习 题 3.6

(A)

1. 用分离变量法求下列微分方程的解：

(2) $x\mathrm{d}y-y\ln y\mathrm{d}x=0$.

解 方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y\ln y}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$,

两端积分得 $\ln|\ln y|=\ln|x|+\ln|C|$，即 $\ln y=Cx$.

故所求通解为 $y=\mathrm{e}^{Cx}$.

(4) $\dfrac{x}{1+y}\mathrm{d}x-\dfrac{y}{1+x}\mathrm{d}y=0, y|_{x=0}=1$.

解 方程变形为 $x(1+x)\mathrm{d}x=(1+y)y\mathrm{d}y$,

两端积分得 $\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3=\dfrac{1}{2}y^2+\dfrac{1}{3}y^3+C$ 为原方程通解.

又 $y|_{x=0}=1$，于是 $C=-5$，故所求特解为

$$2(x^3-y^3)+3(x^2-y^2)+5=0.$$

(6) $\arctan y\mathrm{d}y+(1+y^2)x\mathrm{d}x=0$.

解 方程变形为 $\dfrac{\arctan y}{1+y^2}\mathrm{d}y=-x\mathrm{d}x$,

两端积分得 $\dfrac{1}{2}(\arctan y)^2=-\dfrac{1}{2}x^2+C$.

所求通解为 $(\arctan y)^2+x^2=C$.

2. 求解下列一阶线性微分方程的通解：

(2) $xy'-3y=x^4\mathrm{e}^x$.

解 方程变形为 $y'-\dfrac{3}{x}y=x^3\mathrm{e}^x$.

对应的齐次方程 $y'-\dfrac{3}{x}y=0$ 的通解为 $y=Cx^3$.

用常数变易法，设原方程的解为 $y=h(x)x^3$.

代入方程得 $h'(x)=\mathrm{e}^x$，于是 $h(x)=\mathrm{e}^x+C$.

故所求方程的通解为 $y=x^3(\mathrm{e}^x+C)$.

(4) $\cos^2x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=\tan x$.

解　对应的齐次方程 $\cos^2 x\dfrac{dy}{dx}+y=0$ 的通解为　$y=Ce^{-\tan x}$.

设　$y=h(x)e^{-\tan x}$为原方程的解.

代入非齐次方程得　$h'(x)=\tan x\sec^2 xe^{\tan x}$.

于是　$h(x)=(\tan x-1)e^{\tan x}+C$,

故所求非齐次方程通解为　$y=Ce^{-\tan x}+\tan x-1$.

(6) $xy'-y=\dfrac{x}{\ln x}$.

解　对应的齐次方程的通解为　$y=Cx$.

令 $y=h(x)x$ 为非齐方程 $xy'-y=\dfrac{x}{\ln x}$的解.

于是 $h'(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$,从而　$h(x)=\ln|\ln x|+C$.

所求非齐方程的通解为　$y=x\ln|\ln x|+Cx$.

3. 求下列齐次微分方程的解:

(1) $(2x^2-y^2)+3xy\dfrac{dy}{dx}=0$.

解　方程变形为 $2-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+3\dfrac{y}{x}\dfrac{dy}{dx}=0$. 令 $u=\dfrac{y}{x}$,则 $x\dfrac{du}{dx}+u=\dfrac{dy}{dx}$代入方程得$\dfrac{-2u}{1+u^2}du=\dfrac{4}{3}\dfrac{dx}{x}$,两端积分得 $\ln(1+u^2)^{-1}=\ln(x^{\frac{4}{3}})+C$,即$(1+u^2)^{-1}=Cx^{\frac{4}{3}}$.

故所求通解为　$(x^2+y^2)^3=Cx^2$.

(4) $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$,$y|_{x=-1}=2$.

解　令 $u=\dfrac{y}{x}$,则$\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$代入原方程得 $udu=\dfrac{dx}{x}$.

两边积分得　$\dfrac{1}{2}u^2=\ln|x|+C$.

原方程通解为　$y^2=2x^2\ln|x|+Cx^2$.

又因为 $y|_{x=-1}=2$ 代入通解得　$C=4$.

故满足条件 $y|_{x=-1}=2$ 的特解为　$y^2=2x^2\ln|x|+4x^2$.

