解 (1) $du=\sin y dx+x\cos y dy$,

$$d^2u = d(\sin y dx + x\cos y dy) = 2\cos y dx dy - x\sin y dy^2.$$

(2) 由一阶全微分形式不变性可知

$$du = \sin y dx + x\cos y dy$$

且 $$\begin{aligned} d^2u &= d(\sin y dx + x\cos y dy)\\ &= \cos y dy dx + \sin y d(dx) + dx\cos y dy - x\sin y dy^2 + x\cos y d(dy)\\ &= 2\cos y dx dy - x\sin y dy^2 + \sin y d^2x + x\cos y d^2y. \end{aligned}$$

(3) 要使(1)与(2)中的 d^2u 相等,则 $d^2x\equiv0, d^2y\equiv0$. 即 $d^2\varphi(s,t)\equiv0$, $d^2\psi(s,t)\equiv0$. 即函数 φ 与 ψ 必须关于 s,t 都是线性的,即 $\varphi(s,t)=a_1s+b_1t+c_1$, $\psi(s,t)=a_2s+b_2t+c_2$.

习 题 5.4

(A)

3. 求$f(x,y)=x^y$ 在点(1,4)的二阶 Taylor 公式,并利用它计算$(1.08)^{3.96}$的近似值.

解 $f_x(1,4)=yx^{y-1}\big|_{(1,4)}=4$, $f_y(1,4)=x^y\ln x\big|_{(1,4)}=0$,

$f_{xx}(1,4)=y(y-1)x^{y-2}\big|_{(1,4)}=12$,

$f_{xy}(1,4)=(yx^{y-1}\ln x+x^{y-1})\big|_{(1,4)}=1$,

$f_{yy}(1,4)=x^y(\ln x)^2\big|_{(1,4)}=0$.

$f(x,y)$在(1,4)带 Peano 余项的 Taylor 公式为

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 1+4(x-1)+\frac{1}{2!}(x-1,y-4)\begin{pmatrix}12 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\ y-4\end{pmatrix}+o(\rho^2)\\ &= 1+4(x-1)+6(x-1)^2+(x-1)(y-4)+o(\rho^2), \end{aligned}$$

其中 $$\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}.$$

取 $x=1.08, y=3.96$. 由上面的 Taylor 公式可得

$$\begin{aligned} (1.08)^{3.96} &\approx 1+4(1.08-1)+6(1.08-1)^2+(1.08-1)(3.96-4)\\ &= 1.355\,2. \end{aligned}$$

4. 求下列函数的极值.

(1) $z=x^2(y-1)^2$; (2) $z=(x^2+y^2-1)^2$; (3) $z=xy(a-x-y)$.

解 (1) 由$\begin{cases} z_x=2x(y-1)^2=0,\\ z_y=2x^2(y-1)=0,\end{cases}$求出 z 的驻点有

$M_\alpha(\alpha,1)$ 及 $M_\beta(0,\beta)$，其中 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$. 再求二阶偏导数，得

$$z_{xx}=2(y-1)^2,\ z_{xy}=4x(y-1),\ z_{yy}=2x^2.$$

$$\boldsymbol{H}_z(M_\alpha)=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\alpha^2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{H}_z(M_\beta)=\begin{pmatrix}2(\beta-1)&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

由于 $\boldsymbol{H}_z(M_\alpha)$ 与 $\boldsymbol{H}_z(M_\beta)$ 的行列式为零，所以 M_α,M_β 是不是极值点需进一步讨论. 事实上，$\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2$，均有 $z\geqslant0$，而 $z|_{M_\beta}=z|_{M_\alpha}=0$，故 M_α 与 M_β 均为极小值点，极小值为 0.

(2) 由 $\begin{cases}z_x=4x(x^2+y^2-1)=0,\\z_y=4y(x^2+y^2-1)=0\end{cases}$ 可知 z 有下列驻点

$M_1(0,0)$ 及圆周 $x^2+y^2=1$ 上所有的点. 由 $z_{xx}=4(x^2+y^2-1)+8x^2$，$z_{xy}=8xy$，$z_{yy}=4(x^2+y^2-1)+8y^2$ 知 $\boldsymbol{H}_z(M_1)=\begin{pmatrix}-4&0\\0&-4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{H}_z(x^2+y^2=1)=8\begin{pmatrix}x^2&xy\\xy&y^2\end{pmatrix}$. 显然 $\boldsymbol{H}_z(M_1)$ 负定，函数在 M_1 处取得极大值 $z|_{M_1}=1$，而 $\boldsymbol{H}_z(x^2+y^2-1)$ 行列式为零（且其是半正定的），则 $x^2+y^2=1$ 上的点是否是极值点需进一步讨论. 由于 $\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2$，$z\geqslant0$，且 $z|_{x^2+y^2=1}=0$，故 z 在 $x^2+y^2=1$ 上的每一点均取得极小值 0.

