第 二 章

1. 做一系列独立的试验，每次试验成功的概率为 p，求：

（1） n 次试验中成功次数 X 的分布律；

（2） 在 n 次成功之前已经失败次数 Y 的分布律；

（3） 不断试验至首次成功时试验次数 Z 的分布律。

解 1）二项分布 $P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$， $k=0,1,2\ldots,n$

2）负二项分布 $P\{Y=k\}=C_{n+k-1}^k p^n(1-p)^k$， $k=0,1,2\ldots$

3）几何分布 $P\{Z=k\}=p(1-p)^{k-1}$， $k=1,2\ldots$

2. 一批产品共有 25 件，其中 5 件次品，从中随机地一个一个取出检查，共取 4 次，设 X 为其中的次品数，若

（1） 每次取出的产品仍放回；

（2） 每次取出的产品不再放回。

写出两种情况下 X 的分布律。

解：（1） $X\sim B(4,\frac{1}{5})$，其发布律为

$$P\{X=k\}=C_4^k(0.2)^k(1-0.2)^{4-k},\quad k=0,1,2,3,4$$

(2) $$P(X=k)=\frac{C_5^k C_{20}^{4-k}}{C_{25}^4}\quad k=0,1,2,3,4$$

3. 某公司有 400 台计算机，在一天中任一台报修的概率是 0.01. 请给出一天中报修台数 X 的分布律(需陈述建立过程和依据)，并计算报修不超过 3 台计算机的概率.

解答 一天中 400 台计算机报修相当于做 400 重贝努利试验，其报修台数 X~B(400, 0.01)，因实验重数 400 足够大，报修概率较小，根据泊松定理有

$$P\{X=k\}=C_{400}^k\,0.01^k(1-0.01)^{400-k}\approx\frac{(400\times0.01)}{k!}e^{-(400\times0.01)}$$

$$=\frac{4^k}{k!}e^{-4},\quad k=0,1,\cdots,400$$

故一天中报修台数 X 的分布律可设为

$$P\{X=k\}=\frac{4^k}{k!}e^{-4},\quad k=0,1,\cdots$$

报修不超过 3 台计算机的概率

$$P\{X\le3\}=\sum_{k=0}^{3}\frac{4^k}{k!}e^{-4}=0.433\,5$$

4. 设每天到达炼油厂的油船数服从λ=2 的泊松分布. 现港口有三台设备，一天内一台设备只能为一条油船服务，若一天中有多于三艘油船到达,多余的油船必需调往其他港口. 求:

(1) 某天必需调离油船的概率.

(2) 为在 90%的日子里能容许安排所有的油船,现有设备应增设至几台?

(3) 每天最可能到达的油船数是几艘?并给出其概率.

解 已知到达炼油厂的油船数 X~$P(2)$

(1) 某天必需调离油船的概率为

$$P\{X>3\}=\sum_{k=4}^{\infty}\frac{2^k}{k!}e^{-2}\left[=1-\sum_{k=0}^{3}\frac{2^k}{k!}e^{-2}\right]=0.142\,877$$

(2) 假设设备应增设至 m 台，应满足 $P\{X\le m\}=\sum_{k=0}^{m}\frac{2^k}{k!}e^{-2}\ge 0.90$

因 $P\{X\le 3\}=1-\sum_{k=4}^{\infty}\frac{2^k}{k!}e^{-2}=1-0.142\,877=0.857\,123<0.9$

$$P\{X\le 4\}=1-\sum_{k=5}^{\infty}\frac{2^k}{k!}e^{-2}=1-0.052\,653=0.947\,347>0.9$$

取 m=4，即现有设备应增设至 4 台.

（3）记 $P(k,2)=\frac{2^k}{k!}e^{-2}$ $P(k,2)=\frac{2^k}{k!}e^{-2}$ 则当 k=1, 2, ……有

$$\frac{P(k,2)}{P(k-1,2)}=\frac{2^k}{k!}e^{-2}\Big/\frac{2^{k-1}}{(k-1)!}e^{-2}=\begin{cases}=2, & k=1;\\ =1, & k=2;\\ =\frac{2}{k}<1, & k>2;\end{cases}$$

