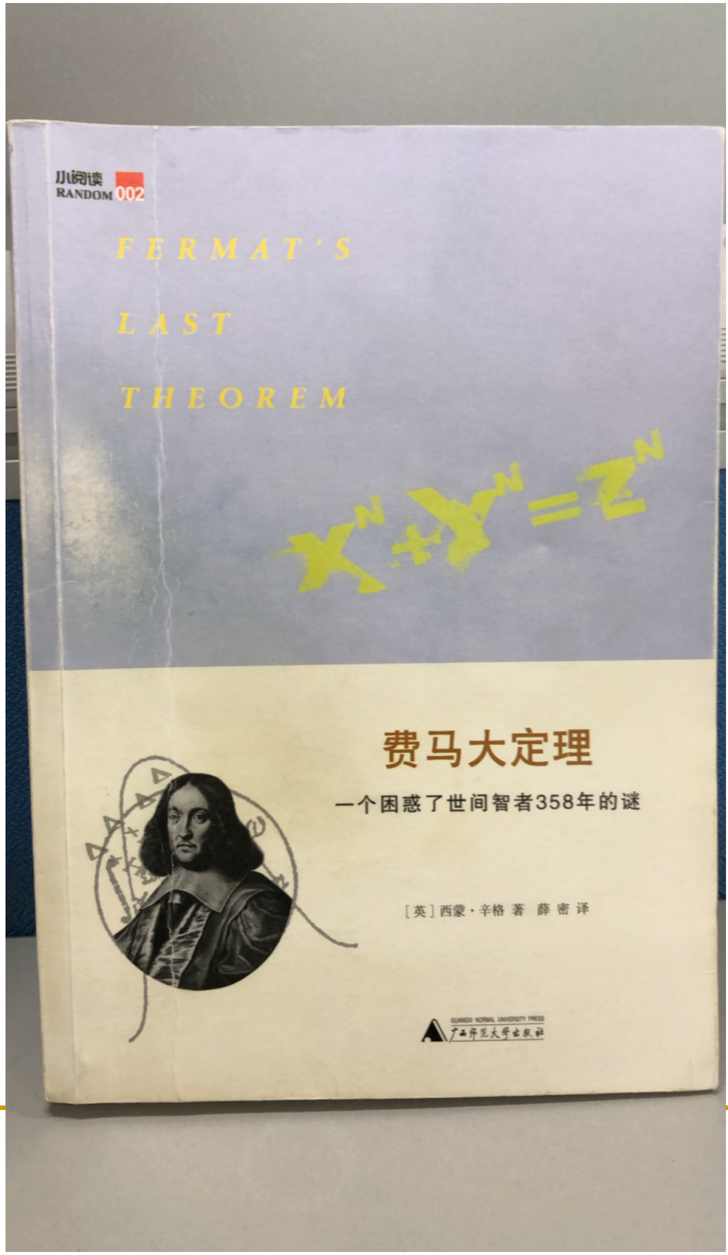
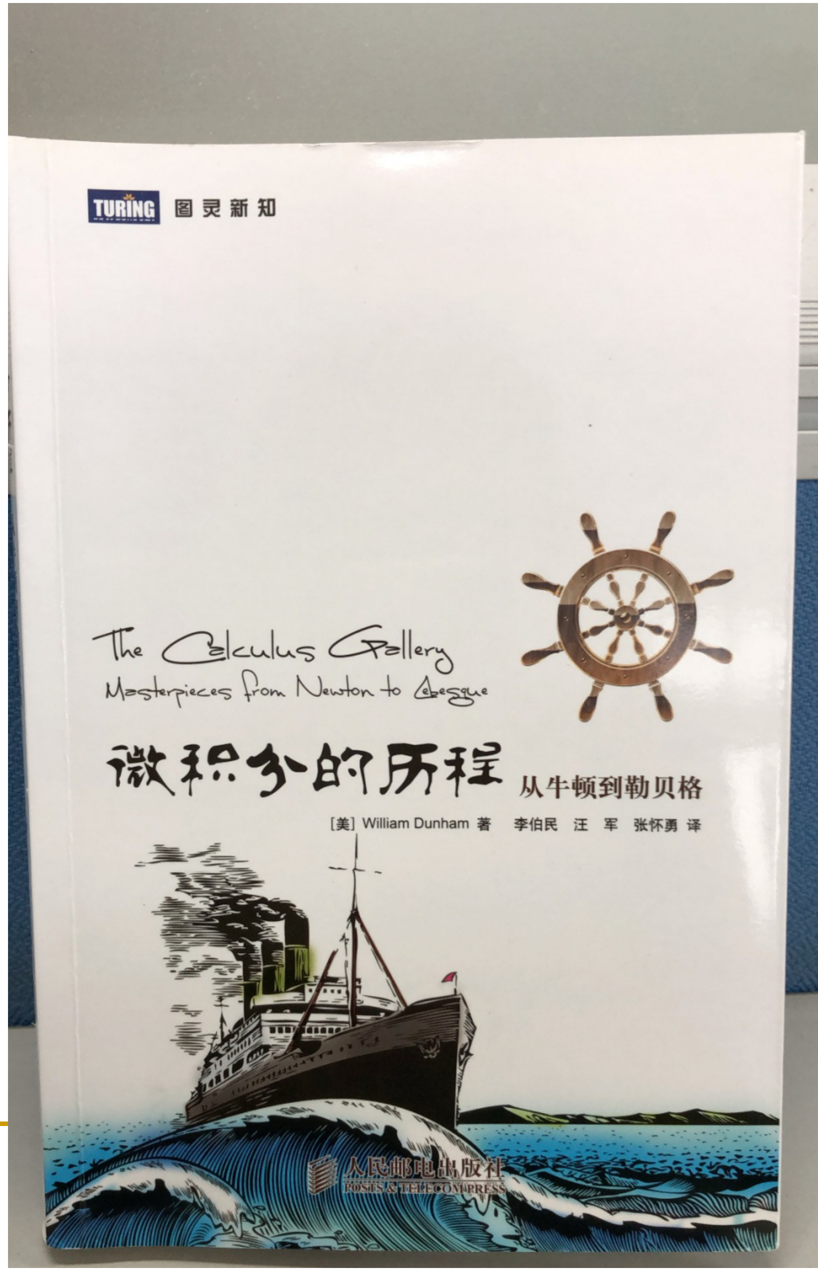
工科数学分析

主讲教师：费铭岗

推荐课外书



小阅读
RANDOM 002
FERMAT'S
LAST
THEOREM
$X^N+Y^N=Z^N$
费马大定理
一个困惑了世间智者358年的谜
[英] 西蒙·辛格 著 薛密 译
广西师范大学出版社



TURING 图灵新知
The Calculus Gallery
Masterpieces from Newton to Lebesgue
微积分的历程
从牛顿到勒贝格
[美] William Dunham 著 李伯民 汪军 张怀勇 译
人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

名　　称　　工科数学分析

总 学 时　　一学年（两学期）

本学期 96 学时

教　　材　《工科数学分析基础》第三版

王绵森 马知恩 主编

参 考 书

《数学分析》第四版

华东师范大学数学系 主编

《数学分析》第二版

复旦大学陈纪修等 编著

本学期的教学内容

1. 函数、极限、连续

2. 一元函数的微分学

3. 一元函数的积分学

4. 微分方程

高等数学 → 工科数学分析 → 数学分析

计算

计算为主、证明兼顾

证明

第1章 函数、极限、连续

第1节　集合、映射与函数

1.1 集合及其运算

1.2 实数集的完备性与确界定理

1.3 映射与函数的概念

1.4 线性函数的基本属性

1.5 复合映射与复合函数

1.6 逆映射与反函数

1.7 初等函数与双曲函数

- 集合论产生于十九世纪七十年代，它是德国数学家康托（Cantor）创立的，不仅是分析学的基础，同时，它的一般思想已渗入到数学的所有部门。“集合论观点”与现代数学的发展不可分割地联系在一起。

1.1 集合及其运算

1 集合概念

集合(集) 具有某种确定性质对象的全体.

元素(简称元) 组成这个集合的个别对象称为该集合的 **元素**.

通常以大写字母 $A, B, M, \cdots$ 等表示集合,
以小写字母 $a, b, m, \cdots$ 等表示集合的元素.

若 a 是 A 的元素, 则说 a 属于 A, 记作 $a \in A$;
否则记 $a \notin A$ 或 $a \overline{\in} A$.

注：集合中的元素具有确定性、无重复性、无序性。

2 表示法

(1) 列举法：把集合的全部元素一一列出来, 外加括号.

例　有限集合 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}=\{a_i\}_{i=1}^{n}$

自然数集 $\mathrm{N}=\{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$

正整数集 $\mathbf{N}^{+}=\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \cdots, \boldsymbol{n}, \cdots\}$

(2) 描述法： $\boldsymbol{M}=\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}$ 所具有的性质 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})\}$

例　整数集合 $\mathrm{Z}=\{x \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{N}$ 或 $-\boldsymbol{x} \in \mathbf{N}^{+}\}$

有理数集 $\mathrm{Q}=\left\{\dfrac{p}{q} \,\middle|\, \boldsymbol{p} \in \mathbf{Z}, \boldsymbol{q} \in \mathrm{N}^{+}, \boldsymbol{p}\text{ 与 }\boldsymbol{q}\text{ 互质}\right\}$

实数集合 $\boldsymbol{R}=\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}$ 为有理数或无理数$\}$

3 集合的关系

子集 两个集合 $A=\{1,2\}$, $B=\{1,2,3,4\}$

A中的每一个元素都属于B. 一般地,

若$x\in A$,则必$x\in B$, 则称 A是B的**子集**,记作

$A\subseteq B$ (读作A含于B) 或 $B\supseteq A$(读作B包含 A).

集合相等 若$A\subseteq B$且$B\subseteq A$,

则称 **集合A与B相等**, 记作 $A=B$.

如 $A=\{1,2\}, B=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$, 则 $A=B$.

真子集 若$A \subseteq B$且$A \neq B$, 则称A是B的**真子集**, 记作 $A \subsetneqq B$.

如 $\mathrm{N} \subsetneqq \mathrm{Z} \subsetneqq \mathrm{Q} \subsetneqq \mathrm{R}$.

空集 不含任何元素的集合称为**空集**.

(记作 $\varnothing$). 如 $\{x \mid x \in R, x^2 + 1 = 0\} = \varnothing$

规定 空集为任何集合的子集. 今后在提到一个集合时, 如不加特别声明, 一般都是非空集.

集合之间的相等与包含关系具有以下几个性质:

(1) 反身性 $A \subseteq A$

(2) 反对称性 $A \subseteq B$, $B \subseteq A$, 则$A = B$

(3) 传递性 $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, 则$A \subseteq C$

注: 空集是唯一的。

例 确定下列命题是否为真

（1） $\varnothing \subseteq \varnothing$;

（2） $\varnothing \in \varnothing$;

（3） $\varnothing \in \{\varnothing\}$；

（4） $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$；

（5） $\varnothing \in \{\{\varnothing\}\}$；

（6） $\{a\} \subseteq \{\{a\}\}$；

（7） $\{a\} \in \{\{a\}\}$；

（8） $\{a\} \subseteq \{a，\{a\}\}$；

（9） $\{a\} \in \{a，\{a\}\}$。

注:（i）理解符号 $\in$和$\subseteq$的区别和联系

(ii) 理解集合$\varnothing$ 和$\{\varnothing\}$ ； $\{a\}$ 和$\{\{a\}\}$ 的区别和联系。

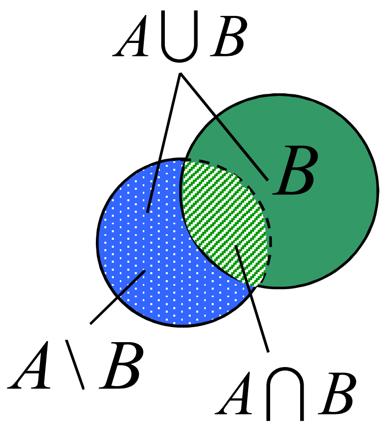
4 集合的三种基本运算

给定两个集合 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, 定义下列运算:

并集 $A \cup B = \{x \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}\}$

交集 $A \cap B = \{x \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ 且 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}\}$

差集 $A \setminus B = \{x \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ 且 $x \notin B\}$



例如, 设$A=\{1,2,3,4\}, B=\{3,4,5,6\}$, 则

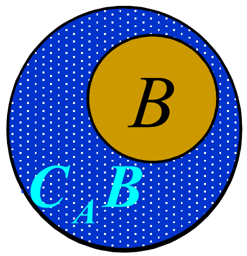
$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}, A\cap B=\{3,4\}, A\setminus B=\{1,2\}.$

B关于**A** 余(补)集 $C_A B = A\setminus B$ (其中$B\subseteq A$)

注 研究某个问题时所考虑的对象的全体称为**全集**或**基本集**,并用 X 表示,并把差积 $X\setminus A$ 特别称为A的**余集**或**补集**. 记作 A^C.

例如, 在实数集R中, 集合 $A=\{x|0\le x\le 1\}$ 的余集

$$A^C=\{x|\, x<0或x>1\}.$$



例 设全集 $E=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,4\}$，

$B=\{1,2,5\}$，$C=\{2,4\}$， D=$\{5\}$，求出以下集合。

(1) $A\cap B$ $\{1\}$

(2) $B-C$ $\{1,5\}$

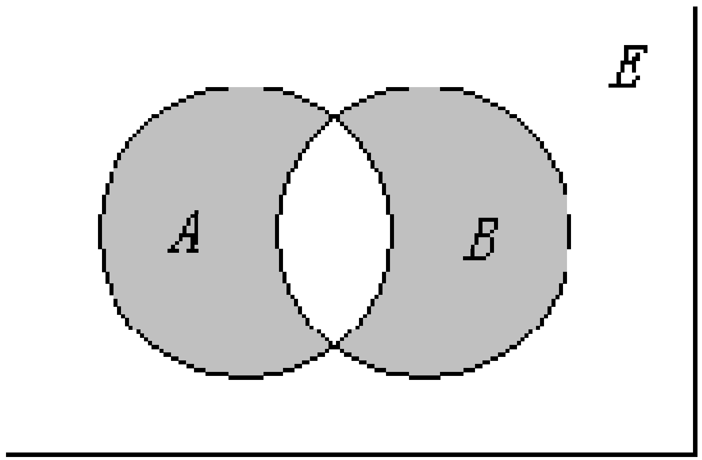
(3) A^c $\{2,3,5\}$

(4) $B\cup A^c$ $\{1,2,3,5\}$

(5) A∩D $\varnothing$

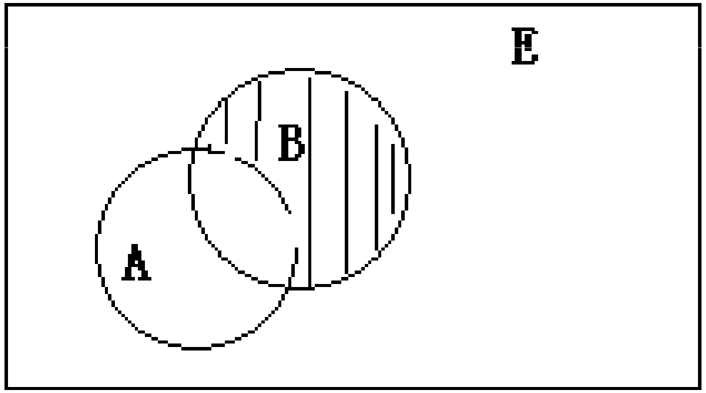
例　用文氏图表示下列集合。

(1) $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$ (对称差运算)

