雪全部融化即 $h=0$，所以由 $0=-\frac{\alpha}{9}(5\sqrt{5}-1)t+h_0$ 得：

$$t=\frac{9}{124\alpha}h_0(5\sqrt{5}+1).$$

习　题　6.7

(A)

2. 计算下列线积分：

(3) $\oint_{(C)} y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y$，$(C)$为正向椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$；

解　(C)的参数方程：$x=a\cos t, y=b\sin t$，则

$$\oint_{(C)} y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}(b\sin t(-a\sin t)-a\cos t\cdot b\cos t)\mathrm{d}t=-2\pi ab.$$

(6) $\oint_{(C)}(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，$(C)$为椭圆$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\x-y+z=2,\end{cases}$且从 z 轴正向往 z 轴负向看去，(C)取顺时针方向.

解　(C)参数方程：$x=\cos t, y=\sin t, z=2-\cos t+\sin t$，

$$\text{原式}=\int_{2\pi}^{0}[(2-\cos t)(-\sin t)+(2\cos t-2-\sin t)\cos t+(\cos^2 t-\sin^2 t)]\mathrm{d}t$$

$$=-2\pi.$$

4. 把二型线积分 $\int_{(C)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 化为第一型线积分，其中(C)为：

(1) 从点$(1,0)$到点$(0,1)$的直线段；

(2) 从点$(1,0)$到$(0,1)$的上半圆周 $x^2+y^2=1$；

(3) 从点$(1,0)$到点$(0,1)$的下半圆周$(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

解　(1) (C)的参数方程：$x=-t, y=1+t$，参数增加的方向即(C)的方向，且 $-1\leqslant t\leqslant 0$. 切向量 $\boldsymbol{\tau}=\{-1,1\}$，单位切向量 $\boldsymbol{e}_\tau=\frac{1}{\sqrt{2}}\{-1,1\}$，则

$$\int_{(C)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(C)}\frac{-P+Q}{\sqrt{2}}\mathrm{d}s.$$

(2) (C)：$\boldsymbol{r}=\{-x,\sqrt{1-x^2}\}$，与$(C)$同向的单位切向量为：$\boldsymbol{e}_\tau=\{-\sqrt{1-x^2},$

$x\}$，$-1\leqslant x\leqslant 0$，则

$$\int_{(C)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{(C)} [-\sqrt{1-x^2}P(x,y) + xQ(x,y)]\mathrm{d}s.$$

(3) (C)的参数方程为：$x=-x, y=1-\sqrt{1-(1+x)^2}$，$-1\leqslant x\leqslant 0$，且 x 增加的方向即(C)的正向，则与(C)同向的单位切向量：

$$\boldsymbol{e}_\tau = \{-\sqrt{1-(x-1)^2}, -x+1\}.$$

则 $\int_{(C)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{(C)} [-\sqrt{1-(x-1)^2}P(x,y) + (1-x)Q(x,y)]\mathrm{d}s.$

5. 设(C)为曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上从点$(1,1,1)$到点$(0,0,0)$的一段弧，把第二型线积分 $\int_{(C)} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$ 化为第一型线积分.

解 (C)的方程写作 $\boldsymbol{r}=\{-u,u^2,-u^3\}$，$-1\leqslant u\leqslant 0$，且参数 u 增加的方向为(C)的方向，则 $\boldsymbol{r}'=\{-1,2u,-3u^2\}$ 为与(C)同向的切向量，从而单位切向量 $\boldsymbol{e}_\tau = \dfrac{1}{\sqrt{1+4u^2+9u^4}}\{-1,2u,-3u^2\} = \dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}\{-1,2x,-3y\}$. 于是

$$\int_{(C)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_{(C)} \frac{-1}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}[P+2xQ+3yR]\mathrm{d}s.$$

7. 设椭圆 $x=a\cos t, y=b\sin t$ 上，每一点 M 都有作用力 $\boldsymbol{F}$，其大小等于从 M 到椭圆中心的距离，而方向指向椭圆中心. 今有一质量为 m 的质点 P 在椭圆上沿正向移动，求：

(1) P 点历经第一象限中的椭圆弧段时，$\boldsymbol{F}$ 所做的功；

(2) P 走遍全椭圆时，$\boldsymbol{F}$ 所做的功.

