第2章 一元函数微分学及其应用

第1节　导数的概念

第2节　求导基本法则

第3节　微分

第4节　微分中值定理及其应用

第5节　Taylor定理及其应用

第6节　函数性态的研究

第4节　微分中值定理及其应用

1. 函数的极值

2. Fermat定理

3. Rolle定理

4. Lagrange定理

5. Cauchy定理

1 函数的极值

定义1 设 $x_0 \in I$,

如果存在$U(x_0,\delta)\subset I$, 使得对$\forall x \in U(x_0,\delta)$,

总有 $f(x_0) \geq f(x)$, 称$f(x_0)$是f在I上的极大值.

x_0称为极大值点. 类似定义极小值, 极小值点.

极值和最值的区别

(1) 极值为局部性质, 最值为整体性质;

(2) 在I内部, 最值必为极值.

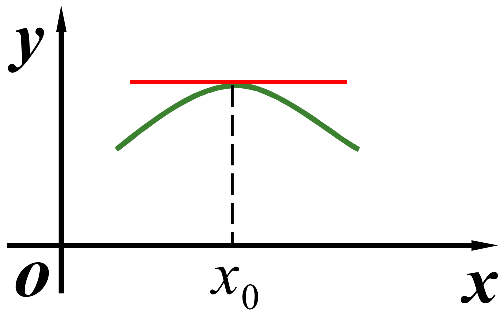
2. Fermat定理(费马)

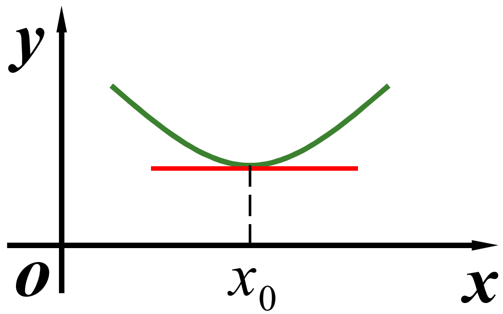
设 f 在 x_0 处可导, 且 x_0 是极值点, 则 $f'(x_0)=0$.

定义2 若$f'(x_0)=0$，则点x_0称为函数$f(x)$的稳定点或驻点.

Fermat定理的几何意义

若$f'(x_0)\exists$, 且x_0为$f(x)$的极值点，则曲线$y=f(x)$在$M(x_0, f(x_0))$处有水平切线.





注意： 1．Fermat定理的逆不一定成立。

例如，$y = x^3$，$y'\big|_{x=0} = 0$，但$x = 0$不是极值点.

2．如果$f(x)$在x_0可导，且x_0为极值点，则x_0必为驻点，但反之不然.

3. 如果$f(x)$在(a,b)内可导，在$[a,b]$连续，且在(a,b)内导数恒不为0，则只能在区间端点取到函数的最大值和最小值.

3. 罗尔(Rolle)中值定理

设 $f\in C[a,b]$, f在(a,b)内可导, 且$f(a)=f(b)$,

则$\exists\xi\in(a,b)$, 使$f'(\xi)=0$.

证明 $f\in C[a,b]$, 必有最值m、M.

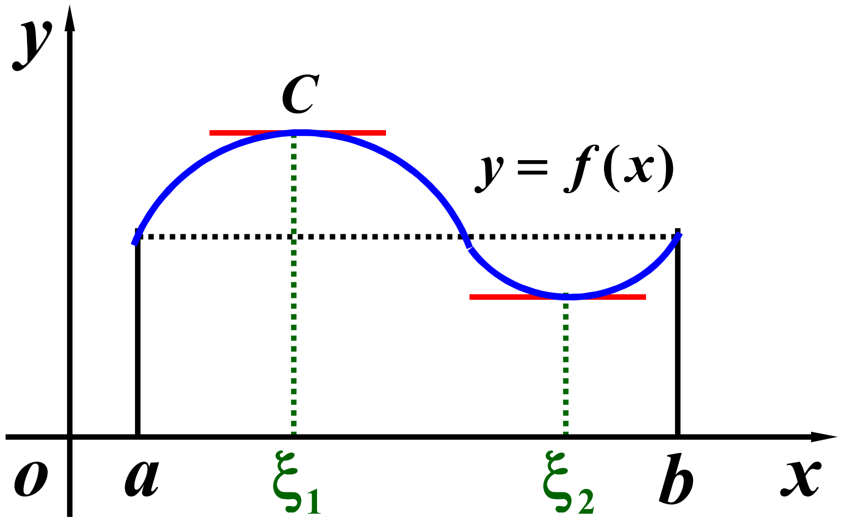
若$M=m$, $f(x)\equiv c, \forall\xi\in(a,b), f'(\xi)=0$.

