第八章　无限维分析入门

习　题　8.2

(A)

1. 证明在实连续函数空间 $C([a,b])$ 中,关系式

$$\langle x,y\rangle = \int_a^b x(t)y(t)\,\mathrm{d}t$$

定义了函数 $x=x(t)$ 与 $y=y(t)$ 的一个内积,从而 $C([a,b])$ 构成一个实内积空间.

证明　由于 $\forall x,y,z \in C([a,b])$ 及 $\forall \alpha,\beta \in \mathbf{R}$,

$$\langle x,y\rangle = \int_a^b x(t)y(t)\,\mathrm{d}t = \langle y,x\rangle,$$

$$\langle \alpha x+\beta y,z\rangle = \int_a^b (\alpha x+\beta y)z\,\mathrm{d}t = \alpha\int_a^b xz\,\mathrm{d}t + \beta\int_a^b yz\,\mathrm{d}t$$

$$= \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle,$$

$$\langle x,x\rangle = \int_a^b x^2\,\mathrm{d}t \geqslant 0,$$

且若 $x(t)\equiv 0$,则 $\langle x,x\rangle = 0$;

若 $\int_a^b x^2\,\mathrm{d}t = 0$,则 $x(t) \equiv 0$,如若不然,$\exists\, t_0 \in [a,b]$,使 $x(t_0) \neq 0$. 不妨设 $x(t_0) > 0$,由连续函数保号性知 $\exists\, U(t_0,\delta) = (t_0-\delta,t_0+\delta)$,使 $\forall x \in U(t_0,\delta)$,$x(t) \geqslant q > 0$. 从而 $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} x(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 2q\delta > 0$ 与 $\int_a^b x^2\,\mathrm{d}t = 0$ 矛盾,故 $x(t) \equiv 0$, $\forall t \in [a,b]$.

4. 设 X 是实内积空间,$x,y \in X$. 证明

(1) $\langle x,y\rangle = 0 \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$(勾股定理);

(2) $\langle x,y\rangle = \dfrac{1}{4}\|x+y\|^2 - \dfrac{1}{4}\|x-y\|^2$.

证明　(1) 由于$\langle x+y,x+y\rangle=\langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle=\|x\|^2+\|y\|^2+2\langle x,y\rangle$，所以

$\langle x,y\rangle=0\Leftrightarrow\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$.

(2) 由于 $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+2\langle x,y\rangle$,

$$\|x-y\|^2=\langle x-y,x-y\rangle=\langle x,x\rangle-\langle x,y\rangle-\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle$$
$$=\|x\|^2-2\langle x,y\rangle+\|y\|^2,$$

故

$$\frac{1}{4}\|x+y\|^2-\frac{1}{4}\|x-y\|^2=\langle x,y\rangle.$$

5. 证明在线性空间 $\mathbf{R}^n$ 中，

$$\|x\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i| \text{ 与 } \|x\|_1=\sum_{i=1}^n|x_i|$$

都是 $x\in\mathbf{R}^n$ 的范数，因而 $\mathbf{R}^n$ 按照这两种范数分别构成赋范线性空间.

证明　$\|x\|_\infty,\|x\|_1$ 显然满足范数公理的非负性与绝对齐次性. 下面验证 $\|x\|_\infty,\|x\|_1$ 满足三角不等式.

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$，

则

$$\|x+y\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i+y_i|\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{|x_i|+|y_i|\}$$
$$\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|+\max_{1\leqslant i\leqslant n}|y_i|=\|x\|_\infty+\|y\|_\infty.$$

$$\|x+y\|_1=\sum_{i=1}^n|x_i+y_i|\leqslant\sum_{i=1}^n(|x_i|+|y_i|)$$
$$=\sum_{i=1}^n|x_i|+\sum_{i=1}^n|y_i|=\|x\|_1+\|y\|_1.$$

6. 有界数列全体构成的集合

$$l^\infty=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\mid x_n\in\mathbf{R},\sup_{n\in\mathbf{N}_+}|x_n|<+\infty\}$$

按照通常数列的加法和数与数列的乘法构成线性空间.

证明(1) 关系式

$$\|x\|_\infty=\sup_{n\in\mathbf{N}_+}|x_n|,x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l^\infty$$

定义了 l^∞ 上的一个范数，从而 l^∞ 构成一个赋范线性空间(称为有界数列空间)；(2) 在 l^∞ 中点列按范数收敛等价于按坐标的一致收敛.

