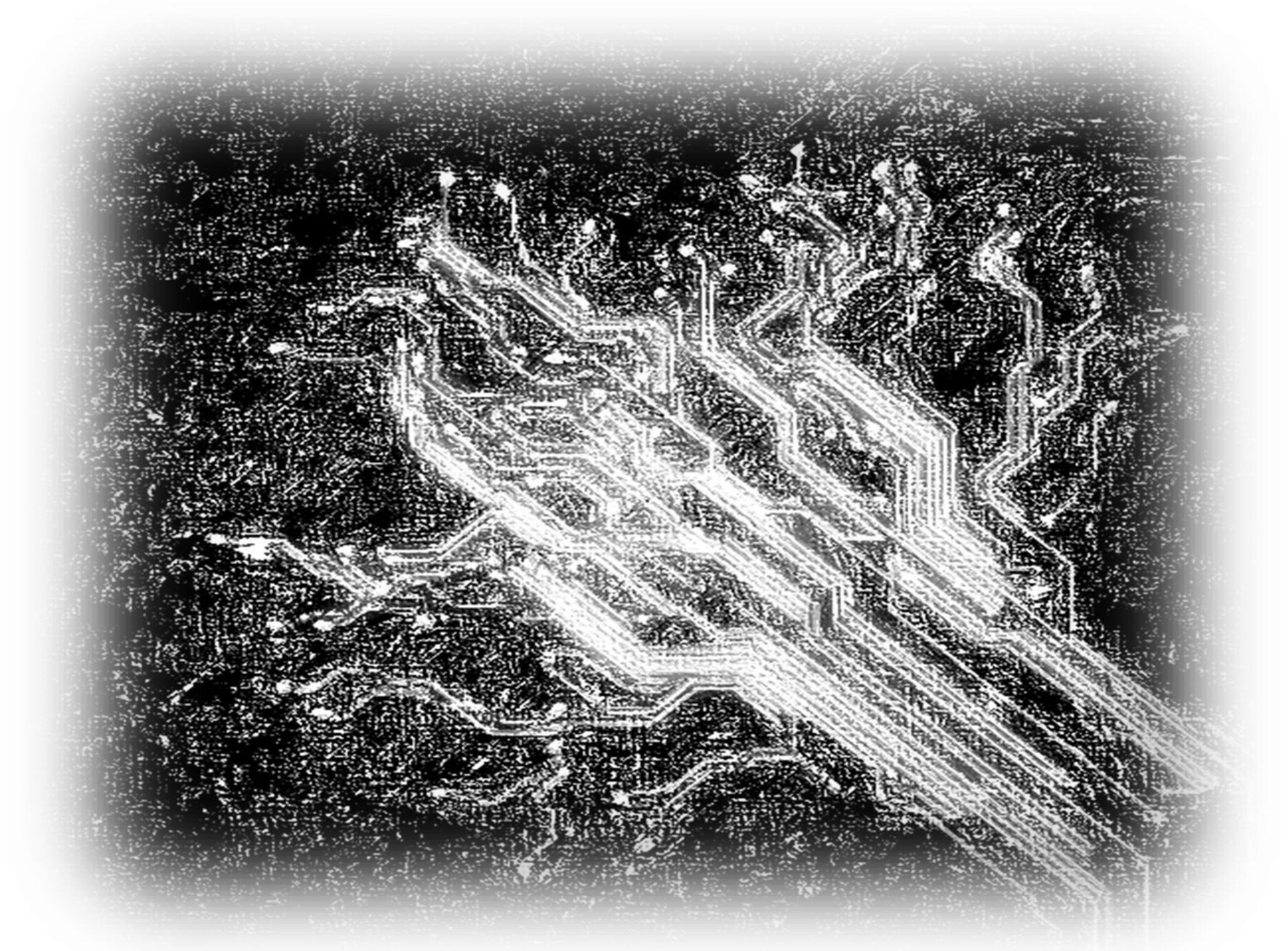


何松柏

电子工程学院

电子电路基础

Analog Circuits

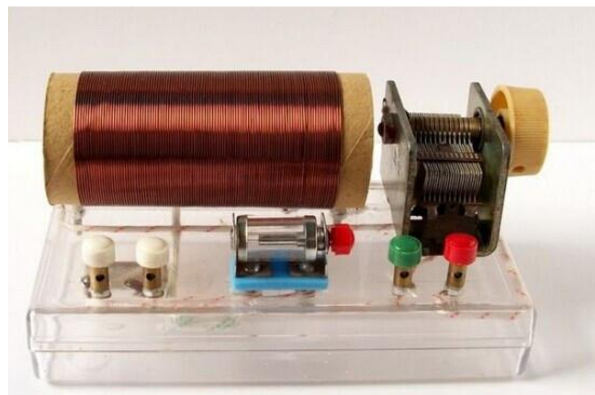
sbhe@uestc.edu.cn

UESTC

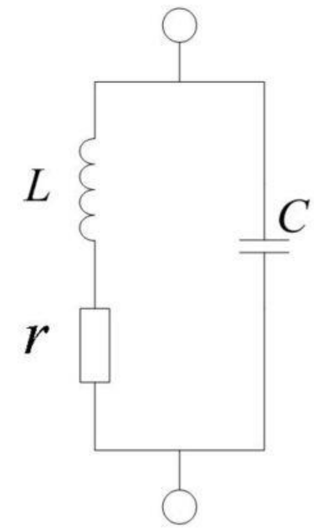
正弦稳态-谐振

问题引入

收音机



调谐



电路原理

通过调谐，在谐振频率上，能量聚积（收集）

正弦稳态—谐振

谐振电路应用

◆滤波器

◆振荡器

本章主要讨论谐振电路基本原理

◆**时域**

◆频域

特征

正弦稳态—谐振

本部分主要关注的问题(二阶系统正弦激励稳态响应）

◆二阶系统参数 （欠阻尼）

◆**系统**参数对电路性能影响

◆二阶系统频率响应（频率选择性）

sbhe@uestc.edu.cn

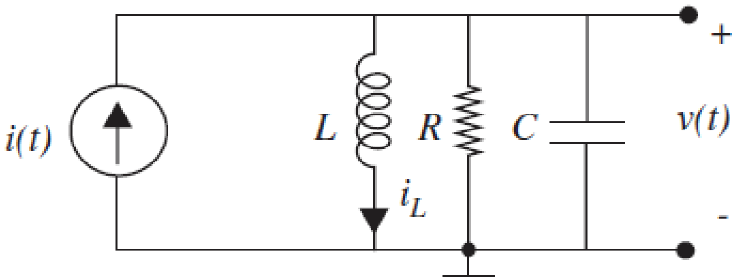
正弦稳态—谐振

两个基本电路形式

- ◆串联RLC
- ◆并联RLC

正弦稳态—谐振

并联RLC



在信号激励下 $i(t) = I_o \cos(\omega_1 t) \quad \text{for} \quad t > 0.$

回顾12章（二阶电路响应），得到以下一些信息：

正弦稳态—谐振

系统微分方程

$$\frac{1}{C}\frac{di}{dt} = \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v.$$

齐次方程 $$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v = 0.$$

特征方程 $$s^2 + 2\alpha s + \omega_o^2 = 0 \qquad \omega_o^2 = \frac{1}{LC} \qquad \alpha = \frac{1}{2RC}.$$

正弦稳态—谐振

欠阻尼系统 $\omega_o > \alpha.$

特征方程两个复根

$$s_a = -\alpha + j\omega_d$$
$$s_b = -\alpha - j\omega_d$$

$$\omega_d^2 = \omega_o^2 - \alpha^2.$$

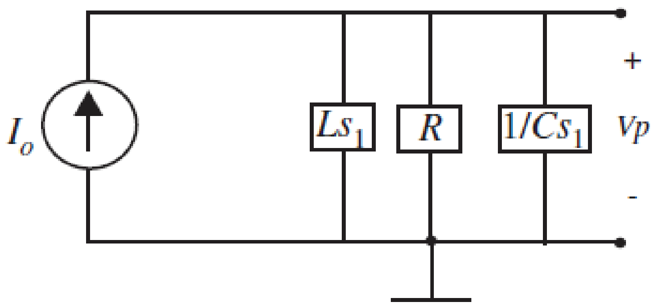
系统函数有复根时会发生振荡，称为谐振系统。

$$v_h(t) = e^{-\alpha t}\left[K_a e^{j\omega_d t} + K_b e^{-j\omega_d t}\right]$$
$$= K e^{-\alpha t}\cos\left(\omega_d t + \theta\right)$$

sbhe@uestc.edu.cn

正弦稳态—谐振

特解



$$V_p = \frac{I_o}{1/Ls_1 + 1/R + Cs_1} = \frac{I_o s_1/C}{s_1^2 + s_1/RC + 1/LC}.$$

$\Rightarrow$

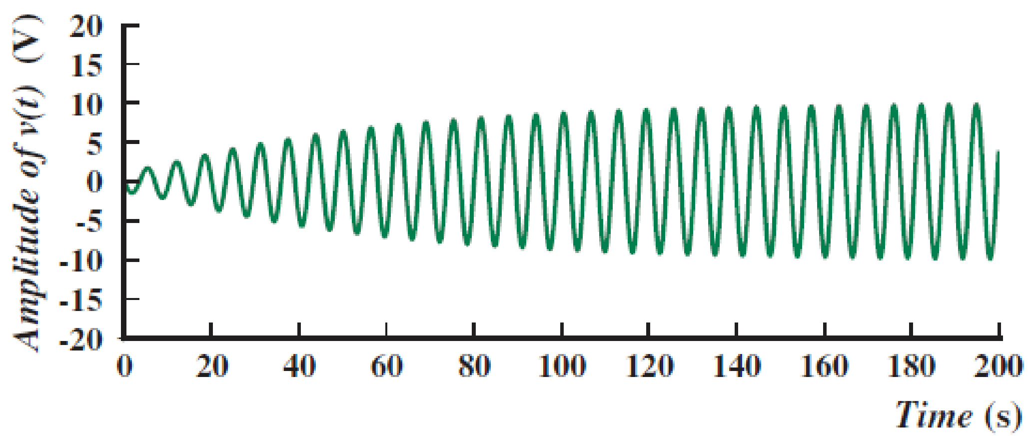
$$v_p(t) = |V_p| \cos\left(\omega_1 t + \angle V_p\right).$$

