**坐标恒等变换**

作者：Happy2018new

出品：幻想乡和英伦小镇·命令组

本文献主要推导和给出“Minecraft·基岩版”中关于局部坐标与相对坐标的转换式。对于其他转换式，请参考其他文献。

1. 局部坐标转换相对坐标[菊香恒等式]
2. 已知：实体A的竖直朝向 及其水平朝向 ，另一点B关于实体A的局部坐标 。
3. 求：点B关于实体A的相对坐标。
4. 推导：

由于游戏中的坐标系统不是数学上的坐标系统，因此为了便于理解和推导，此处令实体A的竖直朝向为 ，水平朝向为 ，以实体A为原点建立的相对坐标系为R。

除此之外，我们使用笛卡尔三维直角坐标系来完成大多数推导过程( 轴为高度轴)。

需要注意的是，由于使用的坐标系统是数学上的，因此竖直朝向 和水平朝向 须在最终转换回 和 。

1. 对于局部坐标系的 方向 ：

一般地，局部坐标系的 方向为实体A的正前方向。同时，此轴上的单位长度与世界坐标系下任意轴上的单位长度等价。

因此，我们不妨设局部坐标系 方向上的单位向量 的长度为1。

现在，我们需要表达出 在坐标系R下的坐标表达形式。

我们知道， 作为实体A的正前方向，其具有的水平朝向和竖直朝向应与实体A完全一致。因此，我们只需要研究这些朝向与 的几何关系即可得到目标表达式。

很显然，我们可以认为 在坐标系R下的竖直分量是 在垂直于地面方向的投影，即：

其中，1是 的长度。

以同样的方法可以得到 在地面上的投影，即：

此时，我们从地面的正上方俯视此投影，于是可以观察到 在坐标系R下的 轴分量分别是此投影在水平地面上的 轴分量，即：

于是，得到 在坐标系R下的坐标表达形式：

由于存在以下转换关系：

于是得到：

值得注意的是，地面上投影的长度应当始终为非负数，即 必须始终为非负数。

细心的读者应发现上文并未使用 。这是因为 的取值范围是 ，在 取此范围中的值时， 一定是非负数，因此绝对值可以直接去掉。

1. 对于局部坐标系的 方向：

一般地，局部坐标系的 方向为实体A的正左方向。除此之外，此方向永远平行于地面，即此方向在坐标系R下的竖直分量为0。

如果你不理解为何为0，那么你可以摆放一张草稿纸在水平桌面上，然后缓慢抬起它(可以转动草稿纸)并让草稿纸的左下角始终接触水平桌面。之后，看到草稿纸的左下角，你会发现无论怎么改变草稿纸的方向，草稿纸总有一边平行于水平桌面。

现在，让我们来解决问题。同样的，由于此轴上的单位长度与世界坐标系下任意轴上的单位长度等价，因此我们依旧设局部坐标系 方向上的单位向量 的长度为1。

现在，我们需要表达出 在坐标系R下的坐标表达形式。

值得注意的是，由于我们在推导时采用的是笛卡尔三维直角坐标系，因此游戏中的正左方应对应此坐标系下的正右方。

近似的，我们可以把 看作是将 投影到地面并顺时针旋转90度。

但这么操作会导致一个问题，即投影的长度不为1。

所以，为了解决这个问题，我们应只看实体A的水平朝向，而不将 投影到地面上。

按照刚刚所说的，将实体A的水平朝向顺时针旋转90度便能得到 。然后，我们分解转动后的单位水平朝向便可得到目标表达式。

于是 在坐标系R下的水平分量为：

其竖直分量为：

于是得到：

由于存在以下转换关系：

于是得到：

1. 对于局部坐标系的 方向：

一般地，局部坐标系的 方向为实体A的上方向。

为了便于理解，你可以先水平看向前方，然后放一只铅笔在你的头顶(铅笔笔头朝向平行于地面的天花板)。

之后，你转动你的脑袋，且仍然让铅笔的底部紧靠你的头顶，那么此时从铅笔底部指向铅笔笔头的方向便是你这个局部坐标系的 方向。

同样的，我们设局部坐标系 方向上的单位向量 的长度为1。

为了便于理解，我们定义一个平面L。此平面的长度方向是 的水平朝向，宽度方向是垂直于地面的方向。

通过分析 方向和 方向的几何关系，我们可以发现 是由 在平面L内逆时针旋转90度得到的。

根据我们之前的推导过程，在此处我们仍然需要分解和 到坐标系R的各个轴上。

值得注意的是，由于分解时需要使用到水平朝向，但 经旋转后得到的 的水平朝向不一定仍旧是 ，因此我们应当分类讨论。

1. 当竖直朝向满足下述限制时：

此时 的水平朝向是原水平朝向加上180度，竖直朝向是原竖直朝向加上90度。

让我们重新看看 在坐标系R下的坐标表达形式：

于是我们得到 在坐标系R下的坐标表达形式：

即：

由于竖直朝向有范围限制，因此我们可以去掉绝对值符号并稍做处理，最终得到：

1. 当竖直朝向满足下述限制时：

此时 的水平朝向不变，竖直朝向是原竖直朝向加上90度。

于是我们得到 在坐标系R下的坐标表达形式：

即：

由于竖直朝向有范围限制，因此我们可以去掉绝对值符号并稍做处理，最终得到：

通过整理，我们会发现2个情况下的表达式完全一致，故 在坐标系R下的坐标表达形式为：

由于存在以下转换关系：

于是得到：

所有情况的讨论到此结束。最终，我们得到了3个向量，它们分别是：

由于存在：

于是可列方程：

因此，当另一点B关于实体A的局部坐标为 时，点B关于实体A的相对坐标为：

1. 相对坐标转换局部坐标[乡居恒等式]
2. 已知：实体A的竖直朝向 及其水平朝向 ，另一点B关于实体A的相对坐标 。
3. 求：点B关于实体A的局部坐标。
4. 根据上一章节的推导，易得：

由于存在：

于是可列方程：

解得：

因此，当另一点B关于实体A的相对坐标为 时，点B关于实体A的局部坐标为：