

# 非零静止质量光子及其 Casimir 效应

解宇晗 20343102

(中山大学物理学院, 广州 510275)

## 摘要

本文对非零静止质量光子的 Proca 理论及其产生的动力学效应进行了概述, 并基于 Proca 理论粗略地讨论了两个良导体平行板之间的 Casimir 效应。

**关键词:** Proca 方程, 非零静止质量光子, Casimir 效应

## 1 引言

Maxwell 方程是电动力学的基石, 在此基础上发展的量子电动力学也获得了极大的成功。但电磁理论的基础之一, 光子的静止质量为零, 是基于实验测量的结论。考虑光子静止质量不为零, 而是一个很小的数值以至于在历史上的所有电磁实验中均可以忽略不计, 其在理论上会出现一些有趣的结果。

本文从 Proca 理论出发, 对非零质量光子的一些行为进行了概述, 并对光子质量非零情况下的光学谐振腔和 Casimir 效应进行了讨论。

为书写方便, 本文在未加申明的地方均使用自然单位制。

## 2 Proca 理论及其效应

### 2.1 非零质量光子和 Proca 理论

存在背景场  $J^\mu$  的 Maxwell 理论的拉格朗日密度为:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu \quad (1)$$

在式 (1) 中可以加入一个质量项, 得到一个有质量矢量场的拉氏量:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu + \frac{\mu_\gamma^2}{2} A_\mu A^\mu \quad (2)$$

考虑该矢量场为光子, 式(2)中的  $\mu_\gamma$  则为光子的静止质量。通过 Euler-Lagrange 方程可以得到光子的运动方程, 即 Proca 方程:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} + \mu_\gamma^2 A^\mu = J^\mu \quad (3)$$

将张量  $F^{\mu\nu}$  展开，得到：

$$(\partial_\nu \partial^\nu - \mu_\gamma^2) A^\mu = -J_\mu \quad (4)$$

若上式中的背景场  $J_\mu$  为零，则为 Klein-Gordon 方程。将公式(4)按分量展开，可得到 Proca 方程组：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho - \mu_\gamma^2 \phi \quad (5a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu_\gamma^2 \mathbf{A} \quad (5d)$$

上式描述了在光子静止质量非零时的电场磁场强度关系，可以看到由于光子质量的存在，矢势  $\mathbf{A}$  和标势  $\phi$  的数值大小会产生实际影响。其中，电场和磁场依然定义为：

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned} \quad (6)$$

且有 Lorentz 条件和电荷守恒定律：

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (7)$$

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (8)$$

## 2.2 非零质量光子的色散关系

考虑真空中的单色平面电磁波解，有  $J_\mu=0$ ，设：

$$A_\mu \propto \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \quad (9)$$

代入公式(4)可得色散关系：

$$k^2 = \omega^2 - \mu_\gamma^2 \quad (10)$$

因此，若光子存在非零质量，则真空中不同频率的电磁波会存在色散，群速度和相速度分别为：

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mu_\gamma^2}{\omega^2}}} \quad (11)$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{1 - \frac{\mu_\gamma^2}{\omega^2}} \quad (12)$$

由于非零质量光子的色散关系导致不同频率电磁波的真空速度不同，在传播一段距离后会存在一个相位差，该现象为实验检验光子质量提供了一种方法。

### 2.3 非零质量光子的 AB 效应

Aharonov-Bohm 效应（即 AB 效应，下同）指出，粒子在实空间中经历一个闭合回路后，其波函数会存在一个相因子，且相因子的大小与矢势大小有关。AB 效应体现了电磁势  $A$  的可观测效应。譬如磁场中带电粒子的拉氏量为：

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q\vec{v} \cdot \vec{A} \quad (13)$$

绕某一闭合回路一周后，粒子存在一个相位差  $\Phi_{AB}$ ，该相位差可以通过干涉效应观察到。相位差的大小为：

$$\Phi_{AB} = \frac{e}{\hbar} \int \vec{A} \cdot \vec{v} dl = \frac{e}{\hbar} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (14)$$

