带宽分配问题的“分而治之”上界模型

A Divide-and-Conquer Upper-Bound Model

for the Bandwidth Allocation Problem

2025 年 9 月 23 日

1 引言

为了高效求解大规模的带宽分配问题，我们提出一种基于“分而治之”思想的启发式方法。该方法的核心思想是通过对时间域和稀缺资源（免费槽）进行确定性划分，将一个大规模的原始问题分解为多个规模较小且相互独立的子问题。通过求解所有子问题并合并其解，我们可以构造出原始问题的一个高质量可行解。本笔记旨在为该方法建立严谨的数学模型，并证明其所得到的解的目标成本是原始问题最优成本的一个有效上界。

2 问题定义

首先，我们定义原始的、基于精细时间粒度的问题 (P_{fine})。

2.1 集合与参数

- I: 客户组集合。
- J: 数据中心（供应商）集合。
- T_{fine}: 精细时间槽的集合（例如，5 分钟槽）。
- L_j: 供应商 j 在整个周期内拥有的免费槽总数。
- D_{it}: 客户 i 在时间槽 t 的流量需求。
- C_j: 供应商 j 的带宽容量。
- a_{ij}: 二元参数，若客户 i 可连接到供应商 j 则为 1，否则为 0。

2.2 决策变量

- $x_{ijt} \geq 0$: 在时间槽 t 从客户 i 分配给供应商 j 的流量。
- $y_{jt} \in \{0, 1\}$: 若时间槽 t 对供应商 j 是免费时段则为 1，否则为 0。
- $b_j \geq 0$: 供应商 j 在整个周期内的计费带宽。

2.3 原始精细问题（P_{fine}）

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = \sum_{j \in J} b_j && && (1) \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j \in J} a_{ij} x_{ijt} = D_{it}, && \forall i \in I, \forall t \in T_{\text{fine}} && (2) \\
& \sum_{i \in I} a_{ij} x_{ijt} \leq C_j, && \forall j \in J, \forall t \in T_{\text{fine}} && (3) \\
& \sum_{t \in T_{\text{fine}}} y_{jt} = L_j, && \forall j \in J && (4) \\
& \sum_{i \in I} a_{ij} x_{ijt} \leq b_j + C_j \cdot y_{jt}, && \forall j \in J, \forall t \in T_{\text{fine}} && (5)
\end{aligned}
$$

3 “分而治之”算法

所有供应商的免费槽总数相同，即 $L_j = L, \forall j \in J$。

3.1 第一步：问题划分（Partitioning）

我们首先对时间集合和免费槽资源进行划分。

1. **时间划分**：将总时间集合 T_{fine} 划分为 L 个互不相交的子集 $T_1, T_2, \ldots, T_L$，使得 $\cup_{k=1}^{L} T_k = T_{\text{fine}}$。为简便起见，假设划分是均匀的，即 $|T_k| = |T_{\text{fine}}|/L$。
2. **资源分配**：将 L 个免费槽配额进行分配，强制规定在每个时间子集 T_k 内，每个供应商 j **必须且只能使用 1 个**免费槽。

3.2 第二步：定义并求解子问题

基于上述划分，原问题被分解为 L 个独立的子问题。对每一个时间子集 T_k $(k = 1, \ldots, L)$，我们定义并求解一个混合整数规划子问题 $P_{\text{sub}}(k)$。

3.2.1 子问题的决策变量

- $x_{ijt} \geq 0$: 流量变量，仅定义于 $t \in T_k$。
- $y_{jt} \in \{0, 1\}$: 免费时段选择变量，仅定义于 $t \in T_k$。
- $b_{jk} \geq 0$: 供应商 j 在时间子集 T_k 内的**局部**计费带宽。

3.2.2 子问题的数学模型 ($P_{\text{sub}}(k)$)

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z_k = \sum_{j \in J} b_{jk} && && (6) \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j \in J} a_{ij} x_{ijt} = D_{it}, && \forall i \in I, \forall t \in T_k && (7) \\
& \sum_{i \in I} a_{ij} x_{ijt} \leq C_j, && \forall j \in J, \forall t \in T_k && (8) \\
& \sum_{t \in T_k} y_{jt} = 1, && \forall j \in J && (9) \\
& \sum_{i \in I} a_{ij} x_{ijt} \leq b_{jk} + C_j \cdot y_{jt}, && \forall j \in J, \forall t \in T_k && (10)
\end{aligned}
$$

我们对所有 $k \in \{1, \ldots, L\}$ 求解上述 MIP，得到一组最优解，记为 $(x^*_{ijt}(k), y^*_{jt}(k), b^*_{jk})$。

