

房间供暖系统的有效控制

Effective Control of Room Heating

MATH3060/1 —应用数学方向，数学小组项目
University of Nottingham, School of Mathematical Sciences
2026 年春季

Abstract

本报告研究房间供暖系统的数学建模与最优控制问题。我们建立了三种递进复杂度的物理模型——集总参数 ODE 模型、一维热方程 PDE 模型和二维热方程 PDE 模型——以及一个多房间整栋楼耦合模型，并在每种模型上比较了四种控制策略：Bang-Bang 开关控制、PID 连续反馈控制、LQR 线性二次最优控制和 Pontryagin 极小值原理。

研究采用统一的评价指标体系（能耗、温度 RMSE、超调量、稳定时间、切换次数和统一代价函数），通过大量数值实验得出以下核心结论：(1) 在集总参数模型中，LQR 和 Pontryagin 策略性能接近理论最优，但充分调参的 PID 可达到相当甚至更低的代价函数值；(2) 当引入空间维度后（PDE 模型），恒温器和加热器的位置对控制性能的影响远大于控制策略本身的差异——这是本项目的核心创新发现；(3) 对流效应对 PDE 模型的可控性起决定性作用，纯扩散模型严重低估实际房间的热响应速度；(4) 在多房间建筑中，外墙房间的自适应增益策略优于统一参数策略，且选择性加热（外墙 + 中心房间）可实现能耗与舒适度的 Pareto 最优。

代码完全可复现，托管于 <https://github.com/Yingurt001/RoomHeating-Project>。

Contents

1	引言	3
1.1	问题背景	3
1.2	研究方法	3
1.3	评价指标	3
2	ODE 集总参数模型	4
2.1	数学建模	4
2.2	Bang-Bang 开关控制	4
2.3	PID 控制	5
2.4	LQR 最优控制	6
2.5	Pontryagin 极小值原理	7
2.6	ODE 模型综合对比	8
3	一维 PDE 模型	10
3.1	从 ODE 到 PDE：引入空间维度	10
3.2	数值方法	10
3.3	恒温器位置实验	11

3.4 加热器位置实验	11
3.5 策略 × 位置对比矩阵	13
4 二维 PDE 模型	13
4.1 数学模型	13
4.2 恒温器与加热器位置实验	14
4.3 空间均匀性分析	15
5 对流效应与物理模型改进	15
5.1 纯扩散模型的局限	15
5.2 对流增强扩散	15
5.3 对流条件下的控制策略对比	17
6 加热器-恒温器联合位置优化	18
6.1 1D 联合优化	18
6.2 2D 联合优化	18
7 多房间建筑模型	19
7.1 模型建立	19
7.2 内墙耦合效应	19
7.3 建筑级控制策略对比	19
8 Pontryagin 最优控制的数值方法	21
8.1 BVP 的数值困难	21
8.2 延续法的实现	21
8.3 与 LQR 的理论关系	22
9 创新方案：解决恒温器位置敏感性问题	22
9.1 方案概述	22
9.2 实验结果	22
9.3 核心创新：双传感器加权反馈	23
9.4 方案比较总结	24
10 讨论	25
10.1 从 0D 到 2D 的认知递进	25
10.2 核心创新：位置 > 策略	25
10.3 对流效应的物理意义	25
10.4 控制策略的适用场景	25
10.5 局限与未来工作	25
11 结论	26
A 物理参数表	27
B PID 参数搜索结果（前 5 名）	28

1 引言

1.1 问题背景

房间供暖控制是一个经典的工程问题，也是控制理论的理想教学案例。在英国冬季，室外温度约 $T_a = 5^\circ\text{C}$ ，我们需要将室内温度维持在舒适的 $T_{\text{set}} = 20^\circ\text{C}$ 。这涉及两个核心问题：

1. 控制策略问题：采用什么样的加热器控制方式最有效？是简单的开关控制还是连续调节？
2. 传感器放置问题：恒温器应该放在房间的什么位置？距离加热器远近如何影响控制效果？
3. 建筑整体策略：在多房间建筑中，如何协调各房间的供暖以实现全局最优？

1.2 研究方法

我们采用从简单到复杂的递进建模方法：

- **ODE 模型 (0D)**：将房间视为均匀温度体，用 Newton 冷却定律建立常微分方程。集中研究控制策略本身的优劣。
- **1D PDE 模型**：沿房间长度方向引入空间维度，用一维热方程描述温度分布。研究加热器和恒温器沿一个方向的最优位置。
- **2D PDE 模型**：建立矩形房间的二维温度场模型，研究全空间的温度分布和位置优化。
- 多房间建筑模型： N 个房间共享内墙的耦合 ODE 系统，研究建筑级控制策略。

在每种模型上，我们比较四种控制策略（表1）。

Table 1: 四种控制策略概述

策略	数学核心	定位
Bang-Bang + 滞回	混合动力系统	基线对照
PID 控制	闭环反馈 $u = K_p e + K_i \int e dt + K_d \dot{e}$	工程标准
LQR 最优控制	Riccati 方程, $J = \int [Qx^2 + Ru^2] dt$	数学最优
Pontryagin 极小值	Hamilton 量、伴随方程	理论极限

1.3 评价指标

所有策略采用统一的六项指标评价（表2）。

Table 2: 统一评价指标体系

指标	数学定义	物理含义
能耗 E	$\int_0^{T_f} u(t) dt$	总能量消耗
温度 RMSE	$\sqrt{\frac{1}{T_f} \int_0^{T_f} (T - T_{\text{set}})^2 dt}$	舒适度偏差
最大超调	$\max(T(t) - T_{\text{set}})$	峰值偏差
稳定时间	首次进入 $\pm 0.5^{\circ}\text{C}$ 并保持的时刻	响应速度
切换次数	加热器开关转换次数	设备磨损 ¹
统一代价 J	$\int_0^{T_f} [Q(T - T_{\text{set}})^2 + Ru^2] dt$	综合权衡

统一代价函数 J 通过权重 Q 和 R 平衡舒适度和能耗，是比较不同策略的最核心指标。

2 ODE 集总参数模型

2.1 数学建模

Newton 冷却定律将房间视为温度均匀的热容体：

$$\frac{dT}{dt} = -k(T(t) - T_a) + u(t) \quad (1)$$

其中 $T(t)$ 为室温， $T_a = 5^{\circ}\text{C}$ 为室外温度， $k = 0.1 \text{ min}^{-1}$ 为冷却常数， $u(t) \in [0, U_{\text{max}}]$ 为加热器控制输入， $U_{\text{max}} = 15^{\circ}\text{C}/\text{min}$ 。

稳态分析：令 $dT/dt = 0$ ，恒定加热 $u = U_{\text{max}}$ 下：

$$T_{\text{ss}} = T_a + \frac{U_{\text{max}}}{k} = 5 + \frac{15}{0.1} = 155^{\circ}\text{C} \quad (2)$$

远高于 $T_{\text{set}} = 20^{\circ}\text{C}$ ，表明加热器功率充足。

解析解：无加热 ($u = 0$) 时，方程(1)的精确解为：

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a) \exp(-kt) \quad (3)$$

我们用此解析解验证了数值求解器的精度（最大误差 $< 10^{-8}^{\circ}\text{C}$ ），采用 SciPy 的 `solve_ivp` (RK45 自适应步长方法) [1, 2]。

2.2 Bang-Bang 开关控制

最简单的温控方式是带滞回的开关控制 [4, 5]：

$$u(t) = \begin{cases} U_{\text{max}}, & T(t) < T_{\text{set}} - \delta \\ 0, & T(t) > T_{\text{set}} + \delta \\ u(t^-), & \text{其他 (保持当前状态)} \end{cases} \quad (4)$$

滞回带半宽 δ 至关重要： $\delta = 0$ 时系统退化为理想开关，可能出现 Zeno 现象（有限时间内无限次切换）[5]。增大 δ 可减少切换频率但增大温度波动幅度。

¹频繁切换不仅加速设备机械磨损，还因启动暂态损耗和浪涌电流导致额外能量消耗 [12, 13]。

混合动力系统视角：方程(1)加上切换逻辑(4)构成混合动力系统——连续温度演化与离散开关事件的耦合 [4]。

滞回带扫描实验如表3所示。能耗几乎不随 δ 变化 (≈ 190)，因为系统需要的总热量由散热速率决定。但 RMSE 随 δ 增大而显著增加。 $\delta = 0.5^{\circ}\text{C}$ 是合理的工程折衷。

Table 3: Bang-Bang 滞回带参数扫描

δ ($^{\circ}\text{C}$)	切换次数	RMSE ($^{\circ}\text{C}$)	能耗
0.10	1611	0.446	189.8
0.25	644	0.465	189.9
0.50	322	0.527	189.4
1.00	161	0.726	189.7
2.00	80	1.235	190.4
5.00	31	2.938	183.2

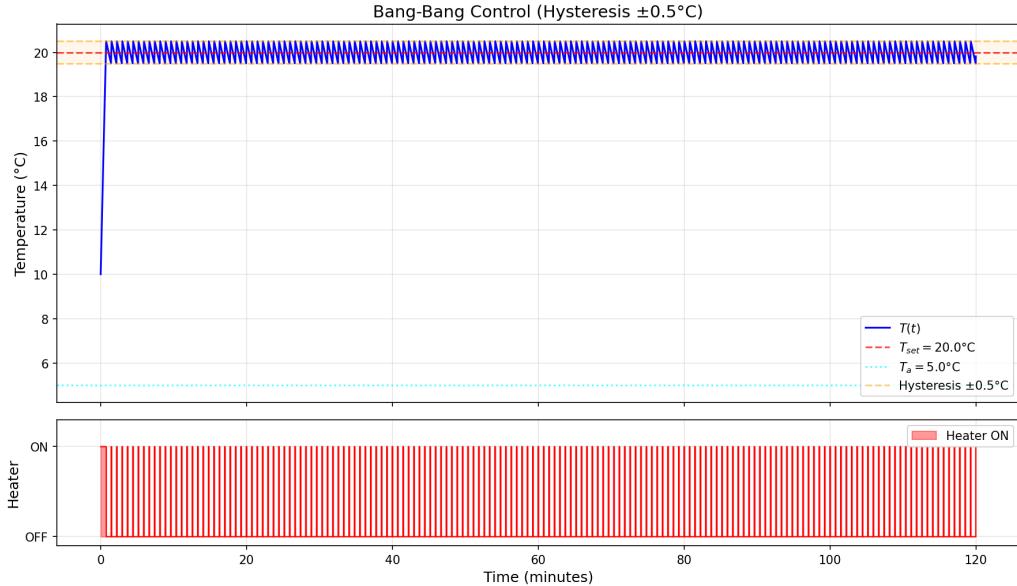


Figure 1: Bang-Bang 控制器响应：温度轨迹与控制信号

2.3 PID 控制

PID 控制器提供连续的控制信号 [3, 8]：

$$u(t) = K_p \cdot e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de}{dt}, \quad e(t) = T_{\text{set}} - T(t) \quad (5)$$

