3.2 分部积分法

3.3 几种特殊类型函数的积分

——有理函数

——三角函数有理式

——简单无理函数

一、分部积分法

问题 $\int xe^x dx = ?$

解决思路 利用两个函数乘积的求导法则.

设函数$u = u(x)$和$v = v(x)$具有连续导数,

$$(uv)' = u'v + uv', \qquad uv' = (uv)' - u'v,$$

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx, \qquad \int udv = uv - \int vdu.$$

分部积分公式

例1　求积分 $\int x\cos x dx$.

解（一）　令 $u=\cos x$,　$xdx=\frac{1}{2}dx^2=dv$

$$\int x\cos x dx=\frac{x^2}{2}\cos x+\int\frac{x^2}{2}\sin x dx$$

显然，u,v' 选择不当，积分更难进行.

解（二）　令 $u=x$,　$\cos x dx=d\sin x=dv$

$$\int x\cos x dx=\int x d\sin x=x\sin x-\int\sin x dx$$

$$=x\sin x+\cos x+C.$$

例2　求积分 $\int x^2 e^x dx$.

解　$u = x^2$,　　$e^x dx = de^x = dv$,

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx$$

（再次使用分部积分法）$u = x$,　$e^x dx = dv$

$$= x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C.$$

总结　若被积函数是幂函数和正(余)弦函数或幂函数和指数函数的乘积，就考虑设幂函数为 u, 使其降幂一次(假定幂指数是正整数)

例3 求积分 $\int x\arctan x dx$.

解 令 $u=\arctan x$， $xdx=d\dfrac{x^2}{2}=dv$

$$\int x\arctan x dx=\frac{x^2}{2}\arctan x-\int\frac{x^2}{2}d(\arctan x)$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\int\frac{1}{2}\cdot(1-\frac{1}{1+x^2})dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}(x-\arctan x)+C.$$

例4 求积分 $\int x^3 \ln x dx$.

解 $u = \ln x$, $x^3 dx = d\dfrac{x^4}{4} = dv$,

$$\int x^3 \ln x dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C.$$

总结 若被积函数是幂函数和对数函数或幂函数和反三角函数的乘积，就考虑设对数函数或反三角函数为 u.

例5 求积分 $\int \sin(\ln x)dx.$

解 $\boxed{\int \sin(\ln x)dx} = x\sin(\ln x) - \int xd[\sin(\ln x)]$

$$= x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) + \int xd[\cos(\ln x)]$$

$$= x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] - \boxed{\int \sin(\ln x)dx}$$

$$\therefore \int \sin(\ln x)dx = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C.$$

例6　求积分 $\int e^x \sin x dx$.

解 $\boxed{\int e^x \sin x dx} = \int \sin x de^x$

$= e^x \sin x - \int e^x d(\sin x)$

$= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int \cos x de^x$

$= e^x \sin x - (e^x \cos x - \int e^x d\cos x)$

$= e^x(\sin x - \cos x) - \boxed{\int e^x \sin x dx}$ 注意循环形式

$\therefore \int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$

例7　求积分 $\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

解　$\because \quad \left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$

$$\therefore \quad \int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \arctan x d\sqrt{1+x^2}$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int \sqrt{1+x^2}d(\arctan x)$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int \sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx}$$ 令 $x = \tan t$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}}\sec^2 t\,dt = \int \sec t\,dt$$

$$= \ln(\sec t + \tan t) + C = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$$

$$\therefore \quad \int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$$

例 8 已知$f(x)$的一个原函数是e^{-x^2}，求$\int xf'(x)dx$.

