第三节 三重积分的计算

1、直角坐标系下

2、柱面坐标系下

3、球面坐标系下

回顾: 三重积分的概念

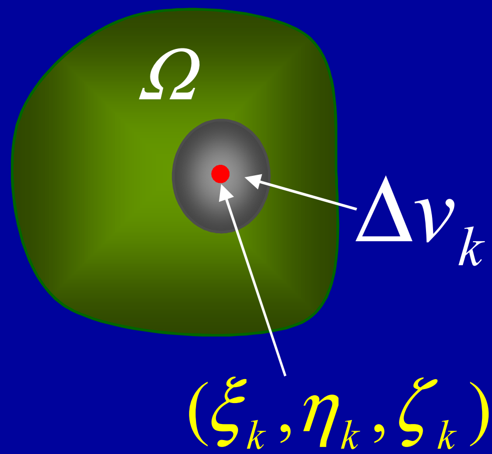
引例: 设在空间有限闭区域 Ω 内分布着某种不均匀的物质, 密度函数为 $\mu(x,y,z)\in C(\Omega)$, 求分布在 Ω 内的物质的质量 M .

解决方法: 类似二重积分解决问题的思想, 采用

"大化小, 常代变, 近似和, 求极限"

可得

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\mu(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k$$



定义. 设 $f(x,y,z)$, $(x,y,z)\in\Omega$, 若对 Ω 作**任意分割**: $\Delta v_k\,(k=1,2,\cdots,n)$,**任意取点** $(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\in\Delta v_k$,下列"乘积和式"极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k \overset{\text{记作}}{=\!=} \iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

存在, 则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上的**三重积分**.

$\mathrm{d}v$ 称为**体积元素**, 在直角坐标系下常写作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

性质: 三重积分的性质与二重积分相似. 例如

中值定理. 设 $f(x,y,z)$ 在有界闭域 Ω 上连续, V 为 Ω 的体积, 则存在 $(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega$, 使得

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = f(\xi,\eta,\zeta)V$$

3.1 利用直角坐标计算三重积分

先假设连续函数 $f(x, y, z) \geq 0$, 并将它看作某物体的密度函数，通过计算该物体的质量引出下列各计算方法:

方法1． 投影法 ("先一后二")

方法2． 截面法 ("先二后一")

最后, 推广到一般可积函数的积分计算.

方法1. 投影法 (“先一后二”)

$$\Omega:\begin{cases} z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y) \\ (x,y)\in D \end{cases}$$

细长柱体微元的质量为

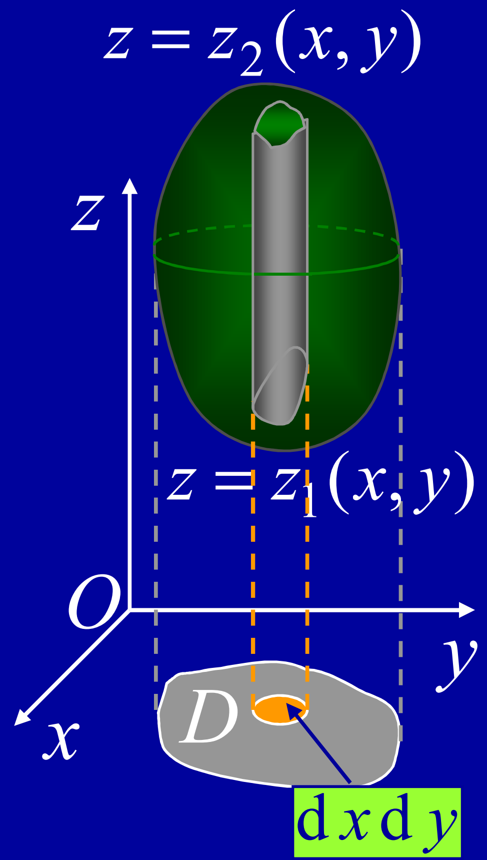
$$\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

该物体的质量为

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

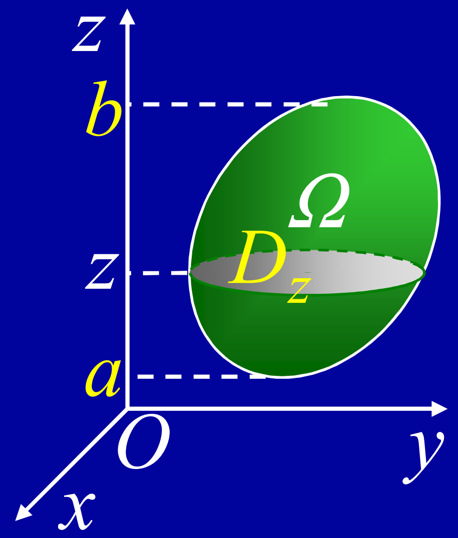
$$=\iint_D \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\underline{\underline{\text{记作}}}\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$



