《电磁场与电磁波》讲义

潘 锦

2021.3

2.4 物理量分析的数学基础

2.4.1 矢量代数

(一) 矢量的表示

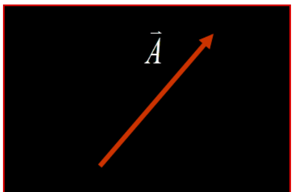
1) 矢量的代数表示

$$\vec{A}=\vec{e}_A A=\vec{e}_A\left|\vec{A}\right|$$

其中，$|\vec{A}|$称为矢量$\vec{A}$的模，表示矢量的大小；$\vec{e}_A$称为矢量$\vec{A}$的单位矢量，指示矢量$\vec{A}$的方向。

2) 矢量的几何表示

如图用有向线段表示，具有平移不变性。其长度表示矢量大小，箭头指示方向。



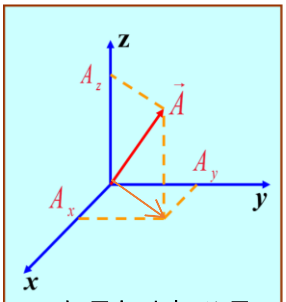
矢量的几何表示

3) 矢量的坐标分量表示

在直角坐标系下，$\vec{A}=A_x\vec{e}_x+A_y\vec{e}_y+A_z\vec{e}_z$

在圆柱坐标系下，$\vec{A}=A_\rho\vec{e}_\rho+A_\varphi\vec{e}_\varphi+A_z\vec{e}_z$

在球坐标系下，$\vec{A}=A_r\vec{e}_r+A_\varphi\vec{e}_\varphi+A_\theta\vec{e}_\theta$



矢量与坐标分量

(二) 矢量的运算

1) 矢量加减

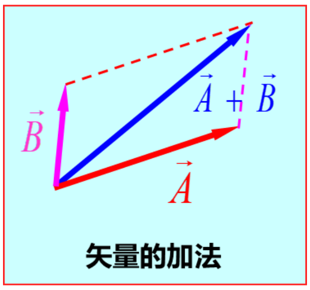
（1）代数运算

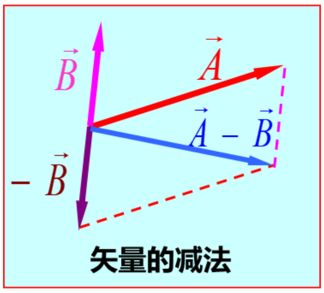
$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$

$$\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$$

（2）几何运算





（3）坐标分量运算

在直角坐标系下，$\vec{A}\pm\vec{B}=\vec{e}_x(A_x\pm B_x)+\vec{e}_y(A_y\pm B_y)+\vec{e}_z(A_z\pm B_z)$

2) 矢量标积（点乘）

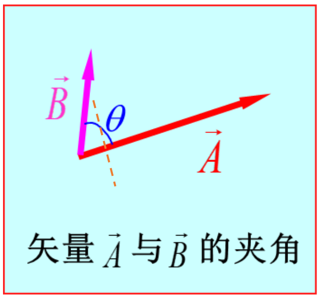
（1）代数运算

$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta$，结果为标量。

若 $\vec{A}\perp\vec{B}$，则 $\vec{A}\cdot\vec{B}=0$

（2）运算的几何关系

一矢量的模与另一矢量对自己投影值的积。



（3）坐标分量运算

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

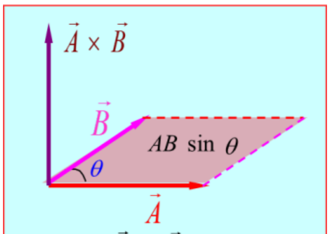
3) 矢量矢积（叉乘）

（1）代数运算

$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{e}_n AB\sin\theta$ ，结果为矢量；

若$\vec{A}//\vec{B}$，则$\vec{A}\times\vec{B}=0$

（2）几何运算



矢量$\vec{A}$ 与$\vec{B}$ 的叉积

大小为图示平行四边形的面积，方向垂直于两矢量决定的平面，并指向由前矢量$\vec{A}$向后矢量$\vec{B}$的右手螺旋方向。

（3）坐标分量运算

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

4) 矢量混合运算关系

$$(\vec{A}+\vec{B})\cdot\vec{C}=\vec{A}\cdot\vec{C}+\vec{B}\cdot\vec{C}$$

$$(\vec{A}+\vec{B})\times\vec{C}=\vec{A}\times\vec{C}+\vec{B}\times\vec{C}$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

注意：上述各矢量运算的坐标分量运算关系，一般仅适用于直角坐标系。当对其它坐标系下的矢量进行坐标分量运算时，应先将参与运算的矢量在直角坐标系下表出，然后再按所给坐标分量关系进行运算。

