市中心距离 r 的增加而减小. 设某城市 1990 年的人口密度为 $P(r)=\frac{4}{r^2+20}$(10 万人/km^2),试求该市距市中心 2 km 的范围内的人口数.

解 在 dr 足够小时. 近似的认为圆环(内半径 r,外半径 $r+dr$)上人口密度为 $P(r)=\frac{4}{r^2+20}$. 而将整个城市的人口看作分布在这些圆环上的人口之和. 圆环面积微元 $dA=2\pi r dr$. 则距市中心 2 km 范围内的人口数

$$M=\int_0^2 P(r)dA=\int_0^2 \frac{4(2\pi r dr)}{r^2+20}=4\pi\ln\frac{6}{5}(10\text{ 万人})$$
$$\approx 2.291(10\text{ 万人}).$$

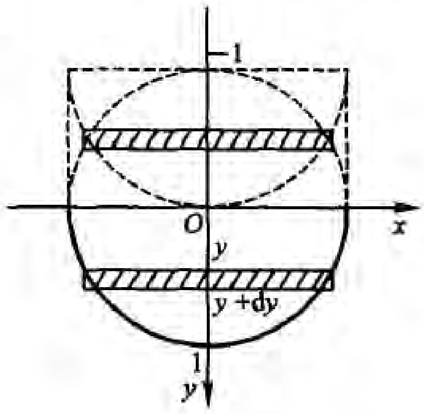
4. 设一半径为 1 的球有一半浸入水中,球的体密度为 1,问将此球从水中取出需作多少功?

解 如图所示建立坐标系,采用与练习 3.4(A)第 8 题的分析法可知:将下半球从水中拿出所做功微元

$$dW_1=(-y)g(1-\mu)dV-[-(1-y)](-g\mu dV)=g[(\mu-1)y+\mu(1-y)]dV,$$

dV 为图中阴影所示薄片的体积,即

$$dv=\pi x^2 dy=\pi\sqrt{1-y^2}dy.$$



(第 4 题)

由于 $\mu=1$,故将下半球从水中取出所做功为

$$W_1=\int_0^1 dW_1=\int_0^1 g(1-y)\pi\sqrt{1-y^2}dy=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)\pi g$$

上半球从原始位置升高 1 所做功

$$W_2=(-1)\left(-g\mu\cdot\frac{2}{3}\pi\cdot 1^3\right)=\frac{2}{3}\pi g$$

故将此球从水中拿出所做的功为

$$W=W_1+W_2=\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}\right)\pi g.$$

习 题 3.5

(A)

1. 利用定义判定下列无穷积分的收敛性,如果收敛,计算其值.

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}}$；　　(3) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

(6) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

解　(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{2\mathrm{d}\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2}$

$=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(2\arctan\sqrt{b}-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$. 故积分收敛，其值为$\frac{\pi}{2}$.

(3) 原式$=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}2\int_0^b\sqrt{x}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}\sqrt{x}$

$=\lim\limits_{b\to+\infty}\left[-2(\sqrt{x}+1)\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\right]_0^b=\lim\limits_{b\to+\infty}2\left[1-(\sqrt{b}+1)\mathrm{e}^{-\sqrt{b}}\right]=2$. 积分收敛.

(6) 因为 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}(\sqrt{1+b^2}-1)$

$=+\infty$,

故$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$积分发散.

2. 利用定义判定下列无界函数积分的收敛性，如果收敛，计算它的值.

(1) $\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$；　　(3) $\int_1^2\frac{x}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$；

(5) $\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}(a<b)$；　　(8) $\int_1^3\ln\sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}}\mathrm{d}x$.

解　(1) $x=1$ 是$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$的奇点. 由定义

$$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(-\sqrt{1-x^2}\right)\Big|_0^{1-\varepsilon}=1.$$

(3) $x=1$ 是$\frac{x}{\sqrt{x-1}}$的奇点，且$\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{x-1}=F(x)$是$\frac{x}{\sqrt{x-1}}$的一个原函数，由于$F(x)$在$x=1$处连续，故积分$\int_1^2\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}=F(2)-F(1)=\frac{8}{3}$收敛.

