$\frac{1}{n+1}$. 所以 $\forall\varepsilon>0$，只要取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则 $\forall n>N$ 及 $p\in\mathbf{N}_+$，恒有 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$. 故 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 列，因而收敛.

7. 设 $\{[a_n,b_n]\}$ 为一列闭区间，若满足条件：(1) 它是递缩的：$[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq\cdots\supseteq[a_n,b_n]\supseteq\cdots$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，则称 $\{[a_n,b_n]\}$ 为一个**闭区间套**. 试利用单调有界原理证明**闭区间套定理**：任何闭区间套必有唯一的公共点，即存在唯一的 $\{\xi\}$，使 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{\xi\}$.

证　数列 $\{a_n\}$ 单增，$\{b_n\}$ 单减且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$. 由习题 1.2(A) 第 16 题，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 均收敛. 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$ 且 $a_n\leqslant\xi\leqslant b_n$，即 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，$\xi\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$. 由极限的唯一性知 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{\xi\}$.

8. 利用闭区间套定理（第 7 题）证明 Weierstrass 定理.

证　设 $\{x_n\}$ 是有界数列，则必存在 $a_1,b_1\in\mathbf{R}$，使得 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，都有 $x_n\in[a_1,b_1]$. 等分 $[a_1,b_1]$ 为两个子区间，则至少有一个含 $\{x_n\}$ 的无穷多项，记该子区间为 $[a_2,b_2]$（若两个子区间都含 $\{x_n\}$ 的无穷多项，则可任取其一）. 等分 $[a_2,b_2]$，按照同样的方法又可得含 $\{x_n\}$ 无穷多项的子区间 $[a_3,b_3]$. 照此办理，可得一个闭区间列 $\{[a_k,b_k]\}$，满足：

$$[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq\cdots\supseteq[a_k,b_k]\supseteq\cdots,$$

$$b_k-a_k=\frac{b_1-a_1}{2^{k-1}}\to 0\ (k\to\infty),$$

因此它是一个闭区间套. 根据闭区间套定理，存在唯一的 $\xi\in\mathbf{R}$，使得 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k]=\{\xi\}$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_k=\lim\limits_{n\to\infty}b_k=\xi$.

由于每个闭区间都含数列 $\{x_n\}$ 的无穷多项，所以我们能在每个 $[a_k,b_k]$ 中选取 $\{x_n\}$ 的一项 x_{n_k}，并使 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，从而得到 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$，满足：

$$a_k\leqslant x_{n_k}\leqslant b_k\ (\forall k\in\mathbf{N}_+).$$

根据夹逼原理，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$.

习　题　1.3

(A)

3. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，且 $f(x)$ 在 x_0 有定义. 问在 $x\to x_0$ 的过程中，x 可否取

到 x_0？是否必有 $a=f(x_0)$？

解 可以取到 x_0. 但未必有 $a=f(x_0)$. 例 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0\neq f(0)=1$.

5. 下列命题是否正确？若正确，请给出证明；若不正确，请举出反例.

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|a|$；

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^2=a^2$；

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)=a$，则 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=a$；

(4) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 都存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必存在；

(5) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 都存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必存在；

(6) 若在 x_0 的某邻域内 $f(x)>0$，并且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，那么必有 $a>0$.

解 (1) 不正确. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|a|$. 但反过来不成立.

例 $$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}\quad |f(x)|=1,\lim_{x\to 0}|f(x)|=1,$$

但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

(2) 正确. 因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，$\exists U(x_0,\delta_1)$ 与 $M>0$，使得 $\forall x\in U(x_0,\delta_1)$，$|f(x)+a|\leqslant M$. 从而 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0(\delta<\delta_1)$，使得 $\forall x\in U(x_0,\delta)$，

$$|[f(x)]^2-a^2|=|f(x)+a||f(x)-a|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$

即 $$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^2=a^2.$$

(3) 不正确. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\pi=0$. 但 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\dfrac{\pi}{x}$ 不存在.

(4) 正确. 由极限的有理运算法则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]-\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

(5) 不正确. 取 $f(x)=x$，$g(x)=\sin\dfrac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)g(x)=0$，但 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ 不存在.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a\neq 0$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 存在.

(6) 不正确. 如 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

9. 下列运算有无错误？若错，错在何处？

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\sin x}{\lim\limits_{x\to 0}x}=\dfrac{0}{0}=1$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\sin x}{\lim\limits_{x\to\infty}x}=0$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=0$.

答：(1) 错. 分母极限为零. (2) 错. $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在.

(3) 错. $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在.

10. 用定义证明下列各题：

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$； (4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{1}{2}$.

