5.2连续函数的运算性质

- 和、差、积、商的连续性
- 复合函数的连续性
- 反函数的连续性
- 初等函数的连续性
- 幂指函数的连续性（一类特殊的初等函数）

和、差、积、商的连续性

定理5.1 如果$f(x),g(x)$在x_0处连续，则

$$f(x)\pm g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}\big(g(x_0)\neq 0\big)\text{在}x_0\text{处都连续.}$$

例：

$\sin x$ 连续
$\cos x$ 连续

$\Rightarrow$

$\tan x$
$\cot x$
$\sec x$
$\csc x$

在定义域内都连续

定理5.2 复合函数的连续性

$g(x)$在x_0处连续
$f(x)$在$g(x_0)$处连续

$\Rightarrow$

复合函数
$y=f\left(g(x)\right)$在x_0处连续

连续性定义 $\Longrightarrow$ $$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right)$$

复合函数连续性 $\Longrightarrow$ $$\lim_{x\to x_0} f\left(g(x)\right) = f\left(g(x_0)\right) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)$$

连续性就意味着函数运算和极限运算的换序！

定理5.3 反函数的连续性

若$f(x)$: $I\to \mathrm{R}$是严格单调增（减）的连续函数，则其反函数$f^{-1}(x)$存在，并且也是$f(I)$上严格单调增（减）的连续函数

三角函数连续 ⇒ 反三角函数连续

a^x连续 ⇒ 对数函数连续 ⇒ $x^a=e^{a\ln x}$连续

1.初等函数的连续性

所有的基本初等函数在定义域内都是连续的

所有的初等函数在<u>**定义域内的任何区间**</u>上都是连续的

称为
定义区间

注：由于初等函数的定义域可能含有孤立点，因此不能够说在定义域内连续

例5.9 讨论函数$f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$的连续性，并判断间断点的类型.

例5.10 讨论函数$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}, & x \neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$的连续性

幂指函数的连续性

幂指函数 $f(x)^{g(x)}, f(x) > 0$ 一类特殊的初等函数

$$= e^{g(x)\ln f(x)}$$

若 $\lim g(x)\ln f(x)$ 存在

$$\Rightarrow \lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x)\ln f(x)}$$

例： 求极限 $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

例5.11 计算下列极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$　　2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}$

$$\Rightarrow\quad \ln(1+x)\sim x,\quad e^x-1\sim x,\quad (1+x)^a-1\sim ax$$

5. 3闭区间上连续函数的性质

- 有界性定理
- 最值定理
- 零点存在定理（二分法）
- 介值定理

一、有界性定理

定理5. 4（有界性） 在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

反证法 + Weiestrass 定理

练习：利用闭区间套定理证明有界性定理。

二、最大值和最小值定理

定义： 对于在区间I上有定义的函数$f(x)$，如果有$x_0 \in I$，使得对于任一$x \in I$都有

$$f(x) \le f(x_0) \qquad (f(x) \ge f(x_0))$$

则称$f(x_0)$是函数$f(x)$在区间I上的最大(小)值.

例如，$y = 1 + \sin x$，在$[0,2\pi]$上，$y_{\max} = 2$，$y_{\min} = 0$；

$y = \operatorname{sgn} x$，在$(-\infty,+\infty)$上，$y_{\max} = 1$，$y_{\min} = -1$；

在$(0,+\infty)$上，$y_{\max} = y_{\min} = 1$.

