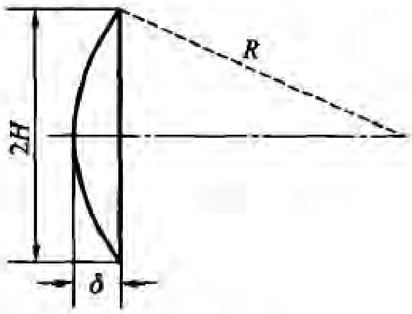
习　题　2.3

(A)

6. 如图,一透镜的凸面半径是 R,口径是 $2H$,$H\ll R$(即 H 比 R 小得多,可以忽略不计),厚度是 δ.



(第 6 题图)

(1) 证明:$\delta\approx\frac{H^2}{2R}$;

(2) 设 $H=25$ mm,$R=100$ mm,求 δ 的近似值;

(3) 设 $R=150$ mm,$\delta=3$ mm,求 H 的近似值.

解 (1) $\delta=R-R\sqrt{1-\left(\frac{H}{R}\right)^2}$,由 $H\ll R$,$x\ll1$ 时,$(1+x)^\alpha\approx1+\alpha x$ 可知$\sqrt{1-\left(\frac{H}{R}\right)^2}\approx1+\frac{1}{2}\left(-\frac{H^2}{R^2}\right)$,于是 $\delta\approx\frac{H^2}{2R}$.

(2) 当 $H=25$ mm,$R=100$ mm 时,$\delta\approx\frac{25^2}{200}(\text{mm})=3.125(\text{mm})$.

(3) $R=150$ mm,$\delta=3$ mm 时,$H\approx\sqrt{2R\delta}=30(\text{mm})$.

7. 有一批半径为 1 cm 的球,为了提高球面的光洁度,要镀上一层铜,厚度为 0.01 cm. 试估计每只球需用多少克的铜(铜的密度是 8.9 g/cm³).

解 设需用 m 克铜,则
$$\begin{aligned}m&=\left[\frac{4}{3}\pi(1+0.01)^3-\frac{4}{3}\pi\cdot1^3\right]\times8.9\\&=\frac{4}{3}\pi(1.01^3-1^3)\times8.9\\&\approx\frac{4\times8.9}{3}\pi[3\times1^2\times(0.01)]\\&\approx1.118(\text{克}).\end{aligned}$$

8. 钟摆摆动的周期 T 与摆长 l 的关系是 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$,其中 g 是重力加速度. 现有一只挂钟,当摆长为 10 cm 时走得很准确. 由于摆长没有校正好,长了 0.01 cm. 问这只钟每天慢多少秒?

解 $l_0=10$ cm. 当 $l=l_0+0.01(\text{cm})$时,

$$\Delta T=T(l_0)-T(l)\approx\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{l_0}}\times0.01=2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}\cdot\frac{0.01}{2l_0},$$

由 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l_0}{g}}=1$ 秒，于是一个周期慢 $\dfrac{0.01}{2\times10}=0.0005$(秒). 每天慢 $0.0005\times3600\times24=43.2$(秒).

9. 求由方程 $e^{x+y}-xy=0$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的微分 dy.

解 对方程 $e^{x+y}-xy=0$ 两边求微分得 $e^{x+y}d(x+y)=d(xy)$，即 $e^{x+y}(dx+dy)=xdy+ydx$，于是 $dy=\dfrac{y-e^{x+y}}{e^{x+y}-x}dx$.

10. 求由参数方程 $x=3t^2+2t+3$，$e^y\sin t-y+1=0$ 所确定的函数 $y=f(x)$ 的微分 dy.

解 由题设可知：$dx=(6t+2)dt$，从而 $dt=\dfrac{dx}{6t+2}$. 对 $e^y\sin t-y+1=0$ 两端求微分得 $e^y\sin t dy+e^y\cos t dt=dy$. 于是 $dy=\dfrac{e^y\cos t}{1-e^y\sin t}dt=\dfrac{e^y\cos t}{(1-e^y\sin t)(6t+2)}dx$.

