二、无界函数的二重积分

定义2 设 P 为有界区域 D 的一个聚点, $f(x,y)$ 在 D 上除点 P 外皆有定义, 且在 P 的任何空心邻域内无界, Δ 为 D 中任何含有 P 的小区域, $f(x,y)$ 在 $D-\Delta$ 上可积, 又设 d 表示 Δ 的直径. 若极限

$$\lim_{d\to 0}\iint\limits_{D-\Delta} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

存在且有限, 并与 Δ 的取法无关, 则称 $f(x,y)$ 在 D

上的反常二重积分收敛, 记作

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{d\to 0}\iint_{D-\Delta} f(x,y)\mathrm{d}\sigma;$$

否则称反常积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 发散.

定理4 **(柯西判别法)** 设 $f(x,y)$ 在有界区域 D 上除点 $P(x_0,y_0)$ 外处处有定义，点 P 是它的瑕点，则下面结论成立：

若在点 P 的附近有

$$|f(x,y)| \le \frac{c}{r^{\alpha}},$$

其中 c 为常数，$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$，则当 $\alpha<2$ 时，反常二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 收敛；

复习思考题

总结反常定积分与反常二重积分有哪些相同与不同之处.