第五章　多元函数微分学及其应用

习　题　5.1

(A)

1. 设$\{x_k\}$为$\mathbf{R}^n$中的点列,$a\in\mathbf{R}^n$,$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=a$,证明$\lim\limits_{k\to\infty}\|x_k\|=\|a\|$.

证明　由$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=a$知对$\forall\varepsilon>0$,$\exists N\in\mathbf{N}_+$,使对$\forall k>N$,恒有$\|x_k-a\|<\varepsilon$. 又$\big|\|x_k\|-\|a\|\big|\leqslant\|x_k-a\|$,从而$\lim\limits_{k\to\infty}\|x_k\|=\|a\|$.

3. 证明定理1.2中的(2),(4).

定理1.2　设$\{x_k\}\subseteq\mathbf{R}^n$是收敛点列,则

(2) $\{x_k\}$是有界点列;

(4) 若$\{x_k\}$收敛于a,则其任一子列也收敛于a.

证明(2)　设$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=a$,则对$\varepsilon_0=1$,$\exists N_0\in\mathbf{N}_+$,使对$\forall k>N_0$,恒有$\|x_k-a\|<1$. 从而$\|x_k\|\leqslant1+\|a\|$,对$\forall k>N_0$.

令$M=\max\{\|a\|+1,\|x_1\|,\|x_2\|,\cdots,\|x_{N_0}\|\}$,则对$\forall k\in\mathbf{N}_+$,$\|x_k\|\leqslant M$,即$\{x_k\}$为有界点列.

(4) 由$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=a$知对$\forall\varepsilon>0$,$\exists N\in\mathbf{N}_+$,使$\forall k>N$,恒有$\|x_k-a\|<\varepsilon$,则子列$\{x_{k_j}\}$中所有下标$k_j>N$的项$x_{k_j}$均有$\|x_{k_j}-a\|<\varepsilon$,故$\lim\limits_{j\to\infty}x_{k_j}=a$.

(B)

1. 设$A\subseteq\mathbf{R}^n$是一个点集,证明:

(1) $\mathring{A}$与ext A是开集;

证明　$\mathring{A}$是开集

对$\forall x_0\in\mathring{A}$,由内点的定义$\exists\delta>0$,使$U(x_0,\delta)\subseteq A$. 而对$\forall y_0\in U(x_0,\delta)$,令$\delta_1=\|y_0-x_0\|<\delta$,$\delta'\leqslant\min\{\delta-\delta_1,\delta_1\}$,则$U(y_0,\delta'/2)\subseteq U(x_0,\delta)\subseteq A$. 则$y_0\in\mathring{A}$,于是$U(x_0,\delta)\subseteq\mathring{A}$,即$\mathring{A}$为开集.

ext A为开集

对$\forall x_0\in\text{ext }A$,$\exists\delta>0$,使$U(x_0,\delta)\cap A=\varnothing$. 而对$\forall y_0\in U(x_0,\delta)$,令$\delta_1=$

$\| \boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{x}_0 \| <\delta,\delta'\leqslant \min\left\{\frac{1}{2}\delta_1,\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\right\}$,则 $U(\boldsymbol{y}_0,\delta')\subseteq U(\boldsymbol{x}_0,\delta)$,从而 $U(\boldsymbol{y}_0,\delta')\cap A=\varnothing$,即 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta)$ 中所有的点均为 A 的外点,即 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta)\subseteq \mathrm{ext}\ A$. 于是ext A为开集.

(2) $A',\partial A$ 是闭集;

先证 A'是闭集. 即证 A'的任一个聚点 $\boldsymbol{x}_0\in A'$. 由于 $\boldsymbol{x}_0$ 为 A'的聚点,则存在 A' 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ ($k=1,2,\cdots$,且 $\boldsymbol{x}_k\neq \boldsymbol{x}_0$)使 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}_0$,即对 $\boldsymbol{x}_0$ 的任一邻域 $\mathring{U}(\boldsymbol{x}_0,\varepsilon)$,$\exists N\in\mathbf{N}_+$,使对 $\forall k>N$,恒有 $\boldsymbol{x}_k\in\mathring{U}(\boldsymbol{x}_0,\varepsilon)$. 又由 $\mathring{U}(\boldsymbol{x}_0,\varepsilon)$ 是开集,则对 $\forall k>N$,$\exists \boldsymbol{x}_k$ 的邻域 $U(\boldsymbol{x}_k)\subseteq \mathring{U}(\boldsymbol{x}_0,\varepsilon)$,又由 $\boldsymbol{x}_k\in A'$,则 $U(\boldsymbol{x}_k)\cap A\neq\varnothing$,即 $\mathring{U}(\boldsymbol{x}_0,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing$,即在 $\boldsymbol{x}_0$ 的任何去心邻域中均含有 A 的点,由定理 1.5 知 $\boldsymbol{x}_0\in A'$.

∂A 为闭集.

由于 $\mathbf{R}^n=\mathring{A}\cup \mathrm{ext}\ A\cup\partial A$,则$\partial A=(\mathring{A}\cup\mathrm{ext}\ A)^c$. 由本题(1)及定理 1.7 知 $\mathring{A}\cup \mathrm{ext}\ A$ 为开集. 由定理 1.6,∂A 为闭集.

(3) A 为开集$\Leftrightarrow A\cap\partial A=\varnothing$.

先证 A 为开集$\Rightarrow A\cap\partial A=\varnothing$.

由 A 为开集,则 $A=\mathring{A}$,从而 $A\cap\partial A=\mathring{A}\cap\partial A=\varnothing$.

再证 $A\cap\partial A=\varnothing\Rightarrow A$ 为开集.

由 $A\cap\partial A=\varnothing$ 且 $A\cap\mathrm{ext}\ A=\varnothing$,而 $\mathring{A}=(\partial A\cup\mathrm{ext}\ A)^c$.

从而 $A\subseteq\mathring{A}$,故 $A=\mathring{A}$. 即 A 为开集.

2. 以 $n=2$ 为例证明聚点原理: $\mathbf{R}^n$ 中的有界无限点集至少有一个聚点.

证明 设 $A=\{(x_\alpha,y_\alpha)\in\mathbf{R}^2\mid \alpha\in I,I$ 为实数集$\}$为有界无限点集. 则 $\{x_\alpha\}\subseteq\mathbf{R},\{y_\alpha\}\subseteq\mathbf{R}(\alpha\in I)$ 均为有界无限集. 由数集的 Weierstrass 定理(第一章定理 2.8)知$\{x_\alpha\}$必有收敛的子列. 不妨设为$\{x_{\alpha_k}\}$,且$\lim\limits_{k\to\infty}x_{\alpha_k}=x_0$. 在$\{y_\alpha\}(\alpha\in I)$中选取与 x_{α_k}对应的 y_{α_k}(即$(x_{\alpha_k},y_{\alpha_k})\in A$)构成数列$\{y_{\alpha_k}\}$,则$\{y_{\alpha_k}\}\subseteq\{y_\alpha\}(\alpha\in I)$为有界无限数列,必有收敛的子数列. 设为$\{y_{\alpha_{k_j}}\}$,且$\lim\limits_{j\to\infty}y_{\alpha_{k_j}}=y_0$. 又由于与$\{y_{\alpha_{k_j}}\}$对应的$\{x_{\alpha_k}\}$的子列$\{x_{\alpha_{k_j}}\}$($(x_{\alpha_{k_j}},y_{\alpha_{k_j}})\in A$)也收敛于 x_0,从而 A 中存在收敛于(x_0,y_0)的点列 $A_j=(x_{\alpha_{k_j}},y_{\alpha_{k_j}})$.

习 题 5.2

(A)

3. 用定义证明下列二重极限.

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\sin\dfrac{x}{x^2+y^2}=0$;

解　由于$\left|xy\sin\dfrac{x}{x^2+y^2}\right|\leqslant|xy|\leqslant\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$. 所以对$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\sqrt{2\varepsilon}$,当$\|(x,y)-(0,0)\|=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$时,就有:

$$\left|xy\sin\frac{x}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon.\text{故}\lim_{(x,y)\to(0,0)}xy\sin\frac{x}{x^2+y^2}=0.$$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}(x^2+y^2)=2$;

解　不妨设$\|(x,y)-(1,1)\|<1$,则$|x+1|<3$, $|y+1|<3$,于是$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{6},1\right\}$. 当$\|(x,y)-(1,1)\|<\delta$时,有

$$\begin{aligned}|x^2+y^2-2|&=|(x^2-1)+(y^2-1)|\\&=|(x+1)(x-1)+(y+1)(y-1)|\\&\leqslant3(|x-1|+|y-1|)<\varepsilon.\end{aligned}$$

故$\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}(x^2+y^2)=2.$

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\dfrac{1}{2}.$

解　$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\sqrt{\varepsilon}$,当$0<\|(x,y)-(0,0)\|=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$时,恒有

$$\left|\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\frac{|xy|}{(\sqrt{xy+1}+1)^2}\leqslant\frac{1}{2}|xy|\leqslant x^2+y^2<\varepsilon.$$

故$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\dfrac{1}{2}.$

4. 证明:(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$不存在;(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x+y}$不存在.

证明　(1) 由于$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=kx}}\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{1+k}{1-k}(k\neq-1)$,故$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$不存在.

(2) 由于$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x=y}}\dfrac{xy}{x+y}=0$; $\lim\limits_{\substack{x=y^2-y\\y\to0}}\dfrac{xy}{x+y}=-1$,故$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x+y}$不存在.

6. 讨论下列函数的连续性.

(2) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$;　(4) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

解　(2) $f(x,y)$的定义域$D=\mathbf{R}^2\setminus\{(x,y)\mid x+y=0\}$.

由于 $x-y, x+y$ 均为 $\mathbf{R}^2$ 上的连续函数.

故 $f(x,y)$ 在 D 上连续，$x+y=0$ 为其间断线.

(4) 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，$f(x,y)$ 连续. 又由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在. 故 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上连续. $(0,0)$ 为其间断点 $\left(\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin kx^2}{kx^2}\cdot\dfrac{k}{1+k^2}\right)=\dfrac{k}{1+k^2}\right)$.

7. 设 $f(x,y)=\dfrac{1}{xy}, r=\sqrt{x^2+y^2}, D_1=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \,\middle|\, \dfrac{x}{k}\leqslant y\leqslant kx, k>1\text{ 为常数}\right\}, D_2=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x>0, y>0\}$.

(1) $\lim\limits_{\substack{r\to+\infty\\ (x,y)\in D_1}} f(x,y)$ 是否存在？为什么？

(2) $\lim\limits_{\substack{r\to+\infty\\ (x,y)\in D_2}} f(x,y)$ 是否存在？为什么？

解　(1) 存在. 当 $(x,y)\in D_1$ 时，$xy>0$ 且 $x>0$ 时，$\dfrac{1}{kx^2}\leqslant\dfrac{1}{xy}\leqslant\dfrac{k}{x^2}$；当 $x<0$ 时，$\dfrac{k}{x^2}\leqslant\dfrac{1}{xy}\leqslant\dfrac{1}{kx^2}$. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$，由函数极限的夹逼准则知 $\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{1}{xy}=0$.

(2) 不存在. 由于 $(x,y)\in D_2$，所以 $\lim\limits_{\substack{r\to+\infty\\ y=\frac{1}{kx}}}\dfrac{1}{xy}=\lim\limits_{x\to+\infty} k=k$.

故 $\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{1}{xy}$ 不存在.

8. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

证明　当 (x,y) 沿过点 $(0,0)$ 的每一条射线 $x=t\cos\alpha, y=t\sin\alpha\ (0<t<+\infty)$ 趋于点 $(0,0)$ 时，$f(x,y)$ 的极限等于 $f(0,0)$，即 $\lim\limits_{t\to 0} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha)=f(0,0)$，但 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不连续.

证明　$\lim\limits_{t\to 0} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}=0=f(0,0)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx^2}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{k}{1+k^2}=\frac{k}{1+k^2}\neq 0,$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续.

9. 设 $f: D\subseteq\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$，若 $f(x,y)$ 在区域 D 内对变量 x 连续，对变量 y 满足

Lipchitz条件. 即对 D 内任意两点 (x,y')，(x,y'') 有：$|f(x,y')-f(x,y'')|\leqslant L|y'-y''|$，其中 L 为常数，证明：$f(x,y)$ 在 D 内连续.

证明　$\forall (x_0,y_0)\in D$ 及 $\forall \varepsilon>0$，由于 $f(x,y)$ 在 D 内对 x 连续，必 $\exists \delta_1>0$，使当 $(x,y)\in U((x_0,y),\delta_1)\cap D$ 时，恒有

$$|f(x,y)-f(x_0,y)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta=\min\left\{\delta_1,\frac{\varepsilon}{2L}\right\}$. 那么当 $(x,y)\in U((x_0,y_0),\delta)\cap D$ 时，恒有

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(x_0,y_0)|&\leqslant|f(x,y)-f(x_0,y)|+|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+L|y-y_0|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2L}\cdot L=\varepsilon.\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$，故 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续. 由 (x_0,y_0) 的任意性知 $f(x,y)$ 在 D 内连续.

10. 设 $A\subseteq\mathbf{R}^n$ 为一点集，$\boldsymbol{f}:A\to\mathbf{R}^m$ 为 n 元向量值函数，证明 f 在 A 上连续等价于它的每个分量在 A 上连续.

证明　设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(x_1,\cdots,x_n),f_2(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_n))^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$.

$\forall \boldsymbol{x}_0=(x_{01},\cdots,x_{0n})\in A$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$，则 $\forall i\in\{1,2,\cdots,m\}$，恒有

$$\begin{aligned}|f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{x}_0)|&\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^m(f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{x}_0))^2}\\&=\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\|.\end{aligned}$$

从而
$$\lim_{x\to x_0}f_i(\boldsymbol{x})=f_i(\boldsymbol{x}_0)\quad(i=1,2,\cdots,m).$$

反过来，设 $\lim\limits_{x\to x_0}f_i(\boldsymbol{x})=f_i(\boldsymbol{x}_0)$，$i=1,2,\cdots,m$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_i>0$，使当 $\boldsymbol{x}\in U(\boldsymbol{x}_0,\delta_i)$ 时，恒有

$$|f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{x}_0)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\quad(i=1,2,\cdots,m).$$

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m\}$，则当 $\boldsymbol{x}\in U(\boldsymbol{x}_0,\delta)$ 时，恒有

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\|=\sqrt{\sum_{i=1}^m|f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{x}_0)|^2}$$

$$< \sqrt{m \cdot \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon.$$

故 $\lim\limits_{x \to x_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$，即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续，从而在 A 上连续.

11. 设 $\boldsymbol{f}$ 是集合 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 上的 n 元向量值函数，证明：f 在 $\boldsymbol{x}_0 \in A$ 连续 $\Leftrightarrow$ 对于 A 中任何收敛于 $\boldsymbol{x}_0$ 的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$，都有 $\lim\limits_{k \to \infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$.

证明 设 $\boldsymbol{f} = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \cdots, f_m(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{x} \in A \subseteq \mathbf{R}^n$，则 $f_i(\boldsymbol{x})$ 为 n 元数量值函数，$i = 1, 2, \cdots, m$. 由上题知：$\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0 \in A$ 上连续 $\Leftrightarrow f_i(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续，$i = 1, 2, \cdots, m$. 由数量值函数的 Heine 定理：$f_i(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续 $\Leftrightarrow$ 对于 A 中任何收敛于 $\boldsymbol{x}_0$ 的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$，都有 $\lim\limits_{x \to x_0} f_i(\boldsymbol{x}) = f_i(\boldsymbol{x}_0)$. 故本题得证.

