$$\int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega = \int_{(\Omega)/\overline{U}(M_0)} f(M)\mathrm{d}\Omega + \int_{\overline{U}(M_0)} f(M)\mathrm{d}\Omega > 0.$$

2. 证明反常积分中值定理：若(Ω)是紧的且可度量的连通集，$f(M)$，$g(M)$在(Ω)上连续，$g(M)$在(Ω)上不变号，则

$$\int_{(\Omega)} f(M)g(M)\mathrm{d}\Omega = f(P)\int_{(\Omega)} g(M)\mathrm{d}\Omega，其中 P \in (\Omega).$$

证明 设在(Ω)上$g(M)\geqslant 0$. 由于(Ω)是紧的可度量的连续集，而$f(M)$在(Ω)上连续，则$f(M)$在(Ω)上可取得最大值A及最小值a. 即$\forall M\in(\Omega)$，$a\leqslant f(M)\leqslant A$. 从而$\forall M\in(\Omega)$，$ag(M)\leqslant f(M)g(M)\leqslant Ag(M)$. 由积分的性质3及性质1，得

$$a\int_{(\Omega)} g(M)\mathrm{d}\Omega \leqslant \int_{(\Omega)} f(M)g(M)\mathrm{d}\Omega \leqslant A\int_{(\Omega)} g(M)\mathrm{d}\Omega.$$

若$\int_{(\Omega)} g(M)\mathrm{d}\Omega>0$，上式两边同除以$\int_{(\Omega)} g(M)\mathrm{d}\Omega$，得

$$a\leqslant \frac{\int_{(\Omega)} f(M)g(M)\mathrm{d}\Omega}{\int_{(\Omega)} g(M)\mathrm{d}\Omega}\leqslant A.$$

由连续函数的介值定理知，至少存在一点P

$$f(P) = \frac{\int_{(\Omega)} f(M)g(M)\mathrm{d}\Omega}{\int_{(\Omega)} g(M)\mathrm{d}\Omega}，即$$

$$\int_{(\Omega)} f(M)g(M)\mathrm{d}\Omega = f(P)\int_{(\Omega)} g(M)\mathrm{d}\Omega.$$

若$\int_{(\Omega)} g(M)\mathrm{d}\Omega=0$，则由上题知$g(M)\equiv 0$，$M\in(\Omega)$. 因此对$\forall P\in(\Omega)$，恒有$\int_{(\Omega)} f(M)g(M)\mathrm{d}\Omega=f(P)\int_{(\Omega)} g(M)\mathrm{d}\Omega=0.$

习 题 6.2

(A)

2. (3) 若积分域关于y轴对称，则：

(i) 当$f(x,y)$是x的奇函数时,二重积分 $\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=0$;

(ii) 当$f(x,y)$是x的偶函数时,

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = 2\iint\limits_{(\sigma_1)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma,$$

其中(σ_1)为(σ)在右半平面$x\geqslant 0$中的部分区域;

(4) 若积分域关于x轴对称,被积函数$f(x,y)$分别具有怎样的对称性时有

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = 0,\quad \iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = 2\iint\limits_{(\sigma_1)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma,$$

其中(σ_1)为(σ)在上半平面$y\geqslant 0$中的部分区域.

解 (3) 设(σ_2)为(σ)在左半平面$x\leqslant 0$中的部分,则$\sigma_1=\sigma_2$,且
$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{(\sigma_1)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{(\sigma_2)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$

不妨设$f(x,y)\geqslant 0$, $\forall (x,y)\in(\sigma_1)$,则 $\iint\limits_{(\sigma_1)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 表示以(σ_1)为底$z=f(x,y)$为顶的曲顶柱体的体积V_1,而 $\left|\iint\limits_{(\sigma_2)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right| = V_2$(以$(\sigma_2)$为底$f(x,y)$为曲顶的曲顶柱体体积),且$V_1=V_2$.

(i) 如$f(x,y)$关于x为奇函数,则$\forall (x,y)\in(\sigma_2)$, $f(x,y)\leqslant 0$. 则

$$\iint\limits_{(\sigma_2)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = -V_2 = -V_1,\text{故}\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = 0.$$

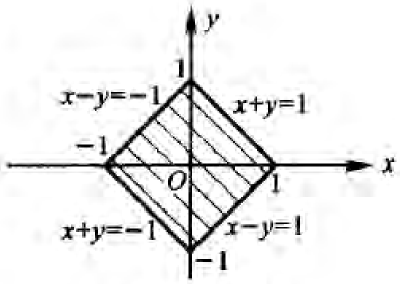
(ii) $f(x,y)$关于x为偶函数,则$\forall (x,y)\in(\sigma_2)$, $f(x,y)\geqslant 0$. 则 $\iint\limits_{(\sigma_2)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = V_2 = V_1$,故 $\iint\limits_{(\sigma)} f\,\mathrm{d}\sigma = 2\iint\limits_{(\sigma_1)} f\,\mathrm{d}\sigma$.

