3.1 微分的概念

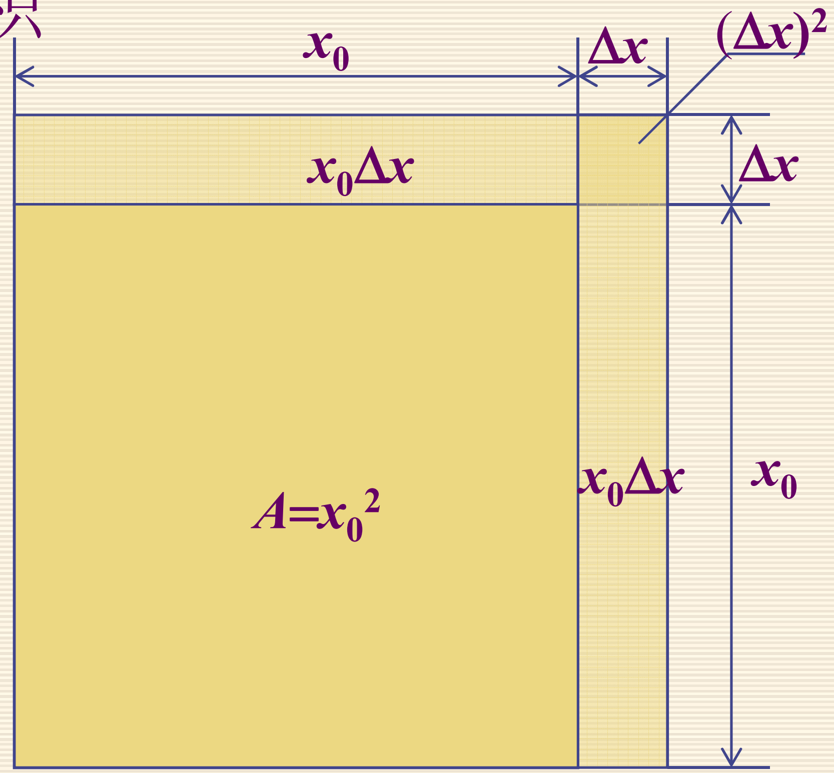
❖引例

一块正方形金属片受热后其边长 x 由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$，考查此薄片的面积 A 的改变情况.

因为 $A=x^2$，所以金属片面积的改变量为

$$\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-(x_0)^2$$
$$=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2.$$

当$\Delta x\to 0$时，$(\Delta x)^2=o(\Delta x)$；ΔA的主要部分是Δx的线性函数$2x_0\Delta x$，$2x_0\Delta x$是ΔA的近似值.



3.1 微分的定义

设函数$y=f(x)$在某区间内有定义，x_0及$x_0+\Delta x$在这区间内，如果函数的增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

可表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x),$$

其中A是不依赖于Δx的常数，$o(\Delta x)$是比Δx高阶的无穷小，那么称函数$y=f(x)$在点x_0是可微的，而$A\Delta x$叫做函数$y=f(x)$在点x_0相应于自变量增量Δx的微分，记作dy，即

$$dy=A\Delta x.$$

$y=f(x)$在点x_0可微$\Leftrightarrow \Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$. $dy=A\Delta x$.

定理3.1 可微与可导的关系

函数$f(x)$在点x_0可微 $\Leftrightarrow$ 函数$f(x)$在点x_0可导.

函数在点x_0的微分一定是

$$dy=f'(x_0)\Delta x.$$

这是因为，一方面

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)=A.$$

另一方面

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha\Rightarrow\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x,$$

其中$\alpha\to 0$(当$\Delta x\to 0$)，且$A=f'(x_0)$是常数，$\alpha\Delta x=o(\Delta x)$.

$y=f(x)$在点x_0可微$\Leftrightarrow\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$. $dy=A\Delta x$.

•可微与可导的关系

函数$f(x)$在点x_0可微 $\Leftrightarrow$ 函数$f(x)$在点x_0可导.

