李智，周培伦
学号：PB13000383，PB13000346
指导老师：李新
June 13, 2016

小波分析在偏微分方程的应用

小波基展开下波动方程数值解的计算

摘要

我们这个项目主要调查研究了小波分析在偏微分方程数值解中的应用。主要以真空波场中的麦克斯韦方程和在均匀各项介质中传播的波动方程为例来说明这种方法的具体的实现原理，过程和优点，并与经典有限元方法进行比较。

关键词： 多分辨率分析，Haar小波基展开，FDTD与MRTD方法，波动方程，波场模拟

正文

我们先以麦克斯韦方程为例分别介绍在传统中应用广泛的有限元方法和最近兴起的小波分析中的多分辨方法。

I. 有限元方法介绍：

思想是将连续的求解域离散为一组单元的组合体，用在每个单元内假设的近似函数来分片的表示求解域上待求的未知场函数，近似函数通常由未知场函数及其导数在单元各节点的数值插值函数来表达。从而使一个连续的无限自由度问题变成离散的有限自由度问题。有限元法的核心思想是就是“数值近似”和“离散化”。

由于在有限元法被发明之前，所有的力学问题和工程问题中出现的偏微分方程只能依靠单纯的解析解得到解答。这种方法对数学要求很高，而且非常依赖于一些理想化的假定。比如在土木工程中梁柱计算中出现的平截面假定，小应变假定，理想塑性

假定。这些假定其实是和实际工程问题有很大偏差的，而且一旦工程问题稍微复杂一些我们就不能直接得到解析解，或者解析解的答案误差过大。而有限元法把复杂的整体结构离散到有限个单元，再把这种理想化的假定和力学控制方程施加于结构内部的每一个单元，然后通过单元分析组装得到结构总刚度方程，再通过边界条件和其他约束解得结构总反应。总结构内部每个单元的反应可以随后通过总反应的一一映射得到，这样就可以避免直接建立复杂结构的力学和数学模型了。其总过程可以描述为:

总结构离散化 — 单元力学分析 — 单元组装 — 总结构分析 — 施加边界条件 — 得到结构总反应 — 结构内部某单元的反应分析

相比之下，多尺度分析方法也有它非常独特的优势，在小波基上展开的计算效率会随不同阶数多尺度函数的取舍而显著提高，也正因如此，这些多尺度分析方法在最近一段时间发展地特别迅速，受到了越来越多的重视。

II. 多尺度分析方法介绍:

多分辨率分析理论基于小波基展开的数值方法的理论基础。通俗易懂的来说，就像人的眼睛观察物体时，如果距离物体比较远，即尺度较大，则视野宽、分辨能力低，只能观察事物的概貌而看不清局部细节;若距离物体较近，即尺度较小，那么视野就窄而分辨能力高，可以观察到事物的局部细节却无法概览全貌。因此，如果既要知道物体的整体轮廓又要看清其局部细节，就必须选择不同的距离对物体进行观察。和人类视觉机理一样，人们对事物、现象或过程的认识会因尺度选择的不同而得出不同的结论，这些结论有些可能反映了事物的本质，有些可能部分地反映，有些甚至是错误的认识。显然，仅使用单一尺度通常只能对事物进行片面的认识，结果不是只见“树木”不见“森林”，就是只见“森林”不见“树木”，很难对事物有全面、清楚的认识。只有采用不同的尺度，小尺度上看细节，大尺度上看整体，多种尺度相结合才能既见“树木”又见“森林”。另一方面，在自然界和工程实践中，许多现象或过程都具有多尺度特征或多尺度效应，同时，人们对现象或过程的观察及测量往往也是在不同尺度上进行的。1987年，Mallat将计算机视觉领域内多尺度分析的思想引入到小波分析中研究小波函数的构造及信号按小波变换的分解和重构，提出了小波多分辨分析的概念，统一了此

前各种具体小波的构造方法。Mallat的工作不仅使小波分析理论取得了里程碑式的发展，同时也使多尺度分析在众多领域取得了许多重要的理论和应用成果。目前，小波分析已经成为应用最广泛的多分辨率分析。

III. 分解到Harr小波基上对麦克斯韦方程的数值解：

小波基也可以看作是一种按等级，或是粗糙程度划分函数的数学工具。可以被分解成以下形式：

$$f(\xi)=\sum_k c_k\phi(\xi-k)+\sum_j\sum_k d_{j,k}\psi(2^j\xi-k)$$

其中 $f\in L^2(\mathbb{R})$, f 也被依次分解到相互正交的空间上，

$$V_0\oplus W_0\oplus W_1\oplus W_2\oplus W_3\cdots\oplus W_{k-1}=V_k$$

下面介绍一种系统推导出麦克斯韦方程的方法，但是同样也可以用多尺度分析的方法推导出相类似的结果，一维情形下的波方程为：

$$\frac{\partial E(z,t)}{\partial z}=\frac{1}{c}\frac{\partial E(z,t)}{\partial t}$$