12. 设 f 为集合 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 上的 n 元数量值函数，证明：若 f 在 $\boldsymbol{x}_0 \in A$ 连续，且 $f(\boldsymbol{x}_0) > 0$，则存在正常数 q，使得：

$$\exists \delta > 0, \forall \boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}_0, \delta) \cap A, \text{都有} f(\boldsymbol{x}) \geqslant q > 0.$$

证明 由于 n 元数量值函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0 \in A$ 连续. 且 $f(\boldsymbol{x}_0) > 0$，则对 $\varepsilon = \dfrac{f(\boldsymbol{x}_0)}{2} > 0$，$\exists \delta > 0$，使得 $\forall \boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}_0, \delta) \cap A$，恒有 $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)| < \dfrac{f(\boldsymbol{x}_0)}{2}$，即

$$f(\boldsymbol{x}_0) - \frac{f(\boldsymbol{x}_0)}{2} < f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{2} f(\boldsymbol{x}_0). \text{取} q = \frac{1}{2} f(\boldsymbol{x}_0) > 0$$

则 $f(\boldsymbol{x}) \geqslant q > 0$.

(B)

1. 设 $\boldsymbol{f}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ 是 n 元向量值函数，试用邻域的语言表述 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ 处连续的定义，并证明下列命题等价：

(1) $\boldsymbol{f}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上连续；

(2) $W \subseteq \mathbf{R}^m$ 是开集，则 W 关于 $\boldsymbol{f}$ 的原象 $\boldsymbol{f}^{-1}(W) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in W\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集；

(3) $W \subseteq \mathbf{R}^m$ 是闭集，则 W 关于 $\boldsymbol{f}$ 的原象 $f^{-1}(W)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的闭集.

证明 f 在 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ 处连续，如果 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得当 $\boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}_0, \delta)$ 时恒有 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in U(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0), \varepsilon)$.

(1) $\Rightarrow$ (2)

如 $\boldsymbol{f}^{-1}(W) = \varnothing$，则 $\boldsymbol{f}^{-1}(W)$ 为开集. 如 $\boldsymbol{f}^{-1}(W) \neq \varnothing$，那么 $\forall \boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{f}^{-1}(W)$，则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) \in W$. 由 W 是开集可知，$\exists \varepsilon > 0$，使 $U(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0), \varepsilon) \subseteq W$. 由 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续知：对上述的 $\varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使 $\forall \boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}_0, \delta)$，恒有 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in U(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0), \varepsilon) \subseteq W$.

即$f(U(x_0,\delta))\subseteq U(f(x_0),\varepsilon)\subseteq W$,则$U(x_0,\delta)\subseteq f^{-1}(W)$,即$x_0$为$f^{-1}(W)$的内点.由$x_0$的任意性知$f^{-1}(W)$为开集.

(2)$\Rightarrow$(1)

$\forall x_0\in\mathbf{R}^n$及$\forall\varepsilon>0$,则$W=U(f(x_0),\varepsilon)$为开集,则$f^{-1}(W)$也是开集,且$x_0\in f^{-1}(W)$.进而$\exists\delta>0$,使$U(x_0,\delta)\subseteq f^{-1}(W)$.即$\forall x\in U(x_0,\delta)$,$f(x)\in W=U(f(x_0),\varepsilon)$.故$f(x)$在$x_0$处连续.从而$f(x)$在$\mathbf{R}^n$上连续.

故(1)$\Leftrightarrow$(2).

下证(2)$\Leftrightarrow$(3).为此先证$f^{-1}(W^c)=[f^{-1}(W)]^c$.$\forall x\in f^{-1}(W^c)$,有$f(x)\in W^c$,即$f(x)\notin W$,从而$x\in[f^{-1}(W)]^c$.故$f^{-1}(w^c)\subseteq[f^{-1}(W)]^c$.

又$\forall x\in[f^{-1}(W)]^c$,有$x\notin f^{-1}(W)$,从而$f(x)\notin W$,即$f(x)\in W^c$,从而$x\in f^{-1}(W^c)$.故$f^{-1}(W^c)\supseteq[f^{-1}(W)]^c$.

因此$f^{-1}(W^c)=[f^{-1}(W)]^c$

(2)$\Rightarrow$(3)

如果$W\subseteq\mathbf{R}^m$为闭集,则$W^C\subseteq\mathbf{R}^m$为开集.由(2)知$f^{-1}(W^c)=[f^{-1}(W)]^c$为开集,即$f^{-1}(W)$为闭集.则(2)$\Rightarrow$(3).

(3)$\Rightarrow$(2)

如果$W\subseteq\mathbf{R}^m$是开集,则$W^c\subseteq\mathbf{R}^m$为闭集.则由(3),$f^{-1}(W^c)=[f^{-1}(W)]^c$为闭集,即$f^{-1}(W)$是开集,则(3)$\Rightarrow$(2).

故(2)$\Leftrightarrow$(3).从而(1)$\Leftrightarrow$(2)$\Leftrightarrow$(3).

2. 设有二元函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

证明$f(x,y)$在$\mathbf{R}^2$上不一致连续.

证明 对$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=2\sqrt{\varepsilon}$,当$(x,y)\in U((0,0),\delta)$时,恒有$\left|\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant\dfrac{1}{4}(x^2+y^2)<\varepsilon$.故$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$.由连续函数的性质,$f(x,y)$在$\mathbf{R}^2$上连续.

取$P_n=\left(n+\dfrac{1}{n},n+\dfrac{1}{n}\right)$,$Q_n=(n,n)$,则当$n\to\infty$时$\|P_n-Q_n\|\to0$.因此,对$\varepsilon=\dfrac{1}{2}$及任何$\delta>0$,都存在$P_n,Q_n\in\mathbf{R}^2$,满足当$\|P_n-Q_n\|<\delta$时有

$$|f(P_n)-f(Q_n)|=1+\frac{1}{2n^2}>1>\varepsilon,$$

故$f(x,y)$在$\mathbf{R}^2$上不一致连续.

3. 设 $\boldsymbol{f}$ 是集 $A\subseteq\mathbf{R}^n$ 上的 n 元向量值函数，并且满足 Lipschitz 条件，即存在常数 $L\geqslant0$，使对所有 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in A$，均有 $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\|\leqslant L\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$，证明 $\boldsymbol{f}$ 在 A 上一致连续.

证明 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{L}$. 则对 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in A$，当 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|<\delta$ 时，由于 $\boldsymbol{f}$ 在 A 上满足 Lipschitz 条件，则有

$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\|\leqslant L\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|<\varepsilon$，故 $\boldsymbol{f}$ 在 A 上一致连续.

4. 设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是 n 元数量值连续函数，$c\in\mathbf{R}$ 是一个常数，证明

(1) $\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})>c\}$ 与 $\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})<c\}$ 均为开集；

(2) $\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})\geqslant c\}$ 与 $\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})\leqslant c\}$ 均为闭集；

(3) $\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})=c\}$ 是闭集.

证明 (1) 令 $W_1=(c,+\infty)$，$W_2=(-\infty,c)$ 均为 $\mathbf{R}$ 中的开集，而 $\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})>c\}=f^{-1}(W_1)$，$\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})<c\}=f^{-1}(W_2)$. 由于 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数，则由本习题(B)的第一题知 $f^{-1}(W_1)$ 与 $f^{-1}(W_2)$ 均为开集.

类似的方法可知(2)中两集合均为闭集.

(3) 由于 $\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})=c\}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})\geqslant c\}\cap\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})\leqslant c\}$，由本题(2)知 $\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})=c\}$ 为两闭集的交. 则由定理性质知其为闭集.

习 题 5.3

(A)

2. (1) 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，求 $f_x(x,1)$；

解 $f_x(x,1)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,1)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)=1$ 或

$$f_x(x,1)=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\bigg|_{(x,1)}=1+(y-1)\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{y}}}\Bigg|_{(x,1)}=1.$$

(2) $f(x,y)=\dfrac{\cos(x-2y)}{\cos(x+y)}$，求 $f_y\left(\pi,\dfrac{\pi}{4}\right)$.

解 $f_y\left(\pi,\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(\pi,y)\bigg|_{y=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\dfrac{\cos(\pi-2y)}{\cos(\pi+y)}\right)\bigg|_{y=\frac{\pi}{4}}=-2\sqrt{2}.$

3. 求曲线 $\begin{cases}z=\dfrac{1}{4}(x^2+y^2),\\ y=4\end{cases}$ 在点 $(2,4,5)$ 处的切线与 x 轴正向所成的倾角.

解　设所求倾角为 α. 由偏导数的几何意义知 $\tan\alpha$ 即为二元函数 $z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)$ 在 $(2,4)$ 处 x 的偏导 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,4)}$. 即 $\tan\alpha=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,4)}=1$, 故 $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

4. (1) 研究 $f(x,y)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 是否存在偏导数 $f_x(0,0)$ 及 $f_y(0,0)$;

解　(1) $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\frac{1}{\Delta x^2}$ 不存在. $f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0.$

(2) 设函数 $f(x,y)=|x-y|g(x,y)$, 其中函数 $g(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内连续. 试问 $g(0,0)$ 为何值时, f 在点 $(0,0)$ 的两个偏导数均存在? $g(0,0)$ 为何值时, f 在点 $(0,0)$ 处可微?

解　(2) $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}g(\Delta x,0).$

要使 $f_x(0,0)$ 存在, 则 $g(0,0)=0$, 此时 $f_x(0,0)=0$.

$f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{|\Delta y|}{\Delta y}g(0,\Delta y)$, 当且仅当 $g(0,0)=0$ 时存在, 且 $f_y(0,0)=0$. 故当 $g(0,0)=0$ 时, $f(x,y)$ 可偏导.

又
$$\begin{aligned}&f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y\\ =&|\Delta x-\Delta y|g(\Delta x,\Delta y),\end{aligned}$$

令 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, 如 $g(0,0)\neq 0$, 则一定不可微. 而 $g(0,0)=0$ 时, $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{|\Delta x-\Delta y|}{\rho}$ 不存在. 但 $\frac{|\Delta x-\Delta y|}{\rho}\leqslant\frac{|\Delta x|+|\Delta y|}{\rho}\leqslant 2$ 有界, 则 $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{|\Delta x-\Delta y|g(\Delta x,\Delta y)}{\rho}=0$. 即当 $g(0,0)=0$ 时 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

6. 设 $f(x,y)=(xy)^{\frac{1}{3}}$. 证明 (1) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 只有沿两个坐标轴的正负方向上存在方向导数; (2) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续.

证明　(1) 设 $l=\{\cos\alpha,\sin\alpha\}$, 则 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)-f(0,0)}{t}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin^{\frac{1}{3}}\alpha\cos^{\frac{1}{3}}\alpha}{t^{\frac{1}{3}}}$. 当且仅当 $\sin\alpha=0$ 或 $\cos\alpha=0$ 时存在，且其值为零. 即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 只有沿 x 轴正负向 $(\alpha=0,\pi)$ 和 y 轴正负向 $\left(\alpha=\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 的方向导数存在.

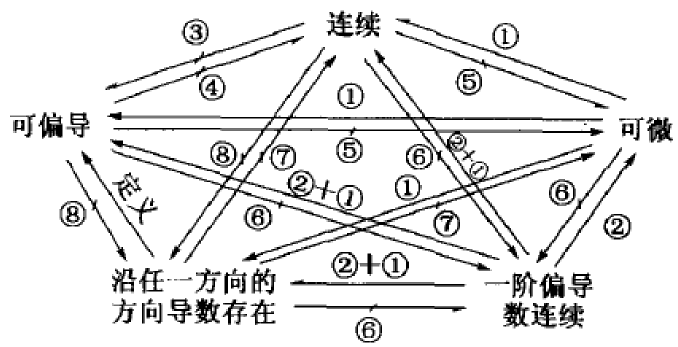
又由 $|f(x,y)-f(0,0)|=|xy|^{\frac{1}{3}}\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}$，易知 f 在 $(0,0)$ 处连续.

9. 设 $du=2xdx-3ydy$，求函数 $u(x,y)$.

解 由于 $du=2xdx-3ydy$，所以 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x,\dfrac{\partial u}{\partial y}=-3y$. 由 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x$ 得 $u(x,y)=x^2+\varphi(y)$. 由 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-3y$ 可得 $\varphi'(y)=-3y$. 则 $\varphi(y)=-\dfrac{3}{2}y^2+c$，故 $u(x,y)=x^2-\dfrac{3}{2}y^2+c$.

10. 试说明二元函数 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 连续，偏导数存在. 沿任一方向 l 的方向导数存在、可微及一阶偏导数连续几个概念之间的关系.

解 其相互关系可表示如下：



其中①表示定理 3.1；②表示定理 3.2；③～⑧为反例.

③ $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 处连续. 但 $f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$ 均不存在.

④ $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，但 f 在 $(0,0)$ 不连续.

⑤ $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ f 在 $(0,0)$ 连续、可偏导，且 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，但不可微.

⑥ $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ f 在(0,0)连续. 可偏导,f 在(0,0)处可微,但 $f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 在(0,0)处间断.(由 f 在(0,0)可微知:f 在(0,0)沿任一方向的方向导数存在.)

⑦ $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

在(0,0)处沿任何方向的方向导数存在,但 f 在(0,0)处不连续,从而不可微.

⑧ $f(x,y)=(xy)^{\frac{1}{3}}$ 在(0,0)连续. 但仅沿 x,y 轴正、负向的方向导数存在.

11. 设 $f(x,y)$ 在区域 D 内具有一阶连续偏导数且恒有 $f_x=0$ 及 $f_y=0$,证明 f 在 D 内为一常数.

证明　由定理 3.2 知 f 在 D 内任一点 (x,y) 处可微,且 $\mathrm{d}f(x,y)=f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y\equiv 0$. 从而 $f(x,y)\equiv$ 常数($(x,y)\in D$).

12. 设 x,y 的绝对值都很小时,利用全微分概念推出下列各式的近似计算公式

(1) $(1+x)^m(1+y)^n$;　(2) $\arctan\dfrac{x+y}{1+xy}$.

解　(1) 令 $f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n$. 当 x,y 绝对值很小时.

$$f(x,y)-f(0,0)\approx f_x(0,0)(x-0)+f_y(0,0)(y-0)=mx+ny.$$

故
$$f(x,y)\approx f(0,0)+mx+ny=1+mx+ny.$$

(2) 令 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x+y}{1+xy}$. 当 $|x|,|y|$ 很小时,

$$f(x,y)\approx f(0,0)+f_x(0,0)(x-0)+f_y(0,0)(y-0)=x+y.$$

20. 设 $u=\ln\left(\dfrac{1}{r}\right)$,其中 $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$,求 ∇u;并指出在空间哪些点处成立 $\|\nabla u\|=1$?

解　$\nabla u=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\ln\dfrac{1}{r}\right)\left\{\dfrac{x-a}{r},\dfrac{y-b}{r},\dfrac{z-c}{r}\right\}=-\dfrac{1}{r^2}\{x-a,x-b,x-c\}$,

$$\|\nabla u\|=\frac{1}{r^2}[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{r},$$

故在 $r=1$ 即球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=1$ 上所有的点处 $\|\nabla u\|=1$.

21. 设 $u=\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$，问 u 在点 (a,b,c) 处沿哪个方向增大最快？沿哪个方向减小最快？沿哪个方向变化率为零？

解 $\nabla u(a,b,c)=\left\{-\frac{2}{a},-\frac{2}{b},\frac{2}{c}\right\}$. 故 u 在 (a,b,c) 点沿 $\nabla u(a,b,c)$ 增加最快；沿 $-\nabla u(a,b,c)=\left\{\frac{2}{a},\frac{2}{b},\frac{-2}{c}\right\}$ 方向减小最快；沿与 $\nabla u(a,b,c)$ 垂直的方向 $\{l,m,n\}$ 变化率为零，其中 l,m,n 满足 $\frac{1}{a}l+\frac{1}{b}m-\frac{1}{c}n=0$. 即沿 $k_1\{a,-b,0\}+k_2\{a,0,c\}$ 方向变化率为零，其中 k_1,k_2 为任意实数.

