4. 设 $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ 是无界函数，证明：$\exists\{x_n\}\subseteq(a,b)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$.

证　因为 $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ 是无界函数，故 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，$\exists x_n\in(a,b)$，使 $f(x_n)>n$. 这样便得到一个数列 $\{x_n\}\subseteq(a,b)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$.

5. 设 $f:[a,+\infty)\to\mathbf{R}$，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$，使得 $\forall x_1,x_2>M$，恒有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

证　必要性　设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$，当 $x>M$ 时，恒有 $|f(x)-a|<\frac{\varepsilon}{2}$. 任取 $x_1,x_2>M$. 则

$$|f(x_i)-a|<\frac{\varepsilon}{2},\quad i=1,2,$$

于是 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|f(x_1)-a|+|f(x_2)-a|<\varepsilon$.

充分性　任取两个数列 $\{x_n\},\{y_n\}\subseteq[a,+\infty)$，且

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=+\infty.$$

(i) 证明数列 $\{f(x_n)\},\{f(y_n)\}$ 收敛.

由 $\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$，使 $\forall x_1,x_2>M$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 及 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ 知：对上述的 $M>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，使 $\forall m,n>N$ 有 $x_m,x_n>M$. 从而 $|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$，即对数列 $\{f(x_n)\}$ 来说：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，$\forall m,n>N$ 恒有 $|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$. 由数列的 Cauchy 收敛原理知数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛. 不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=a$.

同理可证 $\{f(y_n)\}$ 收敛.

(ii) 证明 $\{f(y_n)\}$ 也收敛于 a.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ 及已知条件 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，使 $x_n,y_n>M$，则 $|f(x_n)-a|<\frac{\varepsilon}{2}$，且 $|f(x_n)-f(y_n)|<\frac{\varepsilon}{2}$，进而

$$|f(y_n)-a|\leqslant|f(x_n)-f(y_n)|+|f(x_n)-a|<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=a$. 由(i)、(ii)，命题得证.

习　题　1.4

(A)

2. 下列说法是否正确？为什么？

(1) 无穷小量是很小很小的数，无穷大量是很大很大的数；

(2) 无穷小量就是数 0；数 0 是无穷小量；

(3) 无穷大量一定是无界变量；

(4) 无界变量一定是无穷大量；

(5) 无穷大量与有界量的乘积是无穷大量；

(6) 无限多个无穷小之和仍为无穷小.

解　(1) 不正确. 无穷小量和无穷大量都是变量，不是常数.

(2) 错误. 无穷小量是以 0 为极限的变量，数 0 是无穷小量. 除此之外，其他任意常数都不是无穷小量.

(3) 正确.

(4) 错误. $y=x\sin\frac{1}{x}$是无界变量，但 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$不存在，非无穷大.

(5) 错误. x 无穷大量. $\sin\frac{1}{x}$有界变量. 但 $x\sin\frac{1}{x}$不是无穷大.

(6) 错误. $\forall m\in\mathbf{N}_+$，$\frac{1}{\sqrt{n^2+m}}\to 0(n\to+\infty)$都是无穷小量.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

3. 下列运算是否正确？如有错误，请指出错在何处.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$

解　(1) 错. 利用无穷小的等价代换求极限时，只能对分子和分母中的无穷小因子进行.

(2) 错误. 这里应用了等价无穷小代换 $\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)\sim x^2\sin\frac{1}{x}(x\to 0)$，这是错误的. 因为这里疏忽了无穷小 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 作阶的比较时的前提条件：分母 $\beta(x)$ 不能等于零. 这里 $\beta(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$，当 x 取 $x_n=\frac{1}{n\pi}(n\in\mathbf{N}_+)$时，$\beta(x_n)=0$，且 $x_n\to+\infty$.

