

关于一类“虚实结合的有限大传热平板模型的修正方法”的评注

余荫铠，王誉晨

中山大学 物理学院，广州 510275

摘要：在传热法测量材料导热系数和比热的实验中，由于有限大样品与周围绝热材料依然存在的热交换而导致加热器传给样品的等效热流需要被修正。我们对于中山大学基础物理实验教学团队提出的基于 COMSOL 仿真来严格数值计算该修正系数的方法进行了重现和评注，肯定了他们的方案提高了该修正模型下普适性和可扩展性，指出了他们的方案中存在面临的循环论证、效率低、物理图像不清晰等问题，并给出了改进方向。

关键词：虚实结合，COMSOL，LabVIEW，传热模型

1 引言

传热法是现代工程实践以及高校物理实验教学中测量材料导热系数和比热容的常用方法。在传热实验的设计过程中，需要首先在理论上推算待测参数与传热过程之间的关系，为了简化推算过程，往往采用无限大平板传热模型。但是在实际的实验操作中，使用的却是有限大平板材料，同时由于实验装置的非对称散热，加热器周围的热流分布也往往与理论预期不一致。这就导致了理论预期的参数测量结果与实验结果的偏差。

在不改变实验设计又不过度复杂化理论模型的情况下，要使得这个测量方法尽量准确，就要求我们对理论上的待测参数与传热过程之间的关系做出修正。在工程中，这样的修正往往是基于经验的。

中山大学基础物理实验教学团队近年来做了许多虚实结合的教学设计 [1]。对于传热平板的修正问题，他们提出了借助 COMSOL 软件建立不同精细程度的仿真模型来考察热流分配情况，以拟合理论公式中热流的修正系数 [2-3]。这种办法不是基于经验的，而是利用数值求解传热方程的办法来对理论简化模型作出改进，对该模型的可扩展性做出了很大改进。

中大团队提供的实验讲义 [4] 详述了仿真操作流程，在这个基础上我们重复了他们的工作，并作少许改进。在这个过程中我们发现他们的教学设计思路存在一定程度的思路混乱、容易引起学生误解的问题，甚至修正思路存在循环论证的问题。下面我们将对他们的工作进行完整客观的评注。

2 无限大传热平板模型

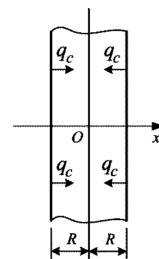


图 1 理想无限大不良导体平板

考虑如图 1 所示的一维无限大导热模型，一无限大不良导体平板厚度为 $2R$ ，初始温度为 t_0 ，在平板两侧同时施加均匀的指向中心面的热流密度 q_c ，则平板上各处的温度将随加热时间 τ 而变化，故 x 处的温度可表示为 $t(x, \tau)$ 。如图 1 所示，以样品中心为坐标原点，则上述模型的热运动方程

可写为

$$\begin{cases} \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial t(R, \tau)}{\partial x} = \frac{q_c}{\lambda}, \quad \frac{\partial t(0, \tau)}{\partial x} = 0 \\ t(x, 0) = t_0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 $a = \lambda/\rho c$, $q_c = c\rho R \frac{\partial t}{\partial \tau}$, λ 为材料的导热系数, ρ 为材料的密度, c 为材料的比热。方程 (1) 的解为

$$t(x, \tau) = t_0 + \frac{q_c}{\lambda} \left[\frac{a}{R} \tau + \frac{1}{2R} x^2 - \frac{R}{6} \right] + \frac{2R}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos \frac{n\pi}{R} x \cdot e^{-\frac{an^2\pi^2}{R^2}\tau} \quad (2)$$

当加热时间 τ 满足 $a\tau/R^2 > 0.5$ 时, 上式的级数项可以忽略, 则 (2) 简化为

$$t(x, \tau) = t_0 + \frac{q_c}{\lambda} \left[\frac{a}{R} \tau + \frac{1}{2R} x^2 - \frac{R}{6} \right] \quad (3)$$

则如图1所示可知, 被测样品中心 ($x = 0$) 和表面处的温度 ($x = R$) 分别为

$$t(\tau)|_{x=0} = t_0 + \frac{q_c}{\lambda} \left[\frac{a}{R} \tau - \frac{R}{6} \right] \quad (4)$$

$$t(\tau)|_{x=R} = t_0 + \frac{q_c}{\lambda} \left[\frac{a}{R} \tau + \frac{R}{3} \right] \quad (5)$$

两处的温度随加热时间线性上升, 升温速率为 $aq_c/\lambda R$, 这是一个跟材料导热性能和实验条件有关的参数。而加热面和中心面间的温度差为

$$\Delta t(\tau) = t(\tau)|_{x=R} - t(\tau)|_{x=0} = \frac{q_c R}{2\lambda} \quad (6)$$

可见, 该状态下被测样品各处匀速升温, 而 Δt 与加热时间 τ 无关并保持恒定, 这种状态称为准稳态。则样品的导热系数为

$$\lambda = \frac{q_c R}{2\Delta t} \quad (7)$$

样品的比热为

$$c = \frac{q_c}{\rho R \frac{dt}{d\tau}} \quad (8)$$

在使用中, 我们控制热流 q_c 恒定, 就可以测量温差 Δt 和斜率 $\frac{dt}{d\tau}$, 从而算出被测样品的热导率 λ 和比热 c 。

3 传热模型的有限尺度修正问题

这个实验在操作上的难点仅剩如何精确控制热流 q_c , 这就是一系列修正问题的起源。

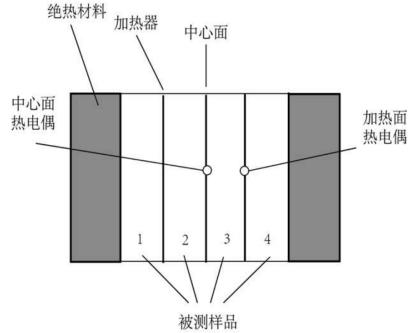


图 2 实验四样品示意图

热流 q_c 本身并不是一个可以直接控制的物理量, 我们通常使用加热片来提供热流, 我们可以直接控制的是加热片的发热功率。如果直接像图1一样对称地把加热片贴在样品两侧, 则我们无法从理论上推算加热片的耗散功率有多少部分转化为热流 q_c 进入样品, 有多少直接流入空气了。在实验中往往使用对称性解决这个问题。使用对称的四块样品, 如图2, 此时对于每个加热片而言, 左右两次是近似对称的, 我们从对称性的角度假设加热片的发热量各分一半流入两块样品, 则

$$q_c = \frac{1}{2} \frac{U^2}{r} \equiv q \quad (9)$$

式中 U^2/r 就是加热片的发热功率。我们将这个实验设计下的理想热流记为 q 。

然而在实际的实验中, 即便我们做了如此对称的构造, 在实验中往往仍是

$$q_c \neq q \quad (10)$$

定性而言, 有两方面的原因。

一方面是, 对于前面的“热流各分一半”理论而言, 其对称条件仍是近似的——对于每块加热板而言, 其两侧的受热结构不一样, 比如我们分析对于图2中样品 3、4 以及它们之间的那块加热板的传热, 3 的左边界是绝热的 (这是由于比较严格的对称性), 而 4 的左边仍和绝热材料有热交换, 所以不会严格地“热流各分一半”, 而是流向 4 的热流更多一些, 这就导致 $q_c < q$ 。

另一方面, 在无限大样品的假设下, 样品中的热流都是垂直与样品平面的, 这就相当于要求在

实际实验于图2中，这四块样品四周（也就是这个二维图中的显示的上下两侧）不会与外界有热交换。而在实际实验中，这是做不到的，我们的实验装置中，样品四周是三合板构成的样品框，会有相当一部分的热量从这里散失。从而，从加热器流向样品3的热流会有一部分从样品四周的边界流出去，而没有起到使中心面升温的作用，这也会造成 $q_c < q$ 。

综上所述，这两方面的原因都使得 $q_c < q$ ，于是在经验上，可以确定一个修正因子，使得

$$q_c = Aq < q \quad (11)$$

其中 $A < 1$ 。这样的经验公式暗含了一个假设，即 A 是一个（至少近似）与加热时间以及温度无关的常数，对应到物理图像上，就是上面两方面导致的热流分配模式是不随加热时间和温度改变的。

