第六章　多元函数积分学及其应用

习　题　6.1

(A)

1. 当$f(M)=1$时，积分$\int_{(\Omega)} f(M)\,\mathrm{d}\Omega$的值表示什么意义？

解　由积分的定义知：当$f(M)=1$时，

$$\int_{(\Omega)} f(M)\,\mathrm{d}\Omega = \lim_{d\to 0}\sum^{n} f(M_k)\Delta\Omega_k = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\Delta\Omega_k = \Omega.$$

2. 积分$\int_{(\Omega)} f(M)\,\mathrm{d}\Omega$定义中所有$(\Delta\Omega_k)$的直径的最大值$d\to 0$能否用所有$\Delta\Omega_k$的度量的最大值趋于零代替，为什么？

解　不能. 当$\lambda=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\Delta\Omega_k\}\to 0$时，不一定有$d\to 0$. 例如，如$(\Omega)=(\sigma)$为平面区域，$\lambda\to 0$，则$(\Delta\sigma_k)$可以是一条曲线. 即使$f(M)$连续，在$(\Delta\sigma_k)$上$f(M)$的值可能相差很大. 则和式$\sum\limits_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta\sigma_k$对于$(\Delta\sigma_k)$上不同的点$M_k$当$\lambda\to 0$时极限可能不同而不存在.

(B)

1. 证明若$f(M)$在(Ω)上连续，(Ω)是紧的且可度量，$f(M)\geqslant 0$，但$f(M)\neq 0$，则$\int_{(\Omega)} f(M)\,\mathrm{d}\Omega>0$.

证明　由于$f(M)\geqslant 0$，$f(M)\neq 0$，则$\exists M_0\in(\Omega)$，使$f(M_0)>0$. 又由于$f(M)$在紧的可度量的(Ω)上连续，则由连续函数的局部保号性知存在M_0的闭邻域$\overline{U}(M_0)\subset(\Omega)$，使对$\forall M\in\overline{U}(M_0)$，均有$f(M)>0$，则由积分的中值定理知$\exists P\in\overline{U}(M_0)$，使$\int_{\overline{U}(M_0)} f(M)\,\mathrm{d}\Omega=f(P)\Omega_{M_0}$. 由于$f(P)>0$，$\Omega_{M_0}$为$\overline{U}(M_0)$的几何度量值，故$\int_{\overline{U}(M_0)} f(M)\,\mathrm{d}\Omega>0$. 又由$f(M)\geqslant 0\ (M\in(\Omega))$，则$\int_{(\Omega)/\overline{U}(M_0)} f(M)\,\mathrm{d}\Omega\geqslant 0$，故由积分对区域的可加性知

$$\int_{(\Omega)} f(M)\,\mathrm{d}\Omega = \int_{(\Omega)/\overline{U}(M_0)} f(M)\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\overline{U}(M_0)} f(M)\,\mathrm{d}\Omega > 0.$$

2. 证明反常积分中值定理：若(Ω)是紧的且可度量的连通集，$f(M)$，$g(M)$在(Ω)上连续，$g(M)$在(Ω)上不变号，则

$$\int_{(\Omega)} f(M)g(M)\,\mathrm{d}\Omega = f(P)\int_{(\Omega)} g(M)\,\mathrm{d}\Omega,\text{其中 } P \in (\Omega).$$

证明 设在(Ω)上$g(M)\geqslant 0$. 由于(Ω)是紧的可度量的连续集，而$f(M)$在(Ω)上连续，则$f(M)$在(Ω)上可取得最大值A及最小值a. 即$\forall M\in(\Omega)$，$a\leqslant f(M)\leqslant A$. 从而$\forall M\in(\Omega)$，$ag(M)\leqslant f(M)g(M)\leqslant Ag(M)$. 由积分的性质3及性质1，得

$$a\int_{(\Omega)} g(M)\,\mathrm{d}\Omega \leqslant \int_{(\Omega)} f(M)g(M)\,\mathrm{d}\Omega \leqslant A\int_{(\Omega)} g(M)\,\mathrm{d}\Omega.$$

若$\int_{(\Omega)} g(M)\,\mathrm{d}\Omega>0$，上式两边同除以$\int_{(\Omega)} g(M)\,\mathrm{d}\Omega$，得

$$a \leqslant \frac{\int_{(\Omega)} f(M)g(M)\,\mathrm{d}\Omega}{\int_{(\Omega)} g(M)\,\mathrm{d}\Omega} \leqslant A.$$

由连续函数的介值定理知，至少存在一点P

$$f(P) = \frac{\int_{(\Omega)} f(M)g(M)\,\mathrm{d}\Omega}{\int_{(\Omega)} g(M)\,\mathrm{d}\Omega},\text{即}$$

$$\int_{(\Omega)} f(M)g(M)\,\mathrm{d}\Omega = f(P)\int_{(\Omega)} g(M)\,\mathrm{d}\Omega.$$

若$\int_{(\Omega)} g(M)\,\mathrm{d}\Omega=0$，则由上题知$g(M)\equiv 0$，$M\in(\Omega)$. 因此对$\forall P\in(\Omega)$，恒有$\int_{(\Omega)} f(M)g(M)\,\mathrm{d}\Omega = f(P)\int_{(\Omega)} g(M)\,\mathrm{d}\Omega=0$.

习 题 6.2

(A)

2. (3) 若积分域关于y轴对称，则：