$f(x)=x^2-2$，$x\in(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},+\infty)$. 于是 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}-4$，$x\in(-\infty,-\sqrt{2}+1]\cup[\sqrt{2}-1,+\infty)$.

习 题 1.2

(A)

1. 下列说法能否作为 a 是数列$\{a_n\}$的极限的定义？为什么？

(1) 对于无穷多个 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，不等式$|a_n-a|<\varepsilon$ 成立；

(2) 对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n\geqslant N$ 时，有无穷多项 a_n，使不等式$|a_n-a|<\varepsilon$成立；

(3) 对于给定的很小的正数 $\varepsilon_0=10^{-10}$，不等式$|a_n-a|<10^{-10}$恒成立.

解 (1) 不能，有无穷多个 $\varepsilon>0$ 满足(2.2)式，不能推出对任意 $\varepsilon>0$ 满足(2.2)式.

(2) 不能，例如发散数列 $1,\frac{1}{2},1,\frac{1}{3},\cdots,1,\frac{1}{n},\cdots$. 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，有无穷多项 a_n 满足$|a_n-0|<\varepsilon$.

(3) 不能，如数列$\left\{10^{-11}\sin\frac{1}{n}\right\}$. $\varepsilon_0=10^{-10}$，$\left|10^{-11}\sin\frac{1}{n}-0\right|<10^{-10}$恒成立. 但 $\lim\limits_{n\to+\infty}10^{-11}\sin\frac{1}{n}$不存在.

2. 说明下列表述都可作为 a 是$\{a_n\}$极限的定义：

(2) 对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，不等式$|a_n-a|\leqslant\varepsilon$ 成立；

(3) 对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，不等式$|a_n-a|<k\varepsilon$ 成立，其中 k 是正常数；

(4) 对于任给的 $m\in\mathbf{N}_+$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，不等式$|a_n-a|<\frac{1}{m}$成立；

(5) 对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，使不等式$|a_{N+p}-a|<\varepsilon$ 对于任意的正整数 p 都成立.

解 (2) $\forall\varepsilon>0$，$\frac{\varepsilon}{10}>0$. 则 $\exists N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，

$$|a_n-a|\leqslant\frac{\varepsilon}{10}<\varepsilon. \text{所以} \lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

(3) $\forall \varepsilon>0, \frac{\varepsilon}{k}>0$. 则 $\exists N\in \mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，

$$|a_n-a|<k\cdot\frac{\varepsilon}{k}=\varepsilon\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

(4) $\forall \varepsilon>0, \exists m\in \mathbf{N}_+$，使$\frac{1}{m}<\varepsilon$，反之也成立.

(5) 由题设，$\forall \varepsilon>0, \exists N\in \mathbf{N}_+$，对一切 $n>N$，恒有$|a_n-a|<\varepsilon$.

3. 若$\{a_n\}$与$\{b_n\}$是两个发散数列，它们的和与积是否发散？为什么？若其中一个收敛，一个发散，它们的和与积的收敛性又如何？

解　若$\{a_n\}$，$\{b_n\}$均发散，和与积不一定发散.

如 $a_n=(-1)^n$，$b_n=(-1)^{n+1}$，$a_n+b_n=0$，收敛. $a_n\cdot b_n=-1$ 收敛.

若$\{a_n\}$收敛，$\{b_n\}$发散. $\{a_n+b_n\}$一定发散.

(假设 $c_n=a_n+b_n$ 收敛. 由极限的有理运算法则知. $b_n=c_n-a_n$ 收敛矛盾，所以$\{c_n\}$发散.)

$\{a_n\cdot b_n\}$不一定收敛，也不一定发散.

$\left(\text{如}a_n=\frac{1}{n}, b_n=n^2, \{a_n\cdot b_n\}=\{n\}\text{发散}. a_n=\frac{1}{n^2}, b_n=n, \{a_n\cdot b_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}\text{收敛}.\right)$

如果$\{a_n\}$收敛且 $\lim a_n\neq 0$，$\{b_n\}$发散则$\{a_n\cdot b_n\}$一定发散.

