(9) $\iint\limits_{(\sigma)}(x\sin y+y\cos x)\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)$ 是以 $(1,1)$，$(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域；

(10) $\iint\limits_{(\sigma)}x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)$ 是由 $y=4-x^2$，$y=-3x$ 和 $x=1$ 所围成的区域.

4. 把二重积分 $I=\iint\limits_{(\sigma)}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 在直角坐标系中分别以两种不同的次序化为累次积分，其中 (σ) 为

(1) $\{(x,y)\mid y^2\leqslant x,x+y\leqslant 2\}$；

(2) $x=\sqrt{y}$，$y=x-1$，$y=0$ 与 $y=1$ 所围成的区域.

5. 交换下列累次积分的顺序：

(1) $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2+x}^{x+1}f(x,y)\mathrm{d}y$；

(2) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y$；

(3) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{x}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^{\sqrt{8}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{8-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$；

(4) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{2y}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^3\mathrm{d}y\int_0^{2y^2}f(x,y)\mathrm{d}x$.

6. 利用极坐标计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_{(\sigma)}\mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)=\{(x,y)\mid a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2\}$，其中 $a>0,b>0$；

(2) $\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)=\{(x,y)\mid 2x\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$；

(3) $\iint\limits_{(\sigma)}(x+y)^2\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)=\{(x,y)\mid (x^2+y^2)^2\leqslant 2a(x^2-y^2),a>0\}$；

(4) $\iint\limits_{(\sigma)}\arctan\dfrac{y}{x}\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)$ 为圆域 $x^2+y^2\leqslant 1$ 在第一象限部分；

(5) $\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)$ 为圆域 $x^2+y^2\leqslant Rx$ 在第一象限部分；

(6) $\iint\limits_{(\sigma)}(x+y)^2\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)$ 是圆域 $x^2+y^2\leqslant a^2$.

7. 把下列累次积分化为极坐标的累次积分，并计算其值：

(1) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$；

(2) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)^{-3/2}\mathrm{d}y$；

(3) $\int_1^2\mathrm{d}y\int_0^{y}\dfrac{x\sqrt{x^2+y^2}}{y}\mathrm{d}x$.

8. 求下列各组曲线所围成平面图形的面积：

(1) $xy=a^2$，$x+y=\dfrac{5}{2}a$ $(a>0)$；

(2) $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$，$x^2+y^2=a^2$ $(x^2+y^2\geqslant a^2,a>0)$；

(3) $\rho=a(1+\sin\theta)$ $(a\geqslant 0)$.

9. 求下列各组曲面所围成立体的体积：

(1) $z=x^2+y^2$，$x+y=4$，$x=0$，$y=0$，$z=0$；

(2) $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$，$z=0$；

(3) $x^2+y^2=a^2$，$y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$.

10. 一金属叶片形如心脏线 $\rho=a(1+\cos\theta)$，如果它在任一点的密度与原点到该点的距离成正比，求它的全部质量.

习题 6.2

(A)

1. 设有一母线平行于 z 轴的柱体，它与 xOy 平面的交线为一闭曲线，此闭曲线所围区域为 (σ)，柱体的顶部和底部分别由曲面 $z=f_2(x,y)$ 与 $z=f_1(x,y)$ 构成. 试用二重积分表示此柱体的体积.

2. 试用二重积分的几何意义说明：

(1) $\iint\limits_{(\sigma)} k\mathrm{d}\sigma = k\sigma, k \in \mathbf{R}_+$ 为常数，σ 表示区域 (σ) 的面积；

(2) $\iint\limits_{(\sigma)} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\mathrm{d}\sigma = \frac{2}{3}\pi R^3$，$(\sigma)$ 是以原点为中心，半径为 R 的圆；

(3) 若积分域关于 y 轴对称，则

i) 当 $f(x,y)$ 是 x 的奇函数时，二重积分 $\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 0$，

ii) 当 $f(x,y)$ 是 x 的偶函数时，有

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 2\iint\limits_{(\sigma_1)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

其中 (σ_1) 为 (σ) 在右半平面 $x \geqslant 0$ 中的部分区域；

(4) 若积分域关于 x 轴对称，被积函数 $f(x,y)$ 分别具有怎样的对称性时有

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 0, \quad \iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 2\iint\limits_{(\sigma_1)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

其中 (σ_1) 为 (σ) 在上半平面 $y \geqslant 0$ 中的部分区域.

