1.3 变号级数的审敛法

定义 正项和负项任意出现的级数称为

任意项级数.

1.交错级数及其审敛法

定义 正、负项相间的级数称为交错级数.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \text{或} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n \qquad (\text{其中} u_n > 0)$$

如 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2^n}$

定理1.8（莱布尼茨定理）

如果交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$满足条件:

（1）$u_n \geq u_{n+1}\ (n=1,2,3,\cdots)$; 递减

（2）$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$,

则级数收敛, 且其和 $s \leq u_1$,

其余项 r_n 的绝对值 $|r_n| \leq u_{n+1}$.

证明 $\because u_{n-1} - u_n \geq 0,$

$$\because s_{2n} = \underbrace{(u_1 - u_2)}_{\geq 0} + \underbrace{(u_3 - u_4)}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{(u_{2n-1} - u_{2n})}_{\geq 0}$$

数列 s_{2n} 是单调增加的，

$$\text{又} s_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} \leq u_1$$

数列 s_{2n} 是有界的， $\therefore \underline{\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s \leq u_1}.$

$$\text{又} \because \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = 0,$$

$$\therefore \underline{\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(s_{2n} + u_{2n+1}) = s},$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} s_n = s$, 且 $s \leq u_1$,即级数收敛且和为 u_1.

余项 $r_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots)$,

$|r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots$,　交错级数

满足收敛的两个条件,

$\therefore |r_n| \le u_{n+1}$.

定理证毕.

例1 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 的收敛性.

解 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 为交错级数,

且满足莱布尼兹定理的条件:

(1) $u_n=\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}=u_{n+1}$, $(n=1,2,\cdots)$;

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

根据莱布尼茨定理, 所给级数收敛.

例2 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$的收敛性.

解 令$f(x)=\frac{\ln x}{x}\ (x>3)$,有

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0,\ (x>3)$$

当$n>3$时,$\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}$是单减数列,

又$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$,

由莱布尼兹判别法,原级数收敛.

定理1.9 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

证明 令 $v_n=\frac{1}{2}(u_n+|u_n|)\quad(n=1,2,\cdots)$,

显然 $v_n\geq 0$, 且 $v_n\leq|u_n|$, $\therefore\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛,

又 $\because\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(2v_n-|u_n|)$, $\therefore\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

定理的作用

任意项级数的收敛问题可借助于正项级数

2. 绝对收敛与条件收敛

定义 若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, 则称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛;

若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散, 而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,

则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为条件收敛.

例3 证明$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$绝对收敛.

证 因为$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛

所以原级数绝对收敛.

问$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$是绝对收敛的吗?

因为$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,而$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$收敛,

故$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 条件收敛.

例4 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^2}$ 的收敛性.

解 $\because \left|\dfrac{\sin n}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{\sin n}{n^2}\right|$ 收敛，

故由定理知原级数收敛且绝对收敛.

例5 判断$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$的收敛性，

若收敛,是条件收敛还是绝对收敛?

解 因原级数是交错级数,利用莱布尼兹定理

由于

(1) $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}=u_{n+1},\ (n=1,2,\cdots);$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0.$

由莱布尼兹判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$收敛，

$$\because \sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} \text{发散},$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{是条件收敛.}$$

例6 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$的收敛性.

解 令$u_n=(-1)^{n-1}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$,

$$\because \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{(n+1)^{n+2}(n+1)!}{(n+2)!n^{n+1}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

$$\to e>1,(n\to\infty)$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}\right|$发散,原级数非绝对收敛.

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=e>1$,

故当n充分大时,$\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}>1$, 即$|u_{n+1}|>|u_n|>0$,

有$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$,所以原级数发散.

注:

如果采用比值法判定的级数非绝对收敛,

则原级数一定发散.

小 结

一、常数项级数的审敛法

<table>
<tr><th></th><th>正 项 级 数</th><th>任意项级数</th></tr>
<tr><td rowspan="2">审敛法</td><td colspan="2">1. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \Leftrightarrow$ 级数收敛;
2. 当 $n\to\infty$, $u_n \not\to 0$, 则级数发散;
3. 基本性质;</td></tr>
<tr><td>4. s_n有界 $\Leftrightarrow$ 收敛
5.比较法
6.比值法
7.根值法</td><td>4.绝对收敛
5.交错级数
(莱布尼茨定理)</td></tr>
</table>

二、绝对收敛与条件收敛

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{ 收敛(绝对收敛)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\text{发散}, \sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{条件收敛}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$发散,则用其它方法判断$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的敛散性.

