《电磁场与电磁波》讲义

潘 锦

2021.3

2.3 矢量场分析

由于矢量场具有矢量特征，因此，矢量场分析具有不同于标量场分析的特殊复杂性，并主要体现于两个方面。一方面，任意位置处的场函数，不但其大小可以发生变化，其方向也可以发生变化。另一方面，空间中矢量场的分布，存在着两种独立的分布类型。一种是以发散状为特征的场分布，一种是以涡旋状为特征的场分布。因此，适宜于标量场分析的简单求导方法，不再适用于矢量场分析。要获知矢量场的空间分布变化情况，应该对矢量场分类建立相宜的变化分析方法。

用矢量线来表示矢量场的空间分布，可以形象地认识理解矢量场的“发散”和“涡旋”特征。即所谓“发散”，是指当进入一定空间包围面的矢量线总和与离开该空间矢量线总和不相等时，则称该空间中的矢量场呈发散分布。与此类似，当在一定空间中的任意区域内，矢量线存有一定程度的环绕时，则称该空间的矢量场呈涡旋分布。由此可知，空间中矢量场的分布变化直接关联着矢量场的发散特性和发散程度，以及矢量场的涡旋特性和涡旋程度。于是，矢量场分析可通过分析反映矢量场发散与涡旋特性和程度的物理量入手。

2.3.1 矢量场的通量与散度

(一)、矢量场的通量

矢量场的通量是为分析一定空间中矢量场发散变化特性和程度而引入的物理量。

(1) 通量的定义

矢量场空间中通过任意曲面矢量线的数量，称为该矢量场通过该曲面的通量。

(2) 通量的数学表达与物理意义

根据矢量线的定义，矢量线在空间的分布密度，表示该处矢量场的大小$|\vec{F}|$。也即，$|\vec{F}|$是矢量线的分布面密度。由此可得，通过空间任意位置矢量线的数量 n 为该处的密度函数与该处矢量线垂平面面元 dS 之积，即，n=$|\vec{F}|$dS。因此，对于任意指向$\vec{e}_n$的面元$d\vec{s}=\vec{e}_n ds$，其上矢量线的通过量则为$n=\vec{F}\cdot d\vec{s}$ 。于是，矢量场通过任意曲面 S 的通量为：

$$\Phi = \oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

由上述分析可知，矢量场通量的物理含义是矢量场在一定面积区域矢量线的通过数量。

利用通量的计算，可进而定量分析矢量场的发散程度。

首先分析一定空间中矢量场的发散程度。由于一定空间中矢量场的发散程度，由进出该空间两者矢量线数量总和之差决定，因此若取体积包围面的外法向，作为通量计算时曲面的参考方向，则定量反映该空间矢量场向外发散程度的计算式，可由该空间矢量场的向外总通量给出，

$$\Phi_V = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

当$\Phi_v > 0$时，表明该空间中存在产生向外发散的场“源”；

当$\Phi_v < 0$时，表明该空间中存在吸收向内发散的场 “漏”；

当$\Phi_v = 0$时，表明该空间中或即无“源”也无“漏”，或其中的“源”与“漏”强度相等。

以上一定空间区域的外向总通量宏观反映了矢量场的发散状况。通量虽能一定程度的揭示该区域中反映影响场发散程度的“源”“漏”存在情况，但是当该区域中同时存在“源”和“漏”时，该计算却既不能给出“源”与“漏”分别各自的强度，也不能确定它们所在的位置。因此，为了完整全面地揭示空间中“源”与“漏”的分布情况，则需要在场分布的全部空间，逐点计算各处场的发散程度，以揭示出各位置处的源强分布。

(二)、矢量场的散度（divergence）

矢量场的散度是为分析空间任意位置处矢量场发散变化规律和程度而引入的物理量。

（1） 散度的定义

矢量场空间中某处单位体积的外向总通量，也即外向总通量体密度，称为矢量场在该处的散度。

如用英文将散度简记为 div $\vec{F}$(div 为 divergence 的缩写)，则由矢量场散度定义可得其数学表示式，

$$div\ \vec{F} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_s \vec{F} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

