习 题 3.2

(A)

3. 用 Newton-Leibniz 公式计算下列定积分：

(4) $\int_{-1}^{1} |x|\,\mathrm{d}x$；　　(6) 设 $f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 0, \\ x^2, & x>0, \end{cases}$ 求 $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$；

(8) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t\,\mathrm{d}t$.

解 (4) $\int_{-1}^{1} |x|\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0} -x\,\mathrm{d}x+\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1=1$

或 $\int_{-1}^{1} |x|\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 |x|\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=x^2\Big|_0^1=1$. （$|x|$是偶函数）

(6) $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0} x\,\mathrm{d}x+\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=-\frac{1}{6}.$$

(8) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 t-1)\,\mathrm{d}t=(\tan t-t)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$.

4. 求下列函数的导数：

(5) $y=\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} \ln(1+t^6)\,\mathrm{d}t$；

(6) $y=\int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t$.

(7) $y=\int_{x^2}^{x^3} (x+t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$，其中 φ 为连续函数.

解 (5) $y=\int_0^{\sqrt[3]{x}} \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t+\int_{\sqrt{x}}^{0} \ln(1+t^6)\,\mathrm{d}t$，于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\ln\left[1+(\sqrt[3]{x})^2\right]\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-\ln(1+x^3)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(6) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{0} \cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{\cos x} \cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t$

$$=-\cos(\pi\sin^2 x)\cos x-\cos(\pi\cos^2 x)\sin x.$$

(7) $y=x\int_{x^2}^{x^3} \varphi(t)\,\mathrm{d}t+\int_{x^2}^{x^3} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$,

$$\frac{dy}{dx}=\int_{x^2}^{x^3}\varphi(t)dt+x\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\varphi(t)dt+\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}t\varphi(t)dt,$$

$$=\int_{x^2}^{x^3}\varphi(t)dt+x[3x^2\varphi(x^3)-2x\varphi(x^2)]$$

$$+[3x^2\cdot x^3\varphi(x^3)-2x\cdot x^2\varphi(x^2)]$$

$$=\int_{x^2}^{x^3}\varphi(t)dt+3x^3(1+x^2)\varphi(x^3)-2x^2(1+x)\varphi(x^2).$$

5. 指出下列运算中有无错误，错在何处：

(1) $\frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^2}\sqrt{t+1}dt\right)=\sqrt{x^2+1}$；

(2) $\int_0^{x^2}\left(\frac{d}{dt}\sqrt{t+1}\right)dt=\sqrt{x^2+1}$；

(3) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=\ln|x|\Big|_{-1}^{1}=0$；

(4) $\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos^2 x}dx=\int_0^{2\pi}\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{2\pi}=0.$

解 (1) 有错误. 由复合函数求导法及微积分第一基本定理可知

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^2}\sqrt{t+1}dt\right)=\frac{d}{dx^2}\left(\int_0^{x^2}\sqrt{t+1}dt\right)\frac{dx^2}{dx}=2x\sqrt{x^2+1}.$$

(2) 有错误. $\int_0^{x^2}\frac{d}{dt}(\sqrt{t+1})dt=\sqrt{t+1}\Big|_0^{x^2}=\sqrt{x^2+1}-1.$

(3) 有错误. $\frac{1}{x}$ 在$[-1,1]$无界，则 $\frac{1}{x}$ 在$[-1,1]$不可积.

(4) 有错误. $\sqrt{1-\cos^2 x}=|\sin x|$，当 $x\in[0,2\pi]$. 故正确的解法为

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos^2 x}dx=\int_0^{2\pi}|\sin x|dx=\int_0^{\pi}\sin xdx+\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin x)dx=4.$$

6. 求由参数方程 $x=\int_0^t\sin^2 udu,y=\int_0^{t^2}\cos\sqrt{u}du$ 所确定的函数 $y=f(x)$的一阶导数.

解 $\frac{dx}{dt}=\sin^2 t,\frac{dy}{dt}=2t\cos t$，故 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t\cos t}{\sin^2 t}.$

7. 求由方程 $\int_0^y e^{t^2}dt+\int_0^{x^2}te^t dt=0$ 所确定隐函数 $y=f(x)$的一阶导数.

