**线性代数补充讲义**

成孝予编

电子科技大学应用数学学院  
2006年8月

多项式是代数学中最基本，最重要的内容之一。在初等代数中我们就学习过多项式。本节内容是初等代数中多项式内容的发展、推广与延伸。

初等代数最重要的内容之一是方程。我们学习方程是从一元一次方程ax=b开始的。保持方程未知数个数不变，使其次数增加，我们有一元二次方程

还可以进一步讨论高次方程

高次方程（1）的左端是一个多项式，高次方程的问题与多项式有着密切的关系。

如果使未知数的次数不变而使未知数个数增加，我们有二元一次方程组



进一步还可以讨论n元线性方程组

 (2)

讨论方程组（2）的求解问题推动了线性代数理论与方法的研究。

高等代数的两个重要部分就是多项式与线性代数，它们一方面是高等代数的两个分支，另一方面又有密切的关系。我们在这里介绍一些多项式的入门内容，使读者对高等代数的全貌有一个初步的了解，同时相关内容对学习线性代数也有很重要的作用。

一、数环与数域

我们先观察一个在中学阶段所熟悉的因式分解的题目

例1



如果在整数范围内或有理数范围内，我们只能分解到第一步，但是在实数范围内可以分解到第二步，如果在复数范围内就可以分解到第三步。

我们约定：

Z={所有整数}， Q={所有有理数}

R={所有实数}， C={所有复数}

容易发现，在整数集合Z中，任取两个数a，b，把a和b做加、减、乘运算以后，所得到的数a+b，a-b，ab仍然在集合Z中，我们称集合Z对+、-、 . 这三个运算封闭。但是可能不在集合Z中，我们称Z对除法运算不封闭。

定义1 设A是一个非空数集，且对加、减、乘运算封闭，则称集合A是数环。

由定义1可知，整数集合Z是一个数环。

显然，有理数集合Q对于加、减、乘运算也是封闭的，所以，有理数集合Q也是一个数环。

进一步分析还可以发现，有理数集合Q不仅对加、减、乘运算是封闭的，而且对除法运算也是封闭的。



定义2 含有0、1两个数，且对加、减、乘、除四则运算封闭的集合称为数域。

由定义2可知，有理数集合Q是一个数域，称为有理数域。

显然，实数集合R与复数集合C对加、减、乘、除四则运算都是封闭的，它们分别称为实数域与复数域。

整数集合Z对除法运算不封闭，所以Z不是数域。

例2 证明

是一个数域。

证 （1）0、1

（2）



所以，是一个数域。

设A、B都是数域且，则称A是B的子域。

例3 有理数域是所有数域的子域。

证 设P是任一数域，则0,1，由数域对四则运算的封闭性可得

0-1=-1



(-1)m=-m

所以。

二、数域P上的多项式环

定义3 设n是非负整数，，称

为数域P上的多项式。

对于数域P上的两个多项式

当且仅当m=n且时，称与相等。

如果 ，则称 为n次多项式。特别地，如果=，则称 为零次多项式。

如果，则=0 称为零多项式，零多项式不定义次数，按照这个约定，零多项式不是零次多项式。

由中学代数知识可知，对于

如果n>m，则

其中，





其中，s。

显然，数域P上的多项式环对多项式的加、减、乘运算是封闭的。

定义4 设



称 为数域P上的多项式环。

三、整除与带余除法

在多项式环内，加、减、乘三种运算是封闭的，但除法运算是不封闭的。

例4

分别用 去除 ，这种除法可用下面的格式（称为长除法）进行。









0

即











令

则。

定义5 对于 若有 使

则称 整除，记为；否则，称 不整除，记为。

在例4中，,。

若 则称 为的因式。

关于 中的多项式 与，有下面称为“带余除法”的结论。

定理1 （带余除法）对任意的 若则存在唯一的两个多项式，使

其中，的次数的次数，或者

证 存在性 用前述长除法可知这样的是存在的。

唯一性 用反证法

设还有 , 使

其中，的次数的次数, 或者

则

（1）

若，又 ,所以

于是

的次数=的次数+的次数

的次数

与（1）式矛盾，所以



由带余除法可得下面的

推论 对于多项式 , 的充要条件是除所得余式。

关于整除，容易得到以下性质：

（1）对非零多项式，有

1)

2)

3)

