第三章　一元函数积分学及其应用

习　题　3.1

(A)

1. 用定积分的定义求下列积分的值.

(1) $\int_0^1 x\mathrm{d}x$；　　　　(2) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

解　(1) 因为 $f(x)=x\in C[0,1]$，所以 $f(x)\in\mathscr{R}[0,1]$.

将$[0,1]n$ 等分，则第 k 个区间为$\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$，取 $\xi_k=\frac{k}{n}$，　$k=1,2,\cdots,n$，

由定积分定义 $\int_0^1 x\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}$.

(2) 由于 $\mathrm{e}^x\in\mathscr{R}[0,1]$，故采用(1) 中相同的划分法，与 ξ_k 的取法，则

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\left[1-(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}})^n\right]}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}=\mathrm{e}-1.$$

5. 设 $f\in\mathscr{R}[-a,a]$，根据定积分几何意义说：

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & f\text{ 为奇函数},\\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & f\text{ 为偶函数}.\end{cases}$$

解　$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$ 表示由 $y=f(x)$，$x=a$，$x=-a$，及 x 轴所围面积的代数和. 如果 f 为奇函数，则 f 的图像关于原点对称，则所围图形的正面积与负面积相同. 即$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x$ 大小相等，符号相反，故 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0$. 如果 f 为偶函数，f 的图像关于 y 轴对称，$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x$ 表示两块面积相等，且符号相同，故 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

6. 设 f 是周期为 T 的周期函数，且在任一有限区间上可积. 根据定积分的

几何意义说明：

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 a 为任一常数.

解　因为 f 是周期为 T 的周期函数，由周期函数的几何特性知：任一周期内由 f 所围曲边梯形面积的代数和相同，即 $\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$.

7. 设 $f\in C[a,b]$，试说明任意改变 f 在有限个点上的值不影响它的可积性和积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的值.

解　设将 f 改变有限个点的函数值后所得函数记为 f^*，则由 $f\in C[a,b]$ 知：f^* 只有有限个可去间断点，所以 $f^*\in\mathscr{R}[a,b]$. 为求 $\int_a^b f^*\mathrm{d}x$，则可用某种特殊的分法和取点方式. 现将$[a,b]$划分使 f^* 的所有间断点都是分点，且 ξ_k 不取区间的端点，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f^*\mathrm{d}x$.

8. 研究下列函数在所给区间上的可积性，并说明理由：

(1) $f(x)=x^2+\cos x,\quad x\in(-\infty,+\infty)$；

(2) $f(x)=\operatorname{sgn} x,\quad x\in[-1,1]$；

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2},\quad x\in[-2,2]$；

(4) $f(x)=\tan x,\quad x\in[0,2]$；

(5) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}\quad x\in[-1,1]$

解　(1) 不可积. $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续，但$(-\infty,+\infty)$非有限区间.

(2) 可积. $f(x)$在$[-1,1]$上只有唯一的间断点 $x=0$，且为第Ⅰ类间断点.

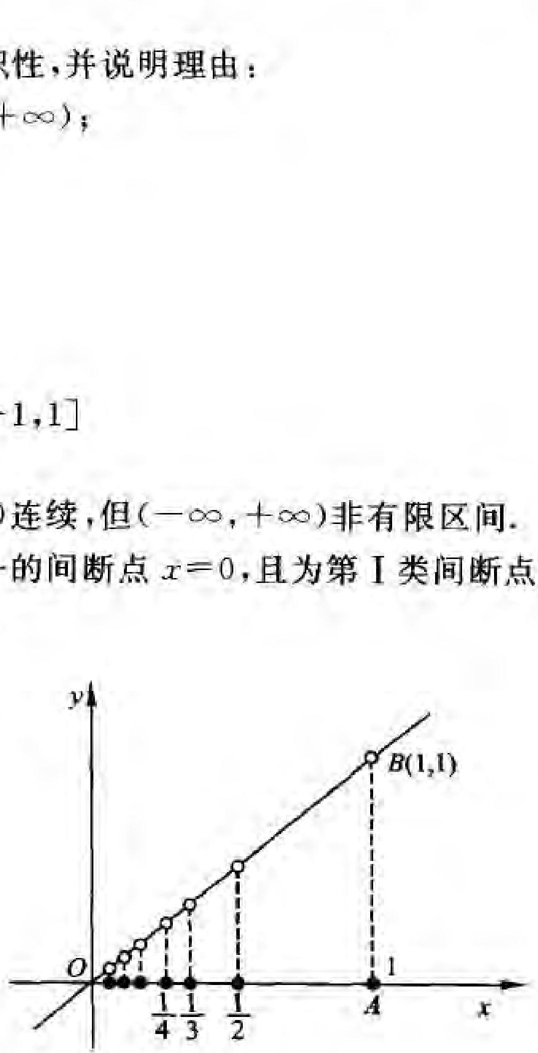
(3) 不可积. $f(x)$在$[-2,2]$上无界.

(4) 不可积. 由于 $f(x)=\tan x$ 在$[0,2]$上无界.

(5) 可积. 因为 $f(x)$在$[-1,1]$上连续.

9. 下列命题是否正确？若正确，给予证明；否则，举出反例：

(1) 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$，则在$[a,b]$上必有 $f(x)\geqslant 0$；



（第 9 题(2)）

(2) 若 $f\in\mathscr{R}[a,b]$,则 f 在$[a,b]$上有有限个间断点;

(3) 若$|f|\in\mathscr{R}[a,b]$,则 $f\in\mathscr{R}[a,b]$;

(4) 若 f 与 g 在$[a,b]$上都不可积,则 $f+g$ 在$[a,b]$上也不可积;

(5) $f\in\mathscr{R}[a,b]\Leftrightarrow f^2\in\mathscr{R}[a,b]$;

(6) 若 $f\in C[a,b]$,$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$,则$\exists c\in(a,b)$,使 $f(c)=0$.

解 (1) 不正确.如$\int_{-1}^2 x\mathrm{d}x=\frac{3}{2}>0$,但 $f(x)=x$ 在$[-1,2]$不定号.

(2) 不正确.例如 $f(x)=\begin{cases}0, & x=\frac{1}{n},n\in\mathbf{N}_+,\\ x, & x\neq\frac{1}{n}.\end{cases}$ $f(x)$在$[0,1]$有无限多个间断点,但 $f(x)$在$[0,1]$上可积,且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\triangle ABO$ 的面积$=\frac{1}{2}$.

(3) 不正确.例如 $f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ -1, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$ 则$|f(x)|=1$ 在$[0,1]$可积,但 $f(x)$不可积.(因为将$[0,1]$任意划分成 n 个小区间,如果在第 k 个子区间上取 ξ_k 为有理点.则积分和 $S_n=\sum\limits_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k=1$,如果在第 k 个子区间上取 ξ_k 为无理点,则积分和 $S_n=-1$.即对同一种分割法,不同的 ξ_k 的取法,和式的极限不同,由定积分定义知 $f(x)$在$[0,1]$上不可积).

(4) 不正确.$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ -1, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$ $g(x)=-f(x)$.由本题(3)知 $f(x)$与 $g(x)$在$[0,1]$上均不可积,但 $f(x)+g(x)=0$ 在$[0,1]$上连续,故可积.

(5) 不正确.由定积分性质 1.5 知:$f\in\mathscr{R}[a,b]\Rightarrow f^2\in\mathscr{R}[a,b]$.但 $f^2\in\mathscr{R}[a,b]$可积,f 不一定可积.如上题中 $f(x)$在$[0,1]$上不可积,但 $f^2(x)=1$ 在$[0,1]$上连续,故可积.

(6) 正确.用反证法,假设$\forall x\in(a,b)$,$f(x)\neq0$,则 $f(x)$在(a,b)上定号.(即 $f(x)$在(a,b)上要么恒正,要么恒负.否则由连续函数的零点定理,必存在 $c\in(a,b)$,使 $f(c)=0$).由定积分的几何意义知,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\neq0$,这与已知矛盾.故原命题成立.

10. 设 $f,g\in C[a,b]$.

(1) 如果在$[a,b]$上 $f(x)\geqslant0$,且 $f(x)\not\equiv0$,证明:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0;$$

(2) 如果在$[a,b]$上 $f(x)\geqslant0$,且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$,证明 $f(x)\equiv0$;

(3) 如果在$[a,b]$上 $f(x)\geqslant g(x)$，且 $f(x)\not\equiv g(x)$，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证　(1) 依题意可知，$\exists x_0\in[a,b]$，使 $f(x_0)>0$，由连续函数的保号性得$\exists\delta>0$ 及 $q>0$，使 $\forall x\in U(x_0,\delta)$，$f(x)\geqslant q>0$，于是

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\int_a^{x_0-\delta} f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_0+\delta}^{b} f(x)\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\mathrm{d}x=q\delta>0.\end{aligned}$$

(2) 假设$\exists x_0\in[a,b]$，使 $f(x_0)\neq 0$. 由(1)知，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$. 而这与已知矛盾. 故 $\forall x\in[a,b]$，$f(x)=0$，即 $f(x)\equiv 0$，$x\in[a,b]$.

(3) 由题设 $F(x)=f(x)-g(x)\geqslant 0$，且 $F(x)\not\equiv 0$. 则由(1)知，$\int_a^b F(x)\mathrm{d}x>0$，即 $\int_a^b (f(x)-g(x))\mathrm{d}x>0$. 由定积分线性性质知，(3)中结论成立.

11. 判别下列积分的大小：

(1) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$；

(2) $\int_1^2 2\sqrt{x}\mathrm{d}x$ 和 $\int_1^2 \left(3-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}\mathrm{d}x$.

解　(1) 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$0\leqslant x^2\leqslant x$，且仅当 $x=0,1$ 时 $x^2=x$. 那么由 e^u 在$[0,1]$上严格单增知，$\mathrm{e}^{x^2}<\mathrm{e}^x(x\in(0,1))$，故

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x>\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x.$$

(2) 令 $F(x)=2\sqrt{x}-3+\frac{1}{x}$，则 $F'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}=\frac{\sqrt{x^3}-1}{x^2}>0$，$x\in(1,2)$，故 $F(x)$ 在$[1,2]$上严格单增. 从而 $F(x)>F(1)=0$，$x\in[1,2]$. 进而 $\int_1^2 2\sqrt{x}\mathrm{d}x>\int_1^2\left(3-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

(3) 令 $F(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$，则 $F'(x)=\frac{x^2}{1+x^2}+\ln(1+x)>0$，$x\in(0,1)$，故 $F(x)$ 在$[0,1]$严格单增. 从而 $F(x)>F(0)=0$. 于是 $\forall x\in[0,1]$，$\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}$. 故 $\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x>\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}\mathrm{d}x$.

12. 证明下列不等式：

(1) $1<\int_0^1 e^{x^2}dx<e$; (2) $84<\int_{-6}^8\sqrt{100-x^2}dx<140$.

证 (1) 因为 $\forall x\in(0,1)$, $1<e^{x^2}<e$, 由第 10 题(1)知, $\int_0^1(e^{x^2}-1)dx>0$, $\int_0^1(e-e^{x^2})dx>0$, 即 $\int_0^1 1\cdot dx<\int_0^1 e^{x^2}dx<\int_0^1 edx$, 而 $\int_0^1 dx=1$, $\int_0^1 edx=e$, 故 $1<\int_0^1 e^{x^2}dx<e$.

(2) 当 $x\in(-6,8)$ 时, $6\leqslant\sqrt{100-x^2}\leqslant10$, 且仅当 $x=0$ 时, $\sqrt{100-x^2}=10$, $x=8$ 时, $\sqrt{100-x^2}=6$. 故由第 10 题(1)

$$\int_{-6}^8(\sqrt{100-x^2}-10)dx<0,\quad \int_{-6}^8(\sqrt{100-x^2}-6)dx>0,$$

故 $$84=\int_{-6}^8 6dx<\int_{-6}^8\sqrt{100-x^2}dx<\int_{-6}^8 10dx=140.$$

13. 利用定理 1.2 证明:若有界函数 f 在有限区间 I 上可积,则 f 在 I 的任一子区间上也可积.

证 由定理 1.2 知,有界函数 f 在 I 上可积 $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当 $d<\delta$ 时, $\sum\limits_{k=1}^n\omega_k\cdot\Delta x_k<\varepsilon$. 任取$[a,b]$的一个子区间$[c,d]\subseteq I$,将$[c,d]$任意分割为 m 个小子区间,以$[c,d]$的划分作为 I 的任一分割的一部分,则

$$\sum_{k=1}^n\omega_k\cdot\Delta x_k=\sum_{I-[c,d]}\omega_k\cdot\Delta x_k+\sum_{[c,d]}\omega_k\cdot\Delta x_k\geqslant\sum_{[c,d]}\omega_k\cdot\Delta x_k,$$

所以对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta^*=\delta>0$, 当 $d<\delta$ 时, $\sum\limits_{[c,d]}\omega_k\cdot\Delta x_k<\varepsilon$, 即由定理 1.2, f 在 I 的任一子区间可积.

14. 设 f 在$[a,b]$上二阶可导, $\forall x\in[a,b]$, $f'(x)>0$, $f''(x)>0$, 证明

$$(b-a)f(a)<\int_a^b f(x)dx<\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)].$$

证 因为 $\forall x\in[a,b]$, $f'(x)>0$, 则 $f(x)$在$[a,b]$上严格单增,从而 $f(x)>f(a)$, $x\in(a,b]$, 故

$$\int_a^b f(x)dx>\int_a^b f(a)dx>(b-a)f(a).$$

下面证明: $$\int_a^b f(x)dx<\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)].$$

因为 $\forall x\in[a,b]$, $f''(x)>0$, 则 $f(x)$在$[a,b]$上严格凸. 从而曲线 $y=f(x)$位于直线 AB: $y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$的上方. 即 $\forall x\in(a,b)$,

$$\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]-f(x)>0.$$

故 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<\int_a^b\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]\mathrm{d}x$$
$$=f(a)(b-a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{(b-a)^2}{2}=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)],$$
其中$\int_a^b(x-a)\mathrm{d}x$表示由$y=0,y=x-a,x=b$所围三角形面积,因此$\int_a^b(x-a)\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^2}{2}$.

(B)

1. 设f与g在任一有限区间上可积.

(1) 如果$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$,那么$f$与$g$在$[a,b]$上是否相等?

(2) 如果在任一区间$[a,b]$上都有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$,那么$f$是否恒等于$g$?

(3) 如果(2)中f与g都是连续函数,那么又有怎样的结论?

解 (1) 不一定. $f(x)=x,g(x)=-x,x\in[-1,1]$,则$g(x)\neq f(x)$,但
$$\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=0=\int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 不一定. 例$f(x)=1,g(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0 & x=0,\end{cases}$ 则$\forall[a,b]\subset\mathbf{R}$,
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=b-a,\text{但 } f(x)\not\equiv g(x).$$

(3) 由习题3.1(A)第10题(2)可知,如果f与g都是连续函数,那么f恒等于g.

3. 设函数f在$[0,a]$上连续,在$(0,a)$内可导,且$3\int_{\frac{2a}{3}}^a f(x)\mathrm{d}x=f(0)a$,证明:$\exists\xi\in(0,a)$,使$f'(\xi)=0$.

证 如果$a=0$,结论显然成立. 如果$a\neq 0$,由于$f\in C[0,a]$. 则$f\in C\left[\frac{2a}{3},a\right]$. 由积分中值定理,$3\int_{\frac{2a}{3}}^a f(x)\mathrm{d}x=af(c)$,其中$c\in\left[\frac{2a}{3},a\right]$,故$f(0)a=af(c)$,由$a\neq 0$知,$f(c)=f(0)$,且$c\neq 0$,从而$f(x)$在$[0,c]$上满足Rolle定理的条件,则$\exists\xi\in(0,c)\subset(0,a)$,使$f'(\xi)=0$.

4. 设f与g在区间$[a,b]$上连续,证明Cauchy不等式:
$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证　因为$\forall\lambda\in\mathbf{R}$，$\int_a^b[\lambda f(x)-g(x)]^2\mathrm{d}x\geqslant0$. 故关于$\lambda$的二次方程

$$\lambda^2\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]+\lambda\left[2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]+\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]=0,$$

要么无实数解，要么有两相等实数解. 从而其根的判别式

$$\Delta=\left[2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2-4\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]\cdot\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]\leqslant0,$$

即
$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

5. f与g在区间$[a,b]$上连续，利用 Cauchy 不等式证明 Minkowski 不等式：

$$\left(\int_a^b[f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证　因为f与g在区间$[a,b]$上连续知，Cauchy 不等式成立，即

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$ 于是

$$\begin{aligned}0&\leqslant\int_a^b[f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\\&=\left[\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2,\end{aligned}$$

故
$$\left[\int_a^b[f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

6. 设f是$[a,b]$上的连续函数，利用 Cauchy 不等式证明：

$$\int_a^b\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\int_a^b\mathrm{e}^{-f(x)}\mathrm{d}x\geqslant(b-a)^2.$$

证　由于$\forall x\in[a,b]$，$\mathrm{e}^{f(x)}$与$\mathrm{e}^{-f(x)}$都是正值函数. 取$h(x)=(\mathrm{e}^{f(x)})^{\frac{1}{2}}$，$g(x)=(\mathrm{e}^{-f(x)})^{\frac{1}{2}}$，由$f\in C[a,b]$知，$h(x)$与$g(x)$在$[a,b]$上连续，由 Cauchy 不等式知：

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b\mathrm{e}^{-f(x)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}&\geqslant\int_a^b(\mathrm{e}^{f(x)})^{\frac{1}{2}}(\mathrm{e}^{-f(x)})^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\mathrm{d}x=b-a>0,\end{aligned}$$

故
$$\int_a^b\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\int_a^b\mathrm{e}^{-f(x)}\mathrm{d}x\geqslant(b-a)^2.$$

习　题　3.2

(A)

3. 用 Newton-Leibniz 公式计算下列定积分：

(4) $\int_{-1}^{1} |x| \mathrm{d}x$；　　(6) 设 $f(x)=\begin{cases} x, & x \leqslant 0, \\ x^2, & x>0, \end{cases}$ 求 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$；

(8) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t \mathrm{d}t$.