(3) 由 $\begin{cases}z_x=y(a-2x-y)=0\\z_y=x(a-x-2y)=0\end{cases}$，求得函数有 4 个驻点

$$M_1(0,0),\ M_2(a,0),\ M_3(0,a),\ M_4\left(\frac{1}{3}a,\frac{1}{3}a\right).$$

由 $z_{xx}=-2y$，$z_{xy}=a-2x-2y$，$z_{yy}=-2x$ 可知

$$\boldsymbol{H}_z(M_1)=\begin{pmatrix}0&a\\a&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{H}_z(M_2)=\begin{pmatrix}0&-a\\-a&-2a\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}_z(M_3)=\begin{pmatrix}-2a&-a\\-a&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{H}_z(M_4)=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}a&-\frac{a}{3}\\-\frac{a}{3}&-\frac{2}{3}a\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{H}_z(M_i)(i=1,2,3)$ 均不定，即 $M_i(i=1,2,3)$ 均非极值点. 当 $a>0$ 时，$\boldsymbol{H}_z(M_4)$ 负定，z 在 M_4 处取得极大值 $z|_{M_4}=\dfrac{a^3}{27}$；当 $a<0$ 时，$\boldsymbol{H}_z(M_4)$ 正定，z 在 M_4 处取得极小值 $z|_{M_4}=\dfrac{a^3}{27}$；当 $a=0$ 时，$\boldsymbol{H}_z(M_4)$ 行列式为零，M_4 是否极值点需另行判定. 事

实上,由于 $a=0,M_4=(0,0)$,而在$(0,0)$的任意小的邻域内存在 $x>0,y>0$ 的点使 $z=-xy(x+y)<0$,存在 $x<0,y>0$ 且 $y>-x$ 的点使 $z=-xy(x+y)>0$. 故 $a=0$ 时,M_4 非极值点.

5. 求下列函数在指定区域 D 上的最大值与最小值.

(3) $z=x^2+y^2-12x+16y,D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 25\}$.

解 由$\begin{cases}z_x=2x-12=0,\\ z_y=2y+16=0,\end{cases}$可求出函数在 D 内无驻点.

在边界 $L_1:y=\sqrt{25-x^2}$ 及 $L_2:y=-\sqrt{25-x^2}$ 上,函数 z 分别变为 x 的一元函数

$$f_1=16\sqrt{25-x^2}-12x+25,\quad |x|\leqslant 5,$$

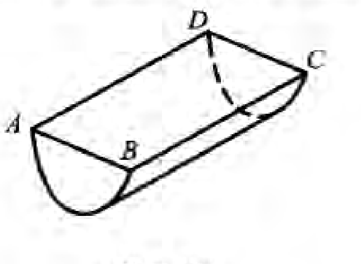
$$f_2=-16\sqrt{25-x^2}-12x+25,\quad |x|\leqslant 5.$$

而
$$\max_{|x|\leqslant 5}f_1(x)=f(-3)=125,\ \min_{|x|\leqslant 5}f_1(x)=f(5)=-35,$$

$$\max_{|x|\leqslant 5}f_2(x)=f(-5)=85,\ \min_{|x|\leqslant 5}f_2(x)=f(3)=-75.$$

故 z 在$(-3,4)$处取得最大值 125,在$(3,-4)$处取得最小值 -75.

7. 如图所示,横放着的半圆柱形无盖容器(其轴截面 $ABCD$ 为水平面),其表面积等于 S,当其尺寸如何时,此容器有最大的容积?



(第 7 题)

解 设底面半径为 R,高为 H. 则问题就转化为求目标函数 $V=\frac{1}{2}\pi R^2H$ 在约束条件 $S=\pi R^2+\pi RH$ 下的最小值. 应用 Lagrange 乘数法,令

$$L=\frac{1}{2}\pi R^2H+\lambda(S-\pi R^2-\pi RH).$$

由$\begin{cases}L_R=\pi RH-\lambda(2\pi R+\pi H)=0,\\ L_H=\frac{1}{2}\pi R^2-\pi R\lambda=0,\\ L_\lambda=S-(\pi R^2+\pi RH)=0\end{cases}$ 得唯一驻点 $M\left(R^*,2R^*,\frac{1}{2}R^*\right)$, $R^*=\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$. 由于表面积一定,当底面半径很小时,容器细长,容积很小,随着 R 增大,

容积逐渐变大，但当 R 很大时，容器很扁，容积变小，则最大容积是存在的. 故当 $H=2R=2\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$时，即高等于底半径的 2 倍时，容积最大.

