无穷小量的前世今生

刘正浩 2019270103005

0. 前奏

无穷小量,一个听起来既熟悉又陌生的名词。我们在学习数学的过程中一定都听说过"无穷小量"这个概念,但无穷小量究竟是什么?打个比方好了:如果说数学是人类智力的那一顶王冠,那么"无穷小量"可以说是这顶王冠上最为璀璨的宝石之一。

从古希腊到工业革命,从东方到西方,人们对无穷小量的追寻从未停止过。无数哲学家、数学家的思考与探究,让这个如幽灵一般诡秘的概念逐渐变得清晰起来;我们也能从中领悟到,数学,这座人类文明史上最宏伟壮丽的大厦,是怎样耗尽先贤的心血、聚集先贤的才智,一砖一瓦地被建立起来的。

1. 隐匿的幽灵

早在古希腊,哲学家芝诺就提出了一个著名的佯谬:

一只乌龟和人赛跑,人的速度比乌龟快一百倍,但在起跑时乌龟领先人99个单位。那么人 能否追上乌龟?

现在我们都知道,人一定会追上乌龟,而且我们很轻易地就可以算出人追上乌龟花费的时间:

$$\frac{99}{100-1} = 1$$
个单位时间

然而,芝诺却不这么认为。他是这样分析的:人要想追上乌龟,必须比乌龟多走过 99 个单位;但在人走过 99 个单位的同时,乌龟又向前走了 0.99 个单位;人在追上这 0.99 个单位的同时,乌龟又向前走了 0.0099 个单位......也就是说,在芝诺的眼中,人永远追不上乌龟。

换句话说, 芝诺认为**人与乌龟之间很小的距离 (也就是无穷小量) 是永远不可能被忽略掉的, 是永远不可能等于 () 的**。这在"正常人"的眼中是多么不合理的结论! 由此可以看出, 古希腊人已经拥有了关于无穷小量的模糊概念, 但正因为芝诺佯谬的存在, 古希腊的几何证明 (当时的"数学") 中就此开除了无穷小量的"数学籍"。

时间来到芝诺悖论之后七百年。在遥远的东方,数学家刘徽提出了计算圆周率的著名方法——割圆术。

在割圆术中,他用弦代替弧计算多边形的面积来近似计算圆的面积,并在《九章算术注》中这样描述他的割圆术:"割之弥细,所失弥少,割之又割,以至于不可割,则与圆合体,而无所失矣。"翻译成白话就是: (多边形)分割得越细,多边形与圆的差距就越来越小,一直分割一直分割,到了不能再继续分割的时候,多边形就和圆重合了,它们的面积差也就消失了。

很明显,刘徽认为,**用来近似圆的多边形与圆之间面积之差(在分割数很大时同样是一个无穷小量),随着分割数越来越大而变得可以被忽略掉,也就是无穷小量可以等于** 0 **!** 这和芝诺得到的结论刚好相反!

所以,无穷小量究竟能不能被忽略掉?它究竟是什么?是不是0?抑或是只有在某些情况下它才能被看做0?在古代哲学家、数学家对数学的讨论过程中,就这样埋下了一颗名为无穷小量的定时炸弹。这个如幽灵般徘徊在数学世界上空的模糊概念,将在将来爆发出来,引发著名的第二次数学危机。

2. 幽灵现身

由于古希腊的数学家们不把无穷小量作为"数学"中的一个概念,自第一次数学危机(希帕索斯发现无理数)之后的几百年间,数学这只"怪兽"始终以温和而又完美的姿态面对着人类——在人们看来,数学即将成为一个完美的体系,这个体系中没有任何的疑点,它就是真理的化身,可以用来解释世间万物。

可真理哪有这么容易就能来到人们身边呢?既然无穷小量是真实存在的,那么将它排除在外的"数学"又怎么可能是完美的体系?在以往的探究中埋下的这颗定时炸弹,即将爆发。

在公元十七世纪,两位伟人——牛顿和莱布尼茨诞生了。现在我们都说,是他们分别独自创立了微积分这一门学科。但实际上,在他们之前,还有许多伟人也对微积分这一学科有过贡献:

• 开普勒给出了公式:

$$\int_0^\theta \sin\theta d\theta = 1 - \cos\theta$$

• 卡瓦列里给出了公式:

$$\int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

- 费马给出了导数思想的雏形,以及著名的费马引理:若函数 $f:(a,b)\to R$ 在 $x_0\in(a,b)$ 处取得极值,且 f 在 x_0 处可导,则 $f'(x_0)=0$;
- 帕斯卡注意到, 很小的弧与切线可以互相替代, 并在证明体积公式时略去了高阶无穷小;
- 巴罗(牛顿的恩师)给出了求切线的方法。

但不要误会,他们的"微积分"与我们现在所熟知的微积分有很大的差别。差别在哪里?差别 正在于他们的"微积分"中的**极限理论是不完整的,使用的"无穷小量"这一概念更是扑朔迷离**。

那么话说回来, 无穷小量究竟是怎样引发一场数学危机的?

举一个例子好了: 求 $f(x) = x^2$ 在 x = 2 处的导数。牛顿是这样计算的:

$$f'(2)=rac{\left(2+lpha
ight)^2-2^2}{lpha}=rac{4lpha+lpha^2}{lpha}=4+lpha=4$$

牛顿把 α 叫做"无穷小量"。猛一看这个式子好像像模像样的没什么毛病,于是牛顿就由此把他的理论推广开来,并用它解决了大量以前无法解决的问题。

然而,当时英国的大主教贝克莱发现了这其中的矛盾。贝克莱于1734年专门写了一本书,攻击流数(导数)"*是消失了的量的鬼魂……能消化得了二阶、三阶流数的人,是不会因吞食了神学论点就呕吐的。"*他说,用忽略高阶无穷小来消除了原有错误,"*是依靠双重的错误得到了虽然不科学却是正确的结果*"。他是这样反驳牛顿的:要使前两个式子 $\frac{(2+\alpha)^2-2^2}{\alpha}$ 、 $\frac{4\alpha+\alpha^2}{\alpha}$ 成立, α

必须不等于 0; 但到了第三个式子 $4 + \alpha$ 中, α 居然又等于 0 了……他还讽刺挖苦牛顿说:*既然 分子和分母都变成"无穷小"了,而无穷小作为一个量,既不是 0 ,又不是非 0 ,那它一定是"量 的鬼魂"了!*

虽然贝克莱提出疑问的动机并不是促进数学的发展,但他提出的这个问题对新兴的微积分学来说却是致命的:它动摇了微积分学的根基。

在此后的两百年间,有无数数学家前赴后拥,尝试对无穷小量悖论展开证明。例如:麦克劳林试图从瞬时速度的方面对无穷小量进行阐述,泰勒则试图用差分法解释无穷小量,等等。但可惜的是,他们都没有成功,数学家们始终没能摆脱"无穷小量"这个飘荡的幽灵。

3. 幽灵的消散

之所以会有关于无穷小量的悖论的出现,还是由于极限理论是不完善的,它还存在很大的 缺陷。没有对极限这一概念的完美的阐述,也就不可能清晰地描述无穷小量这个概念。此时的微 积分学就像一栋地基不牢的大厦,看上去壮丽辉煌、夺人眼球,但实际上马上就要倾倒,让几代 人的心血付诸东流。

好在江山代代出人才,在贝克莱提出质疑的两百年后,逐渐有数学家醒悟过来,开始对极限这一概念进行详细严谨的阐述。

数学家达朗贝尔首先将微积分研究的问题转化成极限的问题,并这样解释极限: "一个变量 趋近于一个固定的的量,并且趋近的程度小于任何给定的量"。在这个阐述中,已经能看到 $\varepsilon - \delta$ 语言的影子了。然而,达朗贝尔同意逐渐消失的量(即无穷小量)是没有意义的。他斩钉截铁般 地宣称: "一个量要么是有,要么是没有。如果是有,它就不可能消失;如果是没有,它就确实 消失了。假设存在介于这两者之间的中间状态,那它就只能是一头由狮头羊身和蛇尾构成的吐火 怪物。"现在我们知道,他关于极限的表述有部分是正确的,但他关于无穷小量的认识却是错误 的:无穷小量当然真实存在!