$\Rightarrow P(0,2)<P(1,2)=P(2,2)$，且 $\forall k>2, P(2,2)>P(k,2)$，即概率序列 $P(k,2)$ 在 1,2 处取得最大值, 故最可能到达的油船数是 1 艘或 2 艘,概率为

$$P(2,2)=P\{X\ge 1\}-P\{X\ge 2\}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k!}e^{-2}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^k}{k!}e^{-2}=0.864\,665-0.593\,994=0.270\,671$$

5. 从一批子弹中任意抽出 10 发试射，若至多只有一发子弹落在靶心 2 厘米以外，则接受该批子弹。设弹着点与靶心的距离 X（厘米）的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}Axe^{-x^2}, & 0<x<3\\ 0, & 其他\end{cases}$$

试求：(1)系数 A;（2）该批子弹被接受的概率.

解 1) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1 \Rightarrow A=\frac{2}{1-e^{-9}}$

2） $P\{0<X\le 2\}=\int_{-\infty}^{2}f(x)dx=\int_{0}^{2}\frac{2}{1-e^{-9}}xe^{-x^2}dx=\frac{1-e^{-4}}{1-e^{-9}}$

设 Y 表示落在靶心两厘米内的子弹数，则 $Y\sim B(10,\frac{1-e^{-4}}{1-e^{-9}})$

该批子弹被接受的概率为

$$P\{Y\ge 9\}=10(\frac{1-e^{-4}}{1-e^{-9}})^9(1-\frac{1-e^{-4}}{1-e^{-9}})+(\frac{1-e^{-4}}{1-e^{-9}})^{10}$$

6. 在长为 L 的线段上随机选取一点，将其分为两段，求短的一段与长的一段之比小于 1/4 的概率？

解　设 0 点到分点的长度为 X，则 $X \sim U(0,L)$

$$p = P\left(0 < \frac{X}{L-X} < \frac{1}{4}\right) + P\left(0 < \frac{L-X}{X} < \frac{1}{4}\right)$$

$$= P\{0 < X < \frac{L}{5}\} + P\{\frac{4L}{5} < X < L\}$$

$$= \frac{1/5L}{L} + \frac{1/5L}{L} = \frac{2}{5}$$

7.两台新的电子仪器寿命分别为 X_1, X_2, $X_1 \sim N(42,36)$, $X_2 \sim N(45,9)$, 若需连续使用仪器 46 小时，问选用哪一台仪器较好？

解

$$P\{X_1 > 46\} = 1 - \Phi(\frac{46-42}{6}) \approx 1 - \Phi(0.67) \approx 0.2514$$

$$P\{X_2 > 46\} = 1 - \Phi(\frac{46-45}{3}) \approx 1 - \Phi(0.33) \approx 0.3707$$

选用第二台仪器比较好

8. 设测量误差 $X \sim N(0,10^2)$，求在 100 次独立重复测量中至少有 3 次测量误差的绝对值大于 19.6 的概率，并用泊松分布求其近似值.

解 设 100 次独立重复测量中测量误差的绝对值大于 19.6 的次数为 Y，计算

$$P\{|X| > 19.6\} = 1 - P\{|X| \le 19.6\}$$

$$= 1 - \left[\Phi(\frac{19.6-0}{10}) - \Phi(\frac{-19.6-0}{10})\right] = 2 - 2\Phi(1.96) = 0.05$$

则 $Y \sim B(100,0.05)$, 近似服从参数为 5 的泊松分布

于是 $$P\{Y \ge 3\} \approx \sum_{k=3}^{+\infty} e^{-5}\frac{5^k}{k!} \approx 0.8753$$

9. 设某电子元件寿命 X（小时）服从参数为 λ 的指数分布。若要求该元件寿命在 1200 小时以上的概率达到 0.96

(1)求 λ 的最大取值（λ 称为该元件的失效率）；

(2) 若一个该种元件已使用 300 小时，求它能用到 900 小时以上的概率。

解（1）$0.96 \le P\{X > 1200\} = \int_{1200}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-1200\lambda} \Rightarrow \lambda \le -\frac{\ln 0.96}{1200} \approx 3.4 \times 10^{-5}$

失效率 λ 不能超过 3.4×10^{-5}

(2) 根据指数分布的无后效性,则

$$P\{X \ge 900 \mid X \ge 300\} = P\{X \ge 600\} = \int_{600}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-600\lambda}$$

10. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}6x(1-x), & 0\le x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

(1)求 X 的分布函数；(2) 确定满足 $P\{X\le b\}=P\{X>b\}$ 的数 b.

