3. 设 $\boldsymbol{f}$ 是集 $A\subseteq\mathbf{R}^n$ 上的 n 元向量值函数，并且满足 Lipschitz 条件，即存在常数 $L\geqslant 0$，使对所有 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in A$，均有 $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\|\leqslant L\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$，证明 $\boldsymbol{f}$ 在 A 上一致连续.

证明 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{L}$. 则对 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in A$，当 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|<\delta$ 时，由于 $\boldsymbol{f}$ 在 A 上满足 Lipschitz 条件，则有

$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\|\leqslant L\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|<\varepsilon$，故 $\boldsymbol{f}$ 在 A 上一致连续.

4. 设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是 n 元数量值连续函数，$c\in\mathbf{R}$ 是一个常数，证明

(1) $\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})>c\}$ 与 $\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})<c\}$ 均为开集；

(2) $\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})\geqslant c\}$ 与 $\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})\leqslant c\}$ 均为闭集；

(3) $\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})=c\}$ 是闭集.

证明 (1) 令 $W_1=(c,+\infty)$，$W_2=(-\infty,c)$ 均为 $\mathbf{R}$ 中的开集，而 $\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})>c\}=f^{-1}(W_1)$，$\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})<c\}=f^{-1}(W_2)$. 由于 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数，则由本习题(B)的第一题知 $f^{-1}(W_1)$ 与 $f^{-1}(W_2)$ 均为开集.

类似的方法可知(2)中两集合均为闭集.

(3) 由于 $\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})=c\}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})\geqslant c\}\cap\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})\leqslant c\}$，由本题(2)知 $\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})=c\}$ 为两闭集的交. 则由定理性质知其为闭集.

习 题 5.3

(A)

2. (1) 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，求 $f_x(x,1)$；

解 $f_x(x,1)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,1)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)=1$ 或

$$f_x(x,1)=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\bigg|_{(x,1)}=1+(y-1)\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{y}}}\Bigg|_{(x,1)}=1.$$

(2) $f(x,y)=\dfrac{\cos\ (x-2y)}{\cos\ (x+y)}$，求 $f_y\left(\pi,\dfrac{\pi}{4}\right)$.

解 $f_y\left(\pi,\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(\pi,y)\bigg|_{y=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\dfrac{\cos(\pi-2y)}{\cos(\pi+y)}\right)\bigg|_{y=\frac{\pi}{4}}=-2\sqrt{2}.$

3. 求曲线 $\begin{cases}z=\dfrac{1}{4}(x^2+y^2),\\ y=4\end{cases}$ 在点(2,4,5)处的切线与 x 轴正向所成的倾角.

解　设所求倾角为α. 由偏导数的几何意义知$\tan\alpha$即为二元函数$z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)$在$(2,4)$处x的偏导$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,4)}$. 即$\tan\alpha=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,4)}=1$，故$\alpha=\frac{\pi}{4}$.

4. (1) 研究$f(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$在点$(0,0)$是否存在偏导数$f_x(0,0)$及$f_y(0,0)$；

解　(1) $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\dfrac{1}{\Delta x^2}$不存在. $f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$.

(2) 设函数$f(x,y)=|x-y|g(x,y)$，其中函数$g(x,y)$在点$(0,0)$的某邻域内连续. 试问$g(0,0)$为何值时，f在点$(0,0)$的两个偏导数均存在？$g(0,0)$为何值时，f在点$(0,0)$处可微？

解　(2) $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}g(\Delta x,0)$.

要使$f_x(0,0)$存在，则$g(0,0)=0$，此时$f_x(0,0)=0$.

$f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{|\Delta y|}{\Delta y}g(0,\Delta y)$，当且仅当$g(0,0)=0$时存在，且$f_y(0,0)=0$. 故当$g(0,0)=0$时，$f(x,y)$可偏导.

又
$$\begin{aligned}&f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y\\&=|\Delta x-\Delta y|g(\Delta x,\Delta y),\end{aligned}$$

令$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，如$g(0,0)\neq 0$，则一定不可微. 而$g(0,0)=0$时，$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{|\Delta x-\Delta y|}{\rho}$不存在. 但$\dfrac{|\Delta x-\Delta y|}{\rho}\leqslant\dfrac{|\Delta x|+|\Delta y|}{\rho}\leqslant 2$有界，则$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{|\Delta x-\Delta y|g(\Delta x,\Delta y)}{\rho}=0$. 即当$g(0,0)=0$时$f(x,y)$在$(0,0)$处可微.

