第三章　一元函数积分学及其应用

习　题　3.1

(A)

1. 用定积分的定义求下列积分的值.

(1) $\int_0^1 x\mathrm{d}x$;　　　　(2) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

解　(1) 因为 $f(x)=x\in C[0,1]$,所以 $f(x)\in\mathscr{R}[0,1]$.

将$[0,1]n$ 等分,则第 k 个区间为$\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$,取 $\xi_k=\frac{k}{n}$,　$k=1,2,\cdots,n$,

由定积分定义 $\int_0^1 x\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}$.

(2) 由于 $\mathrm{e}^x\in\mathscr{R}[0,1]$,故采用(1) 中相同的划分法,与 ξ_k 的取法,则

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\left[1-(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}})^n\right]}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}=\mathrm{e}-1.$$

5. 设 $f\in\mathscr{R}[-a,a]$,根据定积分几何意义说:

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & f\text{ 为奇函数},\\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & f\text{ 为偶函数}.\end{cases}$$

解　$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$ 表示由 $y=f(x)$,$x=a$,$x=-a$,及 x 轴所围面积的代数和.如果 f 为奇函数,则 f 的图像关于原点对称,则所围图形的正面积与负面积相同.即 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x$ 大小相等,符号相反,故 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0$.如果 f 为偶函数,f 的图像关于 y 轴对称,$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x$ 表示两块面积相等,且符号相同,故 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

6. 设 f 是周期为 T 的周期函数,且在任一有限区间上可积.根据定积分的

几何意义说明：

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 a 为任一常数.

解　因为 f 是周期为 T 的周期函数，由周期函数的几何特性知：任一周期内由 f 所围曲边梯形面积的代数和相同，即 $\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x$.

7. 设 $f\in C[a,b]$，试说明任意改变 f 在有限个点上的值不影响它的可积性和积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的值.

解　设将 f 改变有限个点的函数值后所得函数记为 f^*，则由 $f\in C[a,b]$ 知：f^* 只有有限个可去间断点，所以 $f^*\in\mathscr{R}[a,b]$. 为求 $\int_a^b f^*\mathrm{d}x$，则可用某种特殊的分法和取点方式. 现将 $[a,b]$ 划分使 f^* 的所有间断点都是分点，且 ξ_k 不取区间的端点，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f^*\mathrm{d}x$.

8. 研究下列函数在所给区间上的可积性，并说明理由：

(1) $f(x)=x^2+\cos x$，　$x\in(-\infty,+\infty)$；

(2) $f(x)=\operatorname{sgn} x$，　$x\in[-1,1]$；

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2}$，　$x\in[-2,2]$；

(4) $f(x)=\tan x$，　$x\in[0,2]$；

(5) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}$　$x\in[-1,1]$

解　(1) 不可积. $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，但 $(-\infty,+\infty)$ 非有限区间.

(2) 可积. $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上只有唯一的间断点 $x=0$，且为第 I 类间断点.

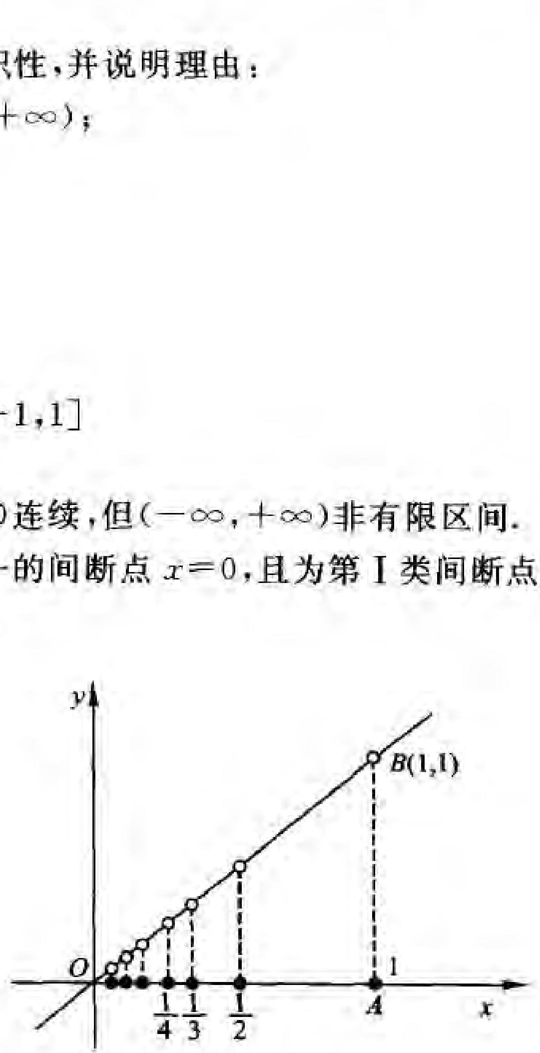
(3) 不可积. $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上无界.

