2.2 多元函数的极限与连续性

二重极限

累次极限

与一元函数的极限相类似，二元函数的极限同样是二元函数微积分的基础.但因自变量个数的增多，导致多元函数的极限有重极限与累次极限两种形式，而累次极限是一元函数情形下所不会出现的.

一、二重极限

定义2.3 设二元函数 f 定义在 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上, P_0 为 D 的一个聚点, a 是一实数. 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $P \in U^\circ(P_0;\delta) \cap D$ 时, 都有

$$|f(P) - a| < \varepsilon,$$

则称 f 在 D 上当 $P \to P_0$ 时以 a 为极限, 记作

$$\lim_{\substack{P \to P_0 \\ P \in D}} f(P) = a.$$

简记为 $$\lim_{P \to P_0} f(P) = a.$$

当 P, P_0 分别用坐标 (x, y),(x_0, y_0)表示时, 上式也常写作

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = a.$$

例1 依定义验证 $\lim\limits_{(x, y) \to (2, 1)} (x^2 + xy + y^2) = 7.$

证 因为

$$\left| x^2 + xy + y^2 - 7 \right| = \left| (x^2 - 4) + xy - 2 + (y^2 - 1) \right|$$

$$= |(x+2)(x-2)+(x-2)y+2(y-1)+(y+1)(y-1)|$$

$$\le |x-2||x+y+2|+|y-1||y+3|.$$

不妨先限制在点 $(2, 1)$ 的方邻域

$$\{(x, y) \mid |x-2|<1, \ |y-1|<1\}$$

内来讨论, 于是有

$$|y+3| = |y-1+4| \le |y-1|+4<5,$$

$$|x+y+2| = |(x-2)+(y-1)+5|$$

$$\le |x-2|+|y-1|+5<7.$$

所以

$$\left| x^2+xy+y^2-7 \right| < 7|x-2|+5|y-1|$$

$$< 7(|x-2|+|y-1|).$$

$\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{14})$, 当 $|x-2| < \delta$, $|y-1| < \delta$

且 $(x, y) \neq (2, 1)$ 时, 就有

$$\left| x^2+xy+y^2-7 \right| < 7\times 2\delta = 14\delta \leq \varepsilon.$$

这就证得

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} (x^2+xy+y^2) = 7.$$

例2 设

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0), \end{cases}$$

证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$

证 (证法一) $\forall \varepsilon>0$, 由

$$\left| xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-0 \right| \le \frac{x^2+y^2}{2}\left| \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right|$$

$$=\frac{1}{2}\left| x^2 - y^2 \right| \le \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

可知 $\exists \delta = \sqrt{2\varepsilon}$, 当 $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ 时, 便有

$$\left| xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$

注意 不要把上面的估计式错写成:

$$\left| xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| \le \left| xy\frac{x^2 - y^2}{2xy} \right| \le \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

因为 $(x, y) \to (0, 0)$ 的过程只要求 $(x, y) \neq (0, 0)$，即 $x^2 + y^2 \neq 0$，而并不要求 $xy \neq 0$.

(证法二) 作极坐标变换 $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. 这时 $(x, y) \to (0, 0)$ 等价于 $r \to 0$ (对任何 φ). 由于

$$|f(x, y) - 0| = \left| xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right|$$

$$= \frac{1}{4}r^2 |\sin 4\varphi| \leq \frac{1}{4}r^2,$$

因此，$\forall \varepsilon > 0$，只须 $r = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = 2\sqrt{\varepsilon}$，对任何 φ

都有

$$|f(x,y)-0| \le \frac{1}{4}r^2 < \varepsilon, \quad \text{即} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

下述定理及其推论相当于一元函数极限的海涅归结原则(而且证明方法也相类似).

定理1 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in D}} f(P) = a$ 的充要条件是：对于 D 的任一子集 E, 只要 P_0 仍是 E 的聚点, 就有

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\ P\in E}} f(P) = a.$$

推论1 若 $\exists E_1 \subset D$, P_0 是 E_1 的聚点, 使 $\lim\limits_{\substack{P \to P_0 \\ P \in E_1}} f(P)$ 不存在, 则 $\lim\limits_{\substack{P \to P_0 \\ P \in D}} f(P)$ 也不存在.

推论2 若 $\exists E_1, E_2 \subset D$, P_0 是它们的聚点，使得

$$\lim_{\substack{P \to P_0 \\ P \in E_1}} f(P) = a_1 \text{ 与 } \lim_{\substack{P \to P_0 \\ P \in E_2}} f(P) = a_2$$

都存在，但 $a_1 \neq a_2$ ，则 $\lim\limits_{\substack{P \to P_0 \\ P \in D}} f(P)$ 不存在.

