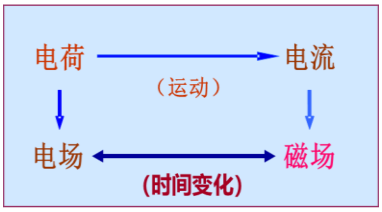
电荷守恒定律

3.1.1 产生电磁场的源



我们知道电荷不仅是产生电场的源，其运动还可形成电流，而电流会产生磁场。电荷静止时，仅会产生静电场；如电荷作均速率运动，则将形成随时间不变的恒定电流（直流），并产生恒定磁场；如电荷做加速运动，则将产生时变电流，此时，其产生的磁场也将是时变的。按电磁感应定律可知，时变磁场又会产生时变电场。

由上述电磁场的场源关系可知，空间存在电磁场分布的根源是电荷，因此，有必要对电荷在空间中的存在形式加以深入认识。

3.1.2 电荷的空间分布形式

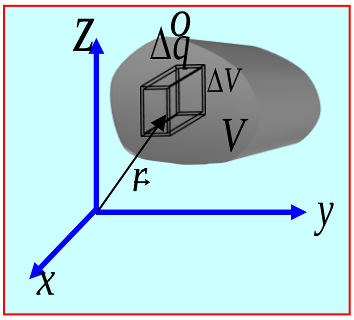
电荷在空间中的分布形式有四种类型：体分布电荷、点分布电荷、面分布电荷和线分布电荷。

（一） 体分布电荷——电荷体密度

（1） 定义

分布于一定体积区域中的电荷，其电荷体密度为该体积中单位体积的电荷量。即

$$\rho(\vec{r},t)=\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\Delta q(\vec{r},t)}{\Delta v}=\frac{dq(\vec{r},t)}{dv}\quad \mathrm{C/m^3}\text{（库仑/米}^3\text{）}$$



（2） 电荷量与**电荷体密度**的关系

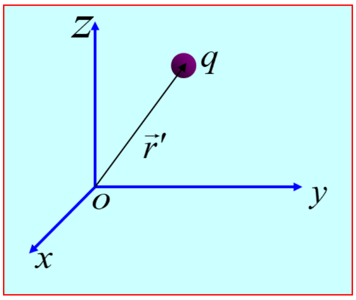
根据电荷体密度的定义，电荷所在区域中任意体积 V 中的电荷量，可通过电荷体密度对该体积的体积分算得

$$q(t)=\int_V \rho(\vec{r},t)dV$$

（二） 点分布电荷——点电荷的体密度

点电荷可视为无限小的体分布电荷。因此，位于$\vec{r}\,'$处电荷量为q的点电荷，可利用δ函数的性质给出**点电荷体密度**的表达式

$$\rho(\vec{r},t)=q(t)\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$



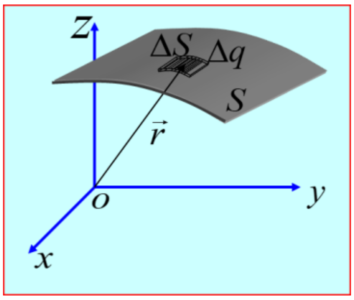
（三） 面分布电荷——电荷面密度

（1） 定义

分布于无限薄层面区域上的电荷，其**电荷面密度**为电

荷所在的面积区域中单位面积上的电荷量。即

$$\rho_s(\vec{r},t)=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta q(\vec{r},t)}{\Delta S}=\frac{dq(\vec{r},t)}{dS}\quad \text{C/m2（库仑/米}^2\text{）}$$



