由于 $u=F(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z)=0,\psi(x,y,z)=0$ 下在 P_0 处取得极值 m，且 F,φ,ψ 均有连续的且不同时为零的一阶偏导数知，∃实数 λ_0,μ_0 使

$$L_x(P_0,\lambda_0,\mu_0)=F_x(P_0)+\lambda_0\varphi_x(P_0)+\mu_0\psi_x(P_0)=0,$$

$$L_y(P_0,\lambda_0,\mu_0)=F_y(P_0)+\lambda_0\varphi_y(P_0)+\mu_0\psi_y(P_0)=0,$$

$$L_z(P_0,\lambda_0,\mu_0)=F_z(P_0)+\lambda_0\varphi_z(P_0)+\mu_0\psi_z(P_0)=0.$$

即 ∃ $\lambda_0,\mu_0\in R_0$ 使 $\boldsymbol{n}_F=-\lambda_0\boldsymbol{n}_\varphi-\mu_0\boldsymbol{n}_\psi$. 从而 $\boldsymbol{n}_F,\boldsymbol{n}_\varphi,\boldsymbol{n}_\psi$ 共面.

习 题 5.7

(A)

1. 如果曲线的方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$（$t$ 为一般参数），试推导标架向量 $\boldsymbol{T},\boldsymbol{B}$ 的计算公式(7.6)

解 公式(7.6) 即 $\boldsymbol{T}=\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}}{\|\dot{\boldsymbol{r}}\|}$, $\boldsymbol{B}=\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}}{\|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}\|}$.

注意到弧长 $s(t)$ 对 t 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\|\dot{\boldsymbol{r}}\|$，则由 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{r}'$，可知 $\boldsymbol{T}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}S}=\dot{\boldsymbol{r}}\dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}}{\|\dot{\boldsymbol{r}}\|}$. 于是

$$\boldsymbol{r}''=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)=\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}+\dot{\boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}s^2}$$

$$=\ddot{\boldsymbol{r}}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2+\dot{\boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}s^2}.$$

从而 $\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''=(\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}})\left(\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^3$，即 $\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''$ 与 $\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}$ 同向，故由 $\boldsymbol{B}=\dfrac{\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''}{\|\boldsymbol{r}''\|}$ 可知 $\boldsymbol{B}=\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}}{\|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}\|}$.

5. 证明螺旋线 $\boldsymbol{r}=(a\cos t,a\sin t,bt)$ 上任一点的主法线都与 z 轴垂直相交.

证明 $\dot{\boldsymbol{r}}=(-a\sin t,a\cos t,b)$，$\ddot{\boldsymbol{r}}=(-a\cos t,-a\sin t,0)$，从而 $\boldsymbol{T}=\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}}{\|\dot{\boldsymbol{r}}\|}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t,a\cos t,b)$，

$$\boldsymbol{B}=(\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}})/\|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}\|=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin t,-b\cos t,a),$$

$N = B \times T = (\cos t, \sin t, 0)$. 故 N 与 z 轴垂直.

即主法线与 z 轴垂直,且螺线上任一点 $r(t)$ 处的主法线方程为 $\rho = \rho(\lambda) = r(t) + \lambda N(t) = (a\cos t, a\sin t, bt) + \lambda(\cos t, \sin t, 0)$. 显然 z 轴上的点 $(0,0,bt) = \rho(-a)$ 在主法线上,故主法线与 z 轴垂直相交,交点为 $\rho(-a)$.

6. 设曲线 Γ 的方程为 $r = r(t)$,其中 $r \in C^{(2)}$, P_0(即 $r(t_0)$)及 P(即 $r(t_0+\Delta t)$)是 Γ 上两点,且 $\dot{r}(t_0) \times \ddot{r}(t_0) \neq 0$,记 Γ 在 P 处的切线为 l,过 P_0 及 l 的平面为 π'. 证明当 P 沿 Γ 趋于 P_0 时,平面 π' 的极限位置为 Γ 在 P_0 的密切平面.

