且 $x=0$ 时，$|x^2e^{-nx}|=0<\frac{2}{n^2}$. 于是

$\forall x\in[0,+\infty)$，$|x^2e^{-nx}|<\frac{2}{n^2}$，且正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ 收敛.

由 M 判别准则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

6. 如果 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，$u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上是单调函数，并且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 的端点绝对收敛，证明它在 $[a,b]$ 上绝对一致收敛（即绝对值级数一致收敛）.

证 由于 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，$u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上是单调函数.

所以 $|u_n(x)|\leqslant\max\{|u_n(a)|,|u_n(b)|\}\leqslant|u_n(a)|+|u_n(b)|$，

又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 的端点绝对收敛. 即

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(a)|$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(b)|$ 收敛. 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|u_n(a)|+|u_n(b)|)$ 收敛.

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对一致收敛.

习 题 4.3

(A)

2. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-3$ 处条件收敛，你能确定该幂级数的收敛半径吗？

解 由阿贝尔定理，如果在点 x_0 处幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛，那么对于一切满足 $|x|<|x_0|$ 的点，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 绝对收敛. 因此，既然已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-3$ 处收敛，那么，对于满足 $|x|<|-3|$ 的一切点，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 是绝对收敛的.

另一方面，注意到幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-3$ 处是条件收敛的，因此，任何 $|x|>3$ 的点都不可能使该幂级数收敛. 否则，据阿贝尔定理，该幂级数在 $x=-3$

处就不是条件收敛，而应是绝对收敛了，这与题设矛盾.

由于 $|x|<3$ 时该幂级数收敛，$|x|>3$ 时该幂级数发散，因此该幂级数的收敛半径 $R=3$.

3. 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R=1$，有人采用下面的方法求幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

的收敛半径，你认为对吗？若不对，指出错在何处.

由于 $R=1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1,$$

从而得

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0.$$

因此，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为 $+\infty$.

解 结果正确，但解法不对. 因为 $R=1$，不一定能得出 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$ 的结果. (例如对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}[2+(-1)^n]x^n$，有

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}=\begin{cases}3, & \text{当 } n \text{ 为奇数,}\\ \dfrac{1}{3}, & \text{当 } n \text{ 为偶数.}\end{cases}$$

即 $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 不存在.

级数 $\sum_{n=0}^{\infty}[2+(-1)^n]x^n$ 的收敛半径可用下述方法得到

由
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(-1)^n}\,|x|=|x|$$

可知当 $|x|<1$ 时幂级数收敛，当 $|x|>1$ 时幂级数发散，所以收敛半径 $R=1$.)

此问题的正确解法如下

由 $R=1$，任取 $x_0\in(0,1)$，有 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 绝对收敛，因此 $\{a_n x_0^n\}$ 有界，设 $|a_n x_0^n|\leqslant M$. 于是

$$\left|\frac{a_n}{n!}x^n\right|=\left|\frac{a_n x_0^n}{n!x_0^n}x^n\right|\leqslant\frac{M}{n!x_0^n}|x|^n,$$

由比值审敛法知，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{M}{n!x_0^n}x^n$ 对任何 x 都绝对收敛，从而由比较审敛法知，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ 也对任何 x 都绝对收敛，即级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ 的收敛半径为 $+\infty$.

4. 求下列幂级数的收敛区间与收敛区域：

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+\sqrt{n}}x^n$.

解　由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{n+1+\sqrt{n+1}}{n+\sqrt{n}}\right|=1$，所以该级数的收敛区间为 $(-1,1)$.

在 $x=1$，该级数变为　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+\sqrt{n}}$ 条件收敛.

在 $x=-1$，该级数变为　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n+\sqrt{n}}$ 发散.

故收敛区域为 $(-1,1]$.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^{2n-1}$.

解　由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{2n+1}}{(n+1)^{n+1}}\Big/\frac{n!x^{2n-1}}{n^n}\right|=\frac{x^2}{\mathrm{e}}$，故当 $\frac{x^2}{\mathrm{e}}<1$ 时，即 $|x|<\sqrt{\mathrm{e}}$ 时，原级数绝对收敛，当 $|x|>\sqrt{\mathrm{e}}$ 时发散.

$x=\pm\sqrt{\mathrm{e}}$，级数变为 $\pm\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n}$ 发散（习题 4.1 第 12 题(11)）

故收敛区间与收敛区域均为 $(-\sqrt{\mathrm{e}},\sqrt{\mathrm{e}})$.

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(2x+1)^n$.