(假设 $c_n=a_n\cdot b_n$ 收敛. 则 $b_n=\frac{c_n}{a_n}$且 $\lim a_n\neq 0$. 由有理运算法则$\{b_n\}$收敛产生矛盾.)

5. 若把保序性中的条件 $a_n\leqslant b_n$ 改为 $a_n<b_n$，是否仍得到结论 $a<b$?

解　不能. 例如 $a_n=\frac{1}{n}$，$b_n=\frac{10}{n}$，$\forall n\in\mathbf{N}_+$，$a_n<b_n$. 但 $a=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=0=b$.

6. 下列结论是否正确？若正确，请给出证明；若不正确，请举出反例.

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|A|$；

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|A|$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A(A\neq 0)$；

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$；

(4) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=A$；

(5) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$；

(6) 若对任何实数 α，$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha a_n=\alpha A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.

解　(1) 正确. 由于$||a_n|-|A||\leqslant|a_n-A|$，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，使$\forall n>N$，恒有$||a_n|-|A||\leqslant|a_n-A|<\varepsilon$. 即 $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=|A|$.

(2) 不正确. 如 $a_n=(-1)^n$，$\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=1$，但 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 不存在.

(3) 正确. 由 $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=0$ 可知 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbf{N}_+$, 当 $n>N$ 时, $||a_n|-0|=|a_n|=|a_n-0|<\varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$.

(4) 正确. 由 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$ 知 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1\in\mathbf{N}_+$, 当 $n>N_1$ 时, $|a_n-A|<\varepsilon$ 成立. 即 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=N_1-1$, 那么当 $n>N_1$ 时, $|a_{n+1}-A|<\varepsilon$ 成立, 故 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n+1}=A$.

(5) 不正确. 如 $a_n=\dfrac{\alpha^n}{n!}(\alpha\in\mathbf{R})$, $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$, 而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=0$.

(6) 正确. 由于对 $\forall\alpha\in\mathbf{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha a_n=\alpha A$, 所以对 $\alpha=1$, 应有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.

7. 用 $\varepsilon-N$ 定义证明下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}=0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-n})=\dfrac{1}{2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\cos n}{n^2}=0$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

解 (1) $\forall\varepsilon>0$. 取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$. 当 $n>N$ 时, 恒有

$$\left|\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}-0\right|\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon \text{ 故 } \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}=0.$$

(2) $\forall\varepsilon>0$. 取 $N=\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$. $\forall n>N$, 恒有

$$\left|n-\sqrt{n^2-n}-\frac{1}{2}\right|=\frac{n}{2(n+\sqrt{n^2-n})^2}\leqslant\frac{1}{2n}<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-\sqrt{n^2-n})=\dfrac{1}{2}$.

(3) $\forall\varepsilon>0$. 取 $N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$. 对 $\forall n>N$, 恒有

$$\left|\frac{1+\cos n}{n^2}\right|\leqslant\frac{2}{n^2}<\frac{2}{n}<\varepsilon, \text{故 } \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\cos n}{n^2}=0.$$

(4) **解法一**　令 $\sqrt[n]{n}=1+x_n$, 则 $x_n>0$ 由二项式公式

$$n=1+nx_n+\frac{1}{2}n(n-1)x_n^2+\cdots+x_n^n\geqslant1+\frac{1}{2}n(n-1)x_n^2,$$

从而有

$$1\leqslant\sqrt[n]{n}=1+x_n\leqslant1+\sqrt{\frac{2}{n}},$$

由夹逼性知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

解法二　由于 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|=\dfrac{n-1}{1+\sqrt[n]{n}+(\sqrt[n]{n})^2+\cdots+(\sqrt[n]{n})^{n-1}}<\dfrac{n-1}{\frac{1}{2}(n-1)\sqrt{n}}=\dfrac{2}{\sqrt{n}}$, 所以 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\dfrac{4}{\varepsilon^2}\right]$, 当 $n>N$ 时, $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$ 成立. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

8. 试写出数列无上界, 无下界的定义.

解　如果$\forall M>0$，总$\exists n_0\in \mathbf{N}_+$，使$a_{n_0}>M$，称数列$\{a_n\}$无上界.