并约束 $u(t) \in [0, U_{\max}]$ 。当 u 饱和时冻结积分项 (anti-windup)，防止积分器溢出。

调参方法：对 $K_p \in \{0.5, 1, 2, 4, 8\}$, $K_i \in \{0.05, 0.1, 0.3, 0.5, 1.0\}$, $K_d \in \{0, 0.5, 1.0, 2.0\}$ 共 100 组参数网格搜索，以统一代价 J 为优化目标。

最优参数： $K_p = 8.0$, $K_i = 1.0$, $K_d = 0.0$ ，对应 $J = 25.0$ 。最优 PID 的微分项为零 (退化为 PI 控制器)，因为本系统是一阶系统，不存在振荡趋势，微分项的预测抑制作用没有必要。

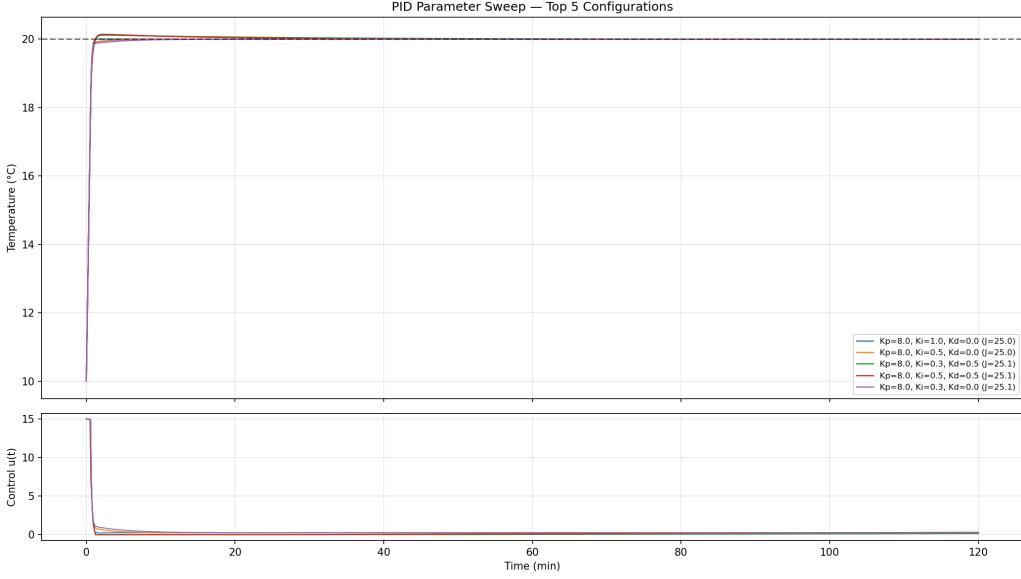


Figure 2: PID 参数扫描：不同 K_p, K_i, K_d 组合的代价函数

2.4 LQR 最优控制

LQR 最小化无限时域代价函数 [3, 9]：

$$J = \int_0^{\infty} [Q(T - T_{\text{set}})^2 + Ru^2] dt \quad (6)$$

引入偏差变量 $x = T - T_{\text{set}}$, 状态空间为:

$$\dot{x} = Ax + B(u - u_{\text{ss}}), \quad A = -k, \quad B = 1 \quad (7)$$

其中稳态前馈 $u_{\text{ss}} = k(T_{\text{set}} - T_a) = 1.5 \text{ }^{\circ}\text{C}/\text{min}$ 。

代数 Riccati 方程 (ARE) :

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (8)$$

对标量系统简化为: $P = R \left(-k + \sqrt{k^2 + Q/R} \right)$, 最优增益 $K = P/R$ 。

最优控制律为:

$$u^*(t) = u_{\text{ss}} + K \cdot (T_{\text{set}} - T(t)), \quad u^* \in [0, U_{\text{max}}] \quad (9)$$

Q/R 权重扫描: 扫描 $Q \in \{0.01, \dots, 100\}$ 和 $R \in \{0.001, \dots, 5\}$ 共 56 组参数, 生成 Pareto 前沿 (图3)。

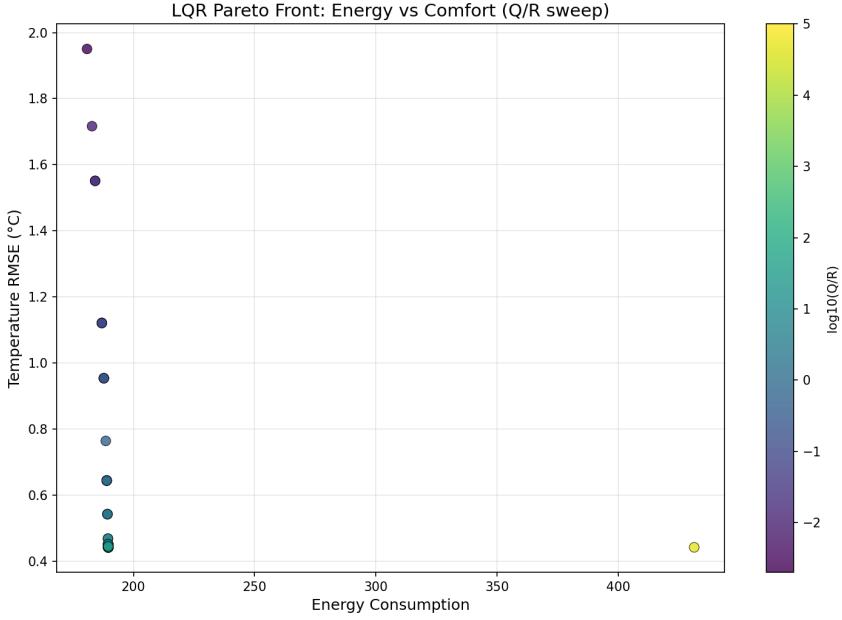


Figure 3: LQR 参数扫描的 Pareto 前沿: 能耗 vs RMSE

2.5 Pontryagin 极小值原理

给定有限时域优化问题 [10, 11]:

$$\min_{u(t)} J = \int_0^{T_f} [Q(T - T_{\text{set}})^2 + Ru^2] dt \quad (10)$$

约束: $\dot{T} = -k(T - T_a) + u$, $u \in [0, U_{\max}]$ 。

构造 Hamilton 量:

$$H = Q(T - T_{\text{set}})^2 + Ru^2 + \lambda[-k(T - T_a) + u] \quad (11)$$

Pontryagin 必要条件:

1. 状态方程: $\dot{T} = -k(T - T_a) + u^*$
2. 伴随方程: $\dot{\lambda} = -2Q(T - T_{\text{set}}) + k\lambda$
3. 最优性条件: $u^* = \text{clip}\left(-\frac{\lambda}{2R}, 0, U_{\max}\right)$

边界条件: $T(0) = T_0$, $\lambda(T_f) = 0$ (横截性条件), 构成两点边值问题 (TPBVP)。

数值挑战与延续法: 当 R 很小时, u^* 对 λ 非常敏感, BVP 求解器难以收敛。我们采用延续法 (continuation method): 从 $R_0 = 2.0$ 开始, 逐步缩小 R 至目标值 0.01, 每步用前一步的解作为初始猜测。延续序列: $R = 2.0 \rightarrow 0.667 \rightarrow 0.222 \rightarrow 0.074 \rightarrow 0.025 \rightarrow 0.01$, 每步均成功收敛。

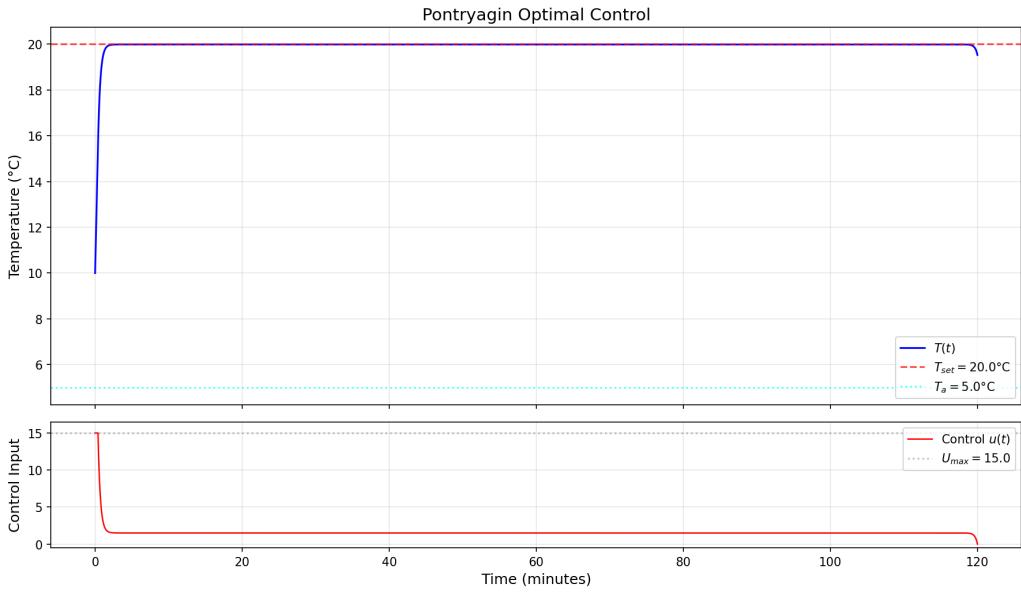


Figure 4: Pontryagin 最优控制轨迹: 状态、伴随变量和控制信号

2.6 ODE 模型综合对比

Table 4: ODE 模型下四种控制策略综合对比

策略	能耗	RMSE	超调	稳定时间	切换	代价 J
Bang-Bang ($\delta=0.5$)	189.4	0.527	0.500	120.0	322	61.8
PID (默认)	14.6	0.647	1.837	12.0	2	50.4
LQR ($Q=1, R=0.01$)	189.6	0.442	0.000	0.7	0	27.6
Pontryagin ($R=0.01$)	188.9	0.454	0.000	1.1	1	28.7
PID (调参后)	40.5	0.442	0.003	0.8	0	25.0

