规范场论初探

郭兆婷 19319033
（中山大学物理学院，广东 广州）

摘要：将规范场论中联络A_μ的变换形式与广义坐标变换中的克氏符变换规则进行对比，从李代数基矢在非平直群流形上积分曲线的平移角度进行分析，提出$A_\mu = A_\mu^a T^a$是李代数基矢的复线性组合，可以用于表征基矢在平移过程中的变化程度的结论。

关键词：Maxwell 方程组；规范对称性；协变导数；Christoffel 符号；李代数

1 引言

一个物理系统的运动方程可以通过实验事实得到，而描述它的理论写出的拉氏量密度和作用量却并非“天然”存在，而是通过引入限制，从一系列变分取极值后得到相同运动方程的作用量中筛选出符合条件的那一个。

系统的某些值在某种变换下不变的性质叫作一种对称性，它对作用量的形式具有限制作用。这些对称性可能是自然存在的真实对称性，比如平移对称性、空间反演对称性等；也可能是人为引入的冗余对称性，比如势能零点的选择、观测参考系变换的对称性等。

所谓“规范对称性”就包含这样一层意思：系统可观测量的值不应随人为选定规范的变化而变化。引用 David Tong 讲义中的一段话：“（规范对称性）并不是自然本身具有的对称性，而是人类在选择‘用哪种方式描述自然’的过程中引入的对称性。”

在广义相对论中有相似的概念，即广义协变性原理：一切描述物理基本规律的物理量应具有张量的形式，使包括它的方程在广义参考系变换中形式保持不变，这样，物理规律只和时空的几何性质有关而和描述它的参考系无关。与之有微妙差别的是，在广义相对论中，这些物理量是时空坐标的函数或张量，它们与时空的几何性质有关；而在描述量子系统的规范理论中，我们也关心那些与时空坐标无关的内禀自由度，它们与某种内禀空间的几何性质有关。

本文写于学习规范场论的初始，笔者试图将其与李代数理论和广义相对论中相似的概念联系起来帮助理解。过程中遇到很多问题与困惑，尽量通过查询资料完善了自己的思考。由于笔者知识水平有限，文中有大量粗糙的协变逆变指标混用，且证明多数止步于直观，也许存在未发现的错误，希望未来通过进一步的学习和思考能够给出更加数学的证明和理解。

注：文中统一采用自然单位制。

2 经典理论

2.1 $Maxwell$方程组中的规范对称性

含源麦克斯韦方程组有如下微分形式：

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{4}$$

为了给电磁相互作用赋予电磁场中势的概念，引入矢势$\boldsymbol{A}$和电势ϕ，使得

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{6}$$

在某些情况下，使用这种表述方式会使物理量的计算更加方便。

由于绝对势能大小取决于人为规范的零点，场量$\boldsymbol{A}$和ϕ的值并不能唯一确定，(5)(6)式具有显而易见的规范自由度，即进行如下变换，物理结果不会发生变化：

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \nabla \mathrm{X} \tag{7}$$

$$\phi \to \phi + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial t} \tag{8}$$

其中函数$\mathrm{X} = \mathrm{X}(t, \boldsymbol{x})$。为了消除人为引入的冗余自由度，我们可以选择库伦规范或洛仑兹规范等来确定固定的标准，前者可以消除所有非物理的自由度，而后者洛伦兹协变，各有适用情况。

2.2 惯性参考系变换

接下来考虑平直时空坐标系变换的情况。在参考系变换下，比如作空间旋转，某一点的场量在某方向的投影值可能会发生变化；作增速变换，由于麦氏方程中的时间偏导项，电场和磁场甚至可以相互转换。

为了描述普适的物理，由于实验中并没有观察到惯性参考系变换中违反麦克斯韦方程组的现象，我们说麦氏方程在洛伦兹变换（或更准确地说，庞加莱变换）中具有张量的形式。采用被动观点，张量所描述的物理量本身并没有发生改变，改变的是坐标系变换下，它在坐标系基矢上的投影值，也就是张量分量。方程中，物理量张量分量的类型最终应由实验中观察到的它的变换方式决定。

