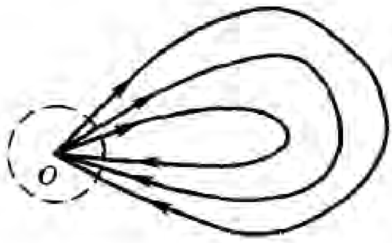
故原方程的通解为 $x=\frac{\sin t}{t}(C_1+C_2\cot t)=C_1\frac{\sin t}{t}+C_2\frac{\cos t}{t}$.

习　题　7.5

(A)

3. 若自治系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{f}:D\subseteq\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 的一切解均满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}\boldsymbol{x}(t)=\mathbf{0}$, 问 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 是否渐近稳定,为什么?

解　不一定. 由于仅有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\boldsymbol{x}(t)=\mathbf{0}$ 不能保证从点 O 足够小的邻域内出发的轨线,始终保持在点 O 的充分小的邻域内. 如图所示的轨线,当 $t\to\pm\infty$ 时都趋向于奇点 O,但在点 O 的任意小邻域出发的轨线不可能永远保持在图中所示的点 O 的邻域内.



(第 3 题)

4. 讨论下列系统零解的稳定性.

(1) $\begin{cases}\dot{x}=-y-xy^2,\\ \dot{y}=x-x^4y;\end{cases}$　　(3) $\begin{cases}\dot{x}=-y+x(x^2+y^2),\\ \dot{y}=x+y(x^2+y^2);\end{cases}$

(4) $\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-a^2\sin x;\end{cases}$　　(5) $\begin{cases}\dot{x}=y+ax^3,\\ \dot{y}=-x+ay^3.\end{cases}$

解　其线性近似系统分别为 $\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-x\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\dot{x}=-y,\\ \dot{y}=x.\end{cases}$ 都有零实部的特征值,故不能用线性近似系统判定原非线性系统零解的稳定性. 故采用 Liapunov 函数法. 为此取正定函数 $V(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$,则

(1) $\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}=-x^2y^2(1+x^2)\leqslant 0$ 定负,故零解稳定.

又 $\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}=0$ 当且仅当 $x=0$ 或 $y=0$.

将 $x=0$ 代入(1)的第一方程可得 $y=0$;将 $y=0$ 代入(1)的第二个方程得 $x=0$,故 $\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}=0$ 当且仅当 $x=0,y=0$,于是零解渐近稳定.

(3) $\left.\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3)}=(x^2+y^2)^2$ 恒正,(3)的零解不稳定.

(4) 有首次积分$\dfrac{1}{2}y^2-a^2\cos x=C$,于是取 $\overline{V}(x,y)=\dfrac{1}{2}y^2+a^2(1-\cos x)$ $\overline{V}(0,0)=0,\overline{V}(x,y)>0(x^2+y^2\neq0)$,从而 $V(x,y)$定正. 又$\left.\dfrac{\mathrm{d}\overline{V}}{\mathrm{d}t}\right|_{(4)}\equiv0$,由定理5.4(1)知(4)的零解稳定,但由于此时$\dfrac{1}{2}y^2+a^2(1-\cos x)=C$为系统(4)的轨线,故零解非渐近稳定.

(5) $\left.\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(5)}=a(x^4+y^4)$.

于是,当 $a<0$ 时,$\left.\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(5)}$ 恒负,从而零解渐近稳定;

当 $a=0$ 时,$\left.\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(5)}\equiv0$,零解稳定,但非渐近稳定(因为 $a=0$ 时 $x^2+y^2=C$ 为轨线);

当 $a>0$ 时,$\left.\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(5)}$ 恒正,零解不稳定.

5. 讨论下列系统零解的稳定性.

(1) $\begin{cases}\dot{x}=-x-y+2z,\\ \dot{y}=x+y,\\ \dot{z}=x+y;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\dot{x}=2x+8\sin y,\\ \dot{y}=2-\mathrm{e}^x-3y-\cos y;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\dot{x}=x-y+z+x^2yz,\\ \dot{y}=x-2y+2z+z^3,\\ \dot{z}=x+2y+z+xy;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}\dot{x}=-2x+y-z+x^2,\\ \dot{y}=x-y+xy,\\ \dot{z}=x+y-z+yz.\end{cases}$

解 (1) 为线性系统,其特征方程为

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & -1 & 2\\ 1 & 1-\lambda & 0\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda+\sqrt{2})(\lambda-\sqrt{2})=0,$$

故其有正特征值,零解不稳定.

