故 $\exists \boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n\in S$,使

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\begin{pmatrix}f_1(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})-f_1(\boldsymbol{x}_0)\\ \vdots\\ f_m(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})-f_m(\boldsymbol{x}_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{\xi}_1)}{\partial x_j}\Delta x_j\\ \vdots\\ \sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{\xi}_m)}{\partial x_j}\Delta x_j\end{pmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\xi}_i)}{\partial x_j}\right)_{m\times n}\Delta\boldsymbol{x}.$$

注意到 $\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{x}_0$,本题得证.

习　题　5.6

(A)

2. 求曲线 $\boldsymbol{r}=(t,-t^2,t^3)$ 上的与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线方程.

解　设曲线上 $\boldsymbol{r}_0=(t_0,-t_0^2,t_0^3)$ 的切线与平面 $x+2y+z=4$ 平行,则 $\boldsymbol{r}_0$ 处的切向量 $\dot{\boldsymbol{r}}_0=(1,-2t_0,3t_0^2)$ 与平面的法向量 $(1,2,1)$ 垂直,即 $1-4t_0+3t_0^2=0$. 解之得 $t_0=1$ 或 $t_0=\frac{1}{3}$. 则所求切线过 $\boldsymbol{r}_0=(1,-1,1)$ 或 $\boldsymbol{r}_0=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{9},\frac{1}{27}\right)$. 所求切线为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}\text{ 和 }\frac{x-\frac{1}{3}}{1}=\frac{y+\frac{1}{9}}{-\frac{2}{3}}=\frac{z-\frac{1}{27}}{\frac{1}{3}}.$$

3. 证明螺线 $\boldsymbol{r}=(a\cos\theta,a\sin\theta,k\theta)$ 上任一点的切线与 Oz 轴交成定角.

证明　$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为螺线上任一点,则 $x_0=a\cos\theta_0,y_0=a\sin\theta_0,z_0=k\theta_0$. P_0 处的切向量为 $\boldsymbol{r}'=(-a\sin\theta,a\cos\theta,k)$ 与 z 轴夹角为 α,则 $\cos\alpha=\dfrac{\langle\boldsymbol{r}',\boldsymbol{k}\rangle}{\|\boldsymbol{r}'\|\cdot\|\boldsymbol{k}\|}=\dfrac{k}{\sqrt{a^2+k^2}}$,其中 $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$ 为 z 轴正向的单位向量. 即 α 与 P_0 无关的常数. 本题得证.

4. 求下列平面曲线的弧长.

(2) $x=x(t)=\int_0^{t^2}\sqrt{1+u}\,\mathrm{d}u,y=y(t)=\int_0^{t^2}\sqrt{1-u}\,\mathrm{d}u$,$0\leqslant t\leqslant 1$;

解　$S=\int_0^1\sqrt{[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2}\mathrm{d}t$

$$= \int_0^1 [(2t\sqrt{1+t^2})^2 + (2t\sqrt{1-t^2})^2]^{\frac{1}{2}} dt = \sqrt{2}.$$

(3) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$　$(a>0)$的全长；

解　其参数方程为 $x = a\cos^3\theta, y = a\sin^3\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

故由对称性全长为 $S = 4S_1 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2} d\theta = 6a$.

(6) 极坐标系中的曲线 $\rho = a(1+\cos\theta)$ 的全长；

解　其参数方程为 $x = a(1+\cos\theta)\cos\theta, y = a(1+\cos\theta)\sin\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. 由心形线 $\rho = a(1+\cos\theta)$ 的对称性知，其全长

$$S = 2\int_0^{\pi} \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2} d\theta = 2\int_0^{\pi} a\sqrt{2(1+\cos\theta)} d\theta$$

$$= 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2} d\theta = 8a.$$

(8) 曲线 $y(x) = \int_{-\sqrt{3}}^{x} \sqrt{3-t^2} dt$ 的全长.

