第五章 多元函数微分学及其应用

第一节 n维欧氏空间$\mathbf{R}^n$中的点集的初步知识

n维欧氏空间

n维欧氏空间中点列的极限与完备性

n维欧氏空间的各类点集：开集、闭集、区域

- 本节将研究一种特殊的集合——n维欧氏空间中的点集。
- 向量空间往往成为数学研究的载体和对象。
- 分析学科所关心的空间的结构包括度量、范数、开集、闭集等。
- 本节的主要内容为n维欧氏空间中的各类点集，这将为我们研究新的积分奠定基础。

1. n维Euclid欧氏空间

所有 n 元有序实数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的全体所构成的集合 R^n 按照以下定义的加法和数乘运算：

对于$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in R^n, y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)\in R^n$

定义加法：$x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n)$

定义数乘：$\alpha x=(\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n) \quad \alpha\in R.$

构成一个 n 维向量空间，简称 n 维空间, 即

$$\boxed{R^n=\left\{\left(x_1, x_2, \cdots x_n\right)\middle| x_i\in R, i=1,2\cdots,n\right\}}$$

其中每个有序实数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$称为称为 R^n 中的一个向量（或点）; n 个实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$是这个向量（或点）的坐标.

在 n 维向量空间 R^n 中，按照以下定义内积：

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n, y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in R^n$

$$<x,y>=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i$$

构成一个 n 维 Euclid 空间.

对于 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n, y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in R^n$

R^n 中的向量的长度（或范数）定义为：

$$\|x\|=\sqrt{<x,x>}=\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2}$$

定义距离

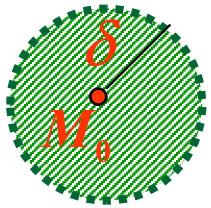
$$\boxed{\rho(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}}$$

2. R^n中点列的极限

定义(邻域)：向量空间R^n中所有和定点a的距离小于定数δ的点的全体,即集合$\{x\in R^n \mid \rho(x,a)<\delta\}$

称为**点a的δ邻域**，　记作　$U(a,\delta)$或$U(a)$

显然，在R^1, R^2, R^3, $U(a,\delta)$分别是以a为中心以δ为半径的开区间、开圆和开球.



邻域具有如下的**基本性质**：

(1) $P\in U(P)$

(2) 对于P的两个邻域$U_1(P),U_2(P)$，存在邻域$U_3(P)\subset U_1(P)\cap U_2(P)$

(3) 对于$Q\in U(P)$，存在Q的邻域$U(Q)\subset U(P)$

(4) 对于$P\neq Q$，存在P和Q的邻域$U(P),U(Q)$，使得$U(P)\cap U(Q)=\varnothing$

点列的极限

(I) ε–N式定义：

若$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$为 n 维向量空间 R^n 中一个点列，点 $a\in R^n$,若$\forall\varepsilon>0,\exists N\in N^+$，$\partial\, k>N$，有$\rho(x_k,a)<\varepsilon$,则称该点列收敛于 a，记作$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=a$.

(II) 邻域式定义：

若对于 a 的任意邻域 $U(a),\exists N\in N^+$，$\partial\, k>N$,有 $x_k\in U(a)$. 则称该点列收敛于 a, 记作 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=a$.

定理1.1 n维欧氏空间点列的收敛是按坐标收敛.

设$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$为 n 维向量空间 R^n 中一个点列，点

$a \in R^n$,则$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{k,i} = a_i, \forall i = 1,2,...,n$

其中，$x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \cdots, x_{k,n}), a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$

例子

$$\boldsymbol{x}^{(k)}=\begin{pmatrix}x_1^{(k)}\\x_2^{(k)}\\x_3^{(k)}\end{pmatrix}=\left((1+\frac{1}{k})^k,\frac{\sin k}{k},k(e^{\frac{1}{k}}-1)\right)^T$$

$$\lim_{k\to\infty}x^{(k)}=\begin{pmatrix}\lim_{k\to\infty}x_1^{(k)}\\\lim_{k\to\infty}x_2^{(k)}\\\lim_{k\to\infty}x_3^{(k)}\end{pmatrix}=(e,0,1)^T$$

$$=\left(\lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{k})^k,\lim_{k\to\infty}\frac{\sin k}{k},\lim_{k\to\infty}k(e^{\frac{1}{k}}-1)\right)^T$$

性质：

1. 点列的极限是唯一的；

2. 设$\{x_k\}$是有界点列，

即 $\exists M>0, M\in R, \partial k\in N_+$, $\|x_k\|\le M$。

收敛点列必为有界点集

3. 点列的收敛满足线性性；

4. 若$\left\{x_k\right\}$收敛于 a, 则它的任意子列也收敛于 a.

