第二节 二重积分的计算

一、二重积分的几何意义

二、直角坐标系下二重积分的计算法

三、极坐标系下二重积分的计算法

四、曲线坐标下二重积分的计算法

2.1 二重积分的几何意义

定义: 设 $f(x, y)$ 是定义在有界闭区域 D 上的有界函数，将区域 D 任意分成 n 个小区域 $\Delta\sigma_k\ (k=1, 2, \cdots, n)$，任取一点 $(\xi_k, \eta_k)\in\Delta\sigma_k$，若存在一个常数 I，使

$$I=\lim_{\lambda\to 0}\underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k}_{积分和} \xlongequal{记作} \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

则称 $f(x, y)$ **可积**，称 I 为 $f(x, y)$ 在 D 上的**二重积分**.

积分和

$$\underset{积分域}{\iint_D} \boxed{\underbrace{f(x,y)}_{被积函数}\,\underbrace{\mathrm{d}\sigma}_{面积元素}}$$

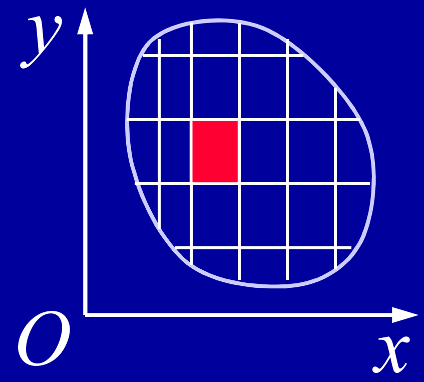
积分表达式

x, y 称为积分变量

积分域　被积函数　面积元素

如果 $f(x,y)$ 在 D 上可积，可用平行坐标轴的直线来划分区域 D，这时 $\Delta\sigma_k=\Delta x_k\Delta y_k$，因此面积元素 $\mathrm{d}\sigma$ 也常记作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，二重积分记作

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$



几何意义 曲顶柱体体积:

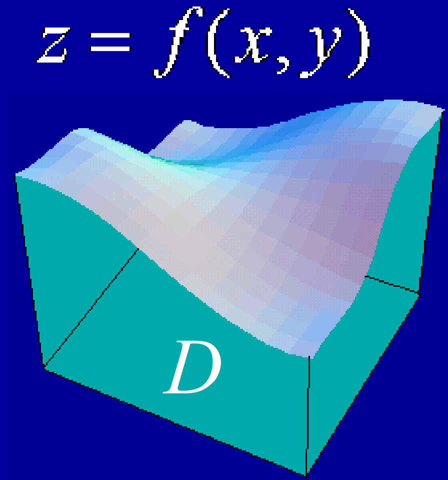
$$V=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

平面薄板的质量:

$$M=\iint_D \mu(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D \mu(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

设 $f \in C(D)$, $D \subseteq R^2$（有界闭区域）

二重积分：$\iint\limits_{(D)} f(x,y)d\sigma = \lim\limits_{d \to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k$

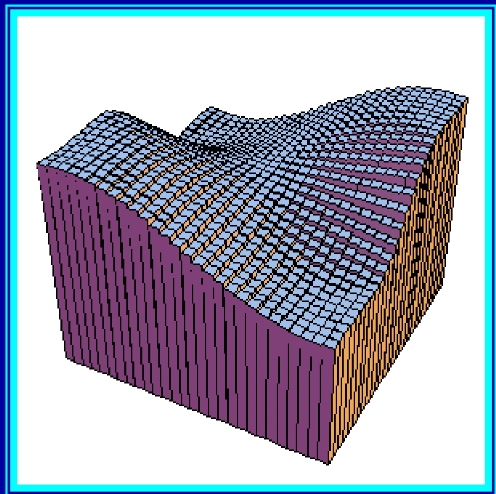


其几何意义就是曲顶柱体的体积

底： xOy 面上的闭区域 D

顶： 连续曲面 $z = f(x,y) \geq 0$

侧面： 以D的边界为准线，母线平行于 z 轴的柱面.



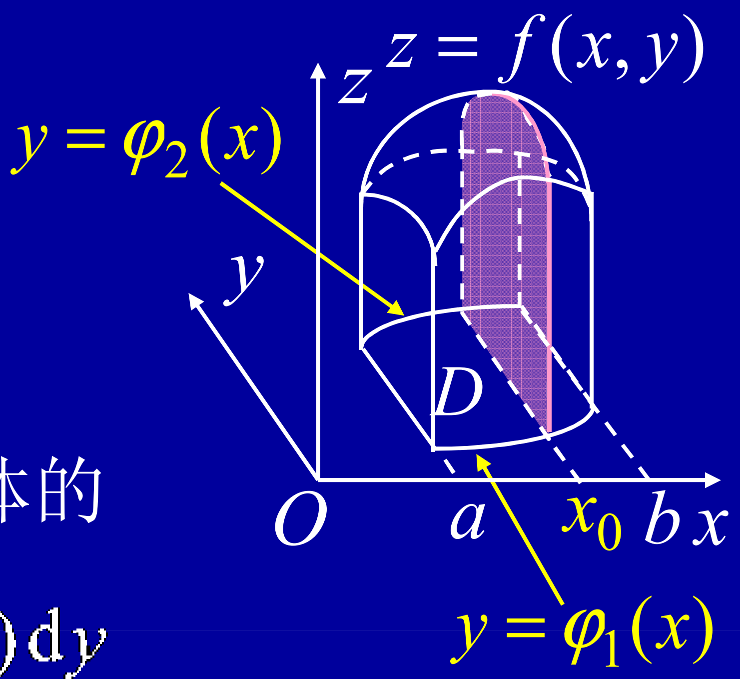
求体积： 类似定积分解决问题的思想:

"分, 匀, 合, 精"

曲顶柱体体积的计算

设曲顶柱的底为（ X - 型区域 ）

$$D=\left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{c} \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x) \\ a\le x\le b \end{array} \right\}$$



任取 $x_0\in[a,b]$，平面 $x=x_0$ 截柱体的

截面积为 $A(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0,y)\,\mathrm{d}y$

故曲顶柱体体积为

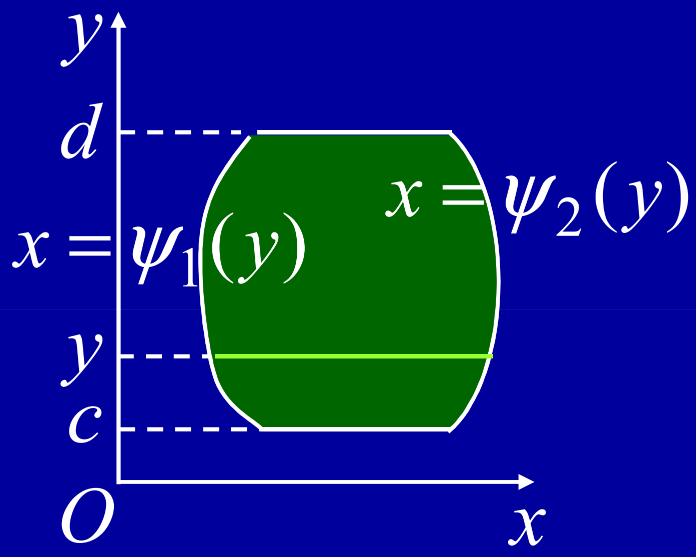
$$V=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \overset{\text{记作}}{=} \int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

