第七节 第二型线积分与面积分

一、场的概念

二、第二型线积分

三、第二型面积分

一、场的概念

一般地，我们把分布着某种物理量的平面或空间区域称为场。在数学上表现为定义在某一区域上的数量值函数或向量值函数。

当这个函数为数量值函数时，称为数量场；当这个函数为向量值函数时，称为向量场。例如温度场、高度场、电位场是数量场；力场、速度场、磁场等为向量场。

从数学的观点看，给定了一个函数就相当于给定了一个场。若此函数是数量值函数时，称为数量场；若此函数是向量值函数则为向量场。

这样的函数称为场函数，函数的定义域称为场域。

如果场的物理量仅与点**M**的位置有关，不随时间变化，那么这种场称为定常场或稳定场。　　视场是数量场或向量场分别记为***u(M)***或***A(M).***

若场不仅与位置有关，而且也与时间有关，则称其为非定常场，或时变场。分别记为**u(M,t)**或**A(M,t).**

本节我们仅讨论定常场。

我们知道，给定了一个场，在数学上也给定了一个函数。对于一个平面或空间的数量场

$$u = u(M) = u(x, y), \quad (x, y) \in D \subseteq R^2$$

或

$$u = u(M) = u(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D \subseteq R^3$$

相应的二元函数或三元函数可以分别通过等值线或等值面来几何表示。

例7.1 高度场的等高线.

例7.2 电位场的等值面.

设有带电量为**q**的点电荷，则在空间形成一个电位场。若建立坐标系，并将此点电荷放在坐标原点，则电位场可以表示为

$$u = \frac{q}{4\pi\varepsilon r} \qquad (r \neq 0)$$

其中ε是介电系数，$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

电位场的等值面$u = C$为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \qquad (R = \frac{q}{4\pi\varepsilon C})$$

它是一族以坐标原点为球心的球面。因此，在每一球面上电位u均相同，而且半径R越大，球面上的电位的值C越小。

无论是数量场还是向量场，我们都需要从宏观和微观两个方面去研究它们。

等值面是宏观了解数量场分布的一种方法。对数量场微观的研究主要是研究函数 $u=u(M)$ 在各点沿各个方向变化的快慢程度，以及沿什么方向变化最大等，即讨论它的方向导数和梯度。

为了对向量场进行比较深入的研究，需要首先讨论第二型线积分和面积分。

二、 第二型线积分（对坐标的曲线积分）

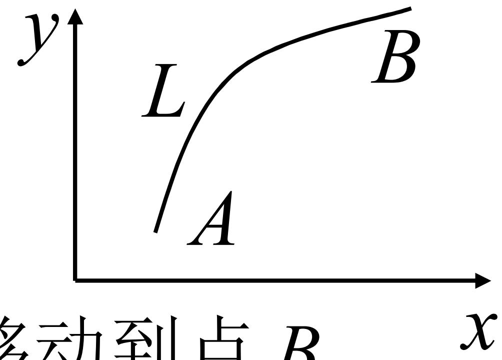
1. 第二型线积分的概念

首先我们看一个具体的例子

引例：变力沿曲线所作的功.

设一质点受如下变力作用

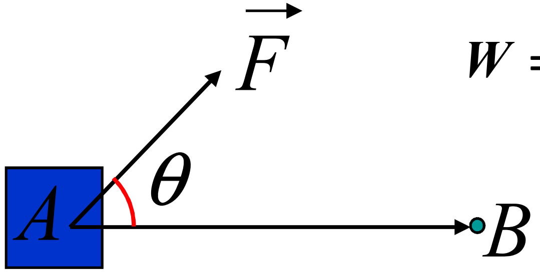
$$\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$



在 xoy 平面内从点 A 沿光滑曲线弧 L 移动到点 B,

求质点移动过程中变力所作的功W.

常力沿直线所作的功



$$W = |\vec{F}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta$$
$$= \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

现在是$\vec{F}(x,y)$变力,

解决办法:

“大化小”“常代变”

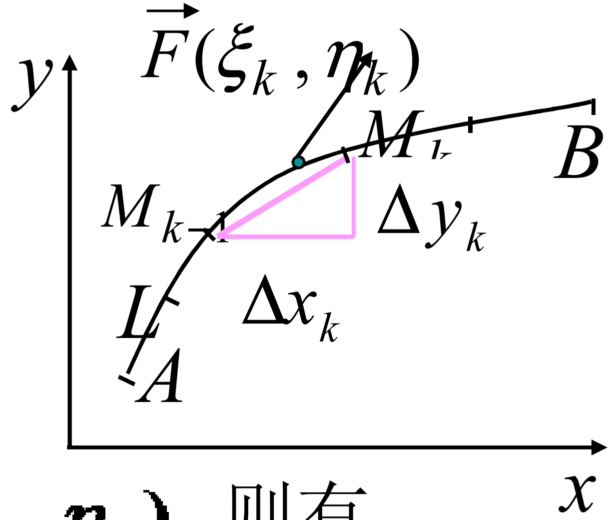
“近似和”“取极限”

1) “大化小”

把L分成 n 个小弧段, $\vec{F}$ 沿 $\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$

所做的功为 ΔW_k, 则 $W = \sum_{k=1}^{n} \Delta W_k$

2) **“常代变”**



有向小弧段 $\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$ 用有向线段

$$\overrightarrow{M_{k-1}M_k} = (\Delta x_k, \Delta y_k)$$

近似代替, 在 $\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$ 上任取一点 (ξ_k, η_k), 则有

$$\Delta W_k \approx \vec{F}(\xi_k, \eta_k) \cdot \overrightarrow{M_{k-1}M_k} = P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k$$

3) **“近似和”** $W \approx \sum_{k=1}^{n} [\, P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k \,]$

4) **“取极限”** $W = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} [P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k]$

(其中λ为 n 个小弧段的 最大长度)

定义. 设L是向量场$\vec{A}(M)$所在区域中的以A为起点B为终点的一条有向光滑曲线。

用L上的点$M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}$把$L$分成$n$个有向小弧段$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ $(i=1,2,\cdots,n; M_0=A,\ M_n=B)$.