若交错级数可用莱布尼兹定理判断收敛;

若用比值(根值)法判定$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$发散,则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

补充例1. 讨论下列级数的绝对收敛性与条件收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{n}{n+1})$; 散 $\because \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}\neq 0$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{n}$; 绝对收敛 $\because \left|(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{n}\right|\sim\frac{\pi}{n^2}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$; 条件收敛 ($\because a_n=\ln(1+\frac{1}{n})\downarrow 0$

$\because \sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$散)

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$. 绝对收敛

$$\because \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{(n+2)!}{(n+2)^{n+2}}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{n+2}{n+1}(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}\xrightarrow{n\to\infty}e^{-1}<1$$

9. 设$f(x)$在$x=0$的某邻域内有二阶连续

导数，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，证明$\sum\limits_{1}^{\infty} f(\dfrac{1}{n})$绝对收敛。

证法1 $\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0 \quad \therefore f(x)\to 0 \Rightarrow f(0)=0$

又$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{1}=0 \quad \therefore f'(0)=0$

*Taylor*展式：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{1}{2!}f''(\theta x)x^2 (0<\theta<1)$

即 $$f(\frac{1}{n})=f(0)+f'(0)\frac{1}{n}+\frac{1}{2!}f''(\theta_1 x)\frac{1}{n^2}$$

$$\therefore \left| \ f(\frac{1}{n}) \ \right| = \left| \ \frac{1}{2!}f''(\theta_1\frac{1}{n})\frac{1}{n^2} \ \right| \le M\frac{1}{n^2}$$

9. 设$f(x)$在$x=0$的某邻域内有二阶连续导数，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，证明$\sum\limits_{1}^{\infty} f(\dfrac{1}{n})$绝对收敛。

证法2 $\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0 \quad \therefore f(x)\to 0 \Rightarrow f(0)=0$

又$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{1}=0 \qquad \therefore f'(0)=0$

$$\because \lim_{x\to o}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to o}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to o}\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(0)}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{|f(1/n)|}{1/n^2}=\frac{|f''(0)|}{2}$$

$\therefore f''(0)\neq 0$, 或$f''(0)=0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\dfrac{1}{n})$都绝对收敛。

练 习 题

一、填空题:

1、$p-$级数当________时收敛, 当________时发散;

2、若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的后项与前项之比值的根等于ρ,

则当_________时级数收敛;_________时级数发散;

_____________时级数可能收敛也可能发散 .

二、用比较审敛法或极限审敛法判别下列级数的收敛性:

1、$1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\cdots+\frac{1+n}{1+n^2}+\cdots$;

2、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n} \quad (a>0)$.

三、用比值审敛法判别下列级数的收敛性:

1、$\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{3^2}{2\cdot 2^2}+\frac{3^3}{3\cdot 2^3}+\cdots+\frac{3^n}{n\cdot 2^n}+\cdots$; 2、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$.

四、用根值审敛法判别下列级数的收敛性:

1、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$; 2、$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$.

五、判别下列级数的收敛性:

1、$\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\cdots+\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\cdots$;

2、$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$; 3、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+2)}{(a+\frac{1}{n})^n}\quad(a>0)$.

六、判别下列级数是否收敛?如果是收敛的，是绝对收敛还是条件收敛?

1、$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$；

2、$\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\cdots$；

3、$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$.

七、若 $\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n$ 存在，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 .

八、证明：$\lim_{n\to\infty}\frac{b^{3n}}{n!a^n}=0$.

练习题答案

一、1、$p>1, p\le 1$；

2、$\rho<1, \rho>1$(或$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$), $\rho=1$.

二、1、发散；　　2、发散.

三、1、发散；　　2、收敛.

四、1、收敛；　　2、收敛.

五、1、发散；　　2、收敛；　　3、$\begin{cases} a>1, \text{收敛}; \\ 0<a<1, \text{发散}; \\ a=1, \text{发散}. \end{cases}$

六、1、绝对收敛；　　2、条件收敛；　　3、条件收敛.