考虑$3+1$维闵氏时空，引入度规张量$g_{\mu\nu}=diag(-1,1,1,1)$，坐标四矢量$x^{\mu}=(t,x,y,z)$，电流密度四矢量$j^{\mu}=(q,j^x,j^y,j^z)$，规范 1-形式$A=A_{\mu}dx^{\mu}$，$A_{\mu}=(\phi,A_x,A_y,A_z)$，场强 2-形式$F\equiv\frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}$，$F_{\mu\nu}=\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu}$，我们可以把麦克斯韦方程组写作随惯性参考系协变的形式[1]：

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu}=j^{\nu} \tag{9}$$

$$\partial_{[a}F_{bc]}=0 \tag{10}$$

其中(9)式包含(1)(4)式，(10)式包含(2)(3)式，$[abc]$表示三个指标的全反对称组合。

我们可以直观地看出麦氏方程在惯性系变换下的协变性。考虑麦克斯韦作用量：

$$S=-\frac{1}{4}\int d^4x\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\int d^4x\,(\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{B}^2) \tag{11}$$

容易证明通过变分法可以从作用量得到真空中的运动方程(9)，通过F的定义可以得到(10)。在洛伦兹变换Λ下二阶张量F按照类似矩阵相似变换的方式变换，因此新的拉氏量密度$(FF)'=\Lambda(FF)\Lambda^T=\Lambda F\Lambda^T\Lambda F\Lambda^T=F'F'$，即在新的坐标系下，我们可以直接使用新坐标定义来写出同样形式的运动方程，满足协变性要求；同时，由于体元$d^4x'=|\Lambda|d^4x$不变，作用量和拉氏量密度都是洛伦兹标量。

将与 2.1(7)式中相同的规范变换写作张量分量的形式$A_{\mu}\to A_{\mu}+\partial_{\mu}\Lambda(\mathrm{x})$，由一阶偏导的可交换性，容易证明此规范变换下$F_{\mu\nu}$不变。相应地，由于规范变换不涉及时空坐标的变换，作用量和运动方程也是规范不变的。注意，我们所定义的物理量在不同的变换下可以表现出不同的变换形式，在写下“张量”时必须明确它在什么变换下表现出张量的性质。因此我们可以说这种定义下的$F_{\mu\nu}$是洛伦兹变换中的二阶张量，也是(7)式描述的规范变换中的标量。

在经典电磁理论中，规范变换似乎只是用于简化运动方程计算的工具，和真实存在的带电粒子相比，电磁势A_{μ}没有自然的动力学，没有共轭动量，它的全部存在意义好像只是对带电粒子起到一个约束作用。

3 量子理论

让我们把目光从经典转到量子，在强耦合的量子场论中，规范理论显得十分重要。它是标准模型建立的基石。

在量子力学中，通过把普通动量写作正则动量，我们可以得到带电粒子在电磁场中的薛定谔方程。这个方程也具有规范不变性，即在变换$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}+\nabla\Lambda(\mathrm{x})$下，波函数$|\psi(x)\rangle\to e^{-i\Lambda(x)}|\psi(x)\rangle$，相位的改变不影响态矢的内积，即概率幅不变。在$AB$效应中，波函数相位所引起的可观测效应也是规范不变的，因此规范对称性得以保留。根据李群的基础知识，相位$e^{-i\Lambda(x)}$可以被视作$U(1)$群中某个群元的表示。用这种方式重新表达$\boldsymbol{A}$的变换方式，可以写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\to e^{-i\Lambda(\mathrm{x})}\boldsymbol{A}e^{i\Lambda(\mathrm{x})}+e^{-i\Lambda(\mathrm{x})}\nabla e^{i\Lambda(\mathrm{x})}\\ =e^{-i\Lambda(\mathrm{x})}(\boldsymbol{A}+\nabla)e^{i\Lambda(\mathrm{x})}\end{aligned}$$