在每一有向小弧段$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$上任取一点$P_k$,作点积

$$\vec{A}(P_k)\cdot\overrightarrow{M_{k-1}M_k},\qquad (i=1,2,\cdots,n; M_0=A,\ M_n=B)$$

将各小弧段所对应的点积相加得和式

$$\sum_{k=0}^{n}\overrightarrow{A(P_k)}\cdot\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$$

如果无论L被怎样划分，点P_k在$\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$上被怎样选取，极限

$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=0}^{n}\vec{A}(P_k)\cdot\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$　　λ为各小弧段长度的最大值.

总存在，则称此极限为向量值函数$\vec{A}(M)$沿有向曲线L的第二型积分，简称第二型线积分。记为

$$\int_L \vec{A}(M)\cdot d\vec{s} = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n}\vec{A}(P_k)\cdot\overrightarrow{M_{k-1}M_k}.$$

此时称向量值函数$\vec{A}(M)$在L上可积。

第二型线积分的向量形式为

$$\int_L \vec{A}(M)\cdot d\vec{s} = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n}\vec{A}(P_k)\cdot\overrightarrow{M_{k-1}M_k}.$$

在直角坐标系下可以表示成坐标形式:

设L为空间曲线，在直角坐标系下，

$$\vec{A}(M) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

把各小段的弦向量$\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$写成分量形式:

$$\overrightarrow{M_{k-1}M_k} = (\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k),$$

其中$\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k$分别表示$\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$在$x, y, z$三个坐标轴上的投影。

将点P_k的坐标记为$P_k(\xi_k,\eta_k,\varsigma_k)$，于是

$$\int_L \vec{A}(M)\cdot d\vec{s} = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n}\vec{A}(P_k)\cdot\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n}\{P(\xi_k,\eta_k,\varsigma_k)\ \Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k,\varsigma_k)\ \Delta y_k + R(\xi_k,\eta_k,\varsigma_k)\ \Delta z_k\}$$

这个极限相应地记为

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz,$$

这就是第二型线积分的坐标形式。因此，第二型线积分也称为对坐标的线积分。即

$$\int_L \vec{A}(M)\cdot d\vec{s} = \int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz,$$

P(x, y， z), Q(x, y, z), R(x, y, z)都叫做被积函数，L叫做积分曲线弧。

特别地，

(1) 若 $\vec{A}(M)=(P(x,y,z),0,0)$，则

$$\int_L \vec{A}(M)\cdot d\vec{s}=\int_L P(x,y,z)dx.$$

(2) 若 $\vec{A}(M)=(0,Q(x,y,z),0)$，则

$$\int_L \vec{A}(M)\cdot d\vec{s}=\int_L Q(x,y,z)dy.$$

(3) 若 $\vec{A}(M)=(0,0,R(x,y,z))$，则

$$\int_L \vec{A}(M)\cdot d\vec{s}=\int_L R(x,y,z)dz.$$

因此，

$$\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

$$=\int_L P(x,y,z)dx+\int_L Q(x,y,z)dy+\int_L R(x,y,z)dz.$$

(4) 若L为xoy平面上的光滑曲线，$\vec{A}(M)=(P(x,y),Q(x,y))$，则

$$\int_L \vec{A}(M)\cdot d\vec{s}=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

第二型线积分与第一型线积分的主要差别在于：

第一型线积分中，积分微元$f(M)ds$是两数量的乘积，积分路径没有方向性，ds是弧微分，它始终为正。

第二型线积分中，积分微元$\vec{A}(M)\cdot d\vec{s}$是两向量的点积，路径L具有方向性。沿$\overset{\frown}{AB}$的积分与沿$\overset{\frown}{BA}$的积分，由于其中分点的顺序刚好相反，向量$\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$反向，从而积分的值反号。

2. 第二型线积分的性质

(1) 线性性　设α，β为常数，则

$$\int_L [\alpha \vec{A}_1(x,y)+\beta \vec{A}_2(x,y)]\cdot \vec{ds} = \alpha\int_L \vec{A}_1(x,y)\cdot\vec{ds}+\beta\int_L \vec{A}_2(x,y)\cdot\vec{ds}.$$

(2) (积分路径可加性)　如果把L分成L_1和L_2，则

$$\int_L \vec{A}(x,y)\cdot\vec{ds} = \int_{L_1} \vec{A}(x,y)\cdot\vec{ds}+\int_{L_2} \vec{A}(x,y)\cdot\vec{ds}.$$

(3) 设L是有向曲线弧,L^-是与L方向相反的有向曲线弧，则

$$\int_{L^-} \vec{A}(x,y)\cdot\vec{ds} = -\int_L \vec{A}(x,y)\cdot\vec{ds}$$

即对坐标的曲线积分与积分弧段的方向有关.

因此关于对坐标的曲线积分，我们必须注意积分弧段的方向。

(4)如果由闭合曲线C所围成的平面区域D被划分成两个无公共内点的区域D_1和D_2，它们的边界分别记为C_1和C_2，则

$$\oint_C \vec{A}(x,y)\cdot\vec{ds} = \oint_{C_1} \vec{A}(x,y)\cdot\vec{ds} + \oint_{C_2} \vec{A}(x,y)\cdot\vec{ds}.$$

其中C，C_1，C_2或者都取正向，或者都取负向。

闭曲线C的正向如下确定：

沿闭曲线C行走使C所围的区域始终在人的左侧，反之为负向。

3.对坐标的曲线积分的计算法

光滑曲线L的参数方程是

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t\text{从}\alpha\text{到}\beta. \\ z = z(t) \end{cases}$$

t=α对应于曲线L的起点，t=β对应于曲线L的终点。又设向量值函数

$$\vec{A}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

在曲线L上连续，则通过和式极限，用与推导第一型积分类似的方法，可以证明 $\int_L \vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{ds}$必存在，且有

$$\int_L \vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{ds}$$

$$=\int_L (P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))\cdot(dx,dy,dz)$$

$$=\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz,$$

其中

$$\int_L P(x,y,z)dx=\int_\alpha^\beta P(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt,$$

$$\int_L Q(x,y,z)dy=\int_\alpha^\beta Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)dt,$$

$$\int_L R(x,y,z)dz=\int_\alpha^\beta R(x(t),y(t),z(t))z'(t)dt.$$

例1. 计算$\int_\Gamma x^3dx+3zy^2dy-x^2ydz$，其中$\Gamma$是从点$A(3,2,1)$到点$B(0,0,0)$的直线段$AB$.

