解　若 $x\leqslant a$，则 $F(x)=\int_a^b f(y)(y-x)\mathrm{d}y$，由定理 5.2

$$F'(x)=-\int_a^b f(y)\mathrm{d}y, F''(x)=0$$

若 $x\geqslant b$，则 $F(x)=\int_a^b (x-y)f(y)\mathrm{d}y, F'(x)=\int_a^b f(y)\mathrm{d}y$,

$$F''(x)=0.$$

若 $a<x<b, F(x)=\int_a^x (x-y)f(y)\mathrm{d}y+\int_x^b(-x+y)f(y)\mathrm{d}y$,

$$F'(x)=\int_a^x f(y)\mathrm{d}y+\int_x^b -f(y)\mathrm{d}y,$$

$$F''(x)=f(x)+f(x)=2f(x).$$

故 $F''(x)=\begin{cases}2f(x), & x\in(a,b),\\ 0, & x\geqslant b \text{ 或 } x\leqslant a.\end{cases}$

2. 设 f 具有连续的一阶偏导数，求 $F(\alpha)=\int_0^\alpha f(x+\alpha,x-\alpha)\mathrm{d}x$ 的导数 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\alpha}$.

解　令 $u=x+\alpha, v=x-\alpha$，由定理 5.4 得

$$F'(\alpha)=\int_0^\alpha[f'_u(u,v)-f'_v(u,v)]\mathrm{d}x+f(2\alpha,0),$$

又　$$\int_0^\alpha \frac{\partial f(u,v)}{\partial x}\mathrm{d}x=f(u,v)\Big|_0^\alpha=f(2\alpha,0)-f(\alpha,-\alpha).$$

另一方面 $\int_0^\alpha \frac{\partial f(u,v)}{\partial x}\mathrm{d}x=\int_0^\alpha(f'_u+f'_v)\mathrm{d}x$，故

$$\int_0^\alpha f'_v\mathrm{d}x=f(2\alpha,0)-f(\alpha,-\alpha)-\int_0^\alpha f'_u\mathrm{d}x.$$

从而　$$F'(\alpha)=2\int_0^\alpha f'_u(u,v)\mathrm{d}x+f(\alpha,-\alpha).$$

习　题　6.6

(A)

1. 计算下列第一型线积分：

(5) $\oint_{(C)} x^2\mathrm{d}s$，$(C)$ 为圆周 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\ z=\sqrt{3};\end{cases}$

(6) $\oint_{(C)} |y|\,\mathrm{d}s$，$(C)$为球面 $x^2+y^2+z^2=2$ 与平面 $x=y$ 的交线．

解　(5) (C)的参数方程为 $x=\cos t, y=\sin t, z=\sqrt{3}, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$，

$$\oint_{(C)} x^2\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t)\ \sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t+0}\,\mathrm{d}t = \pi.$$

(6) (C)的参数方程为：$x=y=\cos t, z=\sqrt{2}\sin t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$，

$$\oint_{(C)} |y|\,\mathrm{d}s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\cdot\sqrt{2}\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cdot\sqrt{2}(-\cos t)\,\mathrm{d}t = 4\sqrt{2}.$$

2. 试导出用极坐标方程 $\rho=\rho(\varphi)\ (\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta)$ 表示曲线(C)的线积分计算公式：

$$\int_{(C)} f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\ \sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi.$$

解　(C)的参数方程为 $x=\rho(\varphi)\cos\varphi, y=\rho(\varphi)\sin\varphi, \alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$，于是

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2 &= [\rho'(\varphi)\cos\varphi-\rho(\varphi)\sin\varphi]^2(\mathrm{d}\varphi)^2 + \\ &\quad [\rho'(\varphi)\sin\varphi+\rho(\varphi)\cos\varphi]^2(\mathrm{d}\varphi)^2 \\ &= (\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi))(\mathrm{d}\varphi)^2.\end{aligned}$$

从而

$$\int_{(C)} f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\ \sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi.$$

3. 计算下列线积分：

(2) $\oint_{(C)} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$，$(C)$为圆周 $x^2+y^2=ax\ (a>0)$；

(3) $\oint_{(C)} |y|\,\mathrm{d}s$，$(C)$为双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\ (a>0)$．

解　(2) (C)的参数方程为：$x=\dfrac{a}{2}(1+\cos t), y=\dfrac{a}{2}\sin t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$，从而 $\mathrm{d}s=\dfrac{a}{2}\mathrm{d}t$，于是，

$$\begin{aligned}\oint_{(C)} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a\cdot\frac{a}{2}(1+\cos t)}\cdot\frac{a}{2}\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\left|\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t \\ &= \frac{a^2}{2}\left[\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}\mathrm{d}t - \int_\pi^{2\pi}\cos\frac{t}{2}\mathrm{d}t\right] = 2a^2.\end{aligned}$$

(3)(C)的极坐标方程为$\rho^2=a^2\cos 2t, t\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$. 参数方程为$x=a\sqrt{\cos 2t}\cos t, y=a\sqrt{\cos 2t}\sin t$,则$ds=\frac{a}{\sqrt{\cos 2t}}dt$. 由于$(C)$关于$x$轴对称,于是

$$\oint_{(C)}|y|ds=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\sqrt{\cos 2t}\sin t\cdot\frac{a}{\sqrt{\cos 2t}}dt+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}a\sqrt{\cos 2t}\sin t\cdot\frac{a\,dt}{\sqrt{\cos 2t}}\right]$$

$$=2a^2(2-\sqrt{2}).$$

5. 计算圆柱面$x^2+y^2=R^2$介于xOy平面及柱面$z=R+\frac{x^2}{R}$之间的一块面积,其中$R>0$.

