换元积分法

第一换元法

第二换元法

定积分换元法

一、第一类换元法

问题 $\int \cos 2x dx \overset{?}{=} \sin 2x + C,$

解决方法 利用复合函数，设置中间变量.

过程 令 $t = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt,$

$$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin 2x + C.$$

在一般情况下：

设 $F'(u)=f(u)$，则 $\int f(u)du=F(u)+C.$

如果 $u=\varphi(x)$（可微）

$\because \quad dF[\varphi(x)]=f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$

$\therefore \quad \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=F[\varphi(x)]+C$

$=[\int f(u)du]_{u=\varphi(x)}$ 由此可得换元法定理

定理3.1

设f是连续函数，φ有连续的导数，且φ的值域含于f的定义域，则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = [\int f(u)du]_{u=\varphi(x)}$$

第一类换元公式（**凑微分法**）

说明 使用此公式的关键在于将

$$\int g(x)dx \text{ 化为} \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx.$$

观察重点不同，所得结论不同.

例1　求$\int \sin 2x dx$.

解（一）$\int \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x d(2x)$

$= -\frac{1}{2}\cos 2x + C$;

解（二）$\int \sin 2x dx = 2\int \sin x \cos x dx$

$= 2\int \sin x d(\sin x) = (\sin x)^2 + C$;

解（三）$\int \sin 2x dx = 2\int \sin x \cos x dx$

$= -2\int \cos x d(\cos x) = -(\cos x)^2 + C$.

例2 求 $\int \frac{1}{3+2x}dx.$

解 $$\frac{1}{3+2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3+2x} \cdot (3+2x)',$$

$$\int \frac{1}{3+2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{3+2x} \cdot (3+2x)' dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln u + C = \frac{1}{2}\ln(3+2x) + C.$$

一般地 $$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\left[\int f(u)du\right]_{u=ax+b}$$

例3 求 $\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}dx.$

解 $\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}dx = \int \frac{1}{1+2\ln x}d(\ln x)$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+2\ln x}d(1+2\ln x)$$

$$u = 1 + 2\ln x$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln u + C = \frac{1}{2}\ln(1+2\ln x) + C.$$

例4　求$\int \frac{x}{(1+x)^3}dx.$

解　$\int \frac{x}{(1+x)^3}dx = \int \frac{x+1-1}{(1+x)^3}dx$

$$= \int [\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^3}]d(1+x)$$

$$= -\frac{1}{1+x} + C_1 + \frac{1}{2(1+x)^2} + C_2$$

$$= -\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2(1+x)^2} + C.$$

例5 求 $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx.$

解 $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}dx$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C.$$

例6 求 $\int \frac{1}{x^2-8x+25}dx.$

解 $\int \frac{1}{x^2-8x+25}dx = \int \frac{1}{(x-4)^2+9}dx$

$$= \frac{1}{3^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x-4}{3}\right)^2+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x-4}{3}\right)^2+1}d\left(\frac{x-4}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\arctan\frac{x-4}{3}+C.$$

例7 求$\int \frac{1}{1+e^x}dx.$

解 $\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx$

$$= \int \left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx = \int dx - \int \frac{e^x}{1+e^x}dx$$

$$= \int dx - \int \frac{1}{1+e^x}d(1+e^x)$$

$$= x - \ln(1+e^x) + C.$$

例8 求$\int(1-\frac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}dx.$

解 $\because\quad \left(x+\frac{1}{x}\right)'=1-\frac{1}{x^2},$

$$\therefore\quad \int(1-\frac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}dx$$

$$=\int e^{x+\frac{1}{x}}d(x+\frac{1}{x})=e^{x+\frac{1}{x}}+C.$$

例9　求 $\int \frac{1}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}}dx.$

原式 $=\int \frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-1}}{\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}\right)\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-1}\right)}dx$

$$=\frac{1}{4}\int \sqrt{2x+3}dx-\frac{1}{4}\int \sqrt{2x-1}dx$$

$$=\frac{1}{8}\int \sqrt{2x+3}d(2x+3)-\frac{1}{8}\int \sqrt{2x-1}d(2x-1)$$

$$=\frac{1}{12}\left(\sqrt{2x+3}\right)^3-\frac{1}{12}\left(\sqrt{2x-1}\right)^3+C.$$

例10 求$\int \frac{1}{1+\cos x}dx$.

解 $\int \frac{1}{1+\cos x}dx = \int \frac{1-\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)}dx$

$$= \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}dx$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 x}dx - \int \frac{1}{\sin^2 x}d(\sin x)$$

$$= -\cot x + \frac{1}{\sin x} + C.$$

例11 求 $\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x dx$.

