《概率论与数理统计》属应用数学范畴，它观察，分析，描述和处理问题的方法与其它数学分支不同，是一种观测实验与理性思维相结合的科学方法.

第 一 章

一、基本题目

1. 写出下列随机试验的样本空间。
（1）同时抛三颗色子，记录三颗色子的点数之和；
（2）将一枚硬币抛三次，(i)观察各次正反面出现的结果；(ii)观察正面总共出现的次数；
（3）对一目标进行射击，直到命中 5 次为止，记录射击次数；
（4）将一单位长的线段分成 3 段，观察各段的长度；
参考答案：

（1）$\Omega=\{3,4,5\cdots,18\}$

(2) $(i)\Omega=\{TTT,TTH,THT,THH,HTT,HTH,HHT,HHH\}$

$(ii)\Omega=\{0,1,2,3\}$

(3) $\Omega=\{5,6,.....\}$

(4) $\Omega=\{(x,y,z)|x+y+z=1,x,y,z>0,x,y,z\in R\}$

2. 从 0,1,2，…，9 十个数字中，先后随机取出两数，写出下列取法中的样本空间：（1）抽取可放回时的样本空间Ω_1；（1）抽取不放回时的样本空间Ω_2.
参考答案：

（1）$\Omega_1=\{(i,j)|0\le i\le 9,0\le j\le 6,\quad i,j\in N\}$

（2）$\Omega_2=\{(i,j)|0\le i\le 9,0\le j\le 9,i\ne j\}$

3. 一袋内装有 4 个白球和 5 个红球,每次从袋内随机取出一球,直至首次取到红球为至. 写出下列两种取法的样本空间: (罗海力、)
(1)不放回时的样本空间Ω_1；(1) 放回时的样本空间Ω_2.
参考答案：用“0”代表白球，“1”代表红球

（1）$\Omega_1=\{1,\ 01,\ 001,\ 0001,\ ,00001\}$

（2）$\Omega_2=\{1,\ 01,\ 001,\ 0001,\ 00001,\cdots\cdots\}$

4. 设 A，B，C 为随机试验的三个随机事件，试将下列各事件用 A，B，C 表示出来.
（1）仅仅 A 发生；（2）三个事件都发生；（3）A 与 B 均发生，C 不发生；
（4）至少有一个事件发生；（5）至少有两个事件发生；
（6）恰有一个事件发生；（7）恰有两个事件发生；
（8）没有一个事件发生；（9）不多于两个事件发生.
参考答案：

(1) $A\overline{B}\overline{C}$； (2)$ABC$； (3)$AB\overline{C}$； (4)$A\cup B\cup C$；

$(5) AB \cup BC \cup AC$; $(6) A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C$;

$(7) AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$;

$(8) \overline{A}\overline{B}\overline{C} = \overline{A \cup B \cup C}$; $(9) \overline{ABC}$

5. 一公司有 16 名员工，若每个员工随机地在一个月的 22 天工作日中挑选一天值班，问：不会出现有两个及以上的员工挑选同一天值班的概率是多少？

参考答案：

令 A={不会出现有两个及以上的员工挑选同一天值班}

基本事件总数为 22^{16}

员工从 22 天中选出 16 天值班日，有 C_{22}^{16} 种选法；

16 名员工每人各值一天班，有 $\mathrm{A}_{16}^{16} = 16!$ 种排法，

所求概率为 $\mathrm{P}(A) = \dfrac{C_{22}^{16} \cdot 16!}{22^{16}}$

6. 一辆公共汽车出发前载有 5 名乘客，每位乘客独立在 7 个站中的任意一站离开，求下列事件的概率：

（1）第 7 站恰有两位乘客离去；

（2）没有两位及两位以上乘客在同一站离去。

参考答案：

设 A={第 7 站恰有两位乘客离去}，

B={没有两位及两位以上乘客在同一站离去}

基本事件总数为 7^5

（1）从 5 人中选出 2 人的选法有 C_5^2 种，另 3 人随意进入其余的 6 个站有 6^3 种方式，故

$$\mathrm{P}(A) = \frac{C_5^2 \cdot 6^3}{7^5}$$

（2）5 名乘客各自从 7 个站选一站离去有 A_7^5

$$\mathrm{P}(B) = \frac{A_7^5}{7^5}$$

7. 一元件盒中有 50 个元件，其中 25 件一等品，15 件二等品，10 件次品，从中任取 10 件，求：

（1）恰有两件一等品，两件二等品的概率；

（2）恰有两件一等品的概率；

（3）没有次品的概率。

参考答案：

系分类抽球模型

1) $\dfrac{C_{25}^2 \cdot C_{15}^2 \cdot C_{10}^6}{C_{50}^{10}}$ 2) $\dfrac{C_{25}^2 \cdot C_{25}^8}{C_{50}^{10}}$ 3) $\dfrac{C_{40}^{10}}{C_{50}^{10}}$

