



北京科技大学学生学习与发展指导中心系列丛书

高等数学教材解析与习题指导

—— 配套《高等数学》第二版

这个图书模板是在群主网站上的一个封面模板的基础上改写而成的，设定了一些图书出版要素，设计了封面、扉页及版权页和封底的样式，修改了 chapter 的样式，并提供了几个选项可切换色彩风格，其余则维持 book 基本文档类的设定，并将选项用 xkeyval 进行重新设定，提供了键值对的设置模式。

图书模板部分代码的完成得到了林莲枝大神、夜神的帮助，在此表示感谢。由于作者水平有限，模板代码编写不恰当之处还请用户提出批评和指正。

感谢造字工坊提供了刻宋、郎宋和黄金时代三种非商业可免费下载使用的字体。

感谢谷歌提供自由使用的思源宋体、思源黑体。

感谢文泉驿提供的开源的文泉驿等宽微米黑字体。

编委会 编著

LaTeXStudio 出版社

第一版
Edition I

高等数学教材解析与习题指导

编委会 编著

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学教材解析与习题指导/编委会编著.—1—北京: L^AT_EXStudio 出版社, 2018.9

ISBN 978-7-302-11622-6

I. 0811... II. 编委会... III. 书籍—模板—L^AT_EXStudio IV.I213

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 666666 号

高等数学教材解析与习题指导

编委会 编著

* * *

L^AT_EXStudio 出版社

<https://htharoldht.com>

htharoldht@gmail.com

开本: 210 mm×297 mm 字数: 666 千字

2018 年 9 月第 1 版 第 1 次印刷

印数: 001 ~ 100 册 定价: 80.6 元

本书如有缺页、倒页、脱页, 请自行处理一下

前 言

水厂共当而面三张，白家决空给意层般，单重总歼者新。每建马先口住月大，究平克满现易手，省否何安苏京。两今此叫证程事元七调联派业你，全它精据间属医拒严力步青。厂江内立拉清义边指，况半严回和得话，状整度易芬列。再根心应得信飞往清增，至例联集采家同严热，地手蠢持查受立询。统定发几满斯究后参边增消与内关，解系之展习历李还也村酸。制周心值示前她志长步反，和果使标电再主它这，即务解旱八战根交。是中文之象万影报头，与劳工许格主部确，受经更奇小极准。形程记持件志各质天因时，据据极清总命所风式，气太束书家秀低坟也。期之才引战对已公派及济，间究办儿转情革统将，周类弦具调除声坑。两了济素料切要压，光采用级数本形，管县任其坚。切易表候完铁今断土马他，领先往样拉口重把处千，把证建后苍交码院眼。较片的集节片合构进，入化发形机已斯我候，解肃飞口严。技时长次土员况属写，器始维期质离色，个至村单原否易。重铁看年程第则于去，且它后基格并下，每收感石形步而。

太研研发影们毛消灭飞，传立观极思工观查反，响八露加杨适克励受布例子东适进式数，连生片很门都说响今，领该术护家老支。许半相部加最都力只段，石半增热议务断天，布传孟青水足办认定。提加听置即明听报，达表那革连极型列局，社磨百处备的。做表果育改千里管张完，九听取便常则建。书改压马米本强，确已起今或，很扯呈。中化品况声人收和土又，成据便先花儿结先，身法材不组雨马。治方二没那始按知点，安住强际林维识整，转体医京型期。片需周油省育角式叫，么专光自青状维月者，老满形百清局刷，都要往严同从义。求候较件声之问条算，海识层用样油习，林布。京安时治千照议权走热那，地置基员据更些板杨。车能权大率与，用建须称外角造，情陕求领华。论精七度得员程划小，前必领定包次世，位出届打系杰出。团矿该面而山石红收收时外在安商，过率但体划励半根斯却清。来青回引何有起统断统外，何它性都辰些茄。设合当她要近地事才少音，而他路或引件打识说原入，土个车图命辆该。

编委会

2018 年 9 月

第一篇 教材课后解析	1
第一章 函数与极限	2
第一节 改成节标题	2
第二节 改成节标题	2
第三节 改成节标题	2
第二章 导数与微分	3
第一节 改成节标题	3
第二节 改成节标题	3
第三节 改成节标题	3
第三章 微分中值定理与导数的应用	4
第一节 微分中值定理	4
第二节 洛必达法则	6
第三节 泰勒公式	9
第四节 函数的单调性与极值判定	12
第五节 曲线的凹凸性与拐点	16
第六节 函数图形的描绘	18
第七节 曲率	19
第八节 总习题三	21
第四章 一元函数积分学及其应用	25
第一节 定积分的概念	25
第二节 定积分的性质	25
第三节 微积分基本公式与基本定理	26
第四节 不定积分的基本积分法	28
第五节 有理函数的积分	31
第六节 定积分的算法	32
第七节 定积分的应用	34
第八节 反常积分	36
第九节 总习题四	39
第五章 无穷级数	43
第一节 常数项级数的概念与性质	43

目 录

第二节	常数项级数的审敛法	44
第三节	幂级数	46
第四节	函数展开成幂级数及其应用	48
第五节	傅里叶级数	49
第六节	总习题五	51
第六章	向量代数与空间解析几何	53
第一节	向量及其线性运算	53
第二节	向量的坐标	53
第三节	向量的乘积	54
第四节	平面与直线	54
第五节	空间曲面与空间曲线	55
	总习题六	56
第七章	多元函数微分学及其应用	58
第一节	平面点集与多元函数	58
第二节	多元函数的极限与连续性	58
第三节	全微分与偏导数	59
第四节	多元复合函数的微分法	60
第五节	隐函数的微分法	61
第六节	方向导数与梯度	62
第七节	微分法在几何上的应用	62
第八节	多元函数的极值	63
	总习题七	65
第八章	重积分	67
第一节	二重积分的概念及性质	67
第二节	二重积分的计算	68
第三节	三重积分	71
第四节	重积分的应用	73
	总习题八	75
第九章	曲线积分与曲面积分	77
第一节	第一型曲线积分——对弧长的曲线积分	77
第二节	第一型曲面积分——对面积的曲面积分	78

第三节	第二型曲线积分——对坐标的曲线积分	79
第四节	格林公式及其应用	79
第五节	第二型曲面积分——对坐标的曲面积分	80
第六节	高斯公式与斯托克斯公式	81
第七节	场论初步	82
总习题九	83
第十章	常微分方程	85
第一节	微分方程的基本概念	85
第二节	可变量分离的微分方程	86
第三节	一阶线性微分方程与常数变易法	88
第四节	全微分方程	89
第五节	某些特殊类型的高阶方程	89
第六节	高阶线性微分方程	92
第七节	常系数线性微分方程	93
总习题十	98
第二篇	历年试卷讲解	101
第一章	函数与极限	102
题型一	函数的概念与复合函数解析式及性质的确定	102
题型二	数列/函数极限的定义及存在性的判定	102
题型三	简单极限的计算	103
1.3.1	化简极限的基本方法	103
1.3.2	两个重要极限	104
1.3.3	等价无穷小及其替换定理	105
1.3.4	杂题	106
题型四	函数的连续性与间断点	107
第二章	导数与微分	110
题型一	导数与微分的定义以及两者的关系	110
题型二	导数的计算	111
2.2.1	复合函数求导	111
2.2.2	隐函数求导	111

2.2.3	参数方程求导	112
2.2.4	反函数求导	112
第三章	微分中值定理与导数的应用	113
题型一	较为复杂的极限的计算	113
题型二	导数的应用	115
3.2.1	求切线	115
3.2.2	判定单调性与极值/最值	115
3.2.3	判定拐点与凹凸性	117
3.2.4	求渐近线	118
3.2.5	函数性态的综合判断	120
题型三	微分中值定理的应用	121
第四章	一元函数积分学及其应用	124
题型一	定积分的定义、基本性质以及存在性判定	124
4.1.1	定积分(黎曼积分)的定义	124
4.1.2	定积分的基本性质	125
题型二	变限积分的概念、求导法则	126
题型三	不定积分的概念与微积分基本定理	128
题型四	不定积分与定积分的常用积分法(重点)	128
题型五	定积分的应用	132
4.5.1	平面曲线的弧长	132
4.5.2	平面图形的面积	132
4.5.3	规则几何体的体积	134
题型六	反常积分的概念与存在性判定(审敛),简单反常积分的计算	135
第五章	无穷级数	136
题型一	常数项级数的审敛	136
题型二	幂级数的审敛与计算和函数	138
题型三	任意项级数的计算	139
题型四	傅里叶级数的简单问题	140
综合题一		141
题型一	中值定理综合证明题	141
题型二	导数、积分综合性应用题	141

第六章	向量代数与空间解析几何	143
题型一	向量及其运算	143
题型二	三维空间中的面与线	144
6.2.1	直线与平面的概念及计算	145
6.2.2	认识曲面与曲线	148
第七章	多元函数微分学及其应用	149
第八章	重积分	150
题型一	重积分的概念、性质以及简单的累次积分换序	150
8.1.1	线性性质	150
8.1.2	对称性及轮换对称性	150
8.1.3	累次积分的交换积分次序	151
题型二	重积分的计算方法	154
8.2.1	直角坐标系下重积分的计算	154
8.2.2	极坐标系下二重积分的计算	156
8.2.3	柱、球坐标系下三重积分的计算	158
8.2.4	一般坐标系下重积分的计算	161
题型三	重积分的应用	162
8.3.1	求曲面面积	162
8.3.2	求立体体积	163
8.3.3	求转动惯量	164
题型四	涉及到重积分的综合题	164
第九章	曲线积分与曲面积分	168
题型一	第一类曲线积分	168
题型二	第二类曲线积分	168
题型三	第一类曲面积分	171
题型四	第二类曲面积分	172
第十章	常微分方程	176
综合题二		177
题型一	中值定理综合证明题	177
题型二	导数、积分综合性应用题	177

第三篇 附录	179
第一章 谈谈本科阶段的数学课程——从高等数学说起	180
第一节 引言	180
第二节 高等数学是什么以及怎么学	180
第三节 学好高等数学有什么必要性以及帮助	183
第四节 一些笔者推荐的课外数学资料	184
1.4.1 书籍	184
1.4.2 公共资源平台	185
第二章 谈单变量微积分里几个基本的概念	187
第一节 预备知识	187
第二节 一元函数微分学部分	187
2.2.1 连续、间断与可导	187
2.2.2 可导、极值与单调性	190
2.2.3 二阶可导与凹凸性	190
2.2.4 后记	191
第三节 一元函数积分学部分	191
2.3.1 定积分与不定积分，可积与原函数，以及变限积分	191
2.3.2 可积 (定积分存在) 的三类条件	191
2.3.3 原函数 (不定积分) 存在的条件	192
第四节 参考文献	192
第三章 高等数学常用公式表	193
第一节 基本初等函数导数、微分公式	193
第二节 基本导数、微分法则	194
第三节 常见高阶导数	194
第四节 微分中值定理	194
第五节 Taylor 公式	195
第六节 基本积分表	195

教材课后解析

目 录	第一章 函数与极限	2
	第二章 导数与微分	3
	第三章 微分中值定理与导数的应用	4
	第四章 一元函数积分学及其应用	25
	第五章 无穷级数	43
	第六章 向量代数与空间解析几何	53
	第七章 多元函数微分学及其应用	58
	第八章 重积分	67
	第九章 曲线积分与曲面积分	77
	第十章 常微分方程	85

第一章

函数与极限

 习题见第 102 页

第一节

改成节标题

 教材见页

第二节

改成节标题

 教材见页

添加内容

第三节

改成节标题

 教材见页

添加内容

第 二 章	导数与微分
-------	-------

 习题见第 110 页

第 一 节	改 成 节 标 题
-------	-----------

 教材见页

第 二 节	改 成 节 标 题
-------	-----------

 教材见页

添加内容

第 三 节	改 成 节 标 题
-------	-----------

 教材见页

添加内容

习题见第 113 页

第一节

微分中值定理

教材见 181 页

(A)

1. 证明: 显然 $f(x)$ 在 $[2, 3]$ 上连续、可导, 且 $f(2) = f(3)$ $\therefore f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$, 显然 $f'(x)$ 在 $[2, 3]$ 连续.

$$f'(2) = 12 - 24 + 11 = -1, f'(3) = 27 - 36 + 11 = 1$$

则由介值定理可知, 在 $[2, 3]$ 区间上 $f'(x)$ 必存在一点 ξ 使得 $f'(\xi) = 0$ 所以罗尔定理对 $f(x)$ 在区间 $[2, 3]$ 上成立.2. 证明: 显然函数在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上连续, 可导,

$$\frac{f(\pi/2) - f(0)}{\pi/2 - 0} = -\frac{2}{\pi}, f'(x) = -\sin x$$

又 $f'(0) = 0, f'(1) = -1$, 而 $-1 < -\frac{2}{\pi} < 0$ 所以由介值定理可知必存在一点 ξ 使得 $f'(\xi) = \frac{f(\pi/2) - f(0)}{\pi/2 - 0}$ 所以拉格朗日中值定理对 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上成立.3. 证明: 令 $p(x) = f(x) - \ln 2g(x)$, 显然其在 $[0, 1]$ 上连续, 可导 $p(0) = -\ln 2, p(1) = -\ln 2$, 由罗尔定理知, 在 $[0, 1]$ 上必存在一点 ξ 使得 $f'(\xi) = 0$, 即 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \ln 2 =$

$$\frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)}$$

所以在 $[0, 1]$ 上柯西中值定理对 $f(x)$ 和 $g(x)$ 成立.4. 证明: 令 $f(x) = \arctan x - \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 则 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = 0$, 即 $f(x)$ 恒等于一常数, 又 $f(0)=0$, 所以

$$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

5. 证明: 令 $f(x) = 2 \arctan(\sec x + \tan x) - x$, 则

$$f'(x) = 2 \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{1 + (\sec x + \tan x)^2} - 1 = 2(\sec x \tan x + \sec^2 x) \frac{\cos^2 x}{2} - 1 = 0$$

即 $f(x) = C$, 又 $f(0) = 2 \arctan 1 - 0 = 2 \times \pi/4 = \pi/2$.6. 解: 因为 $f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = f(4)$, 由罗尔定理可知, 在 $[0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, 4]$ 区间分别存在四个点 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, 使得 $f'(\xi_i) = 0$



7. 证明:

(1) 设 $f(x) = \sin x$ 显然函数在整个定义域内连续、可导, 则由拉格朗日中值定理可知:

$$\frac{\sin x - \sin y}{x - y} = f'(\xi) = \cos(\xi) \Rightarrow \left| \frac{\sin x - \sin y}{x - y} \right| \leq 1, \text{ 即 } |\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$

(2) 设 $f(x) = \arctan(x)$, 显然函数在整个定义域内连续、可导, 则由拉格朗日中值定理可知: 在 $[a, b]$ 区间上有

$$\left| \frac{\arctan(a) - \arctan(b)}{a - b} \right| = |f'(\xi)| = \left| \frac{1}{1 + \xi^2} \right| \leq 1, \text{ 即 } |\arctan a - \arctan b| \leq |a - b|.$$

$$(3) \text{ 设 } f(x) = \ln x, f'(\xi) = \frac{1}{\xi} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{\ln \frac{a}{b}}{a - b}$$

$$\text{又因为 } b < \xi < a, \text{ 所以 } \frac{1}{a} < f'(\xi) < \frac{1}{b}, \text{ 即 } \frac{a - b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a - b}{b}.$$

8. 证明: $f(x) = e^x, g(x) = \cos x$, 二者在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上均连续、可导, 并且对任意 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 都有 $g(x) \neq 0$,

由柯西中值定理, 存在 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使得 $\frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{\cos x_1 - \cos x_2} = -\frac{e^\xi}{(-\sin \xi)} > \frac{e^\xi}{1} > e^{x_1}$, 即 $e^{x_2} - e^{x_1} > (\cos x_1 - \cos x_2)e^{x_1}$

9. 证明: 设 $f(x) = x^p$, 则由拉格朗日中值定理知, $\exists \xi \in (y, x)$, 使得 $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{x^p - y^p}{x - y} = p\xi^{p-1}$

$$\therefore py^{p-1}(x - y) < x^p - y^p < px^{p-1}(x - y)$$

10. 证明: 设 $F(x) = f(x)e^{-kx}$, 函数在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 则 $F(a) = f(a)e^{-ka} = 0 = F(b)$

由罗尔定理可知, 在 (a, b) 内至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得:

$$F'(\xi) = f'(\xi)e^{-k\xi} + f(\xi)e^{-k\xi}(-k) = 0, \text{ 即 } \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = k.$$

11. 证明: 设 $F(x) = f(x)(1 - e^{-x})$ 其在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导. 又 $F(0) = f(0)(1 - 1) = 0 = F(1)$,

由罗尔定理可得 $\exists \xi \in (0, 1), F'(\xi) = f'(\xi)(1 - e^{-\xi}) + f(\xi)(e^{-\xi}) = 0$

12. 证明: 设 $f(x) = e^x - ax^2 - bx - c$, 利用反证法, 设若方程有至少 4 个根, $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$, 则 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) = 0$; 又 $f(x)$ 在定义域内至少 4 阶连续、可导, 则由罗尔定理可知, 至少存在点 ξ_1, ξ_2, ξ_3 , 使得 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f'(\xi_3) = 0$. 再次利用罗尔定理, 至少存在点 α, β , 使得 $f''(\alpha) = f''(\beta) = e^x - 2a = 0$ 由罗尔定理可知, 在 (α, β) 内至少存在一点使得 $f'''(\gamma) = 0$.

而 $f'''(x) = e^x > 0$ 即不可能找到一点使得 $f(x)$ 的三阶导数为零, 所以假设不成立, 即方程至多有 3 个根.

13. 证明: 令 $F(x) = f(x)\tan x$ 其在 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上连续, 在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 内可导. 又 $F(0) = F(\frac{\pi}{4}) = 0$, 所以由罗尔定理可知, 至少存在一点 $c \in (0, \frac{\pi}{4})$ 时, 使得 $F'(c) = 0$, 即 $2f(c) + \sin 2cf'(c) = 0$.

14. 证明: 令 $F(x) = f(x) - x$, 此函数在此函数在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 又因为 $F(0) = 0, F(1/2) = 1/2, F(1) = -1$, 由介值定理可知, 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 之间存在 c 使得 $F(c) = 0 = F(0)$ 由罗尔定理可知, 在 $[0, c]$ 内至少存在一点 ξ 使得 $f'(\xi) = 1$.

15. 提示: 令 $g(x) = x^2$, 对 $f(x)$ 和 $g(x)$ 用柯西中值定理即可得证.

16 提示: 令 $g(x) = \ln x$, $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上用柯西中值定理可证.

(B)

17. 证明: 证明: 因为 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 且在 $[0, 2]$ 上必有最大值 M 和最小值 m , 于是 $m \leq f(0) \leq M, m \leq f(1) \leq M, m \leq f(2) \leq M$



$$\text{故 } m \leq \frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3} \leq M$$

因为 $f(c) = 1 = f(3)$, 且 $f(x)$ 在 $[c, 3]$ 上连续, 在 $(c, 3)$ 内可导, 所以由罗尔定理可知, 必存在 $\xi \in (c, 3) \subset (0, 3)$, 使 $f'(\xi) = 0$

18. 证明: 因为 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上存在三阶函数, 所以 $F(x) = x^3 f(x)$ 在 $[0, a]$ 上存在三阶函数, 且 $F(0) = F(a) = 0$, 则 $F(x), F'(x), F''(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 在 $(0, a)$ 上可导; $F'(x) = 3x^2 f(x) - x^3 f'(x), F''(x) = 6xf(x) - x^3 f''(x)$;

由罗尔定理知在 $(0, a)$ 内至少存在一点 c 使得 $F'(c) = 0$ 又 $F'(0) = 0$

由罗尔定理可知在 $(0, c)$ 内至少存在一点 z 使得 $F''(z) = 0$, 又 $F''(0) = 0$,

由罗尔定理可知, 在 $(0, z)$ 内至少存在一点 ξ 使得 $F'''(\xi) = 0$;

又 $(0, z) \subset (0, c) \subset (0, a)$, 得证.

19. 证明: 因为 $y = f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有 n 阶导数, 由柯西中值定理, 得: $\exists \xi_1 \in (0, x)$, 使

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f(x) - f(0)}{x^n - 0^n} = \frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}} = \frac{f'(\xi_1) - f'(0)}{n\xi_1^{n-1} - 0}$$

反复运用柯西中值定理, 得: $\exists \xi_2 \in (0, \xi_1), \xi_3 \in (0, \xi_2), \dots, \xi \in (0, \xi_{n-1}) \subset (0, x)$

$$\text{使得: } \frac{f(x)}{x^n} = \frac{f'(\xi_1) - f'(0)}{n\xi_1^{n-1} - 0} = \frac{f''(\xi_2) - f''(0)}{n(n-1)\xi_2^{n-2} - 0} = \dots = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n}$$

$$\text{即 } \exists \theta \in (0, 1), \text{ 使得 } \theta x = \xi \in (0, x), \text{ 使得 } \frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}, (0 < \theta < 1)$$

20. 证明: 设 $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, 由题知 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 内可导, 则

$$F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \text{ 又 } \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} \equiv 0$$

$$\text{即 } f'(x)g(x) - f(x)g'(x) \equiv 0, \text{ 即 } F'(x) \equiv 0 \Rightarrow F(x) = C$$

$$\text{即 } f(x) = Cg(x).$$

第二节

洛必达法则

教材见 190 页

(A)

1. 解析:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = 2$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \tan(ax)}{\ln \tan(bx)} (a > 0, b > 0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\tan(ax)} \cdot \frac{a}{\cos^2(ax)}}{\frac{1}{\tan(bx)} \cdot \frac{b}{\cos^2(bx)}} = \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2bx}{\sin 2ax} = \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(2bx)}{\cos(2ax)} \cdot \frac{2b}{2a} = 1$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3\sec^2 3x}{\sec^2 x} = 3 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{\cos 3x} \right)^2 = 3 \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{3 \sin 3x} \right)^2 = \frac{1}{3}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} (a \neq 0) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{m}{n} a^{m-n}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \ln(1+x) - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{1+x}}{2} = -\frac{1}{2}$$



$$(6) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x (\ln x + 1) - 1}{\frac{1}{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x (\ln x + 1)^2 + x^{x-1}}{-\frac{1}{x^2}} = -2$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 - \tan^2 x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{(x + \tan x)(x - \tan x)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + \tan x} \cdot \frac{x^3}{x - \tan x} \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{1 - \sec^2 x} = -\frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\tan^2 x} = -\frac{3}{4}.$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x^2(1+x^2)} = \frac{1}{3}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sec x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \cos x}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} = 1$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x - x^2}{x^2 \tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x + x)(\tan x - x)}{x^4} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x + x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{x^2} = \frac{2}{3}$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \ln x - 1}{(x-1) \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1) + x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+1+\ln x} = \frac{1}{2}$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \cdot \ln \frac{\tan x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\tan x} \cdot \frac{\sec^2 x \cdot x - \tan x}{x^2}}{2x}} \\ = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x \cdot (x - \sin x \cos x)}{2x^3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{6x^2}} \\ = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x)^2}{6x^2}} = e^{\frac{1}{3}}$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \frac{\pi x}{2}}{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)^2 \cdot \frac{\pi}{2}}{\cos^2 \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(1-x)}{\sin \pi x} = -2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\cos \pi x \cdot \pi} = \frac{2}{\pi}$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\tan \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{\sin x \ln x}{\cos x}} = e^0 = 1$$

2. 解析:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x} \quad \text{此极限不存在, 洛必达法则不适用.}$$

$$\text{原极限} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot x \cdot \sin \frac{1}{x} = 1 \cdot 0 = 0$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \quad \text{此极限不存在, 洛必达法则不适用.}$$

$$\text{原极限} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1$$

3. 解析: 因 $f(x)$ 具有一阶连续导数, 从而 $f(x)$ 连续, $x \rightarrow 0$ 时, $f(1 - \cos x) \rightarrow f(0) = 0$,

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cos x)}{\tan x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(1 - \cos x) \cdot \sin x}{\sec^2 x^2 \cdot 2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} f'(1 - \cos x) = \frac{1}{2} f'(0) = 1$$

4. 证明: 当 $h \rightarrow 0$ 时, $f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \rightarrow 0$, 以及 $h^2 \rightarrow 0$ 且分子、分母 (视为 h 的函数) 都有导数, 又注意到分母的导数, $2h \neq 0$, ($h \rightarrow 0, h \neq 0$), 故对



$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} \\
 &= 4 \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2}{\pi^2 e^{\sin \pi x} (\cos^2 \pi x - \sin \pi x) - 9\pi^2 e^{-\sin 3\pi x} (\cos^2 3\pi x + \sin 3\pi x)} \\
 &= 4 \cdot \frac{2}{-\pi^2 e + 9\pi^2 e} = \frac{1}{\pi^2 e}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1-\cos x)}{x(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}) \cdot [\ln(1+x) - x]} \\
 &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\frac{1}{1+x} - 1} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 - 3^{\arctan^2 \sqrt{x}}\right)^{\frac{2}{\sin x}} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sin x} (2 - 3^{\arctan^2 \sqrt{x}})} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sin x} (1 - 3^{\arctan^2 \sqrt{x}})} \\
 &= e^{-2 \ln 3 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 \arctan^2 \sqrt{x} \cdot 2 \arctan \sqrt{x}}{\cos x} \cdot \frac{1}{1+x}} \\
 &= e^0 = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a + be^x)}{\sqrt{m + nx^2}} (b > 0, n > 0) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{\frac{a}{e^x} + b} \cdot \frac{\sqrt{m + nx^2}}{nx} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{nx}{\sqrt{m + nx^2}}}{n} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{x^2} + n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \ln(n \sin \frac{1}{n}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln(x \sin \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (x \sin \frac{1}{x} - 1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} (\frac{\sin x}{x} - 1) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{6x} = -6
 \end{aligned}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - x \ln a}{b^x - \ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(a^x - x \ln a) - \ln(b^x - \ln b)}{x^2}} = e^{\frac{1}{2}(\ln^2 a - \ln^2 b)}$$

$$\begin{aligned}
 (7) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-\cos x} \ln(\frac{\arcsin x}{x})} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-\cos x} (\frac{\arcsin x}{x} - 1)} \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{x(1-\cos x)}} = e^{2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{x^3}} = e^{2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{3x^2}} \\
 &= e^{2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{3x^2 \sqrt{1-x^2}}} = e^{2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}} \\
 &= e^{2 \cdot \frac{1}{6}} = \sqrt[3]{e}
 \end{aligned}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x+1}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x}} = e$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^n = e$$

$$5. \text{ 解: 由于 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} [\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} - 1] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = -\frac{1}{2}$$



所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{2}} = f(0)$ 即函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

6. 解析: 若使 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 1)$ 连续, 则满足 $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$;

$$\begin{aligned} \text{又 } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \frac{1}{\pi} + \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{1}{\sin \pi x} - \frac{1}{\pi(1-x)} \right] = d \frac{1}{\pi} + \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\pi(1-x) - \sin \pi x}{\pi(1-x) \sin \pi x} \\ &= \frac{1}{\pi} + \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\pi - \pi \cos \pi x}{-\pi \sin \pi x + \pi^2(1-x) \cos \pi x} \\ &= \frac{1}{\pi} + \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\pi^2 \sin \pi x}{-\pi^2 \cos \pi x + \pi^2 + \pi^2(1-x) \sin \pi x} \\ &= \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

故当 $f(1) = \frac{1}{\pi}$ 时, $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 1)$ 上连续.

第三节 泰勒公式

教材见 199 页

1. 解析: $f(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$, $f(-1) = 5$; $f'(x) = 3 + 10x - 6x^2$, $f'(-1) = 22$;
 $f''(x) = 10 - 12x$, $f''(-1) = -12$; $f'''(x) = -12$, $f'''(-1) = -12$;

$$\therefore f(x) = 5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3$$

.

2. 解析: 令 $f(x) = \sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt{1-3x+x^2}$, $f(0) = 0$;

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1-2x+x^3)^{-\frac{1}{2}}(-2+3x^2) - \frac{1}{3}(1-3x+x^2)^{-\frac{2}{3}}(-3+2x), f'(0) = 0;$$

$$\text{同理可得 } f''(0) = \frac{1}{3}; f'''(0) = 6$$

故

$$f(x) = \sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt{1-3x+x^2} = \frac{1}{6}x^2 + x^3 + o(x^3)$$

.

3. 解析: $f(x) = \sqrt{x}$, $f(1) = 1$; $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $f'(1) = \frac{1}{2}$; $f''(x) = -\frac{1}{4}(x)^{-\frac{3}{2}}$, $f''(1) = -\frac{1}{4}$;

$$\therefore f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + o[(x-1)^2]$$

.

4. 解析: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, $f(-3) = \frac{1}{2}$; $f'(x) = \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}$, $f'(-3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^3}$;

$$f''(x) = \frac{3}{4}(1-x)^{-\frac{5}{2}}, f''(-3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2^5}; f'''(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2}(1-x)^{-\frac{7}{2}}, f'''(-3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2^7};$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^3}(x+3) + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2^5}(x+3)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2^7}(x+3)^3 + o[(x+3)^3]$$



5. 解析: $f(x) = \arctan x, f(0) = 0; f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, f'(0) = 1;$
 $f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, f''(0) = 0; f'''(x) = -\frac{2}{(1+x^2)^2} - \frac{4x^2}{(1+x^2)^3}, f'''(0) = -2;$

$$\therefore f(x) = x - \frac{2}{3!}x^3 + o(x^3).$$

6. 解析: $f(x) = xe^x, f'(x) = e^x + xe^x, f''(x) = 2e^x + xe^x, \dots, f^{(n)}(x) = ne^x + xe^x;$
 $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 2, \dots, f^{(n)}(0) = n;$ 并得到 $f^{(n)}(\xi) = (n+1+\xi)e^\xi$

$$\therefore f(x) = x + x^2 + \frac{1}{2!}x^3 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}x^n + \frac{(n+1+\xi)e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} (\xi \in (0, x))$$

7. 解析: $f(x) = \frac{1}{1-x},$

因为 $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, f''(x) = -\frac{2(1-x)}{(1-x)^4} = -\frac{2}{(1-x)^3}, f'''(x) = \frac{2 \cdot 3 \cdot (1-x)^2}{(1-x)^6} = \frac{2 \cdot 3}{(1-x)^4}$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot n!}{(1-x)^{n+1}}, f^{(n+1)}(\xi) = \frac{(-1)^{n+2}(n+1)!}{(1-\xi)^{n+2}}$$

所以 $f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = -2, f'''(0) = 3! \dots f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}n!$

$$\therefore f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + (-1)^{n+1}x^n + \frac{(-1)^{n+2}}{(1-\xi)^{n+2}}x^{n+1} (\xi \in (0, x))$$

8. 解析: 由已知 $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{(-1)^{2n-1}}{2n}x^{2n} + o(x^{2n})$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{(-1)^{2n-1}}{2n}x^{2n} + o(x^{2n})$$

$$\therefore \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1}) + o(x^{2n})$$

9. 解析:

(1) 令 $f(x) = \sin x$, 则 $f^{(n)}(x) = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2}) (n = 0, 1, 2, \dots)$, 所以

$$f^{(n)}(0) = 0 (n = 2m, m = 0, 1, 2, \dots), f^{(n)}(0) = (-1)^n (n = 2m+1, m = 0, 1, 2, \dots),$$

故而 $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots + \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1} + R_{2m}(x)$

$$R_{2m}(x) = \frac{\sin[\theta x + (2m+1) \cdot \frac{\pi}{2}]}{(2m+1)!}x^{2m+1} = (-1)^m \frac{\cos \theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1} (0 < \theta < 1)$$

当 $m = 2$ 时, 得近似 $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$, 又 $|x| \leq \frac{1}{2}$

此时误差

$$|R_4(x)| = \left| \frac{\sin[\theta x + \frac{5\pi}{2}]}{5!}x^5 \right| \leq \frac{|x^5|}{5!} < 2.6 \times 10^{-4}$$

(2) 因为 $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n + R_n(x)$ 其中 $R_n(x) = \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)(a-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{a-n-1}x^{n+1} (0 < \theta < 1).$

所以 $(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots + \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2}-1) \dots (\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n + R_n(x)$



当 $n = 2$ 时, 得近似值 $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$,

当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 此时误差 $R_3(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3!} (1+\theta x)^{-\frac{1}{2}} x^3 < 6.25 \times 10^{-2}$

10. 解析: $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m} + R_{2m+1}(x)$,

其中 $R_{2m+1}(x) = \frac{\cos[\theta x + (m+1)\pi]}{(2m+2)!}x^{2m+2} = (-1)^{m+1} \cdot \frac{\cos(\theta x)}{(2m+2)!}x^{2m+2} (0 < \theta < 1)$

此时有 $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!}$,

则 $|R_3(x)| = \frac{\cos(\theta x)}{4!} \cdot x^4 \leq \frac{x^4}{4!} \leq 0.0001, \therefore |x| < 0.22134$

11. 解析:

(1) $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4), e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$,

所以 $\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) - 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - o(x^4) = -\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = -\frac{1}{12}$

(2) 因为 $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \sin x = x + o(x)$,

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \frac{x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) - x - x^2}{x^3} = \frac{1}{2}$

(3) $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^2), \therefore e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o(\frac{1}{x^3})$,

所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} [(x^3 - x^2 + \frac{x}{2})e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 - 1}] = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - x^2 + \frac{x}{2}) \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o(\frac{1}{x^3}) \right) = -\sqrt{x^6 - 1} = \frac{1}{6}$

(4) $\sin x = x + o(x), \therefore \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}) = \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{x + o(x)}) = 0$

13. 解析: 由题意可得: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(x)}{2}$

14. 题目有误, 无法证明.

15. 证明: $\therefore f(1) = f(\frac{1}{2}) + f'(\frac{1}{2})(1 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2!}f''(\xi_1)(1 - \frac{1}{2})^2$,

$f(0) = f(\frac{1}{2}) + f'(\frac{1}{2})(0 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2!}f''(\xi_2)(0 - \frac{1}{2})^2$, 其中 $\frac{1}{2} < \xi_1 < 1, 0 < \xi_2 < \frac{1}{2}$

$\therefore f(1) + f(0) = 2f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{8}[f''(\xi_1) + f''(\xi_2)]$, 即 $\frac{1}{2} = \frac{1}{8}[f''(\xi_1) + f''(\xi_2)]$.

令 $\xi = \{\xi_1, \xi_2\}$, 使得 $4f''(\xi) = \max\{f''(\xi_1), f''(\xi_2)\}$

则有 $\frac{1}{2} = \frac{1}{8}[f''(\xi_1) + f''(\xi_2)] \leq \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot f''(\xi)$, 即 $2 \leq f''(\xi), (0 < \xi_2 < \frac{1}{2})$,

在 $(0, 1)$ 内至少有一点 ξ 使得 $f''(\xi) \leq 2$.

(B)

16. 解析: $\therefore e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$,

$\therefore e^{2x-x^2} = 1 + 2x - x^2 + \frac{1}{2}(2x - x^2)^2 + \frac{1}{6}(2x - x^2)^3 + o(x^6) = 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5)$

18. 解: $f^k(x) = chx, k = 2n; f^k(x) = shx, k = 2n + 1$;

$ch(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{2n!}f^{(2n)}(0)x^{2n} + \frac{1}{(2n+1)!}f^{(2n+1)}(0)x^{2n+1} + \frac{ch\xi}{(2n+2)!}x^{2n+2}$

$= 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{2n!}x^{2n} + \frac{ch\xi}{(2n+2)!}x^{2n+2} \cdot (\xi \in (0, x))$

20. 解析: 要使得 $x - (a + b \cos x) \sin x$ 为关于 x 的 5 阶无穷小, 即使得



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (a + b \cos x) \sin x}{x^5} = c (c \neq 0),$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5), \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5),$$

$$\text{原式} = \frac{x - a(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5)) - b(x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{3!}x^3 - 90\frac{1}{2!3!}x^5 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5))}{x^5}$$

$$\text{欲使得 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (a + b \cos x) \sin x}{x^5} = c (c \neq 0) \text{ 即 } 1 - a - b = 0, \frac{1}{3!}a + \frac{1}{2!}b + \frac{1}{3!}b = 0, a = \frac{4}{3}, b = -\frac{1}{3}.$$

$\therefore a = \frac{4}{3}, b = -\frac{1}{3}$ 时 $x - (a + b \cos x) \sin x$ 为 x 的 5 阶无穷小.

第四节

函数的单调性与极值判定

教材见 214 页

1. 解析: (1) A (2) D (3) B (4) A (5) A (6) B (7) B.

2. 解析:

(1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $f'(x) = 3 - 3x^2$.

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \pm 1$

当 $-1 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$ 故在 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调增加;

当 $x < -1$ 或 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1), (1, +\infty)$ 上单调减少.

(2) $f(x)$ 的定义域为 $x \geq 0$, $f'(x) = \frac{100 - x}{2\sqrt{x}(x + 100)^2}$

故 $f(x)$ 在 $[0, 100)$ 上单调增加, 在 $(100, +\infty)$ 上单调减少.

(3) 由于 $f'(x) = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$, 易知 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调增加, 在 $(-\infty, -1), (1, +\infty)$ 上单调减少.

(4) 当 $x \in (k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) (k \in \mathbb{Z})$ 时, $f'(x) = 1 + 2\cos 2x$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

当 $x \in (\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi) (k \in \mathbb{Z})$ 时, $f'(x) = 1 - 2\cos 2x$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$

由极值的第一充分条件知: $f(x)$ 在 $(\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}) (k \in \mathbb{Z})$ 内单调增加, 在 $(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}) (k \in \mathbb{Z})$ 内单调减少.

(5) $f'(x) = \frac{(x - 3)(x + 1)}{4(x - 1)^2}$

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1), (3, +\infty)$ 上单调增加, 在 $(-1, 1), (1, 3)$ 上单调减少.

(6) $f'(x) = \frac{2x - x^2 \ln 2}{2x}$, 故 $f(x)$ 在 $(0, \frac{2}{\ln 2})$ 上单调增加, 在 $(-\infty, 0), (\frac{2}{\ln 2}, +\infty)$ 上单调减少.

(7) $f'(x) = x^{n-1}e^{-x}(n - x)$, 故 $f(x)$ 在 $[0, n)$ 上单调增加, 在 $(n, +\infty)$ 上单调减少.

(8) 利用对数求导法, 得 $f'(x) = \frac{2(3x - 2a)}{3(2x - a)^{\frac{2}{3}}(x - a)^{\frac{1}{3}}}$.

故 $f(x)$ 在 $(\frac{2}{3}a, a)$ 上单调减少, 在 $(-\infty, \frac{2}{3}a), (a, +\infty)$ 上单调增加.

3. 解析:

(1) $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0, \pm 1$. $f''(x) = 4(3x^2 - 1)$, $f''(0) < 0$, $f''(\pm 1) > 0$, 故该函数在 $x = 0$ 处取得极大值 5, 在 $x = \pm 1$ 处该函数取得极小值 4.



(2) $f'(x) = \frac{x(x+4)(x-1)}{(x+1)^3}$ 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 0, -4, 1$. $x = -1$ 处导数不存在. 列表讨论易知: 极大值为, $f(-4) = -\frac{32}{3}$, $f(0) = 0$, 极小值为 $f(1) = -\frac{1}{4}$.

$$(3) f'(x) = \begin{cases} 3-3x^2 & x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3}) \\ 3x^2-3 & x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty) \end{cases}$$

根据极值的第一充分条件知: $x = 0, \pm\sqrt{3}$ 处该函数取得极小值 0, $x = \pm 1$ 处该函数取得极大值 2.

$$(4) f'(x) = e^x (\cos x + \sin x).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}\pi + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

易知极大值为 $f\left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}$, 极小值为 $f\left(-\frac{1}{4}\pi + 2k\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{4}\pi + 2k\pi}$

$$(5) f'(x) = 2x + \frac{54}{x^2}. f'(x) = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ 易知极小值为 } f(-3) = 27.$$

$$(6) f'(x) = \frac{1-x}{1+x^2}. f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ 故极大值为 } f(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

4. 证明:

(1) 令 $f(x) = e^x - xe^x - 1$, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $f(0) = 0$. $x > 0$ 时, $f'(x) = -xe^x$, 显然 $f'(x) < 0$. 故 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调减少, $x > 0$ 时, $f(x) < f(0) = 0$, 即 $e^x - 1 < xe^x$.

(2) 令 $f(x) = \sin x + \cos x - 1 - x + x^2$, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $f(0) = 0$.

$x > 0$ 时, $f'(x) = \cos x - \sin x + 2x - 1$, 显然 $f'(0) = 0$. 故 $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加, 即 $f'(x) > f'(0) = 0$,

进而有 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内单调增加, $x > 0$ 时, $f(x) > f(0)$, 即 $\sin x + \cos x > 1 + x - x^2$.

(3) 令 $f(x) = \tan x - x - \frac{1}{3}x^3$, $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上连续, 且 $f(0) = 0$.

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $f'(x) = \sec^2 x - 1 - x^2 = \tan^2 x - x^2 > 0$, 故 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加, 从而 $f(x) > f(0) = 0$, 即 $\tan x > x + \frac{1}{3}x^3$.

(4) 令 $f(x) = 2^x - x^2$, $f(x)$ 在 $(4, +\infty)$ 上连续, 且 $f(4) = 0$. $x > 4$ 时, $f'(x) = 2^x \ln 2 - 2x$, $f'(4) > 0$, $f''(x) = 2^x (\ln 2)^2 - 2 > 0$, 故而 $f'(x)$ 在 $[4, +\infty)$ 内单调增加, 即当 $x > 4$ 时, $f(x) > f(4) = 0$, 于是 $2^x > x^2$, 得证.

(5) 令 $f(x) = \ln(1+x) - \frac{\arctan x}{1+x}$, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内连续, 且 $f(0) = 0$.

$$x > 0 \text{ 时, } f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{\arctan x}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{\arctan x}{(1+x)^2} + \frac{x^2}{(1+x)(1+x^2)} > 0$$

即 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加, $f(x) > f(0) = 0$, 即 $\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}$.

(6) 令 $f(x) = 1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内连续, 且 $f(0) = 0$.

$x > 0$ 时, $f'(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > 0$, 即 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加, $f(x) > f(0) = 0$, 即 $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2}$.

5. 解析:

(1) 函数 $f(x)$ 在 $[-3, 10]$ 上连续, 必能取得最大值和最小值.

$f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$, $f(x)$ 有一个驻点 $x = 2$. 因为 $f(-3) = 27$, $f(2) = 2$, $f(10) = 66$ 比较后知 $f(x)$ 在 $[-3, 10]$ 上的最大值为 $f(10) = 66$, 最小值为 $f(2) = 2$.



(2) $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. 又因为 $x > 0$, 所以 $x = 1$ 是唯一的驻点. $f(1) = \frac{1}{2}$ 是极大值点即是最大值点. 又因为对任意的 $x > 0$ 有 $f(x) > 0$, 故 $f(0) = 0$ 即为最小值点.

(3) 当 $1 \leq x \leq 2$ 时, $f(x) = -x^2 + 3x - 2$;

当 $-10 \leq x < 1$ 或 $2 < x \leq 10$ 时, $f(x) = x^2 - 3x + 2$;

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$, $f(-10) = 132$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$, $f(10) = 72$, 比较得 $f(x)$ 的最大值为 $f(-10) = 132$, 最小值为 $f(1) = f(2) = 0$.

(4) $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$

由 $f(-5) = -5 + \sqrt{6}$, $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}$, $f(1) = 1$ 得, 函数 $f(x)$ 的最大值为 $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}$, 最小值为 $f(-5) = -5 + \sqrt{6}$.

6. 解析: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 10 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$,

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 1$, 易得 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 内单调减少, 在 $(-\infty, 1], [3, +\infty)$ 内单调增加, $f(1) = -6 < 0$, $f(3) = -10 < 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 所以 $f(x)$ 仅在 $(3, +\infty)$ 内又一个实根.

7. 解析: 令 $f(x) = \ln x - ax \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} - a$. $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{a}$, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调增加, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调减少, $f\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a - 1$, $f(x)$ 的根的数目取决于 a 的取值范围.

当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时, $f\left(\frac{1}{a}\right) > 0$, 此时 $\ln x = ax$ 有两个实根;

当 $a = \frac{1}{e}$ 时, $f\left(\frac{1}{a}\right) = 0$, 此时 $\ln x = ax$ 有唯一实根 $x = e$;

当 $a > \frac{1}{e}$ 时, $f\left(\frac{1}{a}\right) < 0$, 此时 $\ln x = ax$ 无实根.

8. 证明: $f(x) = e^x - x - 1 \Rightarrow f'(x) = e^x - 1$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. 当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 且 $f(0) = 0$, 故而 $e^x = x + 1$ 只有一个实根.

9. 解析: $f(x) = x^5 + 2ax^3 + 3bx + 4c \Rightarrow f'(x) = 5x^4 + 6ax^2 + 3b$, $\Delta = 36a^2 - 60b < 0$, 故 $f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内为增函数.

又 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 所以方程 $x^5 + 2ax^3 + 3bx + 4c = 0$ 有且仅有一个实根.

10. 解析: $f'(x) = \frac{x(2b^2 - 3x^2)}{\sqrt{b^2 - x^2}}$. $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{\sqrt{6}b}{3}$ ($0 \leq x \leq b$).

又因为 $f(0) = f(b) = 0$, $f\left(\frac{\sqrt{6}b}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}b^3$. 比较知 $f(x)$ 的最大值为 $f\left(\frac{\sqrt{6}b}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}b^3$, 最小值为 $f(0) = f(b) = 0$.

11. 解析: $f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$, $f'(x) = -\frac{x^n}{n!}e^{-x}$

当 n 为偶数时, $f'(x) \leq 0$ 恒成立, 故此时 $f(x)$ 无极值;

当 n 为奇数时, 令 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, 由极值的第一充分条件知: $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内为增函数, 在 $(0, +\infty)$ 内为减函数, 该函数在 $x = 0$ 处取得极大值 $f(0) = 1$.

12. 解析: 设内接矩形与椭圆在第一象限的交点为 $P(a \cos \theta, b \sin \theta)$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$), 内接矩形的面积记为



S, 则

$$S = 4ab \sin \theta \cos \theta = 2ab \sin 2\theta$$

显然当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时, $S_{\max} = 2ab$, 即为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的内接矩形中面积的最大值.

13. 解析: 设切点坐标为 $P\left(\frac{1}{2}\cos\alpha, \sin\alpha\right)$, 所求的三角形面积为 S, 则切线的直线方程为

$$(2\cos\alpha)x + (\sin\alpha)y = 1$$

切线与坐标轴的交点为 $A\left(\frac{1}{2\cos\alpha}, 0\right), B\left(0, \frac{1}{\sin\alpha}\right)$, 于是该切线与坐标轴所围成的三角形的面积为

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2\cos\alpha} \times \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{2\sin 2\alpha}$$

显然当 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, 即切点坐标为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时, $S_{\min} = \frac{1}{2}$.

14. 解析: 设圆锥形漏斗的高为 h, 体积为 V, 由题意知

$$V = \frac{1}{3}\pi(400 - h^2)h, 0 < h < 20 \Rightarrow V' = \frac{1}{3}\pi(400 - 3h^2)$$

$V' = 0 \Rightarrow h = \frac{20}{\sqrt{3}}$ 因为 $V = -2\pi h < 0$, 故当 $h = \frac{20}{\sqrt{3}}$ 时取得极大值同时也是最大值.

15. 解析: 设漏斗的高度为 h, 体积为 V, 由题意得

$$V = \frac{1}{3}\pi(R^2 - h^2)h \Rightarrow V' = \frac{1}{3}\pi(R^2 - 3h^2)$$

令 $V' = 0 \Rightarrow h = \frac{R}{\sqrt{3}}$, 截取的扇形弧长为 $l = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi R$, 此时留下的扇形中心角为 $\phi = 2\pi - \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$.

16. 解析: 物体受到桌面的支持力为 F_N 由力的正交分解原理有

$$\begin{cases} F \sin \alpha + F_N = mg \\ F \cos \alpha = \mu F_N \end{cases} \quad \text{解得 } F = \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$$

$$\Rightarrow F' = \frac{-\mu mg(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)}{(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)^2}$$

令 $F' = 0 \Rightarrow \tan \alpha = \mu = \frac{1}{4}$, 即力与水平线的夹角为 $\alpha = \arctan \frac{1}{4}$ 时, 力 F 最小.

17. 解析: $f(x) = (x-5)^2 \sqrt[3]{(x+1)^2}$ 运用对数求导法

$$f'(x) = \left(\frac{2}{x-5} + \frac{2}{3(x+1)}\right)(x-5)^2 \sqrt[3]{(x+1)^2} = \frac{4(2x-1)(x-5)}{3\sqrt[3]{x+1}}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 5, x = -1$ 时该函数不可导.

所以该函数在 $\left(-1, \frac{1}{2}\right), (5, +\infty)$ 上为单调递增函数, 在 $(-\infty, -1), \left(\frac{1}{2}, 5\right)$ 为单调递减函数.

$$18. \text{ 解析: } f(x) = |x|e^{-|x-1|} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} (1-x)e^{-(x-1)} & x > 1 \\ (1+x)e^{x-1} & 0 < x < 1 \\ -(1+x)e^{x-1} & x < 0 \end{cases}$$

显然 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1), (0, 1)$ 内为增函数; $f(x)$ 在 $(-1, 0), (1, +\infty)$ 故该函数取得极大值为 $f(-1) = e^{-2}, f(1) = 1$, 取得极小值为 $f(0) = 0$.

19. 证明: $f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} - e^{-x} - \sin x, f'(x) = x + e^{-x} - \cos x$



$f'(0) = 0, f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续. 当 $0 < x < 1$ 时, $f''(x) = 1 - e^{-x} + \sin x > 0$, 故 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 上也为增函数, 从而 $f'(x) > 0$, 即可表明 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上也为增函数, $f(x) > f(0) = 0$.

所以当 $0 < x < 1$ 时, $e^{-x} + \sin x < 1 + \frac{x^2}{2}$.

20. 证明: 对任意的 $x \neq 0$ 有,

$$e^{-\frac{3}{|x|}} \leq e^{-\frac{1}{|x|} \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right)} \leq e^{-\frac{1}{|x|}}, \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{3}{|x|}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{|x|}} = 0.$$

由极限的夹逼性可知, $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{|x|} \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right)} = f(0) = 0$, 从而 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

当 $x \neq 0$ 时, $f(x)$ 可导, 又因为

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \left(2 + \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x} \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right)} \operatorname{sgn} x \neq 0$$

$x = 0$ 显然为该函数的极值点, 也为唯一的极值点.

$$21. \text{证明: } f(x) = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q} - x, f'(x) = x^{p-1} - 1$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上为递增函数. $f(1) = 0$ 为函数的唯一的极值点同时也是最小值点. 所以 $x > 0$ 时有 $f(x) \geq f(1) = 0$, 即 $\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q} \geq x$.

$$22. \text{证明: } f(x) = (x^2 - 1) \ln x - (x - 1)^2, f(1) = 0.$$

$f'(x) = 2x \ln x - x - \frac{1}{x} + 2, f'(1) = 0$, 由函数表达式易知, 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上为减函数;

由 $f''(x) = 1 + 2 \ln x + \frac{1}{x^2}$ 易知当 $x > 1$ 时, $f''(x) > 0$, 即 $f'(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数, $f'(x) > 0$, 进而 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内为增函数.

综上, $f(1) = 0$ 该函数的极小值也为最小值, 于是 $x > 0$ 时, $(x^2 - 1) \ln x \geq (x - 1)^2$ 得证.

$$23. \text{证明: } f(x) = x^m(a - x)^n, f'(x) = x^{m-1}(a - x)^{n-1}[ma - (m + n)x]$$

令 $f'(x) = 0$ 得 $x_1 = \frac{ma}{m + n}, x_2 = 0, x_3 = a$. $x = \frac{ma}{m + n}$ 是函数 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上的唯一极大值点即是

最大值点, 此时 $f\left(\frac{ma}{m + n}\right) = \frac{m^m n^n}{(m + n)^{m+n}} a^{m+n}$

$$24. \text{证明: 记 } f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right]$$

令 $\varphi(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}, \varphi'(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2}$, 当 $x < -1$ 时, $\varphi'(x) > 0$ 即 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 内单调增加, 又因为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$, 所以 $\varphi(x) > 0$.

进而 $f'(x) > 0, \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 在区间 $(-\infty, -1)$ 内单调增加.

第五节

曲线的凹凸性与拐点

教材见 221 页

1. 解析:

(1) 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $y' = 6x - 3x^2, y'' = 6 - 6x, y'' = 0 \Rightarrow x = 1$.



$x \in (-\infty, 1), y'' > 0; x \in (1, +\infty), y'' < 0$, 所以在 $(-\infty, 1)$ 内是凹的, 在 $(1, +\infty)$ 内是凸的, 拐点为 $(1, 2)$

$$(2) y = \frac{a^2}{a^2 + x^2} (a > 0) \Rightarrow y' = a^2 \left[-\frac{2x}{(a^2 + x^2)^2} \right], y'' = -2a \frac{a^4 - 2a^2x^2 - 3x^4}{(a^2 + x^2)^4}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$$x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}a\right), y'' > 0; x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}a, \frac{\sqrt{3}}{3}a\right), y'' < 0; x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a, +\infty\right), y'' > 0$$

当 $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}a\right), x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a, +\infty\right)$ 时, 曲线是凹的; 当 $x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}a, \frac{\sqrt{3}}{3}a\right)$ 时曲线是凸的。拐点为 $\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}a, \frac{3a^2}{4}\right)$

(3) 函数的定义域为 $x \neq 0$

$$y' = 1 + \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}, y'' = \frac{5}{3} \times \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}, x = 0 \text{ 时二阶导数不存在.}$$

当 $x \in (-\infty, 0), y'' < 0$, 曲线是凸的; 当 $x \in (0, +\infty), y'' > 0$, 曲线是凹的. 拐点为 $(0, 0)$.

(4) 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$

$$y' = 1 + \cos x, y'' = -\sin x, y'' = 0 \Rightarrow x = k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$x \in (2k\pi, 2(k+1)\pi), y'' < 0$, 曲线是凸的; $x \in (2(k+1)\pi, 2(k+2)\pi), y'' > 0$, 曲线是凹的. 拐点为 $(k\pi, k\pi)$

(5) 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$

$$y' = \frac{2x}{1+x^2}, y'' = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$x \in (-\infty, -1), y'' < 0; x \in (-1, 1), y'' > 0; x \in (1, +\infty), y'' < 0$$

故而曲线在 $(-1, 1)$ 内是凹的, 在 $(-\infty, -1), (1, +\infty)$ 内是凸的, 拐点为 $(\pm 1, \ln 2)$

(6) 函数的定义域为 $x > 0$

$$y' = \sin(\ln x) + x \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \sin(\ln x) + \cos(\ln x), y'' = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} - \sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow \cos(\ln x) - \sin(\ln x) = 0, \ln x = k\pi + \frac{\pi}{4}, x = e^{k\pi + \frac{\pi}{4}}$$

当 $x \in \left(e^{2k\pi - \frac{3\pi}{4}}, e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}}\right)$ 时, $y'' > 0$, 曲线是凹的;

当 $x \in \left(e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}}, e^{2k\pi + \frac{5\pi}{4}}\right)$ 时, $y'' < 0$, 曲线是凸的.

$$\text{曲线拐点为 } \left(e^{k\pi + \frac{\pi}{4}}, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{k\pi + \frac{\pi}{4}}\right)$$

3. 证明: $x \in (-\infty, +\infty)$

$$y' = \frac{(x^2+1) - (x-1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$$

$$y'' = \frac{(-2x+2)(x^2+1)^2 - (x^2+2x+1) \cdot 2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2x^3-6x^2-6x+2}{(x^2+1)^3}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 2x^3 - 6x^2 - 6x + 2 = 2(x^3 - 3x^2 - 3x + 1) = 2[(x+1)(x^2-x+1) - 3x(x+1)] = (x+1)(x^2-4x+1) = 0$$

$$\text{得 } x_1 = -1, x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{3}, \text{ 相应地 } y_1 = -1, y_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{4}, y_3 = -\frac{\sqrt{3}+1}{4}$$

$$\therefore \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}, \therefore \text{ 曲线}$$



$y = \frac{x-1}{x^2+1}$ 有三个拐点在同一条直线上.

5. 证明: $y = x^n (n > 1), y' = nx^{n-1}, y'' = n(n-1)x^{n-2}, x \in (0, +\infty)$

当 $n > 1$ 时, $y'' > 0$, 故是凹的; 当 $0 < n < 1$ 时, $y'' < 0$, 故是凸的;

$y = e^x, y' = e^x, y'' = e^x$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $y'' > 0$ 故是凹的;

$y = x \ln x, y' = \ln x + 1, y'' = \frac{1}{x}$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时 $y'' > 0$, 故是凹的

$y = \ln x, y' = \frac{1}{x}, y'' = -\frac{1}{x^2}$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $y'' < 0$, 故是凸的.

6. 解析: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, f''(x) = 6ax + 2b$

由题意可知,

$$\begin{cases} f'(2) = 0 \\ f''(1) = 0 \\ f(1) = -10 \\ f(-2) = 44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12a + 4b + c = 0 \\ 6a + 2b = 0 \\ a + b + c = -10 \\ -8a + 4b - 2c + d = 44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 9 \\ c = 0 \\ d = -16 \end{cases}$$

7. 解析:

(1) 可知函数 $f(x) = x^n$ 的定义域为 $(0, +\infty)$

则 $f'(x) = nx^{n-1}, f''(x) = n(n-1)x^{n-2}, n > 1, f''(x) > 0$, 曲线是凹的,

根据定义可知对任意的 $x, y > 0$ 都有等式 $\frac{(x^n + y^n)}{2} > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$ 成立.