解 $\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x d(\sin x)$

$= \int \sin^2 x \cdot (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)$

$= \int (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x) d(\sin x)$

$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$

说明 当被积函数是三角函数相乘时，拆开奇次项去凑微分.

例12 求$\int \cos 3x \cos 2x dx$.

解 $\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$,

$$\cos 3x \cos 2x = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 5x),$$

$$\int \cos 3x \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int (\cos x + \cos 5x) dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\sin 5x + C.$$

例13 求$\int \csc x dx.$

解（一）$\int \csc x dx = \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} dx$

$$= \int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2} d\left(\frac{x}{2}\right) = \int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}} d\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$

$$= \ln\tan\frac{x}{2} + C = \ln(\csc x - \cot x) + C.$$

（使用了三角函数恒等变形）

解（二）$\int \csc x dx = \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx$

$$= -\int \frac{1}{1-\cos^2 x} d(\cos x) \qquad u = \cos x$$

$$= -\int \frac{1}{1-u^2} du = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right) du$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1-u}{1+u} + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C.$$

类似地可推出 $\int \sec x dx = \ln(\sec x + \tan x) + C.$

例14 设 $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$，求 $f(x)$.

解 令 $u = \sin^2 x \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x = 1 - u$,

$$f'(u) = 1 - u,$$

$$f(u) = \int (1-u)du = u - \frac{1}{2}u^2 + C,$$

$$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + C.$$

例15　求$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}\arcsin\frac{x}{2}}dx.$

解 $$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}\arcsin\frac{x}{2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\arcsin\frac{x}{2}}d\frac{x}{2}$$

$$= \int \frac{1}{\arcsin\frac{x}{2}}d(\arcsin\frac{x}{2}) = \ln\arcsin\frac{x}{2} + C.$$

二、第二类换元法

问题 $\int x^5\sqrt{1-x^2}dx = ?$

解决方法 改变中间变量的设置方法.

过程 令 $x=\sin t \Rightarrow dx=\cos t dt$,

$$\int x^5\sqrt{1-x^2}dx = \int (\sin t)^5\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt$$

$$= \int \sin^5 t\cos^2 t dt \quad = \cdots\cdots$$

（应用“凑微分”即可求出结果）

定理3.2 设$x=\psi(t)$是单调的、可导的函数，并且$\psi'(t)\neq 0$，又设$f[\psi(t)]\psi'(t)$具有原函数，则有换元公式$\int f(x)dx=\left[\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt\right]_{t=\overline{\psi}(x)}$

其中$\overline{\psi}(x)$是$x=\psi(t)$的反函数.

证　设$\Phi(t)$为$f[\psi(t)]\psi'(t)$的原函数,

令$F(x)=\Phi[\overline{\psi}(x)]$

则 $F'(x)=\dfrac{d\Phi}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=f[\psi(t)]\psi'(t)\cdot\dfrac{1}{\psi'(t)}$,

$$= f[\psi(t)] = f(x).$$

说明$F(x)$为$f(x)$的原函数,

$$\therefore \quad \int f(x)dx = F(x) + C = \Phi[\overline{\psi}(x)] + C,$$

$$\int f(x)dx = \left[\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt\right]_{t=\overline{\psi}(x)}$$

第二类积分换元公式

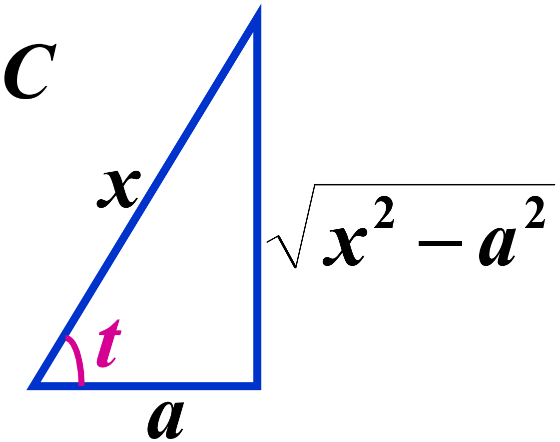
例3. 6 求 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx \quad (a>0)$.

