运筹学与数学建模课程论文

班　　级：数学与统计学院 2018 级数据科学班

学生姓名　　　　学号

王萦　　　　　201800810253

叶家辉　　　　201800830004

日　　期：2020 年 12 月 29 日

得　　分:

全局最小割的问题分析及算法研究

摘　要：全局最小割问题是图论中的重要问题，在工程实践中有着广泛的应用场景和光明的应用前景。在深入研究问题前，先对问题有一个全局性的认识是至关重要的。本文首先定性地探讨了什么是最小割和全局最小割问题，并进一步分析了它们的时间复杂度，对它们是否属于P问题或NP问题做出了讨论。针对求解全局最小割的问题，历史上已有许多研究者提出了一系列行之有效的巧妙方法，其中包括通过引入随机方法降低复杂度的Karger算法和通过循环查找任意s-t最小割来找到全局最小割的Stoer-Wagner算法。本文从理论与实践两方面深入研究了这两种算法，并借助Python程序设计语言进行了算法实现。然后，在六个给定的网络上对上述基于Python实现的两种算法进行了测试，用以检验算法的可靠性。最后，结合搜集到的文献资料与自己的实验研究，对两种算法的改进和推广提出可能的方案。

关键词：全局最小割、P/NP问题、Karger算法、Stoer-Wagner算法

1 最小割与全局最小割问题的概述

最小割问题是图论中的典型问题之一，指的是将图的顶点划分为两个集合，使得端点分别位于这两个集合的一组边总权重最小。它在现实生活中有非常多的实际应用，如网络可靠性分析等。

最小割问题有许多不同的定义，大体上可分为 s-t 最小割和无 s-t 最小割两类。当图中给定了源节点(source)和宿节点(sink)，要求源节点和宿节点必须分别位于划分后的两个集合，该类问题称为 s-t 最小割问题；若不指定源节点与宿节点，该类问题称为无 s-t 最小割问题。

而网络本身可从是否具有权重和方向的角度分为加权图、无权图和有向图、无向图，由于无权图可视为权重相等且均为 1，因此上述两类最小割问题可细分为有向加权和无向加权两种情形。特别的，在无 s-t 和无向的情形下，最小割问题也称全局最小割问题。

<table>
<tr><td rowspan="4">最小割问题</td><td rowspan="2">s-t 最小割</td><td>有向加权</td></tr>
<tr><td>无向加权</td></tr>
<tr><td rowspan="2">无 s-t 最小割</td><td>有向加权</td></tr>
<tr><td>无向加权/全局最小割</td></tr>
</table>

目前，已有许多算法可以解决最小割问题。我们在第一小节中对表格前三种类型的最小割进行了细致探讨，在第二小节中论述了全局最小割问题，第三小节对最小割的变体——最小 k 割进行了简单介绍。

1.1 最小割问题的探讨

1.1.1 s-t 有向加权情形

s-t 最小割问题指定了源节点与宿节点，在有向加权情形下，由最大流最小割定理易知，此时要求解的 s-t 最小割问题，可以转换为其对偶问题——s 为源点，t 为汇点的最大流问题。目前，存在许多多项式时间的算法可以解决最大流问题。下面以寻找增广路的 Edmond-Karp 算法为例，对 s-t 最小割的问题进行求解。

Edmond-Karp 算法的步骤如下：

1. 初始化网络；
2. 利用 BFS（广度优先搜索）在残差网络中找到一条 s 至 t 的最短路径，即增广路；
3. 令这条增广路上允许通过的最大流量为 Min，增广路所有正向边的剩余流量减去 Min，反向边加上 Min；
4. 重复步骤 2、3，直到没有增广路的存在。

接下来分析该算法的时间复杂度。从上述算法步骤可以看出，算法总时间 = BFS 运行时间 × BFS 运行次数。在实际分析中，我们发现关键边的个数与 BFS 运行次数是等价的。关键边，指剩余容量恰为该增广路允许通过的最大流量的边。我们有如下定理：

定理： *Edmond-Karp 算法中关键边的总数为*$O(VE)$。

证明： 首先，对于关键边(u,v)，由于(u,v)位于最短路径上，因此有$d[v] = d[u] + 1$。增广后，(u,v)重新成为关键边的条件是(v,u)出现在新的增广路上，此时$d'[u] = d'[v] + 1$。因为每次增广都会使 s 到所有顶点 v∈V−{s,t}的最短距离 d[v]增大，$d'[v] \geq d[v]$。于是有$d'[u] \geq d[v] + 1 = d[u] + 2$，即边(u,v)从成为关键边到下一次成为关键边，源结点 s 到 u 的距离至少增加 2 个单位。同时，源结点 s 到 u 的中间结点不可能包括 s、u 或 t，所以$d[u]$距离最长为$|V| - 2$。

因此，每条边最多做关键边$\frac{|V|}{2}-1$次。图中共有 E 条边，所以关键边的总数为$O(VE)$。证毕。

而每次 BFS 运行时间为$O(E)$，故 Edmond-Karp 算法的复杂度为$O\left(VE\right)\times O\left(E\right)=O\left(VE^2\right)$。由此可得出结论，存在多项式时间算法 Edmond-Karp 找到最大流(s-t 最小割)。同时可以断定，有向加权的 s-t 最小割问题属于 P 类问题。

由于 P 类问题是 NP 类问题的子集，因此有向加权的 s-t 最小割既属于 P 类问题，也属于 NP 类问题。

1.1.2 s-t 无向加权情形

对于无向加权情形，我们可以将其当做有向情形来处理——为每一条无向边建立两条反向的有向边，其中，反向边的容量和正向边相同。而利用 EK 算法进行求解的过程中，这两条边都会生成对应的反向边。因此，一条无向边实际上对应 4 条边。

由上可知，无向加权的 s-t 最小割既属于 P 类问题，也属于 NP 类问题。

1.1.3 无 s-t 有向加权情形

在无 s-t 的情形下，我们可以在图中固定一点作为 s，穷举所有可能的 t，分别求解 s-t 最小割，其中最小值即为求解的最小割。

在 1.1.1 中，我们得出结论，有向加权情形下，存在 Edmond-Karp 算法使得找到某一指定 s-t 最小割的时间复杂度为$O(VE^2)$。因此，通过上述的穷举方式得到全局最小割的时间复杂度为$O\left(VE^2\right)\times O\left(V\right)=O\left(V^2E^2\right)$。

由上可知，有向加权的无 s-t 最小割既属于 P 类问题，也属于 NP 类问题。

1.2 全局最小割问题的探讨

由定义知，全局最小割是无向加权的无 s-t 最小割问题。类似的，可以通过 1.1.3 中的穷举方式求解。

在 1.1.2 中，我们得出结论，无向加权的 s-t 最小割问题可以在多项式时间内求解。因此，通过穷举方式仍然可以在多项式时间内求解全局最小割。

由上可知，全局最小割既属于 P 类问题，也属于 NP 类问题。

从算法复杂度来看，虽然我们能够在多项式时间内求解全局最小割问题，

但在实际生活中，需要处理的往往是大型网络，运行效率仍然很低。因此，出现了许多随机化算法寻找全局最小割。后文我们将深入探讨 Karger 算法和 Stoer-Wagner 算法，它们的出现极大地提升了寻找全局最小割的效率。

1.3 最小 k 割的探讨

最小 k 割问题是最小割问题的延伸。它指的是移除掉该组割后，形成了 k 个连通分量。通过查阅文献[1]，我们了解到，对于固定的 k，存在多项式时间算法解决最小 k 割问题；若 k 不确定，是程序的额外输入，则是一个 NPC 问题。

因此，我们得出结论：对于固定的 k，最小 k 割是 P 问题，也是 NP 问题；若 k 不固定，它是一个 NPC 问题，自然也是 NP 问题。但目前不存在多项式时间解决算法，因此无法确定是否为 P 问题。

2 全局最小割求解算法

2.1 Karger 算法

2.1.1 算法概述

Karger 算法是非常著名的基于随机化思想的全局最小割算法，它的描述十分简单：随机选择图中一条边，把边的两个端点合二为一。将原来与这两个点相邻的边连到合并后的节点去，同时删除所有由于合并而形成自环的边。当合并至图中仅剩下两个点时，一次搜索结束，得到一组割，并保存两点之间的边数。

可以看到，由于随机选取，上述的合并过程找到的割并不一定是全局最小割。但若将此过程重复执行，我们能够以低于某个极小值的失败概率获得全局最小割。这就是 Karger 算法的基本思想。

2.1.2 理论分析

这一节将从数学理论的角度分析算法的正确性。

以 n 个点的无向图为例进行说明。假设实际的全局最小割的边数为 c，由反证法易知，图中每个点的度数至少为 c（否则若某个点的度数小于 c，可以将这个点和其余点分开，形成的割边数小于 c，与假设矛盾），那么整张图至少有$\frac{nc}{2}$条边。

由于图的全局最小割可能不止一种，在这里仅考虑一组特定割的情况。假设这一组割边数为 c。要想获得正确的全局最小割，在选择边进行合并时则不能选到这特定的 c 条边。即：

$$P(\text{未选择最小割集中的边}) = 1 - \frac{c}{\text{总边数}} \geq 1 - \frac{2}{n} \ (1)$$

注意到，上述概率不等式（1）在整个合并过程中均成立。由此可推出，一次合并过程找到的割恰好为全局最小割的概率至少为：

$$\left(1-\frac{2}{n}\right)\times\left(1-\frac{2}{n-1}\right)\cdots\times\left(1-\frac{2}{3}\ \right)=\frac{n-2}{n}\times\frac{n-3}{n-1}\cdots\times\frac{1}{3}\ =\frac{2}{n\,(n-1)}\ \ \geq\frac{1}{n^2}\ (2)$$

因此，执行一次 Karger 算法找到全局最小割的概率小于或等于 $1-\frac{1}{n^2}$，执行 m 次未找到全局最小割的概率则在$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^m$以下。当取 $m =\ n^2 \ln n$ 时，易知：

$$P(\text{执行 } n^2 \ln n \text{ 次未找到全局最小割}) \leq \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2 \ln n} \leq e^{-\ln n} = \frac{1}{n} \ (3)$$

当 $n\rightarrow\infty$，即网络中的点足够多的时候，失败的概率极小，可忽略不计。

2.1.3 python 实现

2.1.3.1 库函数的导入与操作

网络的输入一般是一系列包含两个结点序号的数对，其中每个数对表示一条边。直接处理这样的数据是抽象的、困难的，因此第一步需要将输入的网络转化成邻接矩阵的表示形式。这一过程可以借助 NetworkX 工具包来实现。