解 圆柱面$x^2+y^2=R^2$的准线是xOy平面上的圆(C):

$x^2+y^2=R^2$. 对(C)进行化分,在弧微元ds上的一小片柱面面积可近似地看作以ds为底,以截线$\begin{cases}x^2+y^2=R^2,\\ z=R+\frac{x^2}{R}\end{cases}$的竖坐标$z=R+\frac{x^2}{R}$为高的长方形面积,从而得面积微元$dS=(R+\frac{x^2}{R})ds$,于是所求面积为

$$A=\int_{(C)}(R+\frac{x^2}{R})ds$$

(C)的参数方程:$x=R\cos t, y=R\sin t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$所以

$$A=\int_0^{2\pi}\left(R+\frac{R^2\cos^2 t}{R}\right)\cdot R\,dt=3\pi R^2.$$

6. 设螺线$x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, z=k\theta(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$上物质的线密度为$\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$,求:

(1) 它关于z轴的转动惯量;

(2) 它的重心.

解 (1) 螺线(C)关于z轴的转动惯量为

$$I_z=\int_{(C)}(x^2+y^2)dm=\int_{(C)}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)ds$$

$$=\int_{(C)}(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)ds$$

$$=\int_0^{2\pi} a^2(a^2+k^2\theta^2)\sqrt{a^2+k^2}\,d\theta=\frac{2}{3}\pi a^2\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2).$$

(2) 设其重心$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$. 质量 $m=\int_{(C)}(x^2+y^2+z^2)\,ds=\frac{2\pi}{3}\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2)$ 对三个坐标面的静矩分别为：

$$M_{xy}=\int_{(C)}z\,dm=\int_{(C)}z(x^2+y^2+z^2)\,ds=\int_0^{2\pi}k\theta(a^2+k^2\theta^2)\sqrt{a^2+k^2}\,d\theta$$

$$=2\pi^2k\sqrt{a^2+k^2}(a^2+2k^2\pi^2),$$

$$M_{yz}=\int_{(C)}x\,dm=\int_0^{2\pi}a\cos\theta\cdot(a^2+k^2\theta^2)\cdot\sqrt{a^2+k^2}\,d\theta=4\pi ak^2\sqrt{a^2+k^2},$$

$$M_{zx}=\int_{(C)}y\,dm=\int_0^{2\pi}a\sin\theta\cdot(a^2+k^2\theta^2)\cdot\sqrt{a^2+k^2}\,d\theta=-4\pi^2ak^2\sqrt{a^2+k^2}.$$

从而：

$$\bar{x}=\frac{M_{yz}}{m}=\frac{6ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2},\quad \bar{y}=\frac{-6\pi ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2},\quad \bar{z}=\frac{3k(\pi a^2+2\pi^3k^2)}{3a^2+4\pi^2k^2}.$$

7. 求曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 包含在圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 内的那一部分的面积.

解 圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 包含在 $x^2+y^2=2x$ 的那一部分在 xOy 平面上的投影(σ)：$x^2+y^2\leqslant 2x$. 则所求面积为

$$A=\iint_{(S)}dS=\iint_{(\sigma)}\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy=\sqrt{2}\iint_{(\sigma)}dx\,dy=\sqrt{2}\pi.$$

8. 求地球上由子午线 $\varphi=30°,\varphi=60°$ 和纬线 $\theta=45°,\theta=60°$ 所围那部分的面积(把地球近似看成半径 $R=6.4\times10^6\,\mathrm{m}$ 的球).

解 以球心为坐标原点，南、北极连线为 z 轴，东西半球的分界面为 xz 坐标面，南北半球的分界面为 xy 平面. 地球的参数方程为：$x=R\sin\theta\cos\varphi,y=R\sin\theta\sin\varphi,z=R\cos\theta$.

所求面积为$\left((\sigma):\frac{\pi}{6}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}\right)$

$$A=\iint_{(\sigma)}\|\boldsymbol{r}_\theta\times\boldsymbol{r}_\varphi\|\,d\theta\,d\varphi=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}R^2\sin\theta\,d\varphi=\frac{\pi R^2}{12}(\sqrt{2}-1).$$

9. 求下列平面曲线所构成的旋转面的面积：

(1) 星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 绕 y 轴；

（2）圆周 $x^2+y^2=a^2$ 被直线 $y=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 截下的劣弧绕 $y=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

解　（1）$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 绕 y 轴旋转形成的旋转面为：$(x^2+z^2)^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$，其参数方程为：

$$\boldsymbol{r}=\{a\cos\varphi\cos^3\theta, a\sin^3\theta, a\sin\varphi\cos^3\theta\}, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, 0\leqslant\theta\leqslant\pi,$$

$\|\boldsymbol{r}_\theta\times\boldsymbol{r}_\varphi\|=3a^2\cos^4\theta|\sin\theta|$. 由旋转面的对称性，所求面积为

$$A=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a^2\cos^4\theta\,|\sin\theta|\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=\frac{12}{5}\pi a^2.$$

