1.3 函数极限的概念

从数列极限到函数极限

数列极限 $n \to +\infty$

离散自变量

↓

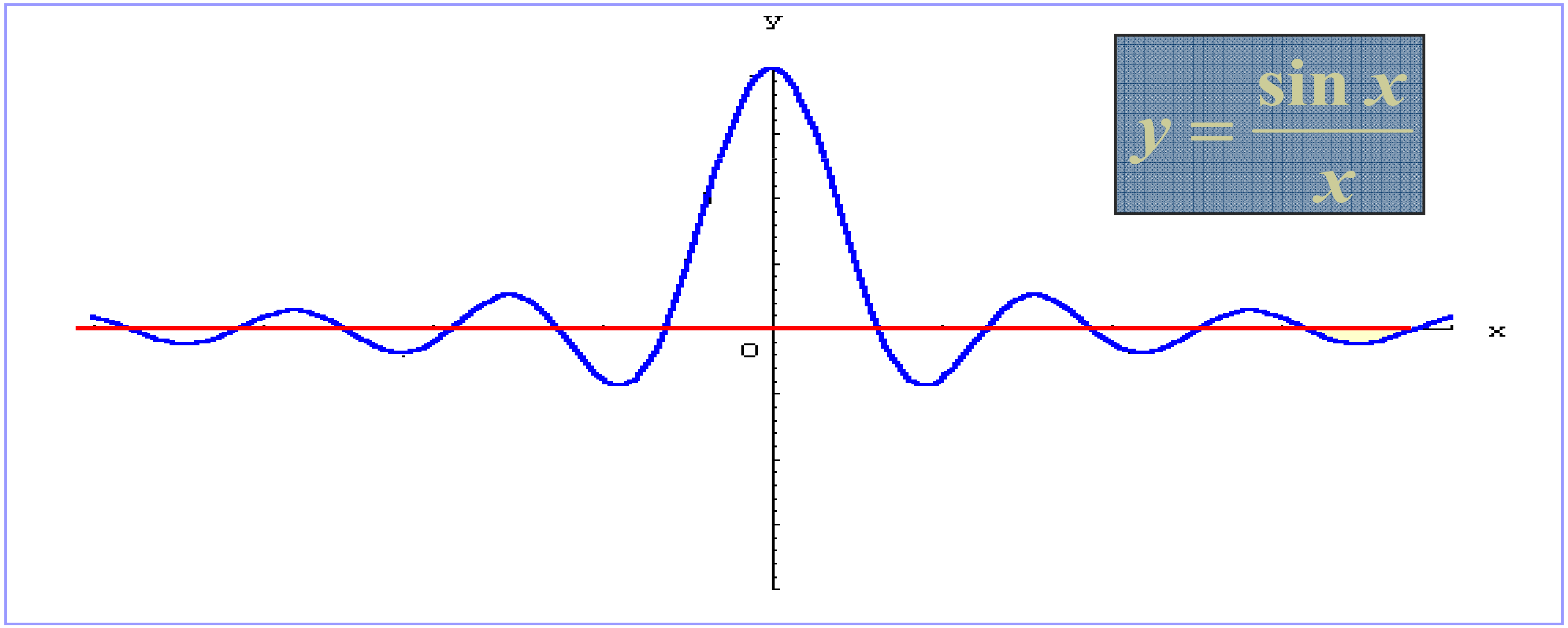
函数极限

连续自变量

- 无穷大
  - $+\infty$
  - $-\infty$
- 有限值
  - 左侧
  - 右侧

1.自变量x趋向无穷大时函数的极限

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的变化趋势.



函数 $y = f(x)$ 在 $x \to \infty$ 的过程中，对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 A.

通过上面演示实验的观察:

当 x 无限增大时, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 无限接近于 0.

问题: 如何用数学语言刻划函数“无限接近”.

$|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小;

$|x| > X$ 表示 $x \to \infty$ 的过程.

