4.4 定义在$[0, l]$上的函数的傅里叶级数

设 $f(x)$ 在 $[0,l]$ 上有定义，令 $F(x)=\begin{cases} f(x), & 0\le x\le l \\ g(x), & -l<x<0 \end{cases}$，

则 $F(x)$ 在 $(-l,l]$ 上有定义，由前面的讨论可知：

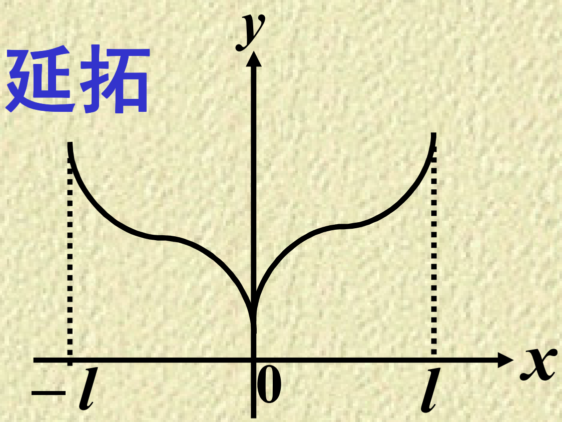
$F(x)$ 在 $(-l,l]$ 上可以展开为傅里叶级数.

又在 $[0,l]$ 上 $F(x)=f(x)$，故只需将 $F(x)$ 的傅里叶级数限制在 $[0,l]$ 上即为函数 $f(x)$ 的傅里叶级数.

为了方便起见，我们常常取这样的 $g(x)$ 使得 $F(x)$为偶函数或奇函数，从而可将$f(x)$展开为余弦级数或正弦级数.

相应地我们也称将$f(x)$偶延拓或奇延拓.

设 $f(x)$ 在 $[0,l]$ 上有定义，将 $f(x)$ **偶延拓**



即令 $F(x)=\begin{cases} f(x), & 0\le x\le l \\ f(-x), & -l<x<0 \end{cases}$

设 $F(x)\sim \dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\dfrac{n\pi}{l}x$，(*)

其中 $a_n=\dfrac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\dfrac{n\pi}{l}x\,dx$，$(n=0,2,3,\cdots)$

$b_n=0$，$(n=1,2,3,\cdots)$

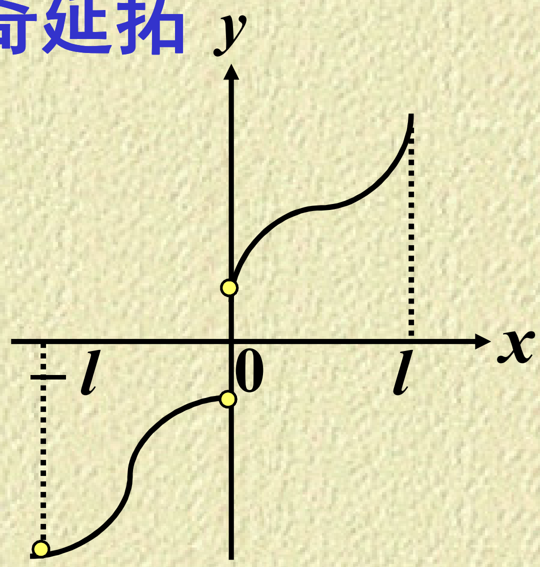
将级数 (*) 限制在 $[0,l]$ 上，即得 $f(x)$ 的傅里叶级数.

$$f(x)\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x.$$

此时也称将 $f(x)$ 展开为**余弦级数**.

上页 下页 返回

设 $f(x)$ 在 $[0,l]$ 上有定义， 将 $f(x)$ **奇延拓**



即令 $F(x)=\begin{cases} f(x), & 0\le x\le l \\ -f(-x), & -l<x<0 \end{cases}$

设 $F(x)\sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x$， (*)

其中 $a_n=0$， $(n=0,2,3,\cdots)$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx,\ (n=1,2,3,\cdots)$$

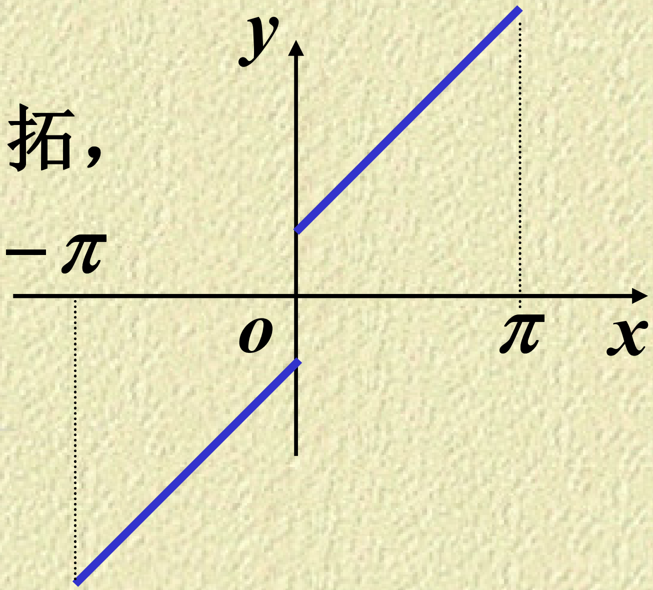
将级数 (*) 限制在 $[0,l]$ 上，即得 $f(x)$ 的傅里叶级数.

$$f(x)\sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x$$

此时也称将 $f(x)$展开为**正弦级数**.

