$\|y_0-x_0\|<\delta,\delta'\leqslant\min\left\{\frac{1}{2}\delta_1,\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\right\}$,则 $U(y_0,\delta')\subseteq U(x_0,\delta)$,从而 $U(y_0,\delta')\cap A=\varnothing$,即 x_0 的邻域 $U(x_0,\delta)$ 中所有的点均为 A 的外点,即 $U(x_0,\delta)\subseteq \text{ext } A$. 于是ext A为开集.

(2) $A',\partial A$ 是闭集;

先证 A'是闭集. 即证 A'的任一个聚点 $x_0\in A'$. 由于 x_0 为 A'的聚点,则存在 A' 中的点列$\{x_k\}$($k=1,2,\cdots$,且 $x_k\neq x_0$)使$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x_0$,即对 x_0 的任一邻域 $\mathring{U}(x_0,\varepsilon)$, $\exists N\in\mathbf{N}_+$, 使对 $\forall k>N$, 恒有 $x_k\in\mathring{U}(x_0,\varepsilon)$. 又由 $\mathring{U}(x_0,\varepsilon)$ 是开集,则对 $\forall k>N$, $\exists x_k$ 的邻域 $U(x_k)\subseteq\mathring{U}(x_0,\varepsilon)$, 又由 $x_k\in A'$,则 $U(x_k)\cap A\neq\varnothing$, 即 $\mathring{U}(x_0,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing$,即在 x_0 的任何去心邻域中均含有 A 的点,由定理 1.5 知 $x_0\in A'$.

∂A 为闭集.

由于 $\mathbf{R}^n=\mathring{A}\cup\text{ext }A\cup\partial A$,则$\partial A=(\mathring{A}\cup\text{ext }A)^c$. 由本题(1)及定理 1.7 知 $\mathring{A}\cup\text{ext }A$ 为开集. 由定理 1.6,∂A 为闭集.

(3) A 为开集$\Leftrightarrow A\cap\partial A=\varnothing$.

先证 A 为开集$\Rightarrow A\cap\partial A=\varnothing$.

由 A 为开集,则 $A=\mathring{A}$, 从而 $A\cap\partial A=\mathring{A}\cap\partial A=\varnothing$.

再证 $A\cap\partial A=\varnothing\Rightarrow A$ 为开集.

由 $A\cap\partial A=\varnothing$且 $A\cap\text{ext }A=\varnothing$,而 $\mathring{A}=(\partial A\cup\text{ext }A)^c$.

从而 $A\subseteq\mathring{A}$,故 $A=\mathring{A}$. 即 A 为开集.

2. 以 $n=2$ 为例证明聚点原理: $\mathbf{R}^n$ 中的有界无限点集至少有一个聚点.

证明　设 $A=\{(x_\alpha,y_\alpha)\in\mathbf{R}^2\mid\alpha\in I,I$ 为实数集$\}$为有界无限点集. 则$\{x_\alpha\}\subseteq\mathbf{R}$,$\{y_\alpha\}\subseteq\mathbf{R}(\alpha\in I)$均为有界无限集. 由数集的 Weierstrass 定理(第一章定理 2.8)知$\{x_\alpha\}$必有收敛的子列. 不妨设为$\{x_{\alpha_k}\}$,且$\lim\limits_{k\to\infty}x_{\alpha_k}=x_0$. 在$\{y_\alpha\}(\alpha\in I)$中选取与 x_{α_k}对应的 y_{α_k}(即$(x_{\alpha_k},y_{\alpha_k})\in A$)构成数列$\{y_{\alpha_k}\}$,则$\{y_{\alpha_k}\}\subseteq\{y_\alpha\}(\alpha\in I)$为有界无限数列,必有收敛的子数列. 设为$\{y_{\alpha_{k_j}}\}$,且$\lim\limits_{j\to\infty}y_{\alpha_{k_j}}=y_0$. 又由于与$\{y_{\alpha_{k_j}}\}$对应的$\{x_{\alpha_k}\}$的子列$\{x_{\alpha_{k_j}}\}$($(x_{\alpha_{k_j}},y_{\alpha_{k_j}})\in A$)也收敛于 x_0,从而 A 中存在收敛于(x_0,y_0)的点列 $A_j=(x_{\alpha_{k_j}},y_{\alpha_{k_j}})$.

