第六节　第一型线积分与面积分

我们将把积分概念推广到积分范围为一段曲线弧或一片曲面的情形。

曲线积分 $\begin{cases} \text{对弧长的曲线积分（第一型线积分）} \\ \text{对坐标的曲线积分（第二型线积分）} \end{cases}$

曲面积分 $\begin{cases} \text{对面积的曲面积分（第一型面积分）} \\ \text{对坐标的曲面积分（第二型面积分）} \end{cases}$

本节讨论：

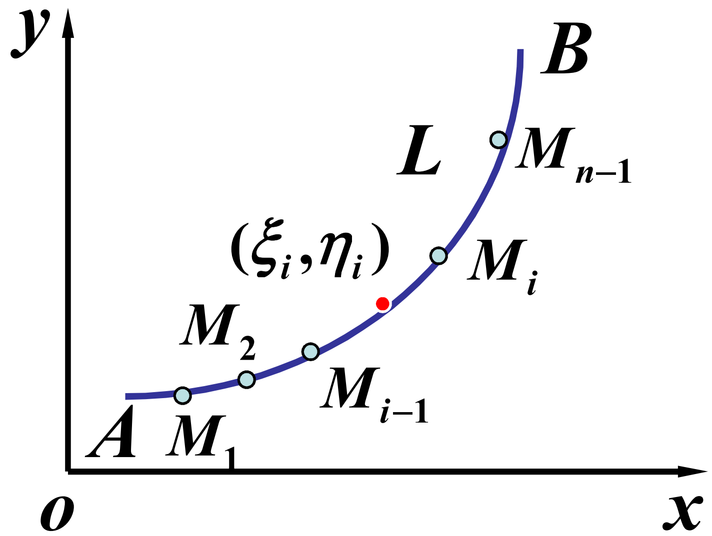
第一型线积分　　　　第一型面积分

一、对弧长的曲线积分的概念

1. 引例：曲线形构件的质量

一曲线形构件在$x\,o\,y$平面内所占位置是一段曲线弧L，L上任一点处的线密度$\rho(x,y)$在L上连续.

计算此构件的质量.



分割 用点$M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}$分$L$成$n$个小段，

记$\Delta s_i = \overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$（$i=1,2,\cdots,n-1$），$M_0=A$，$M_n=B$.

取 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta s_i$，$\Delta M_i \approx \rho(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i$.

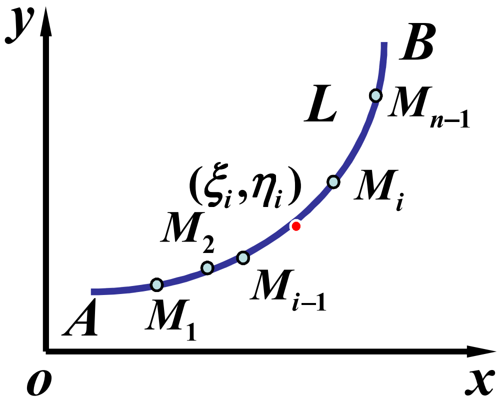
求和 $$M \approx \sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i.$$ 近似值

取极限 $$M = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i.$$ 精确值

2. 定义 设L为xoy面内一条光滑曲线弧,函数$f(x,y)$在L上有界.

在L上任意插入点$M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}$把$L$分成$n$个小段.

设第i个小段的长度为Δs_i,



在第i个小段上任意取定的一点(ξ_i,η_i),

作乘积$f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i$,并作和$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i$,

令 小弧段长度的最大值$\lambda \to 0$, 若极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i$存在,

则称此极限是函数$f(x,y)$在曲线弧L上对弧长的曲线积分,

记作$\int_L f(x,y)ds$.

函数$f(x,y)$在曲线弧L上对弧长的曲线积分也叫第一型线积分.

$$\int_L f(x,y)ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i .$$

积分弧段

$$\int_L f(x,y)ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i.$$

存在条件：

当$f(x,y)$在光滑曲线弧L上连续时,对弧长的曲线积分$\int_L f(x,y)ds$存在.

今后总假定$f(x,y)$在L上是连续的.