如果$f(x,y)$在(σ_1)变号,则将(σ_1)分成若干小区域,使在每个区域上$f(x,y)$不变号. 由(σ)的对称性知(σ_1)的每个子域都有关于y轴对称的子域(σ_2). 重复上述证明即可.

(4) 当$f(x,y)$关于y为奇函数,则 $\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=0$;若$f(x,y)$关于$y$为偶函数,则 $\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = 2\iint\limits_{(\sigma_1)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$.

3. 计算下列二重积分.

(4) $\iint\limits_{(\sigma)}(x+y)^2\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)$是由$|x|+|y|=1$所围成的区域；



(第3题(4))

(5) $\iint\limits_{(\sigma)}\frac{x}{y}\sqrt{1-\sin^2 y}\mathrm{d}\sigma$，

$(\sigma)=\{(x,y)\mid -\sqrt{y}\leqslant x\leqslant\sqrt{3y},\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant 2\pi\}$；

(6) $\iint\limits_{(\sigma)}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1\}$.

解　(4) (σ)如图所示，则

$$\iint\limits_{(\sigma)}(x+y)^2\mathrm{d}\sigma$$
$$=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-x-1}^{x+1}(x+y)^2\mathrm{d}y+\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1+x}^{1-x}(x+y)^2\mathrm{d}y=\frac{2}{3}.$$

(5) $$\iint\limits_{(\sigma)}\frac{x}{y}\sqrt{1-\sin^2 y}\mathrm{d}\sigma=\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{3y}}\frac{x}{y}\sqrt{1-\sin^2 y}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\frac{1}{y}\sqrt{1-\sin^2 y}\,x^2\Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{3y}}\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\sqrt{1-\sin^2 y}\mathrm{d}y$$
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}|\cos y|\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}-\cos y\mathrm{d}y+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\cos y\mathrm{d}y=3.$$

(6) $$\iint\limits_{(\sigma)}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}\sigma=\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{0}^{y}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$$

4. 把二重积分$I=\iint\limits_{(\sigma)}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$在直角坐标系中分别以两种不同的次序化为累次积分，其中(σ)为

(1) $\{(x,y)\mid y^2\leqslant x,x+y\leqslant 2\}$；

(2) $x=\sqrt{y}$，$y=x-1$，$y=0$与$y=1$所围成的区域.

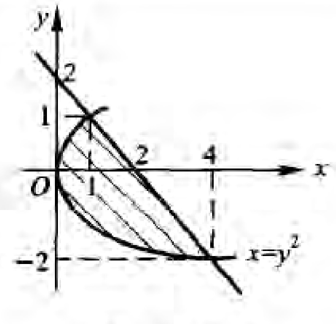
解　(1) (σ)为图中阴影区域.则

$$I=\int_{-2}^{1}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{2-y}f(x,y)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{1}^{4}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x}}^{2-x}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(2) (σ)为图中阴影区域，则

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{y+1} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{x-1}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$



(第 4 题(1))

5. 交换下列累次积分的顺序.

(2) $\int_0^2 \mathrm{d}x\int_{x^2}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$;

(4) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_1^3 \mathrm{d}y\int_0^{2y^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

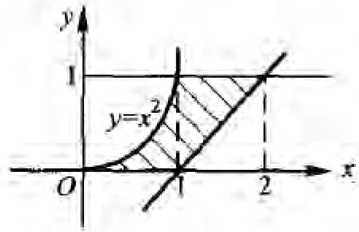
解　(2)

$$\int_0^2 \mathrm{d}x\int_{x^2}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y-\int_1^2 \mathrm{d}x\int_1^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{(\sigma_1)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma-\iint_{(\sigma_2)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x-\int_1^4 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

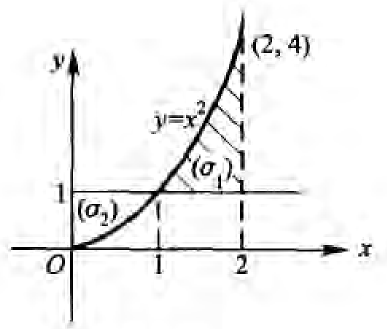


(第 4 题(2))

(4) 原式

$$=\iint_{(\sigma)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\ ((\sigma)\text{如图所示})$$

$$=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}x}^3 f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_2^{18} \mathrm{d}x\int_{\sqrt{\frac{x}{2}}}^3 f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$



(第 5 题(2))

6. 利用极坐标计算下列各题.