习　题　5.2

(A)

3. 用定义证明下列二重极限.

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\sin\dfrac{x}{x^2+y^2}=0$;

解　由于 $\left|xy\sin\dfrac{x}{x^2+y^2}\right|\leqslant|xy|\leqslant\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$. 所以对 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\sqrt{2\varepsilon}$,当 $\|(x,y)-(0,0)\|=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时,就有:

$$\left|xy\sin\frac{x}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon. \text{故} \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\sin\frac{x}{x^2+y^2}=0.$$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}(x^2+y^2)=2$;

解　不妨设 $\|(x,y)-(1,1)\|<1$,则 $|x+1|<3$, $|y+1|<3$,于是 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{6},1\right\}$. 当 $\|(x,y)-(1,1)\|<\delta$ 时,有

$$\begin{aligned}|x^2+y^2-2|&=|(x^2-1)+(y^2-1)|\\&=|(x+1)(x-1)+(y+1)(y-1)|\\&\leqslant 3(|x-1|+|y-1|)<\varepsilon.\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}(x^2+y^2)=2$.

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\dfrac{1}{2}$.

解　$\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$,当 $0<\|(x,y)-(0,0)\|=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时,恒有

$$\left|\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\frac{|xy|}{(\sqrt{xy+1}+1)^2}\leqslant\frac{1}{2}|xy|\leqslant x^2+y^2<\varepsilon.$$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\dfrac{1}{2}$.

4. 证明:(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$不存在;(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x+y}$不存在.

证明　(1) 由于 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=kx}}\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{1+k}{1-k}(k\neq-1)$,故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$不存在.

(2) 由于 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x=y}}\dfrac{xy}{x+y}=0$; $\lim\limits_{\substack{x=y^2-y\\y\to0}}\dfrac{xy}{x+y}=-1$,故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x+y}$不存在.

6. 讨论下列函数的连续性.

(2) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$;　(4) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

解　(2) $f(x,y)$的定义域 $D=\mathbf{R}^2\setminus\{(x,y)\mid x+y=0\}$.

由于 $x-y,x+y$ 均为 $\mathbf{R}^2$ 上的连续函数.

故 $f(x,y)$ 在 D 上连续，$x+y=0$ 为其间断线.

(4) 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，$f(x,y)$ 连续. 又由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在. 故 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上连续. $(0,0)$ 为其间断点 $\left(\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin kx^2}{kx^2}\cdot\dfrac{k}{1+k^2}\right)=\dfrac{k}{1+k^2}\right)$.

7. 设 $f(x,y)=\dfrac{1}{xy}$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $D_1=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\ \middle|\ \dfrac{x}{k}\leqslant y\leqslant kx, k>1 \text{ 为常数}\right\}$, $D_2=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x>0,y>0\}$.

(1) $\lim\limits_{\substack{r\to+\infty\\(x,y)\in D_1}}f(x,y)$ 是否存在? 为什么?

(2) $\lim\limits_{\substack{r\to+\infty\\(x,y)\in D_2}}f(x,y)$ 是否存在? 为什么?

解 (1) 存在. 当 $(x,y)\in D_1$ 时，$xy>0$ 且 $x>0$ 时，$\dfrac{1}{kx^2}\leqslant\dfrac{1}{xy}\leqslant\dfrac{k}{x^2}$；当 $x<0$ 时，$\dfrac{k}{x^2}\leqslant\dfrac{1}{xy}\leqslant\dfrac{1}{kx^2}$. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$，由函数极限的夹逼准则知 $\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{1}{xy}=0$.

(2) 不存在. 由于 $(x,y)\in D_2$，所以 $\lim\limits_{\substack{r\to+\infty\\ y=\frac{1}{kx}}}\dfrac{1}{xy}=\lim\limits_{x\to+\infty}k=k$.

故 $\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{1}{xy}$ 不存在.

8. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

证明 当 (x,y) 沿过点 $(0,0)$ 的每一条射线 $x=t\cos\alpha, y=t\sin\alpha\ (0<t<+\infty)$ 趋于点 $(0,0)$ 时，$f(x,y)$ 的极限等于 $f(0,0)$，即 $\lim\limits_{t\to 0}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=f(0,0)$，但 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不连续.

