第二章　一元函数微分学及其应用

习　题　2.1

(A)

1. 用导数定义求下列函数的导数：

(1) $f(x)=\cos x$；　　(2) $f(x)=\ln x$；

(3) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 求 $f'(0)$；　　(4) $f(x)=x|x|$，求 $f'(0)$.

解　(1) $$(\cos x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=-\sin x.$$

(2) $$(\ln x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}.$$

(3) $$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2\sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}=0.$$

(4) $$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x|\Delta x|-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0.$$

2. 已知函数 f 在 x_0 处可导，求下列极限：

(1) $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；　　(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$；

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]$；　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{x_0 f(x)-xf(x_0)}{x-x_0}$.

解 (1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=-f'(x_0)$.

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\right]=2f'(x_0).$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)-f(x_0)}{\dfrac{1}{n}}=f'(x_0)$.

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x_0f(x)-xf(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{x_0[f(x)-f(x_0)]}{x-x_0}-f(x_0)\right]$

$$=x_0f'(x_0)-f(x_0).$$

5. 问曲线 $y=x^{3/2}$ 上哪一点的切线与直线 $y=3x-1$ 平行?

解 曲线 $y=x^{3/2}$ 上点 $P(x_0,x_0^{3/2})$ 处切线的斜率为 $k=\dfrac{3}{2}\sqrt{x_0}$. 令 $\dfrac{3}{2}\sqrt{x_0}=3$ 得 $x_0=4$. 所以(4,8)处切线平行于 $y=3x-1$.

7. 设 f 是偶函数,且 $f'(0)$ 存在,证明 $f'(0)=0$.

证 因为 f 为偶函数,所以 $f(-x)=f(x)$,从而

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-\Delta x)-f(0)}{-\Delta x}=-f'(0)$$

8. 设函数 φ 在 $x=a$ 处连续,$f(x)=(x-a)\varphi(x)$,证明:函数 f 在 $x=a$ 处可导;若 $g(x)=|x-a|\varphi(x)$,函数 g 在 $x=a$ 处可导吗?

解 因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x\varphi(a+\Delta x)-0\cdot\varphi(a)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varphi(a+\Delta x)=\varphi(a)$,所以 f 在 a 处可导. 且 $f'(a)=\varphi(a)$.

因为 $g'_+(a)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{|\Delta x|\varphi(a+\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\varphi(a+\Delta x)=\varphi(a)$,

$$g'_-(a)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|\varphi(a+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x\varphi(a+\Delta x)}{\Delta x}=-\varphi(a),$$

所以 $g(x)=|x-a|\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处不可导.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 试求 $f'(x)$.

解 $x<0$, $f'(x)=(\sin x)'=\cos x$; $x>0$, $f'(x)=(x)'=1$, $x=0$,

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,$$

$f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1$，从而 $f'(0)=1$. 即

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

11. 试确定 a,b 的值，使函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ ax+b, & x>1\end{cases}$$

在 $x=1$ 处连续且可导.

解　因为 $f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b$；$f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1^-}x^2=1$，

由 $f(x)$在 $x=1$ 连续得 $a+b=1$. 又因为$f'_+(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(\Delta x+1)-f(1)}{\Delta x}=$ $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{a(\Delta x+1)+b-1}{\Delta x}=a$，

$$f'_-(1)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x+1)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}=2,$$

所以由 $f(x)$在 $x=1$ 处可导知：$a=2$，进而 $b=-1$.

12. 已知

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

求 $f'_+(0)$，$f'_-(0)$，问 $f'(0)$是否存在？

解　$f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta x^2-0}{\Delta x}=0$，

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-(\Delta x)-0}{\Delta x}=-1,$$

所以 $f'(0)$不存在.

13. 设物体绕定轴旋转，转角 θ 是时间 t 的函数 $\theta=\theta(t)$. 若旋转是非匀速的，试确定物体在 t_0 时刻的角速度.

解　设 t 时刻物体的角速度为 $\omega(t)$，则从 t_0 时刻到 $t_0+\Delta t$ 的平均角速度为 $\bar{\omega}=\dfrac{\theta(t_0+\Delta t)-\theta(t_0)}{\Delta t}$，所以 $\omega(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\bar{\omega}=\theta'(t_0)$.

14. 设质点在力的作用下所作的功 $W=f(t)$，若功 W 随时间 t 的变化是非均匀的，试求 t_0 时刻的瞬时功率.

解　t_0 时刻的瞬时功率 $P(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{W(t_0+\Delta t)-W(t_0)}{\Delta t}=W'(t_0)$.

15. 设 $N=N(x)$ 表示 x 个劳动力所生产的某产品的数量，若每个劳动力生产的产品数量相同，则$\frac{N}{x}$是常数，称为**劳动生产率**. 实际上，产品的产量 N 并不是随劳动力 x 的增加而均匀增长的. 试求劳动力数量为 x_0 时的劳动生产率（称为**边际劳动生产率**）.

解 劳动力数量为 x_0 时的劳动生产率 $P(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{N(x_0+\Delta x)-N(x_0)}{\Delta x}=N'(x_0)$.

16. 证明：双曲线 $xy=1$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形面积都等于 2.

解 $xy=1$ 上 $P(x,y)$处切线方程为 $Y-y=-\frac{1}{x^2}(X-x)$，从而它与两坐标轴构成的三角形面积为$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}\times 2x\right)=2$.

17. 设有可导函数 $f,g:(a,b)\to\mathbf{R}$. 若 $\forall x\in(a,b)$, $f(x)\leqslant g(x)$，则 $\forall x\in(a,b)$, $f'(x)\leqslant g'(x)$，对吗？

解 不对. 如 $f(x)=x$. $g(x)=1-x$. $\forall x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $f(x)\leqslant g(x)$. 但 $\forall x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $f'(x)=1>g'(x)=-1$.

18. 设 $f(0)=0$, $f'(0)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin 2x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{1}{2}\right]=f'(0)\cdot\frac{1}{2}=1$.

(B)

1. 若函数 f 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$存在. 试证 f 在 $x=0$ 处可导.

证 由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$存在，且 $f(x)$在 $x=0$ 处连续可知 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，而 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$存在，即 $f(x)$在 $x=0$ 可导.

2. 设 f 是定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数，$f(x)\neq 0$, $f'(0)=1$，且

$$\forall x,y\in(-\infty,+\infty),\ f(x+y)=f(x)f(y).$$

证明：f 在$(-\infty,+\infty)$上可导，且 $f'(x)=f(x)$.

证 因为 $\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$, $f(x+y)=f(x)f(y)$，且 $f(x)\neq 0$ 可知 $f(1)=f(1+0)=f(1)f(0)$，从而 $f(0)=1$. 进而，

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\cdot\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=f(x)\cdot f'(0)=f(x).$$

3. 设函数 f 在 $x=a$ 处可导，$f(a)\neq 0$，试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$.

证 因为 f 在 $x=a$ 处可导，所以 $f(a+h)-f(a)=h\cdot f'(a)+h\cdot\alpha(h)$，其中 $\lim\limits_{h\to 0}\alpha(h)=0$，从而

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)}{f(a)}\right]^{\frac{1}{h}}=\lim_{h\to 0}\left\{\left[1+h\cdot\frac{f'(a)+\alpha(h)}{f(a)}\right]^{\frac{f(a)}{f'(a)+\alpha(h)}\cdot\frac{1}{h}}\right\}^{\frac{f'(a)+\alpha(h)}{f(a)}}=\mathrm{e}^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

故由 Heine 定理，$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n=\mathrm{e}^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$.

4. 设曲线 $y=f(x)$在原点与 $y=\sin x$ 相切，试求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{2}}\sqrt{f\left(\dfrac{2}{n}\right)}$.

解 因为 $y=f(x)$在原点与 $y=\sin x$ 相切，所以 $f(0)=0,f'(0)=1$. 从而

$$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{2}}\sqrt{f\left(\frac{2}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\sqrt{\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}}}=\sqrt{2f'(0)}=\sqrt{2}.$$

5. 设 $n\in\mathbf{N}_+$，试讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性与可导性以及 $f'(x)$在 $x=0$ 处的连续性.

解 因为 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^n\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$，所以 $f(x)$在 $x=0$ 连续. 又由于 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n\sin\dfrac{1}{x}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}$，所以当 $n=1$ 时，$f'(0)$不存在，即 $f(x)$在 $x=0$ 不可导；当 $n>1$ 时，$f(x)$在 $x=0$ 可导. 且 $f'(0)=0$. 进而有，当 $n\geqslant 2$ 时，

$$f'(x)=\begin{cases}nx^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{n-2}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

又因为当 $n=2$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$不存在；当 $n>2$ 时，

$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0=f'(0)$，故当 $n\geqslant 3$ 时，$f'(x)$在 $x=0$ 处连续.

6. 设 $f\in C[a,b]$，$f(a)=f(b)=0$，且 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$. 证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

证 由于 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$，因此不妨设 $f'_+(a)>0$，则 $f'_-(b)>0$，即 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，$f'_-(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$.

由极限的保号性知：$\exists\, x_1,x_2$ 使 $a<x_1<x_2<b$，且

$$\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}>0,\ \frac{f(x_2)-f(b)}{x_2-b}>0,$$

进而可知，$f(x_1)>f(a)=0$，$f(x_2)<f(b)=0$，由零点定理可知至少存在一点 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

习 题 2.2

(A)

1. 求下列函数的导数：

(9) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$； (12) $y=\dfrac{e^x\sec x+1}{x^2\log_a\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}}$ $(a>0)$.

解 (9)
$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)'$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{(x+\sqrt{x})'}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right]$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right]$$
$$=\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}.$$

(12)
$$y'=\left(\frac{e^x\sec x+1}{x^2\log_a\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}}\right)'=-3\ln a\left(\frac{e^x\sec x+1}{x^2\ln x}\right)'$$

$$=-3\ln a\,\frac{(e^x\sec x+1)'(x^2\ln x)-(x^2\ln x)'(e^x\sec x+1)}{(x^2\ln x)^2}$$

$$=-3\ln a\,\frac{e^x\sec x(1+\tan x)x\ln x+(2\ln x+1)(e^x\sec x+1)}{x^3\ln^2 x}$$

3. 求下列函数的导数：

(11) $y=\ln\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$；　(13) $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}\quad(a>0)$；

(14) $y=x+x^x+x^{x^x}$；　(16) $y=e^{\arcsin\sqrt{x}}$；

(17) $y=\ln(\ln\sqrt{x^2+1})$；　(19) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}}$；

(20) $y=\arctan\left(\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{x}{2}\right)$.

解　(11) $y'=\left(\ln\sqrt{(x\sin x)\sqrt{1-e^x}}\right)'=\dfrac{1}{2}\left[\ln x+\ln\sin x+\dfrac{1}{2}\ln(1-e^x)\right]'$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}+\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{-e^x}{2(1-e^x)}\right].$$

(13) $y'=(x^{a^a})'+(a^{x^a})'+(a^{a^x})'=a^a x^{(a^a-1)}+(a^{x^a}\ln a)(x^a)'+a^{a^x}\ln a\,(a^x)'$

$$=a^a x^{a^a-1}+ax^{a-1}a^{x^a}\ln a+a^{a^x+x}\ln^2 a.$$

(14) 因为$(x^x)'=(e^{x\ln x})'=e^{x\ln x}\left(x\cdot\dfrac{1}{x}+\ln x\right)=x^x(1+\ln x)$

$$(x^{x^x})'=(e^{x^x\ln x})'=e^{x^x\ln x}[(x^x)'\ln x+x^x(\ln x)']$$

$$=x^x\cdot x^{x^x}\cdot\left[(1+\ln x)\ln x+\frac{1}{x}\right].$$

所以 $y'=(x)'+(x^x)'+(x^{x^x})'=1+x^x(1+\ln x)+x^x\cdot x^{x^x}\left[(1+\ln x)\ln x+\dfrac{1}{x}\right]$.

