5 图形变换

- 二维几何变换
- 三维几何变换
- 三维投影变换

5.1 二维几何变换

- 基本几何变换
- 二维图形几何变换的计算
- 复合变换
- 变换的性质

5.1.1 基本几何变换

- 图形的几何变换是指对图形的几何信息经过平移、比例、旋转等变换后产生新的图形，是图形在方向、尺寸和形状方面的变换。
- 基本几何变换都是相对于坐标原点和坐标轴进行的几何变换。

基本几何变换——平移变换

- 平移是指将p点沿直线路径从一个坐标位置移到另一个坐标位置的重定位过程。

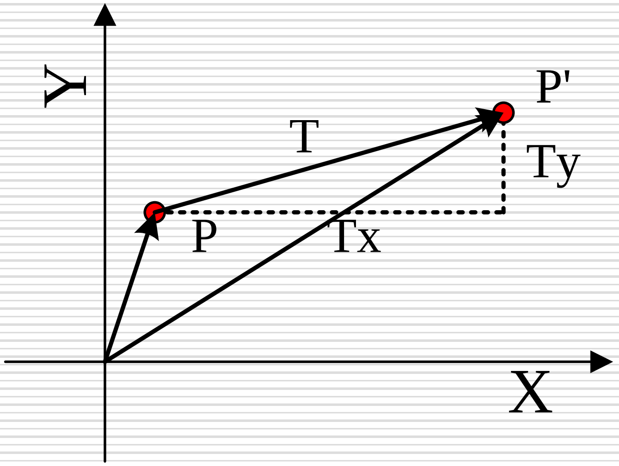


图5.1 平移变换

基本几何变换——平移变换

推导：

$$x' = x + T_x$$

$$y' = y + T_y$$

矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x & T_y \end{bmatrix}$$

T_x，T_y称为平移矢量。

基本几何变换——比例变换

- 比例变换是指对p点相对于坐标原点沿x方向放缩S_x倍，沿y方向放缩S_y倍。其中S_x和S_y称为比例系数。

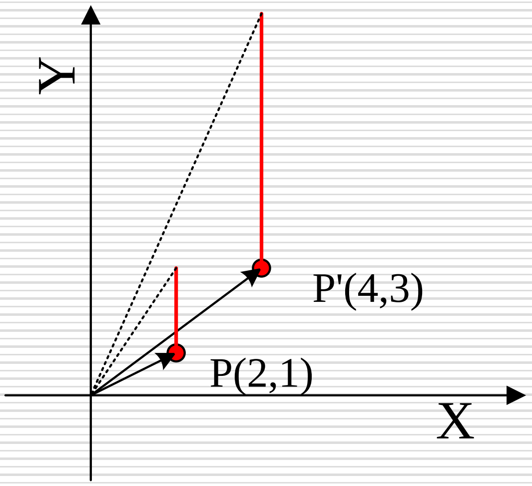


图5.2 比例变换(Sx=2,Sy=3)

基本几何变换——比例变换

推导：

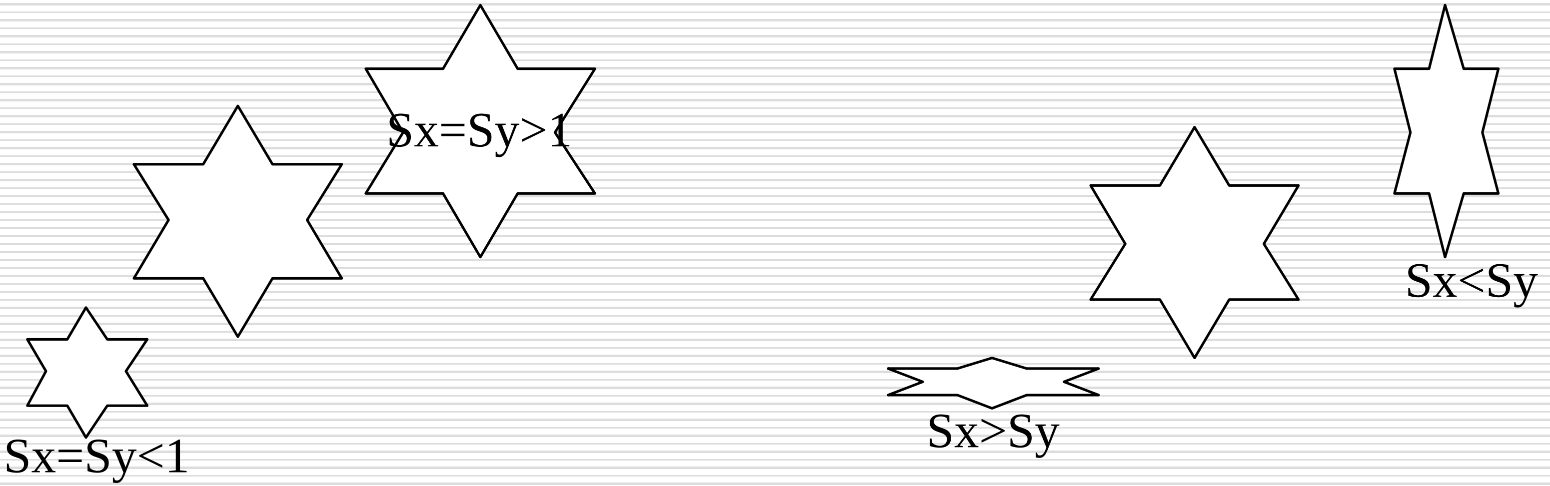
$$x' = S_x \cdot x$$

$$y' = S_y \cdot y$$

矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix}$$

基本几何变换——比例变换



(a) Sx=Sy比例　　　　(b) Sx<>Sy比例

图5.3 比例变换

基本几何变换——旋转变换

- 二维旋转是指将p点绕坐标原点转动某个角度（逆时针为正，顺时针为负）得到新的点p'的重定位过程。

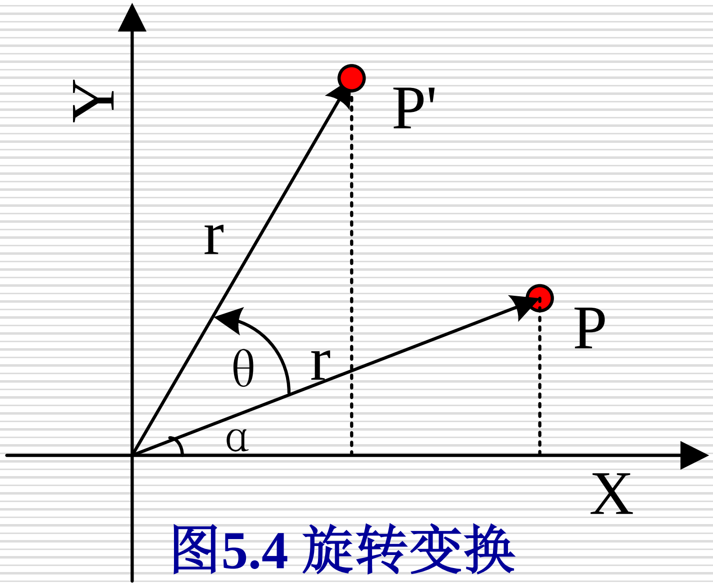


图5.4 旋转变换

基本几何变换——旋转变换

- 推导：（极坐标）

$$x = r\cos\alpha \qquad y = r\sin\alpha$$

$$x' = r\cos(\alpha+\theta) = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = r\sin(\alpha+\theta) = x\sin\theta + y\cos\theta$$

- 矩阵：逆时针旋转θ角

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

基本几何变换

- 平移、缩放、旋转变换的矩阵表示：

$$P' = P + T$$

$$P' = P \cdot S$$

$$P' = P \cdot R$$

$$\longrightarrow P' = P \cdot T_1 + T_2$$

- 图形通常要进行一系列基本几何变换，希望能够把二维变换统一表示为矩阵的乘法。

基本几何变换——规范化齐次坐标

- 齐次坐标表示就是用**n+1**维向量表示一个**n**维向量。

$$(x, y) \Leftarrow (xh, yh, h) \qquad h \neq 0$$

- 规范化齐次坐标表示就是**h=1**的齐次坐标表示。

$$(x, y) \Leftarrow (x, y, 1)$$

基本几何变换

平移：$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x & T_y \end{bmatrix}$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{bmatrix}$$

基本几何变换

比例:

$$[x' \quad y'] = [x \quad y] \cdot \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

基本几何变换

整体比例变换：

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix}$$

基本几何变换

旋转变换：

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

基本几何变换——二维变换矩阵

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \cdot T_{2D} = [x \quad y \quad 1] \cdot \left[\begin{array}{cc|c} a & b & p \\ c & d & q \\ \hline l & m & s \end{array}\right]$$

$$x' = \frac{ax + cy + l}{px + qy + s} \qquad y' = \frac{bx + dy + m}{px + qy + s}$$

基本几何变换——对称变换

- 对称变换后的图形是原图形关于某一轴线或原点的镜像。

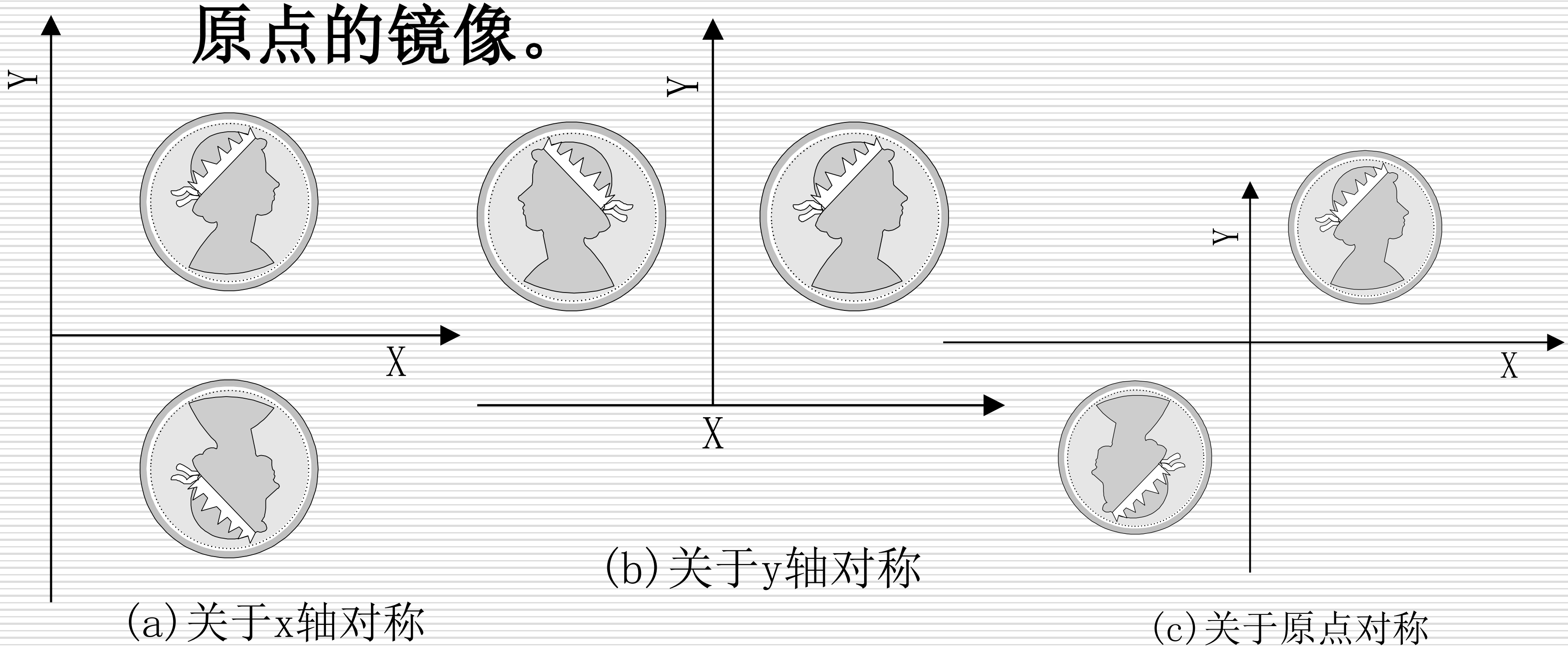
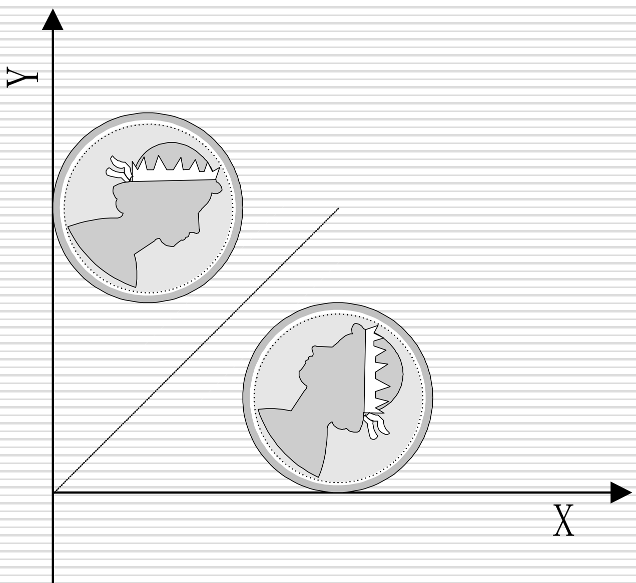
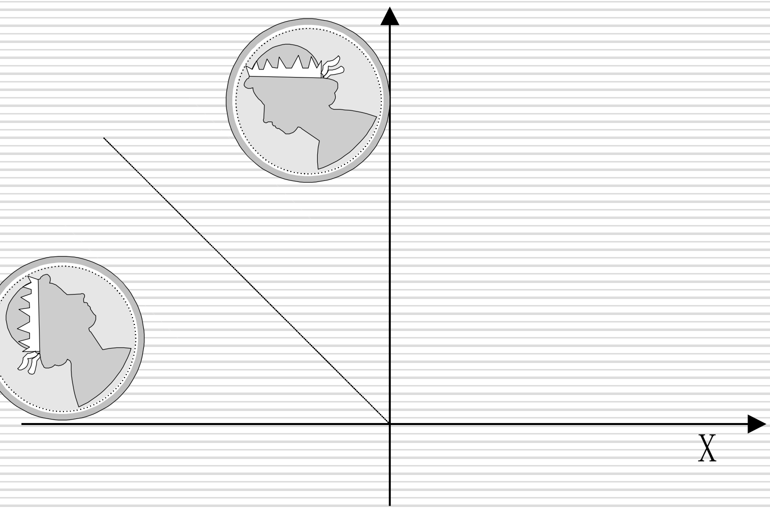


