4.1 几类简单的微分方程

- 可分离变量的微分方程
- 一阶线性微分方程
- 变量替换法
- 可降阶的高阶方程
- 应用举例

1.1 几个基本概念

例 1.1 一曲线通过点(1,2),且在该曲线上任一点 $M(x, y)$处的切线的斜率为$2x$,求这曲线的方程.

解 设所求曲线为 $y = y(x)$

$$\frac{dy}{dx} = 2x \qquad \text{其中 } x = 1\text{时}, y = 2$$

$$y = \int 2x dx \quad \text{即 } y = x^2 + C, \qquad \text{求得} C = 1,$$

所求曲线方程为 $y = x^2 + 1$.

例 2 列车在平直的线路上以 20 米/秒的速度行驶，当制动时列车获得加速度 -0.4 米/秒 ^{2}，问开始制动后多少时间列车才能停住？以及列车在这段时间内行驶了多少路程？

解 设制动后 t 秒钟行驶 s 米，$s = s(t)$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -0.4 \qquad t = 0\text{时}, s = 0, v = \frac{ds}{dt} = 20,$$

$$v = \frac{ds}{dt} = -0.4t + C_1 \qquad s = -0.2t^2 + C_1 t + C_2$$

代入条件后知 $C_1 = 20,\quad C_2 = 0$

$$v = \frac{ds}{dt} = -0.4t + 20,$$

故 $s = -0.2t^2 + 20t,$

开始制动到列车完全停住共需 $t = \dfrac{20}{0.4} = 50(\text{秒}),$

列车在这段时间内行驶了

$$s = -0.2 \times 50^2 + 20 \times 50 = 500(\text{米}).$$

微分方程:

凡含有未知函数的导数或微分的方程叫微分方程.

例 $y' = xy,\qquad y'' + 2y' - 3y = e^x,$

$(t^2 + x)dt + xdx = 0,\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x} = x + y,$

实质: 联系自变量, 未知函数以及未知函数的某些导数(或微分)之间的关系式.

分类1：常微分方程，偏微分方程.

微分方程的阶：微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶.

分类2：

一阶微分方程 $F(x,y,y')=0,\quad y'=f(x,y);$

高阶(n)微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0,$

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}).$$

分类3：线性与非线性微分方程.

$$y' + P(x)y = Q(x), \qquad x(y')^2 - 2yy' + x = 0;$$

分类4：单个微分方程与微分方程组.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 3y - 2z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 2y - z, \end{cases}$$

微分方程的解:

代入微分方程能使方程成为恒等式的函数.

设$y=\varphi(x)$在区间 I 上有 n 阶导数,

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))=0.$$

微分方程的解的分类:

(1) 通解: 微分方程的解中含有任意常数, 且任意常数的个数与微分方程的阶数相同.

例 $y' = y$,　　通解 $y = ce^x$;

$y'' + y = 0$,　　通解 $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$;

(2) 特解:　确定了通解中任意常数以后的解.

解的图象:　微分方程的积分曲线.

通解的图象:　积分曲线族.

初始条件:　用来确定任意常数的条件.

初值问题： 求微分方程满足初始条件的解的问题.

一阶: $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$ 过定点的积分曲线;

二阶: $\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y\big|_{x=x_0} = y_0, y'\big|_{x=x_0} = y'_0 \end{cases}$

过定点且在定点的切线的斜率为定值的积分曲线.

例 3 验证:函数$x=c_1\cos kt+c_2\sin kt$是微分方程$\dfrac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0$的解. 并求满足初始条件

$$x\big|_{t=0}=A,\ \frac{dx}{dt}\bigg|_{t=0}=0$$的特解.

解 $\because \dfrac{dx}{dt}=-kC_1\sin kt+kC_2\cos kt,$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-k^2C_1\cos kt-k^2C_2\sin kt,$$

将$\dfrac{d^2x}{dt^2}$和x的表达式代入原方程,

$$-k^2(C_1\cos kt + C_2\sin kt) + k^2(C_1\cos kt + C_2\sin kt) \equiv 0.$$

故 $x = C_1\cos kt + C_2\sin kt$ 是原方程的解.

$$\because\ x\big|_{t=0} = A,\quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0,\qquad \therefore\ C_1 = A,\quad C_2 = 0.$$

所求特解为 $x = A\cos kt$.

