



0.2

问题求解与算法

Problems Resolving & Algorithms

郝家胜

hao@uesetc.edu.cn

自动化工程学院•2017春

内容回顾

- What is computer and SOFTWARE?
- What are the foundations of software?
- What will you learn in this course?
- Why shall you join this class?



内容提要

- 问题求解
- 计算机如何解题
- 什么是算法



问题求解

计算机是人脑的延伸，要研究计算机解决问题的过程，需要从人解决问题的过程谈起



算术问题

- 鸡兔同笼问题

今有雉兔同笼，上有三十五头，
下有九十四足，问雉兔各几何？



- 物不知其数问题

今有物不知其数，三三数之剩2，五五数之剩3，七七
数之剩2，问物几何？

“物不知其数”解法一（筛法）

- 写出“用3除余2”的数：
2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, ...
- 其中，“用5除余3”的数：8, 23, ...
- 其中，“用7除余2”的数：23, ...
- 由此得到，23是最小的一个解。
- 至于下一个解是什么，要把“...”写出来才知道；
- 实践以后发现，是要费一点儿功夫的。

“物不知其数”解法二（公倍数法）

设要求的数为 x ，则依题意，得联立方程组

$$\begin{cases} x = 3n_1 + 2 \\ x = 5n_2 + 3 \\ x = 7n_3 + 2 \end{cases} \quad (*)$$

$$s = 70a + 21b + 15c + 105k$$

“物不知其数”解法二（公倍数法）

$$s = 70a + 21b + 15c + 105k$$

明朝数学家程大位在《算法统宗》中把上式总结为一首通俗易懂的歌诀：

三人同行七十稀，五树梅花廿一枝，
七子团圆正半月，除百零五便得知。

其中正半月是指15，这个口诀把3，5，7；70，21，15及105这几个关键的数都总结在内了。歌诀的含义是：

用3除的余数乘70，5除的余数乘21，7除的余数乘15，相加后再减去（“除”当“减”讲）105的适当倍数，就是要求的（最小）解了。

韩信点兵

相传韩信带1500名兵士打仗，战死四五百人，站3人一排，多出2人；站5人一排，多出4人；站7人一排，多出6人。

韩信马上说出人数：1049。

这个问题即著名的“韩信点兵”问题，又称“鬼谷算”、“秦王暗点兵”

问题求解

- 如何解题
 - 观察、分析问题，收集必要的信息
 - 然后根据已有的知识、经验进行判断、推理、尝试
 - 按一定的方法和步骤去解决问题
- 解决同一个问题会有多种求解的方法。不同的方法有优劣之分
- 解决问题有时还要靠人的“顿悟”、“灵感”

能不能让计算机来帮助我们解决问题呢？

？

肯定地回答：能



计算机如何解题

分析问题：

对问题进行详细地分析，通过分析，弄清楚已知条件下的初始状态及要达到的目标，找出求解问题的方法和过程，并抽取出一个数学模型；

设计算法：

将这个数学模型连同它要处理的数据用计算机能识别的方式描述出来，使之成为计算机能处理的对象，形成算法；

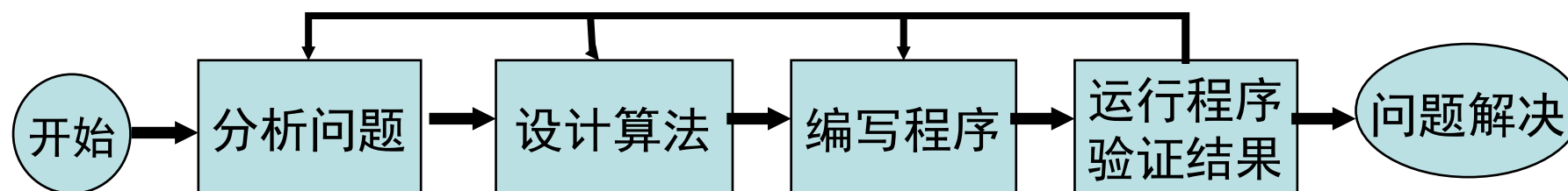
编写程序：

用程序设计语言设计出具体问题求解过程，形成计算机程序。



计算机如何解题

设计一个软件的步骤是：



- ◆ 无论使用现成的软件解决问题，还是自己动手编程解决问题，其实质都是一样的：现有的计算机软件同样也经历了这些过程
- ◆ 其差别在于，用程序设计解决问题需要我们亲自动手设计软件，而使用现成的软件，是别人已经给我们设计好了的