图5.5 对称变换I

基本几何变换——对称变换



(d)关于x=y对称



(e)关于x=-y对称

图5.6 对称变换II

基本几何变换——对称变换

(1)关于x轴对称

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & s \end{bmatrix}$$

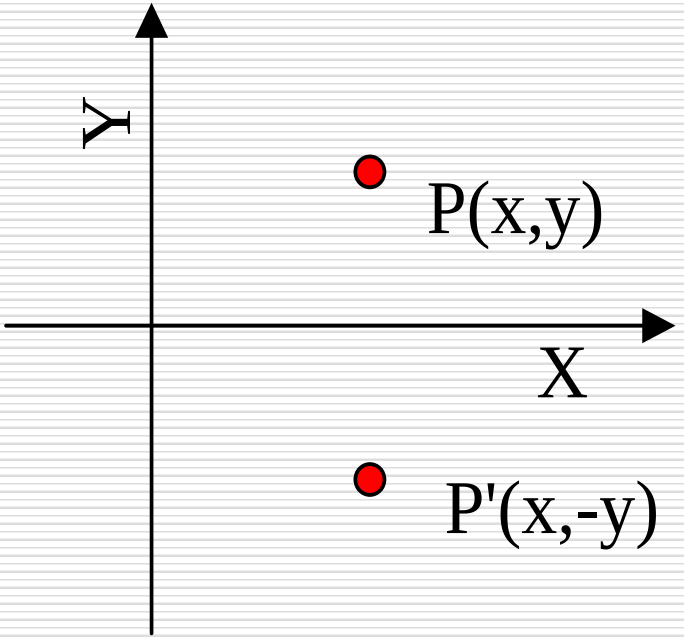


图5.7 关于x轴对称

基本几何变换——对称变换

(2)关于y轴对称

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

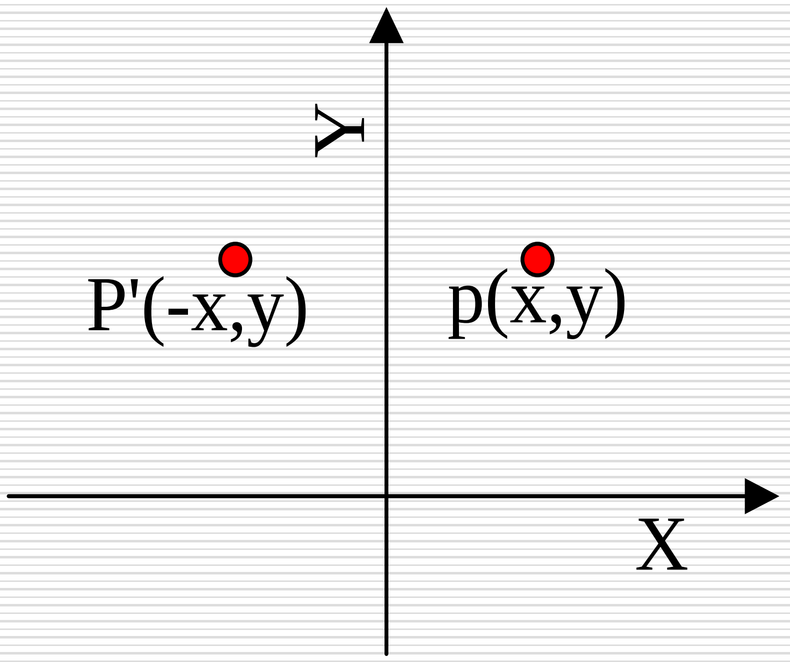


图5.8 关于y轴对称

基本几何变换——对称变换

(3)关于原点对称

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

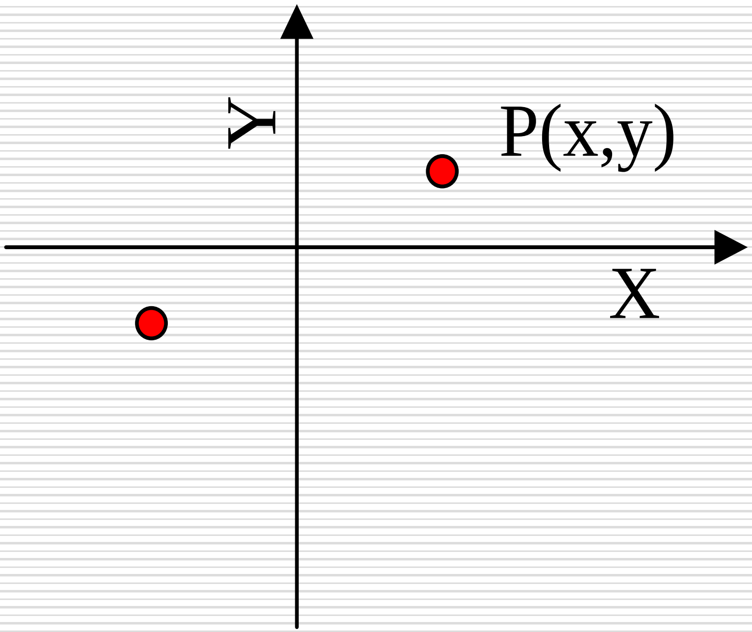


图5.9 关于原点对称

基本几何变换——对称变换

(4)关于y=x轴对称

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

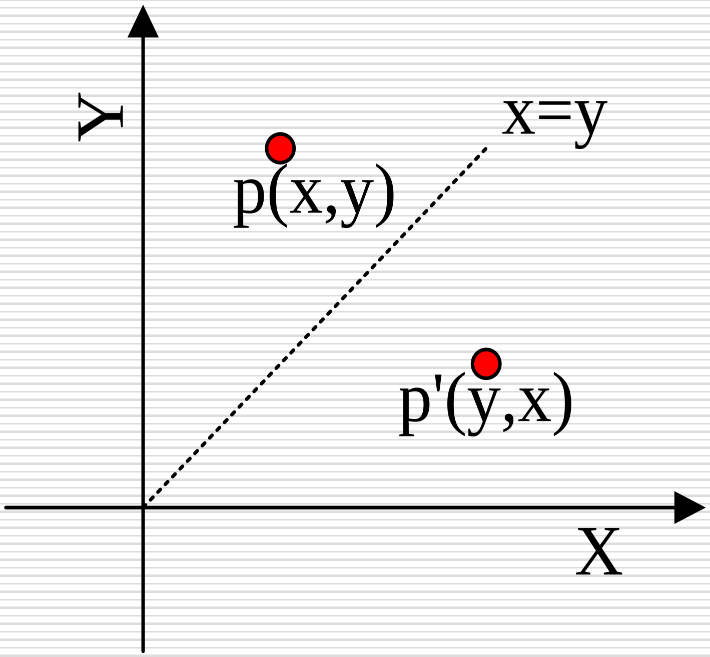


图5.10 关于x＝y对称

基本几何变换——对称变换

(5)关于y=-x轴对称

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

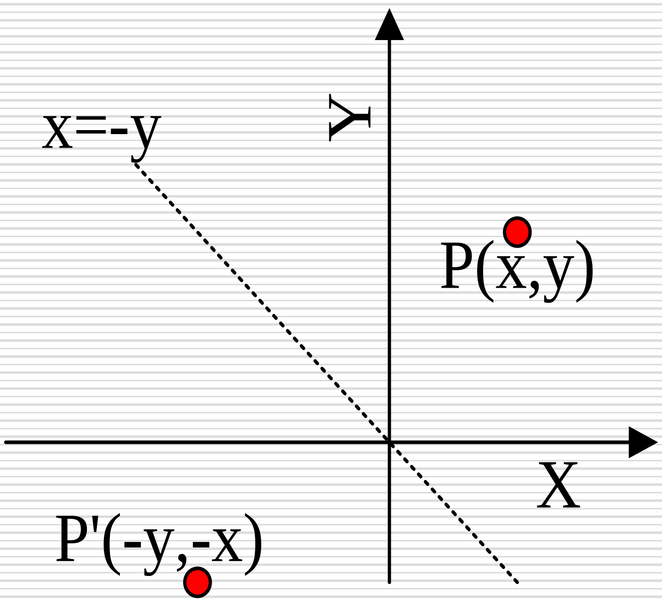


图5.11 关于x＝－y对称

基本几何变换——错切变换

- 错切变换，也称为剪切、错位变换，用于产生弹性物体的变形处理。

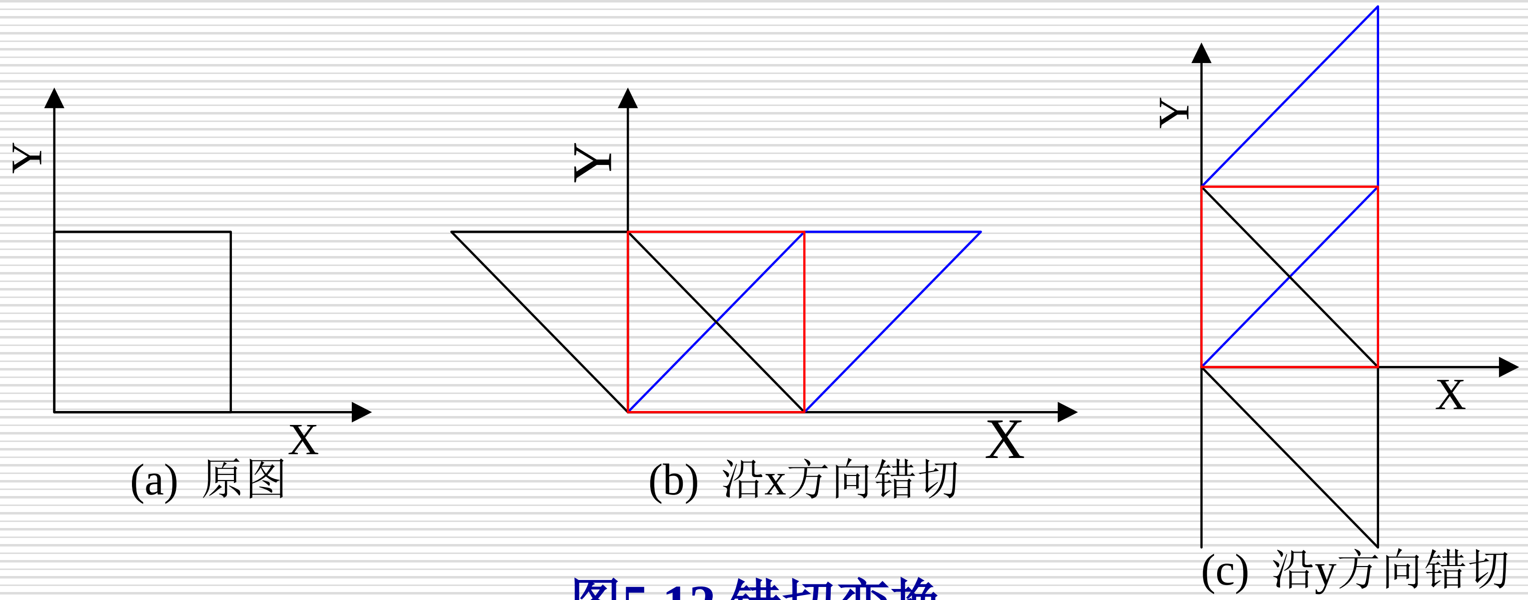


图5.12 错切变换

基本几何变换——错切变换

其变换矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1)沿x方向错切

(2)沿y方向错切

(3)两个方向错切

5.1.2 二维图形几何变换的计算

几何变换均可表示成P'=P*T的形式。

1．点的变换

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & r \end{bmatrix}$$

二维图形几何变换的计算

2. 直线的变换

$$\begin{bmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & r \end{bmatrix}$$

二维图形几何变换的计算

3．多边形的变换

$$\begin{bmatrix} x_1^{'} & y_1^{'} & 1 \\ x_2^{'} & y_2^{'} & 1 \\ x_3^{'} & y_3^{'} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^{'} & y_n^{'} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & r \end{bmatrix}$$

Huazhong University of Science and Technology

5.1.3 复合变换

- 图形作一次以上的几何变换，变换结果是每次变换矩阵的乘积。
- 任何一复杂的几何变换都可以看作基本几何变换的组合形式。
- 复合变换具有形式：

$$P' = P \cdot T = P \cdot (T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdots \cdot T_n)$$

$$= P \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdots \cdot T_n \qquad (n > 1)$$

复合变换——二维复合平移

$$T_t = T_{t1} \cdot T_{t2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_{x1} & T_{y1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_{x2} & T_{y2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_{x1} + T_{x2} & T_{y1} + T_{y2} & 1 \end{bmatrix}$$

复合变换——二维复合比例

$$T_s = T_{s1} \cdot T_{s2} = \begin{bmatrix} S_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & S_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & S_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} S_{x1} \cdot S_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & S_{y1} \cdot S_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

复合变换——二维复合旋转

$$T_r = T_{r1} \cdot T_{r2} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & \sin(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ -\sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = R_{(\theta_1)} \bullet R_{(\theta_2)} = R(\theta_1+\theta_2)$$

复合变换

$$R=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & tg\theta & 0\\ -tg\theta & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & tg\theta & 0\\ -tg\theta & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

相对任一参考点的二维几何变换

- 相对某个参考点(x_F,y_F)作二维几何变换，其变换过程为：

(1) 平移；

(2) 针对原点进行二维几何变换；

(3) 反平移。

华中科技大学 Huazhong University of Science and Technology

相对任一参考点的二维几何变换

例1．相对点(x_F,y_F)的旋转变换

$$T_{RF}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-x_F&-y_F&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\x_F&y_F&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0\\x_F-x_F\cos\theta+y_F\sin\theta&y_F-y_F\cos\theta-x_F\sin\theta&1\end{bmatrix}$$

相对任意方向的二维几何变换

- 相对任意方向作二维几何变换，其变换的过程是：

  (1) 旋转变换；

  (2) 针对坐标轴进行二维几何变换；

  (3) 反向旋转。

- 例2. 相对直线y=x的反射变换

复合变换

例 3. 将正方形 **ABCO** 各点沿下图所示的 **(0,0)→(1,1)**方向进行拉伸，结果为如图所示的，写出其变换矩阵和变换过程。

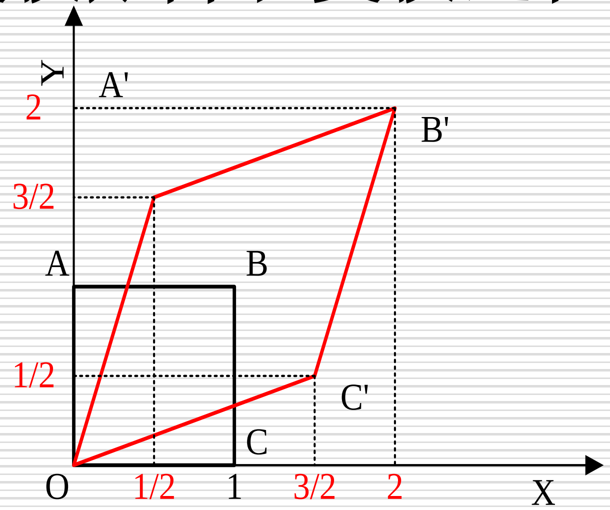


图5.13 图形变换

可能发生的变换：沿（0，0）到（1，1）的比例变换

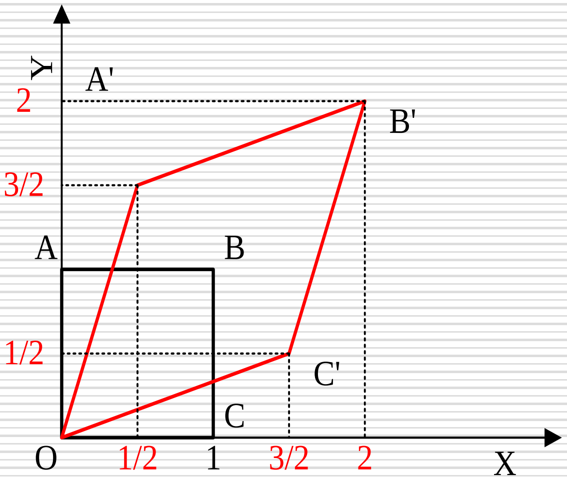


图5.14 沿固定方向拉伸

$$T=\begin{bmatrix}\cos(-45^\circ) & \sin(-45^\circ) & 0\\ -\sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}S_x & 0 & 0\\ 0 & S_y & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos 45^\circ & \sin 45^\circ & 0\\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$P' = P\cdot T$$

简单方式:

$$\begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

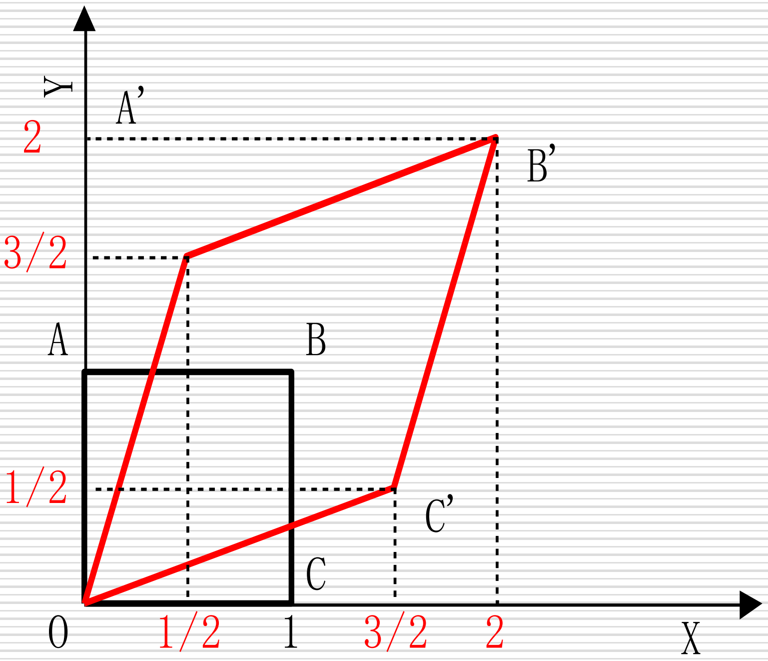


图5.14 沿固定方向拉伸

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 3/2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

坐标系之间的变换

问题:

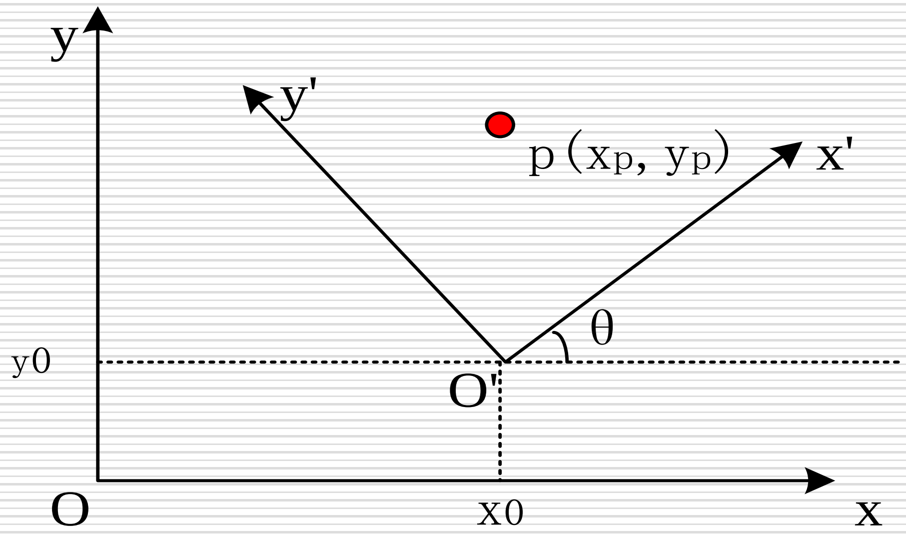


图5.15 坐标系间的变换

坐标系之间的变换

分析：

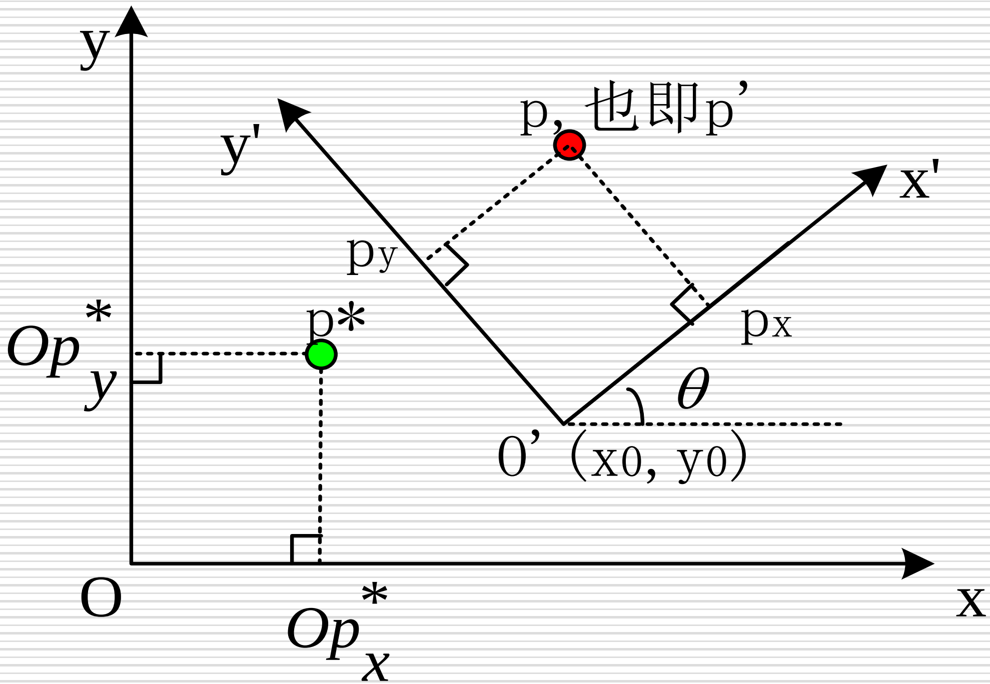
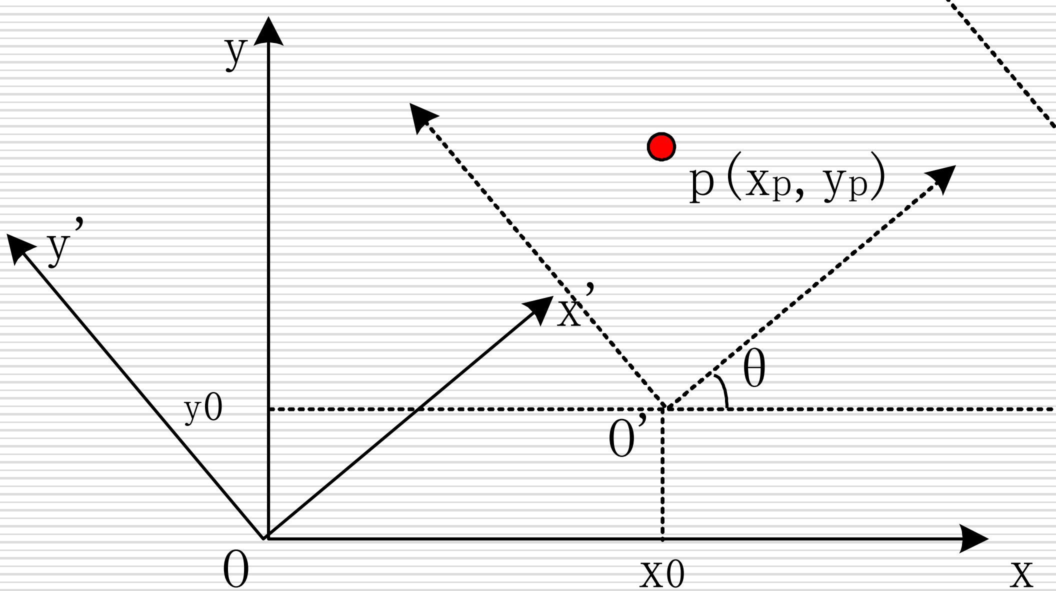
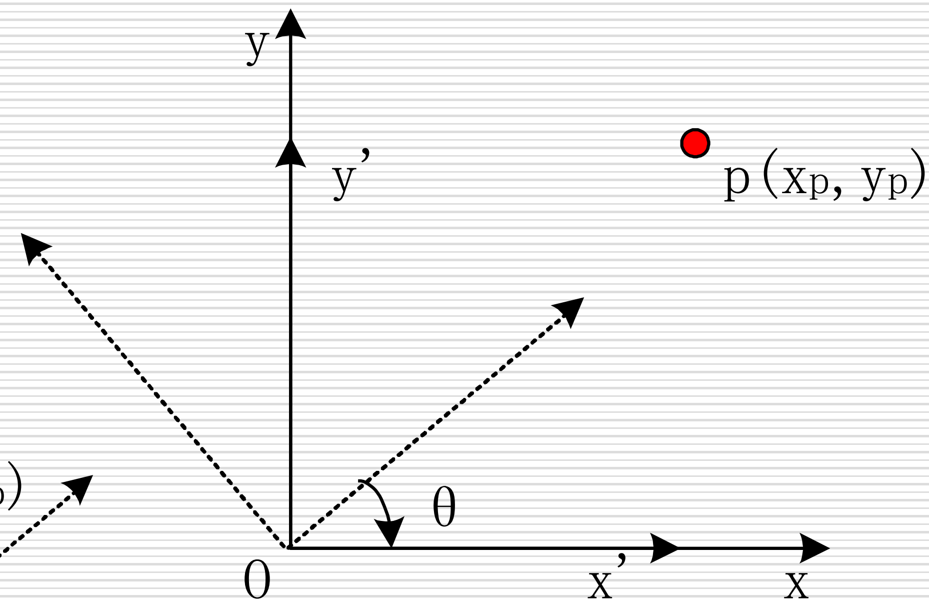


