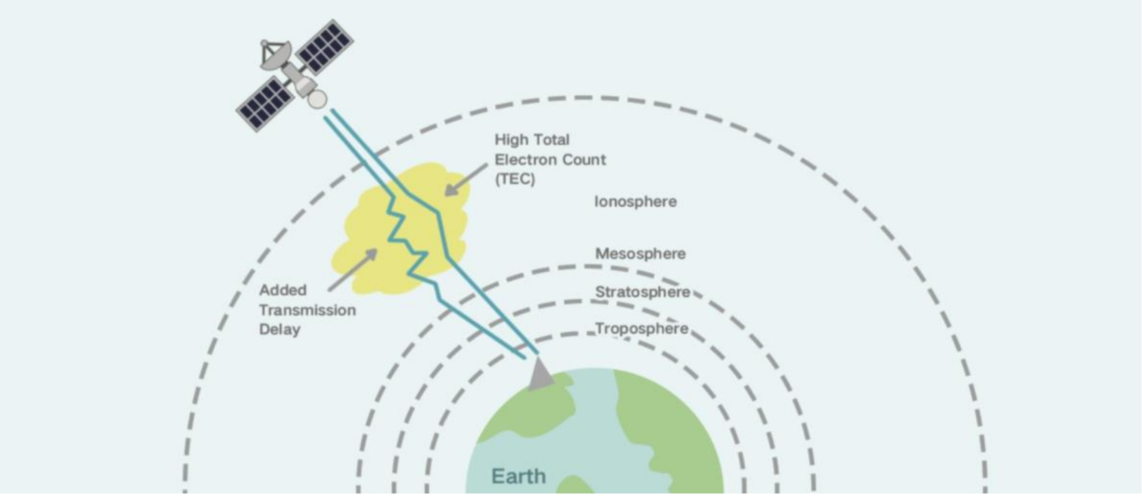
# 电磁场与电磁波

# 讲　义

## （第三部分）

潘　锦　编著




电子科技大学

# 4.3 时谐电磁场求解与应用

## 4.3.1 时谐电磁场分析基础

在时变电磁场中，电磁场是四维时空变化的函数。当电磁场随时间按正弦规律变化时，这样的电磁场称为时谐电磁场。时谐电磁场的坐标分量可表达为如下一般的时谐关系，即

$$F(\vec{r},t)=F_m(\vec{r})\cos\left[\omega t+\phi(\vec{r})+\theta_0\right]$$

其中，$F_m(\vec{r})$ 称为时谐量 $F(\vec{r},t)$ 的振幅；$\omega t+\phi(\vec{r})+\theta_0$ 称为相位。而相位分别由时间相位 $\omega t$ 、空间相位 $\phi(\vec{r})$ 、初始相位 $\theta_0$ 三部分构成。

由于任意时间变化的电磁场均可以通过时域−频域的付里叶变换，表示成为不同频率的时谐电磁场的叠加，即

$$\vec{F}(\vec{r},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{F}(\vec{r},\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

对于标量场

$$f(\vec{r},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\vec{r},\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

因此，时谐电磁场是一种最基本也是最具有代表性的时变电磁场。

另外，时谐电磁场还具有利于应用分离变量法将时空变量分离，实现对四维时空问题进行降维分析的重要特性，从而可降低分析时变电磁场的复杂度。对时谐电磁场进行时空分离的方法是利用正弦函数可用复指数函数表达的关系式，即

$$F(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left[F_m(\vec{r})e^{j\phi(\vec{r})}e^{j\theta_0}e^{j\omega t}\right]=\mathrm{Re}\left[\dot{F}(\vec{r})e^{j\omega t}\right]$$

于是可使得原实数域中四维时空函数 $F(\vec{r},t)$ 求解的问题，转化为复数域中的三维复空间函数 $\dot{F}(\vec{r})$ 求解的问题。这样，时谐量的振幅、空间相位和初始相位等三个要素均包含在了复函数 $\dot{F}(\vec{r})=F_m(\vec{r})e^{j\phi(\vec{r})}e^{j\theta_0}$ 之中。

### 4.3.1.1 复矢量麦克斯韦方程

若将时谐量的复数表示关系应用于麦克斯韦方程组，可得

$$\begin{cases}\nabla\times\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{E}}(\vec{r})e^{j\omega t}\right]=-\dfrac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{B}}(\vec{r})e^{j\omega t}\right]\\ \nabla\times\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{H}}(\vec{r})e^{j\omega t}\right]=\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{J}}(\vec{r})e^{j\omega t}\right]+\dfrac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{D}}(\vec{r})e^{j\omega t}\right]\\ \nabla\cdot\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{B}}(\vec{r})e^{j\omega t}\right]=0\\ \nabla\cdot\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{D}}(\vec{r})e^{j\omega t}\right]=\mathrm{Re}\left[\dot{\rho}(\vec{r})e^{j\omega t}\right]\end{cases}$$

由以上关系可得三维复空间的场源因果关系，为

$$\begin{cases}\nabla\times\dot{\vec{E}}(\vec{r})=-j\omega\dot{\vec{B}}(\vec{r})\\ \nabla\times\dot{\vec{H}}(\vec{r})=\dot{\vec{J}}(\vec{r})+j\omega\dot{\vec{D}}(\vec{r})\\ \nabla\cdot\dot{\vec{B}}(\vec{r})=0\\ \nabla\cdot\dot{\vec{D}}(\vec{r})=\dot{\rho}(\vec{r})\end{cases}$$