解　(4) $\int_{-1}^{1} |x| \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} -x\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}x^2\Big|_{0}^{1} = 1$

或　$\int_{-1}^{1} |x| \mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} |x| \mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} x\mathrm{d}x = x^2\Big|_{0}^{1} = 1$.　($|x|$是偶函数)

(6) $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x^2\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{3}x^3\Big|_{0}^{1} = -\frac{1}{6}.$$

(8) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t\mathrm{d}t = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 t - 1)\mathrm{d}t = (\tan t - t)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$.

4. 求下列函数的导数：

(5) $y = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} \ln(1+t^6)\mathrm{d}t$；

(6) $y = \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2)\mathrm{d}t$.

(7) $y = \int_{x^2}^{x^3} (x+t)\varphi(t)\mathrm{d}t$，其中 φ 为连续函数.

解　(5) $y = \int_{0}^{\sqrt[3]{x}} \ln(1+t^2)\mathrm{d}t + \int_{\sqrt{x}}^{0} \ln(1+t^6)\mathrm{d}t$，于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \ln\left[1+(\sqrt[3]{x})^2\right]\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \ln(1+x^3)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(6) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{0} \cos(\pi t^2)\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{0}^{\cos x} \cos(\pi t^2)\mathrm{d}t$

$$= -\cos(\pi\sin^2 x)\cos x - \cos(\pi\cos^2 x)\sin x.$$

(7) $y = x\int_{x^2}^{x^3} \varphi(t)\mathrm{d}t + \int_{x^2}^{x^3} t\varphi(t)\mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\int_{x^2}^{x^3}\varphi(t)\mathrm{d}t+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{x^3}\varphi(t)\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{x^3}t\varphi(t)\mathrm{d}t,\\&=\int_{x^2}^{x^3}\varphi(t)\mathrm{d}t+x[3x^2\varphi(x^3)-2x\varphi(x^2)]\\&\quad+[3x^2\cdot x^3\varphi(x^3)-2x\cdot x^2\varphi(x^2)]\\&=\int_{x^2}^{x^3}\varphi(t)\mathrm{d}t+3x^3(1+x^2)\varphi(x^3)-2x^2(1+x)\varphi(x^2).\end{aligned}$$

5. 指出下列运算中有无错误，错在何处：

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{x^2}\sqrt{t+1}\mathrm{d}t\right)=\sqrt{x^2+1}$；

(2) $\int_0^{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{t+1}\right)\mathrm{d}t=\sqrt{x^2+1}$；

(3) $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|\Big|_{-1}^{1}=0$；

(4) $\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos^2x}\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{2\pi}=0$.

解 (1) 有错误. 由复合函数求导法及微积分第一基本定理可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{x^2}\sqrt{t+1}\mathrm{d}t\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\left(\int_0^{x^2}\sqrt{t+1}\mathrm{d}t\right)\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x}=2x\sqrt{x^2+1}.$$

(2) 有错误. $\int_0^{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sqrt{t+1})\mathrm{d}t=\sqrt{t+1}\Big|_0^{x^2}=\sqrt{x^2+1}-1$.

(3) 有错误. $\frac{1}{x}$ 在$[-1,1]$无界，则 $\frac{1}{x}$ 在$[-1,1]$不可积.

(4) 有错误. $\sqrt{1-\cos^2x}=|\sin x|$，当 $x\in[0,2\pi]$. 故正确的解法为

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos^2x}\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}|\sin x|\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin x)\mathrm{d}x=4.$$

6. 求由参数方程 $x=\int_0^t\sin^2u\mathrm{d}u, y=\int_0^{t^2}\cos\sqrt{u}\mathrm{d}u$ 所确定的函数 $y=f(x)$的一阶导数.

解 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sin^2t, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2t\cos t$，故 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{2t\cos t}{\sin^2t}$.

7. 求由方程 $\int_0^y e^{t^2}\mathrm{d}t+\int_0^{x^2}te^t\mathrm{d}t=0$ 所确定隐函数 $y=f(x)$的一阶导数.

解 方程两边同时对 x 求导可得

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)e^{y^2}+2x(x^2e^{x^2})=0,\quad 故\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-2x^3e^{x^2-y^2}.$$

9. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t}{\sin^3 x}$； (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x (\arctan t)^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}$

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t}{x^3}\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$.

(2) 原式 $\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\arctan x)^2}{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}=\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2=\dfrac{\pi^2}{4}$.

10. 求函数 $y=\int_0^x \sqrt{t}(t-1)(t+1)^2\,\mathrm{d}t$ 的定义域，单调区间和极值点.

解 定义域为 $[0,+\infty)$. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{x}(x-1)(x+1)^2$，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{(x-1)(x+1)^2}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}(x+1)^2+2\sqrt{x}(x-1)(x+1).$$

令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=0,x_2=1$.

当 $0<x<1$ 时，$y'<0$；当 $x>1$ 时，$y'>0$.

故单减区间 $(0,1)$，单增区间 $(1,+\infty)$，$x=1$ 为极小值点. 无极大值点.

11. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant0,\\ \sin x, & x>0.\end{cases}$

(1) 求函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$； (2) 讨论函数 $F(x)$ 的连续性和可导性.

解 (1) 若 $x=0$，$F(x)=F(0)=0$；

若 $x>0$，$F(x)=\int_0^x \sin t\,\mathrm{d}t=-\cos t\Big|_0^x=1-\cos x$；

若 $x<0$，$F(x)=\int_0^x t^2\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}t^3\Big|_0^x=\dfrac{1}{3}x^3$.

故
$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3, & x<0,\\ 1-\cos x, & x\geqslant0.\end{cases}$$

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(1-\cos x)=0$，$\lim\limits_{x\to0^-}F(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{3}x^3=0$，所以 $F(0+0)=F(0-0)=F(0)$，即 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

又由于 $\dfrac{1}{3}x^3$，$1-\cos x$ 分别是 $(-\infty,0)$ 与 $(0,+\infty)$ 上的连续可微函数，因此 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上可导.

又因为 $F'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$，

$$F'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x}=0.$$

故 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导. 综上所述 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续可导.

12. 如果函数 f 在有限区间 I 上连续, F 为 f 在 I 上的一个原函数, 试问下列式子哪些正确? 哪些不正确? 为什么?

(1) $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)+C$　(其中 a 为 I 中一点, C 为一个常数).

解　若 $C=-F(a)$ 结论正确, 否则不正确.

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(t)\mathrm{d}t=F'(x)$.

解　错误. $\int f(t)\mathrm{d}t=F(t)+C$ (C 为任意常数). 但是 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(t)\mathrm{d}t=0$.

(3) $\int f(x)\mathrm{d}x=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C$ (C 为任意常数).

解　正确. 由于 $f(x)\in C(I)$, 由微积分第一基本定理知, $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.

(4) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(t)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x$.

解　不正确. 因为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(t)\mathrm{d}t=0$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$.

(5) $\int_a^x F'(x)\mathrm{d}x=\int F'(x)\mathrm{d}x$.

解　不正确. $\int_a^x F'(x)\mathrm{d}x=F(x)-F(a)$, $\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$ (C 为任意常数),

(6) $\int_0^x F'(x)\mathrm{d}x=F(x)$.

解　不正确. $\int_0^x F'(x)\mathrm{d}x=F(x)-F(0)$.

13. 求下列不定积分:

(4) $$\int 2^{x-1}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int 2^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(2\mathrm{e})^x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(2\mathrm{e})^x\ln(2\mathrm{e})+C$$
$$=\frac{1}{2}(1+\ln 2)(2\mathrm{e})^x+C.$$

(6) $$\int\frac{\cos 2t}{\cos^2 t\sin^2 t}\mathrm{d}t=\int\frac{\cos^2 t-\sin^2 t}{\cos^2 t\cdot\sin^2 t}\mathrm{d}t=\int\frac{1}{\sin^2 t}\mathrm{d}t-\int\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$$
$$=-\cot t-\tan t+C.$$

14. 设 f 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，并且在(a,b)内，$f'(x)\leqslant 0$. 证明：$F(x)=\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在(a,b)内单调减.

证 $$F'(x)=\frac{1}{(x-a)^2}\left[-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+f(x)(x-a)\right]$$
$$=\frac{1}{(x-a)^2}[-f(\xi)(x-a)+f(x)(x-a)] \qquad (a\leqslant\xi\leqslant x)$$
$$=\frac{f(x)-f(\xi)}{x-a}=f'(c)\frac{x-\xi}{x-a}\leqslant 0, \qquad c\in(\xi,x),$$
故 $F(x)$在(a,b)内单调减.

(B)

1. 设 f 在区间$[a,b]$上可积，证明函数 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$上连续.

证 由 $f\in\mathscr{R}[a,b]$知，f 在$[a,b]$上有界，即$\exists M>0$，$\forall x\in[a,b]$，$|f(x)|\leqslant M$. 又 $\forall x_0\in[a,b]$，$|F(x)-F(x_0)|=\left|\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{x_0}f(t)\mathrm{d}t\right|=\left|\displaystyle\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\left|\displaystyle\int_{x_0}^x|f(t)|\mathrm{d}t\right|\leqslant M|x-x_0|$. 从而$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}>0$，$\forall x\in U\left(x_0,\dfrac{\varepsilon}{M}\right)$恒有$|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon$. 即$\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=F(x_0)$. 也即 $F(x)$在 x_0 处连续. 由 x_0 的任意性知 $F(x)$在$[a,b]$上连续.

2. 试确定 a,b 的值，使 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\displaystyle\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t}{bx-\sin x}=1$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\displaystyle\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t}{bx-\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{a+x}}\right)\dfrac{1}{b-\cos x}=1$，且

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt{a+x}}=0$，所以$\lim\limits_{x\to0}(b-\cos x)=0$，即 $b=1$.

又因为当 $x\to0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，于是

进而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt{a+t}}\cdot\dfrac{1}{b-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt{a+t}}\cdot\dfrac{1}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{\sqrt{a+x}}=1$，

进而$\lim\limits_{x\to0}\sqrt{a+x}=2$，即$\sqrt{a}=2$，从而 $a=4$.

3. 设函数 f 在 $x=1$ 的邻域内可导，且 $f(1)=0$，$\lim\limits_{x\to1}f'(x)=1$，计算 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\displaystyle\int_1^x\left(t\int_t^1 f(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t}{(1-x)^3}$.

解　原式$\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\int_x^1 f(u)\mathrm{d}u}{-3(1-x)^2}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\int_x^1 f(u)\mathrm{d}u-xf(x)}{6(1-x)}$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to1}\frac{-2f(x)-xf'(x)}{-6}=\lim_{x\to1}\frac{1}{6}xf'(x)=\frac{1}{6}.$$

4. 证明推论 1.2 中 ξ 可在开区间(a,b)内取得，即若 $f\in C[a,b]$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$.

证　$f\in C[a,b]$，由微积分第一基本定理，$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$上可导. 对 $\Phi(x)$在$[a,b]$上运用 Lagrange 微分中值定理，$\exists\,\xi\in(a,b)$，使

$$\Phi(b)-\Phi(a)=\Phi'(\xi)(b-a).$$

注意到 $\Phi(a)=0$，$\Phi'(\xi)=f(\xi)$. 故 $\exists\,\xi\in(a,b)$，使 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=f(\xi)(b-a)$.

5. 设函数 f 在$[a,c]$上连续，在(a,c)内可导，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_b^c f(x)\mathrm{d}x=0$，其中 $b\in(a,c)$，证明至少存在一点 $\xi\in(a,c)$，使 $f'(\xi)=0$.

证　因为 $f\in C[a,c]$，由上题知：$\exists\,\xi_1\in(a,b)$，$\xi_2\in(b,c)$，使 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi_1)(b-a)$，$\int_b^c f(x)\mathrm{d}x=f(\xi_2)(c-b)$. 从而 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$，对 $f(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$上应用 Rolle 定理，$\exists\,\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,c)$，使 $f'(\xi)=0$.

6. 设 $f,g\in C[a,b]$，证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$使

$$f(\xi)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x=g(\xi)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x.$$

证　令 $F(u)=\int_a^u f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_u^b g(x)\mathrm{d}x$，则 $F(u)$在$[a,b]$上可导，且 $F(a)=F(b)=0$，于是 $F(u)$在$[a,b]$上满足 Rolle 定理条件，故 $\exists\,\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$，即

$$f(\xi)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x=g(\xi)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x.$$

习　题　3.3

(A)

1. 利用不定积分换元法则(Ⅰ)计算下列不定积分：

(4) $\int x^2(3+2x^3)^{\frac{1}{5}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{6}(3+2x^3)^{\frac{1}{5}}\mathrm{d}(3+2x^3)$

$$= \frac{1}{7}(3+2x^3)^{\frac{7}{6}} + C$$

(5) $\int \frac{3x^3+x}{1+x^4}dx = \int \frac{3x^3}{1+x^4}dx + \int \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{3}{4}\int \frac{d(x^4+1)}{1+x^4} + \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{1+(x^2)^2}$

$$= \frac{3}{4}\ln(1+x^4) + \frac{1}{2}\arctan x^2 + C.$$

(6) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \sqrt{1+\sqrt{x}}d(\sqrt{x}+1) = \frac{4}{3}(1+\sqrt{x})^{\frac{3}{2}} + C.$

(7) $\int \frac{\cos\ln|x|}{x}dx = \int \cos\ln|x|\,d\ln|x| = \sin(\ln|x|) + C.$

(8) $\int \frac{\ln\ln x}{x\ln x}dx = \int \ln\ln x\,d\ln\ln x = \frac{1}{2}(\ln\ln x)^2 + C.$

(9) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}d\sin x = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C.$

(10) $\int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 2x + \frac{\cos 4x+1}{2}\right)dx$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x + \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C.$$

(12) $\int \sec^4 x dx = \int \sec^2 x \cdot \sec^2 x dx = \int (\tan^2 x + 1)d\tan x$

$$= \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + C.$$

(13) $\int \csc^3 x \cot x dx = -\int \csc^2 x d\csc x = -\frac{1}{3}\csc^3 x + C.$

(14) **解法一** $\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^{-x}dx}{e^{-x}(1+e^x)} = -\int \frac{d(e^{-x}+1)}{e^{-x}+1}$

$$= -\ln(1+e^{-x}) + C.$$

解法二 $\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{(1+e^x)-e^x}{1+e^x}dx = \int dx - \int \frac{d(e^x+1)}{1+e^x}$

$$= x - \ln(1+e^x) + C.$$

解法三 $\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^x dx}{e^x(1+e^x)} = \int \left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{1+e^x}\right)de^x$

$$= x - \ln(1+e^x) + C.$$

(15) **解法一** $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{\csc^2 x}{\csc^2 x + 1}dx = \int \frac{-d\cot x}{\cot^2 x + 2}$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\cot x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

解法二 $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{\sec^2 x\,dx}{\sec^2 x + \tan^2 x} = \int \frac{d\tan x}{1+2\tan^2 x}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x) + C.$$

(16) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} e^{-\sqrt{1+x^2}} dx = \int e^{-\sqrt{1+x^2}} d\sqrt{1+x^2} = -e^{-\sqrt{1+x^2}} + C.$

(18) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}\arccos\frac{x}{2}} = \int \frac{-d\arccos\frac{x}{2}}{\arccos\frac{x}{2}} = -\ln\left|\arccos\frac{x}{2}\right| + C.$

(20) $\int \frac{dx}{x^2-2x+3} = \int \frac{dx}{2+(x-1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\frac{x-1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.$$

(21) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} = \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}\left(x-\frac{1}{2}\right) + C.$

(22) $\int \frac{\sin x\cos x}{1-\sin^4 x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d\sin^2 x}{1-(\sin^2 x)^2} = \frac{1}{4}\ln\frac{1+\sin^2 x}{1-\sin^2 x} + C.$

