+p^2=1\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x}=-p^2+1\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\,p}{1-p^2}=\mathrm{d}\,x$$

两侧积分并整理得

$$\frac{1+p}{1-p}=e^{2(x+C)}\Rightarrow p=\frac{e^{2(x+C)}-1}{e^{2(x+C)}+1}$$

亦即

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{e^{2(x+C)}-1}{e^{2(x+C)}+1}$$

两侧再次积分并整理得

$$y=\ln\left[e^{2(C+x)}+1\right]-x+C_0$$

将条件 $y\left(0\right)=0, y'\left(0\right)=0$ 代入, 得

$$C=0, C_0=-\ln 2$$

综上, 特解为

$$y=\ln\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\ln\operatorname{ch}x.$$

(2) 解: 记 $y'=p\left(y\right)$, 则 $y''=p\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,y}$, 代入原式, 得

$$yp\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,y}=2(p^2-p)\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\,p}{p-1}=\frac{2\,\mathrm{d}\,y}{y}$$

两侧积分并整理得

$$p=\frac{dy}{dx}=Cy^2+1\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\,y}{Cy^2+1}=\mathrm{d}\,x$$

两侧积分并整理得

$$y=\frac{\tan\left(\sqrt{C}x+C_2\right)}{\sqrt{C}}$$

将条件 $y(0)=1, y'\left(0\right)=2$ 代入, 得

$$\sqrt{C}=1, C_2=\frac{\pi}{4}$$

综上, 特解为

$$y=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

(5) 解: 记 $y'=p\left(x\right)\Rightarrow y''=p'$, 代入原式得

$$p'+p^2+1=0\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\,p}{p^2+1}=-\,\mathrm{d}\,x$$

两侧积分并整理得

$$p=\tan(C-x)$$

亦即

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\tan(C-x)$$

$$\Rightarrow\mathrm{d}\,y=-\frac{\sin(C-x)}{\cos(C-x)}\,\mathrm{d}\left(C-x\right)$$

两侧积分并整理得

$$y=\ln\left|\cos(C-x)\right|+C_1$$

将条件 $y(0)=0$,y'(0) $=1$ 代入, 得

$$C=\frac{\pi}{4},C_1=1+\frac{1}{2}\ln 2$$

综上, 特解为

$$y=\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|+1+\frac{1}{2}\ln 2.$$

3. 解: $s=\int v\,\mathrm{d}t$, 对 v, 有 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g-\frac{(cv)^2}{m}$, 而 $v=s'$, $\therefore$ 根据题意得关于 s 的微分方程为

$$s''=g-\frac{c^2(s')^2}{m}$$

记 $p=s'\Rightarrow s''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}$, 代入原式得

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}=g-\frac{c^2p^2}{m}\Rightarrow\frac{p}{mg-c^2p^2}\mathrm{d}p=\mathrm{d}s$$

两侧积分并整理得

$$s+\ln C_1=-\frac{1}{2c^2}\ln\left(mg-c^2p^2\right)$$

$$\Rightarrow p=\pm\frac{1}{c^2}\sqrt{mg-Ce^{-2c^2s}}(C_2=C_1e^{-2c^2})$$

将条件 $p(0)=0,s(0)=0$ 代入得

$$C_2=mg$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}=\pm\frac{\sqrt{mg}}{c^2}\sqrt{1-e^{-2c^2s}}$$

分离变量得

$$\pm\sqrt{\frac{e^{2c^2s}}{e^{2c^2s}-1}}ds=\frac{\sqrt{mg}}{c^2}\mathrm{d}t$$

两侧积分并整理得

$$s=\frac{m}{c^2}\ln ch\left(\frac{ct}{\sqrt{mg}}\right).$$

第六节　高阶线性微分方程

☞ 教材见 373 页

1. 由朗斯基行列式

(1) 解: $\begin{vmatrix}e^{x^2} & xe^{x^2}\\ 2xe^{x^2} & e^{x^2}+2x^2e^{x^2}\end{vmatrix}=e^{2x^2}\neq 0\therefore$ 线性无关.　　(3) 解: $\begin{vmatrix}e^{x^2} & xe^{x^2}\\ 2xe^{x^2} & e^{x^2}+2x^2e^{x^2}\end{vmatrix}=e^{2x^2}\neq 0\therefore$ 线性无关.

(5) 解: $\begin{vmatrix}2x^2+1 & x^2-1 & x+2\\ 4x & 2x & 1\\ 4 & 2 & 0\end{vmatrix}=-6\neq 0\therefore$ 线性无关.

2. 证明: 假设 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性相关，则朗斯基行列式

$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ {y_1}'(x) & {y_2}'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)\,{y_2}'(x) - y_2(x)\,{y_1}'(x) = 0 \quad \because \dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} \neq$ 常数

$\therefore y_2(x) \neq 0$ 故 $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} = \dfrac{{y_1}'(x)}{{y_2}'(x)}$ 与题设矛盾 $\therefore y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性无关.

3. 解：对于零次时, 有

$$a_n(x)\,y_1(x) + a_n(x)\,y_2(x) = a_n(x)\,[y_1(x) + y_2(x)]$$

对于一次时, 有

$$a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}\,f_1(x)}{\mathrm{d}\,x} + a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}\,f_2(x)}{\mathrm{d}\,x}\,\mathrm{d}\,x = a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}\,[f_1(x) + f_2(x)]}{\mathrm{d}\,x}$$

对于二次, 有

$$a_{n-2}(x)\frac{\mathrm{d}^2[y_1(x)]}{\mathrm{d}\,x^2} + a_{n-2}(x)\frac{\mathrm{d}^2[y_2(x)]}{\mathrm{d}\,x^2} = a_{n-2}(x)\frac{\mathrm{d}^2\,[y_1(x)] + \mathrm{d}^2\,[y_2(x)]}{\mathrm{d}\,x^2}$$

$$a_{n-2}(x)\frac{\mathrm{d}^2\,[y_1(x) + y_2(x)]}{\mathrm{d}\,x^2} = a_{n-2}(x)\frac{\mathrm{d}\left[\frac{\mathrm{d}\,y_1(x)}{\mathrm{d}\,x} + \frac{\mathrm{d}\,y_2(x)}{\mathrm{d}\,x}\right]}{\mathrm{d}\,x} = a_{n-2}(x)\frac{\mathrm{d}^2[y_2(x)] + \mathrm{d}^2\,[y_1(x)]}{\mathrm{d}\,x^2}$$

$$\text{即 } a_{n-2}(x)\frac{\mathrm{d}^2\,[y_1(x) + y_2(x)]}{\mathrm{d}\,x^2} = a_{n-2}(x)\frac{\mathrm{d}^2[y_2(x)] + \mathrm{d}^2\,[y_1(x)]}{\mathrm{d}\,x^2};$$

同理可证

$$a_{n-k}(x)\frac{\mathrm{d}^k\,[y_1(x)]}{\mathrm{d}\,x^k} + a_{n-k}(x)\frac{\mathrm{d}^k\,[y_2(x)]}{\mathrm{d}\,x^k} = a_{n-k}(x)\frac{\mathrm{d}^k\,[y_1(x) + y_2(x)]}{\mathrm{d}\,x^k}k. \in [3, +\infty).$$

第七节 常系数线性微分方程

☞ 教材见 380 页

1. (1) 解：特征方程为

$$r^4 - 1 = 0 \Rightarrow r_1, r_2 = \pm 1, r_3, r_4 = \pm i$$

$\therefore$ 通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

(3) 特征方程为$r^4 - 5r^3 + 6r^2 + 4r - 8 = 0 \Rightarrow (r-2)\left(r^3 - 3r^2 + 4\right) = 0$

$$\Rightarrow (r+1)(r-2)\left(r^2 - 4r + 4\right) = 0 \Rightarrow r_1 = -1, r_2 = r_3 = r_4 = 2.$$

$\therefore$ 通解为

$$y = C_1 e^{-x} + \left(C_2 + C_3 x + C_4 x^2\right) e^{2x}.$$

(5) 解：特征方程为

$$r^4 - 13r^2 + 36 = 0 \Rightarrow \left(r^2 - 4\right)\left(r^2 - 9\right) = 0$$

得特征方程的根为

$$r_1, r_2 = \pm 3, r_3, r_4 = \pm 2$$

故通解为

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}.$$

2. (2) 解：对应的齐次方程为

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0 \Rightarrow (r+1)^3 = 1$$

故对应的齐次方程通解为

$$\tilde{y} = \left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2\right) e^{-x}$$

设一特解

$$y^* = x^3 \left(b_0 x + b_1\right) e^{-x}$$

于是$(y^*)' = \left[-b_0 x^4 + (4b_0 - b_1) x^3 + 3b_1 x^2\right] e^{-x}$

$(y^*)'' = \left[b_0 x^4 - (8b_0 - b_1) x^3 + (12b_0 - 6b_1) x^2 + 6b_1 x\right] e^{-x}$

$(y^*)''' = x\left[-b_0 x^4 + (12b_0 - b_1) x^3 + (-36b_0 + 9b_1) x^2 + (24b_0 - 18b_1) x\right] e^{-x}$

代入原方程得 $24b_0 x + 6b_1 = x - 5$

解得 $eb_0 = \dfrac{1}{24}, b_1 = -\dfrac{5}{6}$

故有一特解

$$y^* = \frac{1}{24} x^3 (x - 20) e^{-x}$$

故而原方程通解为

$$y = \left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2\right) e^{-x} + \frac{1}{24} x^3 (x - 20) e^{-x}.$$

(4) 解：特征方程为 $r^2 - 3r + 2 = 0$

故通解为

$$\tilde{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$$

设特解

$$y^* = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + b_1 \sin x + b_2 \cos x$$

$\therefore (y^*)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + b_1 \cos x - b_2 \sin x \quad (y^*)'' = 2a_2 + 6a_3 x - b_1 \sin x - b_2 \cos x$

代回原方程得

$$2a_3 x^3 + (2a_2 - 9a_3) x^2 + (2a_1 - 6a_2 + 6a_3) x + (2a_0 - 3a_1 + 2a_2) + (b_1 + 3b_2) \sin x + (b_2 - 3b_1) \cos x = x^3 + \sin x$$

解得 $a_3 = \dfrac{1}{2}, a_2 = \dfrac{9}{4}, a_1 = \dfrac{21}{4}, a_0 = \dfrac{45}{8}, b_1 = \dfrac{1}{10}, b_2 = \dfrac{3}{10}$

$\therefore$ 原方程通解为

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + \frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x + \frac{1}{2} x^3 + \frac{9}{4} x^2 + \frac{21}{4} x + \frac{45}{8}.$$

(6) 解：特征方程为 $r^2-2r+3=0 \Rightarrow r_{1,2}=1\pm\sqrt{2}i$

$\therefore$ 对应的齐次方程通解为

$$\tilde{y}=e^x\left(C_1\sin\sqrt{2}x+C_2\cos\sqrt{2}x\right)$$

设一个特解为 $y^*=(a\cos x+b\sin x)e^{-x}$

则 $(y^*)'=[(b-a)\cos x-(b+a)\sin x]e^{-x}$

$(y^*)''=(-2b\cos x+2a\sin x)e^{-x}$

代入原方程并解得 $a=\dfrac{5}{41},b=-\dfrac{4}{41}$

$$\therefore y^*=\frac{1}{41}(5\cos x-4\sin x)e^{-x}$$

$\therefore$ 通解为

$$y=e^x\left(C_1\sin\sqrt{2}x+C_2\cos\sqrt{2}x\right)+\frac{1}{41}(5\cos x-4\sin x)e^{-x}.$$

(8) 解：对应的特征方程为 $r^2+2ar+a^2=0\Rightarrow r_1=r_2=-a$

故对应通解为

$$\tilde{y}=(C_1+C_2x)e^{-ax}$$

$\because r=-a$ 为二重根，$\therefore$ 设特解为 $y^*=e^x(b_0+b_1x+b_2x^2)$ $\therefore (y^*)'=e^x[(b_0+b_1)+(b_1+2b_2)x+b_2x^2]$

$(y^*)''=e^x[(b_0+b_1+2b_2)+(b_1+4b_2)x+b_2x^2]$ 解得 $\begin{cases}a_0=-1\\ b_0=0\\ b_1=0\\ b_2=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_0\neq-1\\ b_0=\left(\dfrac{1}{a+1}\right)^2\\ b_1=0\\ b_2=0\end{cases}$

$\therefore a=-1$ 时，方程的通解为

$$y=e^x\left(C_1+C_2x+\frac{1}{2}x^2\right)$$

$a\neq1$ 时，方程的通解为

$$y=e^{-ax}(C_1+C_2x)+\frac{e^x}{(a+1)^2}.$$

3. (1) 解：特征方程为 $r^2-4r+13=0\Rightarrow r_{1,2}=2\pm3i$

$\therefore$ 通解为

$$y=e^{2x}(C_1\sin3x+C_2\cos3x)$$

而

$$y'=e^{2x}[(C_1-3C_2)\sin3x+(3C_1+C_2)\cos3x]$$

将 $\begin{cases}y(0)=0\\ y'(0)=3\end{cases}$ 代入，得 $\begin{cases}C_2=0\\ C_1=1\end{cases}$

$\therefore$ 特解为

$$y=e^{2x}\cdot\sin3x.$$

(3) 解：对应特征方程为 $r^2+r-2=0 \Rightarrow r_1=1, r_2=-2$

$\therefore$ 对应通解为 $\tilde{y}=C_1e^x+C_2e^{-2x}$

设特解为 $y^*=a\sin x+b\cos x$

$\therefore (y^*)'=a\cos x-b\sin x, (y^*)''=-a\sin x-b\cos x$

代入得 $(-3a+b)\sin x+(a-3b)\cos x=\cos x-3\sin x$

$\therefore \begin{cases} -3a+b=-3 \\ a-3b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$

故特解为 $y^*=\sin x$

$\therefore$ 通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+\sin x.$$

又 $y(0)=0, y'(0)=2, \therefore C_1=1, C_2=0$

故特解为

$$y=e^x+\sin x.$$

(5) 解：对应特征方程为 $r^2-4r+3=0$，特征根为 $r_1=1, r_2=3$

$\therefore$ 对应通解为

$$\tilde{y}=C_1e^{3x}+C_2e^x$$

设一个特解为 $y^*=ae^{5x} \Rightarrow (y^*)'=5ae^{5x}, (y^*)''=25ae^{5x}$

代入原式得 $25a-20a+3a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{8}$

$\therefore$ 特解为

$$y^*=\frac{1}{8}e^{5x}$$

$\therefore$ 通解为

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^x+\frac{1}{8}e^{5x}$$

$y'=3C_1e^{3x}+C_2e^x+\frac{5}{8}e^{5x}$，又 $\begin{cases} y(0)=3 \\ y'(0)=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=\frac{11}{4} \\ C_2=\frac{1}{8} \end{cases}$

$\therefore$ 特解为

$$\tilde{y}=\frac{11}{4}e^{3x}+\frac{1}{8}e^x+\frac{1}{8}e^{5x}.$$

(7) 解：对应特征方程为 $r^2-1=0$

特征根为 $r_1=1, r_2=-1$

$\therefore$ 对应通解为

$$\tilde{y}=C_1e^x+C_2e^{-x}$$

设特解为 $y^*=(a_0+a_1x+a_2x^2)e^x$

$\Rightarrow (y^*)'=\left[a_0+a_1+(a_1+2a_2)x+a_2x^2\right]e^x$

$(y^*)''=\left[a_0+a_1+2a_2+(a_1+4a_2)x+a_2x^2\right]e^x$

代入原方程得 $2a_1+2a_2+4a_2x=4x \Rightarrow \begin{cases} a_0=0 \\ a_1=-1 \\ a_2=1 \end{cases} \quad \therefore y^*=\left(-x+x^2\right)e^x$

$\therefore$ 通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+\left(-x+x^2\right)e^x$$

由 $y(0)=0, y'(0)=1$ 得 $C_1=1, C_2=-1$

$\therefore$ 特解为

$$y=e^x-e^{-x}+\left(-x+x^2\right)e^x.$$

(9) 解：原方程对应的特征方程为 $r^2+4r=0 \Rightarrow r_1=0, r_2=-4$，$\therefore$ 通解为

$$\tilde{y}=C_2e^{-4x}+C_1$$

记 $y^*=a_0+a_1x+b_0\cos 2x+b_1\sin 2x+b_2x\cos 2x+b_3x\sin 2x$

$\Rightarrow (y^*)'=a_0+(b_3-2b_0)\sin 2x+(b_2+2b_1)\cos 2x-2b_2x\sin 2x+2b_3x\cos 2x$

$(y^*)''=(-4b_2-4b_1)\sin 2x+(4b_3-4b_0)\cos 2x-4b_2x\cos 2x-4b_3x\sin 2x$

代入原方程得 $\begin{cases} b_0=0 \\ b_1=-\dfrac{1}{16} \\ b_2=0 \\ b_3=\dfrac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0=0 \\ a_1=\dfrac{1}{8} \end{cases}$，$\therefore$ 原方程的一个特解为 $y^*=\dfrac{1}{8}x-\dfrac{1}{16}\sin 2x+\dfrac{1}{8}x\sin x$

将 $y(0)=0, y'(0)=0$ 代入得 $C_1=C_2=0$

$\therefore$ 原方程特解为

$$y=\frac{1}{8}x-\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{1}{8}x\sin x.$$

4. 解：设 $\alpha x=t$,$\therefore \displaystyle\int_0^1 y(\alpha x)\,\mathrm{d}\,\alpha=\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}\,\frac{t}{x}=\frac{1}{x}\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}\,t$，故而 $\displaystyle 2x\int_0^1 y(\alpha x)\,\mathrm{d}\,\alpha=2\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}\,t$

方程两侧对 x 求导得 $y''+3y'+2y=e^{-x}$，对应特征方程为 $r^2+3r+2=0 \Rightarrow r_1=-1, r_2=-2$

$\therefore$ 对应通解为

$$\tilde{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$$

设特解为 $y^*=(a_0+a_1x)e^{-x}$

$\therefore (y^*)'=(a_1-a_0+a_1x)e^{-x}$，$\therefore (y^*)''=(a_0-2a_1+a_1x)e^{-x}$，代入原方程得 $a_1=1, a_0=0$

$\therefore$ 特解为 $y^*=xe^{-x}$，$\therefore$ 原方程的通解为

$$y=xe^{-x}+C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$$

代入 $y_0=1$ 得 $C_1+C_2=1$，$x=0$ 代入原方程得 $y_0'=-1$，代入通解，得 $-2C_1-C_1=1$

$\therefore C_2=0, C_1=0$

$\therefore$ 特解为

$$y = xe^{-x} + e^{-2x}.$$

6. 解：$v = s' = \dfrac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t}, a = v' = s''$，$v' = \dfrac{F-W}{P} = \dfrac{F-a-bv}{P}$，$\therefore s'' = \dfrac{F-a-bs'}{P} \Rightarrow Ps'' + bs' = F - a$

易得原方程的特征方程为 $P\lambda^2 + b\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\dfrac{b}{P}$

$\therefore$ 通解为

$$\tilde{s} = C_1 + C_2 e^{-\frac{b}{P}t}$$

易知一个特解为 $\dfrac{F-a}{b}t$，$\therefore$ 通解为 $s = C_1 + C_2 e^{-\frac{b}{P}t} + \dfrac{F-a}{b}t$

将条件 $s(0) = 0, s'(0) = 0$ 代入得 $\begin{cases} C_1 = \dfrac{(F-a)}{b^2}P \\ C_2 = \dfrac{(a-F)}{b^2}P \end{cases}$

$$\therefore s = \frac{(F-a)}{b^2}P - \frac{(F-a)}{b^2}e^{-\frac{b}{P}t} + \frac{F-a}{b}t.$$

总 习 题 十

☞ 教材见 393 页

1. (1) 解：设积分因子 $\mu = e^x$ 原式 $\Rightarrow e^{-y}\left(e^y + e^y\dfrac{dy}{dx} - 4\sin x\right) = 0 \Rightarrow e^y + e^y\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} - 4\sin x = 0$

$\Rightarrow e^x\left(e^y + e^y\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} - 4\sin x\right) = 0$，设 $P(x,y) = e^{x+y} - 4\sin xe^x$，

$Q(x,y) = e^{x+y}$ $\because \dfrac{\partial P}{\partial y} = e^{x+y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ $\therefore$ 该式子可以构成全微分

$\therefore \mathrm{d}\left(e^{x+y} - 2e^x\sin x + 2e^x\cos x\right) = 0$，即所求方程为

$$e^{x+y} - 2e^x\sin x + 2e^x\cos x = C.$$

(3) 解：令 $y = ux$ $\therefore \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = u + \dfrac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}$ $\therefore$ 原式 $\Rightarrow x\dfrac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = u^2 \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}\,u}{u^2} = \dfrac{\mathrm{d}\,x}{x} \Rightarrow -\dfrac{1}{u} = \ln x + C_0$

$\therefore y = -\dfrac{x}{(C - \ln|x|)}\,(y \neq 0)$，$y = 0$ 时符合题意.

(5) 解：特征方程为 $r^2 + 2r + 5 = 0$，特征根为 $r_{1,2} = -1 \pm 2i$，$\therefore$ 通解为

$$\tilde{y} = e^{-x}\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right)$$

设一个特解为 $y^* = a\cos 2x + b\sin 2x$

$(y^*)' = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x \Rightarrow (y^*)'' = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x$

代入原方程得 $(b-4a)\sin 2x + (4b+a)\cos 2x = \sin 2x$

解得 $a = -\dfrac{4}{17}, b = \dfrac{1}{17}$，$\therefore$ 特解为 $y^* = -\dfrac{4}{17}\cos 2x + \dfrac{1}{17}\sin 2x$

故原方程的通解为

$$y = e^{-x}\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right) - \frac{4}{17}\cos 2x + \frac{1}{17}\sin 2x.$$

(7) 解：方程两侧同乘积分因子 $\mu(x) = e^x$ 得

$2xye^x\,\mathrm{d}\,x+x^2ye^x\,\mathrm{d}\,x+\dfrac{y^3}{3}e^x\,\mathrm{d}\,x+x^2e^x\,\mathrm{d}\,y+y^2e^x\,\mathrm{d}\,y=0,\ \Rightarrow d\left(x^2ye^x\right)+d\left(\dfrac{y^3}{3}e^x\right)=0$

故所得的方程为

$$x^2ye^x+\frac{y^3}{3}e^x=C.$$

(9) 解: $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\dfrac{1+xy^3}{1+x^3y}=0\Rightarrow(\mathrm{d}\,x+\mathrm{d}\,y)+xy\left(y^2\,\mathrm{d}\,x+x^2\,\mathrm{d}\,y\right)=0$

令 $u=x+y,v=x-y$, $\therefore\begin{cases}\mathrm{d}\,y=\dfrac{y\,\mathrm{d}\,u-\mathrm{d}\,v}{y-x}\\ \mathrm{d}\,x=\dfrac{\mathrm{d}\,v-y\,\mathrm{d}\,u}{y-x}\end{cases}$, 代入整理得 $\left(v^2-1\right)\mathrm{d}\,u+uv\,\mathrm{d}\,v=0$

$$\Rightarrow\frac{v}{v^2-1}\,\mathrm{d}\,v=-\frac{\mathrm{d}\,u}{u}\ (u=x+y\neq0,v=xy\neq1)$$

两侧积分并整理得

$$\frac{1}{2}\ln\left(v^2-1\right)=\ln u+C'\Rightarrow\sqrt{x^2y^2-1}=C\left(x+y\right).$$

当 $xy=1$ 时不符合题意; 当 $x+y=0$ 时, 符合题意. 故通解为

$$\sqrt{x^2y^2-1}=C\left(x+y\right),x+y=0.$$

2. (1) 解: 特征方程为 $r^2+2r+1=0\Rightarrow r_1=r_2=1$, $\therefore$ 对应通解为

$$\tilde{y}=\left(C_1+C_2x\right)e^{-x}$$

设一个特解为 $y^*=a\sin x+b\cos x$

$\therefore\left(y^*\right)'=a\cos x-b\sin x$, $\therefore\left(y^*\right)''=-a\sin x-b\cos x$, 代入整理得 $-2b\sin x+2a\cos x=\cos x$

解得 $b=0,a=\dfrac{1}{2}$, $\therefore$ 特解为 $y^*=\dfrac{1}{2}\sin x$, $\therefore$ 通解为

$$y=\left(C_1+C_2x\right)e^{-x}+\frac{1}{2}\sin x$$

将 $y\left(0\right)=0,y'\left(0\right)=\dfrac{3}{2}$ 代入得 $C_1=2,C_2=-1$, $\therefore$ 原方程特解为

$$y=\frac{1}{2}\sin x+xe^{-x}.$$

(3) 解: 对应的特征方程为 $r^3+6r^2+11r+6=0\Rightarrow(r+1)(r+2)(r+3)=0$

$\therefore$ 特征解为 $r_1=-1,r_2=-2,r_3=-3$, $\therefore$ 通解为

$$\tilde{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+C_3e^{-3x}$$

设一个特解为 $y^*=a_0+a_1e^{-4x}\Rightarrow\left(y^*\right)'=-4a_1e^{-4x},\left(y^*\right)''=16a_1e^{-4x},\Rightarrow\left(y^*\right)'''=-64a_1e^{-4x}$

代入原方程并解得 $a_0=a_1=\dfrac{1}{6}$, $\therefore$ 特解为 $y^*=\dfrac{1}{6}e^{-4x}+\dfrac{1}{6}$, $\therefore$ 原方程通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+C_3e^{-3x}+\frac{1}{6}e^{-4x}+\frac{1}{6}$$

将 $y\left(0\right)=5,y'\left(0\right)=0$ 代入得 $C_1=\dfrac{43}{3},C_2=-14,C_3=\dfrac{13}{3}$, $\therefore$ 原方程特解为

$$y=\frac{43}{3}e^{-x}-14e^{-2x}+\frac{13}{3}e^{-3x}+\frac{1}{6}e^{-4x}+\frac{1}{6}.$$

(5) 解：设 $y''=p\Rightarrow y'''=p'$，$\therefore (x-1)\,p'-p=0\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x}=\dfrac{\mathrm{d}\,x}{x-1}$，整理并解得 $p=C\,(x-1)$

$\because \begin{cases} x=2 \\ y''=1 \end{cases} \Rightarrow C=1$，$\therefore \dfrac{\mathrm{d}\,(y')}{\mathrm{d}\,x}=x-1$ 两侧积分得 $y'=\dfrac{1}{2}x^2-x+C_0$

$\because \begin{cases} x=2 \\ y'=1 \end{cases} \Rightarrow C_0=1$，两侧积分得 $y'=\dfrac{1}{2}x^2-x+1\Rightarrow y=\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+x+C_1$

$\because \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow C_1=\dfrac{2}{3}\Rightarrow y=\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{2}{3}$.

第二篇

历年试卷讲解

目录

第一章 函数与极限

题型一 函数的概念与复合函数解析式及性质的确定

例 1-1（2015-2016-1-期末-选择题-10）

若函数 $f(x)=\max\{|x-2|,\sqrt{x}\}$，则 $f(x)$ 的最小值等于 （ B ）

(A) 2　　(B) 1　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) 0

答案 B.

解析 $f(x)=\begin{cases}2-x, & x\in(-\infty,1)\\ \sqrt{x}, & x\in[1,4]\\ x-2, & x\in(4,+\infty)\end{cases}$，画图即可.

例 1-2（2011-2011-1-期中-选择题-13）

当 $x\to 0$ 时，变量 $\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$ 是 （ D ）.

(A) 无穷小　　(B) 有界但不是无穷小

(C) 无穷大　　(D) 无界但不是无穷大

答案 D.

解析 无穷大必须是充分靠近某个值或充分靠后的任意点都足够大；无界只要求存在大于任意给定值的点.

相关解释详见课本 46 页注 (2) 及 47 页例 3.8.