证 3),即。

一个有趣的结果是：在整数环Z中，,但是在数域P上的多项式环P[x]中，2|3。

（2）若 且，则。

证

又

故

由上式可得

的次数+的次数=0；

的次数=的次数=0；

；

(3)若 且,则。

称性质3为整除具有传递性。

（4）若且时，则,称为的一个组合。

我们把性质（3）、（4）的证明留作习题。

四、因式分解与重因式

因式分解是代数学中最古老的问题之一，因式分解与多项式的最大公因式有关。

定义6 若且，则称为与的公因式。若为与的公因式，且与的公因式全是的因式，则称为与的最大公因式。

例5 (

(

,都是与的公因式，而是与的最大公因式。

也是与的最大公因式。在与的最大公因式中，有一个是首项系数为1的，比如例5中的，我们将这个最大公因式记为,如：



如果,则称与互素，如

，则即与互素。

在例1中我们曾经看到，多项式在不同的数域中，其中因式分解的结果是不相同的。

=

=

在有理数Q上的多项式环 中， 都不能再分解，而在实数域R上的多项式环中， ,不能再分解，某个多项式不能再分解又称为不可约，其准确定义如下：

定义7 设多项式 , 的次数>1，若不能表示为中的两个次数比 低的多项式的乘积，则称为数域P上的不可约多项式。

如在有理数域上都是不可约多项式，但在实数域上可约而 不可约，在复数域上, 是可约多项式。

由定义7可以得到下面的简单性质：

1. 一次多项式是任何数域上的不可约多项式；
2. 若是不可约多项式，则也是不可约多项式；
3. 若是不可约多项式, 是一多项式，则或者()=1

证不可约，

的因式只有非零常数与。

设()=，则

或

1. 若不可约多项式，则 或,若不可约多项式，则至少要整除中的某一个。

性质（4）的证明涉及到一些前面没有讨论的结论，这里略去不做。

有了以上准备，我们就可以提出下面的：

定理2（因式分解定理） 数域P上每一个次数大于或等于1的多项式都可以唯一地分解为若干个不可约多项式的乘积。

这里的唯一性指，若

则，且适当排列因式的次序以后，有

如(

=((

证 可分性:对多项式的次数作数学归纳证明。

当的次数=1时，为不可约多项式，结论成立；

设的次数时，结论成立，则当的次数=n时，

（1）若不可约，则结论已成立；

（2）若可约，设若 则

的次数<n，的次数<n。

所以，由归纳假设，与都可分解为不可约因式的乘积。

唯一性：对不可约多项式的个数作数学归纳证明。

当时，本身就是一个不可约的多项式，结论成立

设对1个不可约多项式的分解时唯一的，则对个不可约多项式

则。 因此，至少要整除中的某一个，不妨设，而也是约多项式，故

由归纳假设，应有

1=t-1，即

经适当排列因式的顺序，可得

，i=2,…s.

又，故：

，i=1,2,…s.

对于我们使用得最多的实系数多项式，有下面的分解定理。

定理3 (实系数多项式分解定理) 每一个次数大于或等于1的实系数多项式在实数域上都可唯一地分解为一次式与二次不可约多项式的乘积。

如(

一般地，设 为n次实系数多项式，则

其中,是实数域上的不可约多项式

定理3的证明需要更多的理论准备，这里将证明略去。

下面讨论重因式的概念：

定义8 设是数域P上的不可约多项式，且而 则称为的k重因式。

一般，当时，称为的单因式，当k>1时，称为的重因式。

如

,,分别是在有理数域或实数域上的单因式，2重因式，3重因式。但在复数域内,不是不可约多项式，故不是的3重因式。

五、多项式的根

若方程的左端是一个多项式，则方程的根也称为多项式的根。

如果时多项的k重因式，则称为的k重根。

多项式的根与数城有关，下面的定理在代数学历史上曾经起普非常重要的作用。

定理4 (代数基本定理)每一个次数大于或等于 1的多项式在数城内至少有一个根。

定理4的另外一种说法是:

推论 任一n次多项式在复数域内有且只有n个根(重根按数计算个数)。

由此可以得到:

定理5 (复系数多项式分解定理) 每个次数大于或等于1的多项式在数域上都可唯一地分解为一次因式的乘积。

在初等代数中，关于一元二次方程的根与系数有以下关系：

如果a=1，,则

以上结论称为韦达定理。

对于一元n次方程

设 (1)

且在数域P上有n个根：则

(2)

将（2）式展开并与（1）式比较系数，可得以下根与系数的关系：



例6

=

习题

1. 下列数集是否构成数环或数域？
2. 