（2）$x^2+y^2=a^2$ 被 $y=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 截下的劣弧(C)：$x=a\cos t, y=a\sin t, \frac{\pi}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3\pi}{4}$. 将$(C)$划分，在弧微元 $\mathrm{d}s$ 之间的一片旋转面面积可近似地看作是以 $\mathrm{d}s$ 为高，底面半径为 $y-\frac{a}{\sqrt{2}}$ 的圆柱面的面积．从而得面积微元 $\mathrm{d}A=2\pi(y-\frac{a}{\sqrt{2}})\mathrm{d}s$. 于是所求面积 $A=\int_{(C)}2\pi(y-\frac{a}{\sqrt{2}})\mathrm{d}s$．由对称性，

$$A=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}2\pi(a\sin t-\frac{a}{\sqrt{2}})\cdot a\mathrm{d}t=2\sqrt{2}\pi a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

10. 计算下列第一型面积分：

（2）$\iint\limits_{(S)}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$，$(S)$ 为区域 $(G)=\{(x,y,z)\mid\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1\}$ 的边界曲面；

解　$(S)=(S_1)\cup(S_2)$，其中(S_1)为平面 $z=1$ 上的圆 $x^2+y^2\leqslant 1$，(S_2)为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于 $z=0$ 与 $z=1$ 之间的部分.

于是
$$\begin{aligned}\iint\limits_{(S)}(x^2+y^2)\mathrm{d}S&=\iint\limits_{(S_1)}(x^2+y^2)\mathrm{d}S+\iint\limits_{(S_2)}(x^2+y^2)\mathrm{d}S\\&=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)(\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho+\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho\\&=\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2}).\end{aligned}$$

(4) $\iint\limits_{(S)} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}S$，$(S)$ 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$；

解 面积元 $\mathrm{d}S=\dfrac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. (S)在 xOy 平面上的投影为圆域 $x^2+y^2\leqslant R^2$. 于是

$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=R\cdot\pi R^2=\pi R^3.$$

(5) $\iint\limits_{(S)}\dfrac{\mathrm{d}S}{r^2}$，$(S)$为圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 界于平面 $z=0$ 及 $z=H(H>0)$之间的部分，r 为(S)上的点到原点的距离；

解 (S)在 yOz 坐标面的投影为矩形域(σ)：$0\leqslant z\leqslant H$，$-R\leqslant y\leqslant R$. 将圆柱面分为两部分(S_1)与(S_2)，其方程分别为 $x=\pm\sqrt{R^2-y^2}$. 于是柱面上的曲面面积微元 $\mathrm{d}S=\dfrac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. 又$(S_1)$与$(S_2)$关于 yOz 平面对称，$\dfrac{1}{r^2}$是 x 的偶函数，所以，

$$\iint\limits_{(S)}\frac{\mathrm{d}S}{r^2}=2\iint\limits_{(S_1)}\frac{\mathrm{d}S}{r^2}=2\iint\limits_{(\sigma)}\frac{1}{R^2+z^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2R\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{R^2-y^2}}\int_0^H\frac{\mathrm{d}z}{R^2+z^2}$$

$$=4R\int_0^R\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{R^2-y^2}}\int_0^H\frac{\mathrm{d}z}{R^2+z^2}=2\pi\arctan\frac{H}{R}.$$

(6) $\oiint\limits_{(S)}\dfrac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}S$，$(S)$ 是以$(0,0,0)$，$(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$ 为顶点的四面体的边界面；

解 (S)由四张平面(S_1)：$x=0$，(S_2)：$y=0$，(S_3)：$z=0$，(S_4)：$x+y+z=1$ 围成，其曲面面积微元分别为：$\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\mathrm{d}x\mathrm{d}z$，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，所以

$$\oiint\limits_{(S)}\frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}=\iint\limits_{(S_1)}\frac{\mathrm{d}S}{(1+y)^2}+\iint\limits_{(S_2)}\frac{\mathrm{d}S}{(1+x)^2}+\iint\limits_{(S_3)}\frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}+\iint\limits_{(S_4)}\frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}$$

$$=2\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}\frac{\mathrm{d}z}{(1+y)^2}+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2}+\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2}$$

$$= 2\int_0^1\left[\frac{2}{(1+y)^2}-\frac{1}{1+y}\right]dy+(1+\sqrt{3})\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\right)dx$$

$$= (\sqrt{3}-1)\ln 2+\frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

(7) $\iint\limits_{(S)}|xyz|\,dS$,$(S)$ 为曲面 $z=x^2+y^2$ 在平面 $z=1$ 下面的部分;

解　由(S)关于坐标面 zOy 及 xOz 对称,$|xyz|$ 关于 x,y 为偶函数,则 $\iint\limits_{(S)}|xyz|\,dS=4\iint\limits_{(S_1)}xyz\,dS$,其中$(S_1)$为$(S)$在第一卦限的部分,设$(\sigma)$:$x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0$.

则　$$4\iint\limits_{(S_1)}xyz\,dz=\iint\limits_{(\sigma)}4xy(x^2+y^2)\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\cdot\rho^2\cdot\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho\,d\rho$$

$$=\frac{125\sqrt{5}-1}{420}.$$

(8) $\iint\limits_{(S)}(xy+yz+zx)\,dS$,$(S)$ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被曲面 $x^2+y^2=2ax\,(a>0)$所截得的部分;

解　由于(S)关于 xOz 坐标面对称,所以 $\iint\limits_{(S)}(xy+yz)\,dS=0$.

