2.4.4 正交坐标系

(三)正交坐标系中的场分析运算

设正交坐标系的坐标变量为：v_1, v_2, v_3；坐标单位矢量为：$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$；度规系数为：$h_1, h_2, h_3$, $\Omega = h_1 h_2 h_3$ ，则可得出该坐标系下的哈密顿运算符的表达，以及由哈密顿算符作用于场函数而得出的场分析运算式。

(1) 哈密顿算法

$$\nabla = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \frac{\partial}{h_i \partial v_i}$$

(2) 标量场的梯度运算

$$\nabla u = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \frac{\partial}{h_i \partial v_i} u$$

(3) 标量场的拉普拉斯运算

$$\nabla^2 u = \nabla \cdot (\nabla u) = \left(\sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \frac{\partial}{h_i \partial v_i} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{3} \vec{e}_j \frac{\partial}{h_j \partial v_j} u \right) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\Omega} \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\Omega}{h_i^2} \frac{\partial u}{\partial v_i} \right)$$

(4) 矢量场的散度运算

$$\nabla \bullet \vec{F} = \left(\sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \frac{\partial}{h_i \partial v_i} \right) \cdot \vec{F} = \sum_i \frac{1}{\Omega} \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\Omega}{h_i} F_i \right)$$

(5) 矢量场的旋度运算

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \frac{\partial}{h_i \partial v_i} \right) \times \vec{F} = \frac{1}{\Omega} \begin{vmatrix} h_1 \vec{e}_1 & h_2 \vec{e}_2 & h_3 \vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial v_1} & \dfrac{\partial}{\partial v_2} & \dfrac{\partial}{\partial v_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix} = \sum_i \frac{h_i \vec{e}_i}{\Omega} \left[\frac{\partial (h_k F_k)}{\partial v_j} - \frac{\partial (h_j F_j)}{\partial v_k} \right]$$

其中，$(i, j, k) = (1,2,3)$ 以循环次序计算。

(6) 坐标单位矢量的导数

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial v_i} = -\left(\vec{e}_j \frac{1}{h_j} \frac{\partial h_i}{\partial v_j} + \vec{e}_k \frac{1}{h_k} \frac{\partial h_i}{\partial v_k} \right) ; \; \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial v_k} = \vec{e}_k \frac{1}{h_j} \frac{\partial h_k}{\partial v_j} \; , j \neq k$$

直角坐标系、圆柱坐标系、球坐标系是三个最常用的正交坐标系，这三种坐标系的坐标变量、坐标单位矢量、度规系数分别如下，

直角坐标系,

$(v_1, v_2, v_3) = (x, y, z)$, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{e}_\mathrm{x}, \vec{e}_\mathrm{y}, \vec{e}_\mathrm{z})$, $(h_1, h_2, h_3) = (1,1,1)$， $\Omega = 1$

圆柱坐标系，

$(v_1, v_2, v_3) = (\rho, \varphi, z)$, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\mathrm{z})$, $(h_1, h_2, h_3) = (1, \rho, 1)$， $\Omega = \rho$

球坐标系，

$(v_1, v_2, v_3) = (r, \theta, \varphi)$, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{e}_\mathrm{r}, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$, $(h_1, h_2, h_3) = (1, r, r sin\theta)$，$\Omega = r^2 sin\theta$

由此，根据任意正交坐标系下一般的场分析表达式，可得出直角坐标系、圆柱坐标系、球坐标系中的具体场分析表达式。

2.4.5 矢量分析中的恒等关系

(一)积分定理

(1) 格林定理

对一定空间中的物理量进行分析，通常会涉及分析物理量在一定体积中及其包围面上的分布情况与关系问题。另外，对于分析处于同一空间中的多个物理量问题，还会涉及分析各物理量在空间中分布的彼此关系问题。要回答这些问题，就需要建立反映物理量空间分布变化的微积分关系。

1) 第一标量格林定理

$$\int_V (\nabla\Psi\cdot\nabla\Phi+\Psi\nabla^2\Phi)\mathrm{d}V=\oint_S \Psi\nabla\Phi\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

2) 第二标量格林定理

$$\int_V (\Psi\nabla^2\Phi-\Phi\nabla^2\Psi)\mathrm{d}V=\oint_S \left(\Psi\nabla\Phi-\Phi\nabla\Psi\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

3) 第一矢量格林定理

$$\int_V [(\nabla\times\vec{F}_1)\bullet(\nabla\times\vec{F}_2)-\vec{F}_1\bullet\nabla\times\nabla\times\vec{F}_2]\mathrm{d}V=\oint_S (\vec{F}_1\times\nabla\times\vec{F}_2)\bullet\mathrm{d}\vec{S}$$

4) 第二矢量格林定理

$$\int_V [\vec{F}_1\bullet(\nabla\times\nabla\times\vec{F}_2)-\vec{F}_2\bullet(\nabla\times\nabla\times\vec{F}_1)]\mathrm{d}V=\oint_S (\vec{F}_2\times\nabla\times\vec{F}_1-\vec{F}_1\times\nabla\times\vec{F}_2)\bullet\mathrm{d}\vec{S}$$

小结：格林定理给出了场域空间中，两个物理量在任意体积中及其包围面上的恒等关系式。在物理量分析问题中利用这些恒等关系，通常可简化问题分析的复杂度。如，利用格林恒等式将体积域内物理量分析求解的问题，转化为其包围面边界上分析求解的问题；又如，利用一个物理量的已知空间分布特性，求知另一个物理量的分布特性；还有，涉及一定条件下物理量唯一性的证明也可利用格林恒等式。

(2) 散度定理

$$\int_{\mathrm{V}} \nabla\bullet\vec{F}dV=\oint_S \vec{F}\bullet d\vec{S}$$

(3) 旋度定理

$$\int_{\mathrm{V}} \nabla\times\vec{F}dV=\oint_S \vec{e}_n\times\vec{F}dS$$

(4) 梯度定理

$$\int_{\mathrm{V}} \nabla u dV=\oint_S u d\vec{S}$$

(5) 斯托克斯定理

$$\int_{\mathrm{S}} (\nabla\times\vec{F})\bullet dS=\oint_C \vec{F}\bullet d\vec{l}$$

(6) 表面散度定理

$$\int_S \nabla_s\cdot\vec{F}dS=\oint_C \vec{e}_m\cdot\vec{F}dl$$

式中，$\nabla_s=\nabla-\vec{e}_n\dfrac{\partial}{\partial n}$，$\vec{e}_m=\vec{e}_l\times\vec{e}_n$。

(7) 表面旋度定理

$$\int_S \nabla_s\times\vec{F}dS=\oint_C \vec{e}_m\times\vec{F}dl$$

(8) 表面梯度定理

$$\int_S \nabla_s u dS=\oint_C \vec{e}_m u dl$$