图5.16 坐标系间的变换的原理

可以分两步进行：



(a)将x' y' 坐标系的原点平移到xy坐标系的原点



(b)将x' 轴旋转到x轴上

图5.17 坐标系间的变换的步骤

于是：

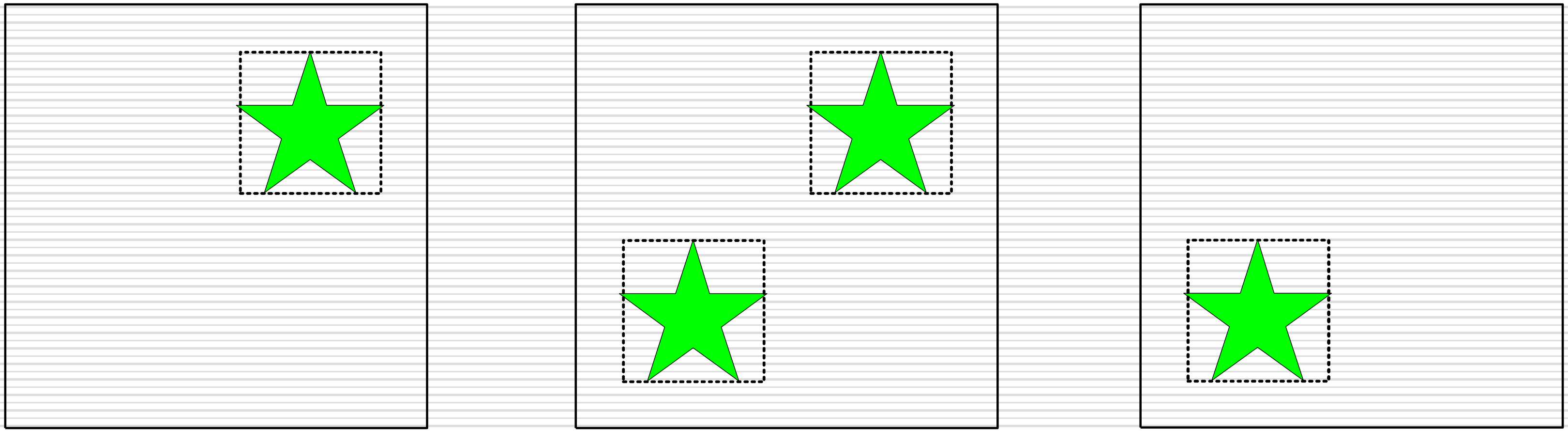
$$p' = \begin{bmatrix} x'_p & y'_p & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_p & y_p & 1 \end{bmatrix} \cdot T$$

$$= p \cdot T = p \cdot T_t \cdot T_R$$

$$T = T_t \cdot T_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & -y_0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

光栅变换

- 直接对帧缓存中象素点进行操作的变换称为光栅变换。
- 光栅平移变换：



(a)读出象素块的内容　(b)复制象素块的内容　(c)擦除原象素块的内容

图5.18 光栅变换

光栅变换

- 90°、180°和270°的光栅旋转变换：

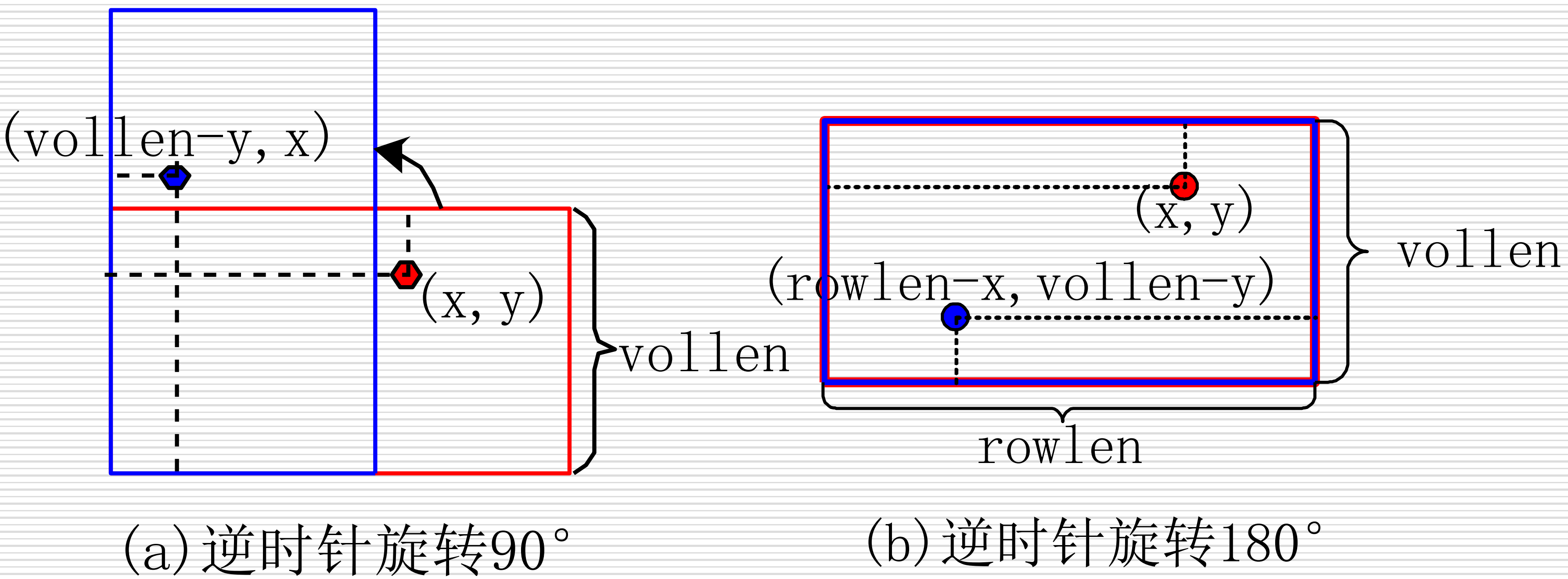


图5.19 光栅旋转变换

光栅变换

- 任意角度的光栅旋转变换：

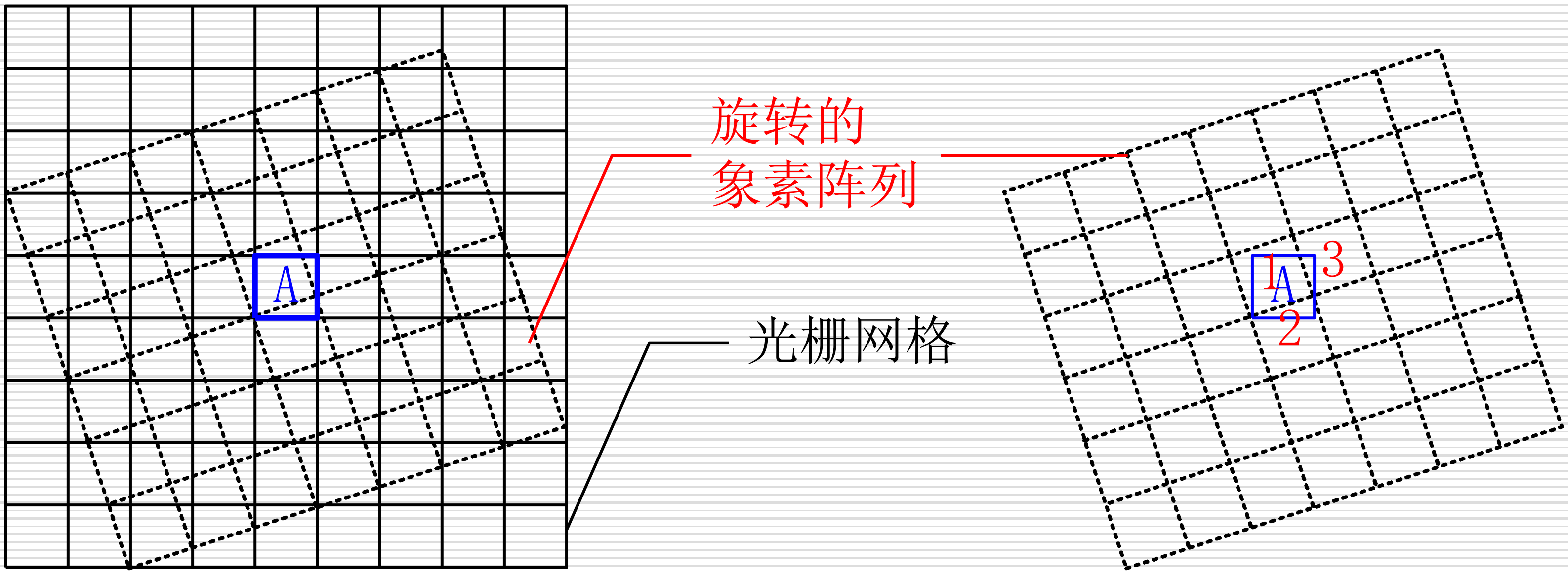


图5.20 任意角度的光栅旋转变换

光栅变换

- 光栅比例变换：进行区域的映射处理。

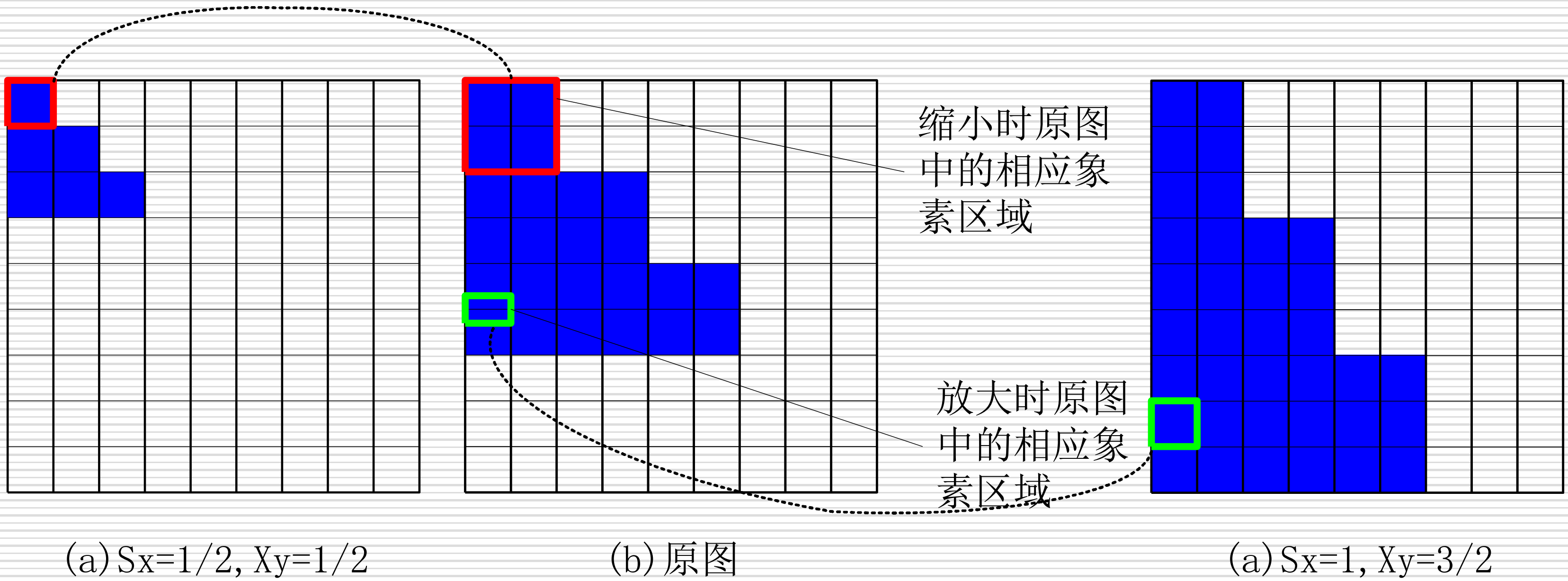


图5.21 光栅比例变换

5.1.4 变换的性质

二维仿射变换是具有如下形式的二维坐标变换：

$$\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$$

- 平移、比例、旋转、错切和反射等变换均是二维仿射变换的特例，反过来，任何常用的二维仿射变换总可以表示为这五种变换的复合。

变换的性质

- 仅包含旋转、平移和反射的仿射变换维持角度和长度的不变性；
- 比例变换可改变图形的大小和形状；
- 错切变换引起图形角度关系的改变，甚至导致图形发生畸变。

5.2 三维变换

- 三维基本几何变换
- 三维复合变换

5.2.1 三维基本几何变换

- 三维基本几何变换都是相对于坐标原点和坐标轴进行的几何变换。
- 假设三维形体变换前一点为$p(x,y,z)$，变换后为$p'(x',y',z')$。

三维齐次坐标变换矩阵

$$p' = \begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = p \cdot T_{3D} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ h & i & j & r \\ \hline l & m & n & s \end{array}\right]$$

三维基本几何变换——平移变换

$$T_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ Tx & Ty & Tz & 1 \end{bmatrix}$$

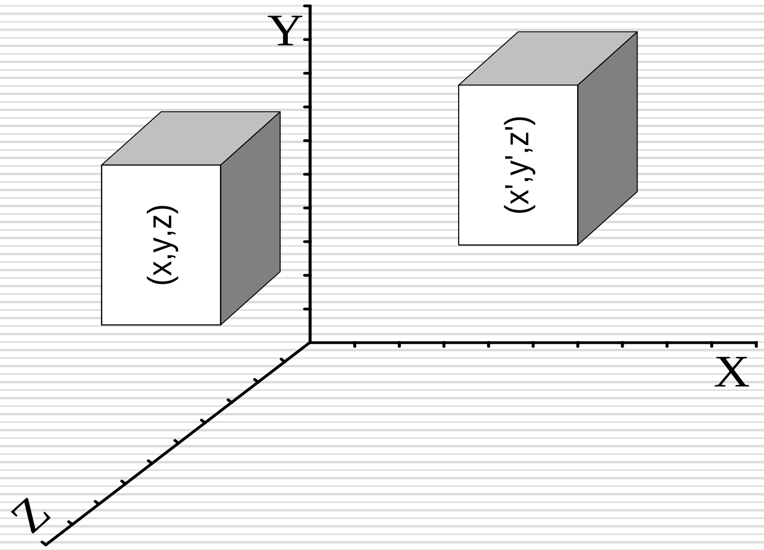


图5.22 三维平移变换

三维基本几何变换——比例变换

- 一般比例变换

$$T_s = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三维基本几何变换——比例变换

- 例：对下图所示的长方形体进行比例变换，其中a=1/2，e=1/3，j=1/2，求变换后的长方形体各点坐标。

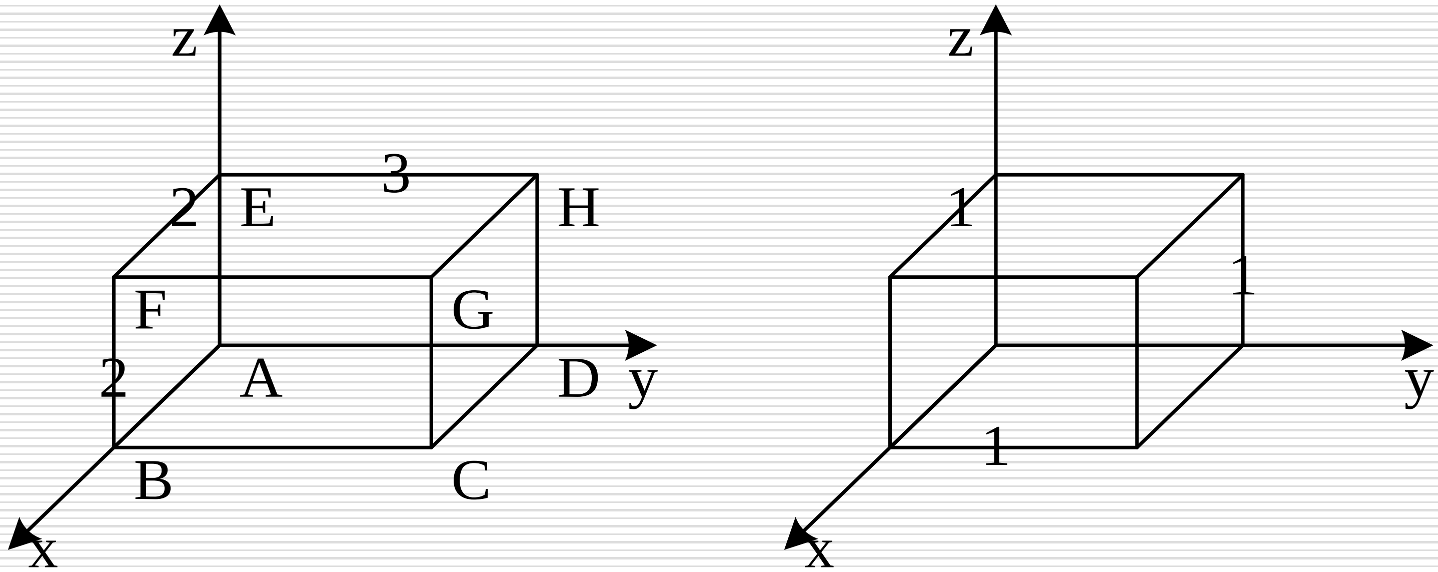


图5.23 三维比例变换

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

三维基本几何变换——比例变换

- 整体比例变换

$$T_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

三维基本几何变换——旋转变换

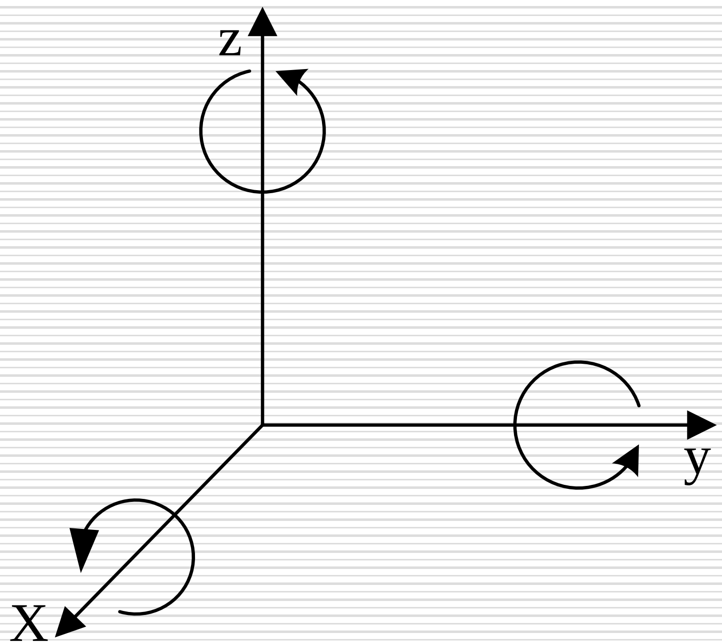


图5.24 三维旋转的方向与角度

三维基本几何变换——旋转变换

- 绕Z轴旋转

$$T_{RZ}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0 & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

