第一章　函数、极限、连续

习　题　1.1

(A)

5. 分别写出实数集 A 下无界、上无界和无界的定义.

解　设 $A\subseteq\mathbf{R}$，且 A 非空. 若对 $\forall l\in\mathbf{R}$，总 $\exists x_0\in A$ 使 $x_0\leqslant l$，称集合 A 下无界.

若 $\forall L\in\mathbf{R}$，$\exists x_0\in A$，使 $x_0\geqslant L$，那么称非空集 A 上无界.

若 $\forall M>0$，$\exists x_0\in A$，使 $|x_0|\geqslant M$，那么称集合 A 无界.

6. 设 $A\subseteq\mathbf{R}$，证明 A 有界 $\Leftrightarrow\exists M>0$，使得 $\forall x\in A$，恒有 $|x|\leqslant M$.

证　必要性（“$\Rightarrow$”）

由于 A 有界，所以 A 有上界且有下界. 于是，$\exists L,l$，使 $\forall x\in A$，恒有 $l\leqslant x\leqslant L$. 取 $M=\max\{|L|,|l|\}$，则 $|x|\leqslant M$，$\forall x\in A$.

充分性（“$\Leftarrow$”）由 $\exists M>0$，使 $\forall x\in A$，恒有 $|x|\leqslant M$，即 $\forall x\in A$，$-M\leqslant x\leqslant M$，即 A 有上界 M 和下界 $-M$，即 A 有界.

7. 设 $A\subseteq\mathbf{R}$，试写出 A 的下确界 $\inf A$ 的定义.

解　设 $A\subseteq\mathbf{R}$，$A\neq\varnothing$. 若存在 $S\in\mathbf{R}$，满足：

(1) $\forall x\in A$，都有 $x\geqslant S$；

(2) $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_0\in A$，使 $x_0<S+\varepsilon$，则称 S 是 A 的下确界，记作 $\inf A$.

14. 设 $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx-a}$，证明 $x=f(y)$，其中 a,b,c 为常数，且 $a^2+bc\neq0$.

证　如果 $a=0$ 或 $bc=0$，结论显然成立.

如果 $a\neq0$，$bc\neq0$，由于 $a^2+bc\neq0$，所以 $\dfrac{a}{c}\notin R(f)$.

$$f[f(x)]=f(y)=\frac{ay+b}{cy-a}=\frac{a\dfrac{ax+b}{cx-a}+b}{c\dfrac{ax+b}{cx-a}-a}=x.$$

即 $x=f(y)$.

17. 设 $f:x\mapsto x^3-x,\varphi:x\mapsto\sin 2x$. 试求 $(f\circ\varphi)(x),(\varphi\circ f)(x),(f\circ f)(x)$.

解 $(f\circ\varphi)(x)=f[\varphi(x)]=f(\sin 2x)=\sin^3 2x-\sin 2x$.

$(\varphi\circ f)(x)=\varphi[f(x)]=\varphi(x^3-x)=\sin 2(x^3-x)$.

$$(f\circ f)(x)=f(x^3-x)=(x^3-x)^3-(x^3-x)=x^9-3x^7+3x^5-2x^3+x.$$

20. 将一圆形金属片，自圆心处剪去一扇形后，围成一无底圆锥形的杯子. 试将该杯的容积表示为余下部分中心角 θ 的函数，并指出其定义区间.

解 设圆锥的底半径为 R_1，则 $2\pi R_1=\theta R$，即 $R_1=\dfrac{\theta R}{2\pi}$. 圆锥体高 $H=\sqrt{R^2-\dfrac{\theta^2R^2}{4\pi^2}}$，故无底圆锥体的容积为

$$V=\frac{1}{3}\pi R_1^2H=\frac{1}{24}\,\frac{R^3\theta^2}{\pi^2}\sqrt{4\pi^2-\theta^2},\theta\in(0,2\pi).$$

(B)

4. 研究下列两组函数：

(1) $f:x\mapsto\sqrt{x^2-1},g:x\mapsto\sqrt{1-x^2}$;

(2) $f(x)=\begin{cases}2x,x\in[-1,1],\\ x^2,x\in(1,3),\end{cases}\qquad g(x)=\dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$.

它们能否进行复合运算？若能，试在能进行复合运算的集合上写出复合函数 $(f\circ g)(x)$ 与 $(g\circ f)(x)$ 的表达式.

解 (1) $D(f)=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty),R(f)=[0,+\infty),D(g)=[-1,1]$, $R(g)=[0,1]$. 由于 $R(g)\cap D(f)=\{1\},R(f)\cap D(g)=[0,1]$，故 $f\circ g,g\circ f$ 均无意义. 但如果限定 g 的定义域为 $\{0\}$. 则 $f\circ g$ 有意义，且 $(f\circ g)(0)=f[g(0)]=f(1)=0$；同样限制 f 的定义域为 $[-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2}]$，则 f 的值域为 $[0,1]$，于是 $g\circ f$ 在 $[-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2}]$ 上有定义，且 $(g\circ f)(x)=g(\sqrt{x^2-1})=\sqrt{1-(\sqrt{x^2-1})^2}=\sqrt{2-x^2}$.

