恒温器控制的数学原理

从零理解：牛顿冷却、热传导、Bang-Bang 控制

Group Project F ·为 Yingurt 整理

2026-02-05

目录

1 第零层：我们要解决什么问题?

恒温器控制问题

目标：让房间温度保持在设定值附近（比如 20°C）
手段：开关暖气（加热器）
约束：

- 室外温度 T_a 会让房间降温
- 暖气功率有限（最大 $u_{\max}$）
- 频繁开关会损耗设备

问题：如何设计控制策略，让温度稳定且能耗最小?

直觉理解

想象冬天在家：

- 太冷了 → 开暖气
- 够暖了 → 关暖气
- 又冷了 → 再开...

这就是最简单的"Bang-Bang 控制"——要么全开，要么全关。
但问题来了：开关太频繁怎么办? 温度波动太大怎么办?

2 第一层：牛顿冷却定律

2.1 物理直觉

直觉理解

一杯热水放在桌上会慢慢变凉，为什么?
因为热量从高温（热水）流向低温（空气）。
温差越大，冷却越快——这就是牛顿冷却定律的核心!

2.2 数学表达

牛顿冷却定律

温度变化的速率与温差成正比：

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)}$$

其中：

- $T(t)$ = 物体（房间）在时刻 t 的温度
- T_a = 环境（室外）温度（假设恒定）
- $k > 0$ = 冷却系数（取决于材料、表面积等）
- 负号表示：如果 $T > T_a$，温度会下降

直觉理解

为什么是负号？
如果房间比室外热（$T > T_a$），热量流出，房间降温，所以 $\frac{dT}{dt} < 0$
如果房间比室外冷（$T < T_a$），热量流入，房间升温，所以 $\frac{dT}{dt} > 0$
负号确保了这个逻辑！

2.3 加入暖气

现在房间有暖气，暖气功率为 $u(t)$：

关键结论

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) + u(t)}$$

或者整理成：

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_a + u(t)$$

- $-k(T - T_a)$：与室外的热交换（可能升温或降温）
- $u(t)$：暖气提供的热量（总是正的或零）

3 第二层：求解 ODE

3.1 这是什么类型的方程？

一阶线性 ODE

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_a + u(t)$$

这是**一阶线性常微分方程**，标准形式：$y' + p(t)y = q(t)$

3.2 积分因子法

Step 1：找积分因子

积分因子 $\mu(t) = e^{\int k\,dt} = e^{kt}$

Step 2：两边乘以积分因子

$$e^{kt}\frac{dT}{dt} + ke^{kt}T = (kT_a + u(t))e^{kt}$$

Step 3：左边变成乘积的导数

注意到：$\frac{d}{dt}(e^{kt}T) = e^{kt}\frac{dT}{dt} + ke^{kt}T$

所以：

$$\frac{d}{dt}(e^{kt}T) = (kT_a + u(t))e^{kt}$$

Step 4：两边积分

$$e^{kt}T(t) - e^{kt_0}T(t_0) = \int_{t_0}^{t}(kT_a + u(s))e^{ks}\,ds$$

Step 5：当 $u(t)$ 是常数时

如果在 $[t_0, t]$ 内 $u(t) = u$（常数），则：

$$e^{kt}T(t) = e^{kt_0}T(t_0) + (kT_a + u)\frac{e^{kt} - e^{kt_0}}{k}$$

关键结论

最终解（u 为常数时）：

$$\boxed{T(t) = \left(T_a + \frac{u}{k}\right) + \left(T(t_0) - T_a - \frac{u}{k}\right) e^{-k(t-t_0)}}$$

3.3 理解这个解

把解写成：

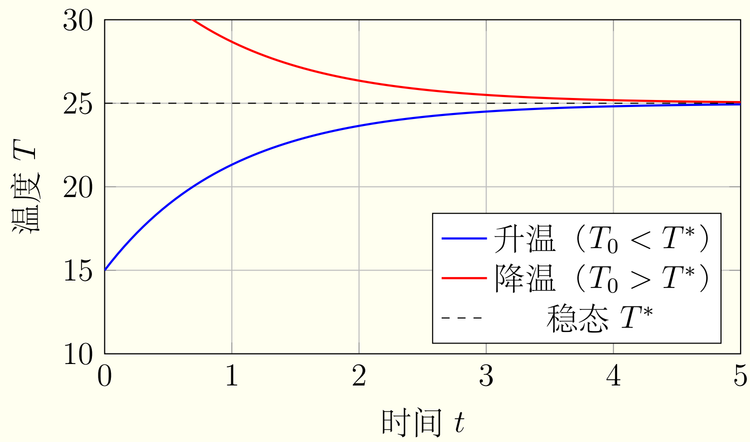
$$T(t) = T^* + (T(t_0) - T^*)e^{-k(t-t_0)}$$

