第四节 无穷小量和无穷大量

4.1 无穷小量的概念和性质

定义4.1：极限为零的变量称为<u>无穷小量</u>.

如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在正数 δ(或正数 X)，使得对于适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$(或$|x|>X$)的一切 x，对应的函数值 $f(x)$都满足不等式 $|f(x)|<\varepsilon$，

那末 称函数$f(x)$当$x\longrightarrow x_0$（或$x\rightarrow\infty$)时为无穷小，

记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ (或$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$).

例如,

$\because \lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$, $\therefore$ 函数 $\sin x$ 是当 $x \to 0$ 时的无穷小.

$\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$, $\therefore$ 函数 $\dfrac{1}{x}$ 是当 $x \to \infty$ 时的无穷小.

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n} = 0$, $\therefore$ 数列 $\{\dfrac{(-1)^n}{n}\}$ 是当 $n \to \infty$ 时的无穷小.

注意

1.无穷小是变量,不能与很小的数混淆;

2.零是可以作为无穷小的唯一的数.

无穷小与函数极限的关系:

定理 4.1 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x),$

其中$\alpha(x)$是当$x\to x_0$时的无穷小.

证 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\qquad$ 令 $\alpha(x)=f(x)-A,$

$\therefore \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0,$ 使得当$0<|x-x_0|<\delta$时

恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$

即有 $|\alpha(x)|<\varepsilon$

意义

1.将一般极限问题转化为特殊极限问题(无穷小);

2.给出了函数$f(x)$在x_0附近的近似表达式

$f(x) \approx A$,误差为$\alpha(x)$.

无穷小的运算性质:

定理4.2 在同一过程中,有限个无穷小的代数和仍是无穷小;有限个无穷小量的乘积是无穷小.

证 设α及β是当$x \to \infty$时的两个无穷小,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X_1 > 0, X_2 > 0, \text{使得当} |x| > X_1 \text{时恒有} |\alpha| < \frac{\varepsilon}{2};$$

$$\text{当} |x| > X_2 \text{时恒有} |\beta| < \frac{\varepsilon}{2}; \quad \text{取 } X = \max\{X_1, X_2\},$$

$$\text{当} |x| > X \text{时, 恒有} |\alpha \pm \beta| \le |\alpha| + |\beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

$$\therefore \alpha \pm \beta \to 0 \ (x \to \infty)$$

注意　无穷多个无穷小的代数和未必是无穷小.

例如, $n \to \infty$时, $\dfrac{1}{n}$是无穷小,

但n个$\dfrac{1}{n}$之和为1不是无穷小.

定理 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

证 设函数u在$\mathring{U}(x_0,\delta_1)$内有界,

则$\exists M>0,\delta_1>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta_1$时恒有$|u|\le M$.

又设α是当$x\to x_0$时的无穷小,

$\therefore \forall\varepsilon>0,\exists\delta_2>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta_2$时恒有$|\alpha|<\dfrac{\varepsilon}{M}$.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则当 $0<|x-x_0|<\delta$时, 恒有

$$|u\cdot\alpha|=|u|\cdot|\alpha|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$

$\therefore$ 当$x\to x_0$时, $u\cdot\alpha$为无穷小.

推论1 在同一过程中,有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.

推论2 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论3 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

例如,当$x \to 0$时,$x\sin\frac{1}{x}, x^2\arctan\frac{1}{x}$ **都是无穷小**

4.2 无穷小的比较

例如, 当$x \to 0$时, $x, x^2, \sin x, x^2 \sin\frac{1}{x}$都是无穷小.

观察各极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x} = 0,$$ x^2比$3x$要快得多;

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$$ $\sin x$与x大致相同;

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$ 不存在. **不可比.**

极限不同，反映了趋向于零的“快慢”程度不同.

定义4.2 设α,β是同一过程中的两个无穷小,且$\alpha \neq 0$.

(1) 如果$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$,就说$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小,

记作$\beta = o(\alpha)$;

(2) 如果$\lim \frac{\beta}{\alpha} = C(C \neq 0)$,就说$\beta$与$\alpha$是同阶的无穷小;

特殊地 如果$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$,则称$\beta$与$\alpha$是等价的无穷小;

记作$\alpha \sim \beta$;

(3) 如果$\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C(C \neq 0, k > 0)$,就说$\beta$是$\alpha$的$k$阶的无穷小.

