

$T_{set}$  室内温度

$K$ : 系数

Project 2

$T_a$  室外温度

$U(t)$  供暖提供的

① 完全不考虑位置，只考虑时间 OD 情况。

By Newton's Law of cooling

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= -k(T(t) - T_a) + U(t) = -kT + kT_a + U(t) \\ \Rightarrow \frac{dT}{dt} + kT &= kT_a + U(t), \text{ multiply by } e^{\int k dt} = e^{kt} \\ \Rightarrow e^{kt} \left( \frac{dT}{dt} + kT \right) &= [kT_a + U(t)] e^{kt} \\ \Rightarrow [e^{kt} T(t)]_{t_0}^t &= \int_{t_0}^t (kT_a + U(t)) \cdot e^{kt} dt. \quad \text{由于 } kT_a + U(t) \text{ 为常数. (单独开/关的段)} \\ \Rightarrow [e^{kt} T(t)]_{t_0}^t &= \frac{1}{k} (kT_a + U(t)) (e^{kt} - e^{kt_0}) \\ \Rightarrow e^{kt} T(t) &= e^{kt_0} T(t_0) + \frac{1}{k} (kT_a + U(t)) (e^{kt} - e^{kt_0}) \\ \Rightarrow T(t) &= e^{-kt} T(t_0) + \frac{1}{k} (kT_a + U(t)) (1 - e^{-kt}) \\ \Rightarrow T &= e^{-k(t-t_0)} T(t_0) + \left( T_a + \frac{U_t}{k} \right) (1 - e^{-k(t-t_0)}) \\ \Rightarrow T &= e^{-k(t-t_0)} (T(t_0) - T_a - \frac{U_t}{k}) + T_a + \frac{U_t}{k} \end{aligned}$$

所以 OD 解析解：

$$T(t) = T_a + \frac{U_t}{k} + e^{-k(t-t_0)} (T(t_0) - T_a - \frac{U_t}{k})$$



分析：只要在单段时间  $k(t)$  为常数则成立。

① 关机时  $U=0$ .

$$T_{off}(t) = T_a + (T(t_0) - T_a) e^{-k(t-t_0)} \rightarrow \text{合理, 温度衰减至 } T_a \text{ (室外温度)}$$

② 开机时  $U = U_{max}$ .

$$T_{on}(t) = T_a + \frac{U_{max}}{k} + (T(t_0) - T_a - \frac{U_{max}}{k}) e^{k(t-t_0)} \Rightarrow \text{温度指数级上升.}$$

接下来我们尝试计算 OD 情况下升温时间 / 周期 / 能耗 / 开关次数 等

我们现在有开/关两段表达式 我们假设从  $T_{set}-\delta$  和  $T_{set}+\delta$  分别开始，也就是  $T(t)$  从 0 到等于之值。

设定温度  $T_{set}$

① 升温时间:  $T_{set} = T_a + \frac{U_{max}}{k} + (T_{set}-\delta - T_a - \frac{U_{max}}{k}) e^{-kt}$

$$\Rightarrow T_{set} - (T_a + \frac{U_{max}}{k}) = (T_{set}-\delta - T_a - \frac{U_{max}}{k}) e^{-kt}$$

$$\Rightarrow e^{-kt} = \frac{T_{set} - (T_a + \frac{U_{max}}{K})}{T_{set} - G - (T_a + \frac{U_{max}}{K})}$$

$$\Rightarrow t_{\text{开}} = \frac{1}{k} \ln \left( \frac{T_{set} - G - (T_a + \frac{U_{max}}{K})}{T_{set} - (T_a + \frac{U_{max}}{K})} \right)$$



同理，关机段降温时间

$$t_{\text{关}} = \frac{1}{k} \ln \left( \frac{T_{set} + G - T_a}{T_{set} - T_a} \right) \quad \text{因为 } U(G) = 0.$$



注意!! 这里由于  $G \rightarrow 0$ . 时间  $t_{\text{开}}$  与  $t_{\text{关}}$  都  $\rightarrow \ln(1) = 0$ . Zero 现象出现!

解决方法：换一个较宽的温度范围  $T_{set} + G \rightarrow T_H$ ,  $T_{set} - G \rightarrow T_L$ , 从  $T_L$  加温到  $T_H$ ,  
 则  $t_{\text{开}} = \frac{1}{k} \ln \left( \frac{T_H - (T_a + \frac{U_{max}}{K})}{T_H - (T_a + \frac{U_{max}}{K})} \right)$

$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{升/降温时间}$

$t_{\text{关}} = \frac{1}{k} \ln \left( \frac{T_H - T_a}{T_L - T_a} \right)$

## 相关推断

于是我们可立刻得到 周期, 开关次数, 能耗

周期  $P = t_{\text{开}} + t_{\text{关}}$

开关次数:  $\frac{2}{P} \times \text{总时长}$  (每周期开→关, 关→开, 2次事件).