类似地可定义

函数$f(x,y,z)$在空间曲线弧Γ上对弧长的曲线积分为

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta s_i.$$

注意： (1). 若L(或Γ)是分段光滑的, $(L=L_1+L_2)$

$$\int_{L_1+L_2} f(x,y)ds=\int_{L_1} f(x,y)ds+\int_{L_2} f(x,y)ds.$$

(2). 函数$f(x,y)$在闭曲线L上对弧长的曲线积分记为$\oint_L f(x,y)ds.$

二、对弧长的曲线积分的计算法

基本思路： 求曲线积分 $\xrightarrow{\text{转 化}}$ 计算定积分

定理 设 $f(x,y)$在光滑曲线弧 L上连续，L的

参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ $(\alpha \le t \le \beta)$,则

$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$$

$$(\alpha < \beta)$$

证：设$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$为$[\alpha, \beta]$上的一个分割。

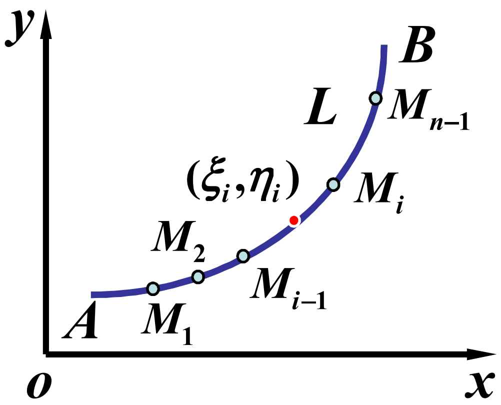
相应曲线有一分割，记 $[t_{i-1}, t_i]$上的弧长为 Δs_i

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt = \sqrt{\varphi'^2(t_i') + \psi'^2(t_i')}\Delta t_i$$

设$\xi_i = \varphi(t_i')$，$\eta_i = \psi(t_i')$ $t_{i-1} \le t_i' \le t_i$

因为$f(x, y)$在L上连续，$\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$连续

$\therefore f[\varphi(t), \psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$可积



$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t), \psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f[\varphi(t_i'), \psi(t_i')]\sqrt{\varphi^2(t_i') + \psi^2(t_i')}\Delta t_i$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i = \int_L f(x, y)ds$$

记$\lambda = \max\{\Delta s_i\}$

注意:

1. 定积分的下限 α 一定要小于上限 β;

特殊情形

(1) $L: y = \psi(x) \qquad a \le x \le b.$

$$\int_L f(x,y)ds = \int_a^b f[x,\psi(x)]\sqrt{1+\psi'^2(x)}dx. \qquad (a < b)$$

(2) $L: x = \varphi(y) \qquad c \le y \le d.$

$$\int_L f(x,y)ds = \int_c^d f[\varphi(y),y]\sqrt{1+\varphi'^2(y)}dy. \qquad (c < d)$$

(3) $L: r = r(\theta) \qquad \alpha \le \theta \le \beta.$

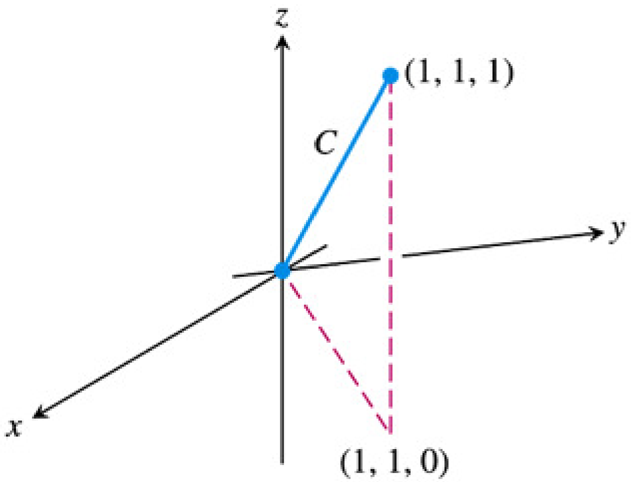
$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[r\cos\theta, r\sin\theta]\sqrt{r^2 + r'^2}d\theta.$$

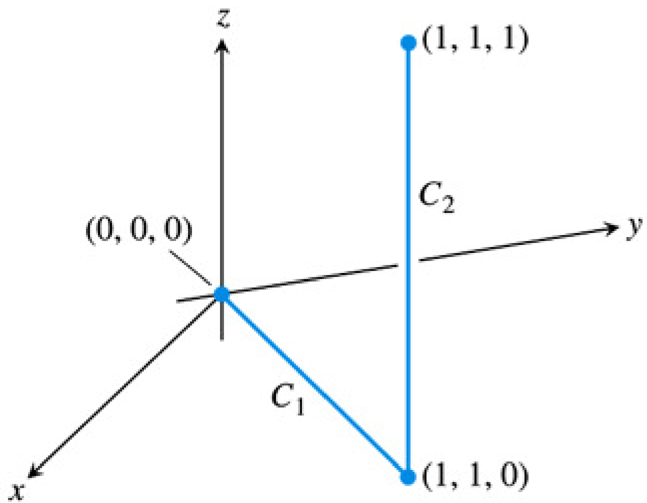
推广: $\Gamma: x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t).\quad (\alpha \le t \le \beta)$

$$\int_{\Gamma} f(x,y,z)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}dt$$

