$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x+\cos^4 x}dx \xlongequal{t=\frac{\pi}{2}-x} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin^3 t}{2\cos^2 t+\sin^4 t}(-dt),$$

故原式$=0$.

4. 计算$\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx \quad (n\in \mathbf{N}_+)$.

解　$I=\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx \xlongequal{u=n\pi-x} \int_0^{n\pi}(n\pi-u)|\sin u|du$,

即　$I=n\pi\int_0^{n\pi}|\sin u|-I$,故 $I=\frac{1}{2}n\pi\int_0^{n\pi}|\sin u|du$.

又因为$|\sin u|$是周期为π的周期函数,故

$$I=\frac{1}{2}n^2\pi\left(\int_0^{\pi}\sin u du\right)=n^2\pi.$$

5. 计算$\int_{\frac{1}{2}}^2\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$.

解

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^2 e^{x+\frac{1}{x}}dx &= xe^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{\frac{1}{2}}^2-\int_{\frac{1}{2}}^2 xe^{x+\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx\\ &=\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}-\int_{\frac{1}{2}}^2\left(x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx,\end{aligned}$$

故原式 $=\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}$.

6. 计算$\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$.

解

$$\begin{aligned}原式&=\int\frac{(x+1-1)e^x}{(1+x)^2}dx=\int\frac{e^x}{1+x}dx+\int e^x\frac{-1}{(1+x)^2}dx\\ &=\int\frac{e^x}{1+x}dx+\frac{e^x}{1+x}-\int\frac{1}{1+x}de^x=\frac{e^x}{1+x}+C.\end{aligned}$$

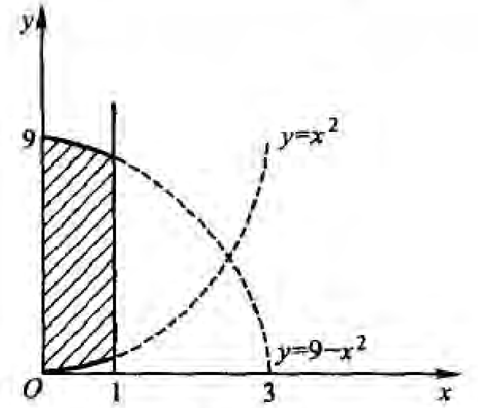
习　题　3.4

(A)

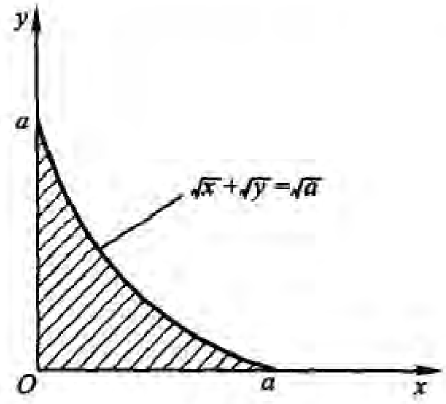
1. 求由下列各曲线围成平面图形的面积:

(1) 曲线 $y=9-x^2, y=x^2$ 与直线 $x=0, x=1$.

解　如图所示,面积元为 $dA=[(9-x^2)-x^2]dx=(9-2x^2)dx$,从而所求面积为 $A=\int_0^1(9-2x^2)dx=\frac{25}{3}$.



(第 1 题(1))



(第 1 题(3))

(3) 曲线$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}(a>0)$与坐标轴.

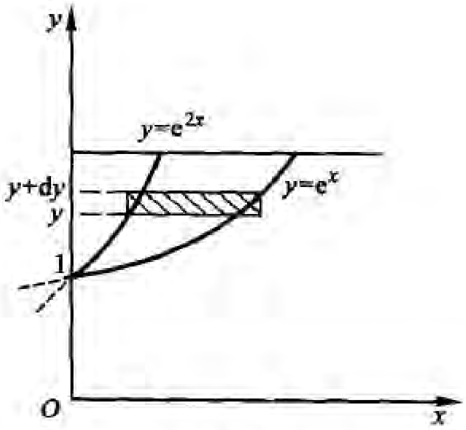
解 如图所示,面积元 $dA=(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2dx$,于是所求面积为

$$A=\int_0^a(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2dx=\frac{1}{6}a^2.$$

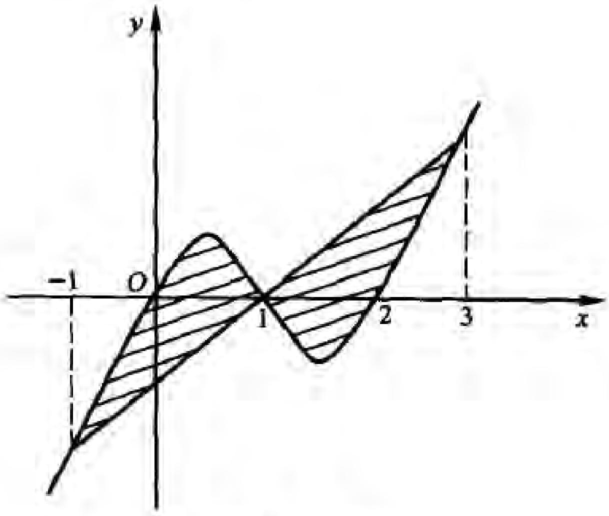
(4) 曲线 $y=e^x,y=e^{2x}$与直线 $y=2$.

