定理3.3

若 n 元函数 f 在点 $\vec{x}_0$ 可微，则函数在该点

沿任意方向 l 的方向导数存在，且有

$$\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{l}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_i} \cos\theta_i$$

其中 $\vec{e}_l = (\cos\theta_1, \cos\theta_2, \cdots, \cos\theta_n)$ 为 l 方向上的单位向量。

下面以二元函数为例证明：

（可微的定义、方向导数的定义）

方向导数公式 $\dfrac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{l}} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_i} \cos\theta_i$

令向量 $\vec{g} = \left(\dfrac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_n} \right)$

$\vec{e}_l = (\cos\theta_1, \cos\theta_2, \cdots, \cos\theta_n)$

$$\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{l}} = \langle \vec{g}, \vec{e}_l \rangle = \|\vec{g}\| \cos(\widehat{\vec{g}, \vec{e}_l})$$

当 $\vec{e}_l$ 与 $\vec{g}$ 的方向一致时，方向导数取最大值：

$$\max\left(\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{l}} \right) = \|\vec{g}\|$$

这说明 $\vec{g}$ $\begin{cases} \text{方向：} f \text{ 变化率最大的方向} \\ \text{模 ：} f \text{ 的最大变化率之值} \end{cases}$

$$\vec{g}=\left(\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_1},\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_n}\right)$$

定义3.4

设函数 $u=f(\vec{x})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在点 $\vec{x}_0$ 可微，则称向量 $\left(\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_1},\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_n}\right)$ 为函数 f 在点 $\vec{x}_0$ 处的梯度向量，简称梯度 (gradient), 记作

grad $f(\vec{x}_0)$,**或** $\nabla f(\vec{x}_0)$, 即

$$\mathbf{grad}\, f(\vec{x}_0)=\nabla f(\vec{x}_0)=\left(\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_1},\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_n}\right)$$

其中 ∇ 称为**向量微分算子**或 **Nabla算子**.

其中 ∇ 称为**向量微分算子**或 **Nabla算子**.

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

它本身没有意义，将 ∇ 作用于函数 f 就得到一向量，即

$$\nabla f(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_n} \right)$$

同样可定义二元函数 $f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 处的梯度

$$\mathbf{grad}\, f = \nabla f(x, y) = \left(f_x(x, y),\ f_y(x, y) \right)$$

方向导数公式 $\dfrac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{l}} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_i} \cos\theta_i$

注：1. 方向导数可以表示成：

$$\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{l}} = \langle \operatorname{grad} f(\vec{x}_0), \vec{e}_l \rangle = \langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{e}_l \rangle$$

2. 若记 $d\vec{x} = (dx_1, dx_2, \cdots, dx_n)$，则利用梯度可将 f 在点 $\boldsymbol{x}$ 处的全微分写成：

$$df(\vec{x}) = \langle \nabla f(\vec{x}), d\vec{x} \rangle$$

例3.13 求二元函数 $u = x^2 - xy + y^2$ 在点 P（-1，1）处沿方向 $\vec{e}_l = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$ 的方向导数，并指出 u 在该点沿哪个方向的方向导数最大？这个最大的方向导数值是多少？u 沿哪个方向减小的最快？沿着哪个方向 u 的值不变化？

解： $\nabla u\big|_{(-1,1)} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big|_{(-1,1)} = (2x - y, 2y - x)\big|_{(-1,1)} = (-3, 3)$

$$\frac{\partial u(-1,1)}{\partial \vec{l}} = < \nabla u\big|_{(-1,1)}, \vec{e}_l > = \frac{1}{\sqrt{5}}(-6+3) = \frac{-3}{\sqrt{5}}$$

(1) 方向导数取最大值的方向即梯度方向，其单位向量为 $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$ ，方向导数的最大值为 $\left\|\nabla u\big|_{(-1,1)}\right\| = 3\sqrt{2}.$