(4) 不可积. 由于 $f(x)=\tan x$ 在 $[0,2]$ 上无界.

(5) 可积. 因为 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续.

9. 下列命题是否正确？若正确，给予证明；否则，举出反例：

(1) 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$，则在 $[a,b]$ 上必有 $f(x)\geqslant 0$；



（第 9 题(2)）

(2) 若 $f\in\mathscr{R}[a,b]$,则 f 在$[a,b]$上有有限个间断点;

(3) 若 $|f|\in\mathscr{R}[a,b]$,则 $f\in\mathscr{R}[a,b]$;

(4) 若 f 与 g 在$[a,b]$上都不可积,则 $f+g$ 在$[a,b]$上也不可积;

(5) $f\in\mathscr{R}[a,b]\Leftrightarrow f^2\in\mathscr{R}[a,b]$;

(6) 若 $f\in C[a,b]$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$,则 $\exists c\in(a,b)$,使 $f(c)=0$.

解 (1) 不正确. 如 $\int_{-1}^{2} x\mathrm{d}x=\frac{3}{2}>0$,但 $f(x)=x$ 在$[-1,2]$不定号.

(2) 不正确. 例如 $f(x)=\begin{cases}0, & x=\frac{1}{n},n\in\mathbf{N}_+,\\ x, & x\neq\frac{1}{n}.\end{cases}$ $f(x)$在$[0,1]$有无限多个间断点,但 $f(x)$在$[0,1]$上可积,且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\triangle ABO$ 的面积$=\frac{1}{2}$.

(3) 不正确. 例如 $f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ -1, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$ 则 $|f(x)|=1$ 在$[0,1]$可积,但 $f(x)$不可积.(因为将$[0,1]$任意划分成 n 个小区间,如果在第 k 个子区间上取 ξ_k 为有理点. 则积分和 $S_n=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k=1$,如果在第 k 个子区间上取 ξ_k 为无理点,则积分和 $S_n=-1$. 即对同一种分割法,不同的 ξ_k 的取法,和式的极限不同,由定积分定义知 $f(x)$在$[0,1]$上不可积).

(4) 不正确. $f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ -1, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$ $g(x)=-f(x)$. 由本题(3)知 $f(x)$与 $g(x)$在$[0,1]$上均不可积,但 $f(x)+g(x)=0$ 在$[0,1]$上连续,故可积.

(5) 不正确. 由定积分性质 1.5 知:$f\in\mathscr{R}[a,b]\Rightarrow f^2\in\mathscr{R}[a,b]$. 但 $f^2\in\mathscr{R}[a,b]$ 可积,f 不一定可积. 如上题中 $f(x)$在$[0,1]$上不可积,但 $f^2(x)=1$ 在$[0,1]$上连续,故可积.

(6) 正确. 用反证法,假设 $\forall x\in(a,b)$, $f(x)\neq0$,则 $f(x)$在(a,b)上定号.(即 $f(x)$在(a,b)上要么恒正,要么恒负. 否则由连续函数的零点定理,必存在 $c\in(a,b)$,使 $f(c)=0$). 由定积分的几何意义知, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\neq0$,这与已知矛盾. 故原命题成立.

10. 设 $f,g\in C[a,b]$.

(1) 如果在$[a,b]$上 $f(x)\geqslant0$,且 $f(x)\not\equiv0$,证明:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0;$$

(2) 如果在$[a,b]$上 $f(x)\geqslant0$,且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$,证明 $f(x)\equiv0$;

(3) 如果在$[a,b]$上 $f(x)\geqslant g(x)$，且 $f(x)\not\equiv g(x)$，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证 (1) 依题意可知，$\exists x_0\in[a,b]$，使 $f(x_0)>0$，由连续函数的保号性得$\exists\delta>0$ 及 $q>0$，使 $\forall x\in U(x_0,\delta)$，$f(x)\geqslant q>0$，于是

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\int_a^{x_0-\delta} f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_0+\delta}^b f(x)\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\mathrm{d}x=q\delta>0.\end{aligned}$$

(2) 假设$\exists x_0\in[a,b]$，使 $f(x_0)\neq 0$. 由(1)知，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$. 而这与已知矛盾. 故 $\forall x\in[a,b]$，$f(x)=0$，即 $f(x)\equiv 0$，$x\in[a,b]$.

