第四章　无 穷 级 数

习　题　4.1

(A)

3. 利用级数收敛的定义判别下列级数的敛散性，并对收敛级数求其和.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+1}{q^n}(|q|>3)$；　　(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n}{n+1}$.

解　(1) $S_n=\frac{3+1}{q}+\frac{3^2+1}{q^2}+\cdots+\frac{3^n+1}{q^n}$

$$=\frac{3}{q}+\left(\frac{3}{q}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3}{q}\right)^n+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\cdots+\frac{1}{q^n}$$

$$=\frac{\frac{3}{q}\left[1-\left(\frac{3}{q}\right)^n\right]}{1-\frac{3}{q}}+\frac{\frac{1}{q}\left(1-\frac{1}{q^n}\right)}{1-\frac{1}{q}},$$

从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{3}{q-3}+\frac{1}{q-1}$（因为 $|q|>3$），故原级数收敛. 和为 $\frac{3}{q-3}+\frac{1}{q-1}$.

(2) $S_n=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}\right)+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(1-\frac{1}{4}\right)\right]$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+4}\right),$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{3}$，故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$ 收敛于 $\frac{1}{3}$.

(3) $a_n=\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$，

$$S_n=[(\sqrt{3}-\sqrt{2})-(\sqrt{2}-\sqrt{1})]+[(\sqrt{4}-\sqrt{3})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})]+\cdots+$$
$$[(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})]$$
$$=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{2}-1),$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=-\sqrt{2}+1$，故原级数收敛，和为 $1-\sqrt{2}$.

(4) $S_n=(\ln 1-\ln 2)+(\ln 2-\ln 3)+\cdots+[\ln n-\ln(n+1)]$
$=-\ln(n+1)\to-\infty(n\to+\infty)$,

故原级数发散.

4. 证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ 收敛. 利用这个结论能将研究数列的敛散性问题转化为研究级数敛散性问题.

证　设数列收敛于 A，即 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=A$. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ 前 n 项和 $S_n=a_{n+1}-a_1$，故 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_1)=A-a_1$. 于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ 收敛.

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ 收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_1)$ 存在. 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n+1}$ 存在等于 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n+a_1$. 即 $\{a_n\}$ 收敛.

5. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ 必发散. 若这两个级数都发散，上述结论是否成立？

证　用反证法. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)-\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛. 推出矛盾. 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 发散.

若两个均发散，则上述结论不一定成立.

如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 都发散，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\sum\limits_{n=1}^{n}\frac{1}{n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛.

6. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$，求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的和.

解　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}=2-5=-3$,

故
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=5+3=8.$$

7. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的前 $2n$ 项之和 $S_{2n}\to A$，并且 $a_n\to0(n\to\infty)$，证明该级数收敛且其和为 A.

证 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}+a_{2n+1})=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}+\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n+1}=A$,

于是数列$\{S_{2n}\}$与$\{S_{2n+1}\}$都收敛于 A, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

8. 利用级数的性质判断下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2^n}\right)$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\ln\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)$ $(x\in\mathbf{R})$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}\neq 0$,故原级数发散.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$收敛,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2^n}\right)$发散.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\ln\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}x\ln\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{x}}=x$ $(x\neq 0)$,若 $x\neq 0$. 原级数发散. 若 $x=0$. 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\ln\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)$收敛,和为 0.

10. 试用 Cauchy 收敛原理证明:若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

证 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,由 Cauchy 收敛原理知,

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbf{N}_+$,使 $\forall p\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,恒有$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k\right|<\varepsilon$.

特别地 $p=1$,则$|a_{n+1}|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

12. 判别下列正项级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n+2}$.

解 $\dfrac{1}{3^n+2}\leqslant\dfrac{1}{3^n}$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$收敛. 由比较准则,原级数收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}\Big/\dfrac{1}{n}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}(n+1)}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散知,原级数发散.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}(\alpha \in \mathbf{R})$.

解 取 $p=\alpha+\dfrac{1}{2}$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}\Big/\dfrac{1}{n^{p}}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}=2$.

故当 $\alpha>\dfrac{1}{2}$ 时，$p=\alpha+\dfrac{1}{2}>1$，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{p}}$ 收敛. 从而原级数收敛. 当 $\alpha\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$p\leqslant 1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{p}}$ 发散，从而原级数发散.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n^{2}-\ln n}$.

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n}}{n^{2}-\ln n}\Big/\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2}}{n^{2}-\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1-\dfrac{\ln n}{n^{2}}}=1$，

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^{3}}}$ 收敛. 故原级数收敛.

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{3}\left[\sqrt{2}+(-1)^{n}\right]^{n}}{3^{n}}$.

