§3.4 定积分在几何计算中的应用

一、定积分的微元法(元素法)

二、平面图形的面积

三、曲线的弧长

四、特殊几何体的体积

五、 曲线的曲率

一、定积分的微元法(元素法)

通过对不均匀量（如曲边梯形的面积，变速直线运动的路程）的分析，采用“划分、近似代替、求和、取极限”四个基本步骤确定了它们的值，并由此抽象出定积分的概念，我们发现，定积分是确定众多的不均匀几何量和物理量的有效工具。那么，究竟哪些量可以通过定积分来求值呢？怎样通过定积分来计算呢？

定积分计算的思想——微元法

一、定积分的微元法(或元素法)

• 求曲边梯形的面积

(1)划分: $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$;

(2)近似代替: 小曲边梯形的面积近似为$f(\xi_i)\Delta x_i$ $(x_{i-1}<\xi_i<x_i)$;

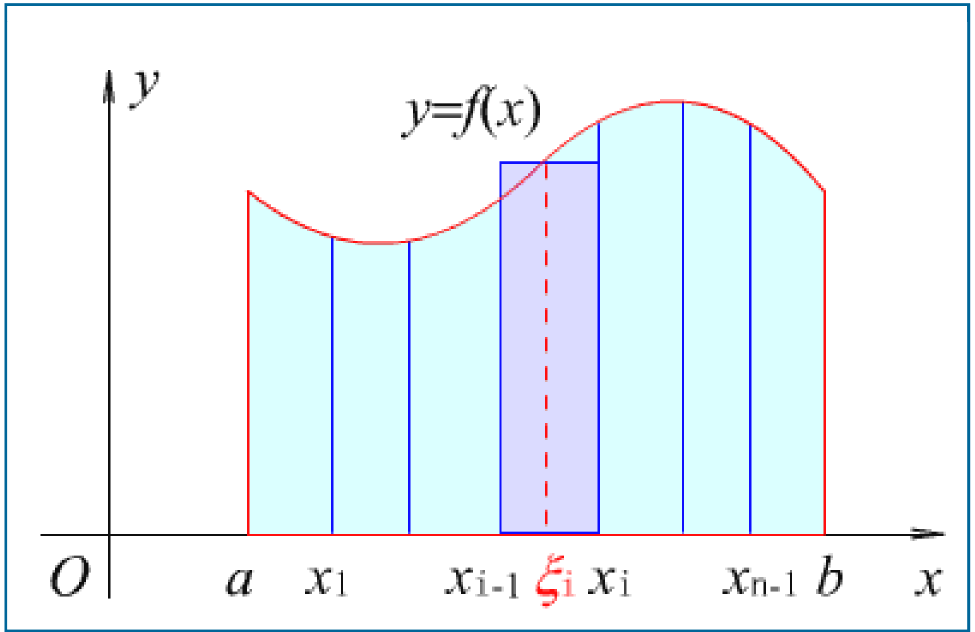
(3)求和: 曲边梯形的面积近似为$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$;

(4)取极限:

设$\lambda=\max\{\Delta x_1, \Delta x_2,\cdots, \Delta x_n\}$,

曲边梯形的面积为

$$S=\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$



注 实际上，引出积分表达式的关键步骤是第二步，因此求解可简化如下：

$$S=\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ .$$

•微元法

(1) 将$[a,b]$任意分成n个小区间，任一小区间记为$[x,x+dx]$

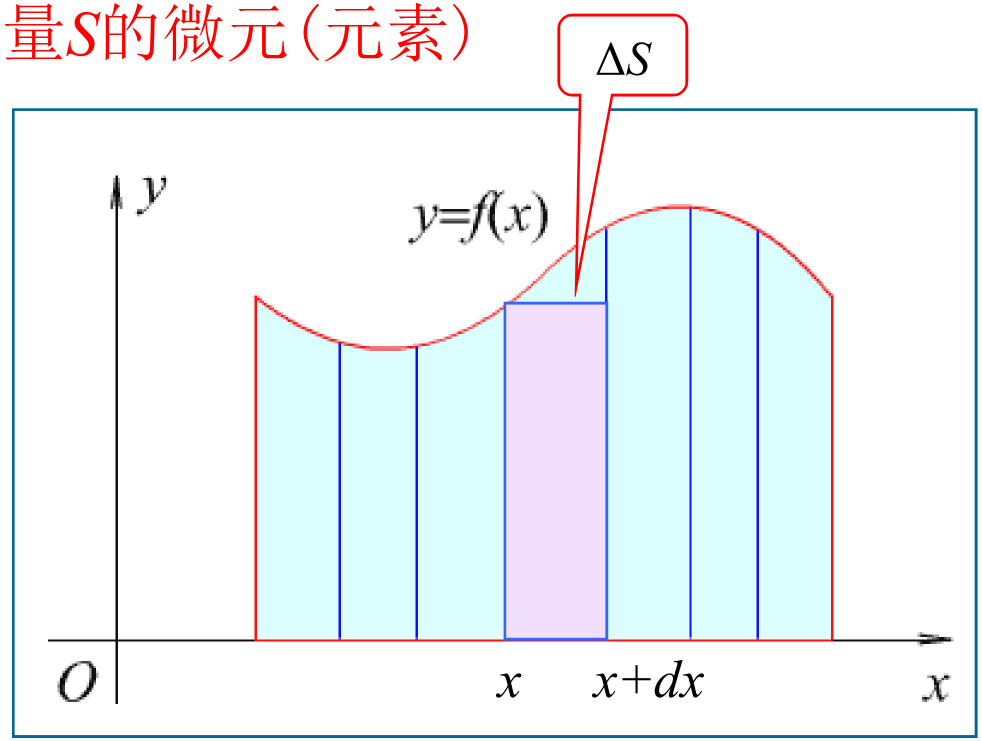
给出此区间上所求量ΔS的近似值：

$$\Delta S \approx \boxed{f(x)dx}$$ 所求量S的微元（元素）

记为dS，即$dS = f(x)dx$

(2) 以量S的微元为被积表达式的定积分即为所求量，也即

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$



$$S=\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\ .$$

•微元法

(1) 将$[a,b]$任意分成n个小区间,任一小区间记为$[x,x+dx]$

给出此区间上所求量ΔS的近似值:

$$\Delta S\approx f(x)dx$$

记为dS, 即$dS=f(x)dx$

(2) 以量S的微元为被积表达式的定积分即为所求量,也即

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

即按以下过程,将实际问题归结为定积分:

$$\xrightarrow[\text{分割}]{\text{自变量}}[x,x+\Delta x]\xrightarrow[\text{规律}]{\text{科学}}\Delta S\approx f(x)dx\xrightarrow[\text{微分}]{\text{转为}}dS=f(x)dx\xrightarrow[\text{积分}]{\text{直接}}S=\int_a^b f(x)dx$$

一般地，设量U非均匀地分布$[a,b]$上，求U的步骤：

分割

用分点$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 将

区间分成n个小区间$[x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

近似计算

把U在小区间上的局部量ΔU_i

用某个函数$f(x)$在$\xi_i(\xi_i \in [x_{i-1}, x_i])$的值与$\Delta x_i$之积代替

$$\Delta U_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$$

求和

把局部量的近似值累加得到总量的近似值，即

$$U = \sum_{i=1}^{n} \Delta U_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

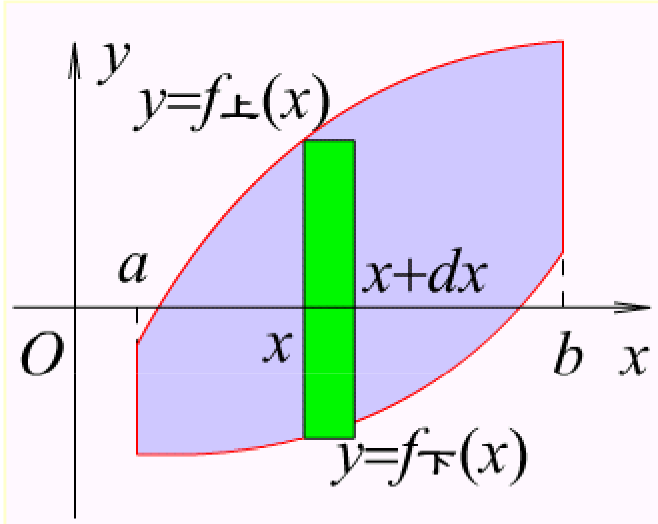
求极限

$$U = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \qquad \lambda = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i$$

二、平面图形的面积

1、在平面直角坐标情形

(1) x-型区域



设平面图形由上下两条曲线 $y=f_{上}(x)$ 与 $y=f_{下}(x)$ 及左右两条直线 $x=a$ 与 $x=b$ 所围成.

在 $[x,x+dx]$ 上面积的近似值为

$$[f_{上}(x)-f_{下}(x)]dx,$$

它也就是面积微元.

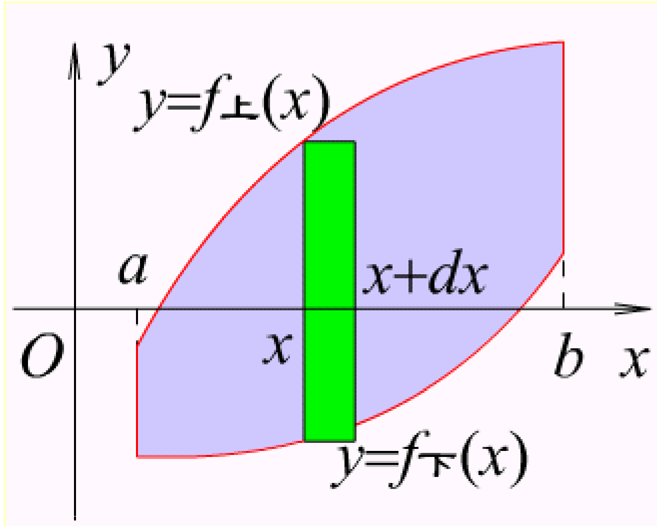
因此平面图形的面积为 $S=\int_a^b [f_{上}(x)-f_{下}(x)]dx$.

