

## 第六章 多元函数积分学及其应用

我们在第三章中所讨论过的定积分,其被积函数是一元函数,积分范围是区间,因而它一般只能用来研究分布在某一区间上的量的求和问题,例如平面曲边梯形的面积、细棒的质量等.但是在科学技术中,往往还会碰到许多非均匀分布在平面或空间的某种几何形体上的可加量的求和问题,例如,空间区域的体积,平面薄板、空间物体或物质曲线和曲面的质量等.这时就需要把定积分的概念加以推广,来讨论被积函数是多元函数而积分范围是平面或空间中某一几何形体的积分,即多元函数的积分.

多元函数积分的种类较多,但可从是否考虑方向性,把它们划分为两大类型.本章先介绍与方向性无关的多元函数积分,称为多元数量值函数的积分或第一大类型积分,讲解其概念、性质、计算和应用,包括含参变量的积分,然后结合场论介绍与方向性有关的第二大类型积分.

### 第一节 多元数量值函数积分的概念与性质

#### 1.1 物体质量的计算

设有一质量非均匀分布的物体,其密度是点  $M$  的连续函数  $\mu=f(M)$ . 如果函数已知,怎样来求物体的质量呢?

在定积分中,我们已经讲解了求线密度为  $\mu=f(M)=f(x)$  的细棒  $AB$  (图 6.1) 质量的思想和步骤. 当线密度  $\mu$  为常量时,物质是均匀分布在区间  $[a, b]$  上的. 这时棒  $AB$  的质量  $m$  可简单地利用乘法得到:  $m=\mu \cdot (b-a)$ . 当  $\mu=f(x)$  是连续变量时,物质在  $[a, b]$  上是非均匀分布的.

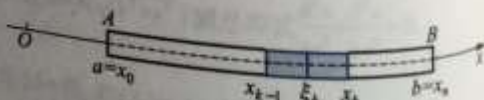


图 6.1

为了运用物质为均匀分布的已知结果去解决非均匀分布的问题,我们采用了“分”“匀”“合”“精”四个步骤,将线密度为  $\mu=f(x)$  的细棒  $AB$  的质量  $m$  化为下述定积分来求:

$$m = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx. \quad (1.1)$$

对于平面或空间内的物体,当其密度函数  $\mu=f(M)$  已知时,其质量的计算也可通过“分”“匀”“合”“精”的步骤来解决.例如,对平面薄板来说,假设它所占的平面区域为  $(\sigma)$  (图 6.2),其面密度  $\mu=f(M)$  在  $(\sigma)$  上连续,我们可按下述步骤来计算它的质量.

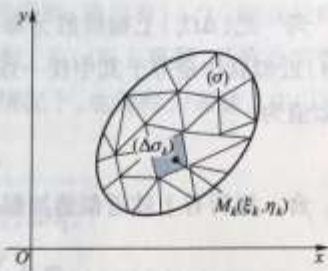


图 6.2

**分** 把薄板所在的区域  $(\sigma)$  任意地划分为  $n$  个子域  $(\Delta\sigma_k)$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) 它们的面积记作  $\Delta\sigma_k$  (图 6.2).

**匀** 当子域  $(\Delta\sigma_k)$  很小时,其上的物质可以近似地看成是均匀分布的,也就是说,密度函数  $f(M)$  在  $(\Delta\sigma_k)$  上可以近似地看作是常数,即等于  $(\Delta\sigma_k)$  内的任一点  $M_k$  的值  $f(M_k)$ ,从而  $(\Delta\sigma_k)$  上质量  $\Delta m_k$  的近似值为

$$\Delta m_k \approx f(M_k) \Delta\sigma_k.$$

**合** 把所有  $\Delta m_k$  的近似值加起来,就得到薄板质量  $m$  的近似值为

$$m \approx \sum_{k=1}^n \Delta m_k \approx \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta\sigma_k.$$

**精**  $(\sigma)$  的所有子域  $(\Delta\sigma_k)$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) 被划分得越小,上述近似值的近似程度就越高.设  $d$  为这  $n$  个子域  $(\Delta\sigma_k)$  的直径<sup>①</sup>中的最大者,当子域的数目  $n$  无限增大,而且  $d$  趋于零时,每一子域都无限缩小,我们把上述近似值的极限规定为此薄板的质量  $m$ ,即

$$m = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta\sigma_k. \quad (1.2)$$

可见,薄板的质量也可由一个和式的极限来确定.和式极限(1.2)与(1.1)式中的和式极限形式上完全一样,唯一的差别是(1.1)式中的每一项是函数在子区间上任一点  $M_k$  的函数值乘该子区间的长度,而(1.2)式中的每一项是函数在平面子域上任一点  $M_k$  的函数值乘该子域的面积.这种差别是由于质量分布的范围不同所引起的.

① 闭区域的直径是指此闭区域中任意两点间距离的最大值.

一般说来,设有一物质非均匀分布在某一几何形体 $(\Omega)$ 上的物体(这里的几何形体 $(\Omega)$ 可以是直线段、平面或空间区域,一片曲面或一段曲线),其密度函数 $\mu=f(M)$ 在 $(\Omega)$ 上连续,可以完全依照上面的四个步骤来计算其质量.

分 把 $(\Omega)$ 任意地划分为 $n$ 个部分,记作 $(\Delta\Omega_k), k=1, 2, \dots, n$ ,并把 $(\Delta\Omega_k)$ 的量(例如面积、体积、曲面面积、曲线的弧长等)记为 $\Delta\Omega_k$ .

匀 把 $(\Delta\Omega_k)$ 上物质的分布近似看成是均匀的,即在 $(\Delta\Omega_k)$ 上把密度函数 $\mu=f(M)$ 近似看作是等于其中任一点 $M_k$ 处的函数值 $f(M_k)$ ,从而 $(\Delta\Omega_k)$ 上质量 $\Delta m_k$ 的近似值为

$$\Delta m_k \approx f(M_k) \Delta\Omega_k.$$

合 把所有上述近似值加起来得此物体质量的近似值为

$$m \approx \sum_{k=1}^n \Delta m_k \approx \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta\Omega_k.$$

精 设 $d$ 为 $n$ 个 $(\Delta\Omega_k)$ 直径<sup>①</sup>中的最大者,当 $d \rightarrow 0$ 时上述和式的极限值就是此物体的质量 $m$ ,即

$$m = \sum_{k=1}^n \Delta m_k = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta\Omega_k. \quad (1.3)$$

## 1.2 多元数量值函数积分的概念

从上面求质量的问题中我们看到,尽管物质分布的几何形体可以不同,甚至涉及不同维数的空间,但是通过点函数从数量关系来看,求质量的问题都归结为求同一形式和式的极限(1.3).在科学技术中还有大量类似的问题,例如各种物体的质心和转动惯量、平面或空间几何形体的面积或体积等,都可以看成是分布在某一几何形体上的可加量的求和问题,从而最终都可归结为形如(1.3)的和式的极限问题而得到解决.为了从数量关系上给出解决这类问题的一般方法,我们抛开它们的具体意义,只保留其数学结构的特征,给出以下多元函数积分的概念.

**定义 1.1 (多元数量值函数积分)** 设 $(\Omega)$ 表示一个有界的几何形体,它是可度量的(即可求长或可求面积或可求体积),函数 $f$ 是定义在 $(\Omega)$ 上的有界数量值函数.

将 $(\Omega)$ 任意地划分为 $n$ 个小部分 $(\Delta\Omega_k), k=1, 2, \dots, n$ ,用 $\Delta\Omega_k$ 表示 $(\Delta\Omega_k)$ 的度量.

注:定义中之所以要求 $f$ 在 $(\Omega)$ 上有界,是因为仿照第三章定积分定义边注(第175页)中的证明可知:当 $f$ 在 $(\Omega)$ 上无界时,积分(1.4)一定不存在.

① 几何形体 $(\Delta\Omega_k)$ 的直径是指此几何形体上任意两点间距离的最大值.



任取点  $M_k \in (\Delta\Omega_k)$ , 作乘积

$$f(M_k) \Delta\Omega_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

作和式

$$\sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta\Omega_k.$$

如果不论  $(\Omega)$  怎样划分, 点  $M_k$  在  $(\Delta\Omega_k)$  中怎样选取, 当所有  $(\Delta\Omega_k)$  的直径的最大值  $d \rightarrow 0$  时上述和式都趋于同一常数, 那么, 称函数  $f$  在  $(\Omega)$  上可积, 且称此常数为多元数量值函数  $f$  在  $(\Omega)$  上的积分, 在不致混淆的情况下, 也简称为函数  $f$  在  $(\Omega)$  上的积分, 记作

$$\int_{(\Omega)} f(M) d\Omega = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta\Omega_k, \quad (1.4)$$

其中  $(\Omega)$  称为积分域<sup>①</sup>,  $f$  称为被积函数,  $f(M) d\Omega$  称为被积式或积分微元.

下面, 我们根据积分域  $(\Omega)$  的不同类型, 分别给出积分 (1.4) 的具体表达式和名称.

(1) 如果  $(\Omega)$  是  $x$  轴上的闭区间  $[a, b]$ , 那么  $f$  就是定义在区间  $[a, b]$  上的一元函数,  $\Delta\Omega_k$  就是子区间的长度  $\Delta x_k$ , 从而 (1.4) 式可以具体地写成

$$\int_{(\Omega)} f(M) d\Omega = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k,$$

而积分  $\int_{(\Omega)} f(M) d\Omega$  就是定积分  $\int_a^b f(x) dx$ .

(2) 如果  $(\Omega)$  是  $xOy$  平面上的区域  $(\sigma)$ <sup>②</sup>, 那么  $f$  就是定义在  $(\sigma)$  上的二元函数,  $\Delta\Omega_k$  就是子区域的面积  $\Delta\sigma_k$ , 从而 (1.4) 式也可更具体地写成

$$\int_{(\Omega)} f(M) d\Omega = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k,$$

称为  $f$  在区域  $(\sigma)$  上的二重积分, 其中  $(\xi_k, \eta_k)$  就是点  $M_k$  的直角坐标. 为了明确显示二重积分有两个独立的积分变量, 我们常用两个积分符号把二重积分表示为

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k,$$

其中  $(\sigma)$  就是二重积分的积分域,  $d\sigma$  称为面积微元.

① 为方便起见, 今后对积分域, 我们均用带有圆括号的字母表示; 而不带括号的相同字母表示此形体的度量. 例如,  $\Omega$  是积分形体  $(\Omega)$  的度量.

② 本书中的区域可以包含它的部分或全部边界, 作为积分域的区域都是指闭区域.



二维码 6.1.1

数量值函数积分概念的实质.

(3) 如果  $(\Omega)$  为三维空间的区域  $(V)$ , 那么  $f$  就是定义在  $(V)$  上的三元函数,  $\Delta\Omega_k$  就是子区域的体积  $\Delta V_k$ . 为了明确显示这时的积分有三个独立的积分变量, 我们常用三个积分符号, 而把 (1.4) 式具体写成

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta V_k,$$

称为  $f$  在区域  $(V)$  上的三重积分, 其中  $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$  为点  $M_k$  的直角坐标,  $(V)$  是三重积分的积分域,  $dV$  称为体积微元.

(4) 如果  $(\Omega)$  为一条平面 (或空间) 的曲线弧段  $(C)$ , 那么  $f$  就是定义在弧段  $(C)$  上的二元 (或三元) 函数,  $\Delta\Omega_k$  就是子弧段的弧长  $\Delta s_k$ , 于是 (1.4) 式可以具体写成

$$\int_{(C)} f(x, y) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k$$

$$\left( \text{或} \int_{(C)} f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta s_k \right),$$

称为  $f$  在曲线段  $(C)$  上对弧长的曲线积分, 也称为第一型线积分, 其中  $(C)$  称为积分路径. 被积函数形式上是二元 (或三元) 函数, 但是由于点  $M$  在曲线  $(C)$  上变动, 它的坐标将受到  $(C)$  的方程的约束, 所以实质上独立的变量只有一个. 这也是为什么只用一个积分符号去表示曲线积分的原因.

(5) 如果  $(\Omega)$  为一片曲面  $(S)$ , 那么  $f$  就是定义在  $(S)$  上的三元函数,  $\Delta\Omega_k$  就是子曲面的面积  $\Delta S_k$ . 由于点  $M$  在曲面  $(S)$  上变化, 它的坐标  $x, y, z$  中只有两个是独立的, 因此我们用两个积分符号来表示这类积分, 而将 (1.4) 式具体写为

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dS = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta S_k,$$

称为  $f$  在曲面  $(S)$  上对面积的曲面积分, 也称为第一型面积分.

我们看到, 多元函数的积分虽然类型多样, 但都是形同 (1.4) 式的和式极限, 只不过被积函数的定义域是不同的几何形体罢了. 这反映了在不同几何形体  $(\Omega)$  上对非均匀分布可加量求和问题的需要. 例如, 如果物质连续分布在空间区域  $(V)$  上, 那么在密度函数  $\mu(x, y, z)$  已知的情况下,  $(V)$  的质量就是  $\mu$  在  $(V)$  上的三重积分  $\iiint_{(V)} \mu(x, y, z) dV$ ; 如果物质连续分布在一片曲面  $(S)$  上, 那么在密度函数  $\mu(x, y, z)$  已

注: 这里我们将二重、三重积分、第一型线、面积分用几何形体上的积分统一定义, 不仅避免了各项的重复, 而且突出了它们的共性与解决问题的思想和步骤, 也便于理解它们的差异仅在于积分域的不同.

知的情况下,  $(S)$  的质量就是  $\mu$  在  $(S)$  上对面积的曲面积分  $\iint_{(S)} \mu(x, y, z) dS$ .

### 1.3 积分存在的条件和性质

在多元数量值函数积分的定义中, 要求不论  $(\Omega)$  怎样划分, 不论点  $M_k$  在  $(\Delta\Omega_k)$  中怎样选取, 当所有  $(\Delta\Omega_k)$  的直径的最大值  $d \rightarrow 0$  时和式均趋于同一个数. 这时, 我们才说积分存在, 或  $f$  在  $(\Omega)$  上可积.

类似于定积分, 可以证明(从略), 若  $(\Omega)$  是有界闭集且可度量,  $f \in C((\Omega))$ , 则  $f$  在  $(\Omega)$  上一定可积.

下面我们在  $(\Omega)$  是有界闭集、可度量且被积函数可积的前提下来讨论积分的主要性质, 它们的证明与定积分中相应性质类似.

#### 1. 线性性质

$$(1) \int_{(\Omega)} kf(M) d\Omega = k \int_{(\Omega)} f(M) d\Omega, k \text{ 为一常数};$$

$$(2) \int_{(\Omega)} [f(M) \pm g(M)] d\Omega = \int_{(\Omega)} f(M) d\Omega \pm \int_{(\Omega)} g(M) d\Omega.$$

2. 对积分域的可加性 设  $(\Omega) = (\Omega_1) \cup (\Omega_2)$ , 且  $(\Omega_1)$  与  $(\Omega_2)$  除边界点外无公共部分, 则

$$\int_{(\Omega)} f(M) d\Omega = \int_{(\Omega_1)} f(M) d\Omega + \int_{(\Omega_2)} f(M) d\Omega.$$

#### 3. 积分不等式

(1) 若  $f(M) \leq g(M), \forall M \in (\Omega)$ , 则

$$\int_{(\Omega)} f(M) d\Omega \leq \int_{(\Omega)} g(M) d\Omega;$$

$$(2) \left| \int_{(\Omega)} f(M) d\Omega \right| \leq \int_{(\Omega)} |f(M)| d\Omega;$$

(3) 若  $l \leq f(M) \leq L, \forall M \in (\Omega)$ , 则

$$l\Omega \leq \int_{(\Omega)} f(M) d\Omega \leq L\Omega.$$

4. 中值定理 设  $f \in C((\Omega)), (\Omega)$  为一有界连通闭集, 则在  $(\Omega)$  上至少存在一点  $P$ , 使

$$\int_{(\Omega)} f(M) d\Omega = f(P)\Omega.$$



二维码 6.1.2  
多元数量值函数积分中值定理的证明.



