第 四 章

1.一箱产品中有 3 件正品和 2 件次品，不放回任取两件，X 表示得到的次品数，求平均次品数 E(X) ____________________________________

X	0	1	2
p_i	$\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$	$\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$	$\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$

$$E(X)=0\cdot\frac{3}{10}+1\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$$

2.已知随机变量 X~P(λ)，试求 $E(\frac{1}{1+X})$

$$E(\frac{1}{1+X})=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{1+k}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}e^{-\lambda}$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}-e^{-\lambda}\right)=\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda}\right)$$

3.设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1\\ 2-x, & 1<x\le 2;\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，**试求 E(X)和 D(X).**

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1x^2dx+\int_1^2x(2-x)dx$$

$$=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1+[x^2-\frac{x^3}{3}]_1^2=1$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^1x^3dx+\int_1^2x^2(2-x)dx$$

$$=\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1+[\frac{2}{3}x^3-\frac{x^4}{4}]_1^2=\frac{7}{6}$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{7}{6}-1=\frac{1}{6}$$

4.地面雷达搜索飞机，在时间(0,t)内发现飞机的概率是 $P(t)=1-e^{-\lambda t},(\lambda>0)$**，试求发现飞机所需的平均搜索时间。**

5. 设发现飞机所需时间为T，则

$$F(t)=p\{T\le t\}=\begin{cases}P\{0<T\le t\}=P(t)=1-e^{-\lambda t} & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$$

$$f(t)=F'(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$$

可见T服从参数为λ的指数分布,平均搜索时间为

$$E(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)dx=\int_0^{+\infty}t\lambda e^{-\lambda t}dx$$

$$\underline{\underline{\text{分部积分}}}-e^{-\lambda t}[t+1/\lambda]_0^{+\infty}=1/\lambda$$

5. 设随机变量 X 服从几何分布：$P(X=k)=pq^k(q=1-p),k=0,1,2,\cdots$，求 $E(X),D(X)$.

解：$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}kP\{X=k\}=\sum_{k=1}^{+\infty}kpq^k=pq\sum_{k=1}^{+\infty}kq^{k-1}=pq\left[\left(\sum_{k=1}^{+\infty}x^k\right)'_x\right]_{x=q}=\frac{q}{p}$

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{+\infty}k^2P\{\xi=k\}=\sum_{k=1}^{+\infty}k^2pq^k=pq\sum_{k=1}^{+\infty}k^2q^{k-1}$$

$$=pq\sum_{k=1}^{+\infty}k(k+1-1)q^{k-1}=pq\sum_{k=1}^{+\infty}k(k+1)q^{k-1}-pq\sum_{k=1}^{+\infty}kq^{k-1}$$

$$=pq\left[\left(\sum_{k=1}^{+\infty}x^{k+1}\right)''_x\right]_{x=q}-\frac{q}{p}=pq\frac{2}{p^3}-\frac{q}{p}=\frac{2q-pq}{p^2}=\frac{(2-p)q}{p^2}$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{(2-p)q}{p^2}-\frac{q^2}{p^2}=\frac{q}{p^2}$$

6.随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，试求 Y=2X 和 $Z=e^{-2X}$ 的数学期望。

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}2xf(x)dx=\int_0^{+\infty}2xe^{-x}dx=-2e^{-x}[x+1]_0^{+\infty}=2$$

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x}f(x)dx=\int_0^{+\infty}e^{-3x}dx=[-\frac{1}{3}e^{-3x}]_0^{+\infty}=\frac{1}{3}$$

7.设某种产品每周的需求量 X~U(10,30)，而经销商进货数量为区间[10,30]中的某一整数。商店每销售一件商品可获利 500 元；若供大于求则削价处理，每处理一件商品亏损 100 元；若供不应求可从外部调货，但此时每件商品仅获利 300 元。为使该商店每周所获平均利润至少为 9280 元，试确定最少进货量。

