3.3 方向导数与梯度

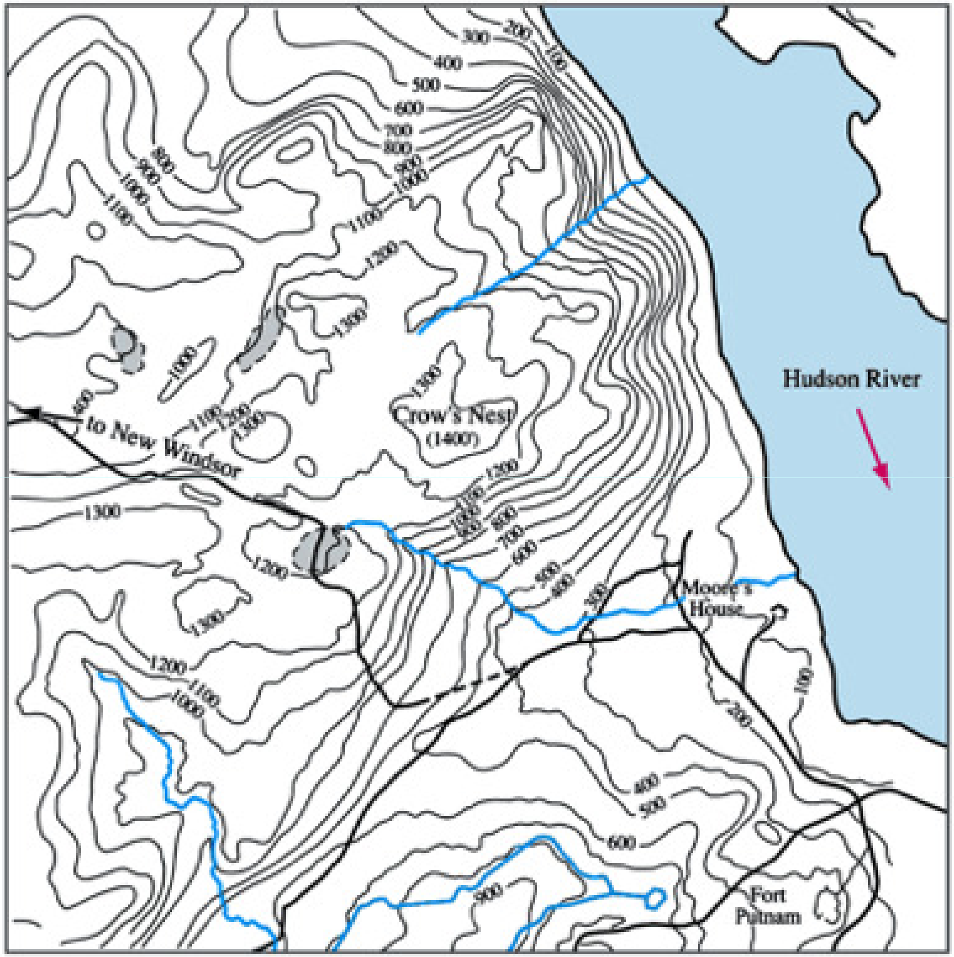


FIGURE 14.25 Contours along the Hudson River in New York show streams, which follow paths of steepest descent, running perpendicular to the contours.

3.3 方向导数与梯度

定义3.3（方向导数） 设点$x_0 \in \mathbf{R}^2$，l是平面上一向量，其单位向量为e_l. f:$U(x_0) \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$.在$U(x_0)$内让自变量$x$由$x_0$沿与$e_l$平行的直线变到$x_0+te_l$，从而函数值的改变量$f(x_0+te_l)-f(x_0)$.

