**关于可逆矩阵的分解及求逆的研究**

刘正浩

（电子科技大学英才实验学院，611730，四川省成都市）

**摘要：**讨论了可逆矩阵的分解，并给出了分解方法

**关键词：**可逆矩阵，初等变换，分解，逆矩阵.

1. **引言**

现阶段教科书中在讲授关于逆矩阵的基本性质之后，一般会给出一种矩阵求逆的方法，如：

【文献1】对于矩阵A，对施以行初等变换将变为，则就变为.

这种求逆矩阵方法在手写时的计算过程相对简单，但是复杂度较高，不便于使用计算机对大型、超大型进行求逆运算。本文给出的对可逆矩阵进行分解后求逆的方法，减少了计算量，能够简化使用计算机对矩阵求逆的过程.

1. **主要结论**

**引理1**对于可逆矩阵，若的所有主子式（即选取任意k1到ki行，k1到ki列，将交叉处的元素取出得到的子矩阵的行列式）均不为0，则存在一个可逆的下三角矩阵使.

**证明1**以三阶矩阵为例，用第1行消去第2、3行的第一列，即进行两次行变换得到，由知，故；再用第2行消去第3行的第2列，即对再进行一次行变换得，由知，故. 此时已变为上三角矩阵，而经过的变换均为将第i行的c倍加至第j行（i<j），由的结构知所有的乘积为下三角矩阵.

**引理2**可逆下三角矩阵的逆矩阵为下三角矩阵.

**证明2**对任意可逆下三角矩阵，有对角线元素全不为0. 依次用第1行消去第2~n行的第一列，用第2行消去第3~n行的第2列，用第k行消去第(k+1)~n行的第k列，即进行多次 行变换，可得到对角矩阵，再对每一行进行一次行变换，得单位矩阵，由的结构知所有和的乘积为下三角矩阵，又，得，即下三角矩阵的逆矩阵为下三角矩阵.

**定理1** 对于可逆矩阵，在经过有限次行初等变换后，可以被分解为对角元为1的下三角形矩阵与上三角形矩阵的乘积，即，且为矩阵进行行初等变换时所乘的初等矩阵的乘积的逆.

证明：定义，对于的情况，每一次都消去矩阵的第n列中的对角线下的元素，相当于对左乘了一个下述下三角矩阵：

于是定义：，其中

经过N-1轮操作后，可以得到一个上三角矩阵.这时有

令，，则定理1得证.

**定理 2** 设矩阵为矩阵，在计算与时，可按照下列的计算方法：

1. 在的对角线填充为1;
2. 其中.

,其中.

步骤3中u与l交替运算，

证明：已经定义矩阵为对角元为1的矩阵，故计算时先将矩阵的对角元赋值为1.由矩阵乘法的计算方法可得矩阵的第一行与矩阵的第一行中的元素对应相等，即；又因为矩阵的第一列元素等于矩阵第一列对应元素与的乘积，可得

同理，可知 ,

由此式可得到，进一步可计算可以得到.

由此可推出步骤3中的等式.

**4. 意义**

在使用计算机对矩阵求逆的步骤中，求解矩阵和矩阵后，对矩阵和矩阵求逆，它们逆矩阵的乘积即为矩阵的逆.这种矩阵求逆方法可以减少计算机对矩阵求逆的计算量.

**参考文献**

【1】黄廷祝，成孝予.线性代数与空间解析几何【M】.北京：高等教育出版社，2018.3，