注意：系统函数分母与特征方程关系！

正弦稳态—谐振

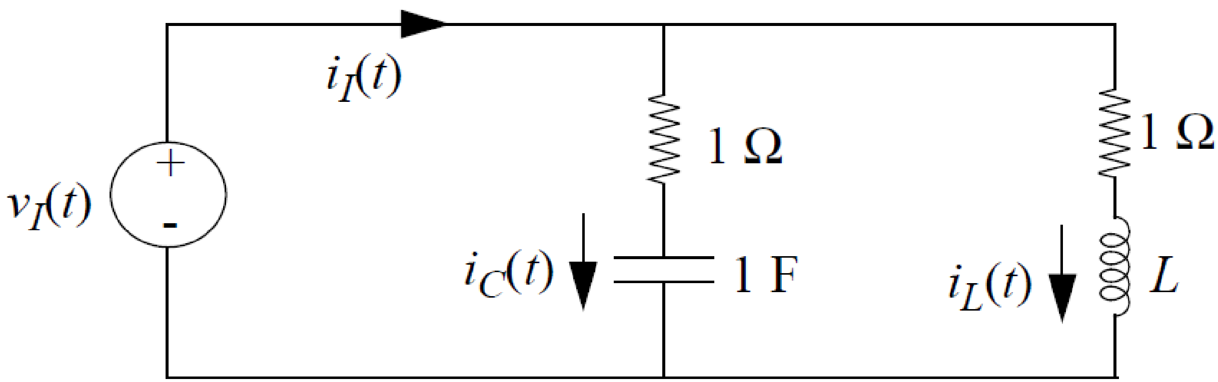
全解

$$v(t) = Ke^{-\alpha t}\cos\left(\omega_d t + \theta\right) + |V_p|\cos\left(\omega_1 t + \angle V_p\right)$$



$(\omega_1 = \omega_d = 1\ \text{rad/s})$

例



（1） $\frac{V_i(s)}{I_i(s)} = Z_i(s)$ L取多少，输入阻抗为纯电阻，电阻值是？

（2) 电容和电感初值为0，当t>0，输入阶跃电压，求电容电流

作答

分析

$$Z_i = \frac{(R+\frac{1}{Cs})(R+Ls)}{R+\frac{1}{Cs}+R+Ls} = \frac{(RCs+1)(R+Ls)\cdot Cs}{Cs(2RCs+1+LCs^2)}$$

$$Z_i(s) = \frac{R\left(LCs^2+\left(\frac{R^2C+L}{R}\right)s+1\right)}{LCs^2+2RCs+1}$$

$$\frac{R^2C+L}{R} = 2RC$$

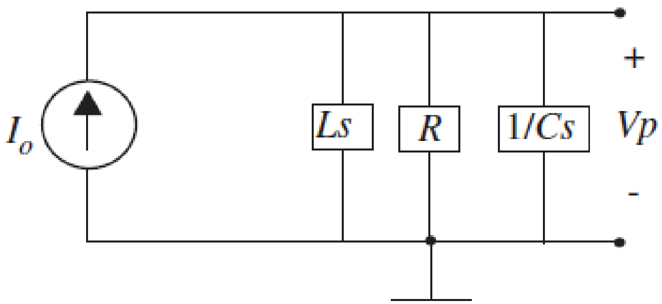
$L = 1$ if $R = C = 1$.

分析

$$i_C(t) = \frac{1}{R}\, e^{-t/RC}$$

正弦稳态—谐振

谐振系统的频率响应（并联RLC为例）



$$H(s) = \frac{V_p}{I_o} = \frac{1}{1/Ls + 1/R + Cs}$$

$$= \frac{s/C}{s^2 + s/RC + 1/LC.}$$

正弦稳态—谐振

取电路参数

$$L = 0.5\ \mu\mathrm{H}$$

$$C = 0.5\ \mu\mathrm{F}$$

$$R = 4\ \Omega.$$

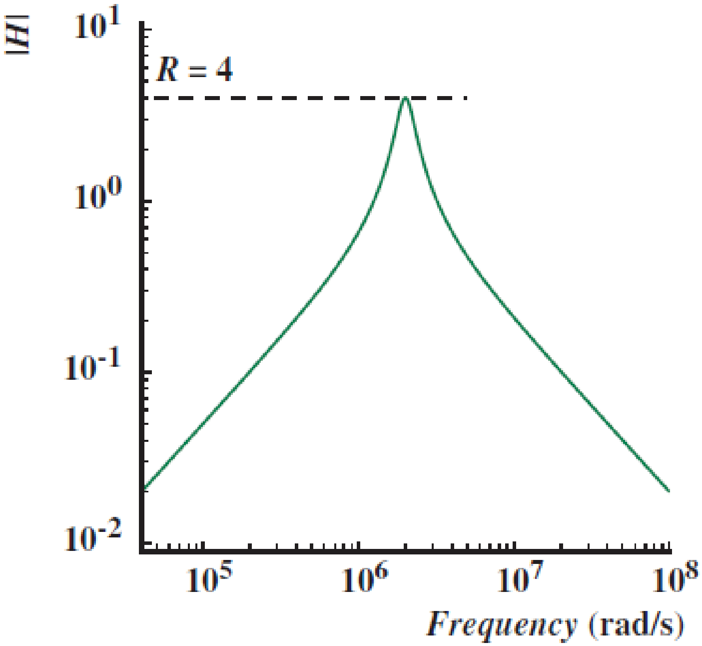
$$H(s) = \frac{2 \times 10^6 s}{s^2 + 0.5 \times 10^6 s + 4 \times 10^{12}}.$$

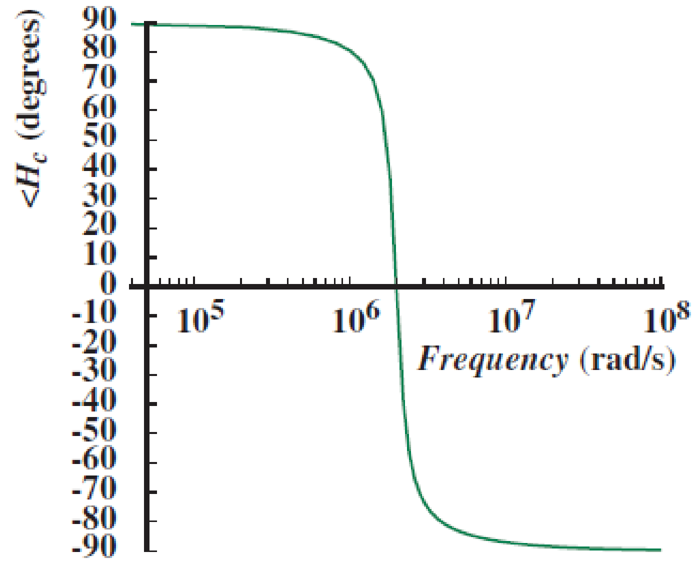
问题：表达式系数与电路参数的关系？

sbhe@uestc.edu.cn

正弦稳态—谐振

波特图





该图给出了哪些信息？

正弦稳态—谐振

类似带通滤波器

根据波特图讨论几个问题：

（1）幅度响应最大值发生的条件是？此时，电路等效为？
（2）在幅度响应图中，以幅值最大点分界，左边电路近似等效为？
右边电路近似等效为？
（3）相位响应图中，相位跃变发生的条件？为什么？

正弦稳态—谐振

根据波特图定义几个基本指标

$$H(j\omega) = \frac{1}{G + j(\omega C - 1/\omega L)}.$$

$$G = 1/R$$

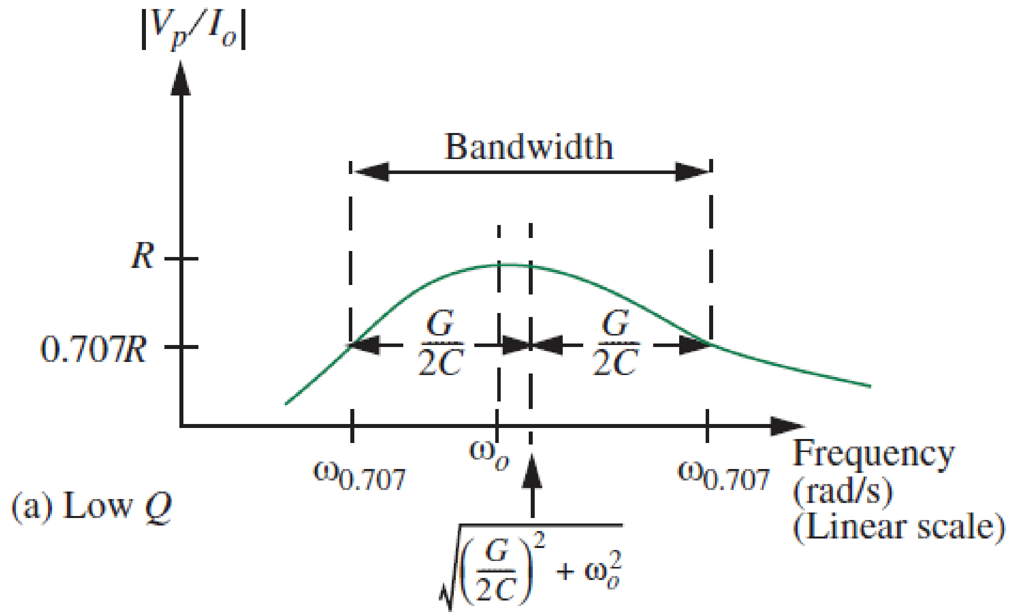
谐振带宽：两个0.707倍最大值幅度对应的频率宽度

$$\text{Bandwidth} = \frac{G}{C} = \frac{1}{RC}.$$

正弦稳态—谐振

谐振带宽

$$\frac{1}{RC} = 2\alpha = \text{Bandwidth.}$$



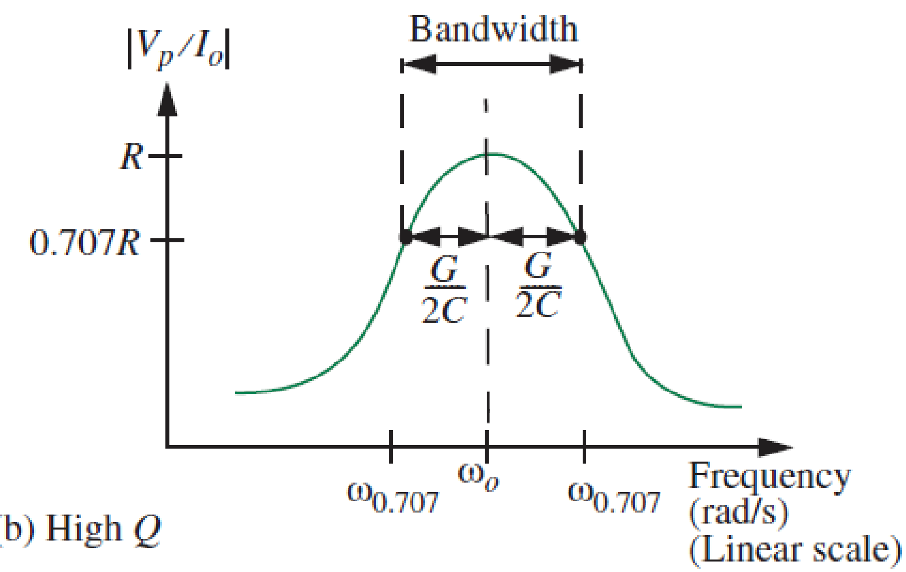
注意对称频率点是？

正弦稳态—谐振

品质因数

$$\frac{\text{Resonance frequency}}{\text{Bandwidth}} = \frac{\omega_o}{G/C} = Q = \omega_o RC = \frac{R}{\omega_o L}.$$

