转动惯量与力矩叠加

刘正浩 2019270103005

【摘要】本文主要介绍了转动惯量叠加与力矩叠加的相关推导过程。

【关键词】转动惯量 力矩 叠加

1.转动惯量的叠加

（1）求质量为 m 的均匀细棒的转动惯量（转轴垂直于细棒并过细棒的几何中心）

取距离中心距离为 x 的长度微元为 dl ，则细棒的转动惯量就是各个长度微元的转动惯量的叠加。设细棒总长度为 L，细棒线密度为 λ 。

$$\lambda = \frac{m}{L}$$

$$dI = \lambda x^2 dx$$

$$I = \int_l dI = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \lambda x^2 dx = \frac{1}{12} mL$$

（1）求质量为 m 的均匀圆环的转动惯量（转轴垂直于圆环面并过圆心）

取半径为R 的圆环上一质量微元 dm，则圆环的转动惯量就是各小点转动惯量的叠加。

$$I = \int R^2 dm = R^2 \int dm = mR^2$$

（2）求质量为 m 的均匀圆盘的转动惯量（转轴垂直于圆盘面并过圆心）

法 1:取圆盘上半径不同的圆环,则圆盘的转动惯量就是各圆环的转动惯量的叠加。

设面密度为σ，则

$$\sigma = \frac{m}{\pi r^2}$$

$$dI = \sigma 2\pi r^3 dr$$

$$I = \int_0^R dI = \frac{1}{2}\sigma\pi R^4 = \frac{1}{2}\cdot\sigma\pi R^2\cdot R^2 = \frac{1}{2}mR^2$$

法 2：取圆盘上的小扇形，圆盘的转动惯量就是各小扇形的转动惯量的叠加。

设面密度为σ，则

$$dI = \sigma r^3 dr d\theta$$

$$I = \iint_S dI = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \sigma r^3 dr = \frac{1}{2}mR^2$$

（3）求质量为 m 的均匀球体的转动惯量（转轴为直径）

设球体密度为ρ，取球中一个体积微元 dV，则

$$\rho=\frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$dI=\rho r^2 dV$$

$$I=\iiint_V dI=\rho\cdot\int_0^R r^4 dr\int_0^\pi sin\phi d\phi\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{2}{5}mR^2$$

2.力矩的叠加

对于一个均匀的几何体，作用在它上面的总力矩等于它内部各个点受到的力矩的矢量和。（刚体的定轴转动定律）

也就是说，求总力矩也是一个“叠加”的过程。

推导：设几何体内部任意质点外力为F，内力为f。所以对任一质点m_i有：

$$\Delta m_i\cdot a_\tau=F_i sin\theta_i+f_i sin\alpha_\tau$$

上式左右两端同乘r_i并对i求和，得

$$左式=\sum_i \Delta m_i r_i a_\tau=\sum_i \Delta m_i r_i^2\cdot\beta=\beta I（几何体的转动惯量）$$

$$右式=\sum_i F_i r_i sin\theta_i+\sum_i f_i r_i sin\theta_i=M_{外}+M_{内}$$

又因为合内力矩恒为0

$$\sum_i f_i r_i sin\theta_i=0$$

所以

$$M_{外}=\beta I$$

参考文献

[1]王绵森，马知恩.工科数学分析基础[M].北京：高等教育出版社.2017.8:171页.

[2]滕保华，吴明和.大学物理学（上册）[M].北京：科学出版社.2017.1:96-100页.

