(5) 由 $z=\frac{xy}{a}$，$x^2+y^2=ax$ $(a>0)$ 与 $z=0$ 所围成的立体；

(6) 由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ $(a>0,b>0,c>0)$ 所确定的立体；

(7) 由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ 与 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0,c>0)$ 所围成的立体.

7. 计算 $\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V$，其中 (V) 为平面曲线 $\begin{cases}y^2=2z\\x=0\end{cases}$，绕 z 轴旋转一周形成的曲面与平面 $z=8$ 所围成的立体.

8. 证明：抛物面 $z=x^2+y^2+1$ 上任一点处的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围立体的体积恒为一常数值.

(B)

1. 计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_{(V)}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}V$，$(V)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+(z-1)^2\leqslant 1, z\geqslant 1, y\geqslant 0\}$；

(2) $\iiint\limits_{(V)}\left|\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1\right|\mathrm{d}V$，$(V)$ 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 围成；

(3) $\iiint\limits_{(V)}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,\mathrm{d}V$，$(V)=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1\ (a>0,b>0,c>0)\right\}$.

2. 将累次积分 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$ 分别化为先对 x 和先对 y 的累次积分.

3. 设 $F(t)=\iiint\limits_{(V)}x\ln(1+x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V$，$(V)$ 由 $x^2+y^2+z^2\leqslant t^2$ 与 $\sqrt{y^2+z^2}\leqslant x$ 确定，求 $\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t}$.

4. 设 f 为连续函数，求函数 $F(t)=\iiint\limits_{(V)}f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V$ 的导数 $F'(t)$，其中 $(V)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\}$.

5. 设 $f(x)$ 连续，$(V)=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant z\leqslant h, x^2+y^2\leqslant t^2\}$，$F(t)=\iiint\limits_{(V)}[z^2+f(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}V$，求 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ 和 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^2}$.

6. 计算三重积分 $\iiint\limits_{(V)}(x+y+z)^2\,\mathrm{d}V$，其中 (V) 为椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$.

第四节 含参变量的积分与反常重积分

在许多问题中所遇到的积分，其被积函数除依赖于积分变量外还可能依赖于另外的变量.例如，在变力沿直线做功的问题中，如果此变力 f 不仅与位移 x 有关，还与时间 t 有关，即 $f=f(x,t)$，那么此变力将物体由 $x=a$ 移至 $x=b$ 所做的功应为 $W(t)=\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$，这种积分

称为含参变量积分.其实,我们已经不止一次地遇到过这种积分.例如将二重积分化成累次积分时所遇到的积分 $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$,第三章第五节中所介绍的 Γ 函数,都是含参变量积分.本节将不通过计算其值而直接讨论含参变量积分的某些重要性质.此外,为满足科学技术的需要,还要将重积分的概念加以拓广,介绍反常重积分的概念、性质与计算.

4.1 含参变量的积分

在本段中我们总记 $D=[a,b]\times[c,d]$.如果 $f\in C(D)$,那么对任一固定的 $y\in[c,d]$,积分

$$F(y)=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \tag{4.1}$$

存在,且将随 y 的改变而变化,我们称积分(4.1)为**含参变量 y 的积分**,它是参变量 y 的函数.同样,对任一 $x\in[a,b]$,积分

$$G(x)=\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

称为**含参变量 x 的积分**,它是参变量 x 的函数.

下面我们以含参变量积分(4.1)为例来讨论其有关性质.

定理 4.1(连续性) 若 $f\in C(D)$,则

$$F(y)=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

在区间 $[c,d]$ 上连续.

证 任取 $y\in[c,d]$,令 $y+\Delta y\in[c,d]$.由于 $f\in C(D)$,且 D 是有界闭域,故 f 必在 D 上一致连续,从而对 $\forall\varepsilon>0$,存在仅与 ε 有关的 $\delta(\varepsilon)>0$,使得 $\forall(x,y)\in D$,当 $\Delta x=0$, $|\Delta y|<\delta$ 时有

$$|f(x,y+\Delta y)-f(x,y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

于是

$$\begin{aligned}&|F(y+\Delta y)-F(y)|\\ \leqslant&\int_a^b|f(x,y+\Delta y)\\ &\quad-f(x,y)|\,\mathrm{d}x\\ <&\int_a^b\frac{\varepsilon}{b-a}\mathrm{d}x=\varepsilon,\end{aligned}$$

因此 $F(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续. ▌

> 注:定理 4.1 证明的思想是:$\forall\varepsilon>0$ 要证明 $\exists\delta(\varepsilon)$ 使 $|\Delta y|<\delta$ 时恒有 $|F(y+\Delta y)-F(y)|<\varepsilon$.由于(4.1)式右端的积分变量和积分上、下限均与 y 及 Δy 无关,故可将 F 的自变量转化为被积函数 f 的自变量.为了保证 $|f(x,y+\Delta y)-f(x,y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$ 中的 ε 是与 x 和 y 无关的常数,需要 f 在 D 上一致连续.不难看出,实际上我们证明了 $F(y)$ 在 $[c,d]$ 上是一致连续的.

由此定理可见,

$$\lim_{y\to y_0}F(y)=F(y_0),$$

即

$$\boxed{\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x,y_0)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\lim_{y\to y_0}f(x,y)\right]\mathrm{d}x.}$$

注：定理 4.1 告诉我们，当 $f\in C(D)$ 时，求极限与求积分可以交换顺序.

定理 4.2（可导性） 若 $f\in C(D)$，$f_y\in C(D)$，则

$$F(y)=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

在 $[c,d]$ 上有连续的导数，且求导与积分可交换顺序，即

$$\boxed{F'(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}x.}$$

注：定理 4.2 告诉我们，在所给的条件下，对含参变量的积分求导可以在积分号内进行，或者说导数与积分可以交换顺序.

证 任取 $y\in[c,d]$，令 $y+\Delta y\in[c,d]$，于是

$$\Delta F=F(y+\Delta y)-F(y)=\int_a^b[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]\,\mathrm{d}x.$$

由微分中值定理知

$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=f_y(x,y+\theta\Delta y)\Delta y,\quad 0<\theta<1,$$

代入上式并除以 Δy 得

$$\frac{\Delta F}{\Delta y}=\int_a^b f_y(x,y+\theta\Delta y)\,\mathrm{d}x. \tag{4.2}$$

由于 $f_y(x,y)$ 在闭域 D 上连续，根据定理 4.1 可知

$$F'(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta y}=\int_a^b\lim_{\Delta y\to 0}f_y(x,y+\theta\Delta y)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f_y(x,y)\,\mathrm{d}x,$$

并且 $F'(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续. ▌

例 4.1 求含参变量积分 $\int_0^1\arctan\frac{x}{y}\mathrm{d}x\ (y\neq 0)$ 对参数 y 的导数.

