第二节 函数项级数

函数项级数的定义

设$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$是定义在集合$A \subseteq R$上的函数, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \qquad (1)$$

称为定义在集合A上的**(函数项)无穷级数**.

例如级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots,$

第二节 函数项级数

2.1 函数项级数处处收敛性

2.2一致收敛及其判定方法

2.3一致收敛级数的性质

2.1 函数项级数处处收敛性

定义2.1（函数项级数处处收敛性与和函数）

取$x_0 \in A$,级数(1)$\Rightarrow u_1(x_0)+u_2(x_0)+\cdots+u_n(x_0)+\cdots$(2)

数项级数

如果数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$收敛,

则称x_0为级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的**收敛点**, 否则称为**发散点**.

函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的所有收敛点的全体 D 称为**收敛域**,

所有发散点的全体称为**发散域**.

设 D 是函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域。

则 $\forall x \in D$，项级 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛，则称该级数在 D 上处处收敛（或逐点收敛）。

$\forall x \in D$,设对应的级数和为 $S(x)$，这样，便在 D 中定义了一个函数 $S(x)$，称为该函数项级数的和函数。

设 $S_n(x)$是函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的前 n 项和，

则当 $x \in D$ 时，有 $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$

称 $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ 为该函数项级

数的余项和。

显然，$\forall x \in D,\quad \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

例如，几何级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

它的收敛域为 $|x| < 1$，发散域为 $|x| \geq 1$；在

收敛域内，和函数是 $\dfrac{1}{1-x}$，即有

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad (x \in (-1,1))$$

例2.2 讨论函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

$$= x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \cdots + (x^n - x^{n-1}) + \cdots$$

的收敛性，并求其和函数。

$$(u_1(x) = x, u_n(x) = (x^n - x^{n-1}), n \in N_+)$$

解

$$\because s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = x^n,$$

$$\therefore s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \begin{cases} 0, |x| < 1, \\ 1, \ x = 1. \end{cases}$$

例2 求$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$的收敛域

解 $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)e^{-(n+1)x}}{ne^{-nx}} = e^{-x}$

$e^{-x} < 1$,即，$x > 0$, 级数收敛

$e^{-x} > 1$,即，$x < 0$, 级数发散

$x = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 发散，级数发散

故级数的收敛域为（0，+∞）

例3 函数项级数 $\boxed{\dfrac{\sin x}{1^2}+\dfrac{\sin 2^2 x}{2^2}+\cdots+\dfrac{\sin n^2 x}{n^2}+\cdots}$

求其收敛域。

解 因为对任意 x 都有:

$$\left|\frac{\sin n^2 x}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2} \quad (n=1,2,\cdots)$$

所以它 在$(-\infty,+\infty)$内处处收敛,

问题的引入

有限项和的极限、连续、导数和积分的性质

$$(1)\quad \lim[f(x)+g(x)]=\lim f(x)+\lim g(x)$$

$$(2)\quad [f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$$

$$(3)\int_a^b[f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

对于无限个函数的和是否具有这些性质呢？

考察例2.2的函数项级数

$$x+(x^2-x)+(x^3-x^2)+\cdots+(x^n-x^{n-1})+\cdots$$

和函数的连续性.

该级数每一项都在[0,1]是连续的,

得和函数:

$$s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

在 $x=1$ 处间断.

例3 函数项级数 $\boxed{\dfrac{\sin x}{1^2}+\dfrac{\sin 2^2 x}{2^2}+\cdots+\dfrac{\sin n^2 x}{n^2}+\cdots}$

因为对任意 x 都有: $\left|\dfrac{\sin n^2 x}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2} \quad (n=1,2,\cdots)$

所以它 在$(-\infty,+\infty)$内处处收敛，但各项求导后的级数

$$\boxed{\cos x+\cos 2^2 x+\cdots+\cos n^2 x+\cdots}$$

其一般项不趋于0，所以对任意 x 都发散 .

问题: 对什么样的函数项级数才有:

逐项连续 $\longrightarrow$ 和函数连续;

逐项求导 = 和函数求导; 逐项积分 = 和函数积分

函数项级数一致收敛性的条件很重要!

对于有限项,求极限,求导数,求积分均有线性性质。

问题:对于无穷项,是否也具有相应的线性 性质呢?