例. 计算曲线积分 $\int_C (x-3y^2+z)ds$, 其中C为:

(1) 连接点(0,0,0)与(1,1,1)的直线段 (2) 下图 $C_1 \cup C_2$.





例1. 求 $I=\int_L y\,ds$, 其 中 L :

$y^2=2x$, 点$A(2,-2)$到$B(2,2)$的一段;

例2. 计算曲线积分$\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,ds$, 其中$\Gamma$为螺旋线

$x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=kt\ (0\le t\le 2\pi)$的一段弧.

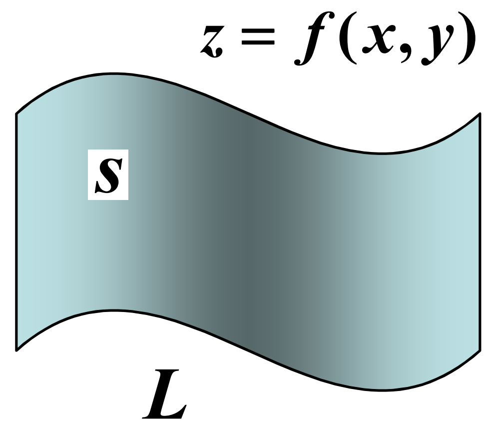
三、几何与物理意义

(1) 当$f(x,y)$表示L的线密度时，$M=\int_L f(x,y)ds$；

(2) 当$f(x,y)\equiv 1$时，$L_{弧长}=\int_L ds$；

(3) 当$f(x,y)$表示以L为准线的柱面在点(x,y)处的高时，

$$S_{柱面面积}=\int_L f(x,y)ds.$$



(4) 均匀曲线弧对x轴及y轴的转动惯量

$$I_x=\int_L y^2\mu ds,\qquad I_y=\int_L x^2\mu ds.$$

(5) 曲线弧的质心坐标

$$\bar{x}=\frac{\int_L x\mu ds}{\int_L \mu ds},\qquad \bar{y}=\frac{\int_L y\mu ds}{\int_L \mu ds}.$$

例6.4（柱面的侧面积）设椭圆柱面$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$被平面z=y与z=0所截。求位于第一、二卦限内所截下部分的侧面积.

例6.5设有半圆形的金属丝，质量均匀分布，求它的质心和对直径的转动惯量。

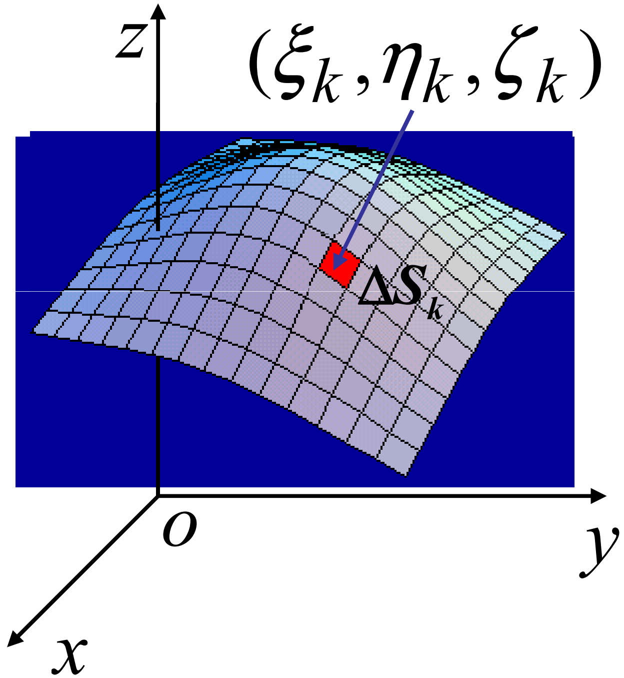
四、对面积的曲面积分的概念

引例： **求**具有连续面密度 $\rho(x,y,z)$ 的曲面形构件的质量.

