第四节 含参变量的积分与反常重积分

4.1 含参变量的积分

（连续性、可积性、可导性）

在许多问题中常常要遇到含参变量的积分 例如，

计算二重积分时已遇到

$$\iint\limits_{\substack{a\le x\le b\\ c\le y\le d}} f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx.$$

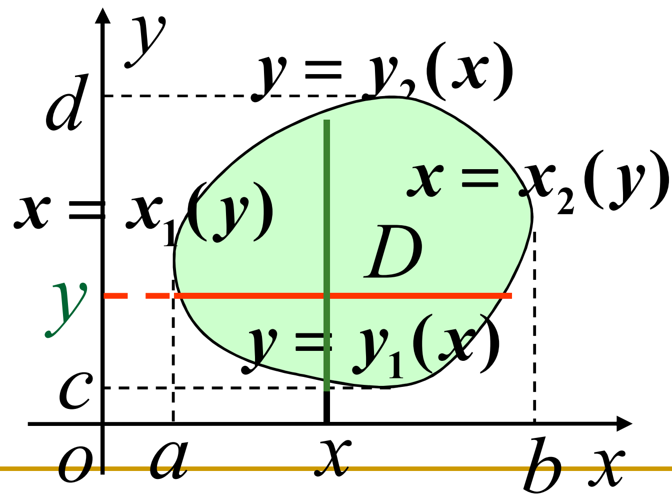
$$\boxed{G(x):=\int_c^d f(x,y)dy} \qquad \boxed{F(y):=\int_a^b f(x,y)dx}$$

若积分区域既是X–型区域又是Y–型区域，

则有 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\ \mathrm{d}y$$

$$=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\ \mathrm{d}x$$



又如求解积分方程

$$\int_0^1 \varphi(tx)dt = n\varphi(x)$$

其中$\varphi(x)$是可微的未知函数

含参变量的反常积分的例子

Γ- 函数 $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx \quad (\alpha > 0)$

B- 函数 $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \quad (p > 0, q > 0)$

积分限含参变量的积分例子 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2 - t^2)dt$

$$\boxed{F(x) = \int_0^x tf(x^2 - t^2)dt}$$

4.1 含参变量的积分

1 积分限固定的情形

设$f(x,y)$是矩形域$D=[a,b]\times[c,d]$上的连续函数,

则积分$\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$确定了一个定义在$[c,d]$上的函数,

记作
$$F(y)=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \qquad ①$$

----积分限固定！

y称为参变量，上式称为含参变量的积分.

含参积分的性质 —— 连续性, 可积性, 可微性

定理4.1（连续性）若$f(x,y)\in C(D)\quad D=[a,b]\times[c,d]$

$$\Rightarrow F(y)=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$$ 在$[c,d]$上连续.

$$\lim_{y\to y_0} F(y) = \boxed{\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x} = \boxed{\int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx}$$

$$= F(y_0) \qquad\qquad = \int_a^b f(x,y_0)\,dx \qquad (y_0\in[c,d])$$

说明
求极限与
求积分可
交换次序

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$|\Delta y|<\delta$时，就有

$$|F(y_0+\Delta y)-F(y_0)|<\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{y\to y_0}F(y)=F(y_0)$$

证：由于$f(x,y)$在闭区域D上连续，所以一致连续，即任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，对D内任意两点(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，

只要 $|x_1-x_2|<\delta$，$|y_1-y_2|<\delta$

就有 $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$

因此，任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$|\Delta y|<\delta$时，就有

$$|F(y+\Delta y)-F(y)|=\left|\int_a^b[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]\,\mathrm{d}x\right|$$
$$\le\int_a^b|f(x,y+\Delta y)-f(x,y)|\,\mathrm{d}x<\varepsilon(b-a)$$

这说明 $F(y)$在$[c,d]$上连续.

$$F(y)=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

定理1 表明，定义在闭矩形域上的连续函数,其极限运算与积分运算的顺序是可交换的． 即对任意 $y_0 \in [c,d]$ ，

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

同理可证，若$f(x,y)$在矩形域$D=[a,b]\times[c,d]$上连续, 则含参变量的积分

$$G(x) = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

也在$[a,b]$上连续.

$$D=[a,b]\times[c,d]$$

定理2（可导性）若 $f(x,y)\in C(D), f_x(x,y)\in C(D)$

则 $G(x)=\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$ 在$[a,b]$上可微，且

$$\boxed{G'(x)}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}\,y=\boxed{\int_c^d f_x(x,y)\,\mathrm{d}\,y}$$