以上所得方程即是复矢量麦克斯韦方程组。

另外，可类似得到复数形式的电荷守恒定律，为

$$\nabla\cdot\dot{\vec{J}}(\vec{r})=-j\omega\dot{\rho}(\vec{r})$$

#### 4.3.1.2　媒质损耗及其复数表示方法——复介电常数和复磁导率

伴随媒质在电磁场作用下所产生的极化、传导和磁化等三种电磁效应，在时变电磁场作用下的媒质，一般会产生三种类型的能量损耗，分别为极化损耗、欧姆损耗（传导损耗）、磁损（磁化损耗）。这三种损耗的基理和特点如下：

（1）极化损耗：时变电场使得介质中的束缚电荷发生往复位移而碰撞，从而产生热耗能。极化损耗也叫介质损耗。对于静态的电场问题不存在介质损耗。

（2）欧姆损耗：导电媒质中的自由电子在电场作用下运动而碰撞，从而产生热耗能。在电路中欧姆损耗表现为电阻；电导率可反应其损耗特性。导电媒质在恒定电场和时变电场作用下，均会产生欧姆损耗。

（3）磁化损耗：介质中形成分子电流的电荷在时变磁场作用下发生往复位移而碰撞，产生热耗能。磁化损耗简称磁损，静态磁场作用下不会出现磁损。

由焦耳定律可知，不同媒质的传导损耗特性可通过媒质的电导率反映。而对于时谐电磁场作用下的导电媒质，媒质的电导率还可以利用复数形式麦克斯韦方程中的安培定律，统一用复数形式的介电常数表示。即

$$\nabla\times\vec{H}(\vec{r})=\vec{J}_i(\vec{r})+\sigma\vec{E}(\vec{r})+\mathrm{j}\omega\varepsilon\vec{E}(\vec{r})$$

其中，$\vec{J}_i(\vec{r})$为激励源电流；$\sigma\vec{E}(\vec{r})$为电场作用下导电媒质中的传导电流；$\mathrm{j}\omega\varepsilon\vec{E}(\vec{r})$为电介质中的位移电流。若定义复介电常数为

$$\varepsilon_c = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$$

则媒质中的传导电流和位移电流可统一表示为 $\mathrm{j}\omega\varepsilon_c\vec{E}(\vec{r})$。由此可见，复介电常数的实部与反映媒质极化的介电常数相对应，而虚部与反映媒质传导损耗的电导率对应。由此可推演得知，时谐情况下媒质的极化损耗特性也可统一用介电常数的虚部表示，即

$$\varepsilon_c = \varepsilon - j\varepsilon' - j\frac{\sigma}{\omega}$$

其中，实部 $\varepsilon$ 为媒质的介电常数，虚部中的 $\varepsilon'$ 和 $\dfrac{\sigma}{\omega}$ 分别反映媒质的极化损耗和欧姆损耗特性。同理，媒质的磁导率和磁化损耗也可统一用复磁导率表示为

$$\mu_c = \mu - j\mu'$$

其中，实部 $\mu$ 为媒质的磁导率，虚部 $\mu'$ 反映磁介质的磁损耗特性。

由上述可知，在时谐电磁场问题中当媒质特性常数具有虚部时，媒质就存在对电磁能量的损耗，此时的媒质称为损耗媒质。在工程应用中常用损耗角正切来表示媒质的损耗特性。损耗角正切定义为媒质特性常数虚部与实部的比值，即定义

$$\tan\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \quad , \quad \tan\delta_\sigma = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \quad , \quad \tan\delta_\mu = \frac{\mu'}{\mu}$$

分别反映媒质的极化损耗、欧姆损耗和磁化损耗特性。

#### 4.3.1.3 复矢量波动方程——亥姆霍兹方程

（一）时变电磁场的矢量波动方程

在一般存在损耗的线性各向同性均匀媒质中，时变激励源电流 $\vec{J}_i(\vec{r},t)$ 在空间中产生的电磁场满足如下麦克斯韦方程，即

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{E}(\vec{r},t) = -\mu\dfrac{\partial\vec{H}(\vec{r},t)}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{J}_i(\vec{r},t) + \sigma\vec{E}(\vec{r},t) + \varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t} \\ \varepsilon\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t) \\ \nabla\cdot\vec{H}(\vec{r},t) = 0 \end{cases}$$

对以上方程组进行消元化简即可得到电场和磁场分别满足的矢量波动方程，为

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\mu\frac{\partial\vec{J}_i}{\partial t}$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{H} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} + \mu\sigma\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \nabla\times\vec{J}_i$$

由此可得激励电流 $\vec{J}_i$ 所在区域以外的无源区矢量波动方程，为

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}+\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}+\mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=0$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{H}+\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}+\mu\sigma\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=0$$

