号性知 $\forall t_0 \in [a,b]$，由 $x_n(t_0) \geqslant 0$ 知 $x(t_0) \geqslant 0$. 即 $x(t) \in A$.

习　题　8.3

2. 设 $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left\{x \,\middle|\, \frac{1}{n+1} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, x \in \mathbf{R}\right\}$，证明 $mA = 1$.

证法Ⅰ　$A = (0,1]$.

显然 $A \subseteq (0,1]$，又 $\forall x \in (0,1]$，令 $n = \left[\frac{1}{x}\right]$，由于 $\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \left[\frac{1}{x}\right] + 1$，于是 $\frac{1}{n+1} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}$，故 $x \in A$. 即 $A = (0,1]$.

从而 $mA = m(0,1] = 1$.

证法Ⅱ　令 $I_n = \left\{x \,\middle|\, \frac{1}{n+1} < x \leqslant \frac{1}{n}\right\}$，则 $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$，且 $\forall i \neq j, U_i \cap U_j = \varnothing$. 由可测集的完全可加性，

$$mA = \sum_{n=1}^{\infty} mI_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

4. 设 E_1 与 E_2 都是有界可测集，且 $E_1 \subseteq E_2$，证明

$$m(E_2 \setminus E_1) = mE_2 - mE_1.$$

证明　由于 $E_1 \subseteq E_2$，则 $E_1 \cup (E_2 \setminus E_1) = E_2$ 且 $E_1 \cap (E_2 \setminus E_1) = \varnothing$.

由可测集的有限可加性 $m(E_1 \cup (E_2 \setminus E_1)) = mE_1 + m(E_2 \setminus E_1) = mE_2$，于是 $m(E_2 \setminus E_1) = mE_2 - mE_1$.

5. 证明函数 f 在可测集 E 上可测的充要条件是对任意实数 α，集合 $E(f < \alpha)$ 可测.

证明　由于 $E(f<\alpha) = E \setminus \{x \mid f(x) \geqslant \alpha, x \in E\} = E \setminus E(f \geqslant \alpha)$，所以 f 在可测集 E 上可测 $\xLeftrightarrow{\text{定理3.2}} E(f \geqslant \alpha)$ 可测 $\Leftrightarrow E(f<\alpha)$ 可测.

6. 设 f 与 g 都是可测集 E 上的可测函数，证明

$$E(f \geqslant g) = \{x \mid f(x) \geqslant g(x), x \in E\}$$

也是可测集.

证明　由于有理数集是可数集，则可表示为 $\{r_n\}(n=1,2,\cdots)$.

又　$E(f \geqslant g) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E(f \geqslant r_n) \cap E(g \leqslant r_n))$，而由于 f,g 均是可测集 E 上的可测函数，所以 $E(f \geqslant r_n)$ 与 $E(g \leqslant r_n) = E(g < r_n) \cup \left(\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} E\left(r_n \leqslant g < r_n + \frac{1}{m}\right)\right)$ 均

可测，从而 $E(g\leqslant f)$ 也可测.

7. 设 f 是 E 上的可测函数，E_1 是 E 的一个可测子集，证明 f 在 E_1 上也是可测函数.

证明 由 f 是 E 上的可测函数，所以对 $\forall\alpha\in\mathbf{R}$，$E(f\geqslant\alpha)$ 是可测集. 又 $E_1(f\geqslant\alpha)=E_1\cap E(f\geqslant\alpha)$ 可知 $E_1(f\geqslant\alpha)$ 可测，故 f 也是 E_1 上的可测集.

10. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}3x^2, & x\text{ 为无理数},\\ 1, & x\text{ 为有理数}.\end{cases}$$

问 f 在区间 $[0,1]$ 上是否 L 可积？若可积，试求其积分值.

解 由于 $\forall x\in[0,1]$，$0<f(x)<3$，所以 $f(x)$ 为有界函数. 又由于 $[0,1]$ 上的有理数集为零测度集，所以在 $[a,b]$ 上 $f(x)=g(x)(a,e)$，其中 $g(x)=3x^2$，$x\in[0,1]$.

又 $g(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，而也是可测函数. 故 $f(x)$ 也是可测函数，由定理 3.4，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 L 可积，且 $\int_{[0,1]}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=x^3\Big|_0^1=1$.

11. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(R)\int_0^1\dfrac{\sin nx}{nx}\mathrm{d}x$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(R)\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(R)\int_0^1\dfrac{x^n}{1+\sin|x|}\mathrm{d}x$.

解 (1) 由于 $\forall x>0$，恒有 $x>\sin x$，则 $\dfrac{\sin nx}{nx}<1$，$\forall x\in(0,1]$. 又 $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{nx}$ 是 $(0,1]$ 上的连续函数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\sin nx}{x}\right)=0$. 由定理 3.7 结论(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(R)\int_0^1\dfrac{\sin nx}{nx}\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}(L)\int_0^1\dfrac{\sin nx}{nx}\mathrm{d}m=(L)\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin nx}{nx}\mathrm{d}m=0$.

(2) 由于 $f_n(x)=\mathrm{e}^{-nx^2}$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-nx^2}=0$，$|f_n(x)|\leqslant 1$，对 $\forall x\in[0,1]$. 由定理 3.7(2)可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(R)\int_0^1\mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}(L)\int_0^1\mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}m\\&=(L)\int_0^1\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}m=0.\end{aligned}$$

(3) 由于对 $\forall x\in[0,1]$, $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+|\sin x|}\leqslant\dfrac{1}{2}x^n\leqslant\dfrac{1}{2}$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$. 故对 $[0,1]$ 上的连续函数列 $f_n(x)$ 恒有 $\lim\limits_{n\to\infty}(R)\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}(L)\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}m=(L)\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}m=0$.

12. 证明在 $[a,b]$ 上 p 方可积函数必是 L 可积函数，即

$$L^p([a,b])\subseteq L([a,b])\qquad(1\leqslant p<+\infty).$$

证明 若 $p=1$, 则结论显然成立；

若 $1<p<+\infty$, 对 $\forall f\in L^p([a,b])$, 令 $A=\{x\mid |f|\geqslant 1, x\in[a,b]\}$, $B=[a,b]\setminus A$, 则有 $\int_{[a,b]}|f|\,\mathrm{d}m=\int_A|f|\,\mathrm{d}m+\int_B|f|\,\mathrm{d}m\leqslant\int_A|f|^p\mathrm{d}m+\int_B\mathrm{d}m=\int_A|f|^p\mathrm{d}m+mB<+\infty$. 即 $|f|$ 是 L 可积，从而 f 是 L 可积.

习 题 8.4

2. 设 M 为 Hilbert 空间 X 的凸子集，$\{x_n\}\subseteq M$, 且

$$\|x_n\|\to d=\inf_{x\in M}\|x\|\quad(n\to\infty),$$

证明 $\{x_n\}$ 是 X 中的收敛点列.

证明 对任意的 x_m,x_n, 由平行四边形公式可得

$$2\left\|\frac{x_m-x_n}{2}\right\|^2=\|x_m\|^2+\|x_n\|^2-2\left\|\frac{x_m+x_n}{2}\right\|^2.$$

又由于 M 是凸集，$x_m,x_n\in M$, 所以 $\dfrac{x_m+x_n}{2}\in M$, 于是 $\left\|\dfrac{x_m+x_n}{2}\right\|\geqslant d$, 代入上式得

$$0\leqslant 2\left\|\frac{x_m-x_n}{2}\right\|^2\leqslant\|x_m\|^2+\|x_n\|^2-2d^2.$$

令 $m,n\to\infty$, 则 $\|x_m-x_n\|^2\to 0$, 故 $\{x_n\}$ 是 M 中的基本列. 由 X 的完备性知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x\in X$, 即 $\{x_n\}$ 为 X 中的收敛点列.

3. 设 X 为 Hilbert 空间，M 是 X 的真闭子空间，证明 $M^\perp$ 必含有非零元.

证明 由于 M 是 X 的真闭子空间，所以 $X\setminus M\neq\varnothing$, 从而存在 $x\neq\theta$, 且 $x\in X\setminus M$. 由正交分解定理知 $\exists x_0\in M$, 使 $x-x_0\in M^\perp$. 又因 $x\notin M$, $x_0\in M$, 故 $x-x_0\neq\theta$. 即 $M^\perp$ 中必有非零元.

4. 试求常数 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$ 使 $\int_0^1(\mathrm{e}^t-\alpha_0-\alpha_1 t-\alpha_2 t^2)\mathrm{d}t$ 取最小值.