

Προχωρημένες Τεχνικές ΣΑΕ

Βέλτιστος Έλεγχος Ηλεκτρικού Τρένου

Γιώργος Βασιλείου

AM: 03116062

ΣΗΜΜΥ

Ακ. Έτος 2019 - 2020

Περίληψη

Σκοπός της άσκησης είναι η μελέτη και εφαρμογή των τεχνικών βελτίστου ελέγχου για τον έλεγχο ηλεκτρικού τρένου με ελεγκτές ανοικτού και κλειστού βρόχου. Παρουσιάζονται εισαγωγικά προβλήματα βέλτιστου ελέγχου με σκοπό την παρουσίαση των τεχνικών και στην συνέχεια ακολουθεί η μοντελοποίηση και προσομοίωση του πλήρους προβλήματος στο περιβάλλον MATLAB. Προσδιορίζονται οι ελεγκτές που οδηγούν το σύστημα καθώς και ελεγκτές γραμμικής διόρθωσης σφάλματος τροχιάς.

Ο κώδικας για τις προσομοιώσεις και την παραγωγή των γραφικών, επισημαίνεται στις αντίστοιχες ενότητες.

1 Προετοιμασία Ασκήσεων

1.1 Διπλός Ολοκληρωτής

Θεωρούμε το σύστημα του διπλού ολοκληρωτή (*state equations*)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \text{ με είσοδο } u \in [-1, 1] \quad (1.1.1)$$

και το σύστημα οριακών συνθηκών.

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{x}(t_f) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.1.2)$$

Θέλουμε να επιλέξουμε $u[0, t_f]$ ώστε το σύστημα να οδηγηθεί σε ελάχιστο χρόνο t_f (ελεύθερο) στην θέση $\mathbf{x}(t_f)$. Θεωρούμε την *Hamiltonian* του συστήματος.

$$H(t) = L + \mathbf{p}^T \cdot (A\mathbf{x} + Bu) = 1 + p_1(t)x_2(t) + p_2(t)u(t) \quad (1.1.3)$$

Η Εξίσωση (1.1.3) ελαχιστοποιείται για $u = u^*$.

$$u^*(t) = \begin{cases} -\text{sgn}(p_2(t)) & , p_2(t) \neq 0 \\ ??? & , p_2(t) = 0 \end{cases} \quad (1.1.4)$$

Για τον ορισμό του παραπάνω ελέγχου και τον έλεγχο για ιδιάζουσες λύσεις εξετάζουμε τις *costate equations*.

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -p_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} p_1(t) = c_1 \\ p_2(t) = c_2 - c_1 t \end{cases} \quad (1.1.5)$$

Θα δείξουμε ότι το παραπάνω σύστημα λύσεων του *costate* δεν παράγει ιδιάζουσες λύσεις, ή ισοδύναμα, ότι η $p_2(t)$ μηδενίζεται μόνο σε μεμονομένα σημεία.

Proof. Θεωρούμε δύο περιπτώσεις.

1. Αν $p_1 = c_1 \neq 0 \forall t \in [0, t_f]$ τότε προφανώς $p_2(t) = c_2 - c_1 t$ μηδενίζεται σε μοναδικό σημείο.

2. Αν $p_1 = c_1 = 0 \forall t \in [0, t_f]$ τότε $p_2(t) = c_2 \forall t \in [0, t_f]$ και η *transversality condition* γίνεται

$$H(t) = 0 \forall t \Leftrightarrow 1 + c_2 u = 0 \forall t \Rightarrow c_2 \neq 0 \Rightarrow p_2(t) \neq 0 \forall t$$

□

Επιλύοντας τις εξισώσεις του συστήματος Εξ. (1.1.1) προκύπτουν οι μεταβλητές κατάστασης συναρτήσει του χρόνου.

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \Delta \\ \dot{x}_1 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2(t) = x_2(0) + \Delta t \\ x_1(t) = x_1(0) + x_2(0)t + \frac{\Delta}{2}t^2 \end{cases}$$

Επιπλέον παράγουμε το *switching curve* γ στον χώρο κατάστασης.

$$x_1 = x_{01} - \frac{\Delta}{2}x_{02}^2 + \frac{\Delta}{2}x_2^2 \quad (1.1.6)$$

Λύση Ανοιχτού Βρόχου

Από την περιγραφή της λειτουργίας του συστήματος πρέπει το σύστημα να οδηγηθεί με $u = 1$ στο διάστημα $[0, t_s]$ και στην συνέχεια $u = -1$ στο $[t_s, t_f]$. Για την εύρεση των *switching time* και *final time* επιλύουμε το διαφορικό πρόβλημα:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_2^{(1)}}{\partial t} &= 1, t \in [0, t_s] \text{ και } \frac{\partial x_2^{(2)}}{\partial t} = -1, t \in [t_s, t_f] \\ \frac{\partial x_1^{(1)}}{\partial t} &= t, t \in [0, t_s] \text{ και } \frac{\partial x_1^{(2)}}{\partial t} = 2t_s - t, t \in [t_s, t_f] \end{aligned}$$

με την χρήση των οριακών συνθηκών

$$\begin{aligned} x_1^{(1)}(0) &= -1, x_2^{(1)}(0) = 0, \\ x_1^{(1)}(t_s) &= x_1^{(2)}(t_s), x_2^{(1)}(t_s) = x_2^{(2)}(t_s) \\ x_1^{(2)}(t_f) &= 0, x_2^{(2)}(t_f) = 0. \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω προκύπτουν οι χρόνοι $t_s = 1$ και $t_f = 2$ οπότε συνολικά ο προκύπτων βέλτιστος έλεγχος ανοιχτού βρόχου είναι:

$$u_{open}^*(t) = \begin{cases} 1 & , t \in [0, 1] \\ -1 & , t \in [1, 2] \end{cases} \quad (1.1.7)$$

Προσομοίωση Βέλτιστου Ελέγχου Ανοιχτού Βρόχου

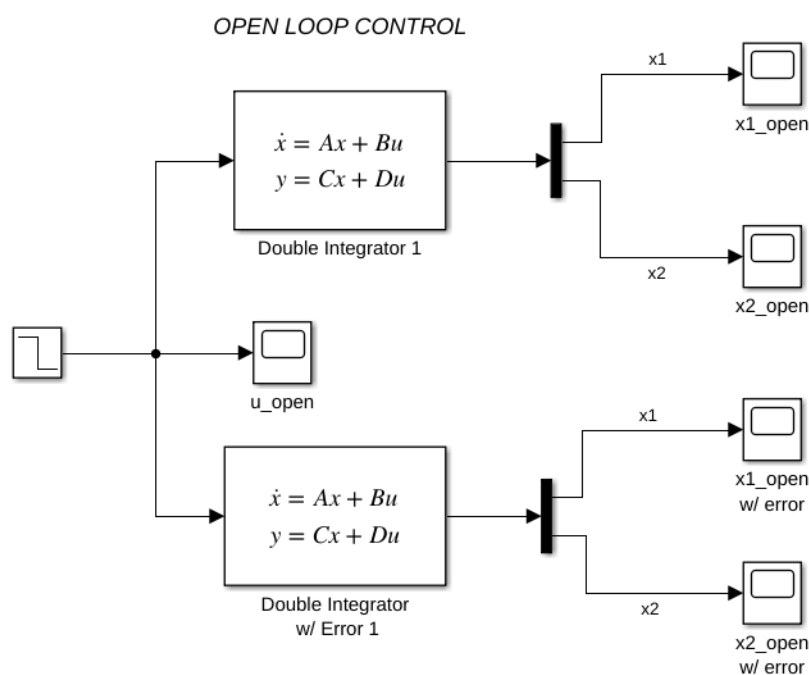
Αρχείο Προσομοίωσης: *doubleIntegrator.slx*

Γίνεται προσομοίωση του συστήματος του διπλού ολοκληρωτή στο περιβάλλον *SIMULINK*

σύμφωνα με την περιγραφή που προηγήθηκε. Το σύστημα και η είσοδος που το οδηγεί εικονίζονται παρακάτω.