证明　(1)显然 $\|x\|_\infty,x\in l^\infty$ 满足范数公理的非负性与绝对齐次性. 下面

证明 $\|x\|_\infty$ 满足三角不等式.

$$\forall x,y \in l^\infty, x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots), y=(y_1,\cdots,y_n,\cdots),$$

则
$$\|x+y\| = \sup_{n\in\mathbf{N}_+} |x_n+y_n| \leqslant \sup_{n\in\mathbf{N}_+}(|x_n|+|y_n|)$$
$$\leqslant \sup_{n\in\mathbf{N}_+}|x_n| + \sup_{n\in\mathbf{N}_+}|y_n| = \|x\| + \|y\|,$$

故 l^∞ 按范数 $\|x\|_\infty$ 构成一个赋范线性空间.

(2) $x^{(n)}=(x_1^{(n)},\cdots,x_k^{(n)},\cdots)\in l^\infty$, $n=1,2,\cdots$, 为 l^∞ 中一收敛的点列, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{(n)}=a=(a_1,\cdots,a_k,\cdots)$. 即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbf{N}_+$, 使 $\forall n>\mathbf{N}$, 恒有 $\|x^{(n)}-a\|<\varepsilon$. 因此 $\sup\limits_{k\in\mathbf{N}_+}|x_k^{(n)}-a_k|<\varepsilon$, 从而 $\forall k\in\mathbf{N}_+$, $\exists N$, 当 $n>N$ 时 $|x_k^{(n)}-a_k|<\varepsilon$. 即数列 $\{x_k^{(n)}\}$ 一致收敛于 a_k, $\forall k=1,2,\cdots$.

反之, 对 l^∞ 中的点列 $\boldsymbol{x}^{(n)}=(x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots,x_k^{(n)},\cdots)$, $n=1,2,\cdots$, 若由此点列相应的分量构成的数列 $\{x_1^{(1)},\cdots,x_1^{(n)},\cdots\}$, $\{x_2^{(1)},\cdots,x_2^{(n)},\cdots\}$, $\cdots$, $\{x_k^{(1)},\cdots,x_k^{(n)},\cdots\}$, $\cdots$ 一致收敛, 且分别收敛于 $a_1,a_2,\cdots,a_k,\cdots$. 记 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_k,\cdots)$, 则下面证明 l^∞ 中的点列 $x^{(n)}$ 收敛于 a.

由于 $\{x_k^{(n)}\}$, $\forall k\in\mathbf{N}_+$ 一致收敛, 即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N(\varepsilon)\in\mathbf{N}_+$, 使 $\forall n>N$, 恒有 $|x_k^{(n)}-a_k|<\varepsilon$, 对 $\forall k=1,2,\cdots$. 即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N(\varepsilon)\in\mathbf{N}_+$, 使当 $n>N$ 时,

$$\sup_{k\in\mathbf{N}_+}|x_k^{(n)}-a_k|<\varepsilon.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{(n)}=a$.

9. 证明赋范线性空间中的任一开球 $S(x_0,r)$ 是凸开集(赋范线性空间 X 中的集合 A 称为凸的, 如果 $\forall x_1,x_2\in A$, $t\in[0,1]$, 都有 $tx_1+(1-t)x_2\in A$).

证明 1° $S(x_0,r)$ 是开集.

$$\forall x\in S(x_0,r), \text{则 } \|x-x_0\|<r. \text{ 令 } \bar r=\frac{r-\|x-x_0\|}{2},$$

则 $\forall y\in S(x,\bar r)$, $\|x-y\|<\bar r$, 从而

$$\|y-x_0\| \leqslant \|y-x\| + \|x-x_0\| < \bar r + \|x-x_0\| = \frac{r+\|x-x_0\|}{2} < r.$$

故 $y\in S(x_0,r)$. 于是 $S(x,\bar r)\subseteq S(x_0,r)$, 即 $S(x_0,r)$ 的任一点都是其内点, 故 $S(x_0,r)$ 为开集.