$$\Gamma:\begin{cases} x=3-3t \\ y=2-2t \\ z=1-t \end{cases}$$

$$(0\le t\le 1)$$

设$P(x,y),Q(x,y)$在曲线弧L上有定义且连续,L的参数方程为

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$$

当参数t单调地由α变到β时,点$M(x,y)$从L的起点A沿L运动到终点B,$\varphi(t),\psi(t)$在以α及β为端点的闭区间上具有一阶连续导数,且$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$,则曲线积分$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$存在,且

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

积分下限α对应L的起点，上限β对应L的终点。

特殊情形

(1) $L: y = y(x)$ x从a到b.

则 $$\int_L Pdx + Qdy = \int_a^b \{P[x, y(x)] + Q[x, y(x)]y'(x)\}dx.$$

(2) $L: x = x(y)$ y从c到d.

则 $$\int_L Pdx + Qdy = \int_c^d \{P[x(y), y]x'(y) + Q[x(y), y]\}dy.$$

例2. 计算$\int_L xy\,\mathrm{d}x$，其中L 为沿抛物线 $y^2 = x$ 从点 $A(1,-1)$到$B(1,1)$ 的一段.

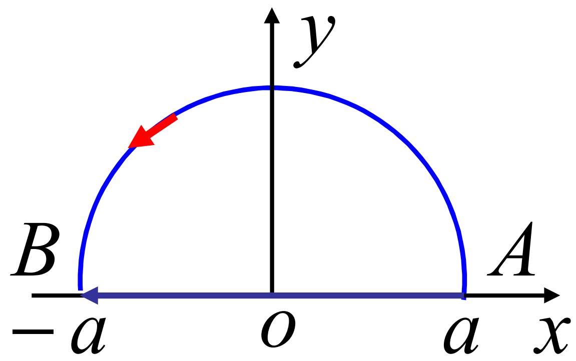
$$L: \begin{cases} x = y^2 \\ y = y \end{cases}$$

$(-1 \le y \le 1)$

例3. 计算$\int_L y^2\,\mathrm{d}x$，其中 L 为

(1) 半径为 a 圆心在原点的上半圆周, 方向为逆时针方向;

(2) 从点 $A(a,0)$沿 x 轴到点 $B(-a,0)$.



解: (1) 取L的参数方程为 $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ t:0\to\pi$

则 $$\int_L y^2\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi} a^2\sin^2 t\cdot(-a\sin t)\,\mathrm{d}t$$

$$=-2a^3\int_0^{\pi/2}\sin^3 t\,\mathrm{d}t=-2a^3\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=-\frac{4}{3}a^3$$

(2) 取 L 的方程为$y=0,\ x:a\to -a$,则

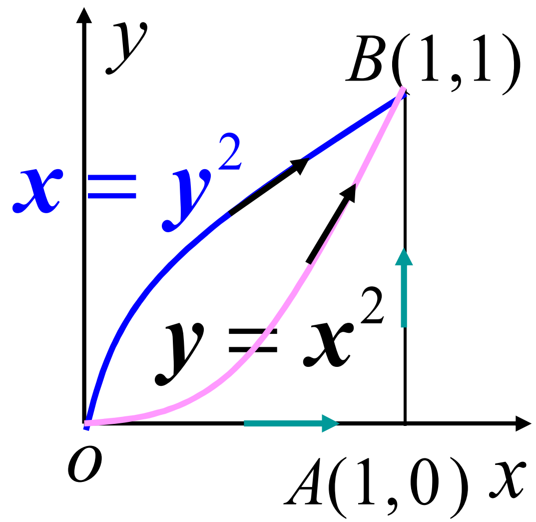
$$\int_L y^2\,\mathrm{d}x=\int_a^{-a}0\,\mathrm{d}x=0$$

例4. 计算 $\int_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$, 其中 L 为

(1) 抛物线 $L: y = x^2,\ x: 0 \to 1$;

(2) 抛物线 $L: x = y^2,\ y: 0 \to 1$;

(3) 有向折线 $L: \overline{OA} + \overline{AB}$.



解: (1) 原式 $= \int_0^1 (2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x)\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = 1$

(2) 原式 $= \int_0^1 (2y^2 y \cdot 2y + y^4)\,\mathrm{d}y = 5\int_0^1 y^4\,\mathrm{d}y = 1$

(3) 原式 $= \int_{\overline{OA}} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y + \int_{\overline{AB}} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$

$$= \int_0^1 (2x \cdot 0 + x^2 \cdot 0)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (2y \cdot 0 + 1)\,\mathrm{d}y = 1$$

例4的结果显示，对于某些第二型线积分，其积分值取决于起点和终点，与路径无关，这是一个重要而有趣的性质。什么样的第二型积分具有这样的性质呢？我们将在下一节讨论。

例5　设一个质点在M(x,y)处受到力F的作用，F的大小与M到原点O的距离成正比，F的方向恒指向原点.此质点由点A(a, 0)沿椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$按逆时针方向到$B(0,b)$,求力$F$所作的功。　（习题7）

4.两类曲线积分之间的联系

我们知道，第二型线积分中的微元向量

$$\overrightarrow{ds} = (dx, dy, dz)$$

就是有向曲线L在点M处的切向量，且

$$\|\overrightarrow{\mathrm{ds}}\| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = ds$$