解　其切向量　$\tau = \{1, y'(x)\} = \{1, \sqrt{3-x^2}\}$ 且 $|x| \leqslant \sqrt{3}$. 故弧长

$$S = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} [1 + (\sqrt{3-x^2})^2]^{\frac{1}{2}} dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx = \frac{4}{3}\pi + \sqrt{3}.$$

5. 求下列空间曲线的弧长.

(3) $\begin{cases} x^2 = 3y, \\ 2xy = 9z \end{cases}$，介于点$(0,0,0)$与点$(3,3,2)$之间的弧段.

解　曲线方程为 $\boldsymbol{r}(x) = \left\{x, \frac{1}{3}x^2, \frac{2}{27}x^3\right\}, 0 \leqslant x \leqslant 3$. 则切向量 $\boldsymbol{r}' = \left\{1, \frac{2}{3}x, \frac{2}{9}x^2\right\}$，则所求弧长为

$$S = \int_0^3 \sqrt{1 + \frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{81}x^4} dx = \int_0^3 \left(1 + \frac{2}{9}x^2\right) dx = 5.$$

6. 两条曲线的交角，是指它们在交点处的切线的交角. 证明曲线 $\boldsymbol{r} = \{ae^t\cos t, ae^t\sin t, ae^t\}$ 与圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的各母线相交的角度相同.

证明　设曲线与圆锥面的交点为 $P_0(ae^{t_0}\cos t_0, ae^{t_0}\sin t_0, ae^{t_0}), t_0 \in \mathbf{R}$，则曲线在 P_0 处的切向量为

$$\boldsymbol{r}' = \{\cos t_0 - \sin t_0, \sin t_0 + \cos t_0, 1\}.$$

圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 过 P_0 点的母线为直线 $\frac{x}{\cos t_0} = \frac{y}{\sin t_0} = \frac{z}{1}$（即直线 OP_0），其方向

向量为 $S=\{\cos t_0,\sin t_0,1\}$.

设 α 为所求夹角,则

$$\cos\alpha=\frac{\langle r',S\rangle}{\|r'\|\ \|S\|}$$

$$=\frac{(\cos t_0-\sin t_0)\cos t_0+(\sin t_0+\cos t_0)\sin t_0+1}{\sqrt{(\cos t_0-\sin t_0)^2+(\sin t_0+\cos t_0)^2+1}\ \sqrt{\cos^2 t_0+\sin^2 t_0+1}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{6}}$$

与 t_0无关.故命题得证.

8. 求 xOz 坐标面内的曲线$\begin{cases}x=f(v),\\ z=g(v),\end{cases}$ $a\leqslant v\leqslant b$ 绕 Oz 轴旋转一周所得旋转面的参数方程,其中 $f(v)>0$.

解 曲面的水平截面为圆,圆心在 z 轴上,半径为 $f(v)$.

故曲面上 $P(x,y,z)$ 满足 $x^2+y^2=f^2(v)$, $z=g(v)$.

P 在 xOy 的投影点为 P',取由 x 轴逆时针旋转到 OP' 的角为 θ,则曲面的参数方程为

$$x=f(v)\cos\theta, y=f(v)\sin\theta, z=g(v), \text{其中} 0\leqslant\theta\leqslant2\pi,\ a\leqslant v\leqslant b.$$

9. 写出曲面 $r=r(u,v)$ 上点 $r(u_0,v_0)$ 处的切面与法线的参数方程.

解 $r=r(u,v)$ 在 $r(u_0,v_0)$ 处的法向量为 $r_u(u_0,v_0)\times r_v(u_0,\theta_0)$.

设 ρ 为点 $r(u_0,v_0)$ 处的切平面上任一点的向径,则 $\rho-r(u_0,v_0)$ 在切平面上,从而 $\rho-r(u_0,v_0)$, $r_u(u_0,v_0)$, $r_v(u_0,v_0)$ 共面.于是存在 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ 使 $\rho-r(u_0,v_0)=\lambda r_u(u_0,v_0)+\mu r_v(u_0,v_0)$.即切平面的方程为

$$\rho=\rho(\lambda,\mu)=r(u_0,v_0)+\lambda r_u(u_0,v_0)+\mu r_v(u_0,v_0),$$

法线方程为 $\rho=\rho(t)=r(u_0,v_0)+t[r_u(u_0,v_0)\times r_v(u_0,v_0)]$.