解 依题意 $\boldsymbol{F}=\{-x,-y\}$，$W=\int_{(C)} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_{(C)} x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y$. 于是

(1) $W = -\int_0^{\pi/2} [(a\cos t)(-a\sin t) + (b\sin t)(b\cos t)]\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}(a^2-b^2)$.

(2) $W = -\int_0^{2\pi} [(a\cos t)(-a\sin t) + (b\sin t)b\cos t]\mathrm{d}t = 0$.

10. 计算下列线积分：

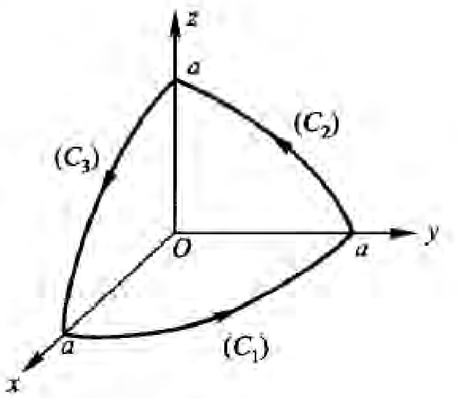
(1) $\oint_{(C)} (y^2-z^2)\mathrm{d}x + (z^2-x^2)\mathrm{d}y + (x^2-y^2)\mathrm{d}z$，$(C)$为球面

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

在第一卦限部分的边界曲线,方向与球面在第一卦限的外法线方向构成右手系;

(2) $\oint_{(C)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{F}=(3x^2-3yz+2xz)\boldsymbol{i}+(3y^2-3xz+z^2)\boldsymbol{j}+(3z^2-3xy+x^2+2yz)\boldsymbol{k}$, (C)为曲线$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ z=0,\end{cases}$取其正向.

解 (1) 如图所示.



(第 10 题(1))

(C_1): $x=R\cos\theta, y=R\sin\theta, z=0$.

则 $\oint_{(C_1)}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(R^2\sin^2\theta\cdot R(-\sin\theta)-R^2\cos^2\theta\cdot R\cos\theta)d\theta=-\frac{4}{3}R^3$.

同理可知 $\int_{(C_2)}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz=\int_{(C_3)}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz=-\frac{4}{3}R^3$.

故　原式 $=-4R^3$.

事实上,将 x 换成 y, y 换成 z, z 换成 x $\left(x,y,z\text{ 的轮换对称性知}: \int_{(C_1)}=\int_{(C_2)}=\int_{(C_3)}, \text{即}\int_{(C)}=3\int_{(C_1)}\right)$.

(2) (C)参数方程: $x=\cos\theta, y=\sin\theta, z=0$,则

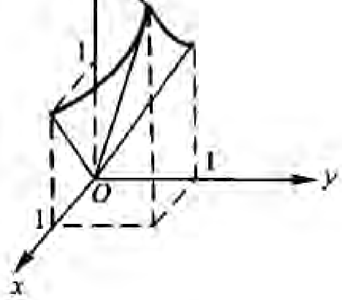
$$\text{原式}=\int_{(C)}(3x^2-3yz+2xz)dx+(3y^2-3xz+z^2)dy+(3z^2-3xy+x^2+2yz)dz$$

$$=\int_0^{2\pi}[3\cos^2\theta(-\sin\theta)+3\sin^2\theta(\cos\theta)]d\theta$$

$$=0$$

11. 设 $\boldsymbol{F}=\{y,-x,z^2\}$, (S)是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上满足 $0\leqslant x\leqslant 1$ 且 $0\leqslant y\leqslant 1$ 部分的下侧,求 $\iint_{(S)}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}$.

