第七章　常微分方程

习　题　7.1

(A)

4. 已知微分方程组$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2x$,

(1) 求它的轨线族方程,在相平面上轨线代表什么曲线?

(2) 求微分方程组的通解,它在增广相平面上表示什么曲线?

(3) 从几何上说明积分曲线与轨线的关系.

解　(1) 由原方程组消去 t 可得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x}{-y}$. 此方程的积分曲线族 $y^2+2x^2=C$ 即原方程组的轨线族,表示 xOy 平面上的同心椭圆族.

(2) 微分方程组的通解为 $x=C_1\cos(t+C_2)$, $y=2C_1\sin(t+C_2)$. 是增广相平面上的椭圆螺旋线族.

(3) 方程组的积分曲线(椭圆螺旋线族)在相平面(xOy 平面)上的投影为轨线族(椭圆族).

5. 求已知微分方程组$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y$ 的通解与轨线族.

解　通解 $x=C_1\mathrm{e}^t, y=C_2\mathrm{e}^t$. 轨线族 $y=Cx$.

(B)

2. 在相平面 xOy 上,下述两个微分方程组所表示的线素场有什么本质的区别?

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x,y),\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=g(x,y),\end{cases}\quad (x,y)\in D\subseteq\mathbf{R}^2;$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x,y),\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=g(t,x,y),\end{cases}\quad (t,x,y)\in I\times D\subseteq\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2.$$

解 前者过相平面 D 上任一点 $(x,y)\in D$ 仅确定一个方向;后者可确定多个方向,随 t 的不同而可能不同.

3. 若题 2 中两个方程组均满足解的存在唯一性定理的条件,它们的任意两条不同的轨线能否相交? 它们的任意两条积分曲线能否相交?

解 由于两方程组均满足解的存在唯一性定理的条件,故它们的任意两条积分曲线不能相交. 但由于题 2 中所述原因. 前者的任意两条不同的轨线不能相交. 后者的两条不同的轨线可能相交.

习 题 7.2

(A)

2. 证明:若 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}(t)$ 是齐次线性微分方程组 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{x}(t_0)=0$ 的解,则必有 $\boldsymbol{x}(t)\equiv 0$.

证明 由于齐次线性微分方程组 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 满足解的存在唯一性定理的条件,故它的任意两条积分曲线不能相交. 如果满足初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=0$ 的解 $\boldsymbol{x}(t)\not\equiv 0$,则此解与平凡解(零解)在 $t=t_0$ 有交. 产生矛盾. 故 $\boldsymbol{x}(t)\equiv 0$.

4. 证明:若 $\boldsymbol{x}_i(t),i=1,2,\cdots,n,t\in(a,b)$ 都是齐次线性微分方程组 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的解,则其线性组合 $\sum\limits_{i=1}^{n}C_i\boldsymbol{x}_i(t)$,$t\in(a,b)$ 也是其解,其中 C_i 为实的或复的常数.

解 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}C_i\boldsymbol{x}_i(t)\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}C_i\dot{\boldsymbol{x}}_i(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}C_i(\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}_i)=\boldsymbol{A}(t)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}C_i\boldsymbol{x}\right)$,故 $\sum\limits_{i=1}^{n}C_i\boldsymbol{x}$ 也是解.

6. 证明:非齐次线性微分组 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 的任意两个解之差必为对应的齐次线性微分方程组的一个解.

证明 设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 均为 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$ 的解,则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)&=\dot{\boldsymbol{x}}_1-\dot{\boldsymbol{x}}_2=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{f}(t)-(\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{f}(t))\\&=\boldsymbol{A}(t)(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2).\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2$ 是齐次线性微分方程组 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)$ 的解.

7. 设 $\boldsymbol{A}(t)$ 为实矩阵,$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ 是 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的复值解,试证明 $\boldsymbol{x}(t)$ 的实部和虚部分别都是它的解.