# 第六节

# 函数性态的研究



# 函数单调性的判定法

**定理 6.1** 设 $f: I \to R$ 在 $I$ 上连续，在$I$ 内可导，
则下述命题成立：

（1） $f$ 在 $I$ 上单调增（减）的充要条件是在$I$ 内

$f' \geq 0$ $(f' \leq 0)$;

（2） 若在$I$ 内 $f' > 0$ $(f' < 0)$,

则 $f$ 在 $I$ 上严格单调增（减）.

证: (1) 充分性　　任取 $x_1, x_2 \in I\ (x_1 < x_2)$

由拉格朗日中值定理得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \ge 0\ (\le 0), \xi \in (x_1, x_2),$$

因此，$f$ 在 $I$ 上单调增（减）.

(2) 必要性　　设 $f$ 在 $I$ 上单调增（减）.

对$I$内的任何 $x$，取 $\Delta x$，使 $x + \Delta x$ 仍在 $I$ 内

则有

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0(\leq 0)$$

从而

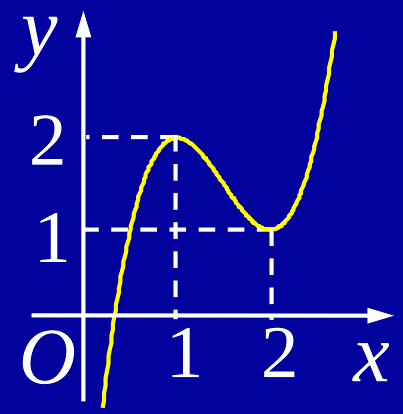
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0(\leq 0)$$

**例1.** 确定函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的单调区间.

**解:** $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

令 $f'(x)=0$, 得 $x=1,\ x=2$

| $x$ | $(-\infty,1)$ | $1$ | $(1,2)$ | $2$ | $(2,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ |




故 $f(x)$ 的**单调增**区间为 $(-\infty,1),\ (2,+\infty)$;

$f(x)$ 的**单调减**区间为 $(1,2)$.

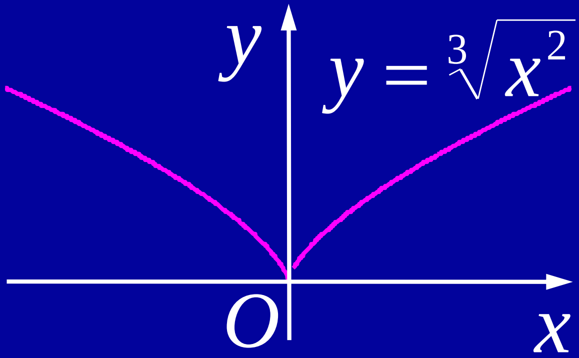
**说明:**

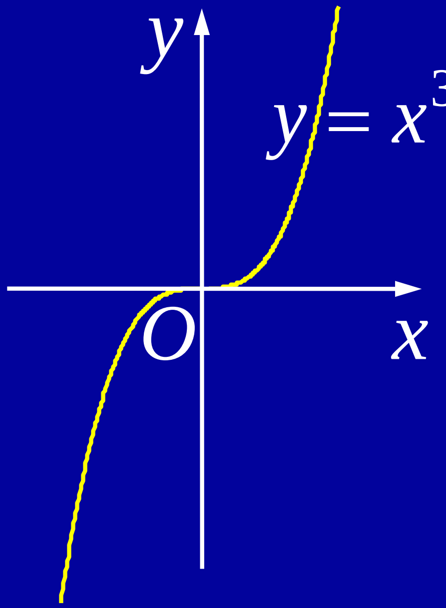
1) 单调区间的分界点除驻点外,也可是导数不存在的点.

例如, $y = \sqrt[3]{x^2}\,,\ x \in (-\infty, +\infty)$

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$y'\big|_{x=0} = \infty$$




2) 如果函数在某驻点两边导数同号,

则不改变函数的单调性 .