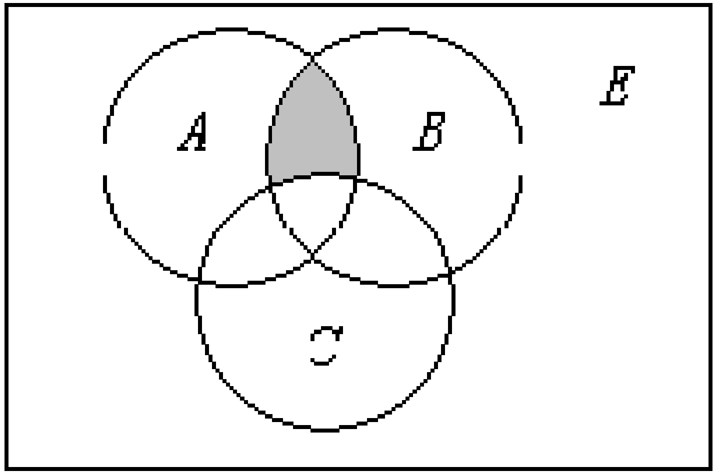


$A \oplus B$

(2) $A^c \cap B$



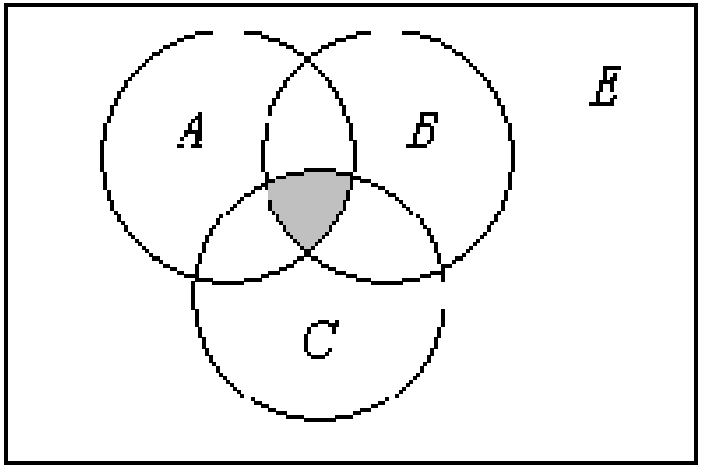
(3) $(A \cap B) - C$



$(A \cap B) - C$

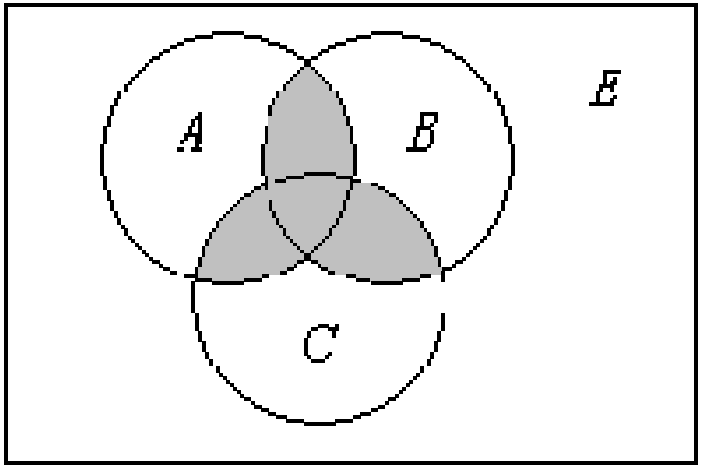
例 用集合公式表示下列文氏图中的阴影部分

(1)



解： $A \cap B \cap C$

(2)



解：$(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$

5 集合的运算法则

设A,B,C 为任意三个集合, 则下列法则成立:

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) 分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(4) 对偶律 $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$,

$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$;

(5) 幂等律 $A \cup A = A$, $A \cap A = A$;

(6) 吸收律 $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$.

笛卡儿乘积

定义 两个确定了先后次序的元素a, b组成的元素对, 称为有序元素对, 简称为有序偶, 记为(a, b)。且规定

(a, b) =(c, d) 当且仅当 a=c, b=d.

注: 有序偶 (a, b) 和集合{a, b}的区别.

定义 有序偶集合$\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$称为集合A和B的笛卡儿乘积, 记为$A\times B$.

例 设$A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{ x, y \}$, 求$A\times B$, $B\times A$ 。

注: (1) $A\times \varnothing = \varnothing \times B= \varnothing$;

(2) 一般的, $A\times B \neq B\times A$。

特例: $R\times R \overset{\text{记}}{=\!=} R^2$

为平面上的全体点集

1.2 实数集的完备性与确界定理

1 实数及其性质

实数的定义

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\\ \text{无理数}\end{cases}$$

有理数的两种等价定义：

1\. 能用分数 $\dfrac{p}{q}\left(p，q\text{为整数且互质，}q\neq 0\right)$表示的数；

2\. 有限十进制小数或无限十进制循环小数表示的数

实数集的一些重要性质

(1) 四则（有理）运算封闭性：

实数全体对加、减、乘、除运算封闭

(2) 有序性：任意两实数a,b必满足下述三个关系之一：

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

(3) 稠密性：

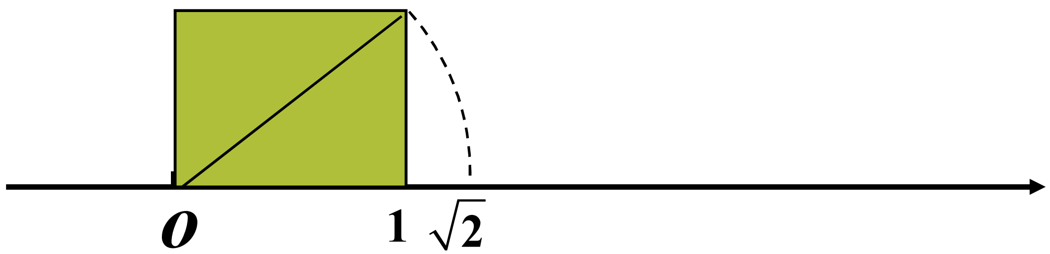
任意两个不相等实数之间还有另一个实数，

所以任意两个实数之间必存在无穷多实数.

有理数集也具有稠密性！

(4)完备性: 实数的连续性 有理数集不具有!

如在一直线上确定一点 O作为原点, 指定一个方向为正向, 并且规定一个单位长度, 此时, 称此直线为数轴.



全体实数和数轴上的点建立了一一对应的关系.(实数的连续性)

实数之间的关系及运算变得形象化.

•逻辑符号 在逻辑推理过程中最常用的两个逻辑记号

∃ **Exist(存在)的 字头E的倒写**

表示 "存在 "," 至少存在一个" 或"能够找到".

∀ **Any(每一个)或All(所有的)的字头A的倒写**

表示 "任取 ", 或"任意给定"

"⇒" 表示 "蕴含 ",或 "推出".

"⇔" 表示 "等价 ",或 "充分必要".

$$\max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}, \quad \min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\},$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots a_n, \ \sum$$ 读作“希格玛”

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$$

2 绝对值与不等式

$$|a|=\begin{cases} a & a\geq 0 \\ -a & a<0 \end{cases} \qquad (|a|\geq 0)$$

运算性质

$$|a|\geq 0$$

$$|a|\geq \pm a \quad 或 \quad -|a|\leq a\leq |a|$$

$$|a|=\sqrt{a^2}$$

$$|ab|=|a||b|; \qquad \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|} \quad (b\neq 0).$$

几个常用的绝对值不等式:

(1) $|x| \le b \Longleftrightarrow -b \le x \le b;$

(2) $|x| \ge a\ (a>0) \Longleftrightarrow x \ge a$ 或 $x \le -a;$

(3) $|x-a| \le b \Longleftrightarrow a-b \le x \le a+b;$

(4) $|a+b| \le |a| + |b|$

(5) $|a-b| \ge \big||a| - |b|\big|$

- 几个重要不等式

$$\begin{cases}\textbf{Bernoulli(伯努利)}\\ \textbf{Cauchy(柯西)}\\ \text{几何与算术平均}\end{cases}$$

Bernoulli(伯努利)不等式

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (x>-1, \quad n\in N)$$

注: 用数学归纳法可证。

Cauchy(柯西)不等式

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}) \ (\sum_{i=1}^{n} b_i^{\,2})$$

平均值不等式 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in R^+$

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

几何平均值

算术平均值

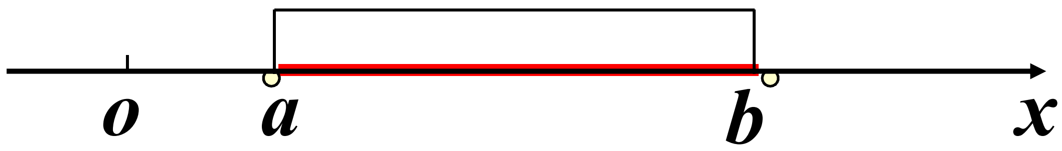
3 区间

区间是用得较多的一类数集 (实数集合), 具体是指介于某两个实数之间的全体实数. 这两个实数叫做区间的端点.

设$\mathbf{a},\mathbf{b}$是实数, 即$\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbf{R}$, 且$\mathbf{a}<\mathbf{b}$.

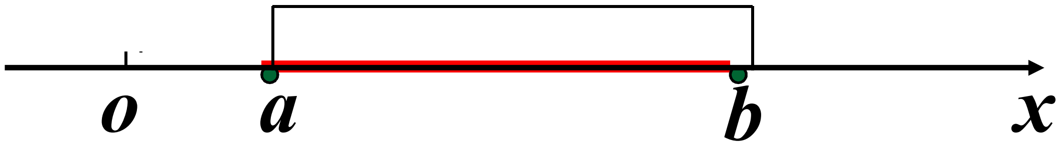
则实数集$\{\mathbf{x}\,|\,\mathbf{a}<\mathbf{x}<\mathbf{b}\}$称为开区间, 记作$(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

在数轴上可表示为



而实数集$\{x \mid a \le x \le b\}$称为闭区间, 记作$[a, b]$.

在数轴上可表示为



除了开区间和闭区间外, 我们还可类似定义如下区间:

实数集$\{x \mid a \le x < b\}$称为半开区间, 记作$[a, b)$.

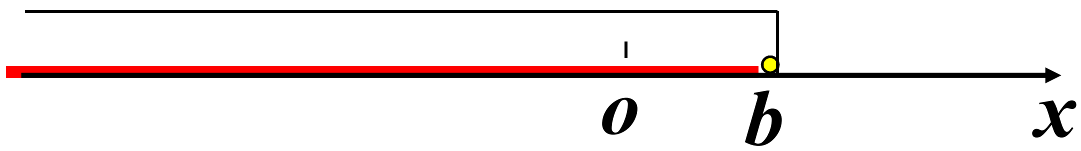
实数集$\{x \mid a < x \le b\}$称为半开区间, 记作$(a, b]$.

注: 以上这些区间均称为有限区间, 数b－a称为这些区间的长度(区间两端点间的距离), 从数轴上看, 这些有限区间是长度有限的线段.

除了有限区间外, 我们还可以定义所谓的无限区间. 通过引入记号+∞(读作正无穷大)及-∞(读作负无穷大), 则可类似地表示无限区间. 如:

$[a,+\infty)=\{x|a\le x\}$在数轴上可表示为

$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$在数轴上可表示为



全体实数R可记作(-∞, +∞), 为一无穷区间.

注: 在不需要辨明所论区间是否包含端点, 以及是有限区间还是无限区间时, 我们可简单地称其为“区间”, 且常用*I*表示.

4 邻域:

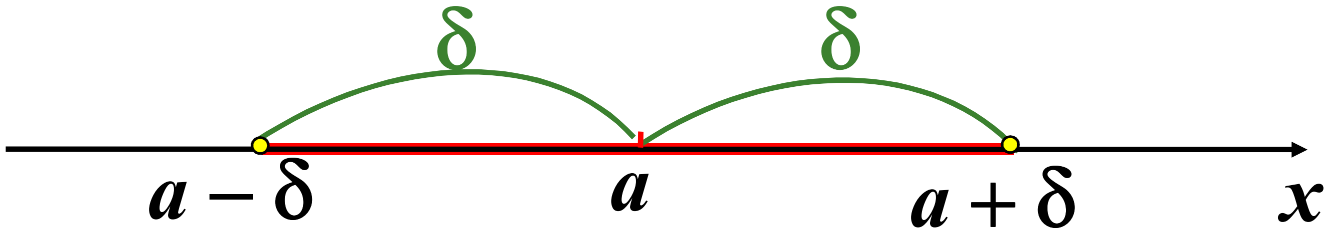
定义：以点a为中心的任何开区间称为点a的邻域,记作$U(a)$.

设a与δ是两个实数，且$\delta > 0$. 则开区间$(a-\delta, a+\delta)$就是点a的一个邻域, 称为点a的δ邻域, 记作$U(a, \delta)$,即

$$U(a, \delta) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$$
$$= \{x \mid |x-a| < \delta\}.$$

点a叫做这邻域的中心，δ叫做这邻域的半径 .

$$U(a,\delta) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}.$$



有时用到的邻域需要把邻域中心去掉，点a的δ邻域去掉中心a后，称为点a的去心的δ邻域，记作$\overset{\circ}{U}(a, \delta)$，即

$$\overset{\circ}{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\},$$

这里$0 < |x - a|$表明$x \neq a$.

为了方便，有时把开区间$(a - \delta, a)$称为a的左δ邻域，把开区间$(a, a + \delta)$称为a的右δ邻域.

注：区间和邻域均为特殊的实数集合.

5 有界数集与确界原理

• 有界数集

定义1.1(有界数集）设$A\subset \mathbf{R}, A\neq\varnothing$.

(1) 若$\exists L\in \mathbf{R}$,使得$\forall x\in A$, $x\leq L$,则称 L 为 A 的一个上界, 称 A 为有上界的数集.

(2) 若$\exists l\in \mathbf{R}$,使得$\forall x\in A$, $x\geq l$,则称 l 为 A的一个下界, 称 A 为有下界的数集.

(3) 若 A 既有上界又有下界, 则称 A 为有界集.

其充要条件为:$\exists M>0$, 使 $\forall x\in A$,有 $|x|\leq M$.

(1′) 若 A 不是有上界的数集, 则称 A 无上界, 即

$$\boxed{\forall L\in \mathbf{R}, \exists\ x_0\in A, \text{使得}\ x_0 > L.}$$

(2′) 若 A 不是有下界的数集, 则称 A 无下界, 即

$$\boxed{\forall l\in \mathbf{R}, \exists\ x_0\in A, \text{使得}\ x_0 < l.}$$

(3′) 若 A 不是有界的数集, 则称 A 无界集, 即

$$\boxed{\forall M > 0, \exists\ x_0\in A, \text{使得}\ |x_0| > M.}$$

例如，闭区间、(a,b) (a,b 为有限数）、邻域等都是有界数集，集合

$E=\{y\mid y=\sin x,\ x\in(-\infty,+\infty)\}$ 也是有界数集.

$(-\infty,+\infty)$，$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$，有理数集等都是无界数集，

例 证明数集 $A=\{2^n\mid n\in \mathbf{N}^+\}$ 无上界，有下界.

证 取 $l=1$，则 $\forall x=2^n\in A$，$x\geq l$，故 A 有下界.