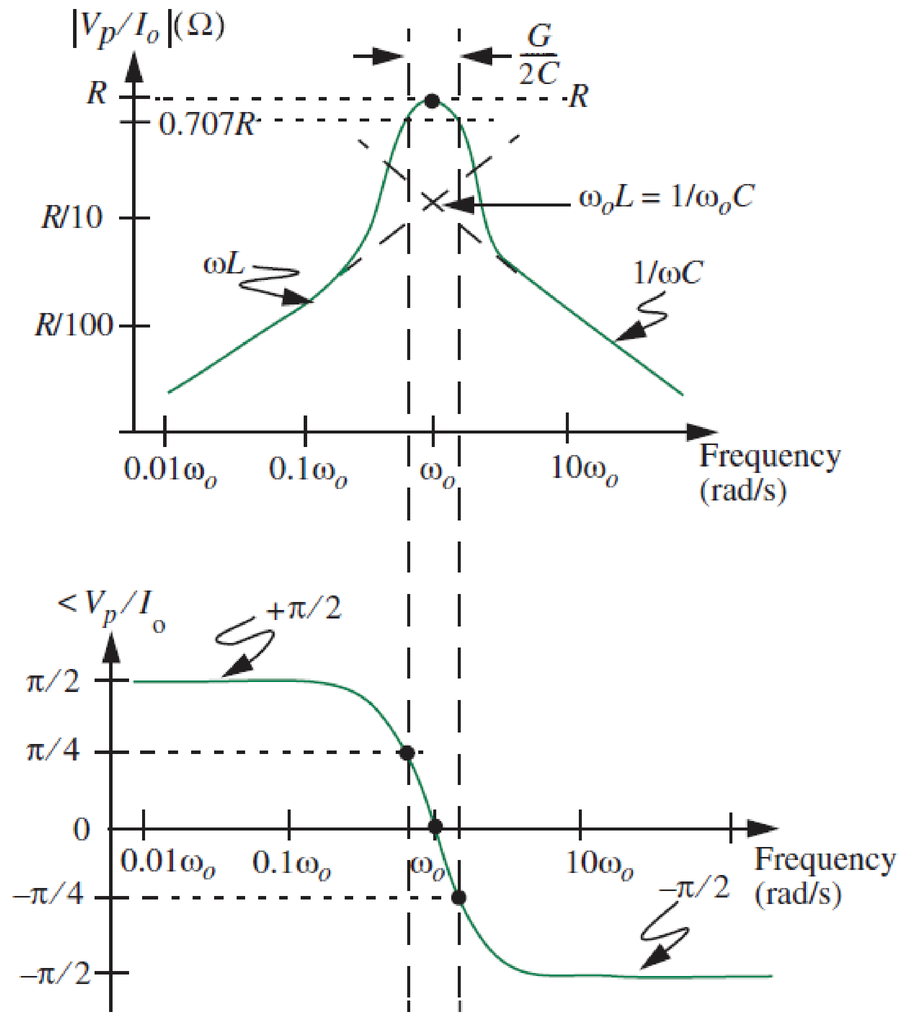
$$\text{Bandwidth} = \frac{\omega_o}{Q}.$$



(b) High Q

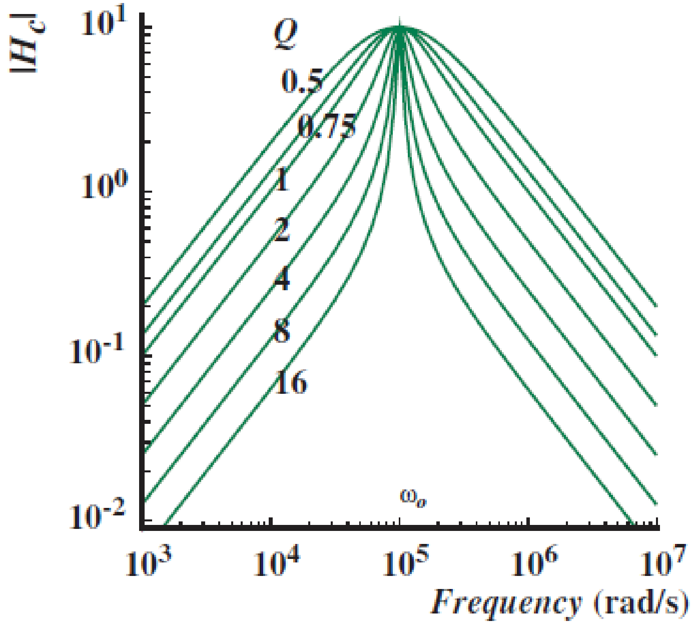
正弦稳态—谐振

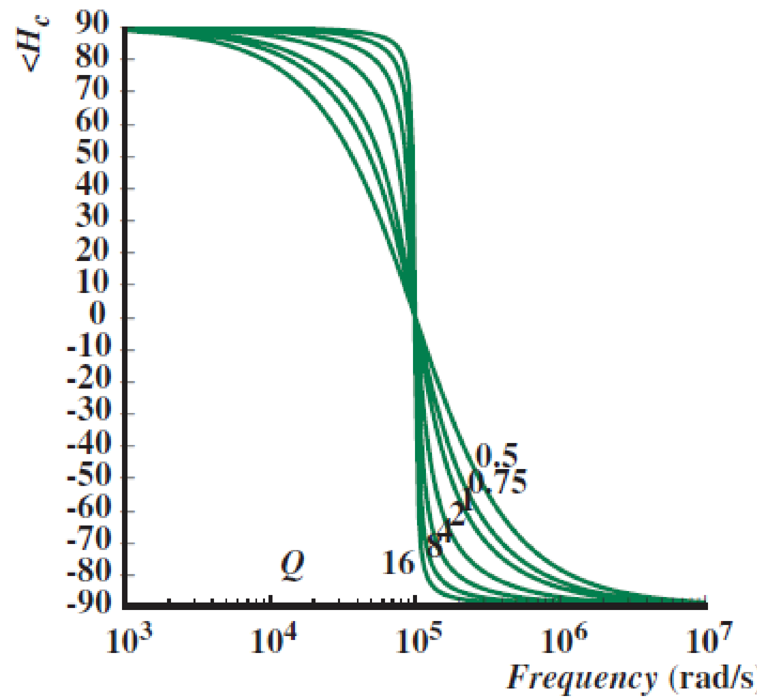
讨论如何设计一个谐振系统，
有哪些系统约束？



正弦稳态—谐振

不同Q值波特图

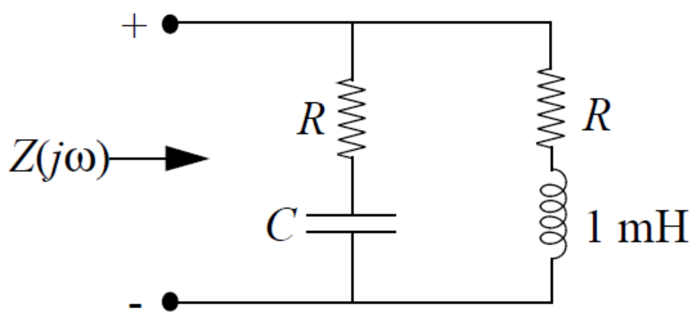




主观题 10分

设置

例：在任何频率网络阻抗为2000欧姆，求R和C?



正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

分析

$$Z = \frac{(R+\frac{1}{Cs})(R+Ls)}{2R+\frac{1}{Cs}+Ls} = \frac{R(LCs^2+(\frac{L}{R}+RC)s+1)}{LCs^2+2RCs+1}$$

