第7章 无穷级数

无穷级数
- 数项级数
- 函数项级数
  - 幂级数
  - Fourier级数(傅里叶级数)

无穷级数是研究函数的工具
- 表示函数
- 研究性质
- 数值计算

傅里叶 (Fourier, 1768 – 1830)


傅里叶，J.-B.-J.

法国数学家. 他的著作《热的解析理论》(1822) 是数学史上一部经典性文献，书中系统的运用了三角级数和三角积分，他的学生将它们命名为傅里叶级数和傅里叶积分. 他深信数学是解决实际问题最卓越的工具. 以后以傅里叶著作为基础发展起来的傅里叶分析对近代数学以及物理和工程技术的发展都产生了深远的影响.

第7章 无穷级数

第4节 Fourier级数

讨论另一类特殊重要的函数项级数：

由三角函数组成的函数项级数----三角级数

研究：

怎样将一个函数用三角级数表示？

即 如何将一个函数展成三角级数？

第4节 Fourier级数

4.1 周期函数与三角级数

4.2 三角函数系的正交性与Fourier级数

4.3 周期函数的Fourier展开

4.4 [0, *l*]上函数的Fourier展开

4.5 Fourier级数的复数形式

4.1 周期函数与三角级数

简单的周期运动为简谐振动： $y=A\sin(\omega t+\varphi)$

复杂的周期运动常分解成若干不同频率的简谐振动的叠加,即

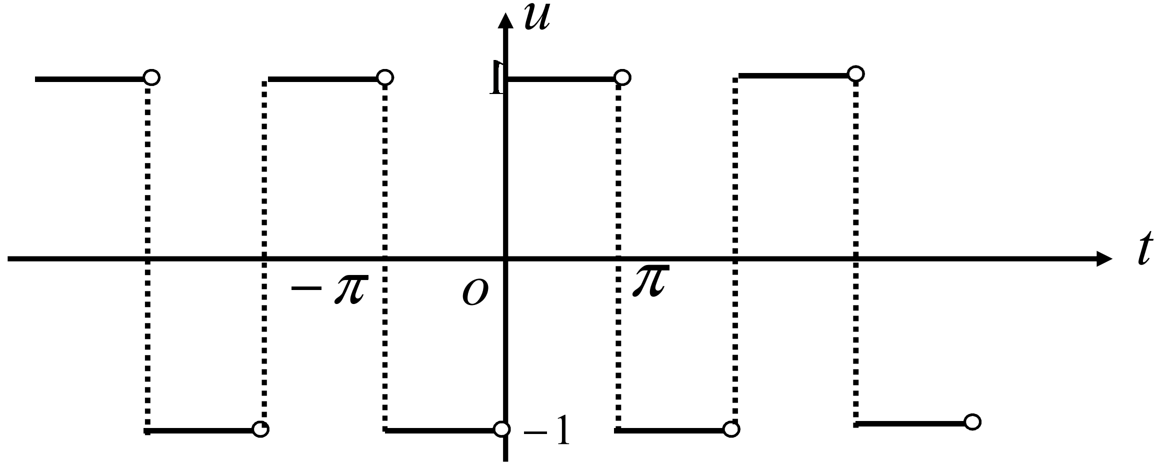
$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)--(1)$$

$$=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(\sin n\omega t\cos\varphi_n+\cos n\omega t\sin\varphi_n)$$ (谐波迭加)

令 $\frac{a_0}{2}=A_0,\ a_n=A_n\sin\varphi_n,\ b_n=A_n\cos\varphi_n,\ \omega t=x,$

$$:=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$ 三角级数

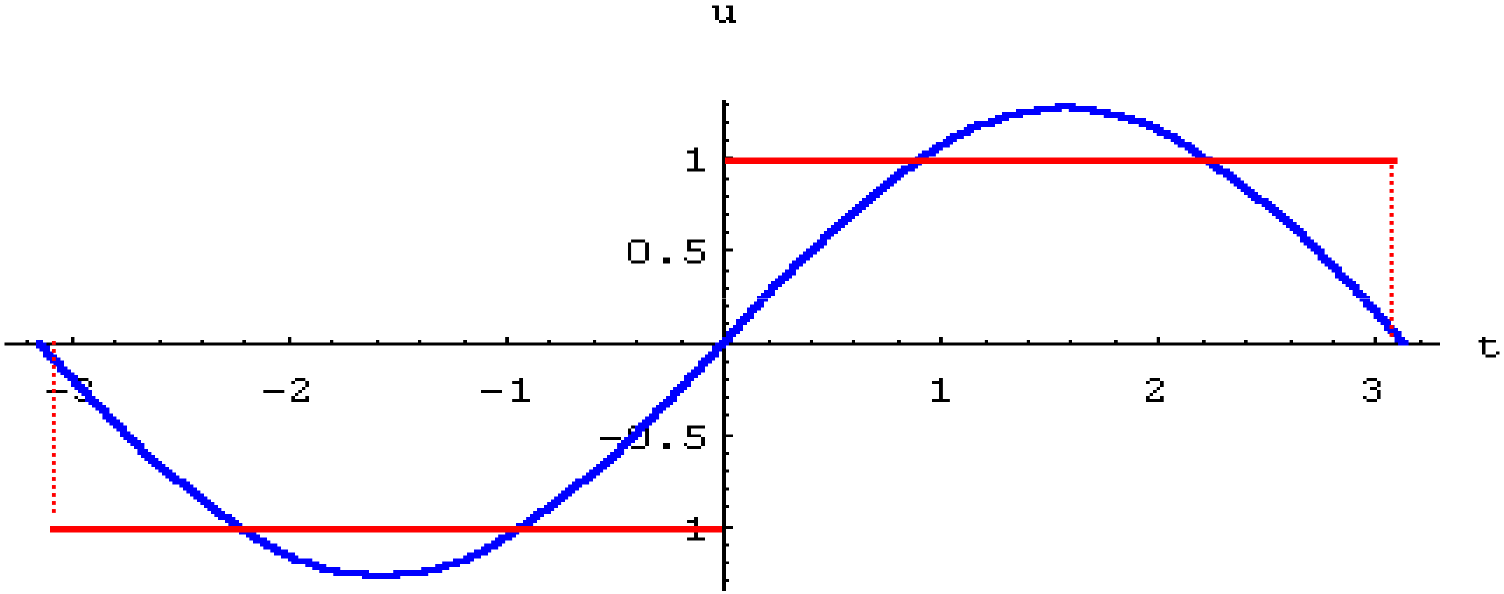
矩形波 $\quad u(t)=\begin{cases}-1, & \text{当} -\pi \le t < 0 \\ 1, & \text{当} 0 \le t < \pi\end{cases}$