4. 用适当的方法求下列微分方程的通解:

(1) $y'-x^2y^2=y$.

解　方程变形为　$\dfrac{1}{y^2}y'-\dfrac{1}{y}=x^2$　$(y\neq 0)$,

即令 $u=-\dfrac{1}{y}$,则$\dfrac{du}{dx}+u=x^2$. 解之得

$$u=(x^2-2x+2)+Ce^{-x}.$$

所求通解为 $y=-\dfrac{1}{x^2+2-2x+Ce^{-x}}$, $y=0$ 也是其解.

(3) $y'=\dfrac{1}{e^y+x}$.

解 $\dfrac{dx}{dy}=e^y+x$,即$\dfrac{dx}{dy}-x=e^y$,故所求通解为 $x=e^{\int dy}\left[\int e^y e^{-y}dy+C\right]=$

$e^y(y+C)$.

(4) $(\cos y-2x)'=1$.

解 由于$(\cos y-2x)'=1$,所以 $\cos y-2x=x+C$ 为所求通解.

(5) $\dfrac{dy}{dx}=(x+y)^2$.

解 令 $u=x+y$,则$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}-1$ 代入方程得$\dfrac{du}{dx}=1+u^2$ 解之得 $\arctan u=x+C$,原方程通解为 $\arctan(x+y)=x+C$.

(6) $y'=\sin^2(x-y+1)$.

解 令 $u=x-y+1$,则$\dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{du}{dx}$代入方程得$\dfrac{du}{dx}=\cos^2 u$,解之得 $\tan u=x+C$,或 $u=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$,故所求通解为 $\tan(x-y+1)=x+C$. 而且 $x-y=k\pi+\dfrac{\pi}{2}-1$ 也是其解. 其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

(8) $xy'+y=y(\ln x+\ln y)$.

解 方程两边同乘 x 得 $x^2y'+xy=xy\ln(xy)$,令 $u=xy$, 则 $x\dfrac{dy}{dx}=-y+\dfrac{du}{dx}=-\dfrac{u}{x}+\dfrac{du}{dx}$代入方程可得 $x\left(-\dfrac{u}{x}+\dfrac{du}{dx}\right)+u=u\ln u$. 即 $x\dfrac{du}{dx}=u\ln u$,解之可分离变量方程得 $u\neq1$, $\ln|\ln u|=\ln x+C$. 于是$\ln u=Cx$,即 $\ln xy=Cx$.

又因为 $u=1$ 也是方程 $x\dfrac{du}{dx}=u\ln u$ 的解. 即 $xy=1$ 也是原方程的解. 包含在 $\ln xy=Cx$ 中.

故所求通解为 $\ln xy=Cx$.

(9) $\cos y dx+(x-2\cos y)\sin y dy=0$;

解 $\dfrac{dx}{dy}+(\tan y)x=2\sin y$,对应的齐次方程$\dfrac{dx}{dy}=-x\tan y$ 的通解为 $x=C\cos y$.

设 $x=h(y)\cos y$ 为非齐次方程$\dfrac{dx}{dy}+(\tan y)x=2\sin y$ 的解,那么 $h'(y)\cos y=2\sin y$. 解之得

$$h(y)=-2\ln|\cos y|+C.$$

故原方程通解为　$x=(C-2\ln|\cos y|)\cos y$.

(10) $(x^2+y^2+2x)\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y=0$.

解　将方程变形可得

$$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y^2=-(x^2+2x).$$

令 $y^2=u$ 可得　$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=-(x^2+2x)$.

解此一阶线性非齐次方程可得

$$\begin{aligned}u&=\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\left[-\int(x^2+2x)\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\\&=\mathrm{e}^{-x}\left[-\int(x^2+2x)\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+C\right]\\&=-x^2+C\mathrm{e}^{-x},\end{aligned}$$

故所求通解为 $(x^2+y^2)\mathrm{e}^x=C$.

5. 设有微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right)$，其中 $\varphi(u)$ 为连续函数，a,b,c,d,e,f 为常数.

