第2章 一元函数微分学及其应用

第2节　求导基本法则

1　函数的求导法则、
初等函数的求导问题

2　高阶导数

3　隐函数求导法

4　由参数方程
所确定的函数的求导法则

5　相关变化率问题

1 函数的求导法则、初等函数的求导问题

$$\boxed{f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}$$

(定义)

求导法则

$$\left\{\begin{array}{l}(C)'=0\\ (\sin x)'=\cos x\\ (\ln x)'=\dfrac{1}{x}\end{array}\right.$$

证明中利用了两个重要极限

其它基本初等函数求导公式

初等函数求导问题

和、差、积、商的求导法则

定理2.1 函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都在 x 具有导数

$\Longrightarrow$ $u(x)$ 及 $v(x)$ 的和、差、积、商 (除分母为 0的点外) 都在点 x 可导, 且

$$(1)\ [u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x);$$

$$(2)\ [u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x);$$

$$(3)\ [\frac{u(x)}{v(x)}]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\quad (v(x)\neq 0).$$

$(C\ u)'=C\,u'$ （C为常数） $\left(\dfrac{1}{v(x)}\right)'=-\dfrac{v'(x)}{v^2(x)}$

(1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

证: 设 $f(x) = u(x) \pm v(x)$, 则

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[u(x+h) \pm v(x+h)] - [u(x) \pm v(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \pm \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

$$= u'(x) \pm v'(x)$$

故结论成立.

此法则可推广到任意有限项的情形. 例如,

例如, $(u + v - w)' = u' + v' - w'$

(2) $(uv)' = u'v + uv'$

证：设 $f(x) = u(x)v(x)$，则有

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}v(x+h)+u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]$$

$$= u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$ 故结论成立.

推论: 1) $(Cu)' = Cu'$ （ C为常数 ）

2) $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$

3) $(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x\ln a}$

(3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

证： 设 $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$，则有

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u(x+h)}{v(x+h)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}v(x) - u(x)\dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}\right]$$

$$= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

故结论成立.

推论: $\left(\dfrac{C}{v}\right)' = \dfrac{-Cv'}{v^2}$ **（C为常数）**

例2.1　已知$y = 2^x + \sqrt{x}\ln x$,求$\frac{dy}{dx}$

例2. 1求证 $(\tan x)'=\sec^2 x$,$(\csc x)'=-\csc x\cot x$.

证 $(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

$$(\csc x)'=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=\frac{-(\sin x)'}{\sin^2 x}=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=-\csc x\cot x$$

类似可证：$(\cot x)'=-\csc^2 x$ ，$(\sec x)'=\sec x\tan x$.

例2.3 求正割函数$y=\sec x$和余割函数

$y=\csc x$的导数.

2.2 复合函数的链式法则

设函数$u=g(x)$在x处可导，函数$y=f(u)$在与x对应的u处可导，则复合函数$y=f\left[g(x)\right]$在x处可导，且

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)g'(x)=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

链式法则

关键：搞清复合函数结构, 由外向内逐层求导.

证 $\because y=f(u)$ 在点 u 可导,

故 $$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)$$

$$\therefore \Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha\Delta u$$

（当 $\Delta u\to 0$ 时 $\alpha\to 0$ ）

故有 $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\quad(\Delta x\neq 0)$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]$$

$$=f'(u)g'(x)$$

例3 求函数 $y=\ln\sin x$ 的导数.

解 $\because y=\ln u, u=\sin x.$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\cdot\cos x=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$$

例4 求函数 $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$ 的导数.

解

$$y'=e^{\sin\frac{1}{x}}(\sin\frac{1}{x})'=e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(\frac{1}{x})'$$

$$=-\frac{1}{x^2}e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}.$$

例5 求下列导数: (1) $(x^{\alpha})'$; (2) $(\operatorname{sh} x)'$.

解 (1) $(x^{\alpha})' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \ln x)' = x^{\alpha} \cdot \dfrac{\alpha}{x}$

$$= \alpha x^{\alpha - 1}$$

(2) $$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$$

说明: 类似可得

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x\ ; \quad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\ ; \quad (\operatorname{coth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \qquad \operatorname{coth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

反函数求导法则

定理2.3 设在I上严格单调连续函数$x=f(y)$在y处可导，且$f'(y)\neq 0$,则它的反函数$y=f^{-1}(x)$在对应点x处可导，且

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'(y)},\quad \text{或}\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}.$$

证 在 x 处给增量 $\Delta x \neq 0$, 由反函数的单调性知

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \neq 0, \quad \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

且由反函数的连续性知 $\Delta x \to 0$ 时必有 $\Delta y \to 0$，因此

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{[f^{-1}(y)]'}$$

例2 求反三角函数及指数函数的导数.