二、平面图形的面积

1、在平面直角坐标情形

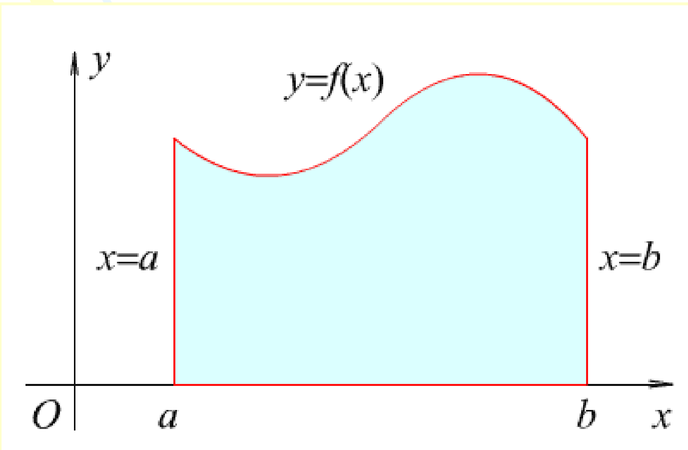
(1) x-型区域

$$S=\int_a^b[f_{上}(x)-f_{下}(x)]dx\ .$$

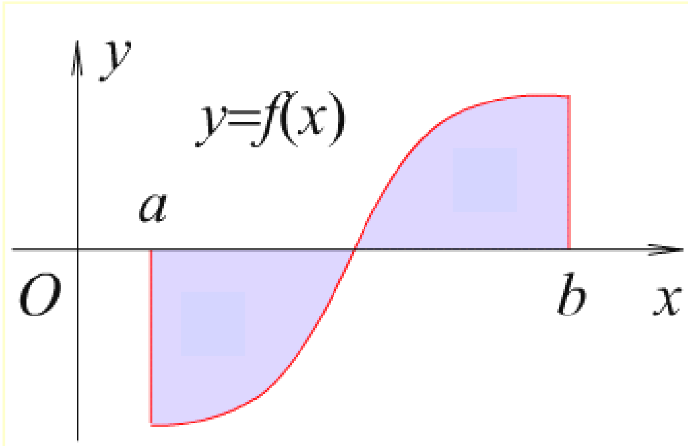


特别地

$$A=\int_a^b f(x)dx$$



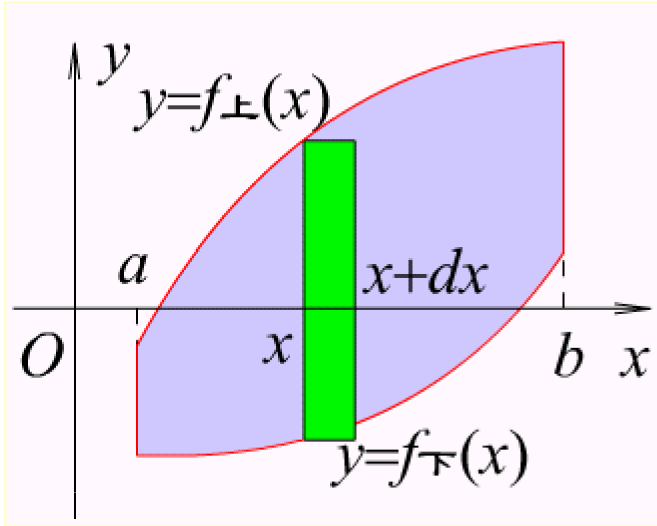
$$A=\int_a^b|f(x)|dx$$



$$S=\int_a^b[f_{上}(x)-f_{下}(x)]dx\,.\quad S=\int_c^d[\varphi_{右}(y)-\varphi_{左}(y)]dy\,.$$

(2) y-型区域

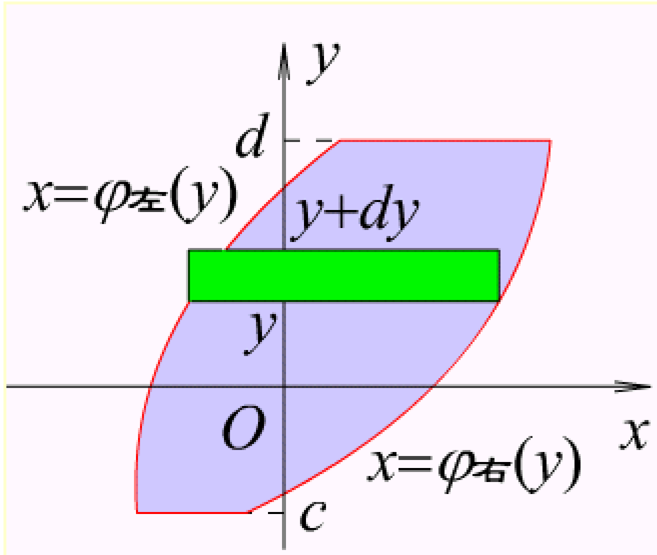
由左右两条曲线$x=\varphi_{左}(y)$与$x=\varphi_{右}(y)$及上下两条直线$y=d$与$y=c$所围成的平面图形的面积如何表示为定积分？



提示：

面积微元为$[\varphi_{右}(y)-\varphi_{左}(y)]dy$,

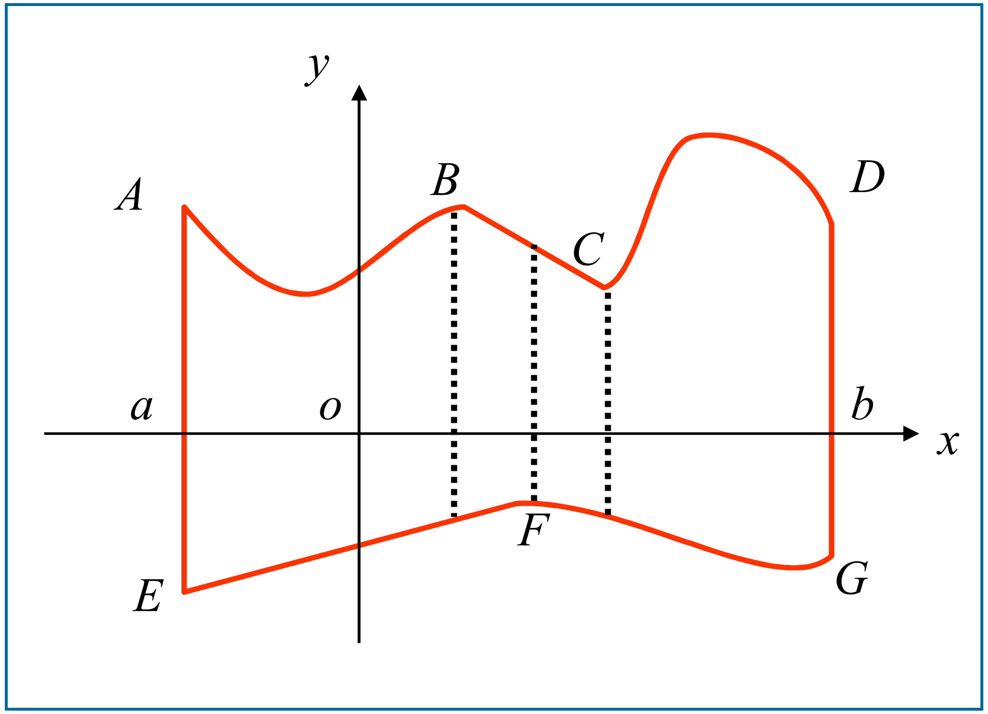
面积为 $S=\int_c^d[\varphi_{右}(y)-\varphi_{左}(y)]dy\,.$



(3) 一般区域

如果平面区域既不是x-型区域，也不是y-型区域，则用一组平行于坐标轴的直线，把平面区域分成尽可能少的若干个x-型区域与y-型区域，然后计算每一区域的面积，则平面区域总的面积等于各区域面积之和。

上曲线由三条不同的曲线：AB、BC与CD 构成；下曲线由两条不同曲线：EF与FG所构成。为计算其面积，可分别过点B、C与F作平行于 y轴的直线，则把平面区域分成4个x-型区域。



$$S=\int_a^b[f_{上}(x)-f_{下}(x)]dx .\quad S=\int_c^d[\varphi_{右}(y)-\varphi_{左}(y)]dy .$$

例1 计算抛物线$y^2=x$与$y=x^2$所围成的图形的面积.

解 (1)画图;

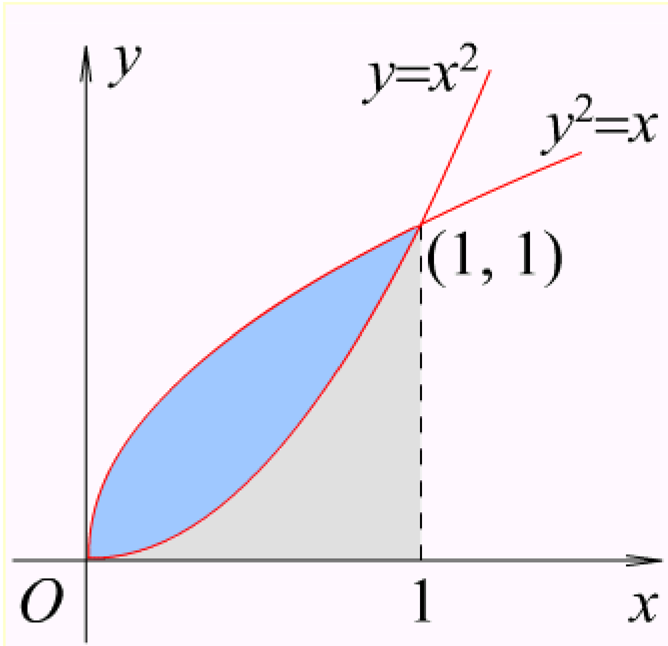
(2)确定在x轴上的投影区间: [0, 1];

(3)确定上下曲线: $f_{上}(x)=\sqrt{x}$, $f_{下}(x)=x^2$.

(4)计算积分

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx$$

$$=[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3]_0^1=\frac{1}{3} .$$



$$S=\int_a^b[f_{上}(x)-f_{下}(x)]dx\,. \quad S=\int_c^d[\varphi_{右}(y)-\varphi_{左}(y)]dy\,.$$

例2 计算抛物线$y^2=2x$与直线$y=x-4$所围成的图形的面积.

解 (1)画图;

(2)确定在y轴上的投影区间: $[-2, 4]$.

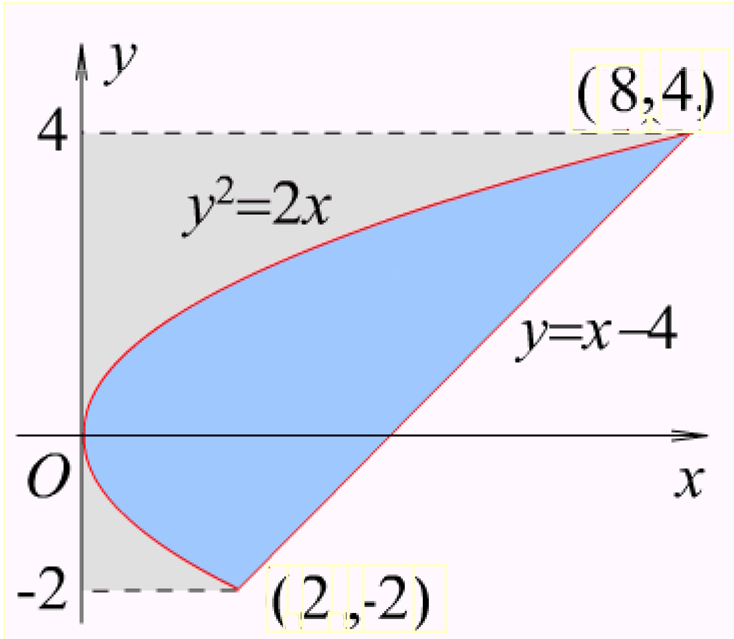
(3)确定左右曲线:

$$\varphi_{左}(y)=\frac{1}{2}y^2,\ \varphi_{右}(y)=y+4\,.$$

(4)计算积分

$$S=\int_{-2}^{4}(y+4-\frac{1}{2}y^2)dy$$

$$=[\frac{1}{2}y^2+4y-\frac{1}{6}y^3]_{-2}^{4}=18\,.$$



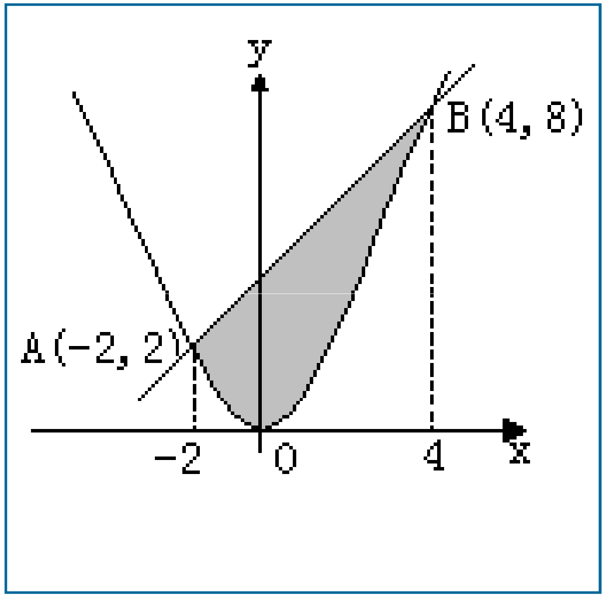
$S=\int_a^b[f_{上}(x)-f_{下}(x)]dx$. $S=\int_c^d[\varphi_{右}(y)-\varphi_{左}(y)]dy$.

