第 五 章

1. 设随机变量ξ服从几何分布$P\{\xi=k\}=pq^k(k=0,1,2,\cdots),0<p<1,q=1-p$，求$\xi$的特征函数，$E(\xi)$和$D(\xi)$。

解：$\varphi_\xi(t)=E(e^{jt\xi})=\sum_{k=0}^{\infty}e^{jtk}pq^k=p\sum_{k=0}^{\infty}(qe^{jt})^k=\dfrac{p}{1-qe^{jt}}$

$$\varphi'(t)=\frac{jpqe^{jt}}{\left(1-qe^{jt}\right)^2},\varphi'(0)=\frac{jq}{p}$$

$$\varphi'(t)=\frac{-pqe^{jt}}{\left(1-qe^{jt}\right)^2}-\frac{2pq^2e^{2jt}}{\left(1-qe^{jt}\right)^3},\varphi''(0)=\frac{-q}{p}-\frac{2q^2}{p^2}$$

$$E(\xi)=j^{-1}\varphi'(0)=\frac{q}{p},E(\xi^2)=j^{-2}\varphi''(0)=\frac{q}{p}+\frac{2q^2}{p^2},D(\xi)=E(\xi^2)-E^2(\xi)=\frac{q}{p^2}$$

2. 设随机变量$\xi(\xi>0)$ 的分布函数为$F_\xi(x)=\begin{cases}\int_0^x f_\xi(t)dt, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，求$\eta=e^{-\xi}$的概率密度。

解：$\varphi_\eta(t)=E(e^{jt\eta})=E(e^{jte^{-\xi}})=\int_0^\infty e^{jte^{-x}}f_\xi(x)dx\ \ \underline{\underline{e^{-x}=u}}\int_1^0 e^{jtu}f_\xi(-\ln u)\dfrac{1}{-u}du$

$$=\int_0^1 e^{jtu}f_\xi(-\ln u)\frac{1}{u}du\Rightarrow f_\eta(y)=\begin{cases}f_\xi(-\ln y)\dfrac{1}{y},0<y<1\\ 0,其它\end{cases}$$

证：设$\xi\sim P(\lambda_1),\eta\sim P(\lambda_2),$且相互独立，现证明$\xi+\eta\sim P(\lambda_1+\lambda_2),$

$$\varphi_{\xi+\eta}(t)=E(e^{jt(\xi+\eta)})=E(e^{jt\xi})E(e^{jt\eta})=\varphi_\xi(t)\varphi_\eta(t)=e^{\lambda_1(e^{jt}-1)}e^{\lambda_2(e^{jt}-1)}=e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{jt}-1)}$$

3. 用特征函数法证明泊松分布的可加性。

由特征函数与分布函数一一对应的唯一性定理知$\xi+\eta\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$。

4. 设随机变量$\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n$相互独立，都服从标准正态分布$N(0,1)$，证明：$\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$也服从$N(0,1)$。

证：$\varphi_{\sum_{k=1}^{n}\xi_k}(t)=\varphi_{\sum_{k=1}^{n}\xi_k}(t)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{\xi_k}(t)=\prod_{k=1}^{n}e^{-\frac{1}{2}t^2}=e^{-\frac{n}{2}t^2}$

$$\varphi_{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\xi_k}(t)=\varphi_{\sum_{k=1}^{n}\xi_k}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}t\right)=e^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{\sqrt{n}}t)^2}=e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

根据特征函数与分布函数一一对应的唯一性定理知$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \sim N(0,1)$。

5. 设噪声电压$X_1, X_2, \cdots X_{100}$相互独立且都服从区间(0,6)上的均匀分布，用切比雪夫不等式估计总噪声电压$Y=\sum_{k=1}^{100}X_k$在 260 到 340 之间的概率。

解：由题意知 $E(Y)=E\left(\sum_{k=1}^{100}X_k\right)=100\times 3=300, D(Y)=\sum_{k=1}^{100}D(X_k)=100\times\frac{6^2}{12}=300$

$$P\{260\le Y\le 340\}=P\{|Y-E(Y)|\le 40\}\ge 1-\frac{D(Y)}{40^2}=\frac{3}{16}$$

6. 证明马尔可夫大数定律：若随机变量序列$\{\xi_k\}$的期望都存在，且$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}D(\sum_{k=1}^{n}X_k)=0$，则$\{\xi_k\}$服从大数定律。

证：$E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(\xi_i)$， 由切比雪夫不等式，对于任意的$\varepsilon>0$，有

$$1\ge P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(\xi_i)|<\varepsilon\}\ge 1-\frac{D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i)}{\varepsilon^2}=1-\frac{\frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)}{\varepsilon^2}\to 1 \quad (n\to\infty)$$

故$\lim_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(\xi_i)|<\varepsilon\}=1$，$\{\xi_k\}$服从大数定律。