2° $S(\boldsymbol{x}_0,r)$ 为凸集.

$$\forall x_1,x_2\in S(x_0,r), t\in[0,1], \text{则 } \|tx_1+(1-t)x_2-x_0\|$$

$$= \| tx_1 + (1-t)x_2 - [tx_0 + (1-t)x_0] \| \leqslant \| tx_1 - tx_0 \|$$

$$+ \| (1-t)x_2 - (1-t)x_0 \| = t\| x_1 - x_0 \| + (1-t)\| x_2 - x_0 \|$$

$$< tr + (1-t)r = r.$$

于是 $tx_1 + (1-t)x_2 \in S(x_0, r)$.

10. 证明赋范线性空间 X 中的任一凸集 A 的内部 $\mathring{A}$ 是凸开集.

证明　1°　$\mathring{A}$ 是一开集.

若 $\mathring{A} = \varnothing$,则 $\mathring{A}$ 为开集;若 $\mathring{A} \neq \varnothing$,那么 $\forall x \in \mathring{A}$, $\exists S(x,\delta) \subseteq A$. 由上题 $S(x,\delta)$ 为开集,则 $S(x,\delta)$ 的每一点均为 A 的内点,即 $S(x,\delta) \subseteq \mathring{A}$,即 x 为 $\mathring{A}$ 的内点. 由 $x \in \mathring{A}$ 的任意性 $\mathring{A}$ 为开集.

2°　$\mathring{A}$ 为凸集.

若 $\mathring{A} = \varnothing$,则 $\mathring{A}$ 显然是凸集;

若 $\mathring{A} \neq \varnothing$,那么对 $\forall x_1, x_2 \in \mathring{A} \subseteq A$ 及 $\alpha \in [0,1]$,由于 A 是凸集,则 $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in A$;又由 $\mathring{A}$ 是开集,则 $\exists \delta > 0$,使开球 $S(x_1,\delta) \subseteq \mathring{A}$, $S(x_2,\delta) \subseteq \mathring{A}$.

(i) $S(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \delta) = \alpha S(x_1,\delta) + (1-\alpha)S(x_2,\delta) \xlongequal{\text{def}} \{ y = \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 \mid y_1 \in S(x_1,\delta), y_2 \in S(x_2,\delta) \}$.

显然, $\alpha S(x_1,\delta) + (1-\alpha)S(x_2,\delta) \subseteq S(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \delta)$. 又对 $\forall y \in S(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \delta)$,令 $z = y - [\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2]$,则 $\| z \| < \delta$. 令 $y_1 = x_1 + z$,则 $\| y_1 - x_1 \| = \| z \| < \delta$,从而 $y_1 \in S(x_1,\delta)$. 同理可知 $y_2 = x_2 + z \in S(x_2,\delta)$,从而 $\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 \in \alpha S(x_1,\delta) + (1-\alpha)S(x_2,\delta)$. 又 $y = z + [\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] = \alpha(x_1 + z) + (1-\alpha)(x_2 + z) = \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2$,故 $y \in \alpha S(x_1,\delta) + (1-\alpha)S(x_2,\delta)$.

故(i)成立.

(ii) $\alpha S(x_1,\delta) + (1-\alpha)S(x_2,\delta) \subseteq A$ 显然成立.

由(i),(ii)可得开球 $S(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \delta) \subseteq A$,即 $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in \mathring{A}$,从而 $\mathring{A}$ 为凸集.

13. 证明在赋范线性空间中,任何收敛点列都是基本列,任何基本列都是有界的.

证明　(1) 设 $\{x_n\}$ $(n = 1,2,\cdots)$ 是一收敛点列. 即 $\exists$ 常向量 a 使 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}_+$,使 $\forall n > N$. 恒有 $\| x_n - a \| < \varepsilon/2$. 从而 $\forall m, n > N$, $\| x_m - x_n \| \leqslant \| x_m - a \| + \| x_n - a \| < \varepsilon$. 故 $\{x_n\}$ 是基本列.

(2) 设 $\{x_n\}$ 是基本列(其中 $n = 1,2,\cdots$),则对 $\varepsilon = 1 > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}_+$,使 $\forall m > N$,恒有 $\| x_m - x_{N+1} \| < 1$,即 $\| x_m \| \leqslant 1 + \| x_{N+1} \|$. 令 $M = \max\{1 + \| x_{N+1} \|, \| x_1 \|, \| x_2 \|, \cdots, \| x_N \|\}$,那么 $\forall m \in \mathbf{N}_+$,恒有 $\| x_m \| \leqslant M$,即 $\{x_n\}$ 有界.