4 虚实结合的修正思路

实际上 q_c 和 q 的关系是可以通过求解传热方程来严格计算的，而不是只能通过经验来确定。中山大学基础物理实验教学团队提出的利用COMSOL仿真来数值求解温度场的方案，就是这类方法。这类方法可以突破上文所说的那种隐含的假设，即并不要求一定用(11)来进行修正，而是可以在数值上得到函数

$$q_c = q_c(q) \quad (12)$$

的形式，进而在导热系数和比热的测量中得到数值上的函数

$$\lambda = \lambda(q), \quad c = c(q) \quad (13)$$

来实现测量方案的更高阶修正。不过，一般来讲，函数形式 $q_c[q]$ 其实也是 λ, c 的泛函，因此在测量出 λ, c 之前，函数形式 $q_c[q]$ 也是无法准确确定的，仿真只能给出试探解。

这个问题只有两种解决方案。

一种方案是，假设（在一定范围内）， $q_c[q]$ 与 λ, c 无关，即

$$q_c[q, \lambda, c] \approx q_c(q) \quad (14)$$

这种思路其实和引入经验公式(11)时的暗含假设是一样的，不过这里并不要求 $q_c(q)$ 如(11)一样是

线性的。既然 $q_c(q)$ 与 λ, c 无关，那么就可以以某种 λ, c 已知的标准样品来测量出 $q_c(q)$ 的具体函数关系（数值上的关系），从而用来测量种 λ, c 未知的待测样品。这是一个十分方便的办法，尽管它引入了一个假设，但是依然可以通过各种手段来确定这个假设成立的范围。

另一种方案是，把泛函 $q_c[q, \lambda, c]$ 视为多元函数，即

$$q_c[q, \lambda, c] = q_c(q; \lambda, c) \quad (15)$$

利用仿真模型是可以计算这个多元函数的函数值的，由此可以把 λ, c 拟合出来（视为参数的话，称作拟合；视为多元函数的话，其实就是多元函数求极值；视作泛函就是求泛函极值）。这种方法可以得到很高阶的修正，修正结果的普适性和可扩展性很强，但是局限性在于，利用仿真模型计算多元函数 $q_c(q; \lambda, c)$ 的函数值往往是效率很低的，而拟合过程又需要求出大量的试探函数值，这就造成了这种办很难在有限的时间成本和计算成本内实现。

5 仿真建模重现及评注

中山大学基础物理实验教学团队近年来做了许多虚实结合的教学设计，关于传热问题的COMSOL建模，除了本文要提到的这个模型之外，他们还设计了电阻加热升温过程的COMSOL仿真教学实验，对于这个实验，我们在附录中有极为详细的探讨，这里就不再赘述，我们仍是专注于导热平板模型的修正问题。

我们首先重现中大团队建立的仿真模型，接着在此基础上讨论他们所做的后续工作究竟属于上述两种方案的哪一种，以及他们所作的设计的效果如何。

5.1 理想导热建模

无限大平面、理想导热模型是可以在仿真中实现的，中大团队所做的二样品仿真模型就是如此。我们按照他们提供的讲义上的完全一致的几何、材料参数，建立了二样品模型，如图3所示。需要强调的是，我们在二样品的前后两个面设置了广义向内热通量 q_c ，同时，四周都是绝热的，热流只有垂直于平板平面的分量，这就与无限大的理论模型（图1）全然一致了。

这个仿真模型的意义在于，提供了数值上可以控制的广义向内热通量 q_c ，这样方便我们后续

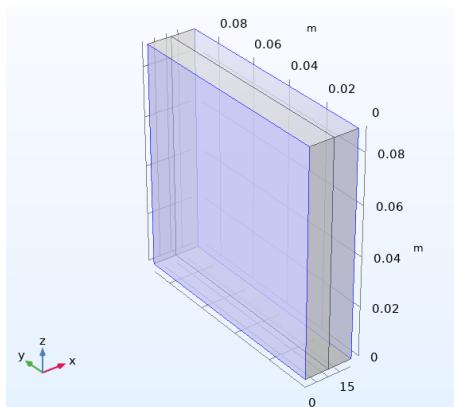


图 3 二样品建模

拿 q_c 和 q 来比较。这部分结果我们在下一小节展示。

如果直接对这个理想模型进行仿真，它显然一定满足 (7)(8)，这是平凡的。

直接利用理想模型的结果，结合真实实验数据，其实就可以作出如经验公式 (11) 一样的修正了，这正是中大团队在他们的方案的最后，明确提出修正思路。按照这个思路，其实可以得出相当漂亮的拟合结果，如图 4 所示。拟合结果得到：

$$A = 0.62 \quad (16)$$

对于中心面温度升高量，其实验斜率与仿真斜率相当接近，对于加热面与中心面温差，准静态阶段实验与仿真数据几乎完全重合。仿真与实验的最大偏差仅为 0.3%，可以说是拟合得相当完美。这里我们设置的传热样品材料为有机玻璃，其传热参数为：

$$\lambda = 0.175 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K}) \quad (17)$$

$$\rho = 1196 \text{ kg}/\text{m}^3 \quad (18)$$

$$c = 1396 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}) \quad (19)$$

但是，我们不得不指出，这种办法拟合得到的修正因子 A 完全不可信——因为在这个实验中，我们并不精确知道待测样品的传热参数，(17)(18)(19) 实际上是我们之前根据已有的经验公式 (11) 计算出来的。也就是说，这里的算法陷入了循环的谬误，是用 A 在算 A ，是得不到任何有用的信息的。

这个方法的改进非常简单，正如我们在上一小节就说到的，采用一个已知传热参数的标准样品来确定 A ，这样就不会陷入循环论证的逻辑谬误。当然，我们还需要再次强调，这里隐含的假设

是， A 是一个（至少近似）与加热时间以及温度无关的常数。至于如何确定这个假设成立的范围，那就是后话了。根据上文的拟合偏差来看，只要有了标准样品来标定，这种办法的拟合效果非常不错。

后续更精细的仿真模型，实际上不是（至少不是直接目的）为了得到更精细的修正结果，而是提供另一种可扩展性强的修正办法。

5.2 实际导热模型

同理，我们按照中大团队的讲义重现实际导热模型，如图 5 所示。其中，样品的四周有一个阻热框，前后有阻热泡沫。它们的传热参数，按照中大团队的讲义来看，都是已知的、确定的，具体的参数值可以参考他们的工作。

与我们在附录中所展现的做法相同，我们基于 COMSOL 的多层膜材料技术（膜材料指的是，这个材料加在仿真模型的边界上，在几何模型中是没有厚度的，但是在热力学计算时会考虑这层材料内的热传递，如附录图 15。这种技术很好地处理了几何尺度相差悬殊的几何模型问题。），在电阻和海绵之间添加了厚度为 0.5 mm 左右的湿度为 62% 的湿空气薄膜，湿度是根据实际实验的条件确定的。

在这个模型中，不需要对热流分配系数进行修正，事实上，按照中大团队的思路，正是要根据我们在第 4 节中提出的第二个方案进行泛函优化，求得 λ^*, c^* 使得

$$\delta (q_c[q, \lambda, c])|_{\lambda^*, c^*} = 0 \quad (20)$$

我们在第 4 节就讨论过，这种办法是及其低效的，而在中大团队提供的具体操作方案中，这种低效性尤为显著。在他们的方案中，待拟合的参数不仅有 λ, c ，还有加热片的电阻、电压等。这其实是真实实验的数据测量计划不完善导致的。

这似乎是这个团队的疏忽之处，他们忘记了这个实验设计的初衷。为了更高效地拟合 λ, c 或者说数值计算 $q_c(q, \lambda, c)$ 的函数值，他们本该是重新进行真实实验并测量出这些测量不完善的参数值的，而不是像他们的工作中所引导学生们做的那样，去调节这些无关紧要的参数以（非常容易）使得我们的泛函优化收敛到局部最优点。他们在做这个设计的时候，似乎只记得这样一个属于 engineering 的目的：要让仿真曲线和实测曲线重合，而就此把更多的调参自由度视作一个可以