11. 试求平面,使它通过曲线$\begin{cases}y^2=x,\\ z=3(y-1)\end{cases}$在 $y=1$ 处的切线,且与曲面 $x^2+y^2=4z$ 相切.

解 曲线 Γ: $\begin{cases}y^2=x,\\ z=3(y-1)\end{cases}$ 上 $y=1$ 的点为 $M(1,1,0)$.而且曲面 $y^2=x$ 在 M 处的切平面 $x-1-2(y-1)=0$ 与平面 $z=3(y-1)$ 的交线 Γ_1: $\begin{cases}x-2y+1=0,\\ z=3(y-1)\end{cases}$ 即曲线 Γ 在 M 点的切线.

过 Γ_1 的平面束为 $x-2y+1+\lambda(3y-3-z)=0$.

即 $x+(3\lambda-2)y-\lambda z+1-3\lambda=0$ 中与曲面 Σ: $x^2+y^2=4z$ 相切的平面. 设切点为 $P_0(x_0, y_0, z_0)$. 则 P_0 应在所求平面 π 及 Σ 上, 即 $\begin{cases} x_0+(3\lambda-2)y_0-\lambda z_0+1-3\lambda=0, \\ x_0^2+y_0^2=4z_0. \end{cases}$

Σ 在 P_0 处的法向量 $\{2x_0, 2y_0, -4\}$ 应与平面束垂直, 因而

$$2x_0+2y_0(3\lambda-2)+4\lambda=0.$$

故 $\lambda=1$ 或 $\lambda=\frac{5}{6}$. 从而所求平面 π 的方程为

$$x+y-z-2=0 \quad 或 \quad 6x+3y-5z-9=0.$$

13. 求曲面 $z=xy$ 的法线, 使它与平面 $x+3y+z+9=0$ 垂直.

解 曲面 $z=xy$ 上 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处法向量 $\boldsymbol{n}=\{y_0, x_0, -1\}$. 又所求法线 Γ 与 $x+3y+z+9=0$ 垂直, 则 $y_0=\frac{x_0}{3}=\frac{-1}{1}$. 于是 $x_0=-3$, $y_0=-1$, $z_0=x_0y_0=3$. 故所求法线 Γ 为

$$\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}.$$

14. 求曲面 $x^2+2y^2+z^2=22$ 的法线, 使它与直线 $\begin{cases} x+3y+z=3, \\ x+y=0 \end{cases}$ 平行.

解 设所求直线 L 为曲面上 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的法线, 则 $x_0^2+2y_0^2+z_0^2=22$, 且 L 的方向向量为 $\{2x_0, 4y_0, 2z_0\}$.

又由于 L 与 $\begin{cases} x+3y+z=3, \\ x+y=0 \end{cases}$ 平行, 则 $\{2x_0, 4y_0, 2z_0\}$ 平行于

$$\{1,3,1\}\times\{1,1,0\}=\{-1,1,-2\}, 即 \frac{x_0}{-1}=\frac{2y_0}{1}=\frac{z_0}{-2},$$

$x_0=-2y_0$, $z_0=-4y_0$. 代入 $x_0^2+2y_0^2+z_0^2=22$ 可得 P_0 为 $(-2,1,-4)$ 或 $(2,-1,4)$. 故所求直线为

$$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+4}{-2} \quad 或 \quad \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-4}{2}.$$

15. 求曲线 $\begin{cases} 3x^2+2y^2=12, \\ z=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所得旋转面在点 $(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ 处

由内部指向外部的单位法向量.

解　所得旋转面为椭圆面,其方程为 $3(x^2+z^2)+2y^2=12$,且在 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的法向量为 $\{0,2\sqrt{3},3\sqrt{2}\}$ 或 $\{0,-2\sqrt{3},-3\sqrt{2}\}$. 而所求法向量应与此点的向径同向,即为与 $\{0,2\sqrt{3},3\sqrt{2}\}$ 同向的单位向量 $\frac{1}{5}\{0,\sqrt{10},\sqrt{15}\}$.

