Discussion problem assignment:

第一题：

Assume $x_1(t)=a_1e^{j\omega_0 t}+a_2e^{j2\omega_0 t}$ and $x_2(t)=b_1e^{j\omega_0 t}+b_2e^{j2\omega_0 t}$ where $T=2\pi/\omega_0$. Note that $x_1(t)$ and $x_2(t)$ are both composed of harmonic components ω_0 and 2 ω_0 . For signals $y(t)=x_1(t)+x_2(t)$ and $z(t)=x_1(t)x_2(t)$,

1. prove that $y(t)$ and $z(t)$ are still periodic signals with T.
2. Write $y(t)$ and $z(t)$ as linear combination of harmonic components. Explain the difference between $y(t)$ and $z(t)$.

$$y(t)=x_1(t)+x_2(t)=(a_1+b_1)e^{j\omega_0 t}+(a_2+b_2)e^{j2\omega_0 t}$$

$$\begin{aligned} z(t)=x_1(t)x_2(t)&=\left(a_1e^{j\omega_0 t}+a_2e^{j2\omega_0 t}\right)\left(b_1e^{j\omega_0 t}+b_2e^{j2\omega_0 t}\right)\\ &=a_1b_1e^{j2\omega_0 t}+(a_1b_2+a_2b_1)e^{j3\omega_0 t}+a_2b_2e^{j4\omega_0 t}\end{aligned}$$

$$y(t)=x_1(t)+x_2(t)=(a_1+b_1)e^{j\omega_0 t}+(a_2+b_2)e^{j2\omega_0 t}$$

$$\begin{aligned} z(t)=x_1(t)x_2(t)&=\left(a_1e^{j\omega_0 t}+a_2e^{j2\omega_0 t}\right)\left(b_1e^{j\omega_0 t}+b_2e^{j2\omega_0 t}\right)\\ &=a_1b_1e^{j2\omega_0 t}+(a_1b_2+a_2b_1)e^{j3\omega_0 t}+a_2b_2e^{j4\omega_0 t}\end{aligned}$$

重点是，线性组合不会改变谐波成分的频率，但是信号相乘则会。如何解释呢？

所以，我想通过这道题，让大家能够知道，谐波求和不会改变谐波的频率，但是谐波相乘却很容易

第二题：复数的开方运算

已知复数 X 有 $X^4=1$，求 X 的取值。

A：X 的取值有四个，+1, -1, +j, -j。

$$\begin{aligned} X&=e^{j\frac{2\pi}{4}m},\quad m=0,1,2,3\\ &=1,e^{j\frac{\pi}{2}},e^{j\frac{2\pi}{2}},e^{j\frac{3\pi}{2}}\\ &=1,j,-1,-j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X&=e^{j\frac{2\pi}{4}m},\quad m=0,1,2,3\\ &=1,e^{j\frac{\pi}{2}},e^{j\frac{2\pi}{2}},e^{j\frac{3\pi}{2}}\\ &=1,j,-1,-j\end{aligned}$$

已知复数 X 有 $X^4=-1$，求 X 的取值。

$$X^4 = -1 = e^{j\pi}$$

$$X = e^{j\frac{\pi+2\pi m}{4}}, \quad m = 0,1,2,3$$

$$= e^{j\frac{\pi}{4}}, e^{j\frac{3\pi}{4}}, e^{j\frac{5\pi}{4}}, e^{j\frac{7\pi}{4}}$$

$$X^4 = -1 = e^{j\pi}$$

$$X = e^{j\frac{\pi+2\pi m}{4}}, \quad m = 0,1,2,3$$

$$= e^{j\frac{\pi}{4}}, e^{j\frac{3\pi}{4}}, e^{j\frac{5\pi}{4}}, e^{j\frac{7\pi}{4}}$$

强调复数的开方运算，得到的结果可能并不唯一。尤其是当高次开方，如 $X^{100} = +1$，可以想象开方后的可能 X 值有 100 个，是非常多的，甚至可以看成是不确定的。

尤其是 $e^{j2\pi t} = \left(e^{j2\pi}\right)^t = 1^t$，当 t 的取值是小数值，如 t=0.001，$1^{0.001}$ 是不确定的。而离散时间信号有 $e^{j2\pi n} = 1$。

一般的，

$$\boldsymbol{X^N = Ae^{j\theta}}$$

$$\boldsymbol{X = \sqrt[N]{A}e^{j\frac{\theta+2\pi m}{N}}, \quad m = 0,1,\cdots,N-1, \quad [0,2\pi)}$$

$$\boldsymbol{X^N = Ae^{j(\theta+2\pi m)} = Ae^{j\theta}}$$

$$\boldsymbol{X^N = Ae^{j\theta}}$$

$$\boldsymbol{X = \sqrt[N]{A}e^{j\frac{\theta+2\pi m}{N}}, \quad m = 0,1,\cdots,N-1, \quad [0,2\pi)}$$

$$\boldsymbol{X^N = Ae^{j(\theta+2\pi m)} = Ae^{j\theta}}$$

N 次开方，在[0, 2pi)一周内有 N 个根。

幅度开方，与普通的开方相同。

但是，相位的开方，是[0, 2pi)一周内等相位间隔分布的 N 个相位。相位间隔是 2pi/N