(16) $y'=e^{\arcsin\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{e^{\arcsin\sqrt{x}}}{2\sqrt{x(1-x)}}$.

(17) $y'=\dfrac{1}{\ln\sqrt{1+x^2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{x}{(1+x^2)\ln\sqrt{1+x^2}}$.

(19) 因为 $\ln y=\dfrac{1}{3}[\ln(1-\sin 2x)-\ln(1+\sin 2x)]$，所以 $\dfrac{y'}{y}=$ $\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{-2\cos 2x}{1-\sin 2x}-\dfrac{2\cos 2x}{1+\sin 2x}\right]$，所以 $y'=\sqrt[3]{\dfrac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}}\left(\dfrac{-4}{3\cos 2x}\right)$.

(20) $y'=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{4}\tan^2\dfrac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}\sec^2\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sec^2\dfrac{x}{2}}{4+\tan^2\dfrac{x}{2}}$.

4. 已知 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x)=\arctan x^2$. 试求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解　令 $u=\frac{3x-2}{3x+2}$. 则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f(u)}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot\frac{12}{(3x+2)^2}$

$$=\frac{12}{(3x+2)^2}\arctan\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)^2,\text{故}\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\frac{3\pi}{4}.$$

5. 设有分段函数 $f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\geqslant x_0,\\ \psi(x), & x<x_0,\end{cases}$ 函数 φ 与 ψ 均可导，问 $f'(x)=\begin{cases}\varphi'(x), & x\geqslant x_0,\\ \psi'(x), & x<x_0\end{cases}$ 是否成立？

解　不一定成立.

$f'(x)=\begin{cases}\varphi'(x), & x>x_0,\\ \psi'(x), & x<x_0\end{cases}$ 但在 $x=x_0$ 处 $f(x)$ 是否可导需用定义来验证.

如 $f(x)=\begin{cases}\sin x; & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ $f'_+(0)=1, f'_-(0)=-1$, $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

6. 求下列函数的导数（f,g 是可导函数）：

(1) $y=f(x^2)$；　　(2) $y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$；

(3) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$；　　(4) $y=f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{g(x)}$；

(5) $y=\begin{cases}1-x, & -\infty<x<1,\\ (1-x)(2-x), & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ -(2-x), & 2<x<+\infty;\end{cases}$　　(6) $y=\begin{cases}\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解　(1) $y'=2xf'(x^2)$.

(2) $y'=\dfrac{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}$.

(3) $y'=f'(\sin^2 x)\sin 2x-f'(\cos^2 x)\sin 2x$

$=(\sin 2x)[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)]$.

(4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}f(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{g(x)}+f(\mathrm{e}^x)(\mathrm{e}^{g(x)})'=f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{x+g(x)}+f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{g(x)}g'(x)$.

(5) $f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(1-x)(2-x)}{x-1}=-1$,

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x}{x-1}=-1$,

$f'_+(2)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-(2-x)-0}{x-2}=1$,

$f'_-(2)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(1-x)(2-x)-0}{x-2}=1$,

所以$f'(1)=-1$，$f'(2)=1$，故

$$f'(x)=\begin{cases}-1, & -\infty<x\leqslant 1,\\ 2x-3, & 1<x\leqslant 2,\\ 1, & 2<x<+\infty.\end{cases}$$

(6) 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x-0}$不存在.

故 $y'=\begin{cases}\dfrac{1+\left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}, & x\neq 0,\\ \text{不可导}, & x=0.\end{cases}$

7. 确定 a,b,c,d 的值，使曲线 $y=ax^4+bx^3+cx^2+d$ 与 $y=11x-5$ 在点$(1,6)$相切，经过点$(-1,8)$并在点$(0,3)$有一水平的切线.

解　依题意可知：

$(ax^4+bx^3+cx^2+d)|_{x=1}=6$，即 $a+b+c+d=6$，$(ax^4+bx^3+cx^2+d)'|_{x=1}=(11x-5)'|_{x=1}$，即 $4a+3b+2c=11$，$(ax^4+bx^3+cx^2+d)|_{x=-1}=8$，得 $a-b+c+d=8$，$(ax^4+bx^3+cx^2+d)'|_{x=0}=3$，得 $d=3$，故 $a=3$，$b=-1$，$c=1$，$d=3$.

8. 证明：双曲线 $xy=a$ 上任一点处的切线介于两坐标轴间的一段被切点所平分.

解　双曲线上任一点 $P\left(x_0,\dfrac{a}{x_0}\right)$的切线方程 $y-\dfrac{a}{x_0}=-\dfrac{a}{x_0^2}(x-x_0)$与 x 轴交点$A(2x_0,0)$，与 y 轴交点 $B\left(0,\dfrac{2a}{x_0}\right)$. 所以$|PA|=\sqrt{x_0^2+\left(\dfrac{a}{x_0}\right)^2}=|PB|$. 命题得证.

9. 求下列函数指定阶的导数：

(2) $f(x)=x\operatorname{sh}x$，求 $f^{(100)}(x)$；　　(4) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$，求 $f^{(n)}(x)$.

解　(2) $f^{(100)}(x)=(\operatorname{sh}x)^{(100)}x+100(\operatorname{sh}x)^{(99)}(x)'=x\operatorname{sh}x+100\operatorname{ch}x$.

(4) $f(x)=\dfrac{1}{(x^2-3x+2)}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$，

$$f^{(n)}(x)=\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}.$$

10. 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)(n\in\mathbf{N}_+)$，求 $f'(0)$及 $f^{(n+1)}(x)$.

解　$f'(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-n)+x[(x-1)(x-2)\cdots(x-n)]'$，$f'(0)=(-1)^n n!$，$f(x)=x^{n+1}-(1+2+\cdots+n)x^n+\cdots+(-1)^n n!x$，所以 $f^{(n+1)}(x)=(n+1)!$.

12. 证明：

(1) 可导偶（奇）函数的导函数为奇（偶）函数；

(2) 可导周期函数的导函数为具有相同周期的周期函数.

解　(1) 设 $f(x)$ 可导，且 $f(x)=f(-x)$ 为偶函数，

则 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(-x-\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=-f'(-x)$，

所以 $f'(x)$ 为奇函数. 同理可证可导奇函数的导函数为偶函数.

(2) $f(x)$ 可导，且 $f(x)$ 为周期函数，最小正周期为 T，则

$$f'(x+T)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+T+\Delta x)-f(x+T)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x),$$

命题得证.

13. 设 $f(x)$ 二阶可导，$F(x)=\lim\limits_{t\to\infty}t^2\left[f\left(x+\dfrac{\pi}{t}\right)-f(x)\right]\sin\dfrac{x}{t}$，求 $F'(x)$（$t\in\mathbf{R}$ 且与 x 无关）.

解　$F(x)=\lim\limits_{t\to\infty}t^2\left[f\left(x+\dfrac{\pi}{t}\right)-f(x)\right]\sin\dfrac{x}{t}$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{f\left(x+\frac{\pi}{t}\right)-f(x)}{\frac{\pi}{t}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{t}}{\frac{x}{t}}\cdot\pi x\right]=\pi x f'(x).$$

因为 $f(x)$ 二阶可导，所以 $F(x)$ 一阶可导，且 $F'(x)=\pi[f'(x)+xf''(x)]$.

14. 求由下列方程确定的隐函数的导数：

(4) $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$；

(6) $y=1+xe^y$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

解　(4) 将 $x=0$ 代入方程 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$，得 $y=1$.

将方程两边对 x 求导得

$$\frac{2x+y'}{x^2+y}=3x^2y+x^3y'+\cos x,\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=1$$

(6) 当 $x=0$ 时，$y=1$. 方程两端对 x 求导得

$$y'=e^y+xe^yy',\quad \left.y'\right|_{x=0}=e.$$

将 $y'=e^y+xe^yy'$ 两端再对 x 求导得 $y''=2e^yy'+xe^y(y')^2+xe^yy''$. 将 $x=0$，$y=1$，$y'=e$ 代入得

$$\left.y''\right|_{x=0}=2e^2.$$

15. 求由 Kepler 方程 $y=x+\varepsilon\sin y(0<\varepsilon<1)$所确定的曲线在点(0,0)处的切线方程.

解　将 $y=x+\varepsilon\sin y$ 两端对 x 求导可得：$y'=1+\varepsilon y'\cos y$，所以 $y'|_{x=0}=\dfrac{1}{1-\varepsilon}$，故过(0,0)切线方程为 $y=\dfrac{1}{1-\varepsilon}x$.

16. 对给定的函数两边取自然对数然后再求导的方法称为**对数求导法**. 例如，对函数

$$y=2^x\sin x\sqrt{1+x^2}$$

两边取自然对数，得

$$\ln|y|=x\ln 2+\ln|\sin x|+\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

由此方程确定了 y 是 x 的隐函数，应用隐函数求导法得

$$\frac{y'}{y}=\ln 2+\cot x+\frac{x}{1+x^2}$$

从而

$$\begin{aligned}y'&=y\left(\ln 2+\cot x+\frac{x}{1+x^2}\right)\\&=2^x\sin x\sqrt{1+x^2}\left(\ln 2+\cot x+\frac{x}{1+x^2}\right).\end{aligned}$$

试用对数求导法求下列函数导数：

(2) $y=\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{\sqrt[3]{x^2+2}}}$；　　(4) $y=(\tan 2x)^{\cot\frac{x}{2}}$.

解　(2) $y=\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{\sqrt[3]{x^2+2}}}$，两边取对数 $\ln|y|=\dfrac{1}{5}\left[\ln|x-5|-\dfrac{1}{3}\ln(x^2+2)\right]$，所以$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1}{5}\left[\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{2x}{3(x^2+2)}\right]$，故 $y'=\dfrac{1}{5}\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{\sqrt[3]{x^2+2}}}\left[\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{2x}{3(x^2+2)}\right]$.

(4) 由 $y=(\tan 2x)^{\cot\frac{x}{2}}$ 知 $\ln y=\cot\dfrac{x}{2}\ln(\tan 2x)$，两端对 x 求导得

$$\frac{y'}{y}=\frac{-1}{2}\csc^2\frac{x}{2}\ln(\tan 2x)+\frac{2\cot\dfrac{x}{2}}{\tan 2x}\sec^2 2x,$$

所以 $y'=(\tan 2x)^{\cot\frac{x}{2}}\left[-\dfrac{1}{2}\csc^2\dfrac{x}{2}\ln(\tan 2x)+2\cot\dfrac{x}{2}\cot 2x\sec^2 2x\right]$.

17. 若两条曲线在它们交点处的切线互相垂直，则称两曲线在该点**正交**. 若一曲线族中每条曲线与另一曲线族中与它相交的曲线均正交，则称它们是**正交曲线族**. 证明：双曲线族 $xy=C_1$ 与 $x^2-y^2=C_2$(其中 C_1 与 C_2 为任意非零常数)

是正交曲线族.

解 曲线 $xy=C_1$. 在 $(x,y)=\left(x,\dfrac{C_1}{x}\right)$ 处切线斜率 $k_1=-\dfrac{C_1}{x^2}$, 曲线 $x^2-y^2=C_2$ 在 $(x,y)=\left(x,\dfrac{C_1}{x}\right)$ 处切线斜率 $k_2=\dfrac{x}{y}=x\cdot\dfrac{x}{C_1}=\dfrac{x^2}{C_1}$, 于是 $k_1\cdot k_2=-1$, 即 $xy=C_1$ 与 $x^2-y^2=C_2$ 在其交点 (x,y) 处正交.

18. 求下列参数方程所确定的函数的导数:

(5) $\begin{cases}x=f(t),\\ y=tf(t)-f(t),\end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, 其中 $f''(t)$ 存在且 $f'(t)$ 不为零.

