第六节

多元函数微分学在几何上的简单应用

一、空间曲线的切线与法平面

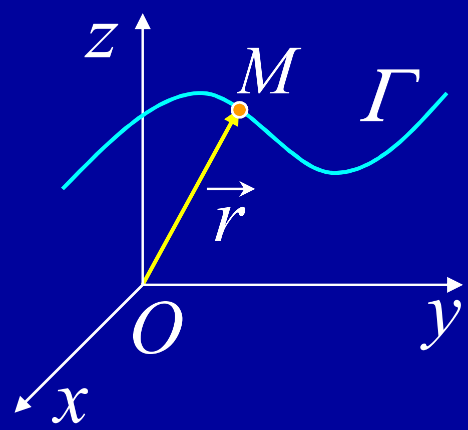
二、曲线的弧长

(转到第七节)

三、曲面的切平面与法线

一、空间曲线的切线与法平面

1、空间曲线 的参数方程:



$$\Gamma: \ x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ \alpha \le t \le \beta.$$

Γ可以看作是从区间 $[\alpha,\beta] \to \mathrm{R}^3$ 的一个连续映射

$\boldsymbol{r}$ 的像，$\{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t),\ \alpha \le t \le \beta\}$，$\boldsymbol{r}(t)$的像就是向径 $\overrightarrow{OM}$

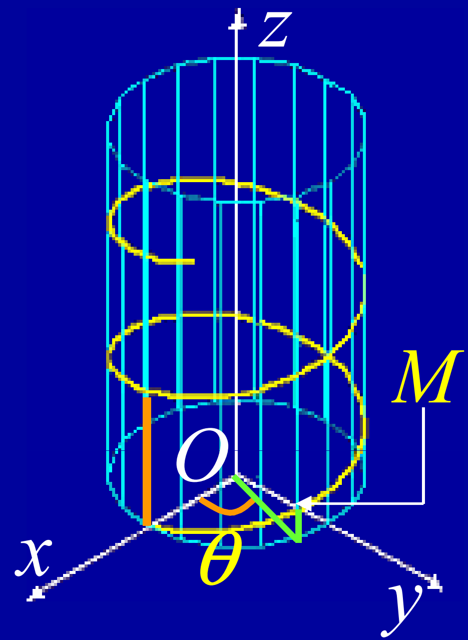
当 t 在区间$[\alpha,\beta]$ 上变化时向径 $\overrightarrow{OM}$ 的终点M

的轨迹就是曲线Γ。曲线也可以写为

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t))\ \ \alpha \le t \le \beta.$$

例如，圆柱螺旋线(Helix)的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = a\sin\omega t \\ z = vt \end{cases}$$



令 $\theta = \omega t\,,\ b = \dfrac{v}{\omega}$

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = b\theta \end{cases}$$

当 $\theta = 2\pi$ 时，上升高度 $h = 2\pi b$，称为**螺距**．

2. 简单曲线和有向曲线

设空间曲线Γ的方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)(\alpha\le t\le\beta)$. 如果向量值函数$\boldsymbol{r}(t)$在区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续，则称 Γ为连续曲线； 如果Γ为连续曲线， 且任取 $t_1,t_2\in(\alpha,\beta),t_1\ne t_2$ 都有 $\boldsymbol{r}(t_1)\ne\boldsymbol{r}(t_2)$,即在 $[\alpha,\beta]$ 上$\boldsymbol{r}(t)$为单射， 则称Γ为简单曲线。

如果Γ为简单曲线, 且 $\boldsymbol{r}(\alpha)=\boldsymbol{r}(\beta)$ 则称Γ为简单闭曲线。

对于选定了参数t的曲线Γ，我们规定t增大的的方向为曲线的正方向。对于规定了方向的曲线，我们称为有向曲线。一般讨论的曲线均为有向曲线。

3.空间曲线的切线与法平面

设空间曲线Γ 的方程为

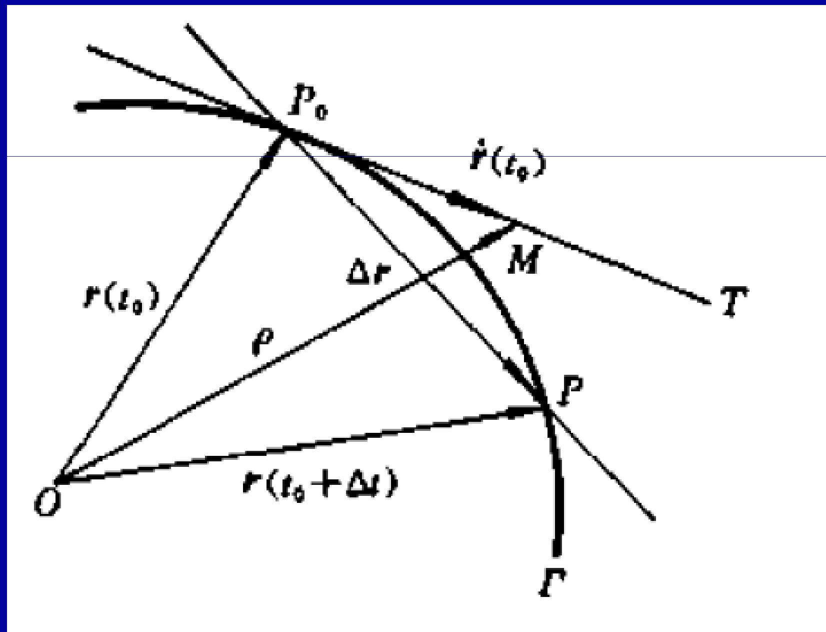
$$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))\quad \alpha\le t\le\beta.$$