解：设商店的进货量为 n（$10\le n\le 30$），则商店每周所获利润为

$$g(X)=\begin{cases}500X-100(n-X)=600X-100n, & X\le n,\\ 500n+300(X-n)=300X+200n, & X>n\end{cases}$$

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f_X(x)dx=\frac{1}{20}\int_{10}^{30}g(x)dx$$

$$=\frac{1}{20}\left[\int_{10}^{n}(600x-100n)dx+\int_{n}^{30}(300x+200n)dx\right]$$

$$=\frac{1}{20}\left[-150n^2+7000n+105000\right]\ge 9280$$

$$\Rightarrow \frac{62}{3}\le n\le 26\Rightarrow n=21$$

8. 设(X, Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}12y^2, & 0\le y\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$，求 E(X), E(Y), E(XY), E($X^2$+$Y^2$).

). $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x 12xy^2dy=\frac{4}{5}$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x 12y^3dy=\frac{3}{5}$$

也可以先算X,Y的边缘密度再求期望,但较麻烦

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x 12xy^3dy=\frac{1}{2}$$

$$E(X^2+Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2+y^2)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x (x^2+y^2)\cdot 12y^2dy=\frac{16}{15}$$

9. 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，都服从区间 $(0,\theta)$ 上的均匀分布，求 $Y=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的数学期望和方差。

解：若 $X\sim U(0,\theta)$，则 $F_X(x)=\begin{cases}0,x<0\\ x/\theta,0\le x\le\theta\\ 1,x\ge\theta\end{cases}$，$f_X(x)=\begin{cases}1/\theta,0\le x\le\theta\\ 0,其它\end{cases}$

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\le y\}$

$=P\{X_1\le y,X_2\le y,\cdots,X_n\le y\}$

$=P\{X_1\le y\}P\{X_2\le y\}\cdots P\{X_n\le y\}$

$=[F_X(y)]^n$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=n[F_X(y)]^{n-1}f_X(y)=\begin{cases}0,其它\\ \frac{n}{\theta}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{n-1},0\le y\le\theta\end{cases}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=\int_0^\theta y\frac{n}{\theta}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{n-1}dy=\frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta y^ndy=\frac{n}{n+1}\theta$$

$$E(Y^2)=\int_0^\theta y^2\frac{n}{\theta}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{n-1}dy=\frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta y^{n+1}dy=\frac{n}{n+2}\theta^2$$

$$D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=\frac{n(n+1)^2-n^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2}\theta^2=\frac{n^3+n^2+n}{(n+2)(n+1)^2}\theta^2$$

10. 民航机场的送客汽车载有 20 名乘客，从机场开出，乘客可以在 10 个车站下车，如果到达某一车站时无顾客下车，则在该站不停车。设随机变量 X 表示停车次数，假定每个乘客在各个车站下车是等可能的，求平均停车次数。

解：设 $X_i=\begin{cases}0,第i站有人下车\\ 1,第i站无人下车\end{cases}$，于是停车次数 $X=\sum_{i=1}^{10}X_i$

$P\{X_i=0\}=\frac{9^{20}}{10^{20}}$，于是 $E(X)=\sum_{i=1}^{10}E(X_i)=\sum_{i=1}^{10}P(X_i=1)=10(1-(\frac{9}{10})^{20})$

11. 证明：对取值于区间 (a,b) 内的随机变量 X，恒成立不等式：

$$a\le E(X)\le b,\quad D(X)\le\frac{(b-a)^2}{4}$$

证：$a=\int_a^b adF_X(x)\le E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xdF_X(x)=\int_a^b xdF_X(x)\le\int_a^b bdF_X(x)=b$

令 $g(x)=E[(X-x)^2]$，知 $g(x)$ 在 $x=E(X)$ 处取得最小值 $D(X)=E[(X-E(X))^2]$，取 $x=\dfrac{a+b}{2}$，

$$D(X)\le g(\frac{a+b}{2})=E[(X-\frac{a+b}{2})^2]$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\frac{a+b}{2})^2dF_X(x)=\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^2dF_X(x)\le\int_a^b(b-\frac{a+b}{2})^2dF_X(x)$$
$$=\int_a^b(\frac{b-a}{2})^2dF_X(x)=\frac{(b-a)^2}{4}$$

