习 题 4.4

(A)

3. 设函数 f 在区间$[a,b](a,b\in\mathbf{R})$上满足 Dirichlet 条件，如何求 f 在$[a,b]$上的 Fourier 展开式？试写出它的 Fourier 系数公式.

解 由于$\forall t\in[-l,l]\left(l=\dfrac{b-a}{2}\right)$，$t+\dfrac{a+b}{2}\in[a,b]$.

取 $F(t)$是周期为 $T=2l$ 的周期函数，且 $F(t)=f\left(t+\dfrac{b+a}{2}\right)$，$t\in[-l,l]$. 由 f 在$[a,b]$上满足 Dirichlet 条件知，$F(t)$是在$[-l,l]$上满足 Dirichlet 条件的周期为 $T=2l$ 的周期函数，则 $F(t)$存在 Fourier 展开式，且此展开式也是 f(将 $F(t)$限定在其一个周期$[a,b]$上即为 $f(x)$)的 Fourier 展开式. 于是 Fourier 系数分别为

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\mathrm{d}t=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f\left(t+\frac{b+a}{2}\right)\cos\frac{n\pi t}{l}\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{x=t+\frac{a+b}{2}}\frac{1}{l}\int_{a}^{b}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\mathrm{d}t=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f\left(t+\frac{b+a}{2}\right)\sin\frac{n\pi t}{l}\mathrm{d}t$$

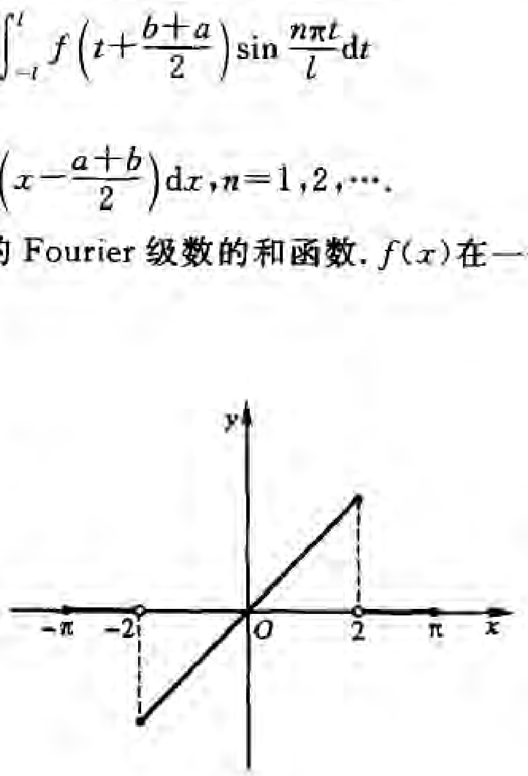
$$\xlongequal{x=t+\frac{a+b}{2}}\frac{1}{l}\int_{a}^{b}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x,n=1,2,\cdots.$$

4. 设 $S(x)$是周期为 2π 的函数 $f(x)$的 Fourier 级数的和函数. $f(x)$在一个周期内的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0, & 2<|x|\leqslant\pi,\\ x, & |x|\leqslant 2,\end{cases}$$

写出 $S(x)$在$[-\pi,\pi]$上的表达式，并求 $S(\pi)$，$S\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)$与 $S(-10)$的值.

解 $f(x)$在一个周期内图像如右图，



(第 4 题)

则 $$S(x)=\begin{cases}x, & |x|<2,\\ 1, & x=2,\\ -1, & x=-2,\\ 0, & 2<|x|\leqslant\pi.\end{cases}$$

所以 $$S(\pi)=0, S\left(\frac{3}{2}\pi\right)=S\left(2\pi-\frac{\pi}{2}\right)=S\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}.$$
$$S(-10)=S(-10+4\pi)=0\quad(2<4\pi-10<\pi).$$

5. 求下列函数的 Fourier 级数,它们在一个周期内分别定义为:

(1) $f(x)=x^2, -\pi<x\leqslant\pi$;(3) $f(x)=e^x+1, -\pi\leqslant x<\pi$;

(5) $f(x)=|x|, -\pi\leqslant x\leqslant\pi$.