3. 计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_{(\sigma)} x^2 y\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)$ 是由 $x=0, y=1$ 与 $x=\sqrt{y}$ 所围成的区域；

(2) $\iint\limits_{(\sigma)} \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)$ 是由 $xy=1, y=x$ 与 $x=2$ 所围成的区域；

(3) $\iint\limits_{(\sigma)} xy\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma) = \{(x,y) \mid 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1\}$；

(4) $\iint\limits_{(\sigma)} (x+y)^2\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)$ 是由 $|x| + |y| = 1$ 所围成的区域；

(5) $\iint\limits_{(\sigma)} \frac{x}{y}\sqrt{1-\sin^2 y}\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma) = \left\{(x,y) \mid -\sqrt{y} \leqslant x \leqslant \sqrt{3y}, \frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant 2\pi\right\}$；

(6) $\iint\limits_{(\sigma)} \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma) = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}$；

(7) $\iint\limits_{(\sigma)} (y + xf(x^2+y^2))\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)$ 是由 $y=x^2$ 和 $y=1$ 所围成的区域；

(8) $\iint\limits_{(\sigma)} (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)$ 是正方形区域：$-1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1$；

(9) $\iint\limits_{(\sigma)}(x\sin y+y\cos x)\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)$ 是以 $(1,1)$，$(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域；

(10) $\iint\limits_{(\sigma)}x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)$ 是由 $y=4-x^2$，$y=-3x$ 和 $x=1$ 所围成的区域.

4. 把二重积分 $I=\iint\limits_{(\sigma)}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 在直角坐标系中分别以两种不同的次序化为累次积分，其中 (σ) 为

(1) $\{(x,y)\mid y^2\leqslant x,x+y\leqslant 2\}$； (2) $x=\sqrt{y}$，$y=x-1$，$y=0$ 与 $y=1$ 所围成的区域.

5. 交换下列累次积分的顺序：

(1) $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2+x}^{x+1}f(x,y)\mathrm{d}y$； (2) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y$；

(3) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^{\sqrt{8}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{8-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$； (4) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{2y}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^3\mathrm{d}y\int_0^{2y^2}f(x,y)\mathrm{d}x$.

6. 利用极坐标计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_{(\sigma)}\mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)=\{(x,y)\mid a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2\}$，其中 $a>0,b>0$；

(2) $\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)=\{(x,y)\mid 2x\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$；

(3) $\iint\limits_{(\sigma)}(x+y)^2\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)=\{(x,y)\mid (x^2+y^2)^2\leqslant 2a(x^2-y^2),a>0\}$；

(4) $\iint\limits_{(\sigma)}\arctan\dfrac{y}{x}\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)$ 为圆域 $x^2+y^2\leqslant 1$ 在第一象限部分；

(5) $\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)$ 为圆域 $x^2+y^2\leqslant Rx$ 在第一象限部分；

(6) $\iint\limits_{(\sigma)}(x+y)^2\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)$ 是圆域 $x^2+y^2\leqslant a^2$.

7. 把下列累次积分化为极坐标的累次积分，并计算其值：

(1) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$； (2) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)^{-3/2}\mathrm{d}y$；

(3) $\int_1^2\mathrm{d}y\int_0^y\dfrac{x\sqrt{x^2+y^2}}{y}\mathrm{d}x$.

8. 求下列各组曲线所围成平面图形的面积：

(1) $xy=a^2$，$x+y=\dfrac{5}{2}a$ $(a>0)$；

(2) $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$，$x^2+y^2=a^2$ $(x^2+y^2\geqslant a^2,a>0)$；

(3) $\rho=a(1+\sin\theta)$ $(a\geqslant 0)$.

