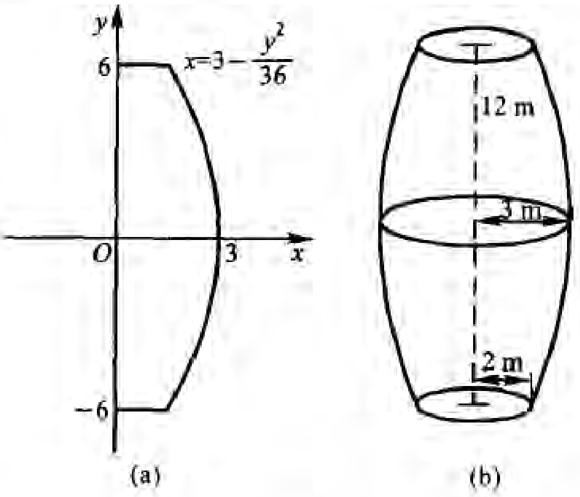
$$= \oint_{(L)} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \oint_{(-L)} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0.$$

综合练习题

1. 一个对称的地下油库,它的内部设计是:横截面为圆,在中心位置上的半径是 3 m,到底部和顶部的半径减小到 2 m;底部和顶部相隔 12 m(图(b));纵截面的两侧是抛物线 $x=3-\dfrac{y^2}{36}(-6\leqslant y\leqslant 6)$(图(a)).

(1) 求油库的容积;

(2) 为了设计油库的油量标尺,试求出油库中油量分别为 10 m^3,20 m^3,30 m^3,…时油的深度.



(第 1 题)

解 (1) 油库侧面的方程为:$\sqrt{x^2+z^2}=3-\dfrac{y^2}{36}$. 设$(V_1)$为油库位于 zOx 平面之上部分,(σ_z)为水平截面 $x^2+z^2\leqslant\left(3-\dfrac{y^2}{36}\right)^2$,于是油库的容积

$$V = 2\iiint_{(V_1)} = 2\int_0^6 \mathrm{d}y \iint_{(\sigma_y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}z = 2\int_0^6 \pi\left(3-\frac{y^2}{36}\right)^2 \mathrm{d}y = \frac{432}{5}\pi(\mathrm{m}^3).$$

(2) 设油量为 V_h 时,油面的高度为 h. 则($h\geqslant -6$)

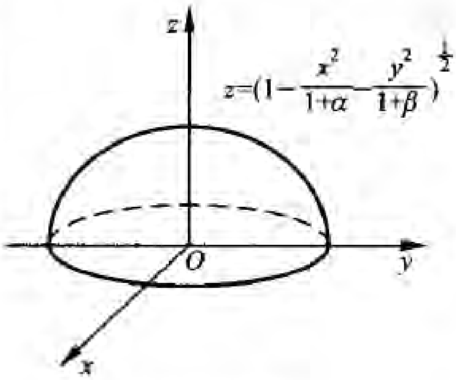
$$V_h = \int_{-6}^{h} \mathrm{d}y \iint_{(\sigma_y)} = \pi\int_{-6}^{h}\left(3-\frac{y^2}{36}\right)^2 \mathrm{d}y,$$

$$V_h = \left[\frac{h^5}{6\,480} - \frac{h^3}{18} + 9h + \frac{216}{5}\right]\pi(\mathrm{m}^3).$$

故当 $V_{h_1}=10(\mathrm{m}^3)$；则 $h_1\approx-5.29(\mathrm{m})$；若 $V_{h_2}=20\ \mathrm{m}^3$，则 $h_2\approx-4.69(\mathrm{m})$；若 $V_{h_3}=30(\mathrm{m}^3)$，则 $h_3\approx-4.16(\mathrm{m})$.

2. 某工厂按原设计要对一半球体的工件的半球面部分镀上一层稀有金属，其半球面方程为 $x^2+y^2+z^2=1(z\geqslant0)$，该厂按原设计的半球面面积 2π 备好电镀材料. 当工件加工好后，对工件进行了测量，发现半球面方程为

$$\frac{x^2}{1+\alpha}+\frac{y^2}{1+\beta}+z^2=1(z\geqslant0),$$



（第 2 题）

其中 $|\alpha|$，$|\beta|$ 是很小正数，在测量了 α 和 β 后，工人师傅希望知道，按原准备好的材料电镀后，镀层厚度在什么情况下比原设计的薄？在什么情况下比原设计的厚？

解 设曲面 $z=\left(1-\frac{x^2}{1+\alpha}-\frac{y^2}{1+\beta}\right)^{\frac{1}{2}}$ 的面积为 $S(\alpha,\beta)$，则

$$S(\alpha,\beta)=\iint\limits_{(S)}\mathrm{d}S=\iint\limits_{(\sigma_{xy})}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\frac{x^2}{1+\alpha}+\frac{y^2}{1+\beta}\leqslant1}\left[\frac{1-\frac{\alpha x^2}{(1+\alpha)^2}-\frac{\beta y^2}{(1+\beta)^2}}{1-\frac{x^2}{1+\alpha}-\frac{y^2}{1+\beta}}\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

令 $x=\sqrt{1+\alpha}\rho\cos\varphi$，$y=\rho\sin\varphi$ （因为 α,β 充分小，所以 $1+\alpha,1+\beta>0$），则

$$S(\alpha,0)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\left[\frac{1-\frac{\alpha}{1+\alpha}\rho^2\cos^2\varphi}{1-\rho^2}\right]^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\alpha}\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\sqrt{1+\alpha-\alpha\rho^2\cos^2\varphi}\,\mathrm{d}\rho$$

$$\left.\frac{\partial S}{\partial\alpha}\right|_{(0,0)}=S'_\alpha(0,0)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\frac{1-\rho^2\cos^2\varphi}{2\sqrt{1+\alpha-\alpha\rho^2\cos^2\varphi}}\mathrm{d}\rho\,\bigg|_{\alpha=0}$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\frac{\rho(1-\rho^2\cos^2\varphi)}{2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{d}\rho=\frac{2\pi}{3}.$$

同理可得 $\left.\frac{\partial S}{\partial\beta}\right|_{(0,0)}=S'_\beta(0,0)=\frac{2\pi}{3}.$

由 Taylor 公式，当 $|\alpha|$，$|\beta|$ 充分小时（注意到 $S(0,0)=2\pi$），

$$S(\alpha,\beta)=S(0,0)+S'_\alpha(0,0)\alpha+S'_\beta(0,0)\beta+0(\alpha^2+\beta^2)$$

$$=2\pi+\frac{2\pi}{3}(\alpha+\beta)+0(\alpha^2+\beta^2).$$

故当 $\alpha+\beta>0$ 时，$S(\alpha,\beta)>S(0,0)=2\pi$（半球面的面积）.

又由于工厂是按半球面面积 2π 准备的原材料，因此此时镀层变薄；当 $\alpha+\beta<0$ 时，$S(\alpha,\beta)<S(0,0)=2\pi$ 镀层变厚.