例3 计算抛物线$y=\frac{1}{2}x^2$与$y=x+4$所围成的图形的面积.

解

解方程组$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x^2 \\ y=x+4 \end{cases}$ 得交点坐标：

$\begin{cases} x_1=-2 \\ y_1=2 \end{cases}$， $\begin{cases} x_1=4 \\ y_1=8 \end{cases}$



则 $A=\int_{-2}^{4}(x+4-\frac{1}{2}x^2)dx$

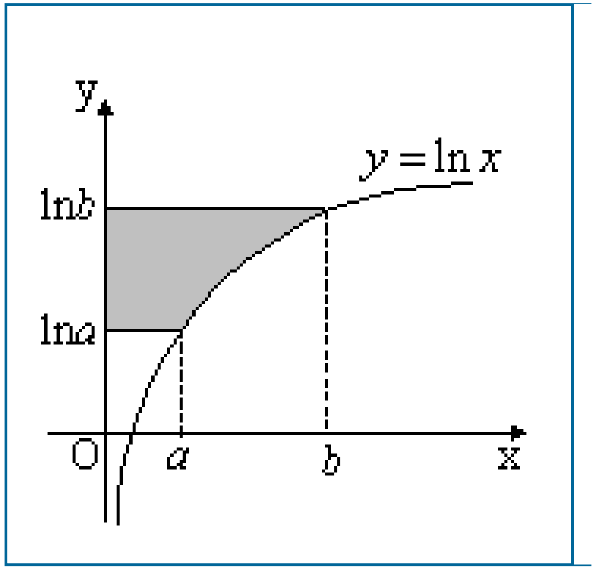
$=[\frac{1}{2}x^2+4x-\frac{1}{6}x^3]_{-2}^{4}=18$

$S=\int_a^b[f_{上}(x)-f_{下}(x)]dx$. $S=\int_c^d[\varphi_{右}(y)-\varphi_{左}(y)]dy$.

例4 计算曲线$y=\ln x$, y轴及直线$y=\ln a$, $y=\ln b(a>0,b>0,b>a)$所围成的图形的面积.

解

$$A=\int_{\ln a}^{\ln b} e^y dy=[e^y]_{\ln a}^{\ln b}=b-a$$

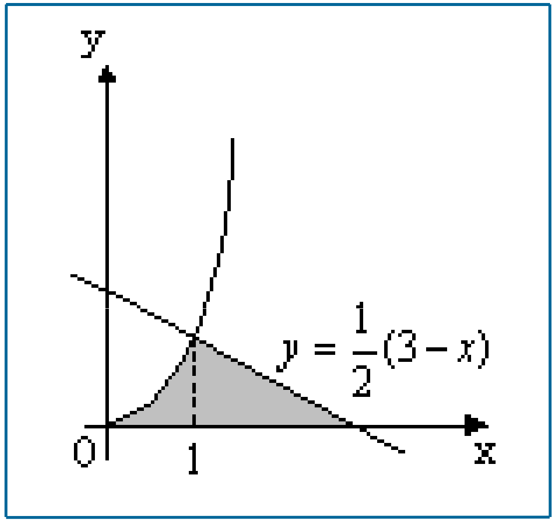


$$S=\int_a^b[f_{上}(x)-f_{下}(x)]dx. \quad S=\int_c^d[\varphi_{右}(y)-\varphi_{左}(y)]dy.$$

例5 计算曲线$y=x^2$,直线$y=\frac{1}{2}(3-x)$, 及x轴所围成的图形的面积.

解 解方程组$\begin{cases} y=x^2 \\ y=\frac{1}{2}(3-x) \end{cases}$ 得:

$$\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=1 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x_2=-\frac{3}{2} \\ y_2=\frac{9}{4} \end{cases}$$

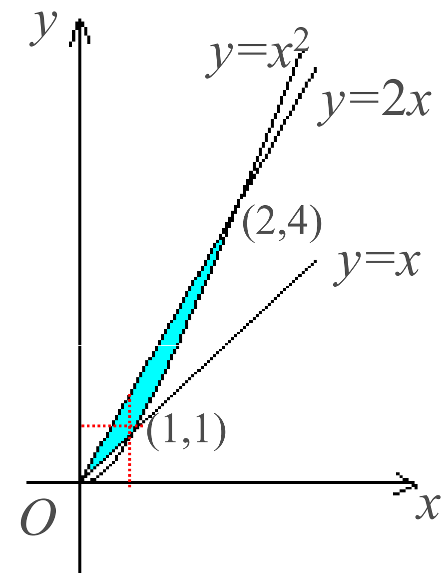


$$A=\int_0^1(3-2y-\sqrt{y})dy=\frac{4}{3} \quad 或 \quad A=\int_0^1 x^2dx+\int_1^3\tfrac{1}{2}(3-x)dx=\frac{4}{3}$$

例6 计算抛物线$y=x^2$与直线$y=x$及$y=2x$所围成的图形的面积.

解 (1)画图;

(2)确定积分变量、积分区间和被积函数;



解方程组 $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x \end{cases}$ 得交点坐标(0,0),(1,1)

解方程组 $\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x \end{cases}$ 得交点坐标(0,0),(2,4)

(3)用定积分表示出所求面积;

$$A=\int_0^1(2x-x)dx+\int_1^2(2x-x^2)dx=\frac{7}{6}$$

或 $$A=\int_0^1\left(y-\frac{1}{2}y\right)dy+\int_1^4\left(\sqrt{y}-\frac{1}{2}y\right)dy=\frac{7}{6}$$

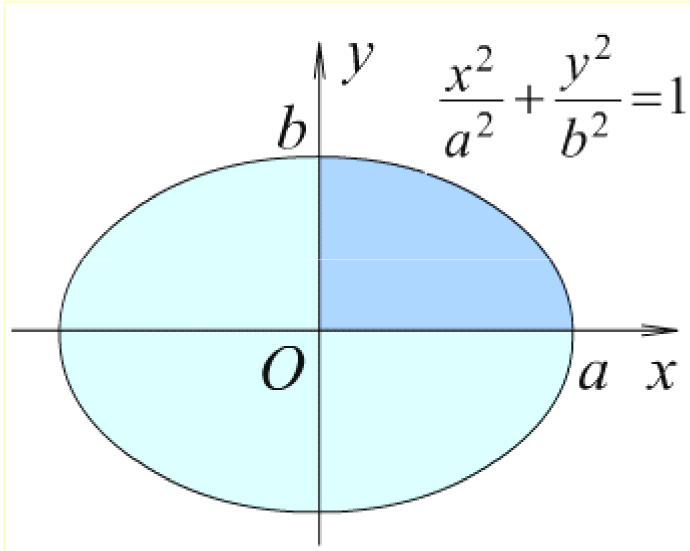
例7 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的图形的面积.

解 椭圆的面积是椭圆在第一象限部分的四倍.

于是 $$S=4\int_0^a y\,dx\ .$$

$$=4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$$

$$=\frac{4b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$



$$\underline{\underline{令x=a\sin t}}\ \frac{4b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos t\cdot a\cos t\,dt$$

$$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt=\pi ab.$$

例7 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的图形的面积.

解 椭圆的面积是椭圆在第一象限部分的四倍.

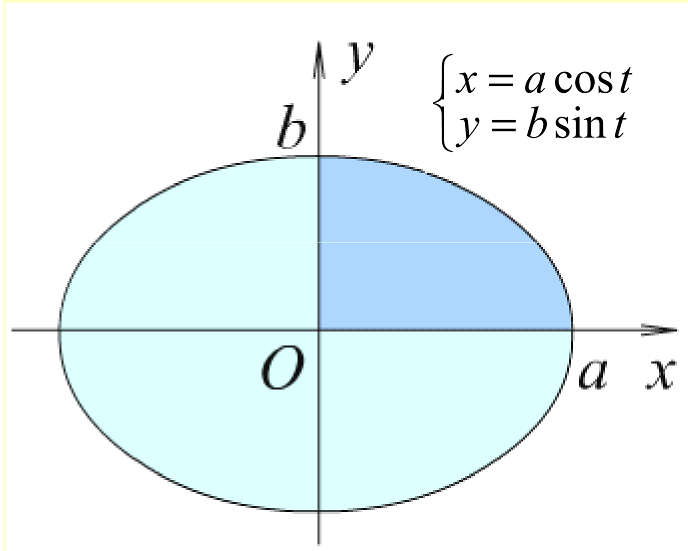
于是
$$S=4\int_0^a y\,dx\,.$$

$$=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\,d(a\cos t)$$

$$=-4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t\,dt$$

$$=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,dt$$

$$=2ab\cdot\frac{\pi}{2}=ab\pi\,.$$



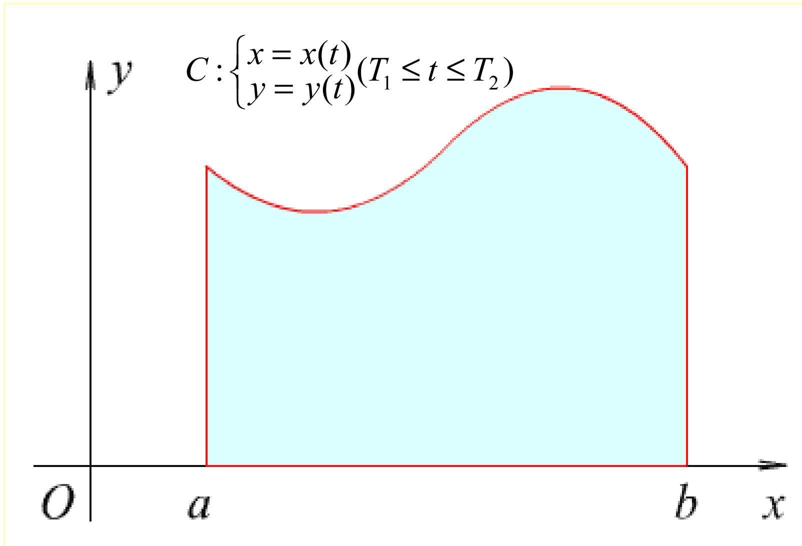
2、参数方程所确定的曲线围成的图形面积

设曲线C的参数方程为：$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, (T_1 \le t \le T_2)$

则曲线C与x轴,$x=a$，$x=b$ $(x(T_1)=a, y(T_2)=b)$所围成的图形面积

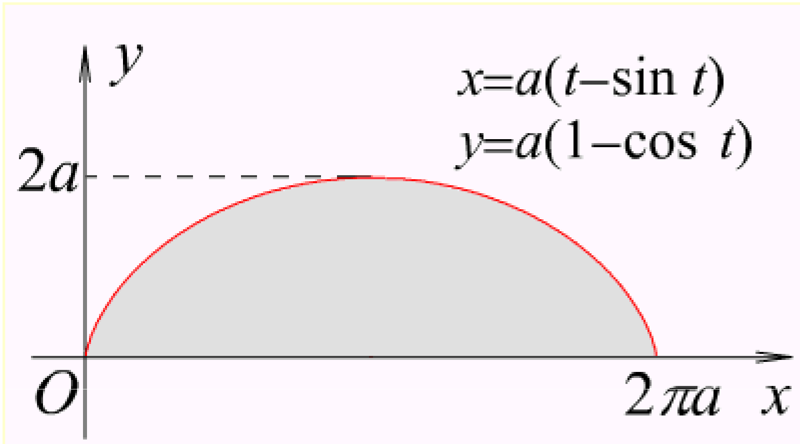
为：

$$S = \int_a^b |y| dx = \int_{T_1}^{T_2} |y(t)| dx(t) = \int_{T_1}^{T_2} |y(t)x'(t)| dt$$



例8 求摆线$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$的一拱$(0\le t\le 2\pi)$与x轴围成图形的面积.

