二、物理场的分析方法

2.1 物理量与场

2.1.1 物理量的类别

根据物理量大小取值与方向取向的属性，物理量可主要分为二类：

标量：是指只有大小量值的物理量。如温度、高度、电位等。

矢量：是指不但有一定大小量值，还有一定方向指向的物理量。如速度、作用力、电场、磁场等。

为了便于分析，通常用不同的符号或字母来表达不同的标量和矢量。如对于标量，用 T 表示温度，H 表示高度，φ表示电位等；对于矢量，常用黑体字母或字母加上划线表示，如用$\boldsymbol{F}$或$\vec{F}$表示作用力。

矢量在一定坐标系下可用 3 个为标量的坐标分量完整表示。例如，在直角坐标系下

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{e}}_x \boldsymbol{F}_x + \vec{\boldsymbol{e}}_y \boldsymbol{F}_y + \vec{\boldsymbol{e}}_z \boldsymbol{F}_z$$

式中$\vec{\boldsymbol{e}}_x$、$\vec{\boldsymbol{e}}_y$和$\vec{\boldsymbol{e}}_z$为直角坐标系的坐标单位矢量。

另外，除了标量和矢量，物理学中还有一种称为张量的物理量，其结果与测量该物理量的方向有关。如等离子体的电磁特性参数就是一种张量。张量常用符号或字母加双上划线来表示。一般来讲，在一定坐标系下，1 个张量的结果可由 9 个独立的标量给出，并常以矩阵的方式列出相应的 9 个标量。例如，各向异性电介质的介电常数张量，可表示为

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

2.1.2 物理量的场

物理量的场，指的是物理量在空间中分布存在的形式。也即，在空间一定区域中的不同位置，都有一个该物理量存在于此处。如：空间中温度分布形成温度场，河道里的水流形成流速场，空间中的电位分布形成电位场等。

物理量的场函数：表示物理量场的数学函数，称为该物理量的场函数。如：温度场$T(x,y,z)$也叫温度（场）函数，高度场$H(x,y,z)$也叫高度函数，电位场$\varphi(x,y,z)$也叫电位函数等。

根据物理量的类别以及其与时间的关系，可对物理量的场进行分类。

按物理量的不同类别，场可分为：标量场，矢量场。在一定坐标系下，矢量场可用三个标量函数对应的坐标分量关系完整表达。如，

$$\vec{\boldsymbol{F}}(x,y,z) = \vec{\boldsymbol{e}}_x \boldsymbol{F}_x(x,y,z) + \vec{\boldsymbol{e}}_y \boldsymbol{F}_y(x,y,z) + \vec{\boldsymbol{e}}_z \boldsymbol{F}_z(x,y,z)\text{。}$$

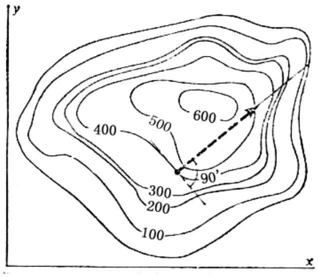
按物理量与时间的关系可将场分为：静态场，时变场，时谐场等。例如，静电荷产生的电场$\vec{\boldsymbol{E}}(x,y,z)$即为静电场；电磁波搭载的电场$\vec{\boldsymbol{E}}(x,y,z;t)$即为时变电场。

2.1.3 场的形象化表示

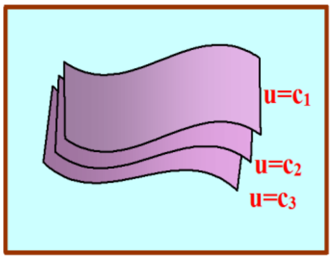
用函数来表达物理量场的空间分布，具有利于通过数学分析获得场分布特性的优点。但是场的函数表达具有一定的抽象性，不利于直观地感受和形象地领会场分布特性。因此，对标量场和矢量场分别建立形象化的表示方式，可有助于具体直观地认识和理解场分布的规律和特征。

（一）标量场的形象化表示方法

对于标量场而言，常用等值线或等值面来形象化反映标量场的空间分布情况。等值线（面）的数学表达，为标量场函数取常数值时所得到的曲线（曲面）方程。即，对于二维场函数 $u(x,y)$，等值线方程为 $u(x,y)=C$；对于三维场函数 $u(x,y,z)$，等值面方程为 $u(x,y,z)=C$。通过等值线（面）方程中常数 C 的不同取值，可得到如图所示反映物理量 u 在空间不同位置区域为相应取值所形成的平面曲线簇或三维曲面簇，并且不同等值线（面）互不相交，标量场沿等值线（面）的变化为零（不变化）。因此，如此形成的等值曲线（面）簇，可形象化直观地反映出标量场的空间分布规律和特征。例如，在反映地形图的等高线中，$H(x,y)=600$ 的曲线直观地指明了高度为 600 米的空间位置区域。同时，通过由全部等高线构成的地形图，可直观地看到不同程度高差变化的区域。由此可见，以等值线（面）来形象化表示标量场空间分布变化情况的基本思想方法，是“以不变应万变”。



