

# 曲线和曲面

---

## □ 提出问题

由离散点来近似地决定曲线和曲面，即通过测量或实验得到一系列有序点列，根据这些点列需构造出一条光滑曲线，以直观地反映出实验特性、变化规律和趋势等。

# 9 曲线和曲面

---

- 基本概念
- 三次样条
- **Bezier**曲线
- **B**样条曲线
- 有理样条曲线

# 9.1 基本概念

---

- 曲线曲面数学描述的发展
- 曲线曲面的表示要求
- 曲线曲面的表示
- 插值与逼近
- 连续性条件
- 样条描述

# 曲线曲面数学描述的发展

---

- ❑ 弗格森双三次曲面片 (**1963**年)
- ❑ 孔斯双三次曲面片 (**1964**年)
- ❑ 样条方法 (**1964**年)
- ❑ **Bezier**方法 (**1971**年, 法国雷诺公司)
- ❑ **B**样条方法 (**1974**年, 通用汽车公司)
- ❑ 有理**Bezier** (**1968**年 **Forrest**)
- ❑ 非均匀有理**B**样条方法 (**1975**年 **NURBS**)

# 曲线曲面的表示要求

---

- 唯一性：形状唯一确定
- 几何不变性：位置相对不变
- 易于定界
- 统一性：统一表示各种形状（平面、空间）
- 易于实现光滑连接
- 几何直观：几何意义明显

# 曲线曲面的表示

---

## □ 参数法表示

$$p = p(t) \quad t \in [0,1]$$

## □ 参数法表示的优点

- 点动成线，一阶、二阶导数
- 通常总是能够选取那些具有几何不变性的参数曲线曲面表示形式，满足几何不变性。
- 用对参数求导来代替斜率，避免无穷大斜率

# 曲线曲面的表示

---

- $t \in [0, 1]$ ，使其相应的几何分量是有界的。
- 可对参数方程直接进行仿射和投影变换。
- 参数变化对各因变量的影响可以明显地表示出来。

# 插值与逼近

---

- 采用模线样板法表示和传递自由曲线曲面的形状称为样条。
- 样条曲线是指由多项式曲线段连接而成的曲线，在每段的边界处满足特定的连续条件。
- 样条曲面则可以用两组正交样条曲线来描述。



# 插值与逼近

---

- 曲线曲面的拟合：当用一组型值点来指定曲线曲面的形状时，形状完全通过给定的型值点列。

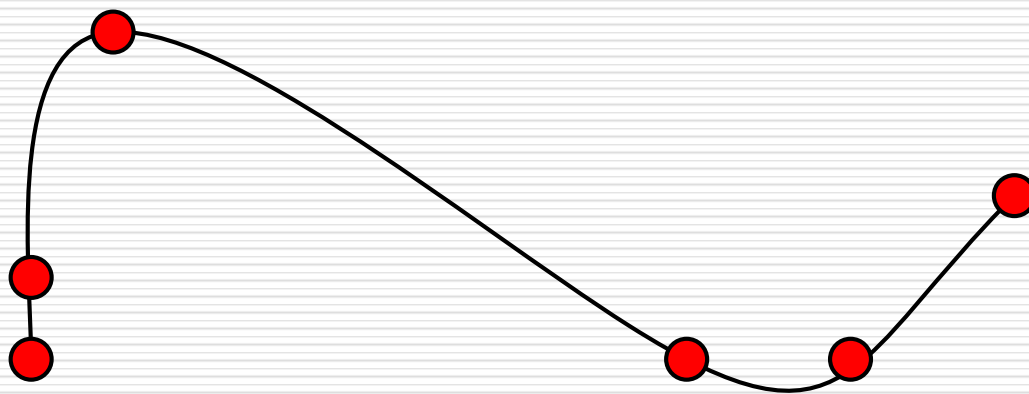


图9.1 曲线的拟合

# 插值与逼近

- 曲线曲面的逼近：当用一组控制点来指定曲线曲面的形状时，求出的形状不必通过控制点列。

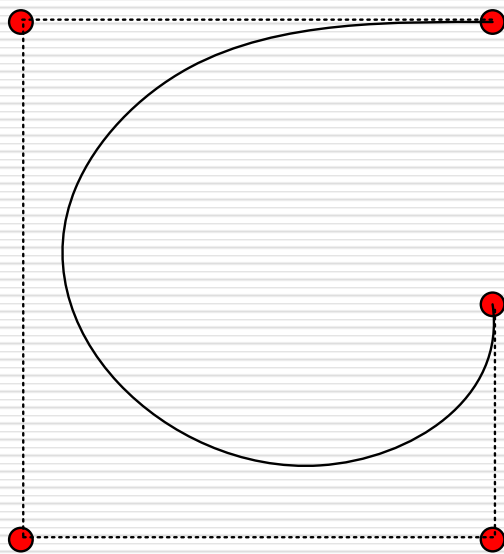


图9.2 曲线的逼近

# 插值与逼近

- 求给定型值点之间曲线上的点称为曲线的插值。
- 将连接有一定次序控制点的直线序列称为控制多边形或特征多边形。

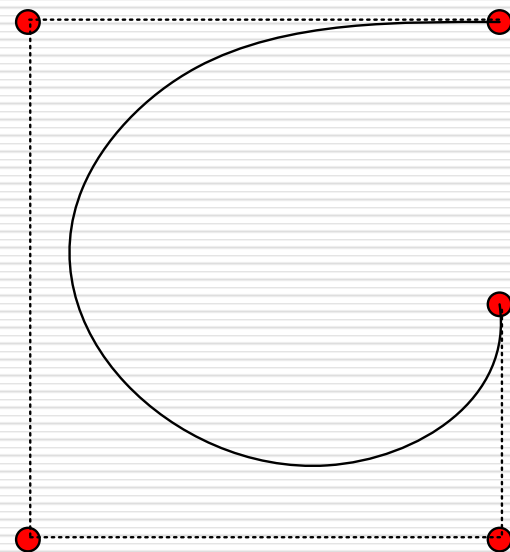


图9.2 曲线的逼近

# 连续性条件

---

- 假定参数曲线段 $\mathbf{p}_i$ 以参数形式进行描述:

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i(t) \quad t \in [t_{i0}, t_{i1}]$$

- 参数连续性

- **0**阶参数连续性, 记作**C<sup>0</sup>**连续性, 是指曲线的几何位置连接, 即

$$\mathbf{p}_i(t_{i1}) = \mathbf{p}_{(i+1)}(t_{(i+1)0})$$

# 连续性条件

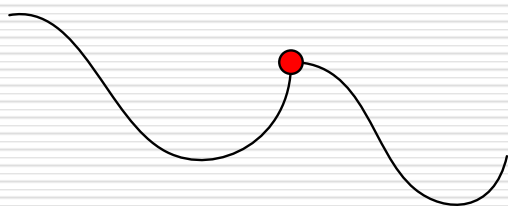
---

- **1阶参数连续性**，记作**C<sup>1</sup>**连续性，指代表两个相邻曲线段的方程在相交点处有相同的一阶导数：

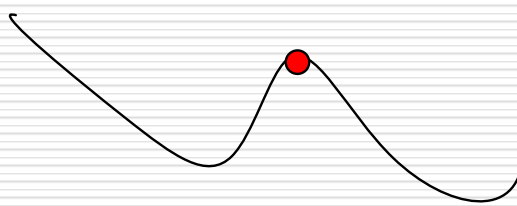
$$p_i(t_{i1}) = p_{(i+1)}(t_{(i+1)0})$$
$$\text{且 } p'_i(t_{i1}) = p'_{(i+1)}(t_{(i+1)0})$$

# 连续性条件

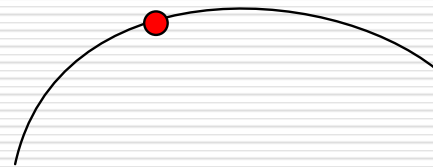
- **2阶参数连续性**，记作 **$C^2$** 连续性，指两个相邻曲线段的方程在相交点处具有相同的一阶和二阶导数。



(a) 0阶连续性



(b) 1阶连续性



(c) 2阶连续性

图9.3 曲线段的参数连续性

# 连续性条件

---

## □ 几何连续性

- **0**阶几何连续性，记作**G<sup>0</sup>**连续性，与**0**阶参数连续性的定义相同，满足：

$$p_i(t_{i1}) = p_{(i+1)}(t_{(i+1)0})$$

# 连续性条件

---

- 1阶几何连续性，记作 $G^1$ 连续性，指一阶导数在相邻段的交点处成比例
- 2阶几何连续性，记作 $G^2$ 连续性，指相邻曲线段在交点处其一阶和二阶导数均成比例。



# 样条描述

---

□ **n**次样条参数多项式曲线的矩阵

$$\begin{cases} x(t) = a_n t^n + \cdots + a_2 t^2 + a_1 t^1 + a_0 \\ y(t) = b_n t^n + \cdots + b_2 t^2 + b_1 t^1 + b_0 \\ z(t) = c_n t^n + \cdots + c_2 t^2 + c_1 t^1 + c_0 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

# 样条描述

---

$$p(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} t^n & \dots & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_n & b_n & c_n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_0 & b_0 & c_0 \end{bmatrix}$$
$$= T \cdot C = T \cdot M_s \cdot G \quad t \in [0, 1]$$

# 样条描述

---

- **Ms**称为基矩阵，是一个  $(n+1) * (n+1)$  阶矩阵
- **G**是一个  $(n+1) * 3$ 阶的矩阵，包含样条形式的几何约束条件（边界条件）。
- **T** 和 **Ms** 构成基函数，或称为混合函数（**Blending Function**）

# 样条描述

---

- 指定一个具体的样条参数表示
  - 列出一组加在样条上的边界条件；
  - 列出描述样条特征的矩阵；
  - 列出一组混合函数（基函数），它可以由指定的曲线几何约束来计算曲线路径位置。

## 9.2 三次样条

---

□ 给定 **$n+1$** 个点，可得到通过每个点的 **$n$** 段三次多项式曲线：

$$\begin{cases} x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x \\ y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y \\ z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

## 9.2.1 自然三次样条

---

### □ 定义

给定  $n+1$  个型值点，现通过这些点列构造一条自然三次参数样条曲线，要求在所有曲线段的公共连接处均具有位置、一阶和二阶导数的连续性，即自然三次样条具有  $C^2$  连续性。

# 自然三次样条

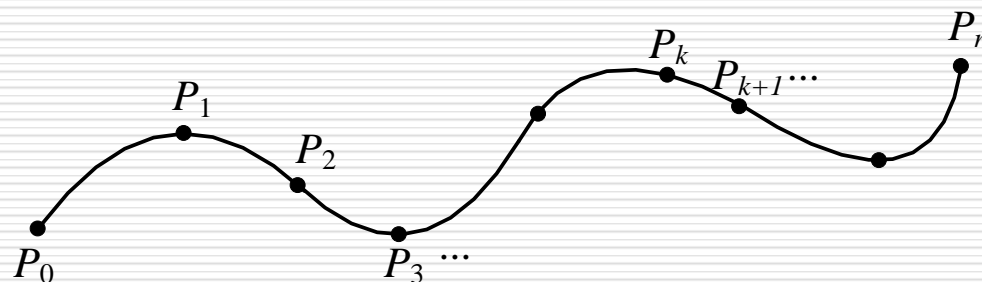


图9.4  $n+1$ 个控制点拟合的三次参数样条曲线

□  $4n$ 个多项式系数

■  $4(n-1)$ :  $P_i$ 点两侧的两条曲线段在该点处有相同的一阶和二阶导数，并且两条曲线段都通过该点；

# 自然三次样条

---

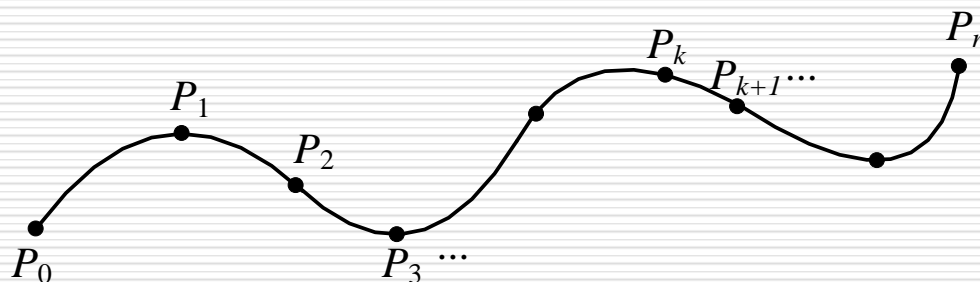


图9.4  $n+1$ 个控制点拟合的三次参数样条曲线

□  $4n$ 个多项式系数

■ **2:**  $P_0$  点（曲线的起点）和  $P_n$  点（曲线的终点）；



# 自然三次样条

---

## □ $4n$ 个多项式系数

- 在 $P_0$ 和 $P_n$ 点处设其二阶导数为0;
- 增加两个隐含的型值点, 分别位于型值点序列的两端, 即 $P_{-1}$ 和 $P_{n+1}$ 点;
- 给出 $P_0$ 和 $P_n$ 点处的一阶导数

