第七章 无穷级数

无穷级数
- 数项级数
- 函数项级数
  - 幂级数
  - **Fourier**级数

无穷级数是研究函数的工具
- 表示函数
- 研究性质
- 数值计算

第一节 常数项级数

1.1 常数项级数的概念、性质与收敛原理

例1.1 小球从 1 米高处自由落下，每次跳起的高度减少一半，问小球是否会在某时刻停止运动？说明道理.

由自由落体运动方程 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 知 $t=\sqrt{\frac{2\ s}{g}}$

设 t_k 表示第 k 次小球落地的时间，则小球运动的时间为

$$T=t_1+2t_2+2t_3+\cdots+2t_n+\cdots$$

$$=\sqrt{\frac{2}{g}}\left[1+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}+\cdots\right)\right]$$

$$=\sqrt{\frac{2}{g}}\left[1+2\left(\sqrt{2}+1\right)\right]\approx 2.63\ (\mathrm{s})$$

无限循环小数可以看作是一无穷个数相加如：

$$\frac{1}{3}=0.3333\cdots=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots$$

级数的定义:

一般项

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \quad \text{或} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

(常数项)无穷级数

级数的部分和

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

部分和数列

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \cdots,$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \cdots$$

定义1.1 若$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$**收敛**，$S$称为这级数的**和**；若$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$不$\exists$，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$**发散**，称这级数**没有和.**

即 常数项级数收敛(发散)$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n$存在(不存在)

当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛时，$S \approx S_n$

余项$R_n = S - S_n \quad = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \quad = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{n+i}$

即 $S_n \approx S$ 误差为$|R_n|$ $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$

例1.2 讨论等比级数(或几何级数)

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots \quad (a \neq 0)$$的敛散性.

解 $\because$ $S_n = \begin{cases} \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}, & |q| \neq 1 \\ na, & q = 1 \\ \dfrac{[1+(-1)^{n-1}]a}{2}, & q = -1 \end{cases}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q} & |q| < 1 \\ \text{不}\exists & |q| \geq 1 \end{cases}$

★ **结论**:等比级数$\sum_{n=1}^{+\infty} aq^{n-1} (a \neq 0)$

当$|q| < 1$收敛,其和为$\dfrac{a}{1-q}$; 当$|q| \geq 1$发散

例　判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$ 的敛散性.

解　$\because u_n = \ln(1+\frac{1}{n}) = \ln(n+1) - \ln n$

$$\therefore S_n = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \cdots \ln(n+1) - \ln n$$

$$= \ln(n+1)$$

而 $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$

$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 发散.

EX. 1. 研究$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$的敛散性.

2. 判断$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$的敛散性.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = ?}$$

EX. 1. 研究$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$的敛散性.

解 $S_n=(\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1})+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+(\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\cancel{\sqrt{n}})$

$$=\sqrt{n+1}-\sqrt{1}\to+\infty$$

$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$发散.

例1.3　判断 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$ 的敛散性.

解　$\because \frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$$\therefore S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

$$=1-\frac{1}{n+1}$$

而　$\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$

用定义判断级数的收敛性

先求S_n,

再求S_n的极限,

然后, 由定义判断级数的收敛性。

局限性：一般情况下S_n的通式难求，或者S_n的极限难求，所以这种方法的局限性较大。

性质 1.1 设两收敛级数$s=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sigma=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, 则

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty}b_n = s \pm \sigma$收敛;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}ka_n = k\sum_{n=1}^{\infty}a_n = ks \quad (k \in R)$;

(3) $a_n \le b_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n \le \sum_{n=1}^{\infty}b_n$

说明: (1)级数的每一项同乘一个不为零的常数,

敛散性不变. (2) 收敛级数可以逐项相加与逐项相减.

(3) 若两级数中一个收敛一个发散 , 则

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ 必发散 .

证明 (2)

由级数敛散性的定义，立即得出以上性质

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \sigma_n = \sum_{i=1}^{n} k a_i$$ 显然有 $\sigma_n = kS_n$

由 $\lim S_n$ ∃，则 $\lim \sigma_n = \lim kS_n = k \lim S_n$

$\therefore k \neq 0$，$\sum_{n=1}^{+\infty} a_i$ 敛散性与 $\sum_{n=1}^{+\infty} k a_i$ 相同.

性质1.2　任意删去、添加或改变级数的有限项，不改变级数的敛散性.