假设光子存在非零静质量，考虑通电螺线管外部的两条首位相交的路径（如图 1 所示），粒子通过这两条路径后的相位差的改变为：

$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi_{AB}} \sim \left[ \frac{\mu_\gamma R}{2} \ln \left( \frac{2}{\mu_\gamma R} \right) \right]^2 \quad (15)$$

其中  $R$  为路径终点到螺线管之间的距离。可以看到，光子静质量对 AB 效应的影响是一个二阶小量。

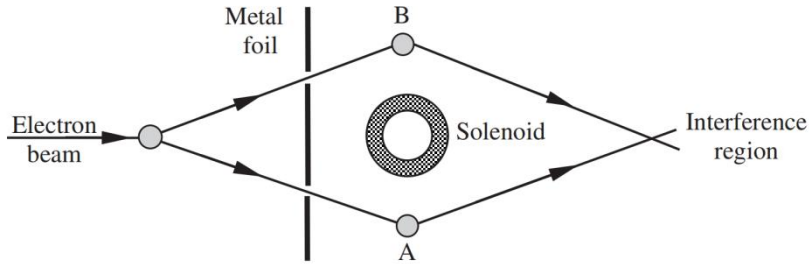


图 1 螺线管 AB 效应示意图

Figure 1. A schematic diagram of the Aharonov-Bohm effect in a solenoid experiment

### 3 基于 Proca 方程的 Casimir 效应

#### 3.1 箱谐振腔与驻波

当两块良导体的平行板在真空中相互靠近时，由于平行板之间和之外的真空零点能的能量密度存在差异，两块板之间会存在一个吸引力，该现象即为 Casimir 效应。若光子存在静止质量，Casimir 效应会发生改变，但改变程度的大小在历史上存在过一些争议。P. Davies 和 S. Unwin 曾首次提出由于有质量的光子存在 P 波分量，因此 Casimir 效应的强度应为零质量光子的 3/2。该猜测与 Stueckelberg 等人的理论不符。1984 年，G. Barton 和 N. Dombey 针对两个平行板的 Casimir 效应给出了准确解。

为更加直观地讨论非零质量光子对 Casimir 效应产生的影响，我们先讨论一个箱形谐振腔中的波模在光子质量非零时发生的变化。

考虑在一个良导体箱形谐振腔中存在一个没有电荷和电流分布的真空，由公式(5)可以得到谐振腔中电磁场的波动方程为：

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= \mu_\gamma^2 \mathbf{E}, \\ \nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} &= \mu_\gamma^2 \mathbf{B}\end{aligned}\tag{16}$$

为更加直观，我们在此处使用国际单位制。可以看到，在光子静质量非零的情况下，波动方程出现了场强的一阶项。考虑电磁场为频率为 $\omega$ 的单色波，得到亥姆霍兹方程：

$$\nabla^2 u + \left[ \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 - \mu_\gamma^2 \right] u = 0\tag{17}$$

其中  $u$  为  $E$  或  $H$  的任意分量。可以看到，它与零质量光子的亥姆霍兹方程的差异仅表现为场强之前的系数不同。电磁场同样满足边界条件：

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}\tag{18}$$

使用分离变量，可得到电场的亥姆霍兹方程解为：

$$\begin{aligned}E_x &= E_{x0} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z, \\ E_y &= E_{y0} \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z, \\ E_z &= E_{z0} \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z.\end{aligned}\tag{19}$$

$$k_x = \frac{m\pi}{L_x}, \quad k_y = \frac{n\pi}{L_y}, \quad k_z = \frac{p\pi}{L_z} \quad (20)$$

其中的波矢  $k$  满足式(10)和式(20),  $m, n, p = 0, 1, 2, \dots$ ,  $(m, n, p)$  为不同的波模。式(10)是有质量光子在箱谐振腔中存在差异的地方, 通过式(10)可以得到:

$$\omega_{nmp} = c \sqrt{\frac{m\pi^2}{L_x^2} + \frac{n\pi^2}{L_y^2} + \frac{p\pi^2}{L_z^2} + \mu_\gamma^2} \quad (21)$$