函数极限的定义一

定义 1 如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在着正数X，使得对于适合不等式$|x| > X$的一切x，所对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x) - A| < \varepsilon$，那末常数A就叫函数$f(x)$当$x \to \infty$时的极限，记作

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A(当x \to \infty)$$

$\boxed{"\varepsilon - X"定义}$ $\lim_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$，使当$|x| > X$时，恒有$|f(x) - A| < \varepsilon.$

另两种情形:

$1^0. \ x \to +\infty$ 情形： $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$

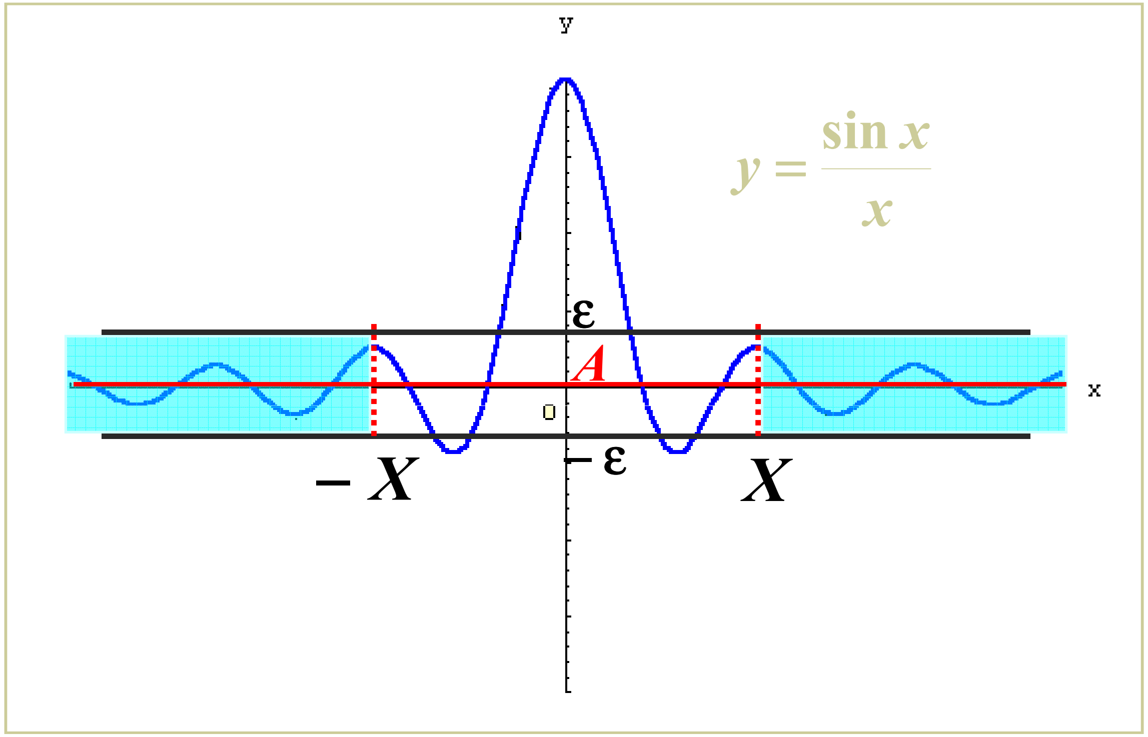
$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当$x > X$时, 恒有$|f(x) - A| < \varepsilon.$

$2^0. \ x \to -\infty$ 情形： $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当$x < -X$时, 恒有$|f(x) - A| < \varepsilon.$

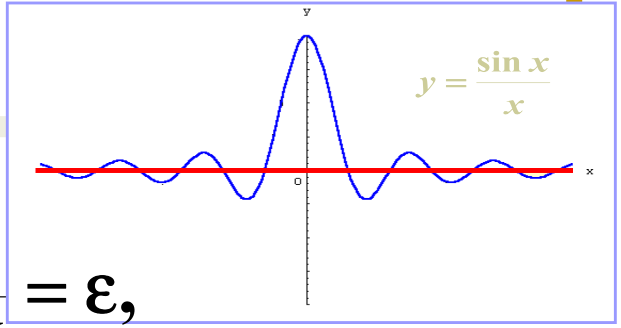
定理 : $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$且$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A.$

几何解释:



当$x<-X$或$x>X$时，函数$y=f(x)$图形完全落在以直线$y=A$为中心线，宽为2ε的带形区域内.

