（2）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}=0$.

解　(1) 如果 $a\leqslant0$，则无论 b 取何值 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-x+1}-ax+b\right]=+\infty$，所以 $a>0$，由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-x+1}-ax+b\right]=0$ 可知 $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[ax-\sqrt{x^2-x+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(a^2-1)x^2+x-1}{ax+\sqrt{x^2-x+1}}$存在.所以 $a=1$，$b=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\dfrac{1}{2}$.

(2) 由 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}=0$ 知 $f(x)=a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}$是$(x-1)^2$ 的高阶无穷小，所以 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0\Rightarrow c=2$，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=0\Rightarrow b=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}=\dfrac{1}{2}$. 将 $c=2$，$b=\dfrac{1}{2}$代入 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}=0$ 可得 $a=$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2-\frac{1}{2}(x-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{2\sqrt{x^2+3}-(x+3)}{2(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{3}{2(2\sqrt{x^2+3}+x+3)}=\frac{3}{16}.$$

习　题　1.5

(A)

2. 两个在 x_0 处不连续函数之和在 x_0 是否一定不连续？若其中一个在 x_0 处连续，一个在 x_0 处不连续，则它们的和在 x_0 处是否一定不连续？

证　两个在 x_0 处不连续函数之和在 x_0 不一定连续，不一定不连续.

如：$f(x)=\dfrac{1}{x}$，$g(x)=-\dfrac{1}{x}+\sin x$，$h(x)=\sin\dfrac{1}{x}$在 $x_0=0$ 处均不连续.但 $f(x)+g(x)$在 $x_0=0$ 处连续，$f(x)+h(x)$在 $x_0=0$ 处不连续.

如果一个函数在 x_0 处连续，另一个不连续，两个之和一定不连续.

3. 证明：若 f 连续，则$|f|$也连续，逆命题成立吗？

证　因为 $\forall\varepsilon>0$，由 f 在 x_0 处连续可知：$\exists\delta>0$，使得 $\forall x$，只要 $|x-x_0|<\delta$，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，从而

$$\big||f(x)|-|f(x_0)|\big|\leqslant|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|f(x_0)|$. 命题得证.逆命题不成立，如 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant0,\\-1, & x<0,\end{cases}$ $|f(x)|$在 $x=0$ 连续，但 $f(x)$在 $x=0$ 不连续.

4. 设 $f,g\in C[a,b]$，记

$$\varphi(x)=\max_{x\in[a,b]}\{f(x),g(x)\},\psi(x)=\min_{x\in[a,b]}\{f(x),g(x)\}$$

证明：$\varphi,\psi\in C[a,b]$.

证 $\varphi(x)=\max\limits_{x\in[a,b]}\{f(x),g(x)\}=\dfrac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$，

$$\psi(x)=\min_{x\in[a,b]}\{f(x),g(x)\}=\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}.$$

因为 $f(x),g(x)\in C[a,b]$，由连续函数的有理运算性质. 及第 3 题可知 $\varphi(x)$，$\psi(x)\in C[a,b]$.

5. 设函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 Lipschitz 条件：

$\exists L>0$，使得 $\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$，恒有 $|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|$，

证明：f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

证 由函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 Lipschitz 条件可知：$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{L}>0$，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|<\varepsilon$，所以 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

7. 设函数 $f:I\to\mathbf{R}$ 在 $x_0\in I$ 处连续，且 $f(x_0)>0$. 证明：存在 x_0 的一个邻域，在该邻域内，$f(x)\geqslant q>0$.

证 取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}f(x_0)>0$，由 f 的连续性，$\exists\ \delta_0>0$，$\forall x\in U(x_0,\delta)$，恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon_0$. 即 $f(x_0)-\varepsilon_0<f(x)<\varepsilon_0+f(x_0)$，取 $q=f(x_0)-\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}f(x_0)>0$ 即可.

8. 讨论下列函数在指定点处的连续性. 若是间断点，说明它的类型：

(3) $f(x)=2^{\frac{1}{x-3}},x=3$； (4) $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $x=0$.

解 (3) $f(3+0)=\lim\limits_{x\to3^+}2^{\frac{1}{x-3}}=+\infty$，$f(3-0)=0$，所以 $x=3$ 为第二类间断点.

(4) $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$，所以 $x=0$ 为跳跃间断点.

9. 讨论下列函数的连续性. 若有间断点，说明间断点的类型：

(2) $f(x)=e^{x+\frac{1}{x}}$； (4) $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 2, & x=0;\end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x<0,\\ \dfrac{x^2-1}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$

解　(2) $f(x)=e^{x+\frac{1}{x}}$ 在 $x\neq 0$ 的所有点处连续.

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{x+\frac{1}{x}}=+\infty$，$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^{x+\frac{1}{x}}=0$. $x=0$ 为第二类间断点.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}=0\neq f(0)=2$，$x=0$ 为可去间断点. $\forall x\neq 0$，$f(x)$ 连续.