2.4.2 泰勒级数展开

(一) 一元函数的泰勒级数展开

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$$

其中，$|x|<1$

(二) 二元函数的泰勒级数展开

$$f(x,y)=f(0,0)+\frac{1}{1!}(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})f(x,y)\Big|_{x=0,y=0}+\frac{1}{2!}(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x,y)\Big|_{x=0,y=0}+o(x^2,y^2)$$

其中，$|x|<1,\quad |y|<1$

2.4.3 复合函数求导

$$\frac{\partial}{\partial v}u[x(v),y(v),z(v)]=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$

2.4.4 正交坐标系

(一) 概念与定义

坐标变量：在一定坐标系中表示空间位置的变量。因此，变量的个数对应于空间的维度

坐标单位矢量：大小为 1，方向从给定位置指向坐标变量增加的方向。因此，每个坐标变量都有其对应的单位矢量。

正交坐标系：单位矢量彼此垂直的坐标系。

坐标面：坐标变量为常数的曲面。

线元：空间线段的微分单元，其长度与其形状无关。为方便分析计算，通常可不失一般性地将任意线元视为直线微元。

线元矢量：线元与其切向单位矢量共同构成的矢量。

面元：空间中的面积微元，其面积与其形状无关。因此，计算时可将其假设为利于

分析的任意形状，如平面，柱面，球面等。

面元矢量：面元与面元法向单位矢量共同构成的矢量。

体积元：空间中的体积微元，其体积与其形状无关。因此，计算时可将其假设为利于

分析的任意形体，如立方体，圆柱体，球体等。

位置矢量：从坐标原点到空间中的位置点连线，方向从坐标原点指向该位置点的矢量。

由此，空间中的任意位置都有一个唯一的位置矢量与之对应。

(二) 常用的正交坐标系

1) 直角坐标系

坐标变量：x, y, z

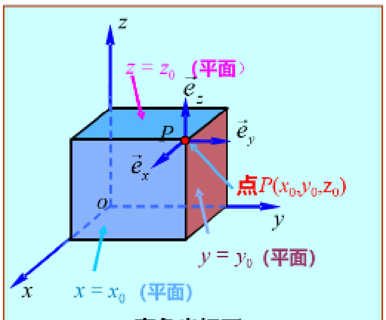
单位矢量：$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ ，且均为常矢量

坐标面：$x = C, y = C, z = C$，且均为平面

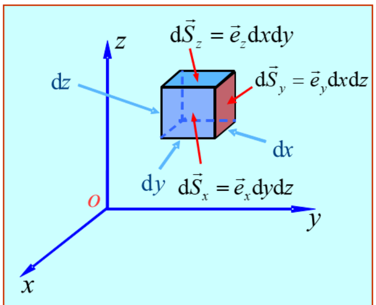
线元矢量：$d\vec{l} = \vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy + \vec{e}_z dz$

面元矢量：$\mathrm{d}\vec{S}_x = \vec{e}_x dydz$，$\mathrm{d}\vec{S}_y = \vec{e}_y dzdx$，$\mathrm{d}\vec{S}_z = \vec{e}_z dxdy$

体积元：$dV = dxdydz$



直角坐标系



直角坐标系的长度元、面积元、体积元

位置矢量: $\vec{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z$

2) 圆柱坐标系

坐标变量：ρ, φ, z

单位矢量：$\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_z$ ；其中除 $\vec{e}_z$ 为常矢量，$\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi$ 均不是常矢量

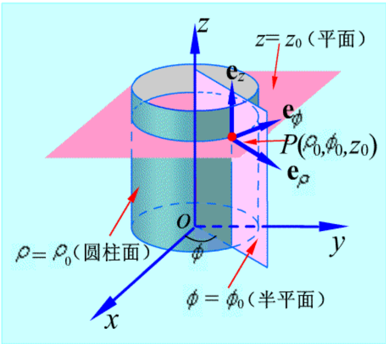
坐标面：$\rho = C$ 的平面，$\varphi = C, z = C$ 的平面

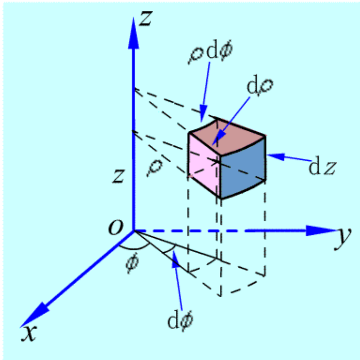
线元矢量：$d\vec{l} = \vec{e}_\rho d\rho + \vec{e}_\varphi \rho d\varphi + \vec{e}_z dz$

面元矢量：$d\vec{S}_\rho = \vec{e}_\rho \rho d\varphi dz$，$d\vec{S}_\varphi = \vec{e}_\varphi d\rho dz$，$d\vec{S}_z = \vec{e}_z \rho d\rho d\varphi$

