第2章 一元函数微分学及其应用

微分学产生的三个源头：

1. 求变速运动的**瞬时速度**；2. 求已知曲线上一点处的**切线**；3. 求函数的**最大、最小值**.

牛顿 (1642－1727, 英国)

牛顿和莱布尼茨就是分别在研究瞬时速度和曲线的切线时发现导数的. 下面是两个关于导数的经典例子.

关于导数的两个经典例子

例1 质点作变速直线运动的**瞬时速度**.

设质点的运动方程为：$s=s(t)$. 则

从时刻t_0到$t_0+\Delta t$时间段内，质点走过的路程为：

$$\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$$

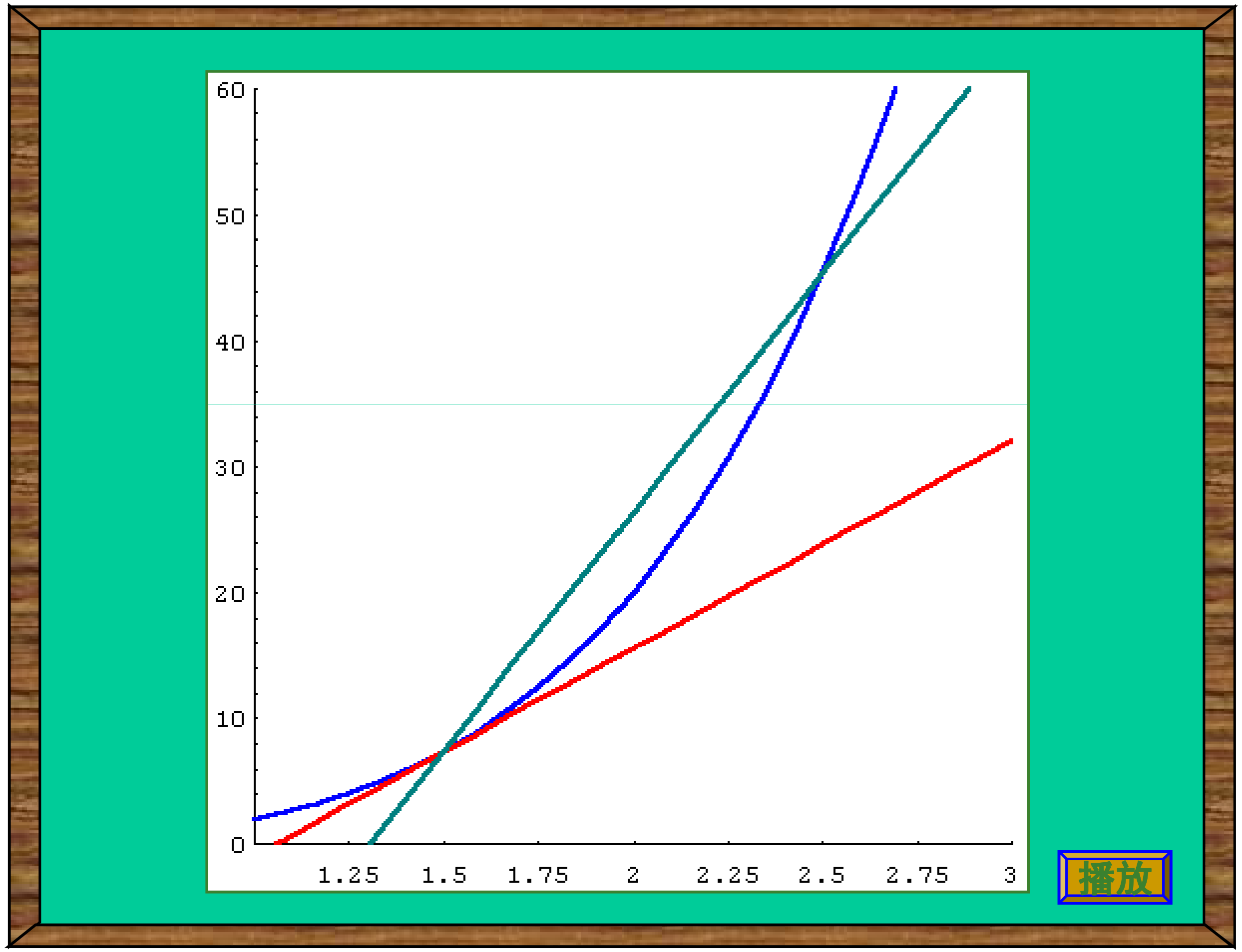
在时间间隔Δt内，质点运动的平均速度为：

$$\bar{v}=\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}$$

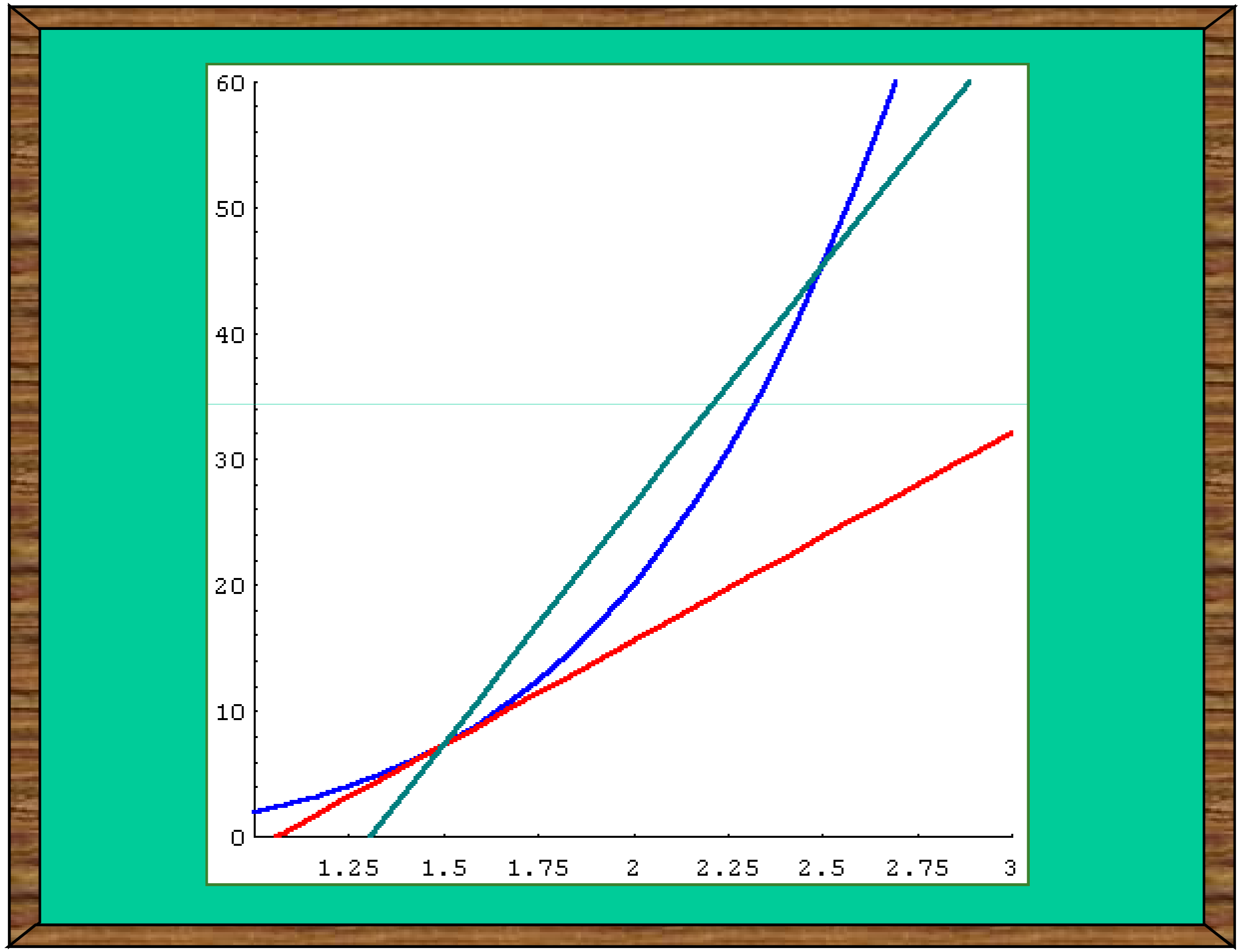
当$\Delta t\to 0$时，取极限得质点在时刻t_0的瞬时速度：

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

