7.2 A

4.(2) $\because \cancel{\frac{x}{1+n^4x^2} < \frac{x}{n^4x^2} = \frac{1}{n^4x} \quad x \sum_{n=1}^{\infty}}$

$x>0$，$\frac{x}{1+n^4x^2} = \frac{1}{\frac{1}{x}+n^4x} \leq \frac{1}{n^2}$，$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛 $\therefore$ 原级数收敛.

$x=0$，收敛到0； ~~$x<0$~~

$x<0$，$\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right| = \left|\frac{-1}{\frac{1}{-x}+n^4(-x)}\right| < \frac{1}{n^2}$ 故收敛.

5.(2) 设级数 $S(x)=1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n$，$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=1$，$R=1$

$\therefore$ 在 $(-1,1)$ 中 $S(x)$ 内闭一致收敛.

$\therefore \int\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^ndx = \sum_{n=0}^{\infty}\int a_nx^ndx = x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots = \frac{x}{1-x}$ $\cancel{=\int S(x)dx}$

$\int S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int a_nx^ndx+1 = 1+x+\cdots+x^n+\cdots = \frac{1}{1-x}$

$\cancel{\int S(x)dx = \int\frac{1}{1-x}}$ $S(x)=\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$

7.3 A:

4.(3) 收 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$ 收敛区间为$(-1,1)$

当$x=1$时，级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+\sqrt{n}}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1+\sqrt{n+1}}{n+\sqrt{n}}>1$，$a_{n+1}>a_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

收敛收敛.

当$x=(-1)$时，级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n+\sqrt{n}}$ 发散.

∴收敛域为$[-1,1]$

(10) ~~$R=\lim\left|\frac{4^{n+1}+(-2)^{n+1}}{4^n+(-2)^n}\right|=2$~~ $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{4^{n+1}+(-2)^{n+1}}{4^n+(-2)^n}\right|=4$

当~~$x=$~~ $x+1=4$时，不收敛；$x+1=-4$时 不收敛

∴收敛~~区间为~~区间为$(-5,3)$，收敛域为$(-5,3)$

6.(6) $\frac{x}{1+x-2x^2}=\frac{x}{(x-1)(-2x-1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{-2x-1}-\frac{1}{x-1}\right)$

$=\frac{1}{3}\left[-\left(\frac{1}{2x+1}\right)+\frac{1}{1-x}\right]$

$\because \frac{1}{2x+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-2)^nx^n=1-2x+4x^2\cdots+(-2)^nx^n+\cdots$

$\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$

∴原式$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^nx^n+x^n}{3}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n+1}{3}x^n$

8.(3) $\ln x=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+\cdots$

两边求导得 $\frac{1}{x}=f'(1)+f''(1)(x-1)+\frac{f'''(1)}{2!}(x-1)^2+\cdots$

将$x=1$代入得 $f'(1)=1$，同理$f''(1)=-1$，$f'''(1)=1\cdots$

$\therefore f^{n}(1)=(-1)^{n-1}$，当$x=1$时 $f(1)=\ln 1=0$

∴$\ln(x)$在1处的Taylor展开式为

$\ln x=x-1-\frac{1}{2!}(x-1)^2+\frac{1}{3!}(x-1)^3\cdots$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}(x-1)^n$