（2）散度的物理意义

① $\vec{r}$处的散度值给出了该处矢量场$\vec{F}$的发散程度；

② $\vec{r}$处的散度值是该处矢量场$\vec{F}$的外向通量体密度；

③ $\vec{r}$处的散度值是该处矢量线数量的体密度；

④ 若$div\ \vec{F}(\vec{r}) > 0$，则表明$\vec{r}$处存在向外发散的场“源”；

⑤ 若$div\ \vec{F}(\vec{r}) < 0$，则表明$\vec{r}$处存在向内发散的场“漏”；

⑥ 若$div\ \vec{F}(\vec{r}) = 0$，则表明$\vec{r}$处不存在场“源”和“漏”；

⑦ 散度不为零之处，也是场源所在之处，且散度值正比例于源强大小；

⑧ 散度是矢量场发散状况的微观反映。对于给定的矢量场$\vec{F}$，可通过计算$div\ \vec{F}$搜寻空间中“源”和“漏”的空间分布位置并给出相应位置发散场的源强。因此，$div\ \vec{F}$

也叫散度源。

（3）散度的计算

如下是在任意 M 点处，计算散度的步骤：

① 建立直角坐标系，则任意 M 点由其坐标（x,y,z）给出；

② 取一立方体积元 dV，使 M 点位于其中心位置；

③ 计算立方体各包围面的外向通量并求和，得 dV 的外向总通量；

④ 求通量体密度，得 M 点处的散度：

$$div\ \vec{F}(\vec{r}) = (\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}) \bullet (\vec{e}_x F_x + \vec{e}_y F_y + \vec{e}_z F_z)$$

$$= \nabla \bullet \vec{F}$$

即，散度可通过哈密顿算符∇的点乘运算作用在矢量上求得。

需要注意，在不同坐标系下用哈密顿算符∇表示散度运算时，“∇•”具有不尽相同的算符运算形式。在圆柱坐标系和球坐标系中，按照类似于直角坐标系下的分析过程，可得

在圆柱坐标系下，

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial(\rho F_\rho)}{\rho \partial \rho} + \frac{\partial F_\varphi}{\rho \partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}(F_\varphi)$$

在球坐标系下，

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{C} = \nabla \cdot \vec{C} = 0\ (\vec{C}\text{为常矢量}) \\ \nabla \cdot (\vec{C} f) = \vec{C} \cdot \nabla f\ (f\text{为标量函数}) \\ \nabla \cdot (k\vec{F}) = k \nabla \cdot \vec{F}\ (k\text{为常量}) \\ \nabla \cdot (f\vec{F}) = f \nabla \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla f \\ \nabla \cdot (\vec{F} \pm \vec{G}) = \nabla \cdot \vec{F} \pm \nabla \cdot \vec{G} \end{cases}$$

散度运算关系，

（4）散度定理

根据宏观和微观反映矢量场发散状况的通量和散度定义可知，矢量通过任意体积 V 的总通量，应等于该体积中各处散度的总和，即

$$\int_V \nabla \bullet \vec{F} dV = \oint_S \vec{F}(\vec{r}) \bullet d\vec{S}$$

该关系式就称为散度定理。

散度定理所给出的关系式是矢量场分析中最为重要的关系式之一，其主要数学物理内涵为：

① 矢量场通过一体积的通量等于通量体密度的体积分；

② 一定体积 V 中矢量场的发散程度是其中各点处发散程度的和。

2.3.2 矢量场的环流与旋度

矢量场的环流是为反映空间中任意区域内矢量场涡旋变化的规律和程度而引入的物理量。

(一) 矢量场的环流

（1）环流的定义

矢量场 $\vec{F}$ 对于闭合曲线 C 的环流定义为该矢量对闭合曲线 C 的线积分，即，

$$\Gamma = \oint_C \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

（2）环流的数学物理意义

① 如果矢量场在空间中对任意闭合回路的环流恒为零，称该矢量场为无旋场，又称为保守场。

② 环流是矢量场涡旋状况的宏观反映。如果空间中存在闭合曲线使得矢量场 $\vec{F}$ 在其上的环流不为零，则称该矢量场为有旋矢量场。能够激发有旋矢量场的源，称为旋涡源。

