2、最大值与最小值

依据

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{函数 } f \text{ 在闭域上连续} \\ \Downarrow \\ \text{函数 } f \text{ 在闭域上可达到最值}\end{array}}$$

$$\text{最值可疑点}\begin{cases}\text{驻点} \\ \text{边界上的最值点}\end{cases}$$

特别, 当区域内部最值存在, 且**只有一个**极值点 P 时,

$$f(P)\text{为极小值} \Longrightarrow f(P)\text{为最小值}$$

（大）　　　　　　（大）

例 1 求函数 $f(x,y)=-x^2-y^2+2x+2y+2$ 在第一象限被直线 $x=0$, $y=0$ 和 $y=9-x$, 所围的三角形闭区域内的最大值与最小值.

最大值: $f(1,1)=4$

最小值: $f(0,9)=f(9,0)=-61$

例4. 某厂要用铁板做一个体积为2 m^3的有盖长方体水箱,问当长、宽、高各取怎样的尺寸时, 才能使用料最省?

解: 设水箱长,宽分别为 x , y m ,则高为 $\frac{2}{xy}$ m,

则水箱所用材料的面积为

$$A = 2\left(xy + y\cdot\frac{2}{xy} + x\cdot\frac{2}{xy}\right) = 2\left(xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}\right) \quad \begin{pmatrix} x > 0 \\ y > 0 \end{pmatrix}$$

令 $\begin{cases} A_x = 2(y - \frac{2}{x^2}) = 0 \\ A_y = 2(x - \frac{2}{y^2}) = 0 \end{cases}$ 得驻点 $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$

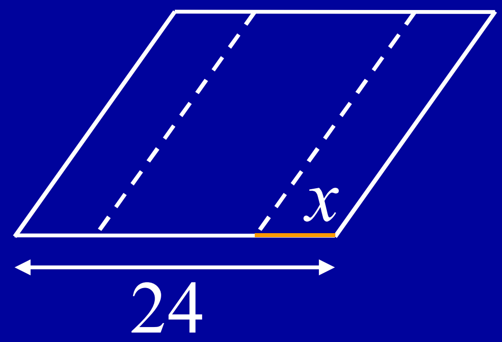
根据实际问题可知最小值在定义域内应存在, 因此可断定此唯一驻点就是最小值点. 即当长、宽均为 $\sqrt[3]{2}$

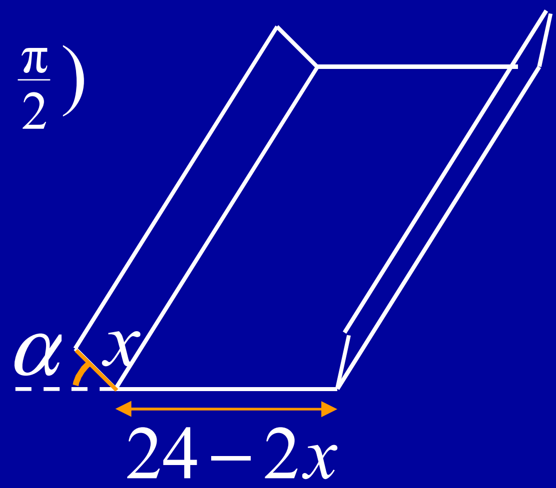
高为 $\frac{2}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2}$ 时, 水箱所用材料最省.

例5. 有一宽为 24cm 的长方形铁板，把它折起来做成一个断面为等腰梯形的水槽，问怎样折法才能使断面面积最大.