6. 设$f(x,y)=(xy)^{\frac{1}{3}}$. 证明(1) $f(x,y)$在点$(0,0)$只有沿两个坐标轴的正负方向上存在方向导数；(2) $f(x,y)$在点$(0,0)$连续.

证明　(1) 设$l=\{\cos\alpha,\sin\alpha\}$，则$\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)-f(0,0)}{t}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin^{\frac{1}{3}}\alpha\cos^{\frac{1}{3}}\alpha}{t^{\frac{1}{3}}}$. 当且仅当 $\sin\alpha=0$ 或 $\cos\alpha=0$ 时存在,且其值为零. 即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 只有沿 x 轴正负向 $(\alpha=0,\pi)$ 和 y 轴正负向 $\left(\alpha=\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 的方向导数存在.

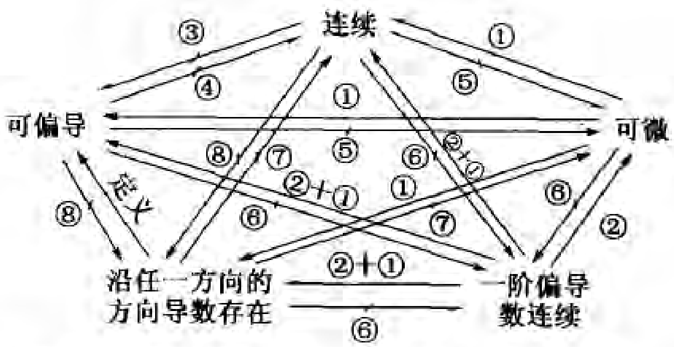
又由 $|f(x,y)-f(0,0)|=|xy|^{\frac{1}{3}}\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}$,易知 f 在 $(0,0)$ 处连续.

9. 设 $du=2xdx-3ydy$,求函数 $u(x,y)$.

解 由于 $du=2xdx-3ydy$,所以 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x,\dfrac{\partial u}{\partial y}=-3y$. 由 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x$ 得 $u(x,y)=x^2+\varphi(y)$. 由 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-3y$ 可得 $\varphi'(y)=-3y$. 则 $\varphi(y)=-\dfrac{3}{2}y^2+c$,故 $u(x,y)=x^2-\dfrac{3}{2}y^2+c$.

10. 试说明二元函数 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 连续,偏导数存在. 沿任一方向 l 的方向导数存在、可微及一阶偏导数连续几个概念之间的关系.

解 其相互关系可表示如下:



其中①表示定理 3.1;②表示定理 3.2;③~⑧为反例.

③ $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 处连续. 但 $f_x(0,0)$,$f_y(0,0)$ 均不存在.

④ $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$,但 f 在 $(0,0)$ 不连续.

⑤ $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ f 在 $(0,0)$ 连续、可偏导,且 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$,但不可微.

⑥ $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ f 在(0,0)连续. 可偏导,f 在(0,0)处可微,但 $f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 在(0,0)处间断.(由 f 在(0,0)可微知:f 在(0,0)沿任一方向的方向导数存在.)

⑦ $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

在(0,0)处沿任何方向的方向导数存在,但 f 在(0,0)处不连续,从而不可微.

⑧ $f(x,y)=(xy)^{\frac{1}{3}}$ 在(0,0)连续. 但仅沿 x,y 轴正、负向的方向导数存在.

11. 设 $f(x,y)$ 在区域 D 内具有一阶连续偏导数且恒有 $f_x=0$ 及 $f_y=0$,证明 f 在 D 内为一常数.

证明　由定理 3.2 知 f 在 D 内任一点 (x,y) 处可微,且 $\mathrm{d}f(x,y)=f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y\equiv 0$. 从而 $f(x,y)\equiv$ 常数($(x,y)\in D$).

12. 设 x,y 的绝对值都很小时,利用全微分概念推出下列各式的近似计算公式

(1) $(1+x)^m(1+y)^n$;　(2) $\arctan\dfrac{x+y}{1+xy}$.

解　(1) 令 $f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n$. 当 x,y 绝对值很小时,

$$f(x,y)-f(0,0)\approx f_x(0,0)(x-0)+f_y(0,0)(y-0)=mx+ny.$$

故
$$f(x,y)\approx f(0,0)+mx+ny=1+mx+ny.$$

(2) 令 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x+y}{1+xy}$. 当 $|x|,|y|$ 很小时,

$$f(x,y)\approx f(0,0)+f_x(0,0)(x-0)+f_y(0,0)(y-0)=x+y.$$

20. 设 $u=\ln\left(\dfrac{1}{r}\right)$,其中 $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$,求 ∇u;并指出在空间哪些点处成立 $\|\nabla u\|=1$?