以上所得矢量波动方程，即是在存在损耗的媒质空间中求解任意时变电磁场的基本方程。
（二）时谐电磁场的矢量波动方程

若用复矢量结合时间因子 $e^{j\omega t}$ 表示时谐电磁场，则可通过时变电磁场的矢量波动方程，推得时谐电磁场复矢量满足的矢量波动方程，为

$$\nabla\times\nabla\times\dot{\vec{E}}(\vec{r})-k_c^2\,\dot{\vec{E}}(\vec{r})=-j\omega\mu\,\dot{\vec{J}}_i(\vec{r})$$

$$\nabla\times\nabla\times\dot{\vec{H}}-k_c^2\,\dot{\vec{H}}=\nabla\times\dot{\vec{J}}_i$$

以上方程也称为亥姆霍兹方程。其中，$k_c^2=\omega^2\mu\varepsilon_c$，对于有耗媒质而言 $k_c$ 为复数，但对于无耗媒质而言 $k_c=k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ 为实数。$k$ 称为波数，$k_c$ 称复波数。将 $k$ 称作波数的物理内涵将在电磁波的传播特性中加以认识。

在无源区域中，利用矢量恒等式 $\nabla\times\nabla\times\vec{F}=\nabla(\nabla\cdot\vec{F})-\nabla^2\vec{F}$，可得出齐次亥姆霍兹方程，为

$$\nabla^2\vec{E}(\vec{r})+k_c^2\vec{E}(\vec{r})=0$$

$$\nabla^2\vec{H}(\vec{r})+k_c^2\vec{H}(\vec{r})=0$$

为了简化符号表达，这里和之后将省去复矢量的顶上点符号。

以上所得亥姆霍兹方程，即是在线性各向同性均匀媒质空间求解时谐电磁场的基本方程。

#### 4.3.1.4　复辅助位函数

根据电磁辅助位与电磁场的一般性关系，即

$$\begin{cases}\vec{B}(\vec{r},t)=\nabla\times\vec{A}(\vec{r},t)\\ \vec{E}(\vec{r},t)=-\dfrac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t}-\nabla\varphi(\vec{r},t)\end{cases}$$

以及电磁辅助位的洛伦兹条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{\vec{A}}=-\mu\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$，可得出时谐情况下线性各向同性均匀媒质空间中磁矢位满足的复矢量波动方程，为

$$\nabla^2\boldsymbol{\vec{A}}+k_c^2\boldsymbol{\vec{A}}=-\mu\boldsymbol{\vec{J}}_i$$

在无源区，

$$\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}}+k_c^2\vec{\boldsymbol{A}}=0$$

此时洛伦兹条件为$\varphi=-\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon_c}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}$，由此可得通过磁矢位计算时谐电磁场的如下关系，

$$\begin{cases}\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\\ \vec{E}=-j\omega\vec{A}-j\dfrac{\nabla\nabla\bullet\vec{A}}{\omega\mu\varepsilon_c}\end{cases}$$

比较前述所得求解时谐电磁场的矢量波动方程可知，在无源区，电磁场与磁矢位满足同样的齐次亥姆霍兹方程，在该情况下通过磁矢位求解时谐电磁场并不具有明显优势。因此，一般情况下常应用电场或磁场的齐次亥姆霍兹方程直接求解无源区的时谐电磁场。但在有源区域中，由于磁矢位满足的非齐次亥姆霍兹方程中的激励项函数关系，较之于电磁场非齐次亥姆霍兹方程的相应关系相对简单，所以求解有源区时谐电磁场问题时也常常基于磁矢位进行求解。

#### 4.3.1.5 复数形式的坡印延定理

（一）时谐量的时间平均计算

对于随时间变化的物理量，在实际应用中除了关心其瞬时值以外，还经常关心其时间平均值，如平均功率、平均电储能、平均磁储能、平均功耗等等。时变物理量$A(\vec{r},t)$的时间平均值定义为

$$A_{av}(\vec{r})=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T A(\vec{r},t)dt$$

若$A(\vec{r},t)$为时谐变化的物理量，且$T$是其时变周期，则

$$A_{av}(\vec{r})=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T A(\vec{r},t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T A(\vec{r},t)dt$$

（二）平均坡印廷矢量

时谐电磁场的瞬时坡印廷矢量为

$$\overline{S}(\vec{r},t)=\overline{E}(\vec{r},t)\times\overline{H}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}[\overline{E}(\vec{r})e^{j\omega t}]\times\mathrm{Re}[\overline{H}(\vec{r})e^{j\omega t}]$$

由此可得其相应的时间平均坡印廷矢量为

$$\overline{S}_{av}(\vec{r})=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\overline{E}(\vec{r})\times\overline{H}^*(\vec{r})]$$

证明：由欧拉公式可得

$$\mathrm{Re}[\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t}]=\frac{1}{2}\left[\vec{E}e^{j\omega t}+(\vec{E}e^{j\omega t})^*\right],\ \mathrm{Re}[\vec{H}(\vec{r})e^{j\omega t}]=\frac{1}{2}\left[\vec{H}e^{j\omega t}+(\vec{H}e^{j\omega t})^*\right]$$

因此，

$$\vec{S}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}[\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t}]\times\mathrm{Re}[\vec{H}(\vec{r})e^{j\omega t}]$$
$$=\frac{1}{4}\left[\vec{E}\times\vec{H}^*+\vec{E}^*\times\vec{H}\right]+\frac{1}{4}\left[\vec{E}\times\vec{H}e^{j2\omega t}+\vec{E}^*\times\vec{H}^*e^{-j2\omega t}\right]$$
$$=\frac{1}{4}\left[\vec{E}\times\vec{H}^*+(\vec{E}\times\vec{H}^*)^*\right]+\frac{1}{4}\left[\vec{E}\times\vec{H}e^{j2\omega t}+(\vec{E}\times\vec{H}e^{j2\omega t})^*\right]$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}\times\vec{H}^*)+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[(\vec{E}\times\vec{H})e^{j2\omega t}\right]$$