证：令$g(x)=\int_c^d f_x(x,y)\,\mathrm{d}\,y$，则$g(x)$是$[a,b]$上的连续

函数，故当$x\in[a,b]$ 时，

$$\int_a^x g(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_a^x\left[\int_c^d f_x(x,y)\,\mathrm{d}\,y\right]\mathrm{d}\,x$$

$$=\int_c^d\left[\int_a^x \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\right]\mathrm{d}\,y$$

证：令$g(x)=\int_c^d f_x(x,y)\,\mathrm{d}\,y$，则$g(x)$是$[a,b]$上的连续函数，故当$x\in[a,b]$ 时，

$$\int_a^x g(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_a^x\left[\int_c^d f_x(x,y)\,\mathrm{d}\,y\right]\mathrm{d}\,x$$

$$=\int_c^d\left[\int_a^x \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\right]\mathrm{d}\,y$$

$$=\int_c^d\left[f(x,y)-f(a,y)\right]\mathrm{d}\,y=G(x)-G(a)$$

因上式左边的变上限积分可导,因此右边 $G(x)$可微，

且有 $G'(x)=g(x)=\int_c^d f_x(x,y)\,\mathrm{d}\,y$

此定理说明，被积函数及其偏导数在闭矩形域上连续时,求导与求积运算是可以交换顺序的 .

$$G(x)=\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

定理3 若$f(x,y)\in C(D)$, $D=[a,b]\times[c,d]$

则 $G(x)=\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$上可积，且

$$\int_a^b G(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

同样, $F(y)=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在$[c,d]$上可积，且

$$\int_c^d F(y)\,\mathrm{d}y=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

推论： 在定理3的条件下，累次积分可交换求积顺序,

即 $$\boxed{\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y}=\boxed{\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x}$$

例4.2 求$I=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x \quad (0<a<b)$.

解: 由被积函数的特点想到积分:

$$\int_a^b x^y \mathrm{d}y = \left[\frac{x^y}{\ln x}\right]_a^b = \frac{x^b-x^a}{\ln x}$$

$$\therefore I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_a^b x^y \mathrm{d}y \quad (x^y\text{在}[0,1]\times[a,b]\text{上连续})$$

$$=\int_a^b \mathrm{d}y\int_0^1 x^y \mathrm{d}x=\int_a^b \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 \mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b \frac{1}{y+1}\mathrm{d}y=\ln\frac{b+1}{a+1}$$

又如求解积分方程 $\int_0^1 \varphi(tx)dt = n\varphi(x)$

其中$\varphi(x)$是可微的未知函数

$$\int_0^1 \varphi(tx)dt = n\varphi(x) \Rightarrow \int_0^1 \frac{\partial \varphi(tx)}{\partial x} dt = n\varphi'(x)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 t\varphi'(tx)dt = n\varphi'(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}[t\varphi(tx)\Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi(tx)dt] = n\varphi'(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}\{[t\varphi(tx)]_0^1 - n\varphi(x)\} = n\varphi'(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}[(1-n)\varphi(x)] = n\varphi'(x)$$

2 积分限变动的情形

在二重积分时遇到对于参变量的不同的值x，积分限也不同的情形，这时积分限也是参变量x的函数.这样,积分

$$\Phi(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

----积分限变动的含参变量的常义积分

也是参变量 x 的函数.下面我们考虑这种更为广泛地依赖于参变量的积分的某些性质.

定理4.4（连续性）若 $f(x,y)\in C(D)$

$$D:\{(x,y)\ \big|\ y_1(x)\le y\le y_2(x),\ a\le x\le b\}$$

其中$y_1(x)$, $y_2(x)$为$[a,b]$上的连续函数, 则函数

$$\Phi(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y,$$

在$[a,b]$上连续.

$$\lim_{x\to 0}\int_x^{1+x}\frac{dy}{1+x^2+y^2}=?\ =\int_0^{1+0}\frac{dy}{1+0^2+y^2}=\frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x\to x_0}\Phi(x)=\Phi(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y=\int_{y_1(x_0)}^{y_2(x_0)} f(x_0,y)\,\mathrm{d}\,y$$

定理4. 4（连续性） 若 $f(x,y)\in C(D)$

$$D:\{(x,y)\ \big|\ y_1(x)\le y\le y_2(x),\ a\le x\le b\}$$

其中$y_1(x)$, $y_2(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数，则函数

$$\Phi(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y,$$

在$[a,b]$上连续.