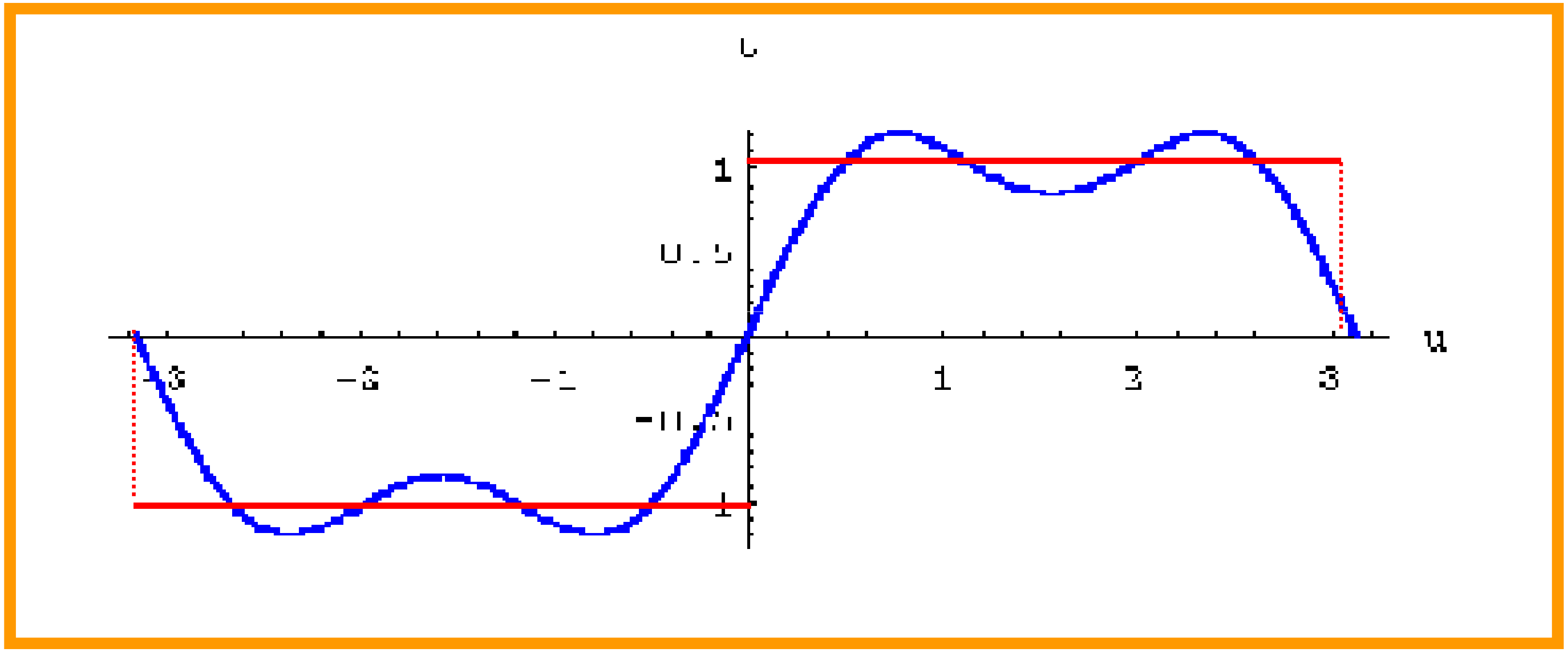
不同频率正弦波逐个叠加

$$\frac{4}{\pi}\sin t,\ \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{3}\sin 3t,\ \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{5}\sin 5t,\ \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{7}\sin 7t,\cdots$$

