第十九届黑龙江省大学生程序设计竞赛解题报告

吉林大学

2024.5.12

I. This is an easy problem

- 我们直接对每一个二进制位进行枚举，看 $(1 << i)\&x$ 是否为 0 即可。

B. String

- 可以发现每个字符最多只会影响到它前面的两个字符。用栈维护答案字符串，每次在栈顶加入一个字符，如果栈顶三个字符相同则弹栈。最后栈中剩余字符即为答案。

D. Card Game

- 对于 A 的攻击牌，显然应该从 atk 大的牌开始使用。且为了使攻击有效，B 不能使用防御牌，只能使用攻击牌，显然 B 的攻击牌应该从 atk 小的牌开始使用。
- 所以，忽略防御牌，A 的攻击牌按照 atk 从大到小取，B 的攻击牌按照 atk 从小到大取，如果在 A 的生命值清零前，B 的生命值先清零，则"yes"，反之"no"。

K. Puzzle

- 四个数字可以任意排列，然后在其中的 3 个位置分别填充运算符，这一枚举过程可以用 dfs 较为方便地实现。
- 最后运算时要注意运算符的优先级，先将乘法符号算好，再算加减符号。
- 验题人表示这题可以用 python 的 eval 函数很方便的求得。

J. Trade

- 首先，由于卖出物品的城市不确定，所以 Kingsnow 有可能在任意位置售卖他的商品，所以题目所求的计划路径应当保证每个位置售卖都不会出现亏损。
- 考虑动态规划，令 $f_{i,j}$ 为从起点到 $City(i,j)$ 合法路径中消耗金钱的最小值，其中合法定义为在路径上任何一点售卖都不亏损。特别的，如果没有合法路径可以将值设为无穷大。
- 转移可以设一个中间变量 $g_{i,j}$ 先算出不考虑当前城市卖出的情况的最小金钱消耗，即 $g_{i,j} = min(f_{i-1,j}, f_{i,j-1}) + b_{i,j}$
- 再通过 $g_{i,j}$ 算出 $f_{i,j}$，即 $f_{i,j} = \begin{cases} g_{i,j} & g_{i,j} + a_{1,1} \leq a_{i,j} \\ inf & otherwise \end{cases}$

F. Photography

- 一条路径上共 5 个点，枚举 2 3 4 这三个点，1 和 5 一定取 2 和 4 出边前四大的。

L. Badminton

- 首先观察答案的分布，小于等于 A_{ans} 的都符合要求，大于 A_{ans} 的都不符合要求，所以可以用二分来解决这个问题。接下来就要考虑给定一个 A，怎么判断是否符合要求。
- 首先，可以对所有节点都扫一遍，判断其是否激活。接下来，通过这些激活的节点计算所有店的 p 值。容易发现，在同一个强连通分量里每个节点的 p 值都相同，所以可以考虑如下的处理方式：对图求一遍强连通分量，对激活点的点权求和，对其强度值取 min 获得一个新的点。这样对新图（一定是 dag）上按拓扑序进行 dp 算出 p 值并和强度值比较就能解决这个问题。

C. Monster Hunt

- 首先可以将题意转化：树上有一些标记点，有新增标记点和取消标记点两种操作，每次操作后将所有标记点与其最近的标记点祖先连边得到一个森林，问这个森林有多少个叶子节点。
- 对于操作 opt, x，无论是哪种操作，都只会对 x 和 x 的最近的标记点祖先是否是叶子产生影响。判断一个点现在是否是叶子就是判断子树中除自己之外的所有点是不是都不是标记点，用 dfs 序和树状数组可以实现，时间复杂度 $O(\log n)$。寻找一个点的最近的标记点祖先可采用以下的方法：先为每个重链用一个 set 维护重链中所有标记点，按深度排序，在寻找 x 的最近的标记点祖先时，判断该重链中深度最小的点的深度是否大于 $dep[x]$，如果是，则直接跳过该重链往上迭代，本次迭代时间复杂度 $O(1)$；如果否，则寻找深度小于等于 $dep[x]$ 中最大的，该点即为所求，本次迭代时间复杂度 $O(\log n)$。综上，总时间复杂度 $O(n \log n)$。

A. Fixing Tube

- 对于四种类型水管，我们分类讨论：
- 1/ i 型水管：水流通过时，为了让水流顺利通过，需要将其旋转到正确方向链接，此时只有一种方案可以链接，因此直接连上即可。
- 2/ $+$ 型水管：只有一种情况，直接连上即可，注意这个水管可以通过两次，方向垂直。
- 3/ p 型水管：有四种形态，其中水流从某一方向进入时有两种情况，因此在这里我们需要枚举搜索，假设方向。
- 4/ x 型水管：有两种形态，其中水流从某一方向进入时有两种情况，因此在这里我们需要枚举搜索，假设方向，注意这个水管可以通过两次，第二次通过时方向已经确定，不需要枚举。
- 因为 p 型水管和 x 型水管数量的和不超过 20 个，对于每个枚举量为 2，因此复杂度为 $O(2^{20}nm)$
- 代码写起来比较难，请注意细节