类似求平面薄板质量的思想, 采用

"大化小, 常代变, 近似和, 求极限"

的方法, 可得



$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k$$

其中, λ 表示 n 小块曲面的直径的

最大值 (曲面的直径为其上任意两点间距离的最大者).

定义　设曲面Σ是光滑的，函数$f(x,y,z)$在Σ上有界把Σ分成n小块ΔS_i（ΔS_i同时也表示第i小块曲面的面积），设点为ΔS_i上任意取定的点(ξ_i,η_i,ζ_i)，λ为各小块曲面的直径的最大值，若极限

$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\cdot\Delta S_i$存在，则称此极限为函数$f(x,y,z)$在曲面$\Sigma$上对面积的**曲面积分**或**第一类曲面积分**.

记为 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS$.

$$\text{即}\quad \iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

其中$f(x,y,z)$叫被积函数，Σ叫积分曲面.

定理 若 $f(x,y,z)$ 在光滑曲面 Σ 上连续,

则对面积的曲面积分存在.即

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

对面积的曲面积分与对弧长的曲线积分性质类似.

- 对积分域的可加性. 若 Σ 是分片光滑的, 例如分成两片光滑曲面 Σ_1, Σ_2, 则有

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

- 线性性质. 设 k_1, k_2 为常数, 则

$$\iint_{\Sigma} [k_1 f(x,y,z) \pm k_2 g(x,y,z)]\,\mathrm{d}S$$

$$= k_1 \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S \pm k_2 \iint_{\Sigma} g(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

五、对面积的曲面积分的计算法

1.曲面面积的计算

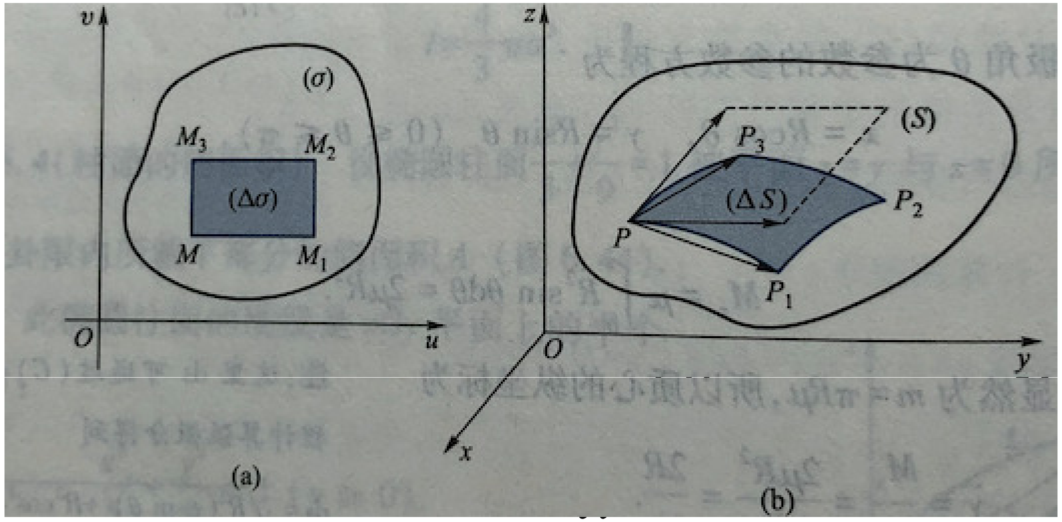
设R^3空间有一曲面S,其参数方程为

$$r = r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \quad (u,v) \in D$$

我们用微元法来讨论曲面的面积。用坐标线$u=c_1$，$v = c_2$把区域D划分成若干小区域$\Delta\sigma$，考察其中一个以点$M(u,v), M_1(u+\Delta u, v), M_2(u+\Delta u, v+\Delta v), M_3(u, v+\Delta v)$为顶点的小矩形$\Delta\sigma$,$(\Delta u > 0, \Delta v > 0)$.