推论3 极限 $\lim\limits_{\substack{P \to P_0 \\ P \in D}} f(P)$ 存在的充要条件是：D 中任一满足条件 $P_n \neq P_0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$ 的点列 $\{P_n\}$, 它所对应的函数列 $\{f(P_n)\}$ 都收敛.

下面三个例子是它们的应用.

例3 讨论 $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ 当 $(x, y) \to (0, 0)$ 时是否存在极限.（注: 本题结论很重要, 以后常会用到.）

解 当动点 (x, y) 沿着直线 $y = mx$ 而趋于定点 $(0, 0)$

时，由于 $f(x,y)=f(x,mx)=\dfrac{m}{1+m^2}$，因此有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,mx)=\frac{m}{1+m^2}.$$

这说明动点沿不同斜率 m 的直线趋于原点时, 对应的极限值不相同，因而所讨论的极限不存在.

例4 设

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<y<x^2,\ -\infty<x<+\infty,\\ 0, & \text{其余部分}.\end{cases}$$

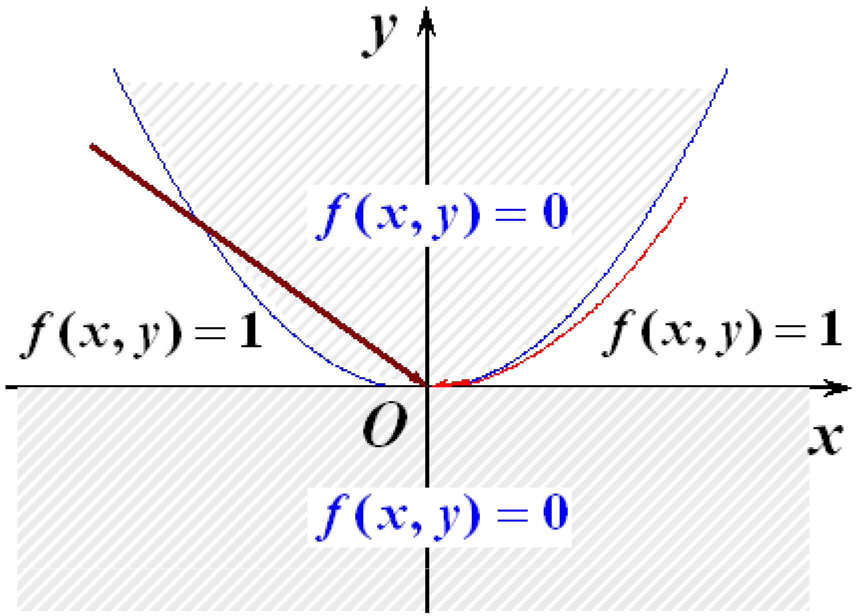

图 16 – 15

如图 16-15 所示, 当 (x, y) 沿任何直线趋于原点时,

相应的 $f(x, y)$ 都趋于 0, 但这并不表明此函数在

$(x,y)\to(0,0)$ 时的极限为 0. 因为当(x,y)沿抛物线 $y=kx^2(0<k<1)$ 趋于点 O 时, $f(x,y)$将趋于1. 所以极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

*例5 讨论 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$ 在 $(x,y)\to(0,0)$ 时不存在极限.

解 利用定理 1的推论 2, 需要找出两条路径, 沿着此二路径而使 $(x,y)\to(0,0)$ 时, 得到两个相异的极限.

第一条路径简单地取 $y=x$，此时有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(y=x)}}\frac{xy}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x}=0.$$

第二条路径可考虑能使 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$ 的分子与

分母化为同阶的无穷小, 导致极限不为 0. 按此思路

的一种有效选择, 是取 $y=x^2-x$. 此时得到

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(y=x^2-x)}}\frac{xy}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x^2-x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}(x-1)=-1,$$

这就达到了预期的目的.

下面再给出当 $P(x,y) \to P_0(x_0, y_0)$ 时, $f(x,y) \to +\infty$

(非正常极限)的定义.

定义2 设 D 为二元函数 f 的定义域, $P_0(x_0, y_0)$ 是 D

的一个聚点. 若 $\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 使得

$$\forall P(x, y) \in U^\circ(P_0; \delta) \cap D, \text{ 都有 } f(x, y) > M,$$

则称 f 在 D 上当 $P \to P_0$ 时, 有非正常极限 $+\infty$, 记作

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = +\infty,$$

或 $$\lim_{P\to P_0} f(P)=+\infty.$$

仿此可类似地定义：

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=-\infty \text{ 与 } \lim_{P\to P_0} f(P)=\infty.$$

例6 设 $f(x,y)=\dfrac{1}{2x^2+3y^2}$. 证明

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=+\infty.$$

证 此函数的图象见后面的图.