解 $\int xf'(x)dx = \int xdf(x) = xf(x) - \int f(x)dx,$

$\because \left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \quad \therefore \int f(x)dx = e^{-x^2} + C,$

两边同时对x求导, 得 $f(x) = -2xe^{-x^2},$

$$\therefore \int xf'(x)dx = xf(x) - \int f(x)dx$$

$$= -2x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + C.$$

练 习 题

一、填空题：

1、$\int x\sin xdx =$________________;

2、$\int \arcsin xdx =$________________;

3、计算$\int x^2\ln xdx$， 可设 $u =$______, $dv =$__________;

4、计算$\int e^{-x}\cos xdx$，可设 $u =$_____, $dv =$__________;

5、计算$\int x^2\arctan xdx$，可设 $u =$_____, $dv =$_______;

6、计算$\int xe^{-x}dx$, 可设 $u =$_______, $dv =$____________.

二、求下列不定积分：

1、$\int x^2\cos^2\frac{x}{2}dx$;

2、$\int \frac{(\ln x)^3}{x^2}dx$;

3、$\int e^{ax}\cos nx dx$；　　　　4、$\int e^{3\sqrt{x}}dx$；

5、$\int \cos(\ln x)dx$；　　　　6、$\int \dfrac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$.

三、已知$\dfrac{\sin x}{x}$是$f(x)$的原函数，求$\int xf'(x)dx$.

四、设$\int f(x)dx = F(x)+C$，$f(x)$可微，且$f(x)$的反函数$f^{-1}(x)$存在，则

$$\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - F\left[f^{-1}(x)\right] + C.$$

练习题答案

一、1、$-x\cos x+\sin x+C$；

2、$x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$；

3、$\ln x$，x^2dx；　　4、e^{-x}，　$\cos xdx$；

5、$\arctan x$，x^2dx；　　6、x，$e^{-x}dx$．

二、1、$\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{2}x^2\sin x+x\cos x-\sin x+C$；

2、$-\dfrac{1}{x}[(\ln x)^3+3(\ln x)^2+6\ln x+6]+C$；

3、$\dfrac{e^{ax}}{a^2+n^2}(a\cos nx+n\sin nx)+C$

4、$3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2)+C$；

5、$\dfrac{x}{2}[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]+C$；

6、$\dfrac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}+C$；

7、$-\dfrac{x^2e^x}{x+2}+xe^x-e^x+C$.

三、$\cos x-\dfrac{2\sin x}{x}+C$.

二、有理函数的积分

有理函数的定义：

两个多项式的商表示的函数称之.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

其中m、n都是非负整数；$a_0,a_1,\cdots,a_n$及$b_0,b_1,\cdots,b_m$都是实数，并且$a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$.

假定分子与分母之间没有公因式

(1) $n < m$，这有理函数是**真分式**；

(2) $n \geq m$，这有理函数是**假分式**；

利用多项式除法，假分式可以化成一个多项式和一个真分式之和.

例 $$\frac{x^3+x+1}{x^2+1} = x + \frac{1}{x^2+1}.$$

难点 将有理函数化为部分分式之和.

有理函数化为部分分式之和的一般规律：

（1）分母中若有因式 $(x-a)^k$，则分解后为

$$\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x-a},$$

其中 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 都是常数.

特殊地：$k=1$, 分解后为 $\dfrac{A}{x-a}$;

（2）分母中若有因式 $(x^2+px+q)^k$，其中 $p^2-4q<0$ 则分解后为

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}$$

其中M_i, N_i都是常数$(i=1,2,\cdots,k)$.

特殊地：$k=1$, 分解后为 $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$;

真分式化为部分分式之和的待定系数法

例9 $$\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3},$$

$$\because\quad x+3=A(x-3)+B(x-2),$$

$$\therefore\quad x+3=(A+B)x-(3A+2B),$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=1,\\-(3A+2B)=3,\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}A=-5\\B=6\end{cases},$$

$$\therefore\quad \frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3}.$$

例10 $$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1},$$

$$1=A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1) \qquad (1)$$

代入特殊值来确定系数 A,B,C

取 $x=0,\ \Rightarrow A=1$ 　　取 $x=1, \Rightarrow B=1$

取 $x=2$，并将 A,B 值代入(1) $\Rightarrow C=-1$

$$\therefore \frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}.$$

例11 $$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+2x}+\frac{Bx+C}{1+x^2},$$

$$1=A(1+x^2)+(Bx+C)(1+2x),$$

整理得 $1=(A+2B)x^2+(B+2C)x+C+A,$

$$\begin{cases} A+2B=0, \\ B+2C=0, \\ A+C=1, \end{cases} \Rightarrow A=\frac{4}{5}, B=-\frac{2}{5}, C=\frac{1}{5},$$

$$\therefore \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{\frac{4}{5}}{1+2x}+\frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}.$$