25. 证明如果函数 $u=f(x,y)$ 满足

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

式中 A,B,C 都是常数，且 $f(x,y)$ 具有连续的三阶偏导数，那么函数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 也满足这个方程.

证明 由于 f 具有连续的三阶偏导数，则三阶偏导数与求导次序无关，从而 $\frac{\partial^3 u}{\partial y^2\partial x}=\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$，进而

$$\begin{aligned}&A\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+2B\frac{\partial}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+C\frac{\partial}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\&=A\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+2B\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right)+C\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0.\end{aligned}$$

故函数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 满足题中方程. 同理可证此结论对函数 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 也成立.

26. 求下列函数的高阶偏导数（假定函数 f 具有二阶连续偏导数或二阶连续导数，函数 g 具二阶连续导数）.

(3) $z=f(xy^2,x^2y)$ 所有二阶偏导数；

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1\cdot y^2+2xyf_2$，$\frac{\partial z}{\partial y}=2xyf_1+x^2f_2$，

则
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(y^2f_1+2xyf_2)=y^2\frac{\partial f_1}{\partial x}+2yf_2+2xy\frac{\partial f_2}{\partial x}$$
$$=y^2(y^2f_{11}+2xyf_{12})+2yf_2+2xy(y^2f_{21}+2xyf_{22})$$
$$=y^4f_{11}+4xy^3f_{12}+4x^2y^2f_{22}+2yf_2;$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(y^2f_1+2xyf_2)$$
$$=2yf_1+y^2\frac{\partial f_1}{\partial y}+2xf_2+2xy\frac{\partial f_2}{\partial y}$$
$$=2yf_1+2xf_2+y^2(2xyf_{11}+x^2f_{12})+2xy(2xyf_{21}+x^2f_{22})$$
$$=2yf_1+2xf_2+2xy^3f_{11}+5x^2y^2f_{12}+2x^3yf_{22};$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=2xf_1+2xy\frac{\partial f_1}{\partial y}+x^2\frac{\partial f_2}{\partial y}$$
$$=2xf_1+2xy(2xyf_{11}+x^2f_{12})+x^2(2xyf_{21}+x^2f_{22})$$
$$=2xf_1+4x^2y^2f_{11}+4x^3yf_{12}+x^4f_{22}.$$

(5)　$z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right),\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}.$

解　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=xf_1-\dfrac{x}{y^2}f_2+\dfrac{1}{x}g'\left(\dfrac{y}{x}\right)$，从而

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(xf_1-\frac{x}{y^2}f_2+\frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$
$$=f_1+x\left(yf_{11}+\frac{1}{y}f_{12}\right)-\frac{1}{y^2}f_2-\frac{x}{y^2}\left(yf_{21}+\frac{1}{y}f_{22}\right)$$
$$-\frac{1}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x}\left(\frac{-y}{x^2}\right)g''\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$=f_1-\frac{1}{y^2}f_2+xyf_{11}-\frac{x}{y^3}f_{22}-\frac{1}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right).$$

27. 设$f(x,y)$具有一阶连续偏导数，且$f(1,1)=1,f_1(1,1)=a,f_2(1,1)=b$，又函数$F(x)=f[x,f(x,f(x,x))]$，求$F(1),F'(1)$.

解　$F(1)=f[1,f(1,f(1,1))]=f[1,f(1,1)]=f[1,1]=1,$

$$F'(1)=f_1[1,f(1,f(1,1))]+f_2[1,f(1,f(1,1))]\cdot\left.\frac{\mathrm{d}f(x,f(x,x))}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}$$

$$=f_1[1,f(1,1)]+f_2[1,f(1,1)]\left[f_1(1,f(1,1))\right.$$

$$\left.+f_2(1,f(1,1))\left.\frac{\mathrm{d}f(x,x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}\right]$$

$$=f_1(1,1)+f_2(1,1)[f_1(1,1)+f_2(1,1)(f_1(1,1)+f_2(1,1))]$$

$$=a+b[a+b(a+b)].$$

28. 设函数 $u=u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,试求常数 a 和 b,使在变换 $\xi=x+ay,\eta=x+by$ 之下,可将方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$.

解 如果 $a=b$,则 $\xi=\eta=x+ay$. 则 $a\neq b$. 从而 $x=\frac{1}{a-b}(a\eta-b\xi),y=\frac{1}{a-b}(\xi-\eta)$,则

$$\frac{\partial u}{\partial\eta}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{a}{a-b}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{-1}{a-b}=\frac{1}{a-b}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{a-b}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)=\frac{1}{a-b}\left[a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{-b}{a-b}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\frac{1}{a-b}\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{-b}{a-b}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{1}{a-b}\right)\right]$$

$$=\frac{-ab}{(a-b)^2}\left[\frac{1}{ab}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{a+b}{ab}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right].$$

令 $ab=\frac{1}{3},\frac{a+b}{ab}=-4$,则 $a=-1,b=-\frac{1}{3}$ 或 $b=-1,a=-\frac{1}{3}$ 时满足题设要求.

29. 已知方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 有形如 $u=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 的解,试求出这个解来.

解 如果 $u=\varphi(t),t=\frac{y}{x}$,则 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}\varphi'(t),\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x}\varphi'(t),\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}\varphi'(t)+\frac{y^2}{x^4}\varphi''(t),\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2}\varphi''(t)$. 从而 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2}[(1+t^2)\varphi''(t)+2t\varphi'(t)]$.

又由方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 有形如 $u=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 的解可得,$\varphi(t)$ 满足方程:$(1+t^2)\varphi''(t)+2t\varphi'(t)=0$. 解此可降阶的二阶微分方程可得 $\varphi(t)=C_1\arctan t+C_2$,$C_1,C_2$ 为相互独立的两个任意常数. 则 $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=C_1\arctan\frac{y}{x}+C_2$.

30. 利用一阶全微分形式不变性和微分运算法则，求下列函数的全微分和偏导数（φ 与 f 均可微）.

（1）$z=\varphi(xy)+\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$；　（4）$u=f(x^2-y^2,e^{xy},z)$.

解　（1）
$$\begin{aligned}dz&=d\varphi(xy)+d\varphi\left(\frac{x}{y}\right)=\varphi'(xy)d(xy)+\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)d\left(\frac{x}{y}\right)\\&=\varphi'(xy)(ydx+xdy)+\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{1}{y}dx+\frac{-x}{y^2}dy\right)\\&=\left[y\varphi'(xy)+\frac{1}{y}\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\right]dx+\left[x\varphi'(xy)-\frac{x}{y^2}\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\right]dy,\end{aligned}$$

且$\frac{\partial z}{\partial x}=y\varphi'(xy)+\frac{1}{y}\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)$；$\frac{\partial z}{\partial y}=x\varphi'(xy)-\frac{x}{y^2}\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)$.

（4）
$$\begin{aligned}du&=f_1\cdot d(x^2-y^2)+f_2\cdot de^{xy}+f_3dz\\&=(2xdx-2ydy)f_1+e^{xy}(xdy+ydx)f_2+f_3dz\\&=(2xf_1+ye^{xy}f_2)dx+(-2yf_1+xe^{xy}f_2)dy+f_3dz.\end{aligned}$$

从而$\frac{\partial u}{\partial x}=2xf_1+ye^{xy}f_2$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-2yf_1+xe^{xy}f_2$，$\frac{\partial u}{\partial z}=f_3$.

32. 求下列方程所确定的隐函数 z 的一阶与二阶偏导数.

（1）$\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$；（2）$x^2-2y^2+z^2-4x+2z-5=0$.

解　（1）由一阶全微分形式不变性可得 $d\frac{x}{z}=d\ln z-d\ln y$，即

$$\frac{1}{z}dx+\frac{-x}{z^2}dz=\frac{1}{z}dz-\frac{1}{y}dy,$$

$$\left(\frac{1}{z}+\frac{x}{z^2}\right)dz=\frac{1}{z}dx+\frac{1}{y}dy.$$

于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{z+x},\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y(x+z)}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{z+x}\right)=\frac{(x+z)\frac{\partial z}{\partial x}-z\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(x+z)^2}=-\frac{z^2}{(x+z)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z^2}{y(x+z)}\right)=\frac{2z\frac{\partial z}{\partial y}y(x+z)-z^2(x+z)-z^2y\frac{\partial z}{\partial y}}{y^2(x+z)^2}=-\frac{x^2z^2}{y^2(x+z)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{xz^2}{y(x+z)^3}.$$

或令 $$F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}=\frac{x}{z}-\ln z+\ln y.$$

则 $$F_x=\frac{1}{z},\ F_y=\frac{1}{y},\ F_z=-\frac{x}{z^2}-\frac{1}{z}.$$

于是 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{z}{x+z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{z^2}{y(x+z)}.$$

（2）由一阶全微分形式不变性可得

$$2x\mathrm{d}x-4y\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z-4\mathrm{d}x+2\mathrm{d}z=0,$$

即 $$(2x-4)\mathrm{d}x-4y\mathrm{d}y+2(z+1)\mathrm{d}z=0.$$

于是 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-(2x-4)}{2(z+1)}=\frac{2-x}{1+z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{-4y}{2(1+z)}=\frac{2y}{1+z}.$$

或令 $F(x,y,z)=x^2-2y^2+z^2-4x+2z-5$,则

$$F_x=2x-4,\ F_y=-4y,\ F_z=2z+2.$$

于是 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{2-x}{1+z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{2y}{1+z}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2-x}{1+z}\right)=\frac{-(1+z)-(2-x)\frac{\partial z}{\partial x}}{(1+z)^2}=-\frac{(1+z)^2+(x-2)^2}{(1+z)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2-x}{1+z}\right)=\frac{x-2}{(1+z)^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y(x-2)}{(1+z)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{1+z}\right)=\frac{2(1+z)-2y\frac{\partial z}{\partial y}}{(1+z)^2}=\frac{2(1+z)^2-4y^2}{(1+z)^3}.$$

34. 已知方程 $F(x+y,y+z)=1$ 确定了隐函数 $z=z(x,y)$,其中函数 F 具有二阶连续偏导数,求$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

解 令 $G(x,y,z)=F(x+y,y+z)-1$,则 $G_y=F_1+F_2$. $G_x=F_1$, $G_z=F_2$,

于是 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_1}{F_2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_1+F_2}{F_2}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{F_1}{F_2}\right)=-\frac{1}{F_2^2}\left(F_2\frac{\partial F_1}{\partial y}-F_1\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)$$

$$= -\frac{1}{F_2^2}\left\{F_2\left[F_{11}+F_{12}\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right]-F_1\left[F_{21}+F_{22}\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right]\right\}$$

$$= -\frac{1}{F_2^2}\left\{F_2\left(F_{11}+F_{12}\frac{-F_1}{F_2}\right)-F_1\left(F_{21}+F_{22}\cdot\frac{-F_1}{F_2}\right)\right\}$$

$$= -\frac{F_2^2F_{11}-2F_1F_2F_{12}+F_1^2F_{22}}{F_2^3}$$

35. 设$f(x,y,z)=xy^2z^3$，又 x,y,z 满足方程 $x^2+y^2+z^2-3xyz=0.$（$*$）

（1）在 $z=z(x,y)$ 是由方程（$*$）所确定的隐函数时，求 $f_x(1,1,1)$；

（2）在 $y=y(x,z)$ 是由方程（$*$）所确定的隐函数时，求 $f_x(1,1,1)$.

解　（1）$z=z(x,y)$ 是由（$*$）所确定的隐函数. 则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x-3yz}{-2z+3xy},\text{那么}\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=-1,$$

于是
$$f_x(1,1,1)=\left.\left(y^2z^3+3xy^2z^2\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right|_{(1,1,1)}=1-3=-2.$$

（2）$y=y(x,z)$ 是由（$*$）所确定的隐函数，则

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=-\left.\frac{2x-3yz}{2y-3xz}\right|_{(1,1,1)}=-1,$$

于是
$$f_x(1,1,1)=\left.\left(y^2z^3+2xyz^3\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right|_{(1,1,1)}=-1.$$

36. 求由下列方程所确定的隐函数 z 的全微分. 其中 F 具一阶连续偏导数，f 连续可导.

（1）$F(x-az,y-bz)=0$；（2）$x^2+y^2+z^2=yf\left(\frac{z}{y}\right)$.

解　（1）由一阶全微分形式不变性可得

$$F_1\mathrm{d}(x-az)+F_2\mathrm{d}(y-bz)=0,$$

即
$$F_1\mathrm{d}x-aF_1\mathrm{d}z+F_2\mathrm{d}y-bF_2\mathrm{d}z=0.$$

于是
$$\mathrm{d}z=\frac{F_1\mathrm{d}x+F_2\mathrm{d}y}{aF_1+bF_2}.$$

（2）$2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z=f\left(\frac{z}{y}\right)\mathrm{d}y+yf'\left(\frac{z}{y}\right)\mathrm{d}\frac{z}{y}$,

$$2x\mathrm{d}x+\left[2y-f\left(\frac{z}{y}\right)+\frac{z}{y}f'\left(\frac{z}{y}\right)\right]\mathrm{d}y=\left(f'\left(\frac{z}{y}\right)-2z\right)\mathrm{d}z.$$

故　$\mathrm{d}z=\dfrac{1}{f'\left(\frac{z}{y}\right)-2z}\left\{2x\mathrm{d}x+\left[2y-f\left(\frac{z}{y}\right)+\frac{z}{y}f'\left(\frac{z}{y}\right)\right]\mathrm{d}y\right\}.$

37. 设 $y=f(x,t)$，而 t 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的 x,y 的函数，其中 F,f 都具有一阶连续偏导数，证明

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}}.$$

证明 由一阶全微形式不变性可知，

$$\mathrm{d}y=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t, \tag{1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial F}{\partial t}\mathrm{d}t=0. \tag{2}$$

又因为 t 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的 x,y 的函数，则 $\frac{\partial F}{\partial t}\neq 0$，则由②可得 $\mathrm{d}t=-\left(\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\Big/\frac{\partial F}{\partial t}$. 代入①式得

$$\mathrm{d}y=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x-\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y}{\frac{\partial F}{\partial t}}.$$ 整理可得

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial y}\right)\mathrm{d}y=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x}\right)\mathrm{d}x,$$

故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}}.$$

(B)

1. 设 $f(x,y)$ 在 P_0 可微，$\boldsymbol{l}_1=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$，$\boldsymbol{l}_2=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$，$\frac{\partial f(P_0)}{\partial l_1}=1$，$\frac{\partial f(P_0)}{\partial l_2}=0$. 确定 $\boldsymbol{l}$ 使 $\frac{\partial f(P_0)}{\partial l}=\frac{7}{5\sqrt{2}}$.

解 $\boldsymbol{l}_1$ 与 $\boldsymbol{l}_2$ 均为单位向量，由 $\frac{\partial f(P_0)}{\partial l_1}=1$ 及 $\frac{\partial f(P_0)}{\partial l_2}=0$ 可得

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{2}}=1,\ \frac{\partial f}{\partial x}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{2}}=0.$$

解之得　$\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial x}=\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial y}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

设 $\boldsymbol{l}$ 的两个方向余弦分别为 $\cos\alpha,\cos\beta=\sin\alpha$，则由$\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial l}=\dfrac{7}{5\sqrt{2}}$可知 $\cos\alpha+\sin\alpha=\dfrac{7}{5}$. 两边平方可得 $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{12}{25}$. 故 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5},\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$或 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5},\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$. 即 $\boldsymbol{l}=\left\{\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right\}$或 $\boldsymbol{l}=\left\{\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right\}$.

3. 设二元函数 f 在点 P_0 的某邻域 $U(P_0)$ 内的偏导数 f_x 与 f_y 都有界. 证明 f 在 $U(P_0)$ 内连续.

