第五章　多元函数微分学及其应用

习　题　5.1

(A)

1. 设$\{x_k\}$为$\mathbf{R}^n$中的点列,$a\in\mathbf{R}^n$,$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=a$,证明$\lim\limits_{k\to\infty}\|x_k\|=\|a\|$.

证明　由$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=a$知对$\forall\varepsilon>0$,$\exists N\in\mathbf{N}_+$,使对$\forall k>N$,恒有$\|x_k-a\|<\varepsilon$.又$|\,\|x_k\|-\|a\|\,|\leqslant\|x_k-a\|$,从而$\lim\limits_{k\to\infty}\|x_k\|=\|a\|$.

3. 证明定理1.2中的(2),(4).

定理1.2　设$\{x_k\}\subseteq\mathbf{R}^n$是收敛点列,则

(2) $\{x_k\}$是有界点列;

(4) 若$\{x_k\}$收敛于a,则其任一子列也收敛于a.

证明(2)　设$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=a$,则对$\varepsilon_0=1$,$\exists N_0\in\mathbf{N}_+$,使对$\forall k>N_0$,恒有$\|x_k-a\|<1$.从而$\|x_k\|\leqslant1+\|a\|$,对$\forall k>N_0$.

令$M=\max\{\|a\|+1,\|x_1\|,\|x_2\|,\cdots,\|x_{N_0}\|\}$,则对$\forall k\in\mathbf{N}_+$,$\|x_k\|\leqslant M$,即$\{x_k\}$为有界点列.

(4) 由$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=a$知对$\forall\varepsilon>0$,$\exists N\in\mathbf{N}_+$,使$\forall k>N$,恒有$\|x_k-a\|<\varepsilon$,则子列$\{x_{k_j}\}$中所有下标$k_j>N$的项$x_{k_j}$均有$\|x_{k_j}-a\|<\varepsilon$,故$\lim\limits_{j\to\infty}x_{k_j}=a$.

(B)

1. 设$A\subseteq\mathbf{R}^n$是一个点集,证明:

(1) $\mathring{A}$与ext A是开集;

证明　$\mathring{A}$是开集

对$\forall x_0\in\mathring{A}$,由内点的定义$\exists\delta>0$,使$U(x_0,\delta)\subseteq A$.而对$\forall y_0\in U(x_0,\delta)$,令$\delta_1=\|y_0-x_0\|<\delta$,$\delta'\leqslant\min\{\delta-\delta_1,\delta_1\}$,则$U(y_0,\delta'/2)\subseteq U(x_0,\delta)\subseteq A$.则$y_0\in\mathring{A}$,于是$U(x_0,\delta)\subseteq\mathring{A}$,即$\mathring{A}$为开集.

ext A为开集

对$\forall x_0\in$ext A,$\exists\delta>0$,使$U(x_0,\delta)\cap A=\varnothing$.而对$\forall y_0\in U(x_0,\delta)$,令$\delta_1=$

$\|y_0-x_0\|<\delta,\delta'\leqslant\min\left\{\frac{1}{2}\delta_1,\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\right\}$,则 $U(y_0,\delta')\subseteq U(x_0,\delta)$,从而 $U(y_0,\delta')\cap A=\varnothing$,即 x_0 的邻域 $U(x_0,\delta)$ 中所有的点均为 A 的外点,即 $U(x_0,\delta)\subseteq \text{ext } A$. 于是ext A为开集.

(2) $A',\partial A$ 是闭集;

先证 A'是闭集.即证 A'的任一个聚点 $x_0\in A'$. 由于 x_0 为 A'的聚点,则存在 A' 中的点列 $\{x_k\}$($k=1,2,\cdots$,且 $x_k\neq x_0$)使 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x_0$,即对 x_0 的任一邻域 $\mathring{U}(x_0,\varepsilon)$,$\exists N\in\mathbf{N}_+$,使对 $\forall k>N$,恒有 $x_k\in\mathring{U}(x_0,\varepsilon)$. 又由 $\mathring{U}(x_0,\varepsilon)$ 是开集,则对 $\forall k>N$,$\exists x_k$ 的邻域 $U(x_k)\subseteq\mathring{U}(x_0,\varepsilon)$,又由 $x_k\in A'$,则 $U(x_k)\cap A\neq\varnothing$,即 $\mathring{U}(x_0,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing$,即在 x_0 的任何去心邻域中均含有 A 的点,由定理1.5知 $x_0\in A'$.

∂A 为闭集.

由于 $\mathbf{R}^n=\mathring{A}\cup\text{ext } A\cup\partial A$,则$\partial A=(\mathring{A}\cup\text{ext } A)^c$. 由本题(1)及定理1.7知 $\mathring{A}\cup\text{ext } A$ 为开集. 由定理1.6,∂A 为闭集.

(3) A 为开集$\Leftrightarrow A\cap\partial A=\varnothing$.

先证 A 为开集$\Rightarrow A\cap\partial A=\varnothing$.

由 A 为开集,则 $A=\mathring{A}$,从而 $A\cap\partial A=\mathring{A}\cap\partial A=\varnothing$.

再证 $A\cap\partial A=\varnothing\Rightarrow A$ 为开集.

由 $A\cap\partial A=\varnothing$且 $A\cap\text{ext } A=\varnothing$,而 $\mathring{A}=(\partial A\cup\text{ext } A)^c$.

从而 $A\subseteq\mathring{A}$,故 $A=\mathring{A}$. 即 A 为开集.

2. 以 $n=2$ 为例证明聚点原理:$\mathbf{R}^n$ 中的有界无限点集至少有一个聚点.

证明　设 $A=\{(x_\alpha,y_\alpha)\in\mathbf{R}^2\mid\alpha\in I,I$ 为实数集$\}$为有界无限点集. 则 $\{x_\alpha\}\subseteq\mathbf{R}$,$\{y_\alpha\}\subseteq\mathbf{R}$($\alpha\in I$)均为有界无限集. 由数集的 Weierstrass 定理(第一章定理2.8)知$\{x_\alpha\}$必有收敛的子列. 不妨设为$\{x_{\alpha_k}\}$,且$\lim\limits_{k\to\infty}x_{\alpha_k}=x_0$. 在$\{y_\alpha\}$($\alpha\in I$)中选取与 x_{α_k}对应的 y_{α_k}(即$(x_{\alpha_k},y_{\alpha_k})\in A$)构成数列$\{y_{\alpha_k}\}$,则$\{y_{\alpha_k}\}\subseteq\{y_\alpha\}$($\alpha\in I$)为有界无限数列,必有收敛的子数列. 设为$\{y_{\alpha_{k_j}}\}$,且$\lim\limits_{j\to\infty}y_{\alpha_{k_j}}=y_0$. 又由于与$\{y_{\alpha_{k_j}}\}$对应的$\{x_{\alpha_k}\}$的子列$\{x_{\alpha_{k_j}}\}$($(x_{\alpha_{k_j}},y_{\alpha_{k_j}})\in A$)也收敛于 x_0,从而 A 中存在收敛于(x_0,y_0)的点列 $A_j=(x_{\alpha_{k_j}},y_{\alpha_{k_j}})$.

习　题　5.2

(A)

3. 用定义证明下列二重极限.