$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0=f'(0)$，故当 $n\geqslant 3$ 时，$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

6. 设 $f\in C[a,b]$，$f(a)=f(b)=0$，且 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$. 证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

证 由于 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$，因此不妨设 $f'_+(a)>0$，则 $f'_-(b)>0$，即 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，$f'_-(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$.

由极限的保号性知：$\exists\, x_1,x_2$ 使 $a<x_1<x_2<b$，且

$$\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}>0,\ \frac{f(x_2)-f(b)}{x_2-b}>0,$$

进而可知，$f(x_1)>f(a)=0$，$f(x_2)<f(b)=0$，由零点定理可知至少存在一点 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

习 题 2.2

(A)

1. 求下列函数的导数：

(9) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$；　　(12) $y=\dfrac{e^x\sec x+1}{x^2\log_a\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}}$　$(a>0)$.

解 (9)
$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{(x+\sqrt{x})'}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right]$$

$$=\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}.$$

(12)
$$y'=\left(\frac{e^x\sec x+1}{x^2\log_a\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}}\right)'=-3\ln a\left(\frac{e^x\sec x+1}{x^2\ln x}\right)'$$

$$=-3\ln a\,\frac{(e^x\sec x+1)'(x^2\ln x)-(x^2\ln x)'(e^x\sec x+1)}{(x^2\ln x)^2}$$

$$=-3\ln a\,\frac{e^x\sec x(1+\tan x)x\ln x+(2\ln x+1)(e^x\sec x+1)}{x^3\ln^2 x}$$

3. 求下列函数的导数：

(11) $y=\ln\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$；　　(13) $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}\quad(a>0)$；

(14) $y=x+x^x+x^{x^x}$；　　(16) $y=e^{\arcsin\sqrt{x}}$；

(17) $y=\ln(\ln\sqrt{x^2+1})$；　　(19) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}}$；

(20) $y=\arctan\left(\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{x}{2}\right)$.

解　(11) $y'=\left(\ln\sqrt{(x\sin x)\sqrt{1-e^x}}\right)'=\dfrac{1}{2}\left[\ln x+\ln\sin x+\dfrac{1}{2}\ln(1-e^x)\right]'$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}+\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{-e^x}{2(1-e^x)}\right].$$

(13) $y'=(x^{a^a})'+(a^{x^a})'+(a^{a^x})'=a^ax^{(a^a-1)}+(a^{x^a}\ln a)(x^a)'+a^{a^x}\ln a\,(a^x)'$

$$=a^ax^{a^a-1}+ax^{a-1}a^{x^a}\ln a+a^{a^x+x}\ln^2 a.$$

(14) 因为$(x^x)'=(e^{x\ln x})'=e^{x\ln x}\left(x\cdot\dfrac{1}{x}+\ln x\right)=x^x(1+\ln x)$

$$(x^{x^x})'=(e^{x^x\ln x})'=e^{x^x\ln x}[(x^x)'\ln x+x^x(\ln x)']$$

$$=x^x\cdot x^{x^x}\cdot\left[(1+\ln x)\ln x+\frac{1}{x}\right].$$

所以 $y'=(x)'+(x^x)'+(x^{x^x})'=1+x^x(1+\ln x)+x^x\cdot x^{x^x}\left[(1+\ln x)\ln x+\dfrac{1}{x}\right]$.

(16) $y'=e^{\arcsin\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{e^{\arcsin\sqrt{x}}}{2\sqrt{x(1-x)}}$.

(17) $y'=\dfrac{1}{\ln\sqrt{1+x^2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{x}{(1+x^2)\ln\sqrt{1+x^2}}$.

(19) 因为 $\ln y=\dfrac{1}{3}[\ln(1-\sin 2x)-\ln(1+\sin 2x)]$，所以 $\dfrac{y'}{y}=$ $\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{-2\cos 2x}{1-\sin 2x}-\dfrac{2\cos 2x}{1+\sin 2x}\right]$，所以 $y'=\sqrt[3]{\dfrac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}}\left(\dfrac{-4}{3\cos 2x}\right)$.