微元线密度≈ $f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

方法2. 截面法 (“先二后一”)



$$\Omega:\begin{cases}(x,y)\in D_z\\ a\le z\le b\end{cases}$$

以D_z为底, d z 为高的柱形薄片质量为

$$\left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$$

面密度≈ $f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$

该物体的质量为

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_a^b\left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$$

$$\underline{\underline{\text{记作}}}\ \int_a^b \mathrm{d}z\iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

实际计算中：　三次积分法

设区域 Ω : $\begin{cases} z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y) \\ (x,y) \in D: \begin{cases} y_1(x) \le y \le y_2(x) \\ a \le x \le b \end{cases} \end{cases}$

利用投影法结果，把二重积分化成二次积分即得:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

$$= \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

投影法

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

当被积函数在积分域上变号时, 因为

$$f(x,y,z)$$

$$=\frac{|f(x,y,z)|+f(x,y,z)}{2}-\frac{|f(x,y,z)|-f(x,y,z)}{2}$$

$$=f_1(x,y,z)-f_2(x,y,z)$$

均为为非负函数

根据重积分性质仍可用前面介绍的方法计算.

小结: 三重积分的计算方法

方法1. “先一后二”

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

方法2. “先二后一”

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\int_a^b \mathrm{d}z\iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

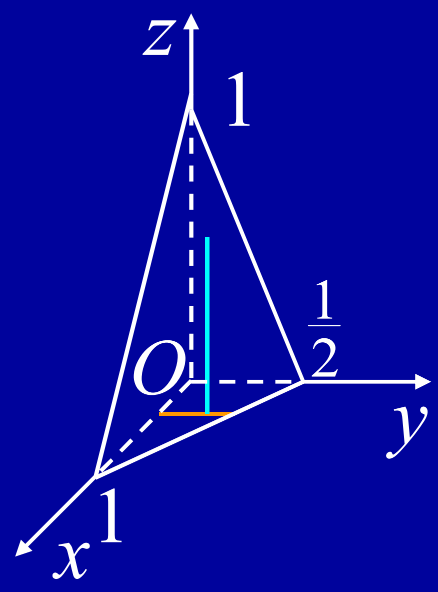
实际计算中： “三次积分”

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

不同方法各有特点，具体计算时应根据被积函数及积分域的特点灵活选择.

例1. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域 .

解: $\Omega:\begin{cases} 0\le z\le 1-x-2y \\ 0\le y\le \frac{1}{2}(1-x) \\ 0\le x\le 1 \end{cases}$



$$\therefore \iiint_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

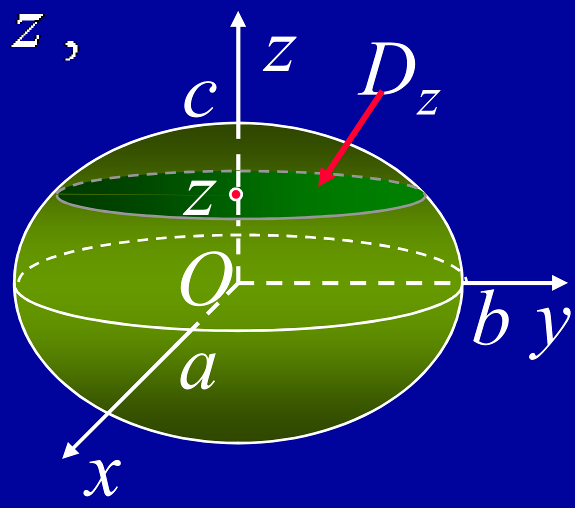
$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-2y}\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}(1-x-2y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1(x-2x^2+x^3)\mathrm{d}x=\frac{1}{48}$$

例3.3 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，

其中 $\Omega: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1.$



解： $\Omega:\begin{cases} -c\le z\le c \\ D_z: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1-\dfrac{z^2}{c^2} \end{cases}$

用“先二后一”

$$\therefore \quad \iiint_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{-c}^{c} z^2\,\mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-c}^{c} z^2 \pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z = \frac{4}{15}\pi abc^3$$

例3 计算三重积分$I=\iiint_{(V)} z^2 dv$,

其中(V)由$z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$, $z=h$所围成.