(23) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[5]{\sin x - \cos x}}dx = \int (\sin x - \cos x)^{-\frac{1}{5}} d(\sin x - \cos x)$

$$= \frac{5}{4}(\sin x - \cos x)^{\frac{4}{5}} + C.$$

(24) $\int \frac{dx}{e^x + e^{\frac{x}{2}}} = \int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}}+1)} = \int e^{-\frac{x}{2}}dx - \int \frac{(1+e^{\frac{x}{2}})-e^{\frac{x}{2}}}{1+e^{\frac{x}{2}}}dx$

$$= -2e^{-\frac{x}{2}} - x + 2\ln(1+e^{\frac{x}{2}}) + C.$$

2. 证明下列各式($m,n\in\mathbf{N}_+$)：

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n; \end{cases}$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n; \end{cases}$

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0$

证　(1) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]dx$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{n+m}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0, & m \neq n, \\ \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2m}\sin 2mx\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi, & m = n. \end{cases}$$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x]dx$

$$=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \pi, & m=n.\end{cases}$$

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x]dx=0.$

3. 利用不定积分换元法则(Ⅱ)计算下列不定积分:

(4) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\xlongequal[t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)]{x=a\sin t}\int\frac{a^2\sin^2t}{a\cos t}\cdot a\cos t\,dt=\frac{a^2}{2}\int(1-\cos 2t)dt$

$$=\frac{a^2}{2}t-\frac{a^2}{4}\sin 2t+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

(6) $\int\frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{x^2d(1+x^2)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\xlongequal{t=\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{2}\int\frac{t^2-1}{t^3}\cdot 2tdt$

$$=t+\frac{1}{t}+C=\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

(7) $\int\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x^2}dx=\int\frac{1}{|x|}\sqrt{1+2x}\,dx.$

令 $u=\sqrt{1+\frac{2}{x}}=\frac{\sqrt{x^2+2x}}{|x|}$(当 $x\in(-\infty,-2]$时,取 $u\in[0,1)$;当 $x\in(0,+\infty)$时,取 $u\in(1,+\infty)$),则 $dx=\frac{-4udu}{(u^2-1)^2}$,于是当 $x\in(-\infty,-2]$,即 $u=-\frac{1}{x}\sqrt{x^2+2x}$时,

$$\int\frac{1}{|x|}\sqrt{1+\frac{2}{x}}dx=\int-\frac{2u^2}{1-u^2}du$$
$$=\int\left(2+\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du$$
$$=2u+\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C$$
$$=-\frac{2\sqrt{x^2+2x}}{x}+\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+2x}}{x-\sqrt{x^2-2x}}\right|+C.$$

同理可得当 $x\in(0,+\infty)$时,上式也成立.故

$$\int\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x^2}dx=-\frac{2}{x}\sqrt{x^2+2x}+\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x}+x}{\sqrt{x^2+2x}-x}\right|+C.$$

(8) $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}}\xlongequal{x+1=u}\int\frac{\frac{1}{2}du^2}{u^2\sqrt{u^2+2}}$

$$\xlongequal{t=\sqrt{u^2+2}}\frac{1}{2}\int\frac{2t\mathrm{d}t}{(t^2-2)t}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{2}}\right|+C.$$

(9) $$\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{\ln x}\mathrm{d}\ln x\xlongequal{t=\sqrt{1+\ln x}}\int\frac{t}{t^2-1}\cdot 2t\mathrm{d}t$$

$$=2\int\frac{(t^2-1)+1}{t^2-1}\mathrm{d}t=2t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=2\sqrt{1+\ln x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+\ln x}-1}{\sqrt{1+\ln x}+1}\right|+C.$$

(10) $$\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{3\mathrm{e}^x-2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{3\mathrm{e}^x-2}}\mathrm{d}(3\mathrm{e}^x-2)$$

$$=\frac{1}{9}\int\left(\sqrt{3\mathrm{e}^x-2}+\frac{2}{\sqrt{3\mathrm{e}^x-2}}\right)\mathrm{d}(3\mathrm{e}^x-2)$$

$$=\frac{2}{27}(3\mathrm{e}^x-2)^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{9}\sqrt{3\mathrm{e}^x-2}+C$$

$$=\frac{2}{27}(3\mathrm{e}^x+4)\sqrt{3\mathrm{e}^x-2}+C.$$

(11) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$=\int\frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}=\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

(12) $$\int x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x=\int\frac{x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{-\frac{1}{2}\mathrm{d}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=-\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\arcsin x+C.$$

其中 $$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\xlongequal[t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)]{x=\sin t}\int\sin^2 t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t+C$$

$$=\frac{1}{2}(\arcsin x-x\sqrt{1-x^2})+C.$$

(13) $$\int\sqrt{e^{2x}+5}\,dx \xlongequal[t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)]{\frac{1}{\sqrt{5}}e^x=\tan t}\int\sqrt{5}\sec t\,\frac{\sec^2 t}{\tan t}dt$$

$$=-\sqrt{5}\int\left[\frac{1}{(1-\cos^2 t)}-\frac{1}{\cos^2 t}\right]d\cos t$$

$$=-\frac{\sqrt{5}}{2}\ln\left|\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right|+\sqrt{5}\,\frac{1}{\cos t}+C$$

$$=-\frac{\sqrt{5}}{2}\ln\left|(\sqrt{e^{2x}+5}+\sqrt{5})/(\sqrt{5}-\sqrt{e^{2x}+5})\right|$$

$$+\sqrt{e^{2x}+5}+C.$$

4. 求下列定积分的值：

(2) $$\int_0^1\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int_0^1\frac{de^x}{e^{2x}+1}=\arctan e^x\Big|_0^1=\arctan e-\frac{\pi}{4}.$$

(4) $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\,|\sin x|\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\sin x\,dx-\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\sqrt{\cos x}\sin x\,dx=\frac{4}{3}.$$

(6) $$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx\xlongequal{x=\sin t}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^2 t\,dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\csc^2 t-1)dt=1-\frac{\pi}{4}.$$

(8) $$\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\,dx=\int_0^{\pi}\sqrt{2}\,|\cos x|\,dx$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)dx$$

$$=2\sqrt{2}.$$

5. 设 f 在$[-a,a]$上连续，利用定积分的换元法证明：

(1) 如果 $f(x)$为奇函数，那么 $\int_{-a}^a f(x)dx=0$；

(2) 如果 $f(x)$为偶函数，那么 $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$；

(3) 计算 $\int_{-1}^1|x|\left(x^2+\frac{\sin^3 x}{1+\cos x}\right)dx$.

证 (1) 由 $f(x)$为奇函数知：$\int_{-a}^a f(x)dx\xlongequal{t=-x}\int_a^{-a}-f(-t)dt=-\int_{-a}^a f(t)dt$，

故
$$\int_{-a}^a f(t)dt=0.$$

(2) 由 f 为偶函数知：$\int_{-a}^0 f(x)dx\xlongequal{x=-t}\int_a^0 f(-t)d(-t)=\int_0^a f(t)dt$，

从而 $$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x+\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 利用(1)、(2)结论，则

$$\int_{-1}^{1}|x|\left(x^{2}+\frac{\sin^{3} x}{1+\cos x}\right)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{1}|x| x^{2}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{1} x^{3}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

6. 设 $f(x)$ 为连续的周期函数，其周期为 T，利用定积分换元法证明

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x \quad (a \text{ 为常数}).$$

证　由于

$$\int_{T}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=T+t} \int_{0}^{a} f(T+t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t,$$

因而 $$\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x+\int_{T}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x.$$

7. 利用分部积分法计算下列积分：

(2) $$\int x^{3}\operatorname{ch} x\mathrm{d}x=\int x^{3}\mathrm{d}\operatorname{sh} x=x^{3}\operatorname{sh} x-3\int x^{2}\mathrm{d}\operatorname{ch} x$$

$$=x^{3}\operatorname{sh} x-3x^{2}\operatorname{ch} x+6\int x\mathrm{d}\operatorname{sh} x$$

$$=x^{3}\operatorname{sh} x-3x^{2}\operatorname{ch} x+6x\operatorname{sh} x-6\operatorname{ch} x+C.$$

(5) $$\int \frac{x\mathrm{e}^{x}}{(1+\mathrm{e}^{x})^{2}}\mathrm{d}x=\int -x\mathrm{d}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}=-\frac{x}{1+\mathrm{e}^{x}}+\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{x}}$$

$$=-\frac{x}{1+\mathrm{e}^{x}}+\int \frac{1+\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{x}{1+\mathrm{e}^{x}}+x-\ln(1+\mathrm{e}^{x})+C.$$

(6) $$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x=-2\int \arcsin x\mathrm{d}\sqrt{1-x}$$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin x+2\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x$$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin x+4\sqrt{1+x}+C.$$

(8) $$\int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}\mathrm{d}x \xlongequal{t=\sqrt{x}} \int(t\sin t)(2t\mathrm{d}t)=-2\int t^{2}\mathrm{d}\cos t$$

$$=-2t^{2}\cos t+4\int t\mathrm{d}\sin t$$

$$=-2t^{2}\cos t+4t\sin t+4\cos t+C.$$

$$=(4-2x)\cos\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+C.$$

(9) $\int_0^{e-1}\ln(1+x)\mathrm{d}x=(x+1)\ln(1+x)\Big|_0^{e-1}-\int_0^{e-1}(1+x)\mathrm{d}\ln(1+x)=1.$

(11) $\int x\sin x\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int -x\mathrm{d}\cos 2x=-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+C.$

(12) $\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x=x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x$

$$=x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)-\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x,$$

故 $$\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x=\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C.$$

(13) $\int\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)e^x\mathrm{d}x=e^x\ln x+C.$

其中：$\int\frac{1}{x}e^x\mathrm{d}x=\int e^x\mathrm{d}\ln x=e^x\ln x-\int\ln x\mathrm{d}e^x=e^x\ln x-\int e^x\ln x\mathrm{d}x.$

8. 证明下列递推公式($n=2,3,\cdots$)：

(1) 设 $I_n=\int\tan^n x\mathrm{d}x$，则 $I_n=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2}$；

(2) 设 $I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x}$，则 $I_n=\frac{1}{1-n}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$.

证 (1) $I_n=\int\tan^{n-2}x(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\int\tan^{n-2}x\mathrm{d}\tan x-I_{n-2}$

$$=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2}.$$

(2) $I_n=-\int\frac{\mathrm{d}\cot x}{\sin^{n-2}x}=-\frac{\cot x}{\sin^{n-2}x}-\int\frac{(\cot x)(n-2)\cos x}{\sin^{n-1}x}\mathrm{d}x$

$$=-\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}-(n-2)\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^n x}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}-(n-2)I_n+(n-2)I_{n-2},$$

从而 $$I_n=\frac{-1}{n-1}\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}.$$

9. 计算下列积分：

(1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+3x^2}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+3}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$

(2) $\int\frac{t}{t^4+10t^2+9}\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\int\left(\frac{t}{t^2+1}-\frac{t}{t^2+9}\right)\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{16}[\ln(1+t^2)-\ln(t^2+9)]+C.$$

(3) $\int\frac{x^2}{(x-1)^{100}}\mathrm{d}x=\int\frac{(x^2-1)+1}{(x-1)^{100}}\mathrm{d}x=\int\frac{(x-1)+2}{(x-1)^{99}}\mathrm{d}x+\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{100}}$

$$=\int\frac{dx}{(x-1)^{98}}+\int\frac{2dx}{(x-1)^{99}}+\int\frac{dx}{(x-1)^{100}}$$

$$=-\frac{1}{97}\frac{1}{(x-1)^{97}}-\frac{1}{49(x-1)^{98}}-\frac{1}{99(x-1)^{99}}+C.$$

(4) $\int\frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{2x^6}{1+x^7}\right)dx=\ln|x|-\frac{2}{7}\ln(1+x^7)+C.$

(5) $\int\frac{dx}{3+2\cos x}=\int\frac{dx}{1+2(1+\cos x)}=\int\frac{dx}{1+4\cos^2\frac{x}{2}}=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}+4}dx$

$$=2\int\frac{d\tan\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+5}=\frac{2}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\tan\frac{x}{2}\right)+C.$$

(6) $\int\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx=\ln|\sin x+\cos x|+C.$

(7) $\int\frac{x^2}{a^2-x^6}dx=\frac{1}{3}\int\frac{dx^3}{a^2-(x^3)^2}=\frac{1}{6a}\ln\left|\frac{a+x^3}{a-x^3}\right|+C.$

(8) $\int\frac{x^{11}dx}{x^8+4x^4+5}=\frac{1}{4}\int\left(1-\frac{4x^4+5}{(x^4+2)^2+1}\right)\cdot dx^4$

$$=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{4}\int\frac{4(x^4+2)-3}{(x^4+2)^2+1}dx^4$$

$$=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}\ln|1+(x^4+2)^2|+\frac{3}{4}\arctan(x^4+2)+C.$$

(9) $\int\frac{\ln\tan x}{\sin x\cos x}=\int\frac{\ln\tan x}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int\frac{\ln\tan x}{\tan x}d\tan x$

$$=\int\ln(\tan x)d\ln(\tan x)$$

$$=\frac{1}{2}\ln^2(\tan x)+C.$$

(10) $\int\frac{\cos 2x}{1+\sin x\cos x}dx=\int\frac{\cos 2x}{1+\frac{1}{2}\sin 2x}dx=\int\frac{d\,\frac{1}{2}\sin 2x}{1+\frac{1}{2}\sin 2x}$

$$=\ln\left|1+\frac{1}{2}\sin 2x\right|+C.$$

(11) $\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx-\int\frac{-\sin x}{1+\cos x}dx$

$$= \int x \mathrm{d}\tan\frac{x}{2} - \ln(1+\cos x)$$

$$= x\tan\frac{x}{2} - \int \tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x - \ln(1+\cos x)$$

$$= x\tan\frac{x}{2} + 2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| - \ln(1+\cos x) + C$$

$$= x\tan\frac{x}{2} + C' \quad (C' = C - \ln 2).$$

(12) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x.$

解法一 $\frac{x^2+1}{x^4+1} = \frac{x^2+1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2}x+1)^2+1} + \frac{1}{(\sqrt{2}x-1)^2+1},$$

原式 $= \frac{1}{\sqrt{2}}[\arctan(\sqrt{2}x+1) + \arctan(\sqrt{2}x-1)] + C.$

解法二 在任何不包含 0 的区间内

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+1} = \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} = \frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)'}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right)' \overset{\text{def}}{=} (F(x))',$$

故
$$\int f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} F(x)+C_1, & x\in(0,+\infty), \\ F(x)+C_2, & x\in(-\infty,0). \end{cases}$$

又由于被积函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，故应在 $(-\infty,+\infty)$ 内求其原函数，因此应在上式补充定义原函数在 $x=0$ 点的值，使原函数在 $x=0$ 处连续. 又因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}(F(x)+C_1) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+C_1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}(F(x)+C_2) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}+C_2$，令 $-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+C_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}+C_2 = C$，于是
$$\int f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+C, & x>0, \\ C, & x=0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+C, & x<0. \end{cases}$$

(14) $\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x.$

解法一 原式 $= I = \int \frac{(\sin x-\cos x)+\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

$$=-\int\frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}+\int\frac{(\cos x+\sin x)-\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=-\ln|\sin x+\cos x|+x-I.$$

故 $$I=\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+\frac{1}{2}x+C.$$

解法二 $$I=\int\frac{\sin(\cos x-\sin x)}{\cos^2 x-\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\int\left(\frac{\sin x\cos x}{2\cos^2 x-1}-\frac{1-\cos 2x}{2\cos 2x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(2\cos^2 x-1)}{2\cos^2 x-1}-\int\frac{1}{2}(\sec 2x-1)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|2\cos^2 x-1|-\frac{1}{4}\ln|\sec 2x+\tan 2x|+\frac{1}{2}x+C.$$

解法三 $$I=\int\frac{\sin x(\cos x-\sin x)}{\cos^2 x-\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{\sin 2x}{2\cos 2x}-\frac{1-\cos 2x}{2\cos 2x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int(\tan 2x-\sec 2x+1)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|\cos 2x|-\frac{1}{4}\ln|\sec 2x+\tan 2x|+\frac{x}{2}+C.$$

解法四 令 $\tan x=t$ 得

$I=\int\frac{\tan x}{\tan x+1}\mathrm{d}x=\int\frac{t\mathrm{d}t}{(t+1)(t^2+1)}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{t+1}{t^2+1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$，可以积出.

解法五 令 $\cot x=t$，

$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cot x}=-\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(1+t^2)}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{t-1}{1+t^2}-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$，可以积出.

解法六 令 $\tan\frac{x}{2}=t$ 得.

$I=\int\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1+t}{1+t^2}-\frac{1-t}{1+2t-t^2}\right)\mathrm{d}t$，可以积出.

解法七

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\sin x}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}x\xlongequal{t=x-\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos t}\mathrm{d}t$$

$=\frac{1}{2}\int\frac{\sin t+\cos t}{\cos t}\mathrm{d}t$，可以积出.

