

核衰变的统计规律及 β 射线的吸收

余荫铠¹，赖睿然²

¹ 中山大学 物理学院，广州 510275，邮箱: yuyk6@mail2.sysu.edu.cn

² 中山大学 物理学院，广州 510275

实验信息

实验时间：2022 年 10 月 26 日星期三下午、2022 年 11 月 2 日星期三下午

实验地点：物理楼 301

实验人：余荫铠、赖睿然

指导老师：唐强

实验器材：计数管探头；智能定标器（容帆 S1）；放射源（三个，最强的放射源放射性活度为 $1.08 \times 10^6 / (\text{min} \cdot 2\pi)$ ，1970/8/2 测量，半衰期 28 年）；铝吸收片若片（0.2mm 厚）

1 原理

本次实验中，我们要检验核衰变的统计分布规律、测量核衰变放出的 β 射线的最大能量、测量放射源的活度。

原理上来说，每一次核衰变的进行都是一次独立事件，发生核衰变与不发生核衰变的概率是一定的，因此形成一个**二项式分布**：

$$P(n) = \frac{N!}{(N-n)!n!} p^n (1-p)^{N-n} \quad (1)$$

其中， N 为实验当中体系的原子数目， n 为发生核衰变的原子数， p 为发生核衰变的概率，即

$$p = 1 - e^{-\lambda t} \quad (2)$$

若 $p = 1 - e^{-\lambda t} \ll 1$ ，则二项式分布趋于**泊松分布**

$$P(n) = \frac{m^n}{n!} e^{-m} \quad (3)$$

其中 m 为发生核衰变的平均原子个数。若 $m \gg 1$ ，泊松分布趋于**正态分布**

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(n-m)^2}{2\sigma^2}\right], \quad \sigma = \sqrt{m} \quad (4)$$

可以证明，对于有限的 A 次计数 N 测量，在上述条件下也满足泊松分布、正态分布，只

中山大学近代物理实验 (2022)

报告归属人

余荫铠

学号

20343078

通讯邮箱

yuyk6@mail2.sysu.edu.cn

个人主页

www.yykspace.com

© 余荫铠 2022.

本报告除了用作本人近代物理实验作业外，在其他场合放弃一切版权，可以随意转载、引用、借鉴，无需征求本人意见。转载、引用、借鉴引起的后果，不由本人承担。

需将 n 换为计数 N ， m 换为计数平均值 $M = \bar{N}$ ， σ 替换为计数标准差 S_x 。当 A 足够大时， $S_x = \sqrt{M}$ 。

在实验中，我们使用 **Kolmogorov-Smirnov 检验**^[1-3]（简称 **KS 检验**）来验证实验测量的计数分布是否服从理论所预期的泊松分布、正态分布¹。KS 检验是一种非参数的统计检验方法，是针对连续分布（主要用于有计量单位的连续和定量数据）的检验。单样本 KS 检测常被用来应用于比较单样本是否符合某个已知分布。将样本数据的累计频数分布 $F_n(x)$ 与特定理论分布 $F(x)$ 相比较，两者间差距（定义为 KS 统计量）

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)| \quad (5)$$

在假设成立的情况下 $\sqrt{n}D_n$ 将收敛于不依赖于 $F(x)$ 的 Kolmogorov 分布 K_α 。在显著性水平 α 的情况下如果

$$\sqrt{n}D_n < K_\alpha \quad (6)$$

则认为有 $1 - \alpha$ 的置信概率接受原假设。KS 检验在各统计科学软件（库）中都有集成的算法，在处理数据时我们直接调用即可。

一束 β 射线通过吸收物质，在线性吸收近似下服从指数衰减率

$$I = I_0 e^{-\mu t} = I_0 e^{-\mu_m t_m} \quad (7)$$

μ_m, t_m 为质量吸收系数和质量厚度。确定核衰变产生的 β 射线的最大能量有两种方法：吸收系数法和最大射程法。吸收系数法则是直接测量上式的衰减规律拟合出质量吸收系数，然后利用经验公式

$$\mu_m = \frac{17}{E_{\beta_{max}}^{1.14}} \quad (8)$$

算出 β 射线的最大能量。而最大射程法则是利用另一个经验公式

$$\begin{cases} E_{\beta_{max}} = 1.85R_\beta + 0.245, & E_{\beta_{max}} > 0.8 \text{ MeV} \\ E_{\beta_{max}} = 1.92R_\beta^{0.725}, & 0.15 \text{ MeV} < E_{\beta_{max}} < 0.8 \text{ MeV} \\ E_{\beta_{max}} = 0.685R_\beta^{1.67}, & E_{\beta_{max}} < 0.15 \text{ MeV} \end{cases} \quad (9)$$

