# 第六章　多元函数积分学及其应用

## 习　题　6.1

### (A)

1. 当$f(M)=1$时,积分$\int_{(\Omega)}f(M)\,\mathrm{d}\Omega$的值表示什么意义?

**解**　由积分的定义知:当$f(M)=1$时,

$$\int_{(\Omega)}f(M)\,\mathrm{d}\Omega=\lim_{d\to 0}\sum^{n}f(M_k)\Delta\Omega_k=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\Delta\Omega_k=\Omega.$$

2. 积分$\int_{(\Omega)}f(M)\,\mathrm{d}\Omega$定义中所有$(\Delta\Omega_k)$的直径的最大值$d\to 0$能否用所有$\Delta\Omega_k$的度量的最大值趋于零代替,为什么?

**解**　不能.当$\lambda=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\Delta\Omega_k\}\to 0$时,不一定有$d\to 0$.例如,如$(\Omega)=(\sigma)$为平面区域,$\lambda\to 0$,则$(\Delta\sigma_k)$可以是一条曲线.即使$f(M)$连续,在$(\Delta\sigma_k)$上$f(M)$的值可能相差很大.则和式$\sum\limits_{k=1}^{n}f(M_k)\Delta\sigma_k$对于$(\Delta\sigma_k)$上不同的点$M_k$当$\lambda\to 0$时极限可能不同而不存在.

### (B)

1. 证明若$f(M)$在$(\Omega)$上连续,$(\Omega)$是紧的且可度量,$f(M)\geqslant 0$,但$f(M)\neq 0$,则$\int_{(\Omega)}f(M)\,\mathrm{d}\Omega>0$.

**证明**　由于$f(M)\geqslant 0$,$f(M)\neq 0$,则$\exists M_0\in(\Omega)$,使$f(M_0)>0$.又由于$f(M)$在紧的可度量的$(\Omega)$上连续,则由连续函数的局部保号性知存在$M_0$的闭邻域$\overline{U}(M_0)\subset(\Omega)$,使对$\forall M\in\overline{U}(M_0)$,均有$f(M)>0$,则由积分的中值定理知$\exists P\in\overline{U}(M_0)$,使$\int_{\overline{U}(M_0)}f(M)\,\mathrm{d}\Omega=f(P)\Omega_{M_0}$.由于$f(P)>0$,$\Omega_{M_0}$为$\overline{U}(M_0)$的几何度量值,故$\int_{\overline{U}(M_0)}f(M)\,\mathrm{d}\Omega>0$.又由$f(M)\geqslant 0(M\in(\Omega))$,则$\int_{(\Omega)/\overline{U}(M_0)}f(M)\,\mathrm{d}\Omega\geqslant 0$,故由积分对区域的可加性知

$$\int_{(\Omega)} f(M)\,\mathrm{d}\Omega = \int_{(\Omega)/\overline{U}(M_0)} f(M)\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\overline{U}(M_0)} f(M)\,\mathrm{d}\Omega > 0.$$

2. 证明反常积分中值定理：若$(\Omega)$是紧的且可度量的连通集，$f(M)$，$g(M)$在$(\Omega)$上连续，$g(M)$在$(\Omega)$上不变号，则

$$\int_{(\Omega)} f(M)g(M)\,\mathrm{d}\Omega = f(P)\int_{(\Omega)} g(M)\,\mathrm{d}\Omega，其中\ P \in (\Omega).$$

**证明** 设在$(\Omega)$上$g(M) \geqslant 0$. 由于$(\Omega)$是紧的可度量的连续集，而$f(M)$在$(\Omega)$上连续，则$f(M)$在$(\Omega)$上可取得最大值$A$及最小值$a$. 即$\forall M \in (\Omega)$，$a \leqslant f(M) \leqslant A$. 从而$\forall M \in (\Omega)$，$ag(M) \leqslant f(M)g(M) \leqslant Ag(M)$. 由积分的性质3及性质1，得

$$a\int_{(\Omega)} g(M)\,\mathrm{d}\Omega \leqslant \int_{(\Omega)} f(M)g(M)\,\mathrm{d}\Omega \leqslant A\int_{(\Omega)} g(M)\,\mathrm{d}\Omega.$$

若$\int_{(\Omega)} g(M)\,\mathrm{d}\Omega > 0$，上式两边同除以$\int_{(\Omega)} g(M)\,\mathrm{d}\Omega$，得

$$a \leqslant \frac{\int_{(\Omega)} f(M)g(M)\,\mathrm{d}\Omega}{\int_{(\Omega)} g(M)\,\mathrm{d}\Omega} \leqslant A.$$

由连续函数的介值定理知，至少存在一点$P$

$$f(P) = \frac{\int_{(\Omega)} f(M)g(M)\,\mathrm{d}\Omega}{\int_{(\Omega)} g(M)\,\mathrm{d}\Omega}，即$$

$$\int_{(\Omega)} f(M)g(M)\,\mathrm{d}\Omega = f(P)\int_{(\Omega)} g(M)\,\mathrm{d}\Omega.$$

若$\int_{(\Omega)} g(M)\,\mathrm{d}\Omega = 0$，则由上题知$g(M) \equiv 0$，$M \in (\Omega)$. 因此对$\forall P \in (\Omega)$，恒有$\int_{(\Omega)} f(M)g(M)\,\mathrm{d}\Omega = f(P)\int_{(\Omega)} g(M)\,\mathrm{d}\Omega = 0$.

## 习 题 6.2

### (A)

2. (3) 若积分域关于$y$轴对称，则：

(i) 当$f(x,y)$是$x$的奇函数时,二重积分 $\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,d\sigma=0$;

(ii) 当$f(x,y)$是$x$的偶函数时,

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,d\sigma = 2\iint\limits_{(\sigma_1)} f(x,y)\,d\sigma,$$

其中$(\sigma_1)$为$(\sigma)$在右半平面$x\geqslant 0$中的部分区域;

(4) 若积分域关于$x$轴对称,被积函数$f(x,y)$分别具有怎样的对称性时有

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,d\sigma = 0,\quad \iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,d\sigma = 2\iint\limits_{(\sigma_1)} f(x,y)\,d\sigma,$$

其中$(\sigma_1)$为$(\sigma)$在上半平面$y\geqslant 0$中的部分区域.

**解** (3) 设$(\sigma_2)$为$(\sigma)$在左半平面$x\leqslant 0$中的部分,则$\sigma_1=\sigma_2$,且
$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,d\sigma = \iint\limits_{(\sigma_1)} f(x,y)\,d\sigma + \iint\limits_{(\sigma_2)} f(x,y)\,d\sigma$.

不妨设$f(x,y)\geqslant 0$, $\forall(x,y)\in(\sigma_1)$,则 $\iint\limits_{(\sigma_1)} f(x,y)\,d\sigma$ 表示以$(\sigma_1)$为底$z=f(x,y)$为顶的曲顶柱体的体积$V_1$,而 $\left|\iint\limits_{(\sigma_2)} f(x,y)\,d\sigma\right| = V_2$(以$(\sigma_2)$为底$f(x,y)$为曲顶的曲顶柱体体积),且$V_1=V_2$.

(i) 如$f(x,y)$关于$x$为奇函数,则$\forall(x,y)\in(\sigma_2)$, $f(x,y)\leqslant 0$. 则

$$\iint\limits_{(\sigma_2)} f(x,y)\,d\sigma = -V_2 = -V_1,\text{故}\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,d\sigma = 0.$$

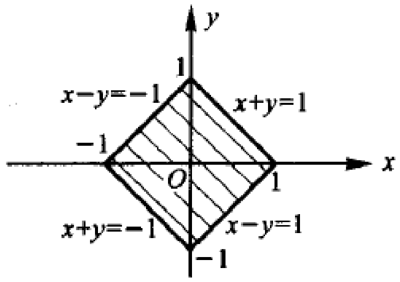
(ii) $f(x,y)$关于$x$为偶函数,则$\forall(x,y)\in(\sigma_2)$, $f(x,y)\geqslant 0$. 则 $\iint\limits_{(\sigma_2)} f(x,y)\,d\sigma = V_2 = V_1$,故 $\iint\limits_{(\sigma)} f\,d\sigma = 2\iint\limits_{(\sigma_1)} f\,d\sigma$.

如果$f(x,y)$在$(\sigma_1)$变号,则将$(\sigma_1)$分成若干小区域,使在每个区域上$f(x,y)$不变号. 由$(\sigma)$的对称性知$(\sigma_1)$的每个子域都有关于$y$轴对称的子域$(\sigma_2)$. 重复上述证明即可.

(4) 当$f(x,y)$关于$y$为奇函数,则 $\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,d\sigma=0$;若$f(x,y)$关于$y$为偶函数,则 $\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,d\sigma = 2\iint\limits_{(\sigma_1)} f(x,y)\,d\sigma$.

3. 计算下列二重积分.

(4) $\iint\limits_{(\sigma)}(x+y)^2\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)$是由 $|x|+|y|=1$ 所围成的区域；



（第 3 题(4)）

(5) $\iint\limits_{(\sigma)}\frac{x}{y}\sqrt{1-\sin^2 y}\mathrm{d}\sigma$，

$(\sigma)=\{(x,y)\mid -\sqrt{y}\leqslant x\leqslant\sqrt{3y},\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant 2\pi\}$；

(6) $\iint\limits_{(\sigma)}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1\}$.

**解** (4) $(\sigma)$如图所示，则

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{(\sigma)}(x+y)^2\mathrm{d}\sigma\\&=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-x-1}^{x+1}(x+y)^2\mathrm{d}y+\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1+x}^{1-x}(x+y)^2\mathrm{d}y=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5)\ \iint\limits_{(\sigma)}\frac{x}{y}\sqrt{1-\sin^2 y}\mathrm{d}\sigma&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{3y}}\frac{x}{y}\sqrt{1-\sin^2 y}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\frac{1}{y}\sqrt{1-\sin^2 y}\,x^2\Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{3y}}\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\sqrt{1-\sin^2 y}\mathrm{d}y\\&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}|\cos y|\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}-\cos y\mathrm{d}y+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\cos y\mathrm{d}y=3.\end{aligned}$$

$$(6)\ \iint\limits_{(\sigma)}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x=\int_0^1 y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$$

4. 把二重积分 $I=\iint\limits_{(\sigma)}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 在直角坐标系中分别以两种不同的次序化为累次积分，其中$(\sigma)$为

(1) $\{(x,y)\mid y^2\leqslant x,x+y\leqslant 2\}$；

(2) $x=\sqrt{y}$，$y=x-1$，$y=0$ 与 $y=1$ 所围成的区域.

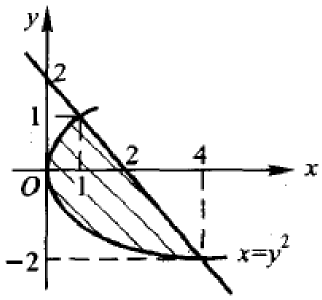
**解** (1) $(\sigma)$为图中阴影区域. 则

$$\begin{aligned}I&=\int_{-2}^{1}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{2-y}f(x,y)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^4\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x}}^{2-x}f(x,y)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(2) $(\sigma)$为图中阴影区域，则

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{y+1} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{x-1}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$




(第 4 题(1))

5. 交换下列累次积分的顺序.

(2) $\int_0^2 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y$;

(4) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_1^3 \mathrm{d}y\int_0^{2y^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$

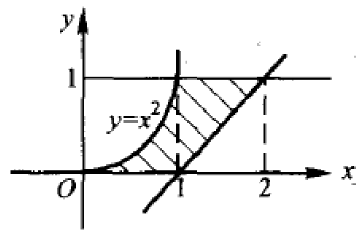
**解**　(2)

$$\int_0^2 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y-\int_1^2 \mathrm{d}x\int_1^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{(\sigma_1)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{(\sigma_2)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x-\int_1^4 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{2} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

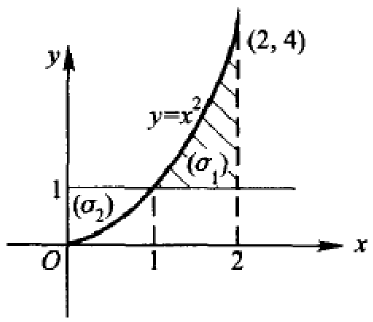



(第 4 题(2))

(4) 原式

$$=\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\ \text{((}\sigma\text{)如图所示)}$$

$$=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}x}^{3} f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_2^{18} \mathrm{d}x\int_{\sqrt{\frac{x}{2}}}^{3} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$




(第 5 题(2))

6. 利用极坐标计算下列各题.

(2) $\iint\limits_{(\sigma)} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$,

$(\sigma)=\{(x,y)\mid 2x\leqslant x^2+y^2\leqslant 4, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$;

**解**　图中阴影部分为积分域$(\sigma)$，可以用极坐标表示为　$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, 2\cos\varphi\leqslant\rho\leqslant 2$.

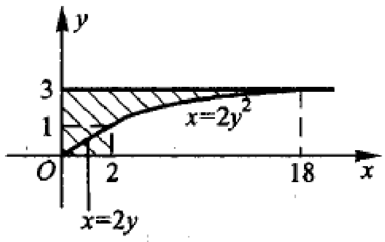
从而

$$\iint\limits_{(\sigma)} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi\int_{2\cos\varphi}^{2} \rho\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{8}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

(3) $\iint\limits_{(\sigma)}(x+y)^2\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)=\{(x,y)\mid(x^2+y^2)^2\leqslant 2a(x^2-y^2),a>0\}$.

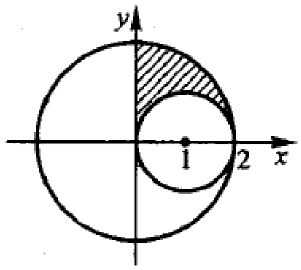
**解**　$(\sigma)$由双纽线$(x^2+y^2)^2=2a(x^2-y^2)$围成，其极坐标方程为$\rho^2=2a\cos 2\varphi$，从而$(\sigma)=(\sigma_1)\cup(\sigma_2)$．$(\sigma_1)$与$(\sigma_2)$分别用极坐标表示为




(第5题(4))

$$(\sigma_1)=\left\{(\rho,\varphi)\mid -\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},0\leqslant\rho\leqslant\sqrt{2a\cos 2\varphi}\right\},$$

$$(\sigma_2)=\left\{(\rho,\varphi)\mid \frac{3}{4}\pi\leqslant\varphi\leqslant\frac{5}{4}\pi,0\leqslant\rho\leqslant\sqrt{2a\cos 2\varphi}\right\}.$$




(第6题(2))

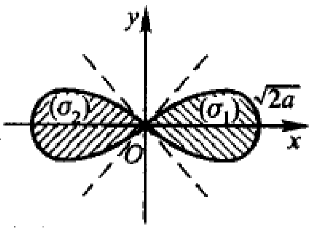
于是 $\iint\limits_{(\sigma_1)}(x+y)^2\mathrm{d}\sigma$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2a\cos 2\varphi}}\rho^2(\cos\varphi+\sin\varphi)^2\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos\varphi+\sin\varphi)^2\cos^2 2\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\sin 2\varphi)\cos^2 2\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{4}a^2,$$




(第6题(3))

$$\iint\limits_{(\sigma_2)}(x+y)^2\mathrm{d}\sigma=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2a\cos 2\varphi}}\rho^2(\sin\varphi+\cos\varphi)^2\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{\pi}{4}a^2,$$

故 $\iint\limits_{(\sigma)}(x+y)^2\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{(\sigma_1)}(x+y)^2\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{(\sigma_2)}(x+y)^2\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{2}a^2$.

7. 把下列累次积分化为极坐标的累次积分，并计算其值.

(3) $\int_1^2\mathrm{d}y\int_0^y\frac{x\sqrt{x^2+y^2}}{y}\mathrm{d}x$.

**解**　令$(\sigma)=\{(x,y)\mid 1\leqslant y\leqslant 2,0\leqslant x\leqslant y\}$，则$(\sigma)$可用极坐标表示为

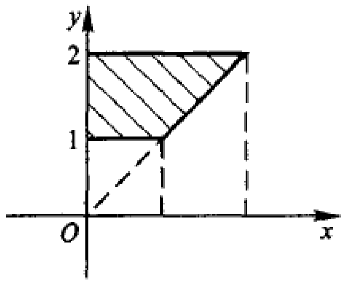
$$(\sigma)=\left\{(\rho,\varphi)\,\middle|\,\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\frac{1}{\sin\varphi}\leqslant\rho\leqslant\frac{2}{\sin\varphi}\right\}.$$

于是

$$\int_1^2 dy\int_0^y \frac{x}{y}\sqrt{x^2+y^2}dx = \iint\limits_{(\sigma)} \frac{x}{y}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{\frac{1}{\sin\varphi}}^{\frac{2}{\sin\varphi}}\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\cdot\rho\cdot\rho d\rho$$

$$=\frac{7}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^4\varphi}d\sin\varphi = \frac{7}{9}(2\sqrt{2}-1).$$




（第 7 题(3)）

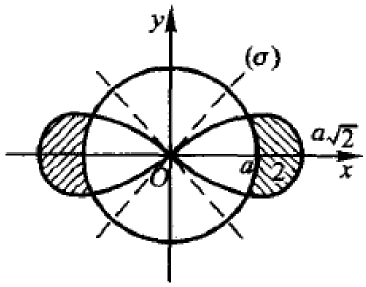
8. 求由下列各组曲线所围成图形的面积.

(2) $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2),x^2+y^2=a^2(x^2+y^2\geqslant a^2,a>0)$;

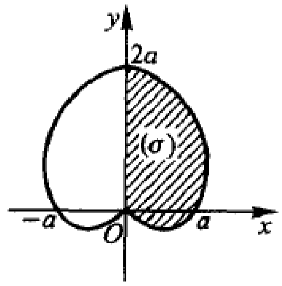
**解**　由对称性知所求面积 $S$

$$S = 4\iint\limits_{(\sigma)} d\sigma = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\varphi\int_a^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}}\rho d\rho = a^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right).$$

(3) $\rho=a(1+\sin\varphi)$.




（第 8 题(2)）




（第 8 题(3)）

**解**　所求面积 $S=2\iint\limits_{(\sigma)} d\sigma = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a(1+\sin\varphi)}\rho d\rho = \frac{3}{2}\pi a^2.$

9. 求由下列各组曲面所围成立体的体积.

(2) $z=\sqrt{x^2+y^2},x^2+y^2=2ax(a>0),z=0$;

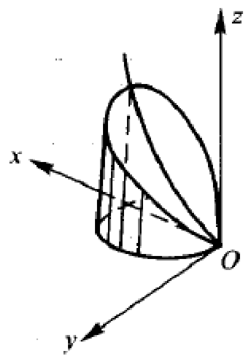
**解**　所求立体为以 $xOy$ 平面上的圆域 $x^2+y^2\leqslant 2ax$ 为底，以锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 为顶的曲顶柱体，其体积为

$$V = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2ax}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}\rho\cdot\rho d\rho = \frac{32}{9}a^3.$$

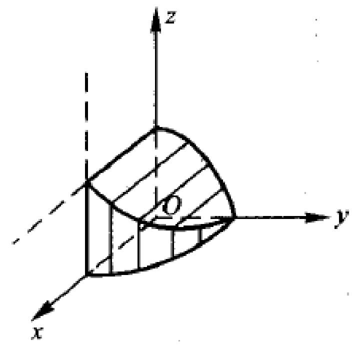
(3) $x^2+y^2=a^2,y^2+z^2=a^2(a>0)$

**解**　图中所示立体体积为 $V_1$，则所求体积

$$V = 8V_1 = 8\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{a^2-y^2}d\sigma = 8\int_0^a dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}\sqrt{a^2-y^2}dx = \frac{16}{3}a^3.$$




（第 9 题(2)）




（第 9 题(3)）

11. 以半径为 4 cm 的铜球的直径为中心轴，钻通一个半径为 1 cm 的圆孔，问损失掉的铜的体积是多少？

**解** 选圆孔的中心轴为 $z$ 轴，$x,y$ 轴为与 $z$ 轴垂直的球的两相互垂直的直径，则所求体积为

$$V = 2\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\sqrt{16-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma = 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\sqrt{16-\rho^2}\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{4}{3}\pi(64-15\sqrt{15})(\mathrm{cm}^3).$$

12. 在一形状为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 的容器中，盛有 $8\pi\mathrm{cm}^3$ 的水，今再灌入 $120\pi\mathrm{cm}^3$ 的水，问液面将升高多少 cm？

**解** 液面高为 $h$ cm 时，所盛水的体积为 $V$. 从而

$$V = \iint_{x^2+y^2\leqslant h} h\mathrm{d}\sigma - \iint_{x^2+y^2\leqslant h}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \pi h^2 - \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{h}}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{2}h^2(\mathrm{cm}^3).$$

于是当 $V=8\pi\mathrm{cm}^3$ 时，$h=4$ cm 当 $V=(120+8)\pi\mathrm{cm}^3$ 时，$h=16$ cm，故液面将升高 12 cm.

13. 利用适当的变换计算下列二重积分.

(2) $\iint_{(\sigma)}\mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)$ 是以 $(0,0)$，$(1,0)$，$(0,1)$ 为顶点的三角形内部；

**解** 令 $u=x+y, v=y$，于是 $(\sigma)$ 在此变换下在 $uOv$ 直角坐标面中为 $(\sigma')=\{(u,v)\mid 0\leqslant u\leqslant 1, 0\leqslant v\leqslant u\}$.

于是 $\iint_{(\sigma)}\mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}\sigma = \iint_{(\sigma')}\mathrm{e}^{\frac{v}{u}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}u \int_0^u \mathrm{e}^{\frac{v}{u}} \mathrm{d}v = \frac{1}{2}(\mathrm{e} - 1).$$

(3) $\iint\limits_{(\sigma)} xy\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)$ 由曲线 $xy = 1, xy = 2, y = x, y = 4x (x > 0, y > 0)$ 所围成；

**解**　令 $u = xy, v = \dfrac{y}{x}$，此变换将 $(\sigma)$ 映射成 $uOv$ 直角坐标面上的矩形域 $(\sigma') = \{(u,v) | 1 \leqslant u \leqslant 2, 1 \leqslant v \leqslant 4\}$，

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix}} = \frac{x}{2y} = \frac{1}{2v}.$$

于是
$$\iint\limits_{(\sigma)} xy\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{(\sigma')} u \cdot \frac{1}{2v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_1^2 \mathrm{d}u \int_1^4 \frac{u}{2v}\mathrm{d}v = \frac{3}{2}\ln 2.$$

(4) $\iint\limits_{(\sigma)} (x + y)\mathrm{d}\sigma$，$(\sigma)$ 由曲线 $x^2 + y^2 = x + y$ 所围成的区域.

**解**　取曲线坐标变换为 $x = \dfrac{1}{2} + \rho\cos\varphi, y = \dfrac{1}{2} + \rho\sin\varphi$，则在 $\rho O\varphi$ 直角坐标平面内 $(\sigma') = \left\{(\rho,\varphi) | 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \rho \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$
于是

$$\iint\limits_{(\sigma)} (x + y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{(\sigma')} (1 + \rho\sin\varphi + \rho\cos\varphi)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1 + \rho\sin\varphi + \rho\cos\varphi)\rho\mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{2}.$$

14. 求下列曲线所围成的平面图形的面积.

(1) $(x - y)^2 + x^2 = a^2 \quad (a > 0)$；

**解**　作曲线坐标变换 $x = \rho\sin\varphi, y = \rho(\sin\varphi - \cos\varphi)$，于是由 $(x - y)^2 + x^2 = a^2$ 所围成的区域 $(\sigma)$ 即为 $\rho O\varphi$ 直角坐标面上的区域 $(\sigma') = \{(\rho,\varphi) | 0 \leqslant \rho \leqslant a, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\varphi & \rho\cos\varphi \\ \sin\varphi - \cos\varphi & \rho(\cos\varphi + \sin\varphi) \end{vmatrix} = \rho$，则所求面积 $S$

$$S = \iint\limits_{(\sigma')} \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^a \rho\mathrm{d}\rho = \pi a^2.$$

(3) $xy = a^2, xy = 2a^2, y = x, y = 2x (x > 0, y > 0)$；

**解** 作曲线坐标变换 $u=xy, v=\dfrac{y}{x}$. 则由题中所给的四条曲线在 $x>0, y>0$ 时所围成的区域$(\sigma)$在 $uOv$ 直角坐标面的像为$(\sigma')=\{(u,v)\mid a^2\leqslant u\leqslant 2a^2, 1\leqslant v\leqslant 2\}$.