9. 在 xOy 平面上求一点，使它到平面上 n 个已知点

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$$

的距离的平方和为最小.

解　设$(a,b)\in\mathbf{R}^2$，则问题转化为求 $S=\sum\limits_{i=1}^{n}[(a-x_i)^2+(b-y_i)^2]$ 的最小值.

$$由\begin{cases}S_a=2\sum\limits_{i=1}^{n}(a-x_i)=0,\\ S_b=2\sum\limits_{i=1}^{n}(b-y_i)=0\end{cases}得唯一驻点\begin{cases}a=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i,\\ b=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i.\end{cases}$$

由 $S_{aa}=2n,S_{ab}=0,S_{bb}=2n$ 知

$$\boldsymbol{H}_S\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\right)=\begin{pmatrix}2n&0\\0&2n\end{pmatrix}正定，则\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\right)$$

为极小值点，故其为最小值点.

10. 求原点到曲线$\begin{cases}x^2+y^2=z,\\x+y+z=1\end{cases}$的最长和最短距离.

解　依题意，问题为求目标函数

$S=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $x^2+y^2=z$ 及 $x+y+z=1$ 下的最值. 用 Lagrange 乘数法，令

$$L=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-1).$$

$$由\begin{cases}L_x=2x+2x\lambda+\mu=0,\\ L_y=2y+2y\lambda+\mu=0,\\ L_z=2z-\lambda+\mu=0,\\ L_\lambda=x^2+y^2-z=0,\\ L_\mu=x+y+z-1=0\end{cases}得驻点 M_1\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{3}}{2},2-\sqrt{3}\right),$$

$M_2\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2},\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2},2+\sqrt{3}\right)$. 而且此实际问题有解，$S(M_1)=9-5\sqrt{3}$，$S(M_2)=9+5\sqrt{3}$. 故原点到所给曲线的最长距离为 $\sqrt{9+5\sqrt{3}}$，最短距离 $\sqrt{9-5\sqrt{3}}$.

11. 有一下部为圆柱形,上部为圆锥形的帐篷,它的容积为常数 k. 今要使所用的布最少,试证帐篷尺寸间应有关系式为 $R=\sqrt{5}H, h=2H$(其中 R,H 分别为圆柱形的底半径及高,h 为圆锥形的高).

解　问题为求目标函数 $S=2\pi RH+\frac{1}{2}\cdot 2\pi R\cdot\sqrt{R^2+h^2}$在约束条件$\pi R^2 H+\frac{1}{3}\pi R^2 h=k$ 下的最小值. 用 Lagrange 乘数法,令

$$L=2\pi RH+\pi R\sqrt{R^2+h^2}+\lambda\left(\pi R^2 H+\frac{1}{3}\pi R^2 h-k\right).$$

由
$$\begin{cases} L_R=2\pi H+\pi\sqrt{R^2+h^2}+\dfrac{2\pi R^2}{2\sqrt{R^2+h^2}}+\lambda\left(2\pi RH+\dfrac{2}{3}\pi Rh\right)=0, \\ L_H=2\pi R+\lambda\pi R^2=0, \\ L_h=\dfrac{2\pi Rh}{2\sqrt{R^2+h^2}}+\lambda\cdot\dfrac{1}{3}\pi R^2=0, \\ L_\lambda=\pi R^2\left(H+\dfrac{1}{3}h\right)-k=0 \end{cases}$$

求得唯一驻点 $R=\sqrt{5}\sqrt[3]{\frac{3K}{25\pi}}, H=\sqrt[3]{\frac{3K}{25\pi}}, h=2\sqrt[3]{\frac{3K}{25\pi}}$.

而此实际问题有解,故此驻点为最小值点. 即当 $R=\sqrt{5}H, h=2H$ 时,所用布料最省.

13. 求椭圆 $x^2+3y^2=12$ 的内接等腰三角形,使其底边平行于椭圆的长轴,而且面积最大?

解　由椭圆和等腰三角形的对称性可知等腰三角形顶点必在$(0,\pm 2)$处. 只需研究顶点在$(0,2)$的情形. 设另外两顶点分别为$(-x,y)$和(x,y). 则其面积为

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot(2-y)=x(2-y).$$

于是问题转化为求目标函数.

