

主題：兩物體系統的力學分析

1. 涉及的力

在分析系統時，考慮以下幾種常見的力：

- 重力 (W)： $W = mg$ ，物體因地球引力產生的重量。
- 張力 (T)：繩子或連接物體之間的拉力。
- 正向力 (N)：物體受到的地面支撐力。
- 摩擦力 (f)：若有摩擦，則需考慮摩擦力。

2. 系統分析步驟

1. 力的分解與分析：

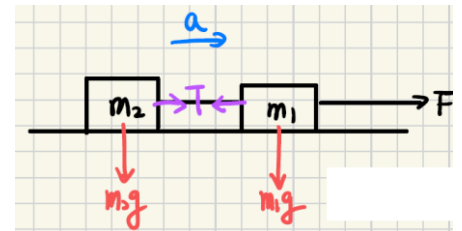
- 每個物體受到的力獨立分析，並標示所有作用力（如 T 、 W 、 N 等）。
- 根據需要選擇水平或垂直方向。

2. 應用牛頓第二定律：

- 每個物體滿足 $\Sigma F = ma$ 。
- 根據物體之間的聯動性，建立聯立方程。

3.

- 兩物體 m_1 和 m_2 ：通過一根繩子相連，繩子上存在張力 T 。
- 外力 F 施加在 m_1 上，使兩物體一起加速。
- 假設無摩擦。



4. 公式推導

1. 對 m_1 分析：水平方向合力： $\Sigma F_1 = F - T = m_1 a$
2. 對 m_2 分析：水平方向合力： $\Sigma F_2 = T = m_2 a$
3. 聯立 (1) 和 (2)：

- $F - T = m_1 a$
- $T = m_2 a$

將 T 代入第一式： $F - m_2 a = m_1 a$

解出加速度 a ： $a = \frac{F}{m_1 + m_2}$

4. 張力 T 的計算：將 a 代入 $T = m_2 a$ ：

$$T = m_2 \cdot \frac{F}{m_1 + m_2}$$

5. 結論公式

- 加速度 a ：

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

- 張力 T ：

$$T = \frac{m_2 F}{m_1 + m_2}$$

應用範例

- 如果 $m_1 = 5kg$, $m_2 = 3kg$ ，施加力 $F = 16N$ ：
加速度：

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{16}{5 + 3} = 2 \text{ m/s}^2$$

張力：

$$T = \frac{m_2 F}{m_1 + m_2} = \frac{3 \cdot 16}{5 + 3} = 6 \text{ N}$$

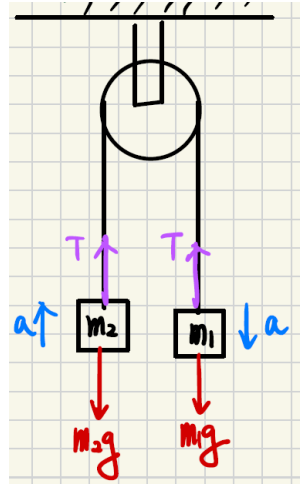
主題：Atwood 機的動力學分析

1. Atwood 機的基本假設

- 兩個質量 m_1 和 m_2 通過無摩擦滑輪和輕繩相連。
- 假設 $m_1 > m_2$ ，則 m_1 向下運動， m_2 向上運動。
- 不考慮摩擦，繩子的張力 T 為同一大小。

2. 步驟 1：力的分解

- 對 m_1 ：
 - 向下的重力： $m_1 g$
 - 向上的張力： T
 - 合力： $\Sigma F_1 = m_1 g - T = m_1 a$ (1)
- 對 m_2 ：
 - 向上的張力： T
 - 向下的重力： $m_2 g$
 - 合力： $\Sigma F_2 = T - m_2 g = m_2 a$ (2)



3. 步驟 2：聯立方程

將 (1) 和 (2) 相加以消去 T

$$m_1 g - T + T - m_2 g = m_1 a + m_2 a$$

整理得： $(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)a$

解出加速度 a ： $a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$

這是 Atwood 機的加速度公式。

4. 步驟 3：計算張力 T

將 $a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$ 代入 (2)： $T = m_2(g + a)$