即:$\lim\limits_{x\to x_0}\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)\overset{?}{=}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lim\limits_{x\to x_0}u_n(x)$ --逐项求极限

$$\lim_{x\to x_0}s(x)\overset{?}{=}s(x_0)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)\right)=\frac{d}{dx}(S(x))\overset{?}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{du_n(x)}{dx}\text{ --逐项求导}$$

$$\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)\right)dx=\int_a^b S(x)dx\overset{?}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx\text{ --逐项求积分}$$

2.2 函数项级数的一致收敛性及其判定

定义2.2 设有函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. 如果对于任意给定的正数 ε，都存在着一个只依赖于 ε 的自然数 N，使得当 $n > N$ 时，对区间 D 上的一切 x，都有不等式

$$|R_n(x)| = |s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$$

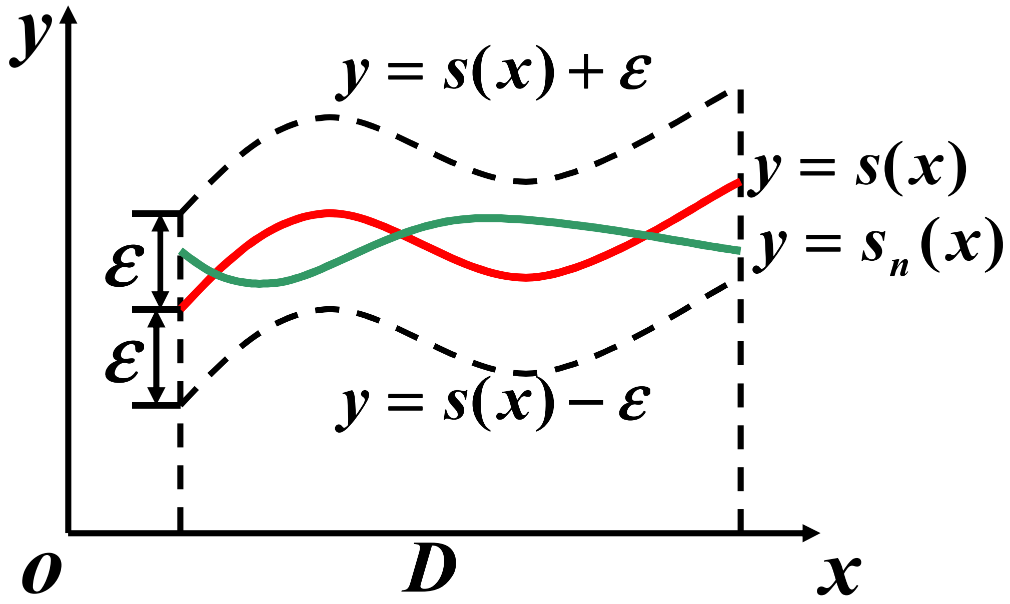
成立，则成函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 D 上**一致收敛**于和 $s(x)$，也称函数序列 $s_n(x)$ 在区间 D 上一致收敛于 $s(x)$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0, \partial\ n > N, \\ \text{对} \forall x \in D, \text{有} |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \end{array}}$$

几何解释:

只要 n充分大$(n > N)$,在 D 上所有曲线 $y = s_n(x)$将位于曲线

$y = s(x) + \varepsilon$与$y = s(x) - \varepsilon$之间.



定理2.1 （Cauchy一致收敛准则）

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 D上一致收敛的充分必要条件是：

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon)$, 当 $n>N$ 时，对 $\forall x \in D$

及任何的自然数 P，有

$$\left|S_{n+P}(x) - S_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+P} u_k(x)\right| < \varepsilon$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛 $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in N^{+}$ 当$n > N$时， 对$\forall p \in N_{+}$， 有

$$\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}\right| < \varepsilon$$

例2 研究级数

$$\frac{1}{x+1}+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n-1}\right)+\cdots$$

在区间$[0,+\infty)$上的一致收敛性.