$S=x(2-y)$在约束条件 $x^2+3y^2=12(0\leqslant x\leqslant 2\sqrt{3}, -2\leqslant y\leqslant 0)$下的最大值. 应用 Lagrange 乘数法,令

$$L=x(2-y)+\lambda(x^2+3y^2-12).$$

由
$$\begin{cases} L_x=2-y+2x\lambda=0, \\ L_y=-x+6\lambda y=0, \\ L_\lambda=x^2+3y^2-12=0 \end{cases}$$

可求得唯一的驻点 $M\left(3,-1,-\frac{1}{2}\right)$. 而此实际问题有解.

故当等腰三角形的三个顶点分别为(0,2),(3,-1)及(-3,-1)或(0,-2),(3,1)及(-3,1)时面积最大.

(B)

1. 证明对任意正数 a,b,c 有 $abc^3\leqslant 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5$.

证明 将正数 a,b,c 的和记为 S. 则只要证明目标函数 $f(a,b,c)=abc^3$ 在区域

$$D=\{(a,b,c)\mid 0<a,b,c<S\}$$

及约束条件 $a+b+c=S$ 上的最大值为 $27\left(\frac{S}{5}\right)^5$ 即可. 应用 Lagrange 乘数法,令

$$L=abc^3+\lambda(a+b+c-S).$$

由 $\begin{cases} L_a=bc^3+\lambda=0,\\ L_b=ac^3+\lambda=0,\\ L_c=3abc^2+\lambda=0,\\ L_\lambda=a+b+c-S=0\end{cases}$ 可求得唯一的驻点 $M\left(\frac{S}{5},\frac{S}{5},\frac{3S}{5},\frac{-27S^3}{5^4}\right)$. 又因为 f 在 $\overline{D}$ 连续,故 f 在 $\overline{D}$ 上有最大值,显然在 $\overline{D}$ 的边界上的值恒为零,而在 D 内部的值大于零,故 f 在 $\overline{D}$ 的最大值必在 D 的内部取得. 又由于 M 为 f 在 D 内唯一的驻点,且 f 在 D 内无不可偏导的点. 故 $f(M)$ 为 f 在 $\overline{D}$ 上的最大值,也是 D 上的最大值,即

$$\max_{(a,b,c)\in D} f(a,b,c)=27\left(\frac{S}{5}\right)^5.$$

2. 求 $f(x_1,\cdots,x_n)=x_1x_2\cdots x_n$ 在条件 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=\frac{1}{a}(x_i>0,i=1,2,\cdots,n,a>0)$ 之下的极值. 并证明当 $a_i>0(i=1,\cdots,n)$ 时,成立

$$n\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)^{-1}\leqslant(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

解 取 Lagrange 函数为

$$L=x_1x_2\cdots x_n+\lambda\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}-\frac{1}{a}\right).$$

由$\begin{cases} L_{x_i} = x_1x_2\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_n - \dfrac{\lambda}{x_i^2} = 0, i=1,2,\cdots,n, \\ L_\lambda = \dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{a} = 0 \end{cases}$

解得 $M(na, na, \cdots, na)$ 为区域 D 内唯一的驻点，其中 $D = \left\{(x_1,\cdots,x_n) \mid x_i > 0, \dfrac{1}{x_i} < \dfrac{1}{a}, a>0, i=1,2,\cdots,n\right\}$. 由于在 $\overline{D}$ 上连续函数 f 必有最小值，且在其边界上 f 为无穷大. 其内部为有限数，从而最小值必在 $\overline{D}$ 的内部取得. 而 M 为其内部唯一的驻点. f 在 D 内可偏导，故 $f(M)$ 必为 f 在 $\overline{D}$ 上的最小值，即 D 上的最小值. 故

$$\min_{(x_1,\cdots,x_n)\in D} f(x_1,\cdots,x_n) = (na)^n.$$

即对任意的 n 个正数 $a_i,(i=1,\cdots,n)$ 恒有 $f(a_1,\cdots,a_n) = a_1a_2\cdots a_n \geqslant \left[n\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right)^{-1}\right]^n$. 即

$$n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)^{-1} \leqslant (a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

3. 设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 内的有界闭区域，函数 $u(x,y)$ 在 D 有定义，在 D 的内部成立 $u_{xx}+u_{yy}+cu=0$，其中 $c<0$ 为常数，证明

(1) u 在 D 上的正最大值（负最小值）不能在 D 的内部取得；

(2) 若 u 在 D 上连续，且在 D 的边界上 $u=0$，则在 D 上 $u\equiv 0$.

