多元函数的极限与连续性

二元函数的连续性

有界闭域（紧集）上连续函数的性质

一、二元函数的连续性

※ 连续性的定义

定义2.4 设 f 为定义在点集 $D\subset \mathbf{R}^2$ 上的二元函数, $P_0 \in D$. 若 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$, 只要 $P\in U(P_0;\delta)\cap D$, 就有

$$|f(P)-f(P_0)|<\varepsilon, \tag{1}$$

则称 f 关于集合 D 在点 P_0 连续. 在不致误解的情形下, 也称 f 在点 P_0 连续.

若 f 在 D 上任何点都关于集合 D 连续, 则称 f 为 D 上的连续函数.

由上述定义知道：若 P_0 是 D 的孤立点, 则 P_0 必定是 f 的连续点. 若 P_0 是 D 的聚点, 则 f 关于集合 D 在点 P_0 连续等价于

$$\lim_{\substack{P \to P_0 \\ P \in D}} f(P) = f(P_0). \qquad (2)$$

如果 P_0 是 D 的聚点, 而 (2) 式不成立 (其含义与一元函数的对应情形相同), 则称 P_0 是 f 的不连续点 (或称间断点). 特别当 (2) 式左边极限存在, 但不等于 $f(P_0)$ 时, P_0 是 f 的可去间断点.

如上节例1、2 给出的函数在原点连续；例3、4、5

给出的函数在原点不连续. 又若把上述例3 的函数改为

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y)\in\{(x, y)\mid y=mx, x\neq 0\},\\[2ex] \dfrac{m}{1+m^2}, & (x, y)=(0, 0),\end{cases}$$

其中 m 为固定实数, 亦即函数 f 只定义在 $y=mx$ 上，这时由于

$$\lim_{\substack{(x, y)\to(0, 0)\\ y=mx}} f(x, y)=\frac{m}{1+m^2}=f(0, 0),$$

因此 f 在原点沿着直线 $y=mx$ 是连续的.

例1 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha}}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}\quad(\alpha>0)$$

在坐标原点的连续性.

解 由于当 $\alpha>2$ 且 $r\to 0$ 时,

$$\left|f(r\cos\theta,r\sin\theta)\right|=\left|r^{\alpha-2}(\cos\theta)^{\alpha}\right|\leq r^{\alpha-2}\to 0,$$

因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$, 此时 f 在原点连

续；而当 $\alpha \le 2$ 时，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在，此时 f 在原点间断.

※ （补充）全增量与偏增量

设 $P_0(x_0, y_0)$、$P(x, y) \in D, \Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$,

称
$$\Delta z = \Delta f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$
$$= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

为函数 f 在点 P_0 的全增量. 和一元函数一样, 可用增量形式来描述连续性, 即当

$$\lim_{\substack{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0) \\ (x,y) \in D}} \Delta z = 0$$

时, f 在点 P_0 连续.

如果在全增量中取 $\Delta x = 0$ 或 $\Delta y = 0$, 则相应得到的增量称为偏增量, 分别记作

$$\Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

$$\Delta_y f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

一般说来, 函数的全增量并不等于相应的两个偏增量之和.

若一个偏增量的极限为零，如 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta_x f(x_0,y_0)=0$，则表示当固定 $y=y_0$ 时，$f(x,y_0)$ 作为 x 的函数，它在 x_0 连续. 同理，若 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\Delta_y f(x_0,y_0)=0$，则表示当固定 $x=x_0$ 时，$f(x_0,y)$ 在 y_0 连续.

容易证明：当 f 在其定义域的内点 (x_0,y_0) 连续时，$f(x,y_0)$ 在 x_0 与 $f(x_0,y)$ 在 y_0 都连续. 但是反过来，由二元函数对单个自变量都连续，一般不能保证该函数的连续性 (除非另外增加条件). 例如二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0\end{cases}$$

在原点处显然不连续，但由于 $f(0,y)=f(x,0)=0$，因此它在原点处对 x 和对 y 分别都连续.

