Project 2.

$T(t)$ 室内温度　　　k: 系数.

T_a 室外温度

$u(t)$ 供暖提供的

① 完全不考虑位置，只考虑时间　OD 情况.

By Newton's law of cooling

$$\frac{dT}{dt} = -k(T(t) - T_a) + u(t) = -kT + kT_a + u(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} + kT = kT_a + u(t) \quad , \text{ multiply by } e^{\int k\,dt} = e^{kt}$$

$$\Rightarrow e^{kt}\left(\frac{dT}{dt} + kT\right) = [kT_a + u(t)]\, e^{kt}$$

$$\Rightarrow \left[e^{kt} T(t)\right]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} (kT_a + u(t)) \cdot e^{kt}\, dt.$$

由于 $kT_a + u(t)$ 为常数.（单独开/关的段）

以下 u_t 和 $u(t)$ 是同个东西.

$$\Rightarrow \left[e^{kt} T(t)\right]_{t_0}^{t} = \frac{1}{k}(kT_a + u_t)(e^{kt} - e^{kt_0})$$

$$\Rightarrow e^{kt} T(t) = e^{kt_0} T(t_0) + \frac{1}{k}(kT_a + u(t))(e^{kt} - e^{kt_0})$$

$$\Rightarrow T(t) = e^{-k(t-t_0)} T(t_0) + \frac{1}{k}(kT_a + u_t)(1 - e^{-k(t-t_0)})$$

$$\Rightarrow T = e^{-k(t-t_0)} T(t_0) + \left(T_a + \frac{u_t}{k}\right)(1 - e^{-k(t-t_0)})$$

$$\Rightarrow T = e^{-k(t-t_0)}\left(T(t_0) - T_a - \frac{u_t}{k}\right) + T_a + \frac{u_t}{k}$$

所以 OD 解析解:

$$\boxed{T(t) = T_a + \frac{u_t}{k} + e^{-k(t-t_0)}\left(T(t_0) - T_a - \frac{u_t}{k}\right)}$$

分析：只要在单段时间 $u(t)$ 为常数则成立.

① 关机时 $u = 0$.

$$T_{关}(t) = T_a + (T(t_0) - T_a)\, e^{-k(t-t_0)}$$

→ 合理，温度衰减至 T_a（室外温度）.

② 开机时 $u = U_{max}$.

$$T_{开}(t) = T_a + \frac{U_{max}}{k} + \left(T(t_0) - T_a - \frac{U_{max}}{k}\right) e^{-k(t-t_0)}$$

⇒ 温度指数级上升.

接下来我们尝试计算 OD 情况下升温时间/周期/能耗/开关次数 等

我们现在有开/关两段表达式. 我们假设从 $T_{set} - 6$ 和 $T_{set} + 6$ 分别开始. 也就是 $T(t_0)$ 分别等于这俩.

设定温度 T_{set}.

① 升温时间: $T_{set} = T_a + \frac{U_{max}}{k} + \left(T_{set} - 6 - T_a - \frac{U_{max}}{k}\right) e^{-kt}$

$$\Rightarrow T_{set} - \left(T_a + \frac{U_{max}}{k}\right) = \left(T_{set} - 6 - T_a - \frac{U_{max}}{k}\right) e^{-kt}$$

$$\Rightarrow e^{-kt} = \frac{T_{set} - (T_a + \frac{U_{max}}{k})}{T_{set} - \sigma - (T_a + \frac{U_{max}}{k})}$$

$$\boxed{\Rightarrow t_{开} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{T_{set} - \sigma - (T_a + \frac{U_{max}}{k})}{T_{set} - (T_a + \frac{U_{max}}{k})} \right)}$$

同理，关机段降温时间

$$\boxed{t_{关} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{T_{set} + \sigma - T_a}{T_{set} - T_a} \right)}$$

因为 $u(t) = 0$.

注意!! 这里由于 $\sigma \to 0$. 时间 $t_{开}$ 与 $t_{关}$ 都 $\longrightarrow \ln(1) = 0$. Zeno 现象出现!

解决方法：换一个较宽的温度范围 $T_{set} + \sigma \longrightarrow T_H$，$T_{set} - \sigma \longrightarrow T_L$，从 T_L 加温到 T_H，T_H 降温到 T_L.

则 $t_{开} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{T_L - (T_a + \frac{U_{max}}{k})}{T_H - (T_a + \frac{U_{max}}{k})} \right)$

$t_{关} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{T_H - T_a}{T_L - T_a} \right)$

升/降温时间

相关推断

于是我们可立刻得到周期，开关次数，能耗

周期 $P = t_{开} + t_{关}$

开关次数：$\frac{2}{P} \times$ 总时长（每周期 开→关，关→开，2次事件）.

能耗：$E = \int_0^P u(t)\,dt = U_{max} \cdot t_{开}$（因为关时无能耗）

若每次开关消耗能量 e，总能耗

$E_{总} =$ 开关次数 $\times e + E$

接下来讨论 1D 情况.