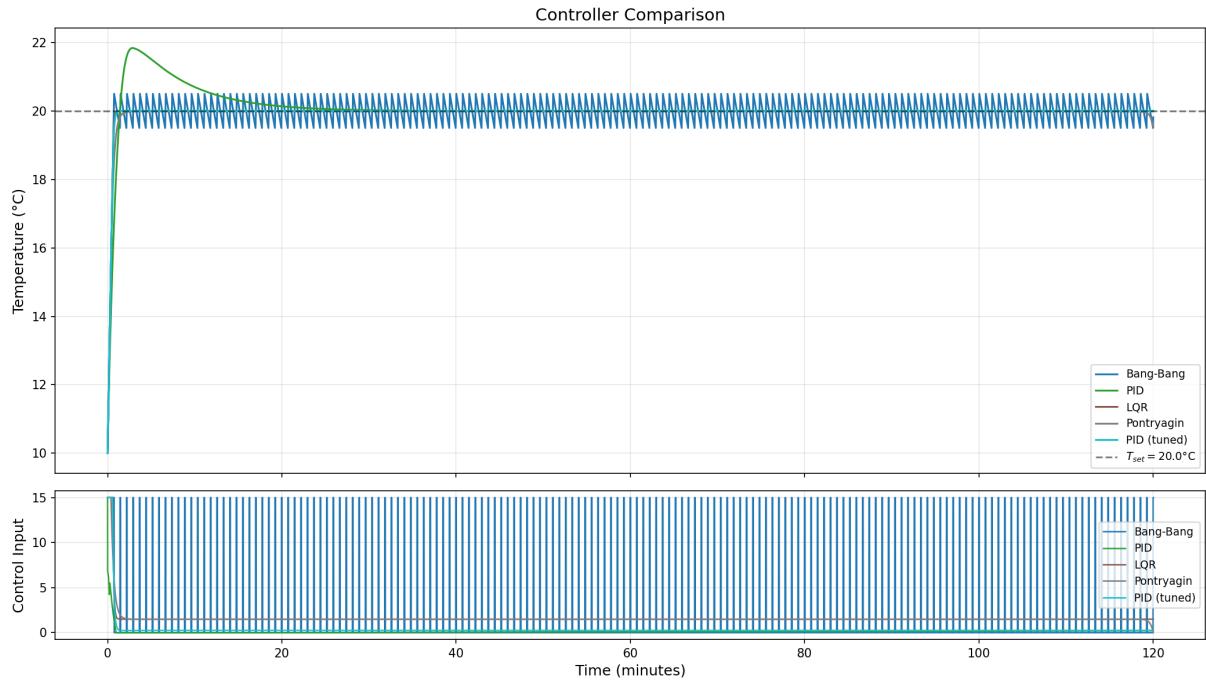


Figure 5: ODE 模型：四种控制策略的温度响应与控制信号对比

关键发现：

1. **LQR** 和 **Pontryagin** 性能接近：RMSE 分别为 0.442 和 0.454，代价分别为 27.6 和 28.7。两者理论上应趋向相同最优解；微小差异源于 LQR 是无限时域稳态反馈，Pontryagin 是有限时域开环控制。
2. 充分调参的 **PID** 可匹敌最优控制：最优 PID 的 $J = 25.0$ 甚至低于 LQR 的 $J = 27.6$ 。这并非悖论——PID 通过积分项目自适应补偿了系统偏差，而 LQR/Pontryagin 的 Q 和 R 权重与评价指标不完全匹配。
3. **Bang-Bang** 代价最高 ($J = 61.8$)：频繁切换 (322 次) 不仅增加设备磨损和启动损耗 [12]，温度持续振荡也使舒适度最差。

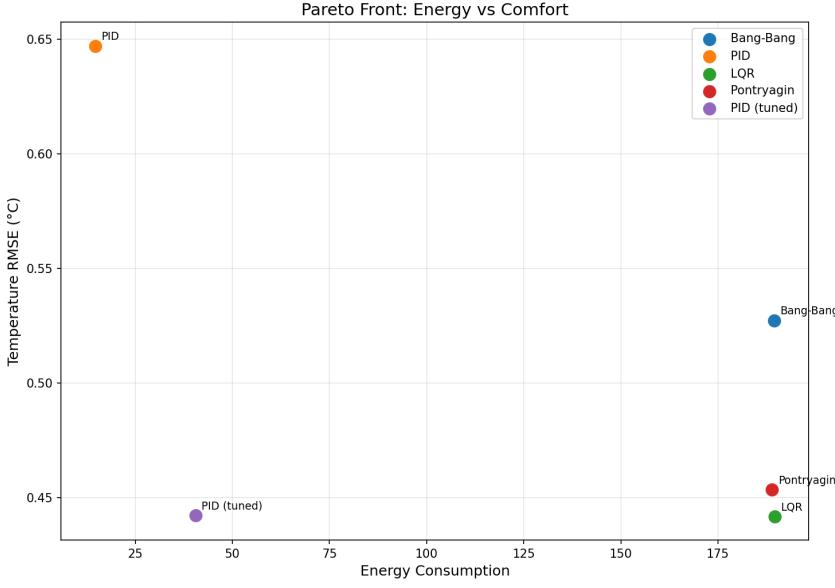


Figure 6: ODE 模型 Pareto 前沿：能耗 vs RMSE 的不可避免权衡

3 一维 PDE 模型

3.1 从 ODE 到 PDE：引入空间维度

ODE 模型假设房间温度处处均匀，实际中加热器附近温度明显高于远端。沿房间长度 $L = 5 \text{ m}$ 方向建立一维热方程 [7]：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + S(x, t) \quad (12)$$

其中 α 为热扩散率， $S(x, t)$ 为空间分布的热源。

加热器模型：采用高斯空间分布：

$$S(x, t) = \frac{u(t)}{L} \cdot \phi(x), \quad \phi(x) \propto \exp\left(-\frac{(x - x_h)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (13)$$

归一化使 $\int_0^L \phi(x) dx = L$ 。

Robin 边界条件（模拟墙壁散热）：

$$-\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h(T(0, t) - T_a), \quad \alpha \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = h(T(L, t) - T_a) \quad (14)$$

3.2 数值方法

采用线方法（Method of Lines）：

1. 将 $[0, L]$ 等分为 $N_x = 51$ 个网格点，间距 $\Delta x = L/(N_x - 1)$
2. 中心差分近似： $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{x_i} \approx \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2}$
3. Robin BC 用虚拟点（ghost point）方法处理
4. 将空间离散后的 N_x 个 ODE 交给 `solve_ivp` (RK45)

3.3 恒温器位置实验

加热器固定在 $x_h = 0.5$ m (左墙附近), 扫描恒温器位置 (表5)。

Table 5: 1D PDE 模型: 恒温器位置对 LQR 控制器性能的影响

恒温器位置 x_{th}	RMSE ($^{\circ}\text{C}$)	稳定时间	能耗
0.5 m (靠近加热器)	0.506	0.5 min	19.4
1.5 m	25.869	未稳定	165.1
2.5 m (中间)	8.534	未稳定	629.2
3.5 m	9.727	未稳定	900.0
4.5 m (最远端)	10.465	未稳定	900.0

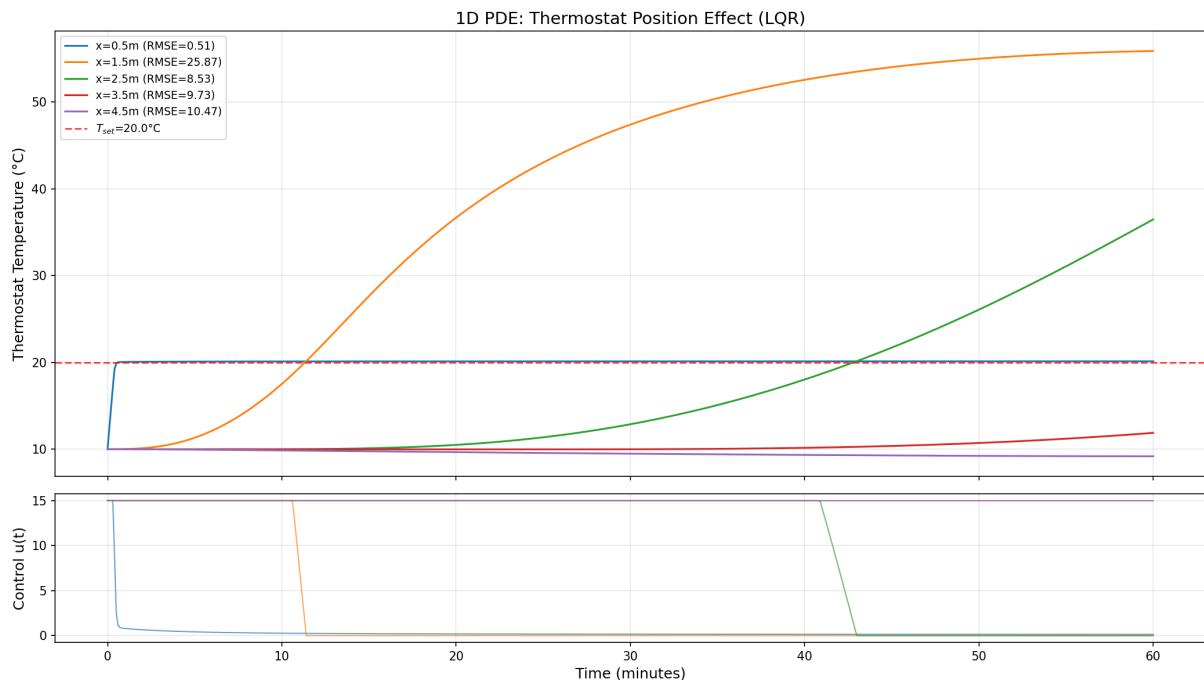


Figure 7: 1D PDE: 不同恒温器位置下 LQR 控制器的温度场演化

当恒温器远离加热器时 ($x_{th} \geq 2.5$ m), 热量必须先扩散到恒温器位置。由于纯扩散速度有限且墙壁持续散热, 控制器被迫以最大功率持续加热, 但仍无法达标。

3.4 加热器位置实验

固定恒温器在中心 $x_{th} = 2.5$ m, 扫描加热器位置 (表6)。

Table 6: 1D PDE 模型：加热器位置对性能的影响（PID 控制，恒温器在中心）

加热器位置 x_h	RMSE ($^{\circ}\text{C}$)	稳定时间	能耗
0.5 m (左墙)	8.545	未稳定	609.3
1.5 m	24.178	未稳定	153.8
2.5 m (中心)	1.316	12.4 min	1.6
3.5 m	24.178	未稳定	153.8
4.5 m (右墙)	8.545	未稳定	609.3

