解　前者过相平面 D 上任一点 $(x,y)\in D$ 仅确定一个方向；后者可确定多个方向，随 t 的不同而可能不同.

3. 若题 2 中两个方程组均满足解的存在唯一性定理的条件，它们的任意两条不同的轨线能否相交？它们的任意两条积分曲线能否相交？

解　由于两方程组均满足解的存在唯一性定理的条件，故它们的任意两条积分曲线不能相交．但由于题 2 中所述原因．前者的任意两条不同的轨线不能相交．后者的两条不同的轨线可能相交.

习　题　7.2

(A)

2. 证明：若 $\dot{x}=x(t)$ 是齐次线性微分方程组 $\dot{x}=A(t)x$ 满足 $x(t_0)=0$ 的解，则必有 $x(t)\equiv 0$.

证明　由于齐次线性微分方程组 $\dot{x}=A(t)x$ 满足解的存在唯一性定理的条件，故它的任意两条积分曲线不能相交．如果满足初值条件 $x(t_0)=0$ 的解 $x(t)\not\equiv 0$，则此解与平凡解（零解）在 $t=t_0$ 有交．产生矛盾．故 $x(t)\equiv 0$.

4. 证明：若 $x_i(t), i=1,2,\cdots,n, t\in(a,b)$ 都是齐次线性微分方程组 $\dot{x}=A(t)x$ 的解，则其线性组合 $\sum\limits_{i=1}^{n}C_ix_i(t)$ ，$t\in(a,b)$ 也是其解，其中 C_i 为实的或复的常数.

解　$\dfrac{d}{dt}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}C_ix_i(t)\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}C_i\dot{x}_i(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}C_i(A(t)x_i)=A(t)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}C_ix\right)$，故 $\sum\limits_{i=1}^{n}C_ix$ 也是解.

6. 证明：非齐次线性微分组 $\dot{x}=A(t)x+f(t), x\in\mathbf{R}^n$ 的任意两个解之差必为对应的齐次线性微分方程组的一个解.

证明　设 x_1,x_2 均为 $\dot{x}=A(t)x+f(t)$ 的解，则

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x_1-x_2)&=\dot{x}_1-\dot{x}_2=A(t)x_1+f(t)-(A(t)x_2+f(t))\\&=A(t)(x_1-x_2).\end{aligned}$$

故 x_1-x_2 是齐次线性微分方程组 $\dot{x}=A(t)$ 的解.

7. 设 $A(t)$ 为实矩阵，$x=x(t)$ 是 $\dfrac{dx}{dt}=A(t)x$ 的复值解，试证明 $x(t)$ 的实部和虚部分别都是它的解.

证明　设 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{u}(t)+i\boldsymbol{v}(t)$，则$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{u}}(t)+i\dot{\boldsymbol{v}}(t)=\boldsymbol{A}(t)[\boldsymbol{u}(t)+i\boldsymbol{v}(t)]=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}(t)+i(\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{v}(t))$. 从而 $\dot{\boldsymbol{u}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}(t)$，$\dot{\boldsymbol{v}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{v}(t)$. 即 $\boldsymbol{x}(t)$ 的实部 $\boldsymbol{u}(t)$ 与虚部 $\boldsymbol{v}(t)$ 均为 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的解.

8. 设 $\boldsymbol{A}(t)$ 为实矩阵，$(\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t))$ 是 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵，其中 $\boldsymbol{x}_1$ 与 $\boldsymbol{x}_2$ 是一对共轭复值解向量，记

$$\boldsymbol{y}_1(t)\xlongequal{\text{def}}\mathrm{Re}\,\boldsymbol{x}_1(t)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{x}_2(t)),$$

$$\boldsymbol{y}_2(t)\xlongequal{\text{def}}\mathrm{Im}\,\boldsymbol{x}_1(t)=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\boldsymbol{x}_1(t)-\boldsymbol{x}_2(t)),$$

证明：用向量 $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2$ 代替 $\boldsymbol{x}_1(t)$ 与 $\boldsymbol{x}_2(t)$ 后所得矩阵 $(\boldsymbol{y}_1(t),\boldsymbol{y}_2(t),\boldsymbol{x}_3(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t))$ 也是原方程组的一个基解矩阵.

