第五节　重积分的应用

一、重积分的微元法

二、立体体积的计算

三、平面区域面积的计算

四、物体的质心的计算

五、物体的转动惯量

六、物体的引力

一、重积分的微元法

1. 能用重积分解决的实际问题的特点

所求量是
- 分布在有界闭域上的整体量
- 对区域具有可加性

2. 用重积分解决问题的方法

- 用微元分析法 (元素法)
- 从积分定义出发 建立积分式

3. 区域函数及其对域的导数

设Ω是一个区域，Ω_σ表示Ω的一切子区域所成的集合，$F:\Omega_\sigma \to R$是Ω_σ到R的映射，即

$$F:\Omega_\sigma \to R$$

$$m = F(\Delta\sigma), \qquad \forall \Delta\sigma \in \Omega_\sigma$$

称映射F为Ω上的区域函数。

定义4.1 设F是定义在Ω_σ上的区域函数，M是区域Ω上的一点，在Ω内任一包含M的子域$\Delta\sigma$，其测度（面积或体积）也记为$\Delta\sigma$，d=diam($\Delta\sigma$),若极限

$$\lim_{d\to 0}\frac{F(\Delta\sigma)}{\Delta\sigma}$$

存在，记为f(M)，称此极限f(M)为区域函数F在点M处对区域面积（或体积）的导数，即

或 $$\frac{dF}{d\sigma}=\lim_{d\to 0}\frac{F(\Delta\sigma)}{\Delta\sigma}=f(M),$$

$$\frac{dF}{d\sigma}=f(x,y), \text{或} \ \frac{dF}{d\sigma}=f(x,y,z).$$

所以，

dF=f(x, y)dσ, 或 dF=f(x, y， z)dσ

例1. 设$\Delta\sigma$是包含点M_0的任一有界闭区域，其测度（面积或体积）也记为$\Delta\sigma$，$f(M)$在$\Delta\sigma$上连续，则存在点$\bar{M}$，使得

$$\int_{\Delta\sigma} f(M)d\sigma = f(\bar{M})\Delta\sigma,$$

于是，

$$\lim_{d\to 0}\frac{\int_{\Delta\sigma} f(M)d\sigma}{\Delta\sigma} = \lim_{d\to 0} f(\bar{M}) = f(M_0).$$

令$\mathrm{F}(\Delta\sigma)=\int_{\Delta\sigma} f(M)d\sigma$，则

$$d\mathrm{F}(\Delta\sigma)=f(M)d\sigma$$

4. 重积分微元法

设F为Ω上的连续分布的区域函数，且F关于区域具有可加性。任意划分区域Ω，$d\Omega$是Ω上的任意小区域，$d\Omega$如此之小以致可以看成是一点，F在$d\Omega$上的值可以记为dF。

由于F关于区域具有可加性，因此

$$F=\int_{\Omega} dF.$$

这是一个积分表达式，要计算出F，关键在于能写出dF.

由于$d\Omega$如此之小以致可以看成是一点，因此，可以在$d\Omega$上将F的分布看成是均匀的，可以利用已知的物理或几何公式计算dF。我们把这种计算量F的方法称为微元法。

例4.1设有一半径为R的圆管道，内部充满液体，已知液体在管道横截面上的压强为$p=f(x,y)$为连续函数，求液体对管道闸门（垂直于管道的轴）的压力F.

解.建立如图所示的直角坐标系（见P187)。显然静压力F关于管道横截面Ω具有可加性。

在管道横截面Ω上任取一小区域$d\sigma$, $d\sigma$如此之小以致可以看成一点$M(x,y)$，于是在$d\sigma$上的压强$p=f(x,y)$, 从而

$$dF=f(x,y)\,d\sigma.$$

因此，管道横截面的静压力为 $F=\int_{\Omega} dF$ 即

$$F=\iint_{\Omega} f(x,y)\,d\sigma=\iint_{\Omega} f(x,y)\,dxdy$$

二、体积的计算

- **曲顶柱体**的顶为连续曲面 $z=f(x,y)\ (x,y)\in D$，

则其体积为 $V=\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

- 占有**空间有界域** Ω 的立体的体积为

$$V=\iiint\limits_\Omega dx\,dy\,dz$$

三、面积的计算

平面区域D的面积

$$A = \iint_D dx\,dy$$

四、质心坐标

若物体占有空间域Ω，有连续密度函数$\rho(x,y,z)$，求该物体的质心坐标.