解 面积元 $dA=\left(\ln y-\frac{1}{2}\ln y\right)dy=\frac{1}{2}\ln ydy$,

所求面积 $A=\int_1^2\frac{1}{2}\ln ydy=\frac{1}{2}(2\ln 2-1)$.



(第 1 题(4))



(第 1 题(5))

(5) $y=x(x-1)(x-2)$与直线 $y=3(x-1)$.

解 面积元

$$\begin{aligned}dA&=|x(x-1)(x-2)-3(x-1)|dx\\&=-|x-1|(x^2-2x-3)dx,x\in[-1,3].\end{aligned}$$

故所求面积

$$A=\int_{-1}^{3}-|x-1|(x^2-2x-3)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-1}^{1}(x-1)(x^2-2x-3)\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}-(x-1)(x^2-2x-3)\mathrm{d}x=8.$$

(6) 闭曲线 $y^2=x^2-x^4$.

解 令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,代入可得曲线的极坐标方程 $\rho^2\cos^4\theta=\cos 2\theta\geqslant 0$,故 $\theta\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi\right)$,从而位于第一象限的面积 A_1.

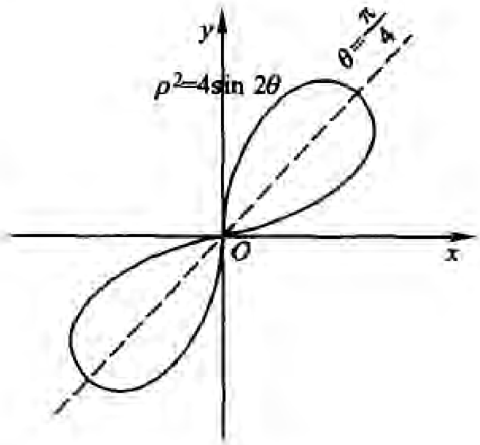
$$A_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\frac{\cos 2\theta}{\cos^4\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{2\cos^2\theta}\mathrm{d}\tan\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\tan^2\theta)\mathrm{d}\tan\theta=\frac{1}{3}.$$ 于是总面积 $A=4A_1=\frac{4}{3}$.

(7) 双纽线 $\rho^2=4\sin 2\theta$.

解 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$.

如图所示位于第一象限的面积 A_1 等于总面积 A 的 $\frac{1}{2}$.

而 $A_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin 2\theta\mathrm{d}\theta=2$,故 $A=4$.

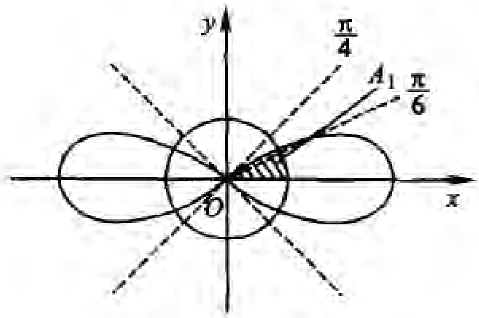


(第 1 题(7))

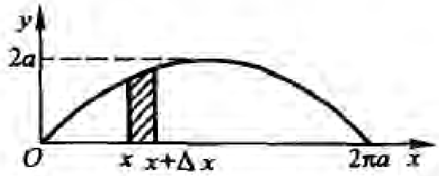
(8) 双纽线 $\rho^2=2\cos 2\theta$ 与圆 $\rho=1$ 围成图形的公共部分.

解 如图所示总面积 A 等于 A_1 的 4 倍.

$$A=4A_1=4\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}1^2\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}2\cos 2\theta\mathrm{d}\theta\right]$$
$$=2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}.$$



(第 1 题(8))



(第 1 题(9))

(9) 摆线$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$的一拱$(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$与 x 轴.

解　如图所示,所求面积为

$$A=\int_0^{2\pi a} y\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\mathrm{d}a(t-\sin t)=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\mathrm{d}t=3\pi a^2.$$

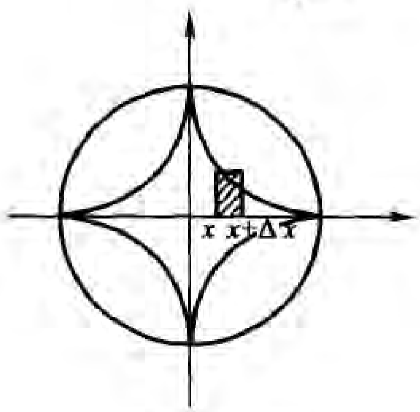
(10) 星形线$\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\y=a\sin^3 t\end{cases}$外,圆 $x^2+y^2=a^2$ 内的部分.

解　由星形线所围的区域的面积 A_0.