补充： 微分方程的初等解法：**初等积分法.**

求解微分方程 → 求积分

(通解可用初等函数或积分表示出来)

1.2 可分离变量的微分方程

$\underline{g(y)dy = f(x)dx}$ **可分离变量的微分方程.**

例如 $\dfrac{dy}{dx} = 2x^2 y^{\frac{4}{5}} \Rightarrow y^{-\frac{4}{5}}dy = 2x^2dx,$

解法 设函数 $g(y)$ 和 $f(x)$ 是连续的,

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

分离变量法

设函数 $G(y)$ 和 $F(x)$ 是依次为 $g(y)$ 和 $f(x)$ 的原函数, $G(y) = F(x) + C$ 为微分方程的解.

例1.3 求解微分方程 $\frac{dy}{dx} = 2xy$ 的通解.

解 分离变量 $\frac{dy}{y} = 2xdx,$

两端积分 $\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx,$

$$\ln y = x^2 + C_1$$

$\therefore y = ce^{x^2}$ 为所求通解.

例5 求方程 $f(xy)ydx+g(xy)xdy=0$ 通解.

解 令 $u=xy$, 则 $du=xdy+ydx$,

$$f(u)ydx+g(u)x\cdot\frac{du-ydx}{x}=0,$$

$$[f(u)-g(u)]\frac{u}{x}dx+g(u)du=0,$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{g(u)}{u[f(u)-g(u)]}du=0,$$

通解为 $\ln|x|+\int\frac{g(u)}{u[f(u)-g(u)]}du=C.$

1.3 一阶线性微分方程

一阶线性微分方程的标准形式:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

当 $Q(x)\equiv 0$, 上方程称为**齐次的**.

当 $Q(x)\not\equiv 0$, 上方程称为**非齐次的**.

例如 $\frac{dy}{dx}=y+x^2$, $\frac{dx}{dt}=x\sin t+t^2$, 线性的;

$yy'-2xy=3$, $y'-\cos y=1$, 非线性的.

一阶线性微分方程的解法

1. 线性齐次方程 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=0.$

(使用分离变量法)

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx,\qquad \int\frac{dy}{y}=-\int P(x)dx,$$

$$\ln y=-\int P(x)dx+\ln C,$$

齐次方程的通解为 $y=Ce^{-\int P(x)dx}.$

2. 线性非齐次方程 $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x).$

讨论 $\because \dfrac{dy}{y} = \left[\dfrac{Q(x)}{y} - P(x)\right]dx,$

两边积分 $\ln|y| = \int \dfrac{Q(x)}{y}dx - \int P(x)dx,$

设 $\int \dfrac{Q(x)}{y}dx$ 为 $v(x)$, $\therefore \ln|y| = v(x) - \int P(x)dx,$

即 $y = e^{v(x)}e^{-\int P(x)dx}.$ 非齐方程通解形式

与齐方程通解相比: $C \Rightarrow u(x)$

常数变易法

把齐次方程通解中的常数变易为待定函数的方法.

实质: 未知函数的变量代换.

新未知函数 $u(x) \Rightarrow$ 原未知函数 $y(x)$,

作变换 $$y = \underline{u(x)}e^{-\int P(x)dx}$$

$$y' = u'(x)e^{-\int P(x)dx} + u(x)[-P(x)]e^{\int P(x)dx},$$

将y和y'代入原方程得 $u'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$,

积分得 $u(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$,

一阶线性非齐次微分方程的通解为:

$$y = [\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C]e^{-\int P(x)dx}$$

$$= \underbrace{Ce^{-\int P(x)dx}}_{\text{对应齐次方程通解}} + \underbrace{e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx}_{\text{非齐次方程特解}}$$

例6 求方程 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$ 的通解.