15. 证明有界数列空间 l^∞ (见第 6 题)是 Banach 空间.

证明 由第 6 题知有界数列空间 l^∞ 是赋范线性空间,其范数为 $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbf{N}_+}|x_n|$, $x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)\in l^\infty$. 只需证明 l^∞ 是完备的.

设 $\{x^{(n)}\}$ 是 l^∞ 中的基本列,则 $\{x^{(n)}\}$ 有界. 即 $\exists M>0$,使 $\|x^{(n)}\|_\infty<M$. 又设 $\{x^{(n)}\}$ 收敛于 a,则对 $\varepsilon=1$, $\exists N\in\mathbf{N}_+$,使 $\|x^{(n)}-a\|_\infty<1$. 从而当 $n>N$ 时, $\|a\|_\infty\leqslant 1+\|x^{(n)}\|\leqslant 1+M$,即 a 为有界数列. 故 $a\in l^\infty$,从而 l^∞ 是完备的.

16. 设线性方程组(2.13)满足条件 $\sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}^2<1$, 证明该方程组存在唯一的解.

证明 设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$,由于 $\mathbf{R}^n$ 按范数

$$\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

构成一 Banach 空间. 定义映射 $T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 如下:

$$Tx=Ax+b,$$

其中 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$,则对 $\mathbf{R}^n$ 中的任何 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $y=(y_1,\cdots,y_n)$ 有

$$\begin{aligned}\|Tx-Ty\|_2^2&=\|A(x-y)\|_2^2\\&=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j-y_j)\right)^2\\&\leqslant\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^n|x_j-y_j|^2\right)(\text{Cauchy - Schwarz 不等式})\\&=\left(\sum_{j=1}^n|x_j-y_j|^2\right)\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2.\end{aligned}$$

即 $\|Tx-Ty\|_2\leqslant M\left(\sum\limits_{j=1}^n|x_j-y_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}=M\|x-y\|_2$,其中 $M=\left(\sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}<1$.

故 T 是由 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的压缩映射,故有唯一的不动点,即方程有唯一的解.

17. 设 $f\in C([a,b])$, $K\in C([a,b]\times[a,b])$, $M=\max\limits_{(t,\tau)\in[a,b]\times[a,b]}|K(t,\tau)|$. 证明第二类 Fredholm 方程

$$x(t)=f(t)+\lambda\int_a^b K(t,\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

当参数 λ 满足 $|\lambda|<\dfrac{1}{M(b-a)}$ 时,存在唯一解 $x=x(t)\in C([a,b])$.

证明　在 $C([a,b])$ 上定义映射 T 为

$$(Tx)(t)=f(t)+\lambda\int_a^b K(t,\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

由于 $x(t),f(t)\in C([a,b])$，$K(t,\tau)\in C([a,b]\times[a,b])$，由连续函数的性质 $Tx\in C([a,b])$，即 T 为由 $C([a,b])$ 到自身的映射，又 $\forall x,y\in C([a,b])$，有

$$\begin{aligned}\|Tx-Ty\| &=|\lambda|\max_{t\in[a,b]}\left|\int_a^b K(t,\tau)[x(\tau)-y(\tau)]\mathrm{d}\tau\right|\\ &\leqslant|\lambda|\max_{t\in[a,b]}\int_a^b|K(t,\tau)||x(\tau)-y(\tau)|\mathrm{d}\tau\\ &\leqslant|\lambda|(b-a)\cdot\max_{(t,\tau)\in[a,b]\times[a,b]}|K(t,\tau)|\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(\tau)|\\ &\leqslant|\lambda|(b-a)\cdot M\|x-y\|.\end{aligned}$$

由于 $|\lambda|(b-a)\cdot M<1$，故 T 为由 $C([a,b])$ 到自身的压缩映射，故有唯一的不动点，即 Fredholm 方程有唯一的解 $x(t)\in C([a,b])$.

(B)

1. 设 X 是任一集合，若对任意的 $x,y\in X$，都存在一个实数与它们相对应，记作 $\rho(x,y)$，并且满足下列条件(称为距离公理)：

(1) 非负性 $\rho(x,y)\geqslant 0$，且 $\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$；

(2) 对称性 $\rho(x,y)=\rho(y,x)$；

(3) 三角不等式 $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$.

