定积分的概念

问题引入
定积分的定义
几何意义
Darboux和与可积性准则

1.1 定积分问题举例

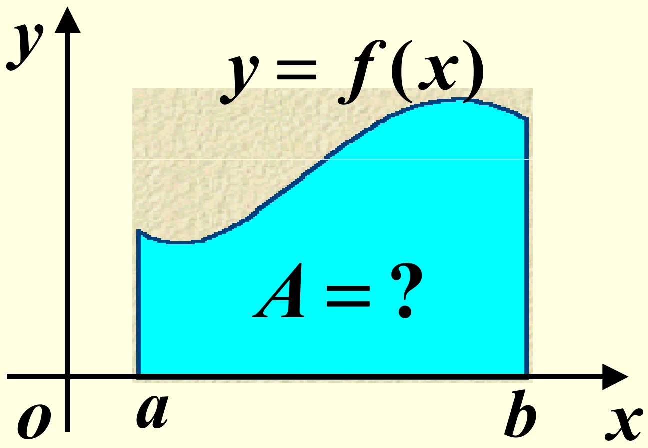
实例1 （求曲边梯形的面积）

曲边梯形由连续曲线

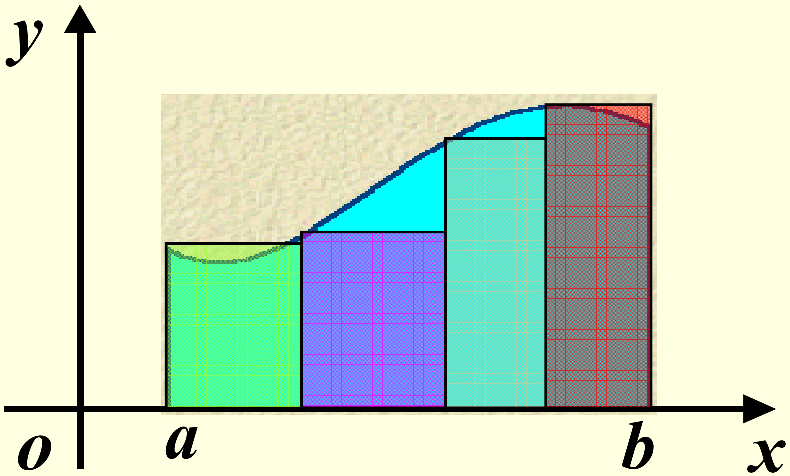
$y = f(x)(f(x) \geq 0)$、

x轴与两条直线$x = a$、

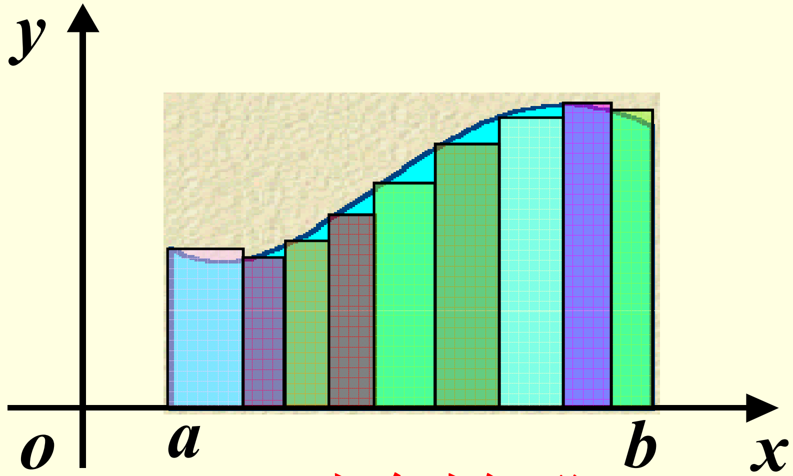
$x = b$所围成.



