4.2 定积分的几何应用

平面图形面积
曲线弧长
几何体的体积
旋转体侧面积

定积分的微元法(元素法)

通过对不均匀量（如曲边梯形的面积，变速直线运动的路程）的分析，采用“划分、近似代替、求和、取极限”四个基本步骤确定了它们的值，并由此抽象出定积分的概念，我们发现，定积分是确定众多的不均匀几何量和物理量的有效工具。那么，究竟哪些量可以通过定积分来求值呢？怎样通过定积分来计算呢？

定积分计算的思想——微元法

定积分的微元法

•求曲边梯形的面积

(1)划分: $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$;

(2)近似代替: 小曲边梯形的面积近似为$f(\xi_i)\Delta x_i$ $(x_{i-1}<\xi_i<x_i)$;

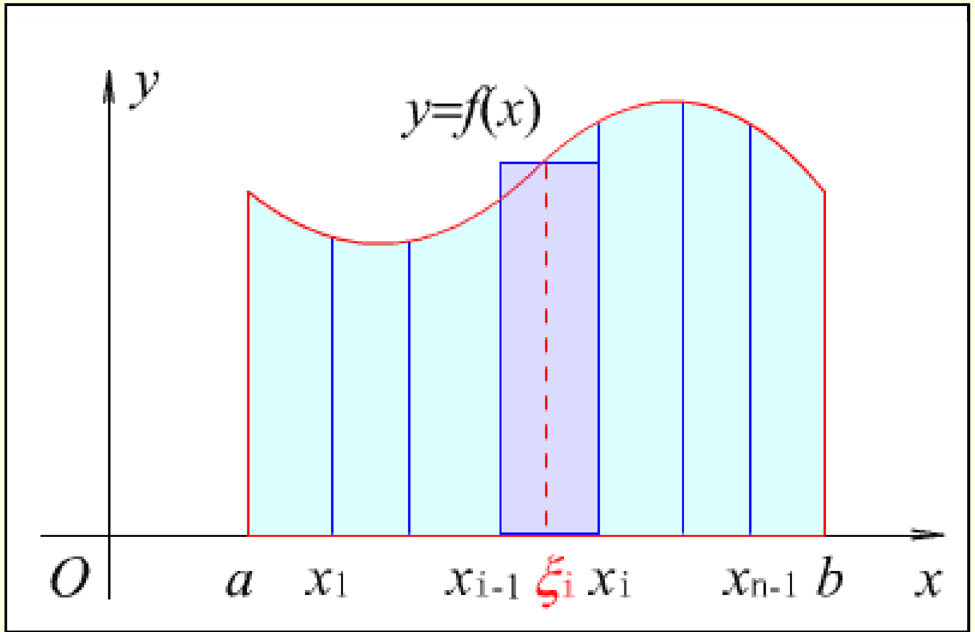
(3)求和: 曲边梯形的面积近似为$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$;

(4)取极限:

设$\lambda=\max\{\Delta x_1, \Delta x_2,\cdots, \Delta x_n\}$,

曲边梯形的面积为

$$S=\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$



注 实际上，引出积分表达式的关键步骤是第二步，因此求解可简化如下：

$$S=\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ .$$

•微元法

(1) 将$[a,b]$任意分成n个小区间, 任一小区间记为$[x,x+dx]$

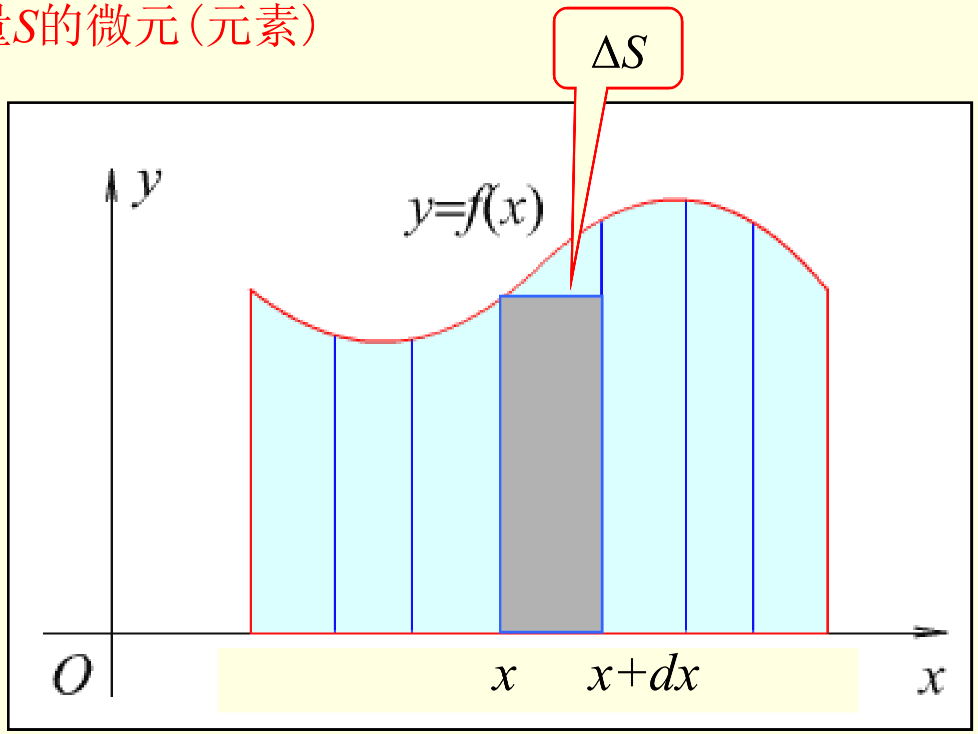
给出此区间上所求量ΔS的近似值：

$$\Delta S\approx \boxed{f(x)dx}$$ 所求量S的微元（元素）

记为dS, 即$dS=f(x)dx$

(2) 以量S的微元为被积表达式的定积分即为所求量, 也即

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$



$$S=\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ .$$

•微元法

(1) 将$[a,b]$任意分成n个小区间,任一小区间记为$[x,x+dx]$

给出此区间上所求量ΔS的近似值:

$$\Delta S \approx f(x)dx$$

记为dS, 即$dS=f(x)dx$

(2) 以量S的微元为被积表达式的定积分即为所求量,也即

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

即按以下过程,将实际问题归结为定积分:

$$\xrightarrow[\text{分割}]{\text{自变量}}[x,x+\Delta x]\xrightarrow[\text{规律}]{\text{科学}}\Delta S\approx f(x)dx\xrightarrow[\text{微分}]{\text{转为}}dS=f(x)dx\xrightarrow[\text{积分}]{\text{直接}}S=\int_a^b f(x)dx$$

一般地，设量U非均匀地分布$[a,b]$上，求U的步骤：

分割

用分点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 将

区间分成n个小区间$[x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

近似计算

把U在小区间上的局部量ΔU_i

用某个函数$f(x)$在$\xi_i(\xi_i \in [x_{i-1}, x_i])$的值与$\Delta x_i$之积代替

$$\Delta U_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$$

求和

把局部量的近似值累加得到总量的近似值，即

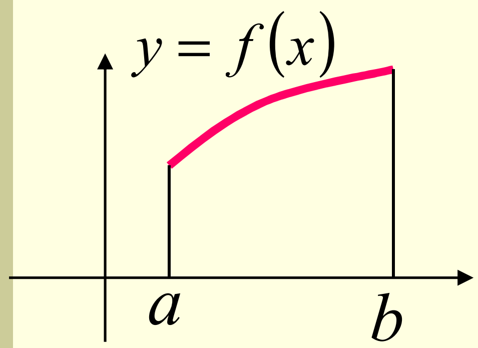
$$U = \sum_{i=1}^{n} \Delta U_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

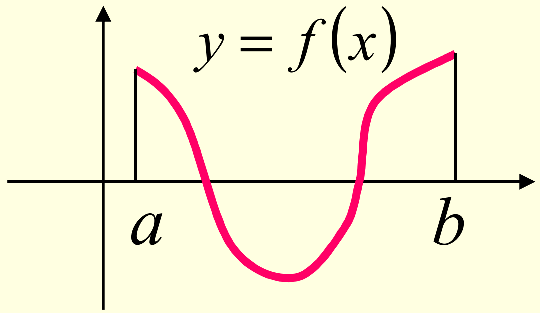
求极限

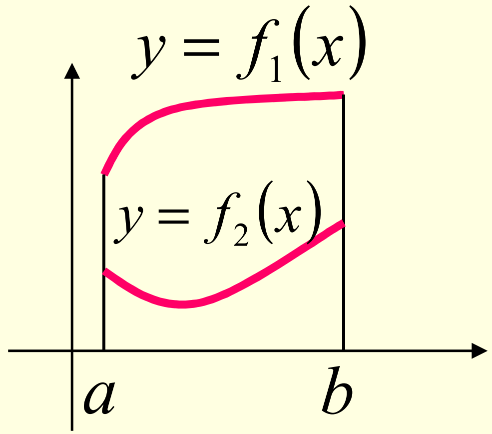
$$U = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \quad \lambda = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i$$