同样, 曲顶柱的底为 （ Y- 型区域 ）

$$D=\{(x,y)\mid \psi_1(y)\le x\le \psi_2(y),\ c\le y\le d\}$$

则其体积可按如下两次积分计算



$$V=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

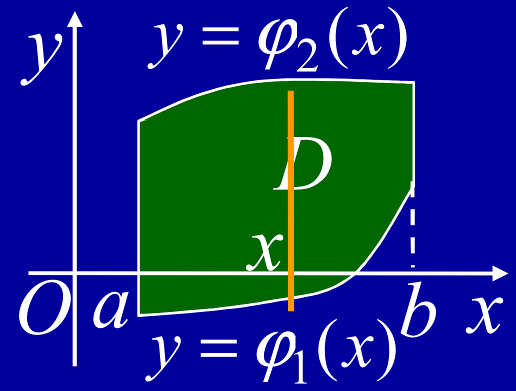
$$=\int_c^d\left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

记作

$$=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

二、直角坐标系下二重积分的计算法

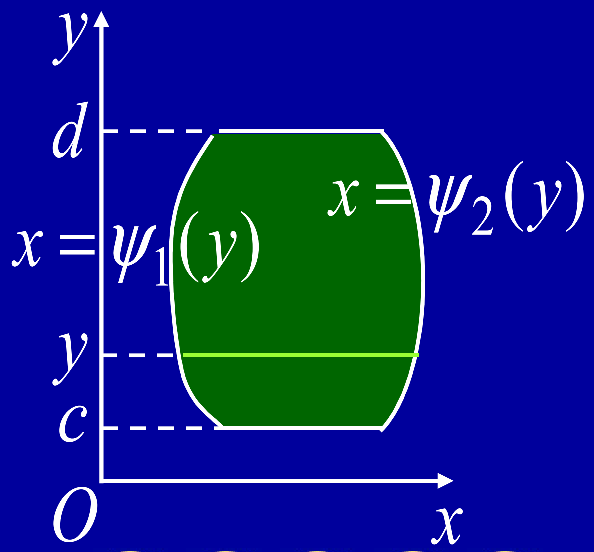
由曲顶柱体体积的计算可知, 当被积函数 $f(x,y)\ge 0$ 且在D上连续时, 若D为 X-型区域



$$D:\begin{cases}\varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\\ a\le x\le b\end{cases}$$

则 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

若D为Y-型区域 $D:\begin{cases}\psi_1(y)\le x\le \psi_2(y)\\ c\le y\le d\end{cases}$



则 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$

当被积函数 $f(x,y)$ 在 D 上变号时，由于

$$f(x,y)=\underbrace{\frac{f(x,y)+|f(x,y)|}{2}}_{f_1(x,y)}-\underbrace{\frac{|f(x,y)|-f(x,y)}{2}}_{f_2(x,y)}$$

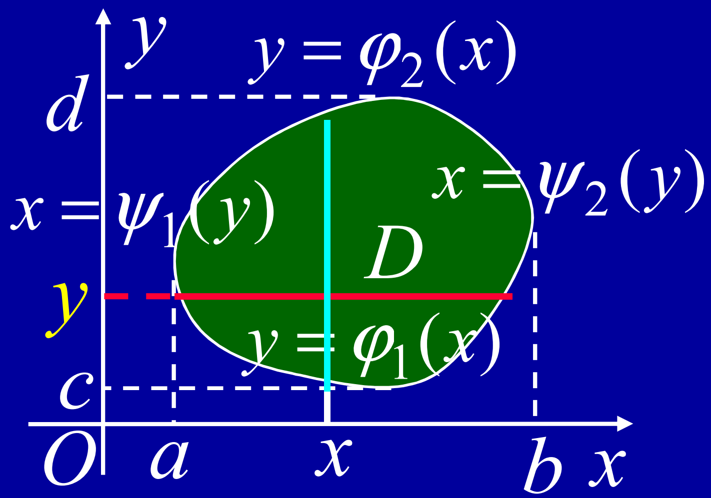
$f_1(x,y)$，$f_2(x,y)$ 均非负

$$\therefore\quad \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D f_1(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_D f_2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

因此上面讨论的累次积分法仍然有效．

说明: (1) 若积分区域既是 X - 型区域又是 Y - 型区域，

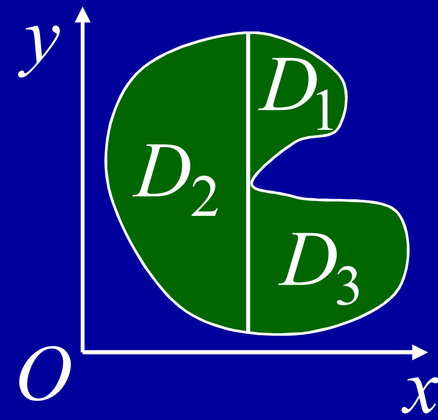
则有
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$



为计算方便,可**选择积分序**, 必要时还可以**交换积分序**.

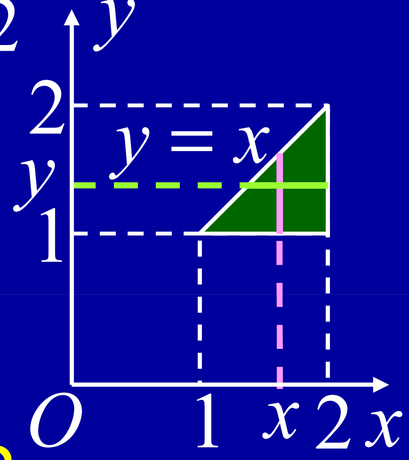
(2) 若积分域较复杂,可将它分成若干 X - 型域或 Y - 型域 ,则

$$\iint_D=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}+\iint_{D_3}$$



例1 计算 $I=\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$ 是直线 $y=1, x=2$, 及 $y=x$ 所围的闭区域.