若

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+te_l)-f(x_0)}{t}$$

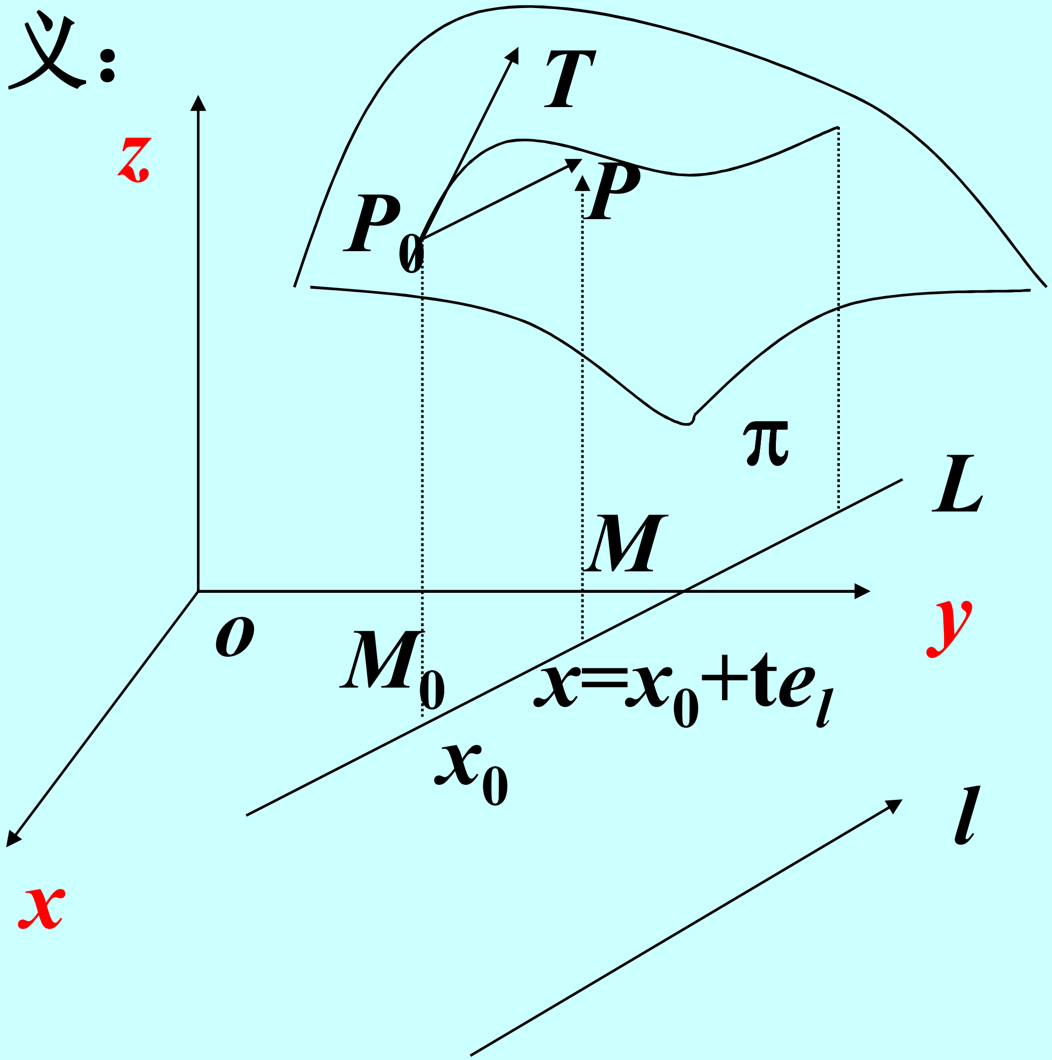
存在，则称此极限为f在点x_0沿l方向的方向导数。

记作：

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial l}=\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{x_0}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+te_l)-f(x_0)}{t}$$

方向导数的几何意义：

过直线L:$x=x_0+te_l$作平行于z轴的平面π,它与曲面在$z=f(x,y)$所交的曲线C在P_0点唯一切线关于l方向的斜率(与向量l交角的正切值)



例 3.12 设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

求f在点(0,0)沿方向e_l=(cosθ,sin θ)的方向导数。

解：

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial l}=\begin{cases}\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta} & \cos\theta\neq 0\\ 0 & \cos\theta=0\end{cases}$$

注1: $$\left.\frac{\partial f}{\partial(-l)}\right|_{x_0} = -\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{x_0}$$

注2:在一点的所有的方向导数都存在，也不一定在此点连续。

设e_l是$\mathbf{R}^n$中的一个单位向量，用其方向余弦可表示为

$$e_l=(\cos\theta_1,\cos\theta_2,\cdots,\cos\theta_n),$$

$$\|e_l\|=\sqrt{\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cdots+\cos^2\theta_n}=1.$$

$e_1=(1,0,\cdots,0),\mathrm{e}_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,$

$e_n=(0,\cdots,0,1)$是$\mathbf{R}^n$的一个标准正交基,

$x_0\in\mathbf{R}^n, f:\mathbf{R}^n\supseteq U(x_0)\to\mathbf{R}$，则

$u=f(x)$在点x_0处沿l方向的方向导数

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial l}=\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{\mathrm{x}_0}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\mathrm{e}_l)-f(x_0)}{t}$$

$u=f(x)$在点x_0处对x_i的偏导数

就是它在点 x_0沿方向 $\mathbf{e}_i\,(i=1,2,\cdots,n)$

的方向导数，即

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}_0}=\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}=\lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{e}_i)-f(\mathbf{x}_0)}{t}$$

其中$\mathbf{x}_0=(x_{0,1},x_{0,2},\cdots,x_{0,n})$，记$\Delta x_i=t$，则有

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x_i\mathbf{e}_i)-f(x_0)}{\Delta x_i}$$

$$=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(x_{0,1},\cdots,x_{0,i-1},x_{0,i}+\Delta x_i,x_{0,i+1},\cdots,x_{0,n})-f(x_{0,1},x_{0,2},\cdots,x_{0,n})}{\Delta x_i}$$