$$\left(\frac{L}{R}+RC\right) = 2RC \quad \Longrightarrow \quad L = R^2C$$

分析

$$R = 2000 \text{ and } C = 2.5 \cdot 10^{-10} \text{ Farads}$$

正弦稳态—谐振

本次课程主要解决：

◆讨论如何实现信号选频放大？

◆串联RLC 在不同元件上取输出，频率响应？

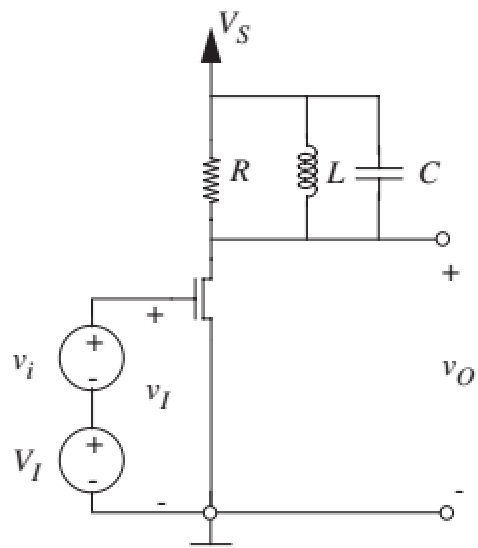
◆**讨论**谐振电路Q值对电路响应（时域，频域）

放大器选频实现

例

$V_T = 1\ \mathrm{V} \quad K = 1\ \mathrm{mA/V^2}$

元器件是理想的



选择合适参数，使得：

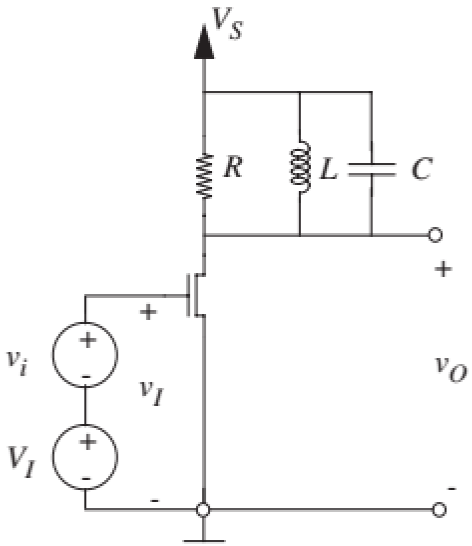
谐振频率 $\omega = 10^5\ \mathrm{rad/s}$

$Q = 10$

在谐振时放大器低频小信号增益为-2

选频放大器

例：选频放大器



$V_T = 1\ \mathrm{V} \quad K = 1\ \mathrm{mA/V^2}$

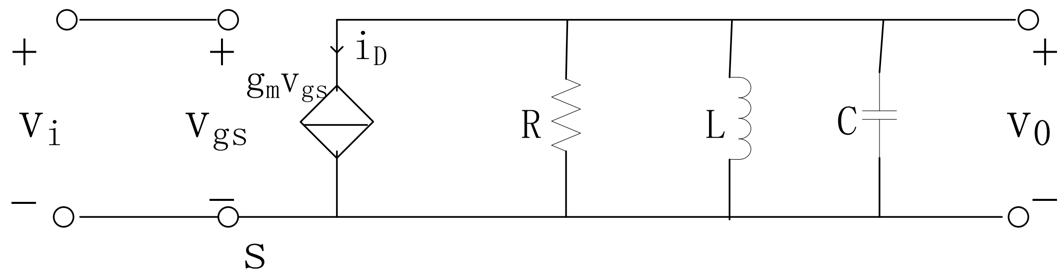
选择合适参数，使得：

谐振频率 $\omega = 10^5\ \mathrm{rad/s}$

$Q = 10$

在谐振时放大器低频小信号增益为-2

例



谐振时：
$$\omega_O = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^5 rad/s$$

$$Q = \omega_O RC = \frac{R}{\omega_O} = 10$$

低频小信号增益：

$$\frac{v_o}{v_i} = -\frac{g_m}{\frac{1}{R} + \frac{1}{SL} + SC} = -2$$

$$g_m = \mathrm{K}(V_I - V_T)$$

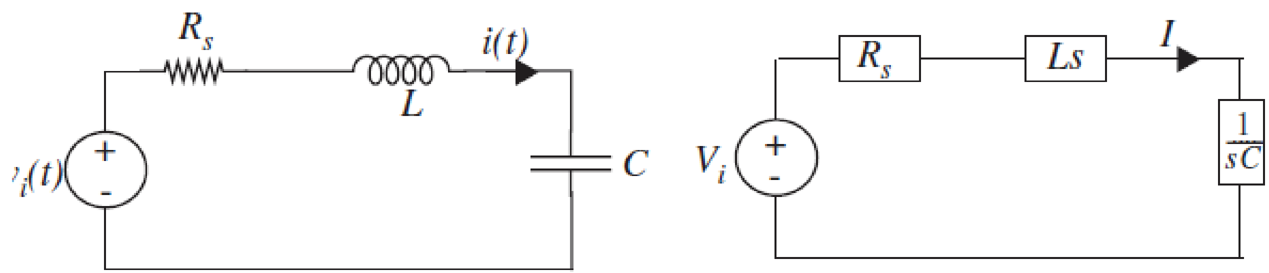
进一步探究：

（1）考虑放大器失真等情况，如何优化参数选择？

（2）根据你所选择的参数，仿真给出该电路的频率响应？

正弦稳态—谐振

串联RLC



(a) Circuit (b) Impedance Model

$$H(s) = \frac{I}{V_i} = \frac{(s/L)\,V_i}{s^2 + sR_s/L + 1/LC}.$$

正弦稳态—谐振

串联RLC

$$\text{Resonant frequency} = \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\text{Bandwidth} = \frac{R_s}{L}.$$

$$Q = \frac{\omega_o L}{R_s}$$

正弦稳态—谐振

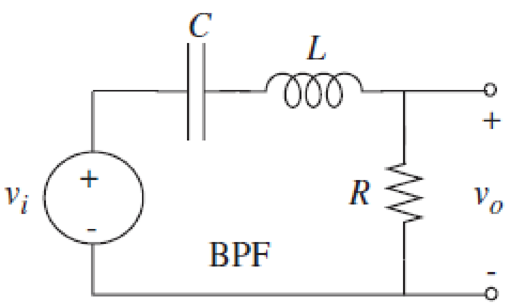
串联RLC

讨论：在该电路不同位置取输出电压，频率响应有什么特点？

正弦稳态—谐振

串联RLC

（1）电阻两端取输出电压---（带通滤波器）

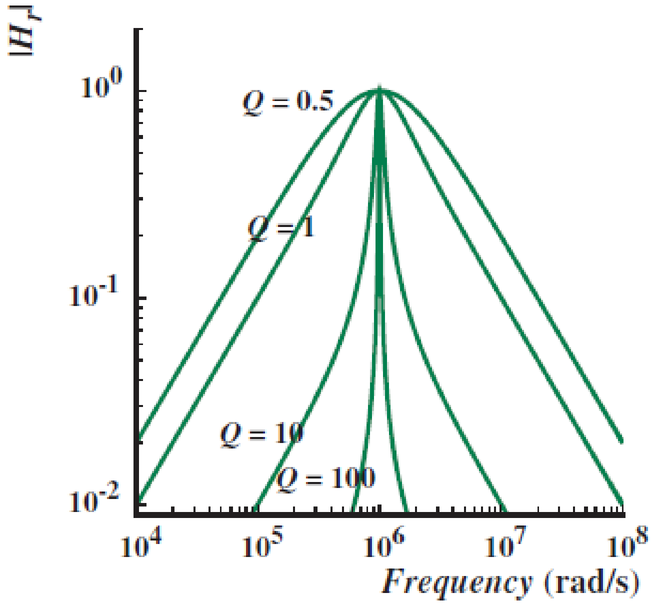


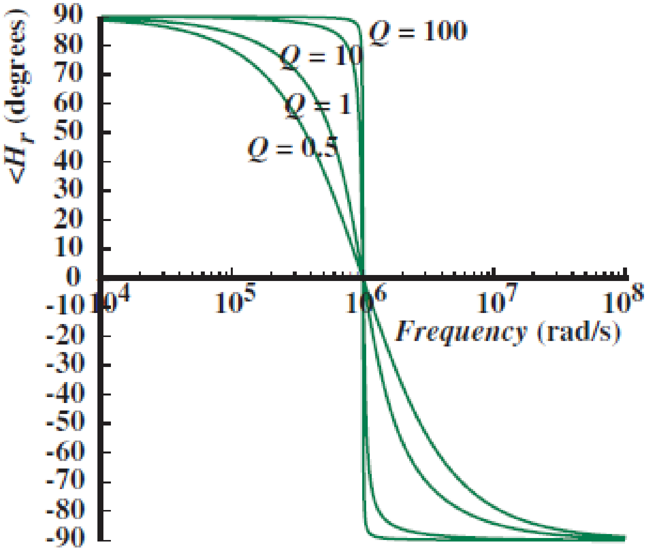
$$V_r = IR = \frac{\frac{sR}{L}V_i}{s^2 + 2\alpha s + \omega_o^2},$$

$$H_r(s) = \frac{V_r(s)}{V_i(s)} = \frac{sR/L}{s^2 + 2\alpha s + \omega_o^2}.$$

正弦稳态—谐振

波特图（不同Q值）





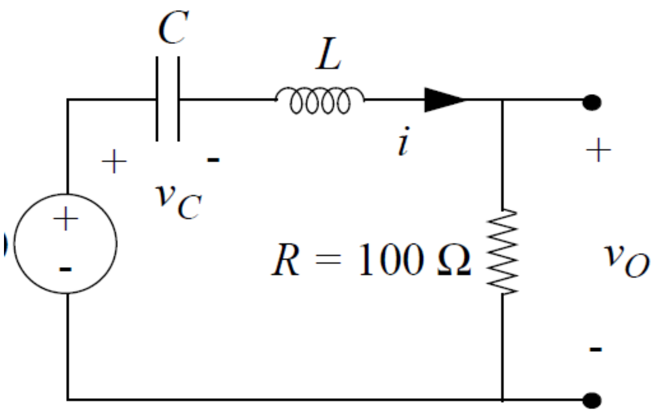
正弦稳态—谐振

例14.3 （P541) 给出参数，分析电路， 自学

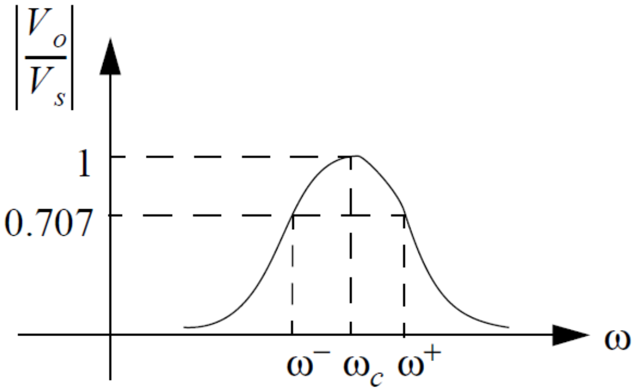
例14.4 （P543)

金属检测器（谐振电路应用，自学）

例



$v_S(t) = V_S \cos(\omega t)$



$$
\begin{aligned}
w_c &= 1 \times 10^6 radians/sec \\
w^+ &= 1.05 \times 10^6 \\
w^- &= 0.95 \times 10^6
\end{aligned}
$$

求L,C;

$v_S = 10\cos 10^6 t$. Calculate $v_C(t), i(t), v_O(t)$.

For $v_S = 10\cos 10^6 t$, determine the total stored energy W_s and the time-averaged power dissipated.

