第7章 无穷级数

第三节 幂级数

讨论一类特殊、常见、最简单的函数项级数

——幂级数

研究：

(1)幂级数的收敛问题;

(2)怎样将一个函数用幂级数表示问题。

3.1 幂级数及其收敛半径

1. 定义： 形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ （1）的级数称为<u>幂级数</u>.

$x_0 = 0,$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2)$$

其中 a_n 为<u>幂级数系数</u>.

注 形如(2)的幂级数，显然 $x = 0$ 是它的收敛点

2. 收敛性：

考察 $$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots,$$

当 $|x| < 1$ 时，收敛；　当 $|x| \geq 1$ 时，发散；

收敛域 $(-1,1)$；　发散域 $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$；

2. 收敛性

例如级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots,$

当$|x| < 1$时, 收敛; 当$|x| \geq 1$时, 发散;

收敛域$(-1,1)$; 发散域 $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$;

观察: 收敛域是以0为中心的对称区间(不考虑端点)

这一事实是否对一切的 幂级数都成立呢 ?

定理 3.1 (Abel 定理)

(1) 如果级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0 (x_0 \neq 0)$处收敛, 则它在满足不等式$|x| < |x_0|$的一切 x处绝对收敛;

(2)如果级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0$处发散, 则它在满足不等式$|x| > |x_0|$的一切$x$处发散.

证明 (1) $\because \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$收敛, $\therefore \lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0,$

$\exists M > 0,$使得 $\left| a_n x_0^n \right| \le M \quad (n = 0,1,2,\cdots)$

$$\left| a_n x^n \right| = \left| a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n} \right| = \left| a_n x_0^n \right| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \le M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

$\because$ 当$\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$时, 等比级数$\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$收敛,

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n x^n \right|$收敛, 即级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛;

(2) 假设当$x = x_0$时发散，

$\boxed{\text{用反证法}}$

有一点x_1适合$|x_1| > |x_0|$使级数收敛,

由(1)结论　则级数当$x = x_0$时应收敛,

这与所设矛盾.

EX1．已知幂级数$\sum_{n-0}^{\infty} a_n (x-1)^n$当$x=-1$ 时条件收敛，则该级数的收敛半径$R=$ ___2___ 。

2　已知$\sum_{1}^{\infty} a_n (x-1)^n$在$x=-1$处收敛，

则级数在$x=2$处（ A ）.

(*A*)绝对收敛；(*B*)条件收敛；

(*C*)发散；　　(*D*)敛散性不定。

EX3. 已知$\sum_{1}^{\infty} a_n x^n$在$x=-2$处收敛，

则级数在$x=1$处（ A ）.

(A)绝对收敛；(B)条件收敛；

(C)发散；　　　(D)敛散性不定。

由定理,若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n (x_0 \neq 0)$收敛，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛 $x \in (-|x_0|, |x_0|)$

若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n (x_0 \neq 0)$发散，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$发散 $x \in (-\infty, -|x_0|) U (|x_0|, +\infty)$

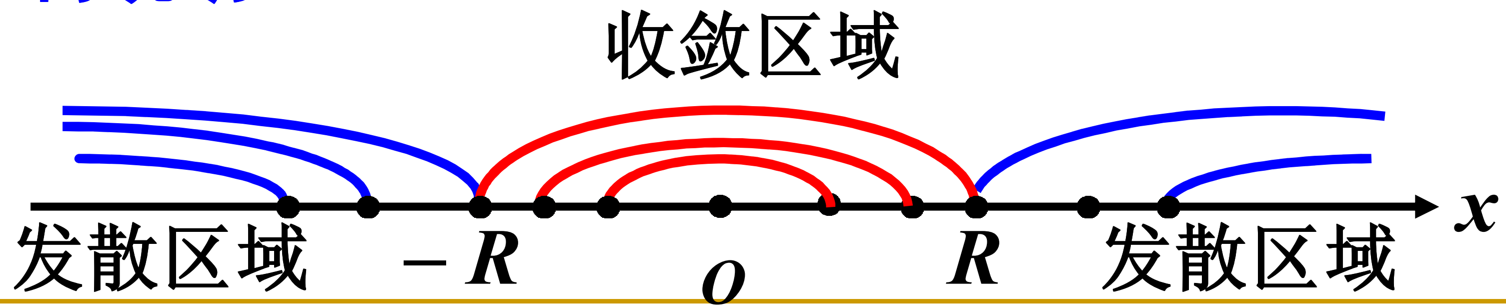
$\therefore$ 发散点不能在原点与收 敛点之间.