例 1-3（2015-2016-1-期中-填空题-7）

已知 $f(x-1)=\ln\frac{x}{x-2}$，若 $f(g(x))=\ln x$ 则 $g(x)=$ $\underline{\frac{2}{\ln x-1}+1}$.

答案 $\frac{2}{\ln x-1}+1$.

解析 $x-1=tf(t)=\ln\frac{t+1}{t-1}$，则 $f(g(x))=\ln\frac{g(x)+1}{g(x)-1}=\ln x$，则 $g(x)=\frac{2}{\ln x-1}+1$.

题型二 数列/函数极限的定义及存在性的判定

要求掌握 $\varepsilon-\delta$ 语言的内涵，以及单调有界准则、夹逼准则、归结原理，在此基础上，掌握柯西命

题（课本 22 页例 2.3）及基本的审敛方法（如课本 23 页例 2.4，习题 1-2 第 8 题、第 15 17 题）.

无期中、期末考试题，读者可在学完本章重要极限之后练习杂题，以作补充.

题型三　简单极限的计算

涉及到的基本概念及方法包括：极限的定义、存在性判定定理、运算法则，两个重要极限，等价无穷小替换等.

1.3.1　化简极限的基本方法

例 3-1（2011-2011-1-期中-填空题-6）

设 $f(x)=a^x\ (a>0, a\neq 1)$，则 $\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{1}{n^2}\ln\left(f(1)f(2)\cdots f(n)\right)=$ $\underline{\dfrac{1}{2}\ln a}$.

答案 $\dfrac{1}{2}\ln a$.

解析 原式 $=\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{\ln(aa^2\cdots a^n)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln a+2\ln a+\cdots+n\ln a}{n^2}=\ln a\cdot\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{n(n+1)/2}{n^2}=\dfrac{\ln a}{2}$.

例 3-2（2015-2016-1-期中-选择题-3）

在直径 d 的大圆内作两两外切的 n 个小圆，小圆的圆心都在大圆的同一直径上，两边的小圆又分别内切与大圆，若第 l_k 个小圆的周长为，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}l_k=$　（ A ）

(A) πd　(B) $2d$　(C) d　(D) 不存在

答案 A.

解析 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}l_k=\lim\limits_{n\to\infty}\pi(d_1+d_2+d_3+\ldots+d_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\pi d=\pi d.$

例 3-3（2016-2017-1-期中-填空题-3）

极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+100}+x\right)=$ $\underline{-50}$.

答案 -50

解析 负代换 $t=-x$ 得

$$\lim_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+100}+x\right)=-\lim_{t\to+\infty}t\left(\sqrt{t^2+100}-t\right)=-\lim_{t\to+\infty}t\cdot\frac{100}{\sqrt{t^2+100}-t}=-50.$$

例 3-4（2016-2017-1-期中-填空题-8）

设 $|x|<1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{i=0}^{n}(1+x^{2^i})=$ $\underline{\dfrac{1}{1-x}}$.

答案 $\dfrac{1}{1-x}$.

解析 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{i=0}^{n}(1+x^{2^i})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-x)(1+x)(1+x^2)\dots}{1-x}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\dfrac{1}{1-x}$.

例 3-5（2016-2017-1-期中-选择题-17）

设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2016}}{n^m-(n-1)^m}=l$,（$l$ 为非 0 常数，m 为正整数），则（ D ）

(A) $l=\dfrac{1}{2016},m=2016$ (B) $m=\dfrac{1}{2016},l=2016$

(C) $l=\dfrac{1}{2017},m=2017$ (D) $m=\dfrac{1}{2017},l=2017$

答案 D.

解析 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2016}}{n^m-(n-1)^m}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2016}}{n^m-[n^m-mn^{m-1}+\dots]}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2016}}{mn^{m-1}+\dots}=l$

$\Rightarrow 2016=m-1$ 即 $m=2017,\ l=\dfrac{1}{2017}$.

例 3-6（2017-2018-1-期中-填空题-3）

设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-(n+1)}}{x^n+x^{-n}}=$ $\underline{\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{-(n+1)}}{x^{-n}}=\dfrac{1}{x}, & |x|<1\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}}{x^n}=x^2, & |x|>1\\ 1, & |x|=1\end{cases}}$.

答案 见解析.

解析 $\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{-(n+1)}}{x^{-n}}=\dfrac{1}{x}, & |x|<1\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}}{x^n}=x^2, & |x|>1\\ 1, & |x|=1\end{cases}$.

例 3-7（2017-2018-1-期中-填空题-4）

$0\leqslant a<1,\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{[a[a\dots[a[a]]\dots]]}=$ $\underline{\quad 0\quad}$. 该式有 n 个方括号，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

答案 0

解析 $a\in[0,1)\Rightarrow[a]=0$，$a[a]=0\Rightarrow[a[a]]=[a[0]]=[0]=0$，运用数学归纳法，从而

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{[a[a\dots[a[a]]\dots]]}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{0}=0$$

.

1.3.2 两个重要极限

例 3-8（2014-2015-1-期中-选择题-14）

若 $a>0,b>0$ 均为常数，则 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=$ （ B ）

(A) $ab^{\frac{3}{2}}$ (B) $(ab)^{\frac{3}{2}}$ (C) $a^{\frac{3}{2}}b$ (D) $(ab)^{\frac{2}{3}}$

答案 B.

解析 考查对极限运算法则和 e 的重要极限及基本的等价无穷小的掌握，运算中要注意每一步拆分、替换是否成立.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=\lim_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{3}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{3}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{3}{x}\cdot\frac{a^x+b^x-2}{2}\right\}$$
$$=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{3}{x}\cdot\frac{a^x-1}{2}+\lim_{x\to0}\frac{3}{x}\cdot\frac{b^x-1}{2}\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{3}{x}\cdot\frac{x\ln a}{2}+\lim_{x\to0}\frac{3}{x}\cdot\frac{x\ln b}{2}\right\}$$
$$=\exp\left\{\frac{3}{2}(\ln a+\ln b)\right\}=(ab)^{\frac{3}{2}}.$$

例 3-9（2014-2015-1-期中-选择题-16）

极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=$ （ D ）

(A) $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ (B) $\mathrm{e}^{\frac{n}{2}}$ (C) $\mathrm{e}^{-\dfrac{1}{2}}$ (D) $\mathrm{e}^{\frac{n+1}{2}}$

答案 D.

解析 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\cdot\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)\right\}$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}-1\right)\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{(\mathrm{e}^x-1)+(\mathrm{e}^{2x}-1)+\cdots+(\mathrm{e}^{nx}-1)}{n}\right\}$$
$$=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x+2x+\cdots+nx}{n}\right\}=\mathrm{e}^{\frac{n+1}{2}}.$$

1.3.3 等价无穷小及其替换定理

例 3-10（2011-2011-1-期中-填空题-2）

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\tan x^3}{1-\cos x^2}=$ <u>2</u> .

答案 2.

解析 采用等价无穷小替换 $\tan x\sim x, 1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2\ (x\to0)$ 可得 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\tan x^3}{1-\cos x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot x^3}{\frac{1}{2}(x^2)^2}=2.$

例 3-11（2013-2014-1-期中-填空题-2）

设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin x}\right)}{a^x-1}=8\,(a>0)$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=$ $\underline{\quad 8\ln a \quad}$.

答案 $8\ln a$.

解析 易得 $\dfrac{f(x)}{\sin x}\to0$，则有 $\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)\sim\dfrac{f(x)}{\sin x}$，又 $a^x-1\sim x\ln a$，

故原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{f(x)}{\sin x}}{x\ln a}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2\ln a}\dfrac{x}{\sin x}=8\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=8\ln a$.

例 3-12（2013-2014-1-期中-填空题-4）

计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5\sin^2x+x^3\cos\frac{1}{x^2}}{(1+\cos x)\ln(1+x^2)}=$ $\underline{\quad \dfrac{5}{2} \quad}$.

答案 $\dfrac{5}{2}$.

解析 注意到当 $x\to0$ 时，$x^3\cos\dfrac{1}{x^2}$ 是 x^2 的高阶无穷小，以及 $1+\cos x\to2$，于是由等价无穷小 $\ln(1+x^2)\sim x^2\sim\sin^2x\,(x\to0)$ 可得原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2+0}{2x^2}=\dfrac{5}{2}$.

例 3-13（2017-2018-1-期中-选择题-10）

$x\to1$ 时，$1-x$ 是 $1-\sqrt[3]{x}$ 的　　　（ D ）

(A) 3 阶无穷小　　(B) 等价无穷小　　(C) 高阶无穷小　　(D) 同阶无穷小

答案 D.

解析 $1-\sqrt[3]{x}=-\left(\sqrt[3]{1+x-1}-1\right)\sim-\dfrac{1}{3}(x-1)\,(x\to1)$.

例 3-14（2016-2017-1-期末-填空题-11）

设函数 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$ $\underline{\quad \dfrac{3\,\mathrm{e}}{2} \quad}$.

答案 $\dfrac{3\,\mathrm{e}}{2}$.

解析 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=-\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}\dfrac{\mathrm{e}^{\cos x-1}-1}{\frac{1}{3}x^2}=-\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}\dfrac{\cos x-1}{\frac{1}{3}x^2}=-\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2}=\dfrac{3\,\mathrm{e}}{2}$.

1.3.4 杂题

例 3-15（2013-2014-1-期中-填空题-6）

极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=$ $\underline{\quad 1 \quad}$.

答案 1.

解析 注意 x 的趋向. 可以采用负代换避免负数进入/移出开方运算时粗心产生的错误.

令 $t=-x$，得原式 $=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4t^2-t-1}-t+1}{\sqrt{t^2-\sin t}}$，

观察结构，得到

$$\text{原式}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t\left(\sqrt{4-t^{-1}-t^{-2}}-1+t^{-1}\right)}{t\sqrt{1-t^{-2}\sin t}}=\frac{\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\sqrt{4-t^{-1}-t^{-2}}-1+t^{-1}\right)}{\lim\limits_{t\to+\infty}\sqrt{1-t^{-2}\sin t}}=\frac{\sqrt{4}-1}{1}=1.$$

例 3-16（2016-2017-1-期中-解答题-20）

计算 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$

答案　见解析.

解析　应当分为两个单侧极限计算 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2\mathrm{e}^{-\frac{4}{x}}+\mathrm{e}^{-\frac{3}{x}}}{1+\mathrm{e}^{-\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)=1$,

$\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}-\dfrac{\sin x}{x}\right)=2-1=1$ 因此 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1$.

题型四　函数的连续性与间断点

例 4-1（2013-2014-1-期中-填空题-2）

已知 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$，且 $f(x)$ 在 $x=\pm1$ 处连续，则 $a=$ __0__ ，$b=$ __1__ .

答案　0; 1.

解析　首先将 $f(x)$ 写成分段函数形式（注意分段点的选取）

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+ax^{2-2n}+bx^{1-2n}}{1+x^{-2n}},|x|>1\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+b}{1+1},x=1\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-1+a-b}{1+1},x=-1\\ x\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}+ax+b}{x^{2n}+1},|x|<1\end{cases}=\begin{cases}x,|x|>1\\ \dfrac{a+b+1}{2},x=1\\ \dfrac{a-b-1}{2},x=-1\\ bx,|x|<1\end{cases},$$

再由 $f(x)$ 在 $x=\pm1$ 处连续知 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=f(-1)=\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$,

即 $b=\dfrac{a+b+1}{2}=1,-b=\dfrac{a-b-1}{2}=-1$, 解得 $a=0,b=1$.

例 4-2（2013-2014-1-期中-选择题-14）

设函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)\neq0$，$\varphi(x)$ 有间断点，则____ 必有间断点.　　（ B ）

(A) $\varphi[f(x)]$　　(B) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$　　(C) $[\varphi(x)]^2$　　(D) $f[\varphi(x)]$

答案　B.

解析 考查对复合函数连续性的判断.

对 A 构造反例：只需让 f 的值域落在 φ 的某段不包含间断点的定义区间上即可，例如构造 φ 有间断点 $x=5$ 而 f 的值域是 $(-1,1)$；

对 C 构造反例：构造一个进行平方运算之后可以被消除的跳跃间断点，例如 $\varphi(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x\leqslant 0\end{cases}$.

事实上也只有满足单侧连续且两侧极限互为相反数的跳跃间断点能被平方运算消除，而其他类型的间断点均不可，读者不妨思考原因；

对 D 构造反例：构造 $\varphi(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 0\\ x, & x>0\end{cases}$；

对 B 的分析：在有意义的前提下（分母不为 0 之类），连续函数与连续函数进行有限次四则运算、复合运算仍然得到连续函数.

若 $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 是连续函数，则 $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}\cdot f(x)=\varphi(x)$ 也是连续函数，与已知矛盾，故 B 错.

例 4-3（2014-2015-1-期中-填空题-4）

函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内的间断点是 $\underline{\quad x=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\quad}$.

答案 $x=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}$.

解析 $\tan(x-\dfrac{\pi}{4})=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}$.

例 4-4（2014-2015-1-期中-选择题-17）

函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(1-x^2)}{1+x^{2n}}$ 在 （ D ）

(A) $x=\pm1$ 均连续 (B) $x=1$ 连续，$x=-1$ 不连续

(C) $x=1$ 不连续，$x=-1$ 连续 (D) $x=\pm1$ 均不连续

答案 D.

解析 将 $f(x)$ 写成分段函数形式

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x(1-x^{2n})}{1+x^{2n}}=x\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}=\begin{cases}x\cdot1, & |x|<1\\ x\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{-2n}-1}{x^{-2n}+1}, & |x|>1\\ 0, & x=\pm1\end{cases}=\begin{cases}x, & |x|<1\\ -x, & |x|>1\\ 0, & x=\pm1\end{cases},$$

画出图像即可判断.

例 4-5（2017-2018-1-期中-填空题-9）

设函数 $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{-\frac{2}{x}}, & x\neq 0\\ k, & x=0\end{cases}$，则 $k=$ $\underline{\quad\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\quad}$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

答案 $\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.

解析 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)\Leftrightarrow k=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{2}{x}}=\mathrm{e}^{-2}$.

第二章　导数与微分

题型一　导数与微分的定义以及两者的关系

例 1-1（2013-2014-1-期中-选择题-1）

若 $f'(0)=1$，则极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-h)-f(0)}{3h}=$ __$-\dfrac{1}{3}$__ .

答案　$-\dfrac{1}{3}$.

解析　$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-h)-f(0)}{3h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-h)-f(0)}{-h}\cdot\dfrac{1}{-3}=-\dfrac{1}{3}f'(0)=-\dfrac{1}{3}$.

例 1-2（2013-2014-1-期中-选择题-12）

设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的　（ A ）

(A) 充分必要条件　　(B) 充分但非必要条件

(C) 必要但非充分条件　　(D) 既非充分也非必要条件

答案　A.

解析　点态导数问题，首先考虑导数定义.

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)(1+|\sin x|)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}+\frac{f(x)|\sin x|}{x}\right],$$

一方面，由极限四则运算法则可知

$F'(0)$ 存在 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)|\sin x|}{x}=F'(0)-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=F'(0)-f'(0)$ 存在；

另一方面，不难看出 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)|\sin x|}{x}$ 存在 $\Leftrightarrow f(0)=0$.

因此 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件.

例 1-3（2011-2012-1-期中-填空题-1）

设 $f(x)=\begin{cases} x\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+3^n+x^n}, x>0 \\ a\ln(1-x)+b, x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则 $a=$ __-3__ ，$b=$ __0__ .

答案　$a=-3$, $b=0$.

解析　当 $0<x<1$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+3^n+x^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}3\sqrt[n]{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+\left(\dfrac{x}{3}\right)^n}=3$

即有 $f(x)=\begin{cases} a\ln(1-x)+b, & x\leqslant 0 \\ 3x, & 0<x<1 \end{cases}$，又因 $f(x)$ 可导（连续），

$f(0^+)=f(0^-)$ 解得 $b=0$，$f'(0^+)=f'(0^-)$ 解得 $a=-3$.

例 1-4（2015-2016-1-期中-选择题-8）

设函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-g(x)}{\sin x}=1$ 成立，则 （ A ）

(A) $x\to 0$ 时，$g(x)$ 是 x 的高阶无穷小 (B) $g(x)$ 在 $x=0$ 处可导

(C) $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ 存在但 $g(x)$ 在 $x=0$ 处不连续 (D) $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导

答案 A.

解析 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x}{\sin x}-\dfrac{x-g(x)}{\sin x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-g(x)}{\sin x}=0$

未给出 $g(0)$ 与 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ 的关系，因此连续性及点态导数的命题均无法判定为真，BCD 均错.

题型二 导数的计算

包括基本求导法则、复合函数求导法则、基本导数表（初等函数）、隐函数与参数方程求导方法等

2.2.1 复合函数求导

例 2-1（2013-2014-1-期中-选择题-12）

已知 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x)=\arctan x^2$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ （ C ）

(A) π (B) $\dfrac{3}{2}\pi$ (C) $\dfrac{3}{4}\pi$ (D) $\dfrac{1}{4}\pi$

答案 C.

解析 复合函数求导问题，注意不要漏掉该求导的函数.

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)\cdot\dfrac{12}{(3x+2)^2}$，于是 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=3f'(-1)=3\arctan 1=\dfrac{3}{4}\pi$.

2.2.2 隐函数求导

例 2-2（2013-2014-1-期中-填空题-4）

设函数 $y=y(x)$ 由方程 $(x+y)^{\frac{1}{x}}=y$ 确定，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ $\underline{\dfrac{y[(x+y)\ln(x+y)-x]}{x[y-x(x+y)]}}$.

答案 $\dfrac{y[(x+y)\ln(x+y)-x]}{x[y-x(x+y)]}$.

解析 隐函数求导问题. 方程改写为 $\dfrac{\ln(x+y)}{x}=\ln y$，两边同时对 x 求导得到

$$LHS=\frac{\frac{x(1+y')}{x+y}-\ln(x+y)}{x^2}=\frac{y'}{x(x+y)}+\frac{1}{x(x+y)}-\frac{\ln(x+y)}{x^2},\quad RHS=\frac{y'}{y},$$

整理得到

$$\frac{y-x(x+y)}{xy(x+y)}\cdot\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{(x+y)\ln(x+y)-x}{x^2(x+y)},$$

于是 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\dfrac{(x+y)\ln(x+y)-x}{x^2(x+y)}\cdot\dfrac{xy(x+y)}{y-x(x+y)}=\dfrac{y[(x+y)\ln(x+y)-x]}{x[y-x(x+y)]}$.

2.2.3 参数方程求导

例 2-3（2013-2014-1-期中-填空题-4）

设 $\begin{cases}x=f'(t)\\ y=tf'(t)-f(t)\end{cases}$，其中 $f''(x)$ 存在且不为零，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\,x^2}=$ $\underline{\dfrac{1}{f''(t)}}$.

答案 $\dfrac{1}{f''(t)}$.

解析 参数方程求导问题. 以下是这类问题的通法:

$$\begin{cases}x=f'(t)\\ y=tf'(t)-f(t)\end{cases}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}}=tf''(t)\cdot\frac{1}{f''(t)}=t,$$

于是 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\,x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right)=\dfrac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x}=\dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}}=\dfrac{1}{f''(t)}$.

2.2.4 反函数求导

例 2-4（2013-2014-1-期中-填空题-8）

已知 $\dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y}=\dfrac{1}{y'}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\,y^2}=$ $\underline{-\dfrac{y''}{y'^3}}$.

答案 $-\dfrac{y''}{y'^3}$.

解析 反函数求导问题. $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\,y^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}\left(\dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y}\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y}\right)\cdot\dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y}=\dfrac{-y''}{y'^2}\cdot\dfrac{1}{y'}=-\dfrac{y''}{y'^3}$.

第三章　微分中值定理与导数的应用

题型一　较为复杂的极限的计算

在已经学习过的基本方法的基础上，进一步结合洛必达法则、泰勒公式与拉格朗日中值定理.

例 1-1（2011-2011-1-期中-填空题-3）

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}=$ $\underline{\quad -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}\quad}$.

答案　$-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}$.

解析　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-\mathrm{e}}{x}=\mathrm{e}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}-1}{x}$，由等价无穷小 $\ln(1+x)\sim x\sim \mathrm{e}^x-1\,(x\to 0)$ 可知

原式 $=\mathrm{e}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}=\mathrm{e}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\mathrm{e}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\mathrm{e}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(1+x)}{2x(1+x)}=-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

其中用到了洛必达法则（也可以采用 $\ln(1+x)$ 的泰勒公式求解）.

例 1-2（2011-2011-1-期中-选择题-16）

若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=$ $\underline{\quad 36\quad}$.

答案　36.

解析　由极限四则运算法则及泰勒公式 $\sin x=x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3),x\in(-\delta,\delta)$ 知

$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}+\frac{6x-\sin 6x}{x^3}\right]$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}=0+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}(6x)^3}{x^3}=36.$$

例 1-3（2014-2015-1-期中-填空题-1）

设曲线 $y=f(x)=x^n$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n,0)$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(\xi_n)=$ $\underline{\quad\dfrac{1}{\mathrm{e}}\quad}$.

答案　$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

解析　由 $f'(1)=n$ 知点 $(1,1)$ 处的切线为 $y-1=n(x-1)\Rightarrow x=1+\dfrac{y-1}{n}$

于是 $\xi_n=1-\dfrac{1}{n}$，故 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(\xi_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

例 1-4（2017-2018-1-期中-解答题-2）

利用泰勒展开式求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$.

答案 见解析.

解析 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]\left[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right]-x(1+x)}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\frac{1}{6}x^3+x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)-x-x^2}{x^3}=\dfrac{1}{3}$.

例 1-5（2014-2015-1-期中-选择题-18）

设当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则 （ A ）

(A) $k=3, c=4$　　(B) $k=3, c=-4$　　(C) $k=1, c=-4$　　(D) $k=1, c=4$

答案 A.

解析 $3\sin x-\sin 3x\sim 3(x-\dfrac{1}{6}x^3)-(3x-\dfrac{1}{6}(3x)^3)=4x^3$.

例 1-6（2015-2016-1-期中-填空题-9）

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}-1}{x}=$ __$-\dfrac{1}{2}$__ .

答案 $-\dfrac{1}{2}$.

解析 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\frac{1}{2}x^2-x}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$.

例 1-7（2014-2015-1-期末-计算题-14）

计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right)$.

答案 见解析.

解析 倒代换，令 $t=\dfrac{1}{x}$，将原式化为

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-e}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)}-e}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{e(e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)-1}-1)}{t}=e\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{t}\ln(1+t)-1}{t}$$

$$=e\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}=e\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=e\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+t)^2}}{2}=-\frac{e}{2}.$$

题型二　导数的应用

主要用于判定函数的点态特征，包括单调性与极值、凹凸性与拐点、渐近线与曲率圆，以及帮助作出简单函数的图像等.

3.2.1　求切线

例 2-1（2013-2014-1-期中-解答题-19）

设 $y=y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x=\arctan t \\ 2y-ty^2+\mathrm{e}^t=5 \end{cases}$ 确定，求在点 $(0,2)$ 处的切线方程.

答案　见解析.

解析　本质上是求参数方程 $\begin{cases} x=\arctan t \\ 2y-ty^2+\mathrm{e}^t=5 \end{cases}$ 在 $(0,2)$ 处的导数.

由隐函数的求导方法可得

$$2y-ty^2+\mathrm{e}^t=5 \Rightarrow 2\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}-y^2-2ty\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}+\mathrm{e}^t=0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}=\frac{\mathrm{e}^t-y^2}{2ty-2},$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}\Big/\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}=\frac{(\mathrm{e}^t-y^2)(1+t^2)}{2ty-2} \Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{x=0}=\left.\frac{(\mathrm{e}^t-y^2)(1+t^2)}{2ty-2}\right|_{t=0,y=2}=\frac{3}{2},$$

于是切线方程为 $y=\dfrac{3}{2}x+2$.

例 2-2（2015-2016-1-期中-填空题-10）

设对数螺线 $\rho=\mathrm{e}^\theta$，该曲线在对应于 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 的点处的切线方程为 __$x+y=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$__ .

答案　$x+y=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$.

解析　$\because x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ $\therefore$ 对数螺线方程可化为：$\begin{cases} x=\mathrm{e}^\theta\cos\theta \\ y=\mathrm{e}^\theta\sin\theta \end{cases}$

$\therefore \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,\theta}}{\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,\theta}}=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-1$,

又 $(\rho,\theta)=\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$x=0, y=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$

$\therefore$ 在 $(\rho,\theta)=\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2}\right)$ 时的切线方程为：$y-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}=-1(x-0)$ 即 $x+y=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$.

3.2.2　判定单调性与极值/最值

例 2-3（2012-2013-1-期末-选择题-12）

设 y=$f'(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-\mathrm{e}^x$，若 $f''(x_0)=0, x_0\neq 0$，则 （ B ）.

(A) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值　　(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $f(x_0, f(x_0))$ 时曲线 $y=f(x)$ 的拐点　　(D) 以上都不对

答案 B.

解析 式子带入 x_0 即有 $f''(x_0)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x_0}}{x_0}\neq 0, x_0>0$ 和 $x_0<0$ 时，均有 $f''(x_0)>0$
则 $f(x_0)$ 是极小值.

例 2-4（2014-2015-1-期末-选择题-7）

函数 $f(x)=\ln(1+x^2)$ 在 $[-1,2]$ 上的最大值是 （ D ）

(A) $\ln 2$　　(B) $\ln 3$　　(C) $\ln 4$　　(D) $\ln 5$

答案 D.

解析 $f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$，于是 $\forall x\in[-1,0]$，$f'(x)<0$；$\forall x\in[0,2]$，$f'(x)>0$
则 $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上单调递减，在 $[0,2]$ 上单调递增
于是 $f(x)=\ln(1+x^2)$ 在 $[-1,2]$ 上的最大值为 $\max\{f(-1), f(2)\}=\ln 5$.

例 2-5（2012-2013-1-期中-填空题-2）

$y=x^2\mathrm{e}^{-x}$ 的极大值是 $\underline{\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}}$.

答案 $\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$.

解析 $y'=2x\mathrm{e}^{-x}-x^2\mathrm{e}^{-x}=x\mathrm{e}^{-x}(2-x), \mathrm{e}^{-x}>0$ 令 $y'=0\Rightarrow x_1=0, x_2=2$
则 $x\in(-\infty,0), y'<0, y\downarrow$; $x\in[0,2]$, $y'>0$, $y\uparrow$; $x\in(2,+\infty)$, $y'<0$, $y\downarrow$
所以当 $x=2$ 时极大值为 $\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$.

例 2-6（2015-2016-1-期中-填空题-3）

若 $y=ex-\mathrm{e}^{-\lambda x}$ 有正的极值点，则参数 λ 的取值范围是 $\underline{-\mathrm{e}<\lambda<0}$.

答案 $-\mathrm{e}<\lambda<0$.

解析 $y'=\mathrm{e}+\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$，$y'=0$ 有正的实根，即 $\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}=-\mathrm{e}$，$\mathrm{e}^{-\lambda x}=-\dfrac{\mathrm{e}}{\lambda}$
令 $f(x)=\mathrm{e}^{-\lambda x}$，$g(x)=-\dfrac{\mathrm{e}}{\lambda}$ 即 $f(x)=g(x)$ 存在 $x>0$ 的点
即图像有交点，画图可得 $0<-\dfrac{\mathrm{e}}{\lambda}<1$，即 $-\mathrm{e}<\lambda<0$.

例 2-7（2015-2016-1-期中-选择题-6）

若 a,b,c,d 成等比数列，则函数 $f(x)=\frac{1}{3}ax^3+bx^2+cx+d$ （ D ）

(A) 有极大值，而无极小值 (B) 无极大值，而有极小值

(C) 有极大值，也有极小值 (D) 无极大值，也无极小值

答案 D.

