$$= \left| \iint_{(S)} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_n \mathrm{d}S \right| \quad (\boldsymbol{e}_n \text{ 为}(S)\text{ 的单位法向量})$$

$$= \left| \iint_{(S)} \| \boldsymbol{A} \| \cos \theta \mathrm{d}S \right| \quad (\theta \text{ 为 } \boldsymbol{e}_n \text{ 与 } \boldsymbol{A} \text{ 的夹角})$$

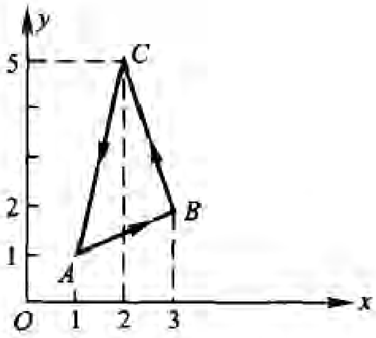
$$\leqslant \iint_{(S)} \| \boldsymbol{A} \| \ |\cos \theta| \mathrm{d}S \leqslant \iint_{(S)} M \cdot 1 \cdot \mathrm{d}S = MS.$$

习 题 6.8

(A)

2. 利用 Green 公式计算下列曲线积分：

(3) $\oint_{(+C)} (x+y)^2 \mathrm{d}x - (x^2+y^2)\mathrm{d}y$，$(C)$：顶点为 $A(1,1)$，$B(3,2)$，$C(2,5)$ 的三角形边界；



（第 2 题(3)）

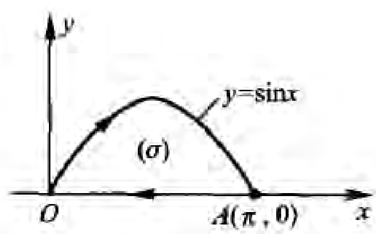
解 直线 AB，BC，CA 的方程分别为：AB：$y=\frac{1}{2}(x+1)$，BC：$y=-3x+11$，CA：$y=4x-3$.

则 $$\oint_{(+C)} (x+y)^2 \mathrm{d}x - (x^2+y^2)\mathrm{d}y = \iint_{(\sigma)} [-2x-2(x+y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{4x-3} (-4x-2y)\mathrm{d}y + \int_2^3 \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{-3x+11} (-4x-2y)\mathrm{d}y$$

$$= -\frac{140}{3}.$$

(4) $\int_{(C)} \mathrm{e}^x[\cos y\mathrm{d}x + (y-\sin y)\mathrm{d}y]$，$(C)$ 为曲线 $y=\sin x$ 从 $(0,0)$ 到 $(\pi,0)$ 的一段.



（第 2 题(4)）

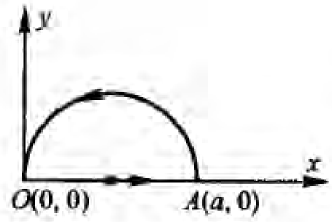
解 原式 $= \int_{(C\cup\overline{AO})} + \int_{\overline{OA}}$

$$= -\iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial \mathrm{e}^x(y-\sin y)}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{e}^x \cos y}{\partial y} \right) \mathrm{d}\sigma + \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$

$$= -\int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} ye^x dy + e^{\pi} - 1$$

$$= \frac{1}{5}(e^{\pi} - 1).$$

(5) $\int_{(C)} (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy$，$(C)$为由点$A(a,0)$至点$O(0,0)$的上半圆周$x^2 + y^2 = ax$（$m$为常数，$a>0$）；



（第2题(5)）

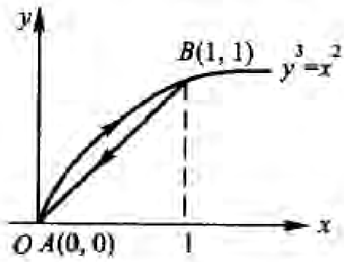
解 原式 $= \int_{(C\cup\overline{OA})} - \int_{\overline{OA}}$

$$= \iint_{(\sigma)} \left[\frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y - m) - \frac{\partial}{\partial y}(e^x \sin y - my)\right] d\sigma - \int_0^a 0 \cdot dx$$

$$= \iint_{(\sigma)} m d\sigma = m \cdot \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\pi m a^2.$$

(6) $\int_{(C)} (x^2 + y)dx + (x - y^2)dy$，$(C)$为曲线$y^3 = x^2$由点$A(0,0)$至$B(1,1)$的一段.