$\forall M\in \mathbf{R}$，若 $M<1$，取 $x_0=2^1>M$；若 $M\geq 1$，

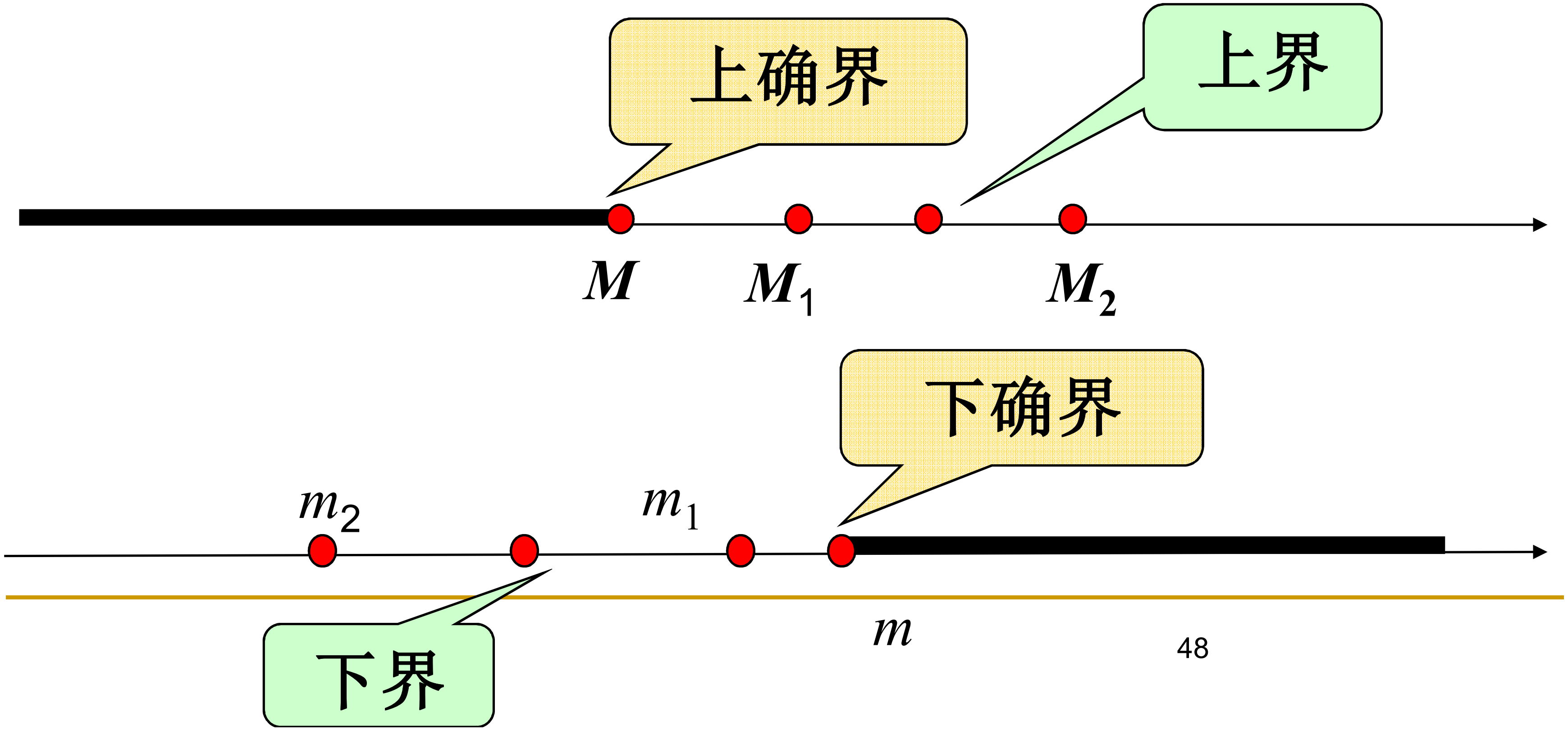
取 $x_0=2^{[\log_2 M]+1}>2^{\log_2 M}=M$，因此 A 无上界.

例1.1 $A=\{x \mid x=\sin t, -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\}$

例1.2 $B=\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$

• 确界　　先给定确界的直观定义

若数集 A 有上界，则必有无穷多个上界，而其中最小的一个具有重要的作用．最小的上界称为上确界,记作sup$A$．同样，若A有下界，则最大的下界称为下确界，记作inf$A$.



定义2（确界的精确定义）

设A为实数集R的非空子集，若数 s 满足以下两条：

(1). 对一切$x\in A$，都有$x\le s$ （即s为A的上界）

(2). $\forall\varepsilon>0,\exists x_0\in A,$ 使 $x_0>s-\varepsilon$

则称 s 为实数集A的上确界，记作 $\sup A$

若数 t 满足以下两条：

(1). 对一切$x\in A$，都有$x\ge t$ （即t为A的下界）

(2). 对任意$\varepsilon>0$，$\exists x_0\in A$，使得$x_0<t+\varepsilon$

则称 t 为实数集A的下确界，记作 $\inf A$

例1 设 $A=\left\{x \,\middle|\, x=1-\dfrac{1}{n}, n=1,2,\cdots\right\}$, 求证

$$\sup A=1, \ \inf A=0.$$

证 先证 $\sup A=1$.

(1) $\forall x\in A,\ x=1-\dfrac{1}{n}\le 1$;

(2) $\forall \varepsilon>0$,若$\varepsilon\ge 1$，则取 $x_0=1-\dfrac{1}{2}\in A,\ x_0>1-\varepsilon.$

若$1>\varepsilon>0$,则$1-\varepsilon>0$, $\exists\, x_0=1-\dfrac{1}{n_0}\left(n_0=[\dfrac{1}{\varepsilon}]+1\right)$

有 $x_0>1-\varepsilon.$

因此，$\sup A=1.$

再证 $\inf A = 0.$

(i) $\forall x \in A,\ x = 1 - \dfrac{1}{n} \geq 0$;

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists\, x_0 = 0 \in A, x_0 < \varepsilon.$

因此 $\inf A = 0.$

注：实数集的上界、下界、上确界, 下确界均未必存在，若上确界, 下确界存在则唯一

问题：满足什么条件的实数集必有上确界和下确界？

以下确界原理也可作公理, 不予证明.

定理1.1 (确界原理)

任一有上（下）界的非空实数集必有上（下）确界.

上述确界原理的证明利用到实数集的完备性.

注：非空有界实数集的上（下）确界是唯一的！

●数集的最大数、最小数与上确界、下确界的关系

设A为实数集R的非空子集，且A有最大值和最小值，则

$$\max A = \sup A; \quad \min A = \inf A$$

证明 $b_0 := \max A, \quad b_0 \in A$

$$b_0 \geq x \quad \forall x \in A$$

b_0为是数集A的一个上界，并且比b_0小的数都不是A的上界，所以b_0就是最小的上界。

1.3 映射与函数的概念

1、映射的概念

定义域 记 D_f,即 $D_f = A.$

定义 设 A、B是两个非空集合, 如果存在一个法则f,使得对 $\forall x\in A$,通过f,在B中有唯一确定的元素 y 与之对应,则称f为从 A 到 B 的**映射**(或**算子**),记作

$$f: A\to B, \quad \text{或} \quad f: x\mapsto y=f(x), \quad x\in A$$

并称y为x(在映射f下)的**象**, 即 $y=f(x)$,

x称为y (在映射f下)的**原象**.

$f(A)=\{y\in B \mid \forall x\in A, y=f(x)\}$称为映射的**值域**($R(f)$) R_f

注 (1) 构成一个映射必须具备以下二个要素:

① 集合A, 即定义域 $D_f = A$;

② 对应法则f, 使对 $\forall x \in A$, 有唯一确定的

$y = f(x)$与之对应.

(2) 对 $\forall x \in A$,元素 x 的象y是唯一的;

而对 $\forall y \in R_f$,元素 y 的原象不一定是唯一的;

映射f 的值域 R_f是Y的一个子集, 即$R_f \subset Y$,

不一定 $R_f = Y$.

(3) 设 $f, g: A \to B$, 若 $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$,

则称映射f与g相等, 记作 $f = g$

例1. 设$f: R \to R$, 对每个$x \in R$, $f(x) = x^2$.

例2.设$X = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $Y = \{(x,0) \mid |x| \le 1\}$,
$f: X \to Y$,对每个$(x,y) \in X$, $f(x,y) = (x,0)$.

例3. 映射$f: [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$,对每个$x \in R$, $f(x) = \sin x$.

2、一一映射与对等

若 $\boxed{f(A)=B}$ ，就称该映射是A到B**上的映射**(即**满射**).

即B 中任一元素y 都是A中某 元素的象.

若$f(A)$中的每个y，都有**唯一**的原象，则称f 为**单射**.

即，若 $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$, 必有$f(x_1) \neq f(x_2)$,

即， 若 $\forall x_1, x_2 \in A$, $f(x_1) = f(x_2)$, 必有 $x_1 = x_2$.

若映射f 既是满射, 又是单射, 则称f 是

一一映射(或**双射**), 记作 $f: A \xrightarrow{1-1} B$

例1. 设$f: R \to R$, 对每个$x \in R$, $f(x) = x^2$.

例2.设$X = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $Y = \{(x,0) \mid |x| \le 1\}$,
$f: X \to Y$,对每个$(x,y) \in X$, $f(x,y) = (x,0)$.

例3. 映射$f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$,对每个$x \in R$, $f(x) = \sin x$.

例 设$A_1=(-\infty,\ +\infty)$, $A_2=\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$,

$B_1=(-\infty,\ +\infty)$, $B_2=[-1,\ 1]$.

对应关系: 对定义域内的任一x,

$f_i(x)=\sin x,\ \ i=1,2,3,4$

$f_1: A_1\to B_1$, 既非满射, 又非单射;

$f_2: A_1\to B_2$, 满射, 非单射;

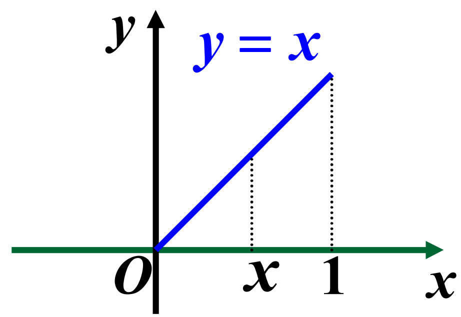
$f_3: A_2\to B_1$, 单射, 非满射;

$f_4: A_2\to B_2$, 满射, 单射, 即为一一映射.

练习

(1) 如图设 $A=[0,1]$, $B=\{(x,y)\,|\,y=x, x\in X\}$.

令由A到B的对应关系为



$$f: x\in A \to (x,x)\in B,$$

则f是一个从A到B的映射.

满射, 单射, 即为一一映射.

(2) 设$N^+=\{1,\ 2,\cdots,\ n,\cdots\}$, $B=\{2,\ 4,\cdots,\ 2n,\cdots\}$.

令 $f: n\mapsto 2n \quad (n=1,2,\cdots)$,

则f是一个从N^+到B的映射.

满射, 单射, 即为一一映射.

映射又称为算子。根据集合A、B的不同情形， 在不同的数学分支中,映射又有不同的惯用名称：

非空集A到数集B的映射称为泛函

非空集A到它自身的映射称为 A上的变换

从实数集(或其子集)X到实数集Y的映射通常称为 定义在A上的函数

定义 设A和B是两个非空集合，若存在映射

$$f: A \xrightarrow{1-1} B$$

则称集合A与B**对等(等势)**，记为 $A \sim B$

若两个集合彼此对等，则认为它们个数是相同的！

对任意的集合A，B，C，对等关系具有如下性质

(1) 反身性： $A \sim A$

(2) 对称性： 若 $A \sim B$，则 $B \sim A$

(3) 传递性： 若 $A \sim B$, $B \sim C$，则 $A \sim C$

等价关系

例 奇数集 ~ 偶数集 ~ 自然数集

~ 整数集 ~ 有理数集

有理数集与实数集不对等

$[a,b] \sim [0,1]$ $\qquad \boxed{f: x \mapsto y = \dfrac{x-a}{b-a}}$

$(-1,1) \sim (-\infty,+\infty)$ $\qquad \boxed{f: x \mapsto y = \tan\dfrac{\pi x}{2}}$

3 函数的概念

定义1.4 设实数集 $A,B\subseteq R$,则称映射 $f:A\to B$ 为定义在A上的**函数**, 通常简记为

$$y = f(x),\quad x\in A,$$

记$D_f = A$

因变量 自变量 定义域(domain)

定义中,如果对$\forall x\in A$,按对应法则f, 总有**唯一**确定的值y与之对应, 这个值称为函数f在x处的**函数值**,记作 $y=f(x)$, 函数关系

函数值$f(x)$全体组成的集合称为 函数f的**值域**(**range**), 记作 R_f 或$f(A)$,即

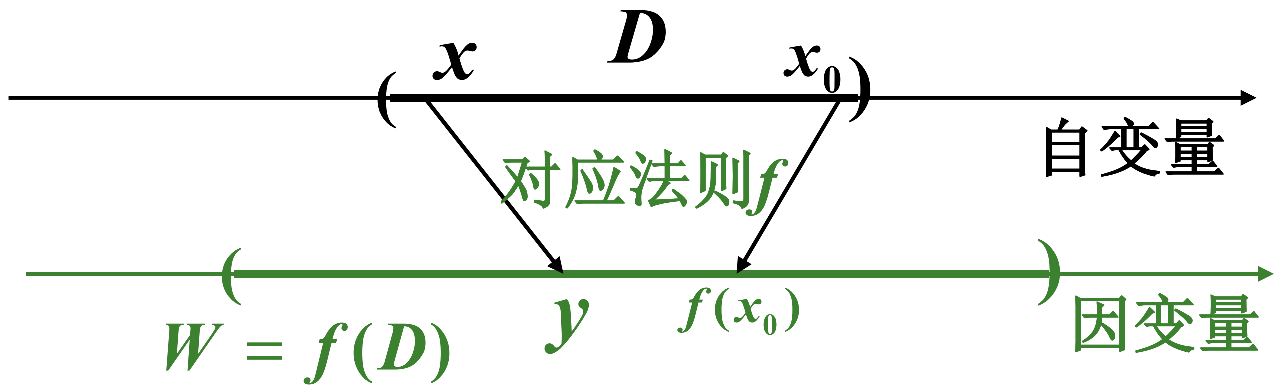
$$R_f = f(A) = \{y \mid y = f(x), x\in A\}.$$

注1. 函数是特殊的映射, 为两个实数集之间的映射.

注2.定义中的实数集B常以R来代替,于是定义域A和对应法则f就成为确定函数的两个主要因素.故我们也常用$y = f\left(x\right), x \in A$表示一个函数. 因此,我们说两个函数相同, 是指它们有相同的定义域和对应法则.

• 函数的两要素:

定义域与对应法则.



两函数只有在定义域和对应法则皆相同时才能称为相同.

注3. 函数的值域是定义域和对应法则所确定.

注4. 确定函数定义域时, 应注意:

若函数有实际意义, 依据实际问题是否有意义来确定;

若函数不表示某实际问题, 而只是一个抽象的数学表达式, 则定义域为自变量所能取得的使得函数$y=f(x)$成立的一切实数所构成的集合,这种定义域称为函数的自然定义域.

例如, $y=\sqrt{1-x^2}$ $D:[-1,1]$

$$y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad D:(-1,1)$$

注5. 在函数定义中, 对每个$x \in D$, 只能有唯一的y值与它对应, 这样定义的函数称为单值函数；若允许同一个x值可以对应多于一个的y值，则称这种函数为多值函数．在本书范围内我们只讨论单值函数.

注6. 函数的几何意义: 设函数$y = f(x), x \in D$. 则$\forall x \in D$, 对应的函数值$y = f(x)$. 将x作为横坐标, 对应的函数值y作为纵坐标, 在xoy平面上得到点(x, y). 当x遍取D中的一切数时, 就得到点集

$$C = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数$y = f(x)$的图形.