解　$\nabla u=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\ln\dfrac{1}{r}\right)\left\{\dfrac{x-a}{r},\dfrac{y-b}{r},\dfrac{z-c}{r}\right\}=-\dfrac{1}{r^2}\{x-a,x-b,x-c\}$,

$$\|\nabla u\|=\frac{1}{r^2}[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{r},$$

故在 $r=1$ 即球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=1$ 上所有的点处 $\|\nabla u\|=1$.

21. 设 $u=\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$，问 u 在点 (a,b,c) 处沿哪个方向增大最快？沿哪个方向减小最快？沿哪个方向变化率为零？

解 $\nabla u(a,b,c)=\left\{-\frac{2}{a},-\frac{2}{b},\frac{2}{c}\right\}$. 故 u 在 (a,b,c) 点沿 $\nabla u(a,b,c)$ 增加最快；沿 $-\nabla u(a,b,c)=\left\{\frac{2}{a},\frac{2}{b},\frac{-2}{c}\right\}$ 方向减小最快；沿与 $\nabla u(a,b,c)$ 垂直的方向 $\{l,m,n\}$ 变化率为零，其中 l,m,n 满足 $\frac{1}{a}l+\frac{1}{b}m-\frac{1}{c}n=0$. 即沿 $k_1\{a,-b,0\}+k_2\{a,0,c\}$ 方向变化率为零，其中 k_1,k_2 为任意实数.

25. 证明如果函数 $u=f(x,y)$ 满足

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

式中 A,B,C 都是常数，且 $f(x,y)$ 具有连续的三阶偏导数，那么函数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 也满足这个方程.

证明 由于 f 具有连续的三阶偏导数，则三阶偏导数与求导次序无关，从而 $\frac{\partial^3 u}{\partial y^2\partial x}=\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$，进而

$$\begin{aligned}
&A\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+2B\frac{\partial}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+C\frac{\partial}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\
&=A\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+2B\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right)+C\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}\\
&=\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\\
&=\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0.
\end{aligned}$$

故函数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 满足题中方程. 同理可证此结论对函数 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 也成立.

26. 求下列函数的高阶偏导数（假定函数 f 具有二阶连续偏导数或二阶连续导数，函数 g 具二阶连续导数）.

(3) $z=f(xy^2,x^2y)$ 所有二阶偏导数；

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1\cdot y^2+2xyf_2$，$\frac{\partial z}{\partial y}=2xyf_1+x^2f_2$，

则
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(y^2f_1+2xyf_2)=y^2\frac{\partial f_1}{\partial x}+2yf_2+2xy\frac{\partial f_2}{\partial x}$$
$$=y^2(y^2f_{11}+2xyf_{12})+2yf_2+2xy(y^2f_{21}+2xyf_{22})$$
$$=y^4f_{11}+4xy^3f_{12}+4x^2y^2f_{22}+2yf_2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(y^2f_1+2xyf_2)$$
$$=2yf_1+y^2\frac{\partial f_1}{\partial y}+2xf_2+2xy\frac{\partial f_2}{\partial y}$$
$$=2yf_1+2xf_2+y^2(2xyf_{11}+x^2f_{12})+2xy(2xyf_{21}+x^2f_{22})$$
$$=2yf_1+2xf_2+2xy^3f_{11}+5x^2y^2f_{12}+2x^3yf_{22};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=2xf_1+2xy\frac{\partial f_1}{\partial y}+x^2\frac{\partial f_2}{\partial y}$$
$$=2xf_1+2xy(2xyf_{11}+x^2f_{12})+x^2(2xyf_{21}+x^2f_{22})$$
$$=2xf_1+4x^2y^2f_{11}+4x^3yf_{12}+x^4f_{22}.$$

(5)　$z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right),\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}.$

解　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=xf_1-\dfrac{x}{y^2}f_2+\dfrac{1}{x}g'\left(\dfrac{y}{x}\right)$，从而

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(xf_1-\frac{x}{y^2}f_2+\frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$
$$=f_1+x\left(yf_{11}+\frac{1}{y}f_{12}\right)-\frac{1}{y^2}f_2-\frac{x}{y^2}\left(yf_{21}+\frac{1}{y}f_{22}\right)$$
$$-\frac{1}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x}\left(\frac{-y}{x^2}\right)g''\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$=f_1-\frac{1}{y^2}f_2+xyf_{11}-\frac{x}{y^3}f_{22}-\frac{1}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right).$$

27. 设$f(x,y)$具有一阶连续偏导数，且$f(1,1)=1,f_1(1,1)=a,f_2(1,1)=b$，又函数$F(x)=f[x,f(x,f(x,x))]$，求$F(1),F'(1)$.