故 $$\iint\limits_{(S)}(xy+yz+zx)\,dS=\iint\limits_{(S)}xz\,dS=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2ax}x\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}\rho\cos\varphi\cdot\rho\cdot\rho\,d\rho=\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4.$$

(9) $\iint\limits_{(S)}z\,dS$,(S)为螺旋面的一部分:$x=\mu\cos\theta, y=\mu\sin\theta, z=\theta\,(0\leqslant\mu\leqslant a, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$;

解　令 $\boldsymbol{r}=\{\mu\cos\theta,\mu\sin\theta,\theta\}$,则 $\|\boldsymbol{r}_\mu\times\boldsymbol{r}_\theta\|=\sqrt{1+\mu^2}$,从而

$$\iint\limits_{(S)}z\,dS=\int_0^a d\mu\int_0^{2\pi}\theta\sqrt{1+\mu^2}\,d\theta=\pi^2\left[a\sqrt{1+a^2}+\ln(a+\sqrt{1+a^2})\right].$$

(10) $\iint\limits_{(S)} z^2 \mathrm{d}S$，$(S)$为圆锥面的一部分：$x = r\cos\varphi\sin\alpha, y = r\sin\varphi\sin\alpha, z = r\cos\alpha (0\leqslant r\leqslant a, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$，$\alpha$为常数$\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

解 令 $\boldsymbol{r} = \{r\cos\varphi\sin\alpha, r\sin\varphi\sin\alpha, r\cos\alpha\}$，$\|\boldsymbol{r}_r\times\boldsymbol{r}_\varphi\| = r\sin\alpha$，则

$$\iint\limits_{(S)} z^2 \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a (r\sin\alpha)(r\cos\alpha)^2\mathrm{d}r = \frac{\pi a^4}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha.$$

11. 设形如悬链线 $y = \dfrac{a}{2}(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}})$ 的物质曲线上每一点的密度与该点的纵坐标成正比，且在点$(0,a)$的密度等于μ，试求该物质曲线在横坐标$x_1 = 0$及$x_2 = a$间一段的质量m.

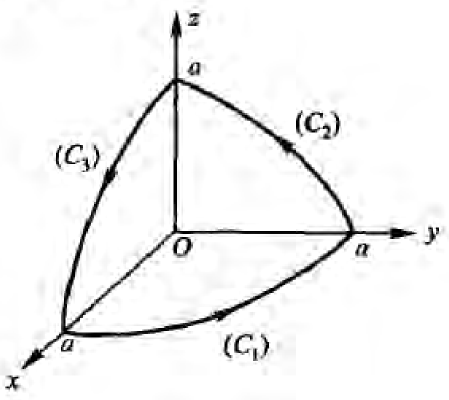
解 依题意 $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$，$(x,y)$点的密度 $\rho(x,y) = \dfrac{\mu}{a}y = \mu\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$.

则
$$m = \int_{(C)}\rho(x,y)\mathrm{d}s = \int_0^a \mu\operatorname{ch}\frac{x}{a}\sqrt{1+\left(a\cdot\frac{1}{a}\operatorname{sh}\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^a \mu\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}\mathrm{d}x = \frac{\mu a}{8}\left(\mathrm{e}^2 - \frac{1}{\mathrm{e}^2} + 4\right).$$

12. 设球面三角形为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, (x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0)$，

(1) 求其周界的形心坐标(即密度为 1 的质心坐标)；

(2) 求此球面三角形的形心坐标.



(第 12 题)

解 (1) 设形心$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，球面三角形的周界的质量 $m = 3\cdot\dfrac{1}{4}\cdot 2\pi a$.

$$M_{yz} = \oint_{(C)} x\mathrm{d}s = \int_{(C_1)} x\mathrm{d}s + \int_{(C_3)} x\mathrm{d}s = 2\int_{(C_1)} x\mathrm{d}s$$
$$= \int_0^a x\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2}\mathrm{d}x$$
$$= 2\int_0^a \frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$$
$$= 2a^2,$$

则 $\bar{x}=\dfrac{4a}{3\pi}$,由 x,y,z 的轮换对称性知

$$\bar{y}=\bar{z}=\frac{4a}{3\pi}.$$

(2) 球面三角形(S)的质量 $m=\iint\limits_{(S)}\mathrm{d}S=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\x\geqslant0,y\geqslant0}}\sqrt{1+\dfrac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a\rho\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}a^2.$

$$M_{yz}=\iint\limits_{(S)}x\mathrm{d}S=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\x\geqslant0,y\geqslant0}}x\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a\rho^2\cos\varphi\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho=\frac{\pi a^3}{4}.$$

故 $\bar{x}=\dfrac{M_{yz}}{m}=\dfrac{a}{2}$.

由 $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ 的轮换对称性知 $\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}$,即质心 $\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}\right)$.

13. 求密度为常数 μ 的均匀锥面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=0\,(0\leqslant z\leqslant b)$ 对 z 轴的转动惯量.

