

光子能发生玻色-爱因斯坦凝聚吗？

罗俊平¹⁾

1) (中山大学物理系, 广州 510275)

摘 要

光子的玻色-爱因斯坦凝聚在一般的普朗克黑体辐射系统中存在相对困难, 研究者通过在充满染料溶液的微弯曲镜光学微共振器中限制光子, 观察到了光子的玻色-爱因斯坦凝聚。本文将光子视为一种“有效质量”玻色子, 通过含质量项的光子理论物理模型, 分析了光子在玻色-爱因斯坦凝聚状态下的行为, 以及它们与物质的相互作用。

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚, 光子, 量子相变

第一作者. E-mail: luojp25@mail2.sysu.edu.cn

1 引 言

1924 年, 玻色提出了新的光子统计方式后^[1], 爱因斯坦将其推广至带质量的理想气体^[2], 并预言不存在相互作用的玻色子在临界温度以下会在最低能量量子态上凝聚, 我们现在把玻色子所处的这一状态称之为玻色-爱因斯坦凝聚态 (BEC)。1995 年, 美国科学家埃里克·康奈尔和卡尔·维曼通过激光制冷技术将碱金属气体温度冷却到 10^{-6}K , 同时通过磁阱将冷原子束缚在空间中的特定区域, 第一次在实验上成功观测到了 BEC^[3], 并于 2001 年获诺贝尔物理学奖。

然而, 尽管 BEC 的提出与发现与玻色提出的光子统计密不可分, 但是由于光子化学势恒为零, 因此光子数并不守恒, 即当系统温度降低时, 系统的光子数会逐渐减少, 因此光子无法发生玻色-爱因斯坦凝聚。即使对于黑体辐射问题而言, 在确定的温度下, 光子的平均粒子数不变, 然而这与光子数守恒的条件并不等价, 前者可以通过光子不断地消失与产生达到动态平衡, 后者则说明不存在涨落, 而前者意味着, 在低温下光子消失在腔壁中, 而不是占据基态。因此发生玻色-爱因

斯坦-凝聚前提是同时满足弱简并和粒子数守恒两个条件。

更进一步而言,光子不能够发生玻色-爱因斯坦凝聚的核心原因在于,光子作为规范场(电磁场)传递相互作用的规范玻色子,为了使系统具有局域规范不变性,其质量必须为 0,即规范玻色子的质量将破坏局域规范对称性^[4]。然而,假设使光子出现纵向极化,破坏其规范对称性后,光子在形式上等价于一个具有“质量”的玻色子,这意味着光子在低温下将也能够发生玻色-爱因斯坦凝聚。

2 具有纵向极化的光子

光子的玻色-爱因斯坦凝聚的相关研究由来已久,激子极化激元(激子和光子形成的强耦合叠加态,是一种准粒子)的玻色-爱因斯坦凝聚早有报道^[5],而非极化激元体系能否发生玻色-爱因斯坦凝聚呢?如前文所述,光子能够发生玻色-爱因斯坦凝聚的前提是破坏光子的规范对称性,使光子等价于一个具有“质量”的玻色子,其可行的方法之一是使光子具有纵向极化。2010年,马丁·魏茨的课题组基于特殊的二维光学微腔实现了光子的玻色-爱因斯坦凝聚^[6]。