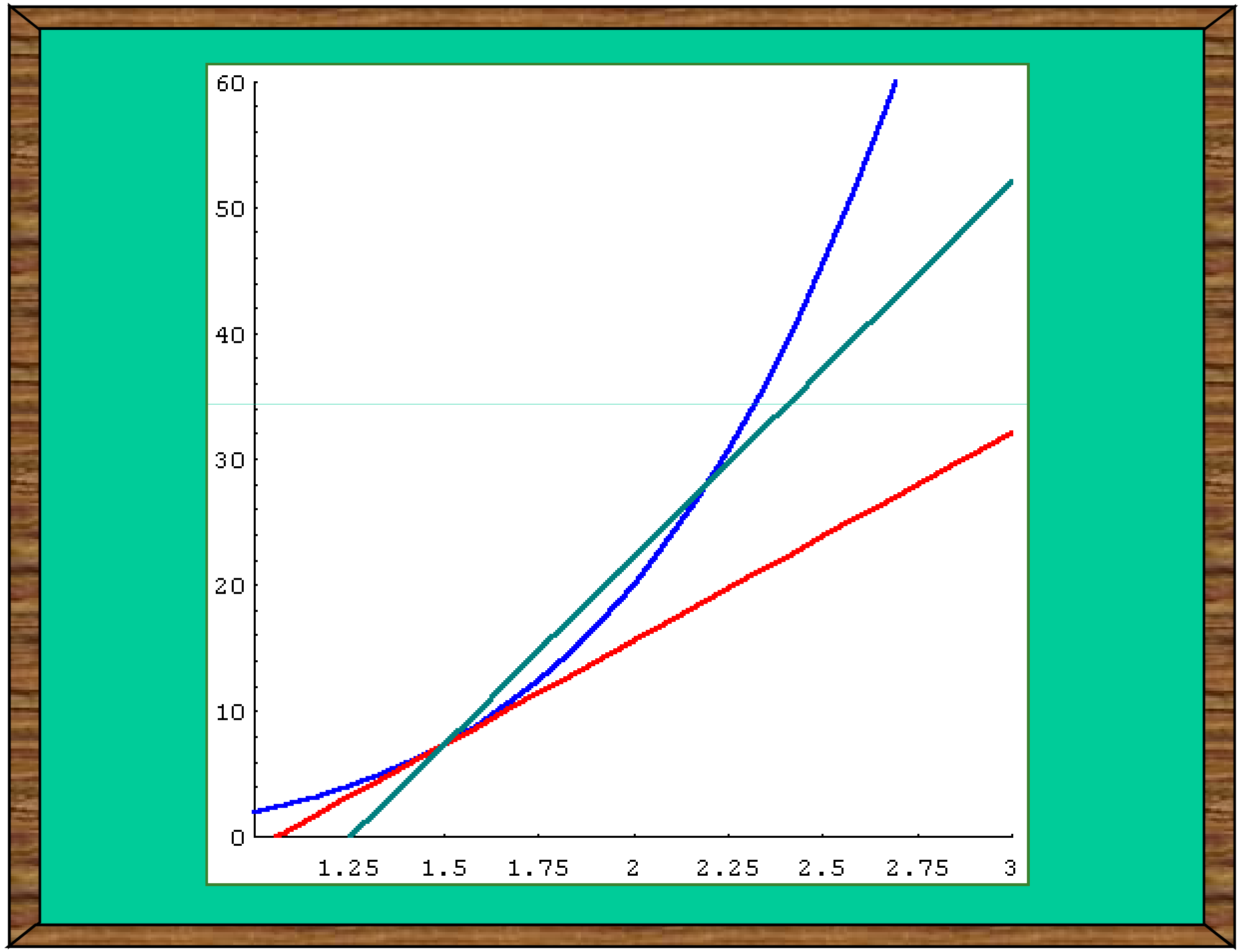
例2 切线问题　　　割线的极限位置——切线位置



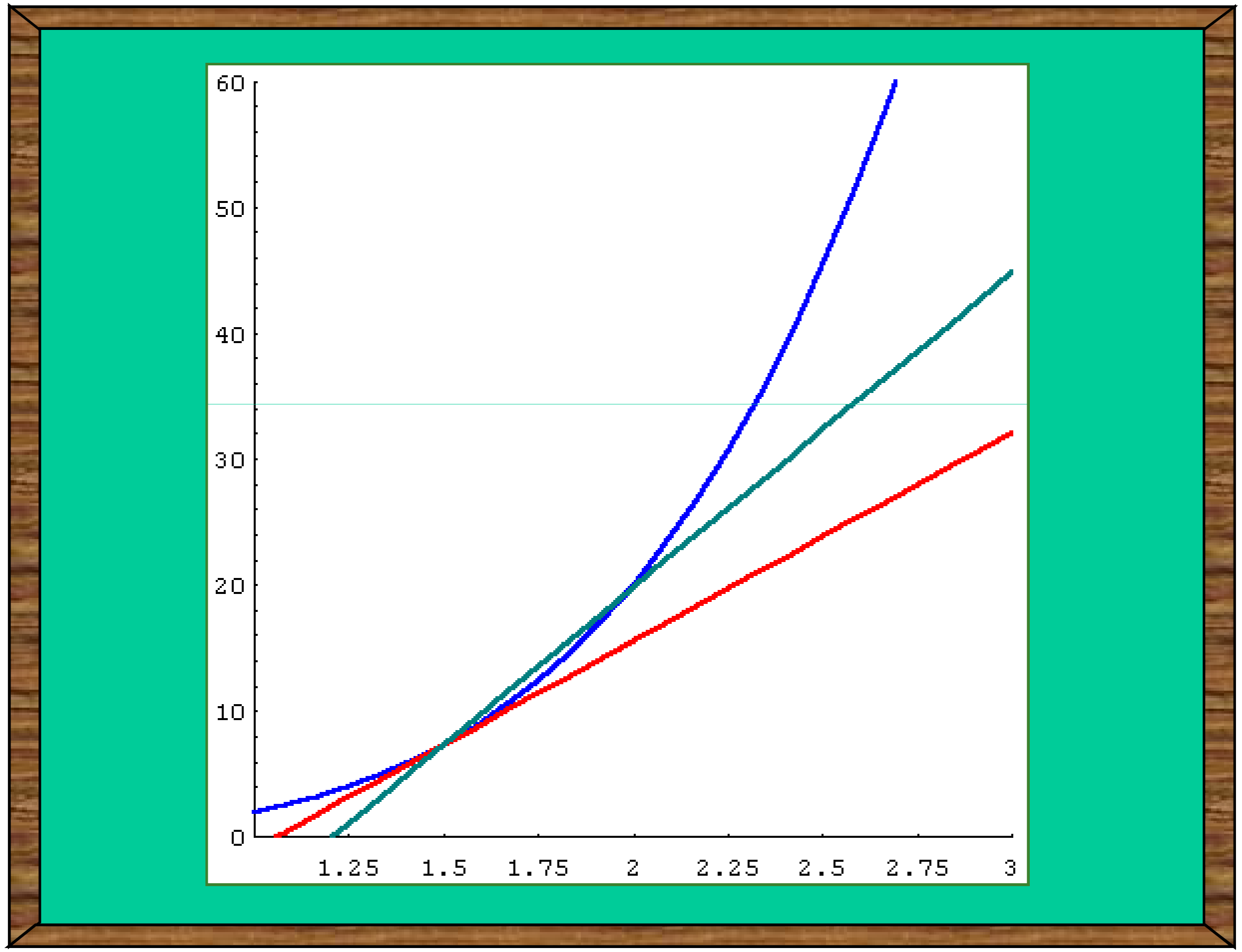
例2 切线问题　　割线的极限位置——切线位置



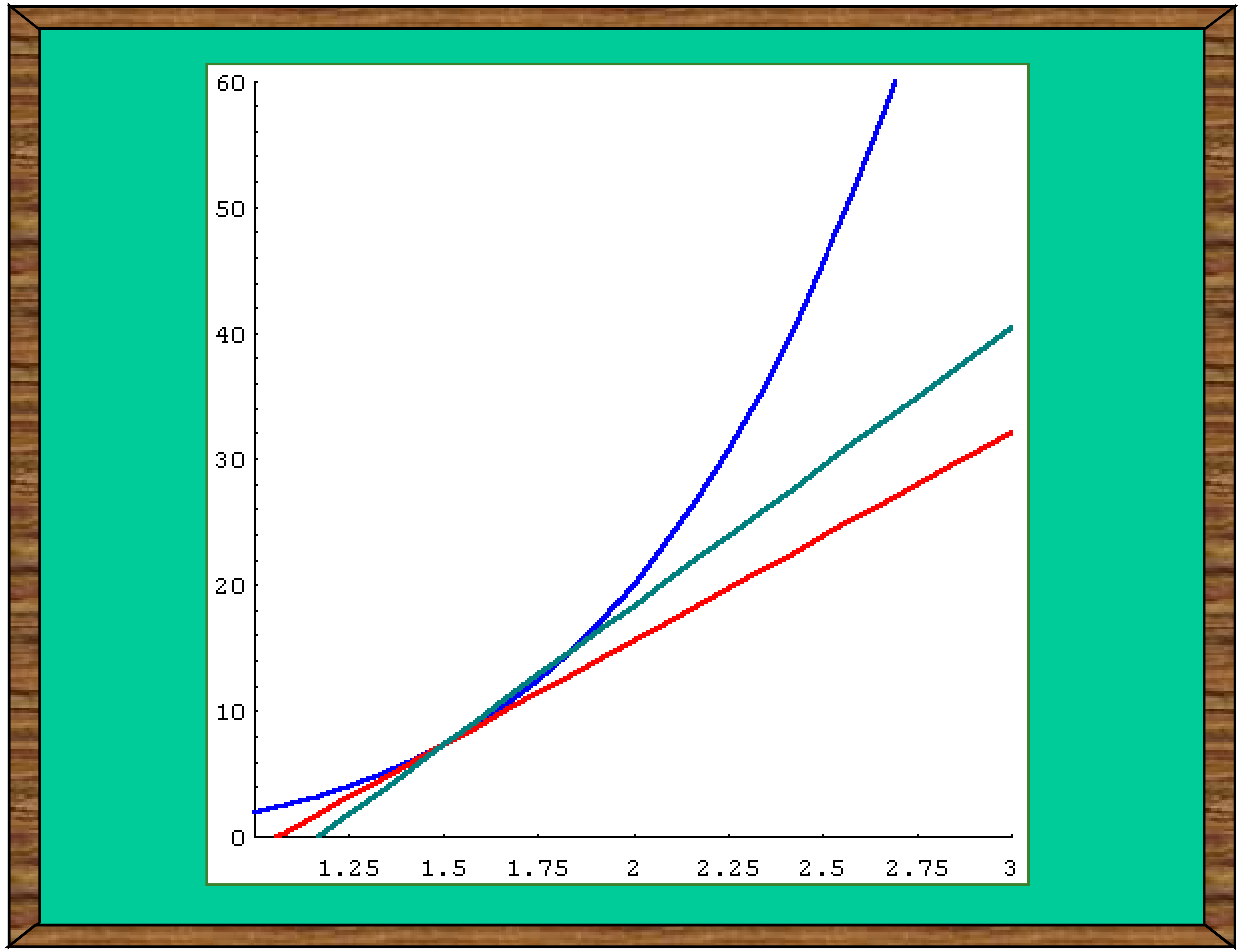
例2 切线问题　　割线的极限位置——切线位置



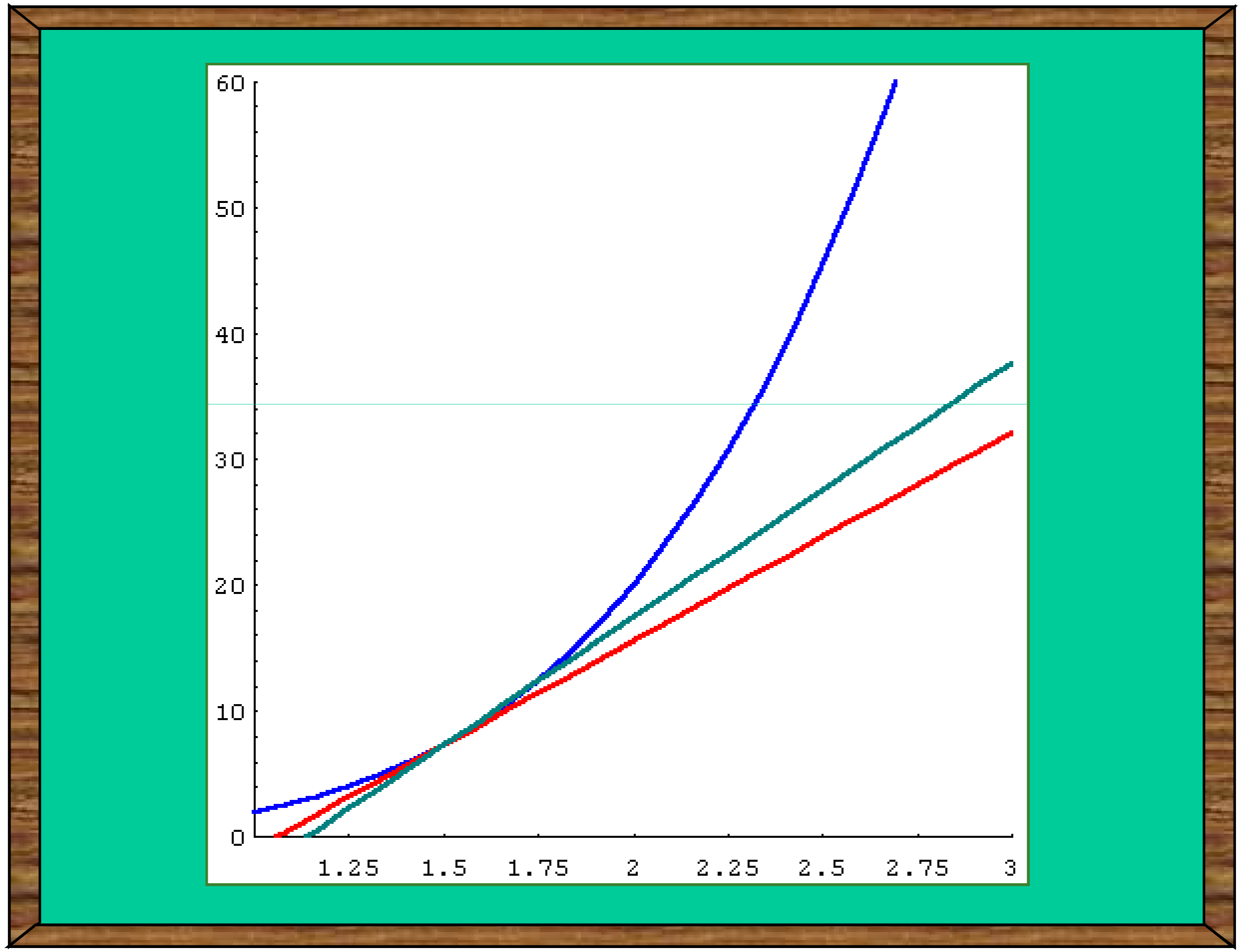
例2 切线问题　　割线的极限位置——切线位置



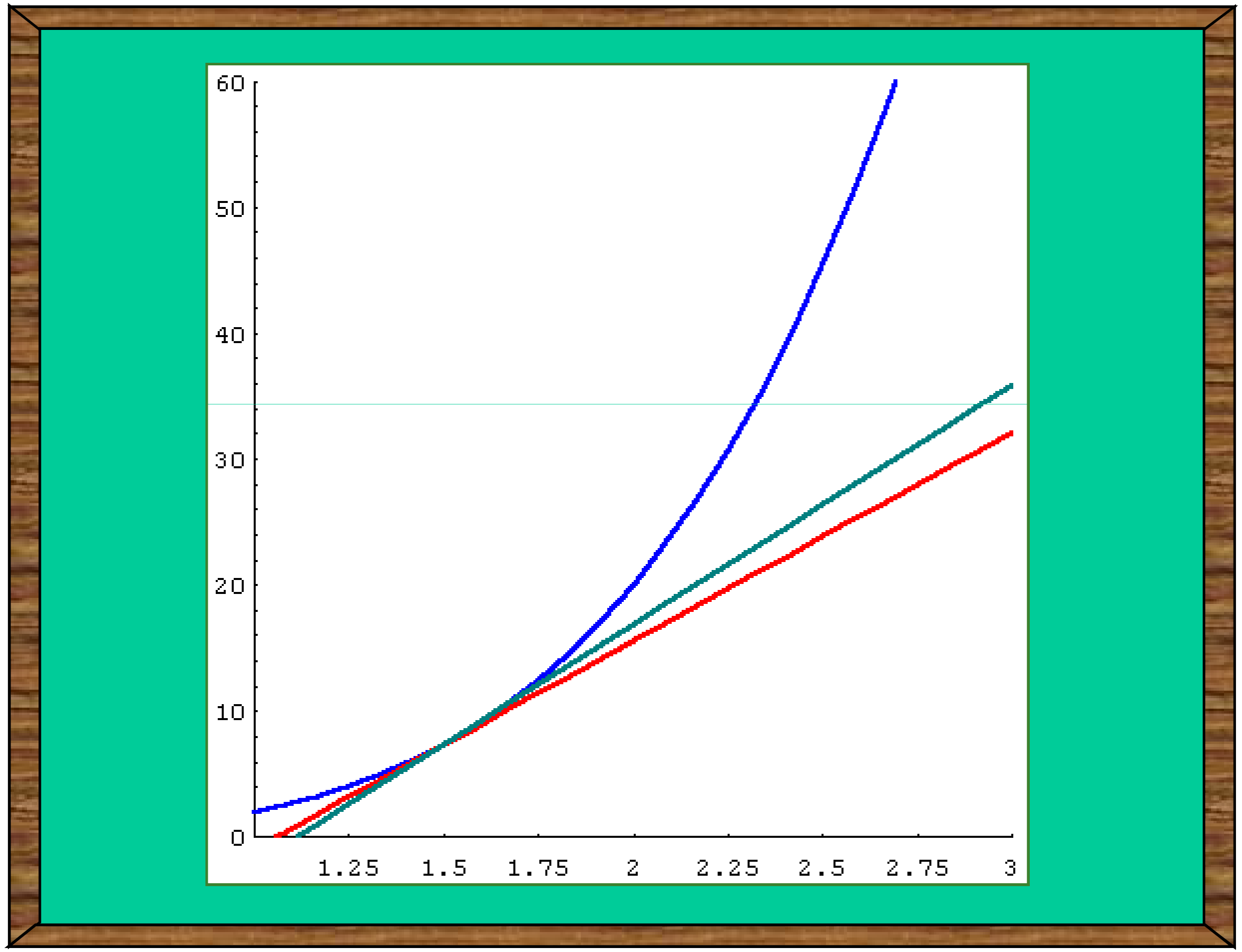
例2 切线问题　　割线的极限位置——切线位置



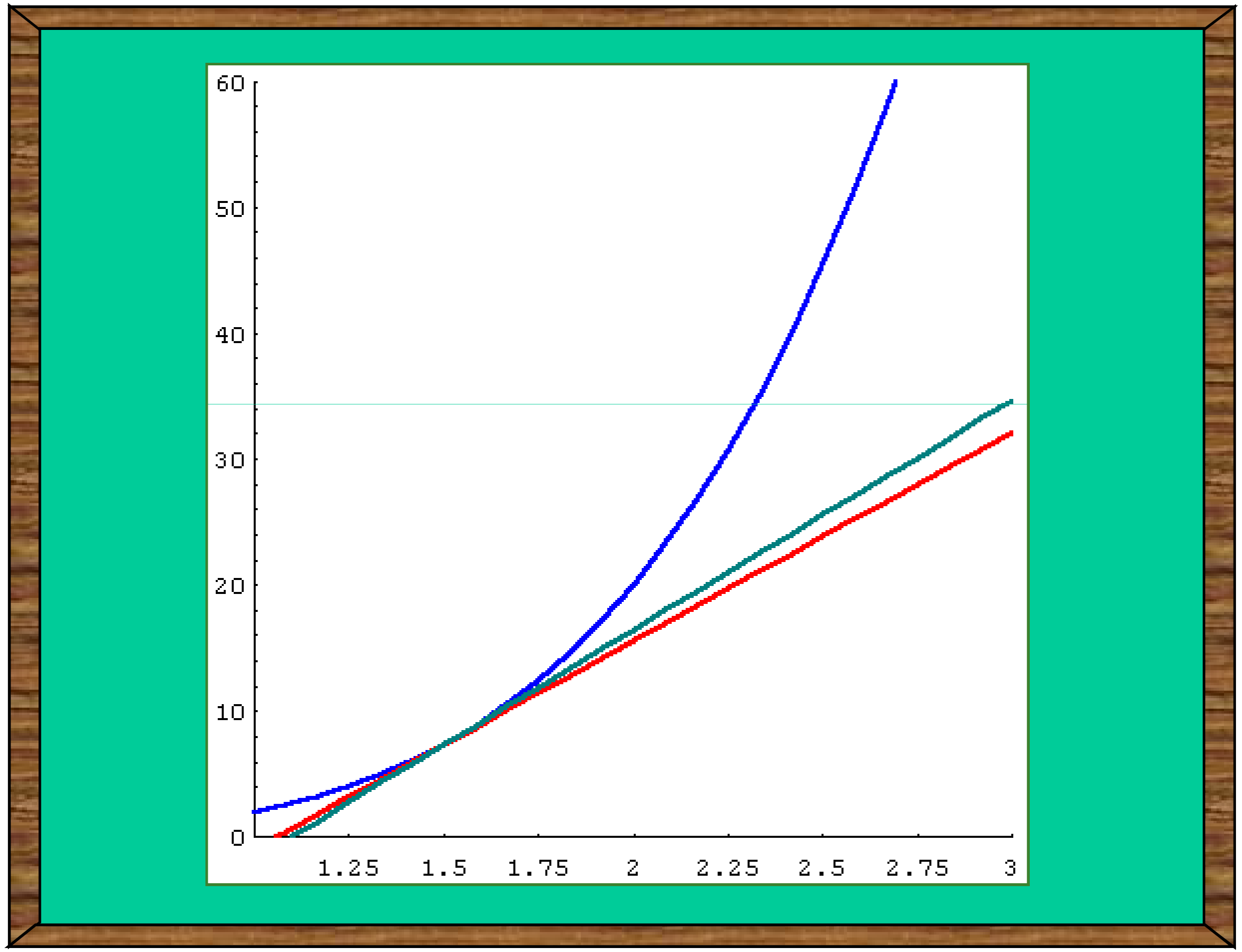
例2 切线问题　　　割线的极限位置——切线位置



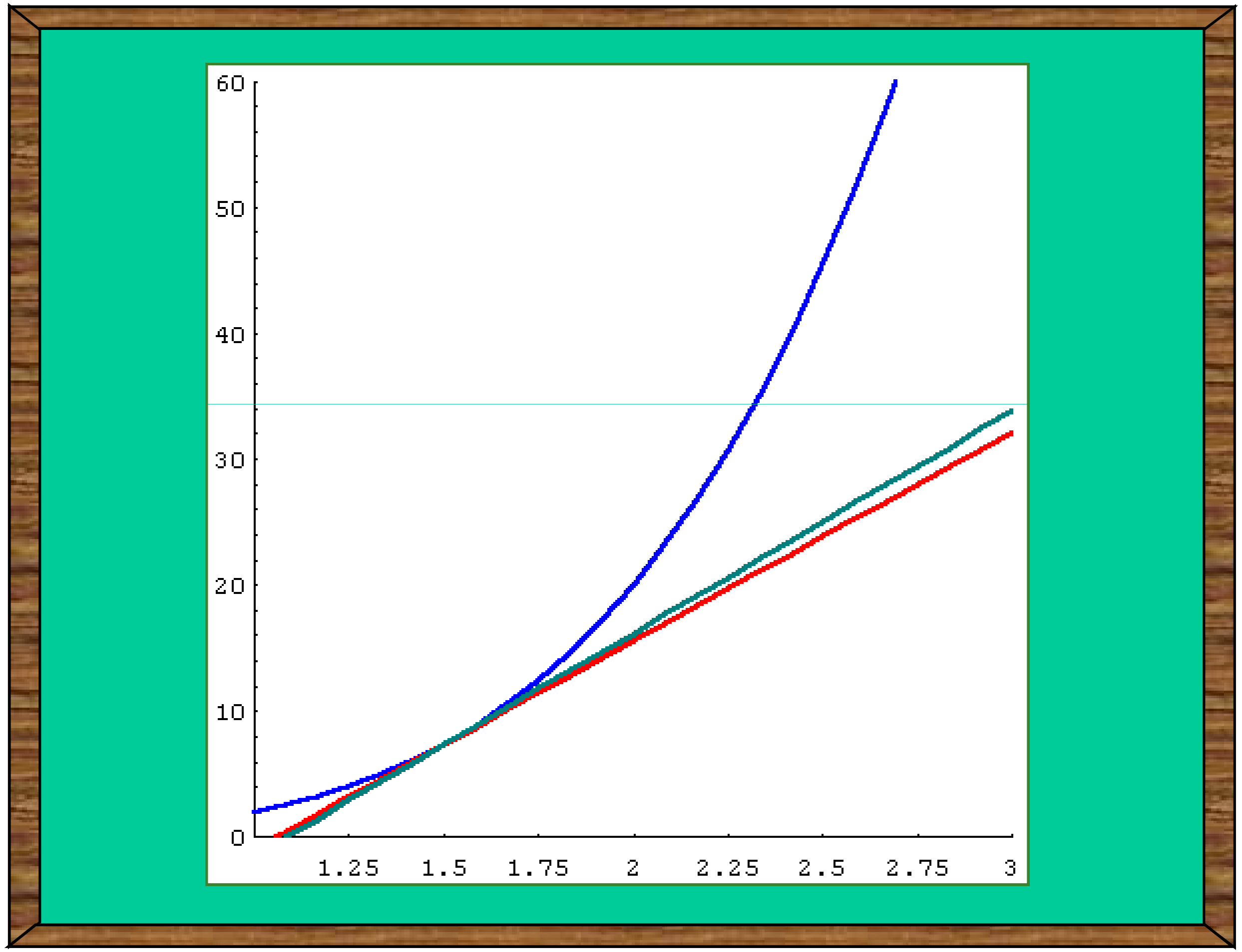
例2 切线问题　　割线的极限位置——切线位置



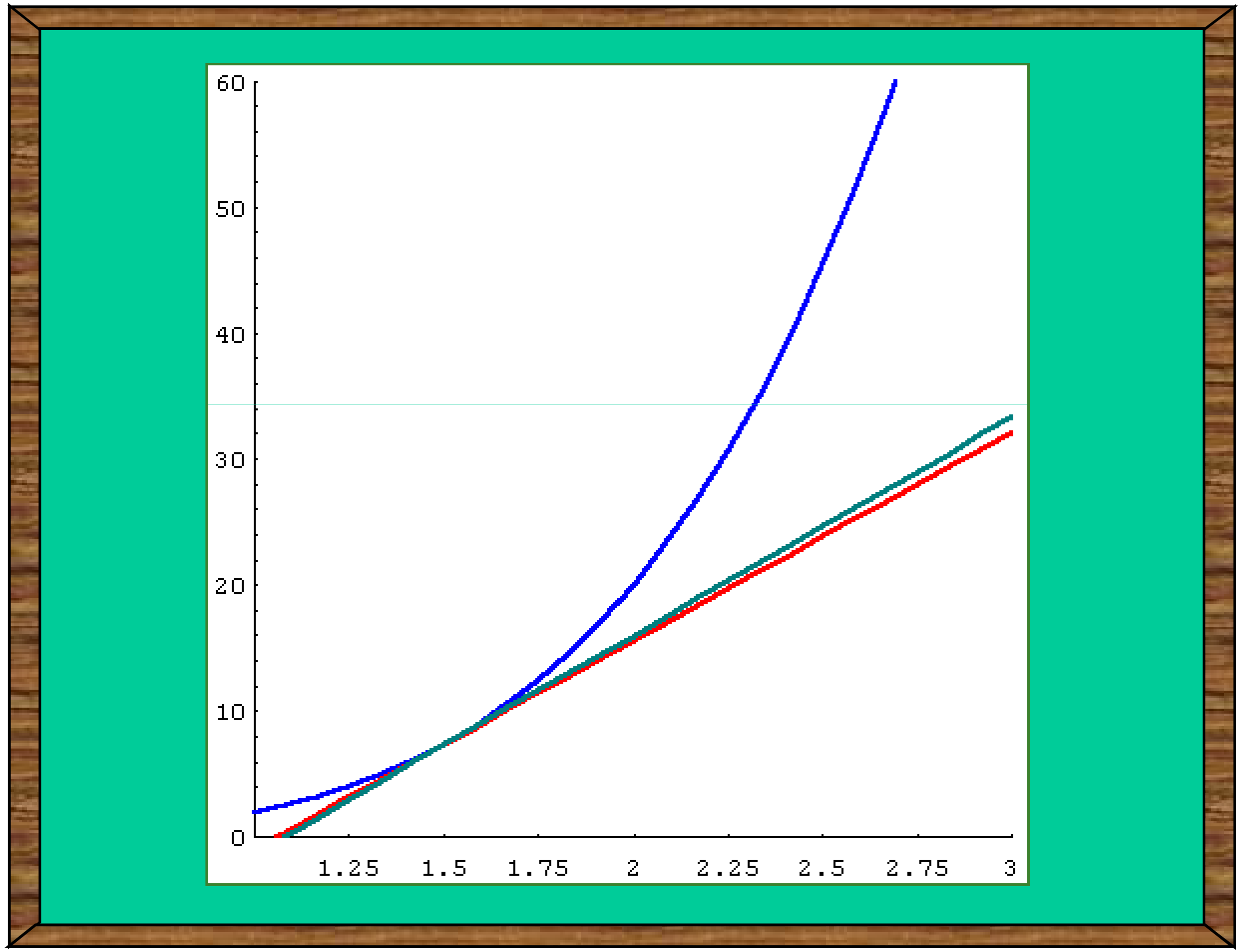
例2 切线问题 割线的极限位置——切线位置



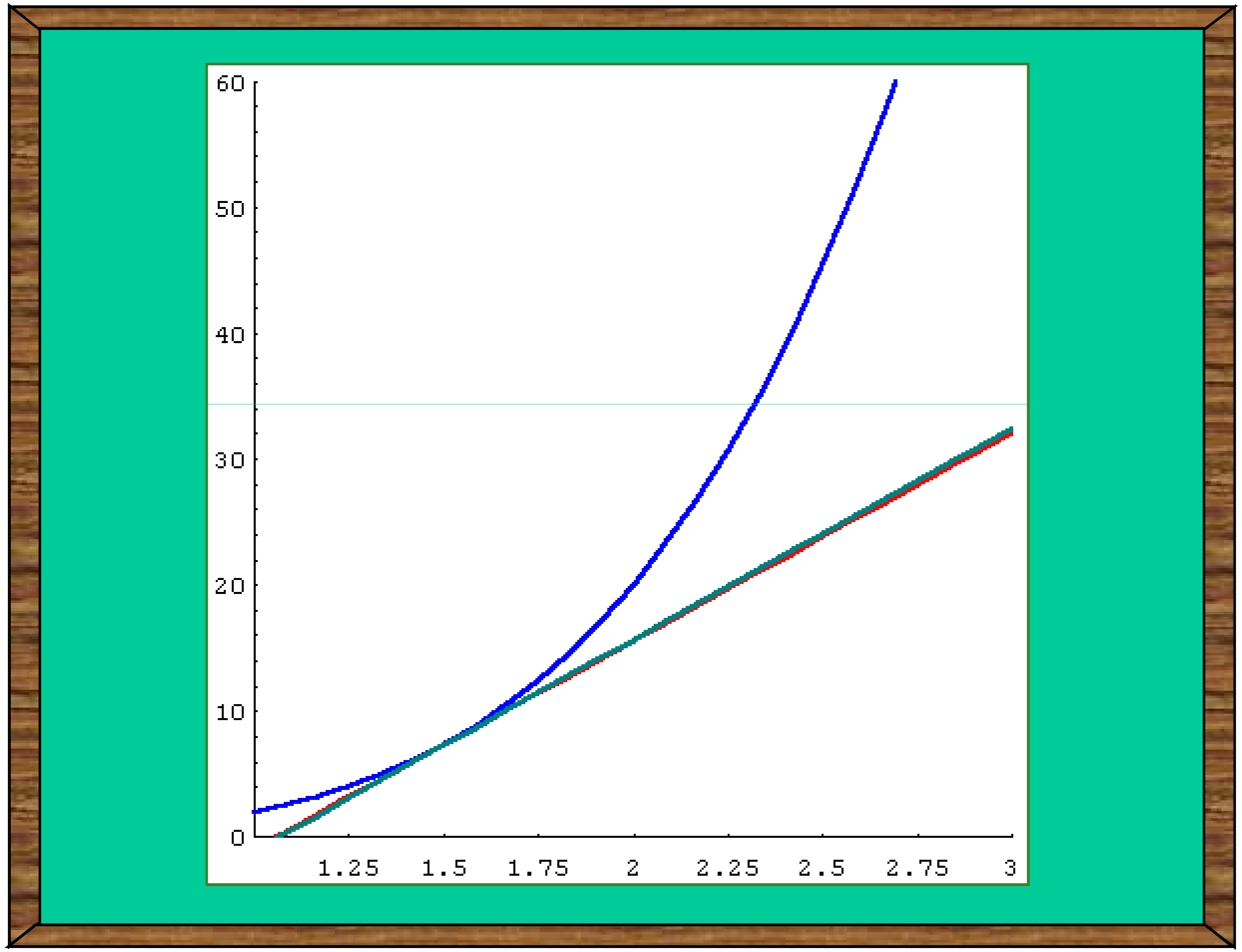