解　$F(1)=f[1,f(1,f(1,1))]=f[1,f(1,1)]=f[1,1]=1$，

$$F'(1)=f_1[1,f(1,f(1,1))]+f_2[1,f(1,f(1,1))]\cdot\left.\frac{\mathrm{d}f(x,f(x,x))}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}$$

$$=f_1[1,f(1,1)]+f_2[1,f(1,1)]\Big[f_1(1,f(1,1))$$

$$+f_2(1,f(1,1))\left.\frac{\mathrm{d}f(x,x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}\Big]$$

$$=f_1(1,1)+f_2(1,1)[f_1(1,1)+f_2(1,1)(f_1(1,1)+f_2(1,1))]$$

$$=a+b[a+b(a+b)].$$

28. 设函数 $u=u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，试求常数 a 和 b，使在变换 $\xi=x+ay,\eta=x+by$ 之下，可将方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$.

解 如果 $a=b$，则 $\xi=\eta=x+ay$. 则 $a\neq b$. 从而 $x=\frac{1}{a-b}(a\eta-b\xi)$，$y=\frac{1}{a-b}(\xi-\eta)$，则

$$\frac{\partial u}{\partial\eta}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{a}{a-b}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{-1}{a-b}=\frac{1}{a-b}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{a-b}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)=\frac{1}{a-b}\Big[a\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{-b}{a-b}$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\frac{1}{a-b}\Big)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{-b}{a-b}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{1}{a-b}\right)\Big]$$

$$=\frac{-ab}{(a-b)^2}\left[\frac{1}{ab}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{a+b}{ab}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right].$$

令 $ab=\frac{1}{3}$，$\frac{a+b}{ab}=-4$，则 $a=-1,b=-\frac{1}{3}$ 或 $b=-1,a=-\frac{1}{3}$ 时满足题设要求.

29. 已知方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 有形如 $u=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 的解，试求出这个解来.

解 如果 $u=\varphi(t),t=\frac{y}{x}$，则 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}\varphi'(t)$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x}\varphi'(t)$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}\varphi'(t)+\frac{y^2}{x^4}\varphi''(t)$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2}\varphi''(t)$. 从而 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2}[(1+t^2)\varphi''(t)+2t\varphi'(t)]$.

又由方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 有形如 $u=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 的解可得，$\varphi(t)$ 满足方程：$(1+t^2)\varphi''(t)+2t\varphi'(t)=0$. 解此可降阶的二阶微分方程可得 $\varphi(t)=C_1\arctan t+C_2$，$C_1,C_2$ 为相互独立的两个任意常数. 则 $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=C_1\arctan\frac{y}{x}+C_2$.

30. 利用一阶全微分形式不变性和微分运算法则，求下列函数的全微分和偏导数（φ 与 f 均可微）.

（1）$z=\varphi(xy)+\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$；（4）$u=f(x^2-y^2,e^{xy},z)$.

解 （1）
$$\begin{aligned}dz&=d\varphi(xy)+d\varphi\left(\frac{x}{y}\right)=\varphi'(xy)d(xy)+\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)d\left(\frac{x}{y}\right)\\&=\varphi'(xy)(ydx+xdy)+\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{1}{y}dx+\frac{-x}{y^2}dy\right)\\&=\left[y\varphi'(xy)+\frac{1}{y}\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\right]dx+\left[x\varphi'(xy)-\frac{x}{y^2}\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\right]dy,\end{aligned}$$

且 $\frac{\partial z}{\partial x}=y\varphi'(xy)+\frac{1}{y}\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)$；$\frac{\partial z}{\partial y}=x\varphi'(xy)-\frac{x}{y^2}\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)$.