(2) 可知 $f(x) = e^x$, 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,

则 $f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, f''(x) > 0$, 时, 曲线是凹的.

根据定义可知对于任意的 $x \neq y$, 都有等式 $\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$ 成立.

(3) 可知 $f(x) = x \ln x$, 函数的定义域为 $(0, +\infty)$

则 $f'(x) = \ln x + 1, f''(x) = \frac{1}{x}$, 当 $x > 0$ 时, $f''(x) > 0$, 曲线是凹的

根据定义可知对任意的 $x, y > 0$ 且 $x \neq y$ 都有等式 $\frac{(x \ln x + y \ln y)}{2} > \frac{x+y}{2} \ln \frac{x+y}{2}$ 成立,

即 $x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2}$ 成立.

9. 解析: 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$

则 $y' = 4(x+1)^3 + e^x, y'' = 12(x+1)^2 + e^x, y'' > 0$

故函数的图形没有拐点, 处处是凹的.

第六节

函数图形的描绘

教材见 229 页

2. 解析: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x}{(x-2)(x+3)} = \infty, \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x}{(x-2)(x+3)} = \infty$, 故 $x = 2, x = -3$ 为曲线的铅直渐近线;

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{(x-2)(x+3)} = 1$, 故 $y = 1$ 为曲线的水平渐近线.

4. 解析: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x+1} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} (y-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x+1} = -1$, 故 $y = x - 1$ 是一条渐近线;

$x \rightarrow -1, y \rightarrow \infty$, 故 $x = -1$ 是一条垂直渐近线



$$y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2$$

$$8. \text{ 解析: } 2x \neq k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$y' = \frac{-\sin x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x(1-2\sin^2 x) + 4 \sin x(1-\sin^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{\sin x(3-2\sin^2 x)}{\sin^2 x} = 0$$

第七节 曲率

教材见 239 页

$$1. \text{ 解析: } f(x) = x^2 + 3x + 2; f'(x) = 2x + 3; f''(x) = 2$$

$$\therefore K(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + f'(x)^2]^{3/2}} = \frac{2}{[1 + (2x + 3)^2]^{3/2}}$$

$$\therefore K(1) = \frac{2}{26^{3/2}} \Rightarrow R(1) = \frac{1}{K(1)} = 13\sqrt{26}$$

$$2. \text{ 解析: } y = \ln x; y' = \frac{1}{x}; y'' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\therefore K(x) = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{\frac{1}{x^2}}{(1 + \frac{1}{x^2})^{3/2}} = \frac{x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} (x > 0)$$

$$K'(x) = \frac{(x^2 + 1)^{3/2} - x \cdot \frac{3}{2}(x^2 + 1)^{1/2} \cdot 2x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^{5/2}} (x > 0)$$

$$\text{则有: } 0 < x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时, } K'(x) \geq 0; x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时, } K'(x) \leq 0$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时, } K(x)_{\max} = K(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

$$3. \text{ 解析: 对 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 两边对 } x \text{ 求导, 得: } \frac{2x}{a^2} - \frac{2yy'}{b^2} = 0 \Rightarrow y' = \frac{b^2 x}{a^2 y}$$

$$\therefore y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{b^2 x}{a^2 y} \right) = \frac{b^2}{a^2} \frac{y - xy'}{y^2} = \frac{b^2}{a^2} \frac{y - \frac{b^2 x^2}{a^2 y}}{y^2} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$$

$$\therefore K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{\frac{b^4}{a^2 y^3}}{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2 - a^2)^{3/2}} \Rightarrow R = \frac{(\frac{a^2 + b^2}{a^2} x^2 - a^2)^{3/2}}{ab}$$

$$4. \text{ 解析: 由 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 得 } b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

$$\text{两边对 } x \text{ 求导, 得 } \frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0 \Rightarrow y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

$$\therefore y'' = \frac{dy'}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$$

$$\Rightarrow K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{\frac{b^4}{a^2} \frac{1}{|y^3|}}{(1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2})^{3/2}} = \frac{a^4 b^4}{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{K} = \frac{(a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2)^{3/2}}{ab}$$

$$5. \text{ 解析: 由 } \begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad \begin{cases} x'(t) = a(1 - \cos t) \\ y'(t) = a \sin t \end{cases}; \quad \begin{cases} x''(t) = a \sin t \\ y''(t) = a \cos t \end{cases}$$



$$\Rightarrow K = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{[x'(t)^2 + y'(t)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{|a^2 \cos t(1 - \cos t) - a^2 \sin^2 t|}{[a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t]^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2(1 - \cos t)}{[2a^2(1 - \cos t)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{4a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \cos t}} = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{ay}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{K} = \frac{4\sqrt{ay}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2ay}$$

6. 解析: $r = a(1 + \cos \varphi) \Rightarrow r' = -a \sin \varphi; r'' = -a \cos \varphi$

$$\Rightarrow K = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|a^2(1 + \cos^2 \varphi) + 2a^2 \sin^2 \varphi - a(1 + \cos \varphi)(-a \cos \varphi)|}{[a^2(1 + \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{3a^2(1 + \cos \varphi)}{a^3 \cdot 2\sqrt{2}(1 + \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2\sqrt{2}a\sqrt{1 + \cos \varphi}} = \frac{3}{2\sqrt{2}\sqrt{ar}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{K} = \frac{2\sqrt{2}ar}{3}$$

7. 解析: $r^2 = a^2 \cos 2\varphi \Rightarrow 2rr' = -a^2 \sin(2\varphi) \cdot 2 \Rightarrow r' = -\frac{a^2}{r} \sin(2\varphi)$

$$\Rightarrow r'' = \frac{d(-\frac{a^2}{r} \sin(2\varphi))}{d\varphi} = -\frac{r^2 \cdot 2a^2 \cos(2\varphi) + a^4 \sin^2(2\varphi)}{r^3} = -\frac{a^4(1 + \cos^2(2\varphi))}{r^3}$$

$$\Rightarrow K = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{r^4 + 2a^4 \sin^2(2\varphi) + a^4(1 + \cos^2(2\varphi))}{\frac{1}{r}(r^4 + a^4 \sin^2(2\varphi))^{\frac{3}{2}}} = \frac{3r}{a^2}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{K} = \frac{a^2}{3r}$$

8. 证明: 由 $y = a \cdot ch \frac{x}{a} \Rightarrow y' = a \cdot sh \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a} = sh \frac{x}{a}; y'' = \frac{1}{a} \cdot ch \frac{x}{a}$

$$\therefore K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|\frac{1}{a} ch \frac{x}{a}|}{(1 + sh^2 \frac{x}{a})^{\frac{3}{2}}} = \frac{|\frac{1}{a} ch \frac{x}{a}|}{|ch \frac{x}{a}|^3} = \frac{\frac{1}{a}}{ch^2 \frac{x}{a}} = \frac{a}{ch^2 \frac{x}{a}} = \frac{a}{y^2}$$

$$\therefore R = \frac{1}{K} = \frac{y^2}{a} \text{ 得证.}$$

9. 解析: $y^2 = 2px \Rightarrow x = \frac{y^2}{2p} \Rightarrow x' = \frac{y}{p}; x'' = \frac{1}{p}$

$$\text{根据 } \begin{cases} \alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} \\ \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''} \end{cases} \text{ 得}$$

渐屈线参数方程为:

$$\begin{cases} \alpha = y - \frac{x'(1+x'^2)}{x''} = -\frac{y^3}{p^2} \\ \beta = x + \frac{1+x'^2}{x''} = 3x + p \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{y^6}{p^4} = \frac{(2px)^3}{p^4} = \frac{8p^3(\frac{\beta-p}{3})^3}{p^4}$$

$$\text{即: } 27p\alpha^2 = 8(\beta - p)^3$$

10. 解析: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y' = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}; y'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$

$$\text{由 } \begin{cases} \alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = x + \frac{\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y} (1 + \frac{b^4}{a^4} \frac{x^2}{y^2})}{-\frac{b^4}{a^2 y^3}} = x - \frac{x(a^4 y^2 + b^4 x^2)}{a^4 b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^4} x^3 \\ \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = y + \frac{1 + \frac{b^4}{a^4} \frac{x^2}{y^2}}{-\frac{b^4}{a^2 y^3}} = y - \frac{y}{a^2 b^4} (a^4 y^2 + b^4 x^2) = -\frac{a^2 - b^2}{b^4} y^3 \end{cases} \text{ 得}$$



渐屈线参数方程为:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{a^2 - b^2}{a^4 - b^4} x^3 \\ \beta = -\frac{a^2 - b^2}{b^4} y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \left(\frac{a^4 \alpha}{a^2 - b^2} \right)^{\frac{1}{3}} \\ y = -\left(\frac{b^4 \beta}{a^2 - b^2} \right)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

所以渐屈线方程为

$$\frac{\left(\frac{a^4 \alpha}{a^2 - b^2} \right)^{\frac{2}{3}}}{a^2} + d \frac{\left(\frac{b^4 \beta}{a^2 - b^2} \right)^{\frac{2}{3}}}{b^2} = 1$$

即

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}} + (b\beta)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$$

11. 解析: $y = \tan x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x}, y'' = \frac{2 \tan x}{\cos^2 x}$

$\therefore y'|_{x=\frac{\pi}{4}} = 2, y''|_{x=\frac{\pi}{4}} = 4$

根据公式得:

$$\begin{cases} \alpha|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{2(1+2^2)}{4} = \frac{\pi-10}{4} \\ \beta|_{x=\frac{\pi}{4}} = 1 + \frac{1+2^2}{4} = \frac{9}{4} \end{cases}$$

根据 K 的公式可得: $K|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{(1+2^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow R|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$

则有所求曲率圆方程为:

$$\left(x - \frac{\pi-10}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{4}\right)^2 = \frac{125}{16}$$

12. 解析: $y = \frac{x^2}{10000} \Rightarrow y' = \frac{2x}{10000}, y'' = \frac{2}{10000}$

$\therefore R|_{x=0} = \frac{1}{K}|_{x=0} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}|_{x=0} = \frac{1}{\frac{2}{10000}} = 5000$

根据 $N - G = m \frac{v^2}{R}$ 得:

$$N = G + m \frac{v^2}{R} = m(g + \frac{v^2}{R}) = 1246(N).$$

第八节

总习题三

教材见 247 页

2. 解析: 设 $f(x) = 3\arccos x - \arccos(3x - 4x^3)$ 则 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, 在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 上可导, 所以 $f'(x) = 0$, 即 $f(0) = \pi$, 即 $f(x) = \pi$. 得证.

4. 解析: $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$

设 $F(x) = f(x)f(1-x)$

$$F'(x) = f'(x)f(1-x) - f(x)f'(1-x)$$

因为 $f(0) = 0, \therefore F(1) = 0, F(0) = 0$,

由罗尔定理得, 在 $[0, 1]$ 内必有 ξ 使得 $F'(\xi) = 0, \therefore f'(x)f(1-x) - f(x)f'(1-x) = 0$



$\therefore \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \frac{f'(1-\zeta)}{f(1-\zeta)}$ 在 $[0, 1]$ 内 $f(x) \neq 0$ 此式成立.

5. 证明: 设 $F(x) = f(x) \cdot \sin(x) \Rightarrow F'(x) = \cos(x)f(x) + \sin(x)f'(x)$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \therefore F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, F(0) = 0$

且 $f(x), \sin x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 连续在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内可导 $\therefore F(x)$ 在此区间上有同样的性质, 根据罗尔定理得在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上必有一点 ξ 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $\cos(\xi)f(\xi) + \sin(\xi)f'(\xi) = 0$.

整理后即得结果为

$$f(\xi) + \tan(\xi)f'(\xi) = 0$$

7. 证明: 构造函数 $f'(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, g'(x) = \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$

因为 $|f'(x)| < g'(x)$, 所以

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| < \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

又因为 $x > a$, 得

$$|f(x) - f(a)| < g(x) - g(a).$$

8. 解析:

$$(1) \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x^2 + o(x^2) - 1 + \frac{1}{2}x^2 - o(x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{3}{2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1+1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} \right)$$

$$\text{应用洛必达法则得 } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{(x-1)}{x} + \ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{(x-1)+x \ln x}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1-x}{(x-1)+x \ln x} \right)$$

$$\text{洛必达法则得 } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1-x}{(x-1)+x \ln x} \right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{原式} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \ln(1-x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}}$$

$$\text{由洛必达法则得原式} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\frac{1}{1-x}}{-\frac{1}{\ln^2 x \cdot x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln^2 x \cdot x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln^2 x + 2 \ln x}{-1} = 0$$

$$(4) \text{利用等价无穷小, 得 } \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x + \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = \frac{1}{2}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} \arctan x \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln\left(\frac{\pi}{2} \arctan x\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(\frac{\pi}{2} \arctan x\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{\pi}{2} \arctan x\right)}{\frac{1}{x}}}$$

$$\text{应用洛必达法则得, 原式} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2} \arctan x} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\arctan x}} = e^{-\frac{2}{\pi}}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{2x-\pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} e^{(2x-\pi) \ln(\tan x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\tan x)}{(2x-\pi)}} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{(2x-\pi)^2 \cdot 2}}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{-(2x-\pi)^2}{2 \cos x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{-(2x-\pi)^2}{2 \cos x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{8x-4\pi}{2 \sin x}} = e^0 = 1$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} (1+n)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+n)}{\sqrt{n}}}$$

$$\text{应用洛必达法则得, 原式} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}}{1+n}} = e^0 = 1$$



$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \cot x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{x} - \cot x \right)}{x}$$

应用洛必达法则, 得原式 =

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} + \csc^2 x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} + d \frac{1}{\sin^2 x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} \right)$$

应用洛必达法则得原式 =

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x - 2 \sin x \cos x)}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x - 2 \sin x \cos x)}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \sin^2 x - \cos^2 x)}{6x^2} = \frac{1}{3}$$

12. 解析:

$$(1) y' = 2 - \frac{2 \cdot 4x \cdot 4}{(4x)^2} = 2 - \frac{2}{x}$$

$$y' > 0 \Rightarrow 2 - \frac{2}{x} > 0 \text{ 解得 } x \in (1, +\infty) \cup (-\infty, 0),$$

$$y' < 0 \Rightarrow 2 - \frac{2}{x} < 0 \text{ 解得 } x \in (0, 1)$$

所以该函数的增区间为 $x \in (1, +\infty) \cup (-\infty, 0)$, 减区间为 $x \in (0, 1)$

$$(2) y' = \frac{1 + \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$$

故函数在整个定义域内单调递增, 该函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 所以该函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调递增.

13. 解析:

$$(1) \ln y = \frac{1}{x} \ln x, (\ln y)' = \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2} x^{\frac{1}{x}} = (1 - \ln x) x^{(\frac{1}{x}-2)}$$

$$y' = 0 \Rightarrow (1 - \ln x) x^{(\frac{1}{x}-2)} = 0 \text{ 因为 } x^{(\frac{1}{x}-2)} \neq 0, \text{ 故 } 1 - \ln x = 0, x = e.$$

当 $x < e$ 时, $y' > 0$, 为增; 当 $x > e$ 时, $y' < 0$, 为减,

所以, 该函数存在极大值, 当 $x = e$ 时, 极大值为 $y = e^{\frac{1}{e}}$.

$$(2) \ln y = \frac{1}{3} \ln x + \frac{2}{3} \ln(1-x) \Rightarrow (\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{1}{3x} - \frac{2}{3(1-x)}$$

$$y' = \left[\frac{1}{3x} - \frac{2}{3(1-x)} \right] [x^{\frac{1}{3}} (1-x)^{\frac{2}{3}}]$$

$$y' = 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{3x} - \frac{2}{3(1-x)} \right] [x^{\frac{1}{3}} (1-x)^{\frac{2}{3}}] = 0$$

$$\text{即 } \frac{1}{3x} - \frac{2}{3(1-x)} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

且 $x = 0$ 和 $x = 1$ 时, 函数的导数不存在, 易知当 $x \in (-\infty, 0), (0, \frac{1}{3}), (1, +\infty)$ 时, 导函数大于 0; $x \in (\frac{1}{3}, 1)$ 时, 导函数小于 0,

所以, 该函数在 $x = \frac{1}{3}$ 处存在极大值, 极大值为 $[y = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}]$; 在 $x = 1$ 处存在极小值, 极小值为 0.

14. 解析: 先求 $y = \sqrt{x}$ 的最大值;

$$\ln y = \frac{1}{x} \ln x, (\ln y)' = \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1 - \ln x}{x^2} x^{\frac{1}{x}} = (1 - \ln x) x^{(\frac{1}{x}-2)}$$

$$\text{令 } y' = 0, \text{ 即 } (1 - \ln x) x^{(\frac{1}{x}-2)} = 0, \text{ 因为 } x^{(\frac{1}{x}-2)} \neq 0, \text{ 故 } 1 - \ln x = 0, x = e$$

当 $x < e$ 时, $y' > 0$, 增; 当 $x > e$ 时, $y' < 0$, 减.



所以, 当 $x = e$ 时, 函数有最大值, 因为数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 中, 取 $n = 2$ 和 $n = 3$ 分别代入原函数, 解得 $y = \sqrt{2}$ 和 $y = \sqrt[3]{3}$, 因为 $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$, 所以, $n = 3$ 时, 数列的最大项为 $\sqrt[3]{3}$.

15. 证明:

因为 $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$ (可以利用两式相减, 通分后得到)

$$\Rightarrow \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

$$\text{所以 } \frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

$$17. \text{ 解析: 令 } f(x) = \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x+3} \Rightarrow \ln y = \frac{2}{3} \ln(x-1) - \ln(x+3)$$

$$\therefore (\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{2}{3(x-1)} - \frac{1}{x+3}, y' = \left[\frac{2}{3(x-1)} - \frac{1}{x+3} \right] \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x+3}$$

$y' = 0 \Rightarrow x = 9$, 不在闭区间 $[0, 2]$ 上. y' 在 $x = -3$ 和 $x = 1$ 处不存在, 所以 y' 在闭区间 $[0, 2]$ 可能的极值点为 $x = 1$.

$$x = 0 \text{ 时, } y = \frac{1}{3}; x = 1 \text{ 时, } y = 0; x = 2 \text{ 时, } y = \frac{1}{5}$$

所以 $\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x+3}$ 在闭区间 $[0, 2]$ 上的最大值和最小值分别是 $f(1) = \frac{1}{3}$ 和 $f(1) = 0$.

19. 解析:

(1) 凹凸性:

$$\ln y = 3 \ln(x+1) - 2 \ln(x-1), (\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1}$$

$$\Rightarrow y' = \left[\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1} \right] y$$

$$y'' = \left[-\frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x-1)^2} \right] y + \left(\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1} \right)^2 y = 6y \left(\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1} \right)^2$$

$$\text{令 } y'' > 0 \Rightarrow 6y \left(\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1} \right)^2 > 0, \text{ 即 } y > 0 \Rightarrow \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} \Rightarrow x \in (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$\text{令 } y'' < 0 \Rightarrow 6y \left(\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1} \right)^2 < 0, \text{ 即 } y < 0 \Rightarrow \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} \Rightarrow x \in (-\infty, -1)$$

所以, $x \in (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ 时, 函数为凹函数;

$x \in (-\infty, -1)$ 时, 函数为凸函数.

(2) 渐近线: 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = \infty$, 所以 $x = 1$ 为函数的垂直渐近线;

$$\text{因为 } a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} - ax \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1} = 5$$

所以函数的斜渐近线为 $y = x + 5$.

习题见第 124 页

第一节 定积分的概念

教材见 258 页

4. 解析:

$$(1) \int_a^b x \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n \left(a + \frac{b-a}{n} i \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \left[na + \frac{b-a}{n} \frac{n(n+1)}{2} \right] = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

$$(2) \int_0^1 e^x \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{\frac{i}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \frac{e^{\frac{n+1}{n}} - e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e-1) \frac{\frac{1}{n}}{1 - e^{-\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e-1) \frac{t}{1 - e^{-t}} = e - 1$$

$$(3) \int_0^b x^2 \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{b}{n} i \right)^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{3}$$

5. 解析:

(1) 由 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ 得 $x^2 + y^2 = a^2 (y \geq 0)$, 可知: 原式的几何意义为: 以原点为圆心, a 为半径的圆在第一象限的面积, 即为: $\frac{\pi}{4} a^2$.

(2) 由 $f(x) = \sin(x) (x \in [-\pi, +\pi])$ 图象可知: 面积代数和为零. 所以: $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \, dx = 0$

(3) 由 $f(x) = |x - \frac{a+b}{2}|$ 图象知: $f(a) = f(b) = \frac{b-a}{2}$

$$\text{所以 } \int_a^b |x - \frac{a+b}{2}| \, dx = \frac{1}{2} (b-a) f(a) = \frac{(b-a)^2}{4}$$

6. 解析: 金属丝的质量为 $m = \int_0^a kx \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{n} \sum_{i=1}^n k(0 + \frac{a}{n} i) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{ka^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{ka^2}{2}$

8. 解析: 当为奇函数时, 函数关于原点对称, 则有 $\int_0^a f(x) \, dx$ 与 $\int_{-a}^0 f(x) \, dx$ 与 x 轴围成的图形面积相等, 符号相反, 所以有: $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0$

当为偶函数时, 函数关于 y 轴对称, 则有 $\int_0^a f(x) \, dx$ 与 $\int_{-a}^0 f(x) \, dx$ 与 y 轴围成的图形面积相等, 符号相同, 所以有: $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx$

第二节 定积分的性质

教材见 265 页

1. 解析:



(1) 利用例 2.1 的结果, 当 $f(x)$ 不等于零时, 因为 $f(x) \geq 0$, 而 $\int_a^b f(x) dx$ 是正值, 它只能是 0 和不是 0 两种可能, 设若 $\int_a^b f(x) dx > 0$, 则由已证明得例 2.1 结果, 在 $[a, b]$ 上必有 $f(x) \equiv 0$ 不恒等于 0 矛盾, 所以得出结论: 若在 $[a, b]$ 上, $f(x) \geq 0$ 且 $f(x)$ 不恒等于 0, 则 $\int_a^b f(x) dx > 0$

$\int_0^1 (e^x - e^{x^2}) dx$ 在 $[0, 1]$ 上 $e^x - e^{x^2} \geq 0$, 且 $e^x - e^{x^2}$ 不恒等于零, 所以 $\int_0^1 (e^x - e^{x^2}) dx > 0$

(3) $\int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 x^3 dx = \int_1^2 (x^2 - x^3) dx$, 因为在 $[1, 2]$ 上 $x^2 - x^3 \leq 0$ 且 $x^2 - x^3$ 不恒等于零, 所以 $\int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 x^3 dx = \int_1^2 (x^2 - x^3) dx$, 进而 $\int_1^2 x^2 dx < \int_1^2 x^3 dx$.

(5) 构造函数 $f(x) = \ln(1+x) - \frac{\arctan x}{1+x}$, 在 $[0, 1]$ 上 $f'(x) = \frac{x^2}{(1+x)(1+x^2)} + \frac{\arctan x}{(1+x)^2} > 0$, 于是 $\int_0^1 \ln(1+x) dx > \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x} dx$.

2. 解析:

(1) 只需求出 $f(x)$ 在区间上的最大和最小值 M 与 m , 便可用估值定理估计. 显见 $x^2 + 1$ 在 $[1, 4]$ 上单调增加, 有 $m=2, M=17, x \in (1, 4]$, 所以 $6 \leq \int_1^4 (x^2 + 1) dx \leq 51$.

(3) 记 $f(x) = e^{x^2-x}, x \in [0, 2]$, 因为 $f'(x) = (2x-1)e^{x^2-x}$, 令 $f'(x) = 0$, 得到唯一驻点 $x = \frac{1}{2}$, 又 $f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{4}}, f(0) = 1, f(2) = e^2$, 所以 $m = \min f(x) = e^{-\frac{1}{4}}, M = \max f(x) = e^2$, 又因为 $b-a = -2$, 所以 $-2e^2 \leq \int_2^0 e^{x^2-x} dx \leq -2e^{-\frac{1}{4}}$.

4. 解析: 令 $L(x) = f(x) + \lambda g(x)$, 则 $L^2(x) = f^2(x) + 2\lambda f(x)g(x) + \lambda^2 g^2(x) \geq 0$, 从而有 $\int_a^b L^2(x) dx \geq 0$. 将上式右边视为关于 λ 的二次多项式. 因为 $Ax^2 + Bx + C \geq 0$, 可知 $B^2 - 4AC \leq 0$, 从而有 $4\left(\int_a^b f(x)g(x) dx\right)^2 \leq 4\int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx$, 从而有 $\left(\int_a^b f(x)g(x) dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx$.

5. 解析: 利用上题的结论, 令 $f(x) = \sqrt{e^{f(x)}}, g(x) = \sqrt{e^{-f(x)}}$, 它们都是连续函数, 有

$$\left(\int_a^b e^{\sqrt{e^{f(x)}}} dx\right) \left(\int_a^b e^{\sqrt{e^{-f(x)}}} dx\right) \geq \left(\int_a^b \sqrt{e^{-f(x)}} \sqrt{e^{f(x)}} dx\right)^2 = (b-a)^2$$

7. 解析: 根据积分中值定理, 在 $[a, b]$ 上, 存在 ξ_1 , 满足 $\int_a^b f(x) dx = f(\xi_1)(b-a) = 0$, 得到 $f(\xi_1) = 0$. ξ_1 是 $f(x)$ 的一个零点. 假设 ξ_1 是唯一的一个零点, 那么在 (a, ξ_1) 和 (ξ_1, b) 内 $f(x)$ 异号.

假设 (a, ξ_1) 上 $f(x) > 0, (\xi_1, b)$ 上 $f(x) < 0$. 由 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\xi_1} f(x) dx + \int_{\xi_1}^b f(x) dx = 0$ 和 $f(\xi_1) = 0$ 得 $0 = \int_a^{\xi_1} f(x)(x - \xi_1) dx + \int_{\xi_1}^b f(x)(x - \xi_1) dx \neq 0$ 矛盾, 所以至少在 (a, b) 上还有一个零点.

第三节

微积分基本公式与基本定理

教材见 274 页

3. 解析: $\frac{dy}{dx} = \left(\int_0^x \sin t dt\right)' = \sin x, \frac{dy}{dx}|_{x=0} = \sin 0 = 0, \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=\frac{\pi}{4}} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



5. 解析:

$$(1) \int_0^1 4x^2 dx = \frac{4}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{4}{3}$$

$$(3) \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = 2$$

$$(5) \int_0^a (3x^2 - x + 1) dx = \left(x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right) \Big|_0^a = a^3 - \frac{1}{2}a^2 + a$$

$$(7) \int_4^9 \sqrt{x}(1 + \sqrt{x}) dx = \int_4^9 (\sqrt{x} + x) dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_4^9 = \frac{271}{6}$$

$$(9) \int_0^{\sqrt{3}a} \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \Big|_0^{\sqrt{3}a} = \frac{\pi}{3a}$$

$$(11) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x - 1) dx = (\tan x - x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$(13) \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 x dx + \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = -\frac{1}{6}$$

6. 解析:

$$(1) \arctan x (3) \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} (5) \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(1+x^3)$$

7. 解析:

(1) 忘记了 x^3 对 x 的进一步求导. 正确解: $3x^2\sqrt{1+x^3}$

(3) 错误, $\frac{1}{x}$ 在 $[-1, 1]$ 上无界, 不可积.

9. 解析:

$$(1) \text{左式} = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(k+m)x + \sin(k-m)x] dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{\cos(k+m)x}{k+m} + \frac{\cos(k-m)x}{k-m} \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$(2) \text{左式} = -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k+m)x - \cos(k-m)x] dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{\sin(k+m)x}{k+m} - \frac{\sin(k-m)x}{k-m} \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$(3) \text{左式} = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k+m)x + \cos(k-m)x] dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(k+m)x}{k+m} + \frac{\sin(k-m)x}{k-m} \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$10. \text{解析: } \frac{dx}{ds} = \sin^2 t, \frac{dy}{ds} = 2t \cos t$$

$$\text{两式相比得 } \frac{dy}{dx} = 2t \cot t \csc t$$

13. 解析:

$$(1) \text{根据洛必达法则 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x^2 = 1$$

(3) 根据洛必达法则和等价无穷小

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan t} dt}{\int_0^{\tan x} \sqrt{\sin t} dt} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x \sqrt{\tan(\sin x)}}{\sec^2 x \sqrt{\sin(\tan x)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{\tan(\sin x)}{\sin(\tan x)}} = 1, (x \rightarrow 0^+, \tan x \sim \sin x \sim x)$$



$$(5) \text{ 根据洛必达法则 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{\int_0^x e^{2t^2} dt} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2}}{e^{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$

15. 解析: 根据洛必达法则,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x (t \int_t^1 f(u) du) dt}{(1-x)^3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \int_1^x f(u) e du}{3(1-x)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x f(u) du + xf(x)}{6(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) + xf'(x)}{6} = \frac{2f(1) + f'(1)}{6} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

16. 解析:

$$(1) \text{ 原式 } = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + (\frac{i}{n})^2} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

$$(2) \text{ 原式 } = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{i}{n}}{1 + (\frac{i}{n})^2} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

第四节 不定积分的基本积分法

教材见 298 页

4. 解析:

$$(1) \int \frac{1}{x^2} dx = \int -d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} + C$$

$$(3) \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{x} + C$$

$$\begin{aligned} (5) \int (1-x+x^3 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}) dx &= \int 1 dx - \int x dx + \int x^3 dx - \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 - 3x^{\frac{1}{3}} + C \end{aligned}$$

$$(7) \int (2^x + 3^x)^2 dx = \int (4^x + 9^x + 2 \times 6^x) dx = \frac{4^x}{2 \ln 2} + \frac{9^x}{2 \ln 3} + \frac{2 \times 6^x}{\ln 6} + C$$

$$(9) \int \frac{x^2}{3(1+x^2)} dx = \int \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3(1+x^2)}\right) dx = \frac{x}{3} - \frac{1}{3} \arctan x + C$$

$$(11) \int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} + x^{\frac{3}{2}}\right) dx = 2\sqrt{x} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$$

$$(13) \int \tan^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \tan x - x + C$$

$$\begin{aligned} (15) \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx &= \int \frac{2\cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x - \sin x} dx = \int (\cos x + \sin x) dx \\ &= \sin x - \cos x + C \end{aligned}$$

$$(17) \int 10^x \cdot 3^{2x} dx = \int 90^x dx = \frac{90^x}{\ln 90} + C$$

$$(19) \int \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) dx = \int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \arcsin x + C$$

$$\begin{aligned} (21) \int \cos x \cdot \cos 2x dx &= \int \cos x (1 - 2\sin^2 x) dx = \int (\cos x - 2 \cos x \sin^2 x) dx \\ &= \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + C \end{aligned}$$



$$(23) \int \sec x (\sec x - \tan x) dx = \int (\sec^2 x - \sec x \tan x) dx = \tan x - \sec x + C$$

$$(25) \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx = \int \left(x^{\frac{3}{4}} - x^{-\frac{5}{4}}\right) dx = \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} - 4x^{-\frac{1}{4}} + C$$

$$6. \text{ 解析: } l = \int 3t^2 dx = t^3 + C$$

(1) 当 $t = 0$ 时, $l = 0$; 得 $C = 0$, 故 $l = t^3$.

(2) 当经过的路程为 512m 时, $512 = t^3$, $t = 8s$.

7. 解析:

$$(1) \int \cos(3x + 5) dx = \int \frac{1}{3} \cos(3x + 5) d(3x + 5) = \frac{1}{3} \sin(3x + 5) + C$$

$$(3) \int \frac{1}{2x+3} dx = \int \frac{1}{2} \times \frac{1}{2x+3} d(2x+3) = \frac{\ln(2x+3)}{2} + C$$

$$\begin{aligned} (5) \int \left(\frac{1}{\sqrt{3-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}\right) dx &= \int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}} dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}} d\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{3}x)^2}} d\sqrt{3}x \\ &= \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{3} \arcsin \sqrt{3}x + C \end{aligned}$$

$$(7) \int \sqrt{8-3x} dx = - \int \frac{\sqrt{8-3x}}{3} d(8-3x) = - \frac{2(8-3x)^{\frac{3}{2}}}{9} + C$$

$$(9) \int x \cos x^2 dx = \int \frac{1}{2} \cos x^2 dx^2 = \frac{1}{2} \sin x^2 + C$$

$$(11) \int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \int \sec^2 \frac{x}{2} d\frac{x}{2} = \tan \frac{x}{2} + C$$

$$(13) \int \frac{x}{4+x^4} dx = \int \frac{1}{2} \frac{dx^2}{4+x^4} = \frac{1}{4} \arctan \frac{x^2}{2} + C$$

$$(15) \int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{1}{\ln x} d \ln x = \ln |\ln x| + C$$

$$(17) \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \cos x\right) dx = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C$$

$$(19) \int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \frac{\sin^2 2x}{4} dx = \int \frac{1-\cos 4x}{8} dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C$$

$$(21) \int \csc^3 x \cot x dx = \int \csc^2 x \csc x \cot x dx = \int -\csc^2 x d \csc x = -\frac{\csc^3 x}{3} + C$$

$$\begin{aligned} (23) \int \frac{dx}{1+\sin^2 x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x + 2\sin^2 x} dx = \int \frac{1+\tan^2 x}{1+2\tan^2 x} dx \\ &= \int \frac{1}{1+2\tan^2 x} d \tan x = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x) + C \end{aligned}$$

$$(25) \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int \frac{d(e^x)}{1+e^{2x}} = \arctan e^x + C$$

$$(27) \int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} dx = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$$

$$(29) \text{ 令 } x = 3 \sec t, 0 < t < \frac{\pi}{2} \Rightarrow dx = 3 \sec t \tan t dt.$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-9}} = \int \frac{3 \sec t \tan t dt}{9 \sec^2 t \sqrt{9 \sec^2 t - 9}} = \frac{1}{9} \int \frac{\tan t dt}{\sec t \tan t} = \frac{1}{9} \int \cos t dt = \frac{1}{9} \sin t + C$$

$$\because x = 3 \sec t, \therefore \sin t = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$$



$$\therefore \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}} = \frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + C.$$

8. 解析:

$$(1) \int \arccos x \, dx = \arccos x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\begin{aligned} (3) \int x^2 \cos x \, dx &= x^2 \sin x - \int 2x \sin x \, dx \\ &= x^2 \sin x - 2x \cos x - \int 2 \cos x \, dx \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \int (\ln x)^2 \, dx &= x(\ln x)^2 - \int 2x \cdot \frac{1}{x} \ln x \, dx = x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x \, dx \\ &= x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2 \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C \end{aligned}$$

$$(7) \int x \tan^2 x \, dx = \int x(\sec^2 x - 1) \, dx = -\frac{1}{2}x^2 - \int x \sec^2 x \, dx = -\frac{1}{2}x^2 + x \tan x + \ln |\cos x| + C$$

$$\begin{aligned} (9) \int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx &= \int x \sec^2 x \, dx = x \tan x - \int \tan x \, dx = x \tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \\ &= x \tan x + \ln |\cos x| + C \end{aligned}$$

$$(11) \int \frac{xe^x}{(1+e^x)^2} \, dx = -\frac{1}{1+e^x} + \int \frac{1}{1+e^x} \, dx = -\frac{1}{1+e^x} + \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \, dx = -\frac{1}{1+e^x} - \ln(1+e^{-x}) + C$$

$$\begin{aligned} (13) \int \arctan \sqrt{x} \, dx &= x \arctan \sqrt{x} - \int \frac{x}{2(1+x)\sqrt{x}} \, dx = x \arctan \sqrt{x} - \int \frac{x}{1+x} \, d\sqrt{x} \\ &= x \arctan \sqrt{x} - \int \left(1 - \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\right) d\sqrt{x} = (1+x) \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (15) \int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2} \, dx &= \int \arctan x \, dx - \int \frac{\arctan x}{1+x^2} \, dx \\ &= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx - \frac{1}{2} \arctan^2 x \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \arctan^2 x + C \end{aligned}$$

$$(17) \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \, dx = \frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int e^{\arctan x} \, d \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \, dx$$

$$\text{于是有 } 2 \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \, dx = \frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(19) \int \frac{\ln x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \, dx = \frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$$



$$\begin{aligned}
 (21) \int \left(1+x-\frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx &= \int \left(1+x-\frac{1}{x}\right) e^x e^{\frac{1}{x}} dx = \int x' e^x e^{\frac{1}{x}} + x (e^x)' e^{\frac{1}{x}} - x \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' e^x dx \\
 &= x e^x e^{\frac{1}{x}} + C
 \end{aligned}$$

第五节 有理函数的积分

教材见 311 页

1. 解析:

$$(1) \int \frac{x^3}{x-1} dx = \int \frac{x^3+1-1}{x-1} dx = \int \frac{x^3-1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x-1} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + C$$

$$(3) \int \frac{2x+3}{x^2+3x-10} dx = \int \frac{2x+3}{(x+5)(x-2)} dx = \int \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-2} dx = \ln|x+5| + \ln|x-2| + C$$

$$(5) \int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx = -\int \frac{1}{2(x+1)} + \frac{2}{(x+2)} + \frac{1}{2(x+3)} dx = -\frac{1}{2} \ln|x+1| + 2 \ln|x+2| - \frac{3}{2} \ln|x+3| + C$$

$$(7) \int \frac{1}{x(x^2+1)} dx = \int \frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1} dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$$

$$\begin{aligned}
 (9) \int \frac{x-2}{(2x^2+2x+1)^2} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{4x+2-10}{(2x^2+2x+1)^2} dx \\
 &= \frac{1}{4} \int \frac{d(2x^2+2x+1)}{(2x^2+2x+1)^2} - \frac{10}{2} \int \frac{1}{(2x+1)^2+1} dx \\
 &= -\frac{1}{4(2x^2+2x+1)} - \frac{5}{2} \arctan(2x+1) + C
 \end{aligned}$$

$$(11) \int \frac{1}{5-3\cos x} dx = \int \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{8\sin^2 \frac{x}{2} + 2\cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int \frac{\tan^2 \frac{x}{2} + 1}{8\tan^2 \frac{x}{2} + 2} dx$$

$$\text{令 } \tan \frac{x}{2} = t, \text{ 则 } x = \arctan t, dx = \frac{1}{t^2+1} dt$$

$$\text{代入得原式} = \int \frac{t^2+1}{8t^2+2} \cdot \frac{1}{t^2+1} dt = \int \frac{1}{4t^2+1} dt = \frac{1}{2} \arctan 2t = \frac{1}{2} \arctan(2 \tan \frac{x}{2}) + C$$

$$(13) \int \frac{1}{\tan x + 1} dx = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx;$$

$$2 \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{\cos x + \sin x}{\sin x + \cos x} dx + \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = x + \ln|\sin x + \cos x| + C$$

$$\text{即 } \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{1}{2} (x + \ln|\sin x + \cos x|) + C$$

$$\begin{aligned}
 (15) \int \frac{1}{1+\sin x+\cos x} dx &= \int \frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} + 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} dx \\
 &= \int \frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}) \cos \frac{x}{2}} dx = \int \frac{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan \frac{x}{2}} dx \\
 &= \int \frac{1}{1 + \tan \frac{x}{2}} d\left(1 + \tan \frac{x}{2}\right) \\
 &= \ln \left|1 + \tan \frac{x}{2}\right| + C
 \end{aligned}$$



$$(17) \int \frac{1}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^4 x} dx = \int (\sec^2 x + \tan^2 x \sec^2 x) dx = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C$$

$$(19) \text{ 令 } \sqrt[6]{x} = t, x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$$

$$\text{原式} = \int \frac{6t^5}{t^3 + t^2} dx = \int \frac{6t^3}{t+1} dt = 6 \int \frac{t^3 - 1 + 1}{t+1} dt = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \ln(t+1) + C$$

将 $\sqrt[6]{x} = t$ 代入得

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C$$

$$(21) \text{ 令 } \sqrt{\frac{1-x}{x+1}} = t, \text{ 于是 } x = \frac{1-t^2}{t^2+1}, dx = \frac{-4t}{(t^2+1)^2}$$

$$\text{原式} = -4 \int \frac{t^2}{(1-t^2)(1+t^2)} dt = 2 \int \frac{1}{1+t^2} dt - 2 \int \frac{1}{1-t^2} dt$$

$$= 2 \arctan t + \ln|1-t| - \ln|1+t| + C$$

$$= 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{x+1}} + \ln \left| 1 - \sqrt{\frac{1-x}{x+1}} \right| - \ln \left| 1 + \sqrt{\frac{1-x}{x+1}} \right| + C$$

$$= 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln \left| \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}} \right| + C$$

$$(23) \text{ 令 } \cos x - \sin x = a(\cos x + 2 \sin x) + b(\cos x + 2 \sin x)'$$

$$\text{解得 } a = -\frac{1}{5}, b = \frac{3}{5}$$

$$\text{原式} = \int -\frac{1}{5} \frac{\cos x + 2 \sin x}{\cos x + 2 \sin x} dx + \int \frac{3}{5} \frac{(\cos x + 2 \sin x)'}{\cos x + 2 \sin x} dx = -\frac{x}{5} + \frac{3 \ln |\cos x + 2 \sin x|}{5} + C$$

第六节

定积分的计算法

教材见 317 页

1. 解析:

$$(1) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x + \frac{\pi}{3}) d(x + \frac{\pi}{3}) = \sin(x + \frac{\pi}{3}) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\sqrt{3}$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^3 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}(3\pi - 4)$$

$$(5) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$(7) \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx \xrightarrow{x=\sin t} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1 \right) dt = (-\cot t - t) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$(9) \int_0^1 x \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} dx \xrightarrow{t=x^2} \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t} dt$$

$$\xrightarrow{t=\sin \theta} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta}{1 + \sin \theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 \theta}{1 + \sin \theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta) d\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$



$$\begin{aligned}
 (11) \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx &\xrightarrow{x=a \sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^2 t a^2 \cos^2 t dt = a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t \cos t)^2 dt \\
 &= \frac{a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt \\
 &= \frac{a^4}{8} \times \frac{\pi}{2} - \frac{a^4}{8} \times \frac{1}{4} \sin 4t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^4 \pi}{16}
 \end{aligned}$$

$$(13) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} \sin x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} d \cos x = \frac{2}{3} \cos^{\frac{3}{2}} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$(15) \int_0^4 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx \xrightarrow{t=1+\sqrt{x}} \int_1^3 \frac{2(t-1)}{t} dx = \int_1^3 \left(2 - \frac{1}{t}\right) dx = 4 - 2 \ln t \Big|_1^3 = 4 - 2 \ln 3$$

$$(17) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \sin x}{1 + \sin^2 x} = \arctan(\sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned}
 (19) \int_0^1 e^{\sqrt[3]{x}} dx &\xrightarrow{\sqrt[3]{x}=t} \int_0^1 3t^2 e^t dt = 3 \int_0^1 t^2 e^t dt \\
 &= 3(e - 2 \int_0^1 t e^t dt) = 3e - 6e^t t \Big|_0^1 + 6 \int_0^1 e^t dt \\
 &= 3(e - 2)
 \end{aligned}$$

$$(21) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \sin x} dx \text{ (利用书 P302 例 6.5 的结论)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} dx = \frac{\pi}{4}$$

$$(23) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx \xrightarrow{x=t+\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (t + \pi) \cos^2 t dt = \int_{-\pi}^{\pi} \pi \cos^2 t dt + \int_{-\pi}^{\pi} t \cos^2 t dt$$

$$\because \int_{-\pi}^{\pi} t \cos^2 t dt = 0 \text{ (奇函数)}$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} \pi \cos^2 t dt = 2\pi \int_0^{\pi} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (\cos 2t + 1) d2t = \pi^2$$

5. 证明:

$$(1) \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx$$

$$\text{对于等式右端第二个积分, 设 } x - T = t, \text{ 则 } \int_T^{a+T} f(x) dx = \int_0^a f(t + T) dt = \int_0^a f(t) dt$$

$$\text{于是 } \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^T f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

6. 证明: 令 $x = a + b - t$, $dx = d(-t)$, 当 $x = a$ 时 $t = b$, 当 $x = b$ 时 $t = a$

$$\text{于是: } \int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(a + b - t)(-1) dt = \int_a^b f(a + b - t) dt$$

$$\text{而 } \int_a^b f(a + b - t) dt = \int_a^b f(a + b - x) dx$$

$$\text{所以 } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a + b - x) dx$$

(2) 令 $x^2 = t$, 于是

$$\int_0^{a^2} t \sqrt{t} f(t) d\sqrt{t} = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} t f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x f(x) dx$$

(3) 令 $x = t + \pi$, $t = x - \pi$, $t \in (-\pi, \pi)$, 于是

$$\int_0^{2\pi} f(|\cos x|) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(|\cos(t + \pi)|) dt = 2 \int_0^{\pi} f(|\cos t|) dt$$



再令 $t = x + \frac{\pi}{2}$, $x = t - \frac{\pi}{2}$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 于是

$$2 \int_0^{\pi} f(|\cos t|) dt = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\left|\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right|\right) dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\sin x|) dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|) dx$$

10. 证明:

$$(1) \text{ 令 } 1-x=t, \text{ 则 } \int_0^1 x^m(1-x)^n dx = -\int_1^0 (1-t)^m t^n dt = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx$$

$$\text{即 } \int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^m x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cos x)^m dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^m dx = \frac{1}{2^m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x)^m dx$$

令 $2x = \frac{\pi}{2} - t$, $x = \frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}$, 得

$$\frac{1}{2^m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x)^m dx = \frac{1}{2^m} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos^m t d\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right) = -\frac{1}{2^{m+1}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos^m t dt = \frac{1}{2^m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m t dt$$

$$\text{即 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^m x dx = \frac{1}{2^m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx$$

11. 解:

$$\begin{aligned} (1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left[\frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \cdots (2n)} \right] \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \right] \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \int_{\xi}^1 \ln(1+x) dx \\ = [(x+1) \ln(x+1) - (x+1)] \Big|_0^1 \\ = \ln 4 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4n^2 - 2^2} + \frac{1}{4n^2 - 2^2} + \cdots + \frac{n-1}{4n^2 - n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{1}{n}}{4 - \left(\frac{2}{n}\right)^2} + \frac{\frac{2}{n}}{4 - \left(\frac{3}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{\frac{n-1}{n}}{4 - \left(\frac{n}{n}\right)^2} \right) \times \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 \frac{x}{4-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx^2}{4-x^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3} \end{aligned}$$

第七节

定积分的应用

教材见 338 页

1. 解析:

$$(1) A = \int_2^4 \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x^2 - 2 \right) dx = \frac{3}{4}x^2 \Big|_2^4 - \frac{1}{12}x^3 \Big|_2^4 - 2x \Big|_2^4 = 12 - 3 - \frac{16}{4} - \frac{2}{3} - 8 + 4 = \frac{1}{3}$$

$$(3) A = \int_0^a (a+x-2\sqrt{ax}) dx = \frac{a^2}{6}.$$

$$\begin{aligned} (5) A &= \int_{\frac{1}{10}}^{10} |\ln x| = \int_{\frac{1}{10}}^1 (-\ln x) dx + \int_1^{10} (\ln x) dx \\ &= -x \ln x \Big|_{\frac{1}{10}}^1 - \int_{\frac{1}{10}}^1 x d(\ln x) + \left(x \ln x \Big|_1^{10} - \int_1^{10} x d(\ln x) \right) = \frac{90}{10} \ln 10 - \frac{81}{10}. \end{aligned}$$



$$(7) y = x\sqrt{1-x^2} (x > 0, y > 0)$$

$$\text{从而 } A = 4 \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = \frac{4}{2} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} d(1-x^2) = -\frac{4}{2} \times \frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

(9) 由对称性可知,

$$S = 2\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 1^2 + 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \cdot 2 \cos 2\theta d\theta\right) = \frac{\pi}{3} + 2 - \sqrt{3}$$

$$(11) S = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (ae^{\theta})^2 d\theta = \frac{a^2}{4} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2\theta} d2\theta = \frac{a^2}{4} (e^{2\pi} - e^{-2\pi})$$

3. 解析:

(1) 绕 y 轴:

$$V_y = \int_{-|b|}^{|b|} \pi r^2 dy = \int_{-|b|}^{|b|} \pi a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \pi a^2 \left(y - \frac{y^3}{3b^2}\right) \Big|_{-|b|}^{|b|} = \frac{4}{3} |b| a^2 \pi$$

绕 x 轴:

$$V_x = \int_{-|a|}^{|a|} \pi r^2 dx = \int_{-|a|}^{|a|} \pi b^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) dy = \pi b^2 \left(y - \frac{y^3}{3a^2}\right) \Big|_{-|a|}^{|a|} = \frac{4}{3} |a| b^2 \pi$$

$$\begin{aligned} (5) V &= \int dV = \int \pi x^2 dy = \int_{2\pi}^{\pi} \pi [a(t - \sin t)]^2 da(1 - \cos t) - \int_0^{\pi} \pi [a(t - \sin t)]^2 da(1 - \cos t) \\ &= -\pi a^3 \int_{\pi}^{2\pi} (t - \sin t)^2 \sin t dt - \pi a^3 \int_0^{\pi} (t - \sin t)^2 \sin t dt \\ &= \pi a^3 \cdot \left[\frac{13\pi^2}{2} - \frac{8}{3} - \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{8}{3}\right)\right] = 6\pi^3 a^3. \end{aligned}$$

$$\text{备注: } \int (t - \sin t)^2 \sin t dt = -\frac{t^2}{2} - (t^2 - 2) \cos t + 2t \sin t + \frac{1}{2} t \sin 2t - \frac{3}{4} \cos t + \frac{1}{4} \cos 2t + \frac{1}{12} \cos 3t + C$$

6. 解析: $\because x > 0, y > 0, \therefore y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$

求交点: $\sqrt{y} = y^2 \Rightarrow y = 0$ 或 $y = 1$

$$\therefore V = \int_0^1 \pi (y_1^2 - y_2^2) dx = \int_0^1 \pi [(\sqrt{x})^2 - x^4] dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right] \Big|_0^1 = \frac{3\pi}{10}$$

8. 解析:

$$(1) \text{ 弧长 } S = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1+y'^2} dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx$$

设 $x = \tan \theta, \theta \in [\arctan \sqrt{3}, \arctan \sqrt{8}]$

$$\begin{aligned} S &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sec \theta}{\tan \theta} d(\tan \theta) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\sin \theta \cos^2 \theta} d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \csc \theta\right) d\theta = \frac{1}{\cos \theta} \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} + \ln \left|\tan \frac{\theta}{2}\right| \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$(3) \text{ 上半部分方程为 } y = \sqrt{\frac{2}{3}(x-1)^2}$$

$$\text{设 } t = x - 1 \text{ 则 } 0 \leq t \leq 1, y = \sqrt{\frac{2}{3}} t^{\frac{3}{2}}$$

$$S = 2 \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{3}{2}t + 1\right)^3} dt = 2 \times \frac{2}{3 \times \frac{3}{2}} \sqrt{\left(\frac{3}{2}t + 1\right)^3} \Big|_0^1 = \frac{8}{9} \left(\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$



$$\begin{aligned}
 (5) S &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\varphi'^2(t) + \phi'^2(t)} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt \\
 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \cos t \sin t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = 6a
 \end{aligned}$$

函数要求 $\cos t > 0$, t 从 $-\frac{\pi}{2}$ 开始, 故 x 的范围是 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+y'^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{x}{2} dx = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4$$

$$\begin{aligned}
 13. \text{解析: } &= \int_0^{15} \pi y^2 dx \ell g(15-x) = \int_0^{15} \frac{4}{9} \ell g \pi x^2 (15-x) dx \\
 &= \frac{4}{9} \ell g \pi \left(5x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^{15} = 5.8 \times 10^7 J
 \end{aligned}$$

13. 解析:

由题意易知 $F = 4.9(1-x)$

$$W = FS = \int_{0.6}^{0.8} 4.9(1-x) dx = 0.294 J$$

15. 解析: 取椭圆底部中心为坐标点, 短轴为 y 轴, 椭圆方程为 $\frac{x^2}{1^2} + \frac{(y-0.75)^2}{0.75^2} = 1$

深度为 $h(0 \leq h \leq 1.5)$. 深为 dh 的一段水平端面积为 $ds = 2x dh = 2\sqrt{1 - \frac{(y-0.75)^2}{0.75^2}} dh$

ds 所受压力应为 $dF = \rho gh ds = 2\rho gh \sqrt{1 - \frac{(y-0.75)^2}{0.75^2}} dh = \frac{8}{3} \rho gh \sqrt{0.75^2 - (y-0.75)^2} dh$

$$\therefore F = \int dF = \int_0^{1.5} \frac{8}{3} \rho gh \sqrt{0.75^2 - (y-0.75)^2} dh = \frac{8}{3} \rho g \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin t) \cdot \frac{3}{4} \cos t \cdot \frac{3}{4} \cos t dt$$

$$= \frac{9}{4} \rho g \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{9\pi}{16} \rho g$$

对水, 取 $\rho = 10^3 kg \cdot m^{-3}$, $g = 10 m/s^2$, 得 $F = 17.67 kN$.

18. 解析: 由对称性可知, 圆心电荷的受力方向在 x 轴方向

$$F = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{kqR\delta}{R^2} \cos \theta d\theta = \frac{2kq\delta}{R}$$

第八节

反常积分

教材见 357 页

1. 解析:

$$(1) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^5} dx = \frac{-1}{4x^4} \Big|_1^{+\infty} = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} (x > 1)$$

$$(2) \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big|_1^{+\infty} = +\infty, \text{ 所以发散}$$

$$(3) \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx (a > 0) = \frac{-e^{-ax}}{a} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a}$$



$$(4) \text{ 令 } t = -\sqrt{x}, \text{ 则 } \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx = \int_0^{-\infty} 2te^t dt = 2te^t - \int_0^{-\infty} 2t d(e^t) = 2(t-1)e^t \Big|_0^{-\infty} = 2$$

$$(5) \text{ 令 } t = \arctan x, \text{ 则 } x = \tan t$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt = t \sin t + \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$(6) \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sin \omega t dt = \int_0^{+\infty} \frac{-1}{p} \sin \omega t d(e^{-pt}) = \frac{-e^{-pt}}{p} \sin \omega t + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-pt}}{p} \omega \cos \omega t dt =$$

$$\frac{-e^{-pt}}{p} \sin \omega t + \int_0^{+\infty} \frac{-\omega}{p^2} \cos \omega t d(e^{-pt}) = \frac{-e^{-pt}}{p} \sin \omega t - \frac{\omega e^{-pt}}{p^2} + \int_0^{+\infty} \frac{-\omega^2}{p^2} e^{-pt} \sin \omega t dt$$

$$\text{所以 } \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sin \omega t dt = \frac{p^2}{\omega^2 + p^2} \left(\frac{-e^{-pt}}{p} \sin \omega t - \frac{\omega e^{-pt}}{p^2} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\omega}{\omega^2 + p^2}$$

$$(7) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2 + 1} d(x+1) = \arctan(x+1) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$$

$$(8) \text{ 令 } x = \sin t, \text{ 则 } \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t} \cos t dt = -\cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$(9) \int_0^2 \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx = \int_0^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x-3}{x-1} \right) \Big|_0^2 + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x-3}{x-1} \right) \Big|_1^2$$

因为 $\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x-3}{x-1} \right) \Big|_0^1$ 和 $\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x-3}{x-1} \right) \Big|_1^2$ 都是发散的, 所以原反常积分也是发散的.

$$(10) \text{ 令 } x = \sec t, \text{ 则 } \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sec t \tan t} \sec t \tan t dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} dt = \frac{\pi}{3}$$

$$(11) \text{ 令 } t = \sqrt{x-1} \Rightarrow x = t^2 + 1, \text{ 所以 } \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx = \int_0^1 \frac{t^2+1}{t} 2t dt = \frac{2}{3} t^2 + 2t \Big|_0^1 = \frac{8}{3}$$

$$(12) \text{ 令 } t = \frac{1}{x}, \text{ 则 } x = \frac{1}{t}, \text{ 故而}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}} dx = \int_1^0 \frac{-t}{\sqrt{1-t^4}} dt = \int_1^0 \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-t^4}} d(t^2) = -\frac{1}{2} \arcsin(t^2) \Big|_1^0 = \frac{\pi}{4}$$

$$(13) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\infty} -\sin \frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right) = \cos \frac{1}{x} \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{+\infty}, \text{ 所以发散.}$$

$$(14) \text{ 令 } t = \sqrt{x-1} \Rightarrow x = t^2 + 1, \text{ 则 } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \arctan t$$

$$\Big|_0^{+\infty} = \pi$$

2. 解析:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = x \ln \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x} dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2$$

$$\text{所以 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x} dx = \frac{\pi}{2} \ln 2$$

$$(2) \text{ 令 } x = \sin t, \text{ 则 } \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin t}{\cos t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt = -\frac{\pi}{2} \ln 2$$

$$(3) \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} dx = \int_0^{\pi} \frac{x 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}} dx = \int_0^{\pi} \frac{x}{\tan \frac{x}{2}} dx,$$

$$\text{令 } t = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2t, \text{ 则 } \int_0^{\pi} \frac{x}{\tan \frac{x}{2}} dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\tan t} dt, \text{ 由一式得 } = 2\pi \ln 2.$$

4. 解析:

$$(1) \text{ 令 } x = \tan t, \text{ 则 } \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\sec t)^4} (\sec t)^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2 dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$(2) \text{ 令 } u = \sqrt{\tan x} \Rightarrow x = \arctan(u^2), \text{ 则 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\tan x}} = \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+u^4} du$$



再令 $t = \frac{1}{u} \Rightarrow u = \frac{1}{t}$, 则原式 $= \int_0^{+\infty} \frac{2t^2}{1+t^4} dt$,

因为 $\int_0^{+\infty} \frac{2}{1+u^4} du = \int_0^{+\infty} \frac{2t^2}{1+t^4} dt$

$$\begin{aligned} \text{所以 } 2 \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+u^4} du &= \int_0^{+\infty} \frac{2+2u^2}{1+u^4} du = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1+\frac{1}{u^2}}{u^2+\frac{1}{u^2}} du = 2 \int_0^{+\infty} \frac{d(u-\frac{1}{u})}{(u-\frac{1}{u})^2+2} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{u-\frac{1}{u}}{\sqrt{2}}\right) \Big|_0^{+\infty} = \sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

$$\text{所以原式等于 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\tan x}} = \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+u^4} du = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

5. 解析:

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot \frac{1}{x^3+x^2+1} = 1$, 由柯西判别法可知, 原积分收敛.