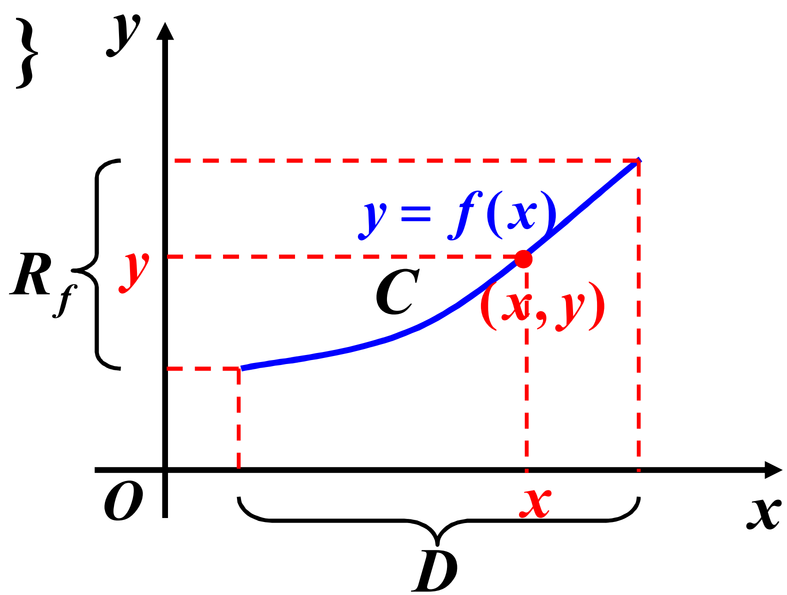
•常用的定义函数的方法

- 列表法
- 图像法

函数的图像 函数的一种直观表示方法.

在平面直角坐标系中，取自变量在横轴上变化,因变量在纵轴上变化，则函数**的图形**是指平面点集：$R \times R$ 中的集合

$$\{P(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$$



通常是一条或几条曲线(包括直线).

•常用的定义函数的方法

- 解析法
  - 显函数形式（y由x的解析式直接表示出来）

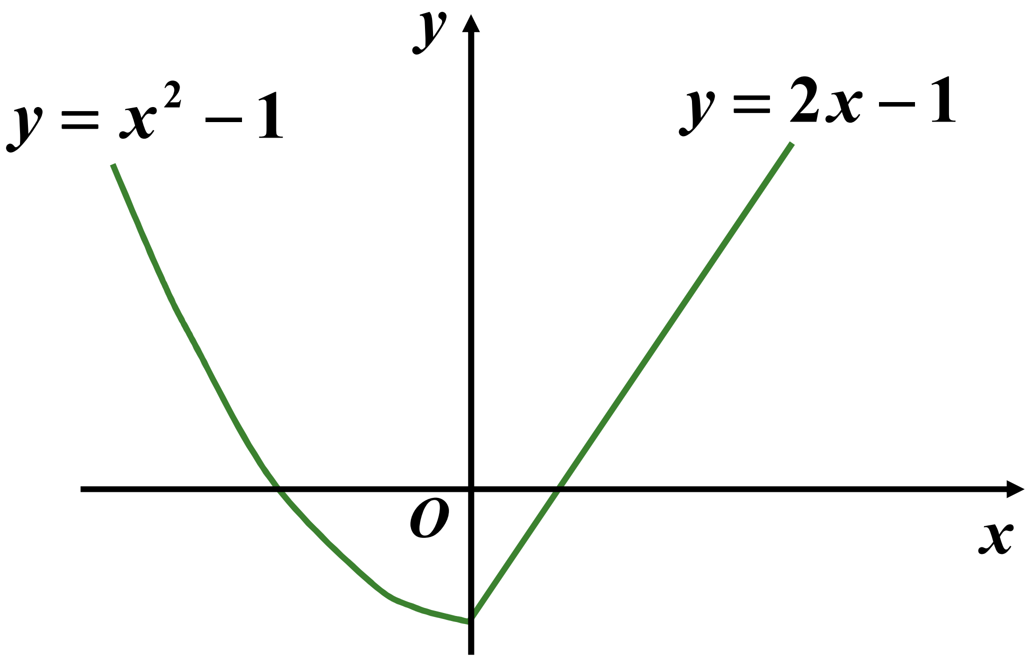
    例如：$y = x^2$

  - 隐函数形式 （y没有由x的解析式直接表示出来)

    例如：$e^y + xy = e$

  - 分段函数形式（函数在其定义域的不同范围内具有不同的解析表达式）

例 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x>0\\ x^2-1, & x\le 0\end{cases}$



练习

填空:

设 $f(x)=\begin{cases} 2^x, & -1\le x<0; \\ 2, & 0\le x<1; \\ x-1, & 1\le x<3. \end{cases}$

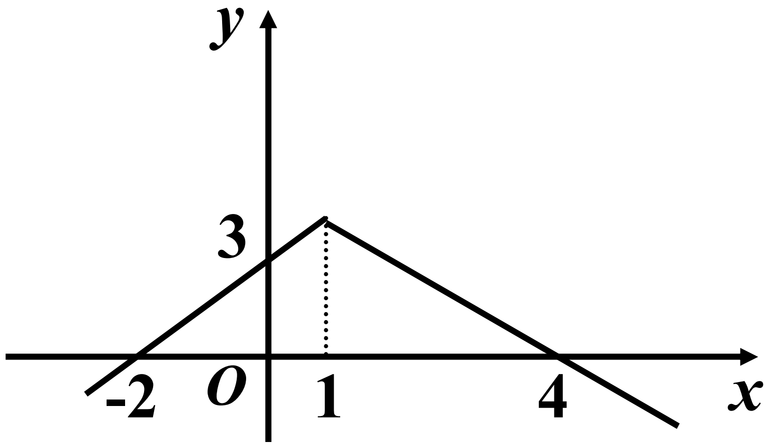
则$f(x)$的定义域 $\underline{[-1,3)}$　　$f(0)=\underline{\ 2\ }$

$f(1)=\underline{\ 0\ }$

2. 用分段函数表示函数 $y = 3 - |x - 1|$

答案: $y = \begin{cases} 3 + (x - 1), & x < 1 \\ 3 - (x - 1), & x \ge 1 \end{cases}$

即 $y = \begin{cases} 2 + x, & x < 1 \\ 4 - x, & x \ge 1 \end{cases}$



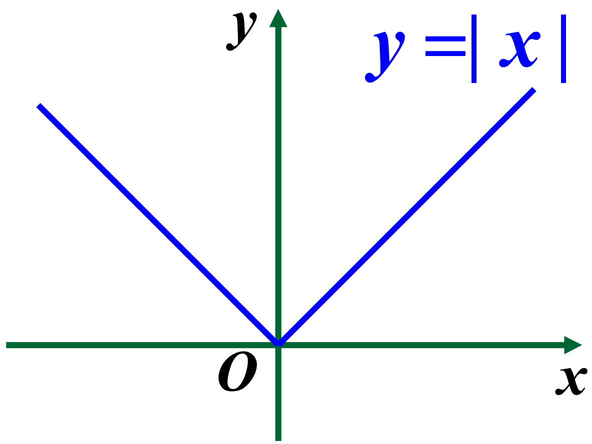
注

分段函数在其整个定义域上是一个函数,而不是几个函数.

•几个今后常引用的函数

例　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0, \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

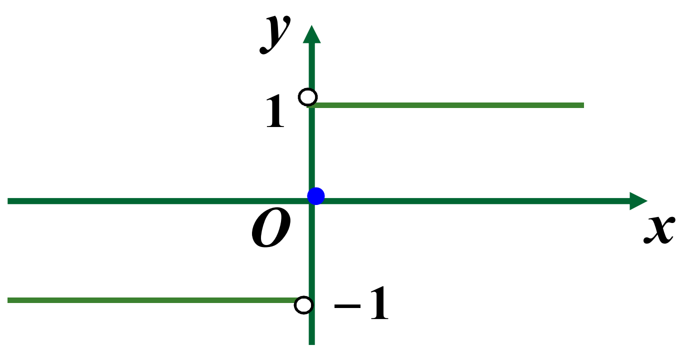


定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,

值域 $R_f=[0,\ +\infty)$.

例1.8 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R_f = \{-1, 0, 1\}$.

对$\forall x \in R$, 有 $x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$ 或 $|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x$.

例1.7 **取整函数** $y=[x]$表示不超过x的最大整数

$$y=[x]=n,\ \text{当}\ n\le x<n+1,\ n\in Z$$

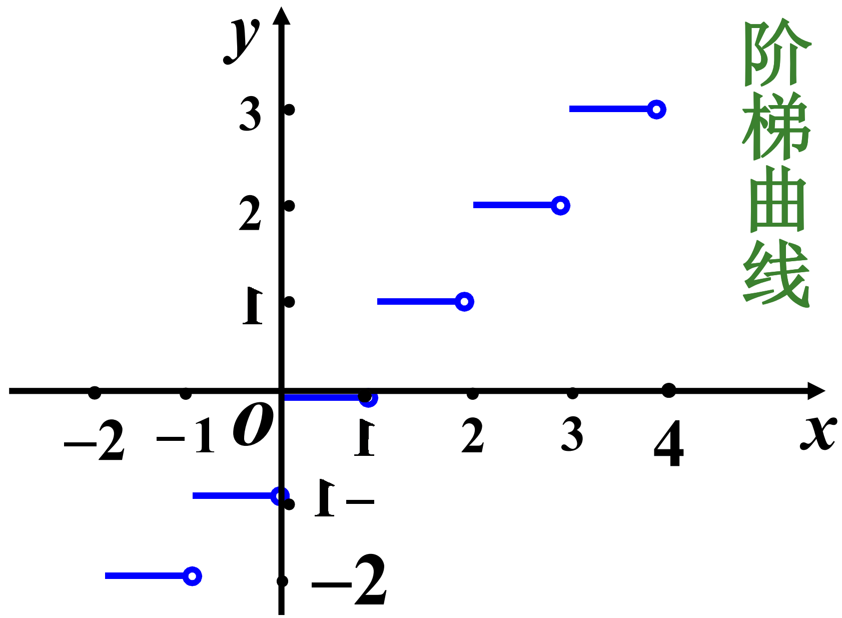
如 $[2.5]=2$

$[5.2]=5$

$[7.9]=7$

$[5]=5$

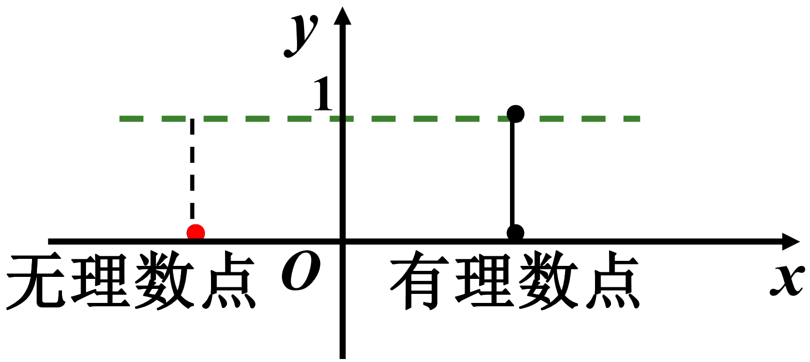
$[-2.5]=-3$



定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=Z$.

例1.9 狄利克雷(Dirichlet)函数

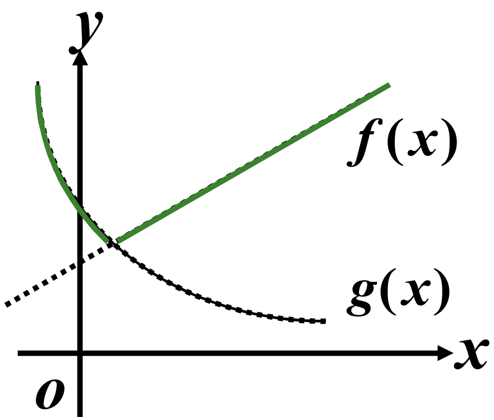
$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q, \ (x\text{为有理函数}) \\ 0, & x \in Q^C. \ (x\text{为无理函数}) \end{cases}$$

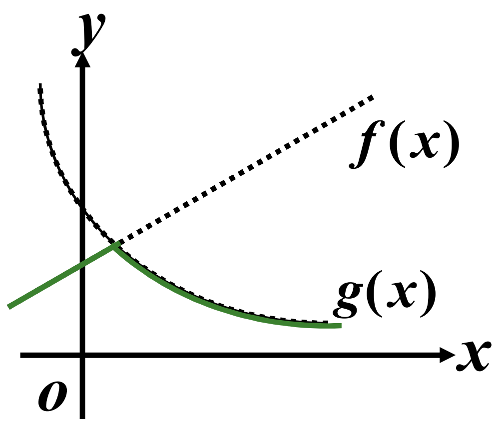


定义域 $D = (-\infty, +\infty)$，值域 $R_f = \{0,1\}$.

例 取最值函数

$$y = \max\{f(x), g(x)\} \qquad y = \min\{f(x), g(x)\}$$



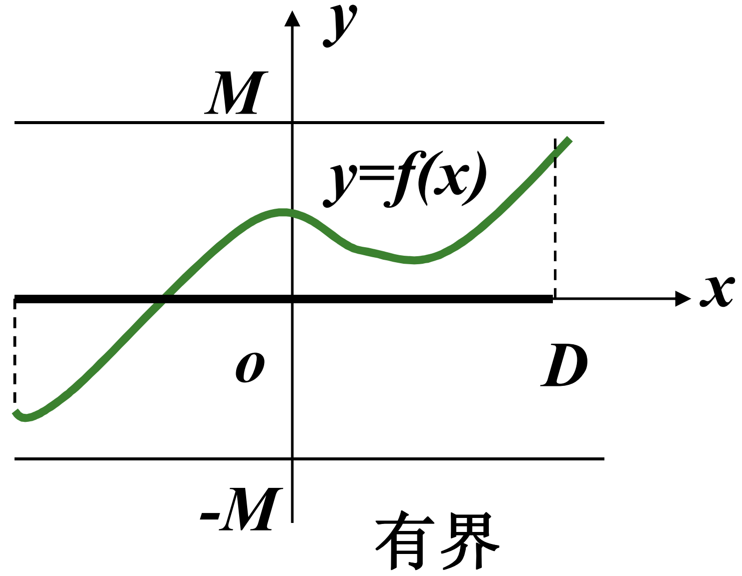


函数的几种特性

1. 函数的有界性:

设函数$y=f(x), x\in D$, 若$\exists$(存在)$M>0$,使得对于任一$x\in D$,有 $|f(x)|\leq M$,则称函数$f(x)$在D上有界.

例如 函数$y=\sin x$, $y=\cos x$在$(-\infty, +\infty)$上均为有界函数.



否则称函数$f(x)$在D上无界, 即

对于任意正数$M>0$,总存在点$x_0 \in D$, 使$\left|f(x_0)\right|>M$.

例: 函数$y=\frac{1}{x}$在$D=\left(0,1\right)$上无界.

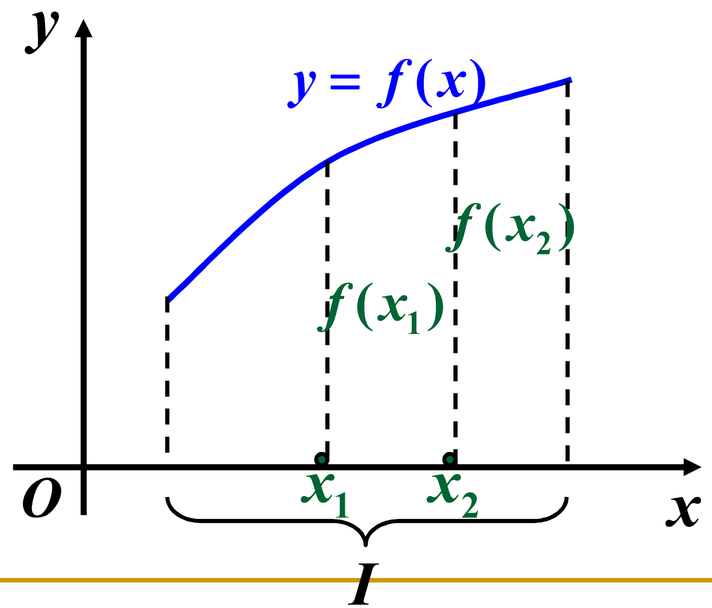
2．函数的单调性:

设函数 $f(x)$的定义域为D, 区间$I \subset D$.