例2 切线问题 割线的极限位置——切线位置



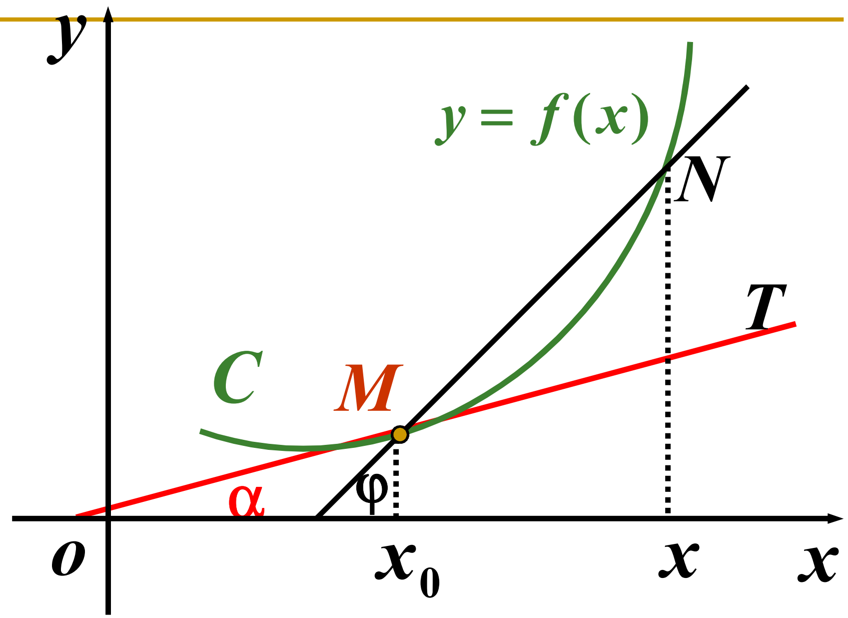
例2 切线问题 割线的极限位置——切线位置



例2 切线问题　　　割线的极限位置——切线位置



如图, 如果割线MN绕点M旋转而趋向极限位置MT,直线MT就称为曲线C在点M处的切线.



极限位置即

$|MN| \to 0, \angle NMT \to 0.$　设 $M(x_0, y_0), N(x, y).$

割线MN的斜率为 $\tan\varphi = \dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$

$N \xrightarrow{\text{沿曲线}C} M, x \to x_0,$

切线MT的斜率为 $k = \tan\alpha = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$

第1节　导数的概念

- 导数的定义
- 导数的几何意义
- 可导与连续的关系
- 导数在科学技术中的含义-----变化率

1.1 导数的定义

定义1.1 设$y=f(x)$在点x_0的某个邻域$U(x_0)$内有定义，且$x_0+\Delta x\in U(x_0)$，若

