关于动生电动势起源的讨论

李志兵
理学院，中山大学·深圳

摘要

法拉第电磁感应定律统一描写两种不同的物理现象：曲面磁通变化在曲面边界闭合曲线上感生出电动势，导线在磁场中运动在导线上感生出动生电动势。众所周知这两个现象背后的物理规律是麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式。磁通变化感生电动势的起源是清楚的，即变化的磁场伴随着涡旋电场。而动生电动势的起源于电荷运动轨道的约束，涉及的约束力并不唯一。本文着重讨论动生电动势的起源及其物理意义。

法拉第首先发现了电磁感应现象，其内容为：（1）两个导体线圈，在一个线圈突然通电或者突然断电的瞬间，另一线圈会感生出电流；（2）让一个通有稳恒电流的线圈相对另一个线圈移动，另一个线圈会感生出电流；（3）让一个永久磁铁（或电磁铁）相对线圈移动，会在线圈中感生出电流。[1,2] 电流的出现解释为导线在上述过程中获得了感生电动势。楞次指出感生电动势的方向总是企图阻碍磁通的变化。电磁感应定律通常表述为磁通量法则[3]

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{1}$$

左边称为线圈中的感生电动势，Φ是线圈所围曲面的磁通量，曲面的方向按照右手螺旋法则与约定的线圈电动势正向一致。把磁通法则从实验现象抽象出来作为一条物理定律，磁通是关于一个几何面的磁通，感生电动势是关于几何面的边界线，与线圈实物无关，下面称之为闭合曲线。事实上磁通法则还适用于电荷束缚在非闭合曲线中的情形，在此情形磁通是 dt 时间内通过曲线扫过曲面的磁通。

磁场变化和曲线变化都可以造成Φ随时间变化。

先讨论闭合曲线不变，仅磁场变化的情形。记固定的闭合曲线记为Γ. 取以Γ为边界的任意一个曲面 S，据麦克斯韦理论[3]

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} &= -\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} \\ &= -\left.\frac{\partial \Phi(t,\Gamma)}{\partial t}\right|_{\Gamma}\end{aligned} \tag{2}$$

若把（2）式解读为从实验现象总结出来的（1）式的一个应用，则左边的线积分便是闭合曲线Γ中的感生电动势，它清晰地起源于涡旋电场，即闭合曲线积分不等于零的电场。按照通常的定义，电动势是非静电场对单位电荷作功的能力。静电场沿闭合曲线的线积分总是等于零的，所以（2）式左边只需考虑非静电场。电场强度 $\boldsymbol{E}$ 是单位电荷受到的电场力，从而 $\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$ 是 $\boldsymbol{E}$ 对单位电荷作的功。假想单位电荷沿闭合曲线Γ移动一周，（2）式左边便是涡旋电场对单位电荷所作的功。严格地讲，假想过程要理解为不需要时间的虚位移，从而相应的功是虚功，实际上不需要真实发生也不可能真实发生。这与电动势是一种作功的能力，即一种类似势能的量，是一致的。诚然，涡旋电场不是保守力场，不能表示为势场的负梯度。

但在目前电荷运动路径固定的情形，电动势实际上起到势能的作用。实际上（2）式左边就是反映这样一个事实：变化的磁场在每一时刻总是伴随着涡旋电场。在许多教科书中，法拉第电磁感应定律专指固定闭合曲线的感生电动势与磁通变化率的这个关系。[4,5,6,7]

我们下面讨论细导线运动或变形的情形。类似讨论可以在[8]中找到。假设束缚在细导线中一个电荷 q 经过 dt 时间从导线 A 点移动到导线 B 点，经过的导线线元为 $d\boldsymbol{l}=\boldsymbol{u}dt$. 设该处导线线元的速度为 $\boldsymbol{v}$，则导线线元在 dt 从 AB 移动到 A′B′，如图 1 所示。注意 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 都是在实验室惯性系定义的，所以 q 相对实验室运动的速度为 $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$，从而经 dt 发生位移 $d\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})dt$，即图 1 的 AB′. 垂直导线线元方向的位移为 $d\boldsymbol{\rho}=v_{\perp}dt$，即图 1 的 AC 和 BC′.