解 $A=\int_0^{2\pi a} y\,dx$



$$=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\,da(t-\sin t)$$

$$=\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\,dt$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt$$

$$=a^2\left[t-2\sin t+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi}$$

$$=3\pi a^2$$

例9 已知星形线 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}(a>0)$，求它所成图形的面积.

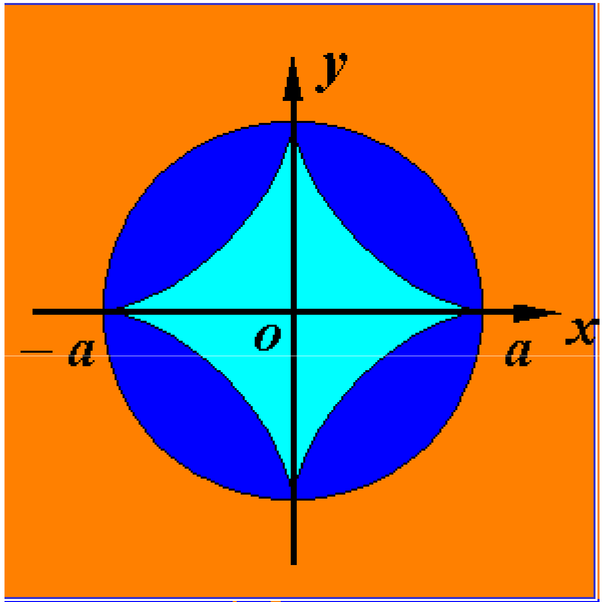
解

$$A = 4\int_0^a y\,dx$$

$$= 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)dt$$

$$= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2[\sin^4 t - \sin^6 t]dt$$

$$= \frac{3}{8}\pi a^2.$$



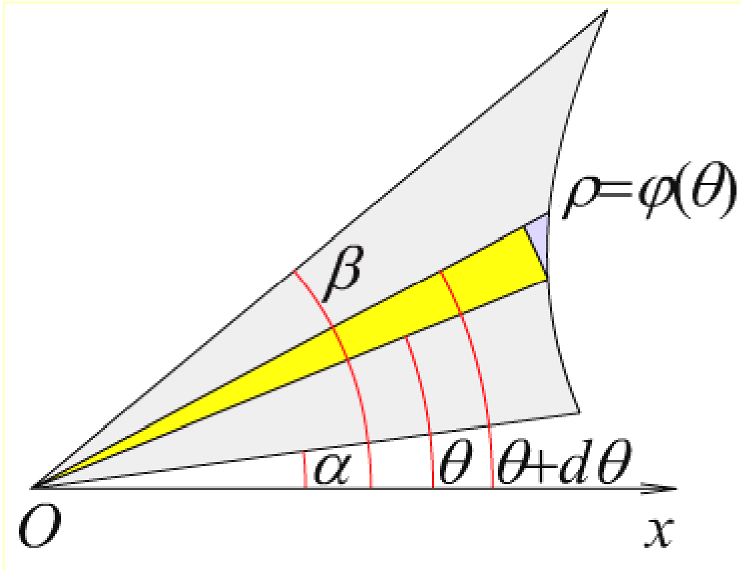
3、极坐标情形

- **曲边扇形**

曲边扇形是由曲线$\rho=\varphi(\theta)$及射线$\theta=\alpha,\ \theta=\beta$所围成的图形.

- **曲边扇形的面积微元**

$$dS=\frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2 d\theta\ .$$

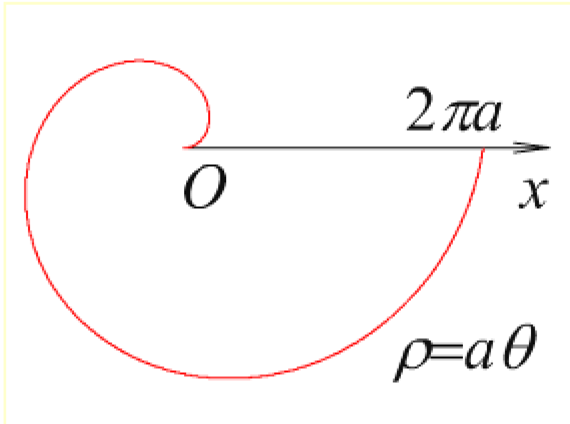


- **曲边扇形的面积**

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2 d\theta\ .$$

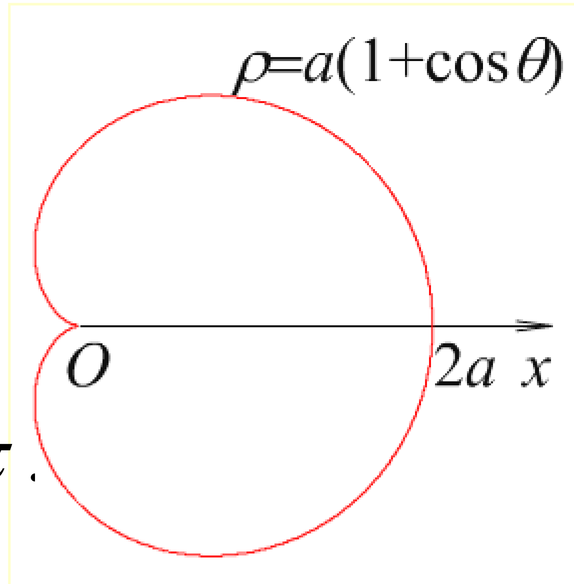
曲边扇形的面积：$S=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2d\theta\ (\rho=\varphi(\theta),\alpha\le\theta\le\beta)$.

例10 计算阿基米德螺线$\rho=a\theta\,(a>0)$上相应于θ从0变到2π的一段弧与极轴所围成的图形的面积.



解 $S=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(a\theta)^2d\theta=\frac{1}{2}a^2[\frac{1}{3}\theta^3]_0^{2\pi}=\frac{4}{3}a^2\pi^3$.

例11 计算心形线$\rho=a(1+\cos\theta)(a>0)$所围成的图形的面积.



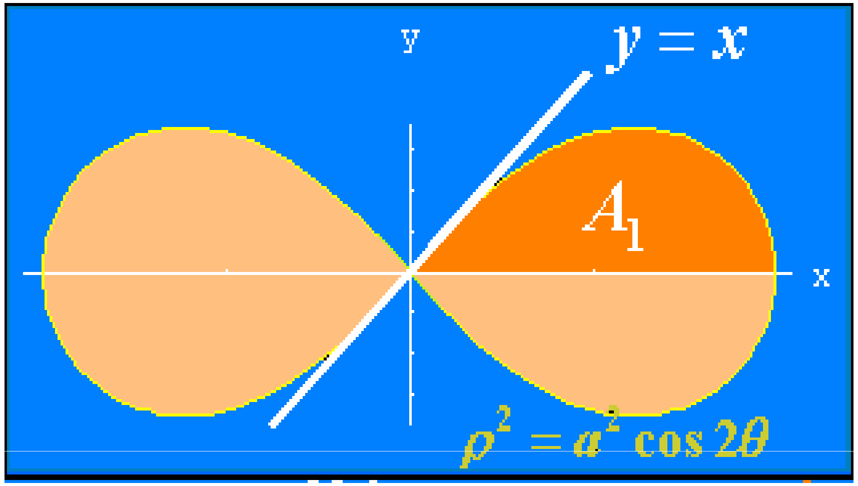
解 $S=2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}[a(1+\cos\theta)]^2d\theta$

$$=a^2\int_0^{\pi}(\frac{1}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos2\theta)d\theta$$

$$=a^2[\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta]_0^{\pi}=\frac{3}{2}a^2\pi.$$

例12 求双纽线$\rho^2 = a^2\cos 2\theta (a > 0)$所围成的图形的面积.

解 由对称性,所求面积为第一象限部分的四倍,



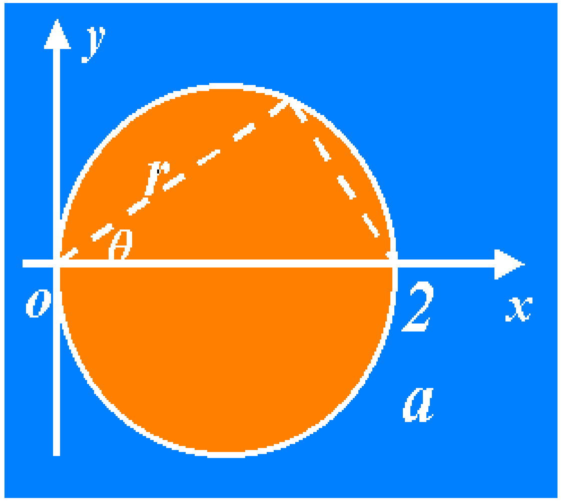
$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\rho^2 d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\theta d\theta$$

$$= a^2 \left[\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

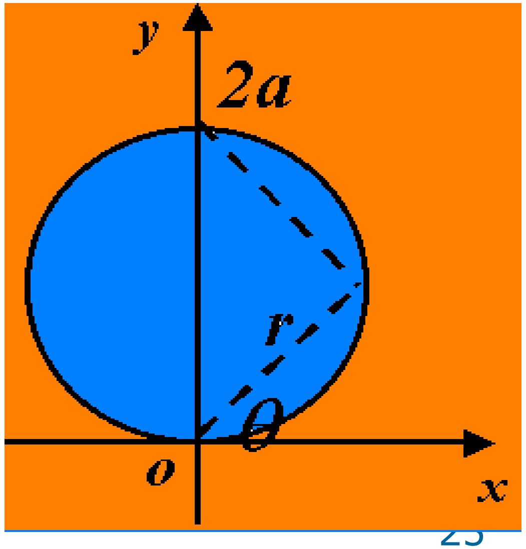
例13 求在极坐标系下圆$(x-a)^2+y^2=a^2$的面积.

