2.3 不定积分

1 原函数与不定积分的概念

2 基本积分表

3 不定积分的性质

1 原函数与不定积分的概念

❖原函数的概念

如果在区间I上，可导函数$F(x)$的导函数为$f(x)$，即对任一$x\in I$, 都有

$$F'(x)=f(x)\text{或}dF(x)=f(x)dx,$$

那么函数$F(x)$就称为$f(x)$(或$f(x)dx$)在区间I上的原函数.

•原函数举例

因为$(\sin x)'=\cos x$, 所以$\sin x$是$\cos x$的原函数.

因为$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，所以$\sqrt{x}$是$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$的原函数.

提问: $\cos x$ 和 $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 还有其它原函数吗？

❖原函数存在定理

如果函数$f(x)$在区间I上连续，那么在区间I上存在可导函数$F(x)$，使对任一$x \in I$都有

$$F'(x)=f(x).$$

简单地说就是：连续函数一定有原函数.

两点说明：

1. 如果函数$f(x)$在区间I上有原函数$F(x)$, 那么$f(x)$就有无限多个原函数，$F(x)+C$都是$f(x)$的原函数，其中C是任意常数.

2. 函数$f(x)$的任意两个原函数之间只差一个常数，即如果$\Phi(x)$和$F(x)$都是$f(x)$的原函数，则

$$\Phi(x)-F(x)=C \quad (C\text{为某个常数}).$$

❖不定积分的概念

在区间I上，函数$f(x)$的带有任意常数项的原函数称为$f(x)$(或$f(x)dx$)在区间I上的不定积分, 记作

$$\int f(x)dx\ .$$

不定积分中各部分的名称：

$\int$ ------ 称为积分号,

$f(x)$ ------- 称为被积函数,

$f(x)dx$ ------- 称为被积表达式,

x ------ 称为积分变量.

❖不定积分的概念

在区间I上，函数$f(x)$的带有任意常数项的原函数称为$f(x)$(或$f(x)dx$)在区间I上的不定积分, 记作

$$\int f(x)dx\ .$$

根据定义，如果$F(x)$是$f(x)$在区间I上的一个原函数，那么$F(x)+C$就是$f(x)$的不定积分, 即

$$\int f(x)dx = F(x)+C\ .$$

如果$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则 $\int f(x)dx=F(x)+C$.

例1　因为$\sin x$ 是$\cos x$ 的原函数，所以

$$\int \cos x dx=\sin x+C .$$

因为 $\sqrt{x}$ 是 $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 的原函数，所以

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx=\sqrt{x}+C .$$

例2 求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的不定积分.

解 当 $x>0$ 时，$(\ln x)'=\frac{1}{x}$,

$$\int \frac{1}{x}dx=\ln x+C\ (x>0);$$

当 $x<0$ 时，$[\ln(-x)]'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$,

$$\int \frac{1}{x}dx=\ln(-x)+C\ (x<0).$$

合并上面两式，得到

$$\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C\ (x\neq 0).$$

例3 设曲线通过点(1, 2), 且其上任一点处的切线斜率等于这点横坐标的两倍, 求此曲线的方程.

解 设所求的曲线方程为$y=f(x)$, 则曲线上任一点(x, y)处的切线斜率为

$$y'=f'(x)=2x,$$

即$f(x)$是$2x$的一个原函数. 因为

$$\int 2xdx = x^2 + C,$$

故必有某个常数C使$f(x)=x^2+C$, 即曲线方程为$y=x^2+C$.

因所求曲线通过点(1, 2), 故

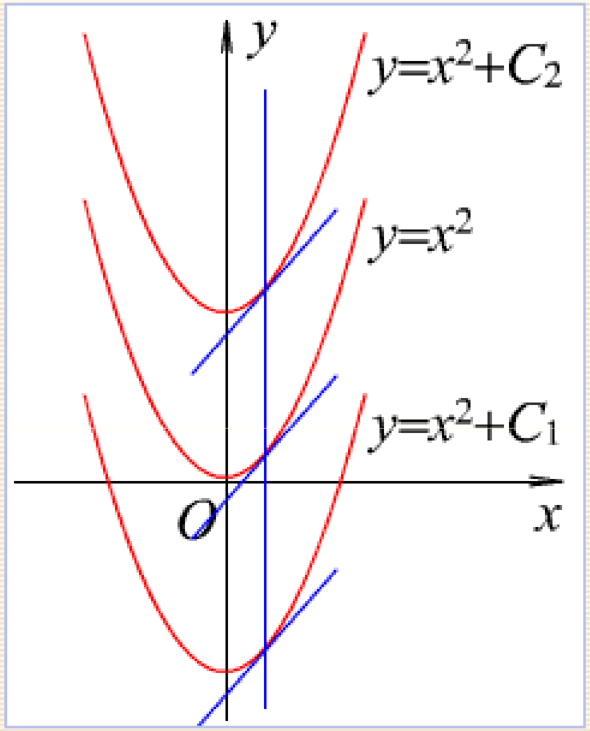
$$2=1+C, \quad C=1.$$

于是所求曲线方程为$y=x^2+1$.