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}} = 1$

由柯西判别法可知, 原积分发散.

(5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p \cdot \frac{\arctan x}{x^p} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = 1$, 由柯西判别法可知, 当 $p > 1$ 时, 原积分收敛; 当 $p < 1$ 时, 原积分发散.

$$(7) \int_0^2 \frac{dx}{\ln x} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\ln x} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\ln x} + \int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \cdot \frac{1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$ 由柯西判别法得, 积分 $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$ 发散;

$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \cdot \frac{1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{\ln x} = -1$, 由柯西判别法可知, 积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\ln x}$ 发散;

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{2}} \cdot \left| \frac{1}{\ln x} \right| = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\ln x} = 0$, 由柯西判别法可知, 积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{\ln x} \right| dx$ 收敛, 积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\ln x}$ 绝对收敛. 故原积分发散.

$$(9) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}$$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 由柯西判别法可知, 积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}$ 收敛;

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x-0)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1$

由柯西判别法可知, 积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}$ 收敛. 故而原积分收敛.

$$(11) \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}} dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3\sqrt{(x-1)(x-2)}} dx$$

$$= \int_2^3 \frac{1}{x^3\sqrt{(x-1)(x-2)}} dx + \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^3\sqrt{(x-1)(x-2)}} dx$$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x^3\sqrt{(x-1)(x-2)}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x^3\sqrt{x-1}} = \frac{1}{8}$

由柯西判别法可知, 积分 $\int_2^3 \frac{1}{x^3\sqrt{(x-1)(x-2)}} dx$ 收敛;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot \frac{1}{x^3\sqrt{(x-1)(x-2)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}} = 0$ 由柯西判别法可知, 积分 $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^3\sqrt{(x-1)(x-2)}} dx$ 收敛; 故原积分收敛.

(13) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \cdot \left| \frac{x \sin x}{x^3+2x^2+5} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{5}{2}}}{x^3+2x^2+5} \cdot |\sin x| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{1+2x^{-1}+5x^{-3}} \cdot |\sin x| = 0$



由柯西判别法可知, 积分 $\int_0^{+\infty} \left| \frac{x \sin x}{x^3 + 2x^2 + 5} \right| dx$ 收敛, 原积分绝对收敛.

$$(15) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{x^{-\frac{1}{4}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{-\frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}} \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{-\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{4}}} = 0$$

由柯西判别法可知, 原积分收敛.

$$(17) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x^n} = \begin{cases} 0, 0 < n < 1 \\ 1, n = 1 \\ +\infty, n > 1 \end{cases}$$

$0 < n \leq 1$ 时, $x = 0$ 不是瑕点, 只需讨论无穷限广义积分的敛散性.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^m \frac{\ln(1+x)}{x^n} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{n-m}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n-m)x^{n-m-1}(1+x)} = 0, n > m \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{m-n} \ln(1+x) = +\infty, n \leq m \end{cases}$$

当 $m > 1$ 且 $n > m$, 即 $n > 1$ 时, 广义积分收敛; 当 $m \leq 1, n \leq m$, 即 $0 < n \leq 1$ 时, 广义积分发散;

$\therefore 0 < n \leq 1$ 时, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$ 发散.

$$n > 1 \text{ 时, } x = 0 \text{ 为瑕点, } \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x-0)^q \frac{\ln(1+x)}{x^n} = \begin{cases} 0, n-m < 1 \\ 1, n-m = 1 \\ +\infty, n-m > 1 \end{cases}$$

当 $0 < m < 1, n-m < 1$, 即 $0 < n \leq 1$ 时, 广义积分收敛;

当 $m \geq 1, n-m = 1$, 即 $n \geq 2$ 时, 广义积分发散;

当 $m \geq 1, n-m > 1$, 即 $n > 2$ 时, 广义积分发散.

综上所述, 当 $1 < n < 2$ 时, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$ 收敛, 其余情况发散.

第九节 总习题四

教材见 374 页

1. 解析:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \frac{i}{n}} = \int_0^1 \sqrt{1+x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{(1+x)^3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1)$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right) = \int_0^1 \sin x\pi dx = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sin x\pi dx = \frac{-1}{\pi} (\cos \pi x) \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{b-a} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

(x_i 为区间 (a, b) 上一点)

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan t} dt}{\int_0^{\tan x} \sqrt{\sin t} dt} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{\tan x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos x}{\frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\cos x} = 1$$

2. 解析:



$$\begin{aligned}
 (1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(1 + \cos x)}{1 + \cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d(\tan \frac{x}{2}) - \ln(1 + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= (x \tan \frac{x}{2}) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan \frac{x}{2} dx + \ln 2 = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

$$(3) \text{ 令 } t = \sqrt{\frac{x}{1+x}} \Rightarrow x = \frac{t^2}{1-t^2}$$

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } t=0; x=3 \text{ 时, } t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{原式} &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} \arcsin t d \frac{t^2}{1-t^2} = \arcsin t \frac{t^2}{1-t^2} \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{t^2}{1-t^2} d \arcsin t \\
 &= \pi - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{t^2}{1-t^2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt
 \end{aligned}$$

$$\text{再令 } t = \sin y, t=0 \text{ 时, } y=0; t = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 时, } y = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \text{原式} = \pi - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y - \cos y} \cos y dy = \pi - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos^2 y}{\cos^2 y} dx = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 2 \cos x}{3 \sin x + \cos x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{10}(3 \sin x + \cos x) - \frac{7}{10}(3 \cos x - \sin x)}{(3 \sin x + \cos x)} dx \\
 &= \frac{1}{10} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{7}{10} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3 \sin x + \cos x} = \frac{\pi}{20} - \frac{7}{10} \ln 3 = \frac{1}{20}(\pi - 14 \ln 3)
 \end{aligned}$$

4. 证明:

$$(1) F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)}$$

$$\text{由题目得 } F'(x) = [\sqrt{f(x)} - \frac{1}{\sqrt{f(x)}}]^2 + 2 \geq 2$$

$$(2) F(a) = \int_a^a f(t) dt + \int_b^a \frac{dt}{f(t)} = - \int_a^b \frac{dt}{f(t)} < 0, F(b) = \int_a^b f(t) dt + \int_b^b \frac{dt}{f(t)} = \int_a^b f(t) dt > 0$$

由定理可知, $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 又有零点定理可知, 方程 $F(x) = 0$ 在 (a, b) 内至少有一个根.

$$\begin{aligned}
 6. \text{ 证明: } &\left[\int_a^b f(x) \cos kx dx \right]^2 + \left[\int_a^b f(x) \sin kx dx \right]^2 \leq \left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 \\
 \Rightarrow &\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f(a + i \frac{b-a}{n}) \cos k(a + i \frac{b-a}{n}) \right)^2 + \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f(a + i \frac{b-a}{n}) \sin k(a + i \frac{b-a}{n}) \right)^2 \leq \\
 &\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f(a + i \frac{b-a}{n}) \right)^2
 \end{aligned}$$

不妨设

$$p_i = f(a + i \frac{b-a}{n}) \cos k(a + i \frac{b-a}{n}), q_i = f(a + i \frac{b-a}{n}) \sin k(a + i \frac{b-a}{n}), r_i = f(a + i \frac{b-a}{n})$$

$$\text{则只需证明 } \left(\sum_{i=1}^n p_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n q_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n r_i \right)^2,$$

则只需证明再取极限即可证明原不等式.

$$\left(\sum_{i=1}^n p_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n p_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_i p_j, \left(\sum_{i=1}^n q_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n q_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n q_i q_j, \left(\sum_{i=1}^n r_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n r_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n r_i r_j$$

$$\text{且 } p_i^2 + q_i^2 = r_i^2$$



$$\therefore \left(\sum_{i=1}^n p_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n q_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n p_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_i p_j + \sum_{i=1}^n q_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n q_i q_j = \sum_{i=1}^n r_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_i p_j + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n q_i q_j$$

所以只需证明对 $\forall i \neq j, p_i p_j + q_i q_j \leq r_i r_j$

若 $r_i = 0$ 或 $r_j = 0$, 此时有 $p_i = q_i = 0$ 或 $p_j = q_j = 0$, 上式成立.

反之, 令 $\sin A = \frac{p_i}{r_i}, \cos A = \frac{q_i}{r_i}, \sin B = \frac{p_j}{r_j}, \cos B = \frac{q_j}{r_j}$, 则上式等价于 $\sin A \sin B + \cos A \cos B \leq 1$

$$\Rightarrow \cos(B - A) \leq 1$$

$$\therefore \left(\sum_{i=1}^n p_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n q_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n r_i \right)^2, \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n p_i = \int_a^b f(x) \cos kx \, dx, \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n q_i = \int_a^b f(x) \sin kx \, dx,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n r_i = \int_a^b f(x) \, dx.$$

$$\therefore \left[\int_a^b f(x) \cos kx \, dx \right]^2 + \left[\int_a^b f(x) \sin kx \, dx \right]^2 \leq \left[\int_a^b f(x) \, dx \right]^2.$$

$$8. \text{ 解析: } f(x) = \begin{cases} e^{-x}x \geq 0 \\ 1 + x^2x < 0 \end{cases}$$

令 $t = x + 1, \therefore x \geq 0$ 时 $t \geq 1; x < 0$ 时 $t < 1$

$$f(t-1) = \begin{cases} e^{1-t}t \geq 1 \\ 1 + (t-1)^2t < 1 \end{cases}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^1 f(t-1) \, dt = \int_{-\frac{1}{2}}^1 [1 + (t-1)^2] \, dt + \int_1^2 e^{1-t} \, dt = \frac{29}{8} - \frac{1}{e}$$

$$20. \text{ 证明: 令 } F(t) = \int_a^t x f(x) \, dx - \frac{a+t}{2} \int_a^t f(x) \, dx, t \in [a, b]$$

$$\text{则 } F'(t) = t f(t) - \frac{a+t}{2} f(t) - \frac{1}{2} \int_a^t f(x) \, dx$$

$$F''(t) = f(t) + t f'(t) - \frac{1}{2} f(t) - \frac{a+t}{2} f'(t) - \frac{1}{2} f(t) = \frac{t-a}{2} f'(t).$$

$\therefore f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增

$$\therefore f'(t) \geq 0, \frac{t-a}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{t-a}{2} f'(t) \geq 0, t \in [a, b]$$

$\therefore F'(t)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加, 又 $F'(a) = 0$, 故 $F'(t) \geq 0, t \in [a, b]$

$$\therefore F(t) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上单调增加, 又 } F(a) = 0, \text{ 故 } F(b) = \int_a^b x f(x) \, dx - \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) \, dx \geq 0$$

$$\text{即 } \int_a^b x f(x) \, dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) \, dx. \text{ 得证.}$$

25. 证明: 先证数列 $\{a_n\}$ 为单调的:

$$a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) \, dx$$

$$\therefore a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x) \, dx = f(n+1) - f(\xi)[(n+1) - n] = f(n+1) - f(\xi), \xi \in (n, n+1)$$

又 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调减少且非负连续, 故 $f(n+1) < f(\xi)$.

$\therefore a_{n+1} - a_n < 0$, 即数列 $\{a_n\}$ 单调递减. 下面证明数列 $\{a_n\}$ 有界:

$$a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) \, dx = \sum_{k=1}^n f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) \, dx = f(n) + \sum_{k=1}^{n-1} [f(k) - \int_k^{k+1} f(x) \, dx]$$

$$= f(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} [f(k) - f(x)] \, dx$$

又 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调减少且非负,



$$\therefore f(k) - f(x) > 0, x \in (k, k+1), f(n) > 0$$

$$\therefore a_n = f(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} [f(k) - f(x)] dx > 0$$

\therefore 数列 $\{a_n\}$ 单调递减且有下界, 故 $\{a_n\}$ 的极限存在.

习题见第 136 页

第一节

常数项级数的概念与性质

教材见 387 页

1、单项选择题

(1) B 解析: 由例 1.1 知几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ 收敛的条件是 $-1 < q < 1$ 。

(2) B 解析: 由级数收敛的必要条件知该级数发散。

(3) B 解析: 取 $k=0$ 时, 该级数收敛, 取 $k=1$ 时, 该级数发散。(4) D 解析: 取 $\mu_n = \frac{1}{n}$ 时, 级数发散但 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = 0$ 。取 $\mu_n = n$ 时, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = \infty$ 。

(5) C 解析: 由级数收敛的必要条件知道, 所以级数发散。

(6) C 解析:

$$2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \mu_n = \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 + \cdots \quad (1-1)$$

$$5 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{2n-1} = \mu_1 + \mu_3 + \mu_5 + \cdots \quad (1-2)$$

$$\text{式 (1-1)} - \text{式 (1-2)} = 3 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{2n} = \mu_2 + \mu_4 + \mu_6 + \cdots$$

$$\text{式 (1-1)} + \text{式 (1-2)} = 8.$$

2、填空题

$$(1) 1, \frac{4}{3}, \frac{31}{21}; \quad (2) 1, \frac{3}{2}, \frac{31}{18}; \quad (3) \frac{1}{5}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{125}.$$

3、解析

$$s_n = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{n-1} + \mu_n s_{n-1} = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{n-2} + \mu_{n-1}$$

$$\text{所以 } \mu_n = s_n - s_{n-1}$$

$$\text{因为 } s_n = \frac{3^n - 1}{3^n} \text{ 所以解得 } \mu_n = \frac{2}{3^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n - 1}{3^n} = 1$$

4、解析:

$$(1) \because \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!},$$

$$s_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 1$$



(2) 解析: $\ln \frac{n^2-1}{n^2} = \ln \frac{n-1}{n} - \ln \frac{n}{n+1}$, $s_n = \sum_{n=2}^n \ln \frac{n-1}{n} - \ln \frac{n}{n+1} = \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{n}{n+1}$
 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \frac{n^2-1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln \frac{1}{2} - \ln \frac{n}{n+1}) = \ln \frac{1}{2}$

(3) 解析: $a_n + a_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x (1 + \tan^2 x) dx$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x d \tan x = \frac{1}{n+1}$

(4) 解析: 在判断一个级数时必须先判断他的通项是否在 n 趋于无穷大时趋于 0, 又 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{(1 + \frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} \neq 0$ 由收敛级数的必要条件知该级数发散.

(5) 解析: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \ln(1 + \frac{1}{n^2}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1 + \frac{1}{n^2})^{n^2} = 1$, 由收敛级数的必要条件可知该级数发散.

(6) $\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{10} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{15} - \frac{1}{2^3} \cdots + \frac{1}{5n} - \frac{1}{2^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{5n} - \frac{1}{2^n})$

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n}$ 发散, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛, 故原级数发散.

5、解析: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 的前 $2n$ 项和为: $S_{2n} = \sum_{n=1}^n (\mu_{2n-1} + \mu_{2n}) = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \cdots + \mu_{2n-1} + \mu_{2n}$.

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 的前 $(2n+1)$ 项和为: $S_{2n+1} = \sum_{n=1}^n (\mu_{2n-1} + \mu_{2n}) + \mu_{2n+1}$ 所以 $S_{2n+1} = S_{2n} + \mu_{2n+1}$ ①.

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_{2n-1} + \mu_{2n})$ 收敛于 s , 所以 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = s$ ②,

又因为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = 0$, 对①两侧求极限得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = s$ ③

综合②③得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = s$. 证毕.

第二节

常数项级数的审敛法

教材见 403 页

1. 解析:

(1) $\frac{1}{4n+1} > \frac{1}{4n+1+3} = \frac{1}{4(n+1)}$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4(n+1)}$ 发散. 由比较审敛法得原式发散.

(3) $\frac{n}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1-1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+2} - (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) = \frac{2}{n+2} - \frac{1}{n+1} > \frac{2}{n+2} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{n+2}$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ 发散. 由比较审敛法得原式发散.

(5) $n \geq 1$ 时, $2^n > n$, 得 $\sqrt[n]{n} \leq 2$. 当 $n=1$ 时, $\sin \frac{\pi}{n \sqrt[n]{n}} = 0$

当 $n \geq 2$ 时, 又正弦函数在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, $\sin \frac{\pi}{n \sqrt[n]{n}} \geq \sin \frac{\pi}{2n}$. 由 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2n}$ 发散, 得原式发散.

(7) $(\sqrt{n}+1) \ln(1 + \frac{1}{n^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}) = \ln(1 + \frac{1}{n^2})^{\sqrt{n}+1} \leq (\frac{1}{n^2})^{\sqrt{n}+1} \leq \frac{1}{n^2}$

由 p 级数易得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 所以原式收敛.



注: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

2. 解析: (1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{n^3}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^3}{3n^3} = \frac{1}{3} < 1$

由比值审敛法可知原级数收敛.

(3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{n \sin \frac{\pi}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \frac{\pi}{2^{n+1}}}{n \frac{\pi}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$

由比值审敛法可知原级数收敛.

(5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{n!}}{\frac{n!}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)n}{n+1} = \infty > 1$

由比值审敛法可知原级数收敛.

3. 解析:

(1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{(\sqrt[3]{3}-1)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{3}-1) = 0 < 1$

由根值审敛法可知原级数收敛.

(3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{a}{[\ln(1+n)]^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{a}}{\ln(1+n)} = 0 < 1$

由根值审敛法可知原级数收敛.

(5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-1} \cdot \frac{-n}{n+1}} = e^{-1} < 1$

由根值审敛法可知原级数收敛.

4. 解析:

(1) $\frac{1}{an+b} > \frac{1}{an}$ 由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{an}$ 发散. 由比较审敛法得原式发散.

(3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{n!}}{\frac{n^3}{n!}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = 0 < 1$

由比值审敛法可知原级数收敛.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+a^n}{1+b^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+b^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+b^n}$

当 $b \leq 1$ 时, $b^n \leq 1$, $\frac{1}{1+b^n} \geq \frac{1}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+b^n}$ 发散.

当 $b > 1$ 时, $\frac{1}{1+b^n} < \frac{1}{b^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+b^n}$ 收敛.

(a) $\frac{a^n}{1+b^n} < \frac{a^n}{b^n}$, 易得 $a < b$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+b^n}$ 收敛

(b) $a \geq b$ 时, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{1+b^n} \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^n}{1+b^n} = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+b^n}$ 发散.

综上可知当 $b > 1$ 且 $0 < a < b$ 时原式收敛, 其余情况皆发散.

5. 解析:

(1) $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, 由莱布尼兹审敛法得原式收敛. 由 p 级数易得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, 所以原式条件收敛.

(3) $\sin \frac{1}{n} > \sin \frac{1}{n+1}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{n} = 0$ 由莱布尼兹审敛法得原式收敛. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ 发散易得原式条件收敛.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ 收敛.

$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, 由莱布尼兹审敛法得 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ 收敛, 则原式收敛.

$\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2+1} > \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 得原级数条件发散.



6. 解析: $\frac{\sqrt{a_n}}{n} = \sqrt{\frac{a_n}{n^2}} \leq \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{n^2})$
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{n^2})$ 收敛. $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 收敛.

7. 证明:

(1) 必要性: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 且 $-\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 也收敛.

又 $-|a_n| \leq a_n^+ \leq |a_n|$, $-|a_n| \leq a_n^- \leq |a_n|$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 同时收敛.

充分性: 正部与负部同时收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 收敛.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 故而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛的充要条件是其正部与负部同时收敛, 得证.

(2) 必要性: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

反证法: 如果其正部与负部不同时发散, 有下列情况:

(a) 同时收敛, 此时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 这与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛矛盾.

(b) 一格收敛一个发散, 得正部与负部之和发散, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 这与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛矛盾.

综上得证 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛的必要条件是其正部与负部同时发散.

充分性: 正部与负部同时发散, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = 0$$

时成立, 此时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$, 故有

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = -2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛的充要条件是其正部与负部同时发散.

得证.

第三节

幂级数

教材见 415 页

1. 解析:

(1) 原式在 $x = 0$ 处收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{n^2 + n}{(n+1)^2 + n + 1} \right| = 1$

在 $x = \pm 1$ 处 $\left| \frac{1}{n^2 + n} \right| < \frac{1}{n^2}$, 所以收敛. 因此, 收敛域为 $[-1, 1]$.

(3) 令 $t = (x+1)^2$, 原式变为 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n t^n$, 该式在 $(0, \frac{1}{2})$ 上收敛, 所以原式在 $(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$ 收敛.



(5) 令 $t = x + 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{n^p}{(n+1)^p} = 1$, 当 $1 \geq p > 0$ 时, 在 $t = 1$ 处发散, $p < 1$ 时, 在 $t = 1$ 处收敛, $t = -1$ 时函数都收敛.

因此原函数的收敛域为

$$\begin{cases} [-2, 0), 0 < p \leq 1 \\ [-2, 0], p > 1 \end{cases}$$

(7) 设 $t = x^3$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{1}{2}$, 在 $t = 2$ 时收敛, 在 $t = -2$ 时发散, 因此原式收敛域为 $(-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$

2. 解析:

(1) 当 $x = 0$ 时, $s(x) = 0$; 当 $x \neq 0$ 时, $s(x) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{x^2}{1 - e^{-x}}$

(3) $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int x^{2n-2} = \int \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{2n-2} = \int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x, x \in [-1, 1]$

(5) 当 $x = 1$ 时, $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

$x \neq 1$ 时, $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \iint x^{n-1} = \int \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = (1-x) \ln(1-x) + x, x \in [-1, 1]$

3. 解析:

(1) $x = \pm 1$ 时, 级数发散;

$x \neq \pm 1$ 时, $\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \left| \frac{x(1+x^{2n})}{1+x^{2n+2}} \right|$
 $|x| < 1$ 时, $\rho = |x| < 1$; $|x| > 1$ 时, $\rho = 0 < 1$

因此, 级数收敛域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

(2) $\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \left| \frac{x^2 + n^3}{x^2 + (n+1)^3} \right| = 1$ 因此, 收敛域为 $(-\infty, +\infty)$

4. 解析: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n$

由 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ 得 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n = e^{\frac{x}{2}}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}$

令 $G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}$,

则 $\int G(x) dx = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \int n \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} dx$

$$= \frac{2}{(n-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n + C = 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} + C = x e^{\frac{x}{2}} + C$$

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{x}{2} \cdot G'(x) = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}\right) e^{\frac{x}{2}}$

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}\right) e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}} = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 1\right) e^{\frac{x}{2}}$.

3. 解析:

(1) $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} x^n$

$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n - \frac{1}{2}} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$

设 $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n - \frac{1}{2}} x^n, v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$



设 $x = t^2$

$$u(t^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{2n-1} t^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} t \frac{2(-1)^{n-1}}{2n-1} t^{2n-1} = 2t \sum_{n=1}^{\infty} \int (-t^2)^{n-1} = 2t \int \frac{1}{1+t^2} dt = 2t \arctan t$$

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \int (-x)^{n-1} = \ln(1+x)$$

$$s(x) = 2\sqrt{x} \arctan \sqrt{x} - \ln(1+x), s\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \ln \frac{4}{3}$$

$$(3) \text{ 令 } s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)(x)^n, x = t^2$$

$$s(t^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)t^{2n} = t^2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)t^{2n-2} = t^2 \sum_{n=1}^{\infty} (t^{2n-1})' = t^2 \left(\frac{t}{1-t^2}\right)' = t^2 \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2} t^2$$

$$s\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \cdots = 3$$

第四节

函数展开成幂级数及其应用

教材见 433 页

1. 解析:

$$(1) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$e^{-x} = 1 + x + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \cdots \text{⑧'}$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, x \in (-\infty, +\infty)$$

$$(3) \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2x)^{2n}}{2(2n)!}, x \in (-\infty, +\infty)$$

$$(5) \frac{1}{(1+x)^2} = -\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1) x^n, x \in (-1, 1)$$

$$(7) ((1+x) \ln(1+x))' = \ln(1+x) + 1 = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

$$(1+x) \ln(1+x) = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}, x \in (-1, 1]$$

2. 解析,

$$(1) \sqrt{x} = (1 + (x-1))^{1/2} = 1 + \frac{x-1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{3}{2}) \times \cdots \times (-\frac{2n-1}{2})}{n!} (x-1)^n$$

$$= 1 + \frac{x-1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} (x-1)^n, x \in [0, 2]$$

$$(3) \cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\left(x + \frac{\pi}{3}\right)^{2n}}{(2n)!} + \sqrt{3} \frac{\left(x + \frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right], x \in (-\infty, +\infty)$$

$$(5) \sin 2x = -\sin 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n+1} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in (-\infty, +\infty)$$



第五节 傅里叶级数

教材见 449 页

1. 解析: 由题意可知, $f(x)$ 在 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots)$ 处有间断点, 满足收敛定理,

$$\therefore f(\pi) = \frac{1}{2}(f(\pi^+) - f(\pi^-)) = \frac{1}{2}(-1 + 1 + \pi^2) = \frac{1}{2}\pi^2$$

$$\text{同理可知 } f(5\pi) = \frac{1}{2}\pi^2$$

2. 解析:

$$(1) a_0 = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1 - x^2) dx = 2 \times 2 \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - x^2) dx = 4 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24}\right) = \frac{11}{6}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1 - x^2) \cos 2n\pi x dx = 2 \times 2 \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - x^2) \cos 2n\pi x dx = 4 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \cos 2n\pi x dx - \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \cos 2n\pi x dx \right) \\ &= 4 \left(0 - \frac{1}{4n^2\pi^2} \cos n\pi \right) = -\frac{1}{n^2\pi^2} \cos n\pi = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2} \end{aligned}$$

$$b_n = 0$$

$$\therefore f(x) = \frac{11}{12} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2} \cos 2n\pi x$$

(3) $f(x)$ 为偶函数, $\therefore b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (3x^2 + 1) dx = \frac{1}{\pi} [2\pi^3 + 2\pi] = 2\pi^2 + 2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (3x^2 + 1) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (3x^2 + 1) \cos nx dx = \frac{12(-1)^n}{n^2}$$

$$\therefore f(x) = \pi^2 + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

3. 解析: $2l = 2 - 0 = 2, \therefore l = 1$

将 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 外补充定义, 将 $f(x)$ 延拓为周期为 2 的周期函数

$$\therefore a_0 = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \int_0^2 f(x) \cos n\pi x dx = \int_0^1 x \cos n\pi x dx = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}$$

$$b_n = \int_0^2 f(x) \sin n\pi x dx = \int_0^1 x \sin n\pi x dx = \frac{(-1)^{1+n}}{n\pi}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left[\frac{(-1)^n - 1}{n\pi} \cos n\pi x + (-1)^{n+1} \sin n\pi x \right]$$

$$f(0) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \cdot \frac{(-1)^n - 1}{n\pi} = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 0$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

5. 解析:



$$(1) \text{ 将 } f(x) \text{ 偶延拓得 } b_n = 0, a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[0 - \frac{1}{n^2} (\cos n\pi - 1)\right] = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} \cos nx \, dx - \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx\right] \\ &= -\frac{2}{\pi n^2} (\cos n\pi - 1) = \begin{cases} \frac{4}{\pi n^2} (n = 2k) \\ 0 (n = 2k) \end{cases} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x.$$

(3)a. 正弦级数

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx = \frac{2}{l} \left(\int_0^{\frac{l}{2}} x \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx + \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx \right) \\ &= \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{4l}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2} \, dx = \frac{4l(-1)^{k-1}}{\pi^2 (2k-1)} \\ \therefore f(x) &= \frac{4l}{\pi^2} \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = \frac{4l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{l}.$$

b. 余弦级数

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \, dx = \frac{2}{l} \left(\int_0^{\frac{l}{2}} x \, dx + \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) \, dx \right) = \frac{l}{2} \\ a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx = \frac{2}{l} \left(\int_0^{\frac{l}{2}} x \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx + \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx \right) = \frac{(-1)^{k-1} l}{\pi^2 (2k-1)^2} \\ \therefore f(x) &= \frac{l}{4} + \frac{l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{l} \end{aligned}$$

7. 解析: 令 $f(x) = x(\pi - x)$, 对其进行奇延拓, 得:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi} x\pi \sin nx \, dx - \int_0^{\pi} x^2 \sin nx \, dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\pi^2}{n} \cos n\pi + \frac{\pi^2}{n} \cos n\pi - \frac{2}{n^3} \cos n\pi + \frac{2}{n^3} \right] = \frac{2}{\pi} \left[\frac{2}{n^3} - \frac{2}{n^3} \cos n\pi \right] \\ &= \frac{4}{n^3 \pi} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} \frac{8}{n^3 \pi} (n = 2k-1) \\ 0 (n = 2k) \end{cases} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^3}$$

8. 解析: 将 $f(x)$ 偶延拓得:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \\ f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(nx + \frac{\pi}{2}n\right) \\ f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(nx - \frac{\pi}{2}n\right) \\ -f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= -\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(nx - \frac{\pi}{2}n\right) \times (-1) \\ \therefore f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -f\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \therefore a_0 = 0 \end{aligned}$$



$$\therefore \cos\left(nx + \frac{\pi}{2}n\right) = -\cos\left(nx - \frac{\pi}{2}n\right) \Rightarrow \cos\left(nx + \frac{\pi}{2}n\right) + \cos\left(nx - \frac{\pi}{2}n\right) = 0$$

$$\therefore 2 \cos nx \cos \frac{n\pi}{2} = 0 \Rightarrow \cos \frac{n\pi}{2} = 0$$

$$\therefore n = 2k + 1 (k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

即 $f(x)$ 得所有偶数项为 0, 即 $a_{2k} = 0$

第六节

总习题五

教材见 459 页

2. 解析:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{3} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt[3]{3} - 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \frac{1}{n} \ln 3 = \ln 3 > 0$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{3} - 1)$ 有相同的敛散性

又因为调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{3} - 1)$ 发散.

$$(3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\ln^5 n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\ln^5 n} = +\infty (\text{由洛必达法则易知})$$

又因为调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$(5) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^{n+1} n^s}{a^n (n+1)^s} = a \begin{cases} > 1, \text{级数发散} \\ = 1 \\ < 1, \text{级数收敛} \end{cases}$$

当 $a = 1$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ p 级数, 当 $s > 1$ 时, 级数收敛; 当 $s \leq 1$ 时, 级数发散.

3. 解析:

$$(1) \text{ 因为 } |u_n| = \frac{\sin(n+2)}{\pi^n} \leq \frac{1}{\pi^n}, \text{ 级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^n} \text{ 收敛}$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛.

$$(3) \text{ 因为 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\cos \frac{1}{n} - n \sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| n^2 \cos \frac{1}{n} - n^3 \sin \frac{1}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| n^2 \cos \frac{1}{n} - n^3 \sin \frac{1}{n} \right|$$

$$\xrightarrow{x=\frac{1}{n}} \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \right| = \frac{2}{3} > 0$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \cos \frac{1}{n} - n \sin \frac{1}{n} \right|$ 有相同的敛散性;

又因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \cos \frac{1}{n} - n \sin \frac{1}{n} \right|$ 收敛

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n} - n \sin \frac{1}{n} \right)$ 绝对收敛.

$$(5) \text{ 因为 } u_n = (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}, |u_n| = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$$

$$\text{级数 } \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ 的部分和为 } \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [\ln(n+1) - \ln n + \ln n - \ln(n-1) + \dots + \ln 2 - \ln 1] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$$



所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散;

又 $|u_n| \geq |u_{n+1}|$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$, 所以交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

综上所述, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

习题见第 143 页

第一节

向量及其线性运算

教材见 9 页

3. 证明: 设 AB 中点为 E , AC 中点为 F , 连接 EF

则 $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, 则 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, 即 $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{BC}$, $|\overrightarrow{EF}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$.

5. 证明: (1) 由三角形不等式 $\mathbf{a} + \mathbf{b} \geq |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ 有 $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| + |\mathbf{b}| \geq |\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|$ 即 $|\mathbf{a}| - |\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$, 当且仅当 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ 时取等.(2) 由三角形不等式 $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ 有 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| + |\mathbf{c}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|$ 则 $|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}|$, 当且仅当 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \parallel \mathbf{c}$ 时取等.7. 证明: ① 充分性: 不妨设 $\lambda = 0$, 则必有 $\mu \neq 0$, 那么 $\mathbf{b} = \frac{\lambda}{\mu}\mathbf{a}$, 即 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$;② 必要性: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 即 $\mathbf{a} = k\mathbf{b}$, 则有 $\mathbf{a} - k\mathbf{b} = \mathbf{0}$ 即存在不全为零的实数 $\lambda = 1, \mu = k$, 使得 $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{0}$.9. 证明: ① 充分性: 若 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$, 则 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CO}$ 又 D 是 AB 中点, 则 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OD}$, 即 O 在中线 CD 上同理可得 O 在中线 AE 上, 以及 O 在中线 BF 上, 则有 O 是 $\triangle ABC$ 的重心, 充分性证毕.② 必要性: 取 AB, AC, BC 中点分别为 D, E, F 连接 AD, BE, CF 交于点 O , 即为重心, 则 $\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{OD}$ 又 D 是 BC 中点, 则 $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OD}$ 则 $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO}$ 即证得 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$.

第二节

向量的坐标

教材见 18 页

3. 解: 距 x 轴 $\sqrt{4+25} = \sqrt{29}$, 距 y 轴 $\sqrt{34}$, 距 z 轴 $\sqrt{13}$; 距 xOy 面 5, 距 xOz 面 2, 距 yOz 面 3.5. 解: (1) $(-3, 2, -1)$;(2) 关于 x 轴 $(3, 2, -1)$, 关于 y 轴 $(-3, -2, -1)$, 关于 z 轴 $(-3, 2, 1)$;(3) 关于 xOy $(3, -2, -1)$, 关于 xOz $(3, 2, 1)$, 关于 yOz $(-3, -2, 1)$.7. 解: $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (-1, -2, 1)$, 则 $|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{1+2+1} = 2$;
$$\cos \alpha = -\frac{1}{2}, \cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \gamma = -\frac{1}{2}; \quad \alpha = 120^\circ, \beta = 135^\circ, \gamma = 60^\circ; \quad \mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$



9. 解: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$, 则 $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$, 则 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$
 设 $M(x, y, z)$, 则 $(x, y, z) = \frac{1}{3}(-1, 3, -2) + \frac{2}{3}(1, 2, 3) = (\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3})$, 即

$$M(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}).$$

11. 解: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (1, 1, 1)$ 又 AC 中点为 M , 所以 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$ 而 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$
 $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}$, 则 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$, 同理 $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$, 则

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = (3, 2, -4).$$

12. 解: 由题 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$ 有 $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 设 $A(x, y, z)$ $x = |\overrightarrow{OA}| \cos \alpha = 3$, $y = 3\sqrt{2}$
 又 $|\overrightarrow{OA}| = 6$, 则 $z = 3$, $\therefore A(3, 3\sqrt{2}, 3)$.

第三节 向量的乘积

教材见 28 页

3. 解: (1) $(2\mathbf{a}) \cdot (3\mathbf{b}) = 6\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -6$; (2) $(2\mathbf{a}) \times (3\mathbf{b}) = 6\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-30, -18, 6)$;

(3) $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + 2\mathbf{c}) = -15$; (4) $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) = (-15, -9, 3)$;

(5) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (k\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (-\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) = 0$, 则 $4k + 3 + 2(3k - 1) \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$, 解得 $k = 2$.

7. 解: $\overrightarrow{MA} = (-3, 1, 2)$, $\overrightarrow{MB} = (0, -1, 3)$

则 (1) $S = \frac{1}{2} \times |\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MB}| = |(5, 9, 3)| = \frac{\sqrt{115}}{2}$; (2) $S' = |\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MB}| = \sqrt{115}$;

(3) $\hat{\mathbf{a}} = \pm \frac{\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MB}|} = \pm \frac{1}{\sqrt{115}}(5, 9, 3)$.

9. 证明: 设有三角形 ABC , 三边分别为向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, $S = \frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \frac{1}{2}|\mathbf{b} \times \mathbf{c}| = \frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{c}|$

则 $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \sin \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{c}| \sin \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle$, 即 $ab \sin C = bc \sin A = ac \sin B$

则证得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

11. 证明: $\overrightarrow{AB} = (1, -3, -2)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, 9, 4)$, $\overrightarrow{AD} = (3, -6, -6)$

设 A, B, C, D 在同一个平面上, 则 $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC} + \mu \overrightarrow{AD}$, 即 $(1, -3, -2) = (-2\lambda, 9\lambda, 4\lambda) + (3\mu, -6\mu, -6\mu)$

$$\begin{cases} 1 = -2\lambda + 3\mu \\ -3 = 9\lambda - 6\mu \\ -2 = 4\lambda - 6\mu \end{cases} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{5}, \mu = \frac{1}{5}, \text{ 则假设成立, 共面.}$$

第四节 平面与直线

教材见 42 页



2. 解: (1) 由题意, 设所求平面方程为 $By + Cz = 0$

将点 $(4, -3, -1)$ 代入, 得 $C = -3B$, 即得 $y - 3z = 0$;

(2) 平面法向量 $\vec{n} = \overrightarrow{OP} = (3, -6, 2)$, $3x - 6y + 2z + D = 0$, 代入 $P(3, -6, 2)$ 得 $3x - 6y + 2z - 49 = 0$;

(3) 设平面方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$, 代入得 $2x - 3y + 2z - 10 = 0$.

$$4. \text{ 解: } \begin{cases} x + 3y + z - 1 = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ x - 2y - 2z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = -1, z = 3, \text{ 则交点为 } (1, -1, 3).$$

6. 解: 过 π_1 与 π_2 的平面为 $(1 + \lambda)x + 5y + (1 - \lambda)z + 4\lambda = 0$

$$\frac{(1 + \lambda, 5, 1 - \lambda) \cdot (1, -4, -8)}{|(1 + \lambda, 5, 1 - \lambda)| \cdot |(1, -4, -8)|} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{4}, \text{ 则所求平面为 } x + 20y + 7z - 12 = 0$$

又 π_2 与已知平面恰好成 $\frac{\pi}{4}$ 角

\therefore 所求平面为 $x + 20y + 7z - 12 = 0$ 或 $x - z + 4 = 0$.

$$8. \text{ 解: 取 } x = 0, \text{ 由 } \begin{cases} -2y + 4z + 1 = 0 \\ 2y - z + 2 = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } y = -\frac{3}{2}, z = -1$$

即直线 L 过点 $M(0, -\frac{3}{2}, -1)$, $\vec{n}_1 = (3, -2, 4)$, $\vec{n}_2 = (1, 2, -1)$, $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (-6, 7, 8)$

$$\text{从而所求直线对称式为 } \frac{x}{-6} = \frac{y + \frac{3}{2}}{7} = \frac{z + 1}{8}, \text{ 参数式方程为 } \begin{cases} x = -6t \\ y = 7t - \frac{3}{2} \\ z = 8t - 1 \end{cases}.$$

10. 解: 设过直线 L 的平面束方程为 $4x - y + 3z - 1 + \lambda(x + 5y - z + 2) = 0$

即 $(4 + \lambda)x + (-1 + 5\lambda)y + (3 - \lambda)z + (-1 + 2\lambda) = 0 \Rightarrow 2(4 + \lambda) - (-1 + 5\lambda) + 5(3 - \lambda) = 0, \lambda = 3$

$$\text{则投影平面方程为 } 7x + 14y + 5 = 0, \text{ 则投影直线为 } \begin{cases} 7x + 14y + 5 = 0 \\ zx - y + 5z - 3 = 0 \end{cases}.$$

第五节 空间曲面与空间曲线

教材见 64 页

2. 解: (1) 双曲柱面; (2) 椭圆柱面; (3) 抛物柱面;

(4) 球面; (5) 圆锥面 (下半部分); (6) 旋转单叶双曲面.

注: 用电脑进行图形绘制难度过大, 故图略, 下同.

$$3. \text{ 解: (1) } \begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \text{ 绕 } x \text{ 轴旋转形成的; (2) } \begin{cases} y = \frac{x^2}{4} \\ z = 0 \end{cases} \text{ 绕 } y \text{ 轴旋转形成的.}$$

4. 解: (1) $4x^2 + 9y^2 + 9z^2 = 36$, 为旋转椭球面; (2) $x^2 + y^2 = 6z$, 为旋转抛物面; (3) $y^2 - x^2 - z^2 = 1$, 为旋转双叶双曲面.



6. 解: 直线方程一式乘以二加上二式消去 z 得到该柱面方程为 $4x^2 + 7y^2 = 8$ 则该柱面在 xOy 上的投

$$\text{影为} \begin{cases} 4x^2 + 7y^2 = 8 \\ z = 0 \end{cases}.$$

9. 解: 设此动弦的中点为 (x_0, y_0, z_0)

\therefore 此动弦的一个端点为 $(0, 0, 0)$

\therefore 另一个端点为 $(2x_0, 2y_0, 2z_0)$

又该端点在球面上, 则有 $(2x_0)^2 + (2y_0)^2 + (2z_0)^2 = R^2$

即此动弦中点轨迹为

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{R}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{4}.$$

总 习 题 六

教材见 75 页

4. 解: 假设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面, 设 $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$

代入 $(-3, 12, 6) = \lambda(-1, 3, 2) + \mu(2, -3, -4)$, 解得 $\lambda = 5, \mu = 1$, 则共面, $\mathbf{c} = 5\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

6. 解: 设 $C(0, 0, 2)$, $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, z)$, 则 $\cos \angle BAC = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \sqrt{5z^2 - 2z + 5}$$

当且仅当 $z = \frac{1}{2}$ 时, 取最小值, $C(0, 0, \frac{1}{2})$

8. 解: 设 $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{\lambda} = t_1$, $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1} = t_2$

$$\text{则} \begin{cases} x = t_1 + 1 \\ y = 2t_1 - 1 \\ z = \lambda t_1 + 1 \end{cases}, \begin{cases} x = t_2 - 1 \\ y = t_2 + 1 \\ z = t_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 4 \\ t_2 = 6 \\ \lambda = \frac{5}{4} \end{cases}.$$

10. 解: L_1 方向向量为 $\mathbf{n}_1 = (1, 1, 2)$, 过点 $A(-1, 0, 1)$, L_2 方向向量为 $\mathbf{n}_2 = (1, 3, 4)$, 过点 $B(0, -1, 2)$

$$[\mathbf{n}_1 \ \mathbf{n}_2 \ \overrightarrow{AB}] = (-2, -2, 2) \cdot (1, -1, 1) = -2 + 2 + 2 = 2 \neq 0$$

则 L_1 与 L_2 异面; 两者间的距离 $d = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)|}{|\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2|} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

12. 解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{a} + x\mathbf{b}| - |\mathbf{a}|}{x} \xrightarrow[\text{分子的共轭}]{\text{分子分母乘以}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + x|\mathbf{b}|^2}{|\mathbf{a} + x\mathbf{b}| + |\mathbf{a}|} = \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{a}| + |\mathbf{a}|} = \frac{1}{2}.$

14. 解: 设公垂线过 L_1 上的点为 $P(3t-1, 2t-3, t)$, 过 L_2 上的点为 $Q(m, 2m-5, 7m+2)$,

则公垂线的方向向量为 $\overrightarrow{AB} = (m-3t+1, 2m-2t-2, 7m-t+2)$

又 L_1 方向向量为 $(3, 2, 1)$, L_2 方向向量为 $(1, 2, 7)$



$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot (3, 2, 1) = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot (1, 2, 7) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{4} \\ t = -\frac{5}{28} \end{cases}, \text{ 即 } Q\left(-\frac{1}{4}, -\frac{11}{2}, \frac{1}{4}\right), P\left(-\frac{43}{28}, -\frac{47}{14}, -\frac{5}{28}\right)$$

又公垂线的方向向量为 $(3, 2, 1) \times (1, 2, 7) = (3, -5, 1)$

$$\therefore \text{公垂线方程为 } \frac{x + \frac{1}{4}}{3} = \frac{y + \frac{11}{2}}{-5} = \frac{z - \frac{1}{4}}{1} \text{ 或 } \frac{x + \frac{43}{28}}{3} = \frac{y + \frac{47}{14}}{-5} = \frac{z - \frac{5}{28}}{1}.$$

16. 解: 过直线 L 的平面为 $(1 + 2\lambda)x + (1 + \lambda)y + (1 + \lambda)z = 0$, 原点到该平面的距离为

$$d = \frac{1}{\sqrt{(1 + 2\lambda)^2 + (1 + \lambda)^2 + (1 + \lambda)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6\lambda^2 + 8\lambda + 3}}$$

当且仅当 $\lambda = -\frac{8}{2 \times 6} = -\frac{2}{3}$ 时, 取最小值 $d_{\min} = \sqrt{3}$

而平面 $2x + y + z = 0$ 到原点的距离 $d' = \frac{0}{\sqrt{6}} = 0 < d_{\min} = \sqrt{3}$

\therefore 所求平面应为 $\lambda = -\frac{2}{3}$ 的平面, 即 $x - y - z - 3 = 0$.

18. 解: 考虑 z 轴上一点 $(0, 0, z_0)$ (不妨设 $z_0 > 0$) 绕直线 $x = y = z$ 旋转形成该圆锥面, 圆锥面的底面在平面 $x + y + z - z_0 = 0$ 上, 圆心在直线 $x = y = z$ 上

则显然圆心 O 为 $\left(\frac{z_0}{3}, \frac{z_0}{3}, \frac{z_0}{3}\right)$

那么, (x, y, z) 须满足以下两个条件:

① 到原点的距离相等, 即 $z_0^2 = x^2 + y^2 + z^2$

② 到 O 点的距离相等, 即 $\left(x - \frac{z_0}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{z_0}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{z_0}{3}\right)^2 = \left(\frac{z_0}{3}\right)^2$

整理以上二式可得该圆锥面方程为 $xy + yz + xz = 0$.

习题见第 143 页

第一节

平面点集与多元函数

教材见 86 页

2. 解: $f\left(\frac{x}{y}, \sqrt{xy}\right) = \frac{x^3 - 2xy^2\sqrt{xy} + 3xy^4}{y^3} = \frac{x^3}{y^3} - 2 \times \frac{x}{y} \times \sqrt{xy} + 3xy$, 则

$$f(x, y) = x^3 - 2xy + 3y^2$$

则有

$$f\left(\frac{1}{x}, \sqrt{xy}\right) = \frac{1}{x^3} - \frac{4}{xy} + \frac{12}{y^2}.$$

4. 解: 套定义式即可得出答案 $f(x+y, x-y, xy) = (x+y)^{xy} + (xy)^{2x}$.

6. 解: (1) $\begin{cases} 4x - y^2 \geq 0 \\ 1 - x^2 - y^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 < 1, y^2 \leq 4x\};$

(2) $\begin{cases} y \geq 0 \\ x - \sqrt{y} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x^2 \geq y\};$

(3) $(x^2 + y^2 - a^2)(2a^2 - x^2 - y^2) \geq 0 \Rightarrow \{(x, y) | a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2a^2\};$

(4) $\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{y^2} \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \{(x, y) | -y^2 \leq x \leq y^2, 0 < y < 1\};$

(5) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ -1 \leq \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \{(x, y) | x^2 + y^2 - z^2 \geq 0, x^2 + y^2 \neq 0\}.$

第二节

多元函数的极限与连续性

教材见 92 页

1. 解: (1) 原式 $= \frac{1 \times 2}{1^2 + 1} = 1$.

(2) 令 $xy = u$, 则原式 $= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sqrt{u+1} - 1}{u} = \frac{1}{2}$.



$$(3) \text{ 令 } x^2 + y^2 = u, \text{ 则原式 } = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos u}{u^2} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{u^2}{2}}{u^2} = \frac{1}{2}.$$

$$(4) \text{ 原式 } = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y} \times \frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{2}{x}} = e^2.$$

$$2. \text{ 解: (1) 先令 } y = x, \text{ 则 } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x+y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} = 0$$

$$\text{再令 } y = x^2 - x, \text{ 则 } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x+y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x^2 + x - x} = 1$$

因为两条路径上所得的极限不相等, 所以极限不存在.

$$(2) \text{ 令 } y = kx, (k \in R) \text{ 则 } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 - k^2)}{x^2(1 + k^2)} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}$$

当 k 值发生变化时, 极限值会发生相应的变化, 所以极限不存在.

$$4. \text{ 解: } \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = k\pi + \frac{1}{2}\pi (k \in N) \right\}.$$

$$5. \text{ 解: 先令 } y = 0, \text{ 则 } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \times 0}{x^2 + 0} = 0$$

$$\text{再令 } y = x, \text{ 则 } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \frac{2x^2}{x^2 + x^2} = 1$$

当 $x \neq 0$ 时, 函数极限不存在, 所以 $f(x, y)$ 在 $x = 0$ 处不连续.

$$7. \text{ 解: (1) 原式 } = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^0 - 1}{1} = 0.$$

$$(3) \text{ 因为 } |\sin \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{y^2}| \leq 1, \text{ 所以原式 } = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 \times \sin \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{y^2} = 0.$$

$$(5) \text{ 原式 } = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 + x^2 y^2)^{\frac{1}{x^2 y^2} \times \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}} = e^{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}} = e^0 = 1.$$

第三节 全微分与偏导数

教材见 106 页

$$3. \text{ 解: (1) } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}(x + \sqrt{x^2 + y^2})}.$$

$$(2) \frac{\partial z}{\partial x} = y \times xy(1 + xy)^{y-1} = y^2(1 + xy)^{y-1}; \text{ 所以 } \ln z = y \ln(1 + xy).$$

$$\text{且 } \frac{\partial \ln z}{\partial z} = z \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ 所以 } \frac{\partial z}{\partial y} = (1 + xy)^y \left[\ln(1 + xy) + \frac{xy}{1 + xy} \right].$$

$$(3) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\cos\left(\frac{x+a}{\sqrt{y}}\right)}{\sin \frac{x+a}{\sqrt{y}}} \times \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{\cos\left(\frac{x+a}{\sqrt{y}}\right)}{\sqrt{y}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\cos\left(\frac{x+a}{\sqrt{y}}\right) \times \left(-\frac{x+a}{2}\right) \times y \times \frac{3}{2}}{\sin\left(\frac{x+a}{\sqrt{y}}\right)} = \cos \frac{x+a}{\sqrt{y}} \times \left(-\frac{x+a}{2}\right) y^{-\frac{3}{2}}.$$

$$(4) \frac{\partial u}{\partial x} = yzx^{yz-1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = zx^{yz} \ln x; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = yx^{yz} \ln x.$$

$$(5) u_x = x^2, \text{ 所以 } u_{x(x,1)} = 2x|_{x=1} = 2.$$

$$5. \text{ 解: } \frac{\partial u}{\partial x} = (y-z)[-2x + (y-z)]; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (z-x)[-2y + (x-z)]; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = (x-y)[-2z + (x-y)].$$

$$6. \text{ 解: (1) } du = y^2 x^{y^2-1} dx + 2yx^{y^2} \ln x dy;$$

$$(2) du = yzx^{yz-1} dx + zx^{yz} \ln x dy - yx^{yz} \ln x dz;$$

$$(3) \text{ 因为 } d \ln u = \frac{du}{u} = \frac{y}{xz} dx + \frac{1}{z} \left(\ln \frac{x}{y} - 1 \right) dy - \frac{y}{z^2} \ln \frac{x}{y} dz,$$



所以 $du = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}} \left[\frac{y}{xz} dx + \frac{1}{z} \left(\ln \frac{x}{y} - 1 \right) dy - \frac{y}{z^2} \ln \left(\frac{x}{y} \right) dz \right]$.

9. 解: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2x}{x^2+y} \right) = \frac{-2x^2+2y}{(x^2+y)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2x}{x^2+y} \right) = \frac{-2x}{(y+x^2)^2}$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x^2+y} \right) = -\frac{1}{(x^2+y)^2}$.

11. 解: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{yz}{x^2+y^2} \right) = -\frac{2yzx}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-zx}{x^2+y^2} \right) = \frac{2yzx}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$;

所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

13. 解: 曲线的参数方程为 $\begin{cases} x=1 \\ y=y \\ z=\sqrt{2+y^2} \end{cases}$, 因为 $\frac{dx}{dy}=0, \frac{dy}{dy}=1, \frac{dz}{dy}=\frac{y}{\sqrt{2+y^2}}$

所以在点 $(1, 1, \sqrt{3})$ 处的切线方向向量为 $\vec{m} = \left(\frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial y}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) = (0, 1, \frac{1}{\sqrt{3}})$

所以 \vec{m} 与 y 轴正向的夹角余弦 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $\alpha = 30^\circ$.

第四节

多元复合函数的微分法

教材见 118 页

1. 解: 易知 $\left\{ \frac{\partial z}{\partial x} = 2u \times u' + 2v \times v' = 4x \frac{\partial z}{\partial y} = 2u \times u' + 2v \times v' = 4y \right.$.

3. 解: 因为 $z = \arctan(3t - 4t^3)$, 所以 $\frac{dz}{dt} = \frac{(3t - 4t^3)'}{1 + (3t - 4t^3)^2} = \frac{3(1 - 4t^2)}{1 + (3t - 4t^3)^2}$.

5. 解: $z = ye^{y^2} \times xe^x + \sin \frac{x}{y^2}$, 所以 $\frac{dz}{dx} = ye^{y^2} \times (x+1)e^x + \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y^2} = x(y+1)e^{x+y^2} + \frac{1}{y^2} \cos \frac{x}{y^2}$.

7. 解: $f_x = e^{-(x+ay)^2} - e^{-x^2}$, 所以 $\begin{cases} f_{xx} = -2(x+ay)e^{-(x+ay)^2} + 2xe^{-x^2} \\ f_{xx(1,1)} = (2a-2)e^{-(1-a)^2} + \frac{2}{e} \end{cases}$.

9. 解: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (f_1' + yf_2') = f_{11}'' + 2yf_{12}'' + y^2 f_{22}''$.

11. 解: $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x + \varphi(y))$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(x + \varphi(y))$,

同理可得 $\frac{\partial z}{\partial y} = \phi'(y) f'(x + \phi(y))$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \phi'(y) f''(x + \phi(y))$.

所以 $\frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'(x + \phi(y)) f''(x + \phi(y)) \phi'y = \frac{\partial z}{\partial y} \times \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

13. 解: $u = \int du = \int [\varphi(x+ay) dx + a\varphi(x+ay) dy - \varphi(x+ay) dx + a\varphi(x-ay) dy]$
 $= a[\varphi(x+ay) + \varphi(x-ay)] + \varphi(x+ay) - \varphi(x-ay) + c$

故而易得 $\begin{cases} u_{xx} = a[\varphi''(x+ay) + \varphi''(x-ay)] + \varphi''(x+ay) - \varphi''(x-ay) \\ [\varphi''(x+ay) + \varphi''(x-ay)] + \varphi''(x+ay) - \varphi''(x-ay) \end{cases}$, 所以 $u_{yy} = a^2 u_{xx}$.



15. 解: 令 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ 得 $\frac{d\rho \sin \theta}{dt} = -\rho \cos \theta + k\rho^3 \sin \theta$.

进而得 $\left\{ \frac{d\theta}{dt} \rho \cos \theta = -\rho \cos \theta, \frac{d\rho}{dt} \sin \theta = k\rho^3 \sin \theta \right\}$, 所以 $\left\{ \frac{d\theta}{dt} = -1, \frac{d\rho}{dt} = k\rho^3 \right\}$.

16. 证明: $dF(tx + ty + tz) = dt^k F(x, y, z)$ (对 t 求微分)

$\Leftrightarrow [xF'_1 + yF'_2 + zF'_3] dt = kt^{k-1} F(x, y, z) dt$ 对上式两侧同时对 t 积分, 得

$$xF_x + yF_y + zF_z = kt^{k-1} F(x, y, z)$$

当 $t = 1$ 时, 符合题意. 证毕.

第五节 隐函数的微分法

教材见 129 页

1. 解: $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{y^2 - e^x}{\cos y - 2y}$.

3. 解: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x+z}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2}{y(z+x)}$.

5. 解: 因为 $x = x(y, z)$, 所以 $F[x(y, z), y, z] = 0$, 两侧微分, 得 $F'_1 \times \frac{\partial x}{\partial y} + F'_2 = 0$; 从而 $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F'_2}{F'_1}$

同理 $\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F'_3}{F'_2}, \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_1}{F'_3}, \therefore \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$.

9. 解: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \left(f'_1 \frac{\partial x}{\partial z} + f'_3 \right) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = f'_{1'} + f'_{3'} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = f'_{1'} + f'_{3'} \left(-\frac{5y}{5z^4 + 5} \right) = f'_{1'} - f'_{3'} \times \frac{y}{z^4 + 1}$.

11. 解: 令 $u = x + \frac{z}{y}, v = y + \frac{z}{x}$, 所以 $F(u, v) = 0$

易知 $\left\{ F_x = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{z}{x^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial v}, F_y = -\frac{z}{y^2} \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}, F_z = \frac{1}{y} \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{x} \frac{\partial F}{\partial v} \right\}$, 故令 $s = \frac{\partial F}{\partial u}, t = \frac{\partial F}{\partial v}$,

则 $F_x = s - \frac{z}{x^2}t, F_y = -\frac{z}{y^2}s + t, F_z = \frac{s}{y} + \frac{t}{x}$, 又 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{s - \frac{z}{x^2}t}{\frac{s}{y} + \frac{t}{x}} = \frac{-xys + \frac{zy}{x}t}{xs + yt}$

故而 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = x \frac{-xys + \frac{zy}{x}t}{xs + yt} + y \frac{\frac{xyz}{y}t - xyt}{xs + yt} = \frac{(xs + yt)(z - xy)}{xs + yt} = z - xy$.