地形图的等高线

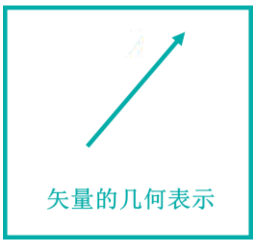


等值面簇

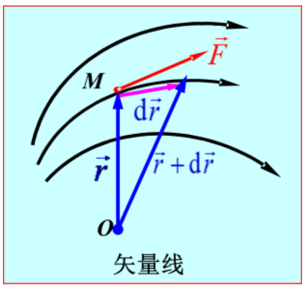
（二）矢量场的形象化表示方法

对于建立矢量场的形象化表示方法而言，将涉及两个方面的问题，一是形象化地表示矢量，一是形象化地表示矢量场（矢量的空间分布）。在实际问题的分析应用中，常用有向线段来表示矢量，用矢量线来表示矢量场的空间分布情况。

在用有向线段表示矢量时，是用线段的长度表示矢量的大小，用有向线段的指向表示矢量的方向。即对于单位矢量为 $\vec{e}_A$，大小（或模）为 $|\vec{A}|$ 的矢量 $\vec{A}=\vec{e}_A|\vec{A}|$，图中用以表示 $\vec{A}$ 的有向线段，其长度取为 $|\vec{A}|$，指向取为 $\vec{e}_A$。


矢量的几何表示

矢量线是英国科学家法拉第为分析认识电磁场空间分布规律，而首先提出的一种形象化表示矢量场空间分布的方法。如图所示，该方法用带指向的空间曲线簇来反映矢量场的空间分布情况，并用矢量线间的疏密表示相应位置处矢量的大小，且矢量线上每点的切线指向与该点矢量的方向一致。



矢量线

根据矢量线的定义，可得出表示矢量场 $\vec{F}(x,y,z)$ 的空间曲线方程，即矢量线方程。如图所示，由于任意位置处代表矢量 $\vec{F}$ 的

有向线段与该处矢量线的切线段$d\vec{r}$共线平行，即$\vec{F}\times d\vec{r}=0$，因此可得矢量线方程为

$$\frac{dx}{F_x}=\frac{dy}{F_y}=\frac{dz}{F_z}$$

2.2 标量场分析

分析物理场的主要目的，是通过分析物理量在空间分布的变化规律，认识和获悉物理量的特征、场分布的特性、分布变化的结果，以及物理量结果间的关系（如因果关系）等。分析物理量的空间分布变化，可从物理量的场函数表达入手，利用数学分析中对函数求微分或导数的方法，得到场函数的空间变化规律。

对于标量场而言，当相应的物理问题为一维空间的问题时，则表达该标量场的标量函数为一元函数$f(x)$。此时，任意位置x处的标量f仅会沿x方向发生改变，其变化的结果可由该处一元函数$f(x)$的导数得出，即$\dfrac{df(x)}{dx}$。然而，当物理问题为二维或三维的高维问题时，表达标量场的标量函数则通常为二元或三元函数。如平面区域内的场函数为$f(x,y)$，三维空间中的场函数为$f(x,y,z)$。此时，不同于一元函数的变化，多元函数在空间某处变化的结果不仅与其具体位置有关，还与该处其变化的方向有关。因此，要分析高维问题中多元标量函数物理场的空间分布变化，一般来说需要按不同方向分别回答相应方向的变化情况。

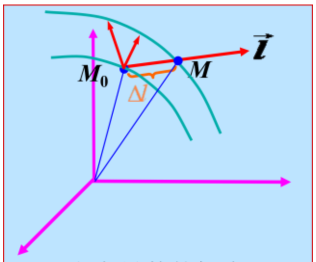
2.2.1　标量场的方向导数

（一）方向导数的定义

定义：标量场$u(M)$在空间任意位置M_0处，沿着从M_0引出的射线l方向，离开单位距离所产生的变化率，称为该标量场于M_0处沿l方向的方向导数。

根据方向导数的定义可写出其数学表达式，

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{u(M)-u(M_0)}{\Delta l}$$



方向导数的概念

由此可见，标量场的方向导数既与空间位置有关，也与所在位置的变化方向有关。当方向导数结果为正时，表明标量场在相应位置沿着相应方向增加；当方向导数结果为负时，表明标量场在相应位置沿着相应方向减小；当方向导数结果为零时，表明标量场在相应位置沿着相应方向不变。

