第 三 章

1. 二维随机变量（X，Y）的联合分布函数为

$$F(x,y)=A(B+arctg\frac{x}{2})(C+arctg\frac{y}{3}),\quad (x,y)\in R^2,$$

试求：（1）系数 A，B，C；　（2）边缘分布函数。

解：$F(+\infty,+\infty)=A(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})=1,\quad \Rightarrow A\neq 0,$

$$对\forall x\in R, F(x,-\infty)=A(B+arctg\frac{x}{2})(C-\frac{\pi}{2})=0,\Rightarrow C=\frac{\pi}{2},$$

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+arc\,tg\frac{x}{2}\right),\quad x\in R$$

2.对一目标独立地射击两次，每次命中的概率为 1/2, 若 X 表示第一次射击的命中次数， Y 表示第二次射击的命中次数，求 X，Y 的联合分布律和联合分布函数。

解：(1)　随机变量(X，Y)的联合分布律为：

X \ Y	0	1
0	1/4	1/4
1	1/4	1/4

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0或y<0;\\ 1/4, & 0\le x<1, 0\le y<1;;\\ 1/2, & 其他;\\ 1, & x\ge 1, y\ge 1.\end{cases}$$

3.　假设（X，Y）的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}C(x^2+y), & 0\le y\le 1-x^2;\\ 0, & 其它\end{cases}$$

试求：（1）常数 C；　（2）；$P\{0\le X\le\frac{1}{2}\}$　（3）$P\{X=Y^2\}$。

解：(1) $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy\right]dx=\int_{-1}^{1}\left[\int_0^{1-x^2}C(x^2+y)dy\right]dx\Rightarrow C=\frac{5}{4}.$

(2) $P\left\{0\le X\le\frac{1}{2}\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^{1-x^2}\frac{5}{4}(x^2+y)dy\right]dx=\frac{79}{256}$

(3) $P\{X=Y^2\}=\iint\limits_{x=y^2}\frac{5}{4}(x^2+y)d\sigma=0.$

4. 设二维随机变量（X，Y）的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}12e^{-(3x+4y)}, & x>0, y>0;\\ 0, & 其它.\end{cases}$

试求：（1）$P\{0\le X\le 1, 0\le Y\le 2\}$；　（2）联合分布函数 $F(x,y)$.

解：

9. $(1)P\{0<X\le 1,0<Y<2\}$

$$=\int_0^2\left[\int_0^1 12e^{-(3x+4y)}dx\right]dy$$

$$=12\int_0^1 e^{-3x}dx\int_0^2 e^{-4y}dy$$

$$=(1-e^{-3})(1-e^{-8})$$

$$\approx 0.9499$$

$$(2)F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy$$

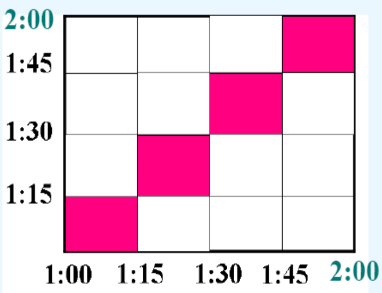
$$=\begin{cases}\int_0^x\int_0^y 12e^{-(3x+4y)}dxdy=(1-e^{-3x})(1-e^{-4y}) & x>0,y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

5. 甲乙两人约定在下午 **1** 点到 **2** 点之间的任意时刻独立到达某车站乘坐公交车，这段时间内共有四班公交车，它们开车的时刻分别为 **1:15, 1:30, 1:45; 2:00.** 若他们约定：（**1**）见车就乘；（**2**）最多等一辆车。求他们乘同一辆车的概率。

解　记甲乙两人到达时刻分别为 **X** 和 **Y**,则

设$G=\{(x,y)|1:00\le x\le 2:00,1:00\le y\le 2:00\}$,

则$(X,Y)\sim U(G)$

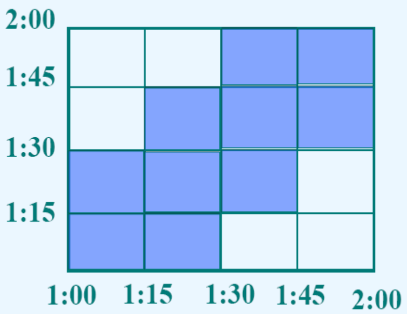


所求概率为:

1) 见车就乘

$$p_1=\frac{S_{红}}{S_{总}}=\frac{1}{4}$$

2) 最多等一辆车



所求概率为:

$$p_2=\frac{S_{蓝}}{S_{总}}=\frac{5}{8}$$

6. 设二维随机变量（**X，Y**）的联合分布律为

X \ Y	1	2	3
1	1/6	1/9	1/18
2	1/3	α	β

问 α 和 β 取什么值时，**X** 与 **Y** 相互独立？

解:

X \ Y	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	1/6	1/9	1/18	1/3
2	1/3	α	β	
$p_{\cdot j}$		1/9+α	1/18+β	

若 X 与 Y 相互独立，则有

1/3×（1/9+α）＝1/9,　1/3×(1/18+β)= 1/18,　得 α＝2/9, β= 1/9.

7.设随机变量 *X* 与 *Y* 相互独立，且 P{*X*=1}= P{*Y*=1}=*p*, P{*X*=0}= P{*Y*=0}=1－*p*=*q*（0<*p*<1）.定义随机变量 Z 为

$$Z=\begin{cases}1, & X+Y\text{为偶数};\\ 0, & X+Y\text{为奇数}\end{cases}$$

(1)求 X，Z 的联合分布律；(2)问 *p* 取何值时，*X* 与 *Z* 相互独立？

解 (1) $P\{X=0,Z=0\}=P\{X=0,X+Y=1\}$

$$=P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1\}=p(1-p)$$

同理 $P\{X=0,Z=1\}=(1-p)^2, P\{X=1,Z=0\}=p(1-p)$

$P\{X=1,Z=1\}=p^2$

联合分布律为

X \ Z	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$p(1-p)$	$(1-p)^2$	$1-p$
1	$p(1-p)$	p^2	p
$p_{\cdot j}$	$2p(1-p)$	$p^2+(1-p)^2$	

(2) 在上表中求得 X，Z 的边缘分布律

由相互独立的充要条件 $p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$ 知当 p=1/2 时，*X*，*Z* 相互独立.

8. 设（X，Y）的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}Cxy^2, & 0<x<1,0<y<1;\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

确定常数 *C*，并讨论 *X* 与 *Y* 的独立性.

解 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^1[\int_0^1 Cxy^2dx]dy=1\Rightarrow C=6$

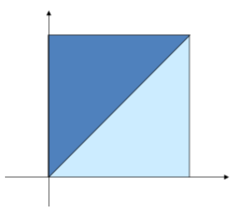
$f_X(x)=\int_0^1 6xy^2dy=2x,$ $\quad=\begin{cases}2x, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_0^1 6xy^2dx=3y^2,\quad(0<y<1)$ $\quad=\begin{cases}3y^2, & 0<y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

因 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$,*X* 和 *Y* 相互独立.

9. 设（X，Y）的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le x\le y\le 1;\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

问 *X* 与 *Y* 是否相互独立？



解 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^1 8xydy, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$$=\begin{cases}4x(1-x^2), & 0\le x\le 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^y 8xydx & 0\le y\le 1;\\ 0, & 其他.\end{cases}=\begin{cases}4y^3, & 0\le y\le 1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

在区域$G=\{(x,y)|0\le x\le y\le 1\}$中 $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$

X 和 Y 不相互独立.

10. 设（X，Y）的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2+\dfrac{xy}{3}, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2;\\ 0, & 其它\end{cases}$$

(1) 求（X，Y）的边缘概率密度函数；

(2) 求（X，Y）的条件概率密度函数；

(3) 求 $P\{X+Y>1\}$，$P\{Y<X\}$.

解：(1) $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^2 (x^2+\dfrac{xy}{3})dy=2x^2+\dfrac{2x}{3}, 0<x<1\\ 0, 其它\end{cases}$$

$$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^1 (x^2+\dfrac{xy}{3})dx=\dfrac{1}{3}+\dfrac{y}{6}, & 0<y<2\\ 0, 其它\end{cases}$$

(2) 当$0<x<1$时， $$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{3x+y}{6x+2}, & 0<y<2\\ 0, & 其它\end{cases},$$

当$0<y<2$时， $$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{6x^2+2xy}{2+y}, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases},$$