其中最大射程 R_β 通过直接外推 (7) 得到。

2 测量的稳定性

核衰变计数的探测会受到本底信号、工作电压波动、衰变的随机性的影响。为使实验结果可靠，也便于误差分析，我们需要先确定合适的工作状态。

¹ 实验讲义中使用的是 χ^2 检验。KS 检验和 χ^2 检验的相同点是都采用实际频数和期望频数之差进行检验。不同点是卡方检验主要用于类别数据，而 KS 检验主要用于有计量单位的连续和定量数据。卡方检验也可以用于定量数据，但必须先将数据分组才能获得实际的观测频数，而 KS 检验能直接对原始数据进行检验，所以它对数据的利用比较完整。显然，KS 检验更符合我们实验对于统计分布验证的要求。

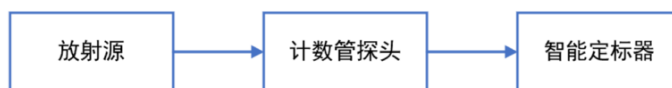


图 1. 实验仪器连接示意图

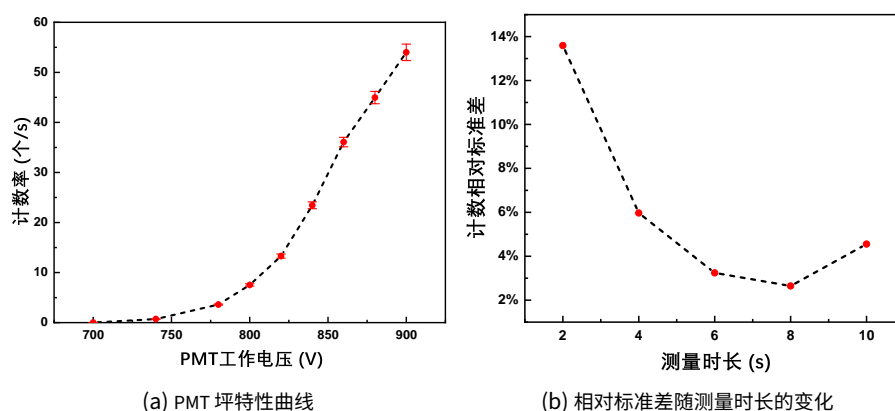


图 2. 计数值的稳定性曲线

我们按照图1传递实验信号。通过调节智能定标器，我们最终确定 PMT 工作电压 900V，定标阈值 5mV，道宽 4000mV，放大倍数 100 为后续的实验条件，以保证探测到信号的信噪比较高。其他的实验条件给出更低的信噪比，见附录表3。

在该条件下，我们测量 PMT 的坪特性曲线（计数率关于工作电压的变化），如图2a所示。在我们的工作电压 700V-900V 范围内并没有呈现“坪”，坪的起始电压大于 900V。可见其原因是定标器的阈值电压过高²。这将使得 PMT 的增益能力不够稳定，会被工作电压的波动所干扰，为我们后续的实验引起了误差。

为探究测量时长对误差的影响，我们对不同的测量时长测量计数的标准差，原始测量数据如表4所示，我们在图2b中展示了相对标准差随测量时长的变化，可见测量时长已经足够长，使得相对标准差相对稳定。特别地，测量时长越长，会使相对误差趋于越小，而图2b尾部的上翘则说明测量时长的变化以及不再是影响稳定性的决定性原因。

3 核衰变统计规律

我们使用活度较低的放射源，测量时长 2s，使之探测器计数期望值 M 小于 20，进行 $A = 1000$ 次重复测量³。此时样本计数应符合泊松分布。我们使用泊松分布对样本直方图进行拟合（图3a），并进行 KS 检验。拟合结果为泊松分布参数 $\hat{\lambda} = 11.8 < 20$ 。KS 检验统计量 $\sqrt{1000}D_{1000} = 0.316 < K_{0.05} \approx 1.36$ ， p 值为 $p = 1.00 > \alpha = 0.05$ ，故在 5% 的显著性水平下不能排除样本服从泊松分布，即至少有 95% 的置信概率认为样本服从泊松分布，泊松分布参数 $\hat{\lambda}$ 的 95% 的置信区间为 (11.6, 12.0)。