而对于矩阵的操作就需要借助 NumPy 工具包，这可以大大降低操作难度，提升操作效率。

库函数的导入具体代码如下所示：

```
import numpy as np
import networkx as nx
```

在程序中，我们从外部读入.txt 文件（以 Benchmark Network 为例），用这些点与边的数据为初始化的图添加点和边，再借助 NetworkX 获得这张图的邻接矩阵 G_mat。当然，也可以选择把这张图打印出来。

网络操作的具体代码如下所示：

```
E = np.loadtxt("data/BenchmarkNetwork.txt")
G = nx.Graph()
G.add_edges_from(E)
A = nx.adjacency_matrix(G)      # 得到图的邻接矩阵
G_mat = A.todense()
# print('邻接矩阵:\n',G_mat)     # 输出这个邻接矩阵
# 画出这张图
# nx.draw(G)
```

在本文中，图网络结构的导入均借助 NetworkX 工具包来实现，后续将不再进行格外说明。

2.1.3.2 算法整体框架

karger 算法整体包含以下步骤：

1. 初始化最小割 mincut 为一个比较大的数；

2. 在图 G 中任选一条边，对该边进行 contract 操作；

3. 重复执行步骤 2，直至图中仅剩两个节点，得到一组割。记两点间的连边数为 mc，并令 mincut=min(mincut, mc)；

4. 执行步骤 2、3 多次，此时的 mincut 即为全局最小割。

步骤 2 中任选一条边的操作，我们通过依次选取两个点 u、v 来实现；contract 操作则通过更新邻接矩阵等变量来实现，具体方式将在下文中细致说明。

2.1.3.3 实现细节

以下是利用 Python 实现上述步骤的一些具体细节。

1. 用于记录点度数的向量 D

在程序中，我们利用 networkx 得到邻接矩阵之后，接着生成向量 D 以记录各点的度数。它的作用有如下几点：

(1)便于每次选择点 u；

我们每次在 D 中选择一个度数非零的节点 u，接着利用邻接矩阵任意选取一个与其有邻边的顶点 v。将 u、v 合并，形成新的 u 点。合并后的 u 点拥有的度数为原来两点度数之和，再减去 u、v 之间重复计算的邻边。而点 v 实际上已不存在，于是将 v 的度数置为 0。因此，每次从 D 中任选一个度数非零的节点作为点 u 即可。

(2)便于停止一次搜索和记录割边数；

当合并至图中仅剩两个节点时，一次搜索停止。在 D 中则表现为仅有两点

的度数非零；同时，这两点的度数（必然相同）则为该组割的边数。

2. contract 具体操作

此过程分为两步。首先删去自环的影响，即将邻接矩阵[u, v]和[v, u]处的值置为 0；其次，对图中的非 u、v 点进行更新。这些点与 u 相连的边数相当于原来的连边数加上与 v 的连边数，而与 v 相连的边均置为 0。

代码中的具体更新步骤如下：

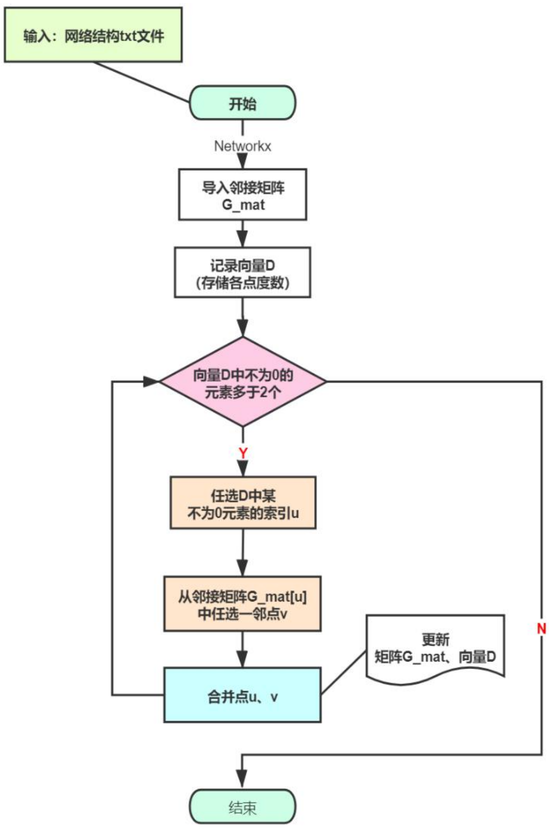
(1)更新向量 D

```
D(u) = D(u) + D(v)  –  2G_mat(u, v)
D(v) = 0
```

(2)更新邻接矩阵 G_mat

```
G_mat [u, v] = 0,  G_mat [v, u] = 0
v_ = np.where(graph[v] > 0)[1]   # 与 v 相连的顶点
    # 更新与 v 有边的点的列表
    for vertex in v_:
        if vertex != u and vertex != v:
            graph[vertex, u] = graph[vertex, u] + graph[vertex, v]
            graph[u, vertex] = graph[u, vertex] + graph[v, vertex]
            graph[vertex, v] = 0
            graph[v, vertex] = 0
```

下图为 Python 实现 karger 算法的整体流程图。完整代码请见附录 A。



2.1.3.4 输出与作图

在算法的最后，我们采用“递归加点”的方法找到了具体的割。“递归加点”，就是从最后图中剩下的两点出发，依次找到它们合并过的点，最后返回两个点集。

下面是找到合并过的点的核心函数，u_list 和 v_list 是程序中两两合并过的顶点，彼此一一对应：

```
# 规约找点：输入索引，返回索引
def find_nodes(array, u_list, v_list, nodes):
    v_ = []
    u_ = []
    for each in array:
        v_.append(v_list[each])
    nodes.extend(v_)
    for every in v_:
        u_.extend([i for i, x in enumerate(u_list) if x == every])
    if len(u_) == 0:        # 空数组,即已找到所有合并过的点
        return 0
    return u_
```

接下来是规约操作，为图中剩下的点依次找到其合并过的所有点。在这里，我们定义了 find_set 函数，该函数为我们返回合并过的点集，其中，node_set 存有最后剩下的节点索引：

```
def find_set(set, u_list, v_list, nodes):
    result1 = find_nodes(set, u_list, v_list, nodes)
    while result1 != 0:
        result1 = find_nodes(result1, u_list, v_list, nodes)
    nodes = [f(x) for x in nodes]
    return nodes

# 输出点集
set1 = ([i for i, x in enumerate(u_list) if x == node_set[0]])
setA = find_set(set1, u_list, v_list, A)
print(",点集 1： ", setA)

set2 = ([i for i, x in enumerate(u_list) if x == node_set[1]])
setB = find_set(set2, u_list, v_list, B)
print(",点集 2： ", setB)
```

注意到，由于在程序中我们直接对邻接矩阵进行操作，即默认将点标号映射至索引 0、1、2……，因此最后输出点时需要将其还原至原来的编号，这由函数 f 实现：

```
pre = list(np.loadtxt(data, dtype=np.int).flatten())
new_ = list(set(pre))
new_.sort(key=pre.index)      # 点的排序

# 点标号的映射
def f(x):
    value = new_[x]
    return value
```

最后，我们作出合并后的网络图。由于 networkx 自带的绘制函数无法展示平行边，我们通过读取邻接矩阵手动绘制，并将其封装成 plot 函数：

```
# 作图
def plot(matrix):
    mat = copy.deepcopy(matrix)
    arr = []
    for i in range(len(mat)):
        for j in range(len(mat)):
            if mat[i, j] > 0:
                mat[j, i] = 0
                number = mat[i, j]
                for m in range(number):
                    arr.append((f(i), f(j)))
    # print(array)
    G = nx.MultiGraph(arr)
    pos = nx.spring_layout(G)
    nx.draw_networkx_nodes(G, pos, node_size= 550, node_color='r', alpha=1)
    ax = plt.gca()
    for e in G.edges:
        ax.annotate("",
                    xy=pos[e[0]], xycoords='data',
                    xytext=pos[e[1]], textcoords='data',
                    arrowprops=dict(arrowstyle="-", color="0.5",
                                    shrinkA=5, shrinkB=5,
                                    patchA=None, patchB=None,

connectionstyle="arc3,rad=rrr".replace('rrr', str(0.05 * e[2])), ), )
    nx.draw_networkx_labels(G, pos,
                            labels=None, font_size=20,
                            font_color='k', font_family='sans-serif',
                        font_weight='normal', alpha=1.0, bbox=None, ax=None)
```

```
    # 保存为透明图像
    plt.savefig("图片.png", transparent=True)
    plt.show()
```

2.2 Stoer-Wagner 算法

2.2.1 算法概述

Stoer-Wagner 算法可以用来求解无向图 G=(V,E)的全局最小割。该算法基于这样的基本定理，即对于图中的任意两个结点 s 和 t，图 G 的全局最小割或者等于图中的 s-t 最小割，如若不然的话就等于将 s 和 t 进行合并(merge)后得到收缩(shrink)的图 G'的全局最小割[2]。合并的过程具体来说就是删除被合并的两个点并添加一个新的点，新的点与其它点边的权值等于被合并的两个点与其权值的和（没有边记权值为 0）。如此一来我们就可以对图进行循环操作，直至图收缩到只剩下一个结点，然后找到在这过程中最小的 s-t 最小割，即为全局最小割。

可以看出，Stoer-Wagner 算法与一般最小割算法的不同之处在于，它的 s-t 点是在求解过程中产生的，而非预先给定的。在每一次寻找 s-t 最小割的时候，Stoer-Wagner 算法则借助 prim 算法扩展出最大生成树，并记录下最后扩展到的点和最后扩展到的边。

2.2.2 理论分析

定义 $\mathrm{w}(\mathrm{A},\mathrm{x})=\sum \mathrm{w}(\mathrm{v}[\mathrm{i}],\mathrm{x}),\mathrm{v}[\mathrm{i}]\in\mathrm{A}$。定义$A_x$为在 x 前加入 A 的所有点的集合（不包括 x）。

Stoer-Wagner 算法中需要求解任意 s-t 最小割。具体的流程为：

1. 初始化 A 为空集，从 V 中任取一个点加入 A；

2. 每次选取集合 V\A 中使得 $\mathrm{w}(\mathrm{A},\mathrm{x})$最大的点 x 加入集合 A；

3. 当|A|=|V|时结束，否则重复第 2 步。

则最后一个加入 A 中的点为 t，倒数第二个加入 A 中的点为 s。s-t 最小割为 $\mathrm{w}(\mathrm{A}_\mathrm{t},\mathrm{t})$。该方法与 Dijkstra 和 Prim 的算法类似。

