$\lim\limits_{x\to0} g(x)^{\frac{1}{x}\left[x+\frac{f(x)}{x}\right]}=e^3$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\dfrac{f''(0)}{2}$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left[x+\dfrac{f(x)}{x}\right]=1+\dfrac{1}{2}f''(0)=3$，即 $f''(0)=4$，故 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=$ $\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}}\right]^{\frac{f(x)}{x^2}}=e^{\frac{1}{2}f''(0)}=e^2$.

习 题 2.6

(A)

1. 单调可微函数的导函数仍为单调可微函数，对吗？

解 不对. 导函数不一定可微. 且即使导函数可微. 我们知道，函数的单调性与区间有关，例如 $f(x)=\operatorname{sh}x$，$f'(x)=\operatorname{ch}x$，对不同的区间有下列各种情况：

(1) $\operatorname{sh}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是单增函数，但 $\operatorname{ch}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 不是单调函数.

(2) $\operatorname{sh}x$ 在 $(-\infty,0)$ 是单增函数，但 $\operatorname{ch}x$ 在 $(-\infty,0)$ 是单减函数.

(3) $\operatorname{sh}x$ 在 $(0,+\infty)$ 是单增函数，但 $\operatorname{ch}x$ 在 $(0,+\infty)$ 也是单增函数.

3. 求下列函数的单调区间：

(4) $y=x+|\sin 2x|$.

解
$$y=\begin{cases}x+\sin 2x, & m\pi\leqslant x<(2m+1)\dfrac{\pi}{2},\\ x-\sin 2x, & (2m+1)\dfrac{\pi}{2}\leqslant x<(m+1)\pi,\end{cases}$$ 则
$$y'=\begin{cases}1+2\cos 2x, & m\pi<x<(2m+1)\dfrac{\pi}{2},\\ 1-2\cos 2x, & (2m+1)\dfrac{\pi}{2}<x<(m+1)\pi.\end{cases}$$

而 $x=\dfrac{n\pi}{2}$，为 y 的不可导点. 其中 $m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

$1+2\cos 2x=0$ 在 $\left(m\pi,(2m+1)\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内有唯一根 $x_{m_2}=m\pi+\dfrac{\pi}{3}$，

$1-2\cos 2x=0$ 在 $\left((2m+1)\dfrac{\pi}{2},(m+1)\pi\right)$ 内有唯一根 $x_{m_1}=m\pi+\dfrac{5\pi}{6}$.

且当 $x\in\left(m\pi,m\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)\cup\left(m\pi+\dfrac{\pi}{2},m\pi+\dfrac{5\pi}{6}\right)$，$y'>0$，严格单增.

当 $x\in\left(m\pi+\frac{\pi}{3},m\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(m\pi+\frac{5\pi}{6},(m+1)\pi\right)$，$y'<0$，严格单减.

6. 如果 $y=f(x)$ 在 x_0 处取得极值，是否一定有 $f'(x_0)=0$.

解 不一定，如果 $y=f(x)$ 在 x_0 可导，则 $f'(x_0)=0$，如果 $f(x)$ 在 x_0 处不可导，则 $f'(x_0)$ 不存在. 例如 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 取得极小值，但 $f'(0)$ 不存在.

7. 求下列函数的极值：

(5) $f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$； (6) $f(x)=|x|e^{-|x-1|}$.

解 (5) $f'(x)=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}$，令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=0$.

若 n 为偶数，则 $f'(x)\leqslant 0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单减，无极值. 若 n 为奇数，当 $x>0$ 时，$f'<0$；当 $x<0$ 时，$f'>0$，$x=0$ 为极大值点，极大值 $f(0)=1$.

(6) $f'(x)=\begin{cases}-(x+1)e^{x-1}, & x<0,\\ (x+1)e^{x-1}, & 0<x<1,\\ -(x-1)e^{1-x}, & x>1.\end{cases}$ $x=0,1$ 为不可导点.