解 当 $y\neq 0$ 时，由定理 4.2 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_0^1\arctan\frac{x}{y}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial y}\arctan\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\frac{y^2}{1+y^2}.\ ▌$$

定理 4.3（积分顺序交换性） 若 $f\in C(D)$，则

$$F(y)=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \text{ 在}[c,d]\text{ 上可积,}$$

$$G(x)=\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \text{ 在}[a,b]\text{ 上可积,}$$

且

$$\boxed{\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.}$$

从二重积分的几何意义来看，等式的成立是显然的. 下面我们再给以分析证明.

证 由定理 4.1，$F(y)\in C([c,d])$，$G(x)\in C([a,b])$，因此它们在相应的区间上都是可积的. 设 $\forall t\in[c,d]$，令

$$I(t)=\int_c^t \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x-\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^t f(x,y)\,\mathrm{d}y, \tag{4.3}$$

注：定理 4.3 实际上就是在二重积分计算（第六章 2.2 节）中所述的累次积分交换积分顺序的特例，那时结论的成立是将其化为二重积分，再利用二重积分的几何意义，把它化为另一顺序的累次积分. 这里我们借助于含参变量积分的相关结论，直接给出了分析证明.

对变量 t 求导，对其中第一个积分直接利用微积分学第一基本定理；对于第二个积分，先利用定理 4.2，再利用微积分学第一基本定理，得

$$I'(t)=\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x\equiv 0,$$

于是在 $[c,d]$ 上有 $I(t)\equiv k$（k 为常数）.

由(4.3)式可知 $I(c)=0$，从而 $k=0$. 于是 $I(t)\equiv 0$，$\forall t\in[c,d]$，所以 $I(d)=0$，即结论成立. ▌

注：定理 4.3 告诉我们，当 $f\in C(D)$ 时，若积分限均为常数，则对含参变量积分求积分可以在积分号内进行，或者说积分可以交换顺序.

例 4.2 计算积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x$ $(a,b>0)$.

解 这个积分难以直接计算，需要利用定理 4.3 来求. 由于

$$\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^y\,\mathrm{d}y,$$

由定理 4.3 可知

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_a^b x^y\,\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^1 x^y\,\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{1}{1+y}\mathrm{d}y=\ln\frac{1+b}{1+a}. \quad ▌$$

在把二重积分化为累次积分时，我们更常碰到的含参变量积分，其上、下限也是参变量的函数. 下面就来讨论这种含参变量积分的连续性和求导法.

定理 4.4 设 $f(x,y)\in C(D)$，$x_i(y)\in C[c,d]$，$i=1,2$，且其值域均为 $[a,b]$. 则

$$F(y)=\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

必在 $[c,d]$ 上连续.

证 $\forall y\in[c,d]$，令 $y+\Delta y\in[c,d]$，有

$$\Delta F=F(y+\Delta y)-F(y)=\int_{x_1(y+\Delta y)}^{x_2(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)\,\mathrm{d}x-\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x,$$

由于

$$\int_{x_1(y+\Delta y)}^{x_2(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{x_1(y+\Delta y)}^{x_1(y)} f(x,y+\Delta y)\mathrm{d}x+\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y+\Delta y)\mathrm{d}x+\int_{x_2(y)}^{x_2(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)\mathrm{d}x,$$

从而

$$\Delta F=\int_{x_1(y+\Delta y)}^{x_1(y)} f(x,y+\Delta y)\mathrm{d}x+\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]\mathrm{d}x+\int_{x_2(y)}^{x_2(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)\mathrm{d}x. \tag{4.4}$$

由于$f\in C(D)$，令$\Delta y\to 0$，注意到(4.4)式右端第二个积分的上下限与Δy无关，故由定理4.1可知，其值趋于0；又由于f在闭域D有界，设$|f(x,y+\Delta y)|\leqslant M$.故有

$$\left|\int_{x_1(y+\Delta y)}^{x_1(y)} f(x,y+\Delta y)\mathrm{d}x\right|\leqslant M|x_1(y+\Delta y)-x_1(y)|,$$
$$\left|\int_{x_2(y)}^{x_2(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)\mathrm{d}x\right|\leqslant M|x_2(y+\Delta y)-x_2(y)|.$$

再由条件$x_1(y),x_2(y)\in C[c,d]$，由上两不等式可知当$\Delta y\to 0$时，(4.4)式右端第一个与第三个积分也均趋于0.所以

$$\lim_{\Delta y\to 0}\Delta F=0.$$

即$F(y)=\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$在$[c,d]$上连续. ▌

定理4.5 若$f(x,y)$与$f_y(x,y)$均在D上连续，$x_1(y)$与$x_2(y)$的值域均为$[a,b]$且它们都在$[c,d]$上可导，则

$$F(y)=\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x \tag{4.5}$$

也在$[c,d]$上可导，且有

$$F'(y)=\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f_y(x,y)\mathrm{d}x+f[x_2(y),y]x'_2(y)-f[x_1(y),y]x'_1(y).$$

证 将由(4.5)式所确定的函数看作是由

$$G(y,x_1,x_2)\equiv\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\mathrm{d}x\text{ 与 }x_1=x_1(y),x_2=x_2(y)$$

所构成的复合函数.

考察三元函数$G(y,x_1,x_2)$.由所设条件，据定理4.2可知G对第一个变量y的导数：

$$G_y=\int_{x_1}^{x_2} f_y(x,y)\mathrm{d}x\text{ 存在且连续.}$$

再据变上限求导定理，可知

$$G_{x_1}=-f(x_1,y),\quad G_{x_2}=f(x_2,y)$$

也均存在且连续.故三元函数 $G(y,x_1,x_2)$ 在域 $[c,d]\times[a,b]\times[a,b]$ 上可微.应用复合函数链导法则,可知 $F(y)$ 在 $[c,d]$ 上可导,而且

$$\begin{aligned} F'(y) &= G_y + G_{x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}y} + G_{x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}y} \\ &= \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f_y(x,y)\,\mathrm{d}x + f[x_2(y),y]x_2'(y) - f(x_1(y),y)x_1'(y). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

例 4.3 求 $F(y)=\int_y^{y^2}\frac{\sin(xy)}{x}\mathrm{d}x$ 的导数.