如$\forall M>0$，总$\exists n_0\in \mathbf{N}_+$，使$a_{n_0}<-M$. 称$\{a_n\}$无下界.

9. 设由数列$\{a_n\}$的奇数项与偶数项组成的两个子列收敛于同一个常数a，证明$\{a_n\}$也收敛于a.

证　$\forall \varepsilon>0$，由于$\lim\limits_{n\to\infty} a_{2m}=a$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_{2m+1}=a$，$\exists N_1,N_2\in \mathbf{N}_+$，对$\forall m>N_i$，$i=1,2$，恒有$|a_{2m}-a|<\varepsilon$，$|a_{2m+1}-a|<\varepsilon$. 所以取$N=\max\{N_1,N_2\}$，当$n>N$时，$|a_n-a|<\varepsilon$成立，其中$n=2m$或$n=2m+1$，故$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$.

10. 求下列数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{5}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\left(1+\dfrac{3}{n}\right)=\dfrac{1}{5}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{3}+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n\dfrac{1}{3}}{1+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}}=\dfrac{1}{3}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n(n+1)}{2(n+2)}-\dfrac{n}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n}{2(n+2)}=-\dfrac{1}{2}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+4}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt{1+\dfrac{4}{n}}+1}=2$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}=2$.

(6) 由于$\sqrt[n]{2}\leqslant\sqrt[n]{2+\sin^2 n}\leqslant\sqrt[n]{3}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+\sin^2 n}=1.$$

(7) $\dfrac{1+4+\cdots+n^2}{n^3+n}\leqslant\dfrac{1}{n^3+1}+\dfrac{4}{n^3+2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+n}\leqslant\dfrac{1+4+\cdots+n^2}{n^3+1}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+4+\cdots+n^2}{n^3+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2+1}=\frac{1}{3},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+4+\cdots+n^2}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3+1}=\frac{1}{3},$$

所以由夹逼性$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^3+1}+\dfrac{4}{n^3+2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+n}\right)=\dfrac{1}{3}$.

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-1}=\mathrm{e}$.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-1}{n}\right)^{-n}\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}$.

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n-4}\right)^{n+4}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n-4}\right)^{n-4}\left(1+\dfrac{1}{n-4}\right)^8=\mathrm{e}$.

11. 判别下列数列的敛散性.

(1) $a_n=\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+1}+\cdots+\frac{1}{3^n+1}$.

$0\leqslant a_n\leqslant\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\leqslant\frac{1}{2}$,$\{a_n\}$有界,

因为 $$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{3^{n+1}+1}\geqslant a_n,\{a_n\}\text{单调增}.$$

由单调有界准则,$\{a_n\}$收敛.

(2) $a_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

$$0\leqslant a_n\leqslant 1,\text{且 } a_{n+1}=a_n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\leqslant a_n.$$

故$\{a_n\}$单减有下界.从而$\{a_n\}$收敛.

(3) $a_1=\sqrt{2},a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\cdots,a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}},\cdots$.

$0<a_1=\sqrt{2}<2,0<a_2=\sqrt{2+a_1}<2$,由数学归纳法证得 $0<a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}<2,n=1,2,\cdots$.

$$a_{n+1}-a_n=\sqrt{2+a_n}-a_n=\frac{(2-a_n)(a_n+1)}{\sqrt{2+a_n}+a_n}>0,$$

故$\{a_n\}$为单增有界数列,即$\{a_n\}$收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,则 $A\geqslant 0$.由 $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$得

$$A=\sqrt{A+2},\text{所以 } A=2.$$

(4) $a_n=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$.

因为 $a_n<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$ (因为 $k\geqslant 2$ 时,$2^{k-1}<k!$)

$$=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)<2,$$

且 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{(n+1)!}>a_n$,故$\{a_n\}$单增有上界.$\{a_n\}$收敛.