解 原式 $= \int_{(C\cup\overline{BA})} - \int_{\overline{BA}}$



（第2题(6)）

$$= \iint_{(\sigma)} \left[\frac{\partial(x - y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(y + x^2)}{\partial y}\right] d\sigma -$$

$$\int_1^0 [x^2 + x + (x - x^2)]dx$$

$$= 0 + \int_0^1 2x dx = 1.$$

3. 利用线积分计算星形线$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$所围图形面积.

解 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$的参数方程$x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t, 0 \leq t \leq 2\pi$. 而所求面积为

$$A = \frac{1}{2}\oint_{(+C)} x dy - y dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t\cos t + a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t\sin t)dt$$

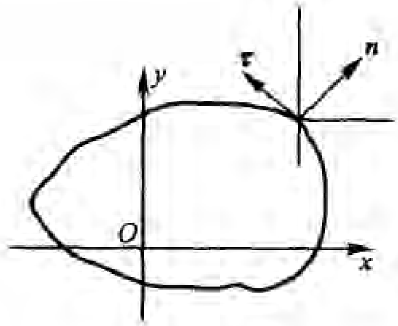
$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t dt = \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

4. 求线积分 $\oint_{(C)}[x\cos(x,\boldsymbol{n})+y\sin(x,\boldsymbol{n})]\mathrm{d}s$ 的值，其中$(x,\boldsymbol{n})$为简单闭曲线(C)的外法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 x 轴正向的夹角.

解　如图所示，$\boldsymbol{\tau}$ 为曲线的切向量. 则

$$\cos(\boldsymbol{\tau},y)=\cos(\boldsymbol{n},x),$$

$$\cos(\boldsymbol{\tau},x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+(\boldsymbol{n},x)\right)=-\sin(\boldsymbol{n},x).$$



（第 4 题）

于是
$$\oint_{(C)}[x\cos(x,\boldsymbol{n})+y\sin(x,\boldsymbol{n})]\mathrm{d}s$$
$$=\oint_{(C)}[x\cos(\boldsymbol{\tau},y)-y\cos(\boldsymbol{\tau},x)]\mathrm{d}s$$
$$=\oint_{(C)}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=2\sigma,$$其 σ 为由(C)所围区域的面积.

7. 验证下列各方程是全微分方程，并求其通解.

(3) $(2x\sin y+3x^2y)\mathrm{d}x+(x^3+x^2\cos y+y^2)\mathrm{d}y=0$;

解　$P(x,y)=2x\sin y+3x^2y, Q(x,y)=x^3+x^2\cos y+y^2.$

由于$\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x\cos y+3x^2=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，原方程为全微分方程. 下面利用凑全微分法求其通解.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=(2x\sin y+3x^2y)\mathrm{d}x+(x^3+x^2\cos y+y^2)\mathrm{d}y\\&=(2x\sin y\mathrm{d}x+x^2\cos y\mathrm{d}y)+(3x^2y\mathrm{d}x+x^3\mathrm{d}y)+y^2\mathrm{d}y\\&=\mathrm{d}(x^2\sin y)+\mathrm{d}x^3y+\mathrm{d}\frac{1}{3}y^3=\mathrm{d}\left(x^2\sin y+x^3y+\frac{1}{3}y^3\right),\end{aligned}$$

于是通解 $u(x,y)=x^2\sin y+x^3y+\dfrac{1}{3}y^3=C.$

(4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-2x\sin y}{(x^2+1)\cos y}.$

解　令 $P=2x\sin y, Q=(x^2+1)\cos y$. 则原方程可转化为 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$. 又$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x\cos y$. 故此方程是全微分方程. 又 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\mathrm{d}(x^2+1)\sin y$，故$(x^2+1)\sin y=C$ 为其通解.

8. 计算下列线积分：

(1) $\int_{(1,-1)}^{(1,1)}(x-y)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)$;

解 由于$\frac{\partial(x-y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}[-(x-y)]=-1$,故此线积分与路径无关. 故

原积分 $=\int_{(1,-1)}^{(1,1)}(x-y)\mathrm{d}(x-y)=\frac{1}{2}(x-y)^2\Big|_{(1,-1)}^{(1,1)}=-2$

(3) $\int_{(0,0)}^{(1,1)}\frac{2x(1-\mathrm{e}^y)}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{e}^y}{1+x^2}\mathrm{d}y$.