我们把这种由$U(1)$群元引起的规范变换称作$U(1)$规范变换，$\Lambda(x)\equiv constant$时称作整体$U(1)$变换，$\Lambda(x)$随时空坐标变化时称作定域$U(1)$变换。在这里经过如 2.2 中的合理外推，我们注意到A_{μ}虽然是洛伦兹矢量，却并不是$U(1)$变换的张量。

在量子场论中，为了与相对论相容，我们放弃波函数的描述方式，使用在庞加莱变换下满足一定变换规则的张量场来描述量子态。根据群的线性表示理论，我们可以选定一个线性表示空间，把某个群元对所有空间基矢的某种线性变换结果总结起来，写成矩阵的形式，我

们就得到了这个群元的一个线性表示。庞加莱群描述闵氏时空的对称性，它的一个子群是洛伦兹群$SO(3,1)$。群的每个表示都有无数个等价表示，我们可以使用特征标来区分不等价的表示。

粒子在闵氏时空中运动，不同种类的粒子由一些量子数加以区分[2]。对粒子做惯性参考系变换时，其中一些量子数可能发生改变，如自旋投影等；另一些量子数可能保持不变，如质量等。量子数的改变遵循庞加莱变换中的张量变换规则，对某个量子数赋予的张量类型同样应该由实验事实决定。

3.1 最小耦合

研究具有整体$U(1)$规范对称性的自由复标量场ϕ的拉格朗日量密度：

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^\dagger\phi \tag{12}$$

使用诺特定理，在无穷小整体$U(1)$变换$\phi\to e^{i\Lambda}\phi\approx 1+i\Lambda\phi$下，我们得到守恒流表达式：

$$j^\mu=-iq\left(\phi\partial^\mu\phi^\dagger-\phi^\dagger\partial_\mu\phi\right) \tag{13}$$

其中q是一个比例系数。容易看出，在整体$U(1)$变换下，即$\Lambda(x)$在任意时空点为相同的常数Λ时，拉格朗日量密度不变。

但是在局域$U(1)$变换下，(12)式中变换后的拉格朗日量密度会出现含有$\partial_\mu\Lambda(x)$的项，从而不能保持形式不变。这其实是不合理的，局域规范变换也应当是一个人为选择引进的冗余自由度，因此我们考虑对复标量场的拉氏量进行修正。

在量子场论课上我们学到：将量子化后(11)中的矢量场与自由复标量场ϕ耦合，得到被称作$U(1)$规范场和复标量场最小耦合理论的拉格朗日量密度形式：

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+D_\mu\phi^\dagger D^\mu\phi-m^2\phi^\dagger\phi \tag{13}$$

$$D_\mu\phi\equiv\left(\partial_\mu+ieqA_\mu\right)\phi$$
$$D_\mu\phi^\dagger\equiv\left(\partial_\mu-ieqA_\mu\right)\phi^\dagger$$

D_μ被称作协变导数，其中A_μ项的具体作用效果根据被作用对象决定[3]。

这个拉氏量密度显然具有整体$U(1)$规范不变性，代入$\phi\to e^{i\Lambda(x)}\phi$的局域变换后发现，它也具有局域$U(1)$规范不变性，即$D_\mu\phi\to e^{i\Lambda(x)}D_\mu\phi,\mathcal{L}\to\mathcal{L}$。我们发现$\partial_\mu$和$A_\mu$作为洛伦兹矢量，虽然都不是$U(1)$规范变换的张量，它们的某种线性组合$D_\mu$却同时是洛伦兹矢量和$U(1)$规范变换张量，因此得名（关于规范变换的）协变导数。同样按照变分原理计算，只是把$\partial_\mu\to D_\mu$，可以得到A_μ和ϕ的运动方程，在此不再赘述。