(3)

$$P\{X+Y>1\}=\iint\limits_{x+y>1} f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_{1-x}^2 (x^2+\frac{xy}{3})dydx$$

$$=\int_0^1 (\frac{x}{2}+\frac{4}{3}x^2+\frac{5}{6}x^3)dx=\frac{65}{72}$$

$$P\{Y<X\}=\iint\limits_{y<x} f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^x (x^2+\frac{xy}{3})dydx=\int_0^1 \frac{7}{6}x^3dx=\frac{7}{24}$$

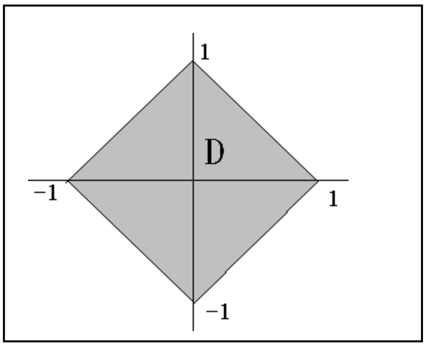
11. 设二维随机变量（X，Y）在（1，0），（0，1），（－1，0），（0，－1）四点构成的正方形上服从均匀分布，

（1） 求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$；

（2） 计算概率 $P\{Y>\frac{1}{2}|X<\frac{1}{2}\}$。

y=x+1

y=-x+1



解：（1） $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & (x,y)\in D;\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

y=-x-1

y=x-1

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}1+x, & -1\le x<0;\\ 1-x, & 0\le x\le 1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

当$-1<x<0$时，$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2(1+x)}, & -x-1<y<x+1\\ 0, & 其它\end{cases}$

当$0<x<1$时，$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2(1-x)}, & x-1<y<-x+1\\ 0, & 其它\end{cases}$

当$x\le -1$或$x\ge 1$时，$f_{Y|X}(y|x)$不存在

（2）由于（*X*，*Y*）服从二维均匀分布，所以

$$P\{Y>\frac{1}{2}|X<\frac{1}{2}\}=\frac{P\{X<\frac{1}{2},Y>\frac{1}{2}\}}{P\{X<\frac{1}{2}\}}=\frac{1/8}{7/8}=\frac{1}{7}$$

12. 设随机变量 $X\sim U(0,1)$，当 $X=x$ ($0<x<1$)时，*Y* 在$(x,1)$上服从均匀分布，求(X,Y)的联合概率密度以及关于 *Y* 的边缘概率密度.

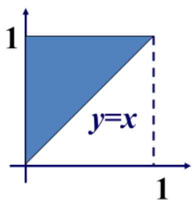
解　*X* 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$

当 $X=x$ 的条件下，*Y* 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x<y<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}\quad (0<x<1)$$

(X,Y)的联合概率密度是

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$



$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\displaystyle\int_0^y \frac{1}{1-x}dx, & 0<y<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-\ln(1-y), & 0<y<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

13. 设随机变量 *X*，*Y* 相互独立，且分别服从参数为λ_1和λ_2的泊松分布，

(1) 证明：*X+Y* 服从参数为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松分布；

(2) 对给定的 *X+Y=N* 的条件下随机变量 *X* 服从二项分布，即 $X\sim B(N,\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})$.

解：(1)　$P(X=k)=\dfrac{\lambda_1^{\,k}}{k!}e^{-\lambda_1}$，　$k=0,1,2,\cdots$ ，

$$P(Y=l)=\frac{\lambda_2{}^l}{l!}e^{-\lambda_2},\quad l=0,1,2,\cdots$$

$$P(X+Y=n)=\sum_{k=0}^{n}P\{X=k\}P\{Y=n-k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_1{}^k}{k!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2{}^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_1{}^k}{k!}\frac{\lambda_2{}^{n-k}}{(n-k)!}n!$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\lambda_1{}^k\lambda_2{}^{n-k}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}(\lambda_1+\lambda_2)^n\quad n=0,1,2,\cdots$$

(2) 当 $N\geqslant 1$

$$P\{X=k\mid X+Y=n\}=\frac{P\{X=k,X+Y=N\}}{P\{X+Y=N\}}=\frac{P\{X=k,Y=N-k\}}{P\{X=k\}}$$

$$=\frac{\frac{\lambda_1{}^k}{k!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2{}^{N-k}}{(N-k)!}e^{-\lambda_2}}{\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}(\lambda_1+\lambda_2)^n}=\frac{\lambda_1{}^k}{k!}\frac{\lambda_2{}^{N-k}}{(N-k)!(\lambda_1+\lambda_2)^n}N!$$

$$=C_N^k\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{N-k},\quad k=0,1,2\cdots,N$$

14. 对事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 定义随机变量 $X_i=\begin{cases}1, & A_i\text{发生}\\0, & A_i\text{不发生}\end{cases}$，$(i=1,2,\cdots,n)$ 试证：事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立的充要条件是 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立.