由于每个波模均有一个零点能  $\frac{1}{2}\hbar\omega$ , 角频率的差异导致谐振腔中的零点能不同。

此外, 在零质量光子的情况下, 由于谐振腔中没有电荷分布, 我们要求电场的散度等于零, 进而导出:

$$k_x E_{0x} + k_y E_{0y} + k_z E_{0z} = 0 \quad (22)$$

上式要求  $(m, n, p)$  最多只有一者为零。但在非零质量光子的情况下电场的散度还与电势相关, 如式(5a)所示, 因此式(22)不再成立, 谐振腔中理论上可以出现  $m, n, p = 0$  的情况, 即腔中电磁波的波模数发生了变化。

此外, 由于光子存在静质量, 电磁波中电场的  $p$  波分量也需要进行考虑, 谐振腔中的波模数也包括  $p$  波分量产生的贡献。

由于 Casimir 效应本质上是不同空间零点能的差异, 光子质量非零时上述内容均会对 Casimir 效应产生一定影响。

### 3.2 零质量光子的 Casimir 效应

作为对比, 我们先对零质量光子情况下的 Casimir 效应进行分析, 有质量的情况只需对推导过程稍作修改。考虑一个宽度和长度  $L$  远大于高度  $a$  的箱形谐振腔, 当  $L/a$  很大时, 我们认为该谐振腔可视为两块相距  $a$ , 面积为  $L^2$  的平行板。以垂直于板面的方向作为  $z$  轴,  $x$ 、 $y$  轴遵循右手法则平行于板面。

由亥姆霍兹方程可得电磁波波模的频率满足:

$$\omega = c \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad (23)$$

其中, 由于平行板长度和宽度  $L$  很大,  $k_x$  和  $k_y$  可以看做是连续的, 而  $a$  相对较小使  $k_z$  为离散的,  $k_z = n\pi/a$ 。该谐振腔中的每一个波模都贡献一个零点能  $\hbar\omega/2$ , 因此整个腔体中的零点能为:

$$\frac{1}{2} \sum \hbar \omega = \hbar c \frac{L^2}{\pi^2} \iint_{0 < k_x, k_y < \infty} \left[ \frac{1}{2} \sqrt{k_x^2 + k_y^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^2 \frac{\pi^2}{a^2} + k_x^2 + k_y^2} \right] dk_x dk_y \quad (24)$$

上式积分号中的两项代表在  $n$  取零和非零时， $\mathbf{k}$  对应波模自由度的不同：当  $n=0$  时，一个特定的波矢  $\mathbf{k}$  对应一个独立模；当  $n \neq 0$  时，一个特定的波矢  $\mathbf{k}$  对应两个独立模。

将  $x, y$  分量写为极坐标形式，平行板内外零点能的能量密度之差为：

$$\delta E = \hbar c \frac{L^2}{\pi^2} \frac{\pi}{2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} s \sqrt{n^2 \frac{\pi^2}{a^2} + \rho^2} \rho d\rho - \iint_{0 < \rho, k_z < \infty} \frac{a}{\pi} \sqrt{k_z^2 + \rho^2} \rho d\rho dk_z \right\} \quad (25)$$

其中  $s$  用于表示波模自由度的不同，当  $n=0$  时  $s=1/2$ ，当  $n=1$  时  $s=1$ 。由于零点能是紫外发散的，我们在式(25)的两个积分项中加入紫外截断因子  $f(k/k_m)$ ，该因子满足：

$$f(k/k_m) = \begin{cases} 1, & k/k_m \rightarrow 0, \\ 1/2, & k/k_m = 1, \\ 0, & k/k_m \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (26)$$

式(25)可以写为：

$$\delta E = \hbar c L^2 \frac{\pi^2}{4a^3} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} s \sqrt{n^2 + u} f\left(\frac{\pi \sqrt{n^2 + u}}{ak_m}\right) du - \iint_{0 < u, n < \infty} \sqrt{n^2 + u} f\left(\frac{\pi \sqrt{n^2 + u}}{ak_m}\right) du dn \right\} \quad (27)$$

其中  $u = a^2 \rho^2 / \pi^2$ 。

通过 Euler-Maclaurin 公式（见附录 A），可以得到：

$$\delta E = -\hbar c \frac{\pi^2}{24 \times 30} \cdot \frac{L^2}{a^3} \quad (28)$$