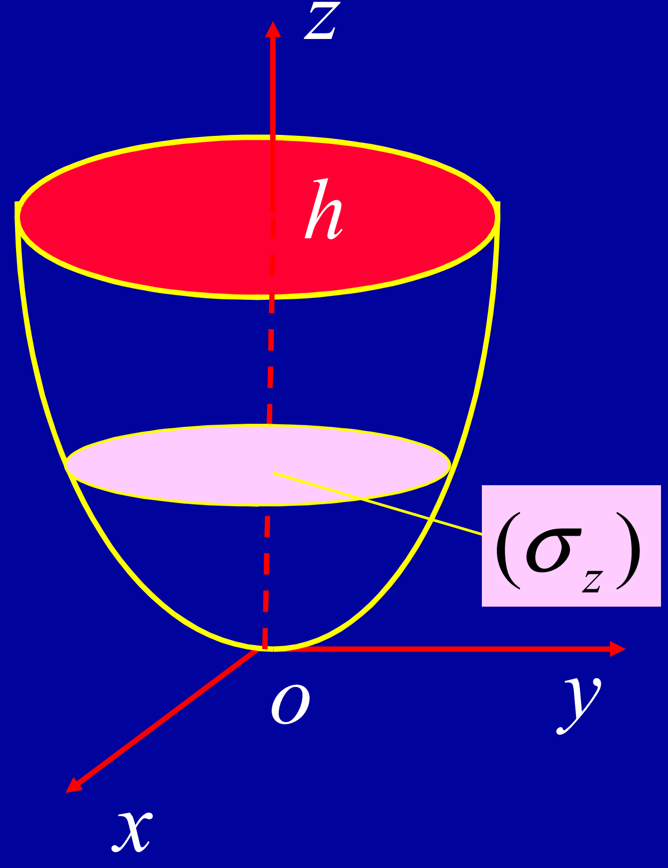
解

$$I=\iiint_{(V)} z^2 \mathrm{d}v$$

$$=\int_0^h z^2 dz \iint_{(\sigma_z)} dxdy$$

$$=\int_0^h z^2 \sigma_z dz$$

$$=\int_0^h z^2 \pi abz dz=\frac{1}{4}\pi abh^4.$$



例4 用两种积分次序分别求解三重积分：

$$\iiint\limits_{(v)} z^2 \mathrm{d}v,\ (v):由\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1与三坐标面所围成.$$

解法一 用$z=z$平面去截(v)得(σ_z).

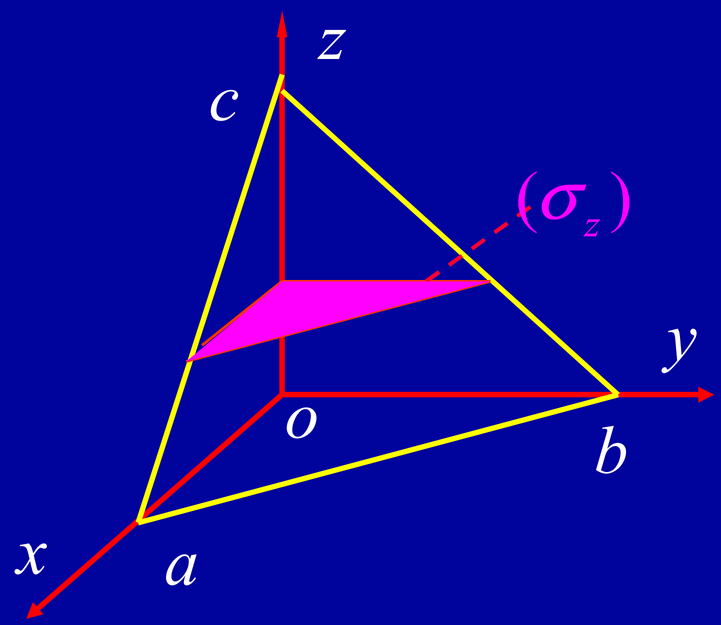
$$\sigma_z=\frac{ab}{2c^2}(c-z)^2$$

$$\therefore \iiint\limits_{(v)} z^2 \mathrm{d}v=\int_0^c dz\iint\limits_{(\sigma_z)} z^2 \mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^c z^2\sigma_z dz$$

