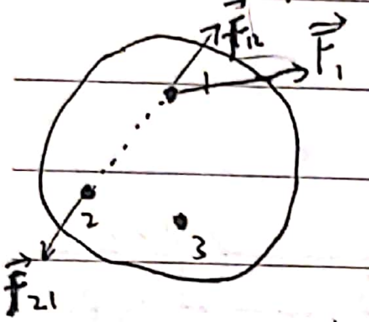
第三章 基本定理和基本守恒定律

3.1 动量定理和动量守恒定律

微分 $\vec{F}dt = d\vec{I} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}\cdot dt = d\vec{p}$, $\vec{p} = m\vec{v}$

积分 $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt = \Delta\vec{p}$

对质点系：分内力外力



对 m_1 : $\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1 + \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \cdots)dt = \Delta\vec{p}_1$

m_2 : $\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_2 + \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \cdots)dt = \Delta\vec{p}_2$

$m_3 \cdots\ m_4 \cdots\ \cdots$

上式相加

$$\int\sum_i \vec{F}_i dt + \int\sum_{i\neq j}\overset{0}{\overset{\parallel}{\boxed{(\vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji})}}}\cdot dt = \sum_i \Delta\vec{p}_i$$

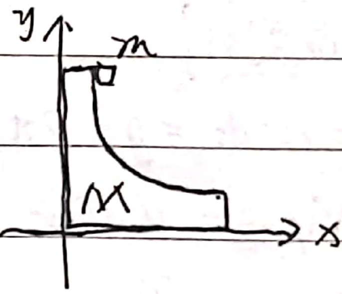
$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_i \vec{F}_i dt = \sum_i \Delta\vec{p}_i$$

守恒要求：1.合外力为零，或外力与内力相比小得多

2.合外力沿某一方向为零 即 $\sum_i p_{i\alpha} = const.$

▲ 只适用于惯性系；比牛顿运动定律更普遍更基本

例 光滑水平面，求m滑至底部时，M移动的距离

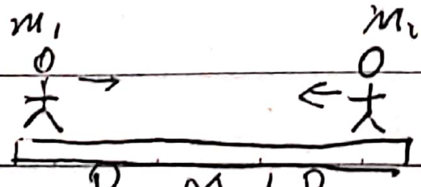


$0 = mv_x - MV$ ①

M: $S = \int_0^t V dt$ m: $s = \int_0^t v_x dt = R - S$ ②

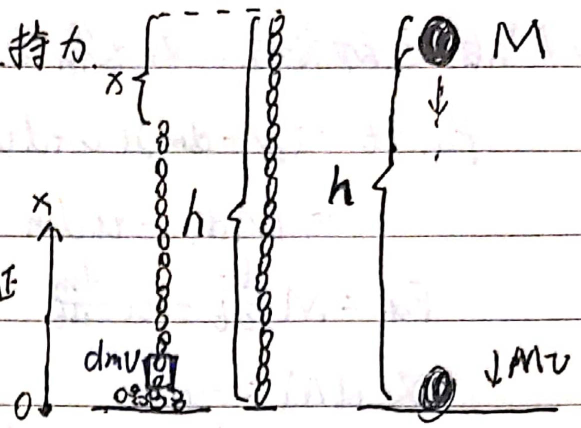
①式对t积分得 $ms = MS$ ③

②③联立得 $S = \frac{mR}{M+m}$



$\Delta x = \frac{(m_1 - m_2)L}{m_1 + m_2 + M}$

互动题　M落下，求落地时受到的支持力.



$N = \frac{Mv}{\Delta t}$　　$\Delta t \uparrow,\ N \downarrow$

$\Delta t \downarrow,\ N \uparrow$

支持力 $\vec{F} = \vec{N} + \vec{mg}$

拓：细链长为h，底端刚好着地. 求下落x时地面所受的力.

取将落地的一段dm：$(N - dmg)dt = dmv$

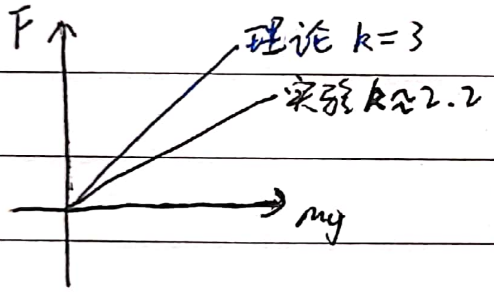
$\boxed{dmg\,dt \text{ 高阶无穷小，忽略}}$　$N = v \cdot \frac{dm}{dt}$

又 $dm = \lambda \cdot dx$，$N = v \cdot \lambda \frac{dx}{dt} = \lambda \cdot v^2$

∴地面所受力 $F = \lambda v^2 + mg$

$= \lambda(\sqrt{2gx})^2 + mg$

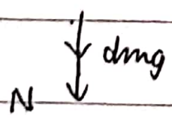
$= 3mg$　（m是已经着地的部分的质量）



例 火箭

(1) 推力问题.　t时刻 质量M，速度v；t到t+dt过程中喷出dm，气体相对火箭速度为u，火箭速度为 v+dv

对dm：



$(N + dmg)dt = dm(-u + v + dv) - dmv = -u \cdot dm$

$N = -u \frac{dm}{dt}$

火箭受到的推力 $F_p = -N = u \cdot \frac{dm}{dt}$

(2) 火箭的运动方程：对火箭与燃料整体.

$$F_{外}dt = (M-dm)(v+dv) + dm(-u+v+dv) - Mv$$

$$= Mdv - udm$$

$$\boxed{F_{外} = f_{空气} + Mg}$$

$$F_{外} = M\frac{dv}{dt} - u\frac{dm}{dt}$$

又 $dM = -dm$

$$\therefore F_{外} = M\frac{dv}{dt} + u\frac{dM}{dt}$$

(3) 火箭速度公式　设 $F_{外} = +Mg$

$$-Mg = M\frac{dv}{dt} + u\frac{dM}{dt}$$

$$-g\,dt = dv + u\frac{dM}{M}$$

$$\int_0^t -g\,dt = \int_0^v dv + u\int_{M_0}^{M}\frac{dM}{M}$$

$$\Downarrow$$

$$v = u\ln\frac{M_0}{M} - gt$$