上页 下页 返回

例 1 将函数 $f(x)=x+1,\ (0\le x\le\pi)$ 分别展开为正弦级数和余弦级数.



解 (1) 求正弦级数. 将 $f(x)$ 奇延拓,

此时 $a_n=0,\ (n=0,1,2,\cdots)$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx\,dx$$

$$=\frac{2}{n\pi}(1-\pi\cos n\pi-\cos n\pi)$$

$$=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n(\pi+1)],\quad (n=1,2,\cdots)$$

所以 $x+1=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n(\pi+1)}{n}\sin nx,\ (0<x<\pi).$

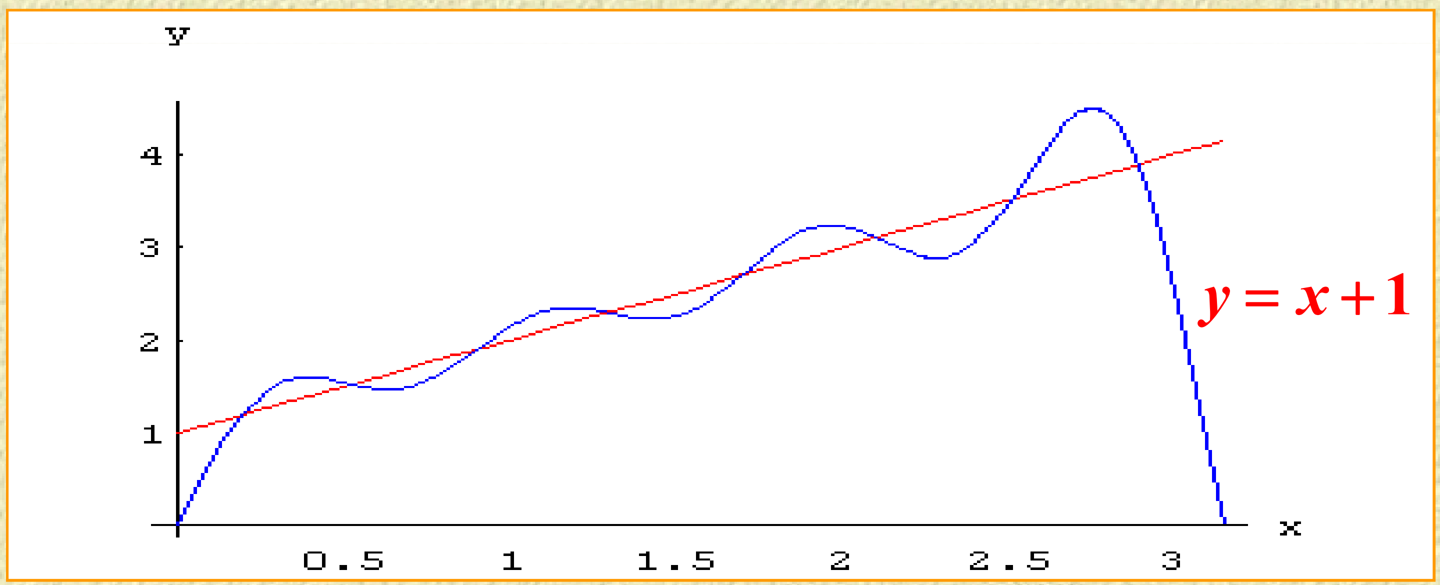
上页 下页 返回

$$x+1=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n(\pi+1)}{n}\sin nx$$

$$=\frac{2}{\pi}[(\pi+2)\sin x-\frac{\pi}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}(\pi+2)\sin 3x-\cdots]$$

