4.2 高阶线性微分方程解的结构

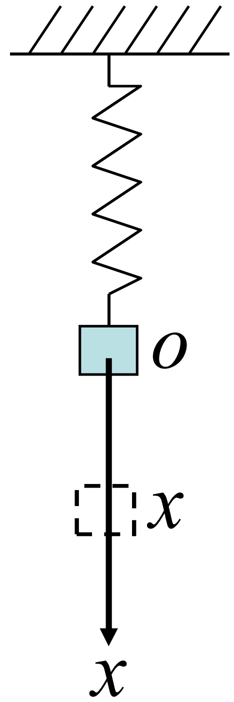
一、高阶线性微分方程举例

二、线性微分方程解的结构

2.1 高阶线性微分方程举例

例2.1 质量为m的物体自由悬挂在一端固定的弹簧上,当重力与弹性力抵消时, 物体处于 平衡状态, 若用手向下拉物体使它离开平衡位置后放开, 物体在弹性力与阻力作用下作往复运动, 阻力的大小与运动速度成正比, 方向相反. 建立位移满足的微分方程.

解: 取平衡时物体的位置为坐标原点,建立坐标系如图. 设时刻 t 物位移为 $x(t)$.



(1) 自由振动情况. 物体所受的力有:

弹性恢复力 $f=-cx$　(虎克定律)

阻力 $\boldsymbol{R=-\mu\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$

据牛顿第二定律得 $\boldsymbol{m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-cx-\mu\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$

令 $2n=\frac{\mu}{m},\ k^2=\frac{c}{m}$, 则得有阻尼自由振动方程:

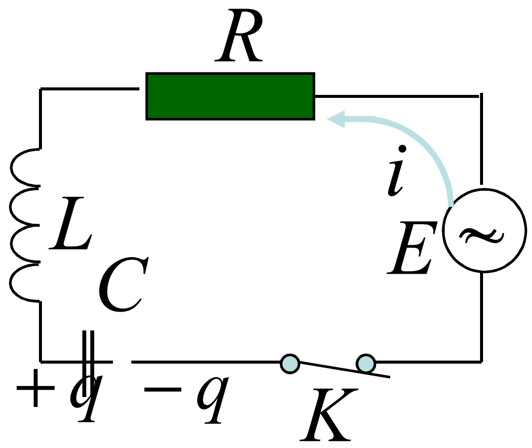
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2n\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+k^2x=0$$

(2) 强迫振动情况. 若物体在运动过程中还受铅直外力 $F=H\sin pt$ 作用，令 $h=\frac{\mathrm{H}}{m}$, 则得强迫振动方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2n\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+k^2x=h\sin pt$$

例2.2 设有一个电阻 R, 自感L ,电容 C 和电源 E 串联组成的电路, 其中R , L , C 为常数 , $\boldsymbol{E = E_m \sin \omega t}$, 求电容器两极板间电压 u_c所满足的微分方程 .

提示: 设电路中电流为 $i(t)$, 极板上的电量为 $q(t)$, 自感电动势为 E_L, 由电学知



$$\boldsymbol{i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t},\quad u_C = \frac{q}{C},\quad E_L = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$$

根据回路电压定律:

在闭合回路中, 所有支路上的电压降为 0

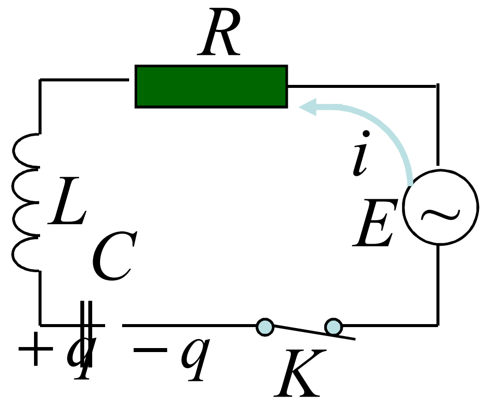
$$E - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - \frac{q}{C} - Ri = 0$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

化为关于 u_c 的方程: **注意** $i=C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, 故有

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=E_m\sin\omega t$$

令 $\beta=\dfrac{R}{2L}, \omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$



串联电路的振荡方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+2\beta\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\omega_0{}^2u_C=\frac{E_m}{LC}\sin\omega t$$

如果电容器充电后撤去电源 ($E=0$) , 则得

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+2\beta\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\omega_0{}^2u_C=0$$

例1.1 **例2.2** 方程的共性 — 可归结为同一形式:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$ 为二阶线性微分方程.

