“Bounding scalar operator dimensions in 4D CFT”中的数值共形自举方法

余荫铠

2025 年 7 月 28 日

本文是对 R. Rattazzi, V. Rychkov, E. Tonni, A. Vichi, Bounding scalar operator dimensions in 4D CFT, JHEP 12 (2008) 031 这篇文章中所提出的数值共形自举方法的思路总结。

我们知道，一个共形场论 (conformal field theory, CFT) 可以完全由其共形数据（即所有 primary fields 的维数 Δ 和自旋 l）和算符乘积展开 (operator product expansion, OPE) 系数 λ 所确定。现代的共形自举方法 (conformal bootstrap) 可以从 CFT 最基本的第一性原理出发——即关联函数的交叉对称性和幺正性——来约束甚至求解共形数据，这一方案是非微扰的，而且方法论上不依赖于具体的模型。

R. Rattazzi, V. Rychkov, E. Tonni, A. Vichi 的这篇开创性文章“Bounding scalar operator dimensions in 4D CFT” [1] 展示了如何用数值方法通用的提取标量算符维数 Δ 的上限（而下限由幺正性约束）。

具体来说，该论文研究了任意 4D 幺正 CFT 中一个标量 primary operator ϕ（维度为 $d = [\phi]$）与其 OPE 中出现的最低维标量算符 ϕ^2（维度为 $\Delta_{\min} = [\phi^2]$）之间的关系。他们证明了 $\Delta_{\min}$ 必然存在一个仅依赖于 d 的上限：

$$\Delta_{\min} \leq f(d)$$

并且这个连续的界限函数满足 $f(1) = 2$，保证了理论在 $d \to 1$ 时能够连续地过渡到自由场论。

本文重点关注原文第 4、5 节，梳理其核心方法论，包括：

1. 利用 OPE 和共形块分解建立四点函数的基本框架。
2. 如何从交叉对称性中推导出核心的求和规则。
3. 如何将求和规则问题转化为一个高维向量空间中的几何问题。
4. 如何利用线性泛函和线性规划等数值方法，从该几何问题中求解出最终的物理界限。

1 交叉对称性与共形块分解

考虑一个由四个相同的标量 primary operator ϕ（标度维为 d）构成的四点关联函数。共形对称性极大地限制了其形式：

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\rangle = \frac{g(u,v)}{|x_{12}|^{2d}|x_{34}|^{2d}}$$

其中所有的动力学信息都包含在函数 $g(u,v)$ 中。u 和 v 是共形不变的交比 (cross-ratios)：

$$u = \frac{x_{12}^2 x_{34}^2}{x_{13}^2 x_{24}^2}, \quad v = \frac{x_{14}^2 x_{23}^2}{x_{13}^2 x_{24}^2}$$

由于四个算符完全相同，这个四点函数在交换任意两个坐标时必须保持不变。特别地，在交换 $x_1 \leftrightarrow x_3$ 时，$u \leftrightarrow v$。这要求函数 $g(u,v)$ 必须满足一个强大的自洽性约束，即**交叉对称方程**:

$$v^d g(u,v) = u^d g(v,u)$$

这个方程是共形自举的基石。

另一方面，我们可以通过算符乘积展开 (OPE) 来分析四点函数。$\phi(x_1)\phi(x_2)$ 的乘积可以展开为无穷多个 primary operator $\mathcal{O}_{\Delta,l}$ 及其 de'cen'dent 的贡献之和。将此 OPE 代入四点函数，函数 $g(u,v)$ 可以被分解为一系列普适的基底函数——**共形块** (conformal blocks) $g_{\Delta,l}(u,v)$ 的线性组合：

$$g(u,v) = 1 + \sum_{\mathcal{O}\in\phi\times\phi} \lambda^2_{\phi\phi\mathcal{O}} g_{\Delta,l}(u,v)$$

这里的 “1” 代表单位算符的贡献。求和遍历所有出现在 $\phi\times\phi$ OPE 中的非单位 primary operator。$g_{\Delta,l}(u,v)$ 是由对称性唯一确定的函数，仅依赖于交换算符的维度 Δ 和自旋 l。而 $\lambda_{\phi\phi\mathcal{O}}$ 是 OPE 系数，是理论的动力学数据。根据幺正性，OPE 系数的平方必须为正，我们记为 $p_{\Delta,l} = \lambda^2_{\phi\phi\mathcal{O}} > 0$。这是整个方法得以成立的另一个关键。

2 求和规则与几何视角

将交叉对称方程与共形块分解相结合，我们就能得到一个关于 CFT 谱数据的普适约束方程。

2.1 推导求和规则

求和规则（原文 4.5 式）是数值共形自举方法的关键，在这里我们补充求和规则的推导。我们将共形块分解式代入交叉对称方程 $v^d g(u,v) = u^d g(v,u)$。方程左边为：

$$\text{LHS} = v^d \left(1 + \sum_{\Delta,l} p_{\Delta,l}\, g_{\Delta,l}(u,v)\right) = v^d + \sum_{\Delta,l} p_{\Delta,l}\, v^d g_{\Delta,l}(u,v)$$

方程右边为：

$$\text{RHS} = u^d \left(1 + \sum_{\Delta,l} p_{\Delta,l}\, g_{\Delta,l}(v,u)\right) = u^d + \sum_{\Delta,l} p_{\Delta,l}\, u^d g_{\Delta,l}(v,u)$$

令 LHS = RHS，并整理移项，我们得到：

$$\sum_{\Delta,l} p_{\Delta,l} \left(v^d g_{\Delta,l}(u,v) - u^d g_{\Delta,l}(v,u)\right) = u^d - v^d$$

在 $u \neq v$ 的区域，两边同除以 $(u^d - v^d)$，便得到了核心的**求和规则 (sum rule)**。为了方便分析，我们通常使用与 (u,v) 等价的坐标 $(z,\bar{z})$，其中 $u = z\bar{z}, v = (1-z)(1-\bar{z})$。

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum_{\Delta,l} p_{\Delta,l} F_{d,\Delta,l}(z,\bar{z}) = 1, \quad \text{其中} p_{\Delta,l} > 0 \\ &F_{d,\Delta,l}(z,\bar{z}) \equiv \frac{v^d g_{\Delta,l}(u,v) - u^d g_{\Delta,l}(v,u)}{u^d - v^d} \end{aligned}} \tag{1}$$

这个方程将一个复杂的非线性函数方程，转化为了一个关于正实数 $p_{\Delta,l}$ 和已知函数 $F_{d,\Delta,l}$ 的线性方程。这就是整个自举方法的出发点。

2.2 几何视角

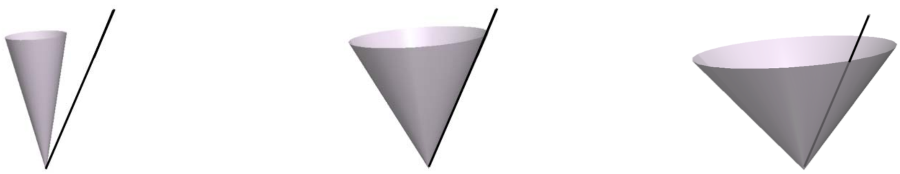
为了系统性地分析求和规则，论文引入了直观的几何图像。首先，通过在对称点 $z = \bar{z} = 1/2$ 进行泰勒展开，求和规则可以被转化为一组无穷多个线性方程：

$$1 = \sum p_{\Delta,l} F^{(0,0)}_{d,\Delta,l} \tag{2}$$

$$0 = \sum p_{\Delta,l} F^{(2m,2n)}_{d,\Delta,l} \quad (\text{for } m + n > 0) \tag{3}$$

其中 $F^{(2m,2n)}$ 代表在对称点处的各阶导数值。我们可以将每个算符 $\mathcal{O}_{\Delta,l}$ 看作一个由其所有导数值构成的无穷维向量 $\vec{V}_{d,\Delta,l}$。那么，求和规则就变成了一个向量方程。

所有这些基向量 $\vec{V}_{d,\Delta,l}$ 在向量空间中张成了一个**凸锥 (convex cone)**。一个理论的谱是自洽的，当且仅当由其谱张成的凸锥能够线性组合出目标向量（在这里是与齐次方程组相关的原点向量，或是与完整方程相关的单位向量）。



$\Delta_{\min} > \Delta_c$　　$\Delta_{\min} = \Delta_c$　　$\Delta_{\min} < \Delta_c$

违背求和规则　　临界情况　　满足求和规则

因此，寻找物理界限 Δ_c 的问题，就转化为一个几何问题：对于一个假设的算符谱（例如，所有标量算符维度都大于某个 $\Delta_{\min}$），它所张成的凸锥是否足够“宽”，以至于能够满足求和规则方程?

3 数值共形自举方法

本节总结如何将上述几何问题转化为一个可执行的数值算法，以求解出最终的物理界限。

3.1 用线性泛函来判断

在高维空间中直接判断一个点是否在凸锥内是困难的。一个更强大的工具是**线性泛函** Λ，它可以被看作是作用在向量上的线性算子。几何上，$\Lambda(\vec{V}) = 0$ 定义了一个超平面。

该方法的核心判据来源于凸集分离定理：

- **理论被排除** ($\Delta_{\min} > \Delta_c$): 当假设的谱不自洽时，其张成的（投影）凸锥的张角小于 π。这意味着，必然**存在**一个线性泛函 Λ（一个分离超平面），使得对于谱中所有算符对应的向量 $\vec{V}$，都有 $\Lambda(\vec{V}) > 0$。如果能找到这样的 Λ，就证明了该谱不可能存在。

$$\Delta_{\min} > \Delta_c \Longleftrightarrow \text{存在一个泛函}\Lambda \text{ 使得}\Lambda(F_{d,\Delta,l}) > 0 \text{ 对所有谱中算符成立} \tag{4}$$

- **理论被允许** ($\Delta_{\min} < \Delta_c$): 当假设的谱是自洽的，其凸锥足够宽。这意味着，**不存在**任何一个线性泛函 Λ 能将所有基向量都置于其一侧。

$$\Delta_{\min} < \Delta_c \iff \text{不存在泛函}\Lambda\ \text{使得}\Lambda(F_{d,\Delta,l}) \geq 0\ \text{对所有谱中算符成立} \tag{5}$$

因此，寻找界限的问题，就变成了寻找是否存在这样一个“分离泛函” Λ 的问题。

3.2 数值方法

上述问题仍然是无穷维的。为了让计算机能够处理，必须进行两步关键的**截断**：

1. **截断向量空间**: 只考虑有限个导数分量，例如原文中使用了 6 阶的 9 个导数，将问题简化到一个 9 维向量空间。
2. **截断算符谱**: 构造一个有限的“试探集 (trial set)”，它由大量离散的 (Δ, l) 值以及代表大 Δ、大 l 极限的渐近行为向量组成。这个试探集必须能很好地代表整个谱的边界。

经过截断后，寻找分离泛函 Λ 的问题就变成了一个标准的**线性规划**问题：寻找一组泛函系数 $\lambda_{2m,2n}$，使得对于试探集中的所有向量 $\vec{V}_i$，都满足约束 $\Lambda(\vec{V}_i) \geq \varepsilon > 0$。

整个数值自举算法的核心流程可以总结如下伪代码：

Algorithm 1: 数值共形自举算法流程 (包含实现细节)

1. 参数设置 (基于 Mathematica 代码示例)

输入: 外部算符维度 d。

导数基底 B**:** 选定一组偏导数阶数 (m, n) 来定义向量空间。

例: 9 维空间 $B = \{(6,0), (4,2), (2,4), (0,6), (4,0), (2,2), (0,4), (2,0), (0,2)\}$。

试探集参数:

- 最大自旋 $l_{\max} = 10$。
- 标量维度的采样上限 $\Delta_{\max} = 20$。
- 高自旋维度采样范围：对于自旋 l，采样 $\Delta \in [l+2, l+10]$。
- 采样步长: $\delta\Delta = 0.2$, $\delta l = 2$。

搜索参数:

- 二分搜索初始区间 $[\Delta_{\text{low}}, \Delta_{\text{high}}] = [2.0, 3.0]$。
- 迭代次数 $N_{\text{iter}} = 6$ (或更高以获得所需精度)。

线性规划公差: $\varepsilon = 10^{-5}$。

2. 算法主体

procedure FIND-BOUND(d)

  for $i = 1$ to N_{iter} **do**

    $\Delta_{\text{mid}} \leftarrow (\Delta_{\text{low}} + \Delta_{\text{high}})/2$ ▷ 检验假设：谱中所有标量算符维度 $\Delta \geq \Delta_{\text{mid}}$

    构建算符试探集 $\mathcal{V}$**:**

    $\mathcal{V} \leftarrow$ empty set ▷ a) 添加标量算符 $(l = 0)$

for Δ from Δ_{mid} to $\Delta_{\max}$ step $\delta\Delta$ **do**
    Add ComputeDerivativeVector$(d, \Delta, 0, B)$ to $\mathcal{V}$.
end for ▷ b) 添加高自旋算符 $(l \geq 2)$
for l from 2 to $l_{\max}$ step δl **do**
    for Δ from $l+2$ to $l+10$ step $\delta\Delta$ **do**
        Add ComputeDerivativeVector(d, Δ, l, B) to $\mathcal{V}$.
    end for
end for ▷ c) 添加大自旋/维度极限的渐近向量
for x from 0 to 10 step 0.2 **do** ▷ x 是一个渐近参数
    Add ComputeAsymptoticVector(x, B) to $\mathcal{V}$.
end for

用线性规划寻找分离泛函 Λ**:**
令 M 为一个矩阵，其行由试探集 $\mathcal{V}$ 中的所有向量 $\vec{V}$ 构成。
求解线性规划可行性问题：**寻找**一个列向量 $\vec{\alpha}$ (泛函 Λ 的系数)，
使得 $M \cdot \vec{\alpha} \geq \vec{\varepsilon}$，其中 $\vec{\varepsilon}$ 是所有分量均为 ε 的常数向量。
(这等价于最小化一个零成本函数 $c(\vec{\alpha}) = \vec{0} \cdot \vec{\alpha}$)。

if 线性规划问题有可行解 $\vec{\alpha}$ **then**
▷ 成功找到分离泛函，假设不成立。
    Δ_{mid} 被排除 $\implies$ 真实的界限更低。
    $\Delta_{\text{high}} \leftarrow \Delta_{\text{mid}}$
else
▷ 找不到分离泛函，未发现矛盾。
    Δ_{mid} 被允许 $\implies$ 真实的界限更高或就在此处。
    $\Delta_{\text{low}} \leftarrow \Delta_{\text{mid}}$
end if
end for

return Δ_{high} ▷ 作为维度上限 $f(d)$ 的高精度数值解。
end procedure

本文所总结的数值共形自举方法的详细 Mathematica 代码实现，我已开源至：https://github.com/YinkaiYu/Numerical-Conformal-Bootstrap-in-4D

参考文献

[1] R. Rattazzi, V. S. Rychkov, E. Tonni and A. Vichi, “Bounding scalar operator dimensions in 4D CFT,” JHEP **12** (2008), 031, doi:10.1088/1126-6708/2008/12/031 [arXiv:0807.0004 [hep-th]].