$T(t)$ 室内温度 k: 系数

Project 2.

T_a 室外温度

$u(t)$ 供暖提供的

① 完全不考虑位置,只考虑时间   0D 情况.

By Newton's law of cooling

$$\frac{dT}{dt} = -k(T(t) - T_a) + u(t) = -kT + kT_a + u(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} + kT = kT_a + u(t) \quad , \text{ multiply by } e^{\int k\,dt} = e^{kt}$$

$$\Rightarrow e^{kt}\left(\frac{dT}{dt} + kT\right) = [kT_a + u(t)]\, e^{kt}$$

$$\Rightarrow \left[e^{kt} T(t)\right]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} (kT_a + u(t)) \cdot e^{kt}\, dt.$$

由于 $kT_a + u(t)$ 为常数.(单独开/关的段)

以下 u_t 和 $u(t)$ 是同个东西.

$$\Rightarrow \left[e^{kt} T(t)\right]_{t_0}^{t} = \frac{1}{k}(kT_a + u_t)(e^{kt} - e^{kt_0})$$

$$\Rightarrow e^{kt} T(t) = e^{kt_0} T(t_0) + \frac{1}{k}(kT_a + u(t))(e^{kt} - e^{kt_0})$$

$$\Rightarrow T(t) = e^{-k(t-t_0)} T(t_0) + \frac{1}{k}(kT_a + u_t)(1 - e^{-k(t-t_0)})$$

$$\Rightarrow T = e^{-k(t-t_0)} T(t_0) + \left(T_a + \frac{u_t}{k}\right)(1 - e^{-k(t-t_0)})$$

$$\Rightarrow T = e^{-k(t-t_0)}\left(T(t_0) - T_a - \frac{u_t}{k}\right) + T_a + \frac{u_t}{k}$$

所以 0D 解析解:

$$\boxed{T(t) = T_a + \frac{u_t}{k} + e^{-k(t-t_0)}\left(T(t_0) - T_a - \frac{u_t}{k}\right)}$$

分析: 只要在单段时间 $u(t)$ 为常数则成立.

① 关机时 $u=0$.

$$T_{关}(t) = T_a + (T(t_0) - T_a)\, e^{-k(t-t_0)}$$

→ 合理, 温度衰减至 T_a (室外温度).

② 开机时 $u = u_{max}$.

$$T_{开}(t) = T_a + \frac{u_{max}}{k} + \left(T(t_0) - T_a - \frac{u_{max}}{k}\right) e^{-k(t-t_0)}$$

⇒ 温度指数级上升.

接下来我们尝试计算 0D 情况下升温时间/周期/能耗/开关次数 等

我们现在有开/关两段表达式. 我们假设从 $T_{set}-6$ 和 $T_{set}+6$ 分别开始. 也就是 $T(t_0)$ 分别等于这俩值.

设定温度 T_{set}.

① 升温时间: $T_{set} = T_a + \frac{u_{max}}{k} + \left(T_{set} - 6 - T_a - \frac{u_{max}}{k}\right) e^{-kt}$

$$\Rightarrow T_{set} - \left(T_a + \frac{u_{max}}{k}\right) = \left(T_{set} - 6 - T_a - \frac{u_{max}}{k}\right) e^{-kt}$$

$$\Rightarrow e^{-kt} = \frac{T_{set} - (T_a + \frac{U_{max}}{k})}{T_{set} - \sigma - (T_a + \frac{U_{max}}{k})}$$

$$\boxed{\Rightarrow t_{开} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{T_{set} - \sigma - (T_a + \frac{U_{max}}{k})}{T_{set} - (T_a + \frac{U_{max}}{k})} \right)}$$

同理，关机段降温时间

$$\boxed{t_{关} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{T_{set} + \sigma - T_a}{T_{set} - T_a} \right)}$$

因为 $u(t) = 0$.

注意!! 这里由于 $\sigma \to 0$. 时间 $t_{开}$ 与 $t_{关}$ 都 $\longrightarrow \ln(1) = 0$. Zeno 现象出现!

