



2.2 收敛数列的性质

1. 唯一性
2. 有界性
3. 有理运算法则
4. 保号性
5. 夹逼性
6. 子数列的收敛性

1、唯一性

定理2.1 每个收敛的数列只有一个极限.

证 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, 由定义,

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, N_2$. 使得 当 $n > N_1$ 时恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$;

当 $n > N_2$ 时恒有 $|x_n - b| < \varepsilon$; 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$,

则当 $n > N$ 时有 $|a - b| = |(x_n - b) - (x_n - a)|$

$$\leq |x_n - b| + |x_n - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

上式仅当 $a = b$ 时才能成立. 故收敛数列极限唯一.



2、有界性

定义：对数列 x_n ，若存在正数 M ，使得一切自然数 n ，恒有 $|x_n| \leq M$ 成立，则称数列 x_n 有界，否则，称为无界.

例如，数列 $x_n = \frac{n}{n+1}$ ；有界 数列 $x_n = 2^n$. 无界

数轴上对应于有界数列的点 x_n 都落在闭区间 $[-M, M]$ 上.

定理2.2 收敛的数列必定有界.

证 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 由定义, 取 $\varepsilon = 1$,

则 $\exists N$, 使得当 $n > N$ 时恒有 $|x_n - a| < 1$,

即有 $a - 1 < x_n < a + 1$.

记 $M = \max\{|x_1|, \dots, |x_N|, |a - 1|, |a + 1|\}$,

则对一切自然数 n , 皆有 $|x_n| \leq M$, 故 $\{x_n\}$ 有界.

注意: 有界性是数列收敛的必要条件.

推论 无界数列必定发散.

3、极限的有理运算法则


定理2.3 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 则

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \alpha a + \beta b,$$


(这里 α, β 为常数)。

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = ab。$$


$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)。$$




例2.4 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0)$




例2.4 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}$



例2.5 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^5 + 3n^2 + 6n + 1}{3n^5 + 6n^4 + n^3 + 2n}$



例2.6 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$



例 求
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^m + a_1 n^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \cdots + b_k}$$

($a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$, m 和 k 为非负整数)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^m + a_1 n^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \cdots + b_k} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & k = m, \\ 0, & k > m, \\ \infty, & k < m, \end{cases}$$



练习

■ 1 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{a^n + 1}$, 其中 $a \neq -1$ 。

■ 2 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ 。

4、保号性

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a (a \neq 0)$, 则 $\exists N \in N_+, a_n$ 与 a 同号.

并且, 若 $a > 0$ (或 $a < 0$) 则 $\exists N \in N_+$

使得 $\forall n > N$, 恒有 $a_n \geq q > 0$ (或 $a_n \leq q < 0$)



推论2.1 保序性

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. 若 $\exists N \in N_+$, 使得
 $\forall n > N$ 恒有 $a_n \leq b_n$, 则 $a \leq b$.

5、夹逼性

定理2.5

如果数列 x_n, y_n 及 z_n 满足下列条件:

$$(1) y_n \leq x_n \leq z_n \quad (n = 1, 2, 3 \cdots)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a,$$

那末数列 x_n 的极限存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

本性质既给出了判别数列收敛的方法; 又提供了一个计算数列极限的方法。



注意:

利用夹逼准则求极限关键是构造出 η_n 与 ε_n ,
并且 η_n 与 ε_n 的极限是容易求的.

例1 求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的极限。

解: 记 $a_n = \sqrt[n]{n} = 1 + h_n$, 这里 $h_n > 0 (n > 1)$,

则有:

$$1 \leq a_n = 1 + h_n \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}$$

左右两边的极限均为1, 故由夹逼性本例得证。

例2.7 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$.

解 $\because \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$

$$\text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1, \quad \text{由夹逼性得}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$$

6、子数列的收敛性

定义：在数列 $\{x_n\}$ 中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列 $\{x_n\}$ 中的先后次序，这样得到的一个数列称为原数列 $\{x_n\}$ 的子数列（或子列）。

例如， $x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n, \cdots$



$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$

注意：在子数列 $\{x_{n_k}\}$ 中，一般项 x_{n_k} 是第 k 项，

而 x_{n_k} 在原数列 $\{x_n\}$ 中却是第 n_k 项，显然， $n_k \geq k$ 。



定理 收敛数列的任一子数列也收敛. 且极限相同.