证明 $\lim\limits_{t\to 0}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}=0=f(0,0)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx^2}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{k}{1+k^2}=\frac{k}{1+k^2}\neq 0,$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续.

9. 设 $f:D\subseteq\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$，若 $f(x,y)$ 在区域 D 内对变量 x 连续，对变量 y 满足

Lipchitz条件. 即对 D 内任意两点 (x,y')，(x,y'') 有：$|f(x,y')-f(x,y'')|\leqslant L|y'-y''|$，其中 L 为常数，证明：$f(x,y)$ 在 D 内连续.

证明　$\forall (x_0,y_0)\in D$ 及 $\forall \varepsilon>0$，由于 $f(x,y)$ 在 D 内对 x 连续，必 $\exists \delta_1>0$，使当 $(x,y)\in U((x_0,y),\delta_1)\cap D$ 时，恒有

$$|f(x,y)-f(x_0,y)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta=\min\left\{\delta_1,\frac{\varepsilon}{2L}\right\}$. 那么当 $(x,y)\in U((x_0,y_0),\delta)\cap D$ 时，恒有

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(x_0,y_0)|&\leqslant|f(x,y)-f(x_0,y)|+|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+L|y-y_0|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2L}\cdot L=\varepsilon.\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$，故 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续. 由 (x_0,y_0) 的任意性知 $f(x,y)$ 在 D 内连续.

10. 设 $A\subseteq\mathbf{R}^n$ 为一点集，$\boldsymbol{f}:A\to\mathbf{R}^m$ 为 n 元向量值函数，证明 f 在 A 上连续等价于它的每个分量在 A 上连续.

证明　设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(x_1,\cdots,x_n),f_2(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_n))^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$.

$\forall \boldsymbol{x}_0=(x_{01},\cdots,x_{0n})\in A$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续，即 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$，则 $\forall i\in\{1,2,\cdots,m\}$，恒有

$$\begin{aligned}|f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{x}_0)|&\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{x}_0))^2}\\&=\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\|.\end{aligned}$$

从而
$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}f_i(\boldsymbol{x})=f_i(\boldsymbol{x}_0)\quad(i=1,2,\cdots,m).$$

反过来，设 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}f_i(\boldsymbol{x})=f_i(\boldsymbol{x}_0)$，$i=1,2,\cdots,m$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_i>0$，使当 $\boldsymbol{x}\in U(\boldsymbol{x}_0,\delta_i)$ 时，恒有

$$|f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{x}_0)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\quad(i=1,2,\cdots,m).$$

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m\}$，则当 $\boldsymbol{x}\in U(\boldsymbol{x}_0,\delta)$ 时，恒有

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}|f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{x}_0)|^2}$$

$$< \sqrt{m \cdot \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon.$$

故 $\lim\limits_{x \to x_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$，即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续，从而在 A 上连续.

11. 设 $\boldsymbol{f}$ 是集合 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 上的 n 元向量值函数，证明：$\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0 \in A$ 连续$\Leftrightarrow$对于 A 中任何收敛于 $\boldsymbol{x}_0$ 的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$，都有 $\lim\limits_{k \to \infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$.

证明 设 $\boldsymbol{f} = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \cdots, f_m(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{x} \in A \subseteq \mathbf{R}^n$，则 $f_i(\boldsymbol{x})$ 为 n 元数量值函数，$i = 1, 2, \cdots, m$. 由上题知：$\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0 \in A$ 上连续$\Leftrightarrow f_i(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续，$i = 1, 2, \cdots, m$. 由数量值函数的 Heine 定理：$f_i(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续$\Leftrightarrow$对于 A 中任何收敛于 $\boldsymbol{x}_0$ 的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$，都有 $\lim\limits_{x \to x_0} f_i(\boldsymbol{x}) = f_i(\boldsymbol{x}_0)$. 故本题得证.