解 (1) Fourier 系数为
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\,dx=\frac{2}{3}\pi^2,$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=(-1)^n\frac{4}{n^2},$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nx\,dx=0,\quad n=1,2,\cdots.$$
所以 $f(x)$ 的 Fourier 级数为 $\frac{1}{3}\pi^2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx$.

(3) $$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^x+1)\,dx=2+\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}\pi,$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^x+1)\cos nx\,dx=\frac{e^x}{\pi(1+n^2)}(\cos nx+n\sin nx)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$
$$=\frac{(-1)^n2\operatorname{sh}\pi}{\pi(1+n^2)},$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^x+1)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi(1+n^2)}\left[e^x(\sin nx-n\cos nx)\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$=\frac{(-1)^{n+1}2n\operatorname{sh}\pi}{\pi(1+n^2)},$$
因此 当 $x\in(-\pi,\pi)$ 时,
$$f(x)=1+\frac{1}{\pi}\operatorname{sh}\pi+\frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx-n\sin nx).$$
$x=\pm\pi$ 时,f 的 Fourier 级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]=1+\operatorname{ch}\pi$.

(5) $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\pi$. $b_n=0, n=1,2,\cdots$,
$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{2}{n\pi}\left[x\sin nx+\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$
$$=\begin{cases}\dfrac{-4}{n^2\pi}, & n\text{ 为奇数},\\ 0, & n\text{ 为偶数},\end{cases}\quad n=1,2,\cdots.$$
所以当 $x\in[-\pi,\pi]$,

$$|x|=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-4}{(2k-1)^2\pi}\cos(2k-1)x.$$

6. 把下列函数展开为 Fourier 级数，它们在一个周期内的定义分别为：

(3) $f(x)=\begin{cases}2-x, & x\in[0,4],\\ x-6, & x\in(4,8).\end{cases}$

解 (3) $f(x)$是以 $T=8$ 为周期的周期函数. 利用其性质.

$$a_0=\frac{1}{4}\int_0^8 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left[\int_0^4(2-x)\mathrm{d}x+\int_4^8(x-6)\mathrm{d}x\right]=0$$

$$a_n=\frac{1}{4}\int_0^8 f(x)\cos\frac{n\pi x}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^4(2-x)\cos\frac{n\pi x}{4}\mathrm{d}x+$$

$$\frac{1}{4}\int_4^8(x-6)\cos\frac{n\pi x}{4}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{-8}{(n\pi)^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数},\\ \dfrac{16}{n^2\pi^2}, & n\text{ 为奇数},\end{cases}\quad n=1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{4}\int_0^8 f(x)\sin\frac{n\pi x}{4}\mathrm{d}x=0,n=1,2,\cdots,$$

故当 $x\in[0,8]$时，$f(x)=\dfrac{16}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi}{4}x.$

另解 f 是以 $T=8$ 为周期的周函数. 所以 $f(x)=f(8+x)$得

$$f(x)=\begin{cases}2+x, & x\in(-4,0),\\ 2-x, & x\in(0,4]\end{cases}=2-|x|,\quad x\in(-4,4].$$

故

$$a_0=\frac{1}{4}\int_{-4}^4 f(x)\mathrm{d}x=0,$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{16}{(2k-1)^2\pi^2}, & n=2k-1,k=1,2,\cdots,\\ 0, & n=2k,\end{cases}$$

$b_n=0$,

故当 $x\in[-4,4]$时，$f(x)=\dfrac{16}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}.$

7. 将下列函数展开为指定的 Fourier 级数：

(2) $f(x)=\begin{cases}0, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right),\\ \pi-x, & x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right],\end{cases}$ 余弦级数.

(4) $f(x)=x-1,x\in[0,2]$，余弦级数，并求常数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的和.