***n* 阶线性微分方程**的一般形式为

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

$$\begin{cases} f(x) \not\equiv 0 \text{ 时, 称为非齐次方程;} \\ f(x) \equiv 0 \text{ 时, 称为齐次方程.} \end{cases}$$

复习: 一阶线性方程 $y' + P(x)y = Q(x)$

通解: $$y = \underbrace{C e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}}_{\text{齐次方程通解}Y} + \underbrace{e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x} \int Q(x) e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x}_{\text{非齐次方程特解}\, y^*}$$

2.2 线性微分方程解的结构

1. 线性齐次微分方程解的结构

$$L(\quad)=\frac{d^n}{dt^n}+P_1(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}+\cdots+P_{n-1}(t)\frac{d}{dt}+P_n(t)$$

$$(1)L(0)=0;$$

$$(2)L(C_1x_1+C_2x_2+\cdots+C_nx_n)$$

$$=C_1L(x_1)+C_2L(x_2)+\cdots+C_nL(x_n)$$

引理1 若函数 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个解，则 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ **(C_1, C_2为任意常数)** 也是该方程的解. (叠加原理)

证： 将 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 代入方程左边，得

$$[C_1 y_1'' + C_2 y_2''] + P(x)[C_1 y_1' + C_2 y_2']$$
$$+ Q(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2]$$
$$= C_1[y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1]$$
$$+ C_2[y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2] = 0$$

证毕

定理2.1（解的叠加性）

若x_1，$x_2,\cdots$，x_n均是线性齐次方程$L(x)=0$的解，则

$x=C_1x_1+C_2x_2+\cdots+C_nx_n$也是该方程的解.

说明:

$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 不一定是所给二阶方程的通解.

例如, $\boldsymbol{y_1(x)}$ 是某二阶齐次方程的解, 则

$\boldsymbol{y_2(x) = 2\,y_1(x)}$ 也是齐次方程的解

但是 $\boldsymbol{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = (C_1 + 2C_2)\,y_1(x)}$

并不是通解

为解决通解的判别问题, 下面引入函数的线性相关与线性无关概念.

定义2.1 设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是定义在区间 I 上的 n 个函数, 若存在**不全为 0** 的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$, 使得

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \cdots + k_n y_n(x) \equiv 0,\ x \in I$$

则称这 n 个函数在 I 上**线性相关**, 否则称为**线性无关**.

例如, $1, \cos^2 x, \sin^2 x$, 在$(-\infty, +\infty)$上都有

$$1 - \cos^2 x - \sin^2 x \equiv 0$$

故它们在任何区间 I 上都**线性相关**;

又如, $1, x, x^2$, 若在某区间 I 上 $k_1 + k_2 x + k_3 x^2 \equiv 0$, 则根据二次多项式至多只有两个零点, 可见 k_1, k_2, k_3 必需全为 0, **故 $1, x, x^2$** 在任何区间 I 上都 **线性无关.**

两个函数在区间 I 上线性相关与线性无关的**充要条件:**

$y_1(x), y_2(x)$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 存在不全为 0 的 k_1, k_2 使

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) \equiv 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{y_1(x)}{y_2(x)} \equiv -\frac{k_2}{k_1}$$

(无妨设 $k_1 \neq 0$)

$y_1(x), y_2(x)$ 线性无关 $\Longleftrightarrow \dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \not\equiv$ 常数

可微函数 y_1, y_2 线性无关

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

(证明略)

思考: 若 $y_1(x), y_2(x)$ 中有一个恒为 0, 则 $y_1(x), y_2(x)$

必线性 相关

引理 2 若 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程的两个线性无关特解, 则 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ (C_1, C_2 为任意常数) 是该方程的通解. (自证)

例如, 方程 $y'' + y = 0$ 有特解 $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$, 且 $\dfrac{y_2}{y_1} = \tan x \not\equiv$ 常数, 故方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

