第六章
多元函数积分学及其应用

2020年5月8日

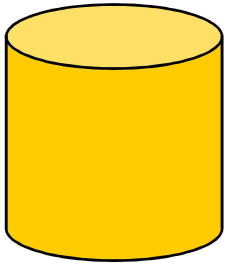
第一节 多元数量值函数积分的概念与性质

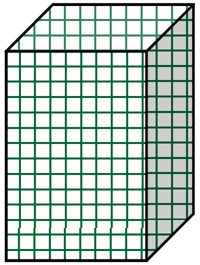
引例

二重积分的概念

一、引例

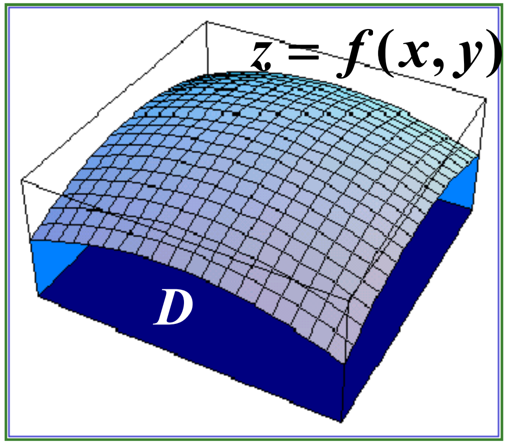
1．曲顶柱体的体积





柱体体积=底面积×高

特点：平顶.

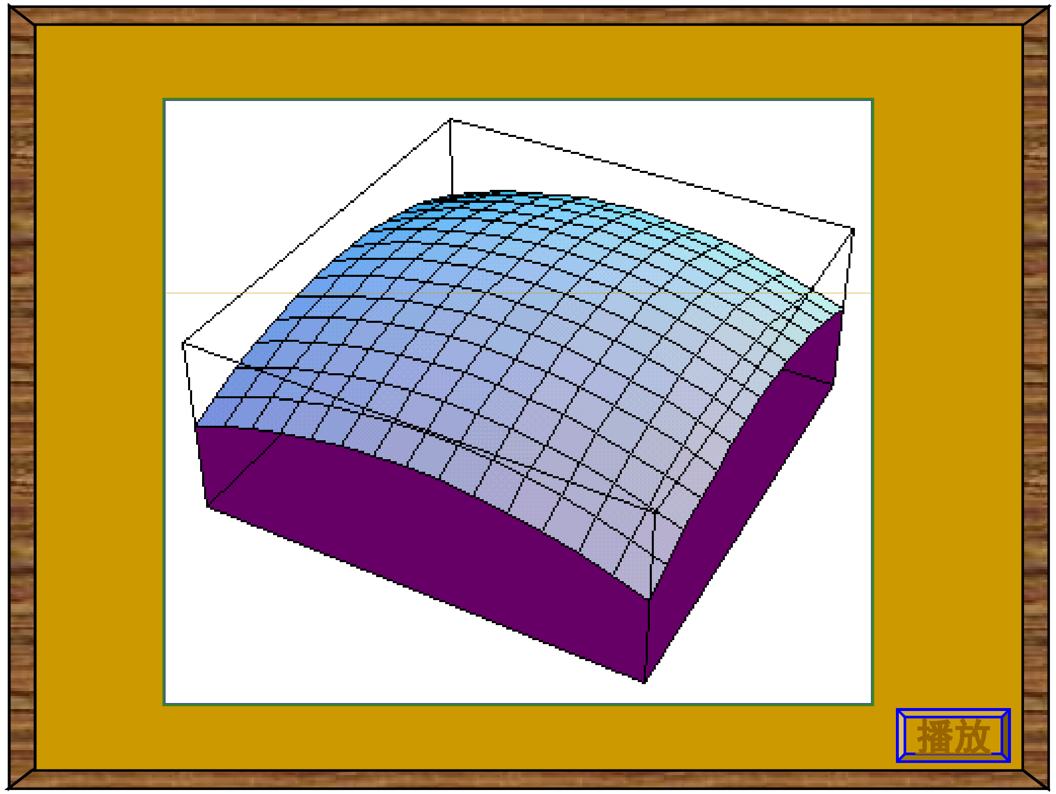


柱体体积=？

特点：曲顶.