解 由定理 4.5 得

$$F'(y)=\int_y^{y^2}\cos(xy)\,\mathrm{d}x + 2y\frac{\sin y^3}{y^2} - \frac{\sin y^2}{y} = \frac{3\sin y^3 - 2\sin y^2}{y}. \quad \blacksquare$$

含参变量的积分不难推广到含参变量的无穷积分 $F(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$,可以证明(从略),在一定条件下定理 4.1、4.2、4.3 的结论仍然成立,即含参变量的无穷积分也同样具有连续性,求导与求积分可变换顺序以及积分顺序可交换等性质.

4.2 反常重积分

与一元函数的反常积分一样,重积分也可以推广为无穷区域与无界函数两类反常重积分.下面以二重积分为例,对这两类反常重积分的概念和收敛的判别法则作一简单介绍(证明略去).

1. 无界区域的二重积分

定义 4.1 设 (σ) 是一无界区域,$f\in C((\sigma))$,任作一有界区域序列 $(\sigma_1),(\sigma_2),\cdots,(\sigma_n),\cdots$,使 $(\sigma_n)\subsetneqq(\sigma)\ (n=1,2,\cdots)$,且当 $n\to+\infty$ 时 (σ_n) 扩张成为 (σ).如果不论 (σ_n) 如何作法①,极限

$$\lim_{n\to+\infty}\iint\limits_{(\sigma_n)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

总存在,那么称 $f(x,y)$ 在无界区域 (σ) 上的**二重积分** $\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ **收敛**,并称此极限值为该**反常二重积分的值**,即 $\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \lim\limits_{n\to+\infty}\iint\limits_{(\sigma_n)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$;否则称此反常二重积分**发散**.

例 4.4 讨论无界区域的二重积分 $\iint\limits_{(\sigma)}\frac{1}{\rho^\alpha}\mathrm{d}\sigma$ 的敛散性,其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$,(σ) 为

---

① 由于无界区域的多样性,严格地讲,对 $\{(\sigma_n)\}$ 的作法有一定限制,本书不作进一步讨论,有兴趣的读者可参阅陈纪修等编《数学分析》有关章节.

去掉以原点 O 为中心的单位圆 Γ 内部的全平面.

解 注意到任一可扩张到 $\mathbf{R}^2$ 的有界区域序列 $\{(\sigma_n)\}$ $((\sigma_n)\subsetneqq(\sigma))$，当 $n\gg1$ 时，总存在以原点 O 为中心，ρ_n 与 ρ_n' 为半径，分别与圆周 Γ 所围成的两同心圆环系列 $\{(R_n)\}$ 与 $\{(R_n')\}$ 使 $n\to+\infty$ 时有 $\rho_n\to+\infty$，$\rho_n'\to+\infty$，且有

$$(R_n')\subseteq(\sigma_n)\subseteq(R_n).$$

注：由于定义要求 (σ_n) 的任意性，无法计算二重积分，故将 (σ_n) 夹在两个圆环域序列中，再运用夹逼定理.

因此，研究 $\iint\limits_{(\sigma)}\frac{1}{\rho^\alpha}\mathrm{d}\sigma$ 的收敛性，即极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\iint\limits_{(\sigma_n)}\frac{1}{\rho^\alpha}\mathrm{d}\sigma$ 的存在性，只需证明极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\iint\limits_{(R_n)}\frac{1}{\rho^\alpha}\mathrm{d}\sigma$ 与 $\lim\limits_{n\to+\infty}\iint\limits_{(R_n')}\frac{1}{\rho^\alpha}\mathrm{d}\sigma$ 均存在且相等. 注意到二者的等价性，只需证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\iint\limits_{(R_n)}\frac{1}{\rho^\alpha}\mathrm{d}\sigma$ 存在即可. 应用极坐标化为累次积分得

$$\iint\limits_{(R_n)}\frac{1}{\rho^\alpha}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^{\rho_n}\frac{1}{\rho^\alpha}\rho\mathrm{d}\rho=2\pi\frac{1}{2-\alpha}(\rho_n^{2-\alpha}-1)\quad(\alpha\neq2);$$

当 $\alpha=2$ 时，

$$\iint\limits_{(R_n)}\frac{1}{\rho^2}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^{\rho_n}\frac{1}{\rho}\mathrm{d}\rho=2\pi\ln\rho_n.$$

于是可知反常二重积分 $\iint\limits_{(\sigma)}\frac{1}{\rho^\alpha}\mathrm{d}\sigma$ 当 $\alpha>2$ 时收敛；类似地，通过讨论 $\lim\limits_{n\to+\infty}\iint\limits_{(R_n')}\frac{1}{\rho^\alpha}\mathrm{d}\sigma$ 的发散性，可知当 $\alpha\leqslant2$ 时发散.

由此例不难得到下面的收敛判别法.

定理 4.6（收敛判别法） 设 $f(x,y)$ 在无界区域 (σ) 上连续，若存在 $\rho_0>0$，使当 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant\rho_0$ 且 $(x,y)\in(\sigma)$ 时，有

$$|f(x,y)|\leqslant\frac{M}{\rho^\alpha},$$

其中 M 与 α 均为常数，则当 $\alpha>2$ 时反常二重积分 $\iint\limits_{(\sigma)}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 收敛.

想一想： 能否利用例 4.4 给出无界区域 (σ) 上二重积分 $\iint\limits_{(\sigma)}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 发散的判别法.

例 4.5 证明无界区域上的二重积分

$$I=\iint\limits_{(\mathbf{R}^2)}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

收敛，并求其值，其中 $\mathbf{R}^2$ 是全平面.

证 由于对任意实数 α 均有

$$\lim_{\rho\to+\infty}\rho^\alpha\mathrm{e}^{-\rho^2}=0<1,$$

从而$\exists\rho_0>0$,使当$\rho>\rho_0$时有

$$e^{-\rho^2}<\frac{1}{\rho^{\alpha}},$$

特别当$\alpha>2$时上不等式仍然成立.由定理4.6可知反常二重积分I收敛.

因此,要求I的值只需要选取一组可以扩充到全平面的特殊区域序列去计算就行了.