根据洛伦兹力公式，电荷 q 在磁场 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)$中受到磁力

$$\boldsymbol{F}_m = q(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) \tag{3}$$

把 $\boldsymbol{v}$ 分解为 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_{\perp}+\boldsymbol{v}_{//}$，其中 $\boldsymbol{v}_{\perp}$垂直导线线元，$\boldsymbol{v}_{//}$平行导线线元。则平行导线线元的磁力为

$$\boldsymbol{F}_{m//} = q\boldsymbol{v}_{\perp}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) \tag{4}$$

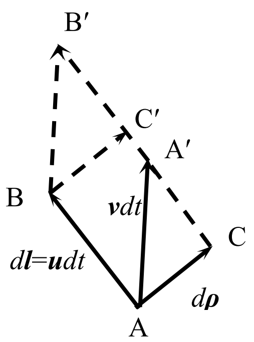

图 1. 运动导线的一个线元。它经 dt 从 AB 移动到 A′B′.

因为总磁力不作功，所以平行导线线元磁力 $\boldsymbol{F}_{m//}$作的功和垂直导线线元磁力 $\boldsymbol{F}_{m\perp}$作的功刚好互相抵消，

$$\boldsymbol{F}_{m//}\cdot d\boldsymbol{l} = -\boldsymbol{F}_{m\perp}\cdot d\boldsymbol{\rho} \tag{5}$$

因为电荷 q 被约束在导线线元内运动，所以 $\boldsymbol{F}_{m\perp}$必然被其他力（包括惯性力）被抵消。我们称这个“其他力”为约束力。约束力在 dt 内对 q 作的功是

$$\delta W = -\boldsymbol{F}_{m\perp}\cdot d\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{F}_{m//}\cdot d\boldsymbol{l} \tag{6}$$

把（4）式代入上式得

$$\delta W = q(\boldsymbol{v}_{\perp}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{l} = q\left(\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot d\boldsymbol{l} \tag{7}$$

利用矢量公式 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})$ 将上式写成

$$\delta W = -\frac{q}{dt}\boldsymbol{B}\cdot\left(d\boldsymbol{\rho}\times d\boldsymbol{l}\right) \tag{8}$$

右边 $d\boldsymbol{\rho}\times d\boldsymbol{l}$ 等于图 1 中以 ACC′B 为顶角的平行四边形面元，它也等于以 AA′B′B 为顶角的平行四边形面元。通过它的磁通为

$$\delta\Phi = \boldsymbol{B}\cdot(d\boldsymbol{\rho}\times d\boldsymbol{l}) \tag{9}$$

因此约束力对单位电荷作的功为

$$\delta\mathcal{E}_c = \frac{1}{q}\delta W = -\frac{\delta\Phi}{dt} \tag{10}$$

上式告诉我们，约束力对约束在导线线元的单位电荷所作的功等于单位时间导线线元扫过面元上的负磁通。回忆线元 $d\boldsymbol{l}$ 和 $d\boldsymbol{\rho}$ 的定义可知它们都正比于无穷小量 dt，从而（10）式是正比于 dt 的无穷小量。而磁场在 dt 中的变化也是正比于 dt 的无穷小量，所以在（9）式中不需要考虑 B 随时间的变化。因此，（10）式对变化的磁场也是正确的。

从推导过程可见，$\delta\mathcal{E}_c$ 与导线的特征以及电荷沿导线的运动无关，$\delta\mathcal{E}_c$ 实际上是因为电荷被束缚在运动线元上而引起。因此可以将细导线换成几何曲线，把（10）式理解为普遍的物理规律。若电荷沿导线发生真实移动，则 $\delta\mathcal{E}_c$ 是真实的功。若电荷相对线圈的位移只是假想的虚位移，则 $\delta\mathcal{E}_c$ 是虚功。因此 $\delta\mathcal{E}_c$ 是运动线元上的动生电动势。从力的角度看，约束力和磁力的合力平行导线方向。因磁力不作功，所以合力作的功（无论虚实）等于约束力作的功。

考虑在磁场中运动（或变形）的任意形状的曲线（闭合或不闭合），记为 C，如图 2 所示。假想在一个瞬间让单位电荷从曲线的一端移动到另端（若 C 不闭合），或让单位电荷绕行 C 一周（若 C 闭合），则约束力作的功等于它在每个线元所作虚功的积分，

$$\mathcal{E}_c = -\int_C \frac{\delta\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{11}$$

