由于质心为坐标原点,则物体对 yOz 坐标面的静矩

$$M_{yz} = \iiint\limits_{(V)} x\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}V = 0,\text{于是 } I_L = I_C + ma^2.$$

习　题　6.5

(A)

1. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}$;　(3) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^1 \sqrt{1+\alpha^2-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解　(1) 由于 $\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$ 在 $(x,\alpha)\in[0,1]\times[-1,1]$ 上连续,由定理 5.1

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2} = \int_0^1\left(\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

(3) $\sqrt{1+\alpha^2-x^2}$ 在 $[0,1]\times[-1,1]$ 上连续,由定理 5.1

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^1 \sqrt{1+\alpha^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{\alpha\to 0}\sqrt{1+\alpha^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

2. 求下列函数的导数.

(2) $F(y) = \int_{a+y}^{b+y}\frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}x$;

(3) $F(x) = \int_0^x (x+y)f(y)\,\mathrm{d}y$,其中 f 为可微函数,求 $F''(x)$.

解　由定理 5.4.

(2) $$F'(y) = \int_{a+y}^{b+y}\cos xy\,\mathrm{d}x + \frac{\sin(b+y)y}{b+y} - \frac{\sin(a+y)y}{a+y}$$
$$= \left(\frac{1}{y}+\frac{1}{b+y}\right)\sin y(b+y) - \left(\frac{1}{y}+\frac{1}{a+y}\right)\sin y(a+y).$$

(3) $$F'(x) = \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y + 2xf(x),$$
$$F''(x) = f(x) + 2f(x) + 2xf'(x) = 3f(x) + 2xf'(x).$$

3. 利用定理 5.2 计算下列积分.

(1) $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$; (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\,\mathrm{d}x\ (a>0,b>0)$.

解　(1) 令 $F(\alpha) = \int_0^1\frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

由$\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}$在$[0,1]\times[0,1]$上连续及定理5.2.

$$F'(\alpha)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\right]dx=\int_0^1\frac{x}{(1+x^2)(1+\alpha x)}dx$$
$$=\frac{1}{1+\alpha^2}\int_0^1\left(\frac{x+\alpha}{1+x^2}-\frac{\alpha}{1+\alpha x}\right)dx$$
$$=\frac{1}{1+\alpha^2}\left[\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}\alpha-\ln(1+\alpha)\right].$$

注意到 $F(0)=0,F(1)=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\int_0^1F'(\alpha)d\alpha.$

故
$$I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{1}{1+\alpha^2}\left[\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}\alpha-\ln(1+\alpha)\right]d\alpha$$
$$=\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\ln 2-\int_0^1\frac{\ln(1+\alpha)}{1+\alpha^2}d\alpha=\frac{\pi}{4}\ln 2-I,$$

从而 $I=\dfrac{\pi}{8}\ln 2.$

(2) 令 $F(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\alpha^2\sin^2x+\cos^2x)dx,F(1)=0.$

$$\alpha\neq 1,F'(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\alpha\sin^2x}{\alpha^2\sin^2x+\cos^2x}dx(令\ t=\tan^2x)$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha t^2}{(1+\alpha^2t^2)(1+t^2)}dt=\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{1+\alpha^2t^2}\right)dt$$
$$=\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\left[\arctan t-\frac{1}{\alpha}\arctan(\alpha t)\right]_0^{+\infty}$$
$$=\frac{\pi}{2}\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{\pi}{\alpha+1},$$
$$F(\alpha)=F(1)+\pi\int_1^{\alpha}\frac{d\alpha}{\alpha+1}=\pi[\ln(1+\alpha)-\ln 2].$$

故当 $a=b$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln a^2dx=\pi\ln a$;

$a\neq b$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\ln\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2\sin^2x+\cos^2x\right)+\ln b^2\right]dx$$
$$=F\left(\frac{a}{b}\right)+\pi\ln b=\pi\ln\frac{a+b}{2}.$$

4. 讨论下列含参变量反常积分在指定区间内的一致收敛性：

(2) $\int_1^{+\infty} x^b e^{-x} dx \quad (a \leqslant b \leqslant c)$；

(4) $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos x dx \quad (0 \leqslant a \leqslant a_1)$.

解 (2) 由于 $|x^b e^{-x}| \leqslant x^c e^{-x}$，

若 $c \leqslant 0$，由于 $|x^c e^{-x}| = x^c e^{-x} \leqslant e^{-x}$，而 $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ 收敛，故 $\int_1^{+\infty} x^c e^{-x} dx$ 收敛.

若 $c > 0$，必存在 $n \in \mathbf{N}_+$ 使 $c - n \leqslant 0$，则 $\int_1^{+\infty} x^{c-n} e^{-x} dx$ 收敛. 又 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$（$\alpha$ 为任意正实数），于是

$$\int_1^{+\infty} x^c e^{-x} dx = -x^c e^{-x} \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} c x^{c-1} e^{-x} dx$$

$$= \frac{1}{e} - c x^{c-1} e^{-x} \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} c(c-1) x^{c-2} e^{-x} dx$$

$$= \frac{1}{e} + \frac{c}{e} + c(c-1) \int_1^{+\infty} x^{c-2} e^{-x} dx$$

$$= \cdots = \frac{1}{e} \Big[1 + c + c(c-1) + \cdots +$$

$$e c(c-1) \cdots (c-n+1) \int_1^{+\infty} x^{c-n} e^{-x} dx \Big].$$

即 $\int_1^{+\infty} x^c e^{-x} dx$ 收敛.