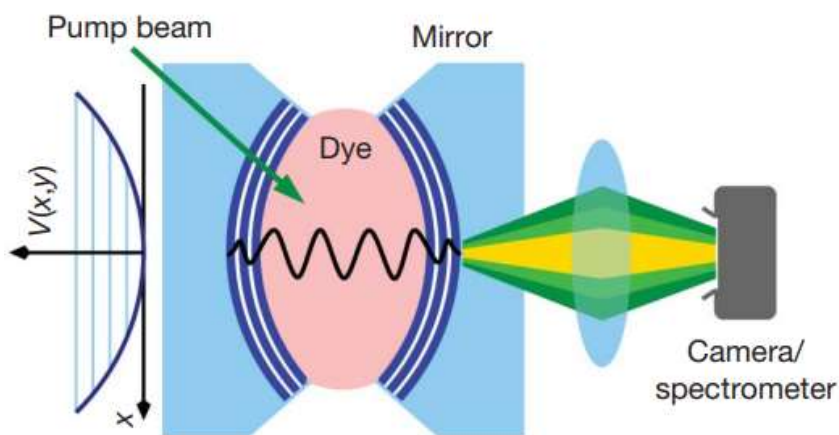


图1 特殊的二维光学微腔^[6]

Fig. 1. Special two-dimensional optical microcavities.

二维光学微腔由两个反射率为99.997%的弯曲介质镜组成,高反射率保证了腔内电磁场在纵向的完美反射,其另一特点为二维光学微腔的横向尺寸较纵向尺寸而言高出一个数量级,提供了一个特殊的边界条件,微腔的边界条件会施加给

光子一个纵向波数，类比黑体辐射问题，我们可以给出这一纵向波数的表达式：

$$k_z = \frac{q\pi}{D_0 - 2(R - \sqrt{R^2 - r^2})} \quad (1)$$

其中 r 为偏离光轴的纵向距离， R 为曲面镜的曲率半径。

另一个需要解决的问题是，系统温度降低时，系统的光子数会逐渐减少，在低温下光子消失在腔壁中，而不是占据基态，因此无法发生玻色-爱因斯坦凝聚。实验中通过液态染料溶液(溶解在甲醇中的罗丹明6G染料)来“冷却”光子。染料分子重复吸收和放出光子的过程，使光子达到染料溶液的温度，即能够通过改变染料溶液的温度使光子“降温”，更准确而言，在介质中的光子气体满足细致平衡条件^[7]：

$$\frac{f_T(\omega)}{\alpha_T(\omega)} \propto \omega^3 e^{\frac{-\hbar\omega}{k_B T}} \quad (2)$$

其中 $\alpha_T(\omega)$ 为染料溶液的光子吸收强度，而 $f_T(\omega)$ 为染料溶液的光子发射强度。

由于二维光学微腔的纵向尺寸很小，因此相邻纵向波模之间的频率间隔较大，而落在染料光谱范围内的波模仅有一个，从而导致光子气体的纵向模态数被冻结，光子气体只剩横向模态自由度，从而使光子气体二维化。图2即给出二维光子气体的色散关系，其中实线表示纵向波模固定的光子的色散关系，虚线表示自由光子的色散关系作为对比。

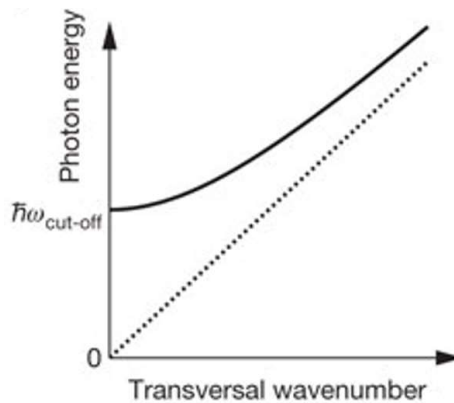


图2 光子的色散关系^[6]

Fig.2. Dispersion relation of photons.