(5) $x=a,x=b$ 都是函数$\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$的奇点，取$c=\frac{a+b}{2}$,

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{\frac{a+b}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-\left(x-\frac{b+a}{2}\right)^2}}$$

$$\xlongequal{\text{令 } x-\frac{b+a}{2}=\frac{b-a}{2}\sin\theta}\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\arcsin\frac{\varepsilon-(b-a)/2}{(b-a)/2}}^{0}\mathrm{d}\theta$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[-\arcsin\frac{\varepsilon-(b-a)/2}{(b-a)/2}\right]=\frac{\pi}{2},$$

又 $$\lim_{\delta\to0^+}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b-\delta}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(b-x)(a-x)}}\xlongequal{x-\frac{a+b}{2}=\frac{b-a}{2}\sin\theta}\lim_{\delta\to0^+}\int_0^{\arcsin\frac{-\delta+(b-a)/2}{(b-a)/2}}\mathrm{d}\theta$$

$$=\lim_{\delta\to0^+}\arcsin\frac{(b-a)/2-\delta}{(b-a)/2}=\frac{\pi}{2},$$

故原积分收敛，且

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a-x)(b-x)}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{\frac{a+b}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a-x)(b-x)}}+\lim_{\delta\to0^+}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b-\delta}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a-x)(b-x)}}=\pi,$$

(8) $x=2$ 为奇点. 且

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_1^{2-\varepsilon}\ln\sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_1^{2-\varepsilon}\ln\sqrt{\frac{\pi}{2-x}}\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_1^{2-\varepsilon}\frac{1}{2}[\ln\pi-\ln(2-x)]\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{2}[(1-\varepsilon)\ln\pi+\varepsilon\ln\varepsilon+1-\varepsilon]$$

$$=\frac{1}{2}(\ln\pi+1).$$

$$\lim_{\delta\to0^+}\int_{2+\delta}^{3}\ln\sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}}\mathrm{d}x=\lim_{\delta\to0^+}\int_{2+\delta}^{3}\frac{1}{2}(\ln\pi-\ln(x-2))\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\delta\to0^+}\frac{1}{2}[(1-\delta)\ln\pi+1+\delta\ln\delta-\delta]$$

$$=\frac{1}{2}(\ln\pi+1)$$

故 $$\int_1^3\ln\sqrt{\frac{\pi}{|x-2|}}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_1^{2-\varepsilon}\ln\sqrt{\frac{\pi}{|x-2|}}\mathrm{d}x+\lim_{\delta\to0^+}\int_{2+\delta}^{3}\ln\sqrt{\frac{\pi}{|x-2|}}\mathrm{d}x=\ln\pi+1.$$

3. 利用定义判定下列反常积分的收敛性，如果收敛，计算它的值.

(1) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\lim_{b\to-\infty}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{b}\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\frac{1}{x}=\lim_{b\to-\infty}\left(\cos\frac{1}{b}-\cos\frac{4}{\pi}\right)=1-\cos\frac{4}{\pi}$，故积分收敛.

(2) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

$x=1$ 为奇点. 故 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

因为 $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} \xlongequal{t=\sqrt{x-1}} \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\left(\frac{\pi}{4} - \arctan \varepsilon\right) = \frac{\pi}{2}$.

又因为 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \lim_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \lim_{b\to+\infty} 2\left(\arctan\sqrt{b-1} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$,

故 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ 收敛,且 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \pi$.

4. 当 k 取何值时,反常积分 $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 收敛,又当 k 为何值时发散.

解 $k=1$ 时,$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k} = \lim_{b\to+\infty}\int_e^b \frac{d\ln x}{\ln x} = \lim_{b\to+\infty} \ln(\ln b) = +\infty$,积分发散.

当 $k\neq 1$ 时, $\int_e^b \frac{dx}{x(\ln x)^k} = \frac{1}{1-k}[(\ln b)^{1-k} - 1]$.

如 $k>1$ $\lim_{b\to+\infty}\int_e^b \frac{dx}{x(\ln x)^k} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{1-k}[(\ln b)^{1-k} - 1] = \frac{1}{k-1}$.

$k<1$ $\lim_{b\to+\infty}\int_e^b \frac{dx}{x(\ln x)^k} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{1-k}[(\ln b)^{1-k} - 1] = +\infty$.

