复习 CH-7 无穷级数

1. 级数的概念，Cauchy收敛原理（与数列的关系）

（Series vs Sequences）

ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

2. 审敛准则

① 通项检验：若 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 不存在或不是0，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

（对于正项级数）

② 比较准则 I 和 II $\left(\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda\right)$

例 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{3/2}} \longrightarrow \boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^m}{n^{\beta}}}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $1<\beta$

Sol: 与 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ 比较，$1<\alpha<\frac{3}{2}$，且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^2 / n^{3/2}}{1/n^{\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{3/2-\alpha}} = 0$$

由 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ 收敛 知 $\sum \frac{(\ln n)^2}{n^{3/2}}$ 收敛.

③ 积分准则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vs $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$

④ 检比法

⑤ 检根法 } 可以处理 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

(对于 $\sum a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$)

⑥ Leibniz 准则 (交错级数)

⑦ 绝对收敛准则

(Abel, Dirichlet 判别法)

3. 绝对收敛和条件收敛

(级数的重排)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

例1: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{[2+(-1)^n]^n}{n \cdot 3^n}$

✓

例2: $\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} + \cdots$

令 $\begin{cases} a_n = \sqrt{2+a_{n-1}} & n>1 \\ a_0 = 0, & n=1 \end{cases}$

$2+a_n = a_{n+1}^2$

$\sqrt{4-a_{n+1}^2} \Rightarrow \sqrt{2-a_n}$

$\boxed{\text{可以说明: } \lim_{n\to\infty} a_n = 2.}$ ✓

利用根化法:

$$\frac{\sqrt{2-a_{n+1}}}{\sqrt{2-a_n}}=\frac{\sqrt{2-a_{n+1}}\sqrt{2+a_{n+1}}}{\sqrt{2-a_n}\sqrt{2+a_{n+1}}}=\frac{\cancel{\sqrt{2-a_n}}}{\cancel{\sqrt{2-a_n}}\sqrt{2+a_{n+1}}}$$

$$\to\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}<1$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{收敛!}}$

例3. 若$f'(x)$在$[-1,1]$上连续，$f'(x)$在$(-1,1)$上可微，且$f(0)=0$, $f'(0)=1$, 存在$M>0$, s.t. $|f''(x)|\leq M$, $\forall x\in(-1,1)$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right]$ 绝对收敛.

Hint: 对 $f'(x)$ 用Lagrange中值定理..

4. 函数项级数一致收敛的概念与M判别法

(vs 点点收敛)

了解: 一致收敛的性质 → 和函数的连续性, 可积性, 可导性

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^2x}{n^2}$, $x\in\mathbb{R}$ $\xrightarrow{\text{求导}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\cos n^2x.$

5. 幂级数的收敛半径，展成Taylor级数
(Abel定理)

6. 幂级数的性质（逐项运算，内闭一致收敛）

7. 幂级数应用（求某些幂级数和函数）

8. 了解Fourier级数的定义 $\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right)$
- Fourier系数
- Dirichlet定理
- 一些实例