我们使用活度较高的放射源，测量时长 2s，使之探测器计数期望值 M 大于 1000，进

² 由此得到启示：调节智能定标器的状态不是信噪比越高越好，稳定性也是需要考虑的重要因素！

³ 样本量过大，我们使用 Excel 记录数据，原始数据可以随补充材料在本报告的补充材料可以在 <https://www.yyk-space.com.cn/scholar.html> 中获取。

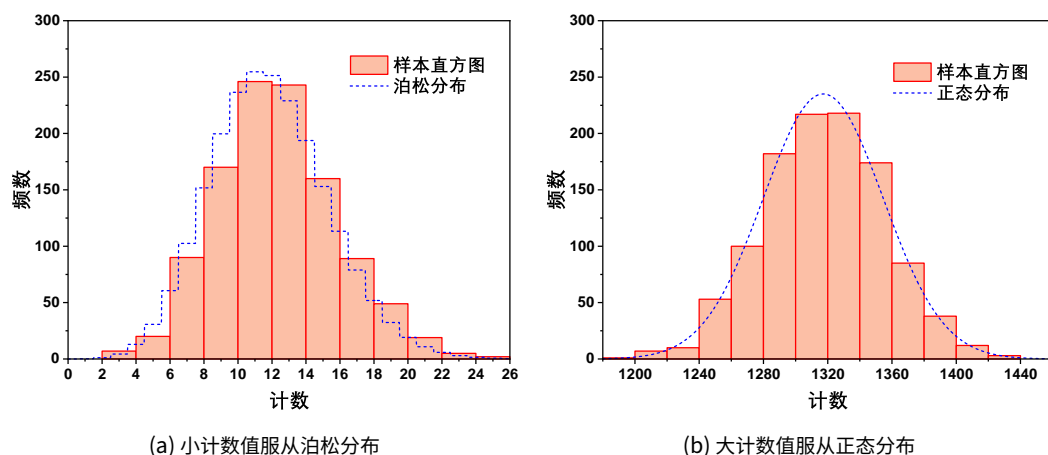


图3. 样本直方图及其对应的分布

行 $A = 1000$ 次重复测量。此时样本计数应符合正态分布。我们使用正态分布对样本直方图进行拟合 (图3b)，并进行KS检验。拟合结果为正态分布位置参数 $\hat{\mu} = 1317$ ，尺度参数 $\hat{\sigma} = 37.3$ 。KS检验统计量 $\sqrt{1000}D_{1000} = 0.758 < K_{0.05} \approx 1.36$ ，p值为 $p = 0.56 > \alpha = 0.05$ ，故在5%的显著性水平下不能排除样本服从正态分布，即**至少有95%的置信概率认为样本服从正态分布**，95%的置信区间为 $\hat{\mu} \in (1315, 1319)$ ， $\hat{\sigma} \in (35.8, 38.9)$ 。

4 β 射线最大能量

在实验中，计及本底的影响，计数率在铝片中的指数衰减律应该修正为

$$I = I_0 e^{-\mu_m t_m} + I_{b0} \quad (10)$$

或者

$$I + I_b = (I_0 + I_{b0}) e^{-\mu_m t_m} \quad (11)$$

其中 I_{b0} 为不添加铝片时测量到的本底计数率。(10)和(11)代表了两种理解本底信号的方式。前者表示认为本底计数率来源于定标器将白噪声信号的一部分计入计数值中，则本底计数率不依赖于铝片厚度，为常数。而后者表示认为本底来源于来自于宇宙、大气的粒子信号，这意味着本底计数率也会在铝片中指数衰减。为了准确测量质量吸收系数或者 β 射线最大射程，若采用(10)的理解则需要扣除本底信号再做拟合，而若采用(11)的理解则不需要扣除本底信号。由于我们没有进行实验以探究本底信号的性质⁴，在写下来的分析中我们分布对这两种理解方式都进行讨论。