解.物体的总质量为 $M=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)dxdydz.$

显然物体静力矩关于区域具有可加性。

任意划分区域Ω，任取一小区域dσ，dσ如此之小以致可以看成一点M(x,y,z)，该小区域dσ关于xoy坐标面的静力矩为

$$dM_{xy}=zdm=z\rho(x,y,z)dv=z\rho(x,y,z)dxdydz$$

因此，该物体对xoy坐标面的静力矩为 $M_{xy}=\iiint\limits_{\Omega}dM_{xy}$，即

$$M_{xy}=\iiint\limits_{\Omega}dM_{xy}=\iiint\limits_{\Omega}z\rho(x,y,z)dxdydz$$

由物理学知道，如果把质点系的质量集中在一点 $P(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$，使得集中的质量在点$P$对各坐标面的静力矩分别等于质点系对同一坐标面的静力矩，即

$$M\overline{z} = M_{xy} = \iiint_{\Omega} z\rho(x, y, z)dxdydz,$$

同理

$$M\overline{x} = M_{yz} = \iiint_{\Omega} x\rho(x, y, z)dxdydz,$$

$$M\overline{y} = M_{zx} = \iiint_{\Omega} y\rho(x, y, z)dxdydz,$$

因此，质心坐标 $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ 为

$$\overline{x} = \frac{1}{M}\iiint_{\Omega} x\rho(x, y, z)dv \qquad \overline{y} = \frac{1}{M}\iiint_{\Omega} y\rho(x, y, z)dv$$

$$\overline{z} = \frac{1}{M}\iiint_{\Omega} z\rho(x, y, z)dv \qquad \text{（其中}M = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z)dv\text{）}$$

当$\rho(x,y,z)\equiv$常数时, 则得质心坐标:

$$\bar{x}=\frac{\iiint_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V},\qquad \bar{y}=\frac{\iiint_{\Omega} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V},$$

$$\bar{z}=\frac{\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V}\qquad \left(V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\text{ 为}\Omega\text{的体积}\right)$$

例2. 求均匀半球体的质心.

五、物体的转动惯量

设有质量为m的质点，它到一已知轴L的垂直距离为r，

mr^2就是转动时惯性大小的度量，称为转动惯量。

物体的转动惯量为物体在转动中惯性大小的量度. 它等于物体中每个质点的质量与这质点到转轴距离的平方的乘积的总和.

1. 质点系的转动惯量:

设xoy平面上有n个质点，它们分别位于(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，$\cdots,(x_n,y_n)$处，质量分别为$m_1,m_2,\cdots,m_n$. 则该质点系对于x轴、y轴和原点的**转动惯量**依次为

$$I_x=\sum_{i=1}^{n} m_i y_i^{2} \qquad I_y=\sum_{i=1}^{n} m_i x_i^{2}$$

$$I_o=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2+y_i^2)$$

2、平面薄片的转动惯量:

设有一平面薄片，占有xoy面上的闭区域D，在点(x,y)处的面密度为$\rho(x,y)$，假定$\rho(x,y)$在D上连续，则

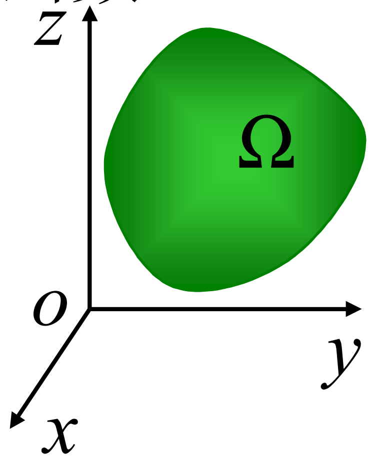
薄片对于x轴的转动惯量 $I_x=\iint_D y^2\rho(x,y)d\sigma,$

薄片对于y轴的转动惯量 $I_y=\iint_D x^2\rho(x,y)d\sigma.$

例3. 求半径为 a 的均匀半圆薄片(密度μ为常数)对其直径的转动惯量.

3、物体的转动惯量:

设物体占有空间区域 Ω , 有连续分布的密度函数 $\rho(x,y,z)$. 则该物体



对 z 轴的转动惯量为

$$I_z=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

对 x 轴的转动惯量 $I_x=\iiint_{\Omega}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

对 y 轴的转动惯量 $I_y=\iiint_{\Omega}(z^2+x^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

对原点的转动惯量 $I_o=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

六、引力

已知两质点间的引力大小为 $F = G\dfrac{M_1 M_2}{R^2}$

下面来讨论物体对质点的引力.

设物体占有空间区域Ω, 其密度函数 $\mu(x,y,z)$ 连续

则物体对位于点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处单位质量的质点的引力

$\vec{F}=(F_x,F_y,F_z)$ 其中

$$F_x = G\iiint_{\Omega} \frac{\mu(x,y,z)(x-x_0)}{r^3}\,dv$$

$$F_y = G\iiint_{\Omega} \frac{\mu(x,y,z)(y-y_0)}{r^3}\,dv$$

$$F_z = G\iiint_{\Omega} \frac{\mu(x,y,z)(z-z_0)}{r^3}\,dv$$

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

特别， xoy 面上的平面薄片D,它对原点处的单位质量质点的引力分量为

$$F_x = G\iint_D \frac{\mu(x,y)x}{\rho^3}\,\mathrm{d}\sigma,$$

$$F_y = G\iint_D \frac{\mu(x,y)y}{\rho^3}\,\mathrm{d}\sigma$$

$$(\rho = \sqrt{x^2 + y^2})$$

例4. 设面密度为μ ,半径为R的圆形薄片 $x^2+y^2\le R^2,$ $z=0,$求它对位于点 $M_0(0,0,a)\ (a>0)$ 处的单位质量质点的引力.