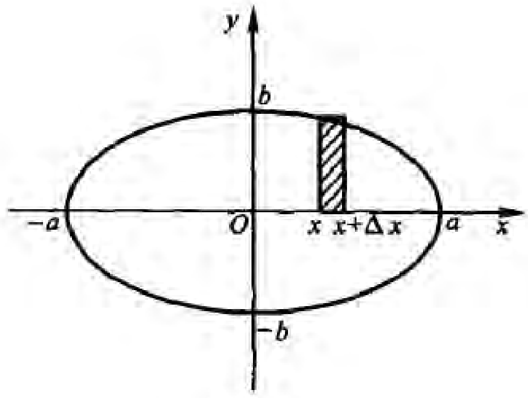
$$A_0=4\int_0^a y\mathrm{d}x=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 -a\sin^3 t\cdot(3a\cos^2 t\sin t)\mathrm{d}t=\frac{3}{8}\pi a^2,$$

故所求面积 $A=A_{圆}-A_0=\pi a^2-\frac{3}{8}\pi a^2$

$$=\frac{5}{8}\pi a^2.$$



(第 1 题(10))



(第 2 题(1))

2. 求下列各曲线围成的图形按指定轴旋转所产生旋转体的体积:

(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$分别绕 x 轴与 y 轴.

解　绕 x 轴旋转

$$\mathrm{d}V_x=\pi y^2\mathrm{d}x$$

$$V_x=\int_{-a}^a \pi b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

类似的方法可得绕 y 轴旋转的体积 $V_y=\frac{4}{3}\pi a^2 b$.

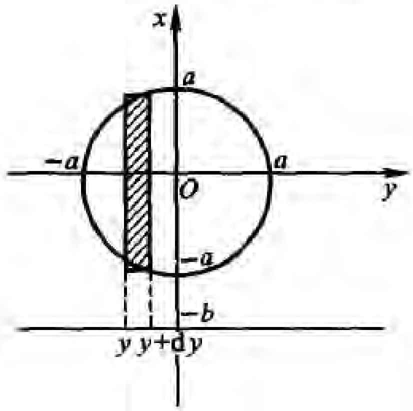
(3) $x^2+y^2=a^2$ 绕直线 $x=-b$　$(b>a>0)$.

$$\mathrm{d}V=\pi[(\sqrt{a^2-y^2}+b)^2-(-\sqrt{a^2-y^2}+b)^2]\mathrm{d}y$$

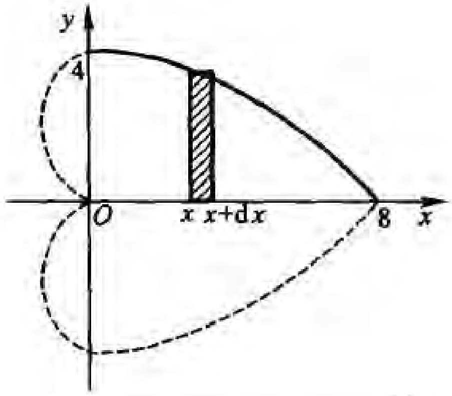
$$V=\pi\int_{-a}^a[(b+\sqrt{a^2-y^2})^2-(b-\sqrt{a^2-y^2})^2]\mathrm{d}y$$

$$=2\pi\int_0^a\left[(b+\sqrt{a^2-y^2})^2-(b-\sqrt{a^2-y^2})^2\right]\mathrm{d}y$$

$$=8b\pi\int_0^a\sqrt{a^2-y^2}\,\mathrm{d}y=2\pi^2a^2b.$$



（第 2 题(3)）



（第 2 题(4)）

(4) 心形线 $\rho=4(1+\cos\theta)$，射线 $\theta=0$ 及 $\theta=\frac{\pi}{2}$，绕极轴旋转的体积.

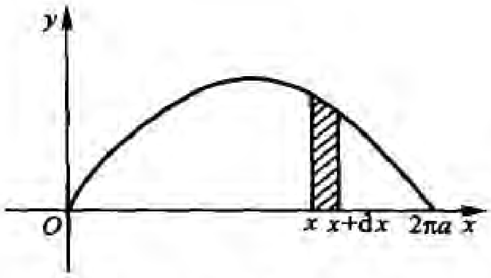
$$V=\int_0^8\pi y^2\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0\left[4(1+\cos\theta)\sin\theta\right]^2\mathrm{d}4(1+\cos\theta)\cos\theta$$

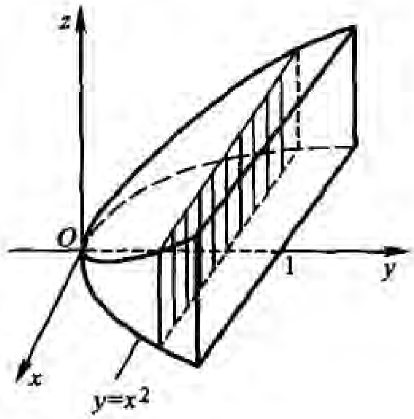
$$=64\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta(1+\cos\theta)^2(1+2\cos\theta)\mathrm{d}(-\cos\theta)$$

$$=64\pi\int_0^1(1-u^2)(1+u)^2(1+2u)\mathrm{d}u=160\pi.$$

(5) 摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 的一拱（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$）与 x 轴，绕 y 轴，其中 $a>0$.