证明　由于 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t)$ 为 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的解，则 $\boldsymbol{y}_1(t)$，与 $\boldsymbol{y}_2(t)$ 也是解. 令

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2\mathrm{i}} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\mathrm{i}} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

则 $\det\boldsymbol{B}\neq0$ 即 $\boldsymbol{B}$ 为非奇异矩阵. 又

$$(\boldsymbol{y}_1(t),\boldsymbol{y}_2(t),\boldsymbol{x}_3(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t))=(\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t))\boldsymbol{B},$$

由基解矩阵的性质 2 知 $(\boldsymbol{y}_1(t),\boldsymbol{y}_2(t),\boldsymbol{x}_3(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t))$ 也是原方程的基解矩阵.

9. 设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_i(t)$ 是 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}_i(t)\ (i=1,2,\cdots,m)$ 的解，证明：$\boldsymbol{x}=\sum\limits_{i=1}^{m}\boldsymbol{x}_i(t)$ 必为 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\sum\limits_{i=1}^{m}\boldsymbol{f}_i(t)$ 的解.

证明
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{m}\dot{\boldsymbol{x}}_i(t)=\sum_{i=1}^{m}[\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}_i(t)+\boldsymbol{f}_i(t)]$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}_i(t)+\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{f}_i(t)$$
$$=\boldsymbol{A}(t)\left[\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{x}_i(t)\right]+\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{f}_i(t)$$
$$=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{f}_i(t).$$

10. (1) 试验证向量值函数组$(1,0,0)^{\mathrm{T}},(t,0,0)^{\mathrm{T}},(t^2,0,0)^{\mathrm{T}}$在任意区间$(a,b)$内线性无关,但它们的 Wronski 行列式 $W(t)\equiv0$;

(2) 试证明方程组(2.2)的 n 个解构成的 Wronski 行列式在解存在的区间(a,b)内或者恒为零,或者恒不为零.

解 (1) 函数组$1,t,t^2$是线性无关的.否则存在不全为零的常数 C_1,C_2,C_3 使 $C_1+C_2t+C_3t^2=0$. 对区间(a,b)的一切 t 值成立. 但由于 $C_1+C_2t+C_3t^2=0$ 是 t 的 2 次代数方程,由代数学基本定理知,它至多有 2 个实根,也就是说,至多只有(a,b)中的 2 个点使 $C_1+C_2t+C_3t^2=0$ 成立. 这一矛盾说明函数组 $1,t,t^2$ 是线性无关的.

设存在三个数 k_1,k_2,k_3 使 $k_1(1,0,0)^{\mathrm{T}}+k_2(t,0,0)^{\mathrm{T}}+k_3(t^2,0,0)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$,即 $k_1+k_2t+k_3t^2=\boldsymbol{0}$. 故 $k_1=k_2=k_3=0$. 也即$(1,0,0)^{\mathrm{T}},(t,0,0)^{\mathrm{T}},(t^2,0,0)^{\mathrm{T}}$线性无关. 而 $W(t)=0$.

(2) 设 $\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$是(2.2)的 n 个解. 则由这 n 个解构成的 Wronski 行列式 $W(t)=\det(\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_2(t))$.

如果 $\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$线性相关,由定理 2.3 知对 $\forall t\in(a,b)$, $W(t)=0$,即 $W(t)\equiv0$. 如果 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$线性无关,由定理 2.1 知对 $\forall t_0\in(a,b)$,常向量组$\{\boldsymbol{x}_i(t_0)\}(i=1,2,\cdots,n)$线性无关,即 $W(t_0)\neq0$. 即 $W(t)$恒不为零($\forall t\in(a,b)$).

(B)

1. 若 $\boldsymbol{X}(t)$是齐次线性微分方程组 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 的任一基解矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是任一 n 阶非奇异常数矩阵,证明 $\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{B}$ 也是此方程组的一个基解矩阵.

证明 设 $\boldsymbol{X}(t)=(\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t))$,其中 $\boldsymbol{x}_i(t)(i=1,\cdots,n)$为 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的 n 个线性无关的解. 则 $\det\boldsymbol{X}(t)\neq0$.

又设 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_n$，则 $\tilde{\boldsymbol{x}}_i(t)=b_{1i}\boldsymbol{x}_1(t)+b_{2i}\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+b_{ni}\boldsymbol{x}_n(t)$，$i=1,2,\cdots,n$. 故 $\tilde{\boldsymbol{x}}_i(t)$ 也是 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的解. 又 $\det(\tilde{\boldsymbol{x}}_1(t),\tilde{\boldsymbol{x}}_2(t),\cdots,\tilde{\boldsymbol{x}}_n(t))=\det[(\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t))\boldsymbol{B}]=\det(\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{B})=\det\boldsymbol{X}(t)\det\boldsymbol{B}\neq 0$.（$\boldsymbol{B}$ 非奇异，$\det\boldsymbol{X}(t)\neq 0$）故 $\widetilde{\boldsymbol{X}}(t)=(\tilde{\boldsymbol{x}}_1(t),\tilde{\boldsymbol{x}}_2(t),\cdots,\tilde{\boldsymbol{x}}_n(t))=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{B}$ 也是一基解矩阵.