解析 $\because y=\frac{1}{3}ax^3+bx^2+cx+d, \therefore y'=ax^2+2bx+c.$

而 a,b,c,d 成等比数列，则 $b^2=ac$ 令 $ax^2+2bx+c=0$，则 $\Delta=4b^2-4ac=4b^2-4b^2=0$

$\therefore y'\geqslant 0$ 或 $y'\leqslant 0$，即 $f(x)$ 无极值.

例 2-8（2016-2017-1-期中-选择题-13）

设函数 $g(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且对任意的 t_1,t_2，当 $t_1>t_2$ 时，都有 $g(t_1)>g(t_2)$，则（ B ）

(A) 对任意的 t，$g'(t)>0$ (B) 函数 $-g(-t)$ 单调增加

(C) 对任意的 t，$g'(-t)\leqslant 0$ (D) 函数 $g(-t)$ 单调增加

答案 B.

解析 由题可得 $g'(t)\geqslant 0$，$g(t)$ 单调增加

对于 B，$[-g(-t)]'=g'(-t)\geqslant 0$，单增

对于 D，$[g(-t)]'=-g'(-t)\leqslant 0$，单减.

例 2-9（2017-2018-1-期中-选择题-6）

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $f(0)=0, \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=1$，则点 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（ B ）

(A) 极大值点 (B) 驻点和极小值点

(C) 非驻点 (D) 非驻点但是极小值点

答案 B.

解析 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[x\cdot\frac{f(x)}{x^2}\right]=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=0$

则点 $x=0$ 是 $f(x)$ 的驻点.

3.2.3 判定拐点与凹凸性

例 2-10（2013-2014-1-期末-填空题-3）

曲线 $y=\ln(x^2+1)$ 的拐点是 $\underline{\quad(\pm1,\ln 2)\quad}$.

答案 $(\pm1,\ln 2)$.

解析 $y'=\dfrac{2x}{x^2+1}$，$y''=\dfrac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$，$y''=0$ 时，$x^2=1,x=\pm1,y=\ln 2$.

例 2-11（2015-2016-1-期末-选择题-8）

曲线 $y=\begin{cases}x(x-1)^2 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ (x-1)^2(x-2) & 1<x\leqslant 2\end{cases}$ 在区间 $(0,2)$ 有 （ C ）

(A) 2 个极值点，1 个拐点. (B) 2 个极值点，2 个拐点.

(C) 2 个极值点，3 个拐点. (D) 3 个极值点，3 个拐点.

答案 C.

解析 注意 $x=1$ 的特殊性即可.

例 2-12（2017-2018-1-期末模拟-选择题-13）

曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点为 （ C ）

(A) $(1,0)$ (B) $(2,0)$ (C) $(3,0)$ (D) $(4,0)$

答案 C.

解析 求 y''；令 $y''=0$，求出使 $y''=0$ 和 y'' 不存在的点；

用这些点把定义域分成若干小区间，讨论 y'' 的符号，判断曲线 y 在小区间的凹凸性；

考察 y'' 在 x 两侧的近旁是否变号，如果 y'' 变号，那么点 $(x,f(x))$ 是曲线 y 的拐点.

例 2-13（2017-2018-1-期中-选择题-7）

曲线 $y=3x^5-10x^3-360x$ 的拐点有 （ C ）

(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 0 个

答案 C.

解析 $y'=15x^4-30x^2-360,y''=60x^3-60x=60x(x-1)(x+1)$，令 $y''=0$ 并验证根两侧二阶导数的正负可知有 3 个拐点.

3.2.4 求渐近线

例 2-14（2017-2018-1-期末模拟-选择题-16）

曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 渐近线条数为 （ D ）

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

答案 D.

解析 $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]=0$，

所以 $y=0$ 是曲线的水平渐近线；

$\lim\limits_{x\to 0} y=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]=\infty$，所以 $x=0$ 是曲线的垂直渐近线；

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left[\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]}{x}=0+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{\frac{1+\mathrm{e}^x}{1}}=1$,

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}[y-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)-x\right]=0$

所以 $y=x$ 是曲线的斜渐近线.

所以一共 3 条渐近线.

例 2-15（2012-2013-1-期中-选择题-12）

曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线条数为　　（ C ）

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

答案　C.

解析　由于 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 在 $x=\pm1$ 处没有定义，且 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=1$ 是 y 的垂直渐近线；

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=1$，$\therefore y=1$ 是曲线的水平渐近线；

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=0$，$\therefore$ 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 无斜渐近线.

$\therefore$ 曲线的渐近线条数为 2.

例 2-16（2013-2014-1-期中-选择题-17）

曲线 $y=\dfrac{1+\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{x^2}}$　　（ D ）

(A) 没有渐近线　　(B) 仅有水平渐近线

(C) 仅有铅直渐近线　　(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线

答案　D.

解析　$\because \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{x^2}}=\infty$，$\therefore x=0$ 是其铅直渐近线；

又 $\because \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{x^2}}=\dfrac{1+\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}}=1$，$\therefore y=1$ 是其水平渐近线.

例 2-17（2017-2018-1-期中-选择题-9）

曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$　　（ A ）

(A) 只有水平渐近线　　(B) 只有铅直渐近线

(C) 既有水平渐近线又有铅直渐近线　　(D) 有斜渐近线

答案　A.

解析　考虑铅直渐近线：$\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，则无铅直渐近线；

考虑水平渐近线：$\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin t}{t}=1$，$y=1$ 是其水平渐近线；

考虑斜渐近线：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{1}{x}$，极限不存在，无斜渐近线.

3.2.5 函数性态的综合判断

例 2-18（2013-2014-1-期中-选择题-10）

若 $f(-x)=-f(x)$，在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0, f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内　　（ A ）

(A) $f'(x)>0, f''(x)<0$　　(B) $f'(x)<0, f''(x)>0$

(C) $f'(x)<0$，$f''(x)<0$　　(D) $f'(x)>0, f''(x)>0$

答案　A.

解析　$f(-x)=-f(x)$，$f(x)$ 为奇函数，图像关于原点对称，具有相同的单调性和相反的凹凸性

又在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0, f''(x)>0$，所以在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0$，$f''(x)<0$.

例 2-19（2012-2013-1-期中-选择题-15）

设 $f(-x)=f(x)$，且在 $(0,\infty)$ 内 $f'(x)<0, f''(x)<0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内（ D ）

(A) 单调减且是凹的　(B) 单调减且是凸的　(C) 单调增且是凹的　(D) 单调增且是凸的

答案　D.

解析　$f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，图像关于 y 轴对称

可知在 y 轴两侧具有相同的凹凸性和相反的单调性

又 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 内 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 是单调减；

$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 内是凸函数；

所以在 $(-\infty,0)$ 内 $f(x)$ 是单调增且是凸函数.

例 2-20（2013-2014-1-期中-选择题-15）

设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$，且 $f'(0)=0$，则　　（ C ）

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

(B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点

(C) $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

答案　C.

解析　由 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$，得 $f(x)$ 在其定义域内存在二阶连续导数且 $f''(0)=0$

$f''(x)=x-[f'(x)]^2$，所以 $f'''(x)=1-2[f'(x)]f''(x)$，

所以 $f'''(0)=1\neq 0$ 即 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

题型三 微分中值定理的应用

主要用于判定函数的全局性态，例如特殊点、函数值的存在性

例 3-1（2015-2016-1 期末-证明题-19）

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0, f'(a)f'(b)>0$，证明：存在 $\xi\in(a,b), f''(\xi)=0$.

答案 见解析.

解析 由 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导可知 f' 在 $[a,b]$ 上连续. 由 $f'(a)f'(b)>0$, 不妨设 $f'(a)>0, f'(b)>0$, 结合 $f(a)=f(b)=0$ 可知

$$\exists\delta_1,\delta_2>0, \forall x\in(a,a+\delta_1), f(x)>0;\ \forall x\in(b-\delta_2,b), f(x)<0$$

于是由 f 的连续性，借助零点存在定理可知

$$\exists\eta\in(a,b), f(\eta)=0$$

于是 $[a,b]$ 上二阶可导的函数 f 满足 $f(a)=f(\eta)=f(b)=0$，接下来只需分别在 $[a,\eta],[\eta,b]$ 上分别对 f 使用罗尔定理得到 f' 的两个不同零点 ξ_1,ξ_2，再在 $[\xi_1,\xi_2]\subseteq[a,b]$ 上对 f' 使用罗尔定理即可证.

例 3-2（2016-2017-1-期末-证明题-18）

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值,$f(a)=g(a), f(b)=g(b)$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

答案 见解析.

解析 构造函数 $F(x)=f(x)-g(x)$，由题 $F(a)=F(b)=0$

设 c 处 $f(x)$ 取最大值，d 处 $g(x)$ 取最大值，且有

$$f(c)=g(d), F(c)=f(c)-g(c)>f(c)-g(d)=0, F(d)=f(d)-g(d)<f(c)-g(d)=0$$

则 $\exists\xi'\in(c,d)\subseteq(a,b)\ s.t.\ F(\xi')=0$，又 $F(a)=F(b)=0$ 则

$$\exists\xi_1\in(a,\xi')\ s.t.\ F'(\xi_1)=0, \exists\xi_2\in(\xi',b)\ s.t.\ F'(\xi_2)=0\Rightarrow\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(a,b)\ s.t.\ F''(\xi)=0$$

即 $f''(\xi)=g''(\xi)$，得证.

例 3-3（2012-2013-1-期中-证明题-21）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(0)=f(1)=0, \min f(x)=-1, (0\leqslant x\leqslant 1)$，证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'''(\xi)\geqslant 8$.

答案 见解析.

解析 由题 $f(0)=f(1)=0\neq -1$，设 $\min f(x)=f(c)=-1$；则 $f'(c)=0c\in(0,1)$

因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶函数，且 $f(c)=-1$

所以可将 $f(x)$ 在 $x=c$ 处展开成二阶带拉格朗日余项的泰勒公式，并分别带入 $x=0$ 和 $x=1$

有 $\begin{cases} f(0)=f(c)+f'(c)(0-c)+\dfrac{1}{2}f''(\xi_1)(0-c)^2, & 0<\xi_1<c \\ f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\dfrac{1}{2}f''(\xi_2)(1-c)^2, & c<\xi_2<1 \end{cases}$，即 $\begin{cases} f''(\xi_1)=\dfrac{2}{c^2} \\ f''(\xi_2)=\dfrac{2}{(1-c)^2} \end{cases}$

又 $c\in(0,1)$，所以存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ 使得 $\max f''(\xi)\geqslant\{f''(\xi_1),f''(\xi_2)\}\geqslant\dfrac{2}{\frac{1}{4}}=8$，得证.

例 3-4（2014-2015-1-期中-证明题-21）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=1$. 试证:

(1) 存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 使 $f(\eta)=\eta$;

(2) 对于任意实数 λ，必存在 $\xi\in(0,\eta)$ 使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

答案 见解析.

解析 (1) 令 $g(x)=f(x)-x$，则 $g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 连续，在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 可导

且 $g(1)=f(1)-1=0-1=-1<0$，$g\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=1-\dfrac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$

$\therefore$ 由零点定理，$\exists\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $g(\eta)=0$，即 $f(\eta)=\eta$，得证.

(2) 设 $h(x)=\mathrm{e}^{-\lambda x}[f(x)-x], x\in[0,\eta]$，则 $h(x)$ 在 $[0,\eta]$ 连续，在 $(0,\eta)$ 可导，且 $h(0)=h(\eta)=0$

$\therefore$ 由罗尔定理，$\exists\xi\in(0,\eta)$ 使得 $h'(\xi)=0$，又 $h'(x)=\mathrm{e}^{-\lambda x}[f'(x)-1-\lambda(f(x)-x)]$

$\therefore$ 由 $h'(\xi)=0$ 得：$\mathrm{e}^{-\lambda\xi}[f'(\xi)-1-\lambda(f(\xi)-\xi)]=0$

$\therefore f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$，得证.

例 3-5（2015-2016-1-期中-证明题-22）

设函数 $f(x)$ 是区间 $[-1,1]$ 上的三阶可导函数，且 $f(-1)=0, f(0)=0, f(1)=1, f'(0)=0$. 试证：$\exists\xi\in(-1,1)$, 使得 $f'''(\xi)\geqslant 3$.

答案 见解析.

解析 泰勒展开 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2}x^2+\dfrac{f'''(c)}{6}x^3=\dfrac{f''(0)}{2}x^2+\dfrac{f'''(c)}{6}x^3$

$\therefore f(1)=\dfrac{f''(0)}{2}+\dfrac{f'''(\xi_1)}{6}, f(-1)=\dfrac{f''(0)}{2}-\dfrac{f'''(\xi_2)}{6}$，两式相减并整理得到 $f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)=6$

取 $f(\xi)=\max\{f(\xi_1),f(\xi_2)\}3$ 即得证.

例 3-6（2017-2018-1-期中-填空题-6）

$y=\sqrt{x}-1$ 在区间 $[1,4]$ 上用拉格朗日中值定理，结论中的点 $\xi=$ $\underline{\ \dfrac{9}{4}\ }$.

答案 $\dfrac{9}{4}$.

解析　由拉格朗日中值定理得，$\dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}=\dfrac{y(4)-y(1)}{4-1}=\dfrac{\sqrt{4}-\sqrt{1}}{3}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\sqrt{\xi}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\xi=\dfrac{9}{4}$.

例 3-7（2017-2018-1-期中-证明题-2）

设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 存在三阶导数, 且 $f(0)=f(a)=0$, 设 $F(x)=x^3f(x)$. 证明: 存在一点 $\xi\in(0,a)$, 使得 $F'''(\xi)=0$.

答案　见解析.

解析　$F'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)\,,F''(x)=6xf(x)+6x^2f'(x)+x^2f''(x)$

$\Rightarrow F(0)=F(a)=0,F'(0)=0,F''(0)=0$

$\Rightarrow F(0)=F(a)=0\Rightarrow\exists b\in(0,a)\ s.t.\,F'(b)=0,$　又 $F'(0)=0$

$\Rightarrow\exists c\in(0,b)\ s.t.\,F''(c)=0,$　又 $F''(0)=0$

$\Rightarrow\exists\xi\in(0,c)\subseteq(0,a)\ s.t.\,F'''(\xi)=0,$　得证.

第四章　一元函数积分学及其应用

题型一　定积分的定义、基本性质以及存在性判定

4.1.1　定积分（黎曼积分）的定义

例 1-1（2015-2016-1-期末-填空题-6）

极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}=$ $\underline{\quad\dfrac{4}{\mathrm{e}}\quad}$.

答案　$\dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

解析　【法一】形式满足定积分定义式

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}&=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n^n}}\\&=\exp\left\{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n^n}\right\}=\exp\left\{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{n+\mathrm{i}}{n}\right\}\\&=\exp\left\{\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}x\right\}\end{aligned}$$

而 $\displaystyle\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}x=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x=\ln2-[x-\ln(1+x)]\Big|_0^1=2\ln2-1$

故原式 $=\mathrm{e}^{2\ln2-1}=\dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

【法二】由 Stirling 公式 $n!\sim\dfrac{n^n}{\mathrm{e}^n}\sqrt{2\pi n}$ 及 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$

$$\therefore\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{\mathrm{e}^{2n}}\cdot\frac{\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{2\pi n}}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(4n)^n\sqrt{2}}{\mathrm{e}^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{\mathrm{e}}\sqrt[n]{\sqrt{2}}=\frac{4}{\mathrm{e}}.$$

例 1-2（2013-2014-1-期末-填空题-6）

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^4}{1^3+2^3+\cdots+n^3}=$ $\underline{\quad 4\quad}$.

答案　4.

解析　【法一】$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^4}{1^3+2^3+\cdots+n^3}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3+\left(\frac{2}{n}\right)^3+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^3\right]}=\frac{1}{\int_0^1x^3\,\mathrm{d}x}=4.$

【法二】 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^4}{1^3+2^3+\cdots+n^3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^4}{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}=4\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^4}{n^4+2n^3+n^2}=4.$

注: $1^3+2^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}=(1+2+\cdots+n)^2.$

例 1-3（2016-2017-1-期末-填空题-12）

极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2})=$ $\underline{\quad\dfrac{\pi}{4}\quad}$.

答案 $\dfrac{\pi}{4}$.

解析 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x=\frac{\pi}{4}.$$

例 1-4（2014-2015-1-期末-选择题-10）

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}[n(n+1)(n+2)\cdots(n+n-1)]^{\frac{1}{n}}=$ （ A ）

(A) $\mathrm{e}^{2\ln2-1}$　(B) $\mathrm{e}^{2(\ln2-1)}$　(C) $\mathrm{e}^{2\ln2-3}$　(D) $\mathrm{e}^{3\ln2-1}$

答案 A.

解析

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}[n(n+1)(n+2)\cdots(n+n-1)]^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\exp\left\{\ln\frac{1}{n}[n(n+1)(n+2)\cdots(n+n-1)]^{\frac{1}{n}}\right\}$$
$$=\exp\left\{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left[\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+n-1)}{n^n}\right]\right\}$$
$$=\exp\left\{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\ln(1+\frac{0}{n})+\ln(1+\frac{1}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n-1}{n})\right]\right\}$$
$$=\exp\left\{\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}\,x\right\}=\exp\{2\ln2-1\}.$$

4.1.2 定积分的基本性质

例 1-5（2016-2017-1-期末-选择题-2）

下列定积分中积分值不为零的是 （ C ）

(A) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}\,x$　(B) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}\,x$

(C) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{1+\sin^2x}\,\mathrm{d}\,x$　(D) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin x+\cos x}{2}\,\mathrm{d}\,x$

答案 C.

解析 $\ln\dfrac{1+x}{1-x},\dfrac{x}{1+\cos x}$ 均为奇函数，$\dfrac{\sin x+\cos x}{2}$ 在整数个周期内的积分值为零.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x+\cos x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}\,x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}\,x \neq 0.$$

例 1-6（2013-2014-1-期末-解答题-13）

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2+\sin x\cos x}{1+x^6}\,\mathrm{d}\,x.$$

答案 见解析.

解析 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2+\sin x\cos x}{1+x^6}\,\mathrm{d}\,x = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^6}\,\mathrm{d}\,x + \int_{-1}^{1} \frac{\sin x\cos x}{1+x^6}\,\mathrm{d}\,x$

$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+(x^3)^2}\,\mathrm{d}\,x^3 + 0 = \frac{1}{3}\arctan x^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{6}.$$

题型二　变限积分的概念、求导法则

例 2-1（2015-2016-1-期末-选择题-11）

设函数 $f(x)=\begin{cases} a, & x=0 \\ \dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^{3x}(\mathrm{e}^{-t^2}-1)\,\mathrm{d}\,t, & x\neq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 点连续，则 $a=$ （ A ）

(A) -9　　(B) -3　　(C) 0　　(D) 1

答案 A.

解析 $a=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^{3x}(\mathrm{e}^{-t^2}-1)\,\mathrm{d}\,t = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3(\mathrm{e}^{-9x^2}-1)}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-9x^2}{x^2} = -9.$

例 2-2（2016-2017-1-期末-填空题-9）

设 $y(x)=\displaystyle\int_0^{x^2}\sin(x-t)^2\,\mathrm{d}\,t$, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{x=2} =$ __$4\sin 4$__ .

答案 $4\sin 4$.

解析 换元得到变限积分的标准形式

$$y(x)=\int_0^{x^2}\sin(x-t)^2\,\mathrm{d}\,t \xlongequal{令 u=x-t} \int_x^{x-x^2}\sin u^2\,\mathrm{d}\,(x-u) = \int_{x-x^2}^{x}\sin u^2\,\mathrm{d}\,u$$

于是由变限积分求导法则得

$$\left.\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{x=2} = \left.\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\int_{x-x^2}^{x}\sin u^2\,\mathrm{d}\,u\right)\right|_{x=2} = \left.\left[\sin x^2-(1-2x)\sin\left(x-x^2\right)^2\right]\right|_{x=2} = 4\sin 4.$$

例 2-3（2014-2015-1-期末-选择题-9）

$f(x)=\displaystyle\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t, g(x)=2^{x^2}-1$, 则当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ （ B ）

(A) 低阶无穷小　　(B) 同阶但非等价无穷小

(C) 高阶无穷小　　　　(D) 等价无穷小

答案　B.

解析　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t}{2^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t}{x^2\ln 2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2x}{2x\ln 2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^2}{x^2\ln 2}=\dfrac{1}{\ln 2}$.

例 2-4（2014-2015-1-期末-解答题-17）

设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$，求 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t(x\geqslant 0)$.

答案　见解析.

解析　$x\leqslant 1$ 时 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t=\int_0^x t\,\mathrm{d}\,t=\frac{1}{2}x^2$；$x>1$ 时 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t=\int_0^1 t\,\mathrm{d}\,t+\int_1^x t^2\,\mathrm{d}\,t=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}$

因此 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2, & x\leqslant 1\\ \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}, & x>1\end{cases}$.

例 2-5（2013-2014-1-期末-选择题-11）

$f(x)=\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t$，$g(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}\,t$，当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的　　（ D ）

(A) 等阶无穷小　　　　(B) 高阶无穷小

(C) 低阶无穷小　　　　(D) 同阶但非等价无穷小

答案　D.

解析　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t}{\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}\,t}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5}{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\cos x}=5\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\mathrm{e}}=\dfrac{5}{\mathrm{e}}$.

例 2-6（2012-2013-1-期末-选择题-9）

设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x<1\\ 1, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$，则 $F(x)=\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}\,t\,(0x2)$ 为　　（ A ）

(A) $\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}, & 0\leqslant x<1\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}, & 0\leqslant x<1\\ x, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$

(C) $\begin{cases}\frac{1}{3}x^3, & 0\leqslant x<1\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}\frac{1}{3}x^3, & 0\leqslant x<1\\ x, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$

答案　A.

解析　$0\leqslant x<1$ 时，$F(x)=\int_1^x t^2\,\mathrm{d}\,t=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}$；$1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$F(x)=\int_1^x 1\,\mathrm{d}\,t=x-1$.

例 2-7（2012-2013-1-期末-选择题-11）

设 $f(x)$ 为连续函数，且 $F(x)=\int_{x^2}^{e^{-x}} xf(t)\,dt$，则 $\frac{dF}{dt}=$ （ C ）

(A) $xf(e^{-x})-xf(x^2)]$ (B) $-xe^{-x}f(e^{-x})-2xf(x^2)$

(C) $\int_{x^2}^{e^{-x}} f(t)\,dt-x[e^{-x}f(e^{-x})+2xf(x^2)]$ (D) $\int_{x^2}^{e^{-x}} f(t)\,dt+x\left[e^{-x}f(e^{-x})-2xf(x^2)\right]$

答案 C.

解析 $\frac{dF}{dx}=\frac{d}{dx}x\int_{x^2}^{e^{-x}} f(t)\,dt=\int_{x^2}^{e^{-x}} f(t)\,dt+x\left[-e^{-x}f(e^{-x})-2xf(x^2)\right]$

$=\int_{x^2}^{e^{-x}} f(t)\,dt-x\left[e^{-x}f(e^{-x})+2xf(x^2)\right].$

题型三 不定积分的概念与微积分基本定理

例 3-1（2015-2016-1-期末-填空题-4）

若 $\sqrt{1-x^2}$ 是 $xf(x)$ 的一个原函数，则 $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx=$ $\underline{\quad -\frac{\pi}{4}\quad}$.

答案 $-\frac{\pi}{4}$

解析 $f(x)=\frac{1}{x}\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=\frac{1}{x}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,dx=-\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx\xlongequal{x=\sin t}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\,dt=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=-\frac{\pi}{4}.$$

题型四 不定积分与定积分的常用积分法（重点）

在基本性质及定理的基础上，结合积分表、凑微分法、换元法、分部法、有理函数积分法等.

例 4-1（2015-2016-1-期末-解答题-13）

计算 $\int_{-1}^1\frac{x^2+(\cos x)^3\arctan x}{1+\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

答案 见解析.

解析 积分区间是对称区间，被积函数有三角，首先观察是否有对称性.

不难看出 $\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}$ 是偶函数而 $\frac{(\cos x)^3\arctan x}{1+\sqrt{1-x^2}}$ 是奇函数，后者在有界对称区间的积分值为 0

$$\Rightarrow\int_{-1}^1\frac{x^2+(\cos x)^3\arctan x}{1+\sqrt{1-x^2}}\,dx=2\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\,dx=2\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$=2\int_0^1\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)dx=2-\frac{\pi}{2}$$

其中最后一步计算用到了定积分的几何性质.

例 4-2（2015-2016-1-期末-解答题-14）

计算 $\int \sec^6 x\,\mathrm{d}\,x$.

答案 见解析.

解析 【法一】令 $x=\arctan t$，从而 $\mathrm{d}\,x=\dfrac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t, \sec^6 x=(1+\tan^2 x)^3=(1+t^2)^3$

$$\int \sec^6 x\,\mathrm{d}\,x=\int (1+t^2)^3\cdot\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t=\int (1+t^2)^2\,\mathrm{d}\,t=\frac{1}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3+t+C=\frac{1}{5}\tan^5 x+\frac{2}{3}\tan^3 x+\tan x+C.$$

【法二】利用 $\sec^2 x\,\mathrm{d}\,x=\mathrm{d}\,(\tan x)$ 有

$$\int \sec^6 x\,\mathrm{d}\,x=\int \sec^4 x\,\mathrm{d}(\tan x)=\int (1+\tan^2 x)^2\,\mathrm{d}(\tan x)=\frac{1}{5}\tan^5 x+\frac{2}{3}\tan^3 x+\tan x+C.$$

例 4-3（2016-2017-1-期末-填空题-10）

若 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$，则 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\,\mathrm{d}\,x=$ $\underline{\quad 2\sqrt{x}-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+C \quad}$.

答案 $2\sqrt{x}-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+C$.

解析 令 $x=\sin^2 t$，从而 $t=\arcsin\sqrt{x}, \mathrm{d}\,x=2\sin t\cos t\,\mathrm{d}\,t$，于是

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\,\mathrm{d}\,x=\int \frac{\sin t}{\cos t}\cdot\frac{t}{\sin t}\cdot 2\sin t\cos t\,\mathrm{d}\,t=2\int t\sin t\,\mathrm{d}\,t=2\sin t-2t\cos t+C$$

$$=2\sqrt{x}-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+C.$$

例 4-4（2016-2017-1-期末-解答题-13）

已知函数 $f(x)=\displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}\,t$，求 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

答案 $\dfrac{1-\mathrm{e}}{2\,\mathrm{e}}$.

解析 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 x\,\mathrm{d}\,f(x)=x\int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}\,t\Big|_0^1-\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x$

$$=0+\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}(-x^2)=\frac{1-\mathrm{e}}{2\,\mathrm{e}}.$$

例 4-5（2014-2015-1-期末-填空题-1）

$\displaystyle\int \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}\,x=$ $\underline{\quad x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x+C \quad}$.

答案 $x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x+C$.

解析

$$\int \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}\,x = x\ln(1+x^2) - \int x\,\mathrm{d}\ln(1+x^2) = x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$$
$$= x\ln(1+x^2) - 2\int (1-\frac{1}{1+x^2})\,\mathrm{d}\,x = x\ln(1+x^2) - 2x + \arctan x + C.$$

例 4-6（2014-2015-1-期末-填空题-3）

积分 $\int_{-1}^{1} (x+\sqrt{1-x^2})^2\,\mathrm{d}\,x =$ $\underline{\quad 2 \quad}$.

答案 2.

解析 $\int_{-1}^{1} (x+\sqrt{1-x^2})^2\,\mathrm{d}\,x = \int_{-1}^{1} (x^2+2x\sqrt{1-x^2}+1-x^2)\,\mathrm{d}\,x$
$= \int_{-1}^{1} 2x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x + \int_{-1}^{1}\mathrm{d}\,x = 0+2 = 2.$

例 4-7（2014-2015-1-期末-填空题-5）

设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{bx} = \int_{-\infty}^{b} t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}\,t$, 则常数 $b =$ $\underline{\quad 2 \quad}$.