于是，

$$\vec{S}_{av}(\vec{r})=\frac{1}{T}\int_0^T\vec{S}(\vec{r},t)dt$$
$$=\frac{1}{T}\int_0^T\left\{\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}\times\vec{H}^*)+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[(\vec{E}\times\vec{H})e^{j2\omega t}\right]\right\}dt=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}\times\vec{H}^*)$$

鉴于以上关系式，定义复坡印廷矢量为

$$\vec{S}_c=\frac{1}{2}(\vec{E}\times\vec{H}^*)$$

由此可见，时谐电磁场的平均坡印廷矢量等于复坡印廷矢量的实部。

由此可见，时谐电磁场的平均坡印廷矢量可通过电磁场复矢量间的简便运算求得。

（三）平均电储能密度

时谐电磁场的瞬时电场能量密度为

$$w_e(\vec{r},t)=\frac{1}{2}\vec{E}(\vec{r},t)\cdot\vec{D}(\vec{r},t)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t}]\cdot\mathrm{Re}[\vec{D}(\vec{r})e^{j\omega t}]$$

由此可得其相应的时间平均电场能量密度为

$$w_{eav}(\vec{r})=\frac{1}{4}\mathrm{Re}[\vec{D}(\vec{r})\cdot\vec{E}^*(\vec{r})]=\frac{1}{4}\varepsilon\left|\vec{E}_m(\vec{r})\right|^2$$

证明：进行类似于平均能流密度矢量的推导过程可得，

$$w_{eav}(\vec{r})=\frac{1}{T}\int_0^T w_e(\vec{r},t)dt=\frac{1}{4}\mathrm{Re}[\vec{D}(\vec{r})\bullet\vec{E}^*(\vec{r})]$$

对于线性各向同性媒质，由于

$$\vec{D}(\vec{r})=\varepsilon_c\vec{E}(\vec{r})=\left(\varepsilon-j\varepsilon'-j\frac{\sigma}{\omega}\right)\vec{E}(\vec{r})$$

因此，

$$w_{eav}(\vec{r})=\frac{1}{4}\mathrm{Re}[\vec{D}(\vec{r})\cdot\vec{E}^*(\vec{r})]$$
$$=\frac{1}{4}\mathrm{Re}\left[\varepsilon_c\vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{E}^*(\vec{r})\right]=\frac{1}{4}\mathrm{Re}\left[\varepsilon_c\left|\vec{E}_m(\vec{r})\right|^2\right]=\frac{1}{4}\varepsilon\left|\vec{E}_m(\vec{r})\right|^2$$

式中，$\vec{E}_m(\vec{r})$ 是时谐电场的振幅矢量。

（四）平均磁储能密度

时谐电磁场的瞬时磁场能量密度为

$$w_m(\vec{r},t)=\frac{1}{2}\vec{B}(\vec{r},t)\cdot\vec{H}(\vec{r},t)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\vec{B}(\vec{r})e^{j\omega t}]\cdot\mathrm{Re}[\vec{H}(\vec{r})e^{j\omega t}]$$

由此进行与平均电储能密度类似的推导可得

$$w_{mav}(\vec{r})=\frac{1}{4}\mathrm{Re}[\vec{B}(\vec{r})\cdot\vec{H}^*(\vec{r})]=\frac{1}{4}\mu\left|\vec{H}_m(\vec{r})\right|^2$$

式中，$\vec{H}_m(\vec{r})$ 是时谐磁场强度的振幅矢量。

（五）平均损耗功率密度

时谐电磁场的瞬时焦耳损耗功率密度为

$$p(\vec{r},t)=\vec{J}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}[\vec{J}(\vec{r})e^{j\omega t}]\cdot\mathrm{Re}[\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t}]$$

由此进行与平均电储能密度类似的推导可得

$$p_{av}(\vec{r})=\frac{1}{2}\sigma\left|\vec{E}_m(\vec{r})\right|$$

（六）电磁能量传输速度

根据离开某点平均功率以及相应位置的电磁储能，可定义时谐电磁场（电磁波）的能量传输速度（能速）为

$$\vec{V}_E(\vec{r})=\frac{\vec{S}_{av}}{w_{av}}$$

式中，$\vec{S}_{av}(\vec{r})=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\vec{E}(\vec{r})\times\vec{H}^*(\vec{r})]$，$w_{av}=w_{eav}+w_{mav}$，且能速不可能超过光速。

（七）复坡印廷定理

在以电荷守恒定律为前提的情况下，时谐电磁场独立形式的复矢量麦克斯韦方程为

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}(\vec{r})=-j\omega\vec{B}(\vec{r})\\ \nabla\times\vec{H}(\vec{r})=\vec{J}_i(\vec{r})+j\omega\vec{D}(\vec{r})\end{cases}$$

在线性各向同性媒质空间中，电磁场复矢量满足的本构关系为

$$\vec{D}(\vec{r})=\varepsilon_c\vec{E}(\vec{r}),\quad \vec{B}(\vec{r})=\mu_c\vec{H}(\vec{r})$$