若$M>m$, 由$f(a)=f(b)$, f在内部必取得M或m,

$\therefore \exists\xi\in(a,b)$, 使$f'(\xi)=0$.

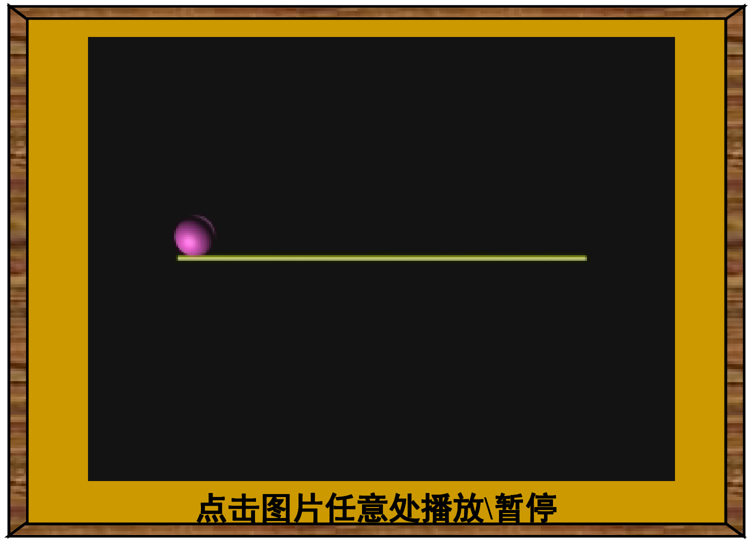
几何解释:

在曲线弧AB上至少有一点C,在该点处的切线是水平的.



物理解释:

变速直线运动在折返点处,瞬时速度等于零.



注意:若罗尔定理的三个条件中有一个不满足,其结论可能不成立.

例如, $y = |x|, x \in [-2,2];$

$$y = \begin{cases} 1 - x, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases};$$

$$y = x, x \in [0,1].$$

推论4.1 证明：如 f可导，则 $f(x)$的任意两个相邻零点间至少存在f'的一个零点.

证明 设$f(x_1)=0, f(x_2)=0, f\in C[x_1,x_2]$，且在$(x_1,x_2)$可导，由$Rolle$定理，知$\exists\xi\in(x_1,x_2)$使$f'(\xi)=0.$

进而可知：若 f有n个零点

f'至少有$n-1$个零点，

f''至少有$n-2$个零点，

……

$f^{(k)}$至少有$n-k$个零点.

例4.1 证明方程$x^3+2x+1=0$在区间$(-1,0)$内有且仅有一个实根.

例 设 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为实常数，且

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n} + \frac{a_n}{n+1} = 0,$$

证明函数 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ 在$(0,1)$内有零点。

结论：可微函数的任意两个零点之间至少有一个导函数的零点！

例4.2 设f在$[0,1]$连续，$(0,1)$内可导，且$f(1)=0$.

求证$\exists c\in(0,1)$，使$f'(c)=\dfrac{-f(c)}{c}$

思路：构造辅助函数

将c记为$x \Rightarrow f(x)+xf'(x)=0$

证明 令$F(x)=xf(x)$,

$\because F(0)=F(1)=0, F\in C[0,1]$, 在$(0,1)$可导,

$\therefore \exists c\in(0,1)$, 使$F'(c)=0$.