（以上各小题中，Q为有理数域，R为实数域）

1. 设F是至少含有两个数地数集，证明：如果F中任意两个数地差与商（除数不为零）仍属于F，则F为数域。
2. 证明：实数域与复数域之间不存在其它地数域。
3. 设，求的展开式中，各项系数之和。
4. 求用去除所得到地商及余式。
5. a、b为何数时，下面的可被整除？



1. 设是4个多项式，并且。 证明:若则。
2. 证明：函数不是多项式
3. 设多项式

,(

的n个根是，求多项式

的根。

1. 已知1-i是方程的一个根，解此方程。
2. 已知方程有一个二重根，解此方程。
3. 设，求的整数根。

**第二节 欧式空间**

在讨论向量空间时,我们曾经利用内积把 中的向量的长度与夹角等概念引入，现在我们同样可以利用内积把向量的长度与夹角引入实线性空间，并讨论中向量组的规范正交化问题。

1. 内积

定义1 设 是线性空间，如果中任意两个元素可进行某种运算，将这种运算记为，其运算结果是一个实数，且运算满足一下条件：

（1）

（2）

(3),当且仅当时等号成立。

则称为线性空间的一个内积。

定义了内积的实线性空间称为欧式空间。

1. 设

则为的一个内积，这是我们在第五章所熟悉的内积。

设A是n阶正定矩阵，规定与的运算如下：

则由矩阵的乘法可知是一个实数，且

1. 当且仅当时等号成立。

所以，也是的一个内积。

对于不同的内积，构成不同的欧式空间。

1. 是一个线性空间，对任意的，规定的运算如下：

则

1. 





1. 当且仅当时等号成立。

所以，是线性空间的一个内积。

1. 内积性质

有了内积概念，可以定义欧式空间的向量长度。

设是欧式空间，则



称为向量的模（长度，范数）。

在欧式空间中，有以下两个重要等式：

1柯西不等式



或



这个不等式的证明与5.3中相应不等式的证明完全一致。有了这个不等式，就可以定义欧式空间中两个向量的夹角。



2三角不等式



1. 设

证明。

证 设

则

即

所以

例4设

证明

这个题在微积分中是一个技巧性比较强的题目，如果利用柯西不等式，则是一个直接结果。

证 设，则是欧式空间的一个内积，由柯西不等式可得



1. 规范正交基

定义2 设是欧式空间的一组基，且满足：

（1）

（2）

则称为欧式空间的一组规范正交基。

例5 在线性空间中，规定 的内积如下：



将化为的规范正交基。

解 将线性无关向量组化为规向量组的方法同施密特正交化方法是一致的

令





的规范正交基

习题

1. 证明： 在欧式空间中，勾股定理成立。

即，若，是

1. 设是维欧式空间中两个不同的向量，且

证明：。

1. 在线性空间中，规定内积如下



问：是否的一组正交基？

1. 群、环、域概念

在线性空间章已经看到，我们讨论的数学对象，可以是数，n维向量，矩阵，函数，它们可以进行某些运算，这些运算还满足一定的运算规则。尽管这些对象和运算是各不相同的，但是它们所满足的运算规则都是相同的，作为现代数学的三大基础之一——近世代数，就是对给定的集合及运算，讨论这些运算所满足的运算规则。而群、环、域则是近世代数中三个最基本的概念。限于篇幅与学时数，这里只对群、环、域作一个最简单的概念介绍，以期使读者对近世代数有一个最初浅的了解。

1. 集合与映射

定义1 设是非空集合



称为所构成的笛卡尔积集。

例1 设



例2 





定义2 设X，Y是两个非空集合， ,通过某一法则对应，则称为从X到Y的一个映射，记为



其中，y称为x在映射下的象，称为在下的原象。

例3设



是从到的一个映射。

有三种特殊的映射，在相关讨论中起着重要的作用。

1. 满射 对于映射 若 ，使则称是从到的满射。

例4



是从到的满射。



不是从到的满射

1. 单射。

对于映射 ，若，则x是唯一的，则称是从到的单射

如例4中，是单射而不是单射。

1. 双射 既是满射又是单射的映射

双射又称一一映射。

如例4中的是双射而不是。

由双射可以发现其有限集和无限集最本质的区别：

任一有限集与真子集之间不存在双射，而无限集与其真子集之间可能存在双射。

如：A=整数集，B=偶数集， B是A的真子集。



显然 是A到B的映射。

下面讨论一种称为代数运算的特殊映射。

定义3 设A，B， D是非空集合，则映射



称为从的代数运算。

通常记为  。

例5 设A=B=D=R，



+为普通数的加法，则是从到的代数运算。

当b=0时，无意义，或者说，对没有给确定一个在中的象，所以不是到的映射，当然也不是代数运算。

从到A的代数运算称为A的二元运算。

定义4 设A是一个非空集合，用表示A的一个二元运算，则称为一个代数系统。

一个代数系统可以含多个代数运算。

 