于是，将复矢量麦克斯韦方程转化成能量方程可得出复数形式的坡印廷定理。为此，考虑到平均能流密度矢量为电场复矢量与磁场强度复矢量共轭叉乘的关系式，以及矢量恒等式

$$\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H}^*)=\vec{H}^*\cdot\nabla\times\vec{E}-\vec{E}\cdot\nabla\times\vec{H}^*$$

由此，将复矢量麦克斯韦方程给出的旋度关系代入可得

$$\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H}^*)=-j\omega\mu_c\vec{H}\cdot\vec{H}^*+j\omega\varepsilon_c^*\vec{E}\cdot\vec{E}^*+\vec{E}\cdot\vec{J}_i^*$$

因此得到

$$-\nabla\cdot\vec{S}_c+\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{J}_i^*=\frac{j\omega}{2}(\mu_c\vec{H}\cdot\vec{H}^*-\varepsilon_c^*\vec{E}\cdot\vec{E}^*)$$

上式所给出的关系即是复坡印廷定理的微分形式。

将$\varepsilon_c=\varepsilon-j\varepsilon'-j\dfrac{\sigma}{\omega}$，$\mu_c=\mu-j\mu'$代入上式，得

$$-\nabla\cdot\vec{S}_c+\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{J}_i^*=j2\omega\left(\frac{1}{4}\mu\left|\vec{H}_m\right|^2-\frac{1}{4}\varepsilon\left|\vec{E}_m\right|^2\right)+\left(\frac{1}{2}\omega\mu'\left|\vec{H}_m\right|^2+\frac{1}{2}\omega\varepsilon'\left|\vec{E}_m\right|^2+\frac{1}{2}\sigma\left|\vec{E}_m\right|^2\right)$$

在任意包围面为$S$的体积区域$V$内，由上式得

$$\begin{aligned}\oint_S\vec{S}_c\cdot d\vec{S}+\int_V\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{J}_i^*dV&=j2\omega\int_V\left(\frac{1}{4}\mu\left|\vec{H}_m\right|^2-\frac{1}{4}\varepsilon\left|\vec{E}_m\right|^2\right)dV\\&\quad+\int_V\left(\frac{1}{2}\omega\mu'\left|\vec{H}_m\right|^2+\frac{1}{2}\omega\varepsilon'\left|\vec{E}_m\right|^2+\frac{1}{2}\sigma\left|\vec{E}_m\right|^2\right)dV\\&=j2\omega(W_{mav}-W_{eav})+(P_{mav}+P_{eav}+P_{jav})\end{aligned}$$

上式即为时谐电磁场复坡印廷定理的积分形式。该式表明，从包围面$S$输入给体积$V$中电磁系统的复功率$P_{in}=-\oint_S\vec{S}_c\cdot d\vec{S}$与$V$中电源供给$V$中电磁系统复功率的总和，等于$V$中电磁系统无功功率$2\omega\left(W_{mav}-W_{eav}\right)$与有功功率$\left(P_{mav}+P_{eav}+P_{jav}\right)$之和。若$V$中无源，则

$$P_{in}=j2\omega\left(W_{mav}-W_{eav}\right)+\left(P_{mav}+P_{eav}+P_{jav}\right)$$

可见无源区复输入功率的实部等于$V$内损耗的平均电磁功率，为有功功率，是$V$中磁损耗功率、极化损耗功率、传导损耗功率三者的总和。而虚部为无功功率，即为$V$中磁储能与电储能之差的$2\omega$倍。当有功功率为零时，体积$V$中的电磁系统为无耗系统；当无功功率为零时，$V$内的电磁系统处于谐振状态，此时，$V$内的电场平均储能与磁场平均储能相等，且随时间的变化电储能与磁储能不断相互交换能量。

### 4.3.2 似稳电磁场分析

似稳电磁场是指电磁场随时间呈慢变化的时变电磁场。所谓“慢变化”，这里的意思是场源（电荷、电流）变化引起场点处场变化的时间延迟可以忽略，或时变电磁场的波动性很不显著时的情况。在时谐电磁场中，慢变化也即是频率很低，或波长很长时的情况。这时，电磁场求解区域的最大尺度$D$远小于波长$\lambda$，即$D\ll\lambda$，或场源变化反应到场点处的最大时延$\tau=D/c$远小于周期$T=1/f$，即$\tau\ll T$。由此可见，对于一定频率的时谐电磁场而言，似稳电磁场与所关心区域的最大尺度密切相关，满足$D\ll\lambda$的区域称为似稳电磁场区。似稳电磁场的分析与求解是电工学和交流电路理论的重要基础。从麦克斯韦方程出发分析似稳电磁场，可利用低频时谐电磁场在$\omega=0$处的泰勒级数展开，从而建立求解似稳电磁场的理论基础和分析方法。

#### 4.3.2.1 低频电磁场分析的理论基础

时谐电磁场满足的复矢量麦克斯韦方程为

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}(\vec{r})=-j\omega\vec{B}(\vec{r})\\\nabla\times\vec{H}(\vec{r})=\vec{J}(\vec{r})+j\omega\vec{D}(\vec{r})\\\nabla\cdot\vec{B}(\vec{r})=0\\\nabla\cdot\vec{D}(\vec{r})=\rho(\vec{r})\end{cases}$$