我们来证明一下上述寻找任意 s-t 最小割方法的正确性[3]。

令 C 为任意一个 s-t 割。定义一个点 v 是活跃的，当且仅当(u, v)∈C，其中 u 为在 v 前一个加入 A 中的点。定义$\mathrm{C}_\mathrm{v}=\{(\mathrm{a},\mathrm{b})\mid \mathrm{a},\mathrm{b}\in(\mathrm{A}_\mathrm{v}\cup\mathrm{v})\text{ 且 }(\mathrm{a},\mathrm{b})\in\mathrm{C}\}$。

下面需要证明$w(\mathrm{A}_\mathrm{t},\mathrm{t})\le \mathrm{w}(\mathrm{C}_\mathrm{t})=\mathrm{w}(\mathrm{C})$。

由于 t 显然为活跃点，下面应用数学归纳法证明对于任意活跃点 x 有 $w(A_x, x) \le w(C_x)$。

首先证明第一个活跃点。

设第一个活跃点为 v[0]，有 $w(A_{v[0]}, v[0]) \le w(C_{v[0]})$。

由于 v[0]为第一个活跃点，所以$A_{V[0]}$中的点到 v[0]的边是仅有的跨越$C_{v[0]}$的边，故上式等号成立。

下面由数学归纳法证明，假设有 $w(A_{v[i-1]}, v[i-1]) \le w(C_{v[i-1]})$成立，则有 $w(A_{v[i]}, v[i]) \le w(C_{v[i]})$成立。

令 v[i-1]为任意活跃点，v[i]为 v[i-1]之后第一个活跃点，设 $w(A_{v[i-1]}, v[i-1]) \le w(C_{v[i-1]})$ 成立，由 w(A, x)定义可得：$w(A_{v[i]}, v[i]) = w(A_{v[i-1]}, v[i]) + w(A_{v[i]} - A_{v[i-1]}, v[i])$ 。

由于 v[i-1]在 v[i]前加入 A，$w(A_{v[i-1]}, v[i]) \le w(A_{v[i-1]}, v[i-1])$。

由归纳假设 $w(A_{v[i-1]}, v[i-1]) \le w(C_{v[i-1]})$，故 $w(A_{v[i]}, v[i]) \le w(C_{v[i-1]}) + w(A_{v[i]} - A_{v[i-1]}, v[i])$。

$w(A_{v[i]} - A_{v[i-1]}, v[i])$对 $w(C_{v[i]})$ 有贡献而对 $w(C_{v[i-1]})$ 没有。故 $w(C_{v[i-1]}) + w(A_{v[i]} - A_{v[i-1]}, v[i]) \le w(C_{v[i]})$。

所以 $w(A_{v[i]}, v[i]) \le w(C_{v[i]})$，故 $w(A_x, x) \le w(C_x)$对于任意活跃点 x 都成立。

所以 $w(A_t, t) \le w(C_t) = w(C)$成立，即算法所求得的 s-t 割为 s-t 的最小割。

2.2.3 Python 实现

2.2.3.1 库函数的导入与操作

与 2.1.3.1 节“库函数的导入与操作”完全相同，不再赘述。

2.2.3.2 算法整体框架

Stoer-Wagner 算法整体包含三个步骤：

1. 初始化最小割 mincut 为一个比较大的数；
2. 在图 G 中求出任意 s-t 最小割 mc，并令 mincut=min(mincut, mc);

3. 对图 G 将 s 和 t 结点进行合并操作（contract 操作），得到新的图 G'，当 G'中结点个数大于 1 的时候令 G=G'，并回到第 2 步，如若不然则此时的 mincut 即为原图的全局最小割。

其中，合并 s 和 t 结点的 contract 操作可以描述为：删除点 s 和 t，以及边(s,t)，加入新结点 u，对于任意 v∈V，$w(v,u) = w(u,v) = w(s,v) + w(t,v)$。

2.2.3.3 实现细节

由于寻找任意 s-t 最小割的过程本身比较慢，所以我们可以在得到最小割为 1 的运行结果只有就跳出 while 循环，在不改变运行效果的前提下尽可能降低运算成本。这个部分会在后续 4.1.2 和 4.2.1 展开，并给出优化后的代码。

从实践的层面上来说，结点合并的过程其实就是更新邻接矩阵 G_mat 的过程。本质上，Stoer-Wagner 算法中的 contract 操作与 Karger 算法中的 contract 操作是一样的。但是更新邻接矩阵的实现方法有很多，这里选择一种与 Karger 中不同的方法进行说明。具体来说分为三个步骤：

1. 假设当前 G_mat 是一个 n × n 的矩阵，则初始化一个(n+1) × (n+1)的 new_mat，并使 new_mat 的前 n 行 n 列等于 G_mat 矩阵；

```
new_mat = np.zeros((len(G_mat)+1,len(G_mat)+1))
new_mat[:len(G_mat),:len(G_mat)] = G_mat
```

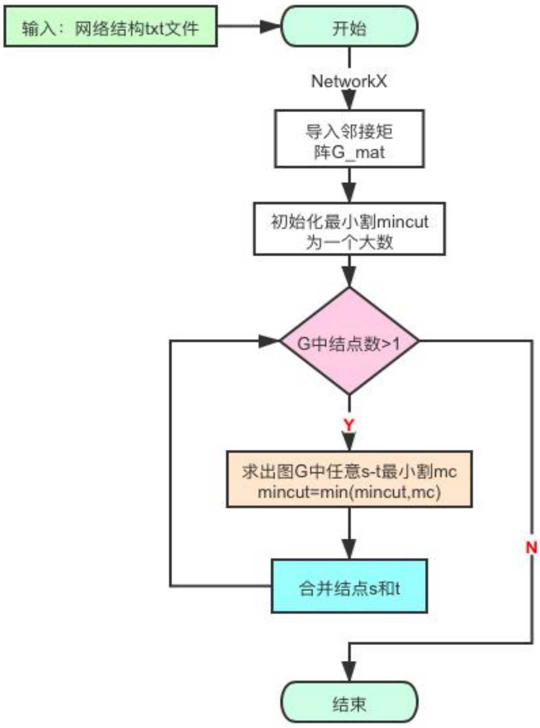
2. 对当前集合 V 中除了 s 和 t 的每一个结点 i，将它们与 s 和 t 的边权重的和添加到最后一行、最后一列作为新的结点；

```
for i in range(len(G_mat)):
    if i != s and i != t:
        new_mat[i,-1] = new_mat[i,s] + new_mat[i,t]
        new_mat[-1,i] = new_mat[s,i] + new_mat[t,i]
```

3. 删去 new_mat 中的第(s,t)行和第(s,t)列。

```
new_mat = np.delete(new_mat, (s,t), axis = 0)
new_mat = np.delete(new_mat, (s,t), axis = 1)
```

下图为 Python 实现 Stoer-wagner 算法的整体流程图。完整代码请见附录 B。



2.2.3.4 输出与作图

最后的输出应该包含合并到最后的两个超结点所包含的结点序号，为此我们需要进行一些操作。

为了得到最终的最小割属于哪两个点，我们需要找出到最后有哪两个点还没有被合并。因此可以创建一个数组 D 用来存储每个结点的信息，尚在 D 中序号所代表的结点表示还未被合并的点。当 D 最后剩下两个元素的时候，这两个结点就是全局最小割所在的两个端点。

具体的更新过程为：删除索引为 t 的点在原图中的序号，并把索引为 s 的点在原图中的序号换到最后。为了保证可以正确地根据索引进行删点、换点操作，需要对 s<t 和 s>t 分两种情况讨论，以防止删点之后对换点产生影响，反之亦然。具体代码呈现如下：

```
# 删除 t 点编号，把 s 点编号换到最后面
if s<t:
    D = np.delete(D,t)
    zjl = D[-1]
    D[-1] = D[s]
    D[s] = zjl
else:
    zjl = D[-1]
    D[-1] = D[s]
```

```
    D[s] = zjl
    D = np.delete(D,[t])
```

关于如何得到两个超结点所含结点序号，这里选用一种与上述 2.1.3.4 中不同的方法。首先创建一个列表 E_，然后把合并过的(s,t)数对作为元素添加到列表中。借助 Python 的 NetworkX 模块以 E_为边的集合生成一张图，然后寻找这张图的连通子图（理论上应为两个连通子图），这两个连通子图所包含的结点就为最后的两个超结点所包含的结点：

```
# 通过 E_寻找两个超结点所含结点
G = nx.Graph()
G.add_edges_from(E_)
Set1 = set()
Set2 = set()
components=list(nx.connected_components(G))

for i in components[0]:
    Set1.add(f(i))

if len(components) > 1:
    for i in components[1]:
        Set2.add(f(i))

print(Set1,Set2)
```

注意到，由于在程序中我们直接对邻接矩阵进行操作，即默认将点标号映射至索引 0、1、2……，因此最后输出点时需要将其还原至原来的编号，这由函数 f 实现：

```
L = list(np.loadtxt("data/"+filename+".txt", dtype=np.int).flatten())
Array = list(set(L))
Array.sort(key=L.index)
# 点标号的映射
def f(x):
    value = Array[x]
    return value
```

最后，我们作出合并后的网络图。由于 networkx 自带的绘制函数无法展示平行边，我们通过读取邻接矩阵手动绘制：

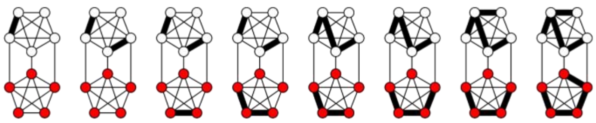
```
# 作图展示测试结果
G=nx.MultiGraph(array)
pos = nx.spring_layout(G)
nx.draw_networkx_nodes(G, pos, node_color = 'r', alpha = 1)
ax = plt.gca()
```

