无穷小量的前世今生

刘正浩 2019270103005

0. 前奏

无穷小量，一个听起来既熟悉又陌生的名词。我们在学习数学的过程中一定都听说过“无穷小量”这个概念，但无穷小量究竟是什么？打个比方好了：如果说数学是人类智力的那一顶王冠，那么“无穷小量”可以说是这顶王冠上最为璀璨的宝石之一。

从古希腊到工业革命，从东方到西方，人们对无穷小量的追寻从未停止过。无数哲学家、数学家的思考与探究，让这个如幽灵一般诡秘的概念逐渐变得清晰起来；我们也能从中领悟到，数学，这座人类文明史上最宏伟壮丽的大厦，是怎样耗尽先贤的心血、聚集先贤的才智，一砖一瓦地被建立起来的。

1. 隐匿的幽灵

早在古希腊，哲学家芝诺就提出了一个著名的佯谬：

一只乌龟和人赛跑，人的速度比乌龟快一百倍，但在起跑时乌龟领先人 99 个单位。那么人能否追上乌龟？

现在我们都知道，人一定会追上乌龟，而且我们很轻易地就可以算出人追上乌龟花费的时间：$\frac{99}{100-1}=1$ 个单位时间。

然而，芝诺却不这么认为。他是这样分析的：人要想追上乌龟，必须比乌龟多走过 99 个单位；但在人走过 99 个单位的同时，乌龟又向前走了 0.99 个单位；人在追上这 0.99 个单位的同时，乌龟又向前走了 0.0099 个单位……也就是说，在芝诺的眼中，人永远追不上乌龟。

换句话说，芝诺认为**人与乌龟之间很小的距离（也就是无穷小量）是永远不可能被忽略掉的，是永远不可能等于 0 的**。这在“正常人”的眼中是多么不合理的结论！由此可以看出，古希腊人已经拥有了关于无穷小量的模糊概念，但正因为芝诺佯谬的存在，古希腊的几何证明（当时的“数学”）中就此开除了无穷小量的“数学籍”。

时间来到芝诺悖论之后七百年。在遥远的东方，数学家刘徽提出了计算圆周率的著名方法——割圆术。

在割圆术中，他用弦代替弧计算多边形的面积来近似计算圆的面积，并在《九章算术注》中这样描述他的割圆术：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣。”翻译成白话就是：（多边形）分割得越细，多边形与圆的差距就越来越小，一直分割一直分割，到了不能再继续分割的时候，多边形就和圆重合了，它们的面积差也就消失了。

很明显，刘徽认为，**用来近似圆的多边形与圆之间面积之差（在分割数很大时同样是一个无穷小量），随着分割数越来越大而变得可以被忽略掉，也就是无穷小量可以等于 0！**这和芝诺得到的结论刚好相反！

所以，无穷小量究竟能不能被忽略掉？它究竟是什么？是不是 0？抑或是只有在某些情况下它才能被看做 0？在古代哲学家、数学家对数学的讨论过程中，就这样埋下了一颗名为无穷小量的定时炸弹。这个如幽灵般徘徊在数学世界上空的模糊概念，将在将来爆发出来，引发著名的第二次数学危机。

2. 幽灵现身

由于古希腊的数学家们不把无穷小量作为“数学”中的一个概念，自第一次数学危机（希帕索斯发现无理数）之后的几百年间，数学这只“怪兽”始终以温和而又完美的姿态面对着人类——在人们看来，数学即将成为一个完美的体系，这个体系中没有任何的疑点，它就是真理的化身，可以用来解释世间万物。

可真理哪有这么容易就能来到人们身边呢？既然无穷小量是真实存在的，那么将它排除在外的“数学”又怎么可能是完美的体系？在以往的探究中埋下的这颗定时炸弹，即将爆发。

十七世纪，两位伟人——牛顿和莱布尼茨诞生了。现在我们都说，是他们分别独自创立了微积分这一门学科。但实际上，在他们之前，还有许多伟人也对微积分这一学科有过贡献：

开普勒给出了公式：$\int_0^{\theta}\sin\theta d\theta=1-\cos\theta$；

卡瓦列里给出了公式：$\int_0^{x}t^n dt=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$；