Ο νόμος ελέγχου οδηγεί δύο σχεδόν πανομοιότυπα συστήματα. Το σύστημα *Double Integrator 1* υλοποιεί τις διαφορικές εξισώσεις του προβλήματος (Εξ. 1.1.1) ενώ το *Double Integrator w/ Error 1* υλοποιεί το ίδιο σύστημα με ένα μικρό σφάλμα μοντελοποίησης.

Εξετάζοντας τις μεταβλητές κατάστασης των δύο συστημάτων (Σχήματα 1.1.3 και 1.1.4) γίνεται σαφές ότι ακόμα και για μικρό σφάλμα στην περιγραφή του συστήματος στο χώρο κατάστασης μπορεί ο έλεγχος ανοιχτού βρόχου να παράγει αισθητή απόκλιση. Για την αύξηση της σθεναρότητας ελέγχου σε πιθανά σφάλματα προτιμούμε την οδήγηση του συστήματος με ελεγκτή κλειστού βρόχου, εξαρτόμενο από τον χώρο κατάστασης.

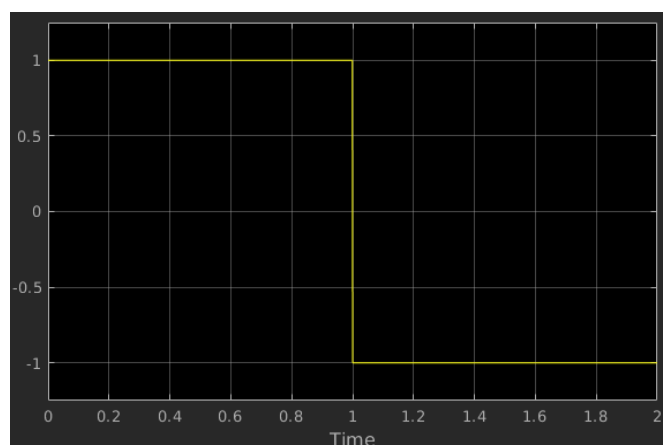
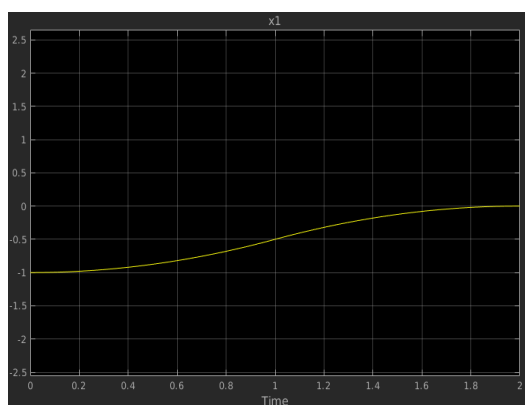


Σχήμα 1.1.1: Οδήγηση συστήματος με έλεγχο ανοιχτού Βρόχου.

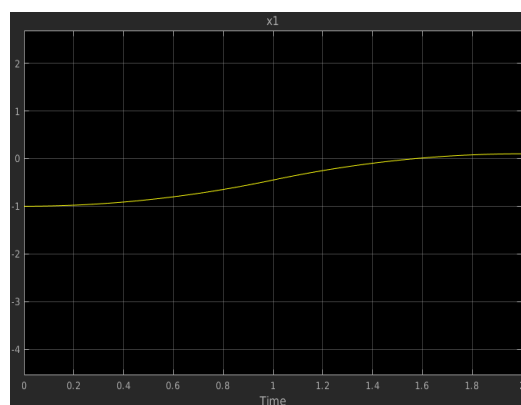
Λύση Κλειστού Βρόχου

Η λύση κλειστού βρόχου του συστήματος δίνεται από την προηγηθείσα ανάλυση του *switching curve* με την Εξ. (1.1.6), για $|\Delta| = 1$. Όσο το σύστημα βρίσκεται σε $(x_1, x_2) \notin \gamma$ πρέπει να κινηθεί προς την καμπύλη ενώ όσο βρίσκεται επί αυτής, πρέπει να την ακολουθήσει μέχρι το τελικό σημείο $\mathbf{x}(t_f)$.

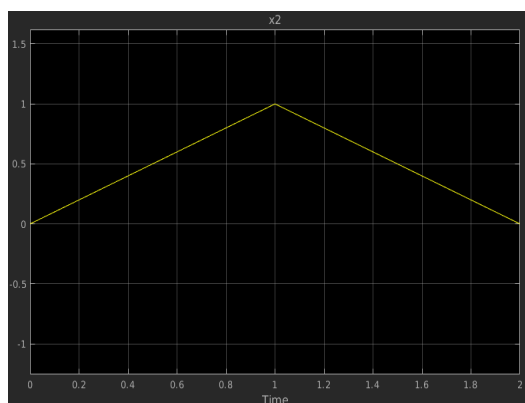
$$u_{closed}^*(x_1, x_2) = \begin{cases} -\text{sgn}(x_2) & , x_1 + \frac{1}{2}|x_2|x_2 = 0 \\ -\text{sgn}(x_1 + \frac{1}{2}|x_2|x_2) & , x_1 + \frac{1}{2}|x_2|x_2 \neq 0 \end{cases} \quad (1.1.8)$$

Σχήμα 1.1.2: Είσοδος Ανοιχτού Βρόχου u_{open}^* .

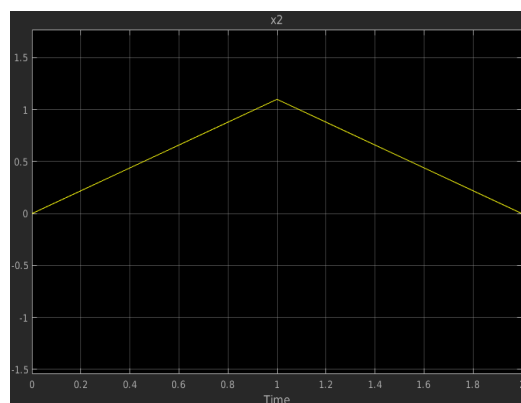
(a) Χωρίς σφάλμα



(b) Με σφάλμα

Σχήμα 1.1.3: Μεταβλητές x_1 συναρτήσει του χρόνου.