（第 2 题(5)）



（第 3 题(1)）

解 $\Delta V \approx [\pi(x+\Delta x)^2-\pi x^2]y$,

$$dV=2\pi xy\mathrm{d}x,$$

$$V=\int_0^{2\pi a}2\pi xy\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}[2\pi a(t-\sin t)a(1-\cos t)]\mathrm{d}a(t-\sin t)=3\pi^3a^3.$$

3. 立体底面为抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=1$ 围成的图形，而任一垂直于 y 轴的截面分别是：(1)正方形；(2)等边三角形；(3)半圆形. 求各种情况下立体的体积.

解 (1) 截面的边长为 $2\sqrt{y}$，则截面积为 $4y$，故立体体积为 $V=\int_0^1 4y\mathrm{d}y=2$.

(2) 由于截面为等边三角形，则截面面积 $\frac{1}{2}(2\sqrt{y})\left(\sqrt{y}\tan\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}y$.

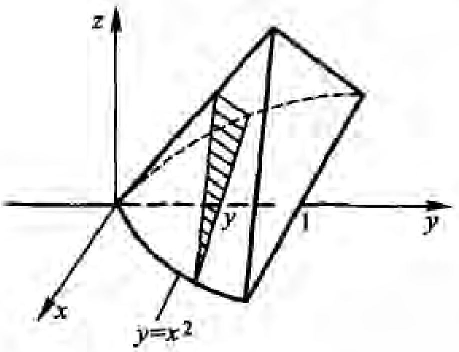
则宽度为 $\mathrm{d}y$ 的薄片体积

$$\Delta V\approx\sqrt{3}y\mathrm{d}y,$$

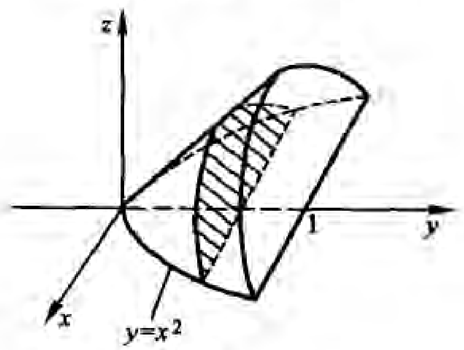
故

$$V=\int_0^1\sqrt{3}y\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(3) 半圆形截面面积为 $\frac{1}{2}\pi(\sqrt{y})^2=\pi y/2$，故 $V=\int_0^1\frac{1}{2}\pi y\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}$.



(第 3 题(2))



(第 3 题(3))

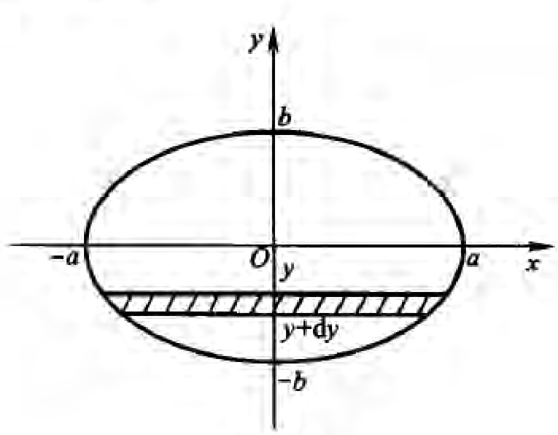
4. 两质点的质量分别为 M 和 m，相距为 a，现将质点 m 沿两质点连线向外移动距离 l，求克服引力所做的功.

解 如图所示建立坐标系，由万有引力定律知：相距为 x 的质量为 m、M 的两质点间的引力大小为 $f=k\frac{Mm}{x^2}$(其中 k 为引力常数)，于是将 m 由 x 移到 $x+\mathrm{d}x$ 时克服引力所做的功微元为

$\mathrm{d}W=f\cdot\mathrm{d}x=k\frac{Mm}{x^2}\cdot\mathrm{d}x$，故所求功为

$$W=\int_a^{a+l}kmM\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=kmM\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+l}\right).$$

（第 4 题）



（第 6 题）

6. 将长、短半径分别为 a 与 b 的一椭圆板铅直放入水中，长为 $2a$ 的轴与水面平行.

（1） 如果水面刚好淹没该板的一半；

（2） 如果水面刚好淹没该板.

分别求两种情况下该板一侧受到的水压力.

解 如图所示建立坐标系，则椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

（1） 图中细条受到水压力的近似值（压力微元）为

$$\mathrm{d}F=P\cdot\mathrm{d}A=\rho g(-y)\cdot 2x\mathrm{d}y=-2gya\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}y$$

P 为该细条上各点处压强的近似值，ρ 为水的密度，g 为重力加速度，$\mathrm{d}A=2x\mathrm{d}y$ 为该细条的面积. 故所受压力

$$F=\int_{-b}^{0}-2g\,\frac{a}{b}y\,\sqrt{b^2-y^2}\,\mathrm{d}y=\frac{2}{3}gab^2.$$

（2） 水面平行于 $y=b$ 时，细条受到的压力近似值

$$\mathrm{d}F=\rho g(b-y)\cdot 2x\mathrm{d}y=2g(b-y)\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\,\mathrm{d}y.$$