一、求平面图形的面积

（一）直角坐标系下的面积公式



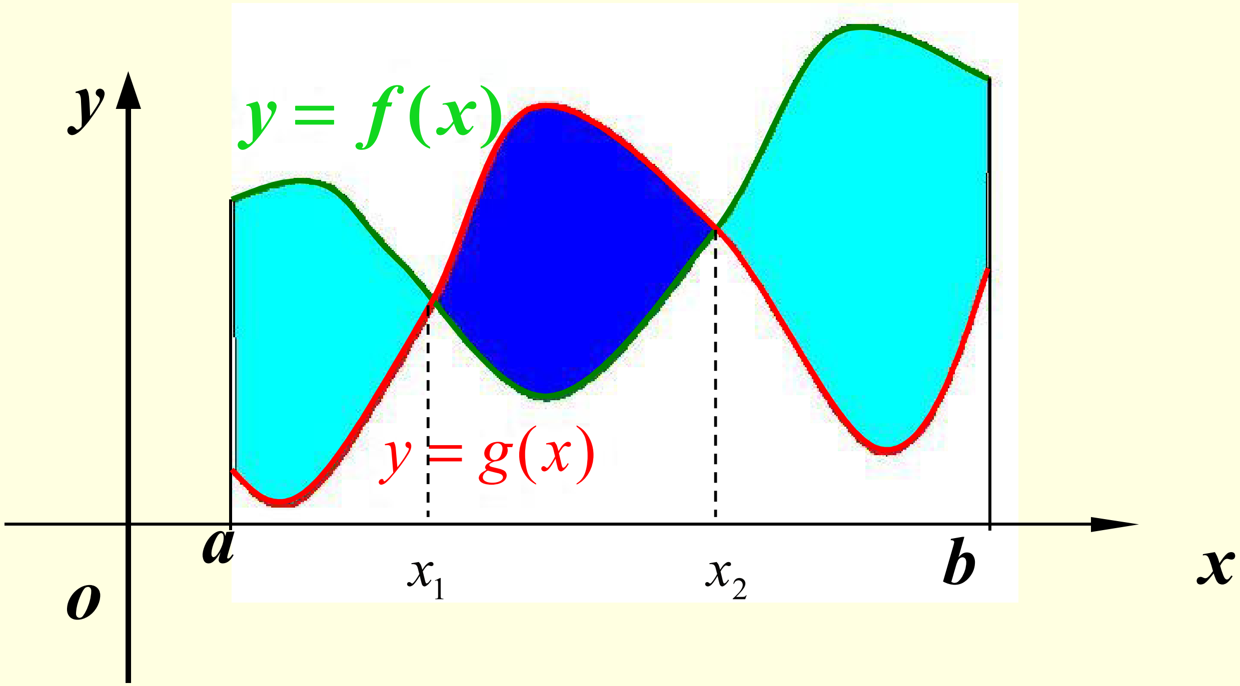




$$A = \int_a^b f(x)dx$$

$$A = \int_a^b |f(x)| dx$$

$$A = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx$$

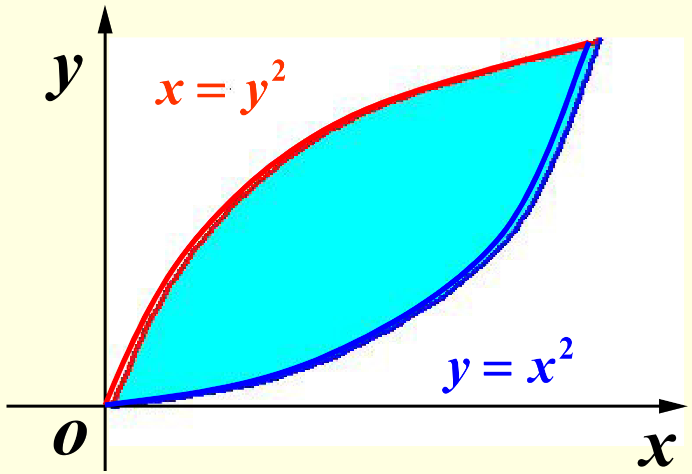


$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$$

例 1 计算由两条抛物线$y^2 = x$和$y = x^2$所围成的图形的面积.

解 两曲线的交点

$$(0,0) \quad (1,1)$$



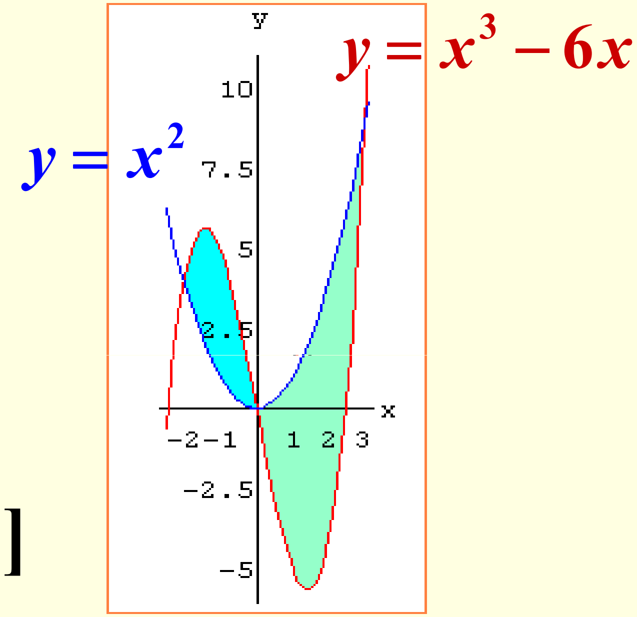
选 x 为积分变量 $x \in [0,1]$

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

例 2 计算由曲线$y = x^3 - 6x$和$y = x^2$所围成的图形的面积.

解 两曲线的交点

$$\begin{cases} y = x^3 - 6x \\ y = x^2 \end{cases}$$



$\Rightarrow (0,0), \quad (-2,4), \quad (3,9).$

选 x 为积分变量 $x \in [-2, 3]$

(1) $x \in [-2, 0]$, $\quad x^3 - 6x \ge x^2$

(2) $x \in [0,3]$, $\quad x^2 \ge x^3 - 6x.$

$$A=\int_{-2}^{3}|x^3-6x-x^2|\,dx$$

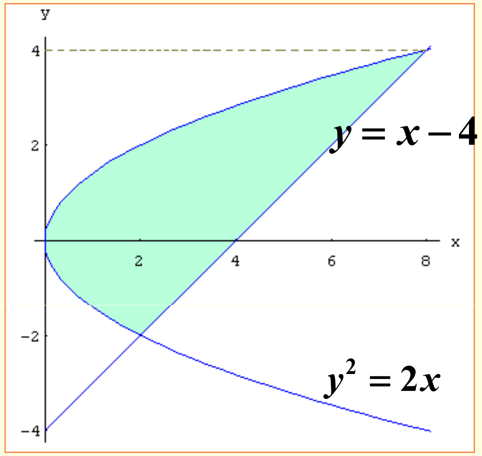
$$=\int_{-2}^{0}(x^3-6x-x^2)\,dx+\int_{0}^{3}(x^2-x^3+6x)\,dx$$

$$=\frac{253}{12}.$$

注：有时，将x与y交换角色，可将问题简化。

例 3 计算由曲线$y^2=2x$和直线$y=x-4$所围成的图形的面积.

解 两曲线的交点



$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = x-4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2,-2),\ (8,4).$$

选 y 为积分变量 $y\in[-2,4]$

$$A=\int_{-2}^{4}\left(y+4-\frac{y^2}{2}\right)dy=18.$$

（二）参数函数的面积公式

如果曲边梯形的曲边为参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$

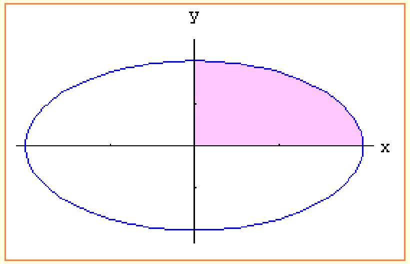
则曲边梯形的面积 $A = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t)dt$.

