第一章　函数、极限、连续

习　题　1.1

(A)

5. 分别写出实数集 A 下无界、上无界和无界的定义.

解　设 $A\subseteq\mathbf{R}$，且 A 非空. 若对 $\forall l\in\mathbf{R}$，总 $\exists x_0\in A$ 使 $x_0\leqslant l$，称集合 A 下无界.

若 $\forall L\in\mathbf{R}$，$\exists x_0\in A$，使 $x_0\geqslant L$，那么称非空集 A 上无界.

若 $\forall M>0$，$\exists x_0\in A$，使 $|x_0|\geqslant M$，那么称集合 A 无界.

6. 设 $A\subseteq\mathbf{R}$，证明 A 有界 $\Leftrightarrow\exists M>0$，使得 $\forall x\in A$，恒有 $|x|\leqslant M$.

证　必要性（“$\Rightarrow$”）

由于 A 有界，所以 A 有上界且有下界. 于是，$\exists L,l$，使 $\forall x\in A$，恒有 $l\leqslant x\leqslant L$. 取 $M=\max\{|L|,|l|\}$，则 $|x|\leqslant M$，$\forall x\in A$.

充分性（“$\Leftarrow$”）由 $\exists M>0$，使 $\forall x\in A$，恒有 $|x|\leqslant M$，即 $\forall x\in A$，$-M\leqslant x\leqslant M$，即 A 有上界 M 和下界 $-M$，即 A 有界.

7. 设 $A\subseteq\mathbf{R}$，试写出 A 的下确界 $\inf A$ 的定义.

解　设 $A\subseteq\mathbf{R}$，$A\neq\varnothing$. 若存在 $S\in\mathbf{R}$，满足：

（1）$\forall x\in A$，都有 $x\geqslant S$；

（2）$\forall\varepsilon>0$，$\exists x_0\in A$，使 $x_0<S+\varepsilon$，则称 S 是 A 的下确界，记作 $\inf A$.

14. 设 $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx-a}$，证明 $x=f(y)$，其中 a,b,c 为常数，且 $a^2+bc\neq 0$.

证　如果 $a=0$ 或 $bc=0$，结论显然成立.

如果 $a\neq 0$，$bc\neq 0$，由于 $a^2+bc\neq 0$，所以 $\dfrac{a}{c}\notin R(f)$.

$$f[f(x)]=f(y)=\frac{ay+b}{cy-a}=\frac{a\dfrac{ax+b}{cx-a}+b}{c\dfrac{ax+b}{cx-a}-a}=x.$$

即 $x=f(y)$.

17. 设 $f:x\mapsto x^3-x$，$\varphi:x\mapsto \sin 2x$. 试求 $(f\circ\varphi)(x)$，$(\varphi\circ f)(x)$，$(f\circ f)(x)$.

解　$(f\circ\varphi)(x)=f[\varphi(x)]=f(\sin 2x)=\sin^3 2x-\sin 2x$.

$(\varphi\circ f)(x)=\varphi[f(x)]=\varphi(x^3-x)=\sin 2(x^3-x)$.

$$(f\circ f)(x)=f(x^3-x)=(x^3-x)^3-(x^3-x)=x^9-3x^7+3x^5-2x^3+x.$$

20. 将一圆形金属片，自圆心处剪去一扇形后，围成一无底圆锥形的杯子. 试将该杯的容积表示为余下部分中心角 θ 的函数，并指出其定义区间.

解　设圆锥的底半径为 R_1，则 $2\pi R_1=\theta R$，即 $R_1=\dfrac{\theta R}{2\pi}$. 圆锥体高 $H=\sqrt{R^2-\dfrac{\theta^2R^2}{4\pi^2}}$，故无底圆锥体的容积为

$$V=\frac{1}{3}\pi R_1^2H=\frac{1}{24}\,\frac{R^3\theta^2}{\pi^2}\sqrt{4\pi^2-\theta^2},\theta\in(0,2\pi).$$

(B)

4. 研究下列两组函数：

(1) $f:x\mapsto\sqrt{x^2-1}$，$g:x\mapsto\sqrt{1-x^2}$；

(2) $f(x)=\begin{cases}2x, x\in[-1,1],\\ x^2, x\in(1,3),\end{cases}\qquad g(x)=\dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$.

它们能否进行复合运算？若能，试在能进行复合运算的集合上写出复合函数 $(f\circ g)(x)$ 与 $(g\circ f)(x)$ 的表达式.

解　(1) $D(f)=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$，$R(f)=[0,+\infty)$，$D(g)=[-1,1]$，$R(g)=[0,1]$. 由于 $R(g)\cap D(f)=\{1\}$，$R(f)\cap D(g)=[0,1]$，故 $f\circ g$，$g\circ f$ 均无意义. 但如果限定 g 的定义域为 $\{0\}$. 则 $f\circ g$ 有意义，且 $(f\circ g)(0)=f[g(0)]=f(1)=0$；同样限制 f 的定义域为 $[-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2}]$，则 f 的值域为 $[0,1]$，于是 $g\circ f$ 在 $[-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2}]$ 上有定义，且 $(g\circ f)(x)=g(\sqrt{x^2-1})=\sqrt{1-(\sqrt{x^2-1})^2}=\sqrt{2-x^2}$.

(2) $D(f)=[-1,3)$，$D(g)=[0,4]$，$R(f)=[-2,9)$，$R(g)=\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$. 由于 $D(f)\cap R(g)=\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$，所以 $\forall\, x\in D(g)$，$(f\circ g)(x)=f\left[\dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)\right]=\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$. 由于 $R(f)\not\subseteq D(g)$，所以 f 与 g 不能复合. 又因为 $D(g)\cap R(f)=$

$[0,4]$，且 $x\in[0,2]$时，$f(x)\in[0,4]$，所以

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases} g(2x)=\dfrac{1}{2}\arcsin(x-1), & x\in[0,1],\\ g(x^2)=\dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{x^2}{2}-1\right), & x\in(1,2].\end{cases}$$

5. 求分段函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\in[-1,0),\\ x^2+1, & x\in[0,1].\end{cases}$$

的反函数表达式，并画出它们的图像.

解　当 $x\in[-1,0)$时，$f^{-1}:y\mapsto-\sqrt{y+1}$，$y\in(-1,0]$，当 $x\in[0,1]$时，$f^{-1}:y\mapsto\sqrt{y-1}$，$y\in[1,2]$. 所以

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} -\sqrt{x+1}, & -1<x\leqslant 0,\\ \sqrt{x-1}, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

6. 设 $f(x)$，$g(x)$都是区间$[a,b]$上的单调增函数，并且在该区间上，$f(x)\leqslant g(x)$. 试证 $f[f(x)]\leqslant g[g(x)]$.

证　$\forall x\in[a,b]$，令 $x_1=f(x)$，$x_2=g(x)$，则 $x_1\leqslant x_2$，$f[f(x)]=f(x_1)\leqslant f(x_2)\leqslant g(x_2)=g[g(x)]$.

7. 设有函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，并且对任何 $x,y\in\mathbf{R}$，都有

$$f(xy)=f(x)f(y)-x-y,$$

试求 $f(x)$的表达式.

解　由题设：$\forall x\in\mathbf{R}$，$y=1$，恒有 $f(x)=f(x)f(1)-x-1$，即$[f(1)-1]f(x)=x+1$；又由于对 $x=1$，$y=1$ 有 $f(1)=f^2(1)-2$. 所以 $f(1)=2$ 或 $f(1)=-1$. 于是 $f(x)=x+1$ 或 $f(x)=-\dfrac{1}{2}(x+1)$. 而 $f(x)=-\dfrac{1}{2}(x+1)$与题设不符，舍去.

8. 设有函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，并且对任何 $x,y\in\mathbf{R}$，都有

$$f(xy)=xf(x)+yf(y),$$

证明 $f(x)\equiv 0$.

证　取 $x=1$，$y=1$，由题设得 $f(1)=f(1)+f(1)$，即 $f(1)=0$. 又由于 $\forall x\in\mathbf{R}$ 及 $y=1$，有 $f(x)=xf(x)+f(1)=xf(x)$，即$(1-x)f(x)=0$，于是 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)=0$.

9. 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，试求 $f(x)$与 $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$.

解　由于 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}+2\right)-2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$，所以

$f(x)=x^2-2,x\in(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},+\infty)$. 于是 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}-4$，$x\in(-\infty,-\sqrt{2}+1]\cup[\sqrt{2}-1,+\infty)$.

习 题 1.2

(A)

1. 下列说法能否作为 a 是数列$\{a_n\}$的极限的定义？为什么？

(1) 对于无穷多个 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，不等式$|a_n-a|<\varepsilon$ 成立；

(2) 对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n\geqslant N$ 时，有无穷多项 a_n，使不等式$|a_n-a|<\varepsilon$成立；

(3) 对于给定的很小的正数 $\varepsilon_0=10^{-10}$，不等式$|a_n-a|<10^{-10}$恒成立.

解 (1) 不能，有无穷多个 $\varepsilon>0$ 满足(2.2)式，不能推出对任意 $\varepsilon>0$ 满足(2.2)式.

(2) 不能，例如发散数列 $1,\frac{1}{2},1,\frac{1}{3},\cdots,1,\frac{1}{n},\cdots$. 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，有无穷多项 a_n 满足$|a_n-0|<\varepsilon$.