其中 $T^* = T_a + \frac{u}{k}$ 是**稳态温度**（平衡点）。

直觉理解

这个解在说什么？

- 温度从初始值 $T(t_0)$ 出发
- **指数级**趋近于稳态 T^*
- 永远不会真正到达 T^*，只是无限接近



4 第三层：Bang-Bang 控制

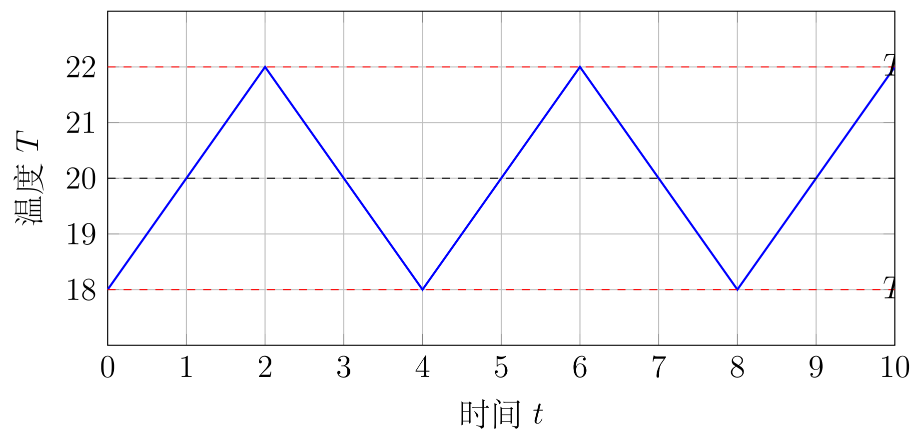
4.1 控制策略

Bang-Bang 控制

最简单的恒温控制：

- 温度低于 $T_{set} - \delta \to$ 开暖气（$u = u_{\max}$）
- 温度高于 $T_{set} + \delta \to$ 关暖气（$u = 0$）

δ 是温度容差（允许的波动范围）。



4.2 两种状态

状态 1：暖气关闭（$u = 0$）

$$T(t) = T_a + (T(t_0) - T_a)e^{-k(t-t_0)}$$

温度从当前值**指数衰减**到室外温度 T_a。

状态 2：暖气开启（$u = u_{\max}$）

$$T(t) = \left(T_a + \frac{u_{\max}}{k}\right) + \left(T(t_0) - T_a - \frac{u_{\max}}{k}\right) e^{-k(t-t_0)}$$

温度**指数上升**到稳态 $T^* = T_a + \frac{u_{\max}}{k}$。

5 第四层：计算升温/降温时间

5.1 升温时间

从 $T_{set} - \delta$ 升到 $T_{set} + \delta$ 需要多久?

初始：$T(t_0) = T_{set} - \delta$，暖气开（$u = u_{\max}$）

目标：$T(t_0 + t\ ) = T_{set} + \delta$

代入解：

$$T_{set} + \delta = T^* + (T_{set} - \delta - T^*)e^{-kt}$$

其中 $T^* = T_a + \frac{u_{\max}}{k}$

解出 t :

$$e^{-kt} \ = \frac{T_{set} + \delta - T^*}{T_{set} - \delta - T^*}$$

关键结论

$$\boxed{t \ = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{T^* - (T_{set} - \delta)}{T^* - (T_{set} + \delta)} \right)}$$

5.2 降温时间

从 $T_{set} + \delta$ 降到 $T_{set} - \delta$ 需要多久?