事实上，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n (k \geq 1)$ 有相同的敛散性

k 可取足够大使其不包含删除的那些项！

$$\sigma_n := a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+n} = S_{n+k} - S_k \quad ,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_{n+k} - \lim\limits_{n\to\infty} S_k \quad = S - S_k \quad .$

注意：收敛时，其和一般会改变！

性质 1.4 收敛级数加括弧后所成的级数仍然收敛于原来的和.（无穷级数和的结合律）

证明 $(u_1+\cdots+u_{k_1})+(u_{k_1+1}+\cdots+u_{k_2})$

$+\cdots+(u_{k_{n-1}}+\cdots+u_{k_n})+\cdots$

$$\sigma_1=S_{k_1},\quad \sigma_2=S_{k_2},\quad \cdots,\sigma_n=S_{k_n},\quad \cdots$$

$$\because \lim_{n\to\infty} S_n=S.$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}S_{k_n}=\lim_{n\to\infty}S_n=S.$$

注

(1)由性质1.4, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$加括号后的级数发散

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{发散}.$$

(2)加括号后收敛的级数去 括号后不一定收敛 .

如: $1-1+1-1+\cdots$发散,

而级数$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$却是收敛的.

收敛级数的必要条件

性质1.3 若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

证明 令 $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 则 $a_n = S_n - S_{n-1},$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$$

$$= S - S = 0.$$

注 1. 逆命题不成立（必要条件不充分）.

例如级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

有 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, 但级数发散

2. 如果级数的一般项不趋于零, 则级数发散;

$i)\ \because \lim_{n\to\infty} u_n$不∃　　$1-1+1-1+1-1+\cdots$ 发散

$ii)\ \because u_n=(1+\frac{1}{n})^n \to e \neq 0$　　$\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^n$　发散

复习

定理2.9 柯西极限存在准则(柯西审敛原理)

数列$\{a_n\}$收敛

$$\Updownarrow$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N$,使得$\forall m, n > N, |a_m - a_n| < \varepsilon$

$$\Updownarrow$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}^+$,使得$\forall n > N$及$\forall p \in \mathbf{N}^+, |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$

级数的柯西收敛原理

定理1.1 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛的充要条件是：

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in N^+$ 当$n > N$时，对$\forall p \in N_+$，有

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

证 设所给级数部分和数列为$S_n (n = 1, 2, \cdots)$,因为

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| = |S_{n+p} - S_n|$$

所以，利用数列 $S_n (n = 1, 2, \cdots)$ 的柯西审敛原理

即得本定理的结论 .

例1.5 利用柯西审敛原理判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的收敛性.

解 对任意自然数p，有

$$
\begin{aligned}
&\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}\right| \\
&=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2} \\
&<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\
&=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right) \\
&=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

$\therefore \forall \varepsilon > 0$, 取 $N \geq [\frac{1}{\varepsilon}]$，当 $n > N$ 时,对任意自然数 p,都有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

由柯西审敛原理可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

例1.4 证明调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的

证法1 假设调和级数收敛于 S，则

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=0$$

但 $S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}\geq\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$

矛盾！所以假设不真．

证法2 应用Cauchy收敛原理

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛 $\Longleftrightarrow$ $\exists\varepsilon_0>0,\forall n,\exists p\in\mathbf{N}_+$，使得$\left|a_{n+p}-a_n\right|\geq\varepsilon_0$

可以取： $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，$p=n$

证明调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的

2项　2项　4项　8项

证法3
$$(1+\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16})$$

$$+\cdots+(\underbrace{\frac{1}{2^m+1}+\frac{1}{2^m+2}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}}}_{2^m\text{项}})+\cdots$$

$$>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}=\frac{m+1}{2}\to\infty\quad(m\to\infty)$$

即前$m+1$项大于$(m+1)\frac{1}{2}$　$\therefore$　级数发散 .

由性质1. 4的逆否命题, 调和级数发散.

Ex. 判断下列级数的敛散性 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$;

(2) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1} + \cdots$

解 (1) 令 $u_n = \frac{e^n n!}{n^n}$, 则

$$\boxed{(1+\tfrac{1}{n})^n < e < (1+\tfrac{1}{n})^{n+1}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{e^n n!}{n^n}} = \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} > 1 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

故 $u_n > u_{n-1} > \cdots > u_1 = e$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, 这说明级数(1) 发散.

判断级数的敛散性:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\cdots$$

解: 考虑加括号后的级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}\right)+\cdots$$

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}=\frac{2}{n-1}$$

$\therefore\quad \sum_{n=2}^{\infty} a_n = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，从而原级数发散.

小结

常数项级数的基本概念

基本审敛法

1. 由定义, 若 $s_n \to s$, 则级数收敛;

2. 当 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, 则级数发散;

3. 按基本性质.

4 .Cauchy收敛原理.