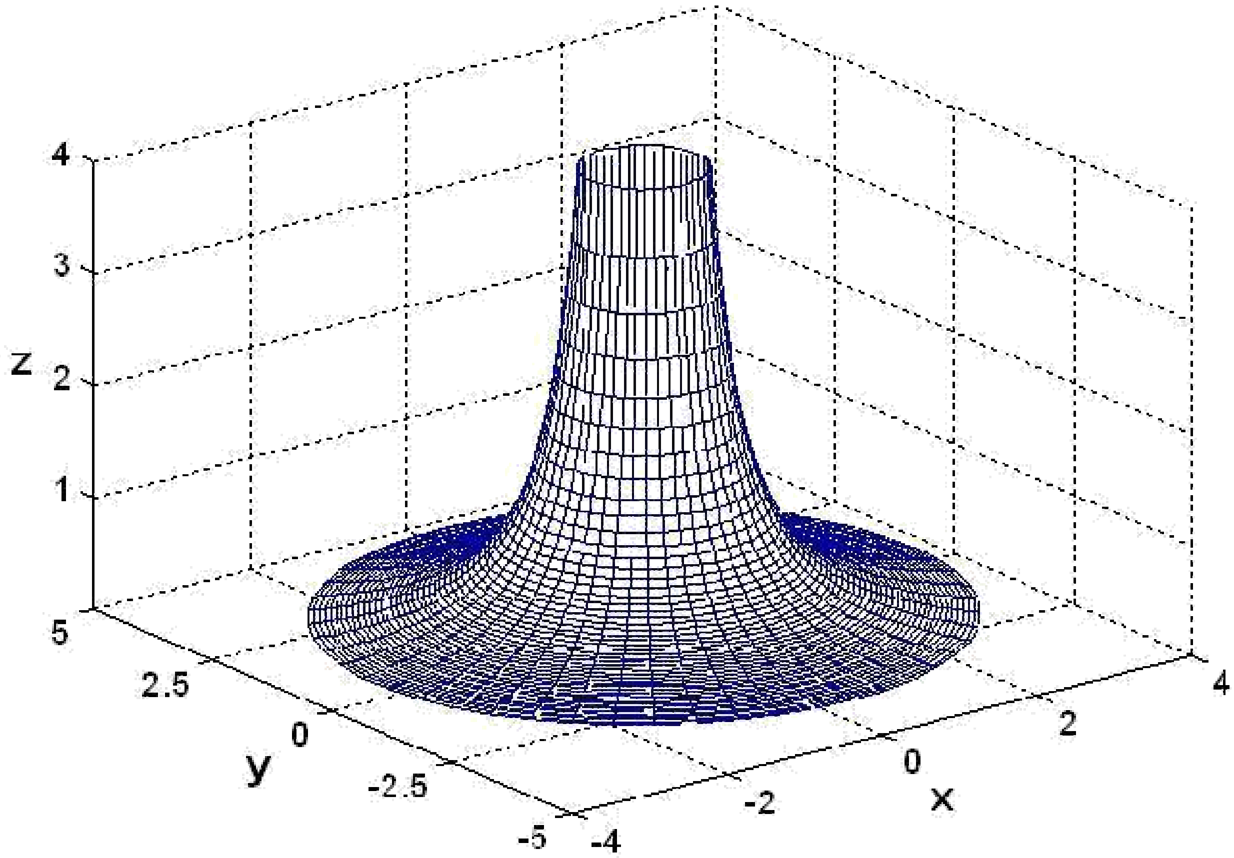

图 16－16

因 $2x^2+3y^2<4(x^2+y^2)$, 故对 $\forall M>0$, 只需取

$\delta=\dfrac{1}{2\sqrt{M}}$, 当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\dfrac{1}{2\sqrt{M}}$ 时，就有

$$2x^2+3y^2<\frac{1}{M},\quad \text{即}\quad \frac{1}{2x^2+3y^2}>M.$$

这就证得结果.

二元函数极限的四则法则与一元函数极限相仿, 特别把 $f(x,y)$ 看作点函数 $f(P)$ 时, 相应的证法也相同, 这里不再一一叙述.

二、累次极限

在上面讨论的 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 中, 自变量 (x,y) 是以任何方式趋于 (x_0,y_0) 的，这种极限也称为**重极限**. 下面要考察 x 与 y 依一定的先后顺序, 相继趋于 x_0 与 y_0 时 f 的极限, 这种极限称为**累次极限**.