则称 $\rho(x,y)$ 为 x 与 y 之间的距离，并称定义了距离的集合 X 为距离空间或度量空间，证明：n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$，连续函数空间 $C([a,b])$ 与 p 方可和数列空间都是距离空间.

证明　设 X 为赋范线性空间，$\forall x,y\in X$，定义 $\rho(x,y)=\|x-y\|$，则由范数公理可知距离公理成立. 又 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$，连续函数空间 $C([a,b])$ 与 p 方可和数列空间分别按照其范数是赋范线性空间，从而是距离空间. 其距离分别为

$$\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n,y=(y_1,\cdots,y_2)\in\mathbf{R}^n,\text{定义 }\rho(x,y)$$

$$\rho_1(x,y)=\|x-y\|_1=\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|$$

或
$$\rho_2(x,y)=\|x-y\|_2=\left(\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}(\text{Euclid 距离})$$

或
$$\rho_\infty(x,y)=\|x-y\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i|.$$

又 $\forall x,y\in C([a,b])$，定义 $\rho(x,y)=\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|$.

对 $\forall x,y\in l^p$，定义 $\rho(x,y)=\|x-y\|_p=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

2. 设在线性空间 X 中定义了两个范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$. 若存在着正常数 m 与 M，使得

$$m\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant M\|x\|_1,\ \forall x\in X,$$

则称 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是两个等价的范数. 证明

(1) 在 $\mathbf{R}^n$ 中，下面三个范数

$$\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},\ \|x\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|,\ \|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

是等价的；

(2) 在线性空间 X 中两个范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价的充要条件是对 X 中的点列 $\{x_n\}$，$\|x_n\|_1\to0\Leftrightarrow\|x_n\|_2\to0\ (n\to\infty)$.

证明　(1) 设 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，

$$\begin{aligned}\|x\|_1&=\sum_{i=1}^{n}|x_i|=\sum_{i=1}^{n}1\cdot|x_i|\\&\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}1^2\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\text{(Cauchy-Schwarz 不等式)}\\&=\sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{n}\|x\|_2.\end{aligned}$$

又
$$\begin{aligned}\|x\|_1&=\left[\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|x_i||x_j|\right)^{\frac{1}{2}}\\&\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|x_2\|,\end{aligned}$$

故　$\|x\|_2\leqslant\|x\|_1\leqslant\sqrt{n}\|x\|_2$，即 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价.

又 $\|x\|_\infty=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|=\|x\|_1\leqslant n\cdot\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|=n\|x\|_\infty$，故 $\|\cdot\|_\infty$ 与 $\|\cdot\|_1$ 等价.

从而 $\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$ 与 $\|\cdot\|_\infty$ 互相等价.

(2) **必要性**　设 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价，则存在正常数 m,M 使 $\forall x\in X$ 有 $m\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant M\|x\|_1$，即 $\|x\|_2\leqslant M\|x\|_1$，且 $\|x_1\|\leqslant\frac{1}{m}\|x\|_2$. 从而

$\|x_n\|_1 \to 0 \Leftrightarrow \|x_n\|_2 \to 0 (n\to\infty)$.

充分性　用反证法. 假设不存在正常数 M 使 $\|x\|_1 \leqslant M\|x\|_2$ 成立. 即对 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, $\exists x_n \in X$, 使得 $\|x_n\|_1 > n\|x_n\|_2$.

令 $y_n = \dfrac{x_n}{\|x_n\|_1}$, 一方面 $\|y_n\|_1 = 1$; 另一方面 $0 \leqslant \|y_n\|_2 = \dfrac{\|x_n\|_2}{\|x_n\|_1} < \dfrac{1}{n}$ ($\forall n \in \mathbf{N}_+$), 所以 $\|y_n\|_2 \to 0$ (当 $n\to\infty$). 又因为由 $\|x_n\|_2 \to 0 \Leftrightarrow \|x_n\|_1 \to 0$ ($n\to\infty$), 所以 $\|y_n\|_1 \to 0 (n\to\infty)$. 这显然是矛盾的.