(2) $\iint_{(\sigma)} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$,

$(\sigma)=\{(x,y)\mid 2x\leqslant x^2+y^2\leqslant 4, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$;

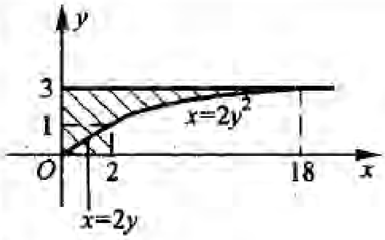
解　图中阴影部分为积分域(σ),可以用极坐标表示为　$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, 2\cos\varphi\leqslant\rho\leqslant 2$.

从而

$$\iint_{(\sigma)} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_{2\cos\varphi}^2 \rho\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{8}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

(3) $\iint\limits_{(\sigma)}(x+y)^2\mathrm{d}\sigma,(\sigma)=\{(x,y)\mid(x^2+y^2)^2\leqslant 2a(x^2-y^2),a>0\}$.

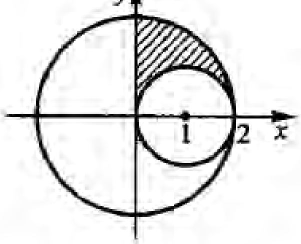


(第5题(4))

解 (σ)由双纽线$(x^2+y^2)^2=2a(x^2-y^2)$围成，其极坐标方程为$\rho^2=2a\cos 2\varphi$，从而$(\sigma)=(\sigma_1)\cup(\sigma_2)$. (σ_1)与(σ_2)分别用极坐标表示为

$$(\sigma_1)=\left\{(\rho,\varphi)\mid-\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},0\leqslant\rho\leqslant\sqrt{2a\cos2\varphi}\right\},$$

$$(\sigma_2)=\left\{(\rho,\varphi)\mid\frac{3}{4}\pi\leqslant\varphi\leqslant\frac{5}{4}\pi,0\leqslant\rho\leqslant\sqrt{2a\cos2\varphi}\right\}.$$



(第6题(2))

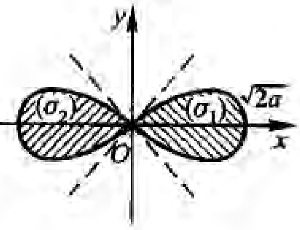
于是 $\iint\limits_{(\sigma_1)}(x+y)^2\mathrm{d}\sigma$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2a\cos2\varphi}}\rho^2(\cos\varphi+\sin\varphi)^2\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos\varphi+\sin\varphi)^2\cos^2 2\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\sin 2\varphi)\cos^2 2\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{4}a^2,$$



(第6题(3))

$$\iint\limits_{(\sigma_2)}(x+y)^2\mathrm{d}\sigma=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2a\cos2\varphi}}\rho^2(\sin\varphi+\cos\varphi)^2\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{\pi}{4}a^2.$$

故 $\iint\limits_{(\sigma)}(x+y)^2\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{(\sigma_1)}(x+y)^2\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{(\sigma_2)}(x+y)^2\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{2}a^2$.

7. 把下列累次积分化为极坐标的累次积分，并计算其值.

(3) $\int_1^2\mathrm{d}y\int_0^y\frac{x\sqrt{x^2+y^2}}{y}\mathrm{d}x$.

解 令$(\sigma)=\{(x,y)\mid1\leqslant y\leqslant2,0\leqslant x\leqslant y\}$，则$(\sigma)$可用极坐标表示为

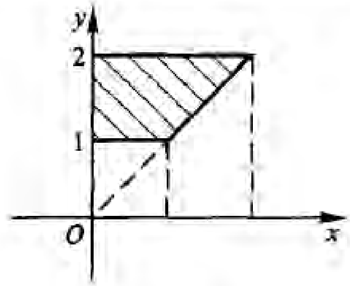
$$(\sigma)=\left\{(\rho,\varphi)\,\middle|\,\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\frac{1}{\sin\varphi}\leqslant\rho\leqslant\frac{2}{\sin\varphi}\right\}.$$