（其中 t_1 和 t_2 对应曲线起点与终点的参数值）

在 $[t_1, t_2]$（或 $[t_2, t_1]$）上 $x = \varphi(t)$ 具有连续导数，$y = \psi(t)$ 连续.

例 4 求椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的面积.

解 椭圆的参数方程 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$



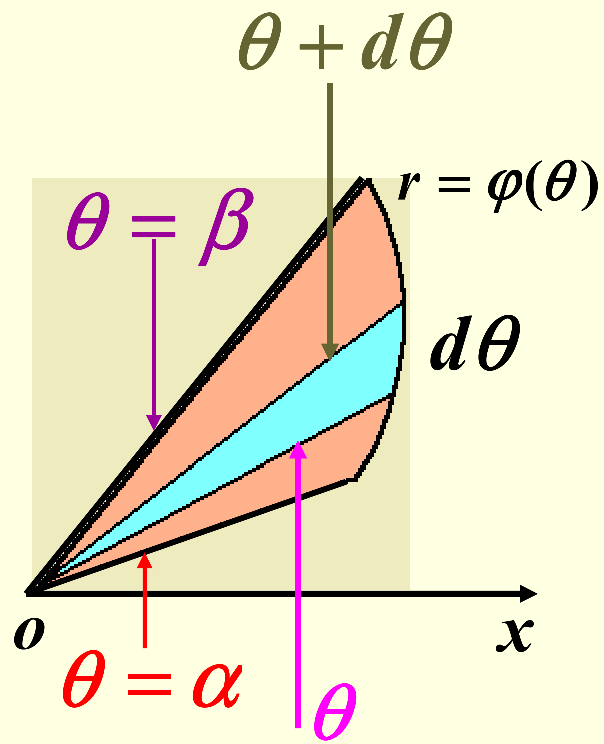
由对称性知总面积等于4倍第一象限部分面积.

$$A = 4\int_0^a y\,dx = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\,d(a\cos t)$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = \pi ab.$$

（三）极坐标系下的面积公式

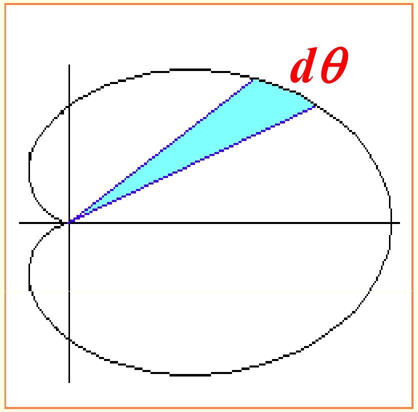
设由曲线$r=\varphi(\theta)$及射线$\theta=\alpha$、$\theta=\beta$围成一曲边扇形，求其面积．这里，$\varphi(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上连续，且$\varphi(\theta)\geq 0$.



曲边扇形的面积

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[\varphi(\theta)]^{2}d\theta.$$

例 5 求心形线$r=a(1+\cos\theta)$所围平面图形的面积$(a>0)$.



解 利用对称性知

$$A=2\cdot\frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2 d\theta$$

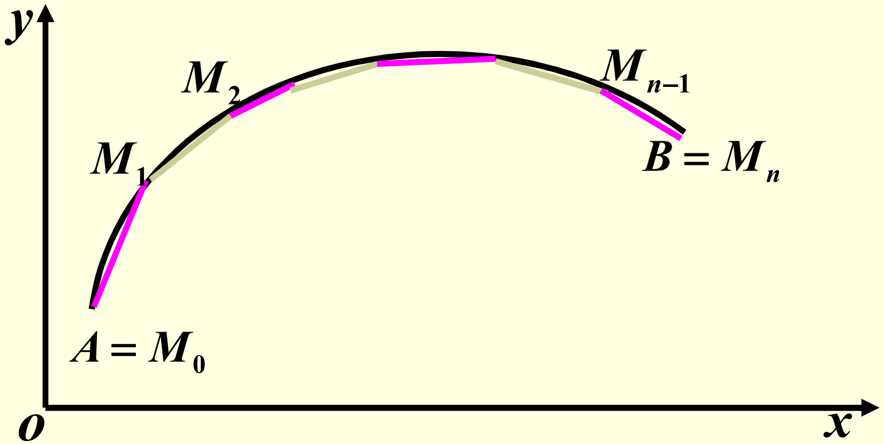
$$=a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$

$$=a^2\left[\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi}=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

二、求曲线的弧长

设A、B是曲线弧上的两个端点，在弧上插入分点

$$A = M_0, M_1, \cdots M_i,$$
$$\cdots, M_{n-1}, M_n = B$$



并依次连接相邻分点得一内接折线，当分点的数目无限增加且每个小弧段都缩向一点时，

此折线的长$\sum_{i=1}^{n} |M_{i-1}M_i|$的极限存在，则称此极限为曲线弧$AB$的弧长.

