$f\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)\cdot f\left(\frac{k\pi}{n}\right)<0$. 从而至少存在一点 $\xi_k\in\left(\frac{(k-1)}{n}\pi,\frac{k\pi}{n}\right)$使 $f(\xi_k)=0$. 即在$(0,2\pi)$上 $f(x)=0$ 至少有 $2n$ 个根.

下面证明:$f\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)\cdot f\left(\frac{k}{n}\pi\right)<0$.

如 k 为偶数,则 $f\left(\frac{k}{n}\pi\right)=a_n+a_{n-1}\cos\frac{(n-1)k\pi}{n}+\cdots+a_1\cos\frac{k\pi}{n}+a_0\geqslant a_n-a_{n-1}-\cdots-a_1+a_0\geqslant a_n-(|a_{n-1}|+\cdots+|a_1|+|a_0|)>0$,而 $f\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)=-a_n+a_{n-1}\cos\frac{(n-1)(k-1)}{n}\pi+\cdots+a_1\cos\frac{(k-1)\pi}{n}+a_0\leqslant-a_n+|a_{n-1}|+\cdots+|a_1|+|a_0|<0$.

故 k 为偶数时,$f\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)\cdot f\left(\frac{k\pi}{n}\right)<0$.

同理可证 k 为奇数时,结论成立.

综合练习题

1. 设有一对新出生的兔子,两个月之后成年. 从第三个月开始,每个月产一对小兔,且新生的每对小兔也在出生两个月之后成年,第三个月开始每月生一对小兔. 假定出生的兔均无死亡,(1)问一年后共有几对兔子? (2)问 n 个月之后有多少对兔子? (3)若 n 个月之后有 F_n 对兔子,试求 $\lim\limits_{n\to\infty}=\frac{F_n}{F_{n+1}}$(题中所讲的一对兔子均是雌雄异性的).

说明:该问题是意大利数学家 Fibonacci 于 13 世纪初(1202 年)研究兔子繁殖过程中数量变化规律时提出来的,其中的数列$\{F_n\}$被后人称为 Fibonacci 数列. 有趣的是,极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$ 正是"黄金分割"数,在优选法及许多领域得到很多新的应用.

解 第 n 月有小兔 F_n 对,且这 F_n 对小兔到第 $n+1$ 月均成熟,所以第 $n+2$ 月新生小兔 F_n 对,故 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$.

(1) $F_1=1,F_2=1,F_3=2,F_4=3,F_5=5,F_6=8,F_7=13,F_8=21,F_9=34,F_{10}=55,F_{11}=89,F_{12}=144,F_{13}=233$.

(2) 差分方程 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ 的特征方程为 $x^2=x+1$,解之得特征根 $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,$x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$,则 $F_n=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$,由 $F_1=1,F_2=$

1 得 $c_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$c_2=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，所以

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

(3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n}\cdot\frac{2^{n+1}}{(1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}}$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{5}+1}\left[\frac{1-\left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right]^n}{1-\left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right]^{n+1}}\right]=\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

2. 所谓**蛛网模型**是在研究市场经济的一种循环现象中提出来的，现以猪肉的产量与价格之间的关系为例来说明. 若去年猪肉的产量供过于求，它的价格就会降低；价格降低会使今年养猪者减少，使猪肉的产量供不应求，于是肉价上扬；价格上扬又使明年猪肉产量增加，造成新的供过于求，如此循环下去. 设 x_n 为第 n 年的猪肉产量，y_n 为其价格，由于当年的产量确定当年价格，所以 $y_n=f(x_n)$，称为**需求函数**. 而第 n 年的价格又决定第 $n+1$ 年的产量，故 $x_{n+1}=g(y_n)$，称为**供应函数**. 产销关系呈现出如下过程：

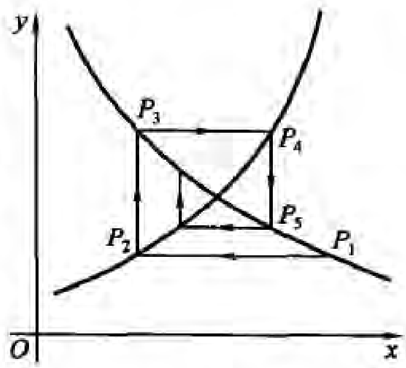
$$x_1\to y_1\to x_2\to y_2\to x_3\to y_3\to x_4\to\cdots.$$

在平面直角坐标系中描出下面的点列：

$$\begin{array}{ll} P_1(x_1,y_1), & P_2(x_2,y_1), \\ P_3(x_2,y_2), & P_4(x_3,y_2), \\ \cdots & \cdots \\ P_{2k-1}(x_k,y_k), & P_{2k}(x_{k+1},y_k),(k=1,2,\cdots), \end{array}$$

其中所有的点 P_{2k} 都满足 $x=g(y)$，P_{2k-1} 满足 $y=f(x)$，如图所示. 由于这种关系很像一个蛛网，所以称为蛛网模型.

据统计，某城市 1991 年猪肉产量为 30 万吨，肉价为 6 元/kg；1992 年猪肉产量为 25 万吨，肉价为 8 元/kg. 已知 1993 年的猪肉产量为 28 万吨. 若维持目前的消费水平和生产模式，并假定猪肉当年的价格与当年的产量之间、来年的产量与当年的价格之间都是线性关系.



(第 2 题图)

(1) 试确定需求函数 $y_n=f(x_n)$ 和供应函数 $x_{n+1}=g(y_n)$；

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}y_{n+1}$；

(3) 问若干年后猪肉的产量与价格是否会趋于稳定？若能够稳定，求出稳定的产量和价格.

解 (1) 设 $x_{n+1}=ay_n+c, y_n=-bx_n+d$. 将 $x_1=30, y_1=6, x_2=25, y_2=8, x_3=28$ 代入上式，则 $a=\frac{3}{2}, c=16, b=\frac{2}{5}, d=18$. 即需求函数为 $y_n=-\frac{2}{5}x_n+18$，供应函数 $x_{n+1}=\frac{3}{2}y_n+16$.

(2) 将 $y_n=-\frac{2}{5}x_n+18$ 代入 $x_{n+1}=\frac{3}{2}y_n+16$ 得

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=-\frac{3}{5}x_n+43\\&=\left(-\frac{3}{5}\right)\left[-\frac{3}{5}x_{n-1}+43\right]+43=\left(-\frac{3}{5}\right)^2x_{n-1}+43\left[1+\left(-\frac{3}{5}\right)\right]\\&=\cdots\\&=\left(-\frac{3}{5}\right)^nx_1+\left[1+\left(-\frac{3}{5}\right)+\cdots+\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right]\times 43,\end{aligned}$$

$$x_{n+1}=\left(-\frac{3}{5}\right)^nx_1+\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^n}{1+\frac{3}{5}}\times 43,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\frac{5}{8}\times 43=\frac{215}{8}$，进而 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=-\frac{2}{5}\lim\limits_{n\to\infty}x_n+18=\frac{29}{4}$.

(3) 经过若干年后猪肉的产量与价格将趋于稳定，稳定后的价格为 $\frac{29}{4}=7.25$ 元/kg. 产量为 $\frac{215}{8}$ 万吨.