第七章　常微分方程

习　题　7.1

(A)

4. 已知微分方程组$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2x$,

(1) 求它的轨线族方程,在相平面上轨线代表什么曲线?

(2) 求微分方程组的通解,它在增广相平面上表示什么曲线?

(3) 从几何上说明积分曲线与轨线的关系.

解　(1) 由原方程组消去 t 可得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x}{-y}$. 此方程的积分曲线族 $y^2+2x^2=C$ 即原方程组的轨线族,表示 xOy 平面上的同心椭圆族.

(2) 微分方程组的通解为 $x=C_1\cos(t+C_2)$, $y=2C_1\sin(t+C_2)$. 是增广相平面上的椭圆螺旋线族.

(3) 方程组的积分曲线(椭圆螺旋线族)在相平面(xOy 平面)上的投影为轨线族(椭圆族).

5. 求已知微分方程组$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y$ 的通解与轨线族.

解　通解 $x=C_1\mathrm{e}^t$, $y=C_2\mathrm{e}^t$. 轨线族 $y=Cx$.

(B)

2. 在相平面 xOy 上,下述两个微分方程组所表示的线素场有什么本质的区别?

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x,y),\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=g(x,y),\end{cases}\quad (x,y)\in D\subseteq\mathbf{R}^2;$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x,y),\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=g(t,x,y),\end{cases}\quad (t,x,y)\in I\times D\subsetneqq\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2.$$

解 前者过相平面 D 上任一点 $(x,y)\in D$ 仅确定一个方向;后者可确定多个方向,随 t 的不同而可能不同.

3. 若题 2 中两个方程组均满足解的存在唯一性定理的条件,它们的任意两条不同的轨线能否相交?它们的任意两条积分曲线能否相交?

解 由于两方程组均满足解的存在唯一性定理的条件,故它们的任意两条积分曲线不能相交.但由于题 2 中所述原因.前者的任意两条不同的轨线不能相交.后者的两条不同的轨线可能相交.

习 题 7.2

(A)

2. 证明:若 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}(t)$ 是齐次线性微分方程组 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{x}(t_0)=0$ 的解,则必有 $\boldsymbol{x}(t)\equiv 0$.

证明 由于齐次线性微分方程组 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 满足解的存在唯一性定理的条件,故它的任意两条积分曲线不能相交.如果满足初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=0$ 的解 $\boldsymbol{x}(t)\neq 0$,则此解与平凡解(零解)在 $t=t_0$ 有交.产生矛盾.故 $\boldsymbol{x}(t)\equiv 0$.

4. 证明:若 $\boldsymbol{x}_i(t),i=1,2,\cdots,n,t\in(a,b)$ 都是齐次线性微分方程组 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的解,则其线性组合 $\sum\limits_{i=1}^{n}C_i\boldsymbol{x}_i(t)$ $,t\in(a,b)$ 也是其解,其中 C_i 为实的或复的常数.

解 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}C_i\boldsymbol{x}_i(t)\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}C_i\dot{\boldsymbol{x}}_i(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}C_i(\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}_i)=\boldsymbol{A}(t)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}C_i\boldsymbol{x}\right)$,故 $\sum\limits_{i=1}^{n}C_i\boldsymbol{x}$ 也是解.

6. 证明:非齐次线性微分组 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 的任意两个解之差必为对应的齐次线性微分方程组的一个解.

证明 设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 均为 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$ 的解,则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)&=\dot{\boldsymbol{x}}_1-\dot{\boldsymbol{x}}_2=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{f}(t)-(\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{f}(t))\\&=\boldsymbol{A}(t)(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2).\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2$ 是齐次线性微分方程组 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)$ 的解.

7. 设 $\boldsymbol{A}(t)$ 为实矩阵,$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ 是 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的复值解,试证明 $\boldsymbol{x}(t)$ 的实部和虚部分别都是它的解.

证明 设 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{u}(t)+i\boldsymbol{v}(t)$，则 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{u}}(t)+i\dot{\boldsymbol{v}}(t)=\boldsymbol{A}(t)[\boldsymbol{u}(t)+i\boldsymbol{v}(t)]=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}(t)+i(\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{v}(t))$. 从而 $\dot{\boldsymbol{u}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}(t)$，$\dot{\boldsymbol{v}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{v}(t)$. 即 $\boldsymbol{x}(t)$ 的实部 $\boldsymbol{u}(t)$ 与虚部 $\boldsymbol{v}(t)$ 均为 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的解.

8. 设 $\boldsymbol{A}(t)$ 为实矩阵，$(\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t))$ 是 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵，其中 $\boldsymbol{x}_1$ 与 $\boldsymbol{x}_2$ 是一对共轭复值解向量，记

$$\boldsymbol{y}_1(t)\overset{\text{def}}{=\!=\!=}\mathrm{Re}\,\boldsymbol{x}_1(t)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{x}_2(t)),$$

$$\boldsymbol{y}_2(t)\overset{\text{def}}{=\!=\!=}\mathrm{Im}\,\boldsymbol{x}_1(t)=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\boldsymbol{x}_1(t)-\boldsymbol{x}_2(t)),$$

证明：用向量 $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2$ 代替 $\boldsymbol{x}_1(t)$ 与 $\boldsymbol{x}_2(t)$ 后所得矩阵 $(\boldsymbol{y}_1(t),\boldsymbol{y}_2(t),\boldsymbol{x}_3(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t))$ 也是原方程组的一个基解矩阵.

证明 由于 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t)$ 为 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的解，则 $\boldsymbol{y}_1(t)$，与 $\boldsymbol{y}_2(t)$ 也是解. 令

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2\mathrm{i}} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\mathrm{i}} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

则 $\det\boldsymbol{B}\neq 0$ 即 $\boldsymbol{B}$ 为非奇异矩阵. 又

$$(\boldsymbol{y}_1(t),\boldsymbol{y}_2(t),\boldsymbol{x}_3(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t))=(\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t))\boldsymbol{B},$$

由基解矩阵的性质 2 知 $(\boldsymbol{y}_1(t),\boldsymbol{y}_2(t),\boldsymbol{x}_3(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t))$ 也是原方程的基解矩阵.

9. 设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_i(t)$ 是 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}_i(t)\ (i=1,2,\cdots,m)$ 的解，证明：$\boldsymbol{x}=\sum\limits_{i=1}^{m}\boldsymbol{x}_i(t)$ 必为 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\sum\limits_{i=1}^{m}\boldsymbol{f}_i(t)$ 的解.

证明

$$\frac{dx}{dt}=\sum_{i=1}^{m}\dot{x}_i(t)=\sum_{i=1}^{m}[A(t)x_i(t)+f_i(t)]$$

$$=\sum_{i=1}^{m}A(t)x_i(t)+\sum_{i=1}^{m}f_i(t)$$

$$=A(t)\left[\sum_{i=1}^{m}x_i(t)\right]+\sum_{i=1}^{m}f_i(t)$$

$$=A(t)x(t)+\sum_{i=1}^{m}f_i(t).$$

10. (1) 试验证向量值函数组$(1,0,0)^T,(t,0,0)^T,(t^2,0,0)^T$在任意区间$(a,b)$内线性无关,但它们的 Wronski 行列式 $W(t)\equiv 0$;

(2) 试证明方程组(2.2)的 n 个解构成的 Wronski 行列式在解存在的区间(a,b)内或者恒为零,或者恒不为零.

解 (1) 函数组 $1,t,t^2$ 是线性无关的. 否则存在不全为零的常数 C_1,C_2,C_3 使 $C_1+C_2t+C_3t^2=0$. 对区间(a,b)的一切 t 值成立. 但由于 $C_1+C_2t+C_3t^2=0$ 是 t 的 2 次代数方程,由代数学基本定理知,它至多有 2 个实根,也就是说,至多只有(a,b)中的 2 个点使 $C_1+C_2t+C_3t^2=0$ 成立. 这一矛盾说明函数组 $1,t,t^2$ 是线性无关的.

设存在三个数 k_1,k_2,k_3 使 $k_1(1,0,0)^T+k_2(t,0,0)^T+k_3(t^2,0,0)^T=\mathbf{0}$,即 $k_1+k_2t+k_3t^2=\mathbf{0}$. 故 $k_1=k_2=k_3=0$. 也即$(1,0,0)^T,(t,0,0)^T,(t^2,0,0)^T$线性无关. 而 $W(t)=0$.

