3.5 多元复合函数的偏导数和全微分

在一元函数的求导法中，复合函数的链式法则发挥了非常重要的作用。本部分将把链式法则推广到多元函数。为了论述简洁，我们以由两个中间变量和两个自变量构成的复合函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 为例来论述链式法则。

定理3.5 设 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$ 均在点 (x,y) 处可微， 而函数 $z=f(u,v)$ 在对应的点 (u,v) 处处可微，则复合函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 处也必

可微，且其全微分为

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$= [\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}]\mathrm{d}x + [\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}]\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right)$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$$

（全微分形式不变性）

证明: 令自变量 x, y 分别有改变量 $\Delta x, \Delta y$, 则函数 u, v 相应地分别有改变量 $\Delta u, \Delta v$, 从而函数 f

有改变量 Δz. 由于 u, v 均在点 (x, y) 处可微，故有

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o_1(\rho), \qquad (1)$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + o_2(\rho), \qquad (2)$$

其中 $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $o_i(\rho)(i = 1, 2)$是当$\rho \to 0$时关于 ρ 的高阶无穷小。又由于函数 f在(x, y)所对应的 (u, v) 处可微，故有

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta v + o(\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}), \qquad (3)$$

将上述(1)(2)两式带入(3)式并加以整理， 则得

复合函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 的改变量为

$$\Delta z=[\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}]\Delta x+[\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}]\Delta y+\alpha, \quad (4)$$

其中

$$\alpha=\frac{\partial z}{\partial u}o_1(\rho)+\frac{\partial z}{\partial v}o_2(\rho)+o(\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}).$$

要证明定理成立，只需证明（4）式中的 α 为 ρ 的高阶无穷小，即

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\alpha}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}[\frac{\partial z}{\partial u}\frac{o_1(\rho)}{\rho}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{o_2(\rho)}{\rho}+\frac{o(\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2})}{\rho}]=0.$$

注意到 $\frac{\partial z}{\partial u}$、$\frac{\partial z}{\partial v}$ 均与 ρ 无关，以及 $\lim_{\rho\to 0}\frac{o_i(\rho)}{\rho}=0(i=1,2)$,

从而有 $$\lim_{\rho\to 0}\left[\frac{\partial z}{\partial u}\frac{o_1(\rho)}{\rho}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{o_2(\rho)}{\rho}\right]=0.$$

因此，以下只需证明 $$\lim_{\rho\to 0}\frac{o(\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2})}{\rho}=0.$$

由于 $$\frac{o(\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2})}{\rho}=\frac{o(\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2})}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}\frac{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}{\rho}, \quad (5)$$

而当 ρ 充分小时，由（1）式可知

$$\frac{|\Delta u|}{\rho}\le\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\frac{|\Delta x|}{\rho}+\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\frac{|\Delta y|}{\rho}+\frac{|o_1(\rho)|}{\rho}<\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|+1$$

故 $\dfrac{\Delta u}{\rho}$ 有界，同理可知 $\dfrac{\Delta v}{\rho}$ 也有界，因此 $\dfrac{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}{\rho}$ 有界。

又由u, v的可微性知u, v在(x, y)处连续，即当$\rho \to 0$时，有$\Delta u \to 0$ 及$\Delta v \to 0$, 所以有

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{o(\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2})}{\Delta u^2 + \Delta v^2} = 0$$

于是由（5）式知

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{o(\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2})}{\rho} = 0.$$ 证毕。

由定理可见，复合函数$z = f[u(x, y), v(x, y)]$有链式法则：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

按照链式法则的结构特征，我们将多元复合函数的求导法则推广到 m 个中间变量、n 个自变量构成的一般复合函数中，设函数

$$y = f(u_1, u_2, \cdots, u_m)$$

及

$$u_i = u_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$

都可微，则复合函数 $y = f(u_1(\vec{x}), u_2(\vec{x}), \cdots, u_m(\vec{x}))$ 也可微，其中 $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，且有

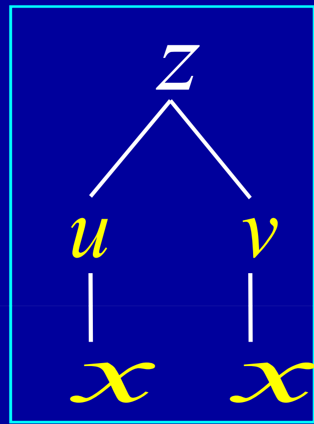
$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n \quad ,$$