于是

$$\int_1^2 \mathrm{d}y \int_0^y \frac{x}{y}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x = \iint\limits_{(\sigma)} \frac{x}{y}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_{\frac{1}{\sin\varphi}}^{\frac{2}{\sin\varphi}} \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\cdot\rho\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{7}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^4\varphi}\mathrm{d}\sin\varphi = \frac{7}{9}(2\sqrt{2}-1).$$



（第 7 题(3)）

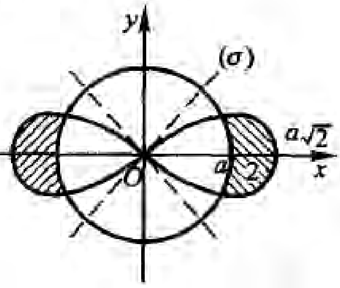
8. 求由下列各组曲线所围成图形的面积.

(2) $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$, $x^2+y^2=a^2$ $(x^2+y^2\geqslant a^2, a>0)$;

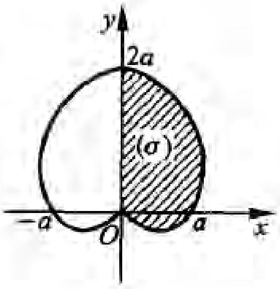
解　由对称性知所求面积 S

$$S = 4\iint\limits_{(\sigma)} \mathrm{d}\sigma = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{d}\varphi \int_a^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} \rho\,\mathrm{d}\rho = a^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right).$$

(3) $\rho=a(1+\sin\varphi)$.



（第 8 题(2)）



（第 8 题(3)）

解　所求面积 $S=2\iint\limits_{(\sigma)} \mathrm{d}\sigma = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{a(1+\sin\varphi)} \rho\,\mathrm{d}\rho = \frac{3}{2}\pi a^2.$

9. 求由下列各组曲面所围成立体的体积.

(2) $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$, $z=0$;

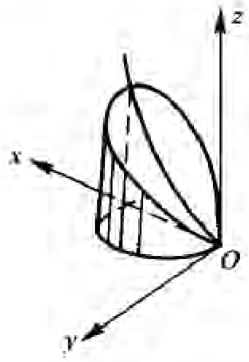
解　所求立体为以 xOy 平面上的圆域 $x^2+y^2\leqslant 2ax$ 为底，以锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 为顶的曲顶柱体，其体积为

$$V = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2ax} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} \rho\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho = \frac{32}{9}a^3.$$

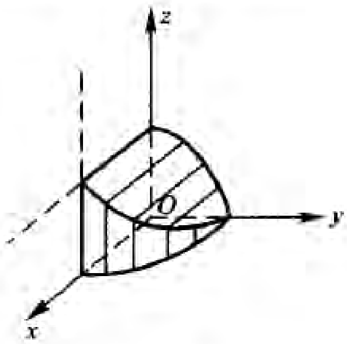
(3) $x^2+y^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$

解　图中所示立体体积为 V_1，则所求体积

$$V = 8V_1 = 8\iint\limits_{(\sigma)} \sqrt{a^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma = 8\int_0^a \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2-y^2}\,\mathrm{d}x = \frac{16}{3}a^3.$$



（第 9 题(2)）



（第 9 题(3)）

11. 以半径为 4 cm 的铜球的直径为中心轴，钻通一个半径为 1 cm 的圆孔，问损失掉的铜的体积是多少？

解 选圆孔的中心轴为 z 轴，x,y 轴为与 z 轴垂直的球的两相互垂直的直径，则所求体积为

$$V=2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sqrt{16-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\sqrt{16-\rho^2}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{4}{3}\pi(64-15\sqrt{15})(\mathrm{cm}^3).$$

12. 在一形状为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 的容器中，盛有 $8\pi\mathrm{cm}^3$ 的水，今再灌入 $120\pi\mathrm{cm}^3$ 的水，问液面将升高多少 cm？

解 液面高为 h cm 时，所盛水的体积为 V. 从而

$$V=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h}h\,\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\pi h^2-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{h}}\rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}h^2(\mathrm{cm}^3).$$

于是当 $V=8\pi\mathrm{cm}^3$ 时，$h=4$ cm 当 $V=(120+8)\pi\mathrm{cm}^3$ 时，$h=16$ cm，故液面将升高 12 cm.

13. 利用适当的变换计算下列二重积分.