若用$\overrightarrow{e_\tau}$表示$\overrightarrow{\mathrm{ds}}$的单位向量，则$\overrightarrow{\mathrm{ds}} = \overrightarrow{e_\tau} ds$，于是

$$\int_L \overrightarrow{A}(M) \cdot \overrightarrow{ds} = \int_L (\overrightarrow{A}(M) \cdot \overrightarrow{e_\tau}) ds$$

上式表达了两类曲线积分之间的联系。

若有向曲线L上点M(x, y, z)处的切线向量的方向角为α, β, γ,

记$\vec{A}=(P, Q, R)$ ， $\overrightarrow{e_\tau}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$,

则

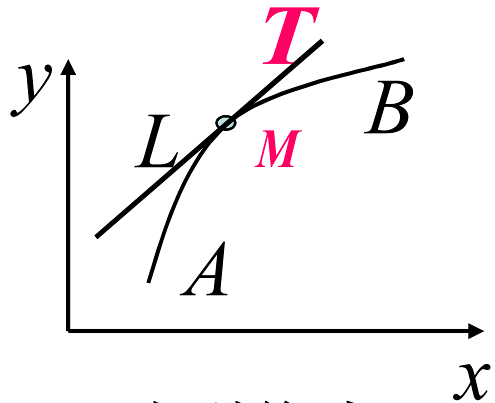
$$\int_\Gamma \vec{A}\cdot\overrightarrow{ds}=\int_\Gamma \vec{A}\cdot\overrightarrow{e_\tau}ds$$

即$\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\int_\Gamma (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$

由上式看到，可把有方向的第二型线积分化为无方向的第一型线积分。

特别

设有向平面光滑曲线弧为 L: $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$,



t单调地由t_1变到t_2时,点$M(x,y)$从L的起点A沿L运动到终点B,

L上点(x, y)处的切线向量的方向角 为α, β,

则$\int_L Pdx + Qdy = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)ds$

其中

$$\cos\alpha = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}},$$

$$\cos\beta = \frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}},$$

注意：

由于切线的方向余弦$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$都是$x, y, z$的函数。一般情况下，它们的形式比较复杂。所以除了一些特殊情况外，第二型线积分不必化为第一型线积分。

例6. 设 $M=\max\sqrt{P^2+Q^2}$, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在L上连续, 曲线段 L 的长度为s, 证明

$$\left|\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\right|\le M\,s$$

证: $\left|\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\right| = \left|\int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)\,\mathrm{d}s\right|$

$$\le \int_L \left|P\cos\alpha+Q\cos\beta\right|\mathrm{d}s$$

设 $\vec{A}=(P,Q)$, $\vec{t}=(\cos\alpha,\cos\beta)$

二者夹角为 θ

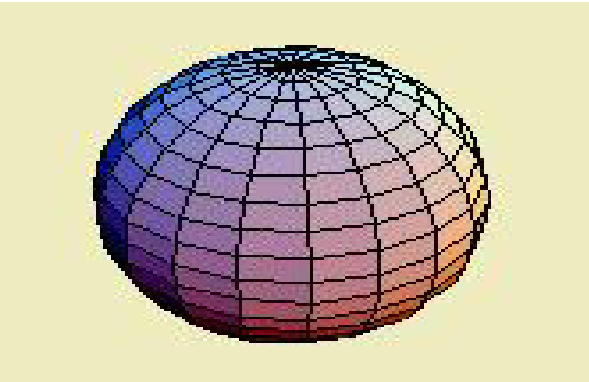
$$=\int_L \left|\vec{A}\cdot\vec{t}\right|\mathrm{d}s = \int_L \left|\vec{A}\right|\left|\cos\theta\right|\mathrm{d}s \le M\,s$$

说明: 上述证法可推广到三维的第二类曲线积分.

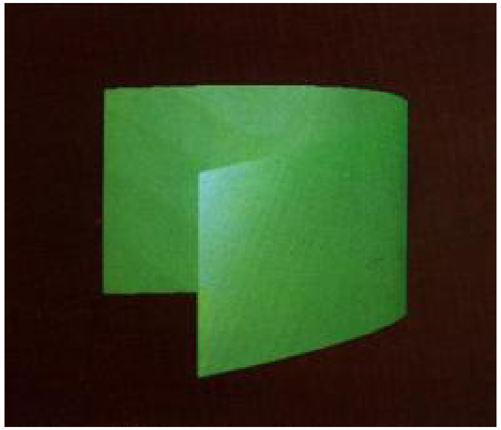
三、第二型面积分

1. 有向曲面及曲面元素的投影

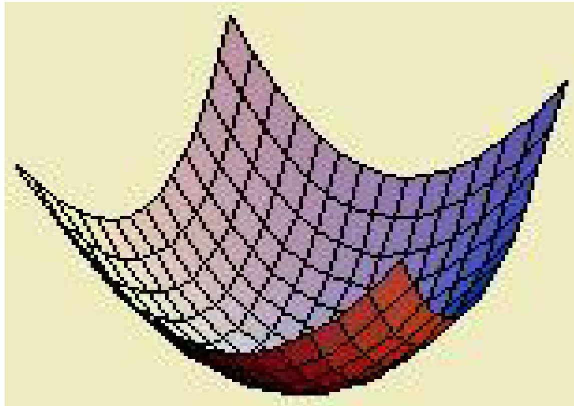
曲面的分类： （1）双侧曲面；



曲面分内侧和外侧



曲面分左侧和右侧

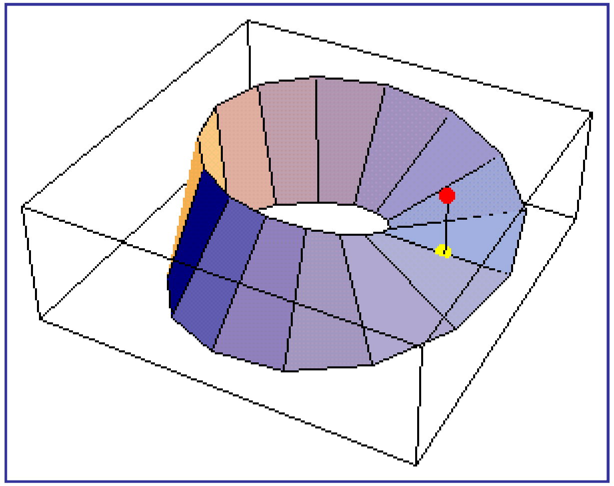


曲面分上侧和下侧

双侧曲面的特征：规定了此曲面在一点P处法向量的指向后，当点在曲面上连续移动而不越过其边界再回到原来位置时，法向量的指向不变。

（2）单侧曲面.

