Harris criterion $\nu > 2$

偏离 $\delta = g - g_c$

扰动 $\sim \xi^{-\frac{1}{2}}$ 关联长度 $\xi \sim \delta^{-\nu}$

推广 扰动引起的 shift $\sim \xi^{-1}$ 情形. → 判据 $\nu \geq 1$ 时稳定.

即 只要 $\nu < 1$, 就有新临界性质

Anti FM spin-$\frac{1}{2}$ Heisenberg spin Chain

$$H = \sum_i J_i \vec{S_i} \cdot \vec{S}_{i+1}$$

反铁磁 $J_i > 0$

三种情形

1 纯态: $J_i = J$ SU(2) Luttinger 液体 $g = \frac{1}{2}$

加无序 → 量子临界随机 singlet 态

随机: 强无序 RG — 找最大 $J_i \gg J_{i-1}, J_{i+1}$ → $J_{eff} = \frac{J_{i-1} J_{i+1}}{2 J_i}$ 二阶微扰

我们只考虑这一种

准周期调制

$J_i = f(i)$ with $f(x) = f(x + \varphi^{-1})$ 本文 选取 $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 空间频率

$f > 0$ 且光滑

Heisenberg 的 $\nu = \frac{2}{3} < 1$, 故准周期调制会产生有关量.

将实空间抽取应用于准周期情形, 即 $J_i' = \frac{J_{i-1} J_{i+1}}{2 J_i}$. 也是由二阶微扰理论得出的

$$\ell_i' = \ell_{i-1} - \ell_i + \ell_{i+1} + c$$

其中 $\begin{cases} \ell_j = -\ln J_j \\ \ell_i = \min\{\ell_j\} \end{cases}$, $c = \ln 2$ (Heisenberg) 下文还会讨论其它情形 Potts 中为参数之一

类似前面找极大 J_i

准周期为 $\ell_j = -\ln J_j = a + \cos(2\pi \varphi j + \theta)$

Fibonacci RG step (SM Note1. A, B)

极小值记为 B, 其他记为 A, 抽取出 B

重复上述步骤 m 次发现

$$A_m(i) = a + m(m+1)c + \frac{\cos(F_{3m+2} \pi \varphi)}{\cos \pi \varphi} + \varepsilon^A_{i,m}$$

$$B_m(i) = a + m^2 c + \frac{\cos(F_{3m+1}\pi\varphi)}{\cos\pi\varphi} + \varepsilon^{B}_{i,m}$$

其中 F_n是 Fibonacci 序列第n项， $\varepsilon^{A,B}_{i,m}$ 是与 i 有关的涨落项，$m\to\infty$ 时指数衰减趋0

接下来要做什么

① 读 Supplemental Notes，搞清楚 Fibonacci 和准周期调制的关系

② 搞清楚重整化变换式具体方法、抽取规则怎么来

③ 搞清楚 SU(2)、SU(3) 对称性，如何判断

④ 找老师讨论一下

量子 Potts 模型

$$H = -\sum_i J_i \delta_{n_i, n_{i+1}} - \sum_i \frac{h_i}{q} \sum_{n_i, n_i'} |n_i\rangle\langle n_i'|$$

n_i是 i 位点上的变量，从q个可能值中取值

为了RG，将 links 倍增，分配 J_i到偶键，h_i到奇键

则抽取规则为 $J_{eff} = \frac{J_{i-1}J_i}{\frac{q}{2}h_i}$ $h_{eff} = \frac{h_i h_{i+1}}{\frac{q}{2}J_i}$

当 $q>2$，$c>0$ 时，RG同样流向离散的序列

与 Heisenberg 不同的是，这里分别有 $(a>1)$

$$J_i = W_J\left(a + \cos\left(2\pi\varphi\left(i+\tfrac{1}{2}\right) + \theta_J\right)\right)$$

$$h_i = W_h\left(a + \cos\left(2\pi\varphi\left(i+\tfrac{1}{2}\right) + \theta_h\right)\right)$$

多了一个相位变量 $\theta \equiv \theta_J - \theta_h$

Note: binary Fibonacci sequence

从 0 开始，应用替换规则 $0\to 01$，$1\to 0$ 得

0, 01, 010, 01001, 01001010, ···

它们每项的长度为 1, 2, 3, 5, 8, ··· 这是 Fibonacci sequence

因此 F = 01001010010 ··· 被称作 binary Fibonacci sequence

Supplementary Note 1.