分析

$$Q = \frac{\omega_c}{\omega^+ - \omega^-} = 10$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1 \times 10^6$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R}$$

$$L = 1mH$$

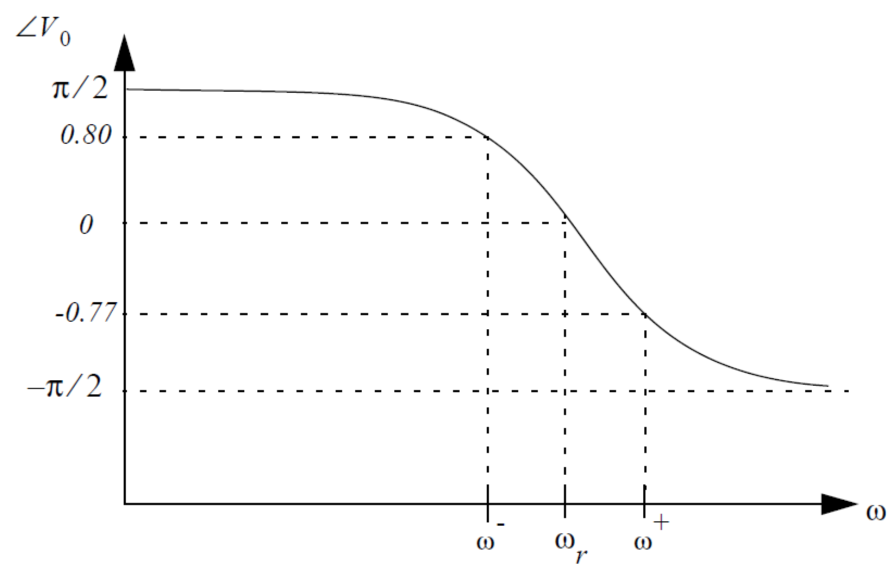
$$C = 1 \times 10^{-9} F$$

分析

$$\frac{V_O}{V_I} = \frac{R}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L + R} = \frac{j\omega RC}{(1-\omega^2 LC) + j\omega RC}$$

$$= \frac{\omega RC e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{\omega RC}{1-\omega^2 LC}\right)\right)}}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}}$$

$$\angle V_O = \tan^{-1}\left(\frac{1-\omega^2 LC}{\omega RC}\right)$$



分析

$$i(t) = \frac{v_S(t)}{Z} = \frac{10e^{j\omega t}}{\frac{1}{j\omega L} + j\omega L + R} = \frac{10(j\omega L)e^{j\omega t}}{(1-\omega^2 LC) + j\omega RC}$$

$$i(t) = \frac{10e^{j\omega t}}{R} = 0.1\cos(10^6 t)$$

$$v_c(t) = \frac{10\cos(10^6 t - \frac{\pi}{2})}{\omega RC} = 100\cos(10^6 t - \frac{\pi}{2})$$

分析

$$v_O(t) = 10\cos(10^6 t)$$

$$W = \frac{1}{2}CV^2 + 12LI^2 = 5\times 10^{-6}\cos^2(10^6 - \frac{\pi}{2}) + 5\times 10^{-6}\cos^2(10^6 t)$$

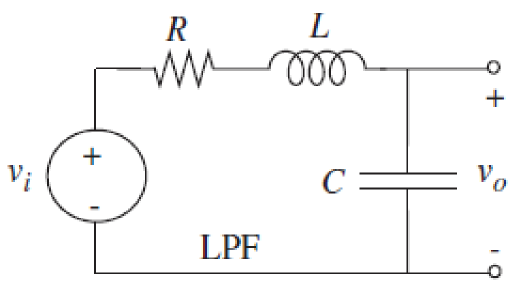
$$W = 5\times 10^{-6} J \qquad P = I^2 R = \cos^2(10^6 t)$$

$$< P >= 0.5$$

正弦稳态—谐振

串联RLC

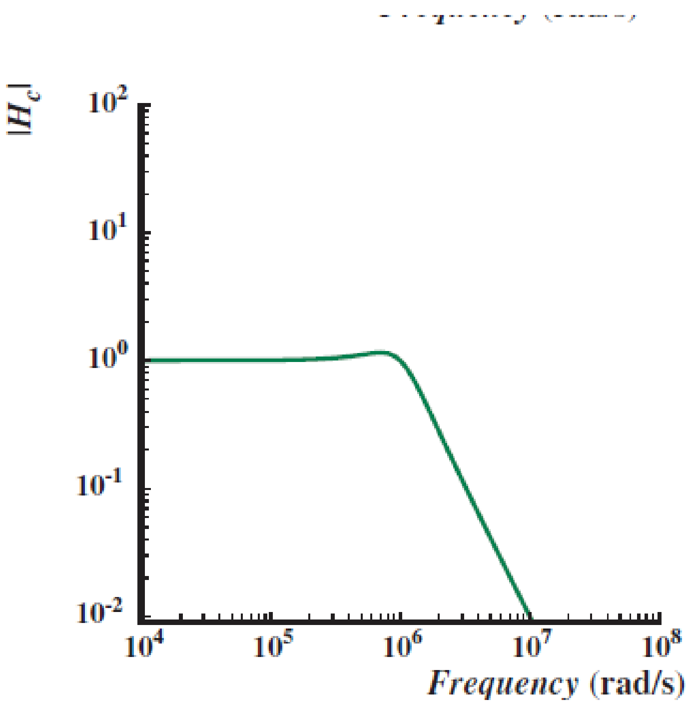
（1）电容两端取输出电压---（低通滤波器）



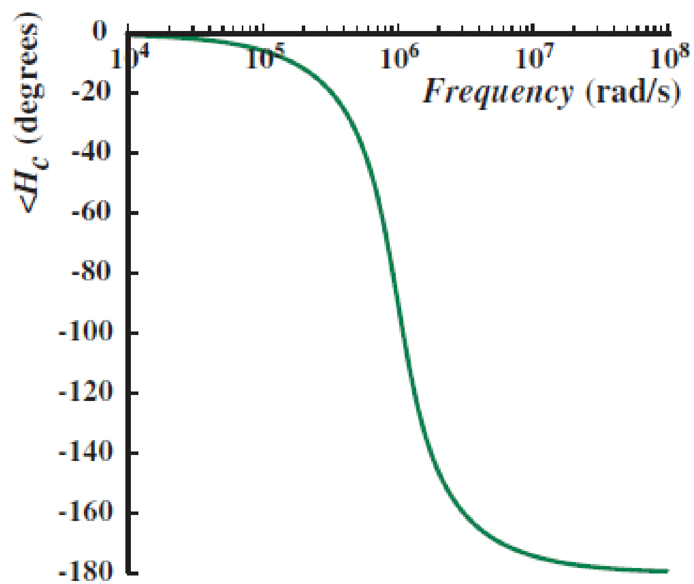
$$H_c(s) = \frac{V_c(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + 2\alpha s + \omega_o^2}.$$

正弦稳态—谐振

波特图



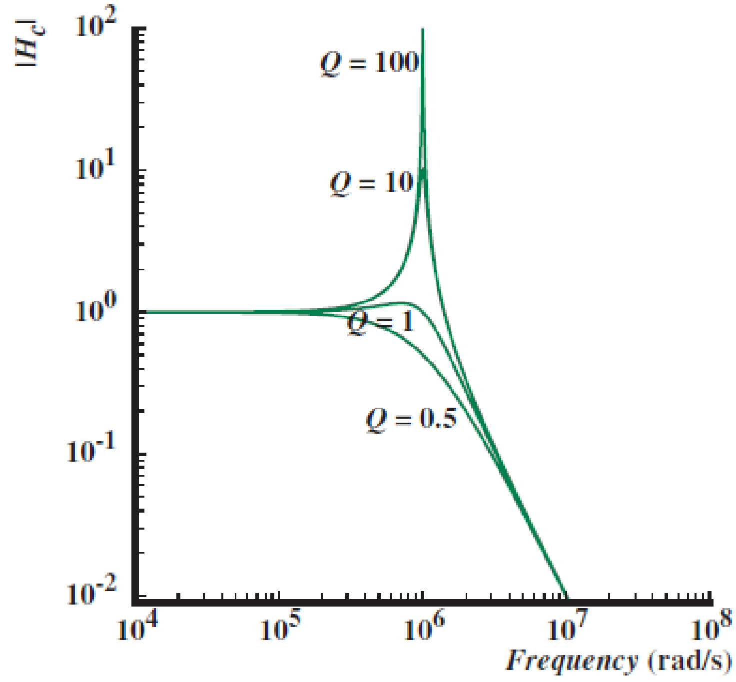
|H_c|
10^2
10^1
10^0
10^-1
10^-2
10^4
10^5
10^6
10^7
10^8
Frequency (rad/s)



<H_c (degrees)
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
-140
-160
-180
10^4
10^5
10^6
10^7
10^8
Frequency (rad/s)

正弦稳态—谐振

波特图（不同Q值）



正弦稳态—谐振

讨论：当驱动频率接近谐振频率时，电容上电压有什么特点？

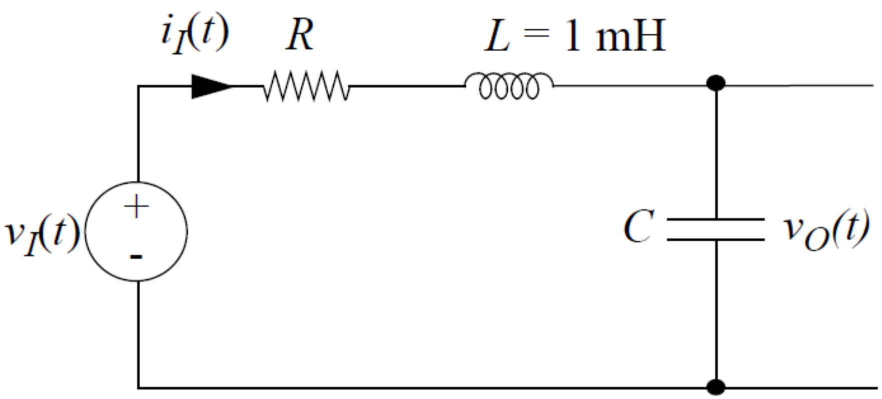
$$|V_c| = QV_i.$$

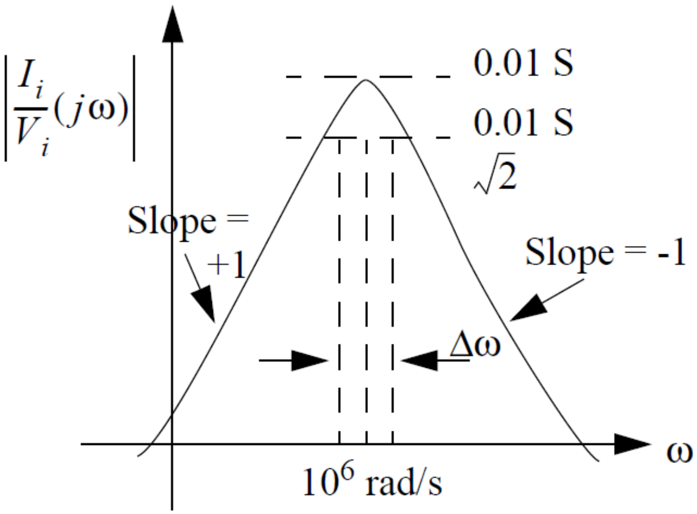
该结论有什么用处？

例14.7（P549）具体数据计算

主观题 10分

例：





求R,C $\Delta\omega$?