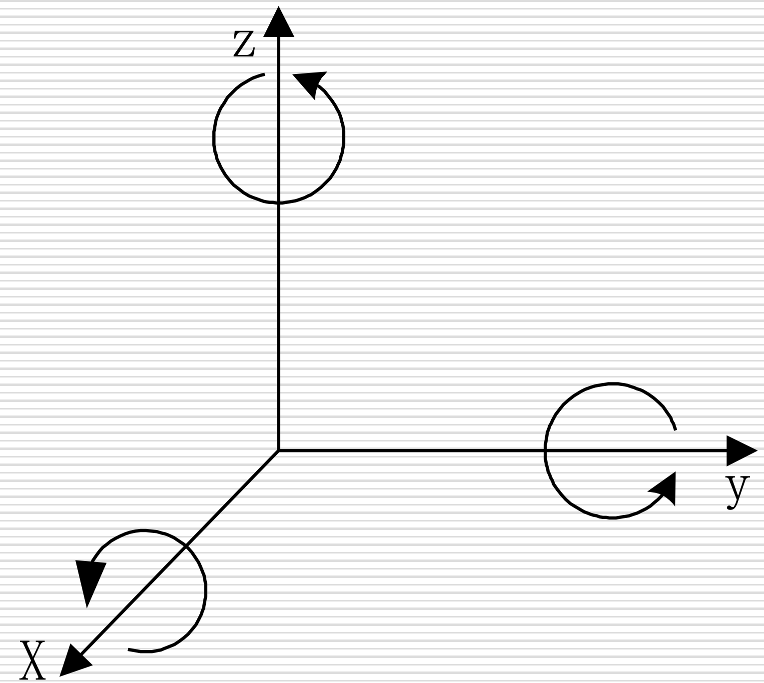


图5.25 三维旋转的方向与角度

三维基本几何变换——旋转变换

- 绕X轴旋转

$$T_{RX} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

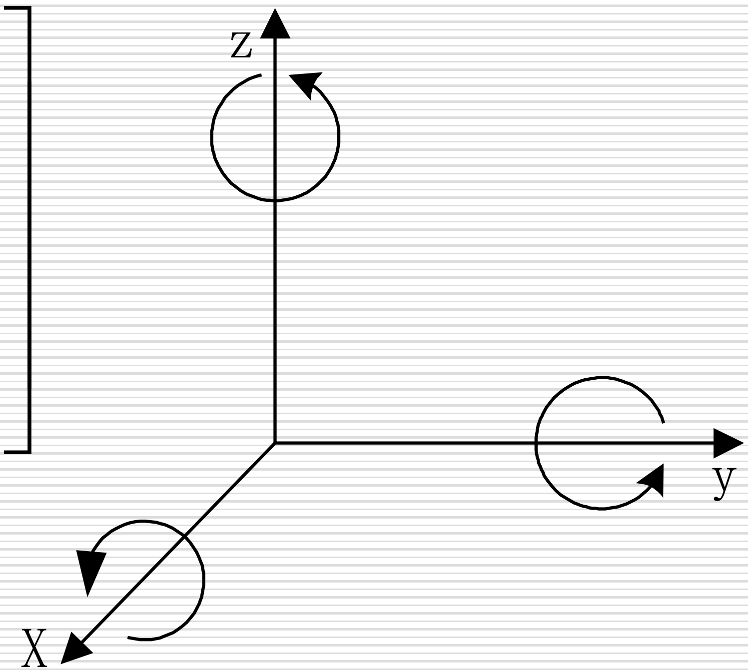


图5.26 三维旋转的方向与角度

三维基本几何变换——旋转变换

- 绕Y轴旋转

$$T_{RY}=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

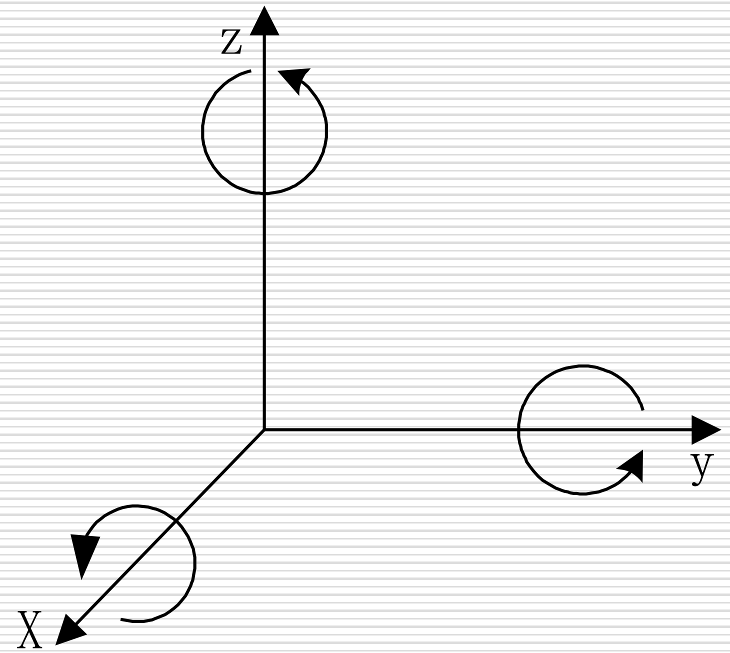


图5.27 三维旋转的方向与角度

三维基本几何变换——对称变换

- 关于坐标平面对称
  - 关于XOY平面进行对称变换的矩阵计算形式为：

$$T_{Fxy}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

三维基本几何变换——对称变换

- 关于YOZ平面进行对称变换的矩阵计算形式为:

$$T_{Fyz}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

三维基本几何变换——对称变换

- 关于ZOX平面进行对称变换的矩阵计算形式为：

$$T_{Fzx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三维基本几何变换——对称变换

- 关于坐标轴对称变换
  - 关于x轴进行对称变换的矩阵计算形式为：

$$T_{Fx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三维基本几何变换——对称变换

- 关于Y轴进行对称变换的矩阵计算形式为：

$$T_{Fy}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三维基本几何变换——对称变换

- 关于Z轴进行对称变换的矩阵计算形式为：

$$T_{Fz}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三维基本几何变换——对称变换

- 关于原点对称

$$T_{Fxy}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

三维基本几何变换——错切变换

$$T_{SH} = \begin{bmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ g & h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三维基本几何变换

- 逆变换：所谓逆变换即是与上述变换过程的相反的变换。
  - 平移的逆变换

$$T_t^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -T_x & -T_y & -T_z & 1 \end{bmatrix}$$

三维基本几何变换

- 比例的逆变换
  - 局部比例变换的逆变换矩阵为：

$$T_s^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三维基本几何变换

- 整体比例变换的逆变换矩阵为：

$$T_S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{s} \end{bmatrix}$$

三维基本几何变换

- 旋转的逆变换

$$T_{RZ}^{-1}=\begin{bmatrix}\cos(-\theta) & \sin(-\theta) & 0 & 0\\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

5.2.2 三维复合变换

- 三维复合变换是指图形作一次以上的变换，变换结果是每次变换矩阵的乘积。

$$P' = P \cdot T = P \cdot (T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdots \cdot T_n) \qquad (n > 1)$$

相对任一参考点的三维变换

- 相对于参考点F(x_f,y_f,z_f)作比例、对称等变换的过程分为以下三步：

(1)将参考点F移至坐标原点；

(2)针对原点进行三维几何变换；

(3)进行反平移。

相对任一参考点的三维变换

- 相对于F(x_f,y_f,z_f)点进行比例变换

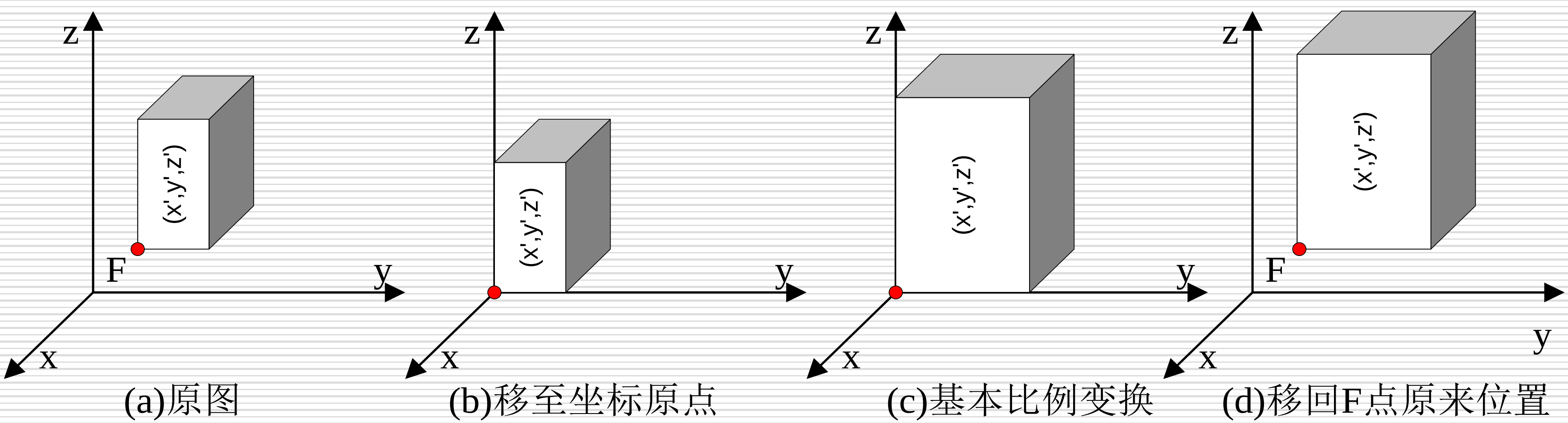


图5.28 相对参考点F的比例变换

绕任意轴的三维旋转变换

$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot T_{RAB}$$

问题：如何求出为T_{RAB}。

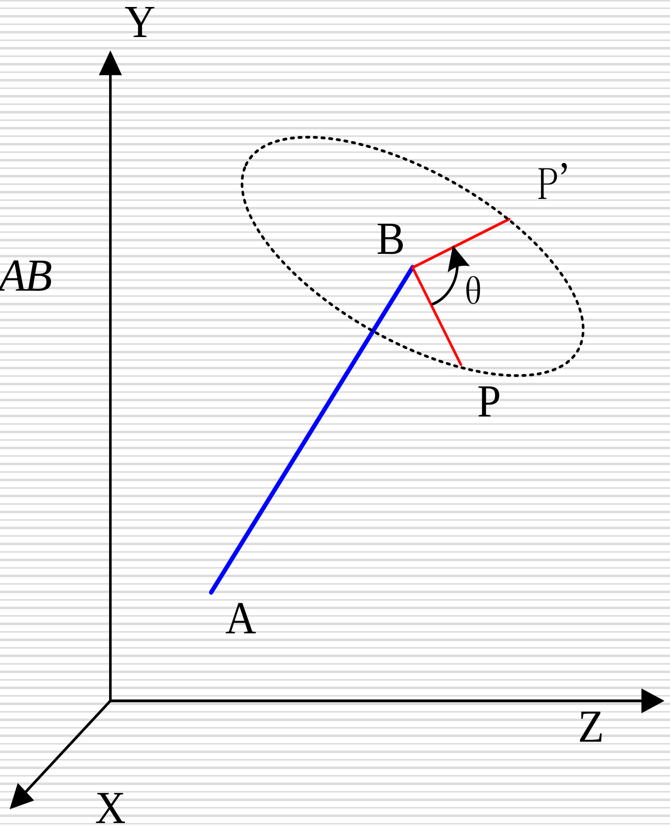


图5.29 P点绕AB轴旋转

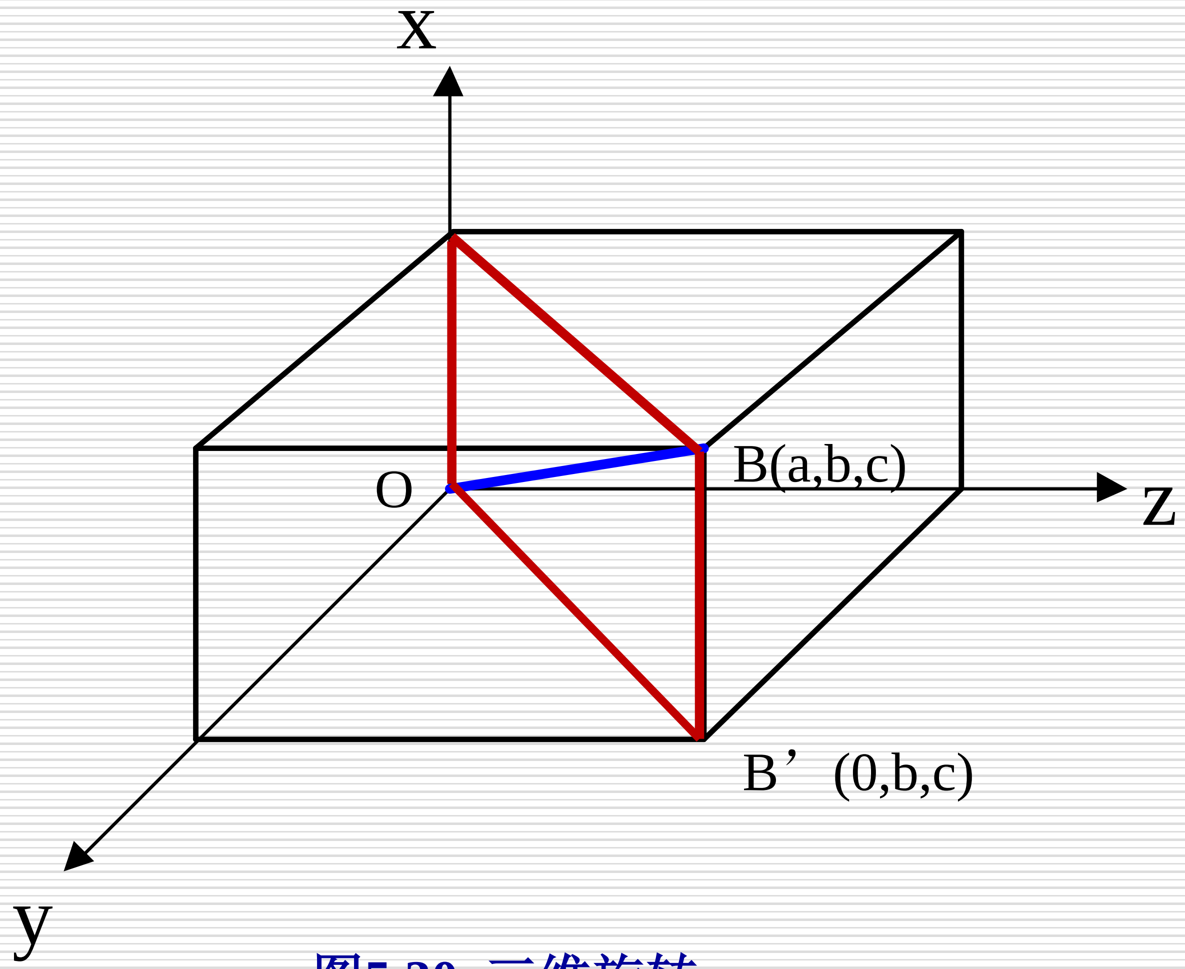


图5.30 三维旋转

绕任意轴的三维旋转变换

(1) 将坐标原点平移到A点：

$$T_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_A & -y_A & -z_A & 1 \end{bmatrix}$$

绕任意轴的三维旋转变换

(2) 将O'BB'绕x'轴逆时针旋转α角，则O'B旋转到x'o'z'平面上；

$$T_{Rx}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

绕任意轴的三维旋转变换

(3) 将O'B绕y'轴顺时针旋转β角，则O'B旋转到z'轴上；

$$T_{Ry}=\begin{bmatrix}\cos(-\beta) & 0 & -\sin(-\beta) & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin(-\beta) & 0 & \cos(-\beta) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

绕任意轴的三维旋转变换

(4) 经以上三步变换后，AB轴与z'轴重合，此时绕AB轴的旋转转换为绕z轴的旋转；

(5) 最后，求T_{tA}，T_{Rx}，T_{Ry}的逆变换，回到AB原来的位置。

$$T = T_A \cdot T_{Rx} \cdot T_{Ry} \cdot T_R \cdot T_{Ry}^{-1} \cdot T_{Rx}^{-1} \cdot T_A^{-1}$$

绕任意轴的三维旋转变换

- 类似地，针对任意方向轴的变换可用五个步骤来完成：

  (1)使任意方向轴的起点与坐标原点重合，此时进行平移变换。

  (2)使方向轴与某一坐标轴重合，此时需进行旋转变换，且旋转变换可能不止一次。

  (3)针对该坐标轴完成变换。

  (4)用逆旋转变换使方向轴回到其原始方向。

  (5)用逆平移变换使方向轴回到其原始位置。

5.3 投影变换

- 平面几何投影
- 平行投影
- 透视投影

5.3.1 平面几何投影变换

- 投影变换就是把三维立体（或物体）投射到投影面上得到二维平面图形的过程。
  - 平面几何投影主要指平行投影、透视投影以及通过这些投影变换而得到的三维立体的常用平面图形：三视图、轴测图。
  - 观察投影是指在观察空间下进行的图形投影变换。

平面几何投影变换

- 投影中心、投影面、投影线：

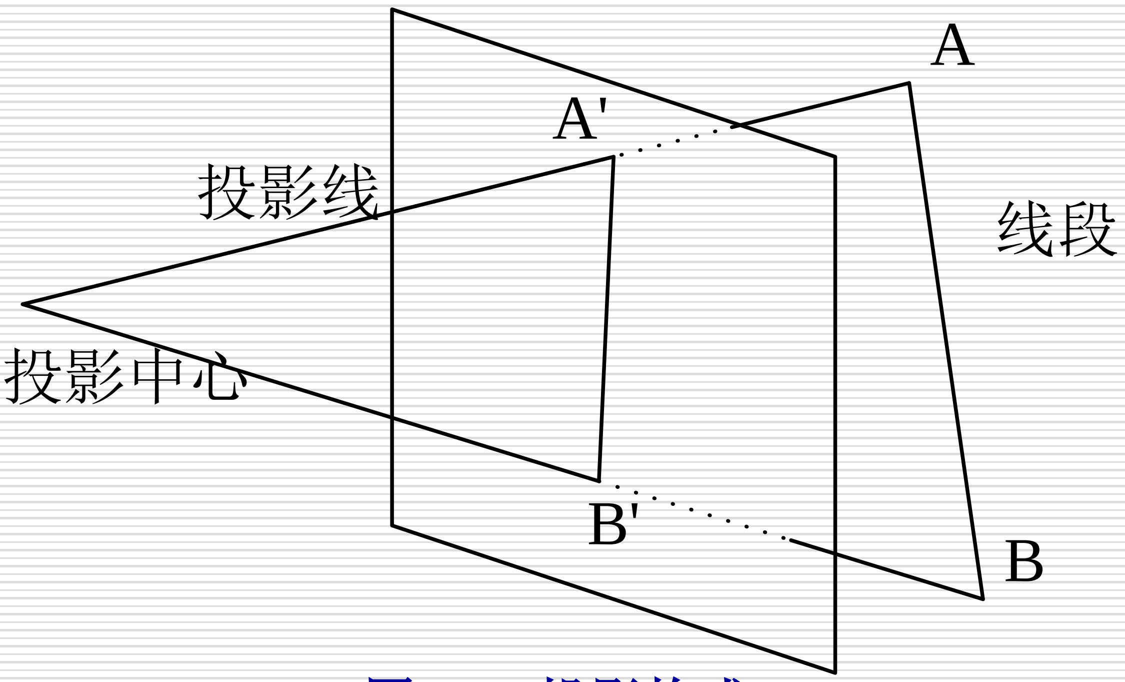


图5.31 投影构成

平面几何投影变换

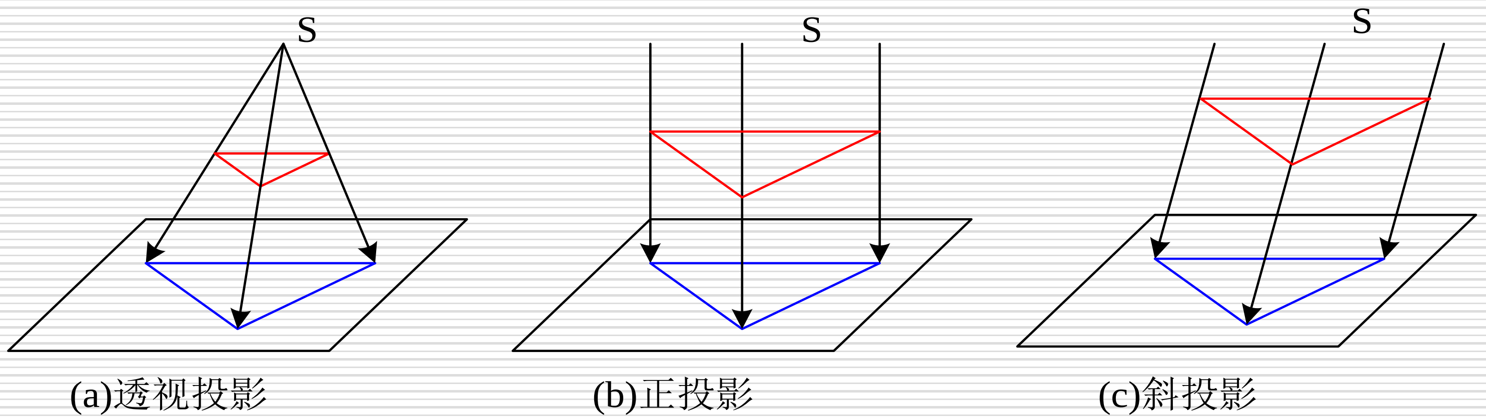


图5.32 平面几何投影分为透视投影和平行投影

平面几何投影可分为两大类：

- 透视投影的投影中心到投影面之间的距离是有限的；
- 平行投影的投影中心到投影面之间的距离是无限的。

- 平面几何投影
  - 平行投影
    - 正投影
      - 三视图
        - 主视图
        - 侧视图
        - 俯视图
      - 正轴测
        - 正等测
        - 正二测
        - 正三测
    - 斜投影
      - 斜等测
      - 斜二测
  - 透视投影
    - 一点透视
    - 二点透视
    - 三点透视

