# 4.2.3 二阶常系数线性齐次微分方程的解法

方程$y''+py'+qy=0$称为二阶常系数齐次线性微分方程，其中$p$、$q$均为常数.

如果$y_1$、$y_2$是二阶常系数齐次线性微分方程的两个线性无关解，那么$y=C_1y_1+C_2y_2$就是它的通解.

## ❖二阶常系数齐次线性微分方程

方程$y''+py'+qy=0$称为二阶常系数齐次线性微分方程，其中$p$、$q$均为常数.

**分析:**

考虑到当$y''$、$y'$、$y$为同类函数时，有可能使$y''+py'+qy$恒等于零，而函数$e^{rx}$具有这种性质，所以猜想$e^{rx}$是方程的解.

将$y=e^{rx}$代入方程$y''+py'+qy=0$得

$$(r^2+pr+q)e^{rx}=0.$$

由此可见，只要$r$满足代数方程$r^2+pr+q=0$，函数$y=e^{rx}$就是微分方程的解.

## ❖二阶常系数齐次线性微分方程

方程$y''+py'+qy=0$称为二阶常系数齐次线性微分方程，其中$p$、$q$均为常数.

## ❖特征方程及其根

方程$r^2+pr+q=0$叫做微分方程$y''+py'+qy=0$的特征方程.

特征方程的求根公式为

$$r_{1,2}=\frac{-p+\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

## ❖特征方程的根与通解的关系

| 方程$r^2+pr+q=0$的根的情况 | 方程$y''+py'+qy=0$的通解 |
|---|---|
| 有两个不相等的实根: $r_1$、$r_2$ | $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$ |
| | |
| | |

**简要证明:** 这是因为

函数 $e^{r_1x}$ 和 $e^{r_2x}$ 都是方程的解;

$\frac{e^{r_1x}}{e^{r_2x}}=e^{(r_1-r_2)x}$ 不是常数，即 $e^{r_1x}$ 与 $e^{r_2x}$ 线性无关.

## ❖特征方程的根与通解的关系

| 方程$r^2+pr+q=0$的根的情况 | 方程$y''+py'+qy=0$的通解 |
|---|---|
| 有两个不相等的实根: $r_1$、$r_2$ | $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$ |
| 有两个相等的实根: $r_1=r_2$ | $y=C_1e^{r_1x}+C_2xe^{r_1x}$ |
| | |

**简要证明:** 这是因为

$$(xe^{r_1x})''+p(xe^{r_1x})'+q(xe^{r_1x})=(2r_1+xr_1^2)e^{r_1x}+p(1+xr_1)e^{r_1x}+qxe^{r_1x}$$

$$=e^{r_1x}(2r_1+p)+xe^{r_1x}(r_1^2+pr_1+q)=0,$$

即 $xe^{r_1x}$ 是方程的解;

$\dfrac{xe^{r_1x}}{e^{r_1x}}=x$ 不是常数, 即 $e^{r_1x}$ 与 $e^{r_2x}$ 线性无关.

## ❖特征方程的根与通解的关系

| 方程$r^2+pr+q=0$的根的情况 | 方程$y''+py'+qy=0$的通解 |
|---|---|
| 有两个不相等的实根: $r_1$、$r_2$ | $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$ |
| 有两个相等的实根: $r_1=r_2$ | $y=C_1e^{r_1x}+C_2xe^{r_1x}$ |
| 有一对共轭复根: $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ | $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$ |

**简要证明:** 因为函数$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}$和$y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}$都是方程的解,

而 $$e^{\alpha x}\cos\beta x=\frac{1}{2}(y_1+y_2),\quad e^{\alpha x}\sin\beta x=\frac{1}{2i}(y_1-y_2),$$

故$e^{\alpha x}\cos\beta x$和$e^{\alpha x}\sin\beta x$也是方程的解;

函数$e^{\alpha x}\cos\beta x$与$e^{\alpha x}\sin\beta x$的比值为$\cot\beta x$, 不是常数,

故$e^{\alpha x}\cos\beta x$和$e^{\alpha x}\sin\beta x$是方程的线性无关解.

## ❖特征方程的根与通解的关系

| 方程$r^2+pr+q=0$的根的情况 | 方程$y''+py'+qy=0$的通解 |
|---|---|
| 有两个不相等的实根: $r_1$、$r_2$ | $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$ |
| 有两个相等的实根: $r_1=r_2$ | $y=C_1e^{r_1x}+C_2xe^{r_1x}$ |
| 有一对共轭复根: $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ | $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$ |

**求$y''+py'+qy=0$的通解的步骤:**

•第一步 写出微分方程的特征方程

$$r^2+pr+q=0;$$

•第二步 求出特征方程的两个根$r_1$、$r_2$;

•第三步 根据特征方程的两个根的不同情况, 写出微分方程的通解.

## ❖特征方程的根与通解的关系

| 方程$r^2+pr+q=0$的根的情况 | 方程$y''+py'+qy=0$的通解 |
|---|---|
| 有两个不相等的实根: $r_1$、$r_2$ | $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$ |
| 有两个相等的实根: $r_1=r_2$ | $y=C_1e^{r_1x}+C_2xe^{r_1x}$ |
| 有一对共轭复根: $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ | $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$ |

**例1** 求微分方程$y''-2y'-3y=0$的通解.

**解** 微分方程的特征方程为

$$r^2-2r-3=0, \text{ 即}(r+1)(r-3)=0.$$

特征方程有两个不相等的实根$r_1=-1$, $r_2=3$,

因此微分方程的通解为$y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$.