定理2.3 若 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 n 阶齐次方程

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0$$

的 n 个线性无关解, 则方程的通解为

$$y = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n \quad (C_k \text{为任意常数})$$

定理2.3（解的线性无关判别法）

若$x_1(t),\cdots$，$x_n(t)$是n阶线性齐次方程定义在区间I上的解，则它们在I上线性无关的充要条件是，在I上存在一点t_0，使由这n个解及其各阶导数在t_0处所构成的行列式

$$w(t_0)=\begin{vmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) & \cdots & x_n(t_0) \\ \dot{x}_1(t_0) & \dot{x}_2(t_0) & \cdots & \dot{x}_n(t_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t_0) & x_2^{(n-1)}(t_0) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix}\neq 0$$

$w(t_0)$称为解组$x_1(t),\cdots,x_n(t)$在t_0处的Wronski行列式.

定理2.4 若 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 n 阶齐次方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

的 n 个线性无关的特解，则方程的任一解均可表示为

$$y = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n \quad (C_k\text{为任意常数})$$

2. 线性非齐次方程解的结构

引理 设 $y^*(x)$ 是二阶非齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad ①$$

的一个特解, $Y(x)$ 是相应齐次方程的通解, 则

$$y = Y(x) + y^*(x) \quad ②$$

是非齐次方程的通解 .

证: 将 $y = Y(x) + y^*(x)$ 代入方程①左端, 得

$$(Y'' + y^{*''}) + P(x)(Y' + y^{*'}) + Q(x)(Y + y^*)$$

$$= (y^{*''} + P(x)y^{*'} + Q(x)y^*) + (Y'' + P(x)Y' + Q(x)Y)$$

$$= f(x) + 0 = f(x)$$

故 $y = Y(x) + y^*(x)$ 是非齐次方程的解, 又Y中含有两个独立任意常数, 因而 ② 也是通解 .　　　证毕

例如, 方程 $y'' + y = x$ 有特解　$y^* = x$

对应齐次方程 $y'' + y = 0$ 有通解

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

因此该方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x$$

引理 设 $y_k^*(x)$ $(k=1,2,,n)$ 分别是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_k(x) \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

的特解, 则 $y = \sum_{k=1}^{n} y_k^*$ 是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

的特解. (非齐次方程之解的叠加原理)

定理 2.5 给定 n 阶非齐次线性方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x)$$

设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是对应齐次方程的 n 个线性无关特解，$y^*(x)$ 是非齐次方程的特解，则非齐次方程的通解为

$$y = \underline{C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x)} + y^*(x)$$

$$= Y(x) + y^*(x)$$

齐次方程通解　　非齐次方程特解

例3. 设线性无关函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的解, C_1, C_2 是任意常数, 则该方程的通解是 (D).

(A) $C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_3$;

(B) $C_1 y_1 + C_2 y_2 + (C_1 + C_2) y_3$;

(C) $C_1 y_1 + C_2 y_2 - (1 - C_1 - C_2) y_3$;

(D) $C_1 y_1 + C_2 y_2 + (1 - C_1 - C_2) y_3$.

提示: (C) $C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) - y_3$

(D) $C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) + y_3$

$y_1 - y_3, y_2 - y_3$ 都是对应齐次方程的解,

二者线性无关 . (反证法可证)

例4. 已知微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 有三个解 $y_1 = x, y_2 = e^x, y_3 = e^{2x}$，求此方程满足初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = 3$ 的特解 .

解: $y_2 - y_1$ 与 $y_3 - y_1$ 是对应齐次方程的解, 且

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{e^x - x}{e^{2x} - x} \neq \text{常数}$$

因而线性无关, 故原方程通解为

$$y = C_1(e^x - x) + C_2(e^{2x} - x) + x$$

代入初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = 3$, 得 $C_1 = -1, C_2 = 2$,

故所求特解为 $y = 2e^{2x} - e^x$.

定理 2.6 若x_1与x_2分别为线性非齐次方程

$$L_1(x)=F_1 \text{与} L_2(x)=F_2$$

的解，则x_1+x_2必为方程$L(x)=F_1+F_2$

的解.