解 $I_z=\iint\limits_{\text{锥面}}(x^2+y^2)\mu\mathrm{d}S=\mu\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{\mu}{a}\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}\mu a^3\sqrt{a^2+b^2}.$$

14. 求高为 $2h$,半径为 R,质量均匀分布的正圆柱面对(1) 中心轴线;(2) 中央横截面的一条直径;(3) 底面的一条直径的转动惯量.

解 如图所示建立坐标系. 设(S)为 $x^2+y^2=R^2,0\leqslant z\leqslant h$;($S_1$)为 $x=\sqrt{R^2-y^2},0\leqslant z\leqslant h$;($S_2$)为 $x=-\sqrt{R^2-y^2},0\leqslant z\leqslant h$;($\sigma$)为 $0\leqslant z\leqslant h,x=0,|y|\leqslant R$,则

(1) 所求即 I_z(对 z 轴的转动惯量),且

$$I_z=2\iint\limits_{(S)}(x^2+y^2)\cdot\mu\mathrm{d}S=2R^2\mu\iint\limits_{(S)}\mathrm{d}S=2R^2\mu S=4\pi\mu R^3h.$$

其中 S 为(S)的面积,即 $S=(2\pi R)h=2\pi Rh$.

（2）所求即 $I_x = I_y$，且

$$I_x = 2\iint_{(S)}(y^2+z^2)\cdot\mu\mathrm{d}S$$

$$= 4\iint_{(S_1)}(y^2+z^2)\mu\mathrm{d}S = 4\mu\iint_{(\sigma)}(y^2+z^2)\sqrt{1+\frac{y^2}{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

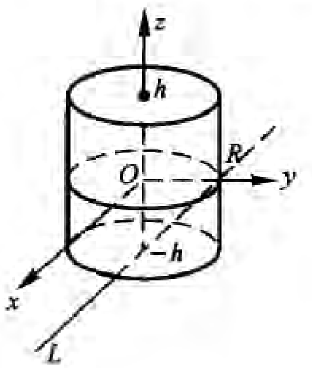
$$= 4\mu R\int_0^h\mathrm{d}z\int_{-R}^{R}\frac{y^2+z^2}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y = 2\pi\mu Rh\left(R^2+\frac{2}{3}h^2\right).$$

（3）直线 L 为底面的一条直径，则所求转动惯量为 I_L. 由于 L 与 x 轴平行，而均匀圆柱面的质心即为形心（坐标原点），则由平行轴定理（习题 6.4（B）第 4 题）可知

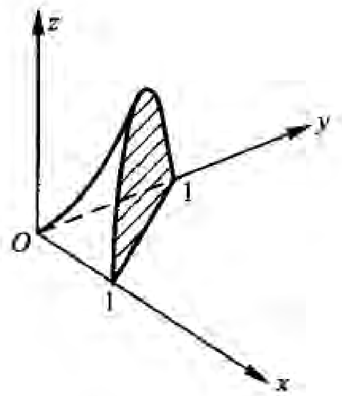
$$I_L = I_x + mh^2 = 2\pi\mu Rh\left(R^2+\frac{2}{3}h^2\right) + (4\pi\mu Rh)h^2$$

$$= 2\pi\mu Rh\left(R^2+\frac{8}{3}h^2\right).$$

其中 $m = 2S\mu = 2(2\pi Rh)\mu = 4\pi\mu Rh$.



（第 14 题）



（（B）第 1 题）

（B）

1. 求平面 $x+y=1$ 上被坐标面与曲面 $z=xy$ 截下的在第一卦限部分的面积.

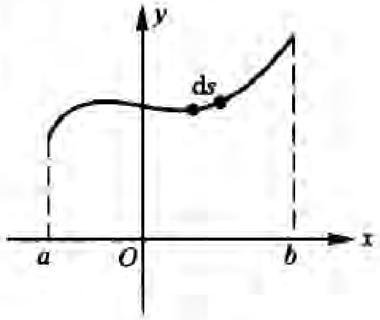
解 如图所示，所求即阴影部分（S）的面积 S. 由于交线 $\begin{cases} z = xy, \\ x+y=1 \end{cases}$ 在 yOz 坐标面的投影为抛物线 $\begin{cases} x=0, \\ z=y(1-y). \end{cases}$ 从而（S）在 yOz 坐标面上的投影域为（σ）：

$0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant y(1-y)$. 于是 $S=\iint\limits_{(S)}\mathrm{d}S=\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{1+x_y^2}\mathrm{d}\sigma=\sqrt{2}\iint\limits_{(\sigma)}\mathrm{d}\sigma=\sqrt{2}\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{y(1-y)}\mathrm{d}z=\frac{\sqrt{2}}{6}$.

2. 求平面光滑曲线 $y=f(x)\,(a\leqslant x\leqslant b, f(x)>0)$ 绕 x 轴旋转所得旋转面的面积.

解　将曲线 $(C): y=f(x)$ 化分. 对弧长微元 $\mathrm{d}s$ 之间的一小片旋转面的面积 $\mathrm{d}S$ 可以近似的看作底面半径为 $y=f(x)$, 高为 $\mathrm{d}s$ 的圆柱体的侧面积, 即 $\mathrm{d}S=2\pi f(x)\mathrm{d}s$. 从而旋转面面积为 S

$$S=\int_{(C)}2\pi f(x)\mathrm{d}s=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x.$$



(第 2 题)

3. 求曲线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ (1) 绕 x 轴; (2) 绕 y 轴; (3) 绕直线 $y=2a$ 旋转所成旋转面的面积.