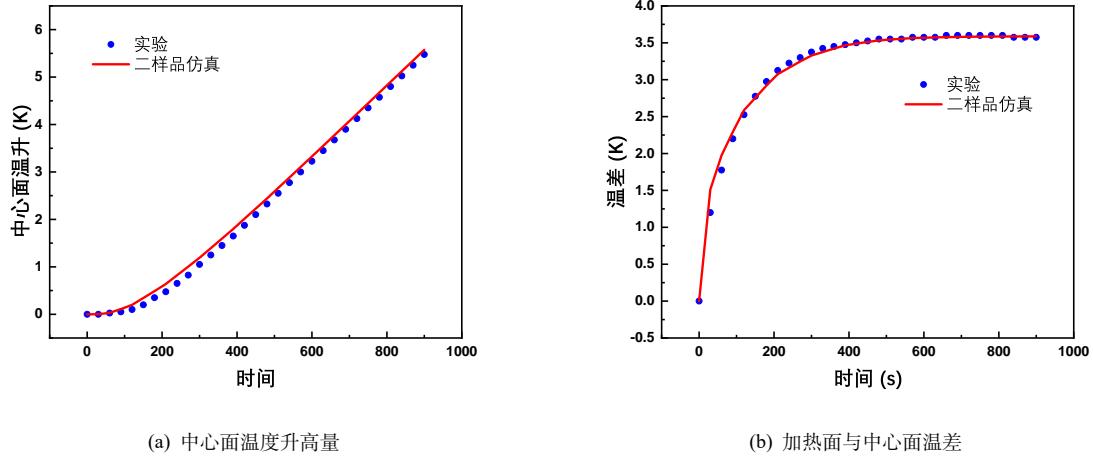


图 4 二样品仿真拟合修正因子 A

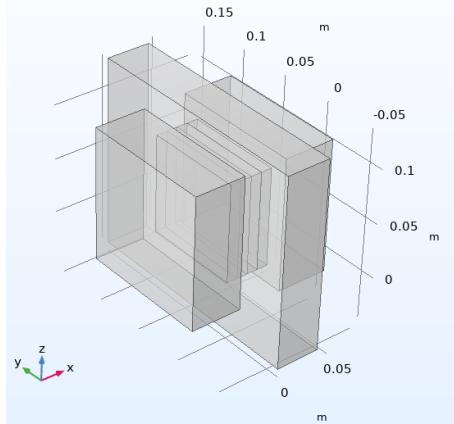


图 5 实际导热模型

操作的机遇，但忘记了本来的目的。

我们还是把这一结果重现出来，尽管在过多自由度的调参中这个拟合可能以及失去意义了。这我们拟合得到的（局部）最优的参数值是

$$\lambda = 0.169 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K}) \quad (21)$$

$$\rho = 1196 \text{ kg}/\text{m}^3 \quad (22)$$

$$c = 1375 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}) \quad (23)$$

$$\text{air thickness} = 2.5 \text{ mm} \quad (24)$$

$$r = 60.5 \omega \quad (25)$$

$$U = 16 \text{ V} \quad (26)$$

尽管我们坚持认为仿真来拟合是一种极为低效的方法，但是建立一个精细的仿真模型并不是多此一举。它至少有两方面重要的用途。

一方面，它可以直观展示我们在第3节所说的热流分配模式。如图7a所示，样品前后的泡沫绝热材料明显使得加热器（即温度场峰值所在之处）两侧的温度场对称性破缺，指向外侧的温度梯度要大于指向内侧的温度梯度，会有更多的热流流向外侧，使得 $q_c < q$ 。如图7b所示，样品四周的非理想阻热框也会吸收样品的热量，在温度场中形成指向四周的温度梯度，从加热器流向样品的热流会有一部分从样品四周的边界流出去，而没有起到使中心面升温的作用，这等价于 $q_c < q$ 。

作为一个教学实验，这样一个定量的仿真模型给出的结果比我们第3节的纯理论的定性的分析会起到更好的教学效果，更加直观。

另一方面，把四样品和二样品两个模型结合起来，利用第4节所说的第一种方案，即假设（在一定范围内）， $q_c[q]$ 与 λ, c 无关，即

$$q_c[q, \lambda, c] \approx q_c(q) \quad (27)$$

那么我们就不需要标准材料来标定（即不通过经验公式的方法），来得到

$$q_c(q) \quad (28)$$

其思路是，对四样精细品模型设置不同的 q 值，调整二样品模型的 q_c 使得二样品模型的升温行为尽量贴近四样品模型（我们做了一个例子，如图8，此时的真实实验参数并不重要，只是提供一个参考，因为我们已经假定 $q_c[q]$ 与 λ, c 无关了），那么就把此时的 q_c 作为这个 q 对应的函数值 $q_c(q)$ 。