12.证明：如果随机变量 X,Y 相互独立，则

$$D(XY)=D(X)D(Y)+E^2(X)D(Y)+E^2(Y)D(X)$$

证明：$E(XY)=E(X)E(Y)$

$$E(X^2Y^2)=E(X^2)E(Y^2)=[D(X)+E^2(X)][D(Y)+E^2(Y)]$$

$$D(XY)=E(X^2Y^2)-E^2(XY)$$
$$=[D(X)+E^2(X)][D(Y)+E^2(Y)]-E^2(X)E^2(Y)$$
$$=D(X)D(Y)+E^2(X)D(Y)+E^2(Y)D(X)$$

13.设(X,Y)的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,|y|<x\\ 0, & 其他\end{cases}$，判断 X 与 Y 的相关性和独立性。

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x}xdy=\frac{2}{3}$$
$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x}ydy=0$$
$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x}xydy=0$$
$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0\Rightarrow\rho_{XY}=0$$

所以X，Y不相关

又 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}2x,0<x<1\\0,其它\end{cases}$，$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}1-|y|,-1<y<1\\0,其它\end{cases}$

可见，在区域 $D=\{0\le x\le 1,|y|<x\}$ 上，$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(x)$，X，Y 不相互独立。

14. 设随机变量（X，Y）的联合分布律为

X \ Y	0	1
0	0.1	0.15
1	0.25	0.2
2	0.15	0.15

(1) 求 X，Y 的协方差矩阵。

(2) 求 $Z=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}(X+Y)\right)$ 的数学期望。

解：（1） $E(X)=1\times(0.25+0.2)+2\times(0.15+0.15)=1.05$

$E(Y)=1\times(0.15+0.2+0.15)=0.5$

$E(XY)=0\times0\times0.1+0\times1\times0.15+1\times0\times0.25+1\times1\times0.2+2\times0\times0.15+2\times1\times0.15=0.5$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-0.025$

$E(X^2)=1^2\times(0.25+0.2)+2^2\times(0.15+0.15)=1.65$

$E(Y^2)=1^2\times(0.15+0.2+0.15)=0.5$

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=0.5475$， $D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=0.25$

协方差矩阵 $C=\begin{pmatrix}0.5475 & -0.025\\ -0.025 & 0.25\end{pmatrix}$

（2）

$$
\begin{aligned}
E(Z)&=E\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}(X+Y)\right)\right]\\
&=\sin\left(\frac{\pi}{2}(0+0)\right)\times0.1+\sin\left(\frac{\pi}{2}(0+1)\right)\times0.15+\sin\left(\frac{\pi}{2}(1+0)\right)\times0.25\\
&+\sin\left(\frac{\pi}{2}(1+1)\right)\times0.2+\sin\left(\frac{\pi}{2}(2+0)\right)\times0.15+\sin\left(\frac{\pi}{2}(2+1)\right)\times0.15\\
&=1\times0.15+1\times0.25-1\times0.15=0.25
\end{aligned}
$$

15.设 D(X)=25, D(Y)=36, 相关系数 $\rho_{XY}=0.4$，试求：D(X+Y) 和 D(X-Y).

$Cov(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=0.4\times5\times6=12$

$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)=25+36+2\times12=85$

$D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y)=25+36-2\times12=37$

16.已知 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<y<x, 0<x<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$，

求 $E(X|Y)和D(X|Y=\frac{1}{2})$.