解 令$x=a\sec t \quad dx=a\sec t\tan t dt \quad t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \int \frac{a\sec t\cdot\tan t}{a\tan t}dt$$

$$=\int \sec t dt = \ln(\sec t+\tan t)+C$$

$$=\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)+C.$$



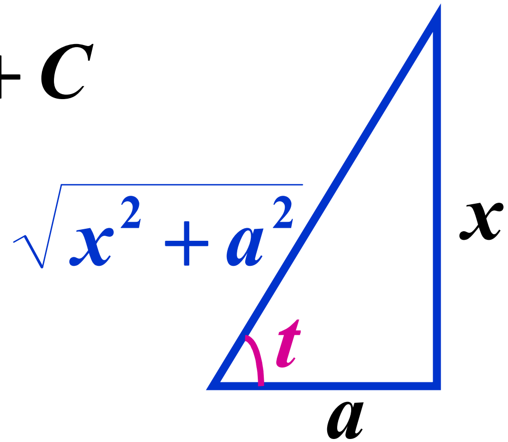
例3.7 求 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx \quad (a>0)$.

解 令 $x = a\tan t \Rightarrow dx = a\sec^2 t dt \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \int \frac{1}{a\sec t} \cdot a\sec^2 t dt$$

$$= \int \sec t dt = \ln(\sec t + \tan t) + C$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right) + C.$$



例16 求 $\int x^3\sqrt{4-x^2}dx.$

解 令 $x=2\sin t \qquad dx=2\cos t dt \qquad t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

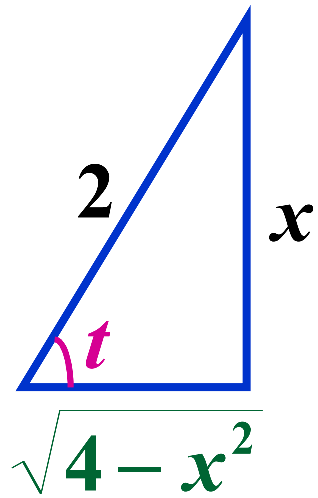
$$\int x^3\sqrt{4-x^2}dx=\int(2\sin t)^3\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt$$

$$=32\int\sin^3 t\cos^2 t dt=32\int\sin t(1-\cos^2 t)\cos^2 t dt$$

$$=-32\int(\cos^2 t-\cos^4 t)d\cos t$$

$$=-32\left(\frac{1}{3}\cos^3 t-\frac{1}{5}\cos^5 t\right)+C$$

$$=-\frac{4}{3}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^5+C.$$



说明(1) 以上几例所使用的均为三角代换.

三角代换的目的是化掉根式.

一般规律如下：当被积函数中含有$(a>0)$:

(1) $\sqrt{a^2-x^2}$ 可令 $x=a\sin t,\ -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$;

(2) $\sqrt{a^2+x^2}$ 可令 $x=a\tan t,\ -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$;

(3) $\sqrt{x^2-a^2}$ 可令 $x=a\sec t$, 若 $\frac{x}{a}\ge 1, 0\le t<\frac{\pi}{2}$;

若 $\frac{x}{a}\le -1, \frac{\pi}{2}<t\le\pi$.

说明(2) 积分中为了化掉根式除采用三角代换外还可用**双曲代换.**

$$\because \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

$\therefore x = a\sinh t, \quad x = a\cosh t$ 也可以化掉根式

例 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx$ 中, 令 $x = a\sinh t$ $\quad dx = a\cosh t dt$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \int \frac{a\cosh t}{a\cosh t} dt = \int dt = t + C$$

$$= ar\sinh \frac{x}{a} + C = \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right) + C.$$

说明(3) 积分中为了化掉根式是否一定采用三角代换（或双曲代换）并不是绝对的，需根据被积函数的情况来定.

例17 求 $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}dx$ （三角代换很繁琐）

解 令 $t=\sqrt{1+x^2} \Rightarrow x^2=t^2-1,\quad xdx=tdt,$

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int \frac{(t^2-1)^2}{t}tdt=\int (t^4-2t^2+1)dt$$

$$=\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t+C=\frac{1}{15}(8-4x^2+3x^4)\sqrt{1+x^2}+C.$$

例18 求 $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx.$

解 令 $t=\sqrt{1+e^x} \Rightarrow e^x = t^2-1,$

$$x=\ln\left(t^2-1\right), \quad dx=\frac{2t}{t^2-1}dt,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx=\int \frac{2}{t^2-1}dt=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=2\ln\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)-x+C.$$

说明(4) 当分母的阶较高时, 可采用**倒代换** $x=\frac{1}{t}$.