令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=-1$. 故

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
f'	$+$	0	$-$	不可导	$+$	不可导	$-$
f	严格单调增	极大值点（极大值为 e^{-2}）	严格单减	极小值点（极小值为 0）	严格单增	极大值点（极大值为 1）	严格单减

故 $f(x)$ 有极大值 $f(-1)=\frac{1}{e^2}$，$f(1)=1$ 及极小值 $f(0)=0$.

8. 试问 a 为何值时，函数 $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值？是极大值还是极小值？并求出此极值.

解 $f'(x)=a\cos x+\cos 3x$，$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}a-1$，

$$f''(x)=-a\sin x-3\sin 3x,\ f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

因为 $f(x)\in C^\infty(-\infty,+\infty)$，所以要使 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值，则 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$.

即 $a=2$，又因为 $f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}<0$，故 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ 为极大值.

10. 设 $3a^2-5b<0$，试证方程 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0$ 有唯一实根.

证 取 $f(x)=x^5+2ax^3+3bx+4c$，则 $f'(x)=5x^4+6ax^2+3b$，由于 $3a^2-$

$5b<0$所以 $f'(x)>0$，即 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$严格单增.

又由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$知. $f(x)=0$ 在$(-\infty,+\infty)$有唯一实根.

11. 设常数 $k>0$，试确定 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$ 在$(0,+\infty)$内零点的个数.

解　$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e}$，令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=e$，在$(0,+\infty)$内无不可导点.

当 $x>e$ 时，$f'(x)<0$，当 $0<x<e$ 时，$f'(x)>0$. 故 $f(x)$有唯一的极值 $f(e)=k>0$，且 $f(e)$为极大值.

又因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x-\dfrac{x}{e}+k\right)=-\infty$，由零点定理知$\exists x_1\in(0,e)$，使 $f(x_1)=0$.

而且由于当 $x\in(0,e)$时，$f'(x)>0$，即 $f(x)$在$(0,e)$严格单增，所以 x_1 是 $f(x)=0$ 在$(0,e)$内唯一的根.

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$. 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{e}\right)+k\right]=-\infty$. 类似可证在$(e,+\infty)$内$f(x)$有唯一的零点 x_2.

综上所述，$f(x)$在$(0,+\infty)$内有且仅有两个零点 $x_1\in(0,e)$，$x_2\in(e,+\infty)$.

12. 求下列函数在给定区间上的最大值和最小值.

(2) $f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x, x\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{3\pi}{4}\right]$；

(4) $f(x)=\max\{x^2,(1-x)^2\}, x\in[0,1]$.

解　(2) $f'(x)=3\sin x\cos x(\sin x-\cos x)$，令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x_1=\dfrac{\pi}{2}$，$x_2=\dfrac{\pi}{4}$. 又 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$，$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{8}+\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$，$f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=0$.

故 $f(x)$的最大值为 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$，最小值 $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=0$.

(4) $$f(x)=\max\{x^2,(1-x)^2\}=\begin{cases}(x-1)^2, & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2},\\ x^2, & \dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}2(x-1), & x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right),\\ 2x, & x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right).\end{cases}$$

所以 $f(x)$无驻点，只有一不可导点 $x=\dfrac{1}{2}$. 又 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$，$f(0)=f(1)=$

1，故 $f(x)$的最大值为 $f(0)=f(1)=1$，最小值 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

13. 证明下列不等式：

(2) $|3x-x^3|\leqslant 2, x\in[-2,2]$； (3) $x^x\geqslant e^{-\frac{1}{e}}, x\in(0,+\infty)$.

证 (2) 令 $f(x)=3x-x^3$，则 $f(x)$在$[-2,2]$上的最大值为 2，最小值为 -2，即 $\forall x\in[-2,2]$，$-2\leqslant f(x)\leqslant 2$，即$|f(x)|\leqslant 2$.