其中向量值函数$\boldsymbol{r}(t)$在 $[\alpha,\beta]$ 上可导

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t)=(\dot{x}(t),\ \dot{y}(t),\ \dot{z}(t))\neq\boldsymbol{0},\ \alpha\le t\le\beta.$$

我们来讨论Γ在点$P_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$处的切线方程。

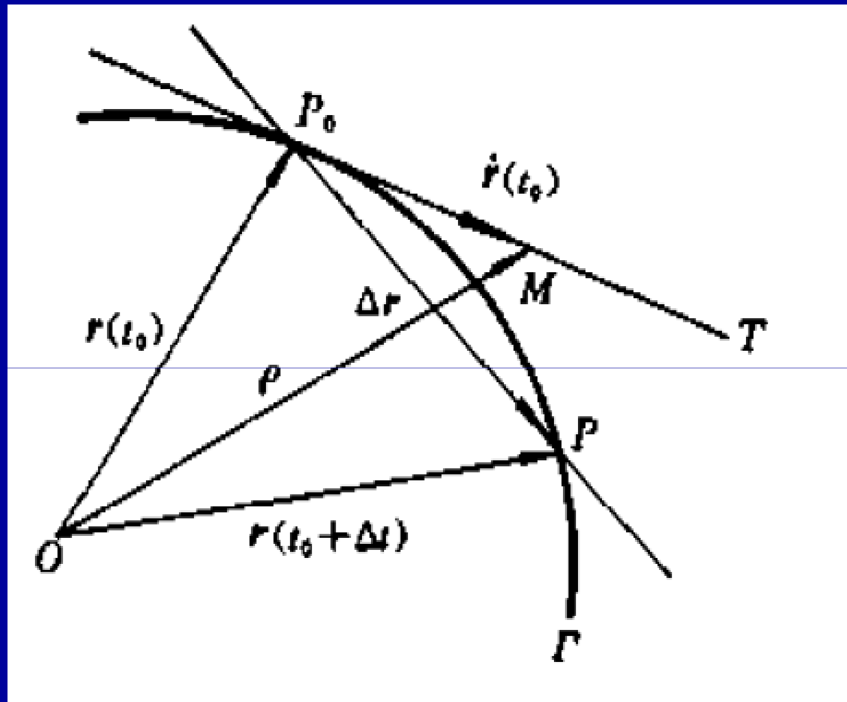
与平面曲线的切线一样，空间曲线上点P_0处的切线也定义为曲线上过点P_0处的割线P_0P当点P沿曲线趋向于点P_0时的极限位置P_0T



要求此切线方程。关键在于求出一个方向向量。

为此在 P_0 的临近取点 $P(\ x(\ t_0+\triangle t),\ y(\ t_0+\triangle t),\ z(\ t_0+\triangle t))$

P_0 与P对应的向径分别为



$r(t_0), r(t_0+\triangle t)$ 。从而向量

$$\overrightarrow{p_0 p} = r(t_0+\triangle t) - r(t_0) = \triangle r$$

为割线 P_0P 的一个方向向量.

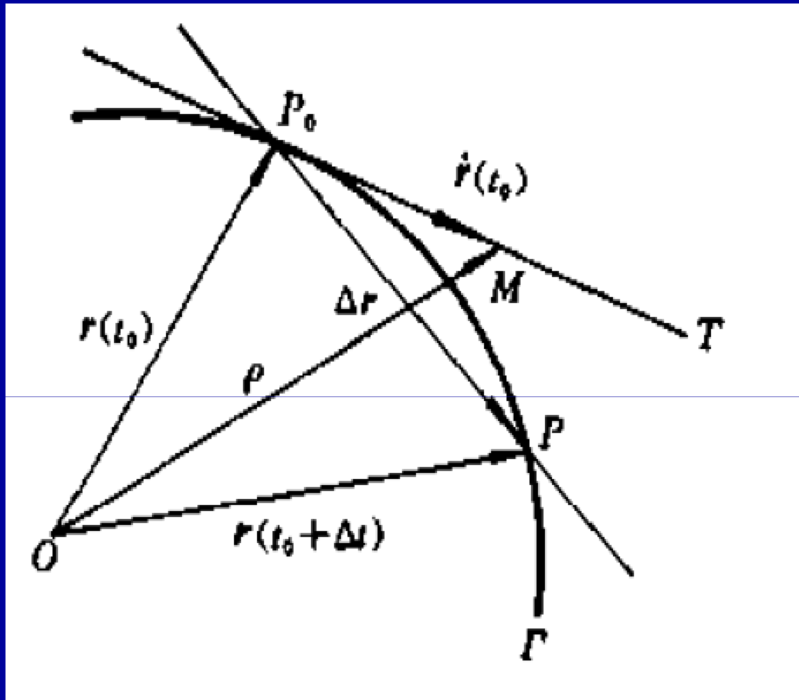
易知

$$\frac{\overrightarrow{p_0 p}}{\triangle t} = \frac{\triangle r}{\triangle t}$$

也是割线 P_0P 的一个方向向量。对上式取极限有

$$\lim_{\triangle t\to 0}\frac{\overrightarrow{p_0p}}{\triangle t}=\lim_{\triangle t\to 0}\frac{\triangle r}{\triangle t}=\dot{r}(t_0)$$

从而割线变为曲线Γ 的切线，相应的方向向量变为切线的方向向量 $\dot{r}(t_0)$.