## 习题 6.1

## (A)

1. 当  $f(M) = 1$  时, 积分  $\int_{(\Omega)} f(M) d\Omega$  的值表示什么意义?

2. 积分  $\int_{(\Omega)} f(M) d\Omega$  定义中的所有  $(\Delta\Omega_k)$  的直径的最大值  $d \rightarrow 0$  能否用所有  $(\Delta\Omega_k)$  的度量最大值趋于零代替, 为什么?

3. 试说明二重积分、三重积分与定积分的共同点和不同点.

4. 就二重积分证明积分对积分域的可加性.

5. 利用积分的性质在所给区域上比较下列积分的大小:

$$(1) \iint_{(\sigma)} (x+y) d\sigma \text{ 与 } \iint_{(\sigma)} (x+y)^2 d\sigma, (\sigma) = \{(x,y) | x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\};$$

$$(2) \iint_{(\sigma)} (x^2+y^2)^2 d\sigma \text{ 与 } \iint_{(\sigma)} (x^2+y^2)^4 d\sigma, (\sigma) = \{(x,y) | 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\};$$

$$(3) \iint_{(\sigma_1)} (x^2+y^2) d\sigma \text{ 与 } \iint_{(\sigma_2)} (x^2+y^2) d\sigma, (\sigma_1) = \{(x,y) | x^2+y^2 \leq 1\}, (\sigma_2) = \{(x,y) | x^2+y^2 \leq 4\};$$

$$(4) \iint_{(\sigma_1)} x^2 y d\sigma \text{ 与 } \iint_{(\sigma_2)} x^2 y d\sigma, (\sigma_1) = \{(x,y) | x^2+y^2 \leq 1, y \geq 0\}, (\sigma_2) = \{(x,y) | x^2+y^2 \leq 1\}.$$

## (B)

1. 证明: 若  $f(M)$  在  $(\Omega)$  上连续,  $(\Omega)$  是紧的且可度量,  $f(M) \geq 0$ , 但  $f(M) \neq 0$ , 则

$$\int_{(\Omega)} f(M) d\Omega > 0.$$

2. 证明反常积分中值定理: 若  $(\Omega)$  是紧的且可度量的连通集,  $f(M), g(M)$  在  $(\Omega)$  上连续,  $g(M)$  在  $(\Omega)$  上不变号, 则在  $(\Omega)$  中至少存在一点  $P$ , 使得

$$\int_{(\Omega)} f(M) g(M) d\Omega = f(P) \int_{(\Omega)} g(M) d\Omega.$$

3. 比较下列积分的大小:

$$\iint_{(\sigma_1)} xy d\sigma, (\sigma_1) \text{ 是由 } x=0, y=0 \text{ 与 } x+y=3 \text{ 所围成的平面区域},$$

$$\iint_{(\sigma_2)} xy d\sigma, (\sigma_2) \text{ 是由 } x=-1, y=0 \text{ 与 } x+y=3 \text{ 所围成的平面区域}.$$

4. 设  $f(x,y)$  为连续函数, 求

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{(\sigma_r)} f(x,y) d\sigma,$$

其中  $(\sigma_r) = \{(x,y) | (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq r^2\}.$

5. 设  $f(x,y)$  在平面有界闭区域  $(\sigma)$  上连续, 证明: 若  $f(x,y)$  在  $(\sigma)$  上非负, 且  $\iint_{(\sigma)} f(x,y) d\sigma = 0$ , 则有  $f(x,y) = 0, \forall (x,y) \in (\sigma).$

## 第二节 二重积分的计算

从这一节开始,我们分别讲解各类积分的计算法.为了得出二重积分的计算公式,先介绍二重积分的几何意义.

### 2.1 二重积分的几何意义

设  $(\sigma) \subseteq \mathbf{R}^2$  是有界闭区域,  $f \in C((\sigma))$ . 由定义,  $f$  在  $(\sigma)$  上的二重积分就是下列和式的极限:

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k.$$

下面,我们根据这个和式极限的结构来说明二重积分的几何意义.为方便起见,设  $f(x, y) \geq 0$ . 于是二元函数  $z = f(x, y)$  在几何上就表示位于域  $(\sigma)$  上方的曲面  $(S)$  (图 6.3(a)), 它在  $xOy$  坐标平面上的投影就是闭域  $(\sigma)$ . 以  $(\sigma)$  的边界为准线作母线平行于  $z$  轴的柱面, 便得一以  $(\sigma)$  为底、曲面  $(S)$  为顶的曲顶柱体. 现在来说明: 若  $f$  在  $(\sigma)$  上非负, 则二重积分  $\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma$  的值等于以  $(\sigma)$  为底、 $(S)$  为顶的曲顶柱体的体积.

此曲顶柱体的体积在域  $(\sigma)$  上是非均匀分布的量, 其原因在于此柱体的高在变化. 若高不变, 这个平顶柱体的体积在  $(\sigma)$  上是均匀分布的 (图 6.3(b)), 它可以简单地利用乘法: 底面积  $\times$  高得到. 为了利用已知的这个均匀分布的体积公式来求此非均匀分布的体积, 我们可以像本章第一节 1.1 段中那样, 采用“分”“匀”“合”“精”四个步骤来完成.

想一想:

(1) 若在域  $(\sigma)$  上  $f(x, y) \leq 0$ ,

$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma$  的几何意义是什么?

(2) 若在域  $(\sigma)$  上  $f(x, y)$  变号, 怎样用二重积分表示曲面  $z = f(x, y)$  在  $(\sigma)$  上与  $xOy$  平面以及由  $(\sigma)$  边界为准线的柱面所围成的立体体积?

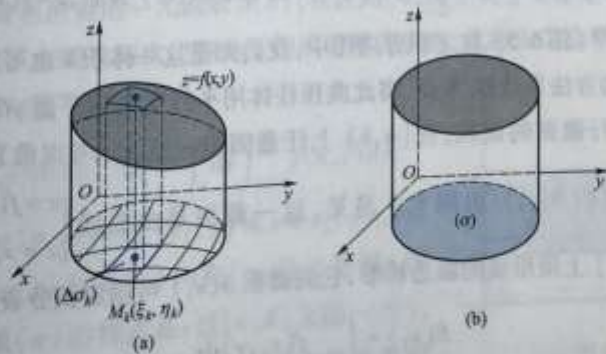


图 6.3



**分** 把区域 $(\sigma)$ 任意划分成 $n$ 个子域 $(\Delta\sigma_k)$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ),  $(\Delta\sigma_k)$ 的面积记为 $\Delta\sigma_k$ . 以每一子域 $(\Delta\sigma_k)$ 的边界为准线, 作母线平行于 $z$ 轴的柱面, 这样, 就把整个曲顶柱体划分成 $n$ 个小曲顶柱体.

**匀** 由于子域 $(\Delta\sigma_k)$ 很小, 以它为底的小曲顶柱体的高变化不大, 可以近似地看作不变, 即看作是 $(\Delta\sigma_k)$ 内任一点 $M_k(\xi_k, \eta_k)$ 处的函数值 $f(\xi_k, \eta_k)$  (图 6.3(a)). 从而这一小曲顶柱体的体积 $\Delta V_k$ 可以近似地表示为

$$\Delta V_k \approx f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k.$$

**合** 把各小曲顶柱体体积的近似值加起来, 就得到整个曲顶柱体体积 $V$ 的近似值

$$V \approx \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k.$$

**精** 令各子域 $(\Delta\sigma_k)$ 直径的最大值 $d \rightarrow 0$ , 取极限便得到体积 $V$ 的精确值

$$V = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k = \iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma.$$

这就说明了二重积分的几何意义.

## 2.2 直角坐标系下二重积分的计算法

下面, 我们利用二重积分的几何意义来讨论它的计算方法. 设 $f \in C((\sigma))$ , 为简单起见, 我们仍假设在 $(\sigma)$ 上 $f(x, y) \geq 0$ . 以下就积分域 $(\sigma)$ 可能出现的三种类型来分别讨论二重积分的计算方法.

(1) 设 $(\sigma) = \{(x, y) | a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$ , 其中 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 均在 $[a, b]$ 上连续. 这一区域 $(\sigma)$ 的特点是: 过 $[a, b]$ 上任一点 $x_1$ , 作与 $y$ 轴平行同向的直线, 与 $(\sigma)$ 的边界至多相交于两点 $(x_1, y_1(x_1))$ 与 $(x_1, y_2(x_1))$  (在区间端点 $a, b$ 处所分别对应的两点可能重合) (图 6.4). 为方便起见, 称这种类型的区域 $(\sigma)$ 为 $x$ 型区域. 由几何意义可知, 二重积分 $\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma$ 的值等于以 $(\sigma)$ 为底,  $z=f(x, y)$ 为顶的曲顶柱体的体积 $V$  (图 6.5). 在定积分应用中, 我们知道这一体积 $V$ 也可用已知平行截面面积求体积的方法来计算. 为此, 将此曲顶柱体用平行于坐标平面 $yOz$ 的平面来切割. 为了求其平行截面的面积, 在 $[a, b]$ 上任意固定一点 $x_1$ , 考虑曲顶柱体与平面 $x=x_1$ 的截面面积 $S(x_1)$ . 由图 6.5 易见, 这一截面是由曲线 $\begin{cases} z=f(x, y), \\ x=x_1 \end{cases}$  在区间 $[y_1(x_1), y_2(x_1)]$ 上所形成的曲边梯形, 它的面积 $S(x_1)$ 可用定积分表示为

$$S(x_1) = \int_{y_1(x_1)}^{y_2(x_1)} f(x_1, y) dy.$$

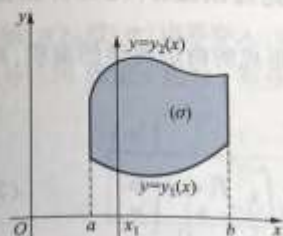


图 6.4

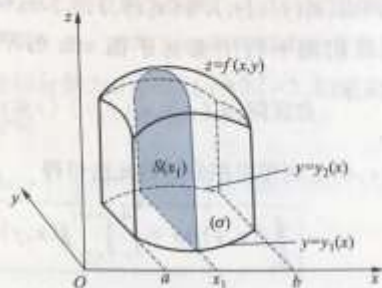


图 6.5

改记  $x_1$  为  $x$ , 并让它在  $a$  与  $b$  之间变动, 这时截面积  $S(x)$  也将随之而变动, 即

$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

值得注意的是, 在求上述积分时,  $x$  应看作是常量, 积分变量是  $y$ . 求得  $S(x)$  之后, 再利用定积分的微元法, 便可得所求曲顶柱体的体积

$$V = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left[ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

另一方面, 根据二重积分的几何意义, 又有

$$V = \iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma.$$

所以

$$V = \iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left[ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx. \quad (2.1)$$

这样一来, 二重积分的计算, 化成了接连两次计算一元函数的定积分: 先固定  $x$ , 把函数  $f(x, y)$  看作是 关于  $y$  的一元函数, 对  $y$  从区域  $(\sigma)$  的边界  $y_1(x)$  至  $y_2(x)$  作定积分; 再将积分后所得的一元函数  $S(x)$ , 在区间  $[a, b]$  上关于  $x$  作定积分. 这样, 就把二重积分化成了由接连两次定积分所构成的累次积分, 或称为二次积分, 也可把其中的方括号去掉写成

$$\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy dx \quad \text{或} \quad \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

(2) 设  $(\sigma) = \{(x, y) | x_1(y) \leq x \leq x_2(y), c \leq y \leq d\}$ , 其中  $x_1(y)$  与  $x_2(y)$  均在  $[c, d]$  上连续 (图 6.6). 这一区域  $(\sigma)$  的特点是: 过  $[c, d]$  上任一点  $y_1$  作与  $x$  轴平行同向的直线, 与域  $(\sigma)$  的边界至多相

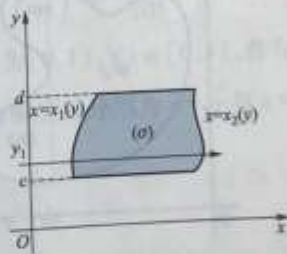


图 6.6

交于两点  $(x_1(y_1), y_1)$  与  $(x_2(y_1), y_1)$ . 这类区域称为  $y$  型区域. 对于这种  $y$  型区域  $(\sigma)$ , 我们用平行于坐标平面  $xOz$  的平面去切割此曲顶柱体. 先计算由曲线  $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=y_1 \end{cases}$  在区间  $[x_1(y_1), x_2(y_1)]$  ( $c \leq y_1 \leq d$ ) 上所形成的曲边梯形的面积, 再在区间  $[c, d]$  上利用定积分的微元法可得

$$\iint_{(\sigma)} f(x,y) d\sigma = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y) dx. \quad (2.2)$$

在这里的累次积分是先固定  $y$  对  $x$  计算由  $x_1(y)$  到  $x_2(y)$  的定积分, 其中  $x_1(y)$  与  $x_2(y)$  分别表示  $(\sigma)$  的左段边界与右段边界上的点对应于  $y$  的横坐标, 然后再将积分后所得的函数对  $y$  在区间  $[c, d]$  上求定积分.

如果积分域  $(\sigma)$  既是  $x$  型区域又是  $y$  型区域, 那么, 由等式 (2.1) 与 (2.2) 可知

$$\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy dx = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y) dx dy. \quad (2.3)$$

(2.3) 式表明: 当  $f(x,y)$  在积分域  $(\sigma)$  上连续时, 累次积分可以交换积分顺序.

注意: 一般来说, 在交换累次积分的积分顺序时, 积分上、下限将随之改变.

(3) 设积分域  $(\sigma)$  既非  $x$  型又非  $y$  型区域 (图 6.7). 这时我们可以把  $(\sigma)$  先分成若干子域, 使每一子域成为  $x$  型区域或  $y$  型区域, 从而每一子域上的二重积分都可通过累次积分算出. 再根据本章第一节 1.3 段中的性质 2, 在域  $(\sigma)$  上的二重积分值就等于这些子域上二重积分值之和.

### 例 2.1 求二重积分

$$I = \iint_{(\sigma)} f(x,y) d\sigma,$$

其中  $f(x,y) = 1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4}$ ,  $(\sigma) = \{(x,y) | -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$  是一矩形域 (图 6.8).

