第二章　一元函数微分学及其应用

习　题　2.1

(A)

1. 用导数定义求下列函数的导数：

(1) $f(x)=\cos x$；　　(2) $f(x)=\ln x$；

(3) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 求 $f'(0)$；　　(4) $f(x)=x|x|$，求 $f'(0)$.

解 (1) $$(\cos x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=-\sin x.$$

(2) $$(\ln x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}.$$

(3) $$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2\sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}=0.$$

(4) $$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x|\Delta x|-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0.$$

2. 已知函数 f 在 x_0 处可导，求下列极限：

(1) $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；　　(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$；

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]$；　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{x_0 f(x)-x f(x_0)}{x-x_0}$.

解 (1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=-f'(x_0)$.

(2) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\right]=2f'(x_0).$$

(3) $$\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)}{\frac{1}{n}}=f'(x_0).$$

(4) $$\lim_{x\to x_0}\frac{x_0f(x)-xf(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{x_0[f(x)-f(x_0)]}{x-x_0}-f(x_0)\right]$$

$$=x_0f'(x_0)-f(x_0).$$

5. 问曲线 $y=x^{3/2}$ 上哪一点的切线与直线 $y=3x-1$ 平行？

解 曲线 $y=x^{3/2}$ 上点 $P(x_0,x_0^{3/2})$ 处切线的斜率为 $k=\frac{3}{2}\sqrt{x_0}$. 令 $\frac{3}{2}\sqrt{x_0}=3$ 得 $x_0=4$. 所以(4,8)处切线平行于 $y=3x-1$.

7. 设 f 是偶函数，且 $f'(0)$ 存在，证明 $f'(0)=0$.

证 因为 f 为偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$，从而

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-\Delta x)-f(0)}{-\Delta x}=-f'(0)$$

8. 设函数 φ 在 $x=a$ 处连续，$f(x)=(x-a)\varphi(x)$，证明：函数 f 在 $x=a$ 处可导；若 $g(x)=|x-a|\varphi(x)$，函数 g 在 $x=a$ 处可导吗？

解 因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x\varphi(a+\Delta x)-0\cdot\varphi(a)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varphi(a+\Delta x)=\varphi(a)$，所以 f 在 a 处可导. 且 $f'(a)=\varphi(a)$.

因为 $$g'_+(a)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\Delta x|\varphi(a+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\varphi(a+\Delta x)=\varphi(a),$$

$$g'_-(a)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|\varphi(a+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x\varphi(a+\Delta x)}{\Delta x}=-\varphi(a),$$

所以 $g(x)=|x-a|\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处不可导.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 试求 $f'(x)$.

解 $x<0$, $f'(x)=(\sin x)'=\cos x$; $x>0$, $f'(x)=(x)'=1$, $x=0$,

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,$$

$f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1$,从而 $f'(0)=1$. 即

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

11. 试确定 a,b 的值,使函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ ax+b, & x>1\end{cases}$$

在 $x=1$ 处连续且可导.

解　因为 $f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b$;$f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1^-}x^2=1$,

由 $f(x)$在 $x=1$ 连续得 $a+b=1$. 又因为$f'_+(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(\Delta x+1)-f(1)}{\Delta x}=$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{a(\Delta x+1)+b-1}{\Delta x}=a$,

$$f'_-(1)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x+1)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}=2,$$

所以由 $f(x)$在 $x=1$ 处可导知:$a=2$,进而 $b=-1$.

12. 已知

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

求 $f'_+(0)$,$f'_-(0)$,问 $f'(0)$是否存在?

解　$f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta x^2-0}{\Delta x}=0$,

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-(\Delta x)-0}{\Delta x}=-1,$$

所以 $f'(0)$不存在.

13. 设物体绕定轴旋转,转角 θ 是时间 t 的函数 $\theta=\theta(t)$. 若旋转是非匀速的,试确定物体在 t_0 时刻的角速度.

解　设 t 时刻物体的角速度为 $\omega(t)$,则从 t_0 时刻到 $t_0+\Delta t$ 的平均角速度为 $\bar{\omega}=\dfrac{\theta(t_0+\Delta t)-\theta(t_0)}{\Delta t}$,所以 $\omega(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\bar{\omega}=\theta'(t_0)$.

14. 设质点在力的作用下所作的功 $W=f(t)$,若功 W 随时间 t 的变化是非均匀的,试求 t_0 时刻的瞬时功率.

解　t_0 时刻的瞬时功率 $P(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{W(t_0+\Delta t)-W(t_0)}{\Delta t}=W'(t_0)$.

15. 设 $N=N(x)$ 表示 x 个劳动力所生产的某产品的数量，若每个劳动力生产的产品数量相同，则 $\frac{N}{x}$ 是常数，称为**劳动生产率**. 实际上，产品的产量 N 并不是随劳动力 x 的增加而均匀增长的. 试求劳动力数量为 x_0 时的劳动生产率(称为**边际劳动生产率**).