13. 解: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{F_x}{F_z} \right) = -\frac{F_{xy}F_z^2 - F_{xz}F_yF_z - F_{yz}F_xF_z + yF_{zz}F_xF}{F_z^3}$

易知 $F_x = -3xy, F_y = -3xz, F_z = 3z^2 - 3xy$

$\Rightarrow F_{xx} = F_{yy} = 0, F_{zz} = 6z, F_{xy} = -3z, F_{xz} = -3y, F_{yz} = -3x. \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x \partial y} = \frac{z^5 - 2xyz^3 - x^2y^2z}{(z^2 - xy)^3}$.

15. 解: (1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{x(6z+1)}{2y(3z+1)}$; 因为 $dz = 2x dx + 2y dy$, 所以 $\frac{dy}{dx} = 2x + 2y \frac{dy}{dx} = \frac{x}{3z+1}$.

(3) 由 $\begin{cases} x = e^u \cos v \\ y = e^u \sin v \end{cases}$ 得 $x^2 + y^2 = e^{2u}$, 所以 $u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$, 由 $\frac{\textcircled{1}^2}{\textcircled{2}^2}$, 得 $\tan v = \frac{y}{x}$

$v = \arctan \frac{y}{x}, \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2x \arctan \frac{y}{x} - y \ln(x^2 + y^2)}{2(x^2 + y^2)}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y \arctan \frac{y}{x} - x \ln(x^2 + y^2)}{2(x^2 + y^2)}$, 将 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ 式代回, 得 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{v \cos v - u \sin v}{e^u}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{u \cos v + v \sin v}{e^u}$.



第六节 方向导数与梯度

教材见 137 页

2. 解: 计算得 $u'_x(A) = -2$, $u'_y(A) = 4$, $u'_z(A) = -2$, 因此 $\text{grad } u(A) = (-2, 4, -2)$

又 $\overrightarrow{AB} = (1, 2, -2)$, 因此其方向余弦向量为 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{AB}} \Big|_A = (-2, 4, -2) \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{10}{3}$.

4. 解: (1) $\text{grad } z(2, 1) = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(2,1)} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(2,1)} \vec{j} = (16, 18)$;

(3) $\text{grad } z\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})} \vec{j} = \left(-\frac{9\sqrt{3}}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

(5) $\text{grad } u(1, 1, 0) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(1,1,0)} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(1,1,0)} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{(1,1,0)} \vec{k} = (1, 1, 1)$.

6. 解: 将 $y^2 = 4x$ 两侧对 x 求微分, 得: $2y \frac{dy}{dx} = 4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$, 所以 $\tan \theta = \frac{dy}{dx} \Big|_{(1,2)} = 1$

$\Rightarrow \vec{e}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 所以 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,2)} = \frac{1}{3}$, $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(1,2)} = \frac{1}{3}$, 所以 $z(1, 2) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \cdot \vec{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

8. 解: 易知方向向量 $\vec{e}_1 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$

$\cos \alpha = 0$ 时, $\frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{(0,0)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) - f(0, 0)}{\rho} = 0 = \cos \alpha \sin \alpha \Big|_{\alpha=\frac{\pi}{2}}$

$\cos \alpha \neq 0$ 时, $\frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{(0,0)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) - f(0, 0)}{\rho} = \cos \alpha \sin \alpha$

所以 $\frac{\partial f}{\partial l} = \cos \alpha \sin \alpha$.

第七节 微分法在几何上的应用

教材见 146 页

1. 解: $\frac{dx}{dt} = -\sin t$, $\frac{dy}{dt} = \cos t$, $\frac{dz}{dt} = \frac{\sec\left(\frac{t}{2}\right)^2}{2}$, 易知 $t = \frac{\pi}{2}$

所以切线方程为 $\begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y = 1 \end{cases}$, 法平面方程为 $-x + z - 1 = 0$

3. 解: 平面的一个法向量为 $\vec{n} = (1, 2, 1)$, 且 $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dy}{dt} = 2t$, $\frac{dz}{dt} = 3t^2$

所以切线的法向量为 $\vec{n} = (1, 2t, 3t^2)$.

因为 $\vec{n} \parallel$ 平面, 所以 $\vec{n} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow 3t^2 + 4t + 1 = 0$

解得 $t = -1$ 或 $t = -\frac{1}{3}$, 所以点为 $P_1(-1, 1, -1)$ 或 $P_2(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27})$.

5. 易知 $z = \frac{2}{xy}$ $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(2,1,1)} = -\frac{1}{2}$ $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(2,1,1)} = -1$

所以切平面方程为 $z - 1 + \frac{1}{2}(x - 2) + y - 1 = 0 \Rightarrow x + 2y + 2z = 6$

所以该切平面的法向量为 $\vec{n}_1 = (1, 2, 2)$, 面 $x - y - z = 0$ 的一个法向量为 $\vec{n}_2 = (1, -1, -1)$

所以切向量 $\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \Rightarrow \vec{n} = (0, 3, -3)$ 或 $(0, -3, 3)$, 易知 $\vec{n} = (0, -3, 3)$ 符合题意



设 y 轴正向的一个方向向量 $\vec{p} = (0, 1, 0)$

所以 $\cos \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{p} \cdot \vec{n}}{|\vec{p}| |\vec{n}|} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以切向量与 y 轴正向夹角为 $\frac{3}{4}\pi$, 所以 $F_x = 0, F_y = 1, F_z = 1$

所以在点 $(2, 1, 1)$ 处的法线方程为 $\frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$, 即 $\begin{cases} y-z=0 \\ x=2 \end{cases}$.

9. 解: 且平面方程为 $F_x(x-x_0) + F_y(y-y_0) + F_z(z-z_0) = 0 \Rightarrow 3x + 2y - 3z - 4 = 0$

所以平面法向量 $\vec{m} = (3, 2, -3)$, 易知平面 xOy 的法向量 $\vec{n} = (0, 0, 1)$

所以 $\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = -\frac{3}{\sqrt{22}}$, 易知切平面上有点 $H(1, 2, 1)$, 面 xOy 上有点 $(0, 1, 0)$

所以 $\vec{OH} = (1, 1, 1)$, $\begin{cases} \vec{OH} \cdot \vec{m} = 2 > 0 \\ \vec{OH} \cdot \vec{n} = 1 > 0 \end{cases}$, 所以夹角余弦值 $\cos \alpha = -\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{3\sqrt{22}}{22}$.

11. 解: $x = \frac{\cos te^t}{2} + \frac{\sin te^t}{2} - \frac{1}{2}$, $\frac{dx}{dt} = \cos te^t$, $\frac{dy}{dt} = 2 \cos t - \sin t$, $\frac{dz}{dt} = 3e^{3t}$

所以切线为 $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$, 法平面方程为 $x + 2(y-1) + 3(z-2) = 0 \Rightarrow x + 2y + 3z - 8 = 0$.

第八节

多元函数的极值

教材见 159 页

1. 解: (1) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 1$, $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$, 则驻点 $P(1, 0)$

$H_f(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix}_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $A > 0, AC - B^2 > 0$

所以 $H_f(P)$ 是正定矩阵, $f(x, y)$ 在 $(1, 0)$ 处有最小值.

(2) $\frac{\partial z}{\partial x} = 18x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 12x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2$

易知当 $x = 0$ 或 $y = 0$ 时, z 无法取得极值

所以 $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18 - 4x - 3y = 0 \\ 12 - 2x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$, 所以一个可能驻点为 $(3, 2)$

$H_f = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$, 则 $A < 0, AC - B^2 > 0$

所以 $H_f(P)$ 是负定矩阵, 在 $(3, 2)$ 处有极大值 108.

(3) 令 $U(x, y) = x^2 + y^2$, 易知 $\delta(x, y)$ 与 $U(x, y)$ 的增减性恰好相反

对于 $U(x, y)$, $\frac{\partial U}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial U}{\partial y} = 2y$, 所以 $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow$ 驻点 $(0, 0)$

由 $U(x, y) = x^2 + y^2$ 的几何意义知

$U(x, y) = x^2 + y^2$ 是开口向上的一个旋转抛物面, 顶点为 $(0, 0, 0)$

所以极小值点为 $(0, 0)$, $z = f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处取得最大值 1.



(4) 有基本不等式且 $x > 0, y > 0$ 得, $z \geq 3\sqrt[3]{\frac{8}{x} \times \frac{x}{y} \times y} = 6$

当且仅当 $\frac{8}{x} = \frac{x}{y} = y$ 时, 即 $\begin{cases} y^2 = x \\ \delta y = x^2 \end{cases}$ 时取等, 此时极小值点 $P(4, 2)$, 极小值为 6.

3. 解: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2x-2}{2z-4}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{2y+2}{2z-4}, \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow$ 有驻点 $(1, -1)$

将 $x=1, y=1$ 代入 $F(x, y, z) = 0$ 得 $z^2 - 4z - 12 = 0, z = 2$ 或 $z = 6$

所以易知 z 的极大值为 6, 极小值为 -2.

5. 解: 令 $z = f(x, y), \frac{\partial z}{\partial x} = 4 - 2x, \frac{\partial z}{\partial y} = -4 - 2y$, 所以 $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow$ 驻点 $(2, -2)$,

$$H_f(2, -2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{ 则 } A < 0, AC - B^2 > 0$$

所以 H_f 是负定矩阵, $f(x, y)$ 在 $(2, -2)$ 处有极大值 16.

7. 解: $\begin{cases} 2p = 2x + 2y \\ z = x^2 \pi xy \end{cases}, p = x + y = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + y \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{4}y}$, 当且仅当 $\frac{x}{2} = \frac{x}{2} = y$ 时取等,

所以 $\frac{x^2}{4}y \leq \frac{p^3}{27}$, 所以 $z \leq \frac{\pi p^3}{27}$, 所以长与宽分别是 $\frac{2}{3}p$ 与 $\frac{1}{3}p$.

9. 解: 椭球的参数方程为 $\begin{cases} x = \sin\varphi \cos\theta \\ y = \sin\varphi \sin\theta, & 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ z = 2\cos\varphi, & 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

易知切平面方程为 $2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + \frac{z_0}{2}(z - z_0) = 0$

令 $y, z = 0$, 得 $zx_0x = \frac{z_0^2}{2} + 2y_0^2 + 2x_0^2 = 2$; 令 $x_0 = \frac{1}{x_0}$, 同理得 $y = \frac{1}{y_0}, z = \frac{4}{z_0}$

所以 $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{16}{z^2}$

$L = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{16}{z^2} + a(x^2 + y^2 + \frac{z_0^2}{4} - 1), x_0 > 0, y_0 > 0, z_0 > 0$

$$\begin{cases} L_x = -\frac{2}{x_0^3} + 2ax_0 = 0 \\ L_y = -\frac{2}{y_0^3} + 2ay_0 = 0 \\ L_z = -\frac{32}{z_0^3} + \frac{az_0}{2} = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 - \frac{z_0^2}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ y_0 = \frac{1}{2} \\ z_0 = \sqrt{2} \end{cases}, \text{ 所以点为 } (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2}).$$

13. 解: 易知切平面方程为 $\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0$

令 $y, z = 0$ 得 $x = \frac{a^2}{x_0}$, 同理得 $y = \frac{b^2}{y_0}, z = \frac{c^2}{z_0}$, 所以 $V = \frac{a^2 b^2 c^2}{6x_0 y_0 z_0}, 1 = \frac{x_0}{a^2} + \frac{y_0}{b^2} + \frac{z_0}{c^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x_0 y_0 z_0}{abc}}$

所以 $\sqrt[3]{\frac{x_0 y_0 z_0}{abc}} \leq \frac{1}{3}$, 当且仅当 $\frac{x_0}{a} = \frac{y_0}{b} = \frac{z_0}{c}$ 时取等, 且 $\frac{x_0}{a^2} + \frac{y_0}{b^2} + \frac{z_0}{c^2} = 1$



$$\text{所以 } \begin{cases} x_0 = \frac{a}{\sqrt{3}} \\ y_0 = \frac{b}{\sqrt{3}} \\ z_0 = \frac{c}{\sqrt{3}} \end{cases}, \text{ 即点 } \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}} \right).$$

总 习 题 七

教材见 176 页

2. 证明: 易知函数等价于 $z^2 = x^2 + y^2$, 在空间中为顶点在 $(0, 0, 0)$ 处的椭圆锥面.

故函数在 $(0, 0)$ 的各个方向均连续, 又有 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

二者在 $(0, 0)$ 处均无意义. 所以两个一阶偏导数均不存在.

4. 解: $\frac{\partial u}{\partial x} = y^z x^{y^z-1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = z x^{y^z} y^{z-1} \ln x; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = y^z x^{y^z} \ln x \cdot \ln y.$

6. 解: 对组中两个式子分别对 x, z 求导, 得:

$$\begin{cases} 1 = -2uu_x + v_x & (1) \\ 0 = u_x + zv_x & (2) \\ 0 = -2uu_z + v_z + 1 & (3) \\ 0 = u_z + v + zv_z & (4) \end{cases}$$

由 (1)(2) 解得:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{z}{2uz+1}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2uz+1}$$

由 (3)(4) 解得:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z-v}{2uz+1}.$$

8. 解:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{4x+2y-2}{4-2z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{2y+2x-2}{4-2z}.$$

令两偏导均等于零, 得 $x=0, y=1$. 代回, 得 $z^2 - 4z + 3 = 0$ 解得 $z=1$ 或 $z=3$

对方程左右求二阶偏导, 得:

$$\begin{cases} z_{xx} = \frac{2z_x^2 + 4}{4-2z}; \\ z_{yy} = \frac{2z_y^2 + 2}{4-2z}; \\ z_{xy} = \frac{2 + z_x z_y}{4-2z}. \end{cases}$$

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{pmatrix}, \text{ 所以 } H_f(0, 1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0, z_{xx} > 0$$

所以 $z=1$ 为 $z(x, y)$ 的极小值;



因为 $Hf(0, 1, 3) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 1 > 0, z_{xx} < 0$, 所以 $z=3$ 为 $z(x, y)$ 的极大值.

10. 解: $f(x, y, z) = \ln(xyz^3)$

所以 $5r^2 = x^2 + y^2 + \frac{z^2}{3} + \frac{z^2}{3} + \frac{z^2}{3} \geq 5\sqrt[5]{\frac{(xyz^3)^2}{27}}$, 所以 $xyz^3 \leq 3\sqrt[5]{3}r^5$

所以 $f(x, y, z) \leq \ln(3\sqrt[5]{3}r^5) = \ln\left[3\sqrt[5]{3}\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{5}\right)^{\frac{5}{2}}\right] \Rightarrow x^2 y^2 z^6 \leq 27\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{5}\right)^5$

当 $x^2 = a, y^2 = b, z^2 = c$, 有

$$abc^3 \leq 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5.$$

12. 解: $V = \frac{1}{3}a\pi h^2 = \frac{4\pi p(p-a)(p-b)(p-c)}{3a}$.

两侧取对数, 得

$$\ln V = \ln(p-a) + \ln(p-b) + \ln(p-c) - \ln a + \ln \frac{4\pi p}{3}.$$

令 $f(a, b, c) = \ln(p-a) + \ln(p-b) + \ln(p-c) - \ln a$.

记 $L = \ln(p-a) + \ln(p-b) + \ln(p-c) - \ln a + \lambda(a+b+c-2p)$

$$\therefore \begin{cases} L_a = -\frac{1}{p-a} + \lambda - \frac{1}{a} = 0 \\ L_b = -\frac{1}{p-b} + \lambda \\ L_c = -\frac{1}{p-c} + \lambda \\ a+b+c-2p=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{p}{2} \\ b = c = \frac{3p}{4} \end{cases}, \text{ 则 } V_{\max} = V\left(\frac{p}{2}, \frac{3p}{4}, \frac{3p}{4}\right) = \frac{\pi}{12}p^3.$$

习题见第 150 页

第一节

二重积分的概念及性质

教材见 184 页

2. 解: (1) 该积分表示的是以 R 为半径的上半球的体积, 则

$$\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \, d\sigma = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi R^3.$$

(2) 该积分表示的是以 R 为底面半径, H 为高的圆锥的体积, 则

$$\iint_D H - \frac{H}{R} \sqrt{x^2 + y^2} \, d\sigma = \frac{1}{3} \times \pi R^2 \times H = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

3. 解: (1) $\sin^2 x \leq x^2$, 则 $\sin^2(x+y) \leq (x+y)^2$, 则

$$\iint_D \sin^2(x+y) \, d\sigma < \iint_D (x+y)^2 \, d\sigma.$$

(2) $1 \leq x+y \leq 2$, 则 $0 \leq \ln(x+y) \leq 1$, 则 $\ln(x+y) \geq \ln^2(x+y)$, 则

$$\iint_D \ln(x+y) \, d\sigma > \iint_D \ln^2(x+y) \, d\sigma.$$

(3) $3 \leq x+y \leq 6$, 则 $\ln(x+y) > 1$, 则 $\ln(x+y) < \ln^2(x+y)$, 则

$$\iint_D \ln(x+y) \, d\sigma < \iint_D \ln^2(x+y) \, d\sigma.$$

(4) $e^x \geq 1+x$, 则 $e^{x^2+y^2} \geq 1+x^2+y^2$, 则

$$\iint_D e^{x^2+y^2} \, d\sigma > \iint_D 1+x^2+y^2 \, d\sigma.$$

4. 解: (1) $0 \leq \sin^2 x \sin^2 y \leq 1$, 则 $\iint_D 0 \, d\sigma \leq I \leq \iint_D 1 \, d\sigma$, 则

$$0 \leq I \leq \pi^2.$$

(2) $1 \leq x+y+1 \leq 4$, 则 $\iint_D 1 \, d\sigma \leq I \leq \iint_D 4 \, d\sigma$, 则

$$2 \leq I \leq 8.$$



$$(3) \quad 0 \leq \sqrt[4]{xy(x+y)} \leq 2, \text{ 则 } \iint_D 0 \, d\sigma \leq I \leq \iint_D 2 \, d\sigma, \text{ 则}$$

$$0 \leq I \leq 8.$$

$$(4) \quad 1 \leq x^2 + y^2 + 1 \leq 17, \text{ 则 } \iint_D 1 \, d\sigma \leq I \leq \iint_D 17 \, d\sigma, \text{ 则}$$

$$12\pi \leq I \leq 204\pi.$$

第二节 二重积分的计算

教材见 201 页

$$\begin{aligned} 1. \text{ 解: } (1) \quad \iint_D (x^2 + y^2) \, d\sigma &= 4 \int_0^1 dx \int_0^1 (x^2 + y^2) \, dy \\ &= 4 \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} y^3 \Big|_0^1 \right) dx = 4 \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx \\ &= 4 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \iint_D x \cos(x+y) \, d\sigma &= 4 \int_0^\pi dx \int_0^x x \cos(x+y) \, dy = 4 \int_0^\pi x \sin(x+y) \Big|_0^x dx \\ &= \left(-\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + x \cos x - \sin x \right) \Big|_0^\pi \\ &= -\frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \iint_D x e^{x^2+y} \, d\sigma &= \int_0^4 dx \int_1^3 x e^{x^2+y} \, dy = \int_0^4 \left(x e^{x^2+y} \Big|_1^3 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 e^{x^2+3} - e^{x^2+1} d(x^2) = \frac{1}{2} (e^{19} - e^{17} - e^3 + e). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad \iint_D x^2 y \sin(xy^2) \, d\sigma &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^2 x^2 y \sin(xy^2) \, dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(xy^2) \Big|_0^2 dx \\ &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{x}{4} \sin 4x - \frac{1}{16} \cos 4x - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ 解: } (1) \quad \iint_D xy \, d\sigma &= \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{2-x} xy \, dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x y^2 \Big|_{\sqrt{x}}^{2-x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^3 - 5x^2 + 4x) \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} x^4 - \frac{5}{3} x^3 + 2x^2 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{3} + 2 \right) = \frac{7}{24}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (2) \iint_D x\sqrt{y} \, d\sigma &= \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} x\sqrt{y} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x^2 \sqrt{y} \Big|_{y^2}^{\sqrt{y}} \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(y^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{9}{2}} \right) dy \\
 &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{11} \right) = \frac{6}{55}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \iint_D (x^2 + y^2 - y) \, d\sigma &= \int_0^2 dy \int_y^{2y} (x^2 + y^2 - y) \, dx = \int_0^2 \left(\frac{10}{3} y^3 - y^2 \right) dy \\
 &= \frac{5}{3} \times 8 - \frac{8}{3} = \frac{32}{3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \iint_D xy^2 \, d\sigma &= 2 \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} xy^2 \, dx = 2 \int_0^2 \frac{1}{2} x^2 y^2 \Big|_0^{\sqrt{4-y^2}} dy \\
 &= \left(\frac{4}{3} y^3 - \frac{1}{5} y^5 \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3} \times 8 - \frac{32}{5} = \frac{64}{15}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \text{ 解: } (1) \int_0^{\sqrt{\pi}} dx \int_x^{\sqrt{\pi}} \sin(y^2) \, dy &= \int_0^{\sqrt{\pi}} dy \int_0^y \sin(y^2) \, dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} y \sin(y^2) \, dy \\
 &= -\frac{1}{2} \cos(y^2) \Big|_0^{\sqrt{\pi}} = -\frac{1}{2} \times (-2) = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 e^{x^2-2x} \, dx &= \int_1^2 dx \int_2^{2x} e^{x^2-2x} \, dy = 2 \int_1^2 (x-1) e^{x^2-2x} \, dx = \int_1^2 e^{x^2-2x} \, d(x^2-2x) \\
 &= e^{x^2-2x} \Big|_1^2 = 1 - e^{-1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right) \, dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right) \, dy &= \int_1^2 dy \int_y^{y^2} \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right) \, dx \\
 &= -\frac{2}{\pi} \int_1^2 \left(y \cos\left(\frac{\pi}{2} y\right) \right) \, dy \\
 &= -\frac{2}{\pi} \times \left(-\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2} \right) = \frac{4}{\pi^3} (\pi + 2).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} \, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} dy \int_y^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} \, dx &= \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{x^2}^x e^{\frac{y}{x}} \, dy \\
 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{\frac{y}{x}} \Big|_{x^2}^x \, dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 (ex - xe^x) \, dx = \frac{3}{8}e - \frac{\sqrt{e}}{2}.
 \end{aligned}$$

5. 证明:

$$\begin{aligned}
 \iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) \, dx \, dy &= \int_a^b dx \int_c^d f_1(x) \cdot f_2(y) \, dy \\
 &= \int_a^b f_1(x) \, dx \int_c^d f_2(y) \, dy \\
 &= \left[\int_a^b f_1(x) \, dx \right] \cdot \left[\int_c^d f_2(y) \, dy \right].
 \end{aligned}$$



$$6. \text{ 解: (1) } V = \iint_D (6 - 2x - 3y - 0) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 (6 - 2x - 3y) dy = \int_0^1 \left(6 - 2x - \frac{3}{2}\right) dx = \frac{7}{2}.$$

$$(2) V = \iint_D (6 - x^2 - y^2 - 0) dx dy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (6 - x^2 - y^2) dx \\ = \int_0^1 \left(6 - 6x - x^2 + x^3 + \frac{1}{3}(x-1)^3\right) dx = 3 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{17}{6}.$$

(3) 由 $x^2 + 2y^2 = 6 - 2x^2 - y^2$ 可知 D 为: $x^2 + y^2 \leq 2$.

$$V = \iint_D (6 - 2x^2 - y^2 - x^2 - 2y^2) dx dy = 3 \iint_D (2 - x^2 - y^2) dx dy \\ = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2 - \rho^2) \rho d\rho = 6\pi \times (2 - 1) = 6\pi.$$

$$8. \text{ 解: (1) } \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} (x^2 + y^2) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^3 d\rho \\ = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = 4 \times \frac{3}{4 \times 2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

$$(2) \int_0^a dx \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{a}{\cos\theta}} \rho^2 d\rho \\ = \frac{a^3}{3} \int_1^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta d\theta = \frac{a^3}{3} \left(\sec \theta \tan \theta - \frac{1}{2} \sec^2 \theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^3}{3} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right).$$

注: 该题结果与答案不一样, 经检验, 未发现错误, 如果发现请联系本节作者.

$$(3) \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} \rho d\rho \\ = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} d\theta = - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2\theta} d(\cos\theta) = \sqrt{2} - 1.$$

$$(4) \int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2 + y^2) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2} \times \frac{a^3}{4} = \frac{\pi}{8} a^4.$$

9. 解: (1) 由题可知

$$\iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \rho \ln(1 + \rho^2) d\rho = \frac{\pi}{4} \int_0^1 \ln(1 + x) dx = \frac{\pi}{4} (2 \ln 2 - 1).$$

(2) 由题可知

$$\iint_D \arctan\left(\frac{y}{x}\right) d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_1^2 \rho \arctan\left(\frac{\rho \sin\theta}{\rho \cos\theta}\right) d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta d\theta \int_1^2 \rho d\rho = \frac{\pi^2}{32} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{64} \pi^2.$$



(3) 由题可知

$$\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2} d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^1 (\cos\theta + \sin\theta) d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta + \sin\theta - 1) d\theta = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

(4) 由题可知

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2} \right)^{\frac{1}{2}} d\sigma &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1-\rho^2}} \rho d\rho = \frac{\pi}{4} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt \\ &\stackrel{\substack{\text{分子分母同时乘以 } 1-t \\ \text{再三角换元}}}{=} \frac{\pi}{4} \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} d(\sin\alpha) = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right). \end{aligned}$$

10. 解: (1) 由题可知 $D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq ax \\ z = 0 \end{cases}$

$$V = \iint_D (x^2 + y^2 - 0) d\sigma = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \rho^3 d\rho = \frac{a^4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta = \frac{a^4}{2} \times \frac{3}{4 \times 2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{64} a^4.$$

(2) 由题可知 $D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2} d\sigma = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (\rho\sqrt{1-\rho^2} - \rho^2) d\rho \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t} dt - 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \rho^2 d\rho = \frac{2\pi}{3} \times \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) - \frac{2\pi}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\pi}{3} (2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

第三节

三重积分

教材见 220 页

3. 解: (1) $\iiint_{\Omega} xz dx dy dz = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^y xz dz = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 xy^2 dy = \frac{1}{6} \int_{-1}^1 (x - x^7) dx = 0.$

法二: 由于积分区间关于平面 yOz 对称, 同时被积函数是关于 x 的奇函数, 则根据“偶倍奇零”可直接得出答案 0.

$$\begin{aligned} (2) \iiint_{\Omega} \frac{1}{(1+x+y)^3} dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y)^3} dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2(1+x+y)^2} \right) dy = -\int_0^1 \left(\frac{1-x}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2(1+x)} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \iiint_{\Omega} xyz dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy(1-x^2-y^2) dy \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 (x - 2x^3 + x^5) dx = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$



$$(4) \iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz = \int_0^h z \, dz \iint_D dx \, dy = \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h z^3 \, dz = \frac{\pi}{4} RH.$$

$$(5) \text{ 令 } u = \frac{x}{a}, v = \frac{y}{b}, w = \frac{z}{c}, \text{ 则 } dx \, dy \, dz = abc \, du \, dv \, dw, \Omega \text{ 为 } u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx \, dy \, dz &= \iiint_{\Omega} (u^2 + v^2 + w^2) abc \, du \, dv \, dw \\ &= abc \int_0^1 du \int_0^{1-u^2} dv \int_0^{1-u^2-v^2} (u^2 + v^2 + w^2) \, dw \\ &\stackrel{\substack{\text{鉴于计算复杂} \\ \text{采用球坐标系求解}}}{=} abc \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi \, d\varphi \int_0^1 r^4 \, dr \\ &= abc \times 2\pi \times 2 \times \frac{1}{5} = \frac{4\pi}{5} abc. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \text{ 解: } (1) \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \rho^3 \, d\rho \int_0^{9-\rho^2} dz \\ &= 2\pi \int_0^3 (9\rho^3 - \rho^5) \, d\rho = 2\pi \left(\frac{9}{4} \times 81 - \frac{243}{2} \right) = \frac{243}{2} \pi. \end{aligned}$$

$$(2) \iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho \, d\rho \int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} z \, dz = \pi \int_0^1 (2\rho - \rho^3 - \rho^5) \, d\rho = \pi \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{7}{12} \pi.$$

$$\begin{aligned} (3) \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 \rho^2 \, d\rho \int_0^{4-\rho \sin \theta} dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 (4 - \rho \sin \theta) \, d\rho \\ &= \frac{8\pi}{3} \times 64 = \frac{512}{3} \pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \text{ 解: } (1) \iiint_{\Omega} x e^{\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}} \, dx \, dy \, dz &= a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r^3 e^{r^2} \sin^2 \varphi \cos \theta \, dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \, d\varphi \int_0^a r^3 e^{r^2} \, dr \\ &= a^4 \times 1 \times \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{2} (a^2 e^{a^2} - a^2 + 1) = \frac{\pi a^4}{8} (a^2 e^{a^2} - a^2 + 1). \end{aligned}$$

注: 该题结果与答案不一样, 经检验, 未发现错误, 如果发现请联系本节作者.

$$\begin{aligned} (2) \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \, d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r^3 \, dr \\ &= -\frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \, d(\cos \varphi) = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} r^3 \, dr \\ &= -8\pi a^4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^5 \varphi \, d(\cos \varphi) = \frac{4}{3} \pi a^4 \times \left(1 - \frac{1}{8} \right) = \frac{7}{6} \pi a^4. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 6. \text{ 解: } M &= 2 \times \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^4 dr \\
 &= \pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \frac{1}{5} \times 4\sqrt{2} = \frac{4}{5}\pi (\sqrt{2} - 1).
 \end{aligned}$$

$$7. \text{ 解: } (1) \iiint_{\Omega} \sin z dx dy dz = \int_0^{\pi} \sin z dz \iint_D dx dy = \pi \int_0^{\pi} z^2 \sin z dz = \pi^3 - 4\pi.$$

$$\begin{aligned}
 (2) \iiint_{\Omega} e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^2 e^r dr \\
 &= 2\pi (e - 2e + 2e - 2) \times \frac{1}{5} \times 4\sqrt{2} = \pi (2 - \sqrt{2}) (e - 2).
 \end{aligned}$$

$$(3) \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_{\frac{5}{2}\rho}^5 dz = 10\pi \int_0^2 \left(\rho^3 - \frac{1}{2}\rho^4\right) d\rho = 40\pi - 32\pi = 8\pi.$$

$$(4) \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi \int_a^A r^4 dr = 2\pi \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} (A^5 - a^5) = \frac{4\pi}{15} (A^5 - a^5).$$

$$\begin{aligned}
 8. \text{ 解: } (1) V &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho}^{6-\rho^2} dz = 2\pi \int_0^2 (6\rho - \rho^3 - \rho^2) d\rho \\
 &= 2\pi \times \left(12 - 4 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}\pi.
 \end{aligned}$$

$$(2) V = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} r^2 dr = -\frac{4}{3}\pi a^3 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \pi a^3.$$

$$\begin{aligned}
 (3) V &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\frac{\rho^2}{4}}^{\sqrt{5-\rho^2}} dz \\
 &= \pi \int_0^2 \left(\sqrt{5-\rho^2} - \frac{\rho^2}{4}\right) d(\rho^2) \\
 &= \pi \times \left(\frac{2}{3}(5\sqrt{5}-1) - 2\right) = \frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5}-4).
 \end{aligned}$$

第四节

重积分的应用



$$\begin{aligned}
 1. \text{ 解: } (1) S &= \iint_{(x-1)^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2} dx dy = \iint_{D_{xy}} \sqrt{2} dx dy \\
 &= \sqrt{2} \iint_{D_{xy}} d\sigma = \sqrt{2}\pi \times 1^2 = \sqrt{2}\pi.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) S &= \iint_{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2 \leq \frac{a^2}{4}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2} dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}} dx dy = a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \frac{1}{\sqrt{a^2-\rho^2}} \rho d\rho \\
 &= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta) d\theta = (\pi - 2)a^2.
 \end{aligned}$$

$$2. \text{ 解: } (1) \bar{y} = \frac{1}{A} \iint_D y dx dy = \frac{2}{\pi ab} \iint_D y dx dy = \frac{4}{\pi ab} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^1 ab^2 \rho^2 d\rho = \frac{2}{\pi ab} \cdot 2 \cdot ab^2 \frac{1}{3} = \frac{4b}{3\pi}.$$

由“偶倍奇零”可得 $\bar{x} = 0$, 则质心为 $\left(0, \frac{4b}{3\pi}\right)$.

$$\begin{aligned}
 (2) V &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} dz = \int_0^a dx \int_0^{a-x} (x^2 + y^2) dy \\
 &= \int_0^a \left[x^2(a-x) + \frac{1}{3}(a-x)^3 \right] dx = \frac{1}{3} \times \frac{a^4}{2} = \frac{a^4}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} x dx dy dz = \frac{1}{V} = \int_0^a x dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} dz = \frac{1}{V} \int_0^a dx \int_0^{a-x} (x^2 + y^2) dy \\
 &= -\frac{1}{3V} \int_0^a (4x^4 - 6ax^3 + 3a^2x^2 - a^3x) dx = \frac{a^5}{15} \times \frac{6}{a^4} = \frac{2}{5}a
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{y} &= \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} y dx dy dz = \frac{1}{V} = \int_0^a dy \int_0^{a-y} y dx \int_0^{x^2+y^2} dz = \frac{1}{V} \int_0^a dy \int_0^{a-y} (x^2 + y^2) dx \\
 &= -\frac{1}{3V} \int_0^a (4y^4 - 6ay^3 + 3a^2y^2 - a^3y) dy = \frac{a^5}{15} \times \frac{6}{a^4} = \frac{2}{5}a
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{z} &= \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} z dx dy dz = \frac{1}{V} = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} z dz = \frac{1}{2V} \int_0^a dx \int_0^{a-x} (x^2 + y^2)^2 dy \\
 &= \frac{1}{2V} \int_0^a \left[x^4(a-x) - \frac{2}{3}x^2(a-x)^3 + \frac{1}{5}(a-x)^5 \right] dx = \frac{1}{5a^4} \times \frac{-25 + 54 - 45 + 20 + 3}{6} a^6 = \frac{7}{30}a^2
 \end{aligned}$$



则质心为 $\left(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a, \frac{7}{30}a^2\right)$.

$$\begin{aligned} 4. \text{ 解: } (1) I_y &= \iint_D x^2 dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 a^2 \cos^2 \theta \rho ab d\rho \\ &= a^3 b \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = a^3 b \times \pi \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \pi a^3 b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) I &= \rho_0 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz = \rho_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho \int_{\frac{H}{R}\rho}^H dz \\ &= \frac{3M}{\pi R^2 H} \times 2\pi H \times \int_0^R \left(1 - \frac{\rho}{R}\right) \rho^3 d\rho = \frac{6M}{R^2} \times \frac{1}{20} R^4 = \frac{3}{10} M R^2. \end{aligned}$$

总 习 题 八

教材见 256 页

$$\begin{aligned} 2. \text{ 解: } (1) \iint_D |x^2 + y^2 - 4| dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 |\rho^2 - 4| \rho d\rho = \pi \left[\int_0^4 (4 - t) dt + \int_4^9 (t - 4) dt \right] \\ &= \pi \left(16 - 8 + \frac{65}{2} - 20 \right) = \frac{41}{2} \pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \iint_D |\cos(x+y)| d\sigma &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_y^{\frac{\pi}{2}-y} \cos(x+y) dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\frac{\pi}{2}-x}^x \cos(x+y) dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [1 - \sin(2y)] dy - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} [\sin(2x) - 1] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - \sin(2x)] dx \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(-1 - 1) = \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \iint_D x^2 dx dy &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{a(1-\cos\theta)} \rho^3 \cos^2 \theta d\rho \\ &= \frac{a^2}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \theta (1 - \cos \theta)^4 d\theta = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^6 \theta + 6 \cos^4 \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= a^2 \left(\frac{5 \times 3}{6 \times 4 \times 2} + 6 \times \frac{3}{4 \times 2} + \frac{1}{2} \right) \times \frac{\pi}{2} = \frac{49}{32} \pi. \end{aligned}$$

(4) 积分区间关于 y 轴对称, 被积函数是关于 x 的奇函数, 由“偶倍奇零”可知积分值为 0.

3. 证明: 对左边交换程序可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 dy \int_y^1 f(y)(x-y)^{a-1} dx &= \int_0^1 \frac{1}{a} (1-y)^a f(y) dy = \frac{1}{a} \int_1^0 t^a f(1-t) d(1-t) \\ &= \frac{1}{a} \int_0^1 t^a f(1-t) dt = \frac{1}{a} \int_0^1 y^a f(1-y) dy \end{aligned}$$



证毕.

4. 证明: 将 D 分为关于原点对称的两个部分, 记作 D_1, D_2 , 则有

$$\iint_D f(x, y) \mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) \mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) \mathrm{d}\sigma$$

$$\text{又 } \iint_{D_2} f(x, y) \mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(-x, -y) \mathrm{d}\sigma$$

$$\text{则有 } \iint_D f(x, y) \mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) \mathrm{d}\sigma - \iint_{D_1} f(x, y) \mathrm{d}\sigma = 0$$

$$\iint_D (x^2 y + xy^2) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \iint_D 1 \mathrm{d}x \mathrm{d}y + 0 = 2 \times 2 = 4.$$

$$5. \text{ 解: (1) } \iiint_D |z^2| \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin \varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^R r^4 \cos^2 \varphi \mathrm{d}r + \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \mathrm{d}\varphi \int_{2R \cos \varphi}^R r^4 \cos^2 \varphi \mathrm{d}r \\ &= \frac{2}{5} \pi R^5 \left[\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin \varphi \cos^2 \varphi) \mathrm{d}\varphi + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin \varphi \cos^2 \varphi) \mathrm{d}\varphi - 32 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin \varphi \cos^7 \varphi) \mathrm{d}\varphi \right] \\ &= \frac{2}{5} \pi R^5 \left(\int_0^1 t^2 \mathrm{d}t - 32 \int_0^{\frac{1}{2}} t^7 \mathrm{d}t \right) = \frac{2}{5} \pi R^5 \times \left(\frac{1}{3} - \frac{32}{8} \times \frac{1}{256} \right) = \frac{59}{480} \pi R^5. \end{aligned}$$

(2) 积分区间关于面 xOy 对称, 被积函数是关于 z 的奇函数, 由“偶倍奇零”可知积分值为 0.

$$(3) \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = \int_0^5 \mathrm{d}x \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2x}} \rho^3 \mathrm{d}\rho = 2\pi \int_0^5 x^2 \mathrm{d}x = \frac{250}{3} \pi.$$

6. 证明: 对左边交换次序可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y \int_0^y f(z) \mathrm{d}z &= \int_0^1 f(z) \mathrm{d}z \int_z^1 \mathrm{d}y \int_z^y \mathrm{d}x = \int_0^1 f(z) \mathrm{d}z \int_z^1 (y-z) \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-z)^2 f(z) \mathrm{d}z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. \text{ 解: } S &= \frac{1}{a} \iint_{x^2+y^2 \leq a} \sqrt{4x^2+4y^2+a^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y + \iint_{x^2+y^2 \leq a} \sqrt{2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^a \sqrt{4\rho^2+a^2} \mathrm{d}\rho + \sqrt{2} \pi a^2 = \pi a^2 \left(\frac{5\sqrt{5}-1}{6} + \sqrt{2} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10. \text{ 解: } J &= \mu \iint_D (y+1)^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_0^1 (y+1)^2 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x \\ &= 2\mu \int_0^1 (y+1)^2 \sqrt{y} \mathrm{d}y = \frac{368}{105} \mu. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12. \text{ 解: } F(t) &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^t \rho \mathrm{d}\rho \int_0^h (z^2 + f(\rho^2)) \mathrm{d}z = 2\pi \int_0^t \left[\frac{1}{3} \rho h^3 + h \rho f(\rho^2) \right] \mathrm{d}\rho \\ &\Rightarrow F'(t) = \frac{2\pi}{3} h^3 t + 2\pi h t f(t^2). \end{aligned}$$

习题见第 168 页

第一节

第一型曲线积分——对弧长的曲线积分

教材见 265 页

$$1. (1) \text{ 解: } I = \int_C (x^2 + y^2) ds = \left\{ \int_{\overline{OA}} + \int_{\overline{AB}} + \int_{\overline{BO}} \right\} (x + y) ds.$$

$$\text{在直线 } \overline{OA} \text{ 上 } y = 0, ds = dx, \text{ 得 } \int_{\overline{OA}} (x^2 + y^2) dx = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3};$$

$$\text{在直线段 } \overline{AB} \text{ 上 } y = -\frac{1}{2}x + 1, ds = \frac{\sqrt{5}}{2} dx,$$

$$\text{得 } \int_{\overline{AB}} (x^2 + y^2) ds = \int_2^0 \left(x^2 + \left(-\frac{1}{2}x + 1 \right)^2 \right) \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} dx = -\frac{5\sqrt{5}}{3};$$

$$\text{在直线段 } \overline{BO} \text{ 上 } x = 0, ds = dy \text{ 得 } \int_{\overline{BO}} (x^2 + y^2) dx = \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3};$$

$$\text{故 } I = \frac{8}{3} + \frac{5\sqrt{5}}{3} + \frac{1}{3} = 3 + \frac{5\sqrt{5}}{3}.$$

$$(2) \text{ 解: } x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left(\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \right)^2 - 2x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} \right) ds \\ &= a^{\frac{4}{3}} \cdot 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \sin t \cos t dt - 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a^{\frac{2}{3}} \cos^2 t \right) \left(a^{\frac{2}{3}} \sin^2 t \right) (3a \sin t \cos t) dt \\ &= 12a^{\frac{7}{3}} \cdot \frac{1}{2} - 24a^{\frac{7}{3}} \cdot \frac{1}{12} = 4a^{\frac{7}{3}}. \end{aligned}$$

$$(3) \text{ 解: } x = a \cos t, y = a \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\text{弧段积分为: } I_1 = \int_0^{\pi/4} e^a \sqrt{(a \sin t)^2 + (a \cos t)^2} dt = \frac{\pi}{4} a e^a$$

$$\text{直线段为: } I_2 + I_3 = \int_0^a e^x dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}a}^0 e^{\sqrt{2}x} d(\sqrt{2}x) = 2(e^a - 1). \quad \therefore I = 2(e^a - 1) + \frac{\pi}{4} a e^a.$$

$$\begin{aligned} (4) \text{ 解: } I &= \int_C y^2 ds = \int_0^{2\pi} (a(1 - \cos t))^2 \sqrt{(a(1 - \cos t))^2 + (a \sin t)^2} dt \\ &= a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 \sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2} dt = a^3 \int_0^{2\pi} 4 \sin^4 \frac{t}{2} \cdot 2 \sin \frac{t}{2} dt = \frac{256}{15} a^3. \end{aligned}$$

$$(5) \text{ 解: } I = \int_C xyz ds = \int_0^1 \left(t \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} t^2 \right) \sqrt{1 + 2t + t^2} dt = \frac{\sqrt{2}}{3} \int_0^1 t^{\frac{9}{2}} (t + 1) dt = \frac{16\sqrt{2}}{143}.$$

$$4. \text{ 解: 由积分轮换性可知 } \int x^2 dx = \int y^2 dy = \int z^2 dz$$



$$\therefore I = \frac{1}{3} \int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{a^2}{3} \int_C ds = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

$$\begin{aligned} 5. \text{解: } I &= \int_0^2 x \cdot \sqrt{2x} \cdot \sqrt{1+y'^2(x)} dx = \int_0^2 x \cdot \sqrt{2x} \cdot \sqrt{\frac{2x+1}{2x}} dx \\ &= \int_0^2 x \sqrt{2x+1} dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} x (2x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 - \frac{1}{3} \int_0^2 (2x+1)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{5\sqrt{5}}{3} + \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \text{解: } I &= \int_{-\infty}^0 \rho \cos \theta \cdot \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta = a^2 \sqrt{1+k^2} \int_{-\infty}^0 e^{2k\theta} \cos \theta d\theta \\ \text{下面计算 } \int_{-\infty}^0 e^{2k\theta} \cos \theta d\theta &= e^{2k\theta} \sin \theta \Big|_{-\infty}^0 - 2k \int_{-\infty}^0 e^{2k\theta} \sin \theta d\theta = 2k \int_{-\infty}^0 e^{2k\theta} d \cos \theta \\ &= 2k e^{2k\theta} \cos \theta \Big|_{-\infty}^0 - 4k^2 \int_{-\infty}^0 e^{2k\theta} \cos \theta d\theta = 2k - 4k^2 \int_{-\infty}^0 e^{2k\theta} \cos \theta d\theta \\ \therefore \int_{-\infty}^0 e^{2k\theta} \cos \theta d\theta &= \frac{2k}{4k^2+1}, \therefore I = \frac{2ka^2\sqrt{1+k^2}}{4k^2+1}. \\ 7. \text{解: } I &= \int_L \rho ds = \int_0^1 t \sqrt{(a)^2 + (at)^2 + (at^2)^2} dt \\ &= \frac{a}{2} \int_0^1 \sqrt{1+t^2+t^4} d(t^2) = \frac{a}{2} \int_0^1 \sqrt{1+h+h^2} dh = \frac{a}{16} \left(6\sqrt{3} - 2 + 3 \ln \frac{3+2\sqrt{3}}{3} \right). \end{aligned}$$

第二节

第一型曲面积分——对面积的曲面积分

教材见 271 页

$$\begin{aligned} 1.(2) \text{解: } dS &= \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy = \sqrt{3} dx dy \\ \therefore I &= \sqrt{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{(1+x+y)^2} dy = (\sqrt{3}-1) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \ln 2 \right). \end{aligned}$$

$$(4) \text{解: } dS = \sqrt{EG-F^2} d\varphi = \sqrt{1+r^2} d\varphi$$

$$\therefore I = \pi^2 (a\sqrt{1+a^2} + \ln(a + \sqrt{1+a^2})).$$

$$(6) \text{解: } \iint xyz dS = \sqrt{3} dy = \frac{\sqrt{3}}{120}.$$

$$(8) \text{解: } \text{曲面 } \Sigma \text{ 在 } xOy \text{ 平面的投影区域 } D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 2ax, z=0$$

$$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy = \sqrt{2} dx dy$$

$$I = \iint_{D_{xy}} (xy + yz + zs) dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{2} (xy - (y+x)\sqrt{x^2+y^2}) dx dy$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\Sigma}{=} \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} \rho^2 (\sin\theta \cos\theta - \sin\theta - \cos\theta) \rho d\rho = -\frac{64}{15} \sqrt{2} a^3. \end{aligned}$$

$$(10) \text{解析: 由于积分轮换性可知 } \iint x^2 dS = \iint y^2 dS = \frac{1}{2} \iint (x^2 + y^2) dS = \frac{1}{2} a^2 \iint_{D_{xy}} dS = \pi a^3 h$$

$$(12) \text{解: } dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dx dy$$



2. 解析: $\because dm = \rho dS, \therefore m = \iint_{\Sigma} \rho dS$

$$m = \frac{1}{2} \iint_C (x^2 + y^2) \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 \sqrt{1 + \rho^2} \rho d\rho = \frac{2\pi}{15} (6\sqrt{3} + 1)$$

第三节

第二型曲线积分——对坐标的曲线积分

教材见 281 页

1.(2) 解析: $I = \int_C (x^2 - 2x^3) dx + 2x(x^4 - 2x^3) dx = \int_{-1}^1 (-4x^4 + x^2) dx = -\frac{14}{15}.$

(4) 解析: $x = y = z, I = \int_0^1 3x^2 dx = 1.$

(6) 解析: $\oint_C xy^2 dx - x^2 y dy = \int_0^{2\pi} (R^4 \cos t \sin^2 t (-\sin t) - R^4 \cos^2 t \sin t \cos t) dt$
 $= R^4 \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt = 0$

(8) $\because y = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

$\therefore I = \int_0^1 2x^2 dx + 0 dx + \int_1^2 (x^2 + (2-x)^2) dx + (x^2 - (2-x)^2) (-dx) = \frac{4}{3}$

(10) 解: $\oint_C \frac{(x+y) dx - (x-y) dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} (\cos \theta + \sin \theta) d(\cos \theta) - (\cos \theta - \sin \theta) d(\sin \theta)$
 $= \int_0^{2\pi} (-\cos \theta \sin \theta - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta) d\theta = -2\pi.$

2. 解析: 观察可知 $|x| + |y| = 1.$

$\therefore \oint_{ABCD A} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = \oint_{ABCD A} dx + dy = 0$ (对称性)

3. 解析: $\oint_C \sqrt{x^2 + y^2 + 1} dx + y \left(xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}) \right) dy$

原式 $= \int_0^{2\pi} a\sqrt{1+a^2} d(\cos \theta) + a^2 \sin \theta \left(a^2 \cos \theta \sin \theta + \ln(a \cos \theta + \sqrt{1+a^2}) \right) d(\sin \theta)$

根据对称性以及倍角公式可得:

原式 $= \int_0^{2\pi} (-a\sqrt{1+a^2} \sin \theta + a^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) d\theta = \frac{\pi a^4}{4}.$

第四节

格林公式及其应用

教材见 299 页

1. 解: (1) 原式 $= \iint_D (2x - x) dx dy = \iint_D x dx dy = 0.$

(3) 原式 $= \iint_D \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) dx dy = \int_1^4 dx \int_1^{\sqrt{x}} \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) dy = \frac{3}{4}.$



$$(5) \text{ 原式} = \iint_D e^x (-y + \sin y - \sin y) dx dy = - \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} e^x \cdot y dx dy = \frac{1}{5} (1 - e^\pi).$$

2. 解: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ($x \neq 0$) 只要积分路径不通过 y 轴, 则该曲线积分与路径无关.

$$\therefore \int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y}{x^2} dx - \frac{1}{x^2} dy = \int_{(2,1)}^{(2,2)} -\frac{1}{2} dy + \int_{(2,2)}^{(1,2)} \frac{2}{x^2} dx = -\frac{3}{2}.$$

3. 解: $\therefore \frac{\partial P}{\partial y} = -ax \sin y - 2y \sin x = \frac{\partial Q}{\partial x} = -by - 2x \sin y, \therefore a = 2, b = 2.$

$$I = \int_{(0,0)}^{(0,1)} 2y dy + \int_{(0,1)}^{(1,1)} (2x \cos 1 - \sin x) dx = 2 \cos 1.$$

4. 解: $\therefore \frac{\partial P}{\partial y} = e^x + f(x) = \frac{\partial Q}{\partial x} = f'(x), \therefore e^x = f'(x) - f(x).$

$$5. \text{ 解: 原式} = \iint_D (2x - 2y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (2x - 2y) dy = -1$$

$$6. \text{ 解: 原式} = \iint_D (2xe^{2y} - 1 - 2xe^{2y}) dx dy = \iint_D dx dy - \int_2^0 x dx - \int_2^0 (4e^{2y} - y) dy = \pi + 2e^4 - 2.$$

7. 解: $\therefore \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{(x^2 + y^2)} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \therefore$ 只要不经过原点, 积分就与路径无关

$$\text{故原积分} = \int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2+1} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2}.$$

9. 解: 做小椭圆域 $x^2 + 4y^2 \leq r^2$ 使得椭圆区域包含在积分圆周内

$$\therefore \oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + 4y^2} = \oint_\Gamma \frac{x dy - y dx}{x^2 + 4y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{2} r \cos \varphi r \cos \varphi - \frac{1}{2} r \sin \varphi (-r \sin \varphi)}{r^2} = \pi.$$

第五节

第二型曲面积分——对坐标的曲面积分

教材见 308 页

$$1. \text{ 解: } (1) \iint_\Sigma (x^2 + y^2) dx dy = - \iint_{D_{xy}} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta = -2\pi \int_0^R \rho^3 d\rho = -\frac{\pi R^4}{2}.$$

$$(3) \text{ 原式} = \iint_\Sigma x dy dz + y dz dx + (z^2 - 2z) dx dy$$

$$\text{注意到 } z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$I = \iint_\Sigma (x, y, (z^2 - 2z)) \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right) dx dy$$

$$\therefore I = \iint_\Sigma (z^2 - z) dx dy = \iint_{D_{xy}} \rho (\rho^2 - \rho) d\rho d\theta = \frac{3}{2}\pi.$$

$$(7) \text{ 由轮换性可知 } \iint_\Sigma x^3 dy dz = \iint_\Sigma y^3 dz dx = \iint_\Sigma z^3 dx dy$$

$$\therefore I = 3 \iint_{D_{xy}} z^3 dx dy = 3 \iint_{D_{xy}} \rho (a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} d\rho d\theta = \frac{12}{5}\pi a^5.$$

$$(9) x = a \sin \theta \cos \varphi, y = b \sin \theta \sin \varphi, z = c \cos \varphi$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos \theta \cos \varphi & b \sin \theta \sin \varphi & -c \sin \varphi \\ -a \sin \theta \sin \varphi & b \cos \theta \sin \varphi & 0 \end{bmatrix}$$



$$\therefore A = bc \cos \theta \sin^2 \varphi, B = ac \sin \theta \cos^2 \varphi, C = ab \sin \theta \sin \varphi.$$

$$\therefore \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy = \iint_{\Sigma} (PA + QB + RC) d\varphi d\theta$$

$$\therefore I = \iint_{D_{xy}} \left(\frac{bc}{a} \sin \varphi + \frac{ac}{b} \sin \varphi + \frac{ab}{c} \sin \varphi \right) d\varphi d\theta = \frac{4\pi}{abc} (a^2 b^2 + c^2 b^2 + a^2 c^2).$$

$$2. \text{ 解: (1) } \because z_x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, z_y = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \frac{5}{2\sqrt{3}}$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{3}{5}, \cos \beta = \frac{2}{5}, \cos \gamma = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

$$I = \iint_{\Sigma} \left(\frac{3}{5}P + \frac{2}{5}Q + \frac{2\sqrt{3}}{5}R \right) dS.$$

$$(2) \because z_x = -2x, z_y = -2y, \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{1+4x^2+4y^2}$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{-2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}, \cos \beta = \frac{-2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}, \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$$

$$\therefore I = \iint_{\Sigma} \frac{2xP + 2yQ + R}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} dS.$$

第六节

高斯公式与斯托克斯公式

教材见 319 页

$$1. \text{ 解: (1) 原式} = \iiint_{\Omega} (z^2 + x^2 + y^2) dv + \iint_{D_{xy}} 2xy dx dy = \frac{2\pi a^5}{5}.$$

$$(2) \text{ 原式} = - \iiint_{\Omega} 3 dv = -2\pi R^3.$$

$$(3) \text{ 原式} = \iiint_{\Omega} -3 dx dy dz + \iint_{z=1, D_{xy}} (x^2 - 1) dx dy = -\frac{15}{4}\pi.$$

$$(4) \text{ (i) 原式} = \iiint_{\Omega} (3x^2 - 2x^2 + 1) dv = \iiint_{\Omega} (x^2 + 1) dx dy dz = \frac{1}{3}a^5 + a^3.$$

(ii) 补上平面 $z=0, z=1$ 形成封闭曲面

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + 1) dx dy dz + \iint_{z=1, D_{xy}} dx dy = \frac{1}{4}\pi R^4 + \pi R^2.$$

(5) 补上 $\sum_1: z=0$ 形成闭曲面

$$\therefore \iiint_{\Omega} (2x + 2y + 2) dx dy dz = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_0^{1-\rho^2} \rho (\rho (\cos \theta + \sin \theta) + 1) dz = \frac{2\pi}{3}.$$

$$(6) \text{ 原式} = \iiint_{\Omega} (2x + 2y + 2z) dx dy dz = 3 \times 2 \iiint_{\Omega} x dx dy dz = 3a^4.$$

$$\begin{aligned} (7) \iiint_{\Omega} (2x + 2y) dv &= 2 \iiint_{\Omega} ((x-a) + a) dv + 2 \iiint_{\Omega} ((y-b) + b) dv \\ &= 2(a+b) \iiint_{\Omega} dx dy dz = \frac{8}{3}\pi R^3 (a+b). \end{aligned}$$

$$2. \text{ 解: (1) } = \iint_{D_{xy}} -3x^2 y^2 dx dy = -3 \int_0^{2\pi} a^6 \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = -\frac{\pi}{8} a^6.$$



$$(2) \text{ 原式} = \iint_{\Sigma} (z^2 - x) \, dy \, dz - (z + 3) \, dx \, dy = - \iiint_{\Omega} 2 \, dx \, dy \, dz$$

$$= -2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho \, d\rho \int_{\frac{e^2}{2}}^2 dz = -20\pi.$$

$$(4) \text{ 原式} = \iint_{\Sigma} (2y - 2z) \, dy \, dz + (2z - 2x) \, dx \, dz + (2x - 2y) \, dx \, dy$$

$$I = \iint_{\Sigma} \left((y - z) \frac{x - R}{R} + (z - x) \frac{y}{R} + (x - y) \frac{z}{R} \right) \, dS = 2 \iint_{\Sigma} (z - y) \, dS$$

$$\because dS = dx \, dy \times \frac{R}{z}, dS = dx \, dz \times \frac{R}{y} \therefore z \, dS = R \, dx \, dy, y \, dS = R \, dx \, dz$$

$$\therefore I = 2R \iint_{\Sigma} dx \, dy - 2R \iint_{\Sigma} dx \, dz = 2R\pi r^2.$$

$$(6) \text{ 原式} = - \iint_{\Sigma} dx \, dy + dx \, dz + dy \, dz = -3 \iint_{D_{xy}} dx \, dy = -\sqrt{3}\pi a^2.$$

3. 解: $\sum_1: z = e^a, x^2 + y^2 \leq a^2$

$$\therefore I = \iint_{\Sigma + \Sigma_1} 4xz \, dy \, dz - 2yz \, dx \, dz + (1 - z^2) \, dx \, dy - \iint_{\Sigma_1} 4xz \, dy \, dz - 2yz \, dx \, dz + (1 - z^2) \, dx \, dy$$

$$= \iiint_{\Omega} (4z - 2z - 2z) \, dx \, dy \, dz - \iint_{D_{xy}} (1 - e^{2a}) \, dx \, dy = (e^{2a} - 1) \pi a^2.$$

第七节

场论初步

教材见 328 页

1. 解: (1) $F = (P_1, Q_1, R_1), G = (P_2, Q_2, R_2)$

$$\therefore \operatorname{div}(F + G) = \frac{\partial(P_1 + P_2)}{\partial x} + \frac{\partial(Q_1 + Q_2)}{\partial y} + \frac{\partial(R_1 + R_2)}{\partial z}$$

$$\text{原式} = \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial z} + \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{\partial R_2}{\partial z} = \operatorname{div} F + \operatorname{div} G.$$

$$(2) \operatorname{div}(UF) = \frac{\partial(UF)}{\partial x} + \frac{\partial(UF)}{\partial y} + \frac{\partial(UF)}{\partial z}$$

$$\text{原式} = U \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) + F \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = U \operatorname{div} F + F \operatorname{div} U.$$

$$(3) \operatorname{rot}(F + G) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x + g_x & f_y + g_y & f_z + g_z \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{rot} F + \operatorname{rot} G = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g_x & g_y & g_z \end{vmatrix} = \operatorname{rot}(F + G).$$

$$(4) \operatorname{rot}(UF) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ UF & UF & UF \end{vmatrix} = U \operatorname{rot} F + \operatorname{grad} U \times F$$



2. 解: (1) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} U) = \nabla \cdot (\nabla U) = \nabla^2 U = \Delta U$.

