1. 可分离变量的一阶微分方程　形如 $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$

通解为 $\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx + C$

2. 一阶线性微分方程

形如 $y'+P(x)y=Q(x)$　通解为 $y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$

3. 可用变量代换法求解的一阶微分方程

(1) 齐次微分方程　形如 $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$　令 $u=\frac{y}{x}$，

则 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$ 代入原式得 $u+x\frac{du}{dx}=f(u)$　即 $x\frac{du}{dx}=f(u)-u$

可得 $\int\frac{1}{f(u)-u}du=\int\frac{1}{x}dx+C$ 求得通解后将 $u=\frac{y}{x}$ 代回即可

(2) 伯努利方程

形如 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{\alpha}$　用 y^{α} 同除方程两端得

$y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-\alpha}=Q(x)$　令 $u=y^{1-\alpha}$

$\frac{du}{dx}=(1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}$ 代入原方程可得 $\frac{du}{dx}+(1-\alpha)P(x)u=(1-\alpha)Q(x)$

该方程为一阶线性微分方程 参照2. 解出通解后将 $u=y^{1-\alpha}$ 代入即可.

3: 其他可用变量代换法求解的一阶微分方程举例.

(1) 求 $y'=\cos(x+y)$ 的通解.

将 $y'=\cos(x+y)=\cos(u)$ 代入

令 $u=x+y$　则 $\frac{du}{dx}=1+y'$　于是原方程变为 $\frac{du}{dx}=1+\cos u=2\cos^2\frac{u}{2}$

当 $\cos\frac{u}{2}\neq 0$ 时，新方程可用分离变量法求解. $\int\frac{1}{2\cos^2\frac{u}{2}}du=\int dx+C$

解得 $\tan\frac{u}{2}=x+C$　∴原方程通解为 $\tan\frac{x+y}{2}=x+C$

4. 可降阶的高阶微分方程

(1) $y^{(n)}=f(x)$ 型　通过 n 次积分就能得到通解.

(2)

下页

(2) $y''=f(x,y')$ 型

做变量代换 $y'=p$，则 $y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dp}{dx}$

故原方程化为 $\frac{dp}{dx}=f(x,p)$ 为一阶线性微分方程. 可求出通解为 $p=F(x,C_1)$ 代入 $y'=p$ 得 $\frac{dy}{dx}=F(x,C_1)$

$\therefore dy=F(x,C_1)dx \quad \int dy=\int F(x,C_1)dx+C_2$

即 $y=\int F(x,C_1)dx+C_2$

(3) $y''=f(y,y')$

做变换 $y'=p$ 则 $y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\cdot\frac{dp}{dy}$

原方程化为 $p\cdot\frac{dp}{dy}=f(y,p)$，为一阶微分方程.

可求出通解 $p=F(y,C_1)$，代入 $p=y'=\frac{dy}{dx}$

得 $\frac{dy}{dx}=F(y,C_1)$ 为可分离变量的微分方程.

可得通解 $\int\frac{1}{F(y,C_1)}dy=\int dx+C_2$

5. 常系数二阶线性齐次方程 一般形式为 $\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_2x=0$

求通解步骤：(1) 求特征方程 $\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$ 的两个根 λ_1,λ_2

(2) ① 若 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 通解为 $x=C_1e^{\lambda_1t}+C_2e^{\lambda_2t}$ （C_1、C_2为常数，不需要求）

② 若 $\lambda_1=\lambda_2$ 通解为 $x=e^{\lambda_1t}(C_1t+C_2)$

③ 若方程的 $\Delta=a_1^2-4a_2<0\Rightarrow$只有两个复数根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$

其中 $\alpha=-\frac{a_1}{2}$，$\beta=\frac{\sqrt{4a_2-a_1^2}}{2}$，通解为 $x=e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t)$

6. 高阶常系数非齐次线性方程　　一般形式为 $\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_2=F(t)$

有结论：线性非齐次方程（$\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_2=F(t)$）的通解等于它的任意

特解 $x^*(t)$ 与其对应的齐次方程（$\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_2=0$）的通解之和

即 $X(t)=x^*(t)+x(t)$

齐次方程的通解 $x(t)$ 可由其解法求得．则求 $X(t)$ 的问题就转化为求 $x^*(t)$ 的问题．我们用待定系数法求特解 $x^*(t)$

为方便读者使用，现就 $F(t)$ 的常见类型，针对不同情况将用待定系数法应设置的特解的形式列表如下（其中 $Z(t)$，$Z_1(t)$，$Z_2(t)$ 均为与 φ 同次数的多项式）：

$F(t)$ 的类型	应设置特解 $x^*(t)$ 的形式	
m 次多项式 $\varphi(t)$	0 不是特征值	$x^*=Z(t)$
	0 是 k 重特征值	$x^*=t^kZ(t)$
$\varphi(t)e^{\mu t}$	μ 不是特征值	$x^*=Z(t)e^{\mu t}$
	μ 是 k 重特征值	$x^*=t^kZ(t)e^{\mu t}$
$\varphi(t)e^{\mu t}\cos\nu t$ 或 $\varphi(t)e^{\mu t}\sin\nu t$	$\mu+i\nu$ 不是特征值	$x^*=e^{\mu t}[Z_1(t)\cos\nu t+Z_2(t)\sin\nu t]$
	$\mu+i\nu$ 是 k 重特征值$\left(1\leqslant k\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]\right)$	$x^*=t^ke^{\mu t}[Z_1(t)\cos\nu t+Z_2(t)\sin\nu t]$

用待定系数法设出 $x^*(t)$ 后，把它当做 x，分别求导、求二次导后代入 $\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_2=F(t)$ 解出系数即可．

分别求得　齐次方程通解 $x(t)$ 与非齐次方程特解 $x^*(t)$ 后相加即可得非齐次方程通解 $X(t)=x(t)+x^*(t)$

7. 高阶变系数线性微分方程　只考虑一种情况：欧拉微分方程

一般形式为 $t^n \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 t^{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n x = f(t)$，其中

$a_1, a_2 \cdots a_n$ 为常数. 可通过变换 $\underset{(t>0)}{t = e^{\tau}}$ 或 $\underset{(t<0)}{-t = e^{\tau}}$

将其化为常系数线性微分方程.

例 求 $t^2\ddot{x} - t\dot{x} + x = 0$ 的通解. 令 $t = e^{\tau}$ 则 $\tau = \ln t$ $\left(\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{t}\right)$

从而 $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{t}\frac{dx}{d\tau}$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{t^2}\left(\frac{d^2x}{d\tau^2} - \frac{dx}{d\tau}\right)$$

代入原方程化简得 $\frac{d^2x}{d\tau^2} - 2\frac{dx}{d\tau} + x = 0$ 特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$\therefore \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 通解为 $x = e^{\tau}(C_1\tau + C_2)$ 将 $\tau = \ln t$ 代入得

$$x = t(C_1 \ln t + C_2)$$