例4.2 当$x \to 0$时，试比较下列无穷小的阶：

（1） $\alpha(x) = x^3 + 2x^2, \beta(x) = 2x^3;$

（2） $\alpha(x) = \sin x, \beta(x) = x;$

（3） $\alpha(x) = \tan x, \beta(x) = x;$

（4） $\alpha(x) = 1 - \cos x, \beta(x) = \frac{1}{2}x^2;$

例1 证明：当$x \to 0$时，$4x\tan^3 x$为x的四阶无穷小.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{4x\tan^3 x}{x^4} = 4\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^3 = 4,$$

故当$x \to 0$时，$4x\tan^3 x$为x的四阶无穷小.

例2 当$x \to 0$时，求$\tan x - \sin x$关于x的阶数.

解 $$\because \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right) = \frac{1}{2},$$

$\therefore \tan x - \sin x$为$x$的三阶无穷小.

常用等价无穷小： 当$x \to 0$时，

$$\sin x \sim x, \qquad \arcsin x \sim x,$$

$$\tan x \sim x, \qquad \arctan x \sim x,$$

$$\ln(1+x) \sim x, \qquad e^x - 1 \sim x, \qquad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2.$$

$\because \lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1, \quad \therefore \lim \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha} = 0,$ 即 $\alpha - \beta = o(\alpha),$

于是有 $\alpha = \beta + o(\alpha).$

例如, $\sin x = x + o(x),$ $\quad \cos x = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2).$

定理4.4 设$\alpha(x)$与$\beta(x)$是在自变量同一变化趋势下的无穷小，且$\alpha(x)\sim\beta(x)$,则$\alpha(x)=\beta(x)+o[\beta(x)]$.

例4.3

证明：当$x \to 0$时，$\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x \qquad (n \in N_{+})$

定理4.5（等价无穷小替换定理）

设 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$ 且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$.

证 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \left(\frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha}\right)$

$$= \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

例4.4 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x^2}-1}{\arcsin\dfrac{x}{2}\arctan\dfrac{x}{3}}$

例3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 2x}{1-\cos x}$.

解 当$x\to 0$时，$1-\cos x\sim \dfrac{1}{2}x^2$，$\tan 2x \sim 2x$.

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{\frac{1}{2}x^2}=8.$$

注意 对于代数和中各无穷小不能随意替换.

例4　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$.

解　当$x\to 0$时，$\tan x\sim x$，　$\sin x\sim x$.

原式 $\cancel{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{(2x)^3}=0.$　　错

解 当$x\to 0$时，　$\sin 2x\sim 2x$,

$$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x^3,$$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{(2x)^3}=\frac{1}{16}.$$

例5　求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 5x - \cos x + 1}{\sin 3x}$.

解　$\because \tan x = 5x + o(x), \quad \sin 3x = 3x + o(x),$

$$1 - \cos x = \frac{1}{2} x^2 + o(x^2).$$

$$\text{原式} = \lim_{x \to 0} \frac{5x + o(x) + \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)}{3x + o(x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{5 + \frac{o(x)}{x} + \frac{1}{2} x + \frac{o(x^2)}{x}}{3 + \frac{o(x)}{x}} = \frac{5}{3}.$$

4.4 无穷大量

绝对值无限增大的变量称为<u>无穷大</u>.

定义 2　如果对于任意给定的正数 M (不论它多么大), 总存在正数 δ (或正数 X), 使得对于适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ (或 $|x| > X$) 的一切 x, 所对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)| > M$,

则称函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ (或 $x \to \infty$) 时为无穷大,

记作　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$　(或 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$).