解 $\because s_n(x)=\dfrac{1}{x+n}$,

$$s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x+n}=0 \quad (0\le x<+\infty)$$

余项的绝对值

$$|R_n|=|s(x)-s_n(x)|=\frac{1}{x+n}\le\frac{1}{n} \ (0\le x<+\infty)$$

对于任给$\varepsilon > 0$，取自然数$N \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$，

则当$n > N$时，对于区间$[0,+\infty]$上的一切 x，

有 $\left|R_n(x)\right| < \varepsilon$,

根据定义，

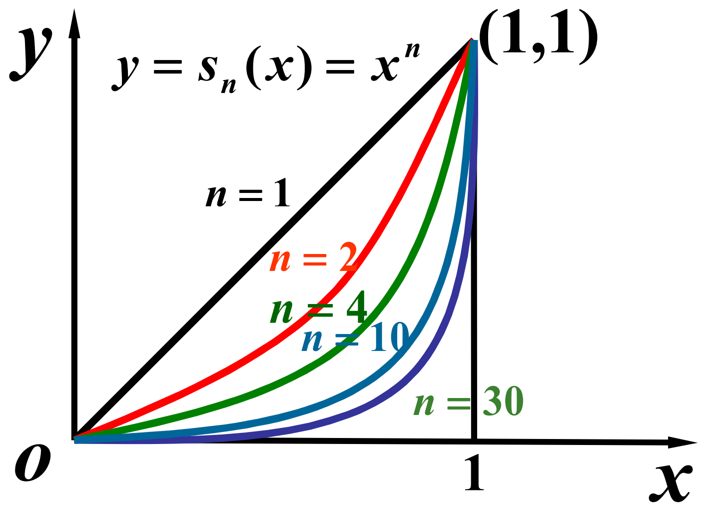
所给级数在区间$[0,+\infty]$上一致收敛于$s(x) \equiv 0$.

例5 研究例2.2中的级数

$$x+(x^2-x)+(x^3-x^2)+\cdots+(x^n-x^{n-1})+\cdots$$

在区间(0 , 1）内的一致收敛性.

$$s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$



例2.4 研究例2.2中的级数

$$x+(x^2-x)+(x^3-x^2)+\cdots+(x^n-x^{n-1})+\cdots$$

在区间(0 , 1）内的一致收敛性.

解 该级数在区间(0,1)内处处收敛于和$s(x)\equiv 0$，但并不一致收敛.

$$s_n(x)=x^n$$

对于任意一个自然数 n，取$x_n=\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}$，于是

$$s_n(x_n)=x_n^n=\frac{1}{2},$$

但 $s(x_n)=0$，从而 $\left|R_n(x_n)\right|=\left|s(x_n)-s_n(x_n)\right|=\dfrac{1}{2}.$

$\therefore$只要取$\varepsilon < \dfrac{1}{2}$，不论$n$多么大，在(0,1)总存在

点x_n，使得$\left|R_n(x_n)\right| > \varepsilon$,

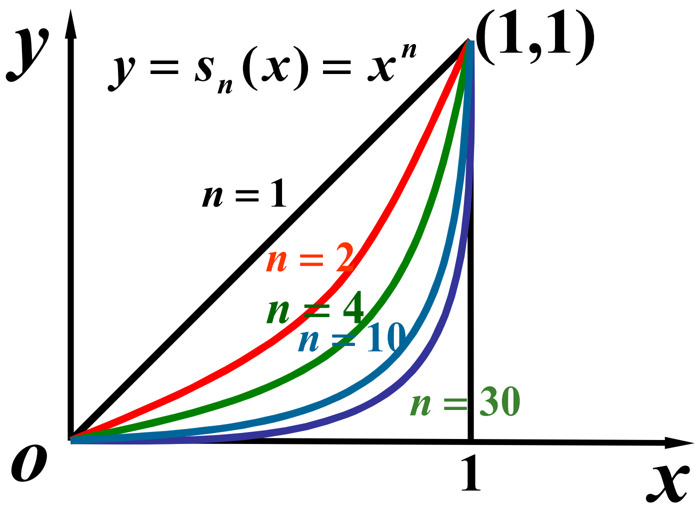
因此级数在$(0,1)$内不一致连续.

说明: 虽然函数序列$s_n(x) = x^n$在$(0,1)$内处处

收敛于$s(x) \equiv 0$, 但$s_n(x)$在$(0,1)$内各点处收

敛于零的“快慢”程度是不一致的.