$$=\frac{ab}{2c^2}\int_0^c z^2(c-z)^2 dz$$

$$=\frac{ab}{2c^2}\cdot\frac{c^5}{30}=\frac{abc^3}{60}.$$



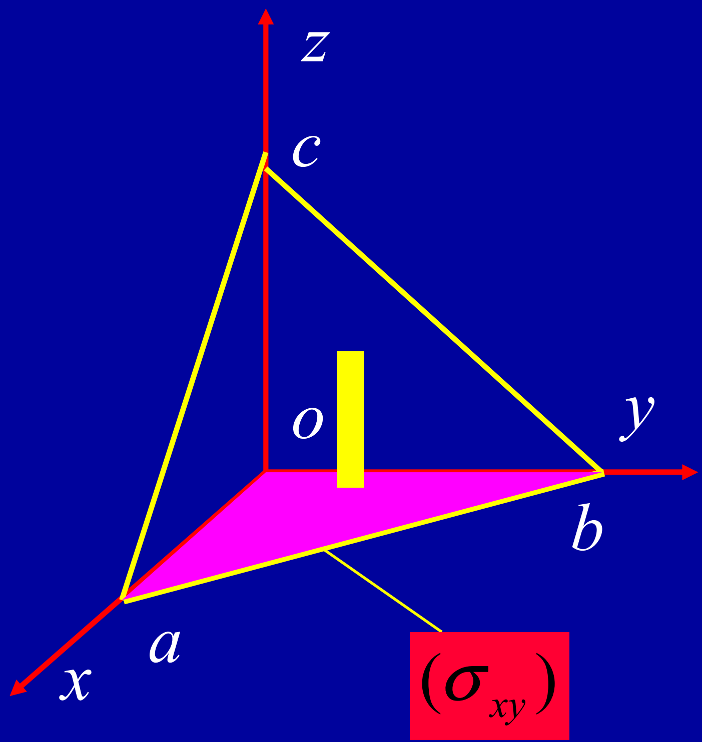
解法二 将(v)向xoy面投影得(σ_{xy}). 则$0 \le z \le c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})$.

$$\therefore \iiint\limits_{(v)} z^2 \mathrm{d}v = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} \mathrm{d}\sigma \int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} z^2 \mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{3}c^3 \iint\limits_{(\sigma_{xy})} (1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})^3 \mathrm{d}\sigma$$

$$= \frac{1}{3}c^3 \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} (1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})^3 dy$$

$$= \frac{1}{12}bc^3 \int_0^a (1-\frac{x}{a})^4 dx = \frac{abc^3}{60}.$$



3.2 利用柱坐标计算三重积分

定理 设 $f(x,y,z)$ 在有界闭域 V 上连续，

变换$T: x = x(u,v,w),\ y = y(u,v,w), z = z(u,v,w)$

将有界闭域 V'变为V，且满足

(1) $x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w) \in C^{(1)}$;

(2) 在 V' 上雅可比式 $J(u,v,w) = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \neq 0$;

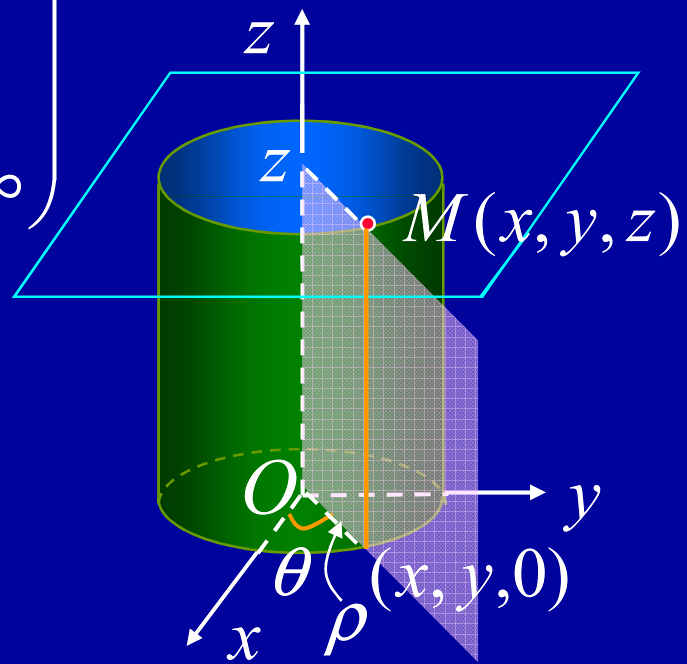
(3) 变换 $T: V' \to V$ 是一对一的，则有

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{V'} f[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w]\left|J(u,v,w)\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