图5.33 平面几何投影的分类

5.3.2 平行投影

- 平行投影可分成两类：正投影和斜投影。

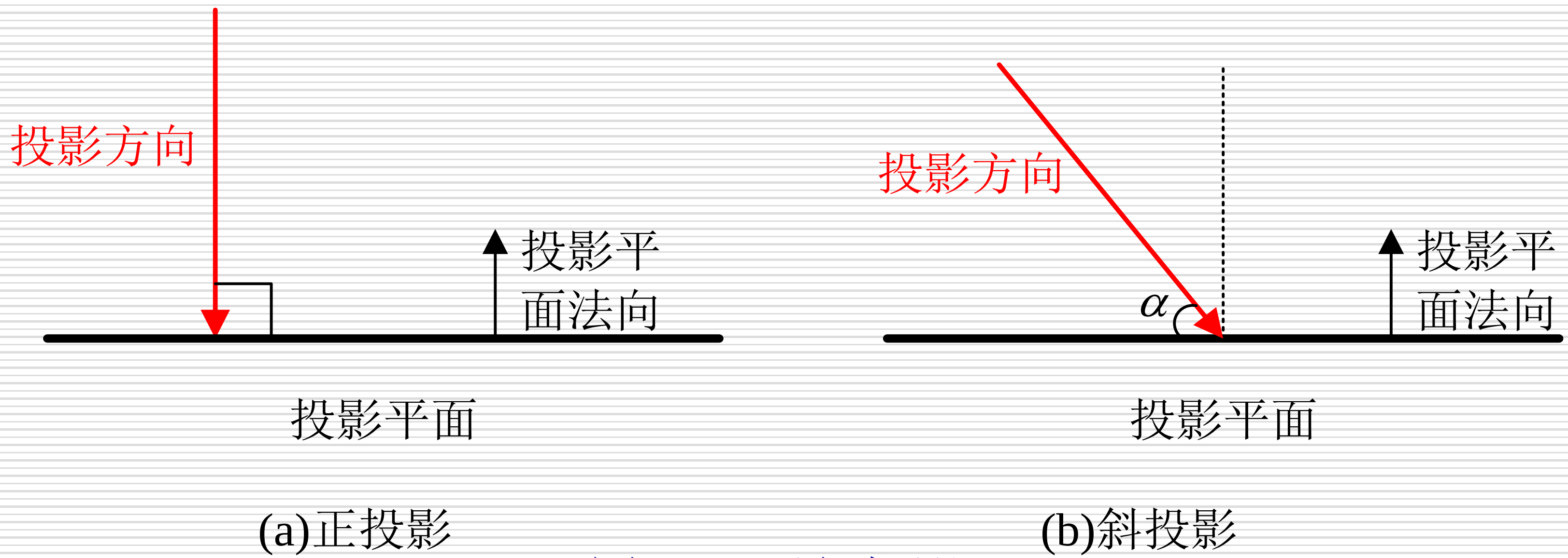


图5.34 平行投影

- 性质：能够精确地反映物体的实际尺寸。

平行投影——正投影

- 正投影又可分为：三视图和正轴测。
- 当投影面与某一坐标轴垂直时，得到的投影为三视图；否则，得到的投影为正轴测图。

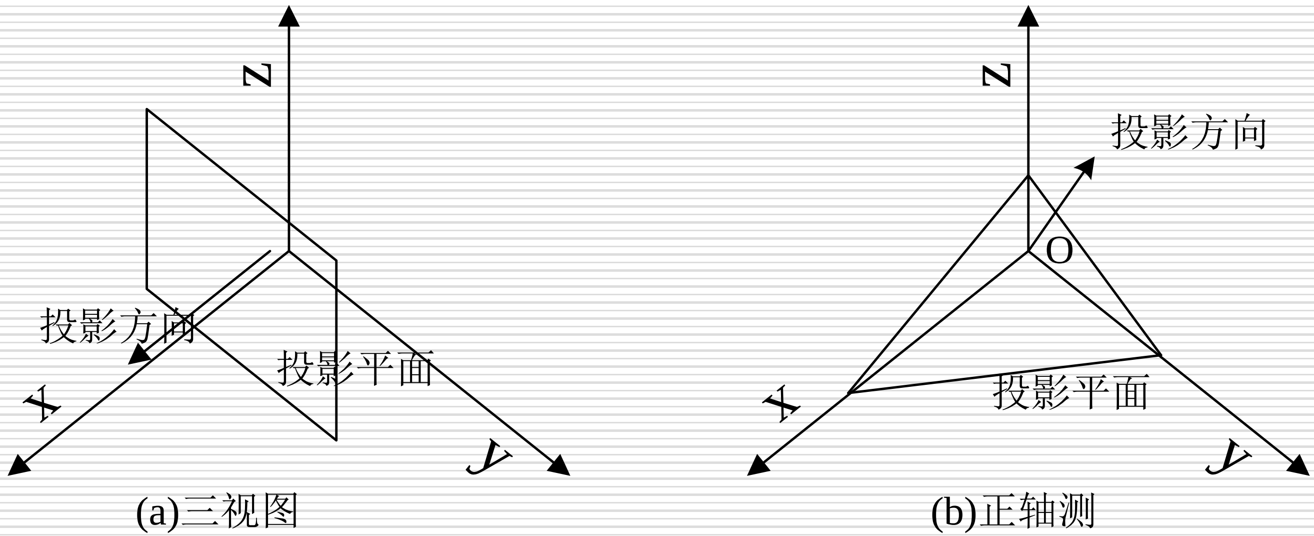


图5.35 正投影

平行投影——三视图

- 三视图包括主视图、侧视图和俯视图三种，投影面分别与X轴、Y轴和Z轴垂直。

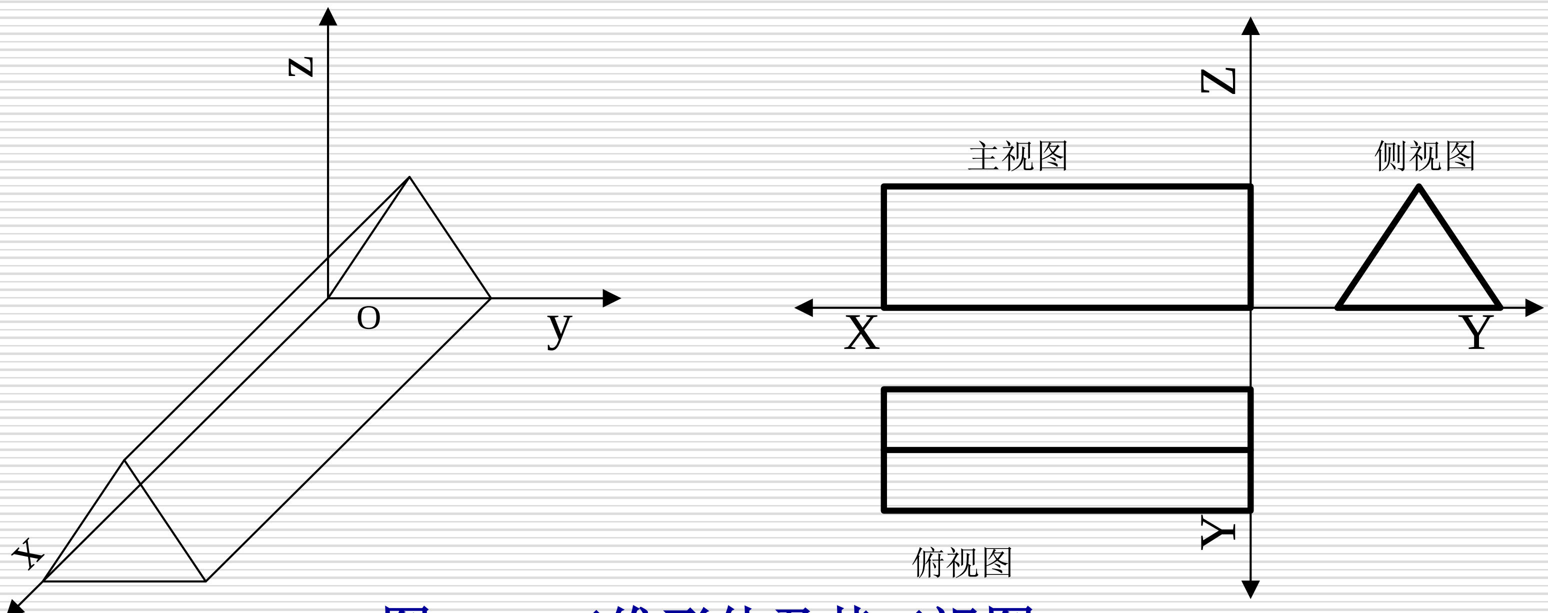


图5.36 三维形体及其三视图

平行投影——三视图

- 确定三维形体上各点的位置坐标；
- 引入齐次坐标，求出所作变换相应的变换矩阵；
- 将所作变换用矩阵表示，通过运算求得三维形体上各点(x,y,z)经变换后的相应点(x',y')或(y',z')；
- 由变换后的所有二维点绘出三维形体投影后的三视图。

平行投影——三视图

- 主视图：将三维形体向xoz面（又称V面）作垂直投影（即正平行投影），得到主视图。

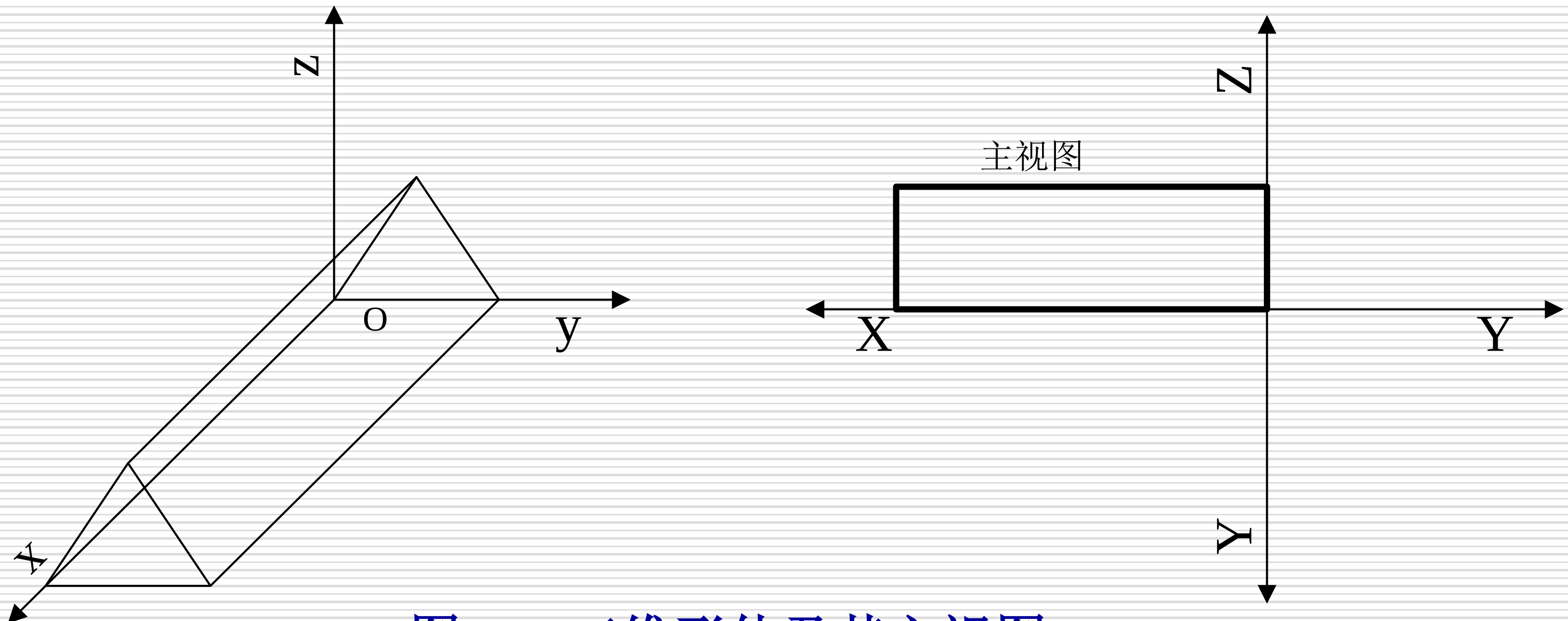


图5.37 三维形体及其主视图

平行投影——三视图

- 主视图投影矩阵为：

$$T_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

平行投影——三视图

- 俯视图：三维形体向xoy面（又称H面）作垂直投影得到俯视图。

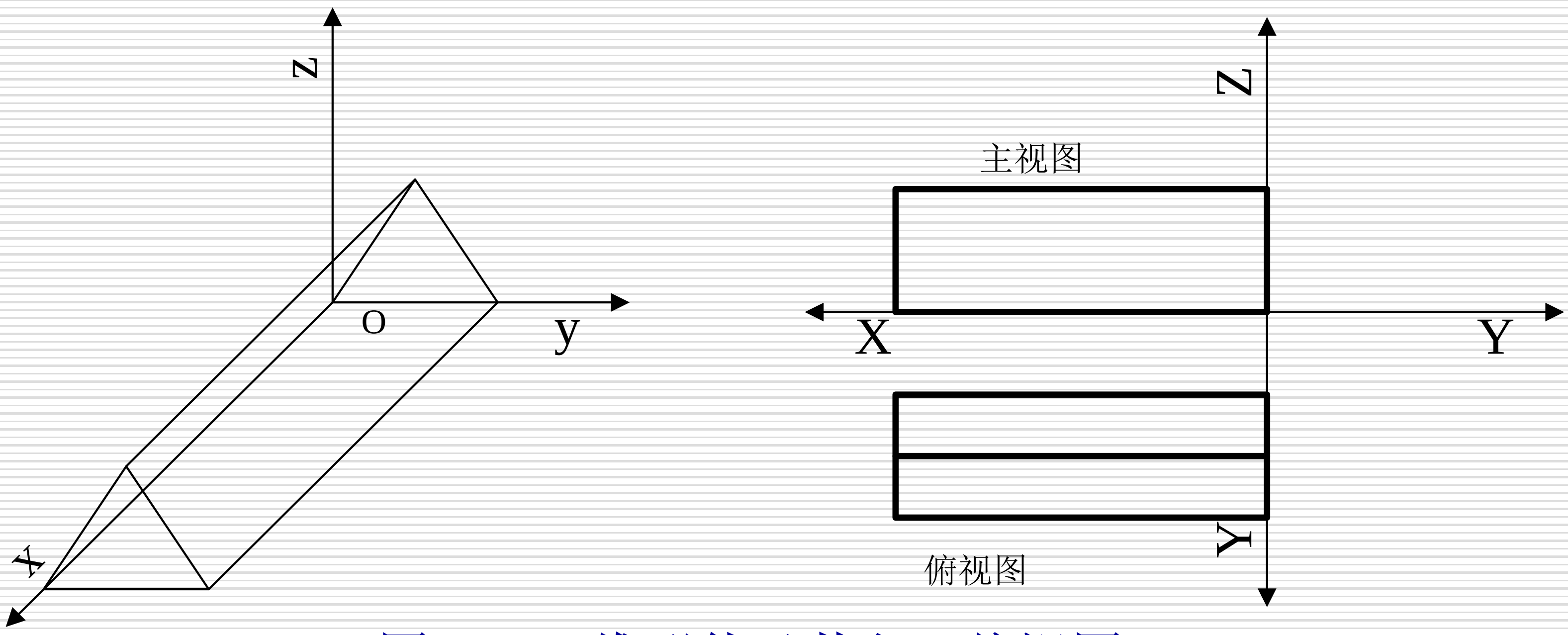
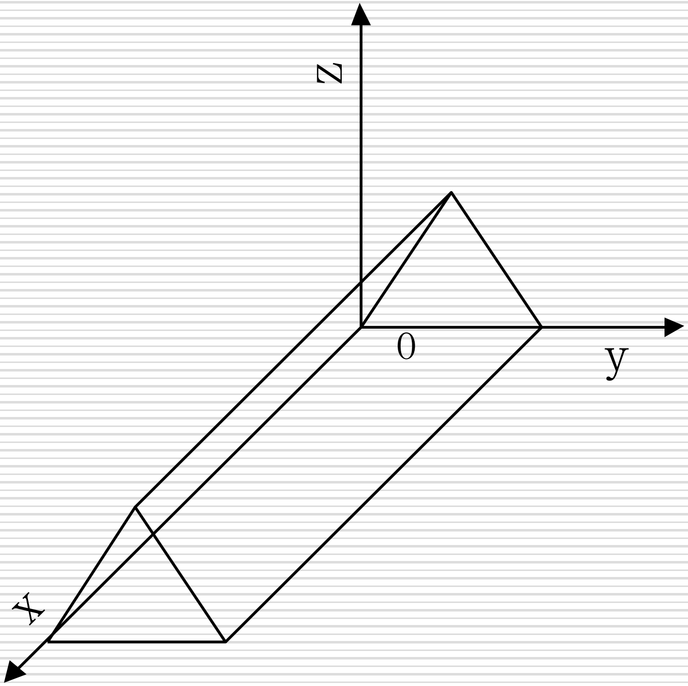
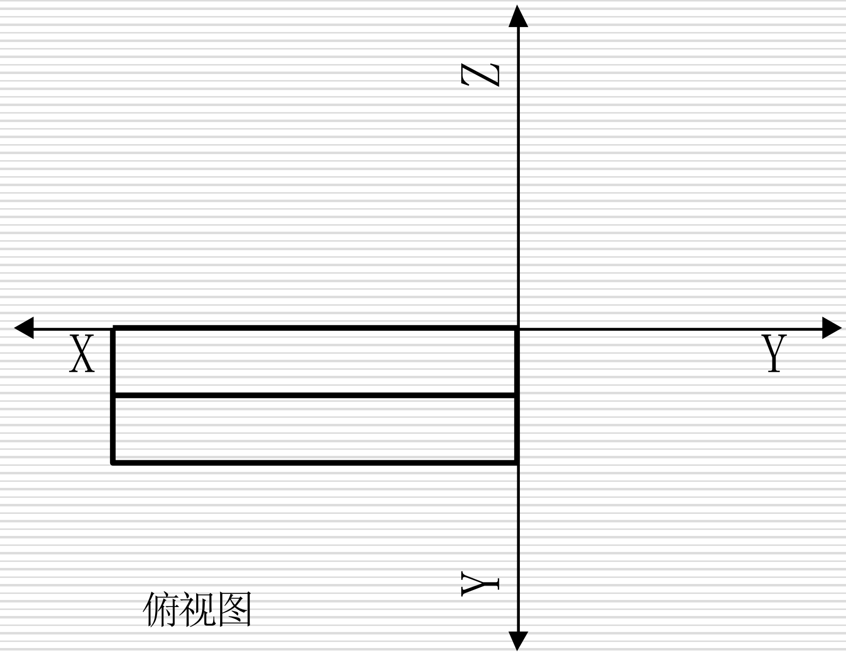