从下图可以看出:



注意：对于任意正数 $r < 1$，这级数在 $[0, r]$ 上一致收敛.

小结　一致收敛性与所讨论的区间有关.

一致收敛性简便的判别法：

也称M-判别法

定理2.2（魏尔斯特拉斯(Weierstrass)判别法）

如果函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在区间 D 上满足条件：

（1） $|u_n(x)| \le a_n \qquad (n = 1,2,3\cdots)$；

（2） 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，

则函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在区间$D$上一致收敛.

证 由条件(2)，对任意给定的 $\varepsilon > 0$，根据柯西收敛原理存在自然数N，使得当 $n > N$ 时，对于任意的自然数 p 都有

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon.$$

由条件(1)，对任何 $x \in D$，都有

$$\begin{aligned} &\left|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)\right| \\ &\qquad \le \left|u_{n+1}(x)\right| + \left|u_{n+2}(x)\right| + \cdots + \left|u_{n+p}(x)\right| \\ &\qquad \le a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon, \end{aligned}$$

因此函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在数集 D 上一致收敛.

EX1. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$,求$\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$.

EX2. 证明$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4}$在$(-\infty,+\infty)$上有二阶连续导函数,并求$f''(x)$.

EX1. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$,求$\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$.

解：由级数在 $[0,\pi]$一致收敛，一般项连续，可逐项积分

$$\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n^2}\mathrm{d}x=0.$$

EX2. 证明$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4}$在$(-\infty,+\infty)$上有二阶连续导函数,并求$f''(x)$.

解: $\because u_n(x)=\frac{\sin nx}{n^4}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$一致收敛,$(-\infty,+\infty)$.

$\therefore f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$

同理: $f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{\sin nx}{n^2}$

例6 证明级数

$$\frac{\sin x}{1^2}+\frac{\sin 2^2 x}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n^2 x}{n^2}+\cdots$$

在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

证 $\because$ 在$(-\infty,+\infty)$内

$$\left|\frac{\sin n^2 x}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

$\because$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛, 由魏尔斯特拉斯判别法,

$\therefore$ 所给级数在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛.

说明: 1.维尔斯特拉斯判别法也称为M判别法,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$称为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的优级数或控制级数.

☆ 2.当不易观察到不等式 $|u_n(x)| \le a_n$时,可利用导数求

$$a_n = \max_{x\in I} |u_n(x)|$$

例如, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}, x\in[0, +\infty), u_n(x)=\frac{nx}{1+n^5x^2},$

用求导法可得 $a_n = \max_{[0,+\infty)} \frac{nx}{1+n^5x^2} = u_n\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$

已知$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛, 因此原级数在$[0, +\infty)$ 上一致收敛 .

2.3 一致收敛级数的性质

对于有限项,求极限,求导数,求积分均有线性性质。

问题:对于无穷项,是否也具有相应的线性 性质呢?

即:$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x) \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to x_0}u_n(x)\text{——逐项求极限}$$

$$\lim_{x\to x_0} s(x) \overset{?}{=} s(x_0)$$

$$\frac{d}{dx}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)\Big)=\frac{d}{dx}(S(x)) \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{du_n(x)}{dx}\text{——逐项求导}$$

$$\int_a^b\Big(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)\Big)dx=\int_a^b S(x)dx \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx\text{——逐项求积分}$$

定理2.3 和函数的连续性

如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的各项$u_n(x)$在区间$[a,b]$上都连续，且$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在区间$[a,b]$上一致收敛于$s(x)$，则$s(x)$在$[a,b]$上也连续.

证 设 x_0, x 为$[a,b]$上任意点. 由

$$\therefore \left|s(x)-s(x_0)\right|$$

$$=\left|s(x)-s_n(x)+s_n(x)-s_n(x_0)+s_n(x_0)-s(x_0)\right| \quad (1)$$

$$\le \left|s(x)-s_n(x)\right|+\left|s_n(x)-s_n(x_0)\right|+\left|s_n(x_0)-s(x_0)\right|$$

$\because$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$一致收敛于$s(x)$,

对$\forall \varepsilon > 0$，必$\exists$自然数$N = N(\varepsilon)$，使得当$n > N$时,

对$[a,b]$上的一切 x 都有$\left|s(x)-s_n(x)\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ (2)

同样有 $\left|s_n(x_0)-s(x_0)\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

$\because \quad s_n(x)$是有限项连续函数之和，

故$s_n(x)(n > N)$在点x_0连续，

$\exists \delta > 0$当$|x - x_0| < \delta$时总有 $|s_n(x) - s_n(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ (3)

由(1)、(2)、(3)可见，对任给$\varepsilon > 0$，必有$\delta > 0$，

当$|x - x_0| < \delta$时，有 $|s(x) - s(x_0)| < \varepsilon$.

