复习第五章

1. 了解R^n中点和点集合的基本概念：内点，外点，边界点，开集，闭集，区域

2. 掌握R^n中聚点的概念与刻划

3. 多元函数极限的定义，计算以及证明

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$$

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

例1 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ $(x=ky^2)$

例2 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x+y}$ $(y=-x+kx^2)$

4. 理解多元函数连续的定义
以及有界闭区域上连续函数的性质

5. 偏导数的定义与计算 ⟨ 某点 / 某区域

以及存在偏导数与连续的关系 (例，$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$)

例3 考察 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在$(0,0)$处的偏导数

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-\cancel{f(0,0)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h\cdot 0}{h^2+0}-0}{h}=0$$

$$f_y(0,0)=0$$

6. $z=f(x,y)$ 可微的定义，以及可微的必要条件与充分条件

必要条件：$f_x, f_y \exists$ 且 $f(x,y)$ 连续

充分条件：f_x, f_y 连续 $\xrightarrow{\text{推出}}$

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$
$$=A\Delta x+B\Delta y+o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta z&=A\Delta x+B\Delta y+\varepsilon_1(\rho)\Delta x+\varepsilon_2(\rho)\Delta y\\ \text{其中 }&\varepsilon_1(\rho)=o(\rho)\\ &\varepsilon_2(\rho)=o(\rho)\end{aligned}}$$

关于 f_x, f_y 不连续但 $f(x,y)$ 可微的例子：

例 4. 在 $(0,0)$ 处：
$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

7. 全微分，方向导数的定义与计算

8. 梯度的定义与几何意义

9. 多元复合函数的链式法则：

$w=f(u,v)$, $u=u(x,y,z)$, $v=v(x,y,z)$

$$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

例5. 计算$F'(x)$，其中$F(x)=\int_a^{f(x)} g(t,x)\,dt$，

这里a为常数，f, g为光滑函数。

> 思考，若
> $$F(x)=\int_a^x t\,g(t^2-x^2)\,dt$$

Sol. 令$u=f(x)$，则可记

$$F(x)=G(u,x)=\int_a^{u} g(t,x)\,dt$$

则
$$F'(x)=\frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial G}{\partial x}$$
$$=g(u,x)\cdot f'(x)+\int_a^u g_x(t,x)\,dt$$
$$=g(f(x),x)f'(x)+\int_a^{f(x)} g_x(t,x)\,dt$$

10. 了解由一个方程(3.6节)与由两个方程(5.4节)确定的隐函数存在定理；会求隐函数的偏导数.

例6 若$e^z+xyz=e$确定了$z=z(x,y)$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

11. 掌握多元函数极值的定义，必要条件，充分条件

$\nabla f=0$

$f_{xx}>0$，Hessian正定

12. 会求一些简单闭区域上二元连续函数的最值

□ △ ○ (边界比较简单)

13. 会用Lagrange乘数法求条件极值问题

14. 了解一些重要的物理量：

切向量 $\vec{T}=\frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|}=\frac{d\vec{r}}{ds}$

曲率

主、次法向量：$\vec{N}$, $\vec{B}$

挠率

(第七节)