由此可见向径$r(t)$的导数

$\boxed{\dot{r}(t_0)}$ 表示曲线Γ在相应点的切线的方向向量。

切向量

曲线Γ在相应点 $P_0(r(t_0))$ 处切线的向量方程为

$$\rho = r(t_0) + t\dot{r}(t_0)$$

其中 $\rho = (x, y, z)$ 为切线上动点$M(x,y,z)$的向径，t参数。

消去参数得 P_0 处的切线方程为

$$\tau: \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

$\dot{r}(t_0) \neq 0$ 时， 曲线Γ上都存在切线。

若切线方向连续变化， 此时称曲线为光滑曲线。

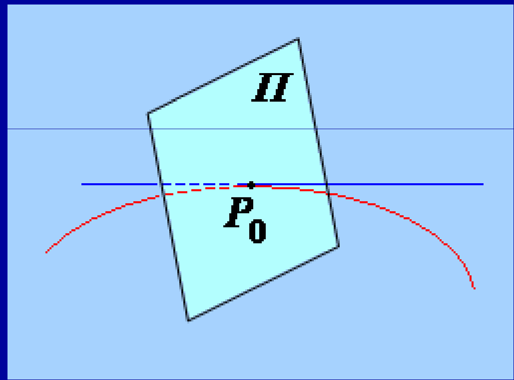
如果Γ 不是光滑曲线， 但将Γ分成若干段后，如果每

段都是光滑曲线，则称为**分段光滑曲线。**

过点 P_0 且垂直于 P_0 处切线的直线，称为

曲线Γ 的法线， 这些法线显然位于一个平面内，

此平面为在点 P_0 处的**法平面**



法平面 的方程为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0.$$

例1 求曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 在点 $M(1, 1, 1)$ 处的切线方程与法平面方程.

解: $x'=1, y'=2t, z'=3t^2$, 点$(1, 1, 1)$ 对应于 $t_0=1$,

故点M 处的切向量为 $\vec{T}=(1, 2, 3)$

因此所求切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$$

法平面方程为

$$(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0$$

即 $$x+2y+3z=6$$

思考: 光滑曲线

$$\Gamma:\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$$

的切向量有何特点?

答: $$\Gamma:\begin{cases} x=x \\ y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$$

切向量 $\vec{T}=(1, \varphi', \psi')$

曲线为一般式的情况

光滑曲线 $\Gamma: \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

当 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\neq 0$ 时，Γ 可表示为 $\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$，且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)},$$

曲线上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量为

$$\vec{T}=\left(1,\varphi'(x_0),\psi'(x_0)\right)$$

$$=\left(1,\ \frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\bigg|_M,\ \frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\bigg|_M\right)$$

或 $\vec{T}=\left(\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M,\ \left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M,\ \left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M\right)$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & x \arrow[dl] & \\ y \arrow[rr] & & z \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

则在点 $M(x_0,y_0,z_0)$有

切线方程 $$\frac{x-x_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M}=\frac{y-y_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M}=\frac{z-z_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M}$$

法平面方程 $$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M(y-y_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M(z-z_0)=0$$

法平面方程

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M (x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M (y-y_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M (z-z_0)=0$$

也可表为

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F_x(M) & F_y(M) & F_z(M) \\ G_x(M) & G_y(M) & G_z(M) \end{vmatrix}=0$$

(自己验证)

例2 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6,\ x+y+z=0$ 在点 $M\,(1,-2,1)$ 处的切线方程与法平面方程.

解法1 令 $F=x^2+y^2+z^2-6,\ G=x+y+z$, 则

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M=\left.\begin{vmatrix}2y & 2z\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right|_M=2(y-z)\Big|_M=-6;$$

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M=0;\quad \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M=6$$

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl] & \\ y \arrow[rr] & & z \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

切向量 $\vec{T}=(-6,\ 0,\ 6)$

切线方程 $\dfrac{x-1}{-6}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{6}$ 即 $\begin{cases}x+z-2=0\\ y+2=0\end{cases}$

法平面方程 $\quad -6\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+6\cdot(z-1)=0$

即 $\quad x-z=0$

解法2 方程组两边对 x 求导, 得 $\begin{cases} y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-x \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-1 \end{cases}$

解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\begin{vmatrix} -x & z \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\dfrac{z-x}{y-z},\quad \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\begin{vmatrix} y & -x \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\dfrac{x-y}{y-z}$

曲线在点 $M(1,-2,1)$ 处有:

切向量 $\quad \vec{T}=\left(1,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_M,\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\Big|_M\right)=(1,0,-1)$