证 设数列 $\{x_{n_k}\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的任一子数列.

$$\because \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

$$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{使 } n > N \text{ 时, 恒有 } |x_n - a| < \varepsilon.$$

取 $K = N$,

则当 $k > K$ 时, $n_k > n_K = n_K \geq N$.


$$\therefore |x_{n_k} - a| < \varepsilon. \quad \therefore \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a. \quad \text{证毕.}$$



推论 若数列存在两个子数列分别收敛于不同的极限，则这个数列必发散。

注 该推论是证明数列必发散的很好的工具。

练习： $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a.$



例4 证明数列 $x_n = (-1)^{n+1}$ 是发散的.

证 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 由定义, 对于 $\varepsilon = \frac{1}{2}$,

则 $\exists N$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \frac{1}{2}$ 成立,

即当 $n > N$ 时, $x_n \in (a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$, 区间长度为1.

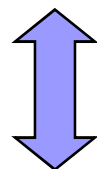
而 x_n 无休止地反复取1, -1两个数,

不可能同时位于长度为1的区间内.

事实上, $\{x_n\}$ 是有界的, 但却发散.

用子数列刻画数列不收敛于 a

数列 $\{a_n\}$ 不收敛于 a



存在 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$ 以及 $\varepsilon_0 > 0$, 满足

$$|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon_0$$



数列极限的两大问题

- 数列极限的存在性；
（此问题为最关键的问题）
- 数列极限值的大小；
（存在性成立后，再想办法计算极限）



几种证明极限存在的方法：

- 按照数列极限的定义证明。
- 按照奇、偶子列的收敛性证明。
- 利用夹逼准则证明。



2.3 数列极限存在的判别准则

- 1. 单调有界准则
- 2. 数列极限的归并原理
- 3. **Weierstrass** 定理
- 4. 柯西(**Cauchy**)收敛原理

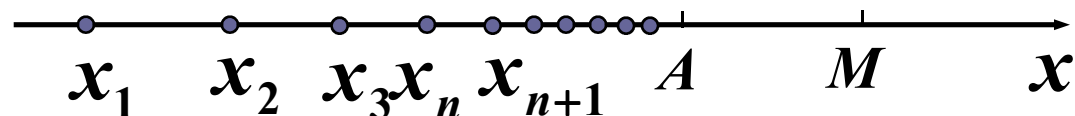
一、单调有界准则

如果数列 x_n 满足条件

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots, \text{ 单调增加} \\ x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots, \text{ 单调减少} \end{array} \right\} \text{ 单调数列}$$

定理2.6 单调有界数列必收敛。


几何解释:



几点说明:


- 通常该准则变通为:
 - 1) 单调递增有上界的数列存在极限。
 - 2) 单调递减有下界的数列存在极限。
- 本定理只是证明了存在性。
- 本定理只对一类特殊的数列可以判别存在性。
- 此定理的条件为充分非必要条件。

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots$$



例2.9 设 $a_n = \frac{\alpha^n}{n!}$, 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛,

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n}{n!} = 0, \alpha \in R$



练习: 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}, n = 1, 2, \dots$

其中 $\alpha \geq 2$, 证明 $\{a_n\}$ 收敛。

证明: $\{a_n\}$ 递增显然, 下面证明有上界, 事实上:

$$\begin{aligned} a_n &\leq 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \\ &\leq 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \\ &= 2 - \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$


例2.10 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 存在。

证明：

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + (n+1) \cdot \frac{1}{n+1} + \dots + C_{n+1}^k \left(\frac{1}{n+1}\right)^k + \dots + \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$


$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \dots + C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\begin{aligned} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 a_n = & 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \dots + \\
 & \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n} \right) + \\
 & \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n} \right)
 \end{aligned}$$

a_n 的展开式中共有 $n+1$ 项，每一项为正数。



$$\begin{aligned}
 a_{n+1} = & 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) + \dots + \\
 & \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \left(1 - \frac{2}{n+1} \right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1} \right) + \\
 & \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \left(1 - \frac{2}{n+1} \right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1} \right) + \\
 & \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \left(1 - \frac{2}{n+1} \right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1} \right)
 \end{aligned}$$

a_{n+1} 的展开式中共有 $n+2$ 项，每一项为正数。



不难发现有：

$$\frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)$$

即 a_n 的第 k 项小于 a_{n+1} 的第 k 项，

此外 a_{n+1} 比 a_n 还多了一个正数项，故

$$a_n < a_{n+1}, n = 1, 2, \dots$$

严格增加



下面证明有上界:

$$\begin{aligned}a_n &< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \\&< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \\&= 3 - \frac{1}{n} < 3\end{aligned}$$



