第四章　无穷级数

习　题　4.1

(A)

3. 利用级数收敛的定义判别下列级数的敛散性，并对收敛级数求其和.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n+1}{q^n}(|q|>3)$；　　(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(3n+1)(3n+4)}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{n}{n+1}$.

解　(1) $$S_n=\frac{3+1}{q}+\frac{3^2+1}{q^2}+\cdots+\frac{3^n+1}{q^n}$$
$$=\frac{3}{q}+\left(\frac{3}{q}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3}{q}\right)^n+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\cdots+\frac{1}{q^n}$$
$$=\frac{\frac{3}{q}\left[1-\left(\frac{3}{q}\right)^n\right]}{1-\frac{3}{q}}+\frac{\frac{1}{q}\left(1-\frac{1}{q^n}\right)}{1-\frac{1}{q}},$$

从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\dfrac{3}{q-3}+\dfrac{1}{q-1}$（因为 $|q|>3$），故原级数收敛. 和为 $\dfrac{3}{q-3}+\dfrac{1}{q-1}$.

(2) $$S_n=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}\right)+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(1-\frac{1}{4}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+4}\right),$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\dfrac{1}{3}$，故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(3n+1)(3n+4)}$ 收敛于 $\dfrac{1}{3}$.

(3) $a_n=\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$，

$$S_n=\left[(\sqrt{3}-\sqrt{2})-(\sqrt{2}-\sqrt{1})\right]+\left[(\sqrt{4}-\sqrt{3})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})\right]+\cdots+\left[(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\right]$$
$$=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{2}-1),$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=-\sqrt{2}+1$，故原级数收敛，和为 $1-\sqrt{2}$.

(4) $S_n=(\ln 1-\ln 2)+(\ln 2-\ln 3)+\cdots+[\ln n-\ln(n+1)]$
$=-\ln(n+1)\to-\infty(n\to+\infty)$,

故原级数发散.

4. 证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ 收敛. 利用这个结论能将研究数列的敛散性问题转化为研究级数敛散性问题.

证 设数列收敛于 A，即 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ 前 n 项和 $S_n=a_{n+1}-a_1$，故 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_1)=A-a_1$. 于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ 收敛.

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ 收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_1)$ 存在. 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n+1}$ 存在等于 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n+a_1$. 即 $\{a_n\}$ 收敛.

5. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ 必发散. 若这两个级数都发散，上述结论是否成立？

证 用反证法. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)-\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛. 推出矛盾. 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 发散.

若两个均发散，则上述结论不一定成立.

如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 都发散，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\sum\limits_{n=1}^{n}\frac{1}{n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛.

6. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$，求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的和.

解 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}=2-5=-3$,

故
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=5+3=8.$$

7. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的前 $2n$ 项之和 $S_{2n}\to A$，并且 $a_n\to 0(n\to\infty)$，证明该级数收敛且其和为 A.

证 $$\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}(S_{2n}+a_{2n+1})=\lim_{n\to\infty}S_{2n}+\lim_{n\to+\infty}a_{2n+1}=A,$$

于是数列$\{S_{2n}\}$与$\{S_{2n+1}\}$都收敛于A，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

8. 利用级数的性质判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$； (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2^n}\right)$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\ln\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)\quad(x\in\mathbf{R})$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}\neq0$，故原级数发散.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$收敛，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2^n}\right)$发散.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\ln\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}x\ln\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{x}}=x\quad(x\neq0)$，若$x\neq0$. 原级数发散. 若$x=0$. 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\ln\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)$收敛，和为 0.

10. 试用 Cauchy 收敛原理证明：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

证 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，由 Cauchy 收敛原理知，

$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}_+$，使$\forall p\in\mathbf{N}_+$，当$n>N$时，恒有$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|<\varepsilon$.

特别地$p=1$，则$|a_{n+1}|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

12. 判别下列正项级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n+2}$.

解 $\dfrac{1}{3^n+2}\leqslant\dfrac{1}{3^n}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$收敛. 由比较准则，原级数收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}$.

解 $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}\bigg/\frac{1}{n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}(n+1)}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散知，原级数发散.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}(\alpha\in\mathbf{R})$.

解 取 $p=\alpha+\dfrac{1}{2}$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}\Big/\dfrac{1}{n^{p}}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}=2$.

故当 $\alpha>\dfrac{1}{2}$ 时，$p=\alpha+\dfrac{1}{2}>1$，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{p}}$ 收敛. 从而原级数收敛. 当 $\alpha\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$p\leqslant 1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{p}}$ 发散，从而原级数发散.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n^{2}-\ln n}$.

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n}}{n^{2}-\ln n}\Big/\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2}}{n^{2}-\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1-\dfrac{\ln n}{n^{2}}}=1$，

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^{3}}}$ 收敛. 故原级数收敛.

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{3}\left[\sqrt{2}+(-1)^{n}\right]^{n}}{3^{n}}$.

解 由 $0\leqslant a_{n}\leqslant\dfrac{n^{3}(\sqrt{2}+1)^{n}}{3^{n}}=b_{n}$，其中 $a_{n}=\dfrac{n^{3}\left[\sqrt{2}+(-1)^{n}\right]^{n}}{3^{n}}$.

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_{n}}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{3}<1$，由 D'Alembert 准则，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_{n}$ 收敛.

进而由此较准则，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n}$ 收敛.

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$.

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n}{\pi}\right)^{2}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\sin^{2}\dfrac{\pi}{2n}}{\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)^{2}}=2$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi^{2}}{4n^{2}}$ 收敛.

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$ 收敛.

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\ln\left(1+\dfrac{2}{n^{3}}\right)$.

解 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\ln\left(1+\dfrac{2}{n^{3}}\right)}{\dfrac{2}{n^{2}}}=1$，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n^{2}}$ 收敛，原级数收敛.

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\dfrac{\pi}{3^{n}}$.

解 因为 $0\leqslant n\sin\frac{\pi}{3^n}\leqslant\frac{n\pi}{3^n},\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)\pi}{3^{n+1}}\Big/\frac{n\pi}{3^n}\right)=\frac{1}{3}$,

由 D'Alembert 判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{3^n}$ 收敛，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{\pi}{3^n}$ 收敛.

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{x}{n}\right)^n(x>0)$.

解 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left[(n+1)!\frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\Big/(n!x^n/n^n)\right]=\frac{x}{\mathrm{e}}$,

则 如果 $x>\mathrm{e}$，那么原级数发散；若 $x<\mathrm{e}$，原级数收敛.

当 $x=\mathrm{e},\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=1$，D'Alembert 判别法失效.

因为当 $n\to+\infty$ 时，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 是单调增趋于 e，所以 $\forall n\in\mathbf{N}_+,\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$,

从而有$\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$，这说明该级数通项 a_n 严格单调增，又 $a_n>0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\sup\{a_n\}>0$，该级数通项 a_n 不趋于零，故原级数发散.

综上所述 $x<\mathrm{e}$ 时收敛；$x\geqslant\mathrm{e}$，发散.

(13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2n\tan\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{3}}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n\tan\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}>1$,

由 Cauchy 判别法. 原级数发散.

(14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{1+\alpha^{2n}}(\alpha>0)$.

解 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha^{n+1}}{1+\alpha^{2n+2}}\Big/\frac{\alpha^n}{1+\alpha^{2n}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\alpha\cdot\frac{1+\alpha^{2n}}{1+\alpha^{2n+2}}\right)=\begin{cases}\alpha, & \alpha<1,\\ \frac{1}{\alpha}, & \alpha>1.\end{cases}$

故 $\alpha\neq1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{1+\alpha^{2n}}$收敛.

$\alpha=1$ 时，$\frac{\alpha^n}{1+\alpha^{2n}}=\frac{1}{2}$，由级数收敛的必要条件知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$发散.

总之，当 $\alpha\neq1$ 时，原级数收敛. 当 $\alpha=1$ 时，原级数发散.

13. 设 $|r|<1$，利用级数理论证明$\lim\limits_{n\to\infty}nr^n=0$.

证 由 Cauchy 准则知. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|nr^n|$收敛.

再由收敛的必要条件知$\lim\limits_{n\to\infty} nr^n=0$.

14. 讨论下列级数的敛散性.并对收敛级数说明是绝对收敛,还是条件收敛:

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n-\ln n}$.

解 此为交错级数,由 $0<\dfrac{1}{n-\ln n}<\dfrac{1}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散知 $\sum\limits_{n=1}^{n}\dfrac{1}{n-\ln n}$发散.

故原级数非绝对收敛.