解： $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 3xdx=\frac{3}{2}(1-y^2), & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

当 $0<y<1$ 时， $f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{2x}{1-y^2}, & y<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{X|Y}(x|y)dx=\int_y^1 x\frac{2x}{1-y^2}dx=\frac{2(1+y+y^2)}{3(1+y)}$

$E(X|Y)=\frac{2(1+Y+Y^2)}{3(1+Y)}$

$E(X|Y=1/2)=\frac{7}{9}$，

$D(X|Y=\frac{1}{2})=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\frac{7}{9})^2 f_{X|Y}(x|y)dx=\int_{\frac{1}{2}}^1(x-\frac{7}{9})^2\frac{2x}{1-\frac{1}{4}}dx=\frac{13}{648}$

（写出积分式子即可）

17. 设每天到站的货物件数 N 的分布律为：

N	10	11	12	13	14	15
P	0.05	0.1	0.1	0.2	0.35	0.2

若每天到达的货物次品率均为 0.1, 用 X 表示每天到达的货物中次品的件数，求 $E(X)$。

解：$E(X)=E[E(X\mid N)]=\sum_{n=10}^{15}E(X\mid N=n)P(N=n)$

$$=10\times0.1\times0.05+11\times0.1\times0.1+12\times0.1\times0.1$$
$$+13\times0.1\times0.2+14\times0.1\times0.35+15\times0.1\times0.2=1.33$$

18.小猫走进一个山洞，其中有三个门洞。第一个走 2 小时回到地面，第二个走 3 小时重回山洞，第三个走 5 小时重回山洞。若小猫随机选择一个门洞，求它回到地面的平均时间.

解 设小猫回到地面的时间为 X，小猫选定的通道为 Y, Y 服从三点均匀分布.

小猫回到地面的平均时间为

$$E(X)=E[E(X\mid Y)]=\sum_{n=1}^{3}E(X\mid Y=n)P(Y=n)$$
$$=E(X\mid Y=1)P(Y=1)+E(X\mid Y=2)P(Y=2)+E(X\mid Y=3)P(Y=3)$$
$$=2\times\frac{1}{3}+[3+E(X))\times\frac{1}{3}+(5+E(X)]\times\frac{1}{3}\Rightarrow E(X)=10$$

19. 设 X,Y 相互独立且都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，令 $Z_1=\alpha X+\beta Y, Z_2=\alpha X-\beta Y$,

(1) 求 $\rho_{Z_1Z_2}$；（2）确定 (Z_1,Z_2) 的联合分布；（3）讨论 Z_1与Z_2 的独立性.

解一 已知

$$\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}\sim N(\mu,C)=N\left(\begin{pmatrix}\mu\\\mu\end{pmatrix},\begin{bmatrix}\sigma^2&0\\0&\sigma^2\end{bmatrix}\right)$$

由正态分布的线性变换不变性, 其线性变换也服从联合正态分布.

$$Z=\begin{bmatrix}Z_1\\Z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha&\beta\\\alpha&-\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}=B\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix},$$

向量 Z 的均值向量和协方差矩阵分别为

$$E\begin{bmatrix}Z_1\\Z_2\end{bmatrix}=B\mu=\begin{bmatrix}\alpha&\beta\\\alpha&-\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu\\\mu\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\alpha+\beta)\mu\\(\alpha-\beta)\mu\end{bmatrix}$$

$$C_Z=BCB^\tau=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\alpha&-\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma^2&0\\0&\sigma^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\alpha&-\beta\end{pmatrix}^\tau=\sigma^2\begin{pmatrix}\alpha^2+\beta^2&\alpha^2-\beta^2\\\alpha^2-\beta^2&\alpha^2+\beta^2\end{pmatrix}$$

有 $D(Z_1)=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$ $D(Z_2)=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$ $Cov(Z_1,Z_2)=(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2$

(1) $$\rho_{Z_1Z_2}=\frac{Cov(Z_1,Z_2)}{\sqrt{D(Z_1)D(Z_2)}}=\frac{(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2}{(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$$

(2) 代入参数得 Z 的联合概率密度

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{{\sigma_1}^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-2r\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{{\sigma_2}^2}\right]\right\},\quad (x,y)\in R^2,$$

(3) 因变换矩阵的行列式 $|\mathbf{B}|=-2\alpha\beta\neq 0\Rightarrow\alpha\neq 0,\beta\neq 0$ 时，**Z** 为非奇异（非退化）二维正态随机向量的满秩线性变换，仍服从非退化二维正态分布，二者相互独立等价于不相关，故 Z_1与Z_2 相互独立的充要条件是

$$\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=0\qquad \text{即}\alpha^2=\beta^2,\ \alpha\neq 0,\beta\neq 0$$

或　直接验证 **Z** 的协方差矩阵 $\mathbf{C_Z}$ 非奇异的成立条件.

