$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0$$

$$S_n \xlongequal{def} a_1 + \cdots + a_n$$

$$S_n \nearrow \begin{cases} \to +\infty, \\ \to \text{上确界} \end{cases}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 收敛}}$$

部分和 $S_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

$$< \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots \frac{1}{(n-1)n}$$

$$= 1 + 1 - \frac{1}{n}$$

$$< 2$$

例 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}=2$?

×

$\int_{1}^{\infty}f(x)\,dx$ vs $\int_{1}^{\infty}g(x)\,dx$

若 $0<f(x)\le g(x)$, $x\ge 1$

or $x\ge 100$

例 ① …… ✓

② …… ✓

① $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{1+\alpha}}$, $\alpha>0$

Ex: ① $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}}$

发散 ② $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

$(\ln n > 1, \quad n \geq 3)$

关于阶: $\ln n < n^{1/100}$
(n充分大)

Q: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \ p \in \mathbb{R}$

p-级数

If $p \leq 0$ $\quad \frac{1}{n^p} \not\to 0$ ✗

下面讨论 $p > 0$.

$0 < p \leq 1$ vs $\sum \frac{1}{n}$ ✗

$p > 1$ vs $1 + \int_2^n \frac{1}{x^p} dx$ ✓

Ex: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}}$

Sol: $\because \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{1/4}} = 0$

$\therefore$ $\exists N$, 当 $n > N$ 时, 有

$\ln n < n^{1/4}$.

于是 $\dfrac{\ln n}{n^{3/2}} < \dfrac{n^{1/4}}{n^{3/2}} = \dfrac{1}{n^{5/4}}$, $n > N$.

但 $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^{5/4}}$ 收敛.

[illegible] 1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}}$ [illegible]