证明　因为 f_x,f_y 在点 P_0 的某邻域 $U(P_0)$ 内都有界. 即 $\forall(x,y)\in U(P_0)$，$\exists M>0$，使 $|f_x(x,y)|\leqslant M$，$|f_y(x,y)|\leqslant M$. 设 $(x+\Delta x,y+\Delta y)\in U(P_0)$，则由 Lagrange 定理可知，$\exists\theta_1,\theta_2\in[0,1)$，使

$$\begin{aligned}|f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)|&\leqslant|f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)|\\&\quad+|f(x,y+\Delta y)-f(x,y)|\\&=|f_x(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)|\,|\Delta x|\\&\quad+|f_y(x,y+\theta_2\Delta y)|\,|\Delta y|\\&\leqslant M(|\Delta x|+|\Delta y|)\leqslant 2M\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2},\end{aligned}$$

则 f 在 $U(P_0)$ 的任一点连续，即 f 在 $U(P_0)$ 上连续.

4. 设 n 元函数 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续，n 元函数 g 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 可微且 $g(\boldsymbol{x}_0)=0$，证明 $f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 可微，且有

$$\mathrm{d}(f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}))\big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}=f(\boldsymbol{x}_0)\mathrm{d}g(\boldsymbol{x}_0).$$

证明　由于 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续，则 $f(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)=\alpha(\rho)$，其中 $\rho=\|\Delta\boldsymbol{x}\|$，$\alpha(\rho)$ 为当 $\rho\to0$ 时的无穷小量，又由 g 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微可知 $g(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x}_0)=\mathrm{d}g(\boldsymbol{x}_0)+O_1(\rho)$ $\dfrac{O_1(\rho)}{\rho}$为当 $\rho\to0$ 时无穷小量. 注意到 $g(\boldsymbol{x}_0)=0$，可得

$$\begin{aligned}&f(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x}_0)f(\boldsymbol{x}_0)=f(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})(g(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x}_0))\\&=(f(\boldsymbol{x}_0)+\alpha(\rho))(\mathrm{d}g(\boldsymbol{x}_0)+O_1(\rho))=f(\boldsymbol{x}_0)\mathrm{d}g(\boldsymbol{x}_0)+\beta.\end{aligned}$$

其中 $\beta=[f(\boldsymbol{x}_0)+\alpha(\rho)]O_1(\rho)+\alpha(\rho)\mathrm{d}g(\boldsymbol{x}_0)$.

又由于 $\dfrac{\mathrm{d}g(\boldsymbol{x}_0)}{\rho}=\left|\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial g(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}\Delta x_i}{\rho}\right|\leqslant\left|\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial g(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}\right|$，$\alpha(\rho)$是无穷小量($\rho$

$\to 0$)，所以$\lim\limits_{\rho\to 0}\alpha(\rho)\dfrac{\mathrm{d}g(\boldsymbol{x}_0)}{\rho}=0$. 又 $O_1(\rho)$是$\rho\to 0$ 时的高阶无穷小，且$\lim\limits_{\rho\to 0}[f(\boldsymbol{x}_0)+\alpha(\rho)]=f(\boldsymbol{x}_0)$，则$\boldsymbol{\beta}$是$\rho\to 0$ 的高阶无穷小量，又$f(\boldsymbol{x}_0)$为常数，则$f(\boldsymbol{x}_0)\mathrm{d}g(\boldsymbol{x}_0)$关于$\Delta\boldsymbol{x}$是线性的. 即$f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x}_0$可微，且$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)g(\boldsymbol{x}_0)=f(\boldsymbol{x}_0)\mathrm{d}g(\boldsymbol{x}_0)$.

5. 设$f_x(x,y)$在(x_0,y_0)的某邻域内存在且在(x_0,y_0)处连续，又$f_y(x,y)$存在，证明$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微.

证明 $z=f(x,y)$在(x_0,y_0)处的改变量为

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\&=[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]\\&\quad+[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)],\end{aligned}$$

上式右端中每一方括号内都是一元函数的改变量. 由 lagrange 微分中值公式，存在$\theta(0<\theta<1)$，使得

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)=f_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x.$$

由于$f_x(x,y)$在(x_0,y_0)处连续，有

$$f_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y)=f_x(x_0,y_0)+\alpha_1(\rho),$$

其中$\alpha_1(\rho)$是当$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$时的无穷小.

又由$f_y(x,y)$在(x_0,y_0)处存在可知$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=f_y(x_0,y_0)$，于是$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-f_y(x_0,y_0)\Delta y}{\Delta y}=0$. 即$f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-f_y(x_0,y_0)\Delta y=\alpha_2(\Delta y)\Delta y$，其中$\alpha_2(\Delta y)$是当$\Delta y\to 0$时的无穷小量. 从而

$$\Delta z=[f_x(x_0,y_0)+\alpha_1(\rho)]\Delta x+[f_y(x_0,y_0)+\alpha_2(\Delta y)]\Delta y,$$

即$\Delta z=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+\alpha$，其中$\alpha=\alpha_1(\rho)\Delta x+\alpha_2(\Delta y)\Delta y$.

由于$\dfrac{|\Delta x|}{\rho}\leqslant 1$，$\dfrac{|\Delta y|}{\rho}\leqslant 1$，且$\lim\limits_{\rho\to 0}\alpha_2(\Delta y)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\alpha_2(\Delta y)=0$，所以$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\alpha}{\rho}=0$.
故$f(x,y)$在(x_0,y_0)处的改变量可表示为

$$\Delta z=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho),$$

即f在(x_0,y_0)处可微.

6. 设$u=x\sin y$,

(1) 当x,y为自变量时，求二阶全微分d^2u;

(2) 当$x=\varphi(s,t)$，$y=\psi(s,t)$时，求二阶全微分d^2u;

(3) $\varphi\neq a_1s+b_1t+c_1$，$\psi\neq a_2s+b_2t+c_2$时，说明(2)中的$\mathrm{d}^2u$与(1)中的$\mathrm{d}^2u$不同.

解　(1) $\mathrm{d}u=\sin y\mathrm{d}x+x\cos y\mathrm{d}y$,

$$\mathrm{d}^2u=\mathrm{d}(\sin y\mathrm{d}x+x\cos y\mathrm{d}y)=2\cos y\mathrm{d}x\mathrm{d}y-x\sin y\mathrm{d}y^2.$$

(2) 由一阶全微分形式不变性可知

$$\mathrm{d}u=\sin y\mathrm{d}x+x\cos y\mathrm{d}y$$

且 $\mathrm{d}^2u=\mathrm{d}(\sin y\mathrm{d}x+x\cos y\mathrm{d}y)$

$$=\cos y\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\sin y\mathrm{d}(\mathrm{d}x)+\mathrm{d}x\cos y\mathrm{d}y-x\sin y\mathrm{d}y^2+x\cos y\mathrm{d}(\mathrm{d}y)$$

$$=2\cos y\mathrm{d}x\mathrm{d}y-x\sin y\mathrm{d}y^2+\sin y\mathrm{d}^2x+x\cos y\mathrm{d}^2y.$$

(3) 要使(1)与(2)中的 d^2u 相等，则 $\mathrm{d}^2x\equiv0$, $\mathrm{d}^2y\equiv0$. 即 $\mathrm{d}^2\varphi(s,t)\equiv0$, $\mathrm{d}^2\psi(s,t)\equiv0$. 即函数 φ 与 ψ 必须关于 s,t 都是线性的，即 $\varphi(s,t)=a_1s+b_1t+c_1$, $\psi(s,t)=a_2s+b_2t+c_2$.

习　题　5.4

(A)

3. 求 $f(x,y)=x^y$ 在点(1,4)的二阶 Taylor 公式，并利用它计算 $(1.08)^{3.96}$ 的近似值.

解　$f_x(1,4)=yx^{y-1}\big|_{(1,4)}=4$, $f_y(1,4)=x^y\ln x\big|_{(1,4)}=0$,

$f_{xx}(1,4)=y(y-1)x^{y-2}\big|_{(1,4)}=12$,

$f_{xy}(1,4)=(yx^{y-1}\ln x+x^{y-1})\big|_{(1,4)}=1$,

$f_{yy}(1,4)=x^y(\ln x)^2\big|_{(1,4)}=0$.

$f(x,y)$ 在(1,4)带 Peano 余项的 Taylor 公式为

$$f(x,y)=1+4(x-1)+\frac{1}{2!}(x-1,y-4)\begin{pmatrix}12&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y-4\end{pmatrix}+o(\rho^2)$$

$$=1+4(x-1)+6(x-1)^2+(x-1)(y-4)+o(\rho^2),$$

其中
$$\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}.$$

取 $x=1.08$, $y=3.96$. 由上面的 Taylor 公式可得

$$(1.08)^{3.96}\approx1+4(1.08-1)+6(1.08-1)^2+(1.08-1)(3.96-4)$$

$$=1.355\,2.$$

4. 求下列函数的极值.

(1) $z=x^2(y-1)^2$; (2) $z=(x^2+y^2-1)^2$; (3) $z=xy(a-x-y)$.

解　(1) 由 $\begin{cases}z_x=2x(y-1)^2=0,\\z_y=2x^2(y-1)=0,\end{cases}$ 求出 z 的驻点有

$M_\alpha(\alpha,1)$及$M_\beta(0,\beta)$，其中$\alpha,\beta\in\mathbf{R}$. 再求二阶偏导数，得

$$z_{xx}=2(y-1)^2,\ z_{xy}=4x(y-1),\ z_{yy}=2x^2.$$

$$\boldsymbol{H}_z(M_\alpha)=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\alpha^2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{H}_z(M_\beta)=\begin{pmatrix}2(\beta-1)&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

由于$\boldsymbol{H}_z(M_\alpha)$与$\boldsymbol{H}_z(M_\beta)$的行列式为零，所以$M_\alpha,M_\beta$是不是极值点需进一步讨论. 事实上，$\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2$，均有$z\geqslant0$，而$z|_{M_\beta}=z|_{M_\alpha}=0$，故$M_\alpha$与$M_\beta$均为极小值点，极小值为0.

(2) 由$\begin{cases}z_x=4x(x^2+y^2-1)=0,\\z_y=4y(x^2+y^2-1)=0\end{cases}$可知$z$有下列驻点

$M_1(0,0)$及圆周$x^2+y^2=1$上所有的点. 由$z_{xx}=4(x^2+y^2-1)+8x^2$，$z_{xy}=8xy$，$z_{yy}=4(x^2+y^2-1)+8y^2$知$\boldsymbol{H}_z(M_1)=\begin{pmatrix}-4&0\\0&-4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{H}_z(x^2+y^2=1)=8\begin{pmatrix}x^2&xy\\xy&y^2\end{pmatrix}$. 显然$\boldsymbol{H}_z(M_1)$负定，函数在$M_1$处取得极大值$z|_{M_1}=1$，而$\boldsymbol{H}_z(x^2+y^2-1)$行列式为零(且其是半正定的)，则$x^2+y^2=1$上的点是否是极值点需进一步讨论. 由于$\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2$，$z\geqslant0$，且$z|_{x^2+y^2=1}=0$，故$z$在$x^2+y^2=1$上的每一点均取得极小值0.

(3) 由$\begin{cases}z_x=y(a-2x-y)=0\\z_y=x(a-x-2y)=0\end{cases}$，求得函数有4个驻点

$$M_1(0,0),\ M_2(a,0),\ M_3(0,a),\ M_4\left(\frac{1}{3}a,\frac{1}{3}a\right).$$

由$z_{xx}=-2y$，$z_{xy}=a-2x-2y$，$z_{yy}=-2x$可知

$$\boldsymbol{H}_z(M_1)=\begin{pmatrix}0&a\\a&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{H}_z(M_2)=\begin{pmatrix}0&-a\\-a&-2a\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}_z(M_3)=\begin{pmatrix}-2a&-a\\-a&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{H}_z(M_4)=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}a&-\frac{a}{3}\\-\frac{a}{3}&-\frac{2}{3}a\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{H}_z(M_i)(i=1,2,3)$均不定，即$M_i(i=1,2,3)$均非极值点. 当$a>0$时，$\boldsymbol{H}_z(M_4)$负定，$z$在$M_4$处取得极大值$z|_{M_4}=\frac{a^3}{27}$；当$a<0$时，$\boldsymbol{H}_z(M_4)$正定，$z$在$M_4$处取得极小值$z|_{M_4}=\frac{a^3}{27}$；当$a=0$时，$\boldsymbol{H}_z(M_4)$行列式为零，$M_4$是否极值点需另行判定. 事

实上，由于 $a=0$，$M_4=(0,0)$，而在 $(0,0)$ 的任意小的邻域内存在 $x>0,y>0$ 的点使 $z=-xy(x+y)<0$，存在 $x<0,y>0$ 且 $y>-x$ 的点使 $z=-xy(x+y)>0$. 故 $a=0$ 时，M_4 非极值点.

5. 求下列函数在指定区域 D 上的最大值与最小值.

(3) $z=x^2+y^2-12x+16y, D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 25\}$.

解　由 $\begin{cases} z_x=2x-12=0, \\ z_y=2y+16=0, \end{cases}$ 可求出函数在 D 内无驻点.

在边界 $L_1: y=\sqrt{25-x^2}$ 及 $L_2: y=-\sqrt{25-x^2}$ 上，函数 z 分别变为 x 的一元函数

$$f_1=16\sqrt{25-x^2}-12x+25, \quad |x|\leqslant 5,$$

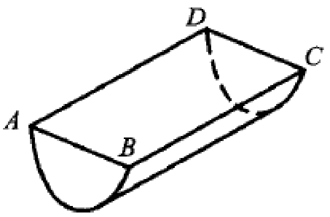
$$f_2=-16\sqrt{25-x^2}-12x+25, \quad |x|\leqslant 5.$$

而
$$\max_{|x|\leqslant 5} f_1(x)=f(-3)=125, \ \min_{|x|\leqslant 5} f_1(x)=f(5)=-35,$$

$$\max_{|x|\leqslant 5} f_2(x)=f(-5)=85, \ \min_{|x|\leqslant 5} f_2(x)=f(3)=-75.$$

故 z 在 $(-3,4)$ 处取得最大值 125，在 $(3,-4)$ 处取得最小值 -75.

7. 如图所示，横放着的半圆柱形无盖容器（其轴截面 $ABCD$ 为水平面），其表面积等于 S，当其尺寸如何时，此容器有最大的容积？



（第 7 题）

解　设底面半径为 R，高为 H. 则问题就转化为求目标函数 $V=\frac{1}{2}\pi R^2 H$ 在约束条件 $S=\pi R^2+\pi RH$ 下的最小值. 应用 Lagrange 乘数法，令

$$L=\frac{1}{2}\pi R^2 H+\lambda(S-\pi R^2-\pi RH).$$

由 $\begin{cases} L_R=\pi RH-\lambda(2\pi R+\pi H)=0, \\ L_H=\frac{1}{2}\pi R^2-\pi R\lambda=0, \\ L_\lambda=S-(\pi R^2+\pi RH)=0 \end{cases}$ 得唯一驻点 $M\left(R^*, 2R^*, \frac{1}{2}R^*\right)$，$R^*=\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$. 由于表面积一定，当底面半径很小时，容器细长，容积很小，随着 R 增大，

容积逐渐变大,但当 R 很大时,容器很扁,容积变小,则最大容积是存在的. 故当 $H=2R=2\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$ 时,即高等于底半径的 2 倍时,容积最大.

9. 在 xOy 平面上求一点,使它到平面上 n 个已知点

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$$

的距离的平方和为最小.