又因为 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{\ln n}{n}}=0.$$

又设 $f(x)=x-\ln x, f'(x)=1-\dfrac{1}{x}>0(x>1)$知$\dfrac{1}{n-\ln n}$单减,于是由 Leibniz 准则.原级数条件收敛.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{a}-1)\quad(a>0,a\neq1)$.

解 令 $f(n)=\sqrt[n]{a}-1$,当 $a>0$ 时,$\sqrt[n]{a}-1>0$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}\ln a}{-\frac{1}{x^2}}=\infty,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\text{发散}.$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{a}-1)\right|$发散.即原级数非绝对收敛.

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=0$,且 $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}a^{\frac{1}{x}}<0$,即 $f(n)$单减,

由 Leibniz 准则,原级数条件收敛.

18. 下列级数中哪些是绝对收敛的?哪些是条件收敛的?

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\dfrac{n}{2^n}$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{9n^2-4}}$.

解 (2) $\left|(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\dfrac{n}{2^n}\right|\leqslant\dfrac{n}{2^n}$,且$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+1}{2^{n+1}}\Big/\dfrac{n}{2^n}\right)=\dfrac{1}{2}$,即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$收敛,

于是原级数绝对收敛.

(3) 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}$发散,故原级数非绝对收敛.

又因为$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}=0$,且$\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}>\dfrac{1}{\sqrt[4]{n+1}}$.由 Leibniz 准则,原级数条件收敛.

(4) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\ln\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{9n^2-4}}\Bigg/\dfrac{1}{n}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\ln\left(2+\dfrac{1}{n}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{9-\dfrac{4}{n^2}}}\right]=\dfrac{\ln 2}{3}$,

且 $$\left|(-1)^{n+1}\frac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{9n^2-4}}\right|=\frac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{9n^2-4}},$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{9n^2-4}}$发散，原级数非绝对收敛.

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{9n^2-4}}=0$，且$\dfrac{\ln\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{9n^2-4}}>\dfrac{\ln\left(2+\dfrac{1}{n+1}\right)}{\sqrt{9(n+1)^2-4}}$，由 Leibniz 准则，原级数条件收敛.

20. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 都收敛，且 $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

证 因为 $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$，所以 $0\leqslant c_n-b_n\leqslant c_n-a_n$.

又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 均收敛. 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$收敛.

由正项级数的比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-b_n)$收敛.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-b_n)$知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

21. 设 $a_n>0$，证明：

(1) 若$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\lambda<1$(或 $\sqrt[n]{a_n}\leqslant\lambda<1$)，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

(2) 若$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant 1$(或 $\sqrt[n]{a_n}\geqslant 1$)，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

证 $a_n>0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数.

(1) 若 $a_{n+1}\leqslant\lambda a_n$，$\lambda<1$，$\forall n\in\mathbf{N}_+$，那么

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant a_1+\lambda a_1+\cdots+\lambda^{n-1}a_1=a_1\frac{(1-\lambda^n)}{1-\lambda},$$

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_1\dfrac{(1-\lambda^n)}{1-\lambda}=\dfrac{a_1}{1-\lambda}$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}a_1$ 收敛.

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

同理可证 $\sqrt[n]{a_n}\leqslant\lambda<1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(2) 若 $a_{n+1}>a_n$，则 $\{a_n\}$ 为单增数列. 且 $a_n>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$ （即 0 不可能为单增数列的上确界）.

22. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，令

$$a_n^+=\frac{|a_n|+a_n}{2}=\begin{cases}a_n, & a_n>0,\\0, & a_n\leqslant 0;\end{cases}\quad a_n^-=\frac{|a_n|-a_n}{2}=\begin{cases}-a_n, & a_n<0,\\0, & a_n\geqslant 0.\end{cases}$$

则 a_n^+ 与 a_n^- 分别称为 a_n 的正部和负部. 证明：

(1) 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$ 都收敛；

(2) 任一绝对收敛的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 都可以表示为两个收敛的正项级数之差：

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+-\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-.$$

证 (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛. 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.

又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+=\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|\right)$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+$ 收敛. 同理可证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$ 收敛.

(2) 因为 $a_n=\frac{a_n}{2}+\frac{a_n}{2}=\frac{a_n}{2}+\frac{|a_n|}{2}-\frac{|a_n|}{2}+\frac{a_n}{2}$

$$=\frac{a_n+|a_n|}{2}-\frac{|a_n|-a_n}{2}=a_n^+-a_n^-,$$

由(1)知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛时. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$ 均收敛. (2)得证.

(B)

1. 设 $a_n>0,b_n>0,\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}$，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

证 由 $a_n>0,b_n>0,\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}$ 可得 $0<\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\leqslant\frac{a_n}{b_n}$，且 $0<\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\leqslant\frac{a_n}{b_n}\leqslant\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\leqslant\cdots\leqslant\frac{a_1}{b_1}$，则 $a_{n+1}\leqslant\frac{a_1}{b_1}b_{n+1}$. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，由比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 原题得证.

2. 设 $a_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-\ln a_n}{\ln n}=q$. 证明：

(1) 若 $q>1$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛； (2) $q<1$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证 (1) 若 $q>1$. 令 $q=1+\alpha(\alpha>0)$. 因为 $a_n>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-\ln a_n}{\ln n}=q$,

所以对 $\varepsilon=\dfrac{\alpha}{2}$, $\exists N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,

$$q+\frac{\alpha}{2}>\frac{-\ln a_n}{\ln n}>q-\frac{\alpha}{2}=1+\frac{\alpha}{2},$$

即 $-\ln a_n>\left(1+\dfrac{\alpha}{2}\right)\ln n$,

即 $0<a_n<\dfrac{1}{n^{1+\frac{\alpha}{2}}}$,

由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+\frac{\alpha}{2}}}$ 收敛知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 若 $q<1$,由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-\ln a_n}{\ln n}=q$ 知,对 $\varepsilon=\dfrac{1-q}{2}>0$, $\exists N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,

$$\frac{-\ln a_n}{\ln n}<q+\frac{1-q}{2}=\frac{1+q}{2}<1,$$

即 $a_n>\dfrac{1}{n}$,由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

3. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数,且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$. 证明:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

证 由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$,所以 $f(0)=0$,于是 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$. 由泰勒公式得 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=f''(0)\dfrac{1}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|\Big/\dfrac{1}{n^2}\right)=|f''(0)|$. 由 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛及比较准则, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

4. 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^{1+\alpha}}(\alpha>0)$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln(5+n^3)}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\alpha^n}{n+1}\right)^n(\alpha>0)$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan(\sqrt{n^2+1}\pi)$;

(5) $\sqrt{3}+\sqrt{3-\sqrt{6}}+\sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{6}}}+\cdots+\sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}}}+\cdots$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}(x\in\mathbf{R})$.

解　(1) 因为 $\alpha>0$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln n}{n^{1+\alpha}}\Big/\dfrac{1}{n^{1+\frac{\alpha}{2}}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}=0$. 由正项级数收敛的比较准则,原级数收敛.

(2) 因为 $\dfrac{1}{n\ln(5+n^3)}>\dfrac{1}{n\ln n^3}>\dfrac{1}{3n\ln n}>\dfrac{1}{3n}$,当 $n>3$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3n}$ 发散,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln(5+n^3)}$ 发散.

(3) $\sqrt[n]{a_n}=\dfrac{\alpha^n}{n+1}$.

若 $0<\alpha\leqslant 1$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=0$,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^\alpha}{n+1}\right)^n$ 收敛.

若 $\alpha>1$,由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{x+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}\lim\limits_{x\to\infty}\alpha x^{\alpha-1}=+\infty$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=+\infty$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^\alpha}{n+1}\right)^n$ 发散.

(4) $a_n=\tan(\sqrt{n^2+1}\pi)=\tan\left[(\sqrt{n^2+1}-n)\pi\right]=\tan\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$,

因而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\frac{\pi}{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\tan\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\Big/\dfrac{\pi}{n+\sqrt{n^2+1}}\right)\cdot\left(\dfrac{\pi}{n+\sqrt{n^2+1}}\Big/\dfrac{\pi}{2n}\right)=1$

又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi}{2n}$ 发散,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

(5) 令 $a_n=\sqrt{3-c_n}$,$n=0,1,2,\cdots$,则原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. 其中 $c_0=0,c_1=\sqrt{6}$,$c_2=\sqrt{6+\sqrt{6}},\cdots,c_n=\sqrt{6+c_{n-1}}$. 由习题 1.2(B)第 4 题(2),数列 $\{c_n\}$ 单增有界,且 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=3$.

