$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}=\frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{g'(\xi_1)-g'(0)}=\frac{f''(\xi_2)}{g''(\xi_2)}=\cdots=\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})-f^{(n-1)}(0)}{g^{(n-1)}(\xi_{n-1})-g^{(n-1)}(0)}$$

$$=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{g^{(n)}(\xi_n)}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!},$$

其中 $\xi_1\in(0,x),\xi_k\in(0,\xi_{k-1}),k=2,3,\cdots,n,\theta\in(0,1),\theta x=\xi_n$.

故　$f(x)=\dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n,\theta\in(0,1)$.

7. 设抛物线 $y=-x^2+Bx+C$ 与 x 轴有两个交点 $x=a,x=b(a<b)$. 函数 f 在$[a,b]$上二阶可导,$f(a)=f(b)=0$,并且曲线 $y=f(x)$与 $y=-x^2+Bx+C$ 在(a,b)内有一个交点. 证明:存在 $\xi\in(a,b)$,则 $f''(\xi)=-2$.

证　令 $F(x)=f(x)+x^2-Bx-C$,$F(x)$在$[a,b]$上二阶可导,且 $F(a)=F(b)=0$. 设曲线 $y=f(x)$与 $y=-x^2+Bx+C$ 在(a,b)内的交点为$(c,f(c))$,则 $F(c)=0$. 在$[a,c]$与$[c,b]$上对 $F(x)$应用 Rolle 定理,$\exists\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$使 $F'(\xi_1)=0=F'(\xi_2)$.

再在$[\xi_1,\xi_2]$上对 $F'(x)$使用 Rolle 定理,$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$,使 $F''(\xi)=0$,即 $\exists\xi\in(a,b)$,使 $f''(\xi)=-2$.

8. 设 f 在$[a,b]$上二阶可微,$f(a)=f(b)=0$,$f'_+(a)f'_-(b)>0$,则方程 $f''(x)=0$ 在(a,b)内至少有一个根.

证　因为 $f'_+(a)f'_-(b)>0$,不妨设 $f'_+(a)>0$,则 $f'_-(b)>0$.

由 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0\Rightarrow\exists x_1>a$ 使 $f(x_1)>f(a)=0$,

再由 $f'_-(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$ 得 $\exists x_2<b$,且 $x_1<x_2$ 使 $f(x_2)<0$.

f 在$[a,b]$上二阶可导知 f 在$[a,b]$上连续,由连续函数零点定理可得 $\exists c\in(a,b)$使 $f(c)=0$,对 $f(x)$在$[a,c]$,$[c,b]$上分别应用 Rolle 定理,$\exists\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$,使 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$. 又对 $f'(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$上应用 Rolle 定理,$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$使 $f''(\xi)=0$.

习　题　2.5

(A)

2. 写出下列函数的 Maclaurin 公式:

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$;　　(2) $f(x)=\ln(1-x)$;

(3) $f(x)=\text{ch }x$; (4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

解 (1) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}=1-(-x)+(-x)^2-(-x)^3+\cdots+$

$$(-1)^n(-x)^n+(-1)^{n+1}\frac{(-x)^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}}.$$

$$=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\frac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}},$$

$x\in(-\infty,1),\theta\in(0,1)$.

(2) $f(x)=\ln(1-x)=\ln[1+(-x)]$

$$=(-x)-\frac{1}{2}(-x)^2+\frac{1}{3}(-x)^3-\frac{1}{4}(-x)^4+\cdots+$$

$$(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}+(-1)^n\frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)(1-\theta x)^{n+1}},$$

$$=-\left[x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+\frac{x^n}{n}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-\theta x)^{n+1}}\right],$$

其中 $x\in(-\infty,1),\theta\in(0,1)$.

