第2章 一元函数微分学及其应用

第4节　微分中值定理及其应用

1. 函数的极值
2. Fermat定理
3. Rolle定理
4. Lagrange定理
5. Cauchy定理
6 L’Hospital法则

微分中值定理 $\begin{cases} \text{函数的性态} \\ \downarrow\uparrow \\ \text{导数的性态} \end{cases}$

本节研究:

函数之商的极限 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ($\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型)

转化 $\downarrow$ 洛必达法则

导数之商的极限 $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

洛必达(1661 – 1704)

6　洛必达（L' Hospital）法则

$\frac{0}{0}$与$\frac{\infty}{\infty}$型

$0\cdot\infty$与$\infty-\infty$型

$0^0, 1^\infty, \infty^0$型

1、$\dfrac{0}{0}$型及$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式解法：洛必达法则

定义 如果当$x \to x_0$(或$x \to \infty$)时,两个函数$f(x)$与g(x)都趋于零或都趋于无穷大,那末极限

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)}$$称为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式.

例如，$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}, \left(\frac{0}{0}\right)$ $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx}, \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

定理 4. 5

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$

(2) $f(x)$ 与 $f(x)$ 在 $U^0(a)$ 内可导, 且 $g'(x)\neq 0$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=a$ (或为∞)

$$\Longrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=a$$

定义 这种在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式的值的方法称为**洛必达法则**.

$$x\to x_0^+,\ x\to x_0^-,\ x\to\infty,\ x\to+\infty,\ x\to-\infty$$

之一, 条件 2) 作相应的修改, 定理 4.5 仍然成立.

证　定义辅助函数

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq a \\ 0, & x=a \end{cases},\qquad g_1(x)=\begin{cases} g(x), & x\neq a \\ 0, & x=a \end{cases},$$

在 $U^0(a)$ 内任取一点 x, 在以 a 与 x 为端点的区间上,

$f_1(x), g_1(x)$满足柯西中值定理的条件,　　则有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\qquad (\xi\text{在}x\text{与}a\text{之间})$$

当$x\to x_0$时$,\xi\to x_0$, $\because \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=a,\quad \therefore \lim\limits_{\xi\to x_0}\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=a,$

$$\therefore \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=a.$$

定理 4.6

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$

(2) $f(x)$ 与 $f(x)$ 在 $U^0(a)$ 内可导, 且 $g'(x)\neq 0$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=a$ (或为∞)

$$\Longrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=a$$ (洛必达法则)

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} \neq 0$的情形

$\dfrac{0}{0}$ 型

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{1}{g(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}}} = \lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{-1}{g^2(x)} g'(x)}{\dfrac{-1}{f^2(x)} f'(x)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)^2 \frac{g'(x)}{f'(x)} \right] = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)^2 \lim_{x \to x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

$$\therefore 1 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

从而 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ 的情形. 取常数 $k\neq 0$,

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}+k\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+kg(x)}{g(x)}$$

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)+kg(x)}{g(x)}=k\neq 0$,可用 1) 中结论

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)+kg'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}+k\right]$$

$$\therefore \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

例4.6 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x - \sin x}$

例 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2} \qquad (\frac{0}{0})$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\overset{\sqrt{x}=y}{=}\lim_{y\to 0^+}\frac{y-\sin y}{y^3}$$

$$=\lim_{y\to 0^+}\frac{1-\cos y}{3y^2}=\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1$$

注意:① 各种方法综合使用(提出常数因子,

等价代换,变量替换)

② 可多次连续使用

例4.7
$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-e^{x}-3x-1}{(e^{x}-1)^{2}e^{x}}\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-e^{x}-3x-1}{x^{2}}$$

$$\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}-e^{x}-3}{2x}\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{8e^{2x}-e^{x}}{2}=\frac{7}{2}$$

例3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}$. $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\cos ax\cdot\sin bx}{b\cos bx\cdot\sin ax}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos bx}{\cos ax}=1.$

例4.8 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a^x}{x^\alpha}$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{a^{\beta x}}\,(a>1,\alpha,\beta>0)$

注意：洛必达法则是求未定式的一种有效方法，但与其它求极限方法结合使用，效果更好.

特别是等价无穷小替换

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^2\tan x}$.