解: 设折起来的边长为 x cm，倾角为 α，则断面面积为

$$A=\frac{1}{2}(24-2x+2x\cos\alpha+24-2x)\cdot x\sin\alpha$$
$$=24x\sin\alpha-2x^2\sin\alpha+x^2\cos\alpha\sin\alpha$$
$$\left(D:\ 0<x<12,\ 0<\alpha<\tfrac{\pi}{2}\right)$$





$$A = 24x\sin\alpha - 2x^2\sin\alpha + x^2\cos\alpha\sin\alpha$$

$$(D: 0 < x < 12, 0 < \alpha < \tfrac{\pi}{2})$$

令 $\begin{cases} A_x = 24\sin\alpha - 4x\sin\alpha + 2x\sin\alpha\cos\alpha = 0 \\ A_\alpha = 24x\cos\alpha - 2x^2\cos\alpha + x^2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0 \end{cases}$

$$\Big\downarrow \ \sin\alpha \neq 0,\ x \neq 0$$

$$\begin{cases} 12 - 2x + x\cos\alpha = 0 \\ 24\cos\alpha - 2x\cos\alpha + x(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0 \end{cases}$$

解得: $\alpha = \dfrac{\pi}{3} = 60^\circ,\ x = 8\,(\mathrm{cm})$

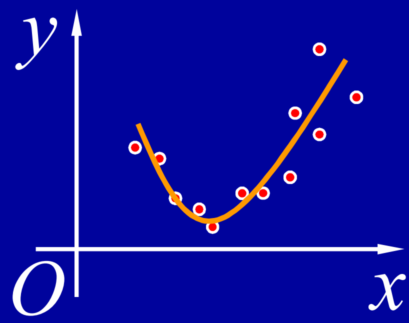
由题意知, 最大值在定义域D 内达到, 而在域D 内只有一个驻点, 故此点即为所求.

3. 最小二乘法

问题的提出： 已知一组实验数据 $(x_k, y_k)(k=0, 1, \cdots, n)$, 求它们的近似函数关系 $y = f(x)$.

需要解决两个问题:

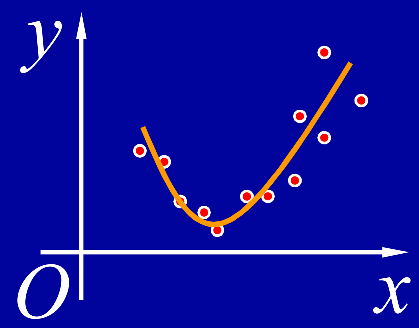
1. 确定近似函数的类型
   - 根据数据点的分布规律
   - 根据问题的实际背景



2. 确定近似函数的标准
   - 实验数据有误差,不能要求 $y_i = f(x_i)$

• 偏差 $r_i = y_i - f(x_i)$ 有正有负, 为使所有偏差的绝对值都较小且便于计算, 可由偏差平方和最小

$$\sum_{i=0}^{n} [y_i - f(x_i)]^2 = \min$$



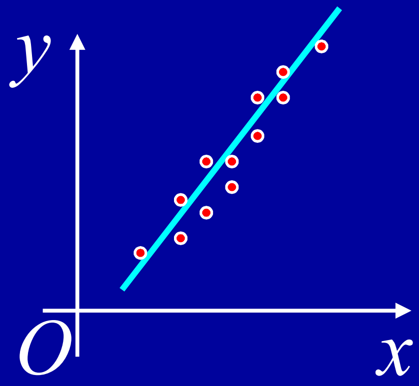
来确定近似函数 $f(x)$.

最小二乘法原理:

设有一列实验数据 (x_k, y_k) $(k = 0, 1, \cdots, n)$, 它们大体分布在某条曲线上, 通过偏差平方和最小求该曲线的方法称为**最小二乘法**, 找出的函数关系称为**经验公式** .

特别, 当数据点分布近似一条直线时, 问题为确定 a, b 使 $y = ax + b$ 满足:

$$M(a,b) = \sum_{k=0}^{n} (y_k - ax_k - b)^2 = \min$$



令 $$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial a} = -2\sum_{k=0}^{n}(y_k - ax_k - b)x_k = 0 \\ \dfrac{\partial M}{\partial b} = -2\sum_{k=0}^{n}(y_k - ax_k - b) = 0 \end{cases}$$

得 $$\begin{cases} \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^2\right)a + \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)b = \sum_{k=0}^{n} x_k y_k \\ \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)a + (n+1)b = \sum_{k=0}^{n} y_k \end{cases}$$

称为法方程组
(注意其特点)