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{3-c_{n+1}}}{\sqrt{3-c_n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{3-\sqrt{6+c_n}}{3-c_n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{3+\sqrt{6+c_n}}}=\frac{1}{\sqrt{6}}<1$$

由 D'Alembert 准则,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(6) $a_n=\tan\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$. 若 $x=0$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=0$ 收敛.

若 $|x|<1$. 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}=0$,所以当 n 足够大时,$\dfrac{|x|^n}{\sqrt{n}}<\dfrac{\pi}{2}$,且 $|a_n|=$

$\tan\dfrac{|x|^n}{\sqrt{n}}$,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\tan\dfrac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\tan\dfrac{|x|^n}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\tan\dfrac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\dfrac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}\cdot\frac{|x|^n/\sqrt{n}}{\tan(|x|^n/\sqrt{n})}\cdot\sqrt{\frac{n}{n+1}}\,|x|\right)$$

$$=|x|<1,$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan\dfrac{|x|^n}{\sqrt{n}}$收敛,即原级数绝对收敛;

若$|x|>1$,$\lim\limits_{n\to+\infty}\tan\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}\neq 0$,于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散;

$x=1$,$a_n=\tan\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}=\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}>0$,由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big/\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)=1$,

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$发散,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}$发散;

$x=-1$,$a_n=(-1)^n\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}$发散,但$\lim\limits_{n\to\infty}\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$,

且 $\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\tan\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$,由 Leibniz 准则,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}$条件收敛.

习 题 4.2

(A)

2. 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^n}$在$(-\infty,+\infty)$上收敛,并求它的和函数.

证 若 $x=0$,$f_n(0)=0$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(0)=0$ 收敛.

若 $x\neq 0$,$S_n(x)=\dfrac{-x^2}{1+x^2}\left(1-\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{(1+x^2)^2}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{(1+x^2)^{n-1}}\right)$

$$=\frac{-x^2}{1+x^2}\cdot\frac{1-\dfrac{(-1)^n}{(1+x^2)^n}}{1+\dfrac{1}{1+x^2}},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=\dfrac{-x^2}{2+x^2}$，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$上收敛，和函数为$\dfrac{-x^2}{2+x^2}$.

3. 求下列函数项级数的收敛域：

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{2^n}$； (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$.

解 (2) 由于$\left|\dfrac{\sin nx}{2^n}\right|\leqslant\dfrac{1}{2^n}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 收敛. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{2^n}$在$(-\infty,+\infty)$上收敛.

(4) 若 $x\leqslant 0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} ne^{-nx}=\lim\limits_{n\to+\infty} ne^{n|x|}=+\infty$，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$发散；

若 $x>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)e^{-(n+1)x}}{ne^{-nx}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{1}{e^x}\right)=\dfrac{1}{e^x}<1$，

且$|ne^{-nx}|=ne^{-nx}$，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$当 $x>0$ 时收敛.

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$收敛域为$(0,+\infty)$.

4. 证明下列级数在给定区间上一致收敛：

(1) $\dfrac{1}{1+x}-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(x+n-1)(x+n)}$， $x\in[0,1]$.

证 因为$\forall x\in[0,1]$，$0<\dfrac{1}{(x+n-1)(x+n)}\leqslant\dfrac{1}{n(n-1)}<\dfrac{1}{(n-1)^2}$，

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)^2}$收敛，由 M 判别准则级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(x+n-1)(x+n)}$在$[0,1]$上一致收敛. 设和为 $S(x)$. 故原级数在$[0,1]$上一致收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{1+n^4x^2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

证 $x=0$，原级数显然收敛于 0；

$$x\neq 0,\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right|\leqslant\left|\frac{x}{2n^2x}\right|=\frac{1}{2n^2},$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^2}$ 收敛，由 M 判别准则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{1+n^4x^2}$ 收敛. 故原级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^{\frac{3}{2}}}$，$x\in[-1,1]$.

证 由于$\left|\dfrac{x^n}{n^{\frac{3}{2}}}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}(x\in[-1,1])$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^{\frac{3}{2}}}$在$[-1,1]$上一致收敛.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\ 2^{-nx}, x\in[\delta,+\infty)(\delta>0)$.

证 因为$\forall x\in[\delta,+\infty)$,及$\delta>0$,所以$0<\sqrt{n}2^{-nx}<\frac{\sqrt{n}}{2^{n\delta}}$.

又因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{n+1}}{2^{(n+1)\delta}}\Big/\frac{\sqrt{n}}{2^{n\delta}}\right)=\frac{1}{2^{\delta}}<1$,所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^{n\delta}}$收敛,

于是 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\ 2^{-nx}$ 在$[\delta,+\infty)$ 上一致收敛.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right), x\in[-\delta,\delta](\delta>0)$.

证 因为 $0\leqslant 1-\cos\frac{x}{n}=2\sin^2\frac{x}{2n}\leqslant 2\cdot\left(\frac{x}{2n}\right)^2\leqslant\frac{\delta^2}{2n^2}$,且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta^2}{2n^2}$收敛.从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$在$[-\delta,\delta](\delta>0)$上一致收敛.

5. 证明:级数 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 在$[-q,q](0<q<1)$上一致收敛,并且

(1) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots, |x|<1$.

(2) $\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n+\cdots, |x|<1$.

证 因为当 $0<q<1, x\in[-q,q]$时,$|x^n|\leqslant q^n$,且 $\sum_{n=1}^{\infty}q^n$ 收敛,所以 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 在$[-q,q](0<q<1)$ 上一致收敛.和函数 $S(x)=\frac{1}{1-x}$,即$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n, x\in[-q,q]$.

(1) 由 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 在$[-q,q]$上一致收敛于$\frac{1}{1-x}$可知$(0<q<1)$,

$\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$ 在$[-q,q]$上一致收敛于$\frac{1}{1+x}$.

由定理 2.4(和函数的可积性)有

$\forall x\in[-q,q](0<q<1)$, $\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-x)^n\mathrm{d}x$,即$\forall x\in[-q,q]$,

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$$
$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,$$

即当$|x|<1$ 时,$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$.

(2) 因为$|(n+1)x^n|\leqslant(n+1)q^n$, $\forall x\in[-q,q]$,

且当 $0<q<1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[(n+1)+1]q^{n+1}}{(n+1)q^n}=q<1$,

故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n$ 收敛,从而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ 在$[-q,q]$上一致收敛.

令 $u_n=x^n$,则$(n+1)x^n=u'_{n+1}$,又因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 在$[-q,q]$上一致收敛于$\dfrac{1}{1-x}$,那么由和函数的可导性(定理 2.5)

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\frac{1}{(1-x)}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

6. 证明:$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^4}$在$(-\infty,+\infty)$上有二阶连续导数,并且

$$f''(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}.$$

证 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, $|u_n(x)|=\left|\dfrac{\sin nx}{n^4}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^4}$,而且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$ 收敛,根据 M 判别准则,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^4}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛,因而处处收敛. 又 $u_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n^4}\in C^{(1)}(-\infty,+\infty)$,所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}\text{在}(-\infty,+\infty)\text{上一致收敛(例 2.6)},$$

由定理 2.5,$f\in^{(1)}(-\infty,+\infty)$,并且

$$f'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nx}{n^4}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}.$$

又因为 $u'_n(x)=\dfrac{\cos nx}{n^3}\in C^{(1)}(-\infty,+\infty)$,且$\forall x\in(-\infty,+\infty)$,

$|(u'(x))'|=|u''_n(x)|=\left|\dfrac{-\sin nx}{n^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^2}$,并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛.

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u''_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛,由定理 2.5,

$f'\in C^{(1)}(-\infty,+\infty)$,即 $f\in C^{(2)}(-\infty,+\infty)$,且

$$f''(x)=(f'(x))'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right)'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\sin nx}{n^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}.$$

(B)

3. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 在开区间(a,b)内的任一闭子区间上一致收敛，则称该级数在(a,b)上内闭一致收敛，证明若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 在(a,b)上内闭一致收敛，则它在(a,b)内处处收敛.

证 $\forall x_0\in(a,b)$，令 $\alpha=\dfrac{x_0+a}{2}$，$\beta=\dfrac{x_0+b}{2}$，则 $\alpha,\beta\in(a,b)$，且 $x_0\in(\alpha,\beta)$.

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 在(a,b)上内闭一致收敛，且$[\alpha,\beta]\subset(a,b)$，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 在$[\alpha,\beta]$上一致收敛，因而处处收敛，于是 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 在 $x_0\in[\alpha,\beta]$处收敛. 由 $x_0\in(a,b)$的任意性知 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 在(a,b)上处处收敛.