代入 a 的表達式：

$$T = m_2 \left(g + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \right)$$

整理得：

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

這是 Atwood 機的張力公式。

5. 結論公式

1. 加速度 a : $a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$

2. 張力 T :

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

6. 應用範例

若 $m_1 = 6kg, m_2 = 4kg$, 則 :

1. 加速度 : $a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{6 - 4}{6 + 4} g = \frac{1}{5} g = 0.2g$

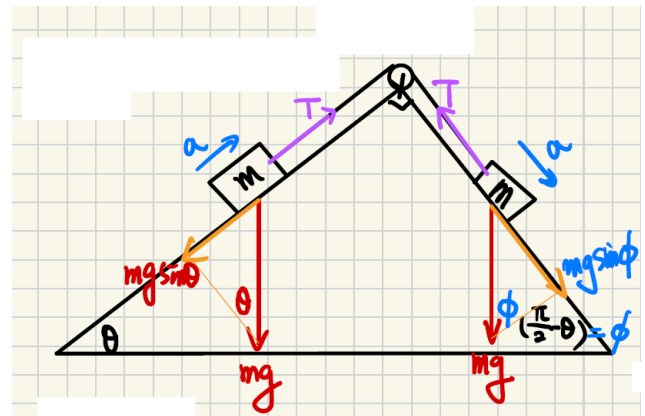
2. 張力 :

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{2 \cdot 6 \cdot 4}{6 + 4} g = 4.8g$$

主題：斜面滑輪系統的動力學分析

1. 基本假設

- 質量 m 的物體放在傾角 θ ($\theta < 45^\circ$) 的光滑斜面上，無摩擦。
- 繩子通過滑輪連接，物體沿斜面運動。
- 重力 mg 可以分解為：
 - 平行於斜面的分量： $mg \sin \theta$
 - 垂直於斜面的分量： $mg \cos \theta$
- 張力 T 沿繩子方向作用。



2. 力的分解與平衡方程

1. 斜面物體的運動（平行斜面方向）：根據牛頓第二定律 $\Sigma F = ma$:

$$T - mg \sin \theta = ma \quad (1)$$

2. 滑輪另一側的物體（垂直方向）：根據牛頓第二定律：

$$mg \cos \theta - T = ma \quad (2)$$

3. 公式推導

將 (1) 和 (2) 聯立解出加速度 a 和張力 T :

1. 求加速度 a : 將 (1) 和 (2) 相加以消去 T : $T - mg \sin \theta + mg \cos \theta - T = 2ma$

整理得 : $a = \frac{g}{2} (\cos \theta - \sin \theta)$

2. 求張力 T : 將 $a = \frac{g}{2} (\cos \theta - \sin \theta)$ 代入 (1) :

$$T = mg \sin \theta + ma = mg \sin \theta + m \cdot \frac{g}{2} (\cos \theta - \sin \theta)$$

整理得 : $T = \frac{mg}{2} (\sin \theta + \cos \theta)$

4. 結論公式

1. 加速度 a : $a = \frac{g}{2}(\cos \theta - \sin \theta)$
2. 張力 T :

$$T = \frac{mg}{2}(\sin \theta + \cos \theta)$$

應用範例

若 $m = 2\text{kg}$ ，傾角 $\theta = 30^\circ$ ，則：

1. 加速度 a :

$$a = \frac{9.8}{2}(\cos 30^\circ - \sin 30^\circ)$$

使用 $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$:

$$a = \frac{9.8}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{9.8}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \approx 2.12 \text{ m/s}^2$$

2. 張力 T :

$$T = \frac{2 \cdot 9.8}{2}(\sin 30^\circ + \cos 30^\circ)$$

$$T = 9.8 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 9.8 \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \approx 12.73 \text{ N}$$