解 $S=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cdot(2a\cos\theta)^2d\theta=\pi a^2.$

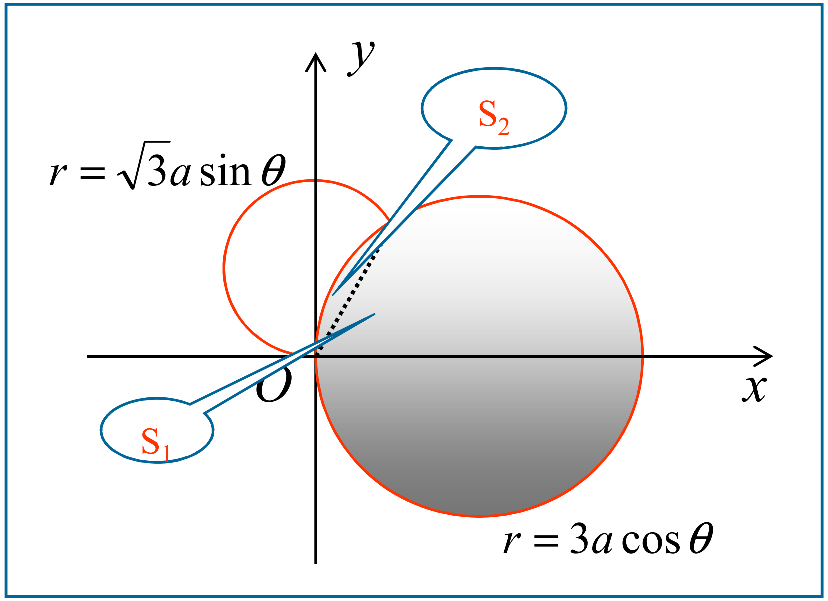


例14 求在极坐标系下圆$x^2+(y-a)^2=a^2$的面积.

解 $S=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cdot(2a\sin\theta)^2d\theta=\pi a^2.$



例15 求由$r=3a\cos\theta$与$r=\sqrt{3}a\sin\theta\,(a>0)$ 所围成的图形的面积.



解 由$\begin{cases} r=3a\cos\theta \\ r=\sqrt{3}a\sin x \end{cases}$

得交点坐标：$(0,0),(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{3}{2}a)$

则 $S=S_1+S_2$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sqrt{3}a\sin\theta)^2\,d\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(3a\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$=\frac{5}{8}a^2\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$$

三、曲线的弧长

•平面曲线弧长的概念

设平面曲线弧AB的参数方程为：$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, (T_1 \le t \le T_2)$

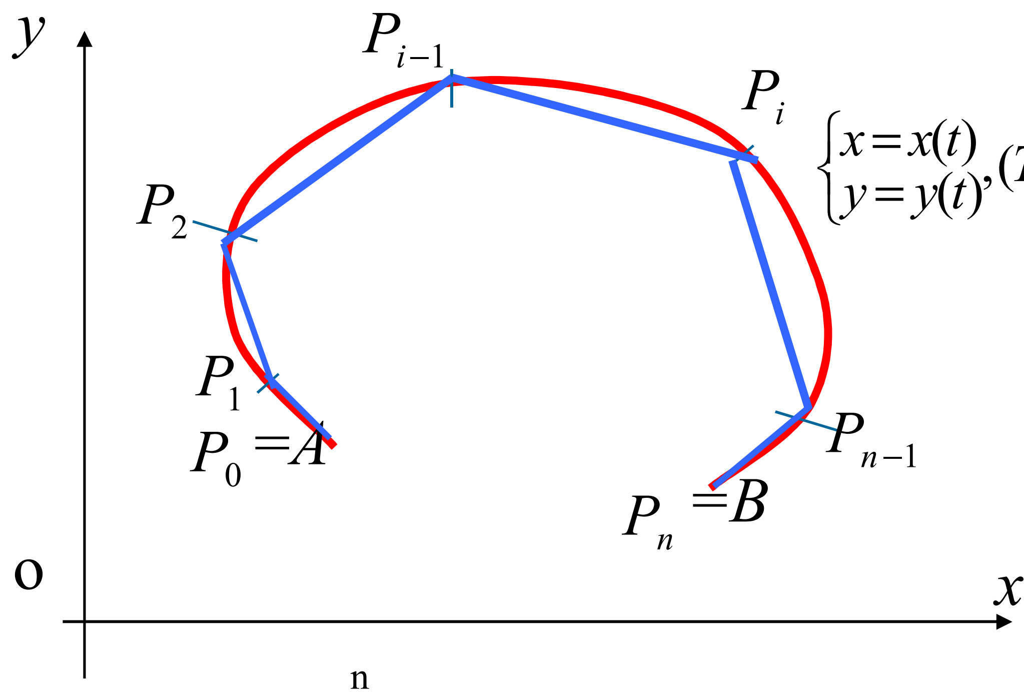
任取一串数$T_1=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_{n-1}< t_n =T_2$，以及此曲线上相应的一串点$P(t_i)(i=0,1,\ldots,n)$，将这些点用折线$Q_n$连接起来, Q_n的长度为$I_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i}$，其中$\overline{P_{i-1}P_i}$为连结点$P_{i-1}$与$P_i$线段的长度,若

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i}, \quad \lambda = \max_{1 \le i \le n} \{\Delta t_i\}$$

对于所有的数列$\{t_i\}_{i=0}^{n}$都存在，称曲线弧AB是可求长的，极限值l为其长度.

三、曲线的弧长

•平面曲线弧长的概念



$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, (T_1 \le t \le T_2)$$

$$l = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i}, \quad \lambda = \max_{1 \le i \le n}\{\Delta t_i\}$$

注意 连续曲线不一定可求长.

•光滑曲线

定义7.4.1 设曲线的参数方程为：$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases},(T_1 \le t \le T_2)$

若$x(t),y(t)$在$[T_1,T_2]$上存在连续的导数,且导数不同时为零,则称该曲线为光滑曲线.

定理7.4.1(弧长公式) 若由参数方程$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases},(T_1 \le t \le T_2)$确定的曲线是光滑曲线，则它是可求长曲线，其弧长为

$$l=\int_{T_1}^{T_2}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$$

$$dl=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$$

——————弧长的微分

弧长的微分

$$dl=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$$

若曲线的方程为$y=f(x), x\in[a,b]$，则弧长的微分为

$$dl=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

弧长公式为

$$l=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

若曲线由极坐标方程$r=r(\theta)(\alpha\le\theta\le\beta)$给出.

因为曲线的参数方程可表示为$x=r(\theta)\cos\theta,\ y=r(\theta)\sin\theta\,(\alpha\le\theta\le\beta)$,

所以弧长的微分为

$$dl=\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}\,d\theta=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta$$

弧长公式为

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta$$

曲线$y=f(x)(a\le x\le b)$的弧长： $l=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$.

例1 计算曲线 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 上相应于 x 从 a 到 b 的一段弧的长度.

解 $y'=x^{\frac{1}{2}}$，从而弧长微元为

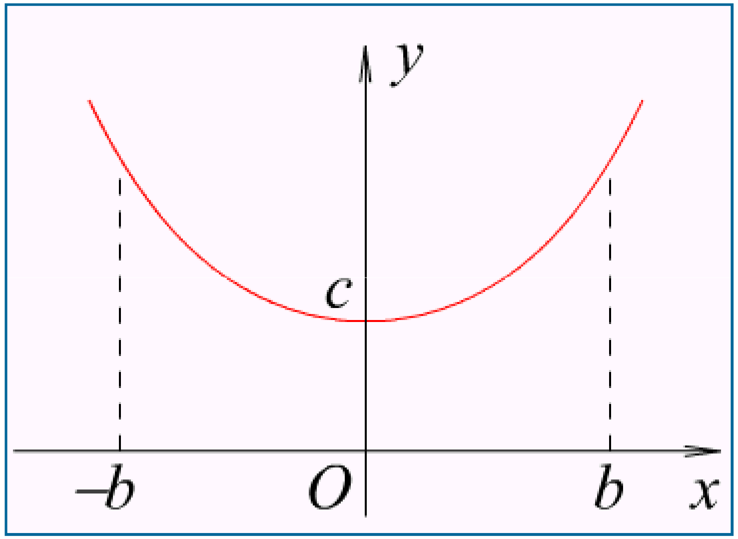
$$dl=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{1+x}\,dx .$$

因此, 所求弧长为

$$l=\int_a^b\sqrt{1+x}\,dx=\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_a^b=\frac{2}{3}\left[(1+b)^{\frac{3}{2}}-(1+a)^{\frac{3}{2}}\right].$$

曲线$y=f(x)(a\le x\le b)$的弧长： $l=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$.

例2 计算悬链线 $y=c\,\mathrm{ch}\frac{x}{c}$ 上介于 $x=-b$ 与 $x=b$ 之间一段弧的长度.



解 $y'=\mathrm{sh}\frac{x}{c}$，从而弧长微元为

$$dl=\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\frac{x}{c}}\,dx=\mathrm{ch}\frac{x}{c}\,dx .$$

因此, 所求弧长为

$$l=\int_{-b}^{b}\mathrm{ch}\frac{x}{c}\,dx=2\int_0^b\mathrm{ch}\frac{x}{c}\,dx$$

$$=2c\left[\mathrm{sh}\frac{x}{c}\right]_0^b=2c\,\mathrm{sh}\frac{b}{c}.$$

曲线$y=f(x)(a\leq x\leq b)$的弧长： $l=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx$.

曲线$x=x(t)$、$y=x(t)(T_1\leq t\leq T_2)$的弧长：$l=\int_{T_1}^{T_2}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$

例3 求摆线$x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$的一拱$(0\leq\theta\leq 2\pi)$的长度.

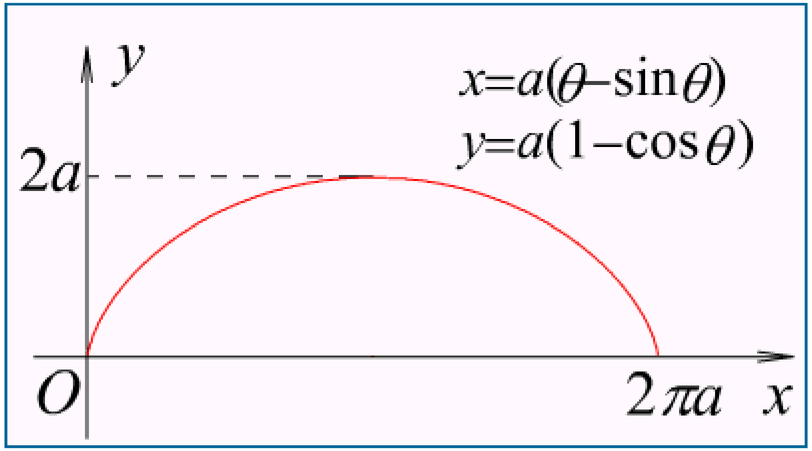
解 弧长微元为

$$dl=\sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}d\theta=2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta .$$

于是所求弧长为

$$l=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$=2a[-2\cos\frac{\theta}{2}]_0^{2\pi}=8a.$$



曲线$y=f(x)(a\le x\le b)$的弧长：$l=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$.

曲线$x=x(t)$、$y=x(t)(T_1\le t\le T_2)$的弧长：$l=\int_{T_1}^{T_2}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$

曲线$r=r(\theta)(\alpha\le\theta\le\beta)$的弧长：$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta$

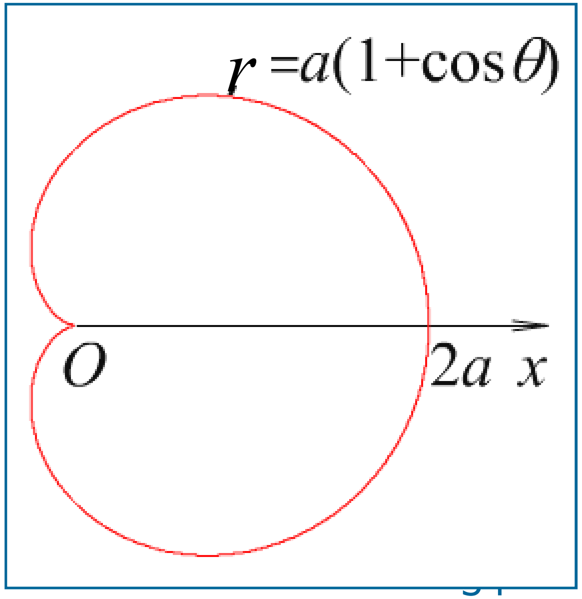
例4 计算心形线$r=a(1+\cos\theta)(a>0)$的长度.