•积分曲线

函数$f(x)$的原函数的图形称为$f(x)$的积分曲线.

函数$f(x)$的积分曲线也有无限多. 函数$f(x)$的不定积分表示$f(x)$的一簇积分曲线，而$f(x)$正是积分曲线的斜率.



$2x$的积分曲线

❖微分与积分的关系

从不定积分的定义可知

$$\frac{d}{dx}[\int f(x)dx]=f(x)\text{，或 } d[\int f(x)dx]=f(x)dx\text{；}$$

又由于$F(x)$是$F'(x)$的原函数，所以

$$\int F'(x)dx=F(x)+C\text{，或记作 }\int dF(x)=F(x)+C\text{．}$$

由此可见，如果不计任意常数，则微分运算与求不定积分的运算是互逆的．

2 基本积分表

(1) $\int k\,dx = kx + C$ (k 是常数),

(2) $\int x^{\mu}dx = \frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + C$,

(3) $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$,

(4) $\int e^{x}dx = e^{x} + C$,

(5) $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$,

(6) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$,

(7) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$,

(8) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$,

(9) $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$,

(10) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$,

(11) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$,

(12) $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$,

(13) $\int \csc x \cot dx = -\csc x + C$,

(14) $\int \mathrm{sh}\,x\,dx = \mathrm{ch}\,x + C$,

(15) $\int \mathrm{ch}\,x\,dx = \mathrm{sh}\,x + C$.

$$\int x^{\mu}dx=\frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1}+C$$

例4 $\int\frac{1}{x^3}dx=\int x^{-3}dx=\frac{1}{-3+1}x^{-3+1}+C=-\frac{1}{2x^2}+C.$

例5 $\int x^2\sqrt{x}dx=\int x^{\frac{5}{2}}dx=\frac{1}{\frac{5}{2}+1}x^{\frac{5}{2}+1}+C=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+C.$

$=\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+C.$

例6 $\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}=\int x^{-\frac{4}{3}}dx=\frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1}+C=-3x^{-\frac{1}{3}}+C=-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+C.$

3 不定积分的性质

❖性质1 $\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$.

这是因为,

$$[\int f(x)dx+\int g(x)dx]'=[\int f(x)dx]'+[\int g(x)dx]'=f(x)+g(x).$$

3 不定积分的性质

❖性质1 $\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$.

❖性质2 $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (k 是常数, $k\neq0$).

例7 $\int\sqrt{x}(x^2-5)dx=\int(x^{\frac{5}{2}}-5x^{\frac{1}{2}})dx=\int x^{\frac{5}{2}}dx-\int 5x^{\frac{1}{2}}dx$

$=\int x^{\frac{5}{2}}dx-5\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-5\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$.

例8 $\int\frac{(x-1)^3}{x^2}dx=\int\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2}dx=\int(x-3+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2})dx$

$=\int xdx-3\int dx+3\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{2}x^2-3x+3\ln|x|+\frac{1}{x}+C$.

3 不定积分的性质

❖性质1 $\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$.

❖性质2 $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (k 是常数, $k\neq0$).

例9 $\int(e^x-3\cos x)dx=\int e^x dx-3\int\cos x dx=e^x-3\sin x+C$.

例10 $\int 2^x e^x dx=\int(2e)^x dx=\frac{(2e)^x}{\ln(2e)}+C=\frac{2^x e^x}{1+\ln 2}+C$.

例11 $\int\frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx=\int\frac{x+(1+x^2)}{x(1+x^2)}dx=\int(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{x})dx$

$=\int\frac{1}{1+x^2}dx+\int\frac{1}{x}dx=\arctan x+\ln|x|+C$.

例12 $\int\frac{x^4}{1+x^2}dx=\int\frac{x^4-1+1}{1+x^2}dx=\int\frac{(x^2+1)(x^2-1)+1}{1+x^2}dx$

$=\int(x^2-1+\frac{1}{1+x^2})dx=\int x^2dx-\int dx+\int\frac{1}{1+x^2}dx$

$=\frac{1}{3}x^3-x+\arctan x+C$.

例13 $\int\tan^2 xdx=\int(\sec^2 x-1)dx=\int\sec^2 xdx-\int dx=\tan x-x+C$.

例14 $\int\sin^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1-\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos x)dx$

$=\frac{1}{2}(x-\sin x)+C$.

例15 $\int\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}dx=4\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-4\cot x+C$.