其中 $\dfrac{\partial y}{\partial x_j} = \dfrac{\partial y}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_j} + \cdots + \dfrac{\partial y}{\partial u_m}\dfrac{\partial u_m}{\partial x_j}, \qquad j = 1, 2, \cdots, n.$

多元函数的复合可以有多种情况，例如：

（1）设 $z=f(u,v), u=\varphi(x), v=\psi(x)$ 均可微，则复合函数 $z=f[\varphi(x),\psi(x)]$ 是 x 的一元可微函数，可得

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}$$



此式称为复合函数 z 对 x 的**全导数公式**。

（2）设 $\omega=f(u), u=\varphi(x,y,z)$ 均可微，则复合函数 $z=f[u(x,y,z)]$ 可微，它有一个中间变量、三个自变量，可得：

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{d\omega}{du}\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{d\omega}{du}\frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial\omega}{\partial z}=\frac{d\omega}{du}\frac{\partial u}{\partial z}$$

（3）设 $u=f(x,y,z),z=\varphi(x,y)$ 均可微，则复合函数 $u=f[x,y,z(x,y)]$ 可微，它有三个中间变量，两个自变量，可得：

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}}=\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

注意： 这里 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 不同，

$\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 表示 $u=f[x,y,z(x,y)]$ 固定 y 对 x 求导，

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 表示 $u=f(x,y,z)$ 固定 y 、z 对 x 求导。

例3.18 设 $z=f(x,xy)$,其中 $z=f(u,v)$ 可微，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解: 由于 $u=x$ 及 $v=xy$ 显然可微，故复合函数可微，可得，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial v},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=x\frac{\partial f}{\partial v}.$$

说明: 把 $f(x,xy)$ 中的 x 看作是第一个变量, xy 看作是第二变量，有时采用下面的记号更为方便清晰:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1+yf_2.$$

其中 f_1 表示 f 对第一个变量的偏导数,

f_2 表示 f 对第二个变量的偏导数。

例3.19 **设** $u=\varphi(x^2+y^2)$, 其中 φ 可导，

求证： $x\dfrac{\partial u}{\partial y}-y\dfrac{\partial u}{\partial x}=0.$

证： 把 $u=\varphi(x^2+y^2)$ 看作是由函数

$$u=\varphi(z) \text{ 及 } z=x^2+y^2$$

复合而成，分别对 x 与 y 求导得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(z)\cdot 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(z)\cdot 2y,$$

从而

$$x\frac{\partial u}{\partial y}-y\frac{\partial u}{\partial x}=2xy\varphi'(z)-2xy\varphi'(z)=0.$$

例3.20 **设** $z = f(u, x, y)$, 其中 f 具有对各变量的连续的二阶偏导数，且 $u = xe^y$， 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

解: 根据函数的复合结构及复合函数的链式法则，得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 e^y + f_2$$

注意到 f_1 、f_2 都是 u, x, y 的三元函数，再有链式法则，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial f_1}{\partial y} e^y + f_1 e^y + \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

$$= (f_{11} x e^y + f_{13}) e^y + f_1 e^y + f_{21} x e^y + f_{23}$$

其中 f_{ij} 表示 f 先对第 i 个变量求导，再对第 j 个求二阶偏导.

在解决物理、力学等问题时，常需要把一种坐标系下的偏导数转化成另一种坐标系下的偏导数，如下例：

例3.21 求 $(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2$ 与 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 在极坐标中的表达式，其中 $u=F(x,y)$ 具有连续的二阶偏导数。

解: 令 $x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,$

从而 $$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \varphi=\arctan\frac{y}{x}, \qquad (1)$$

此时 $$u=F(x,y)=F(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$$
$$=\overline{F}(\rho,\varphi)=\overline{F}(\sqrt{x^2+y^2},\arctan\frac{y}{x})$$

可以把 $u=F(x,y)$ 看作 $u=\overline{F}(\rho,\varphi)$

与 $\rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \varphi=\arctan\dfrac{y}{x}$ 复合而成

应用链式法则得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad (2)$$

由（1）式得

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\rho}=\cos\varphi,\quad \frac{\partial \rho}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\rho}=\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=-\frac{x}{x^2+y^2}=-\frac{\sin\varphi}{\rho},\quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\cos\varphi}{\rho}$$

把四个式子代入（2）式得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{\rho}, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{\rho}, \qquad (4)$$