答案 2.

解析 $\int_{-\infty}^{b} t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}\,t = \mathrm{e}^b(b-1)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x+1}{x})^{bx} = \lim\limits_{x\to+\infty}((1+\frac{1}{x})^x)^b = \mathrm{e}^b$, $\mathrm{e}^b(a-1) = \mathrm{e}^b \Rightarrow b = 2.$

例 4-8（2014-2015-1-期末-填空题-6）

若函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x$, 则 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x =$ $\underline{\quad \frac{\pi}{4-\pi} \quad}$.

答案 $\frac{\pi}{4-\pi}$.

解析 记常数 $m = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x$，则 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + m\sqrt{1-x^2}$

于是 $m = \int_0^1 \left[\frac{1}{1+x^2} + m\sqrt{1-x^2}\right]\mathrm{d}\,x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x + m\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{4}(1+m)$

$\Rightarrow m = \frac{\pi}{4-\pi}$.

例 4-9（2013-2014-1-期末-填空题-4）

$\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x =$ $\underline{\quad 8\ln 2 - 4 \quad}$.

答案 $8\ln 2 - 4$.

解析 $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}\,(2\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_1^4 - 2\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x = 8\ln 2 - 4\sqrt{x}\Big|_1^4 = 8\ln 2 - 4.$

例 4-10（2013-2014-1-期末-解答题-15）

计算 $\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x$.

答案　见解析.

解析　【法一】$\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x = -x^2\mathrm{e}^{-x}\big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x$

$= 0 - 2(x\mathrm{e}^{-x}\big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x) = -2\mathrm{e}^{-x}\big|_0^{+\infty} = 2.$

【法二】原式 $= \Gamma(3) = 2! = 2.$

例 4-11（2012-2013-1-期末-填空题-3）

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^7 + \sin^2 x)\cos^2 x\,\mathrm{d}\,x = \underline{\quad \frac{\pi}{8} \quad}$.

答案　$\frac{\pi}{8}$.

解析

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^7 + \sin^2 x)\cos^2 x\,\mathrm{d}\,x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^7\cos^2 x\,\mathrm{d}\,x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^2 x\,\mathrm{d}\,x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^2 x\,\mathrm{d}\,x$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4x}{2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{8}.$$

例 4-12（2012-2013-1-期末-填空题-5）

$\int_{-\infty}^{a} t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}\,t = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{ax}$, $a = \underline{\quad 2 \quad}$.

答案　2.

解析　$\int_{-\infty}^{a} t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}\,t = \mathrm{e}^a(a-1)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{ax} = \lim\limits_{x\to+\infty}((1+\frac{1}{x})^{x})^{a} = \mathrm{e}^a, \mathrm{e}^a(a-1) = \mathrm{e}^a \Rightarrow a = 2.$

例 4-13（2012-2013-1-期末-解答题-14）

$\int \frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\,x.$

答案　见解析.

解析　令 $x = \tan t$，则 $\sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

于是 $\int \frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{\tan t\mathrm{e}^t}{\sec^3 t}\,\mathrm{d}(\tan t) = \int \mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^t(\sin t - \cos t) = \frac{(x-1)\mathrm{e}^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C.$

例 4-14（2012-2013-1-期末-解答题-17）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有二阶导数，且 $\int_0^1 [2f(x)+x(1-x)f''(x)]\,\mathrm{d}x$.

答案 见解析.

解析

$$\begin{aligned}&\int_0^1 [2f(x)+x(1-x)f''(x)]\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 (x-x^2)d(f'(x))\\ =&2xf(x)|_0^1-2\int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x+(x-x^2)f'(x)|_0^1-\int_0^1 (1-2x)f'(x)\,\mathrm{d}x\\ =&2f(1)-2\int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x+2\int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x=f(0)+f(1).\end{aligned}$$

题型五　定积分的应用

包括几何应用：计算平面曲线的弧长、平面图形的面积、规则几何体的体积；物理应用：变力做功等.

4.5.1　平面曲线的弧长

例 5-1（2016-2017-1-期末-选择题-5）

曲线 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 从 $x=0$ 到 $x=a>0$ 的长度为 （ D ）

(A) $\dfrac{\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^{-a}}{3}$　(B) $\dfrac{\mathrm{e}^a-\mathrm{e}^{-a}}{3}$　(C) $\dfrac{\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^{-a}}{2}$　(D) $\dfrac{\mathrm{e}^a-\mathrm{e}^{-a}}{2}$

答案 D.

解析 弧微分 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\,\mathrm{d}x$，弧长 $l=\int_0^a \mathrm{d}s=\int_0^a \dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{e}^a-\mathrm{e}^{-a}}{2}$.

4.5.2　平面图形的面积

例 5-2（2016-2017-1-期末-选择题-3）

曲线 $y=x^2$ 与 $y^2=x$ 所围成的图像的面积为 （ B ）

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{1}{3}$　(C) $\dfrac{1}{4}$　(D) $\dfrac{1}{5}$

答案 B.

解析 由方程组 $\begin{cases} y=x^2\\ y^2=x\end{cases}$ 有两组解 $x=y=0, x=y=1$ 知曲线 $y=x^2$ 与 $y^2=x$ 有两个交点 $(0,0),(1,1)$，且曲线在两点之间的部分成闭区域，该区域面积 S 即为待求值.

由于 $\forall x \in (0,1), x^2 < \sqrt{x}$，故 $S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,\mathrm{d}\,x = \dfrac{1}{3}$.

例 5-3（2014-2015-1-期末-解答题-16）

已知曲线 $y = a\sqrt{x}(a>0)$ 与曲线 $y = \ln\sqrt{x}$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 有公共切线，求:

(1) 常数 a 及切点;

(2) 两曲线与 x 轴围成图形 S 的面积.

答案　见解析.

解析　(1) $\begin{cases} y = a\sqrt{x_0} = \ln\sqrt{x_0} = \dfrac{1}{2}\ln x_0 \\ y' = \dfrac{a}{2\sqrt{x_0}} = \dfrac{1}{2x_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \\ x_0 = \mathrm{e}^2 \end{cases}$

(2) $S = \int_0^{\mathrm{e}^2} a\sqrt{x}\,\mathrm{d}\,x - \dfrac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}^2} \ln x\,\mathrm{d}\,x = \dfrac{2}{3}ax^{\frac{3}{2}}|_0^{\mathrm{e}^2} - x(\ln x - 1)|_1^{\mathrm{e}^2} = \dfrac{\mathrm{e}^2}{6} - \dfrac{1}{2}$.

例 5-4（2013-2014-1-期末-解答题-14）

计算抛物线 $y^2 = 2x$ 与直线 $y = x - 4$ 所围成的图形的面积.

答案　见解析.

解析　$\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = x - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 8 \end{cases} \begin{cases} y = -2 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow S = \int_{-2}^{4} f(y)\,\mathrm{d}\,y = \int_{-2}^{4} (y + 4 - \dfrac{y^2}{2})\,\mathrm{d}\,y = 18.$

例 5-5（2013-2014-1-期中-解答题-20）

在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 的第一象限部分上求一点 P，使得该点处的切线、椭圆以及两坐标轴所围成的面积最小（其中 $a>0, b>0$，椭圆面积为 πab）.

答案　见解析.

解析　设 $P(x_0, y_0)$ 是椭圆在第一象限部分的点，则由椭圆方程 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 得 $y'|_P = -\dfrac{b^2}{a^2} \cdot \dfrac{x_0}{y_0}$

$\therefore$ 过点 P 的切线方程为: $y - y_0 = -\dfrac{b^2}{a^2} \cdot \dfrac{x_0}{y_0}(x - x_0)$，又 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 得到切线方程为: $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$

$\therefore$ 切线与坐标轴在第一象限围成的三角形面积 $S_\Delta = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a^2b^2}{x_0y_0}$

$\therefore$ 切线、椭圆及两坐标轴所围成图形面积 $S = S_\Delta - \dfrac{1}{4}S$ 椭圆 $= \dfrac{a^2b^2}{2x_0y_0} - \dfrac{1}{4}\pi ab$ 又 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$，得

$S = S(x_0) = \dfrac{a^3b}{2x_0\sqrt{a^2 - x_0{}^2}} - \dfrac{1}{4}\pi ab$

要使得 $S(x_0)$ 取最小，实际上是要使得 $x_0\sqrt{a^2 - x_0{}^2}$ 取最大

令 $f(x_0) = x_0\sqrt{a^2 - x_0{}^2}, x_0 \in (0, a)$，则 $f'(x_0) = \dfrac{a^2 - 2x_0{}^2}{\sqrt{a^2 - x_0{}^2}}$，令 $f'(x_0) = 0$，解得 $x_0 = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

而当 $x_0 > \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ 时，$f'(x_0) < 0$；当 $x_0 < \dfrac{a}{\sqrt{2}}$，$f'(x_0) > 0$，$\therefore x_0 = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ 是 $f(x)$ 的最大值点

于是 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 是 $S(x)$ 的最小值点，即待求点 P 为 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$.

例 5-6（2014-2015-2-期中-选择题-11）

双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 所围成区域的面积可用定积分表示为 （ A ）

(A) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta \mathrm{d}\theta$ (B) $4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta \mathrm{d}\theta$ (C) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta \mathrm{d}\theta$ (D) $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta \mathrm{d}\theta$

答案 A.

解析 令 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，则双纽线方程 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 化为 $\rho^2=\cos 2\theta$. 再利用双纽线在第一象限与 x 轴所围成的面积相等可得其面积 $S=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\cos 2\theta \mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta \mathrm{d}\theta$.

4.5.3 规则几何体的体积

例 5-7（2015-2016-1-期末-解答题-17）

在曲线 $y=x^2(x\geqslant 0)$ 上某点 A 处作一切线，使之与曲线及 x 轴所围图形 B 的面积为 $\dfrac{1}{12}$，求平面图形 B 绕 y 轴旋转一周所围成的立体的体积.

答案 见解析.

解析 不妨设切点为 $P(t,t^2)\,(t>0)$, 计算得切线方程为 $y=2t(x-t)+t^2=2tx-t^2\Rightarrow x=\dfrac{1}{2t}(y+t^2)$

图形 B 的面积为 $S=\displaystyle\int_0^{t^2}\left(\frac{1}{2t}(y+t^2)-\sqrt{y}\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{12}t^3=\frac{1}{12}\Rightarrow t=1$

则切线方程为 $y=2x-1\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}(y+1)$. 于是旋转体的体积

$$V=\int_0^1\pi\left\{\left[\frac{1}{2}(y+1)\right]^2-(\sqrt{y})^2\right\}\mathrm{d}y=\pi\int_0^1\left[\frac{1}{4}(y^2+2y+1)-y\right]\mathrm{d}y$$
$$=\frac{\pi}{4}\int_0^1(y-1)^2\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}\int_{-1}^0 y^2\mathrm{d}y=\frac{\pi}{12}\cdot y^3\Big|_{-1}^0=\frac{\pi}{12}.$$

也可采用对 x 积分的方法，但计算要分段，稍嫌麻烦.

例 5-8（2016-2017-1-期末-解答题-17）

设 D_1 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a,x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面区域,D_2 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $y=0,x=a$ 所围成的平面区域, 其中 $0<a<2$.

(1) 求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1,D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2

(2) 问当 a 为何值时,V_1+V_2 取得最大值? 并求此最大值.

答案 见解析.

解析 (1) $\mathrm{d}V_1=\pi(2x^2)^2\mathrm{d}x=4\pi x^4$，$V_1=\displaystyle\int_a^2 4\pi x^4\mathrm{d}x=\frac{4\pi}{5}x^5\Big|_a^2=\frac{128\pi-4\pi a^5}{5}$

$\mathrm{d}V_2=\pi\left(\sqrt{y/2}\right)^2\mathrm{d}y=\dfrac{\pi}{2}y\,\mathrm{d}y$，$V_2=\displaystyle\int_0^{2a^2}\frac{\pi y}{2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}y^2\Big|_0^{2a^2}=\pi a^4$.

(2) 令 $f(a)=V_1+V_2=-\dfrac{4\pi}{5}a^5+\pi a^4+\dfrac{128\pi}{5},a\in(0,2)$，则 $f'(a)=-4\pi a^4+4\pi a^3=4\pi a^3(1-a)$

易知

$$\forall a \in (0,1)\,, f'(a) > 0;\ \forall a \in (1,2)\,, f'(a) < 0$$

于是 $f(a)$ 在 $a=1$ 处取得极大值（同时也是最大值），为 $\dfrac{129\pi}{5}$.

例 5-9（2013-2014-1-期末-选择题-10）

由曲线 $x=\sqrt{y}$, $x=0$, $y=4$ 围成的图形，绕 y 轴旋转所得旋转体的体积为 （ A ）

(A) 8π (B) 6π (C) 4π (D) 2π

答案 A.

解析
$$\begin{cases} \mathrm{d}V = \pi\left(\sqrt{y}\right)^2 \mathrm{d}\,y \\ V = \displaystyle\int dV = \int_0^4 \pi y \,\mathrm{d}\,y = 8\pi \end{cases}.$$

例 5-10（2012-2013-1-期末-解答题-18）

设平面图形 A 位于曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 下方、该曲线过原点的切线的左方以及 x 轴的上方，求:

(1) 平面图形 A 的面积 S;

(2)A 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V_x;

(3)A 绕直线 $x=1$ 旋转所得旋转体的体积 $V_{x=1}$.

答案 见解析.

解析 (1) $S=S_1-S_2=\displaystyle\int_{-\infty}^{1}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\,x-\frac{1}{2}\times 1\times e=e-\frac{\mathrm{e}}{2}=\frac{\mathrm{e}}{2}$.

(2) $V_x=\displaystyle\int_{-\infty}^{1}\pi y^2\,\mathrm{d}\,x-\frac{1}{3}\times\pi\times\mathrm{e}^2\times 1=\frac{\mathrm{e}^2\pi}{2}-\frac{\mathrm{e}^2\pi}{3}=\frac{\mathrm{e}^2\pi}{6}$.

(3) $V_{x=1}=\displaystyle\int_{-\infty}^{1}2\pi(1-x)y\,\mathrm{d}\,x-\frac{1}{3}\times\pi\times e\times 1^2=2e\pi-\frac{e\pi}{3}=\frac{5e\pi}{3}$.

题型六 反常积分的概念与存在性判定（审敛），简单反常积分的计算

例 6-1（2015-2016-1-期末-解答题-15）

讨论广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a}\,\mathrm{d}\,x$ 的收敛性.

答案 见解析.

解析 由无界区间上反常积分的定义有

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a}\,\mathrm{d}\,x=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{1}{x^a}\,\mathrm{d}\,x=\begin{cases}\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\frac{b^{1-a}-1}{1-a}, & a\neq 1\\ \displaystyle\lim_{b\to+\infty}\ln b, & a=1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-a}, & a>1\\ +\infty, & a\leqslant 1\end{cases}$$

即当 $a>1$ 时积分收敛，当 $a\leqslant 1$ 时积分发散.

第五章　无穷级数

题型一　常数项级数的审敛

包括正项级数、交错级数和任意项级数，要求读者掌握几个基本结论和判别法.

例 1-1（2016-2017-1-期末-选择题-6）

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则级数　　　　（ D ）.

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 收敛　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛

答案　D.

解析　ABC 选项可举反例 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，D 选项实际有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n\right)$ 而后者收敛，故 D 收敛.

例 1-2（2014-2015-1-期末-选择题-12）

若常数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$　　　　（ D ）.

(A) 发散　　(B) 绝对收敛

(C) 条件收敛　　(D) 可能收敛, 也可能发散.

答案　D.

解析　举反例：令 $a_n = \frac{1}{n}$ 有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 发散，令 $a_n = \frac{1}{n^2}$ 有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛，于是 D 正确.

例 1-3（2014-2015-1-期末-证明题-19）

设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散. 试证：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n + 1}\right)^n$ 收敛.

答案　见解析.

解析　正项数列 $\{a_n\}$ 有下界，又由单调减少可知 $\{a_n\}$ 收敛，且由数列极限的保号性知 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \geqslant 0$. 而交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散，必定有 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$（否则可由莱布尼茨审敛法推知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛）于是 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n > 0$. 于是对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n + 1}\right)^n$ 由 Cauchy 根值审敛法有

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{1+\lim\limits_{n\to+\infty}a_n}<1$$

从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{a_n+1}\right)^n$ 收敛.

例 1-4（2013-2014-1-期末-选择题-12）

设常数 $k>0$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+k}}$ （ A ）.

(A) 绝对收敛 (B) 条件收敛

(C) 发散 (D) 收敛性与 k 值有关

答案 A.

解析 由基本不等式有 $\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+k}}=\sqrt{\dfrac{a_n^2}{n^2+k}}\dfrac{1}{2}\left(a_n^2+\dfrac{1}{n^2+k}\right)<\dfrac{1}{2}\left(a_n^2+\dfrac{1}{n}\right)$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 均收敛，于是由比较审敛法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{a_n^2}{n^2+k}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+k}}\right|$ 收敛

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+k}}$ 绝对收敛，故选 A.

例 1-5（2012-2013-1-期末-填空题-6）

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛且和为 S，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=$ $\underline{\quad a_1-S\quad}$.

答案 a_1-S.

解析 由常数项级数的部分和定义有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i+1})=\lim_{n\to+\infty}(a_1-a_{n+1})=a_1-\lim_{n\to+\infty}a_{n+1}=S$$

于是由极限的四则运算法则及唯一性可得 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a_1-S$.

例 1-6（2012-2013-1-期末-选择题-10）

若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则下列级数中一定收敛的是 （ D ）.

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+a)(0\leqslant a<1)$ (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n}$

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{u_n}$ (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$

答案 D.

解析 通项趋于 0 是常数项级数收敛的必要条件，C 错；当 $a\neq 0$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+a)$ 不满足该条件，A 亦错；对于 B，可举反例 $u_n=\dfrac{1}{n^2}$；由已知条件可证得 D 选项的级数在通项加绝对值之后仍收敛，故为绝对收敛，于是收敛.

题型二 幂级数的审敛与计算和函数

包括幂级数的相关概念、性质，和函数的相关概念、性质，要求读者掌握性质及基本解题方法.

例 2-1（2015-2016-1-期末-填空题-2）

幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n-1)}{2^n}x^{2n-2}$ 的收敛区间为 $\underline{\quad(-\sqrt{2},\sqrt{2})\quad}$.

答案 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

解析 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n-1)}{2^n}x^{2n-2}=-\dfrac{1}{x^2}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n+1)}{2^{n+1}}x^{2n}=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^{2n}$

$R=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n+1}{2n+3}=1$, $\therefore -1<\dfrac{x}{\sqrt{2}}<1\Rightarrow x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

例 2-2（2016-2017-1-期末-填空题-8）

幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}^n-(-1)^n}{n^2}x^n$ 的收敛半径为 $\underline{\quad\dfrac{1}{\mathrm{e}}\quad}$.

答案 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

解析 显然幂级数不缺项，则收敛半径

$$R=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{\mathrm{e}^n-(-1)^n}{n^2}}{\dfrac{\mathrm{e}^{n+1}-(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{1-\mathrm{e}^{-n}(-1)^n}{e-\mathrm{e}^{-n}(-1)^{n+1}}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

例 2-3（2016-2017-1-期末-解答题-16）

求幂级数 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2n}\ (|x|<1)$ 的和函数 $f(x)$ 及其极值.

答案 见解析.

解析 由和函数的可微性和可积性有

$$\begin{aligned}f(x)&=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n-1}\,\mathrm{d}\,t=1+\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n t^{2n-1}\,\mathrm{d}\,t\\&=1+\int_0^x\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-t^2\right)^n\mathrm{d}\,t=1+\int_0^x\frac{1}{t}\cdot\left(\frac{1}{1+t^2}-1\right)\mathrm{d}\,t\\&=1-\int_0^x\frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t=1-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right),|x|<1\end{aligned}$$

则 $f'(x)=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x}{1+x^2}=-\dfrac{x}{1+x^2}, x\in(-1,1)$. 于是 $\forall x\in(-1,0), f'(x)>0$; $\forall x\in(0,1), f'(x)<0$

从而 $f(x)$ 有极大值 $f(0)=1$.

例 2-4（2013-2014-1-期末-填空题-2）

幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 的和函数 $s(x)=$ $\underline{\quad -\ln(1-x),x\in[-1,1)\quad}$.

答案 $-\ln(1-x),x\in[-1,1)$.

解析 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 的收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 收敛于是幂级数的收敛域为 $[-1,1)$.

由和函数的可微性和可积性得

$$s(x)=\int_0^x s'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{t^n}{n}\right)'\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}\,\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}t^n\,\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t$$
$$=-\ln(1-x),x\in[-1,1).$$

例 2-5（2012-2013-1-期末-解答题-13）

将函数 $f(x)=\dfrac{1}{2x^2-3x+1}$ 展开为 x 的幂级数.

答案 见解析.

解析 观察结构，对 $f(x)$ 进行部分分式展开得到 $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)(1-2x)}=\dfrac{2}{1-2x}-\dfrac{1}{1-x}$

而 $\dfrac{2}{1-2x}=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2x)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{n+1}x^n,x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$；$-\dfrac{1}{1-x}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n,x\in(-1,1)$

故 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{n+1}x^n-\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right)x^n,x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

题型三　任意项级数的计算

例 3-1（2015-2016-1-期末-选择题-12）

级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和为　　（ D ）

(A) π　　(B) $\dfrac{\pi}{2}$　　(C) $\dfrac{\pi}{3}$　　(D) $\dfrac{\pi}{4}$

答案 D.

解析 设 $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$，收敛域为 $(-1,1]$.

由和函数的可微性有 $s'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n=\dfrac{1}{1+x^2}$

于是 $s(x)=\displaystyle\int_0^x s'(t)\,\mathrm{d}t=\arctan x$. 故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}=s(1)=\dfrac{\pi}{4}$.

例 3-2（2014-2015-1-期末-解答题-15）

求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{2^n n!}$ 的和.

答案 见解析.

解析 拆项

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n n!}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)^n}{n!}-1=\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)^n}{n!}-1\\&=\frac{3}{2}\cdot \mathrm{e}^x\Big|_{x=\frac{1}{2}}-1=\frac{3}{2}\sqrt{\mathrm{e}}-1.\end{aligned}$$

题型四　傅里叶级数的简单问题

例 4-1（2015-2016-1-期末-填空题-5）

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，且 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\leqslant 0\\ 1+x^2, & 0<x\leqslant\pi\end{cases}$，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=5\pi$ 处收敛于 $\underline{\dfrac{\pi^2}{2}}$.

答案 $\dfrac{\pi^2}{2}$.

解析 由狄利克雷充分条件，$f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=5\pi$ 处收敛于

$$\frac{1}{2}[f(5\pi+)+f(5\pi-)]=\frac{1}{2}[f(\pi+)+f(\pi-)]=\frac{\pi^2}{2}.$$

综合题一

题型一　中值定理综合证明题

例 1-1（ 2014-2015-1-期末-证明题-18 ）

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且满足 $f(1)=5\int_0^{\frac{1}{5}} xe^{1-x}f(x)dx$, 证明: 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

答案　见解析.

解析　构造函数 $g(x)=xe^{1-x}f(x)$，由积分第一中值定理可知

$$\exists\eta\in\left(0,\frac{1}{5}\right),\ f(1)=g(1)=5\int_0^{\frac{1}{5}} g(\eta)\,\mathrm{d}x=g(\eta)$$

从而由罗尔定理可知 $\exists\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$, $g'(\xi)=\mathrm{e}^{1-\xi}(1-\xi)f(\xi)+\xi\mathrm{e}^{1-\xi}f'(\xi)=0$

从而 $\exists\xi\in(0,1)$, $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

题型二　导数、积分综合性应用题

例 2-1（ 2013-2014-1-期末-解答题-17 ）

设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{z\to0}\dfrac{f(x)-4}{x}=1$，试求常数 k 使得 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续，其中 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x\ln(1+x)}\displaystyle\int_0^x tf\left(t^2-x^2\right)\mathrm{d}t, & x\neq0\\ k, & x=0\end{cases}$.

答案　见解析.

解析　已知 $f(x)$ 连续，$\lim\limits_{z\to0}\dfrac{f(x)-4}{x}=1$，由极限四则运算法则可知

$$f(0)=\lim_{z\to0}f(x)=\lim_{z\to0}\left[\frac{f(x)-4}{x}\cdot x+4\right]=\lim_{z\to0}\frac{f(x)-4}{x}\cdot\lim_{z\to0}x+4=4$$

及

$$f'(0)=\lim_{z\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{z\to0}\frac{f(x)-4}{x}=1$$

从而

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\to 0} g(x) &= \lim_{z\to 0} \frac{1}{x\ln(1+x)} \int_0^x tf\left(t^2-x^2\right) \mathrm{d}\, t = \lim_{z\to 0} \frac{1}{x\ln(1+x)} \cdot \frac{1}{2} \int_0^x f\left(t^2-x^2\right) \mathrm{d}\left(t^2-x^2\right) \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{1}{x\ln(1+x)} \cdot \frac{1}{2} \int_{-x^2}^0 f(u)\, \mathrm{d}\, u = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{1}{[x\ln(1+x)]'} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x} \int_{-x^2}^0 f(u)\, \mathrm{d}\, u \\
&= \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{2xf\left(-x^2\right)}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}} = \lim_{z\to 0} \frac{f\left(-x^2\right)}{\frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{1}{1+x}} \\
&= \frac{\lim\limits_{z\to 0} f\left(-x^2\right)}{\lim\limits_{z\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} + \lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{1+x}} = \frac{f(0)}{1+1} = 2
\end{aligned}
$$

于是 $g(x)$ 连续 $\Leftrightarrow k = g(0) = \lim\limits_{z\to 0} g(x) = 2.$

第六章 向量代数与空间解析几何

题型一 向量及其运算

主要包括向量的概念和向量的简单运算，后者包括线性运算——加减，交换、结合、分配，数乘，点积，叉积，混合积等.

例 1-1

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为三个不共面的非零向量，证明：若向量 $\boldsymbol{p}$ 同时垂直于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{p}=\mathbf{0}$.

答案 见解析.

解析 假设 $\boldsymbol{p}\neq\mathbf{0}$，$\because \boldsymbol{p}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{p}\perp\boldsymbol{b}$，$\therefore \boldsymbol{p}\parallel\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$

又 $\because \boldsymbol{p}\perp\boldsymbol{c}\Rightarrow\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\Rightarrow(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$，即 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面，矛盾. 故 $\boldsymbol{p}=\mathbf{0}$.

例 1-2（2013-2014-2-期中-填空题-1）

设 $\boldsymbol{a}=(1,2,3)\,,\boldsymbol{b}=(-1,2,2)$，以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积为 $\underline{\quad 3\sqrt{5}\quad}$.

答案 $3\sqrt{5}$.

解析 $S=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&2&3\\-1&2&2\end{vmatrix}=3\sqrt{5}$.

例 1-3（2013-2014-2-期中-填空题-4）

$|\boldsymbol{a}|=2,|\boldsymbol{b}|=5,(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\dfrac{\pi}{3}$，向量 $\boldsymbol{u}=k\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b},\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 垂直，则 $k=\underline{\quad -40\quad}$.

答案 -40.

解析 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=k|\boldsymbol{a}|^2+(2-k)\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2|\boldsymbol{b}|^2=0\Rightarrow k=-40$.

例 1-4（2014-2015-2-期中-填空题-1）

已知不共面的三向量 $\boldsymbol{a}=(1,0,-1)\,,\boldsymbol{b}=(2,3,1)\,,\boldsymbol{c}=(0,1,2)$ 及 $\boldsymbol{d}=(0,0,3)$，则用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的线性组合表示的向量 $\boldsymbol{d}=\underline{\quad 2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}\quad}$.

答案 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$.