例如，电流就是磁场的旋涡源。

(二) 矢量场的旋度

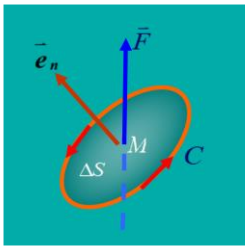
矢量场的旋度是为反映空间中任意位置处矢量场涡旋变化的规律和程度而引入的物理量。

(1) 环流面密度的定义

矢量场在空间中某处沿 $\vec{e}_n$ 方向的单位面积的环流，称为该点矢量场沿 $\vec{e}_n$ 方向的环流面密度。

根据环流面密度的定义，可写出其数学表达式

$$rot_n\vec{F} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$$



(2) 旋度的定义

由 M_0 处矢量场的最大环流面密度大小及其相应方向所构成的矢量，称为矢量场在 M_0 处的旋度。

如果用缩写的英文短句 $rot\ \vec{F}$ 表示旋度矢量（rot 为 rotation 的缩写），则由定义，

$$rot\ \vec{F} = \vec{e}_{nm}[rot_n\vec{F}]_{\max}$$

式中 $\vec{e}_{nm}$ 为 M_0 处最大环流密度方向的单位矢量。

(3) 旋度的计算

根据旋度的定义，可通过对环流面密度的运算分析，得出矢量场在任意位置处的最大环流密度及其方向，从而得到旋度的数学计算式。

在空间中任意位置 M_0 处，设沿任意方向 $\vec{e}_n$ 观察矢量场 $\vec{F}$，所得环流密度为 $rot_n\ \vec{F}$，则在直角坐标系下，

$$rot_n\ \vec{F} = [(rot_n\ \vec{F})\vec{e}_n]\cdot\vec{e}_n$$

而其中环流密度矢量 $(rot_n\ \vec{F})\vec{e}_n$，可由其对各坐标轴的投影所得坐标分量表出，即

$$\begin{aligned}(rot_n\ \vec{F})\vec{e}_n &= \vec{e}_x[(rot_n\ \vec{F})(\vec{e}_n\cdot\vec{e}_x)] + \vec{e}_y[(rot_n\ \vec{F})(\vec{e}_n\cdot\vec{e}_y)] + \vec{e}_z[(rot_n\ \vec{F})(\vec{e}_n\cdot\vec{e}_z)] \\ &= \vec{e}_x(rot_x\ \vec{F}) + \vec{e}_y(rot_y\ \vec{F}) + \vec{e}_z(rot_z\ \vec{F}) = \vec{A}\end{aligned}$$

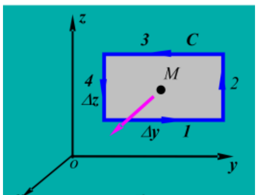
因此，

$$rot_n\ \vec{F} = \vec{A}\cdot\vec{e}_n = |\vec{A}|(\vec{e}_A\cdot\vec{e}_n) = |\vec{A}|\cos(\Omega)$$

式中 $\mathbf{\Omega}$ 为矢量 $\vec{A}$ 与单位矢量 $\vec{e}_n$ 的夹角。

由上述关系可知，当 $\vec{e}_n$ 与 $\vec{A}$ 同方向即 $\mathbf{\Omega = 0}$ 时，(x, y, z) 处的环流密度到达最大值 $|\vec{A}|$，即 $\vec{e}_n = \vec{e}_A$。因此可得，

$$rot\ \vec{F} = \vec{e}_{nm}[rot_n\ F]_{\max} = \vec{A} = \vec{e}_x(rot_xF) + \vec{e}_y(rot_yF) + \vec{e}_z(rot_zF)$$



计算 $rot_x\vec{F}$ 的示意图

其中，rot_xF、rot_yF、rot_zF 分别是 yoz 面上、zox 面上、xoy 面上的环流面密度，可按定义求出。

按右图所示环路，可算得

$$\mathrm{rot}_x\vec{F} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l}}{\Delta S}$$