解 原积分 $=\int_{(0,0)}^{(1,1)}\left[\frac{\mathrm{e}^y[-2x\mathrm{d}x+(1+x^2)\mathrm{d}y]}{(1+x^2)^2}+\frac{2x\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}\right]$

$$=\int_{(0,0)}^{(1,1)}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{e}^y}{1+x^2}+\frac{-1}{1+x^2}\right)=\frac{\mathrm{e}^y-1}{1+x^2}\Big|_{(0,0)}^{(1,1)}=\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1).$$

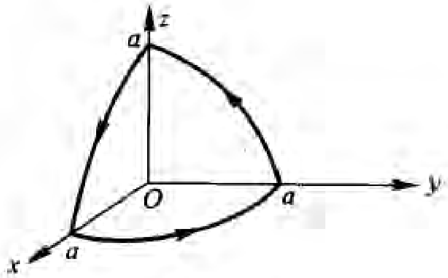
10. 应用 stokes 公式计算线积分$\oint_{(C)}y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$, (C)为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$,其方向与平面 $x+y+z=0$ 的法向量$\{1,1,1\}$符合右手螺旋法则.

解 设(S)为 $x+y+z=0$ 位于 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内法向量为$\{1,1,1\}$的部分. $\boldsymbol{e}_n=\frac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$. 由 stokes 公式

$$\oint_C y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\oint_{(S)}\mathbf{rot}\{y,z,x\}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{(S)}\mathrm{rot}\{y,z,x\}\cdot\boldsymbol{e}_n\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{(S)}\{-1,-1,-1\}\cdot\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}\mathrm{d}S=-\frac{3}{\sqrt{3}}\iint_{(S)}\mathrm{d}S=-\sqrt{3}\pi a^2.$$

11. 应用 Stokes 公式计算线积分$\oint_{(C)}(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(y-x)\mathrm{d}z$, (C)是从$(a,0,0)$经$(0,a,0)$回到$(a,0,0)$的三角形.



(第 11 题)

解 令(S): $x+y+z=a$ 上位于第一卦限部分的上侧,则其单位法向量 $\boldsymbol{e}_n=\frac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$. 又令 $\boldsymbol{A}=\{z-y,x-z,y-x\}$,则 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\{2,2,2\}$. 于是

$$\oint_{(C)}(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(y-x)\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{(S)}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_n\mathrm{d}S=\iint_{(S)}2\sqrt{3}\mathrm{d}S=2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2a^2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2a^2}\right)=3a^2.$$

12. 求向量场 $\boldsymbol{A}=(-y,x,c)$(c 为常数)沿下列曲线正方向的环量:

(1) 圆周:$x^2+y^2=r^2, z=0$;

解 环量 $=\oint_{(C)}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+c\mathrm{d}z((C):x=r\cos t, y=r\sin t)$

$$=\int_0^{2\pi}[-(r\sin t)r(-\sin t)+(r\cos t)(r\cos t)]\mathrm{d}t=2\pi r^2.$$

(2) 圆周:$(x-2)^2+y^2=R^2, z=0.$

解 圆周的参数方程 $x=2+R\cos t, y=R\sin t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$

$$\text{环量}=\oint_{(C)}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+c\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}[R^2\sin^2 t+(2+R\cos t)R\cos t]\mathrm{d}t=2\pi R^2.$$

15. 已知 $\boldsymbol{A}=3y\boldsymbol{i}+2z^2\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}, \boldsymbol{B}=x^2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{k}$,求 $\mathbf{rot}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$.

解 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3y & 2z^2 & xy\\ x^2 & 0 & -4\end{vmatrix}=-8z^2\boldsymbol{i}+(x^3y+12y)\boldsymbol{j}-2x^2z^2\boldsymbol{k}.$

$$\mathbf{rot}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -8z^2 & x^3y+12y & -2x^2z^2\end{vmatrix}=(4xz^2-16z)\boldsymbol{j}+3x^2y\boldsymbol{k}.$$

16. 利用 Gauss 公式计算下列曲面积分:

(2) $\oiint\limits_{(S)}x^3\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, (S)为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧;

解 原式 $=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}(3x^2+3y^2+3z^2)\mathrm{d}V$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R 3r^2\cdot r^2\sin\theta\mathrm{d}r=\frac{12}{5}\pi R^5.$$

(3) $\oiint\limits_{(S)}(x^2-2xy)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(y^2-2yz)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(1-2xz)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, (S)为球心在坐标原点,半径为 a 的上半球面的上侧;

解 设$(S_1):x^2+y^2\leqslant a^2, z=0$ 的下侧,$(V):x^2+y^2+z^2\leqslant a^2, z\geqslant 0.$

则 $$\text{原积分}=\iint\limits_{(S\cup S_1)}-\iint\limits_{(S_1)}$$

$$= \iiint\limits_{(V)} [(2x-2y)+(2y-2z)+(-2x)]\mathrm{d}V + \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^a -2r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta\mathrm{d}r + \pi a^2$$

$$= \pi a^2\left(1-\frac{1}{2}a^2\right).$$

(4) $\oiint\limits_{(S)}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$，$(S)$为锥体 $x^2+y^2\leqslant z^2,0\leqslant z\leqslant h$ 的表面，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为此曲面的外法线方向余弦；