(3) 由题设 $F(x)=f(x)-g(x)\geqslant 0$，且 $F(x)\not\equiv 0$. 则由(1)知，$\int_a^b F(x)\mathrm{d}x>0$，即$\int_a^b (f(x)-g(x))\mathrm{d}x>0$. 由定积分线性性质知，(3)中结论成立.

11. 判别下列积分的大小：

(1) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$；

(2) $\int_1^2 2\sqrt{x}\mathrm{d}x$ 和 $\int_1^2\left(3-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^1\frac{\arctan x}{1+x}\mathrm{d}x$.

解 (1) 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$0\leqslant x^2\leqslant x$，且仅当 $x=0,1$ 时 $x^2=x$. 那么由 e^u 在$[0,1]$上严格单增知，$\mathrm{e}^{x^2}<\mathrm{e}^x(x\in(0,1))$，故

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x>\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x.$$

(2) 令 $F(x)=2\sqrt{x}-3+\frac{1}{x}$，则 $F'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}=\frac{\sqrt{x^3}-1}{x^2}>0$，$x\in(1,2)$，故 $F(x)$ 在$[1,2]$上严格单增. 从而 $F(x)>F(1)=0$，$x\in[1,2]$. 进而$\int_1^2 2\sqrt{x}\mathrm{d}x>\int_1^2\left(3-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

(3) 令 $F(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$，则 $F'(x)=\frac{x^2}{1+x^2}+\ln(1+x)>0$，$x\in(0,1)$，故 $F(x)$ 在$[0,1]$严格单增. 从而 $F(x)>F(0)=0$. 于是 $\forall x\in[0,1]$，$\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}$. 故 $\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x>\int_0^1\frac{\arctan x}{1+x}\mathrm{d}x$.

12. 证明下列不等式：

(1) $1<\int_0^1 e^{x^2}dx<e$；　　(2) $84<\int_{-6}^8 \sqrt{100-x^2}dx<140$.

证　(1) 因为$\forall x\in(0,1)$，$1<e^{x^2}<e$，由第10题(1)知，$\int_0^1(e^{x^2}-1)dx>0$，$\int_0^1(e-e^{x^2})dx>0$，即$\int_0^1 1\cdot dx<\int_0^1 e^{x^2}dx<\int_0^1 edx$，而$\int_0^1 dx=1$，$\int_0^1 edx=e$，故$1<\int_0^1 e^{x^2}dx<e$.

(2) 当$x\in(-6,8)$时，$6\leqslant\sqrt{100-x^2}\leqslant 10$，且仅当$x=0$时，$\sqrt{100-x^2}=10$，$x=8$时，$\sqrt{100-x^2}=6$. 故由第10题(1)

$$\int_{-6}^8(\sqrt{100-x^2}-10)dx<0,\quad \int_{-6}^8(\sqrt{100-x^2}-6)dx>0,$$

故
$$84=\int_{-6}^8 6dx<\int_{-6}^8\sqrt{100-x^2}dx<\int_{-6}^8 10dx=140.$$

13. 利用定理1.2证明：若有界函数f在有限区间I上可积，则f在I的任一子区间上也可积.

证　由定理1.2知，有界函数f在I上可积$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$d<\delta$时，$\sum_{k=1}^n\omega_k\cdot\Delta x_k<\varepsilon$. 任取$[a,b]$的一个子区间$[c,d]\subseteq I$，将$[c,d]$任意分割为$m$个小子区间，以$[c,d]$的划分作为$I$的任一分割的一部分，则

$$\sum_{k=1}^n\omega_k\cdot\Delta x_k=\sum_{I-[c,d]}\omega_k\cdot\Delta x_k+\sum_{[c,d]}\omega_k\cdot\Delta x_k\geqslant\sum_{[c,d]}\omega_k\cdot\Delta x_k,$$

所以对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta^*=\delta>0$，当$d<\delta$时，$\sum_{[c,d]}\omega_k\cdot\Delta x_k<\varepsilon$，即由定理1.2，$f$在$I$的任一子区间可积.

14. 设f在$[a,b]$上二阶可导，$\forall x\in[a,b]$，$f'(x)>0$，$f''(x)>0$，证明

$$(b-a)f(a)<\int_a^b f(x)dx<\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)].$$

证　因为$\forall x\in[a,b]$，$f'(x)>0$，则$f(x)$在$[a,b]$上严格单增，从而$f(x)>f(a)$，$x\in(a,b]$，故

$$\int_a^b f(x)dx>\int_a^b f(a)dx>(b-a)f(a).$$

下面证明：
$$\int_a^b f(x)dx<\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)].$$

因为$\forall x\in[a,b]$，$f''(x)>0$，则$f(x)$在$[a,b]$上严格凸. 从而曲线$y=f(x)$位于直线AB：$y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$的上方. 即$\forall x\in(a,b)$，

$$\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]-f(x)>0.$$

故 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<\int_a^b\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]\mathrm{d}x$$
$$=f(a)(b-a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{(b-a)^2}{2}=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)],$$
其中 $\int_a^b(x-a)\mathrm{d}x$ 表示由 $y=0,y=x-a,x=b$ 所围三角形面积,因此 $\int_a^b(x-a)\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^2}{2}$.

(B)

1. 设 f 与 g 在任一有限区间上可积.

(1) 如果 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$,那么 f 与 g 在 $[a,b]$ 上是否相等?

(2) 如果在任一区间 $[a,b]$ 上都有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$,那么 f 是否恒等于 g?

(3) 如果(2)中 f 与 g 都是连续函数,那么又有怎样的结论?

解 (1) 不一定. $f(x)=x,g(x)=-x,x\in[-1,1]$,则 $g(x)\neq f(x)$,但
$$\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=0=\int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 不一定. 例 $f(x)=1,g(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0 & x=0,\end{cases}$ 则 $\forall\,[a,b]\subset\mathbf{R}$,
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=b-a, \text{但 } f(x)\not\equiv g(x).$$

(3) 由习题 3.1(A)第 10 题(2)可知,如果 f 与 g 都是连续函数,那么 f 恒等于 g.

3. 设函数 f 在 $[0,a]$ 上连续,在 $(0,a)$ 内可导,且 $3\int_{\frac{2a}{3}}^a f(x)\mathrm{d}x=f(0)a$,证明:$\exists\,\xi\in(0,a)$,使 $f'(\xi)=0$.

证 如果 $a=0$,结论显然成立. 如果 $a\neq 0$,由于 $f\in C[0,a]$. 则 $f\in C\left[\frac{2a}{3},a\right]$. 由积分中值定理,$3\int_{\frac{2a}{3}}^a f(x)\mathrm{d}x=af(c)$,其中 $c\in\left[\frac{2a}{3},a\right]$,故 $f(0)a=af(c)$,由 $a\neq 0$ 知,$f(c)=f(0)$,且 $c\neq 0$,从而 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上满足 Rolle 定理的条件,则 $\exists\,\xi\in(0,c)\subset(0,a)$,使 $f'(\xi)=0$.

4. 设 f 与 g 在区间 $[a,b]$ 上连续,证明 Cauchy 不等式:
$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证 因为$\forall\lambda\in\mathbf{R}$，$\int_a^b[\lambda f(x)-g(x)]^2\mathrm{d}x\geqslant 0$. 故关于$\lambda$的二次方程

$$\lambda^2\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]+\lambda\left[2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]+\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]=0,$$

要么无实数解，要么有两相等实数解. 从而其根的判别式

$$\Delta=\left[2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2-4\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]\cdot\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]\leqslant 0,$$

即
$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

5. f与g在区间$[a,b]$上连续，利用 Cauchy 不等式证明 Minkowski 不等式：

$$\left(\int_a^b[f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证 因为f与g在区间$[a,b]$上连续知，Cauchy 不等式成立，即

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$ 于是

$$\begin{aligned}0&\leqslant\int_a^b[f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\\&=\left[\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2,\end{aligned}$$

故
$$\left[\int_a^b[f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

6. 设f是$[a,b]$上的连续函数，利用 Cauchy 不等式证明：

$$\int_a^b \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\int_a^b \mathrm{e}^{-f(x)}\mathrm{d}x\geqslant(b-a)^2.$$

证 由于$\forall x\in[a,b]$，$\mathrm{e}^{f(x)}$与$\mathrm{e}^{-f(x)}$都是正值函数. 取$h(x)=(\mathrm{e}^{f(x)})^{\frac{1}{2}}$，$g(x)=(\mathrm{e}^{-f(x)})^{\frac{1}{2}}$，由$f\in C[a,b]$知，$h(x)$与$g(x)$在$[a,b]$上连续，由 Cauchy 不等式知：

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b \mathrm{e}^{-f(x)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}&\geqslant\int_a^b(\mathrm{e}^{f(x)})^{\frac{1}{2}}(\mathrm{e}^{-f(x)})^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\mathrm{d}x=b-a>0,\end{aligned}$$

故
$$\int_a^b \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\int_a^b \mathrm{e}^{-f(x)}\mathrm{d}x\geqslant(b-a)^2.$$