5. n维欧氏空间的有界点列必有收敛的子（点）列.

定理1.3 **Bolzano-Weierstrass定理**

定义 如果对n维欧氏空间中的点列$\{x_k\}$，若

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N_+, \text{使得} \forall k > N \text{及} \forall p \in \mathrm{N}_+, \left\| x_{k+p} - a_k \right\| < \varepsilon$$

则称$\{x_n\}$是**Cauchy点列**（**基本点列**）

定理1.4 n维欧氏空间中的收敛点列等价于R^n中Cauchy点列

补充 点集的距离

两个非空点集A, B的距离定义为 $\boxed{\rho(A,B)=\inf\limits_{\substack{P\in A\\ Q\in B}}\rho(P,Q).}$

注：若$A=\{P^*\}$，即A为单点集，则可记

$$\rho(A,B)=\rho(P^*,B)$$

直径及有界点集

点集的直径：

一个非空点集A的直径定义为 $\delta(A)=\sup\limits_{P,Q\in A}\rho(P,Q).$

有界点集：

一个非空点集A称为有界集合，若 $\delta(A)<\infty.$

欧氏空间中点集的一些基本概念——区间

定义：R^n 中的点集

$$\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid a_i<x_i<b_i, i=1,\cdots,n\right\}$$

称为一个**开区间**；若将其中的不等式全部换成

$a_i \le x_i \le b_i$, $a_i < x_i \le b_i$, $a_i \le x_i < b_i$,

则上述点集分别称为闭区间、左开右闭区间、左闭右开区间，统称为区间，记作I。

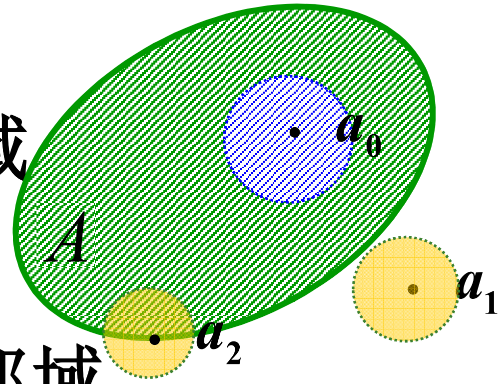
$b_i - a_i$ 称为I的第i个边长；

$\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$ 称为I的体积，记作$|I|$.

3. 欧氏空间中的开集与闭集

考虑向量空间R^n中的点与给定点集之间的关系。

设A为R^n中的一个点集，a为R^n中的点，则a和A的关系具有如下几种：



(1) a附近全是A的点，即存在a的某邻域 $U(a) \subseteq A$， 此时,称a为A的**内点**；

(2) a附近全不是A的点，即存在a的某邻域 $U(a) \cap A = \varnothing$， 此时称$a$为$A$的**外点**；

(3) a附近既有A的点，又有不属于A的点，即对a的任意邻域$U(a)$，$U(a) \not\subset A$且$U(a) \cap A \neq \varnothing$，

此时称a为A的**边界点**，简称**界点**；

(4) a附近有A的无穷多个点，即对a的任意邻域$U(a)$,

$U(a)\cap A$ 为无限集合，此时称a为A的**聚点**；

(5) a附近除a外没有A的点，即存在a的邻域$U(a)$,

$U(a)\cap A=\{a\}$ 此时称a为A的**孤立点**。

点与点集间的关系

显然，空间中任意的点a是且只能是上述(1)(2)(3)中的一个，或者是且只能是上述(2)(4)(5)中的一个，即

$$\text{对某点集}A\text{来说，}R^n\text{中的点}\begin{cases}\text{内点}\\\text{边界点}\\\text{外点}\end{cases}\text{或}\begin{cases}\text{聚点}\\\text{孤立点}\\\text{外点}\end{cases}$$