解 原积分 $= \iint\limits_{(S_{外侧})} x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$

$$\xlongequal{\text{Gauss 公式}} \iiint\limits_{(V)}2(x+y+z)\mathrm{d}V \quad ((V)\text{ 为圆锥 } z^2=x^2+y^2,\ 0\leqslant z\leqslant h)$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^h\rho\mathrm{d}\rho\int_\rho^h 2(\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi+z)\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2}\pi h^4.$$

(5) $\iint\limits_{(S)} x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + (x+y+z+1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，$(S)$为半椭球面 $z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ 的上侧；

解 设(S_1)：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,z=0$ 的下侧，(V)为上半椭球.

(σ)：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,z=0$. 由于$(\sigma)$关于 y,x 轴对称，而函数 x,y 分别关于 x,y 为奇函数. 则 $\iint\limits_{(\sigma)}x\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{(\sigma)}y\mathrm{d}\sigma = 0$，从而

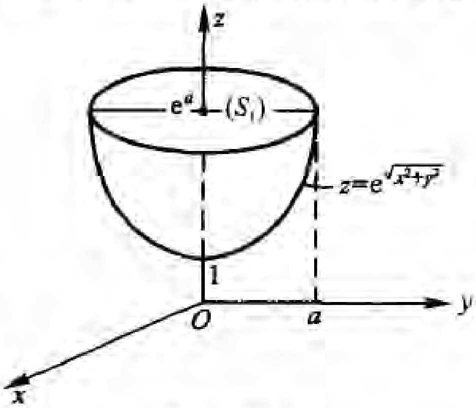
$$\iint\limits_{(S_1)} x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + (x+y+z+1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{(S_1)}(x+y+z+1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = -\iint\limits_{(\sigma)}(x+y+1)\mathrm{d}\sigma$$

$$= -\iint\limits_{(\sigma)}\mathrm{d}\sigma = -\pi ab.$$

于是
$$\iint\limits_{(S)} x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(x+y+z+1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$
$$=\iint\limits_{(S\cup S_1)}-\iint\limits_{(S_1)}$$
$$=\iiint\limits_{(V)}3\mathrm{d}V+\pi ab=\pi ab(2c+1).$$

(6) $\iint\limits_{(S)}4xz\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，其中$(S)$是$yOz$平面上的曲线$z=\mathrm{e}^y(0\leqslant y\leqslant a)$绕$z$轴旋转成的曲面的下侧.



（第 16 题(6)）

解　设(S_1) $x^2+y^2\leqslant a^2$与$z=\mathrm{e}^a$交面的上侧.(V)由(S)及(S_1)围成的立体.(σ)为xOy平面上的圆$x^2+y^2\leqslant a^2$.于是

$$原积分=\iint\limits_{(S\cup S_1)}-\iint\limits_{(S_1)}$$
$$=\iiint\limits_{(V)}(4z-2z-2z)\mathrm{d}V-\iint\limits_{(S_1)}(1-\mathrm{e}^{2a})\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$
$$=0-\iint\limits_{(\sigma)}(1-\mathrm{e}^{2a})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(\mathrm{e}^{2a}-1)\pi a^2.$$

17. 设(S)为上半球面$x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant0)$，其法向量$\boldsymbol{n}$与$Oz$轴的夹角为锐角，求向量场$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$向$\boldsymbol{n}$所指的一侧穿过$(S)$的通量.

解
$$\Phi=\iint\limits_{(S)}x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$
$$=\iint\limits_{(S\cup S_1)}-\iint\limits_{(S_1)}\quad((S_1)为x^2+y^2\leqslant a^2,z=0下侧)$$
$$=\iiint\limits_{(V)}3\mathrm{d}V-\iint\limits_{(S_1)}0\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=3\cdot\frac{2}{3}\pi a^3=2\pi a^3.$$

20. 求下列全微分的原函数：

(1) $\mathrm{d}u=(x^2-2yz)\mathrm{d}x+(y^2-2xz)\mathrm{d}y+(z^2-2xy)\mathrm{d}z$；

解　设$A=(x,0,0)$，$B(x,y,0)$，$C(x,y,z)$.利用线积分可知

$$u=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(x^2-2yz)\,\mathrm{d}x+(y^2-2xz)\,\mathrm{d}y+(z^2-2xy)\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_{OA}+\int_{AB}+\int_{BC}+C$$

$$=\int_0^x x^2\,\mathrm{d}x+\int_0^y y^2\,\mathrm{d}y+\int_0^z(z^2-2xy)\,\mathrm{d}z+C.$$

$$=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+C.$$

(2) $\mathrm{d}u=(3x^2+6xy^2)\,\mathrm{d}x+(6x^2y+4y^3)\,\mathrm{d}y.$

解　令 $P(x,y)=3x^2+6xy^2, Q(x,y)=6x^2y+4y^3.$

利用偏积分求原函数 $u(x,y)$.