现取$(\sigma_n)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a_n^2\}$,当$n\to+\infty$时,有$a_n\to+\infty$,于是

$$I=\iint_{(\mathbb{R}^2)}e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{n\to+\infty}\iint_{(\sigma_n)}e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a_n}e^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho=\lim_{n\to+\infty}\pi(1-e^{-a_n^2})=\pi. \quad ▌$$

如果我们把扩充至全平面的区域序列选作正方形序列

$$(D_n)=\{(x,y)\mid -n\leqslant x\leqslant n,\ -n\leqslant y\leqslant n\},$$

那么有

$$I=\iint_{(\mathbb{R}^2)}e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{n\to+\infty}\iint_{(D_n)}e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\int_{-n}^{n}e^{-y^2}\mathrm{d}y\int_{-n}^{n}e^{-x^2}\mathrm{d}x\right]=\lim_{n\to+\infty}\left(\int_{-n}^{n}e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2.$$

由于反常二重积分I存在,其值为π,从而

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2=\pi,$$

或

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=1. \tag{4.6}$$

(4.6)式中的反常积分称为**概率积分**,它在概率统计中占有重要的地位.

注:概率积分$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x$的收敛性很容易证明,但由于$e^{-x^2}$的原函数不能用初等函数表示,故此反常积分的值在一元函数中难以求出.这里我们是将它平方后看作累次积分,再化为二重反常积分来计算的.

2. 无界函数的二重积分

定义4.2 设$f(x,y)$在有界闭域(σ)上除一点$P_0(x_0,y_0)$外处处连续,且当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时,$f(x,y)\to\infty$.作点P_0的任一d邻域$U(P_0,d)$,记$N_d=U(P_0,d)\cap(\sigma)$.如果不论$U(P_0,d)$如何选取,当$d\to0$,即N_d缩为点P_0时,极限

$$\lim_{d\to0}\iint_{(\sigma)\setminus(N_d)}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

存在,那么称在区域(σ)上无界函数$f(x,y)$的反常二重积分$\iint_{(\sigma)}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$收敛,并称

该极限值为此反常二重积分的值，即 $\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \lim\limits_{d\to 0} \iint\limits_{(\sigma)\setminus(\sigma_n)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$；否则称其发散.

例 4.6 讨论无界函数的二重积分 $\iint\limits_{(\sigma)} \frac{1}{\rho^\alpha}\mathrm{d}\sigma \ (\alpha > 0)$ 的敛散性，其中 $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$，(σ) 为以原点 O 为圆心、半径为 R 的圆域.

解 注意到 $\rho\to 0$ 时 $\frac{1}{\rho^\alpha}\to\infty$，故所给积分是一无界函数的二重积分. 对于任一包含原点而且缩小为原点的闭区域序列 $\{(\sigma_n)\} \subsetneq (\sigma)$，$n=1,2,\cdots$，总存在圆心为原点 O，半径分别为 ε_n 与 ε'_n $(0<\varepsilon'_n<\varepsilon_n<R)$ 的圆域序列 $\{(R_n)\}$ 与 $\{(R'_n)\}$，$n=1,2,\cdots$，使当 $n\to+\infty$ 时，$\varepsilon_n\to 0$，$\varepsilon'_n\to 0$，且有

$$(R'_n) \subseteq (\sigma_n) \subseteq (R_n), \quad n=1,2,\cdots.$$

由定义 4.2 可知，研究 $\iint\limits_{(\sigma)} \frac{1}{\rho^\alpha}\mathrm{d}\sigma \ (\alpha>0)$ 的收敛性，需要证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} \iint\limits_{(\sigma)\setminus(\sigma_n)} \frac{1}{\rho^\alpha}\mathrm{d}\sigma \ (\alpha>0)$ 存在，由于 $(\sigma)\setminus(R_n) \subseteq (\sigma)\setminus(\sigma_n) \subseteq (\sigma)\setminus(R'_n)$，类似于例 4.4，只需证明极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} \iint\limits_{(\sigma)\setminus(R_n)} \frac{1}{\rho^\alpha}\mathrm{d}\sigma$ 存在即可. 利用极坐标得

$$\lim_{n\to+\infty} \iint\limits_{(\sigma)\setminus(R_n)} \frac{1}{\rho^\alpha}\mathrm{d}\sigma = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_{\varepsilon_n}^{R} \frac{1}{\rho^\alpha}\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} 2\pi \dfrac{1}{2-\alpha}(R^{2-\alpha} - \varepsilon_n^{2-\alpha}), & \alpha\neq 2, \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2\pi(\ln R - \ln \varepsilon_n), & \alpha = 2. \end{cases}$$

由此可见，反常积分 $\iint\limits_{(\sigma)} \frac{1}{\rho^\alpha}\mathrm{d}\sigma \ (\alpha>0)$ 当 $0<\alpha<2$ 时收敛；类似地，可以证明 $\alpha \geqslant 2$ 时原积分发散.

由此例不难得到下面的判别法：

定理 4.7（收敛判别法） 设 $f(x,y)$ 在有界闭域 (σ) 上除 $P_0(x_0,y_0)$ 外处处连续，且当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时 $f(x,y)\to\infty$. 若不等式

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{M}{\rho^\alpha}$$

在 (σ) 上除点 (x_0,y_0) 外处处成立，其中 M 与 α 均为常数，$\rho = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$，则当 $\alpha<2$ 时反常二重积分 $\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 收敛.

想一想：

如何给出无界函数二重积分发散的判别法.

例 4.7 证明反常二重积分

$$I=\iint\limits_{(\sigma)}\frac{1}{|x|+|y|}\mathrm{d}\sigma$$

收敛，其中$(\sigma)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$.

证 由于

$$(|x|+|y|)^2\geqslant x^2+y^2,$$

从而在(σ)内除点$(0,0)$外有

$$\frac{1}{|x|+|y|}<\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{\rho},$$

由定理 4.7 可知反常重积分 I 收敛. ▌

习题 6.4

(A)

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}$；　　(2) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x\mathrm{d}x$；

(3) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^1\sqrt{1+\alpha^2-x^2}\mathrm{d}x$.

2. 求下列函数的导数：

(1) $F(x)=\int_x^{x^2}e^{-xy^2}\mathrm{d}y$；　　(2) $F(y)=\int_{a+y}^{b+y}\frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}x$；

(3) $F(x)=\int_0^x(x+y)f(y)\mathrm{d}y$，其中 f 为可微函数，求 $F''(x)$.

3. 利用定理 4.2 计算下列积分：

(1) $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^{\pi/2}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\mathrm{d}x$ $(a>0,b>0)$.

4. 利用定理 4.3 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x$ $(a>0,b>0)$.

5. 计算下列反常重积分：

(1) $\iint\limits_{(D)}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$，$(D)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$；

(2) $\iint\limits_{(D)}\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma$，$(D)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$；

(3) $\iint\limits_{(D)}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$(D)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x\}$；

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\,dxdy$.

(B)

1. 设 $F(x)=\int_a^b f(y)\,|x-y|\,dy$，其中 $a<b$，且 $f(y)$ 为可微函数，求 $F''(x)$.