解 (5) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{tf'(t)+f(t)-f'(t)}{f'(t)}=t-1+\dfrac{f(t)}{f'(t)}$,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t-1+\frac{f(t)}{f'(t)}\right)\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\left\{1+\frac{[f'(t)]^2-f(t)f''(t)}{[f'(t)]^2}\right\}\cdot\frac{1}{f'(t)}$$

$$=\frac{2}{f'(t)}-\frac{f(t)f''(t)}{[f'(t)]^3}.$$

19. 设曲线 Γ 由极坐标方程 $r=r(\theta)$ 所确定, 试求该曲线上任意一点的切线斜率, 并将所得公式用于求心形线 $r=a(1-\cos\theta)(a>0)$ 上任一点的斜率.

解 曲线 $r=r(\theta)$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta,\\ y=r(\theta)\sin\theta,\end{cases}$ 曲线上点 $(\theta,r(\theta))$ 处切线斜率 $k=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}$.

心形线 $r=a(1-\cos\theta)$ 上任一点 $(\theta,r(\theta))$ 处切线斜率为

$$k_{心}=\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta+\cos\theta}{2\sin\theta\cos\theta-\sin\theta}.$$

20. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$ 在点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}a,\dfrac{\sqrt{2}}{4}a\right)$ 处的切线方程和法线方程. 证明: 在它的任一点处的切线介于坐标轴间部分的长为一常量.

解 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos^3\theta,\\ y=a\sin^3\theta\end{cases}(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$, 所以 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}a,\dfrac{\sqrt{2}}{4}a\right)$ 处切线方程为 $y-\dfrac{\sqrt{2}}{4}a=-\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{4}a\right)$, 法线方程为 $y-\dfrac{\sqrt{2}}{4}a=x-\dfrac{\sqrt{2}}{4}a$.

21. 落在平静水面上的石头使水面上产生同心波纹. 若最外一圈波半径的增大率为 6 m/s, 问在 2 秒末被扰动水面面积的增大率为多少?

解　依题可知. t 秒末被扰动水面面积为 $S=S(t)=\pi(6t)^2=36\pi t^2$，$\left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right|_{t=2}=72\pi t\Big|_{t=2}=144\pi$，即在 2 秒时被扰水面增大率 $144\ \pi\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$.

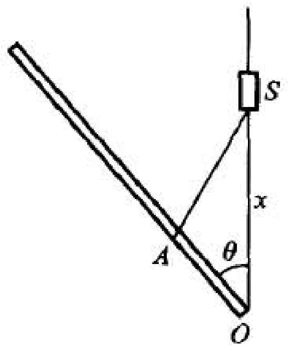
22. 在中午 12 时，甲船以 6 km/h 的速率向东行驶，乙船在甲船之北 16 km 处以 8 km/h 的速率向南行驶，求下午一时两船相离的速率.

解　t 时刻两船的距离为 $s=\sqrt{(16-8t)^2+(6t)^2}$，两船在下午一时相离的速率 $\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=-2.8\ \mathrm{m/h}$.

23. 当油船破裂时，有体积为 $V\mathrm{m}^3$ 的石油漏入海中. 假定石油在海面上以厚度均匀的圆形扩散开来，已知油层的厚度随时间的变化规律为 $h(t)=\frac{k}{\sqrt{t}}(t>0)$，试求油层向外扩散的速率.

解　设 t 时刻圆形油层的半径为 $r=r(t)$，则 $\pi r^2h(t)=V$，即 $r=r(t)=\sqrt{\frac{V}{k\pi}}t^{\frac{1}{4}}$，故油层向外扩散的速率为 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{V}{k\pi}}t^{-\frac{3}{4}}$.

24. 一个开窗子的机构是由一些刚性细杆做成，如右图. 其中 S 为滑块，设 $AO=3$ cm，$AS=4$ cm，求滑块的垂直速度 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 与 θ 的角速度 $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 之间的关系.



（第 24 题图）

解　由三角形余弦定理可知：在 $\triangle OAS$ 中：$4^2=3^2+x^2-2\cdot3\cdot x\cos\theta$. 两边对 t 求导数得

$$(x-3\cos\theta)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+3x\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=0.$$

25. 在距火箭发射塔 4 000 m 处安装一台摄影机. 为使摄影机的镜头始终对准火箭，摄影机的仰角应随着火箭的上升不断增加. 假设火箭发射后垂直上升到距离地面 3 000 m 处时，其速度为 600 m/s. 试求在此时刻摄影机仰角的变化率.

解　设 t 时刻火箭离地面高度为 $h=h(t)m$，摄像机仰角 $\theta=\theta(t)$，则 $\tan\theta=\frac{h(t)}{4\,000}$，于是 $(\sec^2\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{4\,000}\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}$. 当火箭上升到距地面 3 000 m 时. $\tan\theta=\frac{3}{4}$，$\sec^2\theta=\frac{25}{16}$，$\left.\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{h=3\,000}=600\ \mathrm{m/s}$，于是 $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{4\,000}\times600\times\frac{16}{25}=0.096$ 弧度/s. 即此时摄像机仰角的变化为 0.096 弧度/s.

(B)

1. 设 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx(a_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n)$

且 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$，证明：

$$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1.$$

解 由 $f'(x)=a_1\cos x+2a_2\cos 2x+\cdots+na_n\cos nx$ 得 $f'(0)=a_1+2a_2+\cdots+na_n$. 又由导数定义 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$，及 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$ 可得 $|a_1+2a_2+\cdots+na_n|=|f'(0)|=\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\leqslant\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|=1.$

2. 设函数 $\varphi:(-\infty,x_0]\to\mathbf{R}$ 是二阶可导函数. 选择 a,b,c，使函数

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\leqslant x_0,\\ a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c, & x>x_0\end{cases}$$ 在 $\mathbf{R}$ 上二阶可导.

解 要使 f 在 $\mathbf{R}$ 上二阶可导. 则 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，于是，

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+}[a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c]=c=\lim_{x\to x_0^-}\varphi(x)=\varphi(x_0)=f(x_0-0).$$

即 $c=\varphi(x_0)$. 又由 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{[a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c]-\varphi(x_0)}{x-x_0}=b$，

$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\varphi'(x_0)$ 可得 $b=\varphi'(x_0)$，于是

$$f'(x)=\begin{cases}\varphi'(x), & x\leqslant x_0,\\ 2a(x-x_0)+\varphi'(x_0), & x>x_0.\end{cases}$$ 再由

$$f''_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{[2a(x-x_0)+\varphi'(x_0)]-\varphi'(x_0)}{x-x_0}=2a,$$

$f''_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{\varphi'(x)-\varphi'(x_0)}{x-x_0}=\varphi''(x_0)$，可得 $a=\dfrac{1}{2}\varphi''(x_0)$.

3. 确定 a,b 的值，使函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}(1-\cos ax), & x<0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}\ln(b+x^2), & x>0\end{cases}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处可导，并求它的导函数.

解 由于 $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}\ln(b+x^2)$ 存在且等于 $f(0)=0$，所以 $\ln(b+x^2)$ 应是 x 的高阶无穷小 $(x\to 0)$. 即 $\lim\limits_{x\to 0}\ln(b+x^2)=0$，即 $b=1$. 又因为

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\ln(1+x^2)=1,\quad f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}(1-\cos ax)=\frac{a^2}{2},$$

所以$\frac{a^2}{2}=1$，即 $a=\pm\sqrt{2}$.

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\pm\sqrt{2}x\sin(\pm\sqrt{2}x)-1+\cos(\pm\sqrt{2}x)}{x^2}, & x<0,\\ 1, & x=0\\ \dfrac{2}{1+x^2}-\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x^2), & x>0.\end{cases}$$

4. 如果函数 $u=\varphi(x)$在 x_0 处可导，而 $y=f(u)$在 $u_0=\varphi(x_0)$处可导，那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在 x_0 处可导，这是大家所熟知的. 问下列三种情况是否成立？为什么？

(1) 如果 $u=\varphi(x)$在 x_0 处不可导，而 $y=f(u)$在 $u_0=\varphi(x_0)$处可导，那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在 x_0 处一定不可导；

(2) 如果 $u=\varphi(x)$在 x_0 处可导，而 $y=f(u)$在 $u_0=\varphi(x_0)$处不可导，那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在 x_0 处一定不可导；

(3) 如果 $u=\varphi(x)$在 x_0 处不可导，$y=f(u)$在 $u_0=\varphi(x_0)$处也不可导，那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在 x_0 处一定不可导.

解　(1) 不成立. 例如 $u=|x|$在 $x_0=0$ 处不可导，$y=u^2$ 在 $u_0=|x_0|=0$ 处可导. 复合函数 $y=x^2$ 在 $x_0=0$ 处可导.

(2) 不成立. 例如 $u=\sin^2 x$ 在 $x_0=0$ 处可导，$y=|u|$在 $u_0=0$ 处不可导，复合函数 $y=\sin^2 x$ 在 $x_0=0$ 处可导.

(3) 不成立. 如 $\varphi(x)=\begin{cases}-x, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0\end{cases}$ 在 $x_0=0$ 不可导，$f(u)=\begin{cases}0, & u\leqslant 0,\\ u, & u>0\end{cases}$ 在 $u_0=\varphi(x_0)=0$ 不可导，但复合函数 $y=f[\varphi(x)]=0$ 在$(-\infty,+\infty)$处处可导.

6. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$，试确定常数 a,b，使 $f(x)$连续、可导，并求 $f'(x)$.

解　$f(1)=(1+a+b)/2$. 如果 $x<1$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}e^{n(x-1)}=0$，所以 $f(x)=ax+b$，如果 $x>1$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}e^{n(x-1)}=+\infty$，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+(ax+b)e^{-n(x-1)}}{1+e^{-n(x-1)}}=x^2$. 于是

$$f(x)=\begin{cases}ax+b, & x<1,\\ (1+a+b)/2, & x=1,\\ x^2, & x>1.\end{cases}$$

由 $f(x)$在 $x=1$ 的连续性可得 $a+b=1$.
又由 $f(x)$在 $x=1$ 可导及 $f'_-(1)=a$，$f'_+(1)=2$ 知 $a=2$，于是 $b=-1$.

$$f'(x)=\begin{cases}2, & x\leqslant 1,\\ 2x, & x>1.\end{cases}$$

7. 设 $f(x)=\arctan x$，求 $f^{(n)}(0)$.

解 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，于是 $(1+x^2)f'(x)=1$，两边对 x 求 $n-1$ 阶导数得 $(1+x^2)f^{(n)}(x)+C_{n-1}^1(1+x^2)'f^{(n-1)}(x)+C_{n-1}^2(1+x^2)''f^{(n-2)}(x)=0$，于是，$f^{(n)}(0)+2C_{n-1}^2f^{(n-2)}(0)=0$，即 $f^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0)$，由 $f'(0)=1$，$f''(0)=0$ 可得当 $n=2m$ 时，$f^{(2m)}(0)=0$；当 $n=2m+1$ 时，$f^{(2m+1)}(0)=(-1)^m\cdot(2m)!$，$m=0,1,2,\cdots$.

8. 利用恒等式

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}$$

求出表示和式

$$S_n=\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\tan\frac{x}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$$

的公式.

解 对恒等式两边取对数可得

$$\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+\ln\left|\cos\frac{x}{4}\right|+\cdots+\ln\left|\cos\frac{x}{2^n}\right|=\ln|\sin x|-\ln\left|2^n\sin\frac{x}{2^n}\right|,$$

两边对 x 求导

$$-\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\tan\frac{x}{4}-\cdots-\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}=\cot x-\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n},$$

于是

$$S_n=\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}-\cot x.$$

10. 设 $y=y(x)$ 由方程 $\begin{cases}x=3t^2+2t+3,\\ e^y\sin t-y+1=0\end{cases}$ 所确定，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$.

解 将 $t=0$ 代入方程可得 $x=3$，$y=1$.

由 $e^y\sin t-y+1=0$ 可得 $\dfrac{dy}{dt}=\dot{y}=\dfrac{e^y\cos t}{1-e^y\sin t}$，$\dot{y}|_{t=0}=e$.