(2) $\iint\limits_{(\sigma)}\mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)$ 是以 $(0,0)$，$(1,0)$，$(0,1)$ 为顶点的三角形内部；

解 令 $u=x+y, v=y$，于是 (σ) 在此变换下在 uOv 直角坐标面中为 $(\sigma')=\{(u,v)\mid 0\leqslant u\leqslant 1, 0\leqslant v\leqslant u\}$.

于是 $\iint\limits_{(\sigma)}\mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{(\sigma')}\mathrm{e}^{\frac{v}{u}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

$$= \int_0^1 du \int_0^u e^{\frac{v}{u}} dv = \frac{1}{2}(e-1).$$

(3) $\iint\limits_{(\sigma)} xy d\sigma$，$(\sigma)$ 由曲线 $xy=1, xy=2, y=x, y=4x(x>0, y>0)$ 所围成；

解 令 $u=xy, v=\frac{y}{x}$，此变换将 (σ) 映射成 uOv 直角坐标面上的矩形域 $(\sigma')=\{(u,v)\mid 1\leqslant u\leqslant 2, 1\leqslant v\leqslant 4\}$，

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x}\end{vmatrix}}=\frac{x}{2y}=\frac{1}{2v}.$$

于是
$$\iint\limits_{(\sigma)} xy d\sigma=\iint\limits_{(\sigma')} u\cdot\frac{1}{2v}du dv=\int_1^2 du\int_1^4\frac{u}{2v}dv=\frac{3}{2}\ln 2.$$

(4) $\iint\limits_{(\sigma)}(x+y)d\sigma$，$(\sigma)$ 由曲线 $x^2+y^2=x+y$ 所围成的区域.

解 取曲线坐标变换为 $x=\frac{1}{2}+\rho\cos\varphi, y=\frac{1}{2}+\rho\sin\varphi$，则在 $\rho O\varphi$ 直角坐标平面内 $(\sigma')=\left\{(\rho,\varphi)\mid 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, 0\leqslant\rho\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$，$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho$.

于是

$$\iint\limits_{(\sigma)}(x+y)d\sigma=\iint\limits_{(\sigma')}(1+\rho\sin\varphi+\rho\cos\varphi)\rho d\rho d\varphi$$
$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1+\rho\sin\varphi+\rho\cos\varphi)\rho d\rho=\frac{\pi}{2}.$$

14. 求下列曲线所围成的平面图形的面积.

(1) $(x-y)^2+x^2=a^2 \quad (a>0)$；

解 作曲线坐标变换 $x=\rho\sin\varphi, y=\rho(\sin\varphi-\cos\varphi)$，于是由 $(x-y)^2+x^2=a^2$ 所围成的区域 (σ) 即为 $\rho O\varphi$ 直角坐标面上的区域 $(\sigma')=\{(\rho,\varphi)\mid 0\leqslant\rho\leqslant a, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$，$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)}=\begin{vmatrix}\sin\varphi & \rho\cos\varphi \\ \sin\varphi-\cos\varphi & \rho(\cos\varphi+\sin\varphi)\end{vmatrix}=\rho$，则所求面积 S

$$S=\iint\limits_{(\sigma')}\rho d\rho d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\rho d\rho=\pi a^2.$$

(3) $xy=a^2, xy=2a^2, y=x, y=2x(x>0, y>0)$；

解 作曲线坐标变换 $u=xy,v=\dfrac{y}{x}$. 则由题中所给的四条曲线在 $x>0,y>0$ 时所围成的区域(σ)在 uOv 直角坐标面的像为$(\sigma')=\{(u,v)\mid a^2\leqslant u\leqslant 2a^2,1\leqslant v\leqslant 2\}$.

故所求面积 $S=\iint\limits_{(\sigma')}\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_{a^2}^{2a^2}\mathrm{d}u\int_1^2\dfrac{1}{2v}\mathrm{d}v=\dfrac{a^2}{2}\ln 2.$

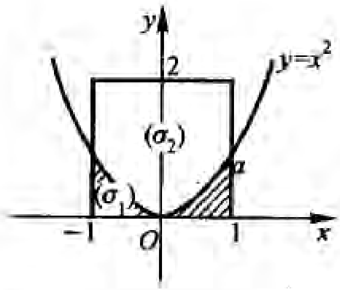
(4) $y^2=2px,y^2=2qx,x^2=2ry,x^2=2sy(0<p<q,0<r<s)$.

