5.4 A

4.(4) $z=e^{2x}(x+2y+y^2)$

$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{2x}(2x+4y+2y^2+1)$ $\quad$ $\frac{\partial z}{\partial y}=e^{2x}(2+2y)$

$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=-1\end{cases}$ $\quad$ $H_f(\frac{1}{2},-1)=\begin{pmatrix}2e, & 0\\ 0, & 2e\end{pmatrix}$ 正定.

$\therefore$ 在 $(\frac{1}{2},-1)$ 处取极小值 $-\frac{e}{2}$

5.(2) $z=x^3+y^3-3xy$ $\quad$ $D=\{(x,y)\mid |x|\le 2, |y|\le 2\}$

$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$

$H_f(0,0)=\begin{pmatrix}0 & -3\\ -3 & 0\end{pmatrix}$ 不是正定

$H_f(1,1)=\begin{pmatrix}6 & -3\\ -3 & 6\end{pmatrix}$ 正定 $\therefore (1,1)$ 为极小值点

$x=2$, $z=8+y^3-6y$, 最大值为 $8+4\sqrt{2}$, 最小值为 -12

$x=-2$, $z=8+y^3+6y$, 最大值为 12, 最小值为 -28

$\therefore$ 最大值为 $8+4\sqrt{2}$, 最小值为 -28

12. 设长、宽、高为 x, y, z

则 $\varphi(x, y, z) = xyz - V = 0$

造价 $f = 4xy + 4yz + 4xz$

令 $F = f + \lambda\varphi(x, y, z)$

$$\begin{cases} F_x = 4y + 4z + \lambda yz - V\lambda = 0 \\ F_y = 4x + 4z + \lambda xz - V\lambda = 0 \\ F_z = 4x + 4y + \lambda xy - V\lambda = 0 \\ F_\lambda = xyz - V = 0 \end{cases}$$ 解得 $$\begin{cases} \lambda = \dfrac{8}{\sqrt[3]{V}} \\ x = y = z = \sqrt[3]{V} \end{cases}$$

$$H_f(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}) = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{V} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{V} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{V} \end{pmatrix}$$ 正定，$\therefore (\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V})$ 为极值点

$\therefore$ 当长、宽、高都等于 $\sqrt[3]{V}$ 时，造价最小