17. 求锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ 在其上一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程,并证明切平面通过锥面在 P_0 处的母线.

解　由于 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=\frac{z_0^2}{c^2}$,故锥面在 P_0 处的切平面 π 的方程为 $\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y-\frac{z_0}{c^2}z=0$. 因而 π 过原点. P_0 点的向径 $\boldsymbol{r}_0=\{x_0,y_0,z_0\}$ 与 π 的法向量 $\left\{\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{-z_0}{c^2}\right\}$ 垂直. 故过原点平行向量 $\boldsymbol{r}_0$ 的直线(即过 P_0 的母线)必在 π 上.

证法Ⅱ　由于圆锥面过 P_0 的母线是锥面过 P_0 的直线,其在 P_0 切线(即其自己)必在锥面过 P_0 的切平面上.

18. 证明曲面 $xyz=a^3(a>0)$ 上任一点的切平面和三个坐标面所围四面体的体积是一常数.

证明　设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为 $xyz=a^3$ 上任一点,则 $x_0y_0z_0=a^3$. 曲面 $xyz=a^3$ 在 P_0 处的切平面 π 方程为

$$y_0z_0x+x_0z_0y+x_0y_0z=3a^3.$$

由 $a>0$ 知 π 的截距方程为 $\frac{x}{3x_0}+\frac{y}{3y_0}+\frac{z}{3z_0}=1$. 故 π 与三坐标面所围四面体体积

$$V=|3x_0\cdot 3y_0\cdot 3z_0|=27a^3 \text{为一常数与 } P_0 \text{ 无关}.$$

19. 设 a,b 和 c 为常数,函数 $F(u,v)$ 有连续的一阶偏导数. 证明曲面 $F\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$ 上任一点处的切平面均通过定点.

证明　设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为曲面 $F\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$ 上一点.

则 $z_0\neq c$,且曲面在 P_0 处的切平面方程为

$$\frac{F_u(P_0)}{z_0-c}(x-x_0)+\frac{F_v(P_0)}{z_0-c}(y-y_0)$$

$$=\frac{F_u(P_0)(x_0-a)+F_v(P_0)(y_0-b)}{(z_0-c)^2}(z-z_0).$$

即 $[(x-x_0)(z_0-c)-(a-x_0)(z_0-z)]F_u(P_0)+[(y-y_0)(z_0-c)-(y_0-b)(z-z_0)]F_v(P_0)=0.$

故切平面过(a,b,c)点.

20. 设 a 和 b 为常数,证明曲面 $F(x-az,y-bz)=0$ 上任一点处的切平面均与某定直线平行.

证明 $P_0(x_0,y_0,z_0)$为 $F(x-az,y-bz)=0$ 上任一点. 过 P_0的法向量 $\boldsymbol{n}=\{F_1(P_0),F_2(P_0),-aF_1(P_0)-bF_2(P_0)\}$与常向量$\{a,b,1\}$垂直,故过 P_0 的切平面与定直线 $ax+by+z=0$ 平行.

21. 两个曲面在交线上某点的交角是指两曲面在该点的法线的交角. 证明球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与锥面 $x^2+y^2=k^2z^2$ 正交$\left(\text{即交角为}\frac{\pi}{2}\right)$.

证明 球面与锥面的交点为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$,则 $x_0^2+y_0^2+z_0^2=R^2$ 且 $x_0^2+y_0^2=kz_0^2$. 而球面与锥面在 P_0 处的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_{球}=\{2x_0,2y_0,2z_0\}$ 和 $\boldsymbol{n}_{锥}=\{2x_0,2y_0,-2kz_0\}$. 设两曲面在 P_0处夹角为 α,则

$$\cos\alpha=\frac{\langle\boldsymbol{n}_{球},\boldsymbol{n}_{锥}\rangle}{\|\boldsymbol{n}_{球}\|\cdot\|\boldsymbol{n}_{锥}\|}=\frac{4(x_0^2+y_0^2-kz_0^2)}{\|\boldsymbol{n}_{球}\|\cdot\|\boldsymbol{n}_{锥}\|}=0,$$

从而 $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

(B)

1. 试证旋转面 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$上任一点的法线与旋转轴相交,其中 $f'(u)$ 连续且不等于零.