例如, $y = x^3\,,\ x \in (-\infty, +\infty)$

$$y' = 3x^2$$

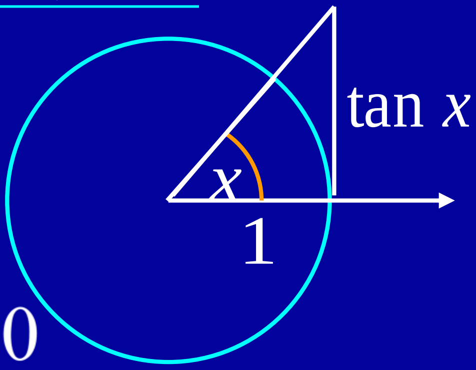
$$y'\big|_{x=0} = 0$$

**例2.** 证明 $0 < x \le \frac{\pi}{2}$ 时, 成立不等式 $\frac{\sin x}{x} \ge \frac{2}{\pi}$ .

**证:** 令 $f(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi}$ ,

则 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上连续, 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上可导, 且

$$f'(x) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}\underline{(x - \tan x) < 0}$$




因此 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调递减,

又 $f(x)$ 在 $\frac{\pi}{2}$ 处左连续, 因此 $f(x) \ge f(\frac{\pi}{2}) = 0$

从而 $\frac{\sin x}{x} \ge \frac{2}{\pi}, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}]$

**例3.** 证明：当 $0 < x < 1$ 时，$e^{2x} < \dfrac{1+x}{1-x}$

**证：** 令 $f(x) = (1-x)e^{2x} - 1 - x, x \in (0,1)$，则

$$f'(x) = (1-2x)e^{2x} - 1$$

$$f''(x) = -4xe^{2x}$$

由于在 $(0,1)$ 内，$f''(x) < 0$，故 $f'$ 在 $(0,1)$ 上严格单调减，从而在 $(0,1)$ 内 $f'(x) < f'(0) = 0$

由此又知 $f$ 在$(0,1)$内严格单调减，得

$$f(x) < f(0) = 0, \quad \text{或} \quad (1-x)e^{2x} < 1+x$$

因此原不等式成立.

# 6.2 函数的极值及其求法

**定义:** 设函数 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内有定义, $x_0 \in (a,b)$,

若存在 $x_0$ 的一个邻域, 在其中当 $x \neq x_0$ 时,

(1) $f(x) < f(x_0)$, 则称 $x_0$ 为 $f(x)$ 的**极大值点**,

称 $f(x_0)$ 为函数的**极大值**;

(2) $f(x) > f(x_0)$, 则称 $x_0$ 为 $f(x)$ 的**极小值点**,

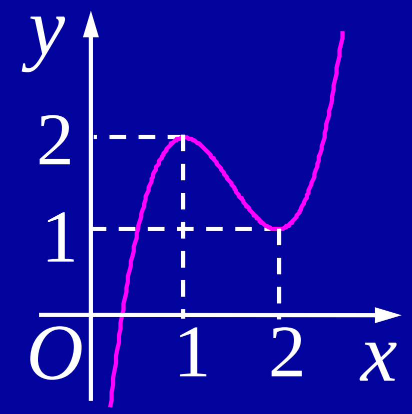
称 $f(x_0)$ 为函数的**极小值**.

极大值点与极小值点统称为**极值点**.