解法1. 将D看作X - 型区域, 则$D:\begin{cases}1\le y\le x\\ 1\le x\le 2\end{cases}$



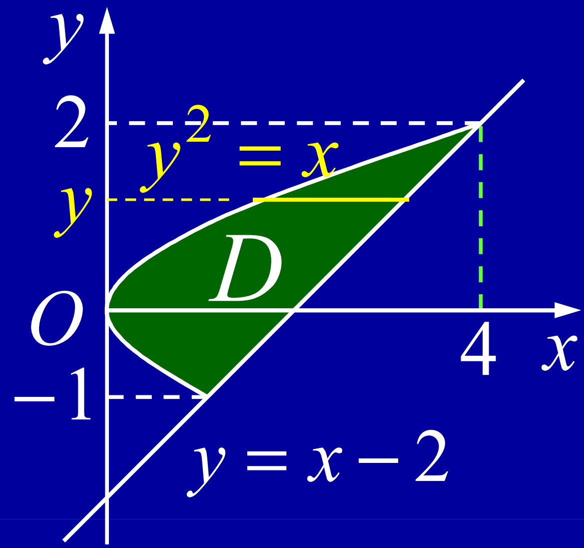
$$I=\int_1^2 \mathrm{d}x\int_1^x xy\,\mathrm{d}y=\int_1^2\left[\tfrac{1}{2}xy^2\right]_1^x \mathrm{d}x$$

$$=\int_1^2\left[\tfrac{1}{2}x^3-\tfrac{1}{2}x\right]\mathrm{d}x=\frac{9}{8}$$

解法2. 将D看作Y - 型区域, 则$D:\begin{cases}y\le x\le 2\\ 1\le y\le 2\end{cases}$

$$I=\int_1^2 \mathrm{d}y\int_y^2 xy\,\mathrm{d}x=\int_1^2\left[\tfrac{1}{2}x^2y\right]_y^2\mathrm{d}y=\int_1^2\left[2y-\tfrac{1}{2}y^3\right]\mathrm{d}y=\frac{9}{8}$$

例2.3 计算 $\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是抛物线 $y^2=x$ 及直线 $y=x-2$ 所围成的闭区域.



解: 为计算简便, 先对 x 后对 y 积分,

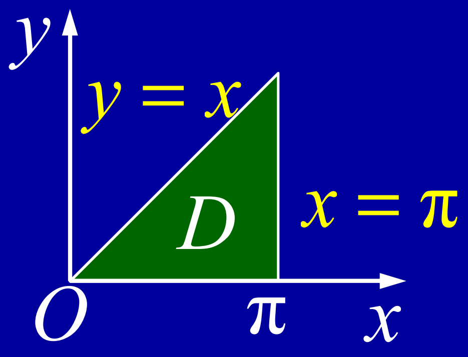
则 $D:\begin{cases} y^2\le x\le y+2 \\ -1\le y\le 2 \end{cases}$

$$\therefore \iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma = \int_{-1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2}xy\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{2}\left[\tfrac{1}{2}x^2y\right]_{y^2}^{y+2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}[y(y+2)^2-y^5]\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{y^4}{4}+\frac{4}{3}y^3+2y^2-\frac{1}{6}y^6\right]_{-1}^{2}=\frac{45}{8}$$

例3 计算 $\iint_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$ 是直线 $y=x,\ y=0,$ $x=\pi$ 所围成的闭区域.



解: 由被积函数可知,先对 x 积分不行,

因此取D 为X - 型域 :

$$D:\begin{cases} 0\le y\le x \\ 0\le x\le \pi \end{cases}$$

$$\therefore\quad \iint_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\int_0^{x}\mathrm{d}y$$

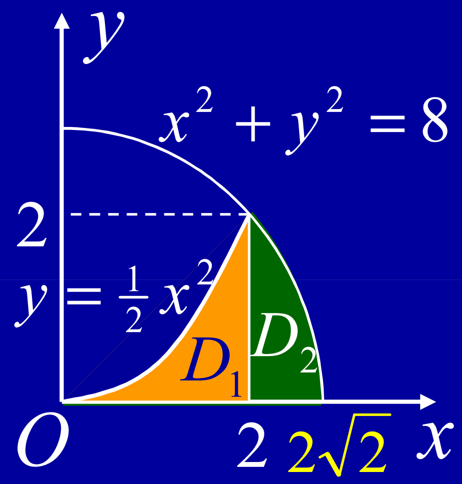
$$=\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = 2$$

说明: 有些二次积分为了积分方便, 还需交换积分顺序.

例4 交换下列积分顺序

$$I=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{x^2}{2}} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^{2\sqrt{2}} \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$$

解: 积分域由两部分组成:



$$D_1:\begin{cases}0\le y\le \frac{1}{2}x^2\\ 0\le x\le 2\end{cases},\quad D_2:\begin{cases}0\le y\le \sqrt{8-x^2}\\ 2\le x\le 2\sqrt{2}\end{cases}$$

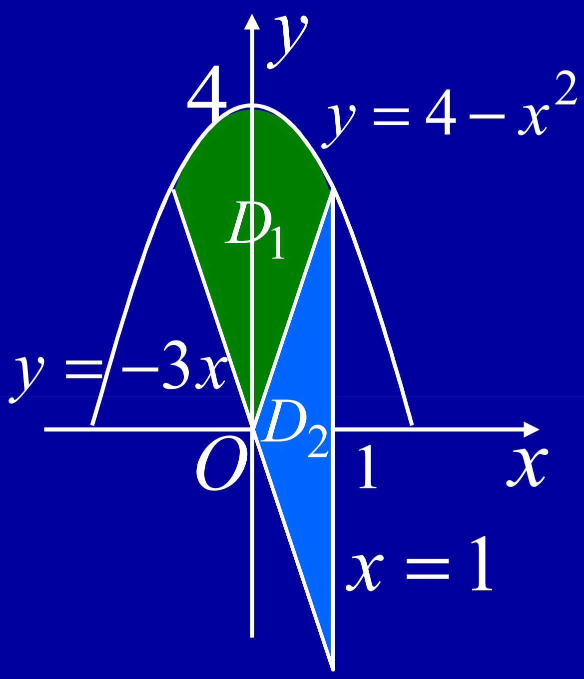
将 $D=D_1+D_2$ 视为 Y - 型区域，则

$$D:\begin{cases}\sqrt{2y}\le x\le \sqrt{8-y^2}\\ 0\le y\le 2\end{cases}$$

$$I=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^2 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$$

例5. 计算 $I=\iint_D x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由 $y=4-x^2,\ y=-3x,\ x=1$ 所围成.