用矩形面积近似取代曲边梯形面积



（四个小矩形）

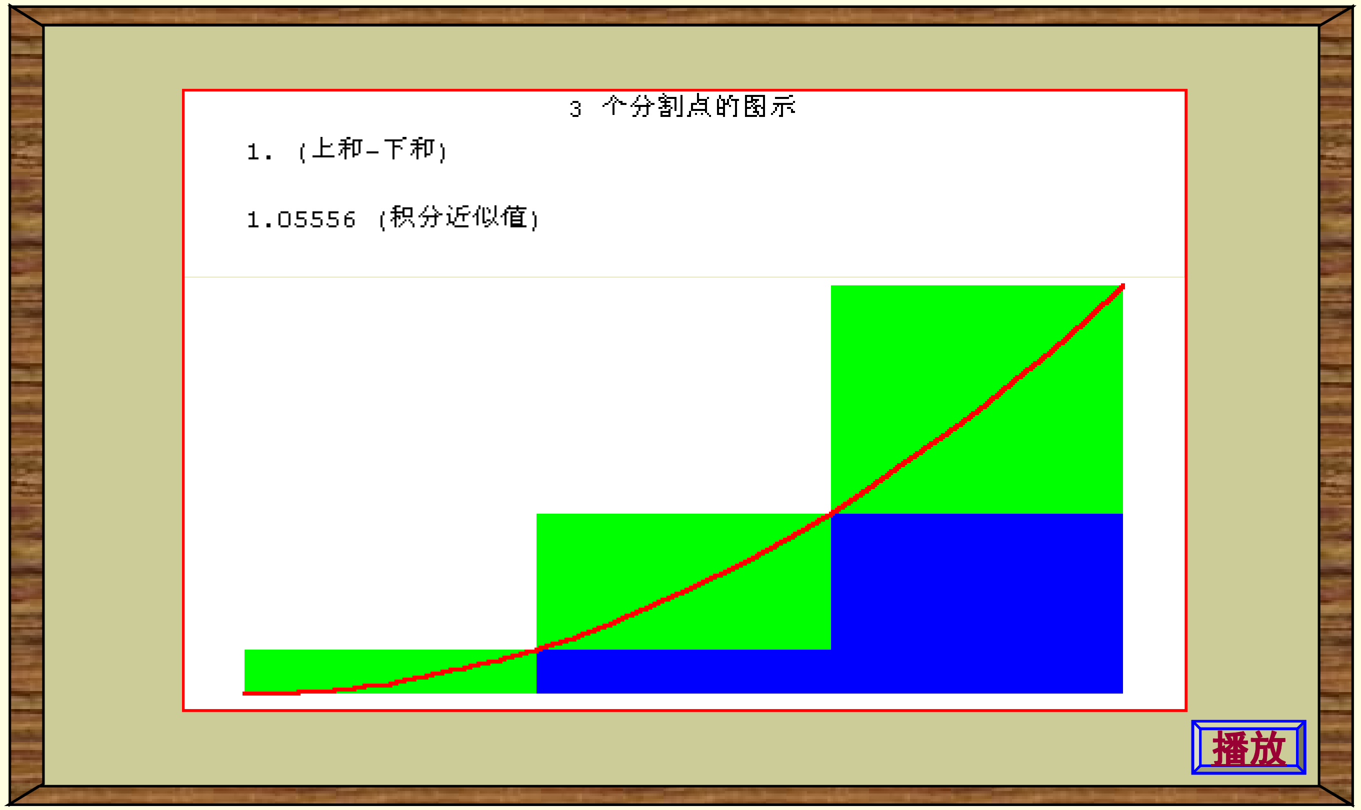


（九个小矩形）

显然，小矩形越多，矩形总面积越接近曲边梯形面积.

观察下列演示过程，注意当分割加细时，

矩形面积和与曲边梯形面积的关系.