图5.38 三维形体及其主、俯视图

(1) 投影变换

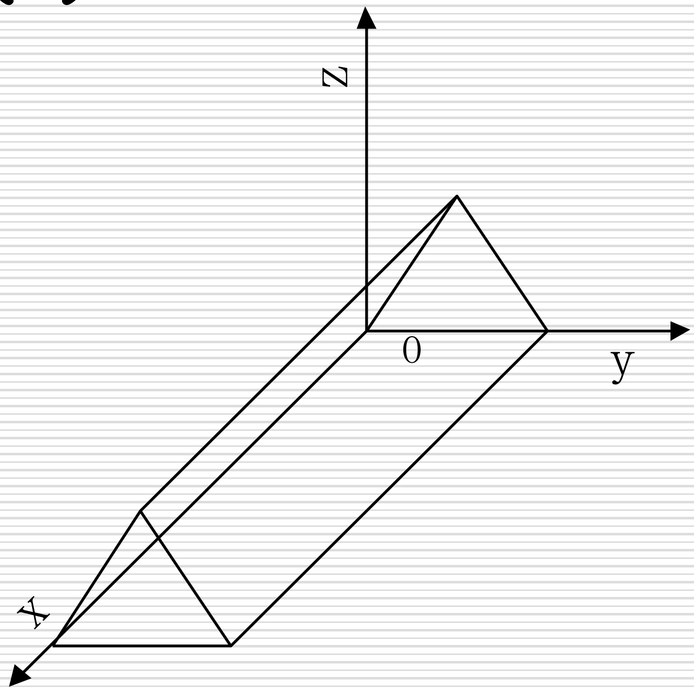


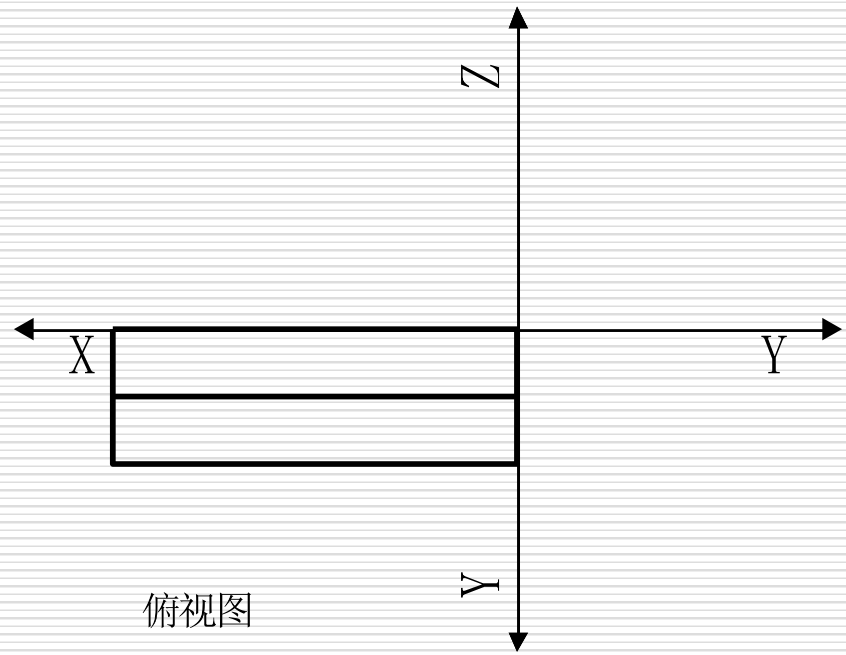


俯视图

$$T_{xoy}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(2)使H面绕x轴负转90°

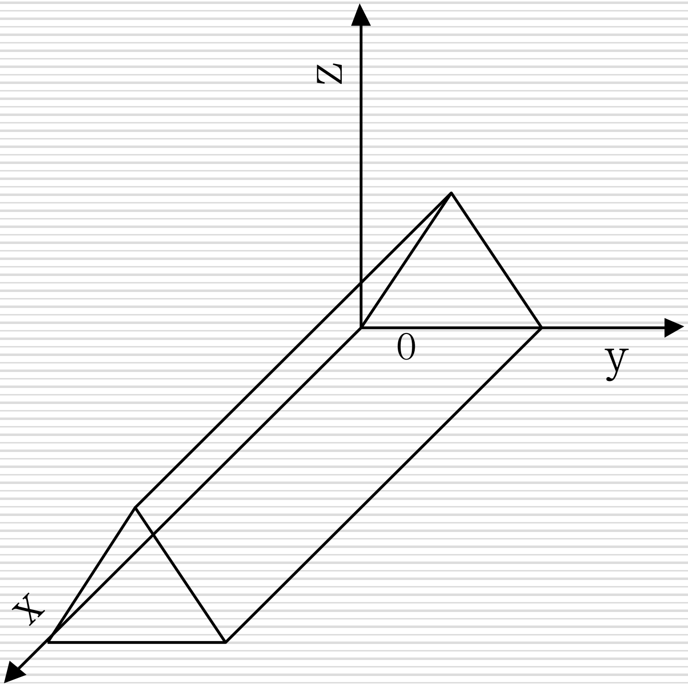


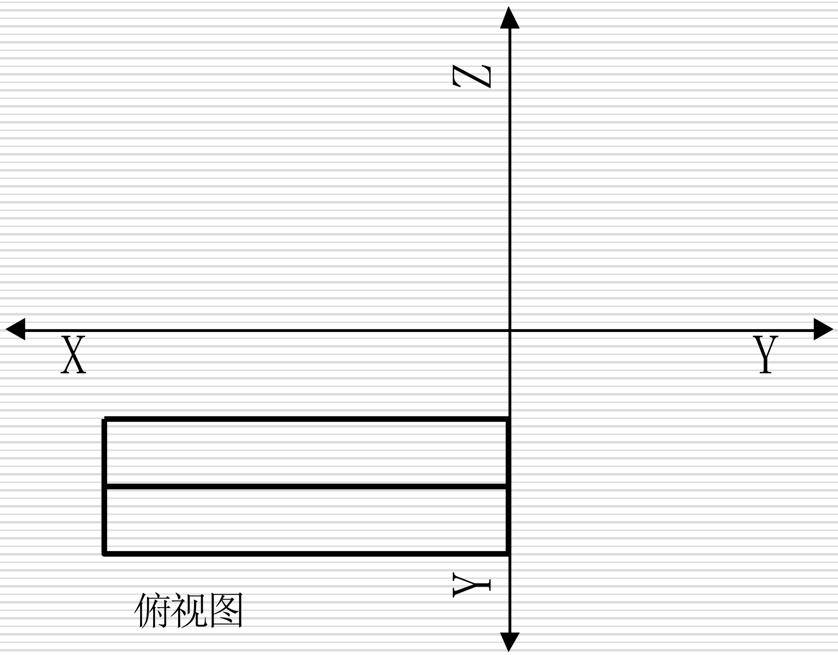


俯视图

$$T_{Rx}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos(-90^\circ) & \sin(-90^\circ) & 0\\ 0 & -\sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(3)使H面沿z方向平移一段距离$-z_0$





$$T_{Rx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -z_0 & 1 \end{bmatrix}$$

平行投影——三视图

- 俯视图投影矩阵为：

$$T = T_{xoy} \cdot T_{Rx} \cdot T_{tz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z_0 & 1 \end{bmatrix}$$

平行投影——三视图

- 侧视图：获得侧视图是将三维形体往yoz面（侧面W）作垂直投影。

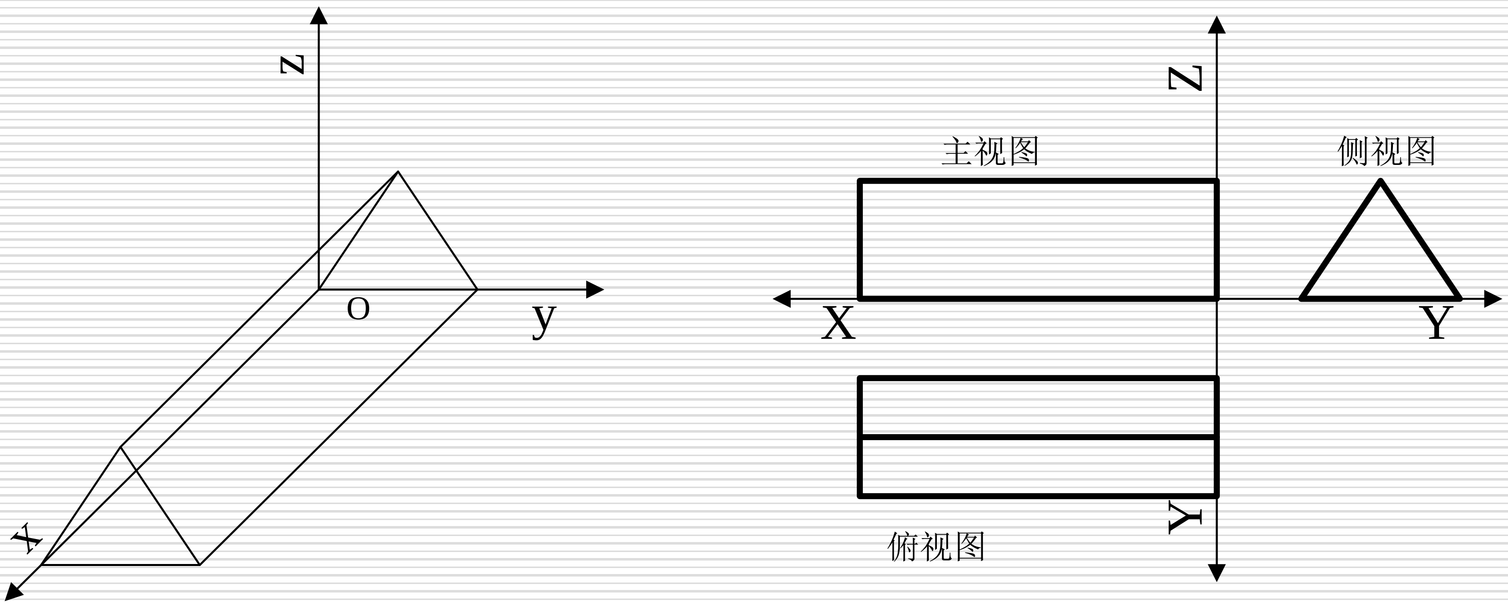
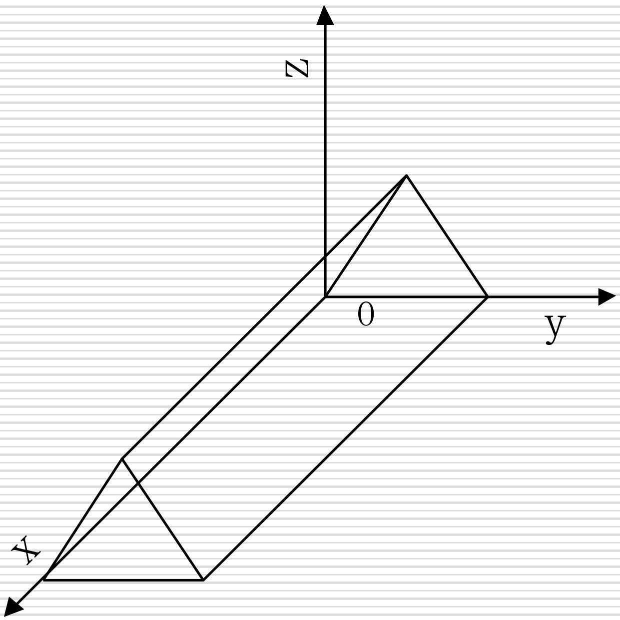
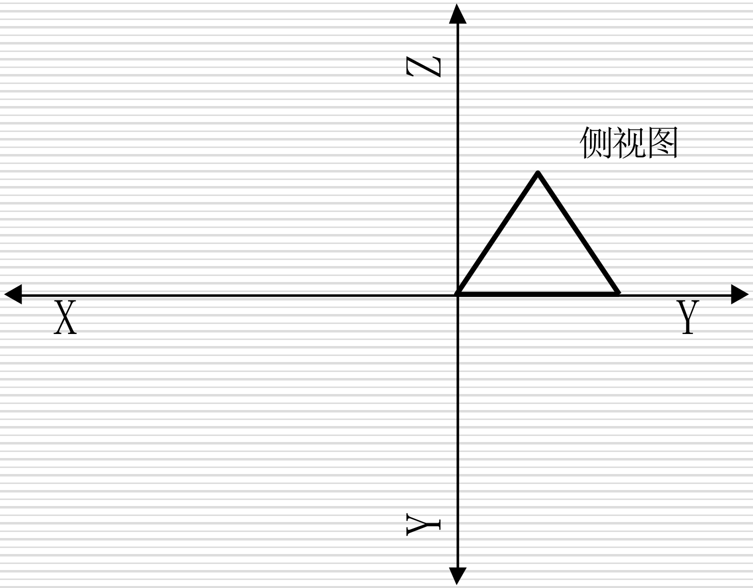


图5.39 三维形体及其三视图

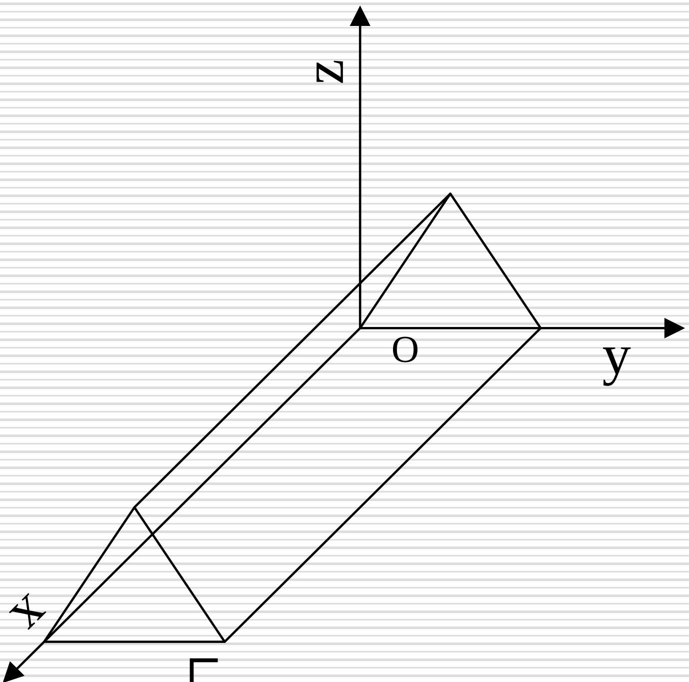
（1）侧视图的投影变换

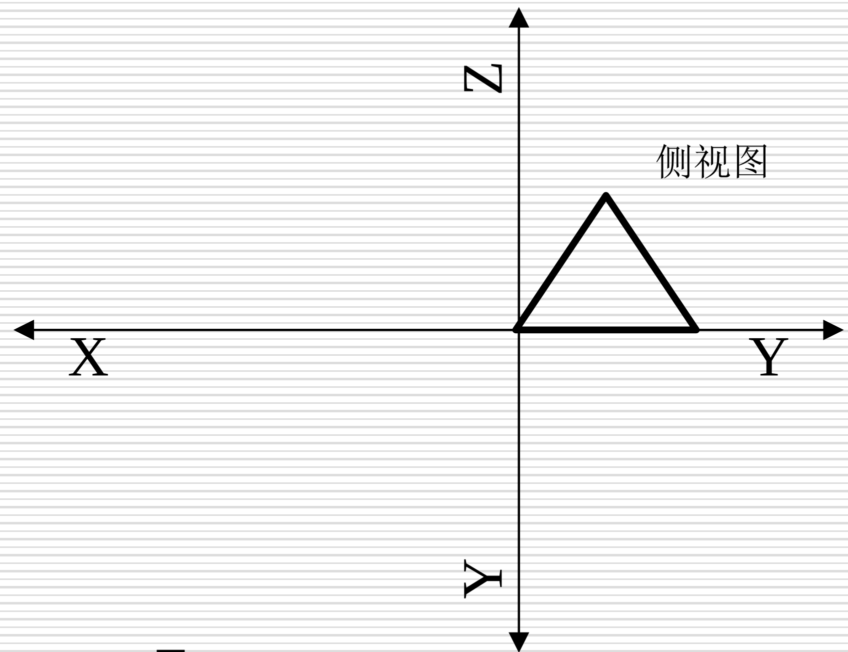




$$T_{yoz}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

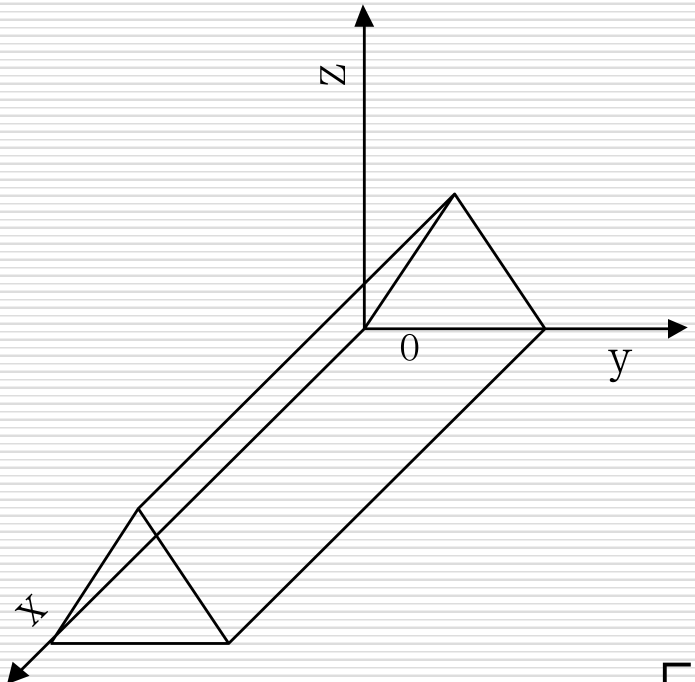
(2)使W面绕z轴正转90°

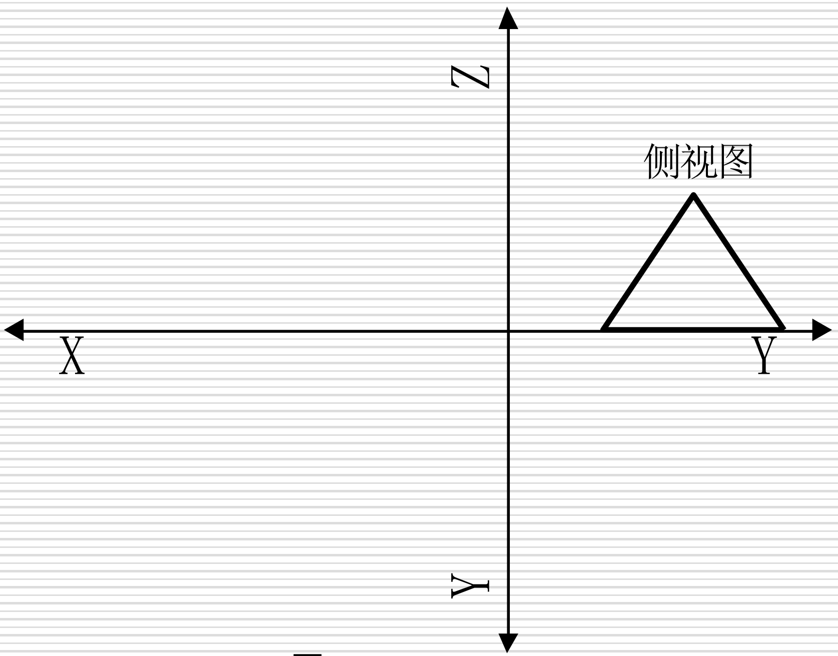




$$T_{Rz}=\begin{bmatrix}\cos 90^\circ & \sin 90^\circ & 0 & 0\\ -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(3)使W面沿负x方向平移一段距离x_0





$$T_{Rx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

平行投影——三视图

- 侧视图投影矩阵为：

$$T = T_{yoz} \cdot T_{Rz} \cdot T_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