例1 证明 $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$



证 $\because \left|\frac{\sin x}{x}-0\right|=\left|\frac{\sin x}{x}\right|<\frac{1}{|x|}<\frac{1}{X}=\varepsilon,$

$\forall\varepsilon>0,$ 取 $X=\frac{1}{\varepsilon},$ 则当 $|x|>X$时恒有

$\left|\frac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon,$ 故 $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$

定义：如果$\lim_{x\to\infty}f(x)=c$,则直线 $y=c$是函数$y=f(x)$的图形的水平渐近线.

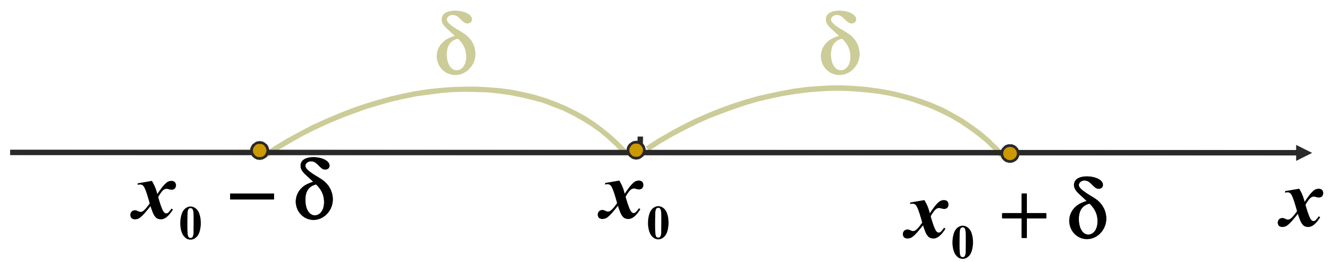
练习：用定义证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{1}{x}=0$

2.自变量x趋向有限值时函数的极限

问题: 函数 $y = f(x)$ 在 $x \to x_0$ 的过程中,对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 A.

$|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小;

$0 < |x - x_0| < \delta$ 表示 $x \to x_0$ 的过程.



点 x_0 的去心δ邻域,　δ体现 x 接近 x_0 程度.

函数极限的定义二

定义 2　如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小),总存在正数δ,使得对于适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$的一切x,对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$,那末常数A就叫函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限,记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(当x\to x_0)$$

$\boxed{"\varepsilon-\delta"定义}$　$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$使当$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon.$

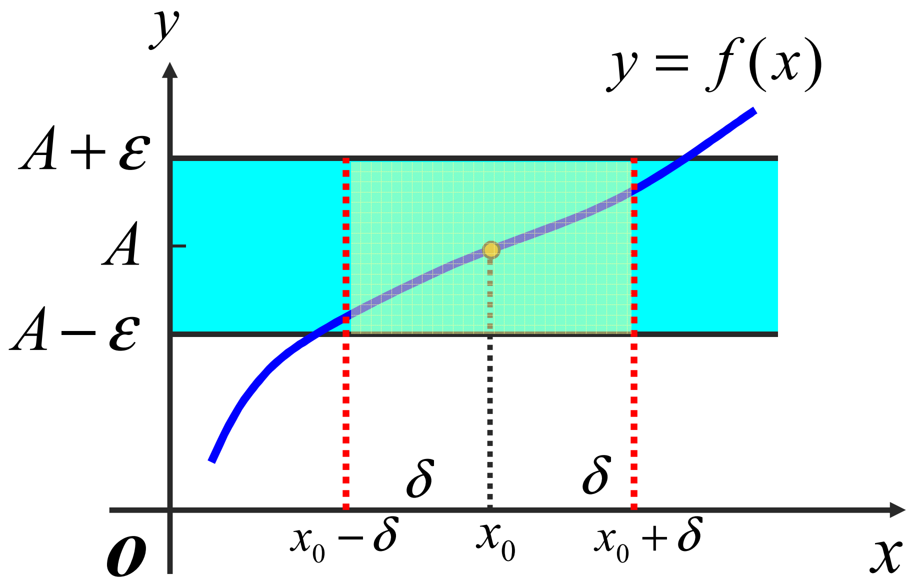
注意：

1.函数极限与$f(x)$在点x_0是否有定义无关；

2.δ与任意给定的正数ε有关.