解　(1) 由上题可知所求面积为

$$\begin{aligned}A_x&=2\pi\int_0^{2\pi a}y\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x\\&=2\pi\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\sqrt{1+\left(\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}\right)^2}\cdot a(1-\cos t)\mathrm{d}t\\&=2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos t}}\mathrm{d}t\\&=2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\sin\frac{t}{2}}=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\mathrm{d}t\\&=\frac{64}{3}\pi a^2.\end{aligned}$$

(2) $A_y=\int_{(C)}2\pi x\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}2\pi a(t-\sin t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$

$$=4\pi a^2\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=16\pi^2a^2.$$

(3) 所求面积 $A=\int_{(C)}2\pi(2a-y)\mathrm{d}s$

$$= \int_0^{2\pi} 2\pi[2a - a(1-\cos t)] \cdot 2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t = \frac{32}{3}\pi a^2.$$

4. 求平面曲线 $x^2+(y-b)^2=a^2(b \geqslant a)$ 绕 x 轴所构成的环(轮胎)面的面积.

解 圆周 (C)：$x^2+(y-b)^2=a^2$ 的参数方程为：

$$x = a\cos\theta,\quad y = b + a\sin\theta,\quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

故所求面积为 $A = \int_{(C)} 2\pi y\mathrm{d}s = 2\pi\int_0^{2\pi}(b + a\sin\theta)\cdot a\mathrm{d}\theta = 4\pi^2 ab.$

5. 证明：由平面上一已知弧段，绕这一平面上一条不穿过这弧段的直线旋转而成的旋转面的面积，等于这弧段的长度与这弧段的形心旋转一周时所经路程的长度的乘积.

证明 建立坐标系使旋转轴为 x 轴，设弧段 (C) 的形心为 $(\bar{x},\bar{y})$ 则 $\bar{y}(\mu l) = \int_{(C)} y(\mu\mathrm{d}s)$，即 $\bar{y}l = \int_{(C)} y\mathrm{d}s$，其中 μ 为密度，l 为 (C) 的长度. 则 $(\bar{x},\bar{y})$ 绕 x 轴旋转一周所形成的圆周长为 $2\pi\bar{y}$，其与 (C) 的长度乘积 $2\pi\bar{y}\cdot l = 2\pi(\bar{y}l) = 2\pi\int_{(C)} y\mathrm{d}s$ 为 (C) 绕 x 轴旋转一周形成的曲面的面积.

6. 质量均匀分布，半径为 R 的球面对距球心为 $a(a>R)$ 处的单位质量的质点 A 的引力.

解 设球面 (S)：$x^2+y^2+z^2=R^2$ 的面密度为 μ，k 为引力系数. 由于 (S) 关于坐标面 $x=0$ 及 $y=0$ 对称，所以所求引力 $\boldsymbol{F}=\{F_x,F_y,F_z\}$ 在 x,y 轴方向的分量 $F_x=F_y=0$. 又引力微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = k\dfrac{1\cdot\mu\mathrm{d}S}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}}\{x,y,z-a\}$，则

$$F_z = \iint_{(S)} \frac{k\mu(z-a)}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}}\mathrm{d}S.$$

解法 I (S) 的参数方程为 $\boldsymbol{r} = \{R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta\}$，

$$(\theta,\varphi) \in (\sigma) = \{(\theta,\varphi) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}.$$

则 $\|\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\varphi\| = R^2\sin\theta.$

从而
$$\begin{aligned} F_z &= \iint_{(\sigma)} \frac{k\mu(R\cos\theta - a)\cdot R^2\sin\theta}{[R^2\sin^2\theta + (R\cos\theta - a)^2]^{3/2}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi} \frac{k\mu R^2(R\cos\theta - a)}{(R^2+a^2-2aR\cos\theta)^{3/2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

令 $t = (R^2+a^2-2aR\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$，则 $\sin\theta\mathrm{d}\theta = \dfrac{t}{aR}\mathrm{d}t$

$$R\cos\theta = \frac{1}{2a}(R^2 + a^2 - t^2).$$

代入上式,得

$$F_z = 2\pi k\mu R^2 \int_{a-R}^{a+R} \frac{R^2 - a^2 - t^2}{2a^2Rt^2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{R}{a^2}\pi k\mu\left[\frac{a^2 - R^2}{t} - t\right]_{a-R}^{a+R}$$

$$= -4\pi k\mu\frac{R^2}{a^2}.$$

解法Ⅱ　把(S)分成上、下两部分(S_1)及(S_2),则有:

$(S_1): z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \mathrm{d}S = \dfrac{R\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, x^2 + y^2 \leqslant R^2$(即圆域$(\sigma)$),

$(S_2): z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \mathrm{d}S = \dfrac{R\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, x^2 + y^2 \leqslant R^2.$

则　$F_z = \displaystyle\iint_{(S_1)} \frac{k\mu(z-a)}{[x^2 + y^2 + (z-a)]^{3/2}}\mathrm{d}S + \iint_{(S_2)} \frac{k\mu(z-a)}{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{3/2}}\mathrm{d}S \overset{\Delta}{=\!=} F_{z_1} + F_{z_2}.$

