第二节 多元函数的极限与连续性

一元函数微分学

↓ 推广

多元函数微分学

多元函数的概念

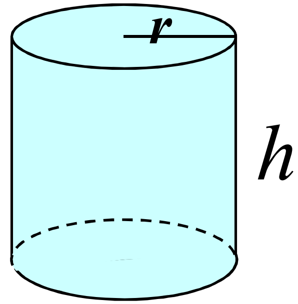
n元（数量值）函数——以二元函数、三元函数为主

n元向量值函数

2.1 多元函数的概念

引例:

- 圆柱体的体积

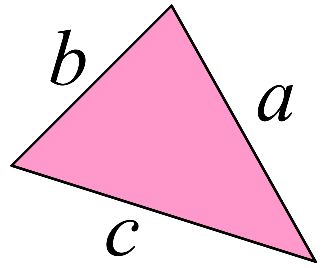


$$V=\pi r^2 h\,,\{(r,h)\mid r>0,h>0\}$$

- 一定质量的理想气体，其体积V与压强p均与气体所受的温度T(绝对温度)有关，其关系式为：

$p=RT/V$　　R-气体常数　($V>0$, $T>0^{o}$K)

- 三角形面积的海伦公式



$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\left(\ p=\frac{a+b+c}{2}\ \right)$$

$$\left\{\ (\ a,\ b,\ c\ )\ \middle|\ a>0,\ b>0,\ c>0,\ a+b>c\ \right\}$$

- 温度是时空的函数： T= T(x,y,z,t)

一个变量依赖于二个或二个以上变量的情形！

※ 函数(或映射)是两个集合之间的一种确定的对应关系. R 到 R 的映射是一元函数； R^2 到 R 的映射则是二元函数，R^3 到 R 的映射则是三元函数，…. ，R^n 到 R 的映射则是n元(数量值）函数.

n 元（数量值）函数定义

定义 2.1 设$A \subseteq R^n$一个非空点集, 称映射f： $A \to R$ 是定义在A上的一个 **n 元（数量值）函数**，也记作

$$w = f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)，\quad \vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A$$

或

$$w = f(P)，\quad P \in A$$

其中： $\vec{x}$或$x_1, x_2, \cdots, x_n$称为**自变量**， $D(f) = A$称为f的**定义域**，w称为**因变量**， $R(f) = \{w \mid w = f(\vec{x}), \vec{x} \in D(f)\}$称为$f$的**值域**.

通常，二元函数记作$z = f(x, y), (x, y) \in A \subseteq R^2$;

三元函数记作$u = f(x, y, z) \in A \subseteq R^3$.

$$w = f(P), \quad P \in D$$ -----点函数形式

对于后一种被称为“点函数”的写法，它可使多元函数与一元函数在形式上尽量保持一致，以便仿照一元函数的办法来处理多元函数中的许多问题；同时，还可把二元函数的很多论断推广到 $n(\geq 3)$ 元函数中来.

二元函数 $z = f(x, y)$的定义域 D求法：

例1 求下列函数的定义域

(1) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

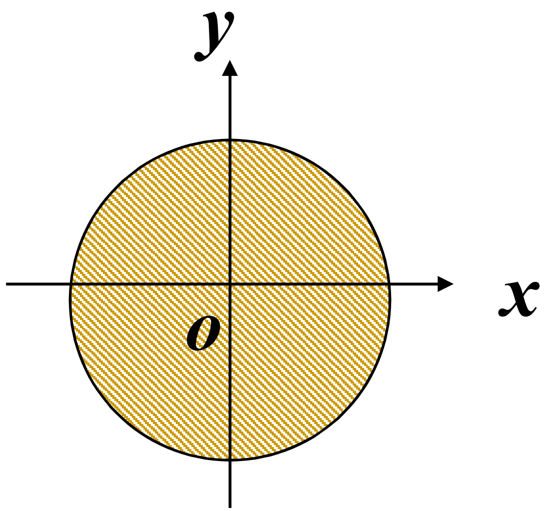
(2) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \ln(x + y)$

(3) $z = \ln(x^2 + y^2 - 2x) + \ln(4 - x^2 - y^2)$

(4) $z = \dfrac{\arcsin(3 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x - y^2}}$