+，是普通数的加法与乘法运算，都是代数系统。

1. 群

群胚 设G是一个非空集合，是G的二元运算，则代数系统称为一个群胚。

1. G={0,1},规定



则是A的一个二元运算，是一个群胚。

半群 如果群胚中的适合结合律，则称为半群。

1. （实n阶方阵的集合），是矩阵乘法，则是的二元运算，且适合结合律，是半群。

亚群 设是一个半群，如果



则称为亚群，  的单位元。

如例7中的半群是一个亚群，单位矩阵E是其单位元。

定义5 设是一个亚群，如果使



则称为一个群。

其中， b为a的逆元。可以证明，任一元素a的逆元b是唯一的，记为，同时，a也是b逆元，记为。

如果，都有，则称为交换群。

例8 设Z=整数集，+为普通数的加法，则是一个群，称为整数加群。的逆元是，的单位元是数0。

设是普通数的乘法，则是亚群，其单位元是数1，但整数对于乘法没有逆元，故不是群。

例9 设正有理数集，+：普通数的加法，则：

1. +是的二元运算，是群胚
2. +适合结合律，是半群；
3. 没有单位元，不是亚群，更不是群。

设是普通乘法，则容易验证，是群。

例10 设是复数的乘法，则

（1）故

是群胚；

（2）结合律成立，故 是半群；

（3）有单位元1，故是群，

这个群称为三次单位报错根群。

设，则称为n次单位根群。

例11 设G={a,b,c,e},规定运算。如下：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 。 | e | a | b | c |
| e | e | a | b | C |
| a | a | c | c | b |
| b | b | c | e | a |
| c | c | b | a | e |

即：

（1）在G中封闭；

（2）,适合结合律。

（3）有单位元e；

（4）

称为四元素群。

三 环

例12 在整数集Z中，除了加法运算+之外，还有乘法运算,对于代数系统

1. 是交换群，
2. 是半群，
3. 分配律成立，则称为一个环。

定义6 设是含有两个运算的代数系统，且：

（1）是交换群；

（2）是半群；

（3）左右分配律成立：



则称是一个人环。

例13 ，+，为数的加法和乘法，则构成一个环，称为偶数环。

例14 +，为矩阵的加法和乘法，则构成一个矩阵环。

四、域

在环 中，交换群 的单位元被称为零元。

定义7 设 是一个环，且：

1. A有非零元；
2. 令 是交换群,则称 是一个域。

例15 设Q是有理数集，+，是普通数的加法与乘法运算，则 是一个环且满足：

1. Q有非零元；
2. 是交换群，

所以,是一个域。

设A是一个数集，+,是普通数的加法与乘法运算，则 是域 都是交换群，且符合分配律。

由于+，作为普通数的运算符合交换律和分配律，故

是域 都是群。

是群 1在A中封闭。

2 ，

3

是群 1在中封闭。

2 ，

3

数集中的减法可以可以用加法来定义

a-b=a+(-b)

数集中的除法可以可以用乘法来定义

所以，由上述的讨论可知：

是域 A中含有0，1且对加减乘除四则运算封闭。

由此可知，有理数集Q，实数集R，复数集C，对管理数的运算+， 都构成数域。

习题

1. 自己构造两个n元集合A、B，然后确定一个从 到D的代数运算。
2. 自己构造一个集合G和G的一个二元运算，然后讨论 是否是群胚，半群，亚群，群。
3. 设

[0]={…,-9,-6,-3,0,3,6,9,…}

[1]={,-8,-5,-2,1,4,7,10,…}

[2]={…,-7,-4,-1,2,5,8,11…}

同时约定

[0]=[-9]=[-6]=[-3]=…,

[1]=[-8]=[-5]=[-2]=…

[2]=[-7]=[-4]=[-1]=….

令A={[0],[1],[2]}.在A的元素之间规定两个运算，

[m]+[n]=[m+n], [m][n]=[mn],

证明：（1）是群；

（2）是环。

1. 设是半群，在中规定：

=

证明：是半群。

5． 自己构造一个元素个数最少的域。