而　$$F_{z_1} = \iint_{(\sigma)} \frac{k\mu(\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} - a)}{[x^2 + y^2 + (\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} - a)^2]^{3/2}} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R \frac{k\mu(\sqrt{R^2 - \rho^2} - a)}{[\rho^2 + (\sqrt{R^2 - \rho^2} - a)^2]^{3/2}} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \cdot \rho\mathrm{d}\rho$$

$$= 2\pi k\mu R\int_0^R \frac{t - a}{(R^2 + a^2 - 2at)^{3/2}}\mathrm{d}t \quad (t = \sqrt{R^2 - \rho^2})$$

$$= 2\pi k\mu\frac{R}{a}\int_0^R (t - a)\mathrm{d}(R^2 + a^2 - 2at)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 2\pi\mu\frac{R}{a}k\left[\frac{t - a}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2at}}\Bigg|_0^R - \int_0^R \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2at}}\right]$$

$$= 2\pi\mu\frac{R}{a}k\left[-1 + \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} + \frac{1}{a}\sqrt{R^2 + a^2 - 2at}\Bigg|_0^R\right]$$

$$= 2\pi\mu k\frac{R}{a}\left(-\frac{R}{a} + \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} - \frac{\sqrt{R^2 + a^2}}{a}\right).$$

又　$$F_{z_2} = \iint_{(\sigma)} \frac{-k\mu(\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} + a)}{[x^2 + y^2 + (\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} + a)^2]^{3/2}} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\pi\mu k \frac{R}{a}\left(\frac{-a}{\sqrt{R^2+a^2}} + \frac{\sqrt{R^2+a^2}}{a} - \frac{R}{a}\right)$$

故　$F_z = -4\pi\mu k \dfrac{R^2}{a^2}$.

7. 计算$\oint_{(C)} x^2 \mathrm{d}s$, (C)为球面$x^2+y^2+z^2=1$被平面$x+y+z=0$所截出的圆周.

解法Ⅰ　由于在(C)的方程$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y+z=0 \end{cases}$中变量$x,y,z$具有"对称性"，即$x,y,z$三变量中任意两个对换$(C)$的方程不变，故有

$$\oint_{(C)} x^2\mathrm{d}s = \oint_{(C)} y^2\mathrm{d}s = \oint_{(C)} z^2\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\oint_{(C)}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\oint_{(C)}\mathrm{d}s = \frac{2}{3}\pi$$

解法Ⅱ　球面$x^2+y^2+z^2=1$的参数方程为：$x=\sin\theta\cos\varphi$, $y=\sin\theta\sin\varphi$, $z=\cos\theta$, 代入平面方程$x+y+z=0$中得(C)的参数方程为

$$x = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2+\sin 2\varphi}},\ y = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2+\sin 2\varphi}},\ z = \frac{-(\sin\varphi+\cos\varphi)}{\sqrt{2+\sin 2\varphi}},\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

则
$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2+\sin 2\varphi}\mathrm{d}\varphi,$$

$$\oint_{(C)} x^2\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi}{2+\sin 2\varphi}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2+\sin 2\varphi}\mathrm{d}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{(2+\sin 2\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2+\sin 2\varphi}\bigg|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{1}{(2+\sin 2\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi\right]$$

$$= \sqrt{3}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{(2+\sin 2\varphi)^2} = \sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{(2+\sin 2\varphi)^2}$$

$$\xlongequal{t=\tan\varphi} \frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+t^2}{(1+t+t^2)^2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t+t^2} - \frac{2t+1}{2(1+t^2+t)^2} + \frac{1}{2(1+t+t^2)^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2(1+t^2+t)}\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

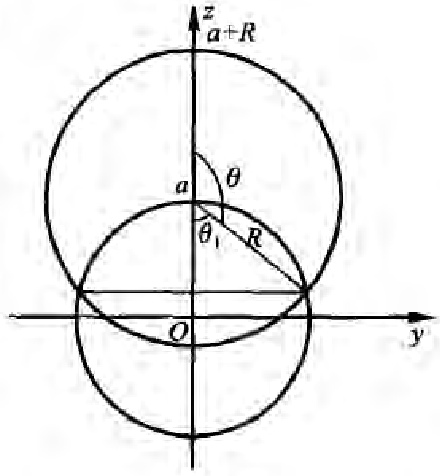
$$+\frac{2}{3\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\left[1+\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]^2}$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\mathrm{d}u=\frac{2}{3}\pi.\quad\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}=\tan u\right).$$

8. 设半径为 R 的球面(S),其球心位于定球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$上,问 R 取何值时球面(S)在定球面内部的那部分面积最大?

解 不妨设(S)的球心为$(0,0,a)$,则(S)的方程为:$x^2+y^2+(z-a)^2=R^2$,则(S)与 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的交线为

$$(C)\begin{cases}x^2+y^2=\dfrac{R^2}{4a^2}(4a^2-R^2),\\ z=a-\dfrac{R^2}{2a}.\end{cases}$$



(第 8 题)

为使所求曲面(S_1)的面积非零,则 $0\leqslant R\leqslant 2a$. $(S_1)\subseteq(S)$的参数方程可写为:

$$\boldsymbol{r}=\{R\sin\theta\cos\varphi,R\sin\theta\sin\varphi,a+R\cos\theta\},$$

$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\pi-\theta_1\leqslant\theta\leqslant\pi\qquad\left(0\leqslant\theta_1=\arccos\frac{R}{2a}\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

于是(S)在 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内部的那一部分为(S_1)的面积为:

$$S=\iint_{(S_1)}\mathrm{d}S=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{\pi-\theta_1}^{\pi}R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=2\pi R^2(1-\cos\theta_1)=2\pi R^2\left(1-\frac{R}{2a}\right)\quad(0\leqslant R\leqslant 2a).$$

又由$\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}R}=2\pi\left(2R-\dfrac{3R^2}{2a}\right)=0$ 得关于 R 的函数的驻点 $R_1=0,R_2=\dfrac{4a}{3}$,于是当$R=\dfrac{4a}{3}$时,S 取得最大值$\dfrac{2\pi}{3}\left(\dfrac{4}{3}a\right)^2$.