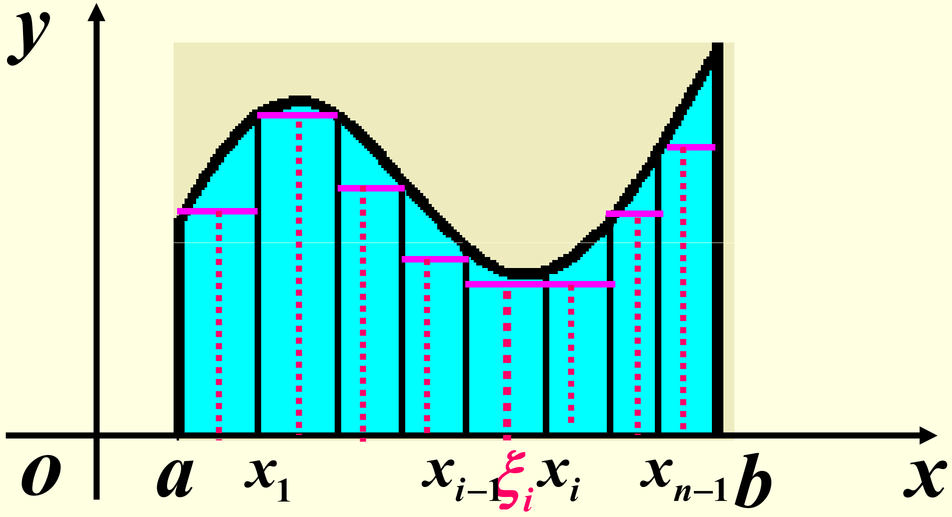


曲边梯形如图所示，在区间 $[a,b]$ 内插入若干个分点，$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$,

把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$,

长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$;

在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i,



以 $[x_{i-1}, x_i]$ 为底，$f(\xi_i)$ 为高的小矩形面积为

$$A_i = f(\xi_i)\Delta x_i$$

曲边梯形面积的近似值为:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

当分割无限加细,即小区间的最大长度

$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots \Delta x_n\}$

趋近于零 $(\lambda \to 0)$ 时,

曲边梯形面积为 $A = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

实例2 （求变速直线运动的路程）

设某物体作直线运动，已知速度$v=v(t)$是时间间隔$[T_1,T_2]$上t的一个连续函数，且$v(t)\geq 0$，求物体在这段时间内所经过的路程.

思路：把整段时间分割成若干小段，每小段上速度看作不变，求出各小段的路程再相加，便得到路程的近似值，最后通过对时间的无限细分过程求得路程的精确值.

（1）分割 $T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2$

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1} \qquad \underbrace{\Delta s_i}_{\text{部分路程值}} \approx \underbrace{v(\tau_i)}_{\text{某时刻的速度}}\Delta t_i$$

（2）求和 $s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$

（3）取极限 $\lambda = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n\}$

路程的精确值 $s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$

1.2 定积分的定义

定义1.1 设函数$f(x)$在$[a,b]$上有界, 在$[a,b]$中任意插入

若干个分点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

把区间$[a,b]$分成n个小区间，各小区间的长度依次为

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$(i = 1,2,\cdots)$，在各小区间上任取

一点ξ_i（$\xi_i \in \Delta x_i$），作乘积$f(\xi_i)\Delta x_i$ $(i = 1,2,\cdots)$

并作和$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$,

记$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$，如果不论对$[a,b]$

怎样的分法， 也不论在小区间$[x_{i-1},x_i]$上

点ξ_i怎样的取法，只要当$\lambda \to 0$时，和S总趋于

确定的极限I，我们称这个极限I为函数$f(x)$

在区间$[a,b]$上的**定积分**， 记为

积分上限

积分和

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

积分下限

被积函数

被积表达式

积分变量

$[a,b]$积分区间

注意：

（1）积分值仅与被积函数及积分区间有关，

而与积分变量的字母无关.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

（2）定义中区间的分法和ξ_i的取法是任意的.

（3）当函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分存在时，

称$f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

对定积分的 **补充规定**:

（1）当$a=b$时，$\int_a^b f(x)dx=0$；

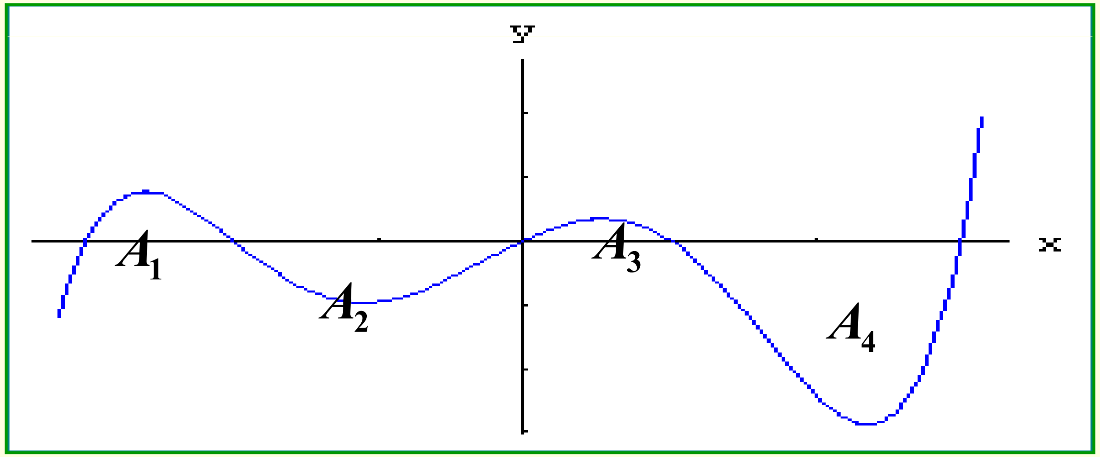
（2）当$a>b$时，$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.