即发散点与收敛点不可 能交错出现在同一区间 内,

因此,收敛区间与发散区间之 间一定∃分界点

$x_0 = R > 0$ 使得 $(-R, R)$收敛, $|x| > R$发散

几何说明



定理3.2

如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$不是仅在$x=0$一点收敛，

也不是在整个数轴上都收敛，则必有一个完全

确定的正数R存在，它具有下列性质：

当$|x|<R$时，幂级数绝对收敛；

当$|x|>R$时，幂级数发散；

当$x=R$与$x=-R$时，幂级数可能收敛也可能发散.

定义3.1：正数R称为幂级数的收敛半径.

$(-R, R)$ 称为幂级数的收敛区间.

收敛域：$(-R,R)$，$[-R,R)$，$(-R,R]$，$[-R,R]$.

规定 (1) 幂级数只在$x=0$处收敛，

$R=0$，收敛区间$x=0$；

(2) 幂级数对一切 x都收敛，

$R=+\infty$，收敛区间$(-\infty,+\infty)$.

问题 如何求幂级数的收敛半径？

定理 3.3 如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的所有系数$a_n \neq 0$,

设极限 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ 存在或为$+\infty$，则

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$$

证明 对级数$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$应用达朗贝尔判别法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x| = \rho|x|, \quad \left(\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$$

证明 对级数$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$应用达朗贝尔判别法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_n x^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_{n+1}\right|}{\left|a_n\right|}\left|x\right|=\rho\left|x\right|,\ \left(\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$$

(1)当$\rho\neq 0$时，由比值审敛法得

$\rho\left|x\right|<1$，即$\left|x\right|<\frac{1}{\rho}$，级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$收敛,

$\rho\left|x\right|>1$，即$\left|x\right|>\frac{1}{\rho}$，级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$发散,

$$\therefore R=\frac{1}{\rho}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

(2)当$\rho=0$时 $\rho|x|\equiv 0<1\Rightarrow x\in(-\infty,+\infty)$,

级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$收敛, $\therefore R=+\infty$ $\boxed{R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$

(3)当$\rho=+\infty$时 $\rho|x|=\infty>1 \quad (x\neq 0)$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$仅$x=0$收敛, $\therefore R=0$

$$\boxed{R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x|=\rho|x|,$$

求幂级数收敛半径的根值法（检根法）：

定理 3.4 对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，若 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$,

则当

(i) $0 < \rho < +\infty$ 时, 幂级数的收敛半径 $R = \dfrac{1}{\rho}$;

(ii) $\rho = 0$ 时, 幂级数的收敛半径 $R = +\infty$;

(iii) $\rho = +\infty$ 时, 幂级数的收敛半径 $R = 0$.

例1 求下列幂级数的收敛半径与收敛域:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{n}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-nx)^n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^n}{\sqrt{n}}(x-\dfrac{1}{2})^n$.

解 (1) $\because R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1 \quad \therefore R=1$

当$x=1$时, 级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$, 该级数收敛

当$x=-1$时, 级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, 该级数发散

故收敛区间是$(-1,1]$.

$$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-nx)^n;$$

$$\because\ \rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\quad=\lim_{n\to\infty}n=+\infty\qquad\therefore\ R=0,$$

级数只在$x=0$处收敛,

$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!};$$

$$\because\ R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\ =\lim_{n\to\infty}(n+1)\ =+\infty,\quad\therefore\ R=+\infty,$$

收敛区间$(-\infty,+\infty)$.

$$(4)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$\because\ R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\qquad\therefore\ R=\frac{1}{2},$$

即 $\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$ 收敛，　　$x\in(0,1)$ 收敛，

当 $x=0$ 时，　级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$，　　发散

当 $x=1$ 时，　级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，　　收敛

故收敛域为 $(0,1]$.

例 2 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}$的收敛域.