$$u(x,y)=\int(3x^2+6xy^2)\,\mathrm{d}x=x^3+3x^2y^2+\varphi(y),$$

又
$$\frac{\partial u}{\partial y}=6x^2y+\varphi'(y)=Q(x,y)=6x^2y+4y^3,$$

则　$\varphi'(y)=4y^3$，于是 $\varphi(y)=y^4+C.$

故　$u(x,y)=x^3+3x^2y^2+y^4+C.$

21. 试证 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在区域(σ)上的任意两个原函数仅差一个常数.

证明　设 $u_1(x,y)$ 与 $u_2(x,y)$ 均为 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在区域(σ)上的两个原函数，则 $\mathrm{d}u_1=\mathrm{d}u_2=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$. 从而 $\mathrm{d}(u_1-u_2)=0$. 于是 $u_1-u_2=C$. 即 $u_1(x,y)=u_2(x,y)+C$.

22. 设(G)是一维单连通域，$\boldsymbol{A}(P,Q,R)\in C^{(1)}((G))$，试证明在$(G)$内恒有 $\nabla\times\boldsymbol{A}=0$ 等价于 $\oint_{(C)}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$，其中$(C)$为$(G)$中任一分段光滑闭曲线.

证明　先证 $\nabla\times\boldsymbol{A}=0\Longrightarrow\oint_{(C)}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$.

由于(G)是一维单连通域，则必存在曲面$(S)\subset(G)$，且(S)的法向量与(C)成右手螺旋，则由 stokes 公式，

$$\oint_{(C)}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{(S)}\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0.$$

如果 $\oint_{(C)}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$，则环量密度$\dfrac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}S}=0$. 即 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_n\mathrm{d}S=0$. 由于$(C)$的任意性知 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=0$，即 $\nabla\times\boldsymbol{A}=0$.

(B)

1. 把 Green 公式写成以下两种形式：

$$\iint\limits_{(\sigma)}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=\oint\limits_{(+C)}X\mathrm{d}y-Y\mathrm{d}x;$$

$\iint\limits_{(\sigma)}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=\oint\limits_{(+C)}[X\cos(x,\boldsymbol{n})+Y\sin(x,\boldsymbol{n})]\mathrm{d}s$，其中 $(x,\boldsymbol{n})$ 为正 x 轴到 (C) 的外法线向量 $\boldsymbol{n}$ 的转角.

解 由 Green 公式 $\oint\limits_{(+C)}X\mathrm{d}y-Y\mathrm{d}x=\iint\limits_{(\sigma)}\left[\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}(-Y)\right]\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{(\sigma)}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma$. 又由本习题(A)第 4 题及前式知：$\oint\limits_{(+C)}[X\cos(x,\boldsymbol{n})+Y\sin(x,\boldsymbol{n})]\mathrm{d}s=\oint_{(C)}X\mathrm{d}y-Y\mathrm{d}x=\iint\limits_{(\sigma)}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma$.

2. 设 $u(x,y),v(x,y)$ 是具有二阶连续偏导数的函数，并设 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，证明：

(1) $\iint\limits_{(\sigma)}\Delta u\mathrm{d}\sigma=\oint_{(C)}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s$；

(2) $\iint\limits_{(\sigma)}(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}\sigma=-\oint_{(C)}\left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}s$，其中 (σ) 为闭曲线 (C) 所围的平面域，$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}},\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}$ 分别表示 u 与 v 沿着 (C) 的外法线方向的导数.

证明 设 $\boldsymbol{n}$ 的两个方向余弦分别为 $\cos\alpha,\cos\beta$. 即 $\boldsymbol{n}_0=\{\cos\alpha,\cos\beta\}$. 则 $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta,\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}=\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta,\cos\beta=\sin\alpha$.

(1) 由上题中 Green 公式的第二种形式有

$$\oint_{(C)}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=\oint_{(C)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta\right)\mathrm{d}s=\oint_{(C)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha\right)\mathrm{d}s$$

$$=\iint\limits_{(\sigma)}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{(\sigma)}\Delta u\mathrm{d}\sigma.$$

(2) $\oint_{(C)}\left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}s=\oint_{(C)}\left[\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos\alpha+\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\sin\alpha\right]\mathrm{d}s$

$$= \iint\limits_{(\sigma)} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \mathrm{d}\sigma$$

$$= \iint\limits_{(\sigma)} (v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}\sigma = -\iint\limits_{(\sigma)} (u\Delta v - v\Delta u)\,\mathrm{d}\sigma.$$

3. 计算 $\int\limits_{(L)} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2 + y^2}$. 其中$(L)$是由点$A(-1,0)$经$B(1,0)$到点$C(-1,2)$的路径,$\overset{\frown}{AB}$为下半圆周,$BC$段是直线.