4. 设 X 是 Banach 空间, $\{\overline{S}(x_n, r_n)\}$ 是一个闭球套, 即

(1) $\overline{S}(x_1,r_1) \supseteq \overline{S}(x_2,r_2) \supseteq \cdots \supseteq \overline{S}(x_n,r_n) \supseteq \cdots$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

证明　存在着唯一的点 $x \in X$, 使 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{S}(x_n, r_n)$.

证明　球心所组成的点列 $\{x_n\}$ 是基本列.

对 $\forall \varepsilon > 0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ 可知 $\exists N \in \mathbf{N}_+$, 使对一切 $n > N$, 恒有 $r_n < \varepsilon$. 从而对 $\forall p \in \mathbf{N}_+$, 由于 $x_{n+p} \in \overline{S}(x_{n+p}, r_{n+p}) \subseteq \overline{S}(x_n, r_n)$, 所以 $\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant r_n < \varepsilon$. 即 $\{x_n\}$ 为基本列.

由 X 的完备性可知点列 $\{x_n\}$ 收敛于 X 中的一点 x. 由于对 $\forall n, p \in \mathbf{N}_+$, 恒有 $\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant r_n$. 令 $p \to +\infty$ 可得 $\|x - x_n\| \leqslant r_n$, 即对 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, 恒有 $x \in \overline{S}(x_n, r_n)$, 即 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{S}(x_n, r_n)$.

下证 x 的唯一性. 如 $y \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{S}(x_n, r_n)$, 即对 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, $\|y - x_n\| \leqslant r_n$. 令 $n \to +\infty$, 则 $\|y - x\| \leqslant 0$, 从而 $\|y - x\| = 0$, 于是 $y = x$. 唯一性得证.

5. 证明

$$A = \{x \in C([0,1]) \mid x = x(t) \geqslant 0, \forall t \in [0,1]\}$$

是连续函数空间 $C([0,1])$ 中的一个闭凸集.

证明　(1) A 是凸集.

对 $\forall x, y \in A$, $\alpha \in [0,1]$, 由于对 $\forall t \in [a,b]$, $x(t), y(t) \geqslant 0$. 由连续函数的性质 $(\alpha x + (1-\alpha)y)(t) = \alpha x(t) + (1-\alpha)y(t) \in C([a,b])$, 且非负. 即 $\alpha x + (1-\alpha)y \in A$.

(2) A 是闭集.

设 $x_n(t) \in A$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 且 $x_n(t)$ 按 $C([a,b])$ 中的范数 $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$ 收敛于 $x(t)$. 由 $C([a,b])$ 的完备性知 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 又函数列 $\{x_n(t)\}$ 按范数收敛等价于 $\{x_n(t)\}$ 一致收敛, 从而处处收敛. 又由极限的保

号性知 $\forall t_0 \in [a,b]$，由 $x_n(t_0) \geqslant 0$ 知 $x(t_0) \geqslant 0$. 即 $x(t) \in A$.

习 题 8.3

2. 设 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x \,\middle|\, \frac{1}{n+1} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, x \in \mathbf{R} \right\}$，证明 $mA = 1$.

证法 I $A = (0,1]$.

显然 $A \subseteq (0,1]$，又 $\forall x \in (0,1]$，令 $n = \left[\frac{1}{x}\right]$，由于 $\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \left[\frac{1}{x}\right] + 1$，于是 $\frac{1}{n+1} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}$，故 $x \in A$. 即 $A = (0,1]$.

从而 $mA = m(0,1] = 1$.

证法 II 令 $I_n = \left\{ x \,\middle|\, \frac{1}{n+1} < x \leqslant \frac{1}{n} \right\}$，则 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$，且 $\forall i \neq j, U_i \cap U_j = \varnothing$. 由可测集的完全可加性，

$$mA = \sum_{n=1}^{\infty} mI_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

4. 设 E_1 与 E_2 都是有界可测集，且 $E_1 \subseteq E_2$，证明

$$m(E_2 \setminus E_1) = mE_2 - mE_1.$$

证明 由于 $E_1 \subsetneq E_2$，则 $E_1 \cup (E_2 \setminus E_1) = E_2$ 且 $E_1 \cap (E_2 \setminus E_1) = \varnothing$.

由可测集的有限可加性 $m(E_1 \cup (E_2 \setminus E_1)) = mE_1 + m(E_2 \setminus E_1) = mE_2$，于是 $m(E_2 \setminus E_1) = mE_2 - mE_1$.