2. 设 f 有连续的一阶偏导数，求 $F(\alpha)=\int_0^{\alpha} f(x+\alpha,x-\alpha)\,dx$ 的导数 $\frac{dF}{d\alpha}$.

*3. 试证明定理 4.6.

第五节 重积分的应用

在第三章定积分应用一节中已经看到，求一个非均匀连续分布在区间 $[a,b]$ 上的可加量 Q，可以通过"分""匀""合""精"四步来建立积分式得到，这四步中的关键是"匀"，也即是建立积分微元. 我们还看到，如果把分布在子区间 $[a,x]$ $(x\in[a,b])$ 上的量记作 $Q(x)$，那么在通常情况下，这个积分微元就是 $Q(x)$ 的微分，它通常可以在微小子区间 $[x,x+dx]$ 上，通过处理相应均匀量的乘法公式得到.

如果所求量 Q 是非均匀地连续分布在平面或空间的某一区域 (Ω) 上，那么要计算它就要建立相应的二重或三重积分. 和定积分情形一样，建立积分式的关键在于求得积分微元，下面我们就来阐述这一问题.

5.1 重积分的微元法

1. 区域函数及其对域的导数

让我们以求连续分布在平面区域 (σ) 上的质量 m 这一问题来说明有关概念. 把由区域 (σ) 的所有可能的子区域 $(\Delta\sigma)$ 所构成的集合记作 Ω_σ. Ω_σ 中的任一元素 $(\Delta\sigma)$ 对应着确定的质量，因而质量 m 可以看作是定义在 Ω_σ 上的一个函数，记作

$$m=F((\Delta\sigma)),\quad (\Delta\sigma)\in\Omega_\sigma.$$

为了研究物质在 (σ) 上分布的疏密情况，人们引入了面密度的概念. 当物质均匀分布时，面密度

$$\mu=\frac{F((\Delta\sigma))}{\Delta\sigma}\quad(\Delta\sigma \text{ 是域} (\Delta\sigma) \text{ 的面积})；$$

当物质非均匀分布时，若 $(\Delta\sigma)$ 收缩为其中一点 (x,y) 时上述比值的极限存在，则将此极限值规定为此平面物体在点 (x,y) 处的面密度，即

$$\mu=\lim_{(\Delta\sigma)\to(x,y)}\frac{F((\Delta\sigma))}{\Delta\sigma}=f(x,y),\quad (x,y)\in(\Delta\sigma).$$

显然面密度 μ 是点 (x,y) 的函数.

容易看出，在点 M 处的面密度实际上就是质量函数 F 在点 M 处对区域面积的变化率.

一般地，把由平面区域 (σ) 中一切子区域 $(\Delta\sigma)$ 构成的集合记作 Ω_σ，则映射 $F:\Omega_\sigma\to\mathbf{R}$ 称为**区域函数**，记作

$$F=F((\Delta\sigma)),\quad (\Delta\sigma)\in\Omega_\sigma,$$

其中 Ω_σ 称为其定义域.

为了研究此区域函数 F 对区域面积的变化率，相应于面密度，我们引入如下定义：

定义 5.1 设 F 是定义于 Ω_σ 上的区域函数，$M(x,y)$ 是 (σ) 中的一点. 在 (σ) 内任作一包含点 M 的子域 $(\Delta\sigma)$，$(\Delta\sigma)\in\Omega_\sigma$，其面积记为 $\Delta\sigma$. 若保持 M 点不动，当 $(\Delta\sigma)$ 的直径 $d\to 0$（即 $(\Delta\sigma)\to M$）时比式 $\dfrac{F((\Delta\sigma))}{\Delta\sigma}$ 的极限存在，记作 $f(M)$，则称此极限值 $f(M)$ 为区域函数 F 在点 M 处对区域面积的导数或对区域 (σ) 的**导数**，简称为区域函数 F 在点 M 处的导数. 记作

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\sigma}=\lim_{d\to 0}\frac{F((\Delta\sigma))}{\Delta\sigma}=f(M),\tag{5.1}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\sigma}=f(x,y).$$

想一想：

能将(5.1)式中的 $d\to 0$ 改为 $\Delta\sigma\to 0$ 吗？

并称 $f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 为区域函数 F 在点 $M(x,y)$ 处对区域 (σ) 的**微分**，简称为区域函数 F 在点 M 处的微分. 记作

$$\mathrm{d}F=f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

由(5.1)式可见

$$\frac{F((\Delta\sigma))}{\Delta\sigma}-f(M)=\alpha(\Delta\sigma),$$

其中 $\alpha(\Delta\sigma)$ 是关于 $\Delta\sigma$ 的无穷小量. 于是，

$$F((\Delta\sigma))=f(x,y)\Delta\sigma+\alpha(\Delta\sigma)\cdot\Delta\sigma.$$

令 $\Delta\sigma=\mathrm{d}\sigma$，注意到 $\alpha(\Delta\sigma)\Delta\sigma$ 是 $\Delta\sigma$ 的高阶无穷小. 可见，区域函数 $F((\Delta\sigma))$ 的微分 $\mathrm{d}F=f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 是此区域函数 $F((\Delta\sigma))$ 关于 $\Delta\sigma$ 的线性主部. 这与一元函数的微分类似.

区域函数及其导数与微分的概念，不难推广到空间区域.

注意：这种导数概念与第五章中所讲的偏导数、全导数是不同的概念. 它在物理、力学及其他科学中同样有重要的地位. 例如，平面在点 M 的压强 $p(M)$ 是力函数 $P((\Delta\sigma))$ 在点 M 对区域 (σ) 的导数

$$p(M)=\left.\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\sigma}\right|_M=\lim_{(\Delta\sigma)\to M}\frac{P((\Delta\sigma))}{\Delta\sigma}.$$

2. 变域上的重积分对域的导数

在定积分中我们知道,变上限积分 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是上限 x 的函数.由微积分学第一基本定理可知,当 $f(x)$ 连续时,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(x).$$

在重积分中也有类似的结论,下面以二重积分为例来加以说明,三重积分完全类似.