解　由例 3.1(3)知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}y^n$ 收敛区间为 $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

收敛区域为 $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. 于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}$ 收敛区间为 $\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$. 收敛区域为 $\left[-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})2^nx^{2n}$.

解　由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})2^n}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})2^{n+1}}\right|=\frac{1}{2}$，所以原级数当 $x^2<\frac{1}{2}$ 时收

敛，$x^2>\frac{1}{2}$时发散. 于是原级数收敛区间为$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

当$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$时，级数变为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$. 由于$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ $<\frac{1}{\sqrt{n}}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$发散.

故原级数收敛区域为$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{4^n+(-2)^n}$.

解 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{4^{n+1}+(-2)^{n+1}}{4^n+(-2)^n}\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{4-2\cdot\left(\frac{-2}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{-2}{4}\right)^n}\right|=4.$

故收敛区间为$(-5,3)$.

$x=3$时，级数变为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{4^n+(-2)^n}$，而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n}{4^n+(-2)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n}=1$，于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{4^n+(-2)^n}$发散.

$x=-5$，级数变为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{4^n+(-2)^n}$发散(通项极限不存在).

故收敛区域为$(-5,3)$.

5. 指出下列推导有什么错误?

由于$\frac{x}{1-x}=x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$,

$$\frac{-x}{1-x}=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^n}+\cdots,$$

两式相加得

$$\cdots+\frac{1}{x^n}+\cdots+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=0.$$

解 不能成立. 因为

$$\frac{x}{1-x}=x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

只有在$|x|<1$时才成立，而

$$\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x}+\cdots+\frac{1}{x_n}+\cdots$$

只有在$|x|>1$时才成立. 由于这两个级数的收敛域没有公共点，因此不能相加.

6. 求下列函数的 Maclaurin 展开式：

解 (1) xe^{-x^2}.

$$xe^{-x^2}=x\left[1-x^2+\frac{1}{2!}(-x^2)^2+\frac{1}{3!}(-x^2)^3+\cdots+\frac{1}{n!}(-x^2)^n+\cdots\right],$$

$x\in(-\infty,+\infty)$,

即 $xe^{-x^2}=x-x^3+\frac{1}{2!}x^5-\frac{1}{3!}x^7+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n+1}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$.

(2) $\sin^2 x$.

由于 $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$，所以

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2!}(2x)^2+\frac{1}{4!}(2x)^4-\cdots+(-1)^k\frac{(2x)^{2k}}{(2k)!}+\cdots\right],\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

即 $\sin^2 x=x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\cdots+(-1)^{k+1}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$.

(3) $\operatorname{ch}\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})$.

$$e^{\frac{x}{2}}=1+\frac{x}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

$$e^{-\frac{x}{2}}=1-\frac{x}{2}+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x}{2}\right)^2+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

于是 $\operatorname{ch}\frac{x}{2}=1+\frac{1}{2!2^2}x^2+\frac{x^4}{2^4 4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{2^{2n}(2n)!}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$.

(4) $\arcsin x$.

解 由于

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=[1+(-x^2)]^{-\frac{1}{2}}=&1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2)+\\&\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)(-x^2)^2+\cdots+\\&\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)(-x^2)^n+\cdots,\\&(-x^2)\in(-1,1),\end{aligned}$$

即 $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\cdots+\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}+\cdots,\quad x\in(-1,1),$$

逐项积分得

$$\begin{aligned}\arcsin x&=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_0^x x^{2n}dx\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1},\quad x\in(-1,1).\end{aligned}$$

(5) $\frac{1}{\sqrt{2-x}}$.

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{x}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+\left(-\frac{x}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{x}{2}\right)^2+\cdots+\right.$$

$$\left.\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\left(-\frac{x}{2}\right)^n+\cdots,\right.$$

$$-\frac{x}{2}\in(-1,1),$$

故 $\frac{1}{\sqrt{2-x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}x+\frac{1}{2!}\frac{3}{2^4\sqrt{2}}x^2+\cdots+\frac{(2n)!}{2^{3n}(n!)\sqrt{2}}x^n+\cdots,\quad x\in(-2,2).$

(6) $\frac{x}{1+x-2x^2}$.