解 (2) $\forall x>0$，由 $0<\dfrac{\pi}{2}-\arctan x=\left|\arctan x-\dfrac{\pi}{2}\right|<\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow$ $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\cot(\arctan x)<\tan\varepsilon\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\tan(\arctan x)}<\dfrac{1}{\cot\varepsilon}\Leftrightarrow x>$ $\cot\varepsilon$，可得 $\forall\varepsilon>0$. 如 $\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}$. 取 $X=\cot\varepsilon>0$；如 $\varepsilon>\dfrac{\pi}{2}$，$0<\varepsilon-\dfrac{n\pi}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，取 $X=$ $\cot\left(\varepsilon-\dfrac{n\pi}{2}\right)>0$，那么 $\forall x>X$. $\left|\arctan x-\dfrac{\pi}{2}\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$.

(4) 不妨设 $|x-1|<1$. 则 $1<x+1<3$，$1<2x+1<5$. $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=$ $\min\left(1,\dfrac{2}{5}\varepsilon\right)>0$，则 $\forall x\in U(1,\delta)$，有

$$\left|\frac{x^2}{x+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{2x+1}{2(x+1)}|x-1|<\frac{5}{2}|x-1|<\varepsilon.$$

11. 用 Heine 定理证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$； (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(1+\sin x)$.

解 (1) 取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，$y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\pi/2}$，那么当 $n\to+\infty$时，$x_n\to 0$，$y_n=0$，$\cos\dfrac{1}{x_n}=1\to 1(n\to+\infty)$，$\cos y_n=0\to 0(n\to+\infty)$，由 Heine 定理 $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$不存在.

(2) 取 $x_n=2n\pi\to+\infty$，$y_n=2n\pi-\dfrac{\pi}{2}\to+\infty(n\to+\infty)$，那么 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n(1+\sin x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$，$\lim\limits_{n\to+\infty}y_n(1+\sin y_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}0=0$. 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(1+\sin x)$不存在.

12. 求下列极限：

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{2x}=\sqrt{2}.$

(6) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{1-x^2}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2(1+x+x^2)-3(1+x)}{(1-x^2)(1+x+x^2)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2x+1}{(1+x)(1+x+x^2)}=\frac{1}{2}.$$

(8) $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\sin x\cos\Delta x+\cos x\sin\Delta x-\sin x}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\left[\frac{(\cos\Delta x-1)\sin x}{\Delta x}+\cos x\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{-2\sin^2\frac{\Delta x}{2}\sin x}{\Delta x}+\cos x$$

$$=\cos x.$$

(10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}(n\in\mathbf{N}_+)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt[n]{1+x})^n-1}{x[(\sqrt[n]{1+x})^{n-1}+(\sqrt[n]{1+x})^{n-2}+\cdots+\sqrt{1+x}+1]}=\frac{1}{n}.$$

13. 利用两个重要极限求下列极限：

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{1}{2}.$

(3) $\lim\limits_{x\to n\pi}\dfrac{\sin x}{x-n\pi}=\lim\limits_{x\to n\pi}\dfrac{(-1)^n\sin(n\pi-x)}{n\pi-x}=(-1)^n.$

(4) 令 $t=1-x$，$\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}=\lim\limits_{t\to0}t\cot\dfrac{\pi}{2}t=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\frac{\pi}{2}t}{\sin\frac{\pi}{2}t}\cdot\dfrac{\cos\frac{\pi t}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{2}{\pi}.$

(7) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{\pi}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\pi\dfrac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}=\pi$. 由 Heine 定理，$\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{\pi}{2^n}=\pi.$

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2=\mathrm{e}^2$. 由 Heine 定理，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3^n}\right)^{3^n}=\mathrm{e}^2.$

14. 讨论下列函数的极限是否存在：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$，$x\to0$；　　(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0\\ (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x>0,\end{cases}$ $x\to0$；

(3) $f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$, $x\to\infty$.

解 (1) 由 $\lim\limits_{x\to0^+}2^{\frac{1}{x}}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-}2^{\frac{1}{x}}=0$ 知 $f(0+0)=0$, $f(0-0)=1$. 从而 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在.

(2) $f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$, $f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}=1$, $f(0+0)\neq f(0-0)$，故 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}=0$.

15. 用夹逼原理证明 $\lim\limits_{x\to0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$，[ ]表示取整.

证 由 $x\neq0$ 时， $\frac{1}{x}-1\leqslant\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant\frac{1}{x}$. 于是，当 $x>0$ 时，$1-x\leqslant x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant1$，当 $x<0$ 时，$1\leqslant x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant1-x$，

由夹逼准则，$\lim\limits_{x\to0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$.

16. 试确定常数 a 与 b，使 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x-2}+ax+b\right)=0$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x-2}+ax+b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{(1+a)x^2-2ax+3}{x-2}+b\right]=0$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1+a)x^2-2ax+3}{x-2}=-b$，于是 $1+a=0$，即 $a=-1$，$b=-2$.

17. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^{3x-1}$； (2) $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\sec\frac{\pi x}{2}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$； (4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\pi+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\arctan\frac{1}{x}\right)$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^{3x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{-1}{3x}\right)^{-3x}\right]^{-1}}{\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}}\left[\frac{1-\frac{1}{3x}}{1+\frac{1}{3x}}\right]^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}^2}$，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^{3x-1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1}{-2}}\right]^{-2}\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^{-2}=\mathrm{e}^{-2}.$$

(2) 因为$\lim\limits_{x\to1}\left(\sec\frac{\pi}{2}x\right)\ln(2-x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(2-x)}{\cos\frac{\pi}{2}x}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}\ln[1+(1-x)]^{\frac{1}{1-x}}$$

$$=\frac{2}{\pi},$$

所以$\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\sec\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to 1}e^{(\sec\frac{\pi}{2}x)\ln(2-x)}=e^{\frac{2}{\pi}}$.

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln\cos\sqrt{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x})^2}\ln[1+(\cos\sqrt{x}-1)]^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}}=-\frac{1}{2}$,

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}\ln(\cos\sqrt{x})}=e^{-\frac{1}{2}}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\pi+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\arctan\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\pi e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\arctan\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$,

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{\pi+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\arctan\frac{1}{x}\right)=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$,

故$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\pi+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\arctan\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$.

(B)

1. 证明 Dirichlet 函数 $D(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbf{Q},\\ 0, x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}\end{cases}$ 在任何 $x\in\mathbf{R}$ 处的极限都不存在.

证　由实数的稠密性，$\forall a\in\mathbf{Q}$，$\exists\{x_n\}\subseteq\mathbf{Q}$，$\{y_n\}\subseteq\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$，且 $x_n\to a$，$y_n\to a(n\to+\infty)$，但 $D(x_n)=1$，$D(y_n)=0$，所以 $\forall a\in\mathbf{Q}$，$\lim\limits_{x\to a}D(x)$不存在. 同理可证 $\forall b\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$. $\lim\limits_{x\to b}D(x)$不存在.

2. 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是周期函数，若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，则 $f(x)\equiv a$.

证　用反证法. 设 $f(x)\not\equiv a$，不妨设 $f(x_0)=b\neq a$，则可构造一点列$\{x_0+nT\}$，T 为 $f(x)$的最小正周期，则 $f(x_0+nT)=f(x_0)=b$，即 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_0+nT)=b\neq a$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$ 矛盾.

3. 设$[a,b]$是一个有限闭区间，如果 $\forall x_0\in[a,b]$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，证明：$f(x)$在$[a,b]$上有界.

证　反证法. 若 $f(x)$在$[a,b]$上无界，则$\exists\{x_n\}\subseteq[a,b]$，使 $f(x_n)\to\infty(n\to\infty)$. 又由于$\{x_n\}\subseteq[a,b]$有界数列. 则必存在收敛子列$\{x_{n_k}\}$. 设 $x_{n_k}\to x_0(k\to\infty)$，则 $x_0\in[a,b]$且 $\lim\limits_{k\to+\infty}f(x_{n_k})=\infty$. 与$\forall x_0\in[a,b]$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在矛盾.

4. 设 $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ 是无界函数，证明：$\exists\{x_n\}\subseteq(a,b)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$.

证　因为 $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ 是无界函数. 故 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，$\exists x_n\in(a,b)$，使 $f(x_n)>n$. 这样便得到一个数列 $\{x_n\}\subseteq(a,b)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$.

5. 设 $f:[a,+\infty)\to\mathbf{R}$，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$，使得 $\forall x_1$，$x_2>M$，恒有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

证　必要性　设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$，当 $x>M$ 时，恒有 $|f(x)-a|<\frac{\varepsilon}{2}$. 任取 $x_1,x_2>M$. 则

$$|f(x_i)-a|<\frac{\varepsilon}{2},\quad i=1,2,$$

于是 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|f(x_1)-a|+|f(x_2)-a|<\varepsilon$.

充分性　任取两个数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}\subseteq[a,+\infty)$，且

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=+\infty.$$

(i) 证明数列 $\{f(x_n)\}$，$\{f(y_n)\}$ 收敛.

由 $\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$，使 $\forall x_1,x_2>M$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 及 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ 知：对上述的 $M>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，使 $\forall m,n>N$ 有 $x_m,x_n>M$. 从而 $|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$，即对数列 $\{f(x_n)\}$ 来说：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，$\forall m,n>N$ 恒有 $|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$. 由数列的 Cauchy 收敛原理知数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛. 不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=a$.

同理可证 $\{f(y_n)\}$ 收敛.

(ii) 证明 $\{f(y_n)\}$ 也收敛于 a.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ 及已知条件 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，使 x_n，$y_n>M$，则 $|f(x_n)-a|<\frac{\varepsilon}{2}$，且 $|f(x_n)-f(y_n)|<\frac{\varepsilon}{2}$，进而

$$|f(y_n)-a|\leqslant|f(x_n)-f(y_n)|+|f(x_n)-a|<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=a$. 由(i)、(ii)，命题得证.

习　题　1.4

(A)

2. 下列说法是否正确？为什么？