(2) 设 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$是(2.2)的 n 个解. 则由这 n 个解构成的 Wronski 行列式 $W(t)=\det(x_1(t),\cdots,x_2(t))$.

如果 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$线性相关,由定理 2.3 知对 $\forall t\in(a,b)$, $W(t)=0$,即 $W(t)\equiv 0$. 如果 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$线性无关,由定理 2.1 知对 $\forall t_0\in(a,b)$,常向量组$\{x_i(t_0)\}(i=1,2,\cdots,n)$线性无关,即 $W(t_0)\neq 0$. 即 $W(t)$恒不为零($\forall t\in(a,b)$).

(B)

1. 若 $X(t)$是齐次线性微分方程组 $\dot{x}=A(t)x$, $x\in\mathbf{R}^n$ 的任一基解矩阵,B 是任一 n 阶非奇异常数矩阵,证明 $X(t)B$ 也是此方程组的一个基解矩阵.

证明 设 $X(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t))$,其中 $x_i(t)(i=1,\cdots,n)$为 $\dot{x}=A(t)x$ 的 n 个线性无关的解. 则 $\det X(t)\neq 0$.

又设 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_n$，则 $\hat{\boldsymbol{x}}_i(t)=b_{1i}\boldsymbol{x}_1(t)+b_{2i}\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+b_{ni}\boldsymbol{x}_n(t)$，$i=1,2,\cdots,n$. 故 $\hat{\boldsymbol{x}}_i(t)$ 也是 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的解. 又 $\det(\hat{\boldsymbol{x}}_1(t),\hat{\boldsymbol{x}}_2(t),\cdots,\hat{\boldsymbol{x}}_n(t))=\det[(\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t))\boldsymbol{B}]=\det(\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{B})=\det\boldsymbol{X}(t)\det\boldsymbol{B}\neq 0$.（$\boldsymbol{B}$ 非奇异，$\det\boldsymbol{X}(t)\neq 0$）故 $\widetilde{\boldsymbol{X}}(t)=(\hat{\boldsymbol{x}}_1(t),\hat{\boldsymbol{x}}_2(t),\cdots,\hat{\boldsymbol{x}}_n(t))=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{B}$ 也是一基解矩阵.

2. 证明下列两方程组 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$，$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{x}$ 有相同的基解矩阵，则 $\boldsymbol{A}(t)\equiv\boldsymbol{B}(t)$，其中 $\boldsymbol{A}(t)$，$\boldsymbol{B}(t)$ 是两个 n 阶连续矩阵.

证明 设 $\boldsymbol{X}(t)$ 是两方程组共同的基解矩阵. 则 $\boldsymbol{X}^{-1}(t)$ 存在

且 $\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{X}(t)$. 于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(t)&=\boldsymbol{A}(t)(\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(t))=(\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t))\boldsymbol{X}^{-1}(t)=(\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{X}(t))\boldsymbol{X}^{-1}(t)\\&=\boldsymbol{B}(t)(\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(t))=\boldsymbol{B}(t).\end{aligned}$$

3. 证明若 $\boldsymbol{X}(t)$ 是 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵，则 $(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(t))^{-1}$ 是 $\dot{\boldsymbol{x}}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵.

证明 因为 $\boldsymbol{X}(t)$ 为 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵，则 $\det\boldsymbol{X}(t)$ 恒不为零. 故 $\boldsymbol{X}(t)$ 可逆（对任意的 $t\in(a,b)$，(a,b) 为解存在的最大区间）. 且 $\det\boldsymbol{X}^{-1}(t)$ 恒不为零，$\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(t)=\boldsymbol{I}_n$（$n$ 阶单位阵）.

从而
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(t))=\dot{\boldsymbol{X}}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(t)+\boldsymbol{X}(t)\dot{\boldsymbol{X}}^{-1}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{I}_n}{\mathrm{d}t}\equiv 0,$$

于是
$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{X}}^{-1}(t)&=-\boldsymbol{X}^{-1}(t)\left(\dot{\boldsymbol{X}}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(t)\right)=-\boldsymbol{X}^{-1}(t)[(\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t))\boldsymbol{X}^{-1}(t)]\\&=-\boldsymbol{X}^{-1}(t)\boldsymbol{A}(t).\end{aligned}$$

故
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(t))^{-1}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{X}^{-1}(t))^{\mathrm{T}}=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{X}^{-1}(t))\right)^{\mathrm{T}}\\&=(-\boldsymbol{X}^{-1}(t)\boldsymbol{A}(t))^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{X}^{-1}(t))^{\mathrm{T}}\\&=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(t))^{-1}.\end{aligned}$$

从而 $(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(t))^{-1}$ 是 $\dot{\boldsymbol{x}}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵.

4. 设 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$，

(1) 怎样的行列式称为其解的 Wronski 行列式；

(2) 证明 Wronski 行列式 $W(t)$ 满足下列 Liouville 公式：

$$W(t)=W(t_0)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\operatorname{tr}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau},$$

其中 tr $\boldsymbol{A}(t)$表示矩阵$\boldsymbol{A}(t)$的迹.

解 (1) 设$\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$为$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$的 n 个解,则以向量$\boldsymbol{x}_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$作为第 i 列形成的矩阵$\boldsymbol{X}(t)=(\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t))$的行列式 det $\boldsymbol{X}(t)$称为解$\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$的 Wronski 行列式.

(2) **证明** 由行列式的求导公式,则

$$\dot{W}(t)=\begin{vmatrix}\dot{x}_{11}(t) & \dot{x}_{12}(t) & \cdots & \dot{x}_{1n}(t)\\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t)\end{vmatrix}+\cdots+$$

$$\begin{vmatrix}x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_{n-1,1}(t) & x_{n-1,2}(t) & \cdots & x_{n-1,n}(t)\\ \dot{x}_{n1}(t) & \dot{x}_{n2}(t) & \cdots & \dot{x}_{nn}(t)\end{vmatrix}.$$

又由于$\boldsymbol{x}_j(t)=(x_{1j}(t),x_{2j}(t),\cdots,x_{nj}(t))^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,n)$是$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$的解,则$\dot{x}_{ij}(t)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(t)x_{kj}(t)$.

于是上式右端第一项等于(利用行列式的加法)

$$\begin{vmatrix}\sum_{k=1}^{n}a_{1k}(t)x_{k1}(t) & \sum_{k=1}^{n}a_{1k}(t)x_{k2}(t) & \cdots & \sum_{k=1}^{n}a_{1k}(t)x_{kn}(t)\\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t)\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}W(t)+a_{12}\begin{vmatrix}x_{21} & \cdots & x_{2n}\\ x_{21} & \cdots & x_{2n}\\ \vdots & & \vdots\\ x_{n1} & \cdots & x_{nn}\end{vmatrix}+\cdots+a_{1n}\begin{vmatrix}x_{n1} & \cdots & x_{nn}\\ x_{21} & \cdots & x_{2n}\\ \vdots & & \vdots\\ x_{n1} & \cdots & x_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}W(t),$$

故 $$\dot{W}(t)=a_{11}W(t)+a_{22}W(t)+\cdots+a_{nn}W(t)=(\operatorname{tr}\boldsymbol{A}(t))W(t).$$

从而 $$W(t)=W(t_0)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\operatorname{tr}A(\tau)\mathrm{d}\tau}.$$

5. 设非齐次线性微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t}x-y+t,\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{t^2}x+\dfrac{2}{t}y-t^2.\end{cases}$$

（1）验证 $x=t^2, y=-t$ 是对应的齐次线性微分方程组的解；

（2）求所给非齐次线性微分方程组的通解.

解　（1）将 $x=t^2, y=-t$ 代入方程组中，即知 $x=t^2, y=-t$ 为对应的齐次线性微分方程组的解.

（2）设 $\bar{x}=t^2h_1(t), \bar{y}=-th_2(t)$ 是与 $x=t^2, y=-t$ 线性无关的齐次方程 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t}x-y\\[1ex]\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{t^2}x+\dfrac{2}{t}y\end{cases}$，的一个解，其中 $h_1(t), h_2(t)$ 不是常函数，且 $h_1(t)\neq h_2(t)$. 由 Liouville公式（或将 $\bar{x},\bar{y}$ 代入上述齐次方程），只要取 $h_1(t), h_2(t)$ 满足下述等式即可.

$$W(t)=\begin{vmatrix}t^2 & t^2h_1(t)\\ -t & -th_2(t)\end{vmatrix}=t^3[h_1(t)-h_2(t)]=e^{\int\frac{3}{t}dt}=t^3,$$

即
$$h_1(t)=1+h_2(t).$$

从而
$$\bar{x}=t^2[1+h_2(t)],\ \bar{y}=-th_2(t).$$

将上式代入上述的齐次微分方程得 $-th_2'(t)=1$，故取 $h_2(t)=-\ln t$，进而 $\boldsymbol{X}(t)=\begin{pmatrix}t^2 & t^2(1-\ln t)\\ -t & t\ln t\end{pmatrix}$ 是上述齐次微分方程的一个基解矩阵.