3.3 第三步：合并解 (Solution Synthesis)

在求解完所有 L 个独立的子问题后，我们按下述规则构造一个原始问题 P_{fine} 的候选解，记为 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{b})$。

1. **合并流量与免费时段解**: 将所有子问题的解直接拼接。

$$\hat{x}_{ijt} = x^*_{ijt}(k), \quad \hat{y}_{jt} = y^*_{jt}(k), \quad \forall t \in T_k, \forall k \in \{1, .., L\}$$

2. **计算最终计费带宽**: 对每个供应商 j，其最终计费带宽由其在所有 L 个时间子集上的局部计费带宽的最大值决定。

$$\hat{b}_j = \max_{k \in \{1, .., L\}} \{b^*_{jk}\}$$

该启发式算法最终得到的总成本为 $z_{\text{heuristic}} = \sum_{j \in J} \hat{b}_j$。

4 上界性质的数学证明

定理 (Theorem) 1. 由“分而治之”算法构造的解 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{b})$ 是原始问题 P_{fine} 的一个可行解。因此，其成本 $z_{heuristic}$ 是 P_{fine} 最优成本 z^*_{fine} 的一个有效上界，即 $z_{heuristic} \geq z^*_{fine}$。

证明. 为证 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{b})$ 是 P_{fine} 的可行解，需验证其满足 P_{fine} 的所有约束 (2)-(5)。

1. **需求约束** (2) **与容量约束** (3): 对于任意时间槽 $t \in T_{\text{fine}}$，根据时间划分，它必然属于某个唯一的子集 T_k。在子问题 $P_{\text{sub}}(k)$ 的解中，约束 (7) 和 (8) 对于所有 $t \in T_k$ 均成立。由于构造解 $\hat{x}$ 在该时间区间内与子问题解 $x^*(k)$ 完全相同，故 $\hat{x}$ 满足 P_{fine} 的需求与容量约束。

2. **免费槽总数约束** (4): 对于任意供应商 j，我们计算其在构造解 $\hat{y}$ 中的免费槽总数:

$$\sum_{t \in T_{\text{fine}}} \hat{y}_{jt} = \sum_{k=1}^{L} \sum_{t \in T_k} \hat{y}_{jt}$$

根据解的构造规则 $\hat{y}_{jt} = y^*_{jt}(k)$ for $t \in T_k$, 以及子问题约束 (9) 即 $\sum_{t \in T_k} y^*_{jt}(k) = 1$, 上式可得:

$$\sum_{k=1}^{L} (1) = L$$

故构造解 $\hat{y}$ 满足 P_{fine} 的免费槽总数约束。

3. **计费带宽约束** (5): 我们需要证明 $\sum_{i \in I} a_{ij} \hat{x}_{ijt} \leq \hat{b}_j + C_j \cdot \hat{y}_{jt}$ 对于所有 $j \in J$ 和 $t \in T_{\text{fine}}$ 均成立。

任取一个时间槽 $t \in T_{\text{fine}}$，其必然属于某个唯一的 T_k。

- 根据子问题 $P_{\text{sub}}(k)$ 的约束 (10)，我们有:

$$\sum_{i \in I} a_{ij} x^*_{ijt}(k) \leq b^*_{jk} + C_j \cdot y^*_{jt}(k)$$

- 根据构造规则，$\hat{x}_{ijt} = x^*_{ijt}(k)$ 且 $\hat{y}_{jt} = y^*_{jt}(k)$。因此，上述不等式等价于:

$$\sum_{i \in I} a_{ij} \hat{x}_{ijt} \leq b^*_{jk} + C_j \cdot \hat{y}_{jt}$$

- 同时，根据最终计费带宽的定义 $\hat{b}_j = \max_{k' \in \{1,..,L\}} \{b^*_{jk'}\}$，必然有 $\hat{b}_j \geq b^*_{jk}$。
- 结合以上两点，可得:

$$\sum_{i \in I} a_{ij} \hat{x}_{ijt} \leq b^*_{jk} + C_j \cdot \hat{y}_{jt} \leq \hat{b}_j + C_j \cdot \hat{y}_{jt}$$

此不等式对任意 t 均成立，故构造解满足 P_{fine} 的计费带宽约束。

综上，构造解 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{b})$ 满足 P_{fine} 的所有约束，是一个可行解。根据最优解的定义，任何可行解的成本必然大于或等于最优解的成本。因此，$z_{\text{heuristic}} = \sum_j \hat{b}_j \geq z^*_{\text{fine}}$。 □