故所求面积 $S=\iint\limits_{(\sigma')}\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_{a^2}^{2a^2}\mathrm{d}u\int_1^2\dfrac{1}{2v}\mathrm{d}v=\dfrac{a^2}{2}\ln 2.$

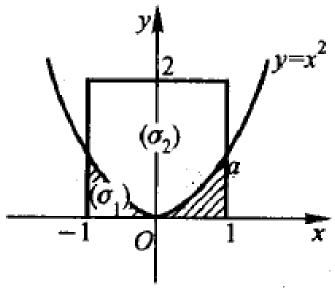
(4) $y^2=2px, y^2=2qx, x^2=2ry, x^2=2sy(0<p<q, 0<r<s)$.

**解** 作曲线坐标变换 $u=y^2/2x, v=x^2/2y$,则由题所给的四条曲线所围成的曲域被映为 $uOv$ 直角坐标面内的矩形域$(\sigma')=\{(u,v)\mid p\leqslant u\leqslant q, r\leqslant v\leqslant s\}$其面积为 $\iint\limits_{(\sigma')}\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_p^q\mathrm{d}u\int_r^s\dfrac{4}{3}\mathrm{d}v=\dfrac{4}{3}(q-p)(s-r).$

**(B)**

1. 计算下列二重积分.

(1) $\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}\sigma, (\sigma)=\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 2\}$;




(第 1 题(1))

**解** 如图所示将$(\sigma)$分为两个区域$(\sigma_1)$及$(\sigma_2)$,则

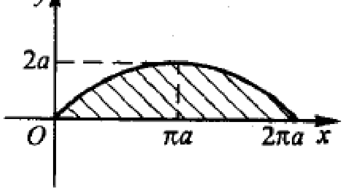
$$\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{(\sigma_1)}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{(\sigma_2)}\sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y+2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^2\sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}.$$

($(\sigma_1)$与$(\sigma_2)$关于 $y$ 轴对称,被积函数关于 $x$ 为偶函数)

(3) $\iint\limits_{(\sigma)}y^2\,\mathrm{d}\sigma$, $(\sigma)$ 是 $x$ 轴与摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi, a>0)$所围成的区域.




(第 1 题(3))

**解** $\iint\limits_{(\sigma)}y^2\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi a}\mathrm{d}x\int_0^{a(1-\cos t)}y^2\,\mathrm{d}y$

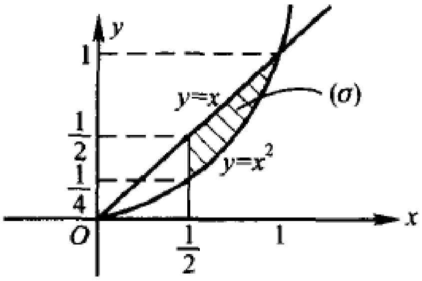
$$= \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi a}(1-\cos t)^3 \mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{x=a(t-\sin t)} \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3 a(1-\cos t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{35}{12}\pi a^4$$

2. 计算累次积分

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{y}} \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x .$$




（第 2 题）

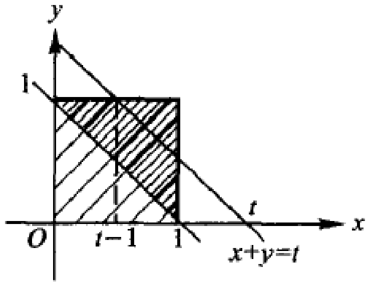
**解**　原式 $= \iint\limits_{(\sigma)} \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}\sigma$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x} \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} x\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\Big|_{x^2}^{x}\mathrm{d}x = \frac{3}{8}\mathrm{e} - \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}.$$

3. 设 $f(x,y) = \begin{cases} 2x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$

$F(t) = \iint\limits_{x+y\leqslant t} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，求 $F(t)$.




（第 3 题）

**解**　如图所示，$f(x,y)$ 仅在阴影区域内非零，所以 $t \leqslant 0$，则 $F(t) = 0$；

若 $0 < t \leqslant 1$，则 $F(t) = \int_0^t \mathrm{d}x\int_0^{t-x} 2x\mathrm{d}y = \frac{1}{3}t^3$；

若 $1 < t \leqslant 2$，则 $F(t) = \int_0^{t-1}\mathrm{d}x\int_0^1 2x\mathrm{d}y + \int_{t-1}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{t-x} 2x\mathrm{d}y$

$$= t - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(t-1)^3;$$

若 $t > 2$，则 $F(t) = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 2x\mathrm{d}y = 1$ .

$$\text{故 } F(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ \frac{1}{3}t^3, & 0 < t \leqslant 1, \\ t - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(t-1)^3, & 1 < t \leqslant 2, \\ 1, & t > 2. \end{cases}$$

4. 计算 $\iint\limits_{(\sigma)} x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}\sigma$,其中$(\sigma)$ 由 $y=x^3, y=1, x=-1$ 所围成的区域,$f(x^2+y^2)$是$(\sigma)$上的连续函数.

**解**　令 $F(u)=\int_0^u f(v)\mathrm{d}v$, 由于$f(v)$连续. 则 $F(u)$可微. 于是

$$\iint\limits_{(\sigma)} x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{(\sigma)} x\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{(\sigma)} xyf(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$$

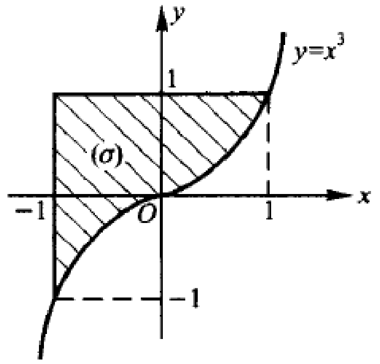
$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^3}^{1}x\mathrm{d}y+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^3}^{1}xyf(x^2+y^2)\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^3}^{1}xf(x^2+y^2)\mathrm{d}(x^2+y^2)$$

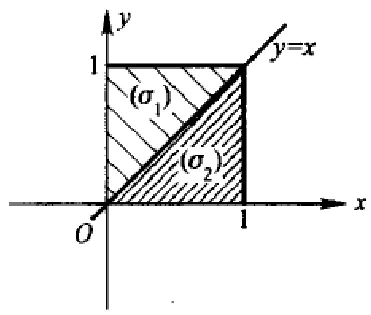
$$=-\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x[F(x^2+1)-F(x^2+x^6)]\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2}{5}.$$

($x[F(x^2+1)-F(x^2+x^6)]$为奇函数).




(第 4 题)




(第 5 题)

5. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 并设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$, 求 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y$.

**解**　如图所示 $\iint\limits_{(\sigma_1)} f(x)f(y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x)f(y)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{改变积分}} \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(y)f(x)\mathrm{d}y=\iint\limits_{(\sigma_2)} f(x)f(y)\mathrm{d}\sigma.$

又
$$2\iint\limits_{(\sigma_1)} f(x)f(y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{(\sigma_1)} f(x)f(y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{(\sigma_2)} f(x)f(y)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} f(x)f(y)\mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y = A^2,$$

故 $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y = \frac{A^2}{2}.$

6. 证明 Dirichlet 公式 $\displaystyle\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^a \mathrm{d}y\int_y^a f(x,y)\mathrm{d}x\,(a>0)$，并由此证明 $\displaystyle\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^y f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a (a-x)f(x)\,\mathrm{d}x$，其中 $f$ 连续.

**证明**　由 $\displaystyle\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y \xlongequal{\text{交换积分次序}} \int_0^a \mathrm{d}y\int_y^a f(x,y)\mathrm{d}x.$

令 $f(x,y)=f(x)$，则由 $\displaystyle\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^y f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a \mathrm{d}x\int_x^a f(x)\mathrm{d}y = \int_0^a (a-x)f(x)\mathrm{d}x.$

7. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，试利用二重积分证明

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

**证明**　由 $\displaystyle 0\leqslant \iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\a\leqslant y\leqslant b}} [f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b [f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}y$

$$= (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - 2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\mathrm{d}y + \int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y$$

$$= (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - 2\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 + (b-a)\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y$$

$$= 2\left\{(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - \left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2\right\}$$

故 $\displaystyle\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$

由习题 6.1(B) 第 1 题知当且仅当 $f(x)\equiv f(y)$ 即 $f(x)$ 恒为常数时等式成立.

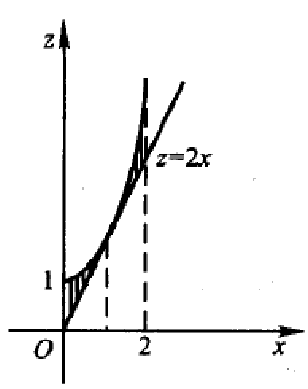
8. 试求曲线 $(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1\,(a_1b_2-a_2b_1\neq 0)$ 所围图形的面积.

**解**　作曲线坐标变换 $u=a_1x+b_1y+c_1$，$v=a_2x+b_2y+c_2$. 此变换将 $xOy$ 直角坐标面上由曲线 $(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$ 围成的区域 $(\sigma)$ 映射成 $uOv$ 直角坐标面中的圆域 $u^2+v^2\leqslant 1$，其面积为 $\pi$，又

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{a_1b_2-a_2b_1},$$

故所求面积 $\displaystyle = \iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} \frac{1}{|a_1b_2-a_2b_1|}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{\pi}{|a_1b_2-a_2b_1|}.$

9. 求抛物面 $z=1+x^2+y^2$ 的一个切平面，使得它与该抛物面及圆柱面 $(x-1)^2+y^2=1$ 围成的体积最小，试写出切平面方程并求出最小体积.



（第 9 题）

**解** 抛物面 $z=1+x^2+y^2$ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面方程为

$$z-z_0=2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0).$$

注意到 $z_0=1+x_0^2+y_0^2$，则切平面方程可表示为：

$$z=2x_0x+2y_0y+1-x_0^2-y_0^2,$$

且切平面总在抛物面的下方. 而所求立体体积 $V$ 为以 $xOy$ 面上的圆域 $(x-1)^2+y^2\leqslant 1$ 为底，分别以抛物面及其切平面为顶的曲顶柱体体积之差，故

$$V=\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\leqslant 1}[(1+x^2+y^2)-(2x_0x+2y_0y+1-x_0^2-y_0^2)]\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}[\rho^2-2\rho(x_0\cos\varphi+y_0\sin\varphi)+x_0^2+y_0^2]\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{1}{2}(3-4x_0+2x_0^2+2y_0^2)\pi.$$

令 $\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial x_0}=(-4+4x_0)\dfrac{\pi}{2}=0,\\ \dfrac{\partial V}{\partial y_0}=4y_0\dfrac{\pi}{2}=0\end{cases}$ 得唯一的驻点 $x_0=1,y_0=0$ 则此唯一的驻点必为最小值点. 故体积的最小值 $V_{\min}=\dfrac{\pi}{2}$，此时切平面的方程为 $z=2x$.

10. 设 $f(t)$ 是连续的奇函数，试利用适当的正交变换证明 $\iint\limits_{(\sigma)}f(ax+by+c)\mathrm{d}\sigma=0$，其中 $(\sigma)$ 关于直线 $ax+by+c=0$ 对称，且 $a^2+b^2\neq 0$.

**证明** 作正交变换 $u=ax+by+c, v=-bx+ay$（直线 $-bx+ay=0$ 为过原点且与直线 $ax+by+c=0$ 垂直），设 $(\sigma)$ 被映为 $uOv$ 直角平面的区域 $(\sigma')$，则 $(\sigma')$ 关于 $u=0$ 对称，即 $v$ 轴对称. 而 $f(ax+by+c)=f(u)$ 关于 $u$ 为奇函数，故

$$\iint\limits_{(\sigma)}f(ax+by+c)\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{a^2+b^2}\iint\limits_{(\sigma')}f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=0.$$

11. 设有一半径为 $R$，高为 $H$ 的圆柱形容器，盛有 $\dfrac{2}{3}H$ 高的水，放在离心机

上高速旋转. 因受离心力的作用,水面呈抛物面形状,问当水刚要溢出容器时,水平的最低点在何处?

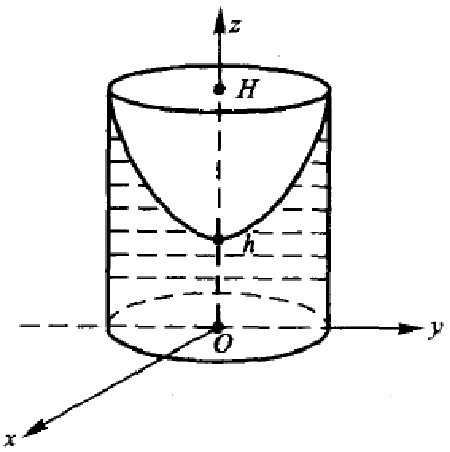
**解**　如图所示建立坐标系,并设水面最低点为 $h$. 依题意有

$$\frac{2}{3}H\cdot(\pi R^2)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}(h+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R(h+\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho.$$

即
$$\frac{2}{3}H\cdot\pi R^2=\left(h+\frac{1}{2}R^2\right)\pi R^2,$$

于是
$$h=\frac{2}{3}H-\frac{1}{2}R^2.$$

又 $H-h=R^2$,故 $h=\frac{1}{3}H$.




(第 11 题)

## 习　题　6.3

### (A)

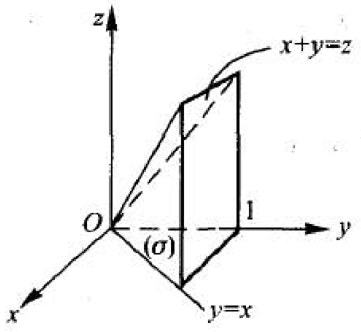
4. 计算下列三重积分.

(1) $\iiint\limits_{(V)}\mathrm{e}^x\mathrm{d}V$, $(V)$ 是由平面 $x=0, y=1, z=0, y=x$ 及 $x+y-z=0$ 所围成的闭区域;

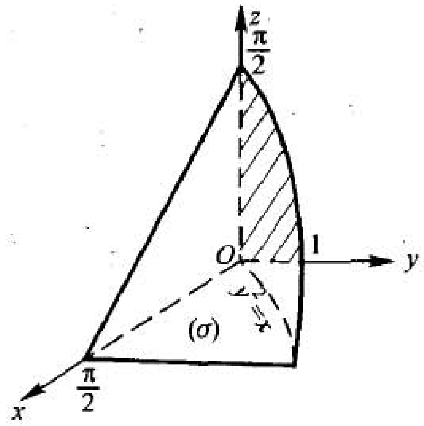
**解**　$\iiint\limits_{(V)}\mathrm{e}^x\mathrm{d}V=\iint\limits_{(\sigma)}\mathrm{d}\sigma\int_0^{x+y}\mathrm{e}^x\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{d}x\int_0^{x+y}\mathrm{e}^x\mathrm{d}z=\frac{7}{2}-\mathrm{e}.$

(2) $\iiint\limits_{(V)}y\cos(x+z)\mathrm{d}V$, $(V)$ 为由抛物面 $y=\sqrt{x}$, 平面 $y=0, z=0$ 及 $x+z=$

$\frac{\pi}{2}$ 所围成的闭区域；




（第 4 题(1)）




（第 4 题(2)）

**解** $$\iiint\limits_{(V)} y\cos(x+z)\,dV = \iint\limits_{(\sigma)} d\sigma \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y\cos(x+z)\,dz$$

$$= \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} dy \int_{y^2}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y\cos(x+z)\,dz$$

$$= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.$$

(3) $\iiint\limits_{(V)} \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dV$，$(V)$ 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$z=1$，$z=2$ 所围成的闭区域；

**解法 I** 设$(V_1)$为由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=2$ 围成的立体区域，$(V_2)$为由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 围成的立体，则由积分的区域可加性，得

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dV = \iiint\limits_{(V_1)} \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dV - \iiint\limits_{(V_2)} \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dV$$

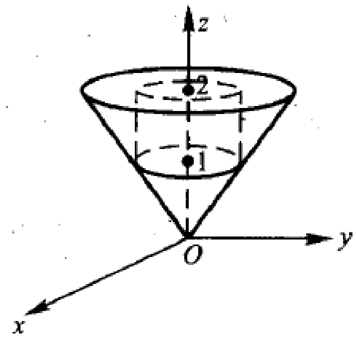
$$= \iint\limits_{\rho\leqslant 2} \rho d\rho d\varphi \int_\rho^2 \frac{1}{\rho} e^z dz - \iint\limits_{\rho\leqslant 1} \rho d\rho d\varphi \int_\rho^1 \frac{1}{\rho} e^z dz = 2\pi e^2.$$

**解法 II** 如图所示$(V_1)=(V)/(V_{圆柱})$

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dV = \iiint\limits_{(V_{圆柱})} \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dV + \iiint\limits_{(V_1)} \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dV$$

$$= \iint\limits_{\rho\leqslant 1} \rho d\rho d\varphi \int_1^2 \frac{1}{\rho} e^z dz + \iint\limits_{1\leqslant\rho\leqslant 2} \rho d\rho d\varphi \int_\rho^2 \frac{e^z}{\rho} dz$$

$$=2\pi e^2.$$




（第 4 题(3)）

(6) $\iiint\limits_{(V)} xy\mathrm{d}V$，$(V)$ 由 $xy=z$，$x+y=1$ 与 $z=0$ 所围成的闭区域；

**解** $\iiint\limits_{(V)} xy\mathrm{d}V=\iint\limits_{(\sigma)}\mathrm{d}\sigma\int_0^{xy}xy\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}x^2y^2\mathrm{d}y$

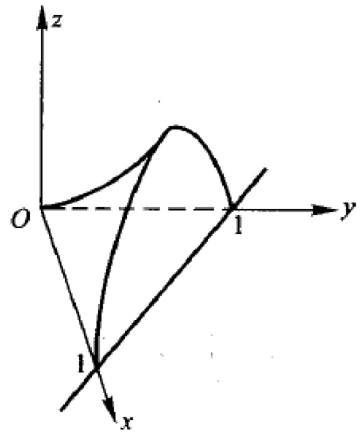
$$=\frac{1}{180}.$$

(7) $\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$，$(V)$ 由 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$z=\sqrt{A^2-x^2-y^2}$，$z=0$ 所围成，其中 $A>a>0$；

**解** $\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$（采用球坐标）

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_a^A r^2\sin^2\theta r^2\sin\theta\mathrm{d}r$$

$$=\frac{4}{15}\pi(A^5-a^5).$$




（第 4 题(6)）

(9) $\iiint\limits_{(V)}\frac{\mathrm{d}V}{1+x^2+y^2}$，$(V)$ 由 $x^2+y^2=z^2$ 与 $z=1$ 所围成；

**解** 利用柱坐标，

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_\rho^1\frac{\mathrm{d}z}{1+\rho^2}=\pi\left(\ln 2-2+\frac{\pi}{2}\right).$$

(13) $\iiint\limits_{(V)}(x+y)\mathrm{d}V$，$(V)$ 由 $x^2+y^2=1$，$x^2+y^2=4$，$z=0$，$z=x+2$ 所围成；

**解** 利用柱坐标，

$$\text{原式}=\iint\limits_{1\leqslant\rho\leqslant 2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\int_0^{\rho\cos\varphi+2}\rho(\sin\varphi+\cos\varphi)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_1^2\rho^2(\sin\varphi+\cos\varphi)(\rho\cos\varphi+2)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{15}{4}\pi.$$

(14) $\iiint\limits_{(V)} \dfrac{z\ln(1+x^2+y^2+z^2)}{1+x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}V,(V):x^2+y^2+z^2\leqslant 1$;

**解** 用球坐标，

$$原式=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r\cos\theta\ln(1+r^2)}{1+r^2}r^2\sin\theta\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\Big[\int_0^{\pi}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\Big]\Big[\int_0^1\frac{r^3\ln(1+r^2)}{1+r^2}\mathrm{d}r\Big]=0.$$

(15) $\iiint\limits_{(V)} z(x^2+y^2)\mathrm{d}V,(V)=\{(x,y,z)\mid z\geqslant\sqrt{x^2+y^2},1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4\}$;

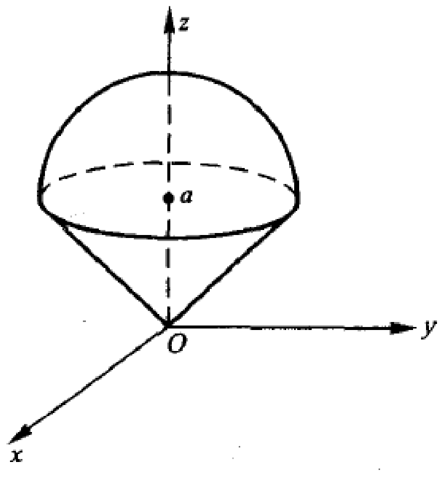
**解** 用球坐标，

$$原式=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r\cos\theta\cdot r^2\sin^2\theta\cdot r^2\sin\theta\mathrm{d}r=\frac{63}{48}\pi.$$

(16) $\iiint\limits_{(V)} z\mathrm{d}V,(V)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+(z-a)^2\leqslant a^2,x^2+y^2\leqslant z^2,a>0\}$.

**解** 用球坐标，原式 =

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta\mathrm{d}r=\frac{7\pi a^4}{6}.$$




(第 4 题(16))

5. 选用适当的坐标系计算下列累次积分.

(1) $\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 z^3\mathrm{d}z$ （用柱坐标）

$$=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho}^1 z^3\mathrm{d}z=\frac{\pi}{12}.$$

(2) $\int_{-3}^3\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}}z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}z$

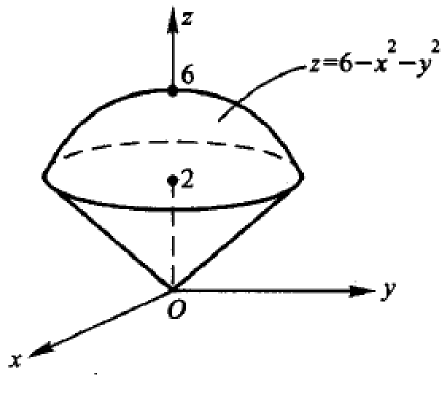
**解** $(V)=\{(x,y,z)\mid z\geqslant 0,x^2+y^2+z^2\leqslant 9\}$，于是

$$原式=\iiint\limits_{(V)} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^3 r\cos\theta\cdot r\cdot r^2\sin\theta\mathrm{d}r$$

$$= \frac{243}{5}\pi.$$

6. 求下列立体体积.

(2) 由 $z=6-x^2-y^2$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体；




(第 6 题(2))

**解**　$z=6-x^2-y^2$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的交线为 $\begin{cases}x^2+y^2=2^2,\\ z=2.\end{cases}$

用柱坐标可得所求体积为 $V$.

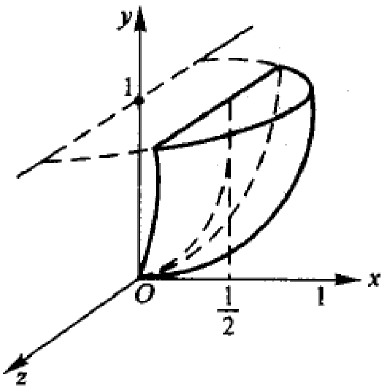
$$V=\iiint\limits_{(V)}\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2\rho\mathrm{d}\rho\int_\rho^{6-\rho^2}\mathrm{d}z=\frac{32}{3}\pi.$$

(3) 由 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z\ (a>0)$ 所围成的立体；

**解**　曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$ 关于 $xOy$，$yOz$ 平面均对称，且位于 $xOy$ 平面上方 $(z\geqslant 0)$ 的闭曲面. 用球坐标，则所求体积

$$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sqrt[3]{\cos\theta}}r^2\sin\theta\mathrm{d}r=\frac{\pi a^3}{3}.$$

(4) 由 $x=\sqrt{y-z^2}$，$\frac{1}{2}\sqrt{y}=x$ 与 $y=1$ 所围立体体积；




(第 6 题(4))(a)

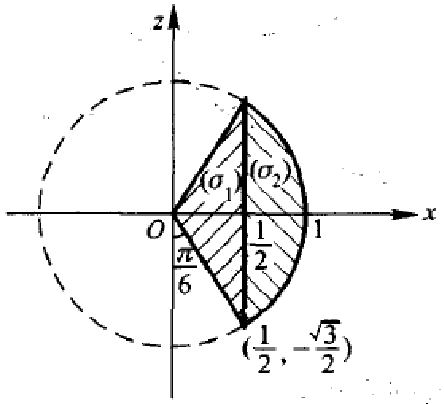
**解**　如图(a)所示对称轴为 $y$ 轴的抛物面 $x=\sqrt{y-z^2}$（即 $x^2+z^2=y$，$x\geqslant 0$）与母线平行于 $z$ 轴的抛物柱面 $x=\frac{1}{2}\sqrt{y}$（即 $y=4x^2$，$x\geqslant 0$）的交线 $\begin{cases}y=\dfrac{4}{3}z^2,\\ x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}|z|\end{cases}$ 在 $xOz$ 平面的投影如图(b)所示为 $|z|=\sqrt{3}x$.