正确的解法为当 $x\neq 0$ 时，$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则 $\forall\ |x|<\delta$ 有

$$\left|\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}\right|\leqslant\frac{\left|x^2\sin\frac{1}{x}\right|}{|x|}\leqslant|x|<\varepsilon,$$

故 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)}{x}=0.$$

4. 当 $x\to 0$ 时，下列函数哪些是 x 的高阶无穷小？哪些是 x 的同阶或等价无穷小？哪些是 x 的低阶无穷小？并指出无穷小的阶数.

(1) $x^4+\sin 2x, x\in\mathbf{R}$； (2) $\sqrt{x(1-x)}, x\in(0,1)$；

(3) $\dfrac{2}{\pi}\cos\dfrac{\pi}{2}(1-x), x\in\mathbf{R}$； (4) $2x\cos x\sqrt[3]{\tan^2 x}, x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$；

(5) $\csc x-\cot x, x\in(0,\pi)$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+\sin 2x}{2x}=1$，所以 $x^4+\sin 2x$ 与 x 同阶.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x(1-x)}}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}=0$，$\sqrt{x(1-x)}$ 是 x 的低阶无穷小.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}=1$，所以 $\sqrt{x(1-x)}$ 是 $\dfrac{1}{2}$ 阶无穷小.

(3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{\pi}\cos\dfrac{\pi}{2}(1-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{\pi}{2}x}{\dfrac{\pi}{2}x}=1,$$ 所以 $\dfrac{2}{\pi}\cos\dfrac{\pi}{2}(1-x)\sim x$.

(4) $$\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x\sqrt[3]{\tan^2 x}}{x^{\frac{5}{3}}}=\lim_{x\to 0}2\cos x\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{2}{3}}=2,$$

所以 $2x\cos x\sqrt[3]{\tan^2 x}$ 是 x 的高阶无穷小，阶为 $\dfrac{5}{3}$.

(5) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\csc x-\cot x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\dfrac{x}{\sin x}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $\csc x-\cot x$ 与 x 同阶.

6. 证明下列关系式：

(1) $\arcsin x=x+o(x), x\to 0$；

(4) $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}\sim\dfrac{1}{4}x^3, x\to 0$；

(5) $\sqrt{x+\sqrt{1+\sqrt{x}}}\sim\sqrt{x}, x\to+\infty$；

(6) $1+\cos(\pi x)\sim\dfrac{\pi^2}{2}(x-1)^2, x\to 1$.

解 (1) 令 $t=\arcsin x$，$-\dfrac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=1$，

所以 $\arcsin x\sim x$，即 $x\to 0$，$\arcsin x=x+o(x)$.

(4) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{\dfrac{1}{4}x^3}=4\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3\left[\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right]}$$

$$=4\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}=1.$$

(5) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x^3}}}}=1$，

所以$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt{x}$，$x\to+\infty$.

(6) 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{\dfrac{\pi^2}{2}(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{\pi^2}\dfrac{2\cos^2\dfrac{\pi}{2}x}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4}{\pi^2}\cdot\dfrac{\sin^2\dfrac{\pi}{2}(1-x)}{(1-x)^2}=1$，

所以 $1+\cos\pi x\sim\dfrac{\pi^2}{2}(x-1)^2$，$x\to 1$.

7. 利用无穷小的等价代换求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2-2(1-\cos^2 x)}{3x^3+4\tan^2 x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}{x\tan x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)}{\sin 2x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt[3]{1+\tan x}-1)(\sqrt{1+x^2}-1)}{\tan x-\sin x}$；　(6) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(1-\sqrt{\cos x})\tan x}{(1-\cos x)^{\frac{3}{2}}}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\sin^2 x}=\dfrac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2-2(1-\cos^2 x)}{3x^3+4\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2-2\sin^2 x}{3x^3+4\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5-2\dfrac{\sin^2 x}{x^2}}{3x+4\dfrac{\tan^2 x}{x^2}}=\dfrac{3}{4}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}{x\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}\sin^2 x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt[3]{1+\tan x}-1)(\sqrt{1+x^2}-1)}{\tan x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{1}{3}\tan x\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)}{\dfrac{1}{2}x^3}=\dfrac{1}{3}$.