解: 令 $f(x,y)=x\ln(y+\sqrt{1+y^2})$



$$D=D_1\cup D_2\ (\text{如图所示})$$

显然，在 D_1 上，$f(-x,y)=-f(x,y)$

在 D_2 上，$f(x,-y)=-f(x,y)$

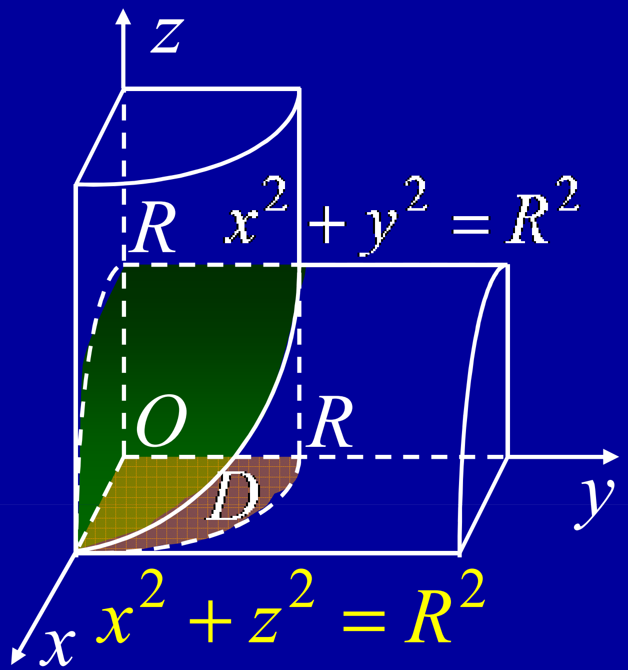
$$\therefore\quad I=\iint_{D_1} x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\iint_{D_2} x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

例6. 求两个底圆半径为R的直交圆柱面所围的体积.

解: 设两个直圆柱方程为

$$x^2+y^2=R^2,\quad x^2+z^2=R^2$$



利用对称性, 考虑第一卦限部分,

其曲顶柱体的顶为 $z=\sqrt{R^2-x^2}$

$$(x,y)\in D:\begin{cases}0\le y\le\sqrt{R^2-x^2}\\0\le x\le R\end{cases}$$

则所求体积为

$$V=8\iint_D\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=8\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y$$

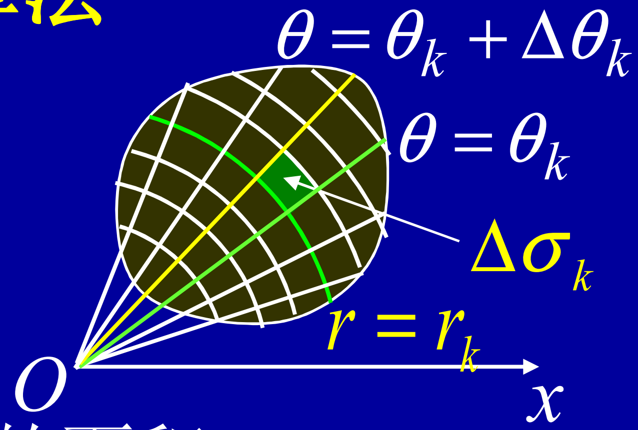
$$=8\int_0^R(R^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{16}{3}R^3$$

2.3 极坐标系下二重积分的计算法

在极坐标系下, 用同心圆 r =常数

及射线 θ =常数, 分划区域D 为

$$\Delta\sigma_k \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

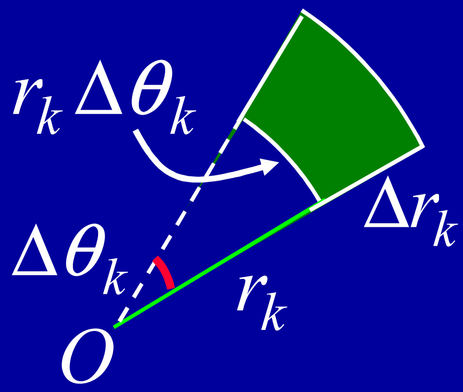


则除包含边界点的小区域外,小区域的面积

$$\Delta\sigma_k=\tfrac{1}{2}(r_k+\Delta r_k)^2\cdot\Delta\theta_k-\tfrac{1}{2}r_k{}^2\cdot\Delta\theta_k$$

$$=\tfrac{1}{2}[r_k+(r_k+\Delta r_k)]\Delta r_k\cdot\Delta\theta_k$$

$$=\overline{r_k}\Delta r_k\cdot\Delta\theta_k$$



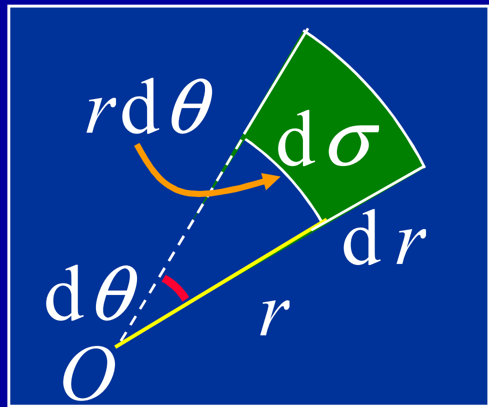
在 $\Delta\sigma_k$ 内取点$(\overline{r_k},\overline{\theta_k})$, 对应有

$$\xi_k=\overline{r_k}\cos\overline{\theta_k},\quad \eta_k=\overline{r_k}\sin\overline{\theta_k}$$

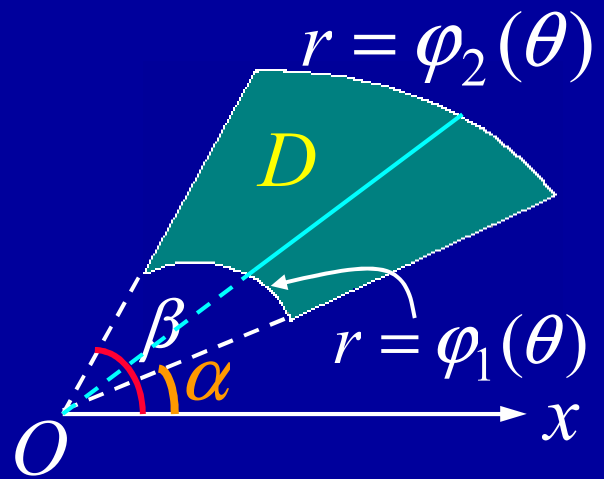
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\overline{r_k}\cos\overline{\theta_k},\overline{r_k}\sin\overline{\theta_k})\overline{r_k}\Delta r_k\Delta\theta_k$$

即 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

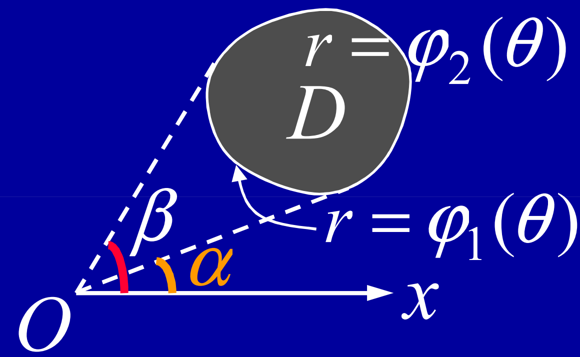


设 $D:\begin{cases}\varphi_1(\theta)\le r\le\varphi_2(\theta)\\ \alpha\le\theta\le\beta\end{cases}$，则

