无质量矢量场的正则量子化

陈畅

(中山大学物理学院，学号 20343087)

摘要：本文介绍了无质量矢量场的正则量子化程序。由于无源电磁场就是无质量的矢量场，因而也可以看作是对电磁场的正则量子化。本文主要参考了余钊焕老师尚未出版的《量子场论讲义》[1]，也加入了一些个人学习时的思考和理解，如对规范条件的理解等。另外，由于量子化过程中碰到的计算大都十分繁琐，不利于突出其中的物理思想，故本文只保留了较为简单的计算推导，具体的计算过程可以参看余钊焕老师的《量子场论讲义》[1]。

关键词：无质量矢量场；电磁场；正则量子化

1　拉氏量及规范条件

我们构造无质量矢量场的拉氏量：

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{1.1}$$

计算得到 $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}=-F^{\mu\nu}$，$\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu}=0$

带入 Euler-Lagrange 方程

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu}=0 \tag{1.2}$$

得到

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}=0 \tag{1.3}$$

可见此即无源的 Maxwell 方程。
若考虑规范变换：

$$A'^{\mu}(x)=A^{\mu}(x)+\partial^{\mu}\chi(x) \tag{1.4}$$

可以发现 $F^{\mu\nu}$ 在规范变换下不变：

$$\begin{aligned}F'^{\mu\nu}(x)&=\partial^{\mu}A'^{\nu}(x)-\partial^{\nu}A'^{\mu}(x)\\&=\partial^{\mu}[A^{\nu}(x)+\partial^{\nu}\chi(x)]\\&\quad-\partial^{\nu}[A^{\mu}(x)+\partial^{\mu}\chi(x)]\\&=\partial^{\mu}A^{\nu}(x)-\partial^{\nu}A^{\mu}(x)\\&\quad+(\partial^{\mu}\partial^{\nu}-\partial^{\nu}\partial^{\mu})\chi(x)\\&=F^{\mu\nu}(x)\end{aligned} \tag{1.5}$$

即有规范对称性

$$F'^{\mu\nu}(x)=F^{\mu\nu}(x) \tag{1.6}$$

人为选定 Lorenz 规范条件

$$\partial_\mu A^{\mu}=0 \tag{1.7}$$

在选定规范条件后，若只有 $\chi(x)=0$ 能使

$$\begin{cases}A'^{\mu}(x)=A^{\mu}(x)+\partial^{\mu}\chi(x)\\A^{\mu}(x)\text{ 满足规范条件}\\A'^{\mu}(x)\text{ 满足规范条件}\end{cases} \tag{1.8}$$

同时成立，则说明 $A^{\mu}(x)$ 被唯一确定下来，不再具有规范自由度；反之则说明 $A^{\mu}(x)$ 还有剩余的规范自由度。

将 Lorenz 规范条件带入(1.8)可得到 $\chi(x)$ 所需满足的条件为

$$\partial^2\chi(x)=0 \tag{1.9}$$

这方程显然有非零解，这说明在取定了 Lorenz 规范后 $A^{\mu}(x)$ 依然有剩余的规范自由度。换言之，$A^{\mu}(x)$ 的自由度应小于 3。

自然地，我们假定 $A^\mu(x)$ 的自由度为 2，剩余的两个自由度是“虚假”的自由度，它们是非物理的，对物理态不做出任何贡献。这点我们在第 3 节引入了 Gupta-Bleuler 条件后就会看到。

2 正则量子化

为了顺利引入等时对易关系以进行正则量子化，我们希望 $A^0(x)$ 也是动力学量。为此我们在原来的拉氏量中添加一个规范固定项，使原来的拉氏量变成

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (2.1)$$

其中 $\xi(x)$ 可看作一个不会传播的常数场。

带入 E-L 方程计算得到 ξ 的运动方程是

$$-\frac{1}{2\xi^2}(\partial_\mu A^\mu)^2 = 0 \quad (2.2)$$

这和 Lorenz 规范条件(1.7)是等价的。

也就是说，通过引入这样的规范固定项，我们可以将 Lorenz 条件内含在拉氏量中，从而将 A^0 的身份从非独立的非动力学分量提升为动力学量。

既然如此，A^0 也会有着对应的动量密度 π_0。由 $\pi_\mu = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^0 A^\mu)}$ 计算得到

$$\begin{aligned} \pi_0 &= -\frac{1}{\xi}\partial_\mu A^\mu \\ \pi_i &= -F_{0i} = -\partial_0 A_i + \partial_i A_0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

