# 等离子体与磁场的相互作用

谢泓任 [1)]

1)（中山大学物理学院，广州 510000）

**摘 要**

等离子体作为固态、液态、气态外物质的第四种物态，由电子和正离子组成，由于和一些重大的科学技术问题密切关联，因而引起人们浓厚的兴趣。本文对等离子体的定义和特点进行了阐明，给出了德拜长度和等离子体振荡频率的介绍，并基于麦克斯韦方程组和磁流体力学相关知识，研究了等离子体与磁场的相互作用，推导得出了磁场的冻结方程和扩散方程，说明了真空条件下对于电导率趋于无穷的等离子体，会出现局域的磁场“冻结”的现象，而对于电导率为有限大的等离子体流体，其局域磁场会扩散并且衰减。但是本文的推导计算均建立在理想的、假定的条件下，要更准确地描述等离子体的运动规律以及与电磁场的耦合，需要对模型进行修改，建立更为复杂的模型.

**关键词：**等离子体，磁流体力学，麦克斯韦方程组

第一作者.E-mail: xiehr9@mail2.sysu.edu.cn

## 1 引 言

宇宙中 99.9%的物质是等离子体态，如太阳放射的大量带电的粒子流（太阳风）、大气电离层、地球辐射带（Van Allen 带）、闪电、北极光、彗星尾部以及爆星碎石等[1]。上个世纪 20 年代后，等离子体物理成为一门独立的学科，以研究等离子体的形成、性质和运动规律。等离子体物理的研究方法有三种，一是研究带电粒子的运动规律，二是将等离子体当作一个整体研究的磁流体力学，三是按照统计方法建立的等离子体微观理论。等离子体包含着游离的带电粒子——自由电子和离子，它们以远程的电磁力相互作用着并与外界的电磁场有着强烈的耦合，在磁场中表现出很多特异的运动规律[2]。本文基于电动力学和磁流体力学相关知识，对等离子体与磁场的相互作用进行研究，并推导了相关方程式。

# 2 等离子体

## 2.1 等离子体的定义

等离子体（Plasma），又叫做电浆，是不同于固体、液体和气体的物质的第四物态，其是由部分电子被剥夺后的原子及原子团被电离后产生的正负离子组成的离子化气体状物质，尺度大于德拜长度的宏观电中性电离气体。与固体变为液体，液体变为气体相同，物质从气态转变为等离子体是由温度升高造成的。等离子体包含正负电荷，但是其是电中性的，内部不可能出现电场，这也对磁场产生较为严格的约束。对于等离子体来说，内部电子由于是电离出的自由电子，所以等离子体是非常优良的导体，宏观电中性是等离子体最重要的特征。

## 2.2 德拜长度和等离子体振荡频率

考虑某一局部区域，即在微观长度范围内电中性被破坏。等离子体和电场相互制约，电场改变热平衡下的电子密度分布，电子的密度变化又反过来激化电场[3]。德拜长度为$\sqrt{\frac{kT\varepsilon_0}{ne^2}}$，其中$k$是玻尔兹曼常数，$T$是温度，德拜长度是静电作用的屏蔽半径，也是热运动导致电荷分离的空间尺度。

在一局域内当电子发生过剩时，会产生一定强度的电场，把电子拉回原来的位置恢复电中性，但由于惯性作用，会出现离子过剩，进而产生反向电场使得电子过剩，如此往复。这种振荡叫做等离子体振荡，其振荡频率可以表示为$\sqrt{\frac{ne^2}{m_e\varepsilon_0}}$，其表征等离子体对电中性破坏反应的快慢。

# 3 等离子体与磁场的相互作用

磁场的冻结与扩散是导电电流与磁场相互作用的重要性质。真空中的麦克斯韦方程组为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \quad ①$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \quad ②$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \quad ③$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} \quad ④$$

其中$\mu_0$为真空中的磁导率。位移电流实质上是电场的变化率。考虑磁流体中场的变化比较缓慢，所以忽略麦克斯韦方程组中的位移电流项，如果场的变化较快，则位移电流项需要保留。

运动导体中的欧姆定律为

$$\boldsymbol{j} = \sigma_c(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) \quad ⑤$$

$\sigma_c$为常数，$\boldsymbol{u}$为所有流体元构成的质心系的运动速度。联立④和⑤，可以消去$\boldsymbol{j}$，得到方程

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B} + \frac{1}{\mu_0 \sigma_c} \nabla \times \boldsymbol{B} \quad ⑥$$

对上式两边求旋度，利用$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$得到$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) - \nabla^2 \boldsymbol{B} = -\nabla^2 \boldsymbol{B}$，进而得到感应方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) + v_m \nabla^2 \boldsymbol{B} \quad ⑦$$