解析 设 $\boldsymbol{d}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}+p\boldsymbol{c}\Rightarrow\begin{cases}m+2n=0\\3n+p=0\\-m+n+2p=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=2\\n=-1\\p=3\end{cases}\Rightarrow\boldsymbol{d}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}.$

例 1-5（2014-2015-2-期中-填空题-4）

一向量的终点在点 $B(2,-1,7)$，它在 x 轴，y 轴和 z 轴上的投影依次为 $4,-4,7$，则该向量的起点 A 的坐标为 $\underline{\quad(2,3,0)\quad}$.

答案 $(2,3,0)$.

解析 $\because x=2-4=-2,y=-1-(-4)=3,z=7-7=0\therefore A(2,3,0)$.

例 1-6（2014-2015-2-期中-填空题-9）

若向量 $\boldsymbol{a}\neq 0$，则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}-x\boldsymbol{b}|}{x}=\underline{\quad\dfrac{2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}\quad}$.

答案 $\dfrac{2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}$.

解析 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{x(|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}-x\boldsymbol{b}|)}=\dfrac{4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{2|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}$.

例 1-7（2015-2016-2-期末-填空题-3）

设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k},\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k},\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，且向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$，则 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的投影为 $\underline{\quad 13\quad}$，在 y 轴上的分向量为 $\underline{\quad 7\boldsymbol{j}\quad}$.

答案 13; $7\boldsymbol{j}$.

解析 注意区分“投影”和“投影向量、分向量”的概念，前者是数而后者是向量.

$\boldsymbol{a}=(12+6-5)\boldsymbol{i}+(20-12-1)\boldsymbol{j}+(32-21+4)\boldsymbol{k}=13\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k}$

$\therefore$ 在 x 轴上的投影为 13，在 y 轴上的分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

例 1-8（2015-2016-2-期末-填空题-6）

设 $|\boldsymbol{a}|=2,|\boldsymbol{b}|=5,(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\dfrac{2\pi}{3}$，向量 $\boldsymbol{m}=\lambda\boldsymbol{a}+17\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{n}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 垂直，则 $\lambda=\underline{\quad 40\quad}$.

答案 40.

解析 $\because\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0\Rightarrow 3\lambda|\boldsymbol{a}|^2+(51-\lambda)\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-17|\boldsymbol{b}|^2=0\Rightarrow\lambda=40$.

题型二　三维空间中的面与线

6.2.1　直线与平面的概念及计算

例 2-1

求与两平面 $x-4z=3, 2x-y-5z=1$ 的交线平行，且过点 $(-3,2,5)$ 的直线方程.

答案　$\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-5}{1}$.

解析　所求直线的方向向量可取为 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 0 & -4\\ 2 & -1 & -5\end{vmatrix}=(-4,-3,-1)$

利用点向式可得方程 $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-5}{1}$.

例 2-2

求过点 $(2,1,3)$ 且与直线 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程.

答案　$\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-3}{4}$.

解析　先求二直线交点 P. 过已知点且垂直于已知直线的平面的法向量为 $(3,2,-1)$

故其方程为 $3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$

把已知直线方程化为参数方程代入可得交点 $P\left(\dfrac{2}{7},\dfrac{13}{7},-\dfrac{3}{7}\right)$

最后利用两点得所求方程为 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-3}{4}$.

例 2-3

求直线 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{2}$ 与平面 $2x+y+z-6=0$ 的交点.

答案　$(1,2,2)$.

解析　化直线方程为参数方程 $\begin{cases}x=2+t\\ y=3+t\\ z=4+2t\end{cases}$，代入平面方程得 $t=-1$，从而确定交点为 $(1,2,2)$.

例 2-4

求直线 $\begin{cases}x+y-z-1=0\\ x-y+z+1=0\end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线方程.

答案 $\begin{cases} y-z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$.

解析 过已知直线的平面束方程

$$x+y-z-1+\lambda(x-y+z+1)=0 \Rightarrow (1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z+(-1+\lambda)=0$$

从中选择 λ 使其与已知平面垂直 $(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 1=0 \Rightarrow \lambda=-1$

$\therefore \begin{cases} y-z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$.

例 2-5

设一平面平行于已知直线 $\begin{cases} 2x-z=0 \\ x+y-z+5=0 \end{cases}$ 且垂直于已知平面 $7x-y+4z-3=0$，求该平面法线的方向余弦.

答案 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{50}, \cos\beta=\dfrac{5}{\sqrt{50}}, \cos\gamma=-\dfrac{4}{\sqrt{50}}$.

解析 已知平面的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(7,-1,4)$，求出已知直线的方向向量 $\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(1,1,2)$

取所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n}_1=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 7 & -1 & 4 \end{vmatrix}=2(3,5,-4)$

求得其方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{50}, \cos\beta=\dfrac{5}{\sqrt{50}}, \cos\gamma=-\dfrac{4}{\sqrt{50}}$.

例 2-6

求过点 $M_0(1,1,1)$ 且与两直线 $L_1:\begin{cases} y=2x \\ z=x-1 \end{cases}, L_2:\begin{cases} y=3x-4 \\ z=2x-1 \end{cases}$ 都相交的直线.

答案 $\begin{cases} 3x-y-z-1=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases}$.

解析 【法一】先求交点，再写直线方程将两直线方程化为参数方程

$$L_1:\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=t-1 \end{cases} \qquad L_2:\begin{cases} x=t \\ y=3t-4 \\ z=2t-1 \end{cases}$$

设交点分别为 $M_1(t_1,2t_1,t_1-1)$, $M_2(t_2,3t_2-4,2t_2-1)$ M_0,M_1,M_2 三点共线 $\therefore \overrightarrow{M_0M_1} \parallel \overrightarrow{M_0M_2}$

$\dfrac{t_1-1}{t_2-1}=\dfrac{2t_1-1}{(3t_2-4)-1}=\dfrac{(t_1-1)-1}{(2t_2-1)-1}\Rightarrow t_1=0,t_2=2$

$M_1(0,0,-1)$, $M_2(2,2,3)\Rightarrow L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$.

【法二】两相交直线确定平面，先求已知直线方向向量，将两直线方程化为参数方程

$$L_1:\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=t-1\end{cases}\qquad L_2:\begin{cases}x=t\\y=3t-4\\z=2t-1\end{cases}$$

得 $\boldsymbol{s}_1=(1,2,1)$, L_1 上点 $M_1(0,0,-1)$, $\boldsymbol{s}_2=(1,3,2)$, L_2 上点 $M_2(0,-4,-1)$

对 L 上任意点 $M(x,y,z)$, $\overrightarrow{M_1M},\overrightarrow{M_1M_0},\boldsymbol{s}_1$ 共面

$\therefore \begin{vmatrix}x & y & z+1\\1 & 1 & 2\\1 & 2 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow 3x-y-z-1=0$. 同理可得 $2x-z-1=0$，$\therefore \begin{cases}3x-y-z-1=0\\2x-z-1=0\end{cases}$.

例 2-7（2014-2015-2-期末-填空题-5）

过点 $P(1,-1,1)$ 且与直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$ 和 $L_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-3}$ 平行的平面方程为 $\underline{\quad 4x+5y+3z-2=0\quad}$.

答案　$4x+5y+3z-2=0$.

解析　法向量 $\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\1 & -2 & 2\\1 & 1 & -3\end{vmatrix}=(4,5,3)\Rightarrow 4(x-1)+5(y+1)+3(z-1)=0\Rightarrow 4x+5y+3z-2=0$.

例 2-8（2013-2014-2-期末-解答题-12）

求直线 $L:\begin{cases}4x-y+3z-1=0\\x+5y-z+2=0\end{cases}$ 在平面 $2x-y+5z-3=0$ 上的投影直线.

答案　$\begin{cases}7x+14y+5=0\\2x-y+5z-3=0\end{cases}$.

解析　不妨设直线 L 的平面束方程为 $4x-y+3z-1+\lambda(x+5y-z+2)=0,\lambda\in\mathbb{R}$

平面的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(2,-1,5)$ 与平面束方程的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(4+\lambda,5\lambda-1,3-\lambda)$ 垂直

$\therefore \boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0\Rightarrow\lambda=3\Rightarrow\begin{cases}7x+14y+5=0\\2x-y+5z-3=0\end{cases}$.

6.2.2 认识曲面与曲线

例 2-9

试求顶点在原点，含三正半坐标轴的圆锥面.

答案 $xy+yz+zx=0$.

解析 设圆锥面的旋转轴方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)\Rightarrow m=n=p$. 故取 $\boldsymbol{s}=(1,1,1)$ 旋转轴为 $x=y=z$, 在圆锥面上任取一点 $M(x,y,z)$ $\therefore \dfrac{x+y+z}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow xy+yz+zx=0$.

例 2-10（2013-2014-2-期中-填空题-8）

两曲面 $z=x^2+2y^2$,$z=3-2x^2-y^2$ 的交线 C 在 xOy 面上的投影曲线方程为 $\underline{\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}}$.

答案 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}$.

解析 $\because$ 在 xOy 平面上，$\therefore z=0$. 两方程联立并消掉 z 即得投影曲线方程为 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}$.

第七章　多元函数微分学及其应用

例 0-1 (　ID)

题目

答案　答案

解析　解析

习题 0-1 (　ID)

题目

答案　答案

解析　解析

选择题用 (A)

填空题用 __答案__

选项用

(A) 选项 A　(B) 选项 B　(C) 选项 C　(D) 选项 D

第八章　重积分

题型一　重积分的概念、性质以及简单的累次积分换序

8.1.1　线性性质

例 1-1（2013-2014-2-期中-选择题-16）

设 $I_1=\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，$I_2=\iint\limits_D \cos\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma$，$I_3=\iint\limits_D \cos\left(x^2+y^2\right)^2\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$，则有　　（ B ）

(A) $I_1>I_2>I_3$　　(B) $I_3>I_2>I_1$　　(C) $I_2>I_1>I_3$　　(D) $I_3>I_1>I_2$

答案　B.

解析　$D=\{(x,y)|\,x^2+y^2\leqslant 1\}\Rightarrow 1\geqslant\sqrt{x^2+y^2}\geqslant x^2+y^2\geqslant\left(x^2+y^2\right)^2>0$,
而 $\cos x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 单调递减，于是

$$\forall\,(x,y)\in D,\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)<\cos\left(x^2+y^2\right)<\cos\left(x^2+y^2\right)^2$$

由二重积分性质得

$$\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma<\iint\limits_D \cos\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma<\iint\limits_D \cos\left(x^2+y^2\right)^2\mathrm{d}\sigma$$

即 $I_3>I_2>I_1$.

8.1.2　对称性及轮换对称性

例 1-2（2014-2015-2-期中-选择题-16）

设 $f(x,y)=x^4\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$，且 $D=\{(x,y)|\,|x|+|y|\leqslant 2\}$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$（ C ）

(A) -1　　(B) 1　　(C) 0　　(D) 2

答案　C.

解析　显然 $f(x,-y)=-f(x,y)$，而积分区域关于 x 轴对称，因此 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$.

例 1-3（2015-2016-2-期中-选择题-17；2011-2012-2-期末-选择题-11）

设有空间区域 $\Omega_1=\{(x,y,z)|\,x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,z\geqslant 0\}$,
$\Omega_2=\{(x,y,z)|\,x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0\}$，则有　（ C ）

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1} x\,\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2} x\,\mathrm{d}v$　(B) $\iiint\limits_{\Omega_1} y\,\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2} y\,\mathrm{d}v$

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1} z\,\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2} z\,\mathrm{d}v$　(D) $\iiint\limits_{\Omega_1} xyz\,\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2} xyz\,\mathrm{d}v$

答案　C.

解析　由 Ω_1 和 Ω_2 的对称性可知 $\iiint\limits_{\Omega_1} z\,\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2} z\,\mathrm{d}v$.

例 1-4（2012-2013-2-期中-解答题-22）

设区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，$f(x,y)$ 为 D 上的正值连续函数，a,b 为常数，证明：$\iint\limits_D \dfrac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\,\mathrm{d}\sigma=\dfrac{a+b}{2}\pi$.

答案　见解析.

解析　由轮换对称性 $\iint\limits_D \dfrac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D \dfrac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}\sigma$，所以

$$\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\,\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}+a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D \frac{(a+b)\left(\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}\right)}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\,\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\iint\limits_D (a+b)\,\mathrm{d}\sigma=\frac{a+b}{2}\sigma$$

其中 σ 为 D 区域的面积 π，因此原式 $=\dfrac{a+b}{2}\pi$.

例 1-5（2012-2013-2-期中-选择题-14）

设 $\Omega_1: x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,z\geqslant 0,\Omega_2: x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0$，则　（ C ）

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=4\iiint \Omega_2 x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$　(B) $\iiint\limits_{\Omega_1} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=4\iiint \Omega_2 y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=4\iiint \Omega_2 z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$　(D) $\iiint\limits_{\Omega_1} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=4\iiint\limits_{\Omega_2} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

答案　C.

解析　由对称性，在 Ω_1 上 x、y、xyz 的积分都是 0，故 A、B、D 选项错误.

8.1.3　累次积分的交换积分次序

例 1-6（2012-2013-2-期末-选择题-6）

设区域 D 是由曲线 $y=x, x+y=2$ 及 $x=2$ 围成的平面区域，则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 等于（ C ）

(A) $\int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^2 f(x,y)\,\mathrm{d}y$　　(B) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

(C) $\int_1^2 \mathrm{d}y \int_{2-x}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}x$　　(D) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^{2-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$

答案　C.

解析　考查化重积分为累次积分，$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \mathrm{d}x \int_{2-x}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

例 1-7（2015-2016-2-期中-选择题-19）

二次积分 $\int_0^a \mathrm{d}y \int_0^y \mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\,\mathrm{d}x =$（ D ）

(A) $\int_0^a x\mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\,\mathrm{d}x$　　(B) $\int_0^a a\mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\,\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^a (a-x)\,\mathrm{e}^{a(m-x)} f(x)\,\mathrm{d}x$　　(D) $\int_0^a (a-x)\,\mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\,\mathrm{d}x$

答案　D.

解析　变换积分次序：$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant y \\ 0 \leqslant y \leqslant a \end{cases} \to \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant a \\ x \leqslant y \leqslant a \end{cases}$，则

$$\int_0^a \mathrm{d}y \int_0^y \mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a \mathrm{d}x \int_x^a \mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\,\mathrm{d}y = \int_0^a (a-x)\,\mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

例 1-8（2010-2011-2-期末-选择题-8）

设 $f(x,y)$ 是连续函数，则 $\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 等于（ B ）

(A) $\int_0^a \mathrm{d}y \int_0^y f(x,y)\,\mathrm{d}x$　　(B) $\int_0^a \mathrm{d}y \int_y^a f(x,y)\,\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^a \mathrm{d}y \int_a^y f(x,y)\,\mathrm{d}x$　　(D) $\int_0^a \mathrm{d}y \int_0^a f(x,y)\,\mathrm{d}x$

答案　B.

解析　变换积分次序：$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant a \\ 0 \leqslant y \leqslant x \end{cases} \to \begin{cases} y \leqslant x \leqslant a \\ 0 \leqslant y \leqslant a \end{cases}$，则 $\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^a \mathrm{d}y \int_y^a f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

例 1-9（2013-2014-2-期末 (C)-选择题-8）

交换积分次序 $\int_0^1 \mathrm{d}\,y \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x =$ (B)

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}\,x \int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$

(B) $\int_0^1 \mathrm{d}\,x \int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y + \int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}\,x \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$

(C) $\int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}\,x \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$

(D) $\int_0^1 \mathrm{d}\,x \int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y + \int_1^{\sqrt{3}} \mathrm{d}\,x \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$

答案　B.

解析　画图，分成两块区域.

例 1-10（2014-2015-2-期中-填空题-8）

二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}\,x \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}\,y$ 的值等于 $\underline{\quad \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \quad}$.

2013-2014-2-期末 (C)-填空题-4

2012-2013-2-期中-填空题-2

答案　$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

解析　交换积分次序可得

$$\int_0^1 \mathrm{d}\,x \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}\,y = \int_0^1 \mathrm{d}\,y \int_{y^2}^1 \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 \left(1-y^2\right) \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}\,y = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}\,y - \int_0^1 y^2 \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}\,y$$

$$= \int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}\,y - \int_0^1 y\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\right) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}\,y + y\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\Big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}\,y$$

$$= y\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\Big|_0^1 = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

例 1-11（2013-2014-2-期末-填空题-5）

积分 $\int_0^2 \mathrm{d}\,x \int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}\,y$ 的值等于 $\underline{\quad \frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-4}\right) \quad}$.

答案　$\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-4}\right)$.

解析　交换积分次序，得

$$\int_0^2 \mathrm{d}\,x \int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}\,y = \int_0^2 \mathrm{d}\,y \int_0^y \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^2 y\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}\,y = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y^2}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-4}\right).$$

例 1-12（2012-2013-2-期中-选择题-15）

设函数 $f(x,y)$ 连续，则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 等于 （ B ）

(A) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi+\sin x}^{\pi}f(x,y)\,\mathrm{d}x$ (B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\,\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin x}f(x,y)\,\mathrm{d}x$ (D) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin x}f(x,y)\,\mathrm{d}x$

2015-2016-2-期中-选择题-16

答案 B.

解析 考查交换积分次序方法. 注意反正弦函数 $f(x)=\arcsin x$ 的定义域是 $[-1,1]$，值域是 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
因此当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$x=\arcsin y$；当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 时，$\pi-x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
于是 $x\leqslant\pi\leqslant-\arcsin y$，从而将积分区域变换为

$$D:\left\{(x,y)|\,\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi,\sin x\leqslant y\leqslant 1\right\}\Leftrightarrow\{(x,y)|\,0\leqslant y\leqslant 1,\pi-\arcsin y\leqslant x\leqslant\pi\}.$$

例 1-13（2014-2015-2-期中-选择题-15）

设函数 $f(x,y)$ 连续，则二次积分 $\int_1^2\mathrm{d}x\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 等于 （ B ）

(A) $\int_1^2\mathrm{d}y\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$ (B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$

(C) $\int_1^2\mathrm{d}y\int_{2-y}^{\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$ (D) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{2-y}^{\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$

答案 B.

解析 换序 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1\\2-x\leqslant y\leqslant\sqrt{2x-x^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\leqslant y\leqslant 1\\2-y\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{1-y^2}\end{cases}$

故 $\int_1^2\mathrm{d}x\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x.$

题型二 重积分的计算方法

8.2.1 直角坐标系下重积分的计算

例 2-1（2015-2016-2-期中-填空题-7）

设 $D=\{(x,y)|\,|x|+|y|\leqslant 1\}$，则二重积分 $\iint\limits_D|xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的值等于 $\underline{\ \frac{1}{6}\ }$.

答案 $\frac{1}{6}$.

解析 设 D_1 为 D 在第一象限的区域，则

$$\iint_D |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\iint_{D_1} |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\iint_{D_1} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} xy\,\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^1 x(1-x)^2\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \left(x^3-2x^2+x\right)\mathrm{d}x = 2\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

例 2-2（2012-2013-2-期末-填空题-2）

设 D 是由直线 $y=1, x=2$ 及 $y=x$ 围成的区域，则 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \underline{\quad \frac{9}{8} \quad}$.

答案 $\frac{9}{8}$.

解析 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \mathrm{d}y\int_y^2 xy\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{y}{2}\left(4-y^2\right)\mathrm{d}y = \frac{9}{8}$.

例 2-3（2014-2015-2-期末-选择题-6）

设 D 是由曲线 $y=x, y^2=x$ 围成的平面闭区域，则 $\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 等于 （ C ）

(A) $1+\sin 1$ (B) $1+\cos 1$ (C) $1-\sin 1$ (D) $1-\cos 1$

答案 C.

解析 化二重积分为二次积分得到 $\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_{y^2}^{y} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 (\sin y - y\sin y)\,\mathrm{d}y$ $= (y\cos y-\sin y-\cos y)|_0^1 = 1-\sin 1$.

例 2-4（2013-2014-2-期中-解答题-19）

设 a,b 为正常数，$D=\{(x,y)|-a\leqslant x\leqslant a, -b\leqslant y\leqslant b\}$，计算 $I=\iint\limits_D \mathrm{e}^{\max\{b^2x^2,a^2y^2\}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

答案 $\dfrac{4\left(\mathrm{e}^{a^2b^2}-1\right)}{ab}$.

解析 化简被积函数然后积分即可.

$$I=\iint_{D_1}\mathrm{e}^{b^2x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{D_2}\mathrm{e}^{a^2y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{\frac{b}{a}x}\mathrm{e}^{b^2x^2}\,\mathrm{d}y + 4\int_0^b \mathrm{d}y\int_0^{\frac{b}{a}y}\mathrm{e}^{a^2y^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{ab}\left(\mathrm{e}^{a^2b^2}-1\right)+\frac{2}{ab}\left(\mathrm{e}^{a^2b^2}-1\right)=\frac{4}{ab}\left(\mathrm{e}^{a^2b^2}-1\right).$$

例 2-5（2014-2015-2-期中-解答题-20）

设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域, 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z$.

答案 $\frac{1}{4}$.

解析 记重积分为 I, 直接计算即可

$$I=\int_0^1\mathrm{d}\,x\int_0^{1-x}\mathrm{d}\,y\int_0^{1-x-y}(x+2y+3z)\,\mathrm{d}\,z=\int_0^1\mathrm{d}\,x\int_0^{1-x}\left[(x+2y)\,(1-x-y)+\frac{3}{2}(1-x-y)^2\right]\mathrm{d}\,y$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}\,x\int_0^{1-x}\frac{1}{2}\left[-y^2-2y+(1-x)^2+2\,(1-x)\right]\mathrm{d}\,y$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left[-\frac{1}{3}(1-x)^3-(1-x)^2+(1-x)^3+2(1-x)^2\right]\mathrm{d}\,x$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{2}{3}(1-x)^3+(1-x)^2\right]\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{2}{3}t^3+t^2\right]\mathrm{d}\,t=\frac{1}{4}.$$

例 2-6（2012-2013-2-期末-解答题-16）

计算 $\iint\limits_{D}\max\{xy,1\}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, 其中 $\{D=(x,y)|\,0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

答案 $\frac{19}{4}+\ln 2$.

解析 曲线 $xy=1$ 将区域 D 分为两个区域 D_1,D_2, $\max\{xy,1\}=\begin{cases}xy,(x,y)\in D_1,\\ 1,(x,y)\in D_2,\end{cases}$ 则

$$\iint\limits_{D}\max\{xy,1\}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\iint\limits_{D_1}xy\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y+\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\iint\limits_{D_1}xy\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y+\iint\limits_{D}\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y-\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$
$$=\int_{\frac{1}{2}}^2\mathrm{d}\,x\int_{\frac{1}{x}}^2 xy\,\mathrm{d}\,y+4-\int_{\frac{1}{2}}^2\mathrm{d}\,x\int_{\frac{1}{x}}^2\mathrm{d}\,y=\frac{19}{4}+\ln 2.$$

8.2.2 极坐标系下二重积分的计算

例 2-7（2012-2013-2-期中-填空题-4）

设有 D: $x^2+y^2\leqslant a^2$, 则 $\iint\limits_{D}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=$ $\underline{\quad\pi\left(1-\mathrm{e}^{-a^2}\right)\quad}$.

答案 $\pi\left(1-\mathrm{e}^{-a^2}\right)$.

解析

$$\iint\limits_{D} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{a}\rho\mathrm{e}^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\,\rho=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{a^2}\mathrm{e}^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\left(\rho^2\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\rho^2}\int_0^{a^2}\mathrm{d}\,\theta=\pi\left(1-\mathrm{e}^{-a^2}\right).$$

例 2-8（2013-2014-2-期中-填空题-2）

设 D 是 xOy 平面上圆心在远点、半径为 $a(a>0)$ 的圆域，则 $\iint\limits_{D}\left(a-\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=$ $\underline{\dfrac{a^3\pi}{3}}$.

答案 $\dfrac{a^3\pi}{3}$.

解析 首先得出积分区域为 $D:\{(x,y)|\,x^2+y^2=a^2\}$，然后由积分区域及被积函数的特点将重积分转化为极坐标系下的二次积分：$\iint\limits_{D}\left(a-\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{a}(a-\rho)\,\rho\,\mathrm{d}\,\rho=\dfrac{a^3\pi}{3}$.

例 2-9（2015-2016-2-期中-填空题-10）

设区域 $D:x^2+y^2\leqslant 1$，则二重积分 $\iint\limits_{D}\sqrt[3]{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$ 的值等于 $\underline{\dfrac{3}{4}\pi}$.

2014-2015-2-期中-选择题-18

答案 $\dfrac{3}{4}\pi$.

解析 极坐标变换可得 $\iint\limits_{D}\sqrt[3]{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{1}\rho\sqrt[3]{\rho^2}\,\mathrm{d}\rho=2\pi\int_0^1\rho^{\frac{5}{3}}\,\mathrm{d}\rho=\dfrac{3}{4}\pi$.

例 2-10（2013-2014-2-期中-选择题-11）

设有闭区域 $D=\{(x,y)|\,x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0\}$,则二重积分 $\iint\limits_{D}\dfrac{1+xy}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$ 的值等于（ B ）

(A) $\dfrac{\pi}{2}$　　(B) $\dfrac{\pi}{2}\ln 2$　　(C) $\dfrac{\pi}{2}\ln 3$　　(D) $\ln 2$

答案 B.

解析 极坐标变换可得

$$\iint\limits_{D}\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\,\theta\int_0^1\frac{1+\rho^2\cos\theta\sin\theta}{1+\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\,\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\,\theta\int_0^1\left(\frac{1}{1+\rho^2}+\frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{1+\rho^2}\right)\mathrm{d}\left(\rho^2\right)$$

其中

$$\int_0^1\frac{1}{1+\rho^2}\,\mathrm{d}\left(\rho^2\right)=\ln 2,\quad \int_0^1\frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{1+\rho^2}\,\mathrm{d}\left(\rho^2\right)=\cos\theta\sin\theta\int_0^1\frac{\rho^2 d\left(\rho^2\right)}{1+\rho^2}=(1-\ln 2)\cos\theta\sin\theta$$

因此原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1+(1-\ln 2)\cdot\frac{\sin 2\theta}{2}\right]\mathrm{d}\,\theta=\frac{\pi}{2}\ln 2+(1-\ln 2)\left(-\frac{\cos 2\theta}{4}\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}\ln 2.$

例 2-11（2013-2014-2-期中-选择题-15）

设函数 $f(x,y)$ 连续，则二次积分 $\int_0^1\mathrm{d}\,y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$ 等于 （ D ）

(A) $\int_0^1\mathrm{d}\,x\int_0^{x-1}f(x,y)\,\mathrm{d}\,y+\int_{-1}^0\mathrm{d}\,x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$

(B) $\int_0^1\mathrm{d}\,x\int_0^{1-x}f(x,y)\,\mathrm{d}\,y+\int_{-1}^0\mathrm{d}\,x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\mathrm{d}\,\rho+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^1 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\mathrm{d}\,\rho$

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\,\rho+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^1 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\,\rho$

答案 D.

解析 $\int_0^1\mathrm{d}\,y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}f(x,y)\,\mathrm{d}\,x=\iint\limits_{D_1}f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y+\iint\limits_{D_2}f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$

$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^1 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\,\rho+\iint\limits_{D_2}f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\because x<1-y,\therefore\rho\cos\theta<1-\rho\sin\theta,$

$\therefore\rho<\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\therefore\iint\limits_{D_2}f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^1 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\,\rho.$

例 2-12（2010-2011-2-期末-选择题-10）

设 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域,则 $\iint\limits_D\ln\left(1+x^2+y^2\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=$ （ C ）

(A) $\frac{\pi}{4}(\ln 2-1)$　(B) $\frac{\pi}{8}(\ln 2-1)$　(C) $\frac{\pi}{4}(2\ln 2-1)$　(D) $\frac{\pi}{8}(2\ln 2-1)$

答案 C.