① 为了得到这个方程的数值解，我们引进一个对空间和时间中的电场的划分 $E(m\Delta z,k\Delta t)={}_kE_m$ ，它将会由有限插分得到的方程迭代求解。有限元将偏微分方程中的偏微分项用有限插分的估计来近似，具体地，有：

$$\frac{\partial E(m\Delta z,k\Delta t)}{\partial z}=\frac{E((m+1)\Delta z,k\Delta t)-E((m-1)\Delta z,k\Delta t)}{2\Delta z}+O(\Delta z^2)$$

$$\approx\frac{{}_kE_{m+1}-{}_kE_{m-1}}{2\Delta z}$$

$$\frac{\partial E(m\Delta z,k\Delta t)}{\partial z}=\frac{E(m\Delta z,(k+1)\Delta t)-E(m\Delta z,(k-1)\Delta t)}{2\Delta z}+O(\Delta z^2)$$

$$\approx\frac{{}_{k+1}E_m-{}_{k-1}E_m}{2\Delta t}$$

对 $E(z,t)$ 分别在时间和空间作泰勒展开，简单的代数运算后，对二阶近似后有

$${}_{k+1}E_m={}_{k-1}E_m+\frac{c\Delta t}{\Delta z}({}_kE_{m+1}-{}_kE_{m-1})$$

$$= {}_{k-1}E_m + \quad s \qquad ({}_kE_{m+1} - {}_kE_{m-1})$$

其中 $s = c\Delta t / \Delta z$ 是CFL(Courant–Friedrichs–Levy) 系数，这是用来衡量迭代稳定性的重要参数。

② 而用Haar小波基展开系数来计算，则有电场在Haar尺度函数时间和空间上的展开：

$$E(z,t) = \sum_{k,m} {}_kE_m h_m(z) h_k(t)$$

其中，
$$h_n(x) = \begin{cases} 1, & n\Delta x < x < (n+1)\Delta x \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

代入波动方程，有：

$$\sum_{k,m} {}_kE_m \frac{dh_m(z)}{dz} h_k(t) = \frac{1}{c} \sum_{k,m} {}_kE_m h_m(z) \frac{dh_k(t)}{dt}$$

再对等式两边分别作内积，即所谓的Galerkin 方法，则有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(x) \frac{dh_{n'}(x)}{dx} dx = \frac{1}{2} (\delta_{n',n+1} - \delta_{n',n-1})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(x) h_{n'}(x) dx = \delta_{n',n} \Delta x$$

其中 $\delta_{n',n}$ 为Kronecker 符号。

因此，等式左边有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dz\,dt h_m(z) h_k(t) \frac{\partial E(z,t)}{\partial z} = \sum_{k',m'} {}_{k'}E_{m'} (\delta_{m',m+1} - \delta_{m',m-1}) \delta_{k',k} \frac{\Delta t}{2}$$

$$= ({}_kE_{m+1} - {}_kE_{m-1}) \frac{\Delta t}{2}$$

同样地，等式右边有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dz\,dt h_m(z) h_k(t) \frac{1}{c} \frac{\partial E(z,t)}{\partial t} = \sum_{k',m'} {}_{k'}E_{m'} \delta_{m',m} (\delta_{k',k+1} - \delta_{k',k-1}) \frac{\Delta z}{2c}$$

$$= ({}_{k+1}E_m - {}_{k-1}E_m) \frac{\Delta z}{2c}$$

可以看出，在Haar小波基上的展开计算结果与传统有限元方法本质上一致，不过在对低阶小波的处理上，这种方法可以有效地滤掉高阶项，从而只针对低阶项进行运算，因此大大减少运算量，从而提高计算效率，同时也能可以保证波场结果具有一定的精度。

IV. 多尺度分析在地震波传播和波场重构中的应用:

之前对麦克斯韦电磁学波动方程的求解是具有普遍性的，我们可以把它应用到其他一般的波动方程中来。我来自地球物理专业，对地震波波动方程的模拟和求解是非常重要的一个环节。目前求解波动方程所用的有限差分法，有限元法以及谱元法都不能根据波场的局部变化性质而动态选择空间网格点的大小，而小波基函数在空间域和频率域中都具有局部性特征的优点可以很好地做到这一点，只要选取恰当的小波基函数，通过阀值运算，地震波场的多分辨率表示就会变得非常稀疏，同时地下波动传播介质中的主要信息又不会受到损害。我们的程序主要根据现有流传较广，较为经典的有限元算法为基础，改进成分解到小波基多分辨率方法，得到了小波域中地震波场正演模拟算法，最终得到所得波场。