# 自然三次样条

---

## □ 特点

- 只适用于型值点分布比较均匀的情况
- 不能“局部控制”

## 9.2.2 三次Hermite样条

---

□ 定义：假定型值点 $\mathbf{P}_k$ 和 $\mathbf{P}_{k+1}$ 之间的曲线段为 $\mathbf{p}(t), t \in [0, 1]$ ，给定矢量 $\mathbf{P}_k$ 、 $\mathbf{P}_{k+1}$ 、 $\mathbf{R}_k$ 和 $\mathbf{R}_{k+1}$ ，则满足下列条件的三次参数曲线为三次Hermite样条曲线：

$$p(0) = P_k, p(1) = P_{k+1}$$

$$p'(0) = R_k, p'(1) = R_{k+1}$$

## □ 推导

$$p(t) = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{bmatrix}$$

$$= [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = T \cdot C$$

## □ 推导

$$p'(t) = [3t^2 \quad 2t \quad 1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$p(0) = P_k, p(1) = P_{k+1}$$

$$p'(0) = R_k, p'(1) = R_{k+1}$$

$$\begin{aligned}
 C = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ R_k \\ R_{k+1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ R_k \\ R_{k+1} \end{bmatrix} = M_h \cdot G_h
 \end{aligned}$$

□  $M_h$ 是Hermite矩阵。 $G_h$ 是Hermite几何矢量。

# 三次 Hermite 样条

---

□ 三次 Hermite 样条曲线的方程为：

$$p(t) = T \cdot M_h \cdot G_h \quad t \in [0, 1]$$

$$T \cdot M_h = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 三次 Hermite 样条

---

□ 通常将  $\mathbf{T} \bullet \mathbf{M}_k$  称为 **Hermite** 基函数（或称混合函数，调和函数）：

$$H_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$$

$$H_1(t) = -2t^3 + 3t^2$$

$$H_2(t) = t^3 - 2t^2 + t$$

$$H_3(t) = t^3 - t^2$$

$$p(t) = P_k H_0(t) + P_{k+1} H_1(t) + R_k H_2(t) + R_{k+1} H_3(t)$$



# 三次 Hermite 样条

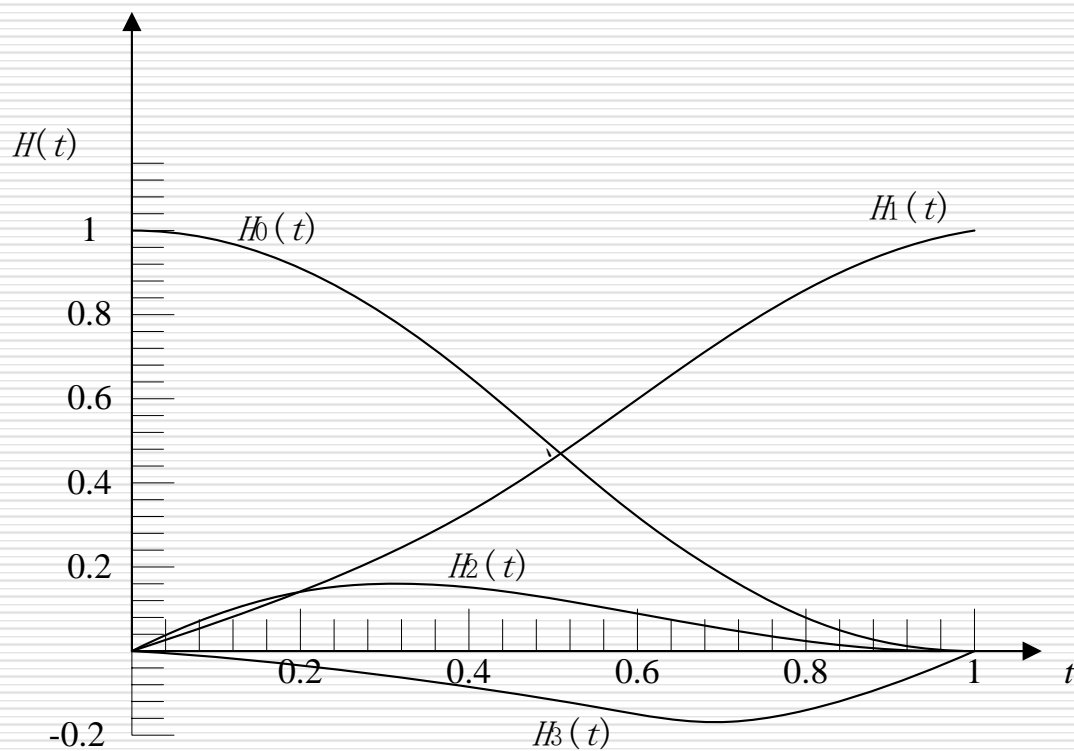


图9.5 Hermite基函数

# 三次 Hermite 样条

---

## □ 特点

- 可以局部调整，因为每个曲线段仅依赖于端点约束。
- 基于 **Hermite** 样条的变化形式：**Cardinal** 样条和 **Kochanek-Bartels** 样条。
- **Hermite** 曲线具有几何不变性。

## 9.3 Bezier曲线曲面

---

- **Bezier**曲线的定义
- **Bezier**曲线的性质
- **Bezier**曲线的生成
- **Bezier**曲面

# Bezier曲线的定义

---

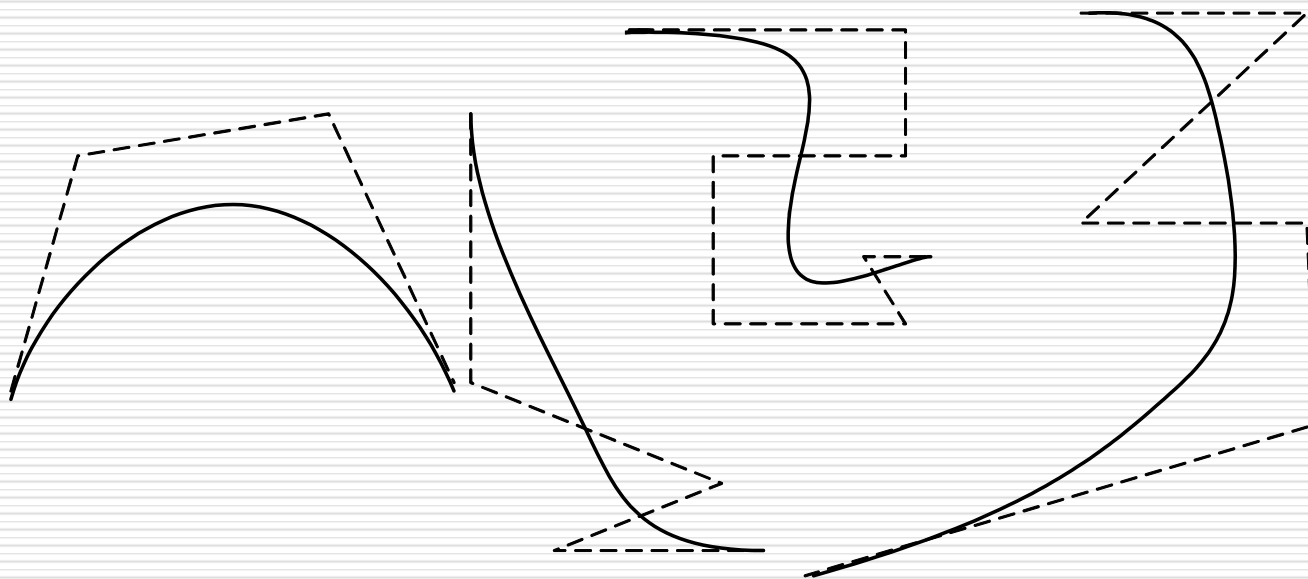


图9.6 Bezier曲线

# Bezier 曲线的定义

---

- 面向几何，利用易于控制的参数改变曲线的阶次和形状。
- 由控制多边形的顶点唯一确定。
- 第一个和最后一个点在曲线上，其他顶点用于控制曲线的导数、阶次和形状。

# Bezier 曲线的定义

---

□ 定义

$$p(t) = \sum_{k=0}^n P_k BEN_{k,n}(t) \quad t \in [0, 1]$$

□ Bernstein基函数具有如下形式:

$$BEN_{k,n}(t) = \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k (1-t)^{n-k} = C_n^k t^k (1-t)^{n-k}$$

$$k = 0, 1, \dots, n$$

□ 注意: 当 $k=0$ ,  $t=0$ 时,  $t^k=1$ ,  $k!=1$ 。

# Bezier 曲线的定义

---

## □ 一次Bezier曲线 (n=1)

$$p(t) = \sum_{k=0}^1 P_k BEN_{k,1}(t) = (1-t)P_0 + tP_1 \quad t \in [0, 1]$$

# Bezier 曲线的定义

---

## □ 二次Bezier曲线 (n=2)

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{k=0}^2 P_k BEN_{k,n}(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2 \\ &= (P_2 - 2P_1 + P_0)t^2 + 2(P_1 - P_0)t + P_0 \quad t \in [0, 1] \end{aligned}$$



# Bezier 曲线的定义

---

## □ 三次Bezier曲线 (n=3)

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{k=0}^3 P_k BEN_{k,n}(t) \\ &= BEN_{0,3}(t)P_0 + BEN_{1,3}(t)P_1 + BEN_{2,3}(t)P_2 + BEN_{3,3}(t)P_3 \\ &= (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3 \quad t \in [0, 1] \end{aligned}$$

$$p(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = T \cdot M_{be} G_{be} \quad t \in [0, 1]$$

# Bezier曲线的定义

---

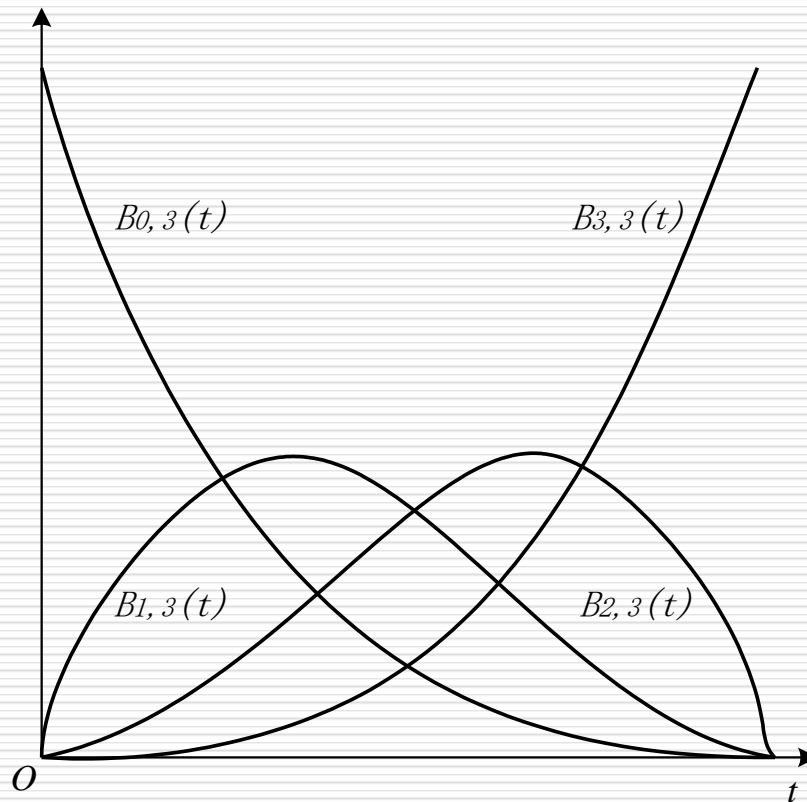


图9.7 三次Bezier曲线的四个Bezier基函数

# Bezier 曲线的性质

---

## □ 端点

$$\begin{aligned} p(0) &= \sum_{k=0}^n P_k BEN_{k,n}(0) \\ &= P_0 BEN_{0,n}(0) + P_1 BEN_{1,n}(0) + \cdots + P_n BEN_{n,n}(0) \\ &= P_0 \\ p(1) &= \sum_{k=0}^n P_k BEN_{k,n}(1) \\ &= P_0 BEN_{0,n}(1) + P_1 BEN_{1,n}(1) + \cdots + P_n BEN_{n,n}(1) \\ &= P_n \end{aligned}$$