解

$$l=2\int_\alpha^\beta\sqrt{\left[a(1+\cos\theta)\right]^2+(-a\sin\theta)^2}\,d\theta$$

$$=2a\int_\alpha^\beta\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,d\theta$$

$$=4a\int_0^\pi\left|\cos\tfrac{\theta}{2}\right|d\theta=8a(\sin\frac{\theta}{2})\Big|_0^\pi=8a$$



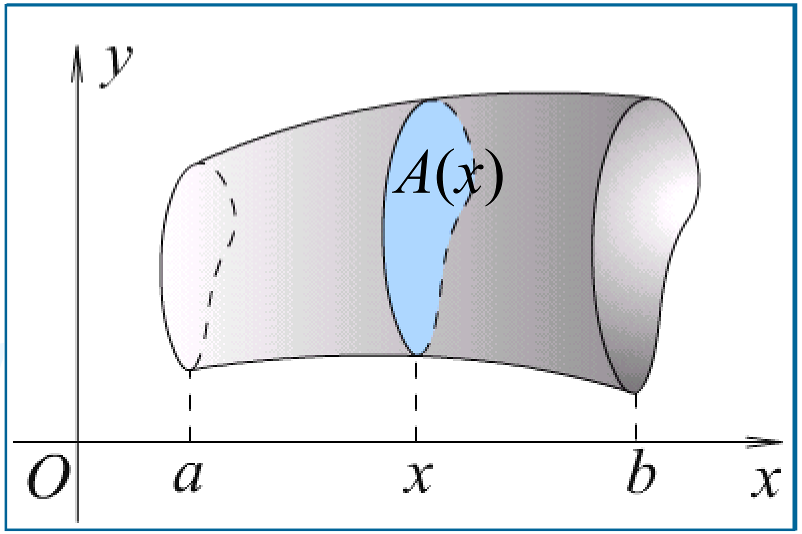
四、特殊几何体的体积

1、平行截面面积为已知的立体的体积

设立体在x轴上的投影区间为$[a, b]$，立体内垂直于x轴的截面面积为$A(x)$.

立体的体积微元为 $A(x)dx$.

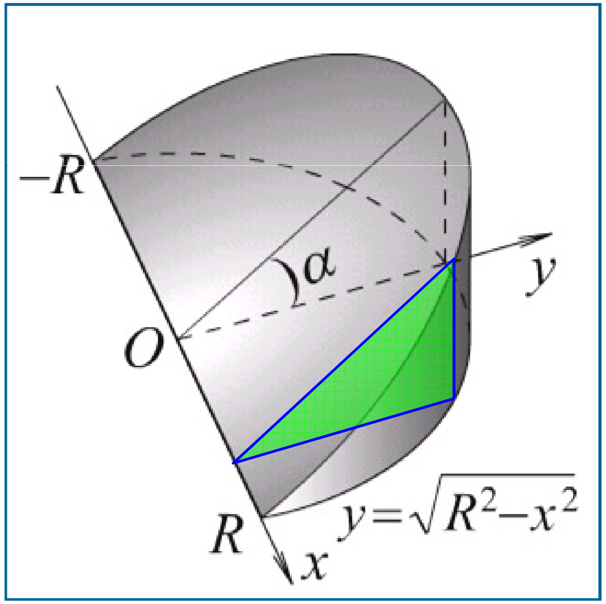
立体的体积为 $V=\int_a^b A(x)dx$.



截面面积为$A(x)$的立体体积：$V=\int_a^b A(x)dx$.

例1 一平面经过半径为R的圆柱体的底圆中心，并与底面交成角α. 计算这平面截圆柱所得立体的体积.

解 建立坐标系如图, 则底圆的方程为$x^2+y^2=R^2$.



立体中过点x且垂直于x轴的截面为直角三角形, 其面积为

$$A(x)=\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha.$$

所求立体的体积为

$$V=\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha dx$$

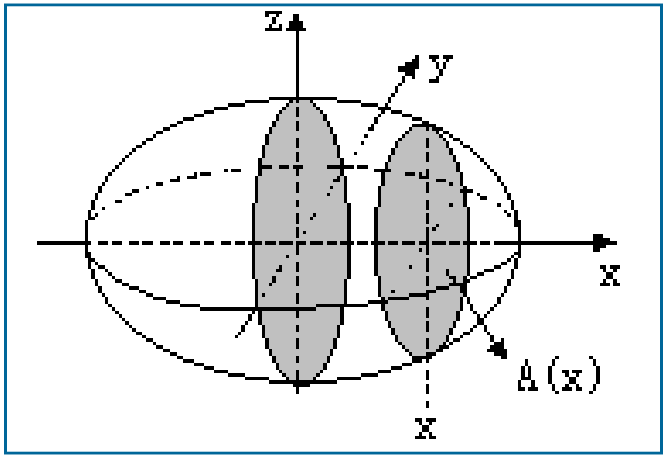
$$=\frac{1}{2}\tan\alpha\left[R^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-R}^{R}=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha.$$

截面面积为$A(x)$的立体体积：$V=\int_a^b A(x)dx$.

例2 求椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$的体积.

解 $\forall x\in[-a,a]$，过点$(x,0,0)$且垂直于x轴的截面椭圆的方程为：

$$\begin{cases} x=x \\ \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}\right)^2}+\dfrac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}\right)^2}=1 \end{cases}$$



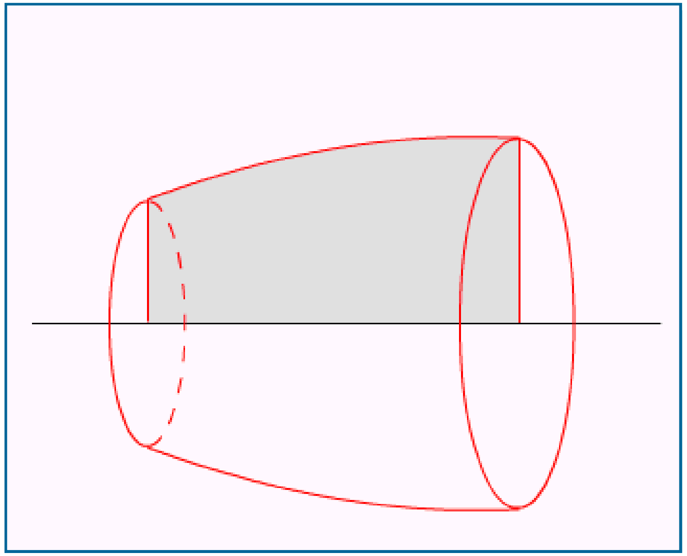
截面椭圆的面积为：

$$A(x)=\pi b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$V=\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=2\pi bc\left(x-\frac{1}{3}\frac{x^3}{a^2}\right)\Big|_0^a=\frac{4}{3}\pi abc$$

2、旋转体的体积

旋转体就是由一个平面图形绕这平面内一条直线旋转一周而成的立体. 这直线叫做旋转轴.



2、旋转体的体积

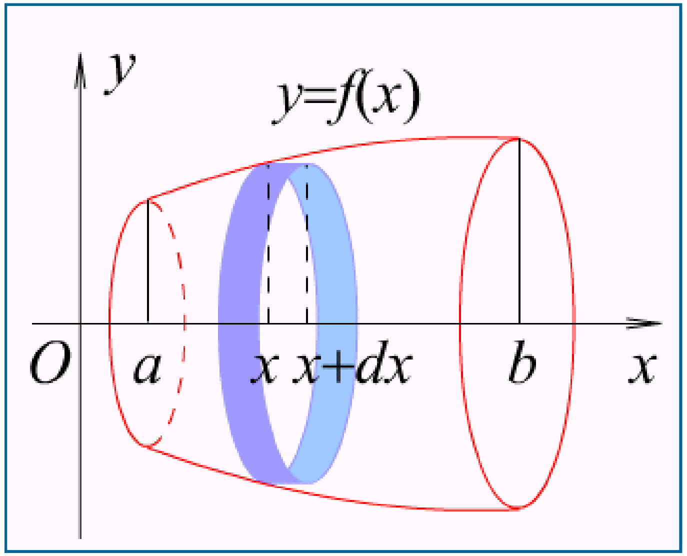
旋转体是由连续曲线$y=f(x)$、直线$x=a$、$a=b$及x轴所围成的曲边梯形绕x轴旋转一周而成的立体，求此旋转体的体积.

•旋转体的体积微元

考虑旋转体内点x处垂直于x轴的厚度为dx的切片，用圆柱体的体积$\pi[f(x)]^2dx$作为切片体积的近似值，于是体积微元为 $dV=\pi[f(x)]^2dx$.

•旋转体的体积

$$V=\int_a^b \pi[f(x)]^2 dx\,.$$



2、旋转体的体积

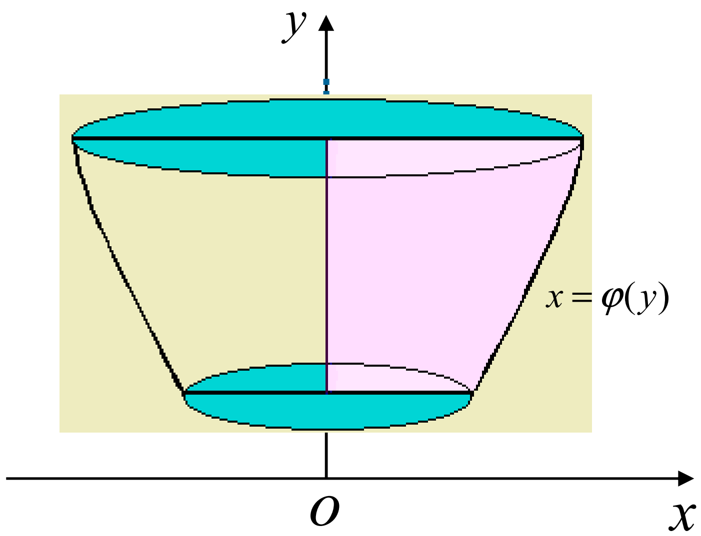
旋转体是由连续曲线$y=f(x)$、直线$x=a$、$a=b$及x轴所围成的曲边梯形绕x轴旋转一周而成的立体，求此旋转体的体积.

$$V=\int_a^b \pi[f(x)]^2 dx\ .$$

用类似的方法可以得到：

由曲线$x=\varphi(y)$,直线$y=c, y=d$与y轴所围成的曲边梯形绕y轴旋转一周而成的旋转体的体积为

$$V=\pi\int_c^d [\varphi(y)]^2 dy.$$



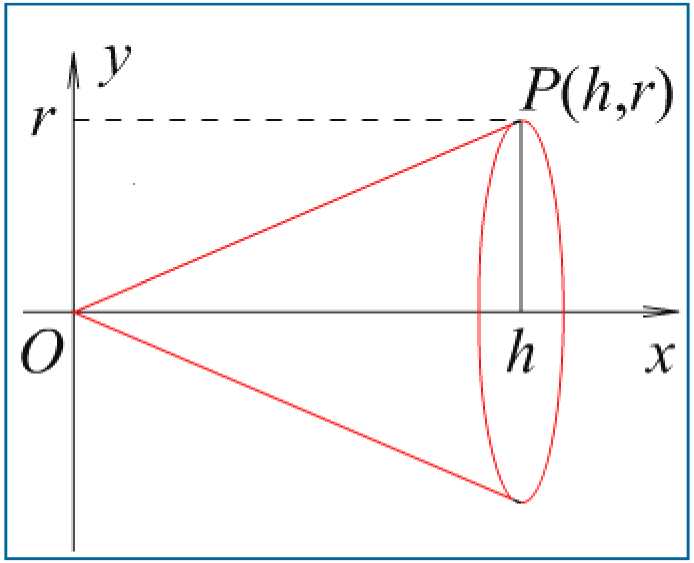
旋转体的体积：$V=\int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$.