设被积函数 $f\in C((\sigma))$,$M(x,y)$ 为域 (σ) 内任一点,任作一包含点 M 的子域 $(\Delta\sigma)\subseteq(\sigma)$,那么当被积函数 f 给定后,二重积分 $\iint\limits_{(\Delta\sigma)}f(M)\,\mathrm{d}\sigma$ 的值将随 $(\Delta\sigma)$ 而变,是区域 $(\Delta\sigma)$ 的函数,记作

$$\Phi((\Delta\sigma))=\iint\limits_{(\Delta\sigma)}f(M)\,\mathrm{d}\sigma,\quad M\in(\Delta\sigma)\subseteq(\sigma).$$

注意到 $f\in C((\sigma))$,由积分中值定理可知

$$\Phi((\Delta\sigma))=\iint\limits_{(\Delta\sigma)}f(M)\,\mathrm{d}\sigma=f(\bar{x},\bar{y})\Delta\sigma,$$

其中点 $(\bar{x},\bar{y})\in(\Delta\sigma)$,$\Delta\sigma$ 是 $(\Delta\sigma)$ 的面积,于是

$$\frac{\Phi((\Delta\sigma))}{\Delta\sigma}=f(\bar{x},\bar{y}).$$

固定 M,令子域 $(\Delta\sigma)$ 的直径 $d\to0$,即令 $(\Delta\sigma)$ 收缩到点 $M(x,y)$,从而 $(\bar{x},\bar{y})\to(x,y)$,由 $f(x,y)$ 的连续性和区域函数导数的定义可得

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\sigma}=\lim_{d\to0}\frac{\Phi((\Delta\sigma))}{\Delta\sigma}=f(x,y).\tag{5.2}$$

(5.2)式表明:连续函数在变域上的二重积分作为区域函数,它在点 (x,y) 处对区域的导数等于被积函数在该点的值.

由(5.2)式可知

$$\Phi((\Delta\sigma))=f(M)\Delta\sigma+o(\Delta\sigma),\tag{5.3}$$

其中 $o(\Delta\sigma)$ 当 $(\Delta\sigma)\to M$ 点时是 $\Delta\sigma$ 的高阶无穷小.

令 $\Delta\sigma=\mathrm{d}\sigma$,可见,当 f 在 (σ) 上连续时,二重积分 $\iint\limits_{(\sigma)}f(M)\,\mathrm{d}\sigma$ 中的被积表达式 $f(M)\,\mathrm{d}\sigma$ 实际上就是区域函数 $\Phi((\Delta\sigma))$ 关于 $\Delta\sigma$ 的线性主部.区域函数 $\Phi((\Delta\sigma))$ 对区域的微分.也就是区域函数 $\Phi((\Delta\sigma))$ 关于 $\Delta\sigma$ 的线性主部.

注:由(5.2)与(5.3)式可见,尽管区域函数不能用平面坐标直接给出,但它的线性主部以及变化率均可通过二元函数表出.

3. 微元法

由(5.3)式可知,如果把一个在域 (σ) 上关于区域具有可加性的量 Φ 视为一定

义在 Ω_n 上的区域函数在区域 (σ) 上的值，并且能把它用二重积分 $\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 来表示，那么当 $f(x,y)$ 在 (σ) 上连续时，积分微元 $f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 就是这一区域函数 Φ 对区域的微分. 因此，在建立 Φ 的积分表达式时，寻找积分微元就是寻找区域函数 Φ 的微分 $\mathrm{d}\Phi$，也就是寻找区域函数 $\Phi((\Delta\sigma))$ 的线性主部. 在处理实际问题中，与定积分类似，通常在微小区域 $(\mathrm{d}\sigma)$ 中把非均匀分布的量 Φ 视为均匀分布，或者将微小区域 $(\mathrm{d}\sigma)$ 看作一点，然后利用已知的几何或物理公式，通过处理相应均匀量所用的乘法得到的近似值往往就是所求的微分 $\mathrm{d}\Phi$，也就是我们要寻求的积分微元. 求得了积分微元 $\mathrm{d}\Phi$ 后，立即可写出计算 Φ 的二重积分表达式. 这种方法称为重积分的**微元法**. 下面我们以液体的静压力为例来具体说明.

注意：求积分微元时，首先分析造成所求量 Φ 非均匀分布的原因，它往往是由于某一相关量 f 变化所引起的. 将此量看作不变，用处理相应均匀分布的乘法，得出的乘积 $f\cdot\mathrm{d}\sigma$ 往往就是所求的微元
$$\mathrm{d}\Phi = f\cdot\mathrm{d}\sigma.$$

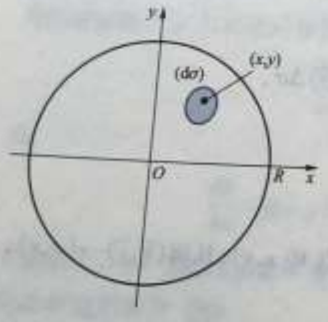

图 6.41

例 5.1 设有一水平放置的半径为 R 的圆管道（图 6.41）内部充满液体，已知液体在管道的横截面上的压强 $p=f(x,y)$ 为一连续函数，求液体对管道闸门（垂直于管道的轴）的静压力 P.

解 在管道闸门上建立平面直角坐标系，取圆心为坐标原点. 由于压强随点而变，所以闸门上静压力的分布是非均匀的，并且关于区域具有可加性，因此，这显然是在圆域 (σ)：$x^2+y^2\leqslant R^2$ 上的二重积分问题.

为寻找压力微元，我们在微小区域 $(\mathrm{d}\sigma)$ 上，把非均匀分布的压力看作是均匀的，即把变动的压强 p 看作是不变的，等于 $(\mathrm{d}\sigma)$ 上一点 (x,y) 处压强的值 $f(x,y)$. 记 $(\mathrm{d}\sigma)$ 的面积为 $\mathrm{d}\sigma$，于是有压力微元
$$\mathrm{d}P = f(x,y)\mathrm{d}\sigma, \tag{5.4}$$
从而
$$P = \iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$
比如，设水平管道中充满水（水的密度为 μ），则点 (x,y) 处的压强
$$p = \mu g(R-y),$$
即 $f(x,y)=(R-y)\mu g$，其中 g 为重力加速度，从而水对闸门的静压力为
$$P = \iint\limits_{(\sigma)} \mu g(R-y)\mathrm{d}\sigma = \mu g\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R (R-\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho = \mu g\pi R^3. \quad ▌$$

若把压力 P 视为区域函数，则

$$\frac{dP}{d\sigma}=p=f(x,y),$$

因而(5.4)式中的 $f(x,y)d\sigma$ 就是这个区域函数 P 对区域的微分.

☞二维码 6.5.1 用微元法建立重积分表达式的思想剖析.

5.2 应用举例

例 5.2 求物质均匀分布，半径为 a 的半球体的质心.