其实这也是一种拟合，但是与第4节中复杂的

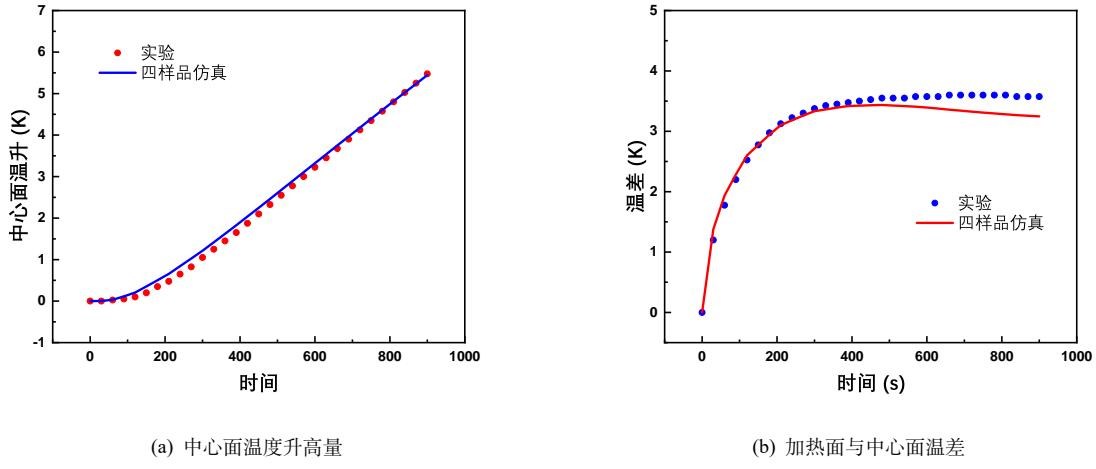


图 6 四样品仿真拟合结果

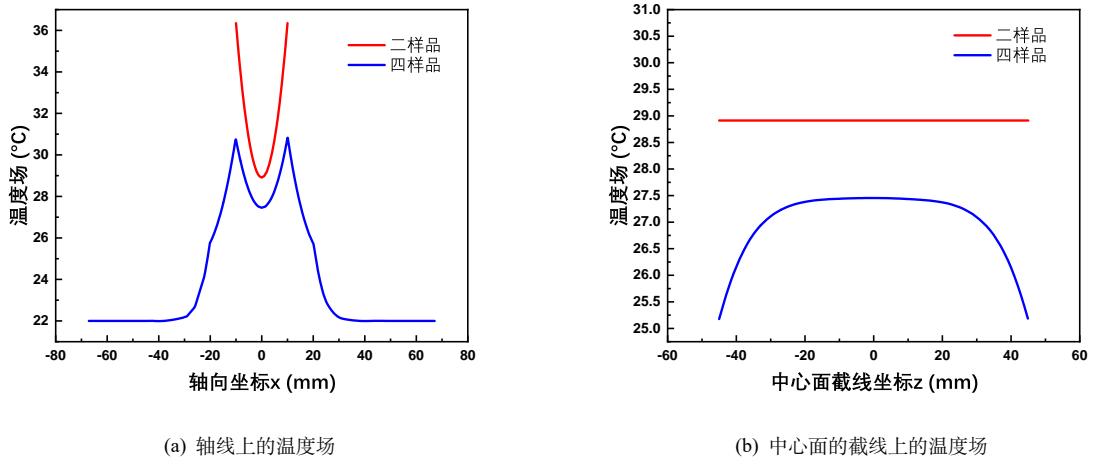


图 7 二样品、四样品模型的温度场对比

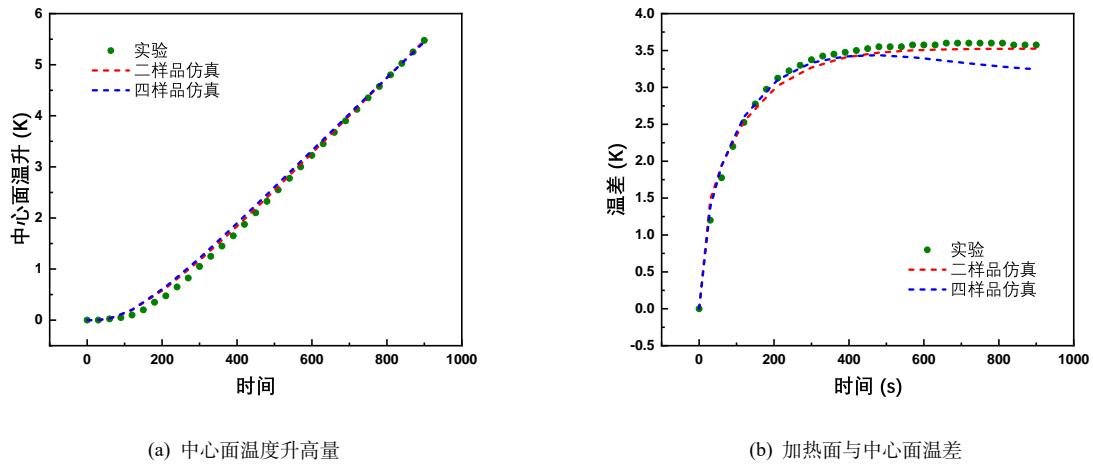


图 8 用二样品模型拟合四样品模型

多元函数拟合不同，这里待拟合的参数只有一个 A ，而且二样品模型的计算效率也是相当高的。

在结果上我们可以把这种办法看作经验公式的一种推广，即

$$q_c = q_c(q) = A(q)q \quad (29)$$

它可以在更大范围内得到传热平板模型的准确修正。在加热功率变化不太大时， $A(q)$ 退化为常数，就回到了经验公式 (11)。对于图8的拟合结果，我们得到

$$A(261.23 \text{ W/m}^2) = 0.4724 \quad (30)$$

6 问题总结与改进方向总结

在评注部分我们说的比较零散，最后我们整理一下中山大学基础物理实验教学团队的工作所面临的问题，以及几种改进方向。

面临的问题有：

1. 在无标准样品的情况下，用实际上包含了 A 的经验值的实验结果来拟合二样品模型中的修正因子 A ，实际上是用 A 来算 A ，计算结果是没有意义的。
2. 在精细的四样品仿真模型中，仅为了升温曲线拟合（降低成本函数）得好，把许多具有实际物理意义的、不可能调节的、但又没有充分测量的参数纳入调参自由度，导致真正需要测量的物理量 λ, c 的拟合效率极低、拟合结果的稳定性反而降低（很容易拟合到局部最优点）。

可以改进的方向有：

1. 结合标准样品，并假设 A 是常数，就可以直接用最简单的二样品模型得到拟合效果非常好的 A 的值。
2. 精细的四样品仿真模型非常直观地展现了 A 这个修正因子出现的原因，不论是定性层面还是定量层面。与其让学生陷入无意义的低效的调参过程，不如让学生分析仿真与实验差异的原因。
3. 结合二样品模型和四样品模型，并假设 $q_c[q]$ 与 λ, c 无关，就可以不需要标准样品直接用二样品模型拟合四样品模型得到修正因子 A 或 $A(q)$ 作为 q 的函数。

参考文献

- [1] 沈韩、赵福利、方奕忠、冯饶慧、廖德狗、崔新图、黄臻成. 结合定量仿真的虚实结合物理实验教学模式 [J]. 物理与工程, 2020, 30(5): 5.
- [2] 崔新图, 方奕忠, 沈韩, 等. 有限长通电圆柱导体温度分布的严格解及 COMSOL 模拟 [J]. 大学物理, 2018, 37(8): 6.
- [3] 方奕忠, 沈韩, 崔新图, 等. 基于 CompactDAQ 的多通道温度测量实验及 COMSOL 模拟 [J]. 物理与工程, 2021.
- [4] 沈韩, 等. 中山大学物理学院基础物理实验讲义：实验 C8 多通道温度测量及仿真实验 [J]. 2022.

Comment on a Kind of "Correction Method of Finite Size Heat Transfer Plate Model with Virtual-Reality Combination"

Yinkai Yu and Yuchen Wang

School of Physics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China

Abstract: In the experiment of measuring the thermal conductivity and specific heat of the material by the heat transfer method, the equivalent heat flux transmitted by the heater to the sample needs to be modified because of the heat exchange between the finite sample and the surrounding thermal insulation material. We reproduce and comment on the method of strictly numerically calculating the correction coefficient based on COMSOL simulation put forward by the basic physics experiment teaching team of Sun Yat-sen University, affirm that their scheme improves the universality and expansibility of the modified model, point out the problems in their scheme, such as cyclic argumentation, low efficiency and unclear physical image, and give the direction of improvement.

Key words: virtual-reality combination, COMSOL, LabVIEW, heat transfer model

A 实验信息记录

A.1 基本信息

实验室房间号: 311	实验人姓名 (学号): 余荫铠 (20343078)
实验桌桌号: 311A07	合作者姓名 (学号): 王誉晨 (20343059)

A.2 实验环境

第一次实验 (2022年6月1日星期三下午)	室温: 26°C	湿度: 62%
第一次实验 (2022年6月7日星期三下午)	室温: 26°C	湿度: 70%
第一次实验 (2022年6月15日星期三下午)	室温: 24°C	湿度: 56%

A.3 仪器设备

CompactDAQ 单槽机箱	一个
多通道温度采集模块	一套
直流稳压电源	一个
实验测控用计算机	一台
电阻	四个 ($19.864\Omega, 42.908\Omega, 81.597\Omega, 99.829\Omega$)
T型热电偶丝及热电偶焊接机	一台

B 四通道电阻温度自动测量

B.1 基于 CompactDAQ 的测量原理

CompactDAQ 是一种工业级的坚固耐用的便携式数据采集平台，它将信号连接和调理功能与模块化 I/O 集成在一起，可直接连接多种传感器和测试信号。CompactDAQ 平台有多种不同型号，具有丰富的总线、机箱和 I/O 调理选项，结合 LabVIEW 软件的可自定义特性，广泛应用于中通道数的多通道数据采集和控制领域。

基于 CompactDAQ 平台的数据采集系统主要由 CompactDAQ 机箱和 C 系列数据采集模块组成。CompactDAQ 机箱负责控制定时、同步，以及计算机和 C 系列数据采集模块之间的数据传输。单个 CompactDAQ 机箱可同时管理多个定时引擎，可在同一个测控系统内以不同采样速率运行多个独立的硬件定时 I/O 任务。数据采集模块直接与传感器和被测信号相连，具有信号采集和调理功能。模块型号超过 100 种，可提供无线通讯、模拟信号输入输出、数字信号输入输出、电机驱动、同步等多种功能，具有不同的测量精度、通道数和采样速率，需要根据实验的要求进行选择。

本实验将采用 NI cDAQNI-9171 型 USB 单槽机箱和 NI 9211 型高密度热电偶模块。NI 9211 内置冷端温度补偿 (CJC)，兼容多种型号的热电偶温。高速模式下最高采样率为 1200S/s，ADC 转换精度为 24Bit，温度测量的最高灵敏度为 0.02°C 。测试通道与地面接地的隔离电压为 250Vrms，能适应较恶劣的测量环境。

NI 9211 的引脚如图9所示。将 NI 9211 连接热电偶信号时，热电偶正极连接 TC+ 端子，热电偶负极连接 TC- 端子。查看热电偶说明文档或热电偶绕线盘可确定其正负极。NI 9211 带有公用端子 (COM)，内部连线至模块的隔离参考地。使用带屏蔽层的热电偶时，如图 2 所示的，将 COM 端连接屏蔽端，屏蔽端连接热电偶的共模参考电压。共模参考电压是指热电偶共模电压 $\pm 1.2 \text{ V}$ 范围内的电压。使用浮接热电偶或热电偶至地