分析

* $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立则对任意实数向量 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,

$$P\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\}=P\{X_1=x_1\}P\{X_2=x_2\}\cdots P\{X_n=x_n\}$$

其中 $x_i=0,1,i=1,2,\cdots,n$

* $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则对任意的 s（$1<s\leq n$）及 $1\leq k_1<k_2<\ldots<k_s\leq n$ 均有

$$P(A_{k_1}\cdots A_{k_s})=P(A_{k_1})\cdots P(A_{k_s})$$

证明：

充分性　若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，特别令 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(1,1,\cdots,1)$ 有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P\{X_1=1,X_2=1,\cdots,X_n=1\}$$

$$=P\{X_1=1\}P\{X_2=1\}\cdots P\{X_n=1\}=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)\quad（1）$$

令 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(0,1,\cdots,1)$ 有

$$P(\overline{A}_1A_2\cdots A_n)=P\{X_1=0,X_2=1,\cdots,X_n=1\}$$

$$=P\{X_1=0\}P\{X_2=1\}\cdots P\{X_n=1\}=P(\overline{A}_1)P(A_2)\cdots P(A_n)\quad（2）$$

将（1）和（2）两端分别相加

$$P(A_1A_2\cdots A_n)+P(\overline{A}_1A_2\cdots A_n)=P(A_2\cdots A_n)$$

$$P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)+P(\overline{A}_1)P(A_2)\cdots P(A_n)=P(A_2)\cdots P(A_n)$$

即有 $P(A_2\cdots A_n)=P(A_2)\cdots P(A_n)$ 成立.

类似地对 $\forall s\geq 2,k_1,k_2,\cdots k_s\in\{1,2,\cdots,n\}$ 在数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中取

$$x_{k_1}=1,x_{k_2}=1,\cdots,x_{k_s}=1,$$

其余分量均取 0 值，可证得

$$P(A_{k_1}\cdots A_{k_s})=P(A_{k_1})\cdots P(A_{k_s})$$

即证得事件组 $A_1,\cdots,A_n$ 相互独立.

必要性　事件组 $A_1,\cdots,A_n$ 相互独立，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

且将其部分事件换为对立事件构成的事件组仍相互独立. 注意到

$$\{X_i=1\}=A_i,\{X_i=0\}=\overline{A}_i,\quad (i=1,\cdots n)$$

故对任意实数向量 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,

$$P\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\}=P\{X_1=x_1\}P\{X_2=x_2\}\cdots P\{X_n=x_n\}$$

$$(x_i=0,1,i=1,\cdots n)$$

15.已知离散型随机变量 X 的分布律为

X	0	π/2	π
p	1/4	1/2	1/4

试求 $Y=\dfrac{2}{3}X+2$ 和 $Z=\cos X$ 的分布律。

X	0	π/2	π
P	1/4	1/2	1/4
Y=2+2X/3	2	2+ π/3	2+ 2π/3
Z=cos X	1	0	-1

Y=2+2X/3	2	2+ π/3	2+ 2π/3
P	1/4	1/2	1/4

Z =cos X	1	0	- 1
P	1/4	1/2	1/4

16.设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，写出（1）$Y=e^X$；（2）$Y=|X|$的概率密度。

解:

$$(1)F(y)=P\{e^X\le y\}$$

$$=\begin{cases}0 & y\le 0\\ P\{X\le \ln y\}=\int_{-\infty}^{\ln y}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx & y>0\end{cases}$$

$$f(y)=F'(y)=\begin{cases}0 & y\le 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\cdot\dfrac{1}{y} & y>0\end{cases}$$

$$(2) F(y)=P\{|X|\le y\}$$

$$=\begin{cases} 0 & y\le 0 \\ P\{-y\le X\le y\}=\int_{-y}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx & y>0 \end{cases}$$

$$f(y)=F'(y)=\begin{cases} 0 & y\le 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y+\mu)^2}{2\sigma^2}} & y>0 \end{cases}$$

注: 函数 $y=g(x)=|x|$ 不满足 $g'(x)>0$ 恒成立,不能应用反函数法.