(3) 因为 $f(x)=\text{ch }x,f'(x)=\text{sh }x,f''(x)=\text{ch }x,\cdots f^{(2n-1)}(x)=\text{sh }x$, $f^{(2n)}(x)=\text{ch }x$,故 $f^{(2n-1)}(0)=0,f^{(2n)}(0)=1(n\in\mathbf{N}_+)$,故

$$f(x)=\text{ch }x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2m}}{(2m)!}+\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\text{ch }\theta x,\theta\in(0,1),x\in(-\infty,+\infty).$$

(4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}=[1+(-2x)]^{-\frac{1}{2}}$

$$=1-\frac{1}{2}(-2x)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)(-2x)^2+\cdots+$$

$$\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)(-2x)^n+$$

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n\right)\frac{(-2x)^{n+1}}{(1-2\theta x)^{n+\frac{3}{2}}}$$

$$=1+x+\frac{4!}{2^2(2!)^2}x^2+\cdots+\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n+\frac{(2n+2)!}{2^{n+1}[(n+1)!]^2}\frac{x^{n+1}}{(1-2\theta x)^{n+\frac{3}{2}}}.$$

其中 $x\in\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right),\theta\in(0,1)$.

3. 求下列函数在指定点处带 Peano 余项的 Taylor 公式:

(3) $f(x)=e^{2x},x_0=1$; (4) $f(x)=\sin x,x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

解 (3) $f(x)=e^{2x}=e^2e^{2(x-1)}$

$$=e^2\left[1+2(x-1)+\frac{2^2}{2!}(x-1)^2+\cdots+\frac{2^n}{n!}(x-1)^n+\right.$$

$$o((x-1)^{n+1})\Big],$$

其中 $x\to 1$.

(4) $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$，于是

$$f^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}\right)=\begin{cases}(-1)^k\dfrac{1}{\sqrt{2}}, & n=2k,\\ (-1)^k\dfrac{1}{\sqrt{2}}, & n=2k+1.\end{cases}$$

故

$$\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\cdots+\right.$$
$$\left.\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}\right)\right],$$ x 在 $\dfrac{\pi}{4}$ 的附近.

4. 设 $f(x)=x^2\sin x$，求 $f^{(99)}(0)$.

解 $f(x)$ 的 Maclaurin 公式为

$$f(x)=x^2\left[x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+(-1)^{48}\frac{x^{97}}{(97)!}+\cdots+\right.$$
$$\left.(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+(-1)^m\frac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1}\right]$$
$$=x^3-\frac{1}{3!}x^5+\cdots+\frac{x^{99}}{(97)!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m+1}}{(2m-1)!}+(-1)^m\frac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+3},$$
$$x\in(-\infty,+\infty),$$

故 $\dfrac{f^{(99)}(0)}{99!}=\dfrac{1}{(97)!}$，即 $f^{(99)}(0)=99\times 98$.

7. 求下列极限：

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$； (2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$；

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$； (4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{x^2\sin x^2}$.

解 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[1+x+\frac{1}{2}x^2+o_1(x^3)\right]\left[x-\frac{1}{6}x^3+o_2(x^3)\right]-x-x^2}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o_3(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-x^3\left(1+\frac{1}{x^6}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o_1\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)-\right.$$

$$\left.x^3\left(1+\frac{1}{2x^6}+o_2\left(\frac{1}{x^6}\right)\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{12x}+\frac{1}{12x^2}-\frac{1}{2x^3}+\alpha(x)\right]=\frac{1}{6},$$

其中 $\alpha(x)=\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)o_1\left(\frac{1}{x^3}\right)-x^3o_2\left(\frac{1}{x^6}\right)$，且

$$\lim_{x\to+\infty}\alpha(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}\right)\frac{o_1\left(\frac{1}{x^3}\right)}{\frac{1}{x^3}}-\frac{o_2\left(\frac{1}{x^6}\right)}{\frac{1}{x^6}}\cdot\frac{1}{x^3}\right]=0.$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{1}{2}.$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{x^2\sin x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}+1-\left[1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^4+o(x^4)\right]}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{8}+\frac{o(x^4)}{x^4}\right]=\frac{1}{8}.$$

8. 设 $f(0)=0,f'(0)=1,f''(0)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}$.