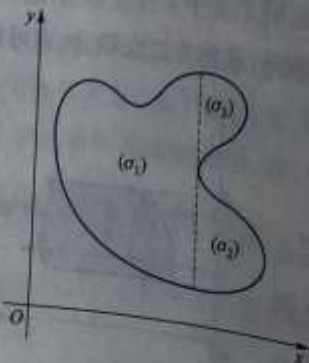


图 6.7

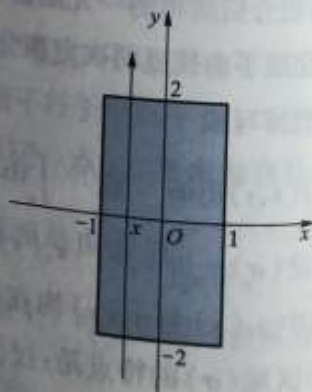


图 6.8



**解法一** 由于 $(\sigma)$ 是一 $x$ 型区域,它在 $x$ 轴上的投影为区间 $[-1,1]$ ,这就是累次积分中对 $x$ 的积分区间.在区间 $[-1,1]$ 上任取一点 $x$ ,作与 $y$ 轴平行同向的直线穿过积分域 $(\sigma)$ ,过 $(\sigma)$ 边界穿入、穿出点的纵坐标分别为 $y=-2$ 与 $y=2$ , $[-2,2]$ 便是对 $y$ 的积分区间.固定 $x$ 先对 $y$ 积分,再对 $x$ 积分得

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{-2}^2 \left( 1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4} \right) dy dx = \int_{-1}^1 \left( y - \frac{xy}{3} - \frac{y^2}{8} \right) \Big|_{-2}^2 dx \\ &= \int_{-1}^1 \left( 4 - \frac{4}{3}x \right) dx = 8. \end{aligned}$$

**解法二** 由于 $(\sigma)$ 也是一 $y$ 型区域,它在 $y$ 轴上的投影为区间 $[-2,2]$ ,在区间 $[-2,2]$ 上任取一点 $y$ ,作与 $x$ 轴平行同向的直线,穿入、穿出 $(\sigma)$ 点的横坐标分别为 $x=-1$ 与 $x=1$ .固定 $y$ 先对 $x$ 积分,再对 $y$ 积分得

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^2 \int_{-1}^1 \left( 1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4} \right) dx dy \\ &= \int_{-2}^2 \left( x - \frac{x^2}{6} - \frac{xy}{4} \right) \Big|_{-1}^1 dy \\ &= \int_{-2}^2 \left( 2 - \frac{y}{2} \right) dy = 8. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

注意:解法一与解法二中的累次积分交换了积分顺序,但是它们对 $x$ 与对 $y$ 的积分上、下限均未发生变化.这种情况仅对矩形域才会出现.

**例 2.2** 计算  $\iint_{(\sigma)} (x^2 + y^2) d\sigma$ , 其中 $(\sigma)$ 为直线 $x=1$ ,  $y=0$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域.

**解法一** 画出积分域 $(\sigma)$ 如图 6.9 所示.将 $(\sigma)$ 视为 $x$ 型区域,它在 $x$ 轴上的投影为 $[0,1]$ . $\forall x \in [0,1]$ ,作与 $y$ 轴平行同向的直线,与 $(\sigma)$ 的下边界和上边界交点的纵坐标分别为 $y=0$ 与 $y=x^2$ .先对 $y$ 后对 $x$ 积分得

$$\begin{aligned} \iint_{(\sigma)} (x^2 + y^2) d\sigma &= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x^2 + y^2) dy \\ &= \int_0^1 \left( x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{x^2} dx = \int_0^1 \left( x^4 + \frac{x^6}{3} \right) dx = \frac{26}{105}. \end{aligned}$$

**解法二** 将 $(\sigma)$ 视为 $y$ 型区域,它在 $y$ 轴上的投影为 $[0,1]$ . $\forall y \in [0,1]$ ,作与 $x$ 轴平行同向的直线,它与 $(\sigma)$ 的左边界和右边界交点的横坐标分别为 $x=\sqrt{y}$ 与 $x=1$ .先对 $x$ 后对 $y$ 积分得

$$\iint_{(\sigma)} (x^2 + y^2) d\sigma = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 (x^2 + y^2) dx$$

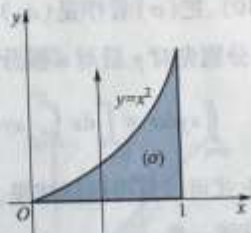


图 6.9

$$= \int_0^1 \left( \frac{1}{3} + y^2 - \frac{1}{3}y^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{3}{2}} \right) dy = \frac{26}{105}.$$

例 2.3 计算  $\iint_{(\sigma)} xy d\sigma$ , 其中  $(\sigma)$  为抛物线  $y^2 = x$  与直线  $y = x - 2$  所围成的区域.

解 画出积分域  $(\sigma)$  如图 6.10 所示. 将  $(\sigma)$  视为  $y$  型区域, 为向  $y$  轴投影, 先求出直线与抛物线的交点, 它们是  $A(4, 2)$  与  $B(1, -1)$ , 于是  $(\sigma)$  在  $y$  轴上的投影为区间  $[-1, 2]$ .  $\forall y \in [-1, 2]$ , 作与  $x$  轴平行同向的直线, 穿入、穿出  $(\sigma)$  边界点的横坐标分别为  $x = y^2$  与  $x = y + 2$ . 于是先对  $x$  后对  $y$  积分得

$$\begin{aligned} \iint_{(\sigma)} xy d\sigma &= \int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{y+2} xy dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 y[(y+2)^2 - y^4] dy = 5 \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

如果将  $(\sigma)$  看成是  $x$  型区域, 它在  $x$  轴的投影为区间  $[0, 4]$ . 由于当  $x \in [0, 1]$  与  $x \in [1, 4]$  时, 与  $y$  轴平行同向的直线穿入  $(\sigma)$  的边界曲线有不同的方程, 故必须用直线  $x = 1$  将  $(\sigma)$  分成两部分 (图 6.10), 把  $(\sigma)$  看作是  $(\sigma_1)$  与  $(\sigma_2)$  两个  $x$  型区域的并. 分别先对  $y$  后对  $x$  积分, 得

$$\iint_{(\sigma)} xy d\sigma = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy dy.$$

由上式可以算得同样结果, 但用这种方法计算显然要麻烦一些.

如果利用对称性就会方便一些. 由于  $(\sigma_1)$  关于  $x$  轴对称, 而被积函数是关于  $y$  的奇函数, 所以  $\iint_{(\sigma_1)} xy d\sigma = 0$ , 于是

$$\begin{aligned} \iint_{(\sigma)} xy d\sigma &= \iint_{(\sigma_2)} xy d\sigma = \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy dy \\ &= 5 \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

例 2.4 计算  $\iint_{(\sigma)} \frac{\sin x}{x} d\sigma$ , 其中  $(\sigma)$  为直线  $y = x$  与抛物线  $y = x^2$  所围成的区域.

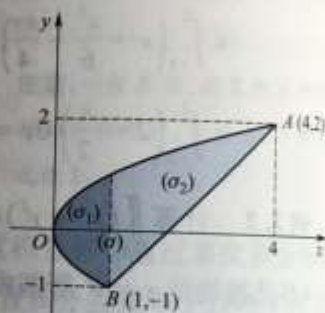


图 6.10



二维码 6.2.2

如何利用对称性简化二重积分的计算.



二维码 6.2.3

关于积分域对称性结论的证明及其应用.

解 画出积分域( $\sigma$ )如图 6.11 所示,先对  $y$  后对  $x$  积分,得

$$\begin{aligned}\iint_{(\sigma)} \frac{\sin x}{x} d\sigma &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x \frac{\sin x}{x} dy \\ &= \int_0^1 \frac{\sin x}{x} (x - x^2) dx = 1 - \sin 1.\end{aligned}$$

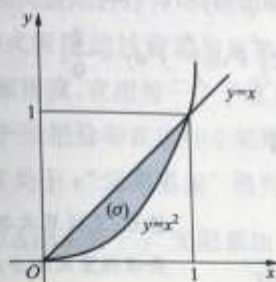


图 6.11

如果先对  $x$  后对  $y$  积分,则有

$$\iint_{(\sigma)} \frac{\sin x}{x} d\sigma = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} \frac{\sin x}{x} dx.$$

由于  $\frac{\sin x}{x}$  的原函数不能用初等函数表示,因而无法继续进行计算.

例 2.5 计算  $\iint_{(\sigma)} (x^2y^2 + xy^3e^{x^2+y^2}) d\sigma$ , 其中( $\sigma$ )为直线  $y=x$ ,  $y=-1$  与  $x=1$  所围成的区域.

解 画出积分域( $\sigma$ )如图 6.12 所示的三角形  $ABC$ . 由于被积函数比较复杂,直接计算是比较费时的,为了利用对称性,作辅助线  $y=-x$ ,将( $\sigma$ )划分为由  $OAB$  所构成的三角形域( $\sigma_1$ )与由  $OBC$  所构成的( $\sigma_2$ ),它们分别关于  $y$  轴和  $x$  轴对称.将所给积分拆开,有

$$\begin{aligned}\iint_{(\sigma)} (x^2y^2 + xy^3e^{x^2+y^2}) d\sigma &= \iint_{(\sigma)} x^2y^2 d\sigma + \iint_{(\sigma)} xy^3e^{x^2+y^2} d\sigma \\ &= \iint_{(\sigma)} x^2y^2 d\sigma + \iint_{(\sigma_1)} xy^3e^{x^2+y^2} d\sigma + \iint_{(\sigma_2)} xy^3e^{x^2+y^2} d\sigma,\end{aligned}$$

由于( $\sigma_1$ )关于  $y$  轴对称,而被积函数  $xy^3e^{x^2+y^2}$  是  $x$  的奇函数,由对称性可知

注:这里被积函数在点  $(0,0)$  无定义,但由于当  $x \rightarrow 0$  时其极限存在,而改变被积函数在个别点的值不影响其积分值,故此时可理解为对此被积函数在点  $(0,0)$  用极限值补充定义后再讨论.

注意:由例 2.3 和例 2.4 可以看到,计算二重积分时,选取适当的积分顺序是一个值得注意的问题.如果积分顺序选取不当,不仅可能引起计算上的麻烦,而且可能导致积分无法算出.

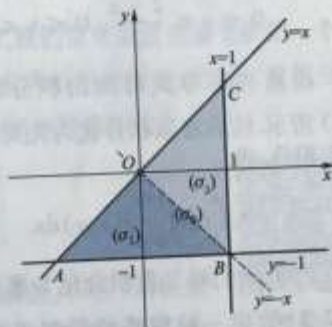


图 6.12



$$\iint_{(\sigma)} xy^3 e^{x^2+y^2} d\sigma = 0;$$

由于 $(\sigma_2)$ 关于 $x$ 轴对称,而被积函数也是 $y$ 的奇函数,所以

$$\iint_{(\sigma)} xy^3 e^{x^2+y^2} d\sigma = 0.$$

再注意到 $x^2y^2$ 关于 $x$ 与 $y$ 都是偶函数,将由 $x$ 轴、 $y$ 轴、 $x=1$ 、 $y=-1$ 所围成的正方形域记作 $(\sigma_0)$ ,于是分别利用关于 $y$ 轴和 $x$ 轴的对称性可知

$$\iint_{(\sigma)} x^2y^2 d\sigma = 2 \iint_{(\sigma_0)} x^2y^2 d\sigma = 2 \int_0^1 x^2 dx \int_{-1}^0 y^2 dy = \frac{2}{9}.$$

综上所述,所求二重积分的值等于 $\frac{2}{9}$ . **I**

### 例 2.6 交换累次积分

$$I = \int_{-2}^0 dx \int_0^{\frac{2+x}{2}} f(x,y) dy + \int_0^2 dx \int_0^{\frac{2-x}{2}} f(x,y) dy$$

的积分顺序.

**解** 首先,由此累次积分来确定(相应二重积分的)积分域 $(\sigma)$ .由所给的上、下限可知, $x,y$ 的变化范围是

$$0 \leq y \leq \frac{2+x}{2}, -2 \leq x \leq 0;$$

$$0 \leq y \leq \frac{2-x}{2}, 0 \leq x \leq 2.$$

由这些不等式可画出积分域 $(\sigma)$ 如图 6.13 所示.然后将原积分化为先对 $x$ 后对 $y$ 的累次积分,得

$$I = \int_0^1 dy \int_{2-2y}^{2-2y} f(x,y) dx. \quad \mathbf{I}$$

下面,我们对二重积分化为累次积分的公式(2.2)给出一种粗略的但却更为形象的解释.在被积函数 $f \in C((\sigma))$ 的条件下,我们用平行于 $x$ 轴和 $y$ 轴的直线,分别对积分域 $(\sigma)$ 进行等距离分割(图 6.14),所得的子域中除了边缘上一些不规则的以外,均为矩形,其面积为 $\Delta\sigma = \Delta x \Delta y$ .在每一小矩形中均取其左下角点 $(x,y)$ 为积分和式中的点,可以证明(从略),当

**注意:**交换累次积分的顺序时,先要根据累次积分的积分限画出相应二重积分的积分域,再根据积分域的特性化为另一顺序的累次积分.

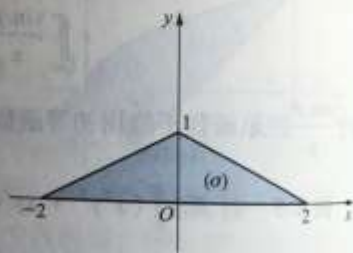


图 6.13

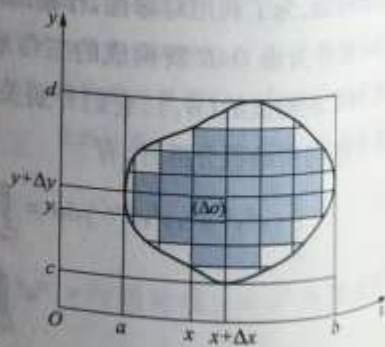


图 6.14

$d \rightarrow 0$  时,全部子域上的和式  $\sum_{(\sigma)} f(x, y) \Delta \sigma$  与仅计算矩形子域上的和式  $\sum_{(\sigma)} f(x, y) \Delta x \Delta y$  的极限值是相等的,即

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{(\sigma)} f(x, y) \Delta \sigma = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{(\sigma)} f(x, y) \Delta x \Delta y.$$

我们把最后的和式极限记作  $\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy$ , 其中  $dx dy$  称为直角坐标的面积微元.

在上述求和式极限的过程中,随着  $d \rightarrow 0$ ,和式的项数将无限地增加.为形象化起见,我们把求和式极限的过程通俗地称为“无限累加”.设想  $f(x, y)$  是分布在区域  $(\sigma)$  上物质的面密度,在把每一个子域上的乘积  $f(x, y) \Delta y \Delta x$  累加时,先关于  $y$  “无限累加”就相当于先把分布在这些小矩形上的质量分别累加成一些平行于  $y$  轴的竖长条的质量;再关于  $x$  “无限累加”相当于把这些竖长条的质量再累加成  $(\sigma)$  上的质量.把  $f(x, y) \Delta y \Delta x$  关于  $y$  “无限累加”得  $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \Delta x$ , 关于  $x$  再“无限累加”即得

$$V = \iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

类似地,如果先关于  $x$  “无限累加”,再关于  $y$  “无限累加”,便得

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

### 2.3 极坐标系下二重积分的计算法

在定积分的计算中,换元法发挥了重要的作用,我们常可通过变量变换把一个难算的定积分化为容易计算的.二重积分的计算中也有类似的换元法,不过二重积分计算中的困难不仅出现在被积函数上,更多地表现在积分域的形状上.

