$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left|\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right|=0$. 必要性得证.

充分性 由题设存在 $L(\Delta x)=a\Delta x$，使 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-L(\Delta x)|}{\Delta x}=0$，于是 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-a\Delta x=o(\Delta x)$，即存在一个关于 Δx 的线性函数 $L(\Delta x)=a\Delta x$ 使 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=a\Delta x+o(\Delta x)$. 故 f 在 x_0 处可微.

习 题 2.4

(A)

3. 能否用下面的方法证明 Cauchy 定理？为什么？

对 f,g 分别应用 Lagrange 定理得，

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)(b-a)}{g'(\xi)(b-a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

答 不能，因为对 f,g 分别应用 Lagrange 定理得到的两个 ξ 不一定相等. 而 Cauchy 定理中的 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 中的 ξ 是相同的.

5. 设 $a_i\in\mathbf{R}(i=0,1,\cdots,n)$，并且满足 $a_0+\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{3}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=0$，证明：$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

证 取 $F(x)=a_0x+\dfrac{1}{2}a_1x^2+\dfrac{1}{3}a_2x^3+\cdots+\dfrac{1}{n+1}a_nx^{n+1}$，则 $F(0)=F(1)=0$. 由 Rolle 定理知至少存在一个 $\xi\in(0,1)$，使 $F'(\xi)=0$，即 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一实根.

8. 设 $f,g:[a,b]\to\mathbf{R}$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，并且 $\forall x\in(a,b)$，$f'(x)=g'(x)$，证明：在 $[a,b]$ 上 $f(x)=g(x)+C$（$C\in\mathbf{R}$ 是常数）.

证 取 $F(x)=f(x)-g(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Lagrange 定理的条件且 $F'(x)=0$，$\forall x\in(a,b)$. 由推论 4.2 知在 $[a,b]$ 上 $F(x)\equiv C$，即 $\forall x\in[a,b]$，$f(x)=g(x)+C$.

9. 应用 Lagrange 定理证明：在闭区间 $[-1,1]$ 上，$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

证 令 $F(x)=\arcsin x+\arccos x$，则 $\forall x\in[-1,1]$，$F'(x)=0$.

由推论 4.2 知：$\forall x\in[-1,1]$，$F(x)=C=F(1)=\dfrac{\pi}{2}$.

10. 设 $f:(-1,1)\to\mathbf{R}$ 可微，$f(0)=0$，$|f'(x)|\leqslant 1$. 证明：在 $(-1,1)$ 内，$|f(x)|<1$.

证 若 $x=0$，则 $|f(x)|=0<1$.

若 $0<x<1(-1<x<0)$，在区间 $[0,x]([x,0])$ 上用 Lagrange 定理，存在 $\xi\in(0,x)(\xi\in(x,0))$，使 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi)$，即 $\dfrac{|f(x)|}{|x|}=|f'(\xi)|\leqslant 1$，从而 $|f(x)|\leqslant|x|<1$. 综上所述，$\forall x\in(-1,1)$，$|f(x)|<1$.

11. 设函数 f 可微，证明：$f(x)$ 的任何两个零点之间必有 $f(x)+f'(x)$ 的零点.

证 令 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^x$，则 $F'(x)=[f(x)+f'(x)]\mathrm{e}^x$. 任取 $f(x)$ 的任两个零点 x_1,x_2，不妨设 $x_1<x_2$，则 $F(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足 Rolle 定理的条件. 那么至少存在 $\xi\in(x_1,x_2)$ 使 $F'(\xi)=0$，即 $[f(\xi)+f'(\xi)]\mathrm{e}^\xi=0$，即 $\exists\,\xi\in(x_1,x_2)$，使 $f(\xi)+f'(\xi)=0$.

12. 证明下列不等式：

(1) $|\arctan x-\arctan y|\leqslant|x-y|$；

(2) $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}(a>b>0)$；

(3) $\mathrm{e}^x>x\mathrm{e}\quad(x>1)$.

证 (1) 令 $f(u)=\arctan u$，则 $\forall x,y\in\mathbf{R}$. $f(u)$ 在 $[x,y]([y,x])$ 上满足 Lagrange 定理的条件，从而存在 $\xi\in(x,y)((y,x))$ 使

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(\xi)=\frac{1}{1+\xi^2}\leqslant 1,$$

于是 $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|$，即 $|\arctan x-\arctan y|\leqslant|x-y|$.