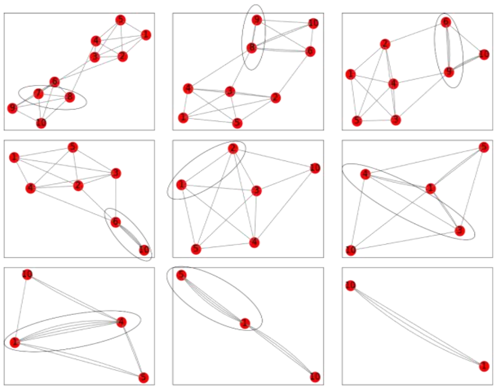
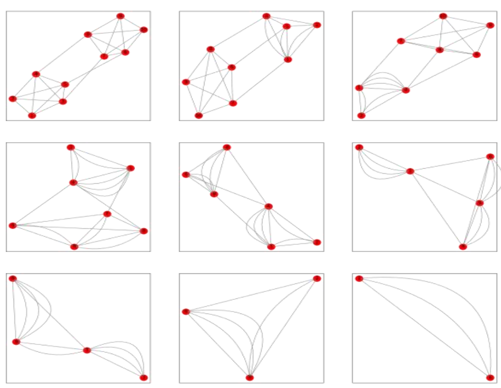
```
for e in G.edges:
        ax.annotate("",
                        xy=pos[e[0]], xycoords='data',
                        xytext=pos[e[1]], textcoords='data',
                        arrowprops=dict(arrowstyle="-", color="0.5",
                                        shrinkA=5, shrinkB=5,
                                        patchA=None, patchB=None,

connectionstyle="arc3,rad=rrr".replace('rrr',str(0.3*e[2])
                                        ),
                                        ),
                        )
nx.draw_networkx_labels(G, pos, labels=None, font_size=12, font_color='k', font_family='sans-serif', font_weight='normal', alpha=1.0, bbox=None, ax=None)
# 保存为透明图像
plt.savefig(filename, transparent=True)
plt.show()
```

3 全局最小割求解算法的数据测试

注：以下所有运行结果中的 SW 算法均未添加 4.2.1 中提及的优化方法。

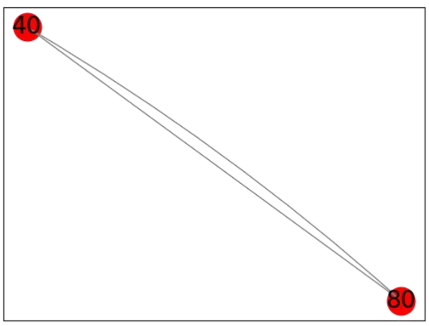
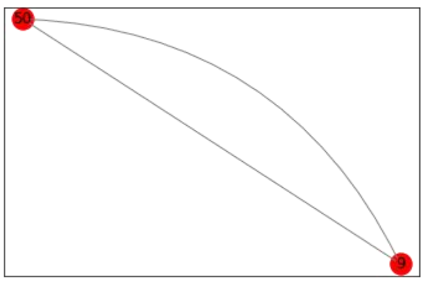
3.1 示例网络的测试



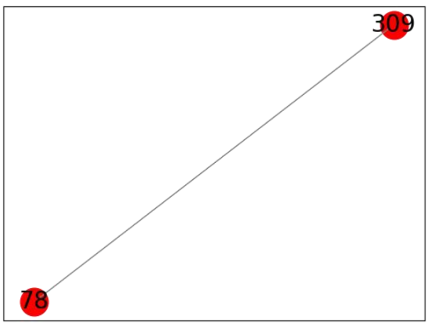
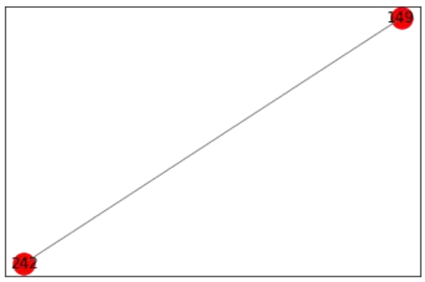
Karger		Stoer-Wagner	
点集 A	点集 B	点集 A	点集 B
{1,2,3,4,5}	{6,7,8,910}	{1,2,3,4,5}	{6,7,8,910}
			
全局最小割	3	全局最小割	3
合并过程	(8,7)	合并过程	(1,3)

	(9,8)		(4,5)
	(6,9)		(10,9)
	(10,6)		(7,9)
	(1,2)		(4,1)
	(4,3)		(9,8)
	(1,4)		(6,9)
	(1,5)		(6,8)

3.2 Benchmark Network 的测试

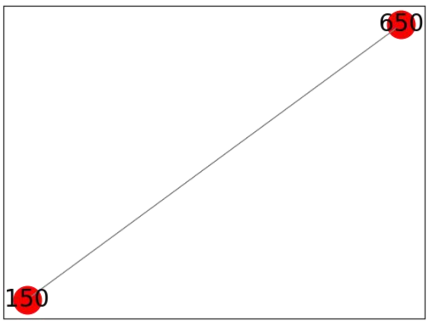
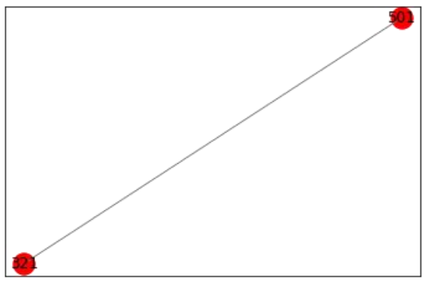
Karger		Stoer-Wagner	
点集 A	点集 B	点集 A	点集 B
{40, 29, 27, 35, 3, 37, 25, 30, 15, 28, 24, 39, 18, 6, 11, 23, 21, 26, 14, 12, 13, 20, 8, 1, 9, 33, 19, 10, 16, 7, 17, 4, 2, 5, 32, 36, 22, 38, 34, 81, 31}	{80, 70, 77, 53, 48, 51, 78, 52, 55, 57, 74, 79, 65, 83, 49, 66, 72, 69, 45, 54, 68, 71, 61, 63, 42, 47, 75, 76, 50, 64, 60, 44, 58, 82, 46, 56, 41, 67, 62, 43, 59, 73}	{3, 4, 5, 11, 12, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 41, 44, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 57, 58, 59, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 71, 72, 73, 74, 76, 77, 78, 81, 82, 83}	{1, 2, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 22, 24, 31, 32, 37, 42, 43, 45, 46, 53, 54, 55, 56, 60, 61, 70, 75, 79, 80}
			
全局最小割	2	全局最小割	2

3.3 Corruption Gcc 的测试

<table>
<tr><td colspan="2">Karger</td><td colspan="2">Stoer-Wagner</td></tr>
<tr><td>点集 A</td><td>点集 B</td><td>点集 A</td><td>点集 B</td></tr>
<tr><td>V-B</td><td>{309}</td><td>V-B</td><td>{7, 8, 11, 13, 18, 20, 21, 24, 26, 28, 33, 45, 48, 50, 52, 53, 55, 56, 60, 62, 68, 81, 82, 89, 90, 100, 101, 102, 108, 109, 111, 118, 119, 120, 122, 123, 126, 133, 135, 140, 147, 148, 158, 161, 172, 175, 176, 178, 181, 183, 186, 190, 202, 206, 208, 209, 215, 221, 222, 225, 227, 229, 232, 235, 242, 243, 244, 247, 259, 260, 264, 265, 268, 269, 272, 275, 276, 278, 281, 285, 294, 301, 305}</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>全局最小割</td><td>1</td><td>全局最小割</td><td>1</td></tr>
</table>

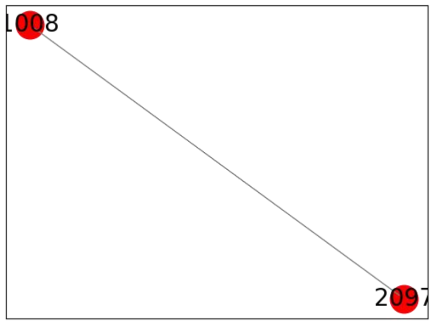
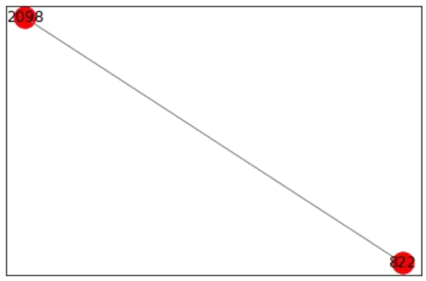
3.4 Crime Gcc 的测试

<table>
<tr><td colspan="2">Karger</td><td colspan="2">Stoer-Wagner</td></tr>
<tr><td>点集 A</td><td>点集 B</td><td>点集 A</td><td>点集 B</td></tr>
<tr><td>V-B</td><td>{650}</td><td>V-B</td><td>{1, 3, 518, 521, 522, 15, 21, 31, 34, 46, 50, 563, 564, 565, 58, 574, 575, 63, 73, 590, 80, 81,</td></tr>
</table>

			86, 87, 88, 90, 95, 618, 625, 117, 630, 119, 633, 635, 128, 640, 652, 657, 662, 668, 669, 164, 171, 684, 174, 691, 181, 696, 698, 187, 188, 701, 198, 712, 715, 218, 734, 737, 226, 747, 235, 749, 237, 752, 252, 257, 276, 281, 283, 284, 297, 299, 306, 308, 309, 321, 330, 334, 338, 341, 349, 350, 353, 370, 384, 389, 405, 407, 415, 468, 476, 480, 481, 484, 496}
			
全局最小割	1	全局最小割	1

3.5 PPI Gcc 的测试

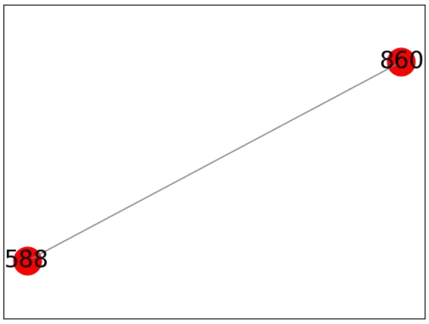
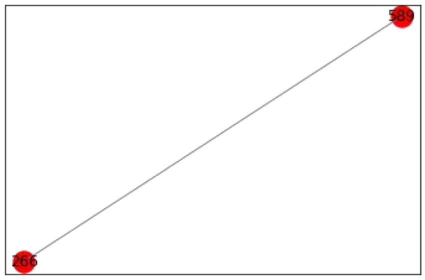
Karger		Stoer-Wagner	
点集 A	点集 B	点集 A	点集 B
V-B	{2097}	V-B	{384, 2067, 2070, 2071, 2078, 2079, 2080, 2082, 2083, 2088, 1066, 2090, 2092, 2093, 2094, 689, 2098, 2102, 695, 2104, 1502}