由于 $\boldsymbol{X}^{-1}(t)=\dfrac{1}{t^2}\begin{pmatrix}\ln t & -t(1-\ln t)\\ 1 & t\end{pmatrix}$，故可取原方程的特解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^*&=\int_0^t\boldsymbol{X}^{-1}(\tau)\boldsymbol{f}(\tau)d\tau=\int_1^t\frac{1}{\tau^2}\begin{pmatrix}\ln\tau & -\tau(1-\ln\tau)\\ 1 & \tau\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau\\ -\tau^2\end{pmatrix}d\tau\\ &=\begin{pmatrix}\dfrac{t^2}{2}\ln t-\dfrac{t^2}{2}\ln^2 t+\dfrac{t^4}{4}-\dfrac{t^2}{4}\\[2ex]\dfrac{t}{2}\ln t-\dfrac{3}{4}t^3+\dfrac{3}{4}t+\dfrac{t}{2}\ln^2 t\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

即原方程的通解

$$x = X(t)(C + x^*) = \begin{pmatrix} C_1t^2 + C_2t^2(1 - \ln t) + \dfrac{t^2}{2}\ln t(1 - \ln t) + \dfrac{t^2}{4}(t^2 - 1) \\ \\ -C_1t + C_2t\ln t + \dfrac{t}{2}\ln t(1 + \ln t) + \dfrac{3t}{4}(1 - t^2) \end{pmatrix},$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

习 题 7.3

(A)

1. 求下列常系数齐次线性微分方程组的通解.

(2) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 + x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2; \end{cases}$ (4) $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}.$

解 (2) 令 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$,则原方程可写为:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}.$$

A 的特征方程为 $\det(A - \lambda E) = (2 - \lambda)(\lambda + 1)^2 = 0$. 因此 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

对应于 $\lambda_1 = 2$ 的特征向量可取为 $\boldsymbol{r}_1 = (1, 1, 1)^T$;

对应于 $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ 的线性无关的特征向量有 2 个. 取为

$$\boldsymbol{r}_2 = (1, -1, 0)^T, \quad \boldsymbol{r}_3 = (1, 0, -1)^T.$$

故所给微分方程组的基解矩阵为 $X(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{-t} & e^{-t} \\ e^{2t} & -e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & -e^{-t} \end{pmatrix}$. 因而通解为 $\boldsymbol{x} = X(t)C$,其中 $C = (C_1, C_2, C_3)^T$ 为任意常数向量.

(4) 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$ 的特征方程为 $(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2 = 0$,

A 的特征值分别为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=1$.

$\lambda_1=-2$ 对应的特征向量可取为 $\boldsymbol{r}_1=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

对应 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的线性无关的特征向量只有一个. 因此需求 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系. 由于 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\28&44&9\end{pmatrix}$,

故 $\boldsymbol{r}_0^{(1)}=(11,-7,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{r}_0^{(2)}=(3,-6,20)^{\mathrm{T}}$

故 $\boldsymbol{r}_1^{(1)}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_0^{(1)}=(15,-30,100)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{r}_1^{(2)}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_0^{(2)}=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$.

从而 $\boldsymbol{x}_2(t)=\mathrm{e}^t(\boldsymbol{r}_0^{(1)}+t\boldsymbol{r}_1^{(1)})=\mathrm{e}^t(11+15t,-7-30t,100t)^{\mathrm{T}}$,

$$\boldsymbol{x}_3(t)=\mathrm{e}^t(\boldsymbol{r}_0^{(2)}+t\boldsymbol{r}_1^{(2)})=\mathrm{e}^t(3,-6,20)^{\mathrm{T}}.$$

故通解 $\boldsymbol{x}(t)=C_1\mathrm{e}^{-2t}\boldsymbol{r}_1+C_2\boldsymbol{x}_2(t)+C_3\boldsymbol{x}_3(t)$,其中 C_1,C_2,C_3 为任意常数

2. 求下列常系数非齐次线性微分方程组的通解.

(3) $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}t^2\\2t\\t\end{pmatrix}$.

解 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}$的特征方程 $(\lambda+1)^3=0$,故特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$.

对应的线性无关的特征向量只有一个. 而 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^3\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系可取为 $\boldsymbol{r}_0^{(1)}=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{r}_0^{(2)}=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{r}_0^{(3)}=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

则 $\boldsymbol{r}_1^{(1)}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_0^{(1)}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{r}_2^{(1)}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_1^{(1)}=\boldsymbol{0};\boldsymbol{r}_1^{(2)}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_0^{(2)}=(-1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{r}_2^{(2)}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_1^{(2)}=\boldsymbol{0};\boldsymbol{r}_1^{(3)}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_0^{(3)}=(0,-1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{r}_2^{(3)}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_1^{(3)}=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$. 从而 $\boldsymbol{x}_1(t)=\mathrm{e}^{-t}\left(\boldsymbol{r}_0^{(1)}+t\boldsymbol{r}_1^{(1)}+\dfrac{t^2}{2}\boldsymbol{r}_2^{(1)}\right)=\mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{r}_0^{(1)}=\mathrm{e}^{-t}(1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_2(t)=\mathrm{e}^{-t}\left(\boldsymbol{r}_0^{(2)}+t\boldsymbol{r}_1^{(2)}+\dfrac{t^2}{2}\boldsymbol{r}_2^{(2)}\right)=\mathrm{e}^{-t}(-t,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}_3(t)=\mathrm{e}^{-t}\left(\boldsymbol{r}_0^{(3)}+t\boldsymbol{r}_1^{(3)}+\dfrac{t^2}{2}\boldsymbol{r}_2^{(3)}\right)=\mathrm{e}^{-t}\left(\dfrac{t^2}{2},-t,1\right)^{\mathrm{T}}$. 故对应的齐次线性微分方程组的基础解系可取为

$$\boldsymbol{X}(t)=(\boldsymbol{x}_1(t)\quad\boldsymbol{x}_2(t)\quad\boldsymbol{x}_3(t))=\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}1&-t&\dfrac{t^2}{2}\\0&1&-t\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{E}.$$

因而所求非齐次线性微分方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{C}+\int_0^t \boldsymbol{X}(t-\tau)\boldsymbol{f}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}1 & -t & \dfrac{t^2}{2}\\ 0 & 1 & -t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\\ C_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t^2-3t+3\\ t\\ t-1\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{C}=(C_1,C_2,C_3)^{\mathrm{T}}$ 任意常向量. $\boldsymbol{f}(\tau)=(t^2,2t,t)^{\mathrm{T}}$.

(B)

1. 求下列常系数齐次线性微分方程组的解.

(2) $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}-5 & -10 & -20\\ 5 & 5 & 10\\ 2 & 4 & 9\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$.

解 系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-5 & -10 & -20\\ 5 & 5 & 10\\ 2 & 4 & 9\end{pmatrix}$的特征值为 $\lambda_1=5,\lambda_{2,3}=2\pm\mathrm{i}$. $\lambda_1=5$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{r}_1=(-2,0,1)^{\mathrm{T}}$;$\lambda_2=2+\mathrm{i}$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{r}_2=(10\mathrm{i}+20,15-5\mathrm{i},-14-2\mathrm{i})^{\mathrm{T}}$. 则原方程有解 $\boldsymbol{x}_1(t)=\mathrm{e}^{5t}\boldsymbol{r}_1,\bar{\boldsymbol{x}}_2(t)=\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})t}\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{x}_2(t)+\mathrm{i}\boldsymbol{x}_3(t)$,

$$\boldsymbol{x}_2(t)=\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}20\cos t-10\sin t\\ 15\cos t+5\sin t\\ -14\cos t+2\sin t\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}_3(t)=\begin{pmatrix}20\sin t+10\cos t\\ 15\sin t-5\cos t\\ -14\sin t-2\cos t\end{pmatrix}\mathrm{e}^{2t}.$$

则 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\boldsymbol{x}_3(t)$ 为原方程的线性无关的三个特解. 从而通解为 $\boldsymbol{x}(t)=C_1\boldsymbol{x}_1(t)+C_2\boldsymbol{x}_2(t)+C_3\boldsymbol{x}_3(t)$.

