因而所求非齐次线性微分方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{C}+\int_0^t\boldsymbol{X}(t-\tau)\boldsymbol{f}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}1 & -t & \dfrac{t^2}{2}\\ 0 & 1 & -t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\\ C_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t^2-3t+3\\ t\\ t-1\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{C}=(C_1,C_2,C_3)^{\mathrm{T}}$ 任意常向量. $\boldsymbol{f}(\tau)=(t^2,2t,t)^{\mathrm{T}}$.

**(B)**

1. 求下列常系数齐次线性微分方程组的解.

(2) $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}-5 & -10 & -20\\ 5 & 5 & 10\\ 2 & 4 & 9\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$.

**解** 系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-5 & -10 & -20\\ 5 & 5 & 10\\ 2 & 4 & 9\end{pmatrix}$的特征值为 $\lambda_1=5,\lambda_{2,3}=2\pm\mathrm{i}$. $\lambda_1=5$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{r}_1=(-2,0,1)^{\mathrm{T}}$;$\lambda_2=2+\mathrm{i}$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{r}_2=(10\mathrm{i}+20,15-5\mathrm{i},-14-2\mathrm{i})^{\mathrm{T}}$. 则原方程有解 $\boldsymbol{x}_1(t)=\mathrm{e}^{5t}\boldsymbol{r}_1$, $\overline{\boldsymbol{x}}_2(t)=\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})t}\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{x}_2(t)+\mathrm{i}\boldsymbol{x}_3(t)$,

$$\boldsymbol{x}_2(t)=\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}20\cos t-10\sin t\\ 15\cos t+5\sin t\\ -14\cos t+2\sin t\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}_3(t)=\begin{pmatrix}20\sin t+10\cos t\\ 15\sin t-5\cos t\\ -14\sin t-2\cos t\end{pmatrix}\mathrm{e}^{2t}.$$

则 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\boldsymbol{x}_3(t)$为原方程的线性无关的三个特解. 从而通解为 $\boldsymbol{x}(t)=C_1\boldsymbol{x}_1(t)+C_2\boldsymbol{x}_2(t)+C_3\boldsymbol{x}_3(t)$.

## 习 题 7.4

**(A)**

2. 验证 $y_1=x$ 与 $y_2=\sin x$ 是微分方程 $(y')^2-yy''=1$ 的两个线性无关的解. 问 $y=C_1x+C_2\sin x$ 是否为该方程的通解.

**解**　$y=C_1x+C_2\sin x$ 不是通解. 由于 $y_3=\cos x$ 是解，且 $x,\sin x,\cos x$ 线性无关. 故 $\cos x$ 不能由 $x$ 与 $\sin x$ 线性表出. 也即 $C_1$ 与 $C_2$ 取任意值都不能使方程的解 $y_3=\cos x=C_1x+C_2\sin x$ 成立. 事实上，原方程是不显含 $x$ 的可降阶的二阶非线性方程，其通解为

当　$|y'|<1$，$y=C_1\sin\left(\dfrac{x}{C_1}+C_2\right)$ 为通解；

$y'>1$ 时，通解 $y=c_1\operatorname{sh}\left(\dfrac{x}{C_1}+C_2\right)$；

$y'<-1$ 时，通解 $y=-c_1\operatorname{sh}\left(\dfrac{x}{C_1}+C_2\right)$.

4. 已知 $y_1=x,y_2=x+e^x,y_3=1+x+e^x$ 是微分方程

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=Q(x)$$

的解. 试求此方程的通解.

**解**　$y_2-y_1=e^x,y_3-y_2=1$ 是对应的齐次方程线性微分方程 $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$ 两个线性无关的解. 故原非齐次线性微分方程的通解为 $C_1+C_2e^x+x$.

5. 求下列各微分方程的通解.

(1) $\ddot{x}+8\dot{x}+15x=0$；　(2) $\ddot{x}-6\dot{x}+9x=0$；

(6) $y''+4y'+5y=0$.