解 设 $(a,b)\in\mathbf{R}^2$,则问题转化为求 $S=\sum\limits_{i=1}^{n}[(a-x_i)^2+(b-y_i)^2]$ 的最小值.

$$\text{由}\begin{cases}S_a=2\sum\limits_{i=1}^{n}(a-x_i)=0,\\ S_b=2\sum\limits_{i=1}^{n}(b-y_i)=0\end{cases}\text{得唯一驻点}\begin{cases}a=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i,\\ b=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i.\end{cases}$$

由 $S_{aa}=2n,S_{ab}=0,S_{bb}=2n$ 知

$$\boldsymbol{H}_S\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\right)=\begin{pmatrix}2n&0\\0&2n\end{pmatrix}\text{正定,则}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\right)$$

为极小值点,故其为最小值点.

10. 求原点到曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=z,\\x+y+z=1\end{cases}$ 的最长和最短距离.

解 依题意,问题为求目标函数

$S=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $x^2+y^2=z$ 及 $x+y+z=1$ 下的最值. 用 Lagrange 乘数法,令

$$L=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-1).$$

$$\text{由}\begin{cases}L_x=2x+2x\lambda+\mu=0,\\L_y=2y+2y\lambda+\mu=0,\\L_z=2z-\lambda+\mu=0,\\L_\lambda=x^2+y^2-z=0,\\L_\mu=x+y+z-1=0\end{cases}\text{得驻点 }M_1\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{3}}{2},2-\sqrt{3}\right),$$

$M_2\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2},\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2},2+\sqrt{3}\right)$. 而且此实际问题有解,$S(M_1)=9-5\sqrt{3}$, $S(M_2)=9+5\sqrt{3}$. 故原点到所给曲线的最长距离为 $\sqrt{9+5\sqrt{3}}$,最短距离 $\sqrt{9-5\sqrt{3}}$.

11. 有一下部为圆柱形，上部为圆锥形的帐篷，它的容积为常数 k. 今要使所用的布最少，试证帐篷尺寸间应有关系式为 $R=\sqrt{5}H, h=2H$（其中 R,H 分别为圆柱形的底半径及高，h 为圆锥形的高）.

解　问题为求目标函数 $S=2\pi RH+\frac{1}{2}\cdot 2\pi R\cdot\sqrt{R^2+h^2}$ 在约束条件 $\pi R^2 H+\frac{1}{3}\pi R^2 h=k$ 下的最小值. 用 Lagrange 乘数法，令

$$L=2\pi RH+\pi R\sqrt{R^2+h^2}+\lambda\left(\pi R^2 H+\frac{1}{3}\pi R^2 h-k\right).$$

由

$$\begin{cases}L_R=2\pi H+\pi\sqrt{R^2+h^2}+\dfrac{2\pi R^2}{2\sqrt{R^2+h^2}}+\lambda\left(2\pi RH+\dfrac{2}{3}\pi Rh\right)=0,\\ L_H=2\pi R+\lambda\pi R^2=0,\\ L_h=\dfrac{2\pi Rh}{2\sqrt{R^2+h^2}}+\lambda\cdot\dfrac{1}{3}\pi R^2=0,\\ L_\lambda=\pi R^2\left(H+\dfrac{1}{3}h\right)-k=0\end{cases}$$

求得唯一驻点 $R=\sqrt{5}\sqrt[3]{\frac{3K}{25\pi}}, H=\sqrt[3]{\frac{3K}{25\pi}}, h=2\sqrt[3]{\frac{3K}{25\pi}}$.

而此实际问题有解，故此驻点为最小值点. 即当 $R=\sqrt{5}H, h=2H$ 时，所用布料最省.

13. 求椭圆 $x^2+3y^2=12$ 的内接等腰三角形，使其底边平行于椭圆的长轴，而且面积最大？

解　由椭圆和等腰三角形的对称性可知等腰三角形顶点必在 $(0,\pm 2)$ 处. 只需研究顶点在 $(0,2)$ 的情形. 设另外两顶点分别为 $(-x,y)$ 和 (x,y). 则其面积为

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot(2-y)=x(2-y).$$

于是问题转化为求目标函数.

$S=x(2-y)$ 在约束条件 $x^2+3y^2=12\,(0\leqslant x\leqslant 2\sqrt{3}, -2\leqslant y\leqslant 0)$ 下的最大值. 应用 Lagrange 乘数法，令

$$L=x(2-y)+\lambda(x^2+3y^2-12).$$

由

$$\begin{cases}L_x=2-y+2x\lambda=0,\\ L_y=-x+6\lambda y=0,\\ L_\lambda=x^2+3y^2-12=0\end{cases}$$

可求得唯一的驻点 $M\left(3,-1,-\frac{1}{2}\right)$. 而此实际问题有解.

故当等腰三角形的三个顶点分别为(0,2),(3,-1)及(-3,-1)或(0,-2),(3,1)及(-3,1)时面积最大.

(B)

1. 证明对任意正数 a,b,c 有 $abc^3\leqslant 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5$.

证明 将正数 a,b,c 的和记为 S. 则只要证明目标函数 $f(a,b,c)=abc^3$ 在区域

$$D=\{(a,b,c)\mid 0<a,b,c<S\}$$

及约束条件 $a+b+c=S$ 上的最大值为 $27\left(\frac{S}{5}\right)^5$ 即可. 应用 Lagrange 乘数法,令

$$L=abc^3+\lambda(a+b+c-S).$$

由 $\begin{cases} L_a=bc^3+\lambda=0,\\ L_b=ac^3+\lambda=0,\\ L_c=3abc^2+\lambda=0,\\ L_\lambda=a+b+c-S=0\end{cases}$ 可求得唯一的驻点 $M\left(\frac{S}{5},\frac{S}{5},\frac{3S}{5},\frac{-27S^3}{5^4}\right)$. 又因为 f 在 $\overline{D}$ 连续,故 f 在 $\overline{D}$ 上有最大值,显然在 $\overline{D}$ 的边界上的值恒为零,而在 D 内部的值大于零,故 f 在 $\overline{D}$ 的最大值必在 D 的内部取得. 又由于 M 为 f 在 D 内唯一的驻点,且 f 在 D 内无不可偏导的点. 故 $f(M)$ 为 f 在 $\overline{D}$ 上的最大值,也是 D 上的最大值,即

$$\max_{(a,b,c)\in D} f(a,b,c)=27\left(\frac{S}{5}\right)^5.$$

2. 求 $f(x_1,\cdots,x_n)=x_1x_2\cdots x_n$ 在条件 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=\frac{1}{a}(x_i>0,i=1,2,\cdots,n,a>0)$ 之下的极值. 并证明当 $a_i>0(i=1,\cdots,n)$ 时,成立

$$n\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)^{-1}\leqslant (a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

解 取 Lagrange 函数为

$$L=x_1x_2\cdots x_n+\lambda\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}-\frac{1}{a}\right).$$

由$\begin{cases} L_{x_i}=x_1x_2\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_n-\dfrac{\lambda}{x_i^2}=0, i=1,2,\cdots,n, \\ L_\lambda=\dfrac{1}{x_1}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}-\dfrac{1}{a}=0 \end{cases}$

解得 $M(na, na, \cdots, na)$ 为区域 D 内唯一的驻点，其中 $D=\left\{(x_1,\cdots,x_n) \mid x_i>0, \dfrac{1}{x_i}<\dfrac{1}{a}, a>0, i=1,2,\cdots,n\right\}$. 由于在 $\overline{D}$ 上连续函数 f 必有最小值，且在其边界上 f 为无穷大. 其内部为有限数，从而最小值必在 $\overline{D}$ 的内部取得. 而 M 为其内部唯一的驻点. f 在 D 内可偏导，故 $f(M)$ 必为 f 在 $\overline{D}$ 上的最小值，即 D 上的最小值. 故

$$\min_{(x_1,\cdots,x_n)\in D} f(x_1,\cdots,x_n)=(na)^n.$$

即对任意的 n 个正数 $a_i,(i=1,\cdots,n)$ 恒有 $f(a_1,\cdots,a_n)=a_1a_2\cdots a_n \geqslant \left[n\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right)^{-1}\right]^n$. 即

$$n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)^{-1} \leqslant (a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

3. 设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 内的有界闭区域，函数 $u(x,y)$ 在 D 有定义，在 D 的内部成立 $u_{xx}+u_{yy}+cu=0$，其中 $c<0$ 为常数，证明

(1) u 在 D 上的正最大值(负最小值)不能在 D 的内部取得；

(2) 若 u 在 D 上连续，且在 D 的边界上 $u=0$，则在 D 上 $u\equiv 0$.

证明　(1) **用反证法**　设 u 在 D 上正的最大值在 D 内部取得. 即 $\exists(x_0, y_0)\in \mathring{D}$，使 $u(x_0,y_0)=\max\limits_{(x,y)\in D} u(x,y)>0$. 于是 (x_0,y_0) 必是 $u(x,y)$ 的极大值点. 且 $u_{xx}\leqslant 0, u_{yy}\leqslant 0$(否则 (x_0,y_0) 非极大值点)，从而 $u_{xx}+u_{yy}\big|_{(x_0,y_0)}\leqslant 0$，由等式 $u_{xx}+u_{yy}+cu=0(c<0)$ 知 $u(x_0,y_0)\leqslant 0$ 与假设矛盾. 故假设错误，即 u 在 D 上的正的最大值不能在 D 内取得. 同理可证 u 在 D 上负的最小值不能在 D 的内部取得.

(2) **用反证法**　设 $u\not\equiv 0$，则 $\exists(x_0,y_0)\in D$，使 $u(x_0,y_0)\neq 0$. 不妨设 $u(x_0, y_0)>0$，由于在 D 的边界上 $u=0$，所以 $(x_0,y_0)\in \mathring{D}$. 又 u 在有界闭区域 D 上连续，必有最大值，且由于 $u(x_0,y_0)>0$，则 u 在 D 上的最大值为正，且在 $\mathring{D}$ 取得. 这与(1)矛盾. 故 $u\equiv 0, \forall(x,y)\in D$.

4. 设有一小山，取它的底面所在的平面为 xOy 坐标面，其底部所占的区域为 $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2-xy\leqslant 75\}$，小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

(1) 设 $M(x_0,y_0)$ 为区域 D 上的一个点，问 $h(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大？若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$，试写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式；

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动，为此需在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点，试确定攀登起点的位置.

解 (1) 由方向导数及梯度的概念可知 $h(x,y)$ 在 $M(x_0,y_0)$ 处沿 $\mathrm{grad}\, h(x_0,y_0)=\{-2x_0+y_0,-2y_0+x_0\}$ 的方向导数最大，且此最大的方向导数 $g(x_0,y_0)=\|\mathrm{grad}\, h(x_0,y_0)\|=\sqrt{5x_0^2+5y_0^2-8x_0y_0}$.

(2) 也就是求 $[g(x,y)]^2=5x^2+5y^2-8xy$ 在 D 内满足约束条件 $x^2+y^2-xy=75$ 的最大值点. 构造 Lagrange 函数，令 $L=5x^2+5y^2-8xy+\lambda(x^2+y^2-xy-75)$. 由

$$\begin{cases}L_x=10x-8y+\lambda(2x-y)=0,\\ L_y=10y-8x+\lambda(2y-x)=0,\\ L_\lambda=x^2+y^2-xy-75=0\end{cases}$$

可得驻点 $M_1(5,-5)$，$M_2(-5,5)$，$M_3(5\sqrt{3},5\sqrt{3})$. $M_4(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3})$. 而 $g^2|_{M_1}=g^2|_{M_2}=450$，$g^2|_{M_3}=g^2|_{M_4}=150$. 故攀登起点为 $M_1(5,-5)$ 或 $M_2(-5,5)$.

习 题 5.5

(A)

1. 用导数定义求下列向量值函数的导数.

(1) f: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 是常向量；

(2) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}$，其中 $(a_{ij})_{m\times n}$ 为常矩阵，$\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^m$ 为常向量.

解 (1) $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 为常向量，则 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(a_{ij})_{m\times n}\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，其中 $a_{ij}=0$，$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$. 故 $\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x})=(a_{ij})_{m\times n}$.

(2) 由
$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\mathrm{d}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})&=\Big(\mathrm{d}\Big(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j+a_1\Big),\mathrm{d}\Big(\sum_{j=1}^n a_{2j}x_j+a_2\Big),\\&\qquad\cdots,\mathrm{d}\Big(\sum_{j=1}^n a_{mj}x_j+a_m\Big)\Big)^{\mathrm{T}}\\&=\Big(\sum_{j=1}^n a_{1j}\mathrm{d}x_j,\sum_{j=1}^n a_{2j}\mathrm{d}x_j,\cdots,\sum_{j=1}^n a_{mj}\mathrm{d}x_j\Big)^{\mathrm{T}}=(a_{ij})_{m\times n}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\&=\boldsymbol{A}\mathrm{d}\boldsymbol{x},\end{aligned}$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的 m 个分量，$\mathrm{d}\boldsymbol{x}=(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_n)^{\mathrm{T}}$. 故 $\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}$.

3. 求下列向量值函数在给定点的导数.

(2) $f(x,y)=(\arctan x,\mathrm{e}^{xy})^{\mathrm{T}}$,在$(1,0)^{\mathrm{T}}$处;

(4) $f(x,y,z)=\left(\sin(x^2-y^2),\ln(x^2+z^2),\dfrac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)^{\mathrm{T}}$,在$(1,1,1)^{\mathrm{T}}$处.

解　(2) $\boldsymbol{D}f(1,0)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{1+x^2} & 0\\ y\mathrm{e}^{xy} & x\mathrm{e}^{xy}\end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x=1\\y=0}}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

(4) $$\boldsymbol{D}f(1,1,1)=\begin{pmatrix}2x\cos(x^2-y^2) & -2y\cos(x^2-y^2) & 0\\ \dfrac{2x}{x^2+z^2} & 0 & \dfrac{2z}{x^2+z^2}\\ 0 & -y(y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} & -z(y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\end{pmatrix}_{\substack{x=1\\y=1\\z=1}}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

4. 设$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$为空间$\mathbf{R}^3$中动点$(x(t),y(t),z(t))^{\mathrm{T}}$的向径,证明$\|\boldsymbol{r}(t)\|=C$($C$为常数)$\Leftrightarrow\langle\boldsymbol{r}'(t),\boldsymbol{r}(t)\rangle=0$.

证明　$\|\boldsymbol{r}(t)\|=C\Leftrightarrow\|\boldsymbol{r}(t)\|^2=C^2\Leftrightarrow\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{r}(t)\|^2=0\Leftrightarrow\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{r}(t)\rangle=0\xLeftrightarrow{\text{定理5.2(2)}}2\langle\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{r}'(t)\rangle=0\Leftrightarrow\langle\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{r}'(t)\rangle=0$.

或　由$\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$知$\boldsymbol{r}'(t)=\{x'(t),y'(t),z'(t)\}$,于是$\langle\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{r}'(t)\rangle=x(t)x'(t)+y(t)y'(t)+z(t)z'(t)$.

故$\|\boldsymbol{r}(t)\|=C\Leftrightarrow x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)=C^2$

$\Leftrightarrow 2x(t)x'(t)+2y(t)y'(t)+2z(t)z'(t)=0$

$\Leftrightarrow\langle\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{r}'(t)\rangle=0$.

5. 求由下列方程组所确定的隐函数的导数.

(1) $\begin{cases}xu+yv=0,\\ yu+xv=0,\end{cases}$ 求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$;

(2) $\begin{cases}u+v+w=x,\\ uv+vw+wu=y,\\ uvw=z,\end{cases}$ 求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

解　(1) 将u,v看作x,y的隐函数,两端分别对x求导,得

$$\begin{cases}u+xu_x+yv_x=0,\\ yu_x+v+xv_x=0,\end{cases}\text{解之得 }u_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-ux+yv}{x^2-y^2}.$$

原方程组两端对 y 求偏导得$\begin{cases} xu_y + yv_y + v = 0, \\ yu_y + xv_y + u = 0, \end{cases}$解之得 $v_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{-ux+yv}{x^2-y^2}$.