解　如图所示



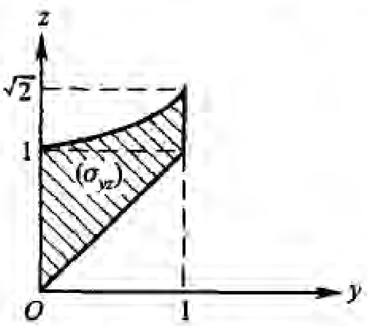
(第 11 题)

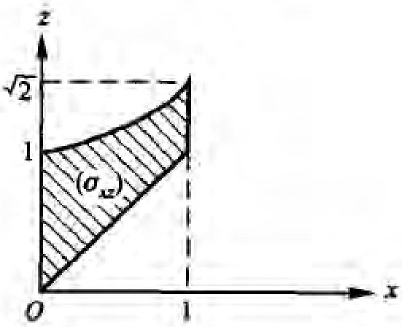
$$\iint\limits_{(S)} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$= \iint\limits_{(S)} y\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - x\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{(\sigma_{yz})} y\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint\limits_{(\sigma_{xz})} x\mathrm{d}x\mathrm{d}z - \iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1}} (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad ((\sigma_{yz})\text{与}(\sigma_{xz})\text{如图所示})$$

$$= \int_0^1 y\mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{1+y^2}} \mathrm{d}z - \int_0^1 x\mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{1+x^2}} \mathrm{d}z - \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 (x^2+y^2)\mathrm{d}y = -\frac{2}{3}.$$





12. 计算下列面积分：

(2) $\oiint\limits_{(S)} xy\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + zx\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$，$(S)$为由平面 $x=0, y=0, z=0$，$x+y+z=1$ 所围成的四面体表面的外侧；

解 $(S_1): x=0, (S_2): y=0, (S_3): z=0, (S_4): x+y+z=1$. 显然

$$\iint\limits_{(S_1)} = \iint\limits_{(S_2)} = \iint\limits_{(S_3)} = 0, \quad \iint\limits_{(S)} = \iint\limits_{(S_1)} + \iint\limits_{(S_2)} + \iint\limits_{(S_3)} + \iint\limits_{(S_4)} = \iint\limits_{(S_4)}.$$

故
$$\iint\limits_{(S)} = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{1-y} y(1-y-z)\mathrm{d}z + \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^{1-z} (1-x-z)z\mathrm{d}x$$

$$+ \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} (1-x-y)x\mathrm{d}y$$

$$= 3\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} x(1-x-y)\mathrm{d}y = \frac{1}{8}.$$

(3) $\iint\limits_{(S)} (z^2+x)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$，$(S)$是 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=2$ 之间部分的下侧；

解 (S_1)：$x=\sqrt{2z-y^2}, 0\leqslant z\leqslant 2$；$(S_2)$ $x=-\sqrt{2z-y^2}, 0\leqslant z\leqslant 2$.

$$\iint\limits_{(S)}(z^2+x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\iint\limits_{(S_1)}+\iint\limits_{(S_2)}=\iint\limits_{(\sigma_{yz})}(z^2+\sqrt{2z-y^2})\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{(\sigma_{yz})}(z^2-\sqrt{2z-y^2})\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2\int_{-2}^{2}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}y^2}^{2}\sqrt{2z-y^2}\mathrm{d}z=\int_{-2}^{2}\frac{2}{3}(2z-y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{1}{2}y^2}^{2}\mathrm{d}y=4\pi$$

$$\iint\limits_{(S)}-z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\frac{1}{2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2\frac{1}{2}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho=4\pi$$

$$\iint\limits_{(S)}(z^2+x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=8\pi.$$

(4) $\iint\limits_{(S)}-y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，$(S)$是柱面 $x^2+y^2=4$ 被 $z=0,x+z=2$ 所截下部分的外侧；

解 由于(S)在 xOy 平面上的投影为零，即 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，则

$$\iint\limits_{(S)}(z+1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=0.$$