17.设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0\le x\le 2;\\ 0, & 其它\end{cases}$

求 $Y=X(2-X)$ 的分布函数和概率密度。

解：由 X 的概率密度形式易知

$$P\{0\le X\le 2\}=1,\quad 从而\ P\{0\le Y\le 1\}=P\{0\le X(2-X)\le 1\}=1$$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X(2-X)\le y\}$$

$$=\begin{cases} 0, & y<0; \\ 1-P\{X(2-X)>y\}, & 0\le y<1 \\ 1, & y\ge 1. \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0, & y<0 \\ 1-P\{1-\sqrt{1-y}<X<1+\sqrt{1-y}\}, & 0\le y<1; \\ 1, & y\ge 1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0, & y<0 \\ 1-\int_{1-\sqrt{1-y}}^{1+\sqrt{1-y}}\frac{x}{2}dx=1-\sqrt{1-y}, & 0\le y\le 1 \\ 1, & y\ge 1 \end{cases}$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-y}}, & 0<y<1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

18.设随机变量 X 具有严格单调上升连续的分布函数 $F(x)$，求 $Y=F(X)$的分布函数.

解：分布函数 $F(x)$是严格单调上升连续函数，且 $0\leqslant F(x)\leqslant 1$，根据反函数存在定理知 $x=F^{-1}(y)$ 存在且严格单增，故

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{F(X)\le y\}=\begin{cases} P\{\phi\}, & y<0 \\ P\{X\le F^{-1}(y)\} & \\ P\{\Omega\}, & y\ge 1 \end{cases}$$

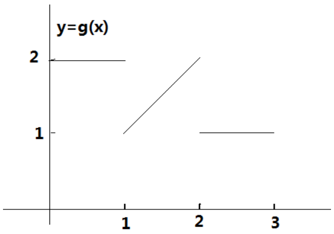
$$=\begin{cases} 0, & y<0 \\ F(F^{-1}(y))=y, & 0\le y<1 \\ 1, & y\ge 1 \end{cases}$$

即 Y 服从区间(0,1)上的均匀分布.

19. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{a}, & 0<x<3;\\ 0, & 其他\end{cases}$ 令随机变量为 $Y=\begin{cases}2, & X\le 1;\\ X, & 1<X\le 2;\\ 1, & 2<X.\end{cases}$

(1)求 Y 的分布函数; (2)计算概率 $P\{X\le Y\}$.

解 (1)



$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}$$

$$=\begin{cases}0, & y<1;\\ P\{2<X\le 3\}, & y=1;\\ P\{2<X\le 3\}+P\{1<X\le y\}, & 1<y\le 2;\\ 1, & 2<y.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & y<1;\\ \int_2^3\dfrac{x^2}{a}dx, & y=1;\\ \int_2^3\dfrac{x^2}{a}dx+\int_1^y\dfrac{x^2}{a}dx, & 1<y\le 2;\\ 1, & 2<y.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & y<1;\\ \dfrac{19}{3a}, & y=1;\\ \dfrac{y^3+18}{3a}, & 1<y\le 2;\\ 1, & 2<y.\end{cases}$$

(2) 计算概率 $P\{X\le Y\}$= $P\{0\le X\le 1\}$+ $P\{1\le X\le 2\}$=4/7

20.设 Z 是在任何有限区间(a, b)上均有 $P\{a<Z<b\}>0$ 的连续型随机变量,其分布函数为 $F_Z(z)$. 若 X 服从区间[0, 1]上的均匀分布，令 $Y=F_Z^{-1}(X)$，证明 Y 具有与 Z 相同的分布函数.

证明：X 的分布函数 $F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x, & 0\le x<1;\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$

由于 Z 是在任何有限区间(a, b)上均有 $P\{a<Z<b\}>0$ 的连续型随机变量，可知其分布函数 $F_Z(z)$严格单调递增,

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{F_Z^{-1}(X)\le y\}=P\{X\le F_Z(y)\}=F_X(F_Z(y))$$

注意到对任意 $y\in R$,有 $0\le F_Z(y)\le 1$,故

$$F_Y(y)=F_X(F_Z(y))=F_Z(y)$$

即 Y 具有与 Z 相同的分布函数.