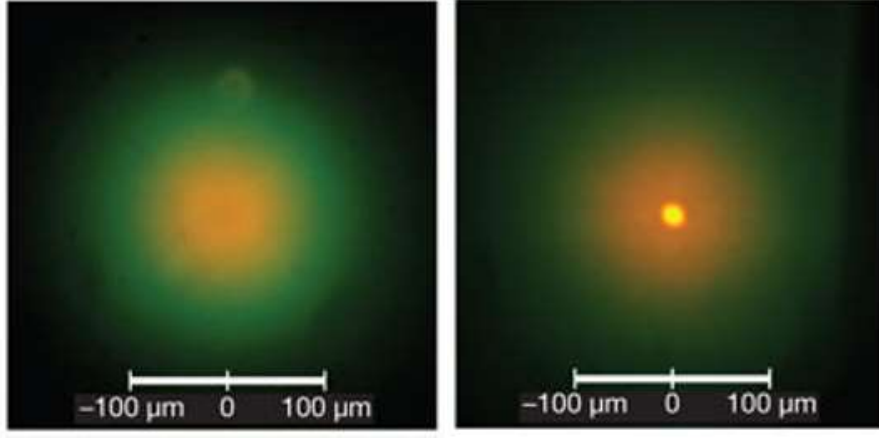


图3 光子的玻色-爱因斯坦凝聚^[6]

Fig. 3. Bose-Einstein condensation of photons.

光子气体在临界光子数以下(左)和高于临界光子数(右)的空间图像如图3所示。能量较低(黄色)的光子被束缚在陷阱中心,而能量较高(绿色)的光子出现在陷阱外围区域。在临界光子数以上,在陷阱中心可见一个亮点,这一现象表明二维光子气体宏观存在 TEM_{00} 模,并发生了玻色-爱因斯坦凝聚。

3 二维光子气的临界凝聚光子数

如前文所述,在这一系统中,光子的纵向波模恒定,令 $q = q_0$ 有:

$$k_z = \frac{q_0 \pi}{D(r)} \quad (3)$$

我们可以写出能量-波数关系:

$$E = \frac{\hbar c}{n} [k_z^2 + k_r^2]^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

其中 n 为染料溶液的折射率。

由于二维光学微腔中光子的纵向波模恒定,且其作为光子的有效质量的来源,进一步导致二维光子气体的化学势并没有消失或者恒定为0,其有效质量表达式可以写为:

$$m = \frac{\hbar q_0 \pi n}{D_0 c} \quad (5)$$

由于 $k_z \gg k_r$, 所以我们将(4)式近似为:

$$E = \frac{\hbar c}{n} (k_z + \frac{k_r^2}{2k_z}) \quad (6)$$

进而利用 $R \gg r$ ，我们可以将(6)式改写为：

$$E = E_0 + \frac{(\hbar k_r)^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \quad (7)$$

其中 E_0 为二维光子气体的零点能，其表达式为：

$$E_0 = \frac{D_0 R + r^2}{n^2 D_0 R} mc^2 \quad (8)$$

而：

$$\omega = \frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{D_0 R}} \quad (9)$$

因此我们可以求得发生玻色-爱因斯坦凝聚临界的光子数：

$$N_c = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^2 \quad (10)$$

对于室温而言，临界光子数约为70000.而当前研究者通过调整二维微腔的尺寸和实验温度，已在150K温度下实现仅有 7 ± 2 个光子的玻色-爱因斯坦凝聚。[8]

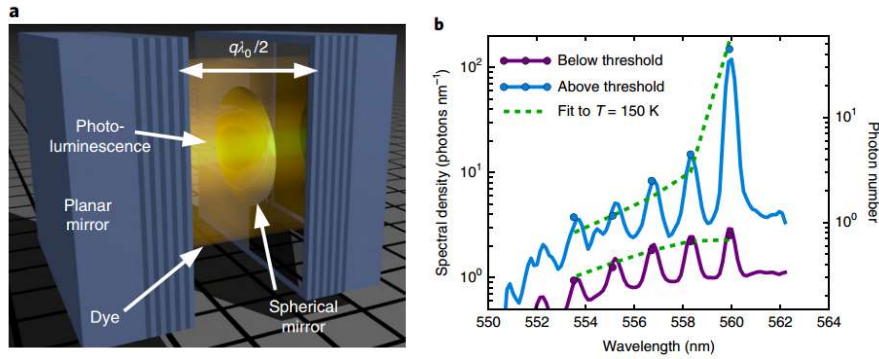


图4 小于10个光子的玻色-爱因斯坦凝聚[9]

Fig. 4. Driven-dissipative non-equilibrium Bose - Einstein condensation of less than ten photons.