(S)可分为左，右两块$(S_左)$，$(S_右)$，则

$$原式=\iint\limits_{(S)}-y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=\iint\limits_{(\sigma)}-\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=-2\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}z=-2\int_{-2}^{2}\mathrm{d}x\int_0^{2-x}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}z=-8\pi.$$

(6) $\iint\limits_{(S)}z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，$(S)$为球面 $x^2+y^2+z^2=2z$ 的外侧；

解 (S)可分为两部分：

(S_1)：$z=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$上侧，(S_2)：$z=1-\sqrt{1-x^2-y^2}$下侧，则

$$\iint\limits_{(S)}z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iint\limits_{(S_1)}z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+\iint\limits_{(S_2)}z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(1+\sqrt{1-x^2-y^2})^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(1-\sqrt{1-x^2-y^2})^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{8}{3}\pi.$$

(7) $\iint\limits_{(S)}[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\wedge$

$\mathrm{d}y$, (S)为 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧, f 为连续函数.

解 (S)的法向量$\{1,-1,1\}$,则单位法向量 $\boldsymbol{e}_n=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\{1,-1,1\}$.

令 $\boldsymbol{A}=\{f(x,y,z)+x,2f(x,y,z)+y,f(x,y,z)+z\}$,则

$$原式=\iint\limits_{(S)}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint\limits_{(S)}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_n\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{(S)}(x-y+z)\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{(S)}\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x-1}^0\sqrt{3}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$

13. 求向量场 $\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$ 穿过下列曲面的通量:

(1) 圆柱 $x^2+y^2\leqslant a^2(0\leqslant z\leqslant h)$的侧表面的外侧;

(2) 上述圆柱体的全表面的外侧.

解 (1) 通量 $\boldsymbol{\Phi}=\iint\limits_{(S)}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$,

(S)的法向量 $\boldsymbol{n}=\{2x,2y,0\}$, 则单位法向量

$$\boldsymbol{e}_n=\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},0\right\},$$

从而 $$\boldsymbol{\Phi}=\iint\limits_{(S)}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint\limits_{(S)}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_n)\mathrm{d}S=\iint\limits_{(S)}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{(S)}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}S=a\iint\limits_{(S)}\mathrm{d}S=a\cdot2\pi ah=2\pi a^2h.$$

(2) $$\iint\limits_{(S_上)}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint\limits_{(S_上)}x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=0+0+h\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a^2h.$$

$$\iint\limits_{(S_下)}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0+0+0=0.$$

故 $$\oiint\limits_{(S)}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=2\pi a^2h+\pi a^2h=3\pi a^2h.$$

14. 计算 $\oiint\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, 其中 $\boldsymbol{F}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$,$(S)$是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

解 (S)的单位法向量 $\boldsymbol{e}_n=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\{x,y,z\}=\dfrac{1}{a}\{x,y,z\}$.

于是 $$\oiint\limits_{(S)}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oiint\limits_{(S)}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_n\mathrm{d}S=\frac{1}{a}\oiint\limits_{(S)}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$$

$$= a\iint\limits_{(S)} dS = a\cdot 4\pi a^2 = 4\pi a^3.$$

15. 把第二型面积分 $\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)\,dy\wedge dz + Q(x,y,z)\,dz\wedge dx + R(x,y,z)\,dx\wedge dy$ 化为第一型面积分，其中

(1) (S)是平面 $3x+2y+2\sqrt{3}z=6$ 在第一卦限部分的上侧；

(2) (S)是抛物面 $z=8-(x^2+y^2)$ 在 xOy 平面上方部分的下侧；

解　(1) (S)的法向量 $\boldsymbol{n}=\{3,2,2\sqrt{3}\}$，单位法向量 $\boldsymbol{e}_n=\frac{1}{5}\{3,2,2\sqrt{3}\}$.