故所求压力

$$F=\int_{-b}^{b}\frac{2ga}{b}(b-y)\sqrt{b^2-y^2}\,\mathrm{d}y=\pi gab^2.$$

7. 以下各种容器中均装满水，分别求把各容器中的水全部从容器口抽出克服重力所作的功：

（1） 容器为圆柱形，高为 H，底半径为 R；

（2） 容器为圆锥形，高为 H，底半径为 R；

（3） 容器为圆台形，高为 H，上底半径为 R，下底半径为 r，且 $R>r$；

(4) 容器为抛物线 $y=x^2(0\leqslant x\leqslant 2)$ 的弧段绕 y 轴旋转所产生的旋转面。

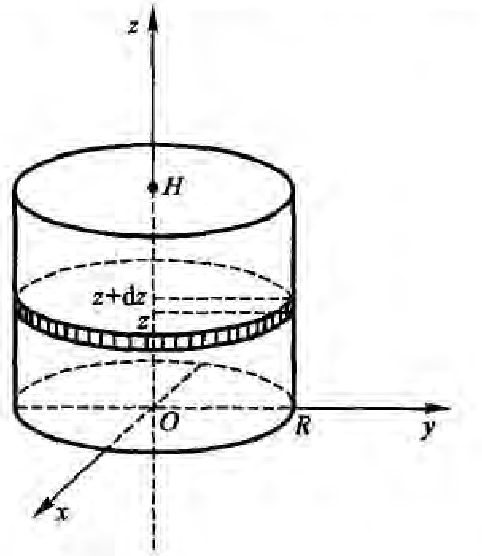
解　(1) 如图所示建立坐标系，与区间 $[z,z+\mathrm{d}z]$ 对应一薄层水体积的近似值 $\mathrm{d}V=\pi R^2\mathrm{d}z$. 将这一薄层水抽到容器口所经过的位移近似看作相同的，等于 $H-z$，则克服重力所做的功为

$$\mathrm{d}W=(\rho g\cdot\pi R^2\mathrm{d}z)(H-z),$$

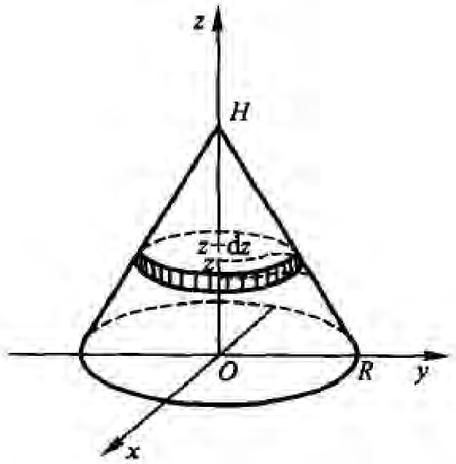
故

$$W=\int_0^H\pi\rho gR^2(H-z)\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\pi\rho gR^2H^2=\frac{1}{2}\pi gR^2H^2.$$

其中 g 为重力加速度，ρ 为水的密度.



(第 7 题(1))



(第 7 题(2))

(2) 设水高为 z 的水面半径为 r_z，则 $\frac{H-z}{H}=\frac{r_z}{R}$，从而 $r_z=\frac{R}{H}(H-z)$，则功微元

$$\mathrm{d}W=\rho g\cdot\pi\left[\frac{R}{H}(H-z)\right]^2\mathrm{d}z\cdot(H-z)=\frac{\pi gR^2}{H^2}(H-z)^3\mathrm{d}z,$$

$$W=\int_0^H\frac{\pi gR^2}{H^2}(H-z)^3\mathrm{d}z=\frac{1}{4}\pi gR^2H^2.$$

(3) 如图所示建立坐标系，水深 $H-z$ 处的水面半径为 y. 则 $\frac{y-r}{R-r}=\frac{z}{H}$，

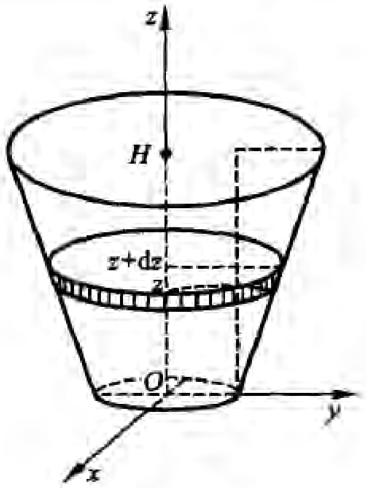
则

$$y=r+\frac{R-r}{H}z.$$

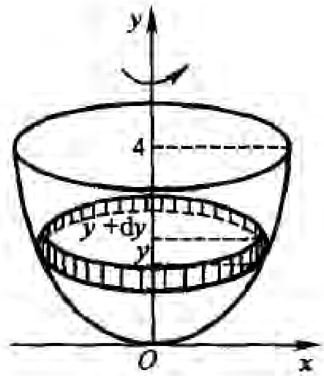
功微元

$$\mathrm{d}W=\rho g\cdot\pi\left[r+\frac{R-r}{H}z\right]^2\mathrm{d}z(H-z),$$

$$W=\int_0^H\frac{\pi g}{H^2}[(R-r)z+rH]^2(H-z)\mathrm{d}z=\frac{1}{12}\pi gH^2(R^2+2Rr+3r^2).$$