4 二维光子气的 Bogoliubov 散射关系

在上一节，我们分析了发生玻色-爱因斯坦凝聚临界物理量，下面我们分析光子发生BEC时的哈密顿量。在这一特殊体系中，染料溶液扮演了光子源的作用，其使得总光子数守恒(区别于黑体辐射问题中平均光子数恒定)，二维微腔限定了光子具有固定的纵向波矢，并赋予光子有效质量，所以本文中光子的BEC本质上指的是光子在横向动量上的凝聚。

在(6)式中加入光子的相互作用项(假设光子间有弱相互作用), 并重新定义光子的零点能, 我们将能量项最终写为:

$$E = \frac{(\hbar k_r)^2}{2m} + E_{int} \quad (11)$$

我们可以用Bogoliubov方法研究弱相互作用的玻色体系, 哈密顿量可以写为:

$$H = \sum_k [\mathcal{E}(k_r) - \mu] a_k^\dagger a_k + \frac{V_0}{2S} \sum_{ik} a_{i+k}^\dagger a_{j-k}^\dagger a_i a_j \quad (12)$$

$\mathcal{E}(k_r)$ 为光子的动能 μ 为光子的化学势, 第二项表示光子间的相互作用, V_0 表示相互作用势。引入Bogoliubov变换后, 我们可以将哈密顿量对角化, 进一步得到:

$$H = E_0 + \sum_k \left[\frac{n_0 V_0}{m} (\hbar k_r)^2 + \frac{(\hbar k_r)^4}{2m} \right]^{\frac{1}{2}} (b_k^\dagger b_k + \frac{1}{2}) \quad (13)$$

其中 $n_0 = \frac{N_0}{S}$ 为光子气的态密度, 这一表达形式说明了对于由于恒定的纵向波模而具有有效质量的二维光子气体而言, 其可以用无相互作用的准粒子的形式描述, 即由弱相互作用的光子系统变换为无相互作用的声子气。这一过程中最关键的近似步骤是 $k_z \gg k_r$ (纵向波矢远大于横向波矢), 且在低于临界温度时有大量光子占据TEM₀₀态产生宏观凝聚, 进而可以将相互作用项保留到产生湮灭算符的二阶, 从而将具有二次多项式形式的哈密顿量对角化得到式(13).进而我们写出薛定谔方程:

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \quad (14)$$

结合式(2), 我们可以求出能动量空间中染料溶液的光子发射强度函数:

$$f_T(k, \omega) = \frac{4\hbar}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \frac{\gamma(E + \omega)(E + 2\mu + \omega)}{4\gamma^2 \omega^2 + (E^2 + 2\mu E + \omega^2)^2} \quad (15)$$

借助式(15), 取实验中对应参数代入计算 ($T=300K, \gamma = 2\pi GHz$), 我们可以计算得到能动量空间的非相干光致发光情况, 其中Bogoliubov色散关系清晰可见。我们发现, 非相干光致发光强度集中分布在 $k=0$ 处, 与图6的实验结果相符。

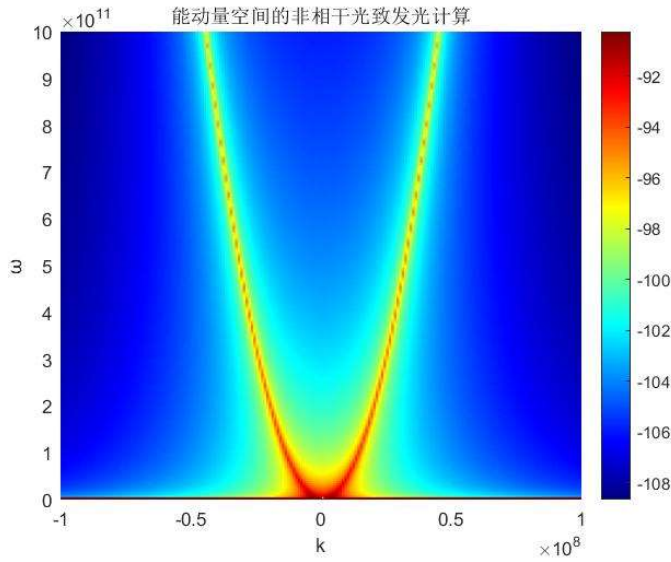


图5 能动量空间的非相干光致发光计算结果

Fig. 5. Calculation results of photoluminescence in the energy space.