故 $k>1$ 时,积分收敛,且 $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k} = \frac{1}{k-1}$. $k\leqslant 1$ 时,积分发散.

5. 利用各种判别准则,讨论下列无穷积分的收敛性:

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^3+x^2+1}$.

解 $g(x) = \frac{1}{x^2}$,则 $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^3+x^2+1}\Big/\frac{1}{x^2} = 1$. 又因为 $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ 收敛,故 $\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^3+x^2+1} = \int_0^1 \frac{x\,dx}{x^3+x^2+1} + \int_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^3+x^2+1}$ 收敛.

(2) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$.

解 取 $g(x) = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$,则 $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\Big/ g(x) = 1$,又因为 $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ 收敛,

故 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ 收敛.

(3) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x\sqrt{x}}} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{4}}}$,因为 $p=\frac{3}{4}<1$. 故积分发散.

(4) $\int_0^{+\infty} e^{-kx}\cos x\mathrm{d}x, k>0$.

解 因为 $|e^{-kx}\cos x|\leqslant e^{-kx}$，而 $\int_0^{+\infty} e^{-kx}=-\frac{e^{-kx}}{k}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{k}$ 收敛. 故 $\int_0^{+\infty} e^{-kx}\cos x\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

6. 利用各种判别准则，讨论下列反常积分的收敛性.

(1) $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$.

解 $x=0, x=1$ 都是奇点，则 $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}+\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}+\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$.

又因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}\Big/\frac{1}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{\ln x}=0$，而 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ 收敛. 故 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 收敛.

又因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\frac{1}{\ln x}\Big/\frac{1}{(x-1)}\right]=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\ln x}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 1^+}x=1$. 而 $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x-1}$ 发散，故 $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 发散. 故原积分 $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 发散

(3) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}$.

解 $x=0,x=1$ 都是奇点，则 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}+\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}$.

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}\Big/\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=1$，而 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ 收敛，从而 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}$ 收敛.

又由 $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}\Big/\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$，而 $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$ 收敛，从而 $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}$ 收敛.

故原积分 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}$ 收敛.

(5) $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}$.

解 由于 $x=2$ 为 $f(x)=\frac{1}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}$ 的奇点，则

$$\int_2^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x+\int_3^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x,$$

又由 $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(f(x)\Big/\frac{1}{\sqrt{x-2}}\right)=\frac{1}{8}$ 及 $\int_2^3\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-2}}$ 收敛知，$\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\Big/\frac{1}{x^4}\right)=1$ 及 $\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4}$ 收敛知 $\int_3^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

故原积分$\int_{2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{3}\sqrt{x^{2}-3x+2}}$收敛.

7. 下列两种判定积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^{2}}\mathrm{d}x$收敛性的做法哪一种是错误的？为什么？

解法一

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^{2}}\mathrm{d}x&=\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{+a}\frac{x}{1+x^{2}}\mathrm{d}x\\&=\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{2}\ln(1+x^{2})\Big|_{-a}^{a}\\&=\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{2}\{\ln(1+a^{2})-\ln[1+(-a)^{2}]\}=0,\end{aligned}$$

故该积分收敛.

解法二

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^{2}}\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{1+x^{2}}\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1+x^{2}}\mathrm{d}x\\&=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\ln(1+x^{2})\Big|_{a}^{0}+\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\ln(1+x^{2})\Big|_{0}^{b},\end{aligned}$$

由于两个极限都不存在，所以该积分发散.

解　解法一错误. 积分$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛的充分必要条件是极限$\lim\limits_{a\to-\infty}\int_{a}^{c}f(x)\mathrm{d}x$与$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{c}^{b}f(x)\mathrm{d}x$同时存在，且$a,b$各自独立地分别趋于$-\infty$与$+\infty$. 若两个极限中有一个不存在，则$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$发散. 而解法一中的$x$趋于$\infty$速度一致导致错误.

8. 下列两种判定积分$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}\mathrm{d}x$收敛性的做法哪一种是错误的？为什么？

解法一

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}\mathrm{d}x=\int_{1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\ln\frac{x}{1+x}\Big|_{1}^{b}=\ln 2,$$

因而收敛.