典型的单侧曲面



莫比乌斯带

单侧曲面的特征：规定了此曲面在一点P处法向量的指向后，当点在曲面上连续移动而不越过其边界再回到原来位置时，法向量的指向改变。

对于双侧曲面，我们把确定了法向量指向的曲面称为有向曲面。

指定了侧的曲面叫有向曲面，其方向用法向量指向表示:

方向余弦	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$	封闭曲面
侧的规定	>0 为前侧	>0 为右侧	>0 为上侧	外侧
	<0 为后侧	<0 为左侧	<0 为下侧	内侧

• 设 Σ 为有向曲面，其曲面元 ΔS 在 xoy 面上的投影记为 $(\Delta S)_{xy}$，$(\Delta S)_{xy}$ 的面积为 $(\Delta\sigma)_{xy}$，则规定

$$(\Delta S)_{xy}=\begin{cases}(\Delta\sigma)_{xy}, & \text{当}\cos\gamma>0\text{时}\\ -(\Delta\sigma)_{xy}, & \text{当}\cos\gamma<0\text{时}\\ 0, & \text{当}\cos\gamma\equiv 0\text{时}\end{cases}$$

类似可规定

$(\Delta S)_{yz},(\Delta S)_{zx}$

2、第二型面积分的概念

引例 设稳定流动的不可压缩流体的速度场为

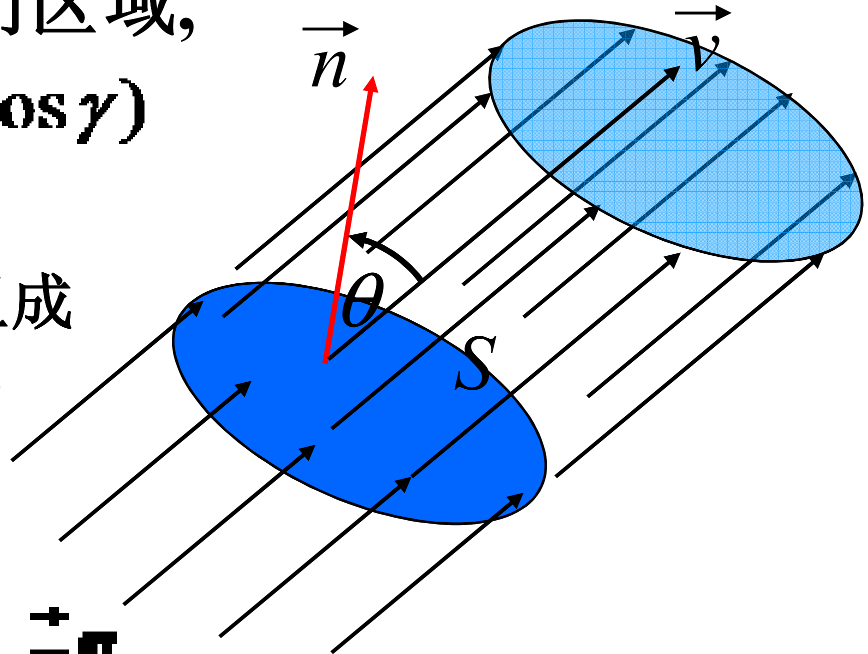
$$\vec{v} = (P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$$

求单位时间流过有向曲面 Σ 的流量Φ .

分析: 若 Σ 是面积为S 的平面闭区域,

法向量: $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

流速为常向量: $\vec{v}$



则单位时间内流过闭区域的流体组成一个底面积S，斜高为$|\vec{v}|$的斜柱体，

流量即为斜柱体的体积.

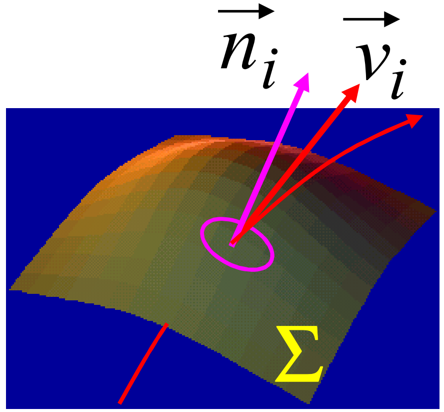
记 $\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle = \theta$

则流量 $\Phi = S\cdot|\vec{v}|\cos\theta = \vec{v}\cdot\vec{n}S$

对一般的有向曲面Σ，稳定流动的不可压缩流体的速度 $\vec{v}=(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$

用“大化小, 常代变, 近似和, 取极限”

进行分析可得 $\Phi=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{v}_i\cdot\vec{n}_i\,\Delta S_i$



设 $\vec{n}_i=(\cos\alpha_i,\cos\beta_i,\cos\gamma_i)$, 则

$$\Phi=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[\,P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i\,]\Delta S_i$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[\,P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}\,]$$

定义7.2（第二型面积分） 设在向量场$\vec{A}(M)$的场域中有一可求面积的有向曲面S，指定它的一侧。

把曲面S任意划分成n小片：$\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots\ldots, \Delta S_n$.任取一点$M_k \in \Delta S_k$，作点积

$$\vec{A}(M_k)\cdot\vec{n}(M_k)\Delta S_k, \qquad (k=1,2,\ldots,n.)$$

其中$\vec{n}(M_k)$是曲面在点M_k处指向给定侧的单位法向量，ΔS_k表示小曲面ΔS_k的面积。

作和式

$$\sum_{k=1}^{n}\vec{A}(M_k)\cdot\vec{n}(M_k)\Delta S_k$$

如果无论曲面S怎样划分, 点M_k在ΔS_k上如何选取，当各小曲面ΔS_k的直径的最大值$d \to 0$时上述和式都趋于同一常数，则称此极限为向量场$\vec{A}(M)$沿有向曲面S的第二型面积分，记为

$$\iint_S \vec{A}(M)\bullet\vec{n}dS = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\vec{A}(M_k)\cdot\vec{n}(M_k)\Delta S_k .$$