习 题 7.4

(A)

2. 验证 $y_1=x$ 与 $y_2=\sin x$ 是微分方程 $(y')^2-yy''=1$ 的两个线性无关的解. 问 $y=C_1x+C_2\sin x$ 是否为该方程的通解.

解　$y = C_1x + C_2\sin x$ 不是通解. 由于 $y_3 = \cos x$ 是解,且 $x,\sin x,\cos x$ 线性无关. 故 $\cos x$ 不能由 x 与 $\sin x$ 线性表出. 也即 C_1 与 C_2 取任意值都不能使方程的解 $y_3 = \cos x = C_1x + C_2\sin x$ 成立. 事实上,原方程是不显含 x 的可降阶的二阶非线性方程,其通解为

当　$|y'| < 1$, $y = C_1\sin\left(\frac{x}{C_1} + C_2\right)$ 为通解;

$y' > 1$ 时,通解 $y = c_1\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{C_1} + C_2\right)$;

$y' < -1$ 时,通解 $y = -c_1\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{C_1} + C_2\right)$.

4. 已知 $y_1 = x, y_2 = x + e^x, y_3 = 1 + x + e^x$ 是微分方程

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = Q(x)$$

的解. 试求此方程的通解.

解　$y_2 - y_1 = e^x, y_3 - y_2 = 1$ 是对应的齐次方程线性微分方程 $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ 两个线性无关的解. 故原非齐次线性微分方程的通解为 $C_1 + C_2e^x + x$.

5. 求下列各微分方程的通解.

(1) $\ddot{x} + 8\dot{x} + 15x = 0$;　　(2) $\ddot{x} - 6\dot{x} + 9x = 0$;

(6) $y'' + 4y' + 5y = 0$.

解　(1) 特征方程为 $\lambda^2 + 8\lambda + 15 = 0$,可得两相异特征值 $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -5$,故通解为 $x = C_1e^{-3t} + C_2e^{-5t}$.

(2) 特征方程为 $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$,可得两相等特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$,故通解为 $x = e^{3t}(C_1 + C_2t)$.

(6) 特征方程为 $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$,解之可得特征值为两共轭复根 $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$,故通解为 $y = e^{-2t}(C_1\cos t + C_2\sin t)$.

7. 写出下列微分方程待定特解的形式.

(1) $\ddot{x} - 5\dot{x} + 4x = (t^2 + 1)e^t$;　(2) $\ddot{x} - 6\dot{x} + 9x = (2t + 1)e^{3t}$;

(3) $y'' - 4y' + 8y = 3e^x\sin x$;　　(4) $y'' + a_1y' + a_2y = A$.

其中 a_1, a_2, A 均为常数.

解　(1) 特征方程为 $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$,从而 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$ 为特征值,故待定特解形为 $t(b_2t^2 + b_1t + b)e^t$.

(2) 特征方程 $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$,特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$,故待定特解形为 $t^2(b_0 + b_1t)e^{3t}$.

(3) 特征方程为 $\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$,特征值为 $2 \pm 2i$,故待定特解形为 $e^x(b_1\cos t +$

$b_2\sin t)$.

(4) 特征方程为 $\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$.

如 $a_2\neq0$,则 $\lambda=0$ 非特征值,$y^*=\frac{A}{a_2}$的特解;

如 $a_2=0,a_1\neq0$,则 $\lambda=0$ 为单重特征值,$y^*=\frac{A}{a_1}t$ 为原方程的一个特解;

如 $a_2=0,a_1=0$,则 $\lambda=0$ 为二重特征值,$y^*=\frac{A}{2}t^2$ 为原方程的一个特解.

8. 求下列微分方程的通解或满足给定初值条件的特解.

(3) $2\ddot{x}+5\dot{x}=5t^2-2t-1$; (5) $y''-2y'+5y=e^x\sin 2x$;

(8) $\ddot{x}-10\dot{x}+9x=e^{2t},x(0)=\frac{6}{7},\dot{x}(0)=\frac{33}{7}$.

解 (3) 特征方程为 $2\lambda^2+5\lambda=0$,则 $\lambda=0,\lambda=-\frac{5}{2}$为特征值.

又原方程有形如 $y^*=(A_0+A_1t+A_2t^2)t$ 的特解,代入可得 $A_0=\frac{7}{25}$ $A_1=-\frac{3}{5}$ $A_2=\frac{1}{3}$. 故通解为

$$y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}t}+\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{5}t^2+\frac{7}{25}t.$$

(5) 特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+5=0$,则特征值为 $1\pm2i$. 从而原方程有形如 $x(A_1\sin 2x+B_1\cos 2x)e^x$ 的特解,代入可得 $A_1=0,B_1=-\frac{1}{4}$. 故原方程的通解为

$$y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\frac{1}{4}xe^x\cos 2x$$

(8) 特征方程 $\lambda^2-10\lambda+9=0$,则 $\lambda_1=9,\lambda_2=1$ 为特征值.

原方程有形如 $x^*=Ae^{2t}$的特解,代入可得 $A=-\frac{1}{7}$.

故原方程的通解为 $y=-\frac{1}{7}e^{2t}+C_1e^{9t}+C_2e^t$,将初值条件代入可得 $C_1=\frac{1}{2}$, $C_2=\frac{1}{2}$,故满足条件的特解为

$$\bar{y}=\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{9t}-\frac{1}{7}e^{2t}.$$

10. 一质量为 m 的质点,由静止开始下沉入液体. 下沉时液体的阻力与下沉的速度成正比,求质点的运动规律.

解 位移 $s=s(t)$,则 $m\frac{d^2s}{dt^2}=mg-k\frac{ds}{dt},s(0)=0,s'(0)=0$.

解之得 $s=C_1+C_2\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}t$，将 $s(0)=0, s'(0)=0$ 代入可得 $C_1=-\frac{m^2g}{k^2}$，$C_2=\frac{m^2g}{k^2}$，故质点的运动方程为

$$s=-\frac{m^2g}{k^2}(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t})+\frac{mg}{k}t.$$

11. 设 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$，其中 f 为连续函数，求 $f(x)$.

解　由于 f 为连续函数，所以变上限积分 $\int_0^x(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t=x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$ 是可导函数. 又 $\sin x$ 也是可导函数，所以 $f(x)$ 也可导. 原式两边求导得

$$f'(x)=\cos x+\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,\quad f'(0)=1.$$

同理可证 $f'(x)$ 可微，即 $f(x)$ 二阶可导，且

$$f''(x)=-\sin x+f(x).$$

故 $f(x)$ 为二阶常系数线性微分方程 $f''(x)-f(x)=-\sin x$ 满足初值条件 $f(0)=0, f'(0)=1$ 的解，于是

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}x\cos x.$$

12. 设曲线 L 的极坐标方程为 $r=r(\theta)$，$M(r,\theta)$ 为 L 上任一点，$M_0(2,0)$ 为 L 上一定点. 若极径 OM_0，OM 与曲线 L 所围成的曲边扇形面积值等于 L 上 M_0，M 两点间弧长值的一半，求曲线 L 的方程.

解　曲边扇形的面 $=\int_0^\theta\frac{1}{2}r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$，$M_0M$ 两点间弧长为 $\int_0^\theta\mathrm{d}s=\int_0^\theta\sqrt{r^2(\varphi)+[r'(\varphi)]^2}\,\mathrm{d}\varphi$，依题意有

$$\int_0^\theta r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^\theta\sqrt{r^2(\varphi)+[r'(\varphi)]^2}\,\mathrm{d}\varphi,$$

两边对 θ 求导可得 $r^2(\theta)=\sqrt{r^2(\theta)+(r'(\theta))^2}$，$r(0)=2$.

方程可变形为 $r'(\theta)=r^2\sqrt{1-\frac{1}{r^2}}$，解之得

$$\arcsin\frac{1}{r}=\mp\theta+C，又\ r(0)=2，故\ C=\frac{\pi}{6}.$$

从而 L 的方程为$\frac{1}{r}=\sin\left(\frac{\pi}{6}\mp\theta\right)$,即 $r=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\mp\theta\right)}$.

13. 求下列微分方程的通解.

(2) $x^3y'''-x^2y''+2xy'-2y=x^3+3x$.