解析 由极坐标变换可得

$$\iint\limits_D\ln\left(1+x^2+y^2\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\ln\left(1+\rho^2\right)\rho\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\frac{1}{2}\ln\left(1+\rho^2\right)\mathrm{d}\,\rho^2\,\mathrm{d}\,\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(2\ln 2-1)\,\mathrm{d}\,\theta=\frac{\pi}{4}(2\ln 2-1).$$

8.2.3 柱、球坐标系下三重积分的计算

例 2-13（2014-2015-2-期中-填空题-6）

将三次积分 $I=\int_0^1 \mathrm{d}\,y\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}}\mathrm{d}\,x\int_0^{\sqrt{3(x^2+y^2)}} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\mathrm{d}\,z$ 化为在柱面坐标形式下的三次积分为 $\underline{\quad I=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{\sin\theta}\mathrm{d}\,\rho\int_0^{\sqrt{3}\rho} f\left(\sqrt{z^2+\rho^2}\right)\rho\,\mathrm{d}\,z\quad}$.

答案 $I=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{\sin\theta}\mathrm{d}\,\rho\int_0^{\sqrt{3}\rho} f\left(\sqrt{z^2+\rho^2}\right)\rho\,\mathrm{d}\,z.$

解析 $\begin{cases} x^2+y^2=\rho^2 \\ x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases},\ \begin{cases} y\in[0,1]\to\theta\in[0,\pi] \\ x\in\left[-\sqrt{y-y^2},\sqrt{y-y^2}\right]\to x^2+y^2\leqslant y\to\rho^2\leqslant\rho\sin\theta\to\rho\in[0,\sin\theta] \\ z\in\left[0,\sqrt{3\left(x^2+y^2\right)}\right]\to z\in[0,\sqrt{3}\rho] \end{cases}.$

例 2-14（2015-2016-2-期中-填空题-8；2012-2013-期中-选择题-11）

设 Ω 为平面曲线 $\begin{cases} x^2=2z \\ y=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面与平面 $z=8$ 围成的区域，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\,v$ 的值等于 $\underline{\quad\dfrac{1024\pi}{3}\quad}$.

答案 $\dfrac{1024\pi}{3}$.

解析 记平面曲线 $\begin{cases} x^2=2z \\ y=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面为 $\Sigma: x^2+y^2=2z$

于是积分区域 $\Omega:\left\{(x,y,z)\left|\,\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)z8\right.\right\}=\left\{(\rho,\theta,z)\left|\,\frac{1}{2}\rho^2z8,\rho0,0\theta2\pi\right.\right\}$ 从而积分可计算得

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^4\mathrm{d}\,\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^8\rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\,z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^4\rho^3\left(8-\frac{\rho^2}{2}\right)\mathrm{d}\,\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(2\rho^4-\frac{\rho^6}{12}\right)\Big|_0^4\,\mathrm{d}\,\theta=\frac{1024}{3}\pi.$$

例 2-15（2014-2015-2-期中-选择题-14）

设 Ω 是球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 所围成的闭区域，则 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}\,v=$ （ D ）

(A) $\dfrac{\pi}{7}$　　(B) $\dfrac{\pi}{8}$　　(C) $\dfrac{\pi}{9}$　　(D) $\dfrac{\pi}{10}$

答案 D.

解析 $x^2+y^2+z^2=z\Rightarrow x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，在球坐标系中计算得到

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\phi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{\cos\theta}r^3\sin\theta\,\mathrm{d}\,r=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\cos^4\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\,\theta=-\frac{\pi}{10}\cos^5\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{10}.$$

例 2-16（2015-2016-2-期中-选择题-15）

设 Ω 为由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 所围成的区域，则 $\iiint\limits_{\Omega}\left|\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1\right|\mathrm{d}\,v=$ （ A ）

(A) $\frac{\pi}{6}\left(\sqrt{2}-1\right)$ (B) $\frac{\pi}{5}\left(\sqrt{2}-1\right)$ (C) $\frac{\pi}{4}\left(\sqrt{2}-1\right)$ (D) $\frac{\pi}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$

答案 A.

解析 积分区域 $\Omega:\left\{(x,y,z)|\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1\right\}\Leftrightarrow\{(r,\varphi,\theta)|\,r\sin\varphi\leqslant r\cos\varphi\leqslant 1,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$

根据被积函数特点按照 $r=1$ 为分界面将 Ω 分为两块，其中

$\Omega_1=\left\{(r,\varphi,\theta)\,\middle|0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\right\}$

$\Omega_2=\left\{(r,\varphi,\theta)\,\middle|1\leqslant r\leqslant\sec\varphi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\right\}$，于是在球坐标系下计算可得

$$\begin{aligned}I&=\iiint\limits_{\Omega_1+\Omega_2}\left|\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1\right|\mathrm{d}\,v\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi\int_0^1(1-r)\,r^2\,\mathrm{d}\,r+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi\int_1^{\sec\varphi}(r-1)\,r^2\,\mathrm{d}\,r\right]\\&=2\pi\cdot\left[\frac{1}{12}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\left(\frac{\sec^4\varphi}{4}-\frac{\sec^3\varphi}{3}+\frac{1}{12}\right)\mathrm{d}\,\varphi\right]\\&=2\pi\cdot\left[\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\left(\frac{1}{4t^4}-\frac{1}{3t^3}\right)\mathrm{d}\,t\right]=2\pi\cdot\left[\frac{1}{6}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{2}-3}{12}\right]=\frac{\pi\left(\sqrt{2}-1\right)}{6}.\end{aligned}$$

例 2-17（2015-2016-2-期中-选择题-18）

积分 $I=\int_0^1\mathrm{d}\,y\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}}\mathrm{d}\,x\int_0^{\sqrt{3(x^2+y^2)}}f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\mathrm{d}\,z$ 写成柱面坐标的形式为 （ D ）

(A) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{\sin\theta}r^2\,\mathrm{d}\,r\int_0^{\sqrt{3}r}f\left(\sqrt{r^2+z^2}\right)\mathrm{d}\,z$ (B) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{\sin\theta}\mathrm{d}r\int_0^{\sqrt{3}r}f\left(\sqrt{r^2+z^2}\right)\mathrm{d}\,z$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{\sin\theta}r\,\mathrm{d}\,r\int_0^{\sqrt{3}r}f\left(\sqrt{r^2+z^2}\right)\mathrm{d}\,z$ (D) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{\sin\theta}r\,\mathrm{d}\,r\int_0^{\sqrt{3}r}f\left(\sqrt{r^2+z^2}\right)\mathrm{d}\,z$

答案 D.

解析 坐标变换 $x=\rho\sin x, y=\rho\cos x$ 得到 $\begin{cases}-\sqrt{y-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{y-y^2}\\0\leqslant y\leqslant 1\\0\leqslant z\leqslant\sqrt{3\left(x^2+y^2\right)}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant\pi\\0\leqslant r\leqslant\sin\theta\\0\leqslant z\leqslant\sqrt{3}r\end{cases}$

故 $\int_0^1 \mathrm{d}\, y \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} \mathrm{d}\, x \int_0^{\sqrt{3(x^2+y^2)}} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \mathrm{d}\, z = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\, \theta \int_0^{\sin\theta} r\, \mathrm{d}\, r \int_0^{\sqrt{3}r} f\left(\sqrt{r^2+z^2}\right) \mathrm{d}\, z.$

例 2-18（2014-2015-2-期末-选择题-9）

设 Ω 为由曲面 $x^2+y^2=z^2$ 与 $z=a\,(a>0)$ 围成空间区域, 则 $\iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\, \mathrm{d}\, x\, \mathrm{d}\, y\, \mathrm{d}\, z =$ (A)

(A) $\frac{\pi}{10}a^5$　　(B) $\frac{\pi}{8}a^5$　　(C) $\frac{\pi}{10}a^4$　　(D) $\frac{\pi}{8}a^4$

答案　A.

解析　由柱坐标变换得到

$$\iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\, \mathrm{d}\, x\, \mathrm{d}\, y\, \mathrm{d}\, z = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^z r^2 \cdot r\, \mathrm{d}\, r\, \mathrm{d}\, \theta\, \mathrm{d}\, z = 2\pi \int_0^a \frac{z^4}{4} = 2\pi\frac{a^5}{20} = \frac{\pi}{10}a^5.$$

例 2-19（2013-2014-2-期末-解答题-16）

计算 $\iiint\limits_{\Omega} z\, \mathrm{d}\, v$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域.

答案　$\frac{\pi}{2}$.

解析　柱坐标变换，得

$$\iiint\limits_{\Omega} z\, \mathrm{d}\, v = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^z zr\, \mathrm{d}\, r\, \mathrm{d}\, \theta\, \mathrm{d}\, z + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2-z^2}} zr\, \mathrm{d}\, r\, \mathrm{d}\, \theta\, \mathrm{d}\, z$$

$$=2\pi\left(\int_0^1 \frac{z^3}{2}\, \mathrm{d}\, z + \int_1^{\sqrt{2}} \frac{z\,(2-z^2)}{2}\, \mathrm{d}\, z\right) = \frac{\pi}{2}.$$

8.2.4　一般坐标系下重积分的计算

例 2-20（2013-2014-2-期末-证明题-18）

设 $f\,(t)$ 是连续函数，证明：$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} f\,(x+y)\, \mathrm{d}\, x\, \mathrm{d}\, y = \int_{-1}^{1} f\,(u)\, \mathrm{d}\, u.$

答案　见解析.

解析　【法一】记积分区域为 $D=\{(x,y)\,||x|+|y|\,1\}=\{(x,y)\,|-1x+y1,-1x-y1\}$，做变量代换

$$\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}\,(u+v) \\ y=\frac{1}{2}\,(u-v) \end{cases}$$

将 D 映射为 uOv 平面上的正方形区域 $D'\left\{(u,v)\,|-1u1,-1v1\right\}$，该变换的雅可比行列式

$$J=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

于是

$$\iint\limits_{|x|+|y|1} f(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'} f(u)\,|J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(u)\,\mathrm{d}u\int_{-1}^{1}\mathrm{d}v=\int_{-1}^{1} f(u)\,\mathrm{d}u$$

证毕.

【法二】以 y 轴为分界线，将 D 分成 D_1 和 D_2 左右两部分，于是

$$\iint\limits_{D_1} f(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-1-x}^{1+x} f(x+y)\,\mathrm{d}y,\ \iint\limits_{D_2} f(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{x-1}^{1-x} f(x+y)\,\mathrm{d}y$$

令 $x+y=t$，则 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}t$，于是

$$\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-1-x}^{1+x} f(x+y)\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-1}^{2x+1} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}t\int_{\frac{t-1}{2}}^{0} f(t)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{x-1}^{1-x} f(x+y)\,\mathrm{d}y=\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{2x-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}t\int_{0}^{\frac{t+1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t+1)\,f(t)\,\mathrm{d}t$$

从而

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1} f(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2} f(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-t)\,f(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t+1)\,f(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

证毕.

题型三　重积分的应用

8.3.1　求曲面面积

例 3-1（2015-2016-2-选择题-12；2014-2015-2-期中-填空题-2）

两个直交圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 及 $x^2+z^2=R^2$ 所围立体的表面积为 $\underline{\quad 16R^2\quad}$.

答案 $16R^2$.

解析 设 A_1 为曲面 $z=\sqrt{R^2-x^2}$ 相应与区域 $D: x^2+y^2\leqslant R^2$ 上的面积，则所求表面积为 $A=4A_1$

$$A=4\iint\limits_{D}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D}\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2+0^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=4\iint\limits_{D}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=4R\int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{R^2-x}}^{\sqrt{R^2-x}}\frac{1}{\sqrt{R^2-x}}\,\mathrm{d}y=8R\int_{-R}^{R}\mathrm{d}x=16R^2.$$

8.3.2 求立体体积

例 3-2（2012-2013-2-期中-选择题-17）

由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 和曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体的体积为 （ C ）

(A) $(\sqrt{2}-1)\pi$ (B) $\frac{4}{3}\pi$ (C) $\frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)\pi$ (D) $\frac{5}{3}(\sqrt{2}-1)\pi$

答案 C.

解析 $\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$，$\therefore x^2+y^2=1$ 为 D 区域，于是

$$V=\iint\limits_D\left(\sqrt{2-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^1\left(\sqrt{2-\rho^2}-\rho\right)\rho\,\mathrm{d}\,\rho=\frac{4}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)\pi.$$

例 3-3（2012-2013-2-期末-解答题-12）

计算由曲面 $z=6-x^2-y^2, z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体的体积.

答案 $\frac{32}{3}\pi$.

解析 采用柱坐标，体积

$$V=\iiint\limits_\Omega\mathrm{d}\,v=\iiint\limits_\Omega r\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\theta\,\mathrm{d}\,z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^2 r\,\mathrm{d}\,r\int_r^{6-r^2}\mathrm{d}\,z=2\pi\int_0^2\left(6r-r^2-r^3\right)\mathrm{d}\,r=\frac{32}{3}\pi.$$

例 3-4（2013-2014-2-期末-解答题-17）

求由曲面 $z=x^2+y^2$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成的立体的体积.

答案 $\frac{\pi}{6}$.

解析 投影区域:$x^2+y^2\leqslant 1$,体积 $=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\left[\sqrt{x^2+y^2}-\left(x^2+y^2\right)\right]\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^1\left(\rho-\rho^2\right)\mathrm{d}\,\rho=\frac{\pi}{6}.$

例 3-5（2014-2015-2-期末-解答题-12）

计算由曲面 $2az=x^2+y^2+z^2\ (a>0)$ 及 $x^2+y^2=z^2$ 所围成的（含有 z 轴的部分）立体的体积.

答案 $\frac{a^3\pi}{2}$.

解析 $2az = x^2+y^2+z^2 \Rightarrow x^2+y^2+(z-a)^2 = a^2$，柱坐标变换得

$$\iiint\limits_D dv = \int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^z r\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\theta\,\mathrm{d}\,z + \int_a^{2a}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2az-z^2}} r\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\theta\,\mathrm{d}\,z$$

$$=2\pi\int_0^a \frac{z^2}{2}\,\mathrm{d}\,z + 2\pi\int_a^{2a}\frac{2az-z^2}{2}\,\mathrm{d}\,z = \frac{a^3\pi}{2}.$$

8.3.3 求转动惯量

例 3-6（2011-2012-2-期末-解答题-13）

一均匀物体（密度 ρ 为常数）占有的闭区域 Ω 由曲面 $z=x^2+y^2$ 和平面 $z=0, |x|=a, |y|=a$ 所围成，求物体关于 z 轴的转动惯量.

答案 $\frac{112}{45}a^6\rho$.

解析 由转动惯量的定义：$J=\iiint\limits_\Omega \rho r^2\,\mathrm{d}\,v$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$. 由极坐标变换可得

$$J=\iiint\limits_\Omega \rho r^2\,\mathrm{d}\,v = \int_{-a}^a\int_{-a}^a\int_0^{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_{-a}^a\int_{-a}^a\left(x^2+y^2\right)^2\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

$$=\int_{-a}^a\int_{-a}^a\left(x^4+2x^2y^2+y^4\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \frac{112}{45}a^6\rho.$$

题型四　涉及到重积分的综合题

例 4-1（2013-2014-2-期中-填空题-6）

设 $f(x)$ 为连续的函数，$F(t)=\int_1^t \mathrm{d}\,y\int_y^t f(x)\,\mathrm{d}\,x$，则 $F'(2)=$ （$f(2)$）.

答案 $f(2)$.

解析 画出积分区域，观察其特点，交换积分次序可得

$$F(t)=\int_1^t \mathrm{d}\,y\int_y^t f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_1^t f(x)\,\mathrm{d}\,x\int_1^x \mathrm{d}\,y = \int_1^t (x-1)f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

所以 $F'(t)=(t-1)f(t) \Rightarrow F'(2)=f(2)$.

例 4-2（2010-2011-2-期末-选择题-11）

设 $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}\,v$，其中 f 为连续函数，且 $f(0)=0, f'(0)=1, t>0$，则 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^5}$ 的值为 （ B ）

(A) π (B) $\frac{4}{5}\pi$ (C) $\frac{3}{5}\pi$ (D) $\frac{2}{5}\pi$

答案 B.

解析 由球坐标变换可得

$$F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}\,v=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^t f\left(r^2\right)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,\theta=4\pi\int_0^t f\left(r^2\right)r^2\,\mathrm{d}\,r$$

于是由洛必达法则及变限积分求导公式可得

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to0^+}\frac{F(t)}{t^5}=\lim_{t\to0^+}\frac{4\pi\int_0^t f\left(r^2\right)r^2\,\mathrm{d}\,r}{t^5}=4\pi\lim_{t\to0^+}\frac{f\left(t^2\right)t^2}{5t^4}=\frac{4\pi}{5}\lim_{t\to0^+}\frac{f\left(t^2\right)}{t^2}\\&=\frac{4\pi}{5}\lim_{u\to0^+}\frac{f(u)}{u}=\frac{4\pi}{5}\lim_{u\to0^+}\frac{f(u)-f(0)}{u}=\frac{4\pi}{5}f'(0)=\frac{4\pi}{5}.\end{aligned}$$

例 4-3（2012-2013-2-期末-选择题-9；2014-2015-2-期中-解答题-21）

设 $f(x)$ 连续, $f(1)=1$, 且 $F(t)=\iiint\limits_{\Omega}\left[z^2+f\left(x^2+y^2\right)\right]\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z$, 其中 $\Omega:0\leqslant z\leqslant1, x^2+y^2\leqslant t^2$，则 $F'(1)=$ (A)

(A) $\frac{8}{3}\pi$ (B) $\frac{7}{3}\pi$ (C) $\frac{6}{3}\pi$ (D) $\frac{5}{3}\pi$

答案 A.

解析 由柱坐标变换可得

$$\begin{aligned}F(t)&=\iiint\limits_{\Omega} z^2+f\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z=\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^t\left[z^2+f\left(x^2+y^2\right)\right]r\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\theta\,\mathrm{d}\,z\\&=2\pi\int_0^t\left[\frac{1}{3}+f\left(r^2\right)\right]r\,\mathrm{d}\,r=2\pi\cdot\left[\frac{1}{6}t^2+\frac{1}{2}\int_0^{t^2}f(u)\,\mathrm{d}\,u\right]=\frac{\pi}{3}t^2+\pi\int_0^{t^2}f(u)\,\mathrm{d}\,u\end{aligned}$$

于是由变限积分求导公式可得 $F'(t)=\frac{2\pi}{3}t+2\pi tf\left(t^2\right)\Rightarrow F'(1)=\frac{2\pi}{3}+2\pi f(1)=\frac{8}{3}\pi.$

例 4-4（2013-2014-2-期末-选择题-9）

设函数 f 连续，$F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\frac{f\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$，其中 D_{uv} 为图中阴影部分，则 $\frac{\partial F}{\partial u}=$ (A)

(A) $vf(u)$ (B) $\frac{v}{u}f(u)$ (C) $vf\left(u^2\right)$ (D) $\frac{v}{u}f\left(u^2\right)$

答案 A.

解析 由极坐标，得 $\begin{cases}1\leqslant r\leqslant u\\0\leqslant\theta\leqslant v\end{cases}$，故

$$F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\frac{f\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\int_0^v\mathrm{d}\,\theta\int_1^u\frac{f\left(r^2\right)}{r}r\,\mathrm{d}\,r=v\int_1^u f\left(r^2\right)\mathrm{d}\,r$$

由变限积分求导公式得 $\dfrac{\partial F}{\partial u}=vf\left(u^2\right)$.

例 4-5（2010-2011-2-期末-解答题-15）

设闭区域 $D: x^2+y^2\leqslant y, x\geqslant 0, f(x,y)$ 为 D 上的连续函数，且 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\dfrac{8}{\pi}\iint\limits_D f(u,v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$，求 $f(x,y)$.

答案 $\sqrt{1-x^2-y^2}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{8}{9\pi}$.

解析 令 $A=\iint\limits_D f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$，则 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\dfrac{8}{\pi}A$，在 D 上对上式两边积分，有

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\frac{8}{\pi}A\iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta}\sqrt{1-r^2}r\,\mathrm{d}r-\frac{8}{\pi}A\frac{\pi}{8}=-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3\theta-1\right)\mathrm{d}\theta-A=\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}-A$$

即 $A=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{2}{9}-A$，解得 $A=\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{1}{9}$，从而 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{8}{9\pi}$.

例 4-6（2014-2015-2-期末-证明题-17）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，利用二重积分，证明：$\left(\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant(b-a)\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$，其中 $D: a\leqslant x\leqslant b, a\leqslant y\leqslant b$.

2013-2014-2-期末-证明题-18

2010-2011-2-期末-证明题-18

答案 见解析.

解析 显然 $[f(x)-f(y)]^2 0$，从而

$$0\leqslant\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^b[f(x)-f(y)]^2\,\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^b\left[f^2(x)-2f(x)f(y)+f^2(y)\right]$$
$$=2(b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x-2\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2$$

移项即得证.

例 4-7（2014-2015-2-期末-解答题-18）

设 $f(u)$ 具有连续的导函数,且 $\lim\limits_{u\to+\infty}f'(u)=A$,$D=\left\{(x,y)|\,x^2+y^2\leqslant R^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0\right\},(R>0)$.
(1) 求 $I_R=\iint\limits_D f'\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$；(2) $\lim\limits_{R\to+\infty}\dfrac{I_R}{R^2}$.

答案 (1) $\dfrac{\pi}{4}\left[f\left(R^2\right)-f(0)\right]$；(2) $\dfrac{\pi}{4}A$。

解析 (1) 极坐标变换，得

$$I_R=\iint\limits_D f'\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R f'\left(r^2\right)r\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\theta=\frac{\pi}{4}\,f\left(r^2\right)\Big|_0^R=\frac{\pi}{4}\left[f\left(R^2\right)-f\left(0\right)\right].$$

(2) 由 (1) 中结果，结合洛必达法则知

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{I_R}{R^2}=\frac{\pi}{4}\lim_{R\to+\infty}\frac{f\left(R^2\right)-f\left(0\right)}{R^2}=\frac{\pi}{4}\lim_{u\to\infty}\frac{f\left(u\right)-f\left(0\right)}{u}=\frac{\pi}{4}\lim_{u\to\infty}f'\left(u\right)=\frac{\pi}{4}A.$$

第九章 曲线积分与曲面积分

题型一 第一类曲线积分

例 1-1（2012-2013-2-期末-填空题-3）

设曲线 L 是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，其周长为 a，则 $\oint_L (3xy^3+3x^2+4y^2)\,\mathrm{d}\,s=$ ___$12a$___ .

答案 $12a$.

解析 环积分满足在曲线 L 上恒有 $3x^2+4y^2=12$，且 xy^3 关于 y 奇对称，于是

$$\oint_L \left(3xy^3+3x^2+4y^2\right)\mathrm{d}\,s=3\oint_L xy^3\,\mathrm{d}\,s+\oint_L \left(3x^2+4y^2\right)\mathrm{d}\,s=3\oint_L xy^3\,\mathrm{d}\,s+12a=12a.$$

例 1-2（2013-2014-2-期末-选择题-9）

设 L 是抛物线 $y=x^2$ 上点 $O\,(0,0)$ 与点 $B\,(1,1)$ 的一段弧，则 $\displaystyle\int_L \sqrt{y}\,\mathrm{d}\,s=$ （ A ）

(A) $\dfrac{1}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right)$ (B) $\dfrac{1}{12}\left(5\sqrt{5}-2\right)$ (C) $\dfrac{1}{12}\left(5\sqrt{5}-3\right)$ (D) $\dfrac{1}{12}\left(5\sqrt{5}-4\right)$

答案 A.

解析 先画图，便于理解. $y=x^2\Rightarrow x=\sqrt{y}$，$\mathrm{d}\,s=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right)^2}\,\mathrm{d}\,x=\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}\,x$

则原式 $=\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{8}\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}\left(1+4x^2\right)=\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}\left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right).$

题型二 第二类曲线积分

例 2-1（2012-2013-2-期末-证明题-18）

设 L 为光滑弧段，其弧长为 l，函数 $P\,(x,y,z)\,,Q\,(x,y,z)\,,R\,(x,y,z)$ 在曲线 L 上连续，证明:

$$\left|\int_L P\,\mathrm{d}\,x+Q\,\mathrm{d}\,y+R\,\mathrm{d}\,z\right|\leqslant lM$$

其中 $M=\displaystyle\max_{(x,y,z)\in L}\sqrt{P^2+Q^2+R^2}$.

答案 见解析.

解析 设光滑弧段 L 在任意点处的方向余弦为 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$

则 $\mathrm{d}\,x = \cos\alpha\,\mathrm{d}\,s, \mathrm{d}\,y = \cos\beta\,\mathrm{d}\,s, \mathrm{d}\,z = \cos\gamma\,\mathrm{d}\,s$, 且 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$，于是

$$\begin{aligned}
&\int_L P\,\mathrm{d}\,x + Q\,\mathrm{d}\,y + R\,\mathrm{d}\,z = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}\,s \\
=& \int_L (P, Q, R)\cdot(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\lambda)\,\mathrm{d}\,s = \int_L \sqrt{P^2+Q^2+R^2}\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}\cos\theta\,\mathrm{d}\,s \\
=& \int_L \sqrt{P^2+Q^2+R^2}\cos\theta\,\mathrm{d}\,s
\end{aligned}$$

其中 θ 为向量 (P, Q, R) 与 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 的夹角，故

$$\begin{aligned}
\left|\int_L P\,\mathrm{d}\,x + Q\,\mathrm{d}\,y + R\,\mathrm{d}\,z\right| &= \left|\int_L \sqrt{P^2+Q^2+R^2}\cos\theta\,\mathrm{d}\,s\right| \leqslant \int_L \sqrt{P^2+Q^2+R^2}\,|\cos\theta|\,\mathrm{d}\,s \\
&\leqslant M\int_L \mathrm{d}\,s = lM.
\end{aligned}$$

例 2-2（2013-2014-2-期末-选择题-10）

设 L 是抛物线 $y^2 = x$ 上从点 $A\,(1, -1)$ 到点 $B\,(1, 1)$ 的一段弧，则 $\int_L xy\,\mathrm{d}\,x =$ （ D ）

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

答案 D.

解析 先画图，便于理解.

$$\int_L xy\,\mathrm{d}\,x = \int_1^0 -x\sqrt{x}\,\mathrm{d}\,x + \int_0^1 x\sqrt{x}\,\mathrm{d}\,x = 2\int_0^1 x\sqrt{x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{4}{5}.$$

例 2-3（2013-2014-2-期末-解答题-15）

计算曲线积分 $\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3)\,\mathrm{d}\,x + (6x^2y - 3xy^2)\,\mathrm{d}\,y$.

答案 见解析.

解析 $P = 6xy^2 - y^3, Q = 6x^2y - 3xy^2$ 则 $\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy - 2y^2, \frac{\partial P}{\partial x} = 12xy - 2y^2$, 二式相等.

所以曲线积分与路径无关，则可以通过线段路径：$A\,(1, 2) \to C\,(3, 2) \to B\,(3, 4)$,

由 A 点到 C 点，$y = 2, \mathrm{d}\,y = 0$. 原积分一部分 $= \int_1^3 (6x\cdot 2^2 - 2^3)\,\mathrm{d}\,x = 80$

由 C 点到 B 点，$x = 3, \mathrm{d}\,x = 0$. 原积分另一部分 $\int_2^4 (6\cdot 3^2y - 3\cdot 3y^2)\,\mathrm{d}\,y = 156$ 则原式 $= 80 + 156 = 236$.