解 $P(x) = \frac{1}{x}$, $\quad Q(x) = \frac{\sin x}{x}$,

$$y = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left(\int \frac{\sin x}{x} \cdot e^{\int \frac{1}{x}dx} dx + C\right)$$

$$= e^{-\ln x}\left(\int \frac{\sin x}{x} \cdot e^{\ln x} dx + C\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(\int \sin x dx + C\right) = \frac{1}{x}(-\cos x + C).$$

1.4 变量替换法

（一）齐次方程

1. 定义 形如 $\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$ 的微分方程称为**齐次方程.**

2.解法 作变量代换 $u=\frac{y}{x}$, 即 $y=xu$,

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx},$$

代入原式 $u+x\frac{du}{dx}=f(u)$,

即 $\frac{du}{dx}=\frac{f(u)-u}{x}$. 可分离变量的方程

例7　求解微分方程

$$\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0.$$

解　令 $u = \dfrac{y}{x}$，则 $dy = xdu + udx$，

$$(x - ux\cos u)dx + x\cos u(udx + xdu) = 0,$$

$$\cos u du = -\frac{dx}{x}, \qquad \sin u = -\ln x + C,$$

微分方程的解为 $\sin\dfrac{y}{x} = -\ln x + C.$

（二）伯努利方程

伯努利(Bernoulli)方程的标准形式

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \qquad (n\neq 0,1)$$

当$n=0,1$时， 方程为**线性微分方程.**

当$n\neq 0,1$时， 方程为**非线性微分方程.**

解法: 需经过变量代换化为线性微分方程.

两端除以y^n，得 $y^{-n}\dfrac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$,

令$z=y^{1-n}$， 则 $\dfrac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$,

代入上式 $\dfrac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$,

求出通解后，将 $z=y^{1-n}$ 代入即得

$$\therefore y^{1-n}=z$$

$$=e^{-\int(1-n)P(x)dx}\left(\int Q(x)(1-n)e^{\int(1-n)P(x)dx}dx+C\right).$$

例 8 求方程 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{4}{x}y=x^2\sqrt{y}$ 的通解.

解　两端除以y^n，得 $\dfrac{1}{\sqrt{y}}\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{4}{x}\sqrt{y}=x^2,$

令 $z=\sqrt{y},$　　$2\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{4}{x}z=x^2,$

解得 $z=x^2\left(\dfrac{x}{2}+C\right),$ 即 $y=x^4\left(\dfrac{x}{2}+C\right)^2.$

（三）其他的变量替换法举例

例 1.9 求方程 $y' = \cos(x+y)$ 的通解.

令 $u = x + y$

例 1.10 求方程 $y' = \dfrac{x}{\cos y} - \tan y$ 的通解.

令 $u = \sin y$

1.5 可降阶的高阶方程

降阶 → **n阶降到n-1阶**

1、 $y^{(n)} = f(x)$ 型

2、 $y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, \cdots, y^{(n-1)})$ 型

3、 $y^{(n)} = f(y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ 型

$y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, \cdots, y^{(n-1)})$ 型

特点: 不显含未知函数 y 及 $y', \cdots, y^{(k-1)}$.

解法: 令 $y^{(k)} = P(x)$

则 $y^{(k+1)} = P', \ y^{(n)} = P^{(n-k)}$.

代入原方程, 得

$P(x)$的$(n\text{-}k)$阶方程

$$P^{(n-k)} = f(x, P(x), \cdots, P^{(n-k-1)}(x)).$$ 求得 $P(x)$,

将 $y^{(k)} = P(x)$ 连续积分k次, 可得通解.

例 11 求方程 $xy^{(5)} - y^{(4)} = 0$ 的通解.

解 设 $y^{(4)} = P(x)$, $\quad y^{(5)} = P'(x)$

代入原方程 $\quad xP' - P = 0$,（$P \neq 0$）

解线性方程, 得 $P = C_1 x \qquad$ 即 $y^{(4)} = C_1 x$,

两端积分,得 $y''' = \dfrac{1}{2}C_1 x^2 + C_2$, $\cdots\ \cdots$,

$$y = \frac{C_1}{120}x^5 + \frac{C_2}{6}x^3 + \frac{C_3}{2}x^2 + C_4 x + C_5 \,,$$

原方程通解为 $y = d_1 x^5 + d_2 x^3 + d_3 x^2 + d_4 x + d_5$

$y^{(n)} = f(y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ 型

特点： 右端不显含自变量 x.

