# 4.2.4 二阶常系数非齐次线性微分方程

## 一、$f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$型

## 二、$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$型

方程$y''+py'+qy=f(x)$称为二阶常系数非齐次线性微分方程, 其中$p$、$q$是常数.

二阶常系数非齐次线性微分方程的通解是对应的齐次方程的通解$y=Y(x)$与非齐次方程本身的一个特解$y=y^*(x)$之和:

$$y=Y(x)+y^*(x).$$

## 一、$f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$ 型

设方程$y''+py'+qy=P_m(x)e^{\lambda x}$特解形式为$y^*=Q(x)e^{\lambda x}$，则得

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x). \quad \text{———}(*)$$

提示:

$$y^{*\prime\prime}+py^{*\prime}+qy^*=[Q(x)e^{\lambda x}]''+[Q(x)e^{\lambda x}]'+q[Q(x)e^{\lambda x}]$$

$$=[Q''(x)+2\lambda Q'(x)+\lambda^2Q(x)]e^{\lambda x}+p[Q'(x)+\lambda Q(x)]e^{\lambda x}+qQ(x)e^{\lambda x}$$

$$=[Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)]e^{\lambda x}.$$

## 一、$f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$ 型

设方程$y''+py'+qy=P_m(x)e^{\lambda x}$特解形式为$y^*=Q(x)e^{\lambda x}$，则得

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x). \quad ——(\ast)$$

(1)如果$\lambda$不是特征方程$r^2+pr+q=0$的根, 则 $y^*=Q_m(x)e^{\lambda x}$.

提示:

此时$\lambda^2+p\lambda+q\neq 0$.

要使($\ast$)式成立, $Q(x)$应设为$m$次多项式:

$$Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m.$$

## 一、$f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$型

设方程$y''+py'+qy=P_m(x)e^{\lambda x}$特解形式为$y^*=Q(x)e^{\lambda x}$，则得

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x). \quad \text{——}(*)$$

(1)如果$\lambda$不是特征方程$r^2+pr+q=0$的根, 则$y^*=Q_m(x)e^{\lambda x}$.

(2)如果$\lambda$是特征方程$r^2+pr+q=0$的单根, 则$y^*=xQ_m(x)e^{\lambda x}$.

提示:

此时$\lambda^2+p\lambda+q=0$, 但$2\lambda+p\neq0$.

要使$(*)$式成立, $Q(x)$应设为$m+1$次多项式: $Q(x)=xQ_m(x)$,
其中$Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m$.

# 一、$f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$ 型

设方程$y''+py'+qy=P_m(x)e^{\lambda x}$特解形式为$y^*=Q(x)e^{\lambda x}$，则得

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x). \quad \text{——}(*)$$

(1)如果$\lambda$不是特征方程$r^2+pr+q=0$的根, 则 $y^*=Q_m(x)e^{\lambda x}$.

(2)如果$\lambda$是特征方程$r^2+pr+q=0$的单根, 则 $y^*=xQ_m(x)e^{\lambda x}$.

(3)如果$\lambda$是特征方程$r^2+pr+q=0$的重根, 则 $y^*=x^2Q_m(x)e^{\lambda x}$.

提示:

此时$\lambda^2+p\lambda+q=0$, $2\lambda+p=0$.

要使$(*)$式成立, $Q(x)$应设为$m+2$次多项式: $Q(x)=x^2Q_m(x)$, 其中$Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m$.

## ❖结论

二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y''+py'+qy=P_m(x)e^{\lambda x}$$

有形如

$$y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$$

的特解，其中$Q_m(x)$是与$P_m(x)$同次的多项式，而$k$按$\lambda$不是特征方程的根、是特征方程的单根或是特征方程的的重根依次取为0、1或2.

**例1** 求微分方程$y''-2y'-3y=3x+1$的一个特解.

**解** 齐次方程$y''-2y'-3y=0$的特征方程为$r^2-2r-3=0$.

因为$f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}=3x+1$, $\lambda=0$不是特征方程的根,

所以非齐次方程的特解应设为

$$y^*=b_0x+b_1.$$

把它代入所给方程, 得

$$-3b_0x-2b_0-3b_1=3x+1.$$

比较两端 $x$ 同次幂的系数, 得 $b_0=-1$, $b_1=\frac{1}{3}$.

因此所给方程的特解为 $y^*=-x+\frac{1}{3}$.

**提示:** $-3b_0=3$,

$-2b_0-3b_1=1$.

例2 求微分方程$y''-5y'+6y=xe^{2x}$的通解.

解 齐次方程$y''-5y'+6y=0$的特征方程为$r^2-5r+6=0$,

其根为$r_1=2, r_2=3$.