# Bezier 曲线的性质

---

## □ 一阶导数

$$p'(0) = n \sum_{k=1}^n (P_k - P_{k-1}) BEN_{k-1, n-1}(0) = n(P_1 - P_0)$$

$$p'(1) = n \sum_{k=1}^n (P_k - P_{k-1}) BEN_{k-1, n-1}(1) = n(P_n - P_{n-1})$$

# Bezier曲线的性质

---

## □ 二阶导数

$$p''(0) = n(n-1)((P_2 - P_1) - (P_1 - P_0))$$

$$p''(1) = n(n-1)((P_{n-2} - P_{n-1}) - (P_{n-1} - P_n))$$

- **Bezier**曲线在起始点和终止点处的二阶导数分别取决于最开始和最后的三个控制点。

# Bezier 曲线的性质

---

## □ 对称性

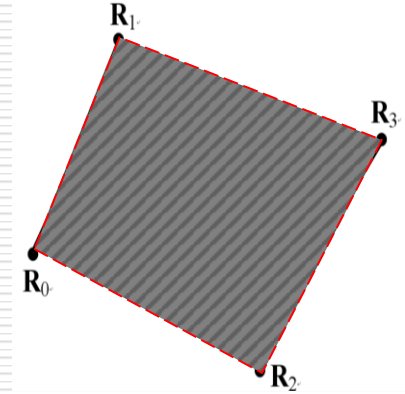
保持控制多边形的顶点位置不变，仅仅把它们的顺序颠倒一下，将下标为 $k$ 的控制点 $\mathbf{P}_k$ 改为下标为 $n-k$ 的控制点 $\mathbf{P}_{n-k}$ 时，曲线保持不变，只是走向相反而已。

# Bezier曲线的性质

## □ 凸包性

$$BEN_{k,n}(t) = \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k (1-t)^{n-k} \geq 0$$

$$\sum_{k=0}^n BEN_{k,n}(t) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k (1-t)^{n-k} = ((1-t) + t)^n \equiv 1$$



□ **Bezier**曲线各点均落在控制多边形各顶点构成的凸包之中。

□ **Bezier**曲线的凸包性保证了曲线随控制点平稳前进而不会振荡。

# Bezier曲线的性质

---

- 几何不变性: **Bézier**曲线的形状仅与控制多边形有关, 与坐标系无关。
- 差变减少性: 如果控制多边形是平面的, 则平面内任意直线与曲线的交点个数不多于直线与多边形的交点个数。
- 控制顶点变化对曲线形状的影响: 第*i*个控制点的变化 $\mathbf{P}_i$ , 将在曲线上参数为 $t=i/n$ 的那个点处发生最大的影响。



# Bezier 曲线的拼接

---

□ 如何保证连接处具有**G<sup>1</sup>**和**G<sup>2</sup>**连续性。

■ 在两段三次**Bezier**曲线间得到**G<sup>1</sup>**连续性

$$p'_1(1) = 3(P_3 - P_2)$$

$$p'_2(0) = 3(Q_1 - Q_0)$$

为实现**G<sup>1</sup>**连续，则有：

$$p'_2(0) = \alpha \cdot p'_1(1) \quad \longrightarrow \quad Q_1 - Q_0 = \alpha \cdot (P_3 - P_2)$$

# Bezier曲线的拼接

- 在两段三次Bezier曲线间得到G<sup>2</sup>连续性

$$p_2''(0) = \beta \cdot p_1''(1)$$

$$(Q_0 - 2Q_1 + Q_2) = \beta \cdot (P_1 - 2P_2 + P_3)$$

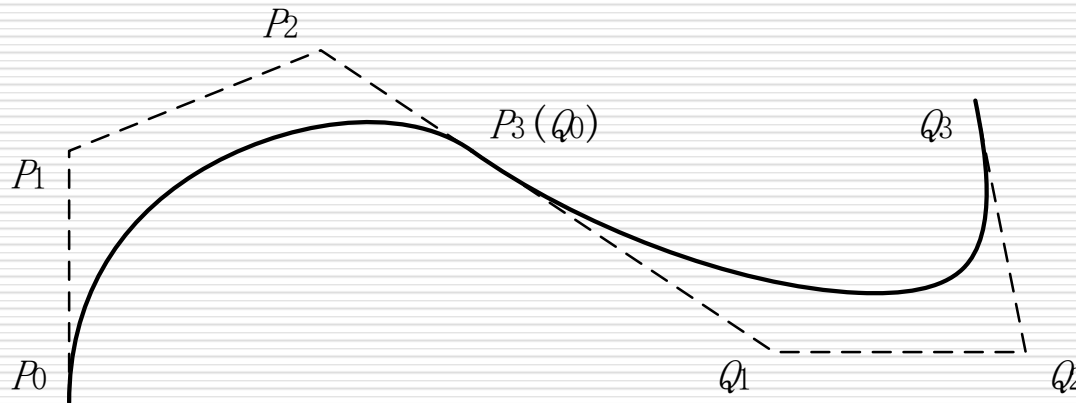


图9.8 两段三次Bezier曲线的连接

# Bezier曲线的细分

- 用少量的控制顶点来设计曲线形状，然后用细分过程来得到附加的控制点，可以对曲线的某些小段作精确的调整。

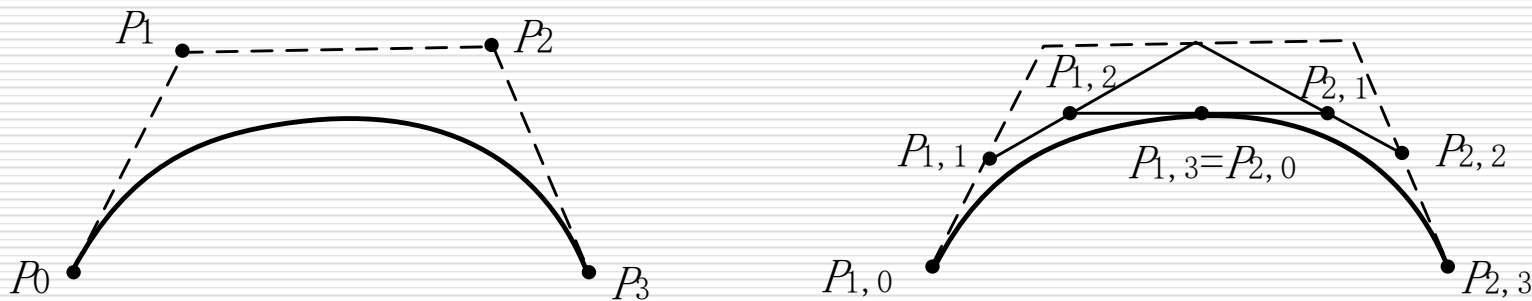


图9.9 四个控制点的Bezier曲线分成两段

# Bezier 曲面

---

## □ 定义

$$p(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{i,j} BEN_{i,m}(u) BEN_{j,n}(v) \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

$BEN_{i,m}(u)$  与  $BEN_{j,n}(v)$  是 Bernstein 基函数

# Bezier 曲面

---

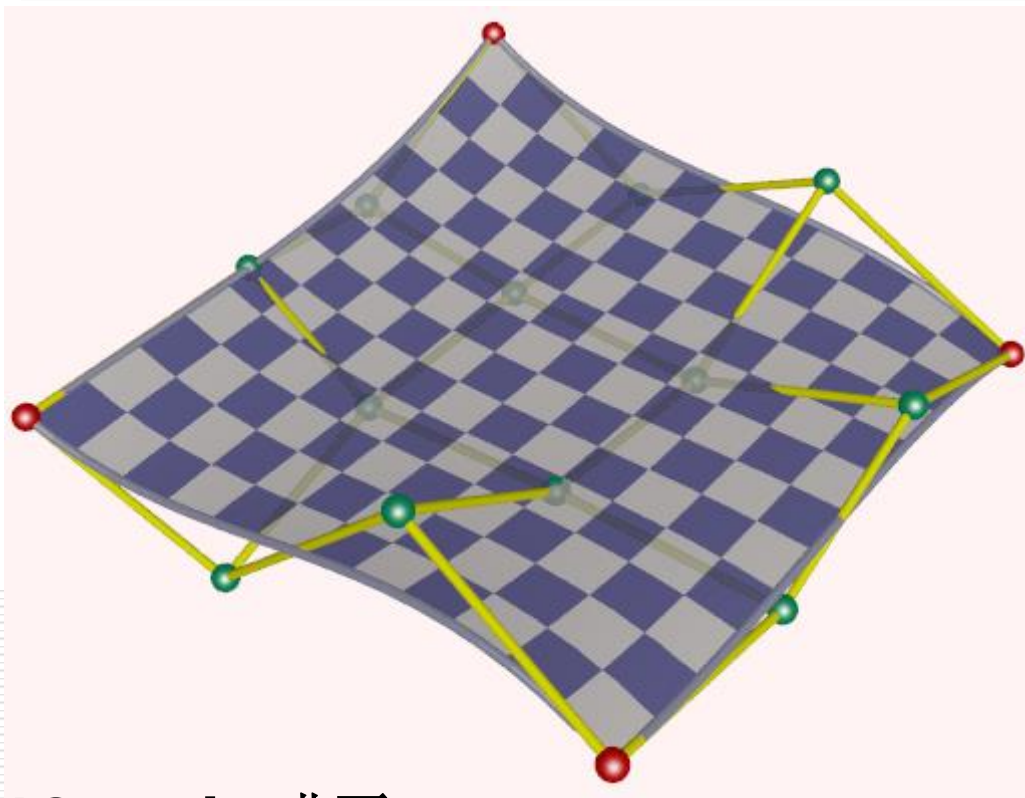
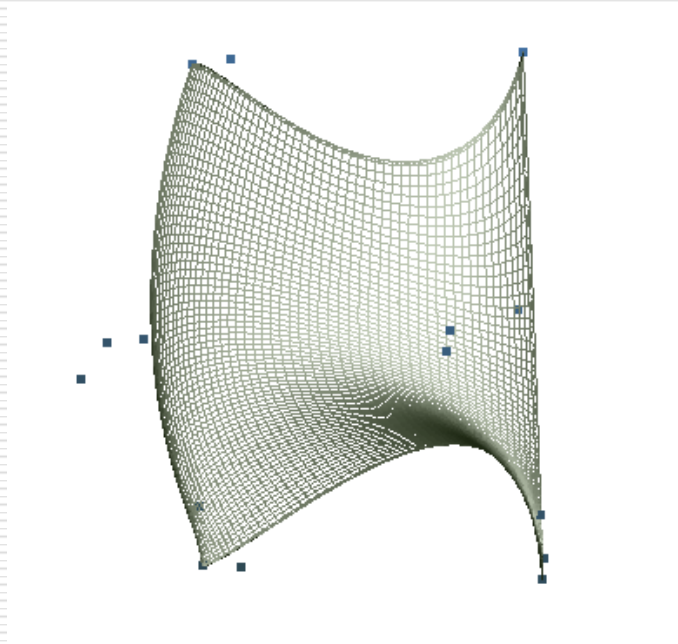


图9.10 Bezier曲面

# Bezier 曲面

## □ 双三次Bezier曲面( $m=n=3$ )

$$p(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 P_{i,j} BEN_{i,3}(u) BEN_{j,3}(v) \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

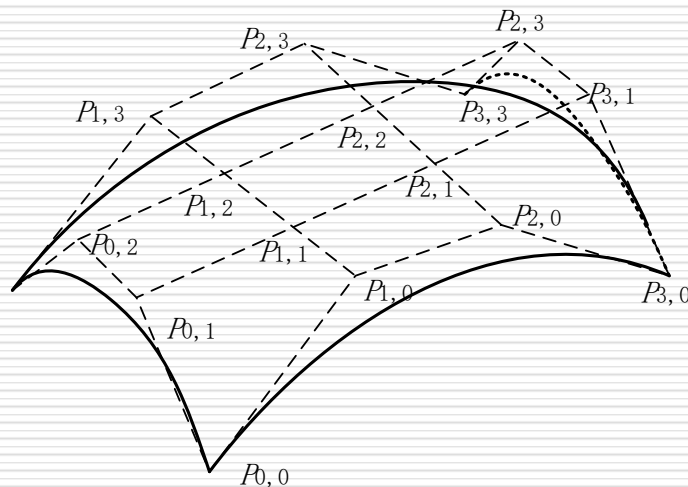


图9.11 双三次Bezier曲面及其控制网格

# Bezier曲面的性质

---

- 控制网格的四个角点正好是**Bezier**曲面的四个角点。
- 控制网格最外一圈顶点定义**Bezier**曲面的四条边界，这四条边界均为**Bezier**曲线。
- 几何不变性、对称性、凸包性等。

# Bezier曲面的拼接

---

- **0**阶连续性只要求在边界上匹配控制点；
- **1**阶连续性则要求在边界曲线上的任何一点，两个曲面片跨越边界的切线矢量应该共线，而且两切线矢量的长度之比为常数。