证明 (1) **用反证法** 设 u 在 D 上正的最大值在 D 内部取得. 即 $\exists (x_0, y_0) \in \mathring{D}$, 使 $u(x_0,y_0) = \max\limits_{(x,y)\in D} u(x,y) > 0$. 于是 (x_0,y_0) 必是 $u(x,y)$ 的极大值点. 且 $u_{xx}\leqslant 0, u_{yy}\leqslant 0$（否则 (x_0,y_0) 非极大值点），从而 $u_{xx}+u_{yy}\big|_{(x_0,y_0)}\leqslant 0$，由等式 $u_{xx}+u_{yy}+cu=0(c<0)$ 知 $u(x_0,y_0)\leqslant 0$ 与假设矛盾. 故假设错误，即 u 在 D 上的正的最大值不能在 D 内取得. 同理可证 u 在 D 上负的最小值不能在 D 的内部取得.

(2) **用反证法** 设 $u\not\equiv 0$，则 $\exists (x_0,y_0)\in D$，使 $u(x_0,y_0)\neq 0$. 不妨设 $u(x_0, y_0)>0$，由于在 D 的边界上 $u=0$，所以 $(x_0,y_0)\in\mathring{D}$. 又 u 在有界闭区域 D 上连续，必有最大值，且由于 $u(x_0,y_0)>0$，则 u 在 D 上的最大值为正，且在 $\mathring{D}$ 取得. 这与(1)矛盾. 故 $u\equiv 0$, $\forall (x,y)\in D$.

4. 设有一小山，取它的底面所在的平面为 xOy 坐标面，其底部所占的区域为 $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2-xy\leqslant 75\}$，小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

(1) 设 $M(x_0,y_0)$ 为区域 D 上的一个点，问 $h(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大？若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$，试写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式；

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动，为此需在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点，试确定攀登起点的位置.

解 (1) 由方向导数及梯度的概念可知 $h(x,y)$ 在 $M(x_0,y_0)$ 处沿 $\text{grad}\, h(x_0,y_0)=\{-2x_0+y_0,-2y_0+x_0\}$ 的方向导数最大，且此最大的方向导数 $g(x_0,y_0)=\|\text{grad}\, h(x_0,y_0)\|=\sqrt{5x_0^2+5y_0^2-8x_0y_0}$.

(2) 也就是求 $[g(x,y)]^2=5x^2+5y^2-8xy$ 在 D 内满足约束条件 $x^2+y^2-xy=75$ 的最大值点. 构造 Lagrange 函数，令 $L=5x^2+5y^2-8xy+\lambda(x^2+y^2-xy-75)$. 由

$$\begin{cases} L_x=10x-8y+\lambda(2x-y)=0, \\ L_y=10y-8x+\lambda(2y-x)=0, \\ L_\lambda=x^2+y^2-xy-75=0 \end{cases}$$

可得驻点 $M_1(5,-5)$, $M_2(-5,5)$, $M_3(5\sqrt{3},5\sqrt{3})$, $M_4(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3})$. 而 $g^2|_{M_1}=g^2|_{M_2}=450$, $g^2|_{M_3}=g^2|_{M_4}=150$. 故攀登起点为 $M_1(5,-5)$ 或 $M_2(-5,5)$.

习 题 5.5

(A)

1. 用导数定义求下列向量值函数的导数.

(1) $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 是常向量；

(2) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}$，其中 $(a_{ij})_{m\times n}$ 为常矩阵，$\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^m$ 为常向量.

解 (1) $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 为常向量，则 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(a_{ij})_{m\times n}\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，其中 $a_{ij}=0$, $i=1,2,\cdots,m$, $j=1,2,\cdots,n$. 故 $\boldsymbol{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(a_{ij})_{m\times n}$.

(2) 由

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\mathrm{d}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})&=\Big(\mathrm{d}\big(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j+a_1\big),\mathrm{d}\big(\sum_{j=1}^n a_{2j}x_j+a_2\big),\\&\qquad\cdots,\mathrm{d}\big(\sum_{j=1}^n a_{mj}x_j+a_m\big)\Big)^{\mathrm{T}}\\&=\Big(\sum_{j=1}^n a_{1j}\mathrm{d}x_j,\sum_{j=1}^n a_{2j}\mathrm{d}x_j,\cdots,\sum_{j=1}^n a_{mj}\mathrm{d}x_j\Big)^{\mathrm{T}}=(a_{ij})_{m\times n}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\&=\boldsymbol{A}\mathrm{d}\boldsymbol{x},\end{aligned}$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的 m 个分量，$\mathrm{d}\boldsymbol{x}=(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_n)^{\mathrm{T}}$. 故 $\boldsymbol{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}$.