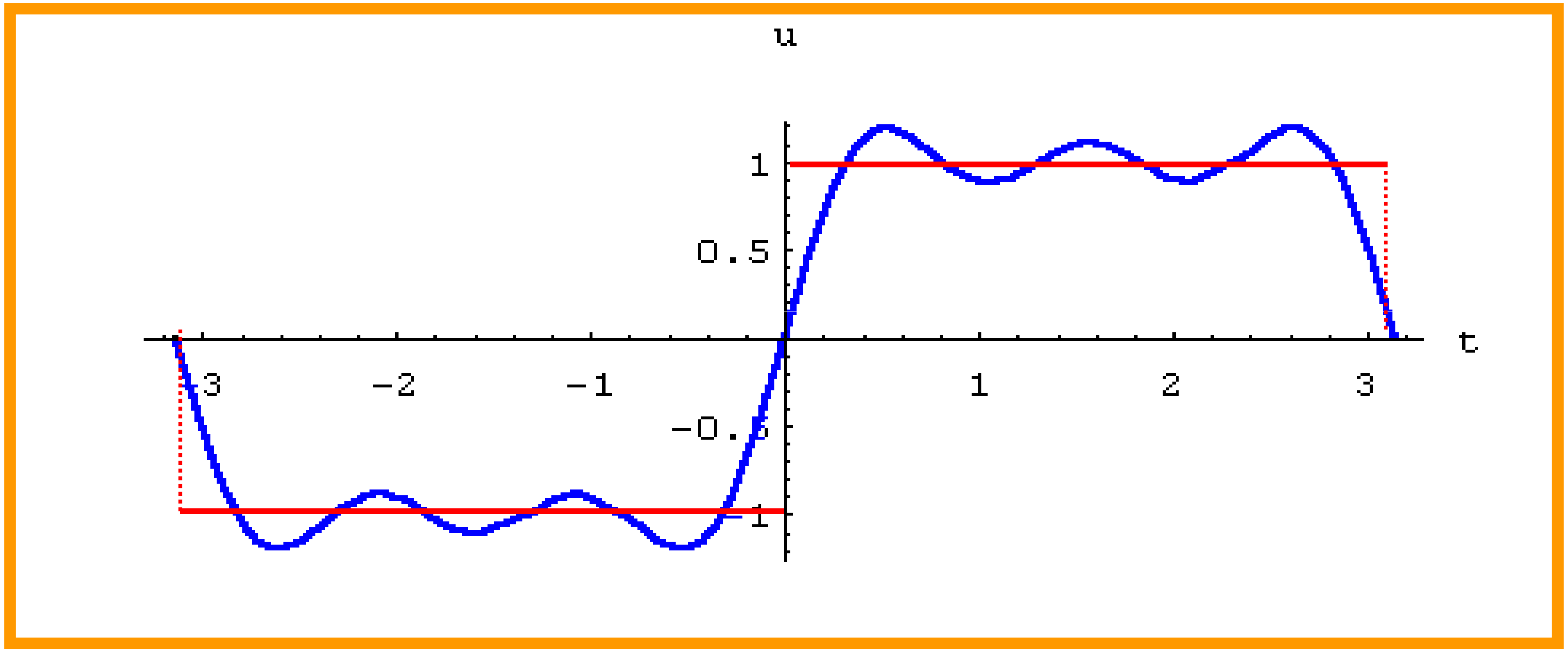
$$u \approx \frac{4}{\pi} \sin t$$



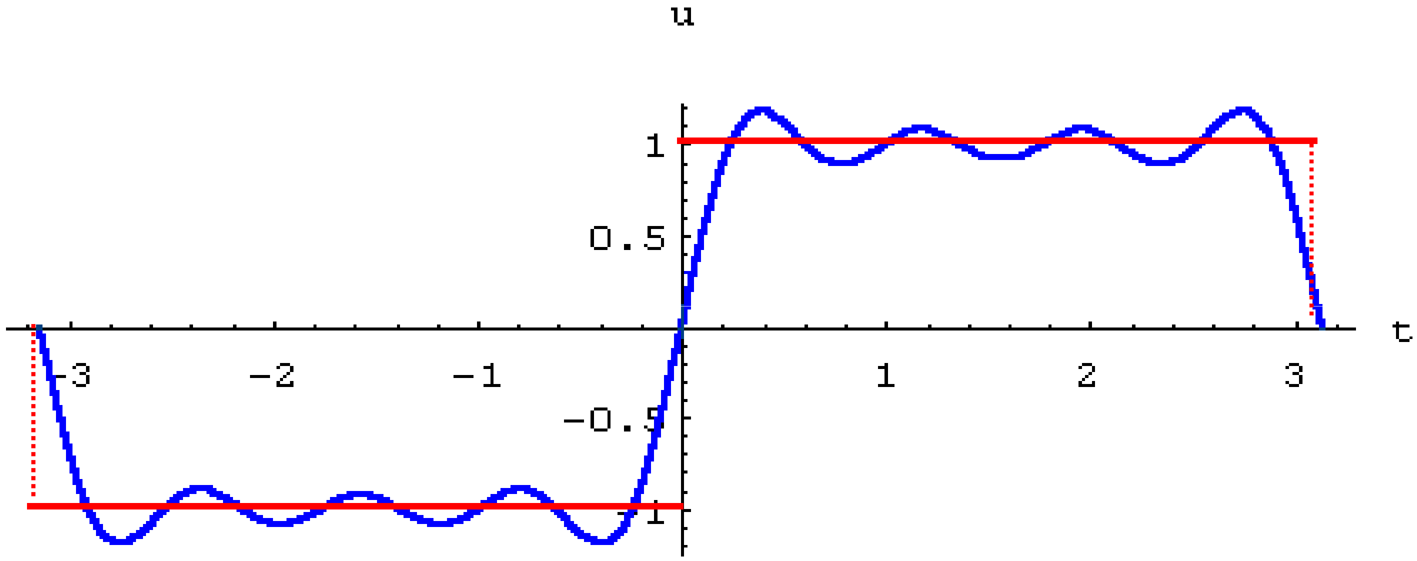
$$u \approx \frac{4}{\pi}(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t)$$



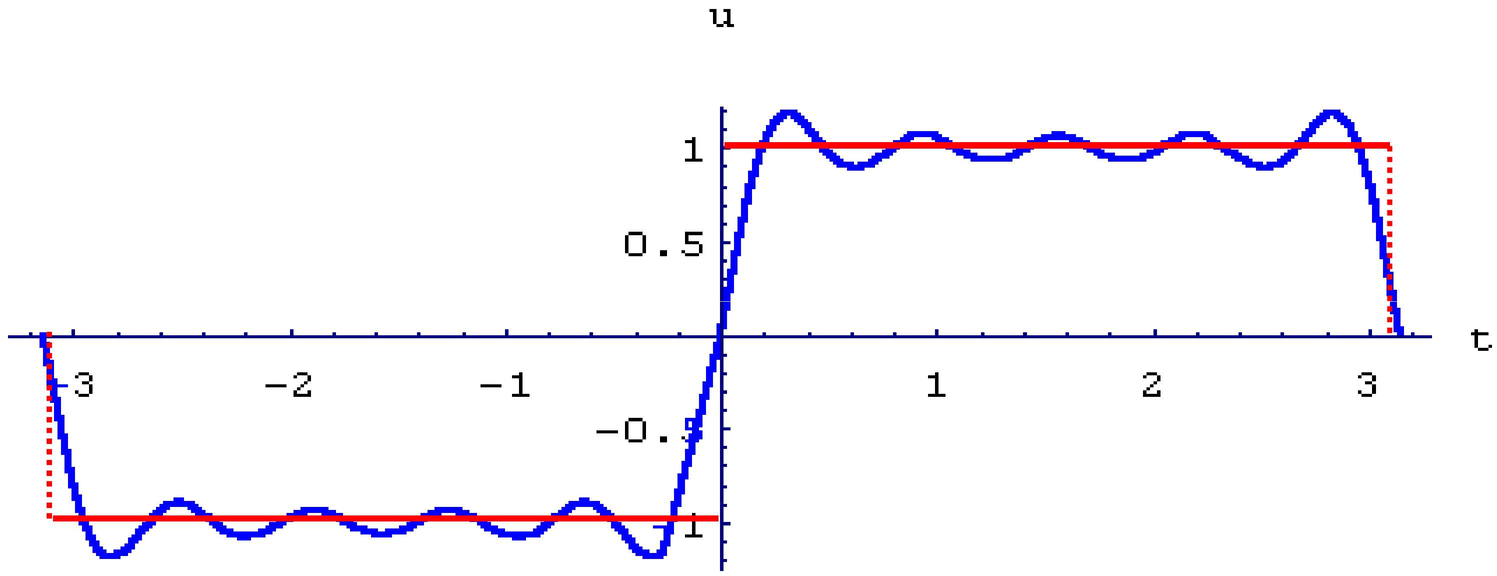
$$u \approx \frac{4}{\pi}(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t)$$