(1) 内点一定是聚点，外点一定不是聚点；

(2) 聚点可以是内点，也可以是界点，但不能是外点；

(3) 孤立点一定不是聚点、内点或外点，一定是界点；

(4) A中的点要么是聚点，要么是孤立点；

(5) 界点要么是聚点，要么是孤立点。

聚点

关于聚点，下面三条是等价的：

(1) a是A的聚点；

(2) a的任意邻域内，至少含有一个属于A而异于a点；

(3) 存在A中互异的点所成的点列$\{x_n\}$，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

内部、边界、外部、导集、闭包

定义1.4：(1) A的全体内点所成的集合，称为A的**内部**，记作 A°,或$\mathrm{int}\,A$

(2) A的全体边界点所成的集合，称为A的**边界**，记作 ∂A

(3) A的全体外点所成的集合，称为A的**外部**，记作 $\mathrm{ext}\,A$

(4) A的全体聚点所成的集合，称为A的**导集**，记作 A'

(5) A与A的导集的并集，称为A的**闭包**，记作 $\overline{A}=A\bigcup A'$

闭包是一个非常重要的概念，我们有如下结论：

$$\overline{A}=\left\{x\in R^n \mid \forall x\text{的邻域}U(x),\text{有}U(x)\bigcap A\neq\varnothing\right\}$$

这样可知：

$$\overline{A}=A\bigcup\partial A=A^{\circ}\bigcup\partial A=A'\bigcup\left\{A\text{的全体孤立点}\right\}$$

例如，$A=\{(\frac{1}{k},\frac{1}{k}),k\in N^{+}\}$

开集和闭集

定义：若集合A的每一点都是A的内点，则称A为开集；

若集合A的每一个聚点都属于A，则称A为闭集.

开集和闭集是最重要的两类点集，它们具有以下的性质：

(1) 对任意的点集A，A°是开集，A'和$\overline{A}$是闭集；

(2) 点集A是开集当且仅当 $A = A^{\circ}$;

A是闭集当且仅当 $A' \subset A$或$\partial A \subset A$;

(3)A^{0}是含于 A 的最大开子集， $\bar{A}$是包含 A 的最小闭子集.

(4) 若A为开集，则A的余集为闭集，若A为闭集，则A的余集为开集；

(5) 任意多个开集的并集以及有限多个开集的交集仍为开集；任意多个闭集的交集以及有限多个闭集的并集仍为闭集；

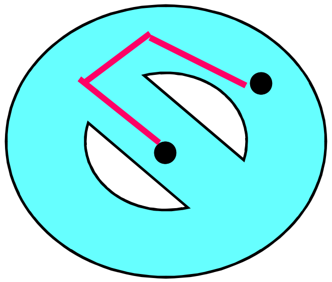
(6) 对于任意两个互不相交的闭集，一定存在两个互不相交的开集分别包含这两个闭集。

4. R^n中的有界集和紧集

定义　设A是R^n中的一个点集，若$\exists M>0$，∂ $\|x\|\le M, x\in A$，则称A是有界集，否则称为无界集。

定义　设A是R^n中的一个点集，若A是有界闭集，则A称为紧集。（关于紧集的数学定义请自行查阅）

定义(连通集)——　如果对于点集A内任何两点，都可用折线连结起来，且该折线上的点都属于A



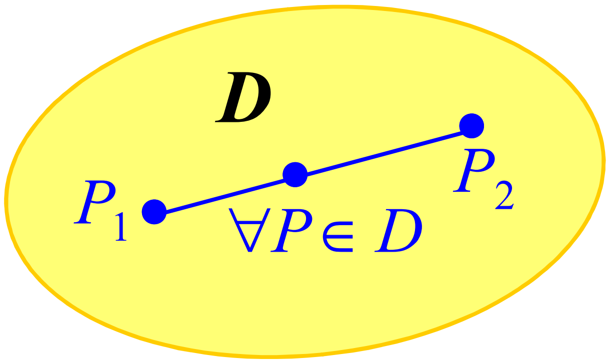
区域、闭区域

区域——若非空开集 A 具有连通性, 即 A 中任意两点之间都可用一条完全含于 A 的有限折线相连接, 则称 A 为区域. 简单地说, 区域就是非空连通开集.