(3) 取 $f(x)=x^x$. 那么 $f'(x)=x^x(\ln x+1)$，则 $x=e^{-1}$是 $f(x)$在$(0,+\infty)$内唯一的驻点，且当 $x>e^{-1}$时，$f'(x)>0$，当 $0<x<e^{-1}$时，$f'(x)<0$. 故 $x=e^{-1}$是 $f(x)$在$(0,+\infty)$内唯一的极值点，且为极小值.

故 $\forall x\in(0,+\infty)$，$f(x)=x^x\geqslant(e^{-1})^{e^{-1}}=e^{-\frac{1}{e}}$.

17. 设某银行中的总存款量与银行付给存户利率的平方成正比，若银行以 20%的年利率把总存款的 90%贷出，问它给存户支付的年利率定为多少时才能获得最大利润？

解 设银行给存户支付的年利率为 x，则其所获利润为

$T(x)=20\%\times 90\%\times kx^2-x\cdot kx^2$，$0<x<100\%$，

$T'(x)=0.36\,kx-3\,kx^2$，于是 $T(x)$在$(0,1)$内有唯一驻点 $x_0=0.12$.

$T''(x_0)=-0.36\,k<0$，于是 $T(x)$在$(0,1)$内有最大值 $T(0.12)$.

故当 $x=12\%$时，银行获利最大.

18. 已知轮船的燃料费与速度的立方成正比，当速度为 10 km/h，每小时的燃料费为 80 元，又其他费用每小时需 480 元. 问轮船的速度多大时，才能使 20 km 航程的总费用最少？此时每小时的总费用等于多少？

解 设轮船的速度为 v，此时 20 km 航程的总费用为 T，则

$$T=T(v)=\frac{20}{v}\cdot 480+\frac{20}{v}\cdot\left(\frac{80}{10^3}\right)v^3, v\in[0,+\infty),$$

$T'(v)=-\frac{9\,600}{v^2}+3.2v$. 令 $T'(v)=0$ 得 $v_0=10\sqrt[3]{3}$(km/h).

由于 $v_0=10\sqrt[3]{3}$是唯一驻点. 由定理 6.3 知，v_0 即是 $T(v)$的最小值点. 故轮船的速度为 $10\sqrt[3]{3}$ km/h 时，20 km 航程的总费用最少. 此时每小时的总费用为 $480+\left(\frac{80}{10^3}\right)(10\sqrt[3]{3})^3=720$ 元.

19. 曲线 $y=4-x^2$ 与 $y=2x+1$ 相交于 A、B 两点，C 为弧段 AB 上的一点，问 C 点在何处时$\triangle ABC$ 的面积最大？求此面积.

解 $A(1,3)$，$B(-3,-5)$，设 $C(x,4-x^2)$，则$\triangle ABC$ 面积为

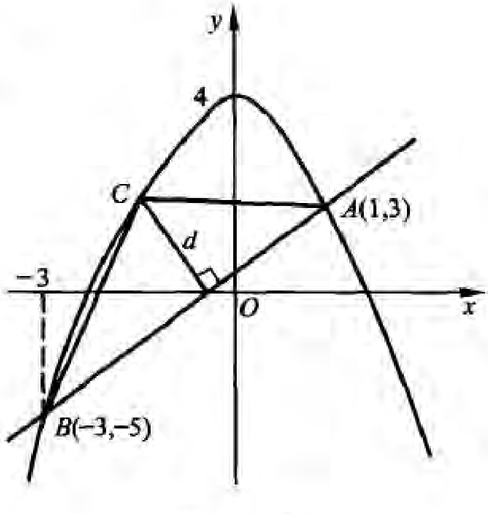
$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d,$$

$|AB|=\sqrt{(-3-1)^2+(-5-3)^2}=4\sqrt{5}$,

$d=\dfrac{|x^2+2x-3|}{\sqrt{5}}$ 为 C 到直线 AB 的距离,故

$S^2=4(x^2+2x-3)^2$,　$x\in[-3,1]$,

则 S^2 在$[-3,1]$上最大值为 $S^2\Big|_{x=-1}=8^2$,故当 C 取在曲线上$(-1,3)$处时,$\triangle ABC$ 面积最大为 8.