8. 袋中有编号为 1,2，…，n 的 n 个小球，从中随机有放回地取 m 次，求取出的 m 个球中最大编号为 k 的概率. 并计算出 n=6，m=3 和 k=6 的值.(董鑫、)
参考答案：

设 A ={取到的 k 个球中最大编号是 k},则

解法 1 $$P(A)=\frac{m(k-1)^{m-1}}{n^m},$$ 漏算样本点

解法 2 $$P(A)=\frac{mk^{m-1}}{n^m},$$ 重复计算样本点

正确解答

基本事件总数为 $N=n^k$，

令 A_i ={取到的 m 个球中最大编号不超过 i}, i =1,2,…,n

则 $A=A_k-A_{k-1}$, 且 $A_{k-1}\subset A_k$，根据概率的单调性

$$P(A)=P(A_k)-P(A_{k-1})$$
$$=\frac{k^m}{n^m}-\frac{(k-1)^m}{n^m}=\frac{k^m-(k-1)^m}{n^m}$$

代入 n=6，m=3 和 k=6，所求概率为 **0.421**

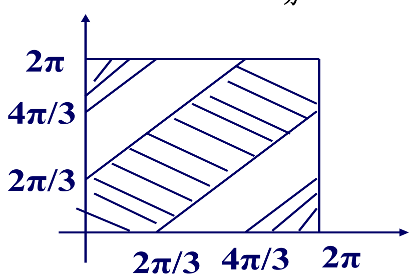
9. 在一半径为 1 的圆周上，甲、乙两人各自独立地从圆周上随机选择一点，将两点连成一条弦，求圆心到这条弦的距离不小于 1/2 的概率.(杨羚、)
参考答案：

设甲、乙在[0,2π]之间随机选择的角度分别为 X,Y，则(X,Y)在[0,2π] ×[0,2π]的正方形上均匀分布.

要使圆心到这条弦的距离不小于 1/2,即满足

$$|X-Y|\le\frac{2}{3}\pi \text{ 或 } |X-Y|\ge\frac{4}{3}\pi$$

$$P\{|X-Y|\le\frac{2}{3}\pi \text{ 或 } |X-Y|\ge\frac{4}{3}\pi\}=\frac{S_{阴影}}{S_{方}}=\frac{2}{3}$$



10. 设 A，B 是试验 E 的两个事件，且 P(A)=1/3, P(B)=1/2．在以下各种情况下计算 $P(B\overline{A})$

（1）$A\subset B$； （2）A 与 B 互不相容； （3）P(AB)=1/8

参考答案：

(1) 由概率的单调性 $\mathrm{P}(B\overline{A})=\mathrm{P}(B-A)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

（2）$\because AB=\phi,\quad B\overline{A}=B(\Omega-A)=B\Rightarrow \mathrm{P}(B\overline{A})=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

（3）$\mathrm{P}(B\overline{A})=\mathrm{P}(B-AB)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

11. 设 $P(A)>0$，$P(B)>0$，将下列四个数：

$$P(A)\ 、P(AB)\ 、P(A\cup B)\ 、P(A)+P(B)$$

用“≤”连接它们，并指出在什么情况下等号成立.

参考答案：

由概率的单调性，因 $AB\subset A\subset A\cup B$，故 $P(AB)\le P(A)\le P(A\cup B)$，

再由概率的次可加性，有 $P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$，从而

$$P(AB)\le P(A)\le P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$$

当 $AB=A$ 时，第一个等号一定成立（逆不真）；

当 $A\cup B=A$ 时，第二个等号一定成立（逆不真）；

当 A，B 互不相容时，第三个等号成立；

12. 已知 A_1 和 A_2 同时发生，则 A 必发生，证明：$P(A)\ge P(A_1)+P(A_2)-1$

参考答案：

因 $A_1A_2\subset A\Rightarrow P(A_1A_2)\le P(A)$

由加法定理 $P(A)\ge P(A_1A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cup A_2)$

且 $0\le P(A_1\cup A_2)\le 1\quad\Rightarrow\quad P(A)\ge P(A_1)+P(A_2)-1$

13. 已知 P(A)=P(B)=P(C)=1/4，P(AB)=0, P(AC)=P(BC)=1/16，计算 A, B, C 全不发生的概率.

参考答案：

类似课件 C-3 例 14

14. 现有两种报警系统 A 与 B，每种系统单独使用时，系统 A 有效的概率是 0.92,系统 B 为 0.93。两种系统装置在一起后，至少有一个系统有效的概率是 0.988，求

（1）两个系统均有效的概率；

（2）两个系统中仅有一个有效的概率。

参考答案：

由题设条件知 $\mathrm{P}(A)=0.92,\quad P(B)=0.93,\quad A=P(A\cup B)=0.988$

（1）$p_1=P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.862$

（2）$p_2=P(A\cup B-AB)=P(A\cup B)-P(AB)=0.126$

15. 摩托车赛道在甲乙两地间设置了三个障碍. 一位参赛者在每一障碍前停车的概率为 0.1, 而从乙地到终点不停车的概率为 0.7. 试求这位参赛者全程不停车的概率.