点 $M(1,-2,1)$ 处的切向量

$$\vec{T}=(1,0,-1)$$

切线方程 $$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}$$

即 $$\begin{cases} x+z-2=0 \\ y+2=0 \end{cases}$$

法平面方程 $$1\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+(-1)\cdot(z-1)=0$$

即 $$x-z=0$$

6.2 曲线的弧长

弧长 $\longleftrightarrow$ 折线的极限

对于空间简单曲线Γ：

$$r = r(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) \qquad (\alpha \le t \le \beta)$$

Γ 的两个端点A, B分别对应 $r(\alpha)$, $r(\beta)$, 在Γ 上介于A, B

之间分别沿 t增大的方向依次取$n-1$个分点 , $P_1, P_2, \cdots P_{n-1}$

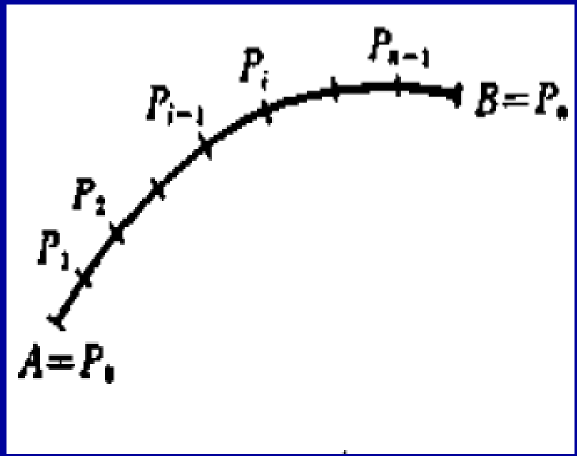
他们把Γ分成了n段。用直线段把相邻分点连接起来得

到一折线，它的长度为

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \left\| \overrightarrow{P_{i-1}P_i} \right\|$$

如果不论分点怎么选取，最大长度

$$d = \max_{1\le i\le n} \left\| \overrightarrow{P_{i-1}P_i} \right\| \to 0$$



折线长度有确定的极限*s*, 则称此曲线弧为可求长的.并称此极限为曲线的长， 即

$$s = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} \left\| \overrightarrow{P_{i-1}P_i} \right\|$$

定理6. 1 若 $\dot{r}(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续且 $\dot{r}(t)\neq 0$ ，则弧长：

$$s = \int_\alpha^\beta \|\dot{r}(t)\| dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2 + [\dot{z}(t)]^2}\, dt$$

证明：设分点 $P_0,P_1,\cdots,P_n$ 对应的参数分别为

$t_0,t_1,\cdots,t_n$ ，这样便有

$$\alpha = t_0, < t_1 < \cdots < t_n = \beta$$

首先来求 $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$

$$\left\|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\right\| = \left\|\boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1})\right\| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 + (\Delta z_i)^2},$$

利用拉格朗日中值公式得

$$\left\|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\right\| = \sqrt{[\dot{x}(\xi_i)]^2 + [\dot{y}(\eta_i)]^2 + [\dot{z}(\zeta_i)]^2}\,\Delta t_i,$$

其中 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, \xi_i, \eta_i, \zeta_i \in (t_i, t_{i-1})$

为使上式右端根式中的函数在 同一点处取值，将其变形得到

$$\left\|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\right\| = \sqrt{[\dot{x}(\xi_i)]^2 + [\dot{y}(\xi_i)]^2 + [\dot{z}(\xi_i)]^2}\,\Delta t_i + R_i \Delta t_i,$$
$$= \|\dot{\boldsymbol{r}}(\xi_i)\| \Delta t_i + R_i \Delta t_i,$$

其中

$$R_i = \sqrt{[\dot{x}(\xi_i)]^2 + [\dot{y}(\eta_i)]^2 + [\dot{z}(\zeta_i)]^2}$$
$$- \sqrt{[\dot{x}(\xi_i)]^2 + [\dot{y}(\xi_i)]^2 + [\dot{z}(\xi_i)]^2}. \qquad (6.12)$$

于是有

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \left\|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\right\| = \sum_{i=1}^{n} \|\dot{\boldsymbol{r}}(\xi_i)\| \Delta t_i + \sum_{i=1}^{n} R_i \Delta t_i, \qquad (6.13)$$

令 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta t_i$ ，由定积分的定义和存在定理可知

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\|\dot{r}(\xi_i)\|\Delta t_i=\int_{\alpha}^{\beta}\|\dot{r}(t)\|dt \qquad (6.14)$$

这样，由(6.13)(6.14)两式可知，要想证明弧长公式，只需要证明

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}R_i\Delta t_i=0$$

利用不等式

$$\sqrt{[a_1]^2+[a_2]^2+[a_3]^2}-\sqrt{[b_1]^2+[b_2]^2+[b_3]^2}\le|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+|a_3-b_3|$$

由(6.12)可知

$$|R_i|\le|\dot{y}(\eta_i)-\dot{y}(\xi_i)|+|\dot{z}(\zeta_i)-\dot{z}(\xi_i)|$$

因为 $\dot{y}(t),\dot{z}(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，从而一致连续，