在不加铝片时，我们对本底计数进行10次测量，每次测量60s，原始数据见附录表5。我们最终测得本底计数率

$$I_{b0} = 1.57 \pm 0.06 \text{ s}^{-1} \quad (12)$$

⁴ 实际上这个实验非常容易操作，只需要在改变铝片厚度（添加铝片）的时候都测量一下本底计数率即可。这是本次核衰变测量实验的一个很值得改进的细节。

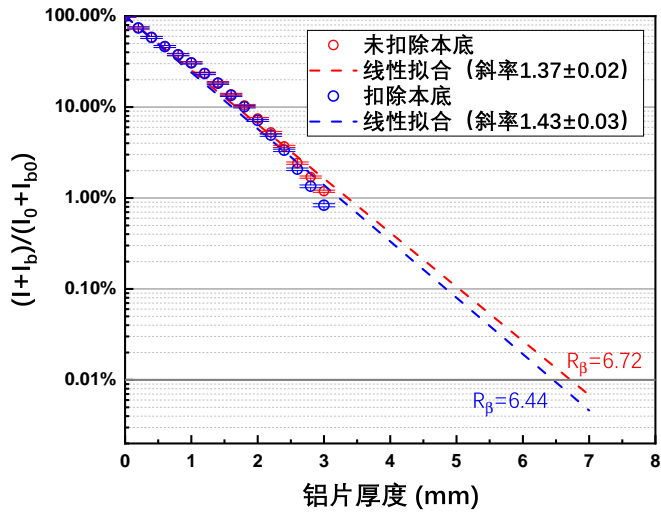


图 4. 吸收曲线

表 1. β 射线最大能量测量结果

方法	扣除本底	最大能量/MeV	不确定度/MeV
吸收系数法	否	2.89	0.04
吸收系数法	是	2.78	0.05
最大射程法	否	3.59	0.06
最大射程法	是	3.46	0.04

不论用吸收系数法还是最大射程法确定 β 射线的最大能量，都需要对指数衰减律 (10) 或 (11) 进行拟合。为此我们测量了不同铝片厚度（添加数量不同的铝片）对应的计数率衰减率，即测定吸收曲线，如附录表6所示。最终我们将吸收曲线测量结果以及拟合结果⁵展示在图4中。拟合得到质量吸收系数（考虑铝的密度为 2.7 g/cm^3 ）为

$$\mu_m = \begin{cases} 5.07 \pm 0.07 \text{ cm}^2/\text{g} & \text{不扣除本底} \\ 5.30 \pm 0.11 \text{ cm}^2/\text{g} & \text{扣除本底} \end{cases} \quad (15)$$

由此利用吸收系数法的经验公式 (8) 可以求得 β 射线最大能量，如表1所示。若使用最大射程法计算 β 射线最大能量，我们在4中直接外推得到计数率降为原始计数率的万分之一的射程为

$$R_\beta = \begin{cases} 1.81 \pm 0.03 \text{ g/cm}^2 & \text{不扣除本底} \\ 1.74 \pm 0.02 \text{ g/cm}^2 & \text{扣除本底} \end{cases} \quad (16)$$

5 值得注意的是，这里在半对数坐标中做线性拟合时应当固定截距为零！因为我们的理论公式

$$\ln \left(\frac{I - I_{b0}}{I_0} \right) = -\mu_m t_m \quad (13)$$

或者

$$\ln \left(\frac{I + I_b}{I_0 + I_{b0}} \right) = -\mu_m t_m \quad (14)$$

都没有给出截距的物理意义，如果我们在拟合出了斜率，那么函数形式就和理论不一致，拟合结果没有意义，无法与理论公式对比。倘若此时强行认为斜率和公式中的比例系数一致，则实际上是把一部分有效信息储存在了截距中，而又幽灵般地把它扔掉了。

则利用经验公式 (9) 可以算出 β 射线最大能量，如表2b所示。

比较表1中不同方法的计算结果，可以发现：(1) 最大射程法的计算结果比吸收系数法的计算结果大。然而这两种方法使用的都是经验公式，就连“万分之一”这样的数也都是据经验选取的。在不清楚公式来由的情况下，我们暂看不出这种差异的物理含义。(2) 数据散点并不呈较好的线性，而是有明显的比线性衰减得更快的趋势（拟合残差超出了误差棒范围）。而且，扣除本底会放大这种偏离线性的趋势。如果我们坚持认为理论吸收曲线应当是线性的，那么不扣除本底的拟合给出更好的结果，这也许能侧面说明本底信号的机理如 (11) 所描述，本底信号亦会被铝片吸收。如果我们认为本底信号强度不依赖于铝片厚度，那么我们有理由认为吸收曲线在半对数坐标中不是线性的，其背后的原因可能是由于级联衰变等更加复杂的物理过程。