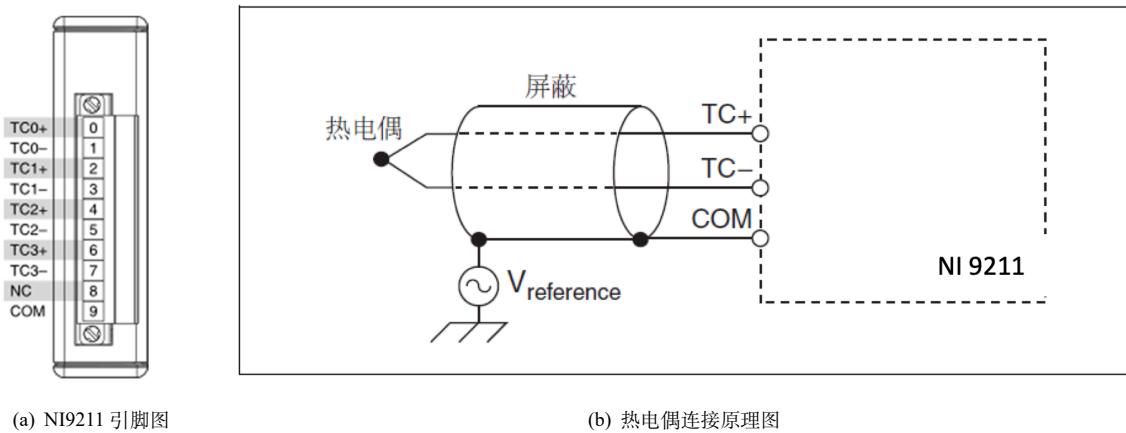


图 9 原理图

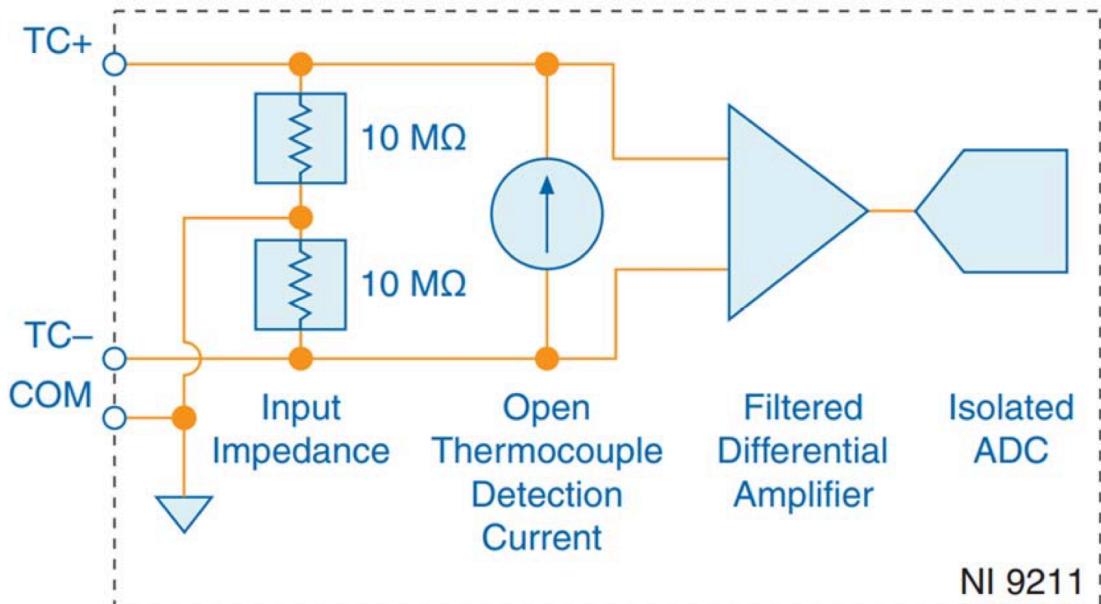


图 10 NI9211 单通道输入原理

的电势差位于 ± 1.2 V 范围内的情况下，将 COM 端和屏蔽端接地。用户还可根据实际应用选择其他形式的屏蔽端接线方式。

NI 9211 的每个通道经差分滤波器和多路复用器后，由一个 24 位模数转换器 (ADC) 进行采样。每个通道还带有一个开路热电偶检测 (OTD) 电路，由 TC+ 和 TC- 端子间的电流源组成。通道连接开路热电偶时，电流源将把端子间电压强制为满量程电压值。图 3 为 NI 9211 某一通道的输入电路示意图。

NI 9211 多路复用 4 个热电偶输入通道、1 个冷端补偿 (CJC) 通道和 1 个自动归零通道至 ADC。每个通道均带有在 TC+ 至 COM 端子以及 TC- 至 COM 端子间产生输入阻抗的电阻。对于多数应用，热电偶源阻抗引起的增益及偏置误差可忽略不计。具有较高导线阻抗的热电偶可引入更多误差。模块各通道使用同一个公共地 (COM)，该公共地与系统中的其它模块隔离。NI 9211 的共模电压范围是任意通道至 COM 端的最大电压值。未连接 COM 端的情况下，共模电压是任意通道间的最大电压值。NI 9211 将测量每个通道的共模电压值，信号超出共模电压范围时，在软件中返回警告。

温度测量误差部分取决于热电偶类型、热电偶精度、待测温度、以及冷端温度。为实现最佳精度要求，可通过 NI 9211 端子的温度梯度保持为最小值，并启用自动归零通道实现。

连接器附近的环境温度变化，或热电偶导线产生的热量或冷量直接进入端子节点均可产生热梯度。为实现最佳精度测量，遵循下列守则，以最小化热梯度：

- 使用后壳连接器。
- 使用小直径的热电偶导线，较短的导线与端子节点间的热量传递较少。
- 靠近弹簧端子连接器完成热电偶连线，以保证导线温度相同。
- 避免在过冷或过热物体附近进行热电偶连线。
- 如需连接延长线，请使用与热电偶导线导电材料相同的导线。
- 最小化周边热源及端子周围空气流动。

B.2 LabVIEW 自动测控程序

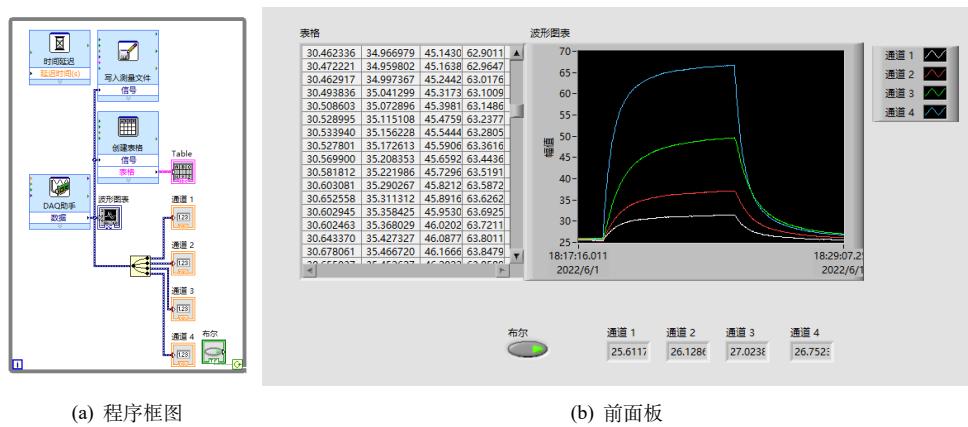


图 11 LabVIEW 自动测控程序

基于 LabVIEW 编程，我们设计了一个四通道温度测量的数据采集程序，如图 11 所示。

B.3 电阻升温过程

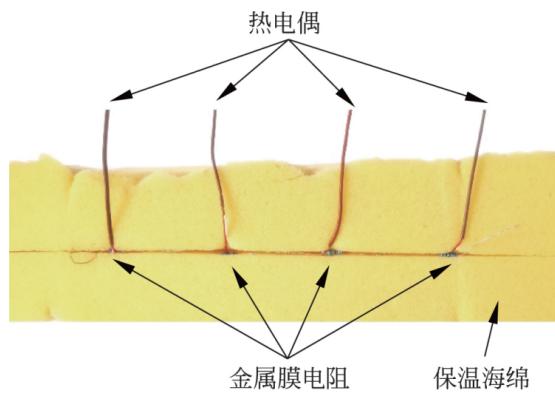


图 12 真实电阻升温模型

按照图 12 所示的方式，实验中同时串联加热四个电阻，并用厚海绵保温。它们的阻值分别是 19.864Ω 、 42.908Ω 、 81.597Ω 、 99.829Ω 。

我们在三组不同的电流下进行加热，加热电流分别为 50 mA 、 42 mA 、 28 mA 。

不同电阻和电流，一共测得 12 组电阻升温数据，我们将其展示在图 13a 中。我们通过归一化的办法可以大致确定电流和电阻对电阻升温过程和平衡温度的决定关系。图 13b 将电流归一化，我们可以看到其