解 $$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\begin{cases}0, & x<0;\\ \int_0^x 6t(1-t)dt & 0\le x<1;\\ 1, & 1\le x.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & x<0;\\ 3x^2-2x^3 & 0\le x<1;\\ 1, & 1\le x.\end{cases}$$

$P\{X\le b\}=P\{X>b\}$ 且 $P\{X\le b\}+P\{X>b\}=1$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}=P\{X\le b\}=F(b)=3b^2-2b^3\Rightarrow b=\frac{1}{2}$$

或

$$P\{X\le b\}=P\{X>b\}\Rightarrow F(b)=1-F(b)\Rightarrow F(b)=\frac{1}{2}$$

11. 随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=A+Barctgx,\qquad x\in R$$

求：(1) 系数 A，B； (2) X 落在区间（－1，1）的概率；(3) X 的概率密度.

解 1) $F(-\infty)=0\Rightarrow A-\frac{\pi}{2}B=0,\quad F(+\infty)=1\Rightarrow A+\frac{\pi}{2}B=1$

$$\Rightarrow A=0.5,\ \ B=\frac{1}{\pi}$$

2) $P\{-1<X<1\}=F(1)-F(-1)=0.5+\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{4}-[0.5+\frac{1}{\pi}(-\frac{\pi}{4})]=\frac{1}{2}$

3) $f(x)=F'(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2},\ x\in R$

12. 设某动物生的蛋数目 $\xi\sim P(\lambda)$.若每个蛋能发育成小动物的概率是 p,且各个蛋能否发育成小动物是相互独立的。证明：该动物恰有 k 个后代的概率分布是参数为 λp 的泊松分布.

解 已知 $$P(\xi=n)=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda},\qquad n=0,1,2,\cdots$$

设该动物的后代数目为η，在 $\xi=n$ 的条件下 $\eta\sim B(n,p)$，即有

$$P(\eta=k\,|\,\xi=n)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\qquad k=0,1,\cdots,n$$

根据全概率公式

$$P\{\eta=k\}=\sum_{n=k}^{\infty}P\{\eta=k\,|\,\xi=n\}P\{\xi=n\}=\sum_{n=k}^{\infty}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k(\lambda(1-p))^{n-k}}{k!(n-k)!}=\frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$=\frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!}e^{\lambda(1-p)}=\frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^k}{k!},\qquad k=0,1,2,\cdots$$

该动物的后代数目$\eta\sim P(\lambda p)$

13. 设$F_1(x),F_2(x)$为两个分布函数，（1）$F_1(x)+F_2(x)$是否分布函数？（2）$F_1(x)F_2(x)$是否分布函数？ 给出证明.

解：(1) 不是，因为$0\le F_1(x)+F_2(x)\le 2$或$\lim\limits_{x\to+\infty}[F_1(x)+F_2(x)]=2$

（2）是.

1) 单调不降性

因$F_1(x),F_2(x)$分别单调不降故$F_1(x)F_2(x)$单调不降；

2) 归一性

因$0\le F_i(x)\le 1$，$\lim\limits_{x\to-\infty}F_i(x)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}F_i(x)=1,i=1,2$，得到

$0\le F_1(x)F_1(x)\le 1$，$\lim\limits_{x\to-\infty}F_1(x)F_2(x)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}F_1(x)F_2(x)=1$.

3) 右连续性

因$F_1(x),F_2(x)$分别右连续故$F_1(x)F_2(x)$右连续.

14. 假设一大型设备在任何长为 t 的时间内发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为λt 的泊松分布.

(1) 求相继两次故障之间的时间间隔 T 的概率分布；

(2) 求在设备已无故障工作 8 小时的情况下，再无故障运行 8 小时的概率。

解

（1）$F_T(t)=P\{T\le t\}=\begin{cases}0, & t<0\\ 1-P\{N(t)=0\}=1-\dfrac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t}=1-e^{-\lambda t}, & t\ge 0\end{cases}$

T 服从参数为λ的指数分布

（2）利用指数分布的无后效性 $P\{T>16\,|\,T>8\}=P\{T>8\}=1-F_T(8)=e^{-8\lambda}$