# Bezier曲面的拼接

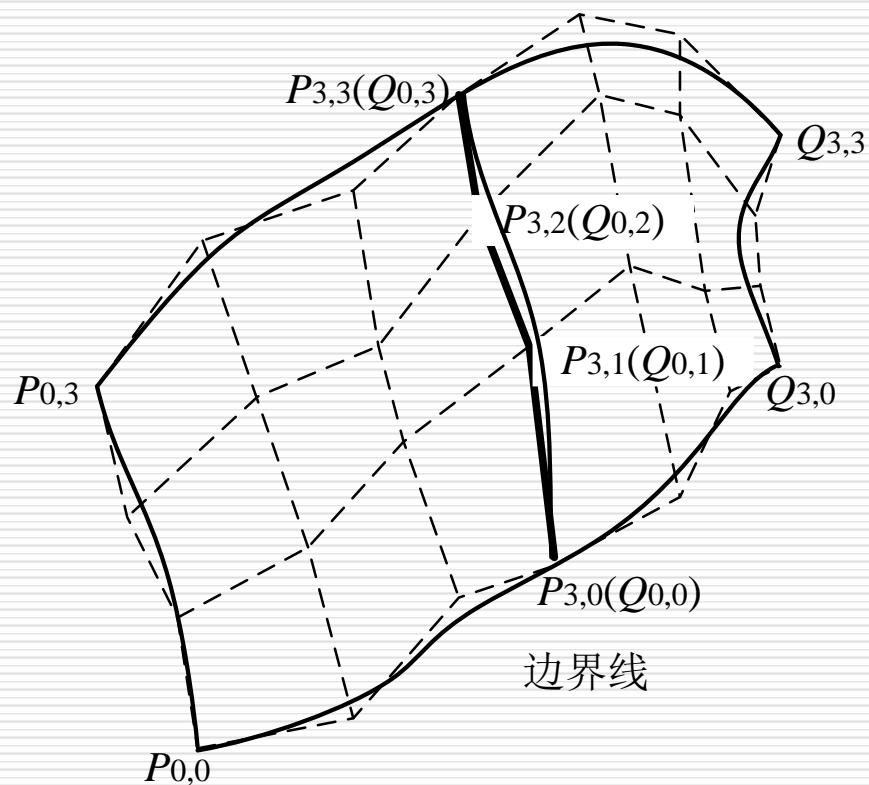


图9.12 Bezier曲面片的拼接

# Bezier曲面的不足

---

- ❑ 全局性：当移动一个控制顶点的位置时，整个曲面的形状会发生改变，这对于外形设计是很不方便的。
- ❑ 生成复杂外形需要多个**Bézier**曲面的光滑拼接，十分复杂。

## 9.4 B样条曲线曲面

---

- B样条曲线
- B样条曲线的性质
- B样条曲面

# B样条曲线

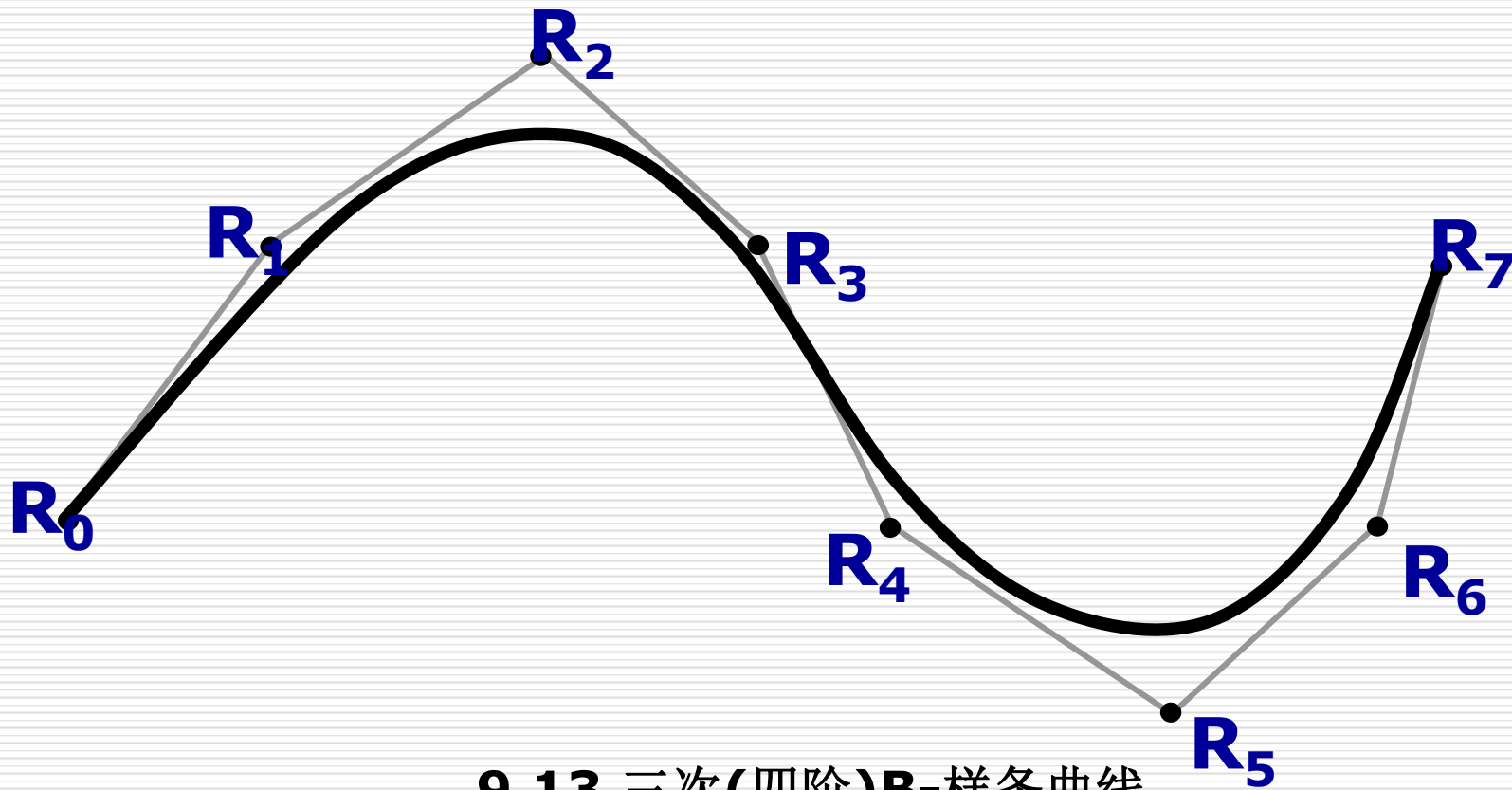
---

## □ Bezier曲线的不足

- 缺乏灵活性：控制多边形的顶点个数决定了 **Bezier** 曲线的阶数
- 控制性差：且当顶点个数较大时，控制多边形对曲线的控制将会减弱；
- 不能作局部修改：任何一个控制点位置的变化对整条曲线都有影响。

# B样条曲线

---



9.13 三次(四阶)B-样条曲线

# B样条曲线

---

- **B**样条多项式次数可以独立于控制点数目
- **B**样条允许局部控制曲线或曲面
- **B**样条比**Bezier**样条更复杂

# B样条曲线

---

## □ 定义

$$p(t) = \sum_{k=0}^n P_k B_{k,m}(t)$$

- de Boor点:  $P_k$
- B样条控制多边形
- B样条基函数

# B样条曲线

---

$$B_{k,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{若 } t_k \leq t < t_{k+1} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$B_{k,m}(t) = \frac{t - t_k}{t_{k+m-1} - t_k} B_{k,m-1}(t) + \frac{t_{k+m} - t}{t_{k+m} - t_{k+1}} B_{k+1,m-1}(t)$$

- **m**是曲线的阶数，**(m-1)**为B样条曲线的次数，曲线在连接点处具有**(m-2)**阶连续。
- **m**可以是**2**到控制点个数**n+1**之间的任意整数



# B样条曲线

---

$$B_{k,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{若 } t_k \leq t < t_{k+1} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$B_{k,m}(t) = \frac{t - t_k}{t_{k+m-1} - t_k} B_{k,m-1}(t) + \frac{t_{k+m} - t}{t_{k+m} - t_{k+1}} B_{k+1,m-1}(t)$$

□  $t_k$ 是节点值，非减序列

$$\mathbf{T} = (t_0, t_1, \dots, t_{n+m})$$

构成了 **$m-1$** 次**B**样条函数的节点矢量。

# B样条曲线

---

$$B_{k,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{若 } t_k \leq t < t_{k+1} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$B_{k,m}(t) = \frac{t - t_k}{t_{k+m-1} - t_k} B_{k,m-1}(t) + \frac{t_{k+m} - t}{t_{k+m} - t_{k+1}} B_{k+1,m-1}(t)$$

- 节点矢量分为三种类型：均匀的，开放均匀的和非均匀的。

# B样条曲线

---

## □ 性质

- 在 $t$ 的取值范围内，多项式曲线次数是  $(m-1)$ ，具有 $C^{m-2}$ 阶连续性
- $n+1$ 个控制点， $n+1$ 个函数描述混合函数
- 每个混合函数 $B_{k,m}$ 定义在 $t$ 取值范围的 $m$ 子区间上面，以节点向量值为起点

# B样条曲线

---

## □ 性质

- 参数 $t$ 的取值范围由 $n+m+1$ 个节点向量值分成 $m+n$ 个区间
- B样条曲线仅定义在 $t_{m-1}$ 到 $t_{n+1}$ 之间
- 每个曲线段受 $m$ 个控制点影响
- 任意一个控制点只能影响 $m$ 段曲线

# B样条曲线

---

## □ 均匀周期性B样条曲线

当节点沿参数轴均匀等距分布，即 $t_{k+1} - t_k = \text{常数}$ 时，所生成的曲线称为均匀B样条曲线。

$$B_{k,m}(t) = B_{k+1,m}(t + \Delta t) = B_{k+2,m}(t + 2\Delta t)$$

$$B_{k,m}(t) = B_{0,m}(t - k\Delta t)$$

# B样条曲线

---

## □ 均匀二次（三阶）B样条曲线

取 **$n=3$** ， **$m=3$** ，则 **$n+m=6$** ，不妨设节点矢量为： **$T=(0,1,2,3,4,5,6)$** ：

$$B_{k,1}(t) = \begin{cases} 1 & k \leq t < k+1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$B_{k,m}(t) = \frac{t-k}{m-1} B_{k,m-1}(t) + \frac{k+m-t}{m-1} B_{k+1,m-1}(t)$$

# B样条曲线

---

$$B_{0,3}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2}t(2-t) + \frac{1}{2}(t-1)(3-t) & 1 \leq t < 2 \\ \frac{1}{2}(3-t)^2 & 2 \leq t < 3 \end{cases}$$

$$B_{1,3}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t-1)^2 & 1 \leq t < 2 \\ \frac{1}{2}(t-1)(3-t) + \frac{1}{2}(t-2)(4-t) & 2 \leq t < 3 \\ \frac{1}{2}(4-t)^2 & 3 \leq t < 4 \end{cases}$$

# B样条曲线

---

$$B_{2,3}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t-2)^2 & 2 \leq t < 3 \\ \frac{1}{2}(t-2)(4-t) + \frac{1}{2}(t-3)(5-t) & 3 \leq t < 4 \\ \frac{1}{2}(5-t)^2 & 4 \leq t < 5 \end{cases}$$
$$B_{3,3}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t-3)^2 & 3 \leq t < 4 \\ \frac{1}{2}(t-3)(5-t) + \frac{1}{2}(t-4)(6-t) & 4 \leq t < 5 \\ \frac{1}{2}(6-t)^2 & 5 \leq t < 6 \end{cases}$$



# B样条曲线

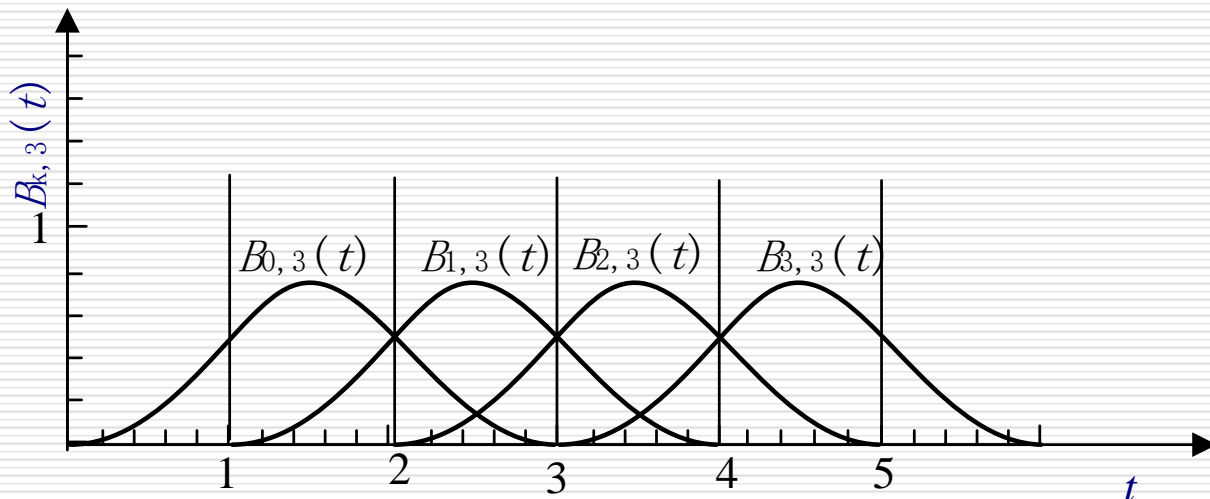


图9.14 四段二次(三阶)均匀B样条基函数

□ 所有的混合函数在**2**到**4**的区域出现，因为要满

足基函数条件  $\sum_{k=0}^n B_{k,m}(t) = 1$

# B样条曲线

---

## □ 按照基函数公式

■  $2 \leq t < 3$

$$p(t) = \frac{1}{2}(3-t)^2 P_0 + \frac{1}{2}((t-1)(3-t) + (t-2)(4-t))P_1 + \frac{1}{2}(t-2)^2 P_2$$

