$$\begin{cases}\dfrac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma I, \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I.\end{cases} \tag{E_1}$$

显然$(S,I) \in (G) = \{(S,I) \mid 0 < S \leqslant k, 0 \leqslant I \leqslant k, S + I = k\}$，其中 k 为人口总数. 由于不考虑人口的出生和自然死亡. 因此 k 为常数.

（2）由于 $S + I = k$，所以原模型的两个方程中只有一个是独立的. 又由于我们主要关心的是疾病的消亡与否，即 I 的变化规律，因此只考虑方程

$$\dot{I} = [\beta(k - I) - \gamma]I = [(\beta k - \gamma) - \beta I]I. \tag{E_2}$$

$I_1 = 0$ 始终是其平衡位置，又当 $k - \dfrac{\gamma}{\beta} > 0$，即 $R_0 \triangleq \dfrac{\beta k}{\gamma} > 1$ 时出现正平衡位置 $I_2 = k - \dfrac{\gamma}{\beta}$.

(E_2)关于 $I_1 = 0$ 的线性近似系统为 $\dot{I} = (\beta k - \gamma)I$，则其特征值为 $\beta k - \gamma$. 故当 $R_0 < 1$ 时 $I_1 = 0$ 稳定；$R_0 > 1$ 时，I_1 不稳定.

(E_2)关于 $I_2 = k - \dfrac{\gamma}{\beta}$的线性近似系统为 $\dot{I} = (\gamma - \beta k)I$，其特征值为 $\gamma - \beta k = 1 - R_0$. 故 $R_0 \not> 1$ 时 $I_2 = k - \dfrac{\gamma}{\beta}$存在时，其渐近稳定. 故此疾病的基本再生数为 $R_0 = \dfrac{\beta k}{\gamma}$，且当$R_0 \leqslant 1$（$R_0 = 1$ 时，(E_2)变为 $\dot{I} = -\beta I^2 \leqslant 0$. 故 $t \to +\infty$ 时，$I \to 0$）时，疾病消亡，当 $R_0 > 1$ 时，发展成地方病.

综合练习题

1. 猪的最佳出售时间问题　养猪场出售生猪有一个最佳出售时间. 因为将生猪在体重过小的时候出售，显然利润不佳. 而猪养得愈大，单位时间饲养费用就愈大，到一定的时候体重的增加速度却会下降，且单位体重的销售价格却不会随体重增加而增加. 因此，饲养时间过短或过长，都是不合算的. 只有选取一个最佳的出售时间，才能获得最大的利润. 试建立这一问题的数学模型，并对最佳出售时间作出理论探讨.（提示：可假定生猪体重 $w(t)$ 符合 Logistic 模型$\dfrac{dw}{dt} = \alpha(1 - aw)$，饲养费用 $y(t)$满足方程$\dfrac{dy}{dt} = b + dw$.）

解　设 $w(t)$为一头猪出生 t 天后的体重（单位：kg），$y(t)$为一头猪从出生到 t 天后所消耗的总饲养费用，c 为每公斤生猪的售价，$L(t)$为 t 时刻出售生猪

可获得的纯利润. 依题意需求函数 $L(t)=cw(t)-y(t)$ 的最大值点,其中 $w(t)$, $y(t)$满足下列微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\alpha(1-aw), & ① \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=b+dw, & ② \end{cases}$$

和初值条件 $w(0)=w_0$(初生小猪的体重),$y(0)=0$,其中 $\alpha>0$ 为生猪体重的生长率,$\overline{w}$ 为生猪体重的最大值. 则 $\overline{w}\triangleq\dfrac{1}{a}>0$,总的饲养费用与生猪的体重成正比,$d>0$ 为其比例常数,$b>0$ 为单位时间内饲养生猪的其他费用. 设 $w(t_s)=w_s$ 为可上市出售的猪的最小体重,t_s 为饲养时间,达到最小可出售体重且能获利的充要条件为

$$cw_s-y(t_s)\geqslant cw_0. \qquad ③$$

方程①为可分离变量的一阶微分方程,且 $w(0)=w_0$,解之得

$$w=w(t)=\overline{w}-(\overline{w}-w_0)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{\overline{w}}t}. \qquad ④$$

令 $w=w_s$,可得 $t_s=\dfrac{\overline{w}}{\alpha}\ln\dfrac{\overline{w}-w_0}{\overline{w}-w_s}$为达到最小可出售体重时的饲养天数.

下面求最大利润 $L(t)$的极值点.

$$\frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t}=c\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

将①,②,④式代入上式可得$\dfrac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{(\overline{w}-w_0)(\overline{w}d+\alpha C)}{\overline{w}}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{\overline{w}}t}-(b+\overline{w}d)$. 令$\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=0$,可求得唯一的驻点 $t_0=\dfrac{\overline{w}}{\alpha}\ln\dfrac{(\overline{w}d+\alpha c)(\overline{w}-w_0)}{\overline{w}(b+\overline{w}d)}$.

易见 t_0 是 $L(t)$的最大值点(因为 $t<t_0$, $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}>0$, $t>t_0$, $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}<0$). 故可得下列结论:

(i) 若$\dfrac{\overline{w}(b+\overline{w}d)}{\overline{w}-w_s}<\overline{w}d+\alpha c$ 时,$t_0>t_s$. 故当生猪的体重达到市场准入体重(最小可出售体重)后再饲养 t_0-t_s 天出售可获最大利润;

(ii) 若$\dfrac{\overline{w}(b+\overline{w}d)}{\overline{w}-w_s}=\overline{w}d+\alpha c$ 时,$t_0=t_s$. 即当生猪的体重达到最小可出售体重时立即出售,可获最大利润. 即饲养 t_s 天出售.