(a) Χωρίς σφάλμα



(b) Με σφάλμα

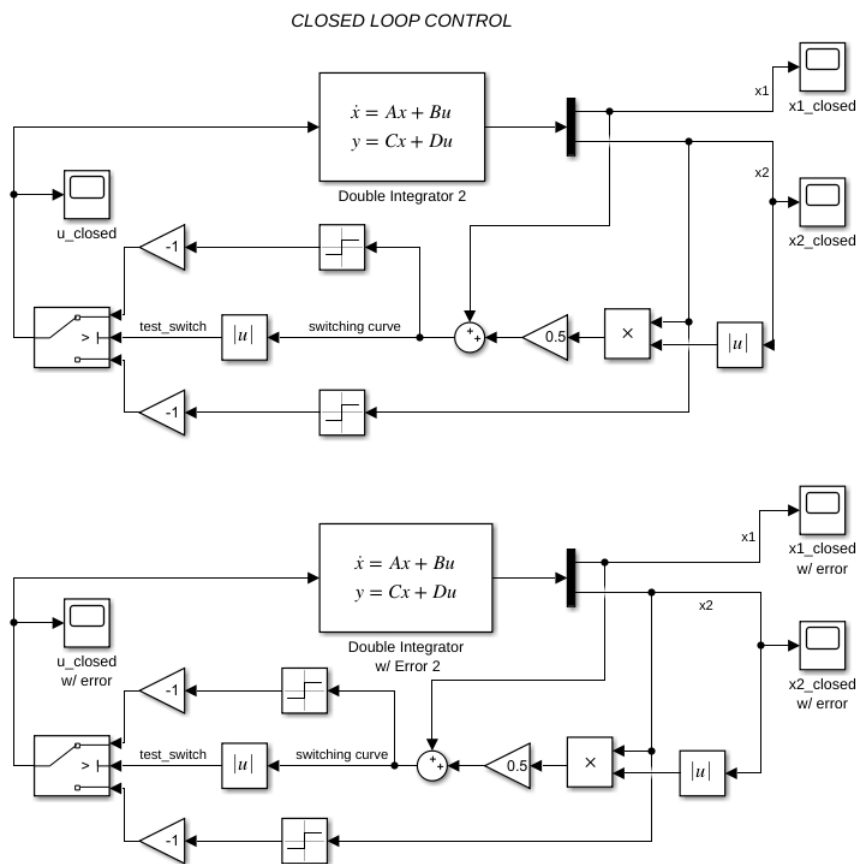
Σχήμα 1.1.4: Μεταβλητές x_2 συναρτήσει του χρόνου.

Προσομοίωση Βέλτιστου Ελέγχου Κλειστού Βρόχου

Αρχείο Προσομοίωσης: *doubleIntegrator.slx*

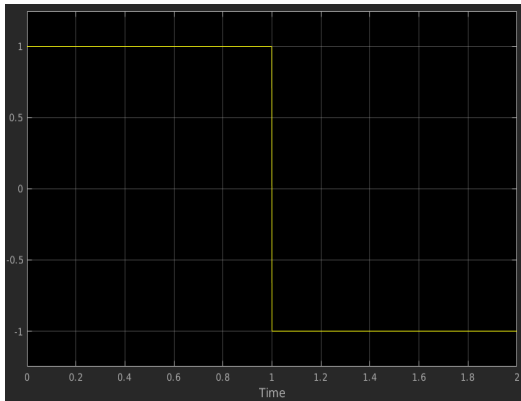
Τα δύο προηγούμενα συστήματα, με και χωρίς σφάλμα, οδηγούνται από τον βέλτιστο ελεγκτή u_{closed}^* (Εξ. 1.1.8).

Εξετάζοντας το σήμα ελέγχου u_{closed}^* που προκύπτει για το σύστημα χωρίς σφάλμα (Σχήμα 1.1.6.a) παρατηρούμε ότι ταυτίζεται με τον νόμο ανοιχτού βρόχου που υπολογίστηκε στην προηγούμενη ενότητα. Επιπλέον για το σύστημα με σφάλμα (Σχήμα 1.1.6.b) παρατηρούμε ότι το κύριο switch της εισόδου έχει μετατοπιστεί νωρίτερα στον χρόνο. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι δευτερεύουσες εναλλαγές προκύπτουν λόγω του επιλεγμένου time step του solver και της εγγύτητας του switching curve στο 0.

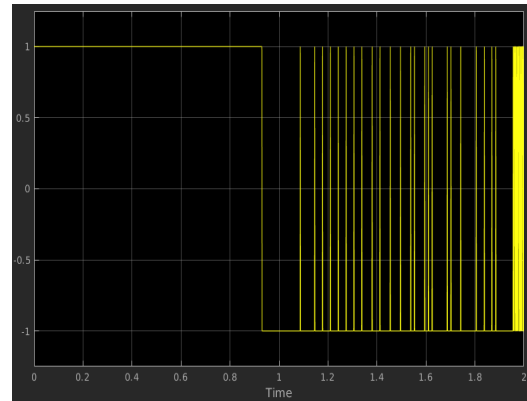


Σχήμα 1.1.5: Οδήγηση συστήματος με έλεγχο κλειστού Βρόχου.

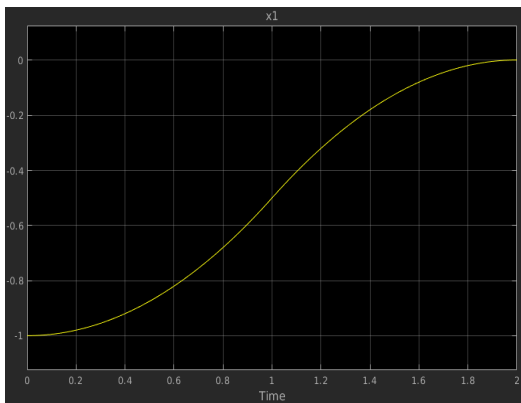
Η απόκριση των δύο συστημάτων στον χώρο κατάστασης φαίνεται στα Σχήματα 1.1.7 και 1.1.8.



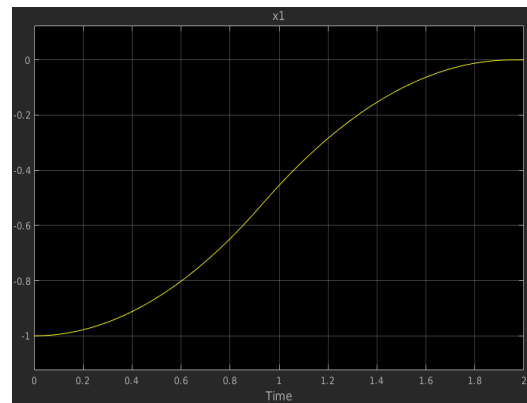
(a) Χωρίς σφάλμα



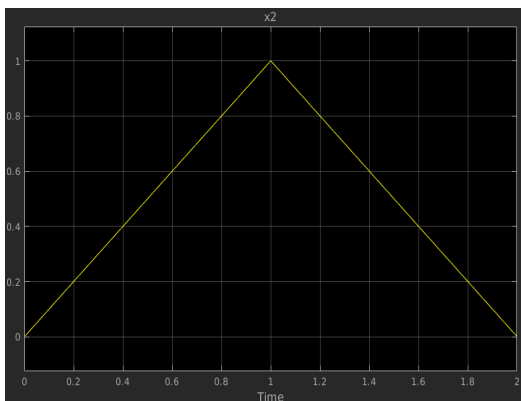
(b) Με σφάλμα

Σχήμα 1.1.6: Είσοδοι Κλειστού Βρόχου u_{closed}^* για τα δύο συστήματα.

