3.3 函数展开成幂级数

一、Taylor级数

二、函数展开成幂级数

函数$f(x)$是否能在某个区间内"展开成幂级数"，就是说，是否能找到这样一个幂级数，它在某区间内收敛，且其和恰好就是给定的函数$f(x)$. 如果能找到这样的幂级数，则称函数$f(x)$在该区间内能展开成幂级数.

一、 Taylor级数

❖复习

根据Taylor中值定理，如果函数$f(x)$在x_0的某邻域内具有各阶导数，则在该邻域内

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)\,,$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (ξ介于 x 与 x_0 之间).

等式右端的多项式当其项数趋于无穷时，将成为幂级数，这个幂级数就称为$f(x)$的**Taylor级数**.

一、 Taylor级数

❖Taylor级数

如果函数$f(x)$在点x_0的某邻域内具有各阶导数, 则幂级数

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\cdots$$

称为函数$f(x)$的Taylor级数.

❖Maclaurin级数

在泰勒级数中取$x_0=0$, 得

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots,$$

此级数称为$f(x)$的Maclaurin级数.

一、Taylor级数

❖Taylor级数

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\cdots.$$

❖Maclaurin级数

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots.$$

显然, 当$x=x_0$时, $f(x)$的Taylor级数收敛于$f(x_0)$.

需回答的问题是: 除了$x=x_0$外, $f(x)$的Taylor级数是否收敛? 如果收敛, 它是否一定收敛于$f(x)$?

一、 Taylor级数

❖Taylor级数

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\cdots.$$

❖Maclaurin级数

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots.$$

❖定理3.8

设函数$f(x)$在点x_0的某一邻域$U(x_0)$内具有各阶导数, 则$f(x)$在该邻域内能展开成Taylor级数的充分必要条件是$f(x)$的Taylor公式中的余项$R_n(x)$当$n\to\infty$时的极限为零, 即

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0\ \ (x\in U(x_0)).$$

设函数$f(x)$在点x_0的某一邻域$U(x_0)$内具有各阶导数, 则$f(x)$在该邻域内能展开成Taylor级数的充分必要条件是$f(x)$的Taylor公式中的余项$R_n(x)$当$n\to\infty$时的极限为零, 即

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0 \quad (x\in U(x_0)).$$

简要证明: 先证必要性.

设$f(x)$在$U(x_0)$内能展开为Taylor级数, 即

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots .$$

又设$s_{n+1}(x)$是$f(x)$的Taylor级数的前$n+1$项的和, 则在$U(x_0)$内

$$s_{n+1}(x)\to f(x)(n\to\infty).$$

而$f(x)$的n阶Taylor公式可写成

$$f(x)=s_{n+1}(x)+R_n(x),$$

于是$R_n(x)=f(x)-s_{n+1}(x)\to 0(n\to\infty)$.

设函数$f(x)$在点x_0的某一邻域$U(x_0)$内具有各阶导数, 则$f(x)$在该邻域内能展开成Taylor级数的充分必要条件是$f(x)$的Taylor公式中的余项$R_n(x)$当$n\to\infty$时的极限为零, 即

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0 \quad (x\in U(x_0)).$$

简要证明: 再证充分性.

设$R_n(x)\to 0(n\to\infty)$对一切$x\in U(x_0)$成立.

因为$f(x)$的n阶Taylor公式可写成

$$f(x)=s_{n+1}(x)+R_n(x),$$

于是

$$s_{n+1}(x)=f(x)-R_n(x)\to f(x),$$

即$f(x)$的Taylor级数在$U(x_0)$内收敛, 并且收敛于$f(x)$.

推论3.1

设$\boldsymbol{f}:(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{R},\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{R})\to\boldsymbol{R}$是$\mathrm{C}^\infty$类函数，如果$\{\boldsymbol{f}^{(n)}\}$在$(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{R},\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{R})$内是一致有界的，那么那么$\boldsymbol{f}$在$(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{R},\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{R})$内必能展开为它在$\boldsymbol{x}_0$处的Taylor级数.

❖展开式的唯一性

如果$f(x)$能展开成x的幂级数，那么这种展式是唯一的，它一定与$f(x)$的Maclaurin级数一致.

这是因为，如果$f(x)$在点$x_0=0$的某邻域$(-R, R)$内能展开成x的幂级数，即

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

那么有 $a_0=f(0)$，$a_1=f'(0)$，$a_2=\dfrac{f''(0)}{2!}$，$\cdots$，$a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$，$\cdots$.

提示：$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+\cdots$，　$f'(0)=a_1$.

$f''(x)=2!a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+5\cdot 4a_5x^3+\cdots$，　$f''(0)=2!a_2$.

$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)n(n-1)\cdots 2a_{n+1}x+\cdots$，　$f^{(n)}(0)=n!a_n$.

❖展开式的唯一性

如果$f(x)$能展开成x的幂级数，那么这种展式是唯一的，它一定与$f(x)$的Maclaurin级数一致.

应注意的问题:

如果$f(x)$能展开成x的幂级数，那么这个幂级数就是$f(x)$的Maclaurin级数.

但是，如果$f(x)$的Maclaurin级数在点$x_0=0$的某邻域内收敛，它却不一定收敛于$f(x)$.

因此，如果$f(x)$在点$x_0=0$处具有各阶导数，则$f(x)$的Maclaurin级数虽然能作出来，但这个级数是否在某个区间内收敛, 以及是否收敛于$f(x)$却需要进一步考察.

