解 用柱坐标，$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^t\rho\mathrm{d}\rho\int_0^h[z^2+f(\rho^2)]\mathrm{d}z$

$$=2\pi\int_0^t\rho\left[\frac{1}{3}z^3+zf(\rho^2)\right]_0^h\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\int_0^t\rho\left[\frac{1}{3}h^3+hf(\rho^2)\right]\mathrm{d}\rho.$$

于是，$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=2\pi ht\left[\frac{1}{3}h^2+f(t^2)\right]$.

$$\lim_{t\to0^+}\frac{F(t)}{t^2}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{t\to0^+}\frac{2\pi ht\left[\frac{1}{3}h^2+f(t^2)\right]}{2t}=\pi h\left[\frac{1}{3}h^2+f(0)\right].$$

6. 计算三重积分 $\iiint\limits_{(V)}(x+y+z)^2\mathrm{d}V$，其中$(V)$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant1$.

解 $\iiint\limits_{(V)}(x+y+z)^2\mathrm{d}V=\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V+\iiint\limits_{(V)}(2xy+2xz+2yz)\mathrm{d}V.$

由于(V)关于 xOy 平面对称，而$(xz+yz)$关于 z 为奇函数，则 $2\iiint\limits_{(V)}(xz+yz)\mathrm{d}V=0$，类似的可知$\iiint\limits_{(V)}xy\mathrm{d}V=0$，从而$\iiint\limits_{(V)}(2xy+2xz+2yz)\mathrm{d}V=0$.

又
$$\iiint\limits_{(V)}x^2\mathrm{d}V=\int_{-a}^{a}x^2\mathrm{d}x\iint\limits_{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant1-\frac{x^2}{a^2}}\mathrm{d}\sigma=\int_{-a}^{a}x^2\left[\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{15}\pi a^3bc.$$

类似可得 $\iiint\limits_{(V)}y^2\mathrm{d}V=\frac{4}{15}\pi ab^3c$，$\iiint\limits_{(V)}z^2\mathrm{d}V=\frac{4}{15}\pi abc^3$.

故 $\iiint\limits_{(V)}(x+y+z)^2\mathrm{d}V=\frac{4}{15}\pi abc(a^2+b^2+c^2)$.

习 题 6.4

(A)

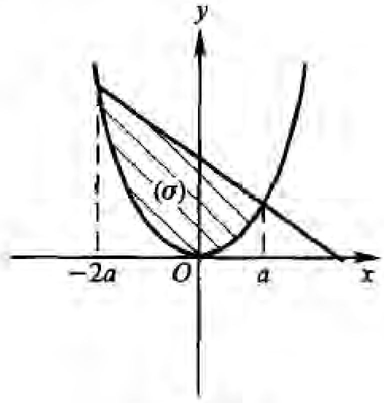
1. 求下列曲线所围成的均匀薄板的质心坐标.

(1) $ay=x^2, x+y=2a\ (a>0)$；

(2) $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)\quad(0\leqslant t\leqslant2\pi, a>0)$与 x 轴；

(3) $\rho=a(1+\cos\varphi)\quad(a>0)$.

解 设μ为薄板的面密度.$(\bar{x},\bar{y})$为质心,则



(第1题(1))

(1) $\bar{y}=\dfrac{\mu\iint\limits_{(\sigma)}y\mathrm{d}\sigma}{\mu\iint\limits_{(\sigma)}\mathrm{d}\sigma}=\dfrac{\int_{-2a}^{a}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{a}x^2}^{2a-x}y\mathrm{d}y}{\int_{-2a}^{a}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{a}x^2}^{2a-x}\mathrm{d}y}=\dfrac{8}{5}a$,

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_{(\sigma)}\mu x\mathrm{d}\sigma}{\mu\iint\limits_{(\sigma)}\mathrm{d}\sigma}=\frac{\int_{-2a}^{a}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{a}x^2}^{2a-x}x\mathrm{d}y}{\int_{-2a}^{a}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{a}x^2}^{2a-x}\mathrm{d}y}=-\frac{a}{2}.$$