如果对 $\forall x_1, x_2 \in I$, 当$x_1 < x_2$时恒有

$$f(x_1) \le f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在区间I上是单调增加;



（若改为严格不等号时，称为严格单调增加的）

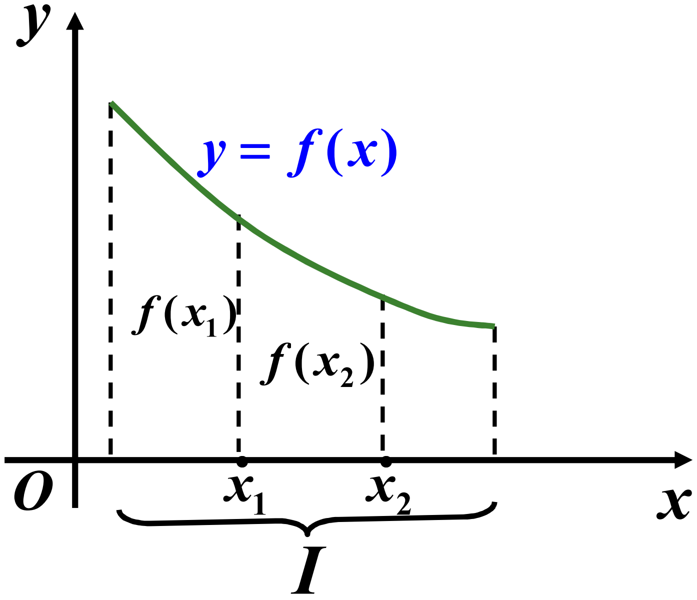
例：$y=e^x$ 在（$-\infty, +\infty$）内单调增加。

设函数 $f(x)$的定义域为D,区间$I \subset D$.

如果对 $\forall x_1, x_2 \in I$, 当$x_1 < x_2$时恒有

$$f(x_1) \geq f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在区间I上是单调减少.



（若改为严格不等号时，称为严格单调减少的）

例如: $f(x) = \frac{1}{x}$在$(0, +\infty)$内是单调递减的.

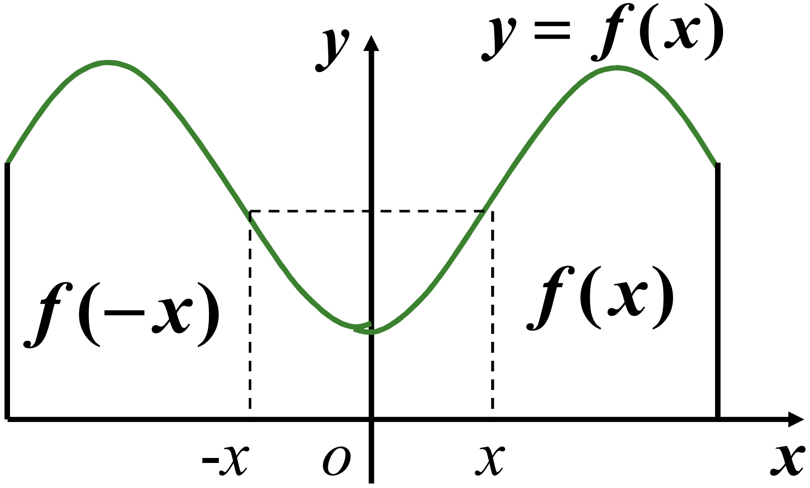
注 应指明单调区间,否则会产生错误.

例: 考察函数$y=x^2$在$(-\infty,+\infty)$内的单调性.

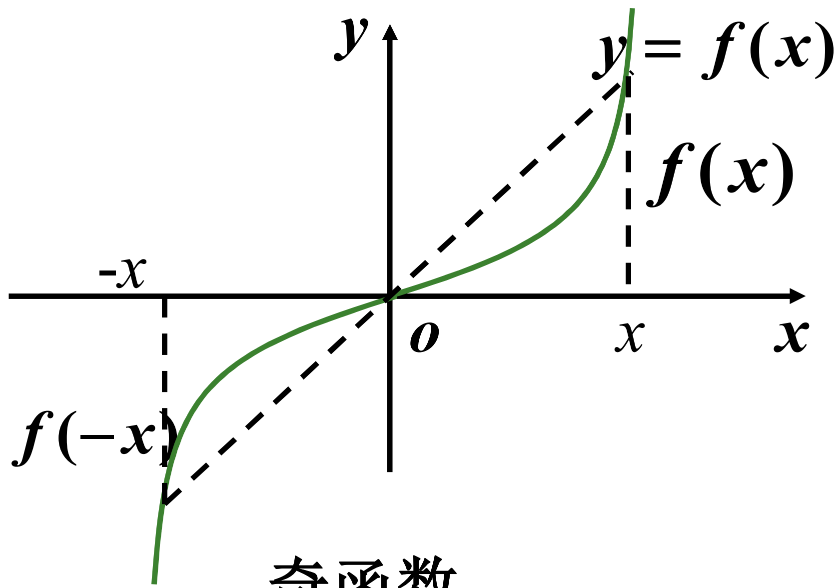
注:单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数.

3．函数的奇偶性:

设函数f(x)的定义域为D关于原点对称，若对于任意$x\in D$，有$f(-x)=f(x)$，则称f(x)为偶函数. 若对于任意$x\in D$，有$f(-x)=-f(x)$，则称f(x)为奇函数.



偶函数



奇函数

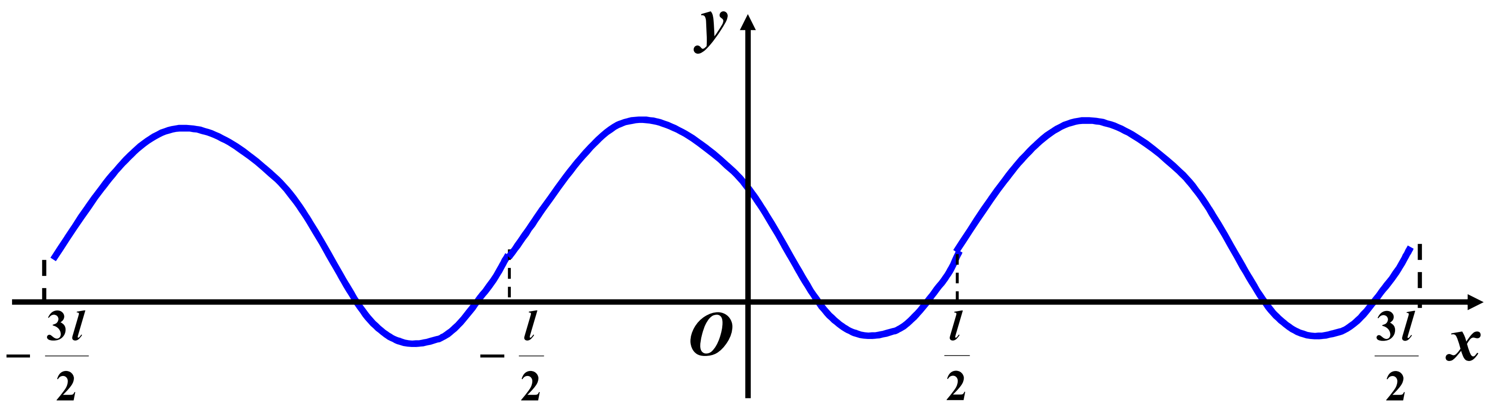
例：判断函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$的奇偶性。

4．函数的周期性:

设函数$f(x)$的定义域为D，如果存在一个大于零的数l，使得对于任一$x\in D,(x\pm l)\in D$.

且$f(x+l)=f(x)$恒成立，则称$f(x)$为周期函数，l称为$f(x)$的周期. 通常我们所说的周期是指最小正周期.

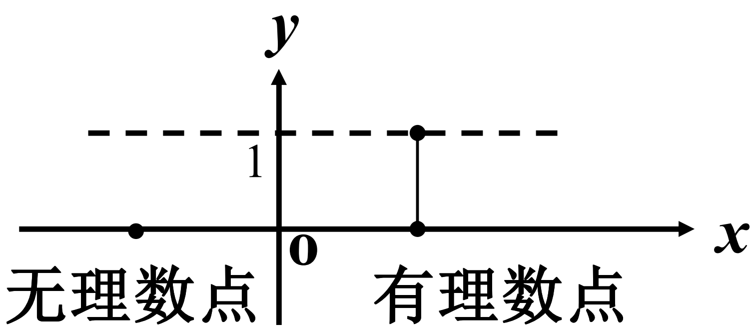
周期为 l 的周期函数



注: 并非所有周期函数都存在最小正周期.

例 狄利克雷(Dirichlet)函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q, \text{(当}x\text{是有理函数时)} \\ 0, & x \in Q^C. \text{(当}x\text{是无理函数时)} \end{cases}$$



这是一个周期函数, 任何正有理数r都是它的周期. 因为不存在最小的正有理数, 所以没有最小正周期.

1.4 复合映射与复合函数

(1) 复合映射

定义. 设有映射链

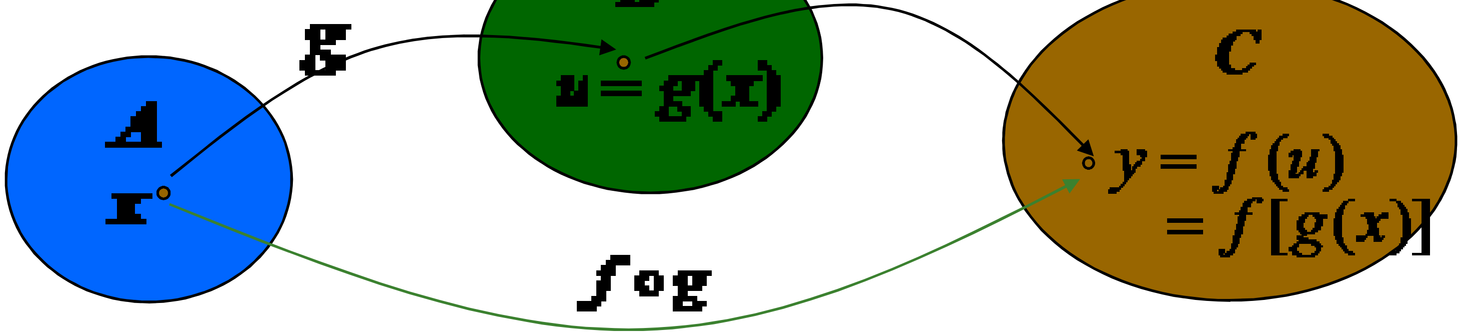
中间元素

$$\forall\ x\in A \xmapsto{\ g\ } u=g(x)\in B$$

$$\forall\ u\in B \xmapsto{\ f\ } y=f(u)\in C$$

由上述映射链可定义由 A 到 C 的映射称为 g 与 f 构成的复合映射，记作 $f[g(x)]$，或 $(f\circ g)(x),\ x\in A.$

"$\circ$" 称为复合运算



注意: 构成复合映射的条件 $g(A)\subseteq B$ 不可少.

(2) 复合函数 — 复合映射的特例

定义. 设有函数链

$\boxed{\text{中间元素}}$

$$\forall\ x \in A \xrightarrow{g} u = g(x) \in B$$

$$\forall\ u \in B \xrightarrow{f} y = f(u) \in C$$

由上述函数链可定义由 A 到 C 的函数称为 g 与 f 构成的复合函数，记作 $f[g(x)]$，或 $(f \circ g)(x)$, $x \in A$.

注意: 构成复合函数的条件 $g(A) \subseteq B$ 不可少.

例1.10　设$g: x \mapsto \sqrt{x}, f: x \mapsto \sin x$

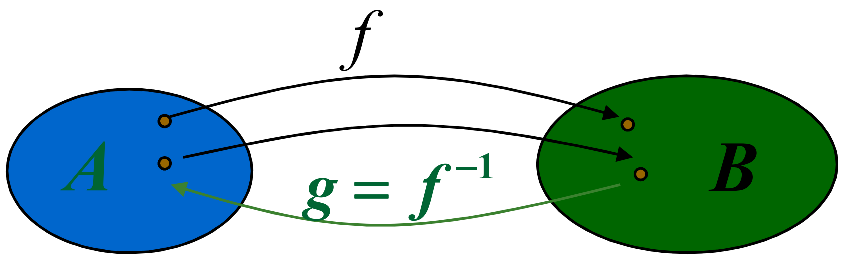
(1) 逆映射的定义 1.5 逆映射与反函数

定义: 设映射 $f: A \to B$ ， 若存在另一映射

$g: B \to A$, 使 $\forall y \in B$ ，$g(y) = x$ ，其中 $f(x) = y$,

称 f 是可逆映射.

称此映射 g 为 f 的逆映射 .



记成 $g = f^{-1}$.

例如, 映射 $y = x^2, x \in (-\infty, 0]$, 其逆映射为

$$y = -\sqrt{x}, \quad x \in [0, +\infty)$$

设映射 $f: A \to B$, 则 $g: B \to A$,

为 f 的逆映射的充要条件是 $g \circ f = I_A, f \circ g = I_B$

定义 设A是非空集合，定义映射$I_A: A \to A$如下：

$$I_A(a) = a, \qquad \forall a \in A$$

称I_A是A上的**恒等映射**或**单位映射**。

定理1.2 映射$f: A \to B$是可逆映射的充分必要条件是f为A到B的一一映射。

（2） 反函数

(i) 反函数的概念及性质

设函数 $f: A \to R(f)$, 若存在逆映射

$$f^{-1}: R(f) \to A$$

称此映射 f^{-1} 为 f 的反函数 .

习惯上, $y = f(x), x \in D$ 的反函数记成

$$y = f^{-1}(x) \ , x \in f(D)$$

显然, 任一反函数的定义域(值域)为其直接函数的值域(定义域).

问题: 满足什么条件的函数才有反函数?

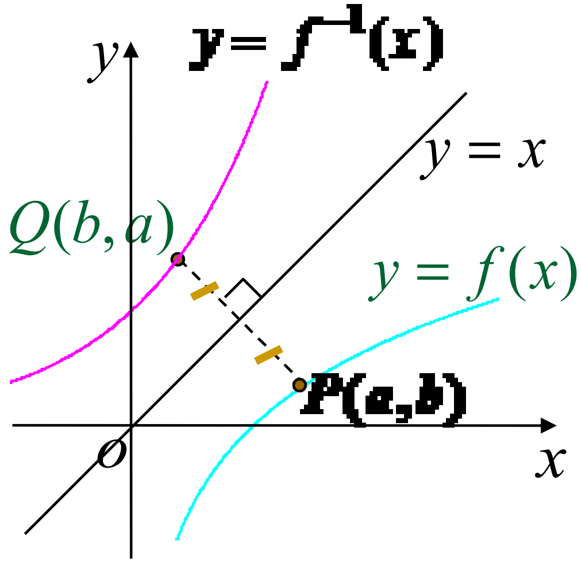
回答: 构成一一映射的函数就有反函数。

反函数存在定理

$y=f(x)$ 严格单调递增 (减),则其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 存在,

且也严格单调递增 (减) .

(ii))函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称 .



例如，

$$\left.\begin{array}{l}\text{指数函数 } y=e^x,\ x\in(-\infty,+\infty)\\ \text{对数函数 } y=\ln x,\ x\in(0,+\infty)\end{array}\right\}\text{互为反函数，}$$

它们都严格单调递增, 其图形关于直线 $y=x$ 对称 .