解法： 设 $y' = p(y)$ 则 $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dP}{dy}$,

$$y''' = P^2\frac{d^2P}{dy^2} + P(\frac{dP}{dy})^2, \quad \cdots \cdots,$$

代入原方程得到新函数 $P(y)$的$(n-1)$阶方程，

求得其解为 $\frac{dy}{dx} = P(y) = \varphi(y,\ C_1,\ \cdots,\ C_{n-1})$,

原方程通解为$\int \frac{dy}{\varphi(y,\ C_1,\ \cdots,\ C_{n-1})} = x + C_n$,

例1.12 求方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

解 设 $y' = p(y)$, 则 $y'' = p\dfrac{dP}{dy}$,

代入原方程得 $y \cdot P\dfrac{dP}{dy} - P^2 = 0$, 即 $P(y \cdot \dfrac{dP}{dy} - P) = 0$,

由 $y \cdot \dfrac{dP}{dy} - P = 0$, 可得 $P = C_1 y$,

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = C_1 y$, 原方程通解为 $y = C_2 e^{c_1 x}$.

1.6 微分方程应用举例

应用微分方程解决实际问题的基本步骤：

（1） 分析问题，建立起实际问题的数学模型—常微分方程（组）

（2） 求解与分析这一数学模型，即求出相应的常微分方程（组）的解，或是精确解或近似解，其中还包括分析解的特性

（3） 用所得的数学结果（解的形式和数值定性分析等）回过头去解决实际问题，从而预测某些自然现象甚至社会现象中的特定性质，以便达到能动地改变世界解决实际问题的目的。

基本方法

1. 根据规律列方程，
2. 微分分析法（微元法），
3. 模拟近似法。

例 13 衰变问题:衰变速度与未衰变原子含量M成正比,已知$M\big|_{t=0}=M_0$,求衰变过程中铀含量$M(t)$随时间t变化的规律.

解 衰变速度$\dfrac{dM}{dt}$, 由题设条件

$$\frac{dM}{dt}=-\lambda M \qquad (\lambda>0\text{衰变系数}) \qquad \frac{dM}{M}=-\lambda dt$$

$$\int\frac{dM}{M}=\int-\lambda dt,\quad \ln M=-\lambda t+\ln c,\quad \text{即} M=ce^{-\lambda t},$$

代入$M\big|_{t=0}=M_0$ 得 $M_0=ce^0=C$,

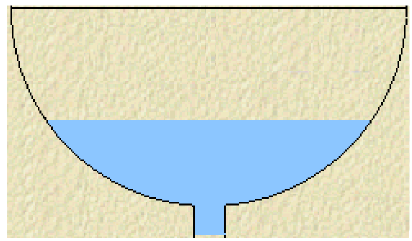
$$\therefore M=M_0e^{-\lambda t}$$

衰变规律

例 14 有高为1米的半球形容器, 水从它的底部小孔流出, 小孔横截面积为1平方厘米(如图). 开始时容器内盛满了水, 求水从小孔流出过程中容器里水面的高度h(水面与孔口中心间的距离)随时间t的变化规律.

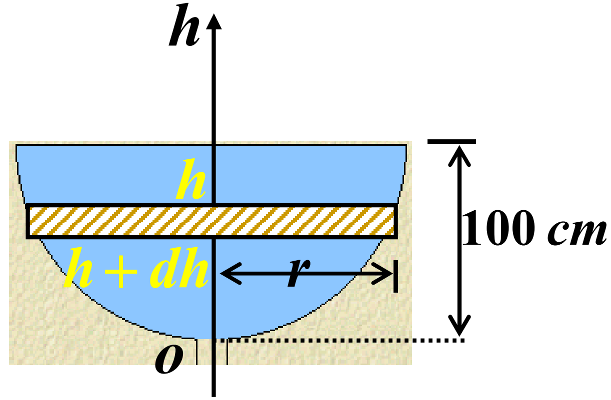
解 由力学知识得,水从孔口流出的流量为

$$Q=\frac{dV}{dt}=\underbrace{0.62}_{\text{流量系数}}\cdot\underbrace{S}_{\text{孔口截面面积}}\sqrt{2\underbrace{g}_{\text{重力加速度}}h},$$



