对数系统、余数系统的分析和与传统数制的比较

英才实验学院 刘正浩 2019270103005

【摘要】本文简要介绍了对数系统（Logarithmic Number system，LNS）、余数系统（Residue Number system，RNS）中数的表示、它们的特点、与传统数制的比较以及应用场景。

【关键词】数制 对数系统LNS 余数系统RNS

1. 对数系统

1.1 对数系统的介绍

在对数系统中，乘法和除法被转化成加法和减法运算，开方和幂运算被转化成乘法和除法运算。这样可以大大简化运算过程，提高运算的效率。所以LNS比较适用于乘除法、开方和幂运算占比较大的环境中。【1】此外，LNS还能明显降低系统的功耗。

但是，在LNS下的加减法比较复杂，因为加减法在LNS中需要通过两个函数来计算，而不是像定点、浮点数数值下直接计算。而计算这两个函数的值需要靠查找表来完成。当LNS下的数的位宽很大时，查找表相应地也会变大。这就会给加减法计算带来不便。因此，LNS实际上适用于对运算精度不太高、一次运算量较大且乘除法占比较大的情况中。

1.2 LNS下数的表示方式

在LNS中，一个数可以表示成下面的方式：

其中为数A的符号，当A为正数时为0，当A为负数时为1；为对A的绝对值取对数后得到的值，即，其中r为数的基。的前K位是它的整数部分，后L位是它的小数部分。

由表达式还可得到，因此LNS也可以看做浮点数的一个特例，即尾数为1的情况。并且，在LNS中数0是无法表示的。有两种方法可以解决这个问题：第一，可以给加上一个值，比如或。这样当为0时表示的数就是0。第二，可以专门设置一个0标志位，当数为0时标志位为1，否则标志位为0。

2. 余数系统

2.1 余数系统介绍

余数系统在数字领域和计算机领域经常用到。这种数值系统通过将一个较大的整数分解成一组较小的整数，将一个计算量较大的问题转化成一组计算量较小的问题，并且这些较小的问题还可以独立执行。

2.2 余数系统表示方式

在RNS中，一个数由一组整数来定义：

称为模数（moduli），其中到通常是两两互质的一组数。

一个整数x在余数系统中由其对模数的一系列余数来表示，即

其中，同时要求。

令M为所有的积。所有相差M的整数倍的整数在RNS中都可以用们来定义。中国剩余定理还证明，从0到M的所有数都可以用这样的一组数来唯一确定。这样，就保证了RNS是一个可用的数值系统。

参考文献

【1】李炜,沈绪榜.对数数值系统的研究[J].微电子学与计算机,2004(12):154-158+162.

【2】Wikipedia：“Residue Number system”https://en.wikipedia.org/wiki/Residue\_number\_system