（一）参数函数的弧长公式

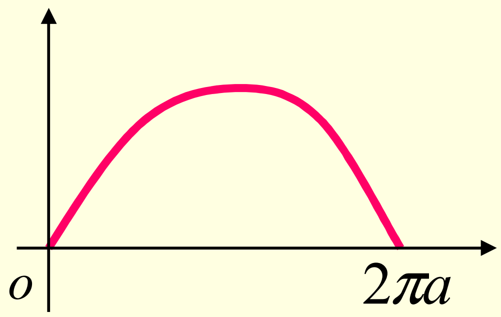
定理　设 $x(t), y(t)$ 在 $[T_1, T_2]$ 上具有连续导数，

曲线弧为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad (T_1 \le t \le T_2)$

则弧长 $l = \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt.$

例6　求旋轮线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$

一拱的弧长。



解　由定理得

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{[a(1-\cos t)]^2 + (a\sin t)^2}\,dt$$

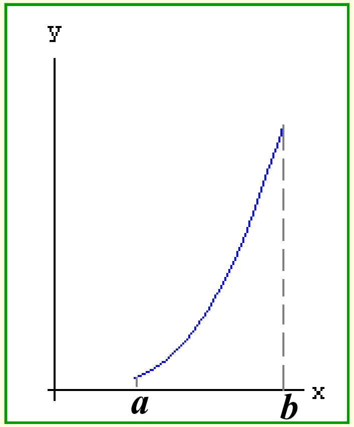
$$= \sqrt{2}a\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\,dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}dt \;= 8a.$$

（二）直角坐标方程曲线弧长公式

设曲线弧为$y=f(x)\quad(a\le x\le b)$，其中$f(x)$在$[a,b]$上有一阶连续导数，则弧长为

$$l=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

例 7 计算曲线$y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$上相应于$x$从$a$到$b$的一段弧的长度.



解 $\because y' = x^{\frac{1}{2}},$

$$\therefore ds = \sqrt{1+(x^{\frac{1}{2}})^2}dx = \sqrt{1+x}dx,$$

所求弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{1+x}dx = \frac{2}{3}[(1+b)^{\frac{3}{2}} - (1+a)^{\frac{3}{2}}].$$

例 8　计算曲线 $y=(x/2)^{2/3}$ 上相应于 x 从 **0** 到 **2** 的一段弧的长度.

（三）极坐标方程曲线弧长公式

如果曲线弧为 $r = r(\theta) \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$

其中 $r(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有连续导数，则弧长为

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\, d\theta.$$

例8 求极坐标系下曲线$r = a\left(\sin\frac{\theta}{3}\right)^3$的长.

$(a > 0)$ $(0 \le \theta \le 3\pi)$

解 $\because\ r' = 3a\left(\sin\frac{\theta}{3}\right)^2 \cdot \cos\frac{\theta}{3} \cdot \frac{1}{3} = a\left(\sin\frac{\theta}{3}\right)^2 \cdot \cos\frac{\theta}{3},$

$$\therefore\ s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,d\theta$$

$$= \int_0^{3\pi} \sqrt{a^2\left(\sin\frac{\theta}{3}\right)^6 + a^2\left(\sin\frac{\theta}{3}\right)^4\left(\cos\frac{\theta}{3}\right)^2}\,d\theta$$

$$= a\int_0^{3\pi}\left(\sin\frac{\theta}{3}\right)^2 d\theta = \frac{3}{2}\pi a.$$

（四）空间曲线弧的弧长公式

如果空间曲线弧段的方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \qquad (T_1 \le t \le T_2)$$

则弧长

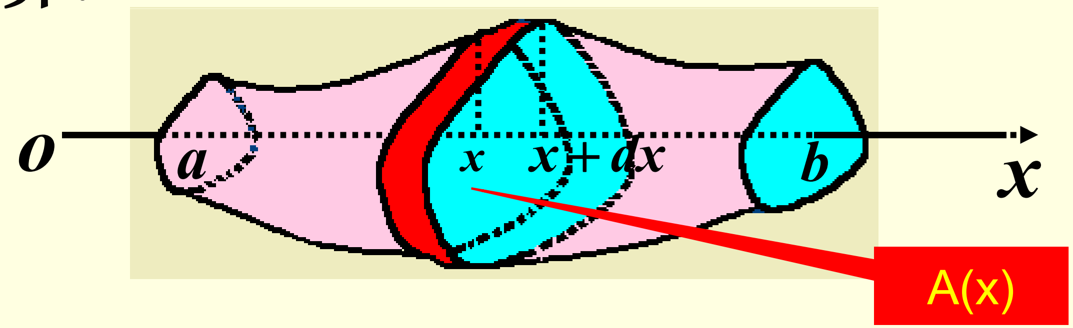
$$l = \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt.$$

三、求某些特殊形状的几何体的体积

（一）已知平行截面面积的几何体的体积

一个立体，如果知道该立体上垂直于一定轴的各个截面面积，那么，这个立体的体积也可用定积分来计算.

$A(x)$表示过点x且垂直于x轴

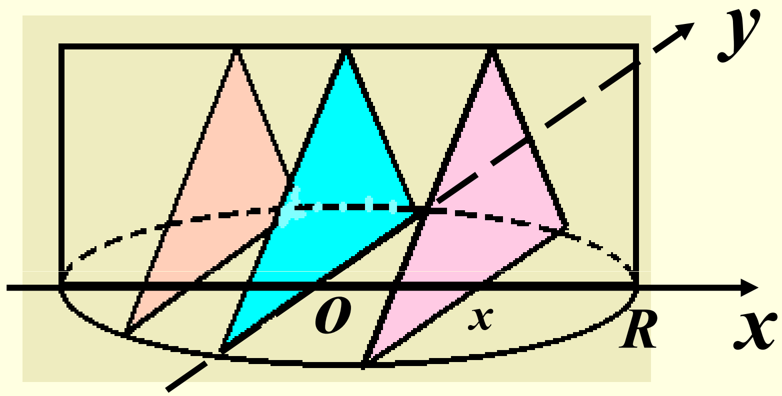


的截面面积，$A(x)$为x的已知连续函数

则立体体积 $V = \int_a^b A(x)dx$.

例 9 求以半径为 R 的圆为底、平行且等于底圆直径的线段为顶、高为 h 的正劈锥体的体积.