（2） 电荷量与电荷面密度的关系

根据电荷面密度的定义，电荷所在区域中任意面积上的电荷量，可通过电荷面密度对该面积的面积分算得

$$q(t)=\int_S \rho_s(\vec{r},t)dS$$

（3） 电荷面密度与体密度的关系

根据电荷面密度与体密度的定义，可得两者间的关系

$$\rho_s(\vec{r},t)=\lim_{\Delta h\to 0}\rho(\vec{r},t)\Delta h$$

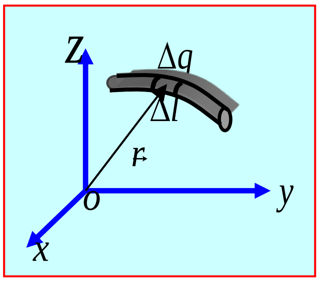
式中，Δh 为电荷面的厚度。

（四）线分布电荷——电荷线密度

（1） 定义

分布于无限细线上的电荷，其**电荷线密度**为电荷所在细线上单位长度的电荷量。即

$$\rho_l(l,t)=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta q(l,t)}{\Delta l}=\frac{dq(l,t)}{dl}\quad \text{C/m（库仑/米）}$$



（2） 电荷量与电荷线密度的关系

根据电荷线密度的定义，在电荷所在线上的任意线段中，电荷量可通过电荷线密度对线段的线积分算得

$$q(t)=\int_L \rho_l(\vec{r},t)dl$$

（3） 电荷线密度与面密度和体密度的关系，

根据电荷的线密度、面密度、体密度的定义，可得三者之间的关系。即

$$\rho_l(\vec{r},t)=\lim_{\Delta w\to 0}\rho_s(\vec{r},t)\Delta w=\lim_{\substack{\Delta h\to 0\\ \Delta w\to 0}}\rho(\vec{r},t)\Delta w\Delta h$$

3.1.3 电流的空间分布形式

电流在空间中分布存在的形式有三种类型：体分布电流、面分布电流和线分布电流。由于电流是电荷在空间中作位移运动的结果，因此，一般不考虑电流在空间中的点分布情况。

（一） 电流的定义

电流定义为一种反映电荷运动状态的物理量，其大小量值 I 称为**电流强度**，是单位时间正电荷通过一个横截面积的电荷量。即

$$I=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{dq}{dt}\quad \text{A（安培）}$$

电流流动的方向规定为与其相应的正电荷运动方向。

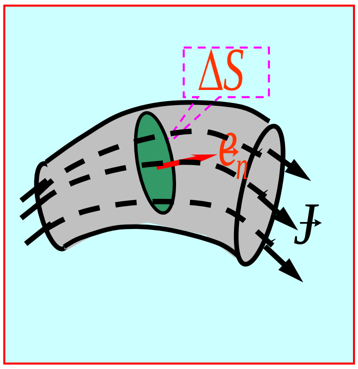
由电流的定义可知，电流强度的大小除了受通过横截面积的电荷量，以及电荷通过横截面的运动速度影响，还可以受横载面所在位置、横截面的面积、横截面的朝向等因素影响。因此，为了在任意情况下针对电流在空间中分布存在的不同形式，准确地定量表达任意位置处电流的具体方向和强度大小，还需要进一步引入与电流不同分布相应的电流密度矢量。

（二） 体分布电流——电流体密度矢量

（1） 定义

分布于体积区域中任意位置$\vec{r}$处的电流，其**电流体密度矢量**的方向，为$\vec{r}$处电流流动的方向；电流体密度矢量的模，为$\vec{r}$处与电流方向垂直的横截平面上单位面积的电流强度。即：

$$\vec{J}(\vec{r},t)=\vec{e}_{\mathrm{n}}\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta I(\vec{r},t)}{\Delta S}=\vec{e}_{\mathrm{n}}\frac{\partial}{\partial s}I(\vec{r},t)\quad \mathrm{A/m^2}\ (\text{安培/米}^2)$$



