非均匀介质有色散时的电磁场问题

郭相飞[1]

中山大学物理学院，广州，510275

摘要：Maxcell 方程组一直是求解电磁场方程在基础，在基础电动力学课程中，我们学习了均匀无色散各向同性介质的电磁场问题的求解方式，本文对这一问题进行拓展，提出了色散问题的处理以及非均匀介质的处理方式，其中，非均匀介质还包含了无源场和有源场两种方式，我们分别对其进行讨论，得到非均匀介质下的广义波动方程和静电场静磁场的广义泊松方程，最后，笔者还对文章未讨论的情况进行说明。

关键词：色散；非均匀介质；广义波动方程

1 前言

按照经典物理学观点，电磁场的波动会形成电磁波，电磁相互作用的规律是 Maxcell 方程组，在无源情况下，电磁场中自由电荷 $\rho=0$，传导电流 $\boldsymbol{J}=0$，同时，如果介质均匀各向同性、无色散情况下，可以解出满足的最简单情况下的波动方程。但是，自然界中的电磁波都不是单色波，这就导致了色散的存在，介质也不都是绝对均匀，这就导致了介电常量 ε 和磁导率 μ 与坐标有关，这样波动方程就会具有新的形式。

本文介绍了仅考虑有色散情况下电磁场波动方程的处理，之后讨论了仅考虑介质非均匀情况下的处理，综合二者的结论，我们可以得到在无源情况下的电磁场波动方程的形式，之后，我们讨论了有源情况下问题的处理方式。

2 传统电磁波动方程

按照 Maxcell 方程理论 [1]，电场和磁场必须满足 Maxcell 方程组，在无源情况下，$\rho=0$，$\boldsymbol{J}=0$，这时，电场和磁场的散度均为 0，即 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0,\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，其余方程具有以下形式：

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{2}$$

以电场的处理方式为例，对于 (1)，对其左右两端取旋度，有：

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=-\frac{\partial(\nabla\times\boldsymbol{B})}{\partial t}=-\mu_0\frac{\partial(\nabla\times\boldsymbol{H})}{\partial t} \tag{3}$$

$$\text{左端}=\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}=-\nabla^2\boldsymbol{E} \tag{4}$$

$$\text{右端}=-\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{D}}{\partial t^2}=-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{5}$$

由此可以得到电场满足的波动方程：

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0 \tag{6}$$

对于磁场，处理方式对称，即：

$$\nabla^2\boldsymbol{B}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}=0 \tag{7}$$

取常数

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \tag{8}$$

式子可以简化为：

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0 \tag{9}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}=0 \tag{10}$$

这就是真空中电磁波动方程，对于空间为均匀无色散的介质（$\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r,\mu=\mu_0\mu_r$），处理方式类似，只需要把真空介电常量和真空磁导率换为介质的介电常量和介

[1] 大三本科生，邮箱：guoxf23@mail2.sysu.edu.cn

质的磁导率即可，这样，我们可以定义：

$$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}\approx\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \tag{11}$$

其中，ε_r,μ_r 为相对介电常量和相对磁导率，当介质为非磁性介质时，$\mu_r\approx 1$ 这样，均匀各向同性介质的波动方程

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0 \tag{12}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{B}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}=0 \tag{13}$$

3 空间有色散时的波动方程

事实上，上述中空间为无色散情况，然而在现实中，不存在绝对意义上的单色波，也不存在绝对意义上的无色散物质，关于色散曲线，可以参考洛伦兹色散模型，此处我们不讨论色散曲线，仅将其表示为 $\varepsilon(\omega)$ 和 $\mu(\omega)$，据此以进行计算。

当空间为有色散介质时，当初的物质方程不能简单写成 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$，物质方程仅对于一种频率的光成立，也就是说对于频率为 ω 的单色波来说，物质方程可以写成：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}(\omega)&=\varepsilon(\omega)\boldsymbol{E}(\omega)\\ \boldsymbol{B}(\omega)&=\mu(\omega)\boldsymbol{H}(\omega)\end{aligned} \tag{14}$$

这样以来，对于某一个频率为 ω 的单色平面波，其依然满足式（9）和（10）的形式，只是其中的 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 都要写成 $\boldsymbol{B}(\omega)$ 和 $\boldsymbol{E}(\omega)$ 的形式，即单色时谐波的波动方程，在单色波下，特定圆频率 ω 的单色平面波是时谐波，即：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)&=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}\\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)&=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}\end{aligned} \tag{15}$$

将其代入 Maxcell 方程组中，可以得到：

$$\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})+k^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})&=0\\ \nabla^2\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})+k^2\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})&=0\end{aligned} \tag{16}$$

这就是一定频率 ω 的电磁波满足的定态波动方程，称之为亥姆霍兹方程，其中 k 表示圆波数，其与圆频率一一对应，即：

$$k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}=\frac{\omega}{v}=\frac{2\pi}{\lambda} \tag{17}$$