（4）
$$\begin{aligned}du&=f_1\cdot d(x^2-y^2)+f_2\cdot de^{xy}+f_3dz\\&=(2xdx-2ydy)f_1+e^{xy}(xdy+ydx)f_2+f_3dz\\&=(2xf_1+ye^{xy}f_2)dx+(-2yf_1+xe^{xy}f_2)dy+f_3dz.\end{aligned}$$

从而 $\frac{\partial u}{\partial x}=2xf_1+ye^{xy}f_2$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-2yf_1+xe^{xy}f_2$，$\frac{\partial u}{\partial z}=f_3$.

32. 求下列方程所确定的隐函数 z 的一阶与二阶偏导数.

（1）$\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$；（2）$x^2-2y^2+z^2-4x+2z-5=0$.

解 （1）由一阶全微分形式不变性可得 $d\frac{x}{z}=d\ln z-d\ln y$，即

$$\frac{1}{z}dx+\frac{-x}{z^2}dz=\frac{1}{z}dz-\frac{1}{y}dy,$$

$$\left(\frac{1}{z}+\frac{x}{z^2}\right)dz=\frac{1}{z}dx+\frac{1}{y}dy.$$

于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{z+x},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y(x+z)}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{z+x}\right)=\frac{(x+z)\frac{\partial z}{\partial x}-z\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(x+z)^2}=-\frac{z^2}{(x+z)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z^2}{y(x+z)}\right)=\frac{2z\frac{\partial z}{\partial y}y(x+z)-z^2(x+z)-z^2y\frac{\partial z}{\partial y}}{y^2(x+z)^2}=-\frac{x^2z^2}{y^2(x+z)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{xz^2}{y(x+z)^3}.$$

或令 $$F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}=\frac{x}{z}-\ln z+\ln y.$$

则 $$F_x=\frac{1}{z},\ F_y=\frac{1}{y},\ F_z=-\frac{x}{z^2}-\frac{1}{z}.$$

于是 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{z}{x+z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{z^2}{y(x+z)}.$$

（2）由一阶全微分形式不变性可得

$$2x\mathrm{d}x-4y\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z-4\mathrm{d}x+2\mathrm{d}z=0,$$

即 $$(2x-4)\mathrm{d}x-4y\mathrm{d}y+2(z+1)\mathrm{d}z=0.$$

于是 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-(2x-4)}{2(z+1)}=\frac{2-x}{1+z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{-4y}{2(1+z)}=\frac{2y}{1+z}.$$

或令 $F(x,y,z)=x^2-2y^2+z^2-4x+2z-5$，则

$$F_x=2x-4,\ F_y=-4y,\ F_z=2z+2.$$

于是 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{2-x}{1+z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{2y}{1+z}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2-x}{1+z}\right)=\frac{-(1+z)-(2-x)\frac{\partial z}{\partial x}}{(1+z)^2}=-\frac{(1+z)^2+(x-2)^2}{(1+z)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2-x}{1+z}\right)=\frac{x-2}{(1+z)^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y(x-2)}{(1+z)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{1+z}\right)=\frac{2(1+z)-2y\frac{\partial z}{\partial y}}{(1+z)^2}=\frac{2(1+z)^2-4y^2}{(1+z)^3}.$$

34. 已知方程 $F(x+y,y+z)=1$ 确定了隐函数 $z=z(x,y)$，其中函数 F 具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

解 令 $G(x,y,z)=F(x+y,y+z)-1$，则 $G_y=F_1+F_2$. $G_x=F_1$，$G_z=F_2$，

于是 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_1}{F_2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_1+F_2}{F_2}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{F_1}{F_2}\right)=-\frac{1}{F_2^2}\left(F_2\frac{\partial F_1}{\partial y}-F_1\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)$$

$$= -\frac{1}{F_2^2}\left\{F_2\left[F_{11}+F_{12}\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right]-F_1\left[F_{21}+F_{22}\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right]\right\}$$

$$= -\frac{1}{F_2^2}\left\{F_2\left(F_{11}+F_{12}\frac{-F_1}{F_2}\right)-F_1\left(F_{21}+F_{22}\cdot\frac{-F_1}{F_2}\right)\right\}$$

$$= -\frac{F_2^2F_{11}-2F_1F_2F_{12}+F_1^2F_{22}}{F_2^3}$$

35. 设 $f(x,y,z)=xy^2z^3$，又 x,y,z 满足方程 $x^2+y^2+z^2-3xyz=0$.（ * ）

（1）在 $z=z(x,y)$ 是由方程（ * ）所确定的隐函数时，求 $f_x(1,1,1)$；

（2）在 $y=y(x,z)$ 是由方程（ * ）所确定的隐函数时，求 $f_x(1,1,1)$.

