Remark 1: 内闭一致收敛 ← 定义

P298, ex3: $[a,b]$ 换成区间 I.

则 Thm 2.3, 2.4, 2.5 的结论也成立.

Ex: P297, ex5 (1)

令 $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$ —(1) $|x|<1$

可以证明上述级数在 $(-1,1)$ 上内闭一致收敛

Q: $f(x)$ 是哪个函数?

级数(1):

$$f'(x) = 1 - x + x^2 + \cdots (-1)^{n-1}x^{n-1} + \cdots$$

$$= \frac{1}{1+x}, \quad |x|<1$$

$$\Rightarrow f(x) = \ln(1+x) + C$$

? $f(0)=0 \Rightarrow C=0$

$$\Rightarrow f(x) = \ln(1+x), \quad |x|<1$$

Dini Thm

Remark 2: Thm 2.3 的逆命题成立吗?!

即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的各项在 $[a,b]$ 上连续且和函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x)$. ✗

反例: $S_n(x)=\sum_{i=1}^{n} u_i(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $|x|\le 1$ 数列

$\Downarrow$

$S(x)=0$, $|x|\le 1$

Remark 3. 处处不可导的连续函数.

首推 Weierstrass 的反例

但是: 1930年, Van der Waerden 的反例.