带宽分配的下界模型 (LBM)

集合与参数

- I: 客户组集合。
- J: 数据中心（供应商）集合。
- $\mathcal{T}$: 粗粒度时间区间的集合，由 τ 索引。
- $|\tau|$: 粗粒度区间 τ 内的 5 分钟时间槽数量。
- $D_{i\tau}$: 客户 i 在区间 τ 内的总流量需求，即 $D_{i\tau} = \sum_{t\in\tau} D_{it}$。
- L_j: 供应商 j 在整个规划周期内的免费 5 分钟时间槽总数。
- C_j: 供应商 j 的带宽容量。
- a_{ij}: 二元参数，若客户 i 可连接到供应商 j 则为 1，否则为 0。

决策变量

- $b_j \geq 0$: 供应商 j 的计费带宽。
- $x_{ij\tau} \geq 0$: 在区间 τ 内，从客户 i 分配到供应商 j 的总流量。
- $y_{j\tau} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$: 在区间 τ 内，供应商 j 使用的免费 5 分钟时间槽数量。

数学规划模型

下界模型 (LBM) 被构建为以下混合整数规划问题：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j \in J} b_j && && (1)\\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j \in J} a_{ij} x_{ij\tau} = D_{i\tau} && \forall i \in I, \forall \tau \in \mathcal{T} && \text{(需求满足)}\\
& \sum_{\tau \in \mathcal{T}} y_{j\tau} = L_j && \forall j \in J && \text{(免费槽总量)}\\
& 0 \le y_{j\tau} \le |\tau| && \forall j \in J, \forall \tau \in \mathcal{T} && \text{(区间免费槽)}\\
& \sum_{i \in I} a_{ij} x_{ij\tau} \le C_j \cdot |\tau| && \forall j \in J, \forall \tau \in \mathcal{T} && \text{(总容量)}\\
& \sum_{i \in I} a_{ij} x_{ij\tau} \le b_j \cdot (|\tau| - y_{j\tau}) + C_j \cdot y_{j\tau} && \forall j \in J, \forall \tau \in \mathcal{T} && \text{(计费带宽)}\\
& b_j \ge 0 && \forall j \in J && (2)\\
& x_{ij\tau} \ge 0 && \forall i \in I, \forall j \in J, \tau \in \mathcal{T} && (3)\\
& y_{j\tau} \in \mathbb{Z}_{\ge 0} && \forall j \in J, \tau \in \mathcal{T} && (4)
\end{aligned}
$$

定理 1. 记 z^*_{FPP} 为全精度问题 (Full-Precision Problem, FPP) 的最优目标值，z^*_{LBM} 为下界模型 (LBM) 的最优目标值。则有 $z^*_{LBM} \le z^*_{FPP}$。

证明. 为证 LBM 是 FPP 的一个有效下界，我们只需证明：对 FPP 的任意可行解，总能构造出一个 LBM 的可行解，且其目标值不大于 FPP 解的目标值。

设 $(x^*_{ijt}, y^*_{jt}, b^*_j)$ 是 FPP 在细粒度时间点集合 $t \in T$ 上的一个任意可行

解，其目标值为 $z^* = \sum_{j \in J} b_j^*$。该解满足 FPP 的约束：

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_{ijt}^* = D_{it}, \qquad \forall i \in I, t \in T \tag{5}$$

$$\sum_{t \in T} y_{jt}^* = L_j, \qquad \forall j \in J \tag{6}$$

$$\sum_{i \in I} a_{ij} x_{ijt}^* \le C_j, \qquad \forall j \in J, t \in T \tag{7}$$

$$\sum_{i \in I} a_{ij} x_{ijt}^* \le b_j^*, \qquad \forall j \in J, \forall t \in T \text{ 且} y_{jt}^* = 0 \tag{8}$$

$$y_{jt}^* \in \{0, 1\}, \qquad \forall j \in J, t \in T \tag{9}$$

注意，当 $y_{jt}^* = 1$ 时，根据约束 (7)，$\sum_{i \in I} a_{ij} x_{ijt}^* \le C_j$ 依然成立。

现在，基于上述 FPP 解，我们构造 LBM 的一个候选解 $(\hat{x}_{ij\tau}, \hat{y}_{j\tau}, \hat{b}_j)$。设粗粒度区间集合 $\mathcal{T}$ 是细粒度时间点集合 T 的一个划分，构造如下：