将 $e^y\sin t-y+1=0$ 两边对 t 求二阶导数，将 $t=0$，$y=1$，$\dot{y}|_{t=0}=e$ 代入可得 $\ddot{y}|_{t=0}=2e^2$，又 $\dot{x}|_{t=0}=2$　$\ddot{x}|_{t=0}=6$ 代入

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\left.\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}\right|_{t=0}=\frac{2\times2e^2-6e}{2^3}=\frac{(2e-3)e}{4}.$$

习　题　2.3

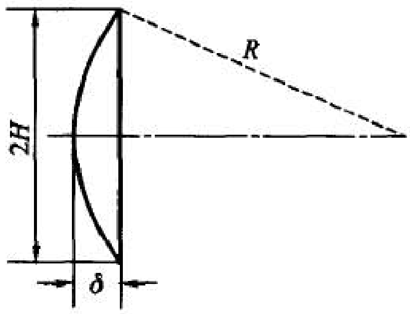
(A)

6. 如图，一透镜的凸面半径是 R，口径是 $2H$，$H\ll R$（即 H 比 R 小得多，可以忽略不计），厚度是 δ.

(1) 证明：$\delta\approx\dfrac{H^2}{2R}$；

(2) 设 $H=25$ mm，$R=100$ mm，求 δ 的近似值；

(3) 设 $R=150$ mm，$\delta=3$ mm，求 H 的近似值.



（第 6 题图）

解　(1) $\delta=R-R\sqrt{1-\left(\dfrac{H}{R}\right)^2}$，由 $H\ll R$，$x\ll 1$ 时，$(1+x)^{\alpha}\approx 1+\alpha x$ 可知$\sqrt{1-\left(\dfrac{H}{R}\right)^2}\approx 1+\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{H^2}{R^2}\right)$，于是 $\delta\approx\dfrac{H^2}{2R}$.

(2) 当 $H=25$ mm，$R=100$ mm 时，$\delta\approx\dfrac{25^2}{200}(\text{mm})=3.125(\text{mm})$.

(3) $R=150$ mm，$\delta=3$ mm 时，$H\approx\sqrt{2R\delta}=30(\text{mm})$.

7. 有一批半径为 1 cm 的球，为了提高球面的光洁度，要镀上一层铜，厚度为 0.01 cm. 试估计每只球需用多少克的铜（铜的密度是 8.9 g/cm^3）.

解　设需用 m 克铜，则
$$\begin{aligned}m&=\left[\frac{4}{3}\pi(1+0.01)^3-\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3\right]\times 8.9\\&=\frac{4}{3}\pi(1.01^3-1^3)\times 8.9\\&\approx\frac{4\times 8.9}{3}\pi[3\times 1^2\times(0.01)]\\&\approx 1.118(\text{克}).\end{aligned}$$

8. 钟摆摆动的周期 T 与摆长 l 的关系是 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$，其中 g 是重力加速度. 现有一只挂钟，当摆长为 10 cm 时走得很准确. 由于摆长没有校正好，长了 0.01 cm. 问这只钟每天慢多少秒？

解　$l_0=10$ cm. 当 $l=l_0+0.01(\text{cm})$ 时，

$$\Delta T=T(l_0)-T(l)\approx\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{l_0}}\times 0.01=2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}\cdot\frac{0.01}{2l_0},$$

由 $T=2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}=1$ 秒，于是一个周期慢 $\frac{0.01}{2\times10}=0.0005$（秒）. 每天慢 $0.0005\times3600\times24=43.2$（秒）.

9. 求由方程 $e^{x+y}-xy=0$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的微分 dy.

解　对方程 $e^{x+y}-xy=0$ 两边求微分得 $e^{x+y}d(x+y)=d(xy)$，即 $e^{x+y}(dx+dy)=xdy+ydx$，于是 $dy=\frac{y-e^{x+y}}{e^{x+y}-x}dx$.

10. 求由参数方程 $x=3t^2+2t+3, e^y\sin t-y+1=0$ 所确定的函数 $y=f(x)$ 的微分 dy.

解　由题设可知：$dx=(6t+2)dt$，从而 $dt=\frac{dx}{6t+2}$. 对 $e^y\sin t-y+1=0$ 两端求微分得 $e^y\sin t dy+e^y\cos t dt=dy$. 于是 $dy=\frac{e^y\cos t}{1-e^y\sin t}dt=\frac{e^y\cos t}{(1-e^y\sin t)(6t+2)}dx$.

11. 求下列函数 y 关于自变量 x 的二阶微分：

(2) $xy+y^2=1$.

解　(2) 由 $xy+y^2=1$ 知：

$$ydx+xdy+2ydy=0，即\ dy=-\frac{y}{x+2y}dx,$$

上式两端再求微分，　$2dydx+xd^2y+2(dy)^2+2yd^2y=0$，

于是，　$d^2y=-\frac{2(dy)^2+2dydx}{x+2y}=\frac{2y(x+y)}{(x+2y)^3}dx^2$.

由于 $(x+y)y=xy+y^2=1$，于是 $d^2y=\frac{2}{(x+2y)^3}dx^2$.

(B)

1. 有人说"若 $y=f(x)$ 在 x_0 点可导，则当 $\Delta x\to0$ 时，该函数在 x_0 点的微分 dy 是 Δx 的同阶无穷小."这种说法是否正确？为什么？

答　不正确. 如 $f(x)=x^2$，$dy|_{x_0=0}=0$ 是 Δx 高阶无穷小. 如果 $f'(x_0)\neq0$，则 $dy|_{x_0}=f'(x_0)\Delta x$ 是 Δx 的同阶无穷小.

2. 证明：函数 $f:U(x_0)\to\mathbf{R}$ 在 x_0 处可微（可导）的充要条件是存在一个关于 Δx 的线性函数 $L(\Delta x)=\alpha\Delta x$，使

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-L(\Delta x)|}{|\Delta x|}=0.$$

证

必要性　因为 f 在 x_0 处可微，所以存在一个关于 Δx 的线性函数 $L(\Delta x)=\alpha\Delta x$，使 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\alpha\Delta x+o(\Delta x)$，于是 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-L(\Delta x)|}{|\Delta x|}=$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left|\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right|=0$. 必要性得证.

充分性　由题设存在 $L(\Delta x)=a\Delta x$，使 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-L(\Delta x)|}{\Delta x}=0$，于是 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-a\Delta x=o(\Delta x)$，即存在一个关于 Δx 的线性函数 $L(\Delta x)=a\Delta x$ 使 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=a\Delta x+o(\Delta x)$. 故 f 在 x_0 处可微.

习　题　2.4

(A)

3. 能否用下面的方法证明 Cauchy 定理？为什么？

对 f,g 分别应用 Lagrange 定理得，

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)(b-a)}{g'(\xi)(b-a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

答　不能，因为对 f,g 分别应用 Lagrange 定理得到的两个 ξ 不一定相等. 而 Cauchy 定理中的 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 中的 ξ 是相同的.

5. 设 $a_i\in\mathbf{R}(i=0,1,\cdots,n)$，并且满足 $a_0+\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{3}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=0$，证明：$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

证　取 $F(x)=a_0x+\dfrac{1}{2}a_1x^2+\dfrac{1}{3}a_2x^3+\cdots+\dfrac{1}{n+1}a_nx^{n+1}$，则 $F(0)=F(1)=0$. 由 Rolle 定理知至少存在一个 $\xi\in(0,1)$，使 $F'(\xi)=0$，即 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一实根.

8. 设 $f,g:[a,b]\to\mathbf{R}$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，并且 $\forall x\in(a,b)$，$f'(x)=g'(x)$，证明：在 $[a,b]$ 上 $f(x)=g(x)+C$（$C\in\mathbf{R}$ 是常数）.

证　取 $F(x)=f(x)-g(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Lagrange 定理的条件且 $F'(x)=0$，$\forall x\in(a,b)$. 由推论 4.2 知在 $[a,b]$ 上 $F(x)\equiv C$，即 $\forall x\in[a,b]$，$f(x)=g(x)+C$.

9. 应用 Lagrange 定理证明：在闭区间 $[-1,1]$ 上，$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

证　令 $F(x)=\arcsin x+\arccos x$，则 $\forall x\in[-1,1]$，$F'(x)=0$.

由推论 4.2 知：$\forall x\in[-1,1]$，$F(x)=C=F(1)=\dfrac{\pi}{2}$.

10. 设 $f:(-1,1)\to\mathbf{R}$ 可微，$f(0)=0$，$|f'(x)|\leqslant 1$. 证明：在 $(-1,1)$ 内，$|f(x)|<1$.

证 若 $x=0$，则 $|f(x)|=0<1$.

若 $0<x<1(-1<x<0)$，在区间 $[0,x]([x,0])$ 上用 Lagrange 定理，存在 $\xi\in(0,x)(\xi\in(x,0))$，使 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi)$，即 $\dfrac{|f(x)|}{|x|}=|f'(\xi)|\leqslant 1$，从而 $|f(x)|\leqslant|x|<1$. 综上所述，$\forall x\in(-1,1)$，$|f(x)|<1$.

11. 设函数 f 可微，证明：$f(x)$ 的任何两个零点之间必有 $f(x)+f'(x)$ 的零点.

证 令 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^x$，则 $F'(x)=[f(x)+f'(x)]\mathrm{e}^x$. 任取 $f(x)$ 的任两个零点 x_1,x_2，不妨设 $x_1<x_2$，则 $F(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足 Rolle 定理的条件. 那么至少存在 $\xi\in(x_1,x_2)$ 使 $F'(\xi)=0$，即 $[f(\xi)+f'(\xi)]\mathrm{e}^\xi=0$，即 $\exists\,\xi\in(x_1,x_2)$，使 $f(\xi)+f'(\xi)=0$.

12. 证明下列不等式：

(1) $|\arctan x-\arctan y|\leqslant|x-y|$；

(2) $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}(a>b>0)$；

(3) $\mathrm{e}^x>x\mathrm{e}\quad(x>1)$.

证 (1) 令 $f(u)=\arctan u$，则 $\forall x,y\in\mathbf{R}$. $f(u)$ 在 $[x,y]([y,x])$ 上满足 Lagrange 定理的条件，从而存在 $\xi\in(x,y)((y,x))$ 使

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(\xi)=\frac{1}{1+\xi^2}\leqslant 1,$$

于是 $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|$，即 $|\arctan x-\arctan y|\leqslant|x-y|$.

(2) 取 $f(x)=\ln x$，由于 $a>b>0$，所以 $f(x)$ 在 $[b,a]$ 上满足 Lagrange 定理的条件，故 $\exists\,\xi\in(b,a)$，使 $\ln a-\ln b=(a-b)\dfrac{1}{\xi}$，又 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{b}$，故 $\dfrac{a-b}{a}<\ln a-\ln b=\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$.

(3) 对 $\forall x>1$，在 $[1,x]$ 上对 e^x 用 Lagrange 中值定理得 $\exists\,\xi\in(1,x)$ 使

$$\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^1=\mathrm{e}^\xi(x-1)>\mathrm{e}^1(x-1)=x\mathrm{e}-\mathrm{e},$$

即 $\mathrm{e}^x>x\mathrm{e}$.

13. 设 $f,g:[a,b]\to R$ 是可导函数，且 $g'\neq 0$，证明：存在 $c\in(a,b)$，使

$$\frac{f(a)-f(c)}{g(c)-g(b)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

证 取 $F(x)=f(a)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(b)$，则 $F(a)=F(b)=f(a)g(b)$，且 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导. 由 Rolle 定理

知：$\exists c\in(a,b)$，使

$$F'(c)=0,\text{即}[f(a)-f(c)]g'(c)=[g(c)-g(b)]f'(c).$$

又因为 $g'(x)\neq 0$，所以 $g(c)\neq g(b)$（否则由 Rolle 定理，$\exists\xi\in(c,b)$，使 $g'(\xi)=0$）. 故 $\exists c\in(a,b)$，使 $\dfrac{f(a)-f(c)}{g(c)-g(b)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

14. 证明方程 $x^5+x-1=0$ 有唯一的正根.