$$\text{则原式} = \iint\limits_{(S)} \{P,Q,R\}\cdot d\boldsymbol{S} = \iint\limits_{(S)} \{P,Q,R\}\cdot \boldsymbol{e}_n dS$$

$$= \frac{1}{5}\iint\limits_{(S)} (3P+2Q+2\sqrt{3}R)\,dS.$$

(2) (S)的法向量 $\boldsymbol{n}=\{-2x,-2y,-1\}$，单位法向量

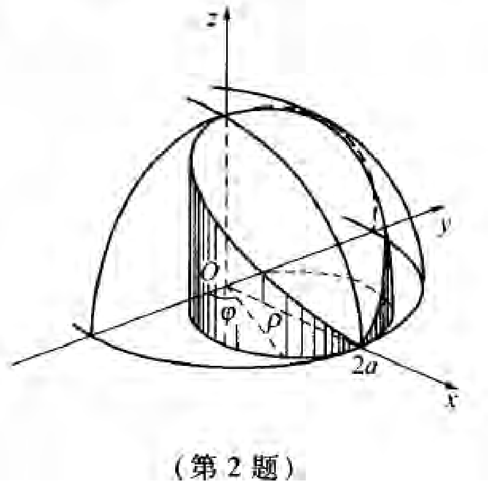
$$\boldsymbol{e}_n = \frac{1}{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}}\{-2x,-2y,-1\}.\text{ 于是}$$

$$\text{原积分} = \iint\limits_{(S)} \{P,Q,R\}\cdot \boldsymbol{e}_n dS$$

$$= \iint\limits_{(S)} \frac{-1}{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}}[2xP(x,y,z)+2yQ(x,y,z)+R(x,y,z)]\,dS.$$

(B)

2. 计算线积分 $\oint_{(C)} y^2dx+z^2dy+x^2dz$，$(C)$为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与柱面 $x^2+y^2=Rx\,(z\geqslant 0, R>0)$ 的交线，其方向是面对着正 x 轴看去是逆时针的.



(第 2 题)

解　令 $x=\frac{R}{2}+\frac{R}{2}\cos t, y=\frac{R}{2}\sin t, (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 代入球面及柱面方程可得：

$z=R\sin\frac{t}{2}$，则曲线(C)的参数方程为

$$x=\frac{R}{2}+\frac{R}{2}\cos t,\quad y=\frac{R}{2}\sin t,$$

$$z = R\sin\frac{t}{2}.\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

于是 $\oint_{(C)} y^2\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}z$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{R^2}{4}\sin^2 t\cdot\frac{R}{2}(-\sin t) + R^2\sin^2\frac{t}{2}\cdot\frac{R}{2}\cos t + \frac{R^2}{4}(1+\cos t)^2\cdot R\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\right]\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{4}\pi R^3.$$

3. 在过点 $O(0,0)$ 和点 $A(\pi,0)$ 的曲线段 $y = a\sin x\ (a>0)$ 中，求一条曲线 (C)，使沿该曲线 (C) 从点 O 到 A 的第二型线积分 $\int_{(C)}(1+y^3)\mathrm{d}x + (2x+y)\mathrm{d}y$ 的值最小.

解 $$I(a) \xlongequal{\Delta} \int_{(C)}(1+y^3)\mathrm{d}x + (2x+y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\pi}[1 + a^3\sin^3 x + a(2x + a\sin x\cos x)]\mathrm{d}x$$

$$= \pi + \frac{4}{3}a^3 - 4a. \quad (\text{注意到 } a>0)$$

由于 $\frac{\mathrm{d}I(a)}{\mathrm{d}a} = 4(a+1)(a-1) = 0$，则得唯一的驻点 $a=1$. 必有 $I_{\min}(a) = I(1) = \pi - \frac{8}{3}$，所求曲线 (C) 为 $y = \sin x$.

4. 在变力 $\boldsymbol{F} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$ 的作用下，质点由原点沿直线运动到椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 上第一卦限中的点 $M(\xi,\eta,\zeta)$，问当 ξ,η,ζ 取何值时，力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 W 最大？并求出 W 的最大值.