费马给出了导数思想的雏形，以及著名的费马引理：若函数 $f:(a,b)\to\boldsymbol{R}$ 在 $x_0\in(a,b)$ 处取得极值，且 f 在 x_0 处可导，则 $f'(x)=0$；

帕斯卡注意到，很小的弧与切线可以互相替代，并在证明体积公式时略去

了高阶无穷小；

巴罗（牛顿的恩师）给出了求切线的方法。

但不要误会，他们的“微积分”与我们现在所熟知的微积分有很大的差别。差别在哪里？差别正在于他们的“微积分”中的**极限理论是不完整的，使用的“无穷小量”这一概念更是扑朔迷离**。

那么话说回来，无穷小量究竟又是怎样引发一场数学危机的？

举一个例子好了：求 $f(x) = x^2$ 在 $x = 2$ 处的导数。牛顿是这样计算的：

$$f'(2) = \frac{(2+\alpha)^2 - 2^2}{\alpha} = \frac{4\alpha + \alpha^2}{\alpha} = 4 + \alpha = 4$$

牛顿把 α 叫做“无穷小量”。猛一看这个式子好像像模像样的没什么毛病，于是牛顿就由此把他的理论推广开来，并用它解决了大量以前无法解决的问题。

然而，当时英国的大主教贝克莱发现了这其中的矛盾。贝克莱于 1734 年专门写了一本书，攻击流数（导数）“是消失了的量的鬼魂……能消化得了二阶、三阶流数的人，是不会因吞食了神学论点就呕吐的。”他说，用忽略高阶无穷小来消除了原有错误，“是依靠双重的错误得到了虽然不科学却是正确的结果”。他是这样反驳牛顿的：要使前两个式子 $\frac{(2+\alpha)^2 - 2^2}{\alpha}$、$\frac{4\alpha + \alpha^2}{\alpha}$ 成立，α 必须不等于0；但到了第三个式子 $4 + \alpha$ 中，α 居然又等于 0 了……他还讽刺挖苦牛顿说：既然分子和分母都变成“无穷小”了，而无穷小作为一个量，**既不是 0，又不是非 0，**那它一定是“量的鬼魂”了！

虽然贝克莱提出疑问的动机并不是促进数学的发展，但他提出的这个问题对新兴的微积分学来说却是致命的：它动摇了微积分学的根基。

在此后的两百年间，有无数数学家前赴后拥，尝试对无穷小量悖论展开证明。例如：麦克劳林试图从瞬时速度的方面对无穷小量进行阐述，泰勒则试图用差分法解释无穷小量，等等。但可惜的是，他们都没有成功，数学家们始终没能摆脱“无穷小量”这个飘荡的幽灵。

3. 幽灵的消散

之所以会有关于无穷小量的悖论的出现，还是由于极限理论是不完善的，它还存在很大的缺陷。没有对极限这一概念的完美的阐述，也就不可能清晰地描述无穷小量这个概念。此时的微积分学就像一栋地基不牢的大厦，看上去壮丽辉煌、

夺人眼球，但实际上马上就要倾倒，让几代人的心血付诸东流。

好在江山代代出人才，在贝克莱质疑的两百年后，逐渐有数学家醒悟过来，开始对极限这一概念进行详细严谨的阐述。

数学家达朗贝尔首先将微积分研究的问题转化成极限的问题，并这样解释极限：“一个变量趋近于一个固定的的量，并且趋近的程度小于任何给定的量”。在这个阐述中，已经能看到$\varepsilon-\delta$语言的影子了。然而，达朗贝尔同意无穷小量/逐渐消失的量是没有意义的。他斩钉截铁般地宣称：“一个量要么是有，要么是没有。如果是有，它就不可能消失；如果是没有，它就确实消失了。假设存在介于这两者之间的中间状态，那它就只能是一头由狮头羊身和蛇尾构成的吐火怪物。”现在我们知道，他关于极限的表述有部分是正确的，但他关于无穷小量的认识却是错误的：无穷小量当然真实存在！