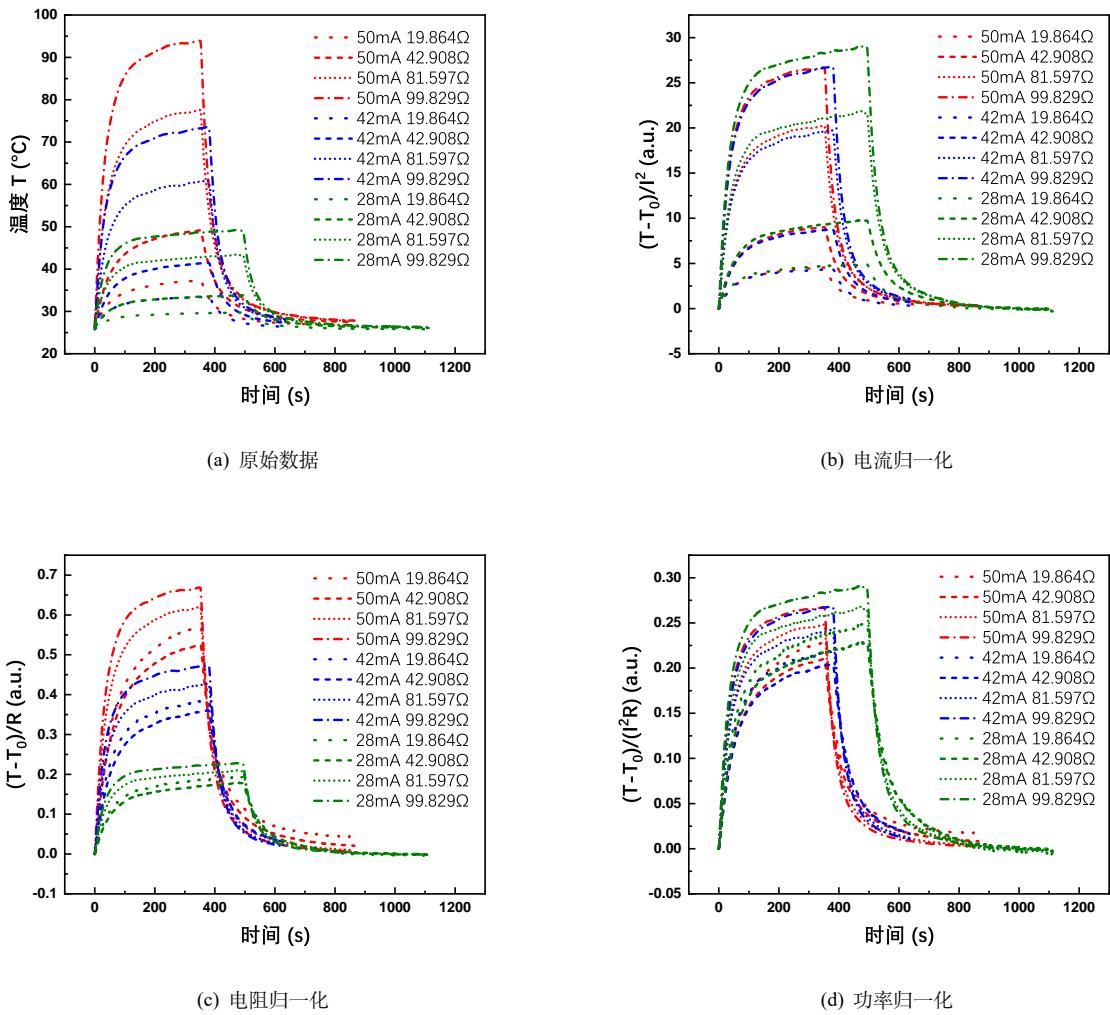


图 13 真实电阻升温曲线

中不同电流对应的曲线大致是重合的；图13c将电阻归一化，我们可以看到其中不同电阻对应的曲线呈现了重合的趋势，但是还是存在不可忽视的偏差；图13d将电流和电阻同时归一化，也即将加热功率归一化，我们可以看到其中不同功率对应的曲线也有重合的趋势。

总结这样的关系，我们不难得出：电流几乎只影响曲线的幅度，而不影响其形态，平衡升温幅度或者说曲线幅度正比于电流的平方。而平衡温度虽然和电阻正相关，但是并不是严格的正比于电阻，可能会有非线性的影响。从后文的仿真分析中我们将会看到，这或许是因为不同电阻的和保温层之间的空气层厚度不同导致的，毕竟电阻和电流对传热模型而言只会影响发热功率，不应该有本质上的差别。

C 电阻加热过程的 COMSOL 模拟

C.1 电阻加热的仿真模型

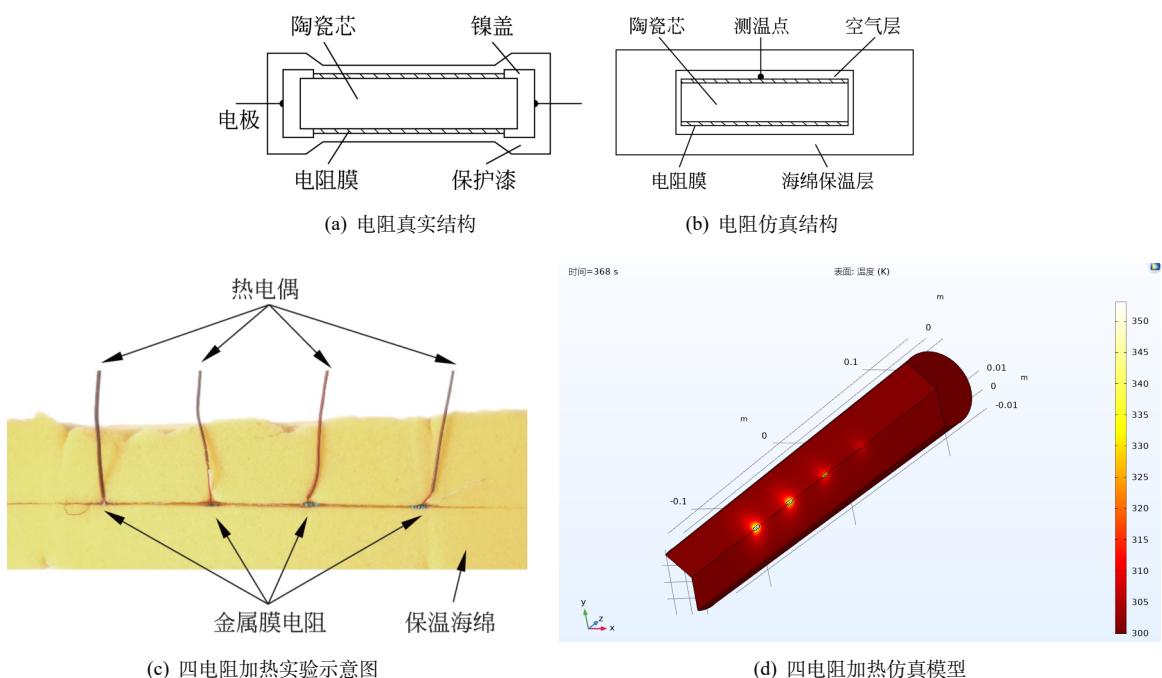


图 14 四电阻加热仿真模型的搭建思路

按照中大团队的讲义，我们建立了四电阻加热过程的二维轴对称传热模型（如图14）。之所以采用二维轴对称传热模型，是因为实际上我们并不准确知道保温层的导热系数和比热容，以及它与空气的热交换系数，这些系数我们只能在仿真调节参数来拟合。即使我们建立三维传热模型，也不过是增加了几个调节参数的自由度，它们可以使得保温层传热参数的拟合更准确一些。不过在这个模型中我们更加关心的是保温层对电阻升温过程的影响，于是我们直接用等效的二维轴对称模型即可。

仿真模型的几何结构基本上根据实验确定，部分测量值参考了中大团队的结果。电阻两两之间的距离为 40 mm，电阻的结构为圆柱陶瓷芯外裹一层铜电阻膜，陶瓷芯的半径为 0.9 mm，长度为 6 mm，电阻膜的长度与之相同，厚度为 0.1 mm。电阻外裹一圈厚海绵，圆柱形海绵的半径为 20 mm，长度为 280 mm。各材料的传热参数参考值如表C.1所示，由于我们不了解实验用的海绵和陶瓷的具体材料类型，其参数的具体值实际上是由后续的仿真拟合出来的。

在中大模型的基础上，我们对其进行了进一步的优化，且这个优化是及其必要的。实际上，电阻和保温层之间不是直接接触的，应当隔着一层薄空气。我们利用 COMSOL 的多层膜材料技术（膜材料指的是，这个材料加在仿真模型的边界上，在几何模型中是没有厚度的，但是在热力学计算时会考虑这层材料内的热传递，如图15。这种技术很好地处理了几何尺度相差悬殊的几何模型问题。），在电阻和海绵之间添加了厚度为 0.1 mm 左右的湿度为 56% 的湿空气薄膜。考虑到由于电阻放置方式的不同，电阻与海绵之间的空