（2）方程两端求全微分，

得
$$\begin{cases} du + dv + dw = dx, \\ (u+w)dv + (v+w)du + (v+u)dw = dy, \\ vwdu + uwdv + uvdw = dz. \end{cases}$$

解之得
$$\begin{cases} du = \dfrac{v-w}{J}[u^2dx - udy + dz], \\ dv = \dfrac{u-w}{J}[-v^2dx + vdy - dz], \\ dw = \dfrac{u-v}{J}(w^2dx - wdy + dz). \end{cases}$$

故 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{u^2}{(u-v)(u-w)}, \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{-u}{(u-v)(u-w)},$

$\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{1}{(u-v)(u-w)}.$

其中 $J = (u-v)(u-w)(v-w)$.

6. 设函数 $u=u(x)$ 由方程组 $u=f(x,y,z)$，$\varphi(x^2,e^y,z)=0$，$y=\sin x$ 确定，其中 f,φ 都具有连续的一阶偏导数，且$\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$，求$\dfrac{du}{dx}$.

解 由一阶全微分形式不变性可得

$$\begin{cases} du = f_x dx + f_y dy + f_z dz, & ① \\ \varphi_1 dx^2 + \varphi_2 de^y + \varphi_3 dz = 2x\varphi_1 dx + e^y\varphi_2 dy + \varphi_3 dz = 0, & ② \\ dy = d\sin x. & ③ \end{cases}$$

将第③式代入第②式可得 dz. 再将 dy 与 dz 的表达式代入第①式可得

$$du = \left[f_1 + \cos x \cdot f_2 - \frac{f_3}{\varphi_3}(2x\varphi_1 + e^y\varphi_2\cos x)\right]dx$$

所以
$$\frac{du}{dx} = f_1 + f_2\cos x - \frac{f_3}{\varphi_3}(2x\varphi_1 + e^y\varphi_2\cos x).$$

8. 设方程组 $F(y-x,y-z)=0$，$G\left(xy,\dfrac{z}{y}\right)=0$ 确定隐函数 $x=x(y)$，$z=z(y)$，其中 F,G 都具有一阶连续偏导数，求$\dfrac{dx}{dy}$.

解　利用一阶全微分形式不变性得

$$\begin{cases} F_1\mathrm{d}(y-x)+F_2\mathrm{d}(y-z)=0, \\ G_1\mathrm{d}xy+G_2\mathrm{d}\dfrac{z}{y}=0. \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} (F_1+F_2)\mathrm{d}y-F_1\mathrm{d}x-F_2\mathrm{d}z=0, \\ \left(xG_1-\dfrac{zG_2}{y^2}\right)\mathrm{d}y+yG_1\mathrm{d}x+\dfrac{1}{y}G_2\mathrm{d}z=0. \end{cases}$$

解之得

$$\mathrm{d}x=\frac{\dfrac{1}{y}F_1G_2+xF_2G_1+\dfrac{1}{y}\left(1-\dfrac{z}{y}\right)F_2G_2}{\dfrac{1}{y}F_1G_2-yG_1F_2}\mathrm{d}y$$

即
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\left[\frac{1}{y}F_1G_2+xF_2G_1+\frac{1}{y}\left(1-\frac{z}{y}\right)F_2G_2\right]\bigg/\left[\frac{1}{y}F_1G_2-yG_1F_2\right].$$

9. 设$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2)^{\mathrm{T}}$，$f_1(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2)=2\mathrm{e}^{y_1}+x_1y_2-4x_2+3$，$f_2(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2)=y_2\cos y_1-6y_1+2x_1-x_3$，$\boldsymbol{x}_0=(3,2,7)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}_0=(0,1)^{\mathrm{T}}$. 求由向量方程$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$所确定的隐函数$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)$在$\boldsymbol{x}_0$处的导数，其中$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)^{\mathrm{T}}$.

解·向量方程两边求微分得

$$\begin{pmatrix} y_2 & -4 & 0 & 2\mathrm{e}^{y_1} & x_1 \\ 2 & 0 & -1 & -6-y_2\sin y_1 & \cos y_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x_1\\ \mathrm{d}x_2\\ \mathrm{d}x_3\\ \mathrm{d}y_1\\ \mathrm{d}y_2\end{pmatrix}=0.$$

在$\boldsymbol{x}_0=(3,2,7)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}_0=(0,1)^{\mathrm{T}}$有

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -6 & 1 \end{pmatrix}(\mathrm{d}x_1\quad \mathrm{d}x_2\quad \mathrm{d}x_3\quad \mathrm{d}y_1\quad \mathrm{d}y_2)^{\mathrm{T}}=0.$$

解之得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\mathrm{d}y_1\\ \mathrm{d}y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{5} & -\dfrac{3}{20} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{6}{5} & \dfrac{1}{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x_1\\ \mathrm{d}x_2\\ \mathrm{d}x_3\end{pmatrix}$$

故
$$\mathrm{D}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{20}\\ -\frac{1}{2} & \frac{6}{5} & \frac{1}{10}\end{pmatrix}.$$

(B)

1. 设$\boldsymbol{f}$: $U(\boldsymbol{x}_0)\subseteq\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$，其中$\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_m)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$，若$\frac{\partial f_i(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_j}(i=1,2,\cdots,m,j=1,\cdots,n)$在$\boldsymbol{x}_0$的某邻域内存在，且在$\boldsymbol{x}_0$处连续，证明$\boldsymbol{f}$在$x_0$处可微.

证明 由于$\frac{\partial f_i(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_j}i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n$在$\boldsymbol{x}_0$的某邻域内存在，且在$\boldsymbol{x}_0$处连续，由定理3.2知数量值函数$f_i(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x}_0$处可微，$i=1,2,\cdots,m$. 即向量值函数的每一个分量$f_i(\boldsymbol{x})(i=1,\cdots,m)$在$\boldsymbol{x}_0$处可微，由向量值函数可微的定义知$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x}_0$处可微.

3. 设$\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0\in\mathbf{R}^n$，$S$是联结$\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0$的线段，$\Omega$是包含$S$的区域，$\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_m)^{\mathrm{T}}:\Omega\to\mathbf{R}^m$连续，$\boldsymbol{f}$在$S$上($\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0$可以除外)可微，则存在$\boldsymbol{\xi}_1\cdots,\boldsymbol{\xi}_m\in S$使

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_0)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\left(\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\xi}_i)}{\partial x_j}\right)_{m\times n}(\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{x}_0)$$

证明 令$\Delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{x}_0$. 首先证明对$\boldsymbol{f}$的每个分量($n$元数量值函数)$f_i(\boldsymbol{x})$，存在$\boldsymbol{\xi}_i\in S$，$i=1,2,\cdots,m$，使

$$f_i(\boldsymbol{y}_0)-f_i(\boldsymbol{x}_0)=f_i(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{x}_0)=\langle\nabla f_i(\boldsymbol{\xi}_i),\Delta\boldsymbol{x}\rangle.$$

为此考虑一元函数$\varphi_i(t)=f_i(\boldsymbol{x}_0+t\Delta\boldsymbol{x})$，$0\leqslant t\leqslant1$.

则$\varphi_i(1)=f_i(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})=f_i(\boldsymbol{y}_0)$，$\varphi_i(0)=f_i(\boldsymbol{x}_0)$.

由于$\boldsymbol{f}$在S上可微，从而复合函数$\varphi_i(t)=f_i(\boldsymbol{x}_0+t\Delta\boldsymbol{x})$在$[0,1]$对$t$可导，由一元函数的Lagrange公式知，存在$\eta_i\in(0,1)$，使$\varphi_i(1)-\varphi_i(0)=\left.\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\eta_i}$.

$$f_i(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{x}_0)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{x}_0+\eta_i\Delta\boldsymbol{x})}{\partial x_j}\Delta x_j=\langle\nabla f_i(\boldsymbol{x}_0+\eta_i\Delta\boldsymbol{x}),\Delta\boldsymbol{x}\rangle.$$

令$\boldsymbol{\xi}_i=\boldsymbol{x}_0+\eta_i\Delta\boldsymbol{x}$，由于$\eta_i\in(0,1)$，则$\boldsymbol{\xi}_i\in S$，其中

$$(\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n)^{\mathrm{T}}=\Delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{x}_0,i=1,2,\cdots,m.$$

故 $\exists \boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n\in S$,使

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})-f_1(\boldsymbol{x}_0)\\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})-f_m(\boldsymbol{x}_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{\xi}_1)}{\partial x_j}\Delta x_j\\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{\xi}_m)}{\partial x_j}\Delta x_j\end{pmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\xi}_i)}{\partial x_j}\right)_{m\times n}\Delta\boldsymbol{x}.$$

注意到 $\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{x}_0$,本题得证.

习　题　5.6

(A)

2. 求曲线 $\boldsymbol{r}=(t,-t^2,t^3)$ 上的与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线方程.

解　设曲线上 $\boldsymbol{r}_0=(t_0,-t_0^2,t_0^3)$ 的切线与平面 $x+2y+z=4$ 平行,则 $\boldsymbol{r}_0$ 处的切向量 $\dot{\boldsymbol{r}}_0=(1,-2t_0,3t_0^2)$ 与平面的法向量 $(1,2,1)$ 垂直,即 $1-4t_0+3t_0^2=0$. 解之得 $t_0=1$ 或 $t_0=\frac{1}{3}$. 则所求切线过 $\boldsymbol{r}_0=(1,-1,1)$ 或 $\boldsymbol{r}_0=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{9},\frac{1}{27}\right)$. 所求切线为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}\text{ 和 }\frac{x-\frac{1}{3}}{1}=\frac{y+\frac{1}{9}}{-\frac{2}{3}}=\frac{z-\frac{1}{27}}{\frac{1}{3}}.$$

3. 证明螺线 $\boldsymbol{r}=(a\cos\theta,a\sin\theta,k\theta)$ 上任一点的切线与 Oz 轴交成定角.

证明　$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为螺线上任一点,则 $x_0=a\cos\theta_0,y_0=a\sin\theta_0,z_0=k\theta_0$. P_0 处的切向量为 $\boldsymbol{r}'=(-a\sin\theta,a\cos\theta,k)$ 与 z 轴夹角为 α,则 $\cos\alpha=\dfrac{\langle\boldsymbol{r}',\boldsymbol{k}\rangle}{\|\boldsymbol{r}'\|\cdot\|\boldsymbol{k}\|}=\dfrac{k}{\sqrt{a^2+k^2}}$,其中 $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$ 为 z 轴正向的单位向量. 即 α 与 P_0 无关的常数. 本题得证.

4. 求下列平面曲线的弧长.

(2) $x=x(t)=\int_0^{t^2}\sqrt{1+u}\,\mathrm{d}u,y=y(t)=\int_0^{t^2}\sqrt{1-u}\,\mathrm{d}u$,$0\leqslant t\leqslant 1$;

解　$S=\int_0^1\sqrt{[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2}\,\mathrm{d}t$

$$=\int_0^1 [(2t\sqrt{1+t^2})^2+(2t\sqrt{1-t^2})^2]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=\sqrt{2}.$$

(3) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\quad(a>0)$的全长;

解 其参数方程为 $x=a\cos^3\theta, y=a\sin^3\theta, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

故由对称性全长为 $S=4S_1=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{[x'(\theta)]^2+[y'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta=6a$.

(6) 极坐标系中的曲线 $\rho=a(1+\cos\theta)$ 的全长;

解 其参数方程为 $x=a(1+\cos\theta)\cos\theta, y=a(1+\cos\theta)\sin\theta, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. 由心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)$ 的对称性知,其全长

$$S=2\int_0^{\pi}\sqrt{[x'(\theta)]^2+[y'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\pi}a\sqrt{2(1+\cos\theta)}\mathrm{d}\theta$$

$$=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=8a.$$

(8) 曲线 $y(x)=\int_{-\sqrt{3}}^{x}\sqrt{3-t^2}\mathrm{d}t$ 的全长.

解 其切向量 $\tau=\{1,y'(x)\}=\{1,\sqrt{3-x^2}\}$ 且 $|x|\leqslant\sqrt{3}$. 故弧长

$$S=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}[1+(\sqrt{3-x^2})^2]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi+\sqrt{3}.$$

5. 求下列空间曲线的弧长.

(3) $\begin{cases}x^2=3y,\\ 2xy=9z\end{cases}$,介于点(0,0,0)与点(3,3,2)之间的弧段.

解 曲线方程为 $\boldsymbol{r}(x)=\left\{x,\frac{1}{3}x^2,\frac{2}{27}x^3\right\}, 0\leqslant x\leqslant 3$. 则切向量 $\boldsymbol{r}'=\left\{1,\frac{2}{3}x,\frac{2}{9}x^2\right\}$,则所求弧长为

$$S=\int_0^3\sqrt{1+\frac{4}{9}x^2+\frac{4}{81}x^4}\mathrm{d}x=\int_0^3\left(1+\frac{2}{9}x^2\right)\mathrm{d}x=5.$$

6. 两条曲线的交角,是指它们在交点处的切线的交角. 证明曲线 $\boldsymbol{r}=\{ae^t\cos t, ae^t\sin t, ae^t\}$ 与圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的各母线相交的角度相同.

证明 设曲线与圆锥面的交点为 $P_0(ae^{t_0}\cos t_0, ae^{t_0}\sin t_0, ae^{t_0}), t_0\in\mathbf{R}$,则曲线在 P_0 处的切向量为

$$\boldsymbol{r}'=\{\cos t_0-\sin t_0, \sin t_0+\cos t_0, 1\}.$$

圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 过 P_0 点的母线为直线 $\frac{x}{\cos t_0}=\frac{y}{\sin t_0}=\frac{z}{1}$(即直线 OP_0),其方向

向量为 $S=\{\cos t_0,\sin t_0,1\}$.

设 α 为所求夹角,则

$$\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{\langle \boldsymbol{r}',\boldsymbol{S}\rangle}{\|\boldsymbol{r}'\|\ \|\boldsymbol{S}\|}\\&=\frac{(\cos t_0-\sin t_0)\cos t_0+(\sin t_0+\cos t_0)\sin t_0+1}{\sqrt{(\cos t_0-\sin t_0)^2+(\sin t_0+\cos t_0)^2+1}\ \sqrt{\cos^2 t_0+\sin^2 t_0+1}}\\&=\frac{2}{\sqrt{6}}\end{aligned}$$

与 t_0无关. 故命题得证.

8. 求 xOz 坐标面内的曲线$\begin{cases}x=f(v),\\z=g(v),\end{cases}$ $a\leqslant v\leqslant b$ 绕 Oz 轴旋转一周所得旋转面的参数方程,其中 $f(v)>0$.

解　曲面的水平截面为圆,圆心在 z 轴上,半径为 $f(v)$.

故曲面上 $P(x,y,z)$ 满足 $x^2+y^2=f^2(v),z=g(v)$.

P 在 xOy 的投影点为 P',取由 x 轴逆时针旋转到 $\boldsymbol{OP'}$的角为 θ,则曲面的参数方程为

$$x=f(v)\cos\theta,y=f(v)\sin\theta,z=g(v),\text{其中 }0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ a\leqslant v\leqslant b.$$

9. 写出曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上点 $\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$ 处的切面与法线的参数方程.

解　$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 在 $\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$ 处的法向量为 $\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)\times\boldsymbol{r}_v(u_0,\theta_0)$.

设 $\boldsymbol{\rho}$ 为点 $\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$ 处的切平面上任一点的向径,则 $\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$ 在切平面上,从而 $\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(u_0,v_0),\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0),\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)$ 共面. 于是存在 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ 使 $\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(u_0,v_0)=\lambda\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)+\mu\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)$. 即切平面的方程为

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}(\lambda,\mu)=\boldsymbol{r}(u_0,v_0)+\lambda\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)+\mu\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0),$$

法线方程为 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}(t)=\boldsymbol{r}(u_0,v_0)+t[\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)\times\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)]$.