之后，柯西在1821年出版的《分析教程》中如此给出极限的定义：“当属于一个变量的相继值无限地趋近某个固定值时，如果以这样一种方式告终，变量值同固定值之差小到我们希望的**任意小**，那么这个固定值就称为其他所有值的极限”。柯西认为，极限是一个无限趋近的过程，是动态的、变化的。除此之外，他还给出了无穷小的定义：“当一个变量的连续数值无限减小（从而变得小于任何给定的值）时，这个变量就称为一个无穷小的量”。但很可惜的是，柯西对”无穷小量的值究竟是多少”这个问题闭口不谈，无穷小量仍然没有被解释清楚。

后来，经过魏尔斯特拉斯、戴德金、康托尔等数学家的不懈努力，数学家们通过把极限论建立在严格的实数理论基础上的方法，形成了严谨地定义极限的**$\boldsymbol{\varepsilon-\delta}$语言**。

例如，用$\varepsilon-\delta$语言描述$x\to x_0$时的函数极限：

设 $f:\overset{0}{U}(x_0)\to R$ 是任一函数，若存在常数$a\in\mathbf{R}$，它与$f(x)$满足如下关系：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)-a|<\varepsilon$，则称$a$是当$x\to x_0$时$f(x)$的极限。

有了 $\varepsilon-\delta$语言，我们就可以轻易地完美解释贝克莱提出的疑问：对于$f(x)=x^2$在$x=2$处的导数，

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2+\Delta x)^2-2^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4$$

从上面的式子就可以看出，用极限来描述求导的过程，比起牛顿那种粗糙的做法是多么地优雅而又严谨！

这样一来，无穷小量也就可以借助极限理论来进行明确的定义了：

当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时，以零为极限的**函数** $\boldsymbol{\alpha(x)}$ 称为当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）的无穷小量。

无穷小量这个幽灵就此烟消云散。我们可以清楚地知道，无穷小量是一个以 0 为极限的函数，它不是 0，在计算中也绝对不能把它与绝对值很小的变量混为一谈。并且，一个函数是否是无穷小，与自变量的变化趋势也息息相关。例如：$\frac{1}{x}$ 是 $x \to \infty$ 时的无穷小，因为只有当 $x \to \infty$ 时才有 $\frac{1}{x} \to 0$；当 $x \to x_0$ 时，$\frac{1}{x}$ 趋于一个有限值 $\frac{1}{x_0}$，当 $x \to 0$ 时 $\frac{1}{x} \to \infty$。在后两种情况下，$\frac{1}{x}$ 显然不是无穷小。

既然微积分学最基础的理论——极限理论已经被精准地表述出来，余下内容的发展与完善就是水到渠成的了。至于微积分学之后发展的详细过程，这里按下不表。

4. 终章

人们对无穷小量的几千年探索历史告诉我们，任何一门学科的建立容不得半点马虎，所有的定义都必须是准确的、精炼的，否则这个学科即使发展的再快，内容再丰富，也会因为基础不牢而被驳倒甚至全盘否定。

同时，我们也可以看到，任何学科的发展都不是一步到位的，而是经过无数次“发现错误→修正→发现新的错误→再修正”的过程才变得逐渐完善起来。

我个人认为胡适说得很对：“大胆假设，小心求证”。科学研究者应当具有这样的特性：在对未知领域进行假设时一定要足够大胆，因为在研究前完全无法知晓未知领域究竟是什么样子的；但在验证假设时一定要小心小心再小心，因为在验证的过程中稍有纰漏就会使结论与事实相差甚远，正所谓“失之毫厘，谬以千里”是也。