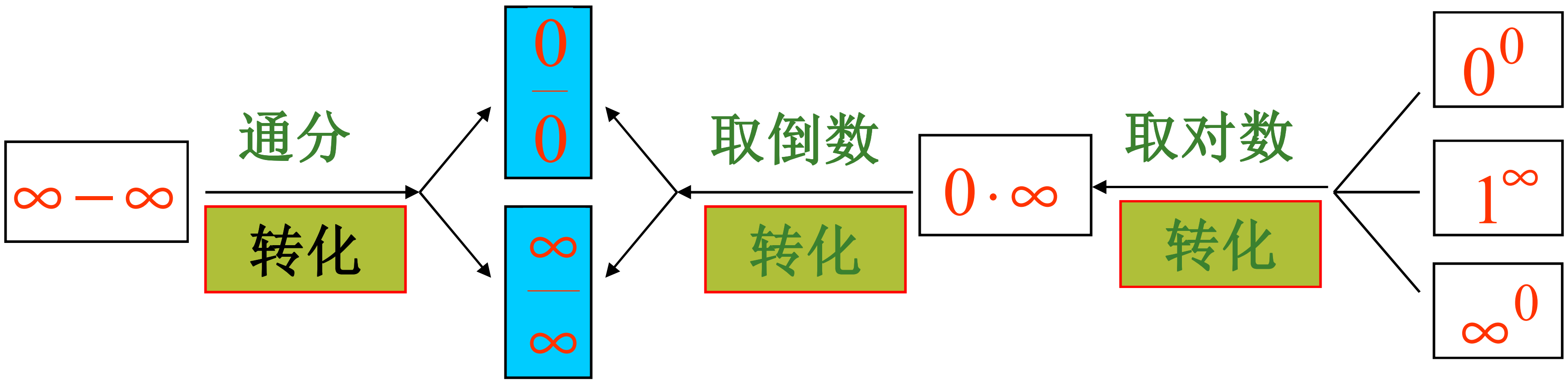
解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan x}{6x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\frac{1}{3}.$$

2、$0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,1^\infty,\infty^0$型未定式解法

关键:将其它类型未定式化为洛必达法则可解决的类型！

$$\Longrightarrow \quad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$



(1). $0\cdot\infty$ 型

步骤: $0\cdot\infty \Rightarrow \frac{1}{\infty}\cdot\infty$, 或 $0\cdot\infty \Rightarrow 0\cdot\frac{1}{0}$.

例5 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-2}e^{x}$. $(0\cdot\infty)$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{2} = +\infty$.

(2). $\infty-\infty$ 型

步骤: $\infty-\infty \Rightarrow \dfrac{1}{0}-\dfrac{1}{0} \Rightarrow \dfrac{0-0}{0\cdot 0}$.

例6 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$. $(\infty-\infty)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x\cdot\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x} = 0.$$

(3). $0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型

步骤:

$$\left.\begin{array}{l} 0^0 \\ 1^\infty \\ \infty^0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{取对数}} \left\{\begin{array}{l} 0 \cdot \ln 0 \\ \infty \cdot \ln 1 \\ 0 \cdot \ln \infty \end{array}\right. \Rightarrow 0 \cdot \infty.$$

例7 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$. (0^0)

解 $$原式 = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^0 = 1.$$

例8 求 $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$. (1^∞)

解 $$原式 = \lim_{x\to 1} e^{\frac{1}{1-x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}} = e^{-1}.$$

例9 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$. (∞^0)

解 取对数得 $(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{1}{\ln x}\cdot\ln(\cot x)}$,

$$\because \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}\cdot\ln(\cot x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{\cot x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{\cos x\cdot\sin x} = -1,$$

$\therefore$ 原式 $= e^{-1}$.

再次强调

(1) 仅用于$\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty}$,

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$不存在,如何处理?

(3) 及时化简,

(4) 多次使用.

例10 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\sin x}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\sin x)$.

极限不存在

洛必达法则失效。

原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x}\cos x)=1$.

例11 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$.

例11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{100}}{100^n}$ 以Heine定理为媒介，计算数列极限.

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{100}}{100^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{100x^{99}}{100^x\ln 100}=\cdots=\dfrac{100!}{(\ln 100)^{100}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{100^x}=0$

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{100}}{100^n}=0$

例4.10 求n次多项式 $P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$,

使$e^x=P_n(x)+o(x^n)(x\to 0)$.