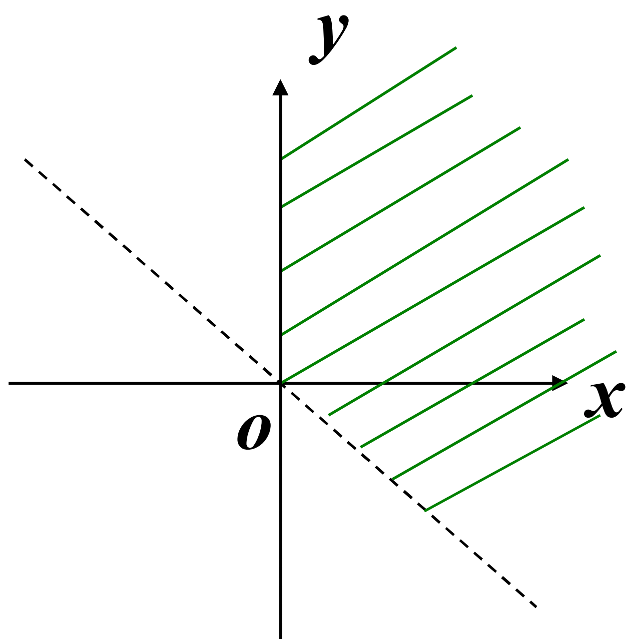
$$(1)\quad z=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$(2)\quad z=\frac{1}{\sqrt{x}}\ln(x+y)$$