证明 只需证明 π' 的法向量 n 当 P 沿 Γ 趋向 P_0 时,其极限平行于 Γ 在 P_0 处的次法向量 $B(t_0)$ 即可. 于是可取

$$n = \dot{r}(t_0 + \Delta t) \times [r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)].$$

由于 $r \in C^{(2)}$,所以对 $\dot{r}(t_0 + \Delta t)$ 与 $r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)$ 的各分量分别应用一元函数的 Lagrang 公式及 Taylor 公式可得

$$\dot{r}(t_0 + \Delta t) = \dot{r}(t_0) + \ddot{r}(\eta)\Delta t, \eta \text{ 介于 } t_0 \text{ 与 } t_0 + \Delta t \text{ 之间},$$

$$r(t_0 + \Delta t) - r(t_0) = \dot{r}(t_0)\Delta t + \frac{1}{2}(\ddot{r}(t_0) + \varepsilon)\Delta t^2,$$

其中当 $\Delta t \to 0, \varepsilon \to 0$. 注意到 $\dot{r}(t_0) \times \dot{r}(t_0) = 0$ 得

$$n = \frac{1}{2}\Delta t^2[\dot{r}(t_0) \times \ddot{r}(t_0) + 2\ddot{r}(\eta) \times \dot{r}(t_0) + (\ddot{r}(\eta) + \ddot{r}(t_0)) \times \varepsilon].$$

从而 $\frac{2}{\Delta t^2}n$ 也是 π' 的法向量,且 $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\frac{2}{\Delta t^2}n = \dot{r}(t_0) \times \ddot{r}(t_0)$ 平行于 $B(t_0)$.

9. 曲线 $y = \ln x$ 上哪点的曲率半径最小? 求出该点的曲率半径.

解 曲线 $y = \ln x$ 上任一点 $P(x,y)$ 处的曲率半径为 R,则

$$R = \frac{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = \frac{\sqrt{(1 + x^2)^3}}{x} \quad (y = \ln x \text{ 定义域 } x \in (0, +\infty)).$$

问题转化为求 R 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值.

由 $\frac{dR}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{3}{2}(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x - \frac{1}{x^2}\sqrt{(1 + x^2)^3} = 0$ 可得唯一的驻点 $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 又 $\left.\frac{d^2R}{dx^2}\right|_{x_0} = 4\sqrt{3} > 0$,故此唯一的驻点 $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 必是 R 的最小值点,且最小值为 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$. 即 $y = \ln x$ 在 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 处的曲率半径最小,其值为 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

10. 求曲线 $y = e^x$ 在 $(0,1)$ 处曲率圆的方程.

解　在(0,1)处切向量 $\boldsymbol{T}(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$，$\boldsymbol{r}''(0)=(0,1,0)$，次法向量 $\boldsymbol{B}(0)=(0,0,1)$，主法向量 $\boldsymbol{N}(0)=\boldsymbol{B}(0)\times\boldsymbol{T}(0)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$，曲率半径为 $R=2\sqrt{2}$. 从而曲率中心为 $\boldsymbol{r}_Q=\boldsymbol{r}(0)+R\boldsymbol{N}(0)=(0,1,0)+2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)=(-2,3,0)$.

故曲率圆的方程为 $(x+2)^2+(y-3)^2=8$.

11. 一飞机沿抛物线路径 $y=\frac{x^2}{10\ 000}$（y 轴铅直向上，单位：m）作俯冲飞行，在坐标原点 O 处飞行的速度为 $v=200$ m/s，飞行员体重 $G=70$ kg. 求飞机俯冲至最低点（即原点 O）处时座椅对飞行员的反作用力.

解　座椅对飞行员的反作用力（在原点 O 处）等于重力与向心力 f 之和，方向与 y 轴相同.

在 O 点的曲率半径 $R=\frac{1}{|y''|}[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}\bigg|_{x=0}=5\ 000$ m.

$$f=\frac{mv^2}{R}\bigg|_{x=0}=\frac{70\times 200^2}{5\ 000}=560\ \text{N}.$$

故反作用力等于 $f+G=560+70\times 9.8=1\ 246$ N.

