Discussion problem assignment:

第一题：

1. A stable LTI system is described by the difference equation

$$y[n]-\tfrac{1}{4}y[n-1]-\tfrac{1}{8}y[n-2]=x[n]$$

(a) Find the system function $H(z)$ and its ROC

(b) Determine the unit impulse response $h[n]$. Is this system causal?

(c) Compute the output of this system if the input signal is

$$x[n]=\cos(\pi n)$$

解答：

(a) 确定差分方程对应系统的系统函数

$$y[n]-\tfrac{1}{4}y[n-1]-\tfrac{1}{8}y[n-2]=x[n]$$

$$H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{z^2}{z^2-\frac{1}{4}z-\frac{1}{8}}=\frac{z^2}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{4})}$$

由此得到两个极点，再加上稳定的条件，可得**ROC**为 $|z|>\frac{1}{2}$

(b) 系统单位冲激响应可以由系统函数的反变换得到

$$H(z)=\frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{4}z^{-1})}=\frac{\frac{2}{3}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}+\frac{\frac{1}{3}}{(1+\frac{1}{4}z^{-1})}$$

$$h[n]=\tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2})^n u[n]+\tfrac{1}{3}(-\tfrac{1}{4})^n u[n]$$

~~从时域，以及ROC，都可以判断出系统因果~~

(c) 求系统输出，关键在于 $x[n]=\cos(\pi n)=(-1)^n$

同时，**z = -1**在系统函数的**ROC**内，有

$$y[n]=H(z=-1)(-1)^n=\tfrac{8}{9}(-1)^n$$

当然，也可以使用欧拉公式，将**cos(pi*n)**展开为两个负指数信号，分别求输出，再求和。

最后，需要注意，**cos(pi*n)**没有**Z**变换，如果将**cos(pi*n)**分成左右两个信号，两个信号的**ROC**无公共部分

第二题：

2. Given the following information about a causal discrete-time LTI system:

(1) The unit step response is $s[n]=a(\tfrac{1}{2})^n u[n]-2(\tfrac{1}{3})^n u[n]$

(2) The value of the unit impulse response at n=0 is h[0] = 1

Solve the following questions:

(a) Find the system function *H*(*z*) and its ROC

(b) Determine the unit impulse response *h*[*n*].

(c) Suppose $g[n]=\lambda^n h[n]$ **, determine the range of real number λ so that *g*[*n*] is the unit impulse response of a stable system.**

解答：

(a) 已知系统阶跃响应（注意是阶跃响应，第二章的一个知识点，不是冲激响应）。利用系统阶跃响应的概念，当系统输入**x[n] = u[n]**时，对应的系统输出就是系统阶跃响应。由此

$$u[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}U(z)=\frac{1}{1-z^{-1}},|z|>1$$

$$s[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}S(z)=\frac{a}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}},|z|>\tfrac{1}{2}$$

$$H(z)=\frac{S(z)}{U(z)}=\left.\left(\frac{a}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\right)\middle/\frac{1}{1-z^{-1}}\right.$$

未知系数 *a* 可由初值定理 $\lim\limits_{z\to\infty}H(z)=h[0]=1=a-2,\therefore a=3$

代入系数后，得到的系统函数为

$$H(z)=\frac{1-z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}=\frac{z(z-1)}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3})}$$

由极点位置，及系统因果性，确定**ROC**为 $|z|>\tfrac{1}{2}$

(b) 求系统**h[n]**，有两种基本方法

方法一是利用**s[n]**和**h[n]**的时域关系，有

$$s[n]=3(\tfrac{1}{2})^n u[n]-2(\tfrac{1}{3})^n u[n]$$

$$h[n]=s[n]-s[n-1]$$

$$=3(\tfrac{1}{2})^n u[n]-2(\tfrac{1}{3})^n u[n]-3(\tfrac{1}{2})^{n-1}u[n-1]+2(\tfrac{1}{3})^{n-1}u[n-1]$$

但是表达式还需要进一步简化

方法二是对系统函数做反变换，有

$$H(z)=\frac{1-z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}=\frac{-3}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}+\frac{4}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$$

$$h[n]=-3(\tfrac{1}{2})^n u[n]+4(\tfrac{1}{3})^n u[n]$$

(c) 为了保证**g[n]**对应的系统稳定，需要确定**G(z)**的**ROC**包含单位圆。由 $g[n]=\lambda^n h[n]$

系统**H(z)**的极点将变化到 $|\lambda|\tfrac{1}{2}<1,\therefore|\lambda|<2$