解 我们先回顾一下质点系质心的计算.设空间内有 n 个质点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$，P_i 的质量为 m_i；坐标为 $(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 的质点 P_i 对 xOy 坐标平面的静矩为 m_iz_i.由于质点系对各坐标平面的静矩具有可加性，因而上述质点系对 xOy,yOz,zOx 坐标平面的静矩分别为

$$M_{xy}=\sum_{i=1}^{n}m_iz_i,\quad M_{yz}=\sum_{i=1}^{n}m_ix_i,\quad M_{zx}=\sum_{i=1}^{n}m_iy_i.$$

由物理学知道，如果把质点系的质量集中在这样一点 P，使得集中的质量在点 P 对各坐标平面的静矩分别等于质点系对同一坐标平面的静矩，那么点 P 就称为该质点系的**质心**.于是可求得质心 $P(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 的坐标为

$$\bar{x}=\frac{M_{yz}}{m},\quad \bar{y}=\frac{M_{zx}}{m},\quad \bar{z}=\frac{M_{xy}}{m},\quad m=\sum_{i=1}^{n}m_i.$$

现在来计算上述半球体的质心.建立坐标系如图 6.42 所示，由对称性可知质心应在 z 轴上，从而

$$\bar{x}=0,\ \bar{y}=0.$$

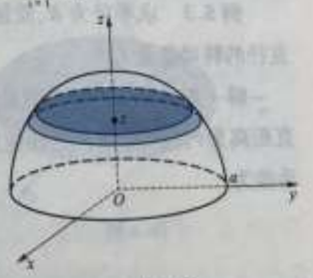

图 6.42

为求 $\bar{z}$，我们首先需要求此半球体对 xOy 平面的静矩.由于半球体上各点到 xOy 平面的距离不尽相同，因而上半球体对 xOy 平面的静矩是一个非均匀分布的可加量.容易看出，这是一个三重积分问题.将半球体所在的区域 (V) 划分成若干子域，把微小子域 (dV) 近似地看作是一个质点 (x,y,z)，(dV) 中的质量都集中于此点，(dV) 的体积记作 dV.这样一来，就把半球体离散化而看作是一个质点系.容易看出，(dV) 上的质量对 xOy 平面的静矩近似地等于

$$dM_{xy}=KzdV,$$

它就是此半球体对 xOy 平面的静矩微元，其中常数 K 是半球体的体密度.从而

$$M_{xy}=\iiint\limits_{(V)}KzdV,$$

其中(V)为$0\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.利用柱面坐标可求得

$$M_{xy}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{\sqrt{a^2-\rho^2}}Kz\mathrm{d}z=\frac{K\pi}{4}a^4.$$

又容易求得半球体的质量为

$$m=\iiint\limits_{(V)}K\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{\sqrt{a^2-\rho^2}}K\mathrm{d}z=\frac{2K\pi}{3}a^3.$$

于是$\bar z=\frac{M_{xy}}{m}=\frac{3}{8}a$,故所求质心为$P\left(0,0,\frac{3}{8}a\right)$.

应当指出,如果我们把此半球体用垂直于z轴的平面切成薄片,那么在z轴上截距为z到$z+\mathrm{d}z$的薄片体积可视为$\pi(a^2-z^2)\mathrm{d}z$.注意到其上各点的竖坐标可近似地看成是不变的,均等于z,于是可立即得到此薄片对xOy平面的静矩

注:读者不难看出,这种作法其实就相当于在柱面坐标下,对三重积分利用"先重后单"的思想化成累次积分来计算的方法.

$$\mathrm{d}M_{xy}=z\cdot K\pi(a^2-z^2)\mathrm{d}z,$$

从而

$$M_{xy}=\int_0^a K\pi z(a^2-z^2)\mathrm{d}z=\frac{K\pi}{4}a^4.\quad \blacksquare$$

例 5.3 求半径为R、质量均匀分布的圆盘对于其中心轴的转动惯量I_O和对其直径的转动惯量I_D.

解 先回顾一下转动惯量的概念.设有一质量为m的质点,它到一已知轴L的垂直距离为r,绕轴L旋转的角速度为ω.由于质点转动时的切线速度为$v=r\omega$,因而它的动能为

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}(mr^2)\omega^2. \tag{5.5}$$

如果此质点平动,则动能为

$$E_K=\frac{1}{2}mv^2, \tag{5.6}$$

其中质量m为平动惯性大小的度量.将(5.5)式与(5.6)式比较可见,mr^2相当于平动时的质量m,它是质点转动时惯性大小的度量,称为质点对轴L的**转动惯量**.由力学可知,质点系对同一轴的转动惯量也具有可加性,即质点系对轴L的转动惯量等于各质点对L转动惯量之和.

现在回到我们的问题.设圆盘的面密度为常数μ,取圆盘的中心为坐标原点,z轴为中心轴,则圆盘上各点到z轴的距离$r=\sqrt{x^2+y^2}$,它随点的位置而异,圆盘对其

中心轴的转动惯量在圆盘上是非均匀分布的，并且具有可加性，因此需要用二重积分来计算.设圆盘所在区域为(σ)，把(σ)任意划分成若干小区域，首先求点(x,y)处的质量微元$\mathrm{d}m=\mu\mathrm{d}\sigma$对中心轴的转动惯量，即转动惯量微元

$$\mathrm{d}I_O=r^2\mathrm{d}m=\mu(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma,$$

从而

$$I_O=\iint_{(\sigma)}\mu(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\mu\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{\pi\mu R^4}{2}.$$

因为圆盘的质量$m=\mu\pi R^2$，故I_O也可写作

$$I_O=\frac{mR^2}{2}.$$

由对称性可知

$$I_D=I_x=I_y,$$

由上面计算可知，

$$I_O=I_x+I_y,$$

故

$$I_D=\frac{1}{2}I_O=\frac{mR^2}{4}.\quad \blacksquare$$

想一想：

(1) 试用圆心在原点的同心圆划分圆盘，通过半径为ρ与$\rho+\mathrm{d}\rho$的圆周所围成圆环的转动惯量来求圆盘的转动惯量.

(2) 这样计算与例5.3计算法有何关系？

例 5.4 设有一圆板，半径为R，密度为一常数μ，在板的中心垂线上有一质量为1的质点P'，求板对该质点的引力.

