4.2 反常二重积分

一、无界区域的二重积分

二、无界函数的二重积分

一、无界区域的二重积分

二重积分的积分区域都是有界的，然而实际应用中有时会遇到积分区域无界（如全平面、半平面或有界区域的外部等）的二重积分，如概率论中计算二维正态分布的分布函数就是无界区域上二元函数的积分，我们称这样的二重积分为反常二重积分.

例1 设 D 为全平面，讨论反常二重积分 $\iint\limits_{D} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma.$

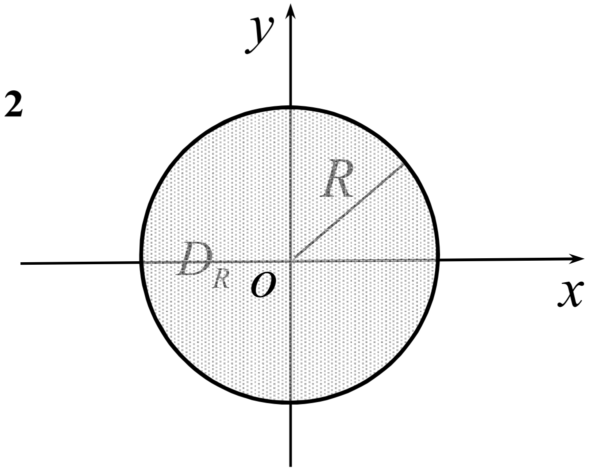
解 如图所示，设 D_R 为圆心在原点，半径为R的圆域，

因此 $\iint\limits_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^R e^{-r^2} \cdot r dr$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^R e^{-r^2} dr^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\pi \cdot \left(-e^{-r^2}\right)\Big|_0^R$$

$$= \pi\left(1 - e^{-R^2}\right)$$



又因为当 $R \to +\infty$ 时，积分区域 $D_R \to D$，所以

$$\iint\limits_{D} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}\sigma = \lim_{R\to+\infty}\iint\limits_{D_R} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}\sigma$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \pi\left(1-\mathrm{e}^{-R^2}\right) = \pi$$

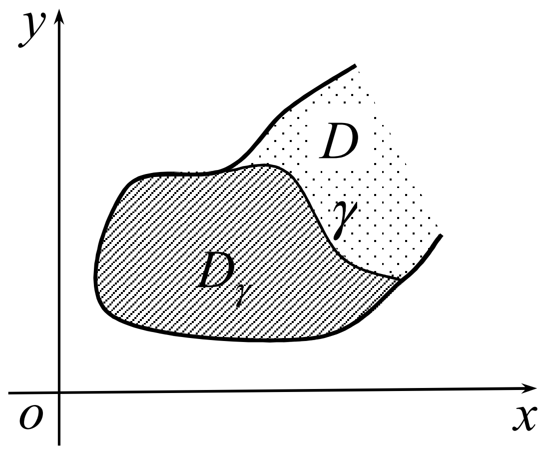
事实上，例1的方法具有一般性，可以用于讨论无界区域上一般二元函数反常积分的收敛性，由此给出反常二重积分的定义.

定义4.1 $f(x,y)$ 为平面上的无界区域 D 上的二元函数，如图所示，如果用任意光滑的曲线 γ 在 D 中划出有界区域 D_γ 后，得到的二重积分 $\iint\limits_{D_\gamma} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 都存在，且当曲线 γ 以任何形状、任何方式连续变动使得区域 D_γ 无限扩展到无界区域 D 时，极限

$\lim\limits_{D_\gamma \to D} \iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 都存在且总取相同的值，则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在无界区域 D 上的反常二重积分，记作

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

即 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{D_\gamma \to D}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$



这时称此反常二重积分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 收敛，

否则称反常二重积分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 发散.

例2 证明泊松积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ ，并进一步计算 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x.$

解 由于 e^{-x^2} 的原函数不能用初等函数表示，

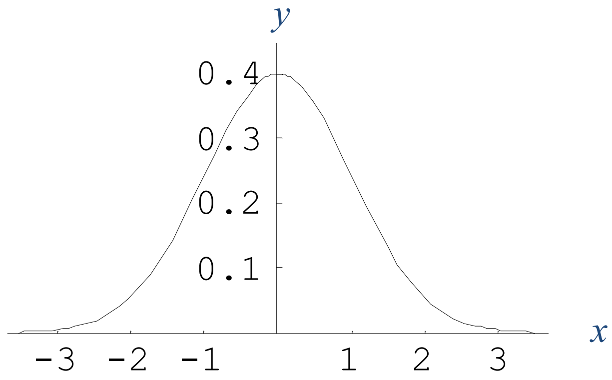
因此通过直接积分求极限的方法计算泊松积分.

由例1得 $\pi = \iint\limits_{D} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\cdot \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2$$

因此泊松积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$,



令 $x = \sqrt{2}t$，则 $dx = \sqrt{2}dt$ ，于是

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1.$$

注 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ 是概率统计中非常重要的一种密度函数——标准正态分布随机变量的密度函数(如图所示)，由本例知它在实数轴的反常积分为1.

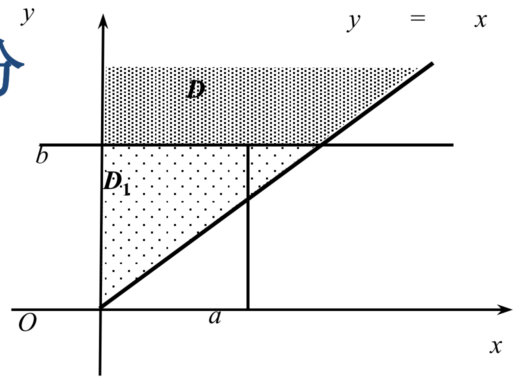
例3 若二元函数 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x\geq 0, y\geq 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

计算反常二重积分 $\iint\limits_{x\leq y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

解 由于被积函数 $f(x,y)$ 仅在第一象限不为0，

因此根据二重积分的性质，只需计算积分区域 D

在第一象限部分（如图所示）的二重积分即可.



又因 D 是无界区域， 故取有界闭区域

$$D_1=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le a,\ x\le y\le b\right\},$$

这样当 $a\to+\infty, b\to+\infty$ 时，$D_1\to D$， 于是

$$\iint\limits_{x\le y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\substack{a\to+\infty\\ b\to+\infty}}\iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}.$$