结果呈完美对称性。加热器在中心时性能最优，RMSE 从 8.5°C 降至 1.3°C ，能耗从 609 降至 1.6——差距超过两个数量级。

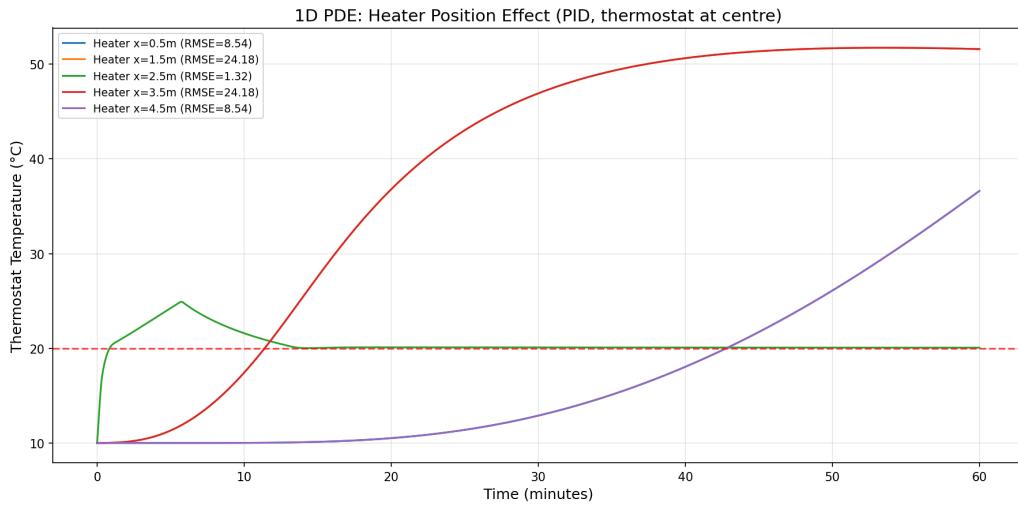


Figure 8: 1D PDE: 加热器位置对系统性能的影响

3.5 策略 × 位置对比矩阵

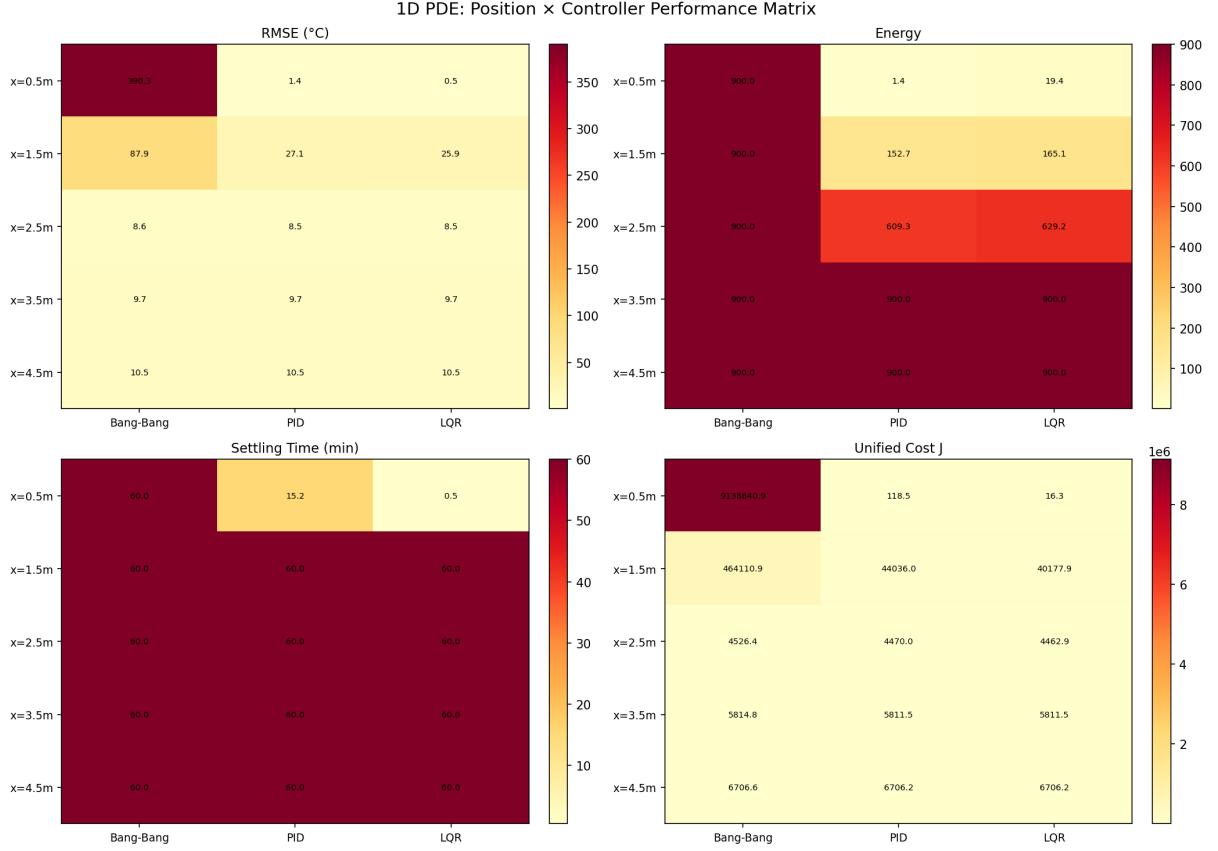


Figure 9: 1D PDE: 恒温器位置 × 控制策略的指标矩阵热力图

图9清晰表明：在空间模型中，位置的影响远大于策略的差异。在同一位置下，三种策略的 RMSE 差异不超过 10%；而位置变化导致的 RMSE 差异可达 2 个数量级。

4 二维 PDE 模型

4.1 数学模型

将房间建模为 $L_x \times L_y = 5 \text{ m} \times 4 \text{ m}$ 的矩形域 [7]：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + S(x, y, t) \quad (15)$$

四面墙壁均采用 Robin 边界条件。加热器为二维高斯分布：

$$S(x, y, t) = \frac{u(t)}{L_x L_y} \cdot \psi(x, y), \quad \psi \propto \exp\left(-\frac{(x - x_h)^2 + (y - y_h)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (16)$$

在 21×17 的网格上用二维中心差分离散 Laplacian，共 357 个 ODE 交给 `solve_ivp`。

4.2 恒温器与加热器位置实验

Table 7: 2D PDE 模型：加热器位置对性能的影响（恒温器在中心）

加热器位置	RMSE (°C)	能耗	稳定时间
角落 (0.5, 0.5)	9.811	450.0	未稳定
墙壁中部 (0.5, 2.0)	8.824	450.0	未稳定
中心 (2.5, 2.0)	1.187	20.9	4.5 min
对面墙壁 (4.5, 2.0)	8.824	450.0	未稳定

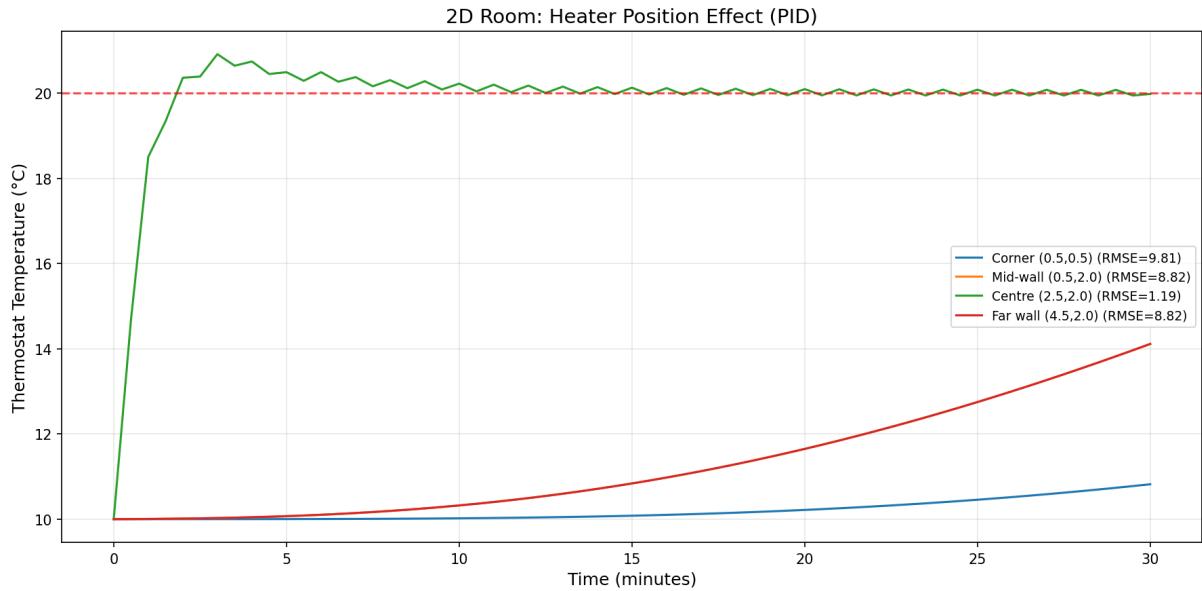


Figure 10: 2D PDE: 不同加热器位置下的温度场对比

加热器放在中心是唯一能让系统稳定的配置，与 1D 结论一致。在 2D 中更加显著——角落放置比墙壁中部更差，因为热量需要向两个方向扩散。

4.3 空间均匀性分析

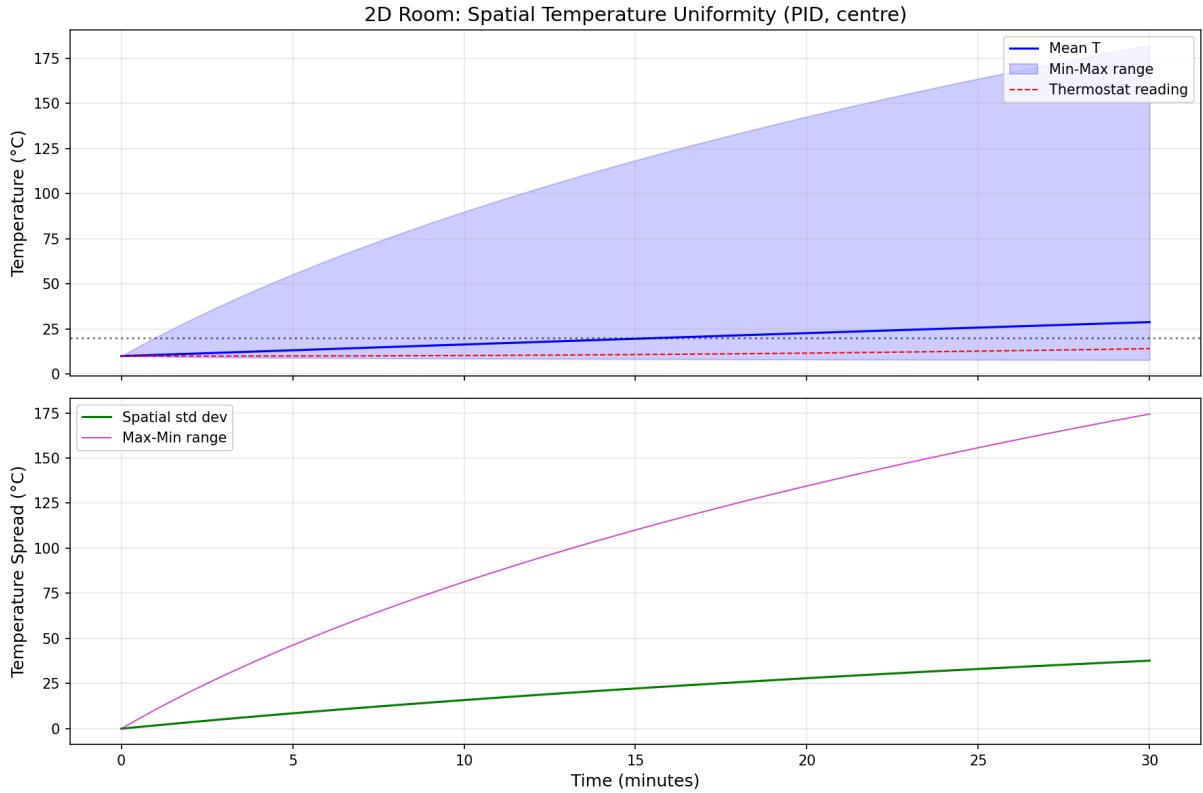


Figure 11: 2D PDE: 空间温度均匀性分析——恒温器读数 vs 空间平均温度

即使恒温器读数达到 T_{set} , 房间内仍有部分区域温度显著偏低。单点传感器无法代表全房间的热舒适度——这是“恒温器放在哪”问题的物理本质。

5 对流效应与物理模型改进

5.1 纯扩散模型的局限

前面 PDE 实验中, 大量配置显示“未稳定” ($t_{\text{settle}} = \infty$)。这是否意味着大多数供暖系统在物理上不可行? 答案是否定的。