解此线性方程组即得 a, b

4、最优化的产出水平

某工厂生产两种产品，产量分别是 q_1, q_2，两者是不相关的，但其成本与生产技术是相关的，假设两种产品的总成本C与其产量的函数关系为 $C = C(q_1, q_2)$；总收益 $R = R(q_1, q_2)$，问如何确定每种产品的产量以使厂商获得最大的利润？

厂商的利润函数显然是 $L = R(q_1,q_2) - C(q_1,q_2)$

因此，问题归结为求L的最大值，由极值的必要

条件可得

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{\partial R}{\partial q_1} - \frac{\partial C}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = \frac{\partial R}{\partial q_2} - \frac{\partial C}{\partial q_2} = 0$$

为获得最大利润即要满足

$$\frac{\partial R}{\partial q_1}=\frac{\partial C}{\partial q_1},\frac{\partial R}{\partial q_2}=\frac{\partial C}{\partial q_2}$$

例4.6 工厂生产两种产品,产量分别是q_1,q_2,总成本是

$$C=q_1^{\ 2}+2q_1q_2+q_2^{\ 2}+5,$$

两种产品的需求函数分别是

$$q_1=2600-p_1,q_2=1000-\frac{1}{4}p_2$$

其中 p_1, p_2分别是两种产品的单价，为使利润最大，试确定产品的产出水平。

解　总收益函数为

$$R = p_1q_1 + p_2q_2 = 2600q_1 + 4000q_2 - q_1^{\ 2} - 4q_2^{\ 2}$$

由 $\dfrac{\partial R}{\partial q_1} = \dfrac{\partial C}{\partial q_1}, \dfrac{\partial R}{\partial q_2} = \dfrac{\partial C}{\partial q_2}$

可得 $q_1 = 500, q_2 = 300$

利润函数为

$$L = R - C = (2600q_1 + 4000q_2 - q_1{}^2 - 4q_2{}^2) - (q_1 + q_2)^2 - 5$$

将 $q_1 = 500, q_2 = 300$ 代入可得 L=169995

4.3 有约束极值、Lagrange乘数法

$$\text{极值问题}\begin{cases}\text{无条件极值: 对自变量只有定义域限制}\\ \text{条件极值: 对自变量除定义域限制外,}\\ \qquad\qquad\quad\text{还有其它条件限制}\end{cases}$$

条件极值的求法:

方法1 代入法. 例如,

在条件 $\varphi(x, y)=0$ 下, 求函数 $z=f(x, y)$ 的极值

$$\Big\Downarrow \text{转化} \quad \text{从条件 } \varphi(x, y)=0 \text{ 中解出 } y=\psi(x)$$

求一元函数 $z=f(x, \psi(x))$ 的无条件极值问题

引例 1 在平面 $2x+y-z-5=0$ 找一个点 $P(x,y,z)$, 使得 P 离原点最近.

$$P\left(\frac{5}{3},\frac{5}{6},-\frac{5}{6}\right)$$

引例 2 在双曲柱面 $x^2 - z^2 - 1 = 0$ 找一个点 $P(x, y, z)$, 使得 P 离原点最近.

$$P\left(\pm 1, 0, 0\right)$$

方法2　拉格朗日乘数法. 例如,

在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下, 求函数 $z=f(x,y)$ 的极值.

分析： 如方法 1 所述, 设 $\varphi(x,y)=0$ 可确定隐函数 $y=\psi(x)$, 则问题等价于一元函数 $z=f(x,\psi(x))$ 的极值问题, 故极值点必满足

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f_x+f_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

因 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}$, 故有 $f_x-f_y\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}=0$

记 $$\frac{f_x}{\varphi_x}=\frac{f_y}{\varphi_y}=-\lambda$$

极值点必满足 $\begin{cases} f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$

引入辅助函数 $F = f(x,y) + \lambda\,\varphi(x,y)$

则极值点满足: $\begin{cases} F_x = f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ F_\lambda = \varphi = 0 \end{cases}$

辅助函数F 称为拉格朗日(Lagrange)函数. 利用拉格朗日函数求极值的方法称为拉格朗日乘数法.

推广 拉格朗日乘数法可推广到多个自变量和多个约束条件的情形.