(3) 不能，如数列 $\left\{10^{-11}\sin\frac{1}{n}\right\}$. $\varepsilon_0=10^{-10}$，$\left|10^{-11}\sin\frac{1}{n}-0\right|<10^{-10}$ 恒成立. 但 $\lim\limits_{n\to+\infty}10^{-11}\sin\frac{1}{n}$不存在.

2. 说明下列表述都可作为 a 是$\{a_n\}$极限的定义：

(2) 对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，不等式$|a_n-a|\leqslant\varepsilon$ 成立；

(3) 对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，不等式$|a_n-a|<k\varepsilon$ 成立，其中 k 是正常数；

(4) 对于任给的 $m\in\mathbf{N}_+$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，不等式$|a_n-a|<\frac{1}{m}$成立；

(5) 对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，使不等式$|a_{N+p}-a|<\varepsilon$ 对于任意的正整数 p 都成立.

解 (2) $\forall\varepsilon>0$，$\frac{\varepsilon}{10}>0$. 则 $\exists N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，

$$|a_n-a|\leqslant\frac{\varepsilon}{10}<\varepsilon. \text{所以} \lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

(3) $\forall \varepsilon>0, \frac{\varepsilon}{k}>0$. 则 $\exists N\in \mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，

$$|a_n-a|<k\cdot\frac{\varepsilon}{k}=\varepsilon\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

(4) $\forall \varepsilon>0, \exists m\in\mathbf{N}_+$，使 $\frac{1}{m}<\varepsilon$，反之也成立.

(5) 由题设，$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}_+$，对一切 $n>N$，恒有 $|a_n-a|<\varepsilon$.

3. 若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是两个发散数列，它们的和与积是否发散？为什么？若其中一个收敛，一个发散，它们的和与积的收敛性又如何？

解 若 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 均发散，和与积不一定发散.

如 $a_n=(-1)^n, b_n=(-1)^{n+1}, a_n+b_n=0$，收敛. $a_n\cdot b_n=-1$ 收敛.

若 $\{a_n\}$ 收敛，$\{b_n\}$ 发散. $\{a_n+b_n\}$ 一定发散.

(假设 $c_n=a_n+b_n$ 收敛. 由极限的有理运算法则知. $b_n=c_n-a_n$ 收敛矛盾，所以 $\{c_n\}$ 发散.)

$\{a_n\cdot b_n\}$ 不一定收敛，也不一定发散.

$\left(\text{如} a_n=\frac{1}{n}, b_n=n^2, \{a_n\cdot b_n\}=\{n\}\text{发散}. a_n=\frac{1}{n^2}, b_n=n, \{a_n\cdot b_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}\text{收敛}.\right)$

如果 $\{a_n\}$ 收敛且 $\lim a_n\neq 0$，$\{b_n\}$ 发散则 $\{a_n\cdot b_n\}$ 一定发散.

(假设 $c_n=a_n\cdot b_n$ 收敛. 则 $b_n=\frac{c_n}{a_n}$ 且 $\lim a_n\neq0$. 由有理运算法则 $\{b_n\}$ 收敛产生矛盾.)

5. 若把保序性中的条件 $a_n\leqslant b_n$ 改为 $a_n<b_n$，是否仍得到结论 $a<b$?

解 不能. 例如 $a_n=\frac{1}{n}, b_n=\frac{10}{n}, \forall n\in\mathbf{N}_+, a_n<b_n$. 但 $a=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=0=b$.

6. 下列结论是否正确？若正确，请给出证明；若不正确，请举出反例.

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|A|$；

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|A|$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A(A\neq0)$；

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$；

(4) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=A$；

(5) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$；

(6) 若对任何实数 α，$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha a_n=\alpha A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.

解 (1) 正确. 由于 $||a_n|-|A||\leqslant|a_n-A|$，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，使 $\forall n>N$，恒有 $||a_n|-|A||\leqslant|a_n-A|<\varepsilon$. 即 $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=|A|$.

(2) 不正确. 如 $a_n=(-1)^n$，$\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=1$，但 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 不存在.

(3) 正确. 由 $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=0$ 可知 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbf{N}_+$, 当 $n>N$ 时, $||a_n|-0|=|a_n|=|a_n-0|<\varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$.

(4) 正确. 由 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$ 知 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1\in\mathbf{N}_+$, 当 $n>N_1$ 时, $|a_n-A|<\varepsilon$ 成立. 即 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=N_1-1$, 那么当 $n>N_1$ 时, $|a_{n+1}-A|<\varepsilon$ 成立, 故 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n+1}=A$.

(5) 不正确. 如 $a_n=\dfrac{\alpha^n}{n!}(\alpha\in\mathbf{R})$, $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$, 而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=0$.

(6) 正确. 由于对 $\forall\alpha\in\mathbf{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha a_n=\alpha A$, 所以对 $\alpha=1$, 应有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.

7. 用 $\varepsilon-N$ 定义证明下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}=0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-n})=\dfrac{1}{2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\cos n}{n^2}=0$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

解 (1) $\forall\varepsilon>0$. 取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$. 当 $n>N$ 时, 恒有

$$\left|\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}-0\right|\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon \text{ 故 } \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}=0.$$

(2) $\forall\varepsilon>0$. 取 $N=\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$. $\forall n>N$, 恒有

$$\left|n-\sqrt{n^2-n}-\frac{1}{2}\right|=\frac{n}{2(n+\sqrt{n^2-n})^2}\leqslant\frac{1}{2n}<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-\sqrt{n^2-n})=\dfrac{1}{2}$.

(3) $\forall\varepsilon>0$. 取 $N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$. 对 $\forall n>N$, 恒有

$$\left|\frac{1+\cos n}{n^2}\right|\leqslant\frac{2}{n^2}<\frac{2}{n}<\varepsilon, \text{故 } \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\cos n}{n^2}=0.$$

(4) **解法一** 令 $\sqrt[n]{n}=1+x_n$, 则 $x_n>0$ 由二项式公式

$$n=1+nx_n+\frac{1}{2}n(n-1)x_n^2+\cdots+x_n^n\geqslant1+\frac{1}{2}n(n-1)x_n^2,$$

从而有
$$1\leqslant\sqrt[n]{n}=1+x_n\leqslant1+\sqrt{\frac{2}{n}},$$

由夹逼性知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

解法二 由于 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|=\dfrac{n-1}{1+\sqrt[n]{n}+(\sqrt[n]{n})^2+\cdots+(\sqrt[n]{n})^{n-1}}<\dfrac{n-1}{\frac{1}{2}(n-1)\sqrt{n}}=\dfrac{2}{\sqrt{n}}$, 所以 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\dfrac{4}{\varepsilon^2}\right]$, 当 $n>N$ 时, $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$ 成立. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

8. 试写出数列无上界, 无下界的定义.

解　如果 $\forall M>0$，总 $\exists n_0\in\mathbf{N}_+$，使 $a_{n_0}>M$，称数列 $\{a_n\}$ 无上界.

如 $\forall M>0$，总 $\exists n_0\in\mathbf{N}_+$，使 $a_{n_0}<-M$. 称 $\{a_n\}$ 无下界.

9. 设由数列 $\{a_n\}$ 的奇数项与偶数项组成的两个子列收敛于同一个常数 a，证明 $\{a_n\}$ 也收敛于 a.

证　$\forall\varepsilon>0$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2m}=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2m+1}=a$，$\exists\ N_1,N_2\in\mathbf{N}_+$，对 $\forall m>N_i$，$i=1,2$，恒有 $|a_{2m}-a|<\varepsilon$，$|a_{2m+1}-a|<\varepsilon$. 所以取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时，$|a_n-a|<\varepsilon$ 成立，其中 $n=2m$ 或 $n=2m+1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

10. 求下列数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{5}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\left(1+\dfrac{3}{n}\right)=\dfrac{1}{5}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{3}+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n\dfrac{1}{3}}{1+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}}=\dfrac{1}{3}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n(n+1)}{2(n+2)}-\dfrac{n}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n}{2(n+2)}=-\dfrac{1}{2}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt{1+\dfrac{4}{n}}+1}=2$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)}$

$$=\lim_{n\to\infty}2^{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}=2.$$

(6) 由于 $\sqrt[n]{2}\leqslant\sqrt[n]{2+\sin^2 n}\leqslant\sqrt[n]{3}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+\sin^2 n}=1.$$

(7) $\dfrac{1+4+\cdots+n^2}{n^3+n}\leqslant\dfrac{1}{n^3+1}+\dfrac{4}{n^3+2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+n}\leqslant\dfrac{1+4+\cdots+n^2}{n^3+1}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+4+\cdots+n^2}{n^3+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2+1}=\frac{1}{3},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+4+\cdots+n^2}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3+1}=\frac{1}{3},$$

所以由夹逼性 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^3+1}+\dfrac{4}{n^3+2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+n}\right)=\dfrac{1}{3}$.

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-1}=\mathrm{e}$.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-1}{n}\right)^{-n}\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}$.

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n-4}\right)^{n+4}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n-4}\right)^{n-4}\left(1+\dfrac{1}{n-4}\right)^8=\mathrm{e}$.

11. 判别下列数列的敛散性.

(1) $a_n=\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+1}+\cdots+\frac{1}{3^n+1}$.