9. 求下列各组曲面所围成立体的体积：

(1) $z=x^2+y^2$，$x+y=4$，$x=0$，$y=0$，$z=0$； (2) $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$，$z=0$；

(3) $x^2+y^2=a^2$，$y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$.

10. 一金属叶片形如心脏线 $\rho=a(1+\cos\theta)$，如果它在任一点的密度与原点到该点的距离成正比，求它的全部质量.

11. 以半径为 4 cm 的铜球的直径为中心轴，钻通一个半径为 1 cm 的圆孔，问损失掉的铜的体积是多少？

12. 在一个形状为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 的容器中，盛有 $8\pi\ \mathrm{cm}^3$ 的水，今再灌入 $120\pi\ \mathrm{cm}^3$ 的水，问液面将升高多少？

13. 利用适当的变换计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$，其中 $a>0,b>0$；

(2) $\iint\limits_{(\sigma)}\mathrm{e}^{y/(y+x)}\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)$ 是以 $(0,0)$，$(1,0)$ 和 $(0,1)$ 为顶点的三角形内部；

(3) $\iint\limits_{(\sigma)}xy\,\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)$ 由曲线 $xy=1,xy=2,y=x,y=4x\ (x>0,y>0)$ 所围成.

14. 求下列曲线所围成的平面图形的面积：

(1) $(x-y)^2+x^2=a^2\ (a>0)$；

(2) $x+y=a,x+y=b,y=\alpha x,y=\beta x\ (0<a<b,0<\alpha<\beta)$；

(3) $xy=a^2,xy=2a^2,y=x,y=2x\ (x>0,y>0)$；

(4) $y^2=2px,y^2=2qx,x^2=2ry,x^2=2sy\ (0<p<q,0<r<s)$.

(B)

1. 计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)=\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2\}$；

(2) $\iint\limits_{(\sigma)}(x+y)\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x+y\}$；

(3) $\iint\limits_{(\sigma)}y^2\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)$ 是 x 轴与摆线的一拱 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$，$(0\leqslant t\leqslant 2\pi,a>0)$ 所围成的区域.

2. 计算累次积分

$$\int_{1/4}^{1/2}\mathrm{d}y\int_{1/2}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{y/x}\mathrm{d}x+\int_{1/2}^{1}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{y/x}\mathrm{d}x.$$

3. 设 $f(x,y)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ $F(t)=\iint\limits_{x+y\leqslant t}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，求 $F(t)$.

4. 计算 $\iint\limits_{(\sigma)}x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}\sigma$，其中 (σ) 是由 $y=x^3,y=1,x=-1$ 所围成的区域，$f(x^2+y^2)$ 是 (σ) 上的连续函数.

5. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，并设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$，求 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y$.

6. 证明 Dirichlet 公式 $\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^a\mathrm{d}y\int_y^a f(x,y)\mathrm{d}x\ (a>0)$，并由此证明 $\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^y f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a(a-x)f(x)\mathrm{d}x$，其中 f 连续.

7. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，试利用二重积分证明：

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

8. 试求曲线$(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$ $(a_1b_2-a_2b_1\neq 0)$所围平面图形的面积.

9. 求抛物面$z=1+x^2+y^2$的一个切平面,使得它与该抛物面及圆柱面$(x-1)^2+y^2=1$围成的体积最小,试写出切平面方程并求出最小的体积.

10. 设$f(t)$是连续的奇函数,试利用适当的正交变换证明$\iint\limits_{(\sigma)} f(ax+by+c)\mathrm{d}\sigma=0$,其中$(\sigma)$关于直线$ax+by+c=0$对称,且$a^2+b^2\neq 0$.

11. 设有一半径为R,高为H的圆柱形容器,盛有$\frac{2}{3}H$高的水,放在离心机上高速旋转.因受离心力的作用,水面呈抛物面形状,问当水刚要溢出容器时,水面的最低点在何处?