11. 试求平面,使它通过曲线$\begin{cases}y^2=x,\\z=3(y-1)\end{cases}$在 $y=1$ 处的切线,且与曲面 $x^2+y^2=4z$ 相切.

解　曲线 Γ: $\begin{cases}y^2=x,\\z=3(y-1)\end{cases}$ 上 $y=1$ 的点为 $M(1,1,0)$. 而且曲面 $y^2=x$ 在 M 处的切平面 $x-1-2(y-1)=0$ 与平面 $z=3(y-1)$ 的交线 Γ_1: $\begin{cases}x-2y+1=0,\\z=3(y-1)\end{cases}$即曲线 Γ 在 M 点的切线.

过 Γ_1 的平面束为 $x-2y+1+\lambda(3y-3-z)=0$.

即 $x+(3\lambda-2)y-\lambda z+1-3\lambda=0$ 中与曲面 Σ: $x^2+y^2=4z$ 相切的平面. 设切点为 P_0 (x_0, y_0, z_0). 则 P_0 应在所求平面 π 及 Σ 上，即 $\begin{cases} x_0+(3\lambda-2)y_0-\lambda z_0+1-3\lambda=0, \\ x_0^2+y_0^2=4z_0. \end{cases}$

Σ 在 P_0 处的法向量 $\{2x_0, 2y_0, -4\}$ 应与平面束垂直，因而

$$2x_0+2y_0(3\lambda-2)+4\lambda=0.$$

故 $\lambda=1$ 或 $\lambda=\frac{5}{6}$. 从而所求平面 π 的方程为

$$x+y-z-2=0 \quad \text{或} \quad 6x+3y-5z-9=0.$$

13. 求曲面 $z=xy$ 的法线，使它与平面 $x+3y+z+9=0$ 垂直.

解 曲面 $z=xy$ 上 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处法向量 $\boldsymbol{n}=\{y_0, x_0, -1\}$. 又所求法线 Γ 与 $x+3y+z+9=0$ 垂直，则 $y_0=\frac{x_0}{3}=\frac{-1}{1}$. 于是 $x_0=-3, y_0=-1, z_0=x_0y_0=3$. 故所求法线 Γ 为

$$\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}.$$

14. 求曲面 $x^2+2y^2+z^2=22$ 的法线，使它与直线 $\begin{cases} x+3y+z=3, \\ x+y=0 \end{cases}$ 平行.

解 设所求直线 L 为曲面上 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的法线，则 $x_0^2+2y_0^2+z_0^2=22$，且 L 的方向向量为 $\{2x_0, 4y_0, 2z_0\}$.

又由于 L 与 $\begin{cases} x+3y+z=3, \\ x+y=0 \end{cases}$ 平行，则 $\{2x_0, 4y_0, 2z_0\}$ 平行于

$$\{1,3,1\}\times\{1,1,0\}=\{-1,1,-2\}, \text{即} \frac{x_0}{-1}=\frac{2y_0}{1}=\frac{z_0}{-2},$$

$x_0=-2y_0, z_0=-4y_0$. 代入 $x_0^2+2y_0^2+z_0^2=22$ 可得 P_0 为 $(-2,1,-4)$ 或 $(2,-1,4)$. 故所求直线为

$$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+4}{-2} \text{ 或 } \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-4}{2}.$$

15. 求曲线 $\begin{cases} 3x^2+2y^2=12, \\ z=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所得旋转面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处

由内部指向外部的单位法向量.

解　所得旋转面为椭圆面,其方程为 $3(x^2+z^2)+2y^2=12$,且在 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的法向量为 $\{0,2\sqrt{3},3\sqrt{2}\}$ 或 $\{0,-2\sqrt{3},-3\sqrt{2}\}$. 而所求法向量应与此点的向径同向,即为与 $\{0,2\sqrt{3},3\sqrt{2}\}$ 同向的单位向量 $\frac{1}{5}\{0,\sqrt{10},\sqrt{15}\}$.

17. 求锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ 在其上一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程,并证明切平面通过锥面在 P_0 处的母线.

解　由于 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=\frac{z_0^2}{c^2}$,故锥面在 P_0 处的切平面 π 的方程为 $\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y-\frac{z_0}{c^2}z=0$. 因而 π 过原点. P_0 点的向径 $\boldsymbol{r}_0=\{x_0,y_0,z_0\}$ 与 π 的法向量 $\left\{\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{-z_0}{c^2}\right\}$ 垂直. 故过原点平行向量 $\boldsymbol{r}_0$ 的直线(即过 P_0 的母线)必在 π 上.

证法Ⅱ　由于圆锥面过 P_0 的母线是锥面过 P_0 的直线,其在 P_0 切线(即其自己)必在锥面过 P_0 的切平面上.

18. 证明 曲面 $xyz=a^3\ (a>0)$ 上任一点的切平面和三个坐标面所围四面体的体积是一常数.

证明　设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为 $xyz=a^3$ 上任一点,则 $x_0y_0z_0=a^3$. 曲面 $xyz=a^3$ 在 P_0 处的切平面 π 方程为

$$y_0z_0x+x_0z_0y+x_0y_0z=3a^3.$$

由 $a>0$ 知 π 的截距方程为 $\frac{x}{3x_0}+\frac{y}{3y_0}+\frac{z}{3z_0}=1$. 故 π 与三坐标面所围四面体体积

$$V=|3x_0\cdot 3y_0\cdot 3z_0|=27a^3 \text{为一常数与} P_0 \text{无关}.$$

19. 设 a,b 和 c 为常数,函数 $F(u,v)$ 有连续的一阶偏导数. 证明曲面 $F\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$ 上任一点处的切平面均通过定点.

证明　设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为曲面 $F\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$ 上一点.

则 $z_0\neq c$,且曲面在 P_0 处的切平面方程为

$$\frac{F_u(P_0)}{z_0-c}(x-x_0)+\frac{F_v(P_0)}{z_0-c}(y-y_0)$$

$$=\frac{F_u(P_0)(x_0-a)+F_v(P_0)(y_0-b)}{(z_0-c)^2}(z-z_0).$$

即 $[(x-x_0)(z_0-c)-(a-x_0)(z_0-z)]F_u(P_0)+[(y-y_0)(z_0-c)-(y_0-b)(z-z_0)]F_v(P_0)=0.$

故切平面过(a,b,c)点.

20. 设 a 和 b 为常数,证明曲面 $F(x-az,y-bz)=0$ 上任一点处的切平面均与某定直线平行.

证明 $P_0(x_0,y_0,z_0)$为 $F(x-az,y-bz)=0$ 上任一点. 过 P_0的法向量 $\boldsymbol{n}=\{F_1(P_0),F_2(P_0),-aF_1(P_0)-bF_2(P_0)\}$ 与常向量$\{a,b,1\}$垂直,故过 P_0 的切平面与定直线 $ax+by+z=0$ 平行.

21. 两个曲面在交线上某点的交角是指两曲面在该点的法线的交角. 证明球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与锥面 $x^2+y^2=k^2z^2$ 正交$\left(\text{即交角为}\frac{\pi}{2}\right)$.

证明 球面与锥面的交点为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$,则 $x_0^2+y_0^2+z_0^2=R^2$ 且 $x_0^2+y_0^2=kz_0^2$. 而球面与锥面在 P_0 处的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_{球}=\{2x_0,2y_0,2z_0\}$ 和 $\boldsymbol{n}_{锥}=\{2x_0,2y_0,-2kz_0\}$. 设两曲面在 P_0处夹角为 α,则

$$\cos\alpha=\frac{\langle \boldsymbol{n}_{球},\boldsymbol{n}_{锥}\rangle}{\|\boldsymbol{n}_{球}\|\cdot\|\boldsymbol{n}_{锥}\|}=\frac{4(x_0^2+y_0^2-kz_0^2)}{\|\boldsymbol{n}_{球}\|\cdot\|\boldsymbol{n}_{锥}\|}=0,$$

从而 $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

(B)

1. 试证旋转面 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$上任一点的法线与旋转轴相交,其中 $f'(u)$ 连续且不等于零.

证明 设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$为 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$上任意一点,由于垂直于 z 轴的截面为圆,故 z 轴为旋转轴. 由于$f'(u)$连续且不为零,则 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$在 P_0处的法线

$$\frac{x-x_0}{\frac{x_0}{u_0}f'(u_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{y_0}{u_0}f'(u_0)}=\frac{z-z_0}{-1},$$

与 z 轴$(x=0,y=0)$ 有交点$\left(0,0,z_0+\frac{u_0}{f'(u_0)}\right)$,其中 $u_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$.

2. 设 $\boldsymbol{F}(u,v)$ 是一连续可微的非零向量值函数，$\boldsymbol{F}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$. 证明函数 $\boldsymbol{F}(u,v)$ 的长度是常数的充要条件为 $\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial u}\cdot\boldsymbol{F}\equiv 0$ 及 $\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial v}\cdot\boldsymbol{F}\equiv 0$.

证明　令 $\boldsymbol{F}(u,v)=\{f_1(u,v),f_2(u,v),f_3(u,v)\}$，

则 $\|\boldsymbol{F}\|^2=f_1^2(u,v)+f_2^2(u,v)+f_3^2(u,v)$，$\dfrac{\partial\|\boldsymbol{F}\|^2}{\partial u}=2\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial u}f_1+\dfrac{\partial f_2}{\partial u}f_2+\dfrac{\partial f_3}{\partial u}f_3\right)=2\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial u}\cdot\boldsymbol{F}$，$\dfrac{\partial\|\boldsymbol{F}\|^2}{\partial v}=2\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial v}f_1+\dfrac{\partial f_2}{\partial v}f_2+\dfrac{\partial f_3}{\partial v}f_3\right)=2\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial v}\cdot\boldsymbol{F}$.

从而 $\|\boldsymbol{F}\|^2=C$ 为常数 $\Leftrightarrow\dfrac{\partial\|\boldsymbol{F}\|^2}{\partial u}\equiv 0$ 且 $\dfrac{\partial\|\boldsymbol{F}\|^2}{\partial v}\equiv 0\xLeftrightarrow{\boldsymbol{F}\text{为连续可微非零向量值函数}}\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial u}\cdot\boldsymbol{F}\equiv 0$ 且 $\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial v}\cdot\boldsymbol{F}\equiv 0$.

3. 证明曲面 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是球面的充要条件为 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的所有法线通过一个定点.

证明　设 Σ 的方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$.

充分性　设 Σ 的所有法线过定点 P_0，P_0 的向径为 $\boldsymbol{x}_0$，则 $\boldsymbol{r}(u,v)-\boldsymbol{x}_0$ 及 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$ 均为 $\boldsymbol{\Sigma}$ 上向径 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 处的法向量，则其互相平行，也即存在数量值函数 $f(u,v)$，使 $\boldsymbol{r}(u,v)-\boldsymbol{x}_0=f(u,v)\boldsymbol{n}$. 从而

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}(\boldsymbol{r}(u,v)-\boldsymbol{x}_0)\right]\cdot[\boldsymbol{r}(u,v)-\boldsymbol{x}_0]=\boldsymbol{r}_u\cdot[f(u,v)\boldsymbol{n}]\equiv 0,$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial v}(\boldsymbol{r}(u,v)-\boldsymbol{x}_0)\right]\cdot[\boldsymbol{r}(u,v)-\boldsymbol{x}_0]=\boldsymbol{r}_v\cdot[f(u,v)\boldsymbol{n}]\equiv 0.$$

由上题知 $\|\boldsymbol{r}(u,v)-\boldsymbol{x}_0\|$ 为常数，即 $\sum$ 上任一点到定点 $\boldsymbol{x}_0$ 的距离相等，故 $\sum$ 为球面.

必要性　将充分性逆推即可.

4. 设函数 $u=F(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 和 $\psi(x,y,z)=0$ 下，在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处取得极值 m. 证明曲面 $F(x,y,z)=m$；$\varphi(x,y,z)=0$ 和 $\psi(x,y,z)=0$ 在点 P_0 的法线共面. 其中函数 F,φ 及 ψ 均有连续的且不同时为零的一阶偏导数.

证明　曲面 $F(x,y,z)=m$，$\varphi(x,y,z)=0$，$\psi(x,y,z)=0$ 在 P_0 点处的法向量分别为

$$\boldsymbol{n}_F=\{F_x(P_0),F_y(P_0),F_z(P_0)\},$$
$$\boldsymbol{n}_\varphi=\{\varphi_x(P_0),\varphi_y(P_0),\varphi_z(P_0)\},$$
$$\boldsymbol{n}_\psi=\{\psi_x(P_0),\psi_y(P_0),\psi_z(P_0)\}.$$

因此只需证明 $\boldsymbol{n}_F,\boldsymbol{n}_\varphi,\boldsymbol{n}_\psi$ 共面即可.

令 $L(x,y,z,\lambda,\mu)=F(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$.

由于 $u=F(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z)=0,\psi(x,y,z)=0$ 下在 P_0 处取得极值 m，且 F,φ,ψ 均有连续的且不同时为零的一阶偏导数知，∃实数 λ_0,μ_0 使

$$L_x(P_0,\lambda_0,\mu_0) = F_x(P_0)+\lambda_0\varphi_x(P_0)+\mu_0\psi_x(P_0) = 0,$$

$$L_y(P_0,\lambda_0,\mu_0) = F_y(P_0)+\lambda_0\varphi_y(P_0)+\mu_0\psi_y(P_0) = 0,$$

$$L_z(P_0,\lambda_0,\mu_0) = F_z(P_0)+\lambda_0\varphi_z(P_0)+\mu_0\psi_z(P_0) = 0.$$

即 $\exists\lambda_0,\mu_0\in R_0$ 使 $\boldsymbol{n}_F=-\lambda_0\boldsymbol{n}_\varphi-\mu_0\boldsymbol{n}_\psi$. 从而 $\boldsymbol{n}_F,\boldsymbol{n}_\varphi,\boldsymbol{n}_\psi$ 共面.

习 题 5.7

(A)

1. 如果曲线的方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$（$t$ 为一般参数），试推导标架向量 $\boldsymbol{T},\boldsymbol{B}$ 的计算公式(7.6)

解 公式(7.6) 即 $\boldsymbol{T}=\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}}{\|\dot{\boldsymbol{r}}\|}$, $\boldsymbol{B}=\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}}{\|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}\|}$.

注意到弧长 $s(t)$ 对 t 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\|\dot{\boldsymbol{r}}\|$，则由 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{r}'$，可知 $\boldsymbol{T}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}S}=\dot{\boldsymbol{r}}\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}}{\|\dot{\boldsymbol{r}}\|}$. 于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}''=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}s}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)=\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}+\dot{\boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}s^2}\\&=\ddot{\boldsymbol{r}}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2+\dot{\boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}s^2}.\end{aligned}$$

从而 $\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''=(\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}})\left(\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^3$，即 $\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''$ 与 $\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}$ 同向，故由 $\boldsymbol{B}=\dfrac{\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''}{\|\boldsymbol{r}''\|}$ 可知 $\boldsymbol{B}=\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}}{\|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}\|}$.

5. 证明螺旋线 $\boldsymbol{r}=(a\cos t,a\sin t,bt)$ 上任一点的主法线都与 z 轴垂直相交.

证明 $\dot{\boldsymbol{r}}=(-a\sin t,a\cos t,b)$，$\ddot{\boldsymbol{r}}=(-a\cos t,-a\sin t,0)$，从而 $\boldsymbol{T}=\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}}{\|\dot{\boldsymbol{r}}\|}$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t,a\cos t,b),$$

$$\boldsymbol{B}=(\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}})/\|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}\|=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin t,-b\cos t,a),$$

$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{T}=(\cos t,\sin t,0)$. 故 $\boldsymbol{N}$ 与 z 轴垂直.