$0\leqslant a_n\leqslant\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\leqslant\frac{1}{2}$，$\{a_n\}$有界，

因为 $$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{3^{n+1}+1}\geqslant a_n,$$ $\{a_n\}$单调增.

由单调有界准则，$\{a_n\}$收敛.

(2) $a_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

$$0\leqslant a_n\leqslant 1,\text{且 } a_{n+1}=a_n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\leqslant a_n.$$

故$\{a_n\}$单减有下界. 从而$\{a_n\}$收敛.

(3) $a_1=\sqrt{2}, a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\cdots,a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}},\cdots$.

$0<a_1=\sqrt{2}<2$，$0<a_2=\sqrt{2+a_1}<2$，由数学归纳法证得 $0<a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}<2$，$n=1,2,\cdots$.

$$a_{n+1}-a_n=\sqrt{2+a_n}-a_n=\frac{(2-a_n)(a_n+1)}{\sqrt{2+a_n}+a_n}>0,$$

故$\{a_n\}$为单增有界数列，即$\{a_n\}$收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则 $A\geqslant 0$. 由 $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$ 得

$$A=\sqrt{A+2},\text{所以 } A=2.$$

(4) $a_n=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$.

因为 $a_n<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$ （因为 $k\geqslant 2$ 时，$2^{k-1}<k!$）

$$=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)<2,$$

且 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{(n+1)!}>a_n$，故$\{a_n\}$单增有上界. $\{a_n\}$收敛.

注意，还可用下述方法证明 a_n 的有界性.

$$a_n<1+\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$
$$=2-\frac{1}{n}<2.$$

(5) $a_n=1+\frac{\sin 1}{1^2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{n^2}$.

$$\begin{aligned}|a_{n+p}-a_n| &= \left|\frac{\sin(n+1)}{(n+1)^2}+\frac{\sin(n+2)}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{\sin(n+p)}{(n+p)^2}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2} \\ &\leqslant \frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\ &\leqslant \frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n},\end{aligned}$$

则 $\forall \varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,$\forall p\in \mathbf{N}_+$,有 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$,由 Cauchy 原理知,原数列 $\{a_n\}$ 收敛.

13. 求下列数列的极限点:

(1) $\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{8},\frac{7}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\frac{2^n-1}{2^n},\cdots$.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n}=1$,所以此数列有两个极限点 0,1.

(2) $a_n=3\left(1-\frac{1}{n}\right)+2(-1)^n$.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=5,\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}=1$,所以此数列有两个极限点 5,1.

(3) $a_n=\frac{n+(-1)^n n}{2}+\frac{1}{n}$.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}=0$,所以此数列有唯一的极限点 0.

14. 设 $0<x_1<1,x_{n+1}=1-\sqrt{1-x_n}$,证明:数列 $\{x_n\}$ 收敛,并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

解 因为 $0<x_1<1$. 设 $0<x_{n-1}<1$,由数学归纳法证得 $0<x_n<1$.

又因为 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1-\sqrt{1-x_n}}{x_n}=\frac{1}{1+\sqrt{1-x_n}}<1$,即 $x_{n+1}<x_n$,$\{x_n\}$ 单调减,由单调有界准则知 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$. 由等式 $x_{n+1}=1-\sqrt{1-x_n}$ 得 $A=1-\sqrt{1-A}$,故 $A=0$,或 $A=1$(舍),故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1-x_n}}=\frac{1}{2}.$$

15. 设 $a>0,x_1>0,x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

证 因为 $a>0,x_1>0$,所以 $x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)\geqslant\sqrt{a}>0$,由数学归纳法可知

$x_n \geqslant \sqrt{a}$，从而

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{x_n^2}\right)\leqslant\frac{1}{2}(1+1)=1，即\ x_{n+1}<x_n，$$

故$\{a_n\}$单减有下界.故$\{a_n\}$收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$. 由于 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$且 $x_n\geqslant\sqrt{a}>0$，所以 $A>0$ 且 $A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{a}{A}\right)$. 故 $A=\sqrt{a}$.

16. 设$\{a_n\}$单调增，$\{b_n\}$单调减，$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$. 证明：$\{a_n\}$与$\{b_n\}$都收敛，并且有相同的极限.

证 由于$\{a_n\}$单调增，$\{b_n\}$单调减，所以$\{b_n-a_n\}$单调减，又由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，即 0 为单减数列$\{b_n-a_n\}$的下确界，所以 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，$b_n-a_n\geqslant0$，即 $b_n\geqslant a_n$. 故单增数列$\{a_n\}$有上界 b_1，单调减数列$\{b_n\}$有下界 a_1. 从而$\{a_n\}$与$\{b_n\}$均收敛. 且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty}[(b_n-a_n)+a_n]=\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)+\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(B)

1. 判别数列$\{x_n\}$的收敛性，其中

$$x_n=a_0+a_1q+a_2q^2+\cdots+a_nq^n(|q|<1,|a_k|\leqslant M,k=0,1,2,\cdots).$$

解 若 $q=0$，$x_n=a_0$，$\{x_n\}$收敛.

若 $0<|q|<1$，由于$|a_k|\leqslant M,k=1,2,\cdots$，所以 $\forall n,p\in\mathbf{N}_+$，

$$|x_{p+n}-x_n|=|a_{n+1}q^{n+1}+\cdots+a_{n+p}q^{n+p}|,$$

$$\leqslant M|q|^{n+1}\frac{1-|q|^p}{1-|q|}<\frac{M}{1-|q|}|q|^{n+1}.$$

注意到 $\ln|q|<0$. 对 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{\ln(1-|q|)\varepsilon-\ln M}{\ln|q|}\right]\in\mathbf{N}_+$，对 $\forall n>N$，$p\in\mathbf{N}_+$，恒有$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$，由 Cauchy 收敛原理知$\{x_n\}$收敛.

2. 求下列数列的极限：

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{x^n-2}{x^n+2}=\begin{cases}不存在, & x=-1,\\ -\frac{1}{3}, & x=1,\\ -1, & |x|<1,\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{2}{x^n}}{1+\dfrac{2}{x^n}}=1, & |x|>1.\end{cases}$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}.$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2^2-1)(3^2-1)\cdots(n^2-1)}{2^2\cdot 3^2\cdot\cdots\cdot n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2-1)(3-1)\cdots(n-1)(2+1)(3+1)\cdots(n+1)}{2^2\cdot 3^2\cdot\cdots\cdot n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!(n+1)!}{2(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\sin^2 n+\cos^2 n}$

解　因为 $1\leqslant\sqrt[n]{2\sin^2 n+\cos^2 n}=\sqrt[n]{1+\sin^2 n}\leqslant\sqrt[n]{2}$，由夹逼性

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\sin^2 n+\cos^2 n}=1.$$

(5) **解法一**　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}}=\frac{e^3}{e^6}=\frac{1}{e^3}.$

解法二　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{-(n+2)}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^2\right]^{-3}=e^{-3}.$

(6) **解法一**　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3-2}\right)^{4n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{n^3}\right)^{-n^3}\right]^{-4}\Big/\left[\left(1+\frac{-2}{n^3}\right)^{-\frac{n^3}{2}}\right]^{-8}=e^4.$

解法二　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3-2}\right)^{4n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^3-2}\right)^{n^3-2}\left(1+\frac{1}{n^3-2}\right)^2\right]^4=e^4.$

3. 证明：

(1) 若 $a_n\to 0$，则 $b_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\to 0(n\to\infty)$；

(2) 若 $a_n\to a$，则 $b_n\to a(n\to\infty)$，b_n 同(1).

解　(1) 由 $a_n\to 0(n\to\infty)$知：$\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in\mathbf{N}_+$，使 $\forall n>N_1$，$|a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$.

而由$\frac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$知：$\exists N_2\in\mathbf{N}_+$. 使 $\forall n>N_2$，$\frac{|a_1+\cdots+a_{N_1}|}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$，

从而$|b_n|=\left|\frac{a_1+\cdots+a_{N_1}}{n}+\frac{a_{N_1+1}+\cdots+a_n}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\left(1-\frac{N_1}{n}\right)\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

(2) 令 $\bar{a}_n=a_n-a$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\bar{a}_n=0$. 由结论(1)，

$$\lim_{n\to\infty}\bar{b}_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\bar{a}_1+\cdots+\bar{a}_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-a\right)=0,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$.

4. 证明下列数列收敛，并求其极限：

(1) $x_n=\dfrac{n^k}{a^n}(a>1,k>0)$.

证 因为 $a>1,a^{\frac{1}{k}}>1$，令 $a^{\frac{1}{k}}=1+b(a>b>0)$，则

$$\frac{n^k}{a^n}=\left[\frac{n}{(1+b)^n}\right]^k=\left[\frac{n}{1+nb+\frac{1}{2}n(n-1)b^2+\cdots+b^n}\right]^k\leqslant\left[\frac{n}{nb+\frac{n}{2}(n-1)b^2}\right]^k$$

$$=\left[\frac{1}{b+\frac{1}{2}b^2(n-1)}\right]^k.$$ 注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b+\frac{1}{2}b^2(n-1)}=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$.

(2) $a_n=\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}}_{n\text{重}}\quad(a>0)$.

证 显然 $a_n>0$. $a_1=\sqrt{a}<1+\sqrt{a}$. 设 $a_{n-1}<1+\sqrt{a}$，则 $a_n=\sqrt{a+\sqrt{a_{n-1}}}<\sqrt{a+\sqrt{a}+1}<\sqrt{a}+1$. 由数学归纳法知. $\forall n\in\mathbf{N}_+,0<a_n<\sqrt{a}+1$. 即 $\{a_n\}$ 有界.