例12 求积分 $\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx.$

解 $$\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx = \int \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}\right]dx$$

$$= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx - \int \frac{1}{x-1}dx$$

$$= \ln x - \frac{1}{x-1} - \ln(x-1) + C.$$

例13 求积分 $\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}dx.$

解 $\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}dx = \int \frac{\frac{4}{5}}{1+2x}dx + \int \frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}dx$

$$= \frac{2}{5}\ln(1+2x) - \frac{1}{5}\int \frac{2x}{1+x^2}dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{2}{5}\ln(1+2x) - \frac{1}{5}\ln(1+x^2) + \frac{1}{5}\arctan x + C.$$

例14 求积分 $\int \frac{1}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}dx.$

解 令 $t=e^{\frac{x}{6}} \Rightarrow x=6\ln t,\qquad dx=\frac{6}{t}dt,$

$$\int \frac{1}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}dx=\int \frac{1}{1+t^3+t^2+t}\cdot\frac{6}{t}dt$$

$$=6\int \frac{1}{t(1+t)(1+t^2)}dt=\int\left(\frac{6}{t}-\frac{3}{1+t}-\frac{3t+3}{1+t^2}\right)dt$$

$$= \int \left(\frac{6}{t} - \frac{3}{1+t} - \frac{3t+3}{1+t^2} \right) dt$$

$$= 6\ln t - 3\ln(1+t) - \frac{3}{2}\int \frac{d(1+t^2)}{1+t^2} - 3\int \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$= 6\ln t - 3\ln(1+t) - \frac{3}{2}\ln(1+t^2) - 3\arctan t + C$$

$$= x - 3\ln(1+e^{\frac{x}{6}}) - \frac{3}{2}\ln(1+e^{\frac{x}{3}}) - 3\arctan(e^{\frac{x}{6}}) + C.$$

说明 将有理函数化为部分分式之和后，只出现三类情况：

(1) 多项式； (2) $\dfrac{A}{(x-a)^n}$； (3) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$；

讨论积分 $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$,

$$\because \quad x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4},$$

令 $x+\dfrac{p}{2}=t$

记 $x^2+px+q=t^2+a^2$, $\quad Mx+N=Mt+b$,

则 $\quad a^2=q-\dfrac{p^2}{4}$, $\quad b=N-\dfrac{Mp}{2}$,

$$\therefore \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$$

$$=\int \frac{Mt}{(t^2+a^2)^n}dt+\int \frac{b}{(t^2+a^2)^n}dt$$

(1) $n=1$, $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$

$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{b}{a}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{a}+C;$$

(2) $n>1$, $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$

$$=-\frac{M}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}+b\int\frac{1}{(t^2+a^2)^n}dt.$$

这三类积分均可积出，且原函数都是初等函数.

结论 有理函数的原函数都是初等函数.

三、三角函数有理式的积分

三角有理式的定义：

由三角函数和常数经过有限次四则运算构成的函数称之．一般记为 $R(\sin x, \cos x)$

$$\because \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2},$$

$$\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

令$u = \tan\frac{x}{2}$　$x = 2\arctan u$（万能置换公式）

$$\boxed{\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad dx = \frac{2}{1+u^2}du}$$

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}du.$$

例15 求积分 $\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx.$

解 由万能置换公式 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$,

$$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}\qquad dx=\frac{2}{1+u^2}du,$$