注意,还可用下述方法证明 a_n 的有界性.

$$a_n<1+\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=2-\frac{1}{n}<2.$$

(5) $a_n=1+\frac{\sin 1}{1^2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{n^2}$.

$$
\begin{aligned}
|a_{n+p}-a_n| &= \left|\frac{\sin(n+1)}{(n+1)^2}+\frac{\sin(n+2)}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{\sin(n+p)}{(n+p)^2}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2} \\
&\leqslant \frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\
&\leqslant \frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n},
\end{aligned}
$$

则 $\forall \varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，$\forall p\in\mathbf{N}_+$，有 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$，由 Cauchy 原理知，原数列 $\{a_n\}$ 收敛.

13. 求下列数列的极限点：

(1) $\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{8},\frac{7}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\frac{2^n-1}{2^n},\cdots$.

因为　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n}=1$，所以此数列有两个极限点 0，1.

(2) $a_n=3\left(1-\frac{1}{n}\right)+2(-1)^n$.

因为　$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=5,\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}=1$，所以此数列有两个极限点 5，1.

(3) $a_n=\frac{n+(-1)^n n}{2}+\frac{1}{n}$.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}=0$，所以此数列有唯一的极限点 0.

14. 设 $0<x_1<1,x_{n+1}=1-\sqrt{1-x_n}$，证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

解　因为 $0<x_1<1$. 设 $0<x_{n-1}<1$，由数学归纳法证得 $0<x_n<1$.

又因为 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1-\sqrt{1-x_n}}{x_n}=\frac{1}{1+\sqrt{1-x_n}}<1$，即 $x_{n+1}<x_n$，$\{x_n\}$ 单调减，由单调有界准则知 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$. 由等式 $x_{n+1}=1-\sqrt{1-x_n}$ 得 $A=1-\sqrt{1-A}$，故 $A=0$，或 $A=1$（舍），故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1-x_n}}=\frac{1}{2}.$$

15. 设 $a>0,x_1>0,x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

证　因为 $a>0,x_1>0$，所以 $x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)\geqslant\sqrt{a}>0$，由数学归纳法可知

$x_n \geqslant \sqrt{a}$，从而

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{x_n^2}\right)\leqslant\frac{1}{2}(1+1)=1\text{，即 } x_{n+1}<x_n\text{，}$$

故$\{a_n\}$单减有下界. 故$\{a_n\}$收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$. 由于 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$且 $x_n\geqslant\sqrt{a}>0$，所以 $A>0$ 且 $A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{a}{A}\right)$. 故 $A=\sqrt{a}$.

16. 设$\{a_n\}$单调增，$\{b_n\}$单调减，$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$. 证明：$\{a_n\}$与$\{b_n\}$都收敛，并且有相同的极限.

证 由于$\{a_n\}$单调增，$\{b_n\}$单调减，所以$\{b_n-a_n\}$单调减，又由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，即 0 为单减数列$\{b_n-a_n\}$的下确界，所以 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，$b_n-a_n\geqslant 0$，即 $b_n\geqslant a_n$. 故单增数列$\{a_n\}$有上界 b_1，单调减数列$\{b_n\}$有下界 a_1. 从而$\{a_n\}$与$\{b_n\}$均收敛. 且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty}[(b_n-a_n)+a_n]=\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)+\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(B)

1. 判别数列$\{x_n\}$的收敛性，其中

$$x_n=a_0+a_1q+a_2q^2+\cdots+a_nq^n\ (|q|<1,|a_k|\leqslant M,k=0,1,2,\cdots).$$

解 若 $q=0$，$x_n=a_0$，$\{x_n\}$收敛.

若 $0<|q|<1$，由于$|a_k|\leqslant M$，$k=1,2,\cdots$，所以 $\forall n,p\in\mathbf{N}_+$，

$$\begin{aligned}|x_{p+n}-x_n|&=|a_{n+1}q^{n+1}+\cdots+a_{n+p}q^{n+p}|,\\&\leqslant M|q|^{n+1}\frac{1-|q|^p}{1-|q|}<\frac{M}{1-|q|}|q|^{n+1}.\end{aligned}$$

注意到 $\ln|q|<0$. 对 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{\ln(1-|q|)\varepsilon-\ln M}{\ln|q|}\right]\in\mathbf{N}_+$，对 $\forall n>N$，$p\in\mathbf{N}_+$，恒有$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$，由 Cauchy 收敛原理知$\{x_n\}$收敛.