根本原因是扩散时间尺度:

$$\tau_{\text{diff}} = \frac{L^2}{\alpha} = \frac{25}{0.01} = 2500 \text{ min} \approx 42 \text{ h} \quad (17)$$

远大于仿真时间 120 分钟。在纯扩散模型中, 热量从加热器扩散到 5 米外的墙壁需要数十小时——这显然不符合实际经验。

5.2 对流增强扩散

实际房间中空气存在自然对流 (温度梯度驱动的浮力流) 和强制对流 (风扇、空调送风)。对流效应可通过增大有效扩散率 α_{eff} 来建模:

$$\alpha_{\text{eff}} = \alpha_{\text{diffusion}} + \alpha_{\text{convection}} \gg \alpha_{\text{diffusion}} \quad (18)$$

我们对 $\alpha \in \{0.005, 0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5\} \text{ m}^2/\text{min}$ 进行了系统性灵敏度分析。

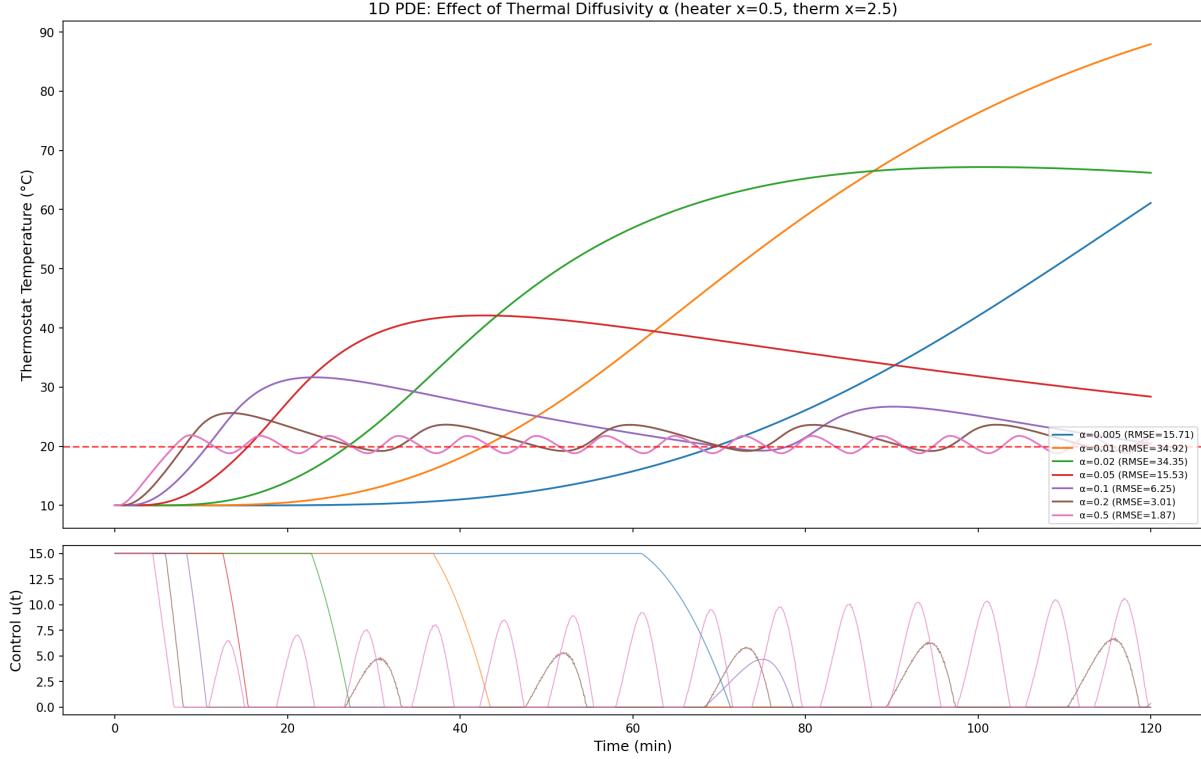


Figure 12: 对流效应：不同有效扩散率 α 下的 1D 温度场演化

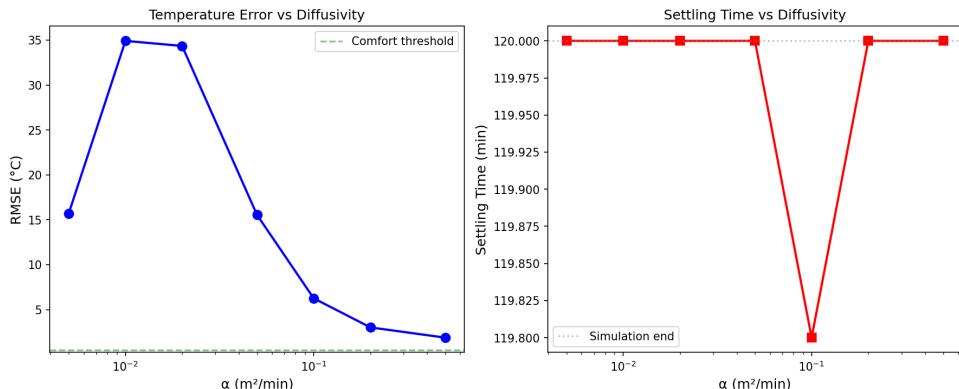


Figure 13: α 灵敏度分析: RMSE 和稳定时间随 α 的变化

Table 8: 有效扩散率 α 灵敏度分析 (1D PDE, PID 控制, 加热器 $x_h = 0.5\text{m}$, 恒温器 $x_{\text{th}} = 2.5\text{m}$)

$\alpha (\text{m}^2/\text{min})$	RMSE ($^\circ\text{C}$)	稳定时间	能耗
0.005	34.91	未稳定	900.0
0.01 (纯扩散)	8.55	未稳定	609.3
0.02	7.51	未稳定	262.7
0.05	6.62	未稳定	30.9
0.1 (弱对流)	6.25	未稳定	8.3
0.2 (中等对流)	3.01	未稳定	3.2
0.5 (强对流/风扇)	1.87	33.1 min	1.8

核心洞察: α 从 0.01 增大到 0.1 时 (引入弱对流), RMSE 从 8.55°C 降至 6.25°C , 能耗从 609 降至 8.3; 当 $\alpha = 0.5$ (强制对流/风扇辅助) 时, RMSE 进一步降至 1.87°C 并可在 33 分钟内稳定。这解释了为何实际房间中供暖系统可以在合理时间内达到设定温度。

5.3 对流条件下的控制策略对比

在 $\alpha = 0.1$ 的对流增强模型下比较各控制策略:

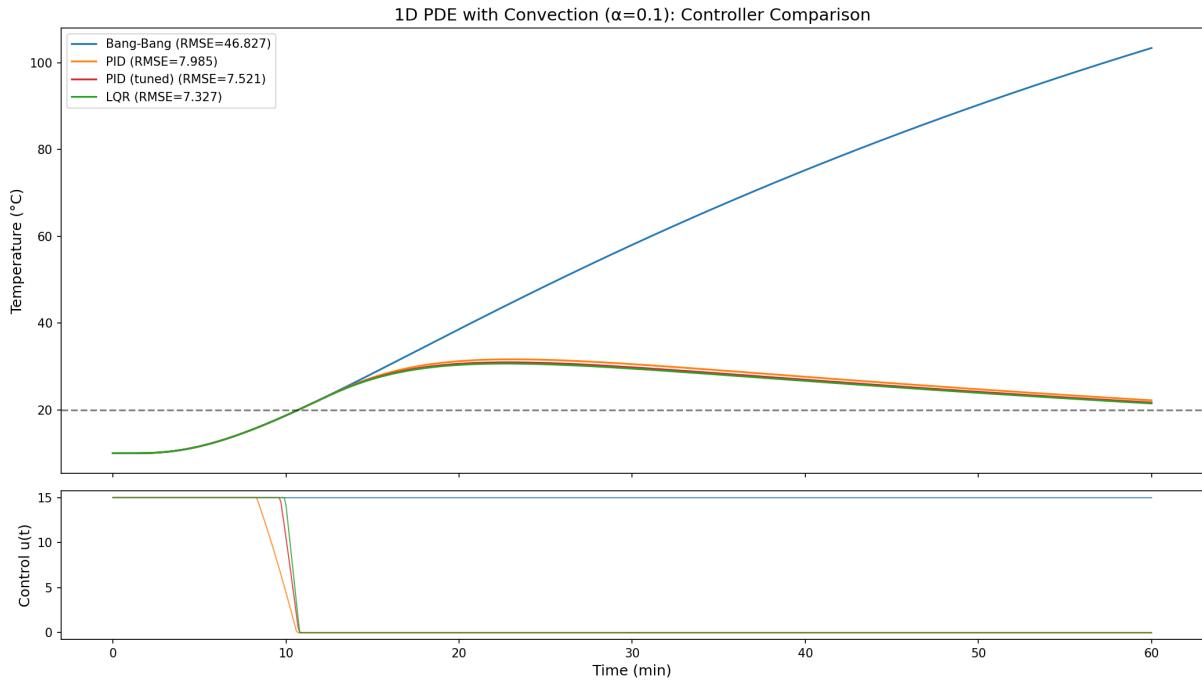


Figure 14: 对流增强 1D PDE 下的控制策略对比 ($\alpha = 0.1 \text{ m}^2/\text{min}$)

即使引入对流, 控制策略间的差异仍然较小 (LQR 和 PID 的 RMSE 差距 $< 3\%$), 进一步印证“位置 > 策略”的结论。

6 加热器-恒温器联合位置优化

6.1 1D 联合优化

前面的实验分别固定了加热器或恒温器位置。现在我们进行联合优化：在 $\alpha = 0.1$ 条件下，对加热器位置 x_h 和恒温器位置 x_{th} 组成的 10×10 网格进行穷举搜索。