$$\hat{x}_{ij\tau} = \sum_{t \in \tau} x_{ijt}^* \qquad \forall i \in I, j \in J, \tau \in \mathcal{T} \tag{10}$$

$$\hat{y}_{j\tau} = \sum_{t \in \tau} y_{jt}^* \qquad \forall j \in J, \tau \in \mathcal{T} \tag{11}$$

$$\hat{b}_j = b_j^* \qquad \forall j \in J \tag{12}$$

接下来，验证该构造解是否满足 LBM 的所有约束。

1. 需求约束 (需求满足)**:**

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in J} a_{ij} \hat{x}_{ij\tau} &= \sum_{j \in J} a_{ij} \left(\sum_{t \in \tau} x_{ijt}^* \right) = \sum_{t \in \tau} \left(\sum_{j \in J} a_{ij} x_{ijt}^* \right) && \text{(交换求和顺序)} \\
&= \sum_{t \in \tau} D_{it} && \text{由 FPP 约束 (5)} \\
&= D_{i\tau} && \text{(根据 } D_{i\tau} \text{ 定义)}
\end{aligned}$$

该约束满足。

2. 免费槽约束 (免费槽总量) **和** (区间免费槽)**:**

$$\begin{aligned}
\sum_{\tau \in \mathcal{T}} \hat{y}_{j\tau} &= \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \left(\sum_{t \in \tau} y_{jt}^* \right) = \sum_{t \in T} y_{jt}^* && \text{(因 } \mathcal{T} \text{ 是 } T \text{ 的划分)} \\
&= L_j && \text{由 FPP 约束 (6)}
\end{aligned}$$

此外，由于 $y_{jt}^* \in \{0, 1\}$，显然有 $0 \le \hat{y}_{j\tau} = \sum_{t \in \tau} y_{jt}^* \le |\tau|$。该组约束满足。

3. 容量约束 (总容量)**:**

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I} a_{ij}\hat{x}_{ij\tau} &= \sum_{i\in I} a_{ij}\left(\sum_{t\in\tau} x^*_{ijt}\right) = \sum_{t\in\tau}\left(\sum_{i\in I} a_{ij}x^*_{ijt}\right) \\
&\le \sum_{t\in\tau} C_j && \text{由 FPP 约束 (7)} \\
&= C_j\cdot|\tau|
\end{aligned}$$

该约束满足。

4. 计费约束 (计费带宽)**:** 令 $T_{0,\tau}=\{t\in\tau\mid y^*_{jt}=0\}$ 且 $T_{1,\tau}=\{t\in\tau\mid y^*_{jt}=1\}$。则 $|T_{1,\tau}|=\hat{y}_{j\tau}$ 且 $|T_{0,\tau}|=|\tau|-\hat{y}_{j\tau}$。

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I} a_{ij}\hat{x}_{ij\tau} &= \sum_{t\in\tau}\left(\sum_{i\in I} a_{ij}x^*_{ijt}\right) \\
&= \sum_{t\in T_{0,\tau}}\left(\sum_{i\in I} a_{ij}x^*_{ijt}\right) + \sum_{t\in T_{1,\tau}}\left(\sum_{i\in I} a_{ij}x^*_{ijt}\right) \\
&\le \sum_{t\in T_{0,\tau}} b^*_j + \sum_{t\in T_{1,\tau}} C_j && \text{由 (8) 和 (7)} \\
&= b^*_j\cdot|T_{0,\tau}| + C_j\cdot|T_{1,\tau}| \\
&= b^*_j\cdot(|\tau|-\hat{y}_{j\tau}) + C_j\cdot\hat{y}_{j\tau} \\
&= \hat{b}_j\cdot(|\tau|-\hat{y}_{j\tau}) + C_j\cdot\hat{y}_{j\tau} && \text{由 (12)}
\end{aligned}$$

该约束满足。

至此，我们已证明所构造的解 $(\hat{x}_{ij\tau},\hat{y}_{j\tau},\hat{b}_j)$ 是 LBM 的一个可行解。该解的目标值为 $\sum_{j\in J}\hat{b}_j=\sum_{j\in J}b^*_j=z^*$。根据最优值的定义，LBM 的最优目标值 z^*_{LBM} 必不大于其任意可行解的目标值。因此，我们有 $z^*_{LBM}\le z^*$。

由于 z^* 是 FPP 任意可行解的目标值, 此不等式对 FPP 的最优解 z^*_{FPP} 也必然成立。故得证 $z^*_{LBM}\le z^*_{FPP}$。 □