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx=\int \frac{2u}{(1+u)(1+u^2)}du$$

$$=\int \frac{2u+1+u^2-1-u^2}{(1+u)(1+u^2)}du$$

$$= \int \frac{(1+u)^2 - (1+u^2)}{(1+u)(1+u^2)} du = \int \frac{1+u}{1+u^2} du - \int \frac{1}{1+u} du$$

$$= \arctan u + \frac{1}{2}\ln(1+u^2) - \ln|1+u| + C$$

$$\because \quad u = \tan\frac{x}{2}$$

$$= \frac{x}{2} + \ln\left|\sec\frac{x}{2}\right| - \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

例16　求积分 $\int \frac{1}{\sin^4 x} dx.$

解（一）$u=\tan\frac{x}{2}$，$\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$，$dx=\frac{2}{1+u^2}du$，

$$\int \frac{1}{\sin^4 x} dx=\int \frac{1+3u^2+3u^4+u^6}{8u^4}du$$

$$=\frac{1}{8}[-\frac{1}{3u^3}-\frac{3}{u}+3u+\frac{u^3}{3}]+C$$

$$=-\frac{1}{24\left(\tan\frac{x}{2}\right)^3}-\frac{3}{8\tan\frac{x}{2}}+\frac{3}{8}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{24}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^3+C.$$

解（二）修改万能置换公式，令 $u = \tan x$

$$\sin x = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}, \quad dx = \frac{1}{1+u^2}du,$$

$$\int \frac{1}{\sin^4 x}dx = \int \frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^4} \cdot \frac{1}{1+u^2}du = \int \frac{1+u^2}{u^4}du$$

$$= -\frac{1}{3u^3} - \frac{1}{u} + C = -\frac{1}{3}\cot^3 x - \cot x + C.$$

解（三） 可以不用万能置换公式.

$$\int \frac{1}{\sin^4 x} dx = \int \csc^2 x(1+\cot^2 x)dx$$

$$= \int \csc^2 x dx + \int \cot^2 x \boxed{\csc^2 x dx} = d(\cot x)$$

$$= -\cot x - \frac{1}{3}\cot^3 x + C.$$

结论 比较以上三种解法, 便知万能置换不一定是最佳方法, 故三角有理式的计算中先考虑其它手段, 不得已才用万能置换.

例17 求积分$\int \frac{1+\sin x}{\sin 3x+\sin x}dx.$

解 $\sin A+\sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin 3x+\sin x}dx = \int \frac{1+\sin x}{2\sin 2x\cos x}dx$$

$$= \int \frac{1+\sin x}{4\sin x\cos^2 x}dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sin x\cos^2 x}dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^2 x}dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\sin x}dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{1}{\cos^2 x}d(\cos x)+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\sin x}dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$=\frac{1}{4\cos x}+\frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{4}\tan x+C.$$

四、简单无理函数的积分

讨论类型 $R(x,\sqrt[n]{ax+b})$, $R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+e}}\right)$,

解决方法 作代换去掉根号.

例18 求积分 $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$

解 令 $\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}=t \Rightarrow \dfrac{1+x}{x}=t^2$,

$$x=\frac{1}{t^2-1},\qquad dx=-\frac{2tdt}{\left(t^2-1\right)^2},$$

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx=-\int\left(t^2-1\right)t\frac{2t}{\left(t^2-1\right)^2}dt=-2\int\frac{t^2dt}{t^2-1}$$

$$=-2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=-2t-\ln\frac{t-1}{t+1}+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\ln\left[x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)^2\right]+C.$$

例19 求积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx.$

解 令 $t^6 = x+1 \Rightarrow 6t^5dt = dx,$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx = \int \frac{1}{t^3+t^2}\cdot 6t^5dt$$

$$= 6\int \frac{t^3}{t+1}dt = 2t^3 - 3t^2 + 6t + 6\ln|t+1| + C$$

$$= 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3\sqrt[6]{x+1} + 6\ln(\sqrt[6]{x+1}+1) + C.$$

说明 无理函数去根号时, 取根指数的**最小公倍数**.