平行投影——三视图

- 最后的三视图：

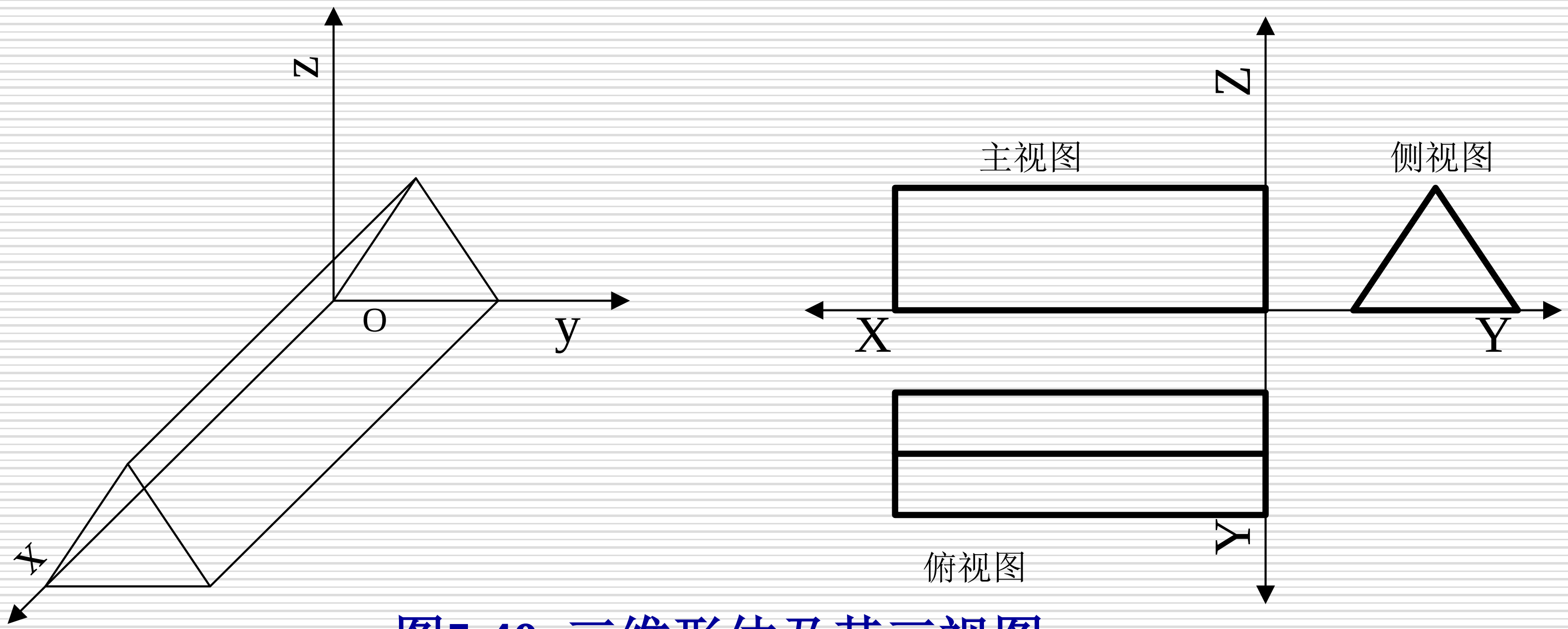


图5.40 三维形体及其三视图

平行投影——正轴测图

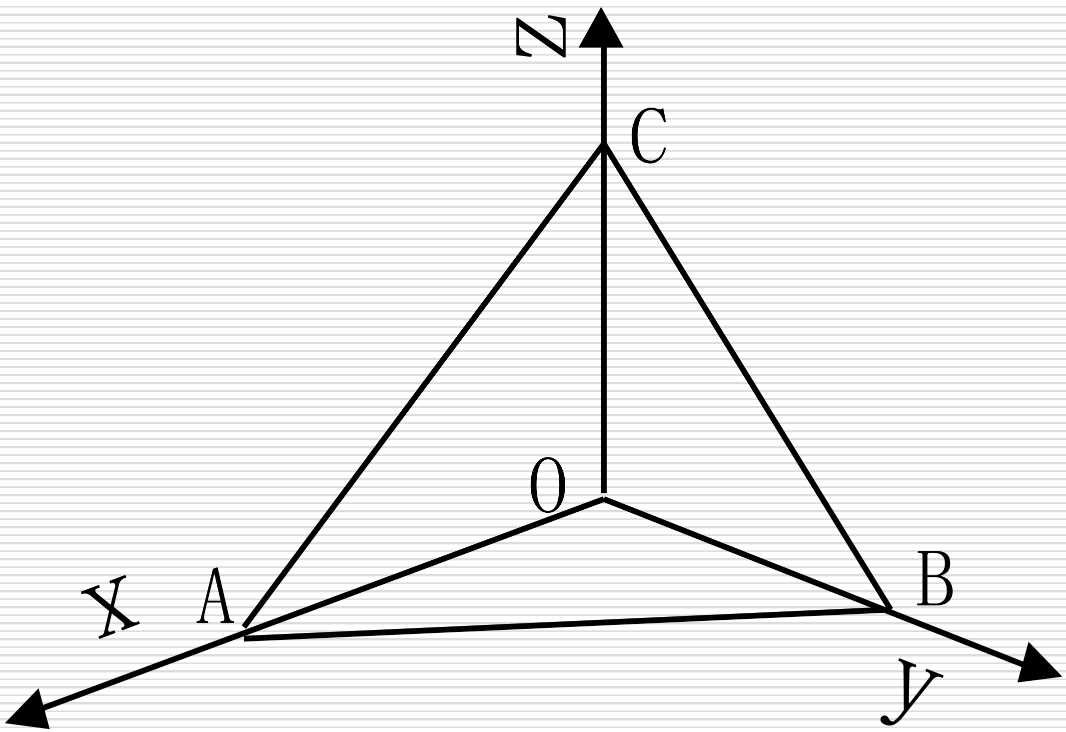


图5.41 正轴测图

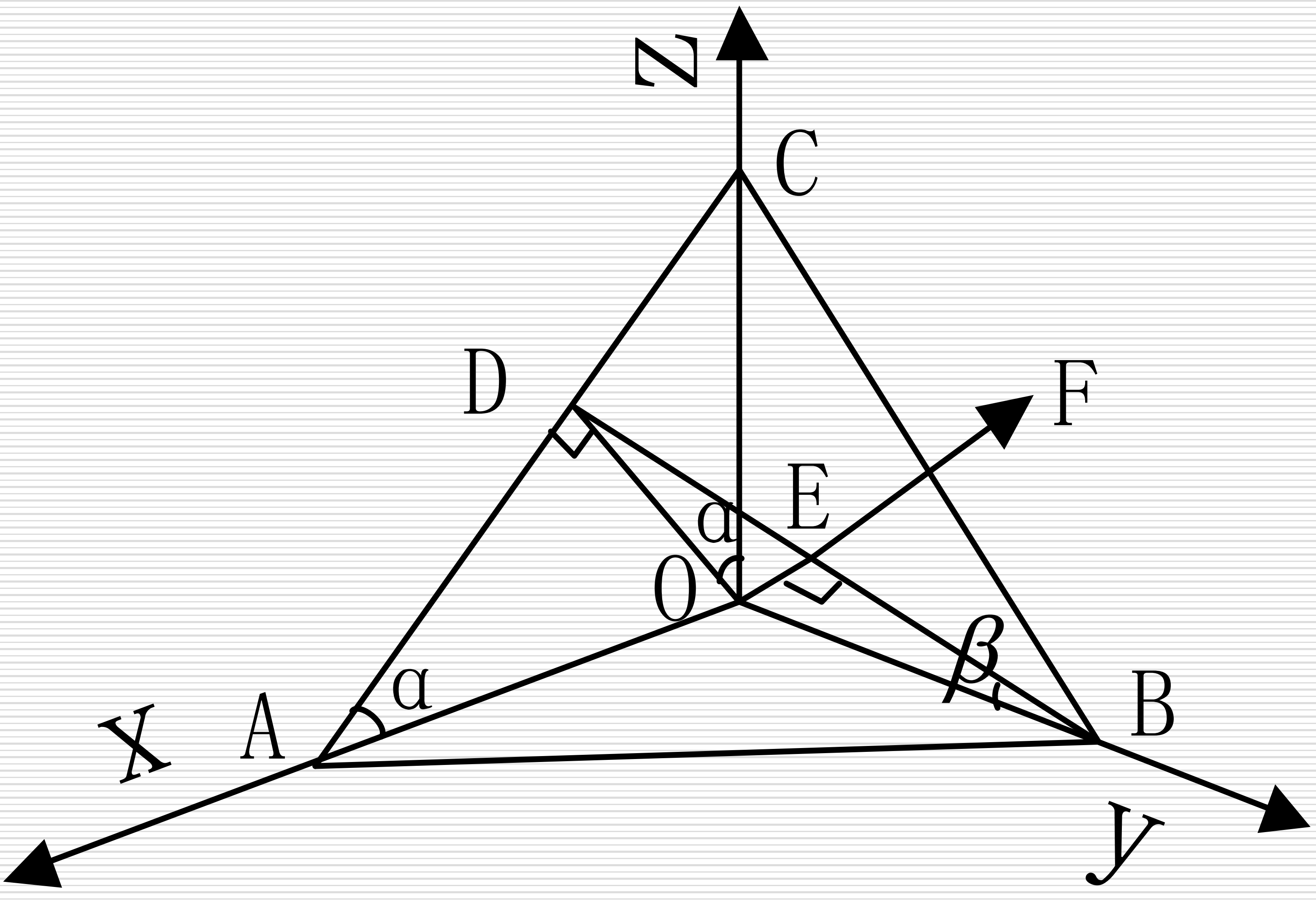


图5.42 正轴测图

平行投影——正轴测图

(1) 先绕y轴顺时针旋转α角

$$T_{Ry} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & 0 & -\sin(-\alpha) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(-\alpha) & 0 & \cos(-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

平行投影——正轴测图

(2) 再绕x轴逆时针旋转β角

$$T_{Rx}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\beta & \sin\beta & 0\\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

平行投影——正轴测图

(3) 将三维形体向xoy平面作正投影

$$T_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

平行投影——正轴测图

- 最后得到正轴测图的投影变换矩阵：

$$T = T_{Ry} \cdot T_{Rx} \cdot T_p = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \cdot \sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha \cdot \sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 此矩阵是一般正轴测图的投影变换矩阵。

平行投影——正轴测图

- 正等测图

$$\sin\alpha = \cos\alpha = \sqrt{2}/2$$

$$\sin\beta = \sqrt{3}/3$$

$$\cos\beta = \sqrt{6}/3$$

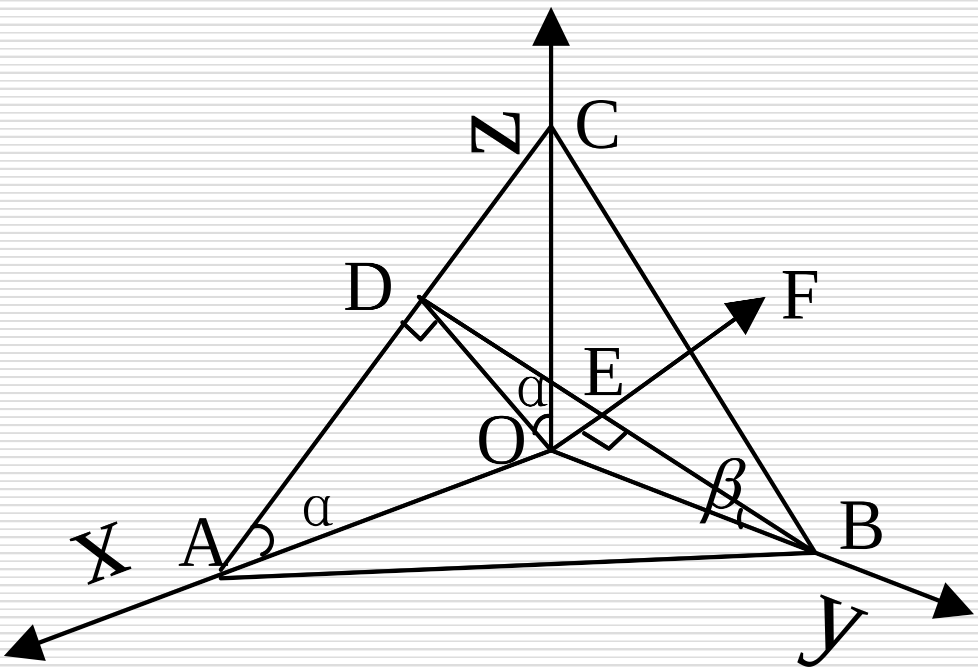


图5.43 正等测图

平行投影——正轴测图

- 将α和β的值代入(7-1)式得到正等测图的投影变换矩阵：

$$T=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.7071 & -0.4082 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8165 & 0 & 0 \\ -0.7071 & -0.4082 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

平行投影——正轴测图

- 正二测图

$$\sin\alpha = \cos\alpha = \sqrt{2}/2$$

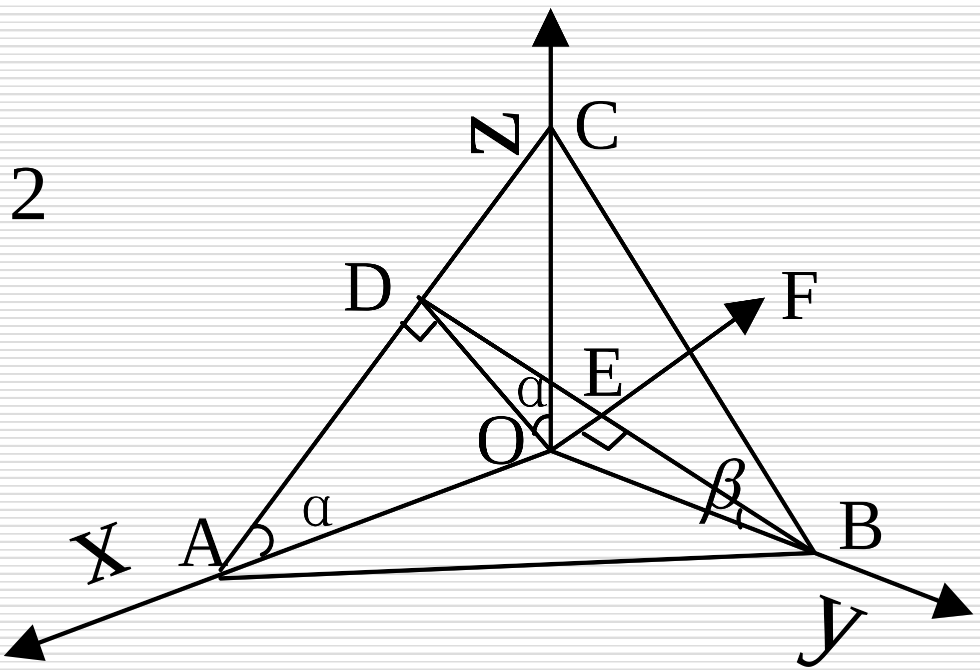


图5.44 正二测图

平行投影——正轴测图

- 将α值代入(7-1)式得到正二测图的投影变换矩阵：

$$T=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

平行投影——正轴测图

- 能同时反映物体的多个面，具有一定的立体效果。
- 能使空间任意一组平行线的投影仍然保持平行。
- 不能保持三维空间的角度关系。
- 沿三个坐标轴的方向均可测量距离，但要注意比例关系。

平行投影——斜投影图

- 斜投影图，即斜轴测图，是将三维形体向一个单一的投影面作平行投影，但投影方向不垂直于投影面所得到的平面图形。
- 常选用垂直于某个主轴的投影面，使得平行于投影面的形体表面可以进行距离和角度的测量。
- 特点：既可以进行测量又可以同时反映三维形体的多个面，具有立体效果。

平行投影——斜投影图

- 常用的斜轴测图有斜等测图和斜二测图。

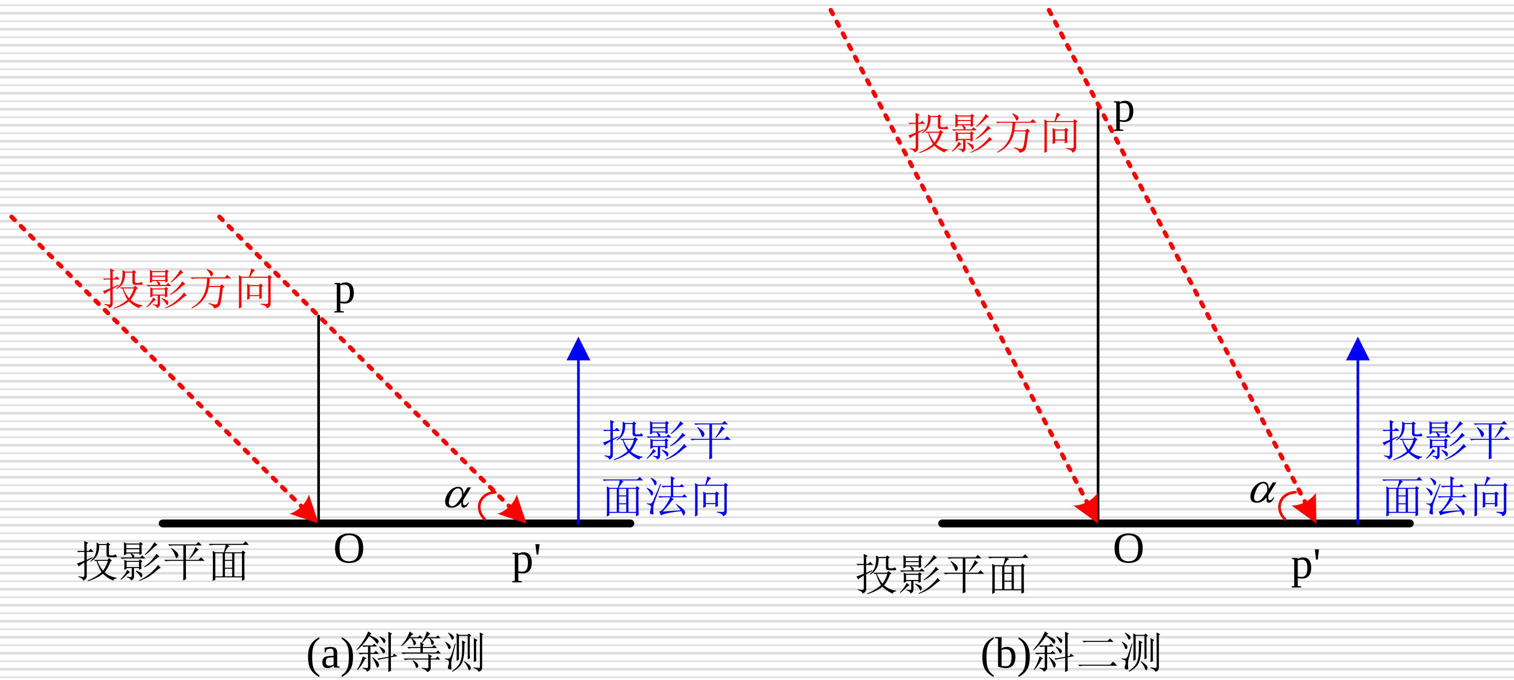


图5.45 斜平行投影

平行投影——斜投影图

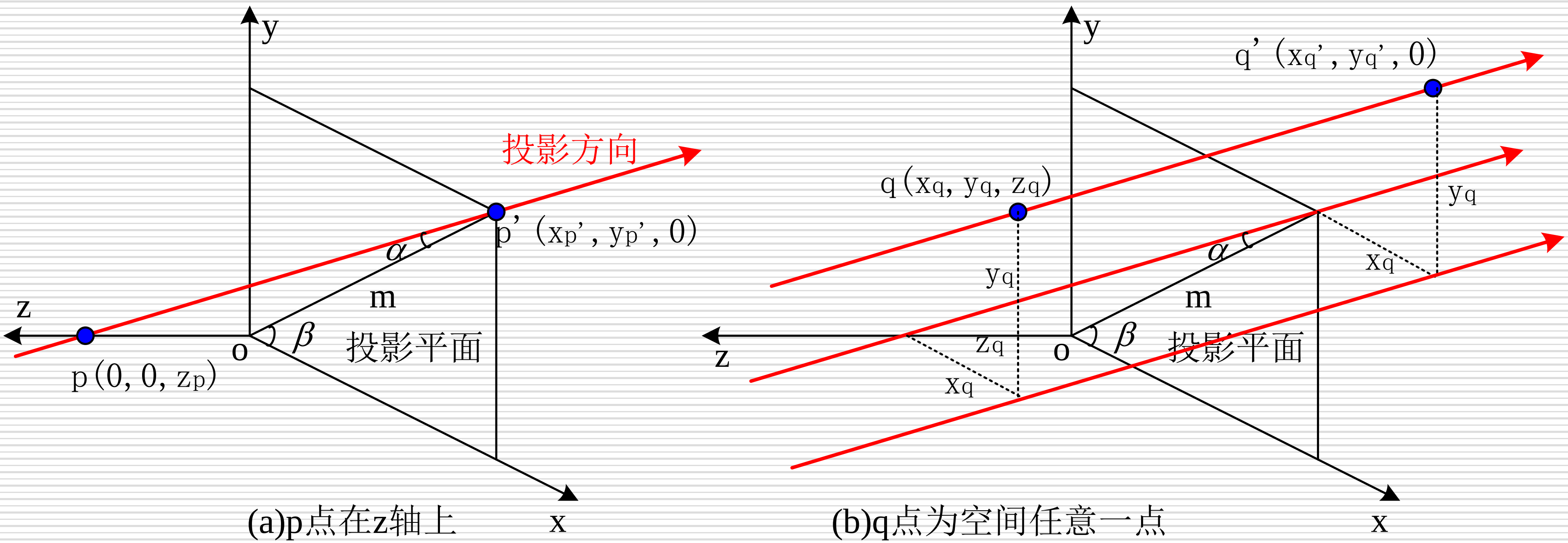


图5.46 斜平行投影的形成

平行投影——斜投影图

$$x_q' = z_q ctg\alpha \cos\beta + x_q$$

$$y_q' = z_q ctg\alpha \sin\beta + y_q$$

- 斜平行投影的投影变换矩阵为：

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ ctg\alpha\cos\beta & ctg\alpha\sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