解 $f(x)$带 Peano 余项的 Maclaurin 公式为

$$f(x)=x+x^2+o(x^2),$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+o(x^2)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{o(x^2)}{x^2}\right]=1.$$

(B)

1. 设函数 $f:[0,2]\to\mathbf{R}$ 在$[0,2]$上二阶可导，并且满足$|f(x)|\leqslant 1,|f''(x)|\leqslant 1$，证明：在$[0,2]$上必有$|f'(x)|\leqslant 2$.

证　$\forall x_0\in[0,2]$，$f(x)$在 $x=x_0$ 处的带 Lagrange 余项的 Taylor 公式为

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2$，$\xi$介于$x$与$x_0$之间，

则 $f(2)=f(x_0)+f'(x_0)(2-x_0)+\dfrac{1}{2}f''(\xi_1)(2-x_0)^2$，　$\xi_1\in(x_0,2)$，

$$f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(-x_0)^2,\qquad \xi_2\in(0,x_0).$$

$$f(2)-f(0)=2f'(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(2-x_0)^2-\frac{1}{2}f''(\xi_2)x_0^2.$$

又因为 $|f(x)|\leqslant 1$，$|f''(x)|\leqslant 1$，$x\in[0,2]$，故

$$2|f'(x_0)|\leqslant|f(2)|+|f(0)|+\frac{1}{2}x_0^2|f''(\xi_2)|+\frac{1}{2}(2-x_0)^2|f''(\xi_1)|$$

$$\leqslant 2+\frac{1}{2}[x_0^2+(2-x_0)^2]$$

又因为当 $0\leqslant x_0\leqslant 2$ 时，$2\leqslant x_0^2+(2-x_0)^2\leqslant 4$，所以 $|f'(x_0)|\leqslant 2$，

故 $\forall x\in[0,2]$，$|f'(x)|\leqslant 2$.

2. 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 二阶可导，并且 $|f(x)|<k_0$，$|f''(x)|<k_2$，k_0，k_2 为正常数.

(1) 写出 $f(x+h)$ 与 $f(x-h)$ 的 Taylor 公式($h>0$)；

(2) 证明：$\forall h>0$，$|f'(x)|\leqslant\dfrac{k_0}{h}+\dfrac{h}{2}k_2$；

(3) 求 $\varphi(h)=\dfrac{k_0}{h}+\dfrac{h}{2}k_2$ 在$(0,+\infty)$上的最小值.

(4) 证明：$k_1\leqslant\sqrt{2k_0k_2}$，其中 $k_1=\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|f'(x)|$.

解　(1) $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\dfrac{f''(\xi_1)}{2!}h^2$，　$\xi_1\in(x,x+h)$，

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{f''(\xi_2)}{2!}h^2,\quad \xi_2\in(x-h,x).$$

(2) 由(1)知 $f(x+h)-f(x-h)=2f'(x)h+\dfrac{h^2}{2}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)]$，

则 $|f'(x)|\leqslant\left|\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\right|+\dfrac{h}{4}(|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|)$

$$\leqslant\frac{k_0}{h}+\frac{h}{2}k_2.$$

(3) $\varphi'(h)=-\dfrac{k_0}{h^2}+\dfrac{1}{2}k_2$，令 $\varphi'(h)=0$ 得驻点 $h_0=\sqrt{\dfrac{2k_0}{k_2}}$. 又因为 $\varphi''(h)=\dfrac{2k_0}{h^3}>0$，故 $\varphi_{\min}(h)=\varphi(h_0)=\sqrt{2k_0k_2}$.

(4) 由于 $\forall x\in\mathbf{R}$ 和 $h>0$，$|f'(x)|\leqslant\varphi(h)$，所以 $|f'(x)|\leqslant\varphi(h_0)$，由上确界定义 $k_1=\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|f'(x)|\leqslant\sqrt{2k_0k_2}$.

3. 设 $f\in C^{(3)}[0,1]$，$f(0)=1$，$f(1)=2$，$f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$，证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $|f'''(\xi)|\geqslant 24$.

