复习 CH-6:

1. 多元数量值函数的积分的概念与性质
(含二重，三重，线，面积分)

2. 掌握二重积分的计算 $\iint_{R \subseteq \mathbb{R}^2} f(x,y)\,dA$

- 直角坐标系 (x, y-型区域 以及积分顺序)
- 极坐标系 (R的特征 以及 f 的特征) $dA = r\,dr\,d\theta$

3. 掌握三重积分的计算 $\iiint_{D \subseteq \mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dV$

- 直角坐标下: $dV = dx\,dy\,dz$
- 柱坐标下: $dV = dz\,r\,dr\,d\theta$
- 球坐标下: $dV = \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

4. 了解二维和三维的坐标变换 (Jacobi行列式)

5. 了解含参变量积分与反常二重，三重积分

6. 了解重积分的微元法，回顾定积分在几何和物理上的应用.

7. 联系物理意义理解两类线积分与面积分的定义，掌握它们的计算方法

I. $\displaystyle\int_{C\subseteq\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,ds$, $ds=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$

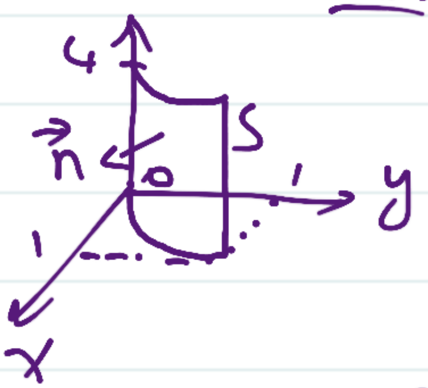
II. $\displaystyle\iint_{S\subseteq\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,\underline{dS}$ 面积元 $\longrightarrow$

① $\vec r=\vec r(u,v)$
$\Rightarrow dS=\|\vec r_u\times\vec r_v\|\,du\,dv$

② $g(x,y,z)=0$
$\Rightarrow dS=\dfrac{\|\nabla g\|}{\|\nabla g\cdot p\|}\,dA$, $p\perp$投影 $(p=i,j,k)$

③ $z=z(x,y)$
$\Rightarrow dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy$

例1. 计算 $\vec F=yz\,i+x\,j-z^2k$ 通过抛物柱面 $y=x^2$, $0\le x\le 1$, $0\le z\le 4$ 的通量，其法向量 $\vec n$ 如图所示:



Hint: ① 通量 $\displaystyle\iint_S \vec F\cdot\vec n\,dS$

S: $\vec r(x,z)=x\,i+x^2\,j+z\,k$, $0\le x\le 1$, $0\le z\le 4$

② 关于 $\vec n$:

$$\vec n=\boxed{\pm}\,\frac{\vec r_x\times\vec r_z}{\|\vec r_x\times\vec r_z\|}$$
?

$d\vec r/ds$

III. $\int_C \vec{A}(M)\cdot d\vec{s} = \int_C \vec{A}(M)\cdot\vec{\tau}\, ds = \int_C \vec{A}(M)\, d\vec{r}$

环(流)量

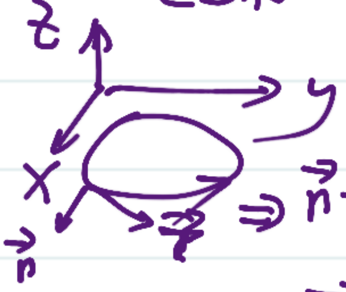
$= \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$

$C: \vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \ \alpha \le t \le \beta$

$= \int_\alpha^\beta P\, x'(t)\, dt$

(注: $\oint_{C \subseteq \mathbb{R}^2} \vec{A}(M)\cdot\vec{n}\, ds = \oint_C M\,dy - N\,dx$)

通量



$\Rightarrow \vec{n} = \vec{\tau} \times \vec{k}$

IV. $\iint_S \vec{A}(M)\cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{A}(M)\cdot\vec{e}_n(M)\, dS$

$= \iint_S P\, dy\wedge dz + Q\, dz\wedge dx + R\, dx\wedge dy$

计算

$\overset{③}{=} \pm \iint_{\underset{①}{\sigma_{xy}}} R(x, y, \underset{②}{z(x,y)})\, dx\,dy$

8. 掌握: ① Green公式

② 平面曲线积分与路径无关的条件

③ Gauss公式与散度

④ Stokes公式与旋度

① Green公式:

$$\oint_{+C} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$\rightarrow (\mathrm{rot}\, A)\cdot\vec{k}$ or $(\mathrm{curl}\, A)\cdot\vec{k}$

② 定理8.2和8.3:

(1) $\oint_C P\,dx+Q\,dy=0$

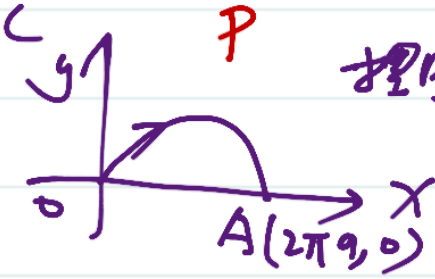
(2) $\int_A^B P\,dx+Q\,dy$ 与路径无关 $\longrightarrow$ 会计算某些曲线积分

(3) $\exists u$, s.t. $du=P\,dx+Q\,dy$ $\longrightarrow$ 会计算一些原函数

(4) $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

例2. 求 $\int_C \underbrace{\cos(x+y^2)}_{P}\,dx+\underbrace{\left[2y\cos(x+y^2)-\frac{1}{\sqrt{1+y^4}}\right]}_{Q}dy$,

其中C: 摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $a>0$.

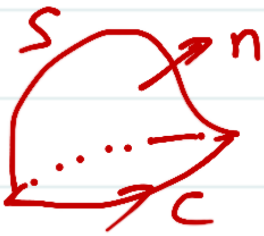


③ $\displaystyle\oiint_S \vec{A}\cdot\vec{e}_n\,dS=\iiint_V \nabla\cdot\vec{A}\,dV \longrightarrow$ [illegible] = 总通量

三维通量　　　　　　　　　　　　散度或通量密度

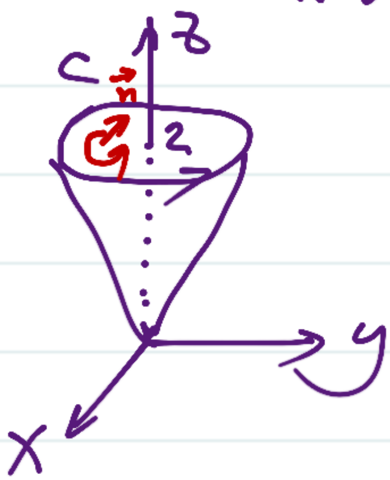
④ $$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{s} = \iint_S \underline{(\nabla\times\vec{A})}\cdot d\vec{S}$$

三维环(流)量　　　　　　　　　　旋度或环量密度.



$$\nabla\times\vec{A} = \mathrm{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

例3. 计算 $\vec{F}=(x^2-y)i+4zj+x^2k$ 绕锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=2$ 相交的曲线 C 的环流量，其方向为：从z轴正方向看为逆时针.



Hint: 环流量 $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$

用三种方法计算：

M1: 用定义

$$C: \begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \\ z = 2 \end{cases}, \quad 0\le\theta\le 2\pi$$

M2: 用stokes公式 (C为锥面的边界 取内侧)

M3: 用stokes公式 ( )