体积元：$dV = \rho d\rho d\varphi dz$

位置矢量: $\vec{r} = \vec{e}_\rho \rho + \vec{e}_z z$





3) 球坐标系

坐标变量：r,θ,φ

单位矢量：$\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi$ ，且均不是常矢量

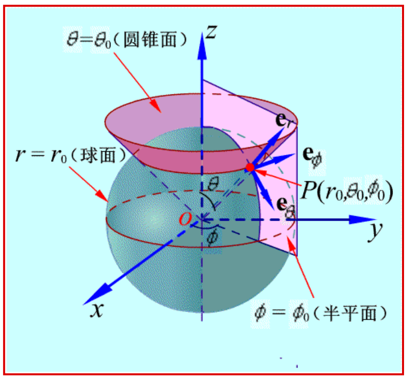
坐标面：$r = C$ 的球面，$\theta = C$ 的圆锥面，以及 $\varphi = C$ 的平面

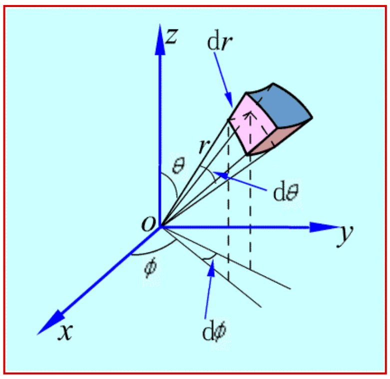
线元矢量：$d\vec{l} = \vec{e}_r dr + \vec{e}_\theta r d\theta + \vec{e}_\varphi r\sin\theta d\varphi$

面元矢量：$d\vec{S}_r = \vec{e}_r r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$，$d\vec{S}_\theta = \vec{e}_z r\sin\theta dr d\varphi$，$d\vec{S}_\varphi = \vec{e}_\varphi r dr d\theta$

体积元：$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$

位置矢量: $\vec{r} = \vec{e}_r r$





4) 三种坐标系单位矢量的变换关系

（1）直角坐标与圆柱坐标系

	$\vec{e}_x$	$\vec{e}_y$	$\vec{e}_z$
$\vec{e}_\rho$	$\cos\phi$	$\sin\phi$	0
$\vec{e}_\phi$	$-\sin\phi$	$\cos\phi$	0
$\vec{e}_z$	0	0	1

(2) 直角坐标与球坐标系

	$-\sin\phi$	0	$\vec{e}_z$
$\vec{e}_r$	$\sin\theta\cos\phi$	$\sin\theta\sin\phi$	$\cos\theta$
$\vec{e}_\theta$	$-\cos\theta\sin\phi$	$\cos\theta\sin\phi$	$-\sin\theta$
$\vec{e}_\phi$	$-\sin\phi$	$\cos\phi$	0

（3）圆柱坐标与球坐标系

	$\vec{e}_\rho$	$\vec{e}_\phi$	$\vec{e}_z$
$\vec{e}_r$	$\sin\theta$	0	$\cos\theta$
$\vec{e}_\theta$	$\cos\theta$	0	$-\sin\theta$
$\vec{e}_\phi$	0	1	0

(三) 正交坐标系中的矢量分析运算式

设正交坐标系的坐标变量为：v_1,v_2,v_3；单位矢量为：$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$；度规系数为：$h_1,h_2,h_3$，$\Omega=h_1h_2h_3$，则可得出该坐标系下矢量分析各运算符的计算式。

对于直角坐标系，$(v_1,v_2,v_3)=(x,y,z)$，$(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)=(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$，$(h_1,h_2,h_3)=(1,1,1)$；

对于圆柱坐标系，$(v_1,v_2,v_3)=(\rho,\varphi,z)$，$(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)=(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_z)$，$(h_1,h_2,h_3)=(1,r,1)$；

对于球坐标系，$(v_1,v_2,v_3)=(r,\theta,\varphi)$，$(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)=(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$，$(h_1,h_2,h_3)=(1,r,r sin\theta)$。

1) 标量场的梯度运算

$$\nabla u = \sum_i \frac{\vec{e}_i \partial u}{h_i \partial v_i}$$

2) 标量场的拉普拉斯运算

$$\nabla^2 u = \sum_i \frac{1}{\Omega} \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\Omega}{h_i^2} \frac{\partial u}{\partial v_i} \right)$$

3) 矢量场的散度运算

$$\nabla \bullet \vec{F} = \sum_i \frac{1}{\Omega} \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\Omega}{h_i} F_i \right)$$

4) 矢量场的旋度运算

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{\Omega} \begin{vmatrix} h_1 \vec{e}_1 & h_2 \vec{e}_2 & h_3 \vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial v_1} & \dfrac{\partial}{\partial v_2} & \dfrac{\partial}{\partial v_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix} = \sum_i \frac{h_i \vec{e}_i}{\Omega} \left[\frac{\partial (h_k F_k)}{\partial v_j} - \frac{\partial (h_j F_j)}{\partial v_k} \right]$$

其中，$(i,j,k) = (1,2,3)$ 以循环次序计算。

5) 单位矢量的导数

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial v_i} = -\left(\vec{e}_j \frac{1}{h_j} \frac{\partial h_i}{\partial v_j} + \vec{e}_k \frac{1}{h_k} \frac{\partial h_i}{\partial v_k} \right) ;\ \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial v_k} = \vec{e}_k \frac{1}{h_j} \frac{\partial h_k}{\partial v_j} \ ,\ j \neq k$$

2.4.5 矢量分析中的恒等关系

(一) 积分定理

1）格林定理

对一定空间中的物理量进行分析，通常会涉及分析物理量在一定体积中及其包围面上的分布情况与关系问题。另外，对于分析处于同一空间中的多个物理量问题，还会涉及分析各物理量在空间中分布的彼此关系问题。要回答这些问题，就需要建立反映物理量空间分布变化的微积分关系。

（1）标量第一格林定理

$$\int_V (\nabla\Psi\cdot\nabla\Phi+\Psi\nabla^2\Phi)\mathrm{d}V=\oint_S \Psi\nabla\Phi\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

（2）标量第二格林定理

$$\int_V (\Psi\nabla^2\Phi-\Phi\nabla^2\Psi)\mathrm{d}V=\oint_S \left(\Psi\nabla\Phi-\Phi\nabla\Psi\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

（3）矢量第一格林定理

$$\int_V [(\nabla\times\vec{F}_1)\bullet(\nabla\times\vec{F}_2)-\vec{F}_1\bullet\nabla\times\nabla\times\vec{F}_2]\mathrm{d}V=\oint_S (\vec{F}_1\times\nabla\times\vec{F}_2)\bullet\mathrm{d}\vec{S}$$

（4）矢量第二格林定理

$$\int_V [\vec{F}_1\bullet(\nabla\times\nabla\times\vec{F}_2)-\vec{F}_2\bullet(\nabla\times\nabla\times\vec{F}_1)]\mathrm{d}V=\oint_S (\vec{F}_2\times\nabla\times\vec{F}_1-\vec{F}_1\times\nabla\times\vec{F}_2)\bullet\mathrm{d}\vec{S}$$

小结：格林定理给出了场域空间中，两个物理量在任意体积中及其包围面上的恒等关系式。在物理量分析问题中利用这些恒等关系，通常可简化问题分析的复杂度。如，利用格林恒等式将体积域内物理量分析求解的问题，转化为其包围面边界上分析求解的问题；又如，利用一个物理量的已知空间分布特性，求知另一个物理量的分布特性；还有，涉及一定条件下物理量唯一性的证明也可利用格林恒等式。

2）散度定理

$$\int_{\mathrm{V}} \nabla\bullet\vec{F}dV=\oint_S \vec{F}\bullet d\vec{S}$$

3）旋度定理

$$\int_{\mathrm{V}} \nabla\times\vec{F}dV=\oint_S \vec{e}_n\times\vec{F}dS$$

4）梯度定理

$$\int_{\mathrm{V}} \nabla u dV=\oint_S u d\vec{S}$$

5）斯托克斯定理

$$\int_{\mathrm{S}} (\nabla\times\vec{F})\bullet dS=\oint_C \vec{F}\bullet d\vec{l}$$

(二) $\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$ 的运算

$$\vec{F}(\vec{r})=\int_V \vec{F}(\vec{r}\,')\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')dV\,' \;; \qquad \vec{r},\ \vec{r}\,'\in V$$

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')=-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\left(\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}\right)$$

(三) 矢量恒等式

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}=(\vec{C}\times\vec{A})\cdot\vec{B}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

$$\nabla\times\nabla u=0$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0$$

$$\nabla\cdot(\nabla u)=\nabla^2 u$$

$$\nabla\cdot(\nabla\vec{A})=\nabla^2\vec{A}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$$

$$\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u$$

$$\nabla\cdot(u\vec{A})=u\nabla\cdot\vec{A}+\vec{A}\cdot\nabla u$$

$$\nabla\times(u\vec{A})=u\nabla\times\vec{A}-\vec{A}\times\nabla u$$

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot\nabla\times\vec{A}-\vec{A}\cdot\nabla\times\vec{B}$$

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{A}\times\nabla\times\vec{B}+\vec{B}\times\nabla\times\vec{A}+(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}$$

$$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}\nabla\cdot\vec{B}-\vec{B}\nabla\cdot\vec{A}-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}$$