例如, 求函数 $u=f(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z)=0$, $\psi(x,y,z)=0$下的极值.

设 $F=f(x,y,z)+\lambda_1\varphi(x,y,z)+\lambda_2\psi(x,y,z)$

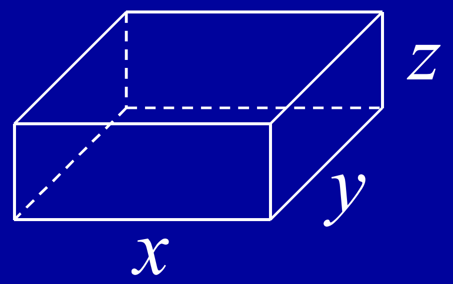
解方程组 $$\begin{cases} F_x=f_x+\lambda_1\varphi_x+\lambda_2\psi_x=0 \\ F_y=f_y+\lambda_1\varphi_y+\lambda_2\psi_y=0 \\ F_z=f_z+\lambda_1\varphi_z+\lambda_2\psi_z=0 \\ F_{\lambda_1}=\varphi=0 \\ F_{\lambda_1}=\psi=0 \end{cases}$$

可得到条件极值的可疑点 .

例6 要设计一个容量为 V_0 的长方体开口水箱，试问水箱长、宽、高等于多少时所用材料最省？

解: 设 x, y, z 分别表示长、宽、高,则问题为求x, y, z 使在条件 $xyz = V_0$ 下水箱表面积 $S = 2(xz + yz) + xy$ 最小.

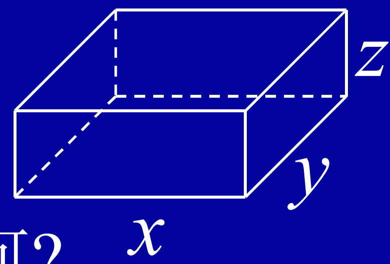
令 $F = 2(xz + yz) + xy + \lambda(xyz - V_0)$



解方程组
$$\begin{cases} F_x = 2z + y + \lambda yz = 0 \\ F_y = 2z + x + \lambda xz = 0 \\ F_z = 2(x + y) + \lambda xy = 0 \\ F_\lambda = xyz - V_0 = 0 \end{cases}$$

得唯一驻点 $x = y = 2z = \sqrt[3]{2V_0}$, $\lambda = \frac{-4}{\sqrt[3]{2V_0}}$

由题意可知合理的设计是存在的, 因此 , 当高为 $\sqrt[3]{\frac{V_0}{4}}$,
长、宽为高的 2 倍时， 所用材料最省.



思考:

1) 当水箱封闭时, 长、宽、高的尺寸如何?

提示: 利用对称性可知, $x = y = z = \sqrt[3]{V_0}$

2) 当开口水箱底部的造价为侧面的二倍时, 欲使造价最省, 应如何设拉格朗日函数? 长、宽、高尺寸如何?

提示: $F = 2(xz + yz) + 2\ xy + \lambda(xyz - V_0)$

长、宽、高尺寸相等 .

例 7 (两个约束条件)

平面 $x+y+z=1$ 与柱面 $x^2+y^2=1$ 相交于椭圆 E,

求椭圆 E 上离原点最近和最远的点.

最近: $P_1(1,0,0)$ 和 $P_2(0,1,0)$

最远: $P_3\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1+\sqrt{2}\right)$

内容小结

1. 函数的极值问题

第一步 利用必要条件在定义域内找驻点.

如对二元函数 $z=f(x,y)$, 即解方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$$

第二步 利用充分条件 判别驻点是否为极值点 .

2. 函数的条件极值问题

(1) 简单问题用代入法

(2) 一般问题用拉格朗日乘数法

如求二元函数 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值，设拉格朗日函数 $F=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

解方程组 $\begin{cases} F_x=f_x+\lambda\varphi_x=0 \\ F_y=f_y+\lambda\varphi_y=0 \\ F_\lambda=\varphi=0 \end{cases}$ 求驻点 .