$$\boxed{\Delta x = x - x_0}$$

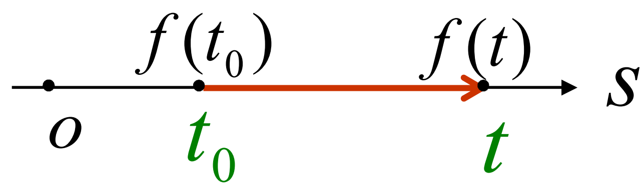
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\boxed{=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\quad=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

$$\boxed{\Delta y = f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}$$

称$y=f(x)$在点x_0处可导，并称这个极限为$y=f(x)$在点x_0处的导数，记为$f'(x_0)$，$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$，$\left.y'\right|_{x=x_0}$或$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$.

运动质点的位置函数 $s = f(t)$



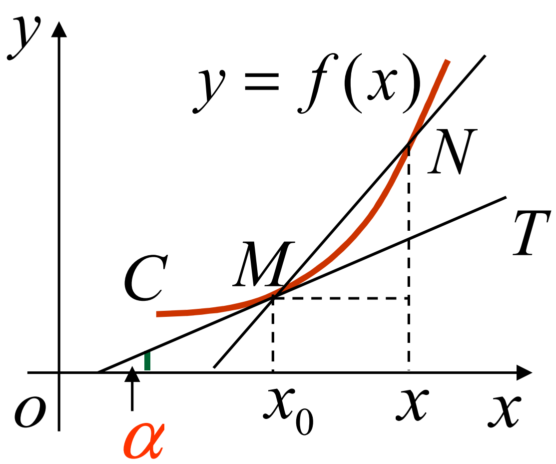
在 t_0 时刻的瞬时速度

$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0)$$

导数的物理意义

曲线 $C: y = f(x)$ 在 M 点处的切线斜率

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$



导数的几何意义

切线方程为 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$

法线方程为 $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}&=f'_+(x_0)\quad\text{右导数}\\ \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}&=f'_-(x_0)\quad\text{左导数}\end{aligned}\right\}\text{单侧导数}$$

$f(x)$在点x_0处可导$\Leftrightarrow$左导数和右导数都存在且相等.

定义2.1 如果$y=f(x)$在开区间 I 内的每点处都可导，就称函数$f(x)$在开区间 I 内可导.

$$\boxed{f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}}$$

例1.3 $(C)'=0,\quad (\sin x)'=\cos x,\quad (\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

解 $$(C)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=0$$

即 $\boxed{(C)'=0}$

$$(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$=\cos x.$$

$$\boxed{(\cos x)'=-\sin x}$$

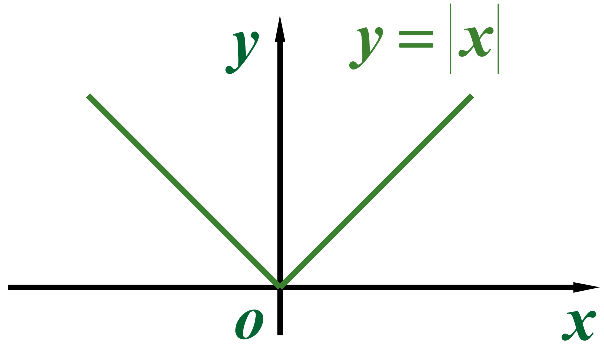
$$(\ln x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}$$

$$\boxed{(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}}$$

例1.4 讨论函数 $f(x)=|x|$ 在$x=0$处的可导性.