如果记

$$\vec{n}dS = \overrightarrow{dS},$$

称$\overrightarrow{dS}$为曲面面积微元向量，于是

$$\iint_S \vec{A}(M)\bullet\vec{n}dS = \iint_S \vec{A}(M)\bullet\overrightarrow{dS} = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\vec{A}(M_k)\cdot\vec{n}(M_k)\Delta S_k .$$

在直角坐标系下，设

$$\overrightarrow{A}(\mathrm{M}) = (\mathrm{P}(x, y, z), \mathrm{Q}(x, y, z), \mathrm{R}(x, y, z))$$

$$\vec{n}(M) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

$$M_k = (\xi_k, \eta_k, \varsigma_k)$$

则有

$$\iint_S \overrightarrow{A}(\mathrm{M}) \bullet \vec{n} dS = \iint_S \overrightarrow{A}(\mathrm{M}) \bullet \overrightarrow{dS} = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{A}(\mathrm{M}_k) \bullet \vec{n}(M) \Delta S_k$$

$$=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}[P(\xi_k,\eta_k,\varsigma_k)\Delta S_k\cos\alpha+Q(\xi_k,\eta_k,\varsigma_k)\Delta S_k\cos\beta+$$

$$R(\xi_k,\eta_k,\varsigma_k)\Delta S_k\cos\gamma]$$

$$=\iint_S P(x,y,z)\cos\alpha dS+Q(x,y,z)\cos\beta dS+R(x,y,z)\cos\gamma dS$$

$$=\iint_S [P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma]dS$$

其中$dS=\|\overrightarrow{dS}\|$.

由于$\cos\alpha dS, \cos\beta dS, \cos\gamma dS$分别是曲面微元向量$\overrightarrow{dS}$在$yoz, zox, xoy$坐标平面的的投影，把它们分别记做

$$\overrightarrow{dS} = (dy\wedge dz,\ dz\wedge dx,\ dx\wedge dy)$$

或 $$dS\cos a = dy\wedge dz,\quad dS\cos\beta = dz\wedge dx,$$

$$dS\cos\gamma = dx\wedge dy,$$

注意：有的书也把**dx∧dy**写成**dxdy.**但应注意它不同于直角坐标系下二重积分的面积微元。这里的**dx∧dy**包含符号（取决于曲面法线的侧）.

因此

$$\iint_S \vec{A}(\mathrm{M})\cdot\overrightarrow{dS}$$

$$=\iint_D [P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+Q(x,y,z)\cos\gamma]dS.$$

$$=\iint_D P(x,y,z)dy\wedge dz+Q(x,y,z)dz\wedge dx+Q(x,y,z)dx\wedge dy.$$

上式右端是第二型面积分的坐标表示,因此第二型面积分也称为对坐标的面积分。

上式是三个积分的组合，他们也可以单独出现。

存在条件:

当$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在有向光滑曲面$\Sigma$上连续时, 对坐标的曲面积分存在.

物理意义:

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{A}(M) \bullet \overrightarrow{dS}$$

$$= \iint_{\Sigma} P(x,y,z)dy \wedge dz + Q(x,y,z)dz \wedge dx + R(x,y,z)dx \wedge dy$$

在单位时间内流向 Σ 指定侧的流体的体积.

3.性质:

性质1. $$\iint_{\Sigma_1+\Sigma_2} \vec{A}(M) \bullet \overrightarrow{dS} = \iint_{\Sigma_1} \vec{A}(M) \bullet \overrightarrow{dS} + \iint_{\Sigma_2} \vec{A}(M) \bullet \overrightarrow{dS}$$

其中等式两端的积分曲面同侧。

性质2. 若改变积分曲面的侧，则积分的值反号，即

$$\iint_{+\Sigma} \vec{A}(M) \bullet \overrightarrow{dS} = -\iint_{-\Sigma} \vec{A}(M) \bullet \overrightarrow{dS}.$$

性质3. 若有向曲面Σ所围空间区域Ω被另一位于Ω内部的曲面分成了两个内部不相交的区域Ω_1和Ω_2，其边界曲面分别是Σ_1和Σ_2，则

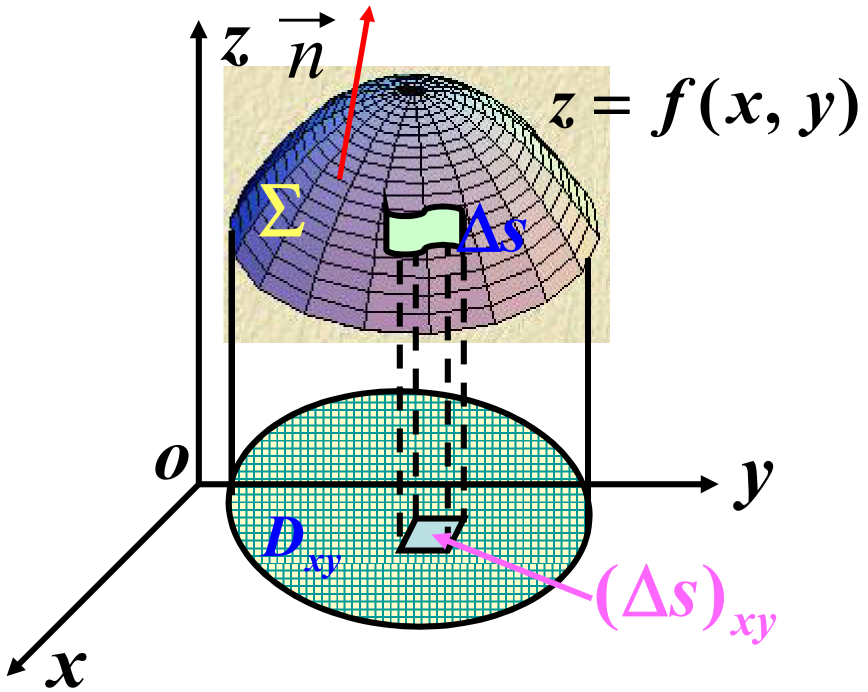
$$\oiint_{\Sigma} \vec{A}(M)\cdot\overrightarrow{dS} = \oiint_{\Sigma_1} \vec{A}(M)\cdot\overrightarrow{dS} + \oiint_{\Sigma_2} \vec{A}(M)\cdot\overrightarrow{dS}.$$

这里Σ和Σ_1,Σ_2都取相同的侧.