表 1 电阻传热模型仿真材料的参数

材料类型	导热系数 (W/(m · K))	密度 (kg/m ³)	比热容 (J/(kg · K))
铜	400	8960	385
陶瓷	450	3200	2475
海绵	0.164	25	1700

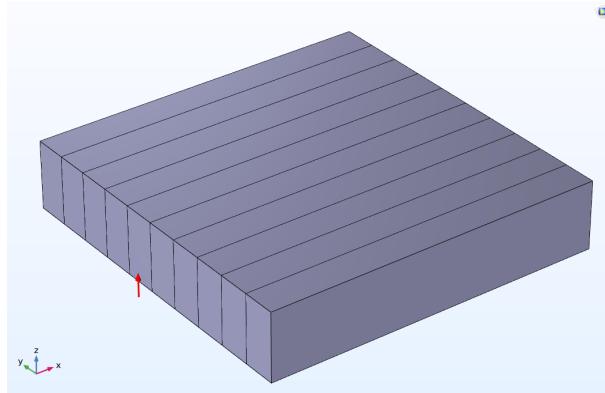


图 15 多层湿空气二维薄膜的三维重建图

气层厚度是不确定的，这也是需要我们后续拟合的参数。

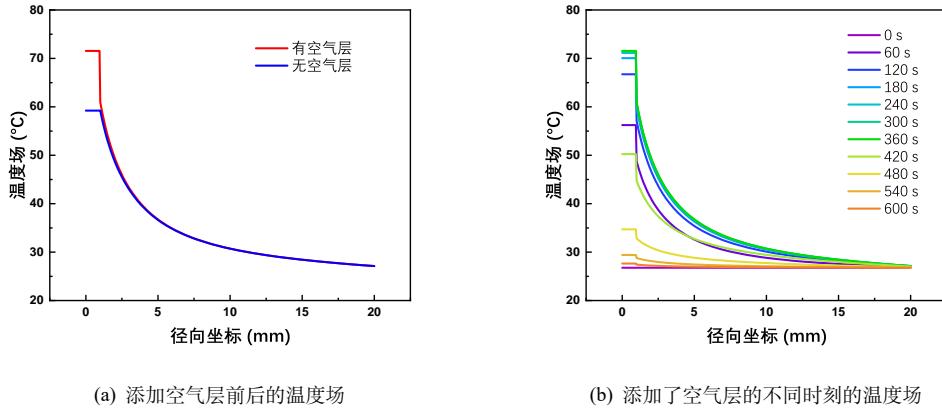


图 16 添加湿空气层对模型温度场的影响

由图16可见，在电阻表面的这层湿空气实际上相当显著地改变了模型中的温度分布，这说明我们的修正十分重要。此外，我们还注意到在电阻加热的过程中，所向外耗散的热量大部分是衰减于海绵中的，在海绵与空气之间的边界处，实际上海绵与外界没什么温差。这也揭示了为什么后文中海绵的导热系数对电阻的平衡温度有很大影响。

C.2 参数灵敏度分析

对于在建模过程中无法准确确定的参数，我们使用 COMSOL 的参数化扫描的办法探究电阻的升温过程关于这些参数的灵敏度。

最终（如图17），我们发现：海绵导热系数会显著影响电阻加热的平衡温度，海绵导热系数越大，平衡稳定越低；陶瓷比热容和空气层厚度影响升温速率，而几乎不影响平衡温度，陶瓷比热容或空气层厚度越大，升温越慢。

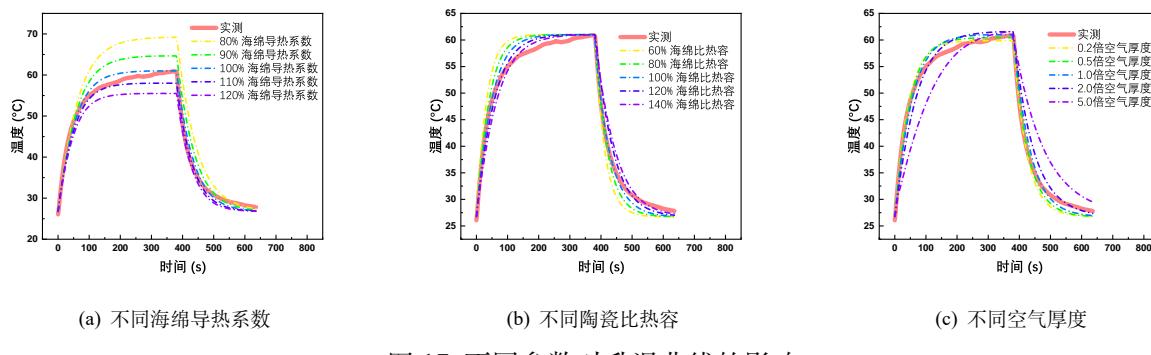


图 17 不同参数对升温曲线的影响

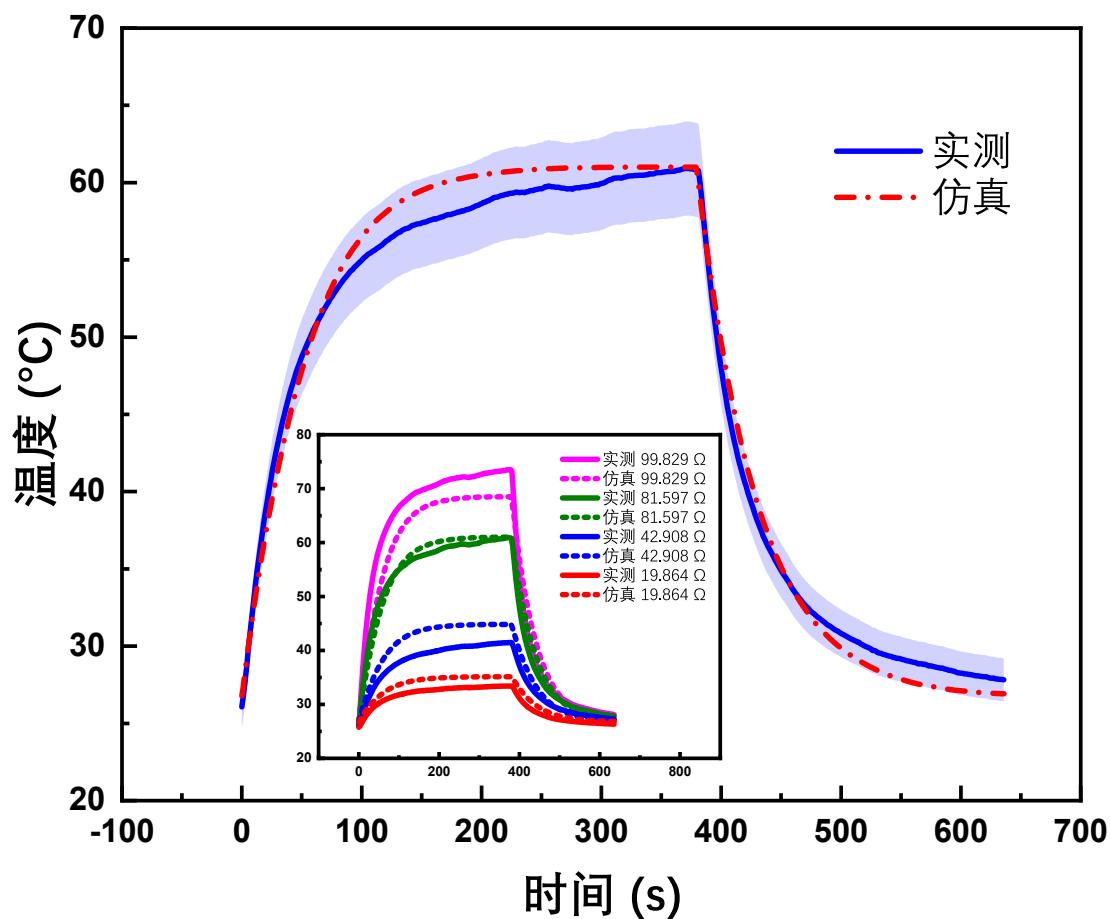


图 18 42mA 电流 81.597Ω 电阻的仿真拟合结果（95% 置信度）
插图：该参数条件下四电阻升温曲线的仿真实验比对

C.3 拟合结果

我们调节上一节所述的具有决定作用的参数，得到如图18所示的结果。可见我们的拟合结果与实验测量值的偏差不超过5%，是相当不错的。不过我们同时比对四个电阻的升温曲线，发现我们无法调节仿真参数来使得四条升温曲线均得到很好的拟合效果。我们认为其原因是我们在实验测量电阻温度时，部分电阻与热电偶并未良好接触，导致部分实验曲线是失真的。