**解**　(1) 特征方程为 $\lambda^2+8\lambda+15=0$，可得两相异特征值 $\lambda_1=-3,\lambda_2=-5$，故通解为 $x=C_1e^{-3t}+C_2e^{-5t}$.

(2) 特征方程为 $\lambda^2-6\lambda+9=0$，可得两相等特征值 $\lambda_1=\lambda_2=3$，故通解为 $x=e^{3t}(C_1+C_2t)$.

(6) 特征方程为 $\lambda^2+4\lambda+5=0$，解之可得特征值为两共轭复根 $\lambda_{1,2}=-2\pm i$，故通解为 $y=e^{-2t}(C_1\cos t+C_2\sin t)$.

7. 写出下列微分方程待定特解的形式.

(1) $\ddot{x}-5\dot{x}+4x=(t^2+1)e^t$；　(2) $\ddot{x}-6\dot{x}+9x=(2t+1)e^{3t}$；

(3) $y''-4y'+8y=3e^x\sin x$；　(4) $y''+a_1y'+a_2y=A$.

其中 $a_1,a_2,A$ 均为常数.

**解**　(1) 特征方程为 $\lambda^2-5\lambda+4=0$，从而 $\lambda_1=1,\lambda_2=4$ 为特征值，故待定特解形为 $t(b_2t^2+b_1t+b)e^t$.

(2) 特征方程 $\lambda^2-6\lambda+9=0$，特征值 $\lambda_1=\lambda_2=3$，故待定特解形为 $t^2(b_0+b_1t)e^{3t}$.

(3) 特征方程为 $\lambda^2-4\lambda+8=0$，特征值为 $2\pm2i$，故待定特解形为 $e^x(b_1\cos t+$

$b_2\sin t)$.

(4) 特征方程为 $\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$.

如 $a_2\neq 0$,则 $\lambda=0$ 非特征值,$y^*=\frac{A}{a_2}$的特解;

如 $a_2=0,a_1\neq 0$,则 $\lambda=0$ 为单重特征值,$y^*=\frac{A}{a_1}t$ 为原方程的一个特解;

如 $a_2=0,a_1=0$,则 $\lambda=0$ 为二重特征值,$y^*=\frac{A}{2}t^2$ 为原方程的一个特解.

8. 求下列微分方程的通解或满足给定初值条件的特解.

(3) $2\ddot{x}+5\dot{x}=5t^2-2t-1$; (5) $y''-2y'+5y=e^x\sin 2x$;

(8) $\ddot{x}-10\dot{x}+9x=e^{2t},x(0)=\frac{6}{7},\dot{x}(0)=\frac{33}{7}$.

**解** (3) 特征方程为 $2\lambda^2+5\lambda=0$,则 $\lambda=0,\lambda=-\frac{5}{2}$为特征值.

又原方程有形如 $y^*=(A_0+A_1t+A_2t^2)t$ 的特解,代入可得 $A_0=\frac{7}{25}$ $A_1=-\frac{3}{5}$ $A_2=\frac{1}{3}$.故通解为

$$y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}t}+\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{5}t^2+\frac{7}{25}t.$$

(5) 特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+5=0$,则特征值为 $1\pm 2i$. 从而原方程有形如 $x(A_1\sin 2x+B_1\cos 2x)e^x$ 的特解,代入可得 $A_1=0,B_1=-\frac{1}{4}$.故原方程的通解为

$$y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\frac{1}{4}xe^x\cos 2x$$

(8) 特征方程 $\lambda^2-10\lambda+9=0$,则 $\lambda_1=9,\lambda_2=1$ 为特征值.

原方程有形如 $x^*=Ae^{2t}$的特解,代入可得 $A=-\frac{1}{7}$.