3. 函数的最值问题

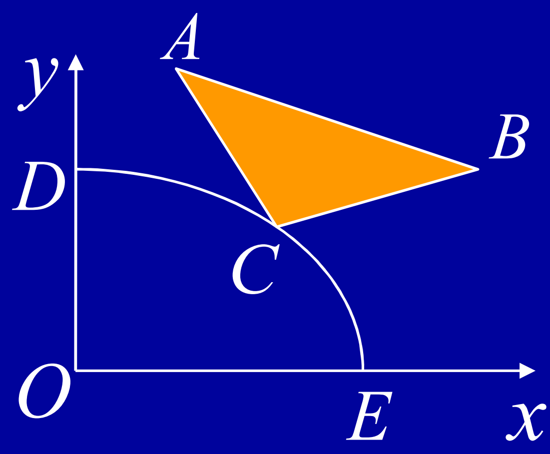
第一步 找目标函数，确定定义域 (及约束条件)

第二步 判别

- 比较驻点及边界点上函数值的大小
- 根据问题的实际意义确定最值

思考与练习 已知平面上两定点 $A(1,3)$, $B(4,2)$,

试在椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\ (x>0,\ y>0)$ 圆周上求一点 C, 使 $\triangle ABC$ 面积 $S_\triangle$ 最大.



解答提示： 设 C 点坐标为 (x,y),

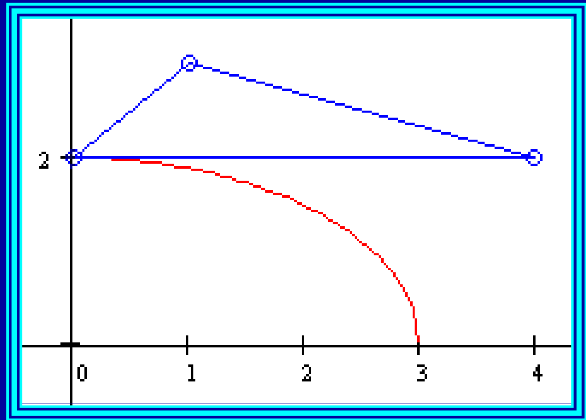
则 $S_\Delta=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

$$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 0\\ x-1 & y-3 & 0\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|(0,0,x+3y-10)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|x+3y-10\right|$$

设拉格朗日函数 $F=(x+3y-10)^2+\lambda(1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4})$

解方程组 $$\begin{cases} 2(x+3y-10)-\dfrac{2\lambda}{9}x=0 \\ 6(x+3y-10)-\dfrac{2\lambda}{4}y=0 \\ 1-\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=0 \end{cases}$$



点击图中任意点
动画开始或暂停

得驻点 $x=\frac{3}{\sqrt{5}}, y=\frac{4}{\sqrt{5}}$, 对应面积 $S\approx 1.646$

而 $S_D=2, S_E=3.5$, 比较可知, 点 C 与 E 重合时, 三角形面积最大.

练习题 1. 求半径为R的圆的内接三角形中面积最大者.

解: 设内接三角形各边所对的圆心角为 x, y, z, 则

$$x+y+z=2\pi, \quad x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$$

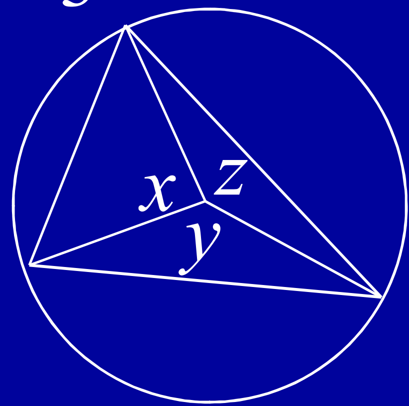
注

它们所对应的三个三角形面积分别为

$$S_1=\tfrac{1}{2}R^2\sin x, \quad S_2=\tfrac{1}{2}R^2\sin y, \quad S_3=\tfrac{1}{2}R^2\sin z$$

设拉氏函数 $F=\sin x+\sin y+\sin z+\lambda(x+y+z-2\pi)$

解方程组 $\begin{cases}\cos x+\lambda=0\\ \cos y+\lambda=0\\ \cos z+\lambda=0\\ x+y+z-2\pi=0\end{cases}$, 得 $x=y=z=\dfrac{2\pi}{3}$