故所求立体体积 $V=\iint\limits_{(\sigma_1)}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\int_{x^2+z^2}^{4x^2}\mathrm{d}y+\iint\limits_{(\sigma_2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\int_{x^2+z^2}^{1}\mathrm{d}y$.

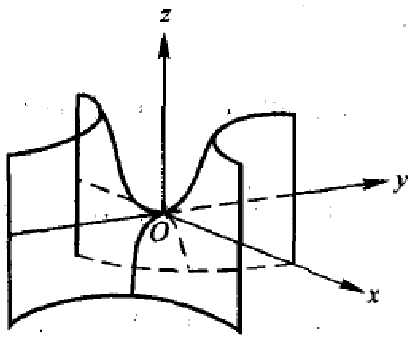
即
$$V=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{3}x}^{\sqrt{3}x}\mathrm{d}z\int_{x^2+z^2}^{4x^2}\mathrm{d}y+\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\varphi\int_{\frac{1}{2\cos\varphi}}^{1}\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{1}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{16} + \left(\frac{\pi}{6} - \frac{3\sqrt{3}}{16}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

(5) 由 $z = \frac{xy}{a}, x^2 + y^2 = ax (a > 0)$ 与 $z = 0$ 所围成的立体；




（第 6 题(4)）(b)




（第 6 题(5)）

**解** 如图所示，$x$ 轴和 $y$ 轴是马鞍面 $z = \frac{xy}{a}$ 上的两条直线，则所求立体由两个曲顶柱体 $(V_1)$ 和 $(V_2)$ 构成. 其中 $(V_1)$ 位于第 1 卦限，底为半圆 $\begin{cases} z = 0, \\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{ax - x^2}, \end{cases}$ 顶为马鞍面；$(V_2)$ 位于第八卦限，底为半圆 $\begin{cases} z = 0, \\ -\sqrt{ax - x^2} \leqslant y \leqslant 0, \end{cases}$ 顶为马鞍面. 故所求体积

$$V = V_1 + V_2 = \iiint_{(V_1)} \mathrm{d}V + \iiint_{(V_2)} \mathrm{d}V$$

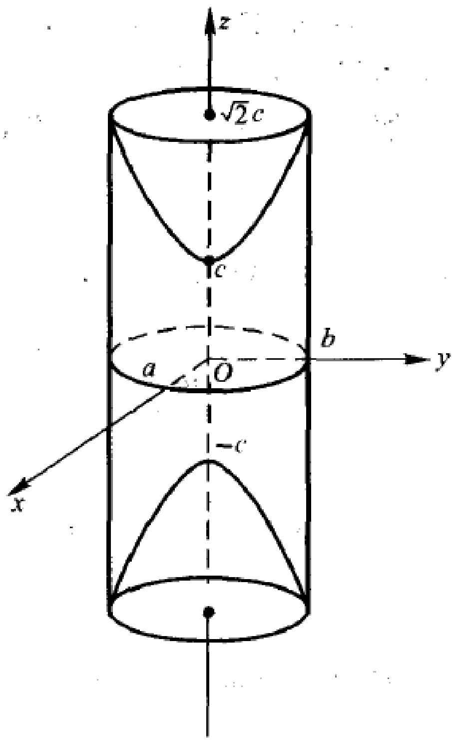
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \rho \mathrm{d}\rho \int_0^{\frac{\rho^2 \sin\varphi\cos\varphi}{a}} \mathrm{d}z - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \mathrm{d}\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \rho \mathrm{d}\rho \int_0^{\frac{\rho^2 \sin\varphi\cos\varphi}{a}} \mathrm{d}z$$

$$= \frac{a^3}{12}.$$

(7) 由 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ 与 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围成的立体 $(a > 0, b > 0, c > 0)$；

**解** 由双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ 与椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 围成的立体关

于 $xOy$ 平面对称.



（第 6 题(7)）

**解法 I**　作变换 $x=a\rho\cos\varphi, y=b\rho\sin\varphi, z=z$，则 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)}=ab\rho$. 故所求体积

$$V=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 ab\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{c\sqrt{1+\rho^2}}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{4}{3}\pi abc(2\sqrt{2}-1).$$

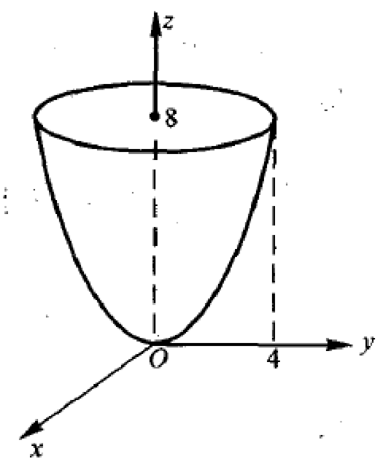
$\left(\text{注：}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1, z\geqslant 0 \text{ 变为 } c\sqrt{\rho^2+1}=z\right)$

**解法 II**　$$V=2\int_0^c\mathrm{d}z\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}\mathrm{d}\sigma+2\int_c^{\sqrt{2}c}\mathrm{d}z\iint\limits_{\frac{z^2}{c^2}-1\leqslant\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}\mathrm{d}\sigma$$

$$=2\int_0^c\pi ab\mathrm{d}z+2\int_c^{\sqrt{2}c}\pi ab\left[1-\left(\frac{z^2}{c^2}-1\right)\right]\mathrm{d}z$$

$$=\frac{4}{3}\pi abc(2\sqrt{2}-1).$$

7. 计算 $\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$，其中 $(V)$ 为平面曲线 $\begin{cases}y^2=2z,\\x=0\end{cases}$ 绕 $z$ 轴旋转一周形成的曲面与平面 $z=8$ 所围立体.



（第 7 题）

**解**　依题意，$(V)$ 为旋转抛物面 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ 及 $z=8$ 围成如图所示. 故

$$\text{原式}=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 16}\mathrm{d}\sigma\int_{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}^{8}(x^2+y^2)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^4\rho\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{8}\rho^2\mathrm{d}z$$

$$=\frac{4\times 16^2\pi}{3}=\frac{1\,024\pi}{3}.$$

8. 证明抛物面 $z=x^2+y^2+1$ 上任一点处的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围立体的体积恒为一常数值.

**解**　$z=x^2+y^2+1$ 上过 $P_0(x_0,y_0,z_0)(z_0=1+x_0^2+y_0^2)$ 处的切平面方程为

$$z=2x_0x+2y_0y+1-x_0^2-y_0^2.$$

则切平面与抛物面 $z=x^2+y^2$ 所围立体体积为

$$V=\iint\limits_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant 1}\mathrm{d}\sigma\int_{x^2+y^2}^{2x_0x+2y_0y+1-x_0^2-y_0^2}\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant 1}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+1]\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1(\rho^2+1)\rho\mathrm{d}\rho=\frac{3}{2}\pi.$$

与 $P_0$ 无关的常数其中 $x=x_0+\rho\cos\varphi, y=y_0+\rho\sin\varphi$,则$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)}=\rho$.

## (B)

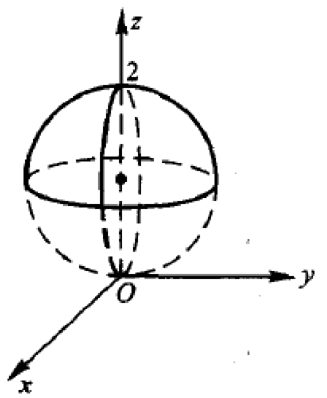
1. 计算下列三重积分

(1) $\iiint\limits_{(V)}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}V,(V)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+(z-1)^2\leqslant 1, z\geqslant 1, y\geqslant 0\}$;

**解**　用球坐标. 则平面 $z=1$ 方程为 $r\cos\theta=1$,则

$$\text{原式}=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2\cos\theta}\frac{1}{r}\cdot r^2\sin\theta\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{6}(7-4\sqrt{2}).$$




（第 1 题(1)）

(2) $\iiint\limits_{(V)}\left|\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1\right|\mathrm{d}V,(V)$ 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 围成;

**解**　$(V)=(V_1)\cup(V_2),(V_1)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\geqslant 1, \sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1\},(V_2)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1, z\geqslant\sqrt{x^2+y^2}\}$.

且 $(V_1)$ 与 $(V_2)$ 除边界外无其他的交点,于是

$$\iiint\limits_{(V)}\left|\sqrt{x^2+z^2+y^2}-1\right|\mathrm{d}V=\iiint\limits_{(V_1)}(\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1)\mathrm{d}V+$$

$$\iiint_{(V_2)}(1-\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}V$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}(r-1)r^2\sin\theta\mathrm{d}r+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r)r^2\sin\theta\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{6}(\sqrt{2}-1).$$

(3) $\iiint_{(V)}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\mathrm{d}V,(V)=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1,a>0,b>0,c>0\right\}.$

**解**　令 $x=ar\sin\theta\cos\varphi,y=br\sin\theta\sin\varphi,z=cr\cos\theta$，则$(V)$：$0\leqslant r\leqslant 1,0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,0\leqslant\theta\leqslant\pi$，且 $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)}\right|=abcr^2\sin\theta.$

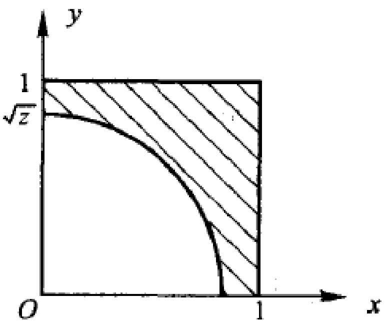
于是原积分 $=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(abcr^2\sin\theta)\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r=\frac{\pi^2}{4}abc.$

2. 将累次积分 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)\mathrm{d}z$ 分别化为先对 $x$ 和先对 $y$ 的累次积分.

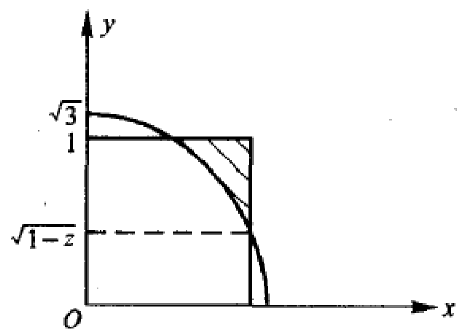
**解**　设$(V)$由抛物面 $z=x^2+y^2,x=0,y=0,z=0,x=1,y=1$ 围成，于是

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)\mathrm{d}z=\iiint_{(V)}f(x,y,z)\mathrm{d}V.$$

与 $xOy$ 面平行的平面 $z=z$ 与$(V)$的截面为$(\sigma_z)$，则 $0\leqslant z\leqslant 1$ 时如图(a)所示，$1\leqslant z\leqslant 2$ 时，$(\sigma_z)$如图(b)所示




(第 2 题(a))




(第 2 题(b))

故

$$\iiint_{(V)}f(x,y,z)\mathrm{d}V=\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{(\sigma_z)}f(x,y,z)\mathrm{d}\sigma+\int_1^2\mathrm{d}z\iint_{(\sigma_z')}f(x,y,z)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \int_0^1 dz\left[\int_0^{\sqrt{z}} dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\,dx + \int_{\sqrt{z}}^1 dy \int_0^1 f(x,y,z)\,dx\right] +$$

$$\int_1^2 dz \int_{\sqrt{z-1}}^1 dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\,dx.$$

又 $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz$

$= \int_0^1 dx \iint\limits_{(\sigma_x)} f(x,y,z)\,d\sigma$（交换二重积分次序）

$= \int_0^1 dx\left[\int_0^{x^2} dz \int_0^1 f(x,y,z)\,dy + \int_{x^2}^{1+x^2} dz \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)\,dy\right]$，其中$(\sigma_x)$ 如图(c) 所示.

3. 设 $F(t) = \iiint\limits_{(V)} x\ln(1+x^2+y^2+z^2)\,dV$，$(V)$ 由 $x^2+y^2+z^2 \leqslant t^2$ 与 $\sqrt{y^2+z^2} \leqslant x$ 确定，求$\frac{dF(t)}{dt}$.

**解** 令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta\cos\varphi, z = r\sin\theta\sin\varphi$.

则 $$F(t) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^t r\cos\theta\ln(1+r^2)\cdot r^2\sin\theta\,dr$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^t r^3\ln(1+r^2)\,dr,$$

故 $$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{\pi}{2}t^3\ln(1+t^2).$$

4. 设 $f$ 为连续函数，求函数 $F(t) = \iiint\limits_{(V)} f(x^2+y^2+z^2)\,dV$ 的导数 $F'(t)$，其中 $(V) = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant t^2\}$.

**解** 用球坐标变换，$F(t) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^t f(r^2)r^2\sin\theta\,dr$

$$= 4\pi\int_0^t r^2 f(r^2)\,dr.$$

由于 $f$ 为连续函数，故 $F'(t) = \frac{d}{dt}\left[4\pi\int_0^t r^2 f(r^2)\,dr\right] = 4\pi t^2 f(t^2)$.

5. 设 $f(x)$ 连续，$(V) = \{(x,y,z) \mid 0 \leqslant z \leqslant h, x^2+y^2 \leqslant t^2\}$，

$$F(t) = \iiint\limits_{(V)} [z^2 + f(x^2+y^2)]\,dV,$$

求$\frac{dF}{dt}$和 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^2}$.

**解**　用柱坐标，$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^t\rho\mathrm{d}\rho\int_0^h[z^2+f(\rho^2)]\mathrm{d}z$

$$=2\pi\int_0^t\rho\left[\frac{1}{3}z^3+zf(\rho^2)\right]_0^h\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\int_0^t\rho\left[\frac{1}{3}h^3+hf(\rho^2)\right]\mathrm{d}\rho.$$

于是，$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=2\pi ht\left[\frac{1}{3}h^2+f(t^2)\right]$.

$$\lim_{t\to0^+}\frac{F(t)}{t^2}\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim_{t\to0^+}\frac{2\pi ht\left[\frac{1}{3}h^2+f(t^2)\right]}{2t}=\pi h\left[\frac{1}{3}h^2+f(0)\right].$$

6. 计算三重积分 $\iiint\limits_{(V)}(x+y+z)^2\mathrm{d}V$，其中$(V)$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant1$.

**解**　$\iiint\limits_{(V)}(x+y+z)^2\mathrm{d}V=\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V+\iiint\limits_{(V)}(2xy+2xz+2yz)\mathrm{d}V.$

由于$(V)$关于 $xOy$ 平面对称，而$(xz+yz)$关于 $z$ 为奇函数，则 $2\iiint\limits_{(V)}(xz+yz)\mathrm{d}V=0$，类似的可知$\iiint\limits_{(V)}xy\mathrm{d}V=0$，从而 $\iiint\limits_{(V)}(2xy+2xz+2yz)\mathrm{d}V=0$.

又
$$\iiint\limits_{(V)}x^2\mathrm{d}V=\int_{-a}^a x^2\mathrm{d}x\iint\limits_{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant1-\frac{x^2}{a^2}}\mathrm{d}\sigma=\int_{-a}^a x^2\left[\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{15}\pi a^3bc.$$

类似可得 $\iiint\limits_{(V)}y^2\mathrm{d}V=\frac{4}{15}\pi ab^3c$，$\iiint\limits_{(V)}z^2\mathrm{d}V=\frac{4}{15}\pi abc^3$.

故　$\iiint\limits_{(V)}(x+y+z)^2\mathrm{d}V=\frac{4}{15}\pi abc(a^2+b^2+c^2)$.

## 习　题　6.4

### (A)

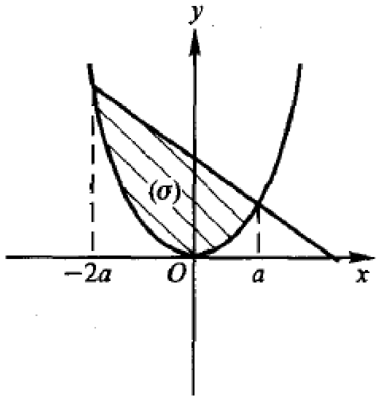
1. 求下列曲线所围成的均匀薄板的质心坐标.

(1) $ay=x^2, x+y=2a\ (a>0)$;

(2) $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)\quad(0\leqslant t\leqslant2\pi, a>0)$与 $x$ 轴;

(3) $\rho=a(1+\cos\varphi)\quad(a>0)$.

**解** 设 $\mu$ 为薄板的面密度. $(\bar{x},\bar{y})$ 为质心,则




（第 1 题(1)）

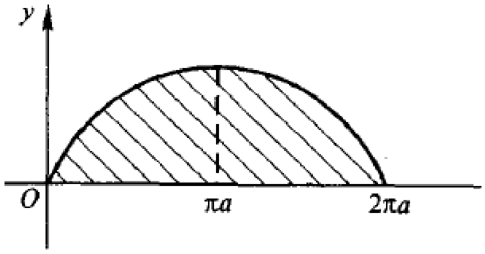
(1) $$\bar{y}=\frac{\mu\iint\limits_{(\sigma)}y\mathrm{d}\sigma}{\mu\iint\limits_{(\sigma)}\mathrm{d}\sigma}=\frac{\int_{-2a}^{a}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{a}x^2}^{2a-x}y\mathrm{d}y}{\int_{-2a}^{a}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{a}x^2}^{2a-x}\mathrm{d}y}=\frac{8}{5}a,$$

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_{(\sigma)}\mu x\mathrm{d}\sigma}{\mu\iint\limits_{(\sigma)}\mathrm{d}\sigma}=\frac{\int_{-2a}^{a}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{a}x^2}^{2a-x}x\mathrm{d}y}{\int_{-2a}^{a}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{a}x^2}^{2a-x}\mathrm{d}y}=-\frac{a}{2}.$$

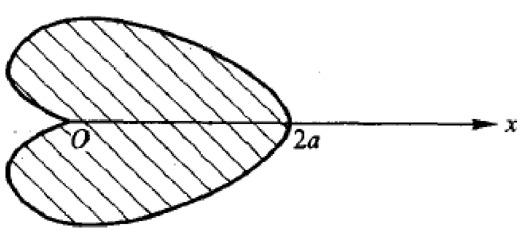
(2) 薄板的质量 $$m=\iint\limits_{(\sigma)}\mu\mathrm{d}\sigma$$
$$=\mu\int_0^{2\pi a}\mathrm{d}x\int_0^{a(1-\cos t)}\mathrm{d}y$$
$$=\mu\int_0^{2\pi a}a(1-\cos t)\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{\text{令 } x=a(t-\sin t)}\mu\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\mathrm{d}t=3\pi a^2\mu.$$

对 $x$ 轴的静力矩 $M_x=\mu\iint\limits_{(\sigma)}y\mathrm{d}\sigma=\mu\int_0^{2\pi a}\mathrm{d}x\int_0^{a(1-\cos t)}y\mathrm{d}y=\frac{5\pi a^3}{2}\mu$. 故 $\bar{y}=\frac{5\pi a^3}{2}\mu\Big/3\pi a^2\mu=\frac{5}{6}a$.

由对称性知 $\bar{x}=\pi a$,故质心$\left(\pi a,\frac{5}{6}a\right)$.




（第 1 题(2)）




（第 1 题(3)）

(3) 由对称性知 $\bar{y}=0$,

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_{(\sigma)}x\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_{(\sigma)}\mathrm{d}\sigma}=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a(1+\cos\varphi)}\rho\cdot\rho\cos\varphi\mathrm{d}\rho}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a(1+\cos\varphi)}\rho\mathrm{d}\rho}=\frac{\frac{5}{4}\pi a^3}{\frac{3}{2}\pi a^2}=\frac{5}{6}a,$$

故质心为$\left(\frac{5}{6}a,0\right)$.

2. 求边界为下列曲面的均匀物体的质心.

(1) $z=c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}, z=0(a>0,b>0,c>0)$;

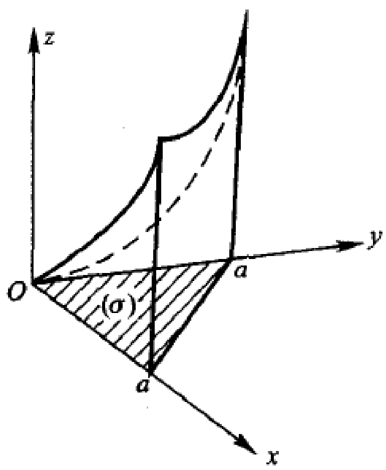
(3) $z=x^2+y^2, x+y=a, x=0, y=0, z=0(a>0)$.

**解**　(1) 由对称性 $\bar{x}=\bar{y}=0$，半椭球体的质量 $M=\dfrac{2}{3}\pi abc\mu$. 对 $xoy$ 平面的静矩 $M_{xy}=\iiint\limits_{(V)}\mu z\mathrm{d}V=\int_0^c\mu z\mathrm{d}z\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\frac{z^2}{c^2}}\mathrm{d}\sigma=\mu\int_0^c\pi ab\left(1-\dfrac{z^2}{c^2}\right)z\mathrm{d}z=\dfrac{\pi}{4}\mu abc^2$,

故　$\bar{z}=\dfrac{M_{xy}}{M}=\dfrac{3}{8}c$. 从而质心 $\left(0,0,\dfrac{3}{8}c\right)$.

(3) 立体质量

$$M=\iiint\limits_{(V)}\mu\mathrm{d}V=\mu\iint\limits_{(\sigma)}\mathrm{d}\sigma\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z=\mu\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z=\frac{1}{6}\mu a^4.$$




(第 2 题(3))

对 $xOy$ 平面及 $yOz$ 平面的静矩分别为

$$M_{xy}=\iiint\limits_{(V)}\mu z\mathrm{d}V=\mu\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}z\mathrm{d}z=\frac{\mu}{2}\cdot\frac{7}{90}a^6,$$

$$M_{yz}=\iiint\limits_{(V)}x\mu\mathrm{d}V=\mu\int_0^a x\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z=\frac{\mu}{15}a^5.$$

故　$\bar{z}=\dfrac{M_{xy}}{M}=\dfrac{7}{30}a^2, \bar{x}=\dfrac{M_{yz}}{M}=\dfrac{2}{5}a$.

由对称性，质心必在 $x=y$ 平面上，即 $\bar{y}=\bar{x}$. 故质心为 $\left(\dfrac{2}{5}a,\dfrac{2}{5}a,\dfrac{7}{30}a^2\right)$.

4. 求均匀物体：$x^2+y^2+z^2\leqslant 2, x^2+y^2\geqslant z^2$ 对 $z$ 轴的转动惯动.

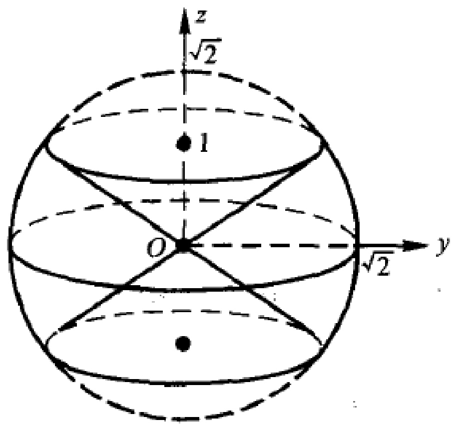
**解**

$$I_z=2\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)\mu\mathrm{d}V$$

$$= 2\mu\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} r^2\sin^2\theta\cdot r^2\sin\theta\mathrm{d}r$$

$$= \frac{8}{3}\pi\mu.$$

其中 $\mu$ 为体密度.



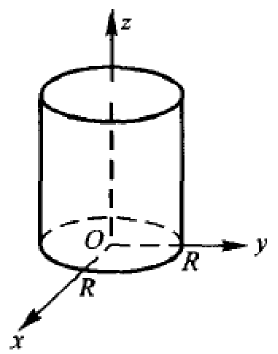

（第 4 题）

5. 求底半径为 $R$,高为 $H$ 的均匀正圆柱体对底面直径的转动惯量.