其中，

$$\oint_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{\Delta l_1}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}_1 + \int_{\Delta l_2}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}_2 + \int_{\Delta l_3}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}_3 + \int_{\Delta l_4}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}_4$$
$$\approx F_{y1}\Delta y + F_{z2}\Delta z + F_{y3}\left(-\Delta y\right) + F_{z4}\left(-\Delta z\right)$$

式中，

$$F_{y1} \approx F_y\left(M\right) - \left.\frac{\partial F_y}{\partial z}\right|_M \cdot \frac{\Delta z}{2} \qquad F_{y3} \approx F_y\left(M\right) + \left.\frac{\partial F_y}{\partial z}\right|_M \cdot \frac{\Delta z}{2}$$
$$F_{z2} \approx F_z\left(M\right) + \left.\frac{\partial F_z}{\partial y}\right|_M \cdot \frac{\Delta y}{2} \qquad F_{z4} \approx F_z\left(M\right) - \left.\frac{\partial F_z}{\partial y}\right|_M \cdot \frac{\Delta y}{2}$$

于是，

$$\mathrm{rot}_x \vec{F} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}{\Delta S} = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}$$

同理可得，$\mathrm{rot}_y \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}$ $\qquad$ $\mathrm{rot}_z \vec{F} = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$

因此，在直角坐标系下旋度的计算公式为，

$$rot\ \vec{F} = \vec{e}_x\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \vec{e}_y\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{F}$$

即，旋度可通过哈密顿算符∇的叉乘运算作用在矢量上求得。另外，某处任意方向的环流面密度可通过该处旋度沿相应方向投影得到，即，

$$\mathrm{rot}_n\ \vec{F} = \vec{e}_n \cdot (\nabla \times \vec{F}\ )$$

需要注意，在不同坐标系下用哈密顿算符∇表示旋度运算时，“$\nabla\times$”具有不尽相同的算符运算形式。在圆柱坐标系和球坐标系中，按照类似于直角坐标系下的分析过程，可分别得到，

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\varphi & F_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r\sin\theta\vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_r & rF_\theta & r\sin\theta F_\varphi \end{vmatrix}$$

旋度的基本运算关系：

$$\nabla \times \vec{C} = 0$$
$$\nabla \times (k\vec{C}) = k\nabla \times \vec{C} \qquad （k\text{是常数}）$$
$$\nabla \times (f\vec{F}) = f\nabla \times \vec{F} + \nabla f \times \vec{F} \qquad （f\text{是标量函数}）$$
$$\nabla \times (\vec{F} \pm \vec{G}) = \nabla \times \vec{F} \pm \nabla \times \vec{G}$$
$$\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \nabla \times \vec{F} - \vec{F} \cdot \nabla \times \vec{G}$$
$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) \equiv 0$$
$$\nabla \times (\nabla u) \equiv 0$$

（4）斯托克斯定理

根据宏观和微观反映矢量场涡旋状况的环流及旋度定义，任意曲面围线的环流与该曲面上各点旋度的总贡献具有如下关系，

$$\oint_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

该关系式就称为斯托克斯定理。

斯托克斯定理给出的关系式是矢量场分析中最为重要的关系式之一，其主要数学物理内涵为：

① 矢量场在限定曲面上闭合曲线的线积分等于矢量场在该曲面上旋度的面积分；

② 一定面积 S 中矢量场的涡旋程度是其中各点处涡旋程度的叠加。

2.3.3 矢量场分类

通过对自然界存在的各种矢量场的观察得知，矢量场可以发散状或涡旋状分布于空间中，也可以两者叠加组合的形式分布于空间中。矢量场的空间分布变化和类型，由其发散场和涡旋场源强类型和分布决定。由此，根据矢量场空间中的源强类型和分布，可将矢量场分为四种类型，分别为：**无旋场**，即场分布空间内不存在旋度源，而仅可存在散度源；**无散场**，即场分布空间内不存在散度源，而仅可存在旋度源；**有散有旋场**，即场分布空间内即存在散度源也存在旋度源；**无散无旋场**，即场分布空间内无场源存在。需要注意的是无散无旋场，并不一定是场域空间中没有场分布，而是可以存在非零场分布，只是其场源位于所关心的场空间以外区域，或场空间的包围面上。