$$D: x^2+y^2\le 1$$

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$$

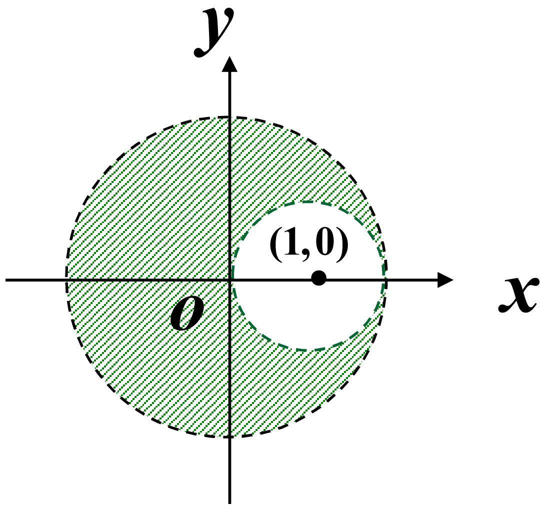


$$D:\begin{cases} x>0 \\ y>-x \end{cases}$$

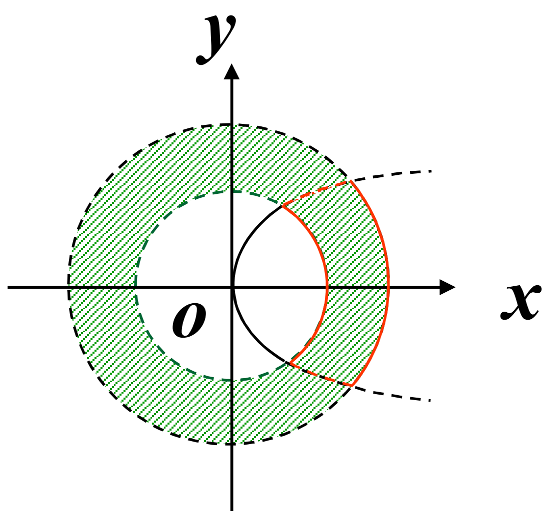
$$D=\{(x,y)\mid\; x>0,\, y>-x\}$$

$$(3)\quad z=\ln(x^2+y^2-2x)+\ln(4-x^2-y^2)$$

$$(4)\quad z=\frac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$$



$$(3)\quad D=\{(x,y)\,|\,2x<x^2+y^2<4\}$$



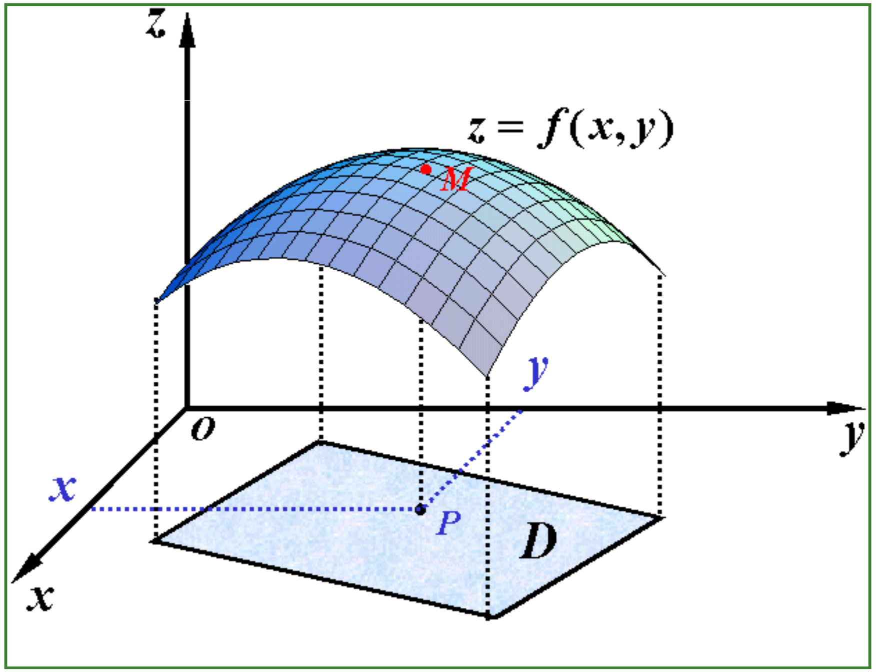
$$(4)\quad D=\{(x,y)\,|\,2\le x^2+y^2\le 4,\ x>y^2\}$$

二元函数 $z=f(x,y)$ 的图象

当把 $(x,y)\in D$ 和它所对应的 $z=f(x,y)$ 一起组成三维数组 (x,y,z) 时, 三维点集

$$\boxed{Grf=\{(x,y,z)\,|\,z=f(x,y),(x,y)\in D\}\subset \mathbf{R}^3}$$

便是二元函数 f 的图象, 通常该图象是一空间曲面.



例2 （1）线性函数：$z = ax + by + c$

$$D=\{(x,y)\in R^2\},\quad f(D)=R$$

表示一张平面 .

（2）$z=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$

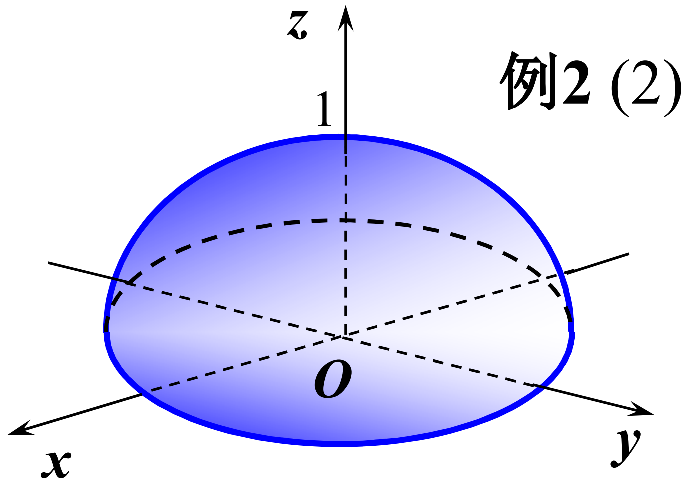
$$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}\quad f(D)=[0,1]$$

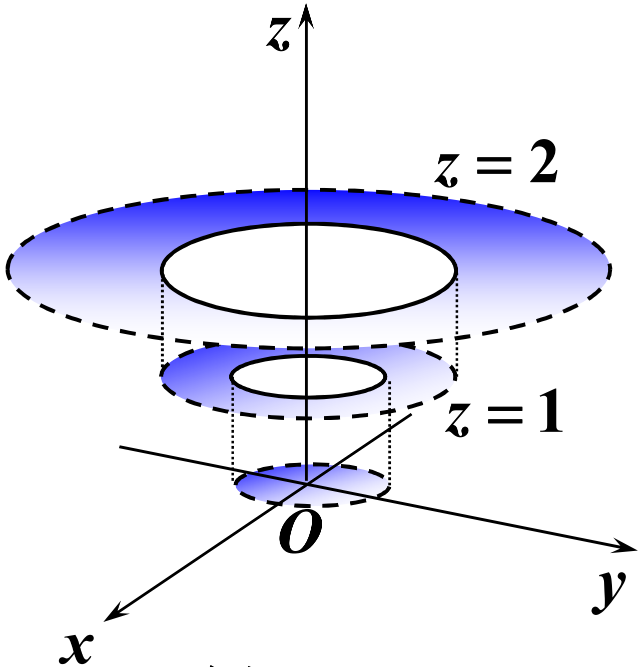
（3）$z = xy$ 表示上半球面.