$$u \approx \frac{4}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \frac{1}{7}\sin 7t\right)$$



$$u \approx \frac{4}{\pi}\left(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\frac{1}{7}\sin 7t+\frac{1}{9}\sin 9t\right)$$



$$u(t)=\frac{4}{\pi}\left(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\frac{1}{7}\sin 7t+\cdots\right)$$

$$(-\pi < t < \pi, t \neq 0)$$

定义　形如 $$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\quad(1)$$

的函数项级数称之**三角级数**，

其中，$a_0,a_n,b_n(n=1,2,\cdots)$均为常数。

易见$T=2\pi$　刻划的周期现象

基本问题：

1　$f(x)$ 满足什么条件时，才能展开为三角级数？

2　如果 $f(x)$ 能展开为三角级数，展开式中的系数如何确定？

4.2 三角函数系的正交性与Fourier级数

复习:

$$(1)\begin{cases}\sin x\sin y=\dfrac{1}{2}[(\cos(x-y)-\cos(x+y)]\\[2ex] \cos x\cos y=\dfrac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]\\[2ex] \sin x\cos y=\dfrac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}\sin^2 x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)\\[2ex] \cos^2 x=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)\end{cases}$$

$$(3)\quad \sin n\pi=0$$

$$\cos n\pi=(-1)^n$$

(4) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ $f(x)$为奇函数

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ $f(x)$为偶函数

(5) 若$f(x) = f(x+T)$，则

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx$$

1. 三角函数系的正交性 → 正交函数系

三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots \cos nx, \sin nx, \cdots \quad (2)$$

正交：

任意两个不同函数的乘积在 $[-\pi,\pi]$上的积分等于零，而任一函数的平方在$[-\pi,\pi]$上的积分都不等于0.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases},$$

$$(m, n \in N^{+})$$

2. 傅里叶级数

设$f(x)$为周期$T=2\pi$的函数,

$$f(x)\overset{能}{=}\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)--(1)$$

且可逐项积分

对(1)两边从$-\pi\to\pi$积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx \quad =a_0\pi$$

$$\boxed{\therefore a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx}$$

$$f(x)\overset{能}{=}\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)--(1)$$

用$\cos nx$乘(1)的两边, 再从$-\pi\to\pi$积分:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos nxdx+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\cos nxdx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}a_n\cos^2 nxdx \ =\pi a_n$$

$$\therefore \quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx \qquad (n\in N_+)$$

同理 $$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx \qquad (n\in N_+)$$

综合：若$f(x)$能展成三角级数(1)，

则(1)中系数a_n, b_n由下式决定

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n = 0,1,2\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 1,2\cdots) \end{cases} \quad --(3)$$

由(3)式确定的a_n, b_n称$f(x)$的 **傅里叶系数**

将$f(x)$的傅里叶系数代入(1)右端，所得的三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) --(4)$$

称为$f(x)$的 **傅里叶级数**

4.3 周期函数的Fourier展开

考虑如下问题:

$$f(x)\,\underline{\underline{\text{条件?}}}\,\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

1 以2π为周期的Fourier级数

2 正弦级数和余弦级数

3 以2L为周期的Fourier级数

1 以2π为周期的Fourier级数

狄利克雷(Dirichlet)定理

设$f(x)$是周期为2π的函数 若$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上满足条件：

1^0 除了有限个第一类间断点外连续；

2^0 $f(x)$只有有限个极大极小值

称为Dirichlet条件（或狄氏条件）

$\Rightarrow f(x)$的傅里叶级数在$[-\pi，\pi]$上点点收敛且和函数

$$s(x)=\begin{cases} f(x), & x\text{为}f(x)\text{的连续点}; \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & x\text{为}f(x)\text{的间断点} \\ \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}, & x=\pm\pi. \end{cases}$$

注意: 1. 函数展开成傅里叶级数的条件比展开成幂级数的条件低的多.

2. 狄利克雷(Dirichlet) 定理的另一种形式

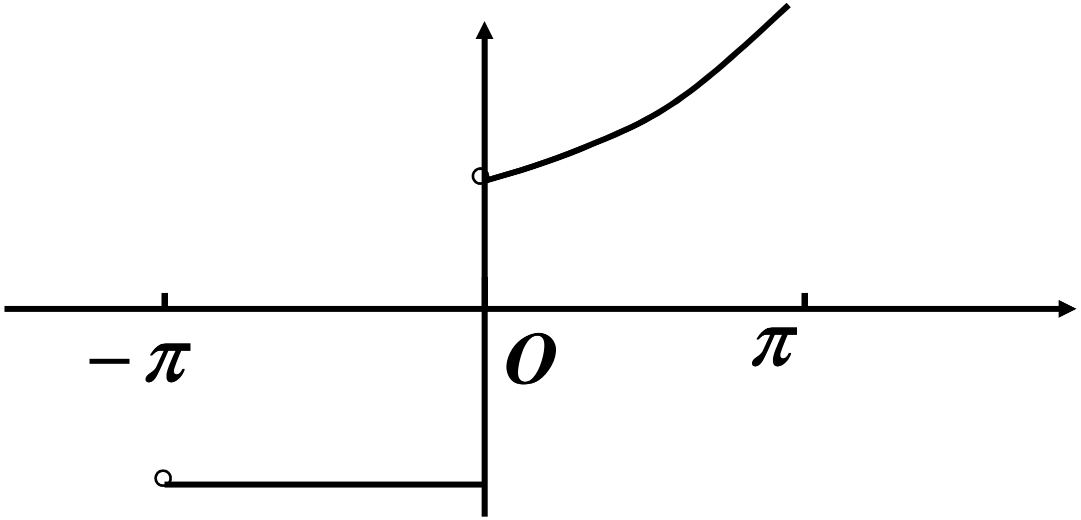
狄利克雷(Dirichlet) 定理

若$f(x)$在$[-\pi,\pi]$分段单调，而且除有限个第一类间断点外都连续，

$\Rightarrow f(x)$的傅里叶级数在$[-\pi,\pi]$上收敛且和函数

$$s(x)=\begin{cases} f(x), & x\text{为}f(x)\text{的连续点;} \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & x\text{为}f(x)\text{的间断点} \\ \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}, & x=\pm\pi. \end{cases}$$

例1 设$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$ 则其以2π为周期的Fourier级数在点$x=\pi$处收敛于 $\pi^2/2$.