对于二重积分

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{(\sigma)} f(x, y) \Delta \sigma.$$

设被积函数在积分域上连续.若积分域  $(\sigma)$  与被积函数  $f(x, y)$  用极坐标表示更为简便,则应考虑将其化为极坐标系下的二重积分来计算.为此,建立极坐标系,令极点与  $xOy$  直角坐标系的原点重合,  $x$  轴取为极轴.利用直角坐标与极坐标的转换公式

$$x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta \quad (0 \leq \rho < +\infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi), \quad (2.4)$$

把  $(\sigma)$  的边界曲线方程化成极坐标,并将被积函数变换为

$$f(x, y) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta).$$



二维码 6.2.4  
关于二重积分  
极坐标变换的  
补充说明.

为了把面积微元  $d\sigma$  用极坐标表出, 我们用极坐标曲线网

$\rho = \text{常数}, \theta = \text{常数}$   
来划分积分域  $(\sigma)$  (图 6.15). 容易看出, 规则子域  $(\Delta\sigma)$  的面积为

$$\begin{aligned}\Delta\sigma &= \frac{1}{2}[(\rho + \Delta\rho)^2\Delta\theta - \rho^2\Delta\theta] \\ &= \rho\Delta\rho\Delta\theta + \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\Delta\theta.\end{aligned}$$

当  $\Delta\rho$  与  $\Delta\theta$  均充分小时, 略去高阶项

$$\frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\Delta\theta, \text{ 得}$$

$$\Delta\sigma \approx \rho\Delta\rho\Delta\theta.$$

从而

$$\lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \sum_{(\sigma)} f(x, y) \Delta\sigma = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \sum_{(\sigma)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \Delta\rho \Delta\theta,$$

即

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \iint_{(\sigma)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta. \quad (2.5)$$

可见在极坐标系下的面积微元为

$$d\sigma = \rho d\rho d\theta,$$

而 (2.5) 式右端的积分就是极坐标系下的二重积分, 其中  $(\sigma)$  的边界曲线由极坐标方程给出.

为了把极坐标系下的二重积分  $\iint_{(\sigma)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$  化成累次积分, 我们应用“无限累加”的思想. 由图 6.15 可见, 当我们用射线  $\theta = C$  切割区域  $(\sigma)$  时, 开始于  $\theta = \alpha$ , 终止于  $\theta = \beta$ , 而当  $\theta \in [\alpha, \beta]$  时,  $(\sigma)$  的边界曲线被分成了关于  $\rho$  的两个单值支  $\widehat{P_1 M_1 P_2}$  与  $\widehat{P_1 M_2 P_2}$ , 其方程分别记为  $\rho = \rho_1(\theta)$  与  $\rho = \rho_2(\theta)$  ( $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ).  $[\alpha, \beta]$  就是  $\theta$  的变化区间,  $\forall \theta \in (\alpha, \beta)$ , 作从坐标原点出发的射线, 穿入、穿出  $(\sigma)$  边界点的  $\rho$  坐标分别为  $\rho_1(\theta), \rho_2(\theta)$ . 于是  $[\rho_1(\theta), \rho_2(\theta)]$  便是  $\rho$  的变化区间. 我们对子域  $(\Delta\sigma)$  上的乘积  $f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \Delta\rho \Delta\theta$  “无限累加”时, 先关于  $\rho$  无限累加成一些扇形状长条得  $\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \Delta\theta$ , 然后

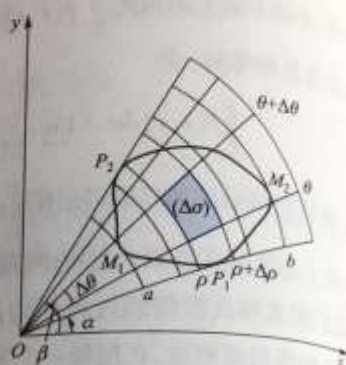


图 6.15

注意: 将直角坐标系下的二重积分化为极坐标计算时要注意三点:

1. 将积分域的边界曲线用极坐标表示;
2. 将被积函数变换为极坐标形式;
3. 将积分微元转换成极坐标式, 即

$$d\sigma = \rho d\rho d\theta.$$



再关于  $\theta$  在  $[\alpha, \beta]$  上无限累加, 使得

$$\begin{aligned} \iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma &= \iint_{(\sigma)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho. \end{aligned} \quad (2.6)$$

当用同心圆  $\rho = C$  切割  $(\sigma)$  时, 开始于  $\rho = a$ , 终止于  $\rho = b$  (图 6.15).  $[a, b]$  就是对  $\rho$  的变化区间. 这时,  $(\sigma)$  的边界曲线被分成关于  $\theta$  的两个单值支  $\widehat{M_1 P_1 M_2}$  与  $\widehat{M_1 P_2 M_2}$ , 分别记为  $\theta = \theta_1(\rho)$  与  $\theta = \theta_2(\rho)$ .  $\forall \rho \in (a, b)$ , 用以原点为圆心,  $\rho$  为半径的圆周逆时针方向穿过  $(\sigma)$ , 穿入、穿出  $(\sigma)$  边界点的  $\theta$  坐标分别为  $\theta_1(\rho)$  与  $\theta_2(\rho)$ . 于是  $[\theta_1(\rho), \theta_2(\rho)]$  便是  $\theta$  的变化区间. 对子域  $(\Delta\sigma)$  上的乘积先关于  $\theta$  “无限累加”, 再关于  $\rho$  “无限累加”, 得

$$\begin{aligned} \iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma &= \iint_{(\sigma)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_a^b d\rho \int_{\theta_1(\rho)}^{\theta_2(\rho)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\theta. \end{aligned} \quad (2.7)$$

**例 2.7** 计算  $I = \iint_{(\sigma)} (x^2 + y^2) d\sigma$ , 其中  $(\sigma)$  为不等式  $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$  所确定的区域 (图 6.16).

**解** 把  $(\sigma)$  用极坐标表示为  $a \leq \rho \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ , 将被积式化为极坐标形式, 根据上述定限方法容易得到

$$I = \iint_{(\sigma)} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2} (b^4 - a^4). \quad \blacksquare$$

读者不难看出, 如果用直角坐标来计算上例中的积分  $I$ , 将要麻烦得多.

**例 2.8** 计算由不等式

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2 \text{ 与 } x^2 + y^2 \leq 2ay$$

所确定的立体的体积.

**解** 这两个不等式表示位于球面及柱面内公共部分的立体, 其图形在  $xOy$  平面上方的部分如图 6.17 所示. 由对称性可知, 所求立体的体积是它在第一卦限中那部分体积的四倍. 第一卦限内的这个



二维码 6.2.5

极坐标下二重积分化为累次积分公式的导出.



二维码 6.2.6

在极坐标系下如何将二重积分化为累次积分.

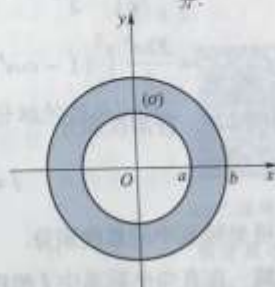


图 6.16

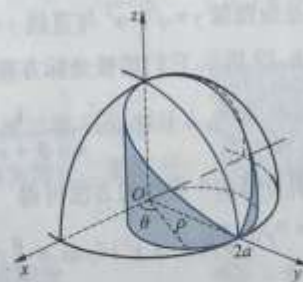


图 6.17

立体是以球面  $z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$  为顶, 以  $xOy$  平面上的半圆域  $(\sigma) = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2ay, x \geq 0\}$  为底的曲顶柱体, 把域  $(\sigma)$  用极坐标表示为

$$\{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq 2a \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

(图 6.18). 应用公式 (2.5) 得所求立体的体积为

$$\begin{aligned} V &= 4 \iint_{(\sigma)} \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} d\sigma \\ &= 4 \iint_{(\sigma)} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \rho d\rho d\theta. \end{aligned}$$

为将它化为先对  $\rho$  后对  $\theta$  积分的累次积分, 用射线  $\theta = c$  (常数) 切割域  $(\sigma)$  (图 6.18), 由  $\theta = 0$  到  $\theta = \frac{\pi}{2}$  切割完毕, 对  $[0, \frac{\pi}{2}]$  的每一确定的  $\theta$  值,  $\rho$  的变化由  $\rho = 0$  到  $\rho = 2a \sin \theta$ , 所以有

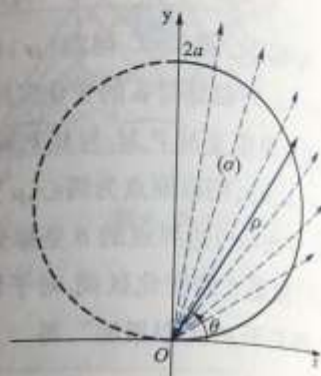


图 6.18

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \sin \theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \rho d\rho \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ -\frac{1}{3} (4a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{2a \sin \theta} d\theta \\ &= \frac{32a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \theta) d\theta = \frac{16}{9} a^3 (3\pi - 4). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 例 2.9 将累次积分

$$I = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x^2 + y^2) dy$$

化成极坐标系中的累次积分.

解 在直角坐标系中  $I$  的积分域为

$$(\sigma) = \{(x, y) | 1 - x \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}, 0 \leq x \leq 1\},$$

它是由圆弧  $y = \sqrt{1 - x^2}$  与直线  $y = 1 - x$  所围成, 如图 6.19 所示. 它们的极坐标方程分别为

$$\rho = 1 \text{ 与 } \rho = \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}.$$

应用与例 2.8 类似的方法可得

$$\begin{aligned} I &= \iint_{(\sigma)} f(x^2 + y^2) dy dx = \iint_{(\sigma)} f(\rho^2) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}}^1 f(\rho^2) \rho d\rho. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

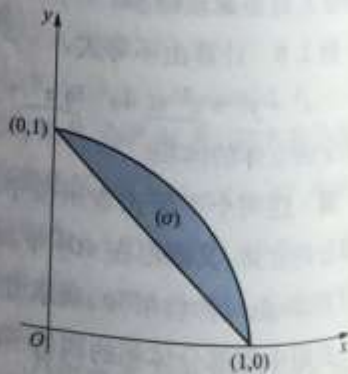


图 6.19

**例 2.10** 计算  $\iint_{(\sigma)} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma$ , 其中  $(\sigma)$  为圆域  $x^2 + y^2 \leq R^2$ .

**解** 采用极坐标, 则积分域

$$(\sigma) = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_{(\sigma)} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma &= \iint_{(\sigma)} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R e^{-\rho^2} \rho d\rho \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - e^{-\rho^2}) d\theta = (1 - e^{-R^2}) \pi. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

读者容易看出, 由于  $\int e^{-x^2} dx$  不能用初等函数表示, 故在  $xOy$  直角坐标系下, 这个二重积分是无法求出的.

**例 2.11** 计算  $\iint_{(\sigma)} x^2 d\sigma$ , 其中  $(\sigma)$  是由圆周  $x^2 + y^2 = R^2$  与直线  $y = -x$  所围成的右上半圆域  $(\sigma)$  (图 6.20).

**解** 本题可以直接化为极坐标计算, 但运算稍显复杂, 注意到积分域  $(\sigma)$  关于  $x$  与  $y$  具有轮换对称性, 即关于直线  $y = x$  对称, 于是

$$\iint_{(\sigma)} x^2 d\sigma = \iint_{(\sigma)} y^2 d\sigma = \frac{1}{2} \iint_{(\sigma)} (x^2 + y^2) d\sigma.$$

又由于被积函数  $x^2 + y^2$  关于  $x$  和  $y$  都是偶函数, 由积分域的部分对称性可知

$$\iint_{(\sigma)} (x^2 + y^2) d\sigma = 2 \iint_{(\sigma_0)} (x^2 + y^2) d\sigma,$$

其中  $(\sigma_0)$  是圆  $x^2 + y^2 \leq R^2$  在第一象限部分, 于是

$$\iint_{(\sigma)} x^2 d\sigma = \iint_{(\sigma_0)} (x^2 + y^2) d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R \rho^2 \rho d\rho d\theta = \frac{1}{8} \pi R^4. \quad \blacksquare$$

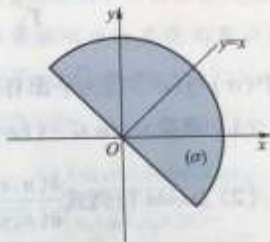


图 6.20



二维码 6.2.7  
积分域边界曲线由参数方程给出时二重积分的计算法.

## 2.4 曲线坐标下二重积分的计算法

在 2.3 段中我们看到, 运用极坐标变换有时可使二重积分的计算简化. 但是, 极坐标只是一种特殊的坐标变换, 有时为简化二重积分的计算, 需要使用其他形式的坐标变换.

**例 2.12** 在如图 6.21 所示的区域  $(\sigma)$  上计算重积分

$$\iint_{(\sigma)} (y - x) d\sigma.$$



二维码 6.2.8  
利用二重积分证明不等式举例.



由图可见,无论将 $(\sigma)$ 作为 $x$ 或 $y$ 型区域都需要把 $(\sigma)$ 分成三个子域来计算,颇为麻烦,而且此积分域 $(\sigma)$ 也不宜于化为极坐标.

下面,我们来介绍在一般形式的坐标变换下计算二重积分 $\iint_{(\sigma)} f(x,y) d\sigma$  (其中 $f$ 在 $(\sigma)$ 上连续)的方法,也就是二重积分的一般换元法.

作变换

$$T: \begin{cases} u = u(x,y), & (x,y) \in (\sigma), \\ v = v(x,y), & (u,v) \in (\sigma'), \end{cases}$$

其中 $(\sigma)$ 与 $(\sigma')$ 均为平面有界区域.若以下三个条件满足

(1) 函数 $u, v \in C^{(1)}((\sigma))$ ;

(2) Jacobi 行列式 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \neq 0, \forall (x,y) \in (\sigma)$ ;

(3) 此变换将 $xOy$ 直角坐标平面中的域 $(\sigma)$ ——对应地映射为 $uOv$ 直角坐标平面中的 $(\sigma')$  (图 6.22),

则称变换 $T$ 为一正则变换.可以证明 (从略),在正则变换 $T$ 下,存在唯一的逆变换

$$T^{-1}: \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \end{cases} \quad (u,v) \in (\sigma'),$$

它将 $(\sigma')$ 变为 $(\sigma)$ ,也是正则的,而且保持将 $(\sigma')$ 的内部变为 $(\sigma)$ 的内部,外部变为外部,边界变为边界.

现在,对于二重积分 $\iint_{(\sigma)} f(x,y) d\sigma$ ,我们用变换 $T$ 将 $xOy$ 直角坐标平面中的积分域 $(\sigma)$ 映射为 $uOv$ 直角坐标平面中的域 $(\sigma')$ .为了计算变换到 $uOv$ 平面中 $(\sigma')$ 上的二重积分,我们用坐标线 $u=c_1, v=c_2$ 来划分区域 $(\sigma')$ ,其中 $c_1$ 与 $c_2$ 均为常数.显然,在 $uOv$ 直角坐标平面上,子域 $(\Delta\sigma')$ 的面积 $\Delta\sigma' = \Delta u \cdot \Delta v$ . (图 6.23(a)) 为了建立二重积分在这两个直角坐标系下的关系,我们利用 $T$ 的逆变换 $T^{-1}$ 把 $(\Delta\sigma')$ 变回 $xOy$ 平面 (图 6.23(b)).