解 由 $0\leqslant a_n\leqslant\dfrac{n^{3}(\sqrt{2}+1)^{n}}{3^{n}}=b_n$，其中 $a_n=\dfrac{n^{3}\left[\sqrt{2}+(-1)^{n}\right]^{n}}{3^{n}}$.

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{3}<1$，由 D'Alembert 准则，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

进而由比较准则，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$.

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n}{\pi}\right)^{2}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\sin^{2}\dfrac{\pi}{2n}}{\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)^{2}}=2$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi^{2}}{4n^{2}}$ 收敛.

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$ 收敛.

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\ln\left(1+\dfrac{2}{n^{3}}\right)$.

解 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\ln\left(1+\dfrac{2}{n^{3}}\right)}{\dfrac{2}{n^{2}}}=1$，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n^{2}}$ 收敛，原级数收敛.

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\dfrac{\pi}{3^{n}}$.

解 因为 $0\leqslant n\sin\frac{\pi}{3^n}\leqslant\frac{n\pi}{3^n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)\pi}{3^{n+1}}\Big/\frac{n\pi}{3^n}\right)=\frac{1}{3}$，

由 D'Alembert 判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{3^n}$ 收敛，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{\pi}{3^n}$ 收敛.

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{x}{n}\right)^n (x>0)$.

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(n+1)!\frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\Big/(n!x^n/n^n)\right]=\frac{x}{\mathrm{e}}$，

则 如果 $x>\mathrm{e}$，那么原级数发散；若 $x<\mathrm{e}$，原级数收敛.

当 $x=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=1$，D'Alembert 判别法失效.

因为当 $n\to+\infty$ 时，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 是单调增趋于 e，所以 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$，从而有 $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$，这说明该级数通项 a_n 严格单调增，又 $a_n>0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\sup\{a_n\}>0$，该级数通项 a_n 不趋于零，故原级数发散.

综上所述 $x<\mathrm{e}$ 时收敛；$x\geqslant\mathrm{e}$，发散.

(13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2n\tan\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{3}}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n\tan\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}>1$，

由 Cauchy 判别法. 原级数发散.

(14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{1+\alpha^{2n}}(\alpha>0)$.

解 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha^{n+1}}{1+\alpha^{2n+2}}\Big/\frac{\alpha^n}{1+\alpha^{2n}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\alpha\cdot\frac{1+\alpha^{2n}}{1+\alpha^{2n+2}}\right)=\begin{cases}\alpha, & \alpha<1,\\ \frac{1}{\alpha}, & \alpha>1.\end{cases}$

故 $\alpha\neq1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{1+\alpha^{2n}}$ 收敛.

$\alpha=1$ 时，$\frac{\alpha^n}{1+\alpha^{2n}}=\frac{1}{2}$，由级数收敛的必要条件知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$ 发散.

总之，当 $\alpha\neq1$ 时，原级数收敛. 当 $\alpha=1$ 时，原级数发散.

13. 设 $|r|<1$，利用级数理论证明 $\lim\limits_{n\to\infty}nr^n=0$.

证 由 Cauchy 准则知. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|nr^n|$ 收敛.

再由收敛的必要条件知$\lim\limits_{n\to\infty} nr^n=0$.

14. 讨论下列级数的敛散性. 并对收敛级数说明是绝对收敛,还是条件收敛:

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n-\ln n}$.

解 此为交错级数,由 $0<\dfrac{1}{n-\ln n}<\dfrac{1}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散知 $\sum\limits_{n=1}^{n}\dfrac{1}{n-\ln n}$发散. 故原级数非绝对收敛.

又因为
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{\ln n}{n}}=0.$$

又设 $f(x)=x-\ln x$, $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}>0(x>1)$知$\dfrac{1}{n-\ln n}$单减,于是由 Leibniz 准则. 原级数条件收敛.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{a}-1)\quad(a>0,a\neq 1)$.

解 令 $f(n)=\sqrt[n]{a}-1$,当 $a>0$ 时,$\sqrt[n]{a}-1>0$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}\ln a}{-\frac{1}{x^2}}=\infty,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\text{发散}.$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{a}-1)\right|$发散. 即原级数非绝对收敛.

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=0$,且 $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}a^{\frac{1}{x}}<0$,即 $f(n)$单减,

由 Leibniz 准则,原级数条件收敛.

18. 下列级数中哪些是绝对收敛的? 哪些是条件收敛的?

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\dfrac{n}{2^n}$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{9n^2-4}}$.

解 (2) $\left|(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\dfrac{n}{2^n}\right|\leqslant\dfrac{n}{2^n}$,且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+1}{2^{n+1}}\Big/\dfrac{n}{2^n}\right)=\dfrac{1}{2}$,即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$收敛,于是原级数绝对收敛.