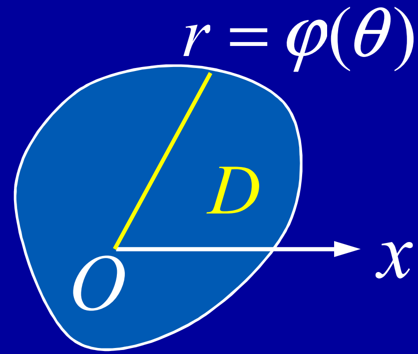


$$\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$$



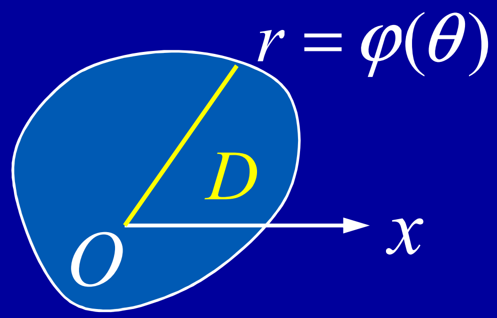
特别，对 $D:\begin{cases}0\le r\le\varphi(\theta)\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$



$$\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$$

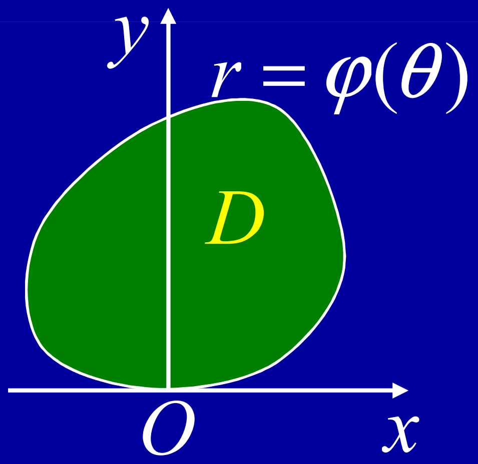
此时若 $f\equiv 1$ 则可求得D 的面积



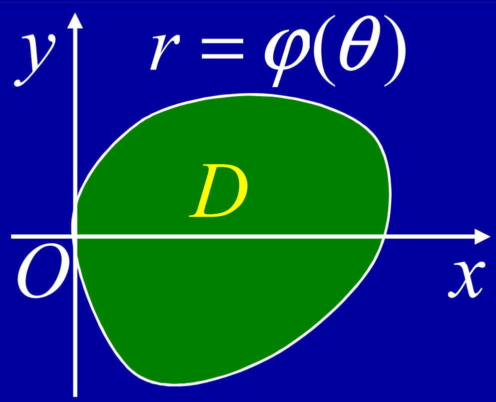
$$\sigma=\iint_D \mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

思考: 下列各图中域 D 分别与 x , y 轴相切于原点,试问 θ 的变化范围是什么?

(1)



(2)



答: (1) $0\le\theta\le\pi$; (2) $-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

例7. 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$, 其中 $D: x^2+y^2\le a^2$.

解: 在极坐标系下 $D: \begin{cases} 0\le r\le a \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$, 故

$$\text{原式} = \iint_D e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r e^{-r^2}\,dr$$

$$= 2\pi\left[\frac{-1}{2}e^{-r^2}\right]_0^a = \pi(1-e^{-a^2})$$

由于 e^{-x^2} 的原函数不是初等函数, 故本题无法用直角坐标计算.

例2.8 求球体 $x^2+y^2+z^2\le 4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$ 所截得的(含在柱面内的)立体的体积.

解: 设 $D:0\le r\le 2a\cos\theta,\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

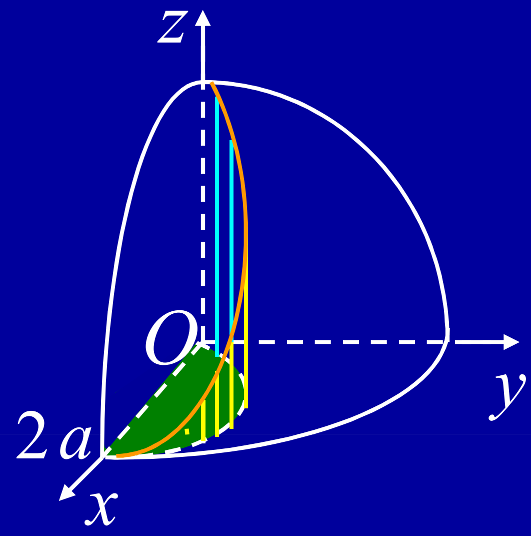
由对称性可知

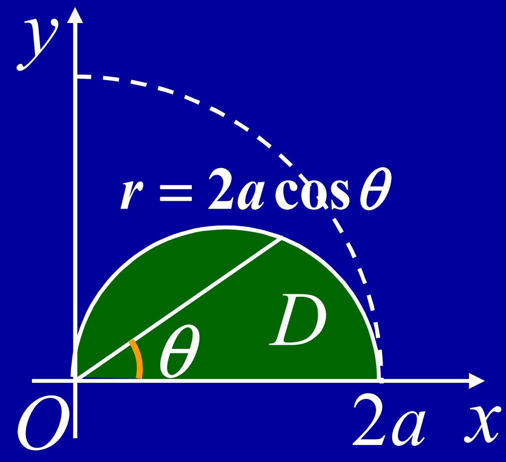
$$V=4\iint_D\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{32}{3}a^3\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{32}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$





2.4 曲线坐标下二重积分的计算法

在2.3段中我们看到，运用极坐标变换有时候可以使二重积分的计算简化．但是，极坐标只是一种特殊的坐标变换．为了计算二重积分，有时候需要使用其它的坐标变换．下面我们来介绍在一般形式的坐标变换下计算二重积分的方法，也就是二重积分的一般换元法．

作变换

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}, (x, y) \in (\sigma) \subsetneqq \boldsymbol{R}^2, (u, v) \in (\sigma') \subsetneqq \boldsymbol{R}^2 \quad (2.13)$$

若以下三个条件满足, 则称变换 (2.13) 为**正则变换**.

(1) 函数 $u, v \in C^{(1)}((\sigma))$;

(2) Jacobi 行列式 $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \neq 0, \forall x, y \in (\sigma)$;

(3) 此变换将域 (σ) 一一对应地映射为 (σ').

可以证明, 正则变换(2.13)存在唯一的逆变换

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}, \ (u,v) \in (\sigma') \qquad (2.14)$$

该逆变换也是正则的, 它将区域(σ')一一对应地映射为区域(σ). 而两个区域的内部对应内部, 外部对应外部, 边界对应边界.

类似于极坐标变换公式(2.4)的导出, 变换(2.13)可以看作是从xOy直角坐标平面到uOv直角坐标平面的映射, 它把xOy平面上的积分域(σ)映射为uOv平面上的积分域(σ').