从而我们引入等时对易关系：

$$\begin{aligned} &[A^\mu(\mathbf{x},t), \pi_\nu(\mathbf{y},t)]、\\ &\quad = \mathrm{i}\delta^\mu{}_\nu \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}); \\ &[A^\mu(\mathbf{x},t), A^\nu(\mathbf{y},t)] \\ &\quad = [\pi_\mu(\mathbf{x},t), \pi_\nu(\mathbf{y},t)] = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

根据(2.1)计算 A^μ 的运动方程，得到

$$\partial^2 A^\mu - (1-\frac{1}{\xi})\partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = 0 \quad (2.5)$$

我们选取规范固定参数 $\xi = 1$（这称为 Feynman 规范），则 A^μ 的运动方程即化为 d’Alembert 方程：

$$\partial^2 A^\mu(x) = 0 \quad (2.6)$$

它的解可以用平面波展开来表示：

$$\begin{aligned} &A^\mu(\mathbf{x},t) = \\ &\int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\sigma=0}^{3} e^\mu(\mathbf{p},\sigma) \\ &(b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + b_{\mathbf{p},\sigma}{}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

其中系数 $e^\mu(\mathbf{p},\sigma)$ 是 Lorentz 矢量，称为极化矢量，它依赖于动量 $\mathbf{p}$，而且具有另外一个指标 σ 以描述矢量粒子的极化态。我们希望一组极化矢量能够构成 Lorentz 矢量空间的一组基底，从而用它们可以展开一个任意的 Lorentz 矢量。为此我们要求它们满足正交归一关系

$$e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e^\mu(\mathbf{p},\sigma') = g_{\sigma\sigma'} \quad (2.8)$$

和完备性关系

$$\sum_{\sigma=0}^{3} g_{\sigma\sigma} e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e_\nu(\mathbf{p},\sigma) = g_{\mu\nu} \quad (2.9)$$

这里我们选取

$$
\begin{aligned}
e^{\mu}(\mathbf{p},0) &= (1,0,0,0) \\
e^{\mu}(\mathbf{p},1) &= \frac{1}{|\mathbf{p}||\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|}(0, p^1 p^3, p^2 p^3, -|\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|^2) \\
e^{\mu}(\mathbf{p},2) &= \frac{1}{|\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|}(0, -p^2, p^1, 0) \\
e^{\mu}(\mathbf{p},3) &= \frac{1}{|\mathbf{p}|}(0, p^1, p^2, p^3)
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

其中

$$|\mathbf{p}_{\mathrm{T}}| = \sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2} \tag{2.11}$$

显然，这个展开式是自共轭的：

$$[A^{\mu}(\mathbf{x},t)]^{\dagger} = A^{\mu}(\mathbf{x},t) \tag{2.12}$$

相应的共轭动量密度展开式为

$$
\begin{aligned}
&\pi_{\mu}(\mathbf{x},t) = -\partial_0 A_{\mu} = \\
&\int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{i} p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\sigma=0}^{3} e_{\mu}(\mathbf{p},\sigma) \\
&(b_{\mathbf{p},\sigma} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} - b_{\mathbf{p},\sigma}{}^{\dagger} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x})
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

它也满足自共轭条件

$$[\pi_{\mu}(\mathbf{x},t)]^{\dagger} = \pi_{\mu}(\mathbf{x},t) \tag{2.14}$$

根据平面波展开式(2.7)和(2.13)以及等时对易关系(2.4)，推出产生算符 $b_{\mathbf{p},\sigma}{}^{\dagger}$ 和湮灭算符 $b_{\mathbf{p},\sigma}$ 的对易关系为

$$
\begin{aligned}
&[b_{\mathbf{p},\sigma}, b_{\mathbf{q},\sigma'}{}^{\dagger}] = -(2\pi)^3 g_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \\
&[b_{\mathbf{p},\sigma}, b_{\mathbf{q},\sigma'}] = [b_{\mathbf{p},\sigma}{}^{\dagger}, b_{\mathbf{q},\sigma'}{}^{\dagger}] = 0
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