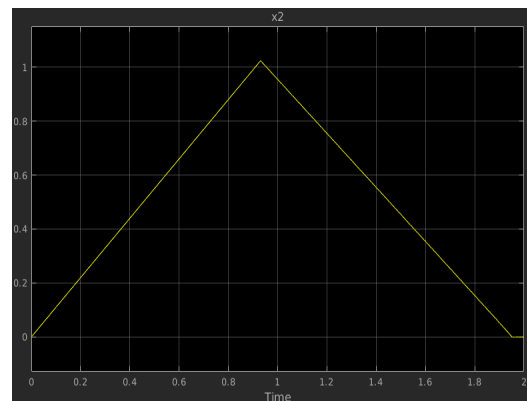
(a) Χωρίς σφάλμα



(b) Με σφάλμα

Σχήμα 1.1.7: Μεταβλητές x_1 συναρτήσει του χρόνου.

(a) Χωρίς σφάλμα



(b) Με σφάλμα

Σχήμα 1.1.8: Μεταβλητές x_2 συναρτήσει του χρόνου.

1.2 Ελαχιστοποίηση Κόστους

Θεωρούμε το σύστημα του διπλού ολοκληρωτή (*state equations*)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} u \quad (1.2.1)$$

και το σύστημα οριακών συνθηκών.

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{x}(10) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.2)$$

Αναζητούμε την είσοδο $u[0, 10]$ ώστε να ελαχιστοποιείται το επιλεγμένο κόστος.

$$J = 5(x_1(10) - 10)^2 + 8x_2(10)^2 + \int_0^{10} u^2(s)ds \quad (1.2.3)$$

Για να οριστεί πλήρως το *Two Point Boundary Value Problem* (TPBVP) θεωρούμε επιπλέον την εξίσωση του τελικού penalty όπως ορίζεται από το κόστος, και την Hamiltonian του συστήματος.

$$\varphi(x_1(10), x_2(10)) = 5(x_1(10) - 10)^2 + 8x_2(10)^2 \quad (1.2.4)$$

$$H = u^2 + \mathbf{p}^T \cdot (A\mathbf{x} + Bu) = u^2 + p_1(x_2 + 4u) + p_2(2x_1 + 3x_2 + 5u) \quad (1.2.5)$$

Από την Αρχή του Ελαχίστου λαμβάνουμε τις costate equations για το \mathbf{p} σε διαφορική μορφή και τις συνοριακές συνθήκες που τις συνοδεύουν.

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (1.2.6)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{p} = 0 \text{ για } t=10, \Rightarrow p_1(10) = -100 \text{ και } p_2(10) = 0 \quad (1.2.7)$$

Το σύστημα των Εξισώσεων (1.2.6) και (1.2.7) προσδιορίζουν ακριβώς τις συναρτήσεις $p_1(t)$, $p_2(t)$ που στην με την σειρά τους ορίζουν τον βέλτιστο ελεγκτή u^* .

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow u^*(t) = -2p_1(t) - 2.5p_2(t) \quad (1.2.8)$$

1.3 Τετραγωνικό Κόστος με Διαφορική Ricatti

Αρχείο Προσομοίωσης: *problem3.m*

Για το χρονομεταβλητό σύστημα που ακολουθεί, αναζητούμε βέλτιστη είσοδο u ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κριτήριο κόστους της Εξ. (1.3.2).

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1.3.1)$$

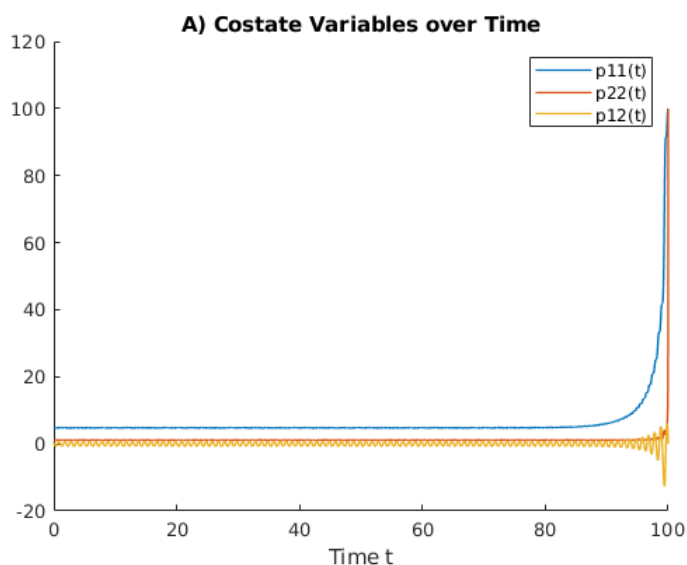
$$J = \mathbf{x}^T(100)Q_f\mathbf{x}(100) + \int_0^{100} (\mathbf{x}^T(s)Q\mathbf{x}(s) + u^2(s))ds, \text{ όπου} \quad (1.3.2)$$

$$Q_f = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \text{ και } Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Από την μορφή του τετραγωνικού κόστους μπορούμε να εκφράσουμε την βέλτιστη είσοδο συναρτήσει του χώρου καταστάσεων ως $u^*(\mathbf{x}) = -B^T P(t)\mathbf{x}$. Ο συμμετρικός πίνακας P είναι η λύση του μητρωικού διαφορικού προβλήματος *Ricatti*.