故$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 只要 $t', t'' \in [\alpha, \beta], |t' - t''| < \delta$ 便有

$$|\dot{y}(t') - \dot{y}(t'')| < \varepsilon, |\dot{z}(t') - \dot{z}(t'')| < \varepsilon$$

特别当 $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta t_i < \delta$ 时有

$$|R_i| < 2\varepsilon$$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} R_i \Delta t_i \right| < 2\varepsilon(\beta - \alpha)$$

于是

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R_i \Delta t_i = 0$$

证毕。

平面曲线为空间曲线的特例(z=0)：对于平面曲线

$$r = r(t) = \big(x(t), y(t)\big) \qquad (\alpha \le t \le \beta)$$

弧长为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \|\dot{r}(t)\| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2}\, dt$$

(1) 如果曲线弧由直角坐标方程给出：

$$y = f(x) \quad (a \le x \le b)$$

则参数方程为 x=x ,y=f(x), 于是有

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, \mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, \mathrm{d}x$$

(2) 曲线弧由极坐标方程给出:

$$r = r(\theta) \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$$

令 $x = r(\theta)\cos\theta,\ y = r(\theta)\sin\theta$, 则得

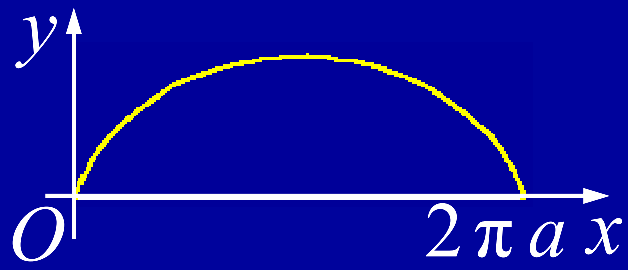
$$\sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

因此所求弧长

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

例6.3 计算摆线$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ $(a>0)$ 一拱 $(0 \le t \le 2\pi)$ 的弧长 .



解: $\sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2}$

$$= \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}$$

$$= a\sqrt{2(1-\cos t)}$$

$$= 2a \sin \frac{t}{2}$$

$$\therefore \quad s = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} \,\mathrm{d}\, t = 2a \left[-2\cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8a$$

例6.4 求平面曲线的弧长：

$$x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y \quad \left(1\le y\le e\right)$$

答案：$\frac{1}{4}(e^2+1)$

例6.5 求螺旋线一个螺距之间的长度：

$$x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, z=k\theta \quad \left(0\le\theta\le 2\pi\right)$$

答案：$2\pi\sqrt{a^2+k^2}$

2. 弧微分与自然参数

设曲线的参数方程为 $r = r(t)\quad \alpha \le t \le \beta.$

可以将弧长视为参数 t 的函数 $s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\dot{r}(\tau)\| d\tau$

则 t 增大的方向也是 s 增大的方向，且有

$$\frac{ds}{dt} = \|\dot{r}(t)\| = \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2 + [\dot{z}(t)]^2}$$

这样，可得弧长的微分（弧微分）为：

$$ds = \|\dot{r}(t)\| dt = \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2 + [\dot{z}(t)]^2}\, dt$$

自然参数

既然弧长可以视为参数 t 的函数

$$s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\dot{r}(\tau)\| d\tau = \int_{t_0}^{t} \|v(\tau)\| d\tau$$

将反函数 $t = t(s)$ 代入曲线参数方程 $r = r(t(s))$

即弧长 s 成为曲线的参数，称之为自然参数

$$ds = \|\dot{r}(t)\| dt = \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2 + [\dot{z}(t)]^2}\, dt = \|v(t)\| dt$$

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

Now, let's go to Section 7…

6.3 曲面的切平面与法线

1. 曲面的参数方程

圆柱面方程 $x^2+y^2=R^2$, 其参数方程为

$$x=R\cos\theta,\ y=R\sin\theta,\ \ z=z \quad ((\theta,z)\in[0,2\pi]\times(-\infty,+\infty)).$$

向量的形式 $\boldsymbol{r}=(R\cos\theta,R\sin\theta,z)\quad((\theta,z)\in D).\qquad(6.21)$

即圆柱面可以看作平面区域 D 到 R^3 的连续映射下的像。

例6.6 建立半径为 R 的球面的参数方程。

解：任取一点 $P(x,y,z)$.

φ,θ 如右图，则

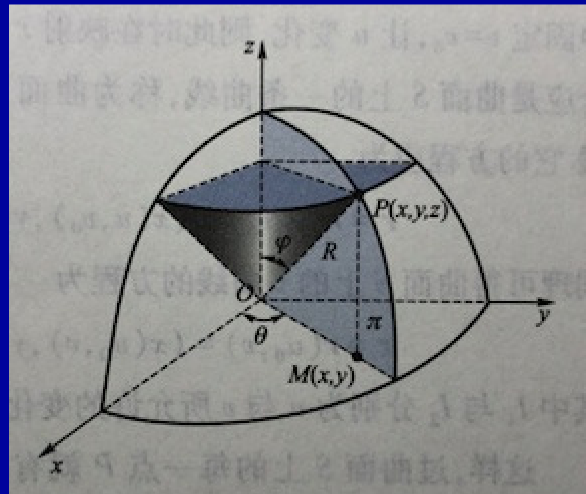


图 5.28

$$x = R\sin\varphi\cos\theta,$$

$$y = R\sin\varphi\sin\theta,$$

$$z = R\cos\varphi,$$

$$0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

$$\boldsymbol{r}(\varphi,\theta) = (R\sin\varphi\cos\theta,\ R\sin\varphi\sin\theta,\ R\cos\varphi) \qquad (6.22)$$