$$D=\{(x,y)\in R^2\}\quad f(D)=R$$

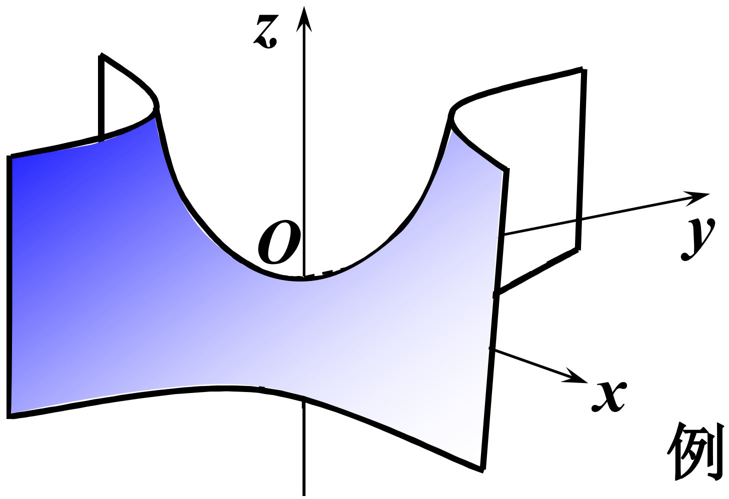
它的图象是过原点的马鞍面.

(4) $z=\left[\sqrt{x^2+y^2}\right]$ $\quad D=\{(x,y)\in R^2\},\quad f(D)=N$





例2(4)



例2(3)

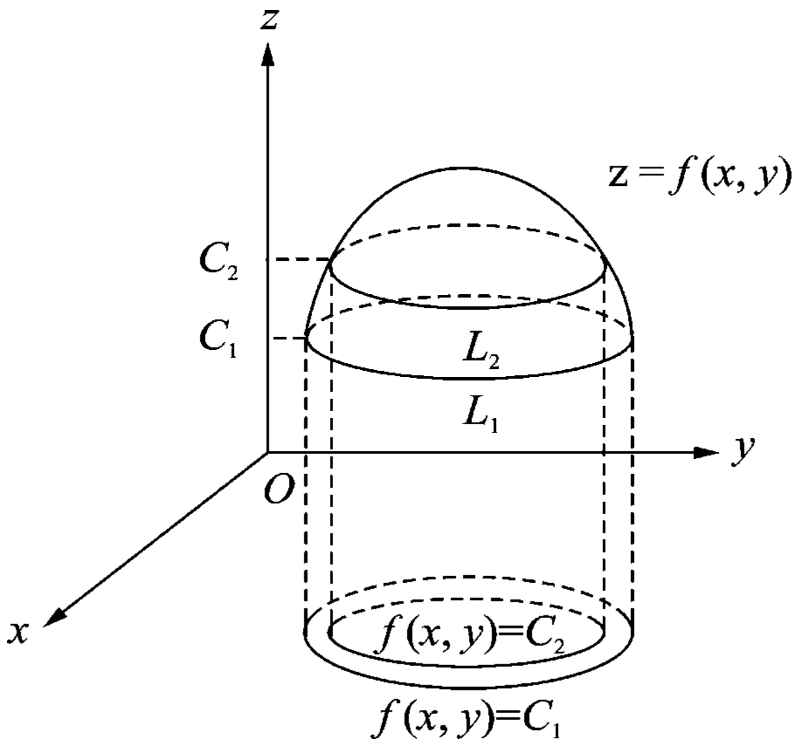
※ 若二元函数的值域 $f(D)$ 是有界数集，则称函数 f 在 D 上为一有界函数 (如例2(2)中的函数) . 否则，若 $f(D)$ 是无界数集，则称函数 f 在 D 上为一无界函数 (如例2(1)、(3)、(4)中的函数).

