第1节 常数项级数

1.1 常数项级数的概念、性质与收敛原理

1.2 正项级数的审敛准则

1.3 变号级数的审敛准则

1.2 正项级数的审敛准则

定义： 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中各项均有 $a_n \geq 0$,

这种级数称为**正项级数**.

1.充要条件 2.比较法 3.积分审敛法

4.比值法 5.根值法

正项级数的特性

若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$为正项级数,显然有$s_{n+1} \geq s_n$　$\{s_n\}$单调递增

若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n$存在$\Rightarrow \{s_n\}$有界

若$\{s_n\}$有界 $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} s_n = s \Rightarrow$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛

1. 正项级数收敛的充要条件

定理1.2

正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛$\Leftrightarrow$部分和所成的数列 $\{s_n\}$有界.

注 正项级数发散必定发散 到$+\infty$

2.比较审敛法

定理1.3(比较准则I) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均为正项级数，

且 $a_n \le b_n (n=1, 2, \ldots)$

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

证明 (1) 设 $\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $\because a_n \le b_n,$

且 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le b_1 + b_2 + \cdots + b_n \le \sigma,$

即部分和数列有界 $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 设 $S_n \to \infty \ (n \to \infty)$ 且 $a_n \le b_n$,

则$\sigma_n \ge S_n \to \infty$ 不是有界数列

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散. 定理证毕.

推论 **定理2中的条件改为:**

$u_n \le k v_n$ （$n = N$，$N + 1, \ldots$),结论仍成立!

比较审敛法: 须有参考级数.

例1 证明调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的

证明 $\because x>0 \quad \ln(1+x)<x$

$$\therefore \qquad \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$发散，由比较判别法得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

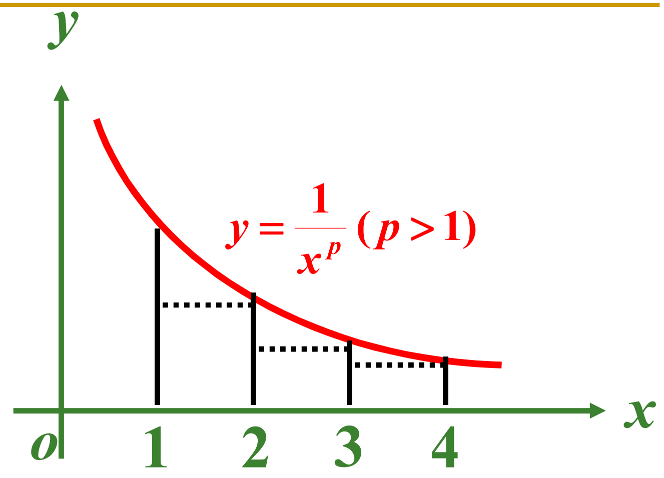
例2 讨论$P-$级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$的敛散性.

解 $P \le 0 \quad \frac{1}{n^p} \not\to 0 \quad \therefore$ 级数$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$发散

$P=1$ 由例1得$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散

$0<P<1 \quad \because \frac{1}{n^p} \ge \frac{1}{n} \quad \therefore \sum \frac{1}{n^P}$发散

设 $p>1$,由图可知 $\frac{1}{n^p}<\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x^p}$



$$S_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}$$

$$\leq 1+\int_1^2\frac{dx}{x^p}+\cdots+\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x^p}$$

$$=1+\int_1^n\frac{dx}{x^p}\quad=1+\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right)\ <1+\frac{1}{p-1}$$

即S_n有界，则$P-$级数收敛.

$$P-\text{级数}\begin{cases}\text{当}p>1\text{时，} & \text{收敛}\\ \text{当}p\leq 1\text{时，} & \text{发散}\end{cases}$$

重要参考级数：几何级数，P-级数，调和级数.

再次强调：

★综合得，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}\text{收敛} & p>1\\ \text{发散} & p\le 1\end{cases}$

★

等比级数$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$，$p-$级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$常作为参考级数.

例3　判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$的敛散性

解　$\because \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \frac{1}{n+1}$

又$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$发散，$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$发散。

练习：判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-n}$的敛散性.