定理5.5（最大值和最小值定理） 在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

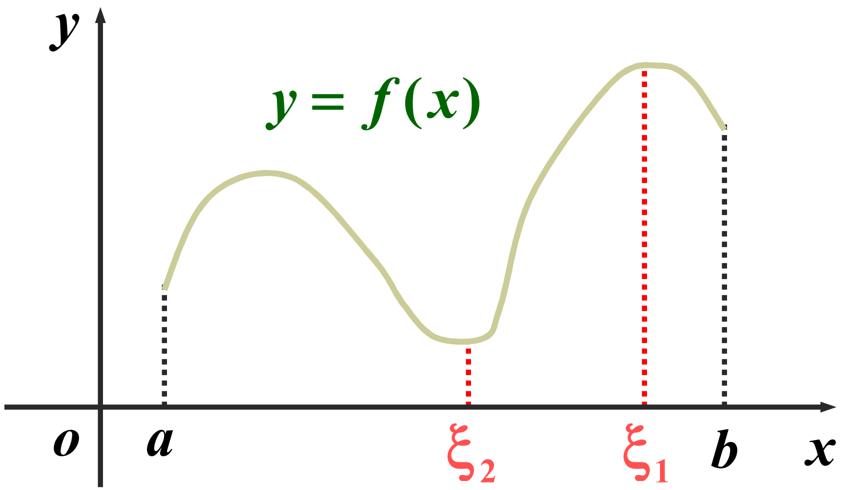
若 $f(x) \in C[a,b]$,

则 $\exists \xi_1, \xi_2 \in [a,b]$,

使得 $\forall x \in [a,b]$,

有 $f(\xi_1) \geq f(x)$,

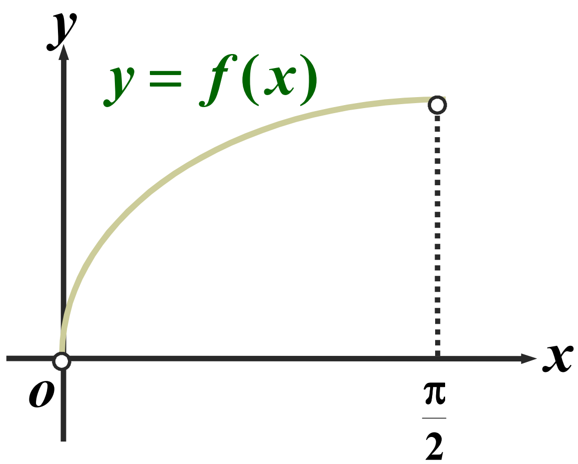
$f(\xi_2) \leq f(x)$.

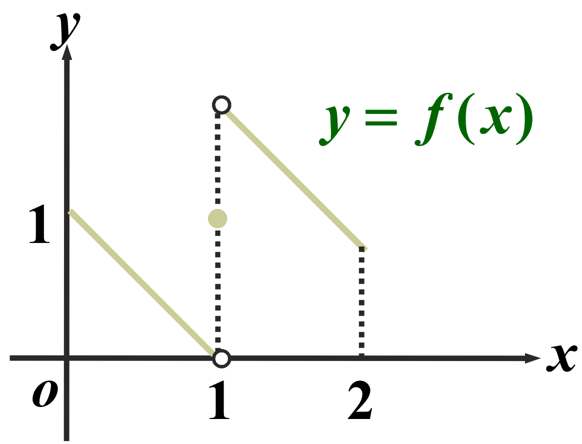


定理5.5(最大值和最小值定理) 在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

注意: 1.若区间是开区间，定理不一定成立;

2.若区间内有间断点，定理不一定成立.





三、零点存在定理

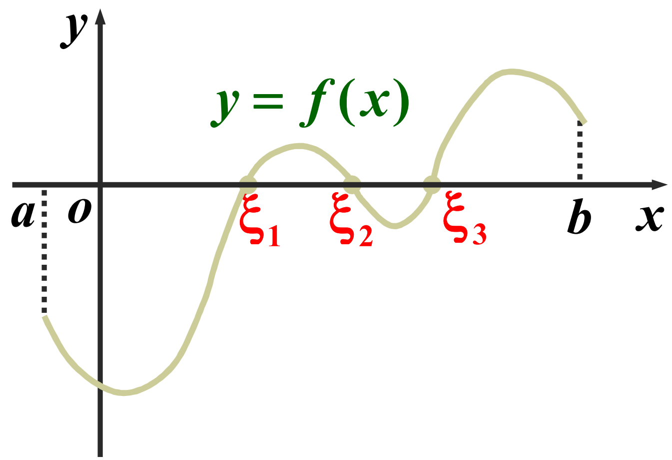
定义: 如果x_0使$f(x_0)=0$, 则x_0称为函数$f(x)$的零点.

