

第二章扩展作业（第二部分）

刘正浩 2019270103005

2021.5.7

目录

1 第一题

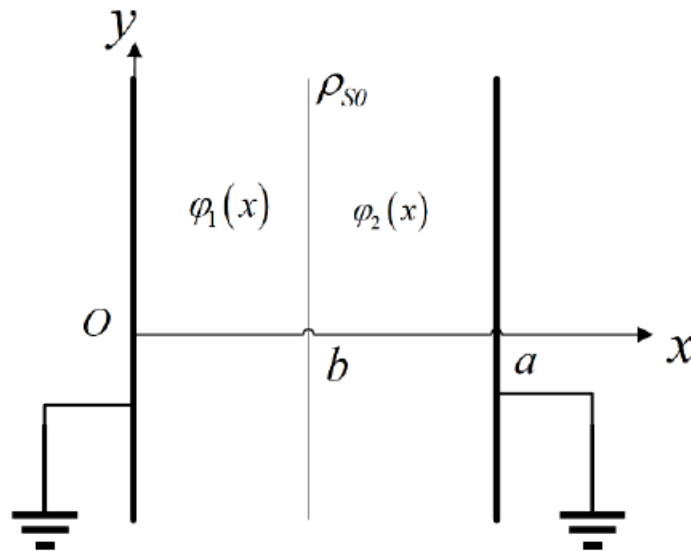


图 1: 平板与坐标系

在 $x = b$ 两侧有电位函数：

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi_1(x) \\ \varphi_2 &= \varphi_2(x)\end{aligned}\tag{1}$$

由于在分界面上没有自由电荷，所以泊松方程退化为拉普拉斯方程。

$$\begin{aligned}\nabla^2 \varphi_1(x) &= 0 \\ \nabla^2 \varphi_2(x) &= 0\end{aligned}\tag{2}$$

方程的解为：

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= C_1 x + D_1 \\ \varphi_2(x) &= C_2 x + D_2\end{aligned}\tag{3}$$

利用边界条件，可知

$$\begin{aligned}
 x=0 \quad \varphi_1(0) &= 0 \\
 x=a \quad \varphi_2(a) &= 0 \\
 x=b \quad \varphi_1(b) &= \varphi_2(b) \\
 \left[\frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x} \right]_{x=b} &= -\frac{\rho_{S0}}{\epsilon_0}
 \end{aligned} \tag{4}$$

由上面四个式子，将 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 带入解得

$$\begin{aligned}
 C_1 &= -\frac{\rho_{S0}(b-a)}{\epsilon_0 a} x \\
 C_2 &= -\frac{\rho_{S0} b}{\epsilon_0 a}, \\
 D_1 &= 0 \\
 D_2 &= \frac{\rho_{S0} b}{\epsilon_0}
 \end{aligned} \tag{5}$$

最后得到

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(x) &= \frac{\rho_{S0}(a-b)}{\epsilon_0 a} x \\
 \varphi_2(x) &= \frac{\rho_{S0} b}{\epsilon_0 a} (a-x) \\
 \vec{E}_1(x) &= -\nabla \varphi_1(x) = -\frac{\rho_{S0}(a-b)}{\epsilon_0 a} \cdot \vec{e}_x \\
 \vec{E}_2(x) &= -\nabla \varphi_2(x) = \frac{\rho_{S0} b}{\epsilon_0 a} \cdot \vec{e}_x
 \end{aligned} \tag{6}$$