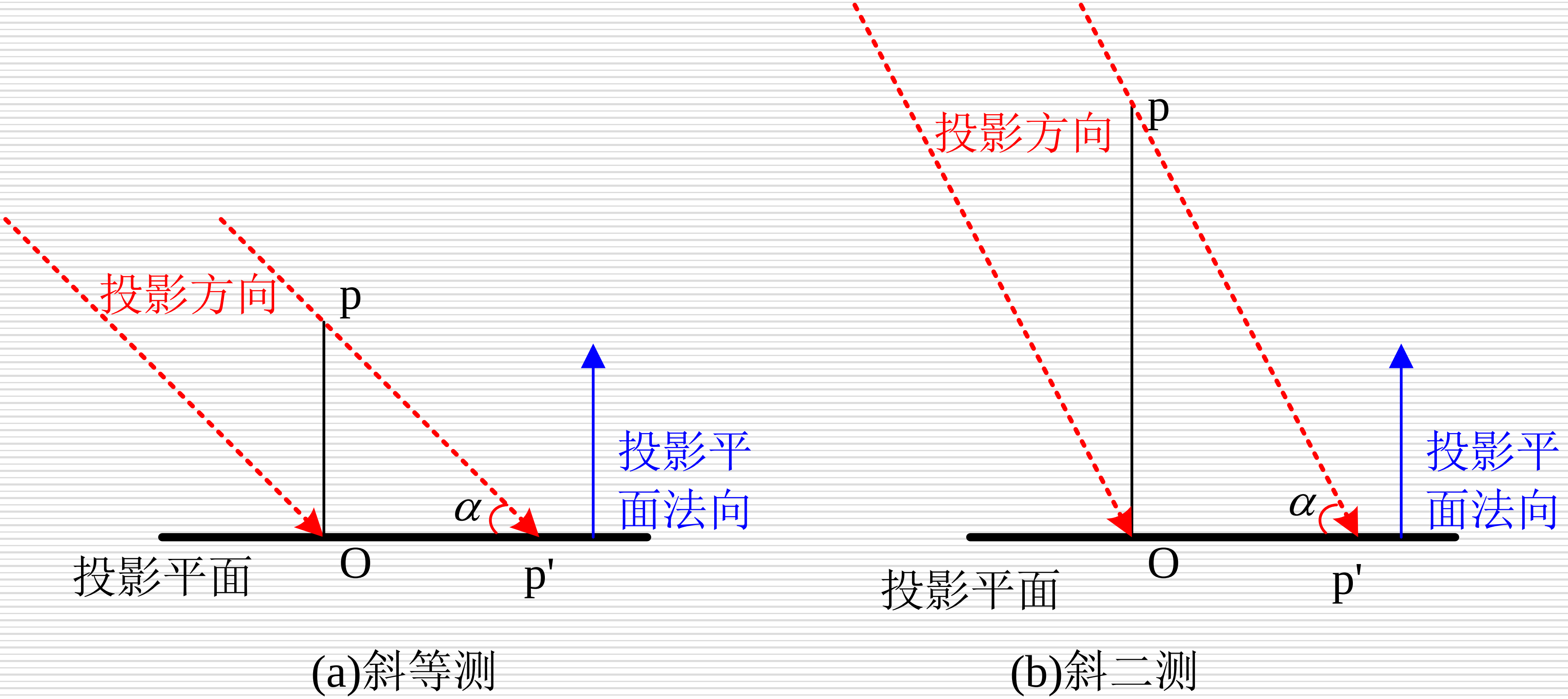


图5.47 斜平行投影

对于斜等测图有：α=45°,ctgα=1。

斜二测图则有：α=arctg(2),ctgα=1/2。

通常β取30°或45°。

平行投影——斜投影图

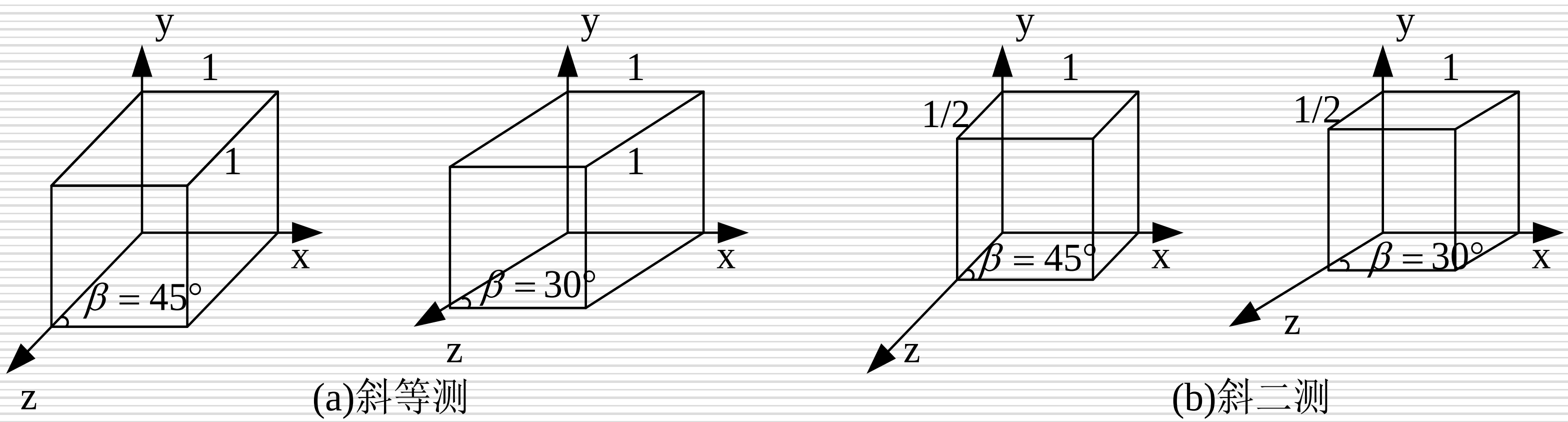


图5.48 单位立方体的斜平行投影

5.3.3 透视投影变换

$$x'/x = y'/y = d/(d+z)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

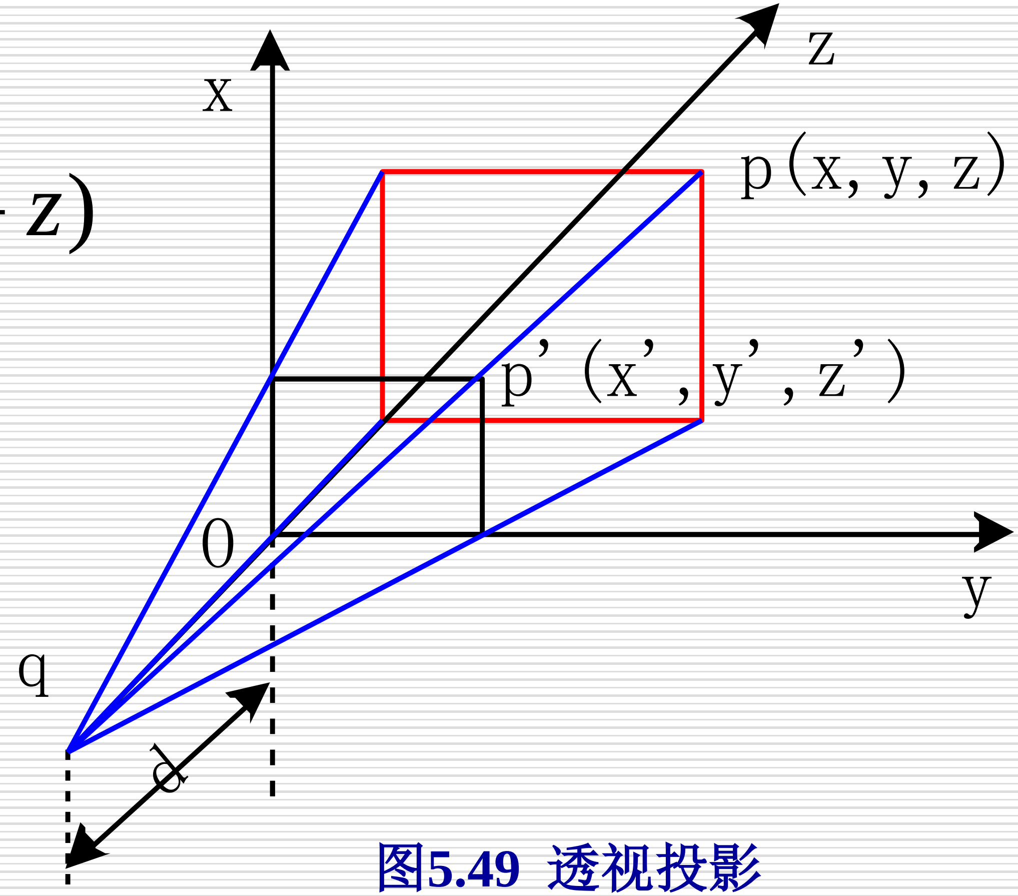


图5.49 透视投影

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

透视投影变换

- 透视缩小效应：物体的透视投影的大小与物体到投影中心的Z方向距离成反比。

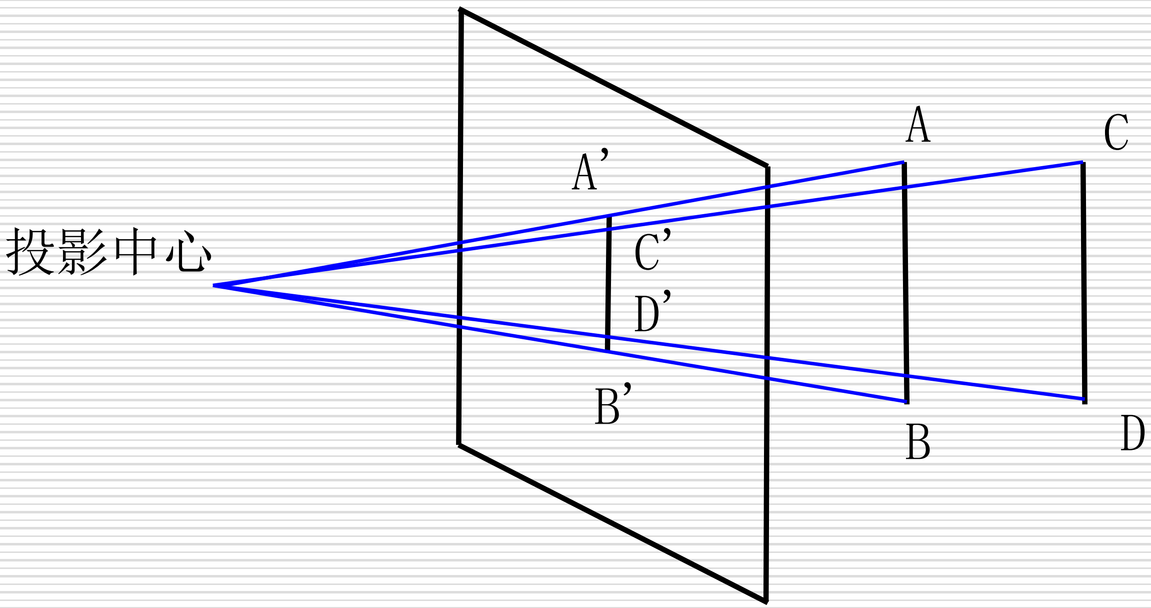


图5.50 透视缩小效应

透视投影变换

- 透视投影的深度感更强，更加具有真实感，但透视投影不能够准确反映物体的大小和形状。
- 透视投影的大小与物体到投影中心的距离有关。
- 一组平行线若平行于投影平面时，它们的透视投影仍然保持平行。
- 只有当物体表面平行于投影平面时，该表面上的角度在透视投影中才能被保持。

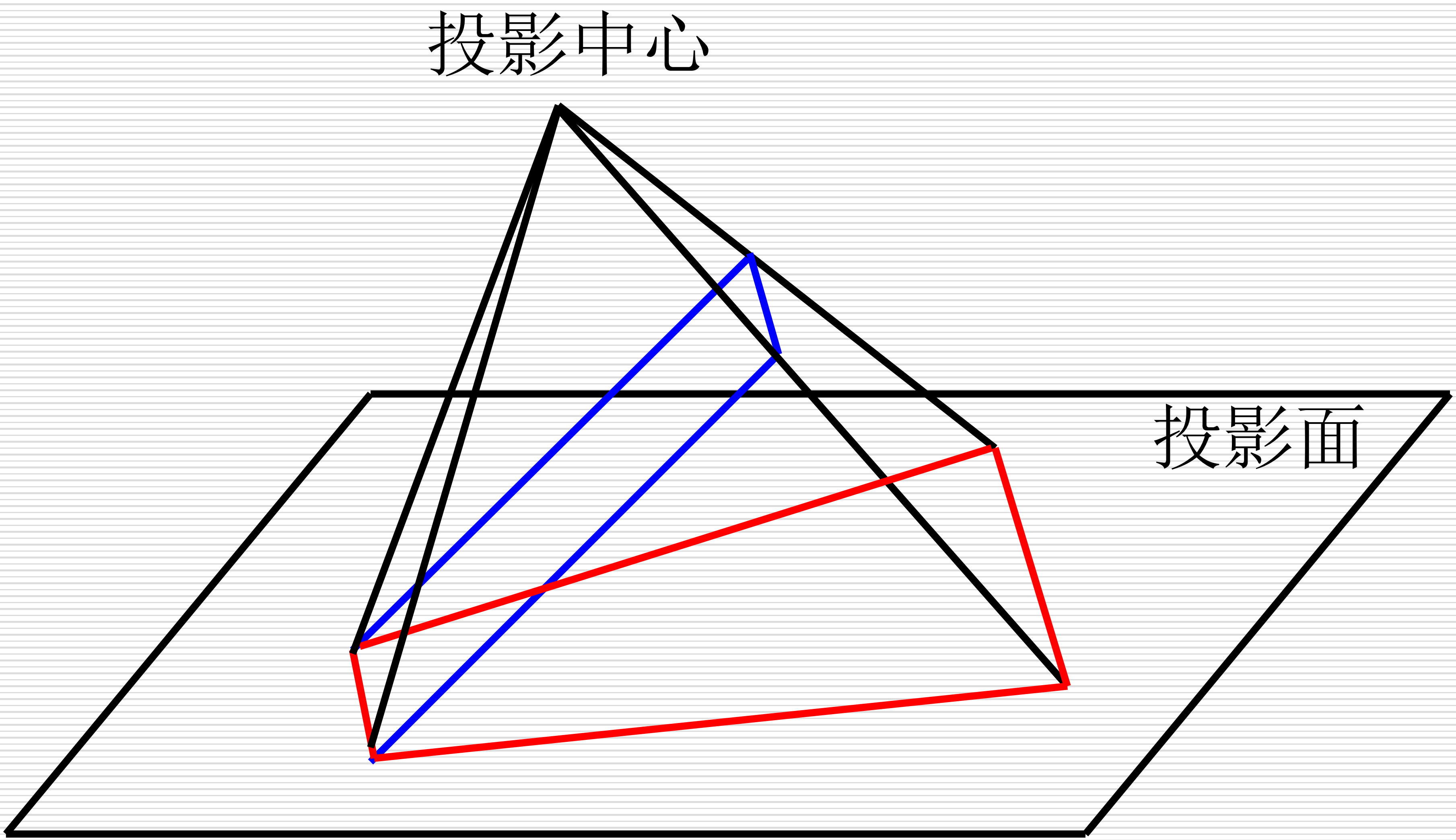


图5.51 灭点

透视投影变换

- 不平行于投影面的平行线的投影会汇聚到一个点，这个点称为灭点(Vanishing Point)。
- 坐标轴方向的平行线在投影面上形成的灭点称作主灭点。
- 一点透视有一个主灭点，即投影面与一个坐标轴正交，与另外两个坐标轴平行。
- 两点透视有两个主灭点，即投影面与两个坐标轴相交，与另一个坐标轴平行。
- 三点透视有三个主灭点，即投影面与三个坐标轴都相交。

透视投影变换

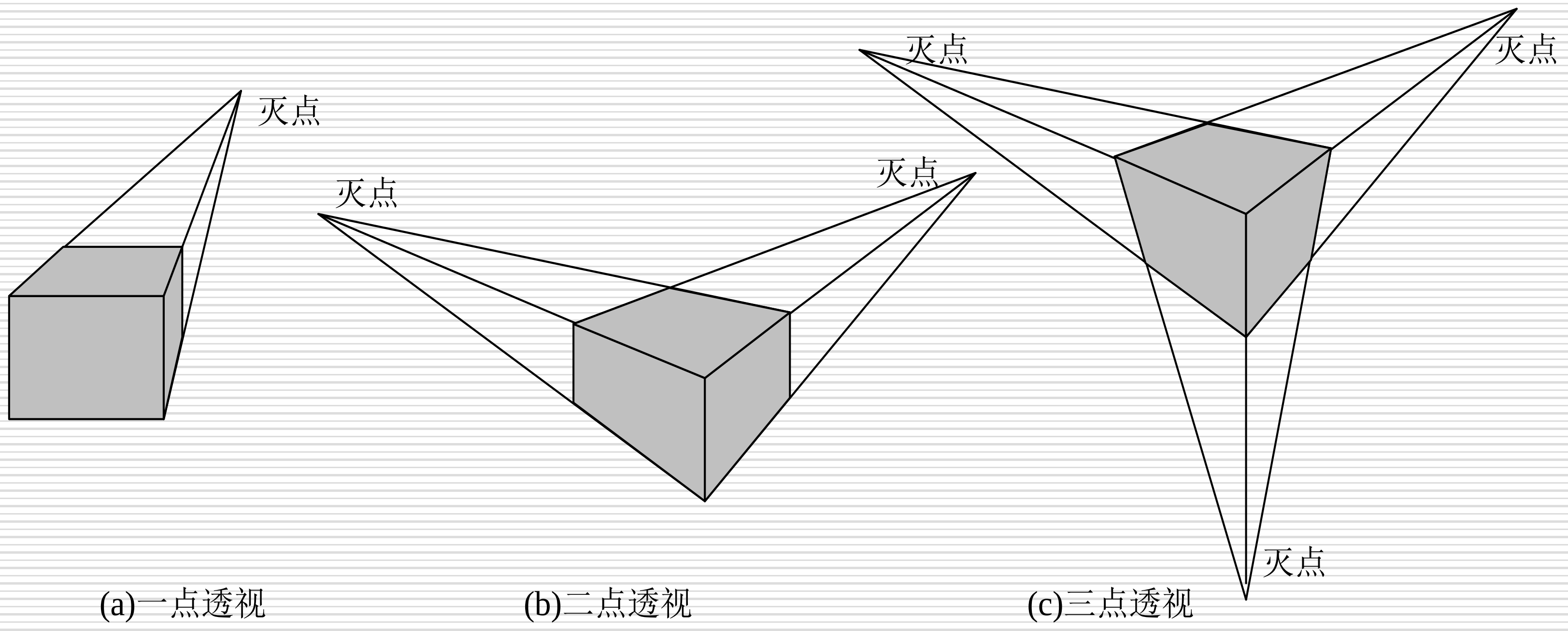


图5.52 透视投影

透视投影变换

- 透视投影的变换矩阵：

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & p \\
0 & 1 & 0 & q \\
0 & 0 & 1 & r \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$