$\tan\dfrac{|x|^n}{\sqrt{n}}$,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\tan\dfrac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\tan\dfrac{|x|^n}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\tan\dfrac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\dfrac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}\cdot\frac{|x|^n/\sqrt{n}}{\tan(|x|^n/\sqrt{n})}\cdot\sqrt{\frac{n}{n+1}}\,|x|\right)$$

$$=|x|<1,$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan\dfrac{|x|^n}{\sqrt{n}}$ 收敛,即原级数绝对收敛;

若 $|x|>1$,$\lim\limits_{n\to+\infty}\tan\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}\neq 0$,于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散;

$x=1$,$a_n=\tan\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}=\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}>0$,由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big/\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)=1$,

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$发散,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}$发散;

$x=-1$,$a_n=(-1)^n\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}$发散,但$\lim\limits_{n\to\infty}\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$,

且 $\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\tan\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$,由 Leibniz 准则,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}$条件收敛.

习 题 4.2

(A)

2. 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^n}$在$(-\infty,+\infty)$上收敛,并求它的和函数.

证 若 $x=0$,$f_n(0)=0$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(0)=0$ 收敛.

若 $x\neq 0$,$S_n(x)=\dfrac{-x^2}{1+x^2}\left(1-\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{(1+x^2)^2}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{(1+x^2)^{n-1}}\right)$

$$=\frac{-x^2}{1+x^2}\cdot\frac{1-\dfrac{(-1)^n}{(1+x^2)^n}}{1+\dfrac{1}{1+x^2}},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=\dfrac{-x^2}{2+x^2}$，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$上收敛，和函数为$\dfrac{-x^2}{2+x^2}$.

3. 求下列函数项级数的收敛域：

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{2^n}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$.

解 (2) 由于$\left|\dfrac{\sin nx}{2^n}\right|\leqslant\dfrac{1}{2^n}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 收敛. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{2^n}$在$(-\infty,+\infty)$上收敛.

(4) 若 $x\leqslant 0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}ne^{-nx}=\lim\limits_{n\to+\infty}ne^{n|x|}=+\infty$，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$发散；

若 $x>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)e^{-(n+1)x}}{ne^{-nx}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{1}{e^x}\right)=\dfrac{1}{e^x}<1$，

且$|ne^{-nx}|=ne^{-nx}$，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$当 $x>0$ 时收敛.

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$收敛域为$(0,+\infty)$.

4. 证明下列级数在给定区间上一致收敛：

(1) $\dfrac{1}{1+x}-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(x+n-1)(x+n)}$，　$x\in[0,1]$.

证 因为$\forall x\in[0,1]$，$0<\dfrac{1}{(x+n-1)(x+n)}\leqslant\dfrac{1}{n(n-1)}<\dfrac{1}{(n-1)^2}$，

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)^2}$收敛，由 M 判别准则级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(x+n-1)(x+n)}$在$[0,1]$上一致收敛. 设和为 $S(x)$. 故原级数在$[0,1]$上一致收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{1+n^4x^2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

证 $x=0$，原级数显然收敛于 0；

$x\neq 0$，$\left|\dfrac{x}{1+n^4x^2}\right|\leqslant\left|\dfrac{x}{2n^2x}\right|=\dfrac{1}{2n^2}$，

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^2}$ 收敛，由 M 判别准则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{1+n^4x^2}$ 收敛. 故原级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^{\frac{3}{2}}}$，$x\in[-1,1]$.

证 由于$\left|\dfrac{x^n}{n^{\frac{3}{2}}}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}(x\in[-1,1])$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^{\frac{3}{2}}}$ 在$[-1,1]$上一致收敛.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\,2^{-nx}$，$x\in[\delta,+\infty)(\delta>0)$.

证 因为 $\forall x\in[\delta,+\infty)$，及 $\delta>0$，所以 $0<\sqrt{n}2^{-nx}<\frac{\sqrt{n}}{2^{n\delta}}$.

又因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{n+1}}{2^{(n+1)\delta}}\Big/\frac{\sqrt{n}}{2^{n\delta}}\right)=\frac{1}{2^{\delta}}<1$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^{n\delta}}$收敛，

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\,2^{-nx}$ 在$[\delta,+\infty)$上一致收敛.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$，$x\in[-\delta,\delta](\delta>0)$.

证 因为 $0\leqslant 1-\cos\frac{x}{n}=2\sin^2\frac{x}{2n}\leqslant 2\cdot\left(\frac{x}{2n}\right)^2\leqslant\frac{\delta^2}{2n^2}$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\delta^2}{2n^2}$收敛. 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$在$[-\delta,\delta](\delta>0)$上一致收敛.