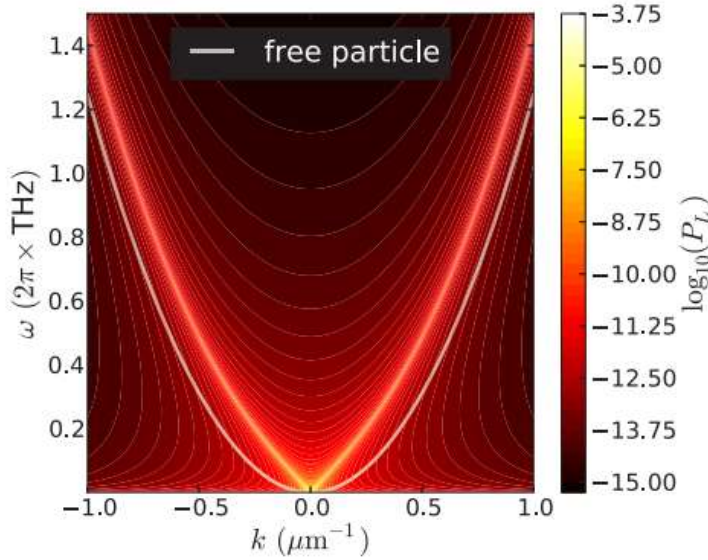


图6 能动量空间的非相干光致发光计算结果(论文结果)^[7]

Fig. 6. Calculation results of photoluminescence in the energy space.

5 讨论部分

在调研光子玻色-爱因斯坦凝聚前,令人深思的问题是当一个玻色体系的化学势从有限值连续变化到 0 的过程中,是否出现了物理性质的跳变。换一种说法即玻色子有效质量 $m=0$ 的情况是否能视为质量为有限质量体系下的一个极限情况,而非一个独立情况。现在借助光子的玻色-爱因斯坦凝聚现象我们可以就这个特例给出一定的答案:拥有纵向极化的光子可以定义“有效质量”,具有有限的化学

势，可以发生玻色-爱因斯坦凝聚，然而此时继续称其为光子气体似乎并不合适，其性质更接近声子气体，且可以用下列哈密顿量描述^[10]

$$H = E_0 + \sum_k \left[\frac{n_0 V_0}{m} (\hbar k_r)^2 + \frac{(\hbar k_r)^4}{2m} \right]^{\frac{1}{2}} \left(b_k^\dagger b_k + \frac{1}{2} \right) \quad (16)$$

其中 V_0 表示相互作用势， $n_0 = \frac{N_0}{S}$ 光子气的态密度，这一表达形式说明了对于由于恒定的纵向波模而具有有效质量的二维光子气体而言，其可以用无相互作用的准粒子的形式描述，即由弱相互作用的光子系统变换为无相互作用的声子气。

从另一个角度考虑，在微腔-染料体系中具有恒定纵向波数的光子气体，其由于纵向波数同时取决于微腔尺寸和染料光谱范围，这意味着其波数不可能实现连续变化，而仅能取特定的分立值。究其根本而言，规范玻色子的质量破坏局域规范对称性这件事情的性质是“全或无”的，在这一问题的研究范围内，玻色子有效质量 $m=0$ 的情况不能视为有限质量体系的极限情况，而应视为一种具有新的物理性质的玻色子。