3. 比较审敛法的极限形式:

定理1.4 (比较准则II)

设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$都是正项级数,如果$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lambda$,

则(1) 当$0<\lambda<+\infty$时,二级数有相同的敛散性;

(2) 当$\lambda=0$时，若$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛;

(3) 当$\lambda=+\infty$时，若$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散,则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散;

证明 (1) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lambda$　对于 $\varepsilon=\dfrac{\lambda}{2}>0,$

$\exists N$, 当 $n>N$ 时, $\lambda-\dfrac{\lambda}{2}<\dfrac{a_n}{b_n}<\lambda+\dfrac{\lambda}{2}$

即 $\dfrac{\lambda}{2}b_n<a_n<\dfrac{3\lambda}{2}b_n\ \ (n>N)$

由比较判别法的推论, 得证.

例 4 判定下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - n}$；

解 (1) $\because \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$, 原级数发散.

(2) $\because \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3^n - n}}{\frac{1}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{n}{3^n}} = 1$,

$\because \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$收敛，故原级数收敛.

EX.

1. 判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{n^2+n+1}\text{及}\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)\text{的敛散性。}$$

2. 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，能否推得$\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2$收敛?反之是否成立?

EX.

1. 判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{n^2+n+1}\text{及}\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)\text{的敛散性。}$$

解 $\because \arctan\dfrac{1}{n^2+n+1}\sim\dfrac{1}{n^2+n+1}\sim\dfrac{1}{n^2}$

$$\text{又}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\text{收敛}\quad\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{n^2+n+1}\text{收敛。}$$

$$\because\quad \sqrt[n]{n}-1=e^{\frac{1}{n}\ln n}-1\sim\frac{1}{n}\ln n$$

$$\text{又}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ln n\text{发散}\qquad\therefore\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)\text{发散。}$$

2. 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，能否推得$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛?反之是否成立?

解 由正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，可以推得$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛，

$$\because \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad ?$$

由比较判别法知$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

反之不成立. 例如：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散.

4. 柯西积分审敛法

定理1.5(积分准则)

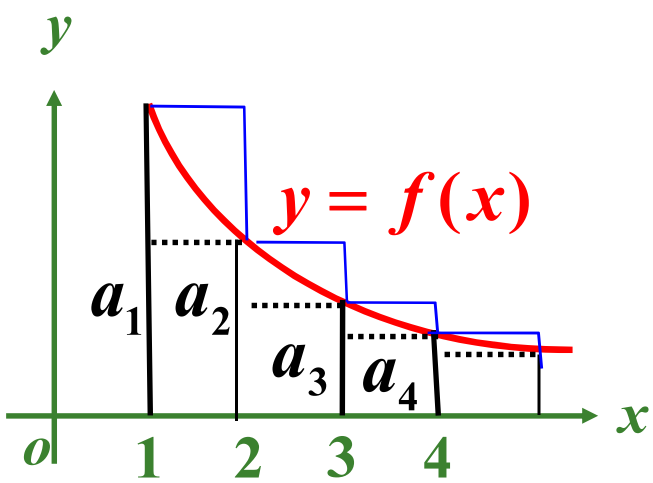
设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$为正项级数，若∃连续函数$f(x)$,满足

(1) $f(x)$在$[1,+\infty]$上单调减少;

(2) $f(x) \geq 0$;

(3) $a_n = f(n), n = 1,2,\cdots,$ 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{收敛} \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{收敛。}$$



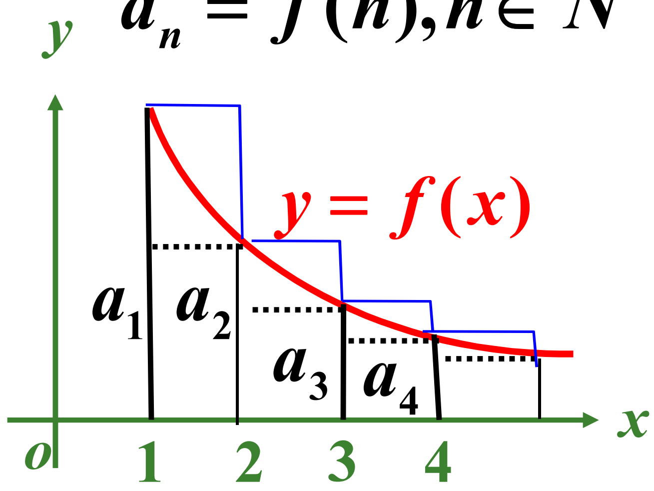
$$\boxed{f(i) \leq \int_{i-1}^{i} f(x)dx \leq f(i-1)}$$

$$i = 2,3,\cdots,n$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{收敛} \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{收敛}}$$

