# 图的连通性

**Definition 1.1** 块：无割点的连通图。则至少有三个顶点的图是块当且仅当它是 2-连通图。

图的连通性是图的一种重要性质，他实际上能够去刻画图中的圈的个数，以及任意两点之间的道路个数，这也是 Whitney 和 Menger 做的事情。虽然在不加证明下，这样的结论似乎不会太难，但实际上证明却很繁琐。最后我们换个观点，从优化的角度来看一看这个问题。

**Theorem 1.2 (Whitney)** $\nu \geq 3$ 的图 $G$ 是2-连通图当且仅当 $G$ 中任二顶点共圈（任两顶点存在至少两条无公共顶点的路）。

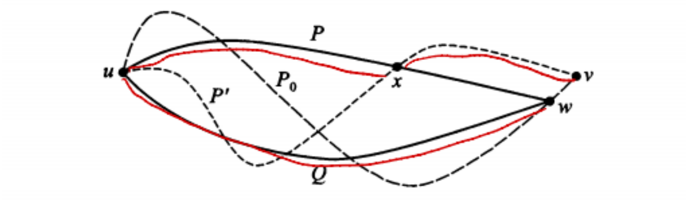
**Rmk 1.3** 出于对 Whitney 的这个名字的好奇，我搜了一下。发现他和流形中那个做任意 $n$ 维微分流形都能以 $C^r$ 嵌入到 $R^{2n+1}$ 的 Whitney Theorem 是一个人。图的一些研究成果是他早年的结论。

**Pf of Theorem 1.2**

**Sufficiency** 显然。

**Necessity** 对任意的 $u, v \in V$， 下面证明 $u, v$ 在同一个圈上。对 $d(u,v)$ 归纳。当 $d(u,v)=1$ 时，$\kappa' \geq \kappa \geq 2$ 有 $G-uv$ 连通。找道路 $P$，圈即为 $u-P-v$。

对 $d(u,v)<k$ 时假设成立，对 $d(u,v)=k$ 时。记 $P_0 = u \dots wv$ 是一条长度为 $k$ 的路。因为 $uw$ 在同一条圈上，存在路 $P, Q$ 连接 $uw$ 且无公共内部顶点。




$G-w$ 连通，则存在 $u-P'-v$，记 $x$ 为 $P'$ 上最后一个与 $P \cup Q$ 的公共顶点，不妨 $x \in P$，则有圈

$$u \overset{P}{—} x \overset{P'}{——} v - w \overset{Q}{—} u$$

**Theorem 1.4** 设 $G$ 是 $\nu \geq 3$ 的连通图，则下列命题等价。

(1) $G$ 是2-连通的；

(2) $G$ 的任两顶点共圈；

(3) $G$ 的任一顶点与任一边共圈；

(4) $G$ 的任二边共圈；

(5) 对 $\forall u,v\in V$，$\forall e\in E$，存在 $e$ 在 $uv$ 中。

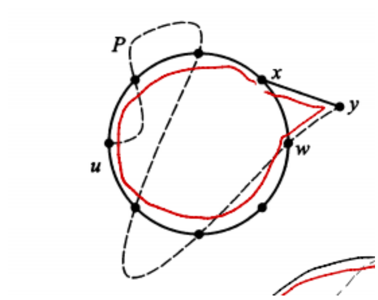
(6) 对 $\forall u,v,w\in V$，存在 $(u,v)$ 路含有顶点 $w$。

(7) 对 $\forall u,v,w\in V$，存在 $(u,v)$ 路不含有顶点 $w$。

**Pf of Theorem 1.4**

(1) $\Leftrightarrow$ (2) (Whitney Thm)

(2) $\Rightarrow$ (3) 顶点 $u$，边 $xy$，只需要验证 $u\neq x,y$。记 $u,x$ 形成的圈为 $C$，只需要考虑 $y\notin C$ 的情况。$G-x$ 连通，故存在 $uy$ 路 $P$ 不含 $x$，记 $w$ 为 $P$ 上从 $y$ 出发第一个与 $C$ 公共的顶点，




则圈为

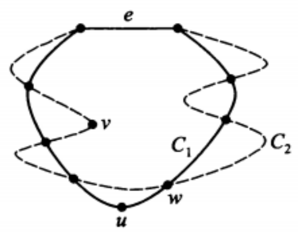
$$u\overset{C}{—}x-y\overset{P}{—}w\overset{C}{—}u$$

(3) $\Rightarrow$ (4) 边 $uv,xy$，则由 (3) $u$，$xy$ 共圈，记为 $C_1$，同样的 $v,xy$ 共圈，记为 $C_2$。记 路$v\overset{P}{—}y$，中与 $C_1$ 从 $v$ 出发交的最近的一个点为 $z$, 不妨 $z$ 在路 $u\overset{Q}{—}y$ 中，

则圈为

$$u-v\overset{P}{—}z\overset{C_1}{——}y-x\overset{C_1}{——}u$$

(4) $\Rightarrow$ (5) 只要证， $u,v$ 不是 $e$ 的端点。任两边共圈显然任二点共圈，故由 (2) $\Rightarrow$ (3) 知道 $u,e;v,e$ 分别共圈，设为 $C_1,C_2$，只要证 $u\notin C_2$，$v\notin C_1$。记从 $u$ 出发沿 $C_1$ 到达的第一个 $C_1$ 与 $C_2$ 的公共顶点 $w$，



则圈为

$$u \overset{C_1}{\text{——}} w \overset{C_2}{\text{——}} e \overset{C_2}{\text{——}} v$$

(5) ⇒ (6) 显然

(6) ⇒ (7) $u, v, w \in V$，则存在 $(u, w)$ 路 $P$ 含有顶点 $v$，则 $P$ 的 $(u, v)$ 段不含有 $w$

(7) ⇒ (1) 任意的点 $w \in V$ 不是割点。

**Introduction 2.1** 实际上 Whitney 定理告诉我们对2-连通性的图 $G$ 而言，“分离” $G$ 中两点所需删除的最少顶点数和这两点间内部无公共顶点的路的最大条数要么都大于等于 $2$，要么都超过 $2$，事实上对任意的k-连通图，这两种连通度量也是对的。

**Definition 2.2**

令 $x, y \in V(G)$，则

(1) $(x, y)$ 的分离集为一组顶点，当 $G$ 删去它们后， 不再有路 $(x, y)$

(2) $(x, y)$ 的最小分离集，即含点数最小的 $(x, y)$ 的分离集，其顶点数称为分离数，记为 $s(x, y)$

(3) $r(x, y)$ 记为 $G$ 中两两内部无公共顶点的 $(x, y)$ 路的最大条数。

**Theorem 2.3 (menger点形式)** 设 $x, y$ 是 $G$ 中两个不相邻的顶点，则 $s(x, y) = r(x, y)$

**Corollary 2.4** $\nu \geq k + 1$ 的图 $G$ 是k-连通图当且仅当 $G$ 中任二顶点至少被 $k$ 条两两内部无公共顶点的路所连。

**Remark 2.4.1** 有的时候，Corollary 2.4 也被称为 menger theorem

**Pf of Theorem 2.3**

$s(x, y) \geq r(x, y)$ 显然。我们只需要考虑 $s(x, y) \leq r(x, y)$。

反证：设 $x, y \in V(G)$ 不相邻，且 $s(x, y) > r(x, y)$，并设 $G$ 为具有这种性质的所有图中顶点数最少并且变数最少的一个。下面证明 $G$ 有以下四条性质。

(1) $s(x, y) > 1$ 否则话 $1 = s(x, y) > r(x, y) \geq 0$ 推到 $r(x, y) = 0$ 与连通性矛盾

(2) 对 $G$ 的任二异于 $x, y$ 的相邻顶点 $u, v$，存在 $G$ 的顶点子集 $U$，满足 $|U| = s(x, y) - 1$，且 $U \cup \{u\}, U \cup \{v\}$ 都是 $G$ 的 $(x, y)$ 分离集。

事实上，记 $e = uv, H = G - e$，则

$$s_H(x, y) \geq s(x, y) - 1$$

于是

$$r_H(x, y) \leq r(x, y) \leq s(x, y) - 1$$

由 $G$ 的极小性，

$$s_H(x, y) = r_H(x, y) \leq s(x, y) - 1 \leq s_H(x, y)$$

即 $s_H(x,y)=s(x,y)-1$。设 $U$ 为 $H$ 的一个最小$(x,y)$ 分离集，则显然 $U\cup\{u\},U\cup\{v\}$ 都是 $G$ 的 $(x,y)$ 分离集。

(3) 记 $N_G(x)$ 为 $x$ 在 $G$ 中的邻点集，则 $N_G(x)\cap N_G(y)=\emptyset$

记 $H=G-u$， $u\in N_G(x)\cap N_G(y)$，类似 (2)，我们有 $s_H(x,y)=s(x,y)-1=r_H(x,y)$

，于是这些路加上 $x-u-y$ 构成了 $s(x,y)$ 条不同的路，矛盾

(4) 记 $k=s(x,y)$。若 $W=\{w_1,...,w_k\}$ 为 $G$ 的一个最小 $(x,y)$ 分离集，则 $W\subset N_G(x)$ 或者 $W\subset N_G(y)$

事实上，记 $G_x,G_y$ 分别为 $G-W$ 中x $x,y$ 的连通分支， $G_1$ 为 $V(G_x)\cup W$ 在 $G$ 中导出的子图， $G_2$ 类似。则 $V(G_1)\cap V(G_2)=W$，$\nu(G_1)\geq k+1$，$\nu(G_2)\geq k+1$。于是我们有，若

$$\nu(G_1)=k+1$$

则 $x$ 与 $W$ 的每个点都相邻。$x$ 与 $V(G)-W-\{x\}$ 不相邻。

所以我们只需要证明 $\nu(G_1)$ 和 $\nu(G_2)$ 不可能都 $>k+1$。否则在 $G_1$ 中添加一个新的顶点 $v^*$，并与 $W$ 中的每一个顶点都连一个新边。记新图为 $G_1^*$，显然关于 $(x,v^*)$ $G_1^*$ 的分离集也是 $G$ 的分离集。于是 $s_G^*(x,v^*)=k$，再由 $G$ 的极小性，$G_1^*$ 中有 $k$ 条两两内部无公共顶点的 $(x,v^*)$ 路，于是显然这 $k$ 条路可以从 $x$ 出发连接到 $W$，同理 $y$ 也是，这就意味着 $s_G(x,y)=r_G(x,y)$ 矛盾。这样就完成的 (4) 的证明

下面回到 Menger 定理证明

取 $P$ 为 $G$ 中的一条最短的 $(x,y)$ 路，则由 (3)，$P$ 的长度至少为 3，令 $P=xv_1v_2,...,v_ty$。于是由 (2)， 存在 $U\subset V(G)$， $|U|=s(x,y)-1$，且 $U\cup\{v_1\}$ 和 $U\cup\{v_2\}$ 是 $G$ 的 $(x,y)$ 最小分离集。由 (1)，$s(x,y)>1$，所以 $|U|\neq 0$，由 (4) $U\cup\{v_1\}\subset N_G(x)$ 或者 $N_G(y)$，但是 $xv_1\in E(G)$，推到 $U\cup\{v_1\}\subset N_G(x)$，且特别的 $U\subset N_G(x)$，于是 $U\cup\{v_2\}\subset N_G(x)$，与最短路矛盾！

**Pf of Corollary 2.4**

**Necessity:** 反证，若 $G$ 是k-连通，$x,y$ 之间两两内部无公共顶点的路最多只有 $m$ 条，$m<k$。

(1) 若 $xy\notin E$，$\kappa(G)\leq s(x,y)=m<k$ 与 k-连通矛盾。

(2) 若 $xy\in E$，则 $H=G-xy$ 中两两内部无公共顶点的 $(x,y)$ 路最多只有 $m-1<k-1$ 条，由 menger定理 $\kappa(G-xy)\leq s_H(x,y)=m-1<k-1$，于是存在 $G-xy$ 的一个顶点子集 $U$ 使得 $|U|\leq k-2$ 且 $G-xy-U$ 不连通，故 $G-(U\cup\{x\})$ 或者 $G-(U\cup\{y\})$ 至少有一个是不连通图，矛盾。

**Sufficiency:** 反证显然

**Theorem 2.5 (menger边形式)** 设 $x,y$ 是 $G$ 中两个不相邻的顶点，则 $s'(x,y)=r'(x,y)$

其中 $s'(x,y)$ 为分离 $x,y$ 所需要的最少边， $r'(x,y)$ 为两两无公共边的 $(x,y)$ 的最大条数。

**Corollary 2.6** 图 $G$ 是 k-边连通图当且仅当 $G$ 中任二顶点至少被 $k$ 条两两无公共边的路所连。

**Introduction 3.1 (max flow and minimum cut)** Menger Theorem 给出了描述图的连通度的两个数的最小和最大是相当的。实际上这很容易让人联想到规划中的对偶问题。本结中，我们给出一个类似与menger定理，不过是对有向图的最大流和最小割定理，然后阐述它和线性规划的关系，最后来试着重新证明 menger 定理。

**Definition 3.2 (Linear Programming)** 对下面的问题 (P) 我们说是一个标准的线性规划问题

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ s.t \quad &Ax = b, x \geq 0 \end{aligned}$$

和该问题相关的一个问题，我们称为一个对偶问题 (DP)

$$\begin{aligned} &\max b^T \lambda \\ s.t \quad &A^T \lambda \leq c \end{aligned}$$

对于一个一般的线性规划问题，它的对偶问题实际上是它的 Lagrange 函数的 KKT 条件导出的结果。而KKT 条件，在无约束情况时，实际上就是，若 $f: X \to \mathbb{R}$，$X$ 为任意的赋范线性空间，且 $f$ 在 $X$ 中有Frechet 导数 $\partial f$，则对任意的极小值点 $x^*$， 我们有 $\partial f(x^*) = 0$，但是对于次一点的光滑性，比如凸函数的次导数，以及加上约束条件，比如 $g(x) \in K$ 之后， KKT 条件要复杂的多。

我们说，对于一般的线性规划问题，如果有解，上面两个问题的结果是一样的即强对偶性原理

**Theorem 3.3 (strong duality)**

(1) 如果 (P) 和 (DP) 中有一个问题有解，则两个都有解，且解值相等。

(2) 如果 (P) 和 (DP) 中有一个解无界，则另一个问题是不可达的。

**Definition 3.4 (max flow and minimum cut)**

定义这样一个图 $G$，它是有向图，且边有权重，有 source 节点和 sink 节点。

割：把节点分成两部分 $(S,T)$，并且 $s$ 位于 $S$ 中， $t$ 位于 $T$ 中。

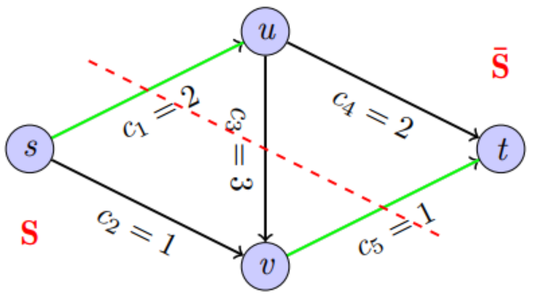
Capacity(S,T)：离开 $s$ 的边的权重之和。

最小割: 找到一个最小的 capacity 的 $(S,T)$ cut

最大流: 找到到达 sink 节点 $t$ 的最大化净流量

**Definition ($s-t$ cut)**

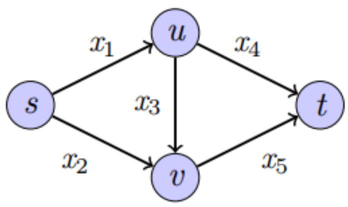
An **$s-t$ cut** is a partition $(S, \bar{S})$ of $V$ such that $s \in S$ and $t \in \bar{S}$.
The **capacity of a cut** $(S, \bar{S})$ is defined as
$C(S, \bar{S}) = \sum_{e \text{ from } S \text{ to } \bar{S}} C(e)$.




$$C(S, \bar{S}) = 3$$

**Theorem 3.4 (max flow and minimum cut)** 最大流等于最小割。

事实上这样的一个问题可以表示成线性规划问题。




DUAL: set variables for edges. Here $x_i$ denotes *flow* via edge $i$.

$$
\begin{array}{lrrrrrrl}
\max & & & & & & f & \\
s.t. & x_1 & +x_2 & & & & -f & = 0 \text{ vertex } s \\
 & & & & -x_4 & -x_5 & +f & = 0 \text{ vertex } t \\
 & -x_1 & & +x_3 & +x_4 & & & = 0 \text{ vertex } u \\
 & & -x_2 & -x_3 & & +x_5 & & = 0 \text{ vertex } v \\
 & x_1 & & & & & & \le C_1 \\
 & & x_2 & & & & & \le C_2 \\
 & & & x_3 & & & & \le C_3 \\
 & & & & x_4 & & & \le C_4 \\
 & & & & & x_5 & & \le C_5 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & & \ge 0
\end{array}
$$

而他的对偶问题为

PRIMAL: set variables for nodes.

$$
\begin{array}{llllllllllll}
\min & & & & & C_1 z_1 & +C_2 z_2 & +C_3 z_3 & +C_4 z_4 & +C_5 z_5 & \\
s.t. & y_s & & -y_u & & +z_1 & & & & & \geq 0 \\
 & y_s & & & -y_v & & +z_2 & & & & \geq 0 \\
 & & & y_u & -y_v & & & +z_3 & & & \geq 0 \\
 & & -y_t & +y_u & & & & & +z_4 & & \geq 0 \\
 & & -y_t & & +y_v & & & & & +z_5 & \geq 0 \\
 & -y_s & +y_t & & & & & & & & \geq 1 \\
 & y_s, & y_t, & y_u, & y_v, & z_1, & z_2, & z_3, & z_4, & z_5 & \geq 0
\end{array}
$$

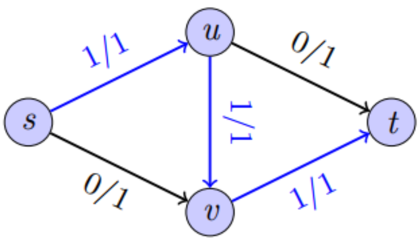
Note:

1. Since the constraints involves the difference among $y_s$, $y_u$, $y_v$ and $y_t$, one of them can be fixed without effects. Here, we fix $y_s = 0$. Thus we have $y_t \geq 1$ (by the constraint $-y_s + y_t \geq 1$).
2. Constraint (4) requires $z_4 \geq y_t - y_u$, and the objective is to minimize a function containing $C_4 z_4$, forcing $y_t = 1$.
3. Constraint (1) requires $z_1 \geq y_u$, and the objective is to minimize a function containing $C_1 z_1$, forcing $z_1 = y_u$. So does constraint (2).

如果有强对偶性，这两个问题就是等价的，这样相当于证明了最大流和最小割问题。

**Observation 3.5**

如果我们把这里的道路的权重改为 $0$ 或者 $1$，并且每个节点容量上限就为 $$，比如




Flow $f$

那么原问题就相当于一个 0-1 整数规划问题，类似的它也是一样的有强对偶性。那么我们想要取证明 Menger定理(边形式)，。然后我们对图 $G$ 附上向，共有 $2^{|\nu|-1}$ 种有向图，对每一个这样的图 $i \in I$, 最大流实际上就是一共有多少条 $s,t$ 的路，而对偶问题的结果实际上就是该顶点要不要删掉，于是有对偶条件，对每个 $i$，我们都有 $s_i = r_i$，而容易看到 $r_G(s,t) = \max r_i = \max s_i = s_G(s,t)$