D 有限大传热平板的实际实验数据

测量有机玻璃样品的厚度，如表2所示。

表2 有机玻璃样品厚度（单位：毫米）

测量次数	样品 1	样品 2	样品 3	样品 4
1	10.02	10.06	10.00	10.00
2	10.00	9.99	9.96	10.03
3	10.03	10.03	10.02	9.98
4	10.00	10.01	9.94	10.04
平均值	10.0125	10.0225	9.9800	10.0125
不确定度	0.0125	0.0225	0.0300	0.0225

我们选择厚度最相近的样品1和样品4放在中间，测量中心面的电偶电势，以及中心面以及加热面之间的电偶电势差，如表3所示。测量过程中，我们选取加热电压为16V。

表3 有机玻璃样品的温差电偶电势以及中心面电偶电势变化

加热电压 18V			加热电压 16V				
时间	温差电偶电势	时间	中心面电偶电势	时间	温差电偶电势	时间	中心面电偶电势
0:00	0.001	0:00	0.108	0:00	0.000	0:00	0.038
0:30	0.061	0:15	0.110	0:30	0.048	0:15	0.038
1:00	0.090	0:45	0.111	1:00	0.071	0:45	0.039
1:30	0.110	1:15	0.113	1:30	0.088	1:15	0.040
2:00	0.126	1:45	0.116	2:00	0.101	1:45	0.042
2:30	0.137	2:15	0.121	2:30	0.111	2:15	0.046
3:00	0.146	2:45	0.128	3:00	0.119	2:45	0.052
3:30	0.153	3:15	0.136	3:30	0.125	3:15	0.057
4:00	0.158	3:45	0.145	4:00	0.129	3:45	0.064
4:30	0.161	4:15	0.154	4:30	0.132	4:15	0.071
5:00	0.164	4:45	0.164	5:00	0.135	4:45	0.080
5:30	0.166	5:15	0.174	5:30	0.137	5:15	0.088
6:00	-	5:45	0.184	6:00	0.138	5:45	0.096
6:30	0.169	6:15	0.195	6:30	0.139	6:15	0.104
7:00	0.170	6:45	0.206	7:00	0.140	6:45	0.113
7:30	0.171	7:15	0.217	7:30	0.141	7:15	0.122
8:00	0.171	7:45	0.228	8:00	0.142	7:45	0.131
8:30	0.172	8:15	0.238	8:30	0.142	8:15	0.140
9:00	0.172	8:45	0.249	9:00	0.142	8:45	0.149
9:30	0.172	9:15	0.260	9:30	0.143	9:15	0.158
10:00	0.173	9:45	0.271	10:00	0.143	9:45	0.167
10:30	0.173	10:15	0.282	10:30	0.143	10:15	0.176
11:00	0.173	10:45	0.293	11:00	0.144	10:45	0.185
11:30	0.173	11:15	0.304	11:30	0.144	11:15	0.194
12:00	0.173	11:45	0.314	12:00	0.144	11:45	0.203
12:30	0.173	12:15	0.325	12:30	0.144	12:15	0.212
13:00	0.173	12:45	0.336	13:00	0.144	12:45	0.221
13:30	0.173	13:15	0.346	13:30	0.144	13:15	0.230
14:00	0.173	13:45	0.357	14:00	0.143	13:45	0.239
14:30	0.173	14:15	0.368	14:30	0.143	14:15	0.248
15:00	0.173	14:45	0.378	15:00	0.143	14:45	0.257

E 思考题

题 1. 什么是第一类边条件 (*Dirichlet* 条件)、第二类边条件 (*Neumann* 条件) 和第三类变条件 (*Robin* 条件), *COMSOL* 能求解哪种边条件的问题?

第一类边界条件是指给定边界上的值的条件, 即形如:

$$u|_S = u_0(x, y, z) \quad (31)$$

第二类边界条件是指给定边界上方向导数的值的边界条件, 即形如:

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_S = l_0(x, y, z) \quad (32)$$

第三类边界条件指的是混合边界条件, 即指定边界上的值与方向导数的某一特定线性组合的值, 即形如:

$$(u + \frac{\partial u}{\partial n})|_S = t_0(x, y, z) \quad (33)$$

COMSOL 三种边界条件的问题都能求解。其中第二类边界条件对应本实验仿真模型中广义向内热通量, 第三类边界条件对应本实验仿真模型中对流热通量。

题 2. 本实验采用电阻加热模型还有哪些可以改进的地方?

以下通过对实验结果的影响大小顺序进行建议:

- (1) 需要在实验前对各个热电元件进行热学性质标定, 从而获得各个热学量关于温度的关系
- (2) 在实际实验中, 散热和保温都不是完全的, 而是有一定的传导, 可以通过设定保温层与环境的传导系数和方程, 来更贴近实际结果。
- (3) 电阻的实际几何形状并不是圆柱形, 可以通过构建更精细的几何结构来改进仿真的模型, 使其更贴近实际结果。

题 3. 选择四块板加两个加热膜 (共六块板) 的情形下, 为何膜的通电加热功率要乘以修正因子 A ?

正文 (比如第3节) 已经分析地很很很很很很详细了, 可以去看看。

F 教师签名

见图19。

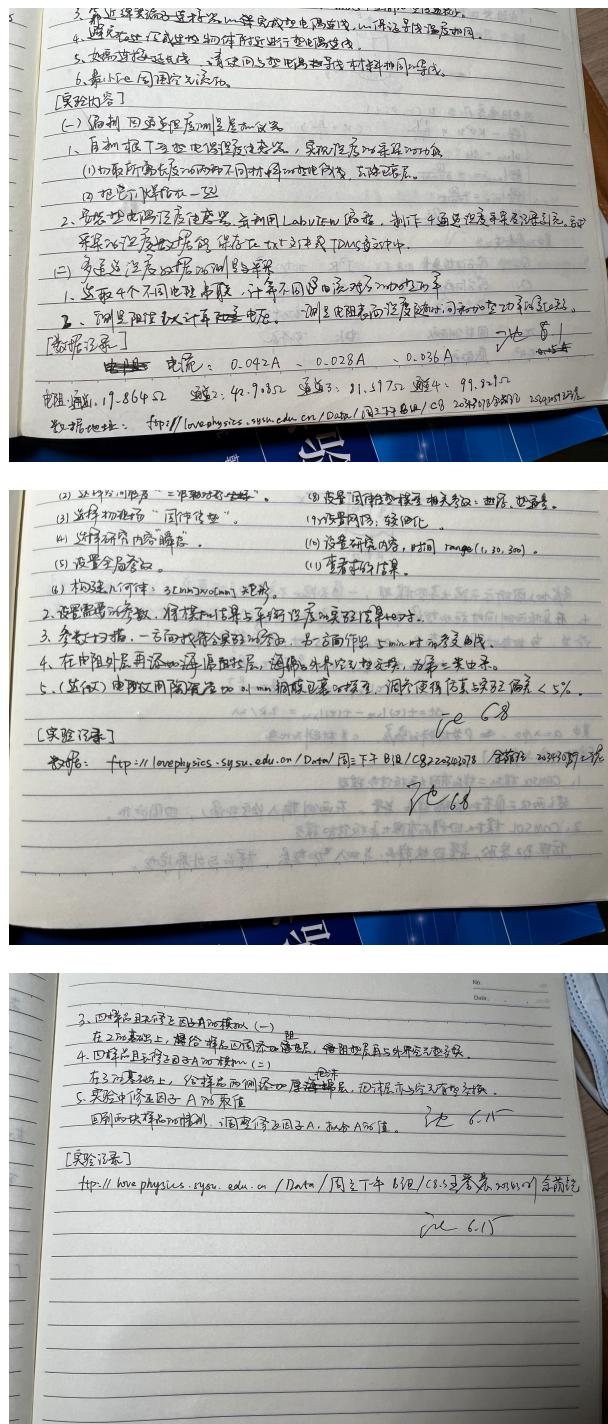


图 19 教师签名