重點總結

- a 和 T 的值由傾角 θ 和物體的質量 m 決定。
- 系統的動力學分析基於牛頓第二定律和重力分解。

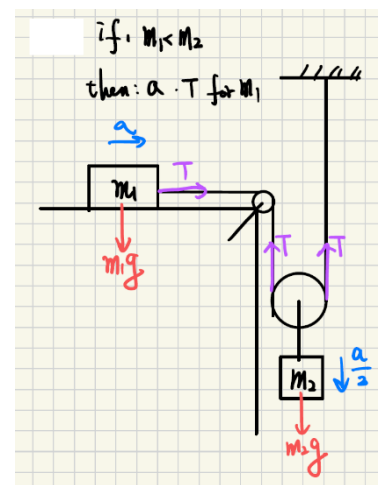
應用問題: 右圖描述了一個 **複雜滑輪系統**，涉及兩個質量 m_1 和 m_2 ，其中 m_1 位於水平面上， m_2 懸掛在滑輪下方。目的是分析 m_1 的加速度 a 和繩子的張力 T 。

1. 系統描述與假設

- 質量 m_1 位於光滑的水平面上（無摩擦）。
- 質量 m_2 垂直懸掛，受到重力 m_2g 。
- 繩子不可伸長，且滑輪無摩擦。
- 假設 $m_2 > m_1$ ，因此 m_2 向下運動， m_1 向右運動。

2. 力的分解與運動方程

1. 對 m_1 （水平運動）：
 - 張力 T 向右施加。
 - 根據牛頓第二定律： $\Sigma F_1 = T = m_1 a$ (1)
2. 對 m_2 （垂直運動）：
 - 向下的重力： m_2g
 - 向上的繩子張力： $2T$ （因為滑輪有兩根繩子施加張力）。



- 根據牛頓第二定律： $\Sigma F_2 = m_2 g - 2T = m_2 \frac{a}{2}$ (2) (滑輪的設計使得繩子的運動分配在兩段，導致 m_2 的運動速度和加速度都是 m_1 的一半。)

3. 聯立方程求解

1. 將 $T = m_1 a$ 代入 (2)：

$$m_2 g - 2m_1 a = m_2 \frac{a}{2}$$

2. 整理方程：

$$\left(\frac{m_2}{2} + 2m_1\right) a = m_2 g$$

3. 解出加速度 a ：

$$a = \frac{m_2 g}{\frac{m_2}{2} + 2m_1} = \frac{2m_2 g}{4m_1 + m_2}$$

4. 將 a 代入 $T = m_1 a$ ，得到張力 T ：

$$T = m_1 a = \frac{2m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2}$$

結論公式

加速度 a ：

$$a = \frac{2m_2 g}{4m_1 + m_2}$$

張力 T ：

$$T = \frac{2m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2}$$

應用範例

若 $m_1 = 2\text{kg}$, $m_2 = 4\text{kg}$ ，則：

加速度 a ：

$$a = \frac{2m_2 g}{4m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 4}{4 \cdot 2 + 4} g = \frac{2}{3} g \text{ m/s}^2$$

張力 T ：

$$T = \frac{2m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4}{4 \cdot 2 + 4} g = \frac{4}{3} g \text{ N}$$

重點總結

- 此系統的關鍵在於正確處理繩子的張力和滑輪的影響。
- 加速度 a 和張力 T 同時受到兩個質量的影響。
- 滑輪的設計使得 m_2 的運動加速度被分成一半。

主題：正向力的分析與應用

1. 基本概念

- 正向力 (N):

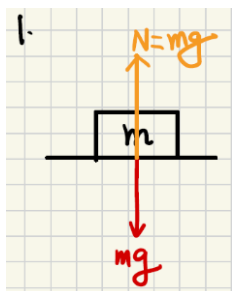
- 是接觸面對物體施加的垂直反作用力。
- 通常用於平衡垂直於接觸面的其他力（如重力、垂直分量的外力等）。