解法八

$$I=\int\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}x,$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(1-\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

(15) $$\int\frac{x^2-1+3}{(x-1)^4}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{x-1+2}{(x-1)^3}+\frac{3}{(x-1)^4}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int\left(\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{3}{(x-1)^4}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)^3}+C.$$

(16) $$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\mathrm{d}x\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\int t\sqrt{t+1}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=-\int\frac{1}{t}\sqrt{t+1}\mathrm{d}t\xlongequal{u=\sqrt{t+1}}-\int\frac{u}{u^2-1}2u\mathrm{d}u$$

$$=-\int\left(2+\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u$$

$$=-2u+\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}\right|+C.$$

10. 证明下列积分等式(其中 f 为连续函数)：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x.$

证　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x\xlongequal{t=\frac{\pi}{2}-x}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t)(-\mathrm{d}t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x.$

(2) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]\mathrm{d}x.$

证　$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\xlongequal{x=a+(b-a)t}\int_0^1 f[a+(b-a)t][(b-a)\mathrm{d}t]$，得证.

(3) $\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x=\int_0^1 x^n(1-x)^m\mathrm{d}x$

证　左 $\xlongequal{t=1-x}\int_1^0(1-t)^m t^n(-\mathrm{d}t)=\int_0^1 t^n(1-t)^m\mathrm{d}t=$ 右.

(4) $\int_0^a x^3 f(x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{a^2}xf(x)\mathrm{d}x.$

证 $\int_0^a x^3 f(x^2)\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{1}{2}x^2 f(x^2)\mathrm{d}x^2 \xlongequal{t=x^2} \int_0^{a^2} \frac{1}{2}tf(t)\mathrm{d}t$

$= \frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)\mathrm{d}x.$

(B)

1. 证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^m x\mathrm{d}x = \frac{1}{2^m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\mathrm{d}x(m=0,1,2,\cdots)$.

证 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^m x\mathrm{d}x = \frac{1}{2^m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2^{m+1}}\int_0^{\pi} \sin^m t\mathrm{d}t(t=2x)$

$= \frac{1}{2^{m+1}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m t\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^m t\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{2^m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m t\mathrm{d}t.$

$\Bigg($由本习题(A)第 10 题(1)知 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m t\mathrm{d}t$，而

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^m t\mathrm{d}t \xlongequal{u=t-\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin\left(u+\frac{\pi}{2}\right)\right]^m \mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m u\mathrm{d}u.\Bigg)$$

2. 计算 $\int_0^{n\pi} \sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x(n\in \mathbf{N}_+)$.

解 因为$\sqrt{1-\sin 2x}$是周期函数，且最小正周期为 π，所以由习题 3.3(A)第 6 题

$$\int_0^{n\pi} \sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x = n\int_0^{\pi} \sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x = n\int_0^{\pi} |\sin x - \cos x|\mathrm{d}x$$

$$= n\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x)\mathrm{d}x\right]$$

$$= 2\sqrt{2}n.$$

3. 计算 $\int_0^{10\pi} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2\sin^2 x + \cos^4 x}\mathrm{d}x$.

解 被积函数是周期为 $T=2\pi$ 的周期函数，且 $\sin^3 x$ 为奇函数，所以

$$\text{原式} = 5\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^3 x}{2\sin^2 x + \cos^4 x}\mathrm{d}x + 5\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x + \cos^4 x}\mathrm{d}x$$

$$= 10\int_0^{\pi} \frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x + \cos^4 x}\mathrm{d}x$$

$$= 10\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x + \cos^4 x}\mathrm{d}x + 10\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos^3 x\mathrm{d}x}{2\sin^2 x + \cos^4 x}.$$

又因为 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x + \cos^4 x}\mathrm{d}x \xlongequal{-u=\frac{\pi}{2}-x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{\sin^3 u}{2\cos^2 u + \sin^4 u}\mathrm{d}u$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x \xlongequal{t=\frac{\pi}{2}-x} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin^3 t}{2\cos^2 t+\sin^4 t}(-\mathrm{d}t),$$

故原式$=0$.

4. 计算$\int_0^{n\pi} x\,|\sin x|\,\mathrm{d}x \quad (n\in \mathbf{N}_+)$.

解 $I=\int_0^{n\pi} x\,|\sin x|\,\mathrm{d}x \xlongequal{u=n\pi-x} \int_0^{n\pi}(n\pi-u)\,|\sin u|\,\mathrm{d}u$,

即 $I=n\pi\int_0^{n\pi}|\sin u|-I$,故 $I=\frac{1}{2}n\pi\int_0^{n\pi}|\sin u|\,\mathrm{d}u$.

又因为$|\sin u|$是周期为π的周期函数,故

$$I=\frac{1}{2}n^2\pi\left(\int_0^{\pi}\sin u\mathrm{d}u\right)=n^2\pi.$$

5. 计算$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x &= x\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}-\int_{\frac{1}{2}}^{2}x\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x\\ &=\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}-\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

故原式$=\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}$.

6. 计算$\int\frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int\frac{(x+1-1)\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\mathrm{d}x+\int\mathrm{e}^x\frac{-1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x\\ &=\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}-\int\frac{1}{1+x}\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}+C.\end{aligned}$$

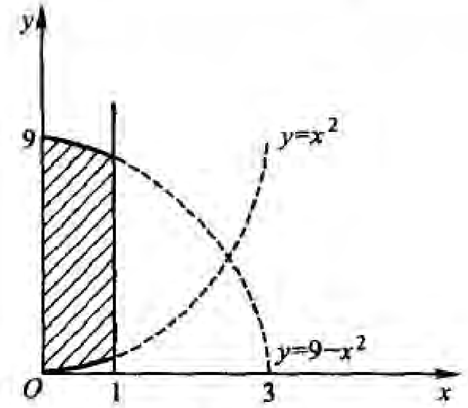
习 题 3.4

(A)

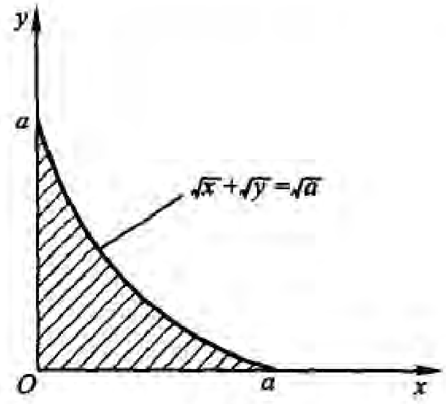
1. 求由下列各曲线围成平面图形的面积:

(1) 曲线 $y=9-x^2$, $y=x^2$ 与直线 $x=0$, $x=1$.

解 如图所示,面积元为 $\mathrm{d}A=[(9-x^2)-x^2]\mathrm{d}x=(9-2x^2)\mathrm{d}x$,从而所求面积为 $A=\int_0^1(9-2x^2)\mathrm{d}x=\frac{25}{3}$.



（第 1 题(1)）



（第 1 题(3)）

(3) 曲线$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}(a>0)$与坐标轴.

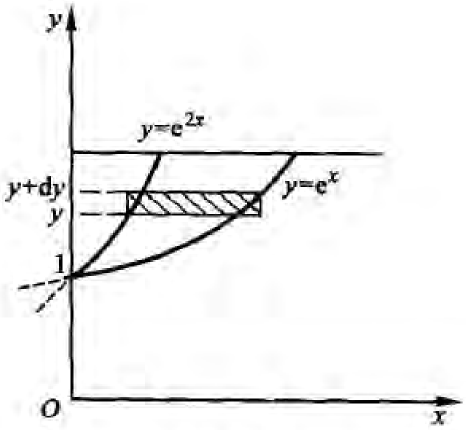
解　如图所示，面积元 $dA=(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2 dx$，于是所求面积为

$$A=\int_0^a(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2 dx=\frac{1}{6}a^2.$$

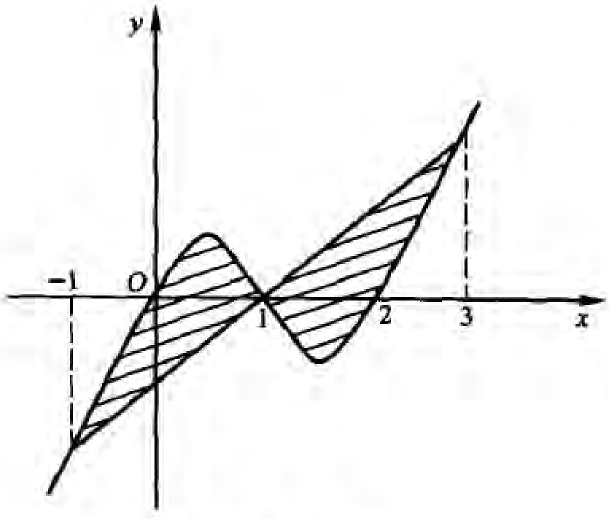
(4) 曲线 $y=e^x$，$y=e^{2x}$ 与直线 $y=2$.

解　面积元 $dA=\left(\ln y-\frac{1}{2}\ln y\right)dy=\frac{1}{2}\ln y dy$，

所求面积 $A=\int_1^2\frac{1}{2}\ln y dy=\frac{1}{2}(2\ln 2-1)$.



（第 1 题(4)）



（第 1 题(5)）

(5) $y=x(x-1)(x-2)$与直线 $y=3(x-1)$.

解　面积元

$$\begin{aligned}dA&=|x(x-1)(x-2)-3(x-1)|dx\\&=-|x-1|(x^2-2x-3)dx, x\in[-1,3].\end{aligned}$$

故所求面积

$$A=\int_{-1}^{3}-|x-1|(x^2-2x-3)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-1}^{1}(x-1)(x^2-2x-3)\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}-(x-1)(x^2-2x-3)\mathrm{d}x=8.$$

(6) 闭曲线 $y^2=x^2-x^4$.

解　令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,代入可得曲线的极坐标方程 $\rho^2\cos^4\theta=\cos 2\theta\geqslant 0$,故 $\theta\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi\right)$,从而位于第一象限的面积 A_1.

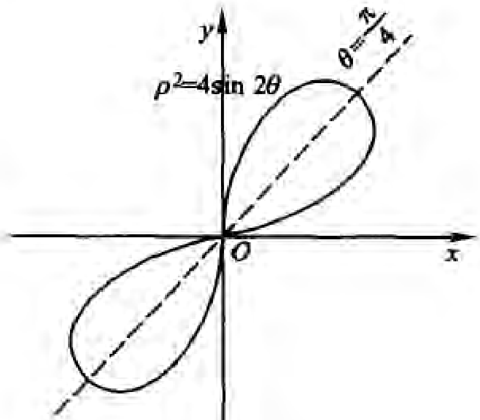
$$A_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\frac{\cos 2\theta}{\cos^4\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{2\cos^2\theta}\mathrm{d}\tan\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\tan^2\theta)\mathrm{d}\tan\theta=\frac{1}{3}.$$ 于是总面积 $A=4A_1=\frac{4}{3}$.

(7) 双纽线 $\rho^2=4\sin 2\theta$.

解　$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$.

如图所示位于第一象限的面积 A_1 等于总面积 A 的 $\frac{1}{2}$.

而　$A_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin 2\theta\mathrm{d}\theta=2$,故 $A=4$.

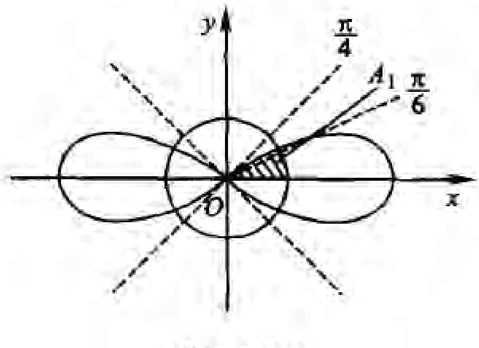


(第 1 题(7))

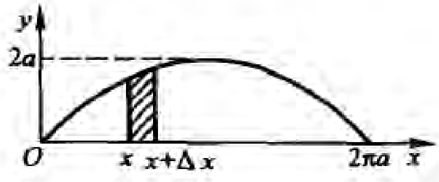
(8) 双纽线 $\rho^2=2\cos 2\theta$ 与圆 $\rho=1$ 围成图形的公共部分.

解　如图所示总面积 A 等于 A_1 的 4 倍.

$$A=4A_1=4\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}1^2\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}2\cos 2\theta\mathrm{d}\theta\right]$$
$$=2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}.$$



(第 1 题(8))



(第 1 题(9))

(9) 摆线$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$的一拱$(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$与 x 轴.

解　如图所示,所求面积为

$$A=\int_0^{2\pi a} y\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\mathrm{d}a(t-\sin t)=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\mathrm{d}t=3\pi a^2.$$

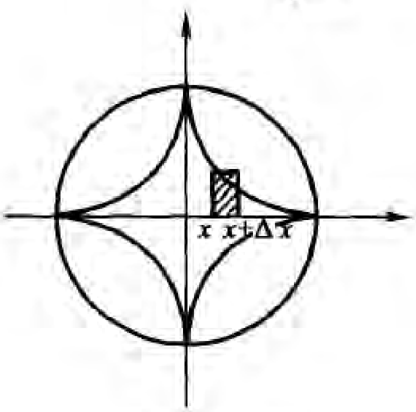
(10) 星形线$\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$外,圆 $x^2+y^2=a^2$ 内的部分.

解　由星形线所围的区域的面积 A_0.

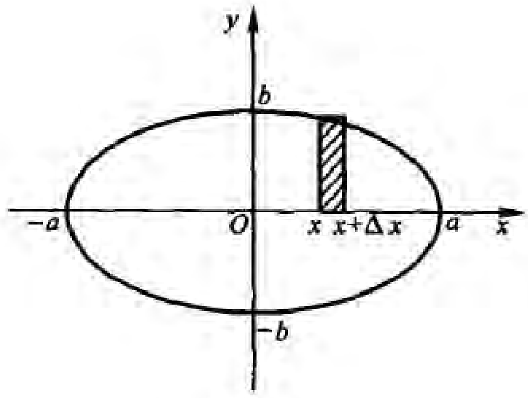
$$A_0=4\int_0^a y\mathrm{d}x=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 -a\sin^3 t\cdot(3a\cos^2 t\sin t)\mathrm{d}t=\frac{3}{8}\pi a^2,$$

故所求面积 $A=A_{圆}-A_0=\pi a^2-\dfrac{3}{8}\pi a^2$

$$=\frac{5}{8}\pi a^2.$$



(第 1 题(10))



(第 2 题(1))

2. 求下列各曲线围成的图形按指定轴旋转所产生旋转体的体积:

(1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$分别绕 x 轴与 y 轴.

解　绕 x 轴旋转

$$\mathrm{d}V_x=\pi y^2\mathrm{d}x$$

$$V_x=\int_{-a}^a \pi b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

类似的方法可得绕 y 轴旋转的体积 $V_y=\dfrac{4}{3}\pi a^2 b$.

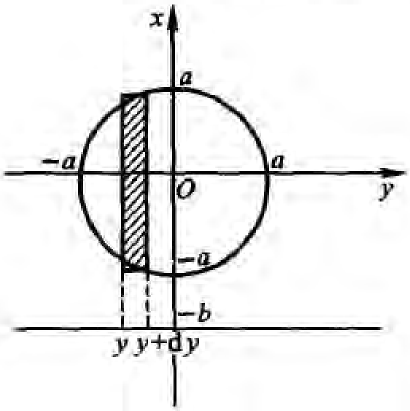
(3) $x^2+y^2=a^2$ 绕直线 $x=-b$　$(b>a>0)$.

$$\mathrm{d}V=\pi[(\sqrt{a^2-y^2}+b)^2-(-\sqrt{a^2-y^2}+b)^2]\mathrm{d}y$$

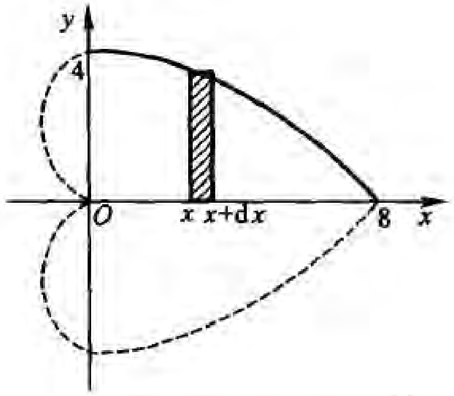
$$V=\pi\int_{-a}^a[(b+\sqrt{a^2-y^2})^2-(b-\sqrt{a^2-y^2})^2]\mathrm{d}y$$

$$=2\pi\int_0^a\left[(b+\sqrt{a^2-y^2})^2-(b-\sqrt{a^2-y^2})^2\right]\mathrm{d}y$$

$$=8b\pi\int_0^a\sqrt{a^2-y^2}\,\mathrm{d}y=2\pi^2a^2b.$$



(第 2 题(3))



(第 2 题(4))

(4) 心形线 $\rho=4(1+\cos\theta)$，射线 $\theta=0$ 及 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，绕极轴旋转的体积.

$$V=\int_0^8\pi y^2\,\mathrm{d}x$$

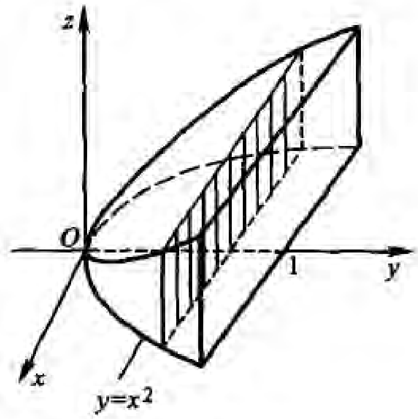
$$=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0\left[4(1+\cos\theta)\sin\theta\right]^2\mathrm{d}4(1+\cos\theta)\cos\theta$$

$$=64\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta(1+\cos\theta)^2(1+2\cos\theta)\mathrm{d}(-\cos\theta)$$

$$=64\pi\int_0^1(1-u^2)(1+u)^2(1+2u)\mathrm{d}u=160\pi.$$

(5) 摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 的一拱$(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$与 x 轴，绕 y 轴，其中 $a>0$.