（二）方向导数的计算

根据方向导数的定义式，结合多元复合函数的导数运算法则，可得出其在直角坐标系下的计算式，即

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial l}\right|_{M_0}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dl}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dl}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dl}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

式中，α、β、γ为射线l分别与x、y、z坐标轴的夹角；$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$称为l方向

的方向余弦，即可将$\vec{l}$的单位矢量表示为$\vec{e}_l = \cos\alpha\vec{e}_x + \cos\beta\vec{e}_y + \cos\gamma\vec{e}_z$。

在实际问题的分析与应用中，标量场在空间任意位置处的最大变化率及其对应的方向，往往是标量场分析中最受关注的问题。这是由于就方向导数来说，任何方向的方向导数结果，均可通过最大变化率方向的方向导数朝着相应方向投影得到。这正是下一节的知识内容重点。

2.2.2 标量场的梯度

（一）梯度的定义

定义：M_0处标量场的最大变化率及其相应方向所构成的矢量，称为标量场在M_0处的梯度。

如果用缩写的英文短句$grad\ u$表示梯度（grad 为 gradient 的缩写），则由定义，

$$grad\ u = \vec{e}_n \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{\max}$$

式中$\vec{e}_n$为相应最大变化方向的单位矢量。

根据梯度的定义，可通过对方向导数的运算分析，得出标量场在任意位置处的最大变化率及其方向，从而得到梯度的数学计算式。

（二）梯度的计算

在直角坐标系中，对标量场u在(x,y,z)处的方向导数计算式加以整理，可得，

$$\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = \vec{A}\cdot\vec{e}_l = \left|\vec{A}\right|\cos(\Omega)$$

其中，

$$\vec{A} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z\text{，}\quad \vec{e}_l = \cos\alpha\vec{e}_x + \cos\beta\vec{e}_y + \cos\gamma\vec{e}_z$$

由于$\left|\vec{e}_l\right| = 1$，所以，$\vec{A}\cdot\vec{e}_l = \left|\vec{A}\right|\cos(\Omega) \le \left|\vec{A}\right|$。$\Omega$为矢量$\vec{A}$ 与单位矢量$\vec{e}_l$ 的夹角。

由上述关系可知，当$\vec{e}_l$与$\vec{A}$同方向即$\Omega = 0$时，(x,y,z)处的方向导数到达最大值$\left|\vec{A}\right|$，即$\vec{e}_n = \vec{e}_A$。因此可得，

$$grad\ u = \vec{e}_n \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{\max} = \vec{A} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z\right)u$$

在场函数分析中，常用哈密顿算符“∇”（读作“del”），来表示上式中的矢性微分运算，即在直角坐标系下，$\nabla = \vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$，因此标量场$u$的梯度计算式为

$$grad\ u = \nabla u$$

需要注意，在不同坐标系下哈密顿算符∇具有不尽相同的算符运算形式。在圆柱坐标系和球坐标系中，按照类似于直角坐标系下的分析过程，可分别得到，

$$grad\ u = \nabla u = \left(\vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\phi \frac{\partial}{\rho \partial \phi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) u$$

$$grad\ u = \nabla u = \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{\partial}{r \sin\theta \partial \phi} \right) u$$

（三）梯度的数学物理特性

（1）标量场的梯度是矢量场，称为梯度场，可全面反映标量场的空间变化规律和特性。其在空间中某处的大小表示相应标量场在该处的最大变化率，方向表示相应标量场在该处的最大变化方向；

（2）任意位置处标量场沿$\boldsymbol{\vec{e}_l}$方向的方向导数等于该处梯度在该方向上的投影，即

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{l}} = \nabla \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\vec{e}_l}$$

（3）任意位置M处梯度∇u的方向,为垂直于该处标量场等值线（面）的法向，且指向$u(M)$增加的方向。

（4）梯度的基本运算关系：

$$\nabla \boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}$$

$$\nabla (\boldsymbol{Cu}) = \boldsymbol{C} \nabla \boldsymbol{u}$$

$$\nabla (\boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{v}) = \nabla \boldsymbol{u} \pm \nabla \boldsymbol{v}$$

$$\nabla (\boldsymbol{uv}) = \boldsymbol{u} \nabla \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \nabla \boldsymbol{u}$$

$$\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{u}) \nabla \boldsymbol{u}$$

其中C为常数，u、v为标量场函数。