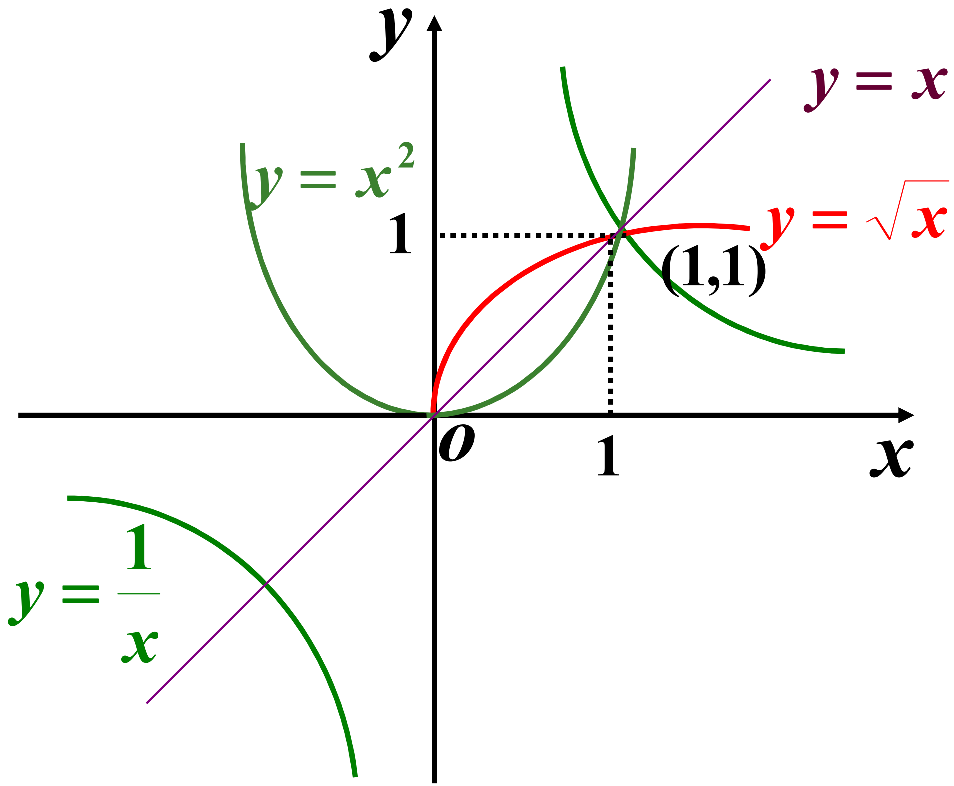
1.6 初等函数与双曲函数

1. 基本初等函数

常数函数;
幂函数;
指数函数;
对数函数;
三角函数 ;
反三角函数

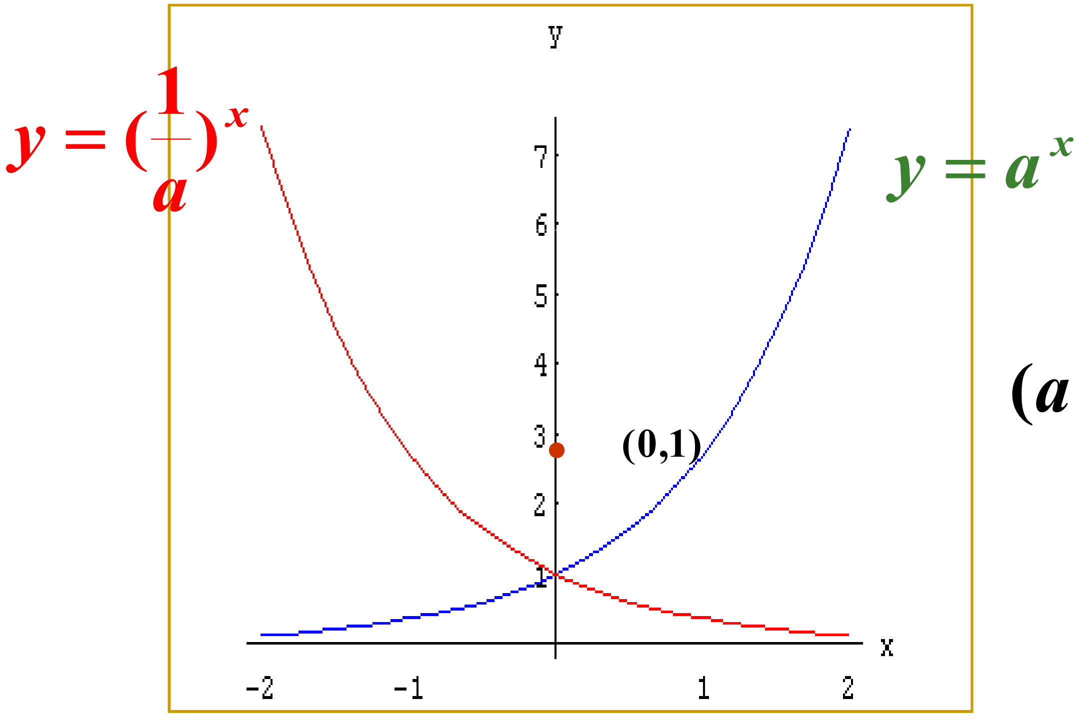
幂函数

$y = x^{\mu}$ （μ是常数）



指数函数

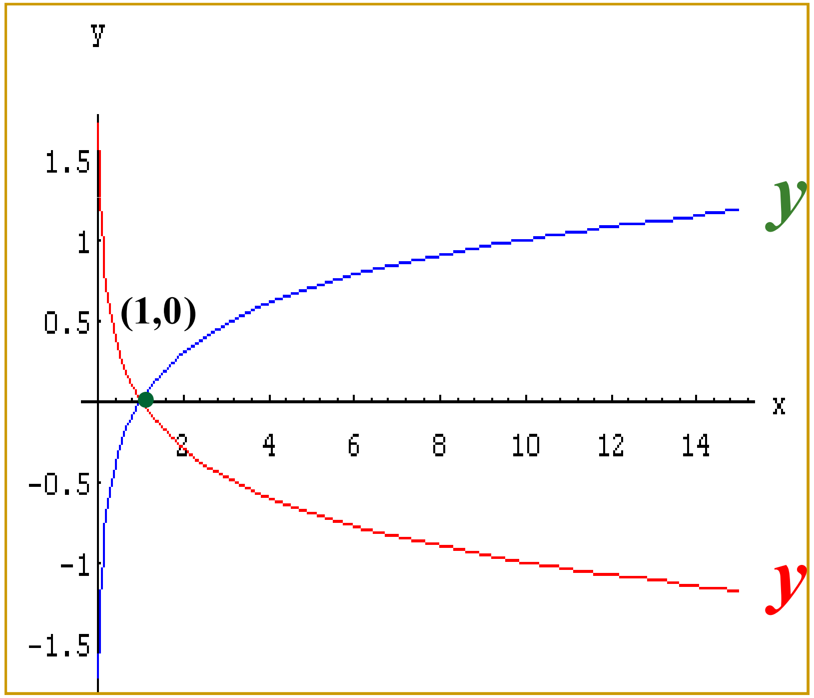
$y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$ $\qquad y = e^x$



$(a > 1)$

对数函数

$y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1) \quad y = \ln x$



$y = \log_a x$

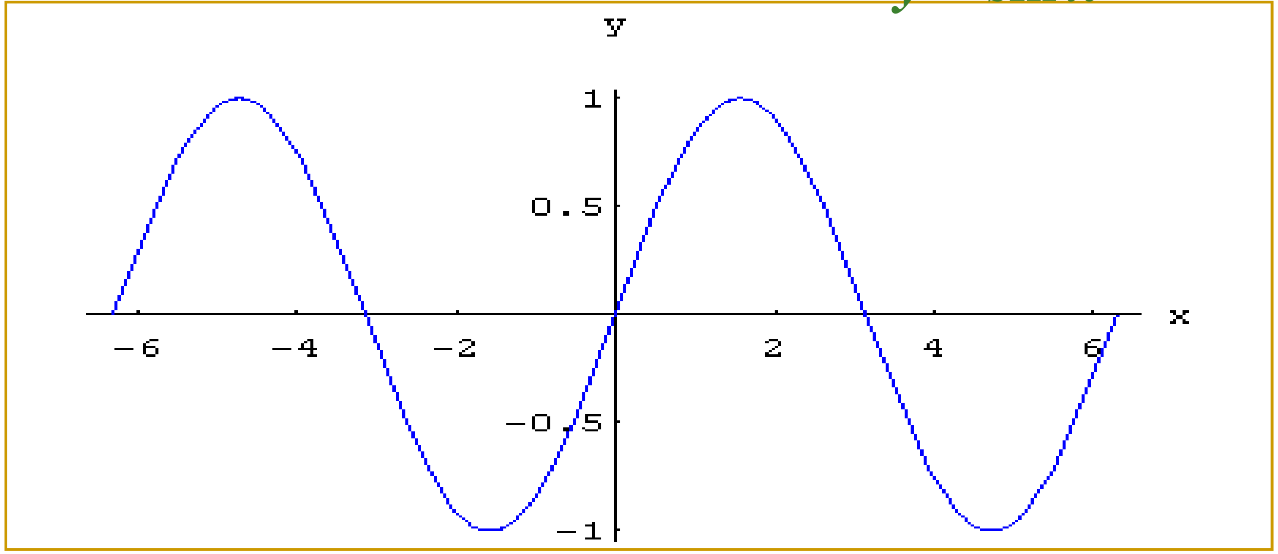
$(a > 1)$

$y = \log_{\frac{1}{a}} x$

三角函数（正弦函数）

正弦函数　$y=\sin x$

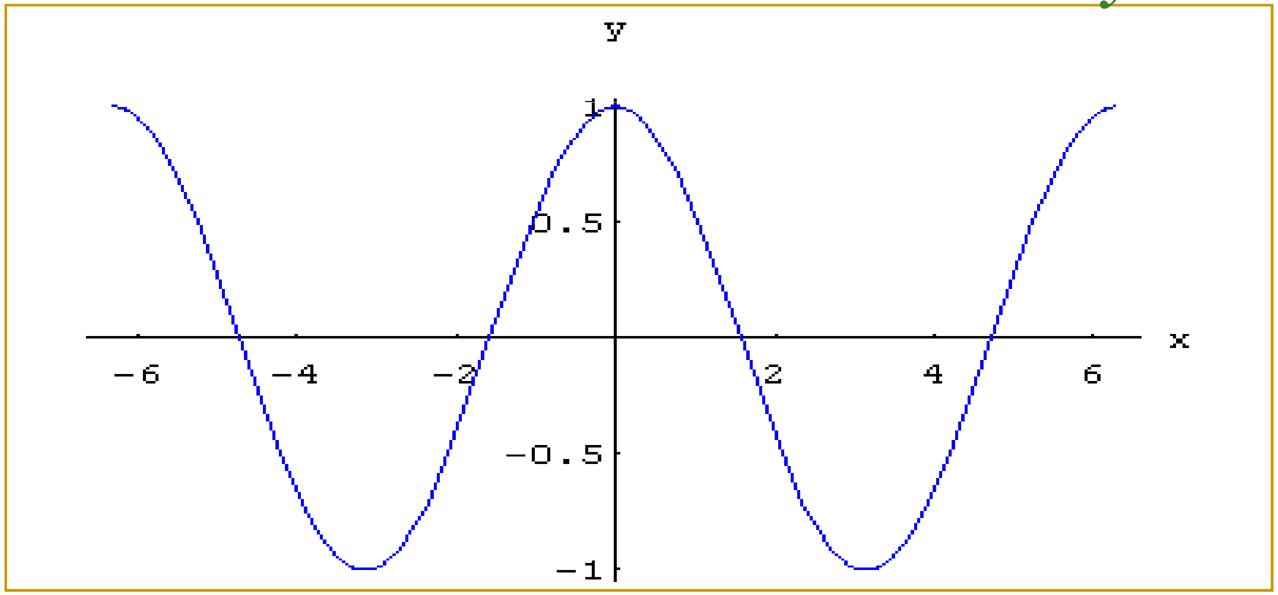
$y=\sin x$



三角函数（余弦函数）

余弦函数 $y = \cos x$

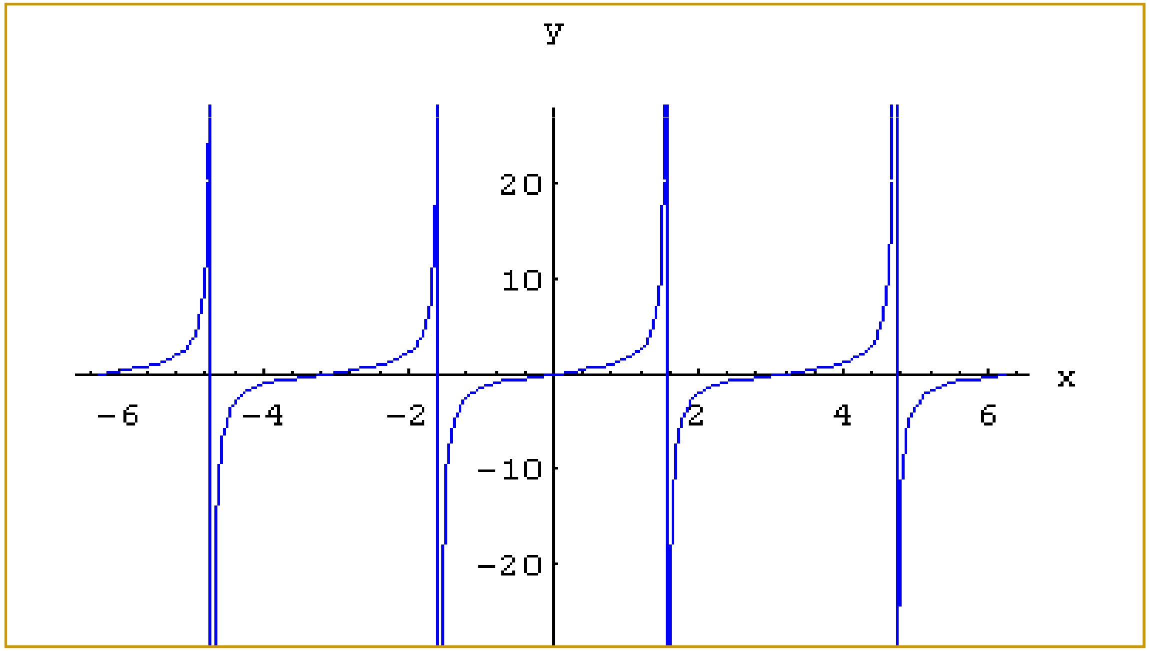
$y = \cos x$



三角函数（正切函数）

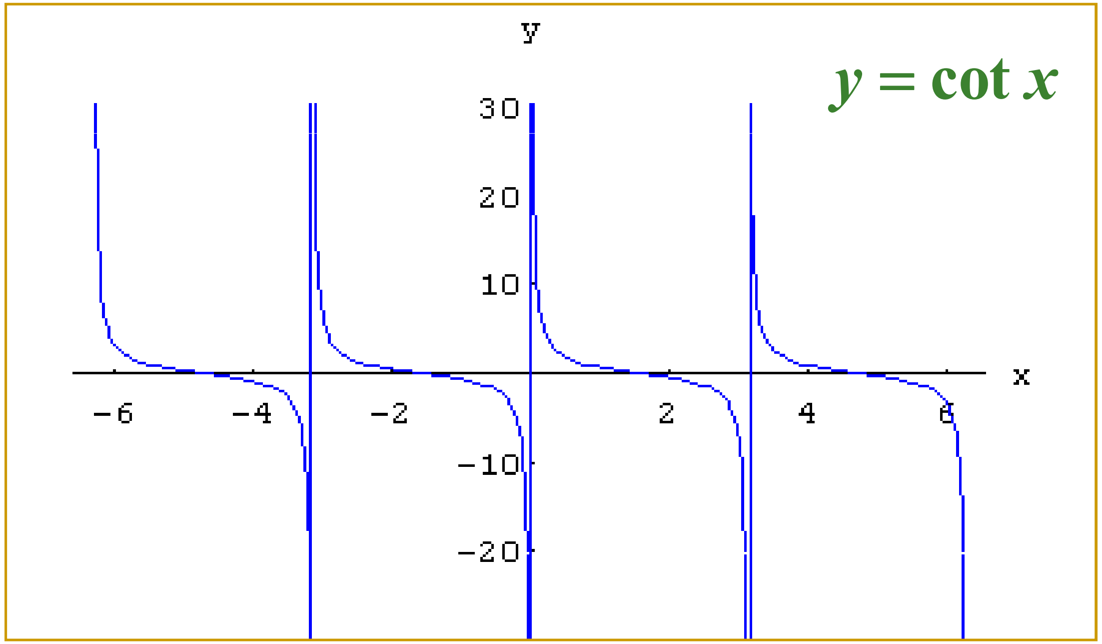
正切函数 $\boldsymbol{y} = \tan \boldsymbol{x}$