(第 19 题图)

20. 用仪器测量某零件的长度 n 次,得到 n 个略有差别的数:$a_1,a_2,\cdots,a_n$. 证明:用算术平均值

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$$

作为该零件的长度 x 的近似值,能使

$$f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$$

达到最小.

解　$f'(x)=2\sum\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)=2\left[nx-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right]$. 令 $f'(x)=0$ 得唯一驻点 $\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$. 又因为 $f''(x)=2n>0$,故 $\bar{x}$ 为 $f(x)$的极小值点,从而 $\bar{x}$ 为 $f(x)$的最小值点. 故用 $\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 作为该零件长度 x 的近似值,能使 $f(x)$达到最小.

22. 讨论下列函数的凸性与相应曲线拐点:

(2) $f(x)=x+\sin x$.

解　(2) $f'(x)=1+\cos x$,$f''(x)=-\sin x$,令 $f''(x)=0$ 得 $x_n=n\pi$,$n\in\mathbf{N}$.

当 $x\in(2n\pi,2n\pi+\pi)$时,$f''(x)<0$,即 f 在$(2n\pi,(2n+1)\pi)$为凹函数;

当 $x\in((2n+1)\pi,2(n+1)\pi)$时,$f''(x)>0$,故 f 在$((2n+1)\pi,2(n+1)\pi)$为凸函数.

23. 证明下列不等式:

(1) $\dfrac{1}{2}(a^n+b^n)>\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n$　$(a,b>0,a\neq b,n>1)$;

(2) $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}$　$(x,y>0,x\neq y)$.

证　(1) 取 $f(x)=x^n$,则 $f'(x)=nx^{n-1}$,$f''(x)=n(n-1)x^{n-2}>0$ 当$(x>0)$,

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为严格凸函数，进而 $\forall a,b>0,a\neq b$. 有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{f(a)+f(b)}{2},\text{即}\left(\frac{a+b}{2}\right)^n<\frac{1}{2}(a^n+b^n).$$

(2) 取 $f(u)=u\ln u$，则 $f'(u)=\ln u+1,f''(u)=\frac{1}{u}>0,u>0$.

故 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格凸，从而 $\forall x,y>0,x\neq y$.

$$\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2}<\frac{x\ln x+y\ln y}{2},$$

即
$$(x+y)\ln\frac{x+y}{2}<x\ln x+y\ln y.$$

24. 设在区间 I 上，$f''(x)>0,a,a+h,a-h(h>0)$ 是 I 内三点，证明：

$$f(a+h)+f(a-h)>2f(a).$$

证 因为 $f''(x)>0$，所以 $f(x)$ 是 I 上严格凸函数，又因为 $a,a+h,a-h\in I$，所以 $f\left[\frac{(a+h)+(a-h)}{2}\right]=f(a)<\frac{1}{2}[f(a+h)+f(a-h)]$，即

$$f(a+h)+f(a-h)>2f(a).$$

25. 设 $0<x_1<x_2<\cdots<x_n<\pi$，证明：

$$\sin\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)>\frac{1}{n}(\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n).$$

证 取 $f(x)=\sin x,x\in[0,\pi]$，因为 $f''=-\sin x<0,x\in(0,\pi)$，所以 $f(x)$ 是 $(0,\pi)$ 上的严格凹函数. 由定理 6.6，取 $\lambda_i=\frac{1}{n},i=1,2,\cdots,n$.

可得
$$f\left(\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i\right)>\sum_{i=1}^n\lambda_if(x_i),\text{即}$$

$$\sin\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)>\frac{1}{n}(\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n).$$

26. 利用 $f(x)=-\ln x(x>0)$ 是凸函数（因而 $\ln x$ 为凹函数）证明：

(1) $x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}\leqslant\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n$（其中 $x_i>0,\lambda_i\geqslant0,\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$）；

(2) 当 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 时，

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

证 (1) 因为 $f(x)=-\ln x$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数，且 $x_i>0,\lambda_i\geqslant0$，及 $\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$，所以 $f\left(\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^n\lambda_if(x_i)$，

即 $\ln(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)\geqslant\lambda_1\ln x_1+\lambda_2\ln x_2+\cdots+\lambda_n\ln x_n$，

即 $\ln(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)\geqslant\ln(x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n})$.