证明 由图可知

$$a_n = f(n), n \in N^+$$



$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$= f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$$

$$\le a_1 + \int_1^2 f(x)dx + \cdots + \int_{n-1}^{n} f(x)dx$$

$$S_n - a_1 \le \int_1^n f(x)dx$$

$$\le a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = S_{n-1} \quad \le S_n$$

$\therefore S_n$与$\int_1^n f(x)dx$有相同的敛散性...

例1.9 试证级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$，当 $P>1$ 时收敛；当 $0<P\le 1$ 时发散。

证 设 $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^P}\qquad (x\ge 2)$

则函数 $f(x)$ 在区间 $[2,+\infty)$上满足 $f(x)>0$

连续且单调减小 因为 $f'(x)<0, f(n)=\frac{1}{n(\ln n)^P}$

当 $P=1$时 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty}=+\infty$ 发散

当$P\ne 1$时

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^P}=\frac{1}{1-P}(\ln x)^{(1-P)}\Big|_2^{+\infty}=\begin{cases}+\infty & P<1\\ \frac{1}{P-1}(\ln 2)^{1-P} & P>1\end{cases}$$

注 $P-$级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$的敛散性用定理1.5判定特别容易。

5. 比值审敛法(达朗贝尔 D'Alembert 审敛法)

定理1.6(D'Alembert准则)

若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n > 0)$满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = l \quad (\text{或} \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty)，则$$

(1) 当$l < 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛；

(2) 当$l > 1$(或$l = +\infty$)时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散；

(3) 当$l = 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$不能判定.

证明 (1) $l<1$ 取r 使 $l<r<1$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l<r$， 由极限的保号性，

$\exists N>0$,当$n\geq N$ 有 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<r$

$a_{N+1}<ra_N$， $a_{N+2}<ra_{N+1}<r^2a_N, a_{N+3}<r^3a_N,\cdots$

$$a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{N+n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+N}$$

$\because r<1$， $\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n a_N$收敛

又$\because a_{N+n}<r^n a_N$， 由比较判别法， $\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛

$(2)\, l > 1$, $\because \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$, 由极限的保号性,

$N > 0$,当$n \ge N$ 有$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$,即$a_{n+1} > a_n$

$a_n \uparrow, a_n > a_N > 0 (n > N), \lim\limits_{n\to\infty} a_n \ne 0$

$\boxed{\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{发散}}$

类似地可证明:$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散.

$(3)\, l = 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散,$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛,$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{(n+1)^2} = 1$

注 **比值审敛法的优点：** 不必找参考级数.

1. 当$l=1$时比值判别法失效;

2. 该定理条件是充分的, 而非必要.

例 $\because a_n = \dfrac{2+(-1)^n}{2^n} \le \dfrac{3}{2^n} = v_n,$

$\therefore$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$ 收敛,

但 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2+(-1)^{n+1}}{2(2+(-1)^n)} = b_n,$ $\lim\limits_{n\to\infty} b_{2n} = \dfrac{1}{6},$ $\lim\limits_{n\to\infty} b_{2n+1} = \dfrac{3}{2},$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 不存在.

例5 判别下列级数的收敛性:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}\quad (3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$$

解 (1) $\because \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}}=\dfrac{1}{n+1}\to 0\quad (n\to\infty),$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ 收敛.

(2) $\because \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)!}{10^{n+1}} \cdot \dfrac{10^n}{n!} = \dfrac{n+1}{10} \to \infty \quad (n \to \infty),$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{10^n}$ 发散.