故原方程的通解为 $y=-\frac{1}{7}e^{2t}+C_1e^{9t}+C_2e^t$,将初值条件代入可得 $C_1=\frac{1}{2}$, $C_2=\frac{1}{2}$,故满足条件的特解为

$$\bar{y}=\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{9t}-\frac{1}{7}e^{2t}.$$

10. 一质量为 $m$ 的质点,由静止开始下沉入液体. 下沉时液体的阻力与下沉的速度成正比,求质点的运动规律.

**解** 位移 $s=s(t)$,则 $m\frac{d^2s}{dt^2}=mg-k\frac{ds}{dt},s(0)=0,s'(0)=0$.

解之得 $s=C_1+C_2\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}t$，将 $s(0)=0,s'(0)=0$ 代入可得 $C_1=-\frac{m^2g}{k^2}$，$C_2=\frac{m^2g}{k^2}$，故质点的运动方程为

$$s=-\frac{m^2g}{k^2}(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t})+\frac{mg}{k}t.$$

11. 设 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f$ 为连续函数，求 $f(x)$.

**解**　由于 $f$ 为连续函数，所以变上限积分 $\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$ 是可导函数. 又 $\sin x$ 也是可导函数，所以 $f(x)$ 也可导. 原式两边求导得

$$f'(x)=\cos x+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,\quad f'(0)=1.$$

同理可证 $f'(x)$ 可微，即 $f(x)$ 二阶可导，且

$$f''(x)=-\sin x+f(x).$$

故 $f(x)$ 为二阶常系数线性微分方程 $f''(x)-f(x)=-\sin x$ 满足初值条件 $f(0)=0,f'(0)=1$ 的解，于是

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}x\cos x.$$

12. 设曲线 $L$ 的极坐标方程为 $r=r(\theta)$，$M(r,\theta)$ 为 $L$ 上任一点，$M_0(2,0)$ 为 $L$ 上一定点. 若极径 $OM_0$，$OM$ 与曲线 $L$ 所围成的曲边扇形面积值等于 $L$ 上 $M_0$，$M$ 两点间弧长值的一半，求曲线 $L$ 的方程.

**解**　曲边扇形的面 $=\int_0^\theta\frac{1}{2}r^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi$，$M_0M$ 两点间弧长为 $\int_0^\theta\mathrm{d}s=\int_0^\theta\sqrt{r^2(\varphi)+[r'(\varphi)]^2}\mathrm{d}\varphi$，依题意有

$$\int_0^\theta r^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi=\int_0^\theta\sqrt{r^2(\varphi)+[r'(\varphi)]^2}\mathrm{d}\varphi,$$

两边对 $\theta$ 求导可得 $r^2(\theta)=\sqrt{r^2(\theta)+(r'(\theta))^2}$，$r(0)=2$.

方程可变形为 $r'(\theta)=r^2\sqrt{1-\frac{1}{r^2}}$，解之得

$$\arcsin\frac{1}{r}=\mp\theta+C，又\ r(0)=2，故\ C=\frac{\pi}{6}.$$

从而 $L$ 的方程为$\frac{1}{r}=\sin\left(\frac{\pi}{6}\mp\theta\right)$，即 $r=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\mp\theta\right)}$.

13. 求下列微分方程的通解.

(2) $x^3y'''-x^2y''+2xy'-2y=x^3+3x$.

**解** 令 $x=e^{\tau}$，即$\tau=\ln x$，于是$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{d\tau}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{d\tau^2}-\frac{dy}{d\tau}\right),\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{x^3}\left[\frac{d^3y}{d\tau^3}-3\frac{d^2y}{d\tau^2}+2\frac{dy}{d\tau}\right].$$

代入原方程可得

$$\frac{d^3y}{d\tau^3}-4\frac{d^2y}{d\tau^2}+5\frac{dy}{d\tau}-2y=e^{3\tau}+3e^{\tau},(*)$$

对应的齐次方程的通解为 $\bar{y}=(C_1+C_2\tau)e^{\tau}+c_3e^{2\tau}$.