说明　在下面的性质中，假定定积分都存在，且不考虑积分上下限的大小.

定积分的几何意义

$f(x)>0,\quad \int_a^b f(x)dx = A$ **曲边梯形的面积**

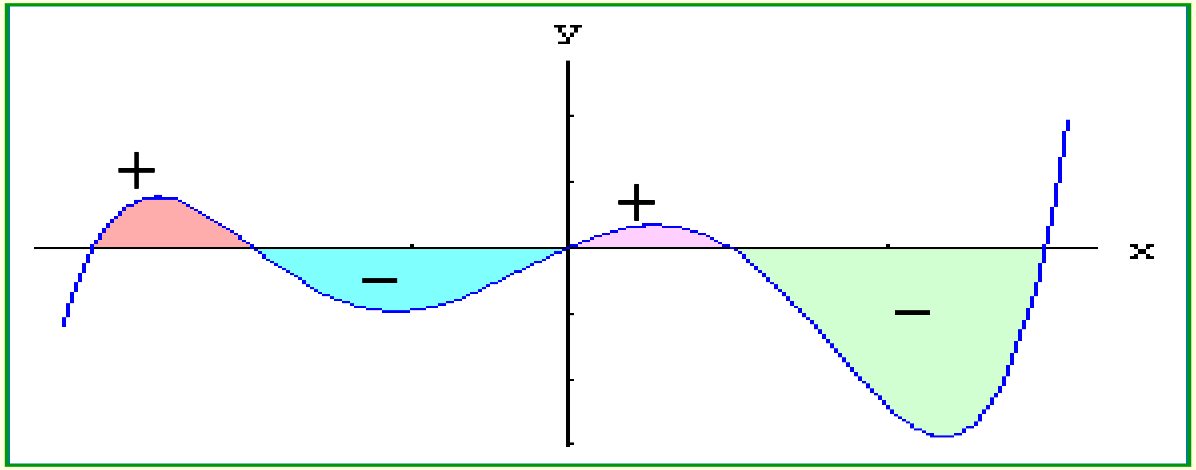
$f(x)<0,\quad \int_a^b f(x)dx = -A$ **曲边梯形的面积的负值**



$$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$

几何意义：

它是介于 x 轴、函数 $f(x)$ 的图形及两条直线 $x=a, x=b$ 之间的各部分面积的代数和．在 x 轴上方的面积取正号；在 x 轴下方的面积取负号.



例1 利用定义计算定积分$\int_0^1 x^2 dx$. **假设该定积分存在**

解 将[0,1]n等分，分点为$x_i = \frac{i}{n}$，$(i = 1,2,\cdots,n)$

小区间$[x_{i-1}, x_i]$的长度$\Delta x_i = \frac{1}{n}$，$(i = 1,2,\cdots,n)$

取$\xi_i = x_i$，$(i = 1,2,\cdots,n)$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Delta x_i,$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right),\qquad \lambda\to 0\ \Rightarrow n\to\infty$$

$$\int_0^1 x^2dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\ \xi_i^{\,2}\Delta x_i$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}.$$

例2 利用定义计算定积分$\int_1^2 \frac{1}{x}dx$. 假设该定积分存在

解 在[1,2]中插入分点 $q, q^2, \cdots, q^{n-1}$,

典型小区间为$[q^{i-1}, q^i]$，（$i = 1,2,\cdots,n$）

小区间的长度$\Delta x_i = q^i - q^{i-1} = q^{i-1}(q-1)$,

取$\xi_i = q^{i-1}$，（$i = 1,2,\cdots,n$）

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_i}\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q^{i-1}} q^{i-1}(q-1)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(q-1)=n(q-1)\quad \text{取}q^{n}=2\ \ \text{即}q=2^{\frac{1}{n}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = n(2^{\frac{1}{n}}-1),$$

$$\because \lim_{x\to+\infty} x(2^{\frac{1}{x}}-1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\ln 2,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n(2^{\frac{1}{n}}-1)=\ln 2,$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\xi_i}\Delta x_i=\lim_{n\to\infty} n(2^{\frac{1}{n}}-1)=\ln 2.$$

例 3 设函数 $f(x)$ 在区间[0,1]上连续，且取正值.