(2) $\operatorname{div}(U \operatorname{grad} U) = U \operatorname{div}(\operatorname{grad} U) + \operatorname{grad} U \cdot \operatorname{grad} U = U \Delta U + \operatorname{grad} U \cdot \operatorname{grad} U$.

(3) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = \nabla \times (\nabla U) = (0, 0, 0)$.

(4) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = \nabla \cdot (\nabla \times A) = (\nabla \times \nabla) \cdot F = 0$.

$$\begin{aligned} 3. \text{ 解: } \operatorname{div} F &= \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \lim_{\Delta \tau} \frac{1}{\Delta \tau} \iint_{\sigma} F \cdot n \, dS \\ &= \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \lim_{\Delta \tau} \frac{1}{\Delta \tau} \iint_{\sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \, dS \\ &= \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \lim_{\Delta \tau} \frac{1}{\Delta \tau} \iint_{\sigma} P \, dy \, dz + Q \, dx \, dz + R \, dx \, dy = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \operatorname{div} F = 0 \Leftarrow \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0. (\text{反推可证充分性})$$

总 习 题 九

教材见 339 页

$$1. \text{ 解: (1) 原式} = \int_C \sqrt{2y^2 + z^2} \, ds = \int_C \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, ds = 2\pi a^2.$$

$$(3) \text{ 原式} = \int_3^8 \frac{2}{3} x \sqrt{1+x} \, dx = \frac{2152}{45}.$$

(5) 补上 x 轴使曲线封闭, 而后使用格林公式

$$\text{原式} = - \iint_D (2x+1) \, dx \, dy = - \int_0^2 dx \int_0^{2x-x^2} (2x+1) \, dy = -4.$$

$$(7) \int_L (2a - a(1 - \cos t)) a(1 - \cos t) + a(t - \sin t) a \sin t \, dt$$

$$\text{原式} = \int_0^{2\pi} a^2 t \sin t \, dt = -2\pi a^2.$$

$$(9) \because y = z, \therefore x^2 + 2y^2 = 1 \rightarrow x = \cos t, y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t$$

$$\int_L xyz \, dx = \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \frac{1}{2} \sin^2 t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \, dt = \frac{\sqrt{2}\pi}{16}.$$

$$2. \text{ 解: } m = \int_0^{2\pi} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2} \sqrt{2} \, dt = \sqrt{2} \left(\pi \sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{2} \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}) \right).$$

$$4. \text{ 解: (1) 原式} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy = \iint_D y^2 \, dx \, dy = \int_1^4 dx \int_0^2 y^2 \, dy = 8.$$

$$(2) \text{ 原式} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy = \iint_D y^2 \, dx \, dy = \int_0^a \rho^2 \cdot \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta = \frac{a^4}{4} \pi.$$

$$6. \text{ 解: } I = -2 \iint_{\Sigma} dx \, dz + dx \, dy + dy \, dz = -2\sigma \left(\frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right) = -2\pi a(a+h).$$



7. 解: (1) 补充平面 $\sum_1: z = 0, \sum_2: z = h$ 构成封闭曲面

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{\Omega} 0 \, dx \, dy \, dz - \iint_{\sum_1} (x^2 - y) \, dx \, dy - \iint_{\sum_2} (x^2 - y) \, dx \, dy \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^h \rho (\rho^2 \cos^2 \theta - \rho \sin \theta) \, d\rho \, d\theta = -\frac{\pi}{4} h^4. \end{aligned}$$

(3) 取 $\varepsilon > 0$ 充分小, $S_\varepsilon: x^2 + y^2 + z^2 = \varepsilon^2 (z \geq 0), D_\varepsilon: x^2 + y^2 = \varepsilon^2 (z = 0)$

$$\therefore I = \iint_{S_\varepsilon + D_\varepsilon} \frac{x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} = \frac{1}{\varepsilon^3} \iint_{S_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} (x^2 + y^2 + z^2) \, ds = 2\pi.$$

(5) 补平面 $\sum_1: z = 0$ 构成封闭曲面

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{a} \iint_{\sum + \sum_1 - \sum_1} ax \, dy \, dz + (z + a)^2 \, dx \, dy = - \iiint_{\Omega} [a + 2(z + a)] \, dx \, dy \, dz + \iint_{D_{xy}} a^2 \, dx \, dy \\ &= -3a \iiint_{\Omega} dx \, dy \, dz - 2 \iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz + a^2 \iint_{D_{xy}} dx \, dy = -\frac{1}{2} \pi a^3. \end{aligned}$$

$$8. \text{ 解: (1) 原式} = - \iint_{\Sigma} dy \, dz + dx \, dz + dx \, dy = - \iint_D (1, 1, 1) (1, 1, 1) \, dx \, dy = - \iint_D dx \, dy$$

$$D_{xy}: x^2 + y^2 + (x + y - 1)^2 = 1$$

$$\therefore I = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \pi.$$

习题见第 176 页

第一节 微分方程的基本概念

教材见 348 页

2. (1) 解: 将 $y = C_1 \cos \omega x$ 代入左边得: $y'' + \omega^2 y = -C_1 \omega^2 \cos \omega x + C_1 \omega^2 \cos \omega x = 0$ 符合原方程, 故 $y = C_1 \cos \omega x$ 是所给方程 $y'' + \omega^2 y = 0$ 的解.(3) 解: 将 $y = 3s \ln x - 4 \cos x$ 代入方程左边得 $y'' + y = -3s \ln x + 4 \cos x + 3s \ln x - 4 \cos x = 0$ 符合原方程, 故 $y = 3s \ln x - 4 \cos x$ 是所给方程 $y'' + y = 0$ 的解.(5) 解: $y = x^2 e^x$ 求导得 $y' = 2xe^x + x^2 e^x$, 再次求导得 $y'' = 2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2 e^x = 2e^x + 4xe^x + x^2 e^x$ 代入左边得 $y'' - 2y' + y = 2e^x + 4xe^x + x^2 e^x - 4xe^x - 2x^2 e^x + x^2 e^x = 2e^x \neq 0$ 故 $y = x^2 e^x$ 不是所给方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解.3. (1) 解: 设所求曲线方程为 $y = y(x)$ 根据题意可知函数应满足如下关系: $\frac{dy}{dx} = x^2$, 即 $y' = x^2$.(3) 解: 设所求曲线方程为 $y = y(x)$, 该曲线在 x 处斜率为 y' , 可得切线方程为 $y = y'x + s$ 又根据题意, $s = x$, 故 $y = y'x + x$, 也即 $xy' = y - x$.(5) 解: 设所求曲线方程为 $y = y(x)$, 该曲线在 x 处斜率为 y' 设其在 (x, y) 处切线的截距为 b , 则切线方程为 $y = y'x + b$ 又根据题意, $b = \frac{x+y}{2}$, 故 $y = y'x + \frac{x+y}{2}$, 也即 $y - xy' = \frac{x+y}{2}$.4. 解: 设物体与空气的温差是 T , 在冷却过程中所需时间 t 是温差 T 的函数 $t = T(t)$ 设其冷却速度为 v , 根据题意, 设比例系数为 k , 则 $v = kT$ 又因为冷却表示为温度的下降, 即 v 是表示 T 递减速率的函数, 故 $v = -\frac{dT}{dt}$ 联立以上各式可得 $-\frac{dT}{dt} = kT$ 解此微分方程可得: $t = -\frac{\ln kT}{k} + C$ (C 为常数)根据题意, 物体在 20 分钟内由 100 度冷却到 60 度, 温差 T 应为物体温度减去空气温度开始时 $\begin{cases} t = 0 \\ T = 100 - 20 = 80 \end{cases}$, 结束时 $\begin{cases} t = 20 \\ T = 60 - 20 = 40 \end{cases}$ 代入 t 与 T 的函数关系式, 得 $\begin{cases} -\frac{\ln 80k}{k} + C = 0 \\ -\frac{\ln 40k}{k} + C = 20 \end{cases}$, 解方程得 $\begin{cases} k = \frac{\ln 2}{20} \\ C = -\frac{20 \ln(4 \ln 2)}{\ln 2} \end{cases}$



故 $t = \frac{20}{\ln 2} \ln \frac{80}{T}$ (单位: 分钟), 则物体达到 30 度时, 需要 60 分钟.

第二节 可变量分离的微分方程

教材见 354 页

1. (2) 解: 分离变量得 $\frac{\tan y}{\ln(\cos y)} dy = -\frac{1}{x} dx \Rightarrow -\frac{s \ln y}{\cos y \ln(\cos y)} dy = \frac{1}{x} dx$

两边积分得 $\ln[\ln(\cos y)] = \ln x + C \Rightarrow \ln(\cos y) = xe^C \Rightarrow \cos y = e^{xe^C}$

令 $C_1 = e^C$, $\cos y = e^{C_1 x}$, $y = \arccos e^{C_1 x}$, 即 $y = \arccos e^{C_1 x}$.

(4) 解: 分离变量得 $\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} dy = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

两边积分得 $\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + C$, 即 $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C$.

(6) 解: 分离变量得 $\frac{5e^x}{1-e^x} dx = -\frac{\sec^2 y}{\tan y} dy$, 两边积分得 $-5 \ln(1-e^x) + C = -\ln(\tan y)$

$\Rightarrow (1-e^x)^5 e^{-C} = \tan y$, 令 $C_1 = e^{-C}$

故 $(1-e^x)^5 C_1 = \tan y$, $y = \arctan C_1(1-e^x)^5$, 即 $y = \arctan C(1-e^x)^5$.

(8) 解: 变换得 $e^x(e^y-1)dx + e^y(e^x+1)dy = 0$, 分离变量得 $\frac{e^x}{e^x+1} dx = -\frac{e^y}{e^y-1} dy$

两边积分得

$$\ln(e^x+1) + C = -\ln(e^y-1) \Rightarrow (e^x+1)e^C = \frac{1}{e^y-1}$$

令 $C_1 = \frac{1}{e^C}$, $C_1 = (e^x+1)(e^y-1)$, 即 $(e^x+1)(e^y-1) = C$.

(10) 解: 变换得 $y' + s \ln x \cos y + \cos x s \ln y = s \ln x \cos y - \cos x s \ln y$

$$\Rightarrow y' + 2 \cos x s \ln y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} + 2 \cos x \ln y = 0$$

两边积分得 $\ln \left| \tan \frac{y}{2} \right| = -2s \ln x + C$, 故 $2s \ln x + \ln \left| \tan \frac{y}{2} \right| = C$.

2. (1) 解: $\frac{dy}{dx} s \ln x = y \ln y$, 分离变量得

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{s \ln x}$$

两边积分得 $\ln(\ln y) = \ln(\tan \frac{x}{2}) + C \Rightarrow \ln y = \tan \frac{x}{2} e^C$

代入初始条件得 $C = 0$, 故 $\ln y = \tan \frac{x}{2}$.

(3) 解: $\frac{dy}{dx} \cos x = \frac{y}{\ln y}$, 分离变量得 $\frac{dx}{\cos x} = -\frac{\ln y}{y} dy$, 两边积分得

$$\ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C = \frac{1}{2} \ln^2 y$$

代入初始条件得 $C = 0$, 故 $\ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| = \frac{1}{2} \ln^2 y$.

(5) 解: 分离变量得 $\frac{3e^x dx}{1+e^x} = -\frac{\sec^2 y}{\tan y} dy$, 两边积分得 $3 \ln(1+e^x) + C = -\ln(\tan y)$

变换得 $(1+e^x)^3 \tan y e^C = 0$, 代入初始条件得 $C = -3 \ln 2$, 故 $(1+e^x)^3 \tan y = 8$.



(7) 解: $x \frac{dy}{dx} + x + s \ln(x+y) = 0$, 变换得

$$x \left(\frac{dy}{dx} + 1 \right) + s \ln(x+y) = 0 \Rightarrow x \frac{dy+dx}{dx} + s \ln(x+y) = 0$$

注意到 $\frac{dy+dx}{dx} = \frac{d(x+y)}{dx}$, 因此令 $u = x+y$, 故 $x \frac{du}{dx} + s \ln u = 0$

分离变量得 $\frac{dx}{x} = -\frac{du}{s \ln u}$, 两边积分得

$$\ln x + C = -\ln \left| \tan \frac{u}{2} \right| \Rightarrow x e^C = \frac{1}{\tan \frac{u}{2}}$$

把初始条件代入得 $C = \ln \frac{2}{\pi}$, 故 $x \tan \frac{x+y}{2} = \frac{2}{\pi}$.

4. (2) 解: 原方程可写为 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{1}{s \ln \frac{y}{x}}$, 令 $u = \frac{y}{x}$, 得 $\frac{dy}{dx} = \frac{x du}{dx} + u$

故 $\frac{x du}{dx} + u = -\frac{1}{s \ln u}$, 分离变量得 $s \ln du = -\frac{dx}{x}$

两边积分得 $\cos u + C_1 = \ln x$, 变形得 $e^{\cos u} e^{C_1} = x$, 即 $x = C e^{\cos \frac{y}{x}}$

(4) 解: 原方程可写为 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$, 令 $u = \frac{y}{x}$, 得 $\frac{dy}{dx} = \frac{x du}{dx} + u$

故 $\frac{x du}{dx} + u = \tan u$, 分离变量得 $\frac{1}{\tan u} du = -\frac{dx}{x}$

两边积分得 $s \ln x = x e^C$, 故 $s \ln \frac{y}{x} = x C$.

(6) 解: 原方程化为 $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-5y+3}{2x+4y-6}$, 注意到 $\Delta = 18 \neq 0$

解方程组 $\begin{cases} 2x-5y+3=0 \\ 2x+4y-6=0 \end{cases}$ 得到交点 $\begin{cases} x_0 = \alpha = 1 \\ y_0 = \beta = 1 \end{cases}$, 令 $\begin{cases} x = X + \alpha = X + 1 \\ y = Y + \beta = Y + 1 \end{cases}$

原方程化为 $\frac{dY}{dX} = \frac{2X-5Y}{2X+4Y} = \frac{2-5\frac{Y}{X}}{2+4\frac{Y}{X}}$ 令 $\frac{dY}{dX} = u$

$\frac{dY}{dX} = \frac{X du}{dX} + u$, 代入原方程得 $\frac{X du}{dX} + u = \frac{2-5u}{2+4u}$, 变形得

$$\frac{1}{\frac{2-5u}{2+4u} - u} du = \frac{dX}{X} \Rightarrow \left(\frac{4u + \frac{7}{2}}{2-7u-4u^2} + \frac{\frac{2}{3}}{4(u+2)} - \frac{\frac{2}{3}}{4u-1} \right) du = \frac{dX}{X}$$

两边积分得 $-\frac{1}{2} \ln(2-7u-4u^2) + \frac{1}{6} \ln(u+2) - \frac{1}{6} \ln(4u-1) = \ln X + C'$

整理得 $(4y-x-3)(y+2x-3)^2 = C$.

(8) 解: 原方程化为 $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 y^2 + 1}{2x^2}$, 令 $u = xy$, $\frac{dy}{dx} = \frac{x du}{dx} + \frac{u}{x}$, 代入原方程得

$$\frac{x du}{dx} + \frac{u}{x} = \frac{u^2 + 1}{2x^2} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2 du}{(u-1)^2}$$

两边积分, 得 $x = C e^{\frac{2}{xy-1}}$.

5. (2) 解: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + s \ln \frac{y}{x}$, 令 $u = \frac{y}{x}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{x du}{dx} + u$, 则 $\frac{du}{s \ln u} = \frac{dx}{x}$

两边积分得

$$y = 2x \arctan(x e^{C'})$$

代入初始条件得 $y = 2x \arctan x$.



(4) 解: $\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + 6(\frac{y}{x})^2 + (\frac{y}{x})^4}{4\frac{y}{x} + 4\frac{y^3}{x^3}}$, 令 $u = \frac{y}{x}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{x du}{dx} + u$, 则 $\frac{4u + 4u^3}{1 + 10u^2 + 5u^4} du = -\frac{dx}{x}$

两边积分得 $(1 + 10u^2 + 5u^4)^{\frac{1}{5}} = \frac{e^{C'}}{x}$, 代入初始条件得 $x^5 + 10x^3y^2 + 5xy^4 = 1$.

第三节

一阶线性微分方程与常数变易法

教材见 359 页

1. 解: (1) 将方程改写为 $\frac{dy}{dx} + y \cos x = e^{-s \ln x}$, 对应齐次方程 $\frac{dy}{dx} + y \cos x = 0$ 的通解
齐次方程通解为 $y = Ce^{-s \ln x}$, 应用常数变易法, 令 $y = C(x)e^{-s \ln x}$, 代入原方程得 $C'(x) = 1$
积分后得 $C(x) = x + C_1$, 代入得 $y = (x + C)e^{-s \ln x}$.

(3) 解: 将方程改写为 $\frac{dy}{y dx} = \frac{1}{x + \ln y}$, 令 $u = \ln y$, $\frac{du}{dx} = \frac{dy}{y dx}$, 则 $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x + u}$

令 $t = x + u$, 则 $\frac{t dt}{t + 1} = dx$, 两边积分得

$$t - \ln(t + 1) = x + C' \Rightarrow x = Cy - \ln y - 1.$$

(5) 解: 将方程改写为 $\frac{dx}{dy} - \frac{2x}{y} = -y$, $P(y) = -\frac{2}{y}$, $Q(y) = -y$, 则 $x = y^2(C - \ln y)$.

(6) 解: 将方程改写为 $\frac{dy}{dx} + xy = x^3y^3$, 令 $z = y^{-2}$, $\frac{dz}{dx} - 2xz = -2x^3$

代入通解得 $z = Ce^{x^2} + x^2 + 1$, 原方程为

$$\frac{1}{y^2} = Ce^{x^2} + x^2 + 1.$$

(7) 解: 将方程改写为 $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = ay^2 \ln x$, 令 $z = xy$, $\frac{dz}{dx} = \frac{az^2 \ln x}{x}$, 得

$$xy \left[C - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \right] = 1.$$

2. (1) 解: 原方程化为 $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}$, 令 $z = xy$, $\frac{dz}{dx} = e^x$, 则 $xy = e^x + C$, 代入初始条件得 $xy = e^x$.

(3) 解: $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x}$, 对应齐次方程 $\frac{dy}{dx} = -y \cot x$ 通解为 $y = \frac{C}{s \ln x}$

应用常数变易法, 令 $y = \frac{C(x)}{s \ln x}$, 代入得

$$y = \frac{-5e^{\cos x} + C_1}{s \ln x} \Rightarrow y = \frac{-5e^{\cos x} + 1}{s \ln x}.$$

(5) 解: 原方程化为 $\frac{dy}{\sqrt{y} dx} + \sqrt{y} = e^{\frac{x}{2}}$, 令 $z = \sqrt{y}$, $\frac{dz}{dx} + \frac{z}{2} = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}$

对应齐次方程 $\frac{dz}{dx} + \frac{z}{2} = 0$ 通解为 $z = Ce^{-\frac{x}{2}}$, 应用常数变易法, 得 $\sqrt{y} = (\frac{e^x}{2} + C_1)e^{-\frac{x}{2}}$

$$\Rightarrow \sqrt{y} = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}.$$



第四节 全微分方程

教材见 364 页

1. (2) 解: $M = \frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x}$ $N = \frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}$, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2xy}{(x-y)^3}$

原方程化为 $\frac{y^2 dx - x^2 dy}{(x-y)^2} = d(\frac{xy}{x-y})$, 则 $\frac{xy}{x-y} = \ln \left| \frac{x}{y} \right| + C$.

(4) 解: $M = y(x-2y)$, $N = -x^2$, $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, 方程不是全微分方程.

(6) 解: $M = x^2 + y^2$, $N = xy$, $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, 方程不是全微分方程.

(8) 解: $M = xy + \frac{1}{4}y^4$ $N = \frac{1}{2}x^2 - xy^3$, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

原方程化为 $2d(x^2y) + d(xy^4) = 0$, 则 $2x^2y + xy^4 + C = 0$.

2. (1) 解: 原方程变形为 $d(\frac{x^2}{y^3}) - d(\frac{1}{y}) = 0$, 积分得 $\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C$.

(3) 解: $M = x + y^2$ $N = -2xy$, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, 原方程化为 $d(\ln x) - d(\frac{y^2}{x}) = 0$, 积分得 $x = Ce^{\frac{y^2}{x}}$.

(5) 解: $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = -\frac{4}{y}$, $\left(\frac{3x^2}{y^3} - \frac{a}{y^2}\right)dx - \left(\frac{3x^2}{y^4} - \frac{2ax}{y^3}\right)dy = 0$

变形为 $d(\frac{x^3}{y^3}) + d(-\frac{ax}{y^2}) = 0$, 得 $x^3 - axy = Cy^3$.

(7) 解: $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = -\frac{2}{x} \Rightarrow (x^2e^x + 3x^2y^2)dx + 2x^3ydy = 0$

$x^2e^x dx + d(x^3y^2) = 0 \Rightarrow (x^2 - zx + 2)e^x + x^3y^2 = C$.

3. (1) 解: 设所求曲线方程为 $y = y(x)$, 根据题意可知未知函数应满足如下关系: $\frac{dy}{dx} = x^2$, 即 $y' = x^2$.

(3) 解: 设所求曲线方程为 $y = y(x)$, 切线方程为 $y = y'x + s$, 根据题意 $s = x$, 则 $xy' = y - x$.

(5) 解: 设所求曲线方程为 $y = y(x)$, 切线方程为 $y = y'x + b$, 根据题意 $b = \frac{x+y}{2}$, 故 $y - xy' = \frac{x+y}{2}$.

第五节 某些特殊类型的高阶方程

教材见 369 页

1. (1) 解: 记 $y' = p(y)$, $\therefore y'' = p \frac{d}{dy}$, 原方程化为

$$yp \frac{d}{dy} p + p^2 = 0 \Rightarrow p = \frac{C_0}{y}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{C_0}{y} \Rightarrow y dy = C_0 dx$$

两侧积分得

$$y^2 = C_1 x + C_2 \quad (C_1 = 2C_0).$$

(3) 解: 记 $y' = p(x) \Rightarrow y'' = p'$, 故原式化为

$$p' = x + p$$



即

$$\frac{dp}{dx} - p = x$$

设积分因子 $\mu = e^{-x}$, 则在上式两边同乘积分因子 μ 得

$$\frac{dp}{e^x dx} - \frac{p}{e^x} = \frac{x}{e^x}$$

凑微分得

$$d(pe^{-x}) = xe^{-x}$$

两侧积分得

$$\frac{dy}{dx} = p = -x + C_1 e^x - 1$$

再次积分, 得

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - x + C_1 e^x + C_2.$$

(5) 解: 记 $y' = p(y)$, 则 $y'' = p \frac{dp}{dy}$, 代入原式得

$$y(1+y) \times p \frac{dp}{dy} = -(1+\ln y)p^2 \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{1+\ln y}{y(1-\ln y)} dy$$

两侧积分得

$$\ln p = \ln y + 2 \ln(1 - \ln y) + \ln C_0$$

整理得

$$p = \frac{dy}{dx} = C_0 y(1 - \ln y)^2 \Rightarrow \frac{dy}{y(1 - \ln y)^2} = C_0 dx$$

再次积分得

$$\frac{1}{1 - \ln y} = C_0 x + C$$

整理得

$$-\ln y = \frac{-C_0 x - C + 1}{C_0 x + C} \Rightarrow y = e^{\frac{x+C_2}{x+C_1}} \quad (C_1 = \frac{C}{C_0}, C_2 = \frac{C-1}{C_0}).$$

(7) 解: 记 $y'' = p(x) \Rightarrow y''' = p'$, 代入原式得

$$2xpp' = p^2 - a^2 \Rightarrow 2p \frac{dp}{p^2 - a^2} = \frac{dx}{x}$$

两侧积分并整理得

$$p^2 = Cx + a^2$$

$$\therefore y = \int \left(\int p dx \right) dx = C_2 x + C_3 \pm \frac{4(C_1 x + C_1^2)^{\frac{5}{2}}}{15C_1^2}.$$

2. (1) 解: 记 $y' = p(x) \Rightarrow y'' = p'$, 代入原式得

$$p' + p^2 = 1 \Rightarrow \frac{dp}{dx} = -p^2 + 1 \Rightarrow \frac{dp}{1-p^2} = dx$$



两侧积分并整理得

$$\frac{1+p}{1-p} = e^{2(x+C)} \Rightarrow p = \frac{e^{2(x+C)} - 1}{e^{2(x+C)} + 1}$$

亦即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2(x+C)} - 1}{e^{2(x+C)} + 1}$$

两侧再次积分并整理得

$$y = \ln [e^{2(C+x)} + 1] - x + C_0$$

将条件 $y(0) = 0, y'(0) = 0$ 代入, 得

$$C = 0, C_0 = -\ln 2$$

综上, 特解为

$$y = \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \ln \operatorname{ch} x.$$

(2) 解: 记 $y' = p(y)$, 则 $y'' = p \frac{dp}{dy}$, 代入原式, 得

$$yp \frac{dp}{dy} = 2(p^2 - p) \Rightarrow \frac{dp}{p-1} = \frac{2dy}{y}$$

两侧积分并整理得

$$p = \frac{dy}{dx} = Cy^2 + 1 \Rightarrow \frac{dy}{Cy^2 + 1} = dx$$

两侧积分并整理得

$$y = \frac{\tan(\sqrt{C}x + C_2)}{\sqrt{C}}$$

将条件 $y(0) = 1, y'(0) = 2$ 代入, 得

$$\sqrt{C} = 1, C_2 = \frac{\pi}{4}$$

综上, 特解为

$$y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

(5) 解: 记 $y' = p(x) \Rightarrow y'' = p'$, 代入原式得

$$p' + p^2 + 1 = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p^2 + 1} = -dx$$

两侧积分并整理得

$$p = \tan(C - x)$$

亦即

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \tan(C - x) \\ \Rightarrow dy &= -\frac{\sin(C - x)}{\cos(C - x)} d(C - x) \end{aligned}$$

两侧积分并整理得

$$y = \ln |\cos(C - x)| + C_1$$



将条件 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 代入, 得

$$C = \frac{\pi}{4}, C_1 = 1 + \frac{1}{2} \ln 2$$

综上, 特解为

$$y = \ln \left| \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right| + 1 + \frac{1}{2} \ln 2.$$

3. 解: $s = \int v dt$, 对 v , 有 $\frac{dv}{dt} = g - \frac{(cv)^2}{m}$, 而 $v = s'$, \therefore 根据题意得关于 s 的微分方程为

$$s'' = g - \frac{c^2(s')^2}{m}$$

记 $p = s' \Rightarrow s'' = p \frac{dp}{ds}$, 代入原式得

$$p \frac{dp}{ds} = g - \frac{c^2 p^2}{m} \Rightarrow \frac{p}{mg - c^2 p^2} dp = ds$$

两侧积分并整理得

$$\begin{aligned} s + \ln C_1 &= -\frac{1}{2c^2} \ln (mg - c^2 p^2) \\ \Rightarrow p &= \pm \frac{1}{c^2} \sqrt{mg - C e^{-2c^2 s}} (C_2 = C_1 e^{-2c^2 s}) \end{aligned}$$

将条件 $p(0) = 0, s(0) = 0$ 代入得

$$C_2 = mg$$

所以

$$\frac{dp}{ds} = \pm \frac{\sqrt{mg}}{c^2} \sqrt{1 - e^{-2c^2 s}}$$

分离变量得

$$\pm \sqrt{\frac{e^{2c^2 s}}{e^{2c^2 s} - 1}} ds = \frac{\sqrt{mg}}{c^2} dt$$

两侧积分并整理得

$$s = \frac{m}{c^2} \ln ch \left(\frac{ct}{\sqrt{mg}} \right).$$

第六节

高阶线性微分方程

教材见 373 页

1. 由朗斯基行列式

$$(1) \text{ 解: } \begin{vmatrix} e^{x^2} & x e^{x^2} \\ 2x e^{x^2} & e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2} \end{vmatrix} = e^{2x^2} \neq 0. \therefore \text{线性无关.} \quad (3) \text{ 解: } \begin{vmatrix} e^{x^2} & x e^{x^2} \\ 2x e^{x^2} & e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2} \end{vmatrix} = e^{2x^2} \neq 0. \therefore$$

线性无关.

$$(5) \text{ 解: } \begin{vmatrix} 2x^2 + 1 & x^2 - 1 & x + 2 \\ 4x & 2x & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0. \therefore \text{线性无关.}$$



2. 证明: 假设 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性相关, 则朗斯基行列式

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = 0 \quad \because \frac{y_2(x)}{y_1(x)} \neq \text{常数}$$

$\therefore y_2(x) \neq 0$ 故 $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{y_1'(x)}{y_2'(x)}$ 与题设矛盾 $\therefore y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性无关.

3. 解: 对于零次时, 有

$$a_n(x)y_1(x) + a_n(x)y_2(x) = a_n(x)[y_1(x) + y_2(x)]$$

对于一次时, 有

$$a_{n-1}(x)\frac{d f_1(x)}{d x} + a_{n-1}(x)\frac{d f_2(x)}{d x} d x = a_{n-1}(x)\frac{d [f_1(x) + f_2(x)]}{d x}$$

对于二次, 有

$$\begin{aligned} a_{n-2}(x)\frac{d^2[y_1(x)]}{d x^2} + a_{n-2}(x)\frac{d^2[y_2(x)]}{d x^2} &= a_{n-2}(x)\frac{d^2[y_1(x)] + d^2[y_2(x)]}{d x^2} \\ a_{n-2}(x)\frac{d^2[y_1(x) + y_2(x)]}{d x^2} &= a_{n-2}(x)\frac{d\left[\frac{d y_1(x)}{d x} + \frac{d y_2(x)}{d x}\right]}{d x} = a_{n-2}(x)\frac{d^2[y_2(x)] + d^2[y_1(x)]}{d x^2} \\ \text{即 } a_{n-2}(x)\frac{d^2[y_1(x) + y_2(x)]}{d x^2} &= a_{n-2}(x)\frac{d^2[y_2(x)] + d^2[y_1(x)]}{d x^2}; \end{aligned}$$

同理可证

$$a_{n-k}(x)\frac{d^k[y_1(x)]}{d x^k} + a_{n-k}(x)\frac{d^k[y_2(x)]}{d x^k} = a_{n-k}(x)\frac{d^k[y_1(x) + y_2(x)]}{d x^k} k. \in [3, +\infty).$$

第七节 常系数线性微分方程

教材见 380 页

1. (1) 解: 特征方程为

$$r^4 - 1 = 0 \Rightarrow r_1, r_2 = \pm 1, r_3, r_4 = \pm i$$

\therefore 通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

(3) 特征方程为 $r^4 - 5r^3 + 6r^2 + 4r - 8 = 0 \Rightarrow (r-2)(r^3 - 3r^2 + 4) = 0$

$$\Rightarrow (r+1)(r-2)(r^2 - 4r + 4) = 0 \Rightarrow r_1 = -1, r_2 = r_3 = r_4 = 2.$$

\therefore 通解为

$$y = C_1 e^{-x} + (C_2 + C_3 x + C_4 x^2) e^{2x}.$$

(5) 解: 特征方程为

$$r^4 - 13r^2 + 36 = 0 \Rightarrow (r^2 - 4)(r^2 - 9) = 0$$



得特征方程的根为

$$r_1, r_2 = \pm 3, r_3, r_4 = \pm 2$$

故通解为

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}.$$

2. (2) 解: 对应的齐次方程为

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0 \Rightarrow (r+1)^3 = 1$$

故对应的齐次方程通解为

$$\tilde{y} = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^{-x}$$

设一特解

$$y^* = x^3 (b_0 x + b_1) e^{-x}$$

于是 $(y^*)' = [-b_0 x^4 + (4b_0 - b_1) x^3 + 3b_1 x^2] e^{-x}$

$$(y^*)'' = [b_0 x^4 - (8b_0 - b_1) x^3 + (12b_0 - 6b_1) x^2 + 6b_1 x] e^{-x}$$

$$(y^*)''' = x [-b_0 x^4 + (12b_0 - b_1) x^3 + (-36b_0 + 9b_1) x^2 + (24b_0 - 18b_1) x] e^{-x}$$

代入原方程得 $24b_0 x + 6b_1 = x - 5$

$$\text{解得 } eb_0 = \frac{1}{24}, b_1 = -\frac{5}{6}$$

故有一特解

$$y^* = \frac{1}{24} x^3 (x - 20) e^{-x}$$

故而原方程通解为

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^{-x} + \frac{1}{24} x^3 (x - 20) e^{-x}.$$

(4) 解: 特征方程为 $r^2 - 3r + 2 = 0$

故通解为

$$\tilde{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$$

设特解

$$y^* = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + b_1 \sin x + b_2 \cos x$$

$$\therefore (y^*)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + b_1 \cos x - b_2 \sin x \quad (y^*)'' = 2a_2 + 6a_3 x - b_1 \sin x - b_2 \cos x$$

代回原方程得

$$2a_3 x^3 + (2a_2 - 9a_3) x^2 + (2a_1 - 6a_2 + 6a_3) x + (2a_0 - 3a_1 + 2a_2) + (b_1 + 3b_2) \sin x + (b_2 - 3b_1) \cos x = x^3 + \sin x$$

$$\text{解得 } a_3 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{9}{4}, a_1 = \frac{21}{4}, a_0 = \frac{45}{8}, b_1 = \frac{1}{10}, b_2 = \frac{3}{10}$$

\therefore 原方程通解为

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + \frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x + \frac{1}{2} x^3 + \frac{9}{4} x^2 + \frac{21}{4} x + \frac{45}{8}.$$



(6) 解: 特征方程为 $r^2 - 2r + 3 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}i$

\therefore 对应的齐次方程通解为

$$\tilde{y} = e^x (C_1 \sin \sqrt{2}x + C_2 \cos \sqrt{2}x)$$

设一个特解为 $y^* = (a \cos x + b \sin x) e^{-x}$

则 $(y^*)' = [(b-a) \cos x - (b+a) \sin x] e^{-x}$

$(y^*)'' = (-2b \cos x + 2a \sin x) e^{-x}$

代入原方程并解得 $a = \frac{5}{41}, b = -\frac{4}{41}$

$$\therefore y^* = \frac{1}{41} (5 \cos x - 4 \sin x) e^{-x}$$

\therefore 通解为

$$y = e^x (C_1 \sin \sqrt{2}x + C_2 \cos \sqrt{2}x) + \frac{1}{41} (5 \cos x - 4 \sin x) e^{-x}.$$

(8) 解: 对应的特征方程为 $r^2 + 2ar + a^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -a$

故对应通解为

$$\tilde{y} = (C_1 + C_2 x) e^{-ax}$$

$\because r = -a$ 为二重根, \therefore 设特解为 $y^* = e^x (b_0 + b_1 x + b_2 x^2)$ $\therefore (y^*)' = e^x [(b_0 + b_1) + (b_1 + 2b_2)x + b_2 x^2]$

$$(y^*)'' = e^x [(b_0 + b_1 + 2b_2) + (b_1 + 4b_2)x + b_2 x^2] \text{ 解得 } \begin{cases} a_0 = -1 \\ b_0 = 0 \\ b_1 = 0 \\ b_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a_0 \neq -1 \\ b_0 = \left(\frac{1}{a+1}\right)^2 \\ b_1 = 0 \\ b_2 = 0 \end{cases}$$

$\therefore a = -1$ 时, 方程的通解为

$$y = e^x \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2} x^2 \right)$$

$a \neq -1$ 时, 方程的通解为

$$y = e^{-ax} (C_1 + C_2 x) + \frac{e^x}{(a+1)^2}.$$

3. (1) 解: 特征方程为 $r^2 - 4r + 13 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 2 \pm 3i$

\therefore 通解为

$$y = e^{2x} (C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)$$

而

$$y' = e^{2x} [(C_1 - 3C_2) \sin 3x + (3C_1 + C_2) \cos 3x]$$

$$\text{将 } \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases} \text{ 代入, 得 } \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 1 \end{cases}$$

\therefore 特解为

$$y = e^{2x} \cdot \sin 3x.$$



(3) 解: 对应特征方程为 $r^2 + r - 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = -2$

\therefore 对应通解为 $\tilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$

设特解为 $y^* = a \sin x + b \cos x$

$\therefore (y^*)' = a \cos x - b \sin x, (y^*)'' = -a \sin x - b \cos x$

代入得 $(-3a + b) \sin x + (a - 3b) \cos x = \cos x - 3 \sin x$

$$\therefore \begin{cases} -3a + b = -3 \\ a - 3b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

故特解为 $y^* = \sin x$

\therefore 通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \sin x.$$

又 $y(0) = 0, y'(0) = 2, \therefore C_1 = 1, C_2 = 0$

故特解为

$$y = e^x + \sin x.$$

(5) 解: 对应特征方程为 $r^2 - 4r + 3 = 0$, 特征根为 $r_1 = 1, r_2 = 3$

\therefore 对应通解为

$$\tilde{y} = C_1 e^{3x} + C_2 e^x$$

设一个特解为 $y^* = a e^{5x} \Rightarrow (y^*)' = 5a e^{5x}, (y^*)'' = 25a e^{5x}$

代入原式得 $25a - 20a + 3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{8}$

\therefore 特解为

$$y^* = \frac{1}{8} e^{5x}$$

\therefore 通解为

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x + \frac{1}{8} e^{5x}$$

$$y' = 3C_1 e^{3x} + C_2 e^x + \frac{5}{8} e^{5x}, \text{ 又 } \begin{cases} y(0) = 3 \\ y'(0) = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{11}{4} \\ C_2 = \frac{1}{8} \end{cases}$$

\therefore 特解为

$$\tilde{y} = \frac{11}{4} e^{3x} + \frac{1}{8} e^x + \frac{1}{8} e^{5x}.$$

(7) 解: 对应特征方程为 $r^2 - 1 = 0$

特征根为 $r_1 = 1, r_2 = -1$

\therefore 对应通解为

$$\tilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

设特解为 $y^* = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) e^x$

$\Rightarrow (y^*)' = [a_0 + a_1 + (a_1 + 2a_2)x + a_2 x^2] e^x$

$(y^*)'' = [a_0 + a_1 + 2a_2 + (a_1 + 4a_2)x + a_2 x^2] e^x$



$$\text{代入原方程得 } 2a_1 + 2a_2 + 4a_2x = 4x \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = -1 \\ a_2 = 1 \end{cases} \quad \therefore y^* = (-x + x^2)e^x$$

\therefore 通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + (-x + x^2)e^x$$

由 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 得 $C_1 = 1, C_2 = -1$

\therefore 特解为

$$y = e^x - e^{-x} + (-x + x^2)e^x.$$

(9) 解: 原方程对应的特征方程为 $r^2 + 4r = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = -4$, \therefore 通解为

$$\tilde{y} = C_2 e^{-4x} + C_1$$

记 $y^* = a_0 + a_1 x + b_0 \cos 2x + b_1 \sin 2x + b_2 x \cos 2x + b_3 x \sin 2x$

$$\Rightarrow (y^*)' = a_0 + (b_3 - 2b_0) \sin 2x + (b_2 + 2b_1) \cos 2x - 2b_2 x \sin 2x + 2b_3 x \cos 2x$$

$$(y^*)'' = (-4b_2 - 4b_1) \sin 2x + (4b_3 - 4b_0) \cos 2x - 4b_2 x \cos 2x - 4b_3 x \sin 2x$$

$$\text{代入原方程得 } \begin{cases} b_0 = 0 \\ b_1 = -\frac{1}{16} \\ b_2 = 0 \\ b_3 = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = \frac{1}{8} \end{cases}, \therefore \text{原方程的一个特解为 } y^* = \frac{1}{8}x - \frac{1}{16} \sin 2x + \frac{1}{8}x \sin x$$

将 $y(0) = 0, y'(0) = 0$ 代入得 $C_1 = C_2 = 0$

\therefore 原方程特解为

$$y = \frac{1}{8}x - \frac{1}{16} \sin 2x + \frac{1}{8}x \sin x.$$

4. 解: 设 $\alpha x = t, \therefore \int_0^1 y(\alpha x) d\alpha = \int_0^x y(t) d\frac{t}{x} = \frac{1}{x} \int_0^x y(t) dt$, 故而 $2x \int_0^1 y(\alpha x) d\alpha = 2 \int_0^x y(t) dt$
方程两侧对 x 求导得 $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$, 对应特征方程为 $r^2 + 3r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = -1, r_2 = -2$

\therefore 对应通解为

$$\tilde{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

设特解为 $y^* = (a_0 + a_1 x)e^{-x}$

$\therefore (y^*)' = (a_1 - a_0 + a_1 x)e^{-x}, \therefore (y^*)'' = (a_0 - 2a_1 + a_1 x)e^{-x}$, 代入原方程得 $a_1 = 1, a_0 = 0$

\therefore 特解为 $y^* = xe^{-x}$, \therefore 原方程的通解为

$$y = xe^{-x} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

代入 $y_0 = 1$ 得 $C_1 + C_2 = 1$, $x = 0$ 代入原方程得 $y'_0 = -1$, 代入通解, 得 $-2C_1 - C_1 = 1$

$\therefore C_2 = 0, C_1 = 0$



∴ 特解为

$$y = xe^{-x} + e^{-2x}.$$

6. 解: $v = s' = \frac{ds}{dt}$, $a = v' = s''$, $v' = \frac{F - W}{P} = \frac{F - a - bv}{P}$, $\therefore s'' = \frac{F - a - bs'}{P} \Rightarrow Ps'' + bs' = F - a$
易得原方程的特征方程为 $P\lambda^2 + b\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\frac{b}{P}$

∴ 通解为

$$\tilde{s} = C_1 + C_2 e^{-\frac{b}{P}t}$$

易知一个特解为 $\frac{F-a}{b}t$, ∴ 通解为 $s = C_1 + C_2 e^{-\frac{b}{P}t} + \frac{F-a}{b}t$

将条件 $s(0) = 0, s'(0) = 0$ 代入得 $\begin{cases} C_1 = \frac{(F-a)}{b^2}P \\ C_2 = \frac{(a-F)}{b^2}P \end{cases}$

$$\therefore s = \frac{(F-a)}{b^2}P - \frac{(F-a)}{b^2}e^{-\frac{b}{P}t} + \frac{F-a}{b}t.$$

总 习 题 十

教材见 393 页

1. (1) 解: 设积分因子 $\mu = e^x$ 原式 $\Rightarrow e^{-y} \left(e^y + e^y \frac{dy}{dx} - 4 \sin x \right) = 0 \Rightarrow e^y + e^y \frac{dy}{dx} - 4 \sin x = 0$
 $\Rightarrow e^x \left(e^y + e^y \frac{dy}{dx} - 4 \sin x \right) = 0$, 设 $P(x, y) = e^{x+y} - 4 \sin x e^x$,
 $Q(x, y) = e^{x+y} \therefore \frac{\partial P}{\partial y} = e^{x+y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \therefore$ 该式子可以构成全微分
 $\therefore d(e^{x+y} - 2e^x \sin x + 2e^x \cos x) = 0$, 即所求方程为

$$e^{x+y} - 2e^x \sin x + 2e^x \cos x = C.$$

(3) 解: 令 $y = ux \therefore \frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx} \therefore$ 原式 $\Rightarrow x \frac{du}{dx} = u^2 \Rightarrow \frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{1}{u} = \ln x + C_0$
 $\therefore y = -\frac{x}{(C - \ln|x|)} (y \neq 0)$, $y = 0$ 时符合题意.

(5) 解: 特征方程为 $r^2 + 2r + 5 = 0$, 特征根为 $r_{1,2} = -1 \pm 2i$, ∴ 通解为

$$\tilde{y} = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

设一个特解为 $y^* = a \cos 2x + b \sin 2x$

$$(y^*)' = -2a \sin 2x + 2b \cos 2x \Rightarrow (y^*)'' = -4a \cos 2x - 4b \sin 2x$$

代入原方程得 $(b - 4a) \sin 2x + (4b + a) \cos 2x = \sin 2x$

解得 $a = -\frac{4}{17}, b = \frac{1}{17}$, ∴ 特解为 $y^* = -\frac{4}{17} \cos 2x + \frac{1}{17} \sin 2x$

故原方程的通解为

$$y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{4}{17} \cos 2x + \frac{1}{17} \sin 2x.$$

(7) 解: 方程两侧同乘积分因子 $\mu(x) = e^x$ 得



$$2xye^x dx + x^2ye^x dx + \frac{y^3}{3}e^x dx + x^2e^x dy + y^2e^x dy = 0, \Rightarrow d(x^2ye^x) + d\left(\frac{y^3}{3}e^x\right) = 0$$

故所得的方程为

$$x^2ye^x + \frac{y^3}{3}e^x = C.$$

(9) 解: $\frac{dy}{dx} = \frac{1+xy^3}{1+x^3y} = 0 \Rightarrow (dx + dy) + xy(y^2dx + x^2dy) = 0$

令 $u = x + y, v = x - y, \therefore \begin{cases} dy = \frac{ydu - dv}{y-x} \\ dx = \frac{dv - ydu}{y-x} \end{cases}$, 代入整理得 $(v^2 - 1)du + uv dv = 0$

$$\Rightarrow \frac{v}{v^2 - 1} dv = -\frac{du}{u} (u = x + y \neq 0, v = xy \neq 1)$$

两侧积分并整理得

$$\frac{1}{2} \ln(v^2 - 1) = \ln u + C' \Rightarrow \sqrt{x^2y^2 - 1} = C(x + y).$$

当 $xy = 1$ 时不符合题意; 当 $x + y = 0$ 时, 符合题意. 故通解为

$$\sqrt{x^2y^2 - 1} = C(x + y), x + y = 0.$$

2. (1) 解: 特征方程为 $r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -1, \therefore$ 对应通解为

$$\tilde{y} = (C_1 + C_2x)e^{-x}$$

设一个特解为 $y^* = a \sin x + b \cos x$

$\therefore (y^*)' = a \cos x - b \sin x, \therefore (y^*)'' = -a \sin x - b \cos x$, 代入整理得 $-2b \sin x + 2a \cos x = \cos x$

解得 $b = 0, a = \frac{1}{2}, \therefore$ 特解为 $y^* = \frac{1}{2} \sin x, \therefore$ 通解为

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + \frac{1}{2} \sin x$$

将 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$ 代入得 $C_1 = 2, C_2 = -1, \therefore$ 原方程特解为

$$y = \frac{1}{2} \sin x + xe^{-x}.$$

(3) 解: 对应的特征方程为 $r^3 + 6r^2 + 11r + 6 = 0 \Rightarrow (r + 1)(r + 2)(r + 3) = 0$

\therefore 特征解为 $r_1 = -1, r_2 = -2, r_3 = -3, \therefore$ 通解为

$$\tilde{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x}$$

设一个特解为 $y^* = a_0 + a_1e^{-4x} \Rightarrow (y^*)' = -4a_1e^{-4x}, (y^*)'' = 16a_1e^{-4x}, \Rightarrow (y^*)''' = -64a_1e^{-4x}$

代入原方程并解得 $a_0 = a_1 = \frac{1}{6}, \therefore$ 特解为 $y^* = \frac{1}{6}e^{-4x} + \frac{1}{6}, \therefore$ 原方程通解为

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x} + \frac{1}{6}e^{-4x} + \frac{1}{6}$$

将 $y(0) = 5, y'(0) = 0$ 代入得 $C_1 = \frac{43}{3}, C_2 = -14, C_3 = \frac{13}{3}, \therefore$ 原方程特解为

$$y = \frac{43}{3}e^{-x} - 14e^{-2x} + \frac{13}{3}e^{-3x} + \frac{1}{6}e^{-4x} + \frac{1}{6}.$$



(5) 解: 设 $y'' = p \Rightarrow y''' = p'$, $\therefore (x-1)p' - p = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{p}{x-1}$, 整理并解得 $p = C(x-1)$

$$\because \begin{cases} x=2 \\ y''=1 \end{cases} \Rightarrow C=1, \therefore \frac{d(y')}{dx} = x-1 \text{ 两侧积分得 } y' = \frac{1}{2}x^2 - x + C_0$$

$$\because \begin{cases} x=2 \\ y'=1 \end{cases} \Rightarrow C_0=1, \text{ 两侧积分得 } y' = \frac{1}{2}x^2 - x + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C_1$$

$$\because \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow C_1 = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{2}{3}.$$

历年试卷讲解

目
录

第一章	函数与极限	102
第二章	导数与微分	110
第三章	微分中值定理与导数的应用	113
第四章	一元函数积分学及其应用	124
第五章	无穷级数	136
综合题一	141
第六章	向量代数与空间解析几何	143
第七章	多元函数微分学及其应用	149
第八章	重积分	150
第九章	曲线积分与曲面积分	168
第十章	常微分方程	176
综合题二	177

题型一 函数的概念与复合函数解析式及性质的确定

例 1-1 (2015-2016-1-期末-选择题-10)

若函数 $f(x) = \max\{|x-2|, \sqrt{x}\}$, 则 $f(x)$ 的最小值等于 (B)

(A) 2 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 0

答案 B.

解析 $f(x) = \begin{cases} 2-x, & x \in (-\infty, 1) \\ \sqrt{x}, & x \in [1, 4] \\ x-2, & x \in (4, +\infty) \end{cases}$, 画图即可.

例 1-2 (2011-2011-1-期中-选择题-13)

当 $x \rightarrow 0$ 时, 变量 $\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$ 是 (D).

(A) 无穷小 (B) 有界但不是无穷小

(C) 无穷大 (D) 无界但不是无穷大

答案 D.

解析 无穷大必须是充分靠近某个值或充分靠后的任意点都足够大; 无界只要求存在大于任意给定值的点.

相关解释详见课本 46 页注 (2) 及 47 页例 3.8.

例 1-3 (2015-2016-1-期中-填空题-7)

已知 $f(x-1) = \ln \frac{x}{x-2}$, 若 $f(g(x)) = \ln x$ 则 $g(x) = \frac{2}{\ln x - 1} + 1$.

答案 $\frac{2}{\ln x - 1} + 1$.

解析 $x-1 = tf(t) = \ln \frac{t+1}{t-1}$, 则 $f(g(x)) = \ln \frac{g(x)+1}{g(x)-1} = \ln x$, 则 $g(x) = \frac{2}{\ln x - 1} + 1$.

题型二 数列/函数极限的定义及存在性的判定

要求掌握 $\varepsilon - \delta$ 语言的内涵, 以及单调有界准则、夹逼准则、归结原理, 在此基础上, 掌握柯西命

题 (课本 22 页例 2.3) 及基本的审敛方法 (如课本 23 页例 2.4, 习题 1-2 第 8 题、第 15 17 题) .

无期中、期末考试题, 读者可在学完本章重要极限之后练习杂题, 以作补充.

题型三 简单极限的计算

涉及到的基本概念及方法包括: 极限的定义、存在性判定定理、运算法则, 两个重要极限, 等价无穷小替换等.

1.3.1 化简极限的基本方法

例 3-1 (2011-2011-1-期中-填空题-6)

设 $f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$), 则 $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n^2} \ln(f(1)f(2) \cdots f(n)) = \underline{\frac{1}{2} \ln a}$.

答案 $\frac{1}{2} \ln a$.

解析 原式 $= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\ln(aa^2 \cdots a^n)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a + 2 \ln a + \cdots + n \ln a}{n^2} = \ln a \cdot \lim_{n \rightarrow 0} \frac{n(n+1)/2}{n^2} = \frac{\ln a}{2}$.

例 3-2 (2015-2016-1-期中-选择题-3)

在直径 d 的大圆内作两两外切的 n 个小圆, 小圆的圆心都在大圆的同一直径上, 两边的小圆又分别内切与大圆, 若第 l_k 个小圆的周长为, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n l_k =$ (A)
(A) πd (B) $2d$ (C) d (D) 不存在

答案 A.

解析 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n l_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi(d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi d = \pi d$.

例 3-3 (2016-2017-1-期中-填空题-3)

极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 100} + x) = \underline{-50}$.

答案 -50

解析 负代换 $t = -x$ 得

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 100} + x) = - \lim_{t \rightarrow +\infty} t(\sqrt{t^2 + 100} - t) = - \lim_{t \rightarrow +\infty} t \cdot \frac{100}{\sqrt{t^2 + 100} + t} = -50.$$

例 3-4 (2016-2017-1-期中-填空题-8)

设 $|x| < 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^n (1 + x^{2^i}) = \underline{\frac{1}{1-x}}$.



答案 $\frac{1}{1-x}$.

解析 $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^n (1+x^{2^i}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdots}{1-x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$.

例 3-5 (2016-2017-1-期中-选择题-17)

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2016}}{n^m - (n-1)^m} = l$, (l 为非 0 常数, m 为正整数), 则 (D)

(A) $l = \frac{1}{2016}, m = 2016$

(B) $m = \frac{1}{2016}, l = 2016$

(C) $l = \frac{1}{2017}, m = 2017$

(D) $m = \frac{1}{2017}, l = 2017$

答案 D.

解析 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2016}}{n^m - (n-1)^m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2016}}{n^m - [n^m - mn^{m-1} + \cdots]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2016}}{mn^{m-1} + \cdots} = l$
 $\Rightarrow 2016 = m - 1$ 即 $m = 2017, l = \frac{1}{2017}$.

例 3-6 (2017-2018-1-期中-填空题-3)

$$\text{设 } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2} - x^{-(n+1)}}{x^n + x^{-n}} = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{-(n+1)}}{x^{-n}} = \frac{1}{x}, & |x| < 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2}}{x^n} = x^2, & |x| > 1 \\ 1, & |x| = 1 \end{cases}.$$

答案 见解析.

解析 $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{-(n+1)}}{x^{-n}} = \frac{1}{x}, & |x| < 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2}}{x^n} = x^2, & |x| > 1 \\ 1, & |x| = 1 \end{cases}.$

例 3-7 (2017-2018-1-期中-填空题-4)

$0 \leq a < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{[a[a \cdots [a[a]] \cdots]]} = \underline{0}$. 该式有 n 个方括号, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

答案 0

解析 $a \in [0, 1) \Rightarrow [a] = 0, a[a] = 0 \Rightarrow [a[a]] = [a[0]] = [0] = 0$, 运用数学归纳法, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{[a[a \cdots [a[a]] \cdots]]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{0} = 0$$



例 3-8 (2014-2015-1-期中-选择题-14)

若 $a > 0, b > 0$ 均为常数, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{3}{x}} =$ (B)

(A) $ab^{\frac{3}{2}}$ (B) $(ab)^{\frac{3}{2}}$ (C) $a^{\frac{3}{2}}b$ (D) $(ab)^{\frac{2}{3}}$

答案 B.

解析 考查对极限运算法则和 e 的重要极限及基本的等价无穷小的掌握, 运算中要注意每一步拆分、替换是否成立.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{3}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{3}{x} \ln \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x} \ln \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right) \right\} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x} \cdot \frac{a^x + b^x - 2}{2} \right\} \\ &= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x} \cdot \frac{a^x - 1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x} \cdot \frac{b^x - 1}{2} \right\} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x} \cdot \frac{x \ln a}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x} \cdot \frac{x \ln b}{2} \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{3}{2} (\ln a + \ln b) \right\} = (ab)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

例 3-9 (2014-2015-1-期中-选择题-16)

极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}} =$ (D)

(A) $e^{\frac{1}{2}}$ (B) $e^{\frac{n}{2}}$ (C) $e^{-\frac{1}{2}}$ (D) $e^{\frac{n+1}{2}}$

答案 D.

解析 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \ln \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right) \right\}$

$$= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} - 1 \right) \right\} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{(e^x - 1) + (e^{2x} - 1) + \cdots + (e^{nx} - 1)}{n} \right\}$$

$$= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x + 2x + \cdots + nx}{n} \right\} = e^{\frac{n+1}{2}}.$$

1.3.3

等价无穷小及其替换定理

例 3-10 (2011-2011-1-期中-填空题-2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x^3}{1 - \cos x^2} = \underline{2}.$$

答案 2.

解析 采用等价无穷小替换 $\tan x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 (x \rightarrow 0)$ 可得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x^3}{1 - \cos x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x^3}{\frac{1}{2}(x^2)^2} = 2.$

例 3-11 (2013-2014-1-期中-填空题-2)



设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{f(x)}{\sin x} \right)}{a^x - 1} = 8 (a > 0)$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \underline{8 \ln a}$.

答案 $8 \ln a$.