曲顶柱体

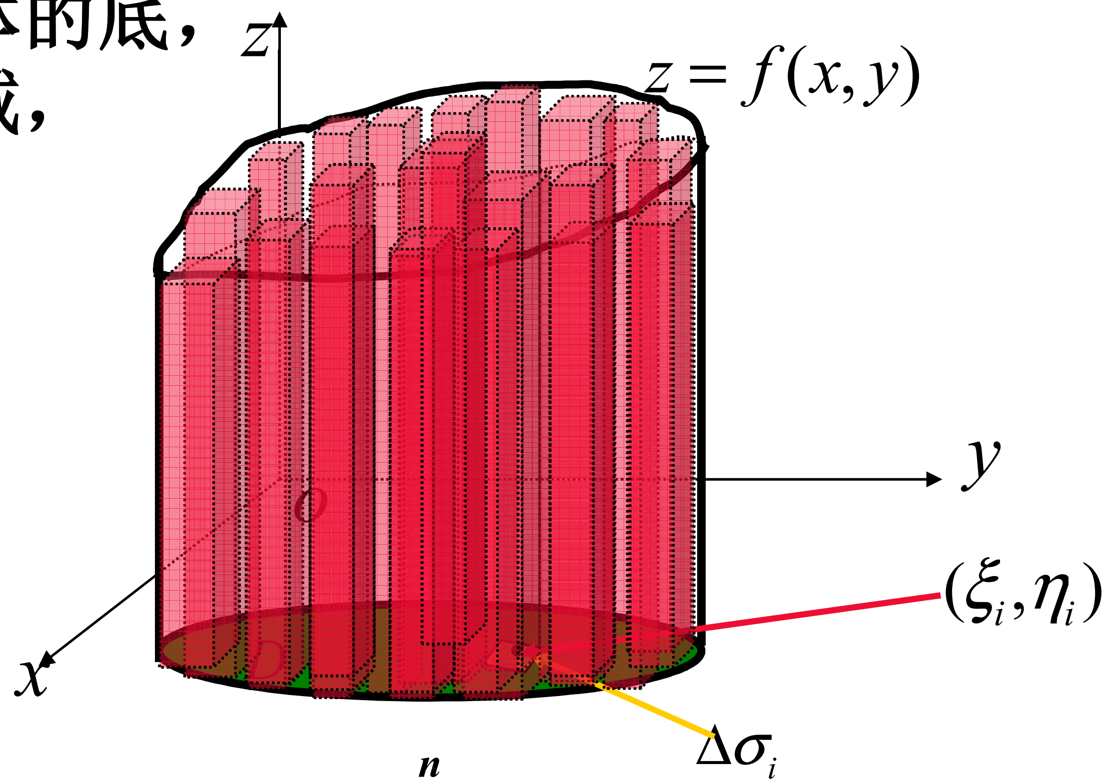
求曲顶柱体的体积采用“分割、求和、取极限”的方法，如下动画演示.