解 令 $P(x,y) = -\frac{y}{4x^2+y^2}, Q(x,y) = \frac{x}{4x^2+y^2}$.
于是$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}$. 从而 $\int\limits_{(L)} = \oint\limits_{(L\cup\overline{CA})} + \int\limits_{(\overline{AC})}$. 又$(L\cup\overline{CA})$围成的区域$(\sigma)$内包含原点$(0,0)$. 而 P,Q 在$(0,0)$处偏导数不连续. 令曲线(L_1)为 $x = \frac{\varepsilon}{2}\cos\theta$, $y = \varepsilon\sin\theta$,且 ε 足够小. 使$(L_1)\subset(\sigma)$. 且$(L\cup\overline{CA})\cap(L_1) = \phi$. 则

$$\oint\limits_{(L\cup\overline{CA})} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\mathrm{d}\theta = \pi,$$

$$\int\limits_{(\overline{AC})} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} = \int_0^2 \frac{-1}{4+y^2}\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\arctan\frac{y}{2}\Big|_0^2 = -\frac{\pi}{8},$$

故
$$\int\limits_{(L)} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} = \frac{7}{8}\pi.$$

4. 计算曲线积分

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AMB}} [\varphi(y)\cos x - \pi y]\mathrm{d}x + [\varphi'(y)\sin x - \pi]\mathrm{d}y,$$

其中$\overset{\frown}{AMB}$为连结 $A(\pi,2)$及 $B(3\pi,4)$两点的光滑曲线,并设$\overset{\frown}{AMB}$恒在弦$\overline{AB}$的下方且与$\overline{AB}$围成弓形域的面积为 2.

解 (σ)为$\overset{\frown}{AMB}$与$\overline{AB}$围成的平面区域,依题意(σ)的面积 $\sigma = 2$. 由于$\overset{\frown}{AMB}$始终在$\overline{AB}$的下方,故(σ)的边界$(\overset{\frown}{AMB}\cup BA)$为正向.

$$I = \oint\limits_{(\overset{\frown}{AMB}\cup\overline{BA})} + \int\limits_{\overline{AB}}$$

$$= \iint\limits_{(\sigma)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}[\varphi'(y)\sin x - \pi] - \frac{\partial}{\partial y}[\varphi(y)\cos x - \pi y] \right\}\mathrm{d}\sigma + \pi\int_2^4 \varphi(y)\cos\pi(y-1)\mathrm{d}y -$$

$$\pi\int_2^4(\pi y+1)\mathrm{d}y+\int_2^4\varphi'(y)\sin\pi(y-1)\mathrm{d}y$$

$$=\pi\iint\limits_{(\sigma)}\mathrm{d}\sigma+\pi\int_2^4\varphi(y)\cos\pi(y-1)\mathrm{d}y-\pi\left(\frac{1}{2}\pi y^2+y\right)\Big|_2^4+$$

$$\varphi(y)\sin\pi(y-1)\Big|_2^4-\int_2^4\pi\varphi(y)\cos\pi(y-1)\mathrm{d}y$$

$$=2\pi-(6\pi+2)\pi=-6\pi^2.$$

5. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有连续一阶导数，(L) 是上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线，其起点为 (a,b)，终点为 (c,d). 记

$$I=\int\limits_{(L)}\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y,$$

(1) 证明曲线积分 I 的值与路径 (L) 无关；

(2) 当 $ab=cd$ 时，求 I 的值.

解　由于 $\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\right\}=f(xy)+xyf'(xy)-\frac{1}{y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{y}\left(1+y^2f(xy)\right]\right.$，所以

$$I=\int_{(a,b)}^{(c,d)}\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^c\frac{1}{b}[1+b^2f(bx)]\mathrm{d}x+\int_b^d\left[cf(cy)-\frac{c}{y^2}\right]\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{b}(c-a)+\int_a^cf(bx)b\mathrm{d}x+\int_b^dcf(cy)\mathrm{d}y+\frac{c}{y}\Big|_b^d$$

$$=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{cb}f(u)\mathrm{d}u+\int_{bc}^{dc}f(u)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{dc}f(u)\mathrm{d}u.$$

(2) 当 $ab=dc$ 时，$I=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$.

