$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

$g_1(x,y,z)=x^2+y^2-1=0$ ✓

$g_2(x,y,z)=x+y+z-1=0$ ✓

$\Rightarrow \nabla f=\lambda\nabla g_1+\mu\nabla g_2$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x=2\lambda x+\mu \\ 2y=2\lambda y+\mu \\ 2z=\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x=z \ ✓ & (1) \\ (1-\lambda)y=z \ ✓ & (2) \end{cases}$

由(1)(2)得:

① 或者 $\lambda=1$, $z=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ or $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

$P_1(1,0,0)$

$P_2(0,1,0)$

② 或者 $\lambda\neq 1$, $x=y=\frac{z}{1-\lambda}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z=1-\sqrt{2} \end{cases}$ or $\begin{cases} x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z=1+\sqrt{2} \end{cases}$

$P_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1-\sqrt{2}\right)$, $P_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1+\sqrt{2}\right)$

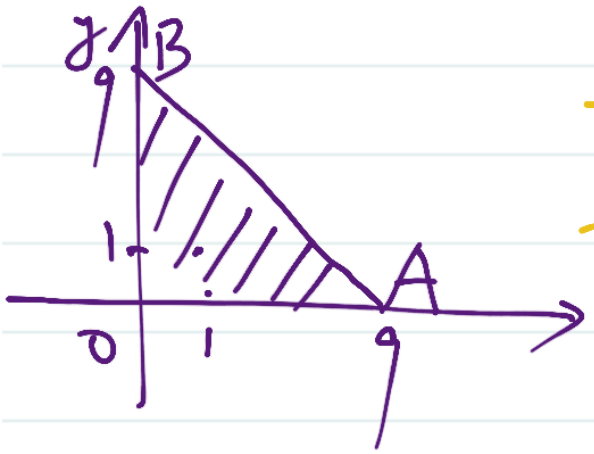
关于最值:

求得函数 $f(x,y)=-x^2-y^2+2x+2y+2$ ✓

在第一象限与三角形区域: $x=0$, $y=0$, $y=9-x$ 闭

内的最大值与最小值.

(对理也考)



Step1: 驻点 $(1,1) \to f(1,1)=4$ ①

Step2: ① 在 OA 上: $y=0$

得函数 $f(x,0)=-x^2+2x+2$, $0\le x\le 9$

驻点: $x=1$ $(1,0)\to f(1,0)=3$ ②

端点: $x=0 \Rightarrow (0,0)\to f(0,0)=2$ ③

$x=9$ $(9,0)\to f(9,0)=-61$ ④

② 在 OB 上: $x=0 \to f(0,y)=-y^2+2y+2$, $0\le y\le 9$

由对称性: $(0,1)\to f(0,1)=3$ ⑤

$(0,0)\to f(0,0)=2$ ⑥

$(0,9)\to f(0,9)=-61$ ⑦

③ 在 AB 上: $y=9-x \to f(x,9-x)=-2x^2+18x-61$, $0\le x\le 9$

驻点: $x=\frac{9}{2} \to f\left(\frac{9}{2},\frac{9}{2}\right)=-\frac{41}{2}$ ⑧

端点: $x=0 \to f(0,9)=-61$ ⑨

$x=9 \to f(9,0)=-61$ ⑩

最大值: $f(1,1)=4$

最小值: $f(0,9)=f(9,0)=-61$