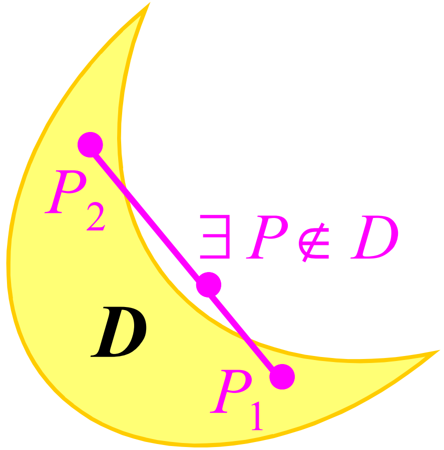
闭区域—— 区域连同其边界所成的集合称为闭区域.

凸集(区域) 若集合(区域) D 上任意两点的连线都含于 D, 则称 D 为凸集(区域) (如图). 这就是说, 若 D 为凸集，则对任意两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2) \in D$, 和一切 $t\ (0 \le t \le 1)$, 恒有

$$P(\,x_1 + \lambda(x_2 - x_1),\ y_1 + t(y_2 - y_1)\,) \in D.$$



凸

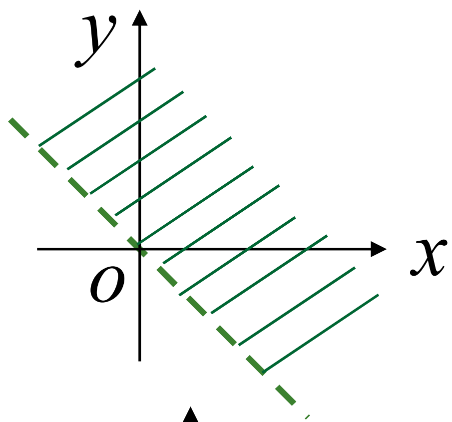


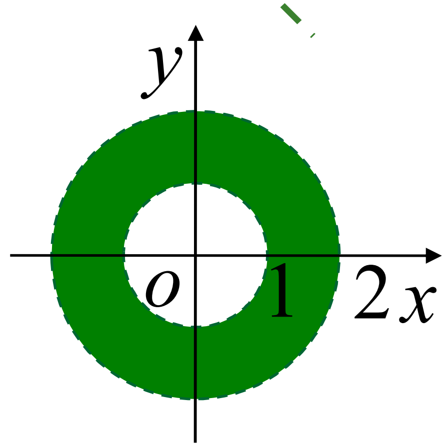
非凸

例1 在平面R^2上

- $\{(x,y) \mid x+y>0\}$
- $\{(x,y) \mid 1<x^2+y^2<4\}$

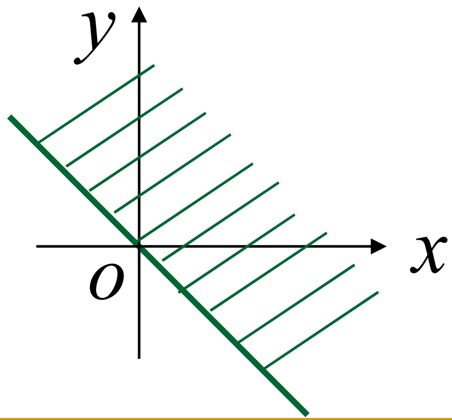
区域

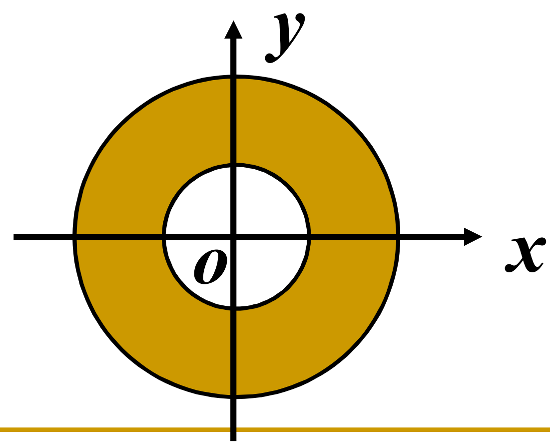




- $\{(x,y) \mid x+y\geq 0\}$
- $\{(x,y) \mid 1\leq x^2+y^2\leq 4\}$

闭区域





- 整个平面是最大的区域，
  也是最大的闭区域；
- 点集 $\{(x,y) \mid |x| > 1\}$ 是开集，
  但非区域．