所以$s(x)$在点 x_0处连续，而 x_0在$[a,b]$上是任意的，因此$s(x)$在$[a,b]$上连续.

定理2.4 和函数的可积性

如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的各项$u_n(x)$在区间$[a,b]$上都连续，且$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在区间$[a,b]$上一致收敛于$s(x)$，则$s(x)$在$[a,b]$上可以逐项积分，即

$$\int_{x_0}^{x} s(x)dx$$

$$= \int_{x_0}^{x} u_1(x)dx + \int_{x_0}^{x} u_2(x)dx + \cdots + \int_{x_0}^{x} u_n(x)dx + \cdots \quad (4)$$

其中$a \le x_0 < x \le b$，并且上式右端的级数在$[a,b]$上也一致收敛.

证 $\because$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$一致收敛于$s(x)$,

由定理 2.3，$s(x)$，$R_n(x) := s(x) - s_n(x)$都在

$[a,b]$上连续,所以积分 $\int_{x_0}^{x} s(x)dx$, $\int_{x_0}^{x} R_n(x)dx$

存在,从而有

$$\left|\int_{x_0}^{x} s(x)dx - \int_{x_0}^{x} s_n(x)dx\right| = \left|\int_{x_0}^{x} R_n(x)dx\right| \le \int_{x_0}^{x} \left|R_n(x)\right| dx.$$

又由级数的一致收敛性,对任给正数 ε 必有

$N = N(\varepsilon)$使得当$n > N$时,对$[a,b]$上的一切 x ,都

有

$$\left|R_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

于是，当$n > N$时有

$$\left|\int_{x_0}^{x} s(x)dx - \int_{x_0}^{x} s_n(x)dx\right| \le \int_{x_0}^{x} |R_n(x)|dx$$

$< \dfrac{\varepsilon}{b-a}\cdot(x-x_0) \le \varepsilon.$ 根据极限定义，有

$$\int_{x_0}^{x} s(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} s_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\int_{x_0}^{x} u_n(x)dx$$

即 $$\boxed{\int_{x_0}^{x} s(x)dx = \sum_{i=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} u_i(x)dx}$$

由于N只依赖于ε而于x_0, x无关，

所以级数$\sum_{i=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} u_i(x)dx$在$[a,b]$上一致收敛.

定理2.5 和函数的可导性

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[\,a,b\,]$ 上收敛于和 $s(x)$，它的各项 $u_n(x)$ 都具有连续导数 $u_n'(x)$，并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $[\,a,b\,]$ 上一致收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[\,a,b\,]$ 上也一致收敛，且可逐项求导，即

$$s'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \cdots + u_n'(x) + \cdots \qquad (5)$$

注意:级数一致收敛并不能保证可以逐项求导.

例如，级数 $\dfrac{\sin x}{1^2}+\dfrac{\sin 2^2 x}{2^2}+\cdots+\dfrac{\sin n^2 x}{n^2}+\cdots$

在任何区间$[a,b]$上都是一致收敛的.

逐项求导后得级数

$$\cos x+\cos 2^2 x+\cdots+\cos n^2 x+\cdots,$$

因其一般项不趋于零,所以对于任意值 x 都是发散的.

所以原级数不可以逐项求导.

小结

1、函数项级数一致收敛的定义；

2、一致收敛级数的判别法——魏尔斯特拉斯判别法；

3、一致收敛级数的基本性质；

判别一个给定的函数列或函数项级数在某个区间D上是否一致收敛，一般有以下几个方法：

（1）直接由定义出发来验证；

（2）运用Cauchy一致收敛准则；

(3) 对函数项级数可用M判别法.

注意: 这里(1)都必须先求得其极限函数(或和函数)