二、函数展开成幂级数

❖函数展开成幂级数的步骤

•第一步　求出$f(x)$的各阶导数: $f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n)}(x), \cdots$;

•第二步　求函数及其各阶导数在x=0 处的值:

$$f(0), f'(0), f''(0), \cdots, f^{(n)}(0), \cdots;$$

•第三步　写出幂级数

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots,$$

并求出收敛半径R;

•第四步　考察在区间$(-R, R)$内时是否$R_n(x)\to 0(n\to\infty)$.

如果$R_n(x)\to 0(n\to\infty)$, 则$f(x)$在$(-R, R)$内有展开式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots\ (-R<x<R).$$

例1 将函数$f(x)=e^x$展开成x的幂级数.

解 显然 $f^{(n)}(x)=e^x(n=1, 2, \cdots)$, $f^{(n)}(0)=1(n=1, 2, \cdots)$.

于是得级数

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots\frac{1}{n!}x^n+\cdots,$$

它的收敛半径$R=+\infty$.

对于任何有限的数x、ξ(ξ介于0与x之间), 有

$$|R_n(x)|=\left|\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<e^{|x|}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$, 从而有展开式

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots\frac{1}{n!}x^n+\cdots \quad (-\infty<x<+\infty).$$

例2 将函数$f(x)=\sin x$展开成x的幂级数.

解 因为 $f^{(n)}(x)=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})\ (n=1, 2, \cdots)$,

所以$f^{(n)}(0)$顺序循环地取$0, 1, 0, -1, \cdots\ (n=0, 1, 2, 3, \cdots)$,

于是得级数 $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$,

它的收敛半径为$R=+\infty$.

对于任何有限的数x、ξ(ξ介于0与x之间), 有

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\sin[\xi+\frac{(n+1)\pi}{2}]}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leq\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0\ (n\to\infty).$$

因此得展开式

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty).$$

例3 将函数$f(x)=(1+x)^m$ (m为任意常数)展开成x的幂级数.

解 $f(x)$的各阶导数为

$$f'(x)=m(1+x)^{m-1},\ f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2},\ \cdots,$$

$$f^{(n)}(x)=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n},\ \cdots,$$

所以 $f(0)=1,\ f'(0)=m,\ f''(0)=m(m-1),\ \cdots,$

$$f^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1),\ \cdots,$$

于是得幂级数

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots.$$

可以证明

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

$(-1<x<1)$.

❖求幂级数展开式的间接展开法

例4 将函数$f(x)=\cos x$展开成x的幂级数.

解 已知

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots \quad (-\infty<x<+\infty).$$

对上式两边求导得

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \quad (-\infty<x<+\infty).$$

注: 逐项求导所得幂级数与原幂级数有相同的收敛半径.

例5 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

解 已知

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \quad (-1<x<1),$$

把x换成$-x^2$, 得

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots \quad (-1<x<1).$$

提示:

收敛半径的确定：由$-1<-x^2<1$ 得$-1<x<1$.

例6 将函数$f(x)=\ln(1+x)$展开成x的幂级数.

解 $f(x)=\ln(1+x)$

$$=\int_0^x [\ln(1+x)]' dx=\int_0^x \frac{1}{1+x} dx$$

$$=\int_0^x [\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n]dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (-1<x\leq 1).$$

上述展开式对$x=1$也成立，这是因为上式右端的幂级数当$x=1$时收敛，而$\ln(1+x)$在$x=1$处有定义且连续. 所以展开式成立的范围是$(-1<x\leq 1)$.

提示: $\int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$

例7 将函数 $f(x)=\sin x$ 展开成 $(x-\frac{\pi}{4})$ 的幂级数.

解 因为

$$\sin x=\sin[\frac{\pi}{4}+(x-\frac{\pi}{4})]=\frac{\sqrt{2}}{2}[\cos(x-\frac{\pi}{4})+\sin(x-\frac{\pi}{4})],$$

并且

$$\cos(x-\frac{\pi}{4})=1-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2+\frac{1}{4!}(x-\frac{\pi}{4})^4-\cdots(-\infty<x<+\infty),$$

$$\sin(x-\frac{\pi}{4})=(x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3+\frac{1}{5!}(x-\frac{\pi}{4})^5-\cdots(-\infty<x<+\infty),$$

提示:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty).$$

例7 将函数 $f(x)=\sin x$ 展开成 $(x-\frac{\pi}{4})$ 的幂级数.

解 因为

$$\sin x=\sin[\frac{\pi}{4}+(x-\frac{\pi}{4})]=\frac{\sqrt{2}}{2}[\cos(x-\frac{\pi}{4})+\sin(x-\frac{\pi}{4})],$$

并且

$$\cos(x-\frac{\pi}{4})=1-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2+\frac{1}{4!}(x-\frac{\pi}{4})^4-\cdots(-\infty<x<+\infty),$$

$$\sin(x-\frac{\pi}{4})=(x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3+\frac{1}{5!}(x-\frac{\pi}{4})^5-\cdots(-\infty<x<+\infty),$$

所以

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}[1+(x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2-\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3+\cdots](-\infty<x<+\infty).$$

例8 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成$(x-1)$的幂级数.

解 $f(x)=\dfrac{1}{2(1+x)}-\dfrac{1}{2(3+x)}=\dfrac{1}{4(1+\frac{x-1}{2})}-\dfrac{1}{8(1+\frac{x-1}{4})}$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}-\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{4^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n\ (-1<x<3).$$

提示:

由 $-1<\dfrac{x-1}{2}<1$ 和 $-1<\dfrac{x-1}{4}<1$ 得 $-1<x<3$.

❖幂级数展开式小结

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots(-1<x<1),$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots\frac{1}{n!}x^n+\cdots(-\infty<x<+\infty),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty),$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots(-1<x\le 1),$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots(-1<x<1).$$