式中，$\vec{J}(\vec{r},t)$即为$\vec{r}$处的电流体密度矢量，$\vec{e}_n$为$\vec{r}$处电流流动的方向。

（2） 电流强度与电流体密度矢量的关系

根据电流体密度的定义，电流流过体积中任意曲面 S 的电流强度，可通过电流体密度矢量并计入 S 上不同位置面元$d\vec{S}$的朝向，利用曲面积分算得，

$$I(t)=\int_S \vec{J}(\vec{r},t)\cdot d\vec{S}$$

式中，$d\vec{S}$的方向为垂直于dS面的法向。

（3） 电流体密度矢量与运动电荷的关系

设电流所在体积区域中$\vec{r}$处的电荷体密度为$\rho(\vec{r},t)$，电荷运动速度为$\vec{v}(\vec{r},t)$，则在单位时间dt内流过垂直于速度方向单位横截面积dS的电荷量为$dq=\rho v dt dS$，由此可得其相应的电流密度矢量为

$$\vec{J}(\vec{r},t)=\rho(\vec{r},t)\vec{v}(\vec{r},t)$$

（三） 面分布电流——电流面密度矢量

（1） 定义

分布于无限薄层面区域上位于$\vec{r}$处的电流，其**电流面密度矢量**的方向，为$\vec{r}$处电流流动的方向；电流面密度矢量的模，为$\vec{r}$处与电流方向垂直的横截线上单位长度的电流强度。即：

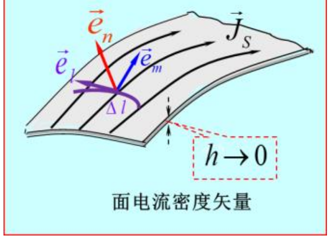
$$\vec{J}_s(\vec{r},t)=\vec{e}_s\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta I(\vec{r},t)}{\Delta l}=\vec{e}_s\frac{\partial}{\partial l}I(\vec{r},t)\quad \mathrm{A/m}\ (\text{安培/米})$$

式中，$\vec{J}_s(\vec{r},t)$即为$\vec{r}$处的电流面密度矢量，$\vec{e}_s$为$\vec{r}$处电流流动的方向。

（2） 电流强度与电流面密度矢量的关系

电流流过电流面 S 上任意曲线段l的电流强度，可通过电流面密度矢量算得，

$$I(t)=\int_l \vec{J}_s(\vec{r},t)\cdot\vec{e}_m dl$$



式中，$\vec{e}_m$为电流面 S 上$\vec{r}$处垂直于曲线l的单位矢量，即$\vec{e}_m=\vec{e}_l\times\vec{e}_n$；$\vec{e}_l$为$\vec{r}$处有向线段$d\vec{l}$的单位矢量；$\vec{e}_n$为$\vec{r}$处电流面的法向单位矢量。

（3） 电流面密度矢量与运动电荷的关系

类似于电流体分布情况中的物理过程和推导可得

$$\vec{J}_s(\vec{r},t)=\rho_s(\vec{r},t)\vec{v}(\vec{r},t)$$

（4）　电流面密度矢量与体密度矢量的关系

$$\vec{J}_s(\vec{r},t)=\lim_{\Delta h\to 0}\vec{J}(\vec{r},t)\Delta h$$

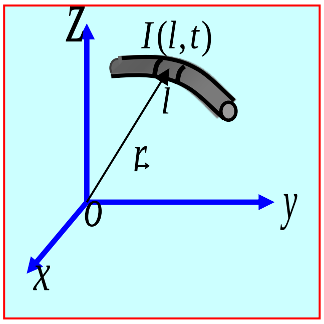
式中，Δh 为电流面的厚度。

（四）线分布电流——线电流

（1）　定义

分布于无限细线上位于 l 处的电流，称为 l 处的**线电流**。由于无限细线上的电流只能沿线以确定的方向流动，因此无需引入矢量来表达其可能存在的其它电流方向。对于线电流，当其所在细线确定后，则仅需通过电流强度来表示出细线上不同位置处的电流大小，也即运动电荷在线上不同位置处单位时间的通过量

$$I(l,t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q(l,t)}{\Delta t}=\frac{dq(l,t)}{dt}\qquad \text{A（安培）}$$