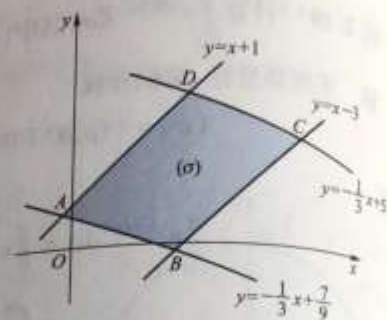


图 6.21

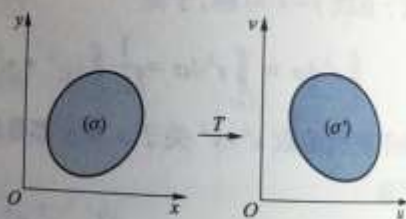


图 6.22

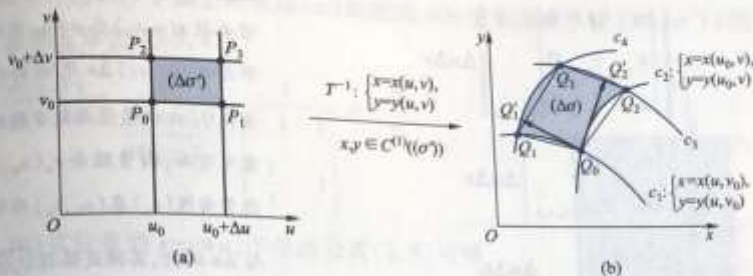


图 6.23

由逆变换  $T^{-1}$  的表达式可见,  $T^{-1}$  将直线  $v=v_0$  映射为  $xOy$  平面上的曲线  $c_1: \begin{cases} x=x(u, v_0), \\ y=y(u, v_0) \end{cases}$  写成向量形式为  $\mathbf{r}=(x(u, v_0), y(u, v_0))=\mathbf{r}(u, v_0)$ ; 将  $uOv$  平面上的直线  $v=v_0+\Delta v$  映射为曲线

$$c_3: \begin{cases} x=x(u, v_0+\Delta v), \\ y=y(u, v_0+\Delta v), \end{cases} \text{ 或 } \mathbf{r}=\mathbf{r}(u, v_0+\Delta v).$$

同理, 直线  $u=u_0$  与  $u=u_0+\Delta u$ , 将分别被映射为  $c_2: \mathbf{r}=\mathbf{r}(u_0, v)$  与  $c_4: \mathbf{r}=\mathbf{r}(u_0+\Delta u, v)$ .

于是  $uOv$  平面上的子域  $(\Delta\sigma')$  将被  $T^{-1}$  映射为  $xOy$  平面上以  $Q_0, Q_1, Q_3, Q_2$  为顶点的曲边四边形域  $(\Delta\sigma)$  (图 6.23(b)). 由于  $\Delta u$  与  $\Delta v$  很小, 所以  $(\Delta\sigma)$  的面积  $\Delta\sigma$  可近似地看作是由直线段  $\overline{Q_0Q_1}, \overline{Q_1Q_3}, \overline{Q_3Q_2}, \overline{Q_2Q_0}$  所围成的平行四边形面积, 即

$$\Delta\sigma \approx \|\overrightarrow{Q_0Q_1} \times \overrightarrow{Q_0Q_2}\|.$$

注意到向量

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Q_0Q_1} &= \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \\ &= \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \Delta u + o(\Delta u), \\ \overrightarrow{Q_0Q_2} &= \mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \\ &= \mathbf{r}_v(u_0, v_0) \Delta v + o(\Delta v), \end{aligned}$$

取其线性主部, 于是

$$\Delta\sigma = \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|_{(u_0, v_0)} \cdot \Delta u \Delta v$$

注意: 之所以  $(\Delta\sigma)$  可以近似地看成是所述的平行四边形, 是因为容易证明舍去高阶无穷小后,

$$\overrightarrow{Q_0Q_1} = \overrightarrow{Q_0Q_1'}, \text{ 事实上,}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Q_0Q_1} &= \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \\ &= \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \Delta u + o(\Delta u), \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{Q_0Q_1'} = \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) -$$

$$\mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v)$$

$$= \mathbf{r}_u(u_0, v_0 + \Delta v) \Delta u + o(\Delta u),$$

由于变换  $T^{-1}$  的表达式中函数  $x,$

$y \in C^{(1)}((\sigma'))$ , 故  $\mathbf{r}_u(u_0, v_0 + \Delta v)$

在  $(u_0, v_0)$  连续, 于是

$$\overrightarrow{Q_0Q_1'} = (\mathbf{r}_u(u_0, v_0) + o(\Delta v)) \Delta u +$$

$$o(\Delta u)$$

$$= \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \Delta u + o(\rho),$$

其中  $\rho = \sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}$ , 可见舍

去  $\rho$  的高阶无穷小后有

$$\overrightarrow{Q_0Q_1} = \overrightarrow{Q_0Q_1'}.$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & 0 \\ x_v & y_v & 0 \end{vmatrix} \right\|_{(u_0, v_0)} \Delta u \Delta v \\
 &= \left\| \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right\|_{(u_0, v_0)} \Delta u \Delta v \\
 &= \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_{(u_0, v_0)} \Delta u \Delta v.
 \end{aligned}$$

由于  $(u_0, v_0)$  是  $(\sigma)$  中的任一点, 故可将下标省去, 所以

$$d\sigma = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| d\sigma', \quad (2.8)$$

其中  $d\sigma' = du dv$  是  $uOv$  直角坐标平面上的面积微元. (2.8) 式表明, 映射  $T$  将  $xOy$  平面上的面积微元  $d\sigma$  映射成  $uOv$  平面上的面积微元  $d\sigma'$ , 使面积产生了伸缩, 伸缩系数为  $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$ . 于是, 在映射  $T$  的作用下,  $xOy$  坐标系下的二重积分与  $uOv$  坐标系下二重积分之间的关系为

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \iint_{(\sigma')} f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| d\sigma'. \quad (2.9)$$

对于  $uOv$  直角坐标系下由 (2.9) 右端所表示的二重积分应用公式 (2.2) 或 (2.3), 便可将其化为对变量  $u$  与  $v$  的累次积分.

应当指出, 如果 Jacobi 行列式  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$  在域  $(\sigma')$  上的个别点或一条曲线上为零, 而在其他点上不为零, 那么公式 (2.9) 仍然成立.

现在, 我们利用公式 (2.9) 来计算例 2.12 中的二重积分  $\iint_{(\sigma)} (y-x) d\sigma$ , 其中  $(\sigma)$  如图 6.21 所示.

解 注意到  $(\sigma)$  的边界是由直线族  $y-x=c_1$  中的两条平行直线 (对应于  $c_1=1$  与  $c_1=-3$ ) 以及直线族  $y+\frac{1}{3}x=c_2$  中的两条平行直线 (对应于  $c_2=\frac{7}{9}$  与  $c_2=5$ ) 所围成, 这就启发我们去作变换

$$u = y - x, \quad v = y + \frac{1}{3}x, \quad (2.10)$$

注意: 这里实际上是用一元向量值函数  $r(u, v)$  在  $u=u_0$  处的向量微分  $r_u(u_0, v_0) \Delta u$  近似替代了向量  $\overrightarrow{Q_0 Q_1}$ . 由向量值函数导数的几何意义可知, 向量微分  $r_u(u_0, v_0) \Delta u$  位于曲线  $(c_1)$  在  $(u_0, v_0)$  的切线上与  $\Delta u$  同向, 其模是弧段  $\widehat{Q_0 Q_1}$  在点  $Q_0$  处的弧微分, 也就是  $\widehat{Q_0 Q_1}$  的线性主部 (不难证明它也是弧长  $Q_0 Q_1$  的线性主部), 于是微分向量  $r_u(u_0, v_0) \Delta u$  就是切向量  $\overrightarrow{Q_0 Q_1}$ . 可见, 从几何上看, 我们是用切线上的向量  $\overrightarrow{Q_0 Q_1}$  与  $\overrightarrow{Q_0 Q_2}$  所构成的平行四边形的面积作为  $(\Delta\sigma)$  面积的近似值, 即

$$\Delta\sigma \approx \|\overrightarrow{Q_0 Q_1} \times \overrightarrow{Q_0 Q_2}\|$$



变换(2.10)将  $xOy$  平面上的区域  $(\sigma)$  映射成  $uOv$  直角坐标平面上的  $(\sigma')$  (图 6.24). 由于(见第五章公式(5.47))

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{3}{4},$$

由(2.10)式注意到  $y-x=u$ , 于是由公式(2.9)可得

$$\begin{aligned} I &= \iint_{(\sigma)} (y-x) d\sigma = \iint_{(\sigma')} u \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv \\ &= \frac{3}{4} \iint_{(\sigma')} u du dv = \frac{3}{4} \int_{\frac{7}{9}}^5 dv \int_{-3}^1 u du = -\frac{38}{3}. \end{aligned}$$

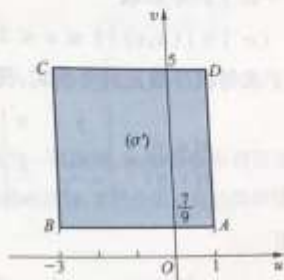


图 6.24

值得指出,由于变换(2.10)在  $xOy$  平面上的几何意义比较明显,我们也可以直接在  $xOy$  平面上利用“无限累加”的思想通过变换把二重积分化为累次积分,而不必把域  $(\sigma)$  映射到  $uOv$  直角坐标平面上去计算.这时,利用  $u=y-x=c_1$ ,  $v=y+\frac{1}{3}x=c_2$  分割域  $(\sigma)$ ,就是用与  $(\sigma)$  边界直线相平行的直线族分割  $(\sigma)$ .由公式(2.8)可知,面积微元

$$d\sigma = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv = \frac{3}{4} du dv,$$

从而,在  $xOy$  平面上有

$$\iint_{(\sigma)} (y-x) d\sigma = \iint_{(\sigma)} u \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv = \frac{3}{4} \iint_{(\sigma)} u du dv.$$

在  $(\sigma)$  上“无限累加”乘积项  $u du dv$  时,先沿  $u$  增加方向累加,再沿  $v$  增加方向累加,由图 6.24 直接可得

$$I = \frac{3}{4} \iint_{(\sigma)} u du dv = \frac{3}{4} \int_{\frac{7}{9}}^5 dv \int_{-3}^1 u du = -\frac{38}{3}.$$

事实上,在 2.3 段中对于极坐标换元法,我们所采用的主要方法就是把二重积分在  $xOy$  平面上通过变换化成极坐标的累次积分去计算的.

**例 2.13** 计算  $\iint_{(\sigma)} \sqrt{xy} d\sigma$ , 其中  $(\sigma)$  为由曲线  $xy=1$ ,  $xy=2$ ,  $y=x$ ,  $y=4x$  ( $x>0, y>0$ ) 所围成的区域.

**解** 由图 6.25 可见,如果我们用直角坐标直接计算此积分,必须将积分域  $(\sigma)$  分成三个子域来进行,比较麻烦.为了使所给积分容易计算,我们采用曲线坐标变换:

$$u = xy, \quad v = \frac{y}{x}. \quad (2.11)$$

在此变换下 $(\sigma)$ 的边界曲线映射成 $uOv$ 直角坐标平面上的矩形域

$$(\sigma') = \{(u, v) \mid 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 4\},$$

为了求得积分微元的变换式,我们求出

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{y}{x} & \frac{x}{y} \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 2 \frac{y}{x},$$

从而

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = \frac{1}{2v}.$$

于是,由(2.9)式得

$$\iint_{(\sigma)} \sqrt{xy} d\sigma = \iint_{(\sigma')} \sqrt{u} \frac{1}{2v} du dv = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{v} dv \int_1^2 \sqrt{u} du = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1) \ln 2. \quad |$$

**例 2.14** 计算  $I = \iint_{(\sigma)} x^2 d\sigma$ , 其中 $(\sigma)$ 为椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  的内部.

**解** 由于积分域是椭圆,如果采用极坐标变换,积分域的边界曲线方程变得比较复杂,使积分难以计算.为简化积分域的边界曲线方程,我们运用曲线坐标变换

$$\frac{x^2}{4} = \rho^2 \cos^2 \theta, \quad \frac{y^2}{9} = \rho^2 \sin^2 \theta,$$

即

$$x = 2\rho \cos \theta, \quad y = 3\rho \sin \theta \quad (0 \leq \rho < +\infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi). \quad (2.12)$$

此变换的逆变换将 $xOy$ 平面上所给的椭圆映射成 $\theta O\rho$ 直角坐标平面上的矩形域 $(\sigma') = \{(\theta, \rho) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1\}$ . 由于

$$d\sigma = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \rho)} \right| d\rho d\theta = 6\rho d\rho d\theta,$$

从而

$$I = \iint_{(\sigma')} 4\rho^2 \cos^2 \theta \cdot 6\rho d\rho d\theta = 24 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = 6 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = 6\pi. \quad |$$

形如例 2.12 中所用的变换

$$x = a\rho \cos \theta, \quad y = b\rho \sin \theta \quad (0 \leq \rho < +\infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

称为广义极坐标变换. 容易看出,在此变换下,面积微元  $d\sigma = ab\rho d\rho d\theta$ .

当  $a=b=1$  时,广义极坐标变换就是极坐标变换. 这时通过 Jacobi 行列式算得的

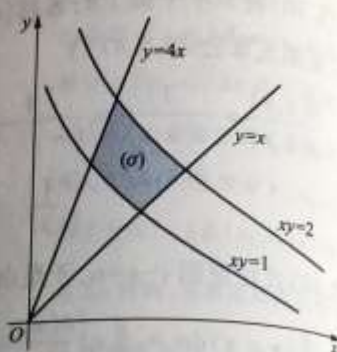


图 6.25

面积微元就是  $d\sigma = \rho d\rho d\theta$ , 与 2.3 段中所得一致.

## 习题 6.2

### (A)

1. 设有一母线平行于  $z$  轴的柱体, 它与  $xOy$  平面的交线为一闭曲线, 此闭曲线所围区域为  $(\sigma)$ , 柱体的顶部和底部分别由曲面  $z=f_2(x, y)$  与  $z=f_1(x, y)$  构成. 试用二重积分表示此柱体的体积.
2. 试用二重积分的几何意义说明:

(1)  $\iint_{(\sigma)} k d\sigma = k\sigma, k \in \mathbf{R}$ , 为常数,  $\sigma$  表示区域  $(\sigma)$  的面积;

(2)  $\iint_{(\sigma)} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma = \frac{2}{3} \pi R^3, (\sigma)$  是以原点为中心, 半径为  $R$  的圆;

(3) 若积分域关于  $y$  轴对称, 则

i) 当  $f(x, y)$  是  $x$  的奇函数时, 二重积分  $\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = 0$ ,

ii) 当  $f(x, y)$  是  $x$  的偶函数时, 有

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{(\sigma_1)} f(x, y) d\sigma,$$

其中  $(\sigma_1)$  为  $(\sigma)$  在右半平面  $x \geq 0$  中的部分区域;

(4) 若积分域关于  $x$  轴对称, 被积函数  $f(x, y)$  分别具有怎样的对称性时有

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = 0, \quad \iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{(\sigma_1)} f(x, y) d\sigma,$$

其中  $(\sigma_1)$  为  $(\sigma)$  在上半平面  $y \geq 0$  中的部分区域.