解 设曲线 (C) 为线段 OM，则其参数方程为

$$x = t\xi,\quad y = t\eta,\quad z = t\zeta,\quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

从而 $$W = \int_{(C)}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{(C)} yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1(\eta\zeta t^2\cdot\xi + \xi\zeta t^2\cdot\eta + \xi\eta t^2\cdot\zeta)\mathrm{d}t$$

$$= \xi\eta\zeta.$$

又 $M(\xi,\eta,\zeta)$ 在 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上，则 $\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1$. 依题需求目标函数 $W=\xi\eta\zeta$ 在约束条件 $\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1$ 下的最大值. 令 $L=\xi\eta\zeta+\lambda\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1\right)$，则令

$$\begin{cases} L_\xi = \eta\zeta + 2\lambda\dfrac{\xi}{a^2} = 0 \\ L_\eta = \xi\zeta + \dfrac{2\lambda}{b^2}\eta = 0 \\ L_\zeta = \xi\eta + \dfrac{2\lambda}{c^2}\zeta = 0 \\ L_\lambda = \dfrac{\xi^2}{a^2}+\dfrac{\eta^2}{b^2}+\dfrac{\zeta^2}{c^2}-1 = 0 \end{cases}$$ 解之得唯一的驻点 $\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$.

必是最大值点. 即当 $\xi=\frac{a}{\sqrt{3}},\eta=\frac{b}{\sqrt{3}},\zeta=\frac{c}{\sqrt{3}}$ 时，F 做的功最大，且 $W_{\max}=\frac{abc}{3\sqrt{3}}$.

5. 计算下列面积分：$\iint\limits_{(S)}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，其中 (S) 是曲面 $x^2+y^2=R^2$ 及平面 $z=R, z=-R(R>0)$ 所围立体的表面外侧.

解 $\iint\limits_{(S)}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$

$$= \iint\limits_{(S_{前侧})}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z}{R^2+z^2}+\iint\limits_{(S_{后侧})}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z}{R^2+z^2}+\iint\limits_{(S_{上})}\frac{R^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{x^2+y^2+R^2}+\iint\limits_{(S_{下})}\frac{R^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{x^2+y^2+R^2}$$

$$= \iint\limits_{\substack{|y|\le R\\|z|\le R}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{\substack{|y|\le R\\|z|\le R}}\frac{-\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\frac{R^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+R^2}-$$

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\frac{R^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+R^2}$$

$$= 2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-y^2}\mathrm{d}y\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}z}{R^2+z^2} = 8\left(\frac{1}{4}\pi R^2\right)\cdot\frac{\pi}{4R} = \frac{1}{2}\pi^2 R.$$

6. 计算 $\iint\limits_{(S)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}$，其中 $\boldsymbol{F}=\dfrac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{x^2+y^2+z^2}$，$(S)$ 上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的下侧.

解法Ⅰ (S) 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{-2x,-2y,-2z\}$. 单位法向量 $\boldsymbol{e}_n=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\{-x,-y,-z\}=\dfrac{1}{R}\{-x,-y,-z\}$，则

$$\iint\limits_{(S)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint\limits_{(S)}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_n)dS=\iint\limits_{(S)}-\frac{1}{R}dS=-\frac{1}{R}\iint\limits_{(S)}dS=-\frac{1}{R}(2\pi R^2)=-2\pi R.$$

解法Ⅱ
$$\iint\limits_{(S)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint\limits_{(S)}\frac{1}{R^2}(x\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y)$$

$$=\frac{1}{R^2}\Big[\iint\limits_{(S_{前})}x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\iint\limits_{(S_{后})}x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\iint\limits_{(S_{左})}y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+$$

$$\iint\limits_{(S_{右})}y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big]$$

$$=\frac{1}{R^2}\Big[-\iint\limits_{\substack{y^2+z^2\leqslant R^2\\ z\geqslant 0}}\sqrt{R^2-y^2-z^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\substack{y^2+z^2\leqslant R^2\\ z\geqslant 0}}-$$

$$\sqrt{R^2-y^2-z^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\Big]+\frac{1}{R^2}\Big[-\iint\limits_{\substack{x^2+z^2\leqslant R^2\\ z\geqslant 0}}\sqrt{R^2-x^2-z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z+$$

$$\iint\limits_{\substack{x^2+z^2\leqslant R^2\\ z\geqslant 0}}-\sqrt{R^2-x^2-z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\Big]-\frac{1}{R^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=-\frac{4}{R^2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho-\frac{1}{R^2}(2\pi)\left(\frac{1}{3}R^3\right)=-2\pi R.$$