			
全局最小割	1	全局最小割	1

3.6 RodeEU Gcc 的测试

Karger		Stoer-Wagner	
点集 A	点集 B	点集 A	点集 B
V-B	{860}	V-B	{512, 513, 514, 515, 3, 517, 518, 519, 8, 516, 1, 11, 15, 16, 17, 531, 20, 21, 532, 535, 533, 534, 27, 30, 31, 34, 546, 547, 549, 38, 548, 552, 553, 42, 43, 556, 47, 560, 51, 564, 53, 54, 566, 568, 567, 570, 571, 569, 572, 573, 574, 576, 65, 577, 580, 585, 589, 590, 591, 592, 596, 597, 85, 599, 600, 601, 90, 91, 92, 86, 603, 95, 606, 607, 614, 104, 616, 617, 115, 117, 118, 122, 634, 124, 125, 637, 131, 645, 135, 648, 649, 140, 141, 144, 658, 659, 149, 661, 662, 154, 155, 156, 669, 670, 158, 160, 161, 159, 681, 690, 691, 178, 179, 180, 696, 702, 703, 192, 709, 199, 711, 204,

			717, 716, 719, 208, 721, 722, 214, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 730, 225, 226, 227, 228, 741, 230, 742, 232, 233, 743, 238, 239, 751, 243, 246, 247, 760, 249, 761, 762, 251, 252, 248, 766, 255, 256, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 780, 781, 257, 782, 278, 279, 791, 281, 282, 280, 283, 797, 284, 287, 289, 290, 291, 803, 292, 804, 293, 296, 809, 297, 294, 811, 812, 305, 313, 315, 317, 318, 831, 832, 833, 333, 334, 847, 336, 848, 850, 335, 341, 343, 344, 346, 350, 351, 352, 874, 875, 876, 368, 369, 370, 371, 885, 376, 377, 378, 379, 897, 898, 900, 389, 390, 901, 391, 388, 902, 392, 903, 393, 398, 904, 404, 917, 406, 918, 923, 411, 925, 926, 927, 413, 417, 418, 415, 932, 416, 422, 934, 432, 440, 954, 454, 457, 460, 461, 462, 463, 978, 472, 473, 474, 475, 483, 484, 485, 487, 493, 496, 508, 509, 510, 511}

			
全局最小割	1	全局最小割	1

4 全局最小割求解算法的改进与推广

4.1 历史文献的改进与推广

4.1.1 Karger-Stein 改进算法

4.1.1.1 算法概述

由上述2.1.2中不等式（1）知，每次在选择点进行合并时，选择正确的概率至少为$1-\frac{2}{n}$（n为当前图中顶点数）。每合并一次，图中点数减少1，由此可推断，前期合并效果较好，而随着合并步骤的进行，选择正确边数的概率在减小。基于此，David Karger和Clifford Stein提出了Karger-Stein改进算法。

Karger-Stein改进算法的思路主要有以下三点：

1. 共享效果好的合并部分以节省运行时间

前期由于节点数很大，合并效果较好。若每次都从原始图网络出发进行合并，需耗费大量时间。因此，可以共享前期的合并节点，而总体效果并不会变差。

2. 在后期容易错选节点的步骤上多次实验

随着后期节点数的减少，错选边的概率会越来越大。因此在后期合并时多次实验。

3. 利用规约思想得到全局最小割

设定规约操作的下限节点6。每次合并至网络中有$\left\lceil \frac{n}{\sqrt{2}}+1 \right\rceil$个节点，并在此基础上多次迭代。当图中节点大于6时，反复进行规约操作；否则直接利用karger中的操作得到一组割集。由于多次迭代，最终能得到大量割集，返回这些割的最小值，即为全局最小割。

4.1.1.2 算法实现

可以看出，该算法的基本步骤与karger算法无异，差别在于利用了规约思想提高算法的时间复杂度：合并节点直到图中节点数为$\left\lceil\frac{n}{\sqrt{2}}+1\right\rceil \approx 70\% \times n$，再在此图基础上继续合并约30%的节点，多次操作，返回割的最小值。具体实现过程如下：

1. 选择节点合并，直到网络中仅有$\left\lceil\frac{n}{\sqrt{2}}+1\right\rceil$个节点。此步骤执行两次，得到两个图$G_1$、$G_2$。

2. 当网络中节点数大于6时，分别对G_1、G_2重复操作步骤（1）；否则利用karger算法中的合并操作，直接得到一组割。

3. 取得到的全部割集的最小值，即为全局最小割。

4.1.1.3 时间复杂度

从算法流程中可知，可得到时间复杂度的递归方程：

$$T_n = 2T\left(\left\lceil\frac{n}{\sqrt{2}}+1\right\rceil\right) + O(n^2)$$

解得，$T_n = O(n^2 \log n)$。运行$\log^2 n$次，可知，本算法总体的时间复杂度为$O(n^2 \log^3 n)$。

4.1.2 并行化方法

4.1.2.1 算法概述

David Karger和Clifford Stein在Karger-Stein改进算法的同一篇论文中提出了并行化方法，以进一步提高时间复杂度。在正式介绍该方法之前，两人对前文中的选择节点、合并等操作进行了重定义。

Karger算法寻找割的关键在于任意挑选边，将边的两个点进行合并，直到最后图中只剩两个节点。因此从逆向角度看，可以用如下方式寻找一组割：将原始网络的边与点剥离开，并对边进行任意排序，每次往图中添加一条边，并将边的两个点合并；直到图中只剩下两个连通分量，剩下的边中顶点分别位于这两个连通分量的边，即为一组割。

若逐次添加一条边，效率太低。因此在并行改进算法中，两人采用了二分法进行搜索，大大提高了时间复杂度。

4.1.2.2 算法实现

符号说明

符号	含义
L	随机打乱的边集
V	图中所有的顶点
$H(V,L^{'})$	由L的子集L'与V构成的图网络
L_1/L_2	将L_2与点集V进行合并后，仍在L_1中的边（即非自环边）

算法整体流程如下[4]，它将此思想推广至最小k-割搜索（k为任意正整数）：

```
COMPACT(G, L, k)
input: A graph G, list of edges L, and parameter k
if G has k vertices or L = ∅
then
    return G
else
    Let L1 and L2 be the first and second halves of L
    Find the connected components in graph H = (V, L1)
    if H has fewer than k components
    then
        return COMPACT(G, L1, k)
    else
        return COMPACT(G/L1, L2/L1, k).
```

下面以k=2为例进行解释说明。具体步骤如下：

1. 将边集L一分为二，得到前后各一半边集L_1、L_2

2. 先选L_1与V进行合并。若形成了一个连通分量，则表明选的边多了，对L_1接着进行二分，重复步骤1、2；若形成多于1个连通分量，则对L_1/L_2进行二分，重复步骤1、2；若刚好形成两个连通分量，则可以直接得到一组割。

4.1.2.3 算法时间复杂度

该算法的核心在于利用二分法进行搜索，即每次选一半的边进行合并，同时检验当前图中连通分量的个数。

假设边的条数为m，下表列出了各步骤的算法复杂度。

打乱边序	$O(m)$
二分法搜索	$O(\log m)$

连通分量数的确定	$O(m)$
合并操作	$O(m)$

由此看出，算法复杂度为$O(m) \times O(\log m) = O(m\log m)$，并不够好。因此在论文中，作者提出采用多个处理器并行运算的方式，进一步提高了效率。

具体的并行方式在此不赘述，通过运算可得，当采用$m = O(n^2)$个处理器时，上述1、3、4步骤的复杂度可降为$O(1)$、$O(\log n)$、$O(1)$。从而整体的时间复杂度为：

$$O(\log m) \times (O(1) + O(\log n)) = O(\log^2 n)$$

4.1.2 Stoer-Wagner 的改进算法

前面提到过，全局最小割或者等于图中任意 s-t 最小割，或者等于将 s 和 t 点合并后形成的新图的全局最小割[2]，所以全局最小割在数值上一定不超过当前找到的 s-t 最小割。由此，可以在算法找到大小为 1 的割的时候就退出循环，即代表这张图的全局最小割就是 1。可以说，这是一种基于全局最小割特性的优化方案。

另一方面，来考察一下每次选取边进行合并的过程。SW 算法中求解 s-t 最小割的步骤，最优先考虑的应当是 Dijkstra 和 Prim 的算法[5]。因此我们可以马上知道，使用 Fibonacci 堆来实现求解一次 s-t 最小割的时间复杂度为$O(m + nlogn)$。也就是说，SW 算法一共要求解 n 轮这样的 s-t 最小割然后合并它们，而每一轮就要耗费$O(m + nlogn)$这么多的时间，总的时间复杂度就为$O(mn + n^2logn)$。有没有什么更快速的算法呢？

我们发现，耗时较多的是每次寻找 s-t 最小割的过程。其实可以想到，我们也许不必每次都规规矩矩找到一组 s-t 最小的割，而是引入一定的随机性，以此来降低运算量。基于这样的思想，Karger 和 Stein 提出了一种提高运算效率的方法：每次随机选择一条边进行 contract 操作[5]。

为简单起见，我们在此假设输入图 G 为无权图。收缩边缘可能会产生自环和平行边。丢弃自环，但保留平行边，因为这是必不可少的，这对应于上一部

分中的权重运算。算法以相同的概率选择每个边。边的收缩会创建超结点(super-vertices)，这些超结点对应于原始图的顶点子集。边缘将收缩，直到只剩下两个超结点。该算法返回这两个剩余的超结点。

这样的思路发展下去就锻造了 Karger 算法。因此从某种意义上说，Karger 算法是 SW 算法的一种优化，是通过引入随机选边来降低时间复杂度的一种做法。

结合 2.1.2 中的理论分析，由（2）式可以得到，对于含有 n 个结点的图，通过随机寻找合并的结点，一轮合并过程找到的割恰好为全局最小割的概率 $\geq \frac{1}{n^2}$，即执行一次算法找到全局最小割的概率$\leq 1-\frac{1}{n^2}$，当取尝试次数 $m = n^2 \ln n$ 时，就得到 (3) 式：$P(\text{找不到全局最小割}) \leq \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2 \ln n} \leq e^{-\ln n} = \frac{1}{n}$。因此我们可以看到，图中所含结点数量越多，Karger 算法出错的概率就越小。这在直观上是好理解的。图中所含边数的最小值与点的个数直接相关，而因为取到每条边的概率是一样的，所以边的总数越多，随机选择合并边的时候选到最小割的边的概率就越小。