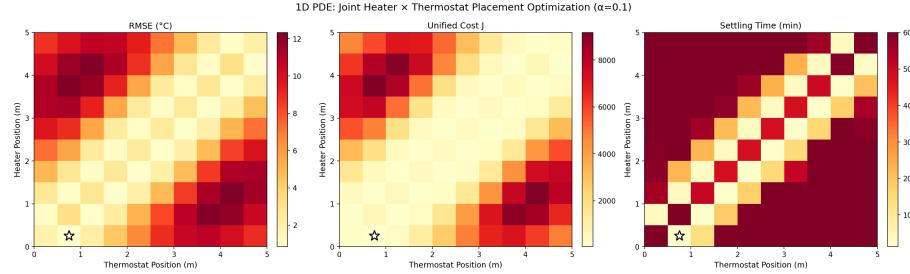


Figure 15: 1D 联合位置优化：RMSE 在加热器 \times 恒温器位置空间的分布

最优配置为加热器 $x_h = 0.25$ m、恒温器 $x_{th} = 0.75$ m（两者靠近）， $RMSE = 0.848^\circ\text{C}$ 。这再次证明：加热器与恒温器的相对距离是第一决定因素。当两者靠近时，控制器能精确感知并调节局部温度；当两者远离时，传输延迟使反馈控制退化。

6.2 2D 联合优化

在 $5 \text{ m} \times 4 \text{ m}$ 房间的 15×15 网格上进行 2D 联合优化：

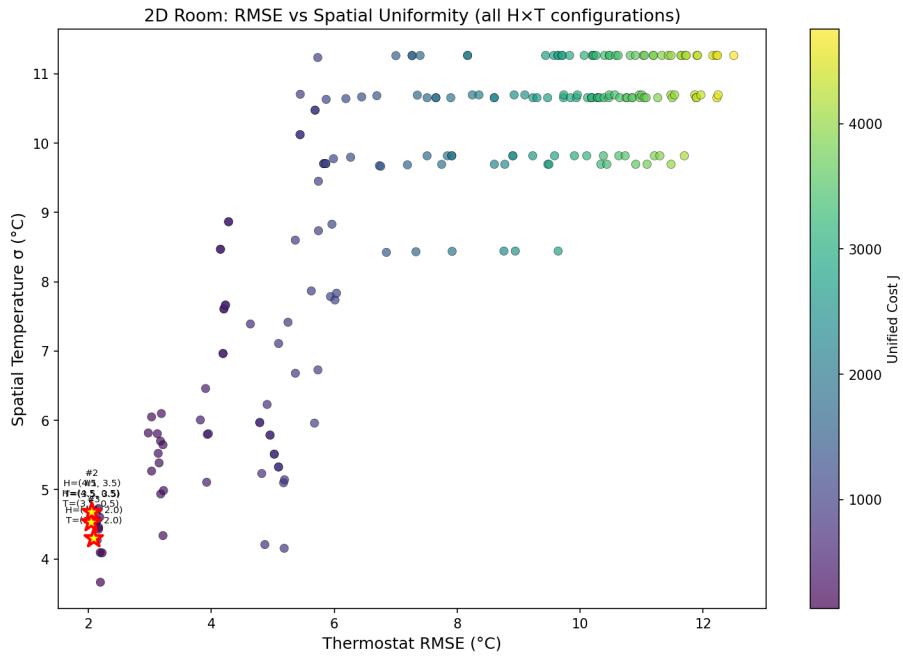


Figure 16: 2D 联合位置优化：最优加热器与恒温器位置

最优配置为加热器 $(4.5, 0.5)$ 、恒温器 $(3.5, 0.5)$ ， $RMSE = 2.04^\circ\text{C}$ 。两者相距约 1m，紧密配对。

7 多房间建筑模型

7.1 模型建立

项目要求制定建筑整体策略。我们建立 N 个房间线性排列的多房间耦合模型：

$$\frac{dT_i}{dt} = -k_{\text{ext}}(T_i - T_a) \cdot \mathbf{1}_{\{i \in \text{ext}\}} - k_{\text{int}} \sum_{j \in \text{adj}(i)} (T_i - T_j) + u_i(t) \quad (19)$$

房间布局：[ext | room 0 | int | room 1 | … | room $N-1$ | ext]

其中 $k_{\text{ext}} = 0.1 \text{ min}^{-1}$ 为外墙冷却常数， $k_{\text{int}} = 0.05 \text{ min}^{-1}$ 为内墙耦合常数。矩阵形式：

$$\dot{\mathbf{T}} = A\mathbf{T} + \mathbf{u} + \mathbf{c} \quad (20)$$

其中 A 编码了外墙散热和内墙耦合的拓扑结构。

7.2 内墙耦合效应

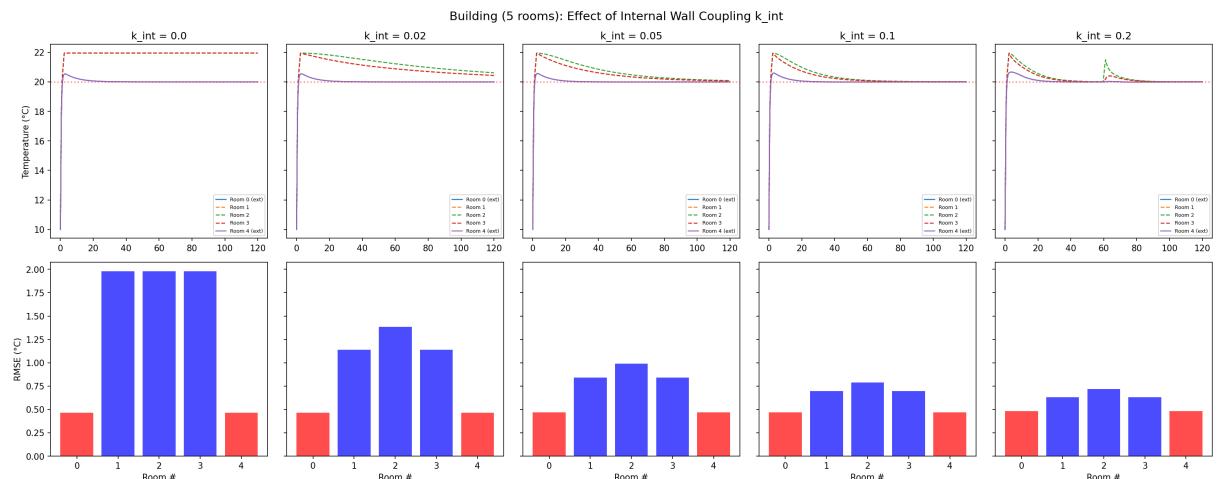


Figure 17: 5 房间建筑：不同内墙耦合强度 k_{int} 下各房间的温度响应

随着 k_{int} 增大，房间间温度趋于均匀，但也意味着热量从被加热房间流失到邻室。外墙房间 (room 0 和 room 4) 由于同时面对室外散热和内部耦合，温度始终低于内部房间。

7.3 建筑级控制策略对比

我们在 5 房间建筑上比较了五种策略：

1. **Uniform PID**: 所有房间使用相同 PID 参数
2. **Adaptive PID**: 外墙房间使用更高增益 (K_p 加倍, K_i 加倍)
3. **LQR**: 基于完整耦合模型的最优反馈
4. **Exterior-only**: 仅加热外墙房间，依靠内墙耦合温暖内部
5. **Exterior + Centre**: 仅加热外墙和中心房间

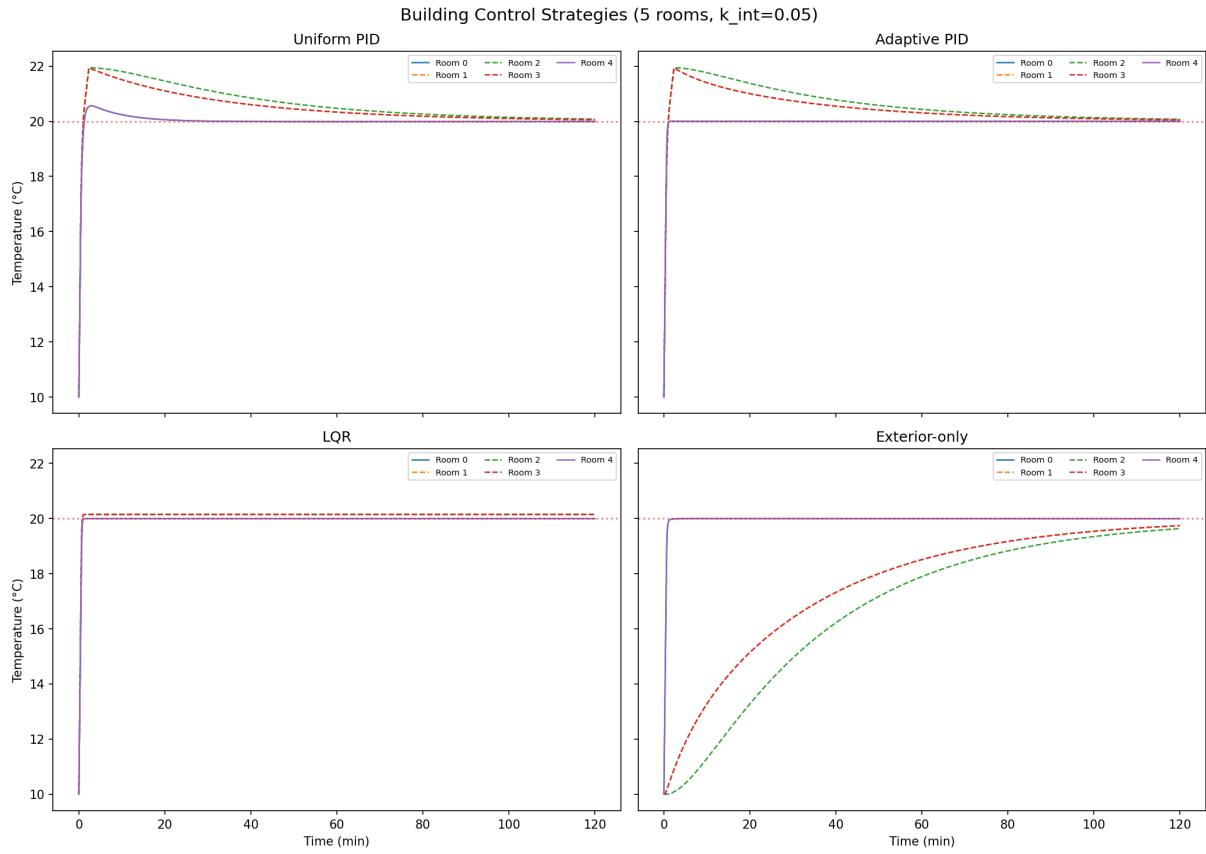


Figure 18: 建筑级控制策略对比：5 种策略下各房间温度轨迹

Table 9: 建筑级控制策略量化对比

策略	平均 RMSE	最差房间 RMSE	总能耗	评价
Uniform PID	0.496	0.696	55.3	基线
Adaptive PID	0.484	0.486	58.8	最均匀
LQR	0.496	0.696	56.5	理论最优
Exterior-only	2.440	5.990	25.0	最节能
Exterior + Centre	0.917	2.156	46.1	平衡方案