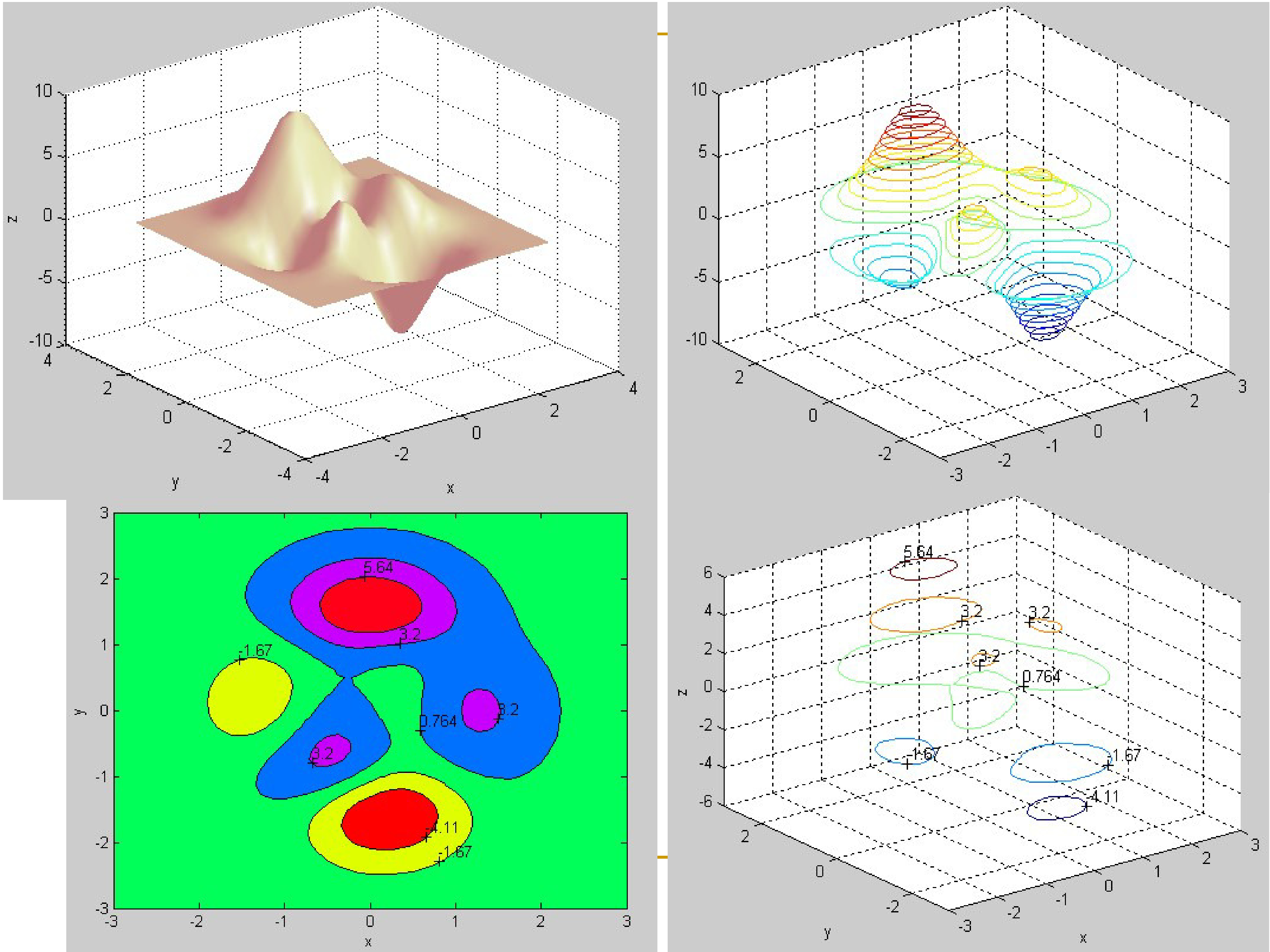
与一元函数类似地，设 $D \subset \mathbf{R}^2$，则有

$$f \text{ 在 } D \text{ 上无界} \Leftrightarrow \exists \{P_k\} \subset D, \text{ 使 } \lim_{k\to\infty} f(P_k) = \infty.$$

另一种图示法—等高(值）线

定义　等高线$f(x,y)=C$是曲面$z=f(x,y)$被平面$z=C$（C 为常数）所截得的曲线$L:\begin{cases} z=f(x,y), \\ z=C \end{cases}$：在$xOy$面上的投影（如图所示）．





z
x
y
5.64
3.2
-1.67
0.764
-4.11

*例3 设函数 (此函数在以后还有特殊用处)

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

试用等高线法讨论曲面 $z=f(x,y)$ 的形状.