因此，零质量光子情况下，Casimir 效应引起的两平行板之间的吸引力为：

$$F_{Casimir} = -\frac{\partial \left( \frac{\delta E}{L^2} \right)}{\partial a} = \hbar c \frac{\pi^2}{240} \cdot \frac{1}{a^4} \quad (29)$$

### 3.3 非零质量光子的 Casimir 效应

光子质量非零 Casimir 效应的准确求解较为复杂，本文中我们基于零质量光子 Casimir 效应的推导过程进行修改，可以粗略地得到一个近似结果。

将公式(27)改写为：

$$\delta E = \hbar c L^2 \frac{\pi^2}{4a^3} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \sqrt{n^2 + u + \mu^2} f\left(\frac{\pi \sqrt{n^2 + u}}{ak_m}\right) du - \iint_{0 < u, n < \infty} \sqrt{n^2 + u + \mu^2} f\left(\frac{\pi \sqrt{n^2 + u}}{ak_m}\right) du dn \right\} \quad (30)$$

其中 $\mu$ 为 $\mu_\gamma$ 乘以一个保证国际单位制的系数。我们将其中的积分项写为  $F(n)$ :

$$F(n) = \int_0^{\infty} \sqrt{n^2 + u + \mu^2} f\left(\frac{\pi \sqrt{n^2 + u}}{ak_m}\right) du \quad (31)$$

做替换  $w=n^2+u$ ，并将因子  $f$  简化为一个阶跃函数:

$$f(\pi \sqrt{w} / ak_m) = \begin{cases} 1, & \pi \sqrt{w} / ak_m < 1, \\ 0, & \pi \sqrt{w} / ak_m > 1. \end{cases} \quad (32)$$

得到:

$$F(n) = \int_{n^2}^{\frac{ak_m^2}{\pi}} \sqrt{w + \mu^2} dw \quad (33)$$

可以得到:

$$\begin{aligned} \delta E &= \hbar c L^2 \frac{\pi^2}{4a^3} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} F(n) - \int_0^{\infty} F(n) dn \right\} \\ &= \hbar c L^2 \frac{\pi^2}{4a^3} \left\{ - \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + \mu^2)^{\frac{3}{2}} + \int_0^{\infty} (n^2 + \mu^2)^{\frac{3}{2}} dn \right\} \end{aligned} \quad (34)$$

上式使用 Euler-Maclaurin 公式无法很好的解决，因此我们采用数值计算的方法。为减小数值计算时引入的误差，我们计算了非零静止质量光子的 Casimir 吸引力与零质量光子的 Casimir 吸引力之差。其中积分项的计算结果如图 2 所示。