因此，球面可以看成是平面区域

$$D = \{(\varphi,\theta) \mid 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

到 R^3 的连续映射（6.22）的像。

一般的，曲面S看做某区域D到空间$Oxyz$的某一连续映射的像，从而S的方程可表为

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v)\quad ((u,v)\in D),$$

或写成向量的形式

$$r=r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\quad ((u,v)\in D),$$

此二式称为曲面的参数方程，

2. 曲面上的曲线的表示

若在D中固定$v=v_0$，则此映射r下的像点的集合应是曲面S上的一条曲线，称为曲面S上的u曲线，方程是

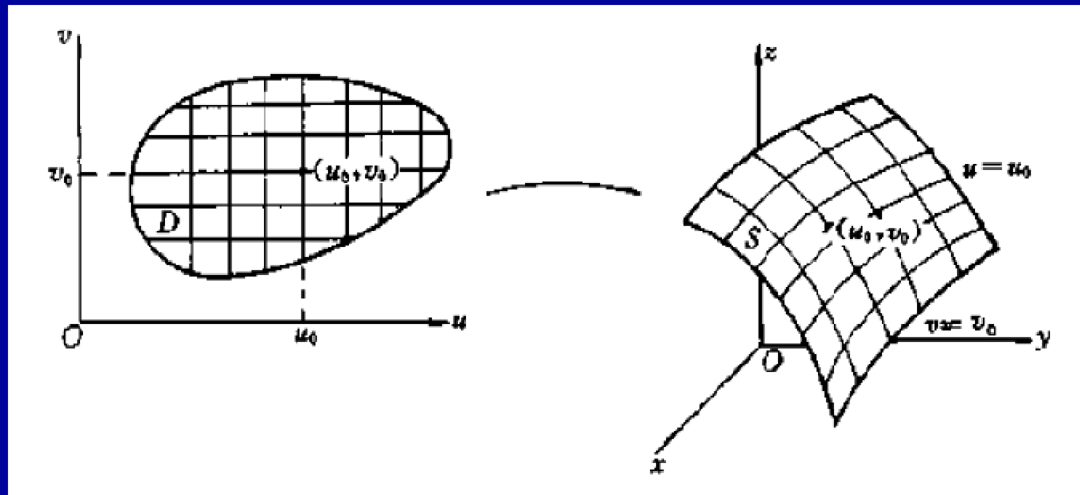
$$r=r(u,v_0)=(x(u,v_0),y(u,v_0),z(u,v_0))\quad (u\in I_1),$$

同理可得曲面S上的v曲线的方程为

$$r=r(u_0,v)=(x(u_0,v),y(u_0,v),z(u_0,v)) \quad (v\in I_2).$$

这样，过曲面S上的每一点P，就有u曲线和一条v曲线，它们的交点就是P。u曲线族和v曲线族构成曲面S上的参数曲线网。

曲面S可以看成是映射r将平面uOv上的区域D在R^3中变形后得到的，而D内的坐标网相应的变成了曲面S的参数曲线网。如图



$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\theta,\varphi)=(R\sin\theta\cos\varphi,R\sin\theta\sin\varphi,R\cos\theta) \qquad (4.22)$$

若 $\varphi=\varphi_0$，

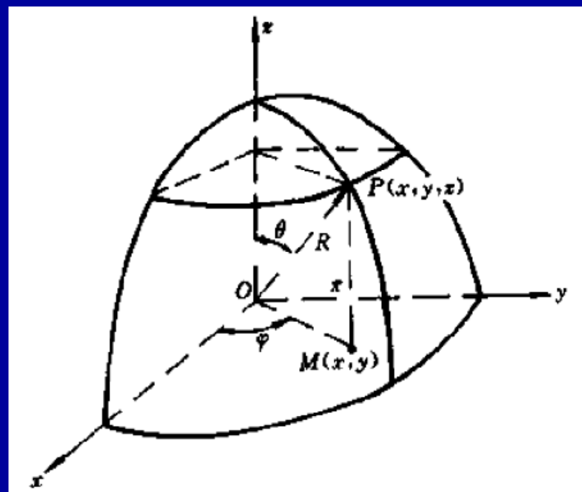
$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\theta,\varphi_0)=(R\sin\theta\cos\varphi_0,R\sin\theta\sin\varphi_0,R\cos\theta) \quad (0\le\theta\le\pi),$$

即为球面的经线。

若 $\theta=\theta_0$，

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\theta_0,\varphi)=(R\sin\theta_0\cos\varphi,R\sin\theta_0\sin\varphi,R\cos\theta_0) \quad (0\le\varphi\le 2\pi),$$

即为球面的纬线。



例6.7 机械工程中常见的一种曲面称为正螺面，它是当长为l的一动直线段在平面上匀速地绕与此平面垂直的轴旋转，而此直线段所在平面又匀速地沿此轴向上或向下运动时，该直线段的运动轨迹，试建立它的方程。

解 建立坐标系，使运动开始时直线段位于x轴的正方向上，且直线段以原点为起点。记为OM。

设$\overrightarrow{OM}$的旋转角速度为$\omega>0$，垂直移动的速度为$b>0$.