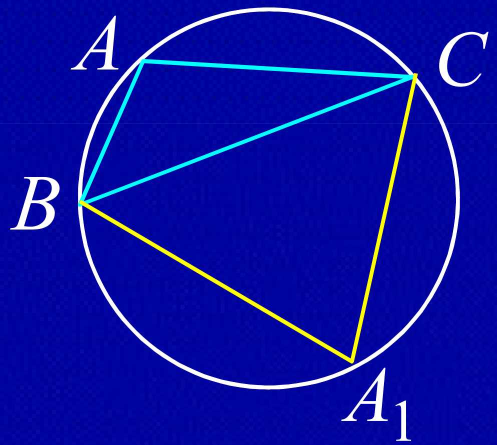


故圆内接正三角形面积最大, 最大面积为

$$S_{\max}=\frac{R^2}{2}\cdot 3\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2.$$

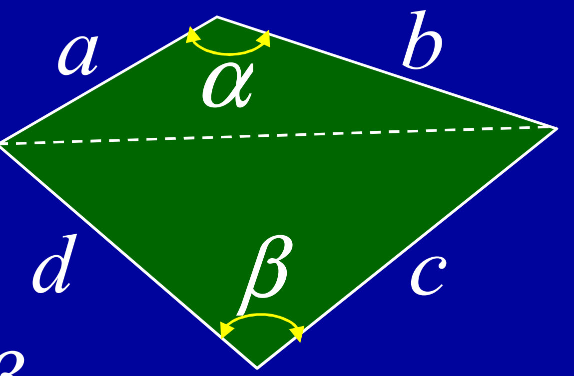
注

若ΔABC位于半圆内(如图)，则其BC边上的高小于ΔA_1BC同边上的高，故前者的面积小于后者，



因此前者不可能为圆内接三角形中面积最大者.

2. 求平面上以 a,b,c,d 为边的面积最大的四边形，试列出其目标函数和约束条件？



提示:

目标函数： $S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha+\frac{1}{2}cd\sin\beta$

$$(0<\alpha<\pi, 0<\beta<\pi)$$

约束条件： $a^2+b^2-2ab\cos\alpha=c^2+d^2-2cd\cos\beta$

答案： $\alpha+\beta=\pi$, 即四边形内接于圆时面积最大 .

3. 设某电视机厂生产一台电视机的成本为c, 每台电视机的销售价格为p, 销售量为x, 假设该厂的生产处于平衡状态, 即生产量等于销售量. 根据市场预测, x 与p 满足关系:

$$x = Me^{-ap} \quad (M > 0,\ a > 0) \qquad ①$$

其中M是最大市场需求量, a是价格系数. 又据对生产环节的分析, 预测每台电视机的生产成本满足:

$$c = c_0 - k\ln x \quad (k > 0,\ x > 1) \qquad ②$$

其中c_0是生产一台电视机的成本, k是规模系数. 问应如何确定每台电视机的售价 p, 才能使该厂获得最大利润?

解: 生产x台获得利润 $u = (p - c)x$

问题化为在条件①, ②下求$u = (p - c)x$ 的最大值点.

作拉格朗日函数

$$L(x,p,c)=(p-c)x+\lambda(x-Me^{-ap})+\mu(c-c_0+k\ln x)$$

令 $$L_x=(p-c)+\lambda+k\frac{\mu}{x}=0 \quad ③$$

$$L_p=x+\lambda aMe^{-ap}=0 \quad ④$$

$$L_c=-x+\mu=0 \quad ⑤$$

将①代入④得 $\lambda=-\frac{1}{a}$, 由⑤得 $\frac{\mu}{x}=1$

将以上结果及①, ②代入③, 得

$$p-c_0+k(\ln M-ap)-\frac{1}{a}+k=0$$

解得 $$p=p^*=\frac{c_0-k\ln M+\frac{1}{a}-k}{1-ak}$$

因问题本身最优价格必定存在, 故此 p^* 即为所求.