另一个有意思的问题是，尽管 BEC 是一种普遍现象，然而对于不同的物理体系来说，判断凝聚的标准并不太一致。对于冷原子体系而言，由于其可以视为封闭系统，因此占据宏观状态即可以视为发生 BEC 的证据。然而对于微腔光子这一存在外界驱动的耗散开放量子系统而言，能否使用微观粒子数作为发生 BEC 的临界物理量是一个悬而未决的问题。在这一体系下，我们认为发生 BEC 的情况是大量光子聚合在能量最低的模式下(TEM_{00})，而其他的模式均不填充光子，实验上则通过玻色-爱因斯坦分布的良好拟合结果作为证据链的一环证明微腔光子发生了 BEC。

6 结 论

研究者通过在充满染料溶液的微弯曲镜光学微共振器中限制光子，在存在外界驱动的耗散开放量子系统中观察到了光子的玻色-爱因斯坦凝聚。二维微腔结构

和染料光谱范围共同决定了光子具有固定的纵向波数，在光子出现纵向极化，破坏其规范对称性后，可以定义光子的有效质量和化学势，此时其性质更接近声子气体，可以使用 Bogoliubov 激发描述其动力学行为。基于 Bogoliubov 色散关系计算得到能动量空间的非相干光致发光情况，能够较好地解释实验结果。

光子的玻色-爱因斯坦凝聚目前留给研究者的一个问题是，光子-光子相互作用还没有被精确测量，且缺乏完整的理论描述，已有的解释为可能来自于克尔效应，或由于光的不均匀性导致温度不均匀性，进而对空间折射率分布产生影响，有待进一步的研究。

感谢中山大学李志兵教授和周子谦学长的讨论。

参考文献

- [1] Bose S N. “Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese”, Z.Phys. 1924, 26:178-181.
- [2] Einstein A. “The quantum theory of the monatomic perfect gas”, Preuss. Akad.Wiss.Berlin, 1924, 261.
- [3] Anderson M H , Ensher J R , Matthews M R , et al. Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor, American Association for the Advancement of Science, 1995(5221).
- [4] YANG C N, MILLS R L. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance, Phys. Rev, 1954,96(1):191-195.
- [5] R. Balili et al. ,Bose-Einstein Condensation of Microcavity Polaritons in a Trap.Science316, 1007-1010(2007).
- [6] Klaers, Jan, Schmitt, et al. Bose-Einstein condensation of photons in an optical microcavity. Nature, 2010.
- [7] McCumber, D. E. Einstein relations connecting broadband emission and absorption spectra. Phys. Rev. 136, A954–A957 (1964).

- [8] Klaers, J., Vewinger, F. & Weitz, M. Thermalization of a two-dimensional photonic gas in a ‘white wall’ photon box. *Nature Phys* 6, 512–515 (2010).
- [9] Walker, B.T., Flatten, L.C., Hesten, H.J. et al. Driven-dissipative non-equilibrium Bose–Einstein condensation of less than ten photons. *Nature Phys* 14, 1173–1177 (2018).
- [10] Zhang J J 2013 Ph.D. Dissertation (Wuhan: Huazhong University of Science and Technology) (in Chinese) [张建军2013 博士学位论文（武汉：华中科技大学）]
- [11] Nyman, R. A. & Szymańska, M. H. Interactions in dye-microcavity photon condensates and the prospects for their observation. *Phys. Rev. A.* 89, 033844 (2014).

Can photons undergo Bose–Einstein condensation?

Junping Luo¹⁾

1) (School of Physics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract

Bose-einstein condensation of photons, which is relatively difficult to achieve in ordinary Planck blackbody structures, was observed by confining photons in an optical microresonator with a slightly curved mirror filled with dye solution. In this paper, the photon is regarded as an "effective mass" boson, and the behavior of photons in the Bose-Einstein condensate state and their interaction with matter are analyzed through the theoretical physics model of photons with mass term.

Keywords: Bose-einstein condensates, Photons, Quantum phase transitions