解 方程两边同时对 x 求导可得

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)e^{y^2}+2x(x^2e^{x^2})=0,\quad 故\frac{dy}{dx}=-2x^3e^{x^2-y^2}.$$

9. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t}{\sin^3 x}$； (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x (\arctan t)^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}$

解 (1) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$.

(2) 原式$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\arctan x)^2}{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}=\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2=\dfrac{\pi^2}{4}$.

10. 求函数 $y=\int_0^x \sqrt{t}(t-1)(t+1)^2\,\mathrm{d}t$ 的定义域，单调区间和极值点.

解 定义域为$[0,+\infty)$. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{x}(x-1)(x+1)^2$,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{(x-1)(x+1)^2}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}(x+1)^2+2\sqrt{x}(x-1)(x+1).$$

令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=0,x_2=1$.

当 $0<x<1$ 时，$y'<0$；当 $x>1$ 时，$y'>0$.

故单减区间$(0,1)$，单增区间$(1,+\infty)$，$x=1$ 为极小值点. 无极大值点.

11. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ \sin x, & x>0.\end{cases}$

(1) 求函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$； (2) 讨论函数 $F(x)$的连续性和可导性.

解 (1) 若 $x=0$，$F(x)=F(0)=0$；

若 $x>0$，$F(x)=\int_0^x \sin t\,\mathrm{d}t=-\cos t\Big|_0^x=1-\cos x$；

若 $x<0$，$F(x)=\int_0^x t^2\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}t^3\Big|_0^x=\dfrac{1}{3}x^3$.

故
$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3, & x<0,\\ 1-\cos x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1-\cos x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{3}x^3=0$，所以 $F(0+0)=F(0-0)=F(0)$，即 $F(x)$在 $x=0$ 处连续.

又由于$\dfrac{1}{3}x^3$，$1-\cos x$ 分别是$(-\infty,0)$与$(0,+\infty)$上的连续可微函数，因此 $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上可导.

又因为 $F'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$,

$$F'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x}=0.$$

故 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导. 综上所述 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续可导.

12. 如果函数 f 在有限区间 I 上连续，F 为 f 在 I 上的一个原函数，试问下列式子哪些正确？哪些不正确？为什么？

(1) $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)+C$　(其中 a 为 I 中一点，C 为一个常数).

解　若 $C=-F(a)$ 结论正确，否则不正确.

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(t)\mathrm{d}t=F'(x)$.

解　错误. $\int f(t)\mathrm{d}t=F(t)+C$ (C 为任意常数). 但是 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(t)\mathrm{d}t=0$.

(3) $\int f(x)\mathrm{d}x=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C$ (C 为任意常数).

解　正确. 由于 $f(x)\in C(I)$，由微积分第一基本定理知，$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.

(4) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(t)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x$.

解　不正确. 因为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(t)\mathrm{d}t=0$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$.

(5) $\int_a^x F'(x)\mathrm{d}x=\int F'(x)\mathrm{d}x$.

解　不正确. $\int_a^x F'(x)\mathrm{d}x=F(x)-F(a)$，$\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$ (C 为任意常数)，

(6) $\int_0^x F'(x)\mathrm{d}x=F(x)$.

解　不正确. $\int_0^x F'(x)\mathrm{d}x=F(x)-F(0)$.

13. 求下列不定积分：

(4) $\int 2^{x-1}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int 2^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(2\mathrm{e})^x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(2\mathrm{e})^x\ln(2\mathrm{e})+C$

$$=\frac{1}{2}(1+\ln 2)(2\mathrm{e})^x+C.$$

(6) $\int\frac{\cos 2t}{\cos^2 t\sin^2 t}\mathrm{d}t=\int\frac{\cos^2 t-\sin^2 t}{\cos^2 t\cdot\sin^2 t}\mathrm{d}t=\int\frac{1}{\sin^2 t}\mathrm{d}t-\int\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$

$$=-\cot t-\tan t+C.$$

14. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，并且在 (a,b) 内，$f'(x)\leqslant 0$. 证明：$F(x)=\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 (a,b) 内单调减.

证

$$
\begin{aligned}
F'(x)&=\frac{1}{(x-a)^2}\left[-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+f(x)(x-a)\right]\\
&=\frac{1}{(x-a)^2}[-f(\xi)(x-a)+f(x)(x-a)] \qquad (a\leqslant\xi\leqslant x)\\
&=\frac{f(x)-f(\xi)}{x-a}=f'(c)\frac{x-\xi}{x-a}\leqslant 0, \qquad c\in(\xi,x),
\end{aligned}
$$

故 $F(x)$ 在 (a,b) 内单调减.