■  $3 \leq t \leq 4$

$$p(t) = \frac{1}{2}(4-t)^2 P_1 + \frac{1}{2}((t-2)(4-t) + (t-3)(5-t)) P_2 \\ + \frac{1}{2}((t-3)(5-t) + (t-4)(6-t))P_3$$

# B样条曲线

---

□ 曲线的起点和终点值:

$$p(start) = \frac{1}{2}(P_0 + P_1), p(end) = \frac{1}{2}(P_2 + P_3)$$

□ 均匀二次B样条曲线起点和终点处的导数:

$$p'(start) = P_1 - P_0, p'(end) = P_3 - P_2$$

# B样条曲线

---

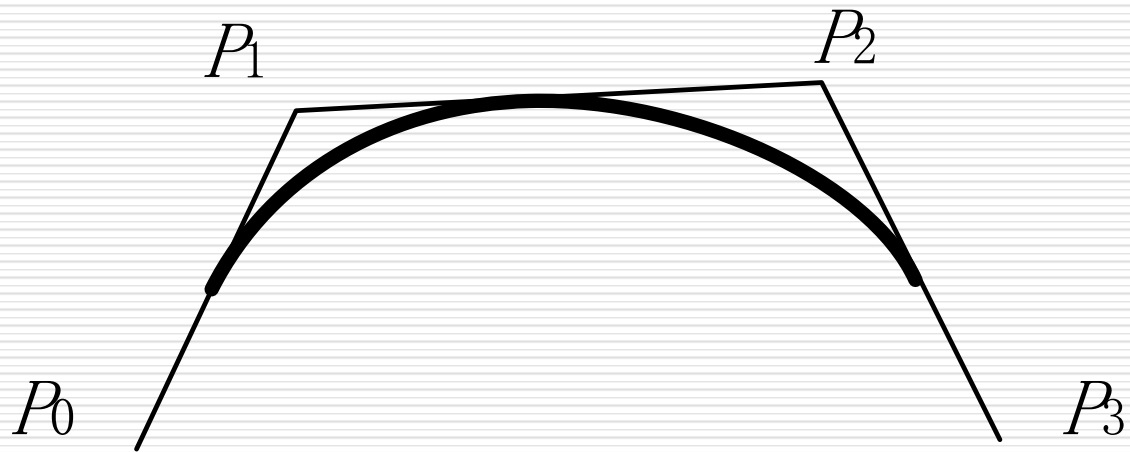


图9.15 四个控制点的二次周期性B样条曲线

# B样条曲线

---

- 对于由任意数目的控制点构造的二次均匀周期性**B**样条曲线来说，曲线的起始点位于头两个控制点之间，终止点位于最后两个控制点之间。
- 对于高次多项式，起点和终点是 $m-1$ 个控制点的加权平均值点。若某一控制点出现多次，样条曲线会更加接近该点。

# B样条曲线

## □ 三次周期性B样条曲线

取 **$m=4$** ， **$n=3$** ，节点矢量为：

**$T=(0,1,2,3,4,5,6,7)$** ：

$$B_{0,4}(t) = \frac{t}{3} B_{0,3}(t) + \frac{4-t}{3} B_{0,3}(t-1)$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{6}t^3 & 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{6}t^2(2-t) + \frac{1}{6}t(3-t)(t-1) + \frac{1}{6}(4-t)(t-1)^2 & 1 \leq t < 2 \\ \frac{1}{6}t(3-t)^2 + \frac{1}{6}(4-t)(3-t)(t-1) + \frac{1}{6}(4-t)^2(t-2) & 2 \leq t < 3 \\ \frac{1}{6}(4-t)^3 & 3 \leq t < 4 \end{cases}$$

# B样条曲线

---

$$B_{0,4}(t) = \frac{1}{6}(-t^3 + 3t^2 - 3t + 1)$$

$$B_{1,4}(t) = \frac{1}{6}(3t^3 - 6t^2 + 4)$$

$$B_{2,4}(t) = \frac{1}{6}(-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1)$$

$$B_{3,4}(t) = \frac{1}{6}t^3$$

$$t \in [0, 1)$$

# B样条曲线

---

$$p(t) = \sum_{k=0}^n P_k B_{k,m}$$

$$= \begin{bmatrix} B_{0,4}(t) & B_{1,4}(t) & B_{2,4}(t) & B_{3,4}(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

$$= T \cdot M_B \cdot G_B \quad t \in [0,1)$$



# B样条曲线

□ 三次周期性**B**样条在四个连续控制点上的边界条件

$$p(0) = \frac{1}{6}(P_0 + 4P_1 + P_2)$$

$$p(1) = \frac{1}{6}(P_1 + 4P_2 + P_3)$$

$$p'(0) = \frac{1}{2}(P_2 - P_0)$$

$$p'(1) = \frac{1}{2}(P_3 - P_1)$$

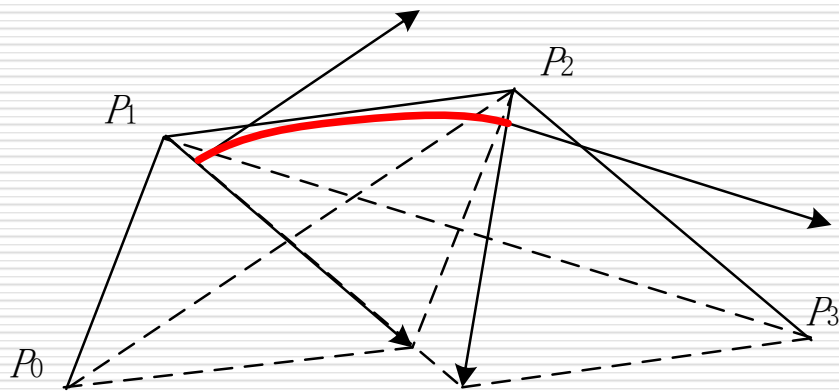


图9.16 四个控制点的三次  
周期性**B**样条曲线

# B样条曲线

## □ 开放均匀B样条曲线

节点矢量可以这样定义：

令  $L=n-m$ ，从0开始，按  $t_i \leq t_{i+1}$  排列。

$$T = (\underbrace{0, \dots, 0}_m, 1, 2, \dots, k-1, \underbrace{k, \dots, k}_m) \quad k = n - m + 2$$

$$t_i = \begin{cases} 0 & 0 \leq i < m \\ i - m + 1 & m \leq i \leq L + m \\ L + 2 & i > L + m \end{cases}$$

# B样条曲线

---

## □ 开放均匀的二次（三阶）B样条曲线

■ 假设  $m=3$ ,  $n=4$ , 节点矢量为:

$$\mathbf{T}=(t_0, t_1, \dots, t_{n+m})=(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7)=(0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3)。$$

■ 5个控制点, B样条有5个基函数

# B样条曲线

---

## □ 开放均匀的二次（三阶）B样条曲线

$$B_{0,3}(t) = (1-t)^2 \quad 0 \leq t < 1$$

$$B_{1,3}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t(4-3t) & 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2}(2-t)^2 & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

# B样条曲线

---

$$B_{2,3}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2}t(2-t) + \frac{1}{2}(t-1)(3-t) & 1 \leq t < 2 \\ \frac{1}{2}(3-t)^2 & 2 \leq t < 3 \end{cases}$$

$$B_{3,3}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t-1)^2 & 1 \leq t < 2 \\ \frac{1}{2}(3t-5)(3-t) & 2 \leq t < 3 \end{cases}$$

$$B_{4,3}(t) = (t-2)^2 \quad 2 \leq t < 3$$

# B样条曲线

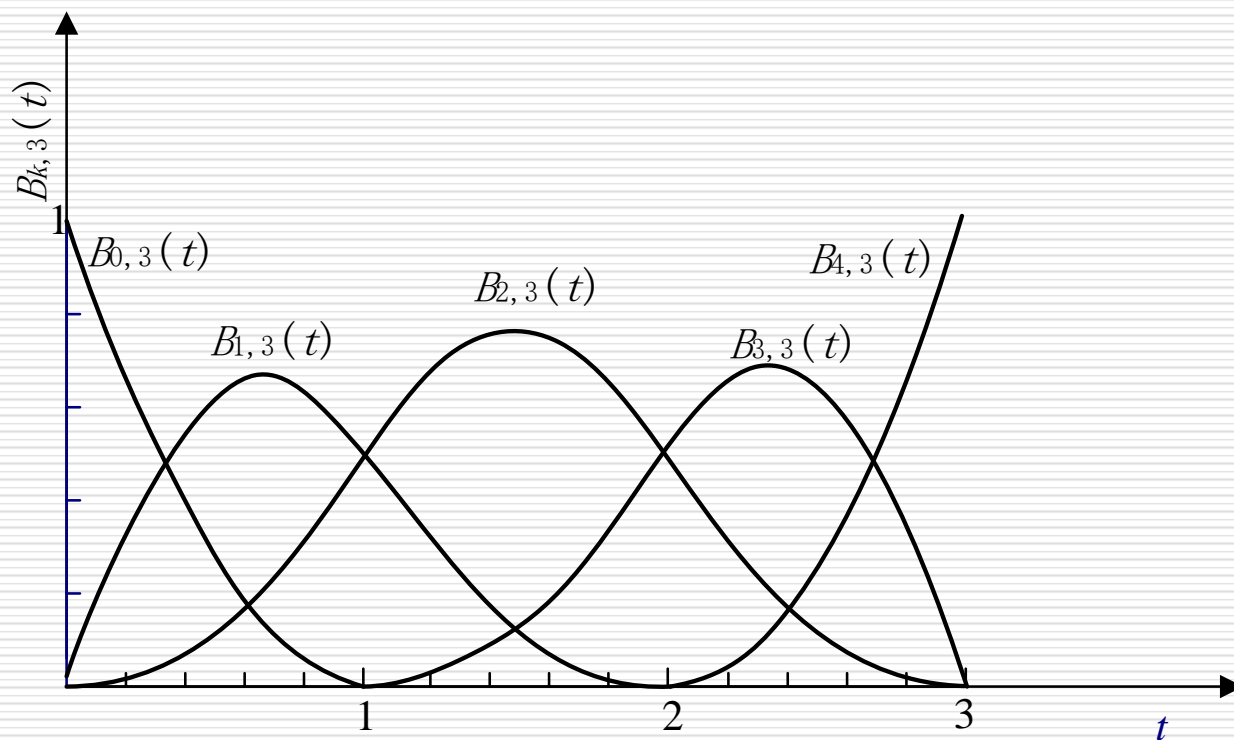


图9.17 开放均匀的二次B样条基函数

# B样条曲线

---

- 开放均匀**B**样条曲线，与**Bezier**样条非常类似的特性（ $m=n+1$ ）
- 三次开放**B**样条，**4**个控制点，有 $m=4$ ，节点矢量为： $\mathbf{T} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$
- 曲线通过第一个和最后一个控制点
- 第一个控制点处的导数和最后一个控制点处的导数将平行于最前和最后两个控制点的连线