其中，$\vec{J}(\vec{r})$包括激励电流与导体中的传导电流，且$\nabla\cdot\vec{J}(\vec{r})=-j\omega\rho(\vec{r})$。当给定激励电流后，上述方程中电磁场复矢量的解应为$\omega$的函数。因此，对于低频电磁场可将电场和磁场的复矢量在$\omega=0$处展开成泰勒级数，为

$$\vec{E}(\vec{r})=\vec{E}_0(\vec{r})+\omega\vec{E}_1(\vec{r})+\omega^2\vec{E}_2(\vec{r})+\cdots+\omega^n\vec{E}_n(\vec{r})+\cdots$$

$$\vec{B}(\vec{r})=\vec{B}_0(\vec{r})+\omega\vec{B}_1(\vec{r})+\omega^2\vec{B}_2(\vec{r})+\cdots+\omega^n\vec{B}_n(\vec{r})+\cdots$$

式中，

$$\vec{E}_i(\vec{r})=\frac{1}{i!}\frac{\partial^i}{\partial\omega^i}\vec{E}(\vec{r})\Big|_{\omega=0}\;,\quad \vec{B}_i(\vec{r})=\frac{1}{i!}\frac{\partial^i}{\partial\omega^i}\vec{B}(\vec{r})\Big|_{\omega=0}\;,\quad i=0,1,2,\cdots$$

分别称为电场和磁场的$i$阶场展开系数，$\omega^i\vec{E}_i(\vec{r})$与$\omega^i\vec{B}_i(\vec{r})$分别称为$i$阶电场和磁场，而电磁场的$i$阶近似解则为$\sum_{k=0}^{i}\omega^k\vec{E}_k(\vec{r})$和$\sum_{k=0}^{i}\omega^k\vec{B}_k(\vec{r})$。

将电磁场级数展开式代入复矢量麦克斯韦方程得

$$\begin{cases}\sum_{i=0}^{\infty}\omega^i\nabla\times\vec{E}_i(\vec{r})=-j\sum_{i=0}^{\infty}\omega^{i+1}\vec{B}_i(\vec{r})\\\sum_{i=1}^{\infty}\omega^i\nabla\times\vec{H}_i(\vec{r})=\vec{J}(\vec{r})+\sum_{i=1}^{\infty}\omega^{i+1}\vec{D}_i(\vec{r})\\\sum_{i=0}^{\infty}\omega^i\nabla\cdot\vec{B}_i(\vec{r})=0\\\sum_{i=0}^{\infty}\omega^i\nabla\cdot\vec{D}_i(\vec{r})=\rho(\vec{r})\end{cases}$$

由于以上关系在低频情况下对任意$\omega$均成立，因此等式两边$\omega$各同次幂的系数必须分别相等。于是，零阶场系数满足的关系为

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}_0(\vec{r})=0\\\nabla\times\vec{H}_0(\vec{r})=\vec{J}(\vec{r})\\\nabla\cdot\vec{B}_0(\vec{r})=0\\\nabla\cdot\vec{D}_0(\vec{r})=\rho(\vec{r})\end{cases}$$

由于$\omega^0=1$，所以以上关系也是零阶电磁场满足的方程。该方程与静态场满足的方程具有相同的形式，因此，尽管零阶电磁场为时变场，即$\vec{E}_0(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{E}_0(\vec{r})e^{j\omega t}\right]$，

$\vec{B}_0(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{B}_0(\vec{r})e^{j\omega t}\right]$, 但其空间分布函数$\vec{E}_0(\vec{r})$、$\vec{B}_0(\vec{r})$与静态电场和磁场具有相同的函数形式。同时，零阶电场与零阶磁场间无相互耦合, 且零阶电场仅由作为散度源的电荷$\rho(\vec{r})$产生, 并为无旋场（保守场）。而零阶磁场仅由作为旋度源的激励电流和传导电流$\vec{J}(\vec{r})$产生，为无散场。

当$i\geq 1$时可得，$i$阶场系数满足如下关系式

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}_i(\vec{r})=-j\vec{B}_{i-1}(\vec{r})\\ \nabla\times\vec{H}_i(\vec{r})=j\vec{D}_{i-1}(\vec{r})\\ \nabla\cdot\vec{B}_i(\vec{r})=0\\ \nabla\cdot\vec{D}_i(\vec{r})=0\end{cases}$$

由此可得任意$i\geq 1$阶电磁场满足的方程，为

$$\begin{cases}\nabla\times\left[\omega^i\vec{E}_i(\vec{r})\right]=-j\omega\left[\omega^{i-1}\vec{B}_{i-1}(\vec{r})\right]\\ \nabla\times\left[\omega^i\vec{H}_i(\vec{r})\right]=j\omega\left[\omega^{i-1}\vec{D}_{i-1}(\vec{r})\right]\\ \nabla\cdot\left[\omega^i\vec{B}_i(\vec{r})\right]=0\\ \nabla\cdot\left[\omega^i\vec{D}_i(\vec{r})\right]=0\end{cases}$$