6. 计算 $\oiint\limits_{(S)}x^3\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left[\frac{1}{z}f\left(\frac{y}{z}\right)+y^3\right]\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\left[\frac{1}{y}f\left(\frac{y}{z}\right)+z^3\right]\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$.

其中 $f(u)$ 具有连续的导数，(S) 为锥面 $x=\sqrt{y^2+z^2}$ 与两球面 $x^2+y^2+z^2=1$，$x^2+y^2+z^2=4$ 所围立体的表面外侧.

解 由 Gauss 公式，

$$\text{原积分} = \iiint\limits_{(V)}\left\{3x^2 + \left[3y^2 + \frac{1}{z^2}f'\left(\frac{y}{z}\right)\right] + \left[3z^2 - \frac{1}{y}\cdot\frac{y}{z^2}f'\left(\frac{y}{z}\right)\right]\right\}\mathrm{d}V$$

$$= 3\iiint\limits_{(V)}(x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}V$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r^2\cdot r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r$$

$$= 6\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_1^2 r^4\,\mathrm{d}r\right) = \frac{93\pi(2-\sqrt{2})}{5}.$$

7. 计算 $\int\limits_{(L)}(y^2+z^2)\mathrm{d}x + (z^2+x^2)\mathrm{d}y + (x^2+y^2)\mathrm{d}z$，其中 (L) 是球面 $x^2+y^2+z^2=4x$ 与柱面 $x^2+y^2=2x$ 的交线，从 Oz 轴正方向看进去为逆时针（$z\geqslant 0$）.

解 球面上点 (x,y,z) 处单位法向量为 $\boldsymbol{e}_n = \left\{\frac{x-2}{2},\frac{y}{2},\frac{z}{2}\right\}$. 又 (L) 与 $\boldsymbol{e}_n$ 成右手螺旋，于是，由 stokes 公式，有

$$\oint\limits_{(L)}(y^2+z^2)\mathrm{d}x + (z^2+x^2)\mathrm{d}y + (x^2+y^2)\mathrm{d}z$$

$$= 2\iint\limits_{(S)}(y-z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + (z-x)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint\limits_{(S)}\left[(y-z)\cdot\frac{x-2}{2} + (z-x)\cdot\frac{y}{2} + (x-y)\cdot\frac{z}{2}\right]\mathrm{d}S = 2\iint\limits_{(S)}(z-y)\,\mathrm{d}S,$$

其中 (S) 上半球面位于圆柱面内部部分，且 (S) 关于 xOz 平面（$y=0$）对称. 故

$$\iint\limits_{(S)}y\,\mathrm{d}S = 0,$$

$$\iint\limits_{(S)}z\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2x}\sqrt{4x-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+\frac{(2-x)^2+y^2}{4x-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2x}2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi.$$

故所求线积分 $=4\pi$.

8. 设函数 $F=f\left(xy,\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)$ 具有连续的二阶偏导数，求 $\mathrm{div}(\mathbf{grad}\,F)$.

解 $\mathbf{grad}\,F = \left\{yf_1 + \frac{1}{z}f_2, xf_1 + \frac{1}{z}f_3, -\frac{x}{z^2}f_2 - \frac{y}{z^2}f_3\right\}$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\operatorname{grad} F) &= y\left(yf_{11}+\frac{1}{z}f_{12}\right)+\frac{1}{z}\left(f_{21}\cdot y+\frac{1}{z}f_{22}\right)+x\left(xf_{11}+\frac{1}{z}f_{13}\right)+\\&\frac{1}{z}\left(f_{31}\cdot x+f_{33}\cdot\frac{1}{z}\right)+\frac{2x}{z^3}f_2+\frac{2y}{z^3}f_3-\frac{x}{z^2}\left[f_{22}\cdot\left(-\frac{x}{z^2}\right)-\right.\\&\left.\frac{y}{z^2}f_{23}\right]-\frac{y}{z^2}\left[f_{32}\cdot\left(-\frac{x}{z^2}\right)+f_{33}\cdot\left(-\frac{y}{z^2}\right)\right]\\&=\frac{2}{z^3}(xf_2+yf_3)+(x^2+y^2)f_{11}+\frac{2y}{z}f_{12}+\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{x^2}{z^2}\right)f_{22}+\\&\frac{2x}{z}f_{13}+\frac{2xy}{z^4}f_{23}+\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{y^2}{z^2}\right)f_{33}.\end{aligned}$$

9. 求 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))$,其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,当 $f(r)$ 等于什么时,$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))=0$?