解　劳动力数量为 x_0 时的劳动生产率 $P(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{N(x_0+\Delta x)-N(x_0)}{\Delta x}=N'(x_0)$.

16. 证明：双曲线 $xy=1$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形面积都等于 2.

解　$xy=1$ 上 $P(x,y)$ 处切线方程为 $Y-y=-\frac{1}{x^2}(X-x)$，从而它与两坐标轴构成的三角形面积为 $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}\times 2x\right)=2$.

17. 设有可导函数 $f,g:(a,b)\to\mathbf{R}$. 若 $\forall x\in(a,b)$，$f(x)\leqslant g(x)$，则 $\forall x\in(a,b)$，$f'(x)\leqslant g'(x)$，对吗？

解　不对. 如 $f(x)=x$. $g(x)=1-x$. $\forall x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$f(x)\leqslant g(x)$. 但 $\forall x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$f'(x)=1>g'(x)=-1$.

18. 设 $f(0)=0$，$f'(0)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin 2x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{1}{2}\right]=f'(0)\cdot\frac{1}{2}=1$.

(B)

1. 若函数 f 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在. 试证 f 在 $x=0$ 处可导.

证　由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续可知 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，而 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导.

2. 设 f 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数，$f(x)\neq 0$，$f'(0)=1$，且

$$\forall x,y\in(-\infty,+\infty),\ f(x+y)=f(x)f(y).$$

证明：f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $f'(x)=f(x)$.

证　因为 $\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$，$f(x+y)=f(x)f(y)$，且 $f(x)\neq 0$ 可知 $f(1)=f(1+0)=f(1)f(0)$，从而 $f(0)=1$. 进而，

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\cdot\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=f(x)\cdot f'(0)=f(x).$$

3. 设函数 f 在 $x=a$ 处可导，$f(a)\neq 0$，试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$.

证　因为 f 在 $x=a$ 处可导，所以 $f(a+h)-f(a)=h\cdot f'(a)+h\cdot\alpha(h)$，其中 $\lim\limits_{h\to 0}\alpha(h)=0$，从而

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)}{f(a)}\right]^{\frac{1}{h}}=\lim_{h\to 0}\left\{\left[1+h\cdot\frac{f'(a)+\alpha(h)}{f(a)}\right]^{\frac{f(a)}{f'(a)+\alpha(h)}\cdot\frac{1}{h}}\right\}^{\frac{f'(a)+\alpha(h)}{f(a)}}=\mathrm{e}^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

故由 Heine 定理，$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n=\mathrm{e}^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$.

4. 设曲线 $y=f(x)$在原点与 $y=\sin x$ 相切，试求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{2}}\sqrt{f\left(\frac{2}{n}\right)}$.

解　因为 $y=f(x)$在原点与 $y=\sin x$ 相切，所以 $f(0)=0$，$f'(0)=1$. 从而

$$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{2}}\sqrt{f\left(\frac{2}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\sqrt{\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}}}=\sqrt{2f'(0)}=\sqrt{2}.$$

5. 设 $n\in\mathbf{N}_+$，试讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性与可导性以及 $f'(x)$在 $x=0$ 处的连续性.

解　因为 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^n\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$，所以 $f(x)$在 $x=0$ 连续. 又由于 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}$，所以当 $n=1$ 时，$f'(0)$不存在，即 $f(x)$在 $x=0$ 不可导；当 $n>1$ 时，$f(x)$在 $x=0$ 可导. 且 $f'(0)=0$. 进而有，当 $n\geqslant 2$ 时，

$$f'(x)=\begin{cases}nx^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{n-2}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

又因为当 $n=2$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$不存在；当 $n>2$ 时，

$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0=f'(0)$，故当 $n\geqslant 3$ 时，$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

6. 设 $f\in C[a,b]$，$f(a)=f(b)=0$，且 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$. 证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

证 由于 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$，因此不妨设 $f'_+(a)>0$，则 $f'_-(b)>0$，即 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，$f'_-(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$.

由极限的保号性知：$\exists\, x_1,x_2$ 使 $a<x_1<x_2<b$，且

$$\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}>0,\ \frac{f(x_2)-f(b)}{x_2-b}>0,$$

进而可知，$f(x_1)>f(a)=0$，$f(x_2)<f(b)=0$，由零点定理可知至少存在一点 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

习 题 2.2

(A)

1. 求下列函数的导数：

(9) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$；　　(12) $y=\dfrac{e^x\sec x+1}{x^2\log_a\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}}$ $(a>0)$.

解 (9)
$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)'$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{(x+\sqrt{x})'}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right]$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right]$$
$$=\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}.$$

(12)
$$y'=\left(\frac{e^x\sec x+1}{x^2\log_a\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}}\right)'=-3\ln a\left(\frac{e^x\sec x+1}{x^2\ln x}\right)'$$