能耗  $E = \int_0^P U(G) dt = U_{max} \cdot t_{\text{开}}$  (因为关时无能耗)

若每次开关消耗能量  $e$ , 总能耗

$$E_{\text{总}} = \text{开关次数} \times e + E$$

接下来讨论 1D 情况.

# 10 情况(考虑距离与时间)

我们有 heat equation:  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + u(x, t)$ . 这里  $\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ .

插上回会议我们选择“点热源”情况.

则令  $u(x, t) = q(t)$ ,  $\alpha(x) \rightarrow$  表示距离的分布.

若整体均匀加热则  $u(x, t) = q(t)H$ ,  $H$  是常数.

室内.

室外.

Boundary Condition.



\* 我们假设, 热源靠左 即  $x=0$  处墙壁绝热, 右侧墙壁与室外交换温度.

(考虑对流)

则我们有两个 Boundary condition.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = 0 \\ \end{array} \right.$$

$$\text{右侧: } -k_1 \frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = h(T(L, t) - T_a) \quad (\text{Robin 条件})$$

解释:  $k_1$  是材料的导热系数,  $h$  为墙与空气对流换热系数.

我们尝试推导点状源的解:

\* 在稳定时, 我们有  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ , 所以我们只需考虑距离.

傅立叶定律:  $r(u) = -k_1 \frac{dT}{dx}$ . 热流 = 导热系数  $\times$  温度梯度.

能量守恒: 流入 + 内部产热 = 流出. 由于已经达到稳定, 总变化为0.

$$\frac{d}{dx} r(u) + p b(x-x_0) = 0.$$

$$\text{代入} \rightarrow -\frac{d}{dx} \left( k_1 \frac{dT}{dx} \right) + p s(x-x_0) = 0$$

$$\Rightarrow k_1 T''(x) + p s(x-x_0) = 0.$$

$$\text{稳定性方程: } \boxed{k_1 T''(x) + p s(x-x_0) = 0.}$$

↓  
导热系数, 点热源强度  
(热功率)

解: 点热源附近 温度会跳变

极短区域,  $x_0$  为点热源位置. 当  $x \neq x_0$  时 这玩意 = 0.

边界条件:  $T'(0) = 0$

$$\left[ -k_1 T'(L) = h(T(L) - T_a) \right]$$

因为  $s(x-x_0) = 0$  当  $x \neq x_0$ .

所以从在  $[0, x_0]$  领:  $k_1 T'' = 0 \Rightarrow T'' = 0 \Rightarrow T(x) = \begin{cases} A_1 x + B_1 & 0 \leq x < x_0 \\ A_2 x + B_2 & x_0 \leq x \leq L \end{cases}$

$(x_0, L]$  领:  $T'' = 0$

现在对方程在  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$  上积分

$$\int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} k_1 T''(x) dx + \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} p \delta(x - x_0) dx = 0$$

$$\Rightarrow k_1(T'(x_0^+) - T'(x_0^-)) + p = 0$$

$$\Rightarrow T'(x_0^+) - T'(x_0^-) = -\frac{p}{k_1}$$

$$\Rightarrow A_2 - A_1 = -\frac{p}{k_1}$$

由于温度本身是连续的， $T(x_0^-) = T(x_0^+)$

$$A_1 x_0 + B_1 = A_2 x_0 + B_2$$

解得： $\begin{cases} A_1 = 0 & (T(x_0) = A_1) \text{ (由题意)} \\ A_2 = -\frac{p}{k_1}, \\ B_2 = B_1 + \frac{p}{k_1} x_0. \end{cases}$

右边的 Boundary Condition

$$T'(L) = A_2 = -\frac{p}{k_1}$$

$$T(L) = A_2 L + B_2 = B_1 + \frac{p}{k_1}(x_0 - L).$$

$$\text{由于 } -k_1 T'(L) = h(T(L) - T_a).$$

$$-k_1 T(L) = -k_1(-\frac{p}{k_1}) = p$$

$$\Rightarrow T(L) = T_a + \frac{p}{k_1}$$

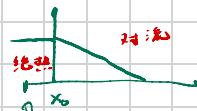
$$\text{又因为 } T(L) = B_1 + \frac{p}{k_1}(x_0 - L)$$

$$\Rightarrow B_1 = T_a + \frac{p}{k_1} + \frac{p}{k_1}(L - x_0)$$

$\Rightarrow$

$$T(x) =$$

$$\begin{cases} T_a + \frac{p}{k_1} + \frac{p}{k_1}(L - x_0), & 0 \leq x \leq x_0, \\ T_a + \frac{p}{k_1} + \frac{p}{k_1}(L - x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$



若用均匀热源

$$Q = \partial_x T''(x) + M(t) H$$

$$\text{则 } T''(x) = -\frac{M H}{\alpha}$$

$$\Rightarrow T(x) = -\frac{M H}{2\alpha} x^2 + C_1 x + C_2$$

代入 B.C. 解得常数故即可。