例4连接坐标原点O及点$P(h, r)$的直线、直线$x=h$及x轴围成一个直角三角形. 将它绕x轴旋转构成一个底半径为r、高为h的圆锥体. 计算这圆锥体的体积.

解 直角三角形斜边的直线方程为 $y=\frac{r}{h}x$.

$$V=\int_0^h \pi(\frac{r}{h}x)^2 dx$$

$$=\frac{\pi r^2}{h^2}[\frac{1}{3}x^3]_0^h=\frac{1}{3}\pi hr^2.$$



旋转体的体积：$V=\int_a^b \pi[f(x)]^2dx$.

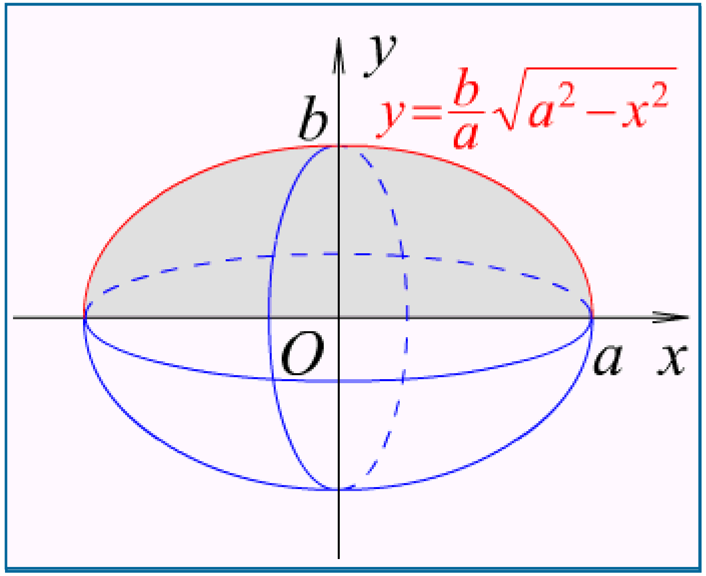
例5计算由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$所成的图形绕$x$轴旋转而成的旋转体(旋转椭球体)的体积.

解 旋转椭球体可以看作是由半个椭圆 $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 及 x 轴围成的图形绕x轴旋转而成的立体.

旋转椭球体的体积为

$$V=\int_{-a}^{a}\pi y^2dx=\int_{-a}^{a}\pi\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx$$

$$=\pi\frac{b^2}{a^2}[a^2x-\frac{1}{3}x^3]_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$



旋转体的体积：$V=\pi\int_c^d[\varphi(y)]^2dy$

例6求圆面 $(x-b)^2+y^2=a^2$ 绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积 $(0<a<b)$.

解 $\because (x-b)^2+y^2=a^2 \qquad \therefore x=b\pm\sqrt{a^2-y^2}$

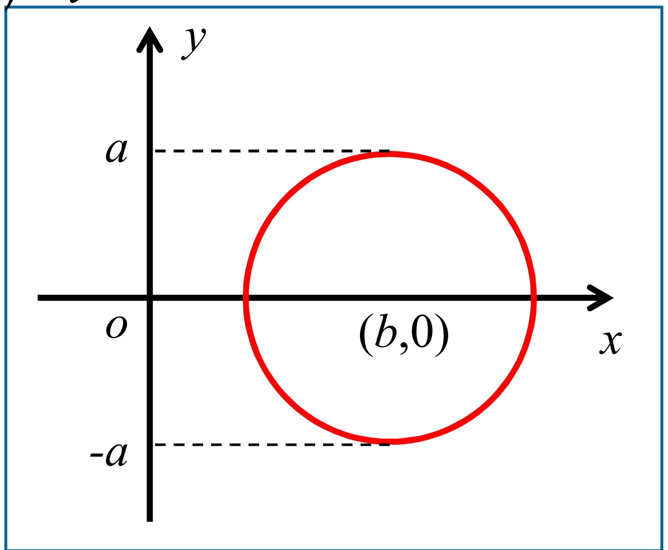
旋转体的体积为

$$V=\pi\int_{-a}^{a}\left(b+\sqrt{a^2-y^2}\right)^2dy-\pi\int_{-a}^{a}\left(b-\sqrt{a^2-y^2}\right)^2dy$$

$$=2\pi\int_0^a\left[\left(b+\sqrt{a^2-y^2}\right)^2-\left(b-\sqrt{a^2-y^2}\right)^2\right]dy$$

$$=4\pi b\int_0^a\sqrt{a^2-y^2}\,dy=4\pi b\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos t\,d(a\sin t)$$

$$=4\pi a^2b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=2\pi^2a^2b$$

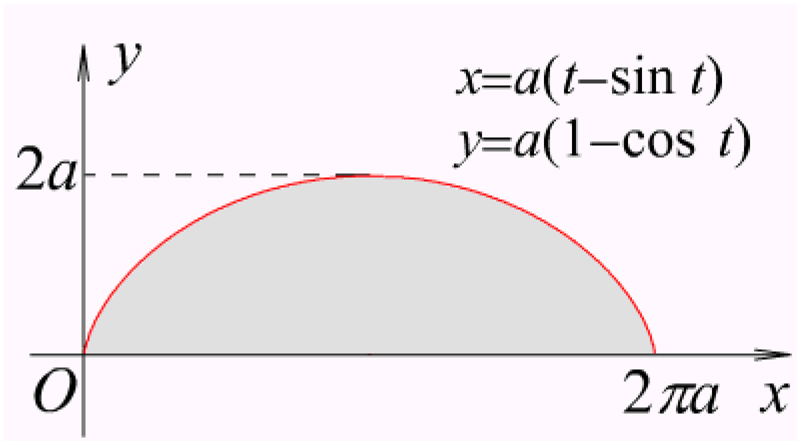


例7 计算由摆线$x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$的一拱, 直线$y=0$所围成的图形分别绕x轴、y轴旋转而成的旋转体的体积.

解 所给图形绕x轴旋转而成的旋转体的体积为

$$V_x=\int_0^{2\pi a}\pi y^2dx=\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\cdot a(1-\cos t)dt$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)dt=5\pi^2a^3\ .$$



例7 计算由摆线$x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$的一拱, 直线$y=0$所围成的图形分别绕x轴、y轴旋转而成的旋转体的体积.

解 设曲线左半边为$x=x_1(y)$, 右半边为$x=x_2(y)$.

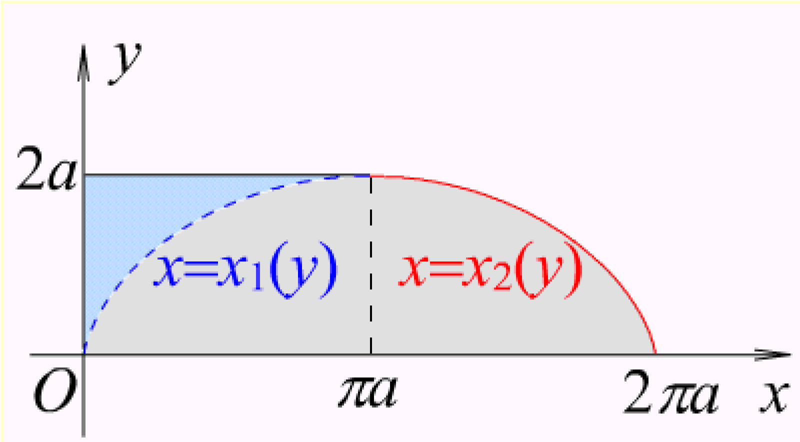
所给图形绕y轴旋转而成的旋转体的体积为

$$V_y=\int_0^{2a}\pi x_2^2(y)dy-\int_0^{2a}\pi x_1^2(y)dy$$

$$=\pi\int_{2\pi}^{\pi}a^2(t-\sin t)^2\cdot a\sin t dt-\pi\int_0^{\pi}a^2(t-\sin t)^2\cdot a\sin t dt$$

$$=-\pi a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)^2\sin t dt$$

$$=6\pi^3a^3 .$$



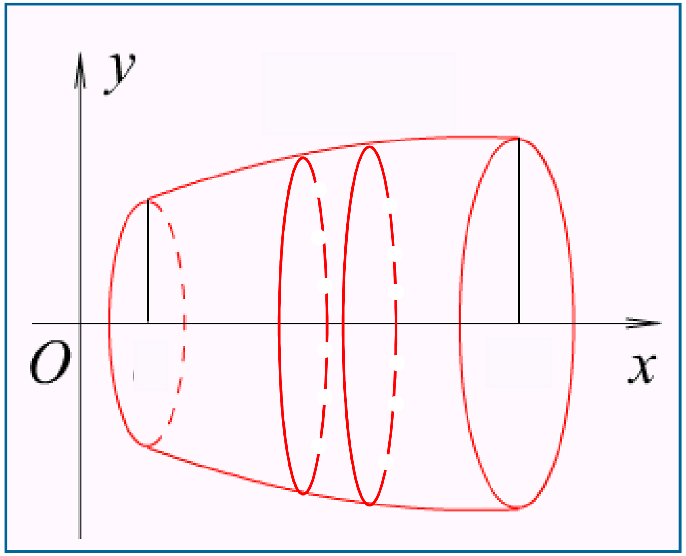
3、旋转曲面的面积

旋转曲面可以看作是由光滑曲线$x=x(t),y=y(t),t\in[T_1,T_2]$，且$y(t)\geq 0$，绕$x$轴旋转一周而成的曲面.

取积分变量为 t，在$[T_1,T_2]$上任取小区间$[t,t+dt]$，通过对应点分别作垂直于 x 轴的平面，它们在旋转曲面上截下一条狭带．当 dt 很小时，此狭带的面积近似于一圆柱(高度这对应的小曲线段的长度)的侧面积，取其为面积微元，

$$dS = 2\pi y(t)dl$$

$$= 2\pi y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$$



旋转曲面的面积为

$$S = 2\pi\int_{T_1}^{T_2} y(t)dl$$

$$= 2\pi\int_{T_1}^{T_2} y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$$

3、旋转曲面的面积

旋转曲面可以看作是由光滑曲线$x=x(t),y=y(t),t\in[T_1,T_2]$，且$y(t)\geq 0$，绕$x$轴旋转一周而成的曲面.

旋转曲面的面积为

$$S=2\pi\int_{T_1}^{T_2} y(t)dl=2\pi\int_{T_1}^{T_2} y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$$

若旋转曲面由光滑曲线$y=f(x),x\in[a,b]$，且$f(x)\geq 0$，绕x轴旋转一周而成的曲面，则

$$S=2\pi\int_a^b f(x)dl=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$$

若旋转曲面由极坐标方程$r=r(\theta)(\alpha\leq\theta\leq\beta)$绕$x$轴旋转一周而成的曲面，则

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta y(\theta)dl=2\pi\int_\alpha^\beta r(\theta)\sin\theta\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}d\theta$$

曲线$y=f(x)(a\le x\le b)$绕x轴旋转的曲面面积：

$$S=2\pi\int_a^b f(x)dl=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$$

曲线$x=x(t)$、$y=x(t)(T_1\le t\le T_2)$绕x轴旋转的曲面面积：

$$S=2\pi\int_{T_1}^{T_2} y(t)dl=2\pi\int_{T_1}^{T_2} y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$$

例8 求半径为a的球面面积.