解 作曲线坐标变换 $u=y^2/2x,v=x^2/2y$,则由题所给的四条曲线所围成的曲域被映为 uOv 直角坐标面内的矩形域$(\sigma')=\{(u,v)\mid p\leqslant u\leqslant q,r\leqslant v\leqslant s\}$其面积为 $\iint\limits_{(\sigma')}\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_p^q\mathrm{d}u\int_r^s\dfrac{4}{3}\mathrm{d}v=\dfrac{4}{3}(q-p)(s-r)$.

(B)

1. 计算下列二重积分.

(1) $\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}\sigma,(\sigma)=\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2\}$;



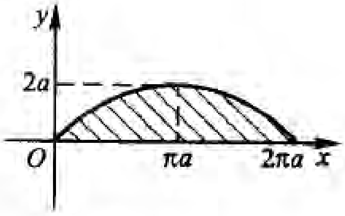
(第 1 题(1))

解 如图所示将(σ)分为两个区域(σ_1)及(σ_2),则

$$\begin{aligned}\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}\sigma&=\iint\limits_{(\sigma_1)}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{(\sigma_2)}\sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}\sigma\\&=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y+\\&\quad 2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^2\sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}y\\&=\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

((σ_1)与(σ_2)关于 y 轴对称,被积函数关于 x 为偶函数)

(3) $\iint\limits_{(\sigma)}y^2\,\mathrm{d}\sigma$, (σ) 是 x 轴与摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi,a>0)$所围成的区域.



(第 1 题(3))

解 $\iint\limits_{(\sigma)}y^2\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi a}\mathrm{d}x\int_0^{a(1-\cos t)}y^2\mathrm{d}y$

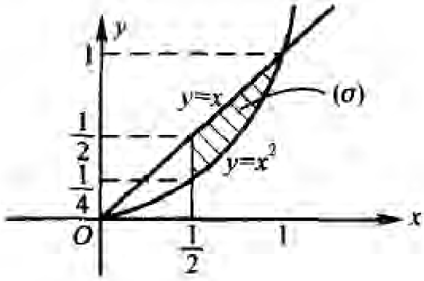
$$= \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi a}(1-\cos t)^3 dx$$

$$\xlongequal{x=a(t-\sin t)} \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3 a(1-\cos t)dt$$

$$= \frac{35}{12}\pi a^4$$

2. 计算累次积分

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{y}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx .$$



（第 2 题）

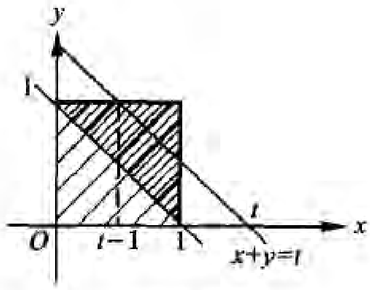
解　原式 $= \iint\limits_{(\sigma)} e^{\frac{y}{x}} d\sigma$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int_{x^2}^{x} e^{\frac{y}{x}} dy$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} x e^{\frac{y}{x}} \Big|_{x^2}^{x} dx = \frac{3}{8}e - \frac{\sqrt{e}}{2}$$

3. 设 $f(x,y) = \begin{cases} 2x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$

$F(t) = \iint\limits_{x+y\leqslant t} f(x,y)d\sigma$，求 $F(t)$.



（第 3 题）

解　如图所示，$f(x,y)$ 仅在阴影区域内非零，所以 $t\leqslant 0$，则 $F(t)=0$；

若 $0<t\leqslant 1$，则 $F(t) = \int_0^t dx \int_0^{t-x} 2x dy = \frac{1}{3}t^3$；

若 $1<t\leqslant 2$，则 $F(t) = \int_0^{t-1} dx \int_0^1 2x dy + \int_{t-1}^{1} dx \int_0^{t-x} 2x dy$

$$= t - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(t-1)^3;$$

若 $t>2$，则 $F(t) = \int_0^1 dx \int_0^1 2x dy = 1$.

$$\text{故 } F(t) = \begin{cases} 0, & t\leqslant 0, \\ \frac{1}{3}t^3, & 0<t\leqslant 1, \\ t-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}(t-1)^3, & 1<t\leqslant 2, \\ 1, & t>2. \end{cases}$$

4. 计算 $\iint\limits_{(\sigma)} x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}\sigma$,其中$(\sigma)$由$y=x^3, y=1, x=-1$所围成的区域,$f(x^2+y^2)$是$(\sigma)$上的连续函数.

