本文旨在对形变理论 (deformation theory) 做一个有限的也可能流于表面的介绍，它最终的目的是要引入导出形变理论 (derived deformation theory)，那也是下一篇文章的主题，而这篇文章将结束于 DGLA。我希望这篇文章能够让更多人对形变理论产生兴趣。由于我还只是初学者，文章中可能会出现一些错误，希望读者能指出。

Deformation Theory

想要介绍导出形变理论那我们就必须得先从形变理论出发，虽然我们下面主要是关注代数几何里面的形变理论，但是为了更加直观，更加地突显动机，我们打算从“平面几何”开始讲起。就历史背景而言，现代的形变理论研究基本是起源于 Kodaira 跟 Spencer 他们对紧复流形形变的研究，之后才是 Grothendieck 引入了 formal geometry 的概念，但我们这里并不打算对初始的复流形形变展开非常细致的讨论，因为它所使用的技术跟代数几何的差别巨大。

Moduli Space of Triangles

研究形变理论很大的一个目的就是为了研究模空间 (moduli space) 的局部性质，因此我们首先介绍一下 moduli problem，而下面我们主要以三角形为例子，具体的细节可以参考这篇文章 *The Geometry of Triangles*.

moduli problem 主要是为了分类一簇我们感兴趣的对象，比如三角形，向量空间，曲线等等，在这里我们把它定义为一个函子 $\mathcal{M} : \mathbf{Top}^{op} \to \mathbf{Sets}$，对于一个拓扑空间 X, $\mathcal{M}(X)$ 就代表被那些被 X 参数化的你所感兴趣的对象簇。以三角形为例，一个在 X 之上的连续三角形簇被定义为一个 fiber bundle $p : \mathcal{F} \to X$，满足一定的度量性质，使得 $p^{-1}(x)$ 跟一个三角形等距同构。 这里我们让 $\mathcal{M}(X)$ 代表所有这样的三角形连续簇 up to isomorphism。注意这里的“isomorphism”是一个非常精细的概念，在三角形的问题里面有两种同构，一种可以诱导出 fine moduli space，另一种仅仅拥有 coarse moduli space，具体的可以参考上面那篇文章的第二节内容。$\mathcal{M}$ 的 fine moduli space M 表示的这样唯一的拓扑空间使得 $\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(-, M)$. 在这里这个 fine moduli space 是由三个不等式 $x+y>z$ 所定义的 open cone.

在这里形变理论有何作用？其实这里的形变理论是平凡的，而且模空间M的性质我们都是熟悉的，因为它就是一个 $\mathbb{R}^3$ 上的一个 open cone，因此这里的形变理论是没什么特殊意义的。比如我们考虑空间 $\{1,2\}$，给定一个三角形 T over 单点的空间 $*$，那么有多少的连续三角形簇 $p: \mathcal{F} \to \{1,2\}$ 作为 T 的形变？这个意思是说对于映射 $* \to \{1,2\}, * \mapsto 1$，有多少 $\mathcal{F}$，它的 pullback 等距同构于 T. 这个问题的答案随着 $\{1,2\}$ 上面的拓扑不一样而不同。如果 $\{1,2\}$ 带着离散的拓扑，那么 $p^{-1}(1)=T$ 而 $p^{-1}(2)$ 可以是任意的三角形。 而假如 $\{1,2\}$ 是 Sierpinski space 记为 S，即里面的开集只有 $\emptyset, \{1\}, \{1,2\}$. 同样 $p^{-1}(1)=T$，我们主要关心 $p^{-1}(2)$。因为 $p: \mathcal{F} \to \{1,2\}$ 是一个 fiber bundle，2 的开邻域只有 S本身，因此 $\mathcal{F} \approx S \times T$，两者的拓扑结构相同。并且给 $\mathcal{F}$ 的每一个三角形 fiber 标上号，或者说标上边长 x, y, z，至少存在一簇标号使得诱导出来的三个度量函数 $x, y, x: S \to \mathbb{R}$ 是连续的。但是由于 $\mathbb{R}$ 是 Hausdorff 的，因此 $x(1)=x(2)$. 这意味着 $p^{-1}(2)=T$。对于空间 S 而言，三角形 T 的形变是平凡的，即 $\mathcal{F} \cong S \times T$。这样的对象 T 被称为是**刚性的** (rigid).

因为 M 是一个 fine moduli space，以上的讨论证明了只存在唯一的连续函数 $S \to M$ 使得 $1 \mapsto T$，即把 1 映射入 T 代表的那个点上。这就意味着 M 的分离性质是比较好的，因为如果有两个这样的映射，M 就绝对不可能是 Hausdorff 的。于是上面的就三角形在 S 上的形变理论的讨论可以帮助我们了解 M 在 T 点周围的局部性质 (分离性质)。这里大家应该就明白了为什么我说三角形的形变理论是平凡且没必要的了，我们对 M 的理解根本不需要通过形变理论这种比较柔软的手段。这在代数几何里面非常非常重要，下面我们解释这种重要性。

Deformation Theory in Algebraic Geometry

在代数几何里面大多数的 moduli problem 并不存在一个作为概型的 fine moduli space，即使存在了我们也非常难以直接地去描述它的性质，这个概型具体长什么样我们“看不到”，最经典的例子就是 Hilbert scheme了，这时候我们就需要利用形变理论来研究 fine moduli space 的局部性质了。而且不同于上面我们说的拓扑空间上的例子，在代数几何里面很多概型他们虽然都具有单点的点集结构，即很多交换环只有一个素理想，但是这些概型确实是不同的，比如域 $\mathrm{Spec}\ k$，local Artin ring $\mathrm{Spec}\ A$ 它们都只有一个点，这给形变理论提供了很大的操作空间，即我们没必要把点集结构向上面那样从 $*$ 扩大到 $\{1,2\}$ ，对 $*$ 本身的研究就已经足够了，因为我们主要考虑的是 fine moduli space 的局部性质，因此我们要尽量让态射往一个点上靠拢，而且扩大点集结构的形变研究在一般情况下是非常复杂的，这就是为什么在代数几何的形变理论里面我们一般把讨论限制在 local Artin ring 上的情况，或者是 square zero thickening 即 $\mathrm{Spec} R/I \to \mathrm{Spec}\ R$ with $I^2=0$ 这类的一阶形变。

Hilbert Scheme

下面我们以 Hilbert scheme 讨论形变理论的作用。假设 $X=\mathbb{P}_k^n$，方便起见 k 是代数闭域，我们的目的是分类 X 上的闭子概型。对应的 moduli problem $\mathcal{H}:\mathbf{Sch}_k\to\mathbf{Sets}$，$\mathcal{H}(\mathrm{Spec}\ k)$ 应该是包含 X 上所有闭子概型的集合。对于任意的一个概型 S，一个被它参数化的 X 上闭子概型的连续簇被定义为是一个闭子概型 $Y\subseteq X\times_k S$，通过 $pr_2:X\times_k S\to S$, Y is flat over S。它同时还满足对任何的 $s\in S$, 通过 $\mathrm{Spec}\ k(s)\to S$, fiber $Y_s=Y\times_S k(s)$ 为 X 上的一个闭子概型。这里对 flat 的要求就像在我们上面讨论三角形时要求 fiber bundle $\mathcal{F}$ 得是连续的，这里 flatness 充当连续的替代品，因为在代数几何里面 moduli functor 在 morphism 上的作用一般都是 pullback (base change)，这在环层面就是张量，flat 可以保证很好的正合性质。

$\mathcal{H}(S)$ 代表所有被 S 参数化的连续的闭子概型簇 up to isomorphism。Grothendieck 证明了 $\mathcal{H}$ 是可表的，即存在一个 fine moduli space H 以及一个 universal family $W\to H$[1]. 这个 Hilbert scheme H 是非常难以描述的，但是利用形变理论我们可以知道一些它的局部性质[2].

我们知道如果概型 Y over k, 那么它的 Zariski tangent space at y 恰好就是所有的态射 $\mathrm{Spec}\ k[t]/t^2\to Y,\ *\mapsto y$. 这里把 Y 替换成是 Hilbert scheme H，那么点 $y\in H$ 代表的是 X 上的一个闭子概型，我们把这个闭子概型记为 Y。于是 Hilbert scheme 在 y 点处的 Zariski tangent space 就是 Y 所有的一阶形变，即闭子概型连续簇 $\mathcal{F}\to\mathrm{Spec}\ k[t]/t^2$ 满足通过 $\mathrm{Spec}\ k\to\mathrm{Spec}\ k[t]/t^2$，其 fiber (pullback) $\mathcal{F}\times_{k[t]/t^2}k$ 同构于 Y。对一阶形变的详细研究可以证明所有的一阶形变等价于集合 $\mathrm{Hom}_Y(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2,\mathcal{O}_Y)$[3]，这里 $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{O}_X$ 表示 Y 对应的 quasi-coherent idea. 于是我们便可以知道在 y 附近 H 的信息。假如更近一步，我们假设 Y 是一个 *locally complete intersection* 且 $H^1(Y,\mathcal{H}om_Y(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2,\mathcal{O}_Y))=0$，那么 H 在点 y 处非奇异 (non-singular)，维度为 $\dim_k\mathrm{Hom}_Y(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2,\mathcal{O}_Y)$. 以下对于闭子概型 $Y\subseteq X$, 用 $\mathcal{N}_{Y/X}$ 来表示 $\mathrm{Hom}_Y(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2,\mathcal{O}_Y)$.

考虑高阶形变 $\mathrm{Spec}\ k\to\mathrm{Spec}\ k[t]/t^n$ 的话，我们可以分步进行

$$\mathrm{Spec}\ k\to\mathrm{Spec}\ k[t]/t^2\to\cdots\to\mathrm{Spec}\ k[t]/t^n\to\cdots$$

依次考虑 $\mathrm{Spec}\ k[t]/t^n\to\mathrm{Spec}\ k[t]/t^{n+1}$. 但这个可以普遍化，即普遍地我们考虑局部 Artin ring 的扩张 (满射)

$$A'\to A=A'/J$$

其中 $k=A/\mathfrak{m}_A=A'/\mathfrak{m}_{A'}$，$\mathfrak{m}_{A'}J=0$. 这里的形变理论则是在给定 $\mathrm{Spec}\ A$ 上某个结构 (比如闭子概型) 的情况下，考虑其在 $\mathrm{Spec}\ A'$ 上的形变，即相应的结构在 base change 下同构于原来在 $\mathrm{Spec}\ A$ 上的结构。这种情况则包含了 $\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.

对于 extensions

$$\mathrm{Spec}\ k\to\mathrm{Spec}\ A\to\mathrm{Spec}\ A'$$

我们先给定闭子概型 $Y \subseteq X = \mathbb{P}^n_k$ over $\operatorname{Spec} k$ 跟闭子概型 $Y_1 \subseteq X \times \operatorname{Spec} A$ flat over $\operatorname{Spec} A$ 满足 $Y_1 \times_A k \cong Y$ ，我们需要考虑 Y 在 $\operatorname{Spec} A'$ 上的形变 $Y' \subseteq X \times \operatorname{Spec} A'$. 这里有三个可能性，$Y'$ 完全不存在，Y' 仅局部地存在，Y' 可以全局地存在即局部上的 Y' 可以粘成一个完整的闭子概型。另一方面，如果我们略过 Y_1 考虑把 Y 直接形变到 $\operatorname{Spec} A'$ 上的话，对于一个 locally complete intersection $Y \subseteq X$ 它形变粘贴的阻碍完全地落在了

$$H^1(Y, \mathcal{N}_{Y/X}) = \operatorname{Ext}^1_Y(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2, \mathcal{O}_Y)$$

里面[4]。

由于 formal smoothness 的性质是用 lifting propery with respect to square zero thickenings 特征化的[5]，在合适的情况下，概型在某点的光滑性可以用 local Artin ring 的 extension 来特征化，因此上面的表述可以证明在没有形变局部阻碍的情况下 Hilbert scheme 在点 y 是光滑的[6]。

上面的 $H^0(Y, \mathcal{N}_{Y/X})$ 跟 $H^1(Y, \mathcal{N}_{Y/X})$ 就构成了闭子概型形变理论中的 tangent-obstruction theory. 之后在 cotangent complex 一节我们会再次遇到这个。

一般来讲对于一个形变函子[7] $\operatorname{Def}: \mathbf{Art}_k \to \mathbf{Sets}$，它存在一个 tangent-obstruction theory，即 k-vector spaces T^1 跟 T^2 (often of finite dimension) 满足
(1). 对任何的 extension of local Artin k-algebras

$$0 \to J \to A' \to A \to 0$$

存在如下正合链

$$T_1 \otimes_k J \to \operatorname{Def}(A') \to \operatorname{Def}(A) \xrightarrow{ob} T_2 \otimes_k J$$

(2). 如果 $A = k$，那么正合链变为

$$0 \to T_1 \otimes_k J \to \operatorname{Def}(A') \to \operatorname{Def}(A) \xrightarrow{ob} T_2 \otimes_k J$$

注意在我们在 $\operatorname{Def}(A)$ 任选一点作为 base point，那么上面的链在 pointed sets 的意义上正合。

Formal Geometry

从上面对 Hilbert scheme 这个例子的分析我们就可以知道对 Artin ring 上的形变理论的讨论可以得到非常丰富的 fine moduli space 的局部信息。当我们考虑高阶形变，从一个 Artin 环形变到一个更大更大的 Artin 环，并且让这个过程趋向极限时，我们就触碰到了 formal geometry.

$$\operatorname{Spec} k \to \operatorname{Spec} k[t]/t^2 \to \cdots \to \operatorname{Spec} k[t]/t^n \to \cdots \to \operatorname{Spec} \lim_n k[t]/t^n = \operatorname{Spec} k[[t]]$$

给定一个 k 上的形变结构 X_0，同时再给定它任意阶数的在 $\mathrm{Spec}\ k[t]/t^n$ 上的形变 X_{n-1}，请问会不会存在所有这些形变在极限 $\mathrm{Spec}\ k[[t]]$ 处的形变 X? 问题可以更加一般化，假设 $(A, \mathfrak{m}, k)$ 是一个 Noetherian local ring with $A/\mathfrak{m} = k$，$\hat{A} = \lim_n A/\mathfrak{m}^n$，formal geometry 的存在性问题变为

$$\mathrm{Spec}\ k \to \mathrm{Spec}\ A/\mathfrak{m}^2 \to \cdots \to \mathrm{Spec}\ A/\mathfrak{m}^n \to \cdots \to \mathrm{Spec}\ \hat{A}$$

通过上面的一系列的扩张，$A/\mathfrak{m}^n$ 上的形变结构能够顺延到极限 $\hat{A}$处 (这类形变问题称为是 *algebraization*)? 如果可以的话，那我们称这个形变问题是 effective 的[8]。假如 A 是完备的，那么 $\hat{A} = A$，于是极限处的形变结构就是 A 上的形变结构了。比如上面的 $k[[t]]$ 就是 compete Noetherian local ring. 但假如 A 不是完备的，那我们就又多了一个扩张 $\mathrm{Spec}\ \hat{A} \to \mathrm{Spec}\ A$，这样问题就又多了一个，极限处的形变结构能否被一个在 A 上的形变结构接近[9]?

为了让上面表述更加严谨，我们这里得构造一个形变函子，即把形变理论问题变为对形变函子性质的探索。固定住一个基域 k， $\mathbf{Art}_k$ 表示所有 local Artin k-algebra with residue field k 构成的范畴。然后给定一个在 k 上的形变结构 X_0 (比如某个闭子概型)，通过形变函子 $\mathrm{Def}_{X_0} : \mathbf{Art}_k \to \mathbf{Sets}$, $\mathrm{Def}_{X_0}(\mathrm{Spec}\ A)$ 表示所有在 $\mathrm{Spec}\ A$ 上的针对 X_0 的形变 (up to iso). 既然有函子那么就有函子可表性的问题。按照对普遍性探索的原则，我们没有理由把自己限制在形变函子上，因此我们可以考虑一般的函子 $F : \mathbf{Art}_k \to \mathbf{Sets}$. 对于 $\xi_0 \in F(k), \xi \in F(\mathrm{Spec}\ A)$ 被称为是 ξ_0 的无穷小形变 (*infinitesimal deformation*)，如果通过 $\mathrm{Spec}\ k \to \mathrm{Spec}\ A, \xi \mapsto \xi_0$. 上面对于形变函子而言，我们给定了在 k 上的形变结构，这在这里的表现则是 (1). $F(k)$ 中只有一个元素。满足这个条件得到函子被称为是 *deformation functor*. (大多数文献里面形变函子还要满足更多的性质，比如由满射的 pullback 产生的态射也是满射，但这些都包含在了 Schlessiniger 定理里面，见下文。)

由上面提到的 algebraization 问题，我们可以预料在这里一般的可表性是比较严苛的，因为极限处的环不一定是 local Artin 的，因此我们这里得到稍微弱化一点的概念 *pro-representable*, 函子 F 是 pro-representable 如果它同构于某 $\mathrm{Hom}_{k-\mathbf{alg}}(R, -) : \mathbf{Art}_k \to \mathbf{Sets}$，这里 R 是某个 complete Noetherian local k-algebra.

对于一个 complete Noetherian local k-algebra R 而言，$R/\mathfrak{m}^n$ 是 Noetherian local ring with $\dim R = 0$，因此它是一个 Artin local ring。那么我们就拥有 $F(R/\mathfrak{m}^n)$，假设 $F(R) = \lim_n F(R/\mathfrak{m}^n)$，那我们得到一个新的函子 $\widehat{F} : \widehat{\mathbf{Art}}_k \to \mathbf{Sets}$，一个关于 formal family 的函子，这里 $\widehat{\mathbf{Art}}_k$ 表示 complete Noetherian local k-algebra 的范畴，它包含 $\mathbf{Art}_k$. 这里我们有一个 cononical isomorphism

$$\widehat{F}(R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(h_R, F)$$

h_R 为 R 的可表函子，但限制在 $\mathbf{Art}_k$. Schlessiniger 在论文 *Functors of Artin Rings* 里面给出了 pro-representable 的等价条件，以及稍微弱化一点的存在 hull 的等价条件 (Theorem 2.11)，我不打算在这里展开非常细致的讨论，因为我这觉得这已经有些失去直观了，不适合放在一个偏向于介绍性的文章

中。大家也可以比较代数几何跟复几何里面形变理论中 *versal*, *semiversal*, *universal family* 的概念，复流形形变的这些概念可见 M Manetti, *Lectures on deformations of complex manifolds* Definition I.35.

由于大部分我们感兴趣的 moduli sapce 都不是良好的，是比较粗糙的，因此我们会考虑把概型的范畴扩大到 stack，于是同样地形变理论在 fibered category 的语言上有了新的发展[10]，说是新的发展，其本质或者说所用到的技术跟我们上面讨论的 formal geometry 没什么不同，因此我们也就不打算对这个展开讨论。在这种情况下，形变函子则是满足 Schlessiniger 条件的 fibered category (deformation category) $\mathcal{C} \to \mathbf{Art}_k$.

一篇对形变理论尤其是 Schlessiniger 定理非常好的笔记 Nitin Nitsure, *Deformation Theory for Vector Bundles*，作为应用，作者利用形变理论来讨论了一些 Grothendieck Qout scheme 的性质，但就形变理论的工具性而言它跟我们上一节对 Hilbert scheme 的讨论差不多。

Cotangent Complex

Cotantgent Complex是导出代数几何的起源，这一点在之后关于导出代数几何的介绍中是非常清晰的。在 Hilbert scheme 一节中我们讲了一个 tangent-obstruction theory 的特例，而对一个形变理论而言，它的 tangent-obstruction theory 就反映在了 cotangent complex 中。

Lower Terms

还是考虑之前那个 Hilbert scheme 的例子，切向跟阻碍的信息都由上同调给出，在例子中便是 $\mathrm{Hom}_Y(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2, \mathcal{O}_Y)$ 的上同调。对于一个 ring map $A \to B$ 它的 cotangent complex $\mathbb{L}_{B/A}$ 可以如下被定义，首先我们构造一个满射 $A[B] \to B$，这里 $A[B]$ 指 A 的一个多项式环，这个满射的 kernel 为 I，然后

$$\mathbb{L}_{B/A} := \cdots \to 0 \to I/I^2 \xrightarrow{d} \Omega^1_{A[B]/A} \otimes_{A[B]} B = \Omega^1_{A[B]/A}/I \cdot \Omega^1_{A[B]/A} \to 0 \to \cdots$$

它是一个只在第一阶跟第二阶可能非 0 的由 B-modules 组成的 complex，这里的 d 则是 Kahler differential. 从这里知道

$$H_0(\mathbb{L}_{B/A}) = \Omega^1_{A[B]/A}/(I \cdot \Omega^1_{A[B]/A} + A[B] \cdot d(I)) = \Omega^1_{B/A}$$

假如考虑概型 $f : X \to Y$ 的话，那么 $\mathbb{L}_{X/Y} = \mathbb{L}_{\mathcal{O}_X/f^{-1}\mathcal{O}_Y}$.

接着对于一个 B-module M，它的 *tangent module* 被定义为

$$T^i(B/A, M) = H^i(\mathrm{Hom}_B(\mathbb{L}_{B/A}, M)),\ i = 0, 1$$

由于我们这里的 cotangent complex $\mathbb{L}_{B/A}$ 是根据选择定义出来的，因此它是否是一个良定义的概念，这是一个问题。事实上，根据不同得到选择，我们得到的是 quasi-isomorphic 的 complex，因此它在导出范畴上是良定义的，但是 tangent modules 是定义良好的。当考虑两个不同的满射 $A[X] \to M$，

$A[Y] \to M$，我们可以考虑 $A[X, Y] \to M$ 作为中间比较量，这里得到的新的 cotangent complex 是原来的直和上一个零调的复形，用上 $\mathrm{Hom}_B(-, M)$ 之后，得到的上同调是不变的。

由于

$$L_1 \to L_0 \to \Omega^1_{B/A} \to 0$$

是正和的，我们得到

$$T^0(B/A, M) = \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, M) = \mathrm{Der}_A(B, M)$$

，尤其当 $M = B$ 时 $T^0(B/A, B) = \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, B)$ 刚好是代数几何里面的 tangent module. 另外假如 $A \to B$ 时满射的话，那么 $T^1(B/A, M) = \mathrm{Hom}_B(I/I^2, M)$.

在关于 Kahler differential 中，对于 ring maps $A \to B \to C$，可诱导出 C-modules 的正合链

$$\Omega^1_{B/A} \otimes_B C \to \Omega^1_{C/A} \to \Omega^1_{C/B} \to 0$$

take $\mathrm{Hom}_C(-, M)$ 函子后，这条正合链等价于

$$0 \to \mathrm{Der}_B(C, M) \to \mathrm{Der}_A(C, A) \to \mathrm{Der}_A(B, M)$$

在 EGAIV 中 Grothendieck 把这条链延长了三项，他往后加了

$$\to \mathrm{Exal}_B(C, M) \to \mathrm{Exal}_A(C, M) \to \mathrm{Exal}_A(B, M)$$

这里对于 ring map $A \to B$，$\mathrm{Exal}_A(B, M)$ 代表了 A-*algebra extension* of B by M，它的意思是指一个 A-surjective algebra map $B' \to B$ whose kernel I is square-zero ($I^2 = 0$) and is identified with M as a B-module.[11] 所有 A-algebra extension of B extension by M

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B' \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

的同构类构成了集合 $\mathrm{Exal}_A(B, M)$. 其中的 0 元素为 $B' = B \oplus M$, with $(b, m) \cdot (b', m') = (bb', bm' + b'm)$.

在代数几何中 Kodaira-Spencer map 指同构 (*fundamental theorem of cotangent complex*[12])

$$\mathrm{Exal}_A(B, M) \xrightarrow{\sim} T^1(B/A, M)$$

我们这里也同样拥有由 T^0 跟 T^1 构成的含 6 项可能非零元素的长正合链。Schlessinger 跟 Lichtenbaum 在 *The cotangent complex of a morphism* 中将 $\mathbb{L}_{B/A}$ 添加了第三项，定义出了 $T^2(B/A, M)$，成功地将正合链延长到了 9 项。以上的讨论可以顺利地拓展到概型上，这种情况下 T^2代表着阻碍，比如闭子概型的形变它的阻碍就可以用这个来表示[13]。不过我们这里并没有介绍这种构造 cotangent complex 的方法，因为后面我们要用 Quillen 的方法构造更长的链。

cotangent complex 也包含光滑信息，事实上对于一个 locally finite presentation map $f: X \to Y$ of schemes, f is smooth iff $H_1(\mathbb{L}_{X/Y}) = 0$ and $H_0(\mathbb{L}_{X/Y}) = \Omega^1_{X/Y}$ is locally free of finite rank，或者是局部上 $\mathrm{Exal}_A(B, M) = 0$ 这翻译到概型上则是对任意的 open subset $U \subseteq X$ and quasi-coherent sheaf $\mathcal{M}$ on U, $\mathcal{T}^1(U/Y, \mathcal{M}) = 0$.[14]

General Theory

下面我们尝试得到 cotangent complex $n >= 0$ 的项，这里有两种方法，一种是构造 simplicial resolution [Tag08PL]，另一种是用导出函子 (Quillen)，二者是等价的，因为事实上第一种就是构造出了 cofibrant simplicial ring. 这里的难点是什么？我们的上同调理论是定义在 $\mathbf{Alg}_k$ (k 为一个交换环) 上的，而传统的 Grothendieck 的同调代数处理的是 abelian category，而 $\mathbf{Alg}_k$ 并不具有这样的性质，因此我们需要发展 non-abelian homological algebra 也就是 homotopical algebra.

下面的部分内容可以在我之前的文章 Algebraic Topology II: Simplicial Object 中第二节 (模型范畴与同调代数) 中找到，这里我们不会复习模型范畴的知识，关于模型范畴的知识大家可以自行查阅 Quillen, *Homotopical Algebra*.

对于一个范畴 $\mathcal{M}$，它里面的 abelian object A，满足 abelian group 的范畴论公理[15]，或者说函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(-, A): \mathcal{M} \to \mathbf{Sets}$ factors through $\mathbf{Ab}$ (由交换群构成的范畴)。比如 $\mathbf{Sets}$ 上这样的对象就是交换群，单纯集合上的 abelian object 就是一个 simplicial abelian group. $\mathcal{M}_{ab}$ 代表所有 abelian object 构成的 subcategory，里面的态射应该保持这种 abelian structure. 例子就是 $\mathbf{Sets}_{ab} = \mathbf{Ab}$, $\mathbf{sSets}_{ab} = \mathbf{sAb}$. 这里存在一个遗忘函子 $U: \mathcal{M}_{ab} \to \mathcal{M}$. 我们假设它存在一个 left adjoint functor $F: \mathcal{M} \to \mathcal{M}_{ab}$，满足

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_{ab}}(FX, A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X, UA)$$

在特例 $\mathbf{Sets}_{ab}$ 中， F 将集合 X 变成以 X 为基的自由交换群。再进一步，我们假设 $\mathcal{M}$ 跟 $\mathcal{M}_{ab}$ 是一个模型范畴，并且 $F \dashv U$ 是一个 Quillen pair，那么 Quillen homology 就是左导出函子 $\mathbb{L}F$ 的同伦论。这是大概的思路，下面我们详细介绍一下我们需要涉及的知识。

Theorem[16] (Quillen)： For any category $\mathcal{C}$ of "algebras" (a categgory of models for Lawvere theory[17]), the category $s\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\Delta^{op}}$ of simplicial algebras admits a simplicial model category structure whose
(1). weak equivalences are those maps which are weak equivalences on the underlying category of simplicial sets;
(2). fibrations are those maps that are Kan fibrations on the underlying simplicial sets;
(3). cofibrations are retracts of free maps.

因此 $\mathbf{sAb}$, $\mathbf{sAlg}_k$ 是模型范畴，尤其 $\mathbf{sMod}_k$ 由 simplicial k-module 构成的范畴也是一个模型范畴。下面让我们去考虑如何用同伦代数的工具构造出 cotangent complex. 首先我们固定住一个 k-

algebra A，然后得到 $\mathbf{Alg}_k/A$ the category of k-algebras over A, 在这个范畴上我们考虑它的 abelian object.

对于一个 A-module M 而言它的 *trivial extension*[18] 为 k-algebra $A \oplus M$ with

$$(a, m) \cdot (b, n) = (ab, an + bm)$$

我们将这个 trivial extension 记为 $A \rtimes M$. 通过 $pr_1 : A \rtimes M \to A$，它可以形成 $\mathbf{Alg}_k/A$ 上的一个 abelian object. 事实上 $(\mathbf{Alg}_k/A)_{ab}$ 跟所有 trivial extension 构成的范畴等价[19]，那么相应地它也将等价于 $\mathbf{Mod}_A$.

考虑一个 k-algebra morphism $f : B \to A \rtimes M$ over A, $f(b) = (f_1(b), f_2(b))$，f_1 是被 $B \to A$ 确定了的，因此它完全地依赖于 f_2： $B \to M$. 要注意的是，由于这是一个 k-algebra map，f_2 至少应该满足 k-linear. 另外作为环态射，$f(bb') = f(b)f(b')$ 这意味着

$$(bb') = b \cdot f_2(b') + b' \cdot f_2(b)$$

这里的乘积是通过 $f_1 : B \to A$ 的，将 M 视为 B-module. 于是

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_k/A}(B, A \rtimes M) = \mathrm{Der}_k(B, M)$$

再注意到

$$\mathrm{Der}_k(B, M) \cong \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/k}, M) \cong \mathrm{Hom}_A(\Omega^1_{B/k} \otimes_B A, M)$$

因此

$$\Omega^1_{-/k} \otimes_- A : \mathbf{Alg}_k/A \to \mathbf{Mod}_A, \quad A \rtimes - : \mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Alg}_k/A$$

构成一个 adjoint pair $\Omega^1_{-/k} \otimes_- A \dashv A \rtimes -$. 由于以上两者并不具有非平凡的模型范畴结构，因此我们会考虑 simplicial algebra 跟 simplicial module，在这两者上做同调理论其实相当于在 differential graded algebra 跟 chain complex 上做同调理论。因此上述的 adjoint pair 变成了

$$\Omega^1_{-/k} \otimes_- A : \mathbf{sAlg}_k/A \to \mathbf{sMod}_A, \quad A \rtimes - : \mathbf{sMod}_A \to \mathbf{sAlg}_k/A$$

这两个函子的作用都是 level-wise 的。因此就集合层面来看 $A \rtimes M_\bullet$ 其实是 $A \times M_\bullet$，利用单纯集合上针对 Kan fibration 跟 trivial fibration 的提升性质[20]，以及上面那个 Quillen 的 Theorem，我们可以判断 $A \times -$ preserves fibrations and trivial fibrations，因此这个 adjoint pair 是一个 Quillen pair, 于是它们便具有了导出函子

$$\mathbb{L}(\Omega^1_{-/k} \otimes_- A) : \mathrm{Ho}(\mathbf{sAlg}_k/A) \longleftrightarrow \mathrm{Ho}(\mathbf{sMod}_A) : \mathbb{R}(A \rtimes -)$$

尤其地左导出函子为

$$\mathbb{L}(\Omega^1_{-/k} \otimes_- A)(B_\bullet) = \Omega^1_{QB_\bullet/k} \otimes^{\mathbb{L}}_{QB_\bullet} A$$

这里 $QB_\bullet$ 代表它的 cofibrant replacement.

在模型范畴 $\mathbf{sAlg}_k$ 中，$B_\bullet$ 的 cofibrant replacement 代表分解

$$k \to QB_\bullet \twoheadrightarrow B_\bullet$$

其中 $QB_\bullet$ 是 cofibrant，$QB_\bullet \twoheadrightarrow B_\bullet$ 代表的是一个 trivial fibration. cotangent complex $\mathbb{L}_{A/k}$ 被定义为

$$\mathbb{L}_{A/k} := \Omega^1_{QA/k} \otimes^{\mathbb{L}}_{QA} A \in \mathrm{Ho}(\mathbf{sMod}_A)$$

因此它是 well defined up to homotopy. *Andre–Quillen homology* of A 被定义为是 cotangent complex 的同伦群

$$\mathrm{D}_n(A/k) = \pi_n \mathbb{L}_{A/k}$$

利用 free simplicial resolution 我们可以计算出 $\mathrm{D}_0(A/k) = \Omega^1_{A/k}$.

更一般地我们可以定义 cotangent complex[21] $\mathbb{L}_{A/B}$ for $B \to A$ in $\mathbf{sAlg}_k/A$ 如下，首先选取 cofibration-trivial fibration 分解

$$B \hookrightarrow P_\bullet \twoheadrightarrow A$$

然后我们有

$$\mathbb{L}_{A/B} := \Omega^1_{P_\bullet/B} \otimes^{\mathbb{L}}_{P_\bullet} A$$

这其实就是考虑在 $\mathbf{sAlg}_B/A$ 上 A 的 cotangent complex. 下一步对于任何 A-module M,

$$\mathrm{D}_n(A/k, M) := H_n(\mathbb{L}_{A/k} \otimes_A M), \ \ \mathrm{D}^n(A/k, M) := H^n(\mathrm{Hom}_A(\mathbb{L}_{A/k}, M))$$

注意这里我们不区分 $\mathbf{sMod}_A$ 跟 $\mathbf{Ch}_+$ 因为它们之间有 Dold-Kan correspondence[22]

$$N : \mathbf{sMod}_A \longleftrightarrow \mathbf{Ch}_+ : \Gamma$$

这个 adjoint pair 形成一个 *Quillen equivalence*，尤其地对于一个 $M_\bullet \in \mathbf{sMod}_A$,

$$\pi_*(M) \cong H_*(N(M_\bullet))$$

最后对于 ring maps $A \to B \to C$, 我们有 distinguished triangle in derived category $\mathrm{Ho}(\mathbf{sMod}_C) \cong D_{\geq 0}(C)$[23]

$$\mathbb{L}_{B/A} \otimes^{\mathbb{L}}_B C \to \mathbb{L}_{C/A} \to \mathbb{L}_{C/B} \to \Sigma(\mathbb{L}_{B/A} \otimes^{\mathbb{L}}_B C)$$

它可以诱导出对应的长正合链。[24]

Geometric Interpretation and Applications

cotangent complex $\mathbb{L}_{B/A}$ 跟环的局部化是兼容的[25]，因此它可以拓展到概型上，对于概型 $X \to Y$，我们将得到 $\mathbb{L}_{X/Y}$[26]，它蕴含着 smooth, etale, locally complete intersection 等等信息，具体的定理可以见 Quillen, *On the (co-)homology of commutative rings*, Theorem 5.4/5.5，证明可以见 Quillen, *Homology of commutative rings*, Proposition 5.3，概型层次的 formulation 可以见 Illusie, *Cotangent complex and deformation theory I*, III.3.1/3.2.6

对于概型的态射 $X \to Y$, 我们有 $\mathbb{L}_{X/Y} \to \Omega^1_{X/Y}$ 后者集中在第 0 项的位置，如果概型的态射是 locally of finite presentation，那么它光滑当且仅当后者是 quasi-isomorphism 并且 $\Omega^1_{X/Y}$ 是 locally free of finite rank. 从这个角度来看 cotangent complex 的高阶同调群从某种意义上来说代表的是态射光滑程度的阻碍，这暗合了导出代数几何的思想。

另外就是，cotangent complex 的上同调可以很好地刻画 obstruction theory，比如给定一个概型的态射 $f : X \to Y$ over S，以及一个 square-zero extension $X \hookrightarrow X'$，问 f 是否可以拓展到 $f' : X' \to Y$？假如该 square-zero extension 的 quasi-coherent ideal 为 $\mathcal{I}$，那么这个阻碍就由 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathbb{L}_{Y/S}, \mathcal{I})$[27] 来刻画，这个定理可以用来寻找 nodal curve 的形变[28]。

DGLA

Slogan: Any reasonable *formal deformation problem* over a field of characteristic zero is controlled by a *differential graded Lie algebra*.

对于 differential graded Lie algebra 我并不熟悉，因此这一节只能给出比较简单的介绍，当然我会给出具体的参考文献，大家可以去看看，另外就是知乎上 @Skadiologist 的主页有一些相关的回答，我就不一一列举了。另外就是，事实上我不知道该先写 DGLA 还是导出形变理论，因为两者的联系是非常密切的，所以读者阅读的话也可以先看导出形变理论，因为初看 DGLA，它跟上述我们讨论的形变理论差别有些大。DGLA 也被叙述在 Deligne 给 Millson 的信中，我原想把它编辑下来的，但里面的文字于我而言难以辨认，因此就放弃了。

我们上面考虑的“传统的”形变理论的方法论大体上是这样的

$$\text{Deformation Problem} \rightsquigarrow \text{Deformation Functor}/\text{Deformation Category}$$

即用形变函子或者形变范畴 (fibered category) 来处理形变问题，而这里则是

$$\text{Deformation Problem} \rightsquigarrow \text{DGLA} \rightsquigarrow \text{Deformation Functor}$$

我们有不要先介绍一下，在传统的形变理论来中增加一个中间过程 DGLA 的必要性。我们在文章的开头说过形变理论是为了研究模空间的局部理论，但是在处理 moduli problem 可表性问题的时候，我们常用的工具是几何不变量理论 (geometric invariant theory)即 GIT，在不把同构的对象看成一样的时候我们可以得到一个较大的空间 M，然后利用群作用 (同构)，商去同构的对象得到 M/G，假如 G 的作用很坏，比如是 non-free 的，那么得到的新的空间也会很坏，也就是说会有奇点，另外即使 G 的作用很好，我们得到的新空间大概率也不是 fine moduli space 而是比较粗糙的，这样以来我们基本就没法利用形变理论研究它的局部结构了，像我们在开头举的 Hilbert scheme 的例子，它是 fine 的。因此我们不打算进行这个 GIT 过程，于是也就不将同构的对象看成是一样的，这样一来要分类的对象带上它们之间的同构就构成了一个 groupoid，moduli problem 便会得到了一个 stack 的解，相应地我们这里的形变理论也将变成是 fibered category，即不将同构的形变看成是一样的。

另外一个考虑 groupoid 的理由则是，我们知道大多数形变函子不是 pro-representable 的，它们并不保持 pullback on $\mathbf{Art}_k$，对于一组态射

$$A' \to A, \quad A'' \to A$$

我们要考虑把在 A' 跟 A'' 拓展到 $A' \times_A A''$ 上，这就需要粘贴，根据粘贴的不同我们得到的拓展了的形变也会是不一样的，因此一种处理这种非唯一性的方法便是考虑 groupoid.

在这时候形变理论变得更加复杂了，于是就有了对形变理论进行分类的必要性，两个形变理论等价是说它们的 fibered category 等价，DGLA 就是拿来处理这个问题的，这也称为是“控制”，而最后被大家实践出来的结果是在特征 0 的情况下所有我们感兴趣的形变理论问题都可以拿某个 DGLA 来控制，也就是说涉及的 fibered category 等价于由某个 DGLA 构造出来的 fibered category.[29] 在这种情况下我们只要处理好 DGLA 的问题就好了。在这一节我们只考虑特征为 0 的域 k.

Definition[30]: A *differential graded Lie algebra* (DGLA) $(\mathfrak{g}, [,], d)$ consists of a $\mathbb{Z}$-graded vector space $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^i$, a bilinear bracket $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ and a linear map $d : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ such that

(1). $[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j] \subseteq \mathfrak{g}^{i+j}$ and for homogeneous elements $a \in \mathfrak{g}^i, b \in \mathfrak{g}^j$,

$$[a, b] + (-1)^{ij}[b, a] = 0$$

(2). for $a \in \mathfrak{g}^i, b \in \mathfrak{g}^j, c \in \mathfrak{g}^k$,

$$[a, [b, c]] = [[a, b], c] + (-1)^{ij}[b, [a, c]]$$

(3). $d(\mathfrak{g}^i) \subseteq \mathfrak{g}^{i+1}$ with $d \circ d = 0$ and for $a \in \mathfrak{g}^i, b \in \mathfrak{g}^j$,

$$d[a, b] = [da, b] + (-1)^i[a, db]$$

注意结合公理 (1)，公理 (2) 等价于说

$$(-1)^{ik}[a,[b,c]]+(-1)^{kj}[c,[a,b]]+(-1)^{ji}[b,[c,a]]=0$$

于是传统的 Lie algebra 就是一个集中在第 0 项的DGLA.

Definition: A *Maurer-Cartan equation* (also called the deformation equation) of a DGLA $\mathfrak{g}$ is

$$da+\frac{1}{2}[a,a]=0,\quad a\in\mathfrak{g}^1$$

The solution set is denoted by $\mathrm{MC}(\mathfrak{g})$.

这样我们可以定义 Maurer-Cartan functor

$$\mathrm{MC}_{\mathfrak{g}}:\mathbf{Art}_k\to\mathbf{Sets},\ (A,\mathfrak{m}_A)\mapsto\mathrm{MC}(\mathfrak{g}\otimes_k\mathfrak{m}_A)$$

这里我们把 $\mathfrak{m}_A$ 看成是集中在第 0 位置上的 commutative differential graded algebra (CDGA)，对于 dg-algebra，一种很漂亮的观点是把它看成是一个只有一个元素的 dg-category[31] (enriched over $\mathbf{Ch}_k$). 注意了对于两个 dg-algebra A,B,

$$(A\otimes_k B)^n:=\bigoplus_{p+q=n}A^p\otimes_k B^q$$

于是 $(\mathfrak{g}\otimes_k\mathfrak{m}_A)^n=\mathfrak{g}^n\otimes_k\mathfrak{m}_A$，可以很容易地认识到 $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{m}_A$ 是一个 DGLA. 更一般地，对于任意一个 CDGA $\mathcal{A}$, $\mathfrak{g}\otimes_k\mathcal{A}$ 是一个 DGLA，Lie bracket 为

$$[x\otimes a,y\otimes b]:=(-1)^{\deg(a)\cdot\deg(y)}[x,y]\otimes ab$$

对于一个 nilpotent DGLA $\mathfrak{g}$，它的 *gauge group* $\exp(\mathfrak{g})$ 在集合上跟 $\mathfrak{g}$ 相等，但是它带上了 Baker-Campell-Hausdorff product

$$x\bullet y=x+y+\frac{1}{2}[x,y]+\cdots$$

$\exp(\mathfrak{g}^0)$ 在 $\mathfrak{g}^1$ 上的作用则是

$$e^a*x=x+\sum_{n\geq 0}\frac{([a,-])^n}{(n+1)!}([a,x]-da)$$

for $a\in\mathfrak{g}^0,x\in\mathfrak{g}^1$，并且这个作用可以在 $\mathrm{MC}(\mathfrak{g})$ 上[32].

对于一个 local Artin ring $(A,\mathfrak{m}_A)$ 而言 $\mathrm{rad}(A)=\mathfrak{m}_A$ 因此 $\mathfrak{m}_A$ 是 nilpotent，于是我们可以考虑 $\exp_{\mathfrak{g}}(A)=\exp(\mathfrak{g}^0\otimes_k\mathfrak{m}_A)$ 作用在 $\mathrm{MC}(\mathfrak{g}\otimes_k\mathfrak{m}_A)$ 上，于是我们得到一个新的函子

$$\mathrm{Def}_{\mathfrak{g}}:\mathbf{Art}_k\to\mathbf{Sets},\quad(A,\mathfrak{m}_A)\mapsto\mathrm{MC}_{\mathfrak{g}}(A)/\exp_{\mathfrak{g}}(A)$$

并且 quasi-isomorphic 的 DGLA 诱导出同构的形变函子[33]。复流形的形变理论便可以用这样的 DGLA 控制[34]。

另一个可以被 DGLA 控制的例子则是结合代数的形变理论，可以见 M. Doubek, M. Markl, P. Zima, *Deformation Theory*, Example 5.16 或者知乎这个问题的回答 规范群在 Maurer-Cartan 方程的作用。以上两个例子基本是最经典的了，对于一般的形变问题，它对应的 DGLA 是不好发现的，我们在此节开头的 slogan 可以在无穷范畴的语言下严谨化，这在后面我们还会遇到。

另外就是，我们在前面讲了要用 DGLA 得到一个 fibered groupoid，这里其实

$$\mathrm{Def}_{\mathfrak{g}}:\mathbf{Art}_k\to\mathbf{Gpd},\ (A,\mathfrak{m}_A)\mapsto(\exp_{\mathfrak{g}}(A)\rtimes\mathrm{MC}_{\mathfrak{g}}(A)\rightrightarrows\mathrm{MC}_{\mathfrak{g}}(A))$$

该 groupoid 被称为是 *Deligne groupoid*，里面的对象是集合 $\mathrm{MC}_{\mathfrak{g}}(A)$，同构由群作用产生。同样，quasi-isomorphic 的 DGLA 将产生等价的形变函子。[35]

下面我们接着考虑 Hilbert scheme 形变理论中的 DGLA，这里我们假设基域为 $k=\mathbb{C}$. 首先我们要把上面为每一个 DGLA $\mathfrak{g}$ 联系上一个形变函子 $\mathrm{Def}_{\mathfrak{g}}$ 的过程推广到给每一个 DGLA 之间的态射 $\chi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ 联系上一个形变函子 Def_{χ}. 将 DGLA 视为复形，我们有它们的 mapping cone

$$\mathrm{Cone}(\chi)^n=\mathfrak{g}^{n+1}\oplus\mathfrak{h}^n,\ (a,b)\mapsto(-da,-\chi(a)+db)$$

而我们感兴趣的则是 $C_\chi=\mathrm{Cone}(\chi)[-1]$，它可以诱导出长正和链[36]。虽然 C_χ 在大多数情况下并不一定具有 DGLA 结构，但在它上面却存在 Maurer-Cartan 方程跟 gauge 作用。[37]

$$\mathrm{MC}_\chi(A):=\{(x,e^a)\in(\mathfrak{g}^1\otimes_k\mathfrak{m})\times\exp(\mathfrak{h}^0\otimes_k\mathfrak{m})|x\in\mathrm{MC}_{\mathfrak{g}}(A),\ e^a*\chi(x)=0\}$$

形变函子则是

$$\mathrm{Def}_\chi(A):=\frac{\mathrm{MC}_\chi(A)}{\exp(\mathfrak{g}^0\otimes_k\mathfrak{m})\times\exp(d\mathfrak{h}^{-1}\otimes_k\mathfrak{m})}$$

$X=\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ 为射影空间，假设 Z 是它的闭子概型，我们在之前已经讨论过了它的形变理论。$\mathcal{A}_X^{p,q}$ 为光滑复流形 X 的 sheaf of differential (p,q)-forms[38]。一个 graded algebra A 的 p 阶导数 $f:A\to A$ 满足 $f(A^n)\subseteq B^{p+n}$，对于齐次元素的乘积

$$f(ab)=f(a)b+(-1)^{n\cdot\deg(a)}af(b)$$

我们这边考虑的是 $\mathcal{A}_X^{0,*}$ 之间的导数 $\mathrm{Der}^p(\mathcal{A}_X^{0,*},\mathcal{A}_X^{0,*})$ 在

$$\mathrm{Der}^*(\mathcal{A}_X^{0,*},\mathcal{A}_X^{0,*})=\oplus_p\mathrm{Der}^p(\mathcal{A}_X^{0,*},\mathcal{A}_X^{0,*})$$

上的 Lie bracket 被定义为

$$[f,g] := f\circ g - (-1)^{\deg(f)\cdot\deg(g)} g\circ f$$

微分为 $df := [\bar{\partial}, f]$. 假设 T_X 是 X 的 tangent sheaf，而 $T_X(-\log Z)$ 则是同时跟 Z 相切的 X 上的切向量。我们可以将 $\mathcal{A}_X^{0,*}(T_X)$ 视为是 $\mathrm{Der}^*(\mathcal{A}_X^{0,*}, \mathcal{A}_X^{0,*})$ 的 sub-DGLA，我们将产生如下的正合链

$$0 \to \mathcal{A}_X^{0,*}(T_X(-\log Z)) \xrightarrow{\chi} \mathcal{A}_X^{0,*}(T_X) \to \mathcal{A}_X^{0,*}(N_{Z/X}) \to 0$$

而 Def_χ 则跟我们之前提过的 Z 的形变函子 Def_Z 同构。[39]

我们同样可以处理一般的代数闭域的情况，作为对上述讨论的推广，这里使用了 semicosimplicial 的语言，因为 mapping cone 一般不具有 DGLA 结构，但这里却可以给它安上 semicosimplicial DGLA 结构，同样我们也应该给每一个 semicosimplicial DGLA 联系上一个形变函子。[40]

Generalization

下面的内容默认读者熟悉单纯集合的知识，它不涉及无穷范畴。在有理同伦论[41] 中有 *algebra of polynomial differential forms* 的概念，即对于 Δ^n，它对应的微分形式多项式为

$$\Omega(\Delta^n) := k[t_0,\cdots,t_n,dt_0,\cdots,dt_n]/(\sum t_i - 1, \sum dt_i)$$

比如 $\Omega(\Delta^0) = k$，$\Omega(\Delta^1) = k[t,dt]$. 注意这里我们把 $\Omega(\Delta^n)$ 看成是 $\Omega^\bullet(\Delta^n)$ 即它是一个 commutative dg-algebra，t_i 在第 0 位，dt_i 在第 1 位，微分运算 $d(t_i) = dt_i$，乘积则是 wedge product $\wedge$. 这里 $\Omega^0(\Delta^n) = k[t_0,\cdots,t_n]/(\sum t_i - 1) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ 是仿射 $n+1$ 维空间的标准单形。

对于一个态射 $f:[n]\to[m]$，它会产生

$$\Omega(f):\Omega^\bullet(\Delta^m)\to\Omega^\bullet(\Delta^n),\ t_i\mapsto \sum_{f(j)=i} t_j$$

所以 $\Omega^\bullet:\Delta\to\mathbf{cdgAlg}_k$ 是一个函子，于是 $\Omega^\bullet(\Delta^\bullet)$ 是一个 simplicial graded commutative dg-algebra. 利用 left Kan extension，函子 $\Omega^\bullet:\Delta\to\mathbf{cdgAlg}_k$ 可以扩张成为

$$\Omega^\bullet:\mathbf{sSets}\to\mathbf{cdgAlg}_k,\ X\mapsto \operatorname*{colim}_{\Delta^n\to X}\Omega^\bullet(\Delta^n)$$

假如 $\mathfrak{g}$ 是一个 dgLa，那么 $\{\mathfrak{g}\otimes_k\Omega^\bullet(\Delta^n)\}_{n\geq 0}$ 则是一个 simplicial dgLa. 我们可以如下 $\mathcal{MC}$ 函子

$$\mathcal{MC}_{\mathfrak{g}}:\mathbf{Art}_k\to\mathbf{sSets},\ A\mapsto\{\mathrm{MC}(\mathfrak{g}\otimes_k\mathfrak{m}\otimes_k\Omega^\bullet(\Delta^n))\}_{n\geq 0}$$

该形变函子具有以下性质

(1). $\mathcal{MC}_{\mathfrak{g}}(A)$ 是一个 Kan complex

(2). $\mathcal{MC}_{\mathfrak{g}}$ 将满射带入到 Kan fibration

(3). 将由满射构成的 pullback 变成单纯集合范畴中的 pullback，这将是 homotopy pullback[42]

这是我们上面讨论的 $\mathrm{Def}_{\mathfrak{g}}$ 的自然推广，因为

$$\pi_0 \mathcal{MC}_{\mathfrak{g}} = \mathrm{Def}_{\mathfrak{g}} = \mathrm{MC}_{\mathfrak{g}}/\text{gauge action}$$

最后在导出代数几何中我们则考虑函子 $F : \mathbf{dgArt}_k \to \mathbf{sSets}$.

1. 证明可以参考 FGA 或者文章 *Elementary Introduction to Representable Functors and Hilbert Schemes* ↩
2. 以下内容参考 Hartshorne, *Deformation Theory*, Section 1, 2 ↩
3. Hartshorne, *Deformation Theory, Corollary* 2.5 ↩
4. Edoardo Sernesi, *Deformations of Algebraic Schemes*, Prop 3.2.6 或者 B. Fantechi and L. Gottsche, *Local properties and Hilbert schemes of points* in *Fundamental Algebraic Geometry Grothendieck's FGA Explained* ↩
5. Scholze 在代数几何讲义 II 里面对 smooth map 的 local source property 进行了类似于上述阻碍理论的讨论 ↩
6. Hartshorne, *Deformation Theory*, Corollary 6.3 ↩
7. 参考下一节内容，或者 B. Fantechi and L. Gottsche, *Local properties and Hilbert schemes of points*, Definition 6.1.21 ↩
8. Grothendieck's Existence Theorem 解决了当形变结构为 coherent sheaf 时的情况, see Illusie, *Grothendieck's existence theorem in formal geometry*, Theorem 4.2 or see EGA III 5.1.4, 一般的情况见 M. Artin *Algebraization of formal moduli I*, in the book *Global Analysis: Papers in Honor of K. Kodaira* (PMS-29) ↩
9. See M. Artin, *Algebraic approximation of structures over complete local rings* ↩
10. Matti Talpo, Angelo Vistoli, *Deformation theory from the point of view of fibered categories* 以及 [Tag06J1] ↩
11. Edoardo Sernesi, *Deformations of Algebraic Schemes*, Section 1.1 ↩
12. W. Dany Dillam, *Deformation Theory*, Theorem 7.2.1 ↩
13. Hartshorne, *Deformation Theory*, Theorem 10.1 ↩
14. W. Dany Dillam, *Deformation Theory*, Theorem 7.5.1 ↩
15. M. Doubek, M. Markl, P. Zima, *Deformation Theory*, Definition 1.13 ↩
16. Quillen, *Homotopical Algebra*, II.4: Theorem 4, Remarks 1., Remarks 4. ↩
17. Lawvere, *Functorial semantics of algebraic theories* ↩
18. M. Doubek, M. Markl, P. Zima, *Deformation Theory*, Definition 1.14 ↩
19. above, Proposition 1.15 ↩
20. Paul G. Goerss, John F. Jardine, *Simplicial Homotopy Theory*, Chapter I, Theorem 11.2 ↩
21. Quillen, *Homology of commutative rings*, 2.14 ↩

22. Paul G. Goerss, John F. Jardine, *Simplicial Homotopy Theory*, Chapter III, Corollary 2.3, or Weibel ↩
23. Quillen, *Homology of commutative rings*, Corollary 4.17, or Quillen, *On the (co-)homology of commutative rings*, Theorem 5.1 ↩
24. 更多的相关性质也可以在 Matthew Morrow, *Topological Hochschild homology in arithmetic geometry*, Proposition 2.27 中找到 ↩
25. Quillen,*Homology of commutative rings*, Proposition 5.1 ↩
26. 我们之前讨论的性质大部分都可以迁移过来，不过要小心符号，Illusie 的两卷关于 cotangent complex 的书系统地发展了相关理论 ↩
27. W. Danny Dillam, *Deformation Theory*, Proposition 7.6.1 or Illusie, *Grothendieck's existence theorem in formal geometry*, Theorem 5.31 ↩
28. W. Danny Dillam, *Deformation Theory*, Proposition 9.3.1 ↩
29. Kontsevich, Soibelman, *Deformation Theory 1*, Section 1.4 ↩
30. M Manetti, *Lectures on deformations of complex manifolds*, Definition V.18 ↩
31. B. Keller, *On differential graded categories* ↩
32. M Manetti,*Lectures on deformations of complex manifolds*, p77 ↩
33. above, Corollary V.52 ↩
34. above, Theorem V.55 ↩
35. William M. Goldman, John J. Milldon, *The Deformation Theorem of Representations of Fundamental Groups of Compact Kahler Manifolds*, Section 2 ↩
36. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*, 1.5.2 ↩
37. Marco, Manetti, *Lie description of higher obstructions to deforming submanifolds*, Section 2 ↩
38. Marco, Manetti, *Lectures on deformations of complex manifolds*, Chapter I, Section 2 ↩
39. Marco, Manetti, *Lie description of higher obstructions to deforming submanifolds*, Theorem 5.2 ↩
40. See Donatella Iacono, *Deformations of Algebraic Subvarieties* ↩
41. Philli Griffiths, John Morgan, *Rational Homotopy Theory and Differential Forms*, Section 9.1 ↩
42. Joao, *Deformation functors - Modern approach and the MC equation*, drive google 得翻墙 ↩