7.设$\{X_k\}$为相互独立的随机变量序列，在下面两种情况下证明：$\{X_k\}$服从大数定律。

(1)$P\{X_k=\pm\sqrt{k}\}=\frac{1}{k}, P\{X_k=0\}=1-\frac{2}{k}, \quad k=2,3,\cdots$

(2)$P\{X_k=\pm\sqrt{\ln k}\}=\frac{1}{2}, \quad k=1,2,\cdots$

证：（1） $\{X_k\}$相互独立，$E(X_k)=0$存在，$D(X_k)=2$一致有界，满足切比雪夫大数定律的条件，故$\{X_k\}$服从大数定律。

（2）$\{X_k\}$相互独立，$E(X_k)=0$，$D(X_k)=\ln k$

$$\frac{1}{n^2}D(\sum_{k=1}^{n}X_k)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\ln k\le\frac{1}{n^2}\cdot n\ln n=\frac{\ln n}{n}\to 0 \quad (n\to\infty)$$

满足马尔可夫大数定律的条件，故$\{X_k\}$服从大数定律。

8.对敌人的阵地进行 100 次炮击，每次炮击时炮弹命中颗数的均值为 4，方差为 2.25。

求在 100 次炮击中有 380 颗到 420 颗炮弹命中目标的概率。

解：设 X_i 为第 i 次炮击命中目标的炮弹数，则 X_i 相互独立，且服从相同分布，$E(X_i)=4$, $D(X_i)=2.25$. $E\left(\sum_{k=1}^{100} X_k\right)=400, D\left(\sum_{k=1}^{100} X_k\right)=225,$ 由独立同分布中心极限定理，

所求为

$$\begin{aligned}
&P\{380 \le \sum_{k=1}^{100} X_k \le 420\} \\
&= P\{\frac{380-400}{\sqrt{225}} \le \frac{\sum_{k=1}^{100} X_k - 400}{\sqrt{225}} \le \frac{420-400}{\sqrt{225}}\} \\
&\approx \Phi(\frac{4}{3}) - \Phi(-\frac{4}{3}) = 2\Phi(\frac{4}{3}) - 1 \approx 0.816
\end{aligned}$$

9.独立重复地抛掷一枚均匀硬币 n =1200 次，用 X_n 表示正面出现的次数，分别用切比雪夫不等式和中心极限定理计算满足 $P\{|\frac{X_n}{n}-\frac{1}{2}|<\delta\} \ge 0.99$ 的最小 δ 值;并对结果的差异做出解释。

解一：用切比雪夫不等式：$X_n \sim B(1200, \frac{1}{2}) \Rightarrow E\left(\frac{X_n}{n}\right)=\frac{1}{2}, D\left(\frac{X_n}{n}\right)=\frac{1}{4800}$

$$P\{|\frac{X_n}{n}-\frac{1}{2}|<\delta\} \ge 1-\frac{1/4800}{\delta^2} \ge 0.99 \Rightarrow \delta \ge 0.1443$$

说明：抛硬币 1200 次，可以 99%的把握保证正面出现的频率和概率的误差控制在 0.1443 的范围内

解二 用中心极限定理 $X_n \sim B(1200, \frac{1}{2})$，$E(X_n)=600, D(X_n)=300$，由于 n =1200 很大，故认为 $\frac{X_n-600}{\sqrt{3}}$ 近似服从标准正态 布。

$$\begin{aligned}
&P\{|\frac{X_n}{n}-\frac{1}{2}|<\delta\} = P\{\frac{1}{2}-\delta < \frac{X_n}{n} < \frac{1}{2}+\delta\} \\
&= P\{600-1200\delta < X_n < 600+1200\delta\} \\
&= P\{\frac{-1200\delta}{10\sqrt{3}} < \frac{X_n-600}{10\sqrt{3}} < \frac{1200\delta}{10\sqrt{3}}\} \\
&\approx 2\Phi(\frac{120\delta}{\sqrt{3}})-1 \ge 0.99 \Rightarrow \Phi(\frac{120\delta}{\sqrt{3}}) \ge 0.995 \Rightarrow \frac{120\delta}{\sqrt{3}} \ge 2.58 \Rightarrow \delta \ge 0.0372
\end{aligned}$$

说明：抛硬币 1200 次，可以 99%的把握保证正面出现的频率和概率的误差控制在 0.0372 的范围内

结论：中心极限定理估算概率比切比雪夫不等式精确得多。

10. 某系统由相互独立的 n 个部件组成，每个部件的可靠性（正常工作的概率）为 0.9，且至少有 80%的部件正常工作，才能使整个系统工作. 问 n 至少为多大，才能使系统的可靠性为 95%.