解 令 $x=e^{\tau}$,即$\tau=\ln x$,于是$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{d\tau}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{d\tau^2}-\frac{dy}{d\tau}\right),\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{x^3}\left[\frac{d^3y}{d\tau^3}-3\frac{d^2y}{d\tau^2}+2\frac{dy}{d\tau}\right].$$

代入原方程可得

$$\frac{d^3y}{d\tau^3}-4\frac{d^2y}{d\tau^2}+5\frac{dy}{d\tau}-2y=e^{3\tau}+3e^{\tau},(*)$$

对应的齐次方程的通解为 $\bar{y}=(C_1+C_2\tau)e^{\tau}+c_3e^{2\tau}$.

又 $y_1^*=\frac{1}{4}e^{3\tau},y_2^*=-\frac{3}{2}\tau^2e^{\tau}$分别为非齐次线性微分方程$\frac{d^3y}{d\tau^3}-4\frac{d^2y}{d\tau^2}+5\frac{dy}{d\tau}-2y=e^{3\tau}$与$\frac{d^3y}{d\tau^3}-4\frac{d^2y}{d\tau^2}+5\frac{dy}{d\tau}-2y=3e^{\tau}$的特解,故方程(*)的通解为 $y=(C_1+C_2\tau)e^{\tau}+C_3e^{2\tau}+\frac{1}{4}e^{3\tau}-\frac{3}{2}\tau^2e^{\tau}$. 令$\tau=\ln t$,则原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2\ln x)x+C_3x^2+\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x\ln^2x.$$

(B)

1. 证明函数组

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}x^2,x\geqslant 0,\\0,x<0\end{cases}\text{与 }\varphi_2(x)=\begin{cases}0,x\geqslant 0,\\x^2,x<0\end{cases}$$

在区间$(-\infty,+\infty)$内线性无关,但它们的 Wronski 行列式却恒等于零,这与本节关于 Wronski 行列式的结论是否矛盾?为什么?

证明 设存在常数 k_1,k_2 使 $k_1\varphi_1+k_2\varphi_2\equiv 0$. 即当 $x\geqslant 0$ 时,$k_1x^2\equiv 0$;当 $x<0$ 时,$k_2x\equiv 0$. 从而,$k_1=k_2=0$. 故 $\varphi_1(x)$与 $\varphi_2(x)$线性无关. $\varphi_1(x)$与 $\varphi_2(x)$的 Wronski 行列式

$$W(t)=\begin{vmatrix}\varphi_1(x)&\varphi_2(x)\\\varphi'_1(x)&\varphi'_2(x)\end{vmatrix}=\begin{cases}\begin{vmatrix}x^2&0\\2x&0\end{vmatrix},x\geqslant 0\\\begin{vmatrix}0&x^2\\0&2x\end{vmatrix},x<0\end{cases}\equiv 0,$$

这与本节关于 Wronski 行列式的结论不矛盾！由于本节结论为：如果 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$ 为某一线性微分方程的线性无关解时，则 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 的 Wronski 行列式恒不为零.

2. 设有 n 阶齐次线性微分方程

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)\dot{x}+a_n(t)x=0,$$

试利用它对应的一阶线性微分方程组的 Liouville 公式(习题 7.2(B)第 4 题)导出此方程的 Liouville 公式

$$W(t)=W(t_0)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}a_1(\tau)\mathrm{d}\tau},$$

其中 $W(t)$ 是方程的 Wronski 行列式.

解　对应的一阶线性微分方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}(t)$，则

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & & -a_2(t) & -a_1(t)\end{bmatrix},$$

从而 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}(t)=-a_1(t)$. 由习题 7.2(B)第 4 题

$$W(t)=W(t_0)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}a_1(\tau)\mathrm{d}\tau}.$$

3. 利用第 2 题中的 Liouville 公式证明：设 $x_1(t)$ 为二阶齐次线性微分方程 $\ddot{x}+a_1(t)\dot{x}+a_2(t)x=0$ 的一个非零解，则其通解为 $x=x_1(t)\left[C_1\int\frac{\mathrm{e}^{-\int a_1(t)\mathrm{d}t}}{(x_1(t))^2}\mathrm{d}t+C_2\right]$.

证明　设 $x_2(t)$ 为方程的与 $x_1(t)$ 线性无关的另一解，则 $\frac{x_2(t)}{x_1(t)}$ 非常数，应为 t 的函数，不妨设为 $h(t)$，则 $x_2(t)=h(t)x_1(t)$. 从而 x_1,x_2 的 Wronski 行列式

$$W(t)=\begin{vmatrix}x_1(t) & h(t)x_1(t)\\ x'_1(t) & h'(t)x_1(t)+h(t)x_1'(t)\end{vmatrix}=h'(t)[x_1(t)]^2,$$

由 Liouville 公式 $h'(t)[x_1(t)]^2=W(t_0)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}-a_1(\tau)\mathrm{d}\tau}$.

不妨取 $h(t)=\int\frac{\mathrm{e}^{-\int a_1(t)\mathrm{d}t}}{[x_1(t)]^2}\mathrm{d}t$，可得与 $x_1(t)$ 线性无关的解

$$x_2(t) = x_1(t)\int \frac{e^{-\int a_1(t)dt}}{[x_1(t)]^2}dt.$$

故原方程的通解为 $x = x_1(t)\left[C_1 + C_2\int \frac{e^{-\int a_1(t)dt}}{[x_1(t)]^2}dt\right]$.

如果不用 Liouville 公式求通解的方法如下.

将 $x_2(t) = x_1(t)h(t)$ 代入原方程可得

$$h(t)[\ddot{x}_1(t) + a_1(t)\dot{x}_1(t) + a_2(t)x_1(t)] + x_1(t)\ddot{h}(t) +$$

$$[2\dot{x}_1(t) + a_1(t)x_1(t)]\dot{h}(t) = 0.$$

又由 $x_1(t)$是方程的解可知 $\ddot{x}_1(t) + a_1(t)\dot{x}_1(t) + a_2(t)x_1(t) = 0$,

于是 $$x_1(t)\ddot{h}(t) + [2\dot{x}_1(t) + a_1(t)x_1(t)]\dot{h}(t) = 0.$$

令 $\dot{h}(t) = p$,则 $\ddot{h}(t) = \dot{p}$, 代入上式可得

$$\frac{dp}{p} = -\frac{2\dot{x}_1(t)}{x_1(t)} - a_1(t).$$

$$\dot{h}(t) = p = \frac{C_1'}{[x_1(t)]^2}e^{-\int a_1(t)dt}.$$

取 $C_1' = 1$,可得 $h(t) = \int \frac{e^{-\int a_1(t)dt}}{[x_1(t)]^2}dt + C_2'$,取 $C_2' = 0$,可得 $x_2(t) = x_1(t)h(t) = x_1(t)\int \frac{e^{-\int a_1(t)dt}}{[x_1(t)]^2}dt$.

于是原方程的通解为 $x = x_1(t)\left[c_1 + c_2\int \frac{e^{-\int a_1(t)dt}}{[x_1(t)]^2}dt\right]$.

4. 设 $u = u(\sqrt{x^2+y^2})$具二阶连续偏导数,且满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + u = x^2 + y^2,$$

试求函数 u 的表达式.

解 令 $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$,则$\frac{\partial u}{\partial x} = u'(\rho)\frac{x}{\rho}$,$\frac{\partial u}{\partial y} = u'(\rho)\frac{y}{\rho}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u''(\rho)\cdot\frac{x^2}{\rho^2} + u'(\rho)\cdot\frac{1}{\rho} - u'(\rho)\frac{x}{\rho^2}\cdot\frac{x}{\rho},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u''(\rho)\frac{y^2}{\rho^2} + u'(\rho)\frac{1}{\rho} - u'(\rho)\frac{y}{\rho^2}\cdot\frac{y}{\rho}.$$

代入原方程可得

即　$u''(\rho) + u(\rho) = \rho^2$.

解之得　$u(\rho) = C_1\cos\rho + C_2\sin\rho + \rho^2 - 2$,

故 $u = u(\sqrt{x^2+y^2}) = C_1\cos\sqrt{x^2+y^2} + C_2\sin\sqrt{x^2+y^2} + x^2 + y^2 - 2$.

5. 设函数$f(t)$在$[0,+\infty)$连续,且满足方程

$$f(t) = e^{4\pi t^2} + \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$

求$f(t)$.