故 $\int_1^{+\infty} x^b e^{-x} dx$ 当 $a \leqslant b \leqslant c$ 时一致收敛.

(4) 收敛但非一致收敛. 对 $\forall b \in (-\infty, +\infty)$，

由于 $|e^{-ax^2} \cos bx| \leqslant e^{-ax^2}$，$|x e^{-ax^2} \sin bx| \leqslant x e^{-ax^2}$，

而 $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx$ 与 $\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} dx$ 均收敛. 故含参变量 b 的积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx$ 与 $\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin bx dx$ 关于参数 $b \in (-\infty, +\infty)$ 一致收敛. 令 $F(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx$，则由定理 5.2，得 $F'(b) = -\frac{b}{2a} F(b)$，于是 $F(b) = F(0) e^{-\frac{b^2}{4a}}$.

由概率积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ 知：

$$F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{a}x)^2} d(\sqrt{a}x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

从而 $F(b)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$，故 $\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos x\mathrm{d}x=F(1)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{1}{4a}}$. 即 $\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos x\mathrm{d}x$ 收敛.

5. 利用定理5.3计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x\quad(a>0,b>0)$

解

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left[\int_a^b e^{-tx}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b\int_0^{+\infty}e^{-tx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_a^b\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\ln b-\ln a=\ln\frac{b}{a}.$$

6. 计算下列反常积分：

(1) $\iint\limits_{(D)}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\qquad (D)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$；

(2) $\iint\limits_{(D)}\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\qquad (D)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$；

(3) $\iint\limits_{(D)}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}\qquad (D)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x\}$；

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}2\pi(1-\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2})=2\pi$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_\varepsilon^1-\rho\ln\rho\mathrm{d}\rho=2\pi\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\varepsilon^2+\frac{1}{2}\varepsilon^2\ln\varepsilon\right)=\frac{\pi}{2}$.

(3) 原式 $=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_\varepsilon^{\cos\varphi}\mathrm{d}\rho=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\left(2-\frac{\pi}{2}\varepsilon\right)=2$.

(4) 原式 $=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^A\rho e^{-\rho^2}\cos\rho^2\mathrm{d}\rho$

$$=\pi\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sin A-\cos A}{e^A}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

(由于 $\sin A-\cos A$ 为有界函数，e^{-A} 为 $A\to+\infty$ 的无穷小，故 $\lim\limits_{A\to+\infty}\frac{\sin A-\cos A}{e^A}=0$).

(B)

1. 设 $F(x)=\int_a^b f(y)\mid x-y\mid\mathrm{d}y$，其中 $a<b$，且 $f(y)$ 可微函数，求 $F''(x)$.

解 若 $x\leqslant a$,则 $F(x)=\int_a^b f(y)(y-x)\mathrm{d}y$, 由定理 5.2

$$F'(x)=-\int_a^b f(y)\mathrm{d}y, F''(x)=0$$

若 $x\geqslant b$,则 $F(x)=\int_a^b (x-y)f(y)\mathrm{d}y, F'(x)=\int_a^b f(y)\mathrm{d}y$,

$$F''(x)=0.$$

若 $a<x<b, F(x)=\int_a^x (x-y)f(y)\mathrm{d}y+\int_x^b(-x+y)f(y)\mathrm{d}y$,

$$F'(x)=\int_a^x f(y)\mathrm{d}y+\int_x^b -f(y)\mathrm{d}y,$$

$$F''(x)=f(x)+f(x)=2f(x).$$

故 $F''(x)=\begin{cases}2f(x), & x\in(a,b),\\ 0, & x\geqslant b \text{ 或 } x\leqslant a.\end{cases}$

2. 设 f 具有连续的一阶偏导数,求 $F(\alpha)=\int_0^\alpha f(x+\alpha,x-\alpha)\mathrm{d}x$ 的导数 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\alpha}$.

解 令 $u=x+\alpha, v=x-\alpha$,由定理 5.4 得

$$F'(\alpha)=\int_0^\alpha[f'_u(u,v)-f'_v(u,v)]\mathrm{d}x+f(2\alpha,0),$$

又 $$\int_0^\alpha \frac{\partial f(u,v)}{\partial x}\mathrm{d}x=f(u,v)\Big|_0^\alpha=f(2\alpha,0)-f(\alpha,-\alpha).$$

另一方面 $\int_0^\alpha \frac{\partial f(u,v)}{\partial x}\mathrm{d}x=\int_0^\alpha(f'_u+f'_v)\mathrm{d}x$,故

$$\int_0^\alpha f'_v\mathrm{d}x=f(2\alpha,0)-f(\alpha,-\alpha)-\int_0^\alpha f'_u\mathrm{d}x.$$

从而 $$F'(\alpha)=2\int_0^\alpha f'_u(u,v)\mathrm{d}x+f(\alpha,-\alpha).$$

习 题 6.6

(A)

1. 计算下列第一型线积分:

(5) $\oint_{(C)} x^2\mathrm{d}s$, (C) 为圆周 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\ z=\sqrt{3};\end{cases}$