4. 设有级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\dfrac{1}{n}\right)^n$，证明：

(1) 该级数的收敛域为$(-1,1)$；

(2) 该级数在$(-1,1)$上内闭一致收敛；

(3) 该级数的和函数在$(-1,1)$内连续.

证 (1) 由于 $\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\sqrt[n]{\left|\left(x+\dfrac{1}{n}\right)^n\right|}=\left|x+\dfrac{1}{n}\right|$，所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=|x|$. 于是 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 当 $|x|<1$ 时收敛，$x>1$ 时发散（此时 $|u_n(x)|=u_n(x)$）.

当 $x<-1$ 时，$\quad \lim\limits_{n\to+\infty}u_n(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}x^n\left[\left(1+\dfrac{1}{nx}\right)^{nx}\right]^{\frac{1}{x}}=\infty$，

当 $x=1$ 时，$\quad \lim\limits_{n\to+\infty}u_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}\neq0$，

$x=-1$ 时，$\quad \lim\limits_{n\to+\infty}u_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-1+\dfrac{1}{n}\right)^n$不存在.

于是当 $|x|\geqslant1$ 时，$\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 发散.

综上所述 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 的收敛区域为$(-1,1)$.

(2) $\forall[\alpha,\beta]\subset(-1,1)$，令 $\delta=\max\{|\alpha|,|\beta|\}$，则 $\delta>0$.

从而 $\left|\left(x+\frac{1}{n}\right)^n\right|\leqslant\left(\delta+\frac{1}{n}\right)^n$. 对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\delta+\frac{1}{n}\right)^n$，

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\delta+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\delta+\frac{1}{n}\right)=\delta<1$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\delta+\frac{1}{n}\right)^n$ 收敛.

由 M 判别准则，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

由于 $[\alpha,\beta]\subset(-1,1)$ 的任一闭子区间，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$ 在 $(-1,1)$ 上内闭一致收敛.

(3) 设 $S(x)$ 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$ 在 $(-1,1)$ 上的和函数，即

$$\forall x\in(-1,1),S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n.$$

那么 $\forall x_0\in(-1,1)$，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$ 在 $(-1,1)$ 上内闭一致收敛，

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$ 在 $\left[\frac{x_0-1}{2},\frac{x_0+1}{2}\right]$ 上一致收敛于 $S_{x_0}(x)$.

其中 $S_{x_0}(x)=S(x)$，当 $x\in\left[\frac{-1+x_0}{2},\frac{1+x_0}{2}\right]$ 时.

并且 $u_n(x)=\left(x+\frac{1}{n}\right)^n\in C\left[\frac{-1+x_0}{2},\frac{1+x_0}{2}\right]$. 由定理 2.3，

$$S_{x_0}(x)\in C\left[\frac{-1+x_0}{2},\frac{1+x_0}{2}\right]，从而\ S(x)\in C\left[\frac{-1+x_0}{2},\frac{1+x_0}{2}\right].$$

故和函数 $S(x)$ 在 $x_0\left(\in\left[\frac{-1+x_0}{2},\frac{1+x_0}{2}\right]\right)$ 处连续.

由 $x_0\in(-1,1)$ 的任意性知：$S(x)\in C(-1,1)$.

5. 证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

证 (1) 先证 $u>0$ 时，$\mathrm{e}^u>\frac{u^2}{2}$. 令 $f(u)=\mathrm{e}^u-\frac{u^2}{2}$，则 $f'(u)=\mathrm{e}^u-u$，$f''(u)=\mathrm{e}^u-1>0(u>0)$，从而 $f'(u)$ 当 $u>0$ 时严格单增，即 $\forall u>0,f'(u)>f'(0)=1>0$，于是 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单增，从而当 $u>0$ 时，$f(u)>f(0)=1>0$. 即当 $u>0$ 时，$\mathrm{e}^u>\frac{u^2}{2}$.

(2) 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

由(1)可得当 $x>0$ 时， $|x^2\mathrm{e}^{-nx}|=\left|\frac{x^2}{\mathrm{e}^{nx}}\right|<\left|x^2\cdot\frac{2}{(nx)^2}\right|=\frac{2}{n^2}$，

且 $x=0$ 时，$\quad |x^2 e^{-nx}|=0<\frac{2}{n^2}$. 于是

$\forall x\in[0,+\infty)$，$|x^2e^{-nx}|<\frac{2}{n^2}$，且正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ 收敛.

由 M 判别准则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

6. 如果 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，$u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上是单调函数，并且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 的端点绝对收敛，证明它在 $[a,b]$ 上绝对一致收敛(即绝对值级数一致收敛).

证　由于 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，$u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上是单调函数.

所以　$|u_n(x)|\leqslant\max\{|u_n(a)|,|u_n(b)|\}\leqslant|u_n(a)|+|u_n(b)|$，

又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 的端点绝对收敛. 即

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(a)|$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(b)|$ 收敛. 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|u_n(a)|+|u_n(b)|)$ 收敛.

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对一致收敛.

习　题　4.3

(A)

2. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-3$ 处条件收敛，你能确定该幂级数的收敛半径吗？

解　由阿贝尔定理，如果在点 x_0 处幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛，那么对于一切满足 $|x|<|x_0|$ 的点，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 绝对收敛. 因此，既然已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-3$ 处收敛，那么，对于满足 $|x|<|-3|$ 的一切点，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 是绝对收敛的.

另一方面，注意到幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-3$ 处是条件收敛的，因此，任何 $|x|>3$ 的点都不可能使该幂级数收敛. 否则，据阿贝尔定理，该幂级数在 $x=-3$

处就不是条件收敛，而应是绝对收敛了，这与题设矛盾.

由于$|x|<3$时该幂级数收敛，$|x|>3$时该幂级数发散，因此该幂级数的收敛半径$R=3$.

3. 已知幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径$R=1$，有人采用下面的方法求幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

的收敛半径，你认为对吗？若不对，指出错在何处.

由于$R=1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1,$$

从而得

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0.$$

因此，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$的收敛半径为$+\infty$.

解 结果正确，但解法不对. 因为$R=1$，不一定能得出$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$的结果. (例如对幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}[2+(-1)^n]x^n$，有

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}=\begin{cases}3, \text{当 } n \text{ 为奇数},\\ \dfrac{1}{3}, \text{当 } n \text{ 为偶数}.\end{cases}$$

即$\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$不存在.

级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}[2+(-1)^n]x^n$的收敛半径可用下述方法得到

由
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(-1)^n}\,|x|=|x|$$

可知当$|x|<1$时幂级数收敛，当$|x|>1$时幂级数发散，所以收敛半径$R=1$.)

此问题的正确解法如下

由$R=1$，任取$x_0\in(0,1)$，有$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$绝对收敛，因此$\{a_n x_0^n\}$有界，设$|a_n x_0^n|\leqslant M$. 于是

$$\left|\frac{a_n}{n!}x^n\right|=\left|\frac{a_n x_0^n}{n! x_0^n}x^n\right|\leqslant\frac{M}{n! x_0^n}|x|^n,$$

由比值审敛法知，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{M}{n!x_0^n}x^n$ 对任何 x 都绝对收敛，从而由比较审敛法知，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n!}x^n$ 也对任何 x 都绝对收敛，即级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n!}x^n$ 的收敛半径为 $+\infty$.

4. 求下列幂级数的收敛区间与收敛区域：

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n+\sqrt{n}}x^n$.

解 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{n+1+\sqrt{n+1}}{n+\sqrt{n}}\right|=1$，所以该级数的收敛区间为 $(-1,1)$.

在 $x=1$，该级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n+\sqrt{n}}$ 条件收敛.

在 $x=-1$，该级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{-1}{n+\sqrt{n}}$ 发散.

故收敛区域为 $(-1,1]$.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}x^{2n-1}$.

解 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)!x^{2n+1}}{(n+1)^{n+1}}\Big/\dfrac{n!x^{2n-1}}{n^n}\right|=\dfrac{x^2}{\mathrm{e}}$，故当 $\dfrac{x^2}{\mathrm{e}}<1$ 时，即 $|x|<\sqrt{\mathrm{e}}$ 时，原级数绝对收敛，当 $|x|>\sqrt{\mathrm{e}}$ 时发散.

$x=\pm\sqrt{\mathrm{e}}$，级数变为 $\pm\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n}$ 发散（习题 4.1 第 12 题(11)）

故收敛区间与收敛区域均为 $(-\sqrt{\mathrm{e}},\sqrt{\mathrm{e}})$.

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}(2x+1)^n$.

解 由例 3.1(3) 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}y^n$ 收敛区间为 $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

收敛区域为 $\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$. 于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}$ 收敛区间为 $\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$. 收敛区域为 $\left[-\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$.

