第五节 反常积分

$$\text{常义积分}\begin{cases}\text{被积函数有界}\\ \text{积分区间有限}\end{cases}$$

$\Downarrow$ 推广

反常积分（无限区间或无界函数的积分）

HIGH EDUCATION PRESS

本节内容：

5.1 无穷区间上的积分

5.2 无界函数的积分

5.3 无穷区间上积分的审敛准则

5.4 无界函数积分的审敛准则

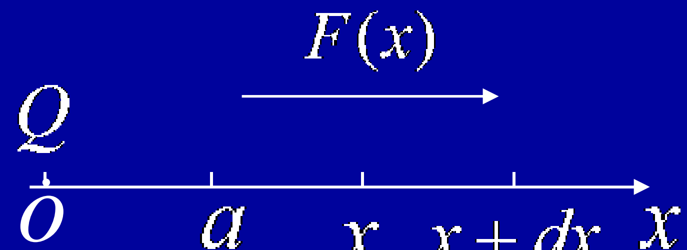
5.5 Γ 函数

5.1 无穷区间上的积分

例5.1 在一个由带电量为Q 的点电荷形成的电场中，求与该点电荷相距为 a 处的电位。

分析：根据物理学知识，该点处的电位 V_a 等于位于该点处的单位正电荷移至无穷远处电场力所做的功。

解 以点电荷 Q 所在处为原点建坐标轴如图



单位正电荷位于坐标轴上距原点 a 处。则当单位正电荷由 x 处

移至 $x+dx$ 处，电场力 $F(x)$ 所做功为

$$dW = F(x)dx = k\frac{Q}{x^2}dx,$$

其中 k 为常数. 该电荷从 a 移到 b 处电场力所做功为

$$W = \int_a^b k\frac{Q}{x^2}dx = kQ(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}).$$

令 $b \to +\infty$, 则电场在 $x=a$ 处的电位为

$$V_a = \lim_{b\to+\infty} W = \lim_{b\to+\infty} kQ(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}) = \frac{kQ}{a},$$

即

$$V_a = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b F(x)dx = \frac{kQ}{a}.$$

定义5.1（无穷积分） 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义.

若对任何 $b>a$, f 在 $[a,b]$ 上 *Riemann* 可积,则称

$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为 f 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的积分,简称无穷积分，记作

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

若极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在,则称 f 在 $[a,+\infty)$ 上的积分收敛，称该极限为

f 在 $[a,+\infty)$ 上积分的值. 若极限不存在，则称 f 在 $[a,+\infty)$ 上的积分发散. 收敛与发散统称为敛散性.

类似地,可以定义 f 在 $(-\infty, b]$ 上的积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 及其敛散性.

f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 定义为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

其中 c 为任一常数. 若极限 $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ 和

$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 都存在,则称 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的积分收敛;只要有一个极限不存在,就称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

无穷限的反常积分也称为**第一类反常积分**.

说明: 上述定义中若出现 $\infty-\infty$, 并非不定型,它表明该反常积分发散.

例5.2 证明第一类 p 积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 当 $p>1$ 时收敛; $p\le 1$ 时发散.

证: 当 $p=1$ 时有

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x}=\lim_{b\to+\infty}\left[\ln|x|\right]_a^b=+\infty,$$

当 $p\neq 1$ 时有

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^b=\begin{cases}+\infty, & p<1,\\ \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1.\end{cases}$$

因此, 当 $p>1$ 时, 反常积分收敛 , 其值为 $\dfrac{a^{1-p}}{p-1}$;

当 $p\leq 1$ 时, 反常积分发散 .

例5.3 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\ (p>0)$.

解: 原式 $= \lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b te^{-pt}dt$

$$= \lim_{b\to+\infty} -\frac{t}{p}\mathrm{e}^{-pt}\Big|_0^b + \frac{1}{p}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{p^2}\lim_{b\to+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\Big|_0^b$$

$$= \frac{1}{p^2}$$

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，引入记号

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x);\quad F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)$$

则有类似牛 – 莱公式的计算表达式：

$$\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a)$$

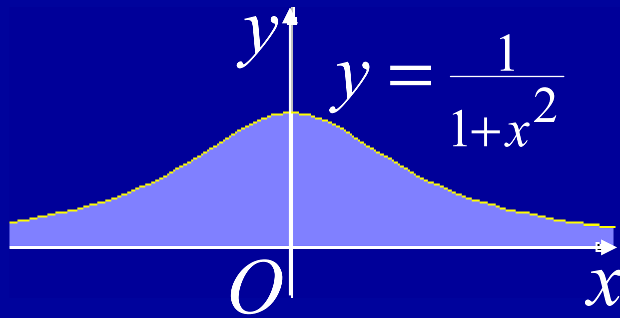
$$\int_{-\infty}^{b}f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{b}=F(b)-F(-\infty)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=F(+\infty)-F(-\infty)$$

例5.4 计算反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=[\arctan x]_{-\infty}^{+\infty}$

$=\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=\pi$



思考: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}\cancel{=}0$ 对吗?

