答疑

有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|f(\frac{1}{n})|}{\frac{1}{n}}=0$

反例：若 $|f(\frac{1}{n})|=\dfrac{1}{n\ln n}$

注：比较判别法Ⅱ：

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$

① 若 $\sum b_n$ 收敛 $\Longrightarrow$ $\sum a_n$ 收敛

①' 若 $\sum a_n$ 发散 $\longrightarrow$ $\sum b_n$ 发散

$$f(x)=\frac{1}{\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}}\longrightarrow f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n\ln n}$$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{\ln\frac{1}{x}}\qquad(-\delta,\delta)$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\longrightarrow\gamma$$

γ：Euler常数

处处收敛：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $x \in D$ $\rightarrow N(\varepsilon, x)$

$\forall x \in D$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, s.t. 当 $n > N$ 时，

有 $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$

or $\left|\sum_{i=1}^{n} u_i(x) - S(x)\right| < \varepsilon$. $\rightarrow N(\varepsilon)$

一致收敛：

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, s.t. 当 $n > N$ 时，

对 $\forall x \in D$, 有 $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

回忆: $f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = r_1, r_2, \cdots, r_n \quad r_i \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

Q1: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$

Q2: $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 0, \ \forall n$

Q3: $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$.

Q4: $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \not\exists$

$\Rightarrow \lim \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim f_n(x)\,dx$

Φ