步骤如下：

先分割曲顶柱体的底，并取典型小区域，

用若干个小平顶柱体体积之和近似表示曲顶柱体的体积，



曲顶柱体的体积 $V=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$

2．求平面薄片的质量

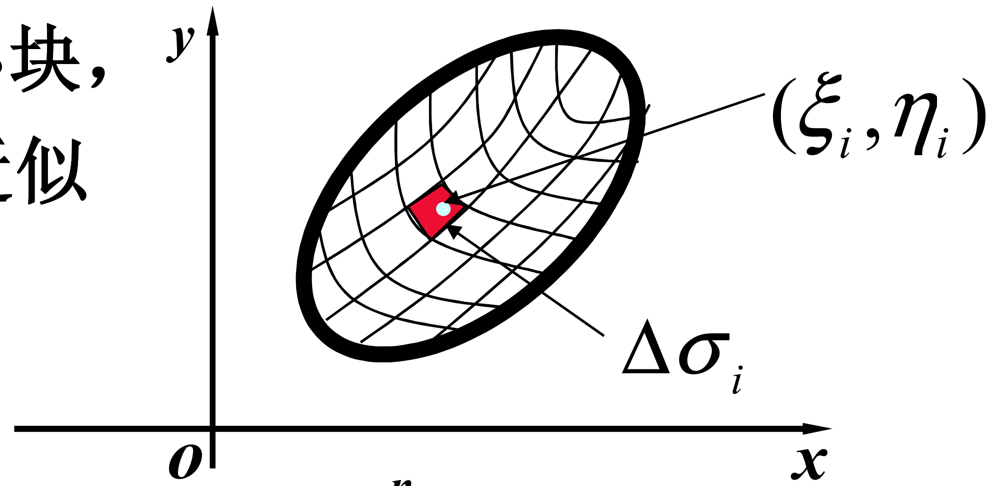
设有一平面薄片，占有xoy面上的闭区域D，在点(x,y)处的面密度为$\rho(x,y)$，假定$\rho(x,y)$在D上连续，平面薄片的质量为多少？

将薄片分割成若干小块，

取典型小块，将其近似

看作均匀薄片，

所有小块质量之和



近似等于薄片总质量 $M=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

1.2 多元数量值函数积分的概念

定义 1.1 设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数，将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2$，$\cdots$，$\Delta\sigma_n$，其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域，也表示它的面积，在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)，作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$， $(i=1,2,\cdots,n)$，

并作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，

如果当各小闭区域的直径中的最大值λ趋近于零时，这和式的极限存在，则称此极限为函数$f(x,y)$在闭区域D上的**二重积分**，

记为$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，

$$\text{即}\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

积分区域

被积函数

积分变量

被积表达式

面积元素

积分和

对二重积分定义的说明：

(1) 在二重积分的定义中，对闭区域的划分是任意的.

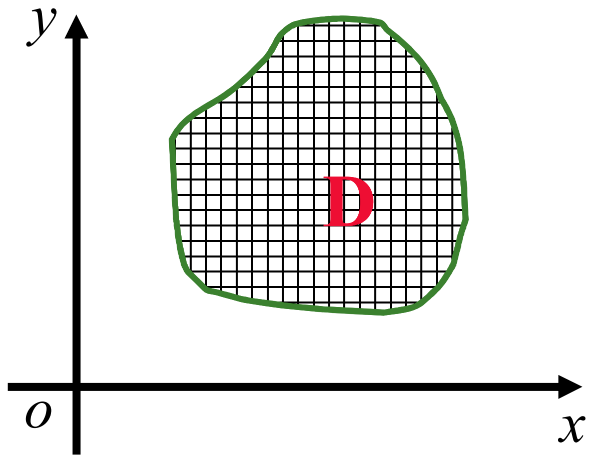
(2)当 $f(x,y)$在闭区域上连续时，定义中和式的极限必存在，即二重积分必存在.

二重积分的几何意义

当被积函数大于零时，二重积分是柱体的体积.

当被积函数小于零时，二重积分是柱体的体积的负值.

在直角坐标系下用平行于坐标轴的直线网来划分区域D，



则面积元素为 $d\sigma = dxdy$

故二重积分可写为

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy$$

二重积分概念的延伸：

→ **一般多元数量值函数的积分**

$$\Omega: \quad \Delta\Omega_1,\ \Delta\Omega_2,\ \cdots,\ \Delta\Omega_n, \qquad M_k \in \Delta\Omega_k$$

可度量的有界的“几何形体”

平面区域、空间区域、曲线或曲面

函数 f 的积分：

$$\int_{\Omega} f(M)\,d\Omega = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta\Omega_k$$

