即原方程的通解

$$x = X(t)(C + x^*) = \begin{pmatrix} C_1t^2 + C_2t^2(1-\ln t) + \frac{t^2}{2}\ln t(1-\ln t) + \frac{t^2}{4}(t^2-1) \\ -C_1t + C_2t\ln t + \frac{t}{2}\ln t(1+\ln t) + \frac{3t}{4}(1-t^2) \end{pmatrix},$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

习 题 7.3

(A)

1. 求下列常系数齐次线性微分方程组的通解.

(2) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 + x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2; \end{cases}$ (4) $\dfrac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} x.$

解 (2) 令 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, 则原方程可写为:

$$x' = Ax.$$

A 的特征方程为 $\det(A - \lambda E) = (2-\lambda)(\lambda+1)^2 = 0$. 因此 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

对应于 $\lambda_1 = 2$ 的特征向量可取为 $r_1 = (1,1,1)^T$;

对应于 $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ 的线性无关的特征向量有 2 个. 取为

$$r_2 = (1, -1, 0)^T, \quad r_3 = (1, 0, -1)^T.$$

故所给微分方程组的基解矩阵为 $X(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{-t} & e^{-t} \\ e^{2t} & -e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & -e^{-t} \end{pmatrix}$. 因而通解为 $x = X(t)C$, 其中 $C = (C_1, C_2, C_3)^T$ 为任意常数向量.

(4) 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$ 的特征方程为 $(\lambda+2)(\lambda-1)^2 = 0$,

A 的特征值分别为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=1$.

$\lambda_1=-2$ 对应的特征向量可取为 $\boldsymbol{r}_1=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

对应 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的线性无关的特征向量只有一个. 因此需求$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系. 由于$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\28&44&9\end{pmatrix}$,

故 $\boldsymbol{r}_0^{(1)}=(11,-7,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{r}_0^{(2)}=(3,-6,20)^{\mathrm{T}}$

故 $\boldsymbol{r}_1^{(1)}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_0^{(1)}=(15,-30,100)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{r}_1^{(2)}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_0^{(2)}=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$.

从而 $\boldsymbol{x}_2(t)=\mathrm{e}^t(\boldsymbol{r}_0^{(1)}+t\boldsymbol{r}_1^{(1)})=\mathrm{e}^t(11+15t,-7-30t,100t)^{\mathrm{T}}$,

$$\boldsymbol{x}_3(t)=\mathrm{e}^t(\boldsymbol{r}_0^{(2)}+t\boldsymbol{r}_1^{(2)})=\mathrm{e}^t(3,-6,20)^{\mathrm{T}}.$$

故通解 $\boldsymbol{x}(t)=C_1\mathrm{e}^{-2t}\boldsymbol{r}_1+C_2\boldsymbol{x}_2(t)+C_3\boldsymbol{x}_3(t)$,其中 C_1,C_2,C_3 为任意常数

2. 求下列常系数非齐次线性微分方程组的通解.

(3) $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}t^2\\2t\\t\end{pmatrix}$.

解 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}$的特征方程$(\lambda+1)^3=0$,故特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$. 对应的线性无关的特征向量只有一个. 而$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^3\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系可取为 $\boldsymbol{r}_0^{(1)}=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{r}_0^{(2)}=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{r}_0^{(3)}=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

则 $\boldsymbol{r}_1^{(1)}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_0^{(1)}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{r}_2^{(1)}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_1^{(1)}=\boldsymbol{0};\boldsymbol{r}_1^{(2)}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_0^{(2)}=(-1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{r}_2^{(2)}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_1^{(2)}=\boldsymbol{0};\boldsymbol{r}_1^{(3)}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_0^{(3)}=(0,-1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{r}_2^{(3)}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_1^{(3)}=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$. 从而 $\boldsymbol{x}_1(t)=\mathrm{e}^{-t}\left(\boldsymbol{r}_0^{(1)}+t\boldsymbol{r}_1^{(1)}+\dfrac{t^2}{2}\boldsymbol{r}_2^{(1)}\right)=\mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{r}_0^{(1)}=\mathrm{e}^{-t}(1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_2(t)=\mathrm{e}^{-t}\left(\boldsymbol{r}_0^{(2)}+t\boldsymbol{r}_1^{(2)}+\dfrac{t^2}{2}\boldsymbol{r}_2^{(2)}\right)=\mathrm{e}^{-t}(-t,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}_3(t)=\mathrm{e}^{-t}\left(\boldsymbol{r}_0^{(3)}+t\boldsymbol{r}_1^{(3)}+\dfrac{t^2}{2}\boldsymbol{r}_2^{(3)}\right)=\mathrm{e}^{-t}\left(\dfrac{t^2}{2},-t,1\right)^{\mathrm{T}}$. 故对应的齐次线性微分方程组的基础解系可取为

$$\boldsymbol{X}(t)=(\boldsymbol{x}_1(t)\quad\boldsymbol{x}_2(t)\quad\boldsymbol{x}_3(t))=\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}1&-t&\dfrac{t^2}{2}\\0&1&-t\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{E}.$$

因而所求非齐次线性微分方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{C}+\int_0^t \boldsymbol{X}(t-\tau)\boldsymbol{f}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}1 & -t & \dfrac{t^2}{2}\\ 0 & 1 & -t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\\ C_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t^2-3t+3\\ t\\ t-1\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{C}=(C_1,C_2,C_3)^{\mathrm{T}}$ 任意常向量. $\boldsymbol{f}(\tau)=(t^2,2t,t)^{\mathrm{T}}$.

(B)

1. 求下列常系数齐次线性微分方程组的解.

(2) $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}-5 & -10 & -20\\ 5 & 5 & 10\\ 2 & 4 & 9\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$.

解 系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-5 & -10 & -20\\ 5 & 5 & 10\\ 2 & 4 & 9\end{pmatrix}$的特征值为 $\lambda_1=5,\lambda_{2,3}=2\pm\mathrm{i}$. $\lambda_1=5$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{r}_1=(-2,0,1)^{\mathrm{T}}$; $\lambda_2=2+\mathrm{i}$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{r}_2=(10\mathrm{i}+20,15-5\mathrm{i},-14-2\mathrm{i})^{\mathrm{T}}$. 则原方程有解 $\boldsymbol{x}_1(t)=\mathrm{e}^{5t}\boldsymbol{r}_1$, $\overline{\boldsymbol{x}}_2(t)=\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})t}\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{x}_2(t)+\mathrm{i}\boldsymbol{x}_3(t)$,

$$\boldsymbol{x}_2(t)=\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}20\cos t-10\sin t\\ 15\cos t+5\sin t\\ -14\cos t+2\sin t\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}_3(t)=\begin{pmatrix}20\sin t+10\cos t\\ 15\sin t-5\cos t\\ -14\sin t-2\cos t\end{pmatrix}\mathrm{e}^{2t}.$$

则 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\boldsymbol{x}_3(t)$为原方程的线性无关的三个特解. 从而通解为 $\boldsymbol{x}(t)=C_1\boldsymbol{x}_1(t)+C_2\boldsymbol{x}_2(t)+C_3\boldsymbol{x}_3(t)$.

习 题 7.4

(A)

2. 验证 $y_1=x$ 与 $y_2=\sin x$ 是微分方程 $(y')^2-yy''=1$ 的两个线性无关的解. 问 $y=C_1x+C_2\sin x$ 是否为该方程的通解.