对比微积分:

1. 实数理论(实数域的完备性)

确界存在定理 $\Longrightarrow$ 单调有界数列必收敛

$a=\sup A$:
① $\forall x\in A$, 有 $x\le a$;
② $\forall\varepsilon>0$, $\exists y\in A$, s.t. $y>a-\varepsilon$

$\Downarrow$

闭区间套定理

$\Downarrow$

Weierstrass定理
(子列)

$\Downarrow$

Cauchy收敛原理

(Cauchy数列 $\{a_n\}$: $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, s.t. $\forall m,n>N$ 时有 $|a_m-a_n|<\varepsilon$.)

2. 闭区间$[a,b]$上连续函数的性质及证明

有界性或最值定理(利用Weierstrass定理)

(局部有界 vs 整体有界)

零点存在定理 或 介值定理

(闭区间套定理)

3. 函数一致连续的概念与性质

$f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上:

① $\forall x_0\in[a,b]$, $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, s.t. $\forall |x-x_0|<\delta$, 有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

② $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, s.t. $\forall |x_1-x_2|<\delta$, 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

反面

$\exists \varepsilon_0>0$, $\forall \delta>0$, 都 $\exists |x_1-x_2|<\delta$, s.t. $|f(x_1)-f(x_2)|\geq\varepsilon_0$

例: $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上连续, 但非一致连续.

取 $x_1=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$

$x_2=\frac{1}{2n\pi}$

4. Riemann可积的定义与充要条件(三个)

条件: $[a,b]$ 上的有界函数

引入: Darboux和

$\overline{S}(P)$ $\underline{S}(P)$

Darboux定理

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 则

$\inf\limits_{P}\overline{S}(P)$, $\sup\limits_{P}\underline{S}(P)$ 都存在

Riemann可积的第二充要条件

$\forall \varepsilon>0$, $\exists P$, s.t.
$\overline{S}(P)-\underline{S}(P)<\varepsilon$.
(典型例子：Riemann函数是可积的.)

5. 函数项级数(内闭)一致收敛的概念与性质

令 $S_n(x)=a_1(x)+a_2(x)+\dots a_n(x)$ 且 $S_n(x)\to S(x)$, $\forall x\in I$

① $\forall x\in I$, $\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, s.t. $\forall n>N$, 有 $|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$.

② $\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, s.t. $\forall n>N$时, 对 $\forall x\in I$, 都有 $|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$.

Motivation:

① 若 $S_n(x)$, $\forall n$, 在 I 上连续 $\Rightarrow$ $S(x)$ 在 I 上连续?
且 $S_n(x)\to S(x)$, $\forall x\in I$

No!
反例: 级数: $x+(x^2-x)+\dots+(x^n-x^{n-1})+\dots$
则 $S_n(x)=x^n \longrightarrow S(x)=\begin{cases}0, & |x|<1\\ 1, & x=1\end{cases}$

② 若 $S_n(x)$, $\forall n$, 在 I 上可微 $\overset{?}{\Rightarrow}$ $S(x)$ 在 I 上可微 且 $S'(x)=\lim\limits_n S_n'(x)$

No! 反例: $S_n(x)=\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, $x\in\mathbb{R}$

③ 若 $S_n(x)$, $\forall n$, 在 $[a,b]$ 上可积, $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx=\int_a^b \lim\limits_n S_n(x)dx$

No! 反例

$$S_n(x) = \begin{cases} 1, & 当\ x\cdot n!\ 为整数 \\ 0, & 其他\ x \end{cases}, \quad x\in[0,1]$$

则 $$S_n(x) \to D(x) = \begin{cases} 1, & x\in Q \\ 0, & x\in Q^c \end{cases}$$

但 $\int_0^1 \underline{S_n}(x)\,dx = 0,\ \forall n$; $\int_0^1 D(x)$ 非.

上述"?"成立的条件是: $S_n(x) \xrightarrow{一致} S(x)$.