由 $\ln x$ 的单调增可知：$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n\geqslant x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}$.

(2) 令 $\lambda_i=\dfrac{1}{n}$, $i=1,2,\cdots,n$. 由结论(1)可知：$\forall x_i>0$, $i=1,2,\cdots,n$

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

令 $\lambda_i=\dfrac{1}{n}$, $x_i=\dfrac{1}{y_i}$, $i=1,2,\cdots,n$. 则由结论(1)，当且仅当 $y_i>0$ 时，

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\cdots+\frac{1}{y_n}\right)\geqslant\left(\frac{1}{y_1}\frac{1}{y_2}\cdots\frac{1}{y_n}\right)^{\frac{1}{n}},$$

即

$$\sqrt[n]{y_1y_2\cdots y_n}\geqslant\frac{n}{\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2}+\cdots+\dfrac{1}{y_n}},$$

故

$$\frac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

(B)

1. 证明定理 6.4.

证　由于 f 在 x_0 处 n 阶可导，且 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，所以 $f(x)$ 在 x_0 处带 Peano 余项的 n 阶 Taylor 公式为

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),$$

从而

$$f(x)-f(x_0)=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n).$$

如果 n 为偶数，类似于定理 6.3 的证明可得结论(1).

如果 n 为奇数，由于上式右端第二项是第一项的高阶无穷小，因此在 x_0 的充分小邻域内，$f(x)-f(x_0)$ 的符号取决于第一项，当 $x<x_0$ 时，$f(x)-f(x_0)$ 与 $f^{(n)}(x_0)$ 异号；当 $x>x_0$ 时，$f(x)-f(x_0)$ 与 $f^{(n)}(x_0)$ 同号. 故在 x_0 的充分小邻域内，$f(x)-f(x_0)$ 不定号. 即 x_0 非极值点.

2. 证明下列不等式：

(3) $\sin x+\tan x>2x\quad\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$;

(4) $\dfrac{|a+b|}{\pi+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|}{\pi+|a|}+\dfrac{|b|}{\pi+|b|}(a,b\in\mathbf{R})$.

证 (3) 令$f(t)=\sin t+\tan t-2t$,那么 $f'(t)=\cos t+\sec^2 t-2$,

$$f''(t)=\frac{(2-\cos^3 t)\sin t}{\cos^3 t}>0, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

故 $f'(t)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上严格增,于是$\forall t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$f'(t)>f'(0)=0$,进而 $f(x)$是$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上的严格增函数,即$\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

$$f(x)>f(0),\text{即} \sin x+\tan x>2x.$$

(4) 取 $f(x)=\frac{x}{\pi+x}$,则 $f'(x)=\frac{\pi}{(\pi+x)^2}>0$,即 $f(x)$为严格单增函数. 因而对$\forall a,b\in\mathbf{R}$,由于$|a+b|\leqslant|a|+|b|$,所以

$$\frac{|a+b|}{\pi+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{\pi+|a|+|b|}\leqslant\frac{|a|}{\pi+|a|}+\frac{|b|}{\pi+|b|}.$$

3. 证明:方程 $\sin x=x$ 只有一个实根.

证 显然 $\sin x=x$ 在$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$上无解.

对$[-1,1]$,取 $f(x)=x-\sin x$,则 $f'(x)=1-\cos x\geqslant0$,且当且仅当 $x=0$ 时$f'(x)=0$. 即 $f(x)$在$[-1,1]$严格单增. 又 $f(0)=0$,故 $x=0$ 是 $\sin x=x$ 的唯一的实根.