12. 设$a>0,b>0$为常数,(σ)为椭圆域$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$,$f(t)$是连续函数,且$f(t)\neq 0$,证明:

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{(b+1)f\left(\frac{x}{a}\right)+(a-1)f\left(\frac{y}{b}\right)}{f\left(\frac{x}{a}\right)+f\left(\frac{y}{b}\right)}\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{2}ab(a+b).$$

13. 设函数$f(t)$在$[0,+\infty)$连续,且满足方程

$$f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\sigma,$$

求$f(t)$.

习题 6.3 ··················

(A)

1. 设积分域(V):(1) 关于 xOy 平面对称;(2) 关于 yOz 平面对称;(3) 关于 zOx 平面对称.试分别说明被积函数具有什么特性时,三重积分

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = 0, \quad \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = 2\iiint\limits_{(V')} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V,$$

其中(V')为(V)在对称面一侧的子区域.

2. 设(V)是球体:$x^2+y^2+z^2\leqslant 4$,(V_1)是其上半球体,试判断下列各题是否正确?为什么?

(1) $\iiint\limits_{(V)} (x+y+z)^2\,\mathrm{d}V = 2\iiint\limits_{(V_1)} (x+y+z)^2\,\mathrm{d}V$;

(2) $\iiint\limits_{(V)} xyz\,\mathrm{d}V = 0$;

(3) $\iiint\limits_{(V)} 3\,\mathrm{d}V = 3\iiint\limits_{(V)} \mathrm{d}V = 3\cdot\dfrac{4}{3}\pi\cdot 8 = 32\pi$;

(4) $\iiint\limits_{(V)} 3(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V = 3\iiint\limits_{(V)} 4\,\mathrm{d}V = 12\cdot\dfrac{4}{3}\pi\cdot 8 = 128\pi$.

3. 仅从积分域考虑,选用你认为最方便的坐标系将三重积分 $I = \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V$ 化成由三个单积分构成的累次积分,其中积分域(V)为

(1) 由平面 $x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$ 与各坐标面围成的区域;

(2) 由 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的区域;

(3) $(V)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant 2x, 0\leqslant z\leqslant \sqrt{4-x^2-y^2}\}$;

(4) $(V)=\{(x,y,z)\mid a-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\leqslant z\leqslant \sqrt{a^2-x^2-y^2}\quad (a>0)\}$.

4. 计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_{(V)} e^{z}\mathrm{d}V$，$(V)$ 是由平面 $x=0, y=1, z=0, y=x$ 和 $x+y-z=0$ 所围成的闭区域；

(2) $\iiint\limits_{(V)} y\cos(x+z)\mathrm{d}V$，$(V)$ 为由抛物柱面 $y=\sqrt{x}$，平面 $y=0, z=0$ 及 $x+z=\dfrac{\pi}{2}$ 所围成的闭区域；

(3) $\iiint\limits_{(V)} \dfrac{e^{z}}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}V$，$(V)$ 为由 $z=\sqrt{x^2+y^2}, z=1, z=2$ 所围成的闭区域；

(4) $\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$，$(V)$ 为由 $x^2+y^2=2z$ 与 $z=2$ 所围成的闭区域；

(5) $\iiint\limits_{(V)} xy\mathrm{d}V$，$(V)$ 为由 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=0, z=1, x=0, y=0$ 所围成的第一卦限内的闭区域；

(6) $\iiint\limits_{(V)} xy\mathrm{d}V$，$(V)$ 为由 $xy=z, x+y=1$ 与 $z=0$ 所围成的闭区域；

(7) $\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$，$(V)$ 由 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, z=\sqrt{A^2-x^2-y^2}, z=0$ 所围成，其中 $A>a>0$；

(8) $\iiint\limits_{(V)} z\mathrm{d}V$，$(V)$ 由 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与 $z=\dfrac{1}{3}(x^2+y^2)$ 所围成；

(9) $\iiint\limits_{(V)} \dfrac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}V$，$(V)$ 由 $x^2+y^2=z^2$ 与 $z=1$ 所围成；