13. 证明挠率的计算公式(7.22)

证明　公式(7.22)即 $\tau(t)=\frac{[\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}}]}{\|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}\|^2}$.

由
$$\boldsymbol{r}'=\dot{\boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s},\boldsymbol{r}''=\ddot{\boldsymbol{r}}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2+\dot{\boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}s^2}\text{及}\ \dot{\boldsymbol{r}}\times\dot{\boldsymbol{r}}=0$$

可得　$\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''=(\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}})\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^3$.

又由 $\|\boldsymbol{r}'\|=1$ 知 $\boldsymbol{r}'\perp\boldsymbol{r}''$ 且 $\|\boldsymbol{r}''\|=\|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''\|=\left|\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right|^3\|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}\|$.

又 $\boldsymbol{r}'''=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}''}{\mathrm{d}s}=\dddot{\boldsymbol{r}}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^3+2\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}s^2}\ddot{\boldsymbol{r}}+\ddot{\boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}s^2}+\dot{\boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{d}^3t}{\mathrm{d}s^3}$,

故 $[\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''']=(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'')\cdot\boldsymbol{r}'''=[(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}})\cdot\dddot{\boldsymbol{r}}]\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^6$.

将 $\|\boldsymbol{r}''\|$ 和 $[\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''']$ 代入公式 $\tau=\frac{[\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''']}{\|\boldsymbol{r}''\|^2}$ 即可得公式(7.22).

(B)

1. 求抛物线 $y^2=2px$ 的渐屈线方程.

解　其参数方程为 $\boldsymbol{r}=\left\{\frac{1}{2p}y^2,y,0\right\},y\in(-\infty,+\infty)$.

单位切向量 $\boldsymbol{T}=\sqrt{\frac{p^2}{p^2+y^2}}\left\{\frac{y}{p},1,0\right\},\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''}{\|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''\|}=\{0,0,-1\}$,主法向量 $\boldsymbol{N}=\{0,0,-1\}\times\boldsymbol{T}=\sqrt{\frac{p^2}{p^2+y^2}}\left\{1,-\frac{y}{p},0\right\}$,曲率半径 $R=\frac{1}{p^2}(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$,曲率中心向径 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}+R\boldsymbol{N}=\left\{\frac{3y^2}{2p}+p,-\frac{y^3}{p^2},0\right\}$.

故渐屈线方程为 $\boldsymbol{\rho}=\left\{\frac{3y^2}{2p}+p,-\frac{y^3}{p^2},0\right\}$.

2. 求螺旋线 $\boldsymbol{r}=(a\cos t,a\sin t,bt)$ 的渐伸线方程,并证明这些渐伸线都是平面曲线.

解　设 $\boldsymbol{r}(0)$ 处的弧长为0,则 $\boldsymbol{r}(t)$ 处的弧长 $s(t)=\int_0^t\|\dot{\boldsymbol{r}}\|\mathrm{d}s=\sqrt{a^2+b^2}\,t$. 于是 $t=ws$,其中 $w=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 由此可得螺线的自然参数方程为 $\boldsymbol{r}(s)=(a\cos ws,a\sin ws,bws)$,$\boldsymbol{r}'(s)=T(s)=(-aw\sin ws,aw\cos ws,bw)$. 于是渐伸线方程为:$\boldsymbol{\rho}(s)=(a\cos ws,a\sin ws,bws)+(c-s)(-aw\sin ws,aw\cos ws,bw)$,其中 c 为任意常数.

由于 $\boldsymbol{\rho}(s)$ 的第三个分量 $z(s)=bws+(c-s)bw=bwc$ 为常数. 故 $\boldsymbol{\rho}(s)$ 是平面 $z=bwc$ 上的平面曲线.

3. 设 $\overline{\Gamma}$ 为曲线 Γ 的曲率中心轨迹. 证明在对应点,曲线 $\overline{\Gamma}$ 的切线与曲线 Γ 的切线垂直.

证明　设 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$,其中 s 为自然参数.

