第2章 一元函数微分学及其应用

第2节　求导基本法则

1　函数的求导法则、
初等函数的求导问题

2　高阶导数

3　隐函数求导法

4　由参数方程
所确定的函数的求导法则

5　相关变化率问题

2.5 高阶导数

1、高阶导数的概念

引例 变速直线运动 $s = s(t)$

速度 $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$， 即 $v = s'$

加速度 $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)$

即 $a = (s')'$

定义2.1 若函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 可导, 则称 $f'(x)$ 的导数为 $f(x)$ 的**二阶导数**, 记作 $f''(x)$, y'' 或 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$,

即 $y''=(y')'$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$

类似地, 二阶导数的导数称为**三阶导数**, 依次类推, $n-1$ 阶导数的导数称为 **n 阶导数**, 分别记作

$$f'''(x),\quad f^{(4)}(x),\quad \cdots, f^{(n)}(x),$$

$$y''',\quad y^{(4)},\quad \cdots,\ y^{(n)}$$

或
$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3},\quad \frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4},\quad \cdots,\ \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$$

直接法 --由高阶导数的定义逐步求高阶导数.

例1 设 $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，求 $y^{(n)}$.

解

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}$$

$$y''=2\cdot 1a_2+3\cdot 2a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}$$

依次类推，可得 $y^{(n)}=n!a_n$

思考 设 $y=x^\alpha$ （$\alpha\in R$），问 $y^{(n)}=?$

$$(x^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

若α为自然数n,则

$$y^{(n)}=(x^n)^{(n)}=n!,\quad y^{(n+1)}=(n!)'=0.$$

例2 设 $y=e^{ax}$，求 $y^{(n)}$.

解 $y'=ae^{ax}$， $y''=a^2e^{ax}$， $y'''=a^3e^{ax}$，$\cdots$，

$$y^{(n)}=a^ne^{ax}$$

特别有: $\boxed{(e^x)^{(n)}=e^x}$

$$y'=-\frac{1}{1-x}$$

$$y''=-\frac{1}{(1-x)^2}$$

例3 设 $y=\ln(1+x)$，求 $y^{(n)}$.

解 $y'=\dfrac{1}{1+x}$， $y''=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$， $y'''=(-1)^2\dfrac{1\cdot 2}{(1+x)^3}$，

$\cdots$， $y^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}\ (n>1)$

规定 $0!=1$

思考 $y=\ln(1-x)$， $y^{(n)}=-\dfrac{(n-1)!}{(1-x)^n}$

注意： 求n阶导数时,求出1-3或4阶后,不要急于合并,分析结果的规律性,写出n阶导数.(数学归纳法证明)

例4 设 $y=\sin x$, 求$y^{(n)}$.

解 $y'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$

$$y''=\cos(x+\frac{\pi}{2})=\sin(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$y'''=\cos(x+2\cdot\frac{\pi}{2})=\sin(x+3\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$\cdots\cdots$$

$$y^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$$

同理可得 $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

例5 已知$f(x)$的n阶导数存在，求$[f(ax+b)]^{(n)}$.

解 $[f(ax+b)]' = af'(ax+b)$

$$[f(ax+b)]'' = a^2 f''(ax+b)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$$

例6 设 $y = e^{ax}\sin bx$ (a, b为常数), 求$y^{(n)}$.

解 $y' = ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx$

$$= e^{ax}(\underline{a\sin bx + b\cos bx})$$

$$= e^{ax}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+\varphi) \quad (\varphi = \arctan\frac{b}{a})$$

$$y'' = \sqrt{a^2+b^2}\cdot[ae^{ax}\sin(bx+\varphi) + be^{ax}\cos(bx+\varphi)]$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\cdot e^{ax}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+2\varphi)$$

$$\cdots\cdots$$

$$y^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cdot e^{ax}\sin(bx+n\varphi) \qquad (\varphi = \arctan\frac{b}{a})$$

2、高阶导数的运算法则

设函数u和v具有n阶导数, 则

$$(1)\ (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$$

$$(2)\ (Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$$

$$(3)\ (u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''$$

$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

莱布尼兹（Leibniz）公式

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(uv)'' = (u'v + uv')' = u''v + 2u'v' + uv''$$

$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$

用数学归纳法可证莱布尼兹公式成立 .

例7 设 $y = x^2 e^{2x}$, 求$y^{(20)}$.

解 设$u = e^{2x}, v = x^2$,则由莱布尼兹公式知

$$y^{(20)} = (e^{2x})^{(20)} \cdot x^2 + 20(e^{2x})^{(19)} \cdot (x^2)'$$

$$+ \frac{20(20-1)}{2!}(e^{2x})^{(18)} \cdot (x^2)'' + 0$$

$$= 2^{20} e^{2x} \cdot x^2 + 20 \cdot 2^{19} e^{2x} \cdot 2x$$

$$+ \frac{20 \cdot 19}{2!} 2^{18} e^{2x} \cdot 2$$

$$= 2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95)$$

例8. 设 $y = \arctan x$，求 $y^{(n)}(0)$.