定义3 设 $f(x,y),(x,y)\in D$, D 在 x 轴、y 轴上的投影分别为 X、Y, 即

$$X=\{x\,|\,(x,y)\in D\},\ Y=\{y\,|\,(x,y)\in D\},$$

x_0, y_0 分别是 X, Y 的聚点. 若对每一个 $y\in Y\,(y\neq y_0)$,

存在极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$，它一般与 y 有关, 记作

$$\varphi(y) = \lim_{x\to x_0} f(x, y);$$

如果进一步还存在极限

$$L = \lim_{y\to y_0} \varphi(y),$$

则称此 L 为 $f(x,y)$ 先对 $x\,(\to x_0)$ 后对 $y\,(\to y_0)$ 的累次极限, 记作

$$L = \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x, y).$$

类似地可以定义先对 y 后对 x 的累次极限:

$$K = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y).$$

注 累次极限与重极限是两个不同的概念，两者之间没有蕴涵关系. 下面三个例子将说明这一点.

例7 设 $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$. 由例 3 知道 $f(x,y)$ 当 $(x, y) \to (0, 0)$ 时的重极限不存在. 但当 $y \neq 0$ 时, 有

$$\lim_{x \to 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0,$$

从而又有

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=0.$$

同理可得

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=0.$$

这说明 f 的两个累次极限都存在而且相等.

例8 设 $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2+x-y}{x+y}$, 它关于原点的两个累次极限分别为

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2+y^2+x-y}{x+y}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2-y}{y}=\lim_{y\to 0}(y-1)=-1,$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2+y^2+x-y}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0}(x+1)=1.$$

当沿斜率不同的直线 $y=mx, (x, y)\to(0, 0)$ 时, 有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}}\frac{x^2+y^2+x-y}{x+y}=\frac{1-m}{1+m},$$

因此该函数的重极限不存在. (下面的定理 2 将告

诉我们, 这个结果是必然的.)

例 9 设 $f(x, y)=x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}$, 它关于原点的两个累次极限都不存在. 这是因为对任何 $y\neq 0$, 而当 $x\to 0$时, f 的第二项不存在极限. 同理, f 的第一项当 $y\to 0$ 时也不存在极限. 但是由于

$$\left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right|\leq |x|+|y|,$$

故按定义知道$(x,y)\to(0,0)$时 f 的重极限存在, 且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)=0.$$

下述定理告诉我们：重极限与累次极限在一定条件下也是有联系的.

定理2 若 $f(x,y)$ 的重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 与累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 都存在, 则两者必定相等.

证 设

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A,$$

则 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 使得当 $P(x,y)\in U^{\circ}(P_0;\delta)$ 时, 有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon. \tag{1}$$

另由存在累次极限之假设, 对任一满足不等式

$$0<|x-x_0|<\delta \tag{2}$$

的 x, 存在极限

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\varphi(x). \tag{3}$$

回到不等式(1), 让其中 $y\to y_0$, 由 (3) 可得

$$|\varphi(x)-A|\le\varepsilon. \tag{4}$$

故由 (2), (4) 两式, 证得 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$, 即

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A.$$

由这个定理立即导出如下两个便于应用的推论.

推论1 若重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 和累次极限

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y),\ \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

都存在, 则三者必定相等.

推论2 若累次极限

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) \quad 与 \quad \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

都存在但不相等, 则重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 必定不存在.

请注意：(i) 定理 2 保证了在重极限与一个累次极限都存在时, 它们必相等. 但对另一个累次极限的存在性却得不出什么结论

(ii) 推论 1 给出了累次极限次序可交换的一个充分条件.

(iii) 推论 2 可被用来否定重极限的存在性(如例8).

***例10** 设 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U^\circ(P_0)$ 内有定义,且满足:

(i) 在 $U^\circ(P_0)$ 内,对每个 $y\neq y_0$,存在极限

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\psi(y);$$

(ii) 在 $U^\circ(P_0)$ 内,关于 x 一致地存在极限

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\varphi(x).$$

试证明: $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y).$

证 1° (证明 $\lim\limits_{y\to y_0}\psi(y)=A$ 存在) $\forall\varepsilon>0$, 由条件 (ii), 对一切 x 存在公共的 $\delta>0$, 只要 $0<|y-y_0|<\delta$ (并使 $(x,y)\in U^\circ(P_0)$), 便有

$$|f(x,y)-\varphi(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当 $0<|y'-y_0|<\delta$ 时, 又有

$$|f(x,y)-f(x,y')|\le|f(x,y)-\varphi(x)|+$$

$$|f(x,y')-\varphi(x)|<\varepsilon.$$

再令 $x \to x_0$, 由条件 (i) 又得

$$|\psi(y) - \psi(y')| \le \varepsilon.$$

根据柯西准则, 证得 $\lim\limits_{y \to y_0} \psi(y) = A$ 存在 .