按照定态叠加原理 [2]，假使一个波是由多种频率组成的，我们可以把其看作一系列简谐的定态波的叠加，同时，每一个简谐波都是正交完备的，因此，根据傅里叶变换，可以把包含多种分量的 $\boldsymbol{E}(r,t)$ 和 $\boldsymbol{B}(r,t)$ 写成一些列简谐的定态波的叠加，即：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(t)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\,d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\,e^{-i\omega t}d\omega\\ \boldsymbol{B}(t)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\,d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\,e^{-i\omega t}d\omega\end{aligned} \tag{18}$$

这样，就可以完整的表示出包含多种频率分量的非定态波的形式。

4 非均匀介质电磁场问题

上面我们讨论了关于均匀介质的情况，理想情况下，ε 和 μ 与坐标无关，即均匀情况，而当非均匀情况下，二者均与坐标有关，写成 $\varepsilon=\varepsilon(\boldsymbol{r})$ 和 $\mu=\mu(\boldsymbol{r})$，这样一来，二者的散度和旋度部分就不为 0，需要保留，下面我们讨论此情况下的电磁场方程的形式 [3]。

根据 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0$，得到：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{E}+\nabla\varepsilon\cdot\boldsymbol{E}=0 \tag{19}$$

即

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=-\frac{\nabla\varepsilon\cdot\boldsymbol{E}}{\varepsilon} \tag{20}$$

这样以来：

$$\begin{aligned}\text{左端}&=\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}\\ &=\nabla(-\frac{\nabla\cdot\varepsilon\boldsymbol{E}}{\varepsilon})-\nabla^2\boldsymbol{E}\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\text{右端}&=-\frac{\partial(\nabla\times\boldsymbol{B})}{\partial t}=-\frac{\partial(\nabla\times\mu\boldsymbol{H})}{\partial t}\\ &=-\frac{\partial(\nabla\mu\times\boldsymbol{H}+\mu\nabla\times\boldsymbol{H})}{\partial t}\\ &=-\left[-\frac{\nabla\mu\times(\nabla\times\boldsymbol{E})}{\mu}+\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}\right]\end{aligned} \tag{22}$$

两端相等，可以得到

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}+\nabla(\frac{\nabla\varepsilon\cdot\boldsymbol{E}}{\varepsilon})+\frac{\nabla\mu\times(\nabla\times\boldsymbol{E})}{\mu}=0 \tag{23}$$

这就是电场在非均匀介质中所满足的波动方程，如果我们做简单的代换（$\frac{\nabla\cdot\varepsilon}{\varepsilon}=\nabla\ln\varepsilon\cdot,\frac{\nabla\mu\times}{\mu}=\nabla\ln\mu\times$），就

可以把其简化为

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + \nabla\left[\nabla\left(\ln\varepsilon\right)\cdot E\right] + \nabla\left(\ln\mu\right)\times\left(\nabla\times\boldsymbol{E}\right) = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{24}$$

这时电场的情况，对于磁场的情况，情况和电场大致相同，依然是根据 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ 出发，得到

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H} = -\frac{\nabla\mu\cdot\boldsymbol{H}}{\mu} \tag{25}$$

并最终可以计算得到与式（23）相类似的式子

$$\nabla^2\boldsymbol{H} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2} + \nabla\left(\frac{\nabla\mu\cdot\boldsymbol{H}}{\mu}\right) + \frac{\nabla\varepsilon\times(\nabla\times\boldsymbol{H})}{\varepsilon} = 0 \tag{26}$$

整理可以得到

$$\nabla^2\boldsymbol{H} + \nabla\left[\nabla\left(\ln\mu\right)\cdot H\right] + \nabla\left(\ln\varepsilon\right)\times\left(\nabla\times\boldsymbol{H}\right) = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2} \tag{27}$$

5 非均匀介质有色散时的电磁场

我们讨论了有色散时的电磁场问题，又讨论了非均匀介质的电磁场问题，事实上，两种问题处理的方式互不干扰，也就是说，一个单色波不受色散的干扰，其满足的方程就是非均匀介质的电磁场方程，而对于多色波来说，仅仅是将不同单色波进行叠加，将时域问题转化为频域问题即可，我们以单色波 ω 重写书写非均匀介质的电磁波运动方程，即

$$\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + k^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \nabla\left[\nabla\left(\ln\varepsilon\right)\cdot E(\boldsymbol{r})\right] + \\ \nabla\left(\ln\mu\right)\times\left(\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\right) = 0\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) + k^2\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) + \nabla\left[\nabla\left(\ln\mu\right)\cdot H(\boldsymbol{r})\right] + \\ \nabla\left(\ln\varepsilon\right)\times\left(\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\right) = 0\end{aligned} \tag{29}$$