(20) $y'=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{4}\tan^2\dfrac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}\sec^2\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sec^2\dfrac{x}{2}}{4+\tan^2\dfrac{x}{2}}$.

4. 已知 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x)=\arctan x^2$. 试求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解　令 $u=\dfrac{3x-2}{3x+2}$. 则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{df(u)}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=f'(u)\cdot\dfrac{12}{(3x+2)^2}$

$$=\frac{12}{(3x+2)^2}\arctan\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)^2,\text{故}\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\frac{3\pi}{4}.$$

5. 设有分段函数 $f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\geqslant x_0,\\ \psi(x), & x<x_0,\end{cases}$ 函数 φ 与 ψ 均可导，问 $f'(x)=\begin{cases}\varphi'(x), & x\geqslant x_0,\\ \psi'(x), & x<x_0\end{cases}$ 是否成立？

解　不一定成立.

$f'(x)=\begin{cases}\varphi'(x), & x>x_0,\\ \psi'(x), & x<x_0\end{cases}$ 但在 $x=x_0$ 处 $f(x)$ 是否可导需用定义来验证.

如 $f(x)=\begin{cases}\sin x; & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ $f'_+(0)=1, f'_-(0)=-1$, $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

6. 求下列函数的导数（f,g 是可导函数）：

(1) $y=f(x^2)$；　　(2) $y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$；

(3) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$；　　(4) $y=f(e^x)e^{g(x)}$；

(5) $y=\begin{cases}1-x, & -\infty<x<1,\\ (1-x)(2-x), & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ -(2-x), & 2<x<+\infty;\end{cases}$　　(6) $y=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解　(1) $y'=2xf'(x^2)$.

(2) $y'=\dfrac{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}$.

(3) $y'=f'(\sin^2 x)\sin 2x-f'(\cos^2 x)\sin 2x$
$=(\sin 2x)[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)]$.

(4) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{df(e^x)}{dx}e^{g(x)}+f(e^x)(e^{g(x)})'=f'(e^x)e^{x+g(x)}+f(e^x)e^{g(x)}g'(x)$.

(5) $f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(1-x)(2-x)}{x-1}=-1$,

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x}{x-1}=-1$,

$f'_+(2)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-(2-x)-0}{x-2}=1$,

$f'_-(2)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(1-x)(2-x)-0}{x-2}=1$,

所以$f'(1)=-1$，$f'(2)=1$，故

$$f'(x)=\begin{cases}-1, & -\infty<x\leqslant 1,\\ 2x-3, & 1<x\leqslant 2,\\ 1, & 2<x<+\infty.\end{cases}$$

(6) 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x-0}$ 不存在.

故 $y'=\begin{cases}\dfrac{1+\left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}, & x\neq 0,\\ \text{不可导}, & x=0.\end{cases}$

7. 确定 a,b,c,d 的值，使曲线 $y=ax^4+bx^3+cx^2+d$ 与 $y=11x-5$ 在点(1,6)相切，经过点(−1,8)并在点(0,3)有一水平的切线.

解　依题意可知：

$(ax^4+bx^3+cx^2+d)|_{x=1}=6$，即 $a+b+c+d=6$，$(ax^4+bx^3+cx^2+d)'|_{x=1}=(11x-5)'|_{x=1}$，即 $4a+3b+2c=11$，$(ax^4+bx^3+cx^2+d)|_{x=-1}=8$，得 $a-b+c+d=8$，$(ax^4+bx^3+cx^2+d)'|_{x=0}=3$，得 $d=3$，故 $a=3,b=-1,c=1,d=3$.

8. 证明：双曲线 $xy=a$ 上任一点处的切线介于两坐标轴间的一段被切点所平分.

解　双曲线上任一点 $P\left(x_0,\dfrac{a}{x_0}\right)$的切线方程 $y-\dfrac{a}{x_0}=-\dfrac{a}{x_0^2}(x-x_0)$与 x 轴交点 $A(2x_0,0)$，与 y 轴交点 $B\left(0,\dfrac{2a}{x_0}\right)$. 所以 $|PA|=\sqrt{x_0^2+\left(\dfrac{a}{x_0}\right)^2}=|PB|$. 命题得证.