解 球面可看作由半圆$y=\sqrt{a^2-x^2}(-a\le x\le a)$绕$x$轴旋转而成,则

$$S=2\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\times\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}dx=4\pi a^2$$

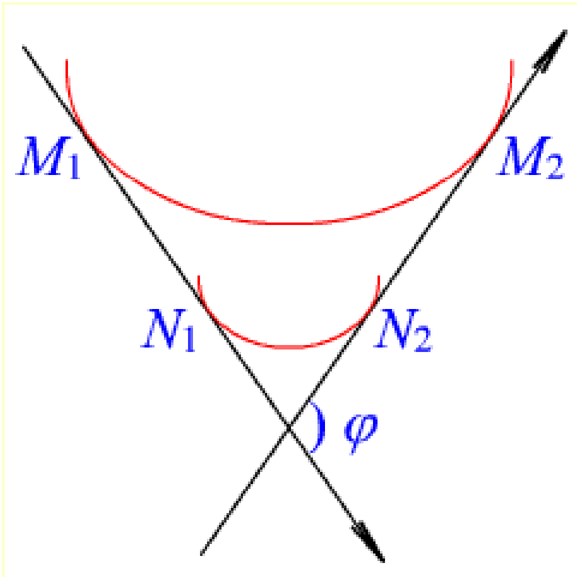
法二

$$S=2\pi\int_{-\pi}^{\pi}a\sin\theta\cdot ad\theta=4\pi a^2$$

五、 曲线的曲率

观察与思考：

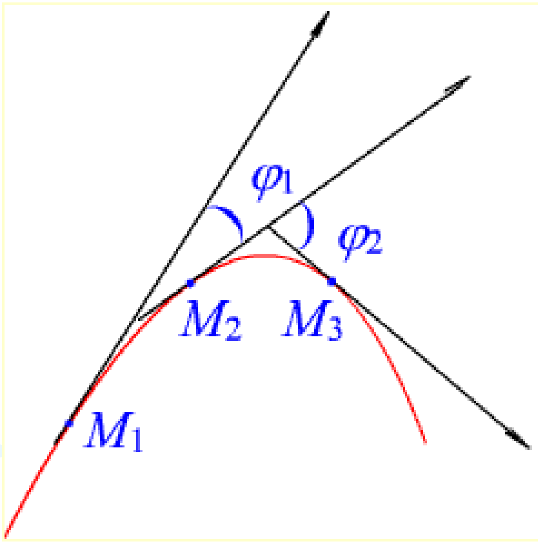
观察曲线的弯曲线程度与哪些因素有关. 怎样衡量曲线的弯曲程度？

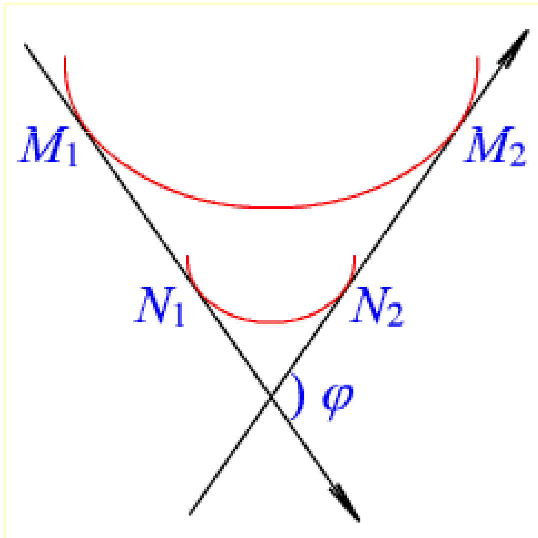


五、 曲线的曲率

观察与思考：

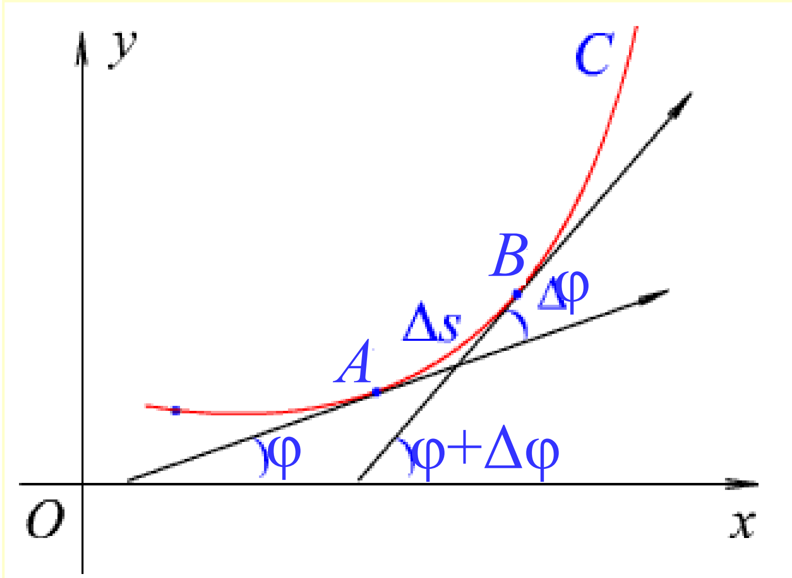
观察曲线的弯曲线程度与哪些因素有关. 怎样衡量曲线的弯曲程度?





❖曲率

设曲线C是光滑的，在点A处切线的倾角为φ，曲线上另外一点B的倾角为φ+Δφ .



比值 $\dfrac{|\Delta\varphi|}{|\Delta s|}$ 即为单位弧段上切线转过的角度大小，即平均弯曲程度.

平均曲率：

记 $\overline{K}=\left|\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$，称 $\overline{K}$ 为弧段 $\overset{\frown}{AB}$ 的平均曲率.

曲率：

记 $K=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$，称 K 为曲线 C 在点 A 处的曲率.

❖曲率的计算公式

在 $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \dfrac{d\varphi}{ds}$ 存在的条件下， $K = \left|\dfrac{d\varphi}{ds}\right|$.

曲率：

记 $K = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \left|\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$， 称 K 为曲线 C 在点 M 处的曲率.

❖曲率的计算公式

在 $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\dfrac{d\varphi}{ds}$ 存在的条件下，$K=\left|\dfrac{d\varphi}{ds}\right|$.

设曲线C的方程为$y=f(x)$, 且$f(x)$具有二阶导数.

因为$\tan\varphi=y'$, 所以

$$\sec^2\varphi d\varphi=y''dx,$$

$$d\varphi=\frac{y''}{\sec^2\varphi}dx \quad \varphi \quad =\frac{y''}{1+y'^2}dx\,.$$

又知 $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$, 从而得曲率的计算公式

$$\varphi$$

曲率的计算公式： $K=\left|\dfrac{d\varphi}{ds}\right|=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$.

例1 计算等边双曲线$xy=1$在点(1, 1)处的曲率.

解 由 $y=\dfrac{1}{x}$，得

$$y'=-\frac{1}{x^2},\quad y''=\frac{2}{x^3}.$$

因此$y'|_{x=1}=-1$，$y''|_{x=1}=2$. 曲线在点(1, 1)处的曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{2}{(1+(-1)^2)^{3/2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

曲率的计算公式： $K=\left|\dfrac{d\varphi}{ds}\right|=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$.

例2 抛物线$y=ax^2+bx+c$上哪一点处的曲率最大？

解 由$y=ax^2+bx+c$，得

$y'=2ax+b$，$y''=2a$，

代入曲率公式，得

$$K=\frac{|2a|}{[1+(2ax+b)^2]^{3/2}}.$$

显然，当$2ax+b=0$时曲率最大.

曲率最大时，$x=-\dfrac{b}{2a}$，对应的点为抛物线的顶点.

因此，抛物线在顶点处的曲率最大，此处$K=|2a|$.

讨论：

1. 直线$y=ax+b$上任一点的曲率是什么？

2. 若曲线的参数方程为$x=x(t)$, $y=y(t)$，那么曲率如何计算？

3. 半径为R的圆上任一点的曲率是什么？

提示：

1. 设直线方程为$y=ax+b$, 则$y'=a$，$y''=0$. 于是$K=0$.

2. $$K=\frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{[x'^2(t)+y'^2(t)]^{3/2}}.$$

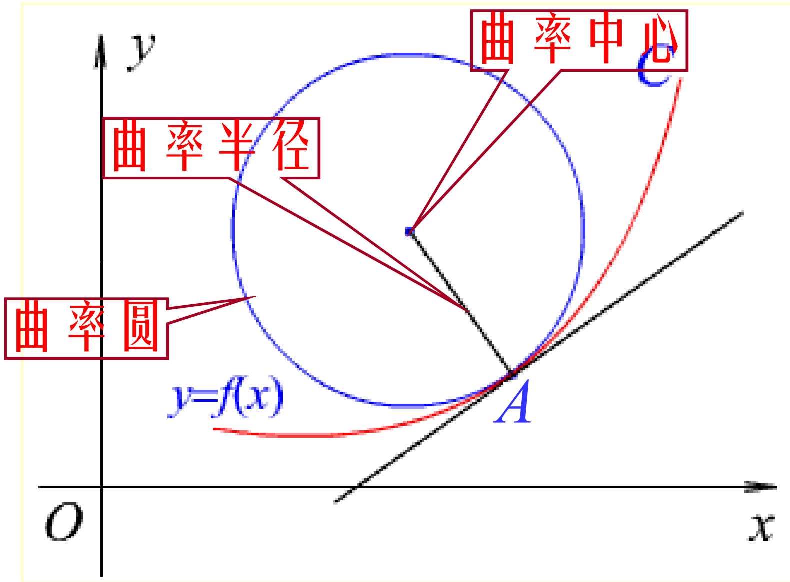
3. 圆的参数方程为$x=R\cos t$, $y=R\sin t$． $K=\dfrac{1}{R}$

❖曲率圆与曲率半径

设曲线在点A处的曲率为$K(K\neq 0)$.

在曲线凹的一侧作一个与曲线相切于A且半径为$R=K^{-1}$的圆.

上述圆叫做曲线在点A处的曲率圆(密切圆), 其圆心叫做曲率中心, 其半径R叫做曲率半径.



❖曲率与曲率半径关系

$$R=\frac{1}{K},\quad K=\frac{1}{R}$$

微分法与积分法的本质：

微分

“匀”：$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ – 平均变化率 (除法)

“精”：$\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

除法为基础

积分

“分”：$[a,b] = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i$

“匀”：$\Delta S \approx f(\xi_i)\Delta x_i$

“合”：$S \approx \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

“精”：$S = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$

乘法为基础

不同范畴、不同类型的问题，解决的基本方法相同，即“微小局部近似”与“利用极限求精确”，导数与定积分是处理均匀量的除法、乘法在处理非均匀量中的发展。

微分法与积分法的本质:

微分

"匀": $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ – 平均变化率 (除法)

"精": $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

除法为基础

积分

"分": $[a,b] = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i$

"匀": $\Delta S \approx f(\xi_i)\Delta x_i$

"合": $S \approx \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

"精": $S = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$

乘法为基础

$f(x_i)\Delta x_i$为$f(x)$的原函数$F(x)$在$[x_{i-1}, x_i]$增量的近似值,且是$F(x)$在x_i点的微分,则定积分是微分的无限 累加.