(第 2 题(5))



(第 3 题(1))

解　$\Delta V \approx [\pi(x+\Delta x)^2 - \pi x^2]y$，

$$dV = 2\pi xy\,dx,$$

$$V = \int_0^{2\pi a} 2\pi xy\,dx = \int_0^{2\pi} [2\pi a(t-\sin t)a(1-\cos t)]\,da(t-\sin t) = 3\pi^3 a^3.$$

3. 立体底面为抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=1$ 围成的图形，而任一垂直于 y 轴的截面分别是：(1) 正方形；(2) 等边三角形；(3) 半圆形. 求各种情况下立体的体积.

解　(1) 截面的边长为 $2\sqrt{y}$，则截面积为 $4y$，故立体体积为 $V=\int_0^1 4y\,dy = 2$.

(2) 由于截面为等边三角形，则截面面积 $\frac{1}{2}(2\sqrt{y})\left(\sqrt{y}\tan\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}y$.

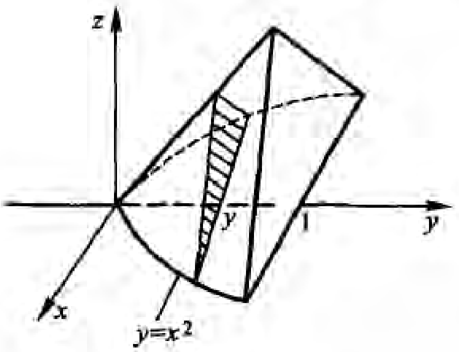
则宽度为 dy 的薄片体积

$$\Delta V \approx \sqrt{3}y\,dy,$$

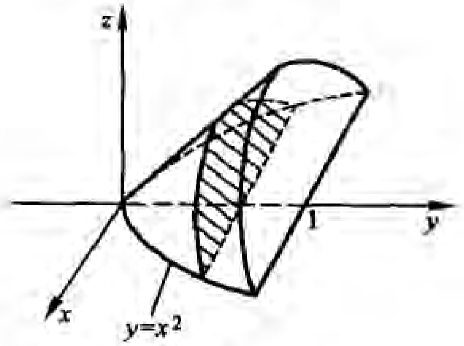
故

$$V = \int_0^1 \sqrt{3}y\,dy = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(3) 半圆形截面面积为 $\frac{1}{2}\pi(\sqrt{y})^2 = \pi y/2$，故 $V=\int_0^1 \frac{1}{2}\pi y\,dy = \frac{\pi}{4}$.



(第 3 题(2))



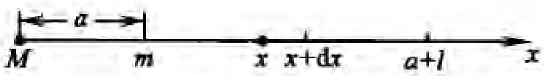
(第 3 题(3))

4. 两质点的质量分别为 M 和 m，相距为 a，现将质点 m 沿两质点连线向外移动距离 l，求克服引力所做的功.

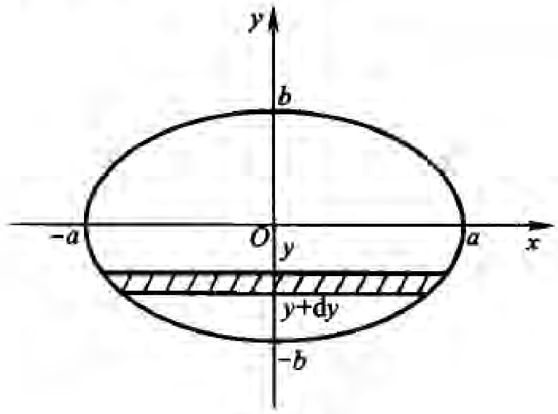
解　如图所示建立坐标系，由万有引力定律知：相距为 x 的质量为 m、M 的两质点间的引力大小为 $f=k\frac{Mm}{x^2}$（其中 k 为引力常数），于是将 m 由 x 移到 $x+dx$ 时克服引力所做的功微元为

$dW = f\cdot dx = k\frac{Mm}{x^2}\cdot dx$，故所求功为

$$W = \int_a^{a+l} kmM\frac{1}{x^2}dx = kmM\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+l}\right).$$



（第 4 题）



（第 6 题）

6. 将长、短半径分别为 a 与 b 的一椭圆板铅直放入水中，长为 $2a$ 的轴与水面平行.

（1）如果水面刚好淹没该板的一半；

（2）如果水面刚好淹没该板.

分别求两种情况下该板一侧受到的水压力.

解　如图所示建立坐标系，则椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

（1）图中细条受到水压力的近似值(压力微元)为

$$\mathrm{d}F=P\cdot\mathrm{d}A=\rho g(-y)\cdot 2x\mathrm{d}y=-2gya\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}y$$

P 为该细条上各点处压强的近似值，ρ 为水的密度，g 为重力加速度，$\mathrm{d}A=2x\mathrm{d}y$ 为该细条的面积. 故所受压力

$$F=\int_{-b}^{0}-2g\frac{a}{b}y\sqrt{b^2-y^2}\mathrm{d}y=\frac{2}{3}gab^2.$$

（2）水面平行于 $y=b$ 时，细条受到的压力近似值

$$\mathrm{d}F=\rho g(b-y)\cdot 2x\mathrm{d}y=2g(b-y)\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\mathrm{d}y.$$

故所求压力

$$F=\int_{-b}^{b}\frac{2ga}{b}(b-y)\sqrt{b^2-y^2}\mathrm{d}y=\pi gab^2.$$

7. 以下各种容器中均装满水，分别求把各容器中的水全部从容器口抽出克服重力所作的功：

（1）容器为圆柱形，高为 H，底半径为 R；

（2）容器为圆锥形，高为 H，底半径为 R；

（3）容器为圆台形，高为 H，上底半径为 R，下底半径为 r，且 $R>r$；

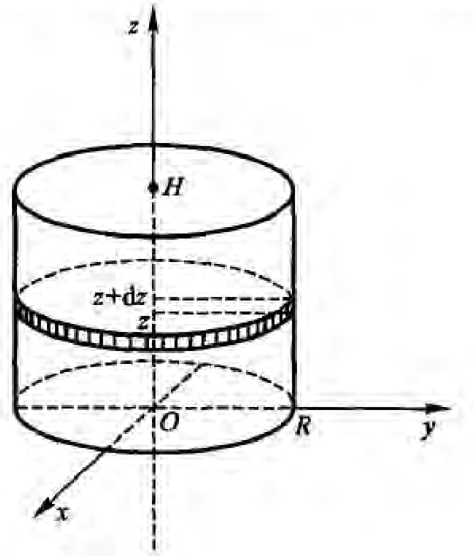
(4) 容器为抛物线 $y=x^2(0\leqslant x\leqslant 2)$ 的弧段绕 y 轴旋转所产生的旋转面。

解　(1) 如图所示建立坐标系，与区间 $[z,z+\mathrm{d}z]$ 对应一薄层水体积的近似值 $\mathrm{d}V=\pi R^2\mathrm{d}z$. 将这一薄层水抽到容器口所经过的位移近似看作相同的，等于 $H-z$，则克服重力所做的功为

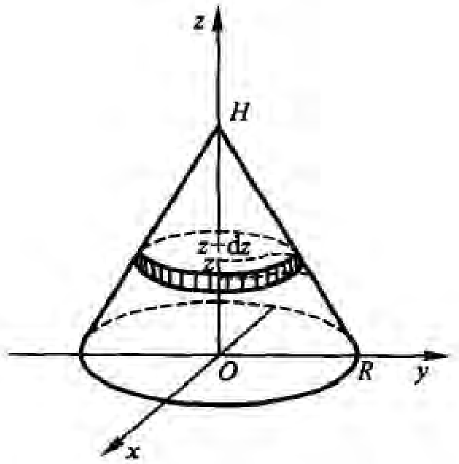
$$\mathrm{d}W=(\rho g\cdot\pi R^2\mathrm{d}z)(H-z),$$

故
$$W=\int_0^H\pi\rho gR^2(H-z)\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\pi\rho gR^2H^2=\frac{1}{2}\pi gR^2H^2.$$

其中 g 为重力加速度，ρ 为水的密度.



(第 7 题(1))



(第 7 题(2))

(2) 设水高为 z 的水面半径为 r_z，则 $\dfrac{H-z}{H}=\dfrac{r_z}{R}$，从而 $r_z=\dfrac{R}{H}(H-z)$，则功微元

$$\mathrm{d}W=\rho g\cdot\pi\left[\frac{R}{H}(H-z)\right]^2\mathrm{d}z\cdot(H-z)=\frac{\pi gR^2}{H^2}(H-z)^3\mathrm{d}z,$$

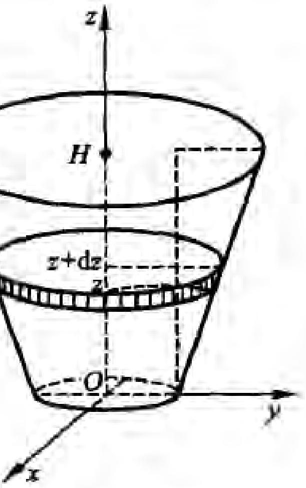
$$W=\int_0^H\frac{\pi gR^2}{H^2}(H-z)^3\mathrm{d}z=\frac{1}{4}\pi gR^2H^2.$$

(3) 如图所示建立坐标系，水深 $H-z$ 处的水面半径为 y. 则 $\dfrac{y-r}{R-r}=\dfrac{z}{H}$，

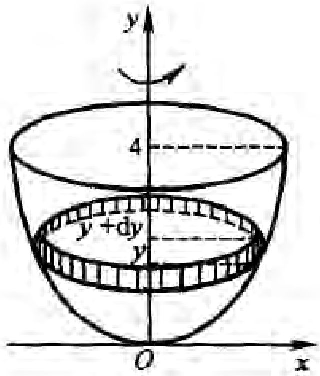
则
$$y=r+\frac{R-r}{H}z.$$

功微元
$$\mathrm{d}W=\rho g\cdot\pi\left[r+\frac{R-r}{H}z\right]^2\mathrm{d}z(H-z),$$

$$W=\int_0^H\frac{\pi g}{H^2}[(R-r)z+rH]^2(H-z)\mathrm{d}z=\frac{1}{12}\pi gH^2(R^2+2Rr+3r^2).$$



（第 7 题(3)）



（第 7 题(4)）

（4）如图所示

$$dW=g\pi x^2(4-y)dy=\pi gy(4-y)dy,$$

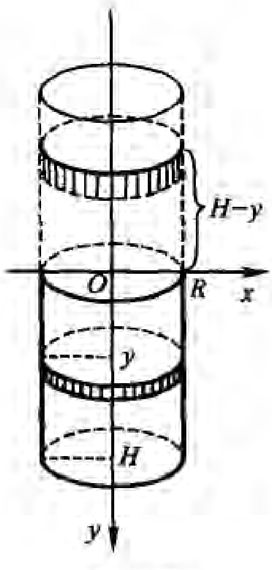
$$W=\int_0^4 \pi g(4y-y^2)dy=\frac{32}{3}\pi g.$$

8. 一圆柱形物体，底半径为 R，高为 H，该物体铅直立于水中，且上底面与水面相齐. 现将它铅直打捞出来，试对下列两种情况分别计算使该物体刚刚脱离水面时需要作的功：

（1）该物体的密度 $\mu=1$（与水的密度相等）；

（2）该物体的密度 $\mu>1$.

解 如图所示建立坐标系.



（第 8 题）

将相应于$[y,y+\Delta y]$间的薄片铅直打捞出水面，既要克服自身的重力，又要克服浮力作功，在水中的位移为$(-y)$，出水后的位移为$[-(H-y)]$. 在水中所受合力微元为 $g(1-\mu)dV$. 出水后的受力微元为$-g\mu dV$. 于是

$$\begin{aligned} dW &=(-y)g(1-\mu)dV+[-(H-y)(-g\mu dV)] \\ &=g(H\mu-y)\cdot\pi R^2dy. \end{aligned}$$

（1）若 $\mu=1$，则 $dW=g(H-y)\pi R^2dy$，

$$W=\int_0^H \pi R^2g(H-y)dy=\frac{1}{2}\pi R^2gH^2.$$

（2）若 $\mu>1$，则 $dW=\pi R^2g(H\mu-y)dy$，

$$W=\int_0^H \pi R^2g(H\mu-y)dy=\frac{1}{2}\pi gR^2H^2(2\mu-1).$$

9. 一个半径为 R 的半圆环导线，均匀带电，电荷密度为 δ. 在圆心处放置一个带电量为 q 的点电荷，求它们之间的作用力.

解 如图所示建立坐标系. 在半圆周上点(x,y)处任取长度为 ds 的弧段,则由 Coulomb 定律知,ds 对原点处点电荷引力的近似值为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=k\frac{q(\delta \mathrm{d}s)}{x^2+y^2}\boldsymbol{r}_0=kq\delta\frac{(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2},$$

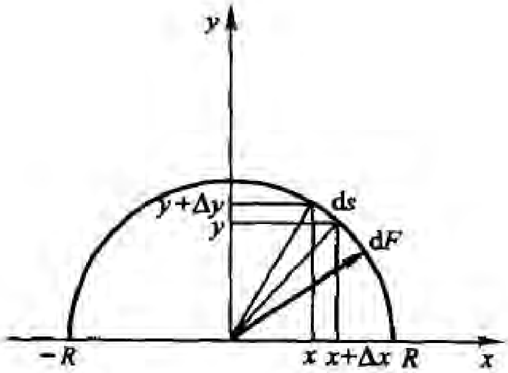
其中 $\Delta s^2\approx\Delta x^2+\Delta y^2\approx(\mathrm{d}x)^2+\mathrm{d}y^2=\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right](\mathrm{d}x)^2=\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)(\mathrm{d}x)^2$,

故 $$\mathrm{d}s=\frac{1}{|y|}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{|y|}R\mathrm{d}y=\frac{1}{y}R\mathrm{d}y,$$

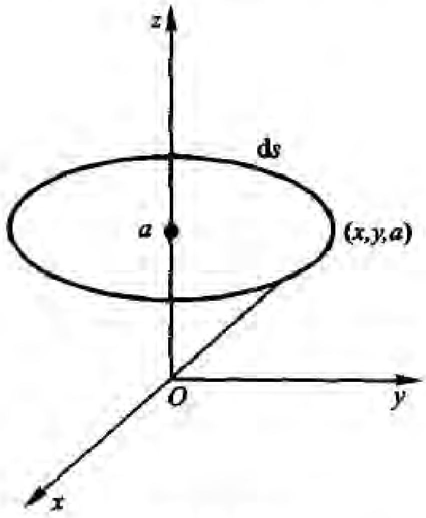
于是 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 在 x,y 方向的分量分别为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_y=\frac{kq\delta}{R^2}\frac{y}{|y|}\mathrm{d}x=\frac{kq\delta}{R^2}\mathrm{d}x,\mathrm{d}\boldsymbol{F}_x=\frac{kq\delta x}{R^2 y}\mathrm{d}x.$$

由对称性可知,合力在 x 轴上的分量等于零. 故合力大小 $F=F_y=\int_{-R}^{R}\frac{kq\delta}{R^2}\mathrm{d}x=\frac{2kq\delta}{R}$,方向与 y 轴一致.



(第 9 题)



(第 10 题)

10. 一个半径为 R 的圆环导线,均匀带电,电荷密度为 δ. 在过圆心且垂直于环所在平面的直线上与圆心相距为 a 之处有一个带电量为 q 的点电荷. 求导线与点电荷之间的作用力.

解 如图所示建立坐标系,则圆环的方程为$\begin{cases}z=a,\\x^2+y^2=R^2\end{cases}$在圆环上点$(x,y,a)$处取一小段圆弧 ds,则 $\mathrm{d}s\approx\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\approx\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+(-x/y)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{|y|}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x=\frac{R}{|y|}\mathrm{d}x$. 将 ds 视作一点. 则点电荷 δds 对原点

处的点电荷的引力为 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\frac{kq\delta \mathrm{d}s}{x^2+y^2+a^2}\boldsymbol{r}_0$（$\boldsymbol{r}_0$ 是与向径同向的单位向量，则 $\boldsymbol{r}_0=\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+a\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}$，且 $x^2+y^2+a^2=R^2+a^2$）于是 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\frac{kq\delta R}{(R^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{|y|}\mathrm{d}x(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+a\boldsymbol{k})$，由对称性可知. 合力在 x，y 方向的分量等于零，而且左半圆弧与右半圆弧对原点处点电荷的引力大小相等，故这个引力大小等于其在 z 轴上的分力 $F_z=F_{z左}+F_{z右}$，方向与 z 轴一致.

