关于可逆矩阵的LU分解及求逆的研究

刘正浩

（电子科技大学英才实验学院，611730，四川省成都市）

摘要：讨论了可逆矩阵的LU分解，并给出了分解方法

关键词：可逆矩阵，初等变换，LU分解，逆矩阵.

1. 引言

现阶段教科书中在讲授关于逆矩阵的基本性质之后，一般会给出一种矩阵求逆的方法，如：

【文献 1】对于矩阵 A，对 (A,I)施以行初等变换将A变为I，则I就变为A^{-1}.

这种求逆矩阵方法在手写时的计算过程相对简单，但是复杂度较高，不便于使用计算机对大型、超大型进行求逆运算。本文给出的对可逆矩阵进行LU分解后求逆的方法，减少了计算量，能够简化使用计算机对矩阵求逆的过程.

2. 主要结论

引理 1 对于可逆矩阵A，若A的所有主子式（即选取任意 k_1 到 k_i 行，k_1 到 k_i 列，将交叉处的元素取出得到的子矩阵的行列式）均不为 0，则存在一个可逆的下三角矩阵L使$LA=U$.

证明 1 以三阶矩阵$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$为例，用第 1 行消去第 2、3 行的第一列，即进行两次$E_{ij}(c)$行变换得到$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b'_2 & b'_3 \\ 0 & c'_2 & c'_3 \end{pmatrix}$，由$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$知$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & b'_2 \end{vmatrix} = a_1 b'_2 \neq 0$，故$b'_2 \neq 0$；再用第 2 行消去第 3 行的第 2 列，即对$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b'_2 & b'_3 \\ 0 & c'_2 & c'_3 \end{pmatrix}$再进行一次 E_{ij} （c） 行变换得$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b'_2 & b'_3 \\ 0 & 0 & c''_3 \end{pmatrix}$， 由$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ 知

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b'_2 & b'_3 \\ 0 & 0 & c''_3 \end{vmatrix} = a_1 b'_2 c''_3 \neq 0$，故$c''_3 \neq 0$. 此时$A$已变为上三角矩阵，而经过的变换均为将第 i 行的 c 倍加至第 j 行（i<j），由I的结构知所有$E_{ij}(c)$的乘积L为下三角矩阵.

引理 2 可逆下三角矩阵的逆矩阵为下三角矩阵.

证明 2 对任意可逆下三角矩阵L，有对角线元素全不为 0. 依次用第 1 行消去第 2~n 行的第一列, 用第 2 行消去第 3~n 行的第 2 列, 用第 k 行消去第(k+1)~n 行的第 k 列，即进行多次 $E_{ij}(c)$行变换，可得到对角矩阵L'，再对每一行进行一次$E_i(c)$行变换，得单位矩阵I，由I的结构知所有$E_{ij}(c)$和$E_i(c)$的乘积L''为下三角矩阵，又$L''L = I$，得$L'' = L^{-1}$，即下三角矩阵的逆矩阵为下三角矩阵.

定理 1 对于可逆矩阵A，在经过有限次行初等变换后，可以被分解为对角元为 1 的下三角形矩阵L与上三角形矩阵U的乘积，即$A = LU$，且L为矩阵A进行行初等变换时所乘的初等矩阵的乘积的逆.

证明：定义$A_0 =$ （a_{nn}），对于$n = 1,2,\dots\dots,N-1$的情况，每一次都消去矩阵A_{n-1}的第 n 列中的对角线下的元素，相当于对A左乘了一个下述下三角矩阵：

$$L_n = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & l_{n+1,n} & & \ddots & \\ & & \vdots & & & \ddots \\ 0 & & l_{N,n} & & & 1 \end{pmatrix}$$

于是定义：$A_n = L_n A_{n-1}$，其中

$$l_{i,n} = -\frac{a_{i,n}}{a_{n,n}}，\ i = n+1, n+2, \dots, N$$

经过 N-1 轮操作后，可以得到一个上三角矩阵A_{N-1}.这时有

$$A = L_1^{-1} L_1 A_0 = L_1^{-1} A_1 = L_1^{-1} L_2^{-1} L_2 A_1 = L_1^{-1} L_2^{-1} A_2 = \cdots = L_1^{-1} \dots L_{N-1}^{-1} A_{N-1}$$

令$L = L_1^{-1} \dots L_{N-1}^{-1}$，$U = A_{N-1}$，则定理 1 得证.

定理 2 设矩阵A为$m \times m$矩阵，在计算L与U时，可按照下列的计算方法：

1. 在L的对角线填充为 1;
2. $u_{1,j} = a_{1,j}, (j = 1, \dots, m), l_{i,1} = \frac{a_{i,1}}{u_{1,1}}, (i = 1, \dots, m)$.
3. $u_{k,j} = \frac{a_{k,j} - \sum_{t=1}^{k-1}(l_{k,t}u_{t,j})}{l_{k,k}} = a_{k,j} - \sum_{t=1}^{k-1}\left(l_{k,t}u_{t,j}\right)$,其中$j = k, \dots, m$.

   $l_{i,k} = \frac{a_{i,k} - \sum_{t=1}^{k-1}(l_{i,t}u_{t,k})}{u_{k,k}}$,其中$i = k, \dots, m$.

   步骤 3 中 u 与 l 交替运算，$k = 1,2, \dots, m$.

证明：已经定义矩阵L为对角元为 1 的矩阵，故计算时先将矩阵L的对角元赋值为 1.由矩阵乘法的计算方法可得矩阵A的第一行与矩阵U的第一行中的元素对应相等，即$u_{1,j} = a_{1,j}, (j = 1, \dots, m)$；又因为矩阵$A$的第一列元素等于矩阵$L$第一列对应元素与$u_{1,1}$的乘积，可得

$$l_{i,1} = \frac{a_{i,1}}{u_{1,1}}, (i = 1, \dots, m),$$

同理，可知 $a_{2,2} = l_{2,1}u_{1,2} + u_{2,2}$,

由此式可得到 $u_{2,2} = \frac{a_{2,2} - l_{2,1}u_{1,2}}{l_{2,2}} = a_{2,2} - l_{2,1}u_{1,2}$，进一步可计算可以得到$l_{2,2}$.

由此可推出步骤 3 中的等式.

4. 意义

在使用计算机对矩阵A求逆的步骤中，求解矩阵L 和矩阵U后，对矩阵L和矩阵U求逆，它们逆矩阵的乘积即为矩阵A的逆.这种矩阵求逆方法可以减少计算机对矩阵求逆的计算量.

参考文献

【1】黄廷祝，成孝予.线性代数与空间解析几何【M】.北京：高等教育出版社，2018.3,