英才实验学院数学分析模拟

姓名：

学号：

一、选择题

1、设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ x\ln x, & x>0\end{cases}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的_________.

A．可去间断点； B．跳跃间断点；

C．无穷间断点； D．振荡间断点.

2、设 $f(x)=\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}$，则其 （ ）

（A）只有一个可去间断点 （B）有两个跳跃间断点

（C）有三个可去间断点 （D）有无穷多个第一类间断点

3、若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+xf(x)}{x^3}=0$ ，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+f(x)}{x^2}$ 为（ ）。

（A）。0 （B）$\dfrac{1}{6}$， (C) 1 （D）∞

4、当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[3]{1+ax^2}-1$ 与 $1-\cos x$ 是等价无穷小，则（ ）

（A）$a=\dfrac{2}{3}$， （B）$a=3$， (C). $a=\dfrac{3}{2}$， （D）$a=2$

二、填空题

1、函数 $f(x)=\begin{cases}a+bx^2 & x\geq 0\\ \dfrac{e^{bx}-1}{x} & x\prec 0\end{cases}$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=$_________，若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，则 a,b 满足________ 。

2、设 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b)=0$，则 $a=$ ___，$b=$ ___.

3、数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n\tan\dfrac{1}{n})^{n^2}=$_____________。

4、$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$_____，$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x})=$____.

三、（10分）计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{(\sqrt{1+x}-1)\ln(1+x^2)+x^4\cos\dfrac{1}{x}}$.

四、（10分）（1）设常数$a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_k > 0$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n}$.

（2）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\dfrac{x^2}{2})^n}$ $(x \ge 0)$，求$f(x)$的表达式.

五、设$f \in C[a,b], a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$,证明至少存在一点$\xi \in (a,b)$,使

$f(\xi)=\dfrac{1}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$,其中$\lambda=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$，且$\lambda_i > 0(i=1,2,\cdots,n)$

六、已知:$\dfrac{1}{n+1} < \ln(1+\dfrac{1}{n}) < \dfrac{1}{n}(n \in N^*)$，设$u_n = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n(n \in N^*)$,
证明数列$\{u_n\}$收敛