$\boldsymbol{y = \tan x}$



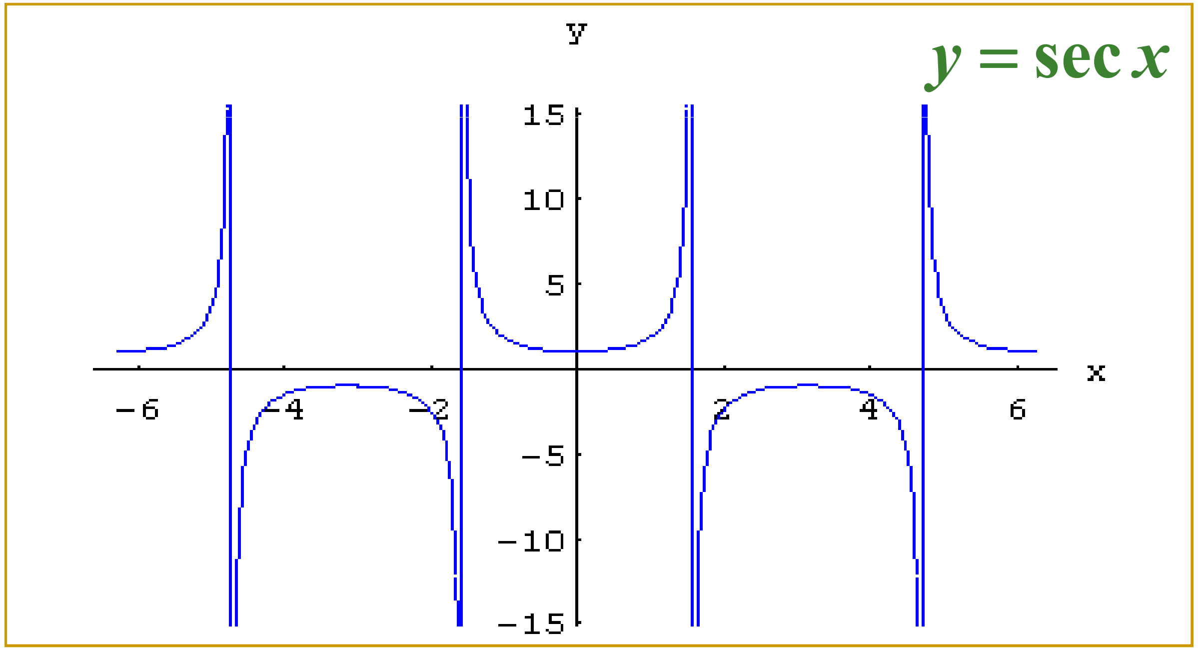
三角函数（余切函数）

余切函数　$y = \cot x$



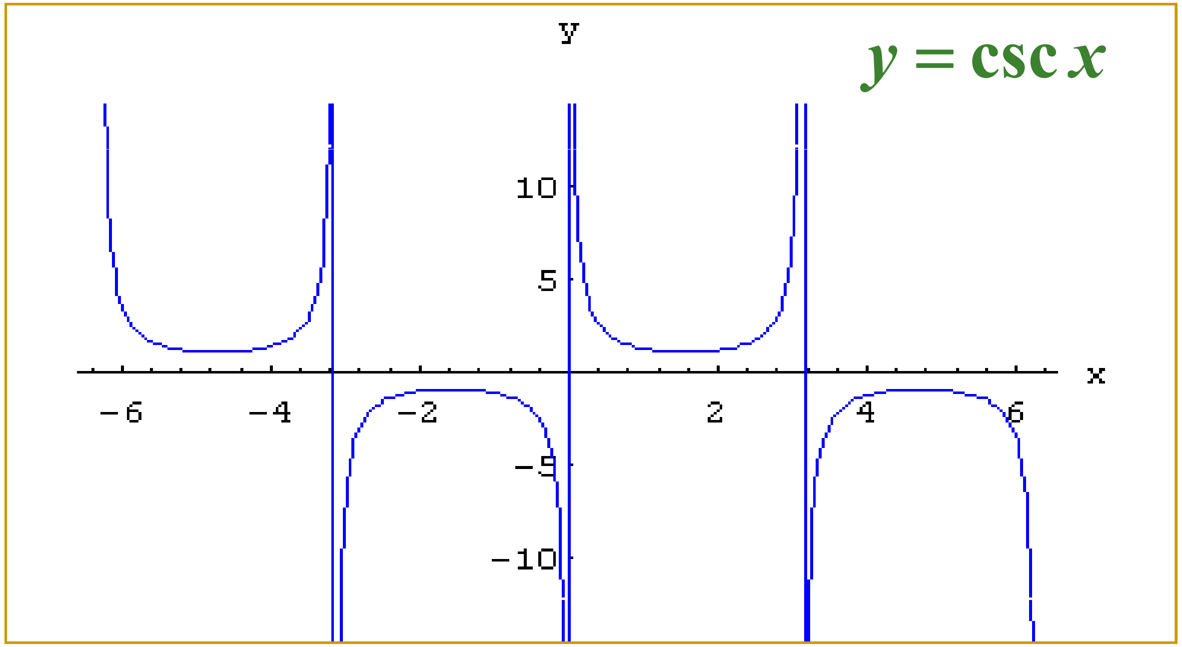
三角函数（正割函数）

正割函数 $y = \sec x$

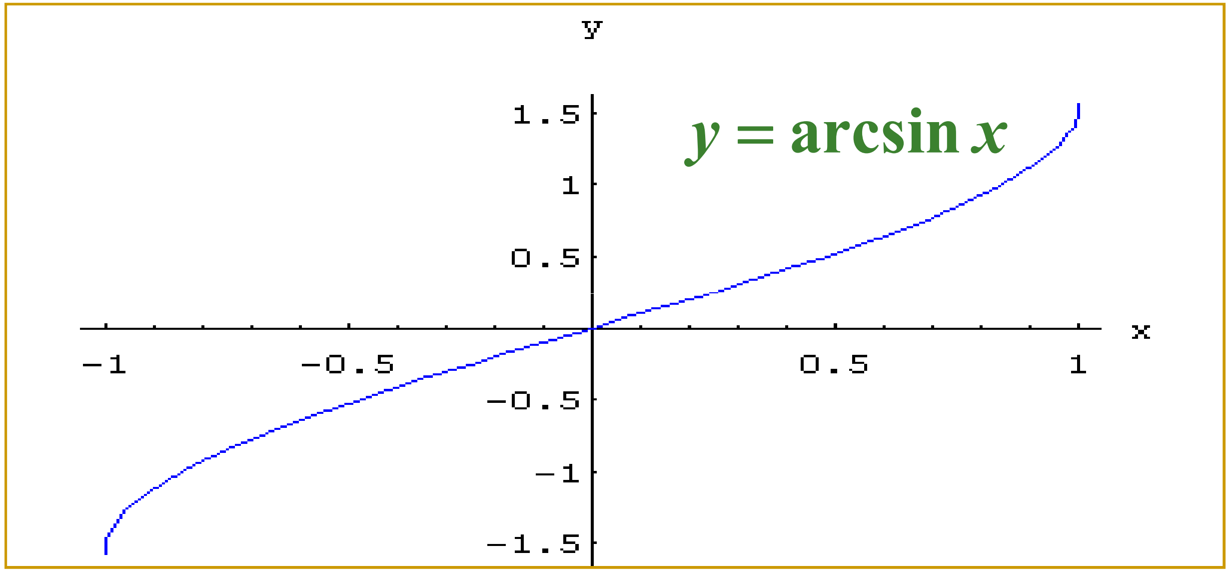


三角函数（余割函数）

余割函数 $y = \csc x$

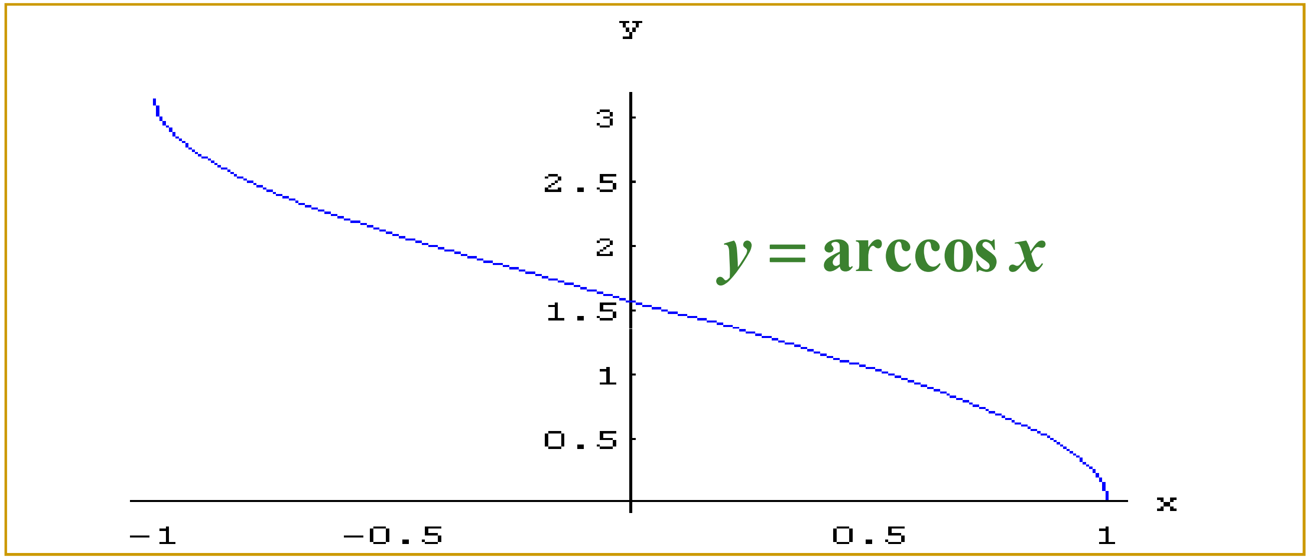


反三角函数　　反正弦函数 $y = \arcsin x$



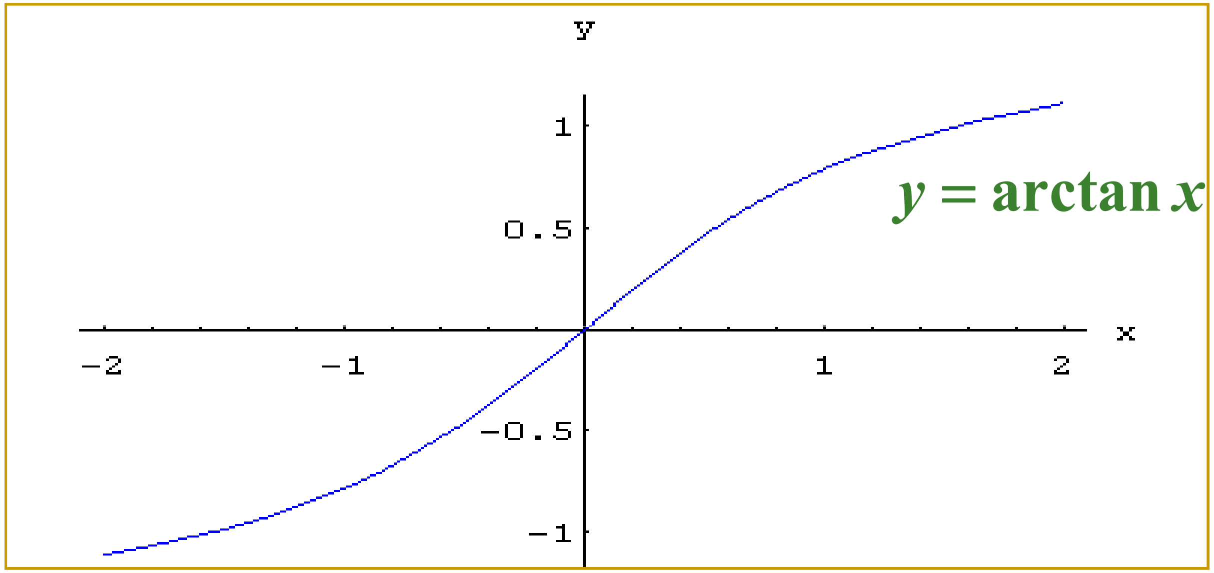
定义域$[-1,1]$，值域$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$

反余弦函数 $y = \arccos x$



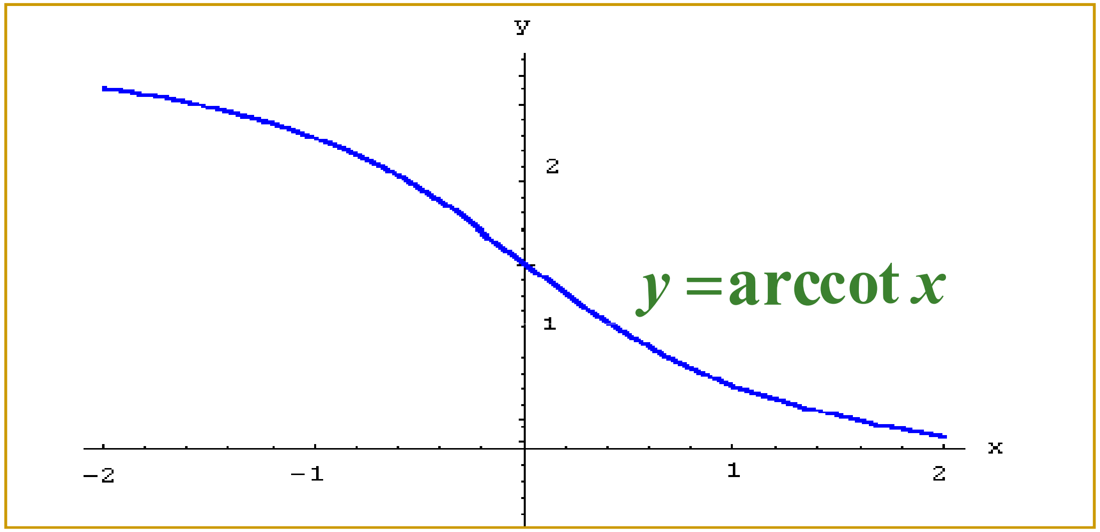
定义域$[-1,1]$，值域 $[0,\ \pi]$

反正切函数 $y = \arctan x$



定义域$(-\infty, +\infty)$，值域 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$



幂函数,指数函数,对数函数,三角函数和反三角函数统称为<u>基本初等函数</u>.

2.初等函数

由六类基本初等函数　经过有限次四则运算和复合运算所产生的函数，称为初等函数.