通过这个例子我们注意到，ϕ本身在规范作用下按照矢量即(1,0)张量的形式变换，因此可以期望D_μ在规范变换下具有(1,1)张量的形式。其实一开始笔者并不理解为什么在各种教科书里，$U(1)$规范变换对ϕ的作用就是简单的左作用，而没有任何解释，就像是先验地知道了ϕ是个$U(1)$矢量一样。这里提供一种理解角度：正如上一节量子力学中的处理手续，我们先规定了A_μ的规范变换形式，为了使方程形式保持不变，才推导出了ϕ的规范变换形式，“发现”它正好是个$U(1)$矢量。

在后文的推导中会发现，A_μ的规范变换方式总是先于ϕ等场算符确定的，并由此出发得到不同群表示中协变导数D_μ的形式，这也许也是经典极限的要求。

3.2 Yang-Mills 理论

接下来考虑一般的规范理论。

在 Yang-Mills 理论中，物质场被认为存在于规范群G的某种表示，G作为李群，具有自带的李代数这个线性空间，在这个空间中通过群元伴随作用基矢产生的表示被称作伴随表示；如果它本身就是矩阵群，则还会有一个基础表示空间，在这个空间中通过群元左作用基矢产生的表示称作基础表示。

基础表示空间的基矢为N维复向量ψ，李代数和李群中的元素都表示成$N\times N$矩阵的形式，不同类型的洛伦兹场按照其在规范变换下的形式，可以以ψ为基矢展开写成张量形式。在基础表示中，协变导数和场强张量的定义方式为[4]：

$$D_\mu\psi=\partial_\mu\psi-iA_\mu\psi \tag{14}$$

$$\left[D_\mu,D_\nu\right]\psi=-iF_{\mu\nu}\psi \tag{15}$$

正如 3.1 中$U(1)$规范场的情况（忽略定义里系数的差别）。

接下来考虑伴随表示。

规范变换也是一种内禀的坐标系变换，对于平直空间，我们使用的工具是链式法则。李群的群流形通常是不平直的，且群元对于加法不封闭，并不是线性空间。如果想要在其上进行微分、积分、向量平移的操作或使用链式法则，我们需要对其作局部线性化。类比广义相对论弯曲时空中局部惯性系的引入，同样引入切空间的概念。李氏第一定理指出，简单李群的线性表示完全由它的生成元即李代数决定。李代数是一个对加法、数乘和李括号运算封闭的线性空间，通过定义$Killing\ form$可以定义度规，最大线性独立矢量组可以作为基矢张成李群单位元处的切空间，描述李群在单位元附近的局域性质。

李括号是一种双线性反对称运算，具有如下性质（$Jacobi$恒等式）：

$$\left[[T_a,T_b],T_c\right]+\left[[T_c,T_a],T_b\right]+\left[[T_b,T_c],T_a\right]=0 \quad (16)$$

也可以使用反对称括号写作：

$$\left[\left[T_{[a},T_b\right],T_{c]}\right]=0 \quad (17)$$

其中，T^a是李代数中的矢量。

对于特定的李群，它的线性表示的李代数满足共同的对易关系：

$$[T_a,T_b]=T_aT_b-T_bT_a=i\sum_d C_{ab}^d T_d \quad (18)$$

C_{ab}^d称为结构常数，关于下指标ab反对称，它们与具体的线性表示无关。在研究一个李群的几何性质时，我们首先找到它的李代数，确定其在单位元附近的行为，然后给定指数映射$g=e^{-i\sum r_aT_a}$（即李代数到李群群元的映射），其中r_a为实系数，类比流形上的积分曲线，按照矢量推前的规则：

$$\frac{d}{dr_b}\Big|_{r_b=0}\left(\left(e^{-i\sum r_aT_a}\right)^*\right)=\left(\frac{d}{dr_b}\Big|_{r_b=0}\right)_* e^{-i\sum r_aT_a} \quad (19)$$