3. 计算下列二重积分:

(1)  $\iint_{(\sigma)} x^2 y d\sigma, (\sigma)$  是由  $x = 0, y = 1$  与  $x = \sqrt{y}$  所围成的区域;

(2)  $\iint_{(\sigma)} \frac{x^2}{y^2} d\sigma, (\sigma)$  是由  $xy = 1, y = x$  与  $x = 2$  所围成的区域;

(3)  $\iint_{(\sigma)} xy d\sigma, (\sigma) = \{(x, y) | 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ ;

(4)  $\iint_{(\sigma)} (x + y)^2 d\sigma, (\sigma)$  是由  $|x| + |y| = 1$  所围成的区域;

(5)  $\iint_{(\sigma)} \frac{x}{y} \sqrt{1 - \sin^2 y} d\sigma, (\sigma) = \{(x, y) | -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{3y}, \frac{\pi}{2} \leq y \leq 2\pi\}$ ;

(6)  $\iint_{(\sigma)} e^{-y} d\sigma, (\sigma) = \{(x, y) | 0 \leq x \leq y \leq 1\}$ ;

(7)  $\iint_{(\sigma)} (y + xf(x^2 + y^2)) d\sigma, (\sigma)$  是由  $y = x^2$  和  $y = 1$  所围成的区域;

(8)  $\iint_{(\sigma)} (x^2 + y^2) d\sigma, (\sigma)$  是正方形区域:  $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ ;



(9)  $\iint_{(\sigma)} (x \sin y + y \cos x) d\sigma$ ,  $(\sigma)$  是以  $(1, 1)$ ,  $(-1, 1)$  和  $(-1, -1)$  为顶点的三角形区域;

(10)  $\iint_{(\sigma)} x \ln(y + \sqrt{1+y^2}) d\sigma$ ,  $(\sigma)$  是由  $y = 4 - x^2$ ,  $y = -3x$  和  $x = 1$  所围成的区域.

4. 把二重积分  $I = \iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma$  在直角坐标系中分别以两种不同的次序化为累次积分, 其中

$(\sigma)$  为

(1)  $\{(x, y) \mid y^2 \leq x, x+y \leq 2\}$ ;

(2)  $x = \sqrt{y}, y = x-1, y=0$  与  $y=1$  所围成的区域

5. 交换下列累次积分的顺序:

(1)  $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{x+1} f(x, y) dy$ ;

(2)  $\int_0^2 dx \int_x^1 f(x, y) dy$ ;

(3)  $\int_0^2 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_2^6 dx \int_{\sqrt{x-2}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy$ ;

(4)  $\int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx$ .

6. 利用极坐标计算下列二重积分:

(1)  $\iint_{(\sigma)} e^{x^2+y^2} d\sigma$ ,  $(\sigma) = \{(x, y) \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$ , 其中  $a > 0, b > 0$ ;

(2)  $\iint_{(\sigma)} \sqrt{x^2+y^2} d\sigma$ ,  $(\sigma) = \{(x, y) \mid 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ ;

(3)  $\iint_{(\sigma)} (x+y)^2 d\sigma$ ,  $(\sigma) = \{(x, y) \mid (x^2+y^2)^2 \leq 2a(x^2-y^2), a > 0\}$ ;

(4)  $\iint_{(\sigma)} \arctan \frac{y}{x} d\sigma$ ,  $(\sigma)$  为圆域  $x^2 + y^2 \leq 1$  在第一象限部分;

(5)  $\iint_{(\sigma)} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma$ ,  $(\sigma)$  为圆域  $x^2 + y^2 \leq Rx$  在第一象限部分;

(6)  $\iint_{(\sigma)} (x+y)^2 d\sigma$ ,  $(\sigma)$  是圆域  $x^2 + y^2 \leq a^2$ .

7. 把下列累次积分化为极坐标的累次积分, 并计算其值:

(1)  $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} (x^2+y^2) dy$ ;

(2)  $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{-3/2} dy$ ;

(3)  $\int_1^2 dy \int_0^y \frac{x \sqrt{x^2+y^2}}{y} dx$ .

8. 求下列各组曲线所围成平面图形的面积:

(1)  $xy = a^2, x+y = \frac{5}{2}a$  ( $a > 0$ );

(2)  $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2), x^2+y^2 = a^2$  ( $x^2+y^2 \geq a^2, a > 0$ );

(3)  $\rho = a(1 + \sin \theta)$  ( $a \geq 0$ ).

9. 求下列各组曲面所围成立体的体积:

(1)  $z = x^2 + y^2, x+y=4, x=0, y=0, z=0$ ;

(3)  $x^2+y^2 = a^2, y^2+z^2 = a^2$  ( $a > 0$ ).

(2)  $z = \sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2 = 2ax$  ( $a > 0$ ),  $z=0$ ;

10. 一金属叶片形如心脏线  $\rho = a(1 + \cos \theta)$ , 如果它在任一点的密度与原点该点的距离成正比, 求它的全部质量.

11. 以半径为 4 cm 的铜球的直径为中心轴, 钻通一个半径为 1 cm 的圆孔, 问损失掉的铜的体积是多少?

12. 在一个形状为旋转抛物面  $z = x^2 + y^2$  的容器中, 盛有  $8\pi \text{ cm}^3$  的水, 今再灌入  $120\pi \text{ cm}^3$  的水, 问液面将升高多少?

13. 利用适当的变换计算下列二重积分:

(1)  $\iint_{(\sigma)} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} d\sigma, (\sigma) = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$ , 其中  $a > 0, b > 0$ ;

(2)  $\iint_{(\sigma)} e^{x+y} d\sigma, (\sigma)$  是以  $(0, 0), (1, 0)$  和  $(0, 1)$  为顶点的三角形内部;

(3)  $\iint_{(\sigma)} xy d\sigma, (\sigma)$  由曲线  $xy = 1, xy = 2, y = x, y = 4x (x > 0, y > 0)$  所围成.

14. 求下列曲线所围成的平面图形的面积:

(1)  $(x-y)^2 + x^2 = a^2 (a > 0)$ ;

(2)  $x+y=a, x+y=b, y=\alpha x, y=\beta x (0 < \alpha < b, 0 < \alpha < \beta)$ ;

(3)  $xy=a^2, xy=2a^2, y=x, y=2x (x > 0, y > 0)$ ;

(4)  $y^2=2px, y^2=2qx, x^2=2ry, x^2=2sy (0 < p < q, 0 < r < s)$ .

(B)

1. 计算下列二重积分:

(1)  $\iint_{(\sigma)} \sqrt{|y-x^2|} d\sigma, (\sigma) = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ ;

(2)  $\iint_{(\sigma)} (x+y) d\sigma, (\sigma) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq x+y\}$ ;

(3)  $\iint_{(\sigma)} y^2 d\sigma, (\sigma)$  是  $x$  轴与摆线的一拱  $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0)$  所围成的区域.

2. 计算累次积分

$$\int_{1/4}^{1/2} dy \int_{1/2}^y e^{xy} dx + \int_{1/2}^1 dy \int_y^1 e^{xy} dx.$$

3. 设  $f(x, y) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} F(t) = \iint_{x+y \leq t} f(x, y) d\sigma$ , 求  $F(t)$ .

4. 计算  $\iint_{(\sigma)} x[1 + yf(x^2 + y^2)] d\sigma$ , 其中  $(\sigma)$  是由  $y=x^2, y=1, x=-1$  所围成的区域,  $f(x^2 + y^2)$  是  $(\sigma)$  上的连续函数.

5. 设函数  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上连续, 并设  $\int_0^1 f(x) dx = A$ , 求  $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy$ .

6. 证明 Dirichlet 公式  $\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx (a > 0)$ , 并由此证明  $\int_0^a dy \int_0^y f(x) dx =$

$\int_0^a (a-x)f(x) dx$ , 其中  $f$  连续.

7. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 试利用二重积分证明:

$$\left[ \int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx.$$

8. 试求曲线  $(a_1x+b_1y+c_1)^2 + (a_2x+b_2y+c_2)^2 = 1$  ( $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ) 所围平面图形的面积.

9. 求抛物面  $z = 1 + x^2 + y^2$  的一个切平面, 使得它与该抛物面及圆柱面  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  围成的体积最小, 试写出切平面方程并求出最小的体积.

10. 设  $f(t)$  是连续的奇函数, 试利用适当的正交变换证明  $\iint_{(\sigma)} f(ax+by+c) d\sigma = 0$ , 其中  $(\sigma)$  关于直线  $ax+by+c=0$  对称, 且  $a^2+b^2 \neq 0$ .

11. 设有一半径为  $R$ , 高为  $H$  的圆柱形容器, 盛有  $\frac{2}{3}H$  高的水, 放在离心机上高速旋转, 因离心力的作用, 水面呈抛物面形状, 问当水刚要溢出容器时, 水面的最低点在何处?

12. 设  $a>0, b>0$  为常数,  $(\sigma)$  为椭圆域  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ ,  $f(t)$  是连续函数, 且  $f(t) \neq 0$ , 证明:

$$\iint_{(\sigma)} \frac{(b+1)f\left(\frac{x}{a}\right) + (a-1)f\left(\frac{y}{b}\right)}{f\left(\frac{x}{a}\right) + f\left(\frac{y}{b}\right)} d\sigma = \frac{\pi}{2} ab(a+b).$$

13. 设函数  $f(t)$  在  $[0, +\infty)$  连续, 且满足方程

$$f(t) = e^{-t^2} + \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right) d\sigma,$$

求  $f(t)$ .

### 第三节 三重积分的计算

#### 3.1 化三重积分为单积分与二重积分的累次积分

在本章第一节中我们已经知道, 三元函数  $u=f(x, y, z)$  在空间区域  $(V)$  上的三重积分就是下列和式极限:

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta V_k.$$

而且当  $f \in C((V))$  时, 其三重积分一定存在, 今后我们总假定被积函数  $f \in C((V))$ .

设积分域  $(V) = \{(x, y, z) \mid z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in (\sigma) \subseteq \mathbf{R}^2\}$ , 其中  $z_1 \in C((\sigma)), z_2 \in C((\sigma))$ ,  $(\sigma)$  是  $(V)$  在  $xOy$  平面的投影区域 (图 6.26).

我们已经知道单 (定) 积分和二重积分的计算法, 因此, 如果能把三重积分化成单积分和二重积分的累次积分, 那么它的计算问题也就得到了解决. 为此, 先把  $(V)$  在  $xOy$  平面上的投影区域  $(\sigma)$  分成若干子域  $(\Delta\sigma)$ , 以每一子域  $(\Delta\sigma)$  的边界曲线为准线, 作母线平行于  $z$  轴的柱面把域  $(V)$  分割成了若干竖长条, 再用平行于  $xOy$  平面



的平面把这些竖长条切割成若干小柱台(图 6.26), 于是这些小柱台( $\Delta V$ )的体积为

$$\Delta V = \Delta z \Delta \sigma.$$

在( $\Delta V$ )内任取一点  $P(x, y, z)$ , 它在  $xOy$  平面的投影点  $M(x, y, 0)$  必在( $\Delta \sigma$ )内, 于是由三重积分定义可知,

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{(V)} f(x, y, z) \Delta z \Delta \sigma.$$

如果我们在把乘积项  $f(x, y, z) \Delta z \Delta \sigma$  “无限累加”时, 先固定  $(x, y)$  和  $\Delta \sigma$ , 沿竖长条(即沿  $z$  轴方向)进行, 并把相同的公因式  $\Delta \sigma$  提出, 然后再把( $\sigma$ )上各竖长条中求得和“无限累加”, 那么便有

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{(V)} f(x, y, z) \Delta z \Delta \sigma = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{(\sigma)} \left( \lim_{\max \Delta z \rightarrow 0} \sum_i f(x, y, z) \Delta z \right) \Delta \sigma,$$

其中  $d'$  是( $\sigma$ )中各( $\Delta \sigma$ )的直径中最大者, 由定积分与二重积分的概念知

$$\lim_{\max \Delta z \rightarrow 0} \sum_i f(x, y, z) \Delta z = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(x, y),$$

$$\lim_{d' \rightarrow 0} \sum_{(\sigma)} \Phi(x, y) \Delta \sigma = \iint_{(\sigma)} \Phi(x, y) d\sigma,$$

于是得

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \iint_{(\sigma)} \left[ \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] d\sigma. \quad (3.1)$$

这样, 就把三重积分化成了单积分与二重积分的累次积分, 这种积分顺序简称为“先单后重”.

在计算(3.1)式中内层的定积分时,  $x$  与  $y$  视为常数, 积分变量是  $z$ . 求出原函数后根据 Newton-Leibniz 公式, 把  $z$  用上下限代入, 从而得到一个二元函数  $\Phi(x, y)$ , 然后再按本章第二节中所讲的方法计算二重积分  $\iint_{(\sigma)} \Phi(x, y) d\sigma$ .

**例 3.1** 计算  $I = \iiint_{(V)} xyz dV$ , 其中( $V$ )由三个坐标面  $x=0, y=0, z=0$  和平面  $x+y+z=1$  所围成.

**解** 首先画出积分域( $V$ )如图 6.27 所示. 容易看出( $V$ )在  $xOy$  平面上的投影区域( $\sigma$ )为三角形区域:

$$(\sigma) = \{(x, y) | x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

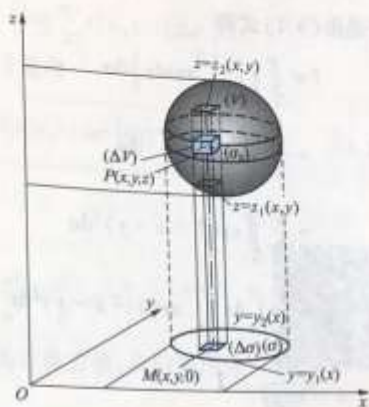


图 6.26

于是由(3.1)式得

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{(\sigma)} \left( \int_0^{1-x-y} xyz dz \right) d\sigma \\
 &= \frac{1}{2} \iint_{(\sigma)} xyz^2 \Big|_0^{1-x-y} d\sigma \\
 &= \frac{1}{2} \iint_{(\sigma)} xy(1-x-y)^2 d\sigma \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} xy(1-x-y)^2 dy \\
 &= \frac{1}{720} \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

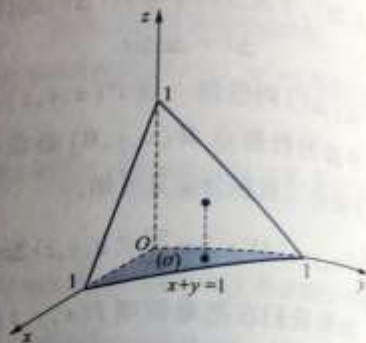


图 6.27

这个三重积分也可以先化成如下三个单积分的累次积分后再逐步计算: 注:右端的累次积分应理解为

$$\int_0^1 \left[ \int_0^{1-x} \left[ xy \int_0^{1-x-y} z dz \right] dy \right] dx$$

$$I = \iint_{(\sigma)} \left[ \int_0^{1-x-y} xyz dz \right] d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} xyz dz$$

例 3.2 计算  $I = \iiint_{(V)} z dV$ , 其中  $(V)$  是以原点为中心,  $R$  为半径的上半球体.