在$x=0$, $x=\pi/2$, $x=-\pi/3$和$x=-\pi$处分别收敛于什么？

$T=2\pi$ 且满足狄利克雷充分条件的函数$f(x)$

展开成三角级数的步骤：

(1) 讨论级数的的收敛性

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$=\begin{cases} f(x) & x\text{为连续点} \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} & x\text{为间断点} \end{cases}$$

$x\in(-\infty,+\infty)$

(2)计算

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\ dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$

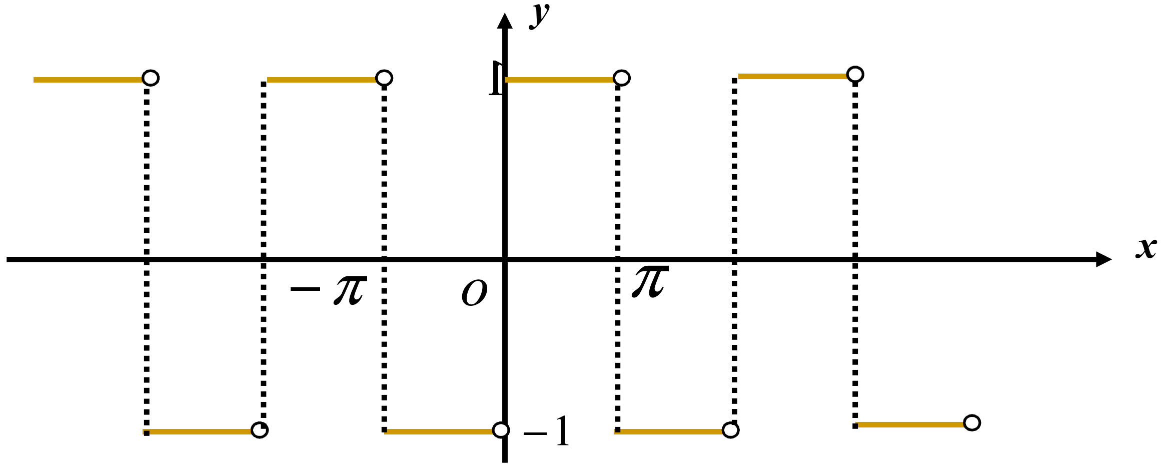
(3)作傅里叶级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

例2 将周期为2π的$f(x)$展开成傅里叶级数，它在$[-\pi,\pi)$上的表达式:

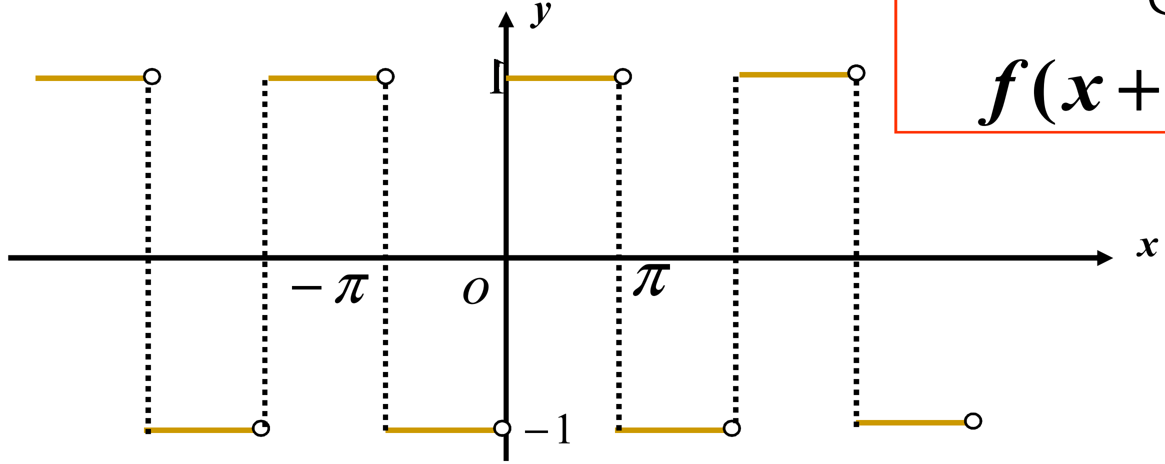
$$f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi\le x<0\\ 1 & 0\le x<\pi\end{cases}$$

解 $f(x)$满足狄利克雷条件，它在点$x=k\pi(k=0,1,\cdots)$不连续.

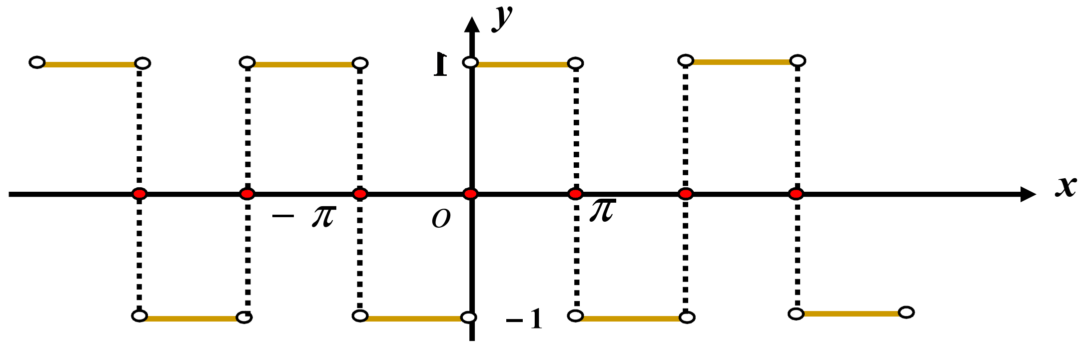


$$f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi \le x < 0,\\ 1 & 0 \le x < \pi,\end{cases}$$
$$f(x+2\pi)=f(x)$$

函数$f(x)$图象为



当$x \neq k\pi$时，收敛于$f(x)$. 和函数S(x)图象为



计算傅里叶系数：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}-dx+\int_{0}^{\pi}dx]=0$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}\cos nxdx]=0 \qquad (n\in N_+)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}\sin nxdx]=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx dx + \int_{0}^{\pi}\sin nx dx] = \frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \dfrac{4}{(2k-1)\pi}, & n = 2k-1 \end{cases}$$

$$\frac{4}{\pi}[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots + \frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x + \cdots]$$

$$= \begin{cases} f(x), & x \neq k\pi, \\ 0, & x = k\pi. \end{cases} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2\cdots)$$

注意: 对于非周期函数,如果函数 $f(x)$ 只在区间 $[-\pi,\pi]$ 上有定义,并且满足狄利克雷充分条件,也可展开成傅里叶级数.