使单位元处的切矢量沿单参积分曲线移动。反复进行此项手续，我们就获得了每个群元附近的局域性质，从而构造出了群流形。由于在非同胚映射下，推前映射并不一定保持张量场的类型，因此对于李代数来说，指数映射并不一定是满射，不满射的李代数可能描述群结构的缺陷。

注意，这里构建李群流形的方式和在给定流形上定义李导数时使用的手续并不相同，后者先给定流形上的矢量场，然后通过解一阶微分方程得到积分曲线。二者的关系某种程度上类似于互逆过程。

李群的伴随表示的表示空间是李代数，线性作用方式是伴随作用，表示的维数是生成元的个数，也就是李代数空间基矢的个数[5]。群元g伴随作用基矢T^a的效果如下：

$$gT_ag^{-1}=\sum_b T_bD_{ba}^{ad}(g) \quad (20)$$

$D^{ad}(g)$即伴随表示矩阵。容易证明，伴随表示的生成元与结构常数直接相关：

$$\begin{aligned}\left[T_c^{ad},T_d^{ad}\right]_{ba}&=\left(T_c^{ad}T_d^{ad}\right)_{ba}-\left(T_d^{ad}T_c^{ad}\right)_{ba}\\&=(T_c^{ad})_{ba}\left(T_d^{ad}\right)_{ea}-\left(T_d^{ad}\right)_{be}(T_c^{ad})_{ea}\\&=\sum_e -C_{ce}^bC_{da}^e+C_{de}^bC_{ca}^e\\&=i\sum_p C_{cd}^p(iC_{pa}^b)\end{aligned}$$

即$\left(T_p^{ad}\right)_{ba}=iC_{pa}^b$。群元对李代数的伴随作用可以在李代数矢量集合中产生群作用轨道，伴随作用后的李代数再通过指数映射产生李群，整个手续可以视为李群$G\to G$的一个自同构映射。

在规范群$\{\Omega(x)\}$伴随表示中，由于表示空间的基矢是生成元T^a，我们可以把物质场ϕ、规范场A_μ、场强张量$F_{\mu\nu}$都写成基矢展开的形式：

$$\phi=\phi^aT^a$$
$$A_\mu=A_\mu^aT^a$$
$$F_{\mu\nu}=F_{\mu\nu}^aT^a$$

在群元$\Omega(x)$的伴随作用下，按照 3.1 中对于经典极限的理解，规范场的变换方式应满足：

$$A'_\mu(x)=\Omega(x)A_\mu(x)\Omega^{-1}(x)+i\Omega(x)\partial_\mu\Omega^{-1}(x)$$

使用各个物理量的李代数展开式代回协变导数的要求$D_\mu{}'\phi'=D_\mu\phi$，注意此时导数算符对基矢T^a也会进行作用，我们得到协变导数和场强张量的定义：

$$D_\mu\phi=\partial_\mu\phi-i[A_\mu,\phi]$$
$$\left[D_\mu,D_\nu\right]\phi=-i[F_{\mu\nu},\phi]$$

$$F_{\mu\nu}=\left[D_\mu,D_\nu\right]=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu+i\left[A_\mu,A_\nu\right]\qquad(14)$$

3.3 对比和讨论

接下来将规范场论、广义相对论和李代数理论中涉及到的相似的概念进行对比，并进行理解。

（一）协变导数：

$$\nabla_\mu\omega_a=\partial_\mu\omega_a-\Gamma^\lambda_{\mu a}\omega_\lambda$$
$$D_\mu\psi=\partial_\mu\psi-iA_\mu\psi\qquad(15)$$

注意，A_μ前有i作为系数，联想到正交归一条件下$Berry$联络是纯实数，其中$\langle\psi|\partial_\mu\psi\rangle=\partial_\mu\langle\psi|\psi\rangle-\langle\partial_\mu\psi|\psi\rangle=\left(\langle\psi|\partial_\mu\psi\rangle\right)^*$是个纯虚数，这里的$A_\mu$可能是纯虚数或者含有虚部成分。