21. 设随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)},\quad (x,y)\in R_2$$

计算概率 $P\{-\sqrt{2}<X+Y<2\sqrt{2}\}$.

解

25 令 $Z=X+Y$，则

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}[x^2+(z-x)^2]}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-(x-\frac{z}{2})^2-\frac{z^2}{4}}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\frac{z}{2})^2}dx$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{[\sqrt{2}(x-\frac{z}{2})]^2}{2}}d\sqrt{2}(x-\frac{z}{2})$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\cdot\sqrt{2\pi}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2(\sqrt{2})^2}}$$

$$\Rightarrow Z\sim N(0,2)$$

另解：事实上，$(X,Y)\sim N(0,1;0,1;0)$

由正态分布的边缘分布仍然是正态分布可知

$X\sim N(0,1)$, $Y\sim N(0,1)$

易知 X,Y 相互独立.由正态分布的可加性得

$X+Y\sim N(0,2)$

$$P\{-\sqrt{2}<X+Y<2\sqrt{2}\}$$

$$=\Phi\left(\frac{2\sqrt{2}-0}{\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{\sqrt{2}-0}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=0.8185$$

22. 随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从参数为 λ 的指数分布，Y~U(0, h), 求 X+Y 的概率密度.

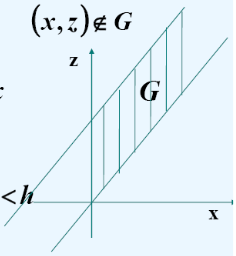
解：

31 令 $G=\{(x,z)|x>0,0<z-x<h\}$

则：$f_X(x)f_Y(z-x)=\begin{cases}\frac{1}{h}\lambda e^{-\lambda x} & (x,z)\in G\\ 0 & (x,z)\notin G\end{cases}$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$=\begin{cases}0 & z\le 0\\ \int_0^z\frac{1}{h}\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{h}(1-e^{-\lambda z}) & 0<z<h\\ \int_{z-h}^{z}\frac{1}{h}\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{h}e^{-\lambda z}(e^{\lambda h}-1) & z\ge h\end{cases}$$



23.一射手向某个靶子射击，设靶心为坐标原点，弹着点坐标（X，Y）服从二维正态分布 N $(0,\sigma^2;\ 0,\sigma^2;0)$. 求弹着点与靶心的距离 Z 的概率密度函数.

解：（X，Y）的联合概率密度为 $f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2)},(x,y)\in R^2$

弹着点与靶心的距离 Z 的分布函数为

$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\}$

$$=\begin{cases}0,z<0\\ P\{X^2+Y^2\le z^2\}=\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2}\frac{1}{2\pi\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2)}dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^z\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}r^2}rdrd\theta=1-e^{-z^2/2\sigma^2},z\ge 0\end{cases}$$

24. 随机变量 X 与 Y 相互独立，$P\{X=i\}=\dfrac{1}{3},i=-1,0,1$，$Y\sim U(0,\ 1)$.设 $Z=X+Y$.试计算条件概率 $P\{Z\le z|X=i\},i=-1,0,1$. 进一步尝试求出 Z 的概率密度.

* 随机变量 X 与 Y 相互独立，$P\{X=i\}=\dfrac{1}{3},i=-1,0,1$; $Y\sim U(0,\ 1)$, 令 $Z=X+Y$, 试求

(1) $P\{Z\le\frac{1}{2}|X=0\}$; (2) Z 的分布函数值 $F_Z(\frac{1}{2})$. (3) 给出 Z 的分布函数(选做 10 分).

