刘徽(约225 – 295年)

我国古代魏末晋初的杰出数学家. 他撰写的《重差》对《九章算术》中的方法和公式作了全面的评注, 指出并纠正了其中的错误, 在数学方法和数学理论上作出了杰出的贡献.他的 “ 割圆术 ” 求圆周率 π 的方法:

“ 割之弥细, 所失弥小, 割之又割, 以至于不可割, 则与圆合体而无所失矣 ”

它包含了“用已知逼近未知, 用近似逼近精确”的重要极限思想.

第一章

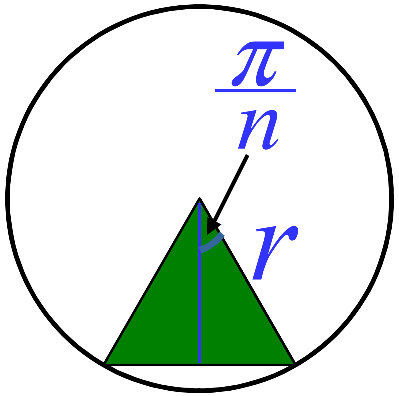
数列的极限

一、数列极限的概念

二、数列极限的性质

一、数列极限的概念

引例. 设有半径为 r 的圆，用其内接正 n 边形的面积 A_n 逼近圆面积 S.



如图所示，可知

$$A_n = n r^2 \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$$

$$(n = 3, 4, 5, \cdots)$$

当 n 无限增大时，A_n 无限逼近 S (刘徽割圆术)，

数列　　　极限

定义: 自变量取正整数的函数称为**数列**,记作 $x_n = f(n)$ 或 $\{x_n\}$. x_n 称为**通项**(一般项) .

例如, $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots \quad \to 1 \quad (n \to \infty)$

$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \cdots \quad \to 0 \quad (n \to \infty)$

$2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots \quad \to \infty \quad (n \to \infty)$

$1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots \quad -1, 1 \quad (n \to \infty)$

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \cdots$$

当 n 无限增大时, $x_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ 无限接近于0.

问题: “无限接近”意味着什么?如何用数学语言刻划它.

$$\because \quad |x_n - 0| = \left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

给定 $\dfrac{1}{100}$, 由 $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{100}$, 只要 $n > 100$时, 有 $|x_n - 0| < \dfrac{1}{100}$,

给定 $\dfrac{1}{1000}$, 由 $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{1000}$, 只要 $n > 1000$时, 有 $|x_n - 0| < \dfrac{1}{1000}$,

给定 $\dfrac{1}{10000}$, 由 $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{10000}$, 只要 $n > 10000$时, 有 $|x_n - 0| < \dfrac{1}{10000}$,

给定 $\varepsilon > 0$, 只要 $n > N(=[\dfrac{1}{\varepsilon}])$时, 有 $|x_n - 0| < \varepsilon$成立.

定义2.1: 若数列 $\{x_n\}$ 及常数 a 有下列关系：

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \text{正整数} N, \text{当 } n > N \text{ 时, 总有 } |x_n - a| < \varepsilon}$$

则称该数列 $\{x_n\}$ 的极限为 a，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{或} \quad x_n \to a \ (n \to \infty)$$

此时也称数列**收敛**，否则称数列**发散**.

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \cdots \quad \to 0 \quad (n \to \infty) \quad \text{收敛}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$$

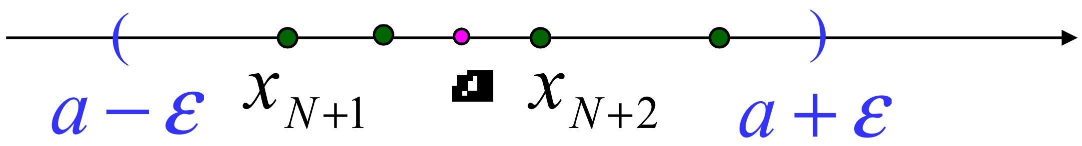
$$2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots \quad \to \infty \quad (n \to \infty)$$

$$1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots \quad -1, 1 \ (n \to \infty)$$

后两个数列：发散

$\forall \varepsilon > 0, \exists$ 正整数 N, 当 $n > N$ 时, 总有 $|x_n - a| < \varepsilon$

几何解释：



$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \quad (n > N)$$

即 $x_n \in \bigcup(a, \varepsilon) \quad (n > N)$

例2.1 用数列极限的定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1$

例1. 利用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2$

例2.2 设 $|q|<1$，证明等比数列 $1, q, q^2, \cdots, q^{n-1}, \cdots$ 的极限为 0 .

证: $|x_n - 0| = |q^{n-1} - 0| = |q|^{n-1}$

$\forall \varepsilon \in (0,1)$，欲使 $|x_n - 0| < \varepsilon$，只要 $|q|^{n-1} < \varepsilon$，即

$(n-1)\ln|q| < \ln\varepsilon$，亦即 $n > 1 + \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$.

因此，取 $N = \left[1 + \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$，则当 $n > N$ 时，就有

$$|q^{n-1} - 0| < \varepsilon$$

故
$$\lim_{n\to\infty} q^{n-1} = 0$$

例2.3 用数列极限的定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3^n}=0$

例2.4 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>1)$.

例2.5 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

例： 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

证： $\because \left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\left|\dfrac{(\sqrt{n^2+a^2}-n)(\sqrt{n^2+a^2}+n)}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}\right|$

$$=\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\frac{a^2}{n^2}\le\frac{a^2}{n}$$

要使 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$, 只要 $\dfrac{a^2}{n}<\varepsilon$, 或 $n>\dfrac{a^2}{\varepsilon}$

$\forall\varepsilon>0$, 取 $N=[\dfrac{a^2}{\varepsilon}]$, 当 $n>N$ 时，恒有

$\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$

例 设$x_n > 0$,且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$,

求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

证 任给$\varepsilon > 0$, $\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 取$\varepsilon_1 = \sqrt{a} \cdot \varepsilon$,

$\therefore \exists N$使得当$n > N$时恒有$|x_n - a| < \varepsilon_1$,

从而有$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| = \dfrac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \dfrac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \dfrac{\varepsilon_1}{\sqrt{a}} = \varepsilon$

故$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

练习1. 已知 $x_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n}$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限为1.

证: $|x_n-1|=\left|\dfrac{n+(-1)^n}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}$

$\forall\varepsilon>0$，欲使 $|x_n-1|<\varepsilon$，即 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$

因此，取 $N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]$，则当 $n>N$ 时，就有

$$\left|\frac{n+(-1)^n}{n}-1\right|<\varepsilon$$

故

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n}{n}=1$$

练习2. 已知 $x_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

证: $|x_n - 0| = \left|\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2} - 0\right| = \dfrac{1}{(n+1)^2} < \dfrac{1}{n+1}$

$\forall \varepsilon \in (0,1)$, 欲使 $|x_n - 0| < \varepsilon$, 只要 $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$, 即 $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$.

取 $N = [\dfrac{1}{\varepsilon} - 1]$, 则当 $n > N$ 时, 就有 $|x_n - 0| < \varepsilon$,

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2} = 0$

也可由 $|x_n - 0| = \dfrac{1}{(n+1)^2}$

取 $N = [\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1]$

说明: N 与 ε 有关, 但不唯一.

不一定取最小的 N.