参考答案：0.5103

设 A_k={参赛者在第 k 个障碍前不停车}，k=1,2,3

B={参赛者从乙地到终点不停车}

A={全程不停车}=$A_1A_2A_3B$，

假设事件组 A_1，A_2，A_3，B 相互独立，则

P(A)=P($A_1A_2A_3B$)= P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(B)=0.9×0.9×0.9×0.7=0.5103.

或根据概率乘法公式

$$P(A_1A_2A_3B) = P(A_1)P(A_2|A_1)PA_3|A_1A_2)P(B|A_1A_2A_3)$$
$$= 0.9\times0.9\times0.9\times0.7 = 0.5103$$

16. 某型号的显像管主要由三个厂家供货，甲、乙、丙三个厂家的产品概率分别占总数的 25%, 50%, 25%. 甲、乙、丙三个厂家的产品在规定时间内能正常工作的概率分别是 0.1, 0.2, 0.4. 求一个随机选取的显像管能在规定时间内正常工作的概率.

参考答案：**0.225**

全概率公式

17.在一盒子中装有 15 个乒乓球，其中有 9 个新球。在第一次比赛时任意取出三个球，赛后仍放回原盒中；在第二次比赛时同样任意取出三个球，求第二次取出的三个球均为新球的概率.

参考答案：

全概率公式，注意新球用后变旧球

设 $A=\{$第二次取出三个新球$\}$，

$\mathrm{B}_i=\{$第一次取出的三个球中 有i个新球$\}, i=0,1,2,3$

则 $$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=\frac{C_6^3}{C_{15}^3}\cdot\frac{C_9^3}{C_{15}^3}+\frac{C_9^1C_6^2}{C_{15}^3}\cdot\frac{C_8^3}{C_{15}^3}+\frac{C_9^2C_6^1}{C_{15}^3}\cdot\frac{C_7^3}{C_{15}^3}+\frac{C_9^3}{C_{15}^3}\cdot\frac{C_6^3}{C_{15}^3}$$

18. 已知一批产品中 96%是合格品，用某种检验方法辨认出合格品为合格品的概率为 0.98, 而误认废品是合格品的概率为 0.05, 求检查合格的一件产品确系合格的概率.

参考答案：**0.998**

贝叶斯公式计算后验概率

19.设甲、乙、丙三导弹向同一敌机射击，甲、乙、丙击中敌机的概率分别为 0.4, 0.5, 0.7. 如果只有一弹击中，飞机坠毁的概率为 0.2；如两弹击中，飞机坠毁的概率为 0.6；如三弹击中，飞机坠毁的概率为 0.9.

（1）求飞机坠毁的概率；（2）若飞机已经坠毁，问飞机最有可能是被几颗导弹击中的？

参考答案：

设 A={飞机坠毁}，

B_k={恰有 k 弹击中飞机}，k=0,1,2,3，构成完备事件组.

C_1={甲弹击中飞机}，C_2={乙弹击中飞机}，C_3={丙弹击中飞机}

假定三发导弹击中飞机是相互独立的，有

$$P(B_0)=P(\overline{C}_1\overline{C}_2\overline{C}_3)=P(\overline{C}_1)P(\overline{C}_2)P(\overline{C}_3)=(1-0.4)(1-0.5)(1-0.7)=0.09$$

$$P(B_1)=P(C_1\overline{C}_2\overline{C}_3\cup\overline{C}_1C_2\overline{C}_3\cup\overline{C}_1C_2\bar{C}_3)$$

$$=0.4\times(1-0.5)(1-0.7)+(1-0.4)\times0.5\times(1-0.7)$$

$$+(1-0.4)(1-0.5)\times0.7=0.36$$

类似地有

$$P(B_2)=0.4\times0.5\times(1-0.7)+(1-0.4)\times0.5\times0.7$$

$$+0.4\times(1-0.5)\times0.7=0.41$$

$$P(B_3)=0.4\times0.5\times0.7=0.14$$

（1）根据全概率公式

$$P(A)=\sum_{k=0}^{3}P(B_k)P(A|B_k)=0\times0.09+0.2\times0.36+0.6\times0.41+0.9\times0.14=0.444$$

（2）由贝叶斯公式

$$P(B_2|A)=\frac{P(AB_2)}{P(A)}=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=\frac{0.41\times0.6}{0.444}\approx0.554$$

同理，可算出 $P(B_1|A)=0.164$， $P(B_3|A)=0.284$，可见，飞机最有可能是被两颗导弹击中的.