(2) 薄板的质量 $m=\iint\limits_{(\sigma)}\mu\mathrm{d}\sigma$

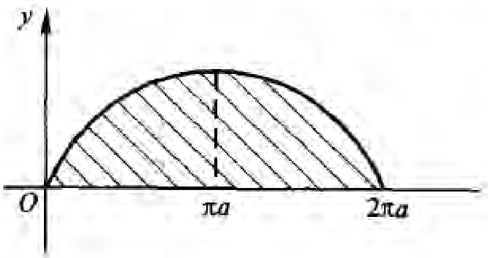
$$=\mu\int_0^{2\pi a}\mathrm{d}x\int_0^{a(1-\cos t)}\mathrm{d}y$$

$$=\mu\int_0^{2\pi a}a(1-\cos t)\mathrm{d}x$$

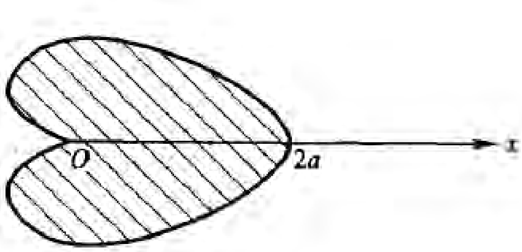
$$\xlongequal{令x=a(t-\sin t)}\mu\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\mathrm{d}t=3\pi a^2\mu.$$

对x轴的静力矩 $M_x=\mu\iint\limits_{(\sigma)}y\mathrm{d}\sigma=\mu\int_0^{2\pi a}\mathrm{d}x\int_0^{a(1-\cos t)}y\mathrm{d}y=\dfrac{5\pi a^3}{2}\mu$. 故 $\bar{y}=\dfrac{5\pi a^3}{2}\mu\Big/3\pi a^2\mu=\dfrac{5}{6}a$.

由对称性知 $\bar{x}=\pi a$,故质心$\left(\pi a,\dfrac{5}{6}a\right)$.



(第1题(2))



(第1题(3))

(3) 由对称性知 $\bar{y}=0$,

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_{(\sigma)}x\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_{(\sigma)}\mathrm{d}\sigma}=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a(1+\cos\varphi)}\rho\cdot\rho\cos\varphi\mathrm{d}\rho}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a(1+\cos\varphi)}\rho\mathrm{d}\rho}=\frac{\frac{5}{4}\pi a^3}{\frac{3}{2}\pi a^2}=\frac{5}{6}a,$$

故质心为$\left(\dfrac{5}{6}a,0\right)$.

2. 求边界为下列曲面的均匀物体的质心.

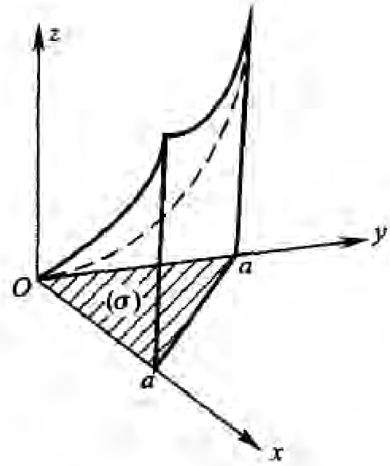
(1) $z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}, z=0(a>0,b>0,c>0)$;

(3) $z=x^2+y^2, x+y=a, x=0, y=0, z=0(a>0)$.

解　(1) 由对称性 $\bar{x}=\bar{y}=0$，半椭球体的质量 $M=\frac{2}{3}\pi abc\mu$. 对 xoy 平面的静矩 $M_{xy}=\iiint\limits_{(V)}\mu z\mathrm{d}V=\int_0^c\mu z\mathrm{d}z\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\frac{z^2}{c^2}}\mathrm{d}\sigma=\mu\int_0^c\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)z\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4}\mu abc^2$,

故　$\bar{z}=\frac{M_{xy}}{M}=\frac{3}{8}c$. 从而质心$\left(0,0,\frac{3}{8}c\right)$.