（二）曲率张量：

$$[T_a,T_b]=iC^d_{ab}T_d$$
$$\left[D_\mu,D_\nu\right]\psi=-iF_{\mu\nu}\psi$$
$$[\nabla_a,\nabla_b]\omega_c=R^d_{abc}\omega_d\qquad(16)$$

R^d_{abc}是黎曼$Riemann$曲率张量，关于后两个指标bc反对称，和结构常数C^d_{ab}、场强张量$F_{\mu\nu}$的性质一致。注意到R^d_{abc}之前没有复系数i出现。

（三）曲率恒等式：

由偏导对于指标的对称性和李括号的反对称性可得$Jacobi$恒等式和$Bianchi$恒等式：

$$\left[[T_a,T_b],T_c\right]+\left[[T_c,T_a],T_b\right]+\left[[T_b,T_c],T_a\right]=0$$
$$\left[[D_a,D_b],D_c\right]+\left[[D_c,D_a],D_b\right]+\left[[D_b,D_c],D_a\right]=0\qquad(17)$$

使用全反对称括号改写为紧凑形式：

$$R^\rho_{[\mu\nu\lambda]}=0$$
$$C^p_{[ab}C^q_{d]p}=0$$
$$D_{[a}F_{bc]}=0\qquad(18)$$

通过以上对比，发现$A_\mu(x)$起着和广义坐标变换中克氏符$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$类似的作用，但是克氏符的三个指标都指向时空坐标，$\left(A_\mu\right)^a_b$中只有μ指向时空坐标，a和b都是李代数基矢的指标。或者也可以认为克氏符的其中两个指标是$\mathfrak{so}$ (3,1)李代数基矢的指标。

（四）联络变换规则：

$$\Gamma'^\lambda_{\mu\nu}=\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\tau}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\Gamma^\tau_{\rho\sigma}+\frac{\partial^2x^\rho}{\partial x'^\mu\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho}$$
$$\left(A'_\mu\right)^a_b=\left(\Omega(x)\right)^a_c\left(A_\mu\right)^c_d\left(\Omega^{-1}(x)\right)^d_b+i\left(\Omega(x)\right)^a_c\left(\partial_\mu\Omega^{-1}(x)\right)^c_b\qquad(19)$$

协变导数D_μ起着和李代数空间基矢T^a类似的作用，而A_μ虽然可以用T^a展开，其变换方式却与D_μ不同。而且其展开式中有复系数i项，接下来给出一个可能的解释。

考虑这样一个例子：设v^a为矢量场，v^ν和v'^ν为v^a在坐标系$\{x^\nu\}$和$\{x'^\nu\}$的分量，$B^\nu_\mu\equiv\partial v^\nu/\partial x^\mu$，$B'^\nu_\mu\equiv\partial v'^\nu/\partial x'^\mu$，有如下坐标系变换等式：

$$B'^\nu_\mu=\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho}v^\rho\right)$$
$$=\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho}B^\rho_\sigma+\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}\left(\frac{\partial^2x'^\nu}{\partial x^\sigma\partial x^\rho}v^\rho\right)\qquad(20)$$

如果把$\Omega(x)$视为广义坐标变换，我们发现B^ν_μ和$\left(A_\mu\right)^a_b$的变换方式非常相似。因此提出一个假设：$\left(A_\mu\right)^a_b$可以写成某个矢量场在固定点普通导数的平移形式。由于普通导数的定义依赖坐标系，旧坐标系的普通导数按基矢展开式直接进行新旧坐标变换后得到的并不是新坐标系的普通导数。即：

$$\Omega(x)\partial_\mu A^\mu\Omega(x)^{-1}\neq\Omega(x)\partial_\mu\Omega(x)^{-1}\Omega(x)A^\mu\Omega(x)^{-1}$$