The circuit is now excited with a unit step of voltage. The values of $i_I(t)$ and $v_O(t)$ are zero prior to time $t = 0$.

Sketch the signal $v_O(t)$ for t greater than zero, labeling important features.

分析

$$\omega_0 = 10^6$$

$$C = 10^{-9}F$$

$$R = \left\| \frac{V_i}{I_i} \right\| = 100\Omega$$

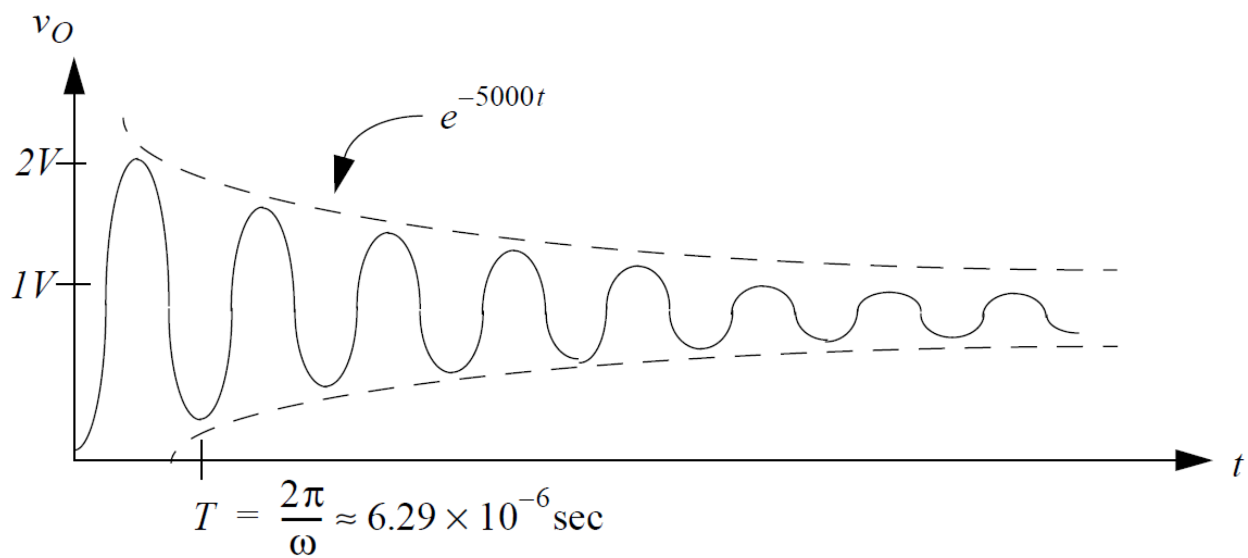
$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = 10$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = 10$$

$$\Delta\omega = 100,000\frac{rad}{s}$$

分析

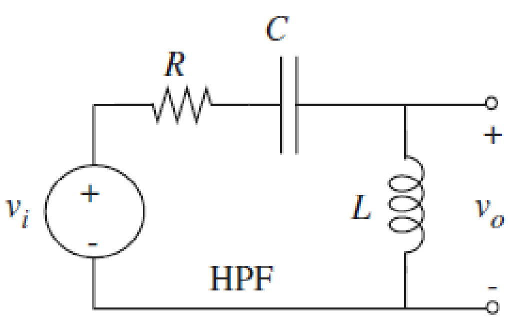
$$v_O(t) = 1 - e^{-5000t}[0.005\sin(998,749t) + \cos(998,749t)]$$



正弦稳态—谐振

串联RLC

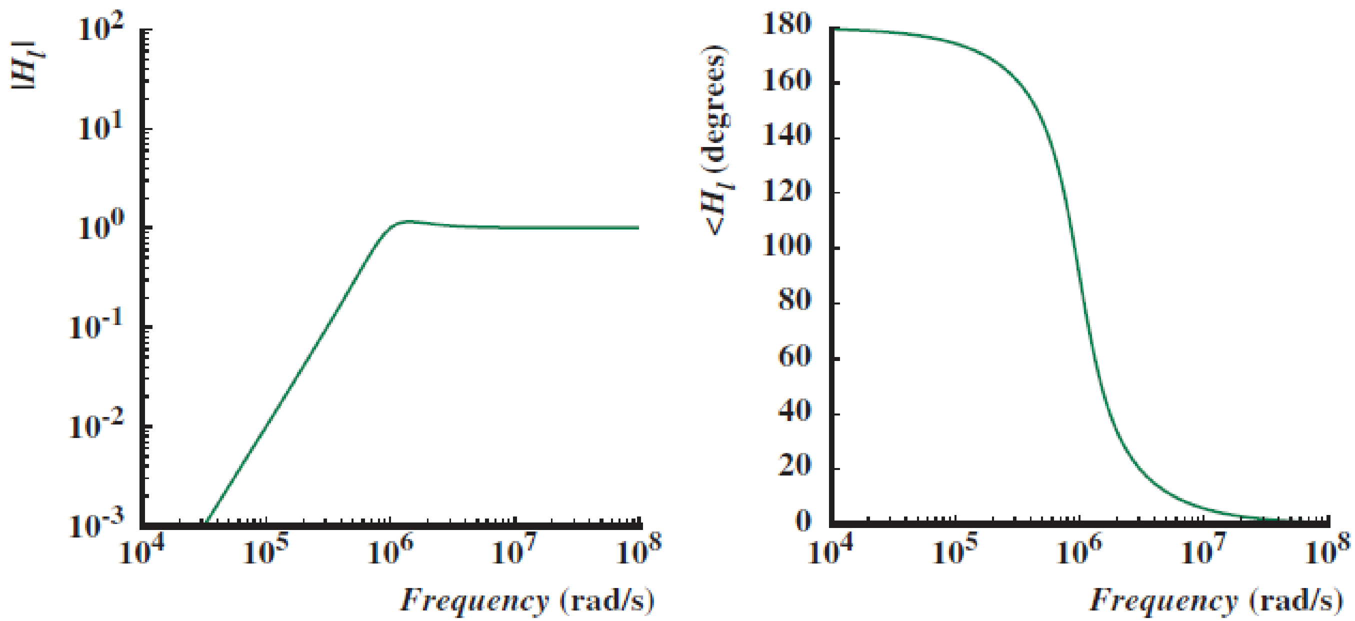
（1）电感两端取输出电压---（高通滤波器）



$$H_l(s) = \frac{V_l(s)}{V_i(s)} = \frac{s^2}{s^2 + 2\alpha s + \omega_o^2}.$$

正弦稳态—谐振

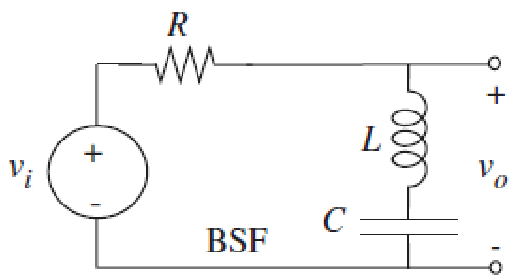
波特图



$|H_l|$
10^2
10^1
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^4 10^5 10^6 10^7 10^8
Frequency (rad/s)
$<H_l$ (degrees)
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
10^4 10^5 10^6 10^7 10^8
Frequency (rad/s)

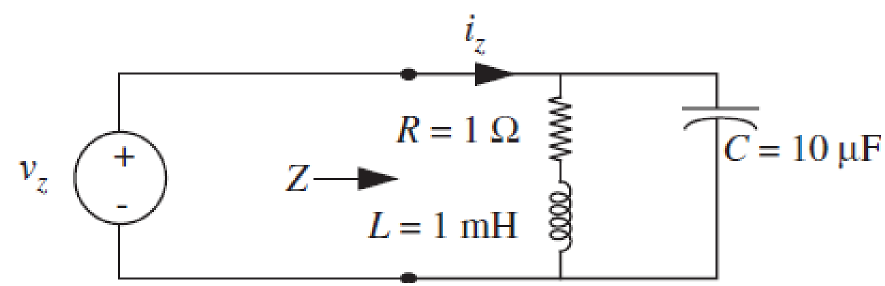
正弦稳态—谐振

凹槽滤波器（陷波器）



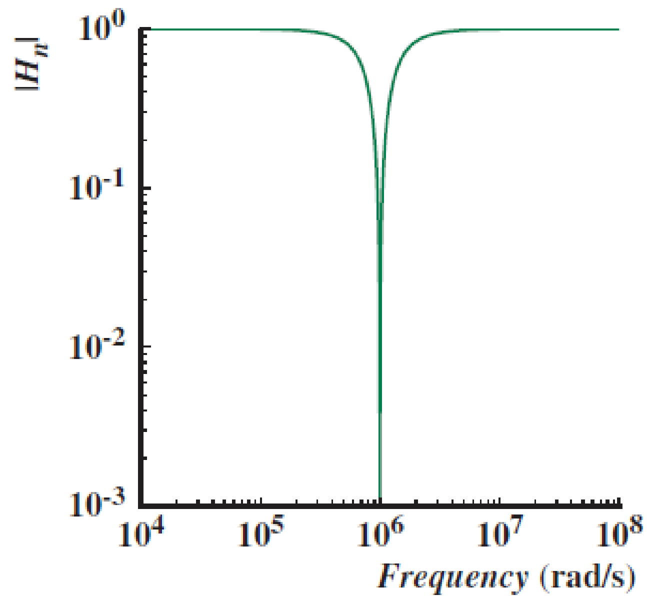
$$H_n(s) = \frac{V_n(s)}{V_i(s)} = \frac{(s^2 + \frac{1}{LC})}{s^2 + 2\alpha s + \omega_o^2}.$$