例19 求 $\int \frac{1}{x(x^7+2)}dx$

解 令 $x=\frac{1}{t} \Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt$,

$$\int \frac{1}{x(x^7+2)}dx=\int \frac{t}{\left(\frac{1}{t}\right)^7+2}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int \frac{t^6}{1+2t^7}dt$$

$$=-\frac{1}{14}\ln|1+2t^7|+C=-\frac{1}{14}\ln|2+x^7|+\frac{1}{2}\ln|x|+C.$$

例20 求$\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}dx.$ （分母的阶较高）

解 令 $x=\frac{1}{t} \Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt,$

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}dx=\int \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^4\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dx$$

$$=-\int \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}dt=-\frac{1}{2}\int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt^2 \qquad u=t^2$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{u}{\sqrt{1+u}}du = \frac{1}{2}\int \frac{1-1-u}{\sqrt{1+u}}du$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{\sqrt{1+u}} - \sqrt{1+u} \right) d(1+u)$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+u}\right)^3 + \sqrt{1+u} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \right)^3 + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$$

说明(5) 当被积函数含有两种或两种以上的根式$\sqrt[k]{x},\cdots,\sqrt[l]{x}$时，可采用令$x=t^n$（其中$n$为各根指数的**最小公倍数**）

例21 求 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx.$

解 令 $x=t^6 \Rightarrow dx=6t^5dt,$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx=\int\frac{6t^5}{t^3(1+t^2)}dt=\int\frac{6t^2}{1+t^2}dt$$

$$= 6\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt$$

$$= 6\int \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$= 6[t-\arctan t]+C$$

$$= 6[\sqrt[6]{x}-\arctan \sqrt[6]{x}]+C.$$

基本积分表

(16) $\int \tan x dx = -\ln\cos x + C$;

(17) $\int \cot x dx = \ln\sin x + C$;

(18) $\int \sec x dx = \ln(\sec x + \tan x) + C$;

(19) $\int \csc x dx = \ln(\csc x - \cot x) + C$;

补充

(20) $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$;

(21) $$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}+C;$$

(22) $$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x}+C;$$

(23) $$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a}+C;$$

(24) $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx = \ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})+C.$$

三、定积分换元积分法

定理　　假设

（1）$f(x)$在$[a,b]$上连续；

（2）函数$x=\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$上是单值的且有连续导数；

（3）当t在区间$[\alpha,\beta]$上变化时，$x=\varphi(t)$的值在$[a,b]$上变化，且$\varphi(\alpha)=a$、$\varphi(\beta)=b$，

则 有$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

应用换元公式时应注意:

（1）用$x=\varphi(t)$把变量x换成新变量t时，积分限也相应的改变.

（2）求出$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$的一个原函数$\Phi(t)$后，不必象计算不定积分那样再要把$\Phi(t)$变换成原变量x的函数，而只要把新变量t的上、下限分别代入$\Phi(t)$然后相减就行了.

例22　计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx.$

解　令 $t=\cos x,\quad dt=-\sin x dx,$

$$x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=0,\qquad x=0 \Rightarrow t=1,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx$$

$$=-\int_1^0 t^5 dt \;=\left.\frac{t^6}{6}\right|_0^1=\frac{1}{6}.$$

例23　计算 $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\,dx$.

解　$\because f(x)=\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}=|\cos x|(\sin x)^{\frac{3}{2}}$

$$\therefore \int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\,dx=\int_0^{\pi}|\cos x|(\sin x)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x(\sin x)^{\frac{3}{2}}dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x(\sin x)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{3}{2}}d\sin x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin x)^{\frac{3}{2}}d\sin x$$

$$=\frac{2}{5}(\sin x)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{5}(\sin x)^{\frac{5}{2}}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{4}{5}.$$

例24 计算 $\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$.

解 原式 $=\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \dfrac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$

$$=\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}\sqrt{(1-\ln x)}} = 2\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{d\sqrt{\ln x}}{\sqrt{1-(\sqrt{\ln x})^2}}$$

$$=2\left[\arcsin(\sqrt{\ln x})\right]_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} = \frac{\pi}{6}.$$

例25 计算 $\int_0^a \frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}dx.\quad (a>0)$

解 令 $x=a\sin t$, $\quad dx=a\cos t dt$,

$$x=a \Rightarrow t=\frac{\pi}{2},\qquad x=0 \Rightarrow t=0,$$

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\cos t}{a\sin t+\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\Big[\ln|\sin t+\cos t|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

命题 当$f(x)$在$[-a,a]$上连续，且有

①$f(x)$为偶函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx;$$

②$f(x)$为奇函数，则$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

例26 计算 $\int_{-1}^{1}\dfrac{2x^2+x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx.$