(10) $\iiint\limits_{(V)} z^2\mathrm{d}V$，$(V)$ 为两球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 与 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz$ 的公共部分，$R>0$；

(11) $\iiint\limits_{(V)} xyz\mathrm{d}V$，$(V)$ 为 $x^2+y^2+z^2=1$ 位于第一卦限中的闭区域；

(12) $\iiint\limits_{(V)} \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}\mathrm{d}V$，$(V)$ 为由不等式 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1, z\geqslant\sqrt{x^2+y^2}$ 所确定的闭区域；

(13) $\iiint\limits_{(V)}(x+y)\mathrm{d}V$，$(V)$ 由 $x^2+y^2=1, x^2+y^2=4, z=0, z=x+2$ 所围成；

(14) $\iiint\limits_{(V)} \dfrac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}V$，$(V)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$；

(15) $\iiint\limits_{(V)} z(x^2+y^2)\mathrm{d}V$，$(V)=\{(x,y,z)\mid z\geqslant\sqrt{x^2+y^2}, 1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4\}$；

(16) $\iiint\limits_{(V)} z\mathrm{d}V$，$(V)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+(z-a)^2\leqslant a^2, x^2+y^2\leqslant z^2\ (a>0)\}$.

5. 选用适当的坐标系计算下列累次积分：

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} z^3\mathrm{d}z$；　　(2) $\displaystyle\int_{-3}^{3}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\mathrm{d}y\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}z$.

6. 求下列立体的体积：

(1) 由 $x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2+z^2=b^2$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}\ (z\geqslant 0)$ 所围成的立体 $(b>a>0)$；

(2) 由 $z=6-x^2-y^2$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体；

(3) 由 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z\ (a>0)$ 所围成的立体；

(4) 由 $x=\sqrt{y-z^2}, \dfrac{1}{2}\sqrt{y}=x$ 与 $y=1$ 所围成的立体；

(5) 由 $z=\frac{xy}{a}, x^2+y^2=ax$ $(a>0)$ 与 $z=0$ 所围成的立体；

(6) 由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ $(a>0,b>0,c>0)$ 所确定的立体；

(7) 由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ 与 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0,c>0)$ 所围成的立体.

7. 计算 $\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$，其中 (V) 为平面曲线 $\begin{cases}y^2=2z\\x=0\end{cases}$，绕 z 轴旋转一周形成的曲面与平面 $z=8$ 所围成的立体.

8. 证明：抛物面 $z=x^2+y^2+1$ 上任一点处的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围立体的体积恒为一常数值.

(B)

1. 计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_{(V)}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}V$, $(V)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+(z-1)^2\leqslant 1, z\geqslant 1, y\geqslant 0\}$；

(2) $\iiint\limits_{(V)}\left|\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1\right|\mathrm{d}V$, (V) 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 围成；

(3) $\iiint\limits_{(V)}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\mathrm{d}V$, $(V)=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1\ (a>0,b>0,c>0)\right\}$.

2. 将累次积分 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)\mathrm{d}z$ 分别化为先对 x 和先对 y 的累次积分.

3. 设 $F(t)=\iiint\limits_{(V)}x\ln(1+x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$, (V) 由 $x^2+y^2+z^2\leqslant t^2$ 与 $\sqrt{y^2+z^2}\leqslant x$ 确定，求 $\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t}$.

4. 设 f 为连续函数，求函数 $F(t)=\iiint\limits_{(V)}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$ 的导数 $F'(t)$，其中 $(V)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\}$.

5. 设 $f(x)$ 连续，$(V)=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant z\leqslant h, x^2+y^2\leqslant t^2\}$，$F(t)=\iiint\limits_{(V)}[z^2+f(x^2+y^2)]\mathrm{d}V$，求 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ 和 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^2}$.

6. 计算三重积分 $\iiint\limits_{(V)}(x+y+z)^2\mathrm{d}V$，其中 (V) 为椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$.