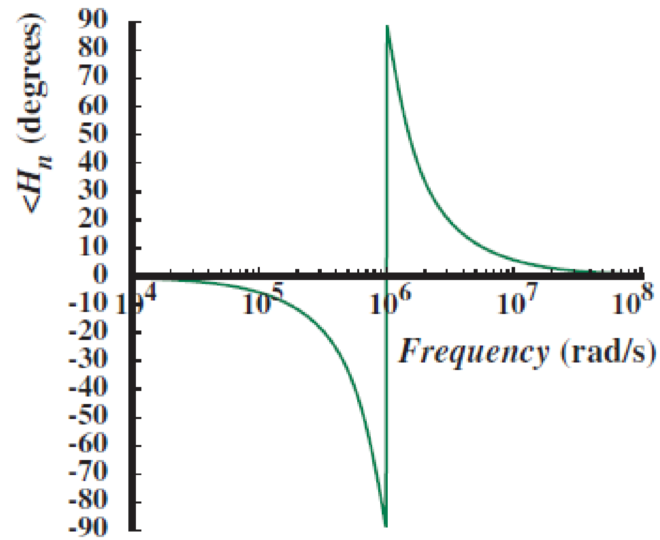
例14.5（P543) 讨论比较



正弦稳态—谐振

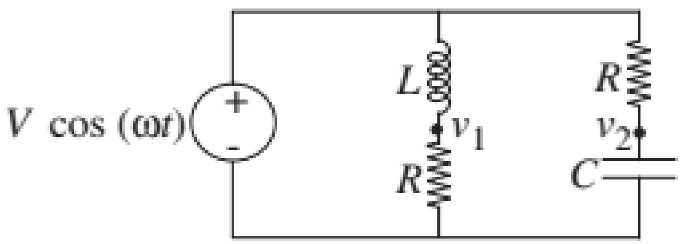
波特图


$|H_n|$
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^4 10^5 10^6 10^7 10^8
Frequency (rad/s)


$<H_n$ (degrees)
90 80 70 60 50 40 30 20 10 0 -10 -20 -30 -40 -50 -60 -70 -80 -90
10^4 10^5 10^6 10^7 10^8
Frequency (rad/s)

正弦稳态—谐振

例



输入 $V\cos(\omega t)$

分析 $v_1 - v_2 = 0$ 电感的表达式

正弦稳态—谐振

例

$$\frac{\frac{1}{SC}}{R+\frac{1}{SC}}-\frac{R}{R+SL}=0$$

$$L=R^2C$$

正弦稳态—谐振

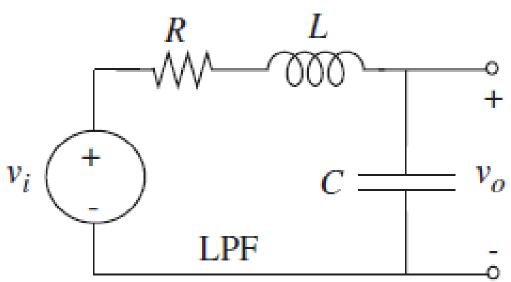
进一步探究：

总结目前具有低通频率响应有哪些电路形式？
分别有什么特点和应用？

sbhe@uestc.edu.cn

正弦稳态—谐振

谐振电路中存储的能量



$$v_i = V_i \cos(\omega t)$$

$$I = \frac{V_i}{R + j\left(\omega L - 1/\omega C\right)}.$$

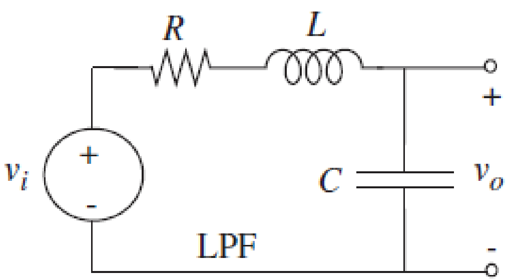
设 $\omega = \omega_o = \dfrac{1}{\sqrt{LC}},$

$$V_c = \frac{I}{j\omega_o C} = \frac{V_i}{j\omega_o RC} = -jV_i\left(\frac{\omega_o L}{R}\right)$$

$$V_l = j\omega_o LI = jV_i\left(\frac{\omega_o L}{R}\right).$$

正弦稳态—谐振

谐振电路中存储的能量



$$|V_c| = |V_l| = QV_i.$$

设 $\omega = \omega_o = \dfrac{1}{\sqrt{LC}},$

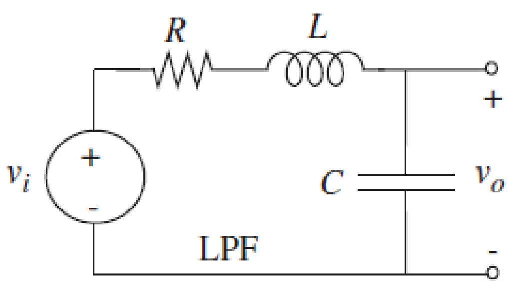
$$\begin{aligned} v_C &= Re\left[V_c e^{j\omega_o t}\right] \\ &= Re\left[-jV_i Q e^{j\omega_o t}\right] \\ &= V_i Q \sin \omega t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_C &= \frac{1}{2} C V_i^2 Q^2 \sin^2(\omega_o t) \\ &= \frac{1}{4} C V_i^2 Q^2 \left(1 - \cos(2\omega_o t)\right). \end{aligned}$$

$$w_C = \frac{1}{4} \frac{L}{R^2} V_i^2 \left(1 - \cos(2\omega_o t)\right).$$

正弦稳态—谐振

谐振电路中存储的能量



$$i_L = Re\left[Ie^{j\omega_o t}\right]$$
$$= \frac{V_i}{R}\cos(\omega_o t)$$

描述能量交换过程?

$$w_L = \frac{1}{4}\frac{L}{R^2}V_i^2\left(1+\cos(2\omega_o t)\right).$$

设 $\omega = \omega_o = \dfrac{1}{\sqrt{LC}},$

$$w_{\text{total}} = w_L + w_C = \frac{1}{2}\frac{L}{R^2}V_i^2.$$

正弦稳态—谐振

注意：品质因数Q的三种定义

（1）
$$Q=\frac{\text{Stored energy}}{\text{Average energy dissipated per radian}}.$$

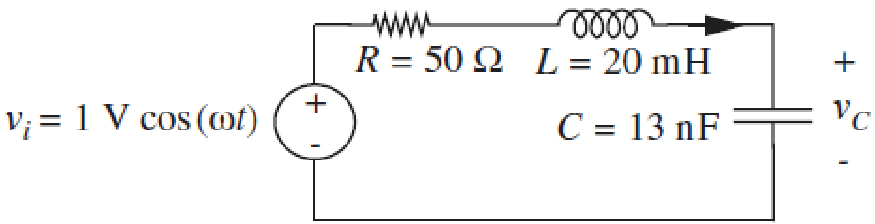
（2）
$$Q=\frac{\omega_o}{2\alpha}.$$

请根据这些定义，分析二阶系统的Q是否一致，高阶系统呢？

（3）
$$Q=\frac{\omega_o}{\omega_2-\omega_1}$$

正弦稳态—谐振

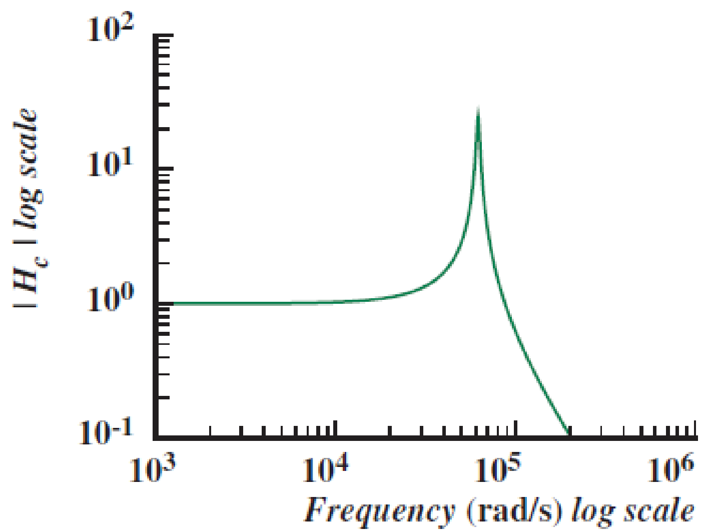
例14.8 高品质因数的RLC 电路时域和频域性质

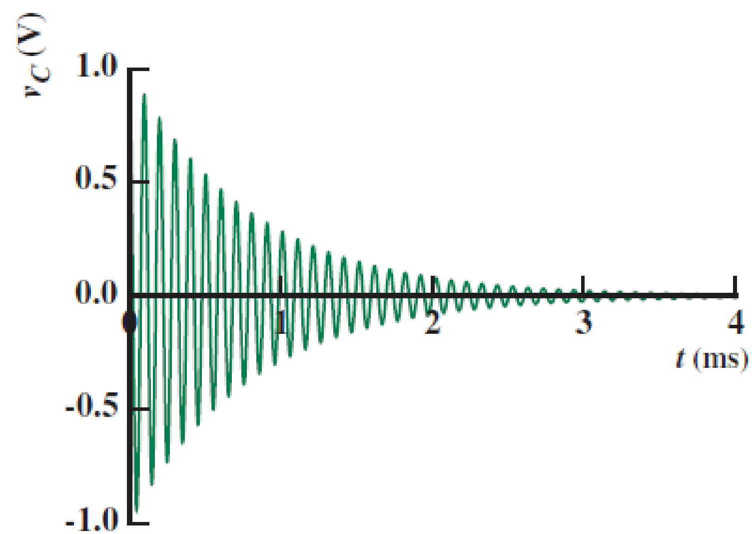


$$|H_c(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}}. \qquad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