12. 设 f 为集合 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 上的 n 元数量值函数，证明：若 f 在 $\boldsymbol{x}_0 \in A$ 连续，且 $f(\boldsymbol{x}_0) > 0$，则存在正常数 q，使得：

$$\exists \delta > 0, \forall \boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}_0, \delta) \cap A, \text{都有} f(\boldsymbol{x}) \geqslant q > 0.$$

证明 由于 n 元数量值函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0 \in A$ 连续. 且 $f(\boldsymbol{x}_0) > 0$，则对 $\varepsilon = \dfrac{f(\boldsymbol{x}_0)}{2} > 0$，$\exists \delta > 0$，使得 $\forall \boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}_0, \delta) \cap A$，恒有 $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)| < \dfrac{f(\boldsymbol{x}_0)}{2}$，即

$$f(\boldsymbol{x}_0) - \frac{f(\boldsymbol{x}_0)}{2} < f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{2} f(\boldsymbol{x}_0). \text{取 } q = \frac{1}{2} f(\boldsymbol{x}_0) > 0$$

则 $f(\boldsymbol{x}) \geqslant q > 0$.

(B)

1. 设 $\boldsymbol{f}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ 是 n 元向量值函数，试用邻域的语言表述 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ 处连续的定义，并证明下列命题等价：

(1) $\boldsymbol{f}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上连续；

(2) $W \subseteq \mathbf{R}^m$ 是开集，则 W 关于 $\boldsymbol{f}$ 的原象 $\boldsymbol{f}^{-1}(W) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in W\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集；

(3) $W \subseteq \mathbf{R}^m$ 是闭集，则 W 关于 $\boldsymbol{f}$ 的原象 $\boldsymbol{f}^{-1}(W)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的闭集.

证明 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ 处连续，如果 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得当 $\boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}_0, \delta)$ 时恒有 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in U(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0), \varepsilon)$.

(1)$\Rightarrow$(2)

如 $\boldsymbol{f}^{-1}(W) = \varnothing$，则 $\boldsymbol{f}^{-1}(W)$ 为开集. 如 $\boldsymbol{f}^{-1}(W) \neq \varnothing$，那么 $\forall \boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{f}^{-1}(W)$，则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) \in W$. 由 W 是开集可知，$\exists \varepsilon > 0$，使 $U(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0), \varepsilon) \subseteq W$. 由 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续知：对上述的 $\varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使 $\forall \boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}_0, \delta)$，恒有 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in U(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0), \varepsilon) \subseteq W$.

即 $\boldsymbol{f}(U(\boldsymbol{x}_0,\delta))\subseteq U(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),\varepsilon)\subseteq W$，则 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta)\subseteq \boldsymbol{f}^{-1}(W)$，即 $\boldsymbol{x}_0$ 为 $\boldsymbol{f}^{-1}(W)$ 的内点. 由 $\boldsymbol{x}_0$ 的任意性知 $\boldsymbol{f}^{-1}(W)$ 为开集.

(2)$\Rightarrow$(1)

$\forall \boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n$ 及 $\forall\varepsilon>0$，则 $W=U(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),\varepsilon)$ 为开集，则 $\boldsymbol{f}^{-1}(W)$ 也是开集，且 $\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{f}^{-1}(W)$. 进而 $\exists\delta>0$，使 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta)\subseteq\boldsymbol{f}^{-1}(W)$. 即 $\forall\boldsymbol{x}\in U(\boldsymbol{x}_0,\delta)$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in W=U(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),\varepsilon)$. 故 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续. 从而 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上连续.

故(1)$\Leftrightarrow$(2).

下证(2)$\Leftrightarrow$(3). 为此先证 $\boldsymbol{f}^{-1}(W^c)=[\boldsymbol{f}^{-1}(W)]^c$. $\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{f}^{-1}(W^c)$，有 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in W^c$，即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\notin W$，从而 $\boldsymbol{x}\in[\boldsymbol{f}^{-1}(W)]^c$. 故 $\boldsymbol{f}^{-1}(w^c)\subseteq[\boldsymbol{f}^{-1}(W)]^c$.

又 $\forall\boldsymbol{x}\in[\boldsymbol{f}^{-1}(W)]^c$，有 $\boldsymbol{x}\notin\boldsymbol{f}^{-1}(W)$，从而 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\notin W$，即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in W^c$，从而 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{f}^{-1}(W^c)$. 故 $\boldsymbol{f}^{-1}(W^c)\supseteq[\boldsymbol{f}^{-1}(W)]^c$.