证 取 $f(x)=x^5+x-1$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，因为 $f(0)=-1<0$，$f(1)=1>0$，由连续函数零点定理知 $\exists x_0\in(0,1)$，使 $f(x_0)=0$，即 $x^5+x-1=0$ 至少有一个正根 x_0. 假设 $\overline{x}_0\in(-\infty,+\infty)$ 是 $f(x)=0$ 的另一根，那么由 Rolle 定理可知，$\exists\xi$ 介于 x_0 与 $\overline{x}_0$ 之间，使 $f'(\xi)=0$. 这与 $f'(\xi)=5\xi^4+1>1$ 矛盾. 故 $x^5+x-1=0$ 只有唯一的正根 x_0.

15. 在下列求极限的过程中都应用了 L'Hospital 法则，解法有无错误？

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+1)'}{(x-1)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{1}=0$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x+x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sin x+x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x+1}{1}$，极限不存在；

(3) 设 f 在 x_0 处二阶可导，则

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}&=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f''(x_0+h)+f''(x_0-h)}{2}=f''(x_0).\end{aligned}$$

解 (1) 有错误，当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{x^2+1}{x-1}$ 即非 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式，不能用 L'Hospital 法则求其极限.

(2) 有错误，由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sin x+x)'}{(x)'}$ 不存在，所以不能用 L'Hospital 法则. 正确的解法为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x+x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\sin x+1\right)=1$.

(3) 有错误，由题设 f 仅在 x_0 处二阶可导，所以 $\forall\,|h|\neq 0$，$f''(x_0\pm h)$ 不一定存在，更谈不上连续，所以只能用一次 L'Hospital 法则，即第二，三个等号均不一定成立，正确的解法为

因为 f 在 x_0 二阶可导，所以 $f'(x)$ 在 x_0 附近连续，于是

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}\\&=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}+\frac{f'(x_0-h)-f'(x_0)}{-h}\right]=f''(x_0).\end{aligned}$$

16. 求下列极限：

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot^2 x-\dfrac{1}{x^2}\right)$； (6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\sin x}$；

(8) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$； (10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$；

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}}$； (12) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1^x+2^x+3^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解 (4) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cot^2 x-1}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cot^2 x-x^2\cdot 2\cot x\cdot\csc^2 x}{2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x-x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x-x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x+\cos^2 x-1}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{3x^2}=-\frac{2}{3}.$$

(6) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{3x^2\cos^2 x}=\dfrac{1}{3}$.

(8) 由于$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\tan 2x\ln\tan x=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\tan x}{\cot 2x}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sec^2 x}{\tan x}\cdot\dfrac{1}{-2\csc^2 2x}=$ -1. 原式$=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\tan 2x\ln\tan x}=\mathrm{e}^{-1}$.

(10) 原式$\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]'}{-1}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{(1+x)\ln(1+x)-x}{x^2}$

$$=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{1+\ln(1+x)-1}{2x}=\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

(11) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right]}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

(12) 原式$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2^x+3^x)-\ln 3}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2+3^x\ln 3}{1+2^x+3^x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln 6}=\sqrt[3]{6}$.

17. 试用三种方法求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

解 由 Heine 定理，只需用三种方法求$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

方法一 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\left(\cos\dfrac{1}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\cos\frac{1}{x}-1}\cdot x^2\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，

其中$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\cos\dfrac{1}{x}-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right]=-\dfrac{1}{2}$.

方法二　$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\left(-2\sin^2\dfrac{1}{2x}\right)\right]^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{1}{2x}}\cdot\frac{-2\sin^2\frac{1}{2x}}{\frac{1}{x^2}}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

方法三　$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\tan\frac{1}{x}}{-2\cdot\frac{1}{x}}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

18. 试确定 a,b，使极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+a\cos 2x+b\cos 4x}{x^4}$存在，并求它的值.

解　要使$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+a\cos 2x+b\cos 4x}{x^4}$存在，必使$\lim\limits_{x\to0}(1+a\cos 2x+b\cos 4x)=0$且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+a\cos 2x+b\cos 4x}{x^2}=0$. 于是 $1+a+b=0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+a\cos 2x+b\cos 4x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}+b\,\dfrac{\cos 4x-\cos 2x}{x^2}\right]=2-3b=0$，即 $b=\dfrac{1}{3}$，$a=-\dfrac{4}{3}$. 进而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1+a\cos 2x+b\cos 4x}{x^4}&=\lim_{x\to0}\frac{3-4\cos 2x+\cos 4x}{x^4}\\&\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{8\sin 2x-4\sin 4x}{12x^3}\\&=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\left(\frac{2\sin 2x}{x}\cdot\frac{1-\cos 2x}{x^2}\right)=\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

19. 设函数 f 具有一阶连续导数，$f''(0)$存在，且 $f'(0)=0$，$f(0)=0$，

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq0,\\ a, & x=0.\end{cases}$$

(1) 确定 a 使 $g(x)$处处连续；

(2) 对以上所确定的 a，证明 $g(x)$具有一阶连续导数.

解　(1) 由于$\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=0$，所以当 $a=0$，$g(x)$处处连续.

(2) $x\neq0$，$g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$连续，

$$\begin{aligned}x=0,\ g'(x)&=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\frac{1}{2}f''(0).\end{aligned}$$

又因为$\lim\limits_{x\to0}g'(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}-\dfrac{f(x)}{x^2}\right]$

$$=f''(0)-\frac{1}{2}f''(0)=\frac{1}{2}f''(0)=g'(0),$$

故 $g(x)$ 具有一阶连续导数.

(B)

1. 设函数 $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$. 证明：存在点 $x_0\in(0,1)$，使

$$nf(x_0)+x_0f'(x)=0.$$

证　取 $F(x)=x^nf(x)$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足 Rolle 定理条件，因而存在 $x_0\in(0,1)$，使 $F'(x_0)=0$，即

$$nx_0^{n-1}f(x_0)+x_0^nf'(x_0)=0,$$

故 $\exists x_0\in(0,1)$，使

$$nf(x_0)+x_0f'(x_0)=0.$$

2. 设 f 在 $[a,b]$ 上可微，且 a 与 b 同号，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使

(1) $2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$；

(2) $f(b)-f(a)=\xi\left(\ln\dfrac{b}{a}\right)f'(\xi)$；

证　(1) 取 $g(x)=x^2$，由于 a,b 同号，所以 $0\notin[a,b]$，对 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用 Cauchy 中值定理即可。

(2) 取 $g(x)=\ln x$，对 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用 Cauchy 定理即可.

3. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可微，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：$\forall\lambda\in\mathbf{R}$，$\exists c\in(a,b)$，使得 $f'(c)=\lambda f(c)$.

证　令 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{-\lambda x}$，对 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用 Rolle 定理即可.

5. 设 $f,g:[a,b]\to\mathbf{R}$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b)\\ g(a) & g(b)\end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi)\\ g(a) & g'(\xi)\end{vmatrix}.$$

证　取 $F(x)=f(a)g(x)-f(x)g(a)=\begin{vmatrix} f(a) & f(x)\\ g(a) & g(x)\end{vmatrix}$，在 $[a,b]$ 上对 $F(x)$ 应用 Lagrange 中值定理即可.

6. 设 f 在 $x=0$ 的某邻域内 n 阶可导，$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$，试用 Cauchy 定理证明：

$$f(x)=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n,\theta\in(0,1).$$

证　取 $g(x)=x^n$，在 $[0,x]$ 上，$f(x),f'(x),f''(x),\cdots,f^{(n-1)}(x),g(x)$，$g'(x),g''(x),\cdots,g^{(n-1)}(x)$ 满足 Cauchy 中值定理的条件，于是，

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}=\frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{g'(\xi_1)-g'(0)}=\frac{f''(\xi_2)}{g''(\xi_2)}=\cdots=\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})-f^{(n-1)}(0)}{g^{(n-1)}(\xi_{n-1})-g^{(n-1)}(0)}$$
$$=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{g^{(n)}(\xi_n)}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!},$$

其中 $\xi_1\in(0,x)$，$\xi_k\in(0,\xi_{k-1})$，$k=2,3,\cdots,n$，$\theta\in(0,1)$，$\theta x=\xi_n$.

故　$f(x)=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$，$\theta\in(0,1)$.

7. 设抛物线 $y=-x^2+Bx+C$ 与 x 轴有两个交点 $x=a$，$x=b(a<b)$. 函数 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，并且曲线 $y=f(x)$ 与 $y=-x^2+Bx+C$ 在 (a,b) 内有一个交点. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，则 $f''(\xi)=-2$.

证　令 $F(x)=f(x)+x^2-Bx-C$，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $F(a)=F(b)=0$. 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=-x^2+Bx+C$ 在 (a,b) 内的交点为 $(c,f(c))$，则 $F(c)=0$. 在 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上对 $F(x)$ 应用 Rolle 定理，$\exists\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$ 使 $F'(\xi_1)=0=F'(\xi_2)$.

再在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上对 $F'(x)$ 使用 Rolle 定理，$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使 $F''(\xi)=0$，即 $\exists\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)=-2$.

8. 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可微，$f(a)=f(b)=0$，$f'_+(a)f'_-(b)>0$，则方程 $f''(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根.

证　因为 $f'_+(a)f'_-(b)>0$，不妨设 $f'_+(a)>0$，则 $f'_-(b)>0$.

由 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0\Rightarrow\exists x_1>a$ 使 $f(x_1)>f(a)=0$，

再由 $f'_-(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$ 得 $\exists x_2<b$，且 $x_1<x_2$ 使 $f(x_2)<0$.

f 在 $[a,b]$ 上二阶可导知 f 在 $[a,b]$ 上连续，由连续函数零点定理可得 $\exists c\in(a,b)$ 使 $f(c)=0$，对 $f(x)$ 在 $[a,c]$，$[c,b]$ 上分别应用 Rolle 定理，$\exists\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$，使 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$. 又对 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用 Rolle 定理，$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$ 使 $f''(\xi)=0$.

习　题　2.5

(A)

2. 写出下列函数的 Maclaurin 公式：

(1) $f(x)=\frac{1}{1-x}$；　　(2) $f(x)=\ln(1-x)$；

(3) $f(x)=\operatorname{ch} x$；　　(4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

解 (1) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}=1-(-x)+(-x)^2-(-x)^3+\cdots+$

$$(-1)^n(-x)^n+(-1)^{n+1}\frac{(-x)^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}}.$$

$$=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\frac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}},$$

$x\in(-\infty,1),\theta\in(0,1)$.

(2) $f(x)=\ln(1-x)=\ln[1+(-x)]$

$$=(-x)-\frac{1}{2}(-x)^2+\frac{1}{3}(-x)^3-\frac{1}{4}(-x)^4+\cdots+$$

$$(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}+(-1)^n\frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)(1-\theta x)^{n+1}},$$

$$=-\left[x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+\frac{x^n}{n}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-\theta x)^{n+1}}\right],$$

其中 $x\in(-\infty,1),\theta\in(0,1)$.

(3) 因为 $f(x)=\operatorname{ch} x,f'(x)=\operatorname{sh} x,f''(x)=\operatorname{ch} x,\cdots f^{(2n-1)}(x)=\operatorname{sh} x$, $f^{(2n)}(x)=\operatorname{ch} x$，故 $f^{(2n-1)}(0)=0,f^{(2n)}(0)=1(n\in\mathbf{N}_+)$，故

$$f(x)=\operatorname{ch} x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2m}}{(2m)!}+\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\operatorname{ch}\theta x,\theta\in(0,1),x\in(-\infty,+\infty).$$

(4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}=[1+(-2x)]^{-\frac{1}{2}}$

$$=1-\frac{1}{2}(-2x)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)(-2x)^2+\cdots+$$

$$\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)(-2x)^n+$$

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n\right)\frac{(-2x)^{n+1}}{(1-2\theta x)^{n+\frac{3}{2}}}$$

$$=1+x+\frac{4!}{2^2(2!)^2}x^2+\cdots+\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n+\frac{(2n+2)!}{2^{n+1}[(n+1)!]^2}\frac{x^{n+1}}{(1-2\theta x)^{n+\frac{3}{2}}}.$$

其中 $x\in(-\infty,\frac{1}{2}),\theta\in(0,1)$.