例2 设在区域 $D\subset \mathbb{R}^2$ 上 $f(x,y)$ 分别对 x 和对 y 都连续．试证在下列条件之一满足时，$f(x,y)$ 在 D 上处处连续：

(i) 对其中一个变量 (例如 y) 满足李普希茨条件，即 $\exists L>0$，使得对任何 $(x,y_1),(x,y_2)\in D$，恒有

$$\left| f(x,y_1)-f(x,y_2)\right| \le L\left| y_1-y_2\right|;$$

(ii) 对其中一个变量 (x) 的连续关于另一个变量 (y) 是一致的, 即 $\forall x_0, \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ (只与 x_0, ε 有关, 而与 y 无关), 当 $|x-x_0|<\delta$, 且 $(x,y)\in D$ 时, 对一切 y 恒有 $\left| f(x,y)-f(x_0,y)\right|<\varepsilon.$

证(i) $\forall (x_0,y_0)\in D$. 因 $f(x,y_0)$ 在 x_0 连续, 故任给 $\varepsilon>0$, $\exists \delta_1>0$, 当 $|x-x_0|<\delta_1$ 时, 有

$$\left| f(x,y_0)-f(x_0,y_0) \right| < \varepsilon/2;$$

又当 $|y-y_0|<\delta_2=\varepsilon/2L$ 时，满足

$$\left| f(x,y)-f(x,y_0) \right| \le L\,|y-y_0| < \varepsilon/2.$$

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当

$$|x-x_0|<\delta, |y-y_0|<\delta \text{ 且 } (x,y)\in D$$

时，又有

$$\left| f(x,y)-f(x_0,y_0) \right| \le \left| f(x,y)-f(x,y_0) \right|$$

$$+\left| f(x,y_0)-f(x_0,y_0) \right| < \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon,$$

即 f 在 (x_0, y_0) 连续. 由 (x_0, y_0) 的任意性, 便知 f 在 D 上处处连续.

(ii) $\forall (x_0, y_0) \in D$. 因 $f(x_0, y)$ 在 y_0 连续, 故 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$, 当 $|y - y_0| < \delta_1$ 时, 有

$$|f(x_0, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon/2;$$

又由 f 对 x 的连续关于 y 是一致的, 故 $\exists \delta_2 > 0$, 使当 $|y - y_0| < \delta_2$, 且 $(x, y) \in D$ 时, 有

$$|f(x, y) - f(x_0, y)| < \varepsilon/2.$$

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$

且 $(x, y) \in D$ 时, 又有

$$\left| f(x,y) - f(x_0, y_0) \right| \le \left| f(x,y) - f(x_0, y) \right|$$

$$+ \left| f(x_0, y) - f(x_0, y_0) \right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

这就证得 f 在 D 上处处连续.

※ 连续函数的局部性质

若二元函数在某一点连续, 则与一元函数一样, 可以证明它在这一点近旁具有局部有界性、局部保号性以及相应的有理运算的各个法则.

定理1 **(复合函数的连续性)** 设函数 $u=\varphi(x,y)$ 和 $v=\psi(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义, 并在点 P_0 连续; $f(u,v)$ 在点 $Q_0(u_0,v_0)$ 的某邻域内有定义, 并在点 Q_0 连续, 其中

$$u_0=\varphi(x_0,y_0),\ v_0=\psi(x_0,y_0).$$

则复合函数 $g(x,y)=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 在点 P_0 也连续.

证 由 f 在点 Q_0 连续可知: $\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0$, 使得当

$|u-u_0|<\eta,\ |v-v_0|<\eta$ 时, 有

$$|f(u,v)-f(u_0,v_0)|<\varepsilon.$$

又由 φ、ψ 在点 P_0 连续可知：对上述 $\eta>0, \exists\delta>0,$

使得当 $|x-x_0|<\delta, |y-y_0|<\delta$ 时, 有

$$|u-u_0|=|\varphi(u,v)-\varphi(u_0,v_0)|<\eta,$$

$$|v-v_0|=|\psi(u,v)-\psi(u_0,v_0)|<\eta.$$

综合起来, 当 $|x-x_0|<\delta, |y-y_0|<\delta$ 时, 便有

$$|g(x,y)-g(x_0,y_0)|=|f(u,v)-f(u_0,v_0)|<\varepsilon.$$

所以 $f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

二、有界闭域上连续函数的性质

本段讨论有界闭域上多元连续函数的整体性质. 这可以看作闭区间上一元连续函数性质的推广.

定理2.1 （有界性定理与最大最小值定理）若二元函数 f 在有界闭域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上连续, 则 f 在 D 上有界, 且能取得最大值与最小值.