（第 7 题(3)）



（第 7 题(4)）

（4） 如图所示

$$dW=g\pi x^2(4-y)dy=\pi gy(4-y)dy,$$
$$W=\int_0^4 \pi g(4y-y^2)dy=\frac{32}{3}\pi g.$$

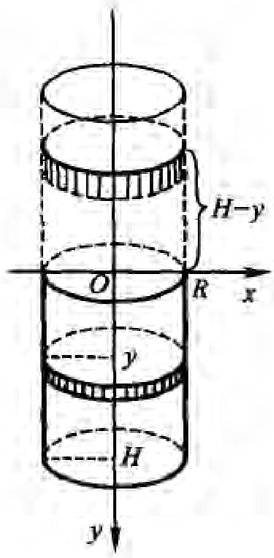
8. 一圆柱形物体，底半径为 R，高为 H，该物体铅直立于水中，且上底面与水面相齐. 现将它铅直打捞出来，试对下列两种情况分别计算使该物体刚刚脱离水面时需要作的功：

（1） 该物体的密度 $\mu=1$（与水的密度相等）；

（2） 该物体的密度 $\mu>1$.

解 如图所示建立坐标系.

将相应于$[y,y+\Delta y]$间的薄片铅直打捞出水面，既要克服自身的重力，又要克服浮力作功，在水中的位移为$(-y)$，出水后的位移为$[-(H-y)]$. 在水中所受合力微元为 $g(1-\mu)dV$. 出水后的受力微元为$-g\mu dV$. 于是



（第 8 题）

$$dW=(-y)g(1-\mu)dV+[-(H-y)(-g\mu dV)]$$
$$=g(H\mu-y)\cdot\pi R^2 dy.$$

（1） 若 $\mu=1$，则 $dW=g(H-y)\pi R^2 dy$，

$$W=\int_0^H \pi R^2 g(H-y)dy=\frac{1}{2}\pi R^2 gH^2.$$

（2） 若 $\mu>1$，则 $dW=\pi R^2 g(H\mu-y)dy$，

$$W=\int_0^H \pi R^2 g(H\mu-y)dy=\frac{1}{2}\pi gR^2H^2(2\mu-1).$$

9. 一个半径为 R 的半圆环导线，均匀带电，电荷密度为 δ. 在圆心处放置一个带电量为 q 的点电荷，求它们之间的作用力.

解　如图所示建立坐标系.在半圆周上点(x,y)处任取长度为ds的弧段,则由 Coulomb 定律知,ds对原点处点电荷引力的近似值为

$$dF=k\frac{q(\delta ds)}{x^2+y^2}r_0=kq\delta\frac{(xi+yj)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2},$$

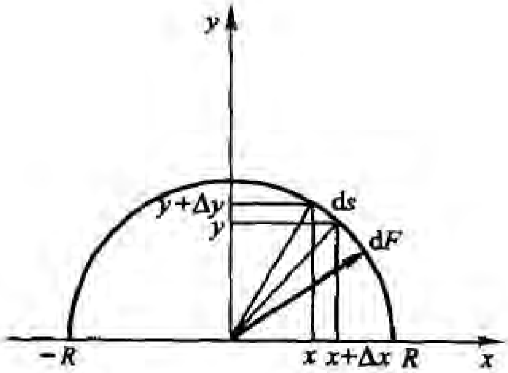
其中　$\Delta s^2\approx\Delta x^2+\Delta y^2\approx(dx)^2+dy^2=\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right](dx)^2=\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)(dx)^2$,

故　$$ds=\frac{1}{|y|}\sqrt{x^2+y^2}dx=\frac{1}{|y|}Rdy=\frac{1}{y}Rdy,$$

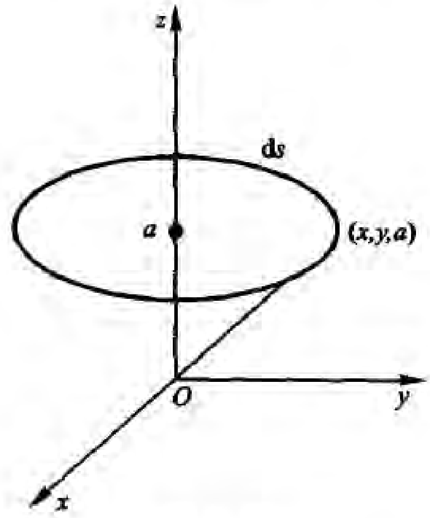
于是dF在x,y方向的分量分别为

$$dF_y=\frac{kq\delta}{R^2}\frac{y}{|y|}dx=\frac{kq\delta}{R^2}dx,dF_x=\frac{kq\delta x}{R^2y}dx.$$

由对称性可知,合力在x轴上的分量等于零.故合力大小$F=F_y=\int_{-R}^{R}\frac{kq\delta}{R^2}dx=\frac{2kq\delta}{R}$,方向与$y$轴一致.