3. 求下列函数在指定点处带 Peano 余项的 Taylor 公式：

(3) $f(x)=e^{2x},x_0=1$；　　(4) $f(x)=\sin x,x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

解 (3) $f(x)=e^{2x}=e^2e^{2(x-1)}$

$$=e^2\left[1+2(x-1)+\frac{2^2}{2!}(x-1)^2+\cdots+\frac{2^n}{n!}(x-1)^n+\right.$$

$$o((x-1)^{n+1})\Big],$$

其中 $x\to 1$.

(4) $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$,于是

$$f^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}\right)=\begin{cases}(-1)^k\dfrac{1}{\sqrt{2}}, & n=2k,\\ (-1)^k\dfrac{1}{\sqrt{2}}, & n=2k+1.\end{cases}$$

故

$$\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\cdots+$$

$$\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}\right)\Big],$$ x 在

$\dfrac{\pi}{4}$的附近.

4. 设 $f(x)=x^2\sin x$,求 $f^{(99)}(0)$.

解　$f(x)$的 Maclaurin 公式为

$$f(x)=x^2\Big[x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+(-1)^{48}\frac{x^{97}}{(97)!}+\cdots+$$

$$(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+(-1)^m\frac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1}\Big]$$

$$=x^3-\frac{1}{3!}x^5+\cdots+\frac{x^{99}}{(97)!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m+1}}{(2m-1)!}+(-1)^m\frac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+3},$$

$$x\in(-\infty,+\infty),$$

故$\dfrac{f^{(99)}(0)}{99!}=\dfrac{1}{(97)!}$,即 $f^{(99)}(0)=99\times 98$.

7. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{x^2\sin x^2}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[1+x+\frac{1}{2}x^2+o_1(x^3)\right]\left[x-\frac{1}{6}x^3+o_2(x^3)\right]-x-x^2}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o_3(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-x^3\left(1+\frac{1}{x^6}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o_1\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)-\right.$$
$$\left.x^3\left(1+\frac{1}{2x^6}+o_2\left(\frac{1}{x^6}\right)\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{12x}+\frac{1}{12x^2}-\frac{1}{2x^3}+\alpha(x)\right]=\frac{1}{6},$$

其中 $\alpha(x)=\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)o_1\left(\frac{1}{x^3}\right)-x^3o_2\left(\frac{1}{x^6}\right)$，且

$$\lim_{x\to+\infty}\alpha(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}\right)\frac{o_1\left(\frac{1}{x^3}\right)}{\frac{1}{x^3}}-\frac{o_2\left(\frac{1}{x^6}\right)}{\frac{1}{x^6}}\cdot\frac{1}{x^3}\right]=0.$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{1}{2}.$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{x^2\sin x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}+1-\left[1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^4+o(x^4)\right]}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{8}+\frac{o(x^4)}{x^4}\right]=\frac{1}{8}.$$

8. 设 $f(0)=0,f'(0)=1,f''(0)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}$.

解 $f(x)$带 Peano 余项的 Maclaurin 公式为

$$f(x)=x+x^2+o(x^2),$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+o(x^2)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{o(x^2)}{x^2}\right]=1.$$

(B)

1. 设函数 $f:[0,2]\to\mathbf{R}$ 在$[0,2]$上二阶可导，并且满足$|f(x)|\leqslant 1,|f''(x)|\leqslant 1$，证明：在$[0,2]$上必有$|f'(x)|\leqslant 2$.

证　$\forall x_0\in[0,2]$，$f(x)$在 $x=x_0$ 处的带 Lagrange 余项的 Taylor 公式为

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2$，$\xi$ 介于 x 与 x_0 之间，

则$f(2)=f(x_0)+f'(x_0)(2-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(2-x_0)^2,\quad \xi_1\in(x_0,2)$，

$$f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(-x_0)^2,\qquad \xi_2\in(0,x_0).$$

$$f(2)-f(0)=2f'(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(2-x_0)^2-\frac{1}{2}f''(\xi_2)x_0^2.$$

又因为$|f(x)|\leqslant 1,|f''(x)|\leqslant 1,x\in[0,2]$，故

$$2|f'(x_0)|\leqslant|f(2)|+|f(0)|+\frac{1}{2}x_0^2|f''(\xi_2)|+\frac{1}{2}(2-x_0)^2|f''(\xi_1)|$$

$$\leqslant 2+\frac{1}{2}[x_0^2+(2-x_0)^2]$$

又因为当 $0\leqslant x_0\leqslant 2$ 时，$2\leqslant x_0^2+(2-x_0)^2\leqslant 4$，所以$|f'(x_0)|\leqslant 2$，

故 $\forall x\in[0,2]$，$|f'(x)|\leqslant 2$.

2. 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 二阶可导，并且$|f(x)|<k_0$，$|f''(x)|<k_2$，k_0,k_2 为正常数.

(1) 写出 $f(x+h)$与 $f(x-h)$的 Taylor 公式($h>0$)；

(2) 证明：$\forall h>0,|f'(x)|\leqslant\frac{k_0}{h}+\frac{h}{2}k_2$；

(3) 求 $\varphi(h)=\frac{k_0}{h}+\frac{h}{2}k_2$ 在$(0,+\infty)$上的最小值.

(4) 证明：$k_1\leqslant\sqrt{2k_0k_2}$，其中 $k_1=\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|f'(x)|$.

解　(1) $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\xi_1)}{2!}h^2,\quad \xi_1\in(x,x+h)$，

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{f''(\xi_2)}{2!}h^2,\quad \xi_2\in(x-h,x).$$

(2) 由(1)知 $f(x+h)-f(x-h)=2f'(x)h+\frac{h^2}{2}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)]$，

则$|f'(x)|\leqslant\left|\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\right|+\frac{h}{4}(|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|)$

$$\leqslant\frac{k_0}{h}+\frac{h}{2}k_2.$$

(3) $\varphi'(h)=-\frac{k_0}{h^2}+\frac{1}{2}k_2$，令 $\varphi'(h)=0$ 得驻点 $h_0=\sqrt{\frac{2k_0}{k_2}}$. 又因为 $\varphi''(h)=\frac{2k_0}{h^3}>0$，故 $\varphi_{\min}(h)=\varphi(h_0)=\sqrt{2k_0k_2}$.

(4) 由于 $\forall x\in\mathbf{R}$ 和 $h>0$，$|f'(x)|\leqslant\varphi(h)$，所以 $|f'(x)|\leqslant\varphi(h_0)$，由上确界定义 $k_1=\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|f'(x)|\leqslant\sqrt{2k_0k_2}$.

3. 设 $f\in C^{(3)}[0,1]$，$f(0)=1$，$f(1)=2$，$f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$，证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $|f'''(\xi)|\geqslant 24$.

证 f 在 $x_0=\frac{1}{2}$ 处的 Taylor 展开式为

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2!}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)^3,$$

其中 ξ 介于 x 与 $\frac{1}{2}$ 之间. 于是

$$1=f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}f'''(\xi_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^3,\quad \xi_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right),$$

$$2=f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}f'''(\xi_2)\left(\frac{1}{2}\right)^3,\quad \xi_2\in\left(\frac{1}{2},1\right),$$

两式相减得 $\frac{1}{48}[f'''(\xi_2)+f'''(\xi_1)]=1$，即 $f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)=48$，故 $f'''(\xi_1)$ 与 $f'''(\xi_2)$ 中至少有一个大于 24. 即 $\exists\,\xi\in(0,1)$，使 $f'''(\xi)>24$.

4. 设函数 f 在 $x=0$ 的某邻域内有二阶导数，且

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3.$$

试求 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解 由 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}}=\mathrm{e}^3$ 可知 $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]=0$，即 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]=1$，从而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$. 又由 f 在 $x=0$ 的某邻域内有二阶导数知：$f(x)$，$f'(x)$ 在 $x=0$ 连续，故 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，从而

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0.\end{aligned}$$

令 $g(x)=\left[1+\left(x+\frac{f(x)}{x}\right)\right]^{\frac{1}{x+\frac{f(x)}{x}}}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\mathrm{e}$. 又因为 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=$

$\lim\limits_{x\to0} g(x)^{\frac{1}{x}\left[x+\frac{f(x)}{x}\right]}=e^3$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\dfrac{f''(0)}{2}$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left[x+\dfrac{f(x)}{x}\right]=1+\dfrac{1}{2}f''(0)=3$，即 $f''(0)=4$，故 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}}\right]^{\frac{f(x)}{x^2}}=e^{\frac{1}{2}f''(0)}=e^2$.

习　题　2.6

(A)

1. 单调可微函数的导函数仍为单调可微函数，对吗？

解　不对. 导函数不一定可微. 且即使导函数可微. 我们知道，函数的单调性与区间有关，例如 $f(x)=\operatorname{sh}x$，$f'(x)=\operatorname{ch}x$，对不同的区间有下列各种情况：

(1) $\operatorname{sh}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是单增函数，但 $\operatorname{ch}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 不是单调函数.

(2) $\operatorname{sh}x$ 在 $(-\infty,0)$ 是单增函数，但 $\operatorname{ch}x$ 在 $(-\infty,0)$ 是单减函数.

(3) $\operatorname{sh}x$ 在 $(0,+\infty)$ 是单增函数，但 $\operatorname{ch}x$ 在 $(0,+\infty)$ 也是单增函数.

3. 求下列函数的单调区间：

(4) $y=x+|\sin 2x|$.

解
$$y=\begin{cases}x+\sin 2x, & m\pi\leqslant x<(2m+1)\dfrac{\pi}{2},\\ x-\sin 2x, & (2m+1)\dfrac{\pi}{2}\leqslant x<(m+1)\pi,\end{cases}\quad 则$$

$$y'=\begin{cases}1+2\cos 2x, & m\pi<x<(2m+1)\dfrac{\pi}{2},\\ 1-2\cos 2x, & (2m+1)\dfrac{\pi}{2}<x<(m+1)\pi.\end{cases}$$

而 $x=\dfrac{n\pi}{2}$，为 y 的不可导点. 其中 $m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

$1+2\cos 2x=0$ 在 $\left(m\pi,(2m+1)\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内有唯一根 $x_{m_2}=m\pi+\dfrac{\pi}{3}$，

$1-2\cos 2x=0$ 在 $\left((2m+1)\dfrac{\pi}{2},(m+1)\pi\right)$ 内有唯一根 $x_{m_1}=m\pi+\dfrac{5\pi}{6}$.

且当 $x\in\left(m\pi,m\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)\cup\left(m\pi+\dfrac{\pi}{2},m\pi+\dfrac{5\pi}{6}\right)$，$y'>0$，严格单增.

当 $x\in\left(m\pi+\frac{\pi}{3},m\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(m\pi+\frac{5\pi}{6},(m+1)\pi\right)$，$y'<0$，严格单减.

6. 如果 $y=f(x)$ 在 x_0 处取得极值，是否一定有 $f'(x_0)=0$.

解 不一定，如果 $y=f(x)$ 在 x_0 可导，则 $f'(x_0)=0$，如果 $f(x)$ 在 x_0 处不可导，则 $f'(x_0)$ 不存在. 例如 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 取得极小值，但 $f'(0)$ 不存在.

7. 求下列函数的极值：

(5) $f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$； (6) $f(x)=|x|e^{-|x-1|}$.

解 (5) $f'(x)=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}$，令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=0$.