设 $M(x,y,z)\in \mathbf{R}^3$, 将 x, y 用极坐标 ρ,θ 代替, 则 (ρ,θ,z) 就称为点 M 的柱坐标. 直角坐标与柱面坐标的关系:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{c} 0\le\rho<+\infty \\ 0\le\theta\le 2\pi \\ -\infty<z<+\infty \end{array}\right)$$



坐标面分别为

$\rho=$ 常数 $\longrightarrow$ 圆柱面

$\theta=$ 常数 $\longrightarrow$ 半平面

$z=$ 常数 $\longrightarrow$ 平面

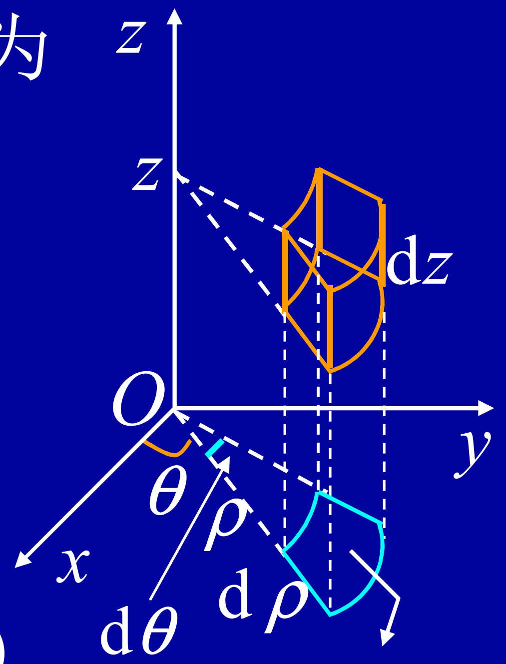
如图所示, 在柱面坐标系中体积元素为

$$\mathrm{d}v = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

因此 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$= \iiint_\Omega F(\rho,\theta,z)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

其中 $F(\rho,\theta,z) = f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta,\ z)$



$\boxed{\mathrm{d}\sigma = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta}$

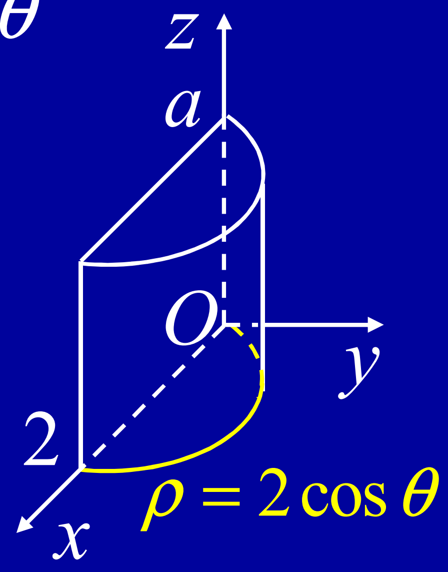
适用范围:

1) **积分域**表面用柱面坐标表示时**方程简单**;

2) **被积函数**用柱面坐标表示时**变量互相分离**.

例6 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 其中Ω为由柱面 $x^2+y^2=2x$ 及平面 $z=0,\ z=a\ (a>0),\ y=0$ 所围成半圆柱体.

解： 在柱面坐标系下 $\Omega:\begin{cases}0\le\rho\le 2\cos\theta\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\\ 0\le z\le a\end{cases}$



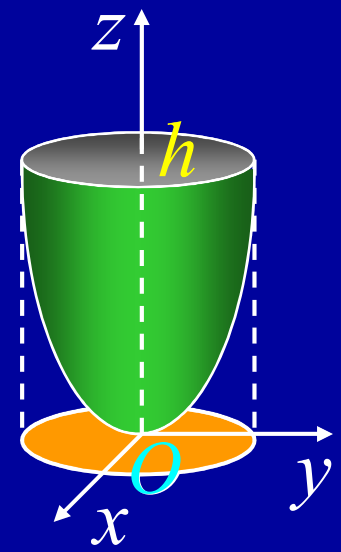
$$\text{原式}=\iiint_{\Omega} z\rho^2\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^a z\mathrm{d}z\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{4a^2}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{8}{9}a^2$$

$$\boxed{\mathrm{d}v=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z}$$

例7 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1+x^2+y^2}$，其中 Ω 由抛物面 $x^2+y^2=4z$ 与平面 $z=h\ (h>0)$ 所围成 .