初始：$T(t_0) = T_{set} + \delta$，暖气关（$u = 0$）

关键结论

$$\boxed{t \ = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{T_{set} + \delta - T_a}{T_{set} - \delta - T_a} \right)}$$

5.3 周期和能耗

- **周期**：$P = t\ + t$
- **开关次数**：总时间 / 周期 $\times$ 2（每个周期开一次关一次）
- **能耗**：$E = u_{\max} \cdot t$ （只有开暖气时消耗能量）

6 第五层：Zeno 现象

6.1 什么是 Zeno 现象？

注意

当 $\delta \to 0$ 时（温度容差趋近于零）：

$$t \to 0, \quad t \to 0$$

这意味着：**暖气无限频繁地开关！**
这在物理上是不可能的，叫做 **Zeno 现象**（芝诺悖论）。

直觉理解

直觉：
如果你要求温度精确保持在 20.000°C，那么一旦偏离 0.001°C 就要切换。
但切换需要时间，温度变化需要时间...
结果是在极短时间内无限次切换——这在现实中做不到！

6.2 解决方法

关键结论

设置合理的温度范围：
不用 $T_{set} \pm \delta$，而是用 $[T_L, T_H]$，其中 $T_H - T_L$ 足够大。
比如：设定 20°C，允许范围 19°C - 21°C。

7 第六层：从 0D 到 1D

7.1 0D 模型的局限

直觉理解

0D 模型假设：房间温度处处相同。
但现实中：

- 暖气旁边更热
- 窗户旁边更冷
- 温度有空间分布！

7.2 1D 模型

现在考虑温度随**位置**和**时间**变化：$T(x,t)$

热传导方程（Heat Equation）

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{u(x,t)}{c}}$$

其中：

- $\alpha = \frac{k_1}{\rho c}$ = 热扩散系数
- k_1 = 材料导热系数
- ρ = 密度
- c = 比热容
- $u(x,t)$ = 热源分布

直觉理解

这个方程在说什么？

$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ 是温度的" 曲率"：

- 如果某点比两边都冷（凹）$\rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} > 0 \rightarrow$ 温度上升
- 如果某点比两边都热（凸）$\rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} < 0 \rightarrow$ 温度下降

热量从高温流向低温，最终趋向均匀！

8 第七层：边界条件

8.1 为什么需要边界条件？

PDE 有无穷多解，边界条件告诉我们选哪一个。

对于房间加热问题，需要指定：

- 墙壁两端发生什么？

8.2 三种常见边界条件

类型	数学形式	物理含义
Dirichlet	$T(0,t) = T_0$	边界温度固定
Neumann	$\frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = q$	边界热流固定
Robin	$-k_1 \frac{\partial T}{\partial x}(L,t) = h(T(L,t) - T_a)$	对流换热

8.3 我们的设定

房间边界条件

- **左边**（$x = 0$）：绝热墙壁（热源在这里）

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = 0 \quad \text{(Neumann)}$$

- **右边**（$x = L$）：与室外对流换热

$$-k_1 \frac{\partial T}{\partial x}(L,t) = h(T(L,t) - T_a) \quad \text{(Robin)}$$

直觉理解

Robin 边界条件的物理含义：

左边：热流 $= -k_1 \frac{\partial T}{\partial x}$（傅里叶定律）

右边：对流换热 $= h(T - T_a)$（牛顿冷却定律）

边界上两者相等：流出的热量 = 对流带走的热量

9 第八层：点热源的稳态解

9.1 稳态是什么？

稳态

当系统达到平衡，温度不再随时间变化：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

此时热传导方程变成：

$$\alpha \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{u(x)}{c} = 0$$

9.2 点热源

点热源

热源集中在一点 x_0，用 Dirac delta 函数表示：

$$u(x) = P \cdot \delta(x - x_0)$$

其中 P 是热源功率（瓦特）。

直觉理解

Delta 函数是什么?

$\delta(x - x_0)$ 是一个" 无穷高、无穷窄" 的尖峰：

- 在 $x = x_0$ 处" 爆炸"
- 在其他地方为零
- 积分等于 1：$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)dx = 1$

物理意义：所有热量集中在一点释放。

9.3 求解稳态方程

稳态方程（乘以 k_1）：

$$k_1 T''(x) + P\delta(x - x_0) = 0$$

在 $x \neq x_0$ **处**：$T''(x) = 0 \Rightarrow T(x) = Ax + B$（直线!）

在 $x = x_0$ **处**：温度连续，但导数有跳跃

对方程在 $[x_0^-, x_0^+]$ 积分：

$$k_1[T'(x_0^+) - T'(x_0^-)] + P = 0$$

关键结论

跳跃条件：

$$T'(x_0^+) - T'(x_0^-) = -\frac{P}{k_1}$$

导数在点热源处有一个跳跃!