又由数学归纳法：$a_1=\sqrt{a},a_2=\sqrt{a+a_1}>\sqrt{a}>a_1$，假设 $a_n>a_{n-1}$，那么 $a_{n+1}=\sqrt{a+a_n}>\sqrt{a+a_{n-1}}=a_n$. 故 $\{a_n\}$ 为单增数列. 从而 $\{a_n\}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，由 $a_{n+1}=\sqrt{a+a_n}$ 可知 $A=\sqrt{a+A}$.

注意到 $0<a_n<\sqrt{a}+1$，可得 $A=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

(3) $0<x_1<\sqrt{3},x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$.

证 因为 $0<x_1<\sqrt{3}$，所以 $x_n>0$. ($\forall n\in\mathbf{N}_+$).

$$x_2-\sqrt{3}=\frac{(3-\sqrt{3})(x_1-\sqrt{3})}{3+x_1}<0.\text{ 所以 }0<x_2<\sqrt{3}.$$

假设 $0<x_{n-1}<\sqrt{3}$，那么 $x_n-\sqrt{3}=\dfrac{(3-\sqrt{3})(x_{n-1}-\sqrt{3})}{3+x_{n-1}}<0$，由数学归纳法知 $0<x_n<\sqrt{3}$，即 $\{x_n\}$ 有界.

因为 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{3-x_n^2}{3+x_n}=\dfrac{(\sqrt{3}-x_n)(\sqrt{3}+x_n)}{3+x_n}>0$，所以 $x_{n+1}>x_n$，$\{x_n\}$ 单调增. 故 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$，则 $0\leqslant A\leqslant\sqrt{3}$. 且 $A=\dfrac{3(1+A)}{3+A}$，即 $A=\sqrt{3}$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{3}$.

(4) $a_1=1, a_n=1+\dfrac{1}{a_{n-1}+1}\quad(n=2,3,\cdots)$.

证　由 $a_1=1<\sqrt{2}, a_n>0$ 且 $a_n-\sqrt{2}=\dfrac{-(a_{n-1}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{a_{n-1}+1\quad(n=1,2,\cdots)}$ 知 $a_n-\sqrt{2}$ 与 $a_{n-1}-\sqrt{2}$ 异号. 从而 $0<a_{2m-1}<\sqrt{2}, a_{2m}>\sqrt{2}$. $m=1,2,\cdots$.

又因为 $a_{n+2}-a_n=1+\dfrac{1}{1+\left(1+\dfrac{1}{1+a_n}\right)}-a_n=\dfrac{2(2-a_n^2)}{2a_n+3}, n=1,2,\cdots$,

所以 $\{a_{2m}\}$ 单调减，$\{a_{2m-1}\}$ 单调增.

由单调收敛准则，$\{a_{2m}\}$，$\{a_{2m-1}\}$ 均收敛.

不妨设 $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m}=A$，则 $A\geqslant\sqrt{2}$. 又因为 $a_{2m+2}=\dfrac{3a_{2m}+4}{2a_{2m}+3}$，所以 $A=\dfrac{3A+4}{2A+3}$，即 $A=\sqrt{2}$.

同理可证 $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m-1}=\sqrt{2}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt{2}$.

5. $\{a_n\}$ 为一单增数列，并且有一子列收敛于 a，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$.

证法一　设 $\{a_{n_k}\}$ 为 $\{a_n\}$ 的收敛于 a 的子列.

假设 $\{a_n\}$ 无上界，则 $\forall M>0$. $\exists n_0\in\mathbf{N}_+$，使 $a_{n_0}>M$. 又因为 $\{a_n\}$ 单调增，所以 $a_{n_0+p}>a_{n_0}>M$，$\exists p_0\in\mathbf{N}_+$ 使 $a_{n_0+p_0}\in\{a_{n_k}\}$，所以 $\{a_{n_k}\}$ 无界与已知矛盾. 所以 $\{a_n\}$ 有上界. 由单调收敛原理，$\{a_n\}$ 收敛且 $a_{n_k}\to a$. $(k\to\infty)$.

证法二　由 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛于 a 知；$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in\mathbf{N}_+$，使 $\forall k>N_1$，$|a_{n_k}-a|<\varepsilon$. 取 $N=n_{N_1+1}$. $\forall n>N$ 存在 $k\in\mathbf{N}_+$，使 $a_{n_k}, a_{n_{k+1}}\in\{a_{n_k}\}$ 且 $n_k\leqslant n\leqslant n_{k+1}$. 再注意到 $\{a_n\}$ 单调增可得 $a_{n_k}\leqslant a_n\leqslant a_{n_{k+1}}$. 从而

$$|a_n-a|\leqslant\max\{|a_{n_k}-a|, |a_{n_{k+1}}-a|\}<\varepsilon,$$

故 $\{a_n\}$ 收敛于 a.

6. 设 $a_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证　由于 $\forall n,p\in\mathbf{N}_+$，$|a_{n+p}-a_n|=\left|\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{(-1)^{p-1}}{n+p}\right|$.

当 p 为偶数时，$\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n+p-1}-\dfrac{1}{n+p}\right)>0$.

当 p 为奇数时，$\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n+p-2}-\dfrac{1}{n+p-1}\right)+\dfrac{1}{n+p}>0$.

利用上述结论易得 $|a_{n+p}-a_n|=\dfrac{1}{n+1}-\left(\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}+\cdots+\dfrac{(-1)^{p-1}}{n+p}\right)<$

$\frac{1}{n+1}$. 所以 $\forall \varepsilon>0$，只要取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则 $\forall n>N$ 及 $p\in\mathbf{N}_+$，恒有 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$. 故 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 列，因而收敛.

7. 设 $\{[a_n,b_n]\}$ 为一列闭区间，若满足条件：(1)它是递缩的：$[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq\cdots\supseteq[a_n,b_n]\supseteq\cdots$；(2)$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，则称 $\{[a_n,b_n]\}$ 为一个**闭区间套**. 试利用单调有界原理证明**闭区间套定理**：任何闭区间套必有唯一的公共点，即存在唯一的 $\{\xi\}$，使 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{\xi\}$.

证 数列 $\{a_n\}$ 单增，$\{b_n\}$ 单减且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$. 由习题 1.2(A)第 16 题，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 均收敛. 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$ 且 $a_n\leqslant\xi\leqslant b_n$，即 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，$\xi\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$. 由极限的唯一性知 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{\xi\}$.

8. 利用闭区间套定理(第 7 题)证明 Weierstrass 定理.

证 设 $\{x_n\}$ 是有界数列，则必存在 $a_1,b_1\in\mathbf{R}$，使得 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，都有 $x_n\in[a_1,b_1]$. 等分 $[a_1,b_1]$ 为两个子区间，则至少有一个含 $\{x_n\}$ 的无穷多项，记该子区间为 $[a_2,b_2]$(若两个子区间都含 $\{x_n\}$ 的无穷多项，则可任取其一). 等分 $[a_2,b_2]$，按照同样的方法又可得含 $\{x_n\}$ 无穷多项的子区间 $[a_3,b_3]$. 照此办理，可得一个闭区间列 $\{[a_k,b_k]\}$，满足：

$$[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq\cdots\supseteq[a_k,b_k]\supseteq\cdots,$$
$$b_k-a_k=\frac{b_1-a_1}{2^{k-1}}\to0(k\to\infty),$$

因此它是一个闭区间套. 根据闭区间套定理，存在唯一的 $\xi\in\mathbf{R}$，使得 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k]=\{\xi\}$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_k=\lim\limits_{n\to\infty}b_k=\xi$.

由于每个闭区间都含数列 $\{x_n\}$ 的无穷多项，所以我们能在每个 $[a_k,b_k]$ 中选取 $\{x_n\}$ 的一项 x_{n_k}，并使 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，从而得到 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$，满足：

$$a_k\leqslant x_{n_k}\leqslant b_k(\forall k\in\mathbf{N}_+).$$

根据夹逼原理，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$.

习 题 1.3

(A)

3. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，且 $f(x)$ 在 x_0 有定义. 问在 $x\to x_0$ 的过程中，x 可否取

到 x_0？是否必有 $a=f(x_0)$？

解　可以取到 x_0. 但未必有 $a=f(x_0)$. 例 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 1, & x=0, \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0\neq f(0)=1$.

5. 下列命题是否正确？若正确，请给出证明；若不正确，请举出反例.

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|a|$；

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^2=a^2$；

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right)=a$，则 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=a$；

(4) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 都存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 必存在；

(5) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ 都存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 必存在；

(6) 若在 x_0 的某邻域内 $f(x)>0$，并且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$，那么必有 $a>0$.

解　(1) 不正确. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|a|$. 但反过来不成立.

例　$f(x)=\begin{cases} 1, & x\geqslant 0, \\ -1, & x<0, \end{cases}$ $|f(x)|=1, \lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=1$,

但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在.

(2) 正确. 因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$，$\exists U(x_0,\delta_1)$ 与 $M>0$，使得 $\forall x\in U(x_0,\delta_1)$，$|f(x)+a|\leqslant M$. 从而 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0(\delta<\delta_1)$，使得 $\forall x\in U(x_0,\delta)$，

$$|[f(x)]^2-a^2|=|f(x)+a||f(x)-a|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$

即

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^2=a^2.$$

(3) 不正确. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\pi=0$. 但 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\dfrac{\pi}{x}$ 不存在.