几何解释:

当x在x_0的去心δ邻域时,函数$y=f(x)$图形完全落在以直线$y=A$为中心线,宽为2ε的带形区域内.



显然,找到一个δ后,δ越小越好.

例2 证明 $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$, ($C$为常数).

证 任给$\varepsilon > 0$, 任取$\delta > 0$, 当$0 < |x - x_0| < \delta$时,

$|f(x) - A| = |C - C| = 0 < \varepsilon$成立, $\therefore \lim\limits_{x\to x_0} C = C$.

例3 证明 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

证 $\because |f(x) - A| = |x - x_0|$, 任给$\varepsilon > 0$, 取$\delta = \varepsilon$,

当$0 < |x - x_0| < \delta = \varepsilon$时,

$|f(x) - A| = |x - x_0| < \varepsilon$成立, $\therefore \lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

例1 用定义证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2.$

证 函数在点x=1处没有定义.

$$\because \left|f(x)-A\right| = \left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right| = \left|x-1\right| \qquad \text{任给}\varepsilon>0,$$

要使 $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon,$ 只要取 $\delta=\varepsilon,$

当 $0<\left|x-x_0\right|<\delta$ 时，就有 $\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon,$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$$

例3.3 用定义验证 $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\frac{1}{4}$

例5 证明：当$x_0>0$时，$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.

证 $\because \left|f(x)-A\right|=\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|=\left|\dfrac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|\le\dfrac{\left|x-x_0\right|}{\sqrt{x_0}}$,

任给$\varepsilon>0$，要使$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$,

只要$\left|x-x_0\right|<\sqrt{x_0}\varepsilon$且x不取负值. 取$\delta=\min\{x_0,\sqrt{x_0}\varepsilon\}$,

当$0<\left|x-x_0\right|<\delta$时，就有$\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|<\varepsilon$,

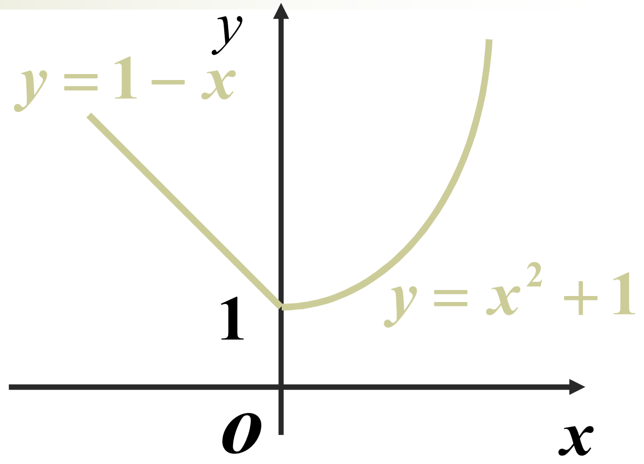
$\therefore \lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.

单侧极限:

例如,

设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ x^2+1, & x\geq 0\end{cases}$

证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1.$



分 $x>0$ 和 $x<0$ 两种情况分别讨论

x 从左侧无限趋近 x_0，记作 $x\to x_0-0$;

x 从右侧无限趋近 x_0，记作 $x\to x_0+0$;

左极限 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时,

恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

记作 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 - 0 \\ (x \to x_0^-)}} f(x) = A$ 或 $f(x_0 - 0) = A$.

右极限 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时,

恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

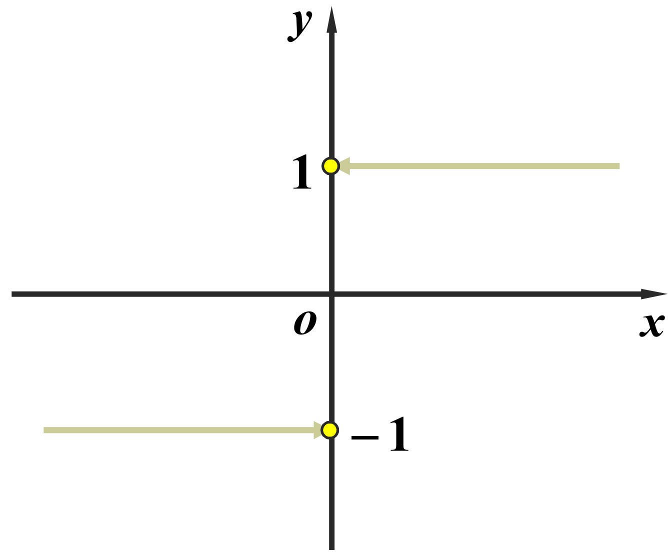
记作 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 + 0 \\ (x \to x_0^+)}} f(x) = A$ 或 $f(x_0 + 0) = A$.