## ❖特征方程的根与通解的关系

| 方程$r^2+pr+q=0$的根的情况 | 方程$y''+py'+qy=0$的通解 |
|---|---|
| 有两个不相等的实根: $r_1$、$r_2$ | $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$ |
| 有两个相等的实根: $r_1=r_2$ | $y=C_1e^{r_1x}+C_2xe^{r_1x}$ |
| 有一对共轭复根: $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ | $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$ |

**例2** 求方程$y''+2y'+y=0$的通解.

**解** 微分方程的特征方程为

$$r^2+2r+1=0, \text{ 即}(r+1)^2=0.$$

特征方程有两个相等的实根$r_1=r_2=-1$,

因此微分方程的通解为$y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$, 即$y=(C_1+C_2x)e^{-x}$.

## ❖特征方程的根与通解的关系

| 方程$r^2+pr+q=0$的根的情况 | 方程$y''+py'+qy=0$的通解 |
|---|---|
| 有两个不相等的实根: $r_1$、$r_2$ | $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$ |
| 有两个相等的实根: $r_1=r_2$ | $y=C_1e^{r_1x}+C_2xe^{r_1x}$ |
| 有一对共轭复根: $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ | $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$ |

**例 3** 求微分方程$y''-2y'+5y=0$的通解.

**解** 微分方程的特征方程为

$$r^2-2r+5=0.$$

特征方程的根为$r_1=1+2i$, $r_2=1-2i$, 是一对共轭复根,

因此微分方程的通解为$y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

## ❖$n$阶常系数齐次线性微分方程

方程 $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$称为$n$ 阶常系数齐次线性微分方程, 其中 $p_1$, $p_2$, $\cdots$, $p_{n-1}$, $p_n$都是常数.

引入微分算子D及微分算子的$n$次多项式

$$L(\mathrm{D})=\mathrm{D}^n+p_1\mathrm{D}^{n-1}+p_2\mathrm{D}^{n-2}+\cdots+p_{n-1}\mathrm{D}+p_n,$$

则$n$阶常系数齐次线性微分方程可记作

$$(\mathrm{D}^n+p_1\mathrm{D}^{n-1}+p_2\mathrm{D}^{n-2}+\cdots+p_{n-1}\mathrm{D}+p_n)y=0\text{或}L(\mathrm{D})y=0.$$

注:

$\mathrm{D}^0y=y$, $\mathrm{D}y=y'$, $\mathrm{D}^2y=y''$, $\mathrm{D}^3y=y'''$, $\cdots$, $\mathrm{D}^ny=y^{(n)}$.

## ❖$n$阶常系数齐次线性微分方程

方程 $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2 y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$称为$n$ 阶常系数齐次线性微分方程, 其中 $p_1$, $p_2$ , $\cdots$ , $p_{n-1}$, $p_n$都是常数.

引入微分算子D, 则上述微分方程可记作

$$(\mathrm{D}^n+p_1\mathrm{D}^{n-1}+p_2\mathrm{D}^{n-2}+\cdots+p_{n-1}\mathrm{D}+p_n)y=0\text{或}L(\mathrm{D})y=0.$$

**分析:**

令$y=e^{rx}$, 则

$$L(\mathrm{D})y=L(\mathrm{D})e^{rx}$$

$$=(r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\cdots+p_{n-1}r+p_n)e^{rx}$$

$$=L(r)e^{rx}.$$

因此如果$r$是多项式$L(r)$的根, 则$y=e^{rx}$是微分方程$L(\mathrm{D})y=0$的解.

$L(r)=0$称为微分方程$L(\mathrm{D})y=0$的特征方程.

## ❖$n$阶常系数齐次线性微分方程

方程 $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$称为$n$ 阶常系数齐次线性微分方程, 其中 $p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}, p_n$都是常数.

引入微分算子D, 则上述微分方程可记作

$$(\mathrm{D}^n+p_1\mathrm{D}^{n-1}+p_2\mathrm{D}^{n-2}+\cdots+p_{n-1}\mathrm{D}+p_n)y=0\text{或}L(\mathrm{D})y=0.$$

## ❖特征方程的根与通解中项的对应

•单实根$r$对应于一项: $Ce^{rx}$;

•一对单复根$r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ 对应于两项: $e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$;

•$k$重实根$r$对应于$k$项: $e^{rx}(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})$;

•一对$k$重复根$r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ 对应于$2k$项:

$$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x].$$

**例4** 求方程$y^{(4)}-2y'''+5y''=0$ 的通解.

**解** 微分方程的特征方程为

$$r^4-2r^3+5r^2=0,\ 即r^2(r^2-2r+5)=0,$$

它的根是$r_1=r_2=0$和$r_{3,\,4}=1\pm 2i$. 因此微分方程的通解为

$$y=C_1+C_2x+e^x(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x).$$

**例5** 求方程$y^{(4)}+\beta^4 y=0$的通解, 其中$\beta>0$.

**解** 微分方程的特征方程为$r^4+\beta^4=0$, 其根为

$$r_{1,\,2}=\frac{\beta}{\sqrt{2}}(1\pm i)\,,\quad r_{3,\,4}=-\frac{\beta}{\sqrt{2}}(1\pm i)\,.$$

因此微分方程的通解为

$$y=e^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}x}\left(C_1\cos\frac{\beta x}{\sqrt{2}}+C_2\sin\frac{\beta x}{\sqrt{2}}\right)+e^{-\frac{\beta}{\sqrt{2}}x}\left(C_3\cos\frac{\beta x}{\sqrt{2}}+C_4\sin\frac{\beta x}{\sqrt{2}}\right).$$