解法二

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_{1}^{b}-\lim_{b\to+\infty}\ln(1+x)\Big|_{1}^{b},$$

两个极限都不存在，因而发散.

解　解法二是错误的. 错用极限的有理运算法则.

只有当 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$ 都存在时，下列运算法则才成立.

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to\infty}f(x)-\lim_{x\to\infty}g(x).$$

(B)

1. 设 f 在 $[a,c)\cup(c,b]$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\infty$，那么反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 能否用极限

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\left\{\int_a^{c-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x\right\}$$

来定义？为什么？讨论积分 $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{1-x}$ 的收敛性.

解 不能. 如 $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{1-x}$. 由反常积分收敛的定义知 $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{1-x}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1-x}+\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{1-x}$，又因为

$$\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{1-x}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{1+\varepsilon}^2\frac{\mathrm{d}x}{1-x}=\lim_{\varepsilon\to0^+}(\ln\varepsilon)=-\infty.$$

故 $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{1-x}$ 发散.

因为 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\left[\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{1-x}+\int_{1+\varepsilon}^2\frac{\mathrm{d}x}{1-x}\right]=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}(-\ln\varepsilon+\ln\varepsilon)=0.$

但如果用此题中的定义却得出 $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{1-x}$ 收敛.

2. 讨论下列反常积分的收敛性：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}\quad(p,q>0)$.

解 $x=0,x=\frac{\pi}{2}$ 为奇点，由 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}\Big/\frac{1}{x^p}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^p\cdot\frac{1}{\cos^q x}=1$ 知，$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$ 与 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 收敛性相同. 故由 p 积分的收敛性知，$p<1$ 时，$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$ 收敛；$p\geqslant1$ 时，$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$ 发散.

又由 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}\Big/\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{-q}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\sin^p x}\cdot\left[\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right]^q=1$ 知

$\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$ 与 $\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^q}\mathrm{d}x$ 收敛性相同.

故　当 $q<1$ 时，$\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$收敛；$q\geqslant 1$ 时，$\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$发散.

综上所述，当 $0<p<1,0<q<1$ 时，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$收敛. 其他情况下均发散.

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}(p,q>0)$.

解　$x=1$ 为 $f(x)=\frac{1}{x^p\ln^q x}$的奇点，而$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$.

由于 $\lim\limits_{x\to1^+}\left[f(x)\Big/\frac{1}{(x-1)^q}\right]=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{x-1}{\ln x}\right)^q=1$，$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^2\frac{1}{(x-1)^q}\mathrm{d}x$ 收敛性相同.

故积分 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ 当 $q<1$ 时收敛；$q\geqslant1$ 时发散.

又当 $p>1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^p\ln^q x}\Big/\frac{1}{x^p}\right)=0$，且 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$收敛，故当 $p>1$ 时，积分 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$收敛.

当 $0<p\leqslant1,q<1$ 时，$\forall x\in[2,+\infty)$，

$$0<x^p\ln^q x\leqslant x\ln^q x，从而\frac{1}{x^p\ln^q x}\geqslant\frac{1}{x\ln^q x},$$

且
$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^q x}=\frac{(\ln x)^{1-q}}{1-q}\Big|_2^{+\infty}=+\infty,$$

故 $0<p\leqslant1$ 且 $q<1$ 时，$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$发散.

综上所述，当 $p>1$ 且 $q<1$ 时，$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 其他情况均发散.

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x\quad(0<\alpha<+\infty)$.

解　$x=0$ 为 $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}\ln(1+x)$的奇点，而

$$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x.$$

若 $\alpha>1$，取 $\varepsilon>0$，使 $\alpha-\varepsilon>1$，由

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\Big/\frac{1}{x^{\alpha-\varepsilon}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\varepsilon}=0 及 \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha-\varepsilon}}\mathrm{d}x 收敛知，$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x 收敛；$$

若 $\alpha\leqslant1$，由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\Big/\frac{1}{x^\alpha}\right)=+\infty$及 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 发散得

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x \text{ 发散；}$$

又由 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\Big/\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ 知，$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1\frac{1}{x^{\alpha-1}}\mathrm{d}x$ 收敛性相同，即

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x \text{ 当}\alpha<2\text{ 时收敛，}\alpha\geqslant2\text{ 时发散.}$$

综上所述，$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 当 $1<\alpha<2$ 时收敛.