为了在域(σ')上计算二重积分,我们用坐标线$u=C_1$,$v=C_2$来划分区域(σ'),其中C_1与C_2均为常数　显然,在uOv直角坐标平面上子域$(\Delta\sigma')$的面积$\Delta\sigma'=\Delta u\cdot\Delta v$,为了建立二重积分在这两个直角坐标系下的关系 ,我们需要知道$(\Delta\sigma')$在映射(2.13)下的原像是什么?

由 (2.13) 式可见:

uOv平面上的直线$u=u_0$,$u=u_0+\Delta u$在xOy平面上的原像分别为$u(x,y)=u_0$, $u(x,y)=u_0+\Delta u$;

$v = v_0$, $v = v_0 + \Delta v$的原像分别为

$v(x, y) = v_0, v(x, y) = v_0 + \Delta v.$

于是$(\Delta\sigma')$在xOy平面上的原像是由上述四条曲线所围成的区域$(\Delta\sigma)$(图6.23).由此可见,在uOv平面上对域(σ')用坐标线$u = C_1, v = C_2$划分,对应于在

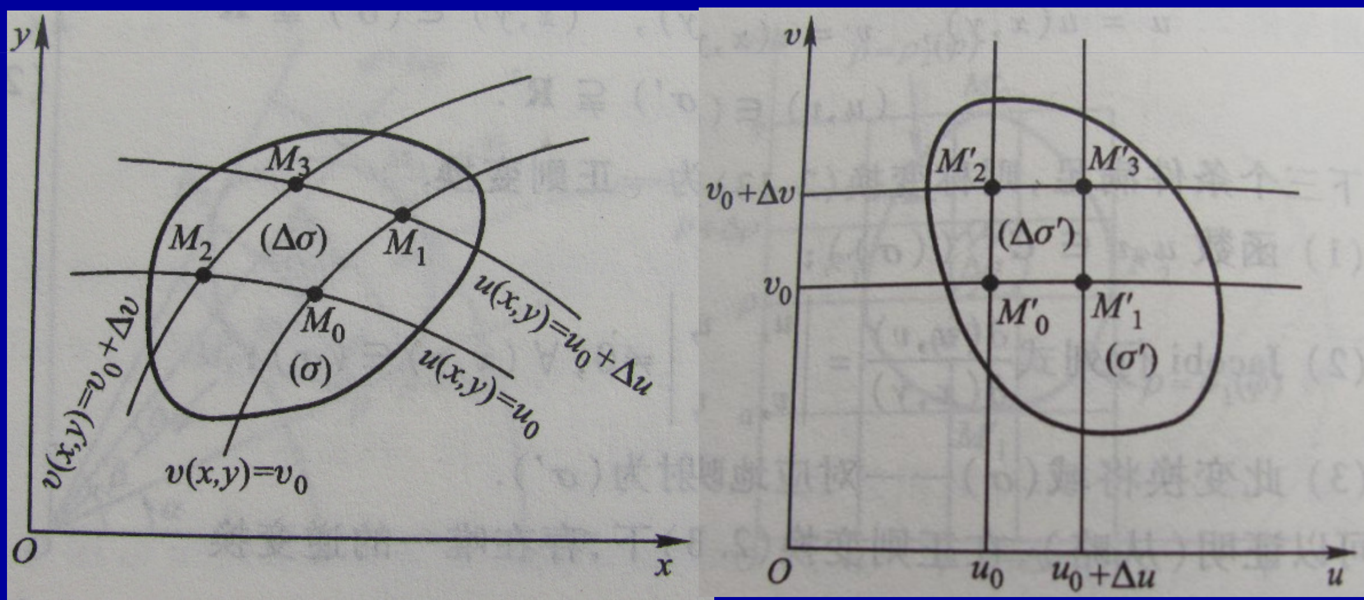


图6.23

在xOy平面上用曲线$u(x,y)=C_1, v(x,y)=C_2$对域(σ)进行划分．$u(x,y)=C_1, v(x,y)=C_2$分别称为**u 曲线族** 和 **v 曲线族**．于是，xOy 平面上任一点 M_0，既可用直角坐标(x_0, y_0)表示，也可用u曲线 $u(x,y)=u_0$ 和v曲线$v(x,y)=v_0$的交点表示为(u_0, v_0)，称为M_0点的**曲线坐标**．曲线坐标(u,v)与直角坐标(x,y)之间的转换关系由公式(2.13)与(2.14) 给出．由此可见，$(\Delta\sigma')$的四个顶点M_0', M_1', M_2' 与M_3' 在 xOy 平面上对应点的直角坐标分别为

$$M_0(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0)),\ M_1(x(u_0+\Delta u,v_0),y(u_0+\Delta u,v_0)),$$

$$M_2\left(x\left(u_0,v_0+\Delta v\right),y\left(u_0,v_0+\Delta v\right)\right),$$

$$M_3(x(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v),y(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v)),$$

当Δu与Δv充分小时,以上述四点为顶点的曲边四边形$(\Delta\sigma)$的面积$\Delta\sigma$可近似地看作是以向量$\overrightarrow{M_0M_1}$与$\overrightarrow{M_0M_2}$为邻边所构成的平行四边形的面积.由于

$$\overrightarrow{M_0M_1}=[x(u_0+\Delta u,v_0)-x(u_0,v_0)]\vec{i}$$

$$+[y(u_0+\Delta u,v_0)-y(u_0,v_0)]\vec{j}$$

$$\approx x_u(u_0,v_0)\Delta u\ \vec{i}+y_u(u_0,v_0)\Delta u\ \vec{j},$$

$$\overrightarrow{M_0M_2} = [x(u_0, v_0 + \Delta v) - x(u_0, v_0)]\vec{i}$$

$$+ [y(u_0, v_0 + \Delta v) - y(u_0, v_0)]\vec{j}$$

$$\approx x_v(u_0, v_0)\Delta v\,\vec{i} + y_v(u_0, v_0)\Delta v\,\vec{j},$$

从而

$$\Delta\sigma \approx \left\|\overrightarrow{M_0M_1} \times \overrightarrow{M_0M_2}\right\| \approx \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u\Delta u & y_u\Delta u & 0 \\ x_v\Delta v & y_v\Delta v & 0 \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)} \right\|$$

$$= \left| \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)} \right| \Delta u\Delta v = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|_{(u_0,v_0)} \Delta u\Delta v.$$

所以

$$d\sigma = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| d\sigma' \qquad (2.15)$$

其中 $d\sigma' = dudv$ 是 uOv 直角坐标平面上的面积微元.