A. Pattern of the local minima in the initial potential

($\{x\} \equiv x - [x]$ 为取小数部分，$[x]$ 为取整数部分)

- 设 ℓ_n 是极小，即 $\ell_n < \ell_{n+1}$，$\ell_n < \ell_{n-1}$，

  先只考虑 $\ell_n = 1 + \cos 2\pi\varphi n$

  代入上面不等式，解得 $\frac{\{\varphi\}}{2} < \{n\varphi\} < 1 - \frac{\{\varphi\}}{2}$

  再把 θ 的影响也加入，写为 $0 < \{n\varphi + \frac{\theta}{2\pi} - \frac{\{\varphi\}}{2}\} < 1 - \{\varphi\}$　　这意味着这个模型中θ对n为常量 ??

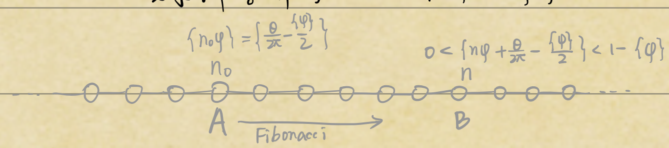
- 将这种模式对应于二进制斐波纳契序列，膨胀规则为 $A \to AB$，$B \to A$.

  这规则意味着：从 n_0 位点开始，以字母A为起始来应用膨胀规则，($\{n_0\varphi\} = \{\frac{\theta}{2\pi} - \frac{\{\varphi\}}{2}\}$)

  当且仅当 $[(n+n_0+1)\varphi] - [(n+n_0)\varphi] = 1$ 时 声明 n位点是一个B位点

  不知为何 也许是黄金比例与斐波纳契之间的特质吧

  上面条件等价于 $0 < \{n\varphi + n_0\varphi\} < 1 - \{\varphi\}$　　($\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$)



这证明了初始势的极小值确实对应斐波纳契序列中的"B"的模式

这样，我们可以把耦合项系数记为 $\ell_n \equiv \begin{cases} A_0(n), & \ell_n \text{ 不是极小} \\ B_0(n), & \ell_n \text{ 是极小} \end{cases}$

B. Sharpening of the sequence structure under RG

- 本模型极小处的RG规则为 $\ell_{eff} = \ell_{n+1} - \ell_n + \ell_{n-1} + c$

  观察到 Fibonacci 序列由 ABABA 和 ABA 两种模式构成，我们可以一次性把它们抽取出来

  $$A_{m+1}(n) = A_m(n-2) - B_m(n-1) + A_m(n) - B_m(n+1) + A_m(n+2) + 2c$$?

  $$B_{m+1}(n) = A_m(n-1) - B_m(n) + A_m(n+1) + c$$

  像这样，我们将 ABABA 替换为 A，将 ABA 替换为 B，得到的仍是 Fibonacci 序列

- (记 F_n 的第n个斐波纳契数，$F_1 = F_2 = 1$，$F_3 = 2 \cdots$

  性质 1：$\{F_n \cdot \varphi\} = \varphi^{-n}$ 即 $F_n\varphi \approx F_{n+1}$

性质 2：　只有 F_{3l} （$l\in N^*$）为偶数

性质 3：　长度为 F_{3l} 的斐波纳契序列中，有 F_{3l-2} 个 B 和 F_{3l-1} 个 A ）

考虑周期性边界条件，故长度应为偶数．记为 $N = F_{3l}$

将所有 F_{3l-2} 个 B 一次性抽取出来，每抽取一个 B（$ABA \xrightarrow{\text{抽一个减少2}} B$ / $ABABA \xrightarrow{\text{抽2个减少4}} A$ ）会减少两项

故剩余的总项数为 $F_{3l} - 2F_{3l-2} = F_{3(l-1)}$ ，这对应于一个 Fibonacci step

•

$$B_1(n) = 1+\cos\left(2\pi\varphi(n+1)\right) + 1+\cos\left(2\pi\varphi(n-1)\right) - 1-\cos\left(2\pi\varphi n\right) + C$$

$$= 1+C + 2\cos(2\pi\varphi n)\cos(2\pi\varphi)$$

$$1+C + \cos(2\pi\varphi n)\cos(4\pi\varphi)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$