解 取坐标系如图



底圆方程为

$x^2 + y^2 = R^2,$

垂直于 x 轴的截面为等腰三角形

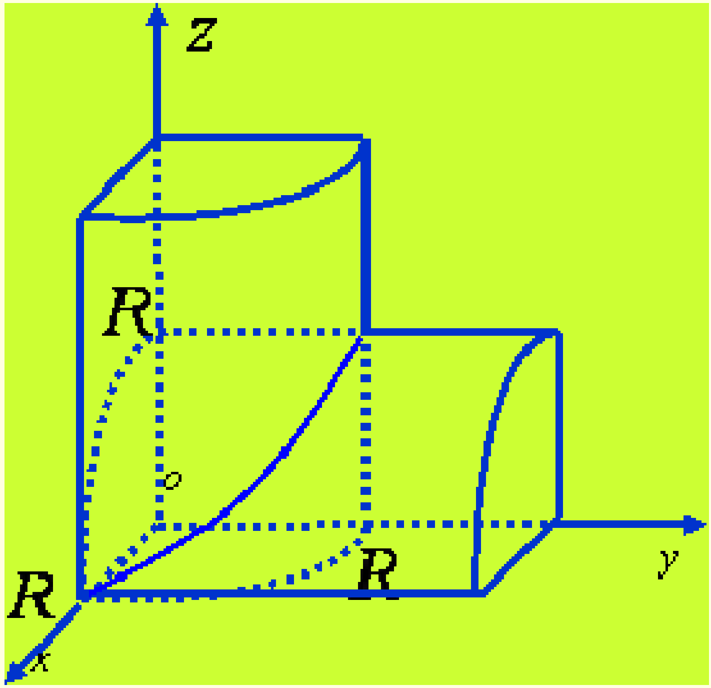
截面面积 $A(x) = h \cdot y = h\sqrt{R^2 - x^2}$

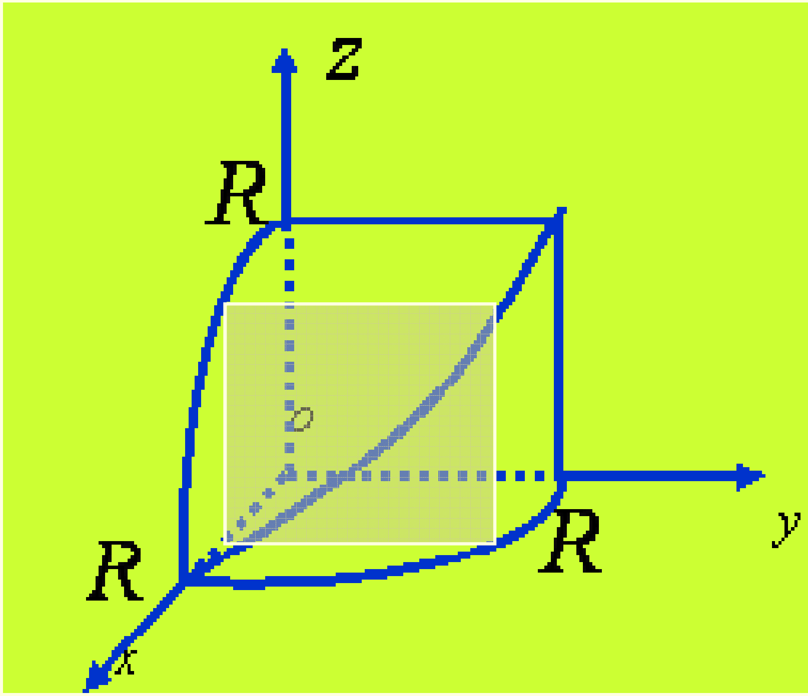
立体体积 $V = h\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}\pi R^2 h.$

例10　求两圆柱：$x^2+y^2=R^2$，$z^2+x^2=R^2$

所围的立体体积．

解：两圆柱所围成的立体是关于8个卦限对称的，因此，它的体积是其在第一卦限体积的8倍。如何求其在第一卦限的体积？下图就是其在第一卦限部分立体：





该立体垂直x轴的截面, 是一个边长为$\sqrt{R^2 - x^2}$ 的正方形，所以截面面积为：

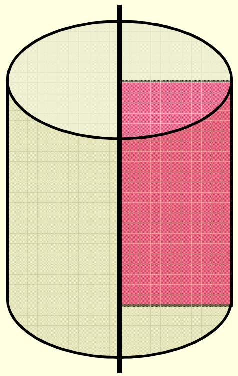
$$A(x) = R^2 - x^2$$

故两圆柱面所围成的立体体积

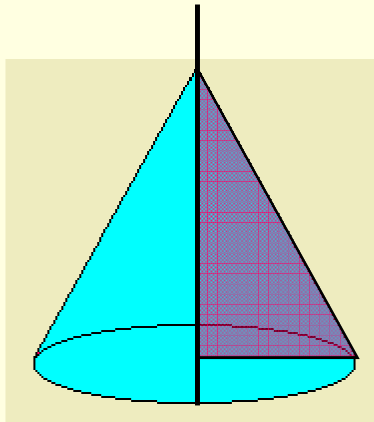
$$V = 8\int_0^R \left(R^2 - x^2 \right) dx = \frac{16}{3} R^3$$

（二）旋转体的体积

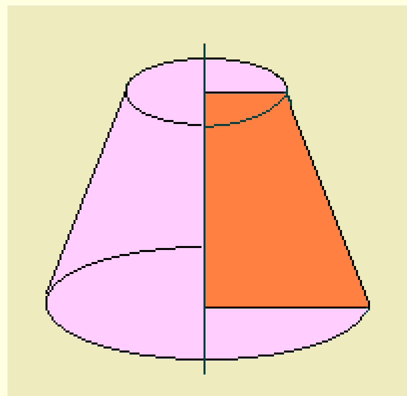
旋转体就是由一个平面图形饶这平面内一条直线旋转一周而成的立体．这直线叫做旋转轴．