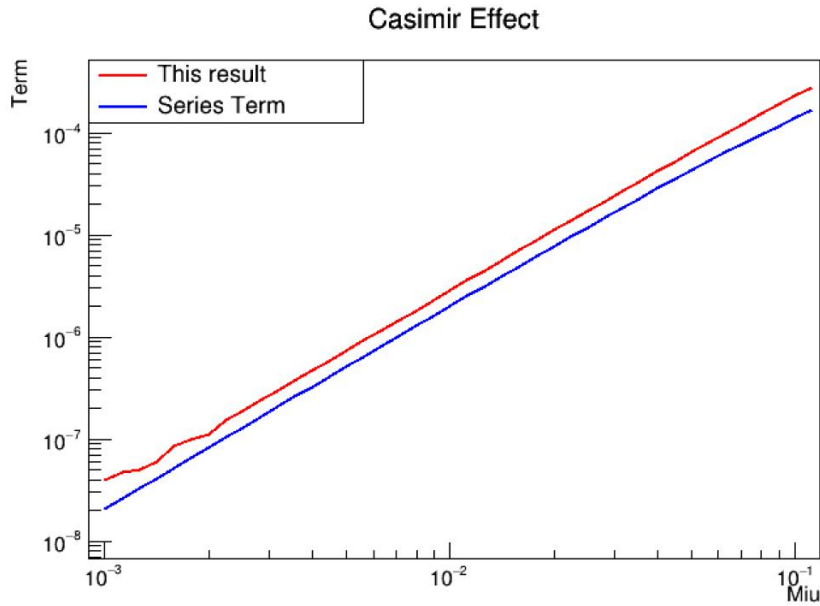


图 2 光子质量非零对 Casimir 效应产生的影响

Figure 2. Calculation of Casimir effect with finite mass photon

上述内容仅是根据零质量光子情况的 Casimir 效应进行质量项修改的粗糙结果。非零质量光子情况下，良导体平行板之间的 Casimir 效应的严格解为：

$$\delta E = -\hbar c L^2 \frac{\pi^2}{3a^3} \int_{\mu}^{\infty} \frac{(\tau^2 - \mu^2)^{\frac{3}{2}} d\tau}{e^{2\pi\tau} - 1} \quad (35)$$

或写为级数形式：

$$\frac{\delta E}{L^2} = \hbar c \frac{\pi^2}{a^3} \left[ -\frac{1}{720} + \frac{1}{48} \mu^2 - \frac{1}{12} \mu^3 - \frac{1}{16} \mu^4 \ln \mu + \dots \right] \quad (36)$$

可以看到，质量的二阶项使 Casimir 效应减弱，三阶和四阶项使 Casimir 效应加强。作为对比，我们将级数解的 2~4 阶项和式(34)的计算结果画在一起，如图 2 所示，其中蓝色线为严格解写为级数项的结果，红色线为本实验粗糙估算的光子静质量非零导致的 Casimir 效应的减弱。可以看到，估算的结果在变化趋势与准确解相似，数值上存在一定差异，该差异主要是因为本文估计结果的粗糙，但也有一部分来源于数值计算误差。总体而言，光子质量对 Casimir 效应产生的贡献是一个二阶小量，而并非 P. Davies 和 S. Unwin 认为的增大 50%。在光子质量极小时，Casimir 效应基本不会发生变化。

## 5 总结

本文对光子静止质量非零时的一些物理现象进行了粗浅的介绍与讨论。当光子静止质量非零时，对 AB 效应、Casimir 效应等物理现象的贡献一般都是静质量  $\mu$  的函数，且在本文的情况下，均为二阶量。

对于 Casimir 效应，本文在一般情况下谐振腔中波模的零点能计算中直接加入了质量项，得到的估计结果与严格的理论值仅在趋势上大致吻合，在数值上存在一定的差异。我们认为该差异的主要因素是在计算过程中没有考虑电磁波的  $p$  波分量，且对于边界条件的选取也过于随意，光子质量非零时谐振腔的边界条件也应该改变。

总体来说，本文通过简单的操作较为直接且直观地对光子非零质量情况下的 Casimir 效应的改变进行了讨论，仅作为一种介绍性质的思路。



## 附录 A

Euler-Maclaurin 公式可以写为:

$$\sum_{n=a}^{\infty} f(n) = \int_a^{\infty} f(x)dx + \frac{1}{2}f(a) - \sum_{l=2}^k \frac{(-1)^l}{l!} f^{(l-1)}(a) B_l - \frac{(-1)^k}{k!} \int_a^{\infty} f^{(k)}(x) \psi_k(x) dx$$

其中  $B_l$  为伯努利数, 定义为伯努利多项式  $x=0$  对应的数值, 即  $B_l = B_l(0)$ 。1 分别为 1~5 的伯努利多项式为:

$$B_0(x) = 1$$

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + \frac{1}{30}$$

$$B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$$

## 参考文献

- [1] Liang-Cheng Tu, J. Luo, G. Gillies. The mass of the photon[J]. Rep. Prog. Phys. 68 (2005) 77–130.
- [2] Boulware D. Aharonov-Bohm Effect and the Mass of the Photon[J]. PHYSICAL REVIEW LETTERS, 1989.
- [3] H. Casimir. On the Attraction between Two Perfectly Conducting Plates[J]. Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences, 1948.
- [4] G. Barton, N. Dombey. Casimir effect for massive photons[J]. 1984.
- [5] Teo L P. Casimir effect of massive vector fields[J]. Phys.Rev., 2010.
- [6] Rozman M G. Euler-Maclaurin summation formula[Z]. 2016.