证 先证明 f 在 D 上有界. 倘若不然, 则 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, 存在 $P_n \in D$, 使得

$$|f(P_n)| > n\ ,\ \ n = 1, 2, \cdots. \tag{3}$$

于是得到一个有界点列 $\{P_n\} \subset D$, 且能使 $\{P_n\}$ 中有无穷多个不同的点. 由聚点定理的推论, $\{P_n\}$ 存在收敛子列 $\{P_{n_k}\}$, 设 $\lim\limits_{k\to\infty} P_{n_k} = P_0$. 因 D 是闭域, 从而 $P_0 \in D$. 又因 f 在 D 上连续, 当然在点 P_0 也连续, 于是有

$$\lim_{k\to\infty} f(P_{n_k}) = f(P_0).$$

这与不等式 (3) 矛盾，所以 f 是 D 上的有界函数.

下面证明 f 在 D 上能取到最大、小值. 为此设

$$m = \inf f(D), \quad M = \sup f(D).$$

可证必有一点 $Q \in D$, 使 $f(Q) = M$ (同理可证存在

$Q' \in D$, 使 $f(Q') = m$). 如若不然, 对任意 $P \in D$, 都有 $M - f(P) > 0$. 考察 D 上的正值连续函数

$$F(P) = \frac{1}{M - f(P)},$$

由前面的证明知道, F 在 D上有界. 又因 f 不能在 D 上达到上确界 M, 所以存在收敛点列 $\{P_n\} \subset D$, 使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(P_n) = M$. 于是有 $\lim\limits_{n\to\infty} F(P_n) = +\infty$, 这导致与 F 在 D 上有界的结论相矛盾, 从而证得 f 在 D 上能取到最大值.

定理2.3 **(一致连续性定理)** 若函数 f 在有界闭域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上连续, 则 f 在 D 上一致连续. 即 $\forall \varepsilon > 0$, 存在只依赖于 ε 的 $\delta > 0$, 使得对一切满足 $\rho(P, Q) < \delta$ 的点 $P, Q \in D$, 必有 $|f(P) - f(Q)| < \varepsilon$.

证 本定理可用有限覆盖定理来证明, 也可以用聚点定理来证明. 这里我们采用后一种证法.

倘若 f 在 D 上连续而不一致连续, 则存在某 $\varepsilon_0 > 0$, 对于任意小的 $\delta > 0$, 例如 $\delta = 1/n$, $n = 1, 2, \cdots$, 总有

相应的 P_n 、$Q_n \in D$, 虽然 $\rho(P_n, Q_n) < 1/n$, 但是

$$|f(P_n) - f(Q_n)| \geq \varepsilon_0.$$

由于 D 为有界闭域, 因此存在收敛子列$\{P_{n_k}\} \subset \{P_n\}$,

并设 $\lim\limits_{k\to\infty} P_{n_k} = P_0 \in D$. 再在 $\{Q_n\}$中取出与$\{P_{n_k}\}$下

标相同的子列$\{Q_{n_k}\}$, 则因

$$0 \leq \rho(P_{n_k}, Q_{n_k}) < 1/n_k \to 0, k \to \infty,$$

有 $\lim\limits_{k\to\infty} Q_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} P_{n_k} = P_0$. 最后, 由 f 在 P_0 连续, 得

$$\lim_{k\to\infty}|f(P_{n_k})-f(Q_{n_k})|=|f(P_0)-f(Q_0)|=0.$$

这与 $|f(P_{n_k})-f(Q_{n_k})|\geq\varepsilon_0>0$ 相矛盾, 所以 f 在 D 上一致连续.

定理2.2 （介值性定理） 设函数 f 在区域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上连续, 若 P_1, P_2 为 D 中任意两点, 且 $f(P_1)<f(P_2)$, 则对任何满足不等式