证 令 $y=y_1(x)+t[y_2(x)-y_1(x)]$ ，$t\in[0,\ 1]$ ， 则

$$\Phi(x)=\int_0^1 f(x,y_1(x)+t[y_2(x)-y_1(x)])\,[y_2(x)(x)-y_1(x)(x)]\,\mathrm{d}\,t$$

由于被积函数在矩形域$[a,b]\times[0,\ 1]$上连续，由定理1知，

上述积分确定的函数 $\Phi(x)$在 $[a,b]$上连续 .

$D=[a,b]\times[c,d]$

定理4.5（可微性）若$f(x,y)\in C(D)$, $f_x(x,y)\in C(D)$

$y_1(x), y_2(x)$为定义在$[a,b]$上，其值域含于$[c,d]$

中的可微函数，则

$$\Phi(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

在$[a,b]$上可微，且

莱布尼茨公式

$$\Phi'(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f_x(x,y)\,\mathrm{d}\,y+f[x,y_2(x)]y_2'(x)-f[x,y_1(x)]y_1'(x)$$

证　把$\Phi(x)$看作复合函数 令

$$\Phi(x)=H(x,y_1,y_2)=\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y,$$

$y_2=y_2(x),\ y_1=y_1(x)$

$$\Phi(x)=H(x,y_1,y_2)=\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y,$$

$$y_2=y_2(x),\ \ y_1=y_1(x)$$

利用复合函数求导法则及变限积分求导，得

$$\Phi'(x)=\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y_1}y_1'(x)+\frac{\partial H}{\partial y_2}y_2'(x)$$

$$=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f_x(x,y)\,\mathrm{d}\,y+f[x,y_2(x)]y_2'(x)$$

$$-f[x,y_1(x)]y_1'(x)$$

例4.3 设 $\Phi(x)=\int_x^{x^2}\frac{\sin xy}{y}dy$, 求 $\Phi'(x)$.

解 应用莱布尼茨公式，得

$$\Phi'(x)=\int_x^{x^2}\cos xy dy+\frac{\sin x^3}{x^2}\cdot 2x-\frac{\sin x^2}{x}\cdot 1$$

$$=\left[\frac{\sin xy}{x}\right]_x^{x^2}+\frac{2\sin x^3}{x}-\frac{\sin x^2}{x}$$

$$=\frac{3\sin x^3-2\sin x^2}{x}.$$

例1 设$f(x)$在 $x=0$的某邻域内连续，验证当$|x|$充分小时，函数

$$\varphi(x)=\frac{1}{(n-1)\,!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

的 n 阶导数存在, 且 $\varphi^{(n)}(x)=f(x)$.

证: 令$F(x,t)=(x-t)^{n-1}f(t)$，显然，$F(x,t)$及 $F_x(x,t)$在原点的某个闭矩形邻域内连续, 由定理5 可得

$$\varphi'(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (n-1)(x-t)^{n-2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\cancel{(x-x)^{n-1} f(x)}$$

$$=\frac{1}{(n-2)!}\int_0^x (x-t)^{n-2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

即 $$\varphi'(x) = \frac{1}{(n-2)!}\int_0^x (x-t)^{n-2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

同理 $$\varphi''(x) = \frac{1}{(n-3)!}\int_0^x (x-t)^{n-3} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \cdots$$

$$\varphi^{(n-1)}(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

于是 $$\varphi^{(n)}(x) = f(x)$$

小结

1、含参变量的积分所确定的函数的定义；

2、含参变量的积分所确定的函数的连续性;

3、含参变量的积分所确定的函数的微分;

4、莱布尼茨公式及其应用.

练　习　题

一、求下列含参变量的积分所确定的函数的极限：

1. $\lim\limits_{x\to 0}\int_x^{1+x}\frac{dy}{1+x^2+y^2}$;　　2. $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^2 y^2\cos(xy)dy$.

二、求下列函数的导数：

1. $\varphi(x)=\int_0^x\frac{\ln(1+xy)}{y}dy$;　　2. $\varphi(x)=\int_x^{x^2}e^{-xy^2}dy$.

三、设 $F(x)=\int_0^x(x+y)f(y)dy$，其中 $f(x)$ 为可微函数，求 $F''(x)$.

四、计算积分：$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}\quad(|a|<1)$.

练习题答案

一、 1. $\dfrac{\pi}{4}$; 2. $\dfrac{8}{3}$.

二、 1. $\dfrac{2}{x}\ln(1+x^2)$; 2. $2xe^{-x^5}-e^{-x^3}-\int_x^{x^2} y^2 e^{-xy^2}dy$.

三、 $3f(x)+2xf'(x)$.

四、 $\pi\arcsin a$.