定积分的性质

线性性质
单调性
绝对值不等式
区间的可加性
积分中值定理

性质1.1　线性性质

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

（此性质可以推广到有限多个函数作和的情况）

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \qquad (k\text{为常数}).$$

性质1.2　单调性质

如果在区间$[a,b]$上$f(x)\geq 0$,

则$\int_a^b f(x)dx \geq 0.\quad (a<b)$

证　$\because\ f(x)\geq 0,\ \therefore\ f(\xi_i)\geq 0,\quad (i=1,2,\cdots,n)$

$$\because\ \Delta x_i > 0,\ \therefore\ \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0,$$

$$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$$

$$\therefore\ \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

如果在区间$[a,b]$上$f(x)\le g(x)$，

则$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.　　$(a<b)$

推论1.1 设M及m分别是函数

$f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值及最小值，

则 $$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

证 $$\because \quad m \le f(x) \le M,$$

$$\therefore \quad \int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx,$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

（此性质可用于估计积分值的大致范围）

例 1 比较积分值$\int_0^{-2} e^x dx$和$\int_0^{-2} x dx$的大小.

解 令$f(x)=e^x-x$, $x\in[-2,0]$

$\because\ f(x)>0$, $\therefore\ \int_{-2}^{0}(e^x-x)dx>0$,

$\therefore\ \int_{-2}^{0} e^x dx > \int_{-2}^{0} x dx$,

于是 $\int_0^{-2} e^x dx < \int_0^{-2} x dx$.

例 2 估计积分$\int_0^{\pi}\frac{1}{3+\sin^3 x}dx$的值.

解 $f(x)=\frac{1}{3+\sin^3 x}$, $\quad \forall\, x\in[0,\pi]$,

$$0\le \sin^3 x\le 1, \qquad \frac{1}{4}\le\frac{1}{3+\sin^3 x}\le\frac{1}{3},$$

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{4}dx\le\int_0^{\pi}\frac{1}{3+\sin^3 x}dx\le\int_0^{\pi}\frac{1}{3}dx,$$

$$\therefore\ \frac{\pi}{4}\le\int_0^{\pi}\frac{1}{3+\sin^3 x}dx\le\frac{\pi}{3}.$$

例 3　估计积分$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$的值.

解　$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x(x - \tan x)}{x^2} < 0,$$

$f(x)$在$[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$上单调下降,

故$x = \frac{\pi}{4}$为极大点，$x = \frac{\pi}{2}$为极小点,

$$M = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}, \qquad m = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi},$$

$$\because \; b - a = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},$$

$$\therefore \; \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \le \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4},$$

$$\therefore \; \frac{1}{2} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \le \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

性质1.3 绝对值不等式

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx. \quad (a < b)$$

证 $\because \ -|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|,$

$$\therefore \ -\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx,$$

即 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$

说明： $|f(x)|$在区间$[a,b]$上的可积性是显然的.

性质1.4　区间可加性

假设$a < c < b$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

补充：不论 a,b,c的相对位置如何, 上式总成立.

（定积分对于积分区间具有可加性）

性质1.5　乘积性质

设$f,g\in R[a,b]$，则$fg\in R[a,b]$

性质1.6 积分中值定理

如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，$g(x)$在$[a,b]$上可积且不变号，则在积分区间$[a,b]$上至少存在一个点 ξ，使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\zeta)\int_a^b g(x)dx$$

推论1.2 (定积分均值公式)

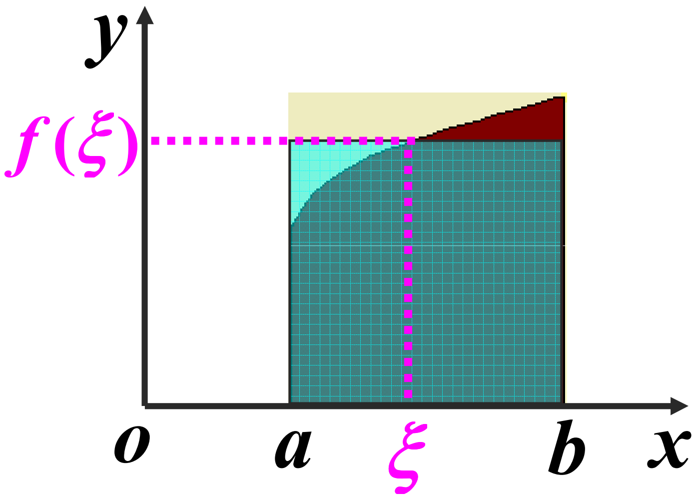
如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，