即$f'(c)=-\dfrac{f(c)}{c}$.

例3 设$f(a)=f(b)=0$, $f\in C[a,b]$,在(a,b)内可导,

求证$\exists\xi\in(a,b)$,使$\xi f'(\xi)-f(\xi)=0$.

分析: $xf'(x)-f(x)$是谁的导数?

$\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$是谁的导数 ?

证明 令$F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$,

$\because F(a)=F(b)=0, F\in C[a,b]$,在$(a,b)$内可导,

$\therefore \exists\xi\in(a,b)$,使$F'(\xi)=0$.

即$\xi f'(\xi)-f(\xi)=0$.

例4 $Q(x)=x^n(1-x)^n, n\in \mathrm{N}^*$

求证 $Q^{(n)}(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有 n 个相异零点．

证明

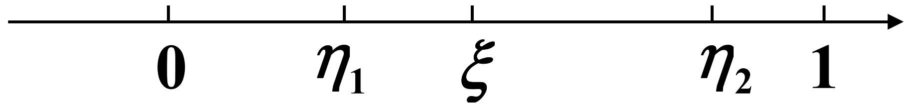
$$Q^{(m)}(x)=\sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{i!(m-i)!}\frac{n!x^{n-i}}{(n-i)!}\cdot\frac{n!}{(n-m+i)!}(1-x)^{n-m+i}(-1)^{m-i},\ (m<n)$$

$$\therefore Q^{(m)}(0)=Q^{(m)}(1)=0,\quad m=0,1,2,\cdots,n-1.$$

$$\because Q(0)=Q(1)=0,\quad \therefore \exists\xi\in(0,1), Q'(\xi)=0.$$

$$\because Q'(0)=Q'(\xi)=Q'(1)=0,$$

$$\therefore \exists\eta_1\in(0,\xi), \eta_2\in(\xi,1),\quad s.t\ \ Q''(\eta_1)=Q''(\eta_2)=0.$$



$$Q''(0)=Q''(\eta_1)=Q''(\eta_2)=Q''(1)=0, \quad \cdots\cdots$$

$Q^{(n-1)}$有$0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_{n-1}<1$, $n+1$个相异零点.

$\therefore Q^{(n)}(x)$至少有n个相异零点.

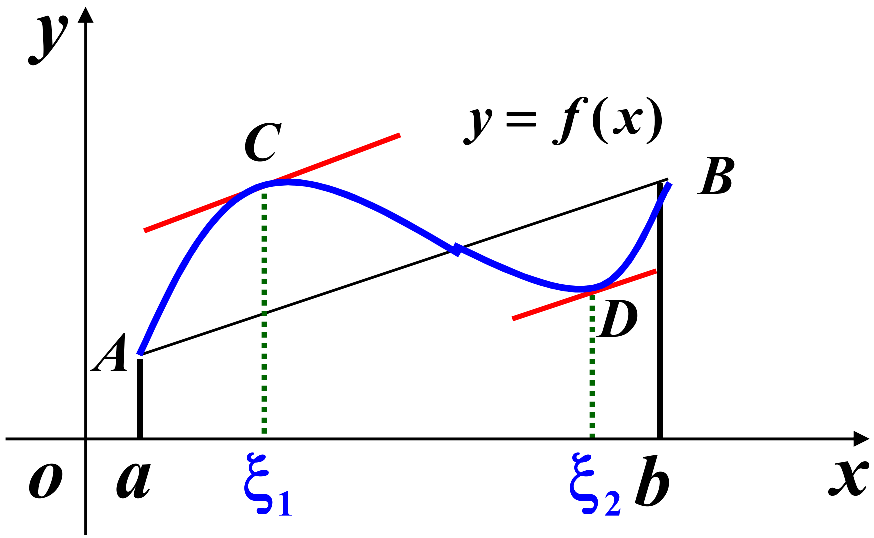
4 拉格朗日(Lagrange)中值定理

设$f \in C[a,b]$,在(a,b)内可导，则$\exists \xi \in (a,b)$,使

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),\quad \text{或}\quad f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