函数在点x_0的微分一定是

$$dy=f'(x_0)\Delta x.$$

函数$y=f(x)$在任意点 x 的微分，称为函数的微分，记作dy 或 $df(x)$，即

$$dy=f'(x)\Delta x.$$

例如，$d\cos x=(\cos x)'\Delta x=-\sin x\,\Delta x$;

$$de^x=(e^x)'\Delta x=e^x\Delta x.$$

$y=f(x)$在点x_0可微$\Leftrightarrow \Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$. $dy=A\Delta x$.

例1　求函数$y=x^2$在$x=1$和$x=3$处的微分.

解　函数$y=x^2$在$x=1$处的微分为

$$dy=(x^2)'|_{x=1}\Delta x=2\Delta x;$$

函数$y=x^2$在$x=3$处的微分为

$$dy=(x^2)'|_{x=3}\Delta x=6\Delta x.$$

例2　求函数 $y=x^3$当$x=2$, $\Delta x=0.02$时的微分.

解　先求函数在任意点x 的微分,

$$dy=(x^3)'\Delta x=3x^2\Delta x.$$

再求函数当$x=2$, $\Delta x=0.02$时的微分,

$$dy|_{x=2,\ \Delta x=0.02}=3x^2|_{x=2,\ \Delta x=0.02}=3\times 2^2\times 0.02=0.24.$$

•自变量的微分

因为当$y=x$时，

$$dy=dx=(x)'\Delta x=\Delta x,$$

所以通常把自变量 x 的增量Δx称为自变量的微分，记作dx，即

$$dx=\Delta x.$$

因此，函数$y=f(x)$的微分又可记作

$$dy=f'(x)dx.$$

•增量与微分的关系

当$f'(x_0)\neq 0$时，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{f'(x_0)\Delta x}=\frac{1}{f'(x_0)}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dx}=1\,.$$

根据等价无穷小的性质，$\Delta y=dy+o(dy)$.

❖结论

在$f'(x_0)\neq 0$的条件下，以微分$dy=f'(x_0)\Delta x$近似代替增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$时，其误差为$o(dy)$.

因此，当$|\Delta x|$很小时，有近似等式$\Delta y\approx dy$.

微分的几何意义

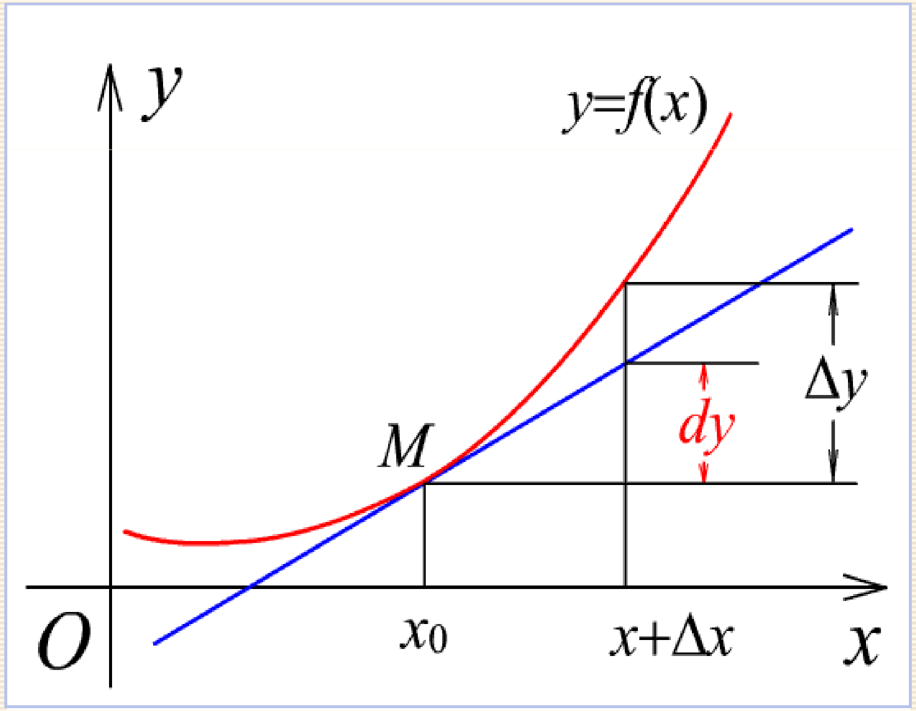
当x从x_0变到$x_0+\Delta x$时,

Δy是曲线上点的纵坐标的增量;