例如，$y=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$ 可表为 $y=\sqrt{x^2}$, 故为初等函数.

***Dirichlet*函数不是初等函数**

$y=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ 也不是初等函数

注: 分段函数未必是初等函数.

3. 双曲函数与反双曲函数

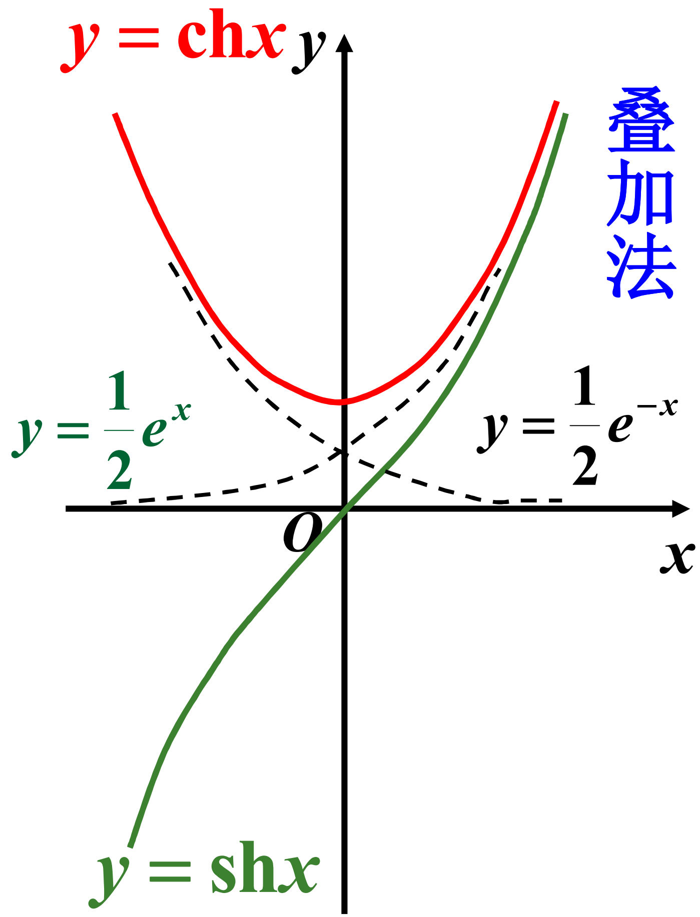
1) 双曲函数

双曲正弦 $\mathrm{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$D:(-\infty,+\infty)$, 奇函数.

双曲余弦 $\mathrm{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

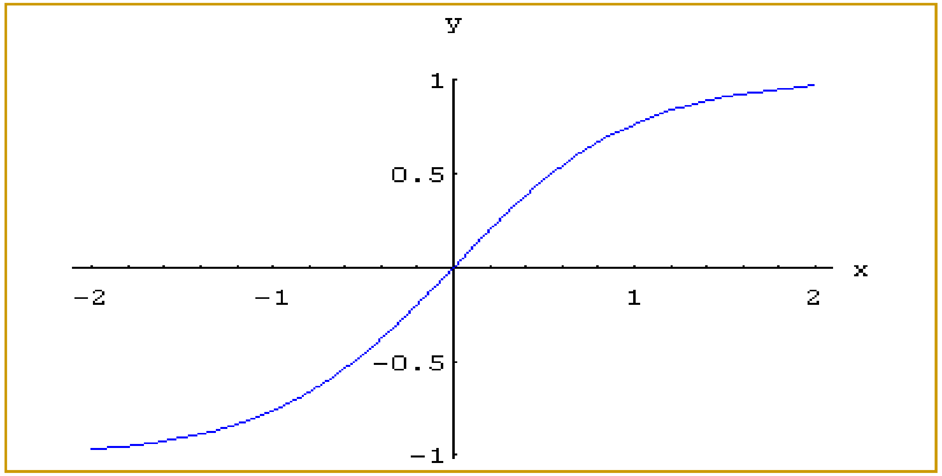
$D:(-\infty,+\infty)$, 偶函数.



双曲正切函数

双曲正切 $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$D:(-\infty,+\infty)$　　奇函数，　有界函数,



双曲函数常用公式

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y;$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y;$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1;$$

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x;$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x.$$

2) 反双曲函数

反双曲正弦 $y = \operatorname{arsh} x$

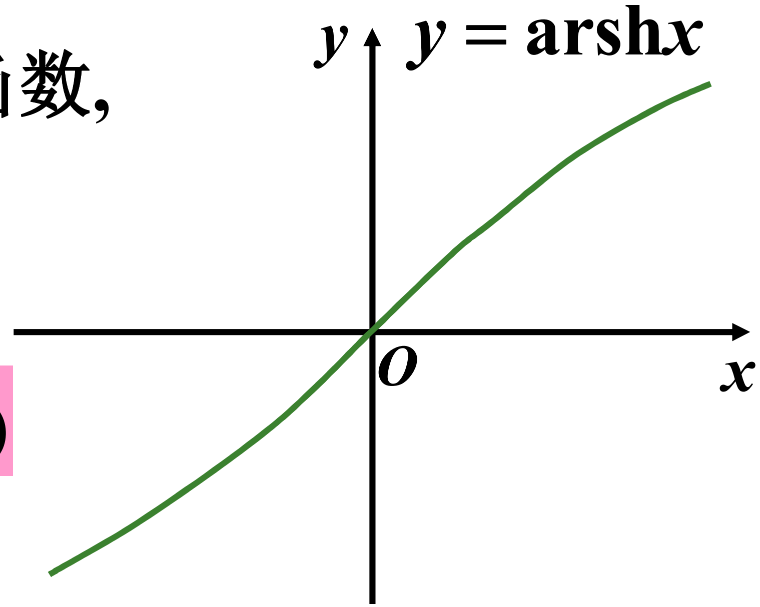
$y = \operatorname{arsh} x$ 是 $x = \operatorname{sh} y$ 的反函数,

由 $x = \operatorname{sh} y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$, 可得

$$y = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$D:(-\infty,+\infty)$ 奇函数,

在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加.



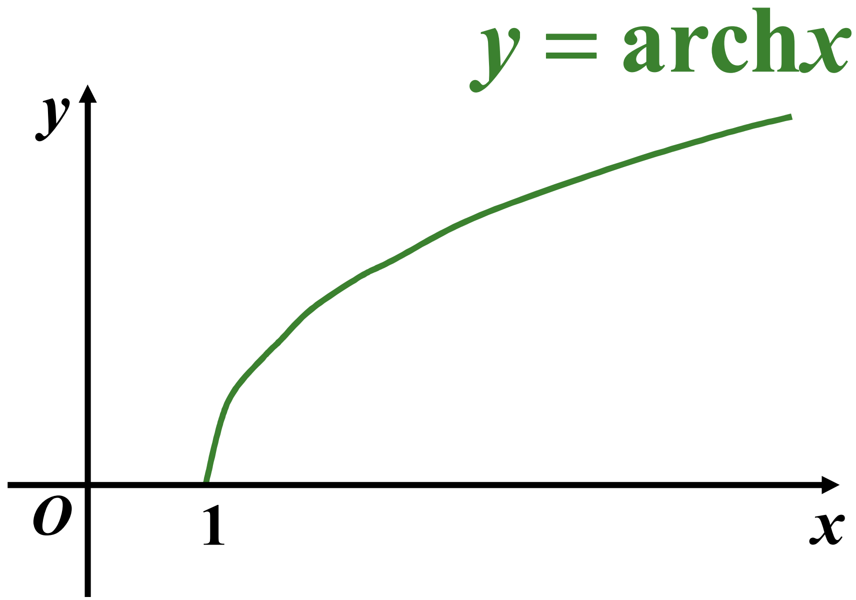
反双曲余弦 $y = \operatorname{arch} x \, (y \geq 0)$

$y = \operatorname{arch} x$

$= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

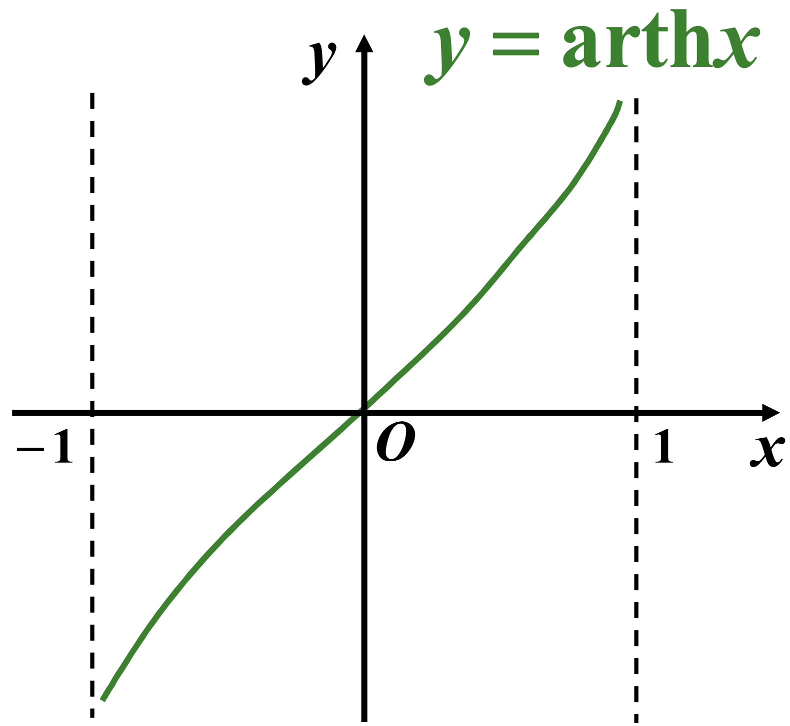
$D: [1, +\infty)$

在 $[1, +\infty)$ 内单调增加.



反双曲正切 $y = \operatorname{arth} x$

$$y = \operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$



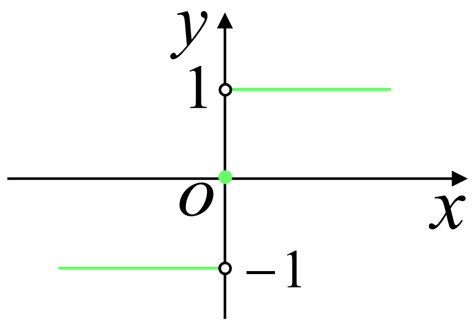
$D:(-1,1)$ 奇函数,

在 $(-1,1)$ 内单调增加.

非初等函数举例:

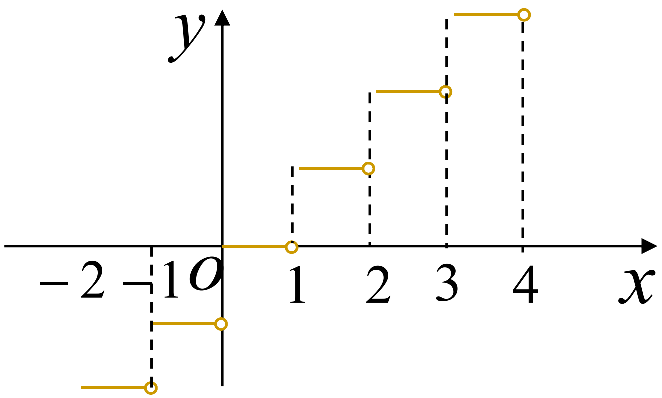
符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \\ 0, & \text{当 } x = 0 \\ -1, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$



取整函数

$$y = [x] = n, \text{ 当 } n \le x < n+1, n \in Z$$



$$y = x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} - \frac{x^7}{7!7} + \cdots,$$ 不是初等函数.

思考

1. 下列函数能否复合为函数 $y = f[g(x)]$，若能，写出其解析式、定义域、值域.

(1) $y = f(u) = \sqrt{u}$, $u = g(x) = x - x^2$

(2) $y = f(u) = \ln u$, $u = g(x) = \sin x - 1$

2. 设 $\forall x > 0$，函数值 $f(\frac{1}{x}) = x + \sqrt{1 + x^2}$，

求函数 $y = f(x)$ $(x > 0)$ 的解析表达式.

思考题解答

1. (1) $y = f[g(x)] = \sqrt{x - x^2}$

$x \in D = \{x \mid 0 \le x \le 1\}$, $f(D) = [0, \frac{1}{2}]$

(2) 不能. $\because$ $g(x) = \sin x - 1 \le 0$

$g(x)$的值域与$f(u)$的定义域之交集是空集.

2. 设 $\frac{1}{x} = u$

则 $f(u) = \frac{1}{u} + \sqrt{1 + \frac{1}{u^2}} = \frac{1 + \sqrt{1 + u^2}}{u}$,

故 $f(x) = \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}$. $(x > 0)$

例1 设 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<1 \\ x, & x\ge 1 \end{cases}$, $\varphi(x)=\begin{cases} x+2, & x<0 \\ x^2-1, & x\ge 0 \end{cases}$,

求 $f[\varphi(x)]$.

解 $f[\varphi(x)]=\begin{cases} e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<1 \\ \varphi(x), & \varphi(x)\ge 1 \end{cases}$

1^0 当$\varphi(x)<1$时,

(i) $x<0$, $\varphi(x)=x+2<1$, $\Longrightarrow$ $x<-1$;

(ii) $x\ge 0$, $\varphi(x)=x^2-1<1$, $\Longrightarrow$ $0\le x<\sqrt{2}$;

2^0　当$\varphi(x) \geq 1$时,

$(\text{i})\ x < 0,\quad \varphi(x) = x + 2 \geq 1, \Longrightarrow -1 \leq x < 0;$

$(\text{ii})\ x \geq 0,\ \varphi(x) = x^2 - 1 \geq 1, \Longrightarrow x \geq \sqrt{2};$

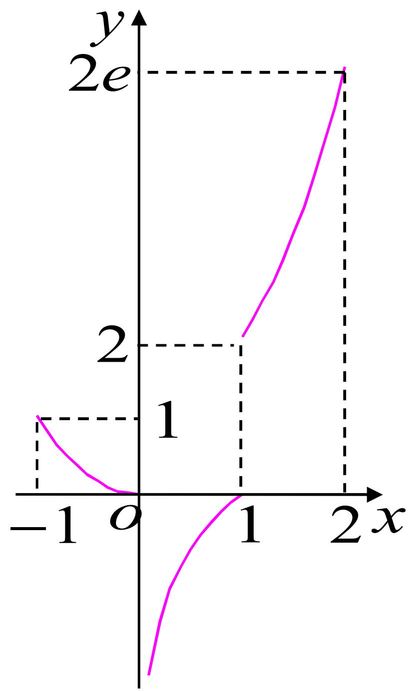
综上所述

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{x+2}, & x < -1 \\ x+2, & -1 \leq x < 0 \\ e^{x^2-1}, & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ x^2 - 1, & x \geq \sqrt{2} \end{cases}.$$

例2. 求 $y=\begin{cases} x^2, & -1\le x<0 \\ \ln x, & 0<x\le 1 \\ 2e^{x-1}, & 1<x\le 2 \end{cases}$ 的反函数及其定义域.

解: 当 $-1\le x<0$ 时, $y=x^2\in(0,1]$,

则 $x=-\sqrt{y},\ y\in(0,1]$



当 $0<x\le 1$ 时, $y=\ln x\in(-\infty,0]$,

则 $x=e^{y},\ y\in(-\infty,0]$

当 $1<x\le 2$ 时, $y=2e^{x-1}\in(2,2e]$,

则 $x=1+\ln\frac{y}{2},\ y\in(2,2e]$

反函数 $y=\begin{cases} e^{x}, & x\in(-\infty,0] \\ -\sqrt{x}, & x\in(0,1] \\ 1+\ln\frac{x}{2}, & x\in(2,2e] \end{cases}$

定义域为 $(-\infty,1]\cup(2,2e]$