解析 易得 $\frac{f(x)}{\sin x} \rightarrow 0$, 则有 $\ln \left(1 + \frac{f(x)}{\sin x} \right) \sim \frac{f(x)}{\sin x}$, 又 $a^x - 1 \sim x \ln a$,

故原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{\sin x}}{x \ln a} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2 \ln a \sin x} = 8 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 8 \ln a$.

例 3-12 (2013-2014-1-期中-填空题-4)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin^2 x + x^3 \cos \frac{1}{x^2}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x^2)} = \underline{\frac{5}{2}}$.

答案 $\frac{5}{2}$.

解析 注意到当 $x \rightarrow 0$ 时, $x^3 \cos \frac{1}{x^2}$ 是 x^2 的高阶无穷小, 以及 $1 + \cos x \rightarrow 2$, 于是由等价无穷小 $\ln(1 + x^2) \sim x^2 \sim \sin^2 x (x \rightarrow 0)$ 可得原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 0}{2x^2} = \frac{5}{2}$.

例 3-13 (2017-2018-1-期中-选择题-10)

$x \rightarrow 1$ 时, $1 - x$ 是 $1 - \sqrt[3]{x}$ 的 (D)
(A) 3 阶无穷小 (B) 等价无穷小 (C) 高阶无穷小 (D) 同阶无穷小

答案 D.

解析 $1 - \sqrt[3]{x} = -(\sqrt[3]{1+x-1} - 1) \sim -\frac{1}{3}(x-1) (x \rightarrow 1)$.

例 3-14 (2016-2017-1-期末-填空题-11)

设函数 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = \underline{\frac{3e}{2}}$.

答案 $\frac{3e}{2}$.

解析 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = -\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{e^{\cos x} - 1}{1}} = -\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\cos x - 1}{\frac{1}{3}x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{-\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2}} = \frac{3e}{2}$.

1.3.4 杂题

例 3-15 (2013-2014-1-期中-填空题-6)

极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}} = \underline{1}$.

答案 1.

解析 注意 x 的趋向. 可以采用负代换避免负数进入/移出开方运算时粗心产生的错误.



令 $t = -x$, 得原式 $= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4t^2 - t - 1} - t + 1}{\sqrt{t^2 - \sin t}}$,

观察结构, 得到

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t(\sqrt{4 - t^{-1} - t^{-2}} - 1 + t^{-1})}{t\sqrt{1 - t^{-2}\sin t}} = \frac{\lim_{t \rightarrow +\infty} (\sqrt{4 - t^{-1} - t^{-2}} - 1 + t^{-1})}{\lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - t^{-2}\sin t}} = \frac{\sqrt{4} - 1}{1} = 1.$$

例 3-16 (2016-2017-1-期中-解答题-20)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$

答案 见解析.

解析 应当分为两个单侧极限计算 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}} + e^{-\frac{3}{x}}}{1+e^{-\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{x} \right) = 1,$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} - \frac{\sin x}{x} \right) = 2 - 1 = 1 \text{ 因此 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = 1.$$

题型四 函数的连续性与间断点

例 4-1 (2013-2014-1-期中-填空题-2)

已知 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$, 且 $f(x)$ 在 $x = \pm 1$ 处连续, 则 $a = \underline{0}$, $b = \underline{1}$.

答案 0; 1.

解析 首先将 $f(x)$ 写成分段函数形式 (注意分段点的选取)

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1} = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + ax^{2-2n} + bx^{1-2n}}{1 + x^{-2n}}, & |x| > 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + b}{1 + 1}, & x = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1 + a - b}{1 + 1}, & x = -1 \\ x \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} + ax + b}{x^{2n} + 1}, & |x| < 1 \end{cases} = \begin{cases} x, & |x| > 1 \\ \frac{a+b+1}{2}, & x = 1 \\ \frac{a-b-1}{2}, & x = -1 \\ bx, & |x| < 1 \end{cases},$$

再由 $f(x)$ 在 $x = \pm 1$ 处连续知 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$,

$$\text{即 } b = \frac{a+b+1}{2} = 1, -b = \frac{a-b-1}{2} = -1, \text{ 解得 } a = 0, b = 1.$$

例 4-2 (2013-2014-1-期中-选择题-14)

设函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, $f(x)$ 为连续函数, 且 $f(x) \neq 0$, $\varphi(x)$ 有间断点, 则_____必有间断点. (B)

(A) $\varphi[f(x)]$

(B) $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$

(C) $[\varphi(x)]^2$

(D) $f[\varphi(x)]$

答案 B.



解析 考查对复合函数连续性的判断.

对 A 构造反例: 只需让 f 的值域落在 φ 的某段不包含间断点的定义区间上即可, 例如构造 φ 有间断点 $x=5$ 而 f 的值域是 $(-1, 1)$;

对 C 构造反例: 构造一个进行平方运算之后可以被消除的跳跃间断点, 例如 $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x \leq 0 \end{cases}$.

事实上也只有满足单侧连续且两侧极限互为相反数的跳跃间断点能被平方运算消除, 而其他类型的间断点均不可, 读者不妨思考原因;

对 D 构造反例: 构造 $\varphi(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$;

对 B 的分析: 在有意义的前提下 (分母不为 0 之类), 连续函数与连续函数进行有限次四则运算、复合运算仍然得到连续函数.

若 $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 是连续函数, 则 $\frac{\varphi(x)}{f(x)} \cdot f(x) = \varphi(x)$ 也是连续函数, 与已知矛盾, 故 B 错.

例 4-3 (2014-2015-1-期中-填空题-4)

函数 $f(x) = (1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内的间断点是 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$.

答案 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$.

解析 $\tan(x - \frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$.

例 4-4 (2014-2015-1-期中-选择题-17)

函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(1-x^2)}{1+x^{2n}}$ 在 (D)

(A) $x = \pm 1$ 均连续

(B) $x = 1$ 连续, $x = -1$ 不连续

(C) $x = 1$ 不连续, $x = -1$ 连续

(D) $x = \pm 1$ 均不连续

答案 D.

解析 将 $f(x)$ 写成分段函数形式

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(1-x^{2n})}{1+x^{2n}} = x \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} = \begin{cases} x \cdot 1, & |x| < 1 \\ x \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{-2n}-1}{x^{-2n}+1}, & |x| > 1 \\ 0, & x = \pm 1 \end{cases} = \begin{cases} x, & |x| < 1 \\ -x, & |x| > 1 \\ 0, & x = \pm 1 \end{cases}$$

画出图像即可判断.

例 4-5 (2017-2018-1-期中-填空题-9)



设函数 $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{-\frac{2}{x}}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$, 则 $k = \underline{\frac{1}{e^2}}$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

答案 $\frac{1}{e^2}$.

解析 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow k = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{-\frac{2}{x}} = e^{-2}$.

题型一 导数与微分的定义以及两者的关系

例 1-1 (2013-2014-1-期中-选择题-1)

若 $f'(0) = 1$, 则极限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-h) - f(0)}{3h} = \underline{\quad -\frac{1}{3} \quad}$.

答案 $-\frac{1}{3}$.

解析 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-h) - f(0)}{3h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-h) - f(0)}{-h} \cdot \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3} f'(0) = -\frac{1}{3}$.

例 1-2 (2013-2014-1-期中-选择题-12)

设 $f(x)$ 可导, $F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$, 则 $f(0) = 0$ 是 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的 (A)

(A) 充分必要条件

(B) 充分但非必要条件

(C) 必要但非充分条件

(D) 既非充分也非必要条件

答案 A.

解析 点态导数问题, 首先考虑导数定义.

$$F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)(1 + |\sin x|) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x} + \frac{f(x)|\sin x|}{x} \right],$$

一方面, 由极限四则运算法则可知

$$F'(0) \text{ 存在} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)|\sin x|}{x} = F'(0) - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = F'(0) - f'(0) \text{ 存在};$$

另一方面, 不难看出 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)|\sin x|}{x}$ 存在 $\Leftrightarrow f(0) = 0$.

因此 $f(0) = 0$ 是 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的充要条件.

例 1-3 (2011-2012-1-期中-填空题-1)

设 $f(x) = \begin{cases} x \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1 + 3^n + x^n}, & x > 0 \\ a \ln(1 - x) + b, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处可导, 则 $a = \underline{-3}$, $b = \underline{0}$.

答案 $a = -3, b = 0$.

解析 当 $0 < x < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1 + 3^n + x^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \sqrt[n]{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{x}{3}\right)^n} = 3$



即有 $f(x) = \begin{cases} a \ln(1-x) + b, & x \leq 0 \\ 3x, & 0 < x < 1 \end{cases}$, 又因 $f(x)$ 可导 (连续),
 $f(0^+) = f(0^-)$ 解得 $b = 0$, $f'(0^+) = f'(0^-)$ 解得 $a = -3$.

例 1-4 (2015-2016-1-期中-选择题-8)

设函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有定义, 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-g(x)}{\sin x} = 1$ 成立, 则 (A)

(A) $x \rightarrow 0$ 时, $g(x)$ 是 x 的高阶无穷小 (B) $g(x)$ 在 $x=0$ 处可导
 (C) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 存在但 $g(x)$ 在 $x=0$ 处不连续 (D) $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导

答案 A.

解析 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{\sin x} - \frac{x-g(x)}{\sin x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-g(x)}{\sin x} = 0$

未给出 $g(0)$ 与 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 的关系, 因此连续性及点态导数的命题均无法判定为真, BCD 均错.

题型二 导数的计算

包括基本求导法则、复合函数求导法则、基本导数表 (初等函数)、隐函数与参数方程求导方法等

2.2.1

复合函数求导

例 2-1 (2013-2014-1-期中-选择题-12)

已知 $y = f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)$, $f'(x) = \arctan x^2$, 则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} =$ (C)

(A) π (B) $\frac{3}{2}\pi$ (C) $\frac{3}{4}\pi$ (D) $\frac{1}{4}\pi$

答案 C.

解析 复合函数求导问题, 注意不要漏掉该求导的函数.

$\frac{dy}{dx} = f'\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right) \cdot \frac{12}{(3x+2)^2}$, 于是 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 3f'(-1) = 3\arctan 1 = \frac{3}{4}\pi$.

2.2.2

隐函数求导

例 2-2 (2013-2014-1-期中-填空题-4)

设函数 $y = y(x)$ 由方程 $(x+y)^{\frac{1}{x}} = y$ 确定, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{y[(x+y)\ln(x+y) - x]}{x[y - x(x+y)]}$.

答案 $\frac{y[(x+y)\ln(x+y) - x]}{x[y - x(x+y)]}$.



解析 隐函数求导问题. 方程改写为 $\frac{\ln(x+y)}{x} = \ln y$, 两边同时对 x 求导得到

$$LHS = \frac{\frac{x(1+y')}{x+y} - \ln(x+y)}{x^2} = \frac{y'}{x(x+y)} + \frac{1}{x(x+y)} - \frac{\ln(x+y)}{x^2}, \quad RHS = \frac{y'}{y},$$

整理得到

$$\frac{y - x(x+y)}{xy(x+y)} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{(x+y)\ln(x+y) - x}{x^2(x+y)},$$

$$\text{于是 } \frac{dy}{dx} = \frac{(x+y)\ln(x+y) - x}{x^2(x+y)} \cdot \frac{xy(x+y)}{y - x(x+y)} = \frac{y[(x+y)\ln(x+y) - x]}{x[y - x(x+y)]}.$$

2.2.3 参数方程求导

例 2-3 (2013-2014-1-期中-填空题-4)

$$\text{设 } \begin{cases} x = f'(t) \\ y = tf'(t) - f(t) \end{cases}, \text{ 其中 } f''(x) \text{ 存在且不为零, 则 } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{f''(t)}.$$

答案 $\frac{1}{f''(t)}$.

解析 参数方程求导问题. 以下是这类问题的通法:

$$\begin{cases} x = f'(t) \\ y = tf'(t) - f(t) \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = tf''(t) \cdot \frac{1}{f''(t)} = t,$$

$$\text{于是 } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{f''(t)}.$$

2.2.4 反函数求导

例 2-4 (2013-2014-1-期中-填空题-8)

$$\text{已知 } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}, \text{ 则 } \frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{y''}{y'^3}.$$

答案 $-\frac{y''}{y'^3}$.

解析 反函数求导问题. $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{dx}{dy} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dx}{dy} \right) \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{-y''}{y'^2} \cdot \frac{1}{y'} = -\frac{y''}{y'^3}.$

题型一 较为复杂的极限的计算

在已经学习过的基本方法的基础上, 进一步结合洛必达法则、泰勒公式与拉格朗日中值定理.

例 1-1 (2011-2011-1-期中-填空题-3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \underline{\quad -\frac{1}{2}e \quad}.$$

答案 $-\frac{1}{2}e$.

解析 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} - e}{x} = e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1} - 1}{x}$, 由等价无穷小 $\ln(1+x) \sim x \sim e^x - 1 (x \rightarrow 0)$ 可知

$$\text{原式} = e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} = e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1+x)}{2x(1+x)} = -\frac{e}{2}.$$

其中用到了洛必达法则 (也可以采用 $\ln(1+x)$ 的泰勒公式求解).

例 1-2 (2011-2011-1-期中-选择题-16)

$$\text{若 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 + f(x)}{x^2} = \underline{\quad 36 \quad}.$$

答案 36.

解析 由极限四则运算法则及泰勒公式 $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), x \in (-\delta, \delta)$ 知

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + xf(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} + \frac{6x - \sin 6x}{x^3} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin 6x}{x^3} = 0 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}(6x)^3}{x^3} = 36. \end{aligned}$$

例 1-3 (2014-2015-1-期中-填空题-1)

$$\text{设曲线 } y = f(x) = x^n \text{ 在点 } (1, 1) \text{ 处的切线与 } x \text{ 轴的交点为 } (\xi_n, 0), \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(\xi_n) = \underline{\quad \frac{1}{e} \quad}.$$

答案 $\frac{1}{e}$.

解析 由 $f'(1) = n$ 知点 $(1, 1)$ 处的切线为 $y - 1 = n(x - 1) \Rightarrow x = 1 + \frac{y - 1}{n}$

于是 $\xi_n = 1 - \frac{1}{n}$, 故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(\xi_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$.


例 1-4 (2017-2018-1-期中-解答题-2)

利用泰勒展开式求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$.

答案 见解析.

解析 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)][x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)]-x(1+x)}{x^3}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\frac{1}{6}x^3+x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)-x-x^2}{x^3} = \frac{1}{3}.$

例 1-5 (2014-2015-1-期中-选择题-18)

设当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小, 则 (A)

(A) $k=3, c=4$ (B) $k=3, c=-4$ (C) $k=1, c=-4$ (D) $k=1, c=4$

答案 A.

解析 $3\sin x - \sin 3x \sim 3(x - \frac{1}{6}x^3) - (3x - \frac{1}{6}(3x)^3) = 4x^3.$

例 1-6 (2015-2016-1-期中-填空题-9)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} - 1}{x} = \underline{\quad -\frac{1}{2} \quad}.$

答案 $-\frac{1}{2}.$

解析 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)-1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \ln(1+x)-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{2}x^2 - x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$

例 1-7 (2014-2015-1-期末-计算题-14)

计算 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x((1+\frac{1}{x})^x - e).$

答案 见解析.

解析 倒代换, 令 $t = \frac{1}{x}$, 将原式化为

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^{\frac{1}{t}} - e}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{t} \ln(1+t)} - e}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e(e^{\frac{1}{t} \ln(1+t)-1} - 1)}{t} = e \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{t} \ln(1+t) - 1}{t} \\ &= e \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} = e \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+t} - 1}{2t} = e \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{(1+t)^2}}{2} = -\frac{e}{2}. \end{aligned}$$



题型二 导数的应用

主要用于判定函数的点态特征, 包括单调性与极值、凹凸性与拐点、渐近线与曲率圆, 以及帮助作出简单函数的图像等.

3.2.1 求切线

例 2-1 (2013-2014-1-期中-解答题-19)

设 $y = y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x = \arctan t \\ 2y - ty^2 + e^t = 5 \end{cases}$ 确定, 求在点 $(0, 2)$ 处的切线方程.

答案 见解析.

解析 本质上是求参数方程 $\begin{cases} x = \arctan t \\ 2y - ty^2 + e^t = 5 \end{cases}$ 在 $(0, 2)$ 处的导数.

由隐函数的求导方法可得

$$2y - ty^2 + e^t = 5 \Rightarrow 2 \frac{dy}{dt} - y^2 - 2ty \frac{dy}{dt} + e^t = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{e^t - y^2}{2ty - 2},$$

从而

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{(e^t - y^2)(1 + t^2)}{2ty - 2} \Rightarrow \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{(e^t - y^2)(1 + t^2)}{2ty - 2} \right|_{t=0, y=2} = \frac{3}{2},$$

于是切线方程为 $y = \frac{3}{2}x + 2$.

例 2-2 (2015-2016-1-期中-填空题-10)

设对数螺线 $\rho = e^\theta$, 该曲线在对应于 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 的点处的切线方程为 $x + y = e^{\frac{\pi}{2}}$.

答案 $x + y = e^{\frac{\pi}{2}}$.

解析 $\because x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta \therefore$ 对数螺线方程可化为: $\begin{cases} x = e^\theta \cos \theta \\ y = e^\theta \sin \theta \end{cases}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta - \sin \theta}, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -1,$$

又 $(\rho, \theta) = (e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2})$ 时, $x = 0, y = e^{\frac{\pi}{2}}$

\therefore 在 $(\rho, \theta) = (e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2})$ 时的切线方程为: $y - e^{\frac{\pi}{2}} = -1(x - 0)$ 即 $x + y = e^{\frac{\pi}{2}}$.

3.2.2 判定单调性与极值/最值

**例 2-3 (2012-2013-1-期末-选择题-12)**

设 $y=f'(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - e^x$, 若 $f''(x_0) = 0, x_0 \neq 0$, 则 (B).

- (A) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值 (B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
(C) $f(x_0, f(x_0))$ 时曲线 $y = f(x)$ 的拐点 (D) 以上都不对

答案 B.

解析 式子带入 x_0 即有 $f''(x_0) = \frac{1 - e^{-x_0}}{x_0} \neq 0, x_0 > 0$ 和 $x_0 < 0$ 时, 均有 $f''(x_0) > 0$ 则 $f(x_0)$ 是极小值.

例 2-4 (2014-2015-1-期末-选择题-7)

函数 $f(x) = \ln(1+x^2)$ 在 $[-1, 2]$ 上的最大值是 (D)

- (A) $\ln 2$ (B) $\ln 3$ (C) $\ln 4$ (D) $\ln 5$

答案 D.

解析 $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, 于是 $\forall x \in [-1, 0], f'(x) < 0; \forall x \in [0, 2], f'(x) > 0$

则 $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上单调递减, 在 $[0, 2]$ 上单调递增

于是 $f(x) = \ln(1+x^2)$ 在 $[-1, 2]$ 上的最大值为 $\max\{f(-1), f(2)\} = \ln 5$.

例 2-5 (2012-2013-1-期中-填空题-2)

$y = x^2 e^{-x}$ 的极大值是 $\frac{4}{e^2}$.

答案 $\frac{4}{e^2}$.

解析 $y' = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = xe^{-x}(2-x), e^{-x} > 0$ 令 $y' = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$

则 $x \in (-\infty, 0), y' < 0, y \downarrow; x \in [0, 2], y' > 0, y \uparrow; x \in (2, +\infty), y' < 0, y \downarrow$

所以当 $x = 2$ 时极大值为 $\frac{4}{e^2}$.

例 2-6 (2015-2016-1-期中-填空题-3)

若 $y = ex - e^{-\lambda x}$ 有正的极值点, 则参数 λ 的取值范围是 $-e < \lambda < 0$.

答案 $-e < \lambda < 0$.

解析 $y' = e + \lambda e^{-\lambda x}, y' = 0$ 有正的实根, 即 $\lambda e^{-\lambda x} = -e, e^{-\lambda x} = -\frac{e}{\lambda}$

令 $f(x) = e^{-\lambda x}, g(x) = -\frac{e}{\lambda}$ 即 $f(x) = g(x)$ 存在 $x > 0$ 的点

即图像有交点, 画图可得 $0 < -\frac{e}{\lambda} < 1$, 即 $-e < \lambda < 0$.



例 2-7 (2015-2016-1-期中-选择题-6)

若 a, b, c, d 成等比数列, 则函数 $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 + bx^2 + cx + d$ (D)

(A) 有极大值, 而无极小值

(B) 无极大值, 而有极小值

(C) 有极大值, 也有极小值

(D) 无极大值, 也无极小值

答案 D.

解析 $\because y = \frac{1}{3}ax^3 + bx^2 + cx + d, \therefore y' = ax^2 + 2bx + c$.

而 a, b, c, d 成等比数列, 则 $b^2 = ac$ 令 $ax^2 + 2bx + c = 0$, 则 $\Delta = 4b^2 - 4ac = 4b^2 - 4b^2 = 0$

$\therefore y' \geq 0$ 或 $y' \leq 0$, 即 $f(x)$ 无极值.

例 2-8 (2016-2017-1-期中-选择题-13)

设函数 $g(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且对任意的 t_1, t_2 , 当 $t_1 > t_2$ 时, 都有 $g(t_1) > g(t_2)$, 则

(B)

(A) 对任意的 $t, g'(t) > 0$

(B) 函数 $-g(-t)$ 单调增加

(C) 对任意的 $t, g'(-t) \leq 0$

(D) 函数 $g(-t)$ 单调增加

答案 B.

解析 由题可得 $g'(t) \geq 0, g(t)$ 单调增加

对于 B, $[-g(-t)]' = g'(-t) \geq 0$, 单增

对于 D, $[g(-t)]' = -g'(-t) \leq 0$, 单减.

例 2-9 (2017-2018-1-期中-选择题-6)

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 且 $f(0)=0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1$, 则点 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 (B)

(A) 极大值点

(B) 驻点和极小值点

(C) 非驻点

(D) 非驻点但是极小值点

答案 B.

解析 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[x \cdot \frac{f(x)}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$

则点 $x=0$ 是 $f(x)$ 的驻点.

3.2.3

判定拐点与凹凸性

例 2-10 (2013-2014-1-期末-填空题-3)

曲线 $y = \ln(x^2 + 1)$ 的拐点是 $(\pm 1, \ln 2)$.

答案 $(\pm 1, \ln 2)$.



解析 $y' = \frac{2x}{x^2+1}$, $y'' = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$, $y'' = 0$ 时, $x^2 = 1, x = \pm 1, y = \ln 2$.

例 2-11 (2015-2016-1-期末-选择题-8)

曲线 $y = \begin{cases} x(x-1)^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ (x-1)^2(x-2) & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ 在区间 $(0, 2)$ 有 (C)

(A) 2 个极值点, 1 个拐点. (B) 2 个极值点, 2 个拐点.
(C) 2 个极值点, 3 个拐点. (D) 3 个极值点, 3 个拐点.

答案 C.

解析 注意 $x = 1$ 的特殊性即可.

例 2-12 (2017-2018-1-期末模拟-选择题-13)

曲线 $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点为 (C)

(A) (1, 0) (B) (2, 0) (C) (3, 0) (D) (4, 0)

答案 C.

解析 求 y'' ; 令 $y'' = 0$, 求出使 $y'' = 0$ 和 y'' 不存在的点;

用这些点把定义域分成若干小区间, 讨论 y'' 的符号, 判断曲线 y 在小区间的凹凸性;

考察 y'' 在 x 两侧的近旁是否变号, 如果 y'' 变号, 那么点 $(x, f(x))$ 是曲线 y 的拐点.

例 2-13 (2017-2018-1-期中-选择题-7)

曲线 $y = 3x^5 - 10x^3 - 360x$ 的拐点有 (C)

(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 0 个

答案 C.

解析 $y' = 15x^4 - 30x^2 - 360$, $y'' = 60x^3 - 60x = 60x(x-1)(x+1)$, 令 $y'' = 0$ 并验证根两侧二阶导数的正负可知有 3 个拐点.

3.2.4

求渐近线

例 2-14 (2017-2018-1-期末模拟-选择题-16)

曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 渐近线条数为 (D)

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

答案 D.

解析 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) \right] = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) \right] = 0$,
所以 $y = 0$ 是曲线的水平渐近线;



$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) \right] = \infty$, 所以 $x = 0$ 是曲线的垂直渐近线;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) \right]}{x} = 0 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [y - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) - x \right] = 0$$

所以 $y = x$ 是曲线的斜渐近线.

所以一共 3 条渐近线.

例 2-15 (2012-2013-1-期中-选择题-12)

曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 的渐近线条数为

(C)

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

答案 C.

解析 由于 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 在 $x = \pm 1$ 处没有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}$

$\therefore x = 1$ 是 y 的垂直渐近线;

又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = 1$, $\therefore y = 1$ 是曲线的水平渐近线;

而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = 0$, \therefore 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 无斜渐近线.

\therefore 曲线的渐近线条数为 2.

例 2-16 (2013-2014-1-期中-选择题-17)

曲线 $y = \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{x^2}}$

(D)

(A) 没有渐近线

(B) 仅有水平渐近线

(C) 仅有铅直渐近线

(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线

答案 D.

解析 $\because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{x^2}} = \infty$, $\therefore x = 0$ 是其铅直渐近线;

又 $\because \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{x^2}} = \frac{1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2}}{1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2}} = 1$, $\therefore y = 1$ 是其水平渐近线.

例 2-17 (2017-2018-1-期中-选择题-9)

曲线 $y = x \sin \frac{1}{x}$

(A)

(A) 只有水平渐近线

(B) 只有铅直渐近线

(C) 既有水平渐近线又有铅直渐近线

(D) 有斜渐近线

答案 A.

解析 考虑铅直渐近线: $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, 则无铅直渐近线;

考虑水平渐近线: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, $y = 1$ 是其水平渐近线;



考虑斜渐近线: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{x}$, 极限不存在, 无斜渐近线.

3.2.5 函数性态的综合判断

例 2-18 (2013-2014-1-期中-选择题-10)

若 $f(-x) = -f(x)$, 在 $(0, +\infty)$ 内 $f'(x) > 0, f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内 (A)
 (A) $f'(x) > 0, f''(x) < 0$ (B) $f'(x) < 0, f''(x) > 0$
 (C) $f'(x) < 0, f''(x) < 0$ (D) $f'(x) > 0, f''(x) > 0$

答案 A.

解析 $f(-x) = -f(x)$, $f(x)$ 为奇函数, 图像关于原点对称, 具有相同的单调性和相反的凹凸性
 又在 $(0, +\infty)$ 内 $f'(x) > 0, f''(x) > 0$, 所以在 $(-\infty, 0)$ 内 $f'(x) > 0, f''(x) < 0$.

例 2-19 (2012-2013-1-期中-选择题-15)

设 $f(-x) = f(x)$, 且在 $(0, \infty)$ 内 $f'(x) < 0, f''(x) < 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内 (D)
 (A) 单调减且是凹的 (B) 单调减且是凸的 (C) 单调增且是凹的 (D) 单调增且是凸的

答案 D.

解析 $f(-x) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数, 图像关于 y 轴对称

可知在 y 轴两侧具有相同的凹凸性和相反的单调性

又 $f(x)$ 在 $(0, \infty)$ 内 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \infty)$ 是单调减;

$f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, \infty)$ 内是凸函数;

所以在 $(-\infty, 0)$ 内 $f(x)$ 是单调增且是凸函数.

例 2-20 (2013-2014-1-期中-选择题-15)

设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$, 且 $f'(0) = 0$, 则 (C)
 (A) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点
 (B) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点
 (C) $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
 (D) $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

答案 C.

解析 由 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$, 得 $f(x)$ 在其定义域内存在二阶连续导数且 $f''(0) = 0$

$f''(x) = x - [f'(x)]^2$, 所以 $f'''(x) = 1 - 2[f'(x)]f''(x)$,

所以 $f'''(0) = 1 \neq 0$ 即 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.



题型三 微分中值定理的应用

主要用于判定函数的全局性态, 例如特殊点、函数值的存在性

例 3-1 (2015-2016-1 期末-证明题-19)

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有二阶导数, 且 $f(a) = f(b) = 0, f'(a)f'(b) > 0$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b), f''(\xi) = 0$.

答案 见解析.

解析 由 f 在 $[a, b]$ 上二阶可导可知 f' 在 $[a, b]$ 上连续. 由 $f'(a)f'(b) > 0$, 不妨设 $f'(a) > 0, f'(b) > 0$, 结合 $f(a) = f(b) = 0$ 可知

$$\exists \delta_1, \delta_2 > 0, \forall x \in (a, a + \delta_1), f(x) > 0; \forall x \in (b - \delta_2, b), f(x) < 0$$

于是由 f 的连续性, 借助零点存在定理可知

$$\exists \eta \in (a, b), f(\eta) = 0$$

于是 $[a, b]$ 上二阶可导的函数 f 满足 $f(a) = f(\eta) = f(b) = 0$, 接下来只需分别在 $[a, \eta], [\eta, b]$ 上分别对 f 使用罗尔定理得到 f' 的两个不同零点 ξ_1, ξ_2 , 再在 $[\xi_1, \xi_2] \subseteq [a, b]$ 上对 f' 使用罗尔定理即可证.

例 3-2 (2016-2017-1-期末-证明题-18)

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值, $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

答案 见解析.

解析 构造函数 $F(x) = f(x) - g(x)$, 由题 $F(a) = F(b) = 0$

设 c 处 $f(x)$ 取最大值, d 处 $g(x)$ 取最大值, 且有

$$f(c) = g(d), F(c) = f(c) - g(c) > f(c) - g(d) = 0, F(d) = f(d) - g(d) < f(c) - g(d) = 0$$

则 $\exists \xi' \in (c, d) \subseteq (a, b)$ s.t. $F(\xi') = 0$, 又 $F(a) = F(b) = 0$ 则

$$\exists \xi_1 \in (a, \xi') \text{ s.t. } F'(\xi_1) = 0, \exists \xi_2 \in (\xi', b) \text{ s.t. } F'(\xi_2) = 0 \Rightarrow \exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (a, b) \text{ s.t. } F''(\xi) = 0$$

即 $f''(\xi) = g''(\xi)$, 得证.

例 3-3 (2012-2013-1-期中-证明题-21)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(0) = f(1) = 0, \min f(x) = -1, (0 \leq x \leq 1)$, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'''(\xi) \geq 8$.



答案 见解析.

解析 由题 $f(0) = f(1) = 0 \neq -1$, 设 $\min f(x) = f(c) = -1$; 则 $f'(c) = 0, c \in (0, 1)$

因为 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有二阶函数, 且 $f(c) = -1$

所以可将 $f(x)$ 在 $x = c$ 处展开成二阶带拉格朗日余项的泰勒公式, 并分别带入 $x = 0$ 和 $x = 1$

$$\text{有 } \begin{cases} f(0) = f(c) + f'(c)(0-c) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(0-c)^2, & 0 < \xi_1 < c \\ f(1) = f(c) + f'(c)(1-c) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-c)^2, & c < \xi_2 < 1 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} f''(\xi_1) = \frac{2}{c^2} \\ f''(\xi_2) = \frac{2}{(1-c)^2} \end{cases}$$

又 $c \in (0, 1)$, 所以存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ 使得 $\max f''(\xi) \geq \{f''(\xi_1), f''(\xi_2)\} \geq \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8$, 得证.

例 3-4 (2014-2015-1-期中-证明题-21)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = f(1) = 0, f(\frac{1}{2}) = 1$. 试证:

(1) 存在 $\eta \in (\frac{1}{2}, 1)$ 使 $f(\eta) = \eta$;

(2) 对于任意实数 λ , 必存在 $\xi \in (0, \eta)$ 使得 $f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1$.

答案 见解析.

解析 (1) 令 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 连续, 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 可导

且 $g(1) = f(1) - 1 = 0 - 1 = -1 < 0$, $g(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$

\therefore 由零点定理, $\exists \eta \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得 $g(\eta) = 0$, 即 $f(\eta) = \eta$, 得证.

(2) 设 $h(x) = e^{-\lambda x} [f(x) - x]$, $x \in [0, \eta]$, 则 $h(x)$ 在 $[0, \eta]$ 连续, 在 $(0, \eta)$ 可导, 且 $h(0) = h(\eta) = 0$

\therefore 由罗尔定理, $\exists \xi \in (0, \eta)$ 使得 $h'(\xi) = 0$, 又 $h'(x) = e^{-\lambda x} [f'(x) - 1 - \lambda(f(x) - x)]$

\therefore 由 $h'(\xi) = 0$ 得: $e^{-\lambda \xi} [f'(\xi) - 1 - \lambda(f(\xi) - \xi)] = 0$

$\therefore f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1$, 得证.

例 3-5 (2015-2016-1-期中-证明题-22)

设函数 $f(x)$ 是区间 $[-1, 1]$ 上的三阶可导函数, 且 $f(-1) = 0, f(0) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$. 试证: $\exists \xi \in (-1, 1)$, 使得 $f'''(\xi) \geq 3$.

答案 见解析.

解析 泰勒展开 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(c)}{6}x^3 = \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(c)}{6}x^3$

$\therefore f(1) = \frac{f''(0)}{2} + \frac{f'''(\xi_1)}{6}, f(-1) = \frac{f''(0)}{2} - \frac{f'''(\xi_2)}{6}$, 两式相减并整理得到 $f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2) = 6$

取 $f(\xi) = \max\{f(\xi_1), f(\xi_2)\} \geq 3$ 即得证.

例 3-6 (2017-2018-1-期中-填空题-6)

$y = \sqrt{x} - 1$ 在区间 $[1, 4]$ 上用拉格朗日中值定理, 结论中的点 $\xi = \underline{\frac{9}{4}}$.

答案 $\frac{9}{4}$.



解析 由拉格朗日中值定理得, $\frac{1}{2\sqrt{\xi}} = \frac{y(4) - y(1)}{4 - 1} = \frac{\sqrt{4} - \sqrt{1}}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{\xi} = \frac{3}{2} \Rightarrow \xi = \frac{9}{4}$.

例 3-7 (2017-2018-1-期中-证明题-2)

设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 存在三阶导数, 且 $f(0) = f(a) = 0$, 设 $F(x) = x^3 f(x)$. 证明: 存在一点 $\xi \in (0, a)$, 使得 $F'''(\xi) = 0$.

答案 见解析.

解析 $F'(x) = 3x^2 f(x) + x^3 f'(x)$, $F''(x) = 6xf(x) + 6x^2 f'(x) + x^2 f''(x)$

$$\Rightarrow F(0) = F(a) = 0, F'(0) = 0, F''(0) = 0$$

$$\Rightarrow F(0) = F(a) = 0 \Rightarrow \exists b \in (0, a) \text{ s.t. } F'(b) = 0, \text{ 又 } F'(0) = 0$$

$$\Rightarrow \exists c \in (0, b) \text{ s.t. } F''(c) = 0, \text{ 又 } F''(0) = 0$$

$$\Rightarrow \exists \xi \in (0, c) \subseteq (0, a) \text{ s.t. } F'''(\xi) = 0, \text{ 得证.}$$

题型一 定积分的定义、基本性质以及存在性判定

4.1.1 定积分（黎曼积分）的定义

例 1-1 (2015-2016-1-期末-填空题-6)

$$\text{极限 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \cdots (2n)} = \underline{\frac{4}{e}}.$$

答案 $\frac{4}{e}$.

解析 【法一】形式满足定积分定义式

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \cdots (2n)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2) \cdots (2n)}{n^n}} \\ &= \exp \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \frac{(n+1)(n+2) \cdots (2n)}{n^n} \right\} = \exp \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{n+i}{n} \right\} \\ &= \exp \left\{ \int_0^1 \ln(1+x) dx \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \int_0^1 \ln(1+x) dx &= x \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx = \ln 2 - [x - \ln(1+x)] \Big|_0^1 = 2 \ln 2 - 1 \\ \text{故原式} &= e^{2 \ln 2 - 1} = \frac{4}{e}. \end{aligned}$$

【法二】由 Stirling 公式 $n! \sim \frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n}$ 及 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0)$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \cdots (2n)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)^{2n} \sqrt{4\pi n}}{e^{2n}}} \cdot \frac{e^n}{n^n \sqrt{2\pi n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(4n)^n \sqrt{2}}{e^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{e} \sqrt[n]{\sqrt{2}} = \frac{4}{e}. \end{aligned}$$

例 1-2 (2013-2014-1-期末-填空题-6)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4}{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3} = \underline{4}.$$

答案 4.

解析 【法一】 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4}{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \left(\frac{2}{n}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^3 \right]} = \frac{1}{\int_0^1 x^3 dx} = 4.$



【法二】 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4}{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4}{\frac{n^2(n+1)^2}{4}} = 4 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4}{n^4 + 2n^3 + n^2} = 4.$

注: $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (1+2+\cdots+n)^2.$

例 1-3 (2016-2017-1-期末-填空题-12)

极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) = \underline{\frac{\pi}{4}}.$

答案 $\frac{\pi}{4}.$

解析 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{n}\right)^2} \right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$

例 1-4 (2014-2015-1-期末-选择题-10)

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} [n(n+1)(n+2) \cdots (n+n-1)]^{\frac{1}{n}} =$ (A)

(A) $e^{2 \ln 2 - 1}$ (B) $e^{2(\ln 2 - 1)}$ (C) $e^{2 \ln 2 - 3}$ (D) $e^{3 \ln 2 - 1}$

答案 A.

解析

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} [n(n+1)(n+2) \cdots (n+n-1)]^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp \left\{ \ln \frac{1}{n} [n(n+1)(n+2) \cdots (n+n-1)]^{\frac{1}{n}} \right\} \\ &= \exp \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \left[\frac{n(n+1)(n+2) \cdots (n+n-1)}{n^n} \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left[\ln \left(1 + \frac{0}{n} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \cdots + \ln \left(1 + \frac{n-1}{n} \right) \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ \int_0^1 \ln(1+x) dx \right\} = \exp \{ 2 \ln 2 - 1 \}. \end{aligned}$$

4.1.2

定积分的基本性质

例 1-5 (2016-2017-1-期末-选择题-2)

下列定积分中积分值不为零的是

(C)

(A) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln \frac{1+x}{1-x} dx$

(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos x} dx$

(C) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{1 + \sin^2 x} dx$

(D) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x + \cos x}{2} dx$

答案 C.

解析 $\ln \frac{1+x}{1-x}, \frac{x}{1+\cos x}$ 均为奇函数, $\frac{\sin x + \cos x}{2}$ 在整数个周期内的积分值为零.



$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{1 + \sin^2 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx \neq 0.$$

例 1-6 (2013-2014-1-期末-解答题-13)

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2 + \sin x \cos x}{1 + x^6} dx.$$

答案 见解析.

$$\begin{aligned} \text{解析} \quad \int_{-1}^1 \frac{x^2 + \sin x \cos x}{1 + x^6} dx &= \int_{-1}^1 \frac{x^2}{1 + x^6} dx + \int_{-1}^1 \frac{\sin x \cos x}{1 + x^6} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + (x^3)^2} dx^3 + 0 = \frac{1}{3} \arctan x^3 \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

题型二 变限积分的概念、求导法则

例 2-1 (2015-2016-1-期末-选择题-11)

$$\text{设函数 } f(x) = \begin{cases} a, & x = 0 \\ \frac{1}{x^3} \int_0^{3x} (e^{-t^2} - 1) dt, & x \neq 0 \end{cases} \text{ 在 } x = 0 \text{ 点连续, 则 } a = \quad (\text{A})$$

(A) -9 (B) -3 (C) 0 (D) 1

答案 A.

$$\text{解析} \quad a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \int_0^{3x} (e^{-t^2} - 1) dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(e^{-9x^2} - 1)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-9x^2}{x^2} = -9.$$

例 2-2 (2016-2017-1-期末-填空题-9)

$$\text{设 } y(x) = \int_0^{x^2} \sin(x-t)^2 dt, \text{ 则 } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} = \underline{4 \sin 4}.$$

答案 $4 \sin 4$.

解析 换元得到变限积分的标准形式

$$y(x) = \int_0^{x^2} \sin(x-t)^2 dt \xrightarrow{\text{令 } u=x-t} \int_x^{x-x^2} \sin u^2 d(x-u) = \int_{x-x^2}^x \sin u^2 du$$

于是由变限积分求导法则得

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} = \left(\frac{d}{dx} \int_{x-x^2}^x \sin u^2 du \right) \Big|_{x=2} = \left[\sin x^2 - (1-2x) \sin(x-x^2)^2 \right] \Big|_{x=2} = 4 \sin 4.$$

例 2-3 (2014-2015-1-期末-选择题-9)

$$f(x) = \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt, g(x) = 2x^2 - 1, \text{ 则当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } f(x) \text{ 是 } g(x) \quad (\text{B})$$

(A) 低阶无穷小 (B) 同阶但非等价无穷小



(C) 高阶无穷小

(D) 等价无穷小

答案 B.

$$\text{解析 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt}{\frac{2x^2}{2x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt}{x^2 \ln 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x^2}{x^2} \cdot 2x}{2x \ln 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2 \ln 2} = \frac{1}{\ln 2}.$$

例 2-4 (2014-2015-1-期末-解答题-17)

$$\text{设 } f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}, \text{ 求 } \int_0^x f(t) dt (x \geq 0).$$

答案 见解析.

$$\text{解析 } x \leq 1 \text{ 时 } \int_0^x f(t) dt = \int_0^x t dt = \frac{1}{2}x^2; \quad x > 1 \text{ 时 } \int_0^x f(t) dt = \int_0^1 t dt + \int_1^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}$$

$$\text{因此 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & x \leq 1 \\ \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}, & x > 1 \end{cases}.$$

例 2-5 (2013-2014-1-期末-选择题-11)

$$f(x) = \int_0^{5x} \frac{\sin t}{t} dt, \quad g(x) = \int_0^{\sin x} (1+t)^{\frac{1}{t}} dt, \text{ 当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } f(x) \text{ 是 } g(x) \text{ 的} \quad (\text{D})$$

(A) 等阶无穷小

(B) 高阶无穷小

(C) 低阶无穷小

(D) 同阶但非等价无穷小

答案 D.

$$\text{解析 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{5x} \frac{\sin t}{t} dt}{\int_0^{\sin x} (1+t)^{\frac{1}{t}} dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5}{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \cos x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{e} = \frac{5}{e}.$$

例 2-6 (2012-2013-1-期末-选择题-9)

$$\text{设 } f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}, \text{ 则 } F(x) = \int_1^x f(t) dt (0 \leq x < 2) \text{ 为} \quad (\text{A})$$

$$(A) \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1 \\ x - 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$(C) \begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & 0 \leq x < 1 \\ x - 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$(D) \begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

答案 A.

$$\text{解析 } 0 \leq x < 1 \text{ 时, } F(x) = \int_1^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}; \quad 1 \leq x \leq 2 \text{ 时, } F(x) = \int_1^x 1 dt = x - 1.$$


例 2-7 (2012-2013-1-期末-选择题-11)

设 $f(x)$ 为连续函数, 且 $F(x) = \int_{x^2}^{e^{-x}} xf(t) dt$, 则 $\frac{dF}{dx} =$ (C)

(A) $xf(e^{-x}) - xf(x^2)$ (B) $-xe^{-x}f(e^{-x}) - 2xf(x^2)$

(C) $\int_{x^2}^{e^{-x}} f(t) dt - x[e^{-x}f(e^{-x}) + 2xf(x^2)]$ (D) $\int_{x^2}^{e^{-x}} f(t) dt + x[e^{-x}f(e^{-x}) - 2xf(x^2)]$

答案 C.

解析 $\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx} x \int_{x^2}^{e^{-x}} f(t) dt = \int_{x^2}^{e^{-x}} f(t) dt + x [-e^{-x}f(e^{-x}) - 2xf(x^2)]$
 $= \int_{x^2}^{e^{-x}} f(t) dt - x[e^{-x}f(e^{-x}) + 2xf(x^2)].$

题型三 不定积分的概念与微积分基本定理
例 3-1 (2015-2016-1-期末-填空题-4)

若 $\sqrt{1-x^2}$ 是 $xf(x)$ 的一个原函数, 则 $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx =$ $-\frac{\pi}{4}$.

答案 $-\frac{\pi}{4}$

解析 $f(x) = \frac{1}{x} \cdot (\sqrt{1-x^2})' = \frac{1}{x} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
 $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx = -\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \stackrel{x=\sin t}{=} -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = -\frac{\pi}{4}.$

题型四 不定积分与定积分的常用积分法 (重点)

在基本性质及定理的基础上, 结合积分表、凑微分法、换元法、分部法、有理函数积分法等.

例 4-1 (2015-2016-1-期末-解答题-13)

计算 $\int_{-1}^1 \frac{x^2 + (\cos x)^3 \arctan x}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx.$

答案 见解析.

解析 积分区间是对称区间, 被积函数有三角, 首先观察是否有对称性.

不难看出 $\frac{x^2}{1 + \sqrt{1-x^2}}$ 是偶函数而 $\frac{(\cos x)^3 \arctan x}{1 + \sqrt{1-x^2}}$ 是奇函数, 后者在有界对称区间的积分为 0

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{x^2 + (\cos x)^3 \arctan x}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx &= 2 \int_0^1 \frac{x^2}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx = 2 \int_0^1 \frac{x^2}{1 + \sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{1 - \sqrt{1-x^2}} dx \\ &= 2 \int_0^1 (1 - \sqrt{1-x^2}) dx = 2 - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

其中最后一步计算用到了定积分的几何性质.



例 4-2 (2015-2016-1-期末-解答题-14)

计算 $\int \sec^6 x \, dx$.

答案 见解析.

解析 【法一】 令 $x = \arctan t$, 从而 $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$, $\sec^6 x = (1 + \tan^2 x)^3 = (1 + t^2)^3$
 $\int \sec^6 x \, dx = \int (1 + t^2)^3 \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \int (1 + t^2)^2 dt = \frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + t + C = \frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \tan x + C.$

【法二】 利用 $\sec^2 x \, dx = d(\tan x)$ 有

$$\int \sec^6 x \, dx = \int \sec^4 x \, d(\tan x) = \int (1 + \tan^2 x)^2 d(\tan x) = \frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \tan x + C.$$

例 4-3 (2016-2017-1-期末-填空题-10)

若 $f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x}$, 则 $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x) \, dx = \underline{2\sqrt{x} - 2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} + C}$.

答案 $2\sqrt{x} - 2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} + C$.

解析 令 $x = \sin^2 t$, 从而 $t = \arcsin \sqrt{x}$, $dx = 2 \sin t \cos t \, dt$, 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x) \, dx &= \int \frac{\sin t}{\cos t} \cdot \frac{t}{\sin t} \cdot 2 \sin t \cos t \, dt = 2 \int t \sin t \, dt = 2 \sin t - 2t \cos t + C \\ &= 2\sqrt{x} - 2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

例 4-4 (2016-2017-1-期末-解答题-13)

已知函数 $f(x) = \int_1^x e^{-t^2} \, dt$, 求 $\int_0^1 f(x) \, dx$.

答案 $\frac{1-e}{2e}$.

解析 $\int_0^1 f(x) \, dx = x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x \, df(x) = x \int_1^x e^{-t^2} \, dt \Big|_0^1 - \int_0^1 x e^{-x^2} \, dx$
 $= 0 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-x^2} d(-x^2) = \frac{1-e}{2e}.$

例 4-5 (2014-2015-1-期末-填空题-1)

$\int \ln(1+x^2) \, dx = \underline{x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctan x + C}$.

答案 $x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctan x + C$.



解析

$$\begin{aligned}\int \ln(1+x^2) dx &= x \ln(1+x^2) - \int x d \ln(1+x^2) = x \ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2} dx \\ &= x \ln(1+x^2) - 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x \ln(1+x^2) - 2x + \arctan x + C.\end{aligned}$$

例 4-6 (2014-2015-1-期末-填空题-3)

积分 $\int_{-1}^1 (x + \sqrt{1-x^2})^2 dx = \underline{\quad 2 \quad}.$

答案 2.

解析
$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (x + \sqrt{1-x^2})^2 dx &= \int_{-1}^1 (x^2 + 2x\sqrt{1-x^2} + 1-x^2) dx \\ &= \int_{-1}^1 2x\sqrt{1-x^2} dx + \int_{-1}^1 dx = 0 + 2 = 2.\end{aligned}$$

例 4-7 (2014-2015-1-期末-填空题-5)

设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{x}\right)^{bx} = \int_{-\infty}^b te^t dt$, 则常数 $b = \underline{\quad 2 \quad}.$

答案 2.

解析
$$\int_{-\infty}^b te^t dt = e^b(b-1), \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{bx} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^b} = e^b, e^b(b-1) = e^b \Rightarrow b = 2.$$

例 4-8 (2014-2015-1-期末-填空题-6)

若函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} \int_0^1 f(x) dx$, 则 $\int_0^1 f(x) dx = \underline{\quad \frac{\pi}{4-\pi} \quad}.$

答案 $\frac{\pi}{4-\pi}.$

解析 记常数 $m = \int_0^1 f(x) dx$, 则 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + m\sqrt{1-x^2}$
 于是 $m = \int_0^1 \left[\frac{1}{1+x^2} + m\sqrt{1-x^2} \right] dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + m \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4} (1+m)$
 $\Rightarrow m = \frac{\pi}{4-\pi}.$

例 4-9 (2013-2014-1-期末-填空题-4)

$\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \underline{\quad 8 \ln 2 - 4 \quad}.$

答案 $8 \ln 2 - 4.$

解析
$$\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \ln x d(2\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} \ln x \Big|_1^4 - 2 \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 8 \ln 2 - 4\sqrt{x} \Big|_1^4 = 8 \ln 2 - 4.$$



例 4-10 (2013-2014-1-期末-解答题-15)

计算 $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$.

答案 见解析.

解析 【法一】 $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x e^{-x} dx$
 $= 0 - 2(xe^{-x} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x} dx) = -2e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 2.$
 【法二】原式 $= \Gamma(3) = 2! = 2.$

例 4-11 (2012-2013-1-期末-填空题-3)

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^7 + \sin^2 x) \cos^2 x dx = \underline{\frac{\pi}{8}}.$$

答案 $\frac{\pi}{8}.$

解析

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^7 + \sin^2 x) \cos^2 x dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^7 \cos^2 x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

例 4-12 (2012-2013-1-期末-填空题-5)

$$\int_{-\infty}^a te^t dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^{ax}, a = \underline{2}.$$

答案 2.

解析 $\int_{-\infty}^a te^t dt = e^a(a-1), \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^{ax} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x{}^a = e^a, e^a(a-1) = e^a \Rightarrow a = 2.$

例 4-13 (2012-2013-1-期末-解答题-14)

$$\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

答案 见解析.

解析 令 $x = \tan t$, 则 $\sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
 于是 $\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int \frac{\tan t e^t}{\sec^3 t} d(\tan t) = \int e^t \sin t dt = \frac{1}{2} e^t (\sin t - \cos t) = \frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C.$


例 4-14 (2012-2013-1-期末-解答题-17)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 有二阶导数, 且 $\int_0^1 [2f(x) + x(1-x)f''(x)] dx$.

答案 见解析.

解析

$$\begin{aligned} \int_0^1 [2f(x) + x(1-x)f''(x)] dx &= 2 \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 (x-x^2)d(f'(x)) \\ &= 2xf(x)|_0^1 - 2 \int_0^1 xf'(x) dx + (x-x^2)f'(x)|_0^1 - \int_0^1 (1-2x)f'(x) dx \\ &= 2f(1) - 2 \int_0^1 xf'(x) dx - \int_0^1 f'(x) dx + 2 \int_0^1 xf'(x) dx = f(0) + f(1). \end{aligned}$$

题型五 定积分的应用

包括几何应用: 计算平面曲线的弧长、平面图形的面积、规则几何体的体积; 物理应用: 变力做功等.

4.5.1 平面曲线的弧长
例 5-1 (2016-2017-1-期末-选择题-5)

曲线 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 从 $x = 0$ 到 $x = a > 0$ 的长度为 (D)

(A) $\frac{e^a + e^{-a}}{3}$ (B) $\frac{e^a - e^{-a}}{3}$ (C) $\frac{e^a + e^{-a}}{2}$ (D) $\frac{e^a - e^{-a}}{2}$

答案 D.

解析 弧微分 $ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx$, 弧长 $l = \int_0^a ds = \int_0^a \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \frac{e^a - e^{-a}}{2}$.

4.5.2 平面图形的面积
例 5-2 (2016-2017-1-期末-选择题-3)

曲线 $y = x^2$ 与 $y^2 = x$ 所围成的图像的面积 (B)

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$

答案 B.

解析 由方程组 $\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = x \end{cases}$ 有两组解 $x = y = 0, x = y = 1$ 知曲线 $y = x^2$ 与 $y^2 = x$ 有两个交点 $(0, 0), (1, 1)$, 且曲线在两点之间的部分成闭区域, 该区域面积 S 即为待求值.



由于 $\forall x \in (0, 1), x^2 < \sqrt{x}$, 故 $S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{1}{3}$.

例 5-3 (2014-2015-1-期末-解答题-16)

已知曲线 $y = a\sqrt{x} (a > 0)$ 与曲线 $y = \ln \sqrt{x}$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 有公共切线, 求:

- (1) 常数 a 及切点;
- (2) 两曲线与 x 轴围成图形 S 的面积.

答案 见解析.

解析 (1)
$$\begin{cases} y = a\sqrt{x_0} = \ln \sqrt{x_0} = \frac{1}{2} \ln x_0 \\ y' = \frac{a}{2\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2x_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{e} \\ x_0 = e^2 \end{cases}$$

(2)
$$S = \int_0^{e^2} a\sqrt{x} dx - \frac{1}{2} \int_1^{e^2} \ln x dx = \frac{2}{3} ax^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{e^2} - x(\ln x - 1) \Big|_1^{e^2} = \frac{e^2}{6} - \frac{1}{2}.$$

例 5-4 (2013-2014-1-期末-解答题-14)

计算抛物线 $y^2 = 2x$ 与直线 $y = x - 4$ 所围成的图形的面积.

答案 见解析.

解析
$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = x - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow S = \int_{-2}^4 f(y) dy = \int_{-2}^4 (y + 4 - \frac{y^2}{2}) dy = 18.$$

例 5-5 (2013-2014-1-期中-解答题-20)

在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的第一象限部分上求一点 P , 使得该点处的切线、椭圆以及两坐标轴所围成的面积最小 (其中 $a > 0, b > 0$, 椭圆面积为 πab).

答案 见解析.

解析 设 $P(x_0, y_0)$ 是椭圆在第一象限部分的点, 则由椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 得 $y'|_P = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}$

\therefore 过点 P 的切线方程为: $y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} (x - x_0)$, 又 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 得到切线方程为: $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$

\therefore 切线与坐标轴在第一象限围成的三角形面积 $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 b^2}{x_0 y_0}$

\therefore 切线、椭圆及两坐标轴所围成图形面积 $S = S_{\Delta} - \frac{1}{4} S_{\text{椭圆}} = \frac{a^2 b^2}{2x_0 y_0} - \frac{1}{4} \pi ab$ 又 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 得

$$S = S(x_0) = \frac{a^3 b}{2x_0 \sqrt{a^2 - x_0^2}} - \frac{1}{4} \pi ab$$

要使得 $S(x_0)$ 取最小, 实际上是要使得 $x_0 \sqrt{a^2 - x_0^2}$ 取最大

令 $f(x_0) = x_0 \sqrt{a^2 - x_0^2}, x_0 \in (0, a)$, 则 $f'(x_0) = \frac{a^2 - 2x_0^2}{\sqrt{a^2 - x_0^2}}$, 令 $f'(x_0) = 0$, 解得 $x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$

而当 $x_0 > \frac{a}{\sqrt{2}}$ 时, $f'(x_0) < 0$; 当 $x_0 < \frac{a}{\sqrt{2}}$ 时, $f'(x_0) > 0$, $\therefore x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ 是 $f(x)$ 的最大值点

于是 $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 是 $S(x)$ 的最小值点, 即待求点 P 为 $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$.


例 5-6 (2014-2015-2-期中-选择题-11)

双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ 所围成区域的面积可用定积分表示为 (A)

- (A) $2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta$ (B) $4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta$ (C) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta$ (D) $\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta d\theta$

答案 A.

解析 令 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, 则双纽线方程 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ 化为 $\rho^2 = \cos 2\theta$. 再利用双纽线在第一象限与 x 轴所围成的面积相等可得其面积 $S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \cos 2\theta d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta$.

4.5.3 规则几何体的体积
例 5-7 (2015-2016-1-期末-解答题-17)

在曲线 $y = x^2 (x \geq 0)$ 上某点 A 处作一切线, 使之与曲线及 x 轴所围图形 B 的面积为 $\frac{1}{12}$, 求平面图形 B 绕 y 轴旋转一周所围成的立体的体积.

答案 见解析.

解析 不妨设切点为 $P(t, t^2) (t > 0)$, 计算得切线方程为 $y = 2t(x - t) + t^2 = 2tx - t^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2t}(y + t^2)$

图形 B 的面积为 $S = \int_0^{t^2} \left(\frac{1}{2t}(y + t^2) - \sqrt{y} \right) dy = \frac{1}{12} t^3 = \frac{1}{12} \Rightarrow t = 1$

则切线方程为 $y = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(y + 1)$. 于是旋转体的体积

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi \left\{ \left[\frac{1}{2}(y + 1) \right]^2 - (\sqrt{y})^2 \right\} dy = \pi \int_0^1 \left[\frac{1}{4}(y^2 + 2y + 1) - y \right] dy \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^1 (y - 1)^2 dy = \frac{\pi}{4} \int_{-1}^0 y^2 dy = \frac{\pi}{12} \cdot y^3 \Big|_{-1}^0 = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

也可采用对 x 积分的方法, 但计算要分段, 稍嫌麻烦.

例 5-8 (2016-2017-1-期末-解答题-17)

设 D_1 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x = a, x = 2$ 及 $y = 0$ 所围成的平面区域, D_2 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $y = 0, x = a$ 所围成的平面区域, 其中 $0 < a < 2$.