(1) 若 $ae\neq bd$，证明：可适当选取常数 h 与 k，使变换 $x=u+h,y=v+k$ 把该方程化为齐次微分方程；

(2) 若 $ae=bd$，证明：可用一适当的变换把该方程化为变量分离方程；

(3) 用(1)或(2)中的方法分别求微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y+4}{x-y-6}\quad 与\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1+x-y}{x-y}$$

的通解.

解　(1) 若 $ae\neq bd$. 则方程 $\begin{cases}ax+by+c=0,\\dx+ey+f=0\end{cases}$ 有唯一的一组解 (h,k)，其中

$$h=\begin{vmatrix}-c&b\\-f&e\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}a&b\\d&e\end{vmatrix}=\frac{bf-ce}{ea-bd},$$

$$k=\frac{\begin{vmatrix}a&-c\\d&-f\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a&b\\d&e\end{vmatrix}}=\frac{dc-af}{ea-bd}.$$

令 $x=u+h,y=v+k$，则原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\varphi\left(\frac{au+bv}{du+ev}\right)=\varphi\left(\frac{a+b\frac{v}{u}}{d+e\frac{v}{u}}\right)\text{为齐次方程.}$$

(2) 如果 $ae=bd=0$，则①$a=b=e=d=0$. 则方程化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{c}{f}\right)$ 可分离变量；②有三个为零，方程是可分离变量方程. ③两个等于零，如 $a=b=0(d=e=0)$. 则令 $u=dx+ey+f(u=ax+by+c)$ 可转化为可分离变量方程；如 $a=d=0(e=b=0)$，则方程本身可分离变量.

如果 $ae=bd\neq0$，则 $\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=k$，进而 $ax+by=k(dx+ey)$.

令 $u=dx+ey$. 则方程化为

$$\frac{1}{e}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{ku+c}{u+f}\right)+\frac{d}{e}\text{为可分离变量方程.}$$

(3) 先求解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y+4}{x-y-6}$.

由于 $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2=ae-bd$，$\begin{cases}x+y+4=0,\\ x-y-6=0\end{cases}$ 的交点为 $(1,-5)$.

令 $x=u+1$，$y=v-5$，则方程化为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{u+v}{u-v},\quad \text{即}\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{1+\frac{v}{u}}{1-\frac{v}{u}}.$$

令 $z=\frac{v}{u}$，则 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=u\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}+z$，于是 $(1-z)\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}=\frac{\mathrm{d}u}{u}$. 从而

$\tan z-\frac{1}{2}\ln(1+z^2)=\ln|u|+C$. 于是

$$\tan\left(\frac{y+5}{x-1}\right)-\ln\sqrt{1+\left(\frac{y+5}{x-1}\right)^2}=\ln|x-1|+C,$$

即 $\tan\left(\frac{y+5}{x-1}\right)=\ln\sqrt{(x-1)^2+(y+5)^2}+C$ 为所求通解.

再求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1+x-y}{x-y}$ 的通解.

令 $u=x-y$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，于是方程化为 $1-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1+u}{u}$，即 $u\mathrm{d}u=-\mathrm{d}x$ 解之得

$$u^2+2x=C.$$

原方程的通解为 $(x-y)^2+2x=C$.

6. 求下列微分方程的通解：

(1) $y''=\frac{1}{1+x^2}$.

解 $y'=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}+C_1=\arctan x+C_1$,

$$y=C_1x+x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_2.$$

(3) $y'''=y''$.

解 由于$\frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}x}=y''$,则$\frac{\mathrm{d}y''}{y''}=\mathrm{d}x$.

$$\ln y''=x+C_1,y''=C_1\mathrm{e}^x,y'=C_1\mathrm{e}^x+C_2,$$

故 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2x+C_3$ 为原方程通解.

(5) $yy''+1=(y')^2$.

解 令 $p=y'$,则 $y''=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$. 代入原方程

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+1=p^2.\text{ 于是}\frac{p}{p^2-1}\mathrm{d}p=\frac{\mathrm{d}y}{y},$$

从而 $$\frac{1}{2}\ln|p^2-1|=\ln|y|+C\quad(p\neq\pm1).$$

于是若$|p|>1$, $$p^2-1=(C_1y)^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p=\pm\sqrt{1+(C_1y)^2},$$

故 $$\frac{C_1\mathrm{d}y}{\sqrt{1+(C_1y)^2}}=\pm C_1\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{arcsh}C_1y=\pm C_1x+C_2,$$

于是 $y=\frac{1}{C_1}\mathrm{sh}(\pm C_1x+C_2)$为原方程通解.