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})2^nx^{2n}$.

解 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})2^n}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})2^{n+1}}\right|=\dfrac{1}{2}$，所以原级数当 $x^2<\dfrac{1}{2}$ 时收

敛，$x^2>\frac{1}{2}$时发散．于是原级数收敛区间为$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$．

当$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$时，级数变为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$．由于$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ $<\frac{1}{\sqrt{n}}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$发散．

故原级数收敛区域为$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$．

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{4^n+(-2)^n}$．

解　$\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{4^{n+1}+(-2)^{n+1}}{4^n+(-2)^n}\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{4-2\cdot\left(\frac{-2}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{-2}{4}\right)^n}\right|=4.$

故收敛区间为$(-5,3)$．

$x=3$时，级数变为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{4^n+(-2)^n}$，而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n}{4^n+(-2)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n}=1$，于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{4^n+(-2)^n}$发散．

$x=-5$，级数变为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{4^n+(-2)^n}$发散（通项极限不存在）．

故收敛区域为$(-5,3)$．

5. 指出下列推导有什么错误？

由于$\frac{x}{1-x}=x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$，

$$\frac{-x}{1-x}=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^n}+\cdots,$$

两式相加得

$$\cdots+\frac{1}{x^n}+\cdots+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=0.$$

解　不能成立．因为

$$\frac{x}{1-x}=x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

只有在$|x|<1$时才成立，而

$$\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x}+\cdots+\frac{1}{x_n}+\cdots$$

只有在$|x|>1$时才成立．由于这两个级数的收敛域没有公共点，因此不能相加．

6. 求下列函数的 Maclaurin 展开式：

解 (1) xe^{-x^2}.

$$xe^{-x^2}=x\left[1-x^2+\frac{1}{2!}(-x^2)^2+\frac{1}{3!}(-x^2)^3+\cdots+\frac{1}{n!}(-x^2)^n+\cdots\right],$$

$x\in(-\infty,+\infty)$,

即 $xe^{-x^2}=x-x^3+\frac{1}{2!}x^5-\frac{1}{3!}x^7+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n+1}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$.

(2) $\sin^2 x$.

由于 $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$，所以

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2!}(2x)^2+\frac{1}{4!}(2x)^4-\cdots+(-1)^k\frac{(2x)^{2k}}{(2k)!}+\cdots\right],\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

即 $\sin^2 x=x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\cdots+(-1)^{k+1}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$.

(3) $\operatorname{ch}\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})$.

$$e^{\frac{x}{2}}=1+\frac{x}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

$$e^{-\frac{x}{2}}=1-\frac{x}{2}+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x}{2}\right)^2+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

于是 $\operatorname{ch}\frac{x}{2}=1+\frac{1}{2!2^2}x^2+\frac{x^4}{2^4 4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{2^{2n}(2n)!}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$.

(4) $\arcsin x$.

解 由于
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=[1+(-x^2)]^{-\frac{1}{2}}=1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2)+$$
$$\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)(-x^2)^2+\cdots+$$
$$\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)(-x^2)^n+\cdots,$$
$$(-x^2)\in(-1,1),$$

即 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\cdots+\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}+\cdots,\quad x\in(-1,1)$,

逐项积分得

$$\arcsin x=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_0^x x^{2n}dx$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1},\quad x\in(-1,1).$$

(5) $\frac{1}{\sqrt{2-x}}$.

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{x}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+\left(-\frac{x}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{x}{2}\right)^2+\cdots+\right.$$

$$\left.\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\left(-\frac{x}{2}\right)^n+\cdots,\right.$$

$$-\frac{x}{2}\in(-1,1),$$

故$\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{4\sqrt{2}}x+\dfrac{1}{2!}\dfrac{3}{2^4\sqrt{2}}x^2+\cdots+\dfrac{(2n)!}{2^{3n}(n!)\sqrt{2}}x^n+\cdots,\quad x\in(-2,2).$

(6) $\dfrac{x}{1+x-2x^2}$.

由于$\dfrac{x}{1+x-2x^2}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+2x}\right)$，而

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1),$$

$$\frac{1}{1+2x}=1-2x+(2x)^2+\cdots+(-1)^n(2x)^n+\cdots,\quad 2x\in(-1,1),$$

故
$$\frac{x}{1+x-2x^2}=x-x^2+\cdots+\frac{1-(-2)^n}{3}x^n+\cdots,\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

(7) 由于$\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n, x\in(-1,1), \dfrac{1}{1-2x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-2x)^n,\quad 2x\in(-1,1),$
分别逐项积分两个幂级数得

$$-\ln(1-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad x\in(-1,1).$$

$$-\frac{1}{2}\ln(1-2x)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-2)^nt^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{n+1}x^{n+1},\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

从而
$$\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)x^n,\quad x\in(-1,1);$$

$$\ln(1-2x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{n}x^n,\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

故
$$\ln(1-3x+2x^2)=\ln(1-x)+\ln(1-2x)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n-1}{n}x^n,\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

(8) $\sqrt[3]{27-x^3}=3\sqrt[3]{1-\left(\dfrac{x}{3}\right)^3}$

$$=3\left[1+\frac{1}{3}\left(-\frac{x}{3}\right)^3+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(-\frac{x}{3}\right)^6+\cdots+\right.$$

$$\left.\frac{1}{n!}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)\left(-\frac{x}{3}\right)^{3n}+\cdots\right],\left(-\frac{x}{3}\right)^3\in(-1,1),$$

$$=3-\frac{1}{3^3}x^3-\frac{2}{2!3^7}x^6-\cdots-\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots$$

$$\left(n-1-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{(27)^n}x^{3n}+\cdots,\quad x\in(-3,3).$$

7. 设 $f(x)=x^3e^{-x^2}$，求 $f^{(n)}(0)$　$(n=2,3,\cdots)$.

解　由于 $e^{-x^2}=1-x^2+\frac{1}{2!}x^4+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$.

故　$f(x)=x^3-x^5+\frac{1}{2!}x^7+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n+3}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$,

于是
$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k,\\ (-1)^{k-1}\dfrac{(2k+1)!}{(k-1)!}, & n=2k+1,\end{cases}\quad k\in\mathbf{N}_+.$$

8. 求下列函数在给定点 x_0 处的 Taylor 展开式：

(3) $\ln x, x_0=1$;　　(4) $\frac{x}{x^2-5x+6}, x_0=5$;

(7) $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x, x_0=0$;　　(8) $\frac{x}{(1-x^2)^2}, x_0=0$.

解　(3) $\ln x=\ln[1+(x-1)]$

$$=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\cdots+$$

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n+\cdots,\quad x-1\in(-1,1],\text{即 } x\in(0,2].$$

(4) $\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{3}{x-3}-\frac{2}{x-2}$,

而 $$\frac{3}{x-3}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-5}{2}}=\frac{3}{2}\left[1-\frac{1}{2}(x-5)+\left(\frac{x-5}{2}\right)^2+\cdots+(-1)^n\left(\frac{x-5}{2}\right)^n+\cdots\right],$$

$\frac{x-5}{2}\in(-1,1)$，即 $x\in(3,7)$.

$$\frac{2}{x-2}=\frac{2}{3}\frac{1}{1+\frac{x-5}{3}}=\frac{2}{3}\left[1-\frac{x-5}{3}+\left(\frac{x-5}{3}\right)^2+\cdots+(-1)^n\left(\frac{x-5}{3}\right)^n+\cdots\right],$$

$\frac{x-5}{3}\in(-1,1)$，即 $x\in(2,8)$.

故　$$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{5}{6}-\left(\frac{3}{2^2}-\frac{2}{3^2}\right)(x-5)+\left(\frac{3}{2^3}-\frac{2}{3^3}\right)(x-5)^2+\cdots+$$

$$(-1)^n\left(\frac{3}{2^{n+1}}-\frac{2}{3^{n+1}}\right)(x-5)^n+\cdots, x\in(3,7).$$

(7) 由于$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots, x\in(-1,1]$.

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots-\frac{x^n}{n}+\cdots, -x\in(-1,1].$$

$$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots, x\in(-1,1).$$

故$\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{1}{5}x^5+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots\right)-x$$

$$=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{9}x^9+\cdots+\frac{1}{4n+1}x^{4n+1}+\cdots, x\in(-1,1).$$

(8) $\frac{x}{(1-x^2)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)'=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}\right)'=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(x^{2n})'=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{2n-1}$,

$$x^2\in(-1,1), 即\ x\in(-1,1).$$

9. 求下列幂级数的和函数：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2x^n$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n-1)3^{2n-1}}$；

(5) $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$；

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}$.