9. 设(S)为椭球面$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分,点 $P(x,y,z)\in(S)$,π 为(S)在点 P 处的切平面,$\rho(x,y,z)$为点$(0,0,0)$到平面 π 的距离,求 $\displaystyle\iint_{(S)}\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$.

解 π 的方程为：$x(X-x)+y(Y-y)+2z(Z-z)=0$.

则
$$\rho(x,y,z)=\frac{|x^2+y^2+2z^2|}{\sqrt{x^2+y^2+(2z)^2}}.$$

又 $P(x,y,z)$ 在 (S) 上，故 $x^2+y^2+2z^2=2$，从而

$$\rho(x,y,z)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+z^2}}.$$

(S) 的参数方程为：$x=\sqrt{2}\sin\theta\cos\varphi,y=\sqrt{2}\sin\theta\sin\varphi,z=\cos\theta$，$\left(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\right.$ $\left.0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

则
$$\mathrm{d}S=\sqrt{2}\sin\theta\sqrt{1+\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

则
$$\iint\limits_{(S)}\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{1+\cos^2\theta}}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\sin\theta\sqrt{1+\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$
$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta(1+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{3}{2}\pi.$$

10. 一个体积为 V，外表面积为 S 的雪堆，融化的速度是 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\alpha S$，其中 α 是一个常数. 假设在融化期间雪堆的形状保持为 $z=h-\frac{x^2+y^2}{h}$，$z>0$，其中 $h=h(t)$. 问一个高度为 h_0 的雪堆全部融化需多长时间？

解 $V=\iiint\limits_{(V)}\mathrm{d}V=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{h-\frac{x^2+y^2}{h}}\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^h\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{h-\frac{\rho^2}{h}}\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}h^3$,

$$S=\iint\limits_{(S)}\mathrm{d}S=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2}\sqrt{1+\left(\frac{2x}{h}\right)^2+\left(\frac{2y}{h}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^h\sqrt{1+\frac{4\rho^2}{h^2}}\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)h^2.$$

由 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\alpha S$ 可得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\pi}{2}h^3\right)=\frac{3\pi}{2}h^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-\alpha\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)h^2$

从而 $h(t)=-\frac{\alpha}{9}(5\sqrt{5}-1)t+C$. 由 $t=0,h=h_0$ 知 $C=h_0$.

故
$$h(t)=-\frac{\alpha}{9}(5\sqrt{5}-1)t+h_0.$$

雪全部融化即 $h=0$，所以由 $0=-\frac{\alpha}{9}(5\sqrt{5}-1)t+h_0$ 得：

$$t=\frac{9}{124\alpha}h_0(5\sqrt{5}+1).$$

习　题　6.7

(A)

2. 计算下列线积分：

(3) $\oint_{(C)} y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y$，$(C)$为正向椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$；

解　(C)的参数方程：$x=a\cos t, y=b\sin t$，则

$$\oint_{(C)} y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}(b\sin t(-a\sin t)-a\cos t\cdot b\cos t)\mathrm{d}t=-2\pi ab.$$

(6) $\oint_{(C)}(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，$(C)$为椭圆$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\x-y+z=2,\end{cases}$且从 z 轴正向往 z 轴负向看去，(C)取顺时针方向.

解　(C)参数方程：$x=\cos t, y=\sin t, z=2-\cos t+\sin t$，

$$\text{原式}=\int_{2\pi}^{0}[(2-\cos t)(-\sin t)+(2\cos t-2-\sin t)\cos t+(\cos^2 t-\sin^2 t)]\mathrm{d}t$$
$$=-2\pi.$$

4. 把二型线积分 $\int_{(C)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 化为第一型线积分，其中 (C)为：

(1) 从点$(1,0)$到点$(0,1)$的直线段；

(2) 从点$(1,0)$到$(0,1)$的上半圆周 $x^2+y^2=1$；

(3) 从点$(1,0)$到点$(0,1)$的下半圆周$(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

解　(1) (C)的参数方程：$x=-t, y=1+t$，参数增加的方向即(C)的方向，且 $-1\leqslant t\leqslant 0$. 切向量 $\boldsymbol{\tau}=\{-1,1\}$，单位切向量 $\boldsymbol{e}_\tau=\frac{1}{\sqrt{2}}\{-1,1\}$，则

$$\int_{(C)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(C)}\frac{-P+Q}{\sqrt{2}}\mathrm{d}s.$$

(2) (C)：$\boldsymbol{r}=\{-x,\sqrt{1-x^2}\}$，与$(C)$同向的单位切向量为：$\boldsymbol{e}_\tau=\{-\sqrt{1-x^2},$