(第 9 题)



(第 10 题)

10. 一个半径为R的圆环导线,均匀带电,电荷密度为δ.在过圆心且垂直于环所在平面的直线上与圆心相距为a之处有一个带电量为q的点电荷.求导线与点电荷之间的作用力.

解　如图所示建立坐标系,则圆环的方程为$\begin{cases}z=a,\\x^2+y^2=R^2\end{cases}$在圆环上点$(x,y,a)$处取一小段圆弧$ds$,则$ds\approx\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\approx\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\sqrt{1+(-x/y)^2}dx=\frac{1}{|y|}\sqrt{x^2+y^2}dx=\frac{R}{|y|}dx$.将$ds$视作一点.则点电荷$\delta ds$对原点

处的点电荷的引力为 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\frac{kq\delta\mathrm{d}s}{x^2+y^2+a^2}\boldsymbol{r}_0$（$\boldsymbol{r}_0$ 是与向径同向的单位向量，则 $\boldsymbol{r}_0=\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+a\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}$，且 $x^2+y^2+a^2=R^2+a^2$）于是 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\frac{kq\delta R}{(R^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{|y|}\mathrm{d}x(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+a\boldsymbol{k})$，由对称性可知.合力在 x,y 方向的分量等于零，而且左半圆弧与右半圆弧对原点处点电荷的引力大小相等，故这个引力大小等于其在 z 轴上的分力 $F_z=F_{z左}+F_{z右}$，方向与 z 轴一致.

而
$$\begin{aligned}F_{z右}&=\int_{-R}^{R}\mathrm{d}F_z=\int_{-R}^{R}\frac{kq\delta R}{(R^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{a}{y}\mathrm{d}x\\&=\frac{akq\delta R}{(R^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\int_{-R}^{R}\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{2akq\delta R}{(R^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\int_{0}^{R}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{R^2-x^2}}\\&=\frac{\pi akq\delta R}{(R^2+a^2)^{\frac{3}{2}}},\end{aligned}$$

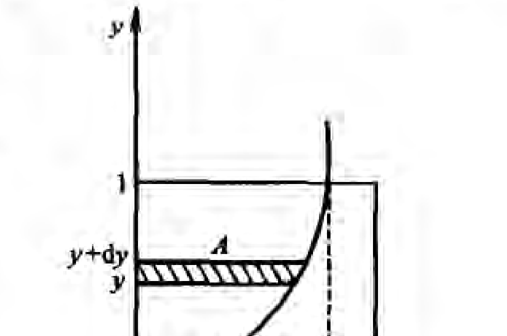
故
$$\boldsymbol{F}=\frac{2\pi akq\delta R}{(R^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{k}.$$

11. 曲线 $a^2y=x^2(0<a<1)$ 将图中边长为 1 的正方形分成 A,B 两部分.

(1) 分别求 A 绕 y 轴旋转一周与 B 绕 x 轴旋转一周所得两旋转体的体积 V_A 与 V_B；

(2) 当 a 取何值时，$V_A=V_B$?

(3) 当 a 取何值时，V_A+V_B 取得最小值?



（第 11 题）

解 (1) A 绕 y 轴一周的体积为 V_A，
$$V_A=\int_0^1\pi x^2\mathrm{d}y=\pi\int_0^1a^2y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\pi a^2.$$

B 绕 x 轴一周的体积
$$\begin{aligned}V_B&=\int_0^a\pi y^2\mathrm{d}x+\pi1^2(1-a)=\int_0^a\pi\frac{x^4}{a^4}\mathrm{d}x+\pi(1-a)\\&=\frac{1}{5}\pi a+\pi-\pi a=\pi\left(1-\frac{4}{5}a\right).\end{aligned}$$

(2) 要使 $V_a=V_B$.则 $a=\frac{\sqrt{66}-4}{5}$.

(3) 令 $V(a)=V_a+V_B=\frac{1}{2}\pi a^2+\pi\left(1-\frac{4}{5}a\right)=\frac{\pi}{10}(5a^2-8a+10)$，$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}a}=0$ 得

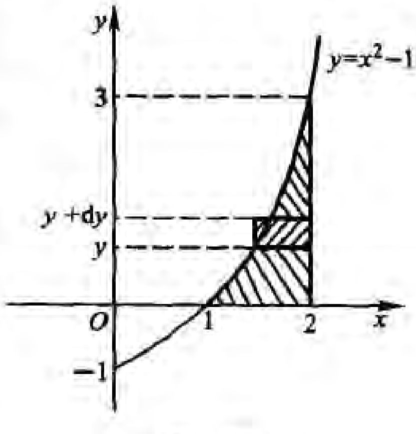
驻点 $a=\frac{4}{5}$，又 $\left.\frac{d^2v}{da^2}\right|_{\frac{4}{5}}=\pi>0$，故 $a=\frac{4}{5}$ 处 $V(a)$ 取得最小值 $\frac{34}{50}\pi$.

12. 设有立体，过 x 轴上点 $x(a\leqslant x\leqslant b)$ 处作垂直于 x 轴的平面截该立体的截面面积为已知连续函数 $S(x)$，立体两端点处的截面（可以缩为一点）分别对应于 $x=a$ 与 $x=b$. 证明：该立体的体积 $V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x$.