作法: 将 $f(x)$ 延拓为以 2π 为周期的函数 $F(x)$

$$F(x)=f(x)\quad x\in[-\pi,\pi)(\text{或}(-\pi,\pi])$$

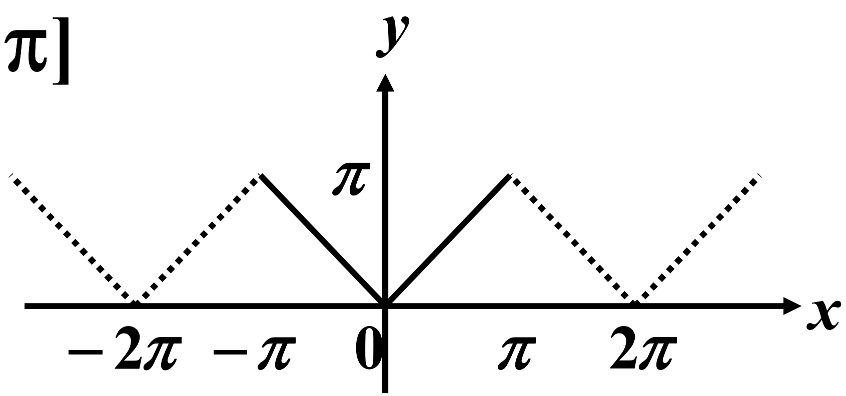
$$F(x)=F(x+2\pi)\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

在 $[-\pi,\pi)$ 或 $(-\pi,\pi]$ 外补充 $f(x)$ 的定义使它拓广成周期为 2π 的函数 $F(x)$，按这种方式拓广函数的定义域过程称为**周期延拓**.

例 3 将函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x<0\\ x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 展开为傅里叶级数.

解 所给函数满足狄利克雷充分条件.

拓广的周期函数的傅里叶级数展开式在 $[-\pi,\pi]$ 收敛于 $f(x)$.



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(-x)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(-x)\cos nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) \quad = \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1]$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx \quad =\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx \quad =\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n=2k-1,\\ 0, & n=2k,\end{cases} \qquad (k,n\in N_+)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx \quad =0,$$

所求函数的傅里叶展开式为

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x \qquad (-\pi\le x\le\pi)$$

利用傅里叶展开式求级数的和

$$\because \quad f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x,$$

当$x=0$时, $f(0)=0$, $\quad \dfrac{\pi^2}{8}=1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots$

设 $\sigma=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\cdots$, $\quad \sigma_1=1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots(=\dfrac{\pi^2}{8})$,

$$\sigma_2=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}+\cdots$$

$$=\frac{1}{4}\sigma=\frac{1}{4}(\sigma_1+\sigma_2) \Rightarrow \sigma_2=\frac{1}{3}\sigma_1=\frac{\pi^2}{24}$$

$$\sigma=4\sigma_2=\frac{\pi^2}{6},$$

$$\therefore \sigma_1 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{3}\sigma_1 = \frac{\pi^2}{24} \qquad \sigma = 4\sigma_2 = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\sigma_3 := 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \cdots$$

$$\sigma_3 = \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}$$

2 正弦级数和余弦级数

注意到奇函数和偶函数在对称区间积分的性质，可以得到下面的结论

(1) 当周期为2π的奇函数$f(x)$展开成傅里叶级数时, 它的傅里叶系数为

$$a_n = 0 \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

(2) 当周期为2π的偶函数$f(x)$展开成傅里叶级数时, 它的傅里叶系数为

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = 0 \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

定义 如果 $f(x)$ 为奇函数，傅里叶级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

称为正弦级数.

如果 $f(x)$ 为偶函数，傅里叶级数 $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$

称为余弦级数.

例 4 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=x$，将 $f(x)$ 展开成 Fourier 级数.

解 所给函数满足狄利克雷充分条件.

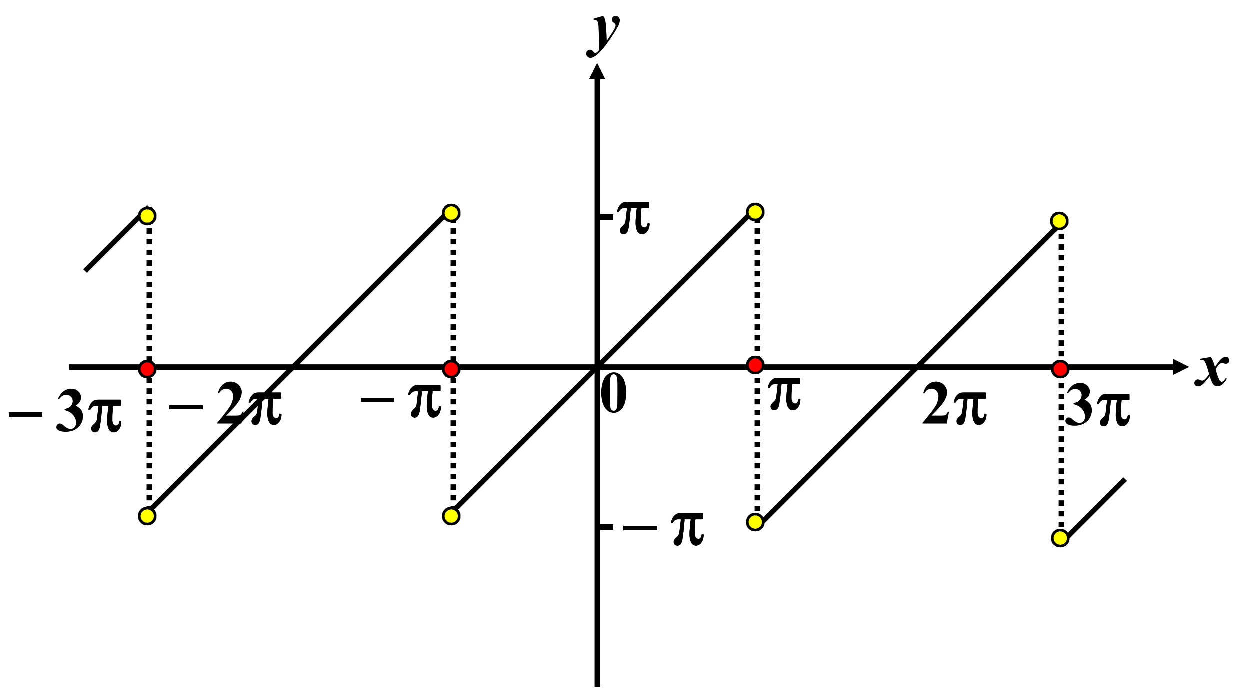
在点 $x=(2k+1)\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处不连续，