(3) 立体质量
$$M=\iiint\limits_{(V)}\mu\mathrm{d}V=\mu\iint\limits_{(\sigma)}\mathrm{d}\sigma\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z=\mu\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z=\frac{1}{6}\mu a^4.$$



(第 2 题(3))

对 xOy 平面及 yOz 平面的静矩分别为

$$M_{xy}=\iiint\limits_{(V)}\mu z\mathrm{d}V=\mu\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}z\mathrm{d}z=\frac{\mu}{2}\cdot\frac{7}{90}a^6,$$

$$M_{yz}=\iiint\limits_{(V)}x\mu\mathrm{d}V=\mu\int_0^a x\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z=\frac{\mu}{15}a^5.$$

故　$\bar{z}=\frac{M_{xy}}{M}=\frac{7}{30}a^2, \bar{x}=\frac{M_{yz}}{M}=\frac{2}{5}a$.

由对称性，质心必在 $x=y$ 平面上，即 $\bar{y}=\bar{x}$. 故质心为$\left(\frac{2}{5}a,\frac{2}{5}a,\frac{7}{30}a^2\right)$.

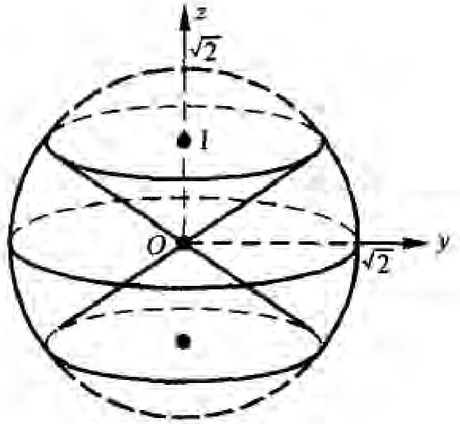
4. 求均匀物体：$x^2+y^2+z^2\leqslant 2, x^2+y^2\geqslant z^2$ 对 z 轴的转动惯动.

解　$$I_z=2\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)\mu\mathrm{d}V$$

$$= 2\mu\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} r^2\sin^2\theta\cdot r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{8}{3}\pi\mu.$$

其中 μ 为体密度.



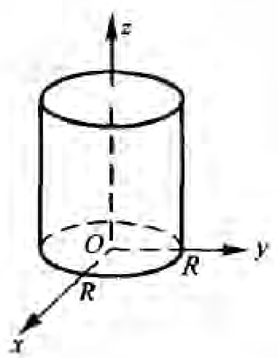
（第 4 题）

5. 求底半径为 R,高为 H 的均匀正圆柱体对底面直径的转动惯量.

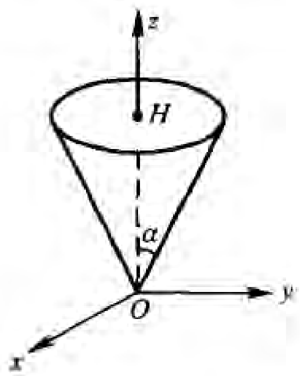
解 如图所示建立坐标系,对 x 轴或 y 轴的转动惯量即对底面直径的转动惯量. 设 μ 为正圆柱的体密度,则

$$I_x = \iiint\limits_{(V)}(\mu\mathrm{d}V)(y^2+z^2) = \mu\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R\rho\mathrm{d}\rho\int_0^H(\rho^2\sin^2\varphi+z^2)\mathrm{d}z$$

$$= \mu\pi R^2H\left(\frac{H^2}{3}+\frac{R^2}{4}\right) = M\left(\frac{H^2}{3}+\frac{R^2}{4}\right) \quad (M\text{ 为圆柱体质量}).$$



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 求高为 H,半顶角为 α,体密度为 μ 的均匀圆锥体对位于其顶点的一单位质量质点的引力.

解 如图所示建立坐标系,则圆锥面的方程为 $z\tan\alpha = \sqrt{x^2+y^2}$. 在 xOy 平面的投影为圆域 $\begin{cases} z=0, \\ x^2+y^2\leqslant H^2\tan^2\alpha, \end{cases}$ 从而引力微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = k\dfrac{\mu\mathrm{d}V}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\{x,y,z\} = \{\mathrm{d}F_x,\mathrm{d}F_y,\mathrm{d}F_z\}$,$k$ 为引力常数.