而
$$F_{z右}=\int_{-R}^{R}\mathrm{d}F_z=\int_{-R}^{R}\frac{kq\delta R}{(R^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{a}{y}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{akq\delta R}{(R^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\int_{-R}^{R}\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2akq\delta R}{(R^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\int_{0}^{R}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$
$$=\frac{\pi akq\delta R}{(R^2+a^2)^{\frac{3}{2}}},$$

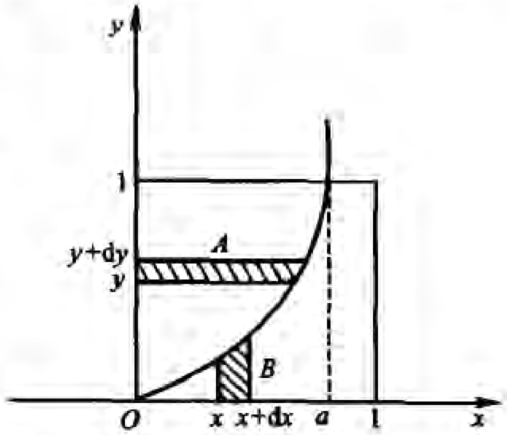
故
$$\boldsymbol{F}=\frac{2\pi akq\delta R}{(R^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{k}.$$

11. 曲线 $a^2y=x^2(0<a<1)$ 将图中边长为 1 的正方形分成 A，B 两部分.

(1) 分别求 A 绕 y 轴旋转一周与 B 绕 x 轴旋转一周所得两旋转体的体积 V_A 与 V_B；

(2) 当 a 取何值时，$V_A=V_B$?

(3) 当 a 取何值时，V_A+V_B 取得最小值?



（第 11 题）

解　(1) A 绕 y 轴一周的体积为 V_A，
$$V_A=\int_0^1\pi x^2\mathrm{d}y$$
$$=\pi\int_0^1 a^2y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\pi a^2.$$

B 绕 x 轴一周的体积
$$V_B=\int_0^a\pi y^2\mathrm{d}x+\pi 1^2(1-a)=\int_0^a\pi\frac{x^4}{a^4}\mathrm{d}x+\pi(1-a)$$
$$=\frac{1}{5}\pi a+\pi-\pi a=\pi\left(1-\frac{4}{5}a\right).$$

(2) 要使 $V_a=V_B$，则 $a=\frac{\sqrt{66}-4}{5}$.

(3) 令 $V(a)=V_a+V_B=\frac{1}{2}\pi a^2+\pi\left(1-\frac{4}{5}a\right)=\frac{\pi}{10}(5a^2-8a+10)$，$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}a}=0$ 得

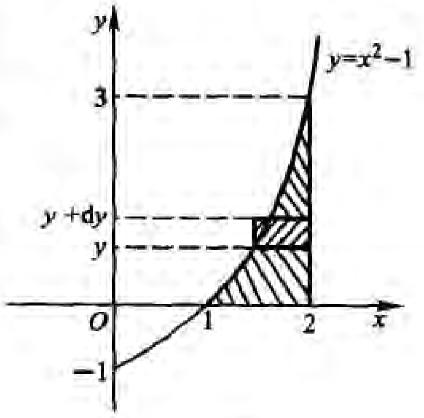
驻点 $a=\frac{4}{5}$，又 $\left.\frac{d^2v}{da^2}\right|_{\frac{4}{5}}=\pi>0$，故 $a=\frac{4}{5}$ 处 $V(a)$ 取得最小值 $\frac{34}{50}\pi$.

12. 设有立体，过 x 轴上点 $x(a\leqslant x\leqslant b)$ 处作垂直于 x 轴的平面截该立体的截面面积为已知连续函数 $S(x)$，立体两端点处的截面（可以缩为一点）分别对应于 $x=a$ 与 $x=b$. 证明：该立体的体积 $V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x$.

解 当 $\mathrm{d}x$ 足够小时，介于截面 $S(x)$（过 x 轴上 x 点处垂直于 x 轴的平面截立体所得截面）与截面 $S(x+\Delta x)$（过 x 轴上的 $x+\Delta x$ 处垂直于 x 轴的平面截立体所得截面）之间的立体薄片可近似的看作以 $S(x)$ 为底面，高为 Δx 的柱体. 则此薄片体积的近似值 $\mathrm{d}V=S(x)\Delta x$. 故由定积分定义，立体的体积 $V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x$.

(B)

2. 一开口容器的侧面与底面分别为由曲线段 $y=x^2-1(1\leqslant x\leqslant 2)$ 和直线段 $y=0(0\leqslant x\leqslant 1)$ 绕 y 轴旋转而成. 现以 $2\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$ 的速度向容器内注水. 试求当水面高度上升到容器深度一半时水面上升的速度. 设坐标轴上长度单位为 m.



（第 2 题）

解 t 时刻容器内水面的高度为 $h(t)(\mathrm{m})$，容器内水的体积为 $2t(\mathrm{m}^3)$. 于是有

$$2t=\int_0^{h(t)}\mathrm{d}V=\int_0^{h(t)}\pi(2^2-x^2)\mathrm{d}y$$
$$=\pi\int_0^{h(t)}(4-y-1)\mathrm{d}y,$$

从而
$$2t=\pi\left(3y-\frac{1}{2}y^2\right)_0^{h(t)},$$

即
$$2t=\left[3h(t)-\frac{1}{2}h^2(t)\right]\pi,$$

两边同时对 t 求导
$$2=[3h'(t)-h(t)h'(t)]\pi,$$

故
$$h'(t)=\frac{2}{[3-h(t)]\pi},$$

从而
$$h'(t_0)|_{h(t)=\frac{3}{2}}=\frac{4}{3\pi}(\mathrm{m/min}).$$

当水面高度升高到容器深度（3m）一半时，水面上升的速度为 $\frac{4}{3\pi}\mathrm{m/min}$.

3. （人口统计模型）我们知道，一般来说城市人口的分布密度 $P(r)$ 随着与

市中心距离 r 的增加而减小. 设某城市 1990 年的人口密度为 $P(r)=\frac{4}{r^2+20}$(10 万人/km^2),试求该市距市中心 2 km 的范围内的人口数.

解 在 dr 足够小时. 近似的认为圆环(内半径 r,外半径 $r+dr$)上人口密度为 $P(r)=\frac{4}{r^2+20}$. 而将整个城市的人口看作分布在这些圆环上的人口之和. 圆环面积微元 $dA=2\pi r dr$. 则距市中心 2 km 范围内的人口数

$$M=\int_0^2 P(r)dA=\int_0^2\frac{4(2\pi r dr)}{r^2+20}=4\pi\ln\frac{6}{5}(10\text{ 万人})$$
$$\approx 2.291(10\text{ 万人}).$$

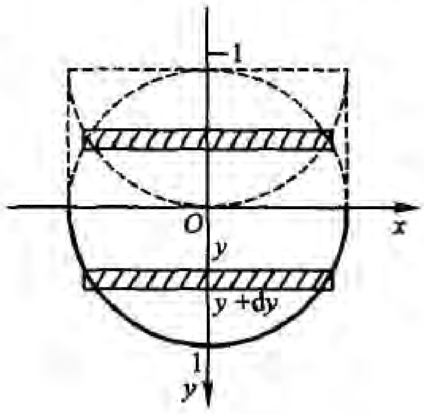
4. 设一半径为 1 的球有一半浸入水中,球的体密度为 1,问将此球从水中取出需作多少功?

解 如图所示建立坐标系,采用与练习 3.4(A)第 8 题的分析法可知:将下半球从水中拿出所做功微元

$$dW_1=(-y)g(1-\mu)dV$$
$$-[-(1-y)](-g\mu dV)$$
$$=g[(\mu-1)y+\mu(1-y)]dV,$$

dV 为图中阴影所示薄片的体积,即

$$dv=\pi x^2dy=\pi\sqrt{1-y^2}dy.$$



(第 4 题)

由于 $\mu=1$,故将下半球从水中取出所做功为

$$W_1=\int_0^1 dW_1=\int_0^1 g(1-y)\pi\sqrt{1-y^2}dy=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)\pi g$$

上半球从原始位置升高 1 所做功

$$W_2=(-1)\left(-g\mu\cdot\frac{2}{3}\pi\cdot 1^3\right)=\frac{2}{3}\pi g$$

故将此球从水中拿出所做的功为

$$W=W_1+W_2=\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}\right)\pi g.$$

习 题 3.5

(A)

1. 利用定义判定下列无穷积分的收敛性,如果收敛,计算其值.

(1) $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$；　　(3) $\int_{0}^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}dx$；

(6) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

解　(1) $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\frac{2d\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2}$

$=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(2\arctan\sqrt{b}-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$. 故积分收敛，其值为$\frac{\pi}{2}$.

(3) 原式$=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}e^{-\sqrt{x}}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}2\int_{0}^{b}\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}d\sqrt{x}$

$=\lim\limits_{b\to+\infty}\left[-2(\sqrt{x}+1)e^{-\sqrt{x}}\right]_{0}^{b}=\lim\limits_{b\to+\infty}2\left[1-(\sqrt{b}+1)e^{-\sqrt{b}}\right]=2$. 积分收敛.

(6) 因为 $\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}(\sqrt{1+b^2}-1)$

$=+\infty$，

故$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$积分发散.

2. 利用定义判定下列无界函数积分的收敛性，如果收敛，计算它的值.

(1) $\int_{0}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$；　　(3) $\int_{1}^{2}\frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$；

(5) $\int_{a}^{b}\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}(a<b)$；　　(8) $\int_{1}^{3}\ln\sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}}dx$.

解　(1) $x=1$ 是$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$的奇点. 由定义

$$\int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{0}^{1-\varepsilon}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(-\sqrt{1-x^2}\right)\Big|_{0}^{1-\varepsilon}=1.$$

(3) $x=1$ 是$\frac{x}{\sqrt{x-1}}$的奇点，且$\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{x-1}=F(x)$是$\frac{x}{\sqrt{x-1}}$的一个原函数，由于$F(x)$在$x=1$处连续，故积分$\int_{1}^{2}\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}=F(2)-F(1)=\frac{8}{3}$收敛.

(5) $x=a$，$x=b$ 都是函数$\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$的奇点，取$c=\frac{a+b}{2}$，

$$\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{\frac{a+b}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-\left(x-\frac{b+a}{2}\right)^2}}$$

$$\xlongequal{\text{令 } x-\frac{b+a}{2}=\frac{b-a}{2}\sin\theta}\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\arcsin\frac{\varepsilon-(b-a)/2}{(b-a)/2}}^{0}\mathrm{d}\theta$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[-\arcsin\frac{\varepsilon-(b-a)/2}{(b-a)/2}\right]=\frac{\pi}{2},$$

又 $$\lim_{\delta\to0^+}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b-\delta}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(b-x)(a-x)}}\xlongequal{x-\frac{a+b}{2}=\frac{b-a}{2}\sin\theta}\lim_{\delta\to0^+}\int_0^{\arcsin\frac{-\delta+(b-a)/2}{(b-a)/2}}\mathrm{d}\theta$$

$$=\lim_{\delta\to0^+}\arcsin\frac{(b-a)/2-\delta}{(b-a)/2}=\frac{\pi}{2},$$

故原积分收敛，且

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a-x)(b-x)}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{\frac{a+b}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a-x)(b-x)}}+\lim_{\delta\to0^+}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b-\delta}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a-x)(b-x)}}=\pi,$$

(8) $x=2$ 为奇点. 且

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_1^{2-\varepsilon}\ln\sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_1^{2-\varepsilon}\ln\sqrt{\frac{\pi}{2-x}}\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_1^{2-\varepsilon}\frac{1}{2}[\ln\pi-\ln(2-x)]\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{2}[(1-\varepsilon)\ln\pi+\varepsilon\ln\varepsilon+1-\varepsilon]$$

$$=\frac{1}{2}(\ln\pi+1).$$

$$\lim_{\delta\to0^+}\int_{2+\delta}^{3}\ln\sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}}\mathrm{d}x=\lim_{\delta\to0^+}\int_{2+\delta}^{3}\frac{1}{2}(\ln\pi-\ln(x-2))\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\delta\to0^+}\frac{1}{2}[(1-\delta)\ln\pi+1+\delta\ln\delta-\delta]$$

$$=\frac{1}{2}(\ln\pi+1)$$

故 $$\int_1^3\ln\sqrt{\frac{\pi}{|x-2|}}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_1^{2-\varepsilon}\ln\sqrt{\frac{\pi}{|x-2|}}\mathrm{d}x+\lim_{\delta\to0^+}\int_{2+\delta}^{3}\ln\sqrt{\frac{\pi}{|x-2|}}\mathrm{d}x=\ln\pi+1.$$

3. 利用定义判定下列反常积分的收敛性，如果收敛，计算它的值.

(1) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\lim_{b\to-\infty}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{b}\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\,\frac{1}{x}=\lim_{b\to-\infty}\left(\cos\frac{1}{b}-\cos\frac{4}{\pi}\right)=1-\cos\frac{4}{\pi}$，故积分收敛.

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

$x=1$ 为奇点. 故 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}=\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}+\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

因为 $\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{1+\varepsilon}^2\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}\xlongequal{t=\sqrt{x-1}}\lim_{\varepsilon\to0^+}2\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\varepsilon\right)=\frac{\pi}{2}$.

又因为 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}=\lim_{b\to+\infty}\int_2^b\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}=\lim_{b\to+\infty}2\left(\arctan\sqrt{b-1}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$,

故 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ 收敛,且 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}=\pi$.

4. 当 k 取何值时,反常积分 $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 收敛,又当 k 为何值时发散.

解　$k=1$ 时, $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}=\lim_{b\to+\infty}\int_e^b\frac{d\ln x}{\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\ln(\ln b)=+\infty$,积分发散.

当 $k\neq1$ 时,　$\int_e^b\frac{dx}{x(\ln x)^k}=\frac{1}{1-k}[(\ln b)^{1-k}-1]$.

如 $k>1$　$\lim_{b\to+\infty}\int_e^b\frac{dx}{x(\ln x)^k}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-k}[(\ln b)^{1-k}-1]=\frac{1}{k-1}$.

$k<1$　$\lim_{b\to+\infty}\int_e^b\frac{dx}{x(\ln x)^k}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-k}[(\ln b)^{1-k}-1]=+\infty$.

故 $k>1$ 时,积分收敛,且 $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}=\frac{1}{k-1}$. $k\leqslant1$ 时,积分发散.

5. 利用各种判别准则,讨论下列无穷积分的收敛性:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{x^3+x^2+1}$.

解　$g(x)=\frac{1}{x^2}$,则 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^3+x^2+1}\Big/\frac{1}{x^2}=1$. 又因为 $\int_1^{+\infty}g(x)dx$ 收敛,故 $\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{x^3+x^2+1}=\int_0^1\frac{x\,dx}{x^3+x^2+1}+\int_1^{+\infty}\frac{x\,dx}{x^3+x^2+1}$ 收敛.

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$.

解　取 $g(x)=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$,则 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x+1}}\Big/g(x)=1$,又因为 $\int_1^{+\infty}g(x)dx$ 收敛,

故 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ 收敛.

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x\sqrt{x}}}=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{3}{4}}}$,因为 $p=\frac{3}{4}<1$. 故积分发散.

(4) $\int_0^{+\infty} e^{-kx}\cos x\mathrm{d}x, k>0$.

解 因为$|e^{-kx}\cos x|\leqslant e^{-kx}$,而$\int_0^{+\infty} e^{-kx}=-\frac{e^{-kx}}{k}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{k}$收敛.故$\int_0^{+\infty} e^{-kx}\cos x\mathrm{d}x$绝对收敛.

6. 利用各种判别准则,讨论下列反常积分的收敛性.

(1) $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$.

解 $x=0,x=1$都是奇点,则$\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}+\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$.

又因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\ln x}\Big/\frac{1}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x}}{\ln x}=0$,而$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$收敛.故$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$收敛.

又因为 $\lim\limits_{x\to1^+}\left[\frac{1}{\ln x}\Big/\frac{1}{(x-1)}\right]=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x-1}{\ln x}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to1^+}x=1$.而$\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x-1}$发散,故$\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$发散.故原积分$\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$发散

(3) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}$.

解 $x=0,x=1$都是奇点,则$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}$.

由于$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}\Big/\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=1$,而$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$收敛,从而$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}$收敛.

又由$\lim\limits_{x\to1^-}\left(\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}\Big/\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$,而$\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$收敛,从而$\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}$收敛.

故原积分$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}$收敛.

(5) $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}$.