(3) 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}$发散,故原级数非绝对收敛.

又因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}=0$,且$\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}>\dfrac{1}{\sqrt[4]{n+1}}$. 由 Leibniz 准则,原级数条件收敛.

(4) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\ln\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{9n^2-4}}\Big/\dfrac{1}{n}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\ln\left(2+\dfrac{1}{n}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{9-\dfrac{4}{n^2}}}\right]=\dfrac{\ln 2}{3}$,

且
$$\left|(-1)^{n+1}\frac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{9n^2-4}}\right|=\frac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{9n^2-4}},$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{9n^2-4}}$发散,原级数非绝对收敛.

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{9n^2-4}}=0$,且$\dfrac{\ln\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{9n^2-4}}>\dfrac{\ln\left(2+\dfrac{1}{n+1}\right)}{\sqrt{9(n+1)^2-4}}$,由 Leibniz 准则,原级数条件收敛.

20. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 都收敛,且 $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$,证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

证 因为 $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$,所以 $0\leqslant c_n-b_n\leqslant c_n-a_n$.

又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 均收敛.所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$收敛.

由正项级数的比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-b_n)$收敛.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-b_n)$知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

21. 设 $a_n>0$,证明:

(1) 若$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\lambda<1$(或$\sqrt[n]{a_n}\leqslant\lambda<1$),则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

(2) 若$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant1$(或$\sqrt[n]{a_n}\geqslant1$),则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

证 $a_n>0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数.

(1) 若 $a_{n+1}\leqslant\lambda a_n$,$\lambda<1$,$\forall n\in\mathbf{N}_+$,那么

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant a_1+\lambda a_1+\cdots+\lambda^{n-1}a_1=a_1\frac{(1-\lambda^n)}{1-\lambda},$$

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_1\dfrac{(1-\lambda^n)}{1-\lambda}=\dfrac{a_1}{1-\lambda}$,所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}a_1$ 收敛.

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

同理可证$\sqrt[n]{a_n}\leqslant\lambda<1$时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

(2) 若$a_{n+1}>a_n$,则$\{a_n\}$为单增数列. 且$a_n>0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq0$ (即0不可能为单增数列的上确界).

22. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛,令

$$a_n^+=\frac{|a_n|+a_n}{2}=\begin{cases}a_n, & a_n>0,\\0, & a_n\leqslant0;\end{cases}\quad a_n^-=\frac{|a_n|-a_n}{2}=\begin{cases}-a_n, & a_n<0,\\0, & a_n\geqslant0.\end{cases}$$

则a_n^+与a_n^-分别称为a_n的正部和负部. 证明:

(1) 正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$都收敛;

(2) 任一绝对收敛的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$都可以表示为两个收敛的正项级数之差:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+-\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-.$$

证 (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛. 即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛.

又因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+=\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|\right)$,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+$收敛. 同理可证$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$收敛.

(2) 因为$a_n=\frac{a_n}{2}+\frac{a_n}{2}=\frac{a_n}{2}+\frac{|a_n|}{2}-\frac{|a_n|}{2}+\frac{a_n}{2}$

$$=\frac{a_n+|a_n|}{2}-\frac{|a_n|-a_n}{2}=a_n^+-a_n^-,$$

由(1)知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛时. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$均收敛. (2)得证.

(B)

1. 设 $a_n>0,b_n>0,\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}$,若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛,证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛.

证 由$a_n>0,b_n>0,\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}$可得$0<\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\leqslant\frac{a_n}{b_n}$,且$0<\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\leqslant\frac{a_n}{b_n}\leqslant\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\leqslant\cdots\leqslant\frac{a_1}{b_1}$,则$a_{n+1}\leqslant\frac{a_1}{b_1}b_{n+1}$. 由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛,由比较判别法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛. 原题得证.

2. 设 $a_n>0$,且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-\ln a_n}{\ln n}=q$. 证明:

(1) 若 $q>1$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; (2) $q<1$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证 (1) 若 $q>1$. 令 $q=1+\alpha(\alpha>0)$. 因为 $a_n>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-\ln a_n}{\ln n}=q$,

所以对 $\varepsilon=\dfrac{\alpha}{2}$, $\exists N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,

$$q+\frac{\alpha}{2}>\frac{-\ln a_n}{\ln n}>q-\frac{\alpha}{2}=1+\frac{\alpha}{2},$$

即 $-\ln a_n>\left(1+\dfrac{\alpha}{2}\right)\ln n$,

即 $0<a_n<\dfrac{1}{n^{1+\frac{\alpha}{2}}}$,

由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+\frac{\alpha}{2}}}$ 收敛知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 若 $q<1$,由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-\ln a_n}{\ln n}=q$ 知,对 $\varepsilon=\dfrac{1-q}{2}>0$, $\exists N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,

$$\frac{-\ln a_n}{\ln n}<q+\frac{1-q}{2}=\frac{1+q}{2}<1,$$

即 $a_n>\dfrac{1}{n}$,由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

3. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数,且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$. 证明:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