试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}=e^{\int_0^1 \ln f(x)dx}$.

证明 利用对数的性质得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}$$

$$=e^{\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}\right)}$$

极限运算与对数运算换序得

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}\right)}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}}$$

指数上可理解为：$\ln f(x)$在$[0,1]$区间上的一个积分和．分割是将$[0,1]$ n等分

分点为$x_i = \dfrac{i}{n}$，（$i = 1,2,\cdots,n$）

因为$f(x)$在区间[0,1]上连续，且$f(x)>0$

所以$\ln f(x)$在[0,1]上有意义且可积，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\ln f(x)dx$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}$$

$$=e^{\int_0^1\ln f(x)dx}.$$

1.3 定积分的存在条件

定理　（可积的必要条件）

区间$[a,b]$上的可积函数一定有界.

注意：有界函数未必一定可积。

例如：
Dirichlet函数

1 达布(Darboux)和及其性质

设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有界,对于$[a,b]$

的任意分法 $\Delta: x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$

既任意选取的$\xi = \{\xi_k\}$ $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$，作积分和

$$S(\Delta,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k\right)\Delta x_k$$

可见积分和既与函数$f(x)$ 及所选择的

的区间$[a,b]$分法Δ有关，又与ξ的取法有关

为了便于讨论积分和，我们还有必要引进两个其它形式的和。记

$$M_k = \sup_{x_{k-1}\le x\le x_k} \{f(x)\}$$

$$m_k = \inf_{x_{k-1}\le x\le x_k} \{f(x)\} \qquad k=1,2,\cdots,n$$

（称$\omega_k = M_k - m_k$为f在子区间$[x_{k-1}, x_k]$上的振幅）

做 $f(x)$ 关于分法 Δ 的如下和式

$$\underline{S}(\Delta)=\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \quad \overline{S}(\Delta)=\sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

分别称之为函数 $f(x)$ 对于分法 Δ 的达布小和

及达布大和，统称为达布和。

我们的目的在于通过达布和来研究一般的积分和。

为此我们首先介绍一下有关达布和的一些性质。

我们注意到对于区间 $[a,b]$ 的任意分法 Δ:

$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ 有

$m_k \le f(\xi_k) \le M_k$ $\qquad$ $m_k \le f(\xi_k) \le M_k$

相应于 Δ 的所有的积分和与达布和满足不等式

$$\underline{S}(\Delta) \le S(\Delta, \xi) \le \overline{S}(\Delta)$$

在固定的分法 Δ 下，达布和 $\underline{S}(\Delta)$ $\overline{S}(\Delta)$ 是常数，

此时由于$\xi=\{\xi_k\}$的选取的任意性,积分和$S(\Delta,\xi)$

却是变化的，若选取 $\xi=\{\xi_k\}$

使$f(\xi_k)$的值与 M_k m_k 任意接近

这就可使积分和$S(\Delta,\xi)$与达布和$\underline{S}(\Delta)$或$\overline{S}(\Delta)$

任意接近。因此有如下结论：

【性质1】 在区间 $[a,b]$ 的一个分法 Δ 的基础上增加若干个新分点，得到 $[a,b]$ 的一个新分法 Δ'，则达布小和不减少，达布大和不增加，即

$$\underline{S}(\Delta) \le \underline{S}(\Delta') \quad \overline{S}(\Delta') \le \overline{S}(\Delta)$$

【性质2】 对于区间$[a,b]$任意两个分法Δ与Δ'

则 $\underline{S}(\Delta) \le \overline{S}(\Delta')$ $\underline{S}(\Delta') \le \overline{S}(\Delta)$