解 $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$,即 $(1+x^2)y' = 1$

用莱布尼兹公式求 n 阶导数

$$(1+x^2)\, y^{(n+1)} + n \cdot 2x\, y^{(n)} + \frac{n(n-1)}{2\,!} \cdot 2 y^{(n-1)} = 0$$

令 $x = 0$,得 $y^{(n+1)}(0) = -n(n-1)\, y^{(n-1)}(0)\ (n = 1\,,\ 2\ ,\cdots)$

由 $y(0) = 0$,得 $y''(0) = 0$, $y^{(4)}(0) = 0$, $\cdots$, $y^{(2m)}(0) = 0$

由 $y'(0) = 1$,得 $y^{(2m+1)}(0) = (-1)^m (2m)\,!\, y'(0)$

即 $y^{(n)}(0) = \begin{cases} 0\,, & n = 2m \\ (-1)^m (2m)\,!\,, & n = 2m+1 \end{cases} \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots)$

间接法： 利用已知的高阶导数公式, 通过四则运算, 变量代换等方法, 求出n阶导数.

常用高阶导数公式

(1) $(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a \quad (a > 0)$ $\qquad (e^x)^{(n)} = e^x$

(2) $(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$

(3) $(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$

(4) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

(5) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$ $\qquad (\dfrac{1}{x})^{(n)} = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$

例9 设 $y=\dfrac{1}{x^2+x-2}$，求$y^{(5)}$.

解 $\because\ y=\dfrac{1}{x^2+x-2}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}\right)$

$$\therefore\ y^{(5)}=\frac{1}{3}\left[\frac{-5!}{(x-1)^6}-\frac{-5!}{(x+2)^6}\right]$$

$$=40\left[\frac{1}{(x+1)^6}-\frac{1}{(x-1)^6}\right]$$

$$y^{(n)}=\frac{1}{3}(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right]$$

例10 设 $y = \sin^6 x + \cos^6 x$, 求$y^{(n)}$.

解 $y = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x)$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x \quad = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2}$$

降幂

$$= \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$$

$$\therefore y^{(n)} = \frac{3}{8} \cdot 4^n \cdot \cos(4x + n \cdot \frac{\pi}{2}).$$

高阶导数的求法

(1) 直接法——逐阶求导法　利用归纳法

(2) 间接法 —— 利用已知的高阶导数公式

(3) 利用莱布尼兹公式

练习

1. 如何求下列函数的 n 阶导数?

(1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$

解 $y=-1+\dfrac{2}{1+x}$

$$y^{(n)}=2\quad(-1)^n\quad\frac{n\quad!}{(1+x)^{n+1}}$$

(2) $y=\dfrac{x^3}{1-x}$

解 $y=-x^2-x-1+\dfrac{1}{1-x}$

$$y^{(n)}=\frac{n\quad!}{(1-x)^{n+1}},\ n\geq 3$$

练习

1. 对任意的$x_1, x_2 (x_1 \neq 0, x_2 \neq 0)$

有$f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$，且$f'(1) = 1$,

证明：当$x \neq 0$时，$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

2.$y = f(\dfrac{1}{x})$ 求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

3.$y = x^2 \ln x$ 求$y^{(n)}$

1　对任意的$x_1,x_2(x_1\neq 0,x_2\neq 0)$

有$f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，且$f'(1)=1$,

证明：当$x\neq 0$时，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

证明 取$x_1=1,x_2=1$，由

$f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$得，$f(1)=0$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\qquad (x\neq 0)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[x(1+\frac{\Delta x}{x})]-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(1)}{\Delta x}$$

$$=f'(1)\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$$

2. $y = f(\frac{1}{x})$ 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

解 $y' = f'(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})$

$$y'' = f''(\frac{1}{x})\frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^3}f'(\frac{1}{x})$$

3. $y = x^2 \ln x$ 求$y^{(n)}$

解法1 $y' = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1),$

$$y'' = 2\ln x + 3$$

$$y^{(n)} = 2(\ln x)^{(n-2)} = 2(-1)^{n-3}(n-3)!\,x^{-(n-2)}$$

解法2 $y^{(n)} = (x^2 \ln x)^{(n)}$

$$= x^2(\ln x)^{(n)} + 2nx(\ln x)^{(n-1)} + n(n-1)(\ln x)^{(n-2)}$$

$$= x^2 \cdot \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} + 2nx \cdot \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}} + n(n-1) \cdot \frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{x^{n-2}}$$

$$= 2(-1)^{n-3}(n-3)!\,x^{-(n-2)} \quad (n > 2)$$

2.6 隐函数求导法则

定义:由方程所确定的函数 $y=y(x)$称为隐函数.