解

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2t} f\left(\frac{1}{2}\rho\right)\rho d\rho$$

$$= 2\pi\int_0^t f(u)\cdot 2u\cdot 2du = 8\pi\int_0^t uf(u)du,$$

于是　$f(t) = e^{4\pi t^2} + 8\pi\int_0^t uf(u)du, f(0) = 1$.

由于$f(t)$ 连续,故变上限积分$\int_0^t uf(u)du$ 可微,又 $e^{4\pi t^2}$ 可微,故两可微函数的和函数$f(t)$ 也可微.上式两边求导得

$$f'(t) = 8\pi te^{4\pi t^2} + 8\pi tf(t).$$

则$f(t)$为上述一阶线性非齐次微分方程满足初值条件$f(0)=1$ 的解,故$f(t) = e^{4\pi t^2}(1+4\pi t^2)$.

6. 验证$x=\frac{\sin t}{t}$是微分方程 $\ddot{x} + \frac{2}{t}\dot{x} + x = 0$ 的解,求此方程的通解.

解　由(B)第3题知与$x_1(t) = \frac{\sin t}{t}$线性无关的特解可取为

$$x_2(t) = h(t)x_1(t),$$

其中

$$h(t) = \int\frac{\int e^{-\int a_1(t)dt}}{[x_1(t)]^2}dt = \int\frac{t^2}{\sin^2 t}e^{-\int\frac{2}{t}dt}dt = -\cot t.$$

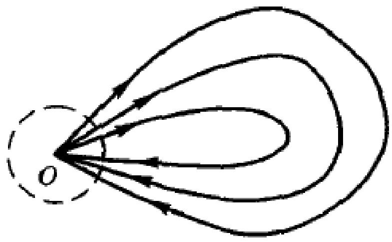
故原方程的通解为 $x=\frac{\sin t}{t}(C_1+C_2\cot t)=C_1\frac{\sin t}{t}+C_2\frac{\cos t}{t}$.

习 题 7.5

(A)

3. 若自治系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{f}:D\subseteq\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 的一切解均满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0}$,问 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是否渐近稳定,为什么?

解 不一定. 由于仅有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0}$ 不能保证从点 O 足够小的邻域内出发的轨线,始终保持在点 O 的充分小的邻域内. 如图所示的轨线,当 $t\to\pm\infty$ 时都趋向于奇点 O,但在点 O 的任意小邻域出发的轨线不可能永远保持在图中所示的点 O 的邻域内.



(第 3 题)

4. 讨论下列系统零解的稳定性.

(1) $\begin{cases}\dot{x}=-y-xy^2,\\ \dot{y}=x-x^4y;\end{cases}$ (3) $\begin{cases}\dot{x}=-y+x(x^2+y^2),\\ \dot{y}=x+y(x^2+y^2);\end{cases}$

(4) $\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-a^2\sin x;\end{cases}$ (5) $\begin{cases}\dot{x}=y+ax^3,\\ \dot{y}=-x+ay^3.\end{cases}$

解 其线性近似系统分别为 $\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-x\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\dot{x}=-y,\\ \dot{y}=x.\end{cases}$ 都有零实部的特征值,故不能用线性近似系统判定原非线性系统零解的稳定性. 故采用 Liapunov 函数法. 为此取正定函数 $V(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$,则

(1) $\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}=-x^2y^2(1+x^2)\leqslant 0$ 定负,故零解稳定.

又 $\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}=0$ 当且仅当 $x=0$ 或 $y=0$.

将 $x=0$ 代入(1)的第一方程可得 $y=0$;将 $y=0$ 代入(1)的第二个方程得 $x=0$,故 $\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}=0$ 当且仅当 $x=0,y=0$,于是零解渐近稳定.

(3) $\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3)}=(x^2+y^2)^2$ 恒正,(3)的零解不稳定.

(4) 有首次积分$\frac{1}{2}y^2-a^2\cos x=C$,于是取 $\overline{V}(x,y)=\frac{1}{2}y^2+a^2(1-\cos x)$ $\overline{V}(0,0)=0,\overline{V}(x,y)>0(x^2+y^2\neq0)$,从而 $V(x,y)$定正. 又$\left.\frac{\mathrm{d}\overline{V}}{\mathrm{d}t}\right|_{(4)}\equiv0$,由定理5.4 (1)知(4)的零解稳定,但由于此时$\frac{1}{2}y^2+a^2(1-\cos x)=C$ 为系统(4)的轨线,故零解非渐近稳定.

(5) $\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(5)}=a(x^4+y^4)$.

于是,当 $a<0$ 时,$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(5)}$ 恒负,从而零解渐近稳定;

当 $a=0$ 时,$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(5)}\equiv0$,零解稳定,但非渐近稳定(因为 $a=0$ 时 $x^2+y^2=C$ 为轨线);

当 $a>0$ 时,$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(5)}$ 恒正,零解不稳定.

5. 讨论下列系统零解的稳定性.

(1) $\begin{cases}\dot{x}=-x-y+2z,\\ \dot{y}=x+y,\\ \dot{z}=x+y;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}\dot{x}=2x+8\sin y,\\ \dot{y}=2-\mathrm{e}^x-3y-\cos y;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\dot{x}=x-y+z+x^2yz,\\ \dot{y}=x-2y+2z+z^3,\\ \dot{z}=x+2y+z+xy;\end{cases}$　(4) $\begin{cases}\dot{x}=-2x+y-z+x^2,\\ \dot{y}=x-y+xy,\\ \dot{z}=x+y-z+yz.\end{cases}$

解　(1) 为线性系统,其特征方程为

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & -1 & 2\\ 1 & 1-\lambda & 0\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda+\sqrt{2})(\lambda-\sqrt{2})=0,$$

故其有正特征值,零解不稳定.

(2) 原方程组可变为

$$\begin{cases}\dot{x}=2x+8\left(y-\frac{1}{3!}y^3+\frac{1}{5!}y^5-\cdots\right),\\ \dot{y}=2-\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots\right)-3y-\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\cdots\right).\end{cases}$$

故其线性近似系统为$\begin{cases}\dot{x}=2x+8y,\\ \dot{y}=-x-3y.\end{cases}$

特征方程为

$$\begin{vmatrix}\lambda-2 & -8\\ 1 & \lambda+3\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda+2=0,$$

特征值 $\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-7})$均有负实部. 故原非线性方程的零解渐近稳定.

(3) 其线性近似系统的特征方程为

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 1\\ 1 & -2-\lambda & 2\\ 1 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda^3-7\lambda+3)=f(\lambda)=0,$$

而$f(0)=-3,f(1)=3$,由介值定理有正特征值,故原非线方程的零解不稳定.

(4) 线性近似系统的特征方程为

$$\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1 & -1\\ 1 & -1-\lambda & 0\\ 1 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda^3+4\lambda^2+5\lambda+3)=0.$$

由于 $a_1=4>0$, $\begin{vmatrix}a_1 & 1\\ a_3 & a_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & 1\\ 3 & 5\end{vmatrix}=17>0$,

$$\begin{vmatrix}a_1 & 1 & 0\\ a_3 & a_2 & a_1\\ 0 & 0 & a_3\end{vmatrix}=a_3(a_1a_2-a_3)=3\times17>0.$$

故其特征值均有负实部,原非线性系统零解渐近稳定.

(B)

1. 设齐次线性微分方程组 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,\boldsymbol{A}(t)$在 $t\in\mathbf{R}$ 连续,证明零解稳定的充要条件是它的一个基解矩阵有界.

证明 设 $\boldsymbol{X}(t)$为齐次线性微分方程组的一个基解矩阵,于是满足初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 的解

$$\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(t_0)\boldsymbol{x}_0.$$

充分性　设基解矩阵有界，即 $\|X(t)X^{-1}(t_0)\| \leqslant M(t_0)$（$M(t_0)$ 与 t_0 有关的正数）. 于是 $\forall \varepsilon>0, t\geqslant t_0$ 取 $\delta(\varepsilon,t_0)=\dfrac{\varepsilon}{M(t_0)}$，当 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta$ 时，有

$$\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\| \leqslant \|X(t)X^{-1}(t_0)\|\,\|\boldsymbol{x}_0\| < \varepsilon.$$

即零解稳定.

必要性　由零解的稳定可知对 $\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon,t_0)>0$，当 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta$ 时，有 $\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\|<\varepsilon$.