设在映射r下，M(u,v)，$M_1(u+\Delta u,v)$，$M_2(u+\Delta u,v+\Delta v)$，$M_3(u,v+\Delta v)$的像点分别为曲面$S$上的$P,P_1,P_2,P_3$所围成的区域$\Delta S$。

由于



$$\overrightarrow{PP_1}=r(u+\Delta u,v)-r(u,v)=r_u\Delta u+o(\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2})\approx r_u\Delta u$$

$$\overrightarrow{PP_3}=r(u,v+\Delta v)-r(u,v)=r_v\Delta v+o(\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2})\approx r_v\Delta v$$

$r_u\Delta u, r_v\Delta v$分别为曲面S上过点M的u曲线和v曲线的切向量，当Δu，Δv都很小时，有

$$\Delta S \approx \| r_u \Delta u \times r_v \Delta v \| = \| r_u \times r_v \| \Delta u \Delta v。$$

令$\Delta u \to 0, \Delta v \to 0$,取极限，得

$$dS = \| r_u \times r_v \| dudv$$

从而曲面S的面积为

$$S = \iint_D \| r_u \times r_v \| dudv$$

例6.6 求半径为R的球面的面积。

解 球面的参数方程为

$$\begin{cases} x=R\sin\varphi\cos\theta, \\ y=R\sin\varphi\sin\theta, \\ z=R\cos\varphi \end{cases} \qquad (\theta,\varphi)\in D=[0,2\pi]\times[0,\pi]$$

$$\vec{r}_\theta=(-R\sin\varphi\sin\theta, R\sin\varphi\cos\theta, 0),$$

$$\vec{r}_\varphi=(R\cos\varphi\cos\theta, R\cos\varphi\sin\theta, R\sin\varphi)$$

经计算知， $\|\vec{r}_\theta\times\vec{r}_\varphi\|=R^2\sin\varphi$

于是

$$S=\iint_D\|\vec{r}_\theta\times\vec{r}_\varphi\|\,d\theta d\varphi=4\pi R^2.$$

例. 假设S为曲线$x=\cos z, y=0, -\pi/2 \le z \le \pi/2$沿z-轴旋转一周所成的“橄榄球”面，给出S的参数方程并计算S的面积。

若曲面$\Sigma: z = z(x, y)$在xoy面上的投影区域为D_{xy}，

将x, y看成参数，此曲面的向量方程为

$$\vec{r} = \vec{r}(x, y) = (x, y, z(x, y)),$$

从而 $\vec{r}_x = (1, 0, z_x)$, $\vec{r}_y = (0, 1, z_y)$

于是

$$\|\vec{r}_x \times \vec{r}_y\| = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$$

所以

$$S = \iint_{D_{xy}} \|\vec{r}_x \times \vec{r}_y\| dxdy = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy.$$

若曲面$\Sigma: y=y(x,z)$在xoz面上的投影区域为D_{xz}

则，$S=\iint\limits_{\Sigma} dS = \iint\limits_{D_{xz}} \sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dxdz;$

若曲面$\Sigma: x=x(y,z)$在yoz面上的投影区域为D_{yz}

则，$S=\iint\limits_{\Sigma} dS = \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,dydz.$

问题：若曲面Σ由$F(x,y,z)=0$给出？

$$S=\iint\limits_{R} \frac{|\nabla F|}{|\nabla F\cdot \vec{n}|}dA,$$

这里，R是Σ在相关平面上的投影.

而$\vec{n}=\vec{i}, \vec{j}$或$\vec{k}$，且垂直于R，$\nabla F\cdot \vec{n}\neq 0.$

2.对面积的曲面积分的计算法

定理: 设有光滑曲面

$$\vec{r}=\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),\qquad (u,v)\in D$$

$f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续, 则曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$ 存在, 且有

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\,\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|\,dudv$$

定理: 设有光滑曲面

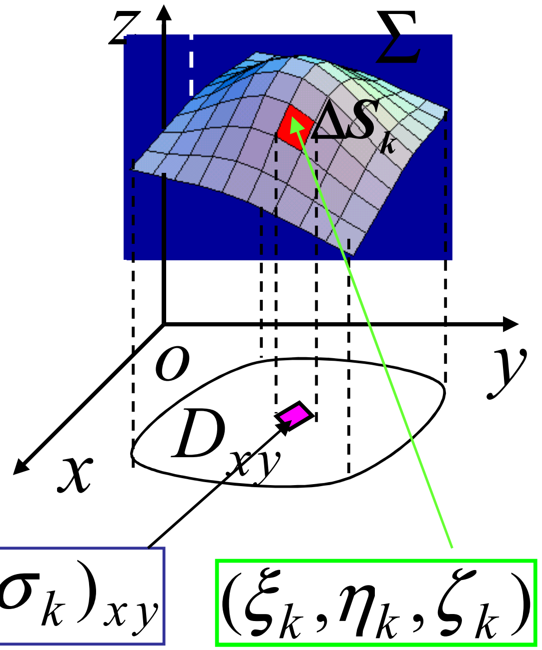
$$\Sigma: z = z(x, y),\ (x, y) \in D_{xy}$$