5. 证明：级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 在$[-q,q](0<q<1)$上一致收敛，并且

(1) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$，$|x|<1$.

(2) $\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n+\cdots$，$|x|<1$.

证 因为当 $0<q<1$，$x\in[-q,q]$时，$|x^n|\leqslant q^n$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 在$[-q,q](0<q<1)$上一致收敛. 和函数 $S(x)=\frac{1}{1-x}$，即$\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$，$x\in[-q,q]$.

(1) 由 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 在$[-q,q]$上一致收敛于$\frac{1}{1-x}$可知$(0<q<1)$，

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x)^n$ 在$[-q,q]$上一致收敛于$\frac{1}{1+x}$.

由定理 2.4(和函数的可积性)有

$\forall x\in[-q,q](0<q<1)$，$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-x)^n\mathrm{d}x$，即 $\forall x\in[-q,q]$，

$$\begin{aligned}\ln(1+x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}\\&=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,\end{aligned}$$

即当$|x|<1$时，$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$.

(2) 因为$|(n+1)x^n|\leqslant(n+1)q^n$, $\forall x\in[-q,q]$,

且当 $0<q<1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[(n+1)+1]q^{n+1}}{(n+1)q^n}=q<1$,

故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n$ 收敛,从而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ 在$[-q,q]$上一致收敛.

令 $u_n=x^n$,则$(n+1)x^n=u'_{n+1}$,又因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 在$[-q,q]$上一致收敛于$\dfrac{1}{1-x}$,那么由和函数的可导性(定理 2.5)

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\frac{1}{(1-x)}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

6. 证明:$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^4}$在$(-\infty,+\infty)$上有二阶连续导数,并且

$$f''(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}.$$

证 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, $|u_n(x)|=\left|\dfrac{\sin nx}{n^4}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^4}$,而且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$ 收敛,根据 M 判别准则, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^4}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛,因而处处收敛. 又 $u_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n^4}\in C^{(1)}(-\infty,+\infty)$,所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}\text{在}(-\infty,+\infty)\text{上一致收敛(例 2.6)},$$

由定理 2.5, $f\in{}^{(1)}(-\infty,+\infty)$,并且

$$f'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nx}{n^4}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}.$$

又因为 $u'_n(x)=\dfrac{\cos nx}{n^3}\in C^{(1)}(-\infty,+\infty)$,且 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,

$|(u'(x))'|=|u''_n(x)|=\left|\dfrac{-\sin nx}{n^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^2}$,并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛.

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u''_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛,由定理 2.5,

$f'\in C^{(1)}(-\infty,+\infty)$,即 $f\in C^{(2)}(-\infty,+\infty)$,且

$$f''(x)=(f'(x))'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right)'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\sin nx}{n^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}.$$

(B)

3. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 在开区间(a,b)内的任一闭子区间上一致收敛，则称该级数在(a,b)上内闭一致收敛，证明若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 在(a,b)上内闭一致收敛，则它在(a,b)内处处收敛.

证 $\forall x_0\in(a,b)$，令 $\alpha=\dfrac{x_0+a}{2}$，$\beta=\dfrac{x_0+b}{2}$，则 $\alpha,\beta\in(a,b)$，且 $x_0\in(\alpha,\beta)$.

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 在(a,b)上内闭一致收敛，且$[\alpha,\beta]\subset(a,b)$，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 在$[\alpha,\beta]$上一致收敛，因而处处收敛，于是 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 在 $x_0\in[\alpha,\beta]$处收敛. 由 $x_0\in(a,b)$的任意性知 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 在(a,b)上处处收敛.

4. 设有级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\dfrac{1}{n}\right)^n$，证明：

(1) 该级数的收敛域为$(-1,1)$；

(2) 该级数在$(-1,1)$上内闭一致收敛；

(3) 该级数的和函数在$(-1,1)$内连续.

证 (1) 由于 $\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\sqrt[n]{\left|\left(x+\dfrac{1}{n}\right)^n\right|}=\left|x+\dfrac{1}{n}\right|$，所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=|x|$. 于是 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 当$|x|<1$时收敛，$x>1$时发散（此时$|u_n(x)|=u_n(x)$）.

当 $x<-1$ 时， $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}x^n\left[\left(1+\dfrac{1}{nx}\right)^{nx}\right]^{\frac{1}{x}}=\infty$，

当 $x=1$ 时， $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}\neq0$，

$x=-1$ 时， $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-1+\dfrac{1}{n}\right)^n$不存在.

于是当$|x|\geqslant1$时， $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 发散.

综上所述 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 的收敛区域为$(-1,1)$.

(2) $\forall[\alpha,\beta]\subset(-1,1)$，令 $\delta=\max\{|\alpha|,|\beta|\}$，则 $\delta>0$.

从而 $\left|\left(x+\frac{1}{n}\right)^n\right|\leqslant\left(\delta+\frac{1}{n}\right)^n$. 对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\delta+\frac{1}{n}\right)^n$,

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\delta+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\delta+\frac{1}{n}\right)=\delta<1$,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\delta+\frac{1}{n}\right)^n$ 收敛.

由 M 判别准则,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$ 在$[\alpha,\beta]$上一致收敛.

由于$[\alpha,\beta]\subset(-1,1)$的任一闭子区间,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$ 在$(-1,1)$上内闭一致收敛.

(3) 设 $S(x)$为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$ 在$(-1,1)$上的和函数,即

$$\forall x\in(-1,1),S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n.$$

那么$\forall x_0\in(-1,1)$,由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$ 在$(-1,1)$上内闭一致收敛,

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$ 在$\left[\frac{x_0-1}{2},\frac{x_0+1}{2}\right]$上一致收敛于 $S_{x_0}(x)$.

其中 $S_{x_0}(x)=S(x)$,当 $x\in\left[\frac{-1+x_0}{2},\frac{1+x_0}{2}\right]$时.

并且$u_n(x)=\left(x+\frac{1}{n}\right)^n\in C\left[\frac{-1+x_0}{2},\frac{1+x_0}{2}\right]$. 由定理 2.3,

$S_{x_0}(x)\in C\left[\frac{-1+x_0}{2},\frac{1+x_0}{2}\right]$,从而 $S(x)\in C\left[\frac{-1+x_0}{2},\frac{1+x_0}{2}\right]$.

故和函数 $S(x)$在 $x_0\left(\in\left[\frac{-1+x_0}{2},\frac{1+x_0}{2}\right]\right)$处连续.

由 $x_0\in(-1,1)$的任意性知:$S(x)\in C(-1,1)$.

5. 证明:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2\mathrm{e}^{-nx}$在$[0,+\infty)$上一致收敛.

证 (1) 先证 $u>0$ 时,$\mathrm{e}^u>\frac{u^2}{2}$. 令 $f(u)=\mathrm{e}^u-\frac{u^2}{2}$,则 $f'(u)=\mathrm{e}^u-u$, $f''(u)=\mathrm{e}^u-1>0(u>0)$,从而 $f'(u)$当 $u>0$ 时严格单增,即$\forall u>0,f'(u)>f'(0)=1>0$,于是 $f(u)$在$(0,+\infty)$上严格单增,从而当 $u>0$ 时,$f(u)>f(0)=1>0$. 即当 $u>0$ 时,$\mathrm{e}^u>\frac{u^2}{2}$.

(2) 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2\mathrm{e}^{-nx}$在$[0,+\infty)$上一致收敛.

由(1)可得当 $x>0$ 时, $|x^2\mathrm{e}^{-nx}|=\left|\frac{x^2}{\mathrm{e}^{nx}}\right|<\left|x^2\cdot\frac{2}{(nx)^2}\right|=\frac{2}{n^2}$,

且 $x=0$ 时， $|x^2e^{-nx}|=0<\frac{2}{n^2}$. 于是

$$\forall x\in[0,+\infty),|x^2e^{-nx}|<\frac{2}{n^2},\text{且正项级数}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}\text{收敛}.$$

由 M 判别准则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$ 在$[0,+\infty)$上一致收敛.

6. 如果 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，$u_n(x)$在$[a,b]$上是单调函数，并且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$的端点绝对收敛，证明它在$[a,b]$上绝对一致收敛(即绝对值级数一致收敛).

证 由于 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，$u_n(x)$在$[a,b]$上是单调函数.

所以 $|u_n(x)|\leqslant\max\{|u_n(a)|,|u_n(b)|\}\leqslant|u_n(a)|+|u_n(b)|$，

又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$的端点绝对收敛. 即

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(a)|,\ \sum_{n=1}^{\infty}|u_n(b)|\text{收敛. 从而}\sum_{n=1}^{\infty}(|u_n(a)|+|u_n(b)|)\text{收敛}.$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$在$[a,b]$上一致收敛. 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上绝对一致收敛.

习 题 4.3

(A)

2. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-3$ 处条件收敛，你能确定该幂级数的收敛半径吗?

解 由阿贝尔定理，如果在点 x_0 处幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛，那么对于一切满足$|x|<|x_0|$的点，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 绝对收敛. 因此，既然已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-3$ 处收敛，那么，对于满足$|x|<|-3|$的一切点，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 是绝对收敛的.

另一方面，注意到幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-3$ 处是条件收敛的，因此，任何$|x|>3$ 的点都不可能使该幂级数收敛. 否则，据阿贝尔定理，该幂级数在 $x=-3$