其中$v_m = \frac{1}{\mu_0 \sigma_c}$，为磁粘滞系数，其量纲与流体力学中的粘滞系数相同。

3.1 磁场的冻结

假设等离子体是理想导体，则考虑$\sigma_c$非常大，则$v_m$非常小，感应方程可以化简为

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) \quad ⑧$$

此即为冻结方程。

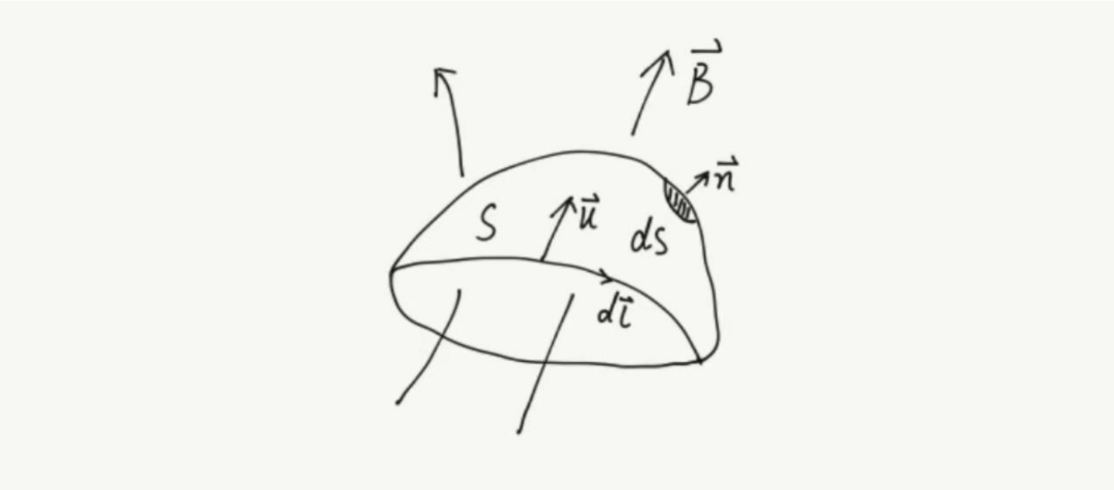


图1 局域理想导电流体的磁通量

Fig.1. Magnetic flux of locally ideal conductive fluid.

考虑通过和理想导电流体一起运动的任何封闭回路所围曲面的磁通量$\boldsymbol{\Phi}$，其随时间的变化率为

$$\frac{d}{dt}\Phi = \frac{d}{dt}\int \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_S \left[\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \nabla\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{u})\right]\cdot\boldsymbol{n}dS = 0$$

因此由式⑨可以知道磁通量不随时间变化。

流体的连续性方程为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}) = 0 \qquad ⑨$$

将冻结方程⑧展开，可以得到

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{u}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{u})$$

联立冻结方程和流体的连续性方程可以得到

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}\right) = (\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} \qquad ⑩$$

取定一根磁力线，磁力线上的一流体物质线元为$\delta\boldsymbol{l}$，其对时间的变化率可以表示为

$$\frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{l} = (\delta\boldsymbol{l}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} \qquad ⑪$$

比较⑩和⑪，它们均满足相同的时间演化方程，也即在理想导电流体中，起始位于一根磁力线上的流体元，以后也一直处于这根磁力线上。

在理想导电流体中，与流体一起运动的回路所包围的磁力线数目不变，即

磁通量不变，且流体线元只能沿同一根磁力线运动。流体沿着磁力线方向的运动是自由的，当流体垂直磁力线方向运动，磁力线也会跟随着流体运动，磁力线也因此被“冻结”了。根据楞次定律，当导体有切割磁力线的相对运动，磁通量会发生变化，就会产生感应电场和感应电流，感应电流产生的磁场将对抗磁通量的变化。对于理想导体，电导率趋于无穷，引起的感应电流也趋于无穷，因此导电流体难以有切割磁力线的相对运动。高温等离子体的电导率非常大，因此会出现磁场“冻结”的现象，在等离子体外的磁场，也难以进入等离子体内部，简单示意如图2所示。在宇宙尺度下，太阳风和地球磁场的相互作用，也会出现磁场“冻结”的现象，如图3所示。

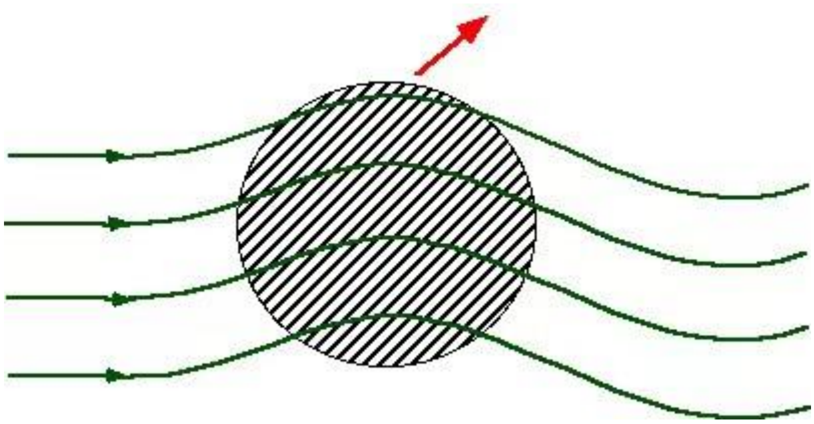

图2 磁通锁定

Fig.2. Flux locking.