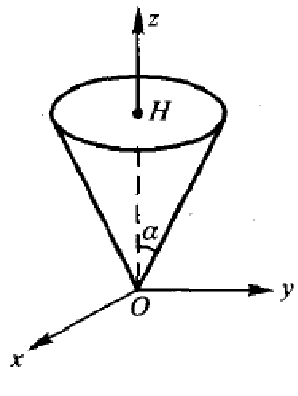
**解** 如图所示建立坐标系,对 $x$ 轴或 $y$ 轴的转动惯量即对底面直径的转动惯量. 设 $\mu$ 为正圆柱的体密度,则

$$I_x = \iiint_{(V)}(\mu\mathrm{d}V)(y^2+z^2) = \mu\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R\rho\mathrm{d}\rho\int_0^H(\rho^2\sin^2\varphi+z^2)\mathrm{d}z$$

$$= \mu\pi R^2H\left(\frac{H^2}{3}+\frac{R^2}{4}\right) = M\left(\frac{H^2}{3}+\frac{R^2}{4}\right)\quad (M\text{ 为圆柱体质量}).$$




（第 5 题）




（第 6 题）

6. 求高为 $H$,半顶角为 $\alpha$,体密度为 $\mu$ 的均匀圆锥体对位于其顶点的一单位质量质点的引力.

**解** 如图所示建立坐标系,则圆锥面的方程为 $z\tan\alpha = \sqrt{x^2+y^2}$. 在 $xOy$ 平面的投影为圆域 $\begin{cases} z=0, \\ x^2+y^2\leqslant H^2\tan^2\alpha, \end{cases}$ 从而引力微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = k\dfrac{\mu\mathrm{d}V}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\{x,y,z\} = \{\mathrm{d}F_x,\mathrm{d}F_y,\mathrm{d}F_z\}$,$k$ 为引力常数.

由对称性知 $F_x = \iiint_{(V)}\mathrm{d}F_x = 0, F_y = 0,$

$$F_z = \iiint\limits_{(V)} \mathrm{d}F_z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{H\tan\alpha} \rho \mathrm{d}\rho \int_{\rho\cot\alpha}^{H} \frac{k\mu z}{\sqrt[3]{\rho^2 + z^2}} \mathrm{d}z$$

$$= 2\pi k\mu \int_0^{H\tan\alpha} \frac{\rho}{-\sqrt{\rho^2 + z^2}} \Bigg|_{\rho\cot\alpha}^{H} \mathrm{d}\rho$$

$$= 2\pi k\mu \int_0^{H\tan\alpha} \left( \sin\alpha - \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + H^2}} \right) \mathrm{d}\rho$$

$$= 2\pi k\mu H(1 - \cos\alpha).$$

故所求引力为 $\boldsymbol{F} = \{0,0,2\pi k\mu H(1-\cos\alpha)\}$.

**(B)**

1. 一个火山的形状可以用曲面 $z = he^{-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{4h}}$ $(z>0)$ 来表示. 在一次爆发后，有体积为 $V$ 的熔岩粘附在山上，使它具有和原来一样的形状，求火山高度 $h$ 变化的百分比.

**解**　火山的高度为 $h$，体积为 $V_h$.

$$V_h = \iiint\limits_{(V_1)} \mathrm{d}V = \int_0^h \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2 \le \left(4h\ln\frac{z}{h}\right)^2} \mathrm{d}\sigma = \int_0^h \pi\left(4h\ln\frac{z}{h}\right)^2 \mathrm{d}z = 32\pi h^3.$$

火山爆发后的体积 $V_1 = V_h + V = 32\pi h^3 + V$，高度为 $h_1$. 由于爆发后保持原来的形状，则 $V_1 = 32\pi h_1^3$，从而 $h_1 = \left(h^3 + \frac{V}{32\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$. 故火山高度增加的百分比为 $\frac{h_1 - h}{h} = \frac{1}{h}\left(h^3 + \frac{V}{32\pi}\right)^{\frac{1}{3}} - 1$.

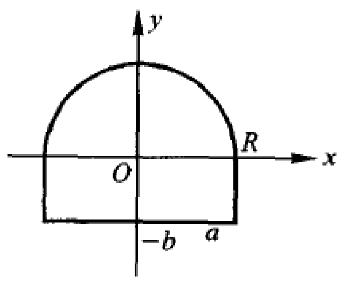
2. 在某一生产过程中，要在半圆形的直边上添上一个边与直径等长的矩形，使整个平面图形的质心落在圆心上，试求矩形的另一边长.

**解**　如图示建立坐标系，圆半径为 $R$，矩形的另一边长为 $b$，质量是均匀分布的，也即面密度 $\mu$ 的常数. 图形的质心 $A(\bar{x},\bar{y})$，则依题意 $\bar{x}=0, \bar{y}=0$.

此图形 $(\sigma)$ 的质量 $m = \mu\left(\frac{1}{2}\pi R^2 + 2bR\right)$，对 $x$ 轴的静矩

$$M_x = \iint\limits_{(\sigma)} \mu y \mathrm{d}\sigma = \mu \int_{-R}^{R} \mathrm{d}x \int_{-b}^{\sqrt{R^2-x^2}} y \mathrm{d}y$$

$$= \mu R\left(\frac{2}{3}R^2 - b^2\right).$$




(第 2 题)

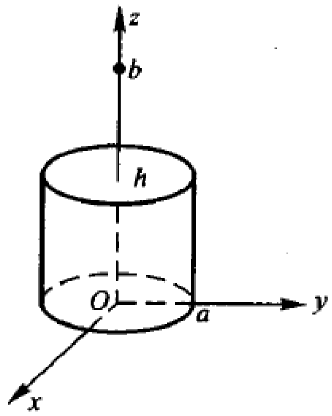
则由 $\bar{y}=\frac{M_x}{m}=0$ 得 $b=\sqrt{\frac{2}{3}}R$.

3. 一个均匀圆柱体,全部质量为 $M$,占有的区域是 $x^2+y^2\leqslant a^2,0\leqslant z\leqslant h$,求它对位于点 $(0,0,b)$,质量为 $M'$ 的一个质点的引力,其中 $b>h$.

**解** 如图所示建立坐标系,圆柱体对质点 $M'$ 的引力

$$F=\{F_x,F_y,F_z\}.$$

由对称性知引力 $F$ 的 $x$ 与 $y$ 分量 $F_x=\iiint\limits_{(V)}dF_x=0,F_y=\iiint\limits_{(V)}dF_y=0$,




(第3题)

而
$$F_z=\iiint\limits_{(V)}dV=\iiint\limits_{(V)}\frac{kM'\mu(z-b)}{[x^2+y^2+(z-b)^2]^{\frac{3}{2}}}dV$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\rho d\rho\int_0^h\frac{kM'\mu(z-b)}{[\rho^2+(z-b)^2]^{\frac{3}{2}}}dz$$

$$=2\pi kM'\mu\int_0^a\rho\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+b^2}}-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(b-h)^2}}\right)d\rho$$

$$=2\pi kM'\cdot\frac{M}{\pi a^2h}(\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+(b-h)^2}-h).$$

故引力 $F=\left\{0,0,\frac{2kMM'}{a^2h}(\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+(b-h)^2}-h)\right\}$.

4. 设物体对轴 $L$ 的转动惯量为 $I_L$,对通过质心 $C$ 平行于 $L$ 轴的轴 $L_C$ 的转动惯量为 $I_C$,$L_C$ 与 $L$ 的距离为 $a$,试证 $I_L=I_C+ma^2$,其中 $m$ 为物体的质量,这一公式称为平行轴定理.

**证明** 以质心为坐标原点,$L_C$ 为 $y$ 轴,$L_C$ 与 $L$ 所在的平面为 $xOz$ 坐标面. 设物体的密度为 $\mu(x,y,z)$,则

$$m=\iiint\limits_{(V)}\mu(x,y,z)dV,I_C=\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)\mu(x,y,z)dV,$$

$$I_L=\iiint\limits_{(V)}[(x-a)^2+y^2]\mu(x,y,z)dV$$

$$=I_C+ma^2-2a\iiint\limits_{(V)}x\mu(x,y,z)dV.$$

由于质心为坐标原点,则物体对 $yOz$ 坐标面的静矩

$$M_{yz} = \iiint\limits_{(V)} x\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}V = 0,\text{于是 } I_L = I_C + ma^2.$$

## 习　题　6.5

### (A)

1. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}$;　(3) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^1 \sqrt{1+\alpha^2-x^2}\,\mathrm{d}x$.

**解**　(1) 由于 $\dfrac{1}{1+x^2+\alpha^2}$ 在 $(x,\alpha)\in[0,1]\times[-1,1]$ 上连续,由定理 5.1

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2} = \int_0^1\left(\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

(3) $\sqrt{1+\alpha^2-x^2}$ 在 $[0,1]\times[-1,1]$ 上连续,由定理 5.1

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^1 \sqrt{1+\alpha^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1\lim_{\alpha\to 0}\sqrt{1+\alpha^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

2. 求下列函数的导数.

(2) $F(y) = \int_{a+y}^{b+y}\dfrac{\sin xy}{x}\mathrm{d}x$;

(3) $F(x) = \int_0^x (x+y)f(y)\,\mathrm{d}y$,其中 $f$ 为可微函数,求 $F''(x)$.

**解**　由定理 5.4.

(2) $$F'(y) = \int_{a+y}^{b+y}\cos xy\,\mathrm{d}x + \frac{\sin(b+y)y}{b+y} - \frac{\sin(a+y)y}{a+y}$$
$$= \left(\frac{1}{y}+\frac{1}{b+y}\right)\sin y(b+y) - \left(\frac{1}{y}+\frac{1}{a+y}\right)\sin y(a+y).$$

(3) $$F'(x) = \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y + 2xf(x),$$
$$F''(x) = f(x) + 2f(x) + 2xf'(x) = 3f(x) + 2xf'(x).$$

3. 利用定理 5.2 计算下列积分.

(1) $\int_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$;(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\,\mathrm{d}x\ (a>0,b>0)$.

**解**　(1) 令 $F(\alpha) = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

由$\frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}$在$[0,1]\times[0,1]$上连续及定理5.2.

$$F'(\alpha)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\right]dx=\int_0^1\frac{x}{(1+x^2)(1+\alpha x)}dx$$

$$=\frac{1}{1+\alpha^2}\int_0^1\left(\frac{x+\alpha}{1+x^2}-\frac{\alpha}{1+\alpha x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{1+\alpha^2}\left[\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}\alpha-\ln(1+\alpha)\right].$$

注意到$F(0)=0,F(1)=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\int_0^1F'(\alpha)d\alpha.$

故
$$I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{1}{1+\alpha^2}\left[\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}\alpha-\ln(1+\alpha)\right]d\alpha$$

$$=\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\ln 2-\int_0^1\frac{\ln(1+\alpha)}{1+\alpha^2}d\alpha=\frac{\pi}{4}\ln 2-I,$$

从而
$$I=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

(2) 令$F(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\alpha^2\sin^2x+\cos^2x)dx,F(1)=0.$

$\alpha\neq 1,F'(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\alpha\sin^2x}{\alpha^2\sin^2x+\cos^2x}dx$(令$t=\tan^2x$)

$$=\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha t^2}{(1+\alpha^2t^2)(1+t^2)}dt=\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{1+\alpha^2t^2}\right)dt$$

$$=\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\left[\arctan t-\frac{1}{\alpha}\arctan(\alpha t)\right]_0^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{2}\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{\pi}{\alpha+1},$$

$$F(\alpha)=F(1)+\pi\int_1^{\alpha}\frac{d\alpha}{\alpha+1}=\pi[\ln(1+\alpha)-\ln 2].$$

故当$a=b$,$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln a^2dx=\pi\ln a$;

$a\neq b$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\ln\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2\sin^2x+\cos^2x\right)+\ln b^2\right]dx$$

$$=F\left(\frac{a}{b}\right)+\pi\ln b=\pi\ln\frac{a+b}{2}.$$

4. 讨论下列含参变量反常积分在指定区间内的一致收敛性：

(2) $\int_1^{+\infty} x^b e^{-x} dx \quad (a \leqslant b \leqslant c)$；

(4) $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos x dx \quad (0 \leqslant a \leqslant a_1)$.

**解** (2) 由于 $|x^b e^{-x}| \leqslant x^c e^{-x}$,

若 $c \leqslant 0$，由于 $|x^c e^{-x}| = x^c e^{-x} \leqslant e^{-x}$，而 $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ 收敛，故 $\int_1^{+\infty} x^c e^{-x} dx$ 收敛.

若 $c > 0$，必存在 $n \in \mathbf{N}_+$ 使 $c - n \leqslant 0$，则 $\int_1^{+\infty} x^{c-n} e^{-x} dx$ 收敛. 又 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$（$\alpha$ 为任意正实数），于是

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} x^c e^{-x} dx &= -x^c e^{-x} \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} c x^{c-1} e^{-x} dx \\
&= \frac{1}{e} - c x^{c-1} e^{-x} \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} c(c-1) x^{c-2} e^{-x} dx \\
&= \frac{1}{e} + \frac{c}{e} + c(c-1) \int_1^{+\infty} x^{c-2} e^{-x} dx \\
&= \cdots = \frac{1}{e}\Big[1 + c + c(c-1) + \cdots + \\
&\quad ec(c-1)\cdots(c-n+1) \int_1^{+\infty} x^{c-n} e^{-x} dx\Big].
\end{aligned}$$

即 $\int_1^{+\infty} x^c e^{-x} dx$ 收敛.

故 $\int_1^{+\infty} x^b e^{-x} dx$ 当 $a \leqslant b \leqslant c$ 时一致收敛.

(4) 收敛但非一致收敛．对 $\forall b \in (-\infty, +\infty)$，

由于 $|e^{-ax^2} \cos bx| \leqslant e^{-ax^2}$，$|xe^{-ax^2} \sin bx| \leqslant xe^{-ax^2}$，

而 $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx$ 与 $\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2} dx$ 均收敛. 故含参变量 $b$ 的积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx$ 与 $\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2} \sin bx dx$ 关于参数 $b \in (-\infty, +\infty)$ 一致收敛. 令 $F(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx$，则由定理 5.2，得 $F'(b) = -\frac{b}{2a} F(b)$，于是 $F(b) = F(0) e^{-\frac{b^2}{4a}}$.

由概率积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ 知：

$$F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{a}x)^2} d(\sqrt{a}x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

从而 $F(b)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$，故 $\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos x\,dx=F(1)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{1}{4a}}$. 即 $\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos x\,dx$ 收敛.

5. 利用定理5.3计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx\quad(a>0,b>0)$.

**解**
$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\int_0^{+\infty}\left[\int_a^b e^{-tx}dt\right]dx$$
$$=\int_a^b\int_0^{+\infty}e^{-tx}dxdt=\int_a^b\frac{1}{t}dt=\ln b-\ln a=\ln\frac{b}{a}.$$

6. 计算下列反常积分:

(1) $\iint\limits_{(D)}\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\qquad(D)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$;

(2) $\iint\limits_{(D)}\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy\qquad(D)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$;

(3) $\iint\limits_{(D)}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}\qquad(D)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x\}$;

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)dxdy$.

**解** (1) 原式 $=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}2\pi(1-\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2})=2\pi$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_\varepsilon^1-\rho\ln\rho d\rho=2\pi\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\varepsilon^2+\frac{1}{2}\varepsilon^2\ln\varepsilon\right)=\frac{\pi}{2}$.

(3) 原式 $=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_\varepsilon^{\cos\varphi}d\rho=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\left(2-\frac{\pi}{2}\varepsilon\right)=2$.

(4) 原式 $=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^A\rho e^{-\rho^2}\cos\rho^2d\rho$
$$=\pi\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sin A-\cos A}{e^A}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

(由于 $\sin A-\cos A$ 为有界函数，$e^{-A}$ 为 $A\to+\infty$ 的无穷小，故 $\lim\limits_{A\to+\infty}\frac{\sin A-\cos A}{e^A}=0$).

## (B)

1. 设 $F(x)=\int_a^b f(y)\,|x-y|\,dy$，其中 $a<b$，且 $f(y)$ 可微函数，求 $F''(x)$.

**解**　若 $x\leqslant a$,则 $F(x)=\int_a^b f(y)(y-x)\mathrm{d}y$, 由定理 5.2

$$F'(x)=-\int_a^b f(y)\mathrm{d}y,F''(x)=0$$

若 $x\geqslant b$,则 $F(x)=\int_a^b (x-y)f(y)\mathrm{d}y,F'(x)=\int_a^b f(y)\mathrm{d}y$,

$$F''(x)=0.$$

若 $a<x<b,F(x)=\int_a^x (x-y)f(y)\mathrm{d}y+\int_x^b(-x+y)f(y)\mathrm{d}y$,

$$F'(x)=\int_a^x f(y)\mathrm{d}y+\int_x^b -f(y)\mathrm{d}y,$$

$$F''(x)=f(x)+f(x)=2f(x).$$

故 $F''(x)=\begin{cases}2f(x), & x\in(a,b),\\ 0, & x\geqslant b \text{ 或 } x\leqslant a.\end{cases}$

2. 设 $f$ 具有连续的一阶偏导数,求 $F(\alpha)=\int_0^\alpha f(x+\alpha,x-\alpha)\mathrm{d}x$ 的导数 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\alpha}$.

**解**　令 $u=x+\alpha,v=x-\alpha$,由定理 5.4 得

$$F'(\alpha)=\int_0^\alpha[f'_u(u,v)-f'_v(u,v)]\mathrm{d}x+f(2\alpha,0),$$

又
$$\int_0^\alpha\frac{\partial f(u,v)}{\partial x}\mathrm{d}x=f(u,v)\Big|_0^\alpha=f(2\alpha,0)-f(\alpha,-\alpha).$$

另一方面 $\int_0^\alpha\frac{\partial f(u,v)}{\partial x}\mathrm{d}x=\int_0^\alpha(f'_u+f'_v)\mathrm{d}x$ ,故

$$\int_0^\alpha f'_v\mathrm{d}x=f(2\alpha,0)-f(\alpha,-\alpha)-\int_0^\alpha f'_u\mathrm{d}x.$$

从而
$$F'(\alpha)=2\int_0^\alpha f'_u(u,v)\mathrm{d}x+f(\alpha,-\alpha).$$

## 习　题　6.6

### (A)

1. 计算下列第一型线积分:

(5) $\oint_{(C)}x^2\mathrm{d}s$, $(C)$为圆周 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\ z=\sqrt{3};\end{cases}$

(6) $\oint_{(C)} |y|\,ds$，$(C)$为球面 $x^2+y^2+z^2=2$ 与平面 $x=y$ 的交线．

**解** (5) $(C)$的参数方程为 $x=\cos t, y=\sin t, z=\sqrt{3}, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$，

$$\oint_{(C)} x^2 ds = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t)\sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t+0}\,dt = \pi .$$

(6) $(C)$的参数方程为：$x=y=\cos t, z=\sqrt{2}\sin t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$，

$$\oint_{(C)} |y|\,ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\cdot\sqrt{2}\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cdot\sqrt{2}(-\cos t)\,dt = 4\sqrt{2}.$$

2. 试导出用极坐标方程 $\rho=\rho(\varphi)\ (\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta)$ 表示曲线$(C)$的线积分计算公式：

$$\int_{(C)} f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f(\rho(\varphi)\cos\varphi,\rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\,d\varphi.$$

**解** $(C)$的参数方程为 $x=\rho(\varphi)\cos\varphi, y=\rho(\varphi)\sin\varphi, \alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$，于是

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= (dx)^2+(dy)^2 = [\rho'(\varphi)\cos\varphi-\rho(\varphi)\sin\varphi]^2(d\varphi)^2 + \\ &\quad [\rho'(\varphi)\sin\varphi+\rho(\varphi)\cos\varphi]^2(d\varphi)^2 \\ &= (\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi))(d\varphi)^2.\end{aligned}$$

从而

$$\int_{(C)} f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f(\rho(\varphi)\cos\varphi,\rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\,d\varphi.$$

3. 计算下列线积分：

(2) $\oint_{(C)} \sqrt{x^2+y^2}\,ds$，$(C)$为圆周 $x^2+y^2=ax\ (a>0)$；

(3) $\oint_{(C)} |y|\,ds$，$(C)$为双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\ (a>0)$.

**解** (2) $(C)$的参数方程为：$x=\frac{a}{2}(1+\cos t), y=\frac{a}{2}\sin t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$，从而 $ds=\frac{a}{2}dt$，于是，

$$\begin{aligned}\oint_{(C)} \sqrt{x^2+y^2}\,ds &= \int_0^{2\pi}\sqrt{a\cdot\frac{a}{2}(1+\cos t)}\cdot\frac{a}{2}dt = \frac{a^2}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\left|\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}\right|dt \\ &= \frac{a^2}{2}\left[\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}dt - \int_\pi^{2\pi}\cos\frac{t}{2}dt\right] = 2a^2.\end{aligned}$$

(3)$(C)$的极坐标方程为 $\rho^2=a^2\cos 2t, t\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$. 参数方程为 $x=a\sqrt{\cos 2t}\cos t, y=a\sqrt{\cos 2t}\sin t$,则 $\mathrm{d}s=\frac{a}{\sqrt{\cos 2t}}\mathrm{d}t$. 由于$(C)$关于 $x$ 轴对称,于是

$$\oint_{(C)}|y|\,\mathrm{d}s=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\sqrt{\cos 2t}\sin t\cdot\frac{a}{\sqrt{\cos 2t}}\mathrm{d}t+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}a\sqrt{\cos 2t}\sin t\cdot\frac{a\mathrm{d}t}{\sqrt{\cos 2t}}\right]$$

$$=2a^2(2-\sqrt{2}).$$

5. 计算圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 介于 $xOy$ 平面及柱面 $z=R+\frac{x^2}{R}$之间的一块面积,其中 $R>0$.

**解**　圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 的准线是 $xOy$ 平面上的圆$(C)$:

$x^2+y^2=R^2$. 对$(C)$进行化分,在弧微元 $\mathrm{d}s$ 上的一小片柱面面积可近似地看作以 $\mathrm{d}s$ 为底,以截线$\begin{cases}x^2+y^2=R^2,\\ z=R+\frac{x^2}{R}\end{cases}$的竖坐标 $z=R+\frac{x^2}{R}$为高的长方形面积,从而得面积微元 $\mathrm{d}S=(R+\frac{x^2}{R})\mathrm{d}s$,于是所求面积为

$$A=\int_{(C)}(R+\frac{x^2}{R})\mathrm{d}s$$

$(C)$的参数方程: $x=R\cos t, y=R\sin t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 所以

$$A=\int_0^{2\pi}\left(R+\frac{R^2\cos^2 t}{R}\right)\cdot R\mathrm{d}t=3\pi R^2.$$

6. 设螺线 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, z=k\theta(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$上物质的线密度为 $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$,求:

(1) 它关于 $z$ 轴的转动惯量;

(2) 它的重心.

**解**　(1) 螺线$(C)$关于 $z$ 轴的转动惯量为

$$I_z=\int_{(C)}(x^2+y^2)\mathrm{d}m=\int_{(C)}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}s$$

$$=\int_{(C)}(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^{2\pi} a^2(a^2+k^2\theta^2)\sqrt{a^2+k^2}\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3}\pi a^2\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2).$$

(2) 设其重心$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$. 质量 $m=\int_{(C)}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{2\pi}{3}\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2)$ 对三个坐标面的静矩分别为：

$$M_{xy}=\int_{(C)}z\mathrm{d}m=\int_{(C)}z(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}k\theta(a^2+k^2\theta^2)\sqrt{a^2+k^2}\mathrm{d}\theta$$

$$=2\pi^2k\sqrt{a^2+k^2}(a^2+2k^2\pi^2),$$

$$M_{yz}=\int_{(C)}x\mathrm{d}m=\int_0^{2\pi}a\cos\theta\cdot(a^2+k^2\theta^2)\cdot\sqrt{a^2+k^2}\mathrm{d}\theta=4\pi ak^2\sqrt{a^2+k^2},$$

$$M_{zx}=\int_{(C)}y\mathrm{d}m=\int_0^{2\pi}a\sin\theta\cdot(a^2+k^2\theta^2)\cdot\sqrt{a^2+k^2}\mathrm{d}\theta=-4\pi^2ak^2\sqrt{a^2+k^2}.$$

从而：

$$\bar{x}=\frac{M_{yz}}{m}=\frac{6ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2},\quad \bar{y}=\frac{-6\pi ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2},\quad \bar{z}=\frac{3k(\pi a^2+2\pi^3k^2)}{3a^2+4\pi^2k^2}.$$

7. 求曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$包含在圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 内的那一部分的面积.