于是，当$i=1$时得到一阶似稳电磁场满足如下方程

$$\begin{cases}\nabla\times\left[\omega\vec{E}_1(\vec{r})\right]=-j\omega\left[\vec{B}_0(\vec{r})\right]\\ \nabla\times\left[\omega\vec{H}_1(\vec{r})\right]=j\omega\left[\vec{D}_0(\vec{r})\right]\\ \nabla\cdot\left[\omega\vec{B}_1(\vec{r})\right]=0\\ \nabla\cdot\left[\omega\vec{D}_1(\vec{r})\right]=0\end{cases}$$

由此可见，一阶电场和磁场均为涡旋场，且零阶磁场是一阶电场的旋度源，零阶电场是一阶磁场的旋度源。以此类推，$i-1$阶场是$i$阶场的旋度源，也即$i$阶场满足的方程给出了通过$i-1$阶场的解答迭代求知$i$阶场的迭代关系。这样，通过迭代关系就可从低频电磁场的零阶近似$\vec{E}_0$和$\vec{B}_0$出发，逐次求得各阶电磁场$\omega^i\vec{E}_i(\vec{r})$和$\omega^i\vec{B}_i(\vec{r})$，并最后得到低频电磁场的$n$阶近似解答，即

$$\vec{E}(\vec{r})=\sum_{i=0}^{n}\omega^i\vec{E}_i(\vec{r})\quad,\quad\vec{B}(\vec{r})=\sum_{i=0}^{n}\omega^i\vec{B}_i(\vec{r})$$

根据以上所得低频场的复矢量解答可进而求得其瞬时时变场表达式，为

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{E}(\vec{r},t)e^{j\omega t}\right]$$

$$\vec{B}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{B}(\vec{r},t)e^{j\omega t}\right]$$

4.3.2.2 似稳电场

在所关心的求解区域中，当时谐电磁场的频率低至可用一阶近似便可很好地反映电磁场的正确解答时，这样的电磁场问题称为似稳场问题，相应的一阶近似解称为似稳场或准静态场。因此，根据低频电磁场 n 阶近似的一般关系式，似稳电场由电荷产生的发散状零阶库伦电场 $\vec{E}_c(\vec{r})$，与由零阶磁场产生的一阶涡旋感应电场 $\vec{E}_{ind}(\vec{r})$ 共同构成。即

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_c(\vec{r}) + \vec{E}_{ind}(\vec{r})$$

其中，

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{E}_c(\vec{r}) = 0 \\ \nabla\cdot\vec{D}_c(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{E}_{ind}(\vec{r}) = -j\omega\vec{B}_0(\vec{r}) \\ \nabla\cdot\vec{D}_{ind}(\vec{r}) = 0 \end{cases} \text{或} \quad \begin{cases} \oint_C \vec{E}_{ind}(\vec{r})\cdot d\vec{l} = -j\omega\int_S \vec{B}_0(\vec{r})\cdot d\vec{S} = -j\omega\psi \\ \nabla\cdot\vec{D}_{ind}(\vec{r}) = 0 \end{cases}$$

由以上关系可知，除非在磁场密集的电感所在区域，电场主要由零阶库伦电场 $\vec{E}_c(\vec{r})$ 决定，而一阶感应电场 $\vec{E}_{ind}(\vec{r})$ 可以忽略，即 $\vec{E}(\vec{r}) \approx \vec{E}_c(\vec{r})$。此时的库伦电场如同静电场，可由电位函数的梯度给出，即

$$\begin{cases} \vec{E}_c(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r}) \\ U_{ab} = \varphi_a(\vec{r}) - \varphi_b(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{E}_c(\vec{r})\cdot d\vec{l} \end{cases}$$

因此，似稳电场也称为准静态电场。

由以上关系可得，零阶电场瞬时值满足的方程为

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{E}_c(\vec{r},t) = 0 \\ \nabla\cdot\vec{D}_c(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t) \end{cases}, \quad \begin{cases} \vec{E}_c(\vec{r},t) = -\nabla\varphi(\vec{r},t) \\ U_{ab} = \varphi_a(\vec{r},t) - \varphi_b(\vec{r},t) = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{E}_c(\vec{r},t)\cdot d\vec{l} \end{cases}$$

而在磁场密集的电感所在区域，若没有电荷分布于其中，则时变磁场产生的感应电场 $\vec{E}_{ind}(\vec{r})$ 将决定该区域中的电场分布，而其中的库伦电场 $\vec{E}_c(\vec{r})$ 可以忽略，即 $\vec{E}(\vec{r}) \approx \vec{E}_{ind}(\vec{r})$。此时，感应电场产生的感应电动势 $\varepsilon_{ind}$ 可通过该区域的电感 $L$ 给出。即

$$\varepsilon_{ind} = \int_C \vec{E}_{ind}(\vec{r},t)\cdot d\vec{l} = -\frac{\partial\psi}{\partial t} = -L\frac{dI}{dt}$$

其相应的复数表示为

$$\int_C \vec{E}_{ind}(\vec{r})\cdot d\vec{l} = -j\omega\psi = -j\omega LI$$

式中，$C$ 为构成电感的全部线圈路径，$\psi$ 为电感回路的磁链，$I$ 为回路电流。因此，在似稳电场问题中，磁场集中于集总参数元件电感 $L$ 之中，并且电感中的时变磁场将在电感回路中