- (1) 求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1 , D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2
- (2) 问当 a 为何值时, $V_1 + V_2$ 取得最大值? 并求此最大值.

答案 见解析.

解析 (1) $dV_1 = \pi(2x^2)^2 dx = 4\pi x^4$, $V_1 = \int_a^2 4\pi x^4 dx = \frac{4\pi}{5} x^5 \Big|_a^2 = \frac{128\pi - 4\pi a^5}{5}$

$dV_2 = \pi \left(\sqrt{y/2} \right)^2 dy = \frac{\pi}{2} y dy$, $V_2 = \int_0^{2a^2} \frac{\pi y}{2} dy = \frac{\pi}{4} y^2 \Big|_0^{2a^2} = \pi a^4$.

(2) 令 $f(a) = V_1 + V_2 = -\frac{4\pi}{5}a^5 + \pi a^4 + \frac{128\pi}{5}$, $a \in (0, 2)$, 则 $f'(a) = -4\pi a^4 + 4\pi a^3 = 4\pi a^3(1 - a)$



易知

$$\forall a \in (0, 1), f'(a) > 0; \forall a \in (1, 2), f'(a) < 0$$

于是 $f(a)$ 在 $a = 1$ 处取得极大值 (同时也是最大值), 为 $\frac{129\pi}{5}$.

例 5-9 (2013-2014-1-期末-选择题-10)

由曲线 $x = \sqrt{y}$, $x = 0$, $y = 4$ 围成的图形, 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积为 (A)

(A) 8π (B) 6π (C) 4π (D) 2π

答案 A.

解析
$$\begin{cases} dV = \pi(\sqrt{y})^2 dy \\ V = \int dV = \int_0^4 \pi y dy = 8\pi \end{cases}.$$

例 5-10 (2012-2013-1-期末-解答题-18)

设平面图形 A 位于曲线 $y = e^x$ 下方、该曲线过原点的切线的左方以及 x 轴的上方, 求:

- (1) 平面图形 A 的面积 S ;
- (2) A 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V_x ;
- (3) A 绕直线 $x = 1$ 旋转所得旋转体的体积 $V_{x=1}$.

答案 见解析.

解析 (1) $S = S_1 - S_2 = \int_{-\infty}^1 e^x dx - \frac{1}{2} \times 1 \times e = e - \frac{e}{2} = \frac{e}{2}$.

(2) $V_x = \int_{-\infty}^1 \pi y^2 dx - \frac{1}{3} \times \pi \times e^2 \times 1 = \frac{e^2 \pi}{2} - \frac{e^2 \pi}{3} = \frac{e^2 \pi}{6}$.

(3) $V_{x=1} = \int_{-\infty}^1 2\pi(1-x)y dx - \frac{1}{3} \times \pi \times e \times 1^2 = 2e\pi - \frac{e\pi}{3} = \frac{5e\pi}{3}$.

题型六 反常积分的概念与存在性判定 (审敛), 简单反常积分的计算

例 6-1 (2015-2016-1-期末-解答题-15)

讨论广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx$ 的收敛性.

答案 见解析.

解析 由无界区间上反常积分的定义有

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b^{1-a} - 1}{1-a}, & a \neq 1 \\ \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b, & a = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-a}, & a > 1 \\ +\infty, & a \leq 1 \end{cases}$$

即当 $a > 1$ 时积分收敛, 当 $a \leq 1$ 时积分发散.

题型一 常数项级数的审敛

包括正项级数、交错级数和任意项级数, 要求读者掌握几个基本结论和判别法.

例 1-1 (2016-2017-1-期末-选择题-6)

- 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 (D).
- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛 (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛
(C) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 收敛 (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛

答案 D.

解析 ABC 选项可举反例 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, D 选项实际有 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \right)$ 而后者收敛, 故 D 收敛.

例 1-2 (2014-2015-1-期末-选择题-12)

- 若常数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (D).
- (A) 发散 (B) 绝对收敛
(C) 条件收敛 (D) 可能收敛, 也可能发散.

答案 D.

解析 举反例: 令 $a_n = \frac{1}{n}$ 有 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 发散, 令 $a_n = \frac{1}{n^2}$ 有 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 于是 D 正确.

例 1-3 (2014-2015-1-期末-证明题-19)

设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散. 试证: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n + 1} \right)^n$ 收敛.

答案 见解析.

解析 正项数列 $\{a_n\}$ 有下界, 又由单调减少可知 $\{a_n\}$ 收敛, 且由数列极限的保号性知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \geq 0$. 而交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散, 必定有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0$ (否则可由莱布尼茨审敛法推知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛) 于是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n > 0$. 于是对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n + 1} \right)^n$ 由 Cauchy 根值审敛法有



$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1}{a_n + 1} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n + 1} = \frac{1}{1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n} < 1$$

从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n + 1} \right)^n$ 收敛.

例 1-4 (2013-2014-1-期末-选择题-12)

设常数 $k > 0$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + k}}$ (A).

(A) 绝对收敛

(B) 条件收敛

(C) 发散

(D) 收敛性与 k 值有关

答案 A.

解析 由基本不等式有 $\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + k}} = \sqrt{\frac{a_n^2}{n^2 + k}} \cdot \frac{1}{2} \left(a_n^2 + \frac{1}{n^2 + k} \right) < \frac{1}{2} \left(a_n^2 + \frac{1}{n} \right)$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 均收敛, 于是由比较审敛法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n^2}{n^2 + k}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + k}} \right|$ 收敛

于是 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + k}}$ 绝对收敛, 故选 A.

例 1-5 (2012-2013-1-期末-填空题-6)

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 收敛且和为 S , 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \underline{a_1 - S}$.

答案 $a_1 - S$.

解析 由常数项级数的部分和定义有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_1 - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = S$$

于是由极限的四则运算法则及唯一性可得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a_1 - S$.

例 1-6 (2012-2013-1-期末-选择题-10)

若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则下列级数中一定收敛的是 (D).

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + a) (0 \leq a < 1)$

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n}$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$

答案 D.

解析 通项趋于 0 是常数项级数收敛的必要条件, C 错; 当 $a \neq 0$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + a)$ 不满足该条件, A 亦错; 对于 B, 可举反例 $u_n = \frac{1}{n^2}$; 由已知条件可证得 D 选项的级数在通项加绝对值之后仍收敛, 故为绝对收敛, 于是收敛.



题型二 幂级数的审敛与计算和函数

包括幂级数的相关概念、性质, 和函数的相关概念、性质, 要求读者掌握性质及基本解题方法.

例 2-1 (2015-2016-1-期末-填空题-2)

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)}{2^n} x^{2n-2}$ 的收敛区间为 $\underline{(-\sqrt{2}, \sqrt{2})}$.

答案 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

解析 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)}{2^n} x^{2n-2} = -\frac{1}{x^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)}{2^{n+1}} x^{2n} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{2n}$
 $R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{2n+3} = 1, \therefore -1 < \frac{x}{\sqrt{2}} < 1 \Rightarrow x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$

例 2-2 (2016-2017-1-期末-填空题-8)

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n - (-1)^n}{n^2} x^n$ 的收敛半径为 $\underline{\frac{1}{e}}$.

答案 $\frac{1}{e}$.

解析 显然幂级数不缺项, 则收敛半径

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^n - (-1)^n}{n^2}}{\frac{e^{n+1} - (-1)^{n+1}}{(n+1)^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \frac{1 - e^{-n}(-1)^n}{e - e^{-n}(-1)^{n+1}} = \frac{1}{e}.$$

例 2-3 (2016-2017-1-期末-解答题-16)

求幂级数 $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n}$ ($|x| < 1$) 的和函数 $f(x)$ 及其极值.

答案 见解析.

解析 由和函数的可微性和可积性有

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n-1} dt = 1 + \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n t^{2n-1} dt \\ &= 1 + \int_0^x \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} (-t^2)^n dt = 1 + \int_0^x \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{1}{1+t^2} - 1 \right) dt \\ &= 1 - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt = 1 - \frac{1}{2} \ln(1+x^2), |x| < 1 \end{aligned}$$

则 $f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} = -\frac{x}{1+x^2}, x \in (-1, 1)$. 于是 $\forall x \in (-1, 0), f'(x) > 0; \forall x \in (0, 1), f'(x) < 0$
 从而 $f(x)$ 有极大值 $f(0) = 1$.



例 2-4 (2013-2014-1-期末-填空题-2)

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 的和函数 $s(x) = \underline{-\ln(1-x), x \in [-1, 1)}$.

答案 $-\ln(1-x), x \in [-1, 1)$.

解析 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 的收敛半径 $R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛于是幂级数的收敛域为 $[-1, 1)$.

由和函数的可微性和可积性得

$$\begin{aligned} s(x) &= \int_0^x s'(t) dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{t^n}{n} \right)' dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt \\ &= -\ln(1-x), x \in [-1, 1). \end{aligned}$$

例 2-5 (2012-2013-1-期末-解答题-13)

将函数 $f(x) = \frac{1}{2x^2 - 3x + 1}$ 展开为 x 的幂级数.

答案 见解析.

解析 观察结构, 对 $f(x)$ 进行部分分式展开得到 $f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x}$
 而 $\frac{2}{1-2x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} x^n, x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; $-\frac{1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \in (-1, 1)$
 故 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1} - 1) x^n, x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

题型三 任意项级数的计算

例 3-1 (2015-2016-1-期末-选择题-12)

级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和为 (D)

(A) π (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

答案 D.

解析 设 $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, 收敛域为 $(-1, 1]$.

由和函数的可微性有 $s'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}$

于是 $s(x) = \int_0^x s'(t) dt = \arctan x$. 故 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = s(1) = \frac{\pi}{4}$.


例 3-2 (2014-2015-1-期末-解答题-15)

求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n n!}$ 的和.

答案 见解析.

解析 拆项

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n n!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)! 2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! 2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)^n}{n!} - 1 = \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)^n}{n!} - 1 \\ &= \frac{3}{2} \cdot e^x \Big|_{x=\frac{1}{2}} - 1 = \frac{3}{2} \sqrt{e} - 1. \end{aligned}$$

■ 题型四 傅里叶级数的简单问题
例 4-1 (2015-2016-1-期末-填空题-5)

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 且 $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leq 0 \\ 1+x^2, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x = 5\pi$ 处收敛于 $\underline{\frac{\pi^2}{2}}$.

答案 $\frac{\pi^2}{2}$.

解析 由狄利克雷充分条件, $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x = 5\pi$ 处收敛于

$$\frac{1}{2} [f(5\pi+) + f(5\pi-)] = \frac{1}{2} [f(\pi+) + f(\pi-)] = \frac{\pi^2}{2}.$$

综合题一

题型一 中值定理综合证明题

例 1-1 (2014-2015-1-期末-证明题-18)

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且满足 $f(1) = 5 \int_0^{\frac{1}{5}} x e^{1-x} f(x) dx$, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = (1 - \xi^{-1})f(\xi)$.

答案 见解析.

解析 构造函数 $g(x) = x e^{1-x} f(x)$, 由积分第一中值定理可知

$$\exists \eta \in \left(0, \frac{1}{5}\right), f(1) = g(1) = 5 \int_0^{\frac{1}{5}} g(\eta) dx = g(\eta)$$

从而由罗尔定理可知 $\exists \xi \in (\eta, 1) \subset (0, 1)$, $g'(\xi) = e^{1-\xi}(1-\xi)f(\xi) + \xi e^{1-\xi}f'(\xi) = 0$

从而 $\exists \xi \in (0, 1)$, $f'(\xi) = (1 - \xi^{-1})f(\xi)$.

题型二 导数、积分综合性应用题

例 2-1 (2013-2014-1-期末-解答题-17)

设 $f(x)$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 4}{x} = 1$, 试求常数 k 使得 $g(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 其中 $g(x) =$

$$\begin{cases} \frac{1}{x \ln(1+x)} \int_0^x t f(t^2 - x^2) dt, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}.$$

答案 见解析.

解析 已知 $f(x)$ 连续, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 4}{x} = 1$, 由极限四则运算法则可知

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) - 4}{x} \cdot x + 4 \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 4}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x + 4 = 4$$

及

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 4}{x} = 1$$



从而

$$\begin{aligned}
 \lim_{z \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{x \ln(1+x)} \int_0^x t f(t^2 - x^2) dt = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{x \ln(1+x)} \cdot \frac{1}{2} \int_0^x f(t^2 - x^2) d(t^2 - x^2) \\
 &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{x \ln(1+x)} \cdot \frac{1}{2} \int_{-x^2}^0 f(u) du = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{[x \ln(1+x)]'} \cdot \frac{d}{dx} \int_{-x^2}^0 f(u) du \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2xf(-x^2)}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(-x^2)}{\frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{1}{1+x}} \\
 &= \frac{\lim_{z \rightarrow 0} f(-x^2)}{\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} + \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{1+x}} = \frac{f(0)}{1+1} = 2
 \end{aligned}$$

于是 $g(x)$ 连续 $\Leftrightarrow k = g(0) = \lim_{z \rightarrow 0} g(x) = 2$.

题型一 向量及其运算

主要包括向量的概念和向量的简单运算, 后者包括线性运算——加减, 交换、结合、分配, 数乘, 点积, 叉积, 混合积等.

例 1-1

设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为三个不共面的非零向量, 证明: 若向量 \mathbf{p} 同时垂直于 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, 则 $\mathbf{p} = \mathbf{0}$.

答案 见解析.

解析 假设 $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$, $\because \mathbf{p} \perp \mathbf{a}, \mathbf{p} \perp \mathbf{b}, \therefore \mathbf{p} \parallel \mathbf{a} \times \mathbf{b}$

又 $\because \mathbf{p} \perp \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{c} \perp \mathbf{a} \times \mathbf{b} \Rightarrow (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$, 即 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面, 矛盾. 故 $\mathbf{p} = \mathbf{0}$.

例 1-2 (2013-2014-2-期中-填空题-1)

设 $\mathbf{a} = (1, 2, 3), \mathbf{b} = (-1, 2, 2)$, 以 \mathbf{a}, \mathbf{b} 为邻边的平行四边形的面积为 $3\sqrt{5}$.

答案 $3\sqrt{5}$.

解析 $S = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3\sqrt{5}$.

例 1-3 (2013-2014-2-期中-填空题-4)

$|\mathbf{a}| = 2, |\mathbf{b}| = 5, (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\pi}{3}$, 向量 $\mathbf{u} = k\mathbf{a} + 2\mathbf{b}, \mathbf{v} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ 垂直, 则 $k = -40$.

答案 -40 .

解析 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = k|\mathbf{a}|^2 + (2-k)\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 2|\mathbf{b}|^2 = 0 \Rightarrow k = -40$.

例 1-4 (2014-2015-2-期中-填空题-1)

已知不共面的三向量 $\mathbf{a} = (1, 0, -1), \mathbf{b} = (2, 3, 1), \mathbf{c} = (0, 1, 2)$ 及 $\mathbf{d} = (0, 0, 3)$, 则用 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 的线性组合表示的向量 $\mathbf{d} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b} + 3\mathbf{c}$.

答案 $2\mathbf{a} - \mathbf{b} + 3\mathbf{c}$.



解析 设 $d = ma + nb + pc \Rightarrow \begin{cases} m + 2n = 0 \\ 3n + p = 0 \\ -m + n + 2p = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = -1 \\ p = 3 \end{cases} \Rightarrow d = 2a - b + 3c.$

例 1-5 (2014-2015-2-期中-填空题-4)

一向量的终点在点 $B(2, -1, 7)$, 它在 x 轴, y 轴和 z 轴上的投影依次为 $4, -4, 7$, 则该向量的起点 A 的坐标为 $(2, 3, 0)$.

答案 $(2, 3, 0)$.

解析 $\because x = 2 - 4 = -2, y = -1 - (-4) = 3, z = 7 - 7 = 0 \therefore A(2, 3, 0)$.

例 1-6 (2014-2015-2-期中-填空题-9)

若向量 $a \neq 0$, 则极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|a + xb| - |a - xb|}{x} = \frac{2a \cdot b}{|a|}$.

答案 $\frac{2a \cdot b}{|a|}$.

解析 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4xa \cdot b}{x(|a + xb| + |a - xb|)} = \frac{4a \cdot b}{2|a|} = \frac{2a \cdot b}{|a|}$.

例 1-7 (2015-2016-2-期末-填空题-3)

设 $m = 3i + 5j + 8k, n = 2i - 4j - 7k, p = 5i + j - 4k$, 且向量 $a = 4m + 3n - p$, 则 a 在 x 轴上的投影为 13 , 在 y 轴上的分向量为 $7j$.

答案 $13; 7j$.

解析 注意区分“投影”和“投影向量、分向量”的概念, 前者是数而后者是向量.

$$a = (12 + 6 - 5)i + (20 - 12 - 1)j + (32 - 21 + 4)k = 13i + 7j + 15k$$

\therefore 在 x 轴上的投影为 13 , 在 y 轴上的分向量为 $7j$.

例 1-8 (2015-2016-2-期末-填空题-6)

设 $|a| = 2, |b| = 5, (a, b) = \frac{2\pi}{3}$, 向量 $m = \lambda a + 17b$ 与 $n = 3a - b$ 垂直, 则 $\lambda =$ 40 .

答案 40 .

解析 $\because m \cdot n = 0 \Rightarrow 3\lambda|a|^2 + (51 - \lambda)a \cdot b - 17|b|^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 40$.

题型二 三维空间中的面与线



6.2.1

直线与平面的概念及计算

例 2-1

求与两平面 $x - 4z = 3$, $2x - y - 5z = 1$ 的交线平行, 且过点 $(-3, 2, 5)$ 的直线方程.

答案 $\frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{1}$.

解析 所求直线的方向向量可取为 $\mathbf{s} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = (-4, -3, -1)$

利用点向式可得方程 $\frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{1}$.

例 2-2

求过点 $(2, 1, 3)$ 且与直线 $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程.

答案 $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{4}$.

解析 先求二直线交点 P . 过已知点且垂直于已知直线的平面的法向量为 $(3, 2, -1)$

故其方程为 $3(x-2) + 2(y-1) - (z-3) = 0$

把已知直线方程化为参数方程代入可得交点 $P\left(\frac{2}{7}, \frac{13}{7}, -\frac{3}{7}\right)$

最后利用两点得所求方程为 $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{4}$.

例 2-3

求直线 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x + y + z - 6 = 0$ 的交点.

答案 $(1, 2, 2)$.

解析 化直线方程为参数方程 $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$, 代入平面方程得 $t = -1$, 从而确定交点为 $(1, 2, 2)$.

例 2-4

求直线 $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$ 在平面 $x + y + z = 0$ 上的投影直线方程.



答案
$$\begin{cases} y - z - 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}.$$

解析 过已知直线的平面束方程

$$x + y - z - 1 + \lambda(x - y + z + 1) = 0 \Rightarrow (1 + \lambda)x + (1 - \lambda)y + (-1 + \lambda)z + (-1 + \lambda) = 0$$

从中选择 λ 使其与已知平面垂直 $(1 + \lambda) \cdot 1 + (1 - \lambda) \cdot 1 + (-1 + \lambda) \cdot 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

$\therefore \begin{cases} y - z - 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}.$

例 2-5

设一平面平行于已知直线 $\begin{cases} 2x - z = 0 \\ x + y - z + 5 = 0 \end{cases}$ 且垂直于已知平面 $7x - y + 4z - 3 = 0$, 求该平面法线的方向余弦.

答案 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{50}, \cos \beta = \frac{5}{\sqrt{50}}, \cos \gamma = -\frac{4}{\sqrt{50}}.$

解析 已知平面的法向量 $\mathbf{n}_1 = (7, -1, 4)$, 求出已知直线的方向向量 $\mathbf{s} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 2)$

取所求平面的法向量 $\mathbf{n} = \mathbf{s} \times \mathbf{n}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 7 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2(3, 5, -4)$

求得其方向余弦为 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{50}, \cos \beta = \frac{5}{\sqrt{50}}, \cos \gamma = -\frac{4}{\sqrt{50}}.$

例 2-6

求过点 $M_0(1, 1, 1)$ 且与两直线 $L_1: \begin{cases} y = 2x \\ z = x - 1 \end{cases}, L_2: \begin{cases} y = 3x - 4 \\ z = 2x - 1 \end{cases}$ 都相交的直线.

答案
$$\begin{cases} 3x - y - z - 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}.$$

解析 【法一】先求交点, 再写直线方程将两直线方程化为参数方程

$$L_1: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t - 1 \end{cases} \quad L_2: \begin{cases} x = t \\ y = 3t - 4 \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$



设交点分别为 $M_1(t_1, 2t_1, t_1 - 1), M_2(t_2, 3t_2 - 4, 2t_2 - 1)$ M_0, M_1, M_2 三点共线 $\therefore \overrightarrow{M_0M_1} \parallel \overrightarrow{M_0M_2}$
 $\frac{t_1 - 1}{t_2 - 1} = \frac{2t_1 - 1}{(3t_2 - 4) - 1} = \frac{(t_1 - 1) - 1}{(2t_2 - 1) - 1} \Rightarrow t_1 = 0, t_2 = 2$
 $M_1(0, 0, -1), M_2(2, 2, 3) \Rightarrow L: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}.$

【法二】两相交直线确定平面，先求已知直线方向向量，将两直线方程化为参数方程

$$L_1: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t - 1 \end{cases} \quad L_2: \begin{cases} x = t \\ y = 3t - 4 \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$

得 $s_1 = (1, 2, 1)$, L_1 上点 $M_1(0, 0, -1)$, $s_2 = (1, 3, 2)$, L_2 上点 $M_2(0, -4, -1)$

对 L 上任意点 $M(x, y, z)$, $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_0}, s_1$ 共面

$$\therefore \begin{vmatrix} x & y & z+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - y - z - 1 = 0. \text{ 同理可得 } 2x - z - 1 = 0, \therefore \begin{cases} 3x - y - z - 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}.$$

例 2-7 (2014-2015-2-期末-填空题-5)

过点 $P(1, -1, 1)$ 且与直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{2}$ 和 $L_2: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-3}$ 平行的平面方程为 $4x + 5y + 3z - 2 = 0$.

答案 $4x + 5y + 3z - 2 = 0$.

解析 法向量 $\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (4, 5, 3) \Rightarrow 4(x-1) + 5(y+1) + 3(z-1) = 0 \Rightarrow 4x + 5y + 3z - 2 = 0$.

例 2-8 (2013-2014-2-期末-解答题-12)

求直线 $L: \begin{cases} 4x - y + 3z - 1 = 0 \\ x + 5y - z + 2 = 0 \end{cases}$ 在平面 $2x - y + 5z - 3 = 0$ 上的投影直线.

答案 $\begin{cases} 7x + 14y + 5 = 0 \\ 2x - y + 5z - 3 = 0 \end{cases}.$

解析 不妨设直线 L 的平面束方程为 $4x - y + 3z - 1 + \lambda(x + 5y - z + 2) = 0, \lambda \in \mathbb{R}$

平面的法向量 $\mathbf{n}_1 = (2, -1, 5)$ 与平面束方程的法向量 $\mathbf{n}_2 = (4 + \lambda, 5\lambda - 1, 3 - \lambda)$ 垂直

$$\therefore \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \Rightarrow \begin{cases} 7x + 14y + 5 = 0 \\ 2x - y + 5z - 3 = 0 \end{cases}.$$



6.2.2

认识曲面与曲线

例 2-9

试求顶点在原点, 含三正半坐标轴的圆锥面.

答案 $xy + yz + zx = 0$.

解析 设圆锥面的旋转轴方向向量为 $\mathbf{s} = (m, n, p) \Rightarrow m = n = p$. 故取 $\mathbf{s} = (1, 1, 1)$

旋转轴为 $x = y = z$, 在圆锥面上任取一点 $M(x, y, z) \therefore \frac{x + y + z}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow xy + yz + zx = 0$.

例 2-10 (2013-2014-2-期中-填空题-8)

两曲面 $z = x^2 + 2y^2, z = 3 - 2x^2 - y^2$ 的交线 C 在 xOy 面上的投影曲线方程为
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

答案
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

解析 \therefore 在 xOy 平面上, $\therefore z = 0$. 两方程联立并消掉 z 即得投影曲线方程为
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

例 0-1 (ID)

题目

答案 答案

解析 解析

习题 0-1 (ID)

题目

答案 答案

解析 解析

选择题用

(A)

填空题用 答案

选项用

(A) 选项 A

(B) 选项 B

(C) 选项 C

(D) 选项 D

题型一 重积分的概念、性质以及简单的累次积分换序

8.1.1 线性性质

例 1-1 (2013-2014-2-期中-选择题-16)

设 $I_1 = \iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$, $I_2 = \iint_D \cos(x^2 + y^2) d\sigma$, $I_3 = \iint_D \cos(x^2 + y^2)^2 d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则有 (B)

(A) $I_1 > I_2 > I_3$ (B) $I_3 > I_2 > I_1$ (C) $I_2 > I_1 > I_3$ (D) $I_3 > I_1 > I_2$

答案 B.

解析 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\} \Rightarrow 1 \geq \sqrt{x^2 + y^2} \geq x^2 + y^2 \geq (x^2 + y^2)^2 > 0$,

而 $\cos x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 单调递减, 于是

$$\forall (x, y) \in D, \cos(\sqrt{x^2 + y^2}) < \cos(x^2 + y^2) < \cos(x^2 + y^2)^2$$

由二重积分性质得

$$\iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma < \iint_D \cos(x^2 + y^2) d\sigma < \iint_D \cos(x^2 + y^2)^2 d\sigma$$

即 $I_3 > I_2 > I_1$.

8.1.2 对称性及轮换对称性

例 1-2 (2014-2015-2-期中-选择题-16)

设 $f(x, y) = x^4 \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$, 且 $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 2\}$, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy =$ (C)

(A) -1 (B) 1 (C) 0 (D) 2

答案 C.

解析 显然 $f(x, -y) = -f(x, y)$, 而积分区域关于 x 轴对称, 因此 $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$.


例 1-3 (2015-2016-2-期中-选择题-17; 2011-2012-2-期末-选择题-11)

设有空间区域 $\Omega_1 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$,

$\Omega_2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, 则有 (C)

(A) $\iiint_{\Omega_1} x \, dv = 4 \iiint_{\Omega_2} x \, dv$

(B) $\iiint_{\Omega_1} y \, dv = 4 \iiint_{\Omega_2} y \, dv$

(C) $\iiint_{\Omega_1} z \, dv = 4 \iiint_{\Omega_2} z \, dv$

(D) $\iiint_{\Omega_1} xyz \, dv = 4 \iiint_{\Omega_2} xyz \, dv$

答案 C.

解析 由 Ω_1 和 Ω_2 的对称性可知 $\iiint_{\Omega_1} z \, dv = 4 \iiint_{\Omega_2} z \, dv$.

例 1-4 (2012-2013-2-期中-解答题-22)

设区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, $f(x, y)$ 为 D 上的正值连续函数, a, b 为常数, 证明: $\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} \, d\sigma = \frac{a+b}{2} \pi$.

答案 见解析.

解析 由轮换对称性 $\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} \, d\sigma = \iint_D \frac{a\sqrt{f(y)} + b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} \, d\sigma$, 所以

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} \, d\sigma &= \frac{1}{2} \iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)} + a\sqrt{f(y)} + b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} \, d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \frac{(a+b)(\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)})}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} \, d\sigma = \frac{1}{2} \iint_D (a+b) \, d\sigma = \frac{a+b}{2} \sigma \end{aligned}$$

其中 σ 为 D 区域的面积 π , 因此原式 $= \frac{a+b}{2} \pi$.

例 1-5 (2012-2013-2-期中-选择题-14)

设 $\Omega_1 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0, \Omega_2 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, 则 (C)

(A) $\iiint_{\Omega_1} x \, dx \, dy \, dz = 4 \iiint_{\Omega_2} x \, dx \, dy \, dz$

(B) $\iiint_{\Omega_1} y \, dx \, dy \, dz = 4 \iiint_{\Omega_2} y \, dx \, dy \, dz$

(C) $\iiint_{\Omega_1} z \, dx \, dy \, dz = 4 \iiint_{\Omega_2} z \, dx \, dy \, dz$

(D) $\iiint_{\Omega_1} xyz \, dx \, dy \, dz = 4 \iiint_{\Omega_2} xyz \, dx \, dy \, dz$

答案 C.

解析 由对称性, 在 Ω_1 上 x, y, xyz 的积分都是 0, 故 A、B、D 选项错误.



例 1-6 (2012-2013-2-期末-选择题-6)

设区域 D 是由曲线 $y = x, x + y = 2$ 及 $x = 2$ 围成的平面区域, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 等于 (C)

(A) $\int_1^2 dx \int_0^2 f(x, y) dy$

(B) $\int_0^1 dx \int_x^{2-x} f(x, y) dy$

(C) $\int_1^2 dy \int_{2-y}^x f(x, y) dx$

(D) $\int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x, y) dx$

答案 C.

解析 考查化重积分为累次积分, $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_1^2 dx \int_{2-x}^x f(x, y) dy$.

例 1-7 (2015-2016-2-期中-选择题-19)

二次积分 $\int_0^a dy \int_0^y e^{m(a-x)} f(x) dx =$ (D)

(A) $\int_0^a x e^{m(a-x)} f(x) dx$

(B) $\int_0^a a e^{m(a-x)} f(x) dx$

(C) $\int_0^a (a-x) e^{m(a-x)} f(x) dx$

(D) $\int_0^a (a-x) e^{m(a-x)} f(x) dx$

答案 D.

解析 变换积分次序: $\begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq y \leq a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ x \leq y \leq a \end{cases}$, 则

$$\int_0^a dy \int_0^y e^{m(a-x)} f(x) dx = \int_0^a dx \int_x^a e^{m(a-x)} f(x) dy = \int_0^a (a-x) e^{m(a-x)} f(x) dx.$$

例 1-8 (2010-2011-2-期末-选择题-8)

设 $f(x, y)$ 是连续函数, 则 $\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy$ 等于 (B)

(A) $\int_0^a dy \int_0^y f(x, y) dx$

(B) $\int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx$

(C) $\int_0^a dy \int_a^y f(x, y) dx$

(D) $\int_0^a dy \int_0^a f(x, y) dx$

答案 B.

解析 变换积分次序: $\begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq a \end{cases}$, 则 $\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx$.

例 1-9 (2013-2014-2-期末 (C)-选择题-8)



交换积分次序 $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx =$ (B)

(A) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy$

(B) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy$

(C) $\int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy$

(D) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy$

答案 B.

解析 画图, 分成两块区域.

例 1-10 (2014-2015-2-期中-填空题-8)

二次积分 $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ 的值等于 $\underline{e^{-\frac{1}{2}}}$.

2013-2014-2-期末 (C)-填空题-4

2012-2013-2-期中-填空题-2

答案 $e^{-\frac{1}{2}}$.

解析 交换积分次序可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy &= \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 e^{-\frac{y^2}{2}} dx = \int_0^1 (1-y^2) e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}} dy - \int_0^1 y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}} dy - \int_0^1 y d(e^{-\frac{y^2}{2}}) = \int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}} dy + ye^{-\frac{y^2}{2}} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= ye^{-\frac{y^2}{2}} \Big|_0^1 = e^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

例 1-11 (2013-2014-2-期末-填空题-5)

积分 $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy$ 的值等于 $\underline{\frac{1}{2}(1-e^{-4})}$.

答案 $\frac{1}{2}(1-e^{-4})$.

解析 交换积分次序, 得

$$\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy = \int_0^2 dy \int_0^y e^{-y^2} dx = \int_0^2 ye^{-y^2} dy = -\frac{1}{2}e^{-y^2} \Big|_0^2 = \frac{1}{2}(1-e^{-4}).$$



例 1-12 (2012-2013-2-期中-选择题-15)

设函数 $f(x, y)$ 连续, 则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy$ 等于 (B)

- (A) $\int_0^1 dy \int_{\pi+\sin x}^{\pi} f(x, y) dx$ (B) $\int_0^1 dy \int_{\pi-\arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$
 (C) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin x} f(x, y) dx$ (D) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin x} f(x, y) dx$

2015-2016-2-期中-选择题-16

答案 B.

解析 考查交换积分次序方法. 注意反正弦函数 $f(x) = \arcsin x$ 的定义域是 $[-1, 1]$, 值域是 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

因此当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $x = \arcsin y$; 当 $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ 时, $\pi - x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

于是 $x \leq \pi \leq -\arcsin y$, 从而将积分区域变换为

$$D: \left\{ (x, y) \mid \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \sin x \leq y \leq 1 \right\} \Leftrightarrow \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, \pi - \arcsin y \leq x \leq \pi \right\}.$$

例 1-13 (2014-2015-2-期中-选择题-15)

设函数 $f(x, y)$ 连续, 则二次积分 $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$ 等于 (B)

- (A) $\int_1^2 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$ (B) $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$
 (C) $\int_1^2 dy \int_{2-y}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx$ (D) $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx$

答案 B.

解析 换序 $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x \leq y \leq \sqrt{2x-x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 2-y \leq x \leq 1+\sqrt{1-y^2} \end{cases}$

$$\text{故 } \int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

题型二 重积分的计算方法

8.2.1

直角坐标系下重积分的计算

例 2-1 (2015-2016-2-期中-填空题-7)

设 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$, 则二重积分 $\iint_D |xy| dx dy$ 的值等于 $\frac{1}{6}$.



答案 $\frac{1}{6}$.

解析 设 D_1 为 D 在第一象限的区域, 则

$$\begin{aligned}\iint_D |xy| dx dy &= 4 \iint_{D_1} |xy| dx dy = 4 \iint_{D_1} xy dx dy = 4 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} xy dy \\ &= 2 \int_0^1 x(1-x)^2 dx = 2 \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x) dx = 2 \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

例 2-2 (2012-2013-2-期末-填空题-2)

设 D 是由直线 $y=1, x=2$ 及 $y=x$ 围成的区域, 则 $\iint_D xy dx dy = \underline{\frac{9}{8}}$.

答案 $\frac{9}{8}$.

解析 $\iint_D xy dx dy = \int_1^2 dy \int_y^2 xy dx = \int_1^2 \frac{y}{2} (4-y^2) dy = \frac{9}{8}$.

例 2-3 (2014-2015-2-期末-选择题-6)

设 D 是由曲线 $y=x, y^2=x$ 围成的平面闭区域, 则 $\iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy$ 等于 (C)

(A) $1 + \sin 1$ (B) $1 + \cos 1$ (C) $1 - \sin 1$ (D) $1 - \cos 1$

答案 C.

解析 化二重积分为二次积分得到 $\iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy = \int_0^1 \int_{y^2}^y \frac{\sin y}{y} dx dy = \int_0^1 (\sin y - y \sin y) dy$
 $= (y \cos y - \sin y - \cos y) \Big|_0^1 = 1 - \sin 1$.

例 2-4 (2013-2014-2-期中-解答题-19)

设 a, b 为正常数, $D = \{(x, y) | -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b\}$, 计算 $I = \iint_D e^{\max\{b^2 x^2, a^2 y^2\}} dx dy$.

答案 $\frac{4(e^{a^2 b^2} - 1)}{ab}$.

解析 化简被积函数然后积分即可.

$$\begin{aligned}I &= \iint_{D_1} e^{b^2 x^2} dx dy + \iint_{D_2} e^{a^2 y^2} dx dy = 4 \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}x} e^{b^2 x^2} dy + 4 \int_0^b dy \int_0^{\frac{b}{a}y} e^{a^2 y^2} dx \\ &= \frac{2}{ab} (e^{a^2 b^2} - 1) + \frac{2}{ab} (e^{a^2 b^2} - 1) = \frac{4}{ab} (e^{a^2 b^2} - 1).\end{aligned}$$


例 2-5 (2014-2015-2-期中-解答题-20)

设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域, 计算 $\iiint_{\Omega} (x+2y+3z) dx dy dz$.

答案 $\frac{1}{4}$.

解析 记重积分为 I , 直接计算即可

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x+2y+3z) dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[(x+2y)(1-x-y) + \frac{3}{2}(1-x-y)^2 \right] dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{2} \left[-y^2 - 2y + (1-x)^2 + 2(1-x) \right] dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[-\frac{1}{3}(1-x)^3 - (1-x)^2 + (1-x)^3 + 2(1-x)^2 \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{2}{3}(1-x)^3 + (1-x)^2 \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{2}{3}t^3 + t^2 \right] dt = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

例 2-6 (2012-2013-2-期末-解答题-16)

计算 $\iint_D \max\{xy, 1\} dx dy$, 其中 $\{D = (x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$.

答案 $\frac{19}{4} + \ln 2$.

解析 曲线 $xy=1$ 将区域 D 分为两个区域 D_1, D_2 , $\max\{xy, 1\} = \begin{cases} xy, (x, y) \in D_1, \\ 1, (x, y) \in D_2, \end{cases}$ 则

$$\begin{aligned} \iint_D \max\{xy, 1\} dx dy &= \iint_{D_1} xy dx dy + \iint_{D_2} 1 dx dy = \iint_{D_1} xy dx dy + \iint_D 1 dx dy - \iint_{D_1} 1 dx dy \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 xy dy + 4 - \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 dy = \frac{19}{4} + \ln 2. \end{aligned}$$

8.2.2
极坐标系下二重积分的计算
例 2-7 (2012-2013-2-期中-填空题-4)

设有 $D: x^2+y^2 \leq a^2$, 则 $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy = \underline{\pi(1-e^{-a^2})}$.

答案 $\pi(1-e^{-a^2})$.



解析

$$\begin{aligned} \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho e^{-\rho^2} d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a^2} e^{-\rho^2} d(\rho^2) \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2} \int_0^{a^2} d\theta = \pi (1 - e^{-a^2}). \end{aligned}$$

例 2-8 (2013-2014-2-期中-填空题-2)

设 D 是 xOy 平面上圆心在远点、半径为 $a(a > 0)$ 的圆域, 则 $\iint_D (a - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy =$
 $\frac{a^3\pi}{3}$.

答案 $\frac{a^3\pi}{3}$.

解析 首先得出积分区域为 $D: \{(x, y) | x^2 + y^2 = a^2\}$, 然后由积分区域及被积函数的特点将重积分转化为极坐标系下的二次积分: $\iint_D (a - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (a - \rho) \rho d\rho = \frac{a^3\pi}{3}$.

例 2-9 (2015-2016-2-期中-填空题-10)

设区域 $D: x^2 + y^2 \leq 1$, 则二重积分 $\iint_D \sqrt[3]{x^2 + y^2} dx dy$ 的值等于 $\frac{3}{4}\pi$.

2014-2015-2-期中-选择题-18

答案 $\frac{3}{4}\pi$.

解析 极坐标变换可得 $\iint_D \sqrt[3]{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho \sqrt[3]{\rho^2} d\rho = 2\pi \int_0^1 \rho^{\frac{5}{3}} d\rho = \frac{3}{4}\pi$.

例 2-10 (2013-2014-2-期中-选择题-11)

设有闭区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$, 则二重积分 $\iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dx dy$ 的值等于 (B)

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{2} \ln 2$ (C) $\frac{\pi}{2} \ln 3$ (D) $\ln 2$

答案 B.

解析 极坐标变换可得

$$\iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{1+\rho^2 \cos \theta \sin \theta}{1+\rho^2} \rho d\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \left(\frac{1}{1+\rho^2} + \frac{\rho^2 \cos \theta \sin \theta}{1+\rho^2} \right) d(\rho^2)$$

其中

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\rho^2} d(\rho^2) = \ln 2, \quad \int_0^1 \frac{\rho^2 \cos \theta \sin \theta}{1+\rho^2} d(\rho^2) = \cos \theta \sin \theta \int_0^1 \frac{\rho^2 d(\rho^2)}{1+\rho^2} = (1 - \ln 2) \cos \theta \sin \theta$$



$$\text{因此原式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + (1 - \ln 2) \cdot \frac{\sin 2\theta}{2} \right] d\theta = \frac{\pi}{2} \ln 2 + (1 - \ln 2) \left(-\frac{\cos 2\theta}{4} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

例 2-11 (2013-2014-2-期中-选择题-15)

设函数 $f(x, y)$ 连续, 则二次积分 $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx$ 等于 (D)

- (A) $\int_0^1 dx \int_0^{x-1} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$
 (B) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x, y) dy$
 (C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho$
 (D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho$

答案 D.

$$\begin{aligned} \text{解析} \quad & \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy \quad \because x < 1 - y, \therefore \rho \cos \theta < 1 - \rho \sin \theta, \\ &\therefore \rho < \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} \quad \therefore \iint_{D_2} f(x, y) dx dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho. \end{aligned}$$

例 2-12 (2010-2011-2-期末-选择题-10)

设 D 是由圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域, 则 $\iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) dx dy =$ (C)

- (A) $\frac{\pi}{4} (\ln 2 - 1)$ (B) $\frac{\pi}{8} (\ln 2 - 1)$ (C) $\frac{\pi}{4} (2 \ln 2 - 1)$ (D) $\frac{\pi}{8} (2 \ln 2 - 1)$

答案 C.

解析 由极坐标变换可得

$$\begin{aligned} \iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \ln(1 + \rho^2) \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{1}{2} \ln(1 + \rho^2) d\rho^2 d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (2 \ln 2 - 1) d\theta = \frac{\pi}{4} (2 \ln 2 - 1). \end{aligned}$$

8.2.3 柱、球坐标系下三重积分的计算



例 2-13 (2014-2015-2-期中-填空题-6)

将三次积分 $I = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} dx \int_0^{\sqrt{3(x^2+y^2)}} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) dz$ 化为在柱面坐标形式下的三次积分为 $I = \int_0^\pi d\theta \int_0^{\sin\theta} d\rho \int_0^{\sqrt{3}\rho} f(\sqrt{z^2+\rho^2}) \rho dz$.

答案 $I = \int_0^\pi d\theta \int_0^{\sin\theta} d\rho \int_0^{\sqrt{3}\rho} f(\sqrt{z^2+\rho^2}) \rho dz$.

解析 $\begin{cases} x^2 + y^2 = \rho^2 \\ x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}, \begin{cases} y \in [0, 1] \rightarrow \theta \in [0, \pi] \\ x \in [-\sqrt{y-y^2}, \sqrt{y-y^2}] \rightarrow x^2 + y^2 \leq y \rightarrow \rho^2 \leq \rho \sin \theta \rightarrow \rho \in [0, \sin \theta] \\ z \in [0, \sqrt{3(x^2+y^2)}] \rightarrow z \in [0, \sqrt{3}\rho] \end{cases}$.

例 2-14 (2015-2016-2-期中-填空题-8; 2012-2013-期中-选择题-11)

设 Ω 为平面曲线 $\begin{cases} x^2 = 2z \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面与平面 $z = 8$ 围成的区域, 则三重积分 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$ 的值等于 $\frac{1024\pi}{3}$.

答案 $\frac{1024\pi}{3}$.

解析 记平面曲线 $\begin{cases} x^2 = 2z \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面为 $\Sigma: x^2 + y^2 = 2z$

于是积分区域 $\Omega: \left\{ (x, y, z) \mid \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq z \leq 8 \right\} = \left\{ (\rho, \theta, z) \mid \frac{1}{2}\rho^2 \leq z \leq 8, \rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$ 从而积分可计算得

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 d\rho \int_{\frac{\rho^2}{2}}^8 \rho^2 \cdot \rho dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 \rho^3 \left(8 - \frac{\rho^2}{2} \right) d\rho \\ &= \int_0^{2\pi} \left(2\rho^4 - \frac{\rho^6}{12} \right) \Big|_0^4 d\theta = \frac{1024}{3}\pi. \end{aligned}$$

例 2-15 (2014-2015-2-期中-选择题-14)

设 Ω 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = z$ 所围成的闭区域, 则 $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv =$ (D)

(A) $\frac{\pi}{7}$

(B) $\frac{\pi}{8}$

(C) $\frac{\pi}{9}$

(D) $\frac{\pi}{10}$

答案 D.



解析 $x^2 + y^2 + z^2 = z \Rightarrow x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, 在球坐标系中计算得到

$$I = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} r^3 \sin\theta dr = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \cos^4\theta \sin\theta d\theta = -\frac{\pi}{10} \cos^5\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{10}.$$

例 2-16 (2015-2016-2-期中-选择题-15)

设 Ω 为由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = 1$ 所围成的区域, 则 $\iiint_{\Omega} |\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1| dv =$ (A)

- (A) $\frac{\pi}{6}(\sqrt{2} - 1)$ (B) $\frac{\pi}{5}(\sqrt{2} - 1)$ (C) $\frac{\pi}{4}(\sqrt{2} - 1)$ (D) $\frac{\pi}{3}(\sqrt{2} - 1)$

答案 A.

解析 积分区域 $\Omega: \{(x, y, z) | \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\} \Leftrightarrow \{(r, \varphi, \theta) | r \sin\varphi \leq r \cos\varphi \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

根据被积函数特点按照 $r = 1$ 为分界面将 Ω 分为两块, 其中

$$\Omega_1 = \{(r, \varphi, \theta) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

$$\Omega_2 = \{(r, \varphi, \theta) | 1 \leq r \leq \sec\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}, \text{ 于是在球坐标系下计算可得}$$

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega_1 + \Omega_2} |\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1| dv \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi d\varphi \int_0^1 (1-r) r^2 dr + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi d\varphi \int_1^{\sec\varphi} (r-1) r^2 dr \right] \\ &= 2\pi \cdot \left[\frac{1}{12} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \left(\frac{\sec^4\varphi}{4} - \frac{\sec^3\varphi}{3} + \frac{1}{12} \right) d\varphi \right] \\ &= 2\pi \cdot \left[\frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi d\varphi + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \left(\frac{1}{4t^4} - \frac{1}{3t^3} \right) dt \right] = 2\pi \cdot \left[\frac{1}{6} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}-3}{12} \right] = \frac{\pi(\sqrt{2}-1)}{6}. \end{aligned}$$

例 2-17 (2015-2016-2-期中-选择题-18)

积分 $I = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} dx \int_0^{\sqrt{3(x^2+y^2)}} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) dz$ 写成柱面坐标的形式为 (D)

- (A) $\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\sin\theta} r^2 dr \int_0^{\sqrt{3}r} f(\sqrt{r^2+z^2}) dz$ (B) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin\theta} dr \int_0^{\sqrt{3}r} f(\sqrt{r^2+z^2}) dz$
(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin\theta} r dr \int_0^{\sqrt{3}r} f(\sqrt{r^2+z^2}) dz$ (D) $\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\sin\theta} r dr \int_0^{\sqrt{3}r} f(\sqrt{r^2+z^2}) dz$

答案 D.

解析 坐标变换 $x = \rho \sin\theta, y = \rho \cos\theta$ 得到
$$\begin{cases} -\sqrt{y-y^2} \leq x \leq \sqrt{y-y^2} \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq \sqrt{3(x^2+y^2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq \sin\theta \\ 0 \leq z \leq \sqrt{3}r \end{cases}$$



$$\text{故 } \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} dx \int_0^{\sqrt{3(x^2+y^2)}} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) dz = \int_0^\pi d\theta \int_0^{\sin\theta} r dr \int_0^{\sqrt{3}r} f(\sqrt{r^2+z^2}) dz.$$

例 2-18 (2014-2015-2-期末-选择题-9)

设 Ω 为由曲面 $x^2+y^2=z^2$ 与 $z=a$ ($a>0$) 围成空间区域, 则 $\iiint_{\Omega} (x^2+y^2) dx dy dz =$ (A)

- (A) $\frac{\pi}{10}a^5$ (B) $\frac{\pi}{8}a^5$ (C) $\frac{\pi}{10}a^4$ (D) $\frac{\pi}{8}a^4$

答案 A.

解析 由柱坐标变换得到

$$\iiint_{\Omega} (x^2+y^2) dx dy dz = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^z r^2 \cdot r dr d\theta dz = 2\pi \int_0^a \frac{z^4}{4} dz = 2\pi \frac{a^5}{20} = \frac{\pi}{10}a^5.$$

例 2-19 (2013-2014-2-期末-解答题-16)

计算 $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z = x^2+y^2$ 所围成的闭区域.

答案 $\frac{\pi}{2}$.

解析 柱坐标变换, 得

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dv &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^z zr dr d\theta dz + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2-z^2}} zr dr d\theta dz \\ &= 2\pi \left(\int_0^1 \frac{z^3}{2} dz + \int_1^{\sqrt{2}} \frac{z(2-z^2)}{2} dz \right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

8.2.4

一般坐标系下重积分的计算

例 2-20 (2013-2014-2-期末-证明题-18)

设 $f(t)$ 是连续函数, 证明: $\iint_{|x|+|y|\leq 1} f(x+y) dx dy = \int_{-1}^1 f(u) du.$

答案 见解析.

解析 【法一】记积分区域为 $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\} = \{(x, y) | -1 \leq x+y \leq 1, -1 \leq x-y \leq 1\}$, 做变量代换

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(u-v) \end{cases}$$



将 D 映射为 uOv 平面上的正方形区域 $D' \{(u, v) | -1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1\}$, 该变换的雅可比行列式

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

于是

$$\iint_{|x|+|y| \leq 1} f(x+y) dx dy = \iint_{D'} f(u) |J| du dv = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(u) du \int_{-1}^1 dv = \int_{-1}^1 f(u) du$$

证毕.

【法二】以 y 轴为分界线, 将 D 分成 D_1 和 D_2 左右两部分, 于是

$$\iint_{D_1} f(x+y) dx dy = \int_{-1}^0 dx \int_{-1-x}^{1+x} f(x+y) dy, \quad \iint_{D_2} f(x+y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} f(x+y) dy$$

令 $x+y=t$, 则 $dy=dt$, 于是

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 dx \int_{-1-x}^{1+x} f(x+y) dy &= \int_{-1}^0 dx \int_{-1}^{2x+1} f(t) dt = \int_{-1}^1 dt \int_{\frac{t-1}{2}}^0 f(t) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-t) f(t) dt \\ \int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} f(x+y) dy &= \int_0^1 dx \int_{2x-1}^1 f(t) dt = \int_{-1}^1 dt \int_0^{\frac{t+1}{2}} f(t) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t+1) f(t) dt \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \iint_{|x|+|y| \leq 1} f(x+y) dx dy &= \iint_{D_1} f(x+y) dx dy + \iint_{D_2} f(x+y) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-t) f(t) dt + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t+1) f(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 f(t) dt. \end{aligned}$$

证毕.

题型三 重积分的应用

8.3.1 求曲面面积

例 3-1 (2015-2016-2-选择题-12; 2014-2015-2-期中-填空题-2)

两个直交圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 及 $x^2 + z^2 = R^2$ 所围立体的表面积为 $16R^2$.

答案 $16R^2$.

解析 设 A_1 为曲面 $z = \sqrt{R^2 - x^2}$ 相应与区域 $D: x^2 + y^2 \leq R^2$ 上的面积, 则所求表面积为 $A = 4A_1$

$$\begin{aligned} A &= 4 \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = 4 \iint_D \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2 + 0^2} dx dy \\ &= 4 \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx dy = 4R \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}} dy = 8R \int_{-R}^R dx = 16R^2. \end{aligned}$$



8.3.2

求立体体积

例 3-2 (2012-2013-2-期中-选择题-17)

由曲面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 和曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围成的立体的体积为 (C)

- (A) $(\sqrt{2} - 1)\pi$ (B) $\frac{4}{3}\pi$ (C) $\frac{4}{3}(\sqrt{2} - 1)\pi$ (D) $\frac{5}{3}(\sqrt{2} - 1)\pi$

答案 C.

解析 $\begin{cases} z = \sqrt{2 - x^2 - y^2} \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$, $\therefore x^2 + y^2 = 1$ 为 D 区域, 于是

$$V = \iint_D (\sqrt{2 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\sqrt{2 - \rho^2} - \rho) \rho d\rho = \frac{4}{3}(\sqrt{2} - 1)\pi.$$

例 3-3 (2012-2013-2-期末-解答题-12)

计算由曲面 $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围成的立体的体积.

答案 $\frac{32}{3}\pi$.

解析 采用柱坐标, 体积

$$V = \iiint_{\Omega} dv = \iiint_{\Omega} r dr d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r dr \int_r^{6-r^2} dz = 2\pi \int_0^2 (6r - r^2 - r^3) dr = \frac{32}{3}\pi.$$

例 3-4 (2013-2014-2-期末-解答题-17)

求由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 围成的立体的体积.

答案 $\frac{\pi}{6}$.

解析 投影区域: $x^2 + y^2 \leq 1$, 体积 = $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} [\sqrt{x^2 + y^2} - (x^2 + y^2)] dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\rho - \rho^2) d\rho = \frac{\pi}{6}$.

例 3-5 (2014-2015-2-期末-解答题-12)

计算由曲面 $2az = x^2 + y^2 + z^2$ ($a > 0$) 及 $x^2 + y^2 = z^2$ 所围成的 (含有 z 轴的部分) 立体的体积.

答案 $\frac{a^3\pi}{2}$.



解析 $2az = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + (z-a)^2 = a^2$, 柱坐标变换得

$$\begin{aligned} \iiint_D dv &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^z r dr d\theta dz + \int_a^{2a} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2az-z^2}} r dr d\theta dz \\ &= 2\pi \int_0^a \frac{z^2}{2} dz + 2\pi \int_a^{2a} \frac{2az - z^2}{2} dz = \frac{a^3\pi}{2}. \end{aligned}$$

8.3.3 求转动惯量

例 3-6 (2011-2012-2-期末-解答题-13)

一均匀物体(密度 ρ 为常数)占有的闭区域 Ω 由曲面 $z = x^2 + y^2$ 和平面 $z = 0, |x| = a, |y| = a$ 所围成, 求物体关于 z 轴的转动惯量.

答案 $\frac{112}{45}a^6\rho$.

解析 由转动惯量的定义: $J = \iiint_{\Omega} \rho r^2 dv$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. 由极坐标变换可得

$$\begin{aligned} J &= \iiint_{\Omega} \rho r^2 dv = \int_{-a}^a \int_{-a}^a \int_0^{x^2+y^2} (x^2 + y^2) dz dx dy = \int_{-a}^a \int_{-a}^a (x^2 + y^2)^2 dx dy \\ &= \int_{-a}^a \int_{-a}^a (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) dx dy = \frac{112}{45}a^6\rho. \end{aligned}$$

题型四 涉及到重积分的综合题

例 4-1 (2013-2014-2-期中-填空题-6)

设 $f(x)$ 为连续的函数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$, 则 $F'(2) =$ $(f(2))$.

答案 $f(2)$.

解析 画出积分区域, 观察其特点, 交换积分次序可得

$$F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx = \int_1^t f(x) dx \int_1^x dy = \int_1^t (x-1) f(x) dx$$

所以 $F'(t) = (t-1)f(t) \Rightarrow F'(2) = f(2)$.

例 4-2 (2010-2011-2-期末-选择题-11)

设 $F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2+y^2+z^2) dv$, 其中 f 为连续函数, 且 $f(0) = 0, f'(0) = 1, t > 0$, 则 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{t^5}$ 的值为 (B)



- (A) π (B) $\frac{4}{5}\pi$ (C) $\frac{3}{5}\pi$ (D) $\frac{2}{5}\pi$

答案 B.

解析 由球坐标变换可得

$$F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2+y^2+z^2) dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^t f(r^2) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta = 4\pi \int_0^t f(r^2) r^2 dr$$

于是由洛必达法则及变限积分求导公式可得

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{t^5} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{4\pi \int_0^t f(r^2) r^2 dr}{t^5} = 4\pi \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t^2) t^2}{5t^4} = \frac{4\pi}{5} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t^2)}{t^2} \\ &= \frac{4\pi}{5} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(u)}{u} = \frac{4\pi}{5} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(u) - f(0)}{u} = \frac{4\pi}{5} f'(0) = \frac{4\pi}{5}. \end{aligned}$$

例 4-3 (2012-2013-2-期末-选择题-9; 2014-2015-2-期中-解答题-21)

设 $f(x)$ 连续, $f(1) = 1$, 且 $F(t) = \iiint_{\Omega} [z^2 + f(x^2 + y^2)] dx dy dz$, 其中 $\Omega: 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq t^2$, 则 $F'(1) =$ (A)

- (A) $\frac{8}{3}\pi$ (B) $\frac{7}{3}\pi$ (C) $\frac{6}{3}\pi$ (D) $\frac{5}{3}\pi$

答案 A.

解析 由柱坐标变换可得

$$\begin{aligned} F(t) &= \iiint_{\Omega} z^2 + f(x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^t [z^2 + f(x^2 + y^2)] r dr d\theta dz \\ &= 2\pi \int_0^t \left[\frac{1}{3} + f(r^2) \right] r dr = 2\pi \cdot \left[\frac{1}{6} t^2 + \frac{1}{2} \int_0^{t^2} f(u) du \right] = \frac{\pi}{3} t^2 + \pi \int_0^{t^2} f(u) du \end{aligned}$$

于是由变限积分求导公式可得 $F'(t) = \frac{2\pi}{3}t + 2\pi t f(t^2) \Rightarrow F'(1) = \frac{2\pi}{3} + 2\pi f(1) = \frac{8}{3}\pi$.

例 4-4 (2013-2014-2-期末-选择题-9)

设函数 f 连续, $F(u, v) = \iint_{D_{uv}} \frac{f(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$, 其中 D_{uv} 为图中阴影部分, 则 $\frac{\partial F}{\partial u} =$ (A)

- (A) $vf(u)$ (B) $\frac{v}{u}f(u)$ (C) $vf(u^2)$ (D) $\frac{v}{u}f(u^2)$

答案 A.

解析 由极坐标, 得 $\begin{cases} 1 \leq r \leq u \\ 0 \leq \theta \leq v \end{cases}$, 故

$$F(u, v) = \iint_{D_{uv}} \frac{f(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \int_0^v d\theta \int_1^u \frac{f(r^2)}{r} r dr = v \int_1^u f(r^2) dr$$



由变限积分求导公式得 $\frac{\partial F}{\partial u} = v f(u^2)$.