解 1) 设 $y=\arcsin x$,则 $x=\sin y,\ y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,

$\therefore \cos y>0$,则

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

利用

$$\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x$$

类似可求得

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2},\quad (\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

2) 设 $y=a^x\ (a>0,a\neq 1)$，则 $x=\log_a y,\ y\in(0,+\infty)$

$$\therefore (a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y\ln a}} = y\ln a = a^x \ln a$$

特别当 $a=\mathrm{e}$ 时，$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$

小结

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$$

例 2.10 关于反双曲函数的导数

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad x \in (1, +\infty)$$

$$(\operatorname{arcth} x)' = \frac{1}{1-x^2} \qquad x \in (-1, 1)$$

$$(\operatorname{arcoth} x)' = \frac{1}{1-x^2} \qquad x \in R \setminus [-1, 1]$$

2.4 初等函数的求导问题

由前面得到的基本初等函数的求导公式以及运算法则，可以得到全体初等函数的导数

四则运算
复合函数
反函数

例. $\left(\ln|x|\right)' = \dfrac{1}{x} \quad (x \neq 0)$

★基本导数公式　（基本初等函数的导数公式）

$(C)' = 0$　　$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}\quad \alpha \in R$

$(\sin x)' = \cos x$　　$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \sec^2 x$　　$(\cot x)' = -\csc^2 x$

$(\sec x)' = \sec x \tan x$　　$(\csc x)' = -\csc x \cot x$

$(a^x)' = a^x \ln a$　　$(e^x)' = e^x$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

例2.11 证明$(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}(x \neq 0)$

例2.12 设$y=\ln(1+x+\sqrt{2x+x^2})$,求y'

幂指函数的导数

$$
\begin{aligned}
\left(u(x)^{v(x)}\right)' &= \left(e^{v(x)\ln u(x)}\right)' \\
&= e^{v(x)\ln u(x)}\left(v'(x)\ln u(x)+\frac{v(x)u'(x)}{u(x)}\right) \\
&= u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x)+\frac{v(x)u'(x)}{u(x)}\right)
\end{aligned}
$$

例7 求下列导数: (1) $(x^x)'$; (2) $(x^{x^x})'$

解 (1) $(x^x)' = (e^{x\ln x})' = e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)' = x^x(\ln x + 1)$

(2) $(x^{x^x})' = (e^{x^x \ln x})' = e^{x^x \ln x}(x^x \ln x)'$

$$= e^{x^x \ln x}(x^x \ln x)'$$

$$= x^{x^x}[x^{x-1} + x^x(\ln x + 1)\ln x]$$

EX　求下列函数的导数y'

$$1.\ y=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}},\qquad 2.\ y=\ln\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}},$$

$$3.\ y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}},\qquad 4.\ y=e^{\sin x^2}\arctan\sqrt{x^2-1},$$

$$5.\ y=\frac{1}{2}\arctan\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1},$$

6. 设 $y=f(f(f(x)))$, 其中$f(x)$可导, 求 y'.

1. $$y=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}},$$

2. $$y=\ln\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}},$$

解:$\because$ $$y=\frac{2x-2\sqrt{x^2-1}}{2}$$

$$=x-\sqrt{x^2-1}$$

$$\therefore\quad y'=1-\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot(2x)$$

$$=1-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\quad(x>1)$$

解: $$y=\ln\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$$

$$=\ln(x-\sqrt{x^2-1}),$$

$$\therefore y'=\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$3.\ y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

解: $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})'$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}(x+\sqrt{x})'\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)$$

$$=\frac{4\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$$

4. $y = e^{\sin x^2} \arctan\sqrt{x^2-1}$

解: $$y' = (e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x) \arctan\sqrt{x^2-1}$$

$$+ e^{\sin x^2} (\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x)$$

$$= 2x \cos x^2 \, e^{\sin x^2} \arctan\sqrt{x^2-1}$$

$$+ \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} e^{\sin x^2}$$

关键: 搞清复合函数结构
由外向内逐层求导

5. $$y=\frac{1}{2}\arctan\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1},$$

解: $$y'=\frac{1}{2}\frac{1}{1+(\sqrt{1+x^2})^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-1}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{1}{2+x^2}-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\frac{-1}{(2x+x^3)\sqrt{1+x^2}}$$

6. 设 $y=f(f(f(x)))$, 其中 $f(x)$ 可导, 求 y'.

解: $y'=f'(f(f(x)))\cdot f'(f(x))\cdot f'(x)$