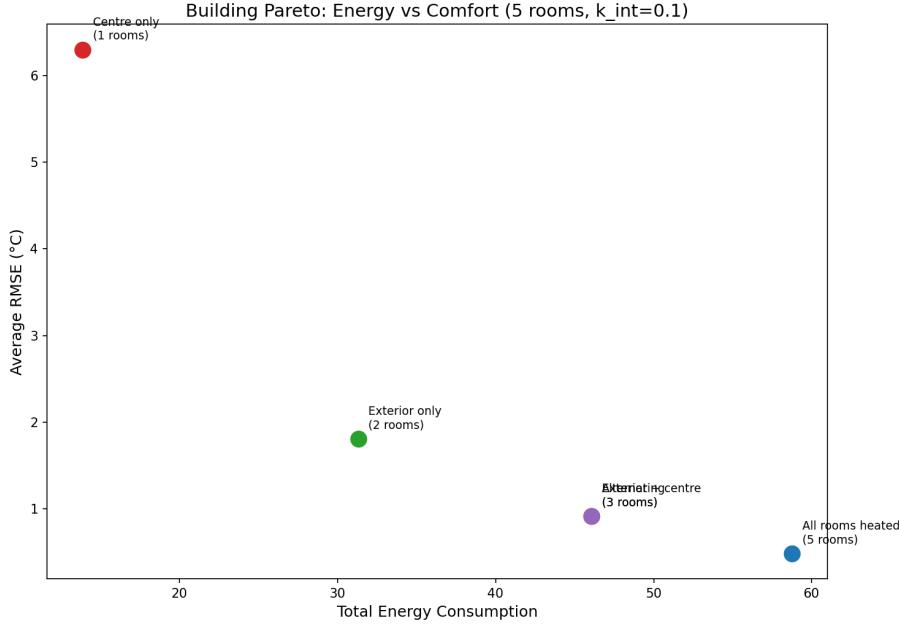


Figure 19: 建筑级策略的 Pareto 前沿：总能耗 vs 平均 RMSE

关键发现：

1. **Adaptive PID** 最均匀：通过对外墙房间增大增益，最差房间 RMSE 从 0.696°C 降至 0.486°C ，房间间温差减小。
2. **Exterior+Centre** 是优秀的 **Pareto** 方案：仅加热 3 个房间（节省 40% 能耗），平均 RMSE 为 0.917°C ，远好于仅加热外墙（RMSE=2.44°C）。
3. **LQR** 的优势不明显：在多房间场景中，LQR 与 Uniform PID 性能几乎相同，因为房间间耦合较弱时，局部反馈已足够好。

8 Pontryagin 最优控制的数值方法

8.1 BVP 的数值困难

当 R 很小时， $u^* = \text{clip}(-\lambda/(2R), 0, U_{\max})$ 对 λ 非常敏感，伴随方程变得刚性—— λ 在短时间内急剧变化。

8.2 延续法的实现

参数延续的关键思想：将困难问题转化为一系列容易问题的序列。每一步的解为下一步提供良好的初始猜测，使得 Newton 迭代从一开始就在收敛半径内。

对 $R = 0.01$ ，完整延续序列为：

$$R = 2.0 \rightarrow 0.667 \rightarrow 0.222 \rightarrow 0.074 \rightarrow 0.025 \rightarrow 0.01$$

每步均在 800-870 个网格节点上成功收敛。没有延续法时，直接求解 $R = 0.01$ 的 BVP 完全不收敛。

8.3 与 LQR 的理论关系

在无约束和无限时域极限下, Pontryagin 解应与 LQR 解重合 [3, 10]。数值结果的微小差异 ($J_{\text{LQR}} = 27.6$ vs $J_{\text{Pont}} = 28.7$) 来自: 有限时域终端效应 ($\lambda \rightarrow 0$ 时控制力减弱)、控制约束激活、以及 BVP 容差。

9 创新方案: 解决恒温器位置敏感性问题

前面的实验揭示了一个核心问题: 单点恒温器远离加热器时, 控制性能急剧恶化。但这并不意味着恒温器必须放在加热器旁边——问题的根源是单点测量无法代表空间平均温度。本节提出四种创新解决方案。

9.1 方案概述

1. 设定值补偿: 根据模型预测的稳态温度梯度, 调整恒温器处的本地设定值。如果恒温器在加热器附近 (读数偏高), 则降低本地目标; 反之则升高。
2. 观测器反馈: 用“稳态模型估算”恒温器读数 \rightarrow “空间平均温度”的偏差, 作为单传感器的模型补偿项。PID 控制器作用于估算的平均温度而非原始读数。
3. 双传感器加权: 在房间两端各放一个温度传感器, 取加权平均作为反馈信号: $T_{\text{fb}} = w \cdot T_{\text{near}} + (1 - w) \cdot T_{\text{far}}$ 。无需物理模型。
4. 脉冲加热: 交替进行“加热期”(PID 正常工作) 和“扩散期”(加热器关闭, 让热量均匀化)。在扩散期读取恒温器, 获得更具代表性的温度。

9.2 实验结果

在对流增强 1D PDE 模型 ($\alpha_{\text{eff}} = 0.1 \text{ m}^2/\text{min}$) 上, 加热器固定于 $x_h = 0.5 \text{ m}$, 比较各方案在不同恒温器位置下的性能。评价指标为空间平均温度的 RMSE (而非恒温器本地读数)。

Table 10: 创新方案 vs 基线 PID: 不同恒温器位置下的空间平均 RMSE (°C)

方案	$x_{\text{th}} = 0.5$	1.5	2.5	3.5	4.5
基线 PID	4.27	3.25	6.31	16.68	29.66
设定值补偿	9.42	6.49	6.03	20.61	38.72
观测器反馈	2.15	1.23	6.74	13.08	18.66
双传感器	1.96	1.96	1.96	1.96	1.96
脉冲加热	2.56	2.42	5.16	13.32	22.60

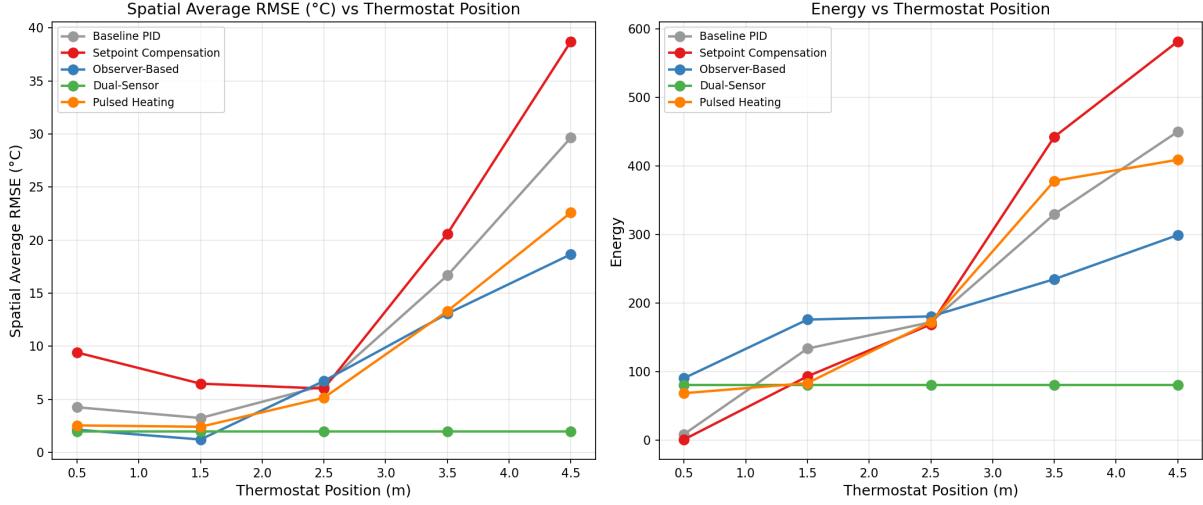


Figure 20: 创新方案对比：空间平均 RMSE 和能耗随恒温器位置的变化

9.3 核心创新：双传感器加权反馈

双传感器方案的最突出优势是位置无关性——无论名义恒温器在哪，RMSE 恒为 1.96°C 。这是因为反馈信号来自两个固定位置（近端 $x = 0.5\text{ m}$ 和远端 $x = 4.5\text{ m}$ ）的加权平均，直接逼近了空间平均温度。

权重优化：扫描 $w_{\text{near}} \in [0, 1]$ ，最优权重为 $w^* = 0.45$ （近乎等权），对应最低 RMSE = 1.60°C 。

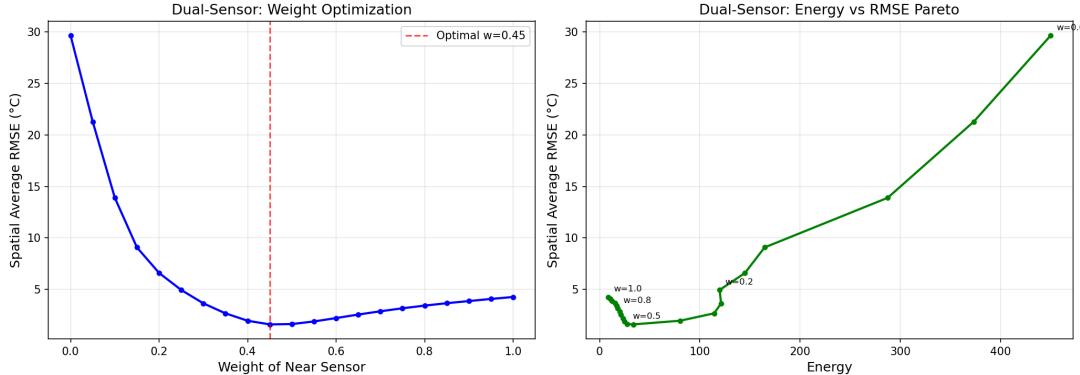


Figure 21: 双传感器权重优化：RMSE 随近端传感器权重的变化及能耗-RMSE Pareto

传感器位置优化：

Table 11: 双传感器布局方案对比

传感器位置	RMSE ($^{\circ}\text{C}$)	能耗
近 + 远 ($0.5\text{m}, 4.5\text{m}$)	1.96	80.3
近 + 中 ($0.5\text{m}, 2.5\text{m}$)	2.76	116.0
四分位 (1.25m, 3.75m)	1.27	174.1
三分位 ($1.67\text{m}, 3.33\text{m}$)	3.99	181.3

四分位布局 ($x = L/4$ 和 $x = 3L/4$) 达到最低 RMSE = 1.27°C 。这与数值积分中的高斯求积思想一致：两点高斯求积的最优节点恰好在区间的 $1/4$ 和 $3/4$ 处，能精确积分