例20 求积分$\int \frac{x}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+1}}dx.$

解　先对分母进行有理化

$$原式=\int \frac{x(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+1})}{(\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+1})(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+1})}dx$$

$$=\int(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+1})dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\sqrt{3x+1}d(3x+1)-\frac{1}{2}\int\sqrt{2x+1}d(2x+1)$$

$$=\frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

总结

有理式分解成部分分式之和的积分.

（注意：必须化成真分式）

三角有理式的积分.（万能置换公式）

（注意：万能公式并不万能）

简单无理式的积分.

练习题

一、填空题：

1、$\int \frac{3}{x^3+1}dx = \int\left(\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}\right)dx$，其$A=$____，

$B=$________ ，$C=$__________；

2、$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx = \int\left[\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}\right]dx$，

其中$A=$_____，$B=$_____，$C=$_______；

3、计算$\int \frac{dx}{2+\sin x}$，可用万能代换$\sin x=$__________，

$dx=$_____________；

4、计算$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}+m}$，令$t=$___，$x=$___，$dx=$____ .

5、有理函数的原函数都是__________．

二、求下列不定积分：

1、$\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$；

2、$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$；

3、$\int \frac{1}{1+x^4}dx$；

4、$\int \frac{dx}{3+\sin^2 x}$；

5、$\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$；

6、$\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx$；

7、$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$；

8、$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$．

三、求下列不定积分（用以前学过的方法）：

1、$\int \frac{x}{(1-x)^3}dx$；　　2、$\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}dx$；

3、$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$；　　4、$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx$；

5、$\int \frac{x^3}{(1+x^8)^2}dx$；　　6、$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$；

7、$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx$；　　8、$\int \frac{xe^x}{(e^x+1)^2}dx$；

9、$\int [\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^2 dx$；　　10、$\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x dx$；

11、$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$；　　12、$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

练习题答案

一、1、$1, -1, 2$；　2、$-1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}$；　3、$\dfrac{2u}{1+u^2}, \dfrac{2du}{1+u^2}$；

4、$\sqrt{ax+b}, \dfrac{t^2-b}{a}, \dfrac{2t}{a}dt$；　5、初等函数 .

二、1、$\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}+C$；

2、$\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^4}{(1+x)^2(1+x^2)}-\dfrac{1}{2}\arctan x+C$；

3、$\dfrac{\sqrt{2}}{8}\ln\dfrac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x+1)$

$$+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}-1)+C；$$

4、$\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2\tan x}{\sqrt{3}}+C$；

5、$\dfrac{1}{\sqrt{5}}\arctan\dfrac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C$；

6、$x-4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{1+x}+1)+C$；

7、$\ln\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}+2\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}+C$，或

$\ln\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}-\arcsin x+C$；

8、$-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}+C$.

三、1、 $\dfrac{1}{2(1-x)^2}-\dfrac{1}{1-x}+C$；

2、$\ln(x+\sin x)+C$；

3、 $-\dfrac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}+\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$；

4、$\dfrac{\sin x}{2\cos^2 x}-\dfrac{1}{2}\ln(\sec x+\tan x)+C$；

5、$\dfrac{x^4}{8(1+x^8)}+\dfrac{1}{8}\arctan x^4+C$；

6、$\dfrac{2}{1+\tan\dfrac{x}{2}}+x+C$，或$\sec x+x-\tan x+C$；

7、$\ln\dfrac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6}+C$；

8、$\dfrac{xe^x}{e^x+1}-\ln(1+e^x)+C$；

9、$\begin{array}{l} x[\ln x+\sqrt{1+x^2})]^2 \\ -2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x+C \end{array}$；

10、$\dfrac{(\arcsin x)^2}{4}+\dfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\dfrac{x^2}{4}+C$；

11、$\dfrac{1}{2}(\sin x-\cos x)+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\dfrac{1+\sqrt{2}\cos x}{1+\sqrt{2}\sin x}+C$；

12、$2\arctan\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}+C$.