11. 求下列函数 y 关于自变量 x 的二阶微分：

(2) $xy+y^2=1$.

解 (2) 由 $xy+y^2=1$ 知：

$$ydx+xdy+2ydy=0,\text{即 } dy=-\frac{y}{x+2y}dx,$$

上式两端再求微分， $2dydx+xd^2y+2(dy)^2+2yd^2y=0$,

于是， $d^2y=-\dfrac{2(dy)^2+2dydx}{x+2y}=\dfrac{2y(x+y)}{(x+2y)^3}dx^2$.

由于 $(x+y)y=xy+y^2=1$，于是 $d^2y=\dfrac{2}{(x+2y)^3}dx^2$.

(B)

1. 有人说"若 $y=f(x)$ 在 x_0 点可导，则当 $\Delta x\to0$ 时，该函数在 x_0 点的微分 dy 是 Δx 的同阶无穷小."这种说法是否正确？为什么？

答 不正确. 如 $f(x)=x^2$，$dy|_{x_0=0}=0$ 是 Δx 高阶无穷小. 如果 $f'(x_0)\neq0$，则 $dy|_{x_0}=f'(x_0)\Delta x$ 是 Δx 的同阶无穷小.

2. 证明：函数 $f:U(x_0)\to\mathbf{R}$ 在 x_0 处可微(可导)的充要条件是存在一个关于 Δx 的线性函数 $L(\Delta x)=\alpha\Delta x$，使

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-L(\Delta x)|}{|\Delta x|}=0.$$

证

必要性 因为 f 在 x_0 处可微，所以存在一个关于 Δx 的线性函数 $L(\Delta x)=\alpha\Delta x$，使 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\alpha\Delta x+o(\Delta x)$，于是 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-L(\Delta x)|}{|\Delta x|}=$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left|\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right|=0$. 必要性得证.

充分性　由题设存在 $L(\Delta x)=a\Delta x$，使 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-L(\Delta x)|}{\Delta x}=0$，于是 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-a\Delta x=o(\Delta x)$，即存在一个关于 Δx 的线性函数 $L(\Delta x)=a\Delta x$ 使 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=a\Delta x+o(\Delta x)$. 故 f 在 x_0 处可微.

习　题　2.4

(A)

3. 能否用下面的方法证明 Cauchy 定理？为什么？

对 f,g 分别应用 Lagrange 定理得，

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)(b-a)}{g'(\xi)(b-a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

答　不能，因为对 f,g 分别应用 Lagrange 定理得到的两个 ξ 不一定相等. 而 Cauchy 定理中的 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 中的 ξ 是相同的.

5. 设 $a_i\in\mathbf{R}(i=0,1,\cdots,n)$，并且满足 $a_0+\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{3}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=0$，证明：$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

证　取 $F(x)=a_0x+\dfrac{1}{2}a_1x^2+\dfrac{1}{3}a_2x^3+\cdots+\dfrac{1}{n+1}a_nx^{n+1}$，则 $F(0)=F(1)=0$. 由 Rolle 定理知至少存在一个 $\xi\in(0,1)$，使 $F'(\xi)=0$，即 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一实根.

8. 设 $f,g:[a,b]\to\mathbf{R}$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，并且 $\forall x\in(a,b)$，$f'(x)=g'(x)$，证明：在 $[a,b]$ 上 $f(x)=g(x)+C$（$C\in\mathbf{R}$ 是常数）.

证　取 $F(x)=f(x)-g(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Lagrange 定理的条件且 $F'(x)=0$，$\forall x\in(a,b)$. 由推论 4.2 知在 $[a,b]$ 上 $F(x)\equiv C$，即 $\forall x\in[a,b]$，$f(x)=g(x)+C$.

9. 应用 Lagrange 定理证明：在闭区间 $[-1,1]$ 上，$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

证　令 $F(x)=\arcsin x+\arccos x$，则 $\forall x\in[-1,1]$，$F'(x)=0$.

由推论 4.2 知：$\forall x\in[-1,1]$，$F(x)=C=F(1)=\dfrac{\pi}{2}$.