若 n 为偶数，则 $f'(x)\leqslant 0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单减，无极值. 若 n 为奇数，当 $x>0$ 时，$f'<0$；当 $x<0$ 时，$f'>0$，$x=0$ 为极大值点，极大值 $f(0)=1$.

(6) $f'(x)=\begin{cases}-(x+1)e^{x-1}, & x<0,\\ (x+1)e^{x-1}, & 0<x<1,\\ -(x-1)e^{1-x}, & x>1.\end{cases}$ $x=0,1$ 为不可导点.

令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=-1$. 故

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
f'	$+$	0	$-$	不可导	$+$	不可导	$-$
f	严格单调增	极大值点（极大值为 e^{-2}）	严格单减	极小值点（极小值为 0）	严格单增	极大值点（极大值为 1）	严格单减

故 $f(x)$ 有极大值 $f(-1)=\frac{1}{e^2}$，$f(1)=1$ 及极小值 $f(0)=0$.

8. 试问 a 为何值时，函数 $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值？是极大值还是极小值？并求出此极值.

解 $f'(x)=a\cos x+\cos 3x$，$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}a-1$，

$$f''(x)=-a\sin x-3\sin 3x,\ f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

因为 $f(x)\in C^{\infty}(-\infty,+\infty)$，所以要使 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值，则 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$.

即 $a=2$，又因为 $f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}<0$，故 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ 为极大值.

10. 设 $3a^2-5b<0$，试证方程 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0$ 有唯一实根.

证 取 $f(x)=x^5+2ax^3+3bx+4c$，则 $f'(x)=5x^4+6ax^2+3b$，由于 $3a^2-$

$5b<0$所以 $f'(x)>0$,即 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$严格单增.

又由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$知. $f(x)=0$ 在$(-\infty,+\infty)$有唯一实根.

11. 设常数 $k>0$,试确定 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$ 在$(0,+\infty)$内零点的个数.

解　$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}$,令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=e$,在$(0,+\infty)$内无不可导点.

当 $x>e$ 时,$f'(x)<0$,当 $0<x<e$ 时,$f'(x)>0$. 故 $f(x)$有唯一的极值 $f(e)=k>0$,且 $f(e)$为极大值.

又因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x-\frac{x}{e}+k\right)=-\infty$,由零点定理知 $\exists x_1\in(0,e)$,使 $f(x_1)=0$.

而且由于当 $x\in(0,e)$时,$f'(x)>0$,即 $f(x)$在$(0,e)$严格单增,所以 x_1 是 $f(x)=0$ 在$(0,e)$内唯一的根.

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$. 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{e}\right)+k\right]=-\infty$. 类似可证在$(e,+\infty)$内$f(x)$有唯一的零点 x_2.

综上所述,$f(x)$在$(0,+\infty)$内有且仅有两个零点 $x_1\in(0,e)$,$x_2\in(e,+\infty)$.

12. 求下列函数在给定区间上的最大值和最小值.

(2) $f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x$,$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{4}\right]$;

(4) $f(x)=\max\{x^2,(1-x)^2\}$,$x\in[0,1]$.

解　(2) $f'(x)=3\sin x\cos x(\sin x-\cos x)$,令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x_1=\frac{\pi}{2}$,

$x_2=\frac{\pi}{4}$. 又 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$,$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$,$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{8}$,$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=0$.

故 $f(x)$的最大值为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$,最小值 $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=0$.

(4) $$f(x)=\max\{x^2,(1-x)^2\}=\begin{cases}(x-1)^2, & 0\leqslant x<\frac{1}{2},\\ x^2, & \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}2(x-1), & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right),\\ 2x, & x\in\left(\frac{1}{2},1\right).\end{cases}$$

所以 $f(x)$无驻点,只有一不可导点 $x=\frac{1}{2}$. 又 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$,$f(0)=f(1)=$

1，故 $f(x)$的最大值为 $f(0)=f(1)=1$，最小值 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

13. 证明下列不等式：

(2) $|3x-x^3|\leqslant 2, x\in[-2,2]$； (3) $x^x\geqslant e^{-\frac{1}{e}}, x\in(0,+\infty)$.

证 (2) 令 $f(x)=3x-x^3$，则 $f(x)$在$[-2,2]$上的最大值为 2，最小值为 -2，即 $\forall x\in[-2,2]$，$-2\leqslant f(x)\leqslant 2$，即$|f(x)|\leqslant 2$.

(3) 取 $f(x)=x^x$，那么 $f'(x)=x^x(\ln x+1)$，则 $x=e^{-1}$是 $f(x)$在$(0,+\infty)$内唯一的驻点，且当 $x>e^{-1}$时，$f'(x)>0$，当 $0<x<e^{-1}$时，$f'(x)<0$. 故 $x=e^{-1}$是 $f(x)$在$(0,+\infty)$内唯一的极值点，且为极小值.

故 $\forall x\in(0,+\infty)$，$f(x)=x^x\geqslant(e^{-1})^{e^{-1}}=e^{-\frac{1}{e}}$.

17. 设某银行中的总存款量与银行付给存户利率的平方成正比，若银行以20%的年利率把总存款的 90%贷出，问它给存户支付的年利率定为多少时才能获得最大利润？

解 设银行给存户支付的年利率为 x，则其所获利润为

$T(x)=20\%\times 90\%\times kx^2-x\cdot kx^2, 0<x<100\%$,

$T'(x)=0.36\,kx-3\,kx^2$，于是 $T(x)$在$(0,1)$内有唯一驻点 $x_0=0.12$.

$T''(x_0)=-0.36\,k<0$，于是 $T(x)$在$(0,1)$内有最大值 $T(0.12)$.

故当 $x=12\%$时，银行获利最大.

18. 已知轮船的燃料费与速度的立方成正比，当速度为 10 km/h，每小时的燃料费为 80 元，又其他费用每小时需 480 元. 问轮船的速度多大时，才能使 20 km 航程的总费用最少？此时每小时的总费用等于多少？

解 设轮船的速度为 v，此时 20 km 航程的总费用为 T，则

$$T=T(v)=\frac{20}{v}\cdot 480+\frac{20}{v}\cdot\left(\frac{80}{10^3}\right)v^3, v\in[0,+\infty),$$

$T'(v)=-\frac{9\,600}{v^2}+3.2v$. 令 $T'(v)=0$ 得 $v_0=10\sqrt[3]{3}$(km/h).

由于 $v_0=10\sqrt[3]{3}$是唯一驻点. 由定理 6.3 知，v_0 即是 $T(v)$的最小值点. 故轮船的速度为 $10\sqrt[3]{3}$ km/h 时，20 km 航程的总费用最少. 此时每小时的总费用为 $480+\left(\frac{80}{10^3}\right)(10\sqrt[3]{3})^3=720$ 元.

19. 曲线 $y=4-x^2$ 与 $y=2x+1$ 相交于 A、B 两点，C 为弧段 AB 上的一点，问 C 点在何处时$\triangle ABC$ 的面积最大？求此面积.

解 $A(1,3)$，$B(-3,-5)$，设 $C(x,4-x^2)$，则$\triangle ABC$ 面积为

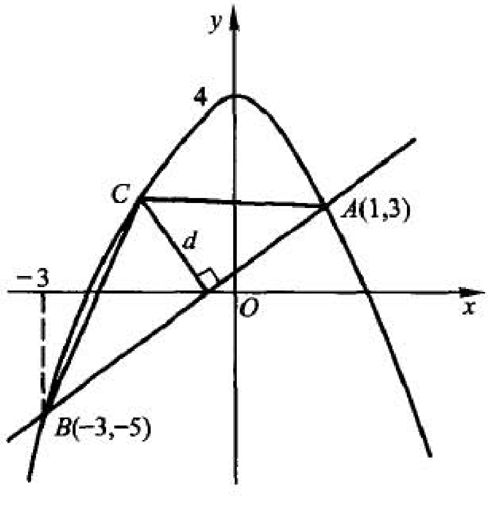
$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d,$$

$|AB|=\sqrt{(-3-1)^2+(-5-3)^2}=4\sqrt{5}$,

$d=\dfrac{|x^2+2x-3|}{\sqrt{5}}$ 为 C 到直线 AB 的距离,故

$$S^2=4(x^2+2x-3)^2,\quad x\in[-3,1],$$

则 S^2 在$[-3,1]$上最大值为 $S^2\Big|_{x=-1}=8^2$,故当 C 取在曲线上$(-1,3)$处时,$\triangle ABC$ 面积最大为 8.



(第 19 题图)

20. 用仪器测量某零件的长度 n 次,得到 n 个略有差别的数:$a_1,a_2,\cdots,a_n$. 证明:用算术平均值

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$$

作为该零件的长度 x 的近似值,能使

$$f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$$

达到最小.

解　$f'(x)=2\sum\limits_{i=1}^{n}(x-a_1)=2\left[nx-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right]$. 令 $f'(x)=0$ 得唯一驻点 $\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$. 又因为 $f''(x)=2n>0$,故 $\bar{x}$ 为 $f(x)$的极小值点,从而 $\bar{x}$ 为 $f(x)$ 的最小值点. 故用 $\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 作为该零件长度 x 的近似值,能使 $f(x)$达到最小.

22. 讨论下列函数的凸性与相应曲线拐点:

(2) $f(x)=x+\sin x$.

解　(2) $f'(x)=1+\cos x$, $f''(x)=-\sin x$,令 $f''(x)=0$ 得 $x_n=n\pi$, $n\in\mathbf{N}$.

当 $x\in(2n\pi,2n\pi+\pi)$时,$f''(x)<0$,即 f 在$(2n\pi,(2n+1)\pi)$为凹函数;

当 $x\in((2n+1)\pi,2(n+1)\pi)$时,$f''(x)>0$,故 f 在$((2n+1)\pi,2(n+1)\pi)$为凸函数.

23. 证明下列不等式:

(1) $\dfrac{1}{2}(a^n+b^n)>\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n\quad(a,b>0,a\neq b,n>1)$;

(2) $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}\quad(x,y>0,x\neq y)$.

证　(1) 取 $f(x)=x^n$,则 $f'(x)=nx^{n-1}$, $f''(x)=n(n-1)x^{n-2}>0$ 当$(x>0)$,

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为严格凸函数，进而 $\forall a,b>0, a\neq b$. 有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{f(a)+f(b)}{2}, \text{即} \left(\frac{a+b}{2}\right)^n<\frac{1}{2}(a^n+b^n).$$

(2) 取 $f(u)=u\ln u$，则 $f'(u)=\ln u+1, f''(u)=\frac{1}{u}>0, u>0$.

故 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格凸，从而 $\forall x,y>0, x\neq y$.

$$\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2}<\frac{x\ln x+y\ln y}{2},$$

即

$$(x+y)\ln\frac{x+y}{2}<x\ln x+y\ln y.$$

24. 设在区间 I 上，$f''(x)>0, a, a+h, a-h(h>0)$ 是 I 内三点，证明：

$$f(a+h)+f(a-h)>2f(a).$$

证 因为 $f''(x)>0$，所以 $f(x)$ 是 I 上严格凸函数，又因为 $a, a+h, a-h\in I$，所以 $f\left[\frac{(a+h)+(a-h)}{2}\right]=f(a)<\frac{1}{2}[f(a+h)+f(a-h)]$，即

$$f(a+h)+f(a-h)>2f(a).$$

25. 设 $0<x_1<x_2<\cdots<x_n<\pi$，证明：

$$\sin\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)>\frac{1}{n}(\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n).$$

证 取 $f(x)=\sin x, x\in[0,\pi]$，因为 $f''=-\sin x<0, x\in(0,\pi)$，所以 $f(x)$ 是 $(0,\pi)$ 上的严格凹函数. 由定理 6.6，取 $\lambda_i=\frac{1}{n}, i=1,2,\cdots,n$.