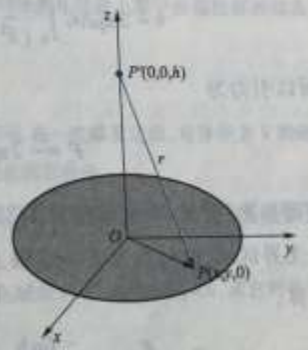

图 6.43

解 设质点P'与圆心的距离为h，取坐标系如图6.43所示.由Newton万有引力定律可知，若有质量分别为m与m'的质点P与P'，则P对P'的引力为

$$\boldsymbol{F}=G\frac{mm'}{r^2}\boldsymbol{e}_r,$$

其中r为P与P'两点间的距离，$\boldsymbol{e}_r$为由P'指向P的单位向量，G为万有引力常量.现在，点P'到圆板内各点的距离不尽相同，方向也随圆板内点的不同而改变.因此，我们需要将圆板划分成小块，运用积分的思想来求其引力.将圆板所占区域(σ)任意划分，把微元$(\Delta\sigma)$看作一质点P，它对质点P'的引力即引力微元可应用Newton万有引力公式得到：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=G\frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2}\mu\mathrm{d}\sigma=G\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\mu\mathrm{d}\sigma.$$

由于 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 为一向量，没有可加性，要把它在 (σ) 内无限累加，只能对其分量分别进行。由图 6.43 可见

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{P'P}=(x,y,-h),$$

从而

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\left(\frac{G\mu x}{(x^2+y^2+h^2)^{3/2}}\mathrm{d}\sigma,\frac{G\mu y}{(x^2+y^2+h^2)^{3/2}}\mathrm{d}\sigma,\frac{-G\mu h}{(x^2+y^2+h^2)^{3/2}}\mathrm{d}\sigma\right).$$

因此，要求引力，一般说来需要计算三个二重积分.然而，对于我们现在的问题，由对称性易见，引力 $\boldsymbol{F}$ 在 x 轴和 y 轴上的分量 F_x 与 F_y 必因相互抵消而为零，即 $F_x=F_y=0$，于是只需计算 F_z.采用极坐标得

想一想：

若用同心圆划分圆盘，通过半径 ρ 与 $\rho+\mathrm{d}\rho$ 所围圆环对点 P' 的引力来求圆盘对点 P 的引力，应如何求？

$$F_z=\iint_{(\sigma)}\frac{-G\mu h}{(x^2+y^2+h^2)^{3/2}}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{-G\mu h}{(h^2+\rho^2)^{3/2}}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=-2\pi\mu hG\int_0^R\frac{\rho}{(h^2+\rho^2)^{3/2}}\mathrm{d}\rho=-2\pi\mu G\left(1-\frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}}\right), \tag{5.7}$$

所以引力为

$$\boldsymbol{F}=-2\pi\mu G\left(1-\frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}}\right)\boldsymbol{k}.\ \blacksquare$$

值得指出，在 $R\gg h$ 的情况下，可以把半径为 R 的圆域 (σ) 视为全平面，即将 (σ) 视为一无界区域，这时引力 $\boldsymbol{F}$ 在 z 轴上的投影可作为无界区域 (σ) 上的反常二重积分计算，

$$F_z=\iint_{(\sigma)}\frac{-G\mu h}{(x^2+y^2+h^2)^{3/2}}\mathrm{d}\sigma=\lim_{n\to+\infty}\iint_{(\sigma_n)}\frac{-G\mu h}{(x^2+y^2+h^2)^{3/2}}\mathrm{d}\sigma,$$

其中 (σ_n) 是半径为 R_n 的圆域，当 $n\to+\infty$ 时 $R_n\to+\infty$，于是由(5.7)式可得：

$$F_z=\lim_{n\to+\infty}\left[-2\pi\mu G\left(1-\frac{h}{\sqrt{h^2+R_n^2}}\right)\right]=-2\pi\mu G,$$

从而引力

$$\boldsymbol{F}=-2\pi\mu G\boldsymbol{k}.$$

习题 6.5

(A)

1. 求由下列曲线所围成的均匀薄板的质心坐标：

(1) $ay=x^2, x+y=2a\ (a>0)$；

(2) $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi, a>0)$ 与 x 轴；

(3) $\rho=a(1+\cos\theta)\ (a>0)$.

2. 求边界为下列曲面的均匀物体的质心：

(1) $z=c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}, z=0\ (a>0,b>0,c>0)$；

(2) $z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}, x^2+y^2=2az\ (a>0)$；

(3) $z=x^2+y^2, x+y=a, x=0, y=0, z=0\ (a>0)$.

3. 设一薄板由 $y=e^x, y=0, x=0, x=2$ 所围成，其面密度 $\mu(x,y)=xy$，求薄板对两个坐标轴的转动惯量 I_x 和 I_y.

4. 求物质均匀分布的物体：$x^2+y^2+z^2\leqslant 2, x^2+y^2\geqslant z^2$ 对 z 轴的转动惯量.

5. 求物质均匀分布的底半径为 R，高为 H 的正圆柱体对于底的直径的转动惯量.

6. 求物质均匀分布的高为 H，半顶角为 α，体密度为 μ 的圆锥体对位于其顶点的一单位质量质点的引力.

7. 如果一个底半径为 R，高为 H 的正圆柱体上的任一点的密度在数量上等于自圆柱体的底面圆中心到该点距离的平方，试求该圆柱体的质量.

(B)

1. 一个火山的形状可以用曲面 $z=he^{-\sqrt{x^2+y^2}/(4h)}\ (z>0)$ 来表示.在一次爆发之后，有体积为 V 的熔岩附着在山上，使它具有和原来一样的形状.求火山高度 h 变化的百分比.

2. 在某一生产过程中，要在半圆形的直径上添上一个边与直径等长的矩形，使整个平面图形的质心落在圆心上，试求矩形的另一边长.

3. 一个物质均匀分布的圆柱体，全部质量为 M，占有的区域是 $x^2+y^2\leqslant a^2, 0\leqslant z\leqslant h$，求它对位于点 $(0,0,b)$ 且质量为 M' 的一个质点的引力，其中 $b>h$.

4. 设物体对轴 L 的转动惯量为 I_L，对通过质心 C 平行于 L 的轴 L_C 的转动惯量为 I_C，L_C 与 L 的距离为 a，试证：$I_L=I_C+ma^2$，其中 m 为物体的质量.这一公式称为**平行轴定理**.

5. 利用平行轴定理求半径为 R 的球体对于任一条切线 T 的转动惯量 I_T.

第六节　第一型线积分与面积分

6.1 第一型线积分

在本章第一节中我们已通过和式的极限式(1.4)给出了点函数 $f(M)$ 在形体 (Ω) 上积分的定义.当 (Ω) 是平面或空间的可求长曲线段 (C) 时，相应的积分就分别是平面或空间曲线积分，即