(B)

1. 设 f 在区间 $[a,b]$ 上可积，证明函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上连续.

证　由 $f\in\mathscr{R}[a,b]$ 知，f 在 $[a,b]$ 上有界，即 $\exists M>0$, $\forall x\in[a,b]$, $|f(x)|\leqslant M$. 又 $\forall x_0\in[a,b]$, $|F(x)-F(x_0)|=\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{x_0}f(t)\mathrm{d}t\right|=\left|\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\left|\int_{x_0}^x|f(t)|\mathrm{d}t\right|\leqslant M|x-x_0|$. 从而 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}>0$, $\forall x\in U\left(x_0,\dfrac{\varepsilon}{M}\right)$ 恒有 $|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon$. 即 $\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=F(x_0)$. 也即 $F(x)$ 在 x_0 处连续. 由 x_0 的任意性知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

2. 试确定 a,b 的值，使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t}{bx-\sin x}=1$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t}{bx-\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{a+x}}\right)\dfrac{1}{b-\cos x}=1$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{a+x}}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}(b-\cos x)=0$，即 $b=1$.

又因为当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，于是

进而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{a+t}}\cdot\dfrac{1}{b-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{a+t}}\cdot\dfrac{1}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{a+x}}=1$，

进而 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{a+x}=2$，即 $\sqrt{a}=2$，从而 $a=4$.

3. 设函数 f 在 $x=1$ 的邻域内可导，且 $f(1)=0$, $\lim\limits_{x\to 1}f'(x)=1$，计算 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_1^x\left(t\int_t^1 f(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t}{(1-x)^3}$.

解　原式 $\xlongequal{\frac{0}{0}} \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\int_x^1 f(u)\mathrm{d}u}{-3(1-x)^2} \xlongequal{\frac{0}{0}} \lim\limits_{x\to1}\dfrac{\int_x^1 f(u)\mathrm{d}u - xf(x)}{6(1-x)}$

$$\xlongequal{\frac{0}{0}} \lim_{x\to1}\frac{-2f(x)-xf'(x)}{-6} = \lim_{x\to1}\frac{1}{6}xf'(x) = \frac{1}{6}.$$

4. 证明推论 1.2 中 ξ 可在开区间 (a,b) 内取得，即若 $f\in C[a,b]$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.

证　$f\in C[a,b]$，由微积分第一基本定理，$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上可导. 对 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上运用 Lagrange 微分中值定理，$\exists\,\xi\in(a,b)$，使

$$\Phi(b)-\Phi(a)=\Phi'(\xi)(b-a).$$

注意到 $\Phi(a)=0$，$\Phi'(\xi)=f(\xi)$. 故 $\exists\,\xi\in(a,b)$，使 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = f(\xi)(b-a)$.

5. 设函数 f 在 $[a,c]$ 上连续，在 (a,c) 内可导，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = 0$，其中 $b\in(a,c)$，证明至少存在一点 $\xi\in(a,c)$，使 $f'(\xi)=0$.

证　因为 $f\in C[a,c]$，由上题知：$\exists\,\xi_1\in(a,b)$，$\xi_2\in(b,c)$，使 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi_1)(b-a)$，$\int_b^c f(x)\mathrm{d}x = f(\xi_2)(c-b)$. 从而 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$，对 $f(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用 Rolle 定理，$\exists\,\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,c)$，使 $f'(\xi)=0$.

6. 设 $f,g\in C[a,b]$，证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使

$$f(\xi)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x = g(\xi)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x.$$

证　令 $F(u)=\int_a^u f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_u^b g(x)\mathrm{d}x$，则 $F(u)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F(a)=F(b)=0$，于是 $F(u)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Rolle 定理条件，故 $\exists\,\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$，即

$$f(\xi)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x = g(\xi)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x.$$

习　题　3.3

(A)

1. 利用不定积分换元法则(Ⅰ)计算下列不定积分：

(4) $\int x^2(3+2x^3)^{\frac{1}{5}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{6}(3+2x^3)^{\frac{1}{5}}\mathrm{d}(3+2x^3)$