正螺面上的任一点$P(x,y,z)$与z轴的距离为u。

$$x=u\cos\omega t,\ y=u\sin\omega t,\ z=bt.$$

令 $\omega t = v,\ \dfrac{b}{\omega} = a.$

$x = u\cos\omega t,\ y = u\sin\omega t,\ z = bt.$

于是正螺面的参数方程为

$$r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, av)$$

$$(0 \le u \le l, -\infty < v < +\infty)$$

3. 曲面的切平面与法线

曲面S的参数方程为

$$r = r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \quad ((u,v) \in D \subseteq R^2),$$

其中r在D内连续，在点$(u_0,v_0) \in D$存在偏导数

$$r_u(u_0,v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)\Big|_{(u_0,v_0)}, \quad r_v(u_0,v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)\Big|_{(u_0,v_0)},$$

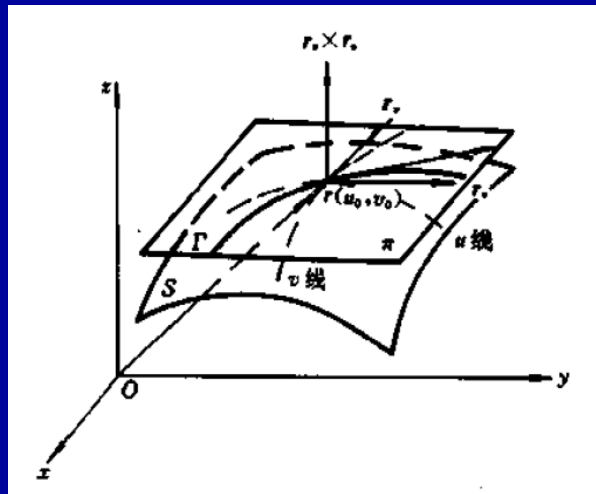
且 $r_u(u_0,v_0)\times r_v(u_0,v_0)\neq 0$ （点 (u_0,v_0)称为曲面的正则点）

曲面S上过点$r(u_0,v_0)$的u曲线为

$$r=r(u,v_0)$$

其在$r_0=r(u_0,v_0)$的切向量为$r_u(u_0,v_0)$; 同理可得v曲线在点$r_0=r(u_0,v_0)$的切向量为$r_v(u_0,v_0)$.

若(u_0,v_0)是正则点，所以向量$r_u(u_0,v_0)$与$r_v(u_0,v_0)$不平行，上述u曲线和v曲线的切线确定了一个平面π，它是过点r_0且以$r_u(u_0,v_0)\times r_v(u_0,v_0)$为法线方向向量的平面。



曲面S上过点 r_0 的任一曲线在点 r_0 的切线与平面 π 是何种关系？

在S上过点 r_0任一条光滑曲线 Γ，其方程为

$$r = r(u(t), v(t)) \quad t \in (t \in I),$$

其中 $u(t_0) = u_0, v(t_0) = v_0$. 上式两端在 t_0处对 t 求导，

$$\frac{dr}{dt}\Big|_{t_0} = r_u(u_0, v_0)\frac{du}{dt}\Big|_{t_0} + r_v(u_0, v_0)\frac{dv}{dt}\Big|_{t_0}$$

于是曲线 Γ 在点 r_0 的切向量可用 $r_u(u_0, v_0)$ 与 $r_v(u_0, v_0)$ 线性表示，故曲线 Γ 在点 r_0 的切线必在平面 π 上。

由曲线 Γ 的任意性知：曲面S上过点 r_0 的任一曲线在

点 r_0 的切线均在平面 π 上。

于是称平面 π 为曲面在点 r_0 的切平面。过点 r_0 且垂直于切平面 π 的直线称为曲面在点 r_0 处的法线。法线的方向向量称为法向量。

$$(r_u \times r_v)_{(u_0,v_0)} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)_{(u_0,v_0)} = (A,B,C)$$

于是S在点 r_0 的切平面方程是：

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

法线方程为：$\dfrac{x-x_0}{A}=\dfrac{y-y_0}{B}=\dfrac{z-z_0}{C}$

其中 $x_0 = x(u_0,v_0), y_0 = y(u_0,v_0), z_0 = z(u_0,v_0).$

若 $r_u=(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u})$, $r_v=(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v})$ 均在区域D内连续，则称曲面S是一光滑曲面。

若曲面S的方程是直角坐标方程 $F(x,y,z)=0$,且 $(F_x,F_y,F_z)\neq 0$, 不妨设 $F_z\neq 0$, 于是方程 $F(x,y,z)=0$,确定二元函数 $z=z(x,y)$, 于是得曲面的参数方程

$$r(x,y)=(x,y,z(x,y))$$

于是

$$r_x=(1,0,-\frac{F_x}{F_z}),\ r_y=(0,1,-\frac{F_y}{F_z}),\ r_x\times r_y=(\frac{F_x}{F_z},\frac{F_y}{F_z},1),$$