$y=f(x)$ 形式称为显函数.

$F(x,y)=0 \Rightarrow y=f(x)$　隐函数的显化

问题:隐函数不易显化或不能显化如何求导?

$$x^2-y+\varepsilon\ \sin y=1\ \ (0<\varepsilon<1)$$

隐函数求导法则:

用复合函数求导法则直接对方程两边求导.

例1 求由方程 $xy-e^x+e^y=0$所确定的隐函数

y的导数$\dfrac{dy}{dx}$.

解 方程两边对x求导,

$$y+x\frac{dy}{dx}-e^x+e^y\frac{dy}{dx}=0$$

解得 $$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x-y}{x+e^y},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-y}{x+e^y}\right)=\frac{(e^x-y')(x+e^y)-(e^x-y)(1+e^y y')}{(x+e^y)^2}$$

例2.17 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+xy=e$ 确定，求 $y'(0)$，$y''(0)$.

解 方程两边对 x 求导，得

$$e^y y'+y+xy'=0 \qquad ①$$

再求导，得

$$e^y y'^2+(e^y+x)y''+2y'=0 \qquad ②$$

当 $x=0$ 时，$y=1$，故由 ① 得

$$y'(0)=-\frac{1}{e}$$

再代入 ② 得 $y''(0)=\dfrac{1}{e^2}$

例3 在曲线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$上哪一点的切线与直线$y-x+3=0$平行？写出该切线方程与法线方程。

解 设曲线在点(x_0,y_0)的切线与$y-x+3=0$平行

将曲线方程两边对x求导得

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=-\frac{\sqrt[3]{y_0}}{\sqrt[3]{x_0}}=1\Rightarrow y_0=-x_0$$

代入曲线方程得$x_0=\pm\dfrac{a}{2\sqrt{2}},y_0=\mp\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$

$\therefore$ 切线方程为：$y\pm\dfrac{a}{2\sqrt{2}}=(x\mp\dfrac{a}{2\sqrt{2}})$

法线方程为：$y\pm\dfrac{a}{2\sqrt{2}}=-(x\mp\dfrac{a}{2\sqrt{2}})$

EX. 设曲线C的方程为$x^3+y^3=3xy$,求过C上点$(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$的切线方程,并证明曲线$C$在该点的法线通过原点.

解 方程两边对x求导, $3x^2+3y^2y'=3y+3xy'$

$$\therefore y'\bigg|_{(\frac{3}{2},\frac{3}{2})}=\frac{y-x^2}{y^2-x}\bigg|_{(\frac{3}{2},\frac{3}{2})}=-1.$$

所求切线方程为 $y-\frac{3}{2}=-(x-\frac{3}{2})$ 即 $x+y-3=0.$

法线方程为 $y-\frac{3}{2}=x-\frac{3}{2}$ 即 $y=x$, 显然通过原点.

多个函数乘积的导数——对数求导法

对数求导法的步骤:

1. 两端取绝对值之后, 再取自然对数.

2. 等式两端分别对自变量求导.

3. 等式两端再乘以y, 左端即$y'(x)$.

例4 设 $y=\dfrac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}\quad(x>4)$，求$y'$.

解 先对函数取对数, 得

$$\ln y=\ln\frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=2\ln(x+5)+\frac{1}{3}\ln(x-4)-5\ln(x+2)-\frac{1}{2}\ln(x+4).$$

再对上式两边分别求对数, 得

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x+5}+\frac{1}{3(x-4)}-\frac{5}{x+2}-\frac{1}{2(x+4)}$$

整理后得到

$$y' = \frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{2}{x+5}+\frac{1}{3(x-4)}-\frac{5}{x+2}-\frac{1}{2(x+4)}\right).$$

例5 设 $y = x^{\sin x}\ (x > 0)$, 求y'.

解 等式两边取对数得 $\ln y = \sin x \cdot \ln x$

上式两边对x求导得

$$\frac{1}{y}y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\therefore y' = y(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x})$$

$$= x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x})$$

2.7 由参数方程所确定的函数的导数

若参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$确定$y$与$x$间的函数关系，

称此为由参数方程所确定的函数.

例如 $\begin{cases} x=2t, \\ y=t^2, \end{cases}$ $\Longrightarrow$ $t=\dfrac{x}{2}$ 消去参数t

$$\therefore y=t^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{4} \qquad \therefore y'=\frac{1}{2}x$$

问题： 消参困难或无法消参如何求导?