取 $\boldsymbol{x}_{01}=\dfrac{\delta}{2}(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{x}_{02}=\dfrac{\delta}{2}(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{x}_{0n}=\dfrac{\delta}{2}(0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$，那么以 $\boldsymbol{x}_{01},\cdots,\boldsymbol{x}_{0n}$ 为初值的 n 个解 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_{01}),\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_{02}),\cdots,\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_{0n})$ 是线性无关的.（由于这 n 个解的 Wronski 行列式在 t_0 处的值 $W(t_0)=\left(\dfrac{\delta}{2}\right)^n\neq 0$），从而以这 n 个解为列的矩阵 $X(t)=(\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_{01}),\cdots,\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_{0n}))$ 为原线性方程组的一个基解矩阵.

又由于 $\|\boldsymbol{x}_{0k}\|=\dfrac{\delta}{2}<\delta$，所以 $\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_{0k})\|<\varepsilon$，其中 $k=1,2,\cdots,n$. 即 $X(t)$ 的每一列均有界，从而矩阵 $X(t)$ 有界.

2. 讨论下列自治系统零解的稳定性.

(1) $\begin{cases}\dot{x}=-x+2x(x+y)^2,\\ \dot{y}=-y^3+2y^3(x+y)^2;\end{cases}$　　(2) $\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=0$ $(0<n<k)$；

(4) $\begin{cases}\dot{x}=\mathrm{e}^{x+y}+z-1,\\ \dot{y}=2x+y-\sin z,\\ \dot{z}=-8x-5y-3z+xy^2.\end{cases}$

解　(1) 取 Liapunov 函数 $V(x,y)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}y^2$，则

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}=-x^2-y^4+2(x+y)^2(x^2+y^4)$$

$$=-2(x^2+y^4)\left[\frac{1}{2}-(x+y)^2\right]$$

$$\leqslant -4(x^2+y^4)\left[\frac{1}{4}-(x^2+y^2)\right].$$

故在 $x^2+y^2\leqslant\dfrac{1}{4}$ 的内部 $\left.\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}<0$（恒负），因而零解渐近稳定.

(2) 令 $y=\dot{x}$，则原方程等价于齐次线性方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -k^2x - 2ny. \end{cases}$$

其特征方程为 $\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$. 从而特征值为 $\lambda = -n \pm \mathrm{i}\sqrt{k^2 - n^2}$（由于 $0 < n < k$），均有负实部，故零解渐近稳定.

(3) 将 $\sin z$, e^{x+y} 用 Taylor 公式展开，可知原方程的线性近似系统为 $\begin{cases} \dot{x} = x + y + z, \\ \dot{y} = 2x + y - z, \\ \dot{z} = -8x - 5y - 3z. \end{cases}$

其特征方程为

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ -8 & -5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0.$$

由于特征值 $\lambda = 2 > 0$，故原非齐次方程的零解不稳定.

3. 设有常系数齐次线性微分方程组 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2$，$\boldsymbol{A}$ 为二阶常数矩阵，记 $p = -\operatorname{tr} \boldsymbol{A}$，$q = \det \boldsymbol{A}$，设 $p^2 + q^2 \neq 0$，试证

(1) 当 $p > 0$ 且 $q > 0$ 时，零解渐近稳定；

(2) 当 $p = 0$ 且 $q > 0$ 或 $p > 0$ 且 $q = 0$ 时，零解稳定但非渐近稳定；

(3) 其他情形下零解都不稳定.

证明 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，则 $p = -\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = -(a + d)$，$q = ad - bc$. $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为 $\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$，即 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. 特征值 $\lambda_{1,2} = \dfrac{1}{2}[-p \pm \sqrt{\Delta}]$，$\Delta = p^2 - 4q$.

(1) 当 $p > 0, q > 0$，则 $\lambda_{1,2}$ 的实部均为负，故零解渐近稳定.

(2) $p = 0, q > 0$，则 $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\sqrt{q}$ 实部为零，且均为单根，故零解稳定而非渐近稳定.

如 $p > 0$ 且 $q = 0$，特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -p < 0$，故零解稳定而非渐近稳定（定理 5.1(2)）.

(3) $q < 0$ 或 $p < 0, q \geqslant 0$ 时，特征值 $\dfrac{1}{2}(-p + \sqrt{p^2 - 4q})$ 的实部为正，故零解不稳定.

4. 设 Volterra 系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1(b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2), \\ \dot{x}_2 = x_2(b_2 + a_{21}x + a_{22}x_2)\end{cases}$$

有正平衡位置 $M(x_1^*, x_2^*)$（即 $x_1^* > 0, x_2^* > 0$）. 证明点 M 渐近稳定的充要条件是

$$x_1^* a_{11} + x_2^* a_{22} < 0, a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0.$$

证明　由于 (x_1^*, x_2^*) 是原微分方程组的正平衡位置，则

$$\begin{cases} b_1 + a_{11}x_1^* + a_{12}x_2^* = 0, \\ b_2 + a_{21}x_1^* + a_{22}x_2^* = 0. \end{cases} \tag{E_1}$$

作变换 $y_i = x_i - x_i^*$ $(i = 1, 2)$，并注意到 (E_1)，则原微分方程等价于

$$\begin{cases}\dot{y}_1 = (y_1 + x_1^*)(a_{11}y_1 + a_{12}y_2), \\ \dot{y}_2 = (y_2 + x_2^*)(a_{21}y_1 + a_{22}y_2).\end{cases}$$

其线性近似系统为

$$\begin{cases}\dot{y}_1 = a_{11}x_1^* y_1 + a_{12}x_1^* y_2, \\ \dot{y}_2 = a_{21}x_2^* y_1 + a_{22}x_2^* y_2.\end{cases}$$

故由上题结论知 M 渐近稳定的充要条件为

$$p = -(a_{11}x_1^* + a_{22}x_2^*) > 0, q = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1^* x_2^* > 0.$$

即
$$a_{11}x_1^* + a_{22}x_2^* < 0, a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0.$$

5. 为了研究传染病的流行规律，我们把人划分为两群：易感者 S，病人 I. 假设一个病人的传染率（单位时间内传染的人数）与该时刻易感者人数成正比，比例常数为 $\beta > 0$；病人的康复率与该时刻的病人成正比，比例常数为 $\gamma > 0$；康复者无免疫力，可以立即被再次传染，不考虑人口的出生、自然死亡和流动.

（1）试建立此疾病传播的 $S - I - S$ 微分方程模型；

（2）求此疾病的基本再生数，并分别给出使此疾病逐渐消亡和发展成为地方病的条件.

解　此疾病的传播情况可用下述框图描述.

由此框图可得疾病传播的 $S - I - S$ 模型

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma I, \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I. \end{cases} \tag{E_1}$$

显然$(S,I)\in(G)=\{(S,I)\mid 0<S\leqslant k,0\leqslant I\leqslant k,S+I=k\}$,其中$k$为人口总数.由于不考虑人口的出生和自然死亡.因此$k$为常数.

(2)由于$S+I=k$,所以原模型的两个方程中只有一个是独立的.又由于我们主要关心的是疾病的消亡与否,即I的变化规律,因此只考虑方程

$$\dot{I}=[\beta(k-I)-\gamma]I=[(\beta k-\gamma)-\beta I]I. \tag{E_2}$$

$I_1=0$始终是其平衡位置,又当$k-\dfrac{\gamma}{\beta}>0$,即$R_0\triangleq\dfrac{\beta k}{\gamma}>1$时出现正平衡位置$I_2=k-\dfrac{\gamma}{\beta}$.

(E_2)关于$I_1=0$的线性近似系统为$\dot{I}=(\beta k-\gamma)I$,则其特征值为$\beta k-\gamma$.故当$R_0<1$时$I_1=0$稳定;$R_0>1$时,$I_1$不稳定.

(E_2)关于$I_2=k-\dfrac{\gamma}{\beta}$的线性近似系统为$\dot{I}=(\gamma-\beta k)I$,其特征值为$\gamma-\beta k=1-R_0$.故$R_0\ngtr 1$时$I_2=k-\dfrac{\gamma}{\beta}$存在时,其渐近稳定.故此疾病的基本再生数为$R_0=\dfrac{\beta k}{\gamma}$,且当$R_0\leqslant1$($R_0=1$时,$(E_2)$变为$\dot{I}=-\beta I^2\leqslant0$.故$t\to+\infty$时,$I\to0$)时,疾病消亡,当$R_0>1$时,发展成地方病.