解 (1) 由于$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n+\cdots$, $x\in(-1,1)$,
于是逐项求导可得

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+(n+2)x^{n+1}+\cdots, \quad x\in(-1,1),$$

再逐项求导

$$\frac{2}{(1-x)^3}=2+3\cdot 2x+4\cdot 3x^2+\cdots+(n+2)(n+1)x^n+\cdots, \quad x\in(-1,1).$$

(2) 由于$\frac{1}{1+x}-1=-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+\cdots$, $x\in(-1,1)$,

逐项求导 $\frac{-1}{(1+x)^2}=-1+2x-3x^2+\cdots+(-1)^nnx^{n-1}+\cdots$, $|x|<1$.

于是 $\frac{-x}{(1+x)^2}=-x+2x^2-3x^3+\cdots+(-1)^nnx^n+\cdots$, $|x|<1$.

逐项求导 $\dfrac{x-1}{(1+x)^3}=-1+2^2x-3^2x^2+\cdots+(-1)^n n^2x^{n-1}+\cdots,\quad |x|<1.$

故 $\dfrac{x(x-1)}{(1+x)^3}=-x+2^2x^2-3^2x^3+\cdots+(-1)^n n^2x^n+\cdots,\quad |x|<1.$

(3) 设和函数为 $S(x)$，则 $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

易知收敛域为$[-1,1]$，且 $S(1)=1$(第四章例 1.3).

$$xS(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)},\quad x\in(-1,0),$$

逐项求导得 $$[xS(x)]'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad x\in(-1,1),$$

再逐项求导得 $$[xS(x)]''=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},\quad x\in(-1,1),$$

于是 $$xS(x)=(1-x)\ln(1-x)+x+C_1x+C_2,$$

故 由 $S(0)=0,S(1)=1$，且 $S(x)$在$[-1,1]$上连续.

$$S(x)=\begin{cases}1, & x=1,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{1-x}{x}\ln(1-x)+1, & x\in[-1,0)\cup(0,1).\end{cases}$$

(4) 由于 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n-1)3^{2n-1}}=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{x}{3}\right)^{2n-1}$.

而$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\frac{x}{3}\right)^{2n-1}\right]'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\left(\frac{x}{3}\right)^2\right]^{n-1}\cdot\frac{1}{3}.$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{3}\right)^2},\quad \frac{x}{3}\in(-1,1),\text{即 } x\in(-3,3).$$

故原级数的和函数

$$S(x)=x\int_0^x\frac{1}{3}\frac{dx}{1+\left(\dfrac{x}{3}\right)^2}=x\arctan\frac{x}{3},\quad x\in[-3,3].$$

(5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=2x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}x^n$,

又由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n=\dfrac{1}{1-x}, x\in(-1,1)$，逐项求导可得：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=\dfrac{1}{(1-x)^2}, x\in(-1,1)$. 故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=\dfrac{2x}{(1-x)^2}+\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{1+x}{(1-x)^2}, x\in(-1,1)$.

(6) 设和函数为 $S(x)$，则 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n2^n}x^{n-1}$， $S(0)=\dfrac{1}{2}$.

由于
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n,\quad x\in(-2,2),$$

逐项积分得
$$\begin{aligned}-\ln(2-x)+\ln 2&=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^n\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}x^n\\&=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 2^n},\quad x\in[-2,2),\end{aligned}$$

故 $S(0)=\dfrac{1}{2}$，当 $x\in[-2,0)\cup(0,2)$ 时，$S(x)=\dfrac{1}{x}[\ln 2-\ln(2-x)]$.

10. 利用幂级数求下列常数项级数的和：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)2^{n-1}}$； (2) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{(n-2)n2^n}$；

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2-n+1)\dfrac{1}{2^n}$； (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2^{n+1}}$.

解 (1) 由第四章例 3.8(或练习 4.3 第 8 题(7)求解过程)知，
$$\begin{aligned}\ln\frac{1+x}{1-x}&=2x\left(1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-2}}{2n-1}+\cdots\right)\\&=2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{2n-1},\quad x\in(-1,1),\end{aligned}$$

于是当 $x=\dfrac{1}{\sqrt2}$ 时， $\ln\left(\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt2}}{1-\frac{1}{\sqrt2}}\right)=\dfrac{2}{\sqrt2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\cdot\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

故
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{\sqrt2}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{\sqrt2}}{1-\frac{1}{\sqrt2}}\right)=\frac{\sqrt2}{2}\ln\left(\frac{\sqrt2+1}{\sqrt2-1}\right)=\sqrt2\ln(\sqrt2+1).$$

(2) 由于
$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-2)2^n},$$

由于
$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad x\in(-1,1),$$

逐项积分得 $-\ln(1-x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n},\quad x\in(-1,1)$，

取 $x=\frac{1}{2}$ 得
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=-\ln\frac{1}{2}=\ln 2,$$

于是
$$\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{3}}\right).$$

又由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n}=-\ln(1-x),x\in(-1,1)$ 知
$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n-2}x^{n}=x^{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n}=-x^{2}\ln(1-x),\quad x\in(-1,1).$$

于是
$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=-\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\ln 2.$$

故
$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-2)2^{n}}=\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$
$$=\frac{1}{8}\ln 2-\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)=\frac{5}{16}-\frac{3}{8}\ln 2.$$

(3) 由练习 4.3 第 9 题(2)知，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}n^{2}x^{n}=\frac{x(x-1)}{(1+x)^{3}},|x|<1.$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}nx^{n}=-\frac{x}{(1+x)^{2}},\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{n}=\frac{1}{1+x},\quad x\in(-1,1)$$

取 $x=\frac{1}{2}$ 可得
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(n^{2}-n+1)\frac{1}{2^{n}}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^{3}}+\frac{\frac{1}{2}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}}+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{22}{27}.$$

(4) 由练习 4.3(A)第 9 题(1)知：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}=\frac{2}{(1-x)^{3}},x\in(-1,1).$

取 $x=\frac{1}{2}$，则
$$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3}}=16,$$

故
$$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)\frac{1}{2^{n-1}}=4.$$

11. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n3^{n-1}x^{n-1}$.

(1) 证明 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ 内连续；　　(2) 计算 $\int_{0}^{\frac{1}{8}}f(x)\mathrm{d}x$.

证

(1) 由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(3x)^n=\dfrac{1}{1-3x},\quad x\in\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$,

逐项求导有 $3\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(3x)^{n-1}=\dfrac{3}{(1-3x)^2}.\quad x\in\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$,

故
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(3x)^{n-1}=\frac{1}{(1-3x)^2},\quad x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),$$

即 当 $x\in\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$时,$f(x)$为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(3x)^{n-1}$的和函数.由定理 3.6,$f(x)\in C\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{8}}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{8}}\frac{\mathrm{d}x}{(1-3x)^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-3x}\right)_0^{\frac{1}{8}}=\frac{1}{5}$.

14. 利用 Euler 公式将 $\mathrm{e}^x\cos x$ 与 $\mathrm{e}^x\sin x$ 展开成 x 的幂级数.

解 因为
$$\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}=\mathrm{e}^x\cos x+\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin x.$$

又因为
$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\mathrm{i})^n}{n!}x^n\\&=1+(1+\mathrm{i})x+\frac{1}{2!}(1+\mathrm{i})^2x^2+\frac{1}{3!}(1+\mathrm{i})^3x^3+\\&\quad\frac{1}{4!}(1+\mathrm{i})^4x^4+\frac{1}{5!}(1+\mathrm{i})^5x^5+\cdots\\&=1+(1+\mathrm{i})x+\frac{1}{2!}(2\mathrm{i})x^2+\frac{2}{3!}(-1+\mathrm{i})x^3+\\&\quad\frac{1}{4!}(-4)x^4+\frac{4}{5!}(-1-\mathrm{i})x^5+\cdots\\&=\left(1+x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{30}x^5+\cdots\right)+\\&\quad\mathrm{i}\left(x+x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+\cdots\right)\end{aligned}$$

故
$$\mathrm{e}^x\cos x=1+x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{30}x^5+\cdots,$$
$$\mathrm{e}^x\sin x=x+x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+\cdots.$$

(B)

1. 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛区间为$(-R,R)$,$0<R<+\infty$,并且在 $x=-R$ 处绝对收敛,证明它在$[-R,R]$上一致收敛.

证　由于$\forall x\in[-R,R]$,恒有$|a_nx^n|\leqslant|a_n|R^n$,且

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|R^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n(-R)^n|$绝对收敛.

所以由M判别准则. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$在$[-R,R]$上一致收敛.