(4) 正确. 由极限的有理运算法则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]-\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

(5) 不正确. 取 $f(x)=x, g(x)=\sin\dfrac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x)=0$，但 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 不存在.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a\neq 0$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在.

(6) 不正确. 如 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\neq 0, \\ 1, & x=0, \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

9. 下列运算有无错误？若错，错在何处？

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to0}\sin x}{\lim\limits_{x\to0}x}=\dfrac{0}{0}=1$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\sin x}{\lim\limits_{x\to\infty}x}=0$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}=0$.

答：(1) 错. 分母极限为零. (2) 错. $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在.

(3) 错. $\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在.

10. 用定义证明下列各题：

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$； (4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{1}{2}$.

解 (2) $\forall x>0$，由 $0<\dfrac{\pi}{2}-\arctan x=|\arctan x-\dfrac{\pi}{2}|<\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow$ $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\cot(\arctan x)<\tan\varepsilon\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\tan(\arctan x)}<\dfrac{1}{\cot\varepsilon}\Leftrightarrow x>$ $\cot\varepsilon$，可得 $\forall\varepsilon>0$. 如 $\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}$. 取 $X=\cot\varepsilon>0$；如 $\varepsilon>\dfrac{\pi}{2}$，$0<\varepsilon-\dfrac{n\pi}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，取 $X=$ $\cot\left(\varepsilon-\dfrac{n\pi}{2}\right)>0$，那么 $\forall x>X$. $\left|\arctan x-\dfrac{\pi}{2}\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$.

(4) 不妨设 $|x-1|<1$. 则 $1<x+1<3$，$1<2x+1<5$. $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=$ $\min\left(1,\dfrac{2}{5}\varepsilon\right)>0$，则 $\forall x\in U(1,\delta)$，有

$$\left|\frac{x^2}{x+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{2x+1}{2(x+1)}|x-1|<\frac{5}{2}|x-1|<\varepsilon.$$

11. 用 Heine 定理证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$； (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(1+\sin x)$.

解 (1) 取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，$y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\pi/2}$，那么当 $n\to+\infty$时，$x_n\to0$，$y_n=0$，$\cos\dfrac{1}{x_n}=1\to1(n\to+\infty)$，$\cos y_n=0\to0(n\to+\infty)$，由 Heine 定理 $\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$不存在.

(2) 取 $x_n=2n\pi\to+\infty$，$y_n=2n\pi-\dfrac{\pi}{2}\to+\infty(n\to+\infty)$，那么 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n(1+\sin x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$，$\lim\limits_{n\to+\infty}y_n(1+\sin y_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}0=0$. 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(1+\sin x)$不存在.

12. 求下列极限：

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{2x}=\sqrt{2}.$

(6) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{1-x^2}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(1+x+x^2)-3(1+x)}{(1-x^2)(1+x+x^2)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{(1+x)(1+x+x^2)}=\frac{1}{2}.$$

(8) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin x\cos\Delta x+\cos x\sin\Delta x-\sin x}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{(\cos\Delta x-1)\sin x}{\Delta x}+\cos x\,\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin^2\dfrac{\Delta x}{2}\sin x}{\Delta x}+\cos x$$

$$=\cos x.$$

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}(n\in\mathbf{N}_+)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[n]{1+x})^n-1}{x[(\sqrt[n]{1+x})^{n-1}+(\sqrt[n]{1+x})^{n-2}+\cdots+\sqrt{1+x}+1]}=\frac{1}{n}.$$

13. 利用两个重要极限求下列极限：

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{1}{2}.$

(3) $\lim\limits_{x\to n\pi}\dfrac{\sin x}{x-n\pi}=\lim\limits_{x\to n\pi}\dfrac{(-1)^n\sin(n\pi-x)}{n\pi-x}=(-1)^n.$

(4) 令 $t=1-x$，$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}=\lim\limits_{t\to 0}t\cot\dfrac{\pi}{2}t=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}t}{\sin\dfrac{\pi}{2}t}\cdot\dfrac{\cos\dfrac{\pi t}{2}}{\dfrac{\pi}{2}}=\dfrac{2}{\pi}.$

(7) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{\pi}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\pi\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{x}}{\dfrac{\pi}{x}}=\pi$. 由 Heine 定理，$\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{\pi}{2^n}=\pi.$

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2=e^2$. 由 Heine 定理，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3^n}\right)^{3^n}=e^2.$

14. 讨论下列函数的极限是否存在：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$，$x\to 0$；　　(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0\\(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x>0,\end{cases}$ $x\to 0$；

(3) $f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$，　$x\to\infty$.

解　(1) 由 $\lim\limits_{x\to0^+}2^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to0^-}2^{\frac{1}{x}}=0$ 知 $f(0+0)=0, f(0-0)=1$. 从而 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在.

(2) $f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$，$f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}=1$，$f(0+0)\neq f(0-0)$，故 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}=0$.

15. 用夹逼原理证明 $\lim\limits_{x\to0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$，[　]表示取整.

证　由 $x\neq0$ 时，$\frac{1}{x}-1\leqslant\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant\frac{1}{x}$. 于是，当 $x>0$ 时，$1-x\leqslant x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant1$，当 $x<0$ 时，$1\leqslant x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant1-x$，

由夹逼准则，$\lim\limits_{x\to0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$.

16. 试确定常数 a 与 b，使 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x-2}+ax+b\right)=0$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x-2}+ax+b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{(1+a)x^2-2ax+3}{x-2}+b\right]=0$，

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1+a)x^2-2ax+3}{x-2}=-b$，于是 $1+a=0$，即 $a=-1, b=-2$.

17. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^{3x-1}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\sec\frac{\pi x}{2}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\pi+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\arctan\frac{1}{x}\right)$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^{3x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{-1}{3x}\right)^{-3x}\right]^{-1}}{\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}}\left(\frac{1-\frac{1}{3x}}{1+\frac{1}{3x}}\right)^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}^2}$，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^{3x-1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1}{-2}}\right]^{-2}\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^{-2}=\mathrm{e}^{-2}.$$

(2) 因为$\lim\limits_{x\to1}\left(\sec\frac{\pi}{2}x\right)\ln(2-x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(2-x)}{\cos\frac{\pi}{2}x}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}\ln[1+(1-x)]^{\frac{1}{1-x}}$$

$$=\frac{2}{\pi},$$

所以$\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\sec\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to1}e^{(\sec\frac{\pi}{2}x)\ln(2-x)}=e^{\frac{2}{\pi}}$.

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}\ln\cos\sqrt{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x})^2}\ln\left[1+(\cos\sqrt{x}-1)\right]^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}}=-\frac{1}{2}$,

所以 $\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}\ln(\cos\sqrt{x})}=e^{-\frac{1}{2}}$.

(4) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{\pi+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\arctan\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{\pi e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\arctan\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$,

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{\pi+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\arctan\frac{1}{x}\right)=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2},$$

故$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\pi+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\arctan\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$.

(B)

1. 证明 Dirichlet 函数 $D(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbf{Q},\\0, x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}$ 在任何 $x\in\mathbf{R}$ 处的极限都不存在.

证　由实数的稠密性, $\forall a\in\mathbf{Q}$, $\exists\{x_n\}\subseteq\mathbf{Q}$, $\{y_n\}\subseteq\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$, 且 $x_n\to a$, $y_n\to a(n\to+\infty)$, 但 $D(x_n)=1$, $D(y_n)=0$, 所以 $\forall a\in\mathbf{Q}$, $\lim\limits_{x\to a}D(x)$不存在. 同理可证 $\forall b\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$. $\lim\limits_{x\to b}D(x)$不存在.

2. 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是周期函数, 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$, 则 $f(x)\equiv a$.

证　用反证法. 设 $f(x)\not\equiv a$, 不妨设 $f(x_0)=b\neq a$, 则可构造一点列 $\{x_0+nT\}$. T 为 $f(x)$的最小正周期, 则 $f(x_0+nT)=f(x_0)=b$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_0+nT)=b\neq a$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$ 矛盾.

3. 设$[a,b]$是一个有限闭区间, 如果 $\forall x_0\in[a,b]$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在, 证明: $f(x)$在$[a,b]$上有界.

证　反证法. 若 $f(x)$在$[a,b]$上无界, 则 $\exists\{x_n\}\subseteq[a,b]$, 使 $f(x_n)\to\infty(n\to\infty)$. 又由于$\{x_n\}\subseteq[a,b]$有界数列. 则必存在收敛子列$\{x_{n_k}\}$. 设 $x_{n_k}\to x_0(k\to\infty)$, 则 $x_0\in[a,b]$且 $\lim\limits_{k\to+\infty}f(x_{n_k})=\infty$. 与 $\forall x_0\in[a,b]$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在矛盾.

4. 设 $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ 是无界函数，证明：$\exists\{x_n\}\subseteq(a,b)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$.

证 因为 $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ 是无界函数. 故 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，$\exists x_n\in(a,b)$，使 $f(x_n)>n$. 这样便得到一个数列 $\{x_n\}\subseteq(a,b)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$.