(2.15) 式表明,映射 (2.13)将 xOy 平面上的面积微元 $d\sigma$ 映射成 uOv平面上的面积微元 $d\sigma'$, 使面积产生了伸缩,伸缩系数为 $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$. 于是, 在映射 (2.13) 的作用下, xOy 坐标系下的二重积分与 uOv 坐标系下的二重积分之间的关系为

$$\iint_{(\sigma)} f(x,y)d\sigma = \iint_{(\sigma')} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|d\sigma' \quad (2.16)$$

对于 uOv 直角坐标系下由 (2.16) 右端所表示的二重积分应用公式 (2.2) 或 (2.3)，便可将其化为对变量 u 与 v 的累次积分.

应当指出，如果 Jacobi 行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 在域 (σ') 上的个别点或一条曲线上为零，而在其它点上不为零，那么公式 (2.16) 仍成立.

例2.12 求 $I=\iint\limits_{(\sigma)}(y-x)d\sigma$，其中 (σ) 是由直线 $y=x+1$，$y=x-3$，$y=-\dfrac{x}{3}+\dfrac{7}{9}$ 及 $y=-\dfrac{x}{3}+5$ 所围成的区域(图6.21).

解 四条直线交点的坐标分别为

$$A\left(-\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right),\ B\left(\frac{17}{6},-\frac{1}{6}\right),$$

$$C(6,3),\ D(3,4)$$

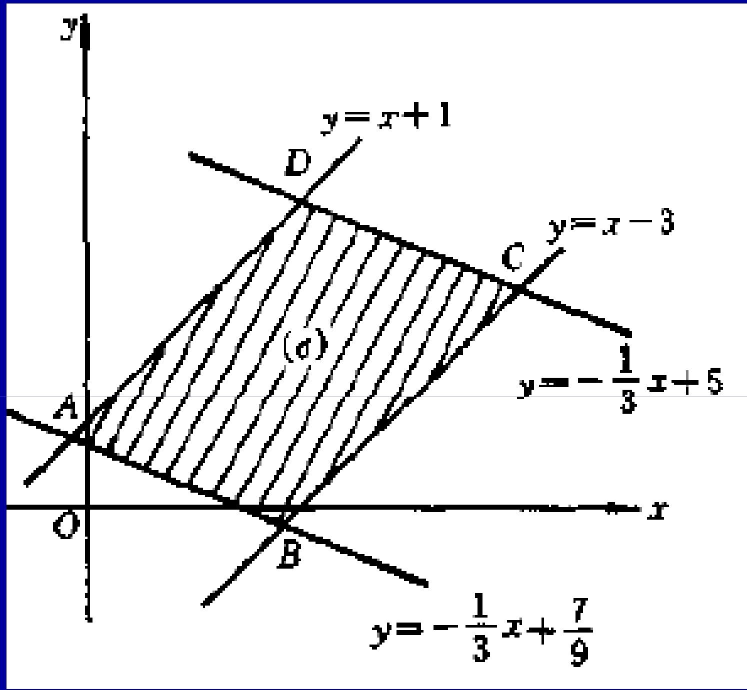


图6.21

从上图中能看出，不论先对 x 还是先对 y 积分,积分区域都要分成三部分，比较麻烦. 所以可改用**曲线坐标**.

由于积分区域(σ)的边界是由直线族$y-x=c_1$中的两条直线（对应于$c_1=1$与$c_1=-3$）以及直线族$y+\frac{1}{3}x=c_2$中的两条直线（对应于$c_2=7/9$与$c_2=5$）所围成，

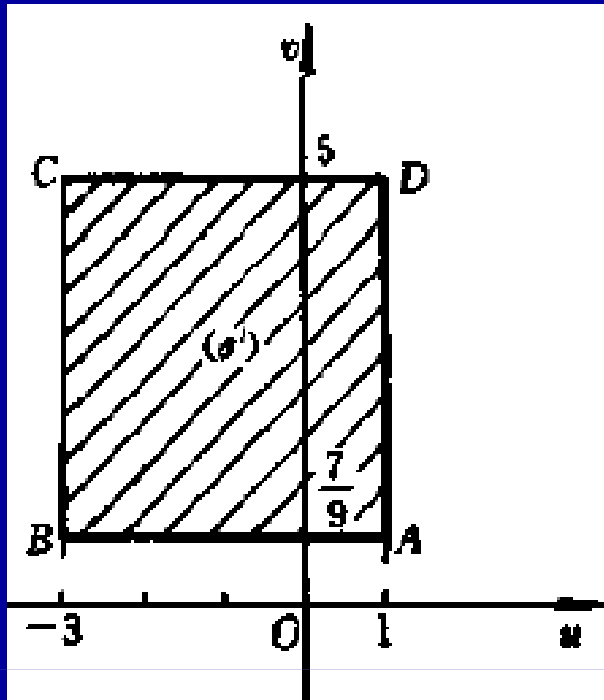


图6.22

这就启发我们作如下的变换：

$$u=y-x,\quad v=y+\frac{1}{3}x, \tag{2.17}$$

变换(2.17)将xOy平面上的区域(σ)映射成uOv直角坐标平面上的(σ')（图6.22）.

由于(见第五章公式(5.47))

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1/3 & 1\end{vmatrix}}=-\frac{3}{4}.$$

于是,由公式(2.16)可得

$$I=\iint_{(\sigma)}(y-x)d\sigma=\iint_{(\sigma')}\left[\left(\frac{1}{4}u+\frac{3}{4}v\right)-\left(-\frac{3}{4}u+\frac{3}{4}v\right)\right]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|d\sigma'$$

$$=\frac{3}{4}\iint_{(\sigma')}u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{3}{4}\int_{\frac{7}{9}}^{5}\mathrm{d}v\int_{-3}^{1}u\,\mathrm{d}u=-\frac{38}{3}.\quad\blacksquare$$

值得一提:由于变换(2.17)在 xOy 平面上的几何意义比较明显. 我们也可以直接在 xOy 平面上利用"无限累加"的思想通过变换把二重积分化为累次积分. 而不必把域 (σ) 映射到 uOv 平面上去计算. 这时利用 $u=y-x=C_1, v=y+\frac{1}{3}x=C_2$ 分割区域 (σ), 就是用与 (σ) 边界直线平行的直线族分割 (σ).

由公式(2.15)可知, 面积微元

$$\mathrm{d}\sigma=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{3}{4}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

从而，在 xOy 平面上就有

$$\iint\limits_{(\sigma)}(y-x)d\sigma=\iint\limits_{(\sigma)}\left[\left(\frac{1}{4}u+\frac{3}{4}v\right)-\left(-\frac{3}{4}u+\frac{3}{4}v\right)\right]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$=\frac{3}{4}\iint\limits_{(\sigma)}u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

在 (σ) 上"无限累加"乘积项 $u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ 时，先沿 u 增加方向累加，再沿 v 增加方向累加，由图6.21直接可得

$$I=\frac{3}{4}\iint\limits_{(\sigma)}u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{3}{4}\int_{\frac{7}{9}}^{5}\mathrm{d}v\int_{3}^{1}u\,\mathrm{d}u=-\frac{38}{3}.$$

例2.13 计算 $\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{xy}\,d\sigma$，其中$(\sigma)$为由曲线 $xy=1$，$xy=2$，$y=x$，$y=4x$ $(x>0,y>0)$所围成的区域.