由对称性知 $F_x = \iiint\limits_{(V)}\mathrm{d}F_x = 0, F_y = 0,$

$$F_z = \iiint_{(V)} dF_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{H\tan\alpha} \rho d\rho \int_{\rho\cot\alpha}^{H} \frac{k\mu z}{\sqrt{\rho^2+z^2}^{3}} dz$$

$$= 2\pi k\mu \int_0^{H\tan\alpha} \left.\frac{\rho}{-\sqrt{\rho^2+z^2}}\right|_{\rho\cot\alpha}^{H} d\rho$$

$$= 2\pi k\mu \int_0^{H\tan\alpha} \left(\sin\alpha - \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+H^2}}\right) d\rho$$

$$= 2\pi k\mu H(1-\cos\alpha).$$

故所求引力为 $\boldsymbol{F} = \{0,0,2\pi k\mu H(1-\cos\alpha)\}$.

(B)

1. 一个火山的形状可以用曲面 $z = he^{-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{4h}}(z>0)$ 来表示. 在一次爆发后，有体积为 V 的熔岩粘附在山上，使它具有和原来一样的形状，求火山高度 h 变化的百分比.

解　火山的高度为 h，体积为 V_h.

$$V_h = \iiint_{(V_1)} dV = \int_0^h dz \iint_{x^2+y^2\leqslant\left(4h\ln\frac{z}{h}\right)^2} d\sigma = \int_0^h \pi\left(4h\ln\frac{z}{h}\right)^2 dz = 32\pi h^3.$$

火山爆发后的体积 $V_1 = V_h + V = 32\pi h^3 + V$，高度为 h_1. 由于爆发后保持原来的形状，则 $V_1 = 32\pi h_1^3$，从而 $h_1 = \left(h^3 + \frac{V}{32\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$. 故火山高度增加的百分比为 $\frac{h_1-h}{h} = \frac{1}{h}\left(h^3+\frac{V}{32\pi}\right)^{\frac{1}{3}} - 1$.

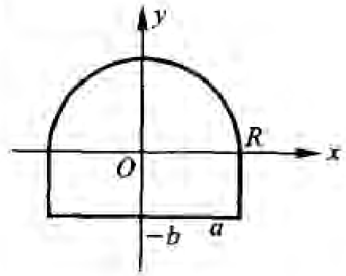
2. 在某一生产过程中，要在半圆形的直边上添上一个边与直径等长的矩形，使整个平面图形的质心落在圆心上，试求矩形的另一边长.

解　如图示建立坐标系，圆半径为 R，矩形的另一边长为 b，质量是均匀分布的，也即面密度 μ 的常数. 图形的质心 $A(\bar{x},\bar{y})$，则依题意 $\bar{x}=0,\bar{y}=0$.

此图形(σ)的质量 $m = \mu\left(\frac{1}{2}\pi R^2 + 2bR\right)$，对 x 轴的静矩

$$M_x = \iint_{(\sigma)} \mu y d\sigma = \mu\int_{-R}^{R} dx \int_{-b}^{\sqrt{R^2-x^2}} y dy$$

$$= \mu R\left(\frac{2}{3}R^2 - b^2\right).$$



(第 2 题)

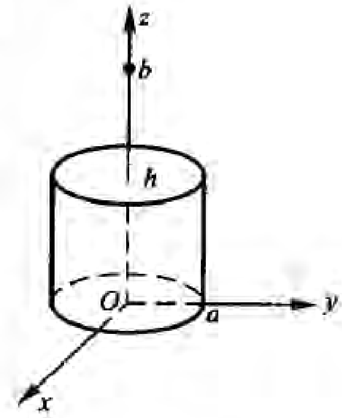
则由 $\bar{y}=\dfrac{M_x}{m}=0$ 得 $b=\sqrt{\dfrac{2}{3}}R$.

3. 一个均匀圆柱体，全部质量为 M，占有的区域是 $x^2+y^2\leqslant a^2,0\leqslant z\leqslant h$，求它对位于点 $(0,0,b)$，质量为 M' 的一个质点的引力，其中 $b>h$.