(2) 取 $f(x)=\ln x$，由于 $a>b>0$，所以 $f(x)$ 在 $[b,a]$ 上满足 Lagrange 定理的条件，故 $\exists\,\xi\in(b,a)$，使 $\ln a-\ln b=(a-b)\dfrac{1}{\xi}$，又 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{b}$，故 $\dfrac{a-b}{a}<\ln a-\ln b=\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$.

(3) 对 $\forall x>1$，在 $[1,x]$ 上对 e^x 用 Lagrange 中值定理得 $\exists\,\xi\in(1,x)$ 使

$$\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^1=\mathrm{e}^\xi(x-1)>\mathrm{e}^1(x-1)=x\mathrm{e}-\mathrm{e},$$

即 $\mathrm{e}^x>x\mathrm{e}$.

13. 设 $f,g:[a,b]\to R$ 是可导函数，且 $g'\neq 0$，证明：存在 $c\in(a,b)$，使

$$\frac{f(a)-f(c)}{g(c)-g(b)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

证 取 $F(x)=f(a)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(b)$，则 $F(a)=F(b)=f(a)g(b)$，且 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导. 由 Rolle 定理

知：$\exists c\in(a,b)$，使

$$F'(c)=0,\text{即}[f(a)-f(c)]g'(c)=[g(c)-g(b)]f'(c).$$

又因为 $g'(x)\neq 0$，所以 $g(c)\neq g(b)$（否则由 Rolle 定理，$\exists\xi\in(c,b)$，使 $g'(\xi)=0$）. 故 $\exists c\in(a,b)$，使 $\dfrac{f(a)-f(c)}{g(c)-g(b)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

14. 证明方程 $x^5+x-1=0$ 有唯一的正根.

证　取 $f(x)=x^5+x-1$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，因为 $f(0)=-1<0$，$f(1)=1>0$，由连续函数零点定理知 $\exists x_0\in(0,1)$，使 $f(x_0)=0$，即 $x^5+x-1=0$ 至少有一个正根 x_0. 假设 $\bar{x}_0\in(-\infty,+\infty)$ 是 $f(x)=0$ 的另一根，那么由 Rolle 定理可知，$\exists\xi$ 介于 x_0 与 $\bar{x}_0$ 之间，使 $f'(\xi)=0$. 这与 $f'(\xi)=5\xi^4+1>1$ 矛盾. 故 $x^5+x-1=0$ 只有唯一的正根 x_0.

15. 在下列求极限的过程中都应用了 L'Hospital 法则，解法有无错误？

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+1)'}{(x-1)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{1}=0$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x+x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sin x+x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x+1}{1}$，极限不存在；

(3) 设 f 在 x_0 处二阶可导，则

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}&=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f''(x_0+h)+f''(x_0-h)}{2}=f''(x_0).\end{aligned}$$

解　(1) 有错误，当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{x^2+1}{x-1}$ 即非 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式，不能用 L'Hospital 法则求其极限.

(2) 有错误，由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sin x+x)'}{(x)'}$ 不存在，所以不能用 L'Hospital 法则. 正确的解法为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x+x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\sin x+1\right)=1$.

(3) 有错误，由题设 f 仅在 x_0 处二阶可导，所以 $\forall\,|h|\neq 0$，$f''(x_0\pm h)$ 不一定存在，更谈不上连续，所以只能用一次 L'Hospital 法则，即第二，三个等号均不一定成立，正确的解法为

因为 f 在 x_0 二阶可导，所以 $f'(x)$ 在 x_0 附近连续，于是

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}\\&=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}+\frac{f'(x_0-h)-f'(x_0)}{-h}\right]=f''(x_0).\end{aligned}$$

16. 求下列极限：

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot^2 x-\dfrac{1}{x^2}\right)$；　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\sin x}$；

(8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$；　　(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$；

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}}$；　　(12) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1^x+2^x+3^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解　(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cot^2 x-1}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cot^2 x-x^2\cdot 2\cot x\cdot\csc^2 x}{2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x-x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x-x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x+\cos^2 x-1}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{3x^2}=-\frac{2}{3}.$$

(6) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{3x^2\cos^2 x}=\dfrac{1}{3}$.