解　（1）$z=z(x,y)$ 是由（ * ）所确定的隐函数. 则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x-3yz}{-2z+3xy}，那么\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=-1，$$

于是
$$f_x(1,1,1)=\left.\left(y^2z^3+3xy^2z^2\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right|_{(1,1,1)}=1-3=-2.$$

（2）$y=y(x,z)$ 是由（ * ）所确定的隐函数，则

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=-\left.\frac{2x-3yz}{2y-3xz}\right|_{(1,1,1)}=-1，$$

于是
$$f_x(1,1,1)=\left.\left(y^2z^3+2xyz^3\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right|_{(1,1,1)}=-1.$$

36. 求由下列方程所确定的隐函数 z 的全微分. 其中 F 具一阶连续偏导数，f 连续可导.

（1）$F(x-az,y-bz)=0$；（2）$x^2+y^2+z^2=yf\left(\frac{z}{y}\right)$.

解　（1）由一阶全微分形式不变性可得

$$F_1\mathrm{d}(x-az)+F_2\mathrm{d}(y-bz)=0，$$

即
$$F_1\mathrm{d}x-aF_1\mathrm{d}z+F_2\mathrm{d}y-bF_2\mathrm{d}z=0.$$

于是
$$\mathrm{d}z=\frac{F_1\mathrm{d}x+F_2\mathrm{d}y}{aF_1+bF_2}.$$

（2）$2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z=f\left(\frac{z}{y}\right)\mathrm{d}y+yf'\left(\frac{z}{y}\right)\mathrm{d}\frac{z}{y}$，

$$2x\mathrm{d}x+\left[2y-f\left(\frac{z}{y}\right)+\frac{z}{y}f'\left(\frac{z}{y}\right)\right]\mathrm{d}y=\left(f'\left(\frac{z}{y}\right)-2z\right)\mathrm{d}z.$$

故
$$\mathrm{d}z=\frac{1}{f'\left(\frac{z}{y}\right)-2z}\left\{2x\mathrm{d}x+\left[2y-f\left(\frac{z}{y}\right)+\frac{z}{y}f'\left(\frac{z}{y}\right)\right]\mathrm{d}y\right\}.$$

37. 设 $y=f(x,t)$，而 t 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的 x,y 的函数，其中 F,f 都具有一阶连续偏导数，证明

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}}.$$

证明 由一阶全微形式不变性可知，

$$\mathrm{d}y=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t, \tag{①}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial F}{\partial t}\mathrm{d}t=0. \tag{②}$$

又因为 t 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的 x,y 的函数，则 $\frac{\partial F}{\partial t}\neq 0$，则由②可得 $\mathrm{d}t=-\left(\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\Big/\frac{\partial F}{\partial t}$，代入①式得

$$\mathrm{d}y=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x-\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y}{\frac{\partial F}{\partial t}},\text{整理可得}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial y}\right)\mathrm{d}y=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x}\right)\mathrm{d}x,$$

故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}}.$$

(B)

1. 设 $f(x,y)$ 在 P_0 可微，$\boldsymbol{l}_1=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$，$\boldsymbol{l}_2=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$，$\frac{\partial f(P_0)}{\partial l_1}=1$，$\frac{\partial f(P_0)}{\partial l_2}=0$. 确定 $\boldsymbol{l}$ 使 $\frac{\partial f(P_0)}{\partial l}=\frac{7}{5\sqrt{2}}$.

解 $\boldsymbol{l}_1$ 与 $\boldsymbol{l}_2$ 均为单位向量，由 $\frac{\partial f(P_0)}{\partial l_1}=1$ 及 $\frac{\partial f(P_0)}{\partial l_2}=0$ 可得

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{2}}=1,\ \frac{\partial f}{\partial x}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{2}}=0.$$

解之得 $\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial x}=\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial y}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

设 $\boldsymbol{l}$ 的两个方向余弦分别为 $\cos\alpha,\cos\beta=\sin\alpha$，则由 $\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial l}=\dfrac{7}{5\sqrt{2}}$ 可知 $\cos\alpha+\sin\alpha=\dfrac{7}{5}$. 两边平方可得 $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{12}{25}$. 故 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5},\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$ 或 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5},\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$. 即 $\boldsymbol{l}=\left\{\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right\}$ 或 $\boldsymbol{l}=\left\{\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right\}$.