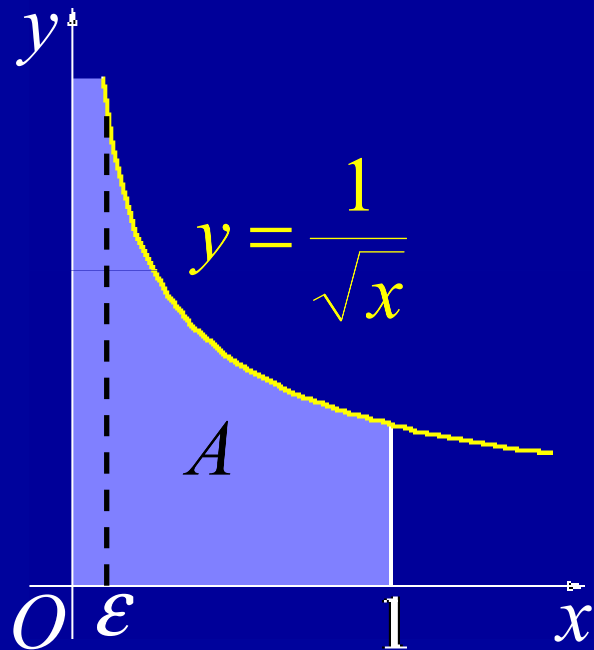
分析: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$ 原积分发散!

注意: 对反常积分, 只有在收敛的条件下才能使用"偶倍奇零"的性质,否则会出现错误.

5.2 无界函数的积分

引例: 曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 与 x 轴, y 轴和直线 $x=1$ 所围成的开口曲边梯形的面积可记作

$$A=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$$



其含义可理解为

$$A=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\sqrt{x}\,\Big|_\varepsilon^1$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+} 2(1-\sqrt{\varepsilon})=2$$

定义5.2（无界函数的积分） 设 $f(x)$ 定义在 $(a,b]$ 而在点 a 的右邻域内无界(称 a 为奇点),取 $\varepsilon>0$,若极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

存在， 则称此极限为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的反常积分,

记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

这时称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果上述极限不存在,

就称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散 .

类似地，若 $f(x)$ 定义在 $[a,b)$ 上，b为奇点，则定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$$

若 $f(x)$ 在 $[a,c)\cup(c,b]$ 上有定义，$c(a<c<b)$ 为奇点，则定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

无界函数的积分又称作**第二类反常积分**.

无界点(奇点)常称为**瑕点**.

注意：若被积函数在积分区间上仅存在有限个第一类间断点, 则本质上是常义积分, 而不是反常积分.

例如,

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2-1}{x-1}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(x+1)\mathrm{d}x$$

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则也有类似牛 – 莱公式的计算表达式：

若 b 为奇点，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b^-) - F(a)$

若 a 为奇点，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a^+)$

若 a，b 都为奇点，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b^-) - F(a^+)$$

注意： 若奇点 $c \in (a,b)$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) \underline{- F(c^+) + F(c^-)} - F(a)$$

可相消吗?

例5.5 计算反常积分 $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a>0).$

解: 显然奇点为 a, 所以

$$原式 = \left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^{a^-} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

例5.6 讨论反常积分 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 的收敛性 .

解: $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{0^-} + \left[-\frac{1}{x}\right]_{0^+}^{1} = \infty$

所以反常积分 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 发散 .

例5.6 证明反常积分 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}\ (a<b)$ 当 $p<1$ 时收敛；$p\geq 1$ 时发散 .

证: 当 $p=1$ 时, $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \left[\ln|x-a|\right]_{a^+}^{b} = +\infty$

当 $p\neq 1$ 时

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p} = \left[\frac{(x-a)^{1-p}}{1-p}\right]_{a^+}^{b} = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}, & p<1, \\ +\infty, & p>1. \end{cases}$$

所以当 $p<1$ 时, 该广义积分收敛 , 其值为 $\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$;

当 $p\geq 1$ 时, 该广义积分发散 .

