

# 第三章扩展作业

刘正浩 2019270103005

2021 年 5 月 31 日

## 目录

### 1 第一题

1

### 1 第一题

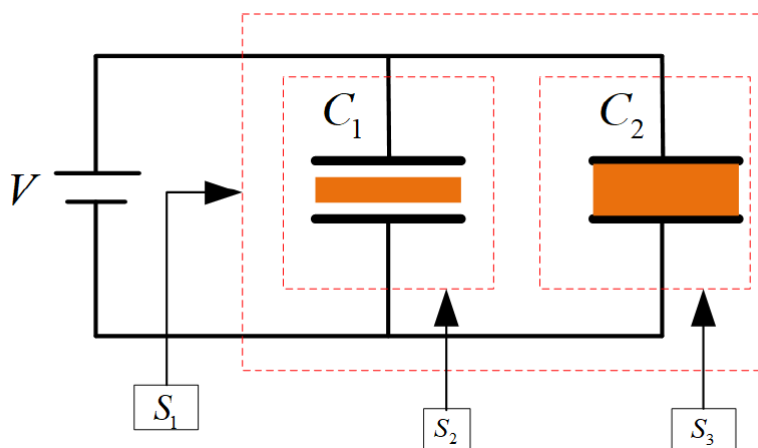


图 1: 电容与电压源组成的电路

已知电介质非理想（同时具有有限大小的电导率和介电常数）。设电介质的介电常数为  $\epsilon$ ，电导率为  $\sigma$ 。电容器两极板间厚度为  $d$ ，极板面积为  $S$ 。

首先分析  $S_2$  区域。设  $S_2$  区域中电介质的厚度为  $d_1$ ，极板上的电荷量为  $Q$ 。易知电容器中的问题为一维问题。应用高斯定理积分方程可知

$$\vec{D}(\vec{r}) = \vec{e}_z D(z) = \vec{e}_z \frac{Q}{S} \quad (1)$$

故可得两极板间电压表达式

$$V = E_1(z)d_1 + E(z)(d - d_1) = \frac{Q}{S} \left( \frac{d_1}{\epsilon} + \frac{d - d_1}{\epsilon_0} \right) \quad (2)$$

根据电容的表达式可知，

$$C_{S_2} = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{\epsilon_0 d_1 + \epsilon(d - d_1)} \quad (3)$$

由于真空电导率为 0，故电阻为无穷大。

在电介质区域中，

$$E_{1S_2} = \frac{Q}{\varepsilon S} = \frac{\varepsilon_0 V}{\varepsilon_0 d_1 + \varepsilon(d - d_1)} \quad (4)$$

在真空区域中，

$$E_{2S_2} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{\varepsilon V}{\varepsilon_0 d_1 + \varepsilon(d - d_1)} \quad (5)$$

电容所包含的能量可以直接用电容包含能量的公式进行计算。

$$W_{S_2} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S V^2}{2[\varepsilon_0 d_1 + \varepsilon(d - d_1)]} \quad (6)$$

功率

$$P_{S_2} = \frac{dW_C}{dt} = 0 \quad (7)$$

这很好理解，因为电容器中并没有电流通过，也就没有电功率。

接着来分析  $S_3$  区域。仍设极板上的电荷量为  $Q$ 。此电容器中的问题仍为一维问题。应用高斯定理积分方程。

$$\vec{D}(\vec{r}) = \vec{e}_z D(z) = \vec{e}_z \frac{Q}{S} \quad (8)$$

带入电压表达式。

$$V = E_1(z)d = \frac{Q}{S} \frac{d}{\varepsilon} \quad (9)$$

根据电容的表达式可知

$$C_{S_3} = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon S}{d} \quad (10)$$

由静电比拟法，可知此电容器的电阻值。

$$R_{S_3} = \frac{1}{\frac{\sigma S}{d}} = \frac{d}{\sigma S} \quad (11)$$

电场强度为

$$E_{S_3} = \frac{Q}{\varepsilon S} = \frac{\varepsilon V}{d} \quad (12)$$

在此区域中，能量由电容存储

$$W_{S_3} = W_C = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{\varepsilon S V^2}{2d} \quad (13)$$

总功率为电流热效应的功率

$$P_{S_3} = UI = \frac{V^2}{R} = \frac{\sigma S V^2}{d} \quad (14)$$

最后分析  $S_1$  区域。

电场情况已由上面内容中给出。

根据电路的相关知识，

$$C = C_{S_2} + C_{S_3} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{\varepsilon_0 d_1 + \varepsilon(d - d_1)} + \frac{\varepsilon S}{d} \quad (15)$$

$$R = R_{S_2} || R_{S_3} = R_{S_3} = \frac{d}{\sigma S} \quad (16)$$

能量

$$W = W_{S_2} + W_{S_3} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S V^2}{2[\varepsilon_0 d_1 + \varepsilon(d - d_1)]} + \frac{\varepsilon S V^2}{2d} \quad (17)$$

功率

$$P = P_{S_2} + P_{S_3} = 0 + \frac{\sigma S V^2}{d} = \frac{\sigma S V^2}{d} \quad (18)$$