# B样条曲线

## □ 非均匀B样条曲线

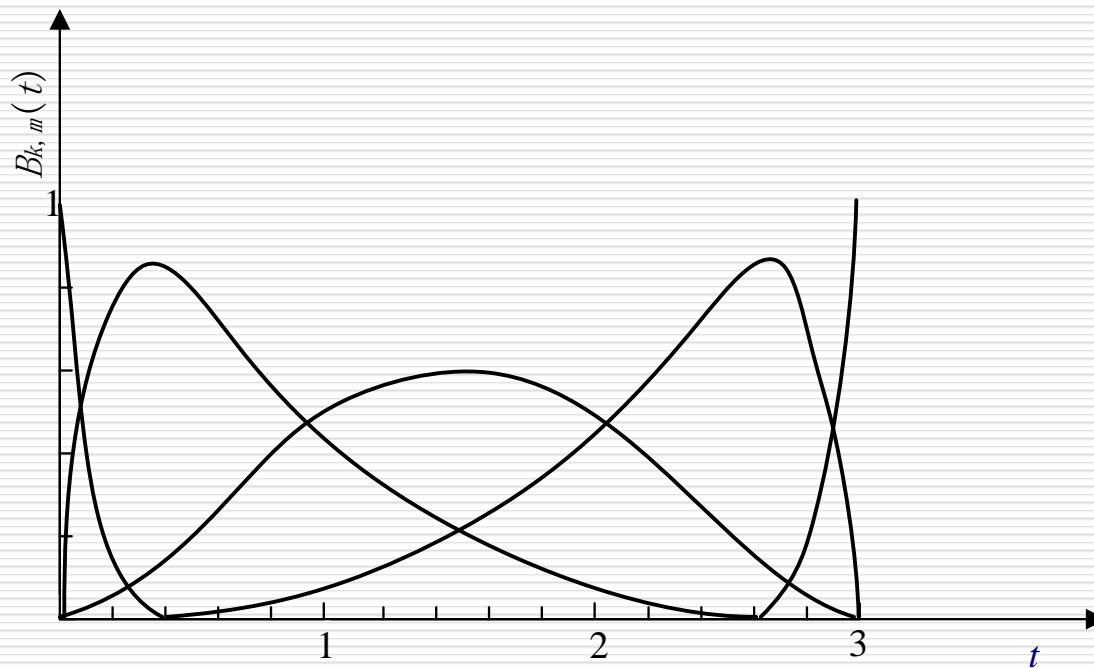


图9.18 非均匀B样条曲线的基函数



# B样条曲线

---

## □ 非均匀B样条曲线

- 基函数不再具有平移性质
- 计算量比均匀B样条大得多
- 可以随意插入、删除或修改节点，从而方便地控制曲线的局部形状

# B样条曲线的性质

---

## □ 局部支柱性

**B**样条的基函数是一个分段函数，其重要特征是在参数变化范围内，每个基函数在 $t_k$ 到 $t_{k+m}$ 的子区间内函数值不为零，在其余区间内均为零，通常也将该特征称为局部支柱性。

# B样条曲线的性质

---

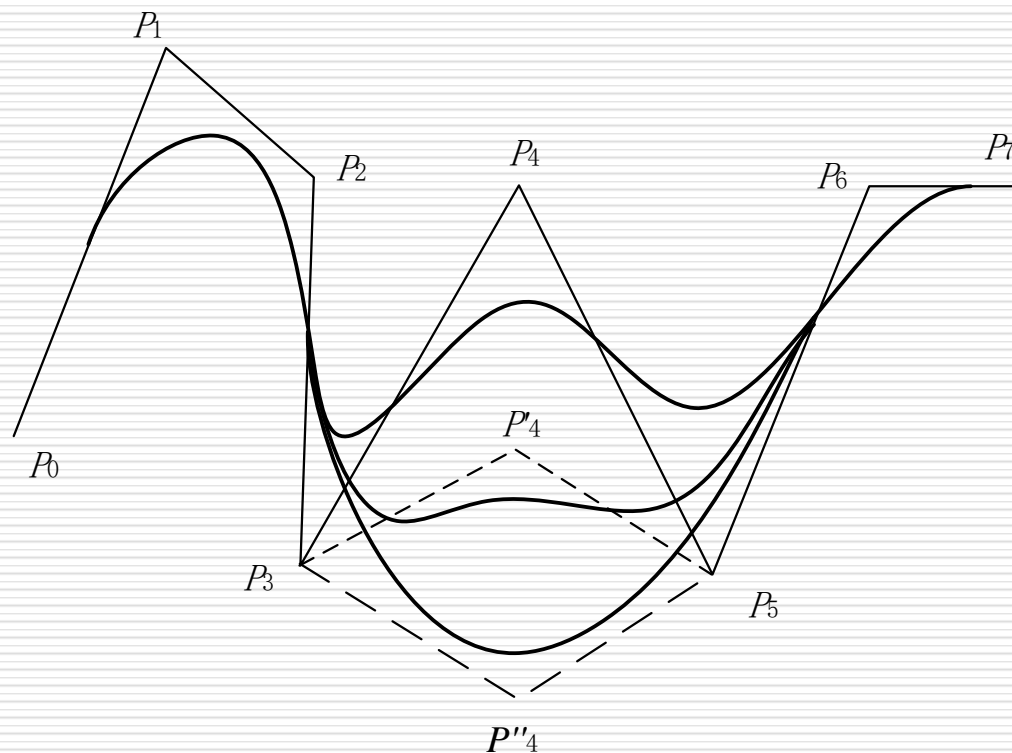


图9.19 B样条曲线的局部支柱性

# B样条曲线的性质

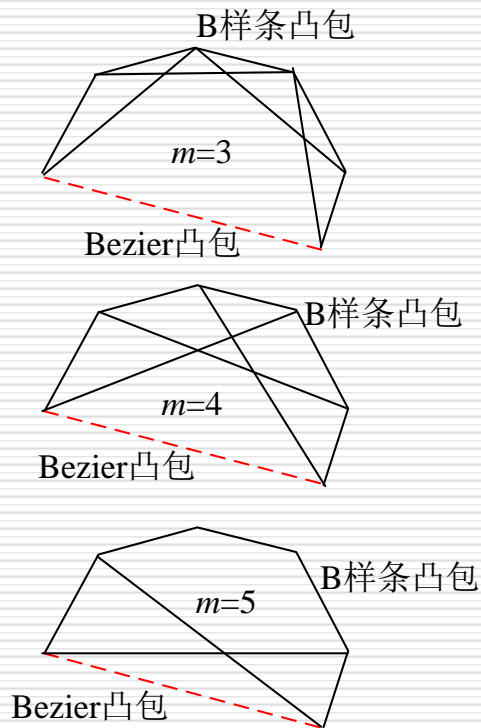
---

## □ B样条的凸组合性质

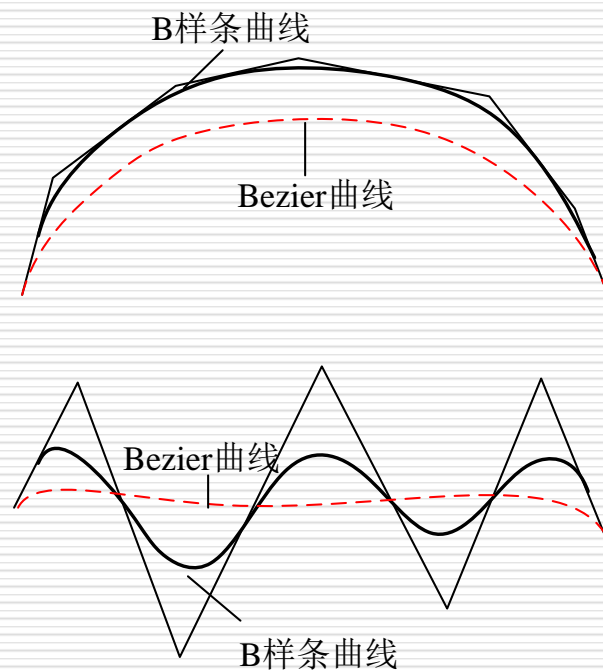
$$\sum_{k=0}^n B_{k,m}(t) \equiv 1 \quad t \in [t_{m-1}, t_{n+1}]$$

**B**样条的凸组合性和**B**样条基函数的数值均大于或等于**0**保证了**B**样条曲线的凸包性，即**B**样条曲线必处在控制多边形所形成的凸包之内。

# B样条曲线的性质



(a) B样条曲线和Bezier曲线的凸包比较



(b) B样条曲线和Bezier曲线的比较

图9.20 B样条曲线与Bezier曲线的凸包性比较

# B样条曲线的性质

## □ 连续性

■ 若一节点矢量中节点均不相同，则 **$m$ 阶（ $m-1$ 次）B样条曲线**在节点处为 **$m-2$ 阶连续**。

■ B样条曲线基函数的次数与控制顶点个数无关。

■ 重节点问题：

重节点处连续性降低

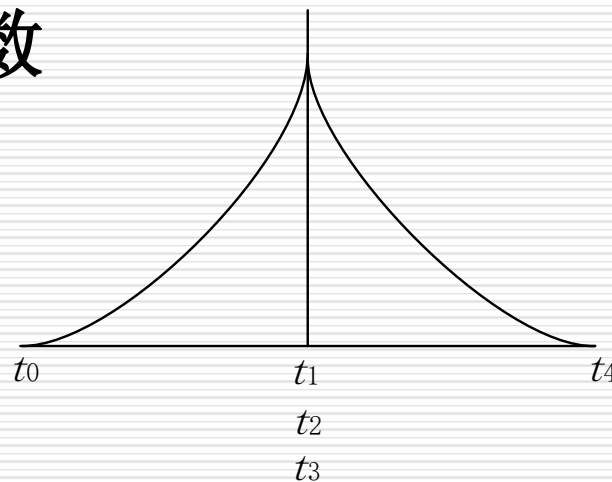


图9.21 具有重节点的三次B样条

# B样条曲线的性质

---

## □ 导数

$$p'(t) = (m-1) \sum_{k=1}^n \frac{P_k - P_{k-1}}{t_{k+m-1} - t_k} B_{k,m-1}(t) \quad t \in [t_{m-1}, t_{n+1}]$$

**B**样条曲线的导数可以用其低阶的**B**样条基函数和顶点矢量的差商序列的线性组合表示。

## □ 几何不变性

## □ 变差减少性

# B样条曲面

---

## □ 定义

$$p(u, v) = \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} P_{k_1, k_2} B_{k_1, m_1}(u) B_{k_2, m_2}(v)$$

- 控制顶点、控制网格（特征网格）、B样条基函数。
- B样条曲面具有与B样条曲线相同的局部支柱性、凸包性、连续性、几何不变性等性质。



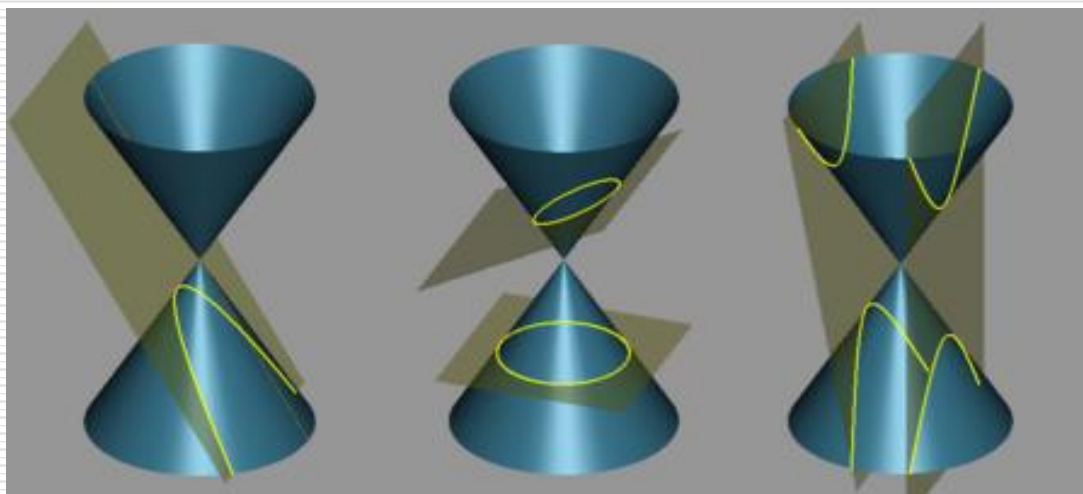
## 9.5 有理样条曲线曲面

---

- **NURBS**曲线曲面的定义
- 有理基函数的性质
- **NURBS**曲线曲面的特点

# NURBS曲线曲面的定义

- B-样条情形不能精确表示二次曲面与平面的交线，如圆锥曲线(平面与圆锥的交线)



抛物线

椭圆(上)与圆(下)

双曲线

图9.22 圆锥曲线

# NURBS曲线曲面的定义

---

## □ 定义

$$p(t) = \frac{\sum_{k=0}^n w_k P_k B_{k,m}(t)}{\sum_{k=0}^n w_k B_{k,m}(t)}$$

**P<sub>k</sub>**为控制顶点；**W<sub>k</sub>**是控制点的权因子，权因子越大，曲线越靠近对应的控制点；**B（t）**是**B**样条基函数。

# NURBS曲线曲面的定义

---

- 例：假定用定义在三个控制顶点和开放均匀的节点矢量上的二次（三阶）**B**样条函数来拟合，于是， **$T=(0,0,0,1,1,1)$** ，取权函数为：

$$w_0 = w_2 = 1$$

$$w_1 = \frac{r}{1-r} \qquad 0 \leq r < 1$$

# NURBS曲线曲面的定义

---

□ 则有理**B**样条的表达式为：

$$p(t) = \frac{P_0 B_{0,3(t)} + \frac{r}{1-r} P_1 B_{1,3(t)} + P_2 B_{2,3(t)}}{B_{0,3(t)} + \frac{r}{1-r} B_{1,3(t)} + B_{2,3(t)}}$$