注意: $\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$

$$= \{x \mid 0 < x - x_0 < \delta\} \cup \{x \mid -\delta < x - x_0 < 0\}$$

定理：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A.$

例6 验证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在.



证 $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{-x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to -0}(-1)=-1$

$\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x+0}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to +0}1=1$

左右极限存在但不相等, $\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

小结

函数极限的统一定义

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = A;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = A; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = A;$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A; \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A; \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A.$$

$\lim f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$,∃时刻,从此时刻以后,

恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$. (见下表)

过　程	$n \to \infty$	$x \to \infty$	$x \to +\infty$	$x \to -\infty$
时　刻	N			
从此时刻以后	$n > N$	$\lvert x \rvert > N$	$x > N$	$x < -N$
$f(x)$	$\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$			

过　程	$x \to x_0$	$x \to x_0^+$	$x \to x_0^-$
时　刻	δ		
从此时刻以后	$0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$	$0 < x - x_0 < \delta$	$-\delta < x - x_0 < 0$
$f(x)$	$\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$		

思考题

试问函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ 10, & x=0 \\ 5+x^2, & x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的左、右极限是否存在？当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限是否存在？

思考题解答

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(5+x^2) = 5,$$ 左极限存在,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x} = 0,$$ 右极限存在,

$$\because \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) \qquad \therefore \lim_{x\to 0} f(x)$$ 不存在.

函数极限的归并原理

目的：将函数极限归结为数列极限

定理3.1 Heine定理：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a \iff \forall\{x_n\}\subset D(f),\ \text{若}\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,\ \text{则有}\lim_{n\to\infty} f(x_n)=a$$

用Heine定理判断函数不收敛

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\neq a \iff \exists\{x_n\}\subset D(f)\text{及}\varepsilon_0>0,\text{满足}\ \lim_{n\to\infty} x_n = x_0\text{且}\left|f(x_n)-a\right|\geq \varepsilon_0$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\text{不存在} \iff \exists\{x_n\}\subset D(f)\text{使得}\{f(x_n)\}\text{不收敛}$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists\{x_n\}\subset D(f)\text{使得}\{f(x_n)\}\text{不是Cauchy数列}$$

$$\Uparrow$$

$$\exists\left\{x_n^{(1)}\right\},\left\{x_n^{(2)}\right\}\subset D(f)\text{满足}\lim_{n\to\infty} x_n^{(1)}=\lim_{n\to\infty} x_n^{(2)}=x_0,\text{且}\lim_{n\to\infty} f\left(x_n^{(1)}\right)\neq\lim_{n\to\infty} f\left(x_n^{(2)}\right)$$

例3.4：证明极限 $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}(x\neq 0)$ 不存在

分别取 $x_n^{(1)}=\dfrac{1}{n\pi}$， $x_n^{(2)}=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$

则 $\lim_{n\to\infty} f\left(x_n^{(1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin n\pi=0,$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n^{(2)}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

练 习 题

一、填空题:

1、当 $x \to 2$ 时，$y = x^2 \to 4$，问当 δ 取___时，只要 $0 < |x-2| < \delta$，必有 $|y-4| < 0.001$.

2、当 $x \to \infty$ 时，$y = \dfrac{x^2-1}{x^2+3} \to 1$，问当 z 取______时，只要 $|x| > z$，必有 $|y-1| < 0.01$.

二、用函数极限的定义 证明:

1、$\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \dfrac{1-4x^2}{2x+1} = 2$

2、$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$

3、$\forall x_0 \in \mathrm{R}, \lim\limits_{x \to x_0} D(x)$不存在

（其中$D(x)$为Dirichlet函数）