(iii) 若$\dfrac{\overline{w}(b+\overline{w}d)}{\overline{w}-w_s}>\overline{w}d+\alpha c$ 时,$t_0<t_s$. 则虽然饲养 t_0 时出售可使利润最大,

但饲养 t_0 天时，猪的体重还未达到市场准入标准，所以只能等到 $t=t_1$ 时才能售出去.

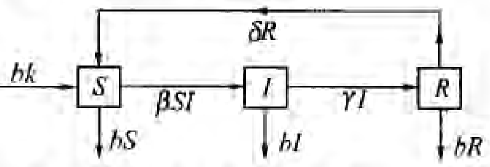
2. 传染病的 $S-I-R-S$ 模型 设有一非致命传染病，在其传播过程中人口的出生率(即单位时间每一个体的平均生育数)为 b，各类人的自然死亡率也为 b，没有因病死亡，从而总人口保持常数 K；每个患者单位时间的传染人数与该时刻的易感者数量成正比，比例系数为 β；单位时间康复者数量与该时刻的患者数成正比，比例系数为 γ；康复者具有暂时的免疫力，但单位时间丧失免疫而再次成为易感者的数量与该时刻位于康复类的数量成正比，比例系数为 δ.

(1) 试建立描述此疾病传播规律的 $S-I-R-S$ 微分方程模型；

(2) 将此模型简化为变量 S 和 I 的模型并求出其平衡点；

(3) 研究平衡点的稳定性，从而求出基本再生数和使疾病消亡或持续的条件.

解 (1) 将某封闭地区(即不考虑人口的迁入迁出)在 t 时刻的人口分成三类：一类是无病但有可能被感者，称为易感者；第二类为染病者(即已患这种疾病，而且具有传染能力)；第三类为移除类(对这种疾病具有非永久性免疫力的人)，其在 t 时刻的数量分别记为 $S(t),I(t),R(t)$ 且 $S(t)+I(t)+R(t)=K$. 依题意此种疾病的传播情况可用下列框图表示.



由此框图可得下述传染病模型($S-I-R-S$ 模型)：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=bK-bS-\beta SI+\delta R,\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta SI-(b+\gamma)I,\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\gamma\nu I-(b+\delta)R,\end{cases}\qquad (*)_1$$

其中 $(S,I,R)\in(G)=\{(S,I,R)\mid S>0,I\geqslant0,R\geqslant0,S+I+R=K\}$.

(2) 由于人口总数 K 保持不变，则 $R=K-S-I$，代入模型，可知 $(*)_1$ 的前两方程是一独立的子系统，故 $(*)_1$ 可简化为下列关于 S 与 I 的模型 $(*)_2$

$$\begin{cases}\dot{S}=(b+\delta)K-(\delta+b)S-\beta SI-\delta I,\\\dot{I}=\beta SI-(b+\gamma)I.\end{cases}\qquad (*)_2$$

(3) 令 $(*)_2$ 中两方程的右端等于零可得

(i) 无论参数取何值,模型$(*)_2$均有无病平衡点$E_0(K,0)$;

(ii) 当$R_0 \triangleq \dfrac{\beta K}{b+\gamma} > 1$时,还存在地方病平衡位置$E^*(S^*,I^*)$,其中$S^* = \dfrac{1}{\beta}(b+\gamma)$,$I^* = \dfrac{(b+\delta)(b+\gamma)}{\beta(b+\delta+\gamma)}(R_0-1)$.

下面讨论E_0,E^*的稳定性.

关于E_0的线性近似系统为$\begin{cases}\dot{S} = -(\delta+b)S-(\delta+\beta K)I, \\ \dot{I} = (\beta K-b-\gamma)I.\end{cases}$　$(*)_3$

则
$$p_0 = -\operatorname{tr}\boldsymbol{A}_0 = (b+\delta+b+\gamma-\beta K) = (b+\gamma)(1-R_0)+b+\delta,$$
$$q_0 = \det\boldsymbol{A}_0 = (b+\delta)(b+\gamma-\beta K) = (b+\delta)(b+\gamma)(1-R_0).$$

由习题7.5(B)第3题知$q>0,p>0$,即$R_0<1$时,E_0渐近稳定,其中$\boldsymbol{A}_0$为$(*)_3$的系数矩阵.

关于E^*的线性近似系统为
$$\begin{cases}\dot{S} = -(b+\delta+\beta I^*)S-(b+\gamma+\delta)I, \\ \dot{I} = \beta I^* S.\end{cases} \qquad (*)_3$$

则
$$p^* = (b+\delta+\beta I^*) > 0 \quad (\text{由}\beta,b,\delta>0,\text{只需}I^*>0),$$
$$q^* = \beta I^*(b+\gamma+\delta) > 0 \quad (\text{只要}I^*>0).$$

故当$I^*>0$,即$R_0>1$(也即E^*存在),E^*就是渐近稳定的. 从而当$R_0<1$时,疾病最终会消亡;当$R_0>1$时,最终会发展成地方病. 而$R_0 = \dfrac{\beta K}{b+\gamma}$就是此种疾病的基本再生数.