5. 证明函数 f 在可测集 E 上可测的充要条件是对任意实数 α，集合 $E(f < \alpha)$ 可测.

证明 由于 $E(f<\alpha) = E \setminus \{x \mid f(x) \geqslant \alpha, x \in E\} = E \setminus E(f \geqslant \alpha)$，所以 f 在可测集 E 上可测 $\xLeftrightarrow{\text{定理3.2}} E(f \geqslant \alpha)$ 可测 $\Leftrightarrow E(f<\alpha)$ 可测.

6. 设 f 与 g 都是可测集 E 上的可测函数，证明

$$E(f \geqslant g) = \{x \mid f(x) \geqslant g(x), x \in E\}$$

也是可测集.

证明 由于有理数集是可数集，则可表示为 $\{r_n\}(n=1,2,\cdots)$.

又 $E(f \geqslant g) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E(f \geqslant r_n) \cap E(g \leqslant r_n))$，而由于 f, g 均是可测集 E 上的可测函数，所以 $E(f \geqslant r_n)$ 与 $E(g \leqslant r_n) = E(g < r_n) \cup \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} E\left(r_n \leqslant g < r_n + \frac{1}{m}\right) \right)$ 均

可测,从而 $E(g\leqslant f)$ 也可测.

7. 设 f 是 E 上的可测函数,E_1 是 E 的一个可测子集,证明 f 在 E_1 上也是可测函数.

证明　由 f 是 E 上的可测函数,所以对 $\forall\alpha\in\mathbf{R}$,$E(f\geqslant\alpha)$ 是可测集. 又 $E_1(f\geqslant\alpha)=E_1\cap E(f\geqslant\alpha)$ 可知 $E_1(f\geqslant\alpha)$ 可测,故 f 也是 E_1 上的可测集.

10. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}3x^2, & x\text{ 为无理数},\\ 1, & x\text{ 为有理数}.\end{cases}$$

问 f 在区间 $[0,1]$ 上是否 L 可积? 若可积,试求其积分值.

解　由于 $\forall x\in[0,1]$,$0<f(x)<3$,所以 $f(x)$ 为有界函数. 又由于 $[0,1]$ 上的有理数集为零测度集,所以在 $[a,b]$ 上 $f(x)=g(x)\,(a,e)$,其中 $g(x)=3x^2$,$x\in[0,1]$.

又 $g(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数,而也是可测函数. 故 $f(x)$ 也是可测函数,由定理 3.4,$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 L 可积,且 $\int_{[0,1]}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=x^3\Big|_0^1=1$.

11. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(R)\int_0^1\dfrac{\sin nx}{nx}\mathrm{d}x$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(R)\int_0^1\mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(R)\int_0^1\dfrac{x^n}{1+\sin|x|}\mathrm{d}x$.

解　(1) 由于 $\forall x>0$,恒有 $x>\sin x$,则 $\dfrac{\sin nx}{nx}<1$,$\forall x\in(0,1]$. 又 $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{nx}$ 是 $(0,1]$ 上的连续函数,且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\sin nx}{x}\right)=0$. 由定理 3.7 结论(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(R)\int_0^1\dfrac{\sin nx}{nx}\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}(L)\int_0^1\dfrac{\sin nx}{nx}\mathrm{d}m=(L)\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin nx}{nx}\mathrm{d}m=0$.

(2) 由于 $f_n(x)=\mathrm{e}^{-nx^2}$ 在 $[0,1]$ 上连续,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-nx^2}=0$,$|f_n(x)|\leqslant 1$,对 $\forall x\in[0,1]$. 由定理 3.7(2)可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(R)\int_0^1\mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}(L)\int_0^1\mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}m\\&=(L)\int_0^1\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}m=0.\end{aligned}$$

(3) 由于对 $\forall x\in[0,1]$, $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+|\sin x|}\leqslant\dfrac{1}{2}x^n\leqslant\dfrac{1}{2}$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$. 故对 $[0,1]$ 上的连续函数列 $f_n(x)$ 恒有 $\lim\limits_{n\to\infty}(R)\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}(L)\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}m=(L)\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}m=0$.