几何解释

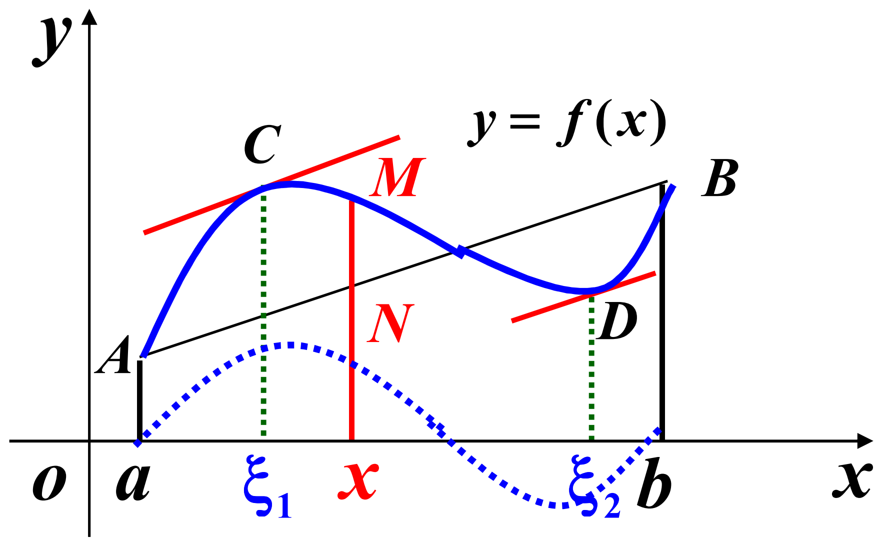
在曲线弧 AB 上至少有一点 C,在该点处的切线平行于弦 AB.



分析

条件中与罗尔定理

相差 $f(a)=f(b)$.



弦AB方程为

$$y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

曲线 $f(x)$ 减去弦 AB,

所得曲线a,b两端点的函数值相等.

证明

$$令F(x)=f(x)-y$$

$$=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

此时 $F(a)=F(b)=0$, $F\in C[a,b]$, 且在(a,b)内可导.

$\therefore \exists\xi\in(a,b)$, 使$F'(\xi)=0$.

$$即f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

证明2

$$f'(x)(b-a)-[f(b)-f(a)]\text{是谁的导数？}$$

$$\text{令}F(x)=f(x)(b-a)-[f(b)-f(a)]x$$

$$\left.\begin{aligned} F(a)&=f(a)b-f(b)a \\ F(b)&=f(a)b-f(b)a \end{aligned}\right\}\text{满足罗尔中值定理}$$

$$\therefore \exists \xi \in (a,b),\text{使}F'(\xi)=0.$$

$$\text{即}f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

注1. 罗尔定理是拉格朗日中值定理的特殊情形.

注2：Lagrange中值定理的几种形式

设f(x)在[a,b]上满足拉格朗日定理条件, $\forall x \in [a,b]$, 且x有增量Δx($x+\Delta x \in [a,b]$, $\Delta x < 0$或$\Delta x > 0$), 则f(x)在$[x, x+\Delta x]$或$[x+\Delta x, x]$上满足拉格朗日定理条件, 则

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1).$$

也可写成 $\Delta y = f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1).$

有 限 增 量 公 式.

推论4.1 $f\in C[a,b]$,在(a,b)内可导,则

$$f\text{在}[a,b]\text{上}\equiv c \Leftrightarrow f'(x)=0, x\in(a,b).$$

证明 $\Rightarrow$ 若 $f(x)\equiv c, x\in[a,b]$,则 $f'(x)=0, x\in(a,b).$

$\Leftarrow$ 若 $f'(x)=0, \forall x\in(a,b)$,

则对$\forall x_1<x_2, x_1, x_2\in[a,b]$,

使 $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)=0$,

$\therefore f(x_2)=f(x_1)$. 由x_1, x_2任意性, $f(x)\equiv c$.