对于地震波场函数来说，随着时间的延续，从激发点激发的地震波场逐渐向地下半个空间中传播，当达到某一时间时，整个计算区域中每一个点上都存在地震波场值 . 而且对于大多数地下介质来说，速度是平缓变化的，只是在层与层的交界处，速度发生很大的变化，因此在地下介质中传播的地震波场函数应该是一个分段连续的函数。这样对一维波场向量进行标准形式的分解时，小波系数只是在地震波场函数性质发生突变的地方值很大，而在大部分的平滑区域系数的值是很小的。 如果对地震波场函数的小波多分辨分解设置阀值 $\varepsilon 2$，将小于此阀值的小波系数充零，而将大于此阀值的小波系数值保留，这样一维地震波场函数的小波多分辨分解就是一个稀疏的向量 。

在实验室师兄们的指导下，我们在导师给的经典有限元方法的基础上改进而成，大致程序结构如下:

(1)利用有限差分算子（在以麦克斯韦方程为例介绍算法时已提及）将二维地震声波波动方程进行离散网格化。

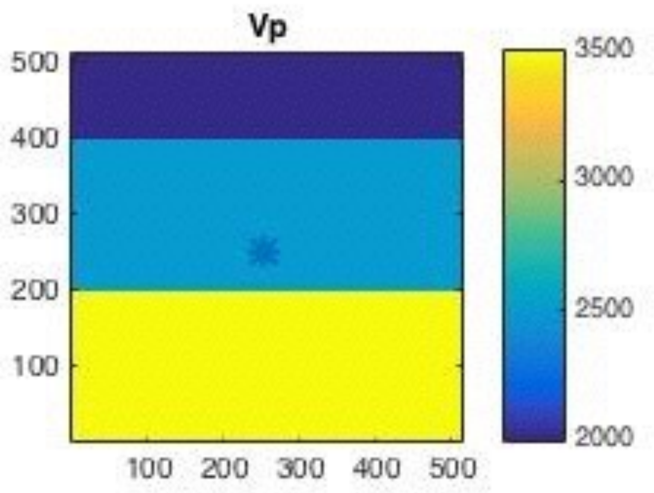
(2)利用二维到一维的投影算子将二维地震波场表示为一维波场向量。

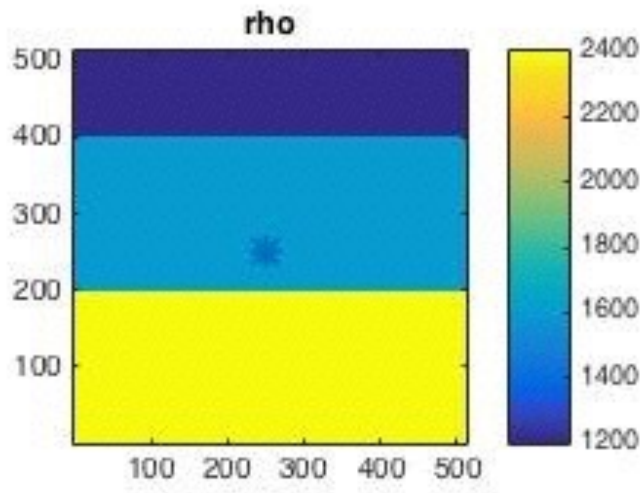
(3)进行多分辨分解，在小波基函数上展开，并根据预先设定的阀值将小于此阀值的多分辨表示中的元素充零,然后利用一个有效的稀疏矩阵表示将其保存起来，注意到。对于同一个地震模拟问题来说,这个矩阵是不变的，只需计算一次即可。

(4)对转化得到的当前时间的一维地震波场向量进行一维多分辨分解，并且设置另一个阀值，将小于阀值的小波系数充零。由于地震波场函数的分段连续性，因此得到的是一个稀疏的向量。

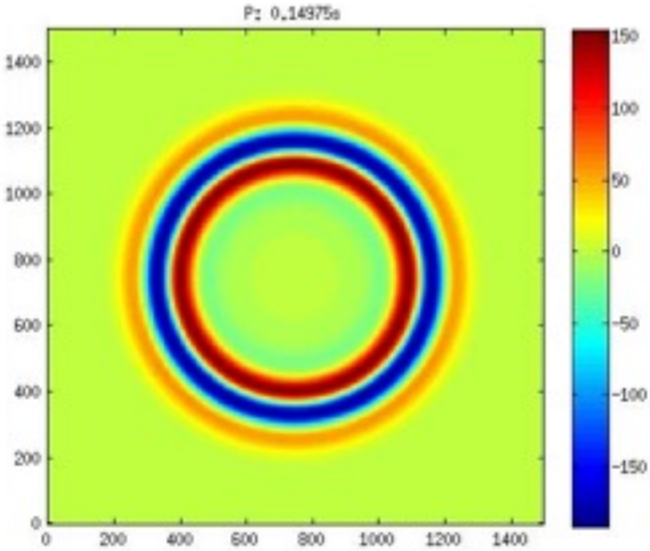
(5)将稀疏矩阵和当前时间的地震波场向量的多分辨分解相乘，加上小波域中的震源函数，并减去小波域中先前时间的地震波场向量的多分辨分解，可以得到将来时间小波域中的地震波场表示。重复该过程，即可得到任一时刻的地下地震波场。