由于 $\frac{x}{1+x-2x^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+2x}\right)$，而

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1),$$

$$\frac{1}{1+2x}=1-2x+(2x)^2+\cdots+(-1)^n(2x)^n+\cdots,\quad 2x\in(-1,1),$$

故 $$\frac{x}{1+x-2x^2}=x-x^2+\cdots+\frac{1-(-2)^n}{3}x^n+\cdots,\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

(7) 由于 $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n, x\in(-1,1), \frac{1}{1-2x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n,\quad 2x\in(-1,1)$，分别逐项积分两个幂级数得

$$-\ln(1-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad x\in(-1,1).$$

$$-\frac{1}{2}\ln(1-2x)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-2)^n t^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{n+1}x^{n+1},\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

从而 $$\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)x^n,\quad x\in(-1,1);$$

$$\ln(1-2x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{n}x^n,\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

故 $$\ln(1-3x+2x^2)=\ln(1-x)+\ln(1-2x)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n-1}{n}x^n,\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

(8) $\sqrt[3]{27-x^3}=3\sqrt[3]{1-\left(\frac{x}{3}\right)^3}$

$$=3\left[1+\frac{1}{3}\left(-\frac{x}{3}\right)^3+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(-\frac{x}{3}\right)^6+\cdots+\right.$$

$$\left.\frac{1}{n!}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)\left(-\frac{x}{3}\right)^{3n}+\cdots\right],\left(-\frac{x}{3}\right)^3\in(-1,1),$$

$$=3-\frac{1}{3^3}x^3-\frac{2}{2!3^7}x^6-\cdots-\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots$$

$$\left(n-1-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{(27)^n}x^{3n}+\cdots,\quad x\in(-3,3).$$

7. 设 $f(x)=x^3e^{-x^2}$，求 $f^{(n)}(0)\quad(n=2,3,\cdots)$.

解 由于 $e^{-x^2}=1-x^2+\frac{1}{2!}x^4+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$.

故 $$f(x)=x^3-x^5+\frac{1}{2!}x^7+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n+3}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

于是 $$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k,\\ (-1)^{k-1}\dfrac{(2k+1)!}{(k-1)!}, & n=2k+1,\end{cases}\quad k\in\mathbf{N}_+.$$

8. 求下列函数在给定点 x_0 处的 Taylor 展开式：

(3) $\ln x, x_0=1$；　　(4) $\dfrac{x}{x^2-5x+6}, x_0=5$；

(7) $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\arctan x-x, x_0=0$；　　(8) $\dfrac{x}{(1-x^2)^2}, x_0=0$.

解 (3) $\ln x=\ln[1+(x-1)]$

$$=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\cdots+$$

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n+\cdots,\quad x-1\in(-1,1],\text{即 } x\in(0,2].$$

(4) $$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{3}{x-3}-\frac{2}{x-2},$$

而 $$\frac{3}{x-3}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-5}{2}}=\frac{3}{2}\left[1-\frac{1}{2}(x-5)+\left(\frac{x-5}{2}\right)^2+\cdots+(-1)^n\left(\frac{x-5}{2}\right)^n+\cdots\right],$$

$$\frac{x-5}{2}\in(-1,1),\text{即 } x\in(3,7).$$

$$\frac{2}{x-2}=\frac{2}{3}\frac{1}{1+\frac{x-5}{3}}=\frac{2}{3}\left[1-\frac{x-5}{3}+\left(\frac{x-5}{3}\right)^2+\cdots+(-1)^n\left(\frac{x-5}{3}\right)^n+\cdots\right],$$

$$\frac{x-5}{3}\in(-1,1),\text{即 } x\in(2,8).$$

故 $$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{5}{6}-\left(\frac{3}{2^2}-\frac{2}{3^2}\right)(x-5)+\left(\frac{3}{2^3}-\frac{2}{3^3}\right)(x-5)^2+\cdots+$$

$$(-1)^n\left(\frac{3}{2^{n+1}}-\frac{2}{3^{n+1}}\right)(x-5)^n+\cdots,x\in(3,7).$$

(7) 由于$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,x\in(-1,1]$.

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots-\frac{x^n}{n}+\cdots,-x\in(-1,1].$$

$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots,x\in(-1,1)$.

故$\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{1}{5}x^5+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots\right)-x$$

$$=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{9}x^9+\cdots+\frac{1}{4n+1}x^{4n+1}+\cdots,x\in(-1,1).$$

(8) $\frac{x}{(1-x^2)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)'=\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n}\right)'=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x^{2n})'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{2n-1}$,

$$x^2\in(-1,1),\text{即 } x\in(-1,1).$$

9. 求下列幂级数的和函数：

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2x^n$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n$；　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n-1)3^{2n-1}}$；

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$；　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}$.