关于对坐标的曲面积分，必须注意积分曲面所取的侧.

4、对坐标的曲面积分的计算法

设积分曲面Σ是由方程 $z = z(x, y)$所给出的曲面上侧,Σ在 xoy 面上的投影区域为 D_{xy} ,函数 $z = z(x, y)$ 在 D_{xy} 上具有一阶连续偏导数,被积函数 $R(x, y, z)$ 在Σ上连续.



$\because \cos\gamma > 0,$

$\therefore (\Delta s)_{xy} = (\Delta\sigma)_{xy}$

则 $$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)dx \wedge dy = \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)]dxdy$$

说明: 如果积分曲面 Σ 取下侧, 则

$$\iint_\Sigma R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- 若 $\Sigma: x = x(y,z),\ (y,z)\in D_{yz}$, 则有

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = \pm\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

(前正后负)

- 若 $\Sigma: y = y(z,x),\ (z,x)\in D_{zx}$, 则有

$$\iint_\Sigma Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x = \pm\iint_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

(右正左负)

计算时应注意以下两点

★ 曲面的侧；　　★ “一投，二代，三定号”

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dx \wedge dy = \iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$$

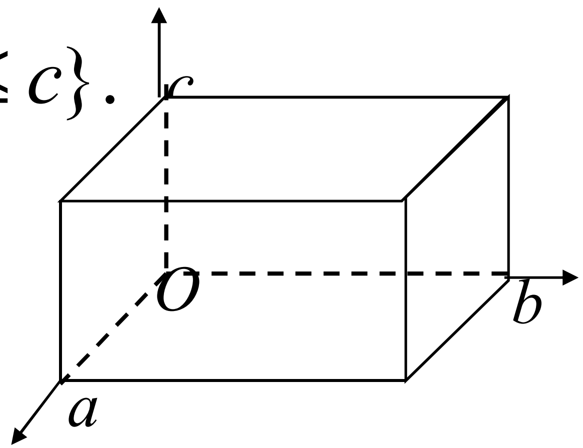
三定号　一投　二代

例 1 计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma} x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy,$$

其中Σ是长方体Ω的整个表面的外侧，

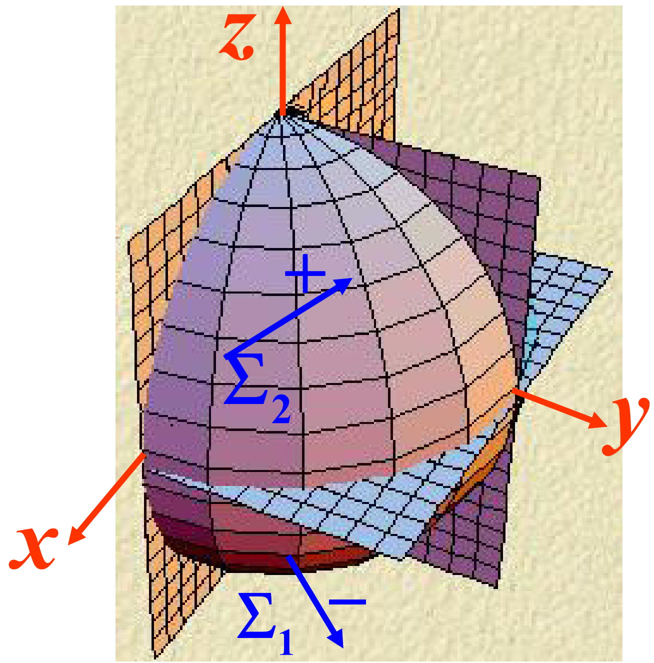
$$\Omega = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le c\}.$$



例 2 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dx \wedge dy$

其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧

在 $x \geq 0, y \geq 0$ 的部分.



解 把 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2 两部分

$$\Sigma_1: \quad z_1 = -\sqrt{1-x^2-y^2};$$

$$\Sigma_2: \quad z_2 = \sqrt{1-x^2-y^2},$$

$$\iint_{\Sigma} xyz dx \wedge dy = \iint_{\Sigma_2} xyz dx \wedge dy + \iint_{\Sigma_1} xyz dx \wedge dy$$

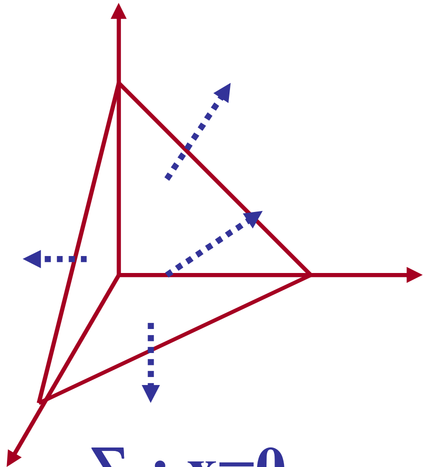
$$= \iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2} dxdy - \iint_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2}) dxdy$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2} dxdy = 2\iint_{D_{xy}} r^2 \sin\theta \cos\theta \sqrt{1-r^2} r dr d\theta = \frac{2}{15}.$$

例3 $\oiint\limits_{\Sigma} dxdy + (x+1)dydz + ydzdx$, 其中∑是平面 x=0, y=0,

z=0, x+y+z=1 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧;