则 $\overline{\Gamma}$ 的方程为 $\boldsymbol{\rho}(s)=\boldsymbol{r}(s)+R(s)N(s)$. 只需证明 $\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{\rho}'(s)=0$ 即可. 由 Frenet 公式及 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{r}',\boldsymbol{B}',\boldsymbol{N}'$ 为互相垂直的单位向量,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{\rho}'(s)&=\boldsymbol{r}'(s)\cdot(\boldsymbol{r}'(s)+R'(s)N(s)+R(s)N'(s))\\&=\|\boldsymbol{r}'\|^2+R'(s)[\boldsymbol{r}'(s)\cdot N(s)]+\boldsymbol{r}'(s)\cdot\\&\quad R(s)\left[-\frac{1}{R(s)}\boldsymbol{T}(s)+\tau(s)\boldsymbol{B}(s)\right]\\&=1+0-\boldsymbol{r}'(s)\cdot\boldsymbol{T}(s)+R(s)\tau(s)(\boldsymbol{r}'(s)\cdot\boldsymbol{B}(s))=0.\end{aligned}$$

5. 证明

(1) 若曲线在每一点处的切线都经过一个定点,则该曲线必是一条直线.

(2) 若曲线在每一点处的密切平面都经过一个定点,则该曲线必是一条平面曲线.

证明 (1) 设曲线的自然参数方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$,则 $\boldsymbol{r}(s)$ 处的切线方程为 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(s)+\lambda\boldsymbol{r}'(s)$. 不妨设每一点的切线都过定点 P_0(向径为 $\boldsymbol{r}_0$),则 $\forall s\in\mathbf{R}$, $\exists\lambda\in\mathbf{R}$,使 $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}(s)+\lambda\boldsymbol{r}'(s)$. 两边对 s 求导,则有 $\boldsymbol{r}'(s)+\lambda\boldsymbol{r}''(s)=0$. (*)

又因为 $\|\boldsymbol{r}'\|=1$,所以 $\boldsymbol{r}'(s)\perp\boldsymbol{r}''(s)$,故 $\boldsymbol{r}''(s)=0$.(如 $\boldsymbol{r}'(s)=0$,同样可得 $\boldsymbol{r}''(s)=0$). 故曲率 $\|\boldsymbol{r}''(s)\|=0$ 的曲线为直线.

(2) 曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$($s$ 为自然参数)的密切平面的方程为

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(s)+\lambda(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'').$$

因为密切平面都过定点 P_0(向径为常向量 $\boldsymbol{r}_0$),则 $\exists\lambda\in\mathbf{R}$,$\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}(s)+\lambda(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'')$. 两边对 s 求导可得

$$0=\boldsymbol{r}'(s)+\lambda(\boldsymbol{r}''\times\boldsymbol{r}''+\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'''),$$

即 $$\boldsymbol{r}'(s)+\lambda(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''')=0.$$

于是 $$\boldsymbol{r}''(s)\cdot[\boldsymbol{r}'(s)+\lambda(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''')]=0.$$

考虑到 $\|\boldsymbol{r}'\|=1$,即 $\boldsymbol{r}'\perp\boldsymbol{r}''$,从而 $\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}''=0$,可知

$$(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''')=-(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}''',\boldsymbol{r}'')=0.$$

即任一点处挠率 $\tau(s)=0$,故曲线为平面曲线.

综合练习题

1. 已知某工厂过去几年的产量与利润的数据如下:

产量 x/千件	40	47	55	70	90	100
利润 y/千元	32	34	43	54	72	85

通过把这些数据 (x_i,y_i) $(i=1,\cdots,6)$ 所对应的点描在坐标纸上,可以看出这些点的连线接近于一条直线,因此可以认为利润 y 与产量 x 的函数关系是线性函数,试利用最小二乘法求出这个线性函数,并估计当产量达到 120 千件时该工厂的利润是多少?

解 依题意可采用线性函数 $y=a+bx$ 对利润进行拟合. 按照最小二乘法,问题就归结为选择参数 a,b 使得偏差平方和