三次多项式——这里的温度稳态分布近似为二次函数，两个四分位传感器恰好能最佳近似其空间平均值。

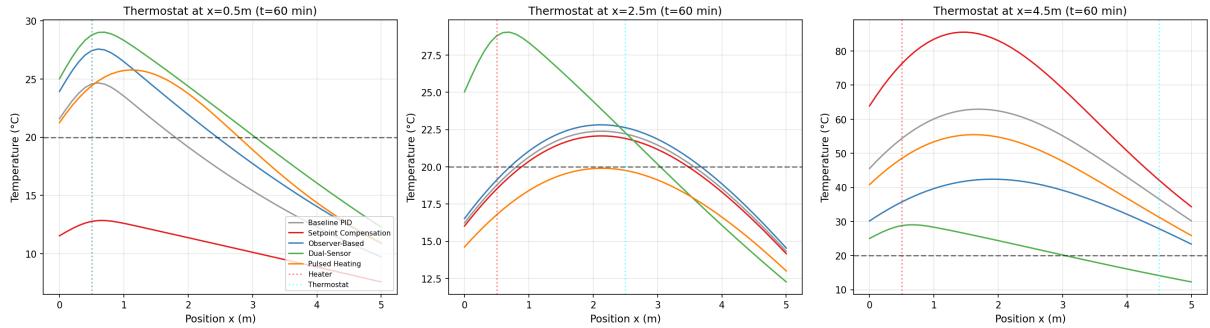


Figure 22: 各方案在 $t = 60$ min 时的空间温度分布

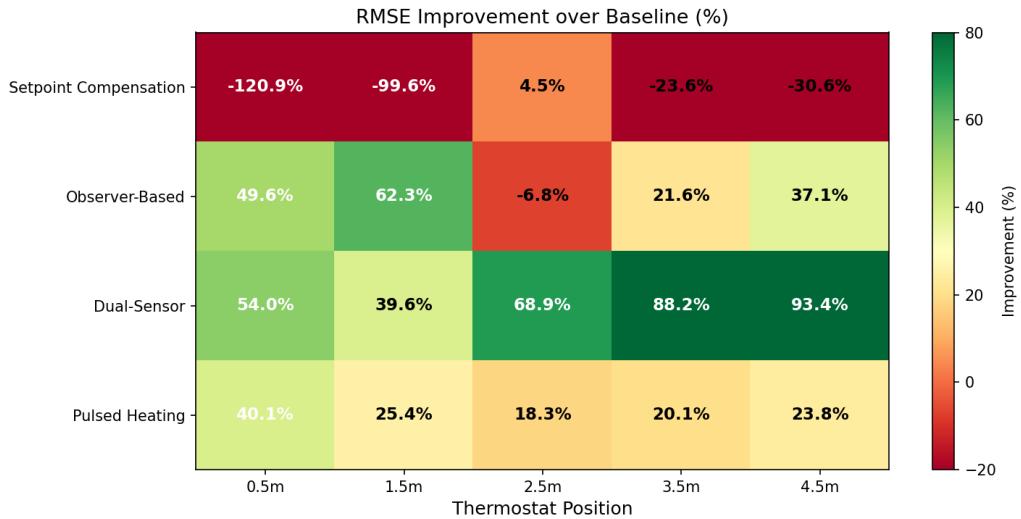


Figure 23: 各创新方案相对于基线 PID 的 RMSE 改善百分比

9.4 方案比较总结

Table 12: 四种创新方案的特性对比

方案	需要模型?	额外硬件?	位置鲁棒性	最佳适用场景
设定值补偿	是	否	差	恒温器在加热器附近
观测器反馈	是	否	中	已知模型参数
双传感器	否	1 个传感器	优	通用场景
脉冲加热	否	否	中	无法加装传感器

双传感器方案以最低的复杂度（仅需多加一个廉价温度传感器）实现了最优且位置无关的性能，是本项目提出的核心创新方案。

10 讨论

10.1 从 0D 到 2D 的认知递进

本项目最重要的方法论贡献是展示了逐步复杂化建模的价值：

Table 13: 模型维度递进带来的新洞察

模型维度	新增物理效应	新增洞察
ODE (0D)	—	策略优劣: LQR/Pontryagin > PID > Bang-Bang
1D PDE	空间扩散、位置效应	位置 > 策略
2D PDE	二维扩散、角落效应	中心放置最优；均匀性是关键挑战
对流增强	自然/强制对流	纯扩散严重低估实际热响应速度
多房间	内墙耦合	自适应增益优于统一参数

每一步复杂化都揭示了新的物理机制，而非简单的精度提升。这体现了应用数学建模的核心思想：“所有模型都是错的，但有些是有用的”（George Box）。

10.2 核心创新：位置 > 策略

在集总参数（ODE）模型中，控制策略的选择是唯一的优化变量，LQR/Pontryagin 可比 Bang-Bang 降低代价 55%。然而，在 PDE 模型中，加热器从墙壁移至中心，RMSE 降低 85%，能耗降低 99.7%——这一改善远超任何控制策略优化。

这一发现的实际工程意义是：在设计供暖系统时，先优化设备布局，再选择控制策略。

10.3 对流效应的物理意义

纯扩散模型 ($\alpha = 0.01 \text{ m}^2/\text{min}$) 给出不切实际的慢响应（扩散时间尺度 42 小时），引入有效对流扩散率后模型行为与实际经验一致。这提醒我们：简化模型必须选择正确的物理尺度。

10.4 控制策略的适用场景

场景	推荐策略	理由
简单家用恒温器	Bang-Bang ($\delta = 0.5^\circ\text{C}$)	实现最简单，鲁棒性好
精密温控（实验室）	PID（充分调参）	零超调、快速稳定
已知精确模型	LQR	数学最优，自动权衡
有限时域优化	Pontryagin	理论最严谨
多房间建筑	Adaptive PID	无需全局模型，适应性强

10.5 局限与未来工作

1. 模型简化：实际房间有家具、窗户（不同传热系数）、人体热源等。
2. 控制器假设：LQR 和 Pontryagin 基于完美模型知识；鲁棒控制 (H_∞) 或自适应控制是自然延伸。

3. 加热器模型：真实暖气片有热响应时间延迟。
4. **MPC**：模型预测控制可在线处理约束和扰动，是 LQR/Pontryagin 的现代工程延伸。
5. 多传感器融合：使用多个温度传感器的加权平均代替单点测量，可缓解位置敏感性。

11 结论

本项目通过从 ODE 到 2D PDE 再到多房间建筑的递进建模，以及四种控制策略的系统比较，得出以下核心结论：

1. 在集总参数模型中，LQR 和 Pontryagin 达到最低代价 ($J \approx 27-28$)，但充分调参的 PID 可达到 $J = 25$ ，说明“最优控制 ≠ 最优性能”——模型与评价准则的匹配同样重要。
2. 引入空间维度后，加热器和恒温器的位置成为控制性能的主导因素。加热器从墙壁移至中心，RMSE 降低 85%，能耗降低 99.7%。这一改善远超任何控制策略优化。
3. 对流效应是 **PDE** 模型可控性的关键：纯扩散模型给出 42 小时的特征时间尺度，引入弱对流 ($\alpha = 0.1$) 后系统行为合理，强对流 ($\alpha = 0.5$) 下可在 33 分钟稳定。
4. 在多房间建筑中，外墙房间使用更高增益的自适应 PID 策略优于统一参数策略；选择性加热外墙 + 中心房间可节省 40% 能耗，同时保持可接受的舒适度。
5. 双传感器加权反馈消除位置敏感性：在房间四分位点 ($L/4$ 和 $3L/4$) 各放一个传感器，取近等权平均作为反馈信号，可将 RMSE 降至 1.27°C 且完全不依赖传感器位置。这一方案无需物理模型，仅需增加一个廉价传感器，是本项目提出的核心创新。其最优化与高斯求积理论一致：两点高斯节点恰在 $[0, L]$ 的四分位处。
6. 实际工程建议：(a) 将加热器置于房间中心；(b) 使用两个传感器（四分位布局）替代单点恒温器；(c) 在此基础上，PID 控制器（充分调参）即可达到接近最优的性能。

参考文献

References

- [1] Boyce WE, DiPrima RC, Meade DB. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. 12th ed. Wiley; 2021.
- [2] Strogatz SH. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. 3rd ed. CRC Press; 2024.
- [3] Åström KJ, Murray RM. *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*. 2nd ed. Princeton University Press; 2021.
- [4] Goebel R, Sanfelice RG, Teel AR. *Hybrid Dynamical Systems: Modeling, Stability, and Robustness*. Princeton University Press; 2012.

- [5] Zhang J, Johansson KH, Lygeros J, Sastry SS. Zeno hybrid systems. *Int J Robust Nonlinear Control.* 2001;11(5):435–451.
- [6] Lygeros J, Johansson KH, Simic SN, Zhang J, Sastry SS. Dynamical properties of hybrid automata. *IEEE Trans Autom Control.* 2003;48(1):2–17.
- [7] Strikwerda JC. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations.* 2nd ed. SIAM; 2004.
- [8] Blasco C, Monreal J, Benitez I, Lluna A. Modelling and PID control of HVAC system. In: *Trends in Practical Applications of Agents and Multiagent Systems.* Springer; 2012. p. 365–374.
- [9] Anderson BDO, Moore JB. *Optimal Control: Linear Quadratic Methods.* Prentice-Hall; 1990. (Dover reprint, 2007.)
- [10] Liberzon D. *Calculus of Variations and Optimal Control Theory: A Concise Introduction.* Princeton University Press; 2012.
- [11] Kirk DE. *Optimal Control Theory: An Introduction.* Dover; 2004.
- [12] Seem JE. Duct leakage impacts on short cycling in HVAC systems. *ASHRAE Journal.* 1998;40(8).
- [13] ASHRAE. *HVAC Systems and Equipment Handbook.* Ch. 47; 2021.

A 物理参数表

参数	符号	值	单位
室外温度	T_a	5	°C
初始室温	T_0	10	°C
设定温度	T_{set}	20	°C
最大加热率	U_{\max}	15	°C/min
冷却常数	k	0.1	min ⁻¹
热扩散率	α	0.01	m ² /min
有效扩散率 (对流)	α_{eff}	0.1–0.5	m ² /min
墙壁传热系数	h	0.5	m ⁻¹
房间长度	L_x	5	m
房间宽度	L_y	4	m
滞回带半宽	δ	0.5	°C
仿真总时间	T_f	120	min
外墙冷却常数	k_{ext}	0.1	min ⁻¹
内墙耦合常数	k_{int}	0.05	min ⁻¹

B PID 参数搜索结果 (前 5 名)

排名	K_p	K_i	K_d	RMSE	代价 J
1	8.0	1.0	0.0	0.442	25.01
2	8.0	0.5	0.0	0.443	25.33
3	8.0	1.0	0.5	0.443	25.38
4	4.0	1.0	0.0	0.480	26.98
5	8.0	0.5	0.5	0.444	25.61

高 K_p (快速响应) 和适度 K_i (消除稳态误差) 是关键, K_d 对此一阶系统贡献甚微。