2. 证明:如果幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$的和函数在$x_0$的邻域内恒等于0,那么它的所有系数$a_n$都等于零.

证　设$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$,收敛区间为$(x_0-R,x_0+R)$.

由定理3.6　$S(x)$在(x_0-R,x_0+R)内连续,且有连续的导数,且可以逐项求导,求导后所得幂级数与原级数收敛半径相同,

于是,

$$S(x_0)=a_0,$$

$$S'(x_0)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\right)'\Bigg|_{x=x_0}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_nn(x-x_0)^{n-1}\Big|_{x=x_0}=a_1$$

$$S''(x_0)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^{n-1}n\right)'\Bigg|_{x=x_0}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(a_nn(x-x_0)^{n-1})'\Big|_{x=x_0}=2a_2$$

…………

$$S^{(n)}(x_0)=a_nn!.$$

又由于$S(x)$在x_0的邻域内恒等于零,则$S(x_0)=S'(x_0)=\cdots=S^{(n)}(x_0)=\cdots=0$,从而$a_n=0,\forall n\in\mathbf{N}_+$.

3. 如果正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,证明:$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$(-1,1)$上连续.

证　由于$\forall x\in[-1,1]$,恒有$|a_nx^n|\leqslant a_n$,且正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,所以由$M$判别准则,幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$在$[-1,1]$上绝对一致收敛. 即其收敛半径$R\geqslant1$,由定理3.6知,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$在$(-1,1)$上连续.

习 题 4.4

(A)

3. 设函数 f 在区间$[a,b]$($a,b\in\mathbf{R}$)上满足 Dirichlet 条件,如何求 f 在$[a,b]$上的 Fourier 展开式? 试写出它的 Fourier 系数公式.

解 由于 $\forall t\in[-l,l]\left(l=\dfrac{b-a}{2}\right)$, $t+\dfrac{a+b}{2}\in[a,b]$.

取 $F(t)$是周期为 $T=2l$ 的周期函数,且 $F(t)=f\left(t+\dfrac{b+a}{2}\right)$, $t\in[-l,l]$. 由 f 在$[a,b]$上满足 Dirichlet 条件知,$F(t)$是在$[-l,l]$上满足 Dirichlet 条件的周期为 $T=2l$ 的周期函数,则 $F(t)$存在 Fourier 展开式,且此展开式也是 f(将 $F(t)$限定在其一个周期$[a,b]$上即为 $f(x)$)的 Fourier 展开式. 于是 Fourier 系数分别为

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\mathrm{d}t=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f\left(t+\frac{b+a}{2}\right)\cos\frac{n\pi t}{l}\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{x=t+\frac{a+b}{2}}\frac{1}{l}\int_{a}^{b}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\mathrm{d}t=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f\left(t+\frac{b+a}{2}\right)\sin\frac{n\pi t}{l}\mathrm{d}t$$

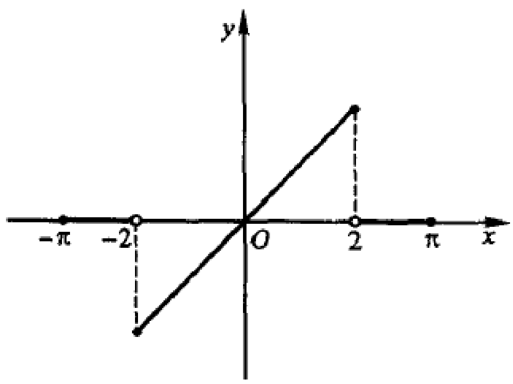
$$\xlongequal{x=t+\frac{a+b}{2}}\frac{1}{l}\int_{a}^{b}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x,n=1,2,\cdots.$$

4. 设 $S(x)$是周期为 2π 的函数 $f(x)$的 Fourier 级数的和函数. $f(x)$在一个周期内的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0, & 2<|x|\leqslant\pi,\\ x, & |x|\leqslant 2,\end{cases}$$

写出 $S(x)$在$[-\pi,\pi]$上的表达式,并求 $S(\pi)$, $S\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)$与 $S(-10)$的值.

解 $f(x)$在一个周期内图像如右图,



(第 4 题)

则 $$S(x)=\begin{cases}x, & |x|<2,\\ 1, & x=2,\\ -1, & x=-2,\\ 0, & 2<|x|\leqslant\pi.\end{cases}$$

所以 $$S(\pi)=0,S\left(\frac{3}{2}\pi\right)=S\left(2\pi-\frac{\pi}{2}\right)=S\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}.$$

$$S(-10)=S(-10+4\pi)=0 \quad (2<4\pi-10<\pi).$$

5. 求下列函数的 Fourier 级数，它们在一个周期内分别定义为：

(1) $f(x)=x^2,-\pi<x\leqslant\pi$；(3) $f(x)=e^x+1,-\pi\leqslant x<\pi$；

(5) $f(x)=|x|,-\pi\leqslant x\leqslant\pi$.

解 (1) Fourier 系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\,dx=\frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=(-1)^n\frac{4}{n^2},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nx\,dx=0,\quad n=1,2,\cdots.$$

所以 $f(x)$ 的 Fourier 级数为 $\frac{1}{3}\pi^2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx$.

(3) $$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^x+1)dx=2+\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^x+1)\cos nx\,dx=\frac{e^x}{\pi(1+n^2)}(\cos nx+n\sin nx)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$
$$=\frac{(-1)^n 2\operatorname{sh}\pi}{\pi(1+n^2)},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^x+1)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi(1+n^2)}\left[e^x(\sin nx-n\cos nx)\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$=\frac{(-1)^{n+1}2n\operatorname{sh}\pi}{\pi(1+n^2)},$$

因此 当 $x\in(-\pi,\pi)$ 时，

$$f(x)=1+\frac{1}{\pi}\operatorname{sh}\pi+\frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx-n\sin nx).$$

$x=\pm\pi$ 时，f 的 Fourier 级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]=1+\operatorname{ch}\pi$.

(5) $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\pi$. $\quad b_n=0,n=1,2,\cdots$,

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{2}{n\pi}\left[x\sin nx+\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-4}{n^2\pi}, & n\text{ 为奇数},\\ 0, & n\text{ 为偶数},\end{cases}\quad n=1,2,\cdots.$$

所以当 $x\in[-\pi,\pi]$，

$$|x|=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-4}{(2k-1)^2\pi}\cos(2k-1)x.$$

6. 把下列函数展开为 Fourier 级数，它们在一个周期内的定义分别为：

(3) $f(x)=\begin{cases}2-x, & x\in[0,4],\\ x-6, & x\in(4,8).\end{cases}$

解　(3) $f(x)$是以 $T=8$ 为周期的周期函数. 利用其性质.

$$a_0=\frac{1}{4}\int_0^8 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left[\int_0^4(2-x)\mathrm{d}x+\int_4^8(x-6)\mathrm{d}x\right]=0$$

$$a_n=\frac{1}{4}\int_0^8 f(x)\cos\frac{n\pi x}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^4(2-x)\cos\frac{n\pi x}{4}\mathrm{d}x+$$

$$\frac{1}{4}\int_4^8(x-6)\cos\frac{n\pi x}{4}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{-8}{(n\pi)^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数},\\ \dfrac{16}{n^2\pi^2}, & n\text{ 为奇数},\end{cases}\quad n=1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{4}\int_0^8 f(x)\sin\frac{n\pi x}{4}\mathrm{d}x=0,n=1,2,\cdots,$$

故当 $x\in[0,8]$时，$f(x)=\dfrac{16}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi}{4}x.$

另解　f 是以 $T=8$ 为周期的周函数. 所以 $f(x)=f(8+x)$得

$$f(x)=\begin{cases}2+x, & x\in(-4,0),\\ 2-x, & x\in(0,4]\end{cases}=2-|x|,\quad x\in(-4,4].$$

故

$$a_0=\frac{1}{4}\int_{-4}^4 f(x)\mathrm{d}x=0,$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{16}{(2k-1)^2\pi^2}, & n=2k-1,k=1,2,\cdots,\\ 0, & n=2k,\end{cases}$$

$b_n=0,$

故当 $x\in[-4,4]$时，$f(x)=\dfrac{16}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}.$

7. 将下列函数展开为指定的 Fourier 级数：

(2) $f(x)=\begin{cases}0, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right),\\ \pi-x, & x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right],\end{cases}$ 余弦级数.

(4) $f(x)=x-1,x\in[0,2]$，余弦级数，并求常数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的和.