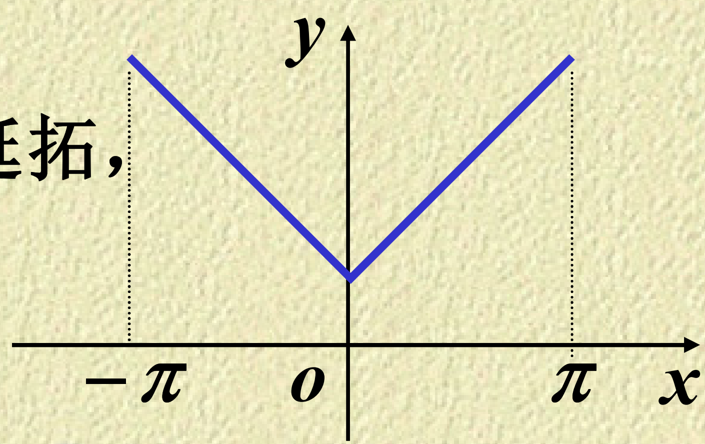
$$(0<x<\pi)$$

$$y=\frac{2}{\pi}[(\pi+2)\sin x-\frac{\pi}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}(\pi+2)\sin 3x-\frac{\pi}{4}\sin 4x+\frac{1}{5}(\pi+2)\sin 5x]$$



上页 下页 返回

例 1 将函数 $f(x)=x+1,\ (0\le x\le \pi)$ 分别展开为正弦级数和余弦级数.



解 (2) 求余弦级数. 将 $f(x)$ 偶延拓,

此时 $b_n=0,\ (n=1,2,\cdots)$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1],\ (n=1,2,\cdots)$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)dx=\pi+2,$$

所以 $x+1=\dfrac{\pi+2}{2}+\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx,\ (0\le x\le \pi)$

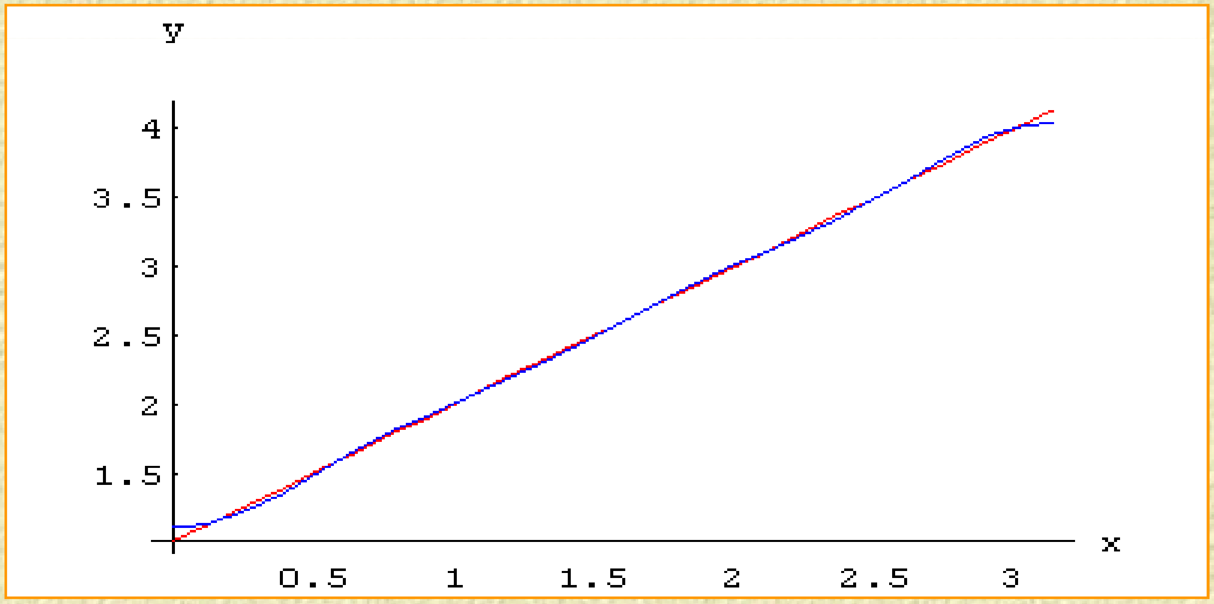
上页 下页 返回

$$x+1=\frac{\pi+2}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx$$

$$=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots]$$

$$(0\le x\le \pi)$$

$$y=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\frac{1}{7^2}\cos 7x)$$



上页 下页 返回

例2 将函数 $f(x)=10-x$, $(5<x<15)$ 展开为傅里叶级数.

解 作变量代换 $z=x-10$,

$\because\ 5<x<15 \Rightarrow -5<z<5$,

$f(x)=f(z+10)=-z=F(z)$,

将 $F(z)=-z$ 在 $(-5,5)$ 内展开为傅里叶级数,

由于 $F(z)$ 是奇函数, $\therefore\ a_n=0$, $(n=0,1,2,\cdots)$

$$b_n=\frac{2}{5}\int_0^5(-z)\sin\frac{n\pi}{5}z\,dz=\frac{2}{n\pi}\int_0^5 z\,d\cos\frac{n\pi}{5}z=(-1)^n\frac{10}{n\pi},$$

$$\therefore\ F(z)=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi}{5}z,\quad(-5<z<5)$$

从而 $$10-x=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin[\frac{n\pi}{5}(x-10)],\ (5<x<15).$$