可得

$$f\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i\right)>\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x_i), \text{即}$$

$$\sin\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)>\frac{1}{n}(\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n).$$

26. 利用 $f(x)=-\ln x(x>0)$ 是凸函数（因而 $\ln x$ 为凹函数）证明：

(1) $x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}\leqslant\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n$（其中 $x_i>0, \lambda_i\geqslant0, \sum\limits_{i=1}^n\lambda_i=1$）；

(2) 当 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 时，

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

证 (1) 因为 $f(x)=-\ln x$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数，且 $x_i>0, \lambda_i\geqslant0$，及 $\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i=1$，所以 $f\left(\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i x_i\right)\leqslant\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i f(x_i)$，

即 $\ln(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)\geqslant\lambda_1\ln x_1+\lambda_2\ln x_2+\cdots+\lambda_n\ln x_n$，

即 $\ln(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\cdots+\lambda_n x_n)\geqslant\ln(x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n})$.

由 $\ln x$ 的单调增可知：$\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\cdots+\lambda_n x_n\geqslant x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}$.

(2) 令 $\lambda_i=\dfrac{1}{n}$，$i=1,2,\cdots,n$. 由结论(1)可知：$\forall x_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

令 $\lambda_i=\dfrac{1}{n}$，$x_i=\dfrac{1}{y_i}$，$i=1,2,\cdots,n$. 则由结论(1)，当且仅当 $y_i>0$ 时，

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\cdots+\frac{1}{y_n}\right)\geqslant\left(\frac{1}{y_1}\frac{1}{y_2}\cdots\frac{1}{y_n}\right)^{\frac{1}{n}},$$

即

$$\sqrt[n]{y_1y_2\cdots y_n}\geqslant\frac{n}{\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2}+\cdots+\dfrac{1}{y_n}},$$

故

$$\frac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

(B)

1. 证明定理 6.4.

证　由于 f 在 x_0 处 n 阶可导，且 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，所以 $f(x)$ 在 x_0 处带 Peano 余项的 n 阶 Taylor 公式为

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),$$

从而

$$f(x)-f(x_0)=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n).$$

如果 n 为偶数，类似于定理 6.3 的证明可得结论(1).

如果 n 为奇数，由于上式右端第二项是第一项的高阶无穷小，因此在 x_0 的充分小邻域内，$f(x)-f(x_0)$ 的符号取决于第一项，当 $x<x_0$ 时，$f(x)-f(x_0)$ 与 $f^{(n)}(x_0)$ 异号；当 $x>x_0$ 时，$f(x)-f(x_0)$ 与 $f^{(n)}(x_0)$ 同号. 故在 x_0 的充分小邻域内，$f(x)-f(x_0)$ 不定号. 即 x_0 非极值点.

2. 证明下列不等式：

(3) $\sin x+\tan x>2x\quad\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$；

(4) $\dfrac{|a+b|}{\pi+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|}{\pi+|a|}+\dfrac{|b|}{\pi+|b|}\,(a,b\in\mathbf{R})$.

证　(3) 令$f(t)=\sin t+\tan t-2t$,那么$f'(t)=\cos t+\sec^2 t-2$,

$$f''(t)=\frac{(2-\cos^3 t)\sin t}{\cos^3 t}>0, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

故$f'(t)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上严格增,于是$\forall t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$f'(t)>f'(0)=0$,进而$f(x)$是$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上的严格增函数,即$\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

$$f(x)>f(0),\text{即 } \sin x+\tan x>2x.$$

(4) 取$f(x)=\frac{x}{\pi+x}$,则$f'(x)=\frac{\pi}{(\pi+x)^2}>0$,即$f(x)$为严格单增函数.因而对$\forall a,b\in\mathbf{R}$,由于$|a+b|\leqslant|a|+|b|$,所以

$$\frac{|a+b|}{\pi+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{\pi+|a|+|b|}\leqslant\frac{|a|}{\pi+|a|}+\frac{|b|}{\pi+|b|}.$$

3. 证明:方程$\sin x=x$只有一个实根.

证　显然$\sin x=x$在$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$上无解.

对$[-1,1]$,取$f(x)=x-\sin x$,则$f'(x)=1-\cos x\geqslant0$,且当且仅当$x=0$时$f'(x)=0$.即$f(x)$在$[-1,1]$严格单增.又$f(0)=0$,故$x=0$是$\sin x=x$的唯一的实根.

4. 设$0\leqslant x_1<x_2<x_3\leqslant\pi$,证明:$\frac{\sin x_2-\sin x_1}{x_2-x_1}>\frac{\sin x_3-\sin x_2}{x_3-x_2}$.

证　令$f(x)=\sin x$,在$[x_1,x_2]$及$[x_2,x_3]$上分别应用 Lagrange 中值定理得$\exists\xi_1\in(x_1,x_2)$及$\xi_2\in(x_2,x_3)$使

$$\frac{\sin x_2-\sin x_1}{x_2-x_1}=\cos\xi_1,\quad\frac{\sin x_3-\sin x_2}{x_3-x_2}=\cos\xi_2.$$

又因为$0\leqslant x_1<\xi_1<x_2<\xi_2<x_3\leqslant\pi$,且$\cos x$在$[0,\pi]$上严格减,

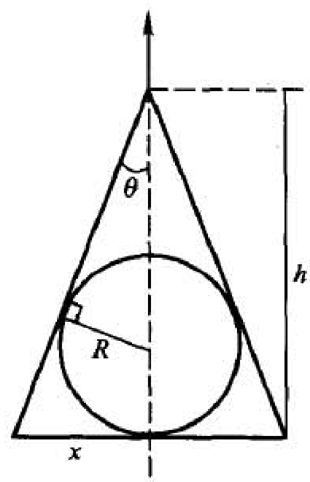
故$\cos\xi_1>\cos\xi_2$.从而

$$\frac{\sin x_2-\sin x_1}{x_2-x_1}>\frac{\sin x_3-\sin x_2}{x_3-x_2}.$$

5. 设$f(x)=(x-x_0)^n g(x)$,$n\in\mathbf{N}_+$,$g(x)$在x_0处连续,且$g(x_0)\neq0$.问$f(x)$在x_0处有无极值?

解　因$g(x_0)\neq0$.不妨设$g(x_0)>0(<0)$,又$g(x)$在x_0处连续,由函数极限的局部保号性可知:$\exists U(x_0,\delta)$,使$\forall x\in U(x_0,\delta)$,$g(x)>0(<0)$.于是,$\forall x\in U(x_0,\delta)$,当$n$为偶数时,$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)^n g(x)>0$.也即$x_0$为$f(x)$的极小(大)值点;当$n$为奇数时,如$x\in(x_0-\delta,x_0)$,$f(x)-f(x_0)<0\ (>0)$;如$x\in(x_0,x_0+\delta)$,$f(x)-f(x_0)>0(<0)$.故$x_0$非极值点.

综上所述,当n为奇数时,x_0不是$f(x)$的极值点;当n为偶数时,若$g(x_0)>0$,x_0



（第 6 题图）

为 $f(x)$ 的极小值点，若 $g(x_0)<0$，x_0 为 $f(x)$ 的极大值点.

6. 求半径为 R 的球的外切正圆锥的最小体积.

解　设正圆锥的半顶角为 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，底半径为 x. 体积为 V，则 $\frac{R}{h-R}=\sin\theta$，$\frac{x}{h}=\tan\theta$，进而

$h=R\left(1+\frac{1}{\sin\theta}\right)$，$x=h\tan\theta=R\left(1+\frac{1}{\sin\theta}\right)\tan\theta$. 从而

$$V=\frac{1}{3}\pi x^2h=\frac{1}{3}\pi R^3\ \frac{(1+\sin\theta)^3}{\sin\theta\cos^2\theta},\quad \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

那么 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}=\frac{1}{3}\pi R^3\ \frac{(1+\sin\theta)^2\cos\theta[3\cos^2\theta\sin\theta-(1+\sin\theta)(\cos^2\theta-2\sin^2\theta)]}{\sin^2\theta\cos^4\theta}$

$$=\frac{1}{3}\pi R^3(1+\sin\theta)^3\ \frac{3\sin\theta-1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}.$$

令 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}=0$，并考虑到 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin\theta+1\neq0$，$\cos\theta\neq0$，得 $\sin\theta=\frac{1}{3}$，即 $\theta=\arcsin\frac{1}{3}$ 是 V 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的唯一驻点. 又因为此实际问题一定存在最小值，故 $\theta=\arcsin\frac{1}{3}$ 一定是 V 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的最小值点. $h\Big|_{\theta=\arcsin\frac{1}{3}}=4R$，$x\Big|_{\theta=\arcsin\frac{1}{3}}=\sqrt{2}R$，最小体积 $V=V\Big|_{\theta=\arcsin\frac{1}{3}}=\frac{8}{3}\pi R^3$.

7. 求常数 k 的取值范围，使当 $x>0$ 时，方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个根.

解　① $k=0$，则方程变为 $\frac{1}{x^2}=1$，则在 $(0,+\infty)$ 有且仅有唯一解 $x^*=1$.

令 $f(x)=kx+\frac{1}{x^2}-1$.

② 如果 $k>0$，$f'(x)=k-\frac{2}{x^3}$，令 $f'(x)=0$ 得在 $(0,+\infty)$ 上 $f(x)$ 有唯一驻点 $x_0=\sqrt[3]{\frac{2}{k}}$. 又 $f''\left(\sqrt[3]{\frac{2}{k}}\right)>0$，因而 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值. 即

$$f\left(\sqrt[3]{\frac{2}{k}}\right)=\min_{x\in(0,+\infty)}f(x)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2k^2}-1.$$

若 $k>\frac{2\sqrt{3}}{9}$，则 $f(x)>f(x_0)>0$，$x\in(0,+\infty)$，即方程 $f(x)=0$ 无解；如果

$k<\frac{2\sqrt{3}}{9}$，由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，所以 $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有两个根. 若 $k=\frac{2\sqrt{3}}{9}$，x_0 是 $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 唯一的根.

③ 如果 $k<0$，则 $f'(x)<0(x\in(0,+\infty))$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单减. 又因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$. 故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一的正根.

综上所述，当 $k=\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 或 $k\leqslant 0$ 时，方程 $f(x)=0$，即 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个根.

8. 设某产品的成本函数为 $C=aq^2+bq+c$，需求函数为 $q=\frac{1}{\mathrm{e}}(d-p)$，其中 C 为成本，q 为需求量（即产量），p 为单价；a,b,c,d,e 都是正的常数，且 $d>b$. 求使利润最大的产量及最大的利润.

解　由需求量（即产量）$q=\frac{1}{e}(d-p)$ 得产品单价 $p=d-eq$，从而利润 $T=T(q)=pq-C=-(e+a)q^2+(d-b)q-c$.

经计算知：当 $q=\frac{d-b}{2(a+e)}$ 时，利润 T 取得最大值. 且最大利润为 $T\left(\frac{d-b}{2(a+e)}\right)=\frac{(d-b)^2}{4(a+e)}-c$.

10. 有人说“若 $f'(x_0)>0$，则存在 x_0 的某邻域，在此邻域内 $f(x)$ 单调增”. 这种说法正确吗？如果正确，请给出证明；如果不正确，请举例说明并给出正确结论.

解　不正确. 如

$$f(x)=\begin{cases}x+2x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\quad f'(x)=\begin{cases}1+4x\sin\frac{1}{x}-2\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

当 $x_n=\frac{1}{(2n+1)\pi}$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时，$f'(x_n)=3>0$.

当 $y_n=\frac{1}{2n\pi}$ 时，$f'(y_n)=-1<0$.

即在原点的任一邻域内，$f'(x)$ 有取正值的点也有取负值的点，因为 $f'(x)$ 在 $x\neq 0$ 的一切点都连续，故 $f(x)$ 在原点的任一邻域内都不单调. 正确的结论应为

若 $f'(x_0)>0$，且 $f'(x)$ 在 x_0 连续，则存在 x_0 的某邻域，在此邻域内 $f(x)$ 单调增.