(2) 原方程组可变为

$$\begin{cases}\dot{x}=2x+8\left(y-\dfrac{1}{3!}y^3+\dfrac{1}{5!}y^5-\cdots\right),\\ \dot{y}=2-\left(1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+\cdots\right)-3y-\left(1-\dfrac{1}{2!}x^2+\cdots\right).\end{cases}$$

故其线性近似系统为$\begin{cases}\dot{x}=2x+8y,\\ \dot{y}=-x-3y.\end{cases}$

特征方程为

$$\begin{vmatrix}\lambda-2 & -8\\ 1 & \lambda+3\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda+2=0,$$

特征值 $\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-7})$ 均有负实部. 故原非线性方程的零解渐近稳定.

(3) 其线性近似系统的特征方程为

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 1\\ 1 & -2-\lambda & 2\\ 1 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda^3-7\lambda+3)=f(\lambda)=0,$$

而 $f(0)=-3,f(1)=3$,由介值定理有正特征值,故原非线方程的零解不稳定.

(4) 线性近似系统的特征方程为

$$\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1 & -1\\ 1 & -1-\lambda & 0\\ 1 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda^3+4\lambda^2+5\lambda+3)=0.$$

由于 $a_1=4>0,\begin{vmatrix}a_1 & 1\\ a_3 & a_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & 1\\ 3 & 5\end{vmatrix}=17>0,$

$$\begin{vmatrix}a_1 & 1 & 0\\ a_3 & a_2 & a_1\\ 0 & 0 & a_3\end{vmatrix}=a_3(a_1a_2-a_3)=3\times17>0.$$

故其特征值均有负实部,原非线性系统零解渐近稳定.

(B)

1. 设齐次线性微分方程组 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,\boldsymbol{A}(t)$ 在 $t\in\mathbf{R}$ 连续,证明零解稳定的充要条件是它的一个基解矩阵有界.

证明 设 $\boldsymbol{X}(t)$ 为齐次线性微分方程组的一个基解矩阵,于是满足初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 的解

$$\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(t_0)\boldsymbol{x}_0.$$

充分性　设基解矩阵有界,即 $\| X(t)X^{-1}(t_0) \| \leqslant M(t_0)$ ($M(t_0)$ 与 t_0 有关的正数). 于是 $\forall \varepsilon > 0, t \geqslant t_0$ 取 $\delta(\varepsilon, t_0) = \dfrac{\varepsilon}{M(t_0)}$,当 $\| x_0 \| < \delta$ 时,有

$$\| x(t, t_0, x_0) \| \leqslant \| X(t)X^{-1}(t_0) \| \, \| x_0 \| < \varepsilon.$$

即零解稳定.

必要性　由零解的稳定可知对 $\varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0$,当 $\| x_0 \| < \delta$ 时,有 $\| x(t, t_0, x_0) \| < \varepsilon$.

取 $x_{01} = \dfrac{\delta}{2}(1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}, x_{02} = \dfrac{\delta}{2}(0, 1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}, \cdots, x_{0n} = \dfrac{\delta}{2}(0, \cdots, 0, 1)^{\mathrm{T}}$,那么以 $x_{01}, \cdots, x_{0n}$ 为初值的 n 个解 $x(t, t_0, x_{01}), x(t, t_0, x_{02}), \cdots, x(t, t_0, x_{0n})$ 是线性无关的.(由于这 n 个解的 Wronski 行列式在 t_0 处的值 $W(t_0) = \left(\dfrac{\delta}{2}\right)^n \neq 0$),从而以这 n 个解为列的矩阵 $X(t) = (x(t, t_0, x_{01}), \cdots, x(t, t_0, x_{0n}))$ 为原线性方程组的一个基解矩阵.

又由于 $\| x_{0k} \| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$,所以 $\| x(t, t_0, x_{0k}) \| < \varepsilon$,其中 $k = 1, 2, \cdots, n$. 即 $X(t)$ 的每一列均有界,从而矩阵 $X(t)$ 有界.

2. 讨论下列自治系统零解的稳定性.