接下来分析复系数i的作用。我们知道，李代数基矢的实线性组合$\sum_a T^a$可以得到空间中另一个矢量T^b，这个矢量可以通过重参数化生成单参子群，作为李群另一个等价表示的生成元。但是T^a的复线性组合往往不再能充当生成元（简单的例子：$SU(2)$生成元σ_x的复形式$i\sigma_x$，$U(1)$生成元i的复形式1，容易发现它们都不能在群流形上生成闭合的积分曲线，即不能形成单参子群）。

事实上，复数实部和虚部的线性运算互相独立，虚数单位i的引入相当于植入了一个线性独立的垂直维度，即把一维实轴嵌入二维复平面，使用$U(1)$群为例，如果我们把群流形看作

一维球面，可以看到其李代数一维基矢e_θ在沿着积分曲线移动时，有一个角度的变化，变化的方向正是一维球面不存在的、但可以在二维平面上看出来的径向基矢e_r方向，即：

$$\frac{de_\theta}{d\theta} = -e_r \equiv -(ie_\theta) \quad (21)$$

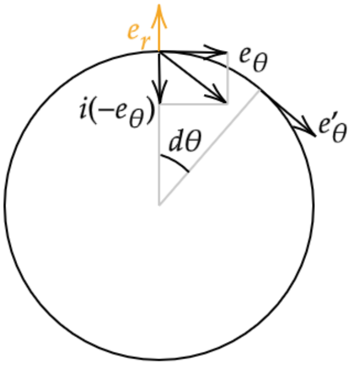

图 1 $U(1)$群流形上基矢沿积分曲线的平移

综上所述，A_μ作为类似克氏符的存在，用于衡量规范变换中内禀空间基矢量的变化率，由于原本的实李代数维度不够，所以只能引入虚数单位来表示垂直基矢的方向，相当于将群流形嵌入高维空间，$A_\mu = A_\mu^a T^a$是李代数T^a的复系数线性组合。换句话说，由于存在∂_μ项，拉氏量密度表达式和A_μ在规范变换下的协变性不能同时保证，由于A_μ并不是可以直接测量的可观测量，为了保证方程形式的协变性，我们选择了牺牲A_μ的协变性。

至此，克氏符的坐标系变换中没有出现复系数i反而成为了奇怪的情况，这可能是由于$SL(2,\mathbb{C})$群的代数结构不同，或者时空的对称群并不非常显然，$SL(2,\mathbb{C})$群和洛伦兹群与$SU(2)$规范群关系密切，由于时间所限，在此不多做讨论。

4 总结与展望

本文作为电动力学讨论班的课程论文，主要讨论了笔者对于规范场A_μ的几何意义的理解和相似概念的对比。文中有多处协变逆变指标混用、切空间和余切空间混用的错误，这都是因为笔者对于微分几何和李代数认识浅显，对场论的几何语言掌握不足。

李代数、微分几何、广义相对论、规范场论，想要对其中任何一个理论有大概的了解都需要多年的学习和思考。本文只是试探性地进行了相似概念的对比，希望未来能够通过进一步的学习，从纤维丛的角度建立起对其本质更深入的理解。

参考文献：

[1] 梁灿彬.微分几何入门与广义相对论・上册[M].北京：科学出版社，2006：51-52.

[2] 马中骐. 物理学中的群论——李代数篇[M].北京：科学出版社，2015：126-128.

[3] 余钊焕.量子场论讲义（未出版）.中山大学.2023：67-70.

[4] David Tong. Gauge Theory. http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/gaugetheory/html:26-31.

A First Step to Gauge Theory

Zhaoting Guo[1)]

1) (Department of Physics, Sun Yat-Sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract

This paper compared the form how gauge field A_μ changes under gauge transformation with the form how Christoffel symbols change under coordination transformation. Analyzing in term of the movements of basis of lie algebra on a group manifold along its integral curve, the paper concluded that A_μ might be the linear combination of basis of lie algebra with complex coefficients, could reflect how much the basis change under gauge transformation.

Keywords: Maxwell equations, gauge symmetry, covariant derivative, Christoffel symbols, lie algebra