2. 证明下列两方程组 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$，$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{x}$ 有相同的基解矩阵，则 $\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{B}(t)$，其中 $\boldsymbol{A}(t)$，$\boldsymbol{B}(t)$ 是两个 n 阶连续矩阵.

证明　设 $\boldsymbol{X}(t)$ 是两方程组共同的基解矩阵. 则 $\boldsymbol{X}^{-1}(t)$ 存在

且 $\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{X}(t)$. 于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(t)&=\boldsymbol{A}(t)(\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(t))=(\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t))\boldsymbol{X}^{-1}(t)=(\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{X}(t))\boldsymbol{X}^{-1}(t)\\&=\boldsymbol{B}(t)(\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(t))=\boldsymbol{B}(t).\end{aligned}$$

3. 证明若 $\boldsymbol{X}(t)$ 是 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵，则 $(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(t))^{-1}$ 是 $\dot{\boldsymbol{x}}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵.

证明　因为 $\boldsymbol{X}(t)$ 为 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵，则 $\det\boldsymbol{X}(t)$ 恒不为零. 故 $\boldsymbol{X}(t)$ 可逆（对任意的 $t\in(a,b)$，(a,b) 为解存在的最大区间）. 且 $\det\boldsymbol{X}^{-1}(t)$ 恒不为零，$\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(t)=\boldsymbol{I}_n$（$n$ 阶单位阵）.

从而
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(t))=\dot{\boldsymbol{X}}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(t)+\boldsymbol{X}(t)\dot{\boldsymbol{X}}^{-1}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{I}_n}{\mathrm{d}t}=0,$$

于是
$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{X}}^{-1}(t)&=-\boldsymbol{X}^{-1}(t)\left(\dot{\boldsymbol{X}}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(t)\right)=-\boldsymbol{X}^{-1}(t)[(\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t))\boldsymbol{X}^{-1}(t)]\\&=-\boldsymbol{X}^{-1}(t)\boldsymbol{A}(t).\end{aligned}$$

故
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(t))^{-1}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{X}^{-1}(t))^{\mathrm{T}}=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{X}^{-1}(t))\right)^{\mathrm{T}}\\&=(-\boldsymbol{X}^{-1}(t)\boldsymbol{A}(t))^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{X}^{-1}(t))^{\mathrm{T}}\\&=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(t))^{-1}.\end{aligned}$$

从而 $(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(t))^{-1}$ 是 $\dot{\boldsymbol{x}}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵.

4. 设 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$，

(1) 怎样的行列式称为其解的 Wronski 行列式；

(2) 证明 Wronski 行列式 $W(t)$ 满足下列 Liouville 公式：

$$W(t)=W(t_0)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\operatorname{tr}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau},$$

其中 $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}(t)$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 的迹.

解 (1) 设 $\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 为 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的 n 个解,则以向量 $\boldsymbol{x}_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 作为第 i 列形成的矩阵 $\boldsymbol{X}(t)=(\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t))$ 的行列式 $\det \boldsymbol{X}(t)$ 称为解 $\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 的 Wronski 行列式.

(2) **证明** 由行列式的求导公式,则

$$\dot{W}(t)=\begin{vmatrix} \dot{x}_{11}(t) & \dot{x}_{12}(t) & \cdots & \dot{x}_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}+\cdots+$$

$$\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n-1,1}(t) & x_{n-1,2}(t) & \cdots & x_{n-1,n}(t) \\ \dot{x}_{n1}(t) & \dot{x}_{n2}(t) & \cdots & \dot{x}_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

又由于 $\boldsymbol{x}_j(t)=(x_{1j}(t),x_{2j}(t),\cdots,x_{nj}(t))^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的解,则 $\dot{x}_{ij}(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}(t)x_{kj}(t)$.