解 用 $z=c$ (c 为一系列常数) 去截曲面 $z=f(x,y)$, 得等高线方程

$$xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=c \quad 或 \quad xy(x^2-y^2)=c(x^2+y^2).$$

当 $c=0$ 时，得 xOy 平面上的四条直线

$$x=0,\ \ y=0,\ \ y=x,\ \ y=-x.$$

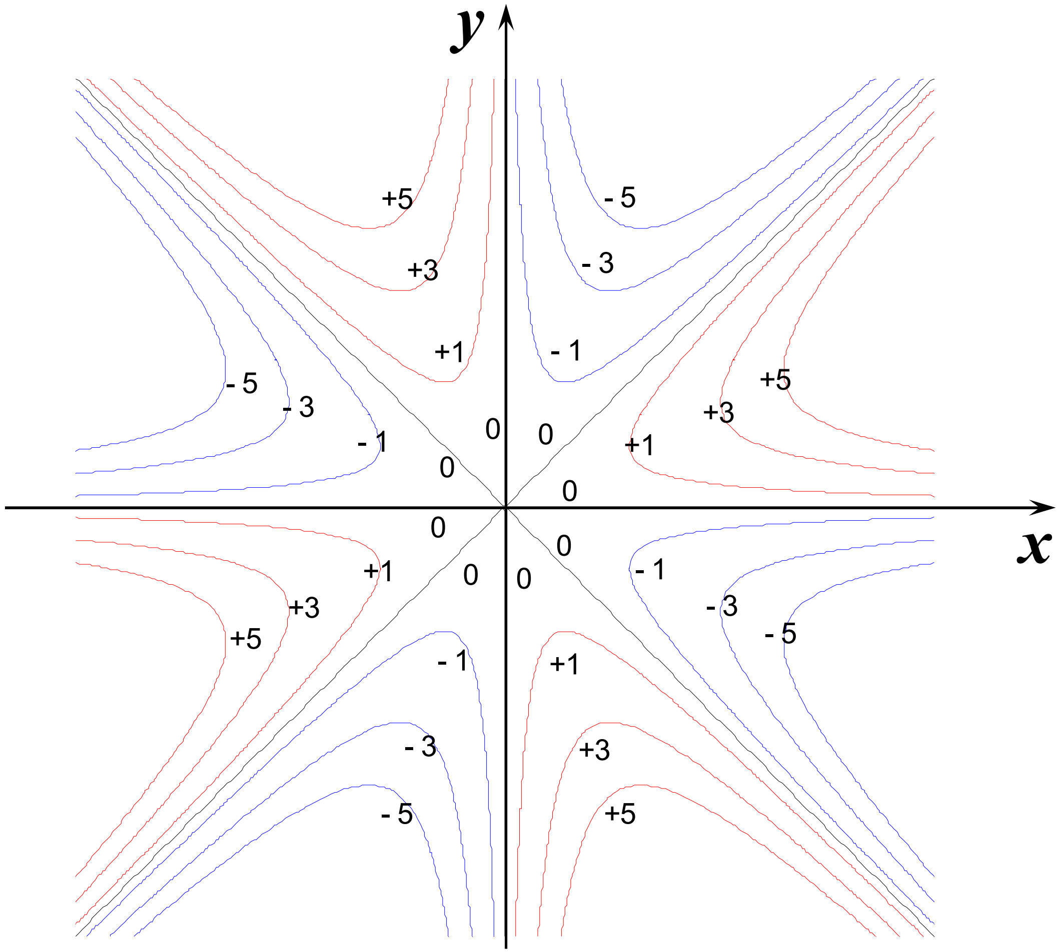
当 $c\neq 0$ 时，由等高线的直角坐标方程难以看出它的形状. 若把它化为极坐标方程，即令