解 因为  $(V) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\}$ , 它在  $xOy$  平面的投影区域  $(\sigma) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$  (图 6.28). 于是

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{(\sigma)} \left( \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z dz \right) d\sigma \\
 &= \frac{1}{2} \iint_{(\sigma)} (R^2 - x^2 - y^2) d\sigma.
 \end{aligned}$$

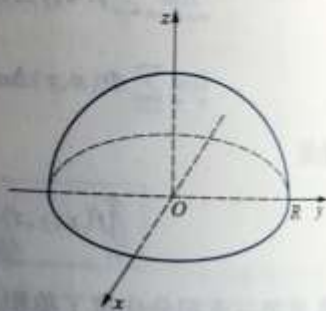


图 6.28

对这个二重积分, 显然用极坐标计算比较方便, 从而

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{2} \iint_{(\sigma)} (R^2 - \rho^2) \rho d\rho d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R (R^2 - \rho^2) \rho d\rho \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( \frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) d\theta = \frac{\pi R^4}{4} \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

如果我们把积分域  $(V)$  被平行于  $xOy$  平面的平面所截出的平面区域记作  $(\sigma_z)$ , 并将  $z$  的变化范围设为  $[a, b]$ . 由三重积分定义, 在“无限累加”乘积项  $f(x, y, z) \Delta z \Delta \sigma$  时, 先固定  $z$  和  $\Delta z$ , 在以  $(\sigma_z)$  为底、厚度为  $\Delta z$  的薄层上“无限累加” (参见图 6.26), 把公因式  $\Delta z$  提出; 然后再在区间  $[a, b]$  上把各薄层所求得和“无限累加”, 那么便有

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{(\sigma_i)} f(x, y, z) \Delta z \Delta \sigma = \lim_{\max d \rightarrow 0} \sum_i \left( \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{(\sigma_i)} f(x, y, z) \Delta \sigma \right) \Delta z,$$

其中  $d'$  为  $(\sigma_i)$  中各  $(\Delta \sigma)$  的直径中的最大者, 于是得

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \int_a^b \left[ \iint_{(\sigma_z)} f(x, y, z) d\sigma \right] dz, \quad (3.2)$$

这种积分顺序简称为“先重后单”.

### 例 3.3 计算

$$I = \iiint_{(V)} z^2 dV, \quad (V) = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

解 由于被积函数仅是  $z$  的函数, 所以为计算方便, 我们采用先重后单的积分顺序, 利用 (3.2) 式得

$$I = \int_{-c}^c \left( \iint_{(\sigma_z)} z^2 d\sigma \right) dz = \int_{-c}^c \left( z^2 \iint_{(\sigma_z)} d\sigma \right) dz,$$

其中  $(\sigma_z)$  为椭球体  $(V)$  被平行于  $xOy$  平面的平面所截出的截面 (图 6.29), 它就是平面  $z=z$  上的椭圆域

$$(\sigma_z) = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2 \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right)} + \frac{y^2}{b^2 \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right)} \leq 1, |z| \leq c \right\}.$$

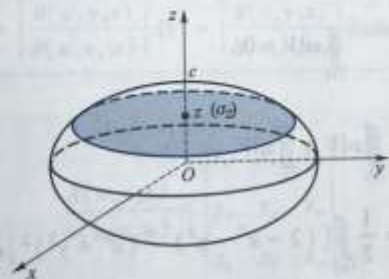


图 6.29

由于椭圆域  $(\sigma_z)$  的面积为

$$\iint_{(\sigma_z)} d\sigma = \pi ab \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right),$$

所以

$$I = \int_{-c}^c \pi ab \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right) z^2 dz = \frac{4}{15} \pi abc^3. \quad \blacksquare$$



二维码 6.3.1

在直角坐标系下计算三重积分的一般步骤.



## 例 3.4 计算

$$I = \iiint_{(V)} (x + y + z) dV, (V) = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}\}.$$

解 易见积分域  $(V)$  是由上半球面  $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$  与旋转抛物面  $z = x^2 + y^2$  所围成, 如图 6.30 所示. 由图可见,  $(V)$  在  $xOy$  坐标平面上的投影  $(\sigma)$  就是两曲面交线

$$\begin{cases} z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}, \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \quad (3.3)$$

在  $xOy$  平面上的投影. 由 (3.3) 式可解得  $z = 1$ . 于是交线 (3.3) 也可表示为

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 1. \end{cases}$$

所以投影区域  $(\sigma) = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

注意到积分域  $(V)$  关于  $xOz$  平面对称, 而  $y$  关于  $y$  是奇函数, 从而

$$\iiint_{(V)} y dV = 0.$$

同理, 由对称性可知

$$\iiint_{(V)} x dV = 0.$$

于是

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{(V)} x dV + \iiint_{(V)} y dV + \iiint_{(V)} z dV = \iiint_{(V)} z dV \\ &= \iint_{(\sigma)} d\sigma \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z dz = \frac{1}{2} \iint_{(\sigma)} [(2 - x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)^2] d\sigma. \end{aligned}$$

将上式右端的二重积分化为极坐标计算得

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (2 - \rho^2 - \rho^4) \rho d\rho = \frac{7}{12}\pi.$$

## 3.2 柱面与球面坐标下三重积分的计算法

## 1. 曲线坐标下的三重积分

与二重积分一样, 三重积分也可通过换元法来计算. 对于在  $Oxyz$  直角坐标系下给出的三重积分  $\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV$ , 作正则变换:

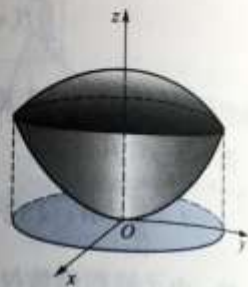


图 6.30



二维码 6.3.2

如何利用对称性简化三重积分的计算.



二维码 6.3.3

利用对称性简化三重积分计算举例.

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z), \\ (x, y, z) &\in (V), \quad (u, v, w) \in (V'), \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中 $(V)$ 与 $(V')$ 均为 $\mathbf{R}^3$ 中的有界闭域,函数 $u, v, w \in C^{(1)}((V))$ ; Jacobi 行列式 $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \neq 0, \forall (x, y, z) \in (V)$ ; 而且此变换将域 $(V)$ ——对应地映射为 $(V')$ . 与二元函数类似, 这时也存在唯一的逆变换

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w), \quad (u, v, w) \in (V'), \quad (3.5)$$

它将 $(V')$ 变为 $(V)$ , 它也是正则的且保持内部变成内部, 外部变成外部, 边界变成边界.

在变换(3.4)下,  $Oxyz$  直角坐标空间中, 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 也可以用三片曲面

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u(x_0, y_0, z_0) = u_0, \quad v(x, y, z) = v(x_0, y_0, z_0) = v_0, \\ w(x, y, z) &= w(x_0, y_0, z_0) = w_0 \end{aligned}$$

的交点来确定.  $(u_0, v_0, w_0)$ 称为空间点 $P_0$ 的曲线坐标.

在 $Ouvw$  直角坐标空间, 用坐标面族 $u=c_1, v=c_2, w=c_3$ 来划分积分域 $(V')$ , 可得体积微元 $dV' = du dv dw$ . 它在 $Oxyz$ 空间上对应于由曲面族

$$u(x, y, z) = c_1, \quad v(x, y, z) = c_2, \quad w(x, y, z) = c_3$$

划分区域 $(V)$ 所得的体积微元 $dV$ . 像二重积分一样可以证明(从略) $dV$ 与 $dV'$ 有如下关系:

$$dV = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| dV' = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw, \quad (3.6)$$

其中

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

是变换(3.5)的 Jacobi 行列式. 从而

$$\begin{aligned} &\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV \\ &= \iiint_{(V')} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw, \end{aligned} \quad (3.7)$$

其中积分域 $(V')$ 是积分域 $(V)$ 通过变换(3.4)在 $Ouvw$ 平面上的像. (3.7)式右端的积分称为曲线坐标下的三重积分. 可以仿照二重积分化为累次积分的思想, 把它化成累次(三次)积分.

类似于二重积分, 当变换(3.4)在 $Oxyz$ 空间内的几何意义比较明显时, 我们也可

通过此变换,在  $Oxyz$  空间利用“无限累加”的思想把三重积分直接化成累次积分.这时公式(3.7)可写成

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \iiint_{(V)} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw, \quad (3.8)$$

其中右端积分区域  $(V)$  的边界曲面应当用相应的曲线坐标表示.

正像极坐标是常见而且重要的一种平面曲线坐标那样,空间曲线坐标也有两种常见的重要类型,我们分述如下.

## 2. 柱面坐标及柱面坐标下三重积分的计算法

作变换

$$x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta, z = z \quad (\rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\infty < z < +\infty), \quad (3.9)$$

由于

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho, \quad (3.10)$$

从而当  $\rho \neq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$  时, (3.9) 为一正则变换,其逆变换由表达式

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z = z \quad (x^2 + y^2 \neq 0)$$

所确定.于是空间中点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  也可用坐标  $(\rho_0, \theta_0, z_0)$  表示,它是圆柱面  $x^2 + y^2 = \rho_0^2$  (即  $\rho = \rho_0$ ), 过  $z$  轴且对  $xOz$  平面的转角为  $\theta = \theta_0$  的半平面  $y = x \tan \theta_0$  (即  $\theta = \theta_0$ ), 以及平面  $z = z_0$  的交点,称为点  $P_0$  的柱面坐标(图 6.31).

用曲面族

$$\rho = c_1, \quad \theta = c_2, \quad z = c_3$$

划分积分域  $(V)$ , 由(3.10)与(3.17)式可知,柱面坐标下的体积微元为

$$dV = \rho d\rho d\theta dz,$$

从而

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \iiint_{(V)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d\rho d\theta dz, \quad (3.11)$$

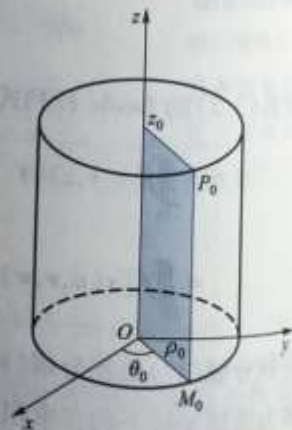


图 6.31



其中  $(V)$  的边界曲面由柱面坐标表示.

如果积分域  $(V)$  在  $xOy$  平面上的投影区域为  $(\sigma)$ , 且  $(V)$  的边界曲面可关于  $z$  被分成两个单值曲面  $z=z_1(x, y), z=z_2(x, y), (x, y) \in (\sigma)$ , 如图 6.26 所示, 那么把 (3.11) 式右端在柱面坐标下的三重积分化成对  $z$  的定积分与关于  $(\sigma)$  的二重积分的累次积分得

$$\begin{aligned} & \iiint_{(V)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d\rho d\theta dz \\ &= \iint_{(\sigma)} \rho d\rho d\theta \int_{z_1(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)}^{z_2(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) dz. \end{aligned}$$

**例 3.5** 计算  $I = \iiint_{(V)} z dV$ ,  $(V)$  是由旋转抛物面  $z =$

$x^2 + y^2$ , 圆柱面  $x^2 + y^2 = 2y$  与平面  $z = 0$  所围区域位于抛物面之外、 $xOy$  平面之上部分.

**解** 由图 6.33 可见, 积分域  $(V)$  在  $xOy$  平面上的投影区域  $(\sigma)$  的边界曲线为圆周  $x^2 + y^2 = 2y$ . 因此, 用柱面坐标计算比较方便. 利用直角坐标与柱面坐标的关系 (3.9), 将积分域的边界曲面方程化成柱面坐标得

$$z = \rho^2, \quad \rho = 2 \sin \theta, \quad z = 0,$$

从而

$$I = \iiint_{(V)} z dV = \iint_{(\sigma)} \rho d\rho d\theta \int_0^{\rho^2} z dz,$$

$$(\sigma) = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 2 \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

注意到  $(\sigma)$  关于  $y$  轴的对称性, 可知

注: 柱面坐标的体积微元也容易从图 6.32 中直接得到.

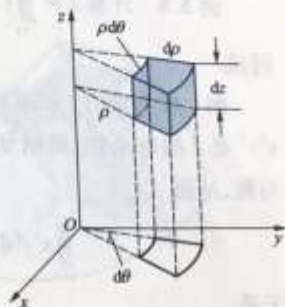


图 6.32

注意: 在柱面坐标下计算三重积分, 其实就是先对  $z$  求定积分, 再在  $(\sigma)$  上用极坐标计算二重积分. 事实上, 由 (3.1) 式,

$$\begin{aligned} & \iiint_{(V)} f(x, y, z) dV \\ &= \iint_{(\sigma)} d\sigma \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \\ &= \iint_{(\sigma)} \Phi(x, y) d\sigma \\ &= \iint_{(\sigma)} \Phi(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta, \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \Phi(x, y) = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

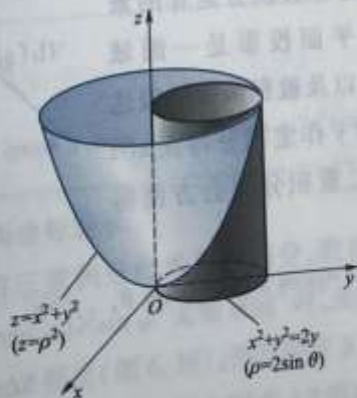


图 6.33

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} \rho^3 d\rho = \frac{64}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \theta d\theta = \frac{5}{3}\pi. \quad \text{I}$$

例 3.6 计算  $I = \iiint_V (x^3 y^2 + z) dV$ , 其中  $(V)$  由曲面  $z = x^2 + y^2$  与平面  $z = 4$  围成.

解 积分域  $(V)$  如图 6.34 所示. 由于被积函数中  $x^3 y^2$  是  $x$  的奇函数, 而积分域  $(V)$  关于  $yOz$  坐标平面对称, 从而

$$\iiint_V x^3 y^2 dV = 0,$$

于是

$$I = \iiint_V x^3 y^2 dV + \iiint_V z dV = \iiint_V z dV.$$

易见  $(V)$  在  $xOy$  平面的投影区域为

$$(\sigma) = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\},$$

为了利用柱面坐标计算, 将积分域  $(V)$  的边界曲面化为柱面坐标方程得

$$\begin{cases} z = \rho^2, \\ z = 4. \end{cases}$$

于是

$$I = \iiint_V z dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho^2}^4 z dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho^2}^4 z dz = \frac{64}{3}\pi. \quad \text{I}$$

例 3.7 计算  $I = \iiint_V \sqrt{x^2 + z^2} dV$ ,  $(V)$  是由  $y = x^2 + z^2$  与  $y = 4$  所围成的区域.

解 由图 6.35 可见, 若将积分域  $(V)$  向  $xOy$  平面投影, 则必须将旋转抛物面分成两个单值支  $z = \pm\sqrt{y-x^2}$ , 这必将导致积分运算的繁难. 注意到  $(V)$  向  $xOz$  平面投影是一圆域  $(\sigma) = \{(x, z) | x^2 + z^2 \leq 4\}$  以及被积函数的表达式, 利用柱面坐标, 或先对  $y$  作定积分再在  $xOz$  平面上利用极坐标计算二重积分将会方便得多. 为此, 令

$$x = \rho \cos \theta, \quad z = \rho \sin \theta, \quad y = y,$$

得

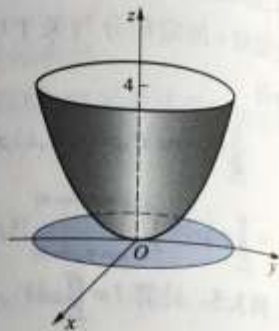


图 6.34

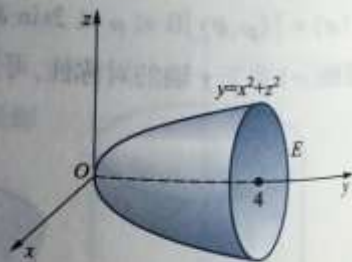


图 6.35





得到结果;最后再把这些结果沿  $\theta$  方向“无限累加”.这样,就把(3.14)式右端的三重积分化成了先对  $r$ ,后对  $\varphi$  再对  $\theta$  的累次(三次)积分.