解 令 $F(u)=\int_0^u f(v)\mathrm{d}v$. 由于$f(v)$连续.则$F(u)$可微.于是

$$\iint\limits_{(\sigma)} x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} x\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{(\sigma)} xyf(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$$

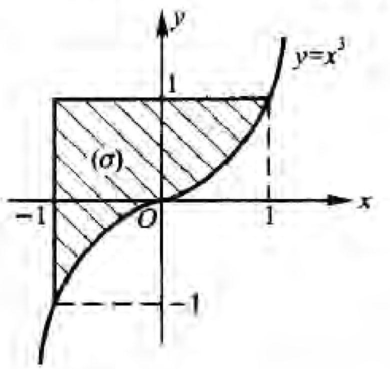
$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^3}^{1}x\mathrm{d}y+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^3}^{1}xyf(x^2+y^2)\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^3}^{1}xf(x^2+y^2)\mathrm{d}(x^2+y^2)$$

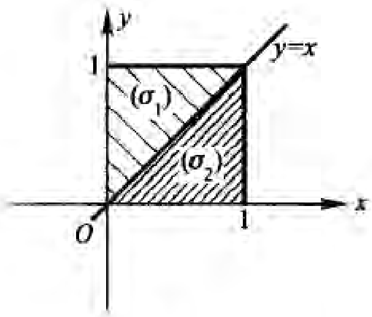
$$=-\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x[F(x^2+1)-F(x^2+x^6)]\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2}{5}.$$

$(x[F(x^2+1)-F(x^2+x^6)]$为奇函数$)$.



(第4题)



(第5题)

5. 设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续,并设$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$,求$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y$.

解 如图所示 $\iint\limits_{(\sigma_1)} f(x)f(y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x)f(y)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{改变积分}} \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(y)f(x)\mathrm{d}y=\iint\limits_{(\sigma_2)} f(x)f(y)\mathrm{d}\sigma.$

又 $$2\iint\limits_{(\sigma_1)} f(x)f(y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{(\sigma_1)} f(x)f(y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{(\sigma_2)} f(x)f(y)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\0\le y\le 1}} f(x)f(y)\mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y = A^2,$$

故　$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y = \dfrac{A^2}{2}$.

6. 证明 Dirichlet 公式 $\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^a \mathrm{d}y\int_y^a f(x,y)\mathrm{d}x(a>0)$，并由此证明 $\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^y f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a (a-x)f(x)\,\mathrm{d}x$,其中 f 连续.

证明　由 $\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y \xlongequal{\text{交换积分次序}} \int_0^a \mathrm{d}y\int_y^a f(x,y)\mathrm{d}x$.

令 $f(x,y)=f(x)$，则由 $\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^y f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a \mathrm{d}x\int_x^a f(x)\mathrm{d}y = \int_0^a (a-x)f(x)\mathrm{d}x$.

7. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，试利用二重积分证明

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

证明　由 $0 \le \iint\limits_{\substack{a\le x\le b\\a\le y\le b}} [f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b [f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}y$

$$= (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - 2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\mathrm{d}y + \int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y$$

$$= (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - 2\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 + (b-a)\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y$$

$$= 2\left\{(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - \left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2\right\}$$

故　$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$

由习题 6.1(B)第 1 题知当且仅当 $f(x)\equiv f(y)$ 即 $f(x)$ 恒为常数时等式成立.

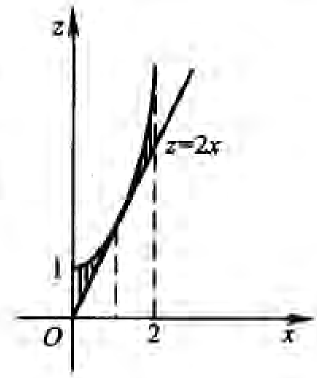
8. 试求曲线 $(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1\,(a_1b_2-a_2b_1\ne 0)$ 所围图形的面积.

解　作曲线坐标变换 $u=a_1x+b_1y+c_1, v=a_2x+b_2y+c_2$. 此变换将 xOy 直角坐标面上由曲线 $(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$ 围成的区域 (σ) 映射成 uOv 直角坐标面中的圆域 $u^2+v^2\le 1$，其面积为 π，又

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{a_1b_2-a_2b_1},$$

故所求面积 $= \iint\limits_{u^2+v^2\le 1} \dfrac{1}{|a_1b_2-a_2b_1|}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \dfrac{\pi}{|a_1b_2-a_2b_1|}$.

9. 求抛物面 $z=1+x^2+y^2$ 的一个切平面，使得它与该抛物面及圆柱面 $(x-1)^2+y^2=1$ 围成的体积最小，试写出切平面方程并求出最小体积.