4. 设 $0\leqslant x_1<x_2<x_3\leqslant\pi$,证明:$\frac{\sin x_2-\sin x_1}{x_2-x_1}>\frac{\sin x_3-\sin x_2}{x_3-x_2}$.

证 令 $f(x)=\sin x$,在$[x_1,x_2]$及$[x_2,x_3]$上分别应用 Lagrange 中值定理得$\exists\xi_1\in(x_1,x_2)$及$\xi_2\in(x_2,x_3)$使

$$\frac{\sin x_2-\sin x_1}{x_2-x_1}=\cos\xi_1,\frac{\sin x_3-\sin x_2}{x_3-x_2}=\cos\xi_2.$$

又因为 $0\leqslant x_1<\xi_1<x_2<\xi_2<x_3\leqslant\pi$,且 $\cos x$ 在$[0,\pi]$上严格减,

故 $\cos\xi_1>\cos\xi_2$. 从而

$$\frac{\sin x_2-\sin x_1}{x_2-x_1}>\frac{\sin x_3-\sin x_2}{x_3-x_2}.$$

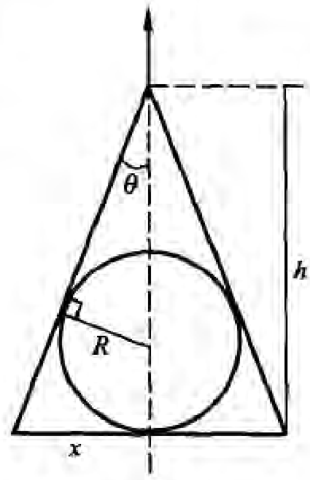
5. 设 $f(x)=(x-x_0)^n g(x)$,$n\in\mathbf{N}_+$,$g(x)$在 x_0 处连续,且 $g(x_0)\neq0$. 问 $f(x)$在 x_0 处有无极值?

解 因 $g(x_0)\neq0$. 不妨设 $g(x_0)>0(<0)$,又 $g(x)$在 x_0 处连续,由函数极限的局部保号性可知:$\exists U(x_0,\delta)$,使$\forall x\in U(x_0,\delta)$,$g(x)>0(<0)$. 于是,$\forall x\in U(x_0,\delta)$,当 n 为偶数时,$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)^n g(x)>0$. 也即 x_0 为$f(x)$的极小(大)值点;当 n 为奇数时,如 $x\in(x_0-\delta,x_0)$,$f(x)-f(x_0)<0\ (>0)$;如 $x\in(x_0,x_0+\delta)$,$f(x)-f(x_0)>0(<0)$. 故 x_0 非极值点.

综上所述,当 n 为奇数时,x_0 不是 $f(x)$的极值点;当 n 为偶数时,若$g(x_0)>0$,x_0

为 $f(x)$ 的极小值点，若 $g(x_0)<0$，x_0 为 $f(x)$ 的极大值点.

6. 求半径为 R 的球的外切正圆锥的最小体积.



（第 6 题图）

解　设正圆锥的半顶角为 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，底半径为 x. 体积为 V，则 $\frac{R}{h-R}=\sin\theta$，$\frac{x}{h}=\tan\theta$，进而

$h=R\left(1+\frac{1}{\sin\theta}\right)$，$x=h\tan\theta=R\left(1+\frac{1}{\sin\theta}\right)\tan\theta$. 从而

$$V=\frac{1}{3}\pi x^2h=\frac{1}{3}\pi R^3\ \frac{(1+\sin\theta)^3}{\sin\theta\cos^2\theta},\quad \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

那么 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}=\frac{1}{3}\pi R^3\ \frac{(1+\sin\theta)^2\cos\theta[3\cos^2\theta\sin\theta-(1+\sin\theta)(\cos^2\theta-2\sin^2\theta)]}{\sin^2\theta\cos^4\theta}$

$$=\frac{1}{3}\pi R^3(1+\sin\theta)^3\ \frac{3\sin\theta-1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}.$$