解 $\because$ 级数为$\frac{x}{2}+\frac{x^3}{2^2}+\frac{x^5}{2^3}+\cdots$ 缺少偶次幂的项

应用达朗贝尔判别法

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}\Big/2^{n+1}}{x^{2n-1}\Big/2^n}\right| = \frac{1}{2}|x|^2,$$

当$\frac{1}{2}x^2<1$, 即$|x|<\sqrt{2}$时, 级数收敛,

当$\frac{1}{2}x^2 > 1$，　　即$|x| > \sqrt{2}$时，　　级数发散，

当$x = \sqrt{2}$时，级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}$，　　级数发散，

当$x = -\sqrt{2}$时，级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{\sqrt{2}}$，　　级数发散，

原级数的收敛域为　　$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

注　以上情形定理3.3不能直接应用.

EX. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2^n \ln(n+1)} x^n$

的收敛域为 $\underline{\quad (-2,2] \quad}$.

总结

求幂级数收敛域的方法

1） 对标准型幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ (a_n \neq 0)$

先求收敛半径 ， 再讨论端点的收敛性 .

2） 对通项为（$x-x_0)^n$ 的幂级数

将1)的收敛域进行平移，使收敛域的中心在x_0处.

3） 对非标准型幂级数(缺项或通项为（$x-x_0)^n$ ）

求收敛半径时直接用比值法或根值法,

也可通过换元化为标准型再求 .

3.2　幂级数的运算性质

1. 代数运算性质:

定理3.5

设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$和$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$的收敛半径各为$R_1$和$R_2$,

$$R = \min\{R_1, R_2\}$$

(1) 加减法

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \quad x \in (-R, R)$$

(其中 $c_n = a_n \pm b_n$)

(2) 乘法

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \quad x \in (-R, R)$$

$$(\text{其中 } c_n = a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + \cdots + a_n \cdot b_0)$$

柯西乘积

$$\begin{array}{ccccc}
1 & x & x^2 & x^3 & \cdots \\
a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & a_0b_3 & \cdots \\
a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots \\
a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots \\
a_3b_0 & a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

(3) 除法　$(b_0 \neq 0)$

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_n x^n + \cdots$$

收敛域比$(-R, R)$小得多$(R \neq 0)$

系数$C_i(i=0,1,2\cdots)$的确定如下:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(b_0 C_n + b_1 C_{n-1} + \quad + b_n C_0) x^n$$

比较系数：$a_n = b_0 C_n + b_1 C_{n-1} + \cdots + b_n C_0$

$(n = 0,1,2,3\cdots)$

$$\begin{cases} a_0 = b_0 C_0 & \Rightarrow C_0 = \dfrac{a_0}{b_0} \\ a_1 = b_0 C_1 + b_1 C_0 & \Rightarrow C_1 = \dfrac{1}{b_0}\left(a_1 - b_1 \dfrac{a_0}{b_0}\right) \\ a_2 = b_0 C_2 + b_1 C_1 + b_2 C_0 \Rightarrow \cdots & \\ \cdots\ \cdots & \end{cases}$$

$\Rightarrow C_0, C_1, C_2 \cdots$

2. 分析运算性质:

对于有限项,求极限,求导数,求积分均有线性性质。

问题:对于无穷项,是否也具有相应的线性 性质呢?

即:
$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to x_0}a_n x^n \text{ --逐项求极限}$$

$$\lim_{x\to x_0} s(x) \overset{?}{=} s(x_0)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)=\frac{d}{dx}(S(x))\overset{?}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}(a_n x^n)\text{ --逐项求导}$$

$$\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)dx=\int_a^b S(x)dx\overset{?}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b a_n x^n dx\text{ --逐项求积分}$$

定理3.6（内闭一致收敛性）

若幂级数的收敛半径为$0 < R \le +\infty$, 则在它的收敛区间$(-R, R)$内任一闭区间$[a, b] \subset (-R, R)$上, 幂级数都一致收敛.

定理3.7

（1）(和函数的连续性)

若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R>0$，

$\Rightarrow$ $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$(-R,R)$内连续：即

$$\lim_{x\to x_0} S(x)=\lim_{x\to x_0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to x_0} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0{}^n=S(x_0)$$

（2） (逐项积分)

若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R>0$，

$$\Rightarrow S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{在}(-R,R)(R>0)\text{内可积},$$

$$\text{且} \int_0^x S(x)dx=\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$$

(收敛半径不变)

（3） (逐项求导)

若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R>0$，

$\Rightarrow S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$(-R,R)$内可导,

且 $S'(x)=(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

(收敛半径不变)

推论 若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R > 0$

$$\Rightarrow S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{在}(-R, R)\text{内任意阶可导,且}$$

$$S^{(k)}(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n x^{n-k}$$

$$k=1,2,\ldots$$

思考题

幂级数逐项求导后，收敛半径不变，那么它的收敛域是否也不变?