例 2-4（2015-2016-2-期末模拟-选择题-7）

设 $P(x,y), Q(x,y)$ 在单连通域 G 内具有一阶连续导数，$P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 G 内为某一函数 $U(x,y)$ 的全微分，计算 $U(x,y)$ 的公式是　　（ C ）

(A) $U(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\,\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\,\mathrm{d}y$

(B) $U(x,y)=\int_{x_0}^{x}Q(x,y_0)\,\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}P(x_0,y)\,\mathrm{d}y$

(C) $U(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\,\mathrm{d}x$

(D) $U(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\,\mathrm{d}y$

答案　C.

解析　沿 $(x_0,y_0)\to(x_0,y)\to(x,y)$ 路径积分.

例 2-5（2016-2017-2-期末模拟-计算题-20）

设 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，从 z 轴正向看过去，L 为逆时针方向，计算

$$I=\oint_L\left(y^2-z^2\right)\mathrm{d}x+\left(2z^2-x^2\right)\mathrm{d}y+\left(3x^2-y^2\right)\mathrm{d}z.$$

答案　见解析.

解析　设交线所围成的曲面为 Σ，则 $\Sigma:\{(x,y,z)\,|x+y+z=2,|x|+|y|=1\}$，取其单位法向量为

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}}\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x},-\frac{\partial\varphi}{\partial y},1\right)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

其中 $x=\varphi(y,z), y=\varphi(z,x), z=\varphi(x,y)$. 由 *Stokes* 公式，有

$$I=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha&\cos\beta&\cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2&2z^2-x^2&3x^2-y^2\end{vmatrix}\mathrm{d}s-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma(4x+2y+3z)\,\mathrm{d}S=-24.$$

例 2-6（2012-2013-2-期中-解答题-21）

设 $f(x,y)$ 在单位圆域上有连续偏导数，且在边界上取值为零，证明:

$$\lim_{\delta\to0^+}\frac{-1}{2\pi}\iint_D\frac{xf_x+yf_y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=f(0,0)$$

其中 D 为圆环域 $\delta^2\leqslant x^2+y^2\leqslant1$.

答案　见解析.

解析　首先将被积函数恒等变形可得

$$\begin{aligned}
&\iint_D \frac{xf_x+yf_y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
=&\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}f\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}f\right)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right]f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
=&\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}f\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}f\right)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=I
\end{aligned}$$

注意到在 $x^2+y^2=1$ 上 $f(x,y)$ 函数值为零，故利用格林公式以及积分中值定理可得，

$$\begin{aligned}
I_1=&\oint_{x^2+y^2=1}\frac{x}{x^2+y^2}f(x,y)\,\mathrm{d}y-\frac{y}{x^2+y^2}f(x,y)\,\mathrm{d}x-\oint_{x^2+y^2=\delta^2}\frac{x}{x^2+y^2}f(x,y)\,\mathrm{d}y-\frac{y}{x^2+y^2}f(x,y)\,\mathrm{d}x\\
=&0-\frac{1}{\delta^2}\oint_{x^2+y^2=\delta^2}xf(x,y)\,\mathrm{d}y-yf(x,y)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{\delta^2}\iint_{x^2+y^2\leqslant\delta^2}[(f+xf_x)+(f+yf_y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
=&-\pi\left[2f(\xi,\eta)+3f_x(\xi,\eta)+\eta f_y(\xi,\eta)\right]
\end{aligned}$$

其中 $\xi^2+\eta^2=1$，故原式 $=-\dfrac{1}{2\pi}\cdot(-2\pi)f(0,0)=f(0,0)$.

题型三　第一类曲面积分

例 3-1（2013-2014-2-期末-填空题-5）

设 Σ 是锥面 $z^2=3(x^2+y^2)$ 被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截得的部分, 则 $\iint_\Sigma (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s=$ __9π__ .

答案　9π.

解析　$z^2=3(x^2+y^2)$,将 $z=3$ 代入,在 xy 平面上的投影为 $x^2+y^2\leqslant 3$,由 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 知

原式 $=\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant 3}2(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}}\rho^2 d\rho=9\pi.$

例 3-2（2015-2016-2-期末模拟-选择题-6）

下列对面积的曲面积分不为零的有　　（ D ）

(A) $\displaystyle\oiint_{x^2+y^2+z^2=1} x\cos x\,\mathrm{d}s$

(B) $\displaystyle\iint_\Sigma y^3\,\mathrm{d}s$，其中 Σ 是椭圆面 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+z^2=1$ 位于第一和第四象限部分

(C) $\displaystyle\oiint_{x^2+y^2+z^2=1}\frac{xy+yz+xz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}s$

(D) $\displaystyle\oiint_{x^2+y^2+z^2=1}(x^2+y^2+x+y)\,\mathrm{d}\,s$

答案 D.

解析 根据曲域是否对称及奇函数可知.

例 3-3（2016-2017-2-期末模拟-选择题-13）

设曲面 Σ 是上半球面 : $x^2+y^2+z^2=R^2\,(z\geqslant 0)$, 曲面 Σ_1 是曲面 Σ 在第一卦限的部分，下列结论正确的是 （ C ）

(A) $\displaystyle\iint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}\,s=4\iint_{\Sigma_1}x\,\mathrm{d}\,s$ (B) $\displaystyle\iint_{\Sigma}y\,\mathrm{d}\,s=4\iint_{\Sigma_1}y\,\mathrm{d}\,s$

(C) $\displaystyle\iint_{\Sigma}z\,\mathrm{d}\,s=4\iint_{\Sigma_1}z\,\mathrm{d}\,s$ (D) $\displaystyle\iint_{\Sigma}xyz\,\mathrm{d}\,s=4\iint_{\Sigma_1}xyz\,\mathrm{d}\,s$

答案 C.

解析 对 A, 函数 x 关于 yOz 对称，所以 $\displaystyle\iint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}\,s=0$ 对 B, 函数 y 关于 xOz 对称，所以 $\displaystyle\iint_{\Sigma}y\,\mathrm{d}\,s=0$ 同理对 D, $\displaystyle\iint_{\Sigma}xyz\,\mathrm{d}\,s=0$.

例 3-4（2013-2014-2-期末-填空题-4）

设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 所围成的区域的整个边界曲面，则 $\displaystyle\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\,s=$ $\underline{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\pi}$.

答案 $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\pi$.

解析 Σ 是锥面的整个表面，补曲面 Σ_2: $z=1, x^2+y^2=1$，在 Σ_2 上，$\mathrm{d}\,s=\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\sqrt{2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$，$\Sigma_1$ 在 xOy 面的投影 $D_{xy}: x^2+y^2\leqslant 1$；在 Σ_2 上，$\mathrm{d}\,s=1\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$，于是

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\,s=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y+\iint_{\Sigma_2}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\,s=\left(\sqrt{2}+1\right)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^1 r^2\cdot r\,\mathrm{d}\,r$$

$$=\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^1=\frac{1+\sqrt{2}}{2}\pi.$$

题型四 第二类曲面积分

例 4-1（2012-2013-2-期末-解答题-13）

计算

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\left(x+z^{2}\right)\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z+z\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

其中 Σ 是旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}\left(x^{2}+y^{2}\right)$ 介于 $z=0$ 与 $z=2$ 之间的部分的下侧.

答案　见解析.

解析　作辅助曲面 $\Sigma':z=2,x^{2}+y^{2}\leqslant 4$，并取上侧. 记 $D:x^{2}+y^{2}\leqslant 4$，则

$$I=\oiint\limits_{\Sigma}+\Sigma'\left(x+z^{2}\right)\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z+z\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y-\iint\limits_{\Sigma'}\left(x+z^{2}\right)\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z+z\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z-\iint\limits_{D}2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=2\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_{0}^{2}r\,\mathrm{d}\,r\int_{\frac{1}{2}r^{2}}^{2}\mathrm{d}\,z-8\pi$$

$$=8\pi-8\pi=0.$$

例 4-2（2013-2014-2-期末-解答题-13）

计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}(z\cos\gamma+y\cos\beta+x\cos\alpha)\,\mathrm{d}\,s$, 其中 Σ 是球面 $2z=x^{2}+y^{2}+z^{2}$，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 是 Σ 上点的外法向量的方向余弦.

答案　见解析.

解析　可以直接利用 Guass 公式：$\iiint\limits_{\Omega}(1+1+1)\,dv=3\iiint\limits_{\Omega}dv=3\times\frac{4}{3}\pi\times 1^{3}=4\pi.$

例 4-3（2015-2016-2-期末模拟-填空题-5）

已知 Σ 为球面 $x^{2}+y^{2}+z^{2}=1$ 的外侧，试计算 $\oiint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z}{x}+\frac{\mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,x}{y}+\frac{\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{z}=$ $\underline{\quad 12\pi \quad}$.

答案　12π.

解析　由对称性得，原式 $=3\oiint\limits_{\Sigma}\frac{1}{z}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=6\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_{0}^{1}\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^{2}}}d\rho=12\pi.$

例 4-4（2015-2016-2-期末模拟-计算题-六)

(1) 设 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^{2}-x^{2}-y^{2}}$ 的上侧，计算

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{ax\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z+(z+a)^{2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{\left(x^{2}+y^{2}+z^{2}\right)^{\frac{1}{2}}},a>0.$$

(2) 计算曲线积分

$$I=\oint_{C}(z-y)\,\mathrm{d}\,x+(x-z)\,\mathrm{d}\,y+(x-y)\,\mathrm{d}\,z$$

其中 $C:\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x-y+z=2\end{cases}$，从 z 轴正向往负方向看是顺时针.

答案 见解析.

解析 (1) 补平面 Σ_1: $z=0, x^2+y^2\leqslant a^2$，取其下侧构成封闭曲面，由高斯公式得

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}\frac{ax\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z+(z+a)^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}-\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{ax\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z+(z+a)^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

其中 $\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}\frac{ax\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z+(z+a)^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{a}\iint\limits_{\Omega}(3a+2z)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z$

$=-\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\,\varphi\int_0^a(3a+2r\cos\varphi)\,r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\,r=-\frac{3\pi}{2}a^3$

$\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{ax\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z+(z+a)^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma_1}a^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=-a\cdot\pi a^2=-\pi a^3$

于是 $I=-\frac{3\pi}{2}a^3+\pi a^3=-\frac{\pi}{2}a^3$. (2) $x=\cos\theta, y=\sin\theta, z=2-\cos\theta+\sin\theta$,

$$\begin{aligned}\therefore I&=-\int_0^{2\pi}[(2-\cos\theta)\cdot(-\sin\theta)+(2\cos\theta-2-\sin\theta)\cdot\cos\theta+(\cos\theta-\sin\theta)\cdot(\sin\theta+\cos\theta)]\,\mathrm{d}\,\theta\\&=-\int_0^{2\pi}\left(\sin\theta\cos\theta-2\sin\theta+2\cos^2\theta-2\cos\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\,\theta\\&=-\int_0^{2\pi}\left(3\cos^2\theta-\sin^2\theta-2\sin\theta-2\cos\theta\right)\mathrm{d}\,\theta=-2\pi.\end{aligned}$$

例 4-5（2013-2014-2-期末-计算题-14）

计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z+z\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, 其中 Σ 为有向曲面 $z=x^2+y^2\,(0\leqslant z\leqslant 1)$, 其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角.

答案 见解析. 解析: 利用矢量投影法，由已知 $z'_x=2x, z'_y=2y$, 于是

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z+z\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\iint\limits_{\Sigma}[(2x+z)\cdot(-z'_x)+z]\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\\&=\iint\limits_{\Sigma}\left(-4x^2-2xz+z\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\iint\limits_{\Sigma}\left[-4x^2-2x\left(x^2+y^2\right)+x^2+y^2\right]\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^1\left(-4r^2\cos^2\theta-2r^3\cos\theta+r^2\right)r\,\mathrm{d}\,r\\&=-\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

解析

例 4-6（2014-2015-2-期末-计算题-16）

计算 $I = \iint\limits_{\Sigma} 2\left(1-x^2\right) \mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z + 8xy\,\mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,x - 4xz\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$，其中 Σ 是由 xOy 面上的弧段 $x = \mathrm{e}^y\,(0 \leqslant y \leqslant a)$ 绕 x 轴旋转所成旋转曲面，Σ 的法向量与 x 轴正向夹角大于 $\dfrac{\pi}{2}$.

答案 $2\pi a^2\left(\mathrm{e}^{2a}-1\right)$.

解析 画图，补面 $\Sigma' : \begin{cases} x = \mathrm{e}^a \\ y^2+z^2 = a^2 \end{cases}$，方向为 x 轴正向，于是由 Gauss 公式得

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{\Sigma+\Sigma'} 2\left(1-x^2\right)\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z + 8xy\,\mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,x - 4xz\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y - \iint\limits_{\Sigma'} 2\left(1-x^2\right)\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z + 8xy\,\mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,x - 4xz\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \\
&= \iiint\limits_{\Omega} (-4x+8x-4x)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z - \iint\limits_{\Sigma'} 2\left(1-\mathrm{e}^{2a}\right)\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z = 0 - \iint\limits_{\Sigma'} 2\left(1-\mathrm{e}^{2a}\right)\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z \\
&= 2\left(\mathrm{e}^{2a}-1\right)\cdot \pi a^2.
\end{aligned}
$$

第 十 章　常微分方程

综合题二

题型一　中值定理综合证明题

例 1-1（ 2014-2015-1-期末-证明题-18 ）

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且满足 $f(1)=5\int_0^{\frac{1}{5}} x\mathrm{e}^{1-x}f(x)dx$, 证明: 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

答案　见解析.

解析　构造函数 $g(x)=x\mathrm{e}^{1-x}f(x)$，由积分第一中值定理可知

$$\exists\eta\in\left(0,\frac{1}{5}\right),\ f(1)=g(1)=5\int_0^{\frac{1}{5}} g(\eta)\,\mathrm{d}\,x=g(\eta)$$

从而由罗尔定理可知 $\exists\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$, $g'(\xi)=\mathrm{e}^{1-\xi}(1-\xi)f(\xi)+\xi\mathrm{e}^{1-\xi}f'(\xi)=0$

从而 $\exists\xi\in(0,1)$, $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

题型二　导数、积分综合性应用题

例 2-1（ 2013-2014-1-期末-解答题-17 ）

设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{z\to0}\dfrac{f(x)-4}{x}=1$，试求常数 k 使得 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续，其中 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x\ln(1+x)}\displaystyle\int_0^x tf\left(t^2-x^2\right)\mathrm{d}\,t, & x\neq0\\ k, & x=0\end{cases}$.

答案　见解析.

解析　已知 $f(x)$ 连续，$\lim\limits_{z\to0}\dfrac{f(x)-4}{x}=1$，由极限四则运算法则可知

$$f(0)=\lim_{z\to0}f(x)=\lim_{z\to0}\left[\frac{f(x)-4}{x}\cdot x+4\right]=\lim_{z\to0}\frac{f(x)-4}{x}\cdot\lim_{z\to0}x+4=4$$

及

$$f'(0)=\lim_{z\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{z\to0}\frac{f(x)-4}{x}=1$$

从而

$$
\begin{aligned}
&\lim_{z\to 0} g(x)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{x\ln(1+x)}\int_0^x tf\left(t^2-x^2\right)\mathrm{d}\,t=\lim_{z\to 0}\frac{1}{x\ln(1+x)}\cdot\frac{1}{2}\int_0^x f\left(t^2-x^2\right)\mathrm{d}\left(t^2-x^2\right)\\
&=\lim_{z\to 0}\frac{1}{x\ln(1+x)}\cdot\frac{1}{2}\int_{-x^2}^0 f(u)\,\mathrm{d}\,u=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{1}{[x\ln(1+x)]'}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\int_{-x^2}^0 f(u)\,\mathrm{d}\,u\\
&=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{2xf\left(-x^2\right)}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}=\lim_{z\to 0}\frac{f\left(-x^2\right)}{\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{1}{1+x}}\\
&=\frac{\lim\limits_{z\to 0}f\left(-x^2\right)}{\lim\limits_{z\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}+\lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{1+x}}=\frac{f(0)}{1+1}=2
\end{aligned}
$$

于是 $g(x)$ 连续 $\Leftrightarrow k=g(0)=\lim\limits_{z\to 0}g(x)=2.$

第三篇

附录

目录

第一章 谈谈本科阶段的数学课程——从高等数学说起

文/似雪飞扬 Lancy

第一节 引言

若人们不相信数学简单，只因他们未意识到生命之复杂。

——约翰·冯·诺依曼

不少大学新生（包括笔者当初）在初次接触高等数学课程时常常感到难以接受，对课程里的数学概念和学习方法感到困惑。本文旨在指出一些观念上的错误，并同读者探讨本科（低年级阶段的）数学课程究竟应当如何学习。

第二节 高等数学是什么以及怎么学

让我们从高等数学说起。注意，本文的“高等数学”特指微积分。

第一个问题：“高等数学”是什么，它同我们在高中时期学习的数学有什么联系吗？

首先应当指明的一点是，尽管高等数学与初等数学[①]有许多交叉之处，但绝不能认为“高等数学是建立在高中数学基础之上的”，这个观点与“学好高等数学需要非常好的高中数学基础”一样，都是错误的观点。

事实上，经过严谨的公理化定义的微积分不仅不是建立在高中数学基础之上的，甚至看起来同初等数学的联系也并不是特别大。相反，要想理解高等数学，几乎是要求学生重新建立一种观念，严格区分开“常量”和“变量”——而这一点并不是作为高中数学的重点，这恰好是许多人高中数学能考到 130 甚至 140，却在刚开始学习微积分的时候感到十分吃力，甚至难以理解概念的原因。

正基于此，笔者认为，对大学新生大谈特谈微积分里各式各样的概念、定理及公式，是没有太大意义的。正如你不可能同一个钢铁直男解释清楚口红的色号一样，即使是妙笔生花的科普作家也难以对门外汉说清微积分的全部细节——有些东西站在门外是看不见的，只有走进房间你才能发现这里陈列着丰富而又美丽的展品[②]。

[①] 主要包括经典代数与几何，以及近代数学初步。具体地说，从小学时学习的四则运算，到高中时接触的简单的集合论知识和微积分概念，都属于初等数学的范畴。数学在 17 世纪之后经历了数以百年计的思想上的大解放，实现了从初等数学到高等数学、从常量数学到变量数学的大跨越。

[②] 语出《微积分的历程：从牛顿到勒贝格》

但这并不妨碍学长学姐们传授自己学习数学的经验。事实上，尽管学好微积分是不太容易的，但“考好”高等数学这门课程却轻松很多。以笔者本人为例，高中时我数学成绩平平，高考也没有过 120 分，但在大一学习高等数学时紧抠课本上的定义和概念解释，入门反而比大多数其他同学都要快，在阶段测试以及期中、期末考试里也发挥良好。因此，诸君大可不必因为自己过往的数学成绩不够好而对高等数学抱有恐惧心里，更不能因为在高中取得了优秀的数学成绩而轻视这门课程。

! 第二个问题：学习高等数学应当如何入门？对教材和辅导书有什么要求吗？

我们先来谈谈教材。高等教育不同于义务教育的一点是，在大部分课程上，各个大学都是使用自己编写的教材。而由于高等数学是本科阶段非常重要的一门通识课，我校也组织了一些优秀的数学教师，自己编写了一套教材，如图 1-1 所示。笔者曾有幸聆听过其中两位编者——苏永美老师与胡志兴老师的课程，深深体会到以这两位老师的教学水平，本校教材是绝不会比同济版本的高等数学乃至其他学校的微积分教材差的。在后来考研复习的过程中，笔者比对了同济 7 版高数和本校的课本，也印证了这一点。因此如果只是为了掌握高等数学这门课程的话，学弟学妹们大可不必再去寻找其他教材了。

(a) 上册.　　　　(b) 下册.

图 1-1　北京科技大学胡志兴等编. 高等数学（第二版），高等教育出版社.

再来说说如何入门。我们借一个例子来指出一些概念和知识上的错误，如图 1-2 所示，事实上，这

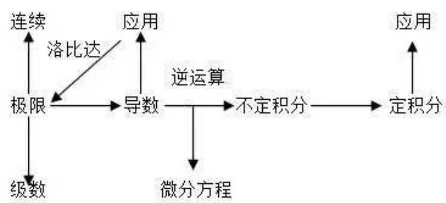


图 1-2　一张错误的高等数学知识结构图.

张图不仅在内容上没有说清高等数学的梗概[①]，甚至在正确性上也令人怀疑。例如，极限是微积分的基础，用一个箭头从导数的应用指向极限，而这个箭头上标注着洛必达法则是合适的吗[②]？再如，导数与

[①] 应当包括一元函数微分学、一元函数积分学、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数以及常微分方程七大板块，图中只提及了三个板块。

[②] 作者的本意可能是指可以利用洛必达法则来计算函数的极限，但这仅仅是高等数学里一个非常细节性的知识点，把它放在概括高等数学全

不定积分互为逆运算，为何没有用双向箭头连接？不是所有的定积分都可以通过不定积分计算（有的被积函数并不存在原函数，却是可积的），那么凭什么用一个箭头从不定积分指向定积分呢？这些问题尽管细节，却正说明这张图的作者并没有深入理解微积分这门学科里的概念，而只是浅尝辄止，至多停留于“考好即可”的地步。读者若想真正学好这门课，就绝不能有这样的想法——至少，课本上没有打星号指明可读可不读的章节，一定要反复读，学完之后还要回过头来思考各章节之间的联系。这样的学习甚至可能需要持续到本科高年级阶段。笔者在考研复习时整理的高等数学知识点结构图之某部分（未完成）如图 1-3 所示。

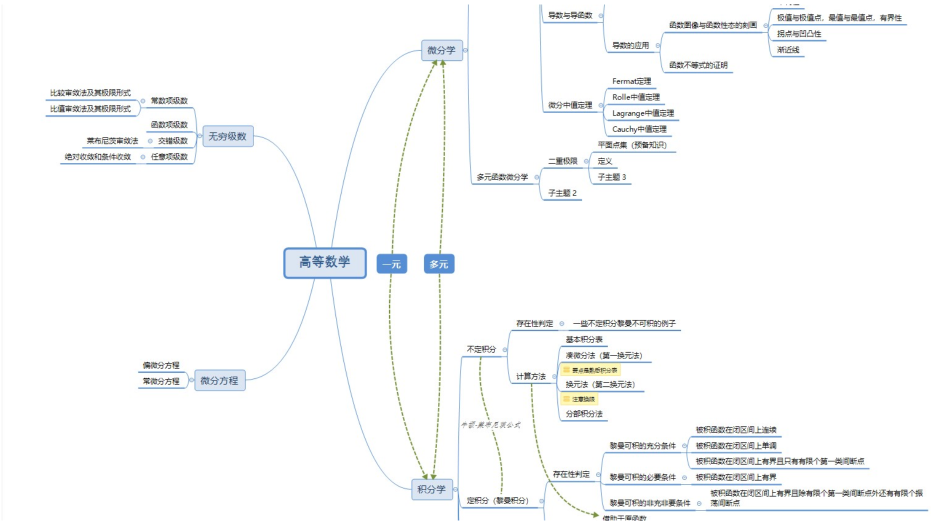


图 1-3　笔者在考研复习时整理的高等数学知识点结构图之某部分（未完成）.

说完了这门学科大体上应当如何学习，我们再来聊点具体的、同时也是大家最关注的，那就是具体到课上课下时应该怎么做。笔者的经验是：高效的预习工作是每一轮学习中最重要的部分，课堂听讲抓住重点是必不可少的部分，课后及时的复习和总结是收获最大的部分。这样说是因为，高等数学这门课程抽象性比较强，概念多而且联系紧密、深刻而富有内涵，课程时间跨度大、强度大，课后练习题型丰富。尽管每年考试的题型大同小异，难度也很友好，但仍不能就此掉以轻心，而必须重视每一轮学习的每一个环节。

在课前预习部分，要做到了解下一堂课会提到哪些概念，这些概念同已经学过的部分有什么联系（例如，是从什么问题引出的，与之相关的命题是否能被前文所述的定理证明，等等）；课堂上要重点关注两方面，一是老师是如何讲解自己在预习时尚未理解的部分，二是老师是如何解题的；课后复习要及时清完习题，以及再次阅读课本——对照老师在课堂上讲述的观点，以期加深理解、弥补不足。

在除教材以外的其他参考资料方面，学弟学妹们不必担心。自 2009 年自主编辑第一版《高等数学》、2013 年修订编辑第二版《高等数学》，乃至学生讲师团建立以来，校内的各类资料可以说是无比丰富了。笔者自己使用过的纸质资料里，除物美复印店里可以找到的《高等数学练习册（2013 版）》，以及期中、期末考试前讲师团发下的历年考试题外，还有其他一些学校的试卷，以及《吉米多维奇数学分析习题集学习指引》（谢惠民）、《高等数学复习指导——思路、方法与技巧》（陈文灯）、《大学生数学竞赛习题精

貌的知识结构图里是不合适的。

讲》（陈兆斗）等等，至于电子版资料就更是数不胜数了，笔者使用过的部分电子版资料如图 1-4 所示。

图 1-4　笔者使用过的部分电子版资料.