**解** 圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$包含在 $x^2+y^2=2x$ 的那一部分在 $xOy$ 平面上的投影$(\sigma)$:$x^2+y^2\leqslant 2x$. 则所求面积为

$$A=\iint\limits_{(S)}\mathrm{d}S=\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\iint\limits_{(\sigma)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\pi.$$

8. 求地球上由子午线 $\varphi=30°$,$\varphi=60°$和纬线 $\theta=45°$,$\theta=60°$所围那部分的面积(把地球近似看成半径 $R=6.4\times10^6\mathrm{m}$ 的球).

**解** 以球心为坐标原点,南、北极连线为 $z$ 轴,东西半球的分界面为 $xz$ 坐标面,南北半球的分界面为 $xy$ 平面. 地球的参数方程为: $x=R\sin\theta\cos\varphi$, $y=R\sin\theta\sin\varphi$, $z=R\cos\theta$.

所求面积为$\left((\sigma):\frac{\pi}{6}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}\right)$

$$A=\iint\limits_{(\sigma)}\|\boldsymbol{r}_\theta\times\boldsymbol{r}_\varphi\|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}R^2\sin\theta\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi R^2}{12}(\sqrt{2}-1).$$

9. 求下列平面曲线所构成的旋转面的面积:

(1) 星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$绕 $y$ 轴;

(2) 圆周 $x^2+y^2=a^2$ 被直线 $y=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 截下的劣弧绕 $y=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

**解**　(1) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 绕 $y$ 轴旋转形成的旋转面为：$(x^2+z^2)^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$，其参数方程为：

$$\boldsymbol{r}=\{a\cos\varphi\cos^3\theta, a\sin^3\theta, a\sin\varphi\cos^3\theta\}, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, 0\leqslant\theta\leqslant\pi,$$

$\|\boldsymbol{r}_\theta\times\boldsymbol{r}_\varphi\|=3a^2\cos^4\theta|\sin\theta|$. 由旋转面的对称性，所求面积为

$$A=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a^2\cos^4\theta|\sin\theta|\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=\frac{12}{5}\pi a^2.$$

(2) $x^2+y^2=a^2$ 被 $y=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 截下的劣弧 $(C)$：$x=a\cos t, y=a\sin t, \frac{\pi}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3\pi}{4}$.
将 $(C)$ 划分，在弧微元 $\mathrm{d}s$ 之间的一片旋转面面积可近似地看作是以 $\mathrm{d}s$ 为高，底面半径为 $y-\frac{a}{\sqrt{2}}$ 的圆柱面的面积．从而得面积微元 $\mathrm{d}A=2\pi(y-\frac{a}{\sqrt{2}})\mathrm{d}s$. 于是所求面积 $A=\int_{(C)}2\pi(y-\frac{a}{\sqrt{2}})\mathrm{d}s$．由对称性．

$$A=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}2\pi\left(a\sin t-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\cdot a\mathrm{d}t=2\sqrt{2}\pi a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

10. 计算下列第一型面积分：

(2) $\iint\limits_{(S)}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$，$(S)$ 为区域 $(G)=\{(x,y,z)\mid\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1\}$ 的边界曲面；

**解**　$(S)=(S_1)\cup(S_2)$，其中 $(S_1)$ 为平面 $z=1$ 上的圆 $x^2+y^2\leqslant 1$，$(S_2)$ 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于 $z=0$ 与 $z=1$ 之间的部分.

于是
$$\begin{aligned}\iint\limits_{(S)}(x^2+y^2)\mathrm{d}S&=\iint\limits_{(S_1)}(x^2+y^2)\mathrm{d}S+\iint\limits_{(S_2)}(x^2+y^2)\mathrm{d}S\\&=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)(\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho+\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho\\&=\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2}).\end{aligned}$$

(4) $\iint\limits_{(S)} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}S$，$(S)$ 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$；

**解** 面积元 $\mathrm{d}S=\dfrac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. $(S)$在 $xOy$ 平面上的投影为圆域 $x^2+y^2\leqslant R^2$. 于是

$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=R\cdot\pi R^2=\pi R^3.$$

(5) $\iint\limits_{(S)} \dfrac{\mathrm{d}S}{r^2}$，$(S)$为圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 界于平面 $z=0$ 及 $z=H(H>0)$之间的部分，$r$ 为$(S)$上的点到原点的距离；

**解** $(S)$在 $yOz$ 坐标面的投影为矩形域$(\sigma)$：$0\leqslant z\leqslant H$，$-R\leqslant y\leqslant R$. 将圆柱面分为两部分$(S_1)$与$(S_2)$，其方程分别为 $x=\pm\sqrt{R^2-y^2}$. 于是柱面上的曲面面积微元 $\mathrm{d}S=\dfrac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. 又$(S_1)$与$(S_2)$关于 $yOz$ 平面对称. $\dfrac{1}{r^2}$是 $x$ 的偶函数，所以，

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\mathrm{d}S}{r^2}=2\iint\limits_{(S_1)} \frac{\mathrm{d}S}{r^2}=2\iint\limits_{(\sigma)} \frac{1}{R^2+z^2}\,\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2R\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{R^2-y^2}}\int_0^H\frac{\mathrm{d}z}{R^2+z^2}$$

$$=4R\int_0^R\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{R^2-y^2}}\int_0^H\frac{\mathrm{d}z}{R^2+z^2}=2\pi\arctan\frac{H}{R}.$$

(6) $\oiint\limits_{(S)} \dfrac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}S$，$(S)$ 是以$(0,0,0)$，$(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$ 为顶点的四面体的边界面；

**解** $(S)$由四张平面$(S_1)$：$x=0$，$(S_2)$：$y=0$，$(S_3)$：$z=0$，$(S_4)$：$x+y+z=1$ 围成，其曲面面积微元分别为：$\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\mathrm{d}x\mathrm{d}z$，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，所以

$$\oiint\limits_{(S)} \frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}=\iint\limits_{(S_1)}\frac{\mathrm{d}S}{(1+y)^2}+\iint\limits_{(S_2)}\frac{\mathrm{d}S}{(1+x)^2}+\iint\limits_{(S_3)}\frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}+\iint\limits_{(S_4)}\frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}$$

$$=2\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}\frac{\mathrm{d}z}{(1+y)^2}+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2}+\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2}$$

$$= 2\int_0^1\left[\frac{2}{(1+y)^2}-\frac{1}{1+y}\right]dy+(1+\sqrt{3})\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\right)dx$$

$$= (\sqrt{3}-1)\ln 2+\frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

(7) $\iint\limits_{(S)}|xyz|\,dS$,$(S)$ 为曲面 $z = x^2+y^2$ 在平面 $z=1$ 下面的部分；

**解**　由$(S)$ 关于坐标面 $zOy$ 及 $xOz$ 对称，$|xyz|$ 关于 $x,y$ 为偶函数，则 $\iint\limits_{(S)}|xyz|\,dS = 4\iint\limits_{(S_1)}xyz\,dS$,其中$(S_1)$ 为$(S)$ 在第一卦限的部分，设$(\sigma)$：$x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0$.

则　$$4\iint\limits_{(S_1)}xyz\,dz = \iint\limits_{(\sigma)}4xy(x^2+y^2)\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\cdot\rho^2\cdot\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho\,d\rho$$

$$=\frac{125\sqrt{5}-1}{420}.$$

(8) $\iint\limits_{(S)}(xy+yz+zx)\,dS$,$(S)$ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被曲面 $x^2+y^2=2ax(a>0)$所截得的部分；

**解**　由于$(S)$关于 $xOz$ 坐标面对称，所以 $\iint\limits_{(S)}(xy+yz)\,dS = 0$.

故 $$\iint\limits_{(S)}(xy+yz+zx)\,dS=\iint\limits_{(S)}xz\,dS=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2ax}x\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}\rho\cos\varphi\cdot\rho\cdot\rho\,d\rho=\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4.$$

(9) $\iint\limits_{(S)}z\,dS$,$(S)$为螺旋面的一部分：$x=\mu\cos\theta, y=\mu\sin\theta, z=\theta(0\leqslant\mu\leqslant a, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$；

**解**　令 $\boldsymbol{r}=\{\mu\cos\theta,\mu\sin\theta,\theta\}$,则 $\|\boldsymbol{r}_\mu\times\boldsymbol{r}_\theta\|=\sqrt{1+\mu^2}$,从而

$$\iint\limits_{(S)}z\,dS=\int_0^a d\mu\int_0^{2\pi}\theta\sqrt{1+\mu^2}\,d\theta=\pi^2\left[a\sqrt{1+a^2}+\ln(a+\sqrt{1+a^2})\right].$$

(10) $\iint\limits_{(S)} z^2 \mathrm{d}S$，$(S)$为圆锥面的一部分：$x = r\cos\varphi\sin\alpha, y = r\sin\varphi\sin\alpha, z = r\cos\alpha(0 \leqslant r \leqslant a, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$，$\alpha$ 为常数$\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

**解** 令 $\boldsymbol{r} = \{r\cos\varphi\sin\alpha, r\sin\varphi\sin\alpha, r\cos\alpha\}$，$\|\boldsymbol{r}_r \times \boldsymbol{r}_\varphi\| = r\sin\alpha$，则

$$\iint\limits_{(S)} z^2 \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^a (r\sin\alpha)(r\cos\alpha)^2 \mathrm{d}r = \frac{\pi a^4}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha.$$

11. 设形如悬链线 $y = \dfrac{a}{2}(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}})$ 的物质曲线上每一点的密度与该点的纵坐标成正比，且在点$(0,a)$的密度等于$\mu$，试求该物质曲线在横坐标 $x_1 = 0$ 及 $x_2 = a$ 间一段的质量 $m$.

**解** 依题意 $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$，$(x,y)$点的密度 $\rho(x,y) = \dfrac{\mu}{a}y = \mu\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$.

则
$$m = \int_{(C)} \rho(x,y)\mathrm{d}s = \int_0^a \mu\operatorname{ch}\frac{x}{a}\sqrt{1 + \left(a\cdot\frac{1}{a}\operatorname{sh}\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}x$$

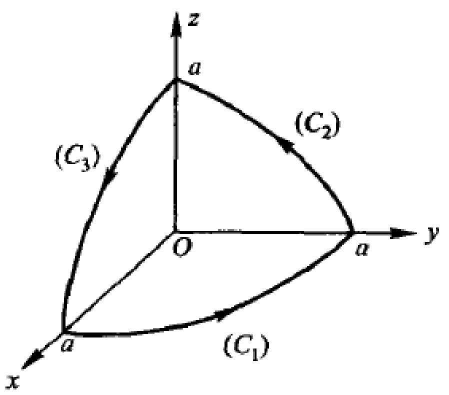
$$= \int_0^a \mu\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}\mathrm{d}x = \frac{\mu a}{8}\left(\mathrm{e}^2 - \frac{1}{\mathrm{e}^2} + 4\right).$$

12. 设球面三角形为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$，$(x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0)$，

(1) 求其周界的形心坐标(即密度为 1 的质心坐标)；

(2) 求此球面三角形的形心坐标.

**解** (1) 设形心$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$，球面三角形的周界的质量 $m = 3\cdot\dfrac{1}{4}\cdot 2\pi a$.




(第 12 题)

$$M_{yz} = \oint_{(C)} x\mathrm{d}s = \int_{(C_1)} x\mathrm{d}s + \int_{(C_3)} x\mathrm{d}s = 2\int_{(C_1)} x\mathrm{d}s$$

$$= \int_0^a x\cdot\sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_0^a \frac{ax}{\sqrt{a^2 - x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= 2a^2,$$

则 $\bar{x}=\dfrac{4a}{3\pi}$，由 $x,y,z$ 的轮换对称性知

$$\bar{y}=\bar{z}=\frac{4a}{3\pi}.$$

（2）球面三角形（$S$）的质量 $m=\iint\limits_{(S)}\mathrm{d}S=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\x\geqslant0,y\geqslant0}}\sqrt{1+\dfrac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a\rho\cdot\dfrac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho=\dfrac{\pi}{2}a^2.$

$$M_{yz}=\iint\limits_{(S)}x\mathrm{d}S=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\x\geqslant0,y\geqslant0}}x\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a\rho^2\cos\varphi\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho=\frac{\pi a^3}{4}.$$

故 $\bar{x}=\dfrac{M_{yz}}{m}=\dfrac{a}{2}.$

由 $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ 的轮换对称性知 $\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}$，即质心 $\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}\right)$.

13. 求密度为常数 $\mu$ 的均匀锥面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=0\,(0\leqslant z\leqslant b)$ 对 $z$ 轴的转动惯量.

**解**　$I_z=\iint\limits_{锥面}(x^2+y^2)\mu\mathrm{d}S=\mu\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{\mu}{a}\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}\mu a^3\sqrt{a^2+b^2}.$$

14. 求高为 $2h$，半径为 $R$，质量均匀分布的正圆柱面对（1）中心轴线；（2）中央横截面的一条直径；（3）底面的一条直径的转动惯量.

**解**　如图所示建立坐标系. 设（$S$）为 $x^2+y^2=R^2,0\leqslant z\leqslant h$；（$S_1$）为 $x=\sqrt{R^2-y^2},0\leqslant z\leqslant h$；（$S_2$）为 $x=-\sqrt{R^2-y^2},0\leqslant z\leqslant h$；（$\sigma$）为 $0\leqslant z\leqslant h,x=0,|y|\leqslant R$，则

（1）所求即 $I_z$（对 $z$ 轴的转动惯量），且

$$I_z=2\iint\limits_{(S)}(x^2+y^2)\cdot\mu\mathrm{d}S=2R^2\mu\iint\limits_{(S)}\mathrm{d}S=2R^2\mu S=4\pi\mu R^3h.$$

其中 $S$ 为（$S$）的面积，即 $S=(2\pi R)h=2\pi Rh$.

（2）所求即 $I_x = I_y$，且

$$I_x = 2\iint\limits_{(S)} (y^2+z^2)\cdot \mu \mathrm{d}S$$

$$= 4\iint\limits_{(S_1)} (y^2+z^2)\mu \mathrm{d}S = 4\mu \iint\limits_{(\sigma)} (y^2+z^2)\sqrt{1+\frac{y^2}{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

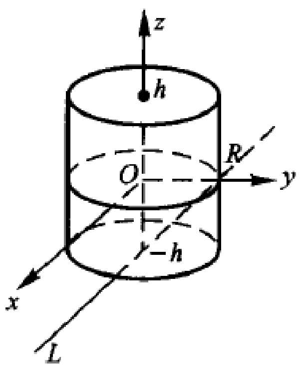
$$= 4\mu R\int_0^h \mathrm{d}z\int_{-R}^{R} \frac{y^2+z^2}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y = 2\pi\mu Rh\left(R^2+\frac{2}{3}h^2\right).$$

（3）直线 $L$ 为底面的一条直径，则所求转动惯量为 $I_L$. 由于 $L$ 与 $x$ 轴平行，而均匀圆柱面的质心即为形心（坐标原点），则由平行轴定理（习题 6.4（B）第 4 题）可知

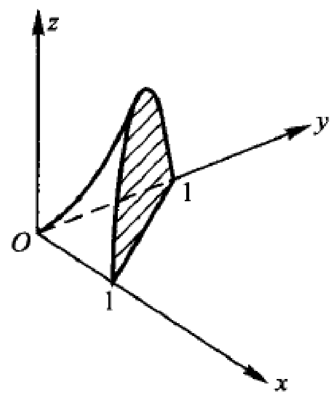
$$I_L = I_x + mh^2 = 2\pi\mu Rh\left(R^2+\frac{2}{3}h^2\right) + (4\pi\mu Rh)h^2$$

$$= 2\pi\mu Rh\left(R^2+\frac{8}{3}h^2\right).$$

其中 $m = 2S\mu = 2(2\pi Rh)\mu = 4\pi\mu Rh$.




（第 14 题）




（（B）第 1 题）

## （B）

1. 求平面 $x+y=1$ 上被坐标面与曲面 $z=xy$ 截下的在第一卦限部分的面积.

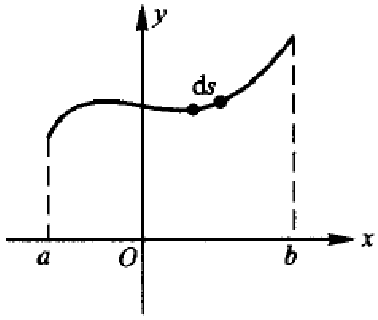
**解** 如图所示，所求即阴影部分（$S$）的面积 $S$. 由于交线 $\begin{cases} z = xy, \\ x+y=1 \end{cases}$ 在 $yOz$ 坐标面的投影为抛物线 $\begin{cases} x=0, \\ z=y(1-y). \end{cases}$ 从而（$S$）在 $yOz$ 坐标面上的投影域为（$\sigma$）：

$0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant y(1-y)$. 于是 $S=\iint\limits_{(S)}\mathrm{d}S=\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{1+x_y^2}\mathrm{d}\sigma=\sqrt{2}\iint\limits_{(\sigma)}\mathrm{d}\sigma=\sqrt{2}\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{y(1-y)}\mathrm{d}z=\frac{\sqrt{2}}{6}$.

2. 求平面光滑曲线 $y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b,f(x)>0)$ 绕 $x$ 轴旋转所得旋转面的面积.

**解**　将曲线 $(C):y=f(x)$ 化分. 对弧长微元 $\mathrm{d}s$ 之间的一小片旋转面的面积 $\mathrm{d}S$ 可以近似的看作底面半径为 $y=f(x)$，高为 $\mathrm{d}s$ 的圆柱体的侧面积，即 $\mathrm{d}S=2\pi f(x)\mathrm{d}s$. 从而旋转面面积为 $S$

$$S=\int_{(C)}2\pi f(x)\mathrm{d}s=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x.$$




（第 2 题）

3. 求曲线 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ (1) 绕 $x$ 轴；(2) 绕 $y$ 轴；(3) 绕直线 $y=2a$ 旋转所成旋转面的面积.

**解**　(1) 由上题可知所求面积为

$$A_x=2\pi\int_0^{2\pi a}y\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\sqrt{1+\left(\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}\right)^2}\cdot a(1-\cos t)\mathrm{d}t$$

$$=2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos t}}\mathrm{d}t$$

$$=2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\sin\frac{t}{2}}=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{64}{3}\pi a^2.$$

(2) $A_y=\int_{(C)}2\pi x\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}2\pi a(t-\sin t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$

$$=4\pi a^2\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=16\pi^2a^2.$$

(3) 所求面积 $A=\int_{(C)}2\pi(2a-y)\mathrm{d}s$

$$= \int_0^{2\pi} 2\pi[2a - a(1 - \cos t)] \cdot 2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t = \frac{32}{3}\pi a^2.$$

4. 求平面曲线 $x^2 + (y-b)^2 = a^2\,(b \geqslant a)$ 绕 $x$ 轴所构成的环(轮胎)面的面积.

**解** 圆周$(C)$:$x^2 + (y-b)^2 = a^2$ 的参数方程为:

$$x = a\cos\theta,\quad y = b + a\sin\theta,\quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

故所求面积为 $A = \int_{(C)} 2\pi y\mathrm{d}s = 2\pi\int_0^{2\pi}(b + a\sin\theta)\cdot a\mathrm{d}\theta = 4\pi^2 ab.$

5. 证明:由平面上一已知弧段,绕这一平面上一条不穿过这弧段的直线旋转而成的旋转面的面积,等于这弧段的长度与这弧段的形心旋转一周时所经路程的长度的乘积.

**证明** 建立坐标系使旋转轴为 $x$ 轴,设弧段$(C)$的形心为 $(\bar{x},\bar{y})$ 则 $\bar{y}(\mu l) = \int_{(C)} y(\mu\mathrm{d}s)$,即 $\bar{y}l = \int_{(C)} y\mathrm{d}s$,其中 $\mu$ 为密度,$l$ 为$(C)$的长度. 则$(\bar{x},\bar{y})$ 绕 $x$ 轴旋转一周所形成的圆周长为 $2\pi\bar{y}$,其与$(C)$的长度乘积 $2\pi\bar{y}\cdot l = 2\pi(\bar{y}l) = 2\pi\int_{(C)} y\mathrm{d}s$ 为$(C)$绕 $x$ 轴旋转一周形成的曲面的面积.

6. 质量均匀分布,半径为 $R$ 的球面对距球心为 $a\,(a > R)$处的单位质量的质点 $A$ 的引力.

**解** 设球面$(S)$:$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的面密度为 $\mu$,$k$ 为引力系数. 由于$(S)$关于坐标面 $x = 0$ 及 $y = 0$ 对称,所以所求引力 $\boldsymbol{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$ 在 $x, y$ 轴方向的分量 $F_x = F_y = 0$. 又引力微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = k\dfrac{1\cdot\mu\mathrm{d}S}{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{3/2}}\{x, y, z-a\}$,则

$$F_z = \iint_{(S)} \frac{k\mu(z-a)}{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{3/2}}\mathrm{d}S.$$

**解法Ⅰ** $(S)$的参数方程为 $\boldsymbol{r} = \{R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta\}$,

$$(\theta,\varphi) \in (\sigma) = \{(\theta,\varphi) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}.$$

则 $\|\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\varphi\| = R^2\sin\theta.$

从而
$$F_z = \iint_{(\sigma)} \frac{k\mu(R\cos\theta - a)\cdot R^2\sin\theta}{[R^2\sin^2\theta + (R\cos\theta - a)^2]^{3/2}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi} \frac{k\mu R^2(R\cos\theta - a)}{(R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta)^{3/2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

令 $t = (R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$,则 $\sin\theta\mathrm{d}\theta = \dfrac{t}{aR}\mathrm{d}t$

$$R\cos\theta = \frac{1}{2a}(R^2 + a^2 - t^2).$$

代入上式，得

$$F_z = 2\pi k\mu R^2 \int_{a-R}^{a+R} \frac{R^2 - a^2 - t^2}{2a^2 R t^2} \mathrm{d}t$$

$$= \frac{R}{a^2}\pi k\mu \left[\frac{a^2 - R^2}{t} - t\right]_{a-R}^{a+R}$$

$$= -4\pi k\mu \frac{R^2}{a^2}.$$

**解法Ⅱ**　把$(S)$分成上、下两部分$(S_1)$及$(S_2)$，则有：

$(S_1): z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \mathrm{d}S = \dfrac{R\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, x^2 + y^2 \leqslant R^2$（即圆域$(\sigma)$），

$(S_2): z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \mathrm{d}S = \dfrac{R\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, x^2 + y^2 \leqslant R^2.$

则　$F_z = \displaystyle\iint_{(S_1)} \frac{k\mu(z-a)}{[x^2 + y^2 + (z-a)]^{3/2}} \mathrm{d}S + \iint_{(S_2)} \frac{k\mu(z-a)}{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{3/2}} \mathrm{d}S \xlongequal{\Delta} F_{z_1} + F_{z_2}.$

而　$F_{z_1} = \displaystyle\iint_{(\sigma)} \frac{k\mu(\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} - a)}{[x^2 + y^2 + (\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} - a)^2]^{3/2}} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R \frac{k\mu(\sqrt{R^2 - \rho^2} - a)}{[\rho^2 + (\sqrt{R^2 - \rho^2} - a)^2]^{3/2}} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \cdot \rho\mathrm{d}\rho$$

$$= 2\pi k\mu R \int_0^R \frac{t-a}{(R^2 + a^2 - 2at)^{3/2}} \mathrm{d}t \quad (t = \sqrt{R^2 - \rho^2})$$

$$= 2\pi k\mu \frac{R}{a} \int_0^R (t-a)\mathrm{d}(R^2 + a^2 - 2at)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 2\pi\mu \frac{R}{a} k\left[\frac{t-a}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2at}}\bigg|_0^R - \int_0^R \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2at}}\right]$$

$$= 2\pi\mu \frac{R}{a} k\left[-1 + \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} + \frac{1}{a}\sqrt{R^2 + a^2 - 2at}\bigg|_0^R\right]$$

$$= 2\pi\mu k \frac{R}{a}\left(-\frac{R}{a} + \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} - \frac{\sqrt{R^2 + a^2}}{a}\right).$$

又　$F_{z_2} = \displaystyle\iint_{(\sigma)} \frac{-k\mu(\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} + a)}{[x^2 + y^2 + (\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} + a)^2]^{3/2}} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= 2\pi\mu k \frac{R}{a}\left(\frac{-a}{\sqrt{R^2+a^2}} + \frac{\sqrt{R^2+a^2}}{a} - \frac{R}{a}\right)$$

故 $F_z = -4\pi\mu k \dfrac{R^2}{a^2}$.