公式推導基於牛頓第二定律 $\Sigma F = ma$ 。

2. 圖例分析

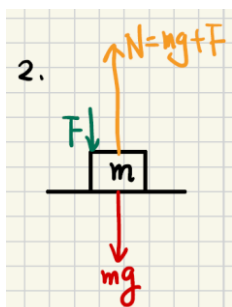
(1) 基本情況：水平靜止

- 僅受重力 mg 和正向力 N : $N = mg$



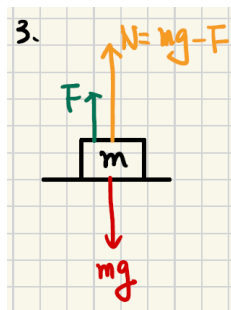
(2) 向下額外施加力 F

- 垂直向下施力 F 增加了接觸壓力: $N = mg + F$



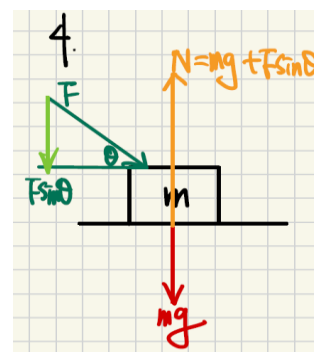
(3) 垂直向上施加力 F

- 垂直向上施力 F 減少了接觸壓力: $N = mg - F$



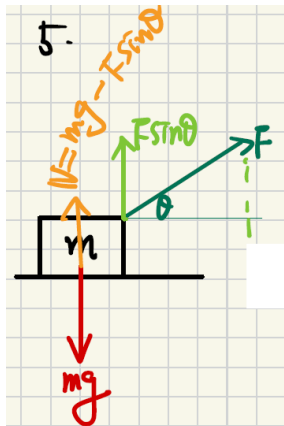
(4) 水平施力的影響 (有角度 θ)

- 力 F 有一個向下的垂直分量 $F \sin \theta$ ，增加接觸壓力:
- $N = mg + F \sin \theta$



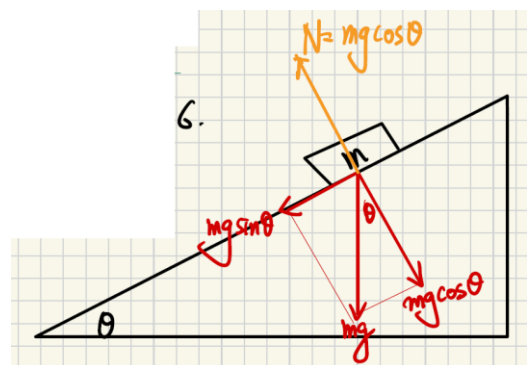
(5) 水平施力（反方向影響）

- 力 F 的垂直分量向上，減少接觸壓力： $N = mg - F \sin \theta$



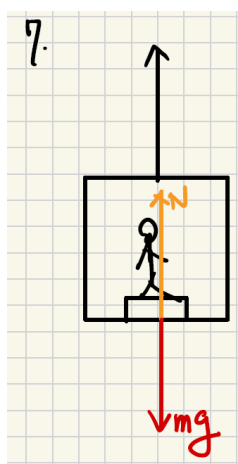
(6) 斜面上的物體

- 物體受到重力 mg ，但重力分解為：
 - 平行於斜面的分量： $mg \sin \theta$
 - 垂直於斜面的分量： $mg \cos \theta$
- 正向力 N 僅平衡垂直分量： $N = mg \cos \theta$



(7) 電梯中的情況

- 當電梯加速或減速時，正向力會隨著電梯的加速度 a 改變：
 - 電梯向上加速 ($a > 0$): $N = m(g + a)$
 - 電梯靜止或等速運動 ($a = 0$): $N = mg$
 - 電梯向下加速 ($a < 0$): $N = m(g - a)$
 - 自由落體 ($a = g$): $N = m(g - g) = 0$ (失重狀態)



重點結論

- 正向力的大小由外力與運動狀態共同決定，不僅僅是物體的重力 mg 。
- 斜面問題：正向力平衡的是垂直於斜面的力分量 $mg \cos \theta$ 。
- 電梯問題：正向力反映了運動的加速或減速效應，可出現「失重」現象。