解 由于$x=2$为$f(x)=\frac{1}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}$的奇点,则

$$\int_2^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_2^3f(x)\mathrm{d}x+\int_3^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x,$$

又由$\lim\limits_{x\to2^+}\left(f(x)\Big/\frac{1}{\sqrt{x-2}}\right)=\frac{1}{8}$及$\int_2^3\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-2}}$收敛知,$\int_2^3f(x)\mathrm{d}x$收敛.

由$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\Big/\frac{1}{x^4}\right)=1$及$\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4}$收敛知$\int_3^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛.

故原积分$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}$收敛.

7. 下列两种判定积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$收敛性的做法哪一种是错误的？为什么？

解法一

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x&=\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{+a}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{-a}^{a}\\&=\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{2}\{\ln(1+a^2)-\ln[1+(-a)^2]\}=0,\end{aligned}$$

故该积分收敛.

解法二

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{a}^{0}+\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{0}^{b},\end{aligned}$$

由于两个极限都不存在，所以该积分发散.

解　解法一错误. 积分$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛的充分必要条件是极限$\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$与$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$同时存在，且$a,b$各自独立地分别趋于$-\infty$与$+\infty$. 若两个极限中有一个不存在，则$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$发散. 而解法一中的$x$趋于$\infty$速度一致导致错误.

8. 下列两种判定积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}\mathrm{d}x$收敛性的做法哪一种是错误的？为什么？

解法一

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\ln\frac{x}{1+x}\Big|_1^b=\ln 2,$$

因而收敛.

解法二

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_1^b-\lim_{b\to+\infty}\ln(1+x)\Big|_1^b,$$

两个极限都不存在，因而发散.

解　解法二是错误的. 错用极限的有理运算法则.

只有当 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$ 都存在时，下列运算法则才成立.

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to\infty}f(x)-\lim_{x\to\infty}g(x).$$

(B)

1. 设 f 在 $[a,c)\cup(c,b]$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\infty$，那么反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 能否用极限

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\left\{\int_a^{c-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x\right\}$$

来定义？为什么？讨论积分 $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{1-x}$ 的收敛性.

解 不能. 如 $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{1-x}$. 由反常积分收敛的定义知 $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{1-x}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1-x}+\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{1-x}$，又因为

$$\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{1-x}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{1+\varepsilon}^2\frac{\mathrm{d}x}{1-x}=\lim_{\varepsilon\to0^+}(\ln\varepsilon)=-\infty.$$

故 $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{1-x}$ 发散.

因为 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\left[\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{1-x}+\int_{1+\varepsilon}^2\frac{\mathrm{d}x}{1-x}\right]=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}(-\ln\varepsilon+\ln\varepsilon)=0.$

但如果用此题中的定义却得出 $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{1-x}$ 收敛.

2. 讨论下列反常积分的收敛性：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}\quad(p,q>0).$

解 $x=0,x=\frac{\pi}{2}$ 为奇点，由 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}\Big/\frac{1}{x^p}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^p\cdot\frac{1}{\cos^q x}=1$ 知，$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$ 与 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 收敛性相同. 故由 p 积分的收敛性知，$p<1$ 时，$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$ 收敛；$p\geqslant1$ 时，$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$ 发散.

又由 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}\Big/\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{-q}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\sin^p x}\cdot\left[\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right]^q=1$ 知

$\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$ 与 $\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^q}\mathrm{d}x$ 收敛性相同.

故 当 $q<1$ 时，$\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$ 收敛；$q\geqslant 1$ 时，$\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$ 发散.

综上所述，当 $0<p<1,0<q<1$ 时，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$ 收敛. 其他情况下均发散.

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}(p,q>0)$.

解 $x=1$ 为 $f(x)=\frac{1}{x^p\ln^q x}$ 的奇点，而 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$.

由于 $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[f(x)\Big/\frac{1}{(x-1)^q}\right]=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{x-1}{\ln x}\right)^q=1$，$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^2\frac{1}{(x-1)^q}\mathrm{d}x$ 收敛性相同.

故积分 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ 当 $q<1$ 时收敛；$q\geqslant 1$ 时发散.

又当 $p>1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^p\ln^q x}\Big/\frac{1}{x^p}\right)=0$，且 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 收敛，故当 $p>1$ 时，积分 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$ 收敛.

当 $0<p\leqslant 1,q<1$ 时，$\forall x\in[2,+\infty)$，

$$0<x^p\ln^q x\leqslant x\ln^q x\text{，从而}\frac{1}{x^p\ln^q x}\geqslant\frac{1}{x\ln^q x},$$

且

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^q x}=\frac{(\ln x)^{1-q}}{1-q}\bigg|_2^{+\infty}=+\infty,$$

故 $0<p\leqslant 1$ 且 $q<1$ 时，$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$ 发散.

综上所述，当 $p>1$ 且 $q<1$ 时，$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 其他情况均发散.

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x\quad(0<\alpha<+\infty)$.

解 $x=0$ 为 $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}\ln(1+x)$ 的奇点，而

$$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x.$$

若 $\alpha>1$，取 $\varepsilon>0$，使 $\alpha-\varepsilon>1$，由

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\Big/\frac{1}{x^{\alpha-\varepsilon}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\varepsilon}=0\text{ 及 }\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha-\varepsilon}}\mathrm{d}x\text{ 收敛知，}$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x\text{ 收敛；}$$

若 $\alpha\leqslant 1$，由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\Big/\frac{1}{x^\alpha}\right)=+\infty$ 及 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 发散得

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x \text{ 发散；}$$

又由 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\Big/\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ 知，$\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}\mathrm{d}x$ 收敛性相同，即

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x \text{ 当}\alpha<2\text{ 时收敛，}\alpha\geqslant2\text{ 时发散.}$$

综上所述，$\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 当 $1<\alpha<2$ 时收敛.

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 $x=0$ 是奇点，又 $\lim\limits_{x\to0^+}\left[\dfrac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\Big/\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right]=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\sin x}{\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}}\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}}\lim\limits_{x\to0^+}\left[\dfrac{-\cot x}{\dfrac{1}{6}x^{-\frac{7}{6}}}\right]=$

$-6\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^{\frac{1}{6}}\cdot\dfrac{x}{\sin x}\cdot\cos x\right)=0$，且 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x$ 收敛，故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 收敛.

3. 证明：当 $p>0,q>0$ 时，反常积分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$ 收敛. 此时，该积分是参数 p,q 的函数，称为 Beta 函数，记作

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x \qquad (p>0,q>0).$$

进而证明 Beta 函数有下列性质：

(1) $B(p,q)=B(q,p)$；

(2) 当 $q>1$ 时，$B(p,q)=\dfrac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$；

当 $p>1$ 时，$B(p,q)=\dfrac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q)$；

(3) 若 $m,n\in\mathbf{N}_+$，则 $B(n,m)=\dfrac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(m+n)}$.

证 当 $p\geqslant1,q\geqslant1$ 时，$(1-x)^{q-1}x^{p-1}$ 在 $[0,1]$ 连续，则在 $[0,1]$ 上可积. $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$ 为定积分. 当 $0<p<1,q\geqslant1$ 时，仅 $x=0$ 是 $f(x)=x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ 的奇点. 由 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x^{p-1}}=1$ 及 $\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{x^{1-p}}$ 收敛知，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 当 $p\geqslant1,0<q<1$ 时，仅 $x=1$ 是 $f(x)$ 的奇点，由 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)}{(1-x)^{q-1}}\mathrm{d}x=1$ 及 $\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{(1-x)^{1-q}}$ 收敛得

$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

当 $p<1,q<1$ 时，$x=0,x=1$ 均为 $f(x)$的奇点，而

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

由以上的讨论知，当 $p<1,q<1$ 时，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 故当 $p>0,q>0$ 时，$\mathrm{B}(p,q)$收敛.

(1) $\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x \xlongequal{t=1-x} \int_1^0 (1-t)^{p-1}t^{q-1}(-\mathrm{d}t)$

$$=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}\mathrm{d}t=\mathrm{B}(q,p).$$

(2) 当 $q>1$，$\mathrm{B}(p,q)=\frac{1}{p}\int_0^1 (1-x)^{q-1}\mathrm{d}x^p$

$$=\frac{1}{p}(1-x)^{q-1}x^p\Big|_0^1+\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}[(x-1)+1](1-x)^{q-2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{q-1}{p}\left[\int_0^1 -x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x+\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{q-1}{p}[-\mathrm{B}(p,q)+\mathrm{B}(p,q-1)],$$

故 $\mathrm{B}(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p,q-1)$.

同理可证：当 $p>1$ 时，$\mathrm{B}(p,q)=\frac{p-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p-1,q)$.

(3) 由于 $m,n\in\mathbf{N}_+$，且 $\Gamma(k+1)=k!\ (k\in\mathbf{N}_+)$，所以

当 $m=n=1$，$\mathrm{B}(1,1)=\int_0^1 \mathrm{d}x=1=\frac{\Gamma(1)\Gamma(1)}{\Gamma(1+1)}$.

当 m、n 至少有一个不等于 1，不妨设 $n>1$，则由(2)可得

$$\mathrm{B}(m,n)=\frac{n-1}{m+n-1}\mathrm{B}(m,n-1)=\frac{n-1}{m+n-1}\cdot\frac{(n-1)-1}{m+(n-1)-1}\mathrm{B}(m,n-2)$$

$$=\cdots=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 2\cdot 1}{(m+n-1)(m+n-2)\cdots(m+1)}\mathrm{B}(m,1)$$

$$=\frac{(n-1)!\ m!}{(m+n-1)!}\mathrm{B}(m,1)=\frac{(n-1)!\ (m-1)!}{(m+n-1)!}=\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(m+n)},$$

其中
$$\mathrm{B}(m,1)=\int_0^1 x^m\mathrm{d}x=\frac{1}{m}x^{m-1}\Big|_0^1=\frac{1}{m}.$$

习 题 3.6

(A)

1. 用分离变量法求下列微分方程的解：

(2) $x\mathrm{d}y-y\ln y\mathrm{d}x=0$.

解 方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y\ln y}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$,

两端积分得 $\ln|\ln y|=\ln|x|+\ln|C|$，即 $\ln y=Cx$.

故所求通解为 $y=\mathrm{e}^{Cx}$.

(4) $\dfrac{x}{1+y}\mathrm{d}x-\dfrac{y}{1+x}\mathrm{d}y=0,y|_{x=0}=1$.

解 方程变形为 $x(1+x)\mathrm{d}x=(1+y)y\mathrm{d}y$,

两端积分得 $\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3=\dfrac{1}{2}y^2+\dfrac{1}{3}y^3+C$ 为原方程通解.

又 $y|_{x=0}=1$，于是 $C=-5$，故所求特解为

$$2(x^3-y^3)+3(x^2-y^2)+5=0.$$

(6) $\arctan y\mathrm{d}y+(1+y^2)x\mathrm{d}x=0$.

解 方程变形为 $\dfrac{\arctan y}{1+y^2}\mathrm{d}y=-x\mathrm{d}x$,

两端积分得 $\dfrac{1}{2}(\arctan y)^2=-\dfrac{1}{2}x^2+C$.

所求通解为 $(\arctan y)^2+x^2=C$.

2. 求解下列一阶线性微分方程的通解：

(2) $xy'-3y=x^4\mathrm{e}^x$.

解 方程变形为 $y'-\dfrac{3}{x}y=x^3\mathrm{e}^x$.

对应的齐次方程 $y'-\dfrac{3}{x}y=0$ 的通解为 $y=Cx^3$.

用常数变易法，设原方程的解为 $y=h(x)x^3$.

代入方程得 $h'(x)=\mathrm{e}^x$，于是 $h(x)=\mathrm{e}^x+C$.

故所求方程的通解为 $y=x^3(\mathrm{e}^x+C)$.

(4) $\cos^2 x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=\tan x$.

解　对应的齐次方程 $\cos^2 x\dfrac{dy}{dx}+y=0$ 的通解为　$y=Ce^{-\tan x}$.

设　$y=h(x)e^{-\tan x}$ 为原方程的解.

代入非齐次方程得　$h'(x)=\tan x\sec^2 x e^{\tan x}$.

于是　$h(x)=(\tan x-1)e^{\tan x}+C$,

故所求非齐次方程通解为　$y=Ce^{-\tan x}+\tan x-1$.

(6) $xy'-y=\dfrac{x}{\ln x}$.

解　对应的齐次方程的通解为　$y=Cx$.

令 $y=h(x)x$ 为非齐方程 $xy'-y=\dfrac{x}{\ln x}$ 的解.

于是 $h'(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$,从而　$h(x)=\ln|\ln x|+C$.

所求非齐方程的通解为　$y=x\ln|\ln x|+Cx$.

3. 求下列齐次微分方程的解:

(1) $(2x^2-y^2)+3xy\dfrac{dy}{dx}=0$.

解　方程变形为 $2-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+3\dfrac{y}{x}\dfrac{dy}{dx}=0$. 令 $u=\dfrac{y}{x}$,则 $x\dfrac{du}{dx}+u=\dfrac{dy}{dx}$ 代入方程得 $\dfrac{-2u}{1+u^2}du=\dfrac{4}{3}\dfrac{dx}{x}$,两端积分得 $\ln(1+u^2)^{-1}=\ln(x^{\frac{4}{3}})+C$,即 $(1+u^2)^{-1}=Cx^{\frac{4}{3}}$.

故所求通解为　$(x^2+y^2)^3=Cx^2$.

(4) $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$, $y|_{x=-1}=2$.

解　令 $u=\dfrac{y}{x}$,则 $\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$ 代入原方程得 $u\,du=\dfrac{dx}{x}$.

两边积分得　$\dfrac{1}{2}u^2=\ln|x|+C$.

原方程通解为　$y^2=2x^2\ln|x|+Cx^2$.

又因为 $y|_{x=-1}=2$ 代入通解得　$C=4$.

故满足条件 $y|_{x=-1}=2$ 的特解为　$y^2=2x^2\ln|x|+4x^2$.

4. 用适当的方法求下列微分方程的通解:

(1) $y'-x^2y^2=y$.

解　方程变形为　$\dfrac{1}{y^2}y'-\dfrac{1}{y}=x^2$　$(y\neq 0)$,

即令 $u=-\dfrac{1}{y}$,则 $\dfrac{du}{dx}+u=x^2$. 解之得

$$u=(x^2-2x+2)+Ce^{-x}.$$

所求通解为 $y=-\dfrac{1}{x^2+2-2x+Ce^{-x}}$，$y=0$ 也是其解.

(3) $y'=\dfrac{1}{e^y+x}$.

解 $\dfrac{dx}{dy}=e^y+x$，即$\dfrac{dx}{dy}-x=e^y$，故所求通解为 $x=e^{\int dy}\left[\int e^y e^{-y}dy+C\right]$.

$$e^y(y+C).$$

(4) $(\cos y-2x)'=1$.

解 由于$(\cos y-2x)'=1$，所以 $\cos y-2x=x+C$ 为所求通解.

(5) $\dfrac{dy}{dx}=(x+y)^2$.

解 令 $u=x+y$，则$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}-1$ 代入方程得$\dfrac{du}{dx}=1+u^2$ 解之得 $\arctan u=x+C$，原方程通解为 $\arctan(x+y)=x+C$.

(6) $y'=\sin^2(x-y+1)$.

解 令 $u=x-y+1$，则$\dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{du}{dx}$代入方程得$\dfrac{du}{dx}=\cos^2 u$，解之得 $\tan u=x+C$，或 $u=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，故所求通解为 $\tan(x-y+1)=x+C$. 而且 $x-y=k\pi+\dfrac{\pi}{2}-1$ 也是其解. 其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

(8) $xy'+y=y(\ln x+\ln y)$.

解 方程两边同乘 x 得 $x^2y'+xy=xy\ln(xy)$，令 $u=xy$，则 $x\dfrac{dy}{dx}=-y+\dfrac{du}{dx}=-\dfrac{u}{x}+\dfrac{du}{dx}$代入方程可得 $x\left(-\dfrac{u}{x}+\dfrac{du}{dx}\right)+u=u\ln u$. 即 $x\dfrac{du}{dx}=u\ln u$，解之可分离变量方程得 $u\neq1$，$\ln|\ln u|=\ln x+C$. 于是$\ln u=Cx$，即 $\ln xy=Cx$.

又因为 $u=1$ 也是方程 $x\dfrac{du}{dx}=u\ln u$ 的解. 即 $xy=1$ 也是原方程的解. 包含在 $\ln xy=Cx$ 中.

故所求通解为 $\ln xy=Cx$.

(9) $\cos y dx+(x-2\cos y)\sin y dy=0$;

解 $\dfrac{dx}{dy}+(\tan y)x=2\sin y$，对应的齐次方程$\dfrac{dx}{dy}=-x\tan y$ 的通解为 $x=C\cos y$.

设 $x=h(y)\cos y$ 为非齐次方程$\dfrac{dx}{dy}+(\tan y)x=2\sin y$ 的解，那么 $h'(y)\cos y=2\sin y$. 解之得

$$h(y)=-2\ln|\cos y|+C.$$

故原方程通解为　$x=(C-2\ln|\cos y|)\cos y$.