圆柱



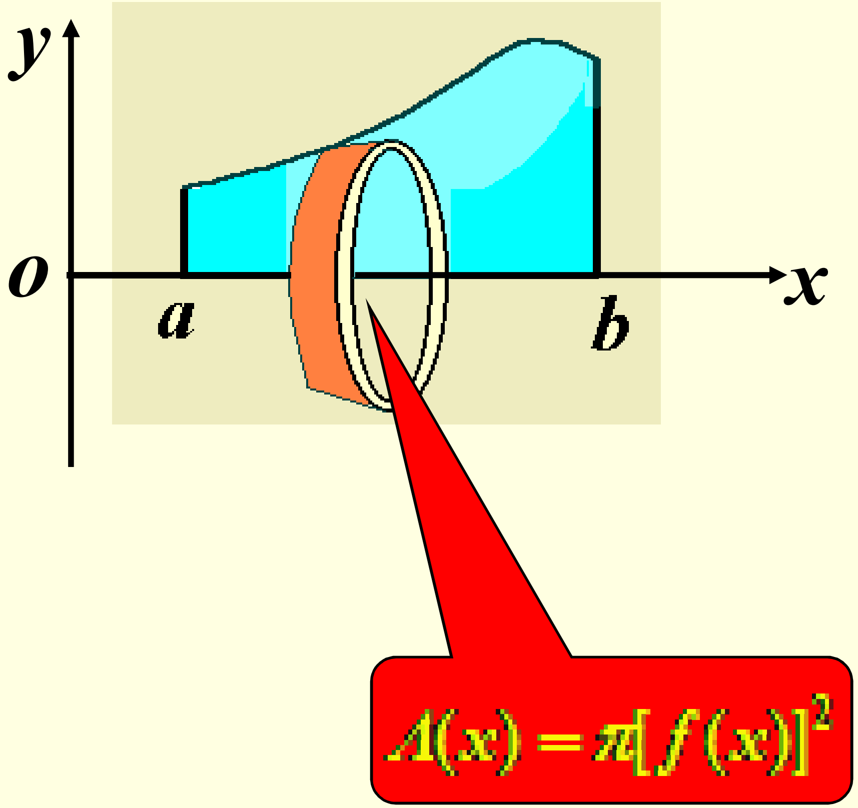
圆锥



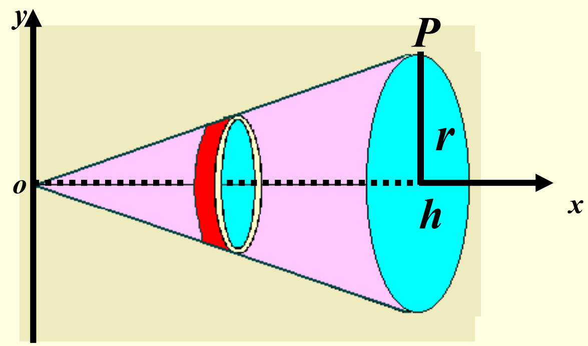
圆台

一般地，如果旋转体是由连续曲线$y=f(x)$、直线$x=a$、$x=b$及x轴所围成的曲边梯形绕x轴旋转一周而成的立体，其体积为：

$$\boxed{V=\int_a^b \pi[f(x)]^2dx}$$



例 11 连接坐标原点O及点$P(h,r)$的直线、直线$x=h$及x轴围成一个直角三角形．将它绕x轴旋转构成一个底半径为r、高为h的圆锥体，计算圆锥体的体积.



解 直线 OP方程为

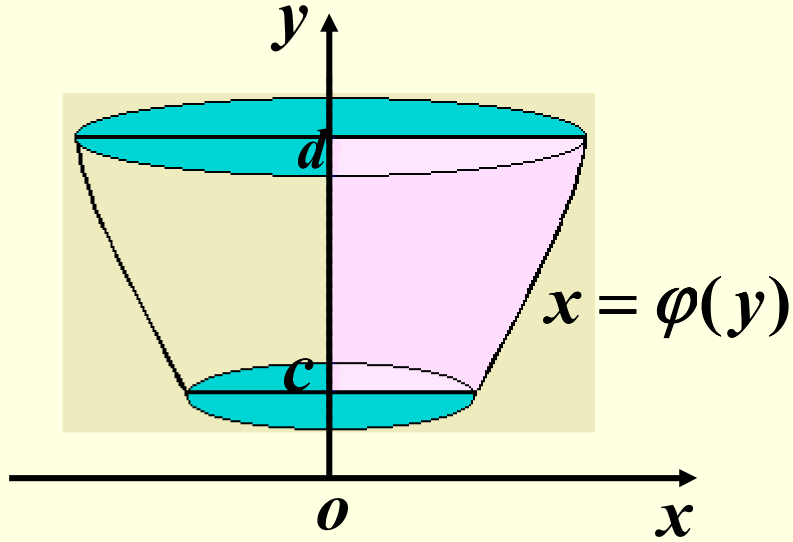
$$y=\frac{r}{h}x$$

取积分变量为x， $x\in[0,h]$, 由公式得

$$V=\int_0^h \pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\frac{\pi h r^2}{3}.$$

