第二节
微积分基本公式与基本定理

一、问题的提出

变速直线运动中位置函数与速度函数的联系

设某物体作直线运动，已知速度$v = v(t)$是时间间隔$[T_1, T_2]$上t的一个连续函数，且$v(t) \geq 0$，求物体在这段时间内所经过的路程.

变速直线运动中路程为 $\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt$

另一方面这段路程可表示为 $s(T_2) - s(T_1)$

$\therefore \int_{T_1}^{T_2} v(t)dt = s(T_2) - s(T_1)$.　其中 $s'(t) = v(t)$.

二、积分上限函数及其导数

设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，并且设x为$[a,b]$上的一点，考察定积分

$$\int_a^x f(t)dt$$

如果上限x在区间$[a,b]$上任意变动，则对于每一个取定的x值，定积分有一个对应值，所以它在$[a,b]$上定义了一个函数，

记 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt.$ 积分上限函数

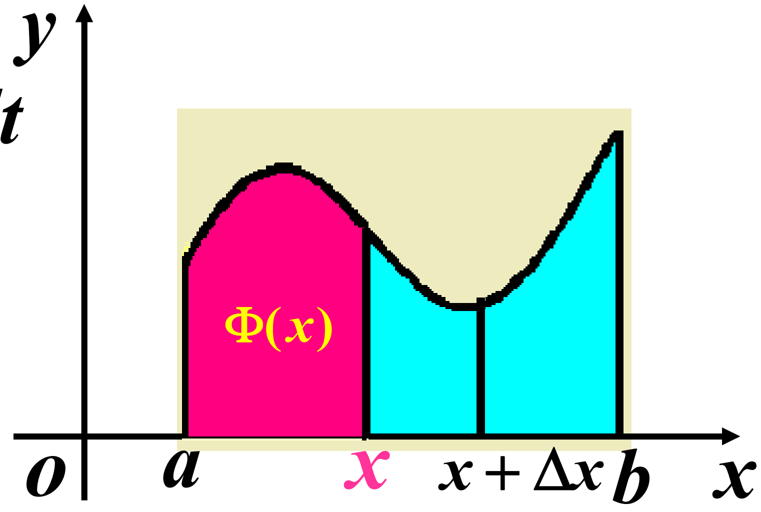
积分上限函数的性质

定理 1 如果$f(x)$在$[a,b]$上连续，则积分上限的函数$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上具有导数，且它的导数是$\Phi'(x)=\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x) \qquad (a\le x\le b)$

证 $\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$

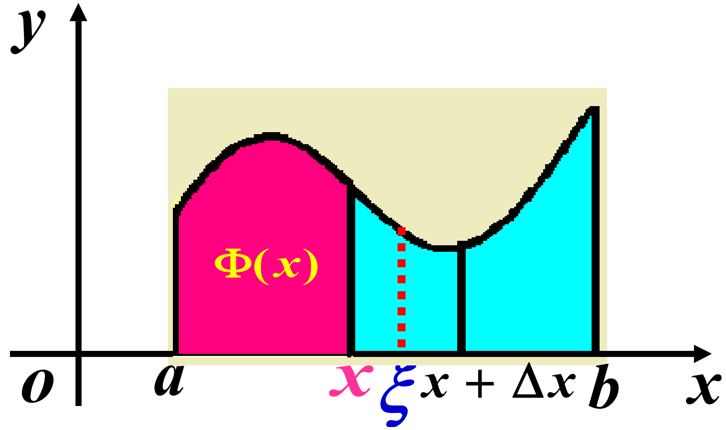
$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)$$

$$=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$$



$$= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

$$= \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt,$$



由积分中值定理得

$$\Delta\Phi = f(\xi)\Delta x \quad \xi \in [x, x+\Delta x],$$

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(\xi), \quad \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi)$$

$$\Delta x \to 0, \xi \to x \qquad \therefore \quad \Phi'(x) = f(x).$$

补充 如果$f(t)$连续，$a(x)$、$b(x)$可导，

则$F(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$的导数$F'(x)$为

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt = f[b(x)]b'(x)-f[a(x)]a'(x)$$

证 $F(x)=\left(\int_{a(x)}^{0}+\int_{0}^{b(x)}\right)f(t)dt$

$$=\int_{0}^{b(x)} f(t)dt-\int_{0}^{a(x)} f(t)dt,$$

$$F'(x)=f[b(x)]b'(x)-f[a(x)]a'(x)$$

例1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2}$.

分析：这是 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式，应用洛必达法则.

解 $\dfrac{d}{dx}\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt = -\dfrac{d}{dx}\int_{1}^{\cos x} e^{-t^2}dt,$

$$= -e^{-\cos^2 x}\cdot(\cos x)' = \sin x \cdot e^{-\cos^2 x},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot e^{-\cos^2 x}}{2x} = \frac{1}{2e}.$$

例 2 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $f(x)>0$.