9. 求下列函数指定阶的导数：

(2) $f(x)=x\operatorname{sh}x$，求 $f^{(100)}(x)$；　　(4) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$，求 $f^{(n)}(x)$.

解　(2) $f^{(100)}(x)=(\operatorname{sh}x)^{(100)}x+100(\operatorname{sh}x)^{(99)}(x)'=x\operatorname{sh}x+100\operatorname{ch}x$.

(4) $f(x)=\dfrac{1}{(x^2-3x+2)}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$,

$$f^{(n)}(x)=\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}.$$

10. 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)(n\in\mathbf{N}_+)$，求 $f'(0)$及 $f^{(n+1)}(x)$.

解　$f'(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-n)+x[(x-1)(x-2)\cdots(x-n)]'$，$f'(0)=(-1)^n n!$，$f(x)=x^{n+1}-(1+2+\cdots+n)x^n+\cdots+(-1)^n n!x$，所以 $f^{(n+1)}(x)=(n+1)!$.

12. 证明：

(1) 可导偶(奇)函数的导函数为奇(偶)函数；

(2) 可导周期函数的导函数为具有相同周期的周期函数.

解 (1) 设 $f(x)$可导，且 $f(x)=f(-x)$为偶函数，

则 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(-x-\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=-f'(-x)$,

所以 $f'(x)$为奇函数. 同理可证可导奇函数的导函数为偶函数.

(2) $f(x)$可导，且 $f(x)$为周期函数，最小正周期为 T，则

$$f'(x+T)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+T+\Delta x)-f(x+T)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x),$$

命题得证.

13. 设 $f(x)$二阶可导，$F(x)=\lim\limits_{t\to\infty}t^2\left[f\left(x+\dfrac{\pi}{t}\right)-f(x)\right]\sin\dfrac{x}{t}$，求 $F'(x)$($t\in\mathbf{R}$ 且与 x 无关).

解 $F(x)=\lim\limits_{t\to\infty}t^2\left[f\left(x+\dfrac{\pi}{t}\right)-f(x)\right]\sin\dfrac{x}{t}$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{f\left(x+\frac{\pi}{t}\right)-f(x)}{\frac{\pi}{t}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{t}}{\frac{x}{t}}\cdot\pi x\right]=\pi x f'(x).$$

因为 $f(x)$二阶可导，所以 $F(x)$一阶可导，且 $F'(x)=\pi[f'(x)+xf''(x)]$.

14. 求由下列方程确定的隐函数的导数：

(4) $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$，求$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$；

(6) $y=1+xe^y$，求$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

解 (4) 将 $x=0$ 代入方程 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$，得 $y=1$.

将方程两边对 x 求导得

$$\frac{2x+y'}{x^2+y}=3x^2y+x^3y'+\cos x,\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=1$$

(6) 当 $x=0$ 时，$y=1$. 方程两端对 x 求导得

$$y'=e^y+xe^yy',\quad y'\Big|_{x=0}=e.$$

将 $y'=e^y+xe^yy'$两端再对 x 求导得 $y''=2e^yy'+xe^y(y')^2+xe^yy''$. 将$x=0$，$y=1$，$y'=e$ 代入得

$$y''\Big|_{x=0}=2e^2.$$

15. 求由 Kepler 方程 $y=x+\varepsilon\sin y(0<\varepsilon<1)$ 所确定的曲线在点(0,0)处的切线方程.

解 将 $y=x+\varepsilon\sin y$ 两端对 x 求导可得：$y'=1+\varepsilon y'\cos y$，所以 $y'|_{x=0}=\dfrac{1}{1-\varepsilon}$，故过(0,0)切线方程为 $y=\dfrac{1}{1-\varepsilon}x$.