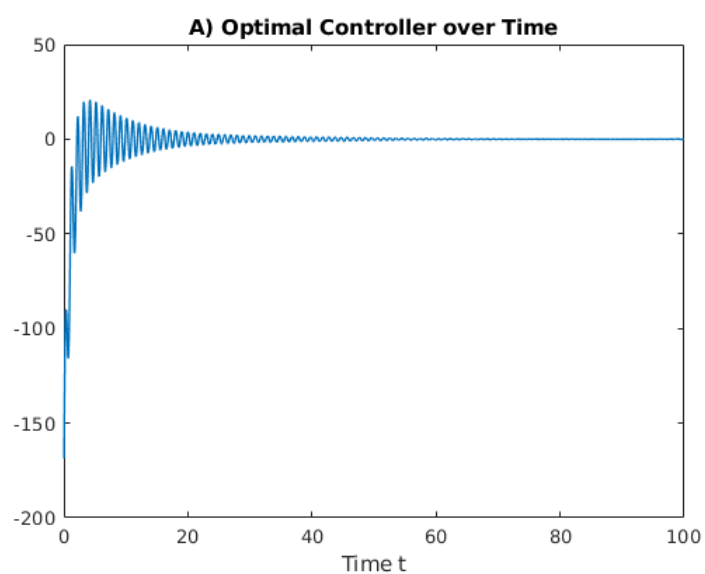
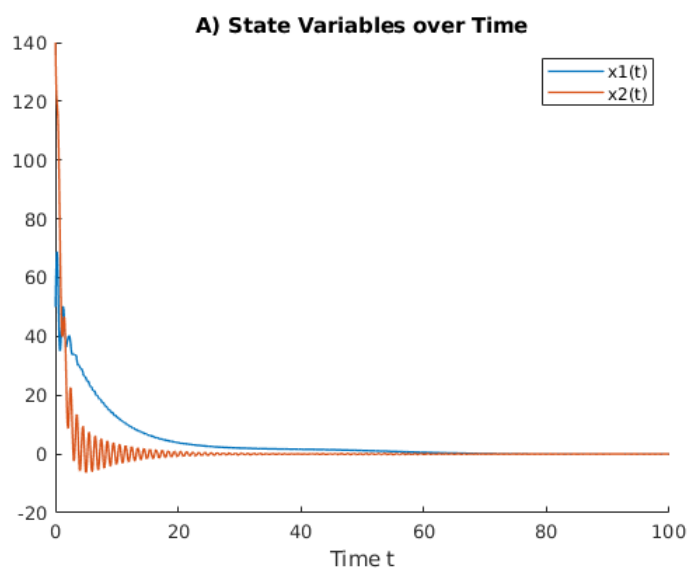
$$\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)B(t)B^T(t)P(t) + Q = 0, \text{ και } P(100) = Q_f \quad (1.3.3)$$

Η επίλυση του διαφορικού προβλήματος της Εξ. (1.3.3) παράγει τις εξής συνιστώσες $p_{11}(t)$, $p_{12}(t) = p_{21}(t)$ και $p_{22}(t)$.

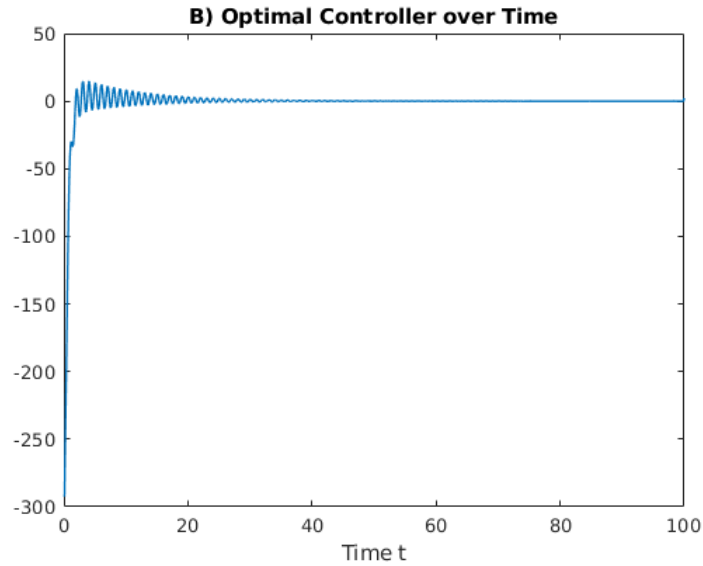


Σχήμα 1.3.1: Συνιστώσες Μήτρας $P(t)$.

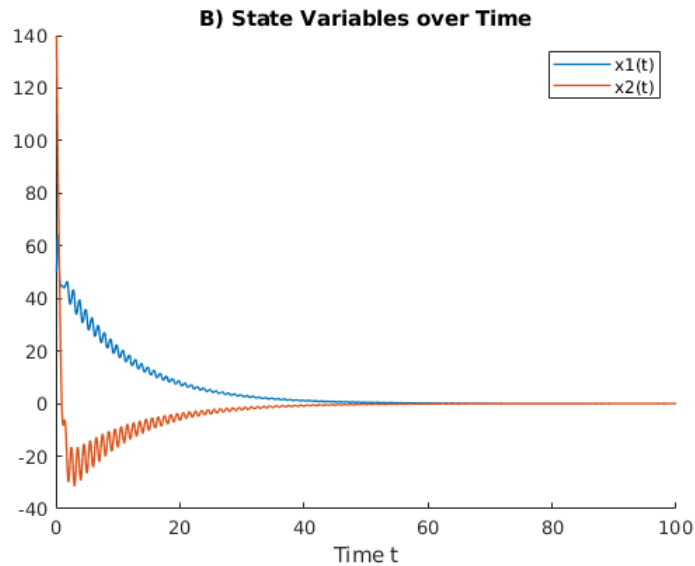
Στις κυματώσεις των Σχημάτων (1.3.2) και (1.3.3) φαίνεται η επίδραση της χρονικής εξάρτησης του πίνακα $A(t)$ του συστήματος. Μειώνοντας την συχνότητα του συστήματος ώστε ο πίνακας $A(t)$ να παραμένει σταθερός, αντιλαμβανόμαστε ότι οι μεταβολές του

Σχήμα 1.3.2: Βέλτιστος Ελεγκτής u^* .Σχήμα 1.3.3: Χώρος κατάστασης οδηγούμενος από u^* .

ελεγκτή και των μεταβλητών κατάστασης θα γίνουν πιο σταδιακές, τείνοντας να ομαλοποιηθούν πλήρως όσο ο (προκαθορισμένος και σταθερός ανά προσομοίωση) τελικός χρόνος αυξάνεται.



Σχήμα 1.3.4: Βέλτιστος Ελεγκτής u^* , LTI προβλήματος.



Σχήμα 1.3.5: Χώρος κατάστασης οδηγούμενος από u^* , LTI προβλήματος.

2 Βέλτιστος Έλεγχος Ηλεκτρικού Τρένου

Για ηλεκτρικό τρένο οδηγούμενο από DC κινητήρες στην μόνιμη κατάσταση μπορεί να μοντελοποιηθεί στον χώρο κατάστασης θέσης - ταχύτητας με το διαφορικό σύστημα των Εξ. (2.0.1). Η μεταβλητή x_1 είναι η θέση του τρένου, x_2 η ταχύτητα, και η είσοδος u το ρεύμα τυμπάνου των κινητήρων.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -k_1 x_2 - k_2 x_2^2 + k_3 u \end{bmatrix}, \text{ με } \mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \quad (2.0.1)$$

Αναζητούμε είσοδο $u \in [I_{min}, I_{max}]$ που να ελαχιστοποιεί το επιλεγμένο κόστος της Εξ. (2.0.2).

$$J = c_1(x_1(t_f) - x_{1f})^2 + c_2 x_2^2(t_f) + \int_0^{t_f} (k_4 x_2 u + R u^2) dt \quad (2.0.2)$$

Για τον πλήρη ορισμό του TPBVP θεωρούμε το penalty τελικού χρόνου και την Hamiltonian του συστήματος, όπως προηγούμενως.