(8) 由于 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x\ln\tan x=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\tan x}{\cot 2x}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sec^2 x}{\tan x}\cdot\dfrac{1}{-2\csc^2 2x}=$ -1. 原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\tan 2x\ln\tan x}=\mathrm{e}^{-1}$.

(10) 原式 $\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]'}{-1}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{(1+x)\ln(1+x)-x}{x^2}$

$$=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{1+\ln(1+x)-1}{2x}=\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

(11) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right]}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

(12) 原式 $=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2^x+3^x)-\ln 3}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2+3^x\ln 3}{1+2^x+3^x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln 6}=\sqrt[3]{6}$.

17. 试用三种方法求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

解　由 Heine 定理，只需用三种方法求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

方法一　$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\left(\cos\dfrac{1}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\cos\frac{1}{x}-1}\cdot x^2\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，

其中 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\cos\dfrac{1}{x}-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right]=-\dfrac{1}{2}$.

方法二　$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\left(-2\sin^2\frac{1}{2x}\right)\right]^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{1}{2x}}\cdot\frac{-2\sin^2\frac{1}{2x}}{\frac{1}{x^2}}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

方法三　$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}}\xlongequal{\frac{0}{0}}e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\tan\frac{1}{x}}{-2\cdot\frac{1}{x}}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

18. 试确定 a,b,使极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{1+a\cos 2x+b\cos 4x}{x^4}$存在,并求它的值.

解　要使$\lim\limits_{x\to0}\frac{1+a\cos 2x+b\cos 4x}{x^4}$存在,必使$\lim\limits_{x\to0}(1+a\cos 2x+b\cos 4x)=0$且$\lim\limits_{x\to0}\frac{1+a\cos 2x+b\cos 4x}{x^2}=0$. 于是 $1+a+b=0$,$\lim\limits_{x\to0}\frac{1+a\cos 2x+b\cos 4x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1-\cos 2x}{x^2}+b\frac{\cos 4x-\cos 2x}{x^2}\right]=2-3b=0$,即 $b=\frac{1}{3}$,$a=-\frac{4}{3}$. 进而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1+a\cos 2x+b\cos 4x}{x^4}&=\lim_{x\to0}\frac{3-4\cos 2x+\cos 4x}{x^4}\\&\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim_{x\to0}\frac{8\sin 2x-4\sin 4x}{12x^3}\\&=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\left(\frac{2\sin 2x}{x}\cdot\frac{1-\cos 2x}{x^2}\right)=\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

19. 设函数 f 具有一阶连续导数,$f''(0)$存在,且 $f'(0)=0$,$f(0)=0$,

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq0,\\ a, & x=0.\end{cases}$$

(1) 确定 a 使 $g(x)$处处连续;

(2) 对以上所确定的 a,证明 $g(x)$具有一阶连续导数.

解　(1) 由于$\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=0$,所以当 $a=0$,$g(x)$处处连续.

(2) $x\neq0$,$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$连续,

$$\begin{aligned}x=0,g'(x)&=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\frac{1}{2}f''(0).\end{aligned}$$

又因为$\lim\limits_{x\to0}g'(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{f'(x)-f'(0)}{x}-\frac{f(x)}{x^2}\right]$

$$=f''(0)-\frac{1}{2}f''(0)=\frac{1}{2}f''(0)=g'(0),$$

故 $g(x)$具有一阶连续导数.

(B)

1. 设函数 $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ 在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且 $f(1)=0$. 证明:存在点 $x_0\in(0,1)$,使

$$nf(x_0)+x_0f'(x)=0.$$

证 取 $F(x)=x^nf(x)$,则 $F(x)$在$[0,1]$上满足 Rolle 定理条件,因而存在 $x_0\in(0,1)$,使 $F'(x_0)=0$,即

$$nx_0^{n-1}f(x_0)+x_0^nf'(x_0)=0,$$

故 $\exists x_0\in(0,1)$,使

$$nf(x_0)+x_0f'(x_0)=0.$$

2. 设 f 在$[a,b]$上可微,且 a 与 b 同号,证明:存在 $\xi\in(a,b)$,使

(1) $2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$;

(2) $f(b)-f(a)=\xi\left(\ln\dfrac{b}{a}\right)f'(\xi)$;

证 (1) 取 $g(x)=x^2$,由于 a,b 同号,所以 $0\notin[a,b]$,对 $f(x),g(x)$在$[a,b]$上应用 Cauchy 中值定理即可。

(2) 取 $g(x)=\ln x$,对 $f(x),g(x)$在$[a,b]$上应用 Cauchy 定理即可.