证明 设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$为 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$上任意一点,由于垂直于 z 轴的截面为圆,故 z 轴为旋转轴. 由于$f'(u)$连续且不为零,则 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$在 P_0处的法线

$$\frac{x-x_0}{\frac{x_0}{u_0}f'(u_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{y_0}{u_0}f'(u_0)}=\frac{z-z_0}{-1},$$

与 z 轴$(x=0,y=0)$ 有交点$\left(0,0,z_0+\frac{u_0}{f'(u_0)}\right)$,其中 $u_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$.

2. 设 $\boldsymbol{F}(u,v)$ 是一连续可微的非零向量值函数，$F:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$. 证明函数 $\boldsymbol{F}(u,v)$ 的长度是常数的充要条件为 $\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial u}\cdot\boldsymbol{F}\equiv 0$ 及 $\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial v}\cdot\boldsymbol{F}\equiv 0$.

证明　令 $\boldsymbol{F}(u,v)=\{f_1(u,v),f_2(u,v),f_3(u,v)\}$，

则 $\|\boldsymbol{F}\|^2=f_1^2(u,v)+f_2^2(u,v)+f_3^2(u,v)$，$\frac{\partial\|\boldsymbol{F}\|^2}{\partial u}=2\left(\frac{\partial f_1}{\partial u}f_1+\frac{\partial f_2}{\partial u}f_2+\frac{\partial f_3}{\partial u}f_3\right)=2\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial u}\cdot\boldsymbol{F}$，$\frac{\partial\|\boldsymbol{F}\|^2}{\partial v}=2\left(\frac{\partial f_1}{\partial v}f_1+\frac{\partial f_2}{\partial v}f_2+\frac{\partial f_3}{\partial v}f_3\right)=2\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial v}\cdot\boldsymbol{F}$.

从而 $\|\boldsymbol{F}\|^2=C$ 为常数 $\Leftrightarrow\frac{\partial\|\boldsymbol{F}\|^2}{\partial u}\equiv 0$ 且 $\frac{\partial\|\boldsymbol{F}\|^2}{\partial v}\equiv 0\xLeftrightarrow{F\text{为连续可微非零向量值函数}}\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial u}\cdot\boldsymbol{F}\equiv 0$ 且 $\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial v}\cdot\boldsymbol{F}\equiv 0$.

3. 证明曲面 Σ 是球面的充要条件为 Σ 的所有法线通过一个定点.

证明　设 Σ 的方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$.

充分性　设 Σ 的所有法线过定点 P_0，P_0 的向径为 $\boldsymbol{x}_0$，则 $\boldsymbol{r}(u,v)-\boldsymbol{x}_0$ 及 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$ 均为 Σ 上向径 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 处的法向量，则其互相平行，也即存在数量值函数 $f(u,v)$，使 $\boldsymbol{r}(u,v)-\boldsymbol{x}_0=f(u,v)\boldsymbol{n}$. 从而

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}(\boldsymbol{r}(u,v)-\boldsymbol{x}_0)\right]\cdot[\boldsymbol{r}(u,v)-\boldsymbol{x}_0]=\boldsymbol{r}_u\cdot[f(u,v)\boldsymbol{n}]\equiv 0,$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial v}(\boldsymbol{r}(u,v)-\boldsymbol{x}_0)\right]\cdot[\boldsymbol{r}(u,v)-\boldsymbol{x}_0]=\boldsymbol{r}_v\cdot[f(u,v)\boldsymbol{n}]\equiv 0.$$

由上题知 $\|\boldsymbol{r}(u,v)-\boldsymbol{x}_0\|$ 为常数，即 $\sum$ 上任一点到定点 $\boldsymbol{x}_0$ 的距离相等，故 $\sum$ 为球面.

必要性　将充分性逆推即可.