**例如，** 函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$

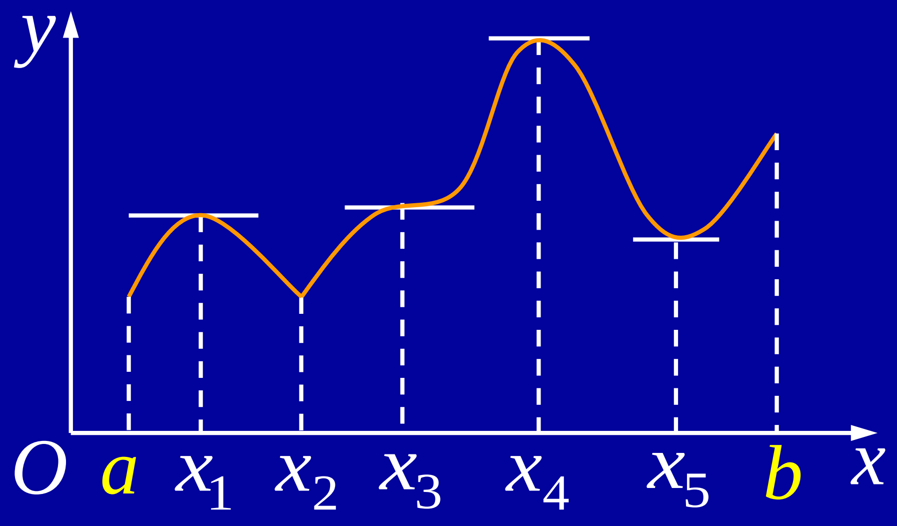
$x=1$ 为极大值点, $f(1)=2$ 是极大值

$x=2$ 为极小值点, $f(2)=1$ 是极小值




**注意:** 1) 函数的极值是函数的局部性质.

2) 对常见函数, 极值可能出现在导数为 0 或不存在的点.




$x_1, x_4$ 为极大值点

$x_2, x_5$ 为极小值点

$x_3$ 不是极值点

使 $f'(x)=0$ 的点称为 $f$ 的驻点.

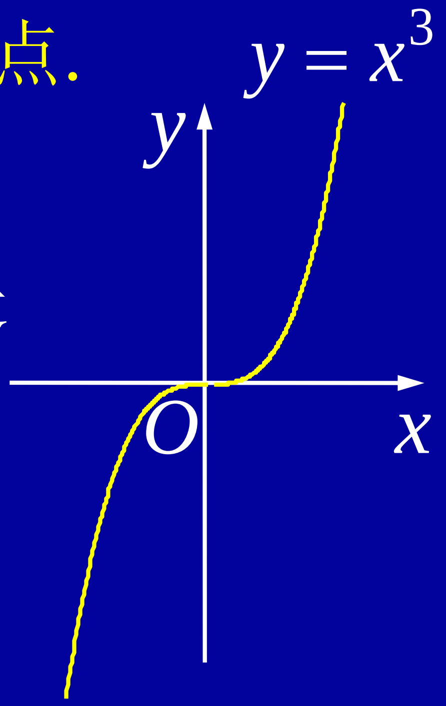
由费马定理（定理4.1）知，

可导函数的极值点必定是它的驻点.

但是，反过来不一定成立.

例如，$x=0$ 是 $f(x)=x^3$ 的驻点但不是

$f$ 的极值点.



## 定理 6.2 (极值第一判别法)

设函数 $f$ 在 $x_0$ 的某邻域内可导，并且 $f'(x_0)=0$

（1）若 $x<x_0$ 时，$f'(x)\ge 0$; $x>x_0$ 时，$f'(x)\le 0,$

则 $f$ 在 $x_0$ 处取极大值;

（2）若 $x<x_0$ 时，$f'(x)\le 0$; $x>x_0$ 时，$f'(x)\ge 0,$

则 $f$ 在 $x_0$ 处取极小值;

（3）若 $f'(x)$ 在 $x_0$的左右两侧符号不变，

则 $f$ 在 $x_0$ 处不取极值.

注：不可导点也可能是函数的极值点.

例如，函数$f(x)=|x|$ 在点 $x$=0处不可导，

但函数在该点取得极小值.

由定理6.2，我们得到确定函数极值的第一种方法，

步骤如下：

(1) 求出函数 $f$ 在所讨论区间内的所有驻点与不可导点;

(2) 考察导函数 $f'$在各驻点与不可导点左右两侧符号的变化，判定它们是否为 $f$ 的极值点，是极大值点还是极小值点;

(3)求出 $f$ 的极值.

**例4.** 求函数 $f(x)=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$ 的极值 .

**解:** 1) 求导数 $f'(x)=x^{\frac{2}{3}}+(x-1)\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{x-\frac{2}{5}}{\sqrt[3]{x}}$

2) 求极值可疑点

令 $f'(x)=0$, 得 $x_1=\frac{2}{5}$; 令 $f'(x)=\infty$, 得 $x_2=0$

3) 列表判别

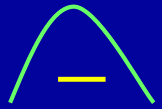
| $x$ | $(-\infty,0)$ | $0$ | $(0,\frac{2}{5})$ | $\frac{2}{5}$ | $(\frac{2}{5},+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $\infty$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-0.33$ | $\nearrow$ |

$\therefore x=0$ 是极大值点, 其极大值为 $f(0)=0$

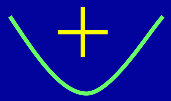
$x=\frac{2}{5}$ 是极小值点, 其极小值为 $f(\frac{2}{5})=-0.33$

**定理6.3 (极值第二判别法)** 设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)\neq 0$

(1) 若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x)$ 在点 $x_0$ 取极大值；




(2) 若 $f''(x_0)>0$，则 $f(x)$ 在点 $x_0$ 取极小值 .