又因为 $p=\pm1$ 时,$y=\pm x+C$ 是原方程的解.

若$|p|<1$,则 $1-p^2=(C_1y)^2$,解之得原方程通解为

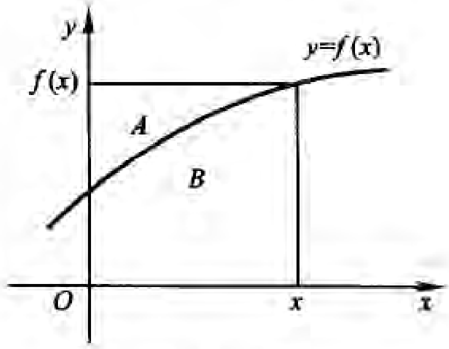
$$y=\frac{1}{C_1}\sin(\pm C_1x+C_2).$$

8. 一曲线经过点(2,8),曲线上任一点到两坐标轴的垂线与两坐标轴构成的矩形被该曲线分为两部分,其中一部分的面积恰好是另一部分面积的两倍,求该曲线的方程.

解 设曲线的方程为 $y=f(x)$. $P(x,f(x))$为其上任一点,如图所示,设上、下两部分的面积为 A 和 B,则 $A=xf(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, $B=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. 依题意有

$$A=2B\text{ 或 }B=2A.$$

(1) 如果 $A=2B$，那么 $xf(x)=3\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，两边求导可得方程 $xf'(x)+f(x)=3f(x)$，即 $f'(x)=\frac{2}{x}f(x)$. 解此可分离方程得 $f(x)=Cx^2$ 又曲线过(2,8)，知 $8=4C$，故 $C=2$，于是所求曲线为 $y=f(x)=2x^2$.



(第 8 题图)

(2) 如果 $2A=B$，那么 $2xf(x)-2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，两边对 x 求导整理得一阶微分方程：$f'(x)=\frac{1}{2x}f(x)$. 解之得 $f^2(x)=Cx$. 又由 $y|_{x=2}=8$ 知 $64=2C$，于是 $C=32$. 此种情况下，曲线方程为 $y^2=32x$.

综上所述，符合题意的曲线方程为 $y=2x^2$ 或 $y^2=32x$.

10. 容器内装有 10 L 盐水，其中含盐 1 kg，现以 3 L/min 的速度注入净水，同时以 2 L/min 的速度抽出盐水，试求 1 h 后容器内溶液的含盐量.

解 设 t min 时含盐量为 $x(t)$ kg，则 $x(0)=1$ 且 t min 时溶液的浓度为 $\frac{x}{10+3t-2t}$，当 Δt 足够小时，则可认为 $[t,t+\Delta t]$ 内浓度不变，则 $\Delta x=x(t+\Delta t)-x(t)=\frac{x}{10+t}\cdot 2\Delta t$，于是 $\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-2x}{10+t}$，所以 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{-2x}{10+t}$，即 $\frac{\mathrm{d}x}{2x}=\frac{-\mathrm{d}t}{10+t}$，即 $x=C(10+t)^{-2}$，又由 $x(0)=1$ 有 $1=\frac{C}{100}$，即 $C=100$，故 $x=100(10+t)^{-2}$，1 小时后溶液的含盐量 $x(C_0)=\frac{1}{49}$ kg.

11. 由经济学知，市场上的商品价格的变化率与商品的过剩需求量(即需求量与供给量的差)成正比. 假设某种商品的供给量 Q_1 与需求量 Q_2 都是价格 p 的线性函数：

$$Q_1=-a+bp, Q_2=c-dp,$$

其中 a,b,c,d 都是正常数，试求该商品价格随时间的变化规律.

解 依题意，$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=k(Q_2-Q_1)=k[a+c-(d+b)p]$，

其中 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$ 为价格的变化率，k 为比例常数，方程可变形为 $p'+k(d+b)p=k(a+c)$.