3. 设 f 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可微,且 $f(a)=f(b)=0$,证明:$\forall\lambda\in\mathbf{R}$,$\exists c\in(a,b)$,使得 $f'(c)=\lambda f(c)$.

证 令 $F(x)=f(x)e^{-\lambda x}$,对 $F(x)$在$[a,b]$上应用 Rolle 定理即可.

5. 设 $f,g:[a,b]\to\mathbf{R}$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,证明:存在 $\xi\in(a,b)$,使

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b)\\ g(a) & g(b)\end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi)\\ g(a) & g'(\xi)\end{vmatrix}.$$

证 取 $F(x)=f(a)g(x)-f(x)g(a)=\begin{vmatrix} f(a) & f(x)\\ g(a) & g(x)\end{vmatrix}$,在$[a,b]$上对$F(x)$应用 Lagrange 中值定理即可.

6. 设 f 在 $x=0$ 的某邻域内 n 阶可导,$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$,试用 Cauchy 定理证明:

$$f(x)=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n,\theta\in(0,1).$$

证 取 $g(x)=x^n$,在$[0,x]$上,$f(x),f'(x),f''(x),\cdots,f^{(n-1)}(x),g(x)$,$g'(x),g''(x),\cdots,g^{(n-1)}(x)$满足 Cauchy 中值定理的条件,于是,

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}=\frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{g'(\xi_1)-g'(0)}=\frac{f''(\xi_2)}{g''(\xi_2)}=\cdots=\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})-f^{(n-1)}(0)}{g^{(n-1)}(\xi_{n-1})-g^{(n-1)}(0)}$$
$$=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{g^{(n)}(\xi_n)}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!},$$

其中 $\xi_1\in(0,x),\xi_k\in(0,\xi_{k-1}),k=2,3,\cdots,n,\theta\in(0,1),\theta x=\xi_n$.

故　$f(x)=\dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n,\theta\in(0,1)$.

7. 设抛物线 $y=-x^2+Bx+C$ 与 x 轴有两个交点 $x=a,x=b(a<b)$. 函数 f 在$[a,b]$上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，并且曲线 $y=f(x)$ 与 $y=-x^2+Bx+C$ 在(a,b)内有一个交点. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，则 $f''(\xi)=-2$.

证　令 $F(x)=f(x)+x^2-Bx-C$，$F(x)$在$[a,b]$上二阶可导，且 $F(a)=F(b)=0$. 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=-x^2+Bx+C$ 在(a,b)内的交点为$(c,f(c))$，则 $F(c)=0$. 在$[a,c]$与$[c,b]$上对 $F(x)$应用 Rolle 定理，$\exists\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$使 $F'(\xi_1)=0=F'(\xi_2)$.

再在$[\xi_1,\xi_2]$上对 $F'(x)$使用 Rolle 定理，$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使 $F''(\xi)=0$，即 $\exists\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)=-2$.

8. 设 f 在$[a,b]$上二阶可微，$f(a)=f(b)=0$，$f'_+(a)f'_-(b)>0$，则方程 $f''(x)=0$ 在(a,b)内至少有一个根.

证　因为 $f'_+(a)f'_-(b)>0$，不妨设 $f'_+(a)>0$，则 $f'_-(b)>0$.

由 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0\Rightarrow\exists x_1>a$ 使 $f(x_1)>f(a)=0$，

再由 $f'_-(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$ 得 $\exists x_2<b$，且 $x_1<x_2$ 使 $f(x_2)<0$.

f 在$[a,b]$上二阶可导知 f 在$[a,b]$上连续，由连续函数零点定理可得 $\exists c\in(a,b)$使 $f(c)=0$，对 $f(x)$在$[a,c]$，$[c,b]$上分别应用 Rolle 定理，$\exists\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$，使 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$. 又对 $f'(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$上应用 Rolle 定理，$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$使 $f''(\xi)=0$.

习　题　2.5

(A)

2. 写出下列函数的 Maclaurin 公式：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$；　　(2) $f(x)=\ln(1-x)$；