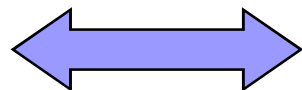
二、子数列与数列极限的归并原理

数列收敛与其子数列收敛的密切联系：

- 1 若数列收敛，则其任意子数列也收敛（并且收敛到同一极限）
- 2 若数列的奇数列和偶数列都收敛到同一极限，则原数列也收敛到该极限

归并原理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$



A. $\{a_n\}$ 的每个子列 $\{a_{n_k}\}$ 都有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$$

B. $\{a_n\}$ 的每个子列 $\{a_{n_k}\}$ 都收敛，
并且至少一个极限为 a

数列收敛 \longleftrightarrow 任意子数列收敛

三、Weierstrass 定理

设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间 ($a_n, b_n \in \mathbb{R}$)

(1) 它是递缩的, 即 $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots$
 $\supseteq [a_n, b_n] \supseteq \cdots$

(2) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$

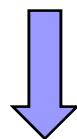
那么称此闭区间列为一个闭区间套.

定理2.8 (闭区间套定理) 任何闭区间套必有唯一的公共点, 即存在唯一的 $\xi \in \mathbb{R}$, 使得

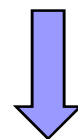
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\xi\}$$



考虑有界数列和收敛数列之间的关系



收敛数列一定有界



有界数列未必收敛

定理2.9 Weierstrass定理

有界数列必有收敛子数列



四、柯西收敛原理

定义2.2 Cauchy数列（基本数列）：

定义 如果对 $\{x_n\} \exists N$ ，当 $n, m > N$ 时

$$|x_n - x_m| < \varepsilon,$$

则称 $\{x_n\}$ 是Cauchy数列（基本数列）



Cauchy收敛原理

定理 2.10 (Cauchy收敛原理)

$\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \{x_n\}$ 为基本数列。

柯西(Cauchy)收敛准则

数列 $\{a_n\}$ 收敛



$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \text{使得} \forall m, n > N, |a_m - a_n| < \varepsilon$$



$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \text{使得} \forall n > N \text{ 及 } \forall p \in \mathbf{N}_+, |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$$

柯西(Cauchy)收敛准则

数列 $\{a_n\}$ 不收敛



$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N, \exists m, n > N, \text{使得 } |a_m - a_n| \geq \varepsilon_0$




$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall n, \exists p \in \mathbf{N}_+, \text{使得 } |a_{n+p} - a_n| \geq \varepsilon_0$



柯西(Cauchy)收敛准则的意义

- 收敛数列的各项越到后面，项之间几乎“挤”在了一起。
- 判别 $\{a_n\}$ 的收敛性只要根据本身满足的特性就可以判别，不需要引入别的数列作参照。
- 把数列项与其极限的关系变换为数列各个项之间的关系。



例2.11

设 $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$, 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛.

例2.12

设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, 证明 $\{a_n\}$ 发散.

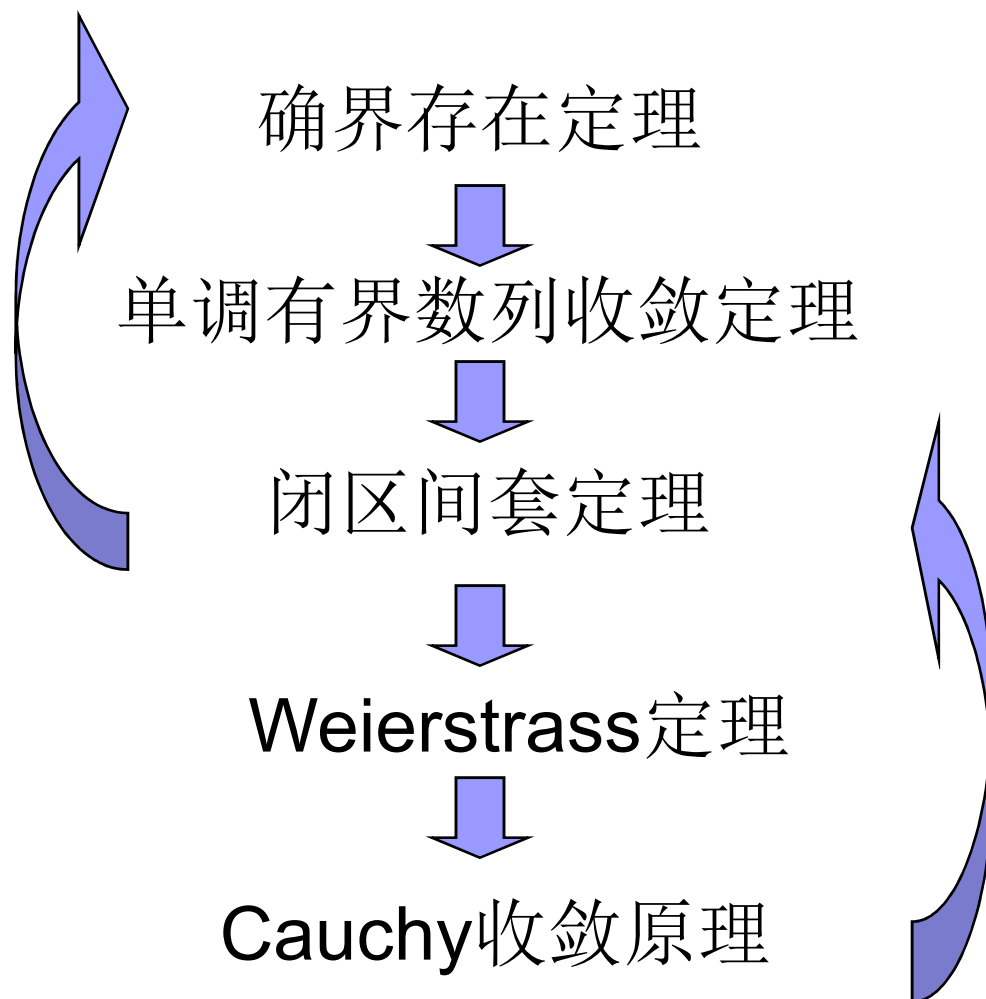
利用:

数列 $\{a_n\}$ 发散 $\iff \exists \varepsilon_0 > 0, \forall n, \exists p \in \mathbf{N}_+, \text{使得 } |a_{n+p} - a_n| \geq \varepsilon_0$

可以取:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}, \quad p = n$$

实数系的基本定理





柯 西

柯西 (Cauchy, Augustin Louis 1789-1857)，十九世纪前半世纪的法国数学家。

他的特长是在分析学方面，他对微积分给出了严密的基础。他还证明了复变函数论的主要定理以及在实变数和复变数的情况下微分方程解的存在定理，这些都是很重要的。他的全集26卷，仅次于欧拉，居第二位。

柯西是历史上有数的大分析学家之一。幼年时在父亲的教导下学习数学。拉格朗日、拉普拉斯常和他的父亲交往，曾预言柯西日后必成大器。1805年柯西入理工科大学，1816年成为那里的教授。

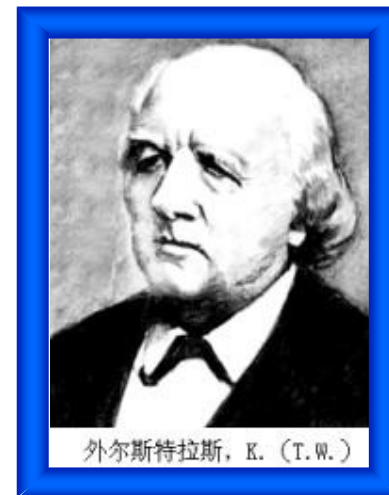
1821年，在拉普拉斯和泊松的鼓励下，柯西出版了《分析教程》、《无穷小计算讲义》、《无穷小计算在几何中的应用》这几部划时代的著作。他给出了分析学一系列基本概念的严格定义。柯西的极限定义至今还在普遍使用，连续、导数、微分、积分、无穷级数的和等概念也建立在较为坚实的基础上。

现今所谓的柯西定义或 ε - δ 方法是半个世纪后经过维尔斯特拉斯的加工才完成的。柯西时代实数的严格理论还未建立起来，因此极限理论也就不可能完成。柯西在1821年提出 ε 方法（后来又改成 δ ），即所谓极限概念的算术化，把整个极限过程用一系列不等式来刻画，使无穷的运算化成一系列不等式的推导。后来维尔斯特拉斯将 ε 和 δ 联系起来，完成了 ε - δ 方法。



维尔斯特拉斯 (Weierstrass 1815 – 1897)

德国数学家. 他的主要贡献是在分析学方面. 1854年他解决了椭圆积分的逆转问题, 还建立了椭圆函数的新结构. 他在分析学中建立了实数理论, 引进了极限的 $\varepsilon - \delta$ 定义, 给出了连续函数的严格定义及性质, 还构造了一个处处不可微的连续函数:



$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x) \quad (0 < a < 1, ab > 1 + \frac{3}{2}\pi, b \text{ 为奇数})$$

为分析学的算术化作出了重要贡献.