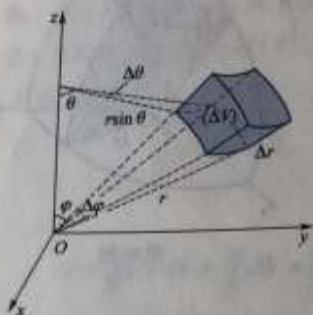


图 6.37

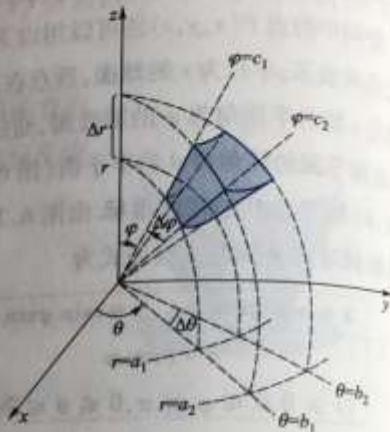


图 6.38

**例 3.8** 设  $(V)$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$  ( $a > 0$ ) 和锥面(以  $z$  轴为对称轴,顶角为  $2\alpha$ )所围的空间区域,求  $(V)$  的体积.

**解** 由于区域  $(V)$  由球面和锥面围成(图 6.39),因此,使用球面坐标比较方便.在球面坐标下,所给球面的方程为

$$r = 2a \cos \varphi,$$

所给圆锥面的方程为

$$\varphi = \alpha,$$

容易看出,对所给区域  $(V)$  来说,  $r, \varphi, \theta$  的变化范围为

$$0 \leq r \leq 2a \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \alpha, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

于是

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{(V)} dV = \iiint_{(V)} r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\alpha \sin \varphi d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} r^2 dr \\ &= \frac{16}{3} \pi a^3 \int_0^\alpha \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{4\pi a^3}{3} (1 - \cos^4 \alpha). \end{aligned}$$

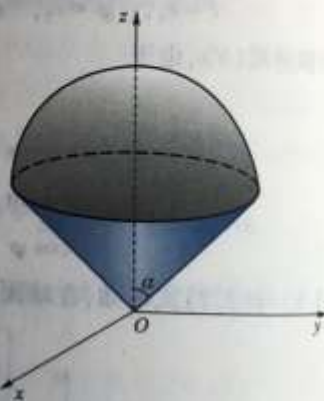


图 6.39

例 3.9 计算  $I = \iiint_{(V)} z^2 dV$ , 其中

$$(V) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2\}.$$

解法一 利用柱面坐标. 把  $(V)$  的边界曲面方程化成柱面坐标 (图 6.40), 得

$$z = \sqrt{R^2 - \rho^2}, \quad z = R - \sqrt{R^2 - \rho^2}.$$

它们的交线在  $xOy$  平面上的投影方程为

$$\begin{cases} \rho = \frac{\sqrt{3}}{2}R, \\ z = 0. \end{cases}$$

于是

$$I = \iiint_{(V)} z^2 \rho dz d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} \rho d\rho \int_{R-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} z^2 dz$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} \rho [(R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} - (R - \sqrt{R^2 - \rho^2})^3] d\rho$$

$$= -\frac{2\pi}{3} \left[ \frac{2}{5} (R^2 - \rho^2)^{\frac{5}{2}} + 2R^3 \rho^2 - \frac{3}{4} R \rho^4 + R^2 (R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \right] \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}$$

$$= \frac{59}{480} \pi R^5.$$

解法二 利用球面坐标. 把  $(V)$  的边界曲面方程化成球面坐标, 得

$$r = R, \quad r = 2R \cos \varphi,$$

它们的交线为圆

$$\begin{cases} r = R, \\ \varphi = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

因此,  $(V)$  的边界曲面由

$$r = 2R \cos \varphi \left( \frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$r = R \left( 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \right)$$

组成 (图 6.40), 于是

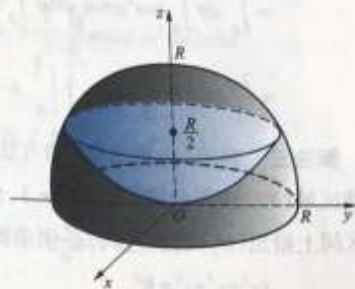


图 6.40

注意: 将直角坐标下的三重积分化为球面坐标下三重积分的步骤:

1. 将积分域  $(V)$  的边界曲面利用关系式 (3.12) 用球面坐标表示;
2. 将被积函数通过 (3.12) 式用球面坐标表示;
3. 将体积微元变换成球面坐标下的体积微元

$$dV = \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_{(V)} r^2 \cos^2 \varphi r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^R r^4 dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} r^4 dr \\
 &= \frac{2\pi}{5} R^5 \left( -\frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2\pi}{5} (2R)^5 \left( -\frac{1}{8} \cos^8 \varphi \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{59}{480} \pi R^5.
 \end{aligned}$$

解法三 利用“先重后单”的方法,用平行于  $xOy$  的平面  $z=c$  去横截区域  $(V)$ , 所得的圆域记为  $(\sigma_z)$ , 由图 6.40 可见, 为了在  $z$  的变化区间上给出  $(\sigma_z)$  的表达式, 必须求得两球面交线处  $z$  的值. 为此

求解方程组  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x^2 + y^2 + (z-R)^2 = R^2, \end{cases}$  可得  $z = \frac{R}{2}$ . 于是

$$(\sigma_z) = \begin{cases} \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2 - (z-R)^2\}, & 0 \leq z \leq \frac{R}{2}, \\ \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2 - z^2\}, & \frac{R}{2} \leq z \leq R. \end{cases}$$

因此

$$I = \int_0^{\frac{R}{2}} z^2 dz \iint_{(\sigma_z)} d\sigma + \int_{\frac{R}{2}}^R z^2 dz \iint_{(\sigma_z)} d\sigma.$$

在平面  $z=z$  上直接运用截面面积公式可得

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{R}{2}} z^2 \pi [R^2 - (z-R)^2] dz + \int_{\frac{R}{2}}^R z^2 \pi (R^2 - z^2) dz \\
 &= \pi \left[ \left( \frac{2R^4}{4} - \frac{1}{5} z^5 \right) \Big|_0^{\frac{R}{2}} + \left( \frac{R^2}{3} z^3 - \frac{1}{5} z^5 \right) \Big|_{\frac{R}{2}}^R \right] = \frac{59}{480} \pi R^5. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

例 3.10 计算  $I = \iiint_{(V)} (x+y+z) \cos(x+y+z)^2 dV$ , 其中

$$(V) = \{(x, y, z) | 0 \leq x-y \leq 1, 0 \leq x-z \leq 1, 0 \leq x+y+z \leq 1\}.$$

解 为了使积分域  $(V)$  变得简单, 我们利用坐标变换

$$x-y=u, \quad x-z=v, \quad x+y+z=w,$$

由于

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

所以



二维码 6.3.4

在计算三重积分

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV$$

时如何选用柱

面坐标或球面

坐标.



$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \frac{1}{3}.$$

于是由(3.8)式得

$$I = \iiint_{(V)} w \cos w^2 \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw = \frac{1}{3} \iiint_{(V)} w \cos w^2 du dv dw.$$

再用  $u, v, w$  表示  $(V)$ , 得

$$(V) = \{(u, v, w) | 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq w \leq 1\},$$

因此,

$$I = \int_0^1 du \int_0^1 dv \int_0^1 \frac{1}{3} w \cos w^2 dw = \frac{1}{6} \sin 1. \quad \blacksquare$$

### 习题 6.3

#### (A)

1. 设积分域  $(V)$ : (1) 关于  $xOy$  平面对称; (2) 关于  $yOz$  平面对称; (3) 关于  $zOx$  平面对称. 试分别说明被积函数具有什么特性时, 三重积分

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = 0, \quad \iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = 2 \iiint_{(V')} f(x, y, z) dV,$$

其中  $(V')$  为  $(V)$  在对称面一侧的子区域.

2. 设  $(V)$  是球体:  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ ,  $(V_1)$  是其上半球体, 试判断下列各题是否正确? 为什么?

$$(1) \iiint_{(V)} (x + y + z)^2 dV = 2 \iiint_{(V_1)} (x + y + z)^2 dV;$$

$$(2) \iiint_{(V)} xyz dV = 0;$$

$$(3) \iiint_{(V)} 3 dV = 3 \iiint_{(V)} dV = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 8 = 32\pi;$$

$$(4) \iiint_{(V)} 3(x^2 + y^2 + z^2) dV = 3 \iiint_{(V)} 4 dV = 12 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 8 = 128\pi.$$

3. 仅从积分域考虑, 选用你认为最方便的坐标系将三重积分  $I = \iiint_{(V)} f(x, y, z) dV$  化成由三个单

积分构成的累次积分, 其中积分域  $(V)$  为

(1) 由平面  $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$  与各坐标面围成的区域;

(2) 由  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  与  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  所围成的区域;

(3)  $(V) = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq 2x, 0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\};$

(4)  $(V) = \{(x, y, z) | a - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad (a > 0)\}.$

4. 计算下列三重积分:

- (1)  $\iiint_V e^z dV, (V)$  是由平面  $x=0, y=1, z=0, y=x$  和  $x+y-z=0$  所围成的闭区域;
- (2)  $\iiint_V y \cos(x+z) dV, (V)$  为由抛物柱面  $y=\sqrt{x}$ , 平面  $y=0, z=0$  及  $x+z=\frac{\pi}{2}$  所围成的闭区域;
- (3)  $\iiint_V \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dV, (V)$  为由  $z=\sqrt{x^2+y^2}, z=1, z=2$  所围成的闭区域;
- (4)  $\iiint_V (x^2+y^2) dV, (V)$  为由  $x^2+y^2=2z$  与  $z=2$  所围成的闭区域;
- (5)  $\iiint_V xy dV, (V)$  为由  $x^2+y^2=1$  与平面  $z=0, z=1, x=0, y=0$  所围成的第一卦限内的闭区域;

- (6)  $\iiint_V xy dV, (V)$  为由  $xy=z, x+y=1$  与  $z=0$  所围成的闭区域;
- (7)  $\iiint_V (x^2+y^2) dV, (V)$  由  $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, z=\sqrt{A^2-x^2-y^2}, z=0$  所围成, 其中  $A>a>0$ ;
- (8)  $\iiint_V zdV, (V)$  由  $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$  与  $z=\frac{1}{3}(x^2+y^2)$  所围成;
- (9)  $\iiint_V \frac{1}{1+x^2+y^2} dV, (V)$  由  $x^2+y^2=z^2$  与  $z=1$  所围成;
- (10)  $\iiint_V z^2 dV, (V)$  为两球体  $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$  与  $x^2+y^2+z^2 \leq 2Rz$  的公共部分,  $R>0$ ;
- (11)  $\iiint_V xyz dV, (V)$  为  $x^2+y^2+z^2=1$  位于第一卦限中的闭区域;
- (12)  $\iiint_V \sqrt{1-x^2-y^2-z^2} dV, (V)$  为由不等式  $x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{x^2+y^2}$  所确定的闭区域;
- (13)  $\iiint_V (x+y) dV, (V)$  由  $x^2+y^2=1, x^2+y^2=4, z=0, z=x+2$  所围成;
- (14)  $\iiint_V \frac{z \ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1} dV, (V) = \{(x, y, z) | x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ ;
- (15)  $\iiint_V z(x^2+y^2) dV, (V) = \{(x, y, z) | z \geq \sqrt{x^2+y^2}, 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$ ;
- (16)  $\iiint_V zdV, (V) = \{(x, y, z) | x^2+y^2+(z-a)^2 \leq a^2, x^2+y^2 \leq z^2 (a>0)\}$ .

5. 选用适当的坐标系计算下列累次积分:

(1)  $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 z^2 dz$ ;

(2)  $\int_{-3}^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z \sqrt{x^2+y^2+z^2} dz$ .

6. 求下列立体的体积:

- (1) 由  $x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2+z^2=b^2$  与  $z=\sqrt{x^2+y^2} (z \geq 0)$  所围成的立体 ( $b>a>0$ );
- (2) 由  $z=6-x^2-y^2$  与  $z=\sqrt{x^2+y^2}$  所围成的立体;
- (3) 由  $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2z (a>0)$  所围成的立体;
- (4) 由  $x=\sqrt{y-z^2}, \frac{1}{2}\sqrt{y}=x$  与  $y=1$  所围成的立体;

(5) 由  $z = \frac{xy}{a}, x^2 + y^2 = ax$  ( $a > 0$ ) 与  $z = 0$  所围成的立体;

(6) 由  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  ( $a > 0, b > 0, c > 0$ ) 所确定的立体;

(7) 由  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$  与  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0, c > 0$ ) 所围成的立体.

7. 计算  $\iiint_V (x^2 + y^2) dV$ , 其中  $(V)$  为平面曲线  $\begin{cases} y^2 = 2x \\ x = 0 \end{cases}$  绕  $z$  轴旋转一周形成的曲面与平面  $z = 8$  所围成的立体.

8. 证明: 抛物面  $z = x^2 + y^2 + 1$  上任一点处的切平面与曲面  $z = x^2 + y^2$  所围立体的体积恒为一常数.

(B)

1. 计算下列三重积分:

(1)  $\iiint_V \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dV, (V) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1, z \geq 1, y \geq 0\};$

(2)  $\iiint_V |\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1| dV, (V)$  由  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  与  $z = 1$  围成;

(3)  $\iiint_V \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dV, (V) = \{(x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 (a > 0, b > 0, c > 0)\}.$

2. 将累次积分  $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz$  分别化为先对  $x$  和先对  $y$  的累次积分.

3. 设  $F(t) = \iiint_V x \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2) dV, (V)$  由  $x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2$  与  $\sqrt{y^2 + z^2} \leq x$  确定, 求  $\frac{dF(t)}{dt}.$

4. 设  $f$  为连续函数, 求函数  $F(t) = \iiint_V f(x^2 + y^2 + z^2) dV$  的导数  $F'(t)$ , 其中  $(V) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2\}.$

5. 设  $f(x)$  连续,  $(V) = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq h, x^2 + y^2 \leq t^2\}, F(t) = \iiint_V [z^2 + f(x^2 + y^2)] dV$ , 求  $\frac{dF}{dt}$  和

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{t^2}.$$

6. 计算三重积分  $\iiint_V (x + y + z)^2 dV$ , 其中  $(V)$  为椭球体  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$

## 第四节 含参变量的积分与反常重积分

在许多问题中所遇到的积分, 其被积函数除依赖于积分变量外还可能依赖于另外的变量. 例如, 在变力沿直线做功的问题中, 如果此变力  $f$  不仅与位移  $x$  有关, 还与时间  $t$  有关, 即  $f = f(x, t)$ , 那么此变力将物体由  $x = a$  移至  $x = b$  所做的功应为  $W(t) = \int_a^b f(x, t) dx$ , 这种积分