**证:** (1) 由于 $f$ 在 $x_0$ 处二阶可导，故由带peano余项的二阶Taylor公式得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$$

$$=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$$

从而有

$$f(x)-f(x_0)=\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$$

由于右端第二项是第一项的高阶无穷小，因此，在

$x_0$ 的充分小的邻域内，$f(x)-f(x_0)$ 的符号取决于

第一项.所以，若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x)-f(x_0)<0$，

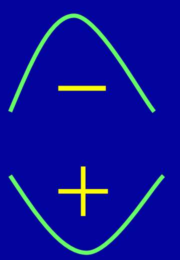
即 $f(x)<f(x_0)$，$f$ 在 $x_0$ 取极大值.

(2) 类似可证 .

**定理6.3（极值第二判别法）** 设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)\neq 0$

(1) 若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x)$ 在点 $x_0$ 取极大值；

(2) 若 $f''(x_0)>0$，则 $f(x)$ 在点 $x_0$ 取极小值．

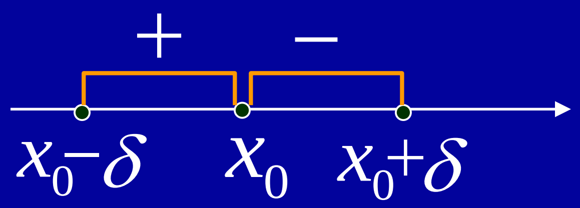



**另证:** (1) $f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}$

由 $f''(x_0)<0$ 知，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0$

故当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，$f'(x)>0$；

当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，$f'(x)<0$，




由第一判别法知 $f(x)$ 在 $x_0$ 取极大值．

(2) 类似可证．

**例5.** 求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值 .

**解:** 1) 求导数

$$f'(x)=6x(x^2-1)^2,\qquad f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1)$$

2) 求驻点

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=1$

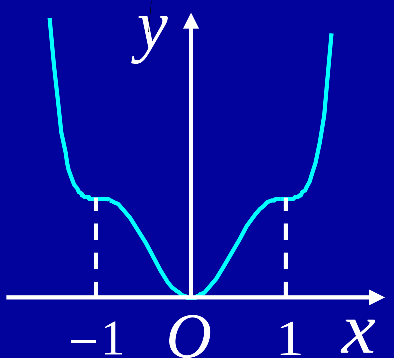
3) 判别

因 $f''(0)=6>0$，故 $f(0)=0$ 为极小值 ;

又 $f''(-1)=f''(1)=0$, 故需用第一判别法判别.

由于 $f'(x)$ 在 $x=\pm1$ 左右邻域内不变号,

$\therefore f(x)$ 在 $x=\pm1$ 没有极值 .

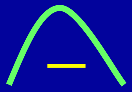


**定理6.4(判别法的推广)**若函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 点有直到 $n$ 阶导数，且 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$,

则: 1) 当 $n$为偶数时, $x_0$为极值点，且

$f^{(n)}(x_0)>0$时, $x_0$是极小点；


$f^{(n)}(x_0)<0$时, $x_0$是极大点．




2) 当 $n$为奇数时, $x_0$不是极值点．

**证:** 利用 $f(x)$ 在 $x_0$ 点的泰勒公式，可得

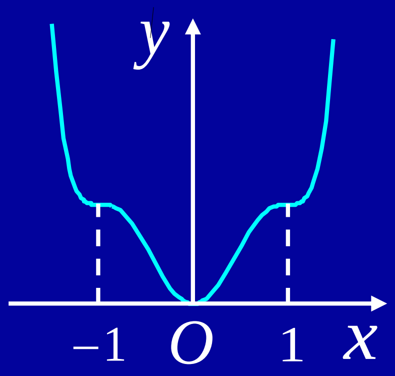
$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

当 $x$ 充分接近 $x_0$ 时, 上式左端正负号由右端第一项确定，故结论正确．

**例如**，例5中 $f(x)=(x^2-1)^3+1$

$$f'''(x)=24x(5x^2-3),\quad f'''(\pm 1)\neq 0$$

所以 $x=\pm 1$ 不是极值点 .