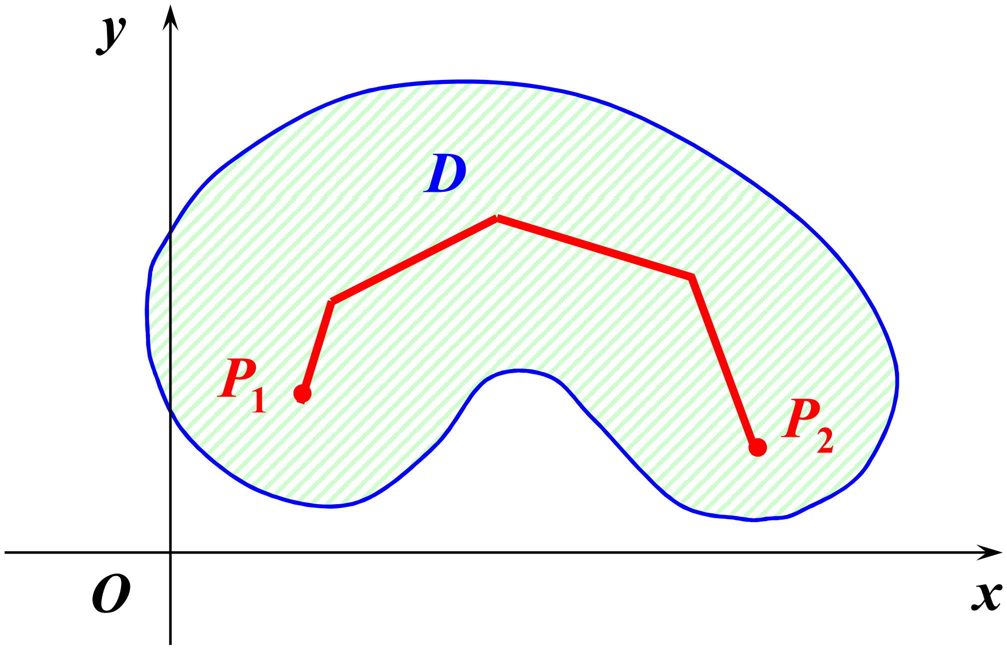
$$f(P_1)<\mu<f(P_2) \tag{4}$$

的实数 μ, 必存在点 $P_0\in D$, 使得 $f(P_0)=\mu$.

证 作辅助函数

$$F(P)=f(P)-\mu,\quad P\in D.$$

易见 F 仍在 D 上连续, 且由 (4) 式知道 $F(P_1)<0$, $F(P_2)>0$. 下面证明必存在 $P_0\in D$, 使 $F(P_0)=0$.



由于 D 为区域, 我们可以用有限段都在 D 中的折线连结 P_1 和 P_2 (如上图).

若有某一个连接点所对应的函数值为 0, 则定理得证. 否则从一端开始逐段检查, 必定存在某直线段, 使得 F 在它两端的函数值异号. 不失一般性, 设连结 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 的直线段含于 D, 其方程为

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1), \end{cases} \quad 0 \le t \le 1.$$

在此直线段上, F 变为关于 t 的复合函数:

$$G(t) = F(x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1)), 0 \le t \le 1.$$

由于 G 为 [0, 1] 上的一元连续函数, 且

$$F(P_1) = G(0) < 0 < G(1) = F(P_2),$$

因此由一元函数根的存在定理, 在 (0, 1) 内存在一点 t_0, 使得 $G(t_0) = 0$. 记

$$x_0 = x_1 + t_0(x_2 - x_1), y_0 = y_1 + t_0(y_2 - y_1),$$

则有 $P_0(x_0, y_0) \in D$, 使得

$$F(P_0) = G(t_0) = 0, \text{即} f(P_0) = \mu.$$

注1 定理1 与 2 中的有界闭域 D 可以改为有界闭集 (证明过程无原则性变化). 但是介值性定理中所考察的点集 D 只能假设是一区域, 这是为了保证它具有连通性, 而一般的开集或闭集是不一定具有连通性的.

注2 由定理3 又可知道, 若 f 为区域 D 上的连续函数, 则 $f(D)$ 必定是一个区间 (有限或无限).

例3 设 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续，又有函数序列 $\{\varphi_k(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛,且

$$c\le\varphi_k(x)\le d,\ \ x\in[a,b],\ \ k=1,2,\cdots.$$

试证 $\{F_k(x)\}=\{f(x,\varphi_k(x))\}$ 在 $[a,b]$ 上也一致收敛.

证　由定理2 知道 f 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上一致连续. 于是, $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 当 $x\in[a,b],\ y',y''\in[c,d],$ 且 $|y'-y''|<\delta$ 时,总有

$$|f(x,y')-f(x,y'')|<\varepsilon.$$

又$\{\varphi_k\}$在$[a,b]$上一致收敛, 故$\exists K>0$, 当 $n,m>K$ 时, 对一切$x\in[a,b]$, 有$|\varphi_n(x)-\varphi_m(x)|<\delta$; 故又有

$$|F_n(x)-F_m(x)|=|f(x,\varphi_n(x))-f(x,\varphi_m(x))|<\varepsilon.$$

这就证得$\{F_k(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛.