Taylor定理及其应用

5.1 Taylor定理

•问题的提出

根据函数的微分, 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)(\text{当}|x-x_0|\text{很小时}),$$

略掉$o(x-x_0)$, 得到求$f(x)$的近似公式

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)(\text{当}|x-x_0|\text{很小时}),$$

其误差为

$$R(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0).$$

近似公式的不足: 精确度不高, 误差难于估计.

为了达到一定的精确度要求, 可考虑用n次多项式$P_n(x)$来近似表达$f(x)$.

• 多项式$P_n(x)$的确定

设函数$f(x)$在含x_0的开区间内具有直到$(n+1)$阶导数, 我们希望找出一个关于$(x-x_0)$的n次多项式

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n$$

来近似表达$f(x)$. 我们自然希望$P_n(x)$与$f(x)$在x_0的各阶导数(直到$(n+1)$阶导数)相等:

$$f(x_0)=P_n(x_0),\qquad f'(x_0)=P_n'(x_0),$$

$$f''(x_0)=P_n''(x_0),\qquad f'''(x_0)=P_n'''(x_0),$$

$$\cdots\cdots,$$

$$f^{(n)}(x_0)=P_n^{(n)}(x_0).$$

• 多项式系数的确定

$f(x_0)=P_n(x_0)=a_0,$ $\quad a_0=f(x_0),$

$f'(x_0)=P_n'(x_0)=a_1,$ $\quad a_1=f'(x_0),$

$f''(x_0)=P_n''(x_0)=2!a_2,$ $\quad a_2=\frac{1}{2!}f''(x_0),$

$f'''(x_0)=P_n'''(x_0)=3!a_3,$ $\quad a_3=\frac{1}{3!}f'''(x_0),$

$\cdots\cdots,$ $\quad \cdots\cdots,$

$f^{(n)}(x_0)=P_n^{(n)}(x_0)=n!a_n.$ $\quad a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0).$

$P_n^{(n)}(x)=n!a_n.$

•多项式系数的确定

$$a_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)\ (k=0,1,2,\cdots,n).$$

于是所求多项式为

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n.$$

带Lagrange余项的Taylor定理

如果函数$f(x)$在含有x_0的某个开区间(a, b)内具有直到$(n+1)$阶的导数, 则对任一$x\in(a, b)$, 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (ξ介于x_0与x之间).

展开式称为$f(x)$按$(x-x_0)$的幂展开的n阶**Taylor公式**, 而$R_n(x)$的表达式称为**Lagrange余项**.

2. 余项估计

令 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$(称为余项)，则有

$$R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$$

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$$

$$= \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1} - 0} = \frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n} \quad (\xi_1 \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

$$= \frac{R_n'(\xi_1) - R_n'(x_0)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n - 0} = \frac{R_n''(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2 - x_0)^{n-1}} \quad (\xi_2 \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } \xi_1 \text{ 之间})$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{R_n^{(n)}(\xi_n) - R_n^{(n)}(x_0)}{(n+1)\cdots 2(\xi_n - x_0) - 0} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

(ξ 在 x_0 与 [redacted] 之间)

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \qquad (\xi\text{在 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间})$$

$$\because\ p_n^{(n+1)}(x) = 0,\ \therefore\ R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad (\xi\text{在 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间})$$

•误差估计

如果在区间(a, b)内，对于某个固定的n，$|f^{(n+1)}(x)|$总不超过一个常数M，则有估计式：

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \le \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1},$$

及
$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_{n(x)}}{(x-x_0)^n} = 0 .$$

可见，当$x\to x_0$时，误差$|R_n(x)|$是比$(x-x_0)^n$高阶的无穷小，即
$R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$.

• **误差估计**

如果在区间(a, b)内, 对于某个固定的n, $|f^{(n+1)}(x)|$总不超过一个常数M, 则有估计式:

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \le \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1},$$

$$R_n(x)=o[(x-x_0)^n].$$

事实上，在不需要精确表达余项时,由前面的推导， n阶Taylor公式也可写成

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n].$$

称为带**Peano余项**的Taylor公式（定理）.

5.2 几个初等函数的Maclaurin公式

提问：

当$x_0=0$时, 泰勒公式及其余项

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x),$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

将变成什么形式？

❖Maclaurin公式

当x_0=0时, Taylor公式称为Maclaurin公式:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x),$$

或
$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n),$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$.

•近似公式

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x),$$

例1 写出函数$f(x)=e^x$的n阶Maclaurin公式.

解 因为

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x,$$

所以

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1,$$

于是 $$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\ (0<\theta<1),$$

并有 $$e^x\approx 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n.$$

进而，当$x=1$时，$e\approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$.

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x),$$

例2 求$f(x)=\sin x$的n阶Maclaurin公式.

解 因为

$$f'(x)=\cos x,\quad f''(x)=-\sin x,\quad f'''(x)=-\cos x,$$

$$f^{(4)}(x)=\sin x,\ \cdots,\ f^{(n)}(x)=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2}),$$

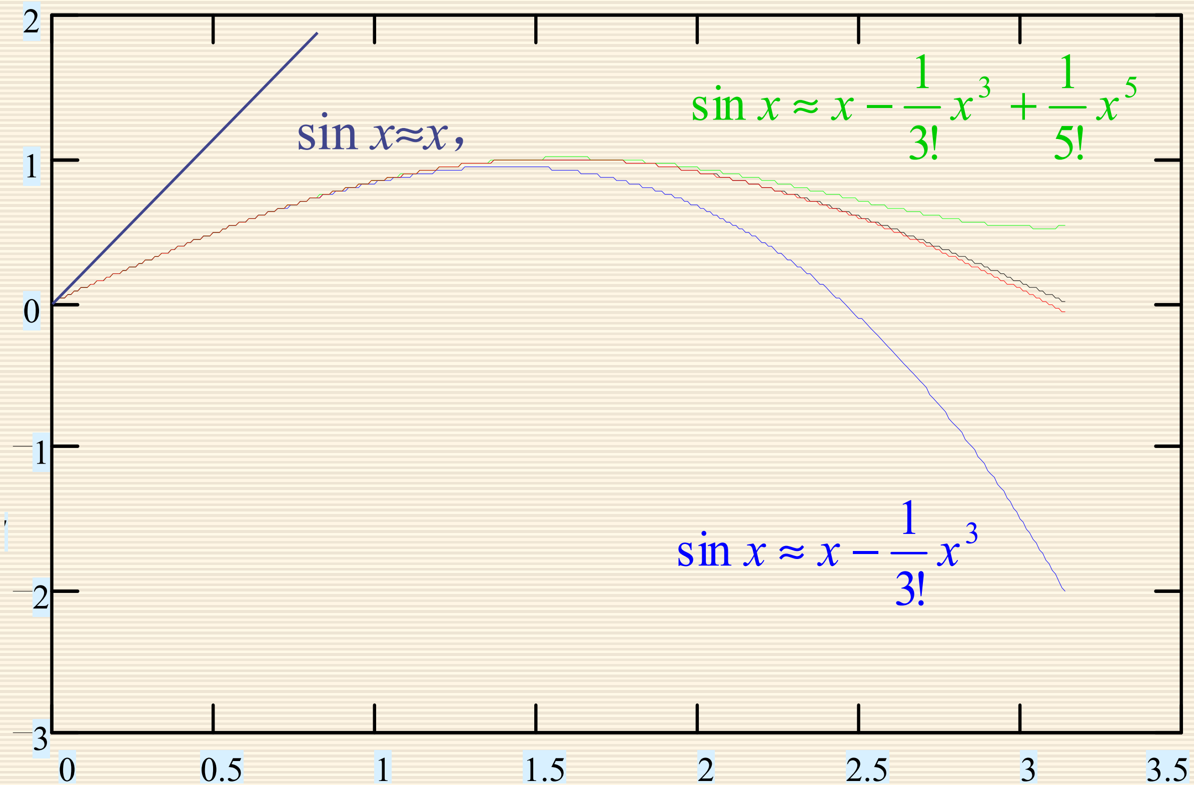
$$f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\quad f'''(0)=-1,$$

$$f^{(4)}(0)=0,\quad \cdots,$$

于是

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1}+R_{2m}(x).$$

当m=1、2、3时, 函数曲线的比较:



(3) $f(x)=\cos x$

类似可得

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+R_{2m+1}(x)$$

其中

$$R_{2m+1}(x)=\frac{(-1)^{m+1}\cos(\theta x)}{(2m+2)!}x^{2m+2}\qquad(0<\theta<1)$$

(4) $\boldsymbol{f(x)=(1+x)^{\alpha} \quad (x>-1)}$

$$\because \quad f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

$$f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1) \qquad (k=1,2,\cdots)$$

$$\therefore \quad (1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+R_{n}(x)$$

其中 $R_{n}(x)=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$

$$(0<\theta<1)$$

(5) $f(x)=\ln(1+x) \quad (x>-1)$

已知 $f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k} \quad (k=1,2,\cdots)$

类似可得

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x)$$

其中

$$R_n(x)=\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \qquad (0<\theta<1)$$

5.3 Taylor公式的应用

1. 近似计算函数值

例5.1　近似计算e的值，并估计误差

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!},\theta\in(0,1).$$

例2 用近似公式 $\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2!}$ 计算 $\cos x$ 的近似值，使其精确到 0.005 , 试确定 x 的适用范围.

解： 近似公式的误差

$$|R_3(x)| = \left|\frac{x^4}{4!}\cos(\theta x)\right| \le \frac{|x|^4}{24}$$

令 $$\frac{|x|^4}{24} \le 0.005$$

解得 $$|x| \le 0.588$$

即当 $|x| \le 0.588$ 时, 由给定的近似公式计算的结果能准确到 0.005 .

2. 利用Taylor公式求极限

例3. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{3x+4}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$.

用洛必塔法则不方便！

解: 用Taylor公式将分子展到 x^2 项, 由于

$$\sqrt{3x+4}=2(1+\frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}$$

$$=2\left[\,1+\frac{1}{2}\cdot(\frac{3}{4}x)+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\,(\frac{3}{4}x)^2+o(x^2)\,\right]$$

$$=2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)$$

$$\sqrt{4-3x}=2(1-\frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}=2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)$$

$$\therefore\ \text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)}{x^2}=-\frac{9}{32}$$

3. 证明不等式

例5.5 设$f''(x)>0$，当$x\to 0$时，$f(x)$与x是等价无穷小.

证明：当$x\neq 0$时，$f(x)>x$.

由例5.5及上面的结论容易得到下列不等式

$$e^x > 1 + x \qquad (x \neq 0)$$

$$\sin x < x \qquad (0 < x \leq \pi)$$

$$\ln(1+x) < x \qquad (x > -1, x \neq 0)$$

$$\arcsin x > x \qquad (-1 < x < 1, x \neq 0)$$

思考题: 设$f(x)$在$[0,1]$上具有二阶导数，且$[0,1]$上成立$\left|f(x)\right| \le A, \left|f''(x)\right| \le B$,

证明：$\left|f'(x)\right| \le 2A + \dfrac{1}{2}B.$