7. 设 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 是连续函数，M 是 $\sqrt{P^2+Q^2+R^2}$ 在 (S) 上的最大值，其中 (S) 是一光滑曲面，其面积记为 S. 证明

$$\left|\iint\limits_{(S)}P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\right|\leqslant MS.$$

证明 令 $\boldsymbol{A}=\{P,Q,R\}$，则 $\|\boldsymbol{A}\|=\sqrt{P^2+Q^2+R^2}$. 则

$$\left|\iint\limits_{(S)}P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\right|$$

$$= \left| \iint_{(S)} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_n \mathrm{d}S \right| \quad (\boldsymbol{e}_n \text{ 为}(S)\text{ 的单位法向量})$$

$$= \left| \iint_{(S)} \| \boldsymbol{A} \| \cos \theta \mathrm{d}S \right| \quad (\theta \text{ 为 } \boldsymbol{e}_n \text{ 与 } \boldsymbol{A} \text{ 的夹角})$$

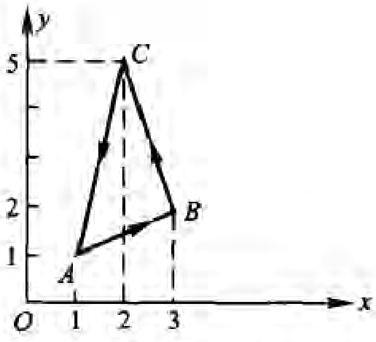
$$\leqslant \iint_{(S)} \| \boldsymbol{A} \| \ |\cos \theta| \mathrm{d}S \leqslant \iint_{(S)} M \cdot 1 \cdot \mathrm{d}S = MS.$$

习 题 6.8

(A)

2. 利用 Green 公式计算下列曲线积分:

(3) $\oint_{(+C)} (x+y)^2 \mathrm{d}x - (x^2+y^2)\mathrm{d}y$, (C):顶点为 $A(1,1)$, $B(3,2)$, $C(2,5)$ 的三角形边界;



(第 2 题(3))

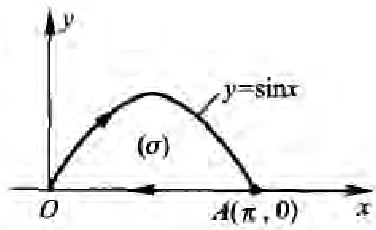
解 直线 AB, BC, CA 的方程分别为: $AB: y=\frac{1}{2}(x+1)$, $BC: y=-3x+11$, $CA: y=4x-3$.

则
$$\oint_{(+C)} (x+y)^2 \mathrm{d}x - (x^2+y^2)\mathrm{d}y = \iint_{(\sigma)} [-2x-2(x+y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{4x-3} (-4x-2y)\mathrm{d}y + \int_2^3 \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{-3x+11} (-4x-2y)\mathrm{d}y$$

$$= -\frac{140}{3}.$$

(4) $\int_{(C)} \mathrm{e}^x [\cos y \mathrm{d}x + (y-\sin y)\mathrm{d}y]$, (C) 为曲线 $y=\sin x$ 从 $(0,0)$ 到 $(\pi,0)$ 的一段.



(第 2 题(4))

解 原式 $= \int_{(C\cup \overline{AO})} + \int_{\overline{OA}}$

$$= -\iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial \mathrm{e}^x (y-\sin y)}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{e}^x \cos y}{\partial y} \right) \mathrm{d}\sigma + \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$