解 如图所示建立坐标系，圆柱体对质点 M' 的引力

$$F=\{F_x,F_y,F_z\}.$$

由对称性知引力 F 的 x 与 y 分量 $F_x=\iiint\limits_{(V)}\mathrm{d}F_x=0,F_y=\iiint\limits_{(V)}\mathrm{d}F_y=0$，



（第 3 题）

而

$$\begin{aligned}F_z&=\iiint\limits_{(V)}\mathrm{d}V=\iiint\limits_{(V)}\frac{kM'\mu(z-b)}{[x^2+y^2+(z-b)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}V\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a\rho\mathrm{d}\rho\int_0^h\frac{kM'\mu(z-b)}{[\rho^2+(z-b)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}z\\&=2\pi kM'\mu\int_0^a\rho\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+b^2}}-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(b-h)^2}}\right)\mathrm{d}\rho\\&=2\pi kM'\cdot\frac{M}{\pi a^2h}(\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+(b-h)^2}-h).\end{aligned}$$

故引力 $F=\left\{0,0,\dfrac{2kMM'}{a^2h}(\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+(b-h)^2}-h)\right\}$.

4. 设物体对轴 L 的转动惯量为 I_L，对通过质心 C 平行于 L 轴的轴 L_C 的转动惯量为 I_C，L_C 与 L 的距离为 a，试证 $I_L=I_C+ma^2$，其中 m 为物体的质量，这一公式称为平行轴定理.

证明 以质心为坐标原点，L_C 为 y 轴，L_C 与 L 所在的平面为 xOz 坐标面. 设物体的密度为 $\mu(x,y,z)$，则

$$m=\iiint\limits_{(V)}\mu(x,y,z)\mathrm{d}V,I_C=\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}V,$$

$$\begin{aligned}I_L&=\iiint\limits_{(V)}[(x-a)^2+y^2]\mu(x,y,z)\mathrm{d}V\\&=I_C+ma^2-2a\iiint\limits_{(V)}x\mu(x,y,z)\mathrm{d}V.\end{aligned}$$

由于质心为坐标原点,则物体对 yOz 坐标面的静矩

$$M_{yz}=\iiint\limits_{(V)}x\mu(x,y,z)\mathrm{d}V=0,\text{于是 } I_L=I_C+ma^2.$$

习　题　6.5

(A)

1. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{\alpha\to0}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}$;　(3) $\lim\limits_{\alpha\to0}\int_0^1\sqrt{1+\alpha^2-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解　(1) 由于 $\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$ 在 $(x,\alpha)\in[0,1]\times[-1,1]$ 上连续,由定理 5.1

$$\lim_{\alpha\to0}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}=\int_0^1\left(\lim_{\alpha\to0}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}.$$

(3) $\sqrt{1+\alpha^2-x^2}$ 在 $[0,1]\times[-1,1]$ 上连续,由定理 5.1

$$\lim_{\alpha\to0}\int_0^1\sqrt{1+\alpha^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{\alpha\to0}\sqrt{1+\alpha^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

2. 求下列函数的导数.

(2) $F(y)=\int_{a+y}^{b+y}\frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}x$;

(3) $F(x)=\int_0^x(x+y)f(y)\,\mathrm{d}y$,其中 f 为可微函数,求 $F''(x)$.

解　由定理 5.4.

(2) $$F'(y)=\int_{a+y}^{b+y}\cos xy\,\mathrm{d}x+\frac{\sin(b+y)y}{b+y}-\frac{\sin(a+y)y}{a+y}$$
$$=\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{b+y}\right)\sin y(b+y)-\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{a+y}\right)\sin y(a+y).$$

(3) $$F'(x)=\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y+2xf(x),$$
$$F''(x)=f(x)+2f(x)+2xf'(x)=3f(x)+2xf'(x).$$

3. 利用定理 5.2 计算下列积分.

(1) $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$; (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\,\mathrm{d}x\ (a>0,b>0)$.

解　(1) 令 $F(\alpha)=\int_0^1\frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.