第 六 章

一、基本作业

1.设电子元件的寿命(小时)服从参数$\lambda = 0.0015$的指数分布，今测试 6 个元件，记录下它们各自失效的时间。问：

(1) 总体和样本分别是什么？

(2) 写出样本的联合概率密度；

(3) 设有样本的一组观测值：600, 670, 640, 700, 620,610, 试计算样本均值和样本方差。

解：(1)总体：电子元件的寿命 X(小时)；样本：测试的 6 个元件的寿命 $X_1, X_2, \cdots, X_6$

(2) 由于样本$X_1, X_2, \cdots, X_6$相互独立，与总体 X 同分布，故其联合概率密度为：

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_6) = \prod_{i=1}^{6} f_X(x_i) = \begin{cases} 0.0015^6 e^{-0.0015\sum_{i=1}^{6} x_i}, & x_i > 0 (i = 1, \ldots, 6) \\ 0. & \text{其它} \end{cases}$$

(3) $\bar{x} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = 640$; $s^2 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x})^2 = 1480$

2. 设总体$X \sim N(12, 2^2)$, $X_1, X_2, \cdots, X_5$为其样本，

(1) 求样本均值$\bar{X}$大于 13 的概率；(2)求样本均值与总体均值之差的绝对值大于 1 的概率。

解：(1) $\bar{X} \sim N(12, \frac{4}{5})$

$$\Rightarrow P\{\bar{X} > 13\} = 1 - P\{\bar{X} \le 13\} = 1 - P\{\frac{\bar{X} - 12}{2/\sqrt{5}} \le \frac{\sqrt{5}}{2}\} = 1 - \Phi(\frac{\sqrt{5}}{2}) \approx 1 - \Phi(1.118) \approx 0.132$$

(2) $P\{|\bar{X} - 12| > 1\} = 1 - P\{|\bar{X} - 12| \le 1\} = 1 - P\{|\frac{\bar{X} - 12}{2/\sqrt{5}}| \le \frac{\sqrt{5}}{2}\} = 2(1 - \Phi(\frac{\sqrt{5}}{2})) \approx 0.264$

3.设总体$X \sim N(5, 6^2)$，n 和 $\bar{X}$ 分别为样本容量和样本均值，问：样本容量至少应取多大，才能使样本均值位于区间(3, 7)的概率不小于 0.9.

解：根据正态总体抽样定理知 $\bar{X} \sim n(5, \frac{36}{n})$

$$\Rightarrow P\{3 < \bar{X} < 7\} = P\{\frac{3-5}{6/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X} - 5}{6/\sqrt{n}} < \frac{7-5}{6/\sqrt{n}}\} = P\{-\frac{\sqrt{n}}{3} < \frac{\bar{X} - 5}{6/\sqrt{n}} < \frac{\sqrt{n}}{3}\} = 2\Phi(\frac{\sqrt{n}}{3}) - 1 \ge 0.9$$

$$\Rightarrow \Phi(\frac{\sqrt{n}}{3}) \ge 0.95 \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{3} \ge 1.645 \Rightarrow n \ge 24.4$$

故样本容量至少应该取 25.

4. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{15}$ 为其样本，$S^2=\frac{1}{14}\sum_{i=1}^{15}(X_i-\overline{X})^2$ 为样本方差，计算概率 $P\{0.4\sigma^2 \le S^2 \le 2\sigma^2\}$.

解：$\because X \sim N(\mu,\sigma^2),\therefore \frac{14}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(14)$

$$P\{0.4\sigma^2 \le S^2 \le 2\sigma^2\} = P\{5.6 \le \frac{14}{\sigma^2}S^2 \le 28\}$$

$$= P\{\frac{14}{\sigma^2}S^2 > 5.6\} - P\{\frac{14}{\sigma^2}S^2 > 28\}$$

$$\approx 0.975 - 0.01 = 0.965$$

5. 设总体 $X \sim N(0, 1)$，$X_1,X_2,\cdots,X_6$ 为其样本，求常数 C 使 CY 服从 χ^2 分布，其中 $Y=(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2$.