2. 求下列数列的极限：

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{x^n-2}{x^n+2}=\begin{cases}\text{不存在}, & x=-1,\\ -\frac{1}{3}, & x=1,\\ -1, & |x|<1,\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{2}{x^n}}{1+\frac{2}{x^n}}=1, & |x|>1.\end{cases}$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2^2-1)(3^2-1)\cdots(n^2-1)}{2^2\cdot 3^2\cdot\cdots\cdot n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2-1)(3-1)\cdots(n-1)(2+1)(3+1)\cdots(n+1)}{2^2\cdot 3^2\cdot\cdots\cdot n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!(n+1)!}{2(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\sin^2 n+\cos^2 n}$

解　因为 $1\leqslant\sqrt[n]{2\sin^2 n+\cos^2 n}=\sqrt[n]{1+\sin^2 n}\leqslant\sqrt[n]{2}$，由夹逼性

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\sin^2 n+\cos^2 n}=1.$$

(5) **解法一**　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}}=\frac{e^3}{e^6}=\frac{1}{e^3}$.

解法二　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{-(n+2)}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{2}\right]^{-3}=e^{-3}$.

(6) **解法一**　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3-2}\right)^{4n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{n^3}\right)^{-n^3}\right]^{-4}\Big/\left[\left(1+\frac{-2}{n^3}\right)^{-\frac{n^3}{2}}\right]^{-8}=e^4$.

解法二　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3-2}\right)^{4n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^3-2}\right)^{n^3-2}\left(1+\frac{1}{n^3-2}\right)^{2}\right]^{4}=e^4$.

3. 证明：

(1) 若 $a_n\to 0$，则 $b_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\to 0(n\to\infty)$；

(2) 若 $a_n\to a$，则 $b_n\to a(n\to\infty)$，b_n 同(1)。

解　(1) 由 $a_n\to 0(n\to\infty)$知：$\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in\mathbf{N}_+$，使$\forall n>N_1$，$|a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$.

而由$\frac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$知：$\exists N_2\in\mathbf{N}_+$. 使$\forall n>N_2$，$\frac{|a_1+\cdots+a_{N_1}|}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$，

从而$|b_n|=\left|\frac{a_1+\cdots+a_{N_1}}{n}+\frac{a_{N_1+1}+\cdots+a_n}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\left(1-\frac{N_1}{n}\right)\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

(2) 令 $\bar{a}_n=a_n-a$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\bar{a}_n=0$. 由结论(1)，

$$\lim_{n\to\infty}\bar{b}_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\bar{a}_1+\cdots+\bar{a}_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-a\right)=0,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$.

4. 证明下列数列收敛，并求其极限：

(1) $x_n=\dfrac{n^k}{a^n}(a>1,k>0)$.

证 因为 $a>1,a^{\frac{1}{k}}>1$，令 $a^{\frac{1}{k}}=1+b(a>b>0)$，则

$$\frac{n^k}{a^n}=\left[\frac{n}{(1+b)^n}\right]^k=\left[\frac{n}{1+nb+\frac{1}{2}n(n-1)b^2+\cdots+b^n}\right]^k\leqslant\left[\frac{n}{nb+\frac{n}{2}(n-1)b^2}\right]^k$$

$$=\left[\frac{1}{b+\frac{1}{2}b^2(n-1)}\right]^k.$$注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b+\frac{1}{2}b^2(n-1)}=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$.

(2) $a_n=\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}}_{n\text{重}}\quad(a>0)$.

证 显然 $a_n>0$. $a_1=\sqrt{a}<1+\sqrt{a}$. 设 $a_{n-1}<1+\sqrt{a}$，则 $a_n=\sqrt{a+\sqrt{a_{n-1}}}<\sqrt{a+\sqrt{a}+1}<\sqrt{a}+1$. 由数学归纳法知. $\forall n\in\mathbf{N}_+,0<a_n<\sqrt{a}+1$. 即$\{a_n\}$有界.