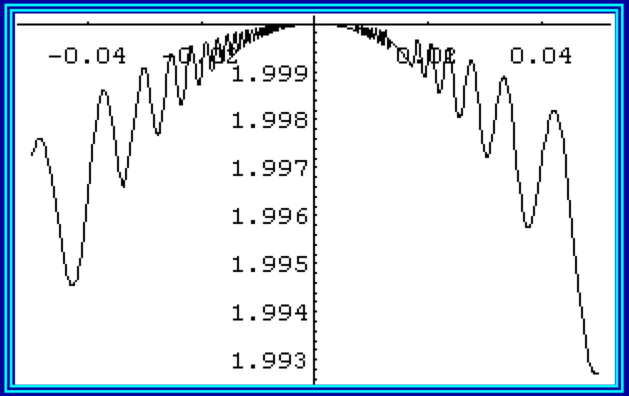



**说明：**极值的判别法( 定理1 ~ 定理3 ) **都是充分的.**

当这些充分条件不满足时, 不等于极值不存在 .

**例如：**

$$f(x)=\begin{cases} 2-x^2(2+\sin\frac{1}{x}), & x\neq 0 \\ 2, & x=0 \end{cases}$$




$f(0)=2$ 为极大值，但不满足定理1 ~ 定理3 的条件.

# 6.3 函数的最大值与最小值

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则其最值只能在**极值点**或**端点**处达到 .

**求函数最值的方法:**

(1) 求 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内的极值可疑点

$$x_1\ ,\ x_2\ ,\ \cdots\ ,\ x_m$$

(2) 最大值

$$M = \max\{\, f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_m), f(a), f(b)\}$$

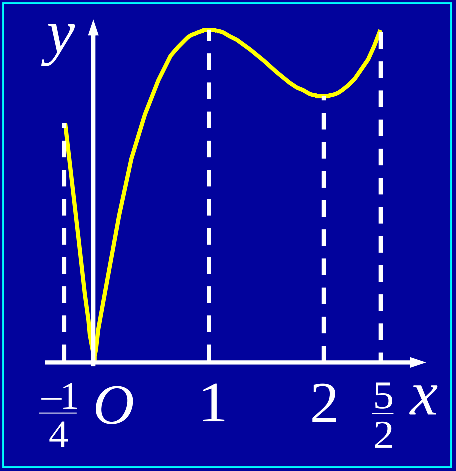
最小值

$$m = \min\{f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_m), f(a), f(b)\}$$

**特别:**

- 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上**单调**时, 最值必在端点处达到.
- 对应用问题 , 有时可根据实际意义判别求出的可疑点是否为最大 值点或最小值点 .

**例6.** 求函数 $f(x)=\left|2x^3-9x^2+12x\right|$ 在闭区间 $[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$ 上的最大值和最小值 .




**解:** 显然 $f(x)\in C[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$, 且

$$f(x)=\begin{cases}-(2x^3-9x^2+12x), & -\frac{1}{4}\le x\le 0\\ 2x^3-9x^2+12x, & 0<x\le\frac{5}{2}\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-6x^2+18x-12=-6(x-1)(x-2), & -\frac{1}{4}\le x<0\\ 6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2), & 0<x\le\frac{5}{2}\end{cases}$$

$f(x)$ 在 $[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$ 内有极值可疑点 $x_1=0, x_2=1, x_3=2$

$$f(\tfrac{-1}{4})=3\tfrac{19}{32},\ f(0)=0,\ f(1)=5,\ f(2)=4,\ f(\tfrac{5}{2})=5$$

故函数在 $x=0$ 取最小值 0 ; 在 $x=1$ 及 $\frac{5}{2}$ 取最大值 5.