在方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$中,

设函数$x = \varphi(t)$具有单调连续的反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$,

$\therefore y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$

再设函数 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$都可导, 且$\varphi(t) \neq 0$,

由复合函数及反函数的求导法则得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

即 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

若上述参数方程中 $\varphi(t)$，$\psi(t)$二阶可导，且$\varphi'(t)\neq 0$，则由它确定的函数$y=f(x)$可求二阶导数．

利用新的参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \end{cases}$，可得

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\Big/\varphi'(t)$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}=\frac{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$$

注意：已知 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'$

例6 设 $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t, \end{cases}$ 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

解

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)}=-\tan t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{(-\tan t)'}{(a\cos^3 t)'}=\frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t}$$

$$=\frac{\sec^4 t}{3a\sin t}$$

EX. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{4t}$$

例7 设由方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ t^2 - y + \varepsilon \sin y = 1 \end{cases}$ $(0 < \varepsilon < 1)$

确定函数 $y = y(x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 方程组两边对 t 求导，得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t + 2 \\ 2t - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \varepsilon \cos y \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2(t+1) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2t}{1 - \varepsilon \cos y} \end{cases}$$

故 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{t}{(t+1)(1 - \varepsilon \cos y)}$$

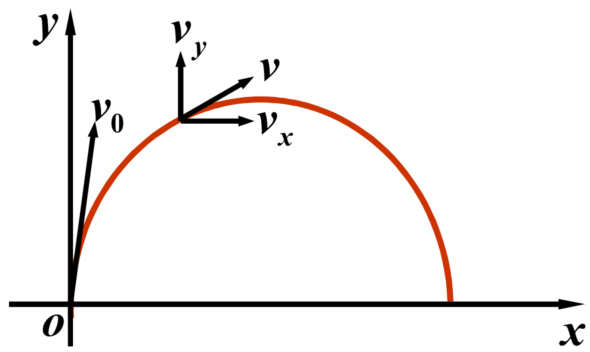
例8 不计空气的阻力, 以初速度v_0, 发射角α发射炮弹, 其运动方程为

$$\begin{cases} x = v_0 t\cos\alpha, \\ y = v_0 t\sin\alpha - \dfrac{1}{2}gt^2, \end{cases}$$

求 (1)炮弹在时刻t_0的运动方向;

(2)炮弹在时刻t_0的速度大小.

解 (1) 在 t_0 时刻的运动方向即轨迹在 t_0 时刻的切线方向，可由切线的斜率来反映 .



$$\frac{dy}{dx}=\frac{(v_0 t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2)'}{(v_0 t\cos\alpha)'}=\frac{v_0\sin\alpha-gt}{v_0\cos\alpha}$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=t_0}=\frac{v_0\sin\alpha-gt_0}{v_0\cos\alpha}.$$

(2) 炮弹在 t_0时刻沿 x, y轴方向的分速度为

$$v_x = \frac{dx}{dt}\Big|_{t=t_0} = (v_0 t\cos\alpha)'\Big|_{t=t_0} = v_0\cos\alpha$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}\Big|_{t=t_0} = (v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2)'\Big|_{t=t_0} = v_0\sin\alpha - gt_0$$

$\therefore$ 在 t_0时刻炮弹的速度为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 g t_0 \sin\alpha + g^2 t_0^2}$$

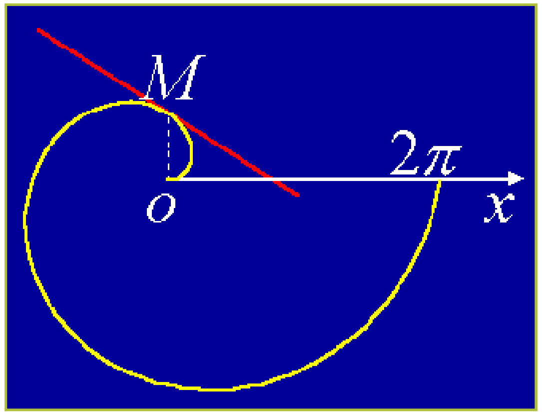
思考

1. 求螺线 $r=\theta$ 在对应于 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 的点处的切线方程.

解 化为参数方程 $\begin{cases} x = r\cos\theta = \theta\cos\theta \\ y = r\sin\theta = \theta\sin\theta \end{cases}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\sin\theta + \theta\cos\theta}{\cos\theta - \theta\sin\theta}$$

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时对应点 $M(\ 0\ ,\ \frac{\pi}{2})$,



斜率 $k = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$

∴ 切线方程为 $y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{\pi}{2}$

EX 设 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$.

解 方程组两边同时对 t 求导, 得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 6t + 2 \\ e^y \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \sin t + e^y \cos t - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{e^y \cos t}{1 - e^y \sin t}$$

$$\therefore \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0} = \left.\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\right|_{t=0} = \left.\frac{e^y \cos t}{(1 - e^y \sin t)(6t + 2)}\right|_{t=0} = \frac{e}{2}$$