Ω

平面区域 → 二重积分

空间区域 → 三重积分

平面（空间）曲线 → 曲线积分（对弧长）

空间曲面 → 曲面积分（对面积）

1.3 积分存在的条件和性质

（二重积分与定积分有类似的性质）

性质 1　　当k为常数时，

$$\iint_D kf(x,y)d\sigma = k\iint_D f(x,y)d\sigma.$$

性质２

$$\iint_D [f(x,y)\pm g(x,y)]d\sigma$$

$$= \iint_D f(x,y)d\sigma \pm \iint_D g(x,y)d\sigma.$$

性质３　对区域具有可加性（ $D = D_1 + D_2$ ）

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)d\sigma.$$

性质４　若 σ 为D的面积，$\sigma = \iint_D 1 \cdot d\sigma = \iint_D d\sigma.$

性质５　若在D上 $f(x,y) \le g(x,y)$,

则有 $\iint_D f(x,y)d\sigma \le \iint_D g(x,y)d\sigma.$

特殊地 $\left|\iint_D f(x,y)d\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|d\sigma.$

性质６ 设M、m分别是$f(x,y)$在闭区域 D 上的最大值和最小值，σ为 D 的面积，则

$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le M\sigma$$

（二重积分估值不等式）

性质７ 设函数$f(x,y)$在闭区域D上连续，σ 为D的面积，则在 D 上至少存在一点(ξ,η)使得

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot\sigma$$

（二重积分中值定理）

例 1 不作计算，估计 $I=\iint\limits_D e^{(x^2+y^2)}d\sigma$ 的值，

其中D是椭圆闭区域：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (0<b<a).$

解 区域D的面积$\sigma=ab\pi$ ，

在D上 $\because 0\le x^2+y^2\le a^2,$

$$\therefore 1=e^0\le e^{x^2+y^2}\le e^{a^2},$$

由性质 6 知 $\sigma\le\iint\limits_D e^{(x^2+y^2)}d\sigma\le\sigma\cdot e^{a^2},$

$$ab\pi\le\iint\limits_D e^{(x^2+y^2)}d\sigma\le ab\pi e^{a^2}.$$

例 2 估计$I=\iint\limits_D \dfrac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$的值，

其中 D： $0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 2.$

解 $\because f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{(x+y)^2+16}}$， 区域面积$\sigma=2,$

在D上$f(x,y)$的最大值 $M=\dfrac{1}{4}\quad (x=y=0)$

$f(x,y)$的最小值 $m=\dfrac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{1}{5}\quad (x=1,y=2)$

故$\dfrac{2}{5}\le I\le\dfrac{2}{4}\quad\Rightarrow 0.4\le I\le 0.5.$

例 3 判断 $\iint\limits_{r\le|x|+|y|\le 1}\ln(x^2+y^2)dxdy$的符号.

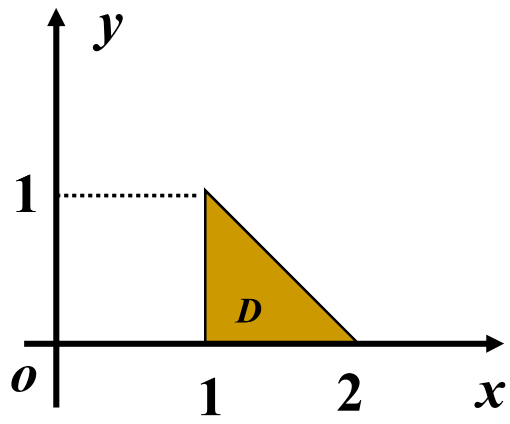
解 当$r\le|x|+|y|\le 1$时，$0<x^2+y^2\le(|x|+|y|)^2\le 1$,

故 $\ln(x^2+y^2)\le 0$;

又当 $|x|+|y|<1$时，$\ln(x^2+y^2)<0$,

于是 $\iint\limits_{r\le|x|+|y|\le 1}\ln(x^2+y^2)dxdy<0.$

例 4 比较积分$\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma$与$\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$的大小，其中 D 是三角形闭区域，三顶点各为(1,0)，(1,1)，(2,0).



解 三角形斜边方程 $x+y=2$

在 D 内有 $1 \le x+y \le 2 < e$,

故 $\ln(x+y) < 1$,

于是$\ln(x+y) > [\ln(x+y)]^2$,

因此 $\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma > \iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$.

四、小结

二重积分的定义（和式的极限）

二重积分的几何意义（曲顶柱体的体积）

二重积分的性质

思考题

将二重积分定义与定积分定义进行比较，找出它们的相同之处与不同之处.