解 (2) 将 $f(x)$ 作偶延拓，因此有 $b_n=0$，

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4},$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\cos nx\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n-\cos\frac{n\pi}{2}\right),\quad n=1,2,\cdots,\end{aligned}$$

故当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，

$$f(x)=\frac{\pi}{8}-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\right]\cos nx,$$

当 $x=\frac{\pi}{2}$，$f(x)$ 的 Fourier 级数收敛于

$$\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)+f\left(\frac{\pi}{2}+0\right)\right]=\frac{\pi}{4}.$$

(4) 将 $f(x)$ 作偶延拓，则有 $b_n=0$，

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2(x-1)\mathrm{d}x=0$$

$$a_n=\int_0^2(x-1)\cos\frac{n\pi}{2}x\mathrm{d}x=\frac{4}{(n\pi)^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}\dfrac{-8}{(n\pi)^2}, & n\text{ 为奇数},\\ 0, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

故当 $x\in[-2,2]$ 时，

$$f(x)=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x.$$

于是 $f(0)=-1=-\frac{8}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$，即

$$S_1=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}.$$

令
$$S_2=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}+\cdots,$$

则
$$S_2=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\right)=\frac{1}{4}(S_1+S_2),$$

于是
$$S_2=\frac{1}{3}S_1=\frac{\pi^2}{24},$$

故
$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=S_1+S_2=\frac{4}{3}S_1=\frac{\pi^2}{6}.$$

8. 证明：在 $[0,\pi]$ 上下列展开式成立：

(1) $x(\pi-x)=\frac{\pi^2}{6}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n^2}$； (2) $x(\pi-x)=\frac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$.

解　(1) 将 $f(x)=x(\pi-x)$ 作偶延拓. 则有 $b_n=0, n=1,2,\cdots$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\cos nx\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & n=2k-1,\\ \dfrac{-4}{(2k)^2}, & n=2k, k=1,2,\cdots,\end{cases}$$

故 $x\in[0,\pi]$,

$$f(x)=x(\pi-x)=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2nx.$$

(2) 将 $f(x)=x(\pi-x)$ 作奇延拓, 则有 $a_n=0, n=0,1,2,\cdots$.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{-4}{\pi n^3}[(-1)^n-1]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{8}{\pi n^3}, & n\text{ 为奇数},\\ 0, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

故 $x\in[0,\pi]$ 时, $f(x)=x(\pi-x)=\dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$.

9. 利用上题的结论证明:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$;　　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$.

解　(1) 由上题的结论(1)可知, 当 $x\in[0,\pi]$ 时,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\left(2n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

从而
$$\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{6}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2},$$

即
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

(2) 由上题(2)有

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}}{(2n-1)^3}=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3},$$

于是　$\dfrac{\pi^2}{4}\times\dfrac{\pi}{8}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$, 即 $\dfrac{\pi^3}{32}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$.

(B)

1. 设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积, 证明 Bessel 不等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$$

成立，其中 a_0, a_n 与 $b_n(n=1,2,\cdots)$ 是 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 系数.

证 令 $S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 为 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数的部分和，则 $[f(x)-S_n(x)]^2\geqslant 0$，于是

$$\begin{aligned}0&\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(x)|^2\mathrm{d}x\\&=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)S_n(x)\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}S_n^2(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

又因为 $1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos kx,\sin kx,\cdots$ 是正交三角函数系，

所以
$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}S_n^2(x)\mathrm{d}x&=\frac{a_0^2}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x+a_0\sum_{k=1}^{n}\left[a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\mathrm{d}x+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\mathrm{d}x\right]+\\&\quad\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right]^2\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi a_0^2}{2}+0+\sum_{k=1}^{n}\left[a_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\mathrm{d}x+b_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{\pi a_0^2}{2}+\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2),\end{aligned}$$

由 $a_0,a_k,b_k(k=1,2,\cdots)$ 是 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 系数有

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)S_n(x)\mathrm{d}x&=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x+\\&\quad\sum_{k=1}^{n}\left[a_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x+b_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{\pi a_0^2}{2}+\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2),\end{aligned}$$

于是
$$\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-2\left[\frac{\pi a_0^2}{2}+\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]+\frac{\pi a_0^2}{2}+\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\geqslant 0,$$

即
$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x.$$

又因为 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，所以 $f^2(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积.

因此正项级数 $\frac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)$ 的部分和有界，因而该级数收敛，(正项级数部分和数列为单增数列) 且其和

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x.$$

2. 设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数一致收敛于 f，并且 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上平方可积，证明 Parseval 等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$$

成立,其中 a_0,a_n 与 b_n 是 f 在$[-\pi,\pi]$上的 Fourier 系数.