即达布下和总不能超过任意一个达布上和。

【性质3】 对任意$[a,b]$的有界函数 $f(x)$ ，恒有

$$\lim_{d(\Delta)\to 0}\overline{S}(\Delta)=L;\quad \lim_{d(\Delta)\to 0}\underline{S}(\Delta)=l.$$

这里 $d(\Delta)=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$

这个性质称为Darboux定理。

利用达布和的上述性质，我们就可以为有界函数的可积性建立起一个十分简明的判别准则。

2　函数可积性准则

【定理1.1】 有界函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积的充要条件是

$$\lim_{d(\Delta)\to 0}[\overline{S}(\Delta)-\underline{S}(\Delta)]=0$$

【证】 必要性　设$f(x)\in R[a,b]$，记

$$I=\int_a^b f(x)dx=\lim_{d(\Delta)\to 0}S(\Delta,\xi)$$

则对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 对于$[a,b]$任意分法Δ

和任取的 $\xi=\{\xi_k\}$ 只要 $d(\Delta)<\delta$，有

$$\left|S(\Delta,\xi)-I\right|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

特别地，取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$满足：$0\le M_i-f(\xi_i)<\dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$,

则，$\left|\overline{S}(\Delta)-S(\Delta,\xi)\right|=\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k-f(\xi_i))\Delta x_k<\dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}\cdot(b-a)=\dfrac{\varepsilon}{4}.$

于是，$\left|\overline{S}(\Delta)-I\right|\le|\overline{S}(\Delta)-S(\Delta,\xi)|+|S(\Delta,\xi)-I|\le\dfrac{\varepsilon}{2}.$

同理可得，$\left|\underline{S}(\Delta)-I\right|\le\dfrac{\varepsilon}{2}.$

从而，有

$$\left|\overline{S}(\Delta)-\underline{S}(\Delta)\right|\leq\left|\overline{S}(\Delta)-I\right|+\left|\underline{S}(\Delta)-I\right|<\varepsilon$$

即 $$\lim_{d(\Delta)\to 0}[\overline{S}(\Delta)-\underline{S}(\Delta)]=0$$

充分性　设条件被满足，则

$$\underline{S}(\Delta)\leq I\leq\overline{S}(\Delta)$$

又 $\underline{S}(\Delta) \le S(\Delta,\xi) \le \overline{S}(\Delta)$ 综合以上两式，得

$$\left|S(\Delta,\xi)-I\right| \le \overline{S}(\Delta)-\underline{S}(\Delta) \to 0 \qquad (d(\Delta)\to 0)$$

即函数 $f(x) \in R[a,b]$，且 $\int_a^b f(x)dx = I$

定理1.2证毕。

如果记 $\omega_k = M_k - m_k$ 此时

$$\overline{S}(\Delta) - \underline{S}(\Delta) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k$$

于是定理1.1又可以叙述为：

【定理1.1】 函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积的充分必要条件为 $\lim\limits_{d(\Delta)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k = 0$

3 可积函数类

【定理1.2】 如果函数$f(x)\in C[a,b]$则 $f(x)\in R[a,b]$

【证】 根据在闭区间上连续函数性质，$f(x)$ 必在

$[a,b]$上一致连续，即$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0$，对

$\forall x',x''\in[a,b]$，只要 $|x'-x''|<\delta$ 有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

对于$[a,b]$的任意分法Δ，只要$d(\Delta)<\delta$，注意

$f(x)\in C\left[x_{k-1},x_k\right]$ $\exists\xi',\xi''\in\left[x_{k-1},x_k\right]$ 使得 $m_k=f(\xi_k')$

$M_k=f(\xi_k'')$，从而有

$$\omega_k=M_k-m_k=f\left(\xi_k''\right)-f\left(\xi_k'\right)<\frac{\varepsilon}{b-a}\qquad k=1,2,\cdots,n$$

所以
$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k\le\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=\varepsilon$$

即 $$\lim_{d(\Delta)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k \Delta x_k = 0$$

