§5.1 伊辛模型

特定态 ν 的能量

$$E_\nu = -\sum_{i=1}^{N} H\mu s_i - J\sum_{ij}{}' s_i s_j$$

H为外场，μ为磁矩，$S_i=\pm1$为方向，

Σ'表示最近邻求和

配分函数

$$Q(\beta, N, H) = \sum_\nu e^{-\beta E_\nu}$$

$\beta = \frac{1}{k_B T}$

注不是临界指数β：$m \propto (T-T_c)^{-\beta}$

$$= \sum_{s_1}\sum_{s_2}\cdots\sum_{s_N=\pm1} \exp\left[\beta\mu H\sum_{i=1}^{N} s_i + \beta J \sum_{ij}{}' s_i s_j\right]$$

对于一维伊辛模型，在周期性边界条件下，配分函数可以解析地求解

$$Q(\beta, N, 0) = [2\cosh(\beta J)]^N$$

§5.4 平均场理论

作用于 s_i 的场 H_i 满足

$$\mu H_i = \mu H + J\sum_j{}' s_j$$

取个平均得

这一步在小涨落（远离相变点）的情况下较为精确

$$\langle H_i\rangle = H + \frac{1}{\mu} J z \langle s_i\rangle$$

z为配位数

由玻尔兹曼分布得

$$\langle s_i\rangle = \frac{\sum_{s_i=\pm1} s_i e^{\beta\mu\langle H_i\rangle s_i}}{\sum_{s_i=\pm1} e^{\beta\mu\langle H_i\rangle s_i}} = \tanh(\beta\mu H + \beta J z\langle s_i\rangle)$$

下文也记$\langle s_i\rangle = m$

这是个超越方程，数学上可知，当 $\beta J z > 1$ 时，对无外场情况存在 $m \in (-1, 1)$ 的非平凡解。

故临界温度由 $\beta J z = 1$ 得

$$T_c = Jz/k_B$$

对于正方晶格 $T_c = 2DJ$，D = 空间维数

§5.6 重整化群理论

一维伊辛模型的配分函数为

$$Q(K, N) = \sum_{s_1, s_2, \cdots s_N = \pm1} \exp\left[K(s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_4 + s_4s_5 + \cdots)\right]$$

$K = \frac{J}{k_B T}$

$$\underset{1}{\circ}\ \underset{2}{\circ}\ \underset{3}{\circ}\ \underset{4}{\circ}\ \underset{5}{\circ}\ \cdots \longrightarrow \underset{1}{\circ}\ \ \underset{3}{\circ}\ \ \underset{5}{\circ}\ \cdots$$

把偶数号的自旋求和掉

$$Q(K, N) = \sum_{s_1, s_3, s_5 \cdots = \pm1} \{\exp[K(s_1+s_3)] + \exp[-K(s_1+s_3)]\}$$

$$\times \{\exp[K(s_3+s_5)] + \exp[-K(s_3+s_5)]\} \times \cdots$$

为把上式化为与原形式相同，即寻找 K' 与 $f(K)$ 使得

$$e^{K(s+s')} + e^{-K(s+s')} = f(K)\, e^{K'ss'}$$

这样一来配分函数就可写为

$$Q(K,N) = \sum_{s_1,s_3,s_5\cdots=\pm1} f(K)\exp(K's_1s_3)\, f(K)\exp(K's_3s_5)\cdots = [f(K)]^{N/2}\, Q(K',N/2)$$

为求 K' 和 $f(K)$，我们分别考虑当 $s=s'=\pm1$ 时，及当 $s=-s'=\pm1$ 时，得

$$e^{2K} + e^{-2K} = f(K)\, e^{K'}$$

$$2 = f(K)\, e^{-K'}$$

解得

$$K' = \frac{1}{2}\ln\cosh 2K \qquad ①$$

$$f(K) = 2\cosh^{\frac{1}{2}}(2K)$$

考虑一个强度量

$$g(K) = \frac{\ln Q}{N}$$

递推关系为

$$g(K') = 2g(K) - \ln\left[2\sqrt{\cosh(2K)}\right] \qquad ②$$

上述①②式统称为重整化群方程

另一组重整化群（上式的逆）可写为

$$K = \frac{1}{2}\cosh^{-1}(e^{2K'})$$

$$g(K) = \frac{1}{2}g(K') + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}K'$$