解　(1) 由于$\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1)$，

于是逐项求导可得

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+(n+2)x^{n+1}+\cdots,\quad x\in(-1,1),$$

再逐项求导

$$\frac{2}{(1-x)^3}=2+3\cdot2x+4\cdot3x^2+\cdots+(n+2)(n+1)x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1).$$

(2) 由于$\frac{1}{1+x}-1=-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+\cdots,\quad x\in(-1,1)$，

逐项求导　$\frac{-1}{(1+x)^2}=-1+2x-3x^2+\cdots+(-1)^nnx^{n-1}+\cdots,\quad |x|<1.$

于是　$\frac{-x}{(1+x)^2}=-x+2x^2-3x^3+\cdots+(-1)^nnx^n+\cdots,\quad |x|<1.$

逐项求导　$\dfrac{x-1}{(1+x)^3}=-1+2^2x-3^2x^2+\cdots+(-1)^n n^2 x^{n-1}+\cdots,\quad |x|<1.$

故　$\dfrac{x(x-1)}{(1+x)^3}=-x+2^2x^2-3^2x^3+\cdots+(-1)^n n^2 x^n+\cdots,\quad |x|<1.$

(3) 设和函数为 $S(x)$，则 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$.

易知收敛域为$[-1,1]$，且 $S(1)=1$（第四章例 1.3）.

$$xS(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)},\quad x\in(-1,0),$$

逐项求导得
$$[xS(x)]'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)'$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad x\in(-1,1),$$

再逐项求导得
$$[xS(x)]''=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},\quad x\in(-1,1),$$

于是
$$xS(x)=(1-x)\ln(1-x)+x+C_1x+C_2,$$

故　由 $S(0)=0,S(1)=1$，且 $S(x)$在$[-1,1]$上连续.

$$S(x)=\begin{cases}1, & x=1,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{1-x}{x}\ln(1-x)+1, & x\in[-1,0)\cup(0,1).\end{cases}$$

(4) 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n}}{(2n-1)3^{2n-1}}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}\left(\dfrac{x}{3}\right)^{2n-1}$.

而$\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot\left(\dfrac{x}{3}\right)^{2n-1}\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\dfrac{x}{3}\right)^{2n-1}\right]'$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\left(\frac{x}{3}\right)^2\right]^{n-1}\cdot\frac{1}{3}.$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2},\quad \frac{x}{3}\in(-1,1),\text{即 } x\in(-3,3).$$

故原级数的和函数

$$S(x)=x\int_0^x\frac{1}{3}\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}=x\arctan\frac{x}{3},\quad x\in[-3,3].$$

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=2x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$,

又由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x},x\in(-1,1)$，逐项求导可得：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2},x\in(-1,1)$. 故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{(1-x)^2},x\in(-1,1)$.

(6) 设和函数为 $S(x)$，则 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}$， $S(0)=\frac{1}{2}$.

由于
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n,\quad x\in(-2,2),$$

逐项积分得
$$\begin{aligned}-\ln(2-x)+\ln 2&=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^n\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}x^n\\&=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 2^n},\quad x\in[-2,2),\end{aligned}$$

故 $S(0)=\frac{1}{2}$，当 $x\in[-2,0)\cup(0,2)$ 时，$S(x)=\frac{1}{x}[\ln 2-\ln(2-x)]$.

10. 利用幂级数求下列常数项级数的和：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{n-1}}$； (2) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)n2^n}$；

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2-n+1)\frac{1}{2^n}$； (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^{n+1}}$.

解 (1) 由第四章例 3.8(或练习 4.3 第 8 题(7)求解过程)知，
$$\begin{aligned}\ln\frac{1+x}{1-x}&=2x\left(1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-2}}{2n-1}+\cdots\right)\\&=2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{2n-1},\quad x\in(-1,1),\end{aligned}$$

于是当 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时， $\ln\left(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)=\frac{2}{\sqrt{2}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}$.

故 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)=\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1).$$

(2) 由于 $$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-2)2^n},$$

由于 $$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad x\in(-1,1),$$

逐项积分得 $-\ln(1-x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n},\quad x\in(-1,1)$，

取 $x=\frac{1}{2}$ 得 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=-\ln\frac{1}{2}=\ln 2,$$

于是 $$\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{3}}\right).$$

又由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n}=-\ln(1-x),x\in(-1,1)$ 知

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n-2}x^{n}=x^{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n}=-x^{2}\ln(1-x),\quad x\in(-1,1).$$

于是 $$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=-\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\ln 2.$$

故 $$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-2)2^{n}}=\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$
$$=\frac{1}{8}\ln 2-\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)=\frac{5}{16}-\frac{3}{8}\ln 2.$$

(3) 由练习 4.3 第 9 题(2)知，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}n^{2}x^{n}=\frac{x(x-1)}{(1+x)^{3}},|x|<1.$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}nx^{n}=-\frac{x}{(1+x)^{2}},\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{n}=\frac{1}{1+x},\quad x\in(-1,1)$$

取 $x=\frac{1}{2}$ 可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(n^{2}-n+1)\frac{1}{2^{n}}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^{3}}+\frac{\frac{1}{2}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}}+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{22}{27}.$$

(4) 由练习 4.3(A)第 9 题(1)知：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}=\frac{2}{(1-x)^{3}},x\in(-1,1).$

取 $x=\frac{1}{2}$，则 $$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3}}=16,$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)\frac{1}{2^{n-1}}=4.$$

11. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n3^{n-1}x^{n-1}$.