解决方法：换一个较宽的温度范围 $T_{set} + \sigma \longrightarrow T_H$，$T_{set} - \sigma \longrightarrow T_L$，从 T_L 加温到 T_H，T_H 降温到 T_L.

则 $t_{开} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{T_L - (T_a + \frac{U_{max}}{k})}{T_H - (T_a + \frac{U_{max}}{k})} \right)$

$t_{关} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{T_H - T_a}{T_L - T_a} \right)$

升/降温时间

相关推断

于是我们可立刻得到周期，开关次数，能耗

周期 $P = t_{开} + t_{关}$

开关次数：$\frac{2}{P} \times$ 总时长 (每周期 开→关，关→开，2次事件).

能耗：$E = \int_0^P u(t)\,dt = U_{max} \cdot t_{开}$ (因为关时无能耗)

若每次开关消耗能量 e，总能耗

$E_{总} = 开关次数 \times e + E$

接下来讨论 1D 情况.

1D 情况（考虑距离与时间）

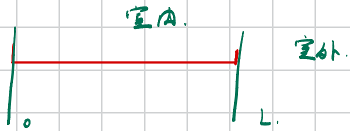
我们有 heat equation: $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + u(x,t)$. 这里 $\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

据上回会议我们选择"点热源"情况.

则令 $u(x,t) = q(t)\cdot \delta(x)$ → 表示距离的分布.

若整体均匀加热则 $u(x,t) = q(t) H$, H 是常数.

Boundary Condition.



☆ 我们假设，热源靠左. 即 $x=0$ 处墙壁绝热，右侧墙壁与室外交换温度。（考虑对流）

则我们有两个 Boundary condition.

$$
\begin{cases}
\frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = 0. \\
\text{右侧: } -k_1 \frac{\partial T}{\partial x}(L,t) = h(T(L,t) - T_a) \quad \text{(Robin 条件)}
\end{cases}
$$

解释：k_1 是材料的导热系数，h 为墙与空气对流换热参数.

我们尝试推导点状源的解:

☆ 在稳态时，我们有，$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$，所以我们只需考虑距离.

傅立叶定律: $r(x) = -k_1 \frac{dT}{dx}$.　热流 = 导热系数 × 温度梯度.

能量守衡: 流入 + 内部产热 = 流出. 由于已经达到稳态，总变化为0.

$\frac{d}{dx} r(x) + p\,\delta(x - x_0) = 0.$

代入 → $-\frac{d}{dx}\left(k_1 \frac{dT}{dx}\right) + p\,\delta(x - x_0) = 0$

⇒ $k_1 T''(x) + p\,\delta(x - x_0) = 0.$

稳态方程: $\boxed{k_1 T''(x) + p\,\delta(x - x_0) = 0.}$

k_1: 导热系数.　p: 点热源强度（热功率）　$\delta(x-x_0)$: 极短区域、x_0 为点热源位置. 当 $x \neq x_0$ 时这玩意 $=0$.

解释: 点热源附近温度会跳变.

边界条件:
$$
\begin{cases}
T'(0) = 0 \\
-k_1 T'(L) = h(T(L) - T_a)
\end{cases}
$$

因为 $\delta(x - x_0) = 0$ 当 $x \neq x_0$.

所以在 $[0, x_0)$ 段: $k_1 T'' = 0 \Rightarrow T'' = 0$

$(x_0, L]$ 段: $T'' = 0$

$$
\Rightarrow T(x) = \begin{cases}
A_1 x + B_1 & 0 \le x < x_0 \\
A_2 x + B_2 & x_0 < x \le L
\end{cases}
$$

现在对方程在 $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$ 上积分.

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} k_1 T''(x)\,dx + \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} p\,\delta(x-x_0)\,dx = 0$$

$\Rightarrow k_1\left(T'(x_0^+) - T'(x_0^-)\right) + p = 0$

$\Rightarrow T'(x_0^+) - T'(x_0^-) = \dfrac{-p}{k_1}$

$\Rightarrow A_2 - A_1 = -\dfrac{p}{k_1}$

由于温度本身是连续的、$T(x_0^-) = T(x_0^+)$.