（第 9 题）

解 抛物面 $z=1+x^2+y^2$ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面方程为

$$z-z_0=2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0).$$

注意到 $z_0=1+x_0^2+y_0^2$，则切平面方程可表示为：

$$z=2x_0x+2y_0y+1-x_0^2-y_0^2,$$

且切平面总在抛物面的下方. 而所求立体体积 V 为以 xOy 面上的圆域 $(x-1)^2+y^2\leqslant 1$ 为底，分别以抛物面及其切平面为顶的曲顶柱体体积之差，故

$$V=\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\leqslant 1}[(1+x^2+y^2)-(2x_0x+2y_0y+1-x_0^2-y_0^2)]\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}[\rho^2-2\rho(x_0\cos\varphi+y_0\sin\varphi)+x_0^2+y_0^2]\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{1}{2}(3-4x_0+2x_0^2+2y_0^2)\pi.$$

令 $\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial x_0}=(-4+4x_0)\dfrac{\pi}{2}=0,\\ \dfrac{\partial V}{\partial y_0}=4y_0\dfrac{\pi}{2}=0\end{cases}$ 得唯一的驻点 $x_0=1,y_0=0$ 则此唯一的驻点必为最小值点. 故体积的最小值 $V_{\min}=\dfrac{\pi}{2}$，此时切平面的方程为 $z=2x$.

10. 设 $f(t)$ 是连续的奇函数，试利用适当的正交变换证明 $\iint\limits_{(\sigma)}f(ax+by+c)\mathrm{d}\sigma=0$，其中 (σ) 关于直线 $ax+by+c=0$ 对称，且 $a^2+b^2\neq 0$.

证明 作正交变换 $u=ax+by+c,v=-bx+ay$（直线 $-bx+ay=0$ 为过原点且与直线 $ax+by+c=0$ 垂直），设 (σ) 被映为 uOv 直角平面的区域 (σ')，则 (σ') 关于 $u=0$ 对称，即 v 轴对称. 而 $f(ax+by+c)=f(u)$ 关于 u 为奇函数，故

$$\iint\limits_{(\sigma)}f(ax+by+c)\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{a^2+b^2}\iint\limits_{(\sigma')}f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=0.$$

11. 设有一半径为 R，高为 H 的圆柱形容器，盛有 $\dfrac{2}{3}H$ 高的水，放在离心机

上高速旋转.因受离心力的作用,水面呈抛物面形状,问当水刚要溢出容器时,水平的最低点在何处?

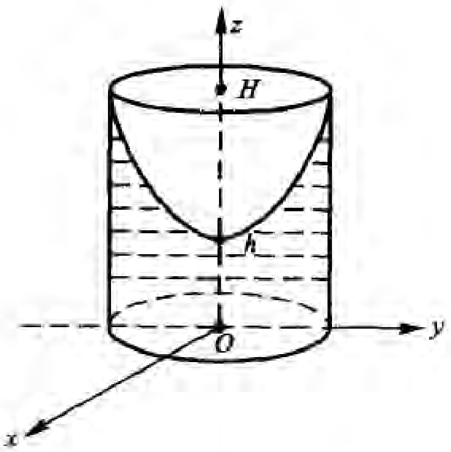
解　如图所示建立坐标系,并设水面最低点为 h.依题意有

$$\frac{2}{3}H\cdot(\pi R^2)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}(h+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R(h+\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho.$$

即
$$\frac{2}{3}H\cdot\pi R^2=\left(h+\frac{1}{2}R^2\right)\pi R^2,$$

于是
$$h=\frac{2}{3}H-\frac{1}{2}R^2.$$

又 $H-h=R^2$,故 $h=\frac{1}{3}H$.



(第 11 题)

习　题　6.3

(A)

4. 计算下列三重积分.

(1) $\iiint\limits_{(V)}\mathrm{e}^x\mathrm{d}V$,$(V)$ 是由平面 $x=0,y=1,z=0,y=x$ 及 $x+y-z=0$ 所围成的闭区域;

解　$\iiint\limits_{(V)}\mathrm{e}^x\mathrm{d}V=\iint\limits_{(\sigma)}\mathrm{d}\sigma\int_0^{x+y}\mathrm{e}^x\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{d}x\int_0^{x+y}\mathrm{e}^x\mathrm{d}z=\frac{7}{2}-\mathrm{e}.$

(2) $\iiint\limits_{(V)}y\cos(x+z)\mathrm{d}V$,$(V)$ 为由抛物面 $y=\sqrt{x}$,平面 $y=0,z=0$ 及 $x+z=$