例 设 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$，求 $I=\int_{-1}^{3}\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,\mathrm{d}x.$

解： $\because x=0$ 与 $x=2$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点，故 I 为反常积分.

$$I=\int_{-1}^{0}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,\mathrm{d}x+\int_{2}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$\int\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}f(x)}{1+f^2(x)}=\arctan f(x)+C$$

$$=\left[\arctan f(x)\right]_{-1}^{0^-}+\left[\arctan f(x)\right]_{0^+}^{2^-}+\left[\arctan f(x)\right]_{2^+}^{3}$$

$$=-\frac{\pi}{2}+\left[-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right]+\left[\arctan\frac{32}{27}-\frac{\pi}{2}\right]=\arctan\frac{32}{27}-2\pi$$

5.3 无穷区间上积分的审敛准则

这一部分我们寻求通过被积函数的性态来判定无穷区间上积分敛散性的方法。

定理5.1 (比较准则Ⅰ) 设 $f, g \in C[a, +\infty)$, 且 $0 \le f(x) \le g(x) \quad (\forall x \in [a, +\infty))$, 则

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \text{收敛} \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{收敛}$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{发散} \Longrightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \text{发散}$$

证: $\forall t > a$, 由 $0 \le f(x) \le g(x)$ 知

若 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则由

$$\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^t g(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$$

知 $\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ 是 t 的单调递增有上界函数, 因此

$$\lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

极限存在, 即反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

若 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散, 利用上述结论及反证法可证.

例 证明无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{x^4+1}} \mathrm{d}x$ 的收敛.

证: $\because \quad 0 \le \frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{x^4+1}} < \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$

又

$$\int_1^{+\infty} x^{-\frac{4}{3}} dx = -3x^{-\frac{1}{3}} \Big|_1^{+\infty} = 3,$$

由比较准则 1 可知原积分收敛 .

定理5.2 (比较准则 II)　设函数 $f, g\ (x\in[a,+\infty))$ 连续非负，并有 $g(x)>0, \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lambda$ 则：

1° 当 $\lambda\neq 0$: $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 同敛散；

2° 当 $\lambda=0$: 若 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow$

$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也收敛.

（证明略）

在用比较准则2时，经常用 $g(x)=x^{-p}$ 来判定 $\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ 的敛散性.

例 判别反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$ 的敛散性 .

解: $\because \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = 1$

根据比较准则2 , 该积分收敛 .

例 判别反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 的敛散性 .

解: $\because \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = 1$

根据比较准则2 , 该积分发散 .

定理5.3 若 $f(x)\in C[a,+\infty)$, 且 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

证: 令 $\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+|f(x)|]$, 则 $0\le\varphi(x)\le|f(x)|$

$\because\ \int_a^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛, $\therefore\ \int_a^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛,

而

$$f(x)=2\varphi(x)-|f(x)|$$

$$\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_a^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$$

可见反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

定义. 设反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛,

若 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则称 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ **绝对收敛**;

若 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 发散, 则称 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ **条件收敛**.

例5 判断积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \sin bx\,\mathrm{d}x$ (a, b 为常数, $a > 0$) 的敛散性.

解: 因 $\left|\mathrm{e}^{-ax} \sin bx\right| \le \mathrm{e}^{-ax}$, 而 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 根据比较审敛原理知 $\int_a^{+\infty} \left|\mathrm{e}^{-ax} \sin bx\right| \mathrm{d}x$ 收敛, 故由定理5知所给积分收敛 (绝对收敛).

5.4 无界函数积分的审敛准则

定理5.4 (比较准则Ⅰ) 设函数 $f(x), g(x)$ $(x \in (a,b])$ 连续, 并有 $0 \le f(x) \le g(x)$ ，则

1° 当 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛时 $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx$ 收敛；

2° 当 $\int_a^b f(x)dx$ 发散时 $\Rightarrow$ $\int_a^b g(x)dx$ 发散.

定理5.5 (比较准则 Ⅱ) 设函数 f, g $(x \in (a,b])$ 非负连续,并有 $g(x) > 0, \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lambda$, 则

1° 当$\lambda \neq 0$: $\int_a^b g(x)dx$与$\int_a^b f(x)dx$同敛散；

2° 当$\lambda = 0$: 若$\int_a^b g(x)dx$收敛 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$也收敛.