收敛于 $\dfrac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}$

在连续点 $x(x\neq(2k+1)\pi)$ 处收敛于 $f(x)$，

$\because x \neq (2k+1)\pi$时 $f(x)$是以2π为周期的奇函数,

和函数图象



$$\therefore a_n = 0, \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{n}\cos n\pi = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}, \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

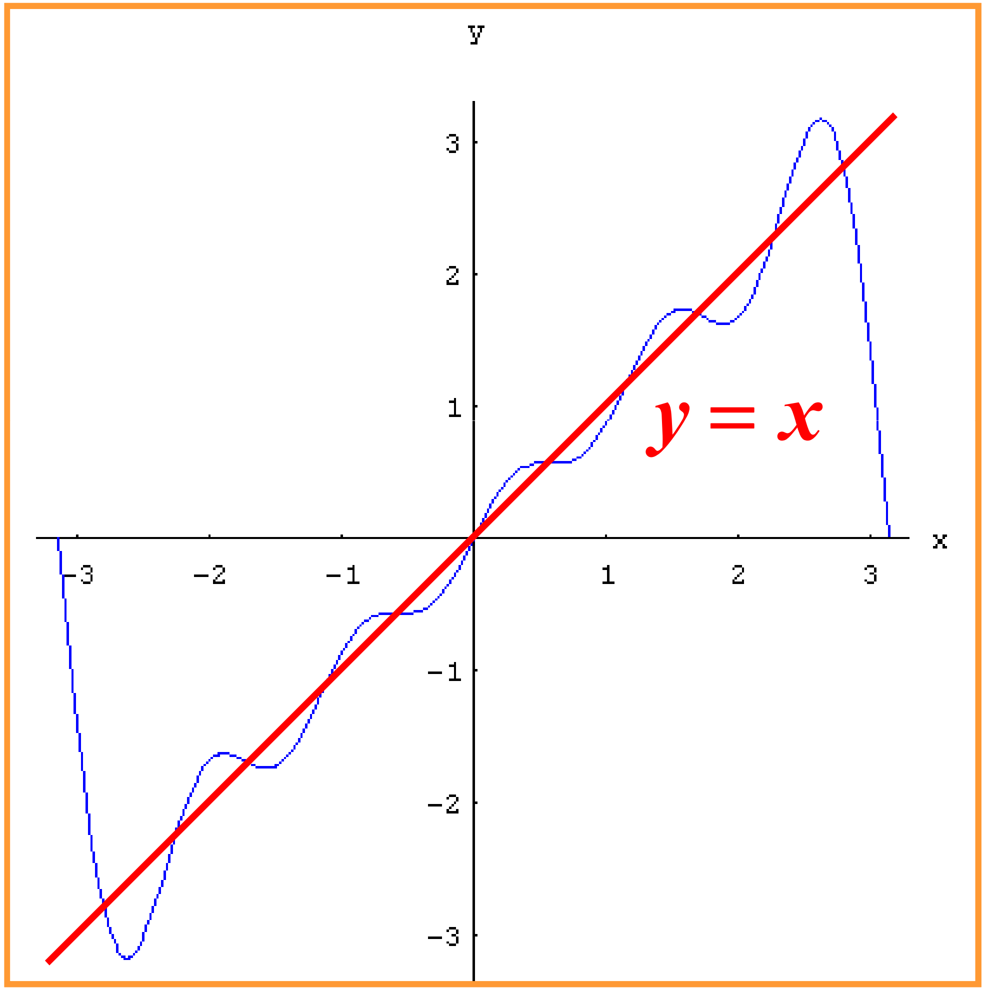
$$f(x) = 2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots)$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

$$(-\infty < x < +\infty; x \neq \pm\pi, \pm 3\pi, \cdots)$$

$$y = 2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{5}\sin 5x)$$

观察两函数图形



3 以2l为周期的Fourier级数

设$f(x)$是T=2l的函数，并且在[-l,l]满足Dirichlet条件，求$f(x)$的Fourier展开式。

方法：变量代换 $\boxed{t := \frac{\pi}{l} x}$ $\longrightarrow x \in [-l, l] \Rightarrow t \in [-\pi, \pi]$

$$f(x) = f(\frac{lt}{\pi}) := g(t) \quad \text{周期} T = 2\pi,$$

$$\because t = \frac{\pi x}{l}$$

$$g(t) = f(x)$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right]$$

$$:= \begin{cases} f(x) & x\text{为连续点} \\ \dfrac{f(x+0)+f(x+0)}{2} & x\text{为间断点} \end{cases}$$

$$\because\ t=\frac{\pi x}{l} \qquad g(t)=f\left(\frac{lt}{\pi}\right)=f(x)$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)dt\ \boxed{=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cos ntdt\ \boxed{=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin ntdt\ \boxed{=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx}$$

$$(n\in N_+)$$

定理 设$f(x)$是T=2l的函数，并且在[-l,l]满足Dirichlet条件， 则$f(x)$的Fourier展开式为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right]$$

$$=\begin{cases} f(x) & x\text{为连续点} \\ \dfrac{f(x+0)+f(x+0)}{2} & x\text{为间断点} \end{cases}$$

其中 $$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ (n\in N)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ (n\in N_+)$$