9.4 完整解

设：

- $0 \leq x < x_0$：$T(x) = A_1 x + B_1$
- $x_0 < x \leq L$：$T(x) = A_2 x + B_2$

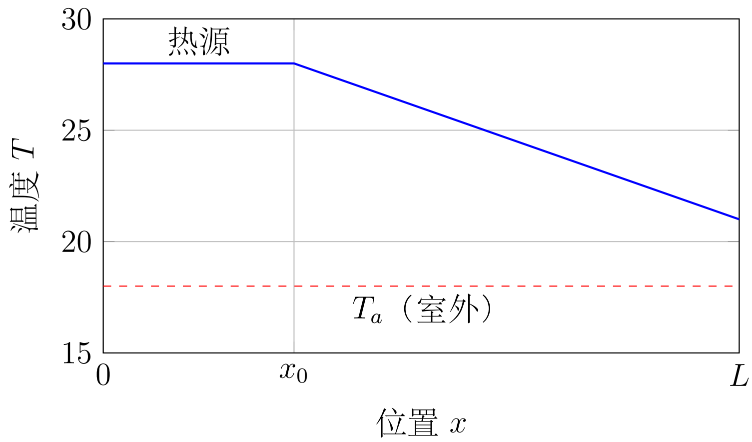
利用边界条件和跳跃条件：

1. $T'(0) = 0 \Rightarrow A_1 = 0$
2. $T(x_0^-) = T(x_0^+)$（温度连续）
3. $T'(x_0^+) - T'(x_0^-) = -\frac{P}{k_1} \Rightarrow A_2 = -\frac{P}{k_1}$
4. Robin BC 在 $x = L$

关键结论

最终稳态解：

$$T(x) = \begin{cases} T_a + \frac{P}{h} + \frac{P}{k_1}(L - x_0) & 0 \le x \le x_0 \\ T_a + \frac{P}{h} + \frac{P}{k_1}(L - x) & x_0 < x \le L \end{cases}$$



10 第九层：均匀热源

如果热源均匀分布（比如地暖）：$u(x) = H$（常数）

稳态方程：

$$T''(x) = -\frac{H}{k_1}$$

积分两次：

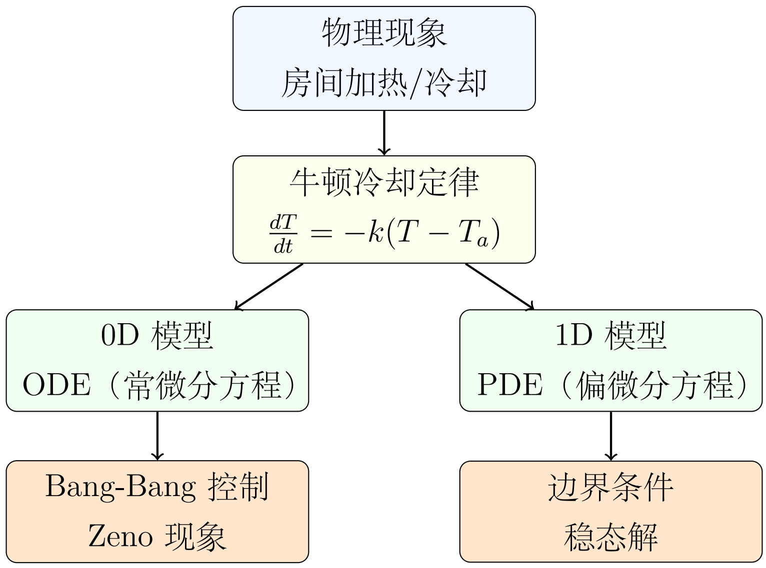
$$T(x) = -\frac{H}{2k_1}x^2 + C_1 x + C_2$$

用边界条件确定 C_1, C_2。

关键结论

均匀热源产生**抛物线型**温度分布！

11 总结：从物理到数学



12 公式速查

概念	**公式**
牛顿冷却定律	$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) + u$
0D 解（u 常数）	$T(t) = T^* + (T_0 - T^*)e^{-kt}$，$T^* = T_a + \frac{u}{k}$
升温时间	$t = \frac{1}{k} \ln \frac{T^* - T_L}{T^* - T_H}$
热传导方程	$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} +$ 热源
傅里叶定律	热流 $q = -k_1 \frac{\partial T}{\partial x}$
Robin BC	$-k_1 \frac{\partial T}{\partial x} = h(T - T_a)$

整理完成 ⋆ *Group Project* 加油！