故法向量取 $n=(F_x,F_y,F_z)$

于是曲面在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面方程为：

$$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0$$

法线方程为：

$$\frac{x-x_0}{F_x(P_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(P_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(P_0)}$$

若曲面S的方程是直角坐标方程 $z=f(x,y)$

于是曲面在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面方程为：

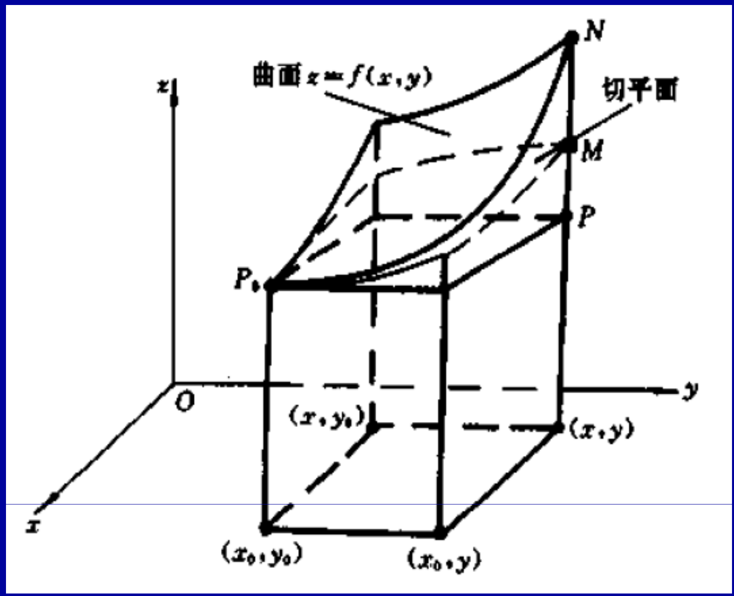
$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

法线方程为：

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

全微分的几何意义



二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的全微分为

$$dz=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

二元函数的全微分是：用切平面上的改变量代替曲面上的改变量。----局部线性化

例6.8求正螺面 $x=u\cos v, y=u\sin v, z=av$ 在 $u=\sqrt{2}$, $v=\frac{\pi}{4}$ 处的切平面与法线方程，其中常数a为非零常数。

解 $\quad r=(u\cos v, u\sin v, av)$

$$r_u=(x_u, y_u, z_u)=(\cos v, \sin v, 0),$$

$$r_v=(x_v, y_v, z_v)=(-u\sin v, u\cos v, a)$$

在 $u=\sqrt{2}, v=\frac{\pi}{4}$ 处，$r_u=(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $\quad r_v=(-1, 1, a)$

$$r_u \times r_v=(\frac{\sqrt{2}a}{2}, -\frac{\sqrt{2}a}{2}, \sqrt{2})$$

于是对应于点 $(1,1,\frac{\pi}{4}a)$ 处的法向量可取为

$$n=(a,-a,2)$$

从而得切平面方程

$$ax-ay+2z=\frac{\pi}{2}a$$

法线方程

$$\frac{x-1}{a}=\frac{y-1}{-a}=\frac{z-\frac{\pi}{4}a}{2}.$$

例3 求球面 $x^2+y^2+z^2=14$ 在点(1 , 2 , 3) 处的切平面及法线方程.

解: 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14$

法向量 $\vec{n}=(2x,2y,2z)$ $\vec{n}\big|_{(1,2,3)}=(2,4,6)$

所以球面在点 (1 , 2 , 3) 处有:

切平面方程 $2(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0$

即 $x+2y+3z-14=0$

法线方程 $$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$$

即 $$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$$ (可见法线经过原点，即球心)

例4 如果平面 $3x+\lambda y-3z+16=0$ 与椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 相切, 求 λ.

提示: 设切点为 $M(x_0,y_0,z_0)$, 则

$$\begin{cases} \dfrac{6x_0}{3}=\dfrac{2y_0}{\lambda}=\dfrac{2z_0}{-3} & \text{(二法向量平行)} \\ 3x_0+\lambda y_0-3z_0+16=0 & \text{(切点在平面上)} \\ 3x_0^2+y_0^2+z_0^2=16 & \text{(切点在椭球面上)} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ $\lambda=\pm 2$

练习题 **1.** 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$在点$(1,1,1)$ 的切线与法平面.

解: 点 (1,1,1) 处两曲面的法向量为

$$\vec{n}_1=(2x-3,2y,2z)\Big|_{(1,1,1)}=(-1,2,2)$$

$$\vec{n}_2=(2,-3,5)$$

因此切线的方向向量为 $\vec{l}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(16,9,-1)$

由此得切线: $\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$

法平面: $16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0$

即 $16x+9y-z-24=0$

2. 证明曲面 $F(x-my, z-ny)=0$ 的所有切平面恒与定直线平行, 其中$F(u,v)$可微.

证: 曲面上任一点的法向量

$$\vec{n}=(F_1', F_1'\cdot(-m)+F_2'\cdot(-n), F_2')$$

取定直线的方向向量为 $\vec{l}=(m, 1, n)$ (定向量)

则 $\vec{l}\cdot\vec{n}=0$, 故结论成立 .