$A_1 x_0 + B_1 = A_2 x_0 + B_2$

解得: $\begin{cases} A_1 = 0 \quad (T'(x) = A_1)(\text{左端点}) \\ A_2 = \dfrac{-p}{k_1} \\ \Rightarrow B_2 = B_1 + \dfrac{p}{k_1} x_0. \end{cases}$

右边的 Boundary Condition

$T'(L) = A_2 = -\dfrac{p}{k_1}$

$T(L) = A_2 L + B_2 = B_1 + \dfrac{p}{k_1}(x_0 - L).$

由于 $-k_1 T'(L) = h(T(L) - T_a).$

$-kT'(L) = -k_1\cdot\left(-\dfrac{p}{k_1}\right) = p.$

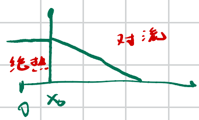
$\Rightarrow T(L) = T_a + \dfrac{p}{h}$

又因为 $T(L) = B_1 + \dfrac{p}{k_1}(x_0 - L)$

$\Rightarrow B_1 = T_a + \dfrac{p}{h} + \dfrac{p}{k_1}(L - x_0)$

1D 稳态解.

$$\Rightarrow T(x) = \begin{cases} T_a + \dfrac{p}{h} + \dfrac{p}{k_1}(L - x_0), & 0 \le x \le x_0 \\ T_a + \dfrac{p}{h} + \dfrac{p}{k_1}(L - x), & 0 \le x \le L. \end{cases}$$



若用均匀热源

$0 = \alpha T''(x) + \mu(t) H$

则 $T''(x) = -\dfrac{\mu H}{\alpha}$

$\Rightarrow T(x) = -\dfrac{\mu H}{2\alpha} x^2 + C_1 x + C_2$

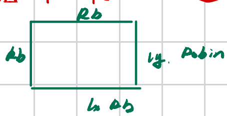
代入 BC. 解待定系数即可。

2D 情况

根据上图，我们 4面墙都采取 Robin 边界。我仍然会从稳态情形开始。

令 $F=(0,L_x)\times(0,L_y)$

则温度场: $T(x,y,t)$。



与 1D 情况类似，2D 下我们有 平衡方程

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\Delta T+P\,\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$$

(原理一致，只是加了一个维度)

$\Delta=\partial_{xx}+\partial_{yy}$　　P：热源强度

Boundary Condition. 假设 n 为外法向.

对于每个边界，都有 $-k_{\substack{1\\2\\3\\4}}\frac{\partial T}{\partial n}=h(T-T_a)$ on ∂F.

在稳态情况下:

$\frac{\partial T}{\partial t}=0$、依旧令 R_n 为常数。

则
$$\begin{cases} k_1\Delta T+P\,\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)=0 \\ -k_1\,\partial_n T=h(T-T_a) \quad BC \end{cases}$$

k_1 可替换为 k_2, k_3, k_4

开始计算:

令 $\theta=T-T_a$，则 $\Delta\theta=\Delta T$.

则
$$\begin{cases} k_1\Delta\theta+P\,\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)=0 \\ -k_1\,\partial_n\theta=h\theta \quad \text{on } \partial F. \ (BC) \end{cases}$$

线性PDE，点源，4个边界，采用 Green's Function (reference)

定义 $G(\vec{r},\vec{r_0})$，$\vec{r}=(x,y)$，$\vec{r_0}=(x_0,y_0)$，满足.

$$\begin{cases} k_1\Delta G(\vec{r},\vec{r_0})+\delta(\vec{r}-\vec{r_0})=0. \\ -k_1\,\partial_n G=hG. \end{cases}$$

则稳态解为

$\theta=PG(\vec{r},\vec{r_0})\ \Rightarrow\ T(x,y)=T_a+PG(\vec{r},\vec{r_0})$

P 和之前一致。

分 方程 闭式太太太长了