思考题解答

不一定.

例 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$, $\quad f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$,

$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)x^{n-2}}{n}$, 它们的收敛半径都是1,

但它们的收敛域各是 $[-1,1], [-1,1), (-1,1)$

例3 求$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$的$R$及$S(x)$.

解法1 $\because 1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots=\dfrac{1}{1-x} \quad x\in(-1,1)$

逐项求导得

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots=\frac{1}{(1-x)^2} \quad x\in(-1,1)$$

解法2 $\int_0^x S(x)dx=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)dx$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}-1 \quad x\in(-1,1)$$

$$S(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$x\in(-1,1)$

例 4 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$的和函数.

解 $\because s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$, 显然 $s(0)=0$,

$$s'(x)=1-x+x^2-\cdots=\frac{1}{1+x},\quad(-1<x<1)$$

两边积分， $\int_0^x s'(t)dt=\int_0^x \frac{1}{1+t}dt$

即 $s(x)-s(0)=\ln(1+x)$ $\quad\therefore s(x)=\ln(1+x)$,

又 $x=1$时, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$收敛. $\quad\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x)$

又 $x=-1$时, $\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n})$ 发散. $\quad(-1<x\le 1)$

例5 证明 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$.

解 收敛半径为 $R=\infty$.

$$S(x):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad \Rightarrow S'(x)=S(x)$$

$$\Rightarrow e^{-x}S'(x)-e^{-x}S(x)=0$$

$$\Rightarrow [e^{-x}S(x)]'=0 \Rightarrow e^{-x}S(x)=C$$

由$S(0)=1\Rightarrow S(x)=e^x$

注意：解方程也可用分离变量

注意：利用$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$，求一些数项级数的和。

例5 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$ 的和.

解 令 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n \qquad (-\infty,+\infty)$

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}x^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)}{(n-1)!}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^n$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}x^n+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}$$

$$=e^x x^2+xe^x,$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=s(1)=2e.$$

EX. 1. 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n3^n}$和函数,指出定义域，并求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$的和.

2. 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$的和函数.

3 . 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!2^n}$的和.

EX. 1. 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n3^n}$和函数,指出定义域，并求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$的和.

解 $\because \lim_{n\to\infty}\frac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}}=\frac{1}{3}=\rho$, $\therefore R=\frac{1}{\rho}=3$,收敛区间$[-3,3)$

$$令S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n3^n}\qquad x\in[-3,3)$$

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n3^n}\right)'=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^{n-1}}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=\frac{1}{3-x}\qquad x\in(-3,3)$$

$$S(x)-S(0)=-\ln(3-x)\Big|_0^x=\ln 3-\ln(3-x)$$

$$S(x)=\ln 3-\ln(3-x)\qquad \therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2\qquad x\in[-3,3)$$

2. 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$的和函数.

解 收敛域 $[-1,1)$. $S(x):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$, $S(0)=1$

$$[xS(x)]' = (\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1})' = \sum_{n=0}^{\infty}x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\int_0^x [xS(x)]'dx = \int_0^x \frac{1}{1-x}dx$$

$$xS(x) = -\ln(1-x)$$

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}\ln(1-x) & [-1,0)\cup(0,1) \\ 1 & x=0 \end{cases}$$

3 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!2^n}$ 的和.

解 令 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n,\qquad (-\infty,+\infty)$

$$\because s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)+n}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^n$$

$$=x^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)''+x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=x^2(e^x-1)''+xe^x$$

$$=e^x(x+1)x,$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!2^n}=s\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}+1\right)\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\sqrt{e}.$$

总结

1. 幂级数的性质

1) 两个幂级数在公共收敛区间内可进行加、减与乘法运算.

2) 在收敛区间内幂级数的和函数连续;

3) 幂级数在收敛区间内可逐项求导和求积分.

2. 利用幂级数的性质求和函数

小结

1.幂级数的收敛性:　收敛半径R

2.幂级数的运算:　分析运算性质

3.求幂级数的和函数