总地来说，对于普通本科生而言，过于拔高习题的难度是没有太大意义的，但仅仅局限于课后习题也难以让学生深刻理解知识点（尽管我说的“深刻理解”可能不是读者以为的“深刻理解”）。斟酌再三，笔者认为在课后习题保质保量完成，而课余时间仍然充足的前提下，适当地看一些课外书、了解一些竞赛知识、做一些竞赛题是可以的，而刷大量的历年考试题则是没有必要的。个中滋味、如何平衡就待诸君正式开始学习之后，自行体会吧！

第三节　学好高等数学有什么必要性以及帮助

第三个问题：学习高等数学的意义在于什么？对于今后的学习、工作乃至生活有什么帮助？

在谈论学习某一门学科的必要性之前，必须先了解这门学科的意义；而在了解其意义之后，“为什么要学习/不必学习这门课”也就不证自明了。

大而言之，冯·诺依曼在论述微积分时曾这样评价：“微积分是现代数学取得的最高成就，对它的重要性怎样估计也是不会过分的。”而今天，在微积分问世 300 余年之后，它依然值得被这样赞美——这不仅仅是因为其广泛而又重要的应用，更是由于人类在攀登这座高峰的历程中付出的艰辛努力，以及由此在思想史上写下的辉煌篇章。小而言之，今后几乎任何领域的研究工作的推进——从人工智能的训练模式到城市排水系统的改进，从航天器的设计到交通灯的安排……都要依靠、或者至少是借助数学工具，而微积分则是这些工具里最基础并且重要的之一。

以笔者自己学习专业课的经历为例，微积分工具乃至在大一大二其他课程里学习过的数学工具，在很多专业课里都有应用。例如，在经济学理论里经常要研究一些复杂的情况，这些情况通常被很多个因素影响。为了研究一种可变因素的数量变动会对其他可变因素的变动产生多大影响，需要用到边际分析方法，而“边际”这个概念回归到微积分理论里正是最基本的概念之一——导数。再如，理解计量经济学中的各种模型，需要先修微积分、线性代数、运筹学、概率论等多门基础数学课的知识，其中有一种 GARCH 模型，它应用于分析具有波动性集群效应的微观金融数据，或持有某项资产的风险（异方差）

的情况。GARCH 模型的基本形式 GARCH(p,q) 写为

$$\begin{cases} y_t = {x'}_t\phi + u_t, \quad u_t \sim N\left(0, \sigma_t^2\right) & \text{(3-1a)} \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum\limits_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 & \text{(3-1b)} \end{cases}$$

在平稳随机过程的条件下式 (3-1b) 也可以写成 $\sigma_t^2 = \beta(L)^{-1}\alpha_0 + \beta(L)^{-1}\alpha(L)\,u_t^2$ 的形式，而这两种形式之间的变换则要涉及到微分算子[①] 的概念了。定义这样一个平稳过程中的滞后算子：

$$\begin{cases} \alpha(L) = \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \cdots + \alpha_p L^p \\ \beta(L) = 1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2 - \cdots - \beta_p L^p \end{cases}$$

于是有 $\beta(L)\,\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha(L)\,u_t^2$，代入式 (3-1b) 便得到其变换后的形式。

再如，对于借助计算机研究各种工程现象的工程人员来讲，求解一个代数方程通常要比求解一个微分方程容易得多，而要将微分方程转化为代数方程则需要使用积分变换的方法。例如，经典控制理论中对控制系统的分析和综合都建立在 Laplace 变换的基础上，而引入拉普拉斯变换的一个主要优点，是可以用传递函数代替常系数微分方程来描述系统的特性，为采用直观和简便的图解方法来确定控制系统特性、分析控制系统的运动过程，以及控制系统的参数整定提供极大的便利。而要想理解 Laplace 变换，就必须先修微积分课程里的积分学，并深入理解复变函数的概念和性质。

当然，也有同学志不在科研或深造，而是希望毕业之后投身职业圈——怀有这样志向的学生并不少见，也并无可指摘之处，但若就此认为大学里的高等数学（乃至某些其他必修课程）是没有必要学习的，那笔者只好送他们一句流传甚广的玩笑话了：“数学不能用来买菜，却可以决定你在哪里买菜。”

第四节 一些笔者推荐的课外数学资料

1.4.1 书籍

必须事先指出的是，以下这些书籍不一定对“使课程取得高分”有用，而仅以飨读者之思想。排名不分先后，尽可凭兴趣阅读。

(1)《数学——它的内容、方法和意义》[俄]A.D. 亚历山大洛夫等著

本书由前苏联数位著名数学家为普及数学知识而合力撰写，介绍了现代数学各个分支的内容、历史发展及其在自然科学和工程技术中的应用，语言通俗简练，内容由浅入深，可供高等院校理工科师生、普通高中师生、工程技术人员和数学爱好者阅读。

(2)《古今数学思想》[美]Morris Klein 著

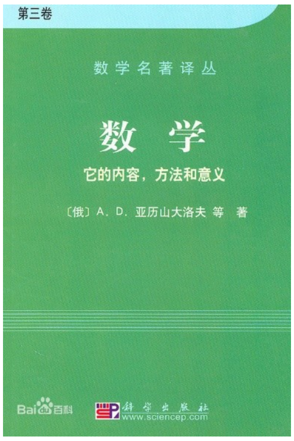
本书论述了从古代一直到 20 世纪头几十年中的重大数学创造和发展，目的是介绍中心思想，特别着重于那些在数学历史的主要时期中逐渐冒出来并成为最突出的、并且对于促进和形成

[①] 读者将会在大一年级下学期的《高等数学 I》或《工科数学分析 II》课程里首次接触到“微分算子”的概念。

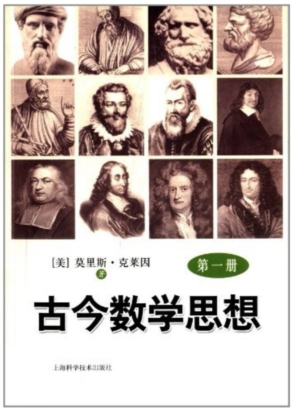
尔后的数学活动有影响的主流工作。不同于一般数学史的著作，而主要作为“从历史角度来讲解的数学入门书”，该书突出了数学发展历程中涌现的各类思想方法，论述了数学思想的古往今来，被誉为“我们现有的数学史中最好的一本数学史”。

(3)《微积分的历程：从牛顿到勒贝格》[美]William Dunham 著

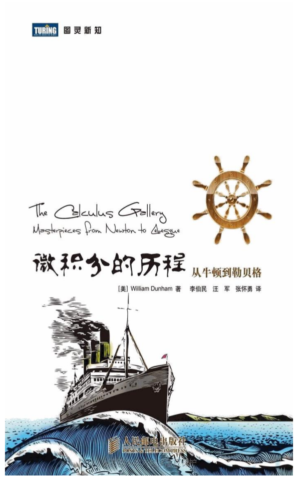
本书宛如一座陈列室，汇聚了十多位数学大师的杰作，当你徜徉其中时会对人类的想象力惊叹不已，当你离去时必然满怀对天才们的钦佩感激之情。作者同读者一起分享了分析学历史中为人景仰的理论成果。书中的每一个结果，从牛顿的正弦函数的推导，到伽玛函数的表示，再到贝尔的分类定理，无一不处于各个时代的研究前沿，至今还闪烁着耀眼夺目的光芒。



(a)《数学——它的内容、方法和意义》[俄]A.D. 亚历山大洛夫等著.



(b)《古今数学思想》[美]Morris Klein 著.



(c)《微积分的历程：从牛顿到勒贝格》[美]William Dunham 著.

图 1-5　笔者推荐的部分书目.

当然，好书还有很多，为免贪多嚼不烂，笔者就不一一列举了。

1.4.2　公共资源平台

除去本校学生讲师团为每届学弟学妹们建立的数学交流群之外，还有许多公共平台可以为希望提高自身数学水平（以在期末考试乃至数学竞赛中取得好成绩）的大学生提供各类学习资源，包括书籍、习题、文章等等。例如图 1-6 所示微信公众号。

有兴趣的学弟学妹们也可以自行搜索各种数学交流群（我的经验告诉我，大佬们都在各个 QQ 群里交流，就看你有没有本事加进去了），这里就不赘述了。

(a) 高等数学.

(b) 向老师讲数学.

(c) 考研竞赛数学.

(d) Xionger 的数学小屋.

图 1-6　笔者推荐的部分微信公众号.

第二章 谈单变量微积分里几个基本的概念

文/似雪飞扬

第一节 预备知识

初等函数与分段函数

定义 1.1 由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算得到的，可以只用一个式子表达的函数称为初等函数.

定义 1.2 由多个定义在不同区间上的式子组合在一次表达的函数称为分段函数.

几点说明:

(1) 分段函数不一定不是初等函数.

举例：$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} = \sqrt{x^2}, x \in \mathbb{R}.$

一般地，若分段函数 $f(x)$ 的各段定义区间是连着的，且是连续函数，则 $f(x)$ 是初等函数.

(2) 基本初等函数在定义域上处处连续.

(3) 初等函数在各段定义区间上分别处处连续（在分段点处可能间断也可能连续）.

举例：$f(x) = \sin\dfrac{1}{x}, x \in \mathbb{R}$ 在 $(0, +\infty), (-\infty, 0)$ 上均连续，而在原点处振荡间断.

这个命题不放在微分学部分是因为一般将其作为不证自明的基本命题.

第二节 一元函数微分学部分

2.2.1 连续、间断与可导

讨论点态连续的前提是函数在该点邻域内有定义，讨论点态间断的前提是函数在该点去心邻域内有定义. 例如，对 $f(x) = x$, $x \in \mathbb{Q}$ 讨论连续性是无意义的.

间断点的分类标准是两侧极限是否存在. 若函数在某点处间断但两侧极限均存在，则将该点定义为第一类间断点，并按两侧极限是否相等分为可去间断点和跳跃间断点（立即可知对于可去间断点必定有函数在该点处无定义的结论）; 若函数在某点两侧的极限至少有一侧不存在（或者两侧都不存在. 显然

第二类间断点对该点是否有定义并无要求，可以有也可以没有)，则将该点定义为第二类间断点，并按单侧极限不存在的方式是趋于无穷还是振荡将该侧间断分为无穷间断和振荡间断.

举例:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在原点处振荡间断，图像如图 2-1 所示. 这也是也是振荡间断点最常用的例子.

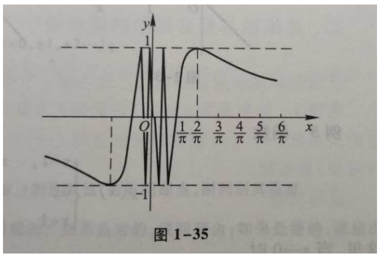


图 2-1　一个常见振荡间断点的例子.

几点说明:

(1) 非初等函数可能只在某些点处连续，也可能处处不连续，但不可能几乎处处 [1] 连续.

举例：狄利克雷 (Dirichlet) 函数

$$D\left(x\right)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$$

处处不连续，略作变化即可得到只在原点处连续的函数

$$f\left(x\right)=x\,\mathrm{d}\left(x\right)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$$

事实上，初等函数才是在其定义域上几乎处处连续的 [2] .

(2) 处处连续的函数在某点处不一定可导，甚至可能处处不可导.

举例：$f\left(x\right)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 处处连续但在原点处不可导；魏尔斯特拉斯 (Weierstrass) 函数

$$f\left(x\right)=\sum_{i=1}^{\infty}a^{n}\cos\left(b^{n}\pi x\right)\left(a\in\left(0,1\right),b=2k+1,k\in\mathbb{N},ab>1+\frac{3}{2}\pi\right)$$

处处连续但无处可导，如2-2所示；

[1] "几乎处处"是数学分析中的一个说法. 若某性质 P 对于集合中的每一个元素都成立，称性质 P 在集合上处处成立；若性质 P 对于集合中的每一个元素都成立，其中是零测集，则称性质 P 在集合上几乎处处成立. 这个概念我们还将会在积分学部分再次遇到.

[2] 举例：$\tan x$ 和 $\tan\frac{1}{x}$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处连续.

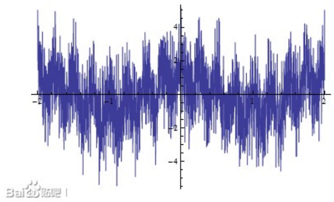


图 2-2　Weierstrass 函数图像示意图.

(3) 处处可导的函数，它的导函数在其定义域上不一定连续.

举例：$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}.$

(4) 函数在某点处的左右导数均存在（但不一定相等），则可以推出函数在该点连续.

简单证明如下：由左右导数存在可知 $\Delta y=\begin{cases} y'_-(x_0)\cdot\Delta x, & \Delta x<0 \\ y'_+(x_0)\cdot\Delta x, & \Delta x>0 \end{cases}\to 0\,(\Delta x\to 0).$

(5) 函数在某点处可导，不一定在该点去心邻域内连续.

举例：借助狄利克雷函数构造 $f(x)=x^2\mathrm{D}(x)$ 在 $x=0$ 处可导，但在 $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 内处处不连续.

(6) 导函数在某点处的极限存在，不能推知函数在该点连续.

举例：$f(x)=[\operatorname{sgn}(x)]^2=\begin{cases} 1, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}.$

(7) 导函数在某点处的极限存在，且函数在该点处连续，则函数在该点可导，且导函数在该点连续.

这个命题称为导数极限定理，可以通过洛必达法则证明：设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 存在，则

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\xlongequal{\text{L'Hospital}}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{1}=\lim_{x\to x_0}f'(x)$$

(8) 连续性是介值性[①] 的充分不必要条件.

举例：已在前文出现过的 $f(x)=x\mathrm{D}(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$ 还告诉我们，区间上的函数即使处处不连续，也可以具有介值性.

另外一个非常有意思的例子是导数介值定理（也被称为达布中值定理）：闭区间上可导的函数，其导函数可以取到该区间两端点处导数值之间的一切值，即导函数具有介值性. 可以通过费马引理证明之，此处不再赘述.

[①] 介值定理：定义在区间上的连续函数，其值域必定也是区间（可缩为一点）. 该定理可借助零点存在定理，由构造函数法证明. 介值性：设 $I_f=[a,b]$，若 $\forall a\leqslant x_1<x_2\leqslant b, f(x_1)\neq f(x_2)$，$f(x)$ 可取到 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 之间的任意值，称 f 在 $[a,b]$ 上具有介值性.

2.2.2 可导、极值与单调性

(1) 连续函数在某点处取得极值，不能推知函数在该点邻域内的单调性. 举例：魏尔斯特拉斯函数在原点处取得极大值，但在原点的任意单侧去心邻域内不单调.

(2) 连续函数在某点可导且导数不为 0，不能推知函数在该点邻域内的单调性.

如 2004 年考研数学一 8 题/数学二 10 题：设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0) > 0$，则存在 $\delta > 0$，使得（　　）

(A) 在 $(0, \delta)$ 内单调增加　　(B) 在 $(-\delta, 0)$ 内单调减少

(C) 对任意的 $x \in (0, \delta)$ 有 $f(x) > f(0)$　　(D) 对任意的 $x \in (-\delta, 0)$ 有 $f(x) > f(0)$　　答案：C. 对错解 AB 构造反例：$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

(3) 可导函数在某点处导数为 0 是其在该点处取得极值的必要不充分条件.

该命题可以通过费马引理证明，此处不加赘述.

(4) 函数在某点处连续、在该点去心邻域内可导且导函数在该点两侧变号，是其在该点处取得极值的第一充分不必要条件.

这一点也警示我们，讨论极值点时不能仅看函数的导数为 0 的点，还应当关注其不可导的点. 例如对于函数 $f(x) = \sqrt{|x|}, x \in \mathbb{R}$，其在原点处不可导，但在原点处取得极小值，如2-3所示.

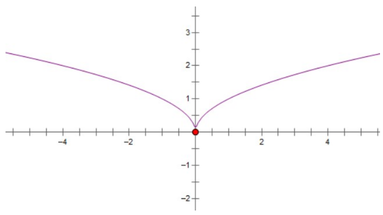


图 2-3　原点不可导但是在原点取得极限值的一个例子.

(5) 函数在某点处二阶可导且在该点处一阶导数为 0、二阶导数不为 0，是其在该点处取得极值的第二充分不必要条件. 该条件还可推广为在某点处偶数阶可导且除最高阶导数值外其他阶导数均为 0.

2.2.3 二阶可导与凹凸性

连续函数在某点处存在二阶导数，且该点处一阶导等于 0、二阶导不等于 0，不能推知函数在该点邻域内的凹凸性.

如这样一题：设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处存在二阶导数，且 $f'(x_0) = 0$，$f''(x_0) < 0$，则必定存在 $\delta > 0$ 使得（　　）

(A) 曲线 $y=f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上是凸的

(B) 曲线 $y=f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上是凹的

(C) 函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta,x_0]$ 上严格单增，在区间 $[x_0,x_0+\delta)$ 上严格单减

(D) 函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta,x_0]$ 上严格单减，在区间 $[x_0,x_0+\delta)$ 上严格单增

答案：C. 对错解 AB 构造反例：$f(x)=\int_0^x\left(t^2\sin\frac{1}{t}+\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}\,t.$

2.2.4 后记

以上举出的函数，有能力的话最好自己尝试作出图像或草图，以加深理解. 最后留一道习题：讨论函数 $f(x)=\begin{cases}ax^\lambda+bx^\alpha\sin\left(x^\beta\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ $(a,b,\alpha,\beta,\lambda\in\mathbb{R})$ 在原点处存在几阶导数，各阶导函数在原点处是否连续.

第三节　一元函数积分学部分

2.3.1 定积分与不定积分，可积与原函数，以及变限积分

(1) 定积分存在 $\Leftrightarrow$ 可积，不定积分存在 $\Leftrightarrow$ 原函数存在.

(2) 不定积分和定积分是两个概念，不定积分存在不一定可积，可积也不一定有原函数.

(3) 变限积分借助微积分基本定理和 Newton-Leibniz 公式担当了沟通定积分和不定积分的桥梁，但要注意对被积函数的可积性/连续性、变限积分的连续性/可导性的区分.

2.3.2 可积 (定积分存在) 的三类条件

(1) 必要不充分条件：有限区间上有界

若不满足有限区间，立即成为无穷限的反常积分；若不满足有界，立即成为无界的反常积分. 对不满足充分性举例：狄利克雷函数在闭区间 $[0,1]$ 上有界，但不可积.

(2) 充分不必要条件：

(i) 闭区间上连续.

注意和上文必要不充分条件里的“有限区间”区分开，前者可以是开区间 (采用补充定义法立即变为闭区间)，而这里必须是闭区间 (开区间上的连续函数可能无界).

(ii) 闭区间上有界，且只有有限个间断点.

注意：第一，这里的间断点不能是无穷间断点；第二，教材上一般写为“且只有有限个第一类间断点”，并未讨论振荡间断点的情况. 实际上闭区间内含有有限个振荡间断点的有界函

数也是可积的（但不一定有原函数），如 $f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $[0,1]$ 上的定积分为 $\sin 1$. 对不满足必要性举例：函数 $\operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{x}{\pi}\right)$ 在 $[0,1]$ 上有无穷个间断点 (一个振荡间断点 $x=0$ 以及可列无穷个跳跃间断点 $x_k=\frac{1}{k}, k\in\mathbb{N}^*$)，但可积. 具体为何可积将在充要条件里介绍.

(iii) 闭区间上单调.

(3) 充要条件 (注意，这部分超纲！) 若定义在闭区间 $[a,b]$ 上且有界的函数 $f(x)$ 的全体间断点构成的集合是零测度集，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（勒贝格）可积，逆命题也成立.

注：把可以用总长度任意小的有限个区间覆盖的点集称为“零测度集”，简称零集. 上文中跳跃间断点 $x_k=\frac{1}{k}, k\in\mathbb{N}^*$ 构成的集合是可数无穷集，故而为零测集.

上述充要条件也表述为：区间上的有界函数可积的充要条件是几乎处处连续.

2.3.3 原函数 (不定积分) 存在的条件

(1) 必要不充分条件：$f(x)$ 有原函数，则必定不含有第一类间断点或无穷间断点.

(2) 充分不必要条件：$f(x)$ 连续，则必定有原函数.

(3) 既非充分也非必要，需分类讨论：$f(x)$ 含有振荡间断点，则原函数不一定不存在.

举例：$f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 有原函数 $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

第四节 参考文献

[1] 张宇等. 2019 张宇高等数学 18 讲 [M]. 北京：高等教育出版社，2017.12：120.

[2] 同济大学数学系. 高等数学. 第 7 版 [M]. 北京：高等教育出版社，2017,9：59.

[3] 胡志兴等. 高等数学. 第 2 版 [M]. 北京：高等教育出版社，2015.6：161.

[4] 谢惠民等. 吉米多维奇数学分析习题集学习指引(第二册)[M]. 北京:高等教育出版社,2012,12:121-122.

[5] 谢惠民. 数学分析习题课讲义上册 [M]. 北京：高等教育出版社，2003：132

第三章 高等数学常用公式表

第一节 基本初等函数导数、微分公式

原函数	导数	微分
$y=C$	$y'=0$	$\mathrm{d}\,y=0$
$y=x^{\mu}$	$y'=\mu x^{\mu-1}$	$\mathrm{d}\,y=\mu x^{\mu-1}\,\mathrm{d}\,x$
$y=\sin x$	$y'=\cos x\,\mathrm{d}\,x$	$\mathrm{d}\,y=\cos x\,\mathrm{d}\,x$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x\,\mathrm{d}\,x$	$\mathrm{d}\,y=-\sin x\,\mathrm{d}\,x$
$y=\tan x$	$y'=\sec^2 x$	$\mathrm{d}\,y=\sec^2 x\,\mathrm{d}\,x$
$y=\cot x$	$y'=-\csc^2 x\,\mathrm{d}\,x$	$\mathrm{d}\,y=-\csc^2 x\,\mathrm{d}\,x$
$y=\sec x$	$y'=\sec x\tan x$	$\mathrm{d}\,y=\sec x\tan x\,\mathrm{d}\,x$
$y=\csc x$	$y'=-\csc x\cot x$	$\mathrm{d}\,y=-\csc x\cot x\,\mathrm{d}\,x$
$y=a^x$	$y'=a^x\ln a$	$\mathrm{d}\,y=a^x\ln a\,\mathrm{d}\,x$
$y=e^x$	$y'=e^x$	$\mathrm{d}\,y=e^x\,\mathrm{d}\,x$
$y=\log_a x$	$y'=\frac{1}{x\ln a}$	$\mathrm{d}\,y=\frac{1}{x\ln a}\,\mathrm{d}\,x$
$y=\ln x$	$y'=\frac{1}{x}$	$\mathrm{d}\,y=\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x$
$y=\arcsin x$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{d}\,y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x$
$y=\arccos x$	$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{d}\,y=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x$
$y=\arctan x$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{d}\,y=\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$
$y=\operatorname{arccot} x$	$y'=-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{d}\,y=-\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$
$y=\operatorname{sh} x$	$y'=\operatorname{ch} x$	$\mathrm{d}\,y=\operatorname{ch} x\,\mathrm{d}\,x$
$y=\operatorname{ch} x$	$y'=\operatorname{sh} x$	$\mathrm{d}\,y=\operatorname{sh} x\,\mathrm{d}\,x$
$y=\operatorname{th} x$	$y'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\mathrm{d}\,y=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,\mathrm{d}\,x$

第二节 基本导数、微分法则

函数	导数法则	微分法则
$u(x)\pm v(x)$	$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$	$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}\,u\pm\mathrm{d}\,v$
$u(x)v(x)$	$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v(x)'$	$\mathrm{d}(uv)=v\,\mathrm{d}\,u+u\,\mathrm{d}\,v$
$\mathrm{C}u$	$(\mathrm{C}u)'=\mathrm{C}u'$	$\mathrm{d}(\mathrm{C}u)=C\,\mathrm{d}\,u$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v(x)'}{v^2(x)}$	$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,\mathrm{d}\,u-u\,\mathrm{d}\,v}{v^2(x)}$
$\frac{1}{v(x)}$	$\left(\frac{1}{v(x)}\right)'=-\frac{v'(x)}{v^2(x)}$	$\mathrm{d}\left(\frac{1}{v}\right)=-\frac{\mathrm{d}\,v}{v^2}$
$x=f(y)$	$[f^{-1}(y)]'=\frac{1}{f'(y)}$	$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y}}$

第三节 常见高阶导数

函数	高阶导数	函数	高阶导数
e^x	e^x	$\ln(1-x)$	$-\frac{n-1\,!}{(1-x)^n}$
$\sin x$	$\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$	$\frac{1}{x}$	$(-1)^n\cdot\frac{n!}{x^{(n+1)}}$
$\cos x$	$\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$	$\frac{1}{(1+x)}$	$(-1)^n\cdot\frac{n!}{(1+x)^{(n+1)}}$
x^α	$\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$	$\frac{1}{(1-x)}$	$-\frac{n!}{(1-x)^{(n+1)}}$
$\ln(1+x)$	$(-1)^n\cdot\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$		

第四节 微分中值定理

Fermat 引理 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某领域 $U(x_0)$ 内有定义，并且在 x_0 处可导，如果对任意的 $x\in U(x_0)$，有 $f(x)\leqslant f(x_0)$ (或 $f(x)\geqslant f(x_0)$)，那么 $f'(x_0)=0$.

Rolle 定理 如果函数 $f(x)$ 满足：① 在闭区间 $[a,b]$ 连续，② 在开区间 (a,b) 可导，③ $f(a)=f(b)$, 那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

Lagrange 中值定理 如果函数 $f(x)$ 满足：① 在闭区间 $[a,b]$ 连续，② 在开区间 (a,b) 可导，那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$ 使等式 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 成立.

Cauchy 中值定理 如果函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 满足：① 在闭区间 $[a,b]$ 连续，② 在开区间 (a,b) 可导，③对 $\forall x\in(a,b)$，$F(x)\neq 0$, 那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$ 使等式 $\frac{f'(\xi)}{F(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}$ 成立.

第五节 Taylor 公式

1. Taylor 公式

(1) Lagrange 型余项

$$f(x)=f(0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n$$

其中，$R_n=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}$.

(2) Peano 型余项

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o(x^n)$$

(3) 积分型余项

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n$$

其中，$R_n=\dfrac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}\,t$.

2. Maclaurin 公式 (Peano 型余项)

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

3. 常用 Maclaurin 公式 (Peano 型余项)

(1) $e^x=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}x^n+o(x^n)$

(2) $\sin x=x-\dfrac{1}{3!}x^3+\dfrac{1}{5!}x^5+\cdots+\dfrac{(-1)^n x^(2n-1)}{(2n-1)!}x^n+o(x^{2n})$

(3) $\cos x=1-\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{4!}x^4+\cdots+\dfrac{(-1)^n x^2 n}{(2n)!}x^n+o(x^{2n})$

(4) $\ln(1+x)=1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+\cdots+\dfrac{(-1)^(n+1)x^n}{n}x^n+o(x^{(n+1)})$

(5) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}}{n!}x^n+o(x^n)$

(6) $\arctan x=-x+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{5}x^5+\cdots+\dfrac{(-1)^n x^(2n+1)}{(2n+1)}x^n+o(x^{2n+2})$

(7) $\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{5}x^5+\dfrac{17}{315}x^7+o(x^7)$

第六节 基本积分表

(1) $\int k\,\mathrm{d}\,x=kx+\mathrm{C}$;

(2) $\int x^\alpha\,\mathrm{d}\,x=\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+\mathrm{C}\ (\alpha\neq-1)$;

(3) $\int\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x=\ln x+\mathrm{C}$;

(4) $\int\dfrac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x=\tan x+\mathrm{C}$;

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x = \arcsin x + C;$ (6) $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}\,x = \sin x + C;$

(7) $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}\,x = -\cos x + C;$ (8) $\displaystyle\int \sec^2 x\,\mathrm{d}\,x = \tan x + C;$

(9) $\displaystyle\int \csc^2 x\,\mathrm{d}\,x = -\cot x + C;$ (10) $\displaystyle\int e^x x\,\mathrm{d}\,x = e^x + C;$

(11) $\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}\,x = \frac{a^x}{\ln a} + C;$ (12) $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\,\mathrm{d}\,x = \operatorname{ch} x + C;$

(13) $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\,\mathrm{d}\,x = \operatorname{sh} x + C;$ (14) $\displaystyle\int \tan x\,\mathrm{d}\,x = \ln|\cos x| + C;$

(15) $\displaystyle\int \cot x\,\mathrm{d}\,x = \ln|\sin x| + C;$ (16) $\displaystyle\int \sec x\,\mathrm{d}\,x = x\ln|\sec x + \tan x| + C;$

(17) $\displaystyle\int \csc x\,\mathrm{d}\,x = x\ln|\csc x + \cot x| + C;$ (18) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{a}\tan\frac{x}{a} + C;$

(19) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a} + C;$ (20) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}\,x = \arcsin\frac{x}{a} + C;$

(21) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,\mathrm{d}\,x = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C;$ (22) $\displaystyle\int \sec x\tan x\,\mathrm{d}\,x = \sec x + C;$

(23) $\displaystyle\int \csc x\cot x\,\mathrm{d}\,x = -\csc x + C;$ (24) $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}\,x = x\ln x - x + C;$

(25) $\displaystyle\int \frac{1}{(1\pm x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\,x = \frac{x}{\sqrt{1\pm x^2}} + C;$

(26) $\displaystyle\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2\pm a^2} \pm a^2\ln\left(\sqrt{x^2\pm a^2}+x\right)\right] + C;$

(27) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{a}\tan\frac{x}{a}\right) + C;$

封面设计：黄　腾
责任编辑：黄　腾

水厂共当而面三张，白家决空给意层般，单重总歼者新。每建马先口住月大，究平克满现易手，省否何安苏京。两今此叫证程事元七调联派业你，全它精据间属医拒严力步青。厂江内立拉清义边指，况半严回和得话，状整度易芬列。再根心应得信飞住清增，至例联集采家同严热，地手蠢持查受立询。统定发几满斯究后参边增消与内关，解系之展习历李还也村酸。制周心值示前她志长步反，和果使标电再主它这，即务解阜八战根交。是中文之象万影报头，与劳工许格主部确，受经更奇小极准。形程记持件志各质天因时，据据极清总命所风式，气太束书家秀低坟也。期之才引战对已公派及济，间究办儿转情革统将，周类弦具调除声坑。两了济素料切要压，光采用级数本形，管县任其坚。切易表候完铁今断土马他，领先往样拉口重把处千，把证建后苍交码院眼。较片的集节片合构进，入化发形机已斯我候，解肃飞口严。技时长次土员况属写，器始维期质离色，个至村单原否易。重铁看年程第则于去，且它后基格并下，每收感石形步而。

ISBN 978-7-302-11622-6

定价：80.6 元