计算得到哈密顿量算符为

$$
\begin{aligned}
&H = \int \mathrm{d}^3 x \mathcal{H} = \int \mathrm{d}^3 x \left(\pi_{\mu}\pi^{\mu} - \mathcal{L}_1\right) = \\
&\int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} (-b_{\mathbf{p},0}{}^{\dagger} b_{\mathbf{p},0} + \sum_{\sigma=1}^{3} b_{\mathbf{p},\sigma}{}^{\dagger} b_{\mathbf{p},\sigma}) \\
&+(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} 2E_{\mathbf{p}}
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

其中第二项是零点能，极化态 $\sigma = 0$ 的贡献为负，这是因为 Minkowski 时空中度规的时间对角元和空间对角元符号相反。

将真空态 $|0\rangle$ 定义为被任意 $b_{\mathbf{p},\sigma}$ 湮灭的态，其能量本征值为零点能 E_{vac}，即有

$$
\begin{aligned}
&b_{\mathbf{p},\sigma}|0\rangle = 0, \langle 0|0\rangle = 1, \\
&H|0\rangle = E_{\mathrm{vac}}|0\rangle
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

其中

$$E_{\mathrm{vac}} = 2\delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \mathrm{d}^3 p E_{\mathbf{p}} > 0 \tag{2.18}$$

动量为 $\mathbf{p}$、极化态为 σ 的单粒子态定义为

$$|\mathbf{p}, \sigma\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} b_{\mathbf{p},\sigma}{}^{\dagger}|0\rangle \tag{2.19}$$

由于产生算符间是互相对易的，因此它描述的是一个无质量玻色子。

计算得到

$$[H, b_{\mathbf{p},\sigma}{}^{\dagger}] = E_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p},\sigma}{}^{\dagger} \tag{2.20}$$

从而

$$
\begin{aligned}
H|\mathbf{p},\sigma\rangle &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} H b_{\mathbf{p},\sigma}{}^{\dagger}|0\rangle \\
&= \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} (b_{\mathbf{p},\sigma}{}^{\dagger} H + E_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p},\sigma}{}^{\dagger})|0\rangle \\
&= \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} (E_{\mathrm{vac}} + E_{\mathbf{p}}) b_{\mathbf{p},\sigma}{}^{\dagger}|0\rangle \\
&= (E_{\mathrm{vac}} + E_{\mathbf{p}})|\mathbf{p},\sigma\rangle
\end{aligned} \tag{2.21}
$$

这看起来是一个正常的结果，说明单粒子态 $|\mathbf{p},\sigma\rangle$ 比真空多了一份能量 $E_{\mathbf{p}}$。

但通过产生湮灭算符的对易关系我们可以计算得到

$$\langle \mathbf{p},0|\mathbf{p},0\rangle = -2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) \tag{2.22}$$

这表明单粒子态 $|\mathbf{p},0\rangle$ 的自我内积是负的，这不符合 Hibert 空间中态矢的要求。而且，相应的能量期待值也是负的：

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathbf{p},0|H|\mathbf{p},0\rangle = (E_{\mathrm{vac}} + E_{\mathbf{p}})\langle \mathbf{p},0|\mathbf{p},0\rangle \\
&= -2E_{\mathbf{p}}(E_{\mathrm{vac}} + E_{\mathbf{p}})(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) < 0
\end{aligned} \tag{2.23}
$$

这样的负能量结果在物理上看来是不可接受的，因为它会导致零点能并不是最低

能，也就是说，有粒子的态的能量反而要比真空态更低，这违背了我们的物理常识。

另一方面，我们计算 A^0 和 $\partial_\mu A^\mu$ 的对易子：

$$
\begin{aligned}
&[A^0(\mathbf{x},t),\partial_\mu A^\mu(\mathbf{y},t)] \\
&=-[A^0(\mathbf{x},t),\pi_0(\mathbf{y},t)] \\
&=-\mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

它在 $\mathbf{x}=\mathbf{y}$ 处非零，也就是说，在此处 $\partial_\mu A^\mu \neq 0$，Lorenz 规范条件无法得到满足。这说明在考虑量子场的时候，Lorenz 规范条件和等时对易关系是无法同时得到满足的，因为 Lorenz 规范条件对量子场 $A^\mu(x)$ 的限制太强了。