（2）　线电流与运动电荷的关系

类似于电流体分布情况中的物理过程和推导可得

$$I(l,t)=\rho_l(l,t)v(l,t)$$

（3）　线电流与电流面密度矢量、体密度矢量的关系

$$I(l,t)=\lim_{\Delta w\to 0}\left|\vec{J}_s(\vec{r},t)\right|\Delta w=\lim_{\substack{\Delta h\to 0\\ \Delta w\to 0}}\left|\vec{J}(\vec{r},t)\right|\Delta h\Delta w$$

式中，Δw 为电流面的宽度。

3.1.4 电荷守恒定律

电荷守恒是一条无需证明的公理，其遵循的道理是电荷是一种微观物质，它既不能被创造，也不能被消灭，只能在一定时间之内从物体的一部分转移到另一部分，或者从一个物体转移到另一个物体上。

（一）电荷守恒定律的表述

任意时刻，空间中任意区域内单位时间电荷量减少的数量，与通过该区域周界电荷移动出该区域的电荷数量一致，也即与通过周界流出的电流一致。由此可见，**电荷守恒定律**可表达为**电流连续性方程**。

（二）电荷守恒的数学表达式

（1）　体电荷守恒定律

当电荷与电流分布于体积空间时，则对于其中任意给定的包围面为 S 的区域 V，任意时刻从 S 流出的电流与 V 内单位时间的电荷减少量一致。据此，可得出体电荷守恒定律的数学表达式。

1）　积分形式

对于给定包围面为 S 的体积区域 V，根据电荷体密度 ρ 与电流体密度矢量 $\vec{J}$ 的定义，可

得

$$\oint_s \vec{J}(\vec{r},t)\cdot d\vec{S} = -\frac{dq(t)}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho(\vec{r},t)dV = -\int_V \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t)dV$$

该表达式也称为积分形式的电流连续性方程，适合于电荷与电流所在的任意给定体积区域。

若电荷与电流所在空间中各处的电流均为恒定电流，则该空间的电荷分布就不会因电荷的运动而随时间发生改变，即 $\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t)=0$。因此对于恒定电流所在的任意体域 V，可得出

$$\oint_s \vec{J}(\vec{r})\cdot d\vec{S} = 0$$

若将此关系应用于电路中电流所在区域，即可得出直流电路中的电流节点定理。

2） 微分形式

根据散度定理，$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_V \nabla\cdot\vec{J}dV$，并将其应用于积分形式的电流连续性方程，可得出电荷与电流所在区域中，任意位置点处体电荷守恒定律或体电流连续性方程的微分形式，

$$\nabla\cdot\vec{J}(\vec{r},t) = -\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t}$$

上式表明，时变电流体密度矢量的空间分布所形成的电流场，是有散场，且其散度源位于电荷量随时间发生改变的位置，散度源的强度为 $-\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t}$。若用电流线形象表达电流密度矢量的空间分布情况，则发散状的电流线始于正电荷随时间减小的位置，并止于正电荷随时间增加之处。

若电荷与电流所在空间中各处的电流均为恒定电流，则其中各位置点处的电荷量不随时间改变，且电流连续，即

$$\nabla\cdot\vec{J}(\vec{r}) = 0$$

该式表明，恒定电流场是无散场，即如果存在则仅能为涡旋状的有旋场。这就是说，在电流所在的空间中，当至少存在一个电流回路形成电流的环流时，才可能有非零的恒定电流存在。

（2） 面电荷守恒定律

当电荷与电流分布于无限薄的表面区域时，则对于其上任意给定的包围线为 C 的面积域 S,任意时刻从 C 流出的电流与 S 内单位时间的电荷减少量一致。据此，可得出**面电荷守恒定律**的数学表达式。

1） 积分形式

对于给定围线为 C 的面积区域 S，根据电荷面密度 ρ_s 与电流面密度矢量 $\vec{J}_s$ 的定义，可得

$$\oint_c \vec{J}_s(\vec{r},t)\cdot\vec{e}_m dl = -\frac{dq(t)}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \rho_s(\vec{r},t)dS = -\int_S \frac{\partial}{\partial t}\rho_s(\vec{r},t)dS$$