证法一　由于 f 在$[-\pi,\pi]$上的 Fourier 级数$\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$一致收敛于 $f(x)$,所以其部分和函数列 $S_n(x)$一致收敛于函数 $f(x)$,即

$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)\in\mathbf{N}_+$,又 $\forall n>N(\varepsilon)$及 $\forall x\in[-\pi,\pi]$,恒有

$|S_n(x)-f(x)|<\sqrt{\varepsilon}$,即 $|S_n(x)-f(x)|^2<\varepsilon$. 于是

$$\int_{-\pi}^{\pi}|S_n(x)-f(x)|^2\mathrm{d}x<\pi\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|S_n(x)-f(x)|^2\mathrm{d}x=0.$$

由上题的证明可知

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x.$$

证法二　$\overline{A}_n\xlongequal{\text{def}}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+l)\cos nx\mathrm{d}x$,$l$ 为任一常数,则由周期函数的性质

$$\begin{aligned}\overline{A}_n&\xlongequal{t=x+l}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+l}^{\pi+l}f(t)\cdot\cos n(t-l)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos n(t-l)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}(\cos nl)\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}(\sin nl)\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\mathrm{d}t\\&=a_n\cos nl+b_n\sin nl,\quad n=0,1,2,\cdots.\end{aligned}$$

记 $F(x)\xlongequal{\triangle}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$,$F(x)$的 Fourier 系数为 A_n,B_n,则

$$\begin{aligned}A_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t\right]\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\cos nx\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cdot\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cos nx\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\mathrm{d}t\\&=a_n^2+b_n^2,\quad n=0,1,2,\cdots,b_0=0.\end{aligned}$$

又由于
$$F(-x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(-x+t)\,\mathrm{d}t$$
$$\xlongequal{u=-x+t}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u)f(u)\,\mathrm{d}u$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)f(x+u)\,\mathrm{d}u=F(x),$$
所以 $F(x)$ 为偶函数，因此 $B_n=0,n=1,2,\cdots$. 由于 $f(x)$ 的 Fourier 级数一致收敛于 f，所以 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，$F(x)$ 在其上连续，则
$$F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx$$
$$=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\cos nx,x\in(-\infty,+\infty).$$
令 $x=0$ 便得
$$F(0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

综合练习题

在热辐射理论中，会遇到反常积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x$ 的计算问题(见吴百诗主编《大学物理》下册，西安交通大学出版社，222～224 页)，试利用无穷级数的知识计算 I 的值.

解 当 $x>0$ 时，$0<\mathrm{e}^{-x}<1$，则
$$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}=1+\mathrm{e}^{-x}+(\mathrm{e}^{-x})^2+\cdots+(\mathrm{e}^{-x})^n+\cdots,\quad x>0,$$
$$\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}=\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}+\cdots+\mathrm{e}^{-nx}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx},\quad x>0,$$
从而
$$I=\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^3\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(x^3\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}\right)\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{\text{定理 3.6}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{+\infty}x^3\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x\right)\xlongequal{\text{分部积分}}6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}.$$
下面计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 的值.

由练习 4.4(A)第 5 题(5)知
$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x,\quad x\in[-\pi,\pi],$$

即
$$b_n=0,a_0=\pi,a_n=\begin{cases}-\dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{1}{(2k-1)^2}, & n=2k-1,k\in\mathbf{N}_+,\\ 0, & n=2k,\end{cases}$$

又$\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|^2\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}\pi^2$，由 Parseval 等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2=\frac{1}{2}(\pi)^2+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2k-1)^2}\right)^2\text{成立.}$$

即
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{\pi^4}{6\times16}.$$

即
$$S_1=1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{6\times16},$$

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)^4}+\frac{1}{(2k)^4}+\cdots,$$

即
$$S=S_1+S_2.$$

$$S_2=\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots+\frac{1}{2^4k^4}+\cdots,$$

即
$$S_2=\frac{1}{2^4}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{k^4}+\cdots\right)=\frac{1}{2^4}(S_1+S_2),$$

所以
$$S_2=\frac{1}{2^4-1}S_1=\frac{1}{15}S_1=\frac{1}{15}\times\frac{\pi^4}{6\times16},$$

所以
$$S=S_1+S_2=\left(\frac{1}{15}+1\right)S_1=\frac{16}{15}\times\frac{\pi^4}{6\times16}=\frac{\pi^4}{15\times6},$$

即
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{15\times6},$$

故
$$I=6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{15}.$$