推论4.3 (导数极限定理)

(1)　设函数$f(x)$在$[x_0,b)$上连续，在(x_0,b)内可导，

且$\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)=A$，则 $f'_+(x_0)=A$;

(2)　设函数$f(x)$在$(a,x_0]$上连续，在(a,x_0)内可导，

且$\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)=A$，则 $f'_-(x_0)=A$;

应用：利用导函数的极限来求区间端点或分段点的左右导数！

例4.3　设

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x\sin x, & x>0 \end{cases}$$

求$f'(x)$.

例4.5

设函数$f(x)$在$[0,1]$上可导，值域$f([0,1])\subset(0,1)$，并且$\forall x\in(0,1)$，$f'(x)\neq 1$，证明f有唯一不动点$c\in(0,1)$.

例5 证明 $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2} \quad (-1 \le x \le 1).$

证 设 $f(x) = \arcsin x + \arccos x, \quad x \in [-1,1]$

$$\because\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0.$$

$$\therefore\ f(x) \equiv C, \quad x \in [-1,1]$$

又 $\because\ f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$, 即 $C = \dfrac{\pi}{2}$.

$$\therefore \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

例4.4（证明不等式） 求证 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$

证 设 $f(x)=\ln(1+x)$,

$f(x)$在$[0,x]$上满足Lagrange定理的条件，

$$\therefore f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0),\ (0<\xi<x)$$

$\because f(0)=0,\ f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$，由上式得 $\ln(1+x)=\dfrac{x}{1+\xi}$,

又 $\because 0<\xi<x \Rightarrow 1<1+\xi<1+x \Rightarrow \dfrac{1}{1+x}<\dfrac{1}{1+\xi}<1$,

$\therefore \dfrac{x}{1+x}<\dfrac{x}{1+\xi}<x$, 即 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$

例7 求证：$\arctan x$在$(-\infty,+\infty)$一致连续

证明 $\forall x_1, x_2$,在 $[x_1,x_2]$或$[x_2,x_1]$上

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 = \frac{1}{1+\xi^2}(x_2 - x_1),\ x_1 \cdots \xi \cdots x_2$$

由于$0 < \dfrac{1}{1+\xi^2} \le 1 \quad \therefore |\arctan x_2 - \arctan x_1| \le |x_2 - x_1|$

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon$,当$|x_2 - x_1| < \delta$时,$|\arctan x_2 - \arctan x_1| < \varepsilon$

推论

若$\forall x \in (a,b)$,有$|f'(x)| \le M$,则f在(a,b)上一致连续.

5 柯西中值定理

$f, g \in C[a,b]$,在(a,b)内可导且 $g'(x) \neq 0$,

则$\exists \xi \in (a,b)$,使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

证明 首先,由$g'(x) \neq 0$知$g(b) \neq g(a)$, （反证可知）

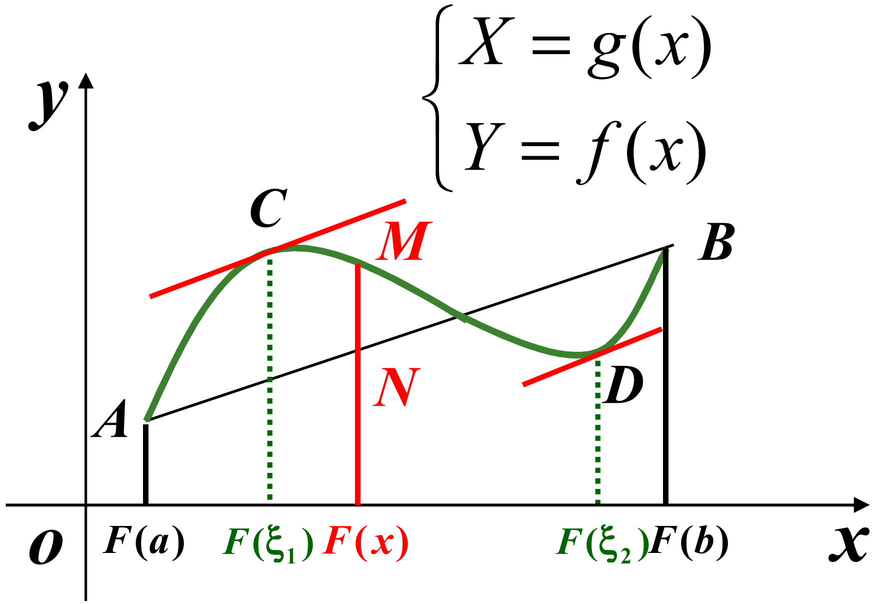
令$F(x) = [f(b)-f(a)]g(x) - [g(b)-g(a)]f(x)$