式中，$\vec{e}_m = \vec{e}_l\times\vec{e}_n$ 为电流面上垂直于有向横截线段 $d\vec{l}$ 的单位矢量；$\vec{e}_n$ 为电流面的法向单位矢量。以上表达式也称为积分形式的**面电流连续性方程**，适合于电荷与电流所在的任意给定面积区域。

若电荷与电流所在面积区域各处的电流均为恒定电流，则该面域上的电荷分布就不会因

电荷的运动而随时间发生改变，即 $\frac{\partial}{\partial t}\rho_s(\vec{r},t)=0$。因此，对于恒定面电流所在的任意面积区域，可得出

$$\oint_c \vec{J}_s(\vec{r},t)\cdot\vec{e}_t dl=0$$

2) 微分形式

根据**表面散度定理**，

$$\int_S \nabla_s\cdot\vec{F}dS=\oint_C \vec{e}_m\cdot\vec{F}dl$$

其中，$\nabla_s=\nabla-\vec{e}_n\frac{\partial}{\partial n}$ 为表面哈密顿运算符。由此可得

$$\oint_c \vec{J}_s\cdot\vec{e}_m dl=\int_S \nabla_s\cdot\vec{J}_s dS$$

将以上关系代入积分形式的面电荷守恒定律，可得出

$$\int_S \nabla_s\cdot\vec{J}_s(\vec{r},t)dS=\int_s \rho_s(\vec{r},t)dS$$

上式对电荷与电流面上的任意面积区域 S 均成立，于是得

$$\nabla_s\cdot\vec{J}_s(\vec{r},t)=-\frac{d\rho_s(\vec{r},t)}{dt}$$

此即电荷与电流面上任意位置处面电荷守恒定律或面电流连续性方程的微分形式，适用于电荷与电流面上的任意位置点。

（3） 线电荷守恒定律

当电荷与电流分布于无限细的线上时，则对于线上任意给定的单条线段 L，任意时刻从 L 两端点向线外流出的电流 I 与线段 L 上单位时间的电荷减少量一致。据此，可得出**线电荷守恒定律**的数学表达式。

1) 宏观形式

对于给定线段 L，根据电荷线密度 ρ_s 与电流强度 I 的定义，设 L 的两端点位置分别为 l_1 和 l_2，于是可得

$$I(l_1,t)+I(l_2,t)=-\frac{dq(t)}{dt}=-\frac{\partial}{\partial t}\int_L \rho_l(\vec{r},t)dl=-\int_L \frac{\partial}{\partial t}\rho_l(\vec{r},t)dl$$

若结合实际应用，考虑到线电流通常从一端流进另一端流出的情况，这里设电流从 l_1 端流进而从 l_2 端流出线段 L，则上式应写为

$$I(l_2,t)-I(l_1,t)=-\int_L \frac{\partial}{\partial t}\rho_l(\vec{r},t)dl$$

以上表达式可称为宏观形式的**线电流连续性方程**，适合于电荷与电流所在的任意给定单条线段。

若电荷与电流所在线段各处的电流均为恒定电流，则该线段上的电荷分布就不会因电荷的运动而随时间发生改变，即 $\frac{\partial}{\partial t}\rho_l(\vec{r},t)=0$。因此，对于恒定线电流所在的任意单条线段，

可得出

$$I(l_1)=I(l_2)$$

2） 微分形式

根据积分运算关系，$I(l_2,t)-I(l_1,t)=\int_{l_1}^{l_2} dI(l,t)=\int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial}{\partial l}I(l,t)dl$ ，并将其代入到宏观形式线电流连续性方程中可得，对于电荷与电流所在细线上的任意位置点，线电荷守恒定律或线电流连续性方程的微分形式为

$$\frac{\partial I(l,t)}{\partial l}=-\frac{\partial \rho_l(l,t)}{\partial t}$$

当线上各点处的电流均为恒定电流时，必有 $\frac{\partial \rho_l(l,t)}{\partial t}=0$ 。因此，$\frac{\partial I(l)}{\partial l}=0$ 即 $I(l)=C$ 。