$$x=r\cos\theta,\ \ y=r\sin\theta,$$

得到

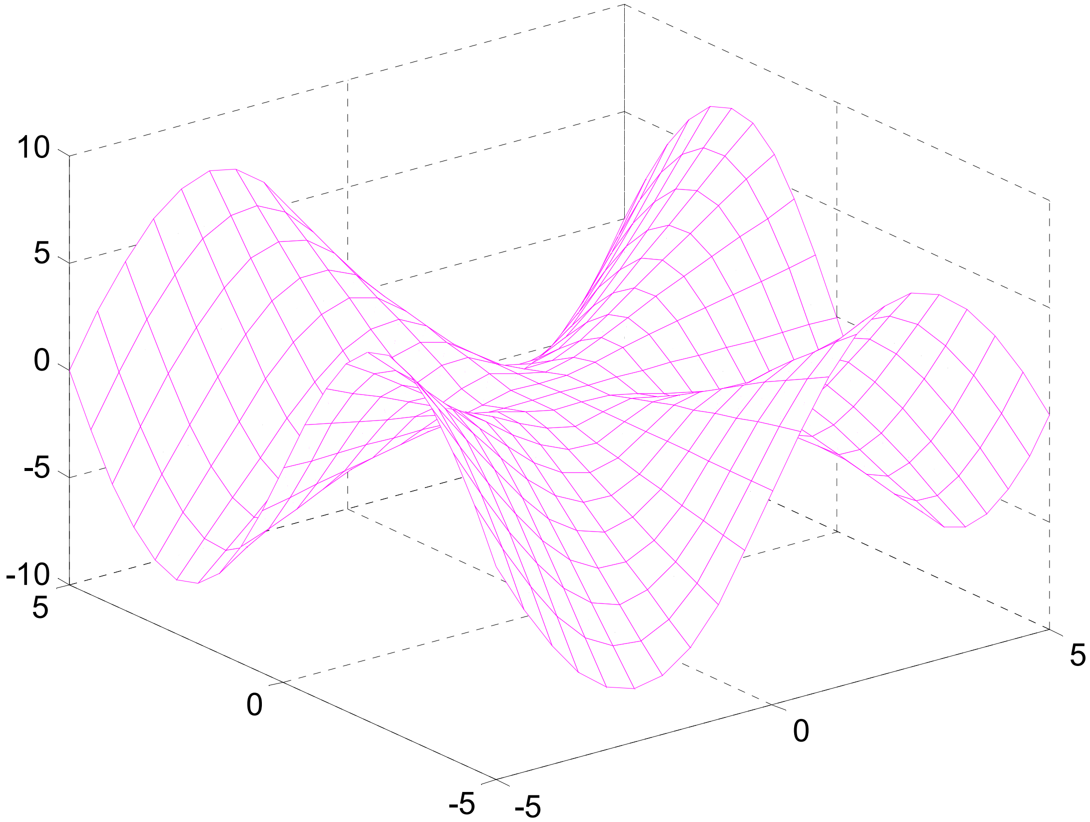
$$r^2\sin 4\theta=4c,\quad \text{或} \quad r^2=4c/\sin 4\theta.$$

如下一页图 所示, 为 $c=0,\pm1,\pm3,\pm5$ 所对应的一族等高线.


y
x
+5
+3
+1
- 5
- 3
- 1
0

由此便可想象曲面的大致形状如图 所示,

坐标原点是曲面的一个鞍点, 四道 “山谷” 与四道 “山脊” 在鞍点处相汇.



设 A 为 $\mathbf{R}^n$ 中的点集，称映射：

$$\boldsymbol{f}: A \to R^m \, (m \geq 2),$$

为定义在 A 上的一个 **n 元向量值函数**，也记作 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \boldsymbol{A}$ 是自变量，

$$\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_m) \in \boldsymbol{R}^{\mathrm{m}}$$

$$\boldsymbol{f}=(f_1, f_2, \cdots, f_m)$$

有

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_m = f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

或

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{pmatrix}$$

例 1 位于原点电量为 q 的点电荷，对周围空间上任一点 $M(x,y,z)$ 处产生的电场强度

$$\vec{E}(M)=\frac{kq}{r^3}\vec{r}\ \text{（}k\text{为常数），}$$

$$\vec{r}=(x,y,z),\quad r=|r|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$f:R^3\to \mathrm{R}^3,$$

$$y_1=f_1(x,y,z)=\frac{kq}{r^3}x$$

$$y_2=f_2(x,y,z)=\frac{kq}{r^3}y$$

$$y_3=f_3(x,y,z)=\frac{kq}{r^3}z$$

例2 圆柱螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \quad \theta \in (-\infty, +\infty) \\ z = b\theta \end{cases}$$

$$\vec{r} = (a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta) \in \mathrm{R}^3$$

$$f : R \to \mathrm{R}^3.$$