又 $y_1^*=\frac{1}{4}e^{3\tau}$，$y_2^*=-\frac{3}{2}\tau^2e^{\tau}$分别为非齐次线性微分方程$\frac{d^3y}{d\tau^3}-4\frac{d^2y}{d\tau^2}+5\frac{dy}{d\tau}-2y=e^{3\tau}$与$\frac{d^3y}{d\tau^3}-4\frac{d^2y}{d\tau^2}+5\frac{dy}{d\tau}-2y=3e^{\tau}$的特解，故方程($*$)的通解为 $y=(C_1+C_2\tau)e^{\tau}+C_3e^{2\tau}+\frac{1}{4}e^{3\tau}-\frac{3}{2}\tau^2e^{\tau}$. 令$\tau=\ln t$，则原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2\ln x)x+C_3x^2+\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x\ln^2 x.$$

**(B)**

1. 证明函数组

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}x^2,x\geq 0,\\0,x<0\end{cases}\text{与}\ \varphi_2(x)=\begin{cases}0,x\geq 0,\\x^2,x<0\end{cases}$$

在区间$(-\infty,+\infty)$内线性无关，但它们的 Wronski 行列式却恒等于零，这与本节关于 Wronski 行列式的结论是否矛盾？为什么？

**证明** 设存在常数 $k_1,k_2$ 使 $k_1\varphi_1+k_2\varphi_2\equiv 0$. 即当 $x\geq 0$ 时，$k_1x^2\equiv 0$；当 $x<0$ 时，$k_2x\equiv 0$. 从而，$k_1=k_2=0$. 故 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 线性无关. $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 的 Wronski 行列式

$$W(t)=\begin{vmatrix}\varphi_1(x)&\varphi_2(x)\\\varphi'_1(x)&\varphi'_2(x)\end{vmatrix}=\begin{cases}\begin{vmatrix}x^2&0\\2x&0\end{vmatrix},x\geq 0\\\begin{vmatrix}0&x^2\\0&2x\end{vmatrix},x<0\end{cases}\equiv 0,$$

这与本节关于 Wronski 行列式的结论不矛盾！由于本节结论为：如果 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ 为某一线性微分方程的线性无关解时，则 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 的 Wronski 行列式恒不为零.

2. 设有 $n$ 阶齐次线性微分方程

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)\dot{x}+a_n(t)x=0,$$

试利用它对应的一阶线性微分方程组的 Liouville 公式（习题 7.2(B)第 4 题）导出此方程的 Liouville 公式

$$W(t)=W(t_0)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}a_1(\tau)\mathrm{d}\tau},$$

其中 $W(t)$ 是方程的 Wronski 行列式.

**解**　对应的一阶线性微分方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}(t)$，则

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & & -a_2(t) & -a_1(t)\end{bmatrix},$$

从而 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}(t)=-a_1(t)$. 由习题 7.2(B)第 4 题

$$W(t)=W(t_0)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}a_1(\tau)\mathrm{d}\tau}.$$

3. 利用第 2 题中的 Liouville 公式证明：设 $x_1(t)$ 为二阶齐次线性微分方程 $\ddot{x}+a_1(t)\dot{x}+a_2(t)x=0$ 的一个非零解，则其通解为 $x=x_1(t)\left[C_1\int\frac{\mathrm{e}^{-\int a_1(t)\mathrm{d}t}}{(x_1(t))^2}\mathrm{d}t+C_2\right]$.

**证明**　设 $x_2(t)$ 为方程的与 $x_1(t)$ 线性无关的另一解，则 $\frac{x_2(t)}{x_1(t)}$ 非常数，应为 $t$ 的函数，不妨设为 $h(t)$，则 $x_2(t)=h(t)x_1(t)$. 从而 $x_1,x_2$ 的 Wronski 行列式

$$W(t)=\begin{vmatrix}x_1(t) & h(t)x_1(t)\\ x'_1(t) & h'(t)x_1(t)+h(t)x_1'(t)\end{vmatrix}=h'(t)[x_1(t)]^2,$$

由 Liouville 公式 $h'(t)[x_1(t)]^2=W(t_0)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}-a_1(\tau)\mathrm{d}\tau}$.