定理 5. 6(零点定理)　设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)$与$f(b)$异号(即$f(a)\cdot f(b)<0$), 那末在开区间(a,b)内至少有函数$f(x)$的一个零点, 即至少有一点$\xi\,(a<\xi<b)$, 使$f(\xi)=0$.

即方程$f(x)=0$在(a,b)内至少存在一个实根 .

几何解释:

连续曲线弧 $y=f(x)$ 的两个端点位于 x 轴的不同侧，则曲线弧与 x 轴至少有一个交点.



例1 证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一根.

证 令 $f(x)=x^3-4x^2+1$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,

又 $f(0)=1>0$, $f(1)=-2<0$, 由零点定理,

$\exists\, \xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=0$, 即 $\xi^3-4\xi^2+1=0$,

$\therefore$ 方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一根 ξ.

求方程的近似解 —— 二分法

1)问题：

给定方程f(x)=0,设f(x)在区间[a,b]连续,且f(a)f(b)<0,则方程f(x)在(a,b)内至少有一根,为便于讨论,不妨设方程f(x)=0在(a,b)内只有一个(重根视为一个)实根x^*，求满足精度要求的的近似值实根$\tilde{x}$。

2) 解题思路

取$[a,b]$区间二等分的中点$c=\dfrac{a+b}{2}$:

若$f(c)=0$, 则c为实根;

若$f(a)f(c)<0$, 则x^*在区间(a,c)内, 取$a_1=a, b_1=c$;

若$f(b)f(c)<0$, 则x^*在区间(c,b)内, 取$a_1=c, b_1=b$.

这样, 得到新区间$[a_1,b_1]$, 其长度为$[a,b]$的一半, 如此继续下去, 进行n次等分后, 得到一组不断缩小的区间

$$[a,b],[a_1,b_1],\cdots,[a_n,b_n]$$

2) 解题思路

由于$\left|a_n - b_n\right| = \dfrac{|a-b|}{2^n}$，对于给定精度$\varepsilon$,

当n充分大时，有$\left|a_n - b_n\right| < \varepsilon.$

此时，$\forall \tilde{x} \in [a_n, b_n]$均满足$\left|x^* - \tilde{x}\right| < \varepsilon$,

即为所求方程的近似解

以上方法就是用于求方程实根近似值的二分法

3) 迭代步数n的确定

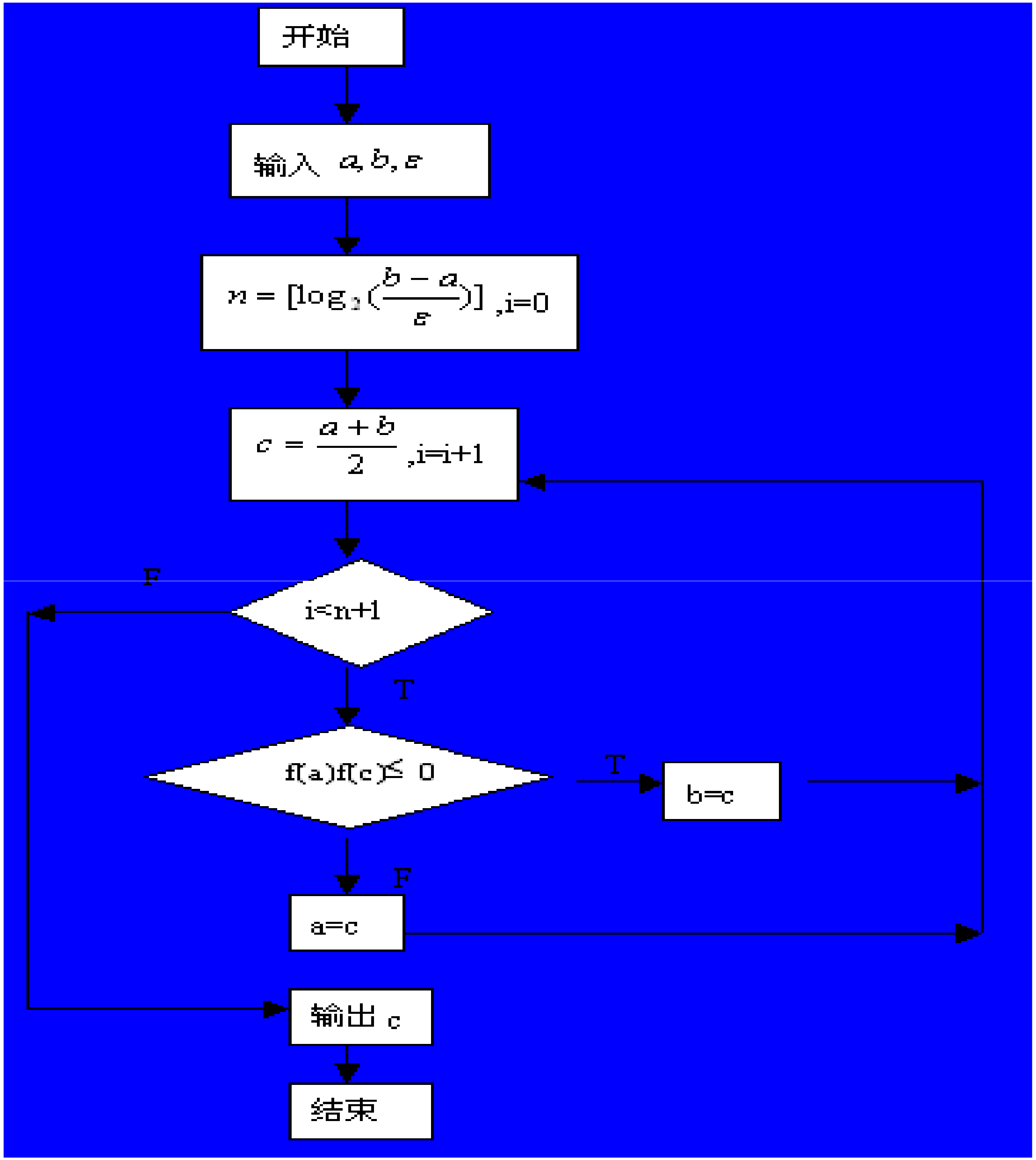
由于 $|b_n - a_n| = b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$