解 $X_1+X_2+X_3 \sim N(0,3)$，$X_4+X_5+X_6 \sim N(0,3)$，

且二者相互独立，根据 χ^2 分布结构定理

$$CY = (\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}})^2 + (\frac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{3}})^2 \sim \chi^2(2)$$

$$\therefore C = \frac{1}{3}$$

6. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n,X_{n+1}$ 为其样本，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，确定统计量 $\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{S}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$ 的抽样分布。

解：$\because X \sim N(\mu,\sigma^2),\therefore X_{n+1} \sim N(\mu,\sigma^2), \overline{X} \sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

X_{n+1} 与 $\overline{X}$ 相互独立 $\Rightarrow X_{n+1}-\overline{X} \sim N(0,(1+\frac{1}{n})\sigma^2)$

$$\Rightarrow U = \frac{X_{n+1}-\overline{X}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\sigma} \sim N(0,1),$$

而 $V = \frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$

U 与 V 相互独立，根据 t 分布结构定理知

$$\frac{U}{\sqrt{V/(n-1)}} = \frac{X_{n+1}-\overline{X}}{\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}} \Bigg/ \sqrt{\frac{nS^2}{(n-1)\sigma^2}} = \frac{X_{n+1}-\overline{X}}{S}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \sim t(n-1)$$

$$\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{S}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \sim t(n-1)$$

7. 设 X_1, X_2 是来自于总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$的样本,试讨论:

(1) X_1+X_2 与 X_1-X_2 是否相互独立?

(2) $Y=\dfrac{(X_1+X_2)^2}{(X_1-X_2)^2}$ 服从什么分布?

解 样本 X_1, X_2 相互独立且同服从 $N(0,\sigma^2)$分布

(1)

$Cov(X_1+X_2, X_1-X_2)$

$$=Cov(X_1,X_1)-Cov(X_1,X_2)+Cov(X_1,X_2)-Cov(X_2,X_2)$$

$$=D(X_1)-Cov(X_1,X_2)+Cov(X_1,X_2)-D(X_2)=\sigma^2-\sigma^2=0$$

或证明 X_1+X_2 与 X_1-X_2 的协方差矩阵为对角阵，二者不相关

又因
$$\begin{pmatrix} X_1+X_2 \\ X_1-X_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

$(X_1+X_2, X_1-X_2)^{\tau}$ 是二维非退化正态随机变量的满秩线性变换，故仍服从二维联合正态分布， 二者不相关则相互独立.

(2)
$$E(X_1+X_2)=0, E(X_1-X_2)=0,$$
$$E(X_1+X_2)=2\sigma^2, E(X_1-X_2)=2\sigma^2$$

根据 χ^2 分布结构定理

$$\chi_1^2=\frac{(X_1+X_2)^2}{2\sigma^2}\sim\chi^2(1),\quad \chi_2^2=\frac{(X_1-X_2)^2}{2\sigma^2}\sim\chi^2(1)$$

因二者相互独立, 由 F 分布结构定理知

$$Y=\frac{(X_1+X_2)^2}{(X_1-X_2)^2}=\frac{(X_1+X_2)^2/2\sigma^2}{(X_1-X_2)^2/2\sigma^2}\sim F(1,1)$$

8. 设总体 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$， $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，从两个总体分别抽样得： $n_1=8, s_1^2=8.75$， $n_1=10, s_1^2=2.66$. 求概率 $P\{\sigma_1^2>\sigma_2^2\}$.

解 实质是求事后概率: $P\{\sigma_1^2>\sigma_2^2 \mid S_1^2=s_1^2, S_2^2=s_2^2\}$

根据双正态抽样定理有

$$F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\cdot\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(7,9)$$

$$P\{\sigma_1^2>\sigma_2^2 \mid S_1^2=s_1^2, S_2^2=s_2^2\}=1-P\{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}>1 \mid S_1^2=s_1^2, S_2^2=s_2^2\}$$

$$=1-P\{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\cdot\frac{S_1^2}{S_2^2}>\frac{s_1^2}{s_2^2}\}=1-P\{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\cdot\frac{S_1^2}{S_2^2}>3.2894\}$$

因 $f_{0.05}(7,9)=3.2694$,根据分位数定义有

$$P\{\sigma_1^2>\sigma_2^2\}=1-0.05=0.95$$