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 $x=0$ 是奇点，又 $\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\Big/\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right]=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\sin x}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{-\cot x}{\frac{1}{6}x^{-\frac{7}{6}}}\right]=$

$-6\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^{\frac{1}{6}}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x\right)=0$，且 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x$ 收敛，故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 收敛.

3. 证明：当 $p>0,q>0$ 时，反常积分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$ 收敛. 此时，该积分是参数 p,q 的函数，称为 Beta 函数，记作

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x\qquad(p>0,q>0).$$

进而证明 Beta 函数有下列性质：

(1) $B(p,q)=B(q,p)$；

(2) 当 $q>1$ 时，$B(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$；

当 $p>1$ 时，$B(p,q)=\frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q)$；

(3) 若 $m,n\in\mathbf{N}_+$，则 $B(n,m)=\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(m+n)}$.

证 当 $p\geqslant1,q\geqslant1$ 时，$(1-x)^{q-1}x^{p-1}$ 在 $[0,1]$ 连续，则在 $[0,1]$ 上可积. $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$ 为定积分. 当 $0<p<1,q\geqslant1$ 时，仅 $x=0$ 是 $f(x)=x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ 的奇点. 由 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x^{p-1}}=1$ 及 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^{1-p}}$ 收敛知，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 当 $p\geqslant1,0<q<1$ 时，仅 $x=1$ 是 $f(x)$ 的奇点，由 $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)}{(1-x)^{q-1}}\mathrm{d}x=1$ 及 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^{1-q}}$ 收敛得

$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

当 $p<1,q<1$ 时，$x=0,x=1$ 均为 $f(x)$ 的奇点，而

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

由以上的讨论知，当 $p<1,q<1$ 时，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 故当 $p>0,q>0$ 时，$\mathrm{B}(p,q)$ 收敛.

(1) $\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x \xlongequal{t=1-x} \int_1^0 (1-t)^{p-1}t^{q-1}(-\mathrm{d}t)$

$$=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}\mathrm{d}t=\mathrm{B}(q,p).$$

(2) 当 $q>1$，$\mathrm{B}(p,q)=\frac{1}{p}\int_0^1 (1-x)^{q-1}\mathrm{d}x^p$

$$\begin{aligned}
&=\frac{1}{p}(1-x)^{q-1}x^p\Big|_0^1+\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}\mathrm{d}x\\
&=\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}[(x-1)+1](1-x)^{q-2}\mathrm{d}x\\
&=\frac{q-1}{p}\left[\int_0^1 -x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x+\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}\mathrm{d}x\right]\\
&=\frac{q-1}{p}[-\mathrm{B}(p,q)+\mathrm{B}(p,q-1)],
\end{aligned}$$

故 $\mathrm{B}(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p,q-1)$.

同理可证：当 $p>1$ 时，$\mathrm{B}(p,q)=\frac{p-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p-1,q)$.

(3) 由于 $m,n\in\mathbf{N}_+$，且 $\Gamma(k+1)=k!\ (k\in\mathbf{N}_+)$，所以

当 $m=n=1$，$\mathrm{B}(1,1)=\int_0^1 \mathrm{d}x=1=\frac{\Gamma(1)\Gamma(1)}{\Gamma(1+1)}$.

当 m、n 至少有一个不等于 1，不妨设 $n>1$，则由(2)可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}(m,n)&=\frac{n-1}{m+n-1}\mathrm{B}(m,n-1)=\frac{n-1}{m+n-1}\cdot\frac{(n-1)-1}{m+(n-1)-1}\mathrm{B}(m,n-2)\\
&=\cdots=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 2\cdot 1}{(m+n-1)(m+n-2)\cdots(m+1)}\mathrm{B}(m,1)\\
&=\frac{(n-1)!\ m!}{(m+n-1)!}\mathrm{B}(m,1)=\frac{(n-1)!\ (m-1)!}{(m+n-1)!}=\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(m+n)},
\end{aligned}$$

其中
$$\mathrm{B}(m,1)=\int_0^1 x^m\mathrm{d}x=\frac{1}{m}x^{m-1}\Big|_0^1=\frac{1}{m}.$$