(1) $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2x(x+y)^2, \\ \dot{y} = -y^3 + 2y^3(x+y)^2; \end{cases}$　　(2) $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0$ $(0 < n < k)$;

(4) $\begin{cases} \dot{x} = \mathrm{e}^{x+y} + z - 1, \\ \dot{y} = 2x + y - \sin z, \\ \dot{z} = -8x - 5y - 3z + xy^2. \end{cases}$

解　(1) 取 Liapunov 函数 $V(x, y) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}y^2$,则

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)} &= -x^2 - y^4 + 2(x+y)^2(x^2 + y^4) \\ &= -2(x^2 + y^4)\left[\frac{1}{2} - (x+y)^2\right] \\ &\leqslant -4(x^2 + y^4)\left[\frac{1}{4} - (x^2 + y^2)\right]. \end{aligned}$$

故在 $x^2 + y^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$ 的内部 $\left.\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)} < 0$(恒负),因而零解渐近稳定.

(2) 令 $y = \dot{x}$,则原方程等价于齐次线性方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-k^2x-2ny.\end{cases}$$

其特征方程为 $\lambda^2+2n\lambda+k^2=0$. 从而特征值为 $\lambda=-n\pm i\sqrt{k^2-n^2}$(由于 $0<n<k$),均有负实部,故零解渐近稳定.

(3) 将 $\sin z$, e^{x+y} 用 Taylor 公式展开,可知原方程的线性近似系统为 $\begin{cases}\dot{x}=x+y+z,\\ \dot{y}=2x+y-z,\\ \dot{z}=-8x-5y-3z.\end{cases}$

其特征方程为

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ 2 & 1-\lambda & -1\\ -8 & -5 & -3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda+1)=0.$$

由于特征值 $\lambda=2>0$,故原非齐次方程的零解不稳定.

3. 设有常系数齐次线性微分方程组 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^2$, $\boldsymbol{A}$ 为二阶常数矩阵,记 $p=-\operatorname{tr}\boldsymbol{A}$, $q=\det\boldsymbol{A}$,设 $p^2+q^2\neq0$,试证

(1) 当 $p>0$ 且 $q>0$ 时,零解渐近稳定;

(2) 当 $p=0$ 且 $q>0$ 或 $p>0$ 且 $q=0$ 时,零解稳定但非渐近稳定;

(3) 其他情形下零解都不稳定.

证明 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$,则 $p=-\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=-(a+d)$, $q=ad-bc$. $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为 $\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0$,即 $\lambda^2+p\lambda+q=0$. 特征值 $\lambda_{1,2}=\dfrac{1}{2}[-p\pm\sqrt{\Delta}]$, $\Delta=p^2-4q$.

(1) 当 $p>0$, $q>0$,则 $\lambda_{1,2}$的实部均为负,故零解渐近稳定.

(2) $p=0$, $q>0$,则 $\lambda_{1,2}=\pm i\sqrt{q}$实部为零,且均为单根,故零解稳定而非渐近稳定.

如 $p>0$ 且 $q=0$,特征值为 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-p<0$,故零解稳定而非渐近稳定(定理 5.1(2)).

(3) $q<0$ 或 $p<0$, $q\geqslant0$ 时,特征值$\dfrac{1}{2}(-p+\sqrt{p^2-4q})$的实部为正,故零解不稳定.

4. 设 Volterra 系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1(b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2),\\ \dot{x}_2 = x_2(b_2 + a_{21}x + a_{22}x_2)\end{cases}$$

有正平衡位置 $M(x_1^*,x_2^*)$（即 $x_1^*>0,x_2^*>0$）. 证明点 M 渐近稳定的充要条件是

$$x_1^*a_{11} + x_2^*a_{22} < 0,a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0.$$

证明　由于 (x_1^*,x_2^*) 是原微分方程组的正平衡位置，则

$$\begin{cases}b_1 + a_{11}x_1^* + a_{12}x_2^* = 0,\\ b_2 + a_{21}x_1^* + a_{22}x_2^* = 0.\end{cases}\tag{E_1}$$

作变换 $y_i = x_i - x_i^*(i=1,2)$，并注意到 (E_1)，则原微分方程等价于

$$\begin{cases}\dot{y}_1 = (y_1 + x_1^*)(a_{11}y_1 + a_{12}y_2),\\ \dot{y}_2 = (y_2 + x_2^*)(a_{21}y_1 + a_{22}y_2).\end{cases}$$