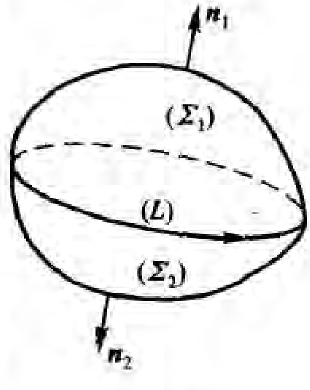
解　由于 $\operatorname{grad} r=\frac{1}{r}\{x,y,z\}=\frac{\boldsymbol{r}}{r}(\boldsymbol{r}=\{x,y,z\})$,于是 $\operatorname{grad} f(r)=f'(r)\operatorname{grad} r=f'(r)\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}$. 从而 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))=f''(r)\left(\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}\right)+f'(r)\left(\frac{r^2-x^2}{r^3}+\frac{r^2-y^2}{r^3}+\frac{r^2-z^2}{r^3}\right)=f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)$.

$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))=0$,即 $f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)=0$. 两边对 r 积分可得

$\int\frac{\mathrm{d}f'(r)}{f'(r)}=\int-\frac{2}{r}\mathrm{d}r$,即 $f'(r)=\frac{C}{r^2}$,(C 为任意常数)故 $f(r)=\frac{C}{r}+C_2$

10. 设向量场 $\boldsymbol{F}$ 在空间区域 $(G)\subseteq\mathbf{R}^3$ 内有连续的一阶偏导数,证明对 (G) 内任何按块光滑的封闭曲面 (Σ) 有

$$\iint_{(\Sigma)}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0.$$



(第 10 题)

证明　设 $\boldsymbol{F}=\{P,Q,R\}$,有向闭曲线 (L) 将 (Σ) 分成两片:(Σ_1) 与 (Σ_2),不妨设 (Σ_1) 的法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 与 (L) 成右手螺旋,则 (Σ_2) 的法向量 $\boldsymbol{n}_2$ 与 $(-L)$ 成右手螺旋,由 Stokes 公式,

$$\iint_{(\Sigma)}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iint_{(\Sigma_1)}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_1\mathrm{d}S+\iint_{(\Sigma_2)}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_2\mathrm{d}S$$

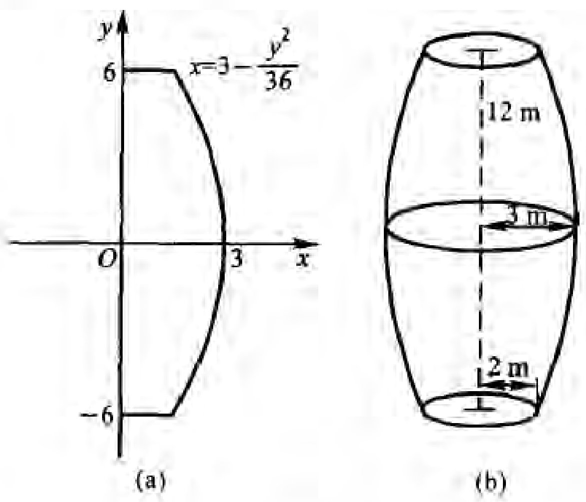
$$= \oint_{(L)} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \oint_{(-L)} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0.$$

综合练习题

1. 一个对称的地下油库,它的内部设计是:横截面为圆,在中心位置上的半径是 3 m,到底部和顶部的半径减小到 2 m;底部和顶部相隔 12 m(图(b));纵截面的两侧是抛物线 $x=3-\frac{y^2}{36}$($-6\leqslant y\leqslant 6$)(图(a)).

(1) 求油库的容积;

(2) 为了设计油库的油量标尺,试求出油库中油量分别为 10 m³,20 m³,30 m³,…时油的深度.



(第 1 题)

解 (1) 油库侧面的方程为: $\sqrt{x^2+z^2}=3-\frac{y^2}{36}$. 设$(V_1)$为油库位于 zOx 平面之上部分,(σ_z)为水平截面 $x^2+z^2\leqslant\left(3-\frac{y^2}{36}\right)^2$,于是油库的容积

$$V = 2\iiint_{(V_1)} = 2\int_0^6 \mathrm{d}y \iint_{(\sigma_y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}z = 2\int_0^6 \pi\left(3-\frac{y^2}{36}\right)^2 \mathrm{d}y = \frac{432}{5}\pi(\mathrm{m}^3).$$

(2) 设油量为 V_h 时,油面的高度为 h. 则($h\geqslant -6$)

$$V_h = \int_{-6}^{h} \mathrm{d}y \iint_{(\sigma_y)} = \pi\int_{-6}^{h}\left(3-\frac{y^2}{36}\right)^2 \mathrm{d}y,$$

$$V_h = \left[\frac{h^5}{6\,480} - \frac{h^3}{18} + 9h + \frac{216}{5}\right]\pi(\mathrm{m}^3).$$