其中 $k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$，即单色波满足的亥姆霍兹方程，之后再进行单色波的叠加即可。

6 有源广义泊松方程

上述讨论中我们均是在大前提自由电荷 $\rho=0$，传导电流 $\boldsymbol{J}=0$ 的前提下讨论的，也就是无源场，当场变为有源时 [4]，情况变得更加复杂，这里我们仅仅讨论关于定态情况，也就是电磁场不随时间变化，不会形成电磁波的传递，关于有源场的问题，需要引入矢势 $\boldsymbol{A}$ 和标势 φ，即 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial A}{\partial t}$，在时不变的情况下，对时间的偏导项可以省略。

6.1 稳恒电势

对于静电场的中，自由电荷不为 0，这样静电场的 Maxcell 方程组就有以下形式：

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{D} &= \rho \\ \nabla\times\boldsymbol{E} &= 0\end{aligned} \tag{30}$$

代入物质方程，得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \nabla\cdot(\varepsilon\nabla\varphi) = -\rho \tag{31}$$

将其展开得到

$$\nabla\varepsilon\cdot\nabla\varphi + \varepsilon\nabla^2\varphi = -\rho \tag{32}$$

也可以写成对数的形式，即

$$\nabla^2\varphi + \nabla\ln\varepsilon(\boldsymbol{r})\cdot\nabla\varphi = -\rho/\varepsilon(\boldsymbol{r}) \tag{33}$$

在介电常量与位置坐标无关时，其可以退化为经典的泊松方程，即 $\nabla^2\varphi=-\rho/\varepsilon(\boldsymbol{r})$，式中的 $\nabla\ln\varepsilon(\boldsymbol{r})\cdot\nabla\varphi$ 就是由于介质的非均匀导致的附加项，当介电常量与位置坐标无关或者 $\nabla\varepsilon\perp E$ 时也可以退化为经典的泊松方程

$$\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon(\boldsymbol{r}) \tag{34}$$

6.2 稳恒磁矢势

对于介质中有传导电流的情况，类似于自由电荷的静磁场问题，当介质的中的传导电流不为 0 时，关于磁场的描述方程为：

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{J} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} &= 0\end{aligned} \tag{35}$$

代入物质方程并进行化简得

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{H} &= \nabla\times\frac{\nabla\times\boldsymbol{A}}{\mu} \\ &= \frac{\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}}{\mu} + \nabla\frac{1}{\mu}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{J}\end{aligned} \tag{36}$$

或者写成

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}-\nabla\ln\mu\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\mu\boldsymbol{J} \tag{37}$$

在对于磁矢势的处理中，需要我们取一定的规范来消除自由度，我们可以取库伦规范，即 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$，这样以来上式可以简化为

$$\nabla^2\boldsymbol{A}+\nabla\ln\mu\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=-\mu\boldsymbol{J} \tag{38}$$

这样一来，我们就可以将磁场方程化成类似于式（33）的形式，同时我们还可以发现，式中 $\nabla\ln\mu\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$ 是由于磁导率随位置坐标不均匀而出现的附加项，当介质均匀或者 $\nabla\mu\parallel B$ 时，方程将退化为经典的磁矢势泊松方程

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{J} \tag{39}$$

7 讨论与分析

在处理非均匀介质时，通常是从物质方程出发，对物质方程进行散度或旋度的展开，此时就不能丢掉介电常量和磁导率的坐标偏导项，而是将其保留，计算出需要的量代入到之后的运算，这样得到的广义波动方程会在原来波动方程的基础上多出由于介质不均匀导致的附加项，当 ε,μ 与位置无关时退化到原来的经典波动方程和经典泊松方程。

关于有源场的处理，我们没有考虑有源场时变电磁场的处理，事实上，非均匀介质中有源时变电磁场得到的方程无法简单通过洛伦兹条件分分离出矢势和标势，需要寻找另外一种广义的洛伦兹规范处理，此处不再详解。

除了各向同性介质外，自然界中还存在各向异性晶体，各向异性晶体的处理方法是介电常量变成 3×3 的张量形式，通过选取介电主轴得到三个方向的不同的介电常量，其物质方程也需要写成张量的形式，此处也不再展开。

总体来说，本文为解决非均匀介质的电磁场问题提供了一种思路，相当于对课程的扩展，对完善各种情况下的电磁场和电磁波问题有参考意义。

参考文献

[1] 梁昆淼. 数学物理方法［M］. 4 版. 北京: 高等教育出版社，2010.

[2] 郭硕鸿. 电动力学 [M].3 版. 北京: 高等教育出版社,2008.

[3] 梁铨廷. 物理光学 [M] 上海: 科学技术出版社, 2007.

[4] 崔明, 江成, 崔元顺. 非均匀介质中电磁场定解方程的确立 [J]. 大学物理,2014,33(10)