$\because S = 1\,\mathrm{cm}^2,$

$\therefore dV = 0.62\sqrt{2gh}\,dt, \qquad (1)$



设在微小的时间间隔 $[t,\ t+\Delta t]$,

水面的高度由h降至 $h+\Delta h$, 则 $dV = -\pi r^2 dh$,

$\because r = \sqrt{100^2 - (100-h)^2} = \sqrt{200h - h^2},$

$\therefore dV = -\pi(200h - h^2)dh, \qquad (2)$

比较(1)和(2)得: $-\pi(200h - h^2)dh = 0.62\sqrt{2gh}\,dt,$

$$-\pi(200h-h^2)dh=0.62\sqrt{2gh}\,dt,$$

可分离变量

即为未知函数的微分方程.

$$dt=-\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}(200\sqrt{h}-\sqrt{h^3})dh,$$

$$t=-\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}(\frac{400}{3}\sqrt{h^3}-\frac{2}{5}\sqrt{h^5})+C,$$

$$\because h\,|_{t=0}=100,\qquad \therefore C=\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\times\frac{14}{15}\times 10^5\,,$$

所求规律为$t=\dfrac{\pi}{4.65\sqrt{2g}}(7\times10^5-10^3\sqrt{h^3}+3\sqrt{h^5}).$

例15 某车间体积为12000立方米, 开始时空气中含有0.1%的CO_2, 为了降低车间内空气中CO_2的含量, 用一台风量为每秒2000立方米的鼓风机通入含0.03%的CO_2的新鲜空气, 同时以同样的风量将混合均匀的空气排出, 问鼓风机开动6分钟后, 车间内CO_2的百分比降低到多少?

解 设鼓风机开动后 t 时刻 CO_2的含量为$x(t)\%$

在$[t, t+dt]$内,

CO_2的通入量 $= 2000 \cdot dt \cdot 0.03$,

CO_2的排出量 $= 2000 \cdot dt \cdot x(t)$,

CO_2的改变量 $=$ CO_2的通入量 $-$ CO_2的排出量

$$12000dx = 2000 \cdot dt \cdot 0.03 - 2000 \cdot dt \cdot x(t),$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{6}(x - 0.03), \quad \Rightarrow x = 0.03 + Ce^{-\frac{1}{6}t},$$

$$\because x|_{t=0} = 0.1, \ \therefore C = 0.07, \ \Rightarrow x = 0.03 + 0.07e^{-\frac{1}{6}t},$$

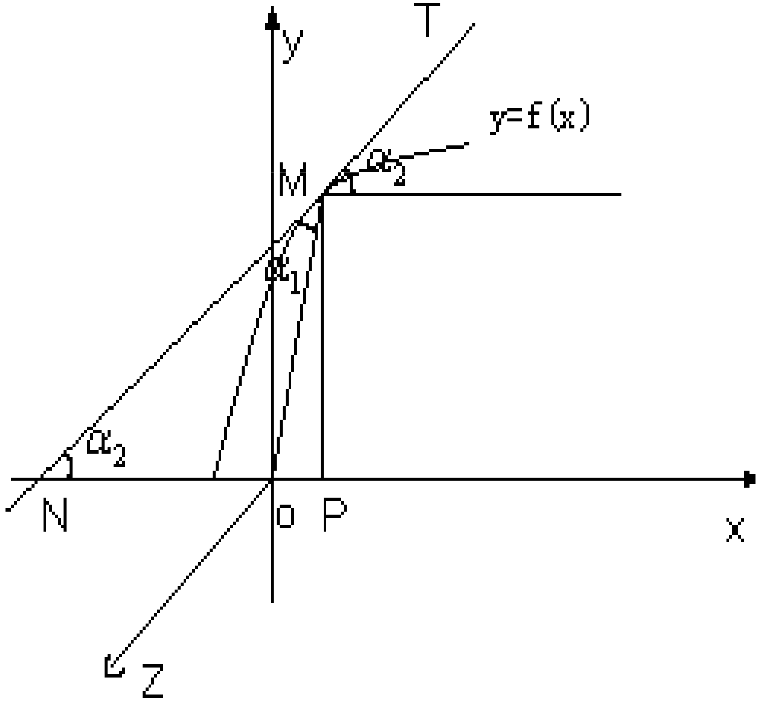
$$x|_{t=6} = 0.03 + 0.07e^{-1} \approx 0.056,$$

6分钟后, 车间内CO_2的百分比降低到 0.056%.