又由数学归纳法：$a_1=\sqrt{a},a_2=\sqrt{a+a_1}>\sqrt{a}>a_1$，假设 $a_n>a_{n-1}$，那么$a_{n+1}=\sqrt{a+a_n}>\sqrt{a+a_{n-1}}=a_n$. 故$\{a_n\}$为单增数列. 从而$\{a_n\}$收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，由 $a_{n+1}=\sqrt{a+a_n}$可知 $A=\sqrt{a+A}$.

注意到 $0<a_n<\sqrt{a}+1$，可得 $A=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

(3) $0<x_1<\sqrt{3},x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$.

证 因为 $0<x_1<\sqrt{3}$，所以 $x_n>0$. ($\forall n\in\mathbf{N}_+$).

$$x_2-\sqrt{3}=\frac{(3-\sqrt{3})(x_1-\sqrt{3})}{3+x_1}<0.\ \text{所以}\ 0<x_2<\sqrt{3}.$$

假设 $0<x_{n-1}<\sqrt{3}$，那么 $x_n-\sqrt{3}=\dfrac{(3-\sqrt{3})(x_{n-1}-\sqrt{3})}{3+x_{n-1}}<0$，由数学归纳法知 $0<x_n<\sqrt{3}$，即$\{x_n\}$有界.

因为 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{3-x_n^2}{3+x_n}=\dfrac{(\sqrt{3}-x_n)(\sqrt{3}+x_n)}{3+x_n}>0$，所以 $x_{n+1}>x_n$，$\{x_n\}$单调增. 故$\{x_n\}$收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$，则 $0\leqslant A\leqslant\sqrt{3}$. 且 $A=\dfrac{3(1+A)}{3+A}$，即 $A=\sqrt{3}$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{3}$.

(4) $a_1=1, a_n=1+\dfrac{1}{a_{n-1}+1}\quad(n=2,3,\cdots)$.

证　由 $a_1=1<\sqrt{2}, a_n>0$ 且 $a_n-\sqrt{2}=\dfrac{-(a_{n-1}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{a_{n-1}+1}\ (n=1,2,\cdots)$ 知 $a_n-\sqrt{2}$ 与 $a_{n-1}-\sqrt{2}$ 异号. 从而 $0<a_{2m-1}<\sqrt{2}, a_{2m}>\sqrt{2}. m=1,2,\cdots$.

又因为 $a_{n+2}-a_n=1+\dfrac{1}{1+\left(1+\dfrac{1}{1+a_n}\right)}-a_n=\dfrac{2(2-a_n^2)}{2a_n+3}, n=1,2,\cdots$，

所以 $\{a_{2m}\}$ 单调减，$\{a_{2m-1}\}$ 单调增.

由单调收敛准则，$\{a_{2m}\}$，$\{a_{2m-1}\}$ 均收敛.

不妨设 $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m}=A$，则 $A\geqslant\sqrt{2}$. 又因为 $a_{2m+2}=\dfrac{3a_{2m}+4}{2a_{2m}+3}$，所以 $A=\dfrac{3A+4}{2A+3}$，即 $A=\sqrt{2}$.

同理可证 $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m-1}=\sqrt{2}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt{2}$.

5. $\{a_n\}$ 为一单增数列，并且有一子列收敛于 a，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$.

证法一　设 $\{a_{n_k}\}$ 为 $\{a_n\}$ 的收敛于 a 的子列.

假设 $\{a_n\}$ 无上界，则 $\forall M>0$. $\exists n_0\in\mathbf{N}_+$，使 $a_{n_0}>M$. 又因为 $\{a_n\}$ 单调增，所以 $a_{n_0+p}>a_{n_0}>M$，$\exists p_0\in\mathbf{N}_+$ 使 $a_{n_0+p_0}\in\{a_{n_k}\}$，所以 $\{a_{n_k}\}$ 无界与已知矛盾. 所以 $\{a_n\}$ 有上界. 由单调收敛原理，$\{a_n\}$ 收敛且 $a_{n_k}\to a.\ (k\to\infty)$.