证 由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$,所以 $f(0)=0$,于是 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$. 由泰勒公式得 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=f''(0)\dfrac{1}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|\Big/\dfrac{1}{n^2}\right)=|f''(0)|$. 由 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛及比较准则, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

4. 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^{1+\alpha}}(\alpha>0)$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln(5+n^3)}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\alpha^n}{n+1}\right)^n(\alpha>0)$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan(\sqrt{n^2+1}\pi)$;

(5) $\sqrt{3}+\sqrt{3-\sqrt{6}}+\sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{6}}}+\cdots+\sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}}}+\cdots$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}(x\in\mathbf{R})$.

解 (1) 因为 $\alpha>0$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\ln n}{n^{1+\alpha}}\Big/\frac{1}{n^{1+\frac{\alpha}{2}}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}=0$. 由正项级数收敛的比较准则,原级数收敛.

(2) 因为 $\frac{1}{n\ln(5+n^3)}>\frac{1}{n\ln n^3}>\frac{1}{3n\ln n}>\frac{1}{3n}$,当 $n>3$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$ 发散,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(5+n^3)}$ 发散.

(3) $\sqrt[n]{a_n}=\frac{a^n}{n+1}$.

若 $0<\alpha\leqslant1$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=0$,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^\alpha}{n+1}\right)^n$ 收敛.

若 $\alpha>1$,由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{x+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}\lim\limits_{x\to\infty}\alpha x^{\alpha-1}=+\infty$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=+\infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^\alpha}{n+1}\right)^n$ 发散.

(4) $a_n=\tan(\sqrt{n^2+1}\pi)=\tan\left[(\sqrt{n^2+1}-n)\pi\right]=\tan\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$,

因而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{\pi}{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\tan\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\Big/\frac{\pi}{n+\sqrt{n^2+1}}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{n+\sqrt{n^2+1}}\Big/\frac{\pi}{2n}\right)=1$

又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2n}$ 发散,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

(5) 令 $a_n=\sqrt{3-c_n}$,$n=0,1,2,\cdots$,则原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. 其中 $c_0=0$,$c_1=\sqrt{6}$, $c_2=\sqrt{6+\sqrt{6}}$,$\cdots$,$c_n=\sqrt{6+c_{n-1}}$. 由习题 1.2(B)第 4 题(2),数列 $\{c_n\}$ 单增有界,且 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=3$.

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{3-c_{n+1}}}{\sqrt{3-c_n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{3-\sqrt{6+c_n}}{3-c_n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{3+\sqrt{6+c_n}}}=\frac{1}{\sqrt{6}}<1$$

由 D'Alembert 准则, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(6) $a_n=\tan\frac{x^n}{\sqrt{n}}$. 若 $x=0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=0$ 收敛.

若 $|x|<1$. 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}=0$,所以当 n 足够大时, $\frac{|x|^n}{\sqrt{n}}<\frac{\pi}{2}$,且 $|a_n|=$

$\tan\dfrac{|x|^n}{\sqrt{n}}$,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\tan\dfrac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\tan\dfrac{|x|^n}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\tan\dfrac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\dfrac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}\cdot\frac{|x|^n/\sqrt{n}}{\tan(|x|^n/\sqrt{n})}\cdot\sqrt{\frac{n}{n+1}}\,|x|\right|$$

$$=|x|<1,$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan\dfrac{|x|^n}{\sqrt{n}}$收敛，即原级数绝对收敛；

若$|x|>1$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\tan\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}\neq 0$，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散；

$x=1$，$a_n=\tan\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}=\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}>0$，由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big/\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)=1$，

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}$发散；

$x=-1$，$a_n=(-1)^n\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}$发散，但$\lim\limits_{n\to\infty}\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$，

且 $\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\tan\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$，由 Leibniz 准则，

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}$条件收敛.

习　题　4.2

(A)

2. 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^n}$在$(-\infty,+\infty)$上收敛，并求它的和函数.

证　若 $x=0$，$f_n(0)=0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(0)=0$ 收敛.

若 $x\neq 0$，$S_n(x)=\dfrac{-x^2}{1+x^2}\left(1-\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{(1+x^2)^2}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{(1+x^2)^{n-1}}\right)$

$$=\frac{-x^2}{1+x^2}\cdot\frac{1-\dfrac{(-1)^n}{(1+x^2)^n}}{1+\dfrac{1}{1+x^2}},$$