$$\begin{aligned} \varphi(x_1(t_f), x_2(t_f)) &= c_1(x_1(t_f) - x_{1f})^2 + c_2 x_2^2(t_f) \\ H = L + \mathbf{p} \cdot (A\mathbf{x} + Bu) &= k_4 x_2 u + R u^2 + p_1 x_2 + p_2(-k_1 x_2 - k_2 x_2^2 + k_3 u) \end{aligned} \quad (2.0.3)$$

Η βέλτιστη είσοδος του συστήματος είναι το $u \in [I_{min}, I_{max}]$ που ελαχιστοποιεί την Εξ. (2.0.3). Θεωρώντας την μερική παράγωγο της Hamiltonian, προκύπτει:

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{-(k_3 p_2 + k_4 x_2)}{2R} \text{ όσο } u \in [I_{min}, I_{max}] \Leftrightarrow \\ u^* &= \begin{cases} I_{min} & , F < -2RI_{max} \\ \frac{-F}{2R} & , F \in [-2RI_{max}, -2RI_{min}] \\ I_{max} & , F < -2RI_{min} \end{cases} \text{ όπου } F(p_2, x_2) = k_3 p_2 + k_4 x_2 \end{aligned} \quad (2.0.4)$$

Με χρήση της παραπάνω εισόδου, ορίζονται οι διαφορικές εξισώσεις του costate και οι συνοριακές συνθήκες που συμπληρώνουν το TPBVP.

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \Rightarrow \begin{cases} \dot{p}_1 = 0 \\ \dot{p}_2 = -k_4 u + k_1 x_2 - p_1 + 2k_2 x_2 p_2 \end{cases} \quad (2.0.5)$$

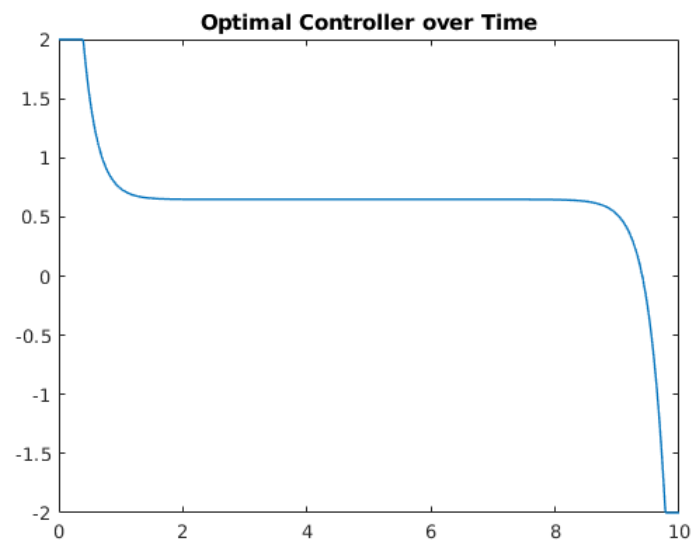
$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{p}(t_f) = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} p_1(t_f) = 2c_1(x_1(t_f) - x_{1f}) \\ p_2(t_f) = 2c_2 x_2(t_f) \end{cases} \quad (2.0.6)$$

Από το σύστημα των Εξισώσεων (2.0.1), (2.0.5) και (2.0.6) και αντικαθιστώντας όπου u το u^* της Εξ. (2.0.4) παράγεται πλέον η βέλτιστη οδήγηση του συστήματος προς ελαχιστοποίηση του κόστους, και η είσοδος κλειστού βρόχου που το επιτυγχάνει.

2.1 Προσομοίωση Ηλεκτρικού Τρένου

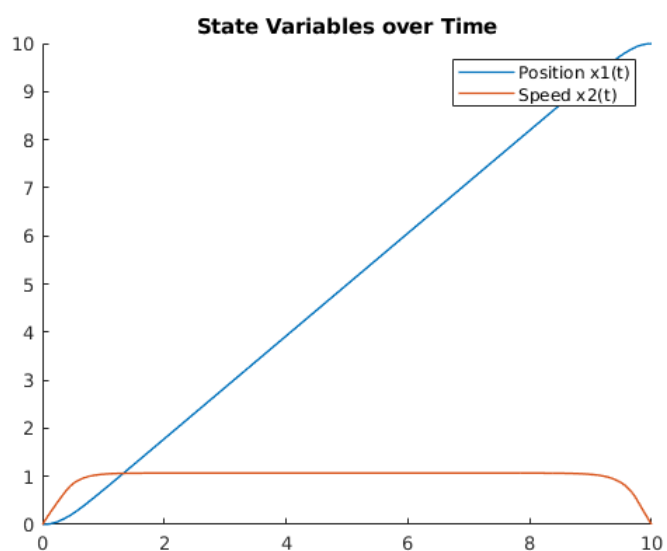
Η λύση του παραπάνω προβλήματος γίνεται στο προγραμματιστικό περιβάλλον MATLAB. Ο κώδικας της προσομοίωσης, στο αρχείο *train_model_optimal_control.m*, επισυνάπτεται στην αναφορά, και παράγει τα αριθμητικά αποτελέσματα για τα ερωτήματα 4 έως 8. Στη συνέχεια ακολουθεί η παρουσίαση των αποτελεσμάτων αυτών.

Για σταθερές όπως δίνονται στην εκφώνηση και αρχικές συνθήκες $x_1(0) = x_2(0) = 0$, το διαφορικό πρόβλημα οδηγεί σε βέλτιστο ελεγκτή σε μορφή κλειστού βρόχου. Αξίζει να σημειωθεί ο ελεγκτής έχει μορφή που μοιάζει με *Bang - Coast - Bang* όπως είναι χαρακτηριστικό σε προβλήματα ελαχιστοποίησης με συνιστώσες ενέργειας (λόγω του όρου Ru^2) αλλά και δέν παρουσιάζει απότομες μεταβολές μεταξύ των περιοχών αυτών λόγω της συνιστώσας ελαχίστου καυσίμου x_2u .