例16 探照灯反射镜面的形状。

在制造探照灯的反射镜面的形状时，总是要求将点光源射出的光线平行地反射出去，以保证探照灯有良好的方向性，

试求反射镜面的几何形状



【解】取光源所在处为坐标原点，而轴平行于光的反射方向（如图）。

设所求曲面由曲线 $\begin{cases} y = f(x) \\ z = 0 \end{cases}$ 绕x轴旋转而成

则求反射镜面的问题归结为求xoy平面上的曲线 $y = f(x)$ 的问题。

过 $y = f(x)$ 上任一点M(x, y)作切线NT。则由光的反射定律：入射角=反射角，知道

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

从而 $\overline{OM}=\overline{ON}$ $\frac{dy}{dx}=tg\alpha_2=\frac{\overline{MP}}{\overline{NP}}$

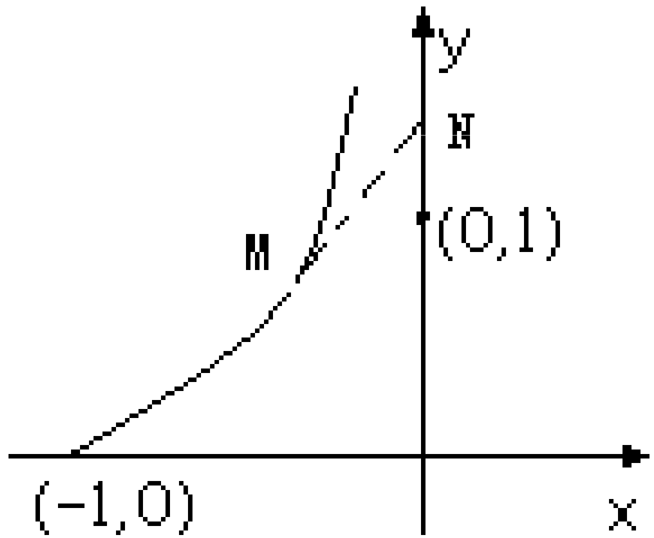
$\overline{OP}=x$ $\overline{MP}=y$，$\overline{OM}=\sqrt{x^2+y^2}$ ，所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$$

解之得 $y^2=C(C+2x)$，C为任意正常数

这就是所求的曲面方程—抛物线。故反射镜面的形状为旋转抛物面 $y^2+z^2=C(C+2x)$

例17　设物体A从点(0,1)出发，以速度大小为常数v沿 y轴方向运动。物体 B从点(-1,0)与A同时出发，其速度大小为2v，方向始终指向A。试建立物体B的运动轨迹 所满足的微分方程，并写出初值条件。



【解】 如图，设在时刻t，物体B位于点M(x,y)

此时物体A位于点N(0,1+vt)。轨线在点M的切线指向点N。由两点式知，M处的切线斜率为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1+vt)-y}{0-x} \qquad 即 \qquad xy'=y-1-vt$$

但这还不是轨迹所满足的微分方程，因为其中含有时间t，要设法消去t。

点M处物体B的运动速度大小

$$2v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \sqrt{1+y'^2} \cdot \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$2vt = \int_0^t 2v dt = \int_{-1}^x \sqrt{1+y'^2} dx$$

代入得 $xy' = y - 1 - \frac{1}{2}\int_{-1}^x \sqrt{1+y'^2} dx$

再求导，得 $xy'' = -\frac{1}{2}\sqrt{1+y'^2}$

初始条件：$y(-1) = 0 \qquad y'(-1) = 1$

即为物体B的运动轨迹所满足的微分方程