思考题解答

定积分与二重积分都表示某个和式的极限值，且此值只与被积函数及积分区域有关．不同的是定积分的积分区域为区间，被积函数为定义在区间上的一元函数，而二重积分的积分区域为平面区域，被积函数为定义在平面区域上的二元函数．

练 习 题

一、填空题:

1、当函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上______________时，则其在 D 上的二重积分必定存在 .

2、二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 的几何意义是________________________.

3、若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上可积，且 $D \supset D_1 \supset D_2$，当 $f(x,y) \geq 0$ 时，

则 $\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma$ __________ $\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$；

当 $f(x,y) \leq 0$ 时，

则 $\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma$ __________ $\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$.

4、$\left|\iint\limits_D \sin(x^2+y^2)d\sigma\right|$ ____________ σ, 其中 σ 是圆域

$x^2+y^2 \le 4^2$ 的面积，$\sigma = 16\pi$.

二、利用二重积分定义证明:

$$\iint\limits_D kf(x,y)d\sigma = k\iint\limits_D f(x,y)d\sigma.$$ (其中 k 为常数)

三、比较下列积分的大小:

1、$\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$, 其中 D 是由圆 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$ 所围成 .

2、$\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma$ 与 $\iint [\ln(x+y)]^2 d\sigma$, 其中 D 是矩形闭区域: $3 \le x \le 5, 0 \le y \le 1$.

四、估计积分$I=\iint\limits_D (x^2+4y^2+9)d\sigma$的值, 其中$D$是圆形区域: $x^2+y^2\le 4$.

练习题答案

一、1、连续；

2、以$z=f(x,y)$为曲顶，以D为底的曲顶柱体体积的代数和；

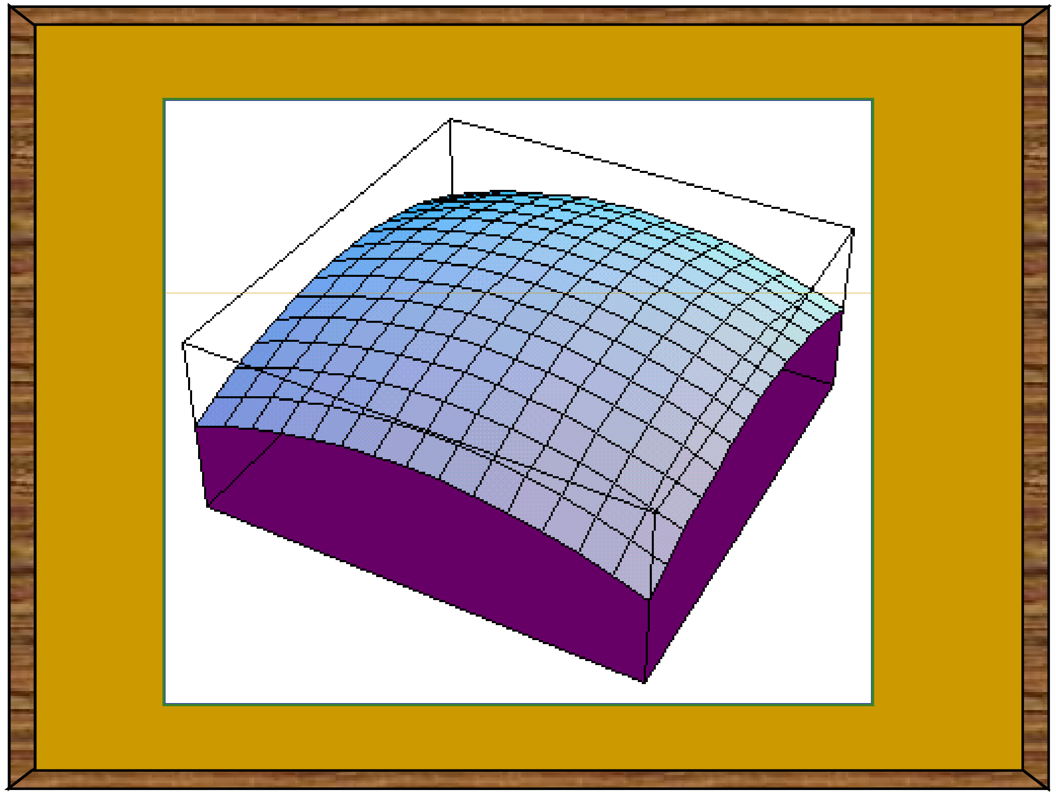
3、$>$，$<$；　　　　4、$\leq$.