解 (1) $P\{Z\le\dfrac{1}{2}|X=0\}=\dfrac{P\{X+Y\le\frac{1}{2},X=0\}}{P\{X=0\}}$

$=\dfrac{P\{Y\le\frac{1}{2},X=0\}}{P\{X=0\}}=P\{Y\le\dfrac{1}{2}\}=\dfrac{1}{2}$ （4 分）

且有

$P\{Z\le 0.5|X=-1\}=P\{Y\le 0.5+1\}=P\{Y\le 1.5\}=1;$

$P\{Z\le z|X=1\}=P\{Y\le 0.5-1\}=P\{Y\le -0.5\}=0;$ （6 分）

(2) 由全概率公式，有

$F_Z(0.5)=P\{Z\le 0.5\}=P\{X=0\}P\{Z\le 0.5|X=0\}$

$+P\{X=-1\}P\{Z\le 0.5|X=-1\}+P\{X=1\}P\{Z\le 0.5|X=1\}$

（9 分）

$=\dfrac{1}{3}[P\{Z\le 0.5|X=-1\}+P\{Z\le 0.5|X=1\}+P\{Z\le 0.5|X=0\}]=\dfrac{1}{2}$（12 分）

(3) 一般地，对任意 $z\in R$，有

$P\{Z\le z|X=0\}=P\{Y\le z\}$; $P\{Z\le z|X=-1\}=P\{Y\le z+1\}$;

$P\{Z\le z|X=1\}=P\{Y\le z-1\}$; （加到 2 分）

由全概率公式，对任意 $z\in R$，有

$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X=0\}P\{Z\le z|X=0\}$

$+P\{X=-1\}P\{Z\le z|X=-1\}+P\{X=1\}P\{Z\le z|X=1\}$

$$=\frac{1}{3}[P\{Z\le z|X=-1\}+P\{Z\le z|X=1\}+P\{Z\le z|X=0\}]$$

$$=\frac{1}{3}[P\{Y\le z+1\}+P\{Y\le z-1\}+P\{Y\le z\}]$$ （加到 4 分）

当 $z\ge 2$ 时，$F_Z(z)=\frac{1}{3}[1+1+1]=1;$

当 $z<-1$ 时，$F_Z(z)=\frac{1}{3}[0+0+0]=0;$ （加到 6 分）

当$-1\le z<0$ 时，$F_Z(z)=\frac{1}{3}P\{Y\le z+1\}=\frac{1}{3}(z+1);$

当 $0\le z<1$ 时，$F_Z(z)=\frac{1}{3}[P\{Y\le z+1\}+P\{Y\le z\}]=\frac{1}{3}(z+1);$

当 $1\le z<2$ 时，$F_Z(z)=\frac{1}{3}[P\{Y\le z+1\}+P\{Y\le z-1\}+P\{Y\le z\}]$

$$=\frac{1}{3}[1+1+z-1]=\frac{1}{3}(z+1);$$（加到 8 分）

综上有

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<-1;\\ \frac{1}{3}(1+z), & -1\le z<2;\\ 1, & z\ge 2.\end{cases}$$ （加到 10 分）

25. 如果随机变量 X 与 Y 相互独立，都服从参数为 1 的指数分布，求证：$X+Y$与X/Y也相互独立.

解 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，$f_Y(x)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

$$f(x,z-x)=\begin{cases}e^{-z}, x>0, z>x\\ 0,\text{其他}\end{cases},$$

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\begin{cases}\int_0^z e^{-z}dx=ze^{-z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

$$f(yz,y)=\begin{cases}e^{-y(z+1)}, y>0, z>0\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(yz,y)dy=\begin{cases}\int_0^{+\infty}ye^{-y(z+1)}dy=\frac{1}{(z+1)^2}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

令$\begin{cases} u = x + y \\ v = x / y \end{cases}$，得反函数$\begin{cases} x = \dfrac{uv}{v+1} \\ y = \dfrac{u}{v+1} \end{cases}$

变换的雅可比行列式 $\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{v}{v+1} & \dfrac{u}{(v+1)^2} \\ \dfrac{1}{v+1} & \dfrac{-u}{(v+1)^2} \end{vmatrix} = \dfrac{-u}{(v+1)^2}$

$$f_{X+Y,X/Y}(u,v) = f[x(u,v), y(u,v)]|\mathrm{J}| = f[\frac{uv}{v+1}, \frac{u}{v+1}] \cdot \frac{u}{(v+1)^2} = \begin{cases} e^{-u} \dfrac{u}{(v+1)^2}, u > 0, v > 0 \\ 0, \text{其它} \end{cases}$$

可见 $f_{X+Y,X/Y}(u,v) = f_{X+Y}(u) f_{X/Y}(v)$ 在平面上点点成立，$X+Y$ 与 X/Y 也相互独立。