令 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}=0$，并考虑到 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin\theta+1\neq0$，$\cos\theta\neq0$，得 $\sin\theta=\frac{1}{3}$，即 $\theta=\arcsin\frac{1}{3}$ 是 V 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的唯一驻点. 又因为此实际问题一定存在最小值，故 $\theta=\arcsin\frac{1}{3}$ 一定是 V 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的最小值点. $h\big|_{\theta=\arcsin\frac{1}{3}}=4R$，$x\big|_{\theta=\arcsin\frac{1}{3}}=\sqrt{2}R$，最小体积 $V=V\big|_{\theta=\arcsin\frac{1}{3}}=\frac{8}{3}\pi R^3$.

7. 求常数 k 的取值范围，使当 $x>0$ 时，方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个根.

解　① $k=0$，则方程变为 $\frac{1}{x^2}=1$，则在 $(0,+\infty)$ 有且仅有唯一解 $x^*=1$.

令 $f(x)=kx+\frac{1}{x^2}-1$.

② 如果 $k>0$，$f'(x)=k-\frac{2}{x^3}$，令 $f'(x)=0$ 得在 $(0,+\infty)$ 上 $f(x)$ 有唯一驻点 $x_0=\sqrt[3]{\frac{2}{k}}$. 又 $f''\left(\sqrt[3]{\frac{2}{k}}\right)>0$，因而 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值. 即

$$f\left(\sqrt[3]{\frac{2}{k}}\right)=\min_{x\in(0,+\infty)}f(x)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2k^2}-1.$$

若 $k>\frac{2\sqrt{3}}{9}$，则 $f(x)>f(x_0)>0$，$x\in(0,+\infty)$，即方程 $f(x)=0$ 无解；如果

$k<\frac{2\sqrt{3}}{9}$，由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，所以 $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有两个根. 若 $k=\frac{2\sqrt{3}}{9}$，x_0 是 $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 唯一的根.

③ 如果 $k<0$，则 $f'(x)<0(x\in(0,+\infty))$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单减. 又因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$. 故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一的正根.

综上所述，当 $k=\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 或 $k\leqslant0$ 时，方程 $f(x)=0$，即 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个根.

8. 设某产品的成本函数为 $C=aq^2+bq+c$，需求函数为 $q=\frac{1}{e}(d-p)$，其中 C 为成本，q 为需求量（即产量），p 为单价；a,b,c,d,e 都是正的常数，且 $d>b$. 求使利润最大的产量及最大的利润.

解　由需求量（即产量）$q=\frac{1}{e}(d-p)$ 得产品单价 $p=d-eq$，从而利润 $T=T(q)=pq-C=-(e+a)q^2+(d-b)q-c$.

经计算知：当 $q=\frac{d-b}{2(a+e)}$ 时，利润 T 取得最大值. 且最大利润为 $T\left(\frac{d-b}{2(a+e)}\right)=\frac{(d-b)^2}{4(a+e)}-c$.

10. 有人说"若 $f'(x_0)>0$，则存在 x_0 的某邻域，在此邻域内 $f(x)$ 单调增". 这种说法正确吗？如果正确，请给出证明；如果不正确，请举例说明并给出正确结论.

解　不正确. 如

$$f(x)=\begin{cases}x+2x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\quad f'(x)=\begin{cases}1+4x\sin\frac{1}{x}-2\cos\frac{1}{x}, & x\neq0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

当 $x_n=\frac{1}{(2n+1)\pi}$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时，$f'(x_n)=3>0$.

当 $y_n=\frac{1}{2n\pi}$ 时，$f'(y_n)=-1<0$.

即在原点的任一邻域内，$f'(x)$ 有取正值的点也有取负值的点，因为 $f'(x)$ 在 $x\neq0$ 的一切点都连续，故 $f(x)$ 在原点的任一邻域内都不单调. 正确的结论应为

若 $f'(x_0)>0$，且 $f'(x)$ 在 x_0 连续，则存在 x_0 的某邻域，在此邻域内 $f(x)$ 单调增.