不妨取 $h(t)=\int\frac{\mathrm{e}^{-\int a_1(t)\mathrm{d}t}}{[x_1(t)]^2}\mathrm{d}t$，可得与 $x_1(t)$ 线性无关的解

$$x_2(t) = x_1(t)\int \frac{e^{-\int a_1(t)dt}}{[x_1(t)]^2}dt.$$

故原方程的通解为 $x = x_1(t)\left[C_1 + C_2\int \frac{e^{-\int a_1(t)dt}}{[x_1(t)]^2}dt\right]$.

如果不用 Liouville 公式求通解的方法如下.

将 $x_2(t) = x_1(t)h(t)$ 代入原方程可得

$$h(t)[\ddot{x}_1(t) + a_1(t)\dot{x}_1(t) + a_2(t)x_1(t)] + x_1(t)\ddot{h}(t) +$$

$$[2\dot{x}_1(t) + a_1(t)x_1(t)]\dot{h}(t) = 0.$$

又由 $x_1(t)$ 是方程的解可知 $\ddot{x}_1(t) + a_1(t)\dot{x}_1(t) + a_2(t)x_1(t) = 0$,

于是 $$x_1(t)\ddot{h}(t) + [2\dot{x}_1(t) + a_1(t)x_1(t)]\dot{h}(t) = 0.$$

令 $\dot{h}(t) = p$,则 $\ddot{h}(t) = \dot{p}$, 代入上式可得

$$\frac{dp}{p} = -\frac{2\dot{x}_1(t)}{x_1(t)} - a_1(t).$$

$$\dot{h}(t) = p = \frac{C_1{}'}{[x_1(t)]^2}e^{-\int a_1(t)dt}.$$

取 $C_1' = 1$,可得 $h(t) = \int \frac{e^{-\int a_1(t)dt}}{[x_1(t)]^2}dt + C_2'$,取 $C_2' = 0$,可得 $x_2(t) = x_1(t)h(t) = x_1(t)\int \frac{e^{-\int a_1(t)dt}}{[x_1(t)]^2}dt$.

于是原方程的通解为 $x = x_1(t)\left[c_1 + c_2\int \frac{e^{-\int a_1(t)dt}}{[x_1(t)]^2}dt\right]$.

4. 设 $u = u(\sqrt{x^2+y^2})$ 具二阶连续偏导数,且满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + u = x^2 + y^2,$$

试求函数 $u$ 的表达式.

**解** 令 $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$,则 $\frac{\partial u}{\partial x} = u'(\rho)\frac{x}{\rho}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = u'(\rho)\frac{y}{\rho}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u''(\rho)\cdot\frac{x^2}{\rho^2} + u'(\rho)\cdot\frac{1}{\rho} - u'(\rho)\frac{x}{\rho^2}\cdot\frac{x}{\rho},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u''(\rho)\frac{y^2}{\rho^2} + u'(\rho)\frac{1}{\rho} - u'(\rho)\frac{y}{\rho^2}\cdot\frac{y}{\rho}.$$

代入原方程可得

即　$u''(\rho) + u(\rho) = \rho^2$.

解之得　$u(\rho) = C_1\cos\rho + C_2\sin\rho + \rho^2 - 2$,

故 $u = u(\sqrt{x^2+y^2}) = C_1\cos\sqrt{x^2+y^2} + C_2\sin\sqrt{x^2+y^2} + x^2 + y^2 - 2$.

5. 设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续,且满足方程

$$f(t) = e^{4\pi t^2} + \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

求 $f(t)$.