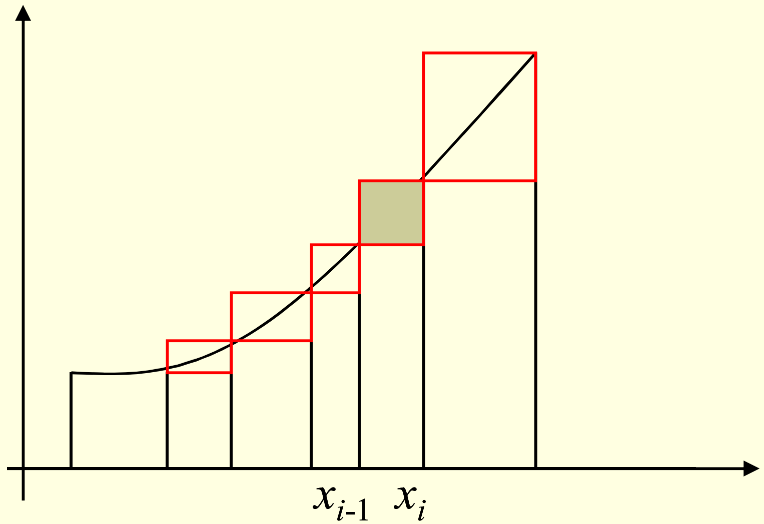
由定理1.1知，$f(x)\in R[a,b]$

如果把定理1.2的函数连续性条件稍微放宽一点，还有如下结论：

【定理1.3】 如果函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有界并且除去有限个间断点外处处连续，则$f(x)\in R[a,b]$.

定理 有界函数$f(x)$在$[a,b]$上可积$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$划分$P$使$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$

Riemann可积的第二充要条件



其中：

$$M_i = \sup\{f(x): x_{i-1} \le x \le x_i\}$$
$$m_i = \inf\{f(x): x_{i-1} \le x \le x_i\}$$
$$\omega_i = M_i - m_i$$

$f(x)$在$[a,b]$上Riemann可积$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$划分$P$，使得$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$

下面我们再介绍一类简单的可积函数，即单调函数

【定理1.4】 如果函数$f(x)$在区间$[a,b]$单调，则

$$f(x)\in R[a,b]$$

【证】 不妨设$f(x)$单调增加。若$f(a)=f(b)$，则

$$f(x)=f(a)=f(b)\in C[a,b]$$

从而由定理1.3，$f(x)\in R[a,b]$;

若 $f(a)<f(b)$

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta=\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$，对于满足 $d(\Delta)<\delta$

的任意分法 Δ 有

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k \Delta x_k<\delta\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-f(x_{k-1})]=\delta[f(b)-f(a)]=\varepsilon$$

由此即推知 $f(x)\in R[a,b]$

1．定积分的实质：特殊和式的极限.

2．定积分的思想和方法：

分割 → 化整为零

⇓ ⇓ 求近似以直（不变）代曲（变）

求和 → 积零为整

⇓ ⇓ 取极限

取极限 → 精确值——定积分

思考题

将和式极限：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$$

表示成定积分.

思考题解答

原式

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}+\sin\frac{n\pi}{n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi = \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sin\underbrace{\boxed{\frac{i\pi}{n}}}_{\xi_i}\right)\cdot\underbrace{\boxed{\frac{\pi}{n}}}_{\Delta x_i}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx.$$

练 习 题

一、　填空题：

1、函数$f(x)$ 在$[a,b]$上的定积分是积分和的极限，即$\int_a^b f(x)dx =$____________________ .

2、定积分的值只与________及_________有关，而与____________的记法无关 .

二、　利用定积分的定义计算由抛物线$y = x^2 + 1$,两直线$x = a, x = b\ (b > a)$及横轴所围成的图形的面积 .

三、　利用定积分的定义计算积分$\int_a^b xdx$，$(a < b)$.

四、 利用定积分的几何意义，说明下列等式：

1、$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$ ；

2、$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ ；

五、 水利工程中要计算拦水闸门所受的水压力，已知闸门上水的压强 P 是水深 h 的函数，且有 $p = 9.8h$(千米/米^2)，若闸门高 $H = 3$米，宽 $L = 2$米，求水面与闸门顶相齐时闸门所受的水压力 P（见教材图 5-3）.

练习题答案

一、1、$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$；

2、被积函数, 积分区间, 积分变量;

3、介于曲线$y = f(x)$, x 轴, 直线$x = a$, $x = b$之间各部分面积的代数和;

4、$\int_a^b dx$.

二、$\frac{1}{3}(b^3 - a^3) + b - a$.

三、$\frac{1}{2}(b^2 - a^2)$.

五、88.2(千牛).