Discussion problem assignment:

第一题：

For an aperiodic signal $x_0(t)=e^{-t}u(t)$, prove that $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_0(t-nT)$ is a periodic signal with fundamental period T. Let $x_0(t)\leftrightarrow X_0(j\omega)$, $x(t)\leftrightarrow a_k$, confirm that $a_k=\frac{1}{T}X_0(jk\omega_0)$.

答案：

课上讲的例子中，信号周期化的过程中，各复制的信号间不会出现时域重叠。但是，这道题的信号在周期化中，会出现明显的时域重叠。因此，这道题在于证明，不管是否发生时域重叠，仍然有结果 $a_k=\frac{1}{T}X_0(jk\omega_0)$.

以下的答案，假设任意的信号 $x_0(t)$ ，而不仅仅限于题目中给出的单边指数衰减信号。

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t-nT)e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_0^T x_0(t-nT)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-nT}^{(-n+1)T} x_0(\tau)e^{-jk\omega_0(\tau+nT)}d\tau \\
&= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-nT}^{(-n+1)T} x_0(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}e^{-jkn\omega_0 T}d\tau = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-nT}^{(-n+1)T} x_0(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}e^{-jkn2\pi}d\tau \\
&= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-nT}^{(-n+1)T} x_0(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}d\tau = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} x_0(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}d\tau = \frac{1}{T}X_0(jk\omega_0)
\end{aligned}$$

第二题：

Question: compute $\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin t}{t}dt=?$

答案：

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt \qquad X(j0)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)dt$$

$$\frac{\sin Wt}{\pi t}\xleftrightarrow{\text{FT}}\begin{cases}1, & |\omega|<W\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{1}{2}X(j0)=\frac{\pi}{2}$$

求解中，灵活利用了傅里叶变换的基本定义，以及信号本身的偶信号的特点。