3.4 幂级数的应用举例

一、近似计算

二、欧拉公式

一、近似计算

例1 计算 $\sqrt[5]{240}$ 的近似值, 要求误差不超过 0.0001.

解 $\sqrt[5]{240}=\sqrt[5]{243-3}=3(1-\frac{1}{3^4})^{1/5}$

$$=3(1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^4}-\frac{1\cdot4}{5^2\cdot2!}\cdot\frac{1}{3^8}-\frac{1\cdot4\cdot9}{5^3\cdot3!}\cdot\frac{1}{3^{12}}-\cdots).$$

如果取前二项作为所求值的近似值, 则误差为

$$|r_2|=3(\frac{1\cdot4}{5^2\cdot2!}\cdot\frac{1}{3^8}+\frac{1\cdot4\cdot9}{5^3\cdot3!}\cdot\frac{1}{3^{12}}+\frac{1\cdot4\cdot9\cdot14}{5^4\cdot4!}\cdot\frac{1}{3^{16}}+\cdots)$$

$$<3\cdot\frac{1\cdot4}{5^2\cdot2!}\cdot\frac{1}{3^8}[1+\frac{1}{81}+(\frac{1}{81})^2+\cdots]<\frac{1}{20000}.$$

于是 $\sqrt[5]{240}\approx3(1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^4})\approx2.9926.$

例3.8 计算ln2的近似值, 要求误差不超过0.0001.

解 已知

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots\ (-1<x\le 1),$$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots\ (1\le x<1),$$

两式相减得

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots\right)\ (-1<x<1).$$

提示: 这个幂级数收敛速度较慢, 用于求ln2较困难. 因此需要寻找收敛速度较快的幂级数.

例3.8 计算ln2的近似值, 要求误差不超过0.0001.

解　已知

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots\right)\ (-1<x<1).$$

以 $x=\frac{1}{3}$ 代入得 $\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\cdots\right).$

如果取前四项作为ln2的近似值, 则误差为

$$|r_4|=2\left(\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9}+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^{11}}+\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{3^{13}}+\cdots\right)$$

$$<\frac{2}{3^{11}}\left[1+\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\cdots\right]<\frac{1}{700000}.$$

于是 $\ln 2\approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}\right)\approx 0.6931.$

例3 利用 $\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3$ 求 $\sin 9°$ 的近似值，并估计误差.

解 $9° = \frac{\pi}{180} \times 9 = \frac{\pi}{20}$ (弧度).

在 $\sin x$ 的幂级数展开式中令 $x = \frac{\pi}{20}$，得

$$\sin\frac{\pi}{20} = \frac{\pi}{20} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^7 + \cdots .$$

取前两项得

$$\sin\frac{\pi}{20} \approx \frac{\pi}{20} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^3 \approx 0.15643.$$

其误差为

$$|r_2| \le \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^5 < \frac{1}{120}\cdot(0.2)^5 < \frac{1}{300000}.$$

例 4 求积分 $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}dx$ 的近似值(误差不超10^{-4}).

解 将被积函数换成其幂级数展开式得

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}}[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}]dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(1-\frac{1}{2^2\cdot 3}+\frac{1}{2^4\cdot 5\cdot 2!}-\frac{1}{2^6\cdot 7\cdot 3!}+\cdots).$$

前四项的和作为近似值, 其误差为

$$|r_4|\le\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2^8\cdot 9\cdot 4!}<\frac{1}{90000},$$

所以

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}dx\approx\frac{1}{\sqrt{\pi}}(1-\frac{1}{2^2\cdot 3}+\frac{1}{2^4\cdot 5\cdot 2!}-\frac{1}{2^6\cdot 7\cdot 3!})\approx 0.5295.$$

例 5 求积分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ 的近似值(误差不超 10^{-4}).

解 展开被积函数, 有

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty).$$

在区间[0, 1]上逐项积分, 得

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx=1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}-\frac{1}{7\cdot 7!}+\cdots\ .$$

因为第四项

$$\frac{1}{7\cdot 7!}<\frac{1}{30000},$$

所以取前三项的和作为积分的近似值:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx\approx 1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}=0.9461.$$

二、欧拉公式

❖复数项级数

设有复数项级数$\sum(u_n+iv_n)$，其中u_n，$v_n(n=1, 2, 3, \cdots)$为实常数或实函数.

如果实部所成的级数$\sum u_n$收敛于和u，并且虚部所成的级数$\sum v_n$收敛于和v，就说复数项级数收敛且和为$u+iv$.

❖ 绝对收敛

如果级$\sum(u_n+iv_n)$的各项的模所构成的级数$\sum|u_n+iv_n|$收敛，则称级数$\sum(u_n+iv_n)$绝对收敛.

❖复变量指数函数

考察复数项级数

$$1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots\ .$$

可以证明此级数在复平面上是绝对收敛的，在x轴上它表示指数函数e^x，在复平面上我们用它来定义复变量指数函数，记为e^z . 即

$$e^z=1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots\ .$$

❖复变量指数函数

$$e^z=1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots\ .$$

❖欧拉公式

当x=0时, $z=iy$, 于是

$$e^{iy}=1+iy+\frac{1}{2!}(iy)^2+\cdots+\frac{1}{n!}(iy)^n+\cdots$$

$$=1+iy-\frac{1}{2!}y^2-i\frac{1}{3!}y^3+\frac{1}{4!}y^4+i\frac{1}{5!}y^5-\cdots$$

$$=(1-\frac{1}{2!}y^2+\frac{1}{4!}y^4-\cdots)+i(y-\frac{1}{3!}y^3+\frac{1}{5!}y^5-\cdots)$$

$$=\cos y+i\sin y.$$

把y换成x得 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, 这就是欧拉公式.

❖复变量指数函数

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots \ .$$

❖欧拉公式

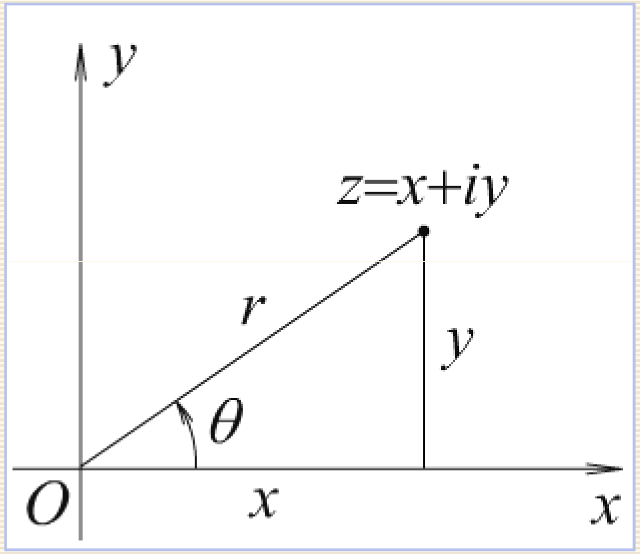
$$e^{ix} = \cos x + i\sin x.$$

❖复数的指数形式

复数z可以表示为

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta},$$

其中$r=|z|$是z的模，$\theta = \arg z$是z的辐角.



❖三角函数与复变量指数函数之间的联系

因为$e^{ix}=\cos x+i\sin x$, $e^{-ix}=\cos x-i\sin x$, 所以

$$e^{ix}+e^{-ix}=2\cos x,\quad e^{x}-e^{-ix}=2i\sin x.$$

因此

$$\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}),\quad \sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix}).$$

❖复变量指数函数的性质

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}.$$

特殊地, 有

$$e^{x+iy}=e^{x}e^{iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y).$$

首页 上页 返回 下页 结束 铃