因为$f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}=xe^{2x}$, $\lambda=2$是特征方程的单根,

所以非齐次方程的特解应设为

$$y^*=x(b_0x+b_1)e^{2x}.$$

把它代入所给方程, 得

$$-2b_0x+2b_0-b_1=x.$$

比较系数, 得 $b_0=-\frac{1}{2}$, $b_1=-1$, 故 $y^*=x(-\frac{1}{2}x-1)e^{2x}$.

提示: $-2b_0=1$,

$2b_0-b_1=0$.

例2 求微分方程$y''-5y'+6y=xe^{2x}$的通解.

解 齐次方程$y''-5y'+6y=0$的特征方程为$r^2-5r+6=0$,

其根为$r_1=2, r_2=3$.

因为$f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}=xe^{2x}$, $\lambda=2$是特征方程的单根,

所以非齐次方程的特解应设为

$$y^*=x(b_0x+b_1)e^{2x}.$$

把它代入所给方程, 得

$$-2b_0x+2b_0-b_1=x.$$

比较系数, 得 $b_0=-\frac{1}{2}$, $b_1=-1$, 故 $y^*=x(-\frac{1}{2}x-1)e^{2x}$.

因此所给方程的通解为

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-\frac{1}{2}(x^2+2x)e^{2x}.$$

# 二、$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$型

❖结论

二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y''+py'+qy=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$$

有形如

$$y^*=x^k e^{\lambda x}[R^{(1)}{}_m(x)\cos\omega x+R^{(2)}{}_m(x)\sin\omega x]$$

的特解, 其中$R^{(1)}{}_m(x)$、$R^{(2)}{}_m(x)$是$m$次多项式, $m=\max\{l, n\}$, 而$k$按$\lambda+i\omega$(或$\lambda-i\omega$)不是特征方程的根或是特征方程的单根依次取0或1.

方程$y''+py'+qy=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$的特解形式:

应用欧拉公式可得

$$e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$$

$$=e^{\lambda x}[P_l(x)\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2}+P_n(x)\frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2i}]$$

$$=\frac{1}{2}[P_l(x)-iP_n(x)]e^{(\lambda+i\omega)x}+\frac{1}{2}[P_l(x)+iP_n(x)]e^{(\lambda-i\omega)x}$$

$$=P(x)e^{(\lambda+i\omega)x}+\overline{P}(x)e^{(\lambda-i\omega)x},$$

其中 $P(x)=\frac{1}{2}(P_l-P_n i)$, $\overline{P}(x)=\frac{1}{2}(P_l+P_n i)$, 而 $m=\max\{l,n\}$.

方程$y''+py'+qy=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$的特解形式:

应用欧拉公式可得

$$e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]=P(x)e^{(\lambda+i\omega)x}+\overline{P}(x)e^{(\lambda-i\omega)x}.$$

设方程$y''+py'+qy=P(x)e^{(\lambda+i\omega)x}$的特解为$y_1^*=x^kQ_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}$,

则 $\overline{y_1}^*=x^k\overline{Q}_m(x)e^{(\lambda-i\omega)x}$必是方程$y''+py'+qy=\overline{P}(x)e^{(\lambda-i\omega)x}$的特解,

其中当$\lambda\pm i\omega$不是特征方程的根时$k$取0, 否则取1.

因此方程$y''+py'+qy=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$的特解为

$$\begin{aligned}y_1^*&=x^kQ_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}+x^k\overline{Q}_m(x)e^{(\lambda-i\omega)x}\\&=x^ke^{\lambda x}[Q_m(x)(\cos\omega x+i\sin\omega x)+\overline{Q}_m(x)(\cos\omega x-i\sin\omega x)]\\&=x^ke^{\lambda x}[R^{(1)}{}_m(x)\cos\omega x+R^{(2)}{}_m(x)\sin\omega x].\end{aligned}$$

**例3** 求微分方程$y''+y=x\cos 2x$的一个特解.

**解** 齐次方程$y''+y=0$的特征方程为$r^2+1=0$.

因为$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]=x\cos 2x$, $\lambda+i\omega=2i$不是特征方程的根, 所以所给方程的特解应设为

$$y^*=(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x.$$

把它代入所给方程, 得

$$(-3ax-3b+4c)\cos 2x-(3cx+4a+3d)\sin 2x=x\cos 2x.$$

比较两端同类项的系数, 得 $a=-\dfrac{1}{3}$, $b=0$, $c=0$, $d=\dfrac{4}{9}$.

因此所给方程的特解为 $y^*=-\dfrac{1}{3}x\cos 2x+\dfrac{4}{9}\sin 2x$.

# 2.5 高阶变系数线性微分方程的求解问题

## Euler方程

$$t^n \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 t^{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} t \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t)$$

可通过$t = e^\tau$或$\tau = \ln t$化为常系数线性微分方程.

例2.15 求微分方程$t^2\ddot{x}-t\dot{x}+x=0$的通解.

例2.16 求微分方程$(x+2)^2\dfrac{d^3y}{dx^3}+(x+2)\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}=1$的通解.