逐点收敛: $S_n(x) \to S(x)$, $x \in D$

If: $\forall x \in D$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(x, \varepsilon)$, s.t. $n > N$ 时

有 $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

一致收敛: $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$, $x \in D$

If: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$, s.t. $n > N$ 时

有 $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in D$

定理2.3的证明思路:

Want: $\boxed{\forall x_0 \in D, \forall \varepsilon > 0}$ $\exists \delta$ s.t. 当 $|x - x_0| < \delta$

有 $|S(x) - S(x_0)| < \varepsilon$. ——— (*)

条件: 1. $\exists \delta_n$ s.t. 当 $|x - x_0| < \delta_n$ 时, 有

$|S_n(x) - S_n(x_0)| < \varepsilon$　　$S_n(x) = u_1(x) + \cdots + u_n(x)$

2. $\exists N(\varepsilon)$, 当 $n>N$ 时 有.

$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$, $\forall x\in D$.

子. 由条件1和(2), 对于(*)式:

$|S(x)-S(x_0)|$

$\le |S(x)-S_{N+1}(x)|+|S_{N+1}(x)-S_{N+1}(x_0)|$ → 条件1

$+|S_{N+1}(x_0)-S(x_0)|$

条件2)

$\boxed{\text{取 } \delta=\delta_{N+1}}$

$<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon$

$=3\varepsilon.$

构. 由: $|S_{n+p}(x)-S_n(x)|<\frac{2}{3}\varepsilon$

$$\Downarrow$$

$|S(x)-S_n(x)|\le\frac{2}{3}\varepsilon<\varepsilon$