之后,柯西在1821年出版的《分析教程》中如此给出极限的定义:"当属于一个变量的相继值无限地趋近某个固定值时,如果以这样一种方式告终,变量值同固定值之差小到我们希望的任意小,那么这个固定值就称为其他所有值的极限"。柯西认为,极限是一个无限趋近的过程,是动态的、变化的。除此之外,他还给出了无穷小的定义:"当一个变量的连续数值无限减小(从而变得小于任何给定的值)时,这个变量就称为一个无穷小的量"。但很可惜的是,柯西对"无穷小量的值究竟是多少"这个问题闭口不谈,他仍然没有把无穷小量这个概念解释清楚。

后来,经过魏尔斯特拉斯、戴德金、康托尔等数学家的不懈努力,数学家们通过把极限论建立在严格的实数理论基础上的方法,形成了严谨地定义极限的 $\varepsilon - \delta$ 语言。

例如,用 $\varepsilon - \delta$ 语言描述 $x \to x_0$ 时的函数极限:

设 $f:\overset{0}{U}(x_0)\to R$ 是任一函数,若存在常数 $a\in R$,它与 f(x) 满足如下关系: $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-a|<\varepsilon$,则称 α 是当 $x\to x_0$ 时 f(x) 的极限。

有了 $\varepsilon - \delta$ 语言,我们就可以轻易地完美解释贝克莱提出的疑问:对于 $f(x) = x^2$ 在 x = 2 处的导数,

$$f'(2) = \lim_{\Delta x o 0} rac{(2+\Delta x)^2-2^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x o 0} rac{4\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x o 0} (4+\Delta x) = 4$$

从上面的式子就可以看出,用极限来描述求导的过程,比起牛顿那种粗糙的做法是多么地 优雅而又严谨!

这样一来, 无穷小量也就可以借助极限理论来进行明确的定义了:

当 $x\to x_0$ (或 $x\to\infty$)时,以零为极限的**函数** a(x) 称为当 $x\to x_0$ (或 $x\to\infty$)的无穷小量。

无穷小量这个幽灵就此烟消云散。我们可以清楚地知道,无穷小量是一个以 0 为极限的函数,它不是 0 ,在计算中也绝对不能把它与绝对值很小的变量混为一谈。并且,一个函数是否是无穷小,与自变量的变化趋势也息息相关。例如: $\frac{1}{x}$ 是 $x \to \infty$ 时的无穷小,因为只有当 $x \to \infty$ 时才有 $\frac{1}{x} \to 0$; 当 $x \to x_0$ 时, $\frac{1}{x}$ 趋于一个有限值 $\frac{1}{x_0}$; 当 $x \to 0$ 时, $\frac{1}{x} \to \infty$ 。在后两种情况下, $\frac{1}{x}$ 显然不是无穷小。

既然微积分学最基础的理论——极限理论已经被精准地表述出来,余下内容的发展与完善也就是水到渠成的了。至于微积分学之后发展的详细过程,这里按下不表。

4. 终章

人们对无穷小量的几千年探索历史告诉我们,任何一门学科的建立容不得半点马虎,所有 的定义都必须是准确的、精炼的,否则这个学科即使发展的再快,内容再丰富,也会因为基础不 牢而被驳倒甚至全盘否定。

同时,我们也可以看到,任何学科的发展都不是一步到位的,而是经过无数次"发现错误→ 修正→发现新的错误→再修正"的过程才逐渐完善起来。

我个人认为胡适说得很对:"大胆假设,小心求证"。科学研究者应当具有这样的特性:在对未知领域进行假设时一定要足够大胆,因为在研究前完全无法知晓未知领域究竟是什么样子的;但在验证假设时一定要小心小心再小心,因为在验证的过程中稍有纰漏就会使结论与事实相差甚远,正所谓"失之毫厘,谬以千里"是也。