产生形成感应电动势。

#### 4.3.2.3 似稳磁场

根据定义，似稳磁场由包含激励电流与传导电流的 $\vec{J}(\vec{r})$ 所产生的零阶磁场 $\vec{H}_0(\vec{r})$，与零阶时变电场对应的位移电流 $\vec{J}_d(\vec{r}) = j\omega\vec{D}_0(\vec{r})$ 所产生的一阶磁场共同构成。即

$$\nabla\times\vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}) + \vec{J}_d(\vec{r})$$

在似稳磁场问题中，除了存在密集电场分布的电容所在区域之外，位移电流可以忽略，准静态磁场由 $\vec{J}(\vec{r})$ 决定。即

$$\nabla\times\vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}), \quad \text{或} \quad \oint_C \vec{H}(\vec{r})\cdot d\vec{l} = I$$

同时，

$$\nabla\cdot\vec{J}(\vec{r}) = 0$$

此时，似稳磁场与恒定磁场具有相同的空间分布，因此也称为准静态磁场。

而在电容所在区域，若其中不存在激励电流和传导电流，则电容区域的磁场由位移电流 $\vec{J}_d(\vec{r})$ 产生的一阶磁场决定。即

$$\nabla\times\vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}_d(\vec{r}), \quad \text{或} \quad \oint_C \vec{H}(\vec{r})\cdot d\vec{l} = I_d$$

由以上关系可得，似稳磁场瞬时值满足的方程为

$$\nabla\times\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{J}(\vec{r},t) + \frac{\partial\vec{D}_0(\vec{r},t)}{\partial t} \quad \text{或} \quad \oint_C \vec{H}(\vec{r},t)\cdot d\vec{l} = \int_S\left[\vec{J}(\vec{r},t) + \frac{\partial\vec{D}_0(\vec{r},t)}{\partial t}\right]\cdot d\vec{S}$$

另外，电容区域的位移电流 $I_d$ 也可通过电容器极板上电荷 $q$ 以及板间电压 $U$ 的关系由电容 $C$ 给出，即

$$I_d = \frac{dq}{dt} = C\frac{dU}{dt}$$

其相应的复数表示为

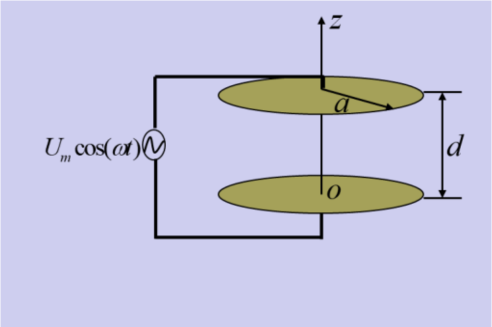
$$I_d = j\omega CU$$

因此，在似稳磁场问题中，电场集中于集总参数元件电容 $C$ 之中，并且电容中时变电场形成的位移电流将在电容区域产生一阶磁场。

例 1. 如图所示为一半径为 $a$ 的圆形平板电容器，板间距为 $d$，板间加有正弦波电压 $U(t) = U_m\cos(\omega t)$，且 $d \ll a \ll \lambda = \dfrac{c}{f}$。求该平板电容器中的电磁场。

解：由于 $d \ll a \ll \lambda$，所以该平板电容器的边缘效应可以忽略，并且其中的电磁场可用似

稳场近似。另外，在该似稳场问题中没有磁场密集的电感区域存在，因此该电容区域中的似稳电场为零阶库伦电场。同时，由于电容区域中没有激励电流和传导电流存在，所以该电容区域中的似稳磁场由位移电流产生的一阶磁场决定。




另外，由于零阶电场的解与静电场的解具有相同的函数形式，因此，平板间的零阶电场为时变均匀场，即 $\vec{E}=\vec{e}_z E_0$，并且

$$U(t)=U_m\cos(\omega t)=\int_d^0 \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_d^0 \vec{e}_z E_0\cdot(-\vec{e}_z)d\left|z\right|=-E_0 d$$

故电容器中的似稳电场为

$$\vec{E}(t)=\vec{E}_0=-\vec{e}_z\frac{U_m}{d}\cos(\omega t)$$

平板电容器中的似稳磁场由平板间的位移电流 $\vec{J}_d$ 产生，而位移电流可由似稳电场求得，即

$$\vec{J}_d=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}(t)}{\partial t}=\vec{e}_z\frac{\varepsilon_0\omega U_m}{d}\sin(\omega t)$$

该均匀时变位移电流充满电容器平板间的全部区域中，其产生的磁场具有轴对称性，即 $\vec{H}=\vec{e}_\phi H_1(\rho)$，因此，该似稳磁场可由安培环路定律求得，即

$$\oint_C \vec{H}(\vec{r})\cdot d\vec{l}=\int_S \vec{J}_d\cdot d\vec{S}$$

于是

$$\int_0^{2\pi}\vec{e}_\phi H_1\,\vec{e}_\phi \rho d\phi=\int_0^{\rho}\vec{e}_z\frac{\varepsilon_0\omega U_m}{d}\sin(\omega t)\cdot\vec{e}_z 2\pi\rho d\rho$$

由此可得

$$H_1=\frac{\varepsilon_0\omega U_m}{2d}\rho\sin(\omega t)$$

所以平板间的似稳磁场为

$$\vec{H}=\vec{e}_\phi\frac{\varepsilon_0\omega U_m}{2d}\rho\sin(\omega t)$$