dy是过点$(x_0, f(x_0))$的切线上点的纵坐标的增量.

当$|\Delta x|$很小时, $|\Delta y-dy|$比$|\Delta x|$小得多.

因此, 在点M的邻近, 我们可以用切线段来近似代替曲线段.



3.2 微分运算法则

1. 基本初等函数的微分公式

导数公式:	微分公式:
$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$	$d(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}dx$
$(\sin x)'=\cos x$	$d(\sin x)=\cos xdx$
$(\cos x)'=-\sin x$	$d(\cos x)=-\sin xdx$
$(\tan x)'=\sec^2 x$	$d(\tan x)=\sec^2 xdx$
$(\cot x)'=-\csc^2 x$	$d(\cot x)=-\csc^2 xdx$
$(\sec x)'=\sec x\tan x$	$d(\sec x)=\sec x\tan xdx$
$(\csc x)'=-\csc x\cot x$	$d(\csc x)=-\csc x\cot xdx$
$(a^x)'=a^x\ln a$	$d(a^x)=a^x\ln adx$
$(e^x)=e^x$	$d(e^x)=e^x dx$

导数公式:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

微分公式:

$$d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} dx$$

$$d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$$

$$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$d(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2} dx$$

2. 函数和、差、积、商的微分法则

求导法则	微分法则
$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$d(u \pm v) = du \pm dv$
$(Cu)' = Cu'$	$d(Cu) = Cdu$
$(u \cdot v)' = u'v + uv'$	$d(u \cdot v) = vdu + udv$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} (v \neq 0)$	$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} dx (v \neq 0)$

公式$d(u \cdot v) = vdu + udv$ 的证明:

因为

$$d(uv) = (u'v + uv')dx = u'vdx + uv'dx.$$

而 $u'dx = du$, $v'dx = dv$,

所以 $d(uv) = vdu + udv.$

3. 复合函数的微分法则

设$y=f(u)$及$u=\varphi(x)$可微, 则复合函数$y=f[\varphi(x)]$的微分为

$$dy=y'_x dx=f'(u)\varphi'(x)dx.$$

因为$\varphi'(x)dx=du$, 所以, 复合函数$y=f[\varphi(x)]$的微分公式也可以写成

$$dy=f'(u)du \text{ 或 } dy=y'_u du.$$

由此可见, 无论u是自变量还是另一个变量的可微函数, 微分形式 $dy=f'(u)du$保持不变. 这一性质称为微分形式不变性.

若$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，则$dy=f'(u)du$.

例3 $y=\sin(2x+1)$，求dy.

解 把$2x+1$看成中间变量u，则

$$dy=d(\sin u)=\cos u\,du=\cos(2x+1)d(2x+1)$$

$$=\cos(2x+1)\cdot 2dx=2\cos(2x+1)dx.$$

在求复合函数的导数时，可以不写出中间变量.

例4 $y=\ln(1+e^{x^2})$，求 dy.

解 $dy=d\ln(1+e^{x^2})=\dfrac{1}{1+e^{x^2}}d(1+e^{x^2})$

$$=\frac{1}{1+e^{x^2}}\cdot e^{x^2}d(x^2)=\frac{1}{1+e^{x^2}}\cdot e^{x^2}\cdot 2xdx=\frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}dx.$$

若$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，则$dy=f'(u)du$.