根据 $\dfrac{b-a}{2^n} \le \varepsilon \Leftrightarrow n \ge \log_2(\dfrac{b-a}{\varepsilon})$

因此只要取 $n = [\log_2(\dfrac{b-a}{\varepsilon})] + 1$

则 $\forall \tilde{x} \in [a_n, b_n]$，都有 $|x^* - \tilde{x}| \le \varepsilon$

4)计算框架图



开始
输入 a, b, ε
$n = [\log_2(\frac{b-a}{\varepsilon})]$,i=0
$c = \frac{a+b}{2}$,i=i+1
i<n+1
F
T
f(a)f(c)≤ 0
T
b=c
F
a=c
输出 c
结束

例5.13 证明方程$x^3+x^2-4x+1=0$的三个根都在区间$(-3,2)$内.

例5.14 设函数$f(x):[0,1]\to[0,1]$连续，证明存在$t\in[0,1]$,使$f(t)=t$.

四、介值定理

定理 5.7(介值定理)

设函数 $f(x)$在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在这区间的端点取不同的函数值

$$f(a)=A \text{ 及 } f(b)=B,$$

那末，对于A与B之间的任意一个数C，在开区间(a,b)内至少有一点ξ，使得 $f(\xi)=C \quad (a<\xi<b)$.

几何解释:

连续曲线弧 $y=f(x)$与水平直线$y=C$至少有一个交点.