7. 计算$\oint_{(C)} x^2 \mathrm{d}s$，$(C)$为球面$x^2+y^2+z^2=1$被平面$x+y+z=0$所截出的圆周.

**解法Ⅰ** 由于在$(C)$的方程$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y+z=0 \end{cases}$中变量$x,y,z$具有"对称性"，即$x,y,z$三变量中任意两个对换$(C)$的方程不变，故有

$$\oint_{(C)} x^2 \mathrm{d}s = \oint_{(C)} y^2 \mathrm{d}s = \oint_{(C)} z^2 \mathrm{d}s = \frac{1}{3}\oint_{(C)} (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\oint_{(C)} \mathrm{d}s = \frac{2}{3}\pi$$

**解法Ⅱ** 球面$x^2+y^2+z^2=1$的参数方程为：$x=\sin\theta\cos\varphi$，$y=\sin\theta\sin\varphi$，$z=\cos\theta$，代入平面方程$x+y+z=0$中得$(C)$的参数方程为

$$x = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2+\sin 2\varphi}}, y = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2+\sin 2\varphi}}, z = \frac{-(\sin\varphi+\cos\varphi)}{\sqrt{2+\sin 2\varphi}}, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

则
$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2+\sin 2\varphi}\mathrm{d}\varphi,$$

$$\oint_{(C)} x^2 \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi}{2+\sin 2\varphi}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2+\sin 2\varphi}\mathrm{d}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{(2+\sin 2\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2+\sin 2\varphi}\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{1}{(2+\sin 2\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi\right]$$

$$= \sqrt{3}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{(2+\sin 2\varphi)^2} = \sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{(2+\sin 2\varphi)^2}$$

$$\xlongequal{t=\tan\varphi} \frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+t^2}{(1+t+t^2)^2}\mathrm{d}t$$

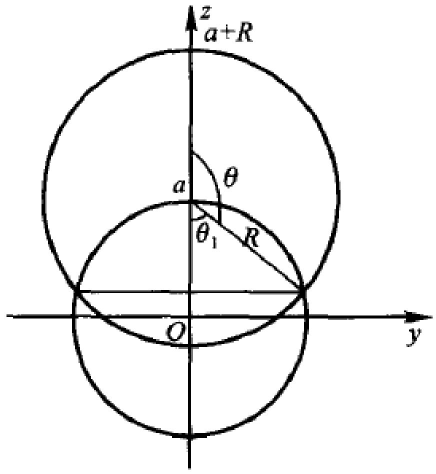
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t+t^2} - \frac{2t+1}{2(1+t^2+t)^2} + \frac{1}{2(1+t+t^2)^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2(1+t^2+t)}\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$+\frac{2}{3\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\left[1+\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]^2}$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2u\mathrm{d}u=\frac{2}{3}\pi.\quad\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}=\tan u\right).$$

8. 设半径为 $R$ 的球面$(S)$,其球心位于定球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$上,问 $R$ 取何值时球面$(S)$在定球面内部的那部分面积最大?



（第 8 题）

**解**　不妨设$(S)$的球心为$(0,0,a)$,则$(S)$的方程为:$x^2+y^2+(z-a)^2=R^2$,则$(S)$与 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的交线为

$$(C)\begin{cases}x^2+y^2=\dfrac{R^2}{4a^2}(4a^2-R^2),\\ z=a-\dfrac{R^2}{2a}.\end{cases}$$

为使所求曲面$(S_1)$的面积非零,则 $0\leqslant R\leqslant 2a$. $(S_1)\subseteq(S)$的参数方程可写为:

$$\boldsymbol{r}=\{R\sin\theta\cos\varphi,R\sin\theta\sin\varphi,a+R\cos\theta\},$$

$$0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\pi-\theta_1\leqslant\theta\leqslant\pi\qquad\left(0\leqslant\theta_1=\arccos\frac{R}{2a}\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

于是$(S)$在 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内部的那一部分为$(S_1)$的面积为:

$$S=\iint\limits_{(S_1)}\mathrm{d}S=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{\pi-\theta_1}^{\pi}R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=2\pi R^2(1-\cos\theta_1)=2\pi R^2\left(1-\frac{R}{2a}\right)\quad(0\leqslant R\leqslant 2a).$$

又由$\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}R}=2\pi\left(2R-\dfrac{3R^2}{2a}\right)=0$ 得关于 $R$ 的函数的驻点 $R_1=0,R_2=\dfrac{4a}{3}$,于是当$R=\dfrac{4a}{3}$时,$S$ 取得最大值$\dfrac{2\pi}{3}\left(\dfrac{4}{3}a\right)^2$.

9. 设$(S)$为椭球面$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分,点 $P(x,y,z)\in(S)$,$\pi$ 为$(S)$在点 $P$ 处的切平面,$\rho(x,y,z)$为点$(0,0,0)$到平面 $\pi$ 的距离,求 $\iint\limits_{(S)}\dfrac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$.

**解** $\pi$ 的方程为：$x(X-x)+y(Y-y)+2z(Z-z)=0$.

则
$$\rho(x,y,z)=\frac{|x^2+y^2+2z^2|}{\sqrt{x^2+y^2+(2z)^2}}.$$

又 $P(x,y,z)$ 在 $(S)$ 上，故 $x^2+y^2+2z^2=2$，从而
$$\rho(x,y,z)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+z^2}}.$$

$(S)$ 的参数方程为：$x=\sqrt{2}\sin\theta\cos\varphi, y=\sqrt{2}\sin\theta\sin\varphi, z=\cos\theta$, $\left(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

则
$$\mathrm{d}S=\sqrt{2}\sin\theta\sqrt{1+\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

则
$$\iint_{(S)}\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{1+\cos^2\theta}}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\sin\theta\sqrt{1+\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$
$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta(1+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{3}{2}\pi.$$

10. 一个体积为 $V$，外表面积为 $S$ 的雪堆，融化的速度是 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\alpha S$，其中 $\alpha$ 是一个常数. 假设在融化期间雪堆的形状保持为 $z=h-\frac{x^2+y^2}{h}, z>0$，其中 $h=h(t)$. 问一个高度为 $h_0$ 的雪堆全部融化需多长时间？

**解**
$$V=\iiint_{(V)}\mathrm{d}V=\iint_{x^2+y^2\leqslant h^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{h-\frac{x^2+y^2}{h}}\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^h\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{h-\frac{\rho^2}{h}}\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}h^3,$$
$$S=\iint_{(S)}\mathrm{d}S=\iint_{x^2+y^2\leqslant h^2}\sqrt{1+\left(\frac{2x}{h}\right)^2+\left(\frac{2y}{h}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^h\sqrt{1+\frac{4\rho^2}{h^2}}\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)h^2.$$

由 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\alpha S$ 可得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\pi}{2}h^3\right)=\frac{3\pi}{2}h^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-\alpha\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)h^2$

从而 $h(t)=-\frac{\alpha}{9}(5\sqrt{5}-1)t+C$. 由 $t=0, h=h_0$ 知 $C=h_0$.

故
$$h(t)=-\frac{\alpha}{9}(5\sqrt{5}-1)t+h_0.$$

雪全部融化即 $h=0$,所以由 $0=-\frac{\alpha}{9}(5\sqrt{5}-1)t+h_0$ 得:

$$t=\frac{9}{124\alpha}h_0(5\sqrt{5}+1).$$

## 习　题　6.7

### (A)

2. 计算下列线积分:

(3) $\oint_{(C)} y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y$, $(C)$为正向椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

**解**　$(C)$的参数方程:$x=a\cos t, y=b\sin t$,则

$$\oint_{(C)} y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}(b\sin t(-a\sin t)-a\cos t\cdot b\cos t)\mathrm{d}t=-2\pi ab.$$

(6) $\oint_{(C)}(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$, $(C)$为椭圆$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\x-y+z=2,\end{cases}$且从 $z$ 轴正向往 $z$ 轴负向看去,$(C)$取顺时针方向.

**解**　$(C)$参数方程:$x=\cos t, y=\sin t, z=2-\cos t+\sin t$,

$$\text{原式}=\int_{2\pi}^{0}[(2-\cos t)(-\sin t)+(2\cos t-2-\sin t)\cos t+(\cos^2 t-\sin^2 t)]\mathrm{d}t$$

$$=-2\pi.$$

4. 把二型线积分 $\int_{(C)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 化为第一型线积分,其中$(C)$为:

(1) 从点$(1,0)$到点$(0,1)$的直线段;

(2) 从点$(1,0)$到$(0,1)$的上半圆周 $x^2+y^2=1$;

(3) 从点$(1,0)$到点$(0,1)$的下半圆周$(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

**解**　(1) $(C)$的参数方程:$x=-t, y=1+t$,参数增加的方向即$(C)$的方向,且 $-1\leqslant t\leqslant 0$. 切向量 $\boldsymbol{\tau}=\{-1,1\}$,单位切向量 $\boldsymbol{e}_\tau=\frac{1}{\sqrt{2}}\{-1,1\}$,则

$$\int_{(C)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(C)}\frac{-P+Q}{\sqrt{2}}\mathrm{d}s.$$

(2) $(C)$:$\boldsymbol{r}=\{-x,\sqrt{1-x^2}\}$,与$(C)$同向的单位切向量为:$\boldsymbol{e}_\tau=\{-\sqrt{1-x^2},$

$x\}$, $-1\leqslant x\leqslant 0$,则

$$\int_{(C)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{(C)}\left[-\sqrt{1-x^2}P(x,y)+xQ(x,y)\right]\mathrm{d}s.$$

(3) $(C)$的参数方程为:$x=-x, y=1-\sqrt{1-(1+x)^2}$, $-1\leqslant x\leqslant 0$,且 $x$ 增加的方向即$(C)$的正向,则与$(C)$同向的单位切向量:

$$\boldsymbol{e}_\tau=\{-\sqrt{1-(x-1)^2},\ -x+1\}.$$

则 $\int_{(C)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{(C)}\left[-\sqrt{1-(x-1)^2}P(x,y)+(1-x)Q(x,y)\right]\mathrm{d}s.$

5. 设$(C)$为曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上从点$(1,1,1)$到点$(0,0,0)$的一段弧,把第二型线积分 $\int_{(C)} P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$ 化为第一型线积分.

**解** $(C)$的方程写作 $\boldsymbol{r}=\{-u,u^2,-u^3\}$, $-1\leqslant u\leqslant 0$,且参数 $u$ 增加的方向为$(C)$的方向,则 $\boldsymbol{r}'=\{-1,2u,-3u^2\}$为与$(C)$同向的切向量,从而单位切向量 $\boldsymbol{e}_\tau=\dfrac{1}{\sqrt{1+4u^2+9u^4}}\{-1,2u,-3u^2\}=\dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}\{-1,2x,-3y\}$. 于是

$$\int_{(C)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_{(C)}\frac{-1}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}[P+2xQ+3yR]\mathrm{d}s.$$

7. 设椭圆 $x=a\cos t, y=b\sin t$ 上,每一点 $M$ 都有作用力 $\boldsymbol{F}$,其大小等于从 $M$ 到椭圆中心的距离,而方向指向椭圆中心. 今有一质量为 $m$ 的质点 $P$ 在椭圆上沿正向移动,求:

(1) $P$ 点历经第一象限中的椭圆弧段时,$\boldsymbol{F}$ 所做的功;

(2) $P$ 走遍全椭圆时,$\boldsymbol{F}$ 所做的功.

**解** 依题意 $\boldsymbol{F}=\{-x,-y\}$, $W=\int_{(C)}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=-\int_{(C)}x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$. 于是

(1) $W=-\int_0^{\pi/2}[(a\cos t)(-a\sin t)+(b\sin t)(b\cos t)]\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}(a^2-b^2)$.

(2) $W=-\int_0^{2\pi}[(a\cos t)(-a\sin t)+(b\sin t)b\cos t]\mathrm{d}t=0$.

10. 计算下列线积分:

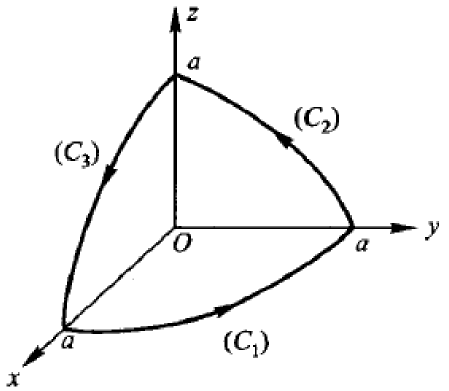
(1) $\oint_{(C)}(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$, $(C)$为球面

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

在第一卦限部分的边界曲线，方向与球面在第一卦限的外法线方向构成右手系；

(2) $\oint_{(C)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{F}=(3x^2-3yz+2xz)\boldsymbol{i}+(3y^2-3xz+z^2)\boldsymbol{j}+(3z^2-3xy+x^2+2yz)\boldsymbol{k}$，$(C)$为曲线$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ z=0,\end{cases}$取其正向.

**解**　(1) 如图所示.




(第 10 题(1))

$(C_1)$：$x=R\cos\theta, y=R\sin\theta, z=0$.

则 $\oint_{(C_1)}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(R^2\sin^2\theta\cdot R(-\sin\theta)-R^2\cos^2\theta\cdot R\cos\theta)d\theta=-\frac{4}{3}R^3$.

同理可知 $\int_{(C_2)}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz=\int_{(C_3)}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz=-\frac{4}{3}R^3$.

故　原式 $=-4R^3$.

事实上，将 $x$ 换成 $y$，$y$ 换成 $z$，$z$ 换成 $x$ $\left(x,y,z\text{ 的轮换对称性知：}\int_{(C_1)}=\int_{(C_2)}=\int_{(C_3)}\text{，即}\int_{(C)}=3\int_{(C_1)}\right)$.

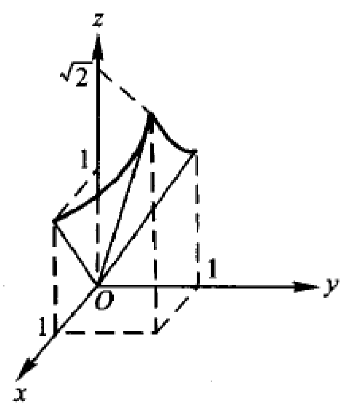
(2) $(C)$参数方程：$x=\cos\theta, y=\sin\theta, z=0$，则

$$\text{原式}=\int_{(C)}(3x^2-3yz+2xz)dx+(3y^2-3xz+z^2)dy+(3z^2-3xy+x^2+2yz)dz$$

$$=\int_0^{2\pi}[3\cos^2\theta(-\sin\theta)+3\sin^2\theta(\cos\theta)]d\theta$$

$$=0$$

11. 设 $\boldsymbol{F}=\{y,-x,z^2\}$，$(S)$是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上满足 $0\leqslant x\leqslant 1$ 且 $0\leqslant y\leqslant 1$ 部分的下侧，求 $\iint_{(S)}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}$.




(第 11 题)

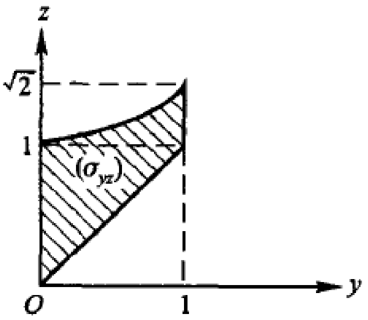
**解**　如图所示

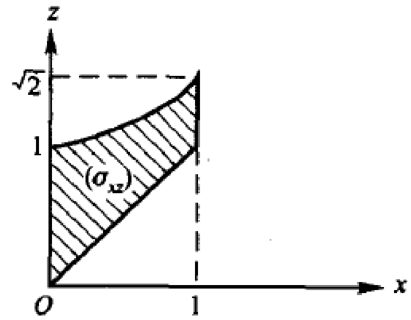
$$\iint\limits_{(S)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$=\iint\limits_{(S)} y\,dy\wedge dz - x\,dz\wedge dx + z^2 dx\wedge dy$$

$$=\iint\limits_{(\sigma_{yz})} y\,dy\,dz - \iint\limits_{(\sigma_{xz})} x\,dx\,dz - \iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1}} (x^2+y^2)\,dx\,dy \quad ((\sigma_{yz})\text{ 与 }(\sigma_{xz})\text{ 如图所示})$$

$$=\int_0^1 y\,dy\int_y^{\sqrt{1+y^2}} dz - \int_0^1 x\,dx\int_x^{\sqrt{1+x^2}} dz - \int_0^1 dx\int_0^1 (x^2+y^2)\,dy = -\frac{2}{3}.$$




12. 计算下列面积分：

(2) $\oiint\limits_{(S)} xy\,dy\wedge dz + yz\,dz\wedge dx + zx\,dx\wedge dy$，$(S)$为由平面 $x=0,y=0,z=0$，$x+y+z=1$ 所围成的四面体表面的外侧；

**解** $(S_1):x=0,(S_2):y=0,(S_3):z=0,(S_4):x+y+z=1$. 显然

$$\iint\limits_{(S_1)} = \iint\limits_{(S_2)} = \iint\limits_{(S_3)} = 0,\quad \iint\limits_{(S)} = \iint\limits_{(S_1)} + \iint\limits_{(S_2)} + \iint\limits_{(S_3)} + \iint\limits_{(S_4)} = \iint\limits_{(S_4)}.$$

故
$$\iint\limits_{(S)} = \int_0^1 dy\int_0^{1-y} y(1-y-z)\,dz + \int_0^1 dz\int_0^{1-z}(1-x-z)z\,dx$$

$$+\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)x\,dy$$

$$=3\int_0^1 dx\int_0^{1-x} x(1-x-y)\,dy = \frac{1}{8}.$$

(3) $\iint\limits_{(S)} (z^2+x)\,dy\wedge dz - z\,dx\wedge dy$，$(S)$是 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=2$ 之间部分的下侧；

**解** $(S_1)$：$x=\sqrt{2z-y^2}, 0\leqslant z\leqslant 2$；$(S_2)$ $x=-\sqrt{2z-y^2}, 0\leqslant z\leqslant 2$.

$$\iint_{(S)}(z^2+x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\iint_{(S_1)}+\iint_{(S_2)}=\iint_{(\sigma_{yz})}(z^2+\sqrt{2z-y^2})\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{(\sigma_{yz})}(z^2-\sqrt{2z-y^2})\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2\int_{-2}^{2}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}y^2}^{2}\sqrt{2z-y^2}\mathrm{d}z=\int_{-2}^{2}\frac{2}{3}(2z-y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{1}{2}y^2}^{2}\mathrm{d}y=4\pi$$

$$\iint_{(S)}-z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\leqslant 4}\frac{1}{2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2\frac{1}{2}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho=4\pi$$

$$\iint_{(S)}(z^2+x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=8\pi.$$

(4) $\iint_{(S)}-y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，$(S)$是柱面 $x^2+y^2=4$ 被 $z=0,x+z=2$ 所截下部分的外侧；

**解**　由于$(S)$在 $xOy$ 平面上的投影为零，即 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，则

$$\iint_{(S)}(z+1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=0.$$

$(S)$可分为左，右两块$(S_{左})$，$(S_{右})$，则

$$原式=\iint_{(S)}-y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=\iint_{(\sigma)}-\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\iint_{(\sigma)}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=-2\iint_{(\sigma)}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}z=-2\int_{-2}^{2}\mathrm{d}x\int_0^{2-x}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}z=-8\pi.$$

(6) $\iint_{(S)}z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，$(S)$为球面 $x^2+y^2+z^2=2z$ 的外侧；

**解**　$(S)$可分为两部分：

$(S_1)$：$z=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$上侧，$(S_2)$：$z=1-\sqrt{1-x^2-y^2}$下侧，则

$$\iint_{(S)}z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iint_{(S_1)}z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+\iint_{(S_2)}z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}(1+\sqrt{1-x^2-y^2})^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}(1-\sqrt{1-x^2-y^2})^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{8}{3}\pi.$$

(7) $\iint_{(S)}[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\cdot\wedge$

$\mathrm{d}y$, $(S)$为 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧，$f$ 为连续函数.

**解** $(S)$的法向量$\{1,-1,1\}$，则单位法向量 $\boldsymbol{e}_n=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\{1,-1,1\}$.

令 $\boldsymbol{A}=\{f(x,y,z)+x,2f(x,y,z)+y,f(x,y,z)+z\}$，则

$$原式=\iint\limits_{(S)}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint\limits_{(S)}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_n\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{(S)}(x-y+z)\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{(S)}\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x-1}^0\sqrt{3}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$

13. 求向量场 $\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$ 穿过下列曲面的通量：

(1) 圆柱 $x^2+y^2\leqslant a^2(0\leqslant z\leqslant h)$的侧表面的外侧；

(2) 上述圆柱体的全表面的外侧.

**解** (1) 通量 $\boldsymbol{\Phi}=\iint\limits_{(S)}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$,

$(S)$的法向量 $\boldsymbol{n}=\{2x,2y,0\}$. 则单位法向量

$$\boldsymbol{e}_n=\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},0\right\},$$

从而 $$\boldsymbol{\Phi}=\iint\limits_{(S)}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint\limits_{(S)}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_n)\mathrm{d}S=\iint\limits_{(S)}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{(S)}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}S=a\iint\limits_{(S)}\mathrm{d}S=a\cdot2\pi ah=2\pi a^2h.$$

(2) $$\iint\limits_{(S_上)}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint\limits_{(S_上)}x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=0+0+h\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a^2h.$$

$$\iint\limits_{(S_下)}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0+0+0=0.$$

故 $$\iint\limits_{(S)}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=2\pi a^2h+\pi a^2h=3\pi a^2h.$$

14. 计算 $\iint\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, 其中 $\boldsymbol{F}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, $(S)$是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

**解** $(S)$的单位法向量 $\boldsymbol{e}_n=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\{x,y,z\}=\dfrac{1}{a}\{x,y,z\}$.

于是 $$\iint\limits_{(S)}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint\limits_{(S)}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_n\mathrm{d}S=\frac{1}{a}\iint\limits_{(S)}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$$

$$= a\iint_{(S)} \mathrm{d}S = a\cdot 4\pi a^2 = 4\pi a^3.$$

15. 把第二型面积分 $\iint_{(S)} P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 化为第一型面积分,其中

(1) $(S)$是平面 $3x+2y+2\sqrt{3}z=6$ 在第一卦限部分的上侧;

(2) $(S)$是抛物面 $z=8-(x^2+y^2)$ 在 $xOy$ 平面上方部分的下侧;

**解** (1) $(S)$的法向量 $\boldsymbol{n}=\{3,2,2\sqrt{3}\}$,单位法向量 $\boldsymbol{e}_n=\frac{1}{5}\{3,2,2\sqrt{3}\}$.

$$\text{则原式} = \iint_{(S)}\{P,Q,R\}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{(S)}\{P,Q,R\}\cdot\boldsymbol{e}_n\mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{5}\iint_{(S)}(3P+2Q+2\sqrt{3}R)\mathrm{d}S.$$

(2) $(S)$的法向量 $\boldsymbol{n}=\{-2x,-2y,-1\}$,单位法向量

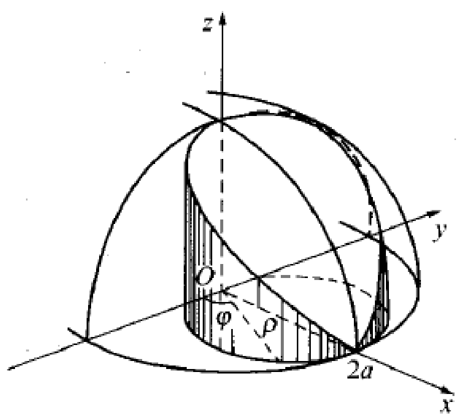
$$\boldsymbol{e}_n = \frac{1}{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}}\{-2x,-2y,-1\}.\text{ 于是}$$

$$\text{原积分} = \iint_{(S)}\{P,Q,R\}\cdot\boldsymbol{e}_n\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{(S)}\frac{-1}{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}}[2xP(x,y,z)+2yQ(x,y,z)+R(x,y,z)]\mathrm{d}S.$$

**(B)**

2. 计算线积分 $\oint_{(C)} y^2\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}z$, $(C)$为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与柱面 $x^2+y^2=Rx(z\geqslant 0, R>0)$ 的交线,其方向是面对着正 $x$ 轴看去是逆时针的.



