Discussion problem assignment:

第一题：

2. Find the z-transform of the following signal and the corresponding poles and zeros

$$x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]+\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$$

解答：

Solutions:

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}-\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{-\frac{1}{6}z^{-1}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

$$=\frac{-\frac{1}{6}z}{(z-\frac{1}{3})(z-\frac{1}{2})} \qquad \frac{1}{3}<|z|<\frac{1}{2}$$

极点，两个，分别在 z=1/3 和 z=1/2 。

零点，z=0是一个。但是分母多项式是二阶，而这里的分子多项式仅是一阶，所以在无穷远点还有一个零点。 $\lim_{z\to\infty} X(z)=0$

思路直接，注意在无穷远点还有一个零点

第二题：

1. Find the z-transform and ROC for the following signals:

$$x_1[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1] \qquad x_2[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{-n+1} u[-n+1]$$

$$x_3[n]=u[n+2]-u[n-3]$$

解答：

Solutions: 重点是让同学们深入理解 Z 平面中原点、无穷远点对 ROC的影响

$$X_1(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_1[n]z^{-n}=\sum_{n=-1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}z^{-n}=\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{m}z^{-(m-1)}$$

$$=z\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{m}z^{-m}=\frac{z}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad \frac{1}{2}<|z|<\infty$$

第一个信号是右边信号，但是起始于 n = -1，所以 ROC 需要去掉无穷远点。

这一点，也可以通过求表达式的极点位置获得，显然分子多项式阶数高于分母多项式阶数，存在无穷远点的极点。所以，ROC 仍然是从极点 1/2 向外的 ROC，但是需要去除无穷远点。

第二个信号是左边信号，但是终止于 n = +1，所以 ROC 需要去掉原点，具体如下

$$x_2[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{-n+1}u[-n+1]$$

$$X_2(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{-n+1}u[-n+1]z^{-n}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+1}\left(\frac{1}{2}z\right)^{-n}=\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{m=-1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}z\right)^{m}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}z\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)(2z^{-1})\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}z\right)^{n}=\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z}=-\frac{2z^{-2}}{1-2z^{-1}}$$

$$0<|z|<2$$

第三个信号就是一个长度是 5 的离散时间方波信号：

$$x_3[n]=u[n+2]-u[n-3]=\sum_{k=-2}^{+2}\delta[n-k]$$

$$X_3(z)=z^2+z+1+z^{-1}+z^{-2} \qquad 0<|z|<\infty$$

ROC 是否需要去掉原点、或者无穷远点，都可以通过求表达式的极点位置获得，对信号二，显然分母多项式阶数高于分子多项式阶数，存在原点处的极点。所以，ROC 仍然是从极点 1/2 向内的 ROC，但是需要去除原点。