驻波的性质

【摘要】本文简要介绍了驻波的性质，包括能量和半波损失。

【关键词】驻波 能量 半波损失

1. 背景

驻波是一种由振幅相同的两列相干波沿相反方向传播时叠加形成的波，这是一种特殊的干涉现象。对驻波进行定量分析如下：

设两列相干波分别为

$$y_1 = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

$$y_2 = A\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

这两列波叠加后的结果为

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cdot \cos\frac{2\pi}{x} \cdot \cos\omega t$$

这就是驻波的方程。

2. 驻波的能量

从驻波的方程我们可以分析它的能量分布：

当介质中各个质点到达位移最大的位置时，也就是当 $\cos\omega t = 1$ 时：各质点速度为 0，所以动能都为 0；此时波节的相对形变 $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ 最大，波节的势能最大，而波腹的相对形变最小，波腹的势能最小。此时驻波的能量以势能的形式集中在波节附近。

当介质中各个质点都到达平衡位置时，也就是当 $\cos\omega t = 0$ 时：介质的形变为 0，各位置的势能都为零；质点速度都有最大值，其中波腹的质点速度最大，动能也就最大。此时驻波的能量以动能的形式集中在波腹附近。

两列波的能流密度矢量大小相等，方向相反，所以驻波的能流密度为 0。也就是说，在驻波中没有能量的单向传播。

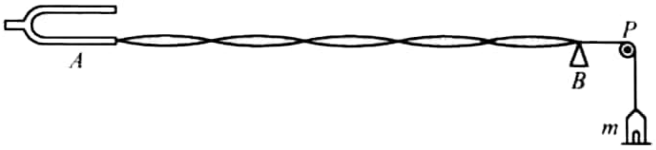
综上，驻波中的能量始终在波腹和波节之间以动能和势能不断转换的形式往返。

3. 驻波中的半波损失

半波损失是一个非常重要的物理概念和自然现象，它在波动理论和光学中都有着广泛的应用。简单来说，波从波疏介质入射到波密介质并从界面处反射回波疏介质并发生π相位突变的现象，就叫做半波损失。

那么在驻波中，如何体现半波损失呢？

在教科书中，我们用下图的装置来产生驻波：



把一根弦一端用一尖劈固定，另一端系在一音叉末端，音叉振动时，弦随之振动，这样就形成了驻波。

我们注意尖劈的位置。在尖劈这一点上，质点的位移始终为 0，所以尖劈这一点是波节。由旋转矢量法可知，在尖劈这一点，入射波和反射波的旋转矢量大小相等，方向相反。所以，入射波与反射波之间存在 π 的相位差。这就是驻波现象中的半波损失。

参考文献

[1]左武魁,周惟公,魏民云,张逢春.半波损失的形成和机理分析[J].物理通报,2019(01):33-35.

[2]滕保华，吴明和.大学物理学（上册）[M].北京：科学出版社.2017.1:193-198页.

狭义相对论中的速度变化

【摘要】本文简要介绍了洛伦兹变换的背景以及推导。

【关键词】狭义相对论 洛伦兹变换 速度

1.背景

在牛顿力学中，我们用到的速度变换是伽利略变换：

$$\begin{cases} x = x' + ut' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \text{(逆变换)} \qquad \begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \text{(正变换)}$$

伽利略变换的特点是，经典力学的定律在任意一个惯性系中的形式都是相同的。从伽利略变换的表达式中，我们可以知道：在一个静系中观察动系中传播的光，这时观察到的光速大于静系中的光速。

然而，在 1887 年进行的迈克耳孙-莫雷实验，却得到了一个不同的结论——在任何惯性系中，光速的大小都是相同的。而伽利略变换并不能导出这样的结论，所以它是不完整的。而爱因斯坦以光速不变原理为基本假设推出的洛伦兹变换，即狭义相对论的速度变换，就在这种情况下出现了。

2.洛伦兹变换的推导

2.1 时间变换和长度变换

爱因斯坦的狭义相对论有两个基本假设：

（1）相对性原理，即一切物理定律在任何惯性系中都是等价的，不存在绝对静止的参考系。这一条基本假设否定了“以太”的存在。

（2）光速不变原理，即光速在任何惯性系中都是相等的。

在两个基本假设的前提下，我们来进行洛伦兹变换的推导。

设有两个坐标系 $O(x,y,z,t)$ 和 $O'(x',y',z',t')$，坐标系 O 静止， 坐标系 O'原点在 x 轴上沿 x 轴方向以速度 u 匀速运动，x' 轴与 x 轴指向相同，$t'=t=0$ 时，原点重合，y 轴与 y'轴重合， z 轴与 z'轴重合，由于在 y 轴与 z 轴方向没有相对运动，所以只讨论 x 轴与 x' 轴。