三、1、$\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma \leq \iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$；

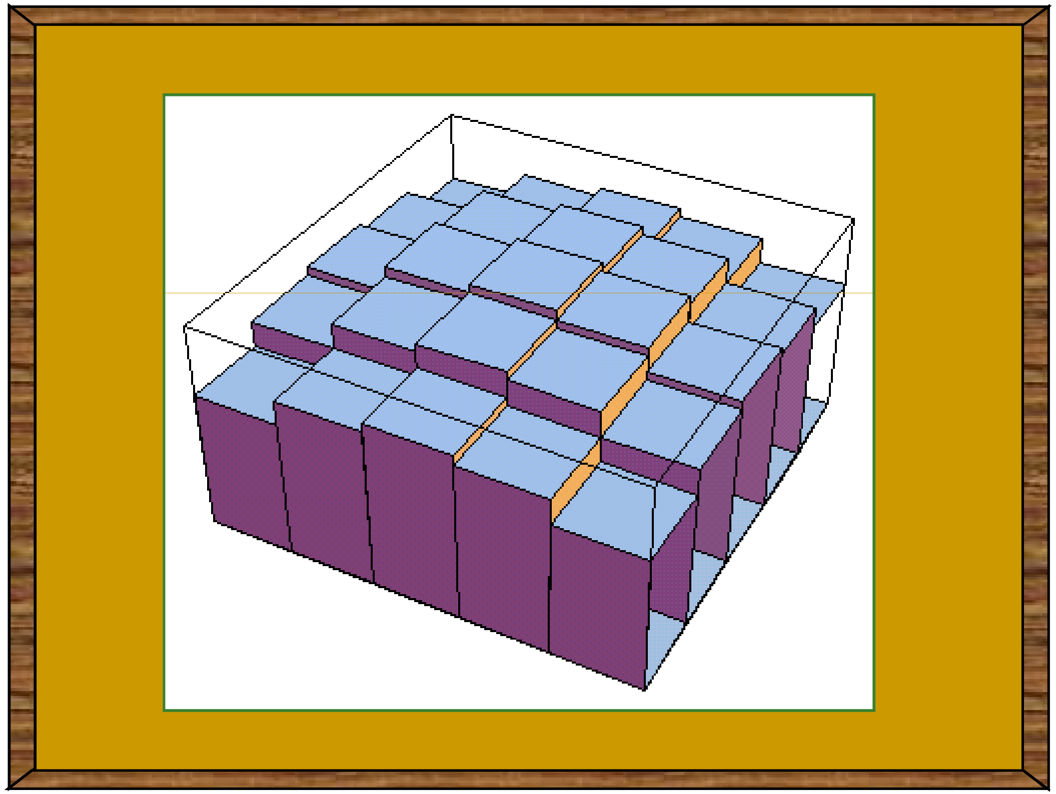
2、$\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma < \iint [\ln(x+y)]^2 d\sigma$.

四、$36\pi \leq \iint (x^2+4y^2+9)d\sigma \leq 100\pi$.