3. 设二元函数 f 在点 P_0 的某邻域 $U(P_0)$ 内的偏导数 f_x 与 f_y 都有界. 证明 f 在 $U(P_0)$ 内连续.

证明　因为 f_x,f_y 在点 P_0 的某邻域 $U(P_0)$ 内都有界. 即 $\forall(x,y)\in U(P_0)$，$\exists M>0$，使 $|f_x(x,y)|\leqslant M$，$|f_y(x,y)|\leqslant M$. 设 $(x+\Delta x,y+\Delta y)\in U(P_0)$，则由 Lagrange 定理可知，$\exists\theta_1,\theta_2\in[0,1)$，使

$$\begin{aligned}|f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)| &\leqslant |f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)|\\&\quad+|f(x,y+\Delta y)-f(x,y)|\\&=|f_x(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)|\,|\Delta x|\\&\quad+|f_y(x,y+\theta_2\Delta y)|\,|\Delta y|\\&\leqslant M(|\Delta x|+|\Delta y|)\leqslant 2M\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2},\end{aligned}$$

则 f 在 $U(P_0)$ 的任一点连续，即 f 在 $U(P_0)$ 上连续.

4. 设 n 元函数 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续，n 元函数 g 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 可微且 $g(\boldsymbol{x}_0)=0$，证明 $f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 可微，且有

$$\mathrm{d}(f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}))\big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}=f(\boldsymbol{x}_0)\mathrm{d}g(\boldsymbol{x}_0).$$

证明　由于 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续，则 $f(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)=\alpha(\rho)$，其中 $\rho=\|\Delta\boldsymbol{x}\|$，$\alpha(\rho)$ 为当 $\rho\to0$ 时的无穷小量，又由 g 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微可知 $g(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x}_0)=\mathrm{d}g(\boldsymbol{x}_0)+O_1(\rho)$，$\dfrac{O_1(\rho)}{\rho}$ 为当 $\rho\to0$ 时无穷小量. 注意到 $g(\boldsymbol{x}_0)=0$，可得

$$\begin{aligned}&f(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x}_0)f(\boldsymbol{x}_0)=f(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})(g(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x}_0))\\&=(f(\boldsymbol{x}_0)+\alpha(\rho))(\mathrm{d}g(\boldsymbol{x}_0)+O_1(\rho))=f(\boldsymbol{x}_0)\mathrm{d}g(\boldsymbol{x}_0)+\beta.\end{aligned}$$

其中 $\beta=[f(\boldsymbol{x}_0)+\alpha(\rho)]O_1(\rho)+\alpha(\rho)\mathrm{d}g(\boldsymbol{x}_0)$.

又由于 $\dfrac{\mathrm{d}g(\boldsymbol{x}_0)}{\rho}=\left|\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial g(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}\Delta x_i}{\rho}\right|\leqslant\left|\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial g(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}\right|$，$\alpha(\rho)$ 是无穷小量（ρ

$\to 0$)，所以$\lim\limits_{\rho\to 0}\alpha(\rho)\dfrac{\mathrm{d}g(\boldsymbol{x}_0)}{\rho}=0$. 又 $O_1(\rho)$是$\rho\to 0$时的高阶无穷小，且$\lim\limits_{\rho\to 0}[f(\boldsymbol{x}_0)+\alpha(\rho)]=f(\boldsymbol{x}_0)$，则$\beta$是$\rho\to 0$的高阶无穷小量，又$f(\boldsymbol{x}_0)$为常数，则$f(\boldsymbol{x}_0)\mathrm{d}g(\boldsymbol{x}_0)$关于$\Delta\boldsymbol{x}$是线性的. 即$f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x}_0$可微，且$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)g(\boldsymbol{x}_0)=f(\boldsymbol{x}_0)\mathrm{d}g(\boldsymbol{x}_0)$.

5. 设$f_x(x,y)$在(x_0,y_0)的某邻域内存在且在(x_0,y_0)处连续，又$f_y(x,y)$存在，证明$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微.

证明 $z=f(x,y)$在(x_0,y_0)处的改变量为

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\&=[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]\\&\quad+[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)],\end{aligned}$$

上式右端中每一方括号内都是一元函数的改变量. 由 lagrange 微分中值公式，存在$\theta(0<\theta<1)$，使得

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)=f_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x.$$

由于$f_x(x,y)$在(x_0,y_0)处连续，有

$$f_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y)=f_x(x_0,y_0)+\alpha_1(\rho),$$

其中$\alpha_1(\rho)$是当$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$时的无穷小.