12. 证明在 $[a,b]$ 上 p 方可积函数必是 L 可积函数,即

$$L^p([a,b])\subseteq L([a,b])\qquad(1\leqslant p<+\infty).$$

证明 若 $p=1$,则结论显然成立;

若 $1<p<+\infty$,对 $\forall f\in L^p([a,b])$,令 $A=\{x\mid |f|\geqslant 1,x\in[a,b]\}$, $B=[a,b]\setminus A$,则有 $\int_{[a,b]}|f|\,\mathrm{d}m=\int_A|f|\,\mathrm{d}m+\int_B|f|\,\mathrm{d}m\leqslant\int_A|f|^p\mathrm{d}m+\int_B\mathrm{d}m=\int_A|f|^p\mathrm{d}m+mB<+\infty$. 即 $|f|$ 是 L 可积,从而 f 是 L 可积.

习 题 8.4

2. 设 M 为 Hilbert 空间 X 的凸子集, $\{x_n\}\subseteq M$,且

$$\|x_n\|\to d=\inf_{x\in M}\|x\|\quad(n\to\infty),$$

证明 $\{x_n\}$ 是 X 中的收敛点列.

证明 对任意的 x_m,x_n,由平行四边形公式可得

$$2\left\|\frac{x_m-x_n}{2}\right\|^2=\|x_m\|^2+\|x_n\|^2-2\left\|\frac{x_m+x_n}{2}\right\|^2.$$

又由于 M 是凸集, $x_m,x_n\in M$,所以 $\dfrac{x_m+x_n}{2}\in M$,于是 $\left\|\dfrac{x_m+x_n}{2}\right\|\geqslant d$,代入上式得

$$0\leqslant 2\left\|\frac{x_m-x_n}{2}\right\|^2\leqslant\|x_m\|^2+\|x_n\|^2-2d^2.$$

令 $m,n\to\infty$,则 $\|x_m-x_n\|^2\to 0$,故 $\{x_n\}$ 是 M 中的基本列. 由 X 的完备性知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x\in X$,即 $\{x_n\}$ 为 X 中的收敛点列.

3. 设 X 为 Hilbert 空间, M 是 X 的真闭子空间,证明 $M^\perp$ 必含有非零元.

证明 由于 M 是 X 的真闭子空间,所以 $X\setminus M\neq\varnothing$,从而存在 $x\neq\theta$,且 $x\in X\setminus M$. 由正交分解定理知 $\exists x_0\in M$,使 $x-x_0\in M^\perp$. 又因 $x\notin M$, $x_0\in M$,故 $x-x_0\neq\theta$. 即 $M^\perp$ 中必有非零元.

4. 试求常数 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$ 使 $\int_0^1(\mathrm{e}^t-\alpha_0-\alpha_1 t-\alpha_2 t^2)\,\mathrm{d}t$ 取最小值.

解　取 $M=\operatorname{span}\{1,t,t^2\}$，令 $f(t)=\mathrm{e}^t$，则题设求即为在 $L^2([0,1])$ 空间中求 $f(t)$ 在 M 中的最佳逼近 $x_0(t)$. 令

$$x_0(t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2,$$

由线性方程组

$$\begin{cases}\alpha_0\langle 1,1\rangle+\alpha_1\langle 1,t\rangle+\alpha_2\langle 1,t^2\rangle=\langle 1,\mathrm{e}^t\rangle,\\ \alpha_0\langle t,1\rangle+\alpha_1\langle t,t\rangle+\alpha_2\langle t,t^2\rangle=\langle t,\mathrm{e}^t\rangle,\\ \alpha_0\langle t^2,1\rangle+\alpha_1\langle t^2,t\rangle+\alpha_2\langle t^2,t^2\rangle=\langle t^2,\mathrm{e}^t\rangle,\end{cases}$$

解得 $\alpha_0\approx 1.013$，$\alpha_1\approx 0.851\,1$，$\alpha_2=0.839\,2$，其中 $\forall f,g\in L^2([0,1])$，$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

5. 设 $\{e_n\}$ 是内积空间 X 中的标准正交系，$x,y\in X$，证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,e_n\rangle\langle y,e_n\rangle|\leqslant\|x\|\,\|y\|.$$

证明　利用 Cauchy-Schwarz 及 Bessel 不等式可知

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,e_n\rangle\langle y,e_n\rangle| &\leqslant\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,e_n\rangle|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|\langle y,e_n\rangle|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant\|x\|\,\|y\|.\end{aligned}$$