解 由图**6.23** 可见，如果我们用直角坐标直接计算此积分，必须将积分域(σ)分成三个子域来进行，麻烦．所以我们采用曲线坐标变换：

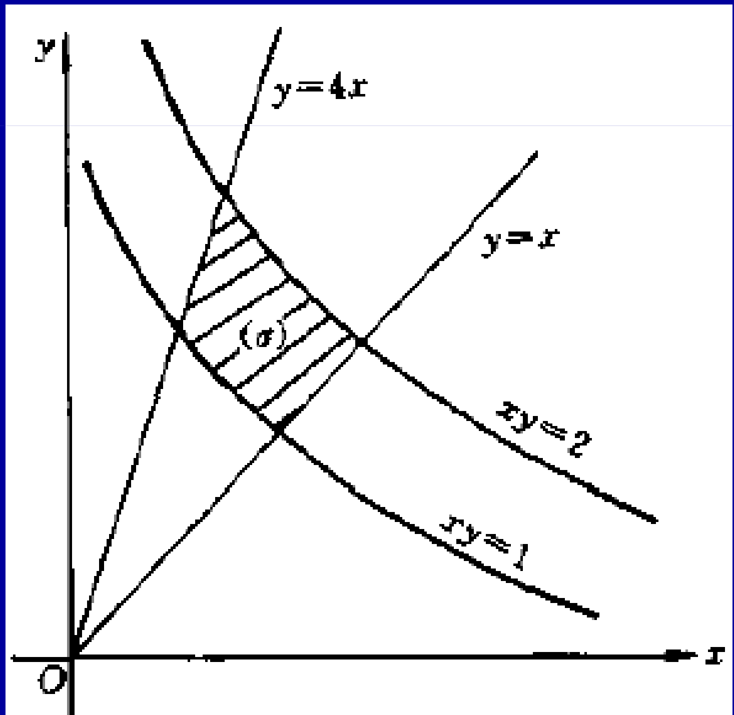


图6.23

$$u=xy,\quad v=\frac{y}{x}.\qquad (2.18)$$

在此变换下，(σ)的边界曲线映射成uOv平面中的水平线和铅直线

$$u=1,u=4,v=1,v=2.$$

变换：$u = xy,\quad v = \dfrac{y}{x}$.

$u=1,2,\ v=1,4$，这四条边界曲线围成了uOv平面直角坐标系中的矩形区域(σ')

$$(\sigma') = \{(u,v)\mid 1 \le u \le 2,\ 1 \le v \le 4\}$$

为了求得积分微元的变换式，

我们求出

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = 2\frac{y}{x}.$$

从而

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{2v}.$$

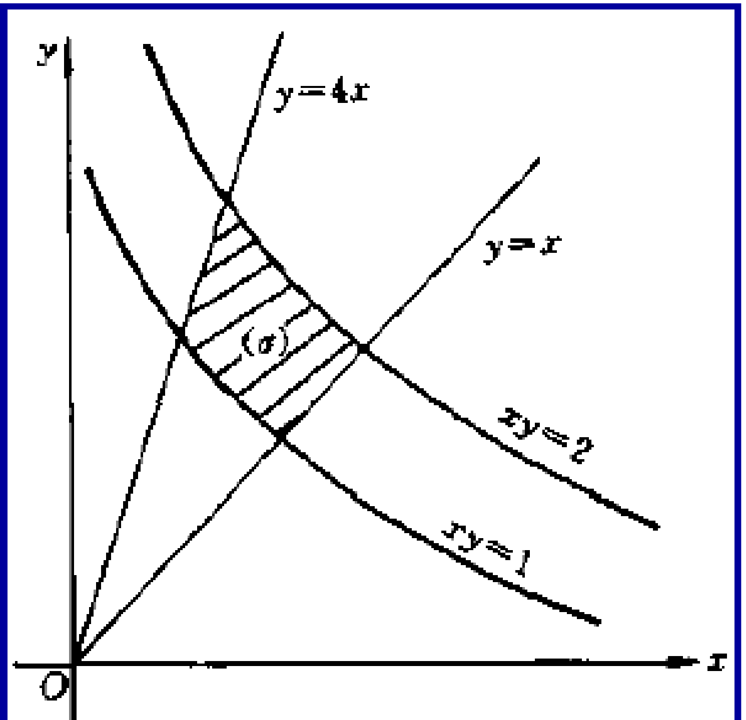


图6.23

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{(\sigma')} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|d\sigma' \quad (2.16)$$

$$f(x,y)=\sqrt{xy}=\sqrt{u},\ \mathrm{d}\sigma'=\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,\quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{2v}.$$

于是,根据公式(2.16)就有

$$\iint\limits_{(\sigma)} \sqrt{xy}\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{(\sigma')} \sqrt{u}\,\frac{1}{2v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^4 \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v\int_1^2 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)\ln 2. \quad \blacksquare$$

例2.14 计算 $I=\iint\limits_{(\sigma)} x^2\,d\sigma$, 其中$(\sigma)$为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的内部

解 由于积分域是椭圆，如果采用极坐标变换，积分域的边界曲线方程变得比较复杂,难以计算.为了简化积分域的边界曲线方程，我们运用曲线坐标变换：

$$\frac{x^2}{4}=\rho^2\cos^2\varphi,\quad \frac{y^2}{9}=\rho^2\sin^2\varphi,$$

即

$$x=2\rho\cos\varphi,\ y=3\rho\sin\varphi,\ (0\le\rho<+\infty,0\le\varphi\le 2\pi). \quad (2.19)$$

此变换的逆变换将 xOy 平面上所给的椭圆域映射成 $\varphi O\rho$ 平面直角坐标系中的矩形域

$$(\sigma')=\{(\varphi,\rho)\mid 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 1\}$$

由于

$$d\sigma = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\rho)}\right| d\rho\, d\varphi = 6\rho\, d\rho\, d\varphi,$$

从而

$$I = \iint_{(\sigma')} 4\rho^2 \cos^2\varphi \cdot 6\rho\, d\rho\, d\varphi = 24\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi \int_0^1 \rho^3\, d\rho$$

$$= 6\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = 6\pi. \quad ▌$$

[illegible]

$$x = a\rho\cos\varphi,\ y = b\rho\sin\varphi,\ (0 \le \rho < +\infty, 0 \le \varphi \le 2\pi)$$

称为 **广义极坐标变换**. 容易看出,在此变换下,面积微元

$$d\sigma = ab\rho\, d\rho\, d\varphi.$$

当 $a = b = 1$, 广义极坐标变换就是极坐标变换.