(5) $\lim\limits_{x\to -1}\sin\dfrac{1}{x^2-1}$ 不存在，$x=-1$ 为第二类间断点.

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-1}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}=-1$，$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\sin\dfrac{1}{x^2-1}=\sin(-1)$，故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{\sin\dfrac{\pi}{2}(1-x)}=-\dfrac{4}{\pi}$，$x=1$ 为 $f(x)$ 可去间断点. 由于 $\lim\limits_{x\to 2k+1}\dfrac{x^2-1}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}$ $(k=1,2,\cdots)$ 不存在. 故 $x=(2k+1)$ $(k\in\mathbf{N}_+)$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(2k-1,2k+1)\right)$ 上连续

10. 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arctan x}{\sqrt{x+\ln x}}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x-\dfrac{e^{2x}}{\sin x}\right)$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\tan x}$

解　(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arctan x}{\sqrt{x+\ln x}}=\dfrac{\pi}{4}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot\dfrac{3x}{\sin 3x}\cdot\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{3}$.

(3) $$\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x-\dfrac{e^{2x}}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1+1-e^{2x}}{\sin x}$$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x-1}{x}+\dfrac{1-e^{2x}}{2x}\cdot 2\right)\dfrac{x}{\sin x}=-2.$$

(4) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}}=\mathrm{e},\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}$,

所以 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{x^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}\right]^{\sin x}=\mathrm{e}$.

11. 证明：

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x_0+\Delta x}-\mathrm{e}^{x_0}}{\Delta x}=\mathrm{e}^{x_0}$； (2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^\alpha-x_0^\alpha}{\Delta x}=\alpha x_0^{\alpha-1}(\alpha\in\mathbf{R})$.

解 (1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x_0+\Delta x}-\mathrm{e}^{x_0}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\mathrm{e}^{x_0}\frac{\mathrm{e}^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\mathrm{e}^{x_0}$.

(2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^\alpha-x_0^\alpha}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}x_0^\alpha\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)^\alpha-1}{\Delta x}=x_0^\alpha\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\cdot\frac{\Delta x}{x_0}}{\Delta x}=\alpha x_0^{\alpha-1}$.

12. 试确定常数 a,b，使下列函数在 $x=0$ 处连续：

(2) $f(x)=\begin{cases}\arctan\frac{1}{x}, & x<0,\\ a+\sqrt{x}, & x\geqslant 0;\end{cases}$ (3) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin ax}{x}, & x>0,\\ 2, & x=0,\\ \frac{1}{bx}\ln(1-3x), & x<0.\end{cases}$

解 (2) $f(0+0)=a,f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$.

因为 $f(0)=a=f(0+0)=f(0-0)$时，即 $a=-\frac{\pi}{2}$. $f(x)$在 $x=0$ 处连续.

(3) $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin ax}{x}=a,f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{bx}\ln(1-3x)=-\frac{3}{b}$,
$f(0)=2$，故 $a=2,b=-\frac{3}{2}$.

14. 用介值定理证明：当 n 为奇数时，方程

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

至少有一个根，其中 $a_i\in\mathbf{R}$ 为常数($i=0,1,\cdots,n$)，$a_n\neq 0$.

证 令 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，不妨设 $a_n>0$，由于 n 为奇数，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，于是存在 $x_1>0>x_2$，使 $f(x_1)f(x_2)<0$，由零点定理在$[x_2,x_1]$内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

15. 设 $f\in C[a,b]$，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$. 证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$f(\xi)=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n\lambda_if(x_i),$$

其中 $\lambda=\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i$，且 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$.

证 因为 $f\in C[a,b]$ 且 $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，所以 $f(x)\in C[x_1,x_n]$，由定理 5.5 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上必取得最大值 M 与最小值 m. 且 $m\leqslant f(x_i)\leqslant M, i=1,2,\cdots,n$. 于是 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\right)m\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)\leqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\right)M$，即 $m\leqslant\dfrac{1}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)\leqslant M$.

由介值定理，至少存在一点 $\xi\in[x_1,x_2]\subset(a,b)$ 使 $f(\xi)=\dfrac{1}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$.

(B)

1. 设函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 满足可加性，即对任何 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，并且 f 在 $x=0$ 处连续，证明 f 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

证 由 f 的可加性知 $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$，即 $f(0)=0$. 又 f 在 $x=0$ 连续. 知 $\forall x_0\in\mathbf{R}$，恒有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f[(x-x_0)+x_0]=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x-x_0)+f(x_0)]=f(x_0)$. 故 f 在 x_0 处连续，由 x_0 的任意性 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

2. 设 $f\in C[a,+\infty)$，并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，证明 f 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

证 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在(不妨设为 A)知：对 $\varepsilon_0=1>0$，$\exists M>0$，使 $\forall x\in(M,+\infty)$，恒有 $|f(x)-A|<1$，即 $\forall x\in(M,+\infty)$，$A-1<f(x)<1+A$，于是 $f(x)$ 在 $(M,+\infty)$ 有界. 又由 $f(x)\in C[a,+\infty)$ 知，对上述的 M，$f(x)\in C[a,M]$，即 $f(x)$ 在 $[a,M]$ 上有界. 故 $f(x)$ 在 $[a,M]\cup(M,+\infty)=[a,+\infty)$ 上有界.