解 (2) 将 $f(x)$作偶延拓,因此有 $b_n=0$,

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4},$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\cos nx\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n-\cos\frac{n\pi}{2}\right),\quad n=1,2,\cdots,\end{aligned}$$

故当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时.

$$f(x)=\frac{\pi}{8}-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\right]\cos nx,$$

当 $x=\frac{\pi}{2}$,$f(x)$的 Fourier 级数收敛于

$$\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)+f\left(\frac{\pi}{2}+0\right)\right]=\frac{\pi}{4}.$$

(4) 将 $f(x)$作偶延拓,则有 $b_n=0$,

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2(x-1)\mathrm{d}x=0$$

$$a_n=\int_0^2(x-1)\cos\frac{n\pi}{2}x\mathrm{d}x=\frac{4}{(n\pi)^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}\dfrac{-8}{(n\pi)^2}, & n\text{ 为奇数},\\ 0, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

故当 $x\in[-2,2]$时,

$$f(x)=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x.$$

于是 $f(0)=-1=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$,即

$$S_1=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}.$$

令
$$S_2=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}+\cdots,$$

则
$$S_2=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\right)=\frac{1}{4}(S_1+S_2),$$

于是
$$S_2=\frac{1}{3}S_1=\frac{\pi^2}{24},$$

故
$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=S_1+S_2=\frac{4}{3}S_1=\frac{\pi^2}{6}.$$

8. 证明:在$[0,\pi]$上下列展开式成立:

(1) $x(\pi-x)=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n^2}$; (2) $x(\pi-x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$.

解 (1) 将 $f(x)=x(\pi-x)$ 作偶延拓. 则有 $b_n=0, n=1,2,\cdots$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\cos nx\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & n=2k-1,\\ \dfrac{-4}{(2k)^2}, & n=2k, k=1,2,\cdots,\end{cases}$$

故 $x\in[0,\pi]$,

$$f(x)=x(\pi-x)=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2nx.$$

(2) 将 $f(x)=x(\pi-x)$ 作奇延拓, 则有 $a_n=0, n=0,1,2,\cdots$.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{-4}{\pi n^3}[(-1)^n-1]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{8}{\pi n^3}, & n\text{ 为奇数},\\ 0, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

故 $x\in[0,\pi]$ 时, $f(x)=x(\pi-x)=\dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$.

9. 利用上题的结论证明:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$;　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$.

解 (1) 由上题的结论(1)可知, 当 $x\in[0,\pi]$ 时,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\left(2n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

从而
$$\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{6}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2},$$

即
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

(2) 由上题(2)有

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}}{(2n-1)^3}=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3},$$

于是 $\dfrac{\pi^2}{4}\times\dfrac{\pi}{8}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$, 即 $\dfrac{\pi^3}{32}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$.

(B)

1. 设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积, 证明 Bessel 不等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$$

成立，其中 a_0,a_n 与 $b_n(n=1,2,\cdots)$ 是 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 系数.

证 令 $S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 为 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数的部分和，则 $[f(x)-S_n(x)]^2\geqslant 0$，于是

$$0\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(x)|^2\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)S_n(x)\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}S_n^2(x)\mathrm{d}x.$$

又因为 $1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos kx,\sin kx,\cdots$ 是正交三角函数系，

所以
$$\int_{-\pi}^{\pi}S_n^2(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x+a_0\sum_{k=1}^{n}\left[a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\mathrm{d}x+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\mathrm{d}x\right]+\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right]^2\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\pi a_0^2}{2}+0+\sum_{k=1}^{n}\left[a_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\mathrm{d}x+b_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\mathrm{d}x\right]$$
$$=\frac{\pi a_0^2}{2}+\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2),$$

由 $a_0,a_k,b_k(k=1,2,\cdots)$ 是 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 系数有

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)S_n(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{n}\left[a_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x+b_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right]$$
$$=\frac{\pi a_0^2}{2}+\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2),$$

于是
$$\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-2\left[\frac{\pi a_0^2}{2}+\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]+\frac{\pi a_0^2}{2}+\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\geqslant 0,$$

即
$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x.$$

又因为 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，所以 $f^2(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积.

因此正项级数 $\frac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)$ 的部分和有界，因而该级数收敛，(正项级数部分和数列为单增数列)且其和

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x.$$

2. 设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数一致收敛于 f，并且 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上平方可积，证明 Parseval 等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$$

成立，其中 a_0,a_n 与 b_n 是 f 在$[-\pi,\pi]$上的 Fourier 系数.

证法一 由于 f 在$[-\pi,\pi]$上的 Fourier 级数$\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$一致收敛于 $f(x)$，所以其部分和函数列 $S_n(x)$一致收敛于函数 $f(x)$，即

$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)\in\mathbf{N}_+$，又 $\forall n>N(\varepsilon)$及 $\forall x\in[-\pi,\pi]$，恒有

$|S_n(x)-f(x)|<\sqrt{\varepsilon}$，即 $|S_n(x)-f(x)|^2<\varepsilon$. 于是

$$\int_{-\pi}^{\pi}|S_n(x)-f(x)|^2\mathrm{d}x<\pi\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|S_n(x)-f(x)|^2\mathrm{d}x=0.$$

由上题的证明可知

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x.$$

证法二 $\overline{A}_n\xlongequal{\text{def}}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+l)\cos nx\mathrm{d}x$，$l$ 为任一常数，则由周期函数的性质

$$\begin{aligned}\overline{A}_n&\xlongequal{t=x+l}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+l}^{\pi+l}f(t)\cdot\cos n(t-l)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos n(t-l)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}(\cos nl)\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}(\sin nl)\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\mathrm{d}t\\&=a_n\cos nl+b_n\sin nl,\quad n=0,1,2,\cdots.\end{aligned}$$

记 $F(x)\xlongequal{\triangle}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$，$F(x)$的 Fourier 系数为 A_n,B_n，则

$$\begin{aligned}A_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t\right]\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\cos nx\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cdot\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cos nx\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\mathrm{d}t\\&=a_n^2+b_n^2,\quad n=0,1,2,\cdots,b_0=0.\end{aligned}$$

又由于 $$F(-x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(-x+t)\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{u=-x+t}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u)f(u)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)f(x+u)\mathrm{d}u=F(x),$$

所以 $F(x)$ 为偶函数，因此 $B_n=0, n=1,2,\cdots$. 由于 $f(x)$ 的 Fourier 级数一致收敛于 f，所以 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，$F(x)$ 在其上连续，则

$$F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos nx$$

$$=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\cos nx, x\in(-\infty,+\infty).$$

令 $x=0$ 便得

$$F(0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

综合练习题

在热辐射理论中，会遇到反常积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x$ 的计算问题（见吴百诗主编《大学物理》下册，西安交通大学出版社，222～224 页），试利用无穷级数的知识计算 I 的值.

解 当 $x>0$ 时，$0<\mathrm{e}^{-x}<1$，则

$$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}=1+\mathrm{e}^{-x}+(\mathrm{e}^{-x})^2+\cdots+(\mathrm{e}^{-x})^n+\cdots,\quad x>0,$$

$$\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}=\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}+\cdots+\mathrm{e}^{-nx}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx},\quad x>0,$$

从而 $$I=\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^3\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(x^3\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}\right)\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\text{定理 3.6}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{+\infty}x^3\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x\right)\xlongequal{\text{分部积分}}6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}.$$

下面计算 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 的值.

由练习 4.4(A)第 5 题(5)知

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x,\quad x\in[-\pi,\pi],$$

即 $$b_n=0,a_0=\pi,a_n=\begin{cases}-\dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{1}{(2k-1)^2}, & n=2k-1,k\in\mathbf{N}_+,\\ 0, & n=2k,\end{cases}$$

又$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|x|^2\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}\pi^2$，由 Parseval 等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2=\frac{1}{2}(\pi)^2+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2k-1)^2}\right)^2 \text{ 成立.}$$

即 $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{\pi^4}{6\times16}.$$

即 $$S_1=1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{6\times16},$$

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)^4}+\frac{1}{(2k)^4}+\cdots,$$

即 $$S=S_1+S_2.$$

$$S_2=\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots+\frac{1}{2^4k^4}+\cdots,$$

即 $$S_2=\frac{1}{2^4}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{k^4}+\cdots\right)=\frac{1}{2^4}(S_1+S_2),$$

所以 $$S_2=\frac{1}{2^4-1}S_1=\frac{1}{15}S_1=\frac{1}{15}\times\frac{\pi^4}{6\times16},$$

所以 $$S=S_1+S_2=\left(\frac{1}{15}+1\right)S_1=\frac{16}{15}\times\frac{\pi^4}{6\times16}=\frac{\pi^4}{15\times6},$$

即 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{15\times6},$$

故 $$I=6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{15}.$$