20. 设事件 A，B，C 相互独立，且 P(A)=1/4, P(B)=1/3, P(C)=1/2. 试求：
(1) 三个事件都不发生的概率； (2) 三个事件至少有一个发生的概率；
(3) 三个事件恰好有一个发生的概率； (4) 至多有两个事件发生的概率.

21. 甲、乙比赛射击，每进行一次比赛，胜者得一分. 在一次射击中，甲“胜”的概率为 α，乙“胜”的概率为 β $(\alpha+\beta=1)$. 设 $\alpha>\beta$，规定比赛进行到有一人超过对方 2 分就停止（各次比赛相互独立），多得 2 分者胜. 求甲获胜的概率.

参考答案：

分析：在一次射击中甲乙双方有且仅有一人得 1 分，必进行偶数次比赛才可能确定胜负.

解法一

甲在第 $2n$ 次比赛时 “胜” $\Leftrightarrow$

甲在第 $2n$ 次和第 $2n-1$ 次各得一分，且前面的 $2n-1$ 次中两人得分相同

设 $B=\{甲获胜\}$， $A_n=\{比赛进行了2n次甲获胜\}$，$n=1,2,\ldots$

故 $$P(A)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\alpha^{n+1}\beta^{n-1}=\frac{\alpha^2}{1-2\alpha\beta}$$

解法二　称每两次比赛为一轮，用 B 表示甲获胜，

记　　　　A_k ={在一轮比赛中甲得 k 分}, k=0,1,2

构成完备事件组,且

$$P(A_0)=C_2^0\alpha^0\beta^2=\beta^2,\ P(A_1)=C_2^1\alpha\beta=2\alpha\beta,\ P(A_2)=C_2^2\alpha^2\beta^0=\alpha^2$$

若甲在一轮比赛中得一分，与下一轮中获胜与否无关，有 $P(B|A_1)=P(B)$

根据全概率公式

$$P(B)=P(A_0)P(B|A_0)+P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$$
$$=0+P(A_1)P(B)+P(A_2)P(B|A_2)$$
$$=0+2\alpha\beta\cdot P(B)+\alpha^2\cdot 1$$

解得 $P(B)=\dfrac{\alpha^2}{1-2\alpha\beta}$

23. 设有事件 $A_1,\cdots,A_n$ 在下列各种条件下应怎样求 $A_1,\cdots,A_n$ 至少有一个发生的概率. (1) $A_1,\cdots,A_n$ 互不相容；(2) $A_1,\cdots,A_n$ 相互独立；(3) 一般情形.

24. 某仪器有三个指示灯，第一、第二、第三个指示灯出错的概率分别为 0.1，0.2 及 0.3，并且出错与否是相互独立的. 一个指示灯出错时造成系统运行失败的概率是 0.25, 两个一个指示灯出错时为 0.6, 而当三个同时出错则为 0.9. 试求系统运行失败的概率.

参考答案：

设　A={系统运行失败}, C_j={第 j 个指示灯出错}，k=1,2,3，

B_k={恰有 k 个指示灯出错}，k=1,2,3，构成完备事件组

同 19 题

二、思考问题：

1. 怎样理解随机试验？随机试验具有哪些特性？

2. 随机事件 A 发生的频率具有稳定性，即稳定在某一常数 $P(A)$, 人们称其为随机事件 A 的统计概率，这是否说明频率的极限就是概率？频率是什么变量？请阐述理由.

3. 怎样确定试验的基本事件组？一个试验的基本事件组是否惟一？

4. 你是如何理解概率的公理化定义的形成思路的，在你学过的其他数学学科中，哪些数学定义中类似的从具体到抽象定义特征给你留下深刻印像？你从中能得到什么启示？

5.如何理解条件概率与非条件概率，二者间有什么关系吗？举例说明概率 $P(AB)$ 和 $P(A|B)$ 的概念差别.

6.基于条件概率概念的三个概率计算公式是哪些？它们有什么关系,又有什么差别?

7. 分析利用全概率公式计算概率的思想，此种思想还类似地用于概率论其他什么地方?

8. 从 Bayes 公式中体会 Bayes 思想，思考该种思想将在哪些问题中会得到广泛应用，从你熟悉的日常生活中举出实例.

9. 事件的独立性是否存在传递性？即事件 *A* 与事件 *B* 相互独立，事件 *B* 与事件 *C* 相互独立，能否推知事件 *A* 与事件 *C* 相互独立？举例说明

10. 分析两个随机事件 *A* 与 *B* 互不相容、*A* 与 *B* 对立及 *A* 与 *B* 相互独立这三个概念的差别. 在一般情形 *A* 与 *B* 相互独立与 *A* 与 *B* 互不相容能否同时成立?