(1) 证明 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ 内连续；　　(2) 计算 $\int_{0}^{\frac{1}{8}}f(x)\mathrm{d}x$.

证

(1) 由于 $$\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n=\frac{1}{1-3x},\quad x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),$$

逐项求导有 $$3\sum_{n=1}^{\infty}n(3x)^{n-1}=\frac{3}{(1-3x)^2},\quad x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),$$

故 $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(3x)^{n-1}=\frac{1}{(1-3x)^2},\quad x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),$$

即 当 $x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$时，$f(x)$为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(3x)^{n-1}$ 的和函数. 由定理 3.6，$f(x)\in C\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

(2) $$\int_0^{\frac{1}{8}}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{8}}\frac{\mathrm{d}x}{(1-3x)^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-3x}\right)_0^{\frac{1}{8}}=\frac{1}{5}.$$

14. 利用 Euler 公式将 $e^x\cos x$ 与 $e^x\sin x$ 展开成 x 的幂级数.

解 因为 $$e^{(1+i)x}=e^x\cos x+ie^x\sin x.$$

又因为
$$\begin{aligned}e^{(1+i)x}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n!}x^n\\
&=1+(1+i)x+\frac{1}{2!}(1+i)^2x^2+\frac{1}{3!}(1+i)^3x^3+\\
&\quad\frac{1}{4!}(1+i)^4x^4+\frac{1}{5!}(1+i)^5x^5+\cdots\\
&=1+(1+i)x+\frac{1}{2!}(2i)x^2+\frac{2}{3!}(-1+i)x^3+\\
&\quad\frac{1}{4!}(-4)x^4+\frac{4}{5!}(-1-i)x^5+\cdots\\
&=\left(1+x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{30}x^5+\cdots\right)+\\
&\quad i\left(x+x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+\cdots\right)\end{aligned}$$

故 $$e^x\cos x=1+x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{30}x^5+\cdots,$$

$$e^x\sin x=x+x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+\cdots.$$

(B)

1. 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛区间为$(-R,R)$，$0<R<+\infty$，并且在 $x=-R$ 处绝对收敛，证明它在$[-R,R]$上一致收敛.

证 由于 $\forall x\in[-R,R]$，恒有 $|a_n x^n|\leqslant|a_n|R^n$，且

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|R^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n(-R)^n|$ 绝对收敛.

所以由 M 判别准则. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 在 $[-R,R]$ 上一致收敛.

2. 证明：如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的和函数在 x_0 的邻域内恒等于 0，那么它的所有系数 a_n 都等于零.

证 设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$，收敛区间为 (x_0-R,x_0+R).

由定理 3.6 $S(x)$ 在 (x_0-R,x_0+R) 内连续，且有连续的导数，且可以逐项求导，求导后所得幂级数与原级数收敛半径相同.

于是，

$$S(x_0)=a_0,$$

$$S'(x_0)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\right)'\Bigg|_{x=x_0}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n(x-x_0)^{n-1}\Bigg|_{x=x_0}=a_1$$

$$S''(x_0)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^{n-1}n\right)'\Bigg|_{x=x_0}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n n(x-x_0)^{n-1})'\Bigg|_{x=x_0}=2a_2$$

$$\cdots\cdots$$

$$S^{(n)}(x_0)=a_n n!.$$

又由于 $S(x)$ 在 x_0 的邻域内恒等于零，则 $S(x_0)=S'(x_0)=\cdots=S^{(n)}(x_0)=\cdots=0$，从而 $a_n=0$，$\forall n\in\mathbf{N}_+$.

3. 如果正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明：$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在 $(-1,1)$ 上连续.

证 由于 $\forall x\in[-1,1]$，恒有 $|a_n x^n|\leqslant a_n$，且正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，所以由 M 判别准则，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 在 $[-1,1]$ 上绝对一致收敛. 即其收敛半径 $R\geqslant1$，由定理 3.6 知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 在 $(-1,1)$ 上连续.