5. 设 $f:[a,+\infty)\to\mathbf{R}$，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$，使得 $\forall x_1$，$x_2>M$，恒有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

证 必要性 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$，当 $x>M$ 时，恒有 $|f(x)-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 任取 $x_1,x_2>M$. 则

$$|f(x_i)-a|<\frac{\varepsilon}{2},\quad i=1,2,$$

于是 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|f(x_1)-a|+|f(x_2)-a|<\varepsilon$.

充分性 任取两个数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}\subseteq[a,+\infty)$，且

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=+\infty.$$

(i) 证明数列 $\{f(x_n)\}$，$\{f(y_n)\}$ 收敛.

由 $\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$，使 $\forall x_1,x_2>M$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 及 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ 知：对上述的 $M>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，使 $\forall m,n>N$ 有 $x_m,x_n>M$. 从而 $|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$，即对数列 $\{f(x_n)\}$ 来说：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，$\forall m,n>N$ 恒有 $|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$. 由数列的 Cauchy 收敛原理知数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛. 不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=a$.

同理可证 $\{f(y_n)\}$ 收敛.

(ii) 证明 $\{f(y_n)\}$ 也收敛于 a.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ 及已知条件 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，使 x_n，$y_n>M$，则 $|f(x_n)-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，且 $|f(x_n)-f(y_n)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，进而

$$|f(y_n)-a|\leqslant|f(x_n)-f(y_n)|+|f(x_n)-a|<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=a$. 由(i)、(ii)，命题得证.

习 题 1.4

(A)

2. 下列说法是否正确？为什么？

(1) 无穷小量是很小很小的数，无穷大量是很大很大的数；

(2) 无穷小量就是数 0；数 0 是无穷小量；

(3) 无穷大量一定是无界变量；

(4) 无界变量一定是无穷大量；

(5) 无穷大量与有界量的乘积是无穷大量；

(6) 无限多个无穷小之和仍为无穷小.

解　(1) 不正确. 无穷小量和无穷大量都是变量，不是常数.

(2) 错误. 无穷小量是以 0 为极限的变量，数 0 是无穷小量. 除此之外，其他任意常数都不是无穷小量.

(3) 正确.

(4) 错误. $y=x\sin\dfrac{1}{x}$是无界变量，但 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$不存在，非无穷大.

(5) 错误. x 无穷大量. $\sin\dfrac{1}{x}$有界变量. 但 $x\sin\dfrac{1}{x}$不是无穷大.

(6) 错误. $\forall m\in\mathbf{N}_+$，$\dfrac{1}{\sqrt{n^2+m}}\to 0(n\to+\infty)$都是无穷小量.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

3. 下列运算是否正确？如有错误，请指出错在何处.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$；

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0.$

解　(1) 错. 利用无穷小的等价代换求极限时，只能对分子和分母中的无穷小因子进行.

(2) 错误. 这里应用了等价无穷小代换 $\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)\sim x^2\sin\dfrac{1}{x}(x\to0)$，这是错误的. 因为这里疏忽了无穷小 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$作阶的比较时的前提条件：分母 $\beta(x)$不能等于零. 这里 $\beta(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$，当 x 取 $x_n=\dfrac{1}{n\pi}(n\in\mathbf{N}_+)$时，$\beta(x_n)=0$，且 $x_n\to+\infty$.

正确的解法为当 $x\neq0$ 时，$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则 $\forall\,|x|<\delta$ 有

$$\left|\frac{\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)}{x}\right|\leqslant\frac{\left|x^2\sin\dfrac{1}{x}\right|}{|x|}\leqslant|x|<\varepsilon,$$

故
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}=0.$$

4. 当 $x\to 0$ 时,下列函数哪些是 x 的高阶无穷小? 哪些是 x 的同阶或等价无穷小? 哪些是 x 的低阶无穷小? 并指出无穷小的阶数.

(1) $x^4+\sin 2x, x\in\mathbf{R}$;　　(2) $\sqrt{x(1-x)}, x\in(0,1)$;

(3) $\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}(1-x), x\in\mathbf{R}$;　　(4) $2x\cos x\sqrt[3]{\tan^2 x}, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$;

(5) $\csc x-\cot x, x\in(0,\pi)$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4+\sin 2x}{2x}=1$,所以 $x^4+\sin 2x$ 与 x 同阶.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x(1-x)}}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\frac{x}{1-x}}=0$, $\sqrt{x(1-x)}$是 x 的低阶无穷小.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}=1$,所以 $\sqrt{x(1-x)}$是$\frac{1}{2}$阶无穷小.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}(1-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{\frac{\pi}{2}x}=1$,所以$\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}(1-x)\sim x$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\cos x\sqrt[3]{\tan^2 x}}{x^{\frac{5}{3}}}=\lim\limits_{x\to 0}2\cos x\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{2}{3}}=2$,

所以 $2x\cos x\sqrt[3]{\tan^2 x}$是 x 的高阶无穷小,阶为$\frac{5}{3}$.

(5) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\csc x-\cot x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x}{\sin x}=\frac{1}{2}$,

所以 $\csc x-\cot x$ 与 x 同阶.

6. 证明下列关系式:

(1) $\arcsin x=x+o(x), x\to 0$;

(4) $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}\sim\frac{1}{4}x^3, x\to 0$;

(5) $\sqrt{x+\sqrt{1+\sqrt{x}}}\sim\sqrt{x}, x\to+\infty$;

(6) $1+\cos(\pi x)\sim\frac{\pi^2}{2}(x-1)^2, x\to 1$.

解 (1) 令 $t=\arcsin x$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1$,

所以 $\arcsin x\sim x$,即 $x\to 0$, $\arcsin x=x+o(x)$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{\frac{1}{4}x^3}=4\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3\left[\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right]}$

$$=4\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}=1.$$

(5) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x^3}}}}=1$,

所以 $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt{x},x\to+\infty$.

(6) 因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+\cos\pi x}{\dfrac{\pi^2}{2}(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2}{\pi^2}\dfrac{2\cos^2\dfrac{\pi}{2}x}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4}{\pi^2}\cdot\dfrac{\sin^2\dfrac{\pi}{2}(1-x)}{(1-x)^2}=1$,

所以 $1+\cos\pi x\sim\dfrac{\pi^2}{2}(x-1)^2,x\to1$.

7. 利用无穷小的等价代换求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x^2-2(1-\cos^2 x)}{3x^3+4\tan^2 x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}{x\tan x}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(\tan x)}{\sin 2x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt[3]{1+\tan x}-1)(\sqrt{1+x^2}-1)}{\tan x-\sin x}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{(1-\sqrt{\cos x})\tan x}{(1-\cos x)^{\frac{3}{2}}}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{2}x^2}{\sin^2 x}=\dfrac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x^2-2(1-\cos^2 x)}{3x^3+4\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x^2-2\sin^2 x}{3x^3+4\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5-2\dfrac{\sin^2 x}{x^2}}{3x+4\dfrac{\tan^2 x}{x^2}}=\dfrac{3}{4}$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}{x\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{2}\sin^2 x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(\tan x)}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt[3]{1+\tan x}-1)(\sqrt{1+x^2}-1)}{\tan x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\dfrac{1}{3}\tan x\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)}{\dfrac{1}{2}x^3}=\dfrac{1}{3}$.

$\left(\text{由第 6 题(4)知：}x\to0,\tan x-\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^3\right)$

(6) $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{(1-\sqrt{\cos x})\tan x}{(1-\cos x)^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{(1-\sqrt{1+(\cos x-1)})\tan x}{(1-\cos x)^{\frac{3}{2}}}$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\frac{1}{2}(\cos x-1)x}{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\frac{1}{4}x^2x}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}x^3}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(B)

1. 设 P 是曲线 $y=f(x)$上的动点.若点 P 沿该曲线无限远离坐标原点时，它到某定直线 L 的距离趋于 0,则称 L 为曲线 $y=f(x)$的**渐近线**.若直线 L 的斜率 $k\neq 0$,称 L 为**斜渐近线**.

(1) 证明:直线 $y=kx+b$ 为曲线 $y=f(x)$斜(或水平)渐近线充分必要条件为

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\qquad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

(2) 求曲线 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}(x\in\mathbf{R}\setminus\{-1\})$的斜渐近线方程.

证 (1) $f(x)$的点 $P(x,f(x))$到直线 $y=kx+b$ 的距离

$$d=\frac{|f(x)-kx-b|}{\sqrt{1+k^2}}.$$

且 $y=kx+b$ 为 $y=f(x)$的渐近线$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to\infty}d=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$.

充分性 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=b$,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$.

必要性 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=b$.

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}[f(x)-kx-b]=0$. 所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}-k-\dfrac{b}{x}\right)=0$. 从而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$.

(2) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=1$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2+1}{x+1}-x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x}{1+x}=-1$,所以 $y=f(x)$的斜渐近线为 $y=x-1$.

2. 确定 a,b,c 的值,使下列极限等式成立:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax+b)=0$;

(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}=0$.

解　(1) 如果 $a\leqslant0$. 则无论 b 取何值 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-x+1}-ax+b\right]=+\infty$，所以 $a>0$，由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-x+1}-ax+b\right]=0$ 可知 $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[ax-\sqrt{x^2-x+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(a^2-1)x^2+x-1}{ax+\sqrt{x^2-x+1}}$存在. 所以 $a=1,b=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\dfrac{1}{2}$.