4. 设函数 $u=F(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 和 $\psi(x,y,z)=0$ 下，在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处取得极值 m. 证明曲面 $F(x,y,z)=m$；$\varphi(x,y,z)=0$ 和 $\psi(x,y,z)=0$ 在点 P_0 的法线共面. 其中函数 F,φ 及 ψ 均有连续的且不同时为零的一阶偏导数.

证明　曲面 $F(x,y,z)=m,\varphi(x,y,z)=0,\psi(x,y,z)=0$ 在 P_0 点处的法向量分别为

$$\boldsymbol{n}_F=\{F_x(P_0),F_y(P_0),F_z(P_0)\},$$
$$\boldsymbol{n}_\varphi=\{\varphi_x(P_0),\varphi_y(P_0),\varphi_z(P_0)\},$$
$$\boldsymbol{n}_\psi=\{\psi_x(P_0),\psi_y(P_0),\psi_z(P_0)\}.$$

因此只需证明 $\boldsymbol{n}_F,\boldsymbol{n}_\varphi,\boldsymbol{n}_\psi$ 共面即可.

令 $L(x,y,z,\lambda,\mu)=F(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$.

由于 $u=F(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z)=0,\psi(x,y,z)=0$ 下在 P_0 处取得极值 m，且 F,φ,ψ 均有连续的且不同时为零的一阶偏导数知，∃实数 λ_0,μ_0 使

$$L_x(P_0,\lambda_0,\mu_0)=F_x(P_0)+\lambda_0\varphi_x(P_0)+\mu_0\psi_x(P_0)=0,$$

$$L_y(P_0,\lambda_0,\mu_0)=F_y(P_0)+\lambda_0\varphi_y(P_0)+\mu_0\psi_y(P_0)=0,$$

$$L_z(P_0,\lambda_0,\mu_0)=F_z(P_0)+\lambda_0\varphi_z(P_0)+\mu_0\psi_z(P_0)=0.$$

即 $\exists\lambda_0,\mu_0\in R_0$ 使 $\boldsymbol{n}_F=-\lambda_0\boldsymbol{n}_\varphi-\mu_0\boldsymbol{n}_\psi$. 从而 $\boldsymbol{n}_F,\boldsymbol{n}_\varphi,\boldsymbol{n}_\psi$ 共面.

习 题 5.7

(A)

1. 如果曲线的方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$（$t$ 为一般参数），试推导标架向量 $\boldsymbol{T},\boldsymbol{B}$ 的计算公式(7.6)

解 公式(7.6) 即 $\boldsymbol{T}=\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}}{\|\dot{\boldsymbol{r}}\|}$, $\boldsymbol{B}=\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}}{\|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}\|}$.

注意到弧长 $s(t)$ 对 t 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\|\dot{\boldsymbol{r}}\|$，则由 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{r}'$，可知 $\boldsymbol{T}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}S}=\dot{\boldsymbol{r}}\dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}}{\|\dot{\boldsymbol{r}}\|}$. 于是

$$\boldsymbol{r}''=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)=\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}+\dot{\boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}s^2}$$

$$=\ddot{\boldsymbol{r}}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2+\dot{\boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}s^2}.$$

从而 $\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''=(\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}})\left(\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^3$，即 $\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''$ 与 $\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}$ 同向，故由 $\boldsymbol{B}=\dfrac{\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''}{\|\boldsymbol{r}''\|}$ 可知 $\boldsymbol{B}=\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}}{\|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}\|}$.

5. 证明螺旋线 $\boldsymbol{r}=(a\cos t,a\sin t,bt)$ 上任一点的主法线都与 z 轴垂直相交.

证明 $\dot{\boldsymbol{r}}=(-a\sin t,a\cos t,b)$，$\ddot{\boldsymbol{r}}=(-a\cos t,-a\sin t,0)$，从而 $\boldsymbol{T}=\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}}{\|\dot{\boldsymbol{r}}\|}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t,a\cos t,b)$,

$\boldsymbol{B}=(\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}})/\|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}\|=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin t,-b\cos t,a)$,