**例6.** 求函数 $f(x)=\left|2x^3-9x^2+12x\right|$ 在闭区间$[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$ 上的最大值和最小值 .

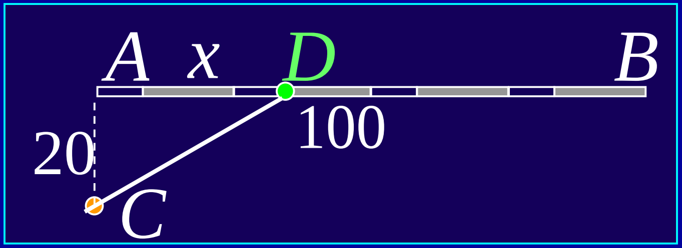
---

**说明:**

令 $\varphi(x)=f^2(x)$

由于 $\varphi(x)$ 与 $f(x)$ 最值点相同 , 因此也可通过 $\varphi(x)$ 求最值点. ( 自己练习 )

**例7.** 铁路上 $AB$ 段的距离为100 km , 工厂 $C$ 距 $A$ 处20 Km， $AC \perp AB$ , 要在 $AB$ 线上选定一点 $D$ 向工厂修一条公路, 已知铁路与公路每公里货运价之比为3:5 , 为使货物从 $B$ 运到工厂 $C$ 的运费最省, 问 $D$ 点应如何取?




**解:** 设 $AD = x\ \ (\text{km})$， 则 $CD = \sqrt{20^2 + x^2}$, 总运费

$$y = 5k\sqrt{20^2 + x^2} + 3k(100 - x) \qquad (0 \le x \le 100)$$

( $k$ 为某常数 )

$$y' = k\left(\frac{5x}{\sqrt{400 + x^2}} - 3\right), \qquad y'' = 5k\frac{400}{(400 + x^2)^{3/2}}$$

令 $y' = 0$, 得 $x = 15$, 又 $y''\big|_{x=15} > 0$, 所以 $x = 15$ 为唯一的极小值点 , 从而为最小值点 , 故 $AD = 15$ km 时运费最省 .

## 6.4 函数图像的凹凸性与拐点

定义6.1 （凸函数） 设$f$：$I\to\mathrm{R}$，若$\forall x_1, x_2 \in I$,

$\forall \lambda \in [0,1]$,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

$$(\ge)$$

则称 $f$ 为 $I$ 上的凸（凹）函数.

若 $\forall \lambda \in (0,1), x_1 \ne x_2$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

$$(>)$$

则称 $f$ 为 $I$ 上的严格凸（凹）函数.

**定理6.5** 设函数 $f$ 在区间 $I$ 上一阶可导，若 $f'$ 在 $I$ 上严格单调增（单调增），则 $f$ 在 $I$ 是严格凸 (凸）的.

证： 仅证 $f$ 在 $I$ 上是严格凸的结论，关于 $f$ 是凸的证明完全类似.

设 $f'$ 在 $I$ 上严格单调增，则 $\forall x_1, x_2 \in I, (x_1 < x_2)$

$\forall \lambda \in [0,1]$ 令 $x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$，则 $x_1 < x_0 < x_2$.

在 $[x_1, x_0]$ 与 $[x_0, x_2]$ 上分别用Lagrange定理，

存在 $\xi \in (x_1, x_0)$ 与 $\eta \in (x_0, x_2)$ 使

$$f(x_2)=f(x_0)+f'(\eta)(x_2-x_0)>f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)$$

$$f(x_1)=f(x_0)+f'(\xi)(x_1-x_0)>f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)$$

从而有

$$\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)>$$

$$f(x_0)+f'(x_0)[\lambda(x_1-x_0)+(1-\lambda)(x_2-x_0)]$$

由于

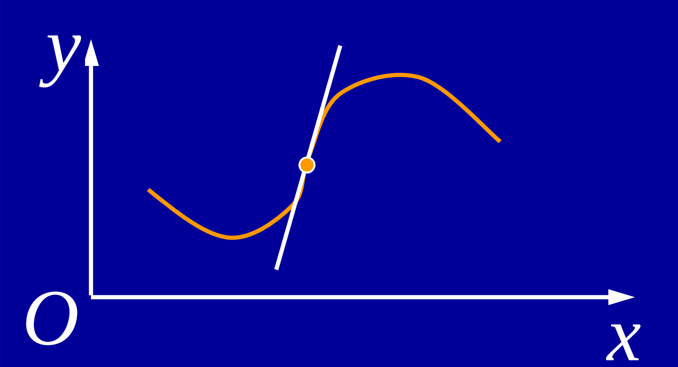
$$\lambda(x_1-x_0)+(1-\lambda)(x_2-x_0)=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2-x_0=0,$$ 故

$$\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)>f\left(x_0\right)=f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$$