将（3）（4）两式平方相加得

$$(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2=(\frac{\partial u}{\partial \rho})^2+\frac{1}{\rho^2}(\frac{\partial u}{\partial \varphi})^2$$

将（3）式两端再对 x 求偏导数，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial \rho}(\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{\rho})\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$+\frac{\partial}{\partial \varphi}(\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{\rho})\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\cos^2\varphi-2\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho\partial \varphi}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$+2\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\frac{\sin^2\varphi}{\rho^2}+\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\sin^2\varphi}{\rho}$$

同理，将（4）式两端对 y 求偏导，并化简可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\sin^2\varphi+2\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\varphi}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$-2\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\frac{\cos^2\varphi}{\rho^2}+\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\cos^2\varphi}{\rho}$$

所以，$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}$$ 证毕。

补充： 在一元函数中，一阶微分具有形式不变性，下面我们讨论**多元函数一阶全微分形式的不变性。**

以二元复合函数为例

设函数 $z=f(u,v),\ u=\varphi(x,y),\ v=\psi(x,y)$ 都可微，

则复合函数 $z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 的全微分为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$=\Big(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\mathrm{d}x+\Big(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\Big)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\Big)+\frac{\partial z}{\partial v}\Big(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\Big)$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$$

可见无论 u , v 是自变量还是中间变量, 其全微分表达形式都一样, 这性质叫做**全微分形式不变性.**

对于多元复合函数

设 $y=f(u)=f(u_1,u_2,\cdots,u_m)$ 其中 $u_i=u_i(x_1,\cdots,x_n)$ $i=1,2,\cdots,m$

若 f 可微，u 也可微，则

$$dy=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y}{\partial x_j}dx_j=\frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n$$

$$=(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial y}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_1})dx_1+\cdots+(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial y}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_n})dx_n$$

$$=(\frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial y}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_1})dx_1+\cdots$$

$$+(\frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_n}+\cdots+\frac{\partial y}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_n})dx_n$$

$$= \frac{\partial y}{\partial u_1}(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial u_1}{\partial x_n}dx_n) + \cdots$$

$$+ \frac{\partial y}{\partial u_m}(\frac{\partial u_m}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial u_m}{\partial x_n}dx_n)$$

$$= \frac{\partial y}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial y}{\partial u_2}du_2 + \cdots + \frac{\partial y}{\partial u_m}du_m$$

即 $$dy = \frac{\partial y}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial y}{\partial u_2}du_2 + \cdots + \frac{\partial y}{\partial u_m}du_m$$

把 $y = f(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ 中的 $u_i\ (i = 1, 2, \cdots, m)$ 看作中间变量或自变量时的全微分形式完全一样，这一性质称为**一阶全微分形式不变性**（高阶全微分不具有此性质）

全微分的有理运算法则

(1) $d(u \pm v) = du \pm dv$； (2) $d(uv) = vdu + udv$ ；

(3) $d(\frac{u}{v}) = \frac{1}{v^2}(vdu - udv)\ , v \neq 0$；

例3.22 设 $f(u,v)$ 可微，求 $z = f(\frac{x}{y}, \frac{y}{x})$ 的偏导数。

解: 利用一阶全微分形式不变性，可得

$$dz = f_1 d(\frac{x}{y}) + f_2 d(\frac{x}{y}) = f_1 \frac{ydx - xdy}{y^2} + f_2 \frac{xdy - ydx}{x^2}$$

$$= (\frac{1}{y} f_1 - \frac{y}{x^2} f_2)dx + (-\frac{x}{y^2} f_1 + \frac{1}{x} f_2)dy$$

所以， $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} f_1 - \frac{y}{x^2} f_2$， $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} f_1 + \frac{1}{x} f_2$

3.6 由一个方程确定的隐函数的微分法

常会遇到一些函数，其因变量与自变量的关系以方程形式联系起来，例如：

$$x^2+y^2+z^2=1$$

可把 x、y 看作自变量，z 看作因变量，则方程确定了两个连续的二元函数：

$$z=\pm\sqrt{1-(x^2+y^2)} \qquad D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$$

设方程 $F(x_1,\cdots,x_n,y)=0$, 若存在 n 元函数 $y=\varphi(x_1,\cdots,x_n)$

代入方程恒成立 $F(x_1,\cdots,x_n,\varphi(x_1,\cdots,x_n))\equiv 0$,

则称 $y=\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 是由 $F(x_1,\cdots,x_n,y)=0$ 确定的**隐函数**