(1) 如果$f(x)$为奇函数， 则有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

其中系数 b_n为 $b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,$ $(n=1,2,\cdots)$

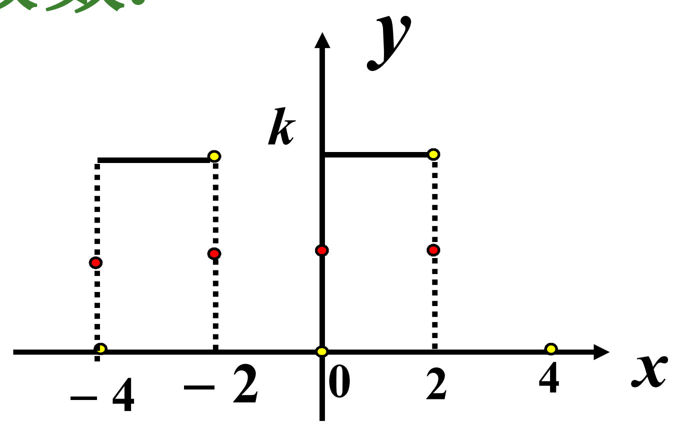
(2) 如果$f(x)$为偶函数，则有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l},$$

其中系数 a_n为 $a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$

$(n=0,1,2,\cdots)$

例5 设 $f(x)$ 是周期为4 的周期函数,它在[-2 , 2) 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}0, & -2\le x<0,\\ k, & 0\le x<2.\end{cases}$ 将其展成傅里叶级数.



解 $\because l=2$, 满足狄利克雷充分条件.

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}0dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}kdx=k,$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_0^2 k \cdot \cos\frac{n\pi}{2} x dx = 0, (n = 1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_0^2 k \cdot \sin\frac{n\pi}{2} x dx = \frac{k}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

$$= \begin{cases} \frac{2k}{n\pi} & 当 n = 1,3,5,\cdots \\ 0 & 当 n = 2,4,6,\cdots \end{cases},$$

$$\therefore f(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2} + \cdots\right)$$

$$(-\infty < x < +\infty; x \neq 0, \pm 2, \pm 4, \cdots)$$

例 当函数定义在[a,b]上时,且满足狄利克雷条件

其傅里叶展开方法:

$f(x)\ ,\ x\in[a,b]$ $\qquad T=b-a$

$\downarrow$ 令 $z=x-\dfrac{b+a}{2}$ 即 $x=z+\dfrac{b+a}{2}$,

$$F(z):=f(x)=f(z+\frac{b+a}{2})\ ,\ z\in[-\frac{b-a}{2},\frac{b-a}{2}]$$

$\downarrow$ 周期延拓

$F(z)$在$[-\dfrac{b-a}{2},\dfrac{b-a}{2}]$上展成傅里叶级数

$\downarrow$ 将 $z=x-\dfrac{b+a}{2}$ 代入展开式

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的傅里叶级数

例6 将函数 $f(x)=10-x\ (5<x<15)$ 展开成傅里叶级数.

解 作变量代换 $z=x-10,$

$5<x<15 \quad \Rightarrow -5<z<5,$

$f(x)=f(z+10)=-z=F(z),$

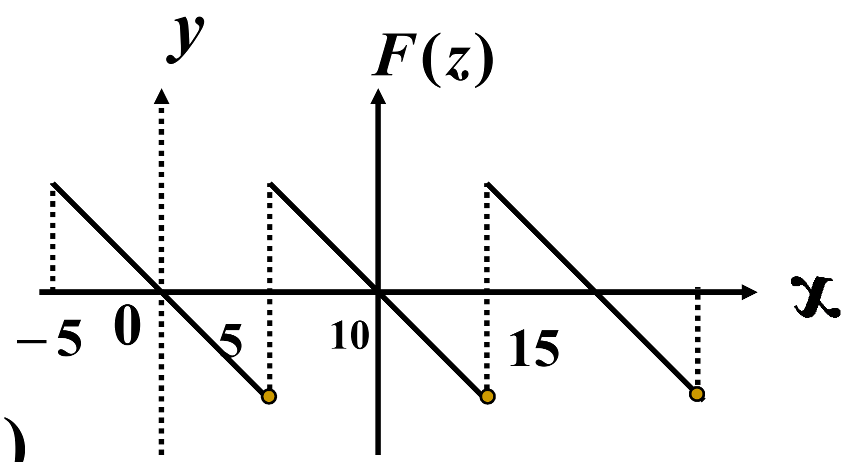
补充函数$F(z)=-z\quad(-5<z<5)$的定义,

令 $F(-5)=5,$ 然后将$F(z)$作周期延拓$(T=10)$

这拓广的周期函数满足 收敛定理的条件,

且展开式在 $(-5,5)$内收敛于$F(z)$.

$$a_n = 0, \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$



$$b_n = \frac{2}{5}\int_0^5 (-z)\sin\frac{n\pi z}{2}dz$$

$$= (-1)^n \frac{10}{n\pi}, \quad (n = 1,2,\cdots)$$

$$F(z) = \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi z}{5}, \qquad (-5 < z < 5)$$

$\boxed{\text{代换} \quad z = x - 10}$

$$\therefore 10 - x = \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin[\frac{n\pi}{5}(x-10)]$$

$$= \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{5}. \qquad (5 < x < 15)$$

另解 $a_n = \dfrac{1}{5}\displaystyle\int_5^{15}(10-x)\cos\frac{n\pi x}{5}dx$

$$= 2\int_5^{15}\cos\frac{n\pi x}{5}dx - \frac{1}{5}\int_5^{15}x\cos\frac{n\pi x}{5}dx \quad = 0, \ (n = 1,2,\cdots)$$

$$a_0 = \frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)dx \quad = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)\sin\frac{n\pi x}{5}dx = (-1)^n\frac{10}{n\pi}, \quad (n = 1,2,\cdots)$$

故 $f(x) = 10 - x = \dfrac{10}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi}{5}x$

$$(5 < x < 15)$$

小结

以$2l(2\pi)$为周期的傅里叶系数;

利用变量代换求傅里叶展开式;

求傅里叶展开式的步骤;

1.画图形验证是否满足狄利克雷条件(收敛域,奇偶性);

2.求出傅里叶系数;

3.写出傅里叶级数,并注明它在何处收敛于$f(x)$.