(2) 由 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}=0$ 知 $f(x)=a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}$是$(x-1)^2$ 的高阶无穷小，所以 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0\Rightarrow c=2,\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=0\Rightarrow b=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}=\dfrac{1}{2}$. 将 $c=2,b=\dfrac{1}{2}$代入 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}=0$ 可得 $a=$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2-\frac{1}{2}(x-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{2\sqrt{x^2+3}-(x+3)}{2(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{3}{2(2\sqrt{x^2+3}+x+3)}=\frac{3}{16}.$$

习　题　1.5

(A)

2. 两个在 x_0 处不连续函数之和在 x_0 是否一定不连续？若其中一个在 x_0 处连续，一个在 x_0 处不连续，则它们的和在 x_0 处是否一定不连续？

证　两个在 x_0 处不连续函数之和在 x_0 不一定连续，不一定不连续.

如：$f(x)=\dfrac{1}{x},g(x)=-\dfrac{1}{x}+\sin x,h(x)=\sin\dfrac{1}{x}$在 $x_0=0$ 处均不连续. 但 $f(x)+g(x)$在 $x_0=0$ 处连续，$f(x)+h(x)$在 $x_0=0$ 处不连续.

如果一个函数在 x_0 处连续，另一个不连续，两个之和一定不连续.

3. 证明：若 f 连续，则$|f|$也连续，逆命题成立吗？

证　因为 $\forall\varepsilon>0$，由 f 在 x_0 处连续可知：$\exists\delta>0$，使得 $\forall x$，只要 $|x-x_0|<\delta$，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，从而

$$\big||f(x)|-|f(x_0)|\big|\leqslant|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|f(x_0)|$. 命题得证. 逆命题不成立，如 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant0,\\-1, & x<0,\end{cases}$

$|f(x)|$在 $x=0$ 连续，但 $f(x)$在 $x=0$ 不连续.

4. 设 $f,g\in C[a,b]$，记

$$\varphi(x)=\max_{x\in[a,b]}\{f(x),g(x)\},\psi(x)=\min_{x\in[a,b]}\{f(x),g(x)\}$$

证明：$\varphi,\psi\in C[a,b]$.

证　$\varphi(x)=\max\limits_{x\in[a,b]}\{f(x),g(x)\}=\dfrac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$,

$$\psi(x)=\min_{x\in[a,b]}\{f(x),g(x)\}=\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}.$$

因为 $f(x),g(x)\in C[a,b]$，由连续函数的有理运算性质. 及第 3 题可知 $\varphi(x)$，$\psi(x)\in C[a,b]$.

5. 设函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 Lipschitz 条件：

$\exists L>0$，使得 $\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$，恒有 $|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|$，

证明：f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

证　由函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 Lipschitz 条件可知：$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{L}>0$，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|<\varepsilon$，所以 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

7. 设函数 $f:I\to\mathbf{R}$ 在 $x_0\in I$ 处连续，且 $f(x_0)>0$. 证明：存在 x_0 的一个邻域，在该邻域内，$f(x)\geqslant q>0$.

证　取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}f(x_0)>0$，由 f 的连续性，$\exists\ \delta_0>0$，$\forall x\in U(x_0,\delta)$，恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon_0$. 即 $f(x_0)-\varepsilon_0<f(x)<\varepsilon_0+f(x_0)$，取 $q=f(x_0)-\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}f(x_0)>0$ 即可.

8. 讨论下列函数在指定点处的连续性. 若是间断点，说明它的类型：

(3) $f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}$，$x=3$；　　(4) $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $x=0$.

解　(3) $f(3+0)=\lim\limits_{x\to3^+}2^{\frac{1}{x-3}}=+\infty$，$f(3-0)=0$，所以 $x=3$ 为第二类间断点.

(4) $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$，所以 $x=0$ 为跳跃间断点.

9. 讨论下列函数的连续性. 若有间断点，说明间断点的类型：

(2) $f(x)=\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}$；　　(4) $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 2, & x=0;\end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x<0,\\ \dfrac{x^2-1}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$

解　(2) $f(x)=e^{x+\frac{1}{x}}$ 在 $x\neq 0$ 的所有点处连续.

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{x+\frac{1}{x}}=+\infty$，$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^{x+\frac{1}{x}}=0$. $x=0$ 为第二类间断点.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}=0\neq f(0)=2$，$x=0$ 为可去间断点. $\forall x\neq 0$，$f(x)$连续.

(5) $\lim\limits_{x\to -1}\sin\dfrac{1}{x^2-1}$不存在，$x=-1$ 为第二类间断点.

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-1}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}=-1$，$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\sin\dfrac{1}{x^2-1}=\sin(-1)$，故 $x=0$ 为 $f(x)$的跳跃间断点.

因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{\sin\dfrac{\pi}{2}(1-x)}=-\dfrac{4}{\pi}$，$x=1$ 为 $f(x)$可去间断点. 由于 $\lim\limits_{x\to 2k+1}\dfrac{x^2-1}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}(k=1,2,\cdots)$不存在. 故 $x=(2k+1)(k\in\mathbf{N}_+)$为 $f(x)$的第二类间断点.

$f(x)$在$(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(2k-1,2k+1)\right)$上连续

10. 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arctan x}{\sqrt{x+\ln x}}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x-\dfrac{e^{2x}}{\sin x}\right)$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\tan x}$

解　(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arctan x}{\sqrt{x+\ln x}}=\dfrac{\pi}{4}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot\dfrac{3x}{\sin 3x}\cdot\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{3}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x-\dfrac{e^{2x}}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1+1-e^{2x}}{\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-1}{x}+\frac{1-e^{2x}}{2x}\cdot 2\right)\frac{x}{\sin x}=-2.$$

(4) 因为 $\lim\limits_{x\to0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}}=e,\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$,

所以 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}\right]^{\sin x}=e$.

11. 证明:

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{e^{x_0+\Delta x}-e^{x_0}}{\Delta x}=e^{x_0}$; (2) $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{(x_0+\Delta x)^\alpha-x_0^\alpha}{\Delta x}=\alpha x_0^{\alpha-1}(\alpha\in\mathbf{R})$.

解 (1) $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{e^{x_0+\Delta x}-e^{x_0}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}e^{x_0}\dfrac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^{x_0}$.

(2) $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{(x_0+\Delta x)^\alpha-x_0^\alpha}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}x_0^\alpha\dfrac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x_0}\right)^\alpha-1}{\Delta x}=x_0^\alpha\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\alpha\cdot\dfrac{\Delta x}{x_0}}{\Delta x}=\alpha x_0^{\alpha-1}$.

12. 试确定常数 a,b,使下列函数在 $x=0$ 处连续:

(2) $f(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ a+\sqrt{x}, & x\geqslant0;\end{cases}$ (3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{x}, & x>0,\\ 2, & x=0,\\ \dfrac{1}{bx}\ln(1-3x), & x<0.\end{cases}$

解 (2) $f(0+0)=a,f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}\arctan\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$.

因为 $f(0)=a=f(0+0)=f(0-0)$时,即 $a=-\dfrac{\pi}{2}$. $f(x)$在 $x=0$ 处连续.

(3) $f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin ax}{x}=a,f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{bx}\ln(1-3x)=-\dfrac{3}{b}$,

$f(0)=2$,故 $a=2,b=-\dfrac{3}{2}$.

14. 用介值定理证明:当 n 为奇数时,方程

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

至少有一个根,其中 $a_i\in\mathbf{R}$ 为常数($i=0,1,\cdots,n$),$a_n\neq0$.

证 令 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$,不妨设 $a_n>0$,由于 n 为奇数,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$,于是存在 $x_1>0>x_2$,使 $f(x_1)f(x_2)<0$,由零点定理在$[x_2,x_1]$内至少存在一点 ξ,使 $f(\xi)=0$.

15. 设 $f\in C[a,b]$,$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$. 证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使

$$f(\xi)=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\lambda_if(x_i),$$

其中 $\lambda=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$,且 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$.

证　因为 $f\in C[a,b]$ 且 $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，所以 $f(x)\in C[x_1,x_n]$，由定理 5.5 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上必取得最大值 M 与最小值 m. 且 $m\leqslant f(x_i)\leqslant M$，$i=1,2,\cdots,n$. 于是 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\right)m\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)\leqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\right)M$，即 $m\leqslant\dfrac{1}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)\leqslant M$.

由介值定理，至少存在一点 $\xi\in[x_1,x_2]\subset(a,b)$ 使 $f(\xi)=\dfrac{1}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$.

(B)

1. 设函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 满足可加性，即对任何 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，并且 f 在 $x=0$ 处连续，证明 f 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

证　由 f 的可加性知 $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$，即 $f(0)=0$. 又 f 在 $x=0$连续. 知 $\forall x_0\in\mathbf{R}$，恒有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f[(x-x_0)+x_0]=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x-x_0)+f(x_0)]=f(x_0)$. 故 f 在 x_0 处连续，由 x_0 的任意性 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

2. 设 $f\in C[a,+\infty)$，并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，证明 f 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

证　由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在（不妨设为 A）知：对 $\varepsilon_0=1>0$，$\exists M>0$，使 $\forall x\in(M,+\infty)$，恒有 $|f(x)-A|<1$，即 $\forall x\in(M,+\infty)$，$A-1<f(x)<1+A$，于是 $f(x)$ 在 $(M,+\infty)$ 有界. 又由 $f(x)\in C[a,+\infty)$ 知，对上述的 M，$f(x)\in C[a,M]$，即 $f(x)$ 在 $[a,M]$ 上有界. 故 $f(x)$ 在 $[a,M]\cup(M,+\infty)=[a,+\infty)$ 上有界.