G. Grey-like Code

- 我们不难找规律发现答案为 $2^{2^{n-1}-n}$ 。(bushi
- 我们构造图 G_n,G_n 有 2^{n-1} 点，编号从 0 到 $2^{n-1}-1$, 每个点 x 往 $2x\&(2^{n-1}-1)$ 与 $(2x+1)\&(2^{n-1}-1)$
- 连一条有向边，那么每条边事实上代表了 0 到 2^n-1 的一个数字，我们将问题转换为了求 G_n 上的欧拉回路。
- 考虑 $BEST$ 定理，带入每个点的度，等价于 G_n 上生成树的数量。
- 我们可以通过求 G_n 的主子式得到答案。

G. Grey-like Code

- 显然 $|G_n| = 0$，对一个行列式为 0 的矩阵，若它有 n 个特征值 $\lambda_1, ...\lambda_n$, 不妨设 $\lambda_1 = 0$，我们显然有主子式 $= \frac{1}{n}|\lambda_2 * \lambda_3 ... \lambda_n|$
- 那么我们转求 G_n 的特征多项式 $M(G_n)$, 记 C_n 为 G_n 的邻接矩阵，我们考虑分块矩阵
  $C_n = \begin{bmatrix} A_{n-1}, B_{n-1} \\ A_{n-1}, B_{n-1} \end{bmatrix}$, 有 $C_n = A_n + B_n$, 且 $G_n = 2I - C_n, M(G_n) = (x-2)I - C_n$
- 我们可以只关心 C_n 的特征多项式，做恒等变换
  $C_n = \begin{bmatrix} xI - A_{n-1}, -B_{n-1} \\ -xI, xI \end{bmatrix} = |x(xI - (A_{n-1} + B_{n-1}))|$ (注，因为有 xI, 分块矩阵行列式可以直接交叉乘后减)。
- 整理回代, 有 $M(G_n) = (x-2)^{2^{n-2}} M(G_{n-1})$,
- 所以, G_n 的主子式为 $\frac{2^{2^{n-1}-1}}{2^{n-1}} = 2^{2^{n-1}-n}$

G. Grey-like Code

- 但显然考场上做出这道题没这么复杂，我们只需写个 2^{3*2^n} 的行列式求值找规律即可。(最朴素的暴力只能算到 $n = 5$ 或 6，此时的规律可能不是很显眼，但如果注意到先求排列的数量而不是圆排列的数量，亦可找到规律通过此题。)

H. Color of Goods

- 我们考虑 $k=1$ 怎么做。
- 我们将每个商品按照其颜色集合作为值，获得一个数组 a。对其 FWT or 即可（即高维前缀和)。
- 我们继续考虑 k 任意的情况，我们考虑 FWT or 的组合性质,$FWT(a)[i]=\sum_{j\in i}a[i]$。那么若 b 为我们要求的答案，它同样需要满足 $FWT(ans)[i]=\sum_{j\in u}ans[i]$
- 我们不难注意到:$FWT(b)=C_{FWT(a)}^{k}$，因为我们从 i 的子集中挑 k 个出来并，显然仍然是 i 的子集。所以现在我们只需关心如何快速求 C_x^k。

H. Color of Goods

- 我们将组合数写成下降幂形式，发现其为一个多项式，我们只需应用分治 fft 求出多项式，并多点插值即可。复杂度 $O(m^2 * 2^m)$。
- 另外有一个低常数的打表做法可以通过此题。我们同样考虑如何求 C_x^k，当 x 很小的时候我们可以预处理出所有的阶乘来实现。当 n 很大的时候，如果我们能预先打一个所有 $kB!$ 的阶乘的表，那么我们单次查询任意一个组合数的复杂度就可以做到 $O(B + logn)$ 的复杂度。暴力预处理生成这个表是 $O(p)$ 的，我们考虑循环展开，利用 AVX2 指令集 256 位向量运算的能力加速，(其中取余部分用蒙哥马利约简加速) 在较为精细的实现下同样可以通过此题。

E. Three Kingdoms

- 如果 Joey 没有手牌, Grey 的期望手牌数为 $E = \frac{1}{a+c} - 1$
- 我们不难注意到 Joey 只有黑桃和梅花是有用的。我们记一张黑桃的收益是为 x, 梅花的收益为 y.
- 我们有：
  $x = b/(a+b+c)x+(a+c)/(a+b+c)(1+E)+b/(a+b+c+d)x+d/(a+b+c+d)y$
  $y = b/(a+b+c)x+(a+c)/(a+b+c)(1+E)$
- 那么答案就是
  $E + x \times (thenumberofspadesJoeyhas) + y \times (thenumberofclubsJoeyhas)$.
- 边界情况处理：当我们发现这个方程无解或者有负数解的时候，黑桃和梅花的收益为正无穷。
- 此时，若 Joey 手上没黑，收益为 E, 不然为 INF。

The End

- 感谢聆听!