接下来我们要利用测出来的吸收曲线来进一步测量铝片厚度、放射源活度。使用不同的方法或是否扣除本底只是在方程形式上稍作修改，并不给出新的物理。因此我们在接下来的计算中只选用不扣除本底的吸收曲线及拟合的吸收系数来计算，而不再做更多机械的重复，其余的结果可类推。

5 测量铝片厚度

将待测铝片放入探测器和放射源之间，计数 15s，计数如附录表7所示，即平均计数率为 $I + I_b = (48.58 \pm 0.40) \text{ s}^{-1}$ ，对比表6中不加铝片的计数率 $I_0 + I_{b0} = (439 \pm 8) \text{ s}^{-1}$ ，则由吸收曲线理论公式 (11) 可以求出铝片质量厚度

$$t_m = -\frac{1}{\mu_m} \ln \left(\frac{I + I_b}{I_0 + I_{b0}} \right) = (0.434 \pm 0.013) \text{ g/cm}^2 \tag{17}$$

其不确定度中， $I_0 + I_{b0}$ 的不确定度居支配地位。

6 放射源活度

表 2. 不同放射源的每分钟计数

放射源	3min 计数	去除本底每分钟计数 \hat{I}	不确定度
本底	173	0	4
最弱源 3	805	211	9
中等源 2	9293	3040	32
最强源 1(已知)	63463	21097	84

在使用已知源和探测器标定待测放射源之前，需要先标定探测器的效率。探测器对

放射源所张的立体角为

$$\Omega = \frac{1}{\pi R_1^2} \int_0^{R_1} 2\pi r_1 dr_1 \int_0^{R_2} dr_2 \int_0^{2\pi} d\theta \frac{r_2}{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta + h^2} \frac{h}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta + h^2}} = 0.8191 \text{ rad} \quad (18)$$

其中放射源半径 $R_1 = 15 \text{ mm}$ ，探测器半径 $R_2 = 22.5 \text{ mm}$ ，探测器到放射源的竖直距离为 $h = 38 \text{ mm}$ 。已知 1970 年 8 月 2 日测量最强的放射源放射性活度为 $1.08 \times 10^6 / (\text{min} \cdot 2\pi)$ ，半衰期 28 年，则理论上该放射源每分钟对探测器方向发出的衰变粒子数为

$$I_1 = 1.08 \times 10^6 \times e^{-\ln[2(2022-1970)/28]} \times \frac{\Omega}{2\pi} = 37906 \quad (19)$$

而实验当天，我们实际探测到的每分钟计数 \hat{I}_1 如表2所示，为

$$\hat{I}_1 = 21097 \pm 84 \quad (20)$$

于是可以计算探测效率为

$$\eta = \hat{I}_1 / I_1 = (55.66 \pm 0.22)\% \quad (21)$$

假设探测效率为定值，那么可以根据表2计算出中等源 2 和最弱源 3 的活度，即

$$W_2 = \frac{2\pi}{\Omega} I_2 = \frac{2\pi}{\Omega} \frac{\hat{I}_2}{\eta} = (4.18 \pm 0.04) \times 10^4 (\text{min} \cdot 2\pi)^{-1} \quad (22)$$

$$W_3 = \frac{2\pi}{\Omega} I_3 = \frac{2\pi}{\Omega} \frac{\hat{I}_3}{\eta} = (2.9 \pm 0.1) \times 10^3 (\text{min} \cdot 2\pi)^{-1} \quad (23)$$

补充材料

本报告的补充材料可以在 <https://www.yykspace.com/cn/scholar.html> 中获取。

参考文献

- [1] JASPEN N. Applied nonparametric statistics[J]. Technometrics, 1990, 32(4): 455-456.
- [2] DIMITROVA D S, KAISHEV V K, TAN S. Computing the kolmogorov-smirnov distribution when the underlying cdf is purely discrete, mixed, or continuous[J/OL]. Journal of Statistical Software, 2020, 95(10): 1-42. <https://www.jstatsoft.org/index.php/jss/article/view/v095i10>. DOI: 10.18637/jss.v095.i10.
- [3] MOSCOVICH A, NADLER B. Fast calculation of boundary crossing probabilities for poisson processes[J/OL]. Statistics and Probability Letters, 2017, 123: 177-182. <https://doi.org/10.1016%2Fj.spl.2016.11.027>. DOI: 10.1016/j.spl.2016.11.027.

