英才实验学院数学分析模拟答案

!!! 此答案仅供参考，如有异议，欢迎指出

一、选择题　　AABC

1、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ x\ln x, & x>0\end{cases}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的__________.

A．可去间断点；　　　　B．跳跃间断点；

C．无穷间断点；　　　　D．振荡间断点.

2、设 $f(x)=\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}$，则其（　　）

（A）只有一个可去间断点　　　　（B）有两个跳跃间断点

（C）有三个可去间断点　　　　（D）有无穷多个第一类间断点

3、若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+f(x)}{x^2}$ 为（　　）。

（A）。0　（B）$\dfrac{1}{6}$，　(C) 1　（D）∞

4、当 $x\to0$ 时，$\sqrt[3]{1+ax^2}-1$ 与 $1-\cos x$ 是等价无穷小，则（　　）

（A）$a=\dfrac{2}{3}$，　（B）$a=3$，　(C). $a=\dfrac{3}{2}$，　（D）$a=2$

二、填空题

1、函数 $f(x)=\begin{cases}a+bx^2 & x\ge0\\ \dfrac{e^{bx}-1}{x} & x\prec0\end{cases}$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=$__________，若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，则 a，b 满足_________　。

b，a=b

2、设 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b)=0$，则 $a=$ ___，$b=$ ___.

1，-1

3、数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n\tan\dfrac{1}{n})^{n^2}=$______________。

令 $x=\frac{1}{n}$

原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \exp\left\{\frac{\ln\left(\frac{\tan x}{x}-1+1\right)}{x^2}\right\}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \exp\left\{\frac{\frac{\tan x}{x}-1}{x^2}\right\}.$

$= \exp\left\{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}\right\}.$

$= e^{\frac{1}{3}}$

4、$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$_____，$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=$_____. $\frac{-1}{3\sqrt{2}}$, $\frac{-1}{3}$

三、（10 分）计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{(\sqrt{1+x}-1)\ln(1+x^2)+x^4\cos\frac{1}{x}}$.

$\frac{1}{原式} = \lim \frac{(\sqrt{1+x}-1)\ln(1+x^2)+x^4\cos\frac{1}{x}}{\tan x - x}.$

分别计算

$\lim \frac{(\sqrt{1+x}-1)\ln(1+x^2)}{\tan x - x} = \lim \frac{\frac{1}{2}x^3}{\frac{1}{3}x^3} = \frac{3}{2}$

$\lim \frac{x^4\cos\frac{1}{x}}{\tan x - x} = \frac{x\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{3}} = 0.$

两边极限都存在.

$\therefore \frac{1}{原式} = \frac{3}{2}$

原式 $= \frac{2}{3}$

四、(10分)(1) 设常数$a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_k > 0$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n}$.

(2) 设 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1 + x^n + (\frac{x^2}{2})^n}$ $(x \ge 0)$，求 $f(x)$ 的表达式.

(1) $a_1\sqrt[n]{1} \le \sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots a_k^n} = a_1\sqrt[n]{1+(\frac{a_2}{a_1})^n+\cdots+(\frac{a_k}{a_1})^n} \le a_1\sqrt[n]{k}$

$\because \lim\limits_{n\to\infty} a_1\sqrt[n]{1} = a_1$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_1\sqrt[n]{k} = a_1$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots a_k^n} = a_1$

(2) 代入(1)式

$f(x) = \max(1, x, \frac{x^2}{2})$

五、设$f \in C[a,b], a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$,**证明至少存在一点**$\xi \in (a,b)$,**使**

$f(\xi) = \frac{1}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$,**其中**$\lambda = \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$, 且$\lambda_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$

证明：令$M = \max\limits_{1\le i\le n} f(x_i)$，$m = \min\limits_{1\le i\le n} f(x_i)$，

所以 $m \le \frac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \ldots + c_n}{c_1 + c_2 + \ldots + c_n} \le M$.

由连续函数的介值定理可得，

存在ξ（ $a < x_1 \le \xi \le x_n < b$ ），使得

$f(\xi) = \frac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \ldots + c_n}{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}$.

六、已知：$\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{n}(n\in N^{*})$，设$u_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n(n\in N^{*})$，**证明数列**$\{u_n\}$**收敛**

∴an=1+1/2+1/3+...+1/n-lnn

>ln(1+1)+ln(1+1/2)+...+ln(1+1/n)-lnn

=ln[2*3/2*4/3*...*(n+1)/n]-lnn

=ln(n+1)-lnn

>0

故{an}有下界

而an+1-an=1/(n+1)-ln(n+1)+lnn

=1/(n+1)-ln[(n+1)/n]

=1/(n+1)-ln(1+1/n)

<1/(n+1)-1/n

<0

故{an}单调递减

由单调有界定理得,{an}收敛.