根据上述讨论，对于结点数较多的复杂图，在合并初期，用 Karger 算法是比较不容易出错的。同时，由于当前图中结点数较多，选用时间复杂度较高的 SW 算法来找出 s-t 最小割是比较低效的。但是随着合并的不断进行，边数的减少会增大最小割被合并的风险，这时候又需要通过一种有效的方法合理地选择合并的边，此时还是选用 SW 算法比较保险。由此，一种综合了 Karger 和 SW 两种算法各自优势的改进方案就呼之欲出了。

4.2 本文的改进与推广

4.2.1 基于全局最小割特性的优化方案

由于全局最小割一定是所有存在的最小割中最小的，全局最小割一定小于等于 SW 算法当前找到的 s-t 最小割，所以一旦找到权和为 1 的最小割，程序就可以直接停止，此时全局最小割就为 1。实践表明，对于比较稀疏的图，这一做法可以极大减少运算量，提高程序运行速度。

```
while len(G_mat) > 2：
    s,t,mc = MinCut(G_mat)

    if mc < mincut：
```

```
            mincut = mc
        # 当发现最小割为 1 时直接退出
        if mincut == 1:
            E_.append([D[t],D[t]])  # 相当于此时不要把点添加进去，同时保证 E_中至少有一条边
            D = [D[s],D[t]]
            break
```

基于全局最小割特性的 SW 算法的优化方案完整代码请见附录 C。

4.2.2 结合两种算法的综合优化方案

Wolpert 和 Macready 于 1997 年提出了著名的“No Free Lunch”理论[6]，该理论对如何比较两种算法哪种更好做出了阐释。这个理论可以给我们这样的启示，即其中一种算法对于一个特定的问题在某方面的性能优势，必然以其在另一些问题上或该问题另一些方面上的性能下降作为代价。不同的算法适用于不同的问题，或者同一问题的不同情况。

具体来说，在寻找全局最小割的问题上，Karger 算法完成一次结点合并操作的时间复杂度远低于 SW 算法，但是存在一定的出错的可能，所以如果要靠 Karger 算法找到真正的全局最小割就需要重复执行多次 Karger 算法，然后取整个过程中找到的最小的割。而 SW 算法每次都能可靠地找到最小的 s-t 割，整个执行过程可以确保最终找到的 s-t 割是全局最小的，但是每一轮找 s-t 割进行结点合并的时间复杂度就比较大。

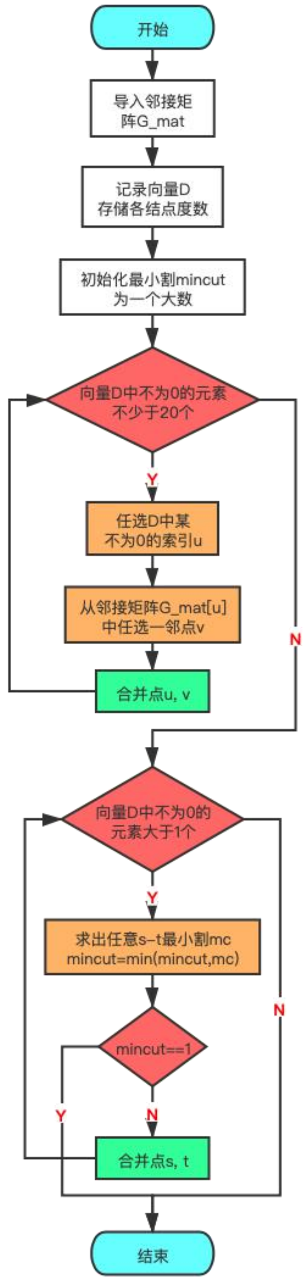
通过 4.1.2 中的讨论，可以得到这样一种改进算法：首先进行结点数判定，如果结点数小于某个阈值 M，则直接选择 SW 算法；否则先通过 Karger 算法随机选边进行 contract 操作，直至合并到结点数小于 M，再用 SW 算法进行后续的合并。

下一步，就需要确定阈值 M，即使用 Karger 算法直至何种境地，改用 SW 算法比较合适。统计学上认为，发生概率小于等于 5%的事件为“小概率事件”，即这样的事件理论上可以发生但是发生概率很小，在一次试验中发生的可能性则几乎为零。在单次实验中认为不可能发生。这其实是基于统计学上的小概率原理，即小概率事件在一次试验中发生的概率很小，如果真的发生了，统计学则怀疑其真实性[7]。因此，当 Karger 算法的出错率低于 5%的时候，可以认为它是可靠的而选择使用它，如若不然就选择 SW 算法。根据 2.1.2 中的（3）式，当取尝试次数 $m = n^2 \ln n$ 时，失败的概率小于等于$\frac{1}{n}$，即当结点数 $n \geq 20$ 时，

失败概率小于等于 5%。由此我们可以很容易得到，当当前结点数大于等于 20 时选择 Karger 算法，当结点数降至 20 以下（不含）时改用 SW 算法。如此一来可以保证在较低的出错率下最大限度提升算法性能。

```
def karger_Min_Cut(graph, D):
    ......
    while np.sum(D > 0) > 20:        # 设定 Karger 的阈值
        ......
    ......
```

下图为 Python 实现结合 Karger 和 Stoer-Wagner 两种算法并基于全局最小割特性进行改进的整体流程图。完整代码请见附录 D。



4.2.3 改进方案实现细节

值得注意的是，Karger 算法毕竟具有一定的随机性，所以在综合改进方案中我们可以考虑以下两点：

1. 生成多张子图。一次 Karger 运行过程中难免会选到全局最小割进而造成出错，而通过生成多张子图，然后选择这些子图使用 SW 求解全局最小割结果最小的一张图，则可以降低整体出错的概率。当然，这也会增加一定的运算时间，因此需要进行一定的权衡（trade-off）。正如前文所说，当尝试次数达到 $m = n^2 \ln n$ 时，可以让“出错”变成一件“小概率事件”，但是在实践中不一定需要生成这么多子图（因为引入了 SW 以保证后续操作的正确性）。这里给出参考值 $m = 5$，在实际操作中应使得参考值尽量比 5 大，而比 $n^2 \ln n$小。

2. 适当增大阈值。在点越多的时候 Karger 就越不容易破坏掉全局最小割，因此我们可以及早停止随机合并，以降低出错的概率。上文给出的参考值为 $M = 20$，在实际操作中应使得阈值尽量不比 20 小。

参考文献

[1] Olivier Goldschmidt,Dorit S. Hochbaum. A Polynomial Algorithm for the k-cut Problem for Fixed k[J]. Mathematics of Operations Research,1994,19(1).

[2] Stoer, Mechthild, and Frank Wagner. "A simple min-cut algorithm." Journal of the ACM (JACM) 44.4 (1997): 585-591.

[3] Etrnls, "最小割 Stoer-Wagner 算法 2007-4-15.

[4] David R. Karger,Clifford Stein. A new approach to the minimum cut problem[J]. Journal of the ACM (JACM),1996,43(4).

[5] Uri Zwick. "Lecture notes for Analysis of Algorithms: Global minimum cuts". Spring 2008.

[6] David H. Wolpert. "What Does Dinner Cost?". NASA Ames Research Center http://ti.arc.nasa.gov/people/dhw/. NASA-ARC-05-097.

[7] 朱继民. "如何理解统计学中的小概率事件？". 百度文库.

附录 A

```
import networkx as nx
import numpy as np
import copy
from random import choice
import matplotlib.pyplot as plt

# Corruption_Gcc     Crime_Gcc     PPI_gcc     RodeEU_gcc     BenchmarkNetwork
data = "BenchmarkNetwork.txt"
E = np.loadtxt(data)
G = nx.MultiGraph()
G.add_edges_from(E)
# 得到图的邻接矩阵
A = nx.adjacency_matrix(G)
G_mat = A.todense()

# 得到每个点的度数
D = []
for i in range(0, len(G_mat)):
    each = G_mat[i][0]
    each[each > 0] = 1
    degree = each.sum()
    D.append(degree)
D = np.array(D)

# 点的排序
pre = list(np.loadtxt(data, dtype=np.int).flatten())
new_ = list(set(pre))
new_.sort(key=pre.index)

# 点标号的映射
def f(x):
    value = new_[x]
    return value

def karger_Min_Cut(graph, D):
    pair = []
    while np.sum(D > 0) > 2:
        # 随机选一个顶点
        u_beixuan = np.array(np.where(D > 0))[0]
        u = choice(u_beixuan)
        u_no = np.where(graph[u] > 0)[1]
        v = choice(u_no)    # 选出一条边
```

```
        pair.append((u,v))
        contract(graph, u, v, D)
    return D, pair


def contract(graph, u, v, D):
    # 更新点的度数
    D[u] = D[u] + D[v] - 2*graph[u, v]
    D[v] = 0
    # 删除 uv 相连的边 (自环)
    graph[u, v] = 0
    graph[v, u] = 0
    v_ = np.where(graph[v] > 0)[1]   # 与 v 相连的顶点
    # 更新与 v 有边的点的列表
    for vertex in v_:
        if vertex != u and vertex != v:
            graph[vertex, u] = graph[vertex, u] + graph[vertex, v]
            graph[u, vertex] = graph[u, vertex] + graph[v, vertex]
            graph[vertex, v] = 0
            graph[v, vertex] = 0


# 规约找点: 输入索引, 返回索引
def find_nodes(array, u_list, v_list, nodes):
    C = []
    D = []
    for each in array:
        C.append(v_list[each])
    nodes.extend(C)
    for every in C:
        D.extend([i for i, x in enumerate(u_list) if x == every])
    if len(D) == 0:        # 空数组
        return 0
    return D


def find_set(set, u_list, v_list, nodes):
    result1 = find_nodes(set, u_list, v_list, nodes)
    while result1 != 0:
        result1 = find_nodes(result1, u_list, v_list, nodes)
    nodes = [f(x) for x in nodes]
    return nodes
```

```
def plot(matrix):
    mat = copy.deepcopy(matrix)
    arr = []
    for i in range(len(mat)):
        for j in range(len(mat)):
            if mat[i, j] > 0:
                mat[j, i] = 0
                number = mat[i, j]
                for m in range(number):
                    arr.append((f(i), f(j)))   # 默认 0 索引，现在加上
    # print(array)
    G = nx.MultiGraph(arr)
    pos = nx.spring_layout(G)
    nx.draw_networkx_nodes(G, pos, node_size= 550, node_color='r', alpha=1)
    ax = plt.gca()
    for e in G.edges:
        ax.annotate("",
                    xy=pos[e[0]], xycoords='data',
                    xytext=pos[e[1]], textcoords='data',
                    arrowprops=dict(arrowstyle="-", color="0.5",
                                    shrinkA=5, shrinkB=5,
                                    patchA=None, patchB=None,
                                    connectionstyle="arc3,rad=rrr".replace('rrr',
str(0.05 * e[2])), ), )
    nx.draw_networkx_labels(G, pos, labels=None, font_size=20, font_color='k',
font_family='sans-serif',
                            font_weight='normal', alpha=1.0, bbox=None, ax=None)
    # 保存为透明图像
    plt.savefig("图片.png", transparent=True)
    plt.show()


Matrix = []
pair_ = []
D_ = []
countMin = float('inf')
for i in range(100):
    if (i % 30 == 0):
        print('第', str(i), '局')
    MatCopy = copy.deepcopy(G_mat)   # 副本
    DCopy = copy.deepcopy(D)   # 副本
    D_no, pair_array = karger_Min_Cut(MatCopy, DCopy)     # x 返回向量 D 和合并过的节
点对
    count = np.max(D_no)
```

```
        if count < countMin:
                countMin = count
                Matrix.append(MatCopy)
                pair_.append(pair_array)
                D_.append(D_no)
print("karger_min_cut is " + str(countMin))

last = Matrix[-1]
degree = D_[-1]
node_set = ([i for i, x in enumerate(degree) if x != 0])
print(node_set)

last_pair = pair_[-1]
A = []
B = []
A.append(node_set[0])       # 点集 1
B.append(node_set[1])       # 点集 2
u_list = []
v_list = []
for m in range(len(last_pair)):
        each = last_pair[m]
        u = each[0]
        v = each[1]
        u_list.append(u)
        v_list.append(v)



# 输出点集
set1 = ([i for i, x in enumerate(u_list) if x == node_set[0]])
setA = find_set(set1, u_list, v_list, A)
print("点集 1: ", setA)

set2 = ([i for i, x in enumerate(u_list) if x == node_set[1]])
setB = find_set(set2, u_list, v_list, B)
print("点集 2: ", setB)

# 作图
plot(last)
```