于是上式右端第一项等于(利用行列式的加法)

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n}a_{1k}(t)x_{k1}(t) & \sum\limits_{k=1}^{n}a_{1k}(t)x_{k2}(t) & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n}a_{1k}(t)x_{kn}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}W(t)+a_{12}\begin{vmatrix} x_{21} & \cdots & x_{2n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+a_{1n}\begin{vmatrix} x_{n1} & \cdots & x_{nn} \\ x_{21} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}W(t),$$

故 $$\dot{W}(t)=a_{11}W(t)+a_{22}W(t)+\cdots+a_{nn}W(t)=(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}(t))W(t).$$

从而 $$W(t)=W(t_0)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\mathrm{tr}\,A(\tau)\mathrm{d}\tau}.$$

5. 设非齐次线性微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t}x-y+t,\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{t^2}x+\dfrac{2}{t}y-t^2.\end{cases}$$

(1) 验证 $x=t^2, y=-t$ 是对应的齐次线性微分方程组的解；

(2) 求所给非齐次线性微分方程组的通解.

解 (1) 将 $x=t^2, y=-t$ 代入方程组中，即知 $x=t^2, y=-t$ 为对应的齐次线性微分方程组的解.

(2) 设 $\bar{x}=t^2h_1(t), \bar{y}=-th_2(t)$ 是与 $x=t^2, y=-t$ 线性无关的齐次方程 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t}x-y\\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{t^2}x+\dfrac{2}{t}y\end{cases}$，的一个解，其中 $h_1(t), h_2(t)$ 不是常函数，且 $h_1(t)\neq h_2(t)$. 由 Liouville公式(或将 $\bar{x},\bar{y}$ 代入上述齐次方程)，只要取 $h_1(t), h_2(t)$ 满足下述等式即可.

$$W(t)=\begin{vmatrix}t^2 & t^2h_1(t)\\ -t & -th_2(t)\end{vmatrix}=t^3[h_1(t)-h_2(t)]=e^{\int\frac{3}{t}dt}=t^3,$$

即

$$h_1(t)=1+h_2(t).$$

从而

$$\bar{x}=t^2[1+h_2(t)],\ \bar{y}=-th_2(t).$$

将上式代入上述的齐次微分方程得 $-th_2'(t)=1$，故取 $h_2(t)=-\ln t$，进而 $X(t)=\begin{pmatrix}t^2 & t^2(1-\ln t)\\ -t & t\ln t\end{pmatrix}$ 是上述齐次微分方程的一个基解矩阵.

由于 $X^{-1}(t)=\dfrac{1}{t^2}\begin{pmatrix}\ln t & -t(1-\ln t)\\ 1 & t\end{pmatrix}$，故可取原方程的特解为

$$x^*=\int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau=\int_1^t\frac{1}{\tau^2}\begin{pmatrix}\ln\tau & -\tau(1-\ln\tau)\\ 1 & \tau\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau\\ -\tau^2\end{pmatrix}d\tau$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{t^2}{2}\ln t-\dfrac{t^2}{2}\ln^2 t+\dfrac{t^4}{4}-\dfrac{t^2}{4}\\[2ex]\dfrac{t}{2}\ln t-\dfrac{3}{4}t^3+\dfrac{3}{4}t+\dfrac{t}{2}\ln^2 t\end{pmatrix},$$

即原方程的通解

$$x = X(t)(C + x^*) = \begin{pmatrix} C_1t^2 + C_2t^2(1 - \ln t) + \dfrac{t^2}{2}\ln t(1 - \ln t) + \dfrac{t^2}{4}(t^2 - 1) \\ - C_1t + C_2t\ln t + \dfrac{t}{2}\ln t(1 + \ln t) + \dfrac{3t}{4}(1 - t^2) \end{pmatrix},$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

习 题 7.3

(A)

1. 求下列常系数齐次线性微分方程组的通解.

(2) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 + x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2; \end{cases}$ (4) $\dfrac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} x$.

解 (2) 令 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, x = (x_1, x_2, x_3)^T$,则原方程可写为:

$$x' = Ax.$$

A 的特征方程为 $\det(A - \lambda E) = (2 - \lambda)(\lambda + 1)^2 = 0$. 因此 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

对应于 $\lambda_1 = 2$ 的特征向量可取为 $r_1 = (1,1,1)^T$;

对应于 $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ 的线性无关的特征向量有 2 个. 取为

$$r_2 = (1, -1, 0)^T, \qquad r_3 = (1, 0, -1)^T.$$

故所给微分方程组的基解矩阵为 $X(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{-t} & e^{-t} \\ e^{2t} & -e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & -e^{-t} \end{pmatrix}$. 因而通解为 $x = X(t)C$,其中 $C = (C_1, C_2, C_3)^T$ 为任意常数向量.

(4) 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$ 的特征方程为 $(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2 = 0$,