解 原式 $=\int_{-1}^{1}\boxed{\dfrac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}}dx+\int_{-1}^{1}\boxed{\dfrac{x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}}dx$

偶函数 奇函数

$$=4\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=4\int_0^1\frac{x^2(1-\sqrt{1-x^2})}{1-(1-x^2)}dx$$

$$=4\int_0^1(1-\sqrt{1-x^2})dx=4-\boxed{4\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx}$$

单位圆的面积

$$=4-\pi.$$

四、小结

两类不定积分换元法：

（一）凑微分

（二）三角代换、倒代换、根式代换

基本积分表(2)

定积分换元法

思考题

求积分 $\int (x\ln x)^p(\ln x+1)dx.$

思考题解答

$$\because\ d(x\ln x)=(1+\ln x)dx$$

$$\therefore \int (x\ln x)^p(\ln x+1)dx=\int (x\ln x)^p d(x\ln x)$$

$$=\begin{cases} \dfrac{(x\ln x)^{p+1}}{p+1}+C, & p\neq -1 \\ \ln(x\ln x)+C, & p=-1 \end{cases}$$

练 习 题

一、填空题：

1、若$\int f(x)dx = F(x) + C$而$u = \Phi(x)$则

$\int f(u)du =$________________；

2、求$\int \sqrt{x^2 - a^2}dx\ (a > 0)$时，可作变量代换________

________________，然后再求积分；

3、求$\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx$时可先令$x =$__________；

4、$x\ dx =$______$d(1 - x^2)$；

5、$e^{-\frac{x}{2}}dx =$____$d(1 + e^{-\frac{x}{2}})$；

6、$\frac{dx}{x} =$_____$d(3 - 5\ln x)$；

7、$\dfrac{dx}{1+9x^2}=$______$d(\arctan 3x)$；

8、$\dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=$______$d(\sqrt{1-x^2})$；

9、$\displaystyle\int\frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt=$____________________；

10、$\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=$____________________ .

二、求下列不定积分：（第一类换元法）

1、$\displaystyle\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$；

2、$\displaystyle\int\frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$；

3、$\int \tan\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$；

4、$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$；

5、$\int x^2\sqrt{1+x^3}dx$；

6、$\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx$；

7、$\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$；

8、$\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}dx$；

9、$\int \frac{x^3}{9+x^2}dx$；

10、$\int \frac{dx}{x(x^6+4)}$；

11、$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$；

12、$\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)}dx$；

13、$\int \frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$；

14、$\int \frac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}dx$.

三、求下列不定积分：（第二类换元法）

1、$\int \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$；

2、$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$；

3、$\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}}$；

4、$\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx$；

5、设$\int \tan^n xdx$，求证：

$$I_n = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x - I_{n-2}$$ ，并求$\int \tan^5 xdx$.

练习题答案

一、1、$F(u)+C$；；　　2、$x=a\sec t$ 或 $x=a\csc t$；

3、$\frac{1}{t}$；　　4、$-\frac{1}{2}$；　　5、-2；　　6、$-\frac{1}{5}$；

7、$\frac{1}{3}$；　　8、$-$ ；　　9、$-2\cos\sqrt{t}+C$；

10、$\frac{a^2}{2}(\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2})+C$.

二、1、$a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C$；　　2、$\ln\ln\ln x+C$；

3、$-\ln(\cos\sqrt{1+x^2})+C$；　　4、$\arctan e^x+C$；

5、$\frac{2}{9}(1+x^3)^{\frac{3}{2}}+C$；　　6、$\frac{1}{2}\arctan(\sin^2 x)+C$；

7、$\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\sin x-\cos x)^2}+C$；

8、$\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3}+\frac{\sqrt{9-4x^2}}{4}+C$；

9、$\frac{x^2}{2}-\frac{9}{2}\ln(x^2+9)+C$；

10、$\frac{1}{24}\ln\frac{x^6}{x^6+4}+C$；

11、$(\arctan\sqrt{x})^2+C$；

12、$\ln(xe^x)-\ln(1+xe^x)+C$；

13、$-\frac{10^{2\arccos x}}{2\ln 10}+C$；

14、$\frac{1}{2}(\ln\tan x)^2+C$.

三、1、$\frac{1}{2}[\arcsin x+\ln(x+\sqrt{1-x^2})]+C$；

2、$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$；

3、$\sqrt{2x}-\ln(1+\sqrt{2x})+C$；

4、$3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}-2a\sqrt{x(2a-x)}$

$$+\frac{a-x}{2}\sqrt{x(2a-x)}+C.$$