(2) u 沿梯度的负向即 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ 的方向减小的最快。

(3) 下求使 u 的变化率为零的方向。令 $\vec{e}_l = (\cos\theta, \sin\theta)$

则：$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{(-1,1)} = \langle \nabla u\big|_{(-1,1)}, \vec{e}_l \rangle = -3\cos\theta + 3\sin\theta$

$$= 3\sqrt{2}\sin(\theta - \frac{\pi}{4})$$

令 $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = 0$ 得 $\theta = \frac{\pi}{4}, \pi + \frac{\pi}{4}$ ，此时 u 的值不变化。

梯度的运算法则

(1) $\mathbf{grad}\, c = \vec{0}$ 或 $\nabla c = \vec{0}$ （c为常数）

(2) $\mathbf{grad}(c\,u) = c\,\mathbf{grad}\,u$ 或 $\nabla(c\,u) = c\nabla\,u$

(3) $\mathbf{grad}(u \pm v) = \mathbf{grad}\,u \pm \mathbf{grad}\,v$ 或 $\nabla(u \pm v) = \nabla\,u \pm \nabla\,v$

(4) $\mathbf{grad}(u\,v) = u\,\mathbf{grad}\,v + v\,\mathbf{grad}\,u$

或 $\nabla(u\,v) = u\nabla\,v + v\nabla\,u$

(5) $\mathbf{grad}(\frac{u}{v}) = \frac{v\mathbf{grad}u - u\mathbf{grad}v}{v^2}$ 或 $\nabla(\frac{u}{v}) = \frac{v\nabla u - u\nabla v}{v^2}$

(6) $\mathbf{grad}\,f(u) = f'(u)\mathbf{grad}\,u$ 或 $\nabla f(u) = f'(u)\nabla\,u$

(6) $\mathbf{grad}\, f(u) = f'(u)\,\mathbf{grad}\, u$ 或 $\nabla f(u) = f'(u)\nabla u$

证明： 设 $u = u(\vec{x}) = u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 由一元函数的链式法则，有

$$\nabla f(u) = \left(\frac{\partial f(u)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(u)}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f(u)}{\partial x_n} \right)$$

$$= \left(f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_1}, f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

$$= f'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = f'(u)\nabla u$$

例3. 设 $f(r)$ 可导, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 为点 $P(x,y,z)$ 处矢径 $\vec{r}$ 的模，试证 $\mathbf{grad}\, f(r)=f'(r)\vec{e}_r$.

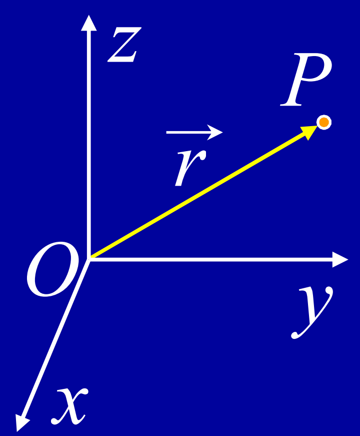
证: $\because \dfrac{\partial f(r)}{\partial x}=f'(r)\dfrac{\partial r}{\partial x}=f'(r)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=f'(r)\dfrac{x}{r}$

$$\frac{\partial f(r)}{\partial y}=f'(r)\frac{y}{r}, \qquad \frac{\partial f(r)}{\partial z}=f'(r)\frac{z}{r}$$

$$\therefore\ \mathbf{grad}\, f(r)=\frac{\partial f(r)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f(r)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f(r)}{\partial z}\vec{k}$$

$$=f'(r)\frac{1}{r}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$$

$$=f'(r)\frac{1}{r}\vec{r}=f'(r)\vec{e}_r$$



物理意义

函数 ——→ 场

(物理量的分布)

- **数量场** (数性函数)
  如: 温度场, 电势场等
- **向量场**(矢性函数)
  如: 力场,速度场等

可微函数 $f(P)$ ——→ **梯度场** $\mathbf{grad}\, f(P)$

(势) (向量场)

注意: 任意一个向量场不一定是梯度场.