正弦稳态—谐振

例14.8 高品质因数的RLC 电路时域和频域性质

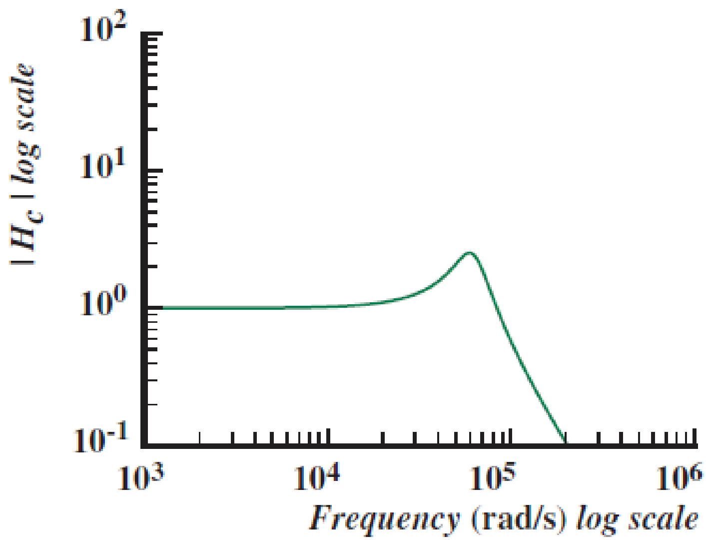


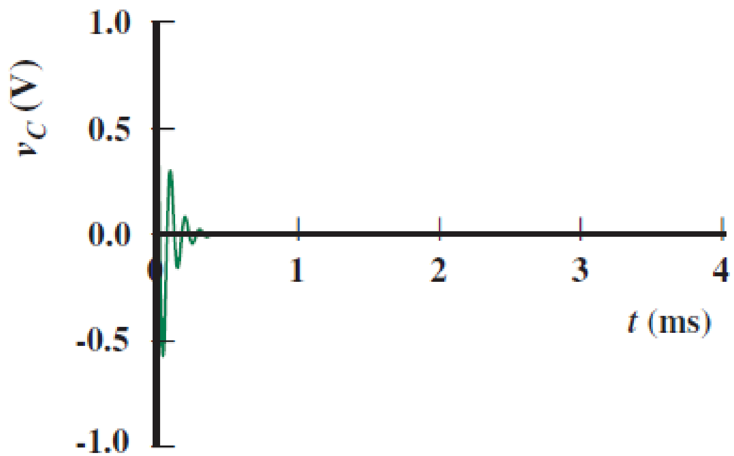


$Q = 25, (R = 50\ \Omega);$

正弦稳态—谐振

例14.8 高品质因数的RLC 电路时域和频域性质





$Q = 2.5, (R = 500\ \Omega);$

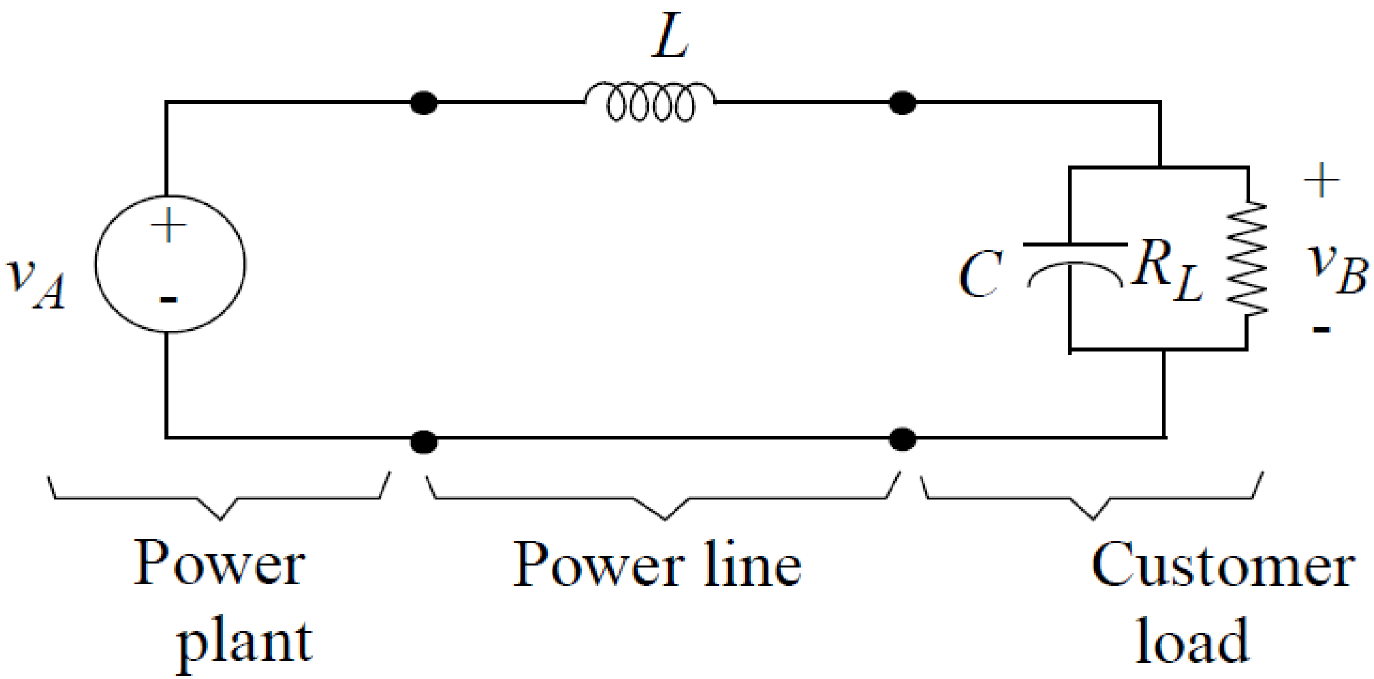
讨论有什么样的看法？

sbhe@uestc.edu.cn

主观题 10分

设置

问题14.12 (P563)



正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

分析

(1)

$$Z = j\omega L + R_L$$

$$i = \frac{V_A}{R_L + j\omega L}$$

$$v_B = \frac{R_L V_A}{R_L + j\omega L} = \frac{R_L A e^{j\omega t}}{R_L + j\omega L}$$

$$|v_B| = \frac{R_L A}{\sqrt{R_L^2 + \omega^2 L^2}} = 99.7kV$$

分析

(2)

$$|v_B| = \frac{R_L \cdot A}{\sqrt{R_L^2(1-\omega^2 LC)+\omega^2 L^2}} = 141kV$$

Power dissipated:

$$< P >= \frac{1}{2}\frac{|v_B|^2}{R_L} = 99.4MW$$

分析

(3)

$$\frac{R_L}{\sqrt{R_L^2(1-\omega^2 LC)+\omega^2 L^2}} = 1$$

$$R_L^2(1-\omega^2 LC)+\omega^2 L^2 = R_L^2$$

$$R_L^2 - (\omega^2 L R_L^2)C + \omega^2 L^2 = R_L^2$$

$$(\omega^2 L R_L^2)C = \omega^2 L^2$$

$$C = \frac{L}{R_L^2}$$

With $L = 0.25H$:

$$C = \frac{1}{4R_L^2}$$

sbhe@uestc.edu.cn

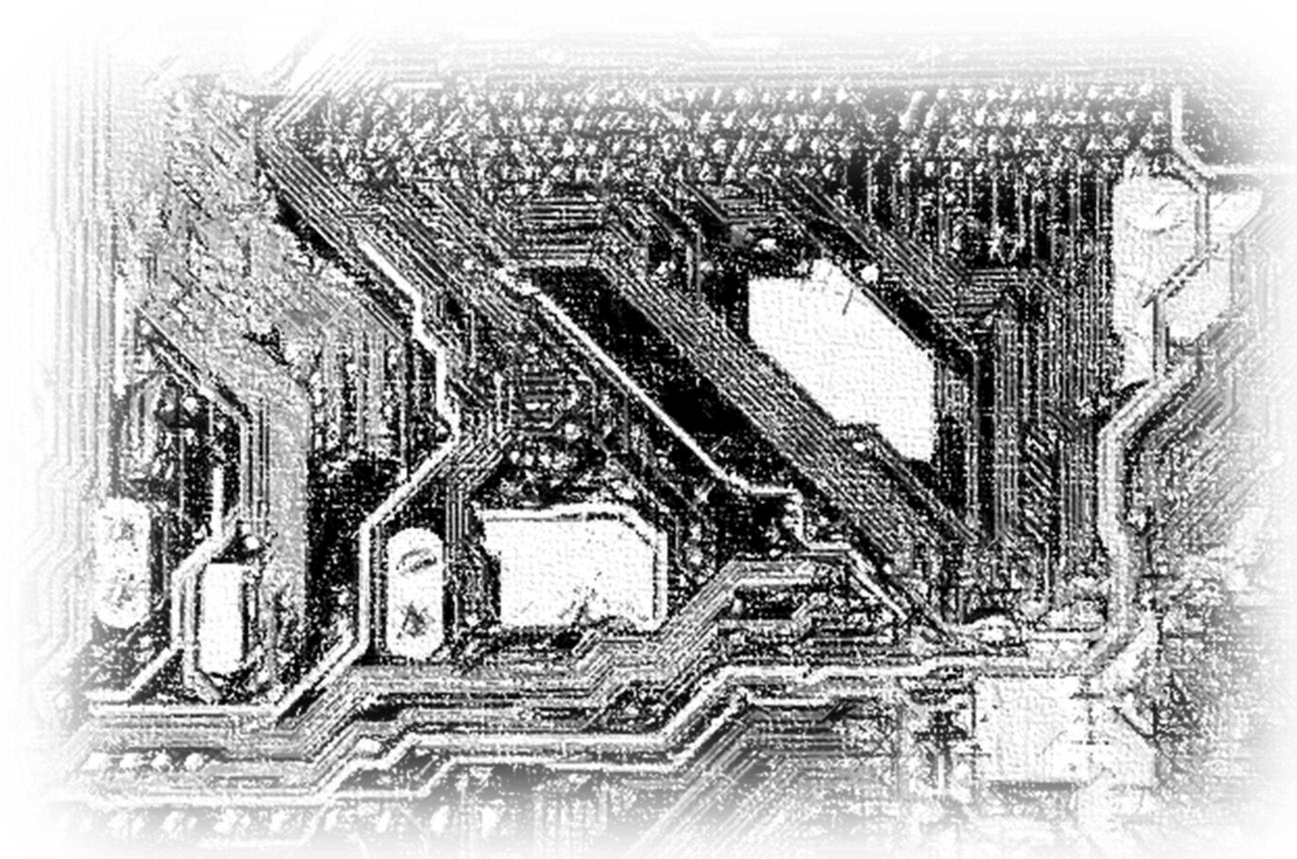
本章关键词：谐振，频率选择，滤波

- 练习14.1, 14.3，14.4，14.7，14.9 （P557)

- 问题14.2，14.3，14.14，14.15

建议小组讨论解决：问题14.4，14. 6，14.8，14.12，14. 16，

sbhe@uestc.edu.cn



何松柏
电子工程学院

谢谢！

sbhe@uestc.edu.cn