若矢量场$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$在无限区域$V$中处处是单值的，且其导数连续有界，场源分布在区域$V'$中，则当矢量场$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$的散度及旋度给定后，该矢量场可以表述为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=-\nabla\Phi(\boldsymbol{r})+\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{1-1}$$

式中

$$\Phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV' \tag{1-2}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV' \tag{1-3}$$

此定理再次表明，无限空间中的矢量场被其散度和旋度唯一地确定，而且给出了场与其散度及旋度之间的定量关系。众所周知，矢量场的散度和旋度代表了矢量场的源，因此，Helmholtz 定理实际上是给出了场与源之间的定量关系。

为了证明这个定理，设区域V大于源区V'，则V包括了全部源点$\boldsymbol{r}'$。那么根据$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$函数的性质，得

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=\int_V\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')dV' \tag{1-4}$$

再根据矢量分析公式

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{1-5}$$

即

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) \tag{1-6}$$

将式(1-6)代入式(1-4)中，得

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{4\pi}\int_V\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)dV' \tag{1-7}$$

考虑到微分算子∇仅对$\boldsymbol{r}$运算，而积分求积仅对$\boldsymbol{r}'$运算，故上式又可变为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\int_V\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV' \tag{1-8}$$

利用矢量恒等式$\nabla^2\boldsymbol{A}=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}-\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}$，则式(1-8)又可写为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{4\pi}\nabla\nabla\cdot\int_V\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'+\frac{1}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\int_V\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV' \tag{1-9}$$

若令

$$\Phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\nabla\cdot\int_V\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dV' \tag{1-10}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\nabla\times\int_V\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV' \tag{1-11}$$

那么式(1-9)与式(1-1)形式上完全形同。因此，只需证明式(1-10)等于式(1-2),式(1-11)等于式(1-3)，那么，前述 Helmholtz 定理即获证明。顺便指出，由式(1-11)可见，矢量场$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$是一个旋度场，因此它是无散的，即

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=0 \tag{1-12}$$

与前同理，式(1-10)中微分算子和积分算子和积分算符可以对调，即

$$\Phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\int_V\nabla\cdot\left[\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right]dV' \tag{1-13}$$

再利用矢量恒等式$\nabla\cdot(\eta\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\,\nabla\eta+\eta\,\nabla\cdot\eta$，且考虑到$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')$仅为$\boldsymbol{r}'$的函数，因此$\nabla\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')=0$，那么式(1-13)中被积函数为

$$\nabla\cdot\left[\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right]=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)+\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\nabla\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)$$

由于

$$\nabla\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)=-\nabla'\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)$$

式中∇'表示微分算子仅对$\boldsymbol{r}'$运算。那么，式(1-13)中被积函数为

$$\nabla\cdot\left[\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right]=\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}-\nabla'\cdot\left[\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right]$$

将此结果代入式(1-13)中，再利用散度定理，得

$$\Phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\int_V\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV-\frac{1}{4\pi}\oint_S\left[\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right]\cdot dS' \tag{1-14}$$

考虑到源仅存在V'中，上式中体积分仅需在V'中求积($V<V'$)。因此，上式中第一项即是式(1-10)。这样，只要证明在无限区域中式(1-14)右侧第二项面积为零即可。

对于无限大的自由空间，如果在无限远处，矢量场的振幅满足下列条件

$$|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')|\propto\frac{1}{R^{1+\varepsilon}},(\varepsilon>0) \tag{1-15}$$

式中 $R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$。若区域$V\to\infty$，$R\to\infty$，那么，式(1-14)中面积分$\oint_S\to 0$，这就证实了式(1-10)与(1-12)是相等的。

类似可以讨论式(1-11),将其写为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\int_V \nabla\times\left[\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right]dV' \tag{1-16}$$

利用矢量恒等式$\nabla\times(\eta\boldsymbol{A})=\eta\ \nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\eta\times\boldsymbol{A}$，同时考虑到$\nabla\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')=0$，则式(1-16)中的被积函数为

$$\nabla\times\left[\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right]=\nabla\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')=-\nabla'\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')$$
$$=\frac{\nabla'\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}-\nabla'\times\left[\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right]$$

将其结果代入式(1-16)中，再利用恒等式

$$\int_V(\nabla\times\boldsymbol{A})\,dV=-\oint_S\boldsymbol{A}\times d\boldsymbol{S}$$

得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\int_V\frac{\nabla'\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'-\frac{1}{4\pi}\oint_S\left[\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right]\times d\boldsymbol{S} \tag{1-17}$$

与前同理，对于无限大空间，只要矢量场$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')$的振幅满足式(1-15),则式(1-17)中面积分为零，又因源仅局限于V'中，因此，式(1-17)与式(1-3)是等同的。

应该注意，式(1-1)、式(1-2)及式(1-3)仅适用于位于有限空间内的源在无限空间产生的场。如果矢量场被局限在有限空间内，则应使用式(1-14)计算$\boldsymbol{\Phi}$，使用式(1-17)计算$\boldsymbol{A}$。事实上，式(1-14)及式(1-17)中面积分分别代表了边界上场量的法向分量和切向分量对于场的贡献。这就再次证明了有限空间的矢量场被其散度、旋度及其边界条件惟一地确定。此外，已知梯度场为无旋场，旋度场为无散场，因此式(1-1)又表明，任一矢量场可以表示为无旋场与无散场之和。

由上可见，如果已知矢量场的散度和旋度，利用 Helmholtz 定理即可求出该矢量场的空间分布。因此，矢量场的散度和旋度特性是研究矢量场的首要问题。只要获悉矢量场的散度及旋度，那么，利用 Helmholtz 定理，矢量场的源和场之间的关系就迎刃而解。综上所述，基于 Helmholtz 定理分析静态电磁场，既简洁，又严谨。