又由$f_y(x,y)$在(x_0,y_0)处存在可知$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=f_y(x_0,y_0)$，于是$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-f_y(x_0,y_0)\Delta y}{\Delta y}=0$. 即$f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-f_y(x_0,y_0)\Delta y=\alpha_2(\Delta y)\Delta y$，其中$\alpha_2(\Delta y)$是当$\Delta y\to 0$时的无穷小量. 从而

$$\Delta z=[f_x(x_0,y_0)+\alpha_1(\rho)]\Delta x+[f_y(x_0,y_0)+\alpha_2(\Delta y)]\Delta y,$$

即$\Delta z=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+\alpha$，其中$\alpha=\alpha_1(\rho)\Delta x+\alpha_2(\Delta y)\Delta y$.

由于$\dfrac{|\Delta x|}{\rho}\leqslant 1$，$\dfrac{|\Delta y|}{\rho}\leqslant 1$，且$\lim\limits_{\rho\to 0}\alpha_2(\Delta y)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\alpha_2(\Delta y)=0$，所以$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\alpha}{\rho}=0$. 故$f(x,y)$在$(x_0,y_0)$处的改变量可表示为

$$\Delta z=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho),$$

即f在(x_0,y_0)处可微.

6. 设$u=x\sin y$，

(1) 当x,y为自变量时，求二阶全微分d^2u；

(2) 当$x=\varphi(s,t)$，$y=\psi(s,t)$时，求二阶全微分d^2u；

(3) $\varphi\neq a_1s+b_1t+c_1$，$\psi\neq a_2s+b_2t+c_2$时，说明(2)中的$\mathrm{d}^2u$与(1)中的$\mathrm{d}^2u$不同.

解　(1) $du=\sin y dx+x\cos y dy$,

$$d^2u=d(\sin y dx+x\cos y dy)=2\cos y dx dy-x\sin y dy^2.$$

(2) 由一阶全微分形式不变性可知

$$du=\sin y dx+x\cos y dy$$

且 $d^2u=d(\sin y dx+x\cos y dy)$

$$=\cos y dy dx+\sin y d(dx)+dx\cos y dy-x\sin y dy^2+x\cos y d(dy)$$

$$=2\cos y dx dy-x\sin y dy^2+\sin y d^2x+x\cos y d^2y.$$

(3) 要使(1)与(2)中的 d^2u 相等,则 $d^2x\equiv 0, d^2y\equiv 0$. 即 $d^2\varphi(s,t)\equiv 0$, $d^2\psi(s,t)\equiv 0$. 即函数 φ 与 ψ 必须关于 s,t 都是线性的,即 $\varphi(s,t)=a_1s+b_1t+c_1$, $\psi(s,t)=a_2s+b_2t+c_2$.

习　题　5.4

(A)

3. 求$f(x,y)=x^y$ 在点(1,4)的二阶 Taylor 公式,并利用它计算$(1.08)^{3.96}$的近似值.

解　$f_x(1,4)=yx^{y-1}\big|_{(1,4)}=4$, $f_y(1,4)=x^y\ln x\big|_{(1,4)}=0$,

$f_{xx}(1,4)=y(y-1)x^{y-2}\big|_{(1,4)}=12$,

$f_{xy}(1,4)=(yx^{y-1}\ln x+x^{y-1})\big|_{(1,4)}=1$,

$f_{yy}(1,4)=x^y(\ln x)^2\big|_{(1,4)}=0$.

$f(x,y)$在(1,4)带 Peano 余项的 Taylor 公式为

$$f(x,y)=1+4(x-1)+\frac{1}{2!}(x-1,y-4)\begin{pmatrix}12&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y-4\end{pmatrix}+o(\rho^2)$$

$$=1+4(x-1)+6(x-1)^2+(x-1)(y-4)+o(\rho^2),$$

其中
$$\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}.$$

取 $x=1.08, y=3.96$. 由上面的 Taylor 公式可得

$$(1.08)^{3.96}\approx 1+4(1.08-1)+6(1.08-1)^2+(1.08-1)(3.96-4)$$
$$=1.355\,2.$$

4. 求下列函数的极值.

(1) $z=x^2(y-1)^2$; (2) $z=(x^2+y^2-1)^2$; (3) $z=xy(a-x-y)$.

解　(1) 由$\begin{cases}z_x=2x(y-1)^2=0,\\ z_y=2x^2(y-1)=0,\end{cases}$求出 z 的驻点有