解　当 $\mathrm{d}x$ 足够小时，介于截面 $S(x)$（过 x 轴上 x 点处垂直于 x 轴的平面截立体所得截面）与截面 $S(x+\Delta x)$（过 x 轴上的 $x+\Delta x$ 处垂直于 x 轴的平面截立体所得截面）之间的立体薄片可近似的看作以 $S(x)$ 为底面，高为 Δx 的柱体. 则此薄片体积的近似值 $\mathrm{d}V=S(x)\Delta x$. 故由定积分定义，立体的体积 $V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x$.

(B)

2. 一开口容器的侧面与底面分别为由曲线段 $y=x^2-1(1\leqslant x\leqslant 2)$ 和直线段 $y=0(0\leqslant x\leqslant 1)$ 绕 y 轴旋转而成. 现以 $2\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$ 的速度向容器内注水. 试求当水面高度上升到容器深度一半时水面上升的速度. 设坐标轴上长度单位为 m.



（第 2 题）

解　t 时刻容器内水面的高度为 $h(t)(\mathrm{m})$，容器内水的体积为 $2t(\mathrm{m}^3)$. 于是有

$$2t=\int_0^{h(t)}\mathrm{d}V=\int_0^{h(t)}\pi(2^2-x^2)\mathrm{d}y$$
$$=\pi\int_0^{h(t)}(4-y-1)\mathrm{d}y,$$

从而
$$2t=\pi\left(3y-\frac{1}{2}y^2\right)_0^{h(t)},$$

即
$$2t=\left[3h(t)-\frac{1}{2}h^2(t)\right]\pi,$$

两边同时对 t 求导
$$2=[3h'(t)-h(t)h'(t)]\pi,$$

故
$$h'(t)=\frac{2}{[3-h(t)]\pi},$$

从而
$$h'(t_0)|_{h(t)=\frac{3}{2}}=\frac{4}{3\pi}(\mathrm{m/min}).$$

当水面高度升高到容器深度（3m）一半时，水面上升的速度为 $\frac{4}{3\pi}\mathrm{m/min}$.

3. （人口统计模型）我们知道，一般来说城市人口的分布密度 $P(r)$ 随着与

市中心距离 r 的增加而减小. 设某城市 1990 年的人口密度为 $P(r)=\frac{4}{r^2+20}$(10 万人/km^2),试求该市距市中心 2 km 的范围内的人口数.

解　在 $\mathrm{d}r$ 足够小时. 近似的认为圆环(内半径 r,外半径 $r+\mathrm{d}r$)上人口密度为 $P(r)=\frac{4}{r^2+20}$. 而将整个城市的人口看作分布在这些圆环上的人口之和. 圆环面积微元 $\mathrm{d}A=2\pi r\mathrm{d}r$. 则距市中心 2 km 范围内的人口数

$$M=\int_0^2 P(r)\mathrm{d}A=\int_0^2\frac{4(2\pi r\mathrm{d}r)}{r^2+20}=4\pi\ln\frac{6}{5}(10\text{ 万人})$$
$$\approx 2.291(10\text{ 万人}).$$

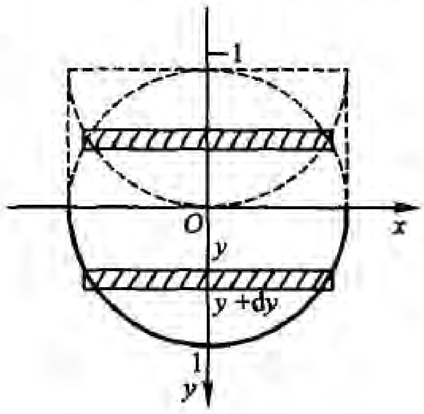
4. 设一半径为 1 的球有一半浸入水中,球的体密度为 1,问将此球从水中取出需作多少功?

解　如图所示建立坐标系,采用与练习 3.4(A)第 8 题的分析法可知:将下半球从水中拿出所做功微元

$$\mathrm{d}W_1=(-y)g(1-\mu)\mathrm{d}V-[-(1-y)](-g\mu\mathrm{d}V)=g[(\mu-1)y+\mu(1-y)]\mathrm{d}V,$$

$\mathrm{d}V$ 为图中阴影所示薄片的体积,即

$$\mathrm{d}v=\pi x^2\mathrm{d}y=\pi\ \sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y.$$



(第 4 题)

由于 $\mu=1$,故将下半球从水中取出所做功为

$$W_1=\int_0^1\mathrm{d}W_1=\int_0^1 g(1-y)\pi\ \sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)\pi g$$

上半球从原始位置升高 1 所做功

$$W_2=(-1)\left(-g\mu\cdot\frac{2}{3}\pi\cdot 1^3\right)=\frac{2}{3}\pi g$$

故将此球从水中拿出所做的功为

$$W=W_1+W_2=\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}\right)\pi g.$$

习　题　3.5

(A)

1. 利用定义判定下列无穷积分的收敛性,如果收敛,计算其值.