(3) $\because a_n = \dfrac{n!}{n^n}, \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \dfrac{n^n}{n!} = (\dfrac{n}{1+n})^n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$ 收敛。

6.根值审敛法 (柯西审敛法)

定理1.7(Cauchy准则)

若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$满足

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l \quad (\text{或}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\infty)\text{，则}$$

(1) 当$l<1$时,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛;

(2) 当$l>1(\text{或}l=+\infty)$时,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散;

(3) 当$l=1$时,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$不能判定.

例6 判断下列级数的收敛性。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n},\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{n}}{2n+1}\right)^n,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-(-1)^n}}{3^{\ln n}}$$

$$\because \sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty)\quad \text{级数}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}\text{收敛.}$$

例7 判断级数$\sum_{1}^{\infty}(\frac{b}{a_n})^n$的敛散性，其中$\{a_n\}$是以$a \neq 0$为极限的正数列，且$b > 0, b \neq a$.

解 $\because \sqrt[n]{u_n} = \frac{b}{a_n}$ $\quad \therefore \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b}{a_n} = \frac{b}{a}$

当$b > a$时，级数发散。当$b < a$时，级数收敛。

例8 判断级数$\sum_{1}^{\infty}\frac{b^n}{n^a}$的敛散性，其中$a > 0, b > 0$.

解:类似于例7用根值法! (可用比值法)

注意：可以证明对于正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,

若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$， 反之未必！

如,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n-(-1)^n}}$， $\because \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{2^{n-(-1)^n}}}=\dfrac{1}{2}<1$， $\therefore \sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n-(-1)^n}}$收敛.

但 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{2^{n-(-1)^n}}{2^{n+1-(-1)^{n+1}}}=b_n$， $\lim\limits_{n\to\infty}b_{2n}=\dfrac{1}{8}$， $\lim\limits_{n\to\infty}b_{2n+1}=2$,

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 不存在.

小结

正项级数敛散性的

六个判敛散定理

1. 设$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$都收敛，且$b_n \le a_n \le c_n$

$(n = 1,2,\cdots)$，能否推出$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛？

2 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$均收敛,试证：

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$也收敛。

1. 设$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$都收敛，且$b_n \le a_n \le c_n$

$(n=1,2,\cdots)$，能否推出$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛？

证明：$\because 0 \le a_n - b_n \le c_n - b_n$

而 $\sum_{1}^{\infty}(c_n - b_n)$收敛

$\therefore \sum_{1}^{\infty}(a_n - b_n)$收敛

又$\because \sum_{1}^{\infty}(a_n - b_n)$收敛，$\sum_{1}^{\infty} b_n$收敛 $\therefore \sum_{1}^{\infty} a_n$收敛.

2 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$均收敛,试证:

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$, $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n b_n}$收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$也收敛。

证明 $\because \sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$均收,$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$收敛

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0 \Rightarrow \exists N>0, n>N, (a_n+b_n)^2 \le (a_n+b_n)$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$收敛;

又$\because a_n+b_n \ge 2\sqrt{a_n b_n}$,

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n b_n}$收敛

令 $b_n=\frac{1}{n^2}$, $\because \sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收

$\therefore$由上述推导可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$收敛。

二、判敛散性

(取参考级数，$b_n=\dfrac{1}{n^{\alpha}}, 1<\alpha<\dfrac{3}{2}$ 或积分判别法)

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$　收

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1+n)^2\tan\frac{\pi}{n^3}$　散　(取参考级数，$b_n=\dfrac{1}{n}$)

(思考：$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1+n)^2\tan\frac{\pi}{n^{\beta}}$)

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

解 $$a_n=\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^p}\frac{1}{n-1}$$

取 $$b_n=\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}$$

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{n^{\frac{p}{2}+1}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^p}\frac{1}{n-1}\to\frac{1}{2^p}(n\to\infty)$$

$\therefore\ p>0$收, $p\le 0$散.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)$

提示：Tarloy展开: $\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$5.\quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1+n)^{\ln n}}{(\ln n)^n}$$

(Cauchy判别法

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = 0 < 1)$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}$$

$$\left(\frac{n \sin^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n} \le \frac{n}{2^n}\right)$$

再用比值法或根值法！