(10) $(x^2+y^2+2x)\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y=0$.

解　将方程变形可得

$$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y^2=-(x^2+2x).$$

令 $y^2=u$ 可得　$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=-(x^2+2x)$.

解此一阶线性非齐次方程可得

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\left[-\int(x^2+2x)\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right] \\ &= \mathrm{e}^{-x}\left[-\int(x^2+2x)\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+C\right] \\ &= -x^2+C\mathrm{e}^{-x}, \end{aligned}$$

故所求通解为 $(x^2+y^2)\mathrm{e}^x=C$.

5. 设有微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right)$，其中 $\varphi(u)$ 为连续函数，a,b,c,d,e,f 为常数.

(1) 若 $ae\neq bd$，证明：可适当选取常数 h 与 k，使变换 $x=u+h,y=v+k$ 把该方程化为齐次微分方程；

(2) 若 $ae=bd$，证明：可用一适当的变换把该方程化为变量分离方程；

(3) 用(1)或(2)中的方法分别求微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y+4}{x-y-6}\quad 与\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1+x-y}{x-y}$$

的通解.

解　(1) 若 $ae\neq bd$. 则方程 $\begin{cases}ax+by+c=0,\\ dx+ey+f=0\end{cases}$ 有唯一的一组解 (h,k)，其中

$$h=\begin{vmatrix}-c & b\\ -f & e\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}a & b\\ d & e\end{vmatrix}=\frac{bf-ce}{ea-bd},$$

$$k=\frac{\begin{vmatrix}a & -c\\ d & -f\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & b\\ d & e\end{vmatrix}}=\frac{dc-af}{ea-bd}.$$

令 $x=u+h,y=v+k$，则原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\varphi\left(\frac{au+bv}{du+ev}\right)=\varphi\left(\frac{a+b\frac{v}{u}}{d+e\frac{v}{u}}\right)$$ 为齐次方程.

(2) 如果 $ae=bd=0$，则①$a=b=e=d=0$. 则方程化为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{c}{f}\right)$可分离变量；②有三个为零，方程是可分离变量方程. ③两个等于零，如 $a=b=0(d=e=0)$. 则令 $u=dx+ey+f(u=ax+by+c)$可转化为可分离变量方程；如 $a=d=0(e=b=0)$，则方程本身可分离变量.

如果 $ae=bd\neq0$，则$\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=k$，进而 $ax+by=k(dx+ey)$.

令 $u=dx+ey$. 则方程化为

$$\frac{1}{e}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{ku+c}{u+f}\right)+\frac{d}{e}\text{为可分离变量方程.}$$

(3) 先求解$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y+4}{x-y-6}$.

由于$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2=ae-bd$，$\begin{cases}x+y+4=0,\\ x-y-6=0\end{cases}$的交点为$(1,-5)$.

令 $x=u+1$，$y=v-5$，则方程化为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{u+v}{u-v},\quad \text{即}\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{1+\frac{v}{u}}{1-\frac{v}{u}}.$$

令 $z=\frac{v}{u}$，则$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=u\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}+z$，于是$(1-z)\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}=\frac{\mathrm{d}u}{u}$. 从而

$\tan z-\frac{1}{2}\ln(1+z^2)=\ln|u|+C$. 于是

$$\tan\left(\frac{y+5}{x-1}\right)-\ln\sqrt{1+\left(\frac{y+5}{x-1}\right)^2}=\ln|x-1|+C,$$

即 $\tan\left(\frac{y+5}{x-1}\right)=\ln\sqrt{(x-1)^2+(y+5)^2}+C$ 为所求通解.

再求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1+x-y}{x-y}$的通解.

令 $u=x-y$，则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，于是方程化为 $1-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1+u}{u}$，即 $u\mathrm{d}u=-\mathrm{d}x$ 解之得

$$u^2+2x=C.$$

原方程的通解为$(x-y)^2+2x=C$.

6. 求下列微分方程的通解：

(1) $y''=\frac{1}{1+x^2}$.

解 $y'=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}+C_1=\arctan x+C_1$,

$$y=C_1x+x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_2.$$

(3) $y'''=y''$.

解 由于$\frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}x}=y''$,则$\frac{\mathrm{d}y''}{y''}=\mathrm{d}x$.

$$\ln y''=x+C_1,y''=C_1\mathrm{e}^x,y'=C_1\mathrm{e}^x+C_2,$$

故 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2x+C_3$ 为原方程通解.

(5) $yy''+1=(y')^2$.

解 令 $p=y'$,则 $y''=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$. 代人原方程

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+1=p^2.\text{ 于是}\frac{p}{p^2-1}\mathrm{d}p=\frac{\mathrm{d}y}{y},$$

从而 $$\frac{1}{2}\ln|p^2-1|=\ln|y|+C\quad(p\neq\pm1).$$

于是若$|p|>1$, $$p^2-1=(C_1y)^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p=\pm\sqrt{1+(C_1y)^2},$$

故 $$\frac{C_1\mathrm{d}y}{\sqrt{1+(C_1y)^2}}=\pm C_1\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{arcsh}C_1y=\pm C_1x+C_2,$$

于是 $y=\frac{1}{C_1}\mathrm{sh}(\pm C_1x+C_2)$为原方程通解.

又因为 $p=\pm1$ 时,$y=\pm x+C$ 是原方程的解.

若$|p|<1$,则 $1-p^2=(C_1y)^2$,解之得原方程通解为

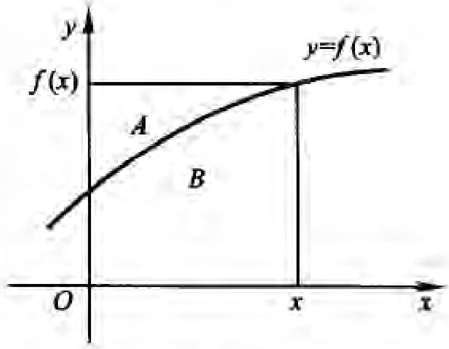
$$y=\frac{1}{C_1}\sin(\pm C_1x+C_2).$$

8. 一曲线经过点(2,8),曲线上任一点到两坐标轴的垂线与两坐标轴构成的矩形被该曲线分为两部分,其中一部分的面积恰好是另一部分面积的两倍,求该曲线的方程.

解 设曲线的方程为 $y=f(x)$. $P(x,f(x))$为其上任一点,如图所示,设上、下两部分的面积为 A 和 B,则 $A=xf(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, $B=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. 依题意有

$$A=2B\text{ 或 }B=2A.$$

(1) 如果 $A=2B$,那么 $xf(x)=3\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,两边求导可得方程 $xf'(x)+f(x)=3f(x)$,即 $f'(x)=\frac{2}{x}f(x)$. 解此可分离方程得 $f(x)=Cx^2$ 又曲线过(2,8),知 $8=4C$,故 $C=2$,于是所求曲线为 $y=f(x)=2x^2$.



(第 8 题图)

(2) 如果 $2A=B$,那么 $2xf(x)-2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,两边对 x 求导整理得一阶微分方程:$f'(x)=\frac{1}{2x}f(x)$. 解之得 $f^2(x)=Cx$. 又由 $y|_{x=2}=8$ 知 $64=2C$,于是 $C=32$. 此种情况下,曲线方程为 $y^2=32x$.

综上所述,符合题意的曲线方程为 $y=2x^2$ 或 $y^2=32x$.

10. 容器内装有 10 L 盐水,其中含盐 1 kg,现以 3 L/min 的速度注入净水,同时以 2 L/min 的速度抽出盐水,试求 1 h 后容器内溶液的含盐量.

解 设 t min 时含盐量为 $x(t)$ kg,则 $x(0)=1$ 且 t min 时溶液的浓度为 $\frac{x}{10+3t-2t}$,当 Δt 足够小时,则可认为$[t,t+\Delta t]$内浓度不变,则 $\Delta x=x(t+\Delta t)-x(t)=\frac{x}{10+t}\cdot 2\Delta t$,于是 $\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-2x}{10+t}$,所以 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{-2x}{10+t}$,即 $\frac{\mathrm{d}x}{2x}=\frac{-\mathrm{d}t}{10+t}$,即 $x=C(10+t)^{-2}$,又由 $x(0)=1$ 有 $1=\frac{C}{100}$,即 $C=100$,故 $x=100(10+t)^{-2}$,1 小时后溶液的含盐量 $x(C_0)=\frac{1}{49}$ kg.

11. 由经济学知,市场上的商品价格的变化率与商品的过剩需求量(即需求量与供给量的差)成正比. 假设某种商品的供给量 Q_1 与需求量 Q_2 都是价格 p 的线性函数:

$$Q_1=-a+bp, Q_2=c-dp,$$

其中 a,b,c,d 都是正常数,试求该商品价格随时间的变化规律.

解 依题意, $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=k(Q_2-Q_1)=k[a+c-(d+b)p]$,

其中$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$为价格的变化率,$k$ 为比例常数,方程可变形为 $p'+k(d+b)p=k(a+c)$.

解此方程可得 $p=\mathrm{e}^{-\int k(b+d)\mathrm{d}t}\left[C+\int k(a+c)\mathrm{e}^{\int k(b+d)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right]$,

故该商品价格随时间的变化率为

$$p=Ce^{-k(b+d)t}+\frac{a+c}{b+d}.$$

12. 海上的一只游船上有 800 人，其中一人患了某种传染病，12 小时后有 3 人被感染发病. 由于这种传染病没有早期症状，所以感染者未被及时隔离. 若疫苗能在 60 至 72 小时运到船上，传染病的传播速度与受感染的人数和未感染人数之积成正比，试估算疫苗运到时的发病人数.

解　设 t 时刻感染人数为 $s=s(t)$，则 $s(0)=1$，$s(12)=3$，且感染率 $\frac{ds}{dt}=k(800-s)s$. 此方程可变形为

$$\frac{d\frac{1}{s}}{dt}+800\,k\,\frac{1}{s}=k,故\frac{1}{s}=Ce^{-800\,kt}+\frac{1}{800}.$$

由 $s(12)=3$，$s(0)=1$ 可得　$C=\frac{799}{800}$，$k=\frac{1}{9\,600}\ln\frac{3\times799}{797}$.

于是
$$s(t)=\frac{800}{799\left(\frac{797}{3\times799}\right)^{\frac{t}{12}}+1}.$$

当 $t=60$ 小时，　$s=\frac{3^5\times799^4\times800}{797^5+3^5\times799^4}\approx188$(人)；

若 $t=72$ 小时，　$s\approx385$(人).

所以若疫苗 60 小时运到，约有 188 人感染；72 小时运到约 385 人感染.

(B)

1. 研究肿瘤细胞增殖动力学，能为肿瘤的临床治疗提供一定的理论依据. 试按下述两种假设分别建立肿瘤生长的数学模型并求解.

(1) 设肿瘤体积 V 随时间 t 增大的速率与 V^b 成正比，其中 b 为常数(称为形状参数). 开始测得肿瘤体积为 V_0，试分别求当 $b=\frac{2}{3}$ 与当 $b=1$ 时 V 随时间变化的规律，以及当 $b=1$ 时肿瘤体积增加一倍所需的时间(称为倍增时间)；

(2) 设肿瘤体积 V 随时间 t 增大的速率与 V 成正比，但比例系数 k 不是常数，它随时间 t 的增大而减少，并且减小的速率与当时 k 的值成正比，比例系数为常数. 试求 V 随时间 t 的变化规律、倍增时间及肿瘤体积的理论上限值.

解　(1) 由题设可知 $V'=kV^b$，$V|_{t=0}=V_0$. 则当 $b=1$ 时，$\frac{V'}{V}=k$，即 $V=V_0e^{kt}$. $b=\frac{2}{3}$ 时，$\frac{dV}{V^{\frac{2}{3}}}=kdt$，即 $V=\left(\frac{kt+3V_0^{\frac{1}{3}}}{3}\right)^3$，

即当 $b=1, b=\frac{2}{3}$ 时，V 随时间变化的规律分别为

$$V=V_0 e^{kt} \text{ 与 } \sqrt[3]{V}=\frac{1}{3}kt+\sqrt[3]{V_0}.$$

$b=1, V=2V_0$ 时，$t=\frac{\ln 2}{k}$. 即当 $b=1$ 时肿瘤倍增时间为 $\frac{\ln 2}{k}$.

(2) 肿瘤体积 V 随时间 t 增大的速率为　$V'=k(t)V$，
而　$k'(t)=-\alpha k$(α 比例常数)，且设 $k(0)=A$.

求解 $k'(t)=-\alpha k$，可得 $k(t)=Ae^{-\alpha t}$ 代入 $V'=k(t)V$ 得

$$\ln V(t)=-\frac{A}{\alpha}e^{-\alpha t}+\ln V_0+\frac{A}{\alpha}, \text{即 } V=V_0 e^{\frac{A}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})}.$$

设倍增时间为 T，则 $2V_0=V_0 e^{\frac{A}{\alpha}(1-e^{-\alpha T})}$，即 $T=\frac{1}{\alpha}\ln\frac{A}{A-\alpha\ln 2}$. 又 $\lim\limits_{t\to+\infty}V(t)=V_0 e^{\frac{A}{\alpha}}$. 所以肿瘤体积的理论上限值为 $V_0 e^{\frac{A}{\alpha}}$.

2. (冷却定律与破案问题)按照 Newton 冷却定律，温度为 T 的物体在温度为 T_0($T_0<T$)的环境中冷却的速度与温差 $T-T_0$ 成正比. 请你用该定律分析下面的条件. 某公安局于晚上 7 时 30 分发现一具女尸，当晚 8 时 20 分法医测得尸体温度为 32.6℃. 一小时后，尸体被抬走时又测得尸体温度为 31.4℃，假定室温在几个小时内均为 21.1℃. 由案情分析得知张某是此案的主要犯罪嫌疑人，但张某矢口否认，并有证人说："下午张某一直在办公室，下午 5 时打了一个电话后才离开办公室". 从办公室到凶案现场步行需 5 min，问张某是否能被排除在犯罪嫌疑人之外？

解　若死者在 5 时 5 分之前被杀，则张某不为嫌疑犯，若死于 5 时 5 分之后，则不能排除. 以晚上 7 时 30 分为 $t=0$ 时刻，并以分钟为单位时间，则由 Newton 冷却定律得

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-21.1), \text{且 } T(50)=32.6, T(110)=31.4,$$

求解方程得

$$T=11.5\, e^{\frac{50-t}{60}\ln\frac{115}{103}}+21.1,$$

即

$$T=11.5\left(\frac{115}{103}\right)^{\frac{50-t}{60}}+21.1.$$

又正常人体温在 35℃至 37℃间，设死者死亡时体温为 37℃，则由上式可知死亡时间 $t\approx-126.4$(min). 于是死者的死亡时刻为 $t_0=7:50-\frac{126.4}{60}=5.393(\text{h})\approx$ 5 时 24 分(下午). 如果死者被杀时体温低于 37℃，由 Newton 冷却定律，死亡时刻应比下午 5 时 24 分更晚，故张某不能被排除在嫌疑犯之外.

3. 设 $y=y(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可微，求 $y=y(x)$，使它满足

$$x\int_0^x y(t)\mathrm{d}t=(x+1)\int_0^x ty(t)\mathrm{d}t.$$

解　方程两端对 x 求导可得

$$\int_0^x y(t)\mathrm{d}x+xy(x)=\int_0^x ty(t)\mathrm{d}t+(x+1)xy(x),$$

再对 x 求导得

$$2y(x)+xy'(x)=2xy(x)+(x+1)y(x)+(x+1)xy'(x).$$

即　$x^2y'=(1-3x)y$,

解之得　$\ln y=\dfrac{-1}{x}-\ln x^3+C$,即 $y=\dfrac{1}{Cx^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$　$(x\neq 0)$.

又 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{Cx^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=0$,令 $y(0)=0$ 使 y 在 $(0,+\infty)$ 上连续可导.

4. 设 f 是 $C^{(1)}$ 类函数,且

$$f(x+t)=\frac{f(t)+f(x)}{1-f(x)f(t)},\quad f'(0)=3.$$

试导出 $f(x)$ 所满足的微分方程,并求 $f(x)$.

解　因为 $f\in C^{(1)}$,所以 f 在 $x=0$ 处连续,则 $f(0)=\dfrac{2f(0)}{1-f^2(0)}$.

于是 $f(0)=0$.

方程 $f(x+t)=\dfrac{f(t)+f(x)}{1-f(x)f(t)}$ 两边对 t 求导.

$$f'(x+t)=\frac{f'(t)[1-f(x)f(t)]+f(x)f'(t)[f(t)+f(x)]}{[1-f(x)f(t)]^2},$$

令 $t=0$ 得

$$f'(x)=\frac{f'(0)+f^2(x)f'(0)}{(1-f(x)f(0))^2}.$$

将 $f'(0)=3$, $f(0)$ 代入得 $f'(x)=3(1+f^2(x))$,解之得 $\arctan f(x)=3x+C$. 由 $x=0$ 时 $f(0)=0$ 知 $C=0$. 故所求函数为 $f(x)=\tan 3x$.