A 预习报告教师签名页

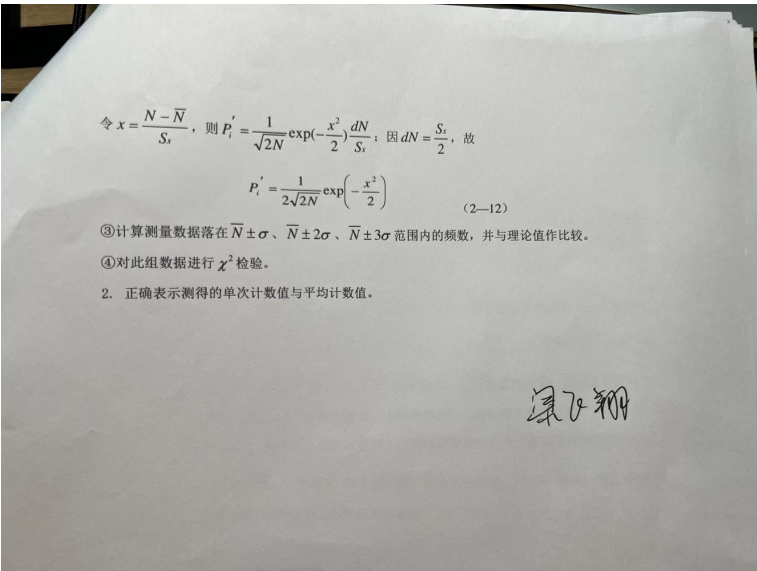


图 5. 预习报告教师签名页

B 工作条件稳定性数据

在道宽 4000mV，高压 900V 的条件下，测量本底计数、放射源计数，并计算信噪比如表3所示。

表 3. 探测器在不同工作条件下的信噪比

阈值/mV	放大倍数	本底计数	加入放射源计数	信噪比
10	200	15	603	39.20
15	300	23	649	27.22
5	100	20	552	26.60
5	100	17	615	35.18
15	100	21	413	18.67
8	100	23	517	21.48
10	100	15	522	33.80
3	100	21	638	29.38
3	200	439	852	0.94
30	1000	70000	30000	-0.57
15	500	71	667	8.39
5	500	3597	1365	-0.62
6	200	101	683	5.76
2	100	48	616	11.83
3	100	40	614	14.35

表 4. 不同测量时长的计数相对标准差

时间/s	五次计数					计数平均值	相对标准差
2	119	92	131	94	114	110.0	13.59%
4	256	223	219	235	221	230.8	5.97%
6	324	327	349	327	347	334.8	3.24%
8	450	436	424	456	433	439.8	2.65%
10	512	564	578	579	577	562.0	4.55%

c 计数率关于铝片厚度的衰减

表 5. 本底计数测量

状态	60s 计数					平均计数率	平均计数率标准差
实验前，不加铝片	81	112	87	93	78	1.57	0.06
实验后，不加铝片	114	96	98	102	79		

表 6. 计数率在铝片中的衰减

厚度/mm	测量时长/s	计数	计数率/s ⁻¹	$\frac{(I+I_b)}{(I_0+I_{b0})}$
0.0	7	3075	439	100.0%
0.2	8	2610	326	74.3%
0.4	10	2566	257	58.4%
0.6	13	2655	204	46.5%
0.8	17	2823	166	37.8%
1.0	22	2978	135	30.8%
1.2	25	2592	104	23.6%
1.4	29	2365	82	18.6%
1.6	35	2119	61	13.8%
1.8	50	2284	46	10.4%
2.0	80	2628	33	7.5%
2.2	105	2424	23	5.3%
2.4	140	2272	16	3.7%
2.6	195	2074	11	2.4%
2.8	300	2238	7	1.7%
3.0	450	2348	5	1.2%

表 7. 加入待测铝片后的计数率

计数					平均计数率	不确定度	相对不确定度
2908	2907	2914	2879	2966	48.58	0.40	0.83%