解: 在柱面坐标系下 $\Omega:\begin{cases}\dfrac{\rho^2}{4}\le z\le h\\ 0\le\rho\le 2\sqrt{h}\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$

$$\boxed{\mathrm{d}v=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z}$$

$$原式=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sqrt{h}}\frac{\rho}{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{4}}^{h}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^{2\sqrt{h}}\frac{\rho}{1+\rho^2}\left(h-\frac{\rho^2}{4}\right)\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{\pi}{4}[(1+4h)\ln(1+4h)-4h]$$

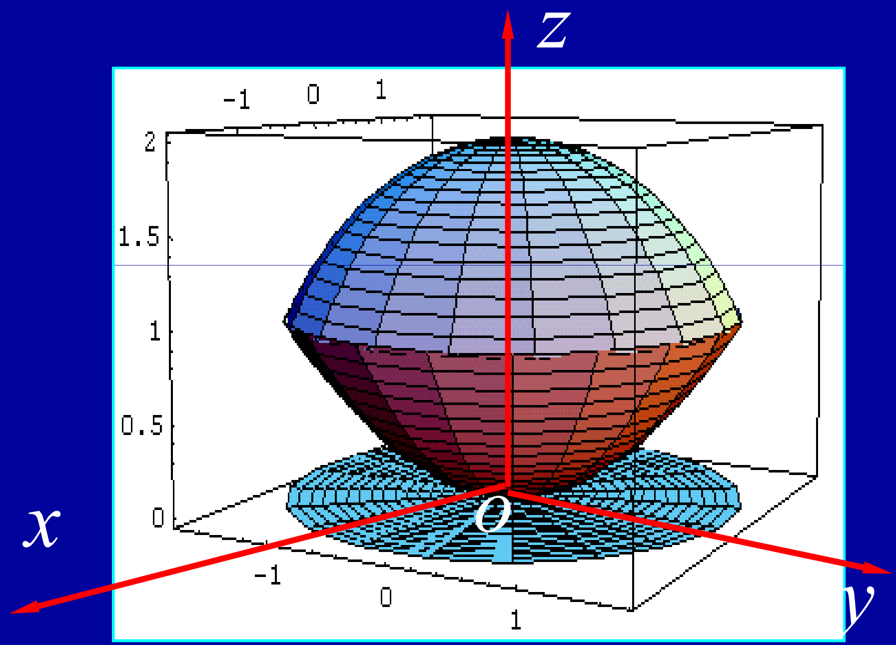
例8 计算$I=\iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz$，其中$\Omega$是球面$x^2+y^2+z^2=4$与抛物面$x^2+y^2=3z$所围的立体.

解 $\begin{cases} \rho^2+z^2=4 \\ \rho^2=3z \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} z=1, \\ \rho=\sqrt{3}, \end{array}$

$$\Omega:(x,y)\in D_{xy}:0\le x^2+y^2\le\sqrt{3},$$

$$\frac{x^2+y^2}{3}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2},$$

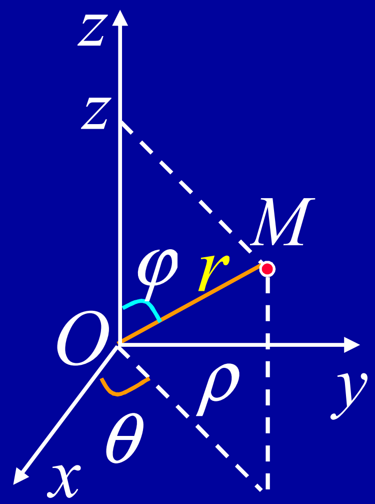
$$I=\iint\limits_{D} dxdy\int_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} zdz$$



$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{D}[4-\rho^2-\tfrac{\rho^4}{9}]\rho d\rho d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}(4-\rho^2-\tfrac{\rho^4}{9})\rho d\rho=\frac{13}{4}\pi.$$

3. 利用球坐标计算三重积分

设 $M(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$, 其柱坐标为 (ρ,θ,z), 令 $|\overrightarrow{OM}|=r$, $\angle zOM=\varphi$, 则 (r,θ,φ) 就称为点 M 的球坐标.