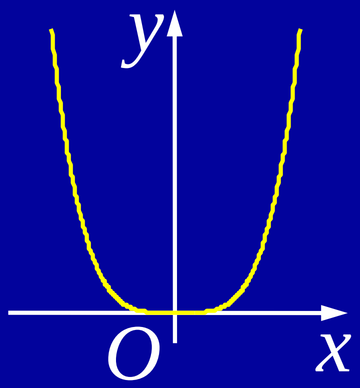
因此，$f$ 是 $I$ 上的严格凸函数.

**推论6.1** 设函数 $f$ 在区间 $I$ 上二阶可导，若 $\forall x \in I, f''(x) > 0\ (\geq 0)$，则 $f$ 在 $I$ 是严格凸 (凸）的.

定义6.2 连续曲线 $y = f(x)$ 上凹弧与凸弧的分界点称为该曲线的拐点.



**例8.** 判断曲线 $y = x^4$ 的凹凸性.




**解:** $y' = 4x^3,\ y'' = 12x^2$

当$x \neq 0$时，$y'' > 0$; $x = 0$时, $y'' = 0$,

故曲线 $y = x^4$在 $(-\infty, +\infty)$ 上是凸的.

**说明:**

1) 若在某点二阶导数为 0 ，在其两侧二阶导数不变号, 则曲线的凹凸性不变 .

2) 根据拐点的定义及上述定理, 可得拐点的判别法如下:

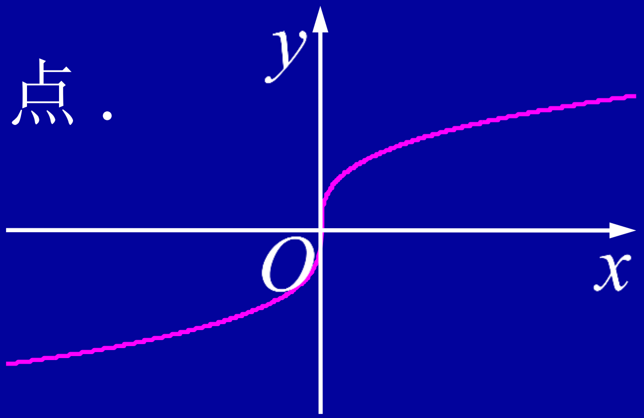
若曲线 $y = f(x)$在点$x_0$ 连续, $f''(x_0) = 0$或不存在, 且 $f''(x)$ 在 $x_0$ 两侧异号, 则点$(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$的一个拐点.

**例9.** 求曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的拐点.

**解:** $y'=\frac{1}{3}x^{-2/3}$ , $y''=-\frac{2}{9}x^{-5/3}$

| $x$ | $(-\infty,0)$ | $0$ | $(0,+\infty)$ |
| --- | --- | --- | --- |
| $y''$ | $+$ | 不存在 | $-$ |
| $y$ | 凸 | $0$ | 凹 |

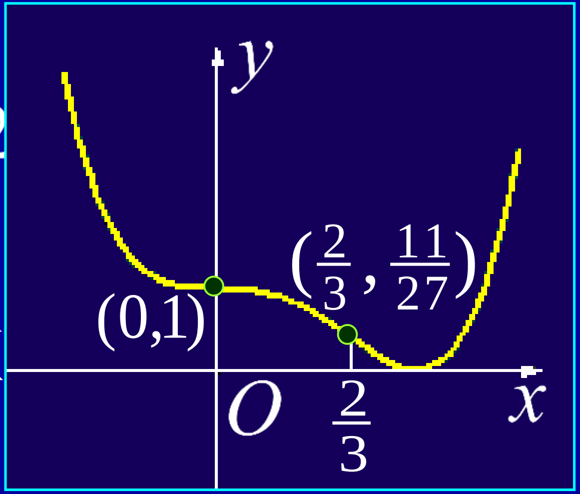
因此点 $(0,0)$ 为曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的拐点.