解二（1）$Cov(Z_1,Z_2)=Cov(\alpha X+\beta Y,\alpha X-\beta Y)=\alpha^2D(X)-\beta^2D(Y)=(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2$

$D(Z_1)=D(\alpha X+\beta Y)=\alpha^2D(X)+\beta^2D(Y)=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$

$D(Z_2)=D(\alpha X-\beta Y)=\alpha^2D(X)+\beta^2D(Y)=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$

$$\rho_{Z_1Z_2}=\frac{Cov(Z_1,Z_2)}{\sqrt{D(Z_1)D(Z_2)}}=\frac{(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2}{(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$$

（2）根据题意知 $(X,Y)\sim N(\mu,\sigma^2;\mu,\sigma^2;0)$，由正态分布的线性变换不变性知 (Z_1,Z_2) 仍服从二维正态分布.

$E(Z_1)=E(\alpha X+\beta Y)=\alpha E(X)+\beta E(Y)=(\alpha+\beta)\mu$

$E(Z_2)=E(\alpha X-\beta Y)=\alpha E(X)-\beta E(Y)=(\alpha-\beta)\mu$

结合第（1）问的结果得

$$(Z_1,Z_2)\sim N((\alpha+\beta)\mu,(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2;(\alpha-\beta)\mu,(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2;\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2})$$

由此可写出 (Z_1,Z_2) 的联合概率密度.

（3）因 (Z_1,Z_2) 服从二维正态分布，故 Z_1与Z_2 相互独立的充要条件是 $\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=0$

即 $\alpha^2=\beta^2$

20. 设二维正态随机变量, $(X,Y)\sim N(1,3^2;0,4^2;-\frac{1}{2})$，设 $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$，试求：

(1) Z 的数学期望和方差； **(2)** ρ_{XZ}； **(3)** 判断 X 与 Z 的独立性。

. 1)由正态分布的边缘分布还是正态分布可知

$$(X,Y)\sim N(1,3^2,0,4^2,-\frac{1}{2})\Rightarrow X\sim N(1,3^2),Y\sim N(0,4^2)$$

$$\therefore E(X)=1,D(X)=3^2=9,E(Y)=0,D(Y)=4^2=16$$

$$E(Z)=E(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{1}{3}E(X)+\frac{1}{2}E(Y)=\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{2}\times0=\frac{1}{3}$$

$$\rho_{XY}=-\frac{1}{2}\Rightarrow Cov(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=-\frac{1}{2}\times3\times4=-6$$

$$D(Z)=D(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=D(\frac{X}{3})+D(\frac{Y}{2})+2Cov(\frac{X}{3},\frac{Y}{2})$$

$$=\frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{4}D(Y)+\frac{1}{3}Cov(X,Y)=3$$

$$(2)Cov(X,Z)=Cov(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{1}{3}Cov(X,X)+\frac{1}{2}Cov(X,Y)$$

$$=\frac{1}{3}D(X)+\frac{1}{2}Cov(X,Y)=\frac{1}{3}\times3^2+\frac{1}{2}\times(-6)=0$$

$$\therefore\rho_{XZ}=0$$

(3) $\because(X,Y)\sim N(1,3^2,0,4^2,-\frac{1}{2})$,而$Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$是$X$和$Y$的非零线性组合,$\therefore$（$X,Z$）也服从正态分布（书上159页性质3）. 又由(2)的结果知$\rho_{XZ}=0$.故X和Z相互独立。