因此 $\boldsymbol{f}^{-1}(W^c)=[\boldsymbol{f}^{-1}(W)]^c$

(2)$\Rightarrow$(3)

如果 $W\subseteq\mathbf{R}^m$ 为闭集，则 $W^C\subseteq\mathbf{R}^m$ 为开集. 由(2)知 $\boldsymbol{f}^{-1}(W^c)=[\boldsymbol{f}^{-1}(W)]^c$ 为开集，即 $\boldsymbol{f}^{-1}(W)$ 为闭集. 则(2)$\Rightarrow$(3).

(3)$\Rightarrow$(2)

如果 $W\subseteq\mathbf{R}^m$ 是开集，则 $W^c\subseteq\mathbf{R}^m$ 为闭集. 则由(3)，$\boldsymbol{f}^{-1}(W^c)=[\boldsymbol{f}^{-1}(W)]^c$ 为闭集，即 $\boldsymbol{f}^{-1}(W)$ 是开集，则(3)$\Rightarrow$(2).

故(2)$\Leftrightarrow$(3). 从而(1)$\Leftrightarrow$(2)$\Leftrightarrow$(3).

2. 设有二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

证明 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上不一致连续.

证明　对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=2\sqrt{\varepsilon}$，当 $(x,y)\in U((0,0),\delta)$ 时，恒有 $\left|\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant\dfrac{1}{4}(x^2+y^2)<\varepsilon$. 故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$. 由连续函数的性质，$f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续.

取 $P_n=\left(n+\dfrac{1}{n},n+\dfrac{1}{n}\right)$，$Q_n=(n,n)$，则当 $n\to\infty$ 时 $\|P_n-Q_n\|\to0$. 因此，对 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$ 及任何 $\delta>0$，都存在 $P_n,Q_n\in\mathbf{R}^2$，满足当 $\|P_n-Q_n\|<\delta$ 时有

$$|f(P_n)-f(Q_n)|=1+\frac{1}{2n^2}>1>\varepsilon,$$

故 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上不一致连续.

3. 设$\boldsymbol{f}$是集$A\subseteq\mathbf{R}^n$上的n元向量值函数,并且满足 Lipschitz 条件,即存在常数$L\geqslant 0$,使对所有$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in A$,均有$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\|\leqslant L\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$,证明$\boldsymbol{f}$在$A$上一致连续.

证明 $\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{L}$. 则对$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in A$,当$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|<\delta$时,由于$\boldsymbol{f}$在$A$上满足 Lipschitz 条件,则有

$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\|\leqslant L\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|<\varepsilon$,故$\boldsymbol{f}$在$A$上一致连续.

4. 设$f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$是$n$元数量值连续函数,$c\in\mathbf{R}$是一个常数,证明

(1) $\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})>c\}$与$\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})<c\}$均为开集;

(2) $\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})\geqslant c\}$与$\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})\leqslant c\}$均为闭集;

(3) $\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})=c\}$是闭集.

证明 (1) 令$W_1=(c,+\infty)$,$W_2=(-\infty,c)$均为$\mathbf{R}$中的开集,而$\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})>c\}=f^{-1}(W_1)$,$\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})<c\}=f^{-1}(W_2)$. 由于$f$是$\mathbf{R}^n$上的连续函数,则由本习题(B)的第一题知$f^{-1}(W_1)$与$f^{-1}(W_2)$均为开集.

类似的方法可知(2)中两集合均为闭集.

(3) 由于$\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})=c\}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})\geqslant c\}\cap\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})\leqslant c\}$,由本题(2)知$\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})=c\}$为两闭集的交. 则由定理性质知其为闭集.

习 题 5.3

(A)

2. (1) 设$f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$,求$f_x(x,1)$;

解 $f_x(x,1)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,1)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)=1$ 或

$$f_x(x,1)=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\bigg|_{(x,1)}=1+(y-1)\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{y}}}\Bigg|_{(x,1)}=1.$$

(2) $f(x,y)=\dfrac{\cos(x-2y)}{\cos(x+y)}$,求$f_y\left(\pi,\dfrac{\pi}{4}\right)$.

解 $f_y\left(\pi,\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(\pi,y)\bigg|_{y=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\dfrac{\cos(\pi-2y)}{\cos(\pi+y)}\right)\bigg|_{y=\frac{\pi}{4}}=-2\sqrt{2}.$

3. 求曲线$\begin{cases}z=\dfrac{1}{4}(x^2+y^2),\\ y=4\end{cases}$在点$(2,4,5)$处的切线与$x$轴正向所成的倾角.