证法二　由 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛于 a 知；$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in\mathbf{N}_+$，使 $\forall k>N_1$，$|a_{n_k}-a|<\varepsilon$. 取 $N=n_{N_1+1}$. $\forall n>N$ 存在 $k\in\mathbf{N}_+$，使 $a_{n_k}, a_{n_{k+1}}\in\{a_{n_k}\}$ 且 $n_k\leqslant n\leqslant n_{k+1}$. 再注意到 $\{a_n\}$ 单调增可得 $a_{n_k}\leqslant a_n\leqslant a_{n_{k+1}}$. 从而

$$|a_n-a|\leqslant\max\{|a_{n_k}-a|, |a_{n_{k+1}}-a|\}<\varepsilon,$$

故 $\{a_n\}$ 收敛于 a.

6. 设 $a_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证　由于 $\forall n,p\in\mathbf{N}_+$，$|a_{n+p}-a_n|=\left|\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{(-1)^{p-1}}{n+p}\right|$.

当 p 为偶数时，$\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n+p-1}-\dfrac{1}{n+p}\right)>0$.

当 p 为奇数时，$\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n+p-2}-\dfrac{1}{n+p-1}\right)+\dfrac{1}{n+p}>0$.

利用上述结论易得 $|a_{n+p}-a_n|=\dfrac{1}{n+1}-\left(\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}+\cdots+\dfrac{(-1)^{p-1}}{n+p}\right)<$

$\frac{1}{n+1}$. 所以 $\forall \varepsilon>0$，只要取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则 $\forall n>N$ 及 $p\in \mathbf{N}_+$，恒有 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$. 故 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 列，因而收敛.

7. 设 $\{[a_n,b_n]\}$ 为一列闭区间，若满足条件：(1)它是递缩的：$[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq\cdots\supseteq[a_n,b_n]\supseteq\cdots$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，则称 $\{[a_n,b_n]\}$ 为一个**闭区间套**. 试利用单调有界原理证明**闭区间套定理**：任何闭区间套必有唯一的公共点，即存在唯一的 $\{\xi\}$，使 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{\xi\}$.

证　数列 $\{a_n\}$ 单增，$\{b_n\}$ 单减且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$. 由习题 1.2(A)第 16 题，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 均收敛. 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$ 且 $a_n\leqslant\xi\leqslant b_n$，即 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，$\xi\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$. 由极限的唯一性知 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{\xi\}$.

8. 利用闭区间套定理(第 7 题)证明 Weierstrass 定理.

证　设 $\{x_n\}$ 是有界数列，则必存在 $a_1,b_1\in\mathbf{R}$，使得 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，都有 $x_n\in[a_1,b_1]$. 等分 $[a_1,b_1]$ 为两个子区间，则至少有一个含 $\{x_n\}$ 的无穷多项，记该子区间为 $[a_2,b_2]$(若两个子区间都含 $\{x_n\}$ 的无穷多项，则可任取其一). 等分 $[a_2,b_2]$，按照同样的方法又可得含 $\{x_n\}$ 无穷多项的子区间 $[a_3,b_3]$. 照此办理，可得一个闭区间列 $\{[a_k,b_k]\}$，满足：

$$[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq\cdots\supseteq[a_k,b_k]\supseteq\cdots,$$
$$b_k-a_k=\frac{b_1-a_1}{2^{k-1}}\to 0\ (k\to\infty),$$

因此它是一个闭区间套. 根据闭区间套定理，存在唯一的 $\xi\in\mathbf{R}$，使得 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k]=\{\xi\}$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_k=\lim\limits_{n\to\infty}b_k=\xi$.

由于每个闭区间都含数列 $\{x_n\}$ 的无穷多项，所以我们能在每个 $[a_k,b_k]$ 中选取 $\{x_n\}$ 的一项 x_{n_k}，并使 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，从而得到 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$，满足：

$$a_k\leqslant x_{n_k}\leqslant b_k\ (\forall k\in\mathbf{N}_+).$$

根据夹逼原理，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$.

习　题　1.3

(A)

3. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，且 $f(x)$ 在 x_0 有定义. 问在 $x\to x_0$ 的过程中，x 可否取