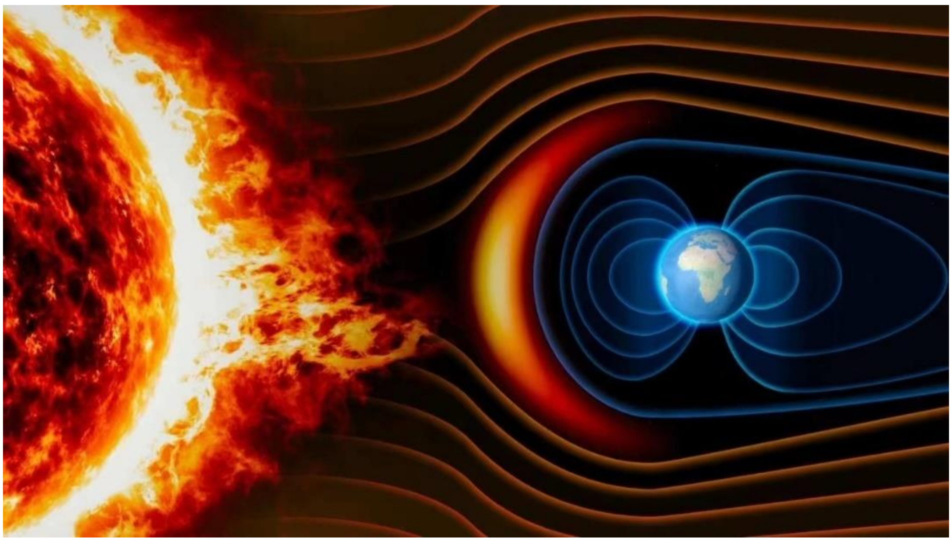

图3 太阳风与地磁场

Fig.3. Solar wind and geomagnetic field.

## 3.2 磁场的扩散

假定电导率有限，流体静止不动，即$\boldsymbol{u}=0$，感应方程变为

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})+v_m\nabla^2\boldsymbol{B}=v_m\nabla^2\boldsymbol{B} \quad ⑫$$

此即为磁场的扩散方程。其中$v_m=\frac{1}{\mu_0\sigma_c}$，不难发现当电导率趋于无穷时，$v_m$趋于 0，磁场不随时间变化。定义等离子体的特征尺度为$L$和特征速度$w$，则可以定义磁雷诺数$R_m=\frac{1}{v_m L w}$，磁雷诺数远远大于 1 时，磁力线冻结在等离子体中。磁雷诺数远远小于 1，则是实验室等离子体的普遍情况，磁力线无法冻结在等离子体中。

## 4 结　论

**高温下物质受到电离形成电子和正离子组成的物质状态，保持宏观电中性，则为等离子体。本文基于麦克斯韦方程组，结合流体力学相关内容，推导得出了磁场的感应方程$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})+v_m\nabla^2\boldsymbol{B}$。基于感应方程的$\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})$项和$v_m\nabla^2\boldsymbol{B}$项分别讨论了磁场的冻结效应和扩散效应。对于磁雷诺数远远大于 1，电导率非常大的高温等离子体，局域磁场出现“冻结”现象，等离子体外的磁场难以进入等离子体内部。磁雷诺数远远小于 1 的等离子体，内部磁场会出现扩散和衰减，磁场无法“冻结”。**

## 参考文献


[1] 汪诗金.等离子体与等离子体物理学[J].物理,1980(03):252-259.

[2] 项志遴.等离子体物理学的发展概况[J].物理,1984(11):641-647.

[3] 电动力学[M]. 郭硕鸿等, 编著.高等教育出版社.2008

# The interaction between plasma and magnetic field

Xie Hongren[1)]

1) (School of Physics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510000, China)

Abstract

The interaction between plasma and magnetic field. As the fourth state of matter in solid, liquid, and gas states, plasma is composed of electrons and positive ions. Due to its close relationship with some major scientific and technological issues, it has aroused strong interest among people. This paper clarifies the definition and characteristics of plasma, introduces the Debye length and plasma oscillation frequency, studies the interaction between plasma and magnetic field based on Maxwell equations and relevant knowledge of magnetic fluid mechanics, derives the freezing equation and diffusion equation of magnetic field, and explains that the phenomenon of local magnetic field "freezing" will occur for the plasma whose conductivity tends to infinity under vacuum conditions, For plasma fluids with finite conductivity, their local magnetic field will diffuse and decay. However, the derivation and calculation in this article are all based on ideal and hypothetical conditions. To more accurately describe the motion law of the plasma and its coupling with the electromagnetic field, it is necessary to modify the model and establish a more complex model.

Keywords: Plasma, Magnetohydrodynamics, Maxwell equations