3. 设 $f\in C(a,b)$，并且 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 存在（包括极限为无穷大）且异号，证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

证　不妨设 $f(a+0)>0$，则 $f(b-0)<0$，由极限的局部保号性可知：$\exists x_1,x_2$，$a<x_1<x_2<b$ 使 $f(x_1)>0$，$f(x_2)<0$. 因为 $f\in C(a,b)$，所以 $f\in C[x_1,x_2]$. 由介值定理知：至少存在一点 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

4. 设 $f\in C(-\infty,+\infty)$，并且 f 是奇函数，证明方程 $f(x)=0$ 至少有一个根. 若 f 是严格单调的，则 $x=0$ 是它的唯一根.

证　因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(0)=0$.

如果 f 是严格单增的连续函数，那么 $\forall x>0$，$f(x)>f(0)=0$，而 $\forall x<0$，$f(x)<f(0)=0$，即 $\forall x\neq0$. $f(x)\neq0$. 故 $x=0$ 是 $f(x)=0$ 唯一根. 同理可证 $f(x)$ 严格单减函数. $x=0$ 仍是 $f(x)=0$ 的唯一根.

5. 证明：若 $a_n>|a_{n-1}|+|a_{n-2}|+\cdots+|a_1|+|a_0|$，则方程

$$a_n\cos nx+a_{n-1}\cos(n-1)x+\cdots+a_1\cos x+a_0=0$$

在 $(0,2\pi)$ 内至少有 $2n$ 个根.

证　令 $f(x)=a_n\cos nx+a_{n-1}\cos(n-1)x+\cdots+a_1\cos x+a_0$. 将 $(0,2\pi)$ 平均分成 $2n$ 个小区间，其中第 k 个子区间为 $\left[\dfrac{(k-1)\pi}{n},\dfrac{k\pi}{n}\right]$. 可以证明：

$f\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)\cdot f\left(\frac{k\pi}{n}\right)<0$. 从而至少存在一点 $\xi_k\in\left(\frac{(k-1)}{n}\pi,\frac{k\pi}{n}\right)$ 使 $f(\xi_k)=0$. 即在 $(0,2\pi)$ 上 $f(x)=0$ 至少有 $2n$ 个根.

下面证明：$f\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)\cdot f\left(\frac{k}{n}\pi\right)<0$.

如 k 为偶数，则 $f\left(\frac{k}{n}\pi\right)=a_n+a_{n-1}\cos\frac{(n-1)k\pi}{n}+\cdots+a_1\cos\frac{k\pi}{n}+a_0\geqslant a_n-a_{n-1}-\cdots-a_1+a_0\geqslant a_n-(|a_{n-1}|+\cdots+|a_1|+|a_0|)>0$，而 $f\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)=-a_n+a_{n-1}\cos\frac{(n-1)(k-1)}{n}\pi+\cdots+a_1\cos\frac{(k-1)\pi}{n}+a_0\leqslant -a_n+|a_{n-1}|+\cdots+|a_1|+|a_0|<0$.

故 k 为偶数时，$f\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)\cdot f\left(\frac{k\pi}{n}\right)<0$.

同理可证 k 为奇数时，结论成立.

综合练习题

1. 设有一对新出生的兔子，两个月之后成年. 从第三个月开始，每个月产一对小兔，且新生的每对小兔也在出生两个月之后成年，第三个月开始每月生一对小兔. 假定出生的兔均无死亡，(1)问一年后共有几对兔子？(2)问 n 个月之后有多少对兔子？(3)若 n 个月之后有 F_n 对兔子，试求 $\lim\limits_{n\to\infty}=\frac{F_n}{F_{n+1}}$（题中所讲的一对兔子均是雌雄异性的）.

说明：该问题是意大利数学家 Fibonacci 于 13 世纪初(1202 年)研究兔子繁殖过程中数量变化规律时提出来的，其中的数列 $\{F_n\}$ 被后人称为 Fibonacci 数列. 有趣的是，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$ 正是“黄金分割”数，在优选法及许多领域得到很多新的应用.

解 第 n 月有小兔 F_n 对，且这 F_n 对小兔到第 $n+1$ 月均成熟，所以第 $n+2$ 月新生小兔 F_n 对，故 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$.

(1) $F_1=1,F_2=1,F_3=2,F_4=3,F_5=5,F_6=8,F_7=13,F_8=21,F_9=34,F_{10}=55,F_{11}=89,F_{12}=144,F_{13}=233$.

(2) 差分方程 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ 的特征方程为 $x^2=x+1$，解之得特征根 $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，则 $F_n=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$，由 $F_1=1,F_2=$

1 得 $c_1=\frac{1}{\sqrt{5}}, c_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}$，所以

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

(3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n}\cdot\frac{2^{n+1}}{(1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}}$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{5}+1}\left[\frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}\right]=\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

2. 所谓**蛛网模型**是在研究市场经济的一种循环现象中提出来的，现以猪肉的产量与价格之间的关系为例来说明. 若去年猪肉的产量供过于求，它的价格就会降低；价格降低会使今年养猪者减少，使猪肉的产量供不应求，于是肉价上扬；价格上扬又使明年猪肉产量增加，造成新的供过于求，如此循环下去. 设 x_n 为第 n 年的猪肉产量，y_n 为其价格，由于当年的产量确定当年价格，所以 $y_n=f(x_n)$，称为**需求函数**. 而第 n 年的价格又决定第 $n+1$ 年的产量，故 $x_{n+1}=g(y_n)$，称为**供应函数**. 产销关系呈现出如下过程：

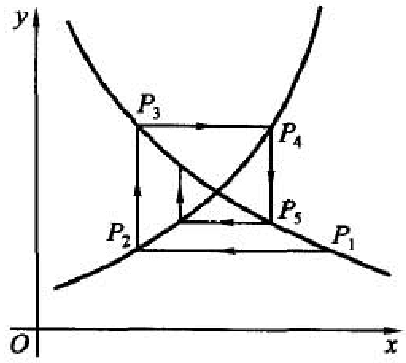
$$x_1\to y_1\to x_2\to y_2\to x_3\to y_3\to x_4\to\cdots.$$

在平面直角坐标系中描出下面的点列：

$$\begin{aligned}&P_1(x_1,y_1),\qquad P_2(x_2,y_1),\\&P_3(x_2,y_2),\qquad P_4(x_3,y_2),\\&\quad\cdots\qquad\qquad\quad\cdots\\&P_{2k-1}(x_k,y_k),\quad P_{2k}(x_{k+1},y_k),(k=1,2,\cdots),\end{aligned}$$

其中所有的点 P_{2k} 都满足 $x=g(y)$，P_{2r-1} 满足 $y=f(x)$，如图所示. 由于这种关系很像一个蛛网，所以称为蛛网模型.

据统计，某城市 1991 年猪肉产量为 30 万吨，肉价为 6 元/kg；1992 年猪肉产量为 25 万吨，肉价为 8 元/kg. 已知 1993 年的猪肉产量为 28 万吨. 若维持目前的消费水平和生产模式，并假定猪肉当年的价格与当年的产量之间、来年的产量与当年的价格之间都是线性关系.



(第 2 题图)

(1) 试确定需求函数 $y_n=f(x_n)$ 和供应函数 $x_{n+1}=g(y_n)$；

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}y_{n+1}$；

(3) 问若干年后猪肉的产量与价格是否会趋于稳定？若能够稳定，求出稳定的产量和价格.

解 (1) 设 $x_{n+1}=ay_n+c, y_n=-bx_n+d$. 将 $x_1=30, y_1=6, x_2=25, y_2=8, x_3=28$ 代入上式，则 $a=\frac{3}{2}, c=16, b=\frac{2}{5}, d=18$. 即需求函数为 $y_n=-\frac{2}{5}x_n+18$，供应函数 $x_{n+1}=\frac{3}{2}y_n+16$.

(2) 将 $y_n=-\frac{2}{5}x_n+18$ 代入 $x_{n+1}=\frac{3}{2}y_n+16$ 得

$$
\begin{aligned}
x_{n+1}&=-\frac{3}{5}x_n+43\\
&=\left(-\frac{3}{5}\right)\left[-\frac{3}{5}x_{n-1}+43\right]+43=\left(-\frac{3}{5}\right)^2x_{n-1}+43\left[1+\left(-\frac{3}{5}\right)\right]\\
&=\cdots\\
&=\left(-\frac{3}{5}\right)^n x_1+\left[1+\left(-\frac{3}{5}\right)+\cdots+\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right]\times 43,
\end{aligned}
$$

$$
x_{n+1}=\left(-\frac{3}{5}\right)^n x_1+\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^n}{1+\frac{3}{5}}\times 43,
$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\frac{5}{8}\times 43=\frac{215}{8}$，进而 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=-\frac{2}{5}\lim\limits_{n\to\infty}x_n+18=\frac{29}{4}$.

(3) 经过若干年后猪肉的产量与价格将趋于稳定，稳定后的价格为 $\frac{29}{4}=7.25$ 元/kg. 产量为 $\frac{215}{8}$ 万吨.