解此方程可得 $p=\mathrm{e}^{-\int k(b+d)\mathrm{d}t}\left[C+\int k(a+c)\mathrm{e}^{\int k(b+d)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right]$，

故该商品价格随时间的变化率为

$$p=Ce^{-k(b+d)t}+\frac{a+c}{b+d}.$$

12. 海上的一只游船上有 800 人，其中一人患了某种传染病，12 小时后有 3 人被感染发病. 由于这种传染病没有早期症状，所以感染者未被及时隔离. 若疫苗能在 60 至 72 小时运到船上，传染病的传播速度与受感染的人数和未感染人数之积成正比，试估算疫苗运到时的发病人数.

解　设 t 时刻感染人数为 $s=s(t)$，则 $s(0)=1$，$s(12)=3$，且感染率 $\frac{ds}{dt}=k(800-s)s$. 此方程可变形为

$$\frac{d\frac{1}{s}}{dt}+800k\frac{1}{s}=k,\text{故}\frac{1}{s}=Ce^{-800kt}+\frac{1}{800}.$$

由 $s(12)=3$，$s(0)=1$ 可得　$C=\frac{799}{800}$，$k=\frac{1}{9\,600}\ln\frac{3\times799}{797}$.

于是
$$s(t)=\frac{800}{799\left(\frac{797}{3\times799}\right)^{\frac{t}{12}}+1}.$$

当 $t=60$ 小时，　$s=\frac{3^5\times799^4\times800}{797^5+3^5\times799^4}\approx188$(人)；

若 $t=72$ 小时，　$s\approx385$(人).

所以若疫苗 60 小时运到，约有 188 人感染；72 小时运到约 385 人感染.

(B)

1. 研究肿瘤细胞增殖动力学，能为肿瘤的临床治疗提供一定的理论依据. 试按下述两种假设分别建立肿瘤生长的数学模型并求解.

(1) 设肿瘤体积 V 随时间 t 增大的速率与 V^b 成正比，其中 b 为常数(称为形状参数). 开始测得肿瘤体积为 V_0，试分别求当 $b=\frac{2}{3}$ 与当 $b=1$ 时 V 随时间变化的规律，以及当 $b=1$ 时肿瘤体积增加一倍所需的时间(称为倍增时间)；

(2) 设肿瘤体积 V 随时间 t 增大的速率与 V 成正比，但比例系数 k 不是常数，它随时间 t 的增大而减少，并且减小的速率与当时 k 的值成正比，比例系数为常数. 试求 V 随时间 t 的变化规律、倍增时间及肿瘤体积的理论上限值.

解　(1) 由题设可知 $V'=kV^b$，$V|_{t=0}=V_0$. 则当 $b=1$ 时，$\frac{V'}{V}=k$，即 $V=V_0e^{kt}$. $b=\frac{2}{3}$ 时，$\frac{dV}{V^{\frac{2}{3}}}=kdt$，即 $V=\left(\frac{kt+3V_0^{\frac{1}{3}}}{3}\right)^3$，

即当 $b=1, b=\frac{2}{3}$ 时，V 随时间变化的规律分别为

$$V=V_0 e^{kt} \text{与} \sqrt[3]{V}=\frac{1}{3}kt+\sqrt[3]{V_0}.$$

$b=1, V=2V_0$ 时，$t=\frac{\ln 2}{k}$. 即当 $b=1$ 时肿瘤倍增时间为 $\frac{\ln 2}{k}$.

(2) 肿瘤体积 V 随时间 t 增大的速率为　$V'=k(t)V$，

而　$k'(t)=-\alpha k$（α 比例常数），且设 $k(0)=A$.

求解 $k'(t)=-\alpha k$，可得 $k(t)=Ae^{-\alpha t}$ 代入 $V'=k(t)V$ 得

$$\ln V(t)=-\frac{A}{\alpha}e^{-\alpha t}+\ln V_0+\frac{A}{\alpha}, \text{即} V=V_0 e^{\frac{A}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})}.$$

设倍增时间为 T，则 $2V_0=V_0 e^{\frac{A}{\alpha}(1-e^{-\alpha T})}$，即 $T=\frac{1}{\alpha}\ln\frac{A}{A-\alpha\ln 2}$. 又 $\lim\limits_{t\to+\infty}V(t)=V_0 e^{\frac{A}{\alpha}}$. 所以肿瘤体积的理论上限值为 $V_0 e^{\frac{A}{\alpha}}$.