解 $\because \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{|h|}{h}$,



$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1,$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1.$$

即 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$, $\therefore$ 函数$y=f(x)$在$x=0$点不可导.

例1.5　考察函数

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0, \\ 0, \qquad\qquad x=0 \end{cases}$$

在$x=0$处的连续性与可导性.

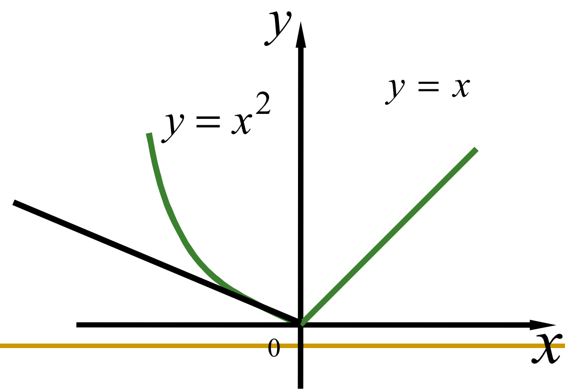
如果$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$不∃,

则称$f(x)$在点x_0的不可导.

函数导数不存在的情形

1. 函数 $f(x)$连续,若 $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$则称点 x_0 为函数$f(x)$ 的角点,函数在角点不可导.

例如, $f(x)=\begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ x, & x>0 \end{cases}$,

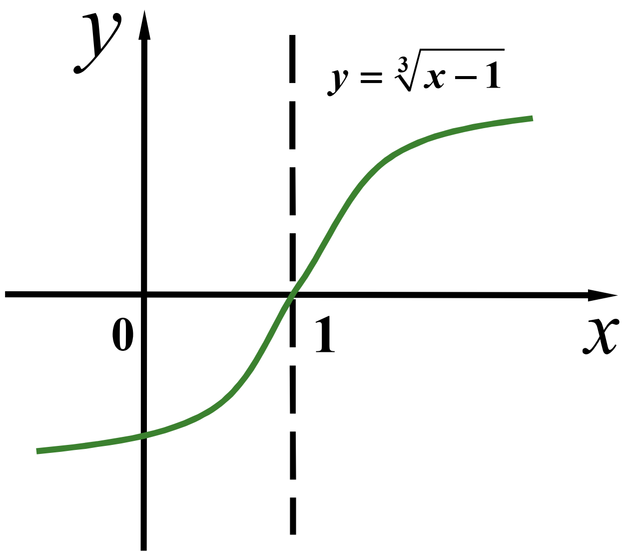


2. 设函数 $f(x)$在点 x_0连续, 但

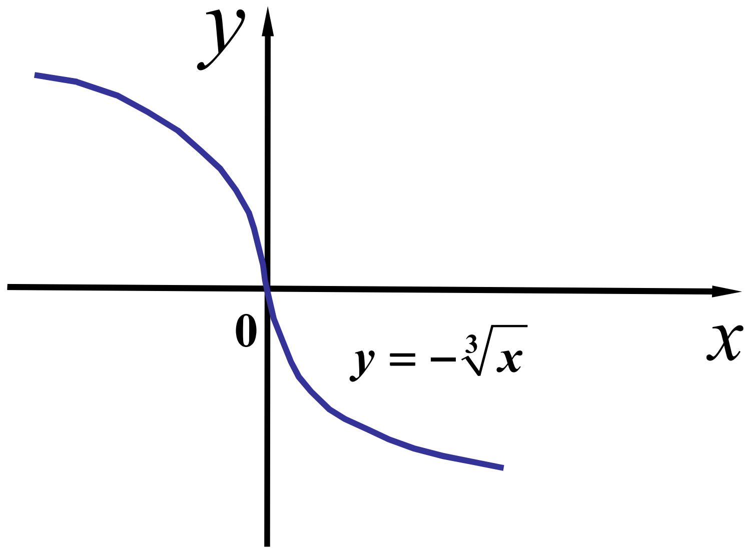
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\infty,$$

称函数 $f(x)$在点 x_0有无穷导数. (不可导)

例如

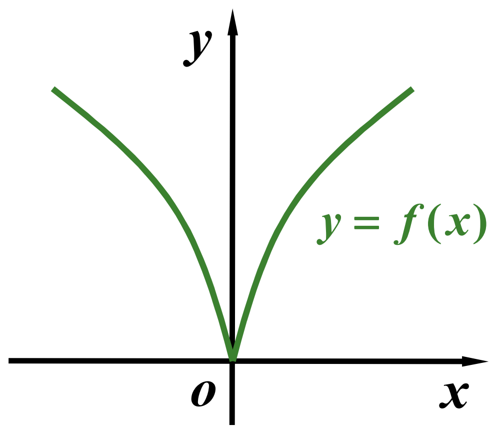


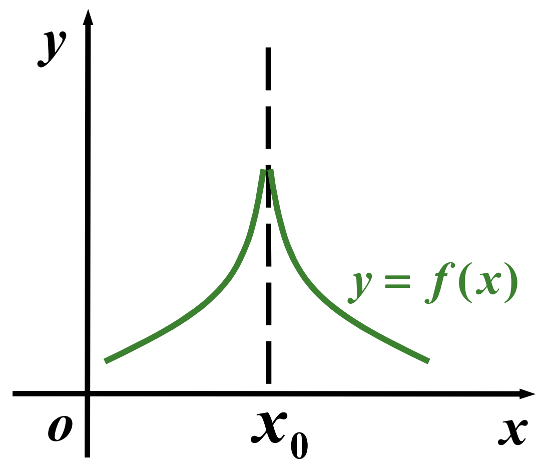
$$f'_-(1)=f'_+(1)=+\infty$$



$$f'_-(0)=f'_+(0)=-\infty$$

3. 若$f'(x_0)=\infty$，且在点 x_0的两个单侧导数符号相反，则称点 x_0为函数 $f(x)$的尖点(不可导点)．



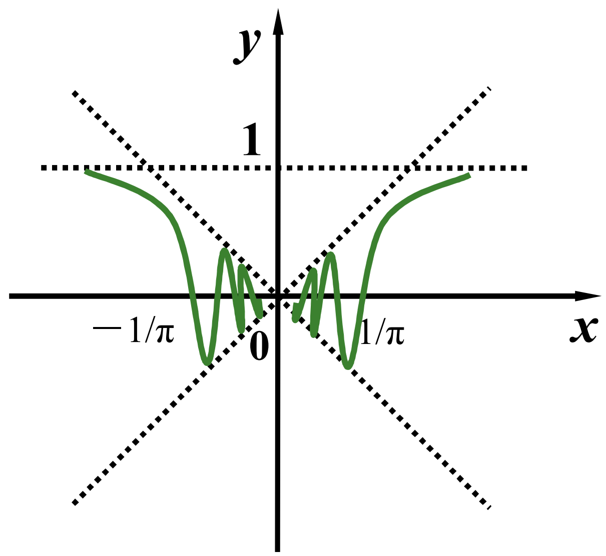


$f'_-(0)=-\infty$，$f'_+(0)=+\infty$　　$f'_-(x_0)=+\infty, f'_+(x_0)=-\infty$

4. 函数 $f(x)$在连续点的左右导数都不存在(指摆动不定)，则 x_0点不可导.

例如,

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases},$$



在$x=0$处不可导.

1.3 函数的可导性与连续性的关系

定理1.1 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

注意： 该定理的逆定理不成立 (连续函数未必可导)

例如$y=|x|$在$x=0$处连续但不可导.

函数的可导性与连续性的关系

定理1.1 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

证 设函数 $f(x)$在点 x_0可导,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$$

$$\alpha\to 0 \quad (\Delta x\to 0) \quad \Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x]=0$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$在点 x_0连续 .

例3 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ ax, & x\ge 0\end{cases}$，问 a 取何值时，$f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 都存在，并求出 $f'(x)$.

解 显然该函数在 $x=0$ 连续.

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x-0}{x-0}=1$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax-0}{x-0}=a$$

故 $a=1$ 时 $f'(0)=1$，此时 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 都存在，

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases}$$

例 4 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^k \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 问 k 满足什么条件，$f(x)$在 $x=0$ 处

(1)连续；（2）可导；（3）导数连续.