解：设 X 为系统中正常工作的部件数， 则由题意知 X~ B (n, 0.9)

E(X)=np =0.9n　　　　D(X)= np(1-p)=0.09n

由 棣莫佛-拉普拉斯 中心极限定理知

$$
\begin{aligned}
&0.95 \le P\{0.8n \le X \le n\} \\
&= P\{\frac{0.8n-0.9n}{0.3\sqrt{n}} \le \frac{X-0.9n}{0.3\sqrt{n}} \le \frac{n-0.9n}{0.3\sqrt{n}}\} \\
&\approx \Phi(\frac{\sqrt{n}}{3}) - \Phi(-\frac{\sqrt{n}}{3}) = 2\Phi(\frac{\sqrt{n}}{3}) - 1 \\
&\Rightarrow \Phi(\frac{\sqrt{n}}{3}) \ge 0.975 = \Phi(1.96)
\end{aligned}
$$

由分布函数单调增加性知 $\frac{\sqrt{n}}{3} \ge 1.96 \Rightarrow n \ge 35$

11.设相互独立的随机变量序列 $\{\xi_k\}$，对每一个 k, $\xi_k \sim U(-k,k)$，证明：$\{\xi_k\}$ 服从中心极限定理。

证明　$X_k \sim U(-k,k)$ 其概率密度为 $f_{X_k}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2k}, & -k < x < k; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

于是　$E(X_k)=0,\ \sigma_k^2 = D(X_k) = E(X^2) = \int_{-k}^{+k} \frac{x^2}{2k} dx = \frac{k^2}{3},$

$$
B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{18} > \frac{n^3}{9} \Rightarrow B_n > \frac{n\sqrt{n}}{3}
$$

从而对任意的 $\varepsilon > 0$，　$\int\limits_{|x|>\varepsilon B_n} x^2 f_{X_k}(x) dx < \int\limits_{|x|>\varepsilon \frac{n\sqrt{n}}{3}} x^2 f_{X_k}(x) dx$

对任意 k=1,2, ….., 当 $|x| > k$ 时，$f_{X_k}(x) = 0$，故当 $\varepsilon \frac{n\sqrt{n}}{3} > k$ ，恒有

$$
\int\limits_{|x|>\varepsilon B_n} x^2 f_{X_k}(x) dx < \int\limits_{|x|>k} x^2 f_{X_k}(x) dx = 0
$$

特别取 $k=n$，令 $\varepsilon \frac{n\sqrt{n}}{3} > n$，即 $n > \frac{9}{\varepsilon^2}$

$$
\int\limits_{|x|>\varepsilon B_n} x^2 f_{X_k}(x) dx < \int\limits_{|x|>n} x^2 f_{X_k}(x) dx = 0, \quad k = 1,2,\cdots,n
$$

$$
\Rightarrow \qquad \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|>\varepsilon B_n} x^2 f_{X_k}(x) dx = 0
$$

$$
\Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|>\varepsilon B_n} x^2 f_{X_k}(x) dx = 0
$$

$\{X_k\}$ 满足林德伯格条件，故服从中心极限定理。

证： $a_k=E(\xi_k)=0,\sigma_k^2=D(\xi_k)=\frac{k^2}{3},\ B_n^2=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{18}$,

由于 $f_{\xi_k}(x)=\begin{cases}1/2k,-k<x<k\\0,\text{其它}\end{cases}$,

对于任意的 $\varepsilon>0$，当 $n>\frac{9}{\varepsilon^2}$ 时， $\varepsilon B_n=\varepsilon\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{18}}>\varepsilon\sqrt{\frac{2n^3}{18}}=\frac{\varepsilon n^{3/2}}{3}>n$。

于是 $\int\limits_{|x|>\varepsilon B_n}x^2f_{\xi_k}(x)dx=0$，$(k=1,2,\cdots,n)$。$\Rightarrow\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|>\varepsilon B_n}x^2f_{\xi_k}(x)dx=0$

即证明了 $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|>\varepsilon B_n}x^2f_{\xi_k}(x)dx=0$，$\{\xi_k\}$ 满足林德伯格条件，故服从中心极限定理。

12. 在计算机模拟中，假设已经产生区间(0,1)上均匀分布的 48 个随机数 $X_1,X_2,\cdots,X_{48}$，则可用 $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{48}X_i-12$ 来模拟标准正态分布的随机数，说明其原理和应假设满足什么条件。若需产生服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 随机数呢？

解：应假设这些随机数 $X_1,X_2,\cdots,X_{48}$ 是相互独立的， $E\left(\sum_{i=1}^{48}X_i\right)=24,D\left(\sum_{i=1}^{48}X_i\right)=4,$

这里累加的变量个数 48 比较多，于是运用独立同分布中心极限定理，

$\frac{\sum_{i=1}^{48}X_i-24}{2}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{48}X_i-12$ 就近似服从标准正态分布。