注：在用比较准则时,经常取 $g(x)=(x-a)^{-p}$.

定理5.6（绝对收敛准则）

若反常积分 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ (a为瑕点)收敛, 则积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, (称为绝对收敛).

（ 但$\int_a^b f(x)dx$为收敛未必$\int_a^b |f(x)|dx$收敛 ）

例5. 12判定椭圆积分 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\quad (k^2<1)$ 的敛散性 .

解: 此处 $x=1$ 为瑕点, 由于

$$\lim_{x\to 1^-}(x-1)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-k^2x^2)}}=\frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}}$$

根据比较准则 2 , 椭圆积分收敛 .

例5 判别反常积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性 .

解: 此处 $x=0$ 为瑕点, 因 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{4}}\ln x = 0$,

故对充分小的 x, 有 $\left| x^{\frac{1}{4}}\ln x \right| < 1$, 从而

$$\frac{|\ln x|}{\sqrt{x}} = \frac{\left| x^{\frac{1}{4}}\ln x \right|}{x^{\frac{3}{4}}} < \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}$$

据比较准则1, 所给积分绝对收敛 .

5.5 Γ 函数

定义5.13

Γ函数: $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x \ \ (s>0)$

(含参变量 s 的反常积分)

下面证明这个特殊函数在 $s>0$ 内收敛. 令

$$I_1=\int_0^1 x^{s-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x,\quad I_2=\int_1^{+\infty} x^{s-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x$$

1) 讨论 I_1. 当$s\ge 1$时, I_1 是定积分;

当$0<s<1$时, $x^{s-1}\,\mathrm{e}^{-x}=\dfrac{1}{x^{1-s}}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}<\dfrac{1}{x^{1-s}}$

而$1-s<1$, 根据比较审敛法 2 知I_1收敛.

$$\boxed{I_2 = \int_1^{+\infty} x^{s-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x}$$

2) 讨论 I_2.

$$\because \quad \lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot (x^{s-1}\,\mathrm{e}^{-x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{s+1}}{\mathrm{e}^x} = 0$$

根据极限审敛法1知 I_2 收敛.

综上所述, $\Gamma(s) = I_1 + I_2$ 在 $s > 0$ 上收敛.

2. 性质

(1) 递推公式 $\Gamma(s+1)=s\,\Gamma(s)\quad(s>0)$

证: $\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty}x^s\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}\,x=-\int_0^{+\infty}x^s\,\mathrm{de}^{-x}$ (分部积分)

$$=\left[-x^s\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty}x^{s-1}\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}\,x$$

$$=s\,\Gamma(s)$$

注意到: $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}\,x=1$

$\therefore\forall n\in\mathbf{N}^+$, 有

$$\Gamma(n+1)=n\,\Gamma(n)=n\,(n-1)\,\Gamma(n-1)$$

$$=\cdots=n!\,\Gamma(1)=n!$$

(2) 当$s \to 0^+$时, $\Gamma(s) \to +\infty$.

证: $\because\ \Gamma(s) = \dfrac{\Gamma(s+1)}{s}, \quad \Gamma(1) = 1$

且可证明$\Gamma(s)$在$s > 0$连续,

$\therefore s \to 0^+$时, $\Gamma(s) \to +\infty$

(3) 余元公式:

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi\, s)} \qquad (0 < s < 1)$$ (证明略)

当$s = \frac{1}{2}$时, 有

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

(4) $\Gamma(s)$的其他形式

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \quad (s>0)$$

令 $x=u^2$, 得

$$\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,u^{2s-1}\,\mathrm{d}u \quad (s>0)$$

再令 $2s-1=t$, 即 $s=\dfrac{1+t}{2}$, 得应用中常见的积分

$$\int_0^{+\infty} u^t\,\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+t}{2}\right) \quad (t>-1)$$

这表明左端的积分可用 Γ 函数来计算. 例如,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

内容小结

1. 反常积分 $\left\{\begin{matrix}\text{积分区间无限}\\ \text{被积函数无界}\end{matrix}\right\}$ —— 常义积分的极限

2. 两个重要的反常积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\begin{cases}+\infty, & p\le 1\\ \dfrac{1}{(p-1)a^{p-1}}, & p>1\end{cases}\qquad (a>0)$$

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}=\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^q}=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q<1\\ +\infty, & q\ge 1\end{cases}$$