2° (证明 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A$) $\forall \varepsilon > 0$, 由

$$|\varphi(x) - A| = |\varphi(x) - f(x,y)| +$$

$$|f(x,y) - \psi(y)| + |\psi(y) - A|,$$

利用条件 (ii) 与结论 1°, 当 $(x,y) \in U^\circ(P_0)$, 且 y 与 y_0

充分接近时,可使

$$|\varphi(x)-f(x,y)|<\frac{\varepsilon}{3},\ |\psi(y)-A|<\frac{\varepsilon}{3};$$

再将 y 固定,由条件 (i), $\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

又有

$$|f(x,y)-\psi(y)|<\frac{\varepsilon}{3};$$

这就证得 $|\varphi(x)-A|<\varepsilon$, 即

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim_{y\to y_0}\psi(y).$$

注 本例给出了二累次极限相等的又一充分条件. 与定理16. 6 的推论1 相比较, 在这里的条件 (i) 与 (ii) 成立时, 重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 未必存在.

复习思考题

试问累次极限

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) \quad 与 \quad \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

是否就是动点(x,y)按后面的图中两条特殊路径 l_1 与 l_2 分别趋向(x_0,y_0)时 $f(x,y)$的极限？并由此说明定理2的推论2与定理1的推论2是不是相同的？

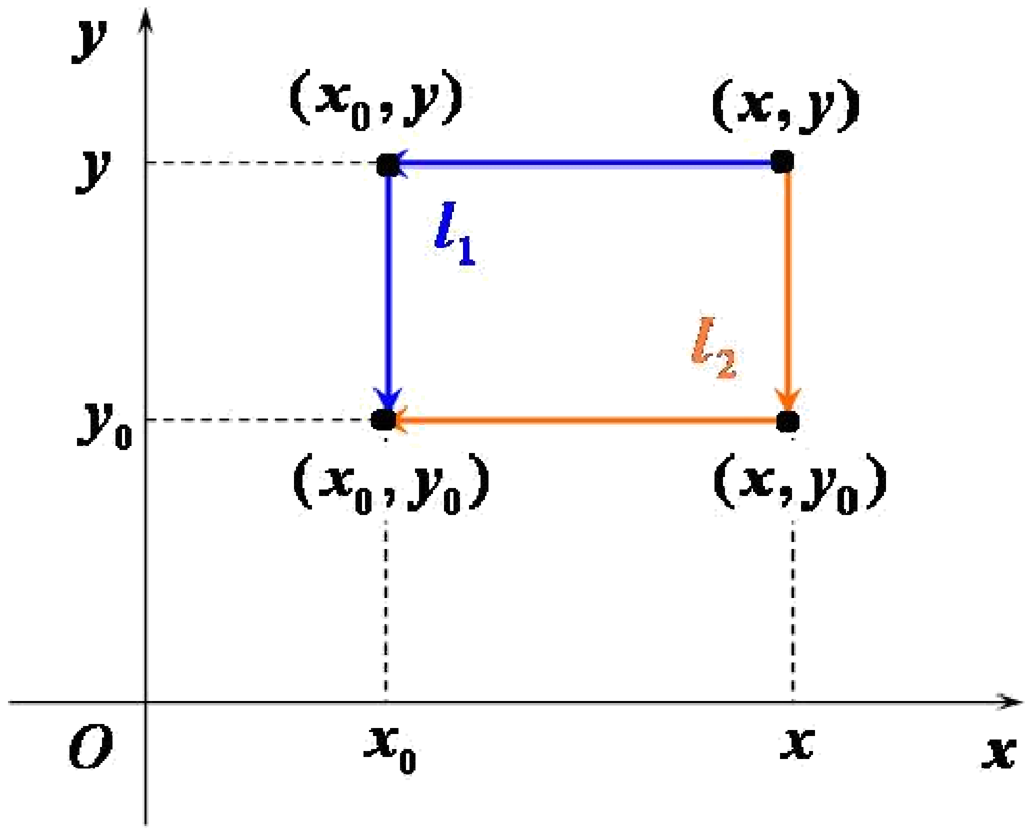

图 16 - 17

例* 观察 $z=\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ 图形，证明：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ 不存在.