算法

- 概念
 - 从具体的操作规范入手，通过操作过程的构造与实施来解决给定问题的思维方法
 - 为解决给定问题的有穷操作规则的集合
- 基本特征
 - 有穷性
 - 确定性
 - 数据输入
 - 信息输出
 - 可行性



Algorithms

- An algorithm is any well-defined computational procedure that takes some value, or set of values, as input and produces some value, or set of values, as output
- An algorithm is thus a sequence of computational steps that transform the input into the output
- Program: a series of coded instructions to control the operation of a computer or other machine by using some algorithms

算法举例（1）：农夫过河

农夫带着一条狼、一头山羊和一篮蔬菜要过河，但只有一条船。乘船时，农夫只能带一样东西。当农夫在场的时候，这三样东西相安无事。一旦农夫不在，狼会吃羊，羊会吃菜。请设计一个算法，使农夫能安全地将这三样东西带过河。

对于同一个问题，解决方法是否只有一种？？

过河步骤

解一：

- 1、农夫带羊过河
- 2、农夫回来
- 3、把狼带过河
- 4、把羊带回来
- 5、带蔬菜过河
- 6、农夫回来
- 7、把羊带过河

解二：

- 1、农夫带羊过河
- 2、农夫回来
- 3'、带蔬菜过河
- 4、把羊带回来
- 5'、把狼带过河
- 6、农夫回来
- 7、把羊带过河

算法举例（2）：阶乘

- $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$
- 描述
 - S1: 设变量 m 为阶乘结果, i 为循环计数
 - S2: m, i 的初始值均为 1
 - S3: 若 $i > n$, 则转S6
 - S4: $m \leftarrow m \times i, i \leftarrow i + 1$
 - S5: 转S3
 - S6: 结果为 m , 结束

算法举例（3）：排序

- 站队

- 扑克牌



- 把n个数字排序

<10, 2, 8, 17, 1, 6, 0, 22>

算法举例（4）：查找

- 房间编号
- 查字典
- 猜数字

Search Example

- Number guessing game
 - Pick a number between $1 \dots n$
 - Guess a number
 - Answer “correct”, “too high”, “too low”
 - Repeat guesses until correct number guessed

Algorithms

- 古代算法 《九章算术》
 - 一部与现代数学的主流思想完全吻合的中国数学经典著作，一部最早却能体现现代宇宙学精神的书
- 古希腊欧几里得 《几何原本》
 - 现代数学的基础
 - 两千多年来，一直是学习几何的主要教材
- 高德纳 《计算机编程艺术》
- CLRS 《算法导论》



算经之首

- 全书分为方田(面积、分数计算)、粟米(比例)、衰分(配分比例)、少广(开平方、立方)、商功(体积计算)、均输(复杂的配分比例)、盈不足(盈亏)、方程(线性方程组)、勾股(勾股计算及测量)等九章，共246问202术，故称“九章算术”。
- 其内容涉及算术、代数、几何等诸多领域，并与实际生活紧密关联，充分体现了中国人的数学观和生活观。全书章与章之间、同章“术”与“术”之间、同“术”所驭算题之间按照由浅入深、由简而繁的顺序编排。
- 这是一部与现代数学的主流思想完全吻合的中国数学经典著作，一部最早却能体现现代宇宙学精神的书。
- 是中国古代算法的扛鼎之作，与古希腊欧几里得的《几何原本》并列为途径方法大不相同的、东西辉映的世界两大数学体系的代表。

小结

- 计算机如何求解问题
- 什么是算法



练习1：韩信分油

“韩信分油”的算术游戏：“3斤葫芦、7斤罐、10斤油篓分一半”，就是用3斤、7斤和10斤这样三种容器来分出两个5斤，而量器只能是这三种东西。

篓	10	7	7	4	4	1	1	8	8	5	5
罐	0	0	3	3	6	6	7	0	2	2	5
葫芦	0	3	0	3	0	3	2	2	0	3	0

练习2：最大公约数

定义 $\gcd(m, n)$ 为 m, n 的最大公约数。

$$\gcd(6, 9) = 3$$

$$\gcd(8, 20) = 4$$

$$\gcd(15, 100) = 5$$

如何求解 $\gcd(m, n)$?

练习3：称球问题

问题：

有12个外观完全一样的球，其中有一个球和其他球的重量不一致，如何使用一个天平称3次得出不一致的球是哪个？