在这里，爱因斯坦认为，这两个参考系都是均匀的、各向同性的，也就是说，时空变换必须是线性的。[1]所以这两个参考系下横坐标 x 与 x'的关系应该如下：

$$x = \gamma(x' + ut')①$$

$$x' = \gamma(x - ut)②$$

在这两个式子中，只有γ 这一个参量需要我们进行求解。

这时我们考虑这样一个状况：在开始运动的一瞬间，从原点向 x 轴正向发射一束光。一段时间后，在静系中观察，经过时间 t 后，光束到达 $x = ct$ 的位置；在动系中观察，经过时间 t'后，光束到达 $x' = ct'$。

所以

$$c^2tt' = xx' = [\gamma(x' + ut')][\gamma(x - ut)] = \gamma^2tt'(c^2 - u^2)$$

即

$$c^2 = \gamma^2(c^2 - u^2)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

既然我们已经知道了①②两式中所有的参量，就可以推导出 t 和 t' 的表达式：

$$t = \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$$

这样，我们便得到了洛伦兹长度变换和时间变换：

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right) \end{cases} (\text{正变换}) \qquad \begin{cases} x = \gamma(x' + ut') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right) \end{cases} (\text{逆变换})$$

2.2 速度变换

接下来，我们要用长度变换和时间变换推出速度变换：

考虑在空间中有一质点 P，在向 x 轴正方向运动。其在静系中的速度为 (v_x, v_y, v_z)，在动系中的速度为(v'_x, v'_y, v'_z)。我们知道：

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v'_x = \frac{dx'}{dt}$$

我们用 v'_x 表示 v_x。由长度变换和速度变换：

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + udt')}{\gamma(dt' - \frac{u}{c^2}dx')} = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2}v'_x}③$$

又因为 P 只在 x 轴正方向有速度，所以 $dy = dy'$；$dz = dz'$。所以

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt'} = \sqrt{1 - \frac{u}{c^2}}\frac{v'_y}{1 + \frac{u}{c^2}v'_x}④$$

$$v_z=\frac{dz}{dt}=\frac{dz'}{dt'}=\sqrt{1-\frac{u}{c^2}}\frac{v_z'}{1+\frac{u}{c^2}v_z'}⑤$$

③④⑤式是洛伦兹速度变换的逆变换:

$$\begin{cases} v_x=\dfrac{v_x'+u}{1+\frac{u}{c^2}v_x'} \\ v_y=\sqrt{1-\frac{u}{c^2}}\dfrac{v_y'}{1+\frac{u}{c^2}v_x'} \\ v_z=\sqrt{1-\frac{u}{c^2}}\dfrac{v_z'}{1+\frac{u}{c^2}v_z'} \end{cases}$$

同理，我们可以得到洛伦兹速度变换的正变换:

$$\begin{cases} v_x'=\dfrac{v_x-u}{1-\frac{u}{c^2}v_x} \\ v_y'=\sqrt{1-\frac{u}{c^2}}\dfrac{v_y}{1-\frac{u}{c^2}v_x} \\ v_z'=\sqrt{1-\frac{u}{c^2}}\dfrac{v_z}{1-\frac{u}{c^2}v_x} \end{cases}$$

参考文献

[1]陈奎孚.为什么时空变换必须是线性的[J].物理与工程,2017,27(06):31-36.

[2]张彩霞,郝玉英,刘红利,等.浅谈狭义相对论中的时空观——同时的相对性[J].教育教学论坛,2020(10):285-286.

[3]王淙可.浅析狭义相对论的建立[J].科学大众(科学教育),2018(05):30.