(2) $D(f)=[-1,3),D(g)=[0,4],R(f)=[-2,9),R(g)=\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$. 由于 $D(f)\cap R(g)=\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$，所以 $\forall x\in D(g),(f\circ g)(x)=f\left[\dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)\right]=\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$. 由于 $R(f)\not\subseteq D(g)$，所以 f 与 g 不能复合. 又因为 $D(g)\cap R(f)=$

$[0,4]$，且 $x\in[0,2]$时，$f(x)\in[0,4]$，所以

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases} g(2x)=\dfrac{1}{2}\arcsin(x-1), & x\in[0,1], \\ g(x^2)=\dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{x^2}{2}-1\right), & x\in(1,2]. \end{cases}$$

5. 求分段函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\in[-1,0), \\ x^2+1, & x\in[0,1]. \end{cases}$$

的反函数表达式，并画出它们的图像.

解　当 $x\in[-1,0)$时，$f^{-1}:y\mapsto-\sqrt{y+1}$，$y\in(-1,0]$，当 $x\in[0,1]$时，$f^{-1}:y\mapsto\sqrt{y-1}$，$y\in[1,2]$. 所以

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} -\sqrt{x+1}, & -1<x\leqslant 0, \\ \sqrt{x-1}, & 1\leqslant x\leqslant 2. \end{cases}$$

6. 设 $f(x)$，$g(x)$都是区间$[a,b]$上的单调增函数，并且在该区间上，$f(x)\leqslant g(x)$. 试证 $f[f(x)]\leqslant g[g(x)]$.

证　$\forall x\in[a,b]$，令 $x_1=f(x)$，$x_2=g(x)$，则 $x_1\leqslant x_2$，$f[f(x)]=f(x_1)\leqslant f(x_2)\leqslant g(x_2)=g[g(x)]$.

7. 设有函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，并且对任何 $x,y\in\mathbf{R}$，都有

$$f(xy)=f(x)f(y)-x-y,$$

试求 $f(x)$的表达式.

解　由题设：$\forall x\in\mathbf{R}$，$y=1$，恒有 $f(x)=f(x)f(1)-x-1$，即$[f(1)-1]f(x)=x+1$；又由于对 $x=1$，$y=1$ 有 $f(1)=f^2(1)-2$. 所以 $f(1)=2$ 或 $f(1)=-1$. 于是 $f(x)=x+1$ 或 $f(x)=-\dfrac{1}{2}(x+1)$. 而 $f(x)=-\dfrac{1}{2}(x+1)$与题设不符，舍去.

8. 设有函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，并且对任何 $x,y\in\mathbf{R}$，都有

$$f(xy)=xf(x)+yf(y),$$

证明 $f(x)\equiv 0$.

证　取 $x=1$，$y=1$，由题设得 $f(1)=f(1)+f(1)$，即 $f(1)=0$. 又由于 $\forall x\in\mathbf{R}$ 及 $y=1$，有 $f(x)=xf(x)+f(1)=xf(x)$，即$(1-x)f(x)=0$，于是 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)=0$.

9. 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，试求 $f(x)$与 $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$.

解　由于 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}+2\right)-2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$，所以

$f(x)=x^2-2, x\in(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},+\infty)$. 于是 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}-4$, $x\in(-\infty,-\sqrt{2}+1]\cup[\sqrt{2}-1,+\infty)$.

习 题 1.2

(A)

1. 下列说法能否作为 a 是数列 $\{a_n\}$ 的极限的定义？为什么？

(1) 对于无穷多个 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，不等式 $|a_n-a|<\varepsilon$ 成立；

(2) 对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n\geqslant N$ 时，有无穷多项 a_n，使不等式 $|a_n-a|<\varepsilon$ 成立；

(3) 对于给定的很小的正数 $\varepsilon_0=10^{-10}$，不等式 $|a_n-a|<10^{-10}$ 恒成立.

解 (1) 不能，有无穷多个 $\varepsilon>0$ 满足(2.2)式，不能推出对任意 $\varepsilon>0$ 满足(2.2)式.

(2) 不能，例如发散数列 $1,\frac{1}{2},1,\frac{1}{3},\cdots,1,\frac{1}{n},\cdots$. 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，有无穷多项 a_n 满足 $|a_n-0|<\varepsilon$.

(3) 不能，如数列 $\left\{10^{-11}\sin\frac{1}{n}\right\}$. $\varepsilon_0=10^{-10}$，$\left|10^{-11}\sin\frac{1}{n}-0\right|<10^{-10}$ 恒成立. 但 $\lim\limits_{n\to+\infty}10^{-11}\sin\frac{1}{n}$ 不存在.

2. 说明下列表述都可作为 a 是 $\{a_n\}$ 极限的定义：

(2) 对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，不等式 $|a_n-a|\leqslant\varepsilon$ 成立；

(3) 对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，不等式 $|a_n-a|<k\varepsilon$ 成立，其中 k 是正常数；

(4) 对于任给的 $m\in\mathbf{N}_+$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，不等式 $|a_n-a|<\frac{1}{m}$ 成立；

(5) 对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，使不等式 $|a_{N+p}-a|<\varepsilon$ 对于任意的正整数 p 都成立.

解 (2) $\forall\varepsilon>0$，$\frac{\varepsilon}{10}>0$. 则 $\exists N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，

$$|a_n-a|\leqslant\frac{\varepsilon}{10}<\varepsilon. \text{ 所以 } \lim_{n\to\infty}a_n=a.$$