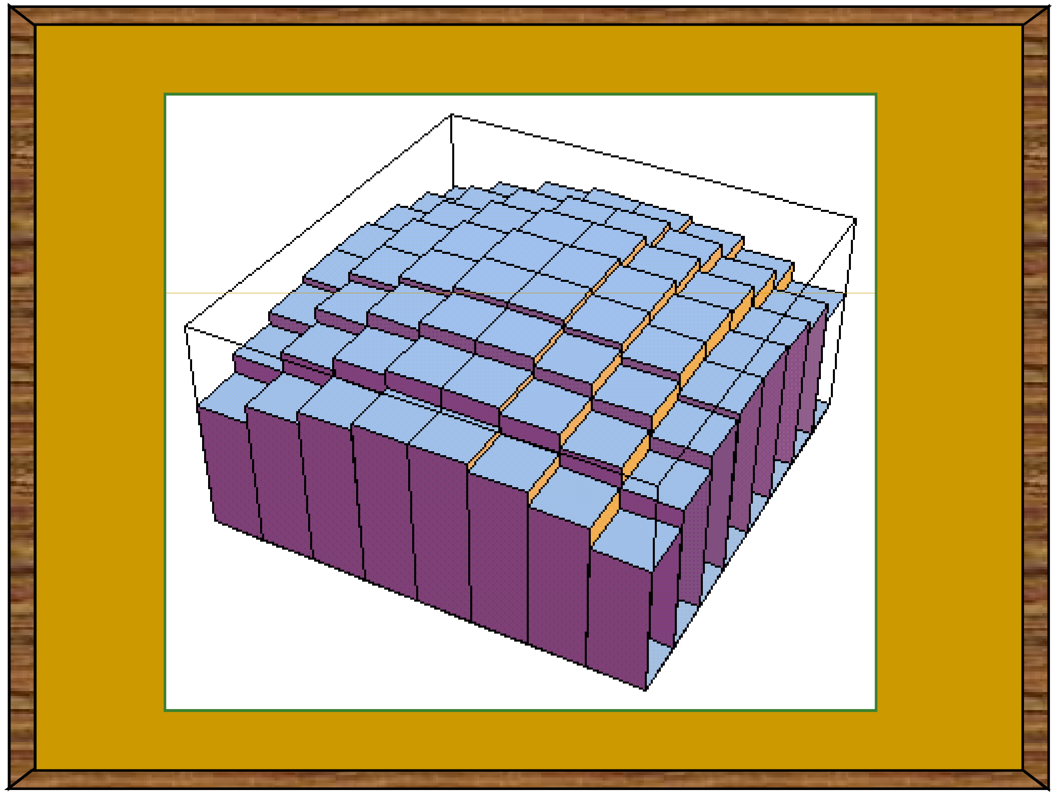
求曲顶柱体的体积采用“分割、求和、取极限”的方法，如下动画演示.



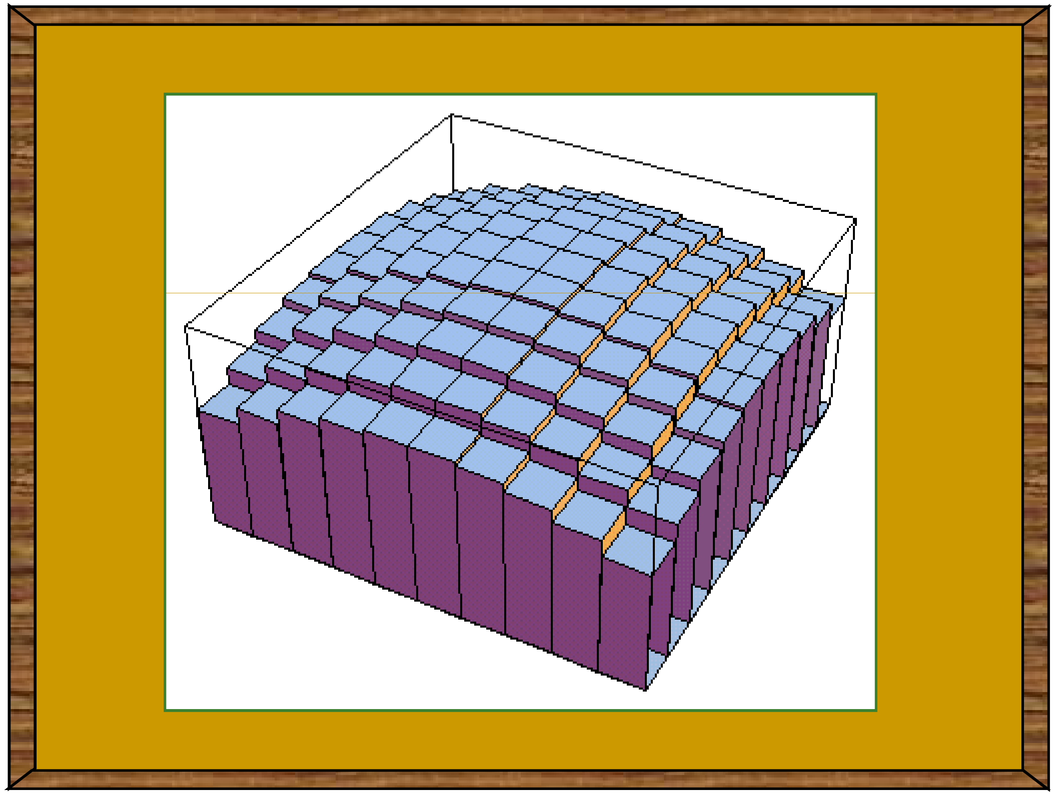
求曲顶柱体的体积采用“分割、求和、取极限”的方法，如下动画演示.



