Discussion problem assignment:

第二章作业：2.3, 2.5, 2.10, 2.12, 2.19, 2.20, 2.23, 2.28(a, b, c), 2.40, 2.46

第一题：

对以下输入信号和 LTI 系统单位冲激响应信号，求对应的系统输出信号。

$$x[n]=\begin{cases}2, & \text{if } 3\le n\le 5\\ 1, & \text{if } 0\le n\le 2, 6\le n\le 8\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$h[n]=u[n]-u[n-6]$$

答案：

当然可以按照上课讲的图解方法直接求解，但是更简单的方法是利用测验时完成的两个等宽度方波脉冲卷积的结果，结合 LTI 性质完成。

假设已知结果 $x_1[n]=h[n], y_1[n]=x_1[n]*h[n]$，通过对信号 x[n]的图形进行观察，可以发现

$$x[n]=x_1[n]+x_1[n-3]$$

由此可得，这道题的答案应该是 $y[n]=y_1[n]+y_1[n-3]$

第二题：

对以下输入信号和 LTI 系统单位冲激响应信号，求对应的系统输出信号。

$$x[n]=\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$h[n]=\left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n]$$

答案：

图解法的基本过程和结果和例题 2.3 相同，具体可以参考课件 22 和 23 页，只是 h[n]的具体波形有差异。

3) $n>0$

$$x[k]=\begin{cases}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k, & k\ge 0\\ 0, & k<0\end{cases}\qquad h[n-k]=\begin{cases}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-k}, & k\le n\\ 0, & k>n\end{cases}$$

$$y[n]=\sum_{k=0}^{n}x[k]h[n-k]=\sum_{k=0}^{n}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k\times\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-k}=\left(\tfrac{1}{4}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\left(\tfrac{1}{2}\big/\tfrac{1}{4}\right)^k=\left(\tfrac{1}{4}\right)^n\sum_{k=0}^{n}(2)^k$$

$$=\left(\tfrac{1}{4}\right)^n\frac{1-2^{n+1}}{1-2}=\left(\tfrac{1}{4}\right)^n\left(2^{n+1}-1\right)=2\left(\tfrac{1}{2}\right)^n-\left(\tfrac{1}{4}\right)^n$$

$$y[n]=\sum_{k=0}^{n}h[k]x[n-k]=\sum_{k=0}^{n}\left(\tfrac{1}{4}\right)^k\times\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-k}=\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\left(\tfrac{1}{4}\big/\tfrac{1}{2}\right)^k=\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k$$

$$=\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\frac{1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\tfrac{1}{2}\right)}=\left(\tfrac{1}{2}\right)^n 2\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right)=2\left(\tfrac{1}{2}\right)^n-\left(\tfrac{1}{4}\right)^n$$

$$\therefore y[n]=\left[2\left(\tfrac{1}{2}\right)^n-\left(\tfrac{1}{4}\right)^n\right]u[n]$$

其中第一种计算，可能有的同学担心等比级数求和中的比值大于 1，因此求和不收敛，但是这里并不是无穷级数求和。另外，也可以尝试第二种计算方法，既可以用 $y[n]=\sum_{k=0}^{n} x[k]h[n-k]$，也可以用 $y[n]=\sum_{k=0}^{n} h[k]x[n-k]$，可以根据计算方便选择，结果是相同的。