(3) 由于对 $\forall x\in[0,1]$, $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+|\sin x|}\leqslant\dfrac{1}{2}x^n\leqslant\dfrac{1}{2}$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$. 故对 $[0,1]$ 上的连续函数列 $f_n(x)$ 恒有 $\lim\limits_{n\to\infty}(R)\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}(L)\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}m=(L)\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}m=0$.

12. 证明在 $[a,b]$ 上 p 方可积函数必是 L 可积函数，即

$$L^p([a,b])\subseteq L([a,b])\qquad(1\leqslant p<+\infty).$$

证明 若 $p=1$，则结论显然成立；

若 $1<p<+\infty$，对 $\forall f\in L^p([a,b])$，令 $A=\{x\mid |f|\geqslant 1, x\in[a,b]\}$，$B=[a,b]\setminus A$，则有 $\int_{[a,b]}|f|\mathrm{d}m=\int_A|f|\mathrm{d}m+\int_B|f|\mathrm{d}m\leqslant\int_A|f|^p\mathrm{d}m+\int_B\mathrm{d}m=\int_A|f|^p\mathrm{d}m+mB<+\infty$. 即 $|f|$ 是 L 可积，从而 f 是 L 可积.

习 题 8.4

2. 设 M 为 Hilbert 空间 X 的凸子集，$\{x_n\}\subseteq M$，且

$$\|x_n\|\to d=\inf_{x\in M}\|x\|\quad(n\to\infty),$$

证明 $\{x_n\}$ 是 X 中的收敛点列.

证明 对任意的 x_m,x_n，由平行四边形公式可得

$$2\left\|\frac{x_m-x_n}{2}\right\|^2=\|x_m\|^2+\|x_n\|^2-2\left\|\frac{x_m+x_n}{2}\right\|^2.$$

又由于 M 是凸集，$x_m,x_n\in M$，所以 $\dfrac{x_m+x_n}{2}\in M$，于是 $\left\|\dfrac{x_m+x_n}{2}\right\|\geqslant d$，代入上式得

$$0\leqslant 2\left\|\frac{x_m-x_n}{2}\right\|^2\leqslant\|x_m\|^2+\|x_n\|^2-2d^2.$$

令 $m,n\to\infty$，则 $\|x_m-x_n\|^2\to 0$，故 $\{x_n\}$ 是 M 中的基本列. 由 X 的完备性知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x\in X$，即 $\{x_n\}$ 为 X 中的收敛点列.

3. 设 X 为 Hilbert 空间，M 是 X 的真闭子空间，证明 $M^\perp$ 必含有非零元.

证明 由于 M 是 X 的真闭子空间，所以 $X\setminus M\neq\varnothing$，从而存在 $x\neq\theta$，且 $x\in X\setminus M$. 由正交分解定理知 $\exists x_0\in M$，使 $x-x_0\in M^\perp$. 又因 $x\notin M$，$x_0\in M$，故 $x-x_0\neq\theta$. 即 $M^\perp$ 中必有非零元.

4. 试求常数 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$ 使 $\int_0^1(\mathrm{e}^t-\alpha_0-\alpha_1t-\alpha_2t^2)\mathrm{d}t$ 取最小值.

解　取 $M=\mathrm{span}\{1,t,t^2\}$，令 $f(t)=\mathrm{e}^t$，则题设求即为在 $L^2([0,1])$ 空间中求 $f(t)$ 在 M 中的最佳逼近 $x_0(t)$. 令

$$x_0(t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2,$$

由线性方程组

$$\begin{cases}\alpha_0\langle 1,1\rangle+\alpha_1\langle 1,t\rangle+\alpha_2\langle 1,t^2\rangle=\langle 1,\mathrm{e}^t\rangle,\\ \alpha_0\langle t,1\rangle+\alpha_1\langle t,t\rangle+\alpha_2\langle t,t^2\rangle=\langle t,\mathrm{e}^t\rangle,\\ \alpha_0\langle t^2,1\rangle+\alpha_1\langle t^2,t\rangle+\alpha_2\langle t^2,t^2\rangle=\langle t^2,\mathrm{e}^t\rangle,\end{cases}$$

解得 $\alpha_0\approx 1.013$，$\alpha_1\approx 0.851\,1$，$\alpha_2=0.839\,2$，其中 $\forall f,g\in L^2([0,1])$，$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

5. 设 $\{e_n\}$ 是内积空间 X 中的标准正交系，$x,y\in X$，证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,e_n\rangle\langle y,e_n\rangle|\leqslant\|x\|\,\|y\|.$$

证明　利用 Cauchy-Schwarz 及 Bessel 不等式可知

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,e_n\rangle\langle y,e_n\rangle|&\leqslant\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,e_n\rangle|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|\langle y,e_n\rangle|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\|x\|\,\|y\|.\end{aligned}$$