证　f 在 $x_0=\frac{1}{2}$ 处的 Taylor 展开式为

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2!}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)^3,$$

其中 ξ 介于 x 与 $\frac{1}{2}$ 之间. 于是

$$1=f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}f'''(\xi_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^3,\quad \xi_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right),$$

$$2=f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}f'''(\xi_2)\left(\frac{1}{2}\right)^3,\qquad \xi_2\in\left(\frac{1}{2},1\right),$$

两式相减得　$\frac{1}{48}[f'''(\xi_2)+f'''(\xi_1)]=1$，即 $f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)=48$，故 $f'''(\xi_1)$ 与 $f'''(\xi_2)$ 中至少有一个大于 24. 即 $\exists\,\xi\in(0,1)$，使 $f'''(\xi)>24$.

4. 设函数 f 在 $x=0$ 的某邻域内有二阶导数，且

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3.$$

试求 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解　由 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}}=\mathrm{e}^3$ 可知 $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]=0$，即 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]=1$，从而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$. 又由 f 在 $x=0$ 的某邻域内有二阶导数知：$f(x)$，$f'(x)$ 在 $x=0$ 连续，故 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，从而

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0.\end{aligned}$$

令 $g(x)=\left[1+\left(x+\frac{f(x)}{x}\right)\right]^{\frac{1}{x+\frac{f(x)}{x}}}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\mathrm{e}$. 又因为 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=$

$\lim\limits_{x\to0} g(x)^{\frac{1}{x}\left[x+\frac{f(x)}{x}\right]}=\mathrm{e}^3$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\dfrac{f''(0)}{2}$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left[x+\dfrac{f(x)}{x}\right]=1+\dfrac{1}{2}f''(0)=3$，即 $f''(0)=4$，故 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}}\right]^{\frac{f(x)}{x^2}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}f''(0)}=\mathrm{e}^2$.

习 题 2.6

(A)

1. 单调可微函数的导函数仍为单调可微函数，对吗？

解 不对. 导函数不一定可微. 且即使导函数可微. 我们知道，函数的单调性与区间有关，例如 $f(x)=\operatorname{sh}x$，$f'(x)=\operatorname{ch}x$，对不同的区间有下列各种情况：

(1) $\operatorname{sh}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是单增函数，但 $\operatorname{ch}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 不是单调函数.

(2) $\operatorname{sh}x$ 在 $(-\infty,0)$ 是单增函数，但 $\operatorname{ch}x$ 在 $(-\infty,0)$ 是单减函数.

(3) $\operatorname{sh}x$ 在 $(0,+\infty)$ 是单增函数，但 $\operatorname{ch}x$ 在 $(0,+\infty)$ 也是单增函数.

3. 求下列函数的单调区间：

(4) $y=x+|\sin 2x|$.

解
$$y=\begin{cases}x+\sin 2x, & m\pi\leqslant x<(2m+1)\dfrac{\pi}{2},\\ x-\sin 2x, & (2m+1)\dfrac{\pi}{2}\leqslant x<(m+1)\pi,\end{cases}$$ 则
$$y'=\begin{cases}1+2\cos 2x, & m\pi<x<(2m+1)\dfrac{\pi}{2},\\ 1-2\cos 2x, & (2m+1)\dfrac{\pi}{2}<x<(m+1)\pi.\end{cases}$$

而 $x=\dfrac{n\pi}{2}$，为 y 的不可导点. 其中 $m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

$1+2\cos 2x=0$ 在 $\left(m\pi,(2m+1)\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内有唯一根 $x_{m_2}=m\pi+\dfrac{\pi}{3}$，

$1-2\cos 2x=0$ 在 $\left((2m+1)\dfrac{\pi}{2},(m+1)\pi\right)$ 内有唯一根 $x_{m_1}=m\pi+\dfrac{5\pi}{6}$.

且当 $x\in\left(m\pi,m\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)\cup\left(m\pi+\dfrac{\pi}{2},m\pi+\dfrac{5\pi}{6}\right)$，$y'>0$，严格单增.