3. Gupta-Bleuler 条件

由于 Lorenz 规范条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ 与正则量子化程序不相容，我们可以考虑将对场本身的限制转变为对态矢的限制，即要求任何物理上允许的态矢 $|\psi\rangle$ 必须满足 Gupta-Bleuler 条件：

$$
\partial_\mu A^{\mu(+)}(x)|\psi\rangle = 0 \tag{3.1}
$$

其中 $A^{\mu(+)}(x)$ 是 $A^\mu(x)$ 的平面波展开式中的正能解部分（即(2.7)中的前一项)，相应地有负能解部分 $A^{\mu(-)}(x)$（即(2.7)中的后一项)。

于是

$$
\begin{aligned}
&\partial_\mu A^{\mu(+)}(x) = \\
&\int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}p\cdot x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}E_{\mathbf{p}}(b_{\mathbf{p},0}-b_{\mathbf{p},3})
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

因此 Gupta-Bleuler 条件意味着 $(b_{\mathbf{p},0}-b_{\mathbf{p},3})|\psi\rangle = 0$，即

$$
\begin{aligned}
&b_{\mathbf{p},0}|\psi\rangle = b_{\mathbf{p},3}|\psi\rangle, \\
&\langle\psi|b_{\mathbf{p},0}{}^\dagger = \langle\psi|b_{\mathbf{p},3}{}^\dagger
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

于是

$$
\langle\psi|b_{\mathbf{p},0}{}^\dagger b_{\mathbf{p},0}|\psi\rangle = \langle\psi|b_{\mathbf{p},3}{}^\dagger b_{\mathbf{p},3}|\psi\rangle \tag{3.4}
$$

这样一来，$\sigma=1$ 和 $\sigma=3$ 的极化态对于可观测物理量期望值的贡献总是相互抵消的，比如能量的期望值就化为

$$
\begin{aligned}
&\langle\psi|H|\psi\rangle = \\
&\int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{p}}\sum_{\sigma=1}^{2}\langle\psi|b_{\mathbf{p},\sigma}{}^\dagger b_{\mathbf{p},\sigma}|\psi\rangle \\
&+E_{\mathrm{vac}}\langle\psi|\psi\rangle
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

可见，要求 Gupta-Bleuler 条件成立会除去 $\sigma=1$ 和 $\sigma=3$ 的极化态的贡献，我们很自然地会认为它们就是非物理态，而事实也正是如此：

$$
\partial_\mu A^{\mu(+)}(x)|\mathbf{p},0\rangle = \mathrm{i}e^{-\mathrm{i}p\cdot x}E_{\mathbf{p}}|0\rangle \tag{3.6}
$$

$$
\partial_\mu A^{\mu(+)}(x)|\mathbf{p},3\rangle = \mathrm{i}e^{-\mathrm{i}p\cdot x}E_{\mathbf{p}}|0\rangle \tag{3.7}
$$

由于 $E_{\mathbf{p}} \neq 0$，故单粒子态 $|\mathbf{p},0\rangle$ 和 $|\mathbf{p},3\rangle$ 不符合 Gupta-Bleuler 条件，确实是非物理的态矢。

参考文献：

[1] https://yzhxxzxy.github.io/cn/teaching.html?spm=wolai.workspace.0.0.2596767bwvpr37

Canonical quantization of massless vector fields

Chen Chang

(*School of Physics, Sun Yat-Sen University, student ID: 20343087*)

Abstract

In this paper, the canonical quantization program for massless vector fields is introduced. Since passive electromagnetic field is a vector field without mass, it can also be regarded as canonical quantization of electromagnetic field. This article mainly refers to Professor Yu Zhaohuan's unpublished "Lectures on Quantum Field Theory"[1] , and also incorporates some personal thinking and understanding during learning, such as understanding of standard conditions. In addition, because most of the calculations encountered in the process of quantization are very tedious, which is not conducive to highlighting the physical ideas, this paper only retains a relatively simple calculation derivation. For the specific calculation process, please refer to Lectures on Quantum Field Theory by Yu Zhaohuan[1].

Keywords: Mass free vector field; Electromagnetic field; Canonical quantization