直角坐标与球面坐标的关系

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0\le r<+\infty \\ 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\varphi\le\pi \end{pmatrix}$$

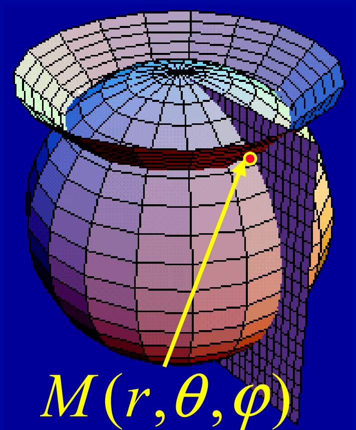
$$\rho = r\sin\varphi$$
$$z = r\cos\varphi$$

坐标面分别为

$r=$ 常数 ⟶ 球面

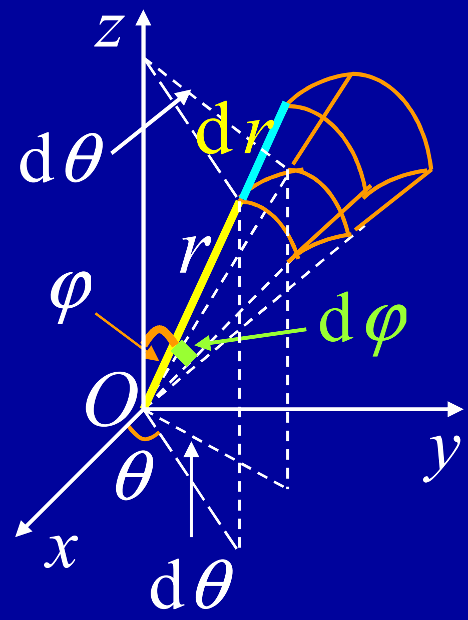
$\theta=$ 常数 ⟶ 半平面

$\varphi=$ 常数 ⟶ 锥面



如图所示, 在球面坐标系中体积元素为

$$\mathrm{d}v = r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta$$



因此有

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{\Omega} F(r,\theta,\varphi)\, r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta$$

其中 $F(r,\theta,\varphi) = f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)$

适用范围:

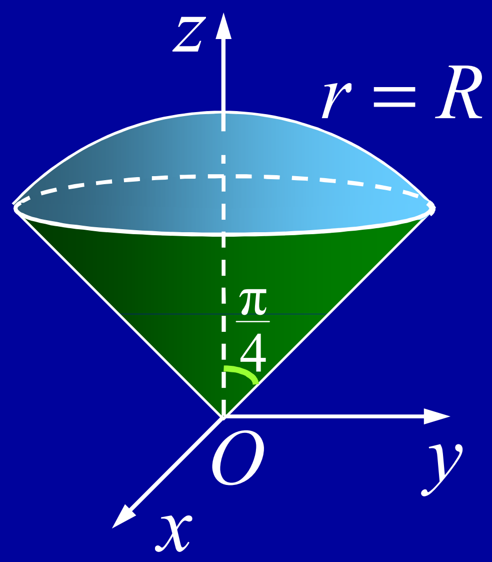
1) **积分域**表面用球面坐标表示时**方程简单**;

2) **被积函数**用球面坐标表示时**变量互相分离**.

例9 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围立体.

解: 在球面坐标系下

$$\Omega:\begin{cases}0\le r\le R\\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$



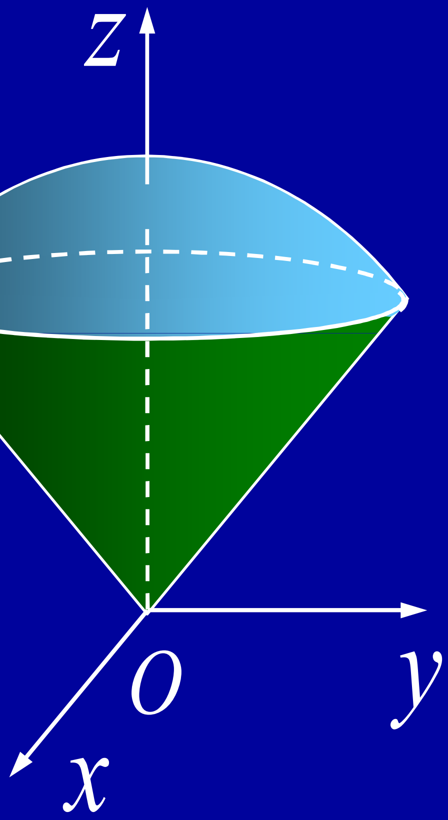
$$\therefore\quad \iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}r^4\,\mathrm{d}r$$

$$\boxed{\mathrm{d}v=r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta}$$

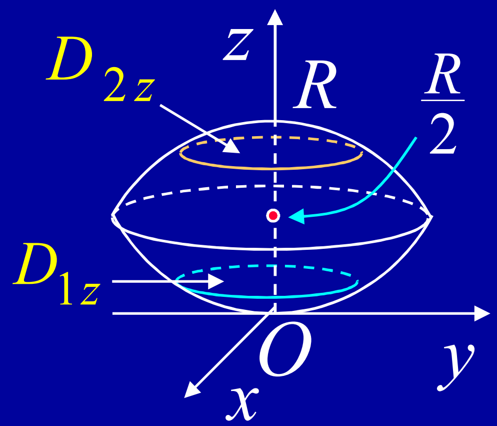
$$=\frac{1}{5}\pi R^5(2-\sqrt{2})$$

例 10 设(V)为球面$x^2+y^2+z^2=2az(a>0)$和锥面(以z轴为对称轴，顶角为2α)所围的空间区域，求（V）的体积。



$$(V):\begin{cases} 0\le r\le 2a\cos\varphi \\ 0\le\varphi\le\alpha \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$$