特殊情形：正无穷大，负无穷大．

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=+\infty \quad (\text{或} \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=-\infty)$$

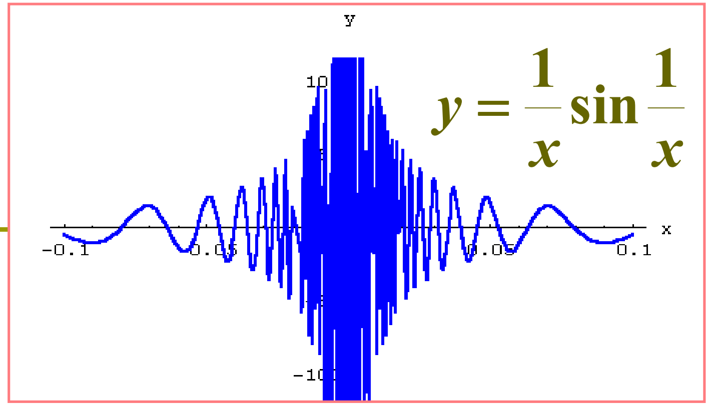
注意　1.**无穷大是变量,不能与很大的数混淆;**

2.勿将 $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 认为极限存在.

3. **无穷大是一种特殊的无界变量,但是无界变量未必是无穷大.**

例如，当$x \to 0$时，$y = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$

是一个无界变量，但不是无穷大.



(1)　取 $x_k = \dfrac{1}{2k\pi + \dfrac{\pi}{2}}$　　　$(k = 0, 1, 2, 3, \cdots)$

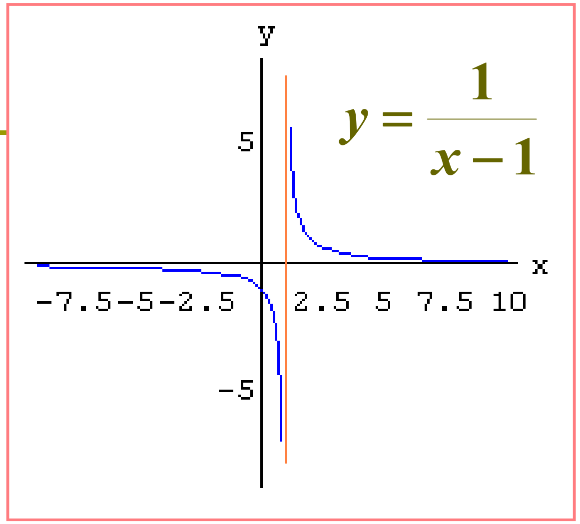
$y(x_k) = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$，　当$k$充分大时，$y(x_k) > M$.　　**无界！**

(2)　取 $x_k = \dfrac{1}{2k\pi}$　　　$(k = 0, 1, 2, 3, \cdots)$

当k充分大时，$|x_k| < \delta$，但 $y(x_k) = 2k\pi \sin 2k\pi = 0$

不是无穷大！

例　证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty.$



证　$\forall M>0.$ 要使 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M,$

只要 $|x-1|<\dfrac{1}{M},$　取 $\delta=\dfrac{1}{M},$

当 $0<|x-1|<\delta=\dfrac{1}{M}$ 时, 就有 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M.\ \therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty.$

定义：如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则直线 $x=x_0$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的铅直渐近线.

无穷小与无穷大的关系

定理4.6　在同一过程中,无穷大的倒数为无穷小;恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

证　设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty.$

$\therefore \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0,$ 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

恒有 $|f(x)|>\dfrac{1}{\varepsilon},$　即 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|<\varepsilon.$

$\therefore$ 当 $x\to x_0$ 时, $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小.

意义 **关于无穷大的讨论,都可归结为关于无穷小的讨论.**

反之,设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$,且 $f(x) \neq 0$.

$\therefore \forall M > 0, \exists \delta > 0$,使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时

恒有$|f(x)| < \dfrac{1}{M}$, 由于 $f(x) \neq 0$, 从而 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| > M$.

$\therefore$ 当$x \to x_0$时,$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大.

定理4.7 在自变量同一变化趋势下

（1）有限个无穷大量的乘积仍是无穷大量;

（2）无穷大量与有界量之和是无穷大量.

五、小结

无穷小与无穷大是相对于过程而言的.

几点注意:

（1）无穷小（ 大）是变量,不能与很小（大）的数混淆，零是唯一的无穷小的数；

（2）无穷多个无穷小的代数和（乘积）未必是无穷小.

（3）无界变量未必是无穷大.