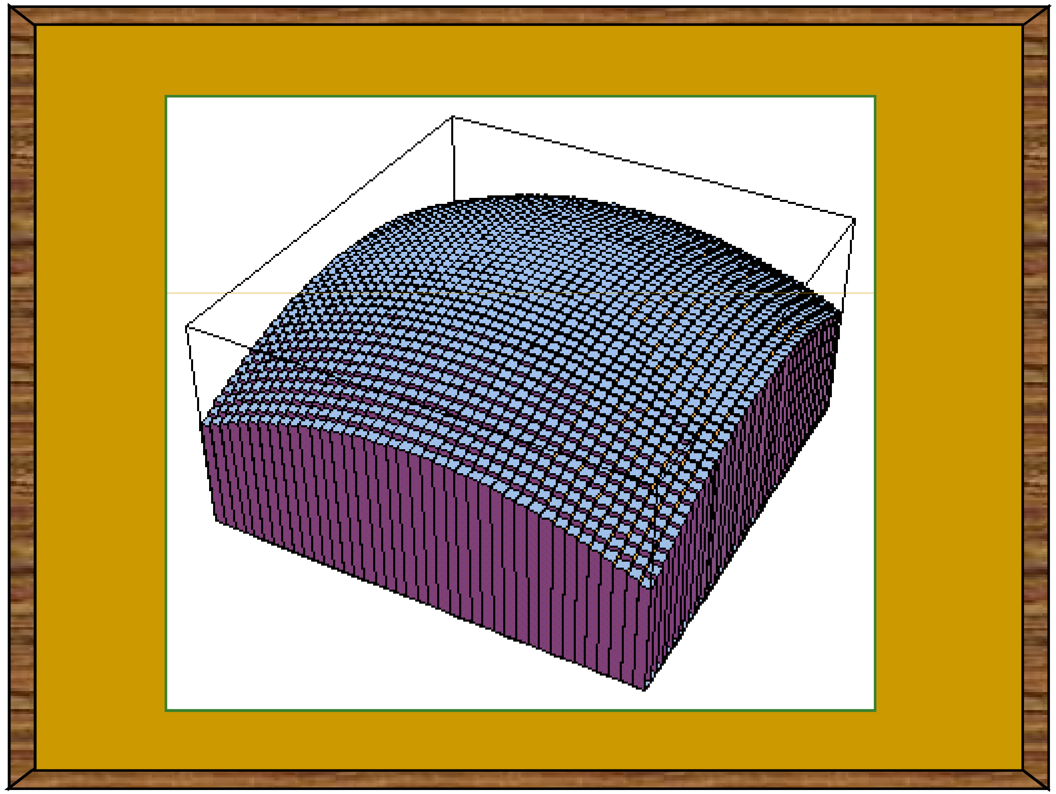
求曲顶柱体的体积采用“分割、求和、取极限”的方法，如下动画演示.



求曲顶柱体的体积采用“分割、求和、取极限”的方法，如下动画演示.



求曲顶柱体的体积采用“分割、求和、取极限”的方法，如下动画演示.



求曲顶柱体的体积采用“分割、求和、取极限”的方法，如下动画演示．