# NURBS曲线曲面的定义

□ 然后取不同的 $r$ 值得到各种二次曲线：

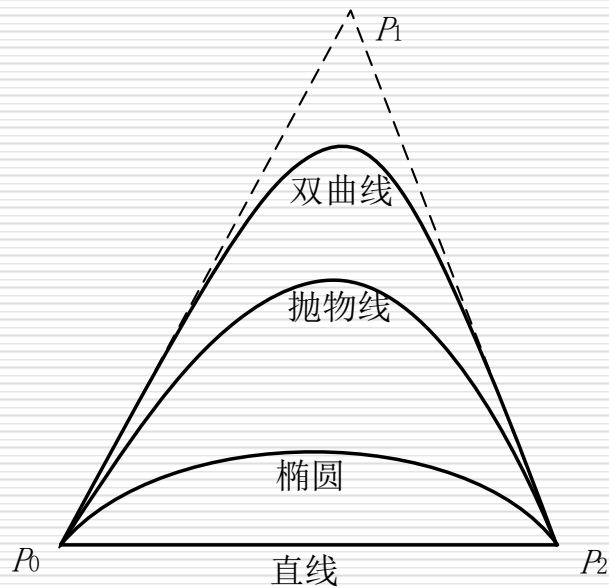


图9.23 由不同有理样条权因子生成的二次曲线段

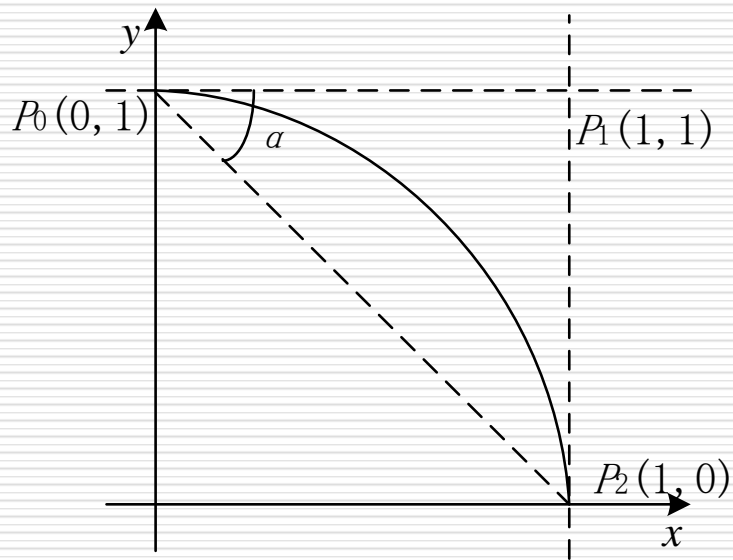


图9.24 由有理样条函数生成的第一象限上的圆弧

# NURBS曲线曲面的性质

---

□ **NURBS**曲面可由下面的有理参数多项式函数表示：

$$p(t) = \sum_{k=0}^n P_k R_{k,m}(t)$$
$$R_{k,m}(t) = \frac{w_k B_{k,m}(t)}{\sum_{j=0}^n w_j B_{j,m}(t)}$$

# NURBS曲线曲面的性质

---

- 普遍性：通过权因子，将**Bezier**样条，**B**样条和有理样条有效统一起来。
- 局部性：在 $t_k$ 到 $t_{k+m}$ 的子区间取正值，其它地方为**0**。
- 凸包性



# NURBS曲线曲面的性质

- 可微性：在结点处具有与**B**样条曲线相同的连续性。
- 权因子

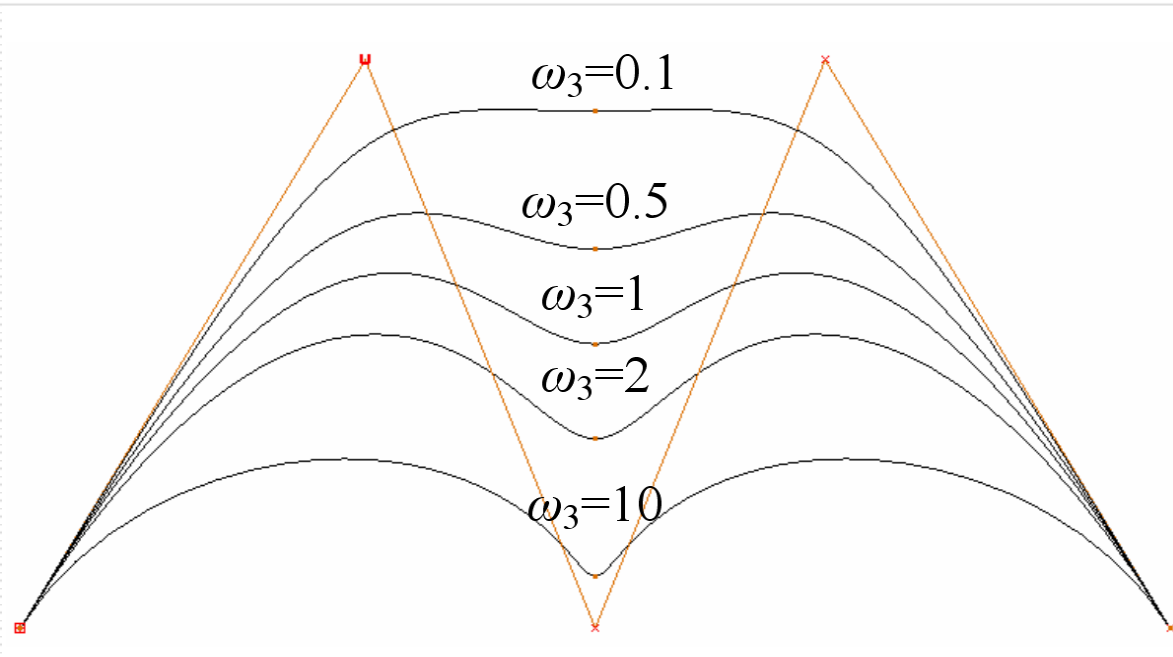


图9.25 权因子对曲线的影响

# NURBS曲线曲面的特点

---

- 既为自由型曲线曲面也为初等曲线曲面的精确表示与设计提供了一个公共的数学形式，因此，一个统一的数据库就能够存储这两类形状信息。
- 为了修改曲线曲面的形状，既可以借助调整控制顶点，又可以利用权因子，因而具有较大的灵活性。

# NURBS曲线曲面的特点

---

- 计算稳定且速度快。
- **NURBS**有明确的几何解释，使得它对良好的几何知识尤其是画法几何知识的设计人员特别有用。
- **NURBS**具有强有力的几何配套计算工具，包括节点插入与删除、节点细分、升阶、节点分割等，能用于设计、分析与处理等各个环节。

# NURBS曲线曲面的特点

---

- ❑ **NURBS**具有几何和透视投影变换不变性。
- ❑ **NURBS**是非有理**B**样条形式以及有理与非有理**Bezier**形式的合适的推广。
- ❑ 需要额外的存储以定义传统的曲线曲面。
- ❑ 权因子的不合适应用可能导致很坏的参数化，甚至毁掉随后的曲面结构。

# NURBS曲线曲面的特点

---

- ❑ 某些技术用传统形式比用**NURBS**工作得更好。  
例如，曲面与曲面求交时，**NURBS**方法特别难于处理刚好接触的情况。
- ❑ 某些基本算法，例如求反曲线曲面上的点的参数值，存在数值不稳定问题。

## 9.6 隐式曲面

---

□  $\mathbf{R}^3$ 中的隐式曲面表示为:

$$\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : f(x,y,z)=0\}$$

- 三维空间中的一个二维曲面(二维流形)
- $f(x,y,z)$ 称为隐式函数: 数学表达式或过程定义的函数
- 当 $f(x,y,z)$ 为多项式函数时, 隐式曲面称为代数曲面

# 隐式曲面与参数曲面的比较

---

- 隐式曲面可以表示具有复杂拓扑的形状
  - **NURBS**曲面只能表示拓扑等价于矩形的四边曲面
  - **NURBS**曲面表示非退化封闭光滑曲面时，需要光滑拼接
- 隐式曲面比**NURBS**曲面更适合于进行布尔运算、光线跟踪、点集判断等

# 隐式曲面与参数曲面的比较

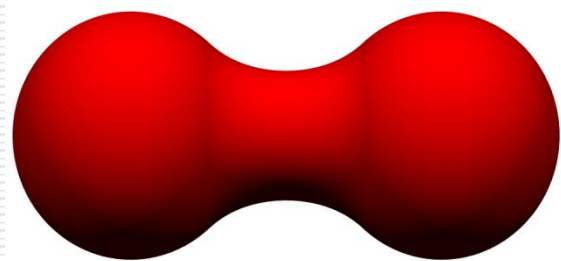
---

- 隐式曲面表示不直观，难以进行外形的交互修改。**NURBS**曲面的外形控制手段非常直观。
- 隐式曲面通常没有边界，而**NURBS**曲面具有显式的边界。
- 隐式曲面难以直接进行显示，而**NURBS**曲面则可以借助于剖分算法，对逼近多边形表示进行绘制。

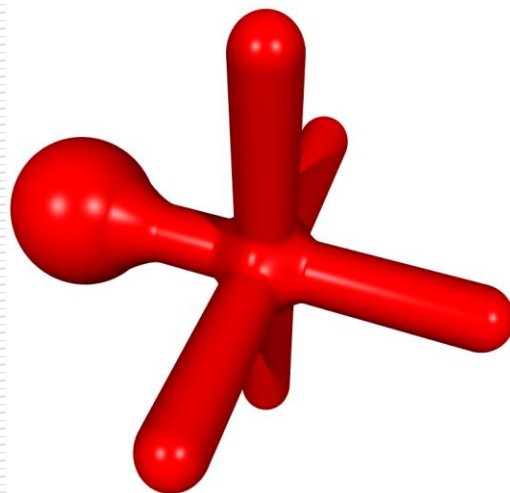


# 隐式曲面造型

## □ 基于骨架的隐式曲面造型



基于点骨架的  
Metaball造型



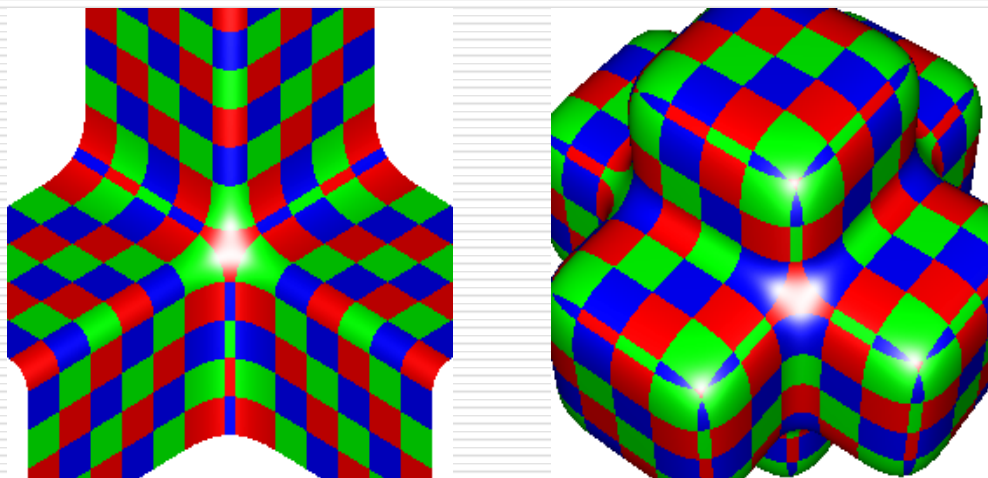
基于点、直线混合骨架的  
Metaball造型

图9.26 隐式曲面造型

# 隐式曲面造型

---

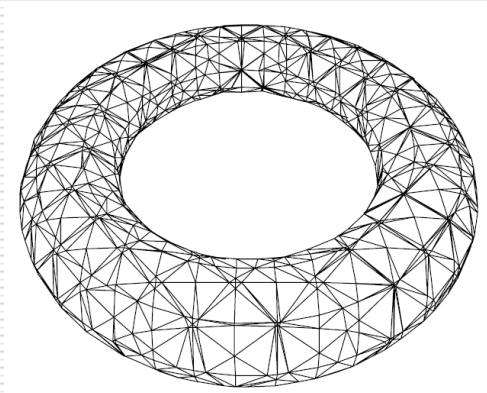
- 代数曲面片造型技术，包括二次代数曲面、**A-Patch**方法等



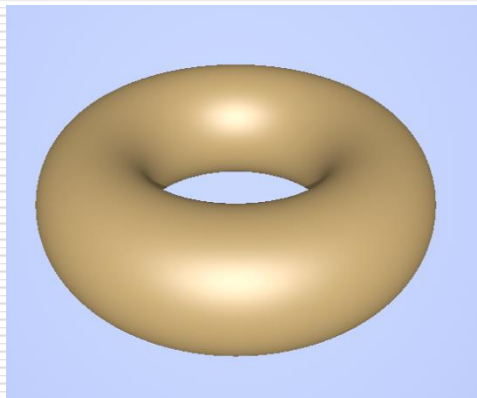
**9.27** 代数曲面片造型

# 隐式曲面造型

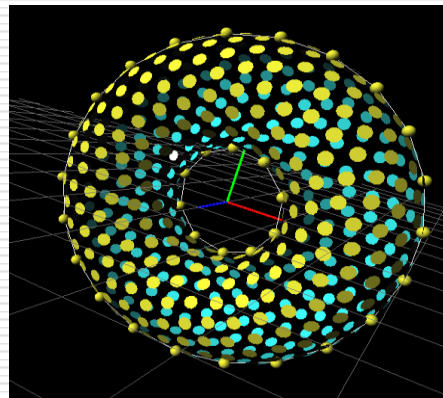
- ❑ 多边形化：用平面多边形逼近隐式曲面
- ❑ 光线跟踪：生成高质量的图像
- ❑ 粒子系统：在隐式曲面上均匀布撒粒子