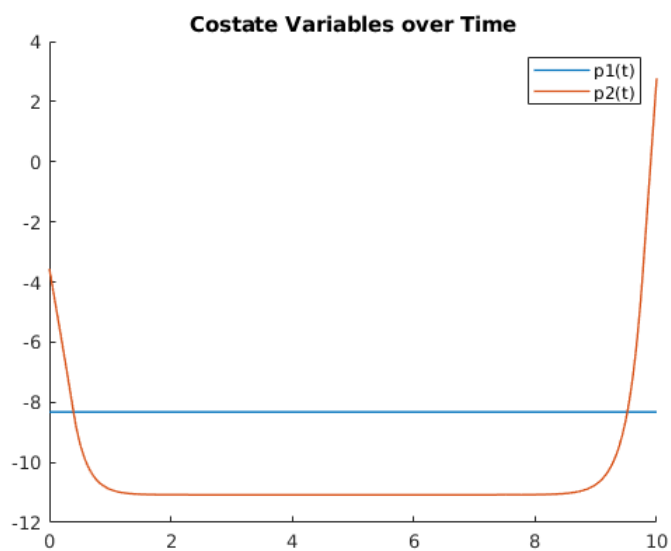


Σχήμα 2.1.1: Βέλτιστος Ελεγκτής Κλειστού Βρόχου

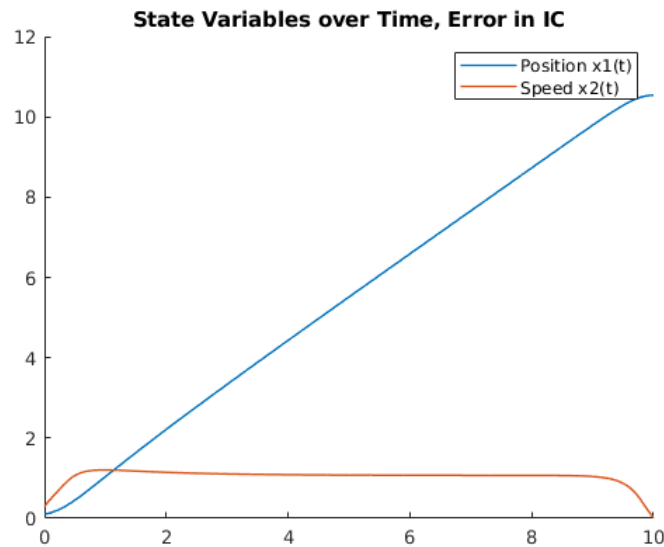
Φυσικά αφού ο νόμος ελέγχου έχει οριστεί σε μορφή κλειστού βρόγχου είναι ανθεκτικός σε μεταβολές στην αρχική κατάσταση αλλά και στα επιμέρους βάρη της συνάρτησης κόστους. Υπόλογιστικά όμως η επίλυση του TPBVP είναι απαιτητική.



Σχήμα 2.1.2: Θέση - Ταχύτητα του Τρένου



Σχήμα 2.1.3: Μεταβλητές Costate του Συστήματος



Σχήμα 2.2.1: Οδήγηση Συστήματος με Σφάλμα Αρχικής Θέσης

2.2 Μεταβολή Αρχικών Συνθηκών

Εάν η παραπάνω υπολογισμένη είσοδος u δοθεί σαν ελεγκτής ανοιχτού βρόχου στο σύστημα, τότε φυσικά δεν παράγει το βέλτιστο αποτέλεσμα για οποιαδήποτε άλλη αρχική συνθήκη. Παρουσιάζεται μια τέτοια λύση για το σύστημα σε αρχική συνθήκη $[x_1(0) \ x_2(0)]^T = [0.1 \ 0.3]^T$ (Σχήμα 2.2.1).

Φαίνεται και αριθμητικά η αύξηση του παραγόμενου κόστους για τον βέλτιστο έλεγχο και για έλεγχο ανοιχτού βρόχου - με σφάλμα στις αρχικές συνθήκες.

Calculated cost for optimal control is:
6.4868e+03

Calculated cost for sub_optimal control is:
7.2688e+03

Σχήμα 2.2.2: Υπολογισμός Κόστους για Βέλτιστη και Μη Βέλτιστη Οδήγηση

2.3 Σφάλμα Γύρω από Βέλτιστη Τροχιά

Για την μείωση του σφάλματος που προκαλείται από την μεταβολή των αρχικών συνθηκών μπορεί επιπλέον να θεωρηθεί διορθωτική συνιστώσα $v(t)$ στην εφαρμοζόμενη είσοδο. Η συνιστώσα αυτή είναι επίσης ανοιχτού βρόχου και υπολογίζεται συναρτήσει της απόκλισης

από την ιδανική τροχιά κλειστού βρόγχου του συστήματος.

Συγκεκριμένα, γραμμικοποιώντας κάποιο σφάλμα $y(t)$ γύρω από την βέλτιστη τροχιά, βρίσκουμε γραμμική εξάρτηση από την στοιχειώδη διορθωτική συνιστώσα v .

$$\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y} + Bv \quad (2.3.1)$$

Όπου οι μήτρες $A(t)$ και B έχουν υπολογιστεί ως:

$$A(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a(t) \end{bmatrix}, \text{ όπου } a(t) = -k_1 - 2k_2x_2(t).$$

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_t = [0 \quad k_3]^T$$

Αφού επιθυμούμε η συνιστώσα $v(t)$ να διορθώνει μικρά σφάλματα γύρω από την βέλτιστη τροχιά του τρένου, τότε επιλέγεται ώστε να ελίσχιστοποιεί κάποιο καθορισμένο τετραγωνικό κριτήριο κόστους για το Σύστημα (2.3.1).

$$J_2 = \mathbf{y}^T(t_f)S_f\mathbf{y}(t_f) + \int_0^{t_f} (\mathbf{y}^T(t)Q\mathbf{y}(t) + v^2(t))dt \quad (2.3.2)$$

$$S_f = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}, \text{ και } Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Όπως προηγουμένως, η είσοδος που ελαχιστοποιεί την Εξ. (2.3.2) είναι η $v(\mathbf{y}) = -B^T P \mathbf{y}$ όπου η μήτρα P δίνεται από το διαφορικό μητρικό πρόβλημα Ricatti.

$$\dot{P} + PA + A^T P - PBB^T P + Q = 0 \text{ και συνθήκη } P(t_f) = S_f \quad (2.3.3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{P}_{11} = k_3^2 P_{12}^2 - 2 \\ \dot{P}_{12} = k_3^2 P_{12} P_{22} - P_{11} - a(t) P_{12} \\ \dot{P}_{22} = -k_3^2 P_{22}^2 - 2 - 2(P_{12} + a(t) P_{22}) \end{cases} \quad \mu\epsilon \begin{cases} P_{11}(t_f) = P_{22}(t_f) = 20 \\ P_{12}(t_f) = 0 \end{cases}$$

Το παραπάνω αποτελεί φυσικά ένα σύστημα τριών διαφορικών εξισώσεων - τριών οριακών συνθηκών που μπορεί να επιλυθεί ανεξάρτητα από το σύστημα. Με τον προσδιορισμό της μήτρας P έχουμε πλέον προσδιορίσει πλήρως την βέλτιστη είσοδο κλειστού βρόχου.

$$v(y) = -k_3 [P_{12}(t)y_1(t) + P_{22}(t)y_2(t)] \quad (2.3.4)$$

Από τις Εξισώσεις (2.3.1) και (2.3.4) καθορίζεται πλήρως η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος διόρθωσης σφάλματος και αρκεί να προσδιοριστούν πλέον κάποιες κατάλληλες οριακές συνθήκες για την παραγωγή της συνιστώσας $v = v(t)$.

Οι συνθήκες αυτές μπορούν να επιλεγούν για το $\mathbf{y}(t)$ είτε στον αρχικό είτε στον τελικό χρόνο. Η επιλογή των οριακών συνθηκών εξαρτάται αποκλειστικά από την *a priori* διαθέσιμη πληροφορία. Αν οι πραγματικές αρχικές συνθήκες του συστήματος του τρένου δεν είναι γνωστές (όπως δεν θα ήταν αν η απόκλιση οφείλονταν σε σφάλμα μέτρησης της αρχικής θέσης) ή δεν μπορούν να προσδιοριστούν με ικανοποιητική ακρίβεια, τότε η επιλογή περιορίζεται στην συνθήκη μηδενισμού του σφάλματος στην τελική θέση.