2.（冷却定律与破案问题）按照 Newton 冷却定律，温度为 T 的物体在温度为 T_0（$T_0<T$）的环境中冷却的速度与温差 $T-T_0$ 成正比. 请你用该定律分析下面的条件. 某公安局于晚上 7 时 30 分发现一具女尸，当晚 8 时 20 分法医测得尸体温度为 32.6℃. 一小时后，尸体被抬走时又测得尸体温度为 31.4℃，假定室温在几个小时内均为 21.1℃. 由案情分析得知张某是此案的主要犯罪嫌疑人，但张某矢口否认，并有证人说："下午张某一直在办公室，下午 5 时打了一个电话后才离开办公室". 从办公室到凶案现场步行需 5 min，问张某是否能被排除在犯罪嫌疑人之外?

解　若死者在 5 时 5 分之前被杀，则张某不为嫌疑犯，若死于 5 时 5 分之后，则不能排除. 以晚上 7 时 30 分为 $t=0$ 时刻，并以分钟为单位时间，则由 Newton 冷却定律得

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-21.1), \text{且 } T(50)=32.6, T(110)=31.4,$$

求解方程得
$$T=11.5\, e^{\frac{50-t}{60}\ln\frac{115}{103}}+21.1,$$

即
$$T=11.5\left(\frac{115}{103}\right)^{\frac{50-t}{60}}+21.1.$$

又正常人体温在 35℃至 37℃间，设死者死亡时体温为 37℃，则由上式可知死亡时间 $t\approx-126.4$(min). 于是死者的死亡时刻为 $t_0=7:50-\frac{126.4}{60}=5.393(\text{h})\approx$ 5 时 24 分（下午）. 如果死者被杀时体温低于 37℃，由 Newton 冷却定律，死亡时刻应比下午 5 时 24 分更晚，故张某不能被排除在嫌疑犯之外.

3. 设 $y=y(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可微，求 $y=y(x)$，使它满足

$$x\int_0^x y(t)\mathrm{d}t=(x+1)\int_0^x ty(t)\mathrm{d}t.$$

解　方程两端对 x 求导可得

$$\int_0^x y(t)\mathrm{d}x+xy(x)=\int_0^x ty(t)\mathrm{d}t+(x+1)xy(x),$$

再对 x 求导得

$$2y(x)+xy'(x)=2xy(x)+(x+1)y(x)+(x+1)xy'(x).$$

即　$x^2y'=(1-3x)y$,

解之得　$\ln y=\dfrac{-1}{x}-\ln x^3+C$,即 $y=\dfrac{1}{Cx^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$　$(x\neq 0)$.

又 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{Cx^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=0$,令 $y(0)=0$ 使 y 在 $(0,+\infty)$ 上连续可导.

4. 设 f 是 $C^{(1)}$ 类函数,且

$$f(x+t)=\frac{f(t)+f(x)}{1-f(x)f(t)},\quad f'(0)=3.$$

试导出 $f(x)$ 所满足的微分方程,并求 $f(x)$.

解　因为 $f\in C^{(1)}$,所以 f 在 $x=0$ 处连续,则 $f(0)=\dfrac{2f(0)}{1-f^2(0)}$.

于是 $f(0)=0$.

方程 $f(x+t)=\dfrac{f(t)+f(x)}{1-f(x)f(t)}$ 两边对 t 求导.

$$f'(x+t)=\frac{f'(t)[1-f(x)f(t)]+f(x)f'(t)[f(t)+f(x)]}{[1-f(x)f(t)]^2},$$

令 $t=0$ 得

$$f'(x)=\frac{f'(0)+f^2(x)f'(0)}{(1-f(x)f(0))^2}.$$

将 $f'(0)=3$,$f(0)$ 代入得 $f'(x)=3(1+f^2(x))$,解之得 $\arctan f(x)=3x+C$. 由 $x=0$ 时 $f(0)=0$ 知 $C=0$. 故所求函数为 $f(x)=\tan 3x$.