例 11 计算积分 $\iiint_{\Omega} z^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是两个球 $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ 及 $x^2+y^2+z^2 \le 2Rz$ $(R>0)$的公共部分.



提示: 由于被积函数缺 x, y，利用“**先二后一**”计算方便.

$$原式 = \int_0^{R/2} z^2\,\mathrm{d}z \iint_{D_{1z}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{R/2}^{R} z^2\,\mathrm{d}z \iint_{D_{2z}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{R/2} z^2 \cdot \pi(2Rz - z^2)\,\mathrm{d}z + \int_{R/2}^{R} z^2 \cdot \pi(R^2 - z^2)\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{59}{480}\pi R^5$$

例 12 计算

$$\iiint_V (x+y+z)\cos(x+y+z)^2 \,\mathrm{d}V\ ,\text{其中}$$

$$V=\{(x,y,z)\,|\,0\le x-y\le 1, 0\le x-z\le 1, 0\le x+y+z\le 1\}$$

内容小结

坐标系	体积元素	适用情况
直角坐标系	$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$	积分区域多由坐标面围成；
柱面坐标系	$\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$	被积函数形式简洁, 或
球面坐标系	$r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$	变量可分离.

* **说明:**

三重积分也有类似二重积分的**换元积分公式:**

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega^*} F(u,v,w)\left|J\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

对应雅可比行列式为 $J=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$

思考与练习

1. 将$I=\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$用三次积分表示, 其中$\Omega$ 由六个平面 $x=0, x=2, y=1, x+2y=4$, $z=x, z=2$ 所围成 , $f(x,y,z)\in C(\Omega)$.

提示:

$$\Omega:\begin{cases} x\le z\le 2 \\ 1\le y\le 2-\frac{1}{2}x \\ 0\le x\le 2 \end{cases}$$

$$I=\int_0^2 \mathrm{d}\,x\int_1^{2-\frac{1}{2}x}\mathrm{d}\,y\int_x^2 f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

2. 设 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$, 计算

$$\iiint_{\Omega}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\,\mathrm{d}v$$

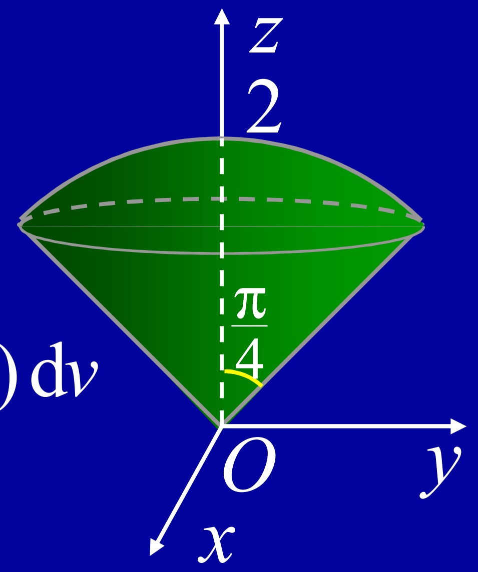
提示: 利用对称性

$$\text{原式}=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\,\mathrm{d}z$$

$$=0$$

奇函数

3. 设Ω由锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 所围成，计算$I=\iiint_\Omega (x+y+z)^2\,\mathrm{d}v.$



提示:

$$I=\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2+\underline{2xy+2yz+2xz})\,\mathrm{d}v$$

$\downarrow$ 利用对称性

$$=\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v$$

$\downarrow$ 用球坐标

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r^4\,\mathrm{d}r=\frac{64}{5}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi$$

4. 计算$I=\iiint_{\Omega}(x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中$\Omega$由$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $z=1$, $z=4$围成.

解: $I=\iiint_{\Omega}\boxed{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+5\iiint_{\Omega}xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

利用对称性

$$=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+0$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^4\mathrm{d}z\iint_{D_z}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^4\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}r^3\,\mathrm{d}r=21\pi$$