(第 2 题)

**解** 令 $x=\frac{R}{2}+\frac{R}{2}\cos t, y=\frac{R}{2}\sin t, (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 代入球面及柱面方程可得:

$z=R\sin\frac{t}{2}$,则曲线$(C)$的参数方程为

$$x=\frac{R}{2}+\frac{R}{2}\cos t,\quad y=\frac{R}{2}\sin t,$$

$$z = R\sin\frac{t}{2}.0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

于是 $\oint_{(C)} y^2\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}z$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{R^2}{4}\sin^2 t\cdot\frac{R}{2}(-\sin t) + R^2\sin^2\frac{t}{2}\cdot\frac{R}{2}\cos t + \frac{R^2}{4}(1+\cos t)^2\cdot R\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\right]\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{4}\pi R^3.$$

3. 在过点 $O(0,0)$ 和点 $A(\pi,0)$ 的曲线段 $y = a\sin x(a>0)$ 中,求一条曲线 $(C)$,使沿该曲线 $(C)$ 从点 $O$ 到 $A$ 的第二型线积分 $\int_{(C)}(1+y^3)\mathrm{d}x + (2x+y)\mathrm{d}y$ 的值最小.

**解** $$I(a) \xlongequal{\Delta} \int_{(C)}(1+y^3)\mathrm{d}x + (2x+y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\pi}[1 + a^3\sin^3 x + a(2x + a\sin x\cos x)]\mathrm{d}x$$

$$= \pi + \frac{4}{3}a^3 - 4a. \quad (注意到\ a>0)$$

由于$\frac{\mathrm{d}I(a)}{\mathrm{d}a} = 4(a+1)(a-1) = 0$,则得唯一的驻点 $a=1$. 必有 $I_{\min}(a) = I(1) = \pi - \frac{8}{3}$,所求曲线 $(C)$ 为 $y = \sin x$.

4. 在变力 $\boldsymbol{F} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$ 的作用下,质点由原点沿直线运动到椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上第一卦限中的点 $M(\xi,\eta,\zeta)$,问当 $\xi,\eta,\zeta$ 取何值时,力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 $W$ 最大? 并求出 $W$ 的最大值.

**解** 设曲线 $(C)$ 为线段 $OM$,则其参数方程为

$$x = t\xi,\quad y = t\eta,\quad z = t\zeta,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

从而 $$W = \int_{(C)}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{(C)} yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1(\eta\zeta t^2\cdot\xi + \xi\zeta t^2\cdot\eta + \xi\eta t^2\cdot\zeta)\mathrm{d}t$$

$$= \xi\eta\zeta.$$

又 $M(\xi,\eta,\zeta)$ 在 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上，则 $\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1$. 依题需求目标函数 $W=\xi\eta\zeta$ 在约束条件 $\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1$ 下的最大值. 令 $L=\xi\eta\zeta+\lambda\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1\right)$，则令

$$\begin{cases} L_\xi = \eta\zeta + 2\lambda\dfrac{\xi}{a^2} = 0 \\ L_\eta = \xi\zeta + \dfrac{2\lambda}{b^2}\eta = 0 \\ L_\zeta = \xi\eta + \dfrac{2\lambda}{c^2}\zeta = 0 \\ L_\lambda = \dfrac{\xi^2}{a^2}+\dfrac{\eta^2}{b^2}+\dfrac{\zeta^2}{c^2}-1 = 0 \end{cases}$$ 解之得唯一的驻点 $\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$.

必是最大值点. 即当 $\xi=\frac{a}{\sqrt{3}},\eta=\frac{b}{\sqrt{3}},\zeta=\frac{c}{\sqrt{3}}$ 时，$F$ 做的功最大，且 $W_{\max}=\frac{abc}{3\sqrt{3}}$.

5. 计算下列面积分：$\iint\limits_{(S)}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，其中 $(S)$ 是曲面 $x^2+y^2=R^2$ 及平面 $z=R,z=-R(R>0)$ 所围立体的表面外侧.

**解** $$\iint\limits_{(S)}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$$

$$=\iint\limits_{(S_{前侧})}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z}{R^2+z^2}+\iint\limits_{(S_{后侧})}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z}{R^2+z^2}+\iint\limits_{(S_{上})}\frac{R^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{x^2+y^2+R^2}+\iint\limits_{(S_{下})}\frac{R^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{x^2+y^2+R^2}$$

$$=\iint\limits_{\substack{|y|\leqslant R\\|z|\leqslant R}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{\substack{|y|\leqslant R\\|z|\leqslant R}}\frac{-\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{R^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+R^2}-$$

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{R^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+R^2}$$

$$=2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-y^2}\mathrm{d}y\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}z}{R^2+z^2}=8\left(\frac{1}{4}\pi R^2\right)\cdot\frac{\pi}{4R}=\frac{1}{2}\pi^2R.$$

6. 计算 $\iint\limits_{(S)} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$, 其中 $\boldsymbol{F}=\dfrac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{x^2+y^2+z^2}$,$(S)$上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$的下侧.

**解法Ⅰ** $(S)$的法向量 $\boldsymbol{n}=\{-2x,-2y,-2z\}$. 单位法向量 $\boldsymbol{e}_n=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\{-x,-y,-z\}=\dfrac{1}{R}\{-x,-y,-z\}$,则

$$\iint\limits_{(S)}\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint\limits_{(S)}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_n)\mathrm{d}S=\iint\limits_{(S)}-\frac{1}{R}\mathrm{d}S=-\frac{1}{R}\iint\limits_{(S)}\mathrm{d}S=-\frac{1}{R}(2\pi R^2)=-2\pi R.$$

**解法Ⅱ** 
$$\begin{aligned}\iint\limits_{(S)}\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}&=\iint\limits_{(S)}\frac{1}{R^2}(x\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y)\\
&=\frac{1}{R^2}\Big[\iint\limits_{(S_{前})}x\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z+\iint\limits_{(S_{后})}x\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z+\iint\limits_{(S_{左})}y\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x+\\
&\qquad\iint\limits_{(S_{右})}y\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big]\\
&=\frac{1}{R^2}\Big[-\iint\limits_{\substack{y^2+z^2\leqslant R^2\\ z\geqslant 0}}\sqrt{R^2-y^2-z^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\substack{y^2+z^2\leqslant R^2\\ z\geqslant 0}}-\\
&\qquad\sqrt{R^2-y^2-z^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\Big]+\frac{1}{R^2}\Big[-\iint\limits_{\substack{x^2+z^2\leqslant R^2\\ z\geqslant 0}}\sqrt{R^2-x^2-z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\\
&\qquad\iint\limits_{\substack{x^2+z^2\leqslant R^2\\ z\geqslant 0}}-\sqrt{R^2-x^2-z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\Big]-\frac{1}{R^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\\
&=-\frac{4}{R^2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho-\frac{1}{R^2}(2\pi)\left(\frac{1}{3}R^3\right)=-2\pi R.\end{aligned}$$

7. 设 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$是连续函数,$M$ 是 $\sqrt{P^2+Q^2+R^2}$在$(S)$上的最大值,其中$(S)$是一光滑曲面,其面积记为 $S$. 证明

$$\left|\iint\limits_{(S)}P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y\right|\leqslant MS.$$

**证明** 令 $\boldsymbol{A}=\{P,Q,R\}$,则 $\|\boldsymbol{A}\|=\sqrt{P^2+Q^2+R^2}$. 则

$$\left|\iint\limits_{(S)}P\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y\right|$$

$$= \left|\iint_{(S)} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_n \mathrm{d}S\right| \quad (\boldsymbol{e}_n \text{ 为}(S)\text{ 的单位法向量})$$

$$= \left|\iint_{(S)} \|\boldsymbol{A}\| \cos\theta \mathrm{d}S\right| \quad (\theta \text{ 为 } \boldsymbol{e}_n \text{ 与 } \boldsymbol{A} \text{ 的夹角})$$

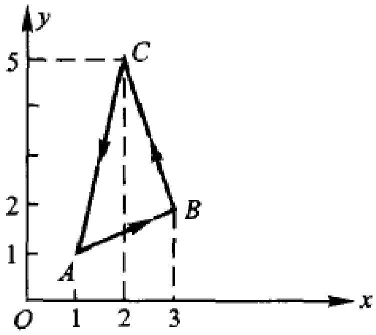
$$\leqslant \iint_{(S)} \|\boldsymbol{A}\| \, |\cos\theta| \, \mathrm{d}S \leqslant \iint_{(S)} M \cdot 1 \cdot \mathrm{d}S = MS.$$

## 习　题　6.8

### (A)

2. 利用 Green 公式计算下列曲线积分：

(3) $\oint_{(+C)} (x+y)^2 \mathrm{d}x - (x^2+y^2)\mathrm{d}y$，$(C)$：顶点为 $A(1,1)$，$B(3,2)$，$C(2,5)$ 的三角形边界；



（第 2 题(3)）

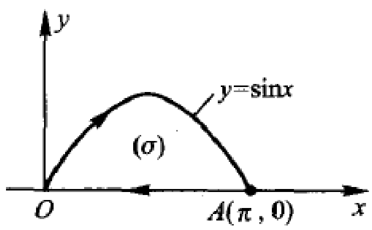
**解**　直线 $AB,BC,CA$ 的方程分别为：$AB: y = \frac{1}{2}(x+1)$，$BC: y = -3x+11$，$CA: y = 4x-3$.

则
$$\oint_{(+C)} (x+y)^2 \mathrm{d}x - (x^2+y^2)\mathrm{d}y = \iint_{(\sigma)} [-2x - 2(x+y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{4x-3} (-4x-2y)\mathrm{d}y + \int_2^3 \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{-3x+11} (-4x-2y)\mathrm{d}y$$

$$= -\frac{140}{3}.$$

(4) $\int_{(C)} \mathrm{e}^x[\cos y \mathrm{d}x + (y - \sin y)\mathrm{d}y]$，$(C)$ 为曲线 $y = \sin x$ 从 $(0,0)$ 到 $(\pi,0)$ 的一段.



（第 2 题(4)）

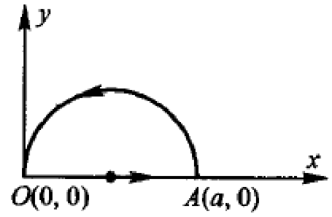
**解**　原式 $= \int_{(C\cup\overline{AO})} + \int_{\overline{OA}}$

$$= -\iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial \mathrm{e}^x(y - \sin y)}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{e}^x \cos y}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma + \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$

$$= -\int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} ye^x dy + e^{\pi} - 1$$

$$= \frac{1}{5}(e^{\pi} - 1).$$

(5) $\int_{(C)} (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy$, $(C)$为由点 $A(a,0)$ 至点 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2 + y^2 = ax$（$m$ 为常数，$a > 0$）；




（第 2 题(5)）

**解** 原式 $= \int_{(C \cup \overline{OA})} - \int_{\overline{OA}}$

$$= \iint_{(\sigma)} \left[ \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y - m) - \frac{\partial}{\partial y}(e^x \sin y - my) \right] d\sigma - \int_0^a 0 \cdot dx$$

$$= \iint_{(\sigma)} m d\sigma = m \cdot \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\pi m a^2.$$

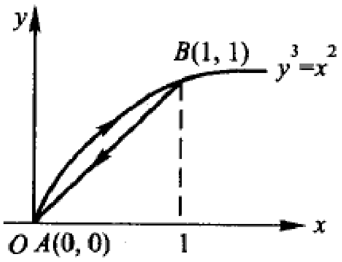
(6) $\int_{(C)} (x^2 + y)dx + (x - y^2)dy$，$(C)$为曲线 $y^3 = x^2$ 由点 $A(0,0)$ 至 $B(1,1)$ 的一段.

**解** 原式 $= \int_{(C \cup \overline{BA})} - \int_{\overline{BA}}$

$$= \iint_{(\sigma)} \left[ \frac{\partial(x - y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(y + x^2)}{\partial y} \right] d\sigma -$$

$$\int_1^0 [x^2 + x + (x - x^2)] dx$$

$$= 0 + \int_0^1 2x dx = 1.$$




（第 2 题(6)）

3. 利用线积分计算星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 所围图形面积.

**解** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 的参数方程 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. 而所求面积为

$$A = \frac{1}{2} \oint_{(+C)} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t\cos t + a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t\sin t) dt$$

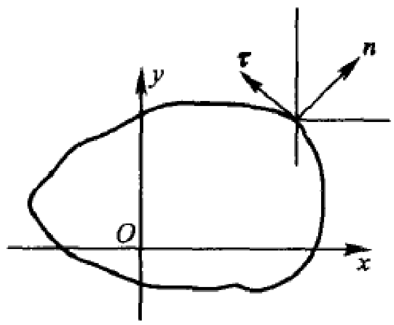
$$= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t dt = \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

4. 求线积分 $\oint_{(C)}[x\cos(x,\boldsymbol{n})+y\sin(x,\boldsymbol{n})]\mathrm{d}s$ 的值，其中$(x,\boldsymbol{n})$为简单闭曲线$(C)$的外法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 $x$ 轴正向的夹角.

**解**　如图所示，$\boldsymbol{\tau}$ 为曲线的切向量. 则

$$\cos(\boldsymbol{\tau},y)=\cos(\boldsymbol{n},x),$$

$$\cos(\boldsymbol{\tau},x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+(\boldsymbol{n},x)\right)=-\sin(\boldsymbol{n},x).$$




(第 4 题)

于是
$$\oint_{(C)}[x\cos(x,\boldsymbol{n})+y\sin(x,\boldsymbol{n})]\mathrm{d}s$$

$$=\oint_{(C)}[x\cos(\boldsymbol{\tau},y)-y\cos(\boldsymbol{\tau},x)]\mathrm{d}s$$

$$=\oint_{(C)}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=2\sigma,$$ 其 $\sigma$ 为由$(C)$所围区域的面积.

7. 验证下列各方程是全微分方程，并求其通解.

(3) $(2x\sin y+3x^2y)\mathrm{d}x+(x^3+x^2\cos y+y^2)\mathrm{d}y=0$；

**解**　$P(x,y)=2x\sin y+3x^2y, Q(x,y)=x^3+x^2\cos y+y^2.$

由于$\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x\cos y+3x^2=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，原方程为全微分方程. 下面利用凑全微分法求其通解.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=(2x\sin y+3x^2y)\mathrm{d}x+(x^3+x^2\cos y+y^2)\mathrm{d}y\\&=(2x\sin y\mathrm{d}x+x^2\cos y\mathrm{d}y)+(3x^2y\mathrm{d}x+x^3\mathrm{d}y)+y^2\mathrm{d}y\\&=\mathrm{d}(x^2\sin y)+\mathrm{d}x^3y+\mathrm{d}\frac{1}{3}y^3=\mathrm{d}\left(x^2\sin y+x^3y+\frac{1}{3}y^3\right),\end{aligned}$$

于是通解 $u(x,y)=x^2\sin y+x^3y+\dfrac{1}{3}y^3=C.$

(4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-2x\sin y}{(x^2+1)\cos y}.$

**解**　令 $P=2x\sin y, Q=(x^2+1)\cos y$. 则原方程可转化为 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$. 又 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x\cos y$. 故此方程是全微分方程. 又 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\mathrm{d}(x^2+1)\sin y$，故$(x^2+1)\sin y=C$ 为其通解.

8. 计算下列线积分：

(1) $\int_{(1,-1)}^{(1,1)}(x-y)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)$;

**解** 由于$\frac{\partial(x-y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}[-(x-y)]=-1$,故此线积分与路径无关. 故

原积分 $=\int_{(1,-1)}^{(1,1)}(x-y)\mathrm{d}(x-y)=\frac{1}{2}(x-y)^2\Big|_{(1,-1)}^{(1,1)}=-2$

(3) $\int_{(0,0)}^{(1,1)}\frac{2x(1-\mathrm{e}^y)}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{e}^y}{1+x^2}\mathrm{d}y$.

**解** 原积分 $=\int_{(0,0)}^{(1,1)}\left[\frac{\mathrm{e}^y[-2x\mathrm{d}x+(1+x^2)\mathrm{d}y]}{(1+x^2)^2}+\frac{2x\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}\right]$

$$=\int_{(0,0)}^{(1,1)}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{e}^y}{1+x^2}+\frac{-1}{1+x^2}\right)=\frac{\mathrm{e}^y-1}{1+x^2}\Big|_{(0,0)}^{(1,1)}=\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1).$$

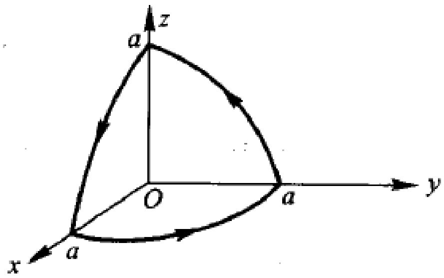
10. 应用stokes公式计算线积分$\oint_{(C)}y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$,$(C)$为圆周$x^2+y^2+z^2=a^2$,$x+y+z=0$,其方向与平面$x+y+z=0$的法向量$\{1,1,1\}$符合右手螺旋法则.

**解** 设$(S)$为$x+y+z=0$位于$x^2+y^2+z^2=a^2$内法向量为$\{1,1,1\}$的部分. $\boldsymbol{e}_n=\frac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$. 由stokes公式

$$\oint_C y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\oint_{(S)}\mathbf{rot}\{y,z,x\}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{(S)}\mathrm{rot}\{y,z,x\}\cdot\boldsymbol{e}_n\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{(S)}\{-1,-1,-1\}\cdot\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}\mathrm{d}S=-\frac{3}{\sqrt{3}}\iint_{(S)}\mathrm{d}S=-\sqrt{3}\pi a^2.$$

11. 应用Stokes公式计算线积分$\oint_{(C)}(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(y-x)\mathrm{d}z$,$(C)$是从$(a,0,0)$经$(0,a,0)$回到$(a,0,0)$的三角形.




(第11题)

**解** 令$(S)$:$x+y+z=a$上位于第一卦限部分的上侧,则其单位法向量$\boldsymbol{e}_n=\frac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$. 又令$\boldsymbol{A}=\{z-y,x-z,y-x\}$,则$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\{2,2,2\}$. 于是

$$\oint_{(C)}(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(y-x)\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{(S)}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_n\mathrm{d}S=\iint_{(S)}2\sqrt{3}\mathrm{d}S=2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2a^2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2a^2}\right)=3a^2.$$

12. 求向量场 $\boldsymbol{A}=(-y,x,c)$($c$ 为常数)沿下列曲线正方向的环量:

(1) 圆周:$x^2+y^2=r^2,z=0$;

**解** 环量 $=\oint_{(C)}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+c\mathrm{d}z((C):x=r\cos t,y=r\sin t)$

$$=\int_0^{2\pi}[-(r\sin t)r(-\sin t)+(r\cos t)(r\cos t)]\mathrm{d}t=2\pi r^2.$$

(2) 圆周:$(x-2)^2+y^2=R^2,z=0$.

**解** 圆周的参数方程 $x=2+R\cos t,y=R\sin t,0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

$$\text{环量}=\oint_{(C)}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+c\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}[R^2\sin^2 t+(2+R\cos t)R\cos t]\mathrm{d}t=2\pi R^2.$$

15. 已知 $\boldsymbol{A}=3y\boldsymbol{i}+2z^2\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k},\boldsymbol{B}=x^2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{k}$,求 $\mathbf{rot}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$.

**解** $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3y&2z^2&xy\\x^2&0&-4\end{vmatrix}=-8z^2\boldsymbol{i}+(x^3y+12y)\boldsymbol{j}-2x^2z^2\boldsymbol{k}.$

$$\mathbf{rot}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\-8z^2&x^3y+12y&-2x^2z^2\end{vmatrix}=(4xz^2-16z)\boldsymbol{j}+3x^2y\boldsymbol{k}.$$

16. 利用 Gauss 公式计算下列曲面积分:

(2) $\oiint\limits_{(S)}x^3\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$,$(S)$为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧;

**解** 原式 $=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}(3x^2+3y^2+3z^2)\mathrm{d}V$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R 3r^2\cdot r^2\sin\theta\mathrm{d}r=\frac{12}{5}\pi R^5.$$

(3) $\oiint\limits_{(S)}(x^2-2xy)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(y^2-2yz)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(1-2xz)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$,$(S)$为球心在坐标原点,半径为 $a$ 的上半球面的上侧;

**解** 设$(S_1):x^2+y^2\leqslant a^2,z=0$ 的下侧,$(V):x^2+y^2+z^2\leqslant a^2,z\geqslant 0$.

则
$$\text{原积分}=\iint\limits_{(S\cup S_1)}-\iint\limits_{(S_1)}$$

$$= \iiint\limits_{(V)} [(2x-2y)+(2y-2z)+(-2x)]\mathrm{d}V + \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^a -2r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta\mathrm{d}r + \pi a^2$$

$$= \pi a^2\left(1-\frac{1}{2}a^2\right).$$

(4) $\oiint\limits_{(S)}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$，$(S)$为锥体 $x^2+y^2\leqslant z^2, 0\leqslant z\leqslant h$ 的表面，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为此曲面的外法线方向余弦；

**解** 原积分 $= \iint\limits_{(S_{外侧})} x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$

$$\xlongequal{\text{Gauss 公式}} \iiint\limits_{(V)} 2(x+y+z)\mathrm{d}V \quad ((V)\text{ 为圆锥 } z^2=x^2+y^2,\ 0\leqslant z\leqslant h)$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^h\rho\mathrm{d}\rho\int_\rho^h 2(\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi+z)\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2}\pi h^4.$$

(5) $\iint\limits_{(S)} x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + (x+y+z+1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，$(S)$为半椭球面 $z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ 的上侧；

**解** 设$(S_1)$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1, z=0$ 的下侧，$(V)$为上半椭球.

$(\sigma)$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1, z=0$. 由于$(\sigma)$关于 $y,x$ 轴对称，而函数 $x,y$ 分别关于 $x,y$ 为奇函数. 则 $\iint\limits_{(\sigma)} x\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} y\mathrm{d}\sigma = 0$，从而

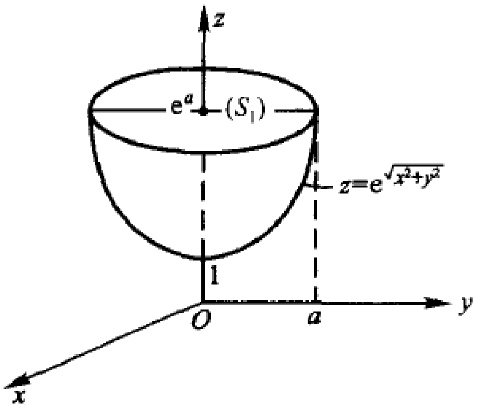
$$\iint\limits_{(S_1)} x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + (x+y+z+1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{(S_1)} (x+y+z+1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = -\iint\limits_{(\sigma)} (x+y+1)\mathrm{d}\sigma$$

$$= -\iint\limits_{(\sigma)} \mathrm{d}\sigma = -\pi ab.$$

于是
$$\iint_{(S)} x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(x+y+z+1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$
$$=\iint_{(S\cup S_1)}-\iint_{(S_1)}$$
$$=\iiint_{(V)}3\mathrm{d}V+\pi ab=\pi ab(2c+1).$$

(6) $\iint_{(S)} 4xz\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，其中$(S)$是$yOz$平面上的曲线$z=\mathrm{e}^y(0\leqslant y\leqslant a)$绕$z$轴旋转成的曲面的下侧.



(第 16 题(6))

**解**　设$(S_1)\,x^2+y^2\leqslant a^2$与$z=\mathrm{e}^a$交面的上侧.$(V)$由$(S)$及$(S_1)$围成的立体.$(\sigma)$为$xOy$平面上的圆$x^2+y^2\leqslant a^2$.于是

$$原积分=\iint_{(S\cup S_1)}-\iint_{(S_1)}$$
$$=\iiint_{(V)}(4z-2z-2z)\mathrm{d}V-\iint_{(S_1)}(1-\mathrm{e}^{2a})\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$
$$=0-\iint_{(\sigma)}(1-\mathrm{e}^{2a})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(\mathrm{e}^{2a}-1)\pi a^2.$$

17. 设$(S)$为上半球面$x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant0)$，其法向量$\boldsymbol{n}$与$Oz$轴的夹角为锐角，求向量场$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$向$\boldsymbol{n}$所指的一侧穿过$(S)$的通量.