多边形化



光线投射



粒子系统

图9.28 隐式曲面造型

## 9.7 细分曲面

---

- 子分曲面，剖分曲面
- 基于拓扑规则和几何规则对初始多边形网格递归进行剖分、由其极限形式构成的曲面。

# 细分曲面

---

- **Chaikin算法(1974)**: 均匀二次**B**-样条曲线的离散生成
  - 输入多边形折线
  - 每次在边的**1:3**和**3:1**处生成两个新顶点, 按规律连接新生成的顶点
  - 极限曲线为均匀二次**B**-样条曲线

# 细分曲面

---

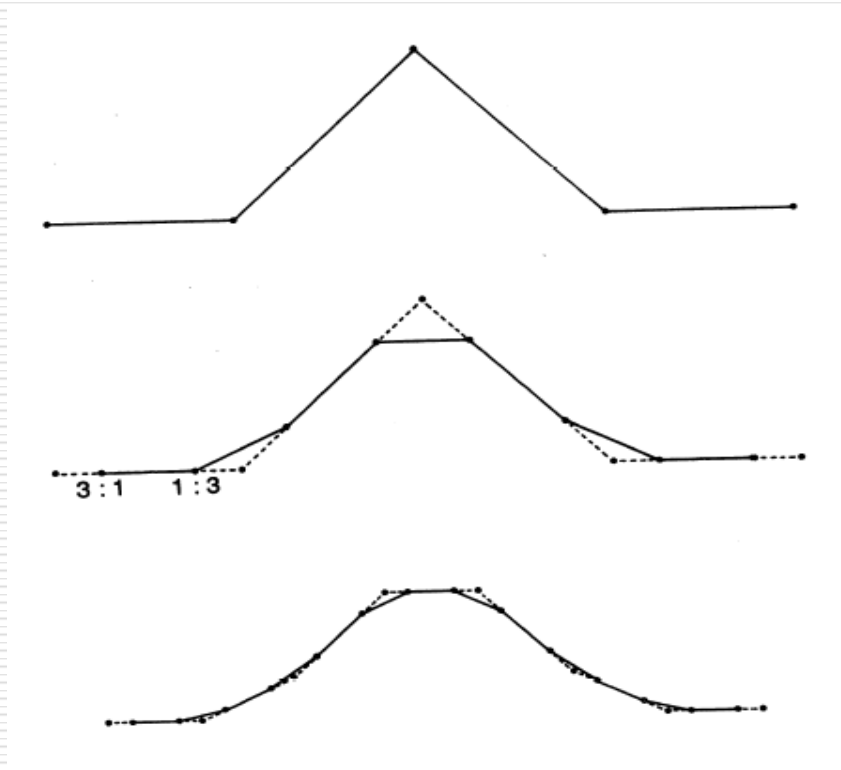


图9.29 Chaikin算法示意图

# Doo-Sabin 细分曲面

---

□ **E.Catmull**和**J.Clark**双三次**B-样条**曲面

**Catmull-Clark**

□ **Donald Doo**和**Malcolm Sabin**推广了

**Chaikin** 算法

■ 由二次**B-样条**曲线推广到二次**B-样条**曲面

■ 输入为一个多边形面片，经过重复的剖分，  
生成光滑的极限曲面

# Doo-Sabin 细分曲面

- ❑ 面点：面的顶点的平均
- ❑ 边点：边的中点
- ❑ 新顶点：对每个面的每一个顶点，计算面点、两个边点和原有顶点的平均

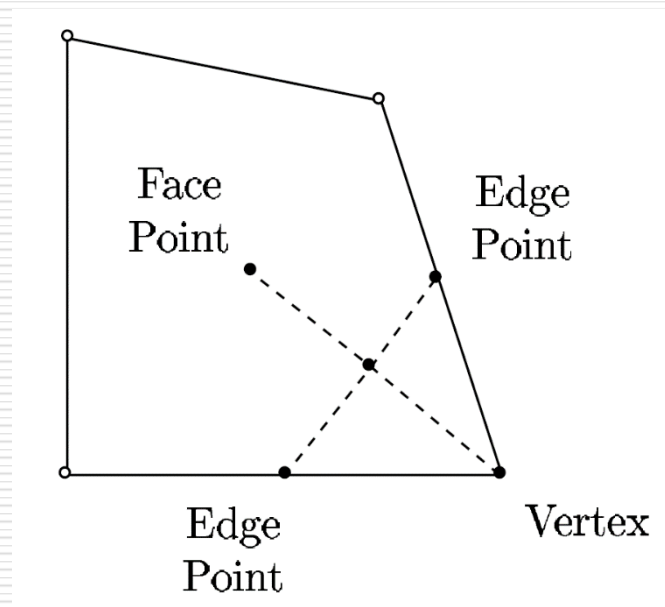
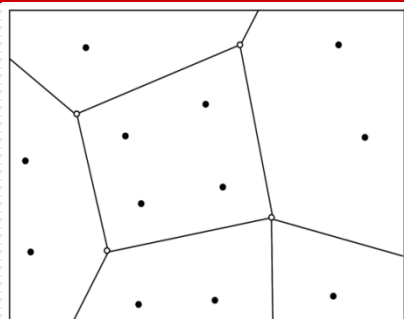


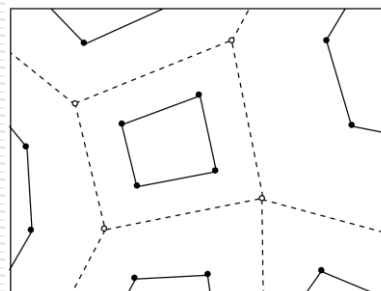
图9.30 新顶点示意图



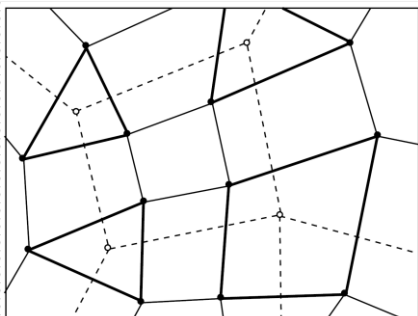
# Doo-Sabin 细分曲面



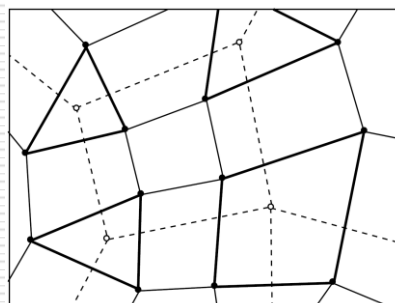
初始多边形及生成的新顶点



对于每个面，连接生成的新顶点



对于每个老顶点，连接与之相邻的新顶点



对于每条边，连接与该边相邻的两个面上的对应新顶点

图9.31 新顶点示意图

# 细分曲面

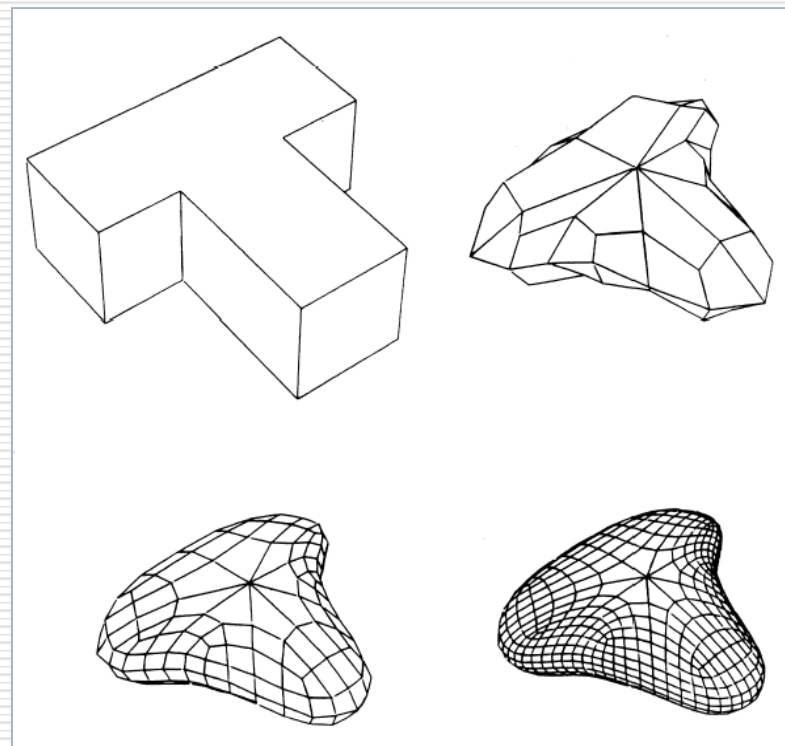
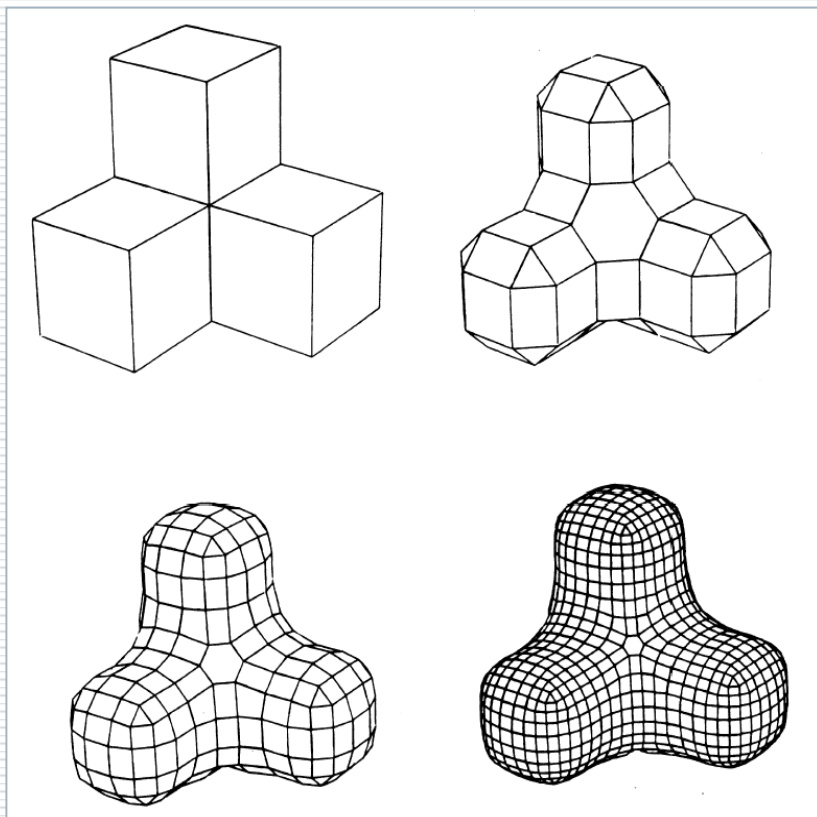


图9.32 Doo-Sabin细分曲面 图9.33 Catmull-Clark细分曲面

# 细分曲面

## □ Loop细分曲面(六次三角样条曲面)

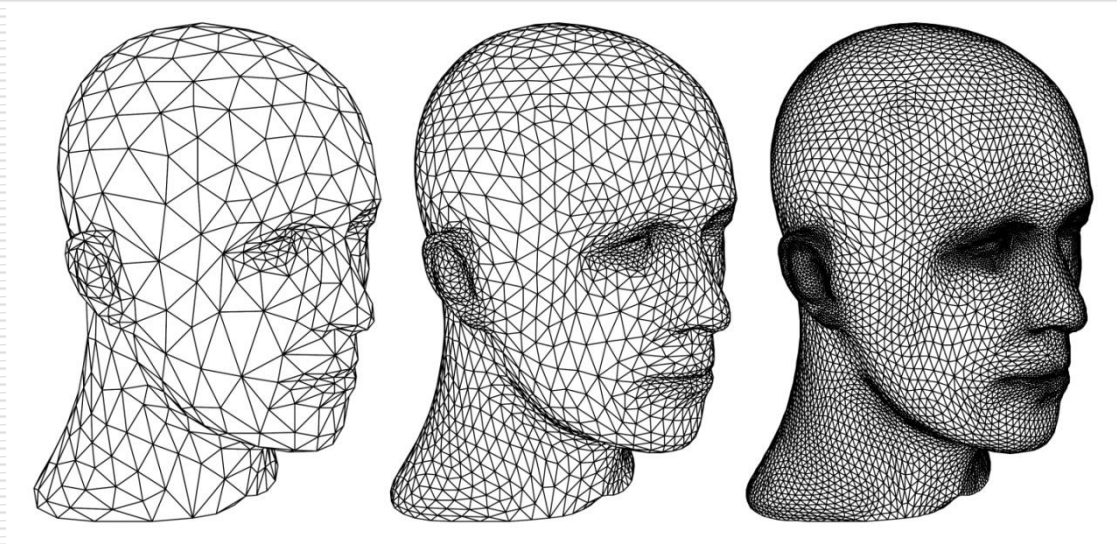


图9.34 细分曲面

# 细分曲面特点

---

## □ 优势

- 极限曲面 $C^1$ 或 $C^2$ 连续的光滑曲面
- 可以表示任意拓扑
- 适合于动画造型、快速显示

## □ 不足

- 奇异点处没有解析表达，难以计算微分量
- 难以精确控制其外形
- 难以构造高阶光滑曲面