积分是沿 C 进行的线积分。由（11）式给出的 $\mathcal{E}_c$ 便是磁场中运动曲线上的动生电动势。

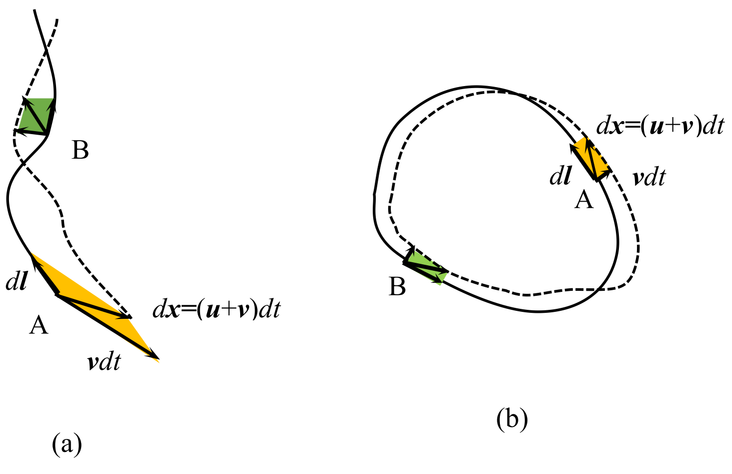

图 2. 变形或运动的曲线 C，曲面以指向读者为正向. 实线是 t 时刻的曲线，虚线是 $t+dt$ 时刻的导线。A 处新增面元（橙色）方向指向读者外，为正；B 处新增面元（绿色）方向背向读者，为负. （a）非封闭曲线；（b）封闭曲线。

小结和讨论如下。

感生电动势是对一条固定闭合曲线而言的，起源于涡旋电场，它是假想单位电荷瞬间绕闭合曲线一周过程中电场对单位电荷作的虚功。动生电动势可以出现在任意曲线上，起源于把电荷约束在曲线的某种力，它是假想单位电荷瞬间走过整条曲线的过程中约束力对单位电荷作的功。约束力不包括因电荷随曲线运动而感受到的宏观洛伦兹力。在实际情形，约束力可能有多种来源。例如导线的原子电子系统中的静电场、变化电磁场、量子多体效应引起的交换关联能、温度差等都可能导致对自由电荷的等效的约束力。如果线元加速运动，还应该把惯性力包括在约束力中。

这两种不同的物理现象的规律形式上都可以总结为法拉第电磁感应定律。感生电动势等于通过闭合曲线所围曲面的磁通负变化率。动生电动势等于通过运动曲线扫过曲面的磁通负变化率。在单一惯性系中的麦克斯韦电磁理论能够完整准确地描写这两个现象。若用法拉第电磁感应定律（磁通量法则）表述这两个现象的规律，其中电动势需要理解为与虚功相联系的一种做功的能力。如文献[3,9]强调的，只在拟稳恒电路中，电动势是一个方便有用的概念。在一般情形，（2）式或（11）仍然是严格正确的。但是对电磁波通过电路的时间不能忽略的情形，严格地说，电磁场对电荷所作的功不能如电动势字面上暗示的那样解释为势能。此情形，所谓电动势或本文所称之虚功只是相应表达式的一种命名而已。

费曼物理学讲义提到，感生电动势和动生电动势是两种不同的物理现象，它们的规律却可以简洁地写成的统一方程（1）式，是物理学中仅有（少见）的情形。[10]从惯性系变换的角度讨论感生电动势和动生电动势的关系已有一些有趣的文章[3,9]，本文不再复述。

致谢：感谢邓文基、张宏浩、李新奇、马中水、帅志刚等教授的有益讨论。

参考文献：

[1]《电磁学》，赵凯华,陈熙谋，高等教育出版社，2003
[2]《经典电动力学》 （第三版，影印版），J. D. Jackson, 高等教育出版社，2004
[3] 邓文基.电磁感应的通量法则与场方程[J].物理与工程，2022，32（03）：3-5+20
[4]《电动力学》（第三版），郭硕鸿，高等教育出版社，2008
[5]《现代电动力学》，王振林，高等教育出版社，2022
[6]《电动力学教程》（第二版），赵玉民，科学出版社，2021
[7]《经典电动力学》，曹昌祺，科学出版社，2009
[8]《电动力学导论》（第三版，影印版），D. J. Griffths，世界图书出版社，2005
[9]戴希，沙威，陈昊.物理，2022，51(3)：145
[10]《费曼物理学讲义》II（影印版），R.P. Feymann，R.B. Leighton, M. Sands，世界图书出版社，2004