综合练习题

1. 猪的最佳出售时间问题 养猪场出售生猪有一个最佳出售时间.因为将生猪在体重过小的时候出售,显然利润不佳.而猪养得愈大,单位时间饲养费用就愈大,到一定的时候体重的增加速度却会下降,且单位体重的销售价格却不会随体重增加而增加.因此,饲养时间过短或过长,都是不合算的.只有选取一个最佳的出售时间,才能获得最大的利润.试建立这一问题的数学模型,并对最佳出售时间作出理论探讨.(提示:可假定生猪体重$w(t)$符合 Logistic 模型$\dfrac{dw}{dt}=\alpha(1-aw)$,饲养费用$y(t)$满足方程$\dfrac{dy}{dt}=b+dw$.)

解 设$w(t)$为一头猪出生t天后的体重(单位:kg),$y(t)$为一头猪从出生到t天后所消耗的总饲养费用,c为每公斤生猪的售价,$L(t)$为t时刻出售生猪

可获得的纯利润.依题意需求函数 $L(t)=cw(t)-y(t)$ 的最大值点,其中 $w(t)$, $y(t)$ 满足下列微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\alpha(1-aw), & ① \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=b+dw, & ② \end{cases}$$

和初值条件 $w(0)=w_0$(初生小猪的体重),$y(0)=0$,其中 $\alpha>0$ 为生猪体重的生长率,$\overline{w}$ 为生猪体重的最大值.则 $\overline{w}\triangleq\dfrac{1}{a}>0$,总的饲养费用与生猪的体重成正比,$d>0$ 为其比例常数,$b>0$ 为单位时间内饲养生猪的其他费用.设 $w(t_s)=w_s$ 为可上市出售的猪的最小体重,t_s 为饲养时间,达到最小可出售体重且能获利的充要条件为

$$cw_s-y(t_s)\geqslant cw_0. \qquad ③$$

方程①为可分离变量的一阶微分方程,且 $w(0)=w_0$,解之得

$$w=w(t)=\overline{w}-(\overline{w}-w_0)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{\overline{w}}t}. \qquad ④$$

令 $w=w_s$,可得 $t_s=\dfrac{\overline{w}}{\alpha}\ln\dfrac{\overline{w}-w_0}{\overline{w}-w_s}$为达到最小可出售体重时的饲养天数.

下面求最大利润 $L(t)$ 的极值点.

$$\frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t}=c\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

将①,②,④式代入上式可得$\dfrac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{(\overline{w}-w_0)(\overline{w}d+\alpha C)}{\overline{w}}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{\overline{w}}t}-(b+\overline{w}d)$.令$\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=0$,可求得唯一的驻点 $t_0=\dfrac{\overline{w}}{\alpha}\ln\dfrac{(\overline{w}d+\alpha c)(\overline{w}-w_0)}{\overline{w}(b+\overline{w}d)}$.

易见 t_0 是 $L(t)$ 的最大值点(因为 $t<t_0,\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}>0,t>t_0,\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}<0$).故可得下列结论:

(i) 若$\dfrac{\overline{w}(b+\overline{w}d)}{\overline{w}-w_s}<\overline{w}d+\alpha c$ 时,$t_0>t_s$.故当生猪的体重达到市场准入体重(最小可出售体重)后再饲养 t_0-t_s 天出售可获最大利润;

(ii) 若$\dfrac{\overline{w}(b+\overline{w}d)}{\overline{w}-w_s}=\overline{w}d+\alpha c$ 时,$t_0=t_s$.即当生猪的体重达到最小可出售体重时立即出售,可获最大利润.即饲养 t_s 天出售.

(iii) 若$\dfrac{\overline{w}(b+\overline{w}d)}{\overline{w}-w_s}>\overline{w}d+\alpha c$ 时,$t_0<t_s$.则虽然饲养 t_0 时出售可使利润最大,

但饲养 t_0 天时，猪的体重还未达到市场准入标准，所以只能等到 $t=t_s$ 时才能售出去.

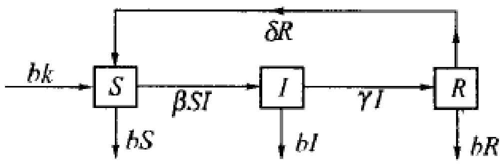
2. 传染病的 $S-I-R-S$ 模型　设有一非致命传染病，在其传播过程中人口的出生率（即单位时间每一个体的平均生育数）为 b，各类人的自然死亡率也为 b，没有因病死亡，从而总人口保持常数 K；每个患者单位时间的传染人数与该时刻的易感者数量成正比，比例系数为 β；单位时间康复者数量与该时刻的患者数成正比，比例系数为 γ；康复者具有暂时的免疫力，但单位时间丧失免疫而再次成为易感者的数量与该时刻位于康复类的数量成正比，比例系数为 δ.

（1）试建立描述此疾病传播规律的 $S-I-R-S$ 微分方程模型；

（2）将此模型简化为变量 S 和 I 的模型并求出其平衡点；

（3）研究平衡点的稳定性，从而求出基本再生数和使疾病消亡或持续的条件.

解　（1）将某封闭地区（即不考虑人口的迁入迁出）在 t 时刻的人口分成三类：一类是无病但有可能被感者，称为易感者；第二类为染病者（即已患这种疾病，而且具有传染能力）；第三类为移除类（对这种疾病具有非永久性免疫力的人），其在 t 时刻的数量分别记为 $S(t)$，$I(t)$，$R(t)$ 且 $S(t)+I(t)+R(t)=K$. 依题意此种疾病的传播情况可用下列框图表示.



由此框图可得下述传染病模型（$S-I-R-S$ 模型）：

$$\begin{cases}\dfrac{dS}{dt}=bK-bS-\beta SI+\delta R,\\[2ex]\dfrac{dI}{dt}=\beta SI-(b+\gamma)I,\\[2ex]\dfrac{dR}{dt}\gamma\nu I-(b+\delta)R,\end{cases}\qquad(*)_1$$

其中 $(S,I,R)\in(G)=\{(S,I,R)\mid S>0,I\geqslant 0,R\geqslant 0,S+I+R=K\}$.

（2）由于人口总数 K 保持不变，则 $R=K-S-I$，代入模型，可知 $(*)_1$ 的前两方程是一独立的子系统，故 $(*)_1$ 可简化为下列关于 S 与 I 的模型 $(*)_2$

$$\begin{cases}\dot S=(b+\delta)K-(\delta+b)S-\beta SI-\delta I,\\ \dot I=\beta SI-(b+\gamma)I.\end{cases}\qquad(*)_2$$

（3）令 $(*)_2$ 中两方程的右端等于零可得

(i) 无论参数取何值,模型$(*)_2$均有无病平衡点$E_0(K,0)$;

(ii) 当$R_0 \triangleq \dfrac{\beta K}{b+\gamma}>$时,还存在地方病平衡位置$E^*(S^*,I^*)$,其中$S^*=\dfrac{1}{\beta}(b+\gamma)$,$I^*=\dfrac{(b+\delta)(b+\gamma)}{\beta(b+\delta+\gamma)}(R_0-1)$.

下面讨论E_0,E^*的稳定性.

关于E_0的线性近似系统为$\begin{cases}\dot{S}=-(\delta+b)S-(\delta+\beta K)I,\\ \dot{I}=(\beta K-b-\gamma)I.\end{cases}$　$(*)_3$

则　$p_0=-\mathrm{tr}\boldsymbol{A}_0=(b+\delta+b+\gamma-\beta K)=(b+\gamma)(1-R_0)+b+\delta$,

$q_0=\det\boldsymbol{A}_0=(b+\delta)(b+\gamma-\beta K)=(b+\delta)(b+\gamma)(1-R_0)$.

由习题7.5(B)第3题知$q>0,p>0$,即$R_0<1$时,E_0渐近稳定,其中$\boldsymbol{A}_0$为$(*)_3$的系数矩阵.

关于E^*的线性近似系统为

$$\begin{cases}\dot{S}=-(b+\delta+\beta I^*)S-(b+\gamma+\delta)I,\\ \dot{I}=\beta I^*S.\end{cases}\qquad (*)_3$$

则　$p^*=(b+\delta+\beta I^*)>0$　(由$\beta,b,\delta>0$,只需$I^*>0$),

$q^*=\beta I^*(b+\gamma+\delta)>0$　(只要$I^*>0$).

故当$I^*>0$,即$R_0>1$(也即E^*存在),E^*就是渐近稳定的.从而当$R_0<1$时,疾病最终会消亡;当$R_0>1$时,最终会发展成地方病.而$R_0=\dfrac{\beta K}{b+\gamma}$就是此种疾病的基本再生数.