解:



$$\oiint\limits_{\Sigma} dxdy = \iint\limits_{\Sigma_3} dxdy + \iint\limits_{\Sigma_4} dxdy = -\iint\limits_{D_{xy}} dxdy + \iint\limits_{D_{xy}} dxdy = 0$$

$$\oiint\limits_{\Sigma} (x+1)dydz = \iint\limits_{\Sigma_1} (x+1)dydz + \iint\limits_{\Sigma_4} (x+1)dydz$$

$$= -\iint\limits_{D_{yz}} dydz + \iint\limits_{D_{yz}} (2-y-z)dydz = \iint\limits_{D_{yz}} (1-y-z)dydz$$

$$\oiint\limits_{\Sigma} ydxdz = \iint\limits_{\Sigma_2} ydxdz + \iint\limits_{\Sigma_4} ydxdz = \iint\limits_{D_{xz}} (1-x-z)dxdz$$

$$\oiint\limits_{\Sigma} dxdy + (x+1)dydz + ydxdz = 2\iint\limits_{D_{xz}} (1-x-z)dxdz = \frac{1}{3}$$

5、两类曲面积分的联系

$$\iint_S \vec{A}(\mathrm{M})\cdot\vec{n}dS=\iint_S \vec{A}(\mathrm{M})\cdot\overrightarrow{dS}=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\vec{A}(\mathrm{M}_k)\cdot\vec{n}(M)\Delta S_k$$

其中$\vec{A}=\{P,Q,R\},\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$为有向曲面 Σ 上点 (x,y,z) 处的单位法向量，$d\vec{S}=\vec{n}dS=\{dydz,dzdx,dxdy\}$称为**有向曲面元**, A_n为向量$\vec{A}$在$\vec{n}$上的投影.

两类曲面积分之间的联系：

$$I=\iint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_\Sigma (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$是有向曲面$\Sigma$上点$(x,y,z)$处法向量的方向余弦.

利用两类曲面积分之间的关系可简化曲面积分计算

$$I=\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

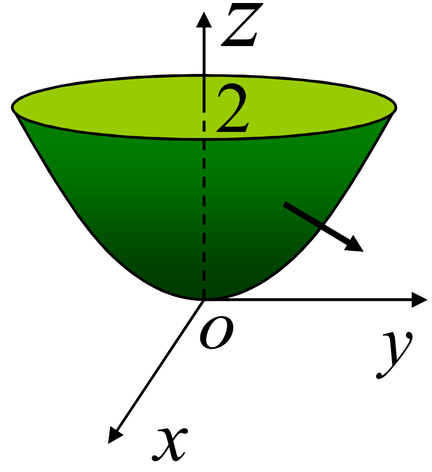
$$=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

如$\cos\gamma\neq 0$时

$$I=\iint_{\Sigma}(P\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\cos\gamma+Q\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\cos\gamma+R\cos\gamma)dS$$

$$=\iint_{\Sigma}(P\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}+Q\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}+R)dxdy$$

例4. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}(z^2+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$\Sigma$ 旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间部分的下侧.



解: 利用两类曲面积分的联系, 有

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

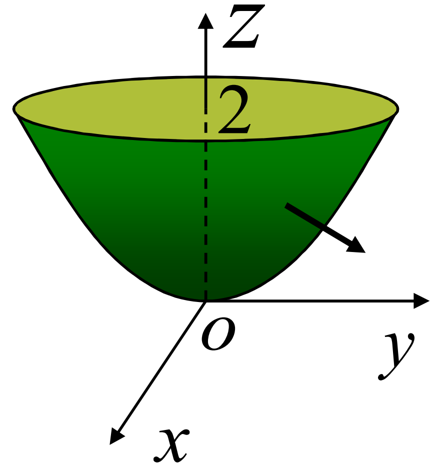
$$=\iint_{\Sigma}(z^2+x)\cos\alpha\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}(z^2+x)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\\ \cos\gamma&=\frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\end{aligned}}$$

$\therefore$ 原式 $=\iint_{\Sigma}[(z^2+x)(-x)-z\,]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

将 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 代入, 得



$$\text{原式}=-\iint_{D_{xy}}\left\{\left[\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x\right](-x)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\left(\text{因为}\iint_{D_{xy}}\frac{1}{4}x(x^2+y^2)^2dxdy=0\right)$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left[\,x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\,\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\left(r^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}r^2\right)r\,\mathrm{d}r$$

$$=8\pi$$

例**7.7**计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma} z\,dxdy$， 其中$\boldsymbol{\Sigma}$

为球面$x^2+\boldsymbol{y^2}+\boldsymbol{z^2}=\boldsymbol{R^2}$在第一卦限的的部分与各坐标面所围成立体表面的外侧。

$$I=\frac{1}{6}\pi R^3$$

例7.8 计算曲面积分

$$I=\oint\!\!\!\oint_S (x^2+y^2)dydz+zdxdy,$$

其中Σ为柱面$x^2+y^2=R^2$与$z=0, z=H$所围成柱体表面的外侧。

$$I=\pi R^2 H$$

内容小结

1. 两类曲面积分及其联系

定义:

- $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$
- $\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Big[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}\Big]$$

性质: $\iint_{\Sigma^-} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$= -\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

联系: $\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

2. 常用计算公式及方法

$$\text{面积分}\begin{cases}\text{第一类 (对面积)} \\ \text{第二类 (对坐标)}\end{cases}\xrightarrow{\text{转化}}\text{二重积分}$$

(1) 统一积分变量 —— 代入曲面方程

(方程不同时分片积分)

$$\text{(2) 积分元素投影}\begin{cases}\text{第一类：面积投影} \\ \text{第二类：有向投影}\end{cases}$$

(4) 确定积分域 —— 把曲面积分域投影到相关坐标面

注： 二重积分是第一类曲面积分的特殊情况.

当 $\boldsymbol{\Sigma: z = z(x, y)\,,\,(x, y) \in D_{xy}}$ 时，

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm\iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

（上侧取 “+”, 下侧取 “−” ）

类似可考虑在 yoz 面及 zox 面上的二重积分转化公式 .