解 $\because e^x-P_n(x)=o(x^n)$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^x-P_n(x)}{x^k}=0,\quad k=0,1,2,\cdots,n$$

取$k=0$, $e^x-P_n(x)\to 0$ $e^0-a_0=0$ $\therefore a_0=1$

取$k=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-P_n(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-P_n'(x)}{1}$

$$=e^0-P_n'(0)=1-a_1,\qquad \therefore a_1=1$$

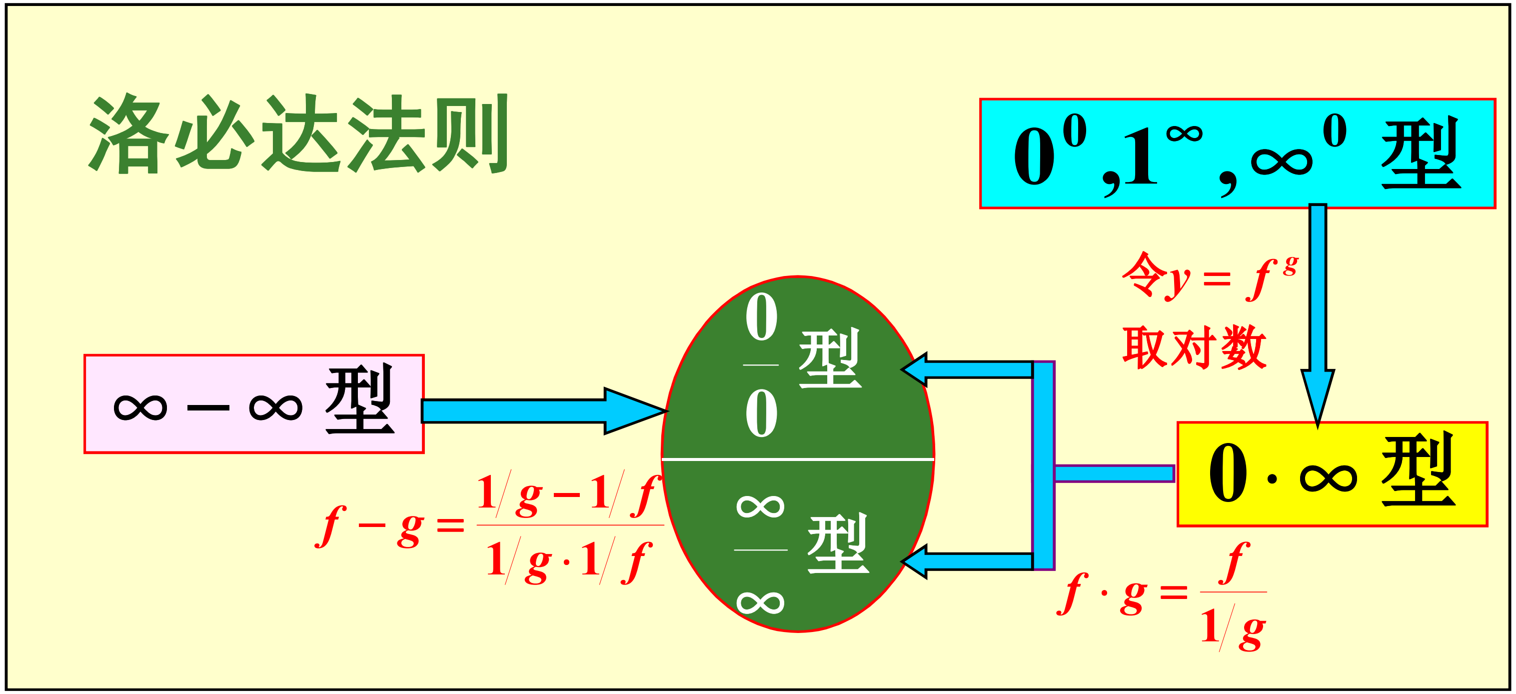
取$k=2$, $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-P_n(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-P_n'(x)}{2x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - P_n''(x)}{2} = 0. \qquad \therefore a_2 = \frac{1}{2!}$$

$$\cdots\cdots \qquad \therefore a_k = \frac{1}{k!}, \quad k = 0,1,2,\cdots,n.$$

$$\therefore e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

三、小结


洛必达法则
$0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型
令$y=f^g$
取对数
$0\cdot\infty$ 型
$\infty-\infty$ 型
$\frac{0}{0}$ 型
$\frac{\infty}{\infty}$ 型
$f-g=\frac{1/g-1/f}{1/g\cdot 1/f}$
$f\cdot g=\frac{f}{1/g}$

思考题

设$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$是不定型极限，如果$\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$的极限不存在，是否$\dfrac{f(x)}{g(x)}$的极限也一定不存在？举例说明.

思考题解答

不一定.

例 $f(x) = x + \sin x, \qquad g(x) = x$

显然 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}$ 极限不存在.

但 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x} = 1$ 极限存在.