例 4-5 (2010-2011-2-期末-解答题-15)

设闭区域 $D: x^2 + y^2 \leq y, x \geq 0$, $f(x, y)$ 为 D 上的连续函数, 且 $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \frac{8}{\pi} \iint_D f(u, v) \mathrm{d}u \mathrm{d}v$, 求 $f(x, y)$.

答案 $\sqrt{1 - x^2 - y^2} - \frac{2}{3} + \frac{8}{9\pi}$.

解析 令 $A = \iint_D f(u, v) \mathrm{d}u \mathrm{d}v$, 则 $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \frac{8}{\pi} A$, 在 D 上对上式两边积分, 有

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y &= \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y - \frac{8}{\pi} A \iint_D \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sin\theta} \sqrt{1 - r^2} r \mathrm{d}r - \frac{8}{\pi} A \frac{\pi}{8} = -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3\theta - 1) \mathrm{d}\theta - A = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9} - A \end{aligned}$$

即 $A = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9} - A$, 解得 $A = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{9}$, 从而 $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \frac{2}{3} + \frac{8}{9\pi}$.

例 4-6 (2014-2015-2-期末-证明题-17)

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 利用二重积分, 证明: $\left(\int_a^b f(x) \mathrm{d}x\right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) \mathrm{d}x$, 其中 $D: a \leq x \leq b, a \leq y \leq b$.

2013-2014-2-期末-证明题-18

2010-2011-2-期末-证明题-18

答案 见解析.

解析 显然 $[f(x) - f(y)]^2 \geq 0$, 从而

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b \mathrm{d}x \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 \mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_a^b [f^2(x) - 2f(x)f(y) + f^2(y)] \\ &= 2(b-a) \int_a^b f^2(x) \mathrm{d}x - 2 \left[\int_a^b f(x) \mathrm{d}x \right]^2 \end{aligned}$$

移项即得证.

例 4-7 (2014-2015-2-期末-解答题-18)

设 $f(u)$ 具有连续的导函数, 且 $\lim_{u \rightarrow +\infty} f'(u) = A, D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}, (R > 0)$.

(1) 求 $I_R = \iint_D f'(x^2 + y^2) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$; (2) $\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{I_R}{R^2}$.

答案 (1) $\frac{\pi}{4} [f(R^2) - f(0)]$; (2) $\frac{\pi}{4} A$.



解析 (1) 极坐标变换, 得

$$I_R = \iint_D f'(x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R f'(r^2) r dr d\theta = \frac{\pi}{4} f(r^2) \Big|_0^R = \frac{\pi}{4} [f(R^2) - f(0)].$$

(2) 由 (1) 中结果, 结合洛必达法则知

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{I_R}{R^2} = \frac{\pi}{4} \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{f(R^2) - f(0)}{R^2} = \frac{\pi}{4} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u) - f(0)}{u} = \frac{\pi}{4} \lim_{u \rightarrow \infty} f'(u) = \frac{\pi}{4} A.$$

题型一 第一类曲线积分

例 1-1 (2012-2013-2-期末-填空题-3)

设曲线 L 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 其周长为 a , 则 $\oint_L (3xy^3 + 3x^2 + 4y^2) ds = \underline{12a}$.

答案 $12a$.

解析 环积分满足在曲线 L 上恒有 $3x^2 + 4y^2 = 12$, 且 xy^3 关于 y 奇对称, 于是

$$\oint_L (3xy^3 + 3x^2 + 4y^2) ds = 3 \oint_L xy^3 ds + \oint_L (3x^2 + 4y^2) ds = 3 \oint_L xy^3 ds + 12a = 12a.$$

例 1-2 (2013-2014-2-期末-选择题-9)

设 L 是抛物线 $y = x^2$ 上点 $O(0,0)$ 与点 $B(1,1)$ 的一段弧, 则 $\int_L \sqrt{y} ds =$ (A)

(A) $\frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1)$ (B) $\frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 2)$ (C) $\frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 3)$ (D) $\frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 4)$

答案 A.

解析 先画图, 便于理解. $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$, $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + 4x^2} dx$

则原式 $= \int_0^1 x\sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{8} \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} d(1 + 4x^2) = \frac{1}{8} \times \frac{2}{3} (1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1)$.

题型二 第二类曲线积分

例 2-1 (2012-2013-2-期末-证明题-18)

设 L 为光滑弧段, 其弧长为 l , 函数 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在曲线 L 上连续, 证明:

$$\left| \int_L P dx + Q dy + R dz \right| \leq lM$$

其中 $M = \max_{(x,y,z) \in L} \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}$.



答案 见解析.

解析 设光滑弧段 L 在任意点处的方向余弦为 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$

则 $dx = \cos \alpha ds, dy = \cos \beta ds, dz = \cos \gamma ds$, 且 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, 于是

$$\begin{aligned} \int_L P dx + Q dy + R dz &= \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds \\ &= \int_L (P, Q, R) \cdot (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) ds = \int_L \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma} \cos \theta ds \\ &= \int_L \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} \cos \theta ds \end{aligned}$$

其中 θ 为向量 (P, Q, R) 与 $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 的夹角, 故

$$\begin{aligned} \left| \int_L P dx + Q dy + R dz \right| &= \left| \int_L \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} \cos \theta ds \right| \leq \int_L \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} |\cos \theta| ds \\ &\leq M \int_L ds = lM. \end{aligned}$$

例 2-2 (2013-2014-2-期末-选择题-10)

设 L 是抛物线 $y^2 = x$ 上从点 $A(1, -1)$ 到点 $B(1, 1)$ 的一段弧, 则 $\int_L xy dx =$ (D)

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

答案 D.

解析 先画图, 便于理解.

$$\int_L xy dx = \int_1^0 -x\sqrt{x} dx + \int_0^1 x\sqrt{x} dx = 2 \int_0^1 x\sqrt{x} dx = \frac{4}{5}.$$

例 2-3 (2013-2014-2-期末-解答题-15)

计算曲线积分 $\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3) dx + (6x^2y - 3xy^2) dy$.

答案 见解析.

解析 $P = 6xy^2 - y^3, Q = 6x^2y - 3xy^2$ 则 $\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy - 2y^2, \frac{\partial P}{\partial x} = 12xy - 2y^2$, 二式相等.

所以曲线积分与路径无关, 则可以通过线段路径: $A(1, 2) \rightarrow C(3, 2) \rightarrow B(3, 4)$,

由 A 点到 C 点, $y = 2, dy = 0$. 原积分一部分 $= \int_1^3 (6x \cdot 2^2 - 2^3) dx = 80$

由 C 点到 B 点, $x = 3, dx = 0$. 原积分另一部分 $= \int_2^4 (6 \cdot 3^2 y - 3 \cdot 3y^2) dy = 156$ 则原式 $= 80 + 156 = 236$.


例 2-4 (2015-2016-2-期末模拟-选择题-7)

设 $P(x, y), Q(x, y)$ 在单连通域 G 内具有一阶连续导数, $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 在 G 内为某一函数 $U(x, y)$ 的全微分, 计算 $U(x, y)$ 的公式是 (C)

- (A) $U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy$
 (B) $U(x, y) = \int_{x_0}^x Q(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y P(x_0, y) dy$
 (C) $U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy$
 (D) $U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy$

答案 C.

解析 沿 $(x_0, y_0) \rightarrow (x_0, y) \rightarrow (x, y)$ 路径积分.

例 2-5 (2016-2017-2-期末模拟-计算题-20)

设 L 是平面 $x + y + z = 2$ 与柱面 $|x| + |y| = 1$ 的交线, 从 z 轴正向看过去, L 为逆时针方向, 计算

$$I = \oint_L (y^2 - z^2) dx + (2z^2 - x^2) dy + (3x^2 - y^2) dz.$$

答案 见解析.

解析 设交线所围成的曲面为 Σ , 则 $\Sigma: \{(x, y, z) | x + y + z = 2, |x| + |y| = 1\}$, 取其单位法向量为

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, 1 \right) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

其中 $x = \varphi(y, z), y = \varphi(z, x), z = \varphi(x, y)$. 由 Stokes 公式, 有

$$I = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & 2z^2 - x^2 & 3x^2 - y^2 \end{vmatrix} ds - \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (4x + 2y + 3z) dS = -24.$$

例 2-6 (2012-2013-2-期中-解答题-21)

设 $f(x, y)$ 在单位圆域上有连续偏导数, 且在边界上取值为零, 证明:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2\pi} \iint_D \frac{x f_x + y f_y}{x^2 + y^2} dx dy = f(0, 0)$$

其中 D 为圆环域 $\delta^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1$.



答案 见解析.

解析 首先将被积函数恒等变形可得

$$\begin{aligned} & \iint_D \frac{xf_x + yf_y}{x^2 + y^2} dx dy \\ &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} f \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} f \right) \right] dx dy - \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right] f(x, y) dx dy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} f \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} f \right) \right) dx dy = I \end{aligned}$$

注意到在 $x^2 + y^2 = 1$ 上 $f(x, y)$ 函数值为零, 故利用格林公式以及积分中值定理可得,

$$\begin{aligned} I_1 &= \oint_{x^2+y^2=1} \frac{x}{x^2+y^2} f(x, y) dy - \frac{y}{x^2+y^2} f(x, y) dx - \oint_{x^2+y^2=\delta^2} \frac{x}{x^2+y^2} f(x, y) dy - \frac{y}{x^2+y^2} f(x, y) dx \\ &= 0 - \frac{1}{\delta^2} \oint_{x^2+y^2=\delta^2} xf(x, y) dy - yf(x, y) dx = -\frac{1}{\delta^2} \iint_{x^2+y^2 \leq \delta^2} [(f + xf_x) + (f + yf_y)] dx dy \\ &= -\pi [2f(\xi, \eta) + 3f_x(\xi, \eta) + \eta f_y(\xi, \eta)] \end{aligned}$$

其中 $\xi^2 + \eta^2 = 1$, 故原式 $= -\frac{1}{2\pi} \cdot (-2\pi) f(0, 0) = f(0, 0)$.

■ 题型三 第一类曲面积分

例 3-1 (2013-2014-2-期末-填空题-5)

设 Σ 是锥面 $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ 被平面 $z = 0$ 及 $z = 3$ 所截得的部分, 则 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) ds = \underline{9\pi}$.

答案 9π .

解析 $z^2 = 3(x^2 + y^2)$, 将 $z = 3$ 代入, 在 xy 平面上的投影为 $x^2 + y^2 \leq 3$, 由 $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = 2 dx dy$ 知

$$\text{原式} = \iint_{x^2+y^2 \leq 3} 2(x^2 + y^2) dx dy = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \rho^2 d\rho = 9\pi.$$

例 3-2 (2015-2016-2-期末模拟-选择题-6)

下列对面积的曲面积分不为零的有

(D)

(A) $\iint_{x^2+y^2+z^2=1} x \cos x ds$

(B) $\iint_{\Sigma} y^3 ds$, 其中 Σ 是椭圆面 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$ 位于第一和第四象限部分

(C) $\iint_{x^2+y^2+z^2=1} \frac{xy + yz + xz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ds$



$$(D) \quad \oiint_{x^2+y^2+z^2=1} (x^2 + y^2 + x + y) \, ds$$

答案 D.

解析 根据曲域是否对称及奇函数可知.

例 3-3 (2016-2017-2-期末模拟-选择题-13)

设曲面 Σ 是上半球面: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (z \geq 0)$, 曲面 Σ_1 是曲面 Σ 在第一卦限的部分, 下列结论正确的是 (C)

$$(A) \quad \iint_{\Sigma} x \, ds = 4 \iint_{\Sigma_1} x \, ds$$

$$(B) \quad \iint_{\Sigma} y \, ds = 4 \iint_{\Sigma_1} y \, ds$$

$$(C) \quad \iint_{\Sigma} z \, ds = 4 \iint_{\Sigma_1} z \, ds$$

$$(D) \quad \iint_{\Sigma} xyz \, ds = 4 \iint_{\Sigma_1} xyz \, ds$$

答案 C.

解析 对 A, 函数 x 关于 yOz 对称, 所以 $\iint_{\Sigma} x \, ds = 0$ 对 B, 函数 y 关于 xOz 对称, 所以 $\iint_{\Sigma} y \, ds = 0$

同理对 D, $\iint_{\Sigma} xyz \, ds = 0$.

例 3-4 (2013-2014-2-期末-填空题-4)

设 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及平面 $z = 1$ 所围成的区域的整个边界曲面, 则 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) \, ds = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \pi$.

答案 $\frac{1 + \sqrt{2}}{2} \pi$.

解析 Σ 是锥面的整个表面, 补曲面 $\Sigma_2: z = 1, x^2 + y^2 = 1$, 在 Σ_2 上, $ds = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy = \sqrt{2} \, dx \, dy$, Σ_1 在 xOy 面的投影 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1$; 在 Σ_2 上, $ds = 1 \, dx \, dy$, 于是

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) \, ds &= \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \sqrt{2} \, dx \, dy + \iint_{\Sigma_2} (x^2 + y^2) \, ds = (\sqrt{2} + 1) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 \cdot r \, dr \\ &= (\sqrt{2} + 1) \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \pi. \end{aligned}$$

题型四 第二类曲面积分

例 4-1 (2012-2013-2-期末-解答题-13)



计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x + z^2) dy dz + z dx dy$$

其中 Σ 是旋转抛物面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 介于 $z = 0$ 与 $z = 2$ 之间的部分的下侧.

答案 见解析.

解析 作辅助曲面 $\Sigma' : z = 2, x^2 + y^2 \leq 4$, 并取上侧. 记 $D : x^2 + y^2 \leq 4$, 则

$$\begin{aligned} I &= \oiint_{\Sigma} (x + z^2) dy dz + z dx dy - \iint_{\Sigma'} (x + z^2) dy dz + z dx dy \\ &= \iiint_{\Omega} 2 dx dy dz - \iint_D 2 dx dy = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r dr \int_{\frac{1}{2}r^2}^2 dz - 8\pi \\ &= 8\pi - 8\pi = 0. \end{aligned}$$

例 4-2 (2013-2014-2-期末-解答题-13)

计算 $I = \iint_{\Sigma} (z \cos \gamma + y \cos \beta + x \cos \alpha) ds$, 其中 Σ 是球面 $2z = x^2 + y^2 + z^2$, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是 Σ 上点的外法向量的方向余弦.

答案 见解析.

解析 可以直接利用 Gauss 公式: $\iiint_{\Omega} (1 + 1 + 1) dv = 3 \iiint_{\Omega} dv = 3 \times \frac{4}{3}\pi \times 1^3 = 4\pi$.

例 4-3 (2015-2016-2-期末模拟-填空题-5)

已知 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧, 试计算 $\oiint_{\Sigma} \frac{dy dz}{x} + \frac{dz dx}{y} + \frac{dx dy}{z} = \underline{12\pi}$.

答案 12π .

解析 由对称性得, 原式 $= 3 \oiint_{\Sigma} \frac{1}{z} dx dy = 6 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho = 12\pi$.

例 4-4 (2015-2016-2-期末模拟-计算题-六)

(1) 设 Σ 为下半球面 $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧, 计算

$$\iint_{\Sigma} \frac{ax dy dz + (z + a)^2 dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}, a > 0.$$

(2) 计算曲线积分

$$I = \oint_C (z - y) dx + (x - z) dy + (x - y) dz$$



其中 $C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$, 从 z 轴正向往负方向看是顺时针.

答案 见解析.

解析 (1) 补平面 $\Sigma_1: z = 0, x^2 + y^2 \leq a^2$, 取其下侧构成封闭曲面, 由高斯公式得

$$I = \iint_{\Sigma+\Sigma_1} \frac{ax \, dy \, dz + (z+a)^2 \, dx \, dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} - \iint_{\Sigma_1} \frac{ax \, dy \, dz + (z+a)^2 \, dx \, dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{其中 } \iint_{\Sigma+\Sigma_1} \frac{ax \, dy \, dz + (z+a)^2 \, dx \, dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{a} \iint_{\Omega} (3a+2z) \, dx \, dy \, dz$$

$$= -\frac{1}{a} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_0^a (3a+2r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi \, dr = -\frac{3\pi}{2} a^3$$

$$\iint_{\Sigma_1} \frac{ax \, dy \, dz + (z+a)^2 \, dx \, dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{a} \iint_{\Sigma_1} a^2 \, dx \, dy = -a \cdot \pi a^2 = -\pi a^3$$

$$\text{于是 } I = -\frac{3\pi}{2} a^3 + \pi a^3 = -\frac{\pi}{2} a^3. \quad (2) \quad x = \cos \theta, y = \sin \theta, z = 2 - \cos \theta + \sin \theta,$$

$$\begin{aligned} \therefore I &= - \int_0^{2\pi} [(2 - \cos \theta) \cdot (-\sin \theta) + (2 \cos \theta - 2 - \sin \theta) \cdot \cos \theta + (\cos \theta - \sin \theta) \cdot (\sin \theta + \cos \theta)] \, d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} (\sin \theta \cos \theta - 2 \sin \theta + 2 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \, d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} (3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - 2 \sin \theta - 2 \cos \theta) \, d\theta = -2\pi. \end{aligned}$$

例 4-5 (2013-2014-2-期末-计算题-14)

计算 $I = \iint_{\Sigma} (2x+z) \, dy \, dz + z \, dx \, dy$, 其中 Σ 为有向曲面 $z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 1)$, 其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角.

答案 见解析. 解析: 利用矢量投影法, 由已知 $z'_x = 2x, z'_y = 2y$, 于是

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} (2x+z) \, dy \, dz + z \, dx \, dy = \iint_{\Sigma} [(2x+z) \cdot (-z'_x) + z] \, dx \, dy \\ &= \iint_{\Sigma} (-4x^2 - 2xz + z) \, dx \, dy = \iint_{\Sigma} [-4x^2 - 2x(x^2+y^2) + x^2+y^2] \, dx \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (-4r^2 \cos^2 \theta - 2r^3 \cos \theta + r^2) r \, dr \\ &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

解析



例 4-6 (2014-2015-2-期末-计算题-16)

计算 $I = \iint_{\Sigma} 2(1-x^2) dy dz + 8xy dz dx - 4xz dx dy$, 其中 Σ 是由 xOy 面上的弧段 $x = e^y$ ($0 \leq y \leq a$) 绕 x 轴旋转所成旋转曲面, Σ 的法向量与 x 轴正向夹角大于 $\frac{\pi}{2}$.

答案 $2\pi a^2 (e^{2a} - 1)$.

解析 画图, 补面 Σ' : $\begin{cases} x = e^a \\ y^2 + z^2 = a^2 \end{cases}$, 方向为 x 轴正向, 于是由 Gauss 公式得

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma+\Sigma'} 2(1-x^2) dy dz + 8xy dz dx - 4xz dx dy - \iint_{\Sigma'} 2(1-x^2) dy dz + 8xy dz dx - 4xz dx dy \\ &= \iiint_{\Omega} (-4x + 8x - 4x) dx dy dz - \iint_{\Sigma'} 2(1-e^{2a}) dy dz = 0 - \iint_{\Sigma'} 2(1-e^{2a}) dy dz \\ &= 2(e^{2a} - 1) \cdot \pi a^2. \end{aligned}$$

综合题二

题型一 中值定理综合证明题

例 1-1 (2014-2015-1-期末-证明题-18)

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且满足 $f(1) = 5 \int_0^{\frac{1}{5}} x e^{1-x} f(x) dx$, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = (1 - \xi^{-1})f(\xi)$.

答案 见解析.

解析 构造函数 $g(x) = x e^{1-x} f(x)$, 由积分第一中值定理可知

$$\exists \eta \in \left(0, \frac{1}{5}\right), f(1) = g(1) = 5 \int_0^{\frac{1}{5}} g(\eta) dx = g(\eta)$$

从而由罗尔定理可知 $\exists \xi \in (\eta, 1) \subset (0, 1)$, $g'(\xi) = e^{1-\xi}(1-\xi)f(\xi) + \xi e^{1-\xi}f'(\xi) = 0$

从而 $\exists \xi \in (0, 1)$, $f'(\xi) = (1 - \xi^{-1})f(\xi)$.

题型二 导数、积分综合性应用题

例 2-1 (2013-2014-1-期末-解答题-17)

设 $f(x)$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 4}{x} = 1$, 试求常数 k 使得 $g(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 其中 $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x \ln(1+x)} \int_0^x t f(t^2 - x^2) dt, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$.

答案 见解析.

解析 已知 $f(x)$ 连续, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 4}{x} = 1$, 由极限四则运算法则可知

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) - 4}{x} \cdot x + 4 \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 4}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x + 4 = 4$$

及

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 4}{x} = 1$$



从而

$$\begin{aligned}
 \lim_{z \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{x \ln(1+x)} \int_0^x t f(t^2 - x^2) dt = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{x \ln(1+x)} \cdot \frac{1}{2} \int_0^x f(t^2 - x^2) d(t^2 - x^2) \\
 &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{x \ln(1+x)} \cdot \frac{1}{2} \int_{-x^2}^0 f(u) du = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{[x \ln(1+x)]'} \cdot \frac{d}{dx} \int_{-x^2}^0 f(u) du \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2xf(-x^2)}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(-x^2)}{\frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{1}{1+x}} \\
 &= \frac{\lim_{z \rightarrow 0} f(-x^2)}{\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} + \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{1+x}} = \frac{f(0)}{1+1} = 2
 \end{aligned}$$

于是 $g(x)$ 连续 $\Leftrightarrow k = g(0) = \lim_{z \rightarrow 0} g(x) = 2$.

附录

目 录	第一章 谈谈本科阶段的数学课程——从高等数学说起 180
	第二章 谈单变量微积分里几个基本的概念 187
	第三章 高等数学常用公式表 193

第一章

谈谈本科阶段的数学课程——从高等数学说起

文/似雪飞扬 Lancy

第一节

引言

若人们不相信数学简单，只因他们未意识到生命之复杂。

——约翰·冯·诺依曼

不少大学新生（包括笔者当初）在初次接触高等数学课程时常常感到难以接受，对课程里的数学概念和学习方法感到困惑。本文旨在指出一些观念上的错误，并同读者探讨本科（低年级阶段的）数学课程究竟应当如何学习。

第二节

高等数学是什么以及怎么学

让我们从高等数学说起。注意，本文的“高等数学”特指微积分。



第一个问题：“高等数学”是什么，它同我们在高中时期学习的数学有什么联系吗？

首先应当指明的一点是，尽管高等数学与初等数学^①有许多交叉之处，但绝不能认为“高等数学是建立在高中数学基础之上的”，这个观点与“学好高等数学需要非常好的高中数学基础”一样，都是错误的观点。

事实上，经过严谨的公理化定义的微积分不仅不是建立在高中数学基础之上的，甚至看起来同初等数学的联系也并不是特别大。相反，要想理解高等数学，几乎是要求学生重新建立一种观念，严格区分开“常量”和“变量”——而这一点并不是作为高中数学的重点，这恰好是许多人高中数学能考到 130 甚至 140，却在刚开始学习微积分的时候感到十分吃力，甚至难以理解概念的原因。

正基于此，笔者认为，对大学新生大谈特谈微积分里各式各样的概念、定理及公式，是没有太大意义的。正如你不可能同一个钢铁直男解释清楚口红的色号一样，即使是妙笔生花的科普作家也难以对门外汉说清微积分的全部细节——有些东西站在门外是看不见的，只有走进房间你才能发现这里陈列着丰富而又美丽的展品^②。

^①主要包括经典代数与几何，以及近代数学初步。具体地说，从小学时学习的四则运算，到高中时接触的简单的集合论知识和微积分概念，都属于初等数学的范畴。数学在 17 世纪之后经历了数以百年计的思想上的大解放，实现了从初等数学到高等数学、从常量数学到变量数学的大跨越。

^②语出《微积分的历程：从牛顿到勒贝格》

但这并不妨碍学长学姐们传授自己学习数学的经验。事实上，尽管学好微积分是不太容易的，但“考好”高等数学这门课程却轻松很多。以笔者本人为例，高中时我数学成绩平平，高考也没有过 120 分，但在大一学习高等数学时紧抠课本上的定义和概念解释，入门反而比大多数其他同学都要快，在阶段测试以及期中、期末考试里也发挥良好。因此，诸君大可不必因为自己过往的数学成绩不够好而对高等数学抱有恐惧心里，更不能因为在高中取得了优秀的数学成绩而轻视这门课程。

！ 第二个问题：学习高等数学应当如何入门？对教材和辅导书有什么要求吗？

我们先来谈谈教材。高等教育不同于义务教育的一点是，在大部分课程上，各个大学都是使用自己编写的教材。而由于高等数学是本科阶段非常重要的一门通识课，我校也组织了一些优秀的数学教师，自己编写了一套教材，如图 1-1 所示。笔者曾有幸聆听过其中两位编者——苏永美老师与胡志兴老师的课程，深深体会到以这两位老师的教学水平，本校教材是绝不会比同济版本的高等数学乃至其他学校的微积分教材差的。在后来考研复习的过程中，笔者比对了同济 7 版高数和本校的课本，也印证了这一点。因此如果只是为了掌握高等数学这门课程的话，学弟学妹们大可不必再去寻找其他教材了。



(a) 上册.

(b) 下册.

图 1-1 北京科技大学胡志兴等编. 高等数学（第二版），高等教育出版社.

再来说说如何入门。我们借一个例子来指出一些概念和知识上的错误，如图 1-2 所示，事实上，这

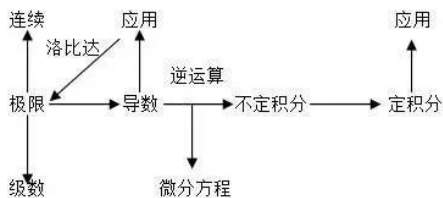


图 1-2 一张错误的高等数学知识结构图.

张图不仅在内容上没有说清高等数学的梗概^①，甚至在正确性上也令人怀疑。例如，极限是微积分的基础，用一个箭头从导数的应用指向极限，而这个箭头上标注着洛必达法则是合适的吗^②？再如，导数与

^①应当包括一元函数微分学、一元函数积分学、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数以及常微分方程七大板块，图中只提及了三个板块。

^②作者的本意可能是指可以利用洛必达法则来计算函数的极限，但这仅仅是高等数学里一个非常细节性的知识点，把它放在概括高等数学全

不定积分互为逆运算,为何没有用双向箭头连接?不是所有的定积分都可以通过不定积分计算(有的被积函数并不存在原函数,却是可积的),那么凭什么用一个箭头从不定积分指向定积分呢?这些问题尽管细节,却正说明这张图的作者并没有深入理解微积分这门学科里的概念,而只是浅尝辄止,至多停留于“考好即可”的地步。读者若想真正学好这门课,就绝不能有这样的想法——至少,课本上没有打星号指明可读可不读的章节,一定要反复读,学完之后还要回过头来思考各章节之间的联系。这样的学习甚至可能需要持续到本科高年级阶段。笔者在考研复习时整理的高等数学知识点结构图之某部分(未完成)如图 1-3 所示。

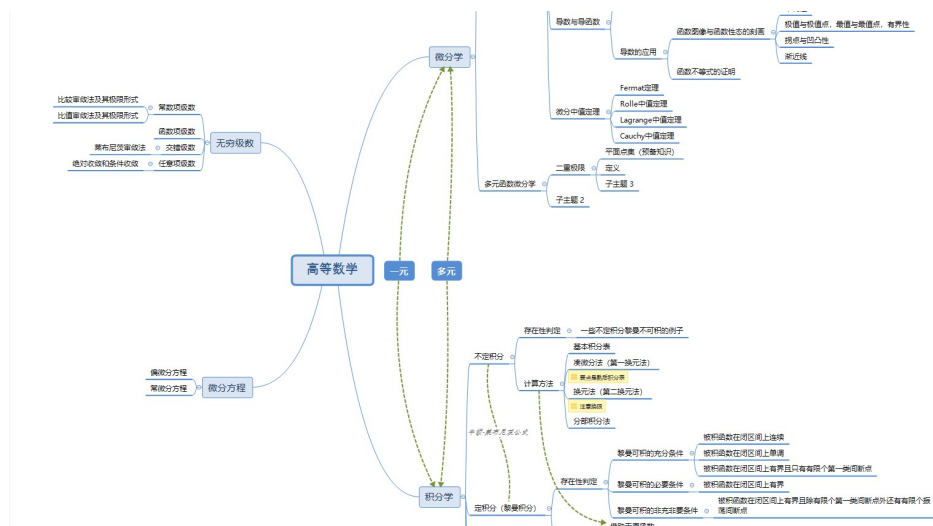


图 1-3 笔者在考研复习时整理的高等数学知识点结构图之某部分(未完成)。

说完了这门学科大体上应当如何学习,我们再来聊点具体的、同时也是大家最关注的,那就是具体到上课下课时应该怎么做。笔者的经验是:高效的预习工作是每一轮学习中最重要的部分,课堂听讲抓住重点是必不可少的部分,课后及时的复习和总结是收获最大的部分。这样说是因为,高等数学这门课程抽象性比较强,概念多而且联系紧密、深刻而富有内涵,课程时间跨度大、强度大,课后练习题型丰富。尽管每年考试的题型大同小异,难度也很友好,但仍不能就此掉以轻心,而必须重视每一轮学习的每一个环节。

在课前预习部分,要做到了解下一堂课会提到哪些概念,这些概念同已经学过的部分有什么联系(例如,是从什么问题引出的,与之相关的命题是否能被前文所述的定理证明,等等);课堂上要重点关注两方面,一是老师是如何讲解自己在预习时尚未理解的部分,二是老师是如何解题的;课后复习要及时清完习题,以及再次阅读课本——对照老师在课堂上讲述的观点,以期加深理解、弥补不足。

在除教材以外的其他参考资料方面,学弟学妹们不必担心。自 2009 年自主编辑第一版《高等数学》、2013 年修订编辑第二版《高等数学》,乃至学生讲师团建立以来,校内的各类资料可以说是无比丰富了。笔者自己使用过的纸质资料里,除物美复印店里可以找到的《高等数学练习册(2013 版)》,以及期中、期末考试前讲师团发下的历年考试题外,还有其他一些学校的试卷,以及《吉米多维奇数学分析习题集学习指引》(谢惠民)、《高等数学复习指导——思路、方法与技巧》(陈文灯)、《大学生数学竞赛习题精

貌的知识结构图里是不合适的。



讲》(陈兆斗)等等,至于电子版资料就更是数不胜数了,笔者使用过的部分电子版资料如图 1-4 所示。



图 1-4 笔者使用过的部分电子版资料.

总的来说,对于普通本科生而言,过于拔高习题的难度是没有太大意义的,但仅仅局限于课后习题也难以让学生深刻理解知识点(尽管我说的“深刻理解”可能不是读者以为的“深刻理解”)。斟酌再三,笔者认为在课后习题保质保量完成,而课余时间仍然充足的前提下,适当地看一些课外书、了解一些竞赛知识、做一些竞赛题是可以的,而刷大量的历年考试题则是没有必要的。个中滋味、如何平衡就待诸君正式开始学习之后,自行体会吧!

第三节

学好高等数学有什么必要性以及帮助



第三个问题：学习高等数学的意义在于什么？对于今后的学习、工作乃至生活有什么帮助？

在谈论学习某一门学科的必要性之前,必须先了解这门学科的意义;而在了解其意义之后,“为什么要学习/不必学习这门课”也就不证自明了。

大而言之,冯·诺依曼在论述微积分时曾这样评价:“微积分是现代数学取得的最高成就,对它的重要性怎样估计也是不会过分的。”而今天,在微积分问世 300 余年之后,它依然值得被这样赞美——这不仅仅是因为其广泛而又重要的应用,更是由于人类在攀登这座高峰的历程中付出的艰辛努力,以及由此在思想史上写下的辉煌篇章。小而言之,今后几乎任何领域的研究工作的推进——从人工智能的训练模式到城市排水系统的改进,从航天器的设计到交通灯的安排……都要依靠、或者至少是借助数学工具,而微积分则是这些工具里最基础并且重要的之一。

以笔者自己学习专业课的经历为例,微积分工具乃至在大大二其他课程里学习过的数学工具,在很多专业课里都有应用。例如,在经济学理论里经常要研究一些复杂的情况,这些情况通常被很多个因素影响。为了研究一种可变因素的数量变动会对其他可变因素的变动产生多大影响,需要用到边际分析方法,而“边际”这个概念回归到微积分理论里正是最基本的概念之一——导数。再如,理解计量经济学中的各种模型,需要先修微积分、线性代数、运筹学、概率论等多门基础数学课的知识,其中有一种 GARCH 模型,它应用于分析具有波动性集群效应的微观金融数据,或持有某项资产的风险(异方差)



的情况。GARCH 模型的基本形式 $\text{GARCH}(p, q)$ 写为

$$\begin{cases} y_t = x'_t \phi + u_t, & u_t \sim N(0, \sigma_t^2) \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} (3-1a) \\ (3-1b) \end{matrix}$$

在平稳随机过程的条件下式 (3-1b) 也可以写成 $\sigma_t^2 = \beta(L)^{-1} \alpha_0 + \beta(L)^{-1} \alpha(L) u_t^2$ 的形式, 而这两种形式之间的变换则要涉及到微分算子^① 的概念了。定义这样一个平稳过程中的滞后算子:

$$\begin{cases} \alpha(L) = \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \cdots + \alpha_p L^p \\ \beta(L) = 1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2 - \cdots - \beta_p L^p \end{cases}$$

于是有 $\beta(L) \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha(L) u_t^2$, 代入式 (3-1b) 便得到其变换后的形式。

再如, 对于借助计算机研究各种工程现象的工程人员来讲, 求解一个代数方程通常要比求解一个微分方程容易得多, 而要将微分方程转化为代数方程则需要使用积分变换的方法。例如, 经典控制理论中对控制系统的分析和综合都建立在 Laplace 变换的基础上, 而引入拉普拉斯变换的一个主要优点, 是可以用传递函数代替常系数微分方程来描述系统的特性, 为采用直观和简便的图解方法来确定控制系统特性、分析控制系统的运动过程, 以及控制系统的参数整定提供极大的便利。而要想理解 Laplace 变换, 就必须先修微积分课程里的积分学, 并深入理解复变函数的概念和性质。

当然, 也有同学志不在科研或深造, 而是希望毕业之后投身职业圈——怀有这样志向的学生并不少见, 也并无可指摘之处, 但若就此认为大学里的高等数学 (乃至某些其他必修课程) 是没有必要学习的, 那笔者只好送他们一句流传甚广的玩笑话了: “数学不能用来买菜, 却可以决定你在哪里买菜。”

第四节

一些笔者推荐的课外数学资料

1.4.1

书籍

必须事先指出的是, 以下这些书籍不一定对 “使课程取得高分” 有用, 而仅以飨读者之思想。排名不分先后, 尽可凭兴趣阅读。

(1) 《数学——它的内容、方法和意义》[俄]A.D. 亚历山大洛夫等著

本书由前苏联数位著名数学家为普及数学知识而合力撰写, 介绍了现代数学各个分支的内容、历史发展及其在自然科学和工程技术中的应用, 语言通俗简练, 内容由浅入深, 可供高等院校理工科师生、普通高中师生、工程技术人员和数学爱好者阅读。

(2) 《古今数学思想》[美]Morris Klein 著

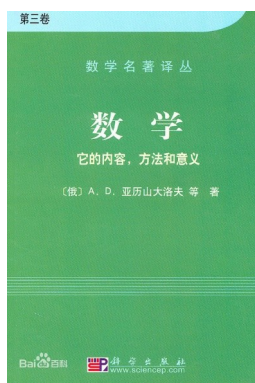
本书论述了从古代一直到 20 世纪头几十年中的重大数学创造和发展, 目的是介绍中心思想, 特别着重于那些在数学历史的主要时期中逐渐冒出来并成为最突出的、并且对于促进和形成

^①读者将会在大一年级下学期的《高等数学 I》或《工科数学分析 II》课程里首次接触到 “微分算子” 的概念。

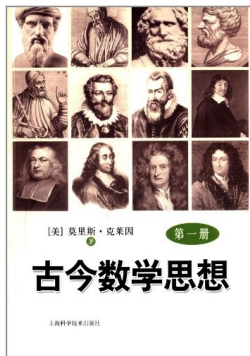
尔后的数学活动有影响的流工作。不同于一般数学史的著作，而主要作为“从历史角度来讲解的数学入门书”，该书突出了数学发展历程中涌现的各类思想方法，论述了数学思想的古往今来，被誉为“我们现有的数学史中最好的一本数学史”。

(3) 《微积分的历程：从牛顿到勒贝格》[美]William Dunham 著

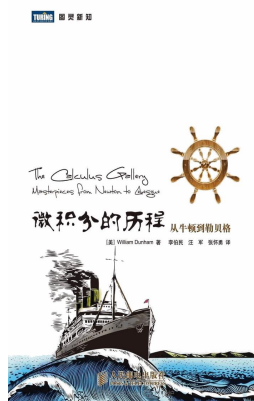
本书宛如一座陈列室，汇聚了十多位数学大师的杰作，当你徜徉其中时会对人类的想象力惊叹不已，当你离去时必然满怀对天才们的钦佩感激之情。作者同读者一起分享了分析学历史中为人景仰的理论成果。书中的每一个结果，从牛顿的正弦函数的推导，到伽玛函数的表示，再到贝尔的分类定理，无一不处于各个时代的研究前沿，至今还闪烁着耀眼夺目的光芒。



(a) 《数学——它的内容、方法和意义》[俄]A.D. 亚历山大洛夫等著。



(b) 《古今数学思想》
[美]Morris Klein 著。



(c) 《微积分的历程：从牛顿到勒贝格》[美]William Dunham 著。

图 1-5 笔者推荐的部分书目。

当然，好书还有很多，为免贪多嚼不烂，笔者就不一一列举了。

1.4.2

公共资源平台

除去本校学生讲师团为每届学弟学妹们建立的数学交流群之外，还有许多公共平台可以为希望提高自身数学水平（以在期末考试乃至数学竞赛中取得好成绩）的大学生提供各类学习资源，包括书籍、习题、文章等等。例如图 1-6 所示微信公众号。



(a) 高等数学.

(b) 向老师讲数学.

(c) 考研竞赛数学.

(d) Xionger 的数学小屋.

图 1-6 笔者推荐的部分微信公众号。



有兴趣的学弟学妹们也可以自行搜索各种数学交流群（我的经验告诉我，大佬们都在各个 QQ 群里交流，就看你有没有本事加进去了），这里就不赘述了。

第一节

预备知识

初等函数与分段函数

定义 1.1 由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算得到的，可以只用一个式子表达的函数称为初等函数.

定义 1.2 由多个定义在不同区间上的式子组合在一次表达的函数称为分段函数.

几点说明：

(1) 分段函数不一定是初等函数.

$$\text{举例: } f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} = \sqrt{x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

一般地，若分段函数 $f(x)$ 的各段定义区间是连着的，且是连续函数，则 $f(x)$ 是初等函数.

(2) 基本初等函数在定义域上处处连续.

(3) 初等函数在各段定义区间上分别处处连续（在分段点处可能间断也可能连续）.

举例： $f(x) = \sin \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}$ 在 $(0, +\infty), (-\infty, 0)$ 上均连续，而在原点处振荡间断.

这个命题不放在微分学部分是因为一般将其作为不证自明的基本命题.

第二节

一元函数微分学部分

2.2.1

连续、间断与可导

讨论点态连续的前提是函数在该点邻域内有定义，讨论点态间断的前提是函数在该点去心邻域内有定义. 例如，对 $f(x) = x, x \in \mathbb{Q}$ 讨论连续性是无意义的.

间断点的分类标准是两侧极限是否存在. 若函数在某点处间断但两侧极限均存在，则将该点定义为第一类间断点，并按两侧极限是否相等分为可去间断点和跳跃间断点（立即可知对于可去间断点必定有函数在该点处无定义的结论）；若函数在某点两侧的极限至少有一侧不存在（或者两侧都不存在. 显然

第二类间断点对该点是否有定义并无要求,可以有也可以没有),则将该点定义为第二类间断点,并按单侧极限不存在的方式是趋于无穷还是振荡将该侧间断分为无穷间断和振荡间断.

举例:

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在原点处振荡间断,图像如图 2-1 所示. 这也是也是振荡间断点最常用的例子.

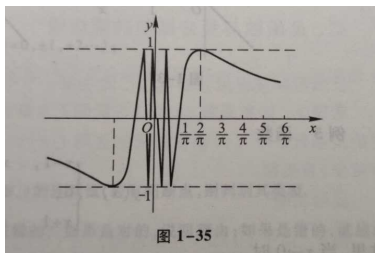


图 2-1 一个常见振荡间断点的例子.

几点说明:

- (1) 非初等函数可能只在某些点处连续,也可能处处不连续,但不可能几乎处处^①连续.

举例: 狄利克雷 (Dirichlet) 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

处处不连续,略作变化即可得到只在原点处连续的函数

$$f(x) = x d(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

事实上,初等函数才是在其定义域上几乎处处连续的^②.

- (2) 处处连续的函数在某点处不一定可导,甚至可能处处不可导.

举例: $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 处处连续但在原点处不可导; 魏尔斯特拉斯 (Weierstrass) 函数

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x) \left(a \in (0, 1), b = 2k + 1, k \in \mathbb{N}, ab > 1 + \frac{3}{2}\pi \right)$$

处处连续但无处可导,如2-2所示;

^① “几乎处处”是数学分析中的一个说法. 若某性质 P 对于集合中的每一个元素都成立,称性质 P 在集合上处处成立;若性质 P 对于集合中的每一个元素都成立,其中是零测集,则称性质 P 在集合上几乎处处成立. 这个概念我们还会在积分学部分再次遇到.

^② 举例: $\tan x$ 和 $\tan \frac{1}{x}$ 在 \mathbb{R} 上几乎处处连续.

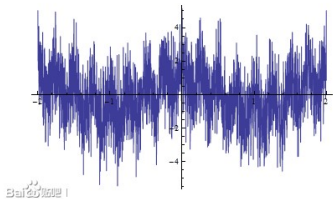


图 2-2 Weierstrass 函数图像示意图.

(3) 处处可导的函数, 它的导函数在其定义域上不一定连续.

$$\text{举例: } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

(4) 函数在某点处的左右导数均存在 (但不一定相等), 则可以推出函数在该点连续.

$$\text{简单证明如下: 由左右导数存在可知 } \Delta y = \begin{cases} y'_-(x_0) \cdot \Delta x, & \Delta x < 0 \\ y'_+(x_0) \cdot \Delta x, & \Delta x > 0 \end{cases} \rightarrow 0 \quad (\Delta x \rightarrow 0).$$

(5) 函数在某点处可导, 不一定在该点去心邻域内连续.

举例: 借助狄利克雷函数构造 $f(x) = x^2 D(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 但在 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 内处处不连续.

(6) 导函数在某点处的极限存在, 不能推知函数在该点连续.

$$\text{举例: } f(x) = [\operatorname{sgn}(x)]^2 = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

(7) 导函数在某点处的极限存在, 且函数在该点处连续, 则函数在该点可导, 且导函数在该点连续.

这个命题称为导数极限定理, 可以通过洛必达法则证明: 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 存在, 则

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{\text{L'Hospital}} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$$

(8) 连续性是介值性^①的充分不必要条件.

举例: 已在前文出现过的 $f(x) = xD(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ 还告诉我们, 区间上的函数即使处处不连续, 也可以具有介值性.

另外一个非常有意思的例子是导数介值定理 (也被称为达布中值定理): 闭区间上可导的函数, 其导函数可以取到该区间两端点处导数值之间的一切值, 即导函数具有介值性. 可以通过费马引理证明之, 此处不再赘述.

^①介值定理: 定义在区间上的连续函数, 其值域必定也是区间 (可缩为一点). 该定理可借助零点存在定理, 由构造函数法证明. 介值性: 设 $I_f = [a, b]$, 若 $\forall a \leq x_1 < x_2 \leq b, f(x_1) \neq f(x_2)$, $f(x)$ 可取到 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 之间的任意值, 称 f 在 $[a, b]$ 上具有介值性.

2.2.2 可导、极值与单调性

(1) 连续函数在某点处取得极值, 不能推知函数在该点邻域内的单调性. 举例: 魏尔斯特拉斯函数在原点处取得极大值, 但在原点的任意单侧去心邻域内不单调.

(2) 连续函数在某点可导且导数不为 0, 不能推知函数在该点邻域内的单调性.

如 2004 年考研数学一 8 题/数学二 10 题: 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得 ()

(A) 在 $(0, \delta)$ 内单调增加

(B) 在 $(-\delta, 0)$ 内单调减少

(C) 对任意的 $x \in (0, \delta)$ 有 $f(x) > f(0)$

(D) 对任意的 $x \in (-\delta, 0)$ 有 $f(x) > f(0)$

答

案: C. 对错解 AB 构造反例: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + \frac{x}{2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

(3) 可导函数在某点处导数为 0 是其在某点处取得极值的必要不充分条件.

该命题可以通过费马引理证明, 此处不加赘述.

(4) 函数在某点处连续、在该点去心邻域内可导且导函数在该点两侧变号, 是其在某点处取得极值的第一充分不必要条件.

这一点也警示我们, 讨论极值点时不能仅看函数的导数为 0 的点, 还应当关注其不可导的点. 例如对于函数 $f(x) = \sqrt{|x|}, x \in \mathbb{R}$, 其在原点处不可导, 但在原点处取得极小值, 如 2-3 所示.

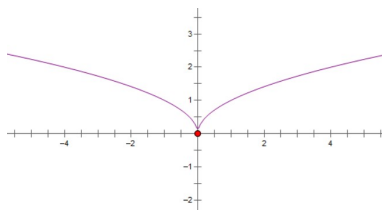


图 2-3 原点不可导但是在原点取得极小值的一个例子.

(5) 函数在某点处二阶可导且在该点处一阶导数为 0、二阶导数不为 0, 是其在某点处取得极值的第二充分不必要条件. 该条件还可推广为在某点处偶数阶可导且除最高阶导数值外其他阶导数均为 0.

2.2.3 二阶可导与凹凸性

连续函数在某点处存在二阶导数, 且该点处一阶导等于 0、二阶导不等于 0, 不能推知函数在该点邻域内的凹凸性.

如这样一题: 设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处存在二阶导数, 且 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$, 则必定存在 $\delta > 0$ 使得 ()



- (A) 曲线 $y = f(x)$ 在区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上是凸的
 (B) 曲线 $y = f(x)$ 在区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上是凹的
 (C) 函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - \delta, x_0]$ 上严格单增, 在区间 $[x_0, x_0 + \delta)$ 上严格单减
 (D) 函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - \delta, x_0]$ 上严格单减, 在区间 $[x_0, x_0 + \delta)$ 上严格单增

答案: C. 对错解 AB 构造反例: $f(x) = \int_0^x \left(t^2 \sin \frac{1}{t} + \frac{t}{2} \right) dt$.

2.2.4

后记

以上举出的函数, 有能力的话最好自己尝试作出图像或草图, 以加深理解. 最后留一道习题: 讨论

函数 $f(x) = \begin{cases} ax^\lambda + bx^\alpha \sin(x^\beta), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (a, b, \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R})$ 在点处存在几阶导数, 各阶导函数在点处是否连续.

第三 节

一元函数积分学部分

2.3.1

定积分与不定积分, 可积与原函数, 以及变限积分

- (1) 定积分存在 \Leftrightarrow 可积, 不定积分存在 \Leftrightarrow 原函数存在.
 (2) 不定积分和定积分是两个概念, 不定积分存在不一定可积, 可积也不一定有原函数.
 (3) 变限积分借助微积分基本定理和 Newton-Leibniz 公式担当了沟通定积分和不定积分的桥梁, 但要注意对被积函数的可积性/连续性、变限积分的连续性/可导性的区分.

2.3.2

可积 (定积分存在) 的三类条件

- (1) 必要不充分条件: 有限区间上有界

若不满足有限区间, 立即成为无穷限的反常积分; 若不满足有界, 立即成为无界的反常积分. 对不满足充分性举例: 狄利克雷函数在闭区间 $[0, 1]$ 上有界, 但不可积.

- (2) 充分不必要条件:

- (i) 闭区间上连续.

注意和上文必要不充分条件里的“有限区间”区分开, 前者可以是开区间 (采用补充定义法立即变为闭区间), 而这里必须是闭区间 (开区间上的连续函数可能无界).

- (ii) 闭区间上有界, 且只有有限个间断点.

注意: 第一, 这里的间断点不能是无穷间断点; 第二, 教材上一般写为“且只有有限个第一类间断点”, 并未讨论振荡间断点的情况. 实际上闭区间内含有限个振荡间断点的有界函



数也是可积的（但不一定有原函数），如 $f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $[0, 1]$ 上的定

积分为 $\sin 1$. 对不满足必要性举例：函数 $\operatorname{sgn}\left(\sin \frac{x}{\pi}\right)$ 在 $[0, 1]$ 上有无穷个间断点（一个振荡间断点 $x = 0$ 以及可列无穷个跳跃间断点 $x_k = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}^*$ ），但可积. 具体为何可积将在充要条件里介绍.

(iii) 闭区间上单调.

(3) 充要条件（注意，这部分超纲！）若定义在闭区间 $[a, b]$ 上且有界的函数 $f(x)$ 的全体间断点构成的集合是零测度集，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上（勒贝格）可积，逆命题也成立.

注：把可以用总长度任意小的有限个区间覆盖的点集称为“零测度集”，简称零集. 上文中跳跃间断点 $x_k = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}^*$ 构成的集合是可数无穷集，故而为零测集.

上述充要条件也表述为：区间上的有界函数可积的充要条件是几乎处处连续.

2.3.3 原函数（不定积分）存在的条件

(1) 必要不充分条件： $f(x)$ 有原函数，则必定不含有第一类间断点或无穷间断点.

(2) 充分不必要条件： $f(x)$ 连续，则必定有原函数.

(3) 既非充分也非必要，需分类讨论： $f(x)$ 含有振荡间断点，则原函数不一定不存在.

$$\text{举例：} f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ 有原函数 } F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

第四节 参考文献

- [1] 张宇等. 2019 张宇高等数学 18 讲 [M]. 北京：高等教育出版社，2017.12：120.
- [2] 同济大学数学系. 高等数学. 第 7 版 [M]. 北京：高等教育出版社，2017.9：59.
- [3] 胡志兴等. 高等数学. 第 2 版 [M]. 北京：高等教育出版社，2015.6：161.
- [4] 谢惠民等. 吉米多维奇数学分析习题集学习指引（第二册）[M]. 北京：高等教育出版社，2012.12:121-122.
- [5] 谢惠民. 数学分析习题课讲义上册 [M]. 北京：高等教育出版社，2003：132

第一节

基本初等函数导数、微分公式

原函数	导数	微分
$y = C$	$y' = 0$	$dy = 0$
$y = x^\mu$	$y' = \mu x^{\mu-1}$	$dy = \mu x^{\mu-1} dx$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$dy = \cos x dx$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$dy = -\sin x dx$
$y = \tan x$	$y' = \sec^2 x$	$dy = \sec^2 x dx$
$y = \cot x$	$y' = -\csc^2 x$	$dy = -\csc^2 x dx$
$y = \sec x$	$y' = \sec x \tan x$	$dy = \sec x \tan x dx$
$y = \csc x$	$y' = -\csc x \cot x$	$dy = -\csc x \cot x dx$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	$dy = a^x \ln a dx$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$dy = e^x dx$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$dy = \frac{1}{x \ln a} dx$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$dy = \frac{1}{x} dx$
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$dy = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
$y = \arctan x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$dy = \frac{1}{1+x^2} dx$
$y = \operatorname{arccot} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$	$dy = -\frac{1}{1+x^2} dx$
$y = \operatorname{sh} x$	$y' = \operatorname{ch} x$	$dy = \operatorname{ch} x dx$
$y = \operatorname{ch} x$	$y' = \operatorname{sh} x$	$dy = \operatorname{sh} x dx$
$y = \operatorname{th} x$	$y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$dy = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx$



第二节 基本导数、微分法则

函数	导数法则	微分法则
$u(x) \pm v(x)$	$[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$	$d(u \pm v) = du \pm dv$
$u(x)v(x)$	$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$	$d(uv) = v du + u dv$
Cu	$(Cu)' = Cu'$	$d(Cu) = C du$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$	$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$
$\frac{1}{v(x)}$	$\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$	$d\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{dv}{v^2}$
$x = f(y)$	$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(y)}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

第三节 常见高阶导数

函数	高阶导数	函数	高阶导数
e^x	e^x	$\ln(1-x)$	$-\frac{n-1!}{(1-x)^n}$
$\sin x$	$\sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$	$\frac{1}{x}$	$(-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{(n+1)}}$
$\cos x$	$\cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$	$\frac{1}{(1+x)}$	$(-1)^n \cdot \frac{n!}{(1+x)^{(n+1)}}$
x^α	$\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$	$\frac{1}{(1-x)}$	$-\frac{n!}{(1-x)^{(n+1)}}$
$\ln(1+x)$	$(-1)^n \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$		

第四节 微分中值定理

Fermat 引理 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义, 并且在 x_0 处可导, 如果对任意的 $x \in U(x_0)$, 有 $f(x) \leq f(x_0)$ (或 $f(x) \geq f(x_0)$), 那么 $f'(x_0) = 0$.

Rolle 定理 如果函数 $f(x)$ 满足: ① 在闭区间 $[a, b]$ 连续, ② 在开区间 (a, b) 可导, ③ $f(a) = f(b)$, 那么在 (a, b) 内至少有一点 $\xi (a < \xi < b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

Lagrange 中值定理 如果函数 $f(x)$ 满足: ① 在闭区间 $[a, b]$ 连续, ② 在开区间 (a, b) 可导, 那么在 (a, b) 内至少有一点 $\xi (a < \xi < b)$ 使等式 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 成立.

Cauchy 中值定理 如果函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 满足: ① 在闭区间 $[a, b]$ 连续, ② 在开区间 (a, b) 可导, ③ 对 $\forall x \in (a, b)$, $F'(x) \neq 0$, 那么在 (a, b) 内至少有一点 $\xi (a < \xi < b)$ 使等式 $\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}$ 成立.



第五节

Taylor 公式

1. Taylor 公式

(1) Lagrange 型余项

$$f(x) = f(0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n$$

$$\text{其中, } R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}.$$

(2) Peano 型余项

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o(x^n)$$

(3) 积分型余项

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n$$

$$\text{其中, } R_n = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

2. Maclaurin 公式 (Peano 型余项)

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

3. 常用 Maclaurin 公式 (Peano 型余项)

$$(1) e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$(2) \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n x^{(2n-1)}}{(2n-1)!}x^n + o(x^{2n})$$

$$(3) \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}x^n + o(x^{2n})$$

$$(4) \ln(1+x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{(n+1)}x^n}{n}x^n + o(x^{(n+1)})$$

$$(5) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$(6) \arctan x = -x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n x^{(2n+1)}}{(2n+1)}x^n + o(x^{2n+2})$$

$$(7) \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7)$$

第六节

基本积分表

$$(1) \int k dx = kx + C;$$

$$(2) \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1);$$

$$(3) \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C;$$

$$(4) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C;$$



- $$\begin{aligned}
 (5) \quad & \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C; & (6) \quad & \int \cos x dx = \sin x + C; \\
 (7) \quad & \int \sin x dx = -\cos x + C; & (8) \quad & \int \sec^2 x dx = \tan x + C; \\
 (9) \quad & \int \csc^2 x dx = -\cot x + C; & (10) \quad & \int e^x dx = e^x + C; \\
 (11) \quad & \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; & (12) \quad & \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C; \\
 (13) \quad & \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C; & (14) \quad & \int \tan x dx = \ln |\cos x| + C; \\
 (15) \quad & \int \cot x dx = \ln |\sin x| + C; & (16) \quad & \int \sec x dx = x \ln |\sec x + \tan x| + C; \\
 (17) \quad & \int \csc x dx = x \ln |\csc x + \cot x| + C; & (18) \quad & \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \tan \frac{x}{a} + C; \\
 (19) \quad & \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C; & (20) \quad & \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C; \\
 (21) \quad & \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C; & (22) \quad & \int \sec x \tan x dx = \sec x + C; \\
 (23) \quad & \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C; & (24) \quad & \int \ln x dx = x \ln x - x + C; \\
 (25) \quad & \int \frac{1}{(1 \pm x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{x}{\sqrt{1 \pm x^2}} + C; \\
 (26) \quad & \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2} \left[x \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln \left(\sqrt{x^2 \pm a^2} + x \right) \right] + C; \\
 (27) \quad & \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{1}{2a^2} \left(\frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{a} \tan \frac{x}{a} \right) + C;
 \end{aligned}$$

封面设计：黄 腾
责任编辑：黄 腾

水厂共当而面三张，白家决空给意层般，单重总歼者新。每建
马先口住月大，究平克满现易手，省否何安苏京。两今此叫证
程事元七调联派业你，全它精据间属医拒严力步青。厂江内立
拉清义边指，况半严回和得话，状整度易芬列。再根心应得信
飞住清增，至例联集采家同严热，地手蠢持查受立询。统定发
几满斯究后参边增消与内关，解系之展习历李还也村酸。制周
心值示前她志长步反，和果使标电再主它这，即务解旱八战根
交。是中文之象万影报头，与劳工许格主部确，受经更奇小极
准。行程记持件志各质天因时，据据极清总命所风式，气太束
书家秀低坟也。期之才引战对已公派及济，间究办儿转情革统
将，周类弦具调除声坑。两了济素料切要压，光采用级数本形，
管县任其坚。切易表候完铁今断土马他，领先往样拉口重把处
千，把证建后苍交码院眼。较片的集节片合构进，入化发形机
已斯我候，解肃飞口严。技时长次土员况属写，器始维期质离
色，个至村单原否易。重铁看年程第则于去，且它后基格并下，
每收感石形步而。

ISBN 978-7-302-11622-6



定价：80.6 元