(一) 无旋场

特性：无旋场无旋！即场空间无旋度源，矢量场呈发散状分布，其各处的旋度为零。

数学表达：$\nabla\times\vec{F}\equiv 0 \xrightarrow{\nabla\times\nabla u\ \equiv\ 0} \vec{F}=\nabla u$；$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l}=0$

分析方法：由无旋场特性及其数学表达可知，无旋场分析问题可转化为标量场分析问题。首先通过引入标量场并对其进行分析，进而对该标量场求梯度完成相应无旋场的分析。所引入的标量场也称为该无旋场的标量位函数。

(二) 无散场

特性：无散场无散！即场空间无散度源，矢量场呈涡旋状分布，其各处散度为零。

数学表达：$\nabla\cdot\vec{F}\equiv 0 \xrightarrow{\nabla\bullet(\nabla\times\vec{A})\equiv 0} \vec{F}=\nabla\times\vec{A}$；$\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=0$

分析方法：由无旋场特性及其数学表达可知，无散场分析问题可转化为引入另一个不受散度约束的矢量场分析问题。即，如果获知了所引入的矢量场结果，则对其求旋度便可得到相应无散场的结果。通过引入不受散度约束矢量场的分析求知无散场的有利因素在于，任意规定引入场的散度结果，均不会对待求无散场的结果产生任何影响。这样，分析引入场时，借助选择规定其恰当的散度，可望较直接分析无散场更为便利。所引入的矢量场也称为该无散场的矢量位函数。

(三) 有散有旋场

特性：场空间即存在散度源，也存在旋度源。场源所在位置处，其相应的散度或旋度不为零。因此，有散有旋场$\vec{F}$由无旋场$\vec{F}_d$和无散场$\vec{F}_c$叠加构成。

数学表达：$\vec{F}(\vec{r})=\vec{F}_d(\vec{r})+\vec{F}_C(\vec{r})=-\nabla u(\vec{r})+\nabla\times\vec{A}(\vec{r})$

分析方法：将分别求知的无旋场和无散场进行叠加。无旋场和无散场可分别通过相应的标量位和矢量位分析得到。

(四) 无散无旋场

特性：所关心的场空间内无源，其中各处的散度和旋度均为零。

数学表达：$\nabla\times\vec{F}=0$ & $\nabla\cdot\vec{F}=0 \xrightarrow{\vec{F}=-\nabla u} \nabla^2 u=0$

分析方法：首先对其无散场相应的标量位进行拉普拉斯运算分析，然后对分析得到的标量位函数进行梯度运算，从而得出该无散无旋场分布。

拉普拉斯运算：

在直角坐标系下，$\nabla^2 u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

在圆柱坐标系下，$\nabla^2 u=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho})+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

在球坐标系下，$\nabla^2 u=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r})+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta})+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}$

小结：空间中任意发散、涡旋的矢量场，按其分布特性可分为四种类型。各类矢量场的分布可通过引入标量位和矢量位进行分析。

2.3.4 矢量场与源的因果关系——亥姆霍兹定理

任何物理矢量在空间分布所形成的矢量场，都是由其场源所产生而形成的结果。通过矢量场分析可知，有两种产生矢量场的场源，分别为散度源和旋度源，并形成相应的无旋场和无散场。场源可以点分布、线分布、面分布、体分布等四种形式存在于空间各区域中与包围面上。一定空间中的任意矢量场，均可通过因果关系的分析认识，由该空间内的体分布场源以及该空间包围面上的面分布场源的贡献，给出其表达式。

亥姆霍兹定理：

有界区域 V 的包围面为 S，其中的矢量场 $\vec{F}(\vec{r})$ 由 V 中和 S 上的散度源和旋度源完全确定：

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla u(\vec{r}) + \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$$

式中，

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V' - \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\vec{F}(\vec{r}')\cdot \mathrm{d}\vec{S}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla' \times \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V' - \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\vec{F}(\vec{r}')\times \mathrm{d}\vec{S}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$