其线性近似系统为

$$\begin{cases}\dot{y}_1 = a_{11}x_1^*y_1 + a_{12}x_1^*y_2,\\ \dot{y}_2 = a_{21}x_2^*y_1 + a_{22}x_2^*y_2.\end{cases}$$

故由上题结论知 M 渐近稳定的充要条件为

$$p = -(a_{11}x_1^* + a_{22}x_2^*) > 0,q = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1^*x_2^* > 0,$$

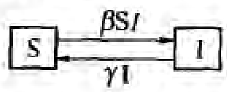
即
$$a_{11}x_1^* + a_{22}x_2^* < 0,a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0.$$

5. 为了研究传染病的流行规律，我们把人划分为两群：易感者 S，病人 I. 假设一个病人的传染率（单位时间内传染的人数）与该时刻易感者人数成正比，比例常数为 $\beta>0$；病人的康复率与该时刻的病人成正比，比例常数为 $\gamma>0$；康复者无免疫力，可以立即被再次传染，不考虑人口的出生、自然死亡和流动.

(1) 试建立此疾病传播的 $S-I-S$ 微分方程模型；

(2) 求此疾病的基本再生数，并分别给出使此疾病逐渐消亡和发展成为地方病的条件.

解　此疾病的传播情况可用下述框图描述.



由此框图可得疾病传播的 $S-I-S$ 模型

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma I, \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I. \end{cases} \tag{E_1}$$

显然$(S,I)\in(G)=\{(S,I)\mid 0<S\leqslant k,0\leqslant I\leqslant k,S+I=k\}$,其中 k 为人口总数. 由于不考虑人口的出生和自然死亡. 因此 k 为常数.

(2) 由于 $S+I=k$,所以原模型的两个方程中只有一个是独立的. 又由于我们主要关心的是疾病的消亡与否,即 I 的变化规律,因此只考虑方程

$$\dot{I} = [\beta(k-I)-\gamma]I = [(\beta k-\gamma)-\beta I]I. \tag{E_2}$$

$I_1=0$ 始终是其平衡位置,又当 $k-\dfrac{\gamma}{\beta}>0$,即 $R_0 \triangleq \dfrac{\beta k}{\gamma}>1$ 时出现正平衡位置 $I_2=k-\dfrac{\gamma}{\beta}$.

(E_2)关于 $I_1=0$ 的线性近似系统为 $\dot{I}=(\beta k-\gamma)I$,则其特征值为 $\beta k-\gamma$. 故当 $R_0<1$ 时 $I_1=0$ 稳定;$R_0>1$ 时,I_1 不稳定.

(E_2)关于 $I_2=k-\dfrac{\gamma}{\beta}$的线性近似系统为 $\dot{I}=(\gamma-\beta k)I$,其特征值为 $\gamma-\beta k=1-R_0$. 故 $R_0 \ngtr 1$ 时 $I_2=k-\dfrac{\gamma}{\beta}$存在时,其渐近稳定. 故此疾病的基本再生数为 $R_0=\dfrac{\beta k}{\gamma}$,且当$R_0\leqslant 1$($R_0=1$ 时,(E_2)变为 $\dot{I}=-\beta I^2\leqslant 0$. 故 $t\to+\infty$ 时,$I\to 0$)时,疾病消亡,当 $R_0>1$ 时,发展成地方病.

综合练习题

1. 猪的最佳出售时间问题 养猪场出售生猪有一个最佳出售时间. 因为将生猪在体重过小的时候出售,显然利润不佳. 而猪养得愈大,单位时间饲养费用就愈大,到一定的时候体重的增加速度却会下降,且单位体重的销售价格却不会随体重增加而增加. 因此,饲养时间过短或过长,都是不合算的. 只有选取一个最佳的出售时间,才能获得最大的利润. 试建立这一问题的数学模型,并对最佳出售时间作出理论探讨.(提示:可假定生猪体重 $w(t)$ 符合 Logistic 模型$\dfrac{dw}{dt}=\alpha(1-aw)$,饲养费用 $y(t)$满足方程$\dfrac{dy}{dt}=b+dw$.)

解 设 $w(t)$为一头猪出生 t 天后的体重(单位:kg),$y(t)$为一头猪从出生到 t 天后所消耗的总饲养费用,c 为每公斤生猪的售价,$L(t)$为 t 时刻出售生猪