**例10.** 求曲线 $y=3x^4-4x^3+1$的凹凸区间及拐点.

**解:** 1) 求 $y''$

$$y'=12x^3-12x^2,\quad y''=36x^2-2$$




2) 求拐点可疑点坐标

令 $y''=0$ 得 $x_1=0$ , $x_2=\frac{2}{3}$, 对应

3) 列表判别

| $x$ | $(-\infty,0)$ | $0$ | $(0,\frac{2}{3})$ | $\frac{2}{3}$ | $(\frac{2}{3},+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | 凸 | $1$ | 凹 | $\frac{11}{27}$ | 凸 |

故该曲线在 $(-\infty,0)$ 及 $(\frac{2}{3},+\infty)$ 上是凸的, 在 $(0,\frac{2}{3})$ 上是凹的 , 点 $(0,1)$ 及 $(\frac{2}{3},\frac{11}{27})$ 均为拐点.

利用函数的凸性也可以证明一些不等式.

**例11.** 设 $x_1$ 与 $x_2$ 为任意两个实数，且 $x_1 \neq x_2$,

证明不等式 $e^{\frac{x_1+x_2}{2}} < \dfrac{e^{x_1}+e^{x_2}}{2}$

证：若 $f$ 为 区间$I$ 上的严格凸函数，则不等式

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

成立.取 $\lambda=\frac{1}{2}$，该式变为

$$f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

因此，只要证明 $f(x)=e^x$ 是 $(-\infty,+\infty)$上的严格凸函数，由上式立即得所证不等式.

## 内容小结

1. 可导函数单调性判别

$f'(x)>0,\ x\in I \Longrightarrow f(x)$ 在 $I$ 上严格单调递增

$f'(x)<0,\ x\in I \Longrightarrow f(x)$ 在 $I$ 上严格单调递减

2. 连续函数的最值

最值点应在极值点和边界点上找；

应用题可根据问题的实际意义判别 .

## 3. 连续函数的极值

(1) 极值可疑点：使导数为0 或不存在的点

(2) 第一充分条件

$f'(x)$ 过 $x_0$ 由正变负 $\Longrightarrow$ $f(x_0)$ 为极大值

$f'(x)$ 过 $x_0$ 由负变正 $\Longrightarrow$ $f(x_0)$ 为极小值

(3) 第二充分条件

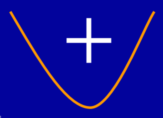
$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)<0 \Longrightarrow f(x_0)$ 为极大值 $-$

$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0 \Longrightarrow f(x_0)$ 为极小值 $+$

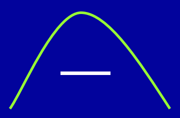
(4) 判别法的推广 定理3

## 2.曲线凹凸与拐点的判别

$f''(x) > 0, x \in I \Longrightarrow$ 曲线 $y = f(x)$ 在 $I$ 上严格凸的




$f''(x) < 0, x \in I \Longrightarrow$ 曲线 $y = f(x)$ 在 $I$ 上严格凹的




拐点 — 连续曲线上有切线的凹凸分界点

# 思考与练习

**1.** 设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$, 则 $f'(0), f'(1), f(1)-f(0)$ 的大小顺序是 ( ***B*** )

$(A)\quad f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$

$(B)\quad f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

$(C)\quad f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$

$(D)\quad f'(0)>f(1)-f(0)>f'(1)$

**提示:** 利用 $f''(x)>0 \Rightarrow f'(x)$ 单调增加 , 及

$$f(1)-f(0)=f'(\xi)\quad (0<\xi<1)$$

**2.** 曲线 $y=1-\mathrm{e}^{-x^2}$ 的凸区间是 $(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$；

凹区间是 $(-\infty,\frac{-1}{\sqrt{2}})$ 及 $(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$；

拐点为 $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},1-\mathrm{e}^{\frac{-1}{2}})$ .

**提示:** $y''=2\mathrm{e}^{-x^2}(1-2x^2)$