答案：

(1) 当$k>0$时，$f(x)$在$x=0$处连续；

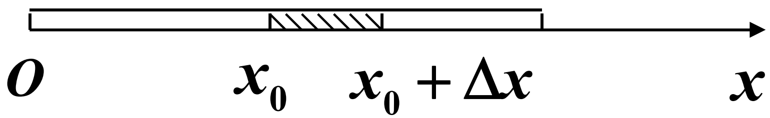
(2) 当$k>1$时，$f(x)$在$x=0$处可导，且$f'(0)=0$；

(3) 当$k>2$，$f'(x)$在$x=0$处连续.

1. 4导数在科学技术中的含义-----变化率

1.细棒的线密度问题

如图，求x_0点处细棒的线密度



若从原点到x的细棒的质量为: $m=m(x)$

则从x_0到$x_0+\Delta x$的平均线密度为: $\dfrac{\Delta m}{\Delta x}=\dfrac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x}$

若$\Delta x\to 0$时平均密度的极限存在，则极限值即为在x_0处的线密度:

$$\rho(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x}$$

2. 交流电路:电量对时间的导数为电流强度.

$$i(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{dq}{dt}.$$

3. 生物种群的增长率:

设$N=N(t)$为某生物种群在t时刻个体的数目

t_0时刻种群的增长率

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta N}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{N(t_0+\Delta t)-N(t_0)}{\Delta t}$$

4. 经济学中的边际成本：

设$p = p(x)$为生产x个产品的总成本

生产x_0个产品时的边际成本为：

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p(x_0 + \Delta x) - p(x_0)}{\Delta x}$$

定义1 设函数$f(x)$在$S(x_0,\delta)$内有定义，如果对$\forall x \in (x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, 均有

$$f(x) \le f(x_0) \quad (\text{或} f(x) \ge f(x_0)),$$

则称$f(x_0)$是函数$f(x)$的极大值(或极小值)，点x_0称为函数$f(x)$的极大点(或极小点).

函数的极大值与极小值统称为极值,使函数取得极值的点称为极值点.

定义2 若$f'(x_0)=0$，则点x_0称为函数$f(x)$的稳定点或驻点.

Fermat定理 若$f'(x_0)$存在,且对$\forall x\in S(x_0,\delta)$有

$$f(x)\le f(x_0)\ \ (\text{或}f(x)\ge f(x_0)), \qquad (1)$$

则$f'(x_0)=0$.

证明 不失一般性。设 $f(x)\le f(x_0)$，$x\in S(x_0,\delta)$.

$\therefore$ 当$x<x_0$时，有 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$;

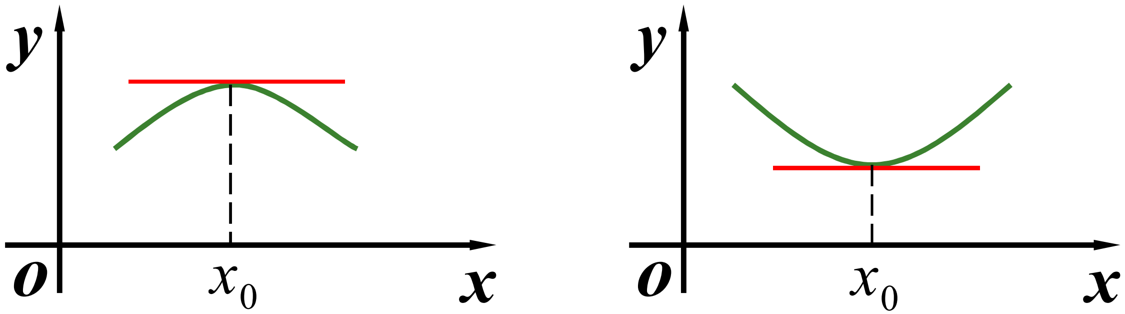
由极限的保序性 $f_-'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$;

当$x>x_0$时，有 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$;

$f_+'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0+0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$; 从而 $f'(x_0)=0$.

Fermat定理的几何意义:

若$f'(x_0)\exists$,且x_0为$f(x)$的极值点，则曲线$y=f(x)$在$M(x_0,f(x_0))$处有水平切线.



费马(P. de Fermat,1601 – 1665)

费马，P. de

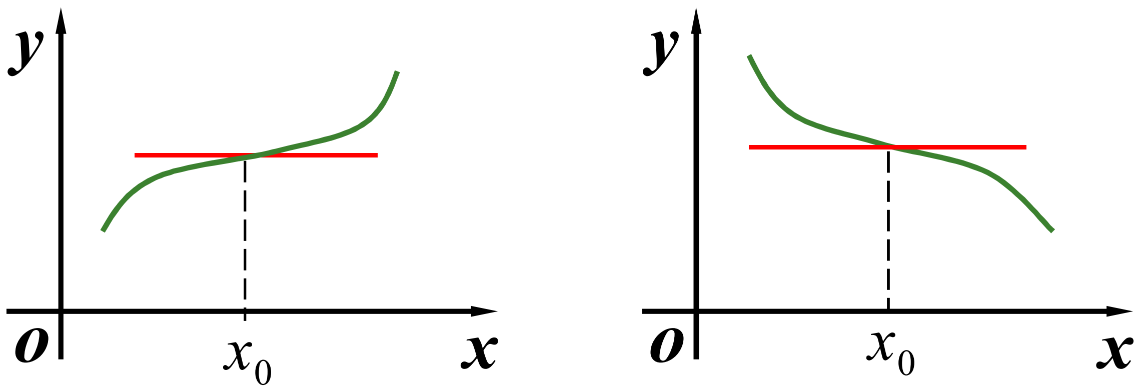
法国数学家, 他是一位律师, 数学只是他的业余爱好. 他兴趣广泛, 博览群书并善于思考, 在数学上有许多重大贡献. 他特别爱好数论, 他提出的费马大定理:

当$n>2$时,方程$x^n+y^n=z^n$无满足xyz$\neq 0$的整数解.

历时350年之久直到1995年才被英国的数学家A. Wiles彻底解决. 同时，费马还是微积分学的先驱，费马引理是后人从他研究最大值与最小值的方法中提炼出来的.

注意: 可导函数 $f(x)$ 的极值点必定是它的驻点，但函数的驻点却不一定是极值点.

例如， $y = x^3$， $y'\big|_{x=0} = 0$， 但$x = 0$不是极值点.



(不是极值点情形)

EX. 1 在下列各题中均假定$f'(x_0)$存在，按照导数的定义观察下列极限，分析并指出A表示什么？

1、$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A$； $\boxed{f'(x_0)}$

2、$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}=A$，其中$f(0)=0$且$f'(0)$存在； $\boxed{f'(0)}$

3、$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=A$. $\boxed{2f'(x_0)}$

EX. 2 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ ax+b, & x>1 \end{cases}$，为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导，a,b 应取什么值？

解 $f(1)=1 \quad \therefore f(1-)=\lim\limits_{x\to 1-0} x^2 = 1$

$\therefore f(1+)=\lim\limits_{x\to 1+0}(ax+b)=a+b$

若 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续，则 $a+b=1$

$$f'_-(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

$$f'_+(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{ax+b-1}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{ax-a}{x-1}=a$$

$\because f_+(1)=f_-(1), \therefore a=2$，故 $b=-1$

EX3 设$f(x)=x|x(x-2)|$,求 $f'(x)$.

解 先去掉绝对值

$$f(x)=\begin{cases} x^2(x-2), x\le 0 \\ -x^2(x-2), 0<x<2, \\ x^2(x-2), x\ge 2 \end{cases}$$

当$x=0$时, $f'_-(0)=f'_+(0)=0$, $f'(0)=0$;

当$x>2$或$x<0$时, $f'(x)=3x^2-4x$;

当$0<x<2$时, $f'(x)=-3x^2+4x$;

当$x=2$时,

$$f'_{-}(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-x^2(x-2)}{x-2}=-4.$$

$$f'_{+}(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2(x-2)}{x-2}=4.$$

$f'_{-}(2)\neq f'_{+}(2)$, $\therefore f(x)$在$x=2$处不可导.

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2-4x, x>2, \text{或} x<0\\ 0, x=0,\\ -3x^2+4x, 0<x<2,\end{cases}$$