$f(x, y, z)$ 在 Σ 上连续, 则曲面积分

$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S$ 存在, 且有

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



若曲面$\Sigma: y = y(x,z)$在xoz面上的投影区域为D_{xz}

则$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xz}} f[x, y(x,z), z]\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dxdz;$$

若曲面$\Sigma: x = x(y,z)$在yoz面上的投影区域为D_{yz}

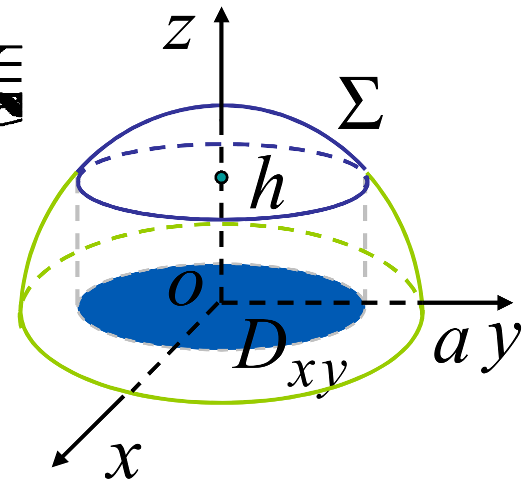
则$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D_{yz}} f[x(y,z), y, z]\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,dydz.$$

例6.8 计算$\iint\limits_{\Sigma} zdS$,其中曲面$\Sigma$是圆锥面

$z=\sqrt{x^2+y^2}$上介于$z=1$与$z=2$间的部分。

例. 计算曲面积分 $\iint_\Sigma \frac{\mathrm{d}S}{z}$, 其中Σ是球面 $x^2+y^2+z^2$ $=a^2$ 被平面 $z=h\ (0<h<a)$ 截出的顶部.

解: $\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\ (x,y)\in D_{xy}$



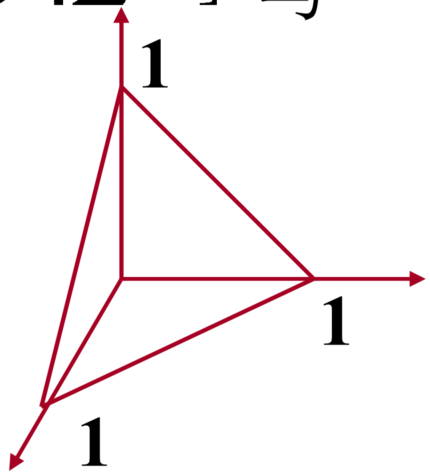
$$D_{xy}: x^2+y^2 \le a^2-h^2$$

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$\therefore \iint_\Sigma \frac{\mathrm{d}S}{z}=\iint_{D_{xy}} \frac{a\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{a^2-x^2-y^2}=a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{r\,\mathrm{d}r}{a^2-r^2}$$

$$=2\pi a\left[-\frac{1}{2}\ln(a^2-r^2)\right]_0^{\sqrt{a^2+h^2}}=2\pi a\ln\frac{a}{h}$$

例. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} \!\!\!\!\!\!\!\!\!\bigcirc\;\; xyz\,\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$ 是由平面 $x+y+z=1$ 与坐标面所围成的四面体的表面.



解: 设 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ 分别表示Σ 在平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 上的部分, 则

Σ_1: x=0
Σ_2: y=0
Σ_3: z=0
Σ_4: x+y+z=1

$$\text{原式} = \left(\iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_3} + \iint_{\Sigma_4} \right) xyz\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{\Sigma_4} xyz\,\mathrm{d}S$$

$$\Sigma_4 : z = 1 - x - y,\ (x, y) \in D_{xy} : \begin{cases} 0 \le y \le 1 - x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$= \sqrt{3} \int_0^1 x\,\mathrm{d}x \int_0^{1-x} y(1 - x - y)\,\mathrm{d}y = \sqrt{3} \big/ 120$$

例. 计算 $I=\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 是介于平面 $z=0, z=H$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$.

分析: 若将曲面分为前后(或左右)两片, 则计算较繁.

解: 取曲面面积元素

$$\mathrm{d}S=2\pi R\,\mathrm{d}z$$

则

$$I=\int_0^H\frac{2\pi R\,\mathrm{d}z}{R^2+z^2}$$

$$=2\pi\arctan\frac{H}{R}$$