**解**

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2t} f\left(\frac{1}{2}\rho\right)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$= 2\pi\int_0^t f(u)\cdot 2u\cdot 2\mathrm{d}u = 8\pi\int_0^t uf(u)\mathrm{d}u,$$

于是　$f(t) = e^{4\pi t^2} + 8\pi\int_0^t uf(u)\mathrm{d}u, f(0) = 1$.

由于 $f(t)$ 连续,故变上限积分 $\int_0^t uf(u)\mathrm{d}u$ 可微,又 $e^{4\pi t^2}$ 可微,故两可微函数的和函数 $f(t)$ 也可微. 上式两边求导得

$$f'(t) = 8\pi te^{4\pi t^2} + 8\pi tf(t).$$

则 $f(t)$ 为上述一阶线性非齐次微分方程满足初值条件 $f(0)=1$ 的解,故 $f(t) = e^{4\pi t^2}(1+4\pi t^2)$.

6. 验证 $x = \frac{\sin t}{t}$ 是微分方程 $\ddot{x} + \frac{2}{t}\dot{x} + x = 0$ 的解,求此方程的通解.

**解**　由(B)第 3 题知与 $x_1(t) = \frac{\sin t}{t}$ 线性无关的特解可取为

$$x_2(t) = h(t)x_1(t),$$

其中

$$h(t) = \int\frac{e^{-\int a_1(t)\mathrm{d}t}}{[x_1(t)]^2}\mathrm{d}t = \int\frac{t^2}{\sin^2 t}e^{-\int\frac{2}{t}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = -\cot t.$$

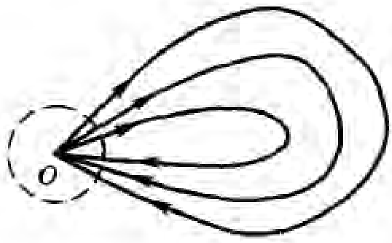
故原方程的通解为 $x=\frac{\sin t}{t}(C_1+C_2\cot t)=C_1\frac{\sin t}{t}+C_2\frac{\cos t}{t}$.

## 习　题　7.5

### (A)

3. 若自治系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{f}:D\subseteq\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 的一切解均满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}\boldsymbol{x}(t)=\mathbf{0}$, 问 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 是否渐近稳定,为什么?

**解**　不一定. 由于仅有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\boldsymbol{x}(t)=\mathbf{0}$ 不能保证从点 $O$ 足够小的邻域内出发的轨线,始终保持在点 $O$ 的充分小的邻域内. 如图所示的轨线,当 $t\to\pm\infty$ 时都趋向于奇点 $O$,但在点 $O$ 的任意小邻域出发的轨线不可能永远保持在图中所示的点 $O$ 的邻域内.




(第 3 题)

4. 讨论下列系统零解的稳定性.

(1) $\begin{cases}\dot{x}=-y-xy^2,\\ \dot{y}=x-x^4y;\end{cases}$　　(3) $\begin{cases}\dot{x}=-y+x(x^2+y^2),\\ \dot{y}=x+y(x^2+y^2);\end{cases}$

(4) $\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-a^2\sin x;\end{cases}$　　(5) $\begin{cases}\dot{x}=y+ax^3,\\ \dot{y}=-x+ay^3.\end{cases}$

**解**　其线性近似系统分别为 $\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-x\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\dot{x}=-y,\\ \dot{y}=x.\end{cases}$ 都有零实部的特征值,故不能用线性近似系统判定原非线性系统零解的稳定性. 故采用 Liapunov 函数法. 为此取正定函数 $V(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$,则

(1) $\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}=-x^2y^2(1+x^2)\leqslant 0$ 定负,故零解稳定.

又 $\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}=0$ 当且仅当 $x=0$ 或 $y=0$.

将 $x=0$ 代入(1)的第一方程可得 $y=0$;将 $y=0$ 代入(1)的第二个方程得 $x=0$,故 $\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}=0$ 当且仅当 $x=0,y=0$,于是零解渐近稳定.