附录 B

```
import numpy as np
import networkx as nx
```

```
import matplotlib.pyplot as plt


# Stoer-Wagner 算法
def GlobalMinCut(G_mat):
    # 记录每个结点
    D = np.arange(len(G_mat))
    # 初始化 mincut 为一个大数
    mincut = 10000
    E_ = []

    while len(G_mat) > 2:
        s,t,mc = MinCut(G_mat)
        E_.append([D[s],D[t]])

        if mc < mincut:
            mincut = mc

        #合并 s,t
        G_mat = contract(G_mat,s,t)

        print(D[s],D[t],mincut)

        # 删除 t 点编号，把 s 点编号换到最后面
        if s<t:
            D = np.delete(D,t)
            zjl = D[-1]
            D[-1] = D[s]
            D[s] = zjl
        else:
            zjl = D[-1]
            D[-1] = D[s]
            D[s] = zjl
            D = np.delete(D,[t])

        # 输出剩余的点的标号
        # print(D)

    return mincut,D,E_


# 求解任意 st 最小割的函数
def MinCut(G_mat):
    A = []
```

```
    a = np.random.randint(0,len(G_mat)-1)
    A.append(a)

    # 构造点集 V-A 记为 V_no_
    V_no_ = list(np.arange(len(G_mat)))

    while(len(A)<len(G_mat)):

        V_no_.remove(A[-1])
        # print(V_no_)
        # print(A)

        A.append(V_no_[np.argmax(np.sum(G_mat[A][:,V_no_],axis=0))])

    s = A[-2]
    t = A[-1]
    mincut = np.sum(G_mat[A,t])-G_mat[A[-1],t]

    return s,t,mincut


def contract(G_mat,s,t):
    new_mat = np.zeros((len(G_mat)+1,len(G_mat)+1))
    new_mat[:len(G_mat),:len(G_mat)] = G_mat
    for i in range(len(G_mat)):
        if i != s and i != t:
            new_mat[i,-1] = new_mat[i,s] + new_mat[i,t]
            new_mat[-1,i] = new_mat[s,i] + new_mat[t,i]
    new_mat = np.delete(new_mat, (s,t), axis = 0)
    new_mat = np.delete(new_mat, (s,t), axis = 1)
    return new_mat


filename = "BenchmarkNetwork"
# filename = "Corruption_Gcc"
# filename = "Crime_Gcc"
filename = "PPI_gcc"
# filename = "RodeEU_gcc"

E = np.loadtxt("data/"+filename+".txt")
G = nx.Graph()
G.add_edges_from(E)
# 得到图的邻接矩阵
A = nx.adjacency_matrix(G)
```

```
G_mat = A.todense()
# 输出这个邻接矩阵
# print('邻接矩阵:\n',G_mat)
# 画出这张图
# nx.draw(G)


print("The number of nodes is:",len(G_mat))
mincut,D,E_ = GlobalMinCut(G_mat)


L = list(np.loadtxt("data/"+filename+".txt", dtype=np.int).flatten())
Array = list(set(L))
Array.sort(key=L.index)
# 点标号的映射
def f(x):
    value = Array[x]
    return value

# 映射到原文件中的点
D[0] = f(D[0])
D[1] = f(D[1])
array = []
for i in range(int(mincut)):
    array.append(D)

print("\nThe global minimum cut is:",D,mincut,"(在原文件中的标号)")


# 作图展示测试结果
G=nx.MultiGraph(array)
pos = nx.spring_layout(G)
nx.draw_networkx_nodes(G, pos, node_color = 'r', alpha = 1)
ax = plt.gca()
for e in G.edges:
    ax.annotate("",
                xy=pos[e[0]], xycoords='data',
                xytext=pos[e[1]], textcoords='data',
                arrowprops=dict(arrowstyle="-", color="0.5",
                                shrinkA=5, shrinkB=5,
                                patchA=None, patchB=None,

connectionstyle="arc3,rad=rrr".replace('rrr',str(0.3*e[2])
                                ),
```

```
                                              ),
                              )
nx.draw_networkx_labels(G, pos, labels=None, font_size=12, font_color='k', font_family='sans-serif', font_weight='normal', alpha=1.0, bbox=None, ax=None)
# 保存为透明图像
plt.savefig("Advanced"+filename, transparent=True)
plt.show()



# 通过 E_寻找两个超结点所含结点
G = nx.Graph()
G.add_edges_from(E_)
Set1 = set()
Set2 = set()
components=list(nx.connected_components(G))
for i in components[0]:
    Set1.add(f(i))

if len(components) > 1:
    for i in components[1]:
        Set2.add(f(i))

print(Set1,"\n",Set2)
```

附录 C

```
import numpy as np
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt



# Stoer-Wagner 算法
def GlobalMinCut(G_mat):
    # 记录每个结点
    D = np.arange(len(G_mat))
    # 初始化 mincut 为一个大数
    mincut = 10000
    E_ = []

    while len(G_mat) > 2:
        s,t,mc = MinCut(G_mat)

        if mc < mincut:
```

```
                mincut = mc

            # 当发现最小割为 1 时直接退出
            if mincut == 1:
                E_.append([D[t],D[t]])  # 相当于此时不要把点添加进去，同时保证 E_中至少
有一条边
                D = [D[s],D[t]]
                break

            E_.append([D[s],D[t]])
            #合并 s,t
            G_mat = contract(G_mat,s,t)

            print(D[s],D[t],mincut)

            # 删除 t 点编号，把 s 点编号换到最后面
            if s<t:
                D = np.delete(D,t)
                zjl = D[-1]
                D[-1] = D[s]
                D[s] = zjl
            else:
                zjl = D[-1]
                D[-1] = D[s]
                D[s] = zjl
                D = np.delete(D,[t])

            # 输出剩余的点的标号
            print(D)

        return mincut,D,E_


# 求解任意 st 最小割的函数
def MinCut(G_mat):
    A = []
    a = np.random.randint(0,len(G_mat)-1)
    A.append(a)

    # 构造点集 V-A 记为 V_no_
    V_no_ = list(np.arange(len(G_mat)))

    while(len(A)<len(G_mat)):
```

```
            V_no_.remove(A[-1])
            # print(V_no_)
            # print(A)

            A.append(V_no_[np.argmax(np.sum(G_mat[A][:,V_no_],axis=0))])

        s = A[-2]
        t = A[-1]
        mincut = np.sum(G_mat[A,t])-G_mat[A[-1],t]

        return s,t,mincut


def contract(G_mat,s,t):
        new_mat = np.zeros((len(G_mat)+1,len(G_mat)+1))
        new_mat[:len(G_mat),:len(G_mat)] = G_mat
        for i in range(len(G_mat)):
                if i != s and i != t:
                        new_mat[i,-1] = new_mat[i,s] + new_mat[i,t]
                        new_mat[-1,i] = new_mat[s,i] + new_mat[t,i]
        new_mat = np.delete(new_mat, (s,t), axis = 0)
        new_mat = np.delete(new_mat, (s,t), axis = 1)
        return new_mat



filename = "BenchmarkNetwork"
filename = "Corruption_Gcc"
# filename = "Crime_Gcc"
# filename = "PPI_gcc"
# filename = "RodeEU_gcc"

E = np.loadtxt("data/"+filename+".txt")
G = nx.Graph()
G.add_edges_from(E)
# 得到图的邻接矩阵
A = nx.adjacency_matrix(G)
G_mat = A.todense()
# 输出这个邻接矩阵
# print('邻接矩阵:\n',G_mat)
# 画出这张图
# nx.draw(G)



print("The number of nodes is:",len(G_mat))
```

```
mincut,D,E_ = GlobalMinCut(G_mat)

L = list(np.loadtxt("data/"+filename+".txt", dtype=np.int).flatten())
Array = list(set(L))
Array.sort(key=L.index)
# 点标号的映射
def f(x):
    value = Array[x]
    return value

# 映射到原文件中的点
D[0] = f(D[0])
D[1] = f(D[1])
array = []
for i in range(int(mincut)):
    array.append(D)

print("\nThe global minimum cut is:",D,mincut,"(在原文件中的标号)")



# 作图展示测试结果
G=nx.MultiGraph(array)
pos = nx.spring_layout(G)
nx.draw_networkx_nodes(G, pos, node_color = 'r', alpha = 1)
ax = plt.gca()
for e in G.edges:
    ax.annotate("",
                xy=pos[e[0]], xycoords='data',
                xytext=pos[e[1]], textcoords='data',
                arrowprops=dict(arrowstyle="-", color="0.5",
                                shrinkA=5, shrinkB=5,
                                patchA=None, patchB=None,

connectionstyle="arc3,rad=rrr".replace('rrr',str(0.3*e[2])
                                ),
                                ),
                                )
nx.draw_networkx_labels(G, pos, labels=None, font_size=12, font_color='k',
font_family='sans-serif', font_weight='normal', alpha=1.0, bbox=None, ax=None)
# 保存为透明图像
plt.savefig("Advanced"+filename, transparent=True)
plt.show()

# 通过 E_寻找两个超结点所含结点
```

```
G = nx.Graph()
G.add_edges_from(E_)
Set1 = set()
Set2 = set()
components=list(nx.connected_components(G))
for i in components[0]:
    Set1.add(f(i))

if len(components) > 1:
    for i in components[1]:
        Set2.add(f(i))

print(Set1,Set2)
```

