3.2 函数极限的性质

$$\lim_{x\to+\infty} f(x);$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x);$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x);$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x);$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x);$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x);$$

1.局部有界性

定理 若当$x \to x_0$时$f(x)$有极限，则存在x_0的一个邻域$\mathring{U}(x_0, \delta)$，在此邻域内$f(x)$有界.

2.唯一性

定理 若$\lim f(x)$存在，则极限唯一.

3.局部保号性

定理：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 且 $A>0$(或 $A<0$),

则 $\exists\delta>0$, 当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时, $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

推论：$\exists\delta>0$, 当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时, $f(x)\geq 0$(或 $f(x)\leq 0$),

且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 则 $A\geq 0$(或 $A\leq 0$).

4.局部保不等性

定理

设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$与$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$都存在，且在某邻域

$\mathring{U}(x_0;\delta)$内有$f(x) \le g(x)$,则$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

5.夹逼准则

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$,且在某 $\overset{\circ}{U}(x_0;\delta)$内有

$$f(x)\le h(x)\le g(x)$$

则 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A.$

本定理既给出了判别函数极限存在的方法；又提供了一个计算函数极限的方法。

6、有理运算法则

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$,则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=A\pm B;$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=A\cdot B;$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B},$ 其中$B\neq 0.$

7、复合运算法则

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0 \\ &\lim_{u\to u_0} f(u) = a \end{aligned}\right\} \lim_{x\to x_0} f\big(g(x)\big) = a$$

求极限方法举例

例1 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+5}$.

解 $\because \lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)=\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}3x+\lim\limits_{x\to 2}5$

$=(\lim\limits_{x\to 2}x)^2-3\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}5$

$=2^2-3\cdot 2+5 \ =3\neq 0,$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-3x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)}=\frac{2^3-1}{3}=\frac{7}{3}.$$

例3.5　求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$

例3.6 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x+5}{x^2+x+4}$

例3.7 求$\lim\limits_{x\to 2}(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8})$

例3.8 证明$\lim_{x \to 0} \cos x = 1$

例3.9 证明: $\lim_{x\to 0} e^x = 1, \lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0} \ (a > 0)$

小结: 1. 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$,则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a_0(\lim_{x\to x_0} x)^n+a_1(\lim_{x\to x_0} x)^{n-1}+\cdots+a_n$$

$$=a_0x_0{}^n+a_1x_0{}^{n-1}+\cdots+a_n=f(x_0).$$

2. 设 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 且$Q(x_0)\neq 0$, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=f(x_0).$$

若$Q(x_0)=0$, 则商的法则不能应用.

例2 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x-1}{x^2+2x-3}$.

解 $\because \lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x-3)=0$, 商的法则不能用

又 $\because \lim\limits_{x\to 1}(4x-1)=3\neq 0$,

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{4x-1}=\frac{0}{3}=0.$$

从而,

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x-1}{x^2+2x-3}=\infty.$$

例3 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$.

解 $x\to1$时,分子,分母的极限都是零. $(\dfrac{0}{0}$型$)$

先约去不为零的无穷小因子$x-1$后再求极限.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x+3}=\frac{1}{2}.$$

(消去零因子法)

例4 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}$.

解 $x\to\infty$时, 分子, 分母的极限都是无穷大. ($\dfrac{\infty}{\infty}$型)

先用x^3去除分子分母, 分出无穷小, 再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^3}}{7+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^3}}=\frac{2}{7}.$$

小结: 当$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m$和$n$为非负整数时有

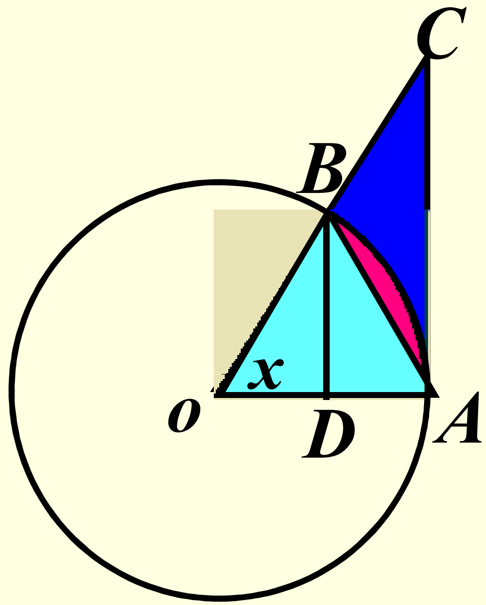
$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, \text{当} n = m, \\ 0, \text{当} n > m, \\ \infty, \text{当} n < m, \end{cases}$$

3.3 两个重要极限

1. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1}$

设单位圆 O, 圆心角$\angle AOB = x$,

$$(0 < x < \frac{\pi}{2})$$



作单位圆的切线，得ΔACO.

扇形OAB的圆心角为x， ΔOAB的高为BD,

于是有$\sin x = BD$, $x =$ 弧 AB, $\tan x = AC$,

$$\therefore \sin x < x < \tan x, \quad 即 \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

上式对于 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 也成立. 当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ 时,

$$0 < |\cos x - 1| = 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} < 2(\frac{x}{2})^2 = \frac{x^2}{2},$$

$$\because \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2} = 0, \quad \therefore \lim_{x\to 0}(1 - \cos x) = 0,$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \cos x = 1, \quad 又 \because \lim_{x\to 0} 1 = 1, \quad \therefore \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

例1　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解　$\text{原式}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{(\dfrac{x}{2})^2}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

例3.10 求$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$

2. $$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}$$

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e \qquad (e=2.71828\cdots)$

当 $x\geq 1$ 时， 有 $[x]\leq x\leq [x]+1$,

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}\leq\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\leq\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1},$$

而 $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}=\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]}\cdot\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})=e,$

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]+1}\cdot\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{-1}=e,$$

$$\therefore\ \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e.$$

令 $t=-x$,

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=\lim_{t\to+\infty}(1-\frac{1}{t})^{-t}=\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t-1}(1+\frac{1}{t-1})=e.$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e}$$

令 $t=\dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to\infty}(1+\dfrac{1}{t})^{t}=e.$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$$

例2 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{-x})^{-x}]^{-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{-x})^{-x}}=\frac{1}{e}$.

例3 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3+x}{2+x})^{2x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{x+2})^{x+2}]^{2}(1+\frac{1}{x+2})^{-4}=e^{2}$.

小结

两个重要极限

设α在某过程中趋向于0，

$$1^0 \quad \lim_{\text{某过程}} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1;$$

$$2^0 \quad \lim_{\text{某过程}} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

3.4 函数极限的存在准则

单调有界准则：

$$\lim_{x\to+\infty} f(x); \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x);$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x); \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x);$$

以上4种极限有相互对应的单调有界准则。

定理3.6　单调有界准则

(1)设$f(x)$为定义在$[\alpha,+\infty)\left(\text{或}[-\infty,\ \beta)\right)$上的单调有界函数，则极限$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\left(\text{或}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)$存在

(2)设$f(x)$为定义在区间I上的单调有界函数，则$f(x)$在I内每一点的单侧极限存在.

定理3.7 Cauchy收敛原理：

设函数$f(x)$在$\mathring{U}(x_0;\delta)$内有定义。$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的充要条件为：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \ni \forall x', x'' \in U^0(x_0;\delta),$$

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

1 收敛函数的函数值在$U^0(x_0;\delta)$几乎“挤”在了一起。

2 通常用 Cauchy收敛准则证明函数的极限不存在。