3. 设 $f\in C(a,b)$，并且 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 存在(包括极限为无穷大)且异号，证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

证 不妨设 $f(a+0)>0$，则 $f(b-0)<0$，由极限的局部保号性可知：$\exists x_1,x_2$，$a<x_1<x_2<b$ 使 $f(x_1)>0$，$f(x_2)<0$. 因为 $f\in C(a,b)$，所以 $f\in C[x_1,x_2]$. 由介值定理知：至少存在一点 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

4. 设 $f\in C(-\infty,+\infty)$，并且 f 是奇函数，证明方程 $f(x)=0$ 至少有一个根. 若 f 是严格单调的，则 $x=0$ 是它的唯一根.

证 因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(0)=0$.

如果 f 是严格单增的连续函数，那么 $\forall x>0$，$f(x)>f(0)=0$，而 $\forall x<0$，$f(x)<f(0)=0$，即 $\forall x\neq 0$. $f(x)\neq 0$. 故 $x=0$ 是 $f(x)=0$ 唯一根. 同理可证 $f(x)$ 严格单减函数. $x=0$ 仍是 $f(x)=0$ 的唯一根.

5. 证明：若 $a_n>|a_{n-1}|+|a_{n-2}|+\cdots+|a_1|+|a_0|$，则方程

$$a_n\cos nx+a_{n-1}\cos(n-1)x+\cdots+a_1\cos x+a_0=0$$

在 $(0,2\pi)$ 内至少有 $2n$ 个根.

证 令 $f(x)=a_n\cos nx+a_{n-1}\cos(n-1)x+\cdots+a_1\cos x+a_0$. 将 $(0,2\pi)$ 平均分成 $2n$ 个小区间，其中第 k 个子区间为 $\left[\dfrac{(k-1)\pi}{n},\dfrac{k\pi}{n}\right]$. 可以证明：

$f\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)\cdot f\left(\frac{k\pi}{n}\right)<0$. 从而至少存在一点 $\xi_k\in\left(\frac{(k-1)}{n}\pi,\frac{k\pi}{n}\right)$使 $f(\xi_k)=0$. 即在$(0,2\pi)$上 $f(x)=0$ 至少有 $2n$ 个根.

下面证明：$f\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)\cdot f\left(\frac{k}{n}\pi\right)<0$.

如 k 为偶数，则 $f\left(\frac{k}{n}\pi\right)=a_n+a_{n-1}\cos\frac{(n-1)k\pi}{n}+\cdots+a_1\cos\frac{k\pi}{n}+a_0\geqslant a_n-a_{n-1}-\cdots-a_1+a_0\geqslant a_n-(|a_{n-1}|+\cdots+|a_1|+|a_0|)>0$，而 $f\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)=-a_n+a_{n-1}\cos\frac{(n-1)(k-1)}{n}\pi+\cdots+a_1\cos\frac{(k-1)\pi}{n}+a_0\leqslant -a_n+|a_{n-1}|+\cdots+|a_1|+|a_0|<0$.

故 k 为偶数时，$f\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)\cdot f\left(\frac{k\pi}{n}\right)<0$.

同理可证 k 为奇数时，结论成立.

综合练习题

1. 设有一对新出生的兔子，两个月之后成年. 从第三个月开始，每个月产一对小兔，且新生的每对小兔也在出生两个月之后成年，第三个月开始每月生一对小兔. 假定出生的兔均无死亡，(1)问一年后共有几对兔子？(2)问 n 个月之后有多少对兔子？(3)若 n 个月之后有 F_n 对兔子，试求 $\lim\limits_{n\to\infty}=\frac{F_n}{F_{n+1}}$(题中所讲的一对兔子均是雌雄异性的).

说明：该问题是意大利数学家 Fibonacci 于 13 世纪初(1202 年)研究兔子繁殖过程中数量变化规律时提出来的，其中的数列$\{F_n\}$被后人称为 Fibonacci 数列. 有趣的是，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$ 正是"黄金分割"数，在优选法及许多领域得到很多新的应用.

解　第 n 月有小兔 F_n 对，且这 F_n 对小兔到第 $n+1$ 月均成熟，所以第 $n+2$ 月新生小兔 F_n 对，故 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$.

(1) $F_1=1,F_2=1,F_3=2,F_4=3,F_5=5,F_6=8,F_7=13,F_8=21,F_9=34,F_{10}=55,F_{11}=89,F_{12}=144,F_{13}=233$.

(2) 差分方程 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ 的特征方程为 $x^2=x+1$，解之得特征根 $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，则 $F_n=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$，由 $F_1=1,F_2=$