5. 证明

(1) 若曲线在每一点处的切线都经过一个定点，则该曲线必是一条直线.

(2) 若曲线在每一点处的密切平面都经过一个定点，则该曲线必是一条平面曲线.

证明　(1) 设曲线的自然参数方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，则 $\boldsymbol{r}(s)$ 处的切线方程为 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(s)+\lambda\boldsymbol{r}'(s)$. 不妨设每一点的切线都过定点 P_0（向径为 $\boldsymbol{r}_0$），则 $\forall s\in\mathbf{R}$，$\exists\lambda\in\mathbf{R}$，使 $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}(s)+\lambda\boldsymbol{r}'(s)$. 两边对 s 求导，则有 $\boldsymbol{r}'(s)+\lambda\boldsymbol{r}''(s)=0$. (∗)

又因为 $\|\boldsymbol{r}'\|=1$，所以 $\boldsymbol{r}'(s)\perp\boldsymbol{r}''(s)$，故 $\boldsymbol{r}''(s)=0$.（如 $\boldsymbol{r}'(s)=0$，同样可得 $\boldsymbol{r}''(s)=0$）. 故曲率 $\|\boldsymbol{r}''(s)\|=0$ 的曲线为直线.

(2) 曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$（$s$ 为自然参数）的密切平面的方程为

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(s)+\lambda(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'').$$

因为密切平面都过定点 P_0（向径为常向量 $\boldsymbol{r}_0$），则 $\exists\lambda\in\mathbf{R}$，$\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}(s)+\lambda(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'')$. 两边对 s 求导可得

$$0=\boldsymbol{r}'(s)+\lambda(\boldsymbol{r}''\times\boldsymbol{r}''+\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'''),$$

即
$$\boldsymbol{r}'(s)+\lambda(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''')=0.$$

于是
$$\boldsymbol{r}''(s)\cdot[\boldsymbol{r}'(s)+\lambda(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''')]=0.$$

考虑到 $\|\boldsymbol{r}'\|=1$，即 $\boldsymbol{r}'\perp\boldsymbol{r}''$，从而 $\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}''=0$，可知

$$(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''')=-(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}''',\boldsymbol{r}'')=0.$$

即任一点处挠率 $\tau(s)=0$，故曲线为平面曲线.

综合练习题

1. 已知某工厂过去几年的产量与利润的数据如下：

产量 x/千件	40	47	55	70	90	100
利润 y/千元	32	34	43	54	72	85

通过把这些数据 (x_i,y_i) $(i=1,\cdots,6)$ 所对应的点描在坐标纸上，可以看出这些点的连线接近于一条直线，因此可以认为利润 y 与产量 x 的函数关系是线性函数，试利用最小二乘法求出这个线性函数，并估计当产量达到 120 千件时该工厂的利润是多少？

解　依题意可采用线性函数 $y=a+bx$ 对利润进行拟合. 按照最小二乘法，问题就归结为选择参数 a,b 使得偏差平方和

$$Q(a,b)=\sum_{i=1}^{6}(a+bx_i-y_i)^2$$

为最小. 利用极值的必要条件得

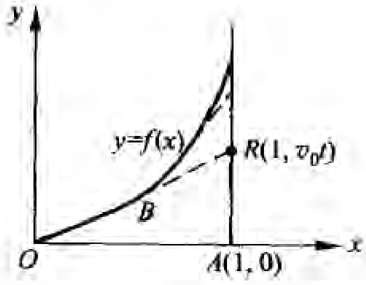
$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q}{\partial a}=2\sum\limits_{i=1}^{6}(a+bx_i-y_i)=0,\\ \dfrac{\partial Q}{\partial b}=2\sum\limits_{i=1}^{6}(a+bx_i-y_i)x_i=0,\end{cases}$$

解之得 $Q(a,b)$ 有唯一驻点

$$\bar{b}\approx0.884,\quad \bar{a}\approx-5.881.$$

可以证明 $(\bar{a},\bar{b})$ 是 $Q(a,b)$ 的最小值点. 因此所求利润函数的最佳拟合曲线是 $y=0.884x-5.881$. 且当产量达到 120 千件时，利润 $y=0.884\times120-5.881\approx100.2$.

2. 位于坐标原点的我舰向位于点 $A(1,0)$ 处的敌舰发射鱼雷，已知敌舰以常速度 v_0 沿直线 $x=1$ 逃窜，鱼雷的速度为 $5v_0$，试求鱼雷的轨迹曲线方程 $y=f(x)$，并求何时击中敌舰.



（第 2 题）

解　取过原点与敌舰逃跑方向相同的直线为 y 轴，如图所示.

从我舰发射鱼雷开始（$t=0$ 时刻），t 时刻，敌舰的位置到达 $R(1,v_0t)$ 点，鱼雷到达 $B(x,y)$. 由于鱼雷在运动的过程中方向始终指向敌舰，所示直线 BR 与鱼雷的航线 $y=f(x)$ 相切，即

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v_0t-y}{1-x},\frac{ds}{dt}=5v_0.$$

其中 s 为鱼雷的位移. 为了找出 x 与 y 的关系，需设法消去变量 t. 上述第一式两边对 x 求导得 $(1-x)\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}=v_0\dfrac{dt}{dx}-\dfrac{dy}{dx}$. 又 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{dt}{ds}\cdot\dfrac{ds}{dx}=\dfrac{1}{5v_0}\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ 代入上式整理可得二阶微分方程的初值问题

$$\begin{cases}(1-x)\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{5}\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2},\quad(E_1)\\ y(0)=0,y'(0)=0.\end{cases}$$

令 $p=\dfrac{dy}{dx}$ 代入 (E_1) 可得 $\begin{cases}(1-x)\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{1}{5}\sqrt{1+p^2},\\ p(0)=0.\end{cases}$ 解此一阶可分离变量的微分方程的初值问题可得：

$$p+\sqrt{1+p^2}=\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{5}}}.$$

从而
$$-(1-x)^{\frac{1}{5}}=-\frac{1}{p+\sqrt{1+p^2}}=p-\sqrt{1+p^2}.$$

于是
$$\begin{cases}p=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{5}}-\dfrac{1}{2}(1-x)^{\frac{1}{5}},\\ y(0)=0.\end{cases}$$

解之得 $y=f(x)=-\dfrac{5}{8}(1-x)^{\frac{4}{5}}+\dfrac{5}{12}(1-x)^{\frac{6}{5}}+\dfrac{5}{24}$.

当鱼雷击中敌舰时 $x=1$. 从而敌舰逃窜的距离 $y=\dfrac{5}{24}$. 所用时间 $t=\dfrac{y}{v_0}=\dfrac{5}{24v_0}$.