满足*Rolle*定理

$\therefore \exists \xi \in (a,b)$,使$F'(\xi) = 0$, 即 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

几何解释:

在曲线弧AB上至少有一点$C(g(\xi), f(\xi))$,在该点处的切线平行于弦AB.



例8 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,证明:至少存在一点$\xi \in (0,1)$,使 $f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$.

分析:结论可变形为

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{f'(\xi)}{2\xi} = \frac{f'(x)}{(x^2)'}\bigg|_{x=\xi}.$$

设 $g(x) = x^2$,

则 $f(x), g(x)$ 在$[0,1]$上满足柯西中值定理的条件

$\therefore$ 在$(0,1)$内至少存在一点 ξ,有

$$\frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)} = \frac{f'(\xi)}{2\xi},$$

即 $f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$.

小结

罗尔定理、拉格朗日中值定理及柯西中值定理之间的关系；

注意定理成立的条件；

注意利用中值定理证明等式与不等式的步骤.

1　证明方程 $x^5-5x+1=0$ 有且仅有一个小于1的正实根.

证 设 $f(x)=x^5-5x+1$, 则 $f(x)$在$[0,1]$连续,

且 $f(0)=1, f(1)=-3.$ 由介值定理

$\exists x_0\in(0,1)$, 使 $f(x_0)=0$. 即为方程的小于1的正实根.

设另有 $x_1\in(0,1), x_1\neq x_0$, 使 $f(x_1)=0$.

$\because f(x)$ 在 x_0,x_1 之间满足罗尔定理的条件,

$\therefore$ 至少存在一个 ξ (在 x_0,x_1 之间),使得 $f'(\xi)=0$.

但 $f'(x)=5(x^4-1)<0, (x\in(0,1))$ 矛盾, $\therefore$ 为唯一实根.

2 设f(x)在[a, b]上可微，且ab>0，求证：

$$\frac{1}{a-b}[af(b)-bf(a)]=f(\xi)-\xi f'(\xi) \qquad (a<\xi<b)$$

证明 令 $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{x}$， $g(x)=\dfrac{1}{x}$

∵ a, b同号，故x=0不在(a, b)内;

∴φ(x),g(x)在(a, b)内可微。

$$\varphi'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}, \quad g'(x)=\frac{-1}{x^2}$$

∴由柯西中值定理 $\dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{\varphi'(\xi)}{g'(\xi)}$

即 $\dfrac{1}{a-b}[af(b)-bf(a)]=f(\xi)-\xi f'(\xi), \quad \xi\in(a,b).$

注：常见的一些函数构造技巧：

（1）证$\exists\xi\in(a,b)$使$f(\xi)=-f'(\xi)\xi \quad \Rightarrow F(x)=f(x)x$

（2）证$\exists\xi\in(a,b)$使$f(\xi)+f'(\xi)=0 \quad \Rightarrow F(x)=e^{x}f(x)$

若$F'(x)=e^{x}f'(x)+e^{x}f(x)=0\Rightarrow \quad f(x)+f'(x)=0$

（3）证$\exists\xi\in(a,b)$使$f(\xi)-f'(\xi)=0 \Rightarrow F(x)=e^{-x}f(x)$

（4）证$\exists\xi\in(a,b)$使$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$即$f(\xi)g''(\xi)-g(\xi)f''(\xi)=0$

$\Rightarrow F(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$

$(F'(x)=f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)-f'(x)g'(x)-f''(x)g(x))$