**解**
$$\Phi=\iint_{(S)}x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$
$$=\iint_{(S\cup S_1)}-\iint_{(S_1)}\quad((S_1)\text{ 为 }x^2+y^2\leqslant a^2,z=0\text{ 下侧})$$
$$=\iiint_{(V)}3\mathrm{d}V-\iint_{(S_1)}0\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=3\cdot\frac{2}{3}\pi a^3=2\pi a^3.$$

20. 求下列全微分的原函数：

(1) $\mathrm{d}u=(x^2-2yz)\mathrm{d}x+(y^2-2xz)\mathrm{d}y+(z^2-2xy)\mathrm{d}z$；

**解**　设$A=(x,0,0)$，$B(x,y,0)$，$C(x,y,z)$.利用线积分可知

$$u=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(x^2-2yz)\mathrm{d}x+(y^2-2xz)\mathrm{d}y+(z^2-2xy)\mathrm{d}z$$

$$=\int_{\overline{OA}}+\int_{\overline{AB}}+\int_{\overline{BC}}+C$$

$$=\int_0^x x^2\mathrm{d}x+\int_0^y y^2\mathrm{d}y+\int_0^z(z^2-2xy)\mathrm{d}z+C.$$

$$=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+C.$$

(2) $\mathrm{d}u=(3x^2+6xy^2)\mathrm{d}x+(6x^2y+4y^3)\mathrm{d}y.$

**解** 令 $P(x,y)=3x^2+6xy^2, Q(x,y)=6x^2y+4y^3.$

利用偏积分求原函数 $u(x,y)$.

$$u(x,y)=\int(3x^2+6xy^2)\mathrm{d}x=x^3+3x^2y^2+\varphi(y),$$

又 $$\frac{\partial u}{\partial y}=6x^2y+\varphi'(y)=Q(x,y)=6x^2y+4y^3,$$

则 $\varphi'(y)=4y^3$,于是 $\varphi(y)=y^4+C.$

故 $u(x,y)=x^3+3x^2y^2+y^4+C.$

21. 试证 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在区域$(\sigma)$上的任意两个原函数仅差一个常数.

**证明** 设 $u_1(x,y)$与 $u_2(x,y)$均为 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在区域$(\sigma)$上的两个原函数,则 $\mathrm{d}u_1=\mathrm{d}u_2=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$. 从而 $\mathrm{d}(u_1-u_2)=0$. 于是 $u_1-u_2=C$. 即 $u_1(x,y)=u_2(x,y)+C$.

22. 设$(G)$是一维单连通域,$\boldsymbol{A}(P,Q,R)\in C^{(1)}((G))$,试证明在$(G)$内恒有$\nabla\times\boldsymbol{A}=0$等价于$\oint_{(C)}\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{S}=0$,其中$(C)$为$(G)$中任一分段光滑闭曲线.

**证明** 先证 $\nabla\times\boldsymbol{A}=0\Longrightarrow\oint_{(C)}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0.$

由于$(G)$是一维单连通域,则必存在曲面$(S)\subset(G)$,且$(S)$的法向量与$(C)$成右手螺旋,则由 stokes 公式,

$$\oint_{(C)}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{(S)}\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0.$$

如果$\oint_{(C)}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$,则环量密度$\dfrac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}S}=0$. 即 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_n\mathrm{d}S=0$. 由于$(C)$的任意性知$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=0$,即$\nabla\times\boldsymbol{A}=0$.

**(B)**

1. 把 Green 公式写成以下两种形式：

$$\iint_{(\sigma)}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=\oint_{(+C)}X\mathrm{d}y-Y\mathrm{d}x;$$

$$\iint_{(\sigma)}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=\oint_{(+C)}[X\cos(x,\boldsymbol{n})+Y\sin(x,\boldsymbol{n})]\mathrm{d}s,$$ 其中 $(x,\boldsymbol{n})$ 为正 $x$ 轴到 $(C)$ 的外法线向量 $\boldsymbol{n}$ 的转角.

**解**　由 Green 公式 $\oint_{(+C)}X\mathrm{d}y-Y\mathrm{d}x=\iint_{(\sigma)}\left[\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}(-Y)\right]\mathrm{d}\sigma=\iint_{(\sigma)}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma$. 又由本习题(A)第 4 题及前式知：$\oint_{(+C)}[X\cos(x,\boldsymbol{n})+Y\sin(x,\boldsymbol{n})]\mathrm{d}s=\oint_{(C)}X\mathrm{d}y-Y\mathrm{d}x=\iint_{(\sigma)}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma$.

2. 设 $u(x,y),v(x,y)$ 是具有二阶连续偏导数的函数，并设 $\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，证明：

(1) $\iint_{(\sigma)}\Delta u\mathrm{d}\sigma=\oint_{(C)}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s$;

(2) $\iint_{(\sigma)}(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}\sigma=-\oint_{(C)}\left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}s$，其中 $(\sigma)$ 为闭曲线 $(C)$ 所围的平面域，$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}},\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}$ 分别表示 $u$ 与 $v$ 沿着 $(C)$ 的外法线方向的导数.

**证明**　设 $\boldsymbol{n}$ 的两个方向余弦分别为 $\cos\alpha,\cos\beta$. 即 $\boldsymbol{n}_0=\{\cos\alpha,\cos\beta\}$. 则 $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta,\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}=\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta,\cos\beta=\sin\alpha$.

(1) 由上题中 Green 公式的第二种形式有

$$\oint_{(C)}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=\oint_{(C)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta\right)\mathrm{d}s=\oint_{(C)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha\right)\mathrm{d}s$$

$$=\iint_{(\sigma)}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}\sigma=\iint_{(\sigma)}\Delta u\mathrm{d}\sigma.$$

(2) $\oint_{(C)}\left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}s=\oint_{(C)}\left[\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos\alpha+\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\sin\alpha\right]\mathrm{d}s$

$$= \iint\limits_{(\sigma)} \left[ \frac{\partial}{\partial x}\left( v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left( v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \mathrm{d}\sigma$$

$$= \iint\limits_{(\sigma)} (v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}\sigma = -\iint\limits_{(\sigma)} (u\Delta v - v\Delta u)\,\mathrm{d}\sigma.$$

3. 计算 $\int\limits_{(L)} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2 + y^2}$. 其中$(L)$是由点$A(-1,0)$经$B(1,0)$到点$C(-1,2)$的路径,$\overset{\frown}{AB}$为下半圆周,$BC$段是直线.

**解**　令 $P(x,y) = -\frac{y}{4x^2+y^2}, Q(x,y) = \frac{x}{4x^2+y^2}$.

于是$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}$. 从而 $\int\limits_{(L)} = \oint\limits_{(L\cup\overline{CA})} + \int\limits_{(\overline{AC})}$. 又$(L\cup\overline{CA})$围成的区域$(\sigma)$内包含原点$(0,0)$. 而$P,Q$在$(0,0)$处偏导数不连续. 令曲线$(L_1)$为 $x = \frac{\varepsilon}{2}\cos\theta$, $y = \varepsilon\sin\theta$,且$\varepsilon$足够小. 使$(L_1)\subset(\sigma)$. 且$(L\cup\overline{CA})\cap(L_1) = \phi$. 则

$$\oint\limits_{(L\cup\overline{CA})} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\mathrm{d}\theta = \pi,$$

$$\int\limits_{(\overline{AC})} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} = \int_0^2 \frac{-1}{4+y^2}\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\arctan\frac{y}{2}\Big|_0^2 = -\frac{\pi}{8},$$

故
$$\int\limits_{(L)} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} = \frac{7}{8}\pi.$$

4. 计算曲线积分

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AMB}} [\varphi(y)\cos x - \pi y]\mathrm{d}x + [\varphi'(y)\sin x - \pi]\mathrm{d}y,$$

其中$\overset{\frown}{AMB}$为连结$A(\pi,2)$及$B(3\pi,4)$两点的光滑曲线,并设$\overset{\frown}{AMB}$恒在弦$\overline{AB}$的下方且与$\overline{AB}$围成弓形域的面积为2.

**解**　$(\sigma)$为$\overset{\frown}{AMB}$与$\overline{AB}$围成的平面区域,依题意$(\sigma)$的面积$\sigma = 2$. 由于$\overset{\frown}{AMB}$始终在$\overline{AB}$的下方,故$(\sigma)$的边界$(\overset{\frown}{AMB}\cup BA)$为正向.

$$I = \oint\limits_{(\overset{\frown}{AMB}\cup\overline{BA})} + \int\limits_{\overline{AB}}$$

$$= \iint\limits_{(\sigma)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}[\varphi'(y)\sin x - \pi] - \frac{\partial}{\partial y}[\varphi(y)\cos x - \pi y] \right\}\mathrm{d}\sigma + \pi\int_2^4 \varphi(y)\cos\pi(y-1)\mathrm{d}y -$$

$$\pi\int_2^4(\pi y+1)\mathrm{d}y+\int_2^4\varphi'(y)\sin\pi(y-1)\mathrm{d}y$$

$$=\pi\iint_{(\sigma)}\mathrm{d}\sigma+\pi\int_2^4\varphi(y)\cos\pi(y-1)\mathrm{d}y-\pi\left(\frac{1}{2}\pi y^2+y\right)\Big|_2^4+$$

$$\varphi(y)\sin\pi(y-1)\Big|_2^4-\int_2^4\pi\varphi(y)\cos\pi(y-1)\mathrm{d}y$$

$$=2\pi-(6\pi+2)\pi=-6\pi^2.$$

5. 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有连续一阶导数，$(L)$是上半平面$(y>0)$内的有向分段光滑曲线，其起点为$(a,b)$，终点为$(c,d)$. 记

$$I=\int_{(L)}\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y,$$

(1) 证明曲线积分$I$的值与路径$(L)$无关；

(2) 当$ab=cd$时，求$I$的值.

**解**　由于$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\right\}=f(xy)+xyf'(xy)-\frac{1}{y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{y}\left(1+y^2f(xy)\right)\right]$，所以

$$I=\int_{(a,b)}^{(c,d)}\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^c\frac{1}{b}[1+b^2f(bx)]\mathrm{d}x+\int_b^d\left[cf(cy)-\frac{c}{y^2}\right]\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{b}(c-a)+\int_a^c f(bx)b\mathrm{d}x+\int_b^d cf(cy)\mathrm{d}y+\frac{c}{y}\Big|_b^d$$

$$=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{cb}f(u)\mathrm{d}u+\int_{bc}^{dc}f(u)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{dc}f(u)\mathrm{d}u.$$

(2) 当$ab=dc$时，$I=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$.

6. 计算$\oint\!\!\!\oint_{(S)}x^3\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left[\frac{1}{z}f\left(\frac{y}{z}\right)+y^3\right]\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\left[\frac{1}{y}f\left(\frac{y}{z}\right)+z^3\right]\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$.

其中$f(u)$具有连续的导数，$(S)$为锥面$x=\sqrt{y^2+z^2}$与两球面$x^2+y^2+z^2=1$，$x^2+y^2+z^2=4$所围立体的表面外侧.

**解** 由 Gauss 公式，

$$\text{原积分} = \iiint\limits_{(V)} \left\{3x^2 + \left[3y^2 + \frac{1}{z^2} f'\left(\frac{y}{z}\right)\right] + \left[3z^2 - \frac{1}{y} \cdot \frac{y}{z^2} f'\left(\frac{y}{z}\right)\right]\right\} \mathrm{d}V$$

$$= 3 \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}V$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_1^2 r^2 \cdot r^2 \sin\theta \mathrm{d}r$$

$$= 6\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta \mathrm{d}\theta\right)\left(\int_1^2 r^4 \mathrm{d}r\right) = \frac{93\pi(2 - \sqrt{2})}{5}.$$

7. 计算 $\int\limits_{(L)} (y^2 + z^2)\mathrm{d}x + (z^2 + x^2)\mathrm{d}y + (x^2 + y^2)\mathrm{d}z$，其中 $(L)$ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ 与柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 的交线，从 $Oz$ 轴正方向看进去为逆时针 $(z \geqslant 0)$.

**解** 球面上点 $(x,y,z)$ 处单位法向量为 $\boldsymbol{e}_n = \left\{\frac{x-2}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}\right\}$. 又 $(L)$ 与 $\boldsymbol{e}_n$ 成右手螺旋，于是，由 stokes 公式，有

$$\oint\limits_{(L)} (y^2 + z^2)\mathrm{d}x + (z^2 + x^2)\mathrm{d}y + (x^2 + y^2)\mathrm{d}z$$

$$= 2 \iint\limits_{(S)} (y - z)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (z - x)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (x - y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

$$= 2 \iint\limits_{(S)} \left[(y - z) \cdot \frac{x-2}{2} + (z - x) \cdot \frac{y}{2} + (x - y) \cdot \frac{z}{2}\right]\mathrm{d}S = 2 \iint\limits_{(S)} (z - y)\mathrm{d}S,$$

其中 $(S)$ 上半球面位于圆柱面内部部分，且 $(S)$ 关于 $xOz$ 平面 $(y = 0)$ 对称. 故

$$\iint\limits_{(S)} y\mathrm{d}S = 0,$$

$$\iint\limits_{(S)} z\mathrm{d}S = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 2x} \sqrt{4x - x^2 - y^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{(2 - x)^2 + y^2}{4x - x^2 - y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 2x} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi.$$

故所求线积分 $= 4\pi$.

8. 设函数 $F = f\left(xy, \frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ 具有连续的二阶偏导数，求 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} F)$.

**解** $\operatorname{grad} F = \left\{yf_1 + \frac{1}{z}f_2, xf_1 + \frac{1}{z}f_3, -\frac{x}{z^2}f_2 - \frac{y}{z^2}f_3\right\}$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} F)=y\left(yf_{11}+\frac{1}{z}f_{12}\right)+\frac{1}{z}\left(f_{21}\cdot y+\frac{1}{z}f_{22}\right)+x\left(xf_{11}+\frac{1}{z}f_{13}\right)+$$

$$\frac{1}{z}\left(f_{31}\cdot x+f_{33}\cdot\frac{1}{z}\right)+\frac{2x}{z^3}f_2+\frac{2y}{z^3}f_3-\frac{x}{z^2}\left[f_{22}\cdot\left(-\frac{x}{z^2}\right)-\right.$$

$$\left.\frac{y}{z^2}f_{23}\right]-\frac{y}{z^2}\left[f_{32}\cdot\left(-\frac{x}{z^2}\right)+f_{33}\cdot\left(-\frac{y}{z^2}\right)\right]$$

$$=\frac{2}{z^3}(xf_2+yf_3)+(x^2+y^2)f_{11}+\frac{2y}{z}f_{12}+\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{x^2}{z^2}\right)f_{22}+$$

$$\frac{2x}{z}f_{13}+\frac{2xy}{z^4}f_{23}+\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{y^2}{z^2}\right)f_{33}.$$

9. 求 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，当 $f(r)$ 等于什么时，$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))=0$？

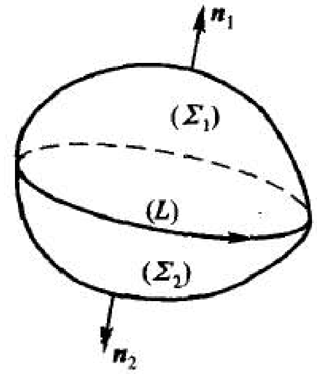
**解**　由于 $\operatorname{grad} r=\frac{1}{r}\{x,y,z\}=\frac{\boldsymbol{r}}{r}(\boldsymbol{r}=\{x,y,z\})$，于是 $\operatorname{grad} f(r)=f'(r)\operatorname{grad} r=f'(r)\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}$. 从而 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))=f''(r)\left(\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}\right)+f'(r)\left(\frac{r^2-x^2}{r^3}+\frac{r^2-y^2}{r^3}+\frac{r^2-z^2}{r^3}\right)=f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)$.

$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))=0$，即 $f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)=0$. 两边对 $r$ 积分可得

$\int\frac{\mathrm{d}f'(r)}{f'(r)}=\int-\frac{2}{r}\mathrm{d}r$，即 $f'(r)=\frac{C}{r^2}$，($C$ 为任意常数) 故 $f(r)=\frac{C}{r}+C_2$

10. 设向量场 $\boldsymbol{F}$ 在空间区域 $(G)\subseteq\mathbf{R}^3$ 内有连续的一阶偏导数，证明对 $(G)$ 内任何按块光滑的封闭曲面 $(\Sigma)$ 有

$$\iint_{(\Sigma)}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0.$$



(第 10 题)

**证明**　设 $\boldsymbol{F}=\{P,Q,R\}$，有向闭曲线 $(L)$ 将 $(\Sigma)$ 分成两片：$(\Sigma_1)$ 与 $(\Sigma_2)$，不妨设 $(\Sigma_1)$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $(L)$ 成右手螺旋，则 $(\Sigma_2)$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_2$ 与 $(-L)$ 成右手螺旋，由 Stokes 公式，

$$\iint_{(\Sigma)}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iint_{(\Sigma_1)}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_1\mathrm{d}S+\iint_{(\Sigma_2)}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_2\mathrm{d}S$$

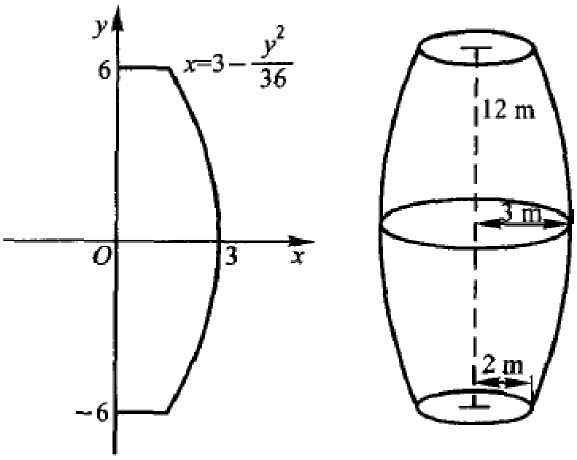
$$= \oint_{(L)} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \oint_{(-L)} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0.$$

## 综合练习题

1. 一个对称的地下油库,它的内部设计是:横截面为圆,在中心位置上的半径是 3 m,到底部和顶部的半径减小到 2 m;底部和顶部相隔 12 m(图(b));纵截面的两侧是抛物线 $x = 3 - \frac{y^2}{36}(-6\leqslant y\leqslant 6)$(图(a)).

(1) 求油库的容积;

(2) 为了设计油库的油量标尺,试求出油库中油量分别为 10 $m^3$,20 $m^3$,30 $m^3$,…时油的深度.




(a) (b)

(第 1 题)

**解** (1) 油库侧面的方程为:$\sqrt{x^2+z^2} = 3 - \frac{y^2}{36}$. 设$(V_1)$为油库位于 $zOx$ 平面之上部分.$(\sigma_z)$为水平截面 $x^2+z^2 \leqslant \left(3-\frac{y^2}{36}\right)^2$. 于是油库的容积

$$V = 2\iiint\limits_{(V_1)} = 2\int_0^6 \mathrm{d}y \iint\limits_{(\sigma_y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}z = 2\int_0^6 \pi\left(3-\frac{y^2}{36}\right)^2 \mathrm{d}y = \frac{432}{5}\pi(\mathrm{m}^3).$$

(2) 设油量为 $V_h$ 时,油面的高度为 $h$. 则$(h\geqslant -6)$

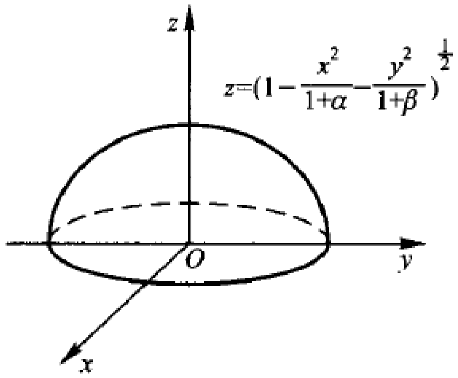
$$V_h = \int_{-6}^{h} \mathrm{d}y \iint\limits_{(\sigma_y)} = \pi\int_{-6}^{h}\left(3-\frac{y^2}{36}\right)^2 \mathrm{d}y,$$

$$V_h = \left[\frac{h^5}{6\,480} - \frac{h^3}{18} + 9h + \frac{216}{5}\right]\pi(\mathrm{m}^3).$$

故当 $V_{h_1}=10(\mathrm{m}^3)$；则 $h_1\approx -5.29(\mathrm{m})$；若 $V_{h_2}=20\ \mathrm{m}^3$，则 $h_2\approx -4.69(\mathrm{m})$；若 $V_{h_3}=30(\mathrm{m}^3)$，则 $h_3\approx -4.16(\mathrm{m})$.

2. 某工厂按原设计要对一半球体的工件的半球面部分镀上一层稀有金属，其半球面方程为 $x^2+y^2+z^2=1(z\geqslant 0)$，该厂按原设计的半球面面积 $2\pi$ 备好电镀材料. 当工件加工好后，对工件进行了测量，发现半球面方程为

$$\frac{x^2}{1+\alpha}+\frac{y^2}{1+\beta}+z^2=1(z\geqslant 0),$$




（第 2 题）

其中 $|\alpha|,|\beta|$ 是很小正数，在测量了 $\alpha$ 和 $\beta$ 后，工人师傅希望知道，按原准备好的材料电镀后，镀层厚度在什么情况下比原设计的薄？在什么情况下比原设计的厚？

**解**　设曲面 $z=\left(1-\dfrac{x^2}{1+\alpha}-\dfrac{y^2}{1+\beta}\right)^{\frac{1}{2}}$ 的面积为 $S(\alpha,\beta)$，则

$$S(\alpha,\beta)=\iint\limits_{(S)}\mathrm{d}S=\iint\limits_{(\sigma_{xy})}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\frac{x^2}{1+\alpha}+\frac{y^2}{1+\beta}\leqslant 1}\left[\frac{1-\dfrac{\alpha x^2}{(1+\alpha)^2}-\dfrac{\beta y^2}{(1+\beta)^2}}{1-\dfrac{x^2}{1+\alpha}-\dfrac{y^2}{1+\beta}}\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

令 $x=\sqrt{1+\alpha}\rho\cos\varphi,y=\rho\sin\varphi$　（因为 $\alpha,\beta$ 充分小，所以 $1+\alpha,1+\beta>0$），则

$$S(\alpha,0)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\left[\frac{1-\dfrac{\alpha}{1+\alpha}\rho^2\cos^2\varphi}{1-\rho^2}\right]^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\alpha}\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\sqrt{1+\alpha-\alpha\rho^2\cos^2\varphi}\,\mathrm{d}\rho$$

$$\left.\frac{\partial S}{\partial\alpha}\right|_{(0,0)}=S'_\alpha(0,0)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\left.\frac{1-\rho^2\cos^2\varphi}{2\sqrt{1+\alpha-\alpha\rho^2\cos^2\varphi}}\mathrm{d}\rho\right|_{\alpha=0}$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\frac{\rho(1-\rho^2\cos^2\varphi)}{2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{d}\rho=\frac{2\pi}{3}.$$

同理可得 $\left.\frac{\partial S}{\partial\beta}\right|_{(0,0)}=S'_\beta(0,0)=\frac{2\pi}{3}.$

由 Taylor 公式,当 $|\alpha|,|\beta|$ 充分小时(注意到 $S(0,0)=2\pi$),

$$S(\alpha,\beta)=S(0,0)+S'_\alpha(0,0)\alpha+S'_\beta(0,0)\beta+0(\alpha^2+\beta^2)$$

$$=2\pi+\frac{2\pi}{3}(\alpha+\beta)+0(\alpha^2+\beta^2).$$

故当 $\alpha+\beta>0$ 时,$S(\alpha,\beta)>S(0,0)=2\pi$(半球面的面积).

又由于工厂是按半球面面积 $2\pi$ 准备的原材料,因此此时镀层变薄;当 $\alpha+\beta<0$ 时,$S(\alpha,\beta)<S(0,0)=2\pi$ 镀层变厚.