则在积分区间$[a,b]$上至少存在一个点 ξ，

使$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.　　$(a \le \xi \le b)$

积分均值公式

积分均值公式的几何解释：



在区间$[a,b]$上至少存在一个点ξ，使得以区间$[a,b]$为底边， 以曲线$y=f(x)$为曲边的曲边梯形的面积等于同一底边而高为$f(\xi)$的一个矩形的面积。

例 4 设 $f(x)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$，

求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t}f(t)dt$.

解 由积分中值定理知有 $\xi\in[x, x+2]$,

使 $\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t}f(t)dt=\xi\sin\frac{3}{\xi}f(\xi)(x+2-x)$,

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t}f(t)dt=2\lim_{\xi\to+\infty}\xi\sin\frac{3}{\xi}f(\xi)$$

$$=2\lim_{\xi\to+\infty}3f(\xi)=6.$$

二、小结

1．定积分的性质

（注意估值性质、积分中值定理的应用）

2．典型问题

（1）估计积分值；

（2）不计算定积分比较积分大小.

思考题

定积分性质中指出，若 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上都可积，则 $f(x)+g(x)$ 或 $f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积。这一性质之逆成立吗？为什么？

思考题解答

由$f(x)+g(x)$或$f(x)g(x)$在$[a,b]$上可积，不能断言$f(x),g(x)$在$[a,b]$上都可积。

例 $f(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}0, & x\text{为有理数}\\ 1, & x\text{为无理数}\end{cases}$

显然$f(x)+g(x)$和$f(x)g(x)$在$[0,1]$上可积，但$f(x),g(x)$在$[0,1]$上都不可积。

练 习 题

一、填空题:

1、如果积分区间$[a,b]$被点c分成$[a,c]$与$[c,b]$，则定积分的可加性为$\int_a^b f(x)dx =$____________；

2、如果$f(x)$在$[a,b]$上的最大值与最小值分别为M与m，则$\int_b^a f(x)dx$有如下估计式：____；

3、当$a>b$时，我们规定$\int_a^b f(x)dx$与$\int_b^a f(x)dx$的关系是____________________________；

4、积分中值公式

$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)\,,(a\le\xi\le b)$的几何意义是____________________；

5、下列两积分的大小关系是：

（1）$\int_0^1 x^2 dx$______$\int_0^1 x^3 dx$

（2）$\int_1^2 \ln x dx$________$\int_1^2 (\ln x)^2 dx$

（3）$\int_0^1 e^x dx$________$\int_0^1 (x+1) dx$

二、证明：$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$（ k 是常数）.

三、估计下列积分$\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arc}\cot x dx$的值 .

四、证明不等式：$\int_1^2 \sqrt{x+1} dx \geq \sqrt{2}$.

六、用定积分定义和性质求极限：

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$；

2.、$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n xdx$.

七、设$f(x)$及$g(x)$在$[a,b]$上连续，证明：

1、若在$[a,b]$上$f(x)\geq 0$，且$\int_a^b f(x)dx=0$，则在$[a,b]$上$f(x)\equiv 0$；

2、若在$[a,b]$上，$f(x)\geq 0$，且$f(x)$不恒等于0，则$\int_a^b f(x)dx>0$；

3、若在$[a,b]$上$f(x)\leq g(x)$，且$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$，则在$[a,b]$上$f(x)\equiv g(x)$.

练习题答案

一、1、$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$；

2、$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$，$a < b$；

3、$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$；

4、曲边梯形各部分面积的代数和等于 $f(\xi)$ 与 $b-a$ 为邻边的矩形面积；

5、(1)>；　(2)>；　(3)>.

三、1、$\dfrac{\pi}{9} \le \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\arctan x dx \le \dfrac{2}{3}\pi$；

2、$\dfrac{1}{2} \le \int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2+x^3}} \le \arcsin\dfrac{3}{5}$.