定理3.6（隐函数存在定理）

若二元函数 $F(x,y)$ 满足：

① $F(x_0, y_0) = 0$;

② 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有连续的偏导数;

③ $F_y(x_0, y_0) \neq 0$

则方程 $F(x, y) = 0$ 在点(x_0, y_0)的**某邻域内**可唯一确定一个有连续导数的函数 $y = f(x)$，它满足：$y_0 = f(x_0)$以及 $F[x, f(x)] \equiv 0$，并且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x}{F_y}$$ **(隐函数求导公式)**

定理证明从略，仅就求导公式推导如下：

设 $y=f(x)$ 为方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数，则

$$F(x,y)\equiv 0,\ \text{其中}\ y=f(x)$$

两边对 x 求导

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

在 (x_0,y_0) 的某邻域内 $F_y\neq 0$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}$$

若$F(x, y)$的二阶偏导数也都连续，

则还可求隐函数的 二阶导数：

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$=-\frac{F_{xx}F_y-F_{yx}F_x}{F_y^2}-\frac{F_{xy}F_y-F_{yy}F_x}{F_y^2}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)$$

$$=-\frac{F_{xx}F_y^{\,2}-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^{\,2}}{F_y^3}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}$$

x y

x

定理3.4（推广）若函数 $F(x,y,z)$ 满足:

① 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$的某邻域内具有**连续偏导数**；

② $F(x_0,y_0,z_0)=0$；

③ $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，

则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0) 某一邻域内可唯一确定一个连续函数 $z=f(x,y)$，满足 $z_0=f(x_0,y_0)$，并有连续偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

定理证明从略，仅就求导公式推导如下:

设 $z=f(x,y)$ 是方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的隐函数，则

$$F(x,y,z)\equiv 0, \text{其中 } z=f(x,y)$$

两边对 x 求偏导

$$F_x+F_z\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

在 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域内 $F_z\neq 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$$

(隐函数求导公式)

同样可得 $$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

例3.23 设 $\varphi(u,v)$ 具有连续的一阶偏导数，方程 $\varphi(cx-az,cy-bz)=0$ 确定了函数 $z=z(x,y)$, 求 az_x+bz_y .

解: 令 $F(x,y,z)=\varphi(cx-az,cy-bz)$, 显然复合函数 $F(x,y,z)$ 具有连续的一阶偏导数，得

$$z_x=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{c\varphi_1}{-a\varphi_1-b\varphi_2}=\frac{c\varphi_1}{a\varphi_1+b\varphi_2}$$

$$z_y=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{c\varphi_2}{-a\varphi_1-b\varphi_2}=\frac{c\varphi_2}{a\varphi_1+b\varphi_2}$$

所以， $az_x+bz_y=c.$

例3.24 设方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 确定了函数 $z=z(x,y)$, 求点（1，0，-1）处的全微分 dz.

解: 利用隐函数求导公式

$$z_x=-\left(yz+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)/\left(xy+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right),$$

$$z_y=-\left(xz+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)/\left(xy+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right),$$

在点（1，0，-1）处 $z_x=1, z_y=-\sqrt{2}$,

从而 $dz=dx-\sqrt{2}dy$.

定理5.5（隐函数存在定理） 设有函数方程组

$$\begin{cases} F_1(x,y,u,v)=0 \\ F_2(x,y,u,v)=0 \end{cases}$$ 如果 F_1,F_2 满足：

$$(1) F_i \in C^{(1)}(u(x_0,y_0,u_0,v_0)), i=1,2$$

$$(2) F_i(x_0,y_0,u_0,v_0)=0, i=1,2$$

(3)*Jacobi*行列式

$$\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}\right|_{(x_0,y_0,u_0,v_0)} = \left.\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix}\right|_{(x_0,y_0,u_0,v_0)} \neq 0$$

则方程组在点(x_0, y_0)的某一邻域内可唯一确定一组

满足条件: $u_0 = u(x_0, y_0),\quad v_0 = v(x_0, y_0)$

$$F_i(x, y, u(x, y), v(x, y)) = 0, i = 1, 2$$

的单值连续函数:

$u = u(x, y), v = v(x, y)$.

第五节 多元向量值函数的导数和微分

5.1 一元向量值函数的导数与微分

5.2 二元向量值函数的导数与微分

5.3 微分运算法则

5.4 由方程组所确定的隐函数的微分法

注：本节留给大家自主学习