证明函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调增加函数.

证 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x tf(t)dt = xf(x)$, $\dfrac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x)$,

$$F'(x)=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)dt - f(x)\int_0^x tf(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}$$

$$F'(x)=\frac{f(x)\int_0^x (x-t)f(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2},$$

$$\because\ f(x)>0,\quad (x>0)\qquad \therefore \int_0^x f(t)dt>0,$$

$$\because (x-t)f(t)>0,\qquad \therefore \int_0^x (x-t)f(t)dt>0,$$

$$\therefore F'(x)>0\quad (x>0).$$

故$F(x)$在$(0,+\infty)$内为单调增加函数.

例 3 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(x)<1$.证明

$$2x-\int_0^x f(t)dt=1\text{在}[0,1]\text{上只有一个解.}$$

证 令 $F(x)=2x-\int_0^x f(t)dt-1$,

$\because f(x)<1$, $\quad\therefore F'(x)=2-f(x)>0$,

$F(x)$在$[0,1]$上为单调增加函数. $F(0)=-1<0$,

$$F(1)=1-\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1[1-f(t)]dt>0,$$

所以$F(x)=0$即原方程在$[0,1]$上只有一个解.

定理（原函数存在定理）

如果$f(x)$在$[a,b]$上连续，则积分上限的函数$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$就是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数.

微积分第一基本定理

定理的重要意义：

（1）肯定了连续函数的原函数是存在的.

（2）初步揭示了积分学中的定积分与原函数之间的联系.

三、牛顿—莱布尼茨公式

定理 3（微积分基本公式）

如果$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，则$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

证 $\because$ 已知$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，

又$\because$ $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$也是$f(x)$的一个原函数,

$$\therefore F(x) - \Phi(x) = C \qquad x \in [a,b]$$

令 $x=a \Rightarrow F(a)-\Phi(a)=C,$

$\because \Phi(a)=\int_a^a f(t)dt=0 \Rightarrow F(a)=C,$

$\because F(x)-\int_a^x f(t)dt=C,$

$\therefore \int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a),$

令 $x=b \Rightarrow \int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$

牛顿—莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$$

微积分基本公式表明：

一个连续函数在区间$[a,b]$上的定积分等于它的任意一个原函数在区间$[a,b]$上的增量.

求定积分问题转化为求原函数的问题.

注意 当$a > b$时，$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$仍成立.

思考题

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$\int_a^x f(t)dt$与$\int_x^b f(u)du$是x的函数还是t与u的函数？它们的导数存在吗？如存在等于什么？

思考题解答

$\int_a^x f(t)dt$ 与 $\int_x^b f(u)du$ 都是 x 的函数

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_x^b f(u)du = -f(x)$$

练 习 题

一、 填空题：

1、 $\dfrac{d}{dx}\left(\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)=$________ .

2、 $\int_a^x (\dfrac{d}{dx}f(x))dx=$____________ .

3、 $\dfrac{d}{dx}\int_x^{-2}\sqrt[3]{t}\ln(t^2+1)dt=$________ .

4、 $\int_0^2 f(x)dx=$_____，其中 $f(x)=\begin{cases} x^2, 0\le x\le 1 \\ 2-x, 1<x<2 \end{cases}$.

5、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}=$____.

二、求导数：

1、设函数$y=y(x)$由方程$\int_0^y e^t dt+\int_0^x \cos t dt=0$所确定，求$\dfrac{dy}{dx}$；

2、设$\begin{cases} x=\int_1^{t^2} u\ln u du, \\ y=\int_{t^2}^1 u^2 \ln u du, \end{cases}$ $(t>1)$，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$；

3、$\dfrac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2)dt$；

4、设$g(x)=\int_0^{x^2} \dfrac{dx}{1+x^3}$，求$g''(1)$．

三、　求下列极限：

1、$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}$；　　2、$\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\int_0^{x^{\frac{1}{2}}}(1-\cos t^2)dt}{x^{\frac{5}{2}}}$.

四、　设$f(x)$为连续函数，证明：

$$\int_0^x f(t)(x-t)dt=\int_0^x\left(\int_0^t f(u)du\right)dt\ .$$

五、　求函数$f(x)=\int_0^x \dfrac{3t+1}{t^2-t+1}dt$在区间$[\,0\,,1\,]$上的最大值与最小值．

六、 设$f(x)$在$[a,b]$上连续且$f(x)>0$，

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \frac{dt}{f(t)}$$ ，证明：

（1）、$F'(x)\geq 2$ ；

（2）、方程$F(x)=0$在(a,b)内有且仅有一个根 .