附录 D

```
import numpy as np
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt
from random import choice
import copy



filename = "BenchmarkNetwork"
# filename = "Corruption_Gcc"
# filename = "Crime_Gcc"
# filename = "PPI_gcc"
# filename = "RodeEU_gcc"

E = np.loadtxt("data/"+filename+".txt")
G = nx.Graph()
G.add_edges_from(E)
# 得到图的邻接矩阵
A = nx.adjacency_matrix(G)
G_mat = A.todense()
# 输出这个邻接矩阵
# print('邻接矩阵:\n',G_mat)
# 画出这张图
# nx.draw(G)



# 得到每个点的度数
D = []
```

```
for i in range(0, len(G_mat)):
    each = G_mat[i][0]
    each[each > 0] = 1
    degree = each.sum()
    D.append(degree)
D = np.array(D)

L = list(np.loadtxt("data/"+filename+".txt", dtype=np.int).flatten())
Array = list(set(L))
Array.sort(key=L.index)
# 点标号的映射
def f(x):
    value = Array[x]
    return value


def karger_Min_Cut(graph, D):
    pair = []
    while np.sum(D > 0) > 20:        # 设定 Karger 的阈值
        # 随机选一个顶点
        u_beixuan = np.array(np.where(D > 0))[0]
        u = choice(u_beixuan)
        u_no = np.where(graph[u] > 0)[1]
        v = choice(u_no)      # 选出一条边
        pair.append((u,v))
        contract_K(graph, u, v, D)
    return D, pair


def contract_K(graph, u, v, D):
    # 更新点的度数
    D[u] = D[u] + D[v] - 2*graph[u, v]
    D[v] = 0
    # 删除 uv 相连的边（自环）
    graph[u, v] = 0
    graph[v, u] = 0
    v_ = np.where(graph[v] > 0)[1]   # 与 v 相连的顶点
    # 更新与 v 有边的点的列表
    for vertex in v_:
        if vertex != u and vertex != v:
            graph[vertex, u] = graph[vertex, u] + graph[vertex, v]
            graph[u, vertex] = graph[u, vertex] + graph[v, vertex]
            graph[vertex, v] = 0
            graph[v, vertex] = 0
```

```
# 规约找点：输入索引，返回索引
def find_nodes(array, u_list, v_list, nodes):
    C = []
    D = []
    for each in array:
        C.append(v_list[each])
    nodes.extend(C)
    for every in C:
        D.extend([i for i, x in enumerate(u_list) if x == every])
    if len(D) == 0:        # 空数组
        return 0
    return D


# Stoer-Wagner 算法
def GlobalMinCut(G_mat):
    # 记录每个结点
    D = np.arange(len(G_mat))
    # 初始化 mincut 为一个大数
    mincut = 10000
    E_ = []

    while len(G_mat) > 2:
        s,t,mc = MinCut(G_mat)

        if mc < mincut:
            mincut = mc

        # 当发现最小割为 1 时直接退出
        if mincut == 1:
            E_.append([D[t],D[t]])  # 相当于此时不要把点添加进去，同时保证 E_中至少
有一条边
            D = [D[s],D[t]]
            break

        E_.append([D[s],D[t]])
        #合并 s,t
        G_mat = contract_SW(G_mat,s,t)

        print(D[s],D[t],mincut)

        # 删除 t 点编号，把 s 点编号换到最后面
```

```
        if s<t:
            D = np.delete(D,t)
            zjl = D[-1]
            D[-1] = D[s]
            D[s] = zjl
        else:
            zjl = D[-1]
            D[-1] = D[s]
            D[s] = zjl
            D = np.delete(D,[t])

        # 输出剩余的点的标号
        print(D)

    return mincut,D,E_


# 求解任意 st 最小割的函数
def MinCut(G_mat):
    A = []
    a = np.random.randint(0,len(G_mat)-1)
    A.append(a)

    # 构造点集 V-A 记为 V_no_
    V_no_ = list(np.arange(len(G_mat)))

    while(len(A)<len(G_mat)):

        V_no_.remove(A[-1])
        # print(V_no_)
        # print(A)

        A.append(V_no_[np.argmax(np.sum(G_mat[A][:,V_no_],axis=0))])

    s = A[-2]
    t = A[-1]
    mincut = np.sum(G_mat[A,t])-G_mat[A[-1],t]

    return s,t,mincut



def contract_SW(G_mat,s,t):
    new_mat = np.zeros((len(G_mat)+1,len(G_mat)+1))
    new_mat[:len(G_mat),:len(G_mat)] = G_mat
```

```
    for i in range(len(G_mat)):
        if i != s and i != t:
            new_mat[i,-1] = new_mat[i,s] + new_mat[i,t]
            new_mat[-1,i] = new_mat[s,i] + new_mat[t,i]
    new_mat = np.delete(new_mat, (s,t), axis = 0)
    new_mat = np.delete(new_mat, (s,t), axis = 1)
    return new_mat


Matrix = []
pair_ = []
D_ = []
# print(karger_Min_Cut(G_mat))
countMin = float('inf')
for i in range(100):
    if (i % 30 == 0):
        print('第', str(i), '局')
    MatCopy = copy.deepcopy(G_mat)    # 副本
    DCopy = copy.deepcopy(D)    # 副本
    count, pair_array = karger_Min_Cut(MatCopy, DCopy)    # 节点对
    count_number = np.max(count)
    if count_number < countMin:
        countMin = count_number
        Matrix.append(MatCopy)
        pair_.append(pair_array)
        D_.append(count)
print("karger_min_cut is " + str(countMin))

last = Matrix[-1]
degree = D_[-1]
node_set = ([i for i, x in enumerate(degree) if x != 0])
print(node_set)

last_pair = pair_[-1]
A = []
B = []
A.append(node_set[0])    # 点集 1
B.append(node_set[1])    # 点集 2
u_list = []
v_list = []
for m in range(len(last_pair)):
    each = last_pair[m]
    u = each[0]
    v = each[1]
```

```
    u_list.append(u)
    v_list.append(v)

# 点集 1
set1 = ([i for i, x in enumerate(u_list) if x == node_set[0]])
result1 = find_nodes(set1, u_list, v_list, A)
while result1 != 0:
    result1 = find_nodes(result1, u_list, v_list, A)
A = [f(x) for x in A]      # 还原标号
print("点集 1：", A)

# 点集 2
set2 = ([i for i, x in enumerate(u_list) if x == node_set[1]])
result2 = find_nodes(set2, u_list, v_list, B)
while result2 != 0:
    result2 = find_nodes(result2, u_list, v_list, B)
B = [f(x) for x in B]      # 还原标号
print("点集 2：", B)



# 作图
last = Matrix[-1]
arr = []
for i in range(len(last)):
    for j in range(len(last)):
        if last[i, j] > 0:
            last[j, i] = 0
            number = last[i, j]
            for m in range(number):
                arr.append([f(i), f(j)])
# print(arr)

G=nx.MultiGraph(arr)
pos = nx.spring_layout(G)
nx.draw_networkx_nodes(G, pos, node_color = 'r', alpha = 1)
ax = plt.gca()
for e in G.edges:
    ax.annotate("",
                xy=pos[e[0]], xycoords='data',
                xytext=pos[e[1]], textcoords='data',
                arrowprops=dict(arrowstyle="-", color="0.5",
                                shrinkA=5, shrinkB=5,
                                patchA=None, patchB=None,
```

```
connectionstyle="arc3,rad=rrr".replace('rrr',str(0.3*e[2])),),)
nx.draw_networkx_labels(G, pos, labels=None, font_size=12, font_color='k',
font_family='sans-serif', font_weight='normal', alpha=1.0, bbox=None, ax=None)
plt.show()


# 结点数降至阈值以下改用 SW 算法
G = nx.MultiGraph()
G.add_edges_from(arr)
# 得到图的邻接矩阵
A = nx.adjacency_matrix(G)
G_mat = A.todense()
mincut,D,E_ = GlobalMinCut(G_mat)

L = list(np.array(arr).flatten())
Array = list(set(L))
Array.sort(key=L.index)
# 点标号的映射
def F(x):
    value = Array[x]
    return value

# 映射到在原文件中的编号
D[0] = F(D[0])
D[1] = F(D[1])

array = []
for i in range(int(mincut)):
    array.append(D)

print("\nThe global minimum cut is:",D,mincut,"(在原文件中的标号)")


# 作图展示测试结果
G=nx.MultiGraph(array)
pos = nx.spring_layout(G)
nx.draw_networkx_nodes(G, pos, node_color = 'r', alpha = 1)
ax = plt.gca()
for e in G.edges:
    ax.annotate("",
                xy=pos[e[0]], xycoords='data',
                xytext=pos[e[1]], textcoords='data',
                arrowprops=dict(arrowstyle="-", color="0.5",
                                shrinkA=5, shrinkB=5,
```

```
                                        patchA=None, patchB=None,

connectionstyle="arc3,rad=rrr".replace('rrr',str(0.3*e[2])
                                        ),
                                        ),
                    )
nx.draw_networkx_labels(G, pos, labels=None, font_size=12, font_color='k', font_family='sans-serif', font_weight='normal', alpha=1.0, bbox=None, ax=None)
# 保存为透明图像
plt.savefig("Advanced"+filename, transparent=True)
plt.show()

# 通过 E_寻找两个超结点所含结点
G = nx.Graph()
G.add_edges_from(E_)
Set1 = set()
Set2 = set()
components=list(nx.connected_components(G))
for i in components[0]:
    Set1.add(F(i))

if len(components) > 1:
    for i in components[1]:
        Set2.add(F(i))

print(Set1,"\n",Set2)
```