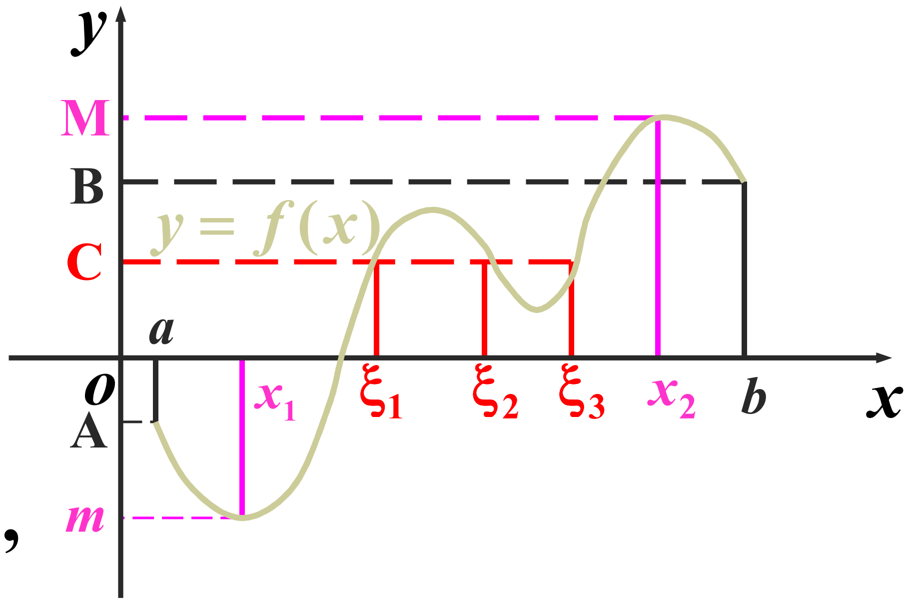
证 设$\varphi(x) = f(x) - C$,

则$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续,

且$\varphi(a) = f(a) - C$

$= A - C$,

$\varphi(b) = f(b) - C = B - C$,



$\therefore \varphi(a) \cdot \varphi(b) < 0$, 由零点定理, $\exists \xi \in (a,b)$,使

$\varphi(\xi) = 0$, 即 $\varphi(\xi) = f(\xi) - C = 0$, $\therefore f(\xi) = C$.

推论5. 1 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值M 与最小值m之间的任何值.

推论5. 2 闭区间上非常数的连续函数的值域为闭区间.

例5.16 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，

$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$ 则在 $[x_1, x_n]$上必有

ξ，使 $$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots\ldots + f(x_n)}{n}.$$

例2 设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$f(a)<a$，$f(b)>b$. 证明$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\xi$.

证 令 $F(x)=f(x)-x$，则$F(x)$在$[a,b]$上连续，

而 $F(a)=f(a)-a<0$， $F(b)=f(b)-b>0$，

由零点定理，$\exists\xi\in(a,b)$， 使

$F(\xi)=f(\xi)-\xi=0$，即 $f(\xi)=\xi$.

思考题

下述命题是否正确？

如果$f(x)$在$[a,b]$上有定义，在(a,b)内连续，且$f(a)\cdot f(b)<0$，那么$f(x)$在(a,b)内必有零点.

思考题解答

不正确.

例函数 $f(x)=\begin{cases} e, & 0<x\le 1 \\ -2, & x=0 \end{cases}$

$f(x)$在$(0,1)$内连续, $f(0)\cdot(1)=-2e<0.$

但$f(x)$在$(0,1)$内无零点.

5.4 函数的一致连续性

连续的定义：

$\forall \varepsilon > 0, \underline{\exists \delta > 0}$, 使当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

与 x_0 有关

是一个局部概念

整体化

一致连续——在某个区间上“一起”连续

一致连续的定义

定义：设$f(x)$为区间I上的函数，若$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0,$

使得$\forall x_1, x_2 \in I$, 当$|x_1 - x_2| < \delta$时, 恒有$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$

则称$f(x)$是区间I上的**一致连续函数**

例5.17 $\sin x$和$\cos x$在$(-\infty, +\infty)$上一致连续;

例5.18 $\sin\dfrac{1}{x}$在$(0,1]$上连续但不一致连续.

一致连续性定理

定理5.8 设$f(x)\in C[a,b]$，则$f(x)$在$[a,b]$上一致连续.

反证法　+　Weiestrass 定理

闭区间上的连续函数都是一致连续的

练 习 题

一、证明方程 $x = a\sin x + b$ ，其中 $a > 0, b > 0$ ，至少有一个正根，并且它不超过 $a + b$.

二、 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$ 则在 $[x_1, x_n]$上必有 ξ ，使 $f(\xi) = \dfrac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots\ldots + f(x_n)}{n}$.

三、 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续， $a < c < d < b$,试证明：对任意正数p和q；至少有一点 $\xi \in [c, d]$,使 $pf(c) + qf(d) = (p+q)f(\xi)$.