$\left(\text{由第 6 题(4)知：}x\to 0,\tan x-\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^3\right)$

(6) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(1-\sqrt{\cos x})\tan x}{(1-\cos x)^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(1-\sqrt{1+(\cos x-1)})\tan x}{(1-\cos x)^{\frac{3}{2}}}$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{-\frac{1}{2}(\cos x-1)x}{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{-\frac{1}{4}x^2x}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}x^3}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(B)

1. 设 P 是曲线 $y=f(x)$ 上的动点.若点 P 沿该曲线无限远离坐标原点时，它到某定直线 L 的距离趋于0,则称 L 为曲线 $y=f(x)$ 的**渐近线**.若直线 L 的斜率 $k\neq0$,称 L 为**斜渐近线**.

(1) 证明:直线 $y=kx+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 斜(或水平)渐近线充分必要条件为

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\qquad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

(2) 求曲线 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}(x\in\mathbf{R}\setminus\{-1\})$ 的斜渐近线方程.

证 (1) $f(x)$ 的点 $P(x,f(x))$ 到直线 $y=kx+b$ 的距离

$$d=\frac{|f(x)-kx-b|}{\sqrt{1+k^2}}.$$

且 $y=kx+b$ 为 $y=f(x)$ 的渐近线 $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to\infty}d=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$.

充分性　由于 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=b$,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$.

必要性　因为 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=b$.

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}[f(x)-kx-b]=0$. 所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}-k-\dfrac{b}{x}\right)=0$. 从而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$.

(2) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=1$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2+1}{x+1}-x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x}{1+x}=-1$,所以 $y=f(x)$ 的斜渐近线为 $y=x-1$.

2. 确定 a,b,c 的值,使下列极限等式成立:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax+b)=0$;

(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}=0.$

解 (1) 如果 $a\leqslant0$,则无论 b 取何值 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-x+1}-ax+b\right]=+\infty$,所以 $a>0$,由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-x+1}-ax+b\right]=0$ 可知 $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[ax-\sqrt{x^2-x+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(a^2-1)x^2+x-1}{ax+\sqrt{x^2-x+1}}$ 存在.所以 $a=1,b=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\dfrac{1}{2}$.

(2) 由 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}=0$ 知 $f(x)=a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}$ 是 $(x-1)^2$ 的高阶无穷小,所以 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0\Rightarrow c=2$,$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=0\Rightarrow b=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}=\dfrac{1}{2}$. 将 $c=2$,$b=\dfrac{1}{2}$ 代入 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}=0$ 可得 $a=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2-\frac{1}{2}(x-1)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2\sqrt{x^2+3}-(x+3)}{2(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3}{2(2\sqrt{x^2+3}+x+3)}=\dfrac{3}{16}$.

习 题 1.5

(A)

2. 两个在 x_0 处不连续函数之和在 x_0 是否一定不连续?若其中一个在 x_0 处连续,一个在 x_0 处不连续,则它们的和在 x_0 处是否一定不连续?

证 两个在 x_0 处不连续函数之和在 x_0 不一定连续,不一定不连续.

如:$f(x)=\dfrac{1}{x}$,$g(x)=-\dfrac{1}{x}+\sin x$,$h(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x_0=0$ 处均不连续.但 $f(x)+g(x)$ 在 $x_0=0$ 处连续,$f(x)+h(x)$ 在 $x_0=0$ 处不连续.

如果一个函数在 x_0 处连续,另一个不连续,两个之和一定不连续.

3. 证明:若 f 连续,则 $|f|$ 也连续,逆命题成立吗?

证 因为 $\forall\varepsilon>0$,由 f 在 x_0 处连续可知:$\exists\delta>0$,使得 $\forall x$,只要 $|x-x_0|<\delta$,有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,从而

$$\big||f(x)|-|f(x_0)|\big|\leqslant|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|f(x_0)|$.命题得证.逆命题不成立,如 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ $|f(x)|$ 在 $x=0$ 连续,但 $f(x)$ 在 $x=0$ 不连续.