注：类似地，如果旋转体是由连续曲线 $x=\varphi(y)$、直线 $y=c$、$y=d$ 及 y 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的立体，体积为

$$V=\pi\int_c^d [\varphi(y)]^2 dy$$



在参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 下，旋转体的体积为

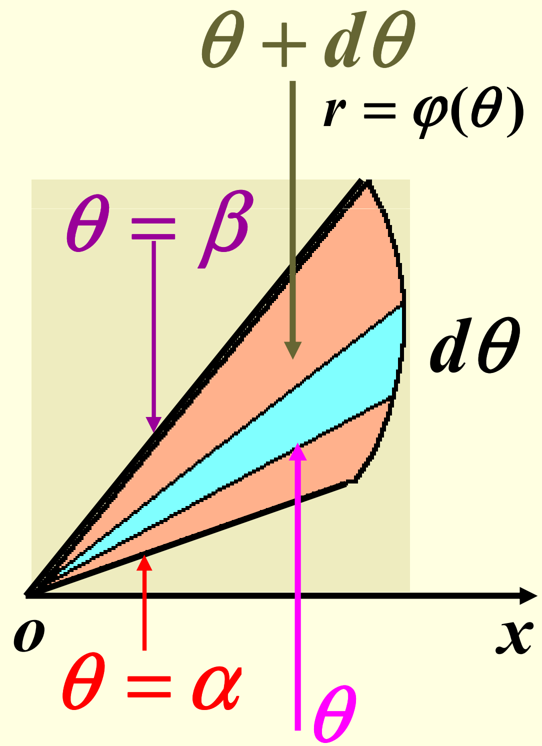
$$V = \pi \int_{T_1}^{T_2} [y(t)]^2 x'(t) dt,$$

其中$T_1 = x^{-1}(a)$，$T_2 = x^{-1}(b)$.

在极坐标下，由$0 \le r \le \varphi(\theta), \theta \in [\alpha, \beta] \subset [0, \pi]$

所表示的区域绕极轴旋转一周所得的旋转体的体积为

$$V = \frac{2}{3}\pi\int_{\alpha}^{\beta}\varphi^{3}(\theta)\sin\theta d\theta.$$



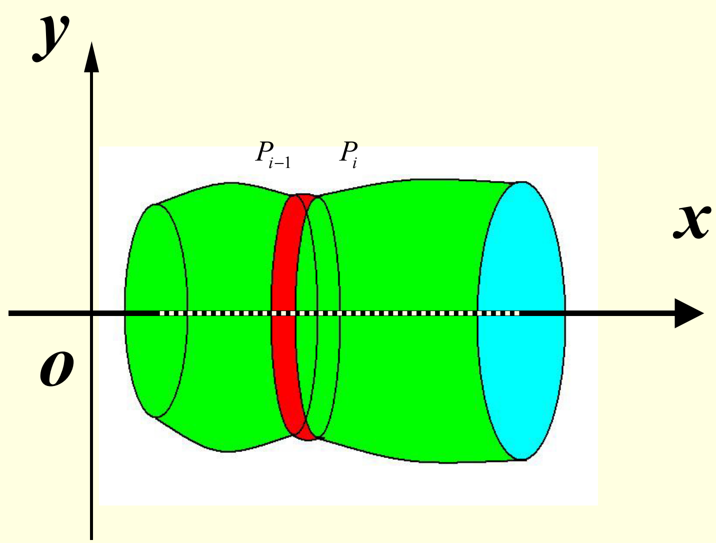
四、旋转体的侧面积

设平面上一段可求长的曲线为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad (T_1 \le t \le T_2)$$

该曲线段绕x轴旋转一周所得的

旋转体的侧面积为



$$S = 2\pi \int_{T_1}^{T_2} y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt.$$

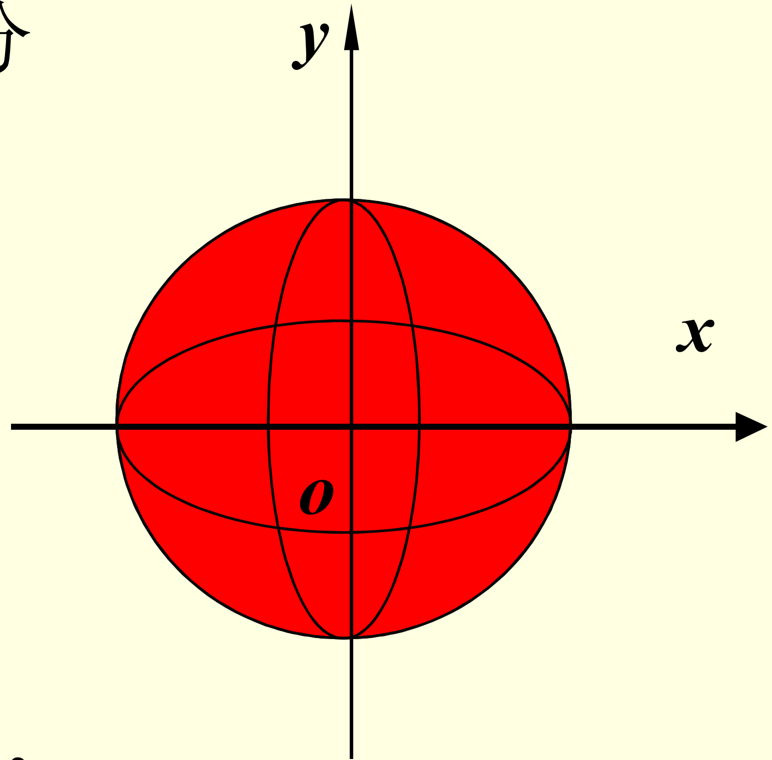
例 12　求半径为a的球的表面积。

解 将其看作圆的上半部分

$$y=\sqrt{a^2-x^2}$$

绕x轴转一周而的得到

旋转体的侧面积，因而



$$S=2\pi\int_{-a}^{a}f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

$$=2\pi a\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx \quad =4\pi a^2.$$