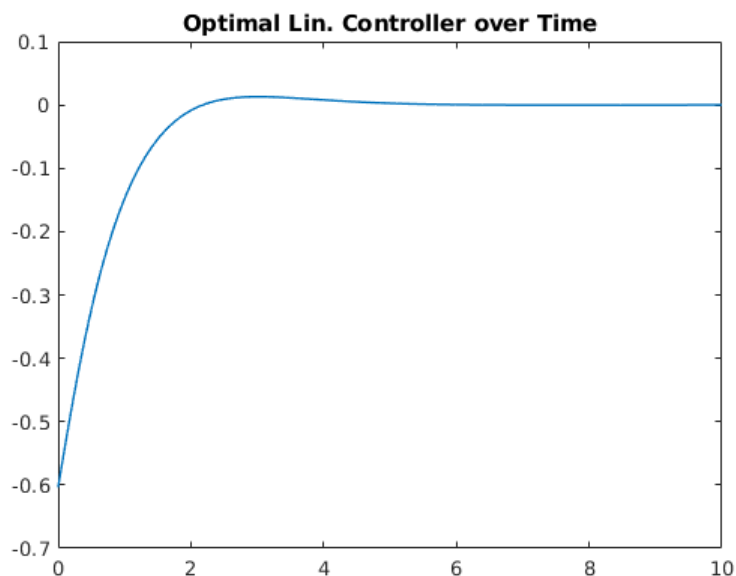
$$\mathbf{y}(t_f) = [0 \ 0]^T \quad (2.3.5)$$

Η επιλογή αυτή, μαζί με τις Εξισώσεις (2.3.1) και (2.3.4) ορίζουν ένα BVP που πρέπει να επιλυθεί ώστε να προσδιορίσει η ανοιχτού βρόχου μορφή του v . Το πρόβλημα αυτό είναι εξίσου απαιτητικό υπολογιστικά με την επίλυση του αρχικού BVP για την εύρεση της βέλτιστης λύσης κλειστού βρόχου του τρένου (Εξ. (2.0.4)).

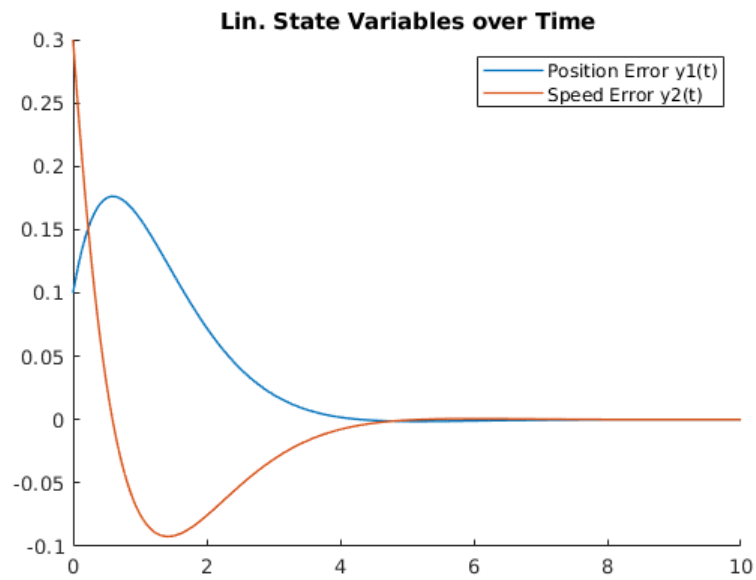
Αφού όμως σκοπός του σχεδιασμού αυτού του γραμμικού ελεγκτή είναι η διόρθωση σφάλματος προς προσέγγιση της βέλτιστης λύσης, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε αρχικές συνθήκες στον χρόνο $t = 0$.

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_{real}(0) - \mathbf{x}_{ideal}(0) = [x_{01} \ x_{02}]^T \quad (2.3.6)$$

Με αρχικές συνθήκες στην μορφή των (2.3.6) μπορεί το σφάλμα να διορθωθεί *on-line* και με τρόπο ευκολότερο από την επίλυση ενός BVP. Στην παρούσα αναφορά έχουν επιλεγεί οριακές συνθήκες για τον αρχικό χρόνο, θεωρώντας πιθανώς ότι αυτές προέρχονται από κάποια αρχική μέτρηση θέσης - ταχύτητας.

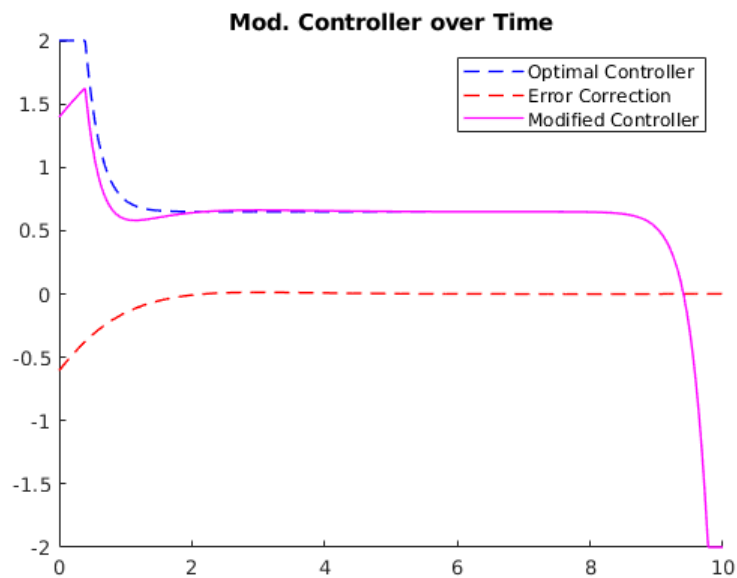


Σχήμα 2.3.1: Ελεγκτής Προσέγγισης Βέλτιστης Τροχιάς



Σχήμα 2.3.2: Σφάλματα Θέσης - Ταχύτητας

Οπότε ο συνολικά επιλεγμένος έλεγχος για την προσέγγιση της βέλτιστης λύσης, παρουσία σφαλμάτων στην αρχική θέση προκύπτει ως ακολουθεί και οδηγεί το σύστημα σε μια αναμενόμενη μείωση κόστους.



Σχήμα 2.3.3: Συνολικά Εφαρμοζόμενος Ελεγκτής

Η μείωση του κόστους με χρήση του τροποποιημένου αυτού νόμου ελέγχου αποδεικνύεται σημαντική, και μάλιστα πιο οικονομική από το αρχικό κόστος της βέλτιστης, χωρίς σφάλμα αρχικών συνθηκών, οδήγησης. Αυτό οφείλεται στην συνιστώσα ενέργειας του κόστους Ru^2 .

```
Calculated cost for corrected control is:  
6.2109e+03
```

Σχήμα 2.3.4: Μειωμένο Κόστος οδήγησης με Διορθωση Σφάλματος