16. 对给定的函数两边取自然对数然后再求导的方法称为**对数求导法**. 例如，对函数

$$y=2^x\sin x\sqrt{1+x^2}$$

两边取自然对数，得

$$\ln|y|=x\ln 2+\ln|\sin x|+\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

由此方程确定了 y 是 x 的隐函数，应用隐函数求导法得

$$\frac{y'}{y}=\ln 2+\cot x+\frac{x}{1+x^2}$$

从而

$$\begin{aligned}y'&=y\left(\ln 2+\cot x+\frac{x}{1+x^2}\right)\\&=2^x\sin x\sqrt{1+x^2}\left(\ln 2+\cot x+\frac{x}{1+x^2}\right).\end{aligned}$$

试用对数求导法求下列函数导数：

(2) $y=\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{\sqrt[3]{x^2+2}}}$； (4) $y=(\tan 2x)^{\cot\frac{x}{2}}$.

解 (2) $y=\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{\sqrt[3]{x^2+2}}}$，两边取对数 $\ln|y|=\dfrac{1}{5}\left[\ln|x-5|-\dfrac{1}{3}\ln(x^2+2)\right]$，所以 $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1}{5}\left[\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{2x}{3(x^2+2)}\right]$，故 $y'=\dfrac{1}{5}\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{\sqrt[3]{x^2+2}}}\left[\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{2x}{3(x^2+2)}\right]$.

(4) 由 $y=(\tan 2x)^{\cot\frac{x}{2}}$ 知 $\ln y=\cot\dfrac{x}{2}\ln(\tan 2x)$，两端对 x 求导得

$$\frac{y'}{y}=\frac{-1}{2}\csc^2\frac{x}{2}\ln(\tan 2x)+\frac{2\cot\dfrac{x}{2}}{\tan 2x}\sec^2 2x,$$

所以 $y'=(\tan 2x)^{\cot\frac{x}{2}}\left[-\dfrac{1}{2}\csc^2\dfrac{x}{2}\ln(\tan 2x)+2\cot\dfrac{x}{2}\cot 2x\sec^2 2x\right]$.

17. 若两条曲线在它们交点处的切线互相垂直，则称两曲线在该点**正交**. 若一曲线族中每条曲线与另一曲线族中与它相交的曲线均正交，则称它们是**正交曲线族**. 证明：双曲线族 $xy=C_1$ 与 $x^2-y^2=C_2$(其中 C_1 与 C_2 为任意非零常数)

是正交曲线族.

解 曲线 $xy=C_1$. 在 $(x,y)=\left(x,\dfrac{C_1}{x}\right)$ 处切线斜率 $k_1=-\dfrac{C_1}{x^2}$，曲线 $x^2-y^2=C_2$ 在 $(x,y)=\left(x,\dfrac{C_1}{x}\right)$ 处切线斜率 $k_2=\dfrac{x}{y}=x\cdot\dfrac{x}{C_1}=\dfrac{x^2}{C_1}$，于是 $k_1\cdot k_2=-1$，即 $xy=C_1$ 与 $x^2-y^2=C_2$ 在其交点 (x,y) 处正交.

18. 求下列参数方程所确定的函数的导数：

(5) $\begin{cases}x=f(t),\\ y=tf(t)-f(t),\end{cases}$ 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$，其中 $f''(t)$ 存在且 $f'(t)$ 不为零.

解 (5) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{tf'(t)+f(t)-f'(t)}{f'(t)}=t-1+\dfrac{f(t)}{f'(t)}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(t-1+\frac{f(t)}{f'(t)}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\left\{1+\frac{[f'(t)]^2-f(t)f''(t)}{[f'(t)]^2}\right\}\cdot\frac{1}{f'(t)}$$

$$=\frac{2}{f'(t)}-\frac{f(t)f''(t)}{[f'(t)]^3}.$$

19. 设曲线 Γ 由极坐标方程 $r=r(\theta)$ 所确定，试求该曲线上任意一点的切线斜率，并将所得公式用于求心形线 $r=a(1-\cos\theta)(a>0)$ 上任一点的斜率.

解 曲线 $r=r(\theta)$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta,\\ y=r(\theta)\sin\theta,\end{cases}$ 曲线上点 $(\theta,r(\theta))$ 处切线斜率 $k=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}$.

心形线 $r=a(1-\cos\theta)$ 上任一点 $(\theta,r(\theta))$ 处切线斜率为

$$k_{心}=\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta+\cos\theta}{2\sin\theta\cos\theta-\sin\theta}.$$

20. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$ 在点 $\left(\dfrac{\sqrt2}{4}a,\dfrac{\sqrt2}{4}a\right)$ 处的切线方程和法线方程. 证明：在它的任一点处的切线介于坐标轴间部分的长为一常量.

解 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos^3\theta,\\ y=a\sin^3\theta\end{cases}$ $(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$，所以 $\left(\dfrac{\sqrt2}{4}a,\dfrac{\sqrt2}{4}a\right)$ 处切线方程为 $y-\dfrac{\sqrt2}{4}a=-\left(x-\dfrac{\sqrt2}{4}a\right)$，法线方程为 $y-\dfrac{\sqrt2}{4}a=x-\dfrac{\sqrt2}{4}a$.

21. 落在平静水面上的石头使水面上产生同心波纹. 若最外一圈波半径的增大率为 6 m/s，问在 2 秒末被扰动水面面积的增大率为多少？

解　依题可知. t 秒末被扰动水面面积为 $S=S(t)=\pi(6t)^2=36\pi t^2$，$\left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right|_{t=2}=72\pi t\Big|_{t=2}=144\ \pi$，即在 2 秒时被扰水面增大率 $144\ \pi\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$.

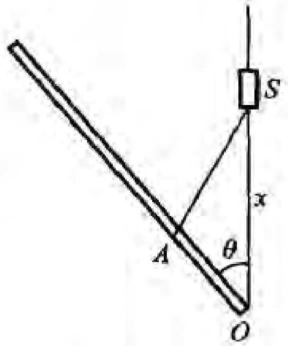
22. 在中午 12 时，甲船以 6 km/h 的速率向东行驶，乙船在甲船之北 16 km 处以 8 km/h 的速率向南行驶，求下午一时两船相离的速率.

解　t 时刻两船的距离为 $s=\sqrt{(16-8t)^2+(6t)^2}$，两船在下午一时相离的速率 $\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=-2.8$ m/h.

23. 当油船破裂时，有体积为 $V\mathrm{m}^3$ 的石油漏入海中. 假定石油在海面上以厚度均匀的圆形扩散开来，已知油层的厚度随时间的变化规律为 $h(t)=\frac{k}{\sqrt{t}}(t>0)$，试求油层向外扩散的速率.

解　设 t 时刻圆形油层的半径为 $r=r(t)$，则 $\pi r^2h(t)=V$，即 $r=r(t)=\sqrt{\frac{V}{k\pi}}t^{\frac{1}{4}}$，故油层向外扩散的速率为 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{V}{k\pi}}t^{-\frac{3}{4}}$.

24. 一个开窗子的机构是由一些刚性细杆做成，如右图. 其中 S 为滑块，设 $AO=3$ cm，$AS=4$ cm，求滑块的垂直速度 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 与 θ 的角速度 $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 之间的关系.



（第 24 题图）

解　由三角形余弦定理可知：在 $\triangle OAS$ 中：$4^2=3^2+x^2-2\cdot3\cdot x\cos\theta$. 两边对 t 求导数得

$$(x-3\cos\theta)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+3x\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=0.$$

25. 在距火箭发射塔 4 000 m 处安装一台摄影机. 为使摄影机的镜头始终对准火箭，摄影机的仰角应随着火箭的上升不断增加. 假设火箭发射后垂直上升到距离地面 3 000 m 处时，其速度为 600 m/s. 试求在此时刻摄影机仰角的变化率.

解　设 t 时刻火箭离地面高度为 $h=h(t)m$，摄像机仰角 $\theta=\theta(t)$，则 $\tan\theta=\frac{h(t)}{4\ 000}$，于是 $(\sec^2\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{4\ 000}\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}$. 当火箭上升到距地面 3 000 m 时. $\tan\theta=\frac{3}{4}$，$\sec^2\theta=\frac{25}{16}$，$\left.\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{h=3\ 000}=600$ m/s，于是 $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{4\ 000}\times600\times\frac{16}{25}=0.096$ 弧度/s. 即此时摄像机仰角的变化为 0.096 弧度/s.

(B)

1. 设 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx(a_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n)$

且 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$，证明：

$$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1.$$

解 由 $f'(x)=a_1\cos x+2a_2\cos 2x+\cdots+na_n\cos nx$ 得 $f'(0)=a_1+2a_2+\cdots+na_n$. 又由导数定义 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$，及 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$ 可得

$$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|=|f'(0)|=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right|=1.$$

2. 设函数 $\varphi:(-\infty,x_0]\to\mathbf{R}$ 是二阶可导函数. 选择 a,b,c，使函数

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\leqslant x_0,\\ a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c, & x>x_0\end{cases}$$ 在 $\mathbf{R}$ 上二阶可导.

解 要使 f 在 $\mathbf{R}$ 上二阶可导，则 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，于是，

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+}[a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c]=c=\lim_{x\to x_0^-}\varphi(x)=\varphi(x_0)=f(x_0-0).$$

即 $c=\varphi(x_0)$. 又由 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{[a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c]-\varphi(x_0)}{x-x_0}=b$，

$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\varphi'(x_0)$ 可得 $b=\varphi'(x_0)$，于是

$$f'(x)=\begin{cases}\varphi'(x), & x\leqslant x_0,\\ 2a(x-x_0)+\varphi'(x_0), & x>x_0.\end{cases}$$ 再由

$$f''_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{[2a(x-x_0)+\varphi'(x_0)]-\varphi'(x_0)}{x-x_0}=2a,$$

$f''_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{\varphi'(x)-\varphi'(x_0)}{x-x_0}=\varphi''(x_0)$，可得 $a=\dfrac{1}{2}\varphi''(x_0)$.

3. 确定 a,b 的值，使函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}(1-\cos ax), & x<0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}\ln(b+x^2), & x>0\end{cases}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处可导，并求它的导函数.

解 由于 $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}\ln(b+x^2)$ 存在且等于 $f(0)=0$，所以 $\ln(b+x^2)$ 应是 x 的高阶无穷小($x\to 0$). 即 $\lim\limits_{x\to 0}\ln(b+x^2)=0$，即 $b=1$. 又因为

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\ln(1+x^2)=1,\ f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}(1-\cos ax)=\frac{a^2}{2},$$

所以$\frac{a^2}{2}=1$，即 $a=\pm\sqrt{2}$.

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\pm\sqrt{2}x\sin(\pm\sqrt{2}x)-1+\cos(\pm\sqrt{2}x)}{x^2}, & x<0,\\ 1, & x=0\\ \dfrac{2}{1+x^2}-\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x^2), & x>0.\end{cases}$$

4. 如果函数 $u=\varphi(x)$在 x_0 处可导，而 $y=f(u)$在 $u_0=\varphi(x_0)$处可导，那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在 x_0 处可导，这是大家所熟知的. 问下列三种情况是否成立？为什么？

(1) 如果 $u=\varphi(x)$在 x_0 处不可导，而 $y=f(u)$在 $u_0=\varphi(x_0)$处可导，那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在 x_0 处一定不可导；

(2) 如果 $u=\varphi(x)$在 x_0 处可导，而 $y=f(u)$在 $u_0=\varphi(x_0)$处不可导，那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在 x_0 处一定不可导；

(3) 如果 $u=\varphi(x)$在 x_0 处不可导，$y=f(u)$在 $u_0=\varphi(x_0)$处也不可导，那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在 x_0 处一定不可导.

解　(1) 不成立. 例如 $u=|x|$在 $x_0=0$ 处不可导，$y=u^2$ 在 $u_0=|x_0|=0$ 处可导. 复合函数 $y=x^2$ 在 $x_0=0$ 处可导.

(2) 不成立. 例如 $u=\sin^2 x$ 在 $x_0=0$ 处可导，$y=|u|$在 $u_0=0$ 处不可导，复合函数 $y=\sin^2 x$ 在 $x_0=0$ 处可导.

(3) 不成立. 如 $\varphi(x)=\begin{cases}-x, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0\end{cases}$ 在 $x_0=0$ 不可导，$f(u)=\begin{cases}0, & u\leqslant 0,\\ u, & u>0\end{cases}$ 在 $u_0=\varphi(x_0)=0$ 不可导，但复合函数 $y=f[\varphi(x)]=0$ 在$(-\infty,+\infty)$处处可导.

6. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$，试确定常数 a,b，使 $f(x)$连续、可导，并求 $f'(x)$.

解　$f(1)=(1+a+b)/2$. 如果 $x<1$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}e^{n(x-1)}=0$，所以 $f(x)=ax+b$，如果 $x>1$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}e^{n(x-1)}=+\infty$，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+(ax+b)e^{-n(x-1)}}{1+e^{-n(x-1)}}=x^2$. 于是

$$f(x)=\begin{cases}ax+b, & x<1,\\ (1+a+b)/2, & x=1,\\ x^2, & x>1.\end{cases}$$

由 $f(x)$在 $x=1$ 的连续性可得 $a+b=1$.

又由 $f(x)$在 $x=1$ 可导及 $f'_-(1)=a$，$f'_+(1)=2$ 知 $a=2$，于是 $b=-1$.

$$f'(x)=\begin{cases}2, & x\leqslant 1,\\ 2x, & x>1.\end{cases}$$

7. 设 $f(x)=\arctan x$，求 $f^{(n)}(0)$.

解 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，于是 $(1+x^2)f'(x)=1$，两边对 x 求 $n-1$ 阶导数得 $(1+x^2)f^{(n)}(x)+C_{n-1}^1(1+x^2)'f^{(n-1)}(x)+C_{n-1}^2(1+x^2)''f^{(n-2)}(x)=0$，于是，$f^{(n)}(0)+2C_{n-1}^2f^{(n-2)}(0)=0$，即 $f^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0)$，由 $f'(0)=1$，$f''(0)=0$ 可得当 $n=2m$ 时，$f^{(2m)}(0)=0$；当 $n=2m+1$ 时，$f^{(2m+1)}(0)=(-1)^m\cdot(2m)!$，$m=0,1,2,\cdots$.

8. 利用恒等式

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}$$

求出表示和式

$$S_n=\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\tan\frac{x}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$$

的公式.

解 对恒等式两边取对数可得

$$\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+\ln\left|\cos\frac{x}{4}\right|+\cdots+\ln\left|\cos\frac{x}{2^n}\right|=\ln|\sin x|-\ln\left|2^n\sin\frac{x}{2^n}\right|,$$

两边对 x 求导

$$-\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\tan\frac{x}{4}-\cdots-\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}=\cot x-\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n},$$

于是

$$S_n=\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}-\cot x.$$

10. 设 $y=y(x)$ 由方程 $\begin{cases}x=3t^2+2t+3,\\ e^y\sin t-y+1=0\end{cases}$ 所确定，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$.

解 将 $t=0$ 代入方程可得 $x=3,y=1$.

由 $e^y\sin t-y+1=0$ 可得 $\dfrac{dy}{dt}=\dot{y}=\dfrac{e^y\cos t}{1-e^y\sin t}$，$\dot{y}|_{t=0}=e$.

将 $e^y\sin t-y+1=0$ 两边对 t 求二阶导数，将 $t=0,y=1,\dot{y}|_{t=0}=e$ 代入可得 $\ddot{y}|_{t=0}=2e^2$，又 $\dot{x}|_{t=0}=2$ $\ddot{x}|_{t=0}=6$ 代入

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\left.\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}\right|_{t=0}=\frac{2\times2e^2-6e}{2^3}=\frac{(2e-3)e}{4}.$$