例5 $y=e^{1-3x}\cos x$，求dy.

解 应用积的微分法则，得

$$dy=d(e^{1-3x}\cos x)=\cos x d(e^{1-3x})+e^{1-3x}d(\cos x)$$

$$=(\cos x)e^{1-3x}(-3dx)+e^{1-3x}(-\sin x dx)$$

$$=-e^{1-3x}(3\cos x+\sin x)dx.$$

例6 在括号中填入适当的函数，使等式成立.

(1) $d(\qquad)=xdx$; (2) $d(\qquad)=\cos\omega t\,dt$.

解 (1)因为$d(x^2)=2xdx$，所以

$$xdx=\frac{1}{2}d(x^2)=d(\frac{1}{2}x^2)\text{，即 } d(\frac{1}{2}x^2)=xdx\,.$$

一般地，有 $d(\frac{1}{2}x^2+C)=xdx$ (C 为任意常数).

(2)因为$d(\sin\omega t)=\omega\cos\omega t dt$，所以

$$\cos\omega t dt=\frac{1}{\omega}d(\sin\omega t)=d(\frac{1}{\omega}\sin\omega t)\,.$$

因此 $d(\frac{1}{\omega}\sin\omega t+C)=\cos\omega t dt$ (C 为任意常数).

3.3 高阶微分

$$d(dy) = d(f'(x)dx) = f''(x)(dx)^2$$

$$d^2 f = d^2 y = f''(x)dx^2$$

$$d^n y = d^n f = d(d^{n-1} f) = f^{(n)}(x)dx^n$$

3.4 微分在近似计算中的应用

1. 函数的近似计算

当函数$y=f(x)$在点x_0处的导数$f'(x)\neq 0$，且$|\Delta x|$很小时，我们有

$$\Delta y\approx dy=f'(x_0)\Delta x,$$

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx dy=f'(x_0)\Delta x,$$

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.$$

若令$x=x_0+\Delta x$，即$\Delta x=x-x_0$，那么又有

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

特别当$x_0=0$时，有 $f(x)\approx f(0)+f'(0)x$.

求函数增量的近似公式: $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$

例7 有一批半径为 1cm 的球, 为了提高球面的光洁度, 要镀上一层铜, 厚度定为0.01cm. 估计一下每只球需用铜多少 g (铜的密度是8.9g/cm^3)?

解 已知球体体积为$V=\frac{4}{3}\pi R^3$, R_0=1cm, ΔR=0.01cm.

镀层的体积为

$$\Delta V=V(R_0+\Delta R)-V(R_0)$$

$$\approx V'(R_0)\Delta R=4\pi R_0^2\Delta R$$

$$=4\times3.14\times1^2\times0.01=0.13(\text{cm}^3).$$

于是镀每只球需用的铜约为

$$0.13\times8.9=1.16(g).$$

求函数值的近似公式: $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$

例8 利用微分计算$\sin 30°30'$的近似值.

解 已知 $30°30'=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{360}$, $x_0=\frac{\pi}{6}$, $\Delta x=\frac{\pi}{360}$.

$$\sin 30°30'=\sin(x_0+\Delta x)\approx \sin x_0+\cos x_0\,\Delta x$$

$$=\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{360}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{360}=0.5076.$$

即 $\sin 30°30'\approx 0.5076$.

求函数在$x=0$附近的值的近似公式: $f(x)\approx f(0)+f'(0)x$

常用的近似公式(假定$|x|$是较小的数值):

(1) $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x$;

(2)$\sin x\approx x$ (x用弧度作单位来表达);

(3)$\tan x\approx x$(x用弧度作单位来表达);

(4)$e^x\approx 1+x$;

(5)$\ln(1+x)\approx x$.

例9 计算 $\sqrt{1.05}$ 的近似值.

解 已知 $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x$，故

$$\sqrt{1.05}=\sqrt{1+0.05}\approx 1+\frac{1}{2}\times 0.05=1.025\ .$$