即主法线与 z 轴垂直,且螺线上任一点 $\boldsymbol{r}(t)$ 处的主法线方程为 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}(\lambda)=\boldsymbol{r}(t)+\lambda\boldsymbol{N}(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)+\lambda(\cos t,\sin t,0)$. 显然 z 轴上的点 $(0,0,bt)=\boldsymbol{\rho}(-a)$ 在主法线上,故主法线与 z 轴垂直相交,交点为 $\boldsymbol{\rho}(-a)$.

6. 设曲线 Γ 的方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$,其中 $\boldsymbol{r}\in C^{(2)}$,$P_0$(即 $\boldsymbol{r}(t_0)$)及 P(即 $\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)$)是 Γ 上两点,且 $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t_0)\neq 0$,记 Γ 在 P 处的切线为 l,过 P_0 及 l 的平面为 π'. 证明当 P 沿 Γ 趋于 P_0 时,平面 π' 的极限位置为 Γ 在 P_0 的密切平面.

证明　只需证明 π' 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 当 P 沿 Γ 趋向 P_0 时,其极限平行于 Γ 在 P_0 处的次法向量 $\boldsymbol{B}(t_0)$ 即可. 于是可取

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)\times[\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)].$$

由于 $\boldsymbol{r}\in C^{(2)}$,所以对 $\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)$ 与 $\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)$ 的各分量分别应用一元函数的 Lagrang 公式及 Taylor 公式可得

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t_0+\Delta t)=\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)+\ddot{\boldsymbol{r}}(\eta)\Delta t,\eta\text{ 介于 }t_0\text{ 与 }t_0+\Delta t\text{ 之间},$$

$$\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)=\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)\Delta t+\frac{1}{2}(\ddot{\boldsymbol{r}}(t_0)+\boldsymbol{\varepsilon})\Delta t^2,$$

其中当 $\Delta t\to 0$,$\boldsymbol{\varepsilon}\to 0$. 注意到 $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)=0$ 得

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{2}\Delta t^2[\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t_0)+2\ddot{\boldsymbol{r}}(\eta)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)+(\ddot{\boldsymbol{r}}(\eta)+\ddot{\boldsymbol{r}}(t_0))\times\boldsymbol{\varepsilon}].$$

从而 $\frac{2}{\Delta t^2}\boldsymbol{n}$ 也是 π' 的法向量,且 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{2}{\Delta t^2}\boldsymbol{n}=\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ 平行于 $\boldsymbol{B}(t_0)$.

9. 曲线 $y=\ln x$ 上哪点的曲率半径最小? 求出该点的曲率半径.

解　曲线 $y=\ln x$ 上任一点 $P(x,y)$ 处的曲率半径为 R,则

$$R=\frac{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{x}\quad(y=\ln x\text{ 定义域 }x\in(0,+\infty)).$$

问题转化为求 R 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值.

由 $\frac{dR}{dx}=\frac{1}{x}\cdot\frac{3}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x-\frac{1}{x^2}\sqrt{(1+x^2)^3}=0$ 可得唯一的驻点 $x_0=\frac{1}{\sqrt{2}}$. 又 $\left.\frac{d^2R}{dx^2}\right|_{x_0}=4\sqrt{3}>0$,故此唯一的驻点 $x_0=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 必是 R 的最小值点,且最小值为 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$. 即 $y=\ln x$ 在 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 处的曲率半径最小,其值为 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

10. 求曲线 $y=e^x$ 在 $(0,1)$ 处曲率圆的方程.

解 在(0,1)处切向量 $T(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$,$r''(0)=(0,1,0)$,次法向量 $B(0)=(0,0,1)$,主法向量 $N(0)=B(0)\times T(0)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$,曲率半径为 $R=2\sqrt{2}$. 从而曲率中心为 $r_Q=r(0)+RN(0)=(0,1,0)+2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)=(-2,3,0)$.

故曲率圆的方程为 $(x+2)^2+(y-3)^2=8$.

11. 一飞机沿抛物线路径 $y=\frac{x^2}{10\ 000}$(y 轴铅直向上,单位:m)作俯冲飞行,在坐标原点 O 处飞行的速度为 $v=200$ m/s,飞行员体重 $G=70$ kg. 求飞机俯冲至最低点(即原点 O)处时座椅对飞行员的反作用力.

解 座椅对飞行员的反作用力(在原点 O 处)等于重力与向心力 f 之和,方向与 y 轴相同.

在 O 点的曲率半径 $R=\frac{1}{|y''|}[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}\bigg|_{x=0}=5\ 000$ m.

$$f=\frac{mv^2}{R}\bigg|_{x=0}=\frac{70\times 200^2}{5\ 000}=560\ \text{N}.$$

故反作用力等于 $f+G=560+70\times 9.8=1\ 246$ N.

13. 证明挠率的计算公式(7.22)

证明 公式(7.22)即 $\tau(t)=\frac{[\dot{r},\ddot{r},\dddot{r}]}{\|\dot{r}\times\ddot{r}\|^2}$.

由
$$r'=\dot{r}\frac{dt}{ds},r''=\ddot{r}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\dot{r}\frac{d^2t}{ds^2}\text{及}\dot{r}\times\dot{r}=0$$

可得 $r'\times r''=(\dot{r}\times\ddot{r})\left(\frac{dt}{ds}\right)^3$.

又由 $\|r'\|=1$ 知 $r'\perp r''$ 且 $\|r''\|=\|r'\times r''\|=\left|\frac{dt}{ds}\right|^3\|\dot{r}\times\ddot{r}\|$.

又 $r'''=\frac{dr''}{ds}=\dddot{r}\left(\frac{dt}{ds}\right)^3+2\frac{dt}{ds}\cdot\frac{d^2t}{ds^2}\ddot{r}+\ddot{r}\frac{d^2t}{ds^2}+\dot{r}\frac{d^3t}{ds^3}$,

故 $[r',r'',r''']=(r'\times r'')\cdot r'''=[(\dot{r}\cdot\ddot{r})\cdot\dddot{r}]\left(\frac{dt}{ds}\right)^6$.

将 $\|r''\|$ 和 $[r',r'',r''']$ 代入公式 $\tau=\frac{[r',r'',r''']}{\|r''\|^2}$ 即可得公式(7.22).

(B)

1. 求抛物线 $y^2=2px$ 的渐屈线方程.

解　其参数方程为 $\boldsymbol{r}=\left\{\frac{1}{2p}y^2,y,0\right\},y\in(-\infty,+\infty)$.

单位切向量 $\boldsymbol{T}=\sqrt{\frac{p^2}{p^2+y^2}}\left\{\frac{y}{p},1,0\right\},\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''}{\|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''\|}=\{0,0,-1\}$，主法向量 $\boldsymbol{N}=\{0,0,-1\}\times\boldsymbol{T}=\sqrt{\frac{p^2}{p^2+y^2}}\left\{1,-\frac{y}{p},0\right\}$，曲率半径 $R=\frac{1}{p^2}(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$，曲率中心向径 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}+R\boldsymbol{N}=\left\{\frac{3y^2}{2p}+p,-\frac{y^3}{p^2},0\right\}$.

故渐屈线方程为 $\boldsymbol{\rho}=\left\{\frac{3y^2}{2p}+p,-\frac{y^3}{p^2},0\right\}$.

2. 求螺旋线 $\boldsymbol{r}=(a\cos t,a\sin t,bt)$ 的渐伸线方程，并证明这些渐伸线都是平面曲线.

解　设 $\boldsymbol{r}(0)$ 处的弧长为 0，则 $\boldsymbol{r}(t)$ 处的弧长 $s(t)=\int_0^t\|\dot{\boldsymbol{r}}\|\mathrm{d}s=\sqrt{a^2+b^2}\,t$. 于是 $t=ws$，其中 $w=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 由此可得螺线的自然参数方程为 $\boldsymbol{r}(s)=(a\cos ws,a\sin ws,bws)$，$\boldsymbol{r}'(s)=T(s)=(-aw\sin ws,aw\cos ws,bw)$. 于是渐伸线方程为：$\boldsymbol{\rho}(s)=(a\cos ws,a\sin ws,bws)+(c-s)(-aw\sin ws,aw\cos ws,bw)$，其中 c 为任意常数.

由于 $\boldsymbol{\rho}(s)$ 的第三个分量 $z(s)=bws+(c-s)bw=bwc$ 为常数. 故 $\boldsymbol{\rho}(s)$ 是平面 $z=bwc$ 上的平面曲线.

3. 设 $\overline{\Gamma}$ 为曲线 Γ 的曲率中心轨迹. 证明在对应点，曲线 $\overline{\Gamma}$ 的切线与曲线 Γ 的切线垂直.

证明　设 Γ 的方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，其中 s 为自然参数.

则 $\overline{\Gamma}$ 的方程为 $\boldsymbol{\rho}(s)=\boldsymbol{r}(s)+R(s)N(s)$. 只需证明 $\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{\rho}'(s)=0$ 即可. 由 Frenet 公式及 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{r}',\boldsymbol{B}',\boldsymbol{N}'$ 为互相垂直的单位向量，则

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{\rho}'(s)&=\boldsymbol{r}'(s)\cdot(\boldsymbol{r}'(s)+R'(s)N(s)+R(s)N'(s))\\
&=\|\boldsymbol{r}'\|^2+R'(s)[\boldsymbol{r}'(s)\cdot N(s)]+\boldsymbol{r}'(s)\cdot\\
&\quad R(s)\left[-\frac{1}{R(s)}\boldsymbol{T}(s)+\tau(s)\boldsymbol{B}(s)\right]\\
&=1+0-\boldsymbol{r}'(s)\cdot\boldsymbol{T}(s)+R(s)\tau(s)(\boldsymbol{r}'(s)\cdot\boldsymbol{B}(s))=0.
\end{aligned}
$$

5. 证明

(1) 若曲线在每一点处的切线都经过一个定点,则该曲线必是一条直线.

(2) 若曲线在每一点处的密切平面都经过一个定点,则该曲线必是一条平面曲线.

证明 (1) 设曲线的自然参数方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$,则 $\boldsymbol{r}(s)$ 处的切线方程为 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(s)+\lambda\boldsymbol{r}'(s)$. 不妨设每一点的切线都过定点 P_0(向径为 $\boldsymbol{r}_0$),则 $\forall s\in\mathbf{R}$, $\exists\lambda\in\mathbf{R}$,使 $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}(s)+\lambda\boldsymbol{r}'(s)$. 两边对 s 求导,则有 $\boldsymbol{r}'(s)+\lambda\boldsymbol{r}''(s)=0$. (*)

又因为 $\|\boldsymbol{r}'\|=1$,所以 $\boldsymbol{r}'(s)\perp\boldsymbol{r}''(s)$,故 $\boldsymbol{r}''(s)=0$. (如 $\boldsymbol{r}'(s)=0$,同样可得 $\boldsymbol{r}''(s)=0$). 故曲率 $\|\boldsymbol{r}''(s)\|=0$ 的曲线为直线.

(2) 曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$($s$ 为自然参数)的密切平面的方程为

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(s)+\lambda(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'').$$

因为密切平面都过定点 P_0(向径为常向量 $\boldsymbol{r}_0$),则 $\exists\lambda\in\mathbf{R}$, $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}(s)+\lambda(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'')$. 两边对 s 求导可得

$$0=\boldsymbol{r}'(s)+\lambda(\boldsymbol{r}''\times\boldsymbol{r}''+\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'''),$$

即

$$\boldsymbol{r}'(s)+\lambda(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''')=0.$$

于是

$$\boldsymbol{r}''(s)\cdot[\boldsymbol{r}'(s)+\lambda(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''')]=0.$$

考虑到 $\|\boldsymbol{r}'\|=1$,即 $\boldsymbol{r}'\perp\boldsymbol{r}''$,从而 $\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}''=0$,可知

$$(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''')=-(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}''',\boldsymbol{r}'')=0.$$

即任一点处挠率 $\tau(s)=0$,故曲线为平面曲线.

综合练习题

1. 已知某工厂过去几年的产量与利润的数据如下:

产量 x/千件	40	47	55	70	90	100
利润 y/千元	32	34	43	54	72	85

通过把这些数据 (x_i,y_i) $(i=1,\cdots,6)$ 所对应的点描在坐标纸上,可以看出这些点的连线接近于一条直线,因此可以认为利润 y 与产量 x 的函数关系是线性函数,试利用最小二乘法求出这个线性函数,并估计当产量达到 120 千件时该工厂的利润是多少?

解 依题意可采用线性函数 $y=a+bx$ 对利润进行拟合. 按照最小二乘法,问题就归结为选择参数 a,b 使得偏差平方和

$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{6}(a + bx_i - y_i)^2$$

为最小. 利用极值的必要条件得

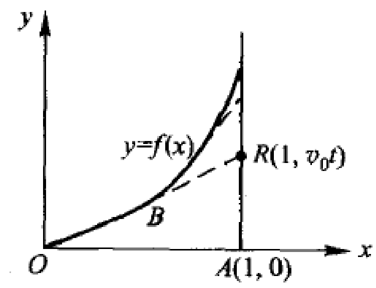
$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q}{\partial a} = 2\sum\limits_{i=1}^{6}(a + bx_i - y_i) = 0, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial b} = 2\sum\limits_{i=1}^{6}(a + bx_i - y_i)x_i = 0,\end{cases}$$

解之得 $Q(a,b)$ 有唯一驻点

$$\bar{b} \approx 0.884, \quad \bar{a} \approx -5.881.$$

可以证明$(\bar{a},\bar{b})$是 $Q(a,b)$ 的最小值点. 因此所求利润函数的最佳拟合曲线是 $y=0.884x-5.881$. 且当产量达到 120 千件时,利润 $y=0.884\times120-5.881\approx 100.2$.

2. 位于坐标原点的我舰向位于点 $A(1,0)$ 处的敌舰发射鱼雷,已知敌舰以常速度 v_0 沿直线 $x=1$ 逃窜,鱼雷的速度为 $5v_0$,试求鱼雷的轨迹曲线方程 $y=f(x)$,并求何时击中敌舰.



（第 2 题）

解　取过原点与敌舰逃跑方向相同的直线为 y 轴,如图所示.

从我舰发射鱼雷开始($t=0$ 时刻),t 时刻,敌舰的位置到达 $R(1,v_0t)$ 点,鱼雷到达 $B(x,y)$. 由于鱼雷在运动的过程中方向始终指向敌舰,所示直线 BR 与鱼雷的航线 $y=f(x)$ 相切,即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{v_0t - y}{1 - x}, \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 5v_0.$$

其中 s 为鱼雷的位移. 为了找出 x 与 y 的关系,需设法消去变量 t. 上述第一式两边对 x 求导得 $(1-x)\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=v_0\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 又 $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\cdot\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{5v_0}\sqrt{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$ 代入上式整理可得二阶微分方程的初值问题

$$\begin{cases}(1-x)\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{1}{5}\sqrt{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}, & (E_1) \\ y(0) = 0, y'(0) = 0.\end{cases}$$

令 $p=\frac{dy}{dx}$ 代入(E_1)可得 $\begin{cases}(1-x)\frac{dp}{dx}=\frac{1}{5}\sqrt{1+p^2},\\ p(0)=0.\end{cases}$ 解此一阶可分离变量的微分方程的初值问题可得：

$$p+\sqrt{1+p^2}=\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{5}}}.$$

从而

$$-(1-x)^{\frac{1}{5}}=-\frac{1}{p+\sqrt{1+p^2}}=p-\sqrt{1+p^2}.$$

于是

$$\begin{cases}p=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{5}}-\frac{1}{2}(1-x)^{\frac{1}{5}},\\ y(0)=0.\end{cases}$$

解之得 $y=f(x)=-\frac{5}{8}(1-x)^{\frac{4}{5}}+\frac{5}{12}(1-x)^{\frac{6}{5}}+\frac{5}{24}$.

当鱼雷击中敌舰时 $x=1$. 从而敌舰逃窜的距离 $y=\frac{5}{24}$. 所用时间 $t=\frac{y}{v_0}=\frac{5}{24v_0}$.