3.2 全微分

一元函数 $y = f(x)$ 的微分

$$\Delta y = \underline{A\Delta x} + o(\Delta x)$$

$$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x \xrightarrow{\text{应用}} \begin{cases} \text{近似计算} \\ \text{估计误差} \end{cases}$$

本节内容:

一、全微分的定义

二、全微分在近似计算中的应用

一、全微分的定义

定义3.2: 如果函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有定义.如果对于$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in U(x_0,y_0)$,函数f在(x_0,y_0)处的改变量

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

可以表示为

$$\Delta z=a_1\Delta x+a_2\Delta y+o(\rho),\quad \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

其中 a_1, a_2 不依赖于Δx, Δy, 仅与 x_0, y_0 有关，则称 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) **可微**，并称 $a_1\Delta x+a_2\Delta y$ 为函数f在点 (x_0,y_0) 的**全微分**, 记作

$$dz\big|_{(x_0,y_0)}=df\big|_{(x_0,y_0)}=a_1\Delta x+a_2\Delta y=a_1dx+a_2dy$$

由上述定义知,当ρ充分小且a_1, a_2不全为零时,全微分$dz\big|_{(x_0,y_0)}$就是函数f在(x_0,y_0)处该变量的线性主部.

问题:

1. f在什么条件下可微?

2. 当f可微时，a_1, a_2 代表什么?

3. 如何计算全微分?

4. 函数的可微性与连续性及方向导数之间又有什么关系?

定理3. 1（可微的必要条件） **若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微，则**

(1) f 在(x_0, y_0)处连续；

(2) f 在 (x_0, y_0)处的两个偏导数均存在，且有

$$\mathrm{d} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

证 (1) 当 f 在点(x_0, y_0) 可微时, 故

$$\Delta z = a_1\Delta x + a_2\Delta y + o(\rho)$$ 成立,

令$\rho \to 0$(即$\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$),得

$$\lim_{\rho \to 0} \Delta z = 0$$

或 $$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0)$$

所以 f 在(x_0, y_0)处连续;

(2)由可微的定义,有

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = a_1\Delta x + a_2\Delta y + o(\rho)$$

$$a_1 = f_x(x_0, y_0) \qquad a_2 = f_y(x_0, y_0)$$

于是由全微分定义，定理得证！

函数 $z = f(x, y)$ 在点 $x_0 = (x_0,\ y_0)$ 可微

$$\rightleftarrows \quad \Delta z = f_x(x_0)\,\Delta x + f_y(x_0)\,\Delta y + o(\rho)$$

二元函数在一点处的全微分不仅与f在该点处的各个偏导数有关，还与各自变量的改变量$\triangle x, \triangle y$有关.

如果f在区域$\Omega \subseteq \mathrm{R}^2$的每一点均可微，则称$f$是$\Omega$内的可微函数.此时全微分可简记为$\mathrm{d}f$或$\mathrm{d}z$，其计算公式为

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

可微与偏导数的关系（1）：

$$\text{函数可微} \;\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}\; \text{偏导数存在}$$

例3.1

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

f在原点处两个偏导数都存在，但是在原点却不连续，故不可微！

例3.5 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

在点O(0,0)处的连续性与可微性.

证 由

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|\leq|y|\leq\sqrt{x^2+y^2}$$

易见f在点(0,0)处连续.再由偏导数的定义，可得

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$$

同理，$f_y(0,0)=0$

故f在点(0,0)处的两个偏导数均存在.

例3.5 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

在点O(0,0)处的连续性与可微性.

证

$$\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]=\frac{\Delta x\,\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$\frac{\Delta x\,\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\Big/\rho=\frac{\Delta x\,\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\not\to 0$$

$\neq o(\rho)$ 因此,函数在点 (0,0) 不可微 .

定理3.2 (充分条件) 若函数 $z=f(x,y)$ 的所有偏导数均在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内存在, 且所有偏导数均在 (x_0,y_0) 处连续, 则 f 在 (x_0,y_0) 处可微.

证

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

$$= [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)]$$

$$- [f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)]$$

由Lagrange微分中值公式知存在 $\theta_i (0<\theta_i<1, i=1,2)$，使

$$\Delta z = f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x + f_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y$$

由于 $f_x(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，有

$$\lim_{\rho\to 0} f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) = f_x(x_0,y_0), \text{其中} \rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

定理3.2 (充分条件) 若函数 $z=f(x,y)$ 的所有偏导数均在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内存在, 且所有偏导数均在 (x_0,y_0) 处连续，则 f 在 (x_0,y_0) 处可微.

因此有 $f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)=f_x(x_0,y_0)+\alpha_1(\rho)$

同理 $f_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)=f_y(x_0,y_0)+\alpha_2(\rho)$

其中 $\alpha_1(\rho),\alpha_2(\rho)$ 是当 $\rho\to 0$ 时的无穷小. 于是

$$\Delta z=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+\alpha_1(\rho)\Delta x+\alpha_2(\rho)\Delta y$$

由 $\left|\dfrac{\alpha_1(\rho)\Delta x+\alpha_2(\rho)\Delta y}{\rho}\right|\le|\alpha_1(\rho)|+|\alpha_2(\rho)|$

知 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\alpha_1(\rho)\Delta x+\alpha_2(\rho)\Delta y}{\rho}=0$

定理3.2 (充分条件) 若函数 $z=f(x,y)$ 的所有偏导数均在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内存在, 且所有偏导数均在 (x_0,y_0) 处连续， 则 f 在 (x_0,y_0) 处可微.

所以

$$\alpha_1(\rho)\Delta x+\alpha_2(\rho)\Delta y=O(\rho)$$

综上所述， 则 f 在 (x_0,y_0) 处可微.

例3.6 计算函数$z=\mathrm{e}^{xy}$在点 (0,1) 处当$\Delta x=0.1,\Delta y=0.2$时的该变量$\Delta z$ 及全微分dz.

解： 记$z=f(x,y)=\mathrm{e}^{xy}$,则

$$\Delta z=f(0+0.1,1+0.2)-f(0,1)=e^{0.12}-1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\mathrm{e}^{xy},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=x\mathrm{e}^{xy}$$

$$\mathrm{d}z\Big|_{(0,1)}=f_x(0,1)\mathrm{d}x+f_y(0,1)\mathrm{d}y=1\times0.1+0\times0.2=0.1$$

可微与偏导数的关系（2）：

偏导数连续 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ 函数可微

例3.7

证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

在点 (0,0) 处可微，但偏导数在点 (0,0) 不连续.

证 **易求得** $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ **,因此 有**

$$\Delta f-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)$$

$$=(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}=\rho^2\sin\frac{1}{\rho^2}=o(\rho)$$

故f在点 (0,0) 处可微。

当 f 不在点(0,0) 处时，有

$$f_x(x,y) = 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

由于

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} = 0$$

而

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cos\frac{1}{2x^2}$$ 不存在，

所以 $f_x(x,y)$ 在点(0,0)处间断，同理 $f_y(x,y)$ 也在点(0,0)间断.

2. n元函数的全微分

设n元函数$u=f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)$在点$x_0=(x_{0,1},\cdots,x_{0,n})\in R^n$的邻域$U(x_0)\subseteq R^n$内有定义，如果$\forall x=x_0+\Delta x\in U(x_0)$，存在一组与$\Delta x=(\Delta x_1,\cdots,\ \Delta x_n)$无关的常数$a_1,\cdots,a_n$，使得函数$f$在$x_0$处的改变量

$$\Delta u=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

可表示为 $\Delta u=a_1\Delta x_1+\cdots+a_n\Delta x_n+o(\rho)$

其中$o(\rho)$是当$\rho=\|\Delta x\|\to 0$ 时关于ρ的高阶无穷小，则称f 在 点 x_0 处可微，且称关于$\Delta x_1,\cdots,\ \Delta x_n$的线性函数

$$a_1\Delta x_1+\cdots+a_n\Delta x_n$$

为f 在 点 x_0 处的全微分，记为$df(x_0)$，或 $du\,|_{x=x_0}$ ，即

$$df(x_0)=a_1\Delta x_1+\cdots+a_n\Delta x_n$$

同二元函数一样，常记 $\Delta x_i = dx_i$ ，于是f的全微分也常写成

$$df(x_0)=\sum_{i=1}^{n} a_i dx_i$$

定理3.1及定理3.2的结论也可直接推广到n元函数.例如，当n元函数f在x_0处可微时，f在x_0处的所有偏导数均存在，且可微定义中的

$$a_i=\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}(i=1,\cdots,n)$$

从而有
$$df(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}dx_i$$

例3.8 求$f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$的全微分.

解 显然，在除了原点之外的所有点，f的所有偏导数均存在且连续，因此由定理3.2知f可微，则

$$df=f_x dx+f_y dy+f_z dz$$

$$=-\frac{xdx+ydy+zdz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$(x^2+y^2+z^2\neq 0)$$

3. 全微分在近似计算和误差估计中的应用

n元函数 f 在点 x_0 处可微时，有

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = df(x_0) + o(\rho)$$

从而当 $\rho = \|\Delta x\| \ll 1$ 时，有

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = df(x_0) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_0)\Delta x_i$$

或

$$f(x) \approx f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_0)(x_i - x_{0,i})$$

当 $\rho \ll 1$时用函数的全微分近似表示函数的该变量，就是在x_0 的邻域内把一个非线性函数$f(x)$近似地线性化。上式右端称为$f(x)$的一次近似或线性逼近.

(1) 函数值的近似计算

例3.9 求 $\sqrt{1.97^3+1.01^3}$ 的近似值.

解　令 $f(x,y)=\sqrt{x^3+y^3}$，$(x_0,y_0)=(2,1)$,

$\Delta x=-0.03$，$\Delta y=0.01$,

$$f_x(2,1)=\left.\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}\right|_{(2,1)}=2 \quad f_y(2,1)=\left.\frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}\right|_{(2,1)}=\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{1.97^3+1.01^3}=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)$$

$$=f(2,1)+f_x(2,1)\Delta x+f_y(2,1)\Delta y=2.945$$

(2) 误差估计

设量z 由公式$z=f(x,y)$确定，如果x 和 y的近似值x_0和y_0 分别有绝对误差 δ_x,δ_y,即$|\Delta x|<\delta_x,|\Delta y|<\delta_y$,那么 $z_0=f(x_0,y_0)$ 也是z的近似值. 由于 $|\Delta x|,|\Delta y|$ 都很小,所以可以用公式 $\Delta z\approx dz$ 估计z_0的绝对误差:

$$|\Delta z|\approx|dz|=|f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y|$$

$$\le|f_x(x_0,y_0)||\Delta x|+|f_y(x_0,y_0)||\Delta y|$$

$$<|f_x(x_0,y_0)|\delta_x+|f_y(x_0,y_0)|\delta_y$$

从而z的绝对误差为

$$\delta_z=|f_x(x_0,y_0)|\delta_x+|f_y(x_0,y_0)|\delta_y$$

由此得z_0的相对误差为

$$\frac{\delta_z}{|z_0|}=\left|\frac{f_x(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}\right|\delta_x+\left|\frac{f_y(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}\right|\delta_y$$

例3.10 设$z=xy$，求由测量值x_0,y_0计算z所产生的绝对误差与相对误差.

解 绝对误差 $\delta_z=|y_0|\delta_x+|x_0|\delta_y$

相对误差 $$\frac{\delta_z}{|z_0|}=\frac{\delta_x}{|x_0|}+\frac{\delta_y}{|y_0|}$$

乘积(商)的相对误差等于各因子（分子与分母）的相对误差之和.

例3.11 肾的一个重要功能是清除血液中的尿素。临床上用公式 $C=\sqrt{V}u/P$ 来计算尿素标准清除率，其中u表示尿中的尿素浓度（单位：mg/L），V表示每分钟排出的尿量（单位：mL/min），P表示血液中的尿素浓度（单位：mg/L），某病人的实际测量值为u=5000，V=1.44，P=200，从而算的C=30（正常54）。如果该测量值u，V，P的绝对误差分别为50，0.0144,2，试估算由测量值的误差对C值所带来的绝对误差与相对误差.

解

$$\frac{\partial C}{\partial u}=\frac{\sqrt{V}}{P},\ \frac{\partial C}{\partial V}=\frac{u}{2P\sqrt{V}},\ \frac{\partial C}{\partial P}=-\frac{u\sqrt{V}}{P^2},$$

当u=5000，V=1.44，P=200时

$$\frac{\partial C}{\partial u}=0.006,\ \frac{\partial C}{\partial V}=\frac{125}{12},\ \frac{\partial C}{\partial P}=-0.15,$$

故C值的绝对误差为

$$\delta_C = \left|\frac{\partial C}{\partial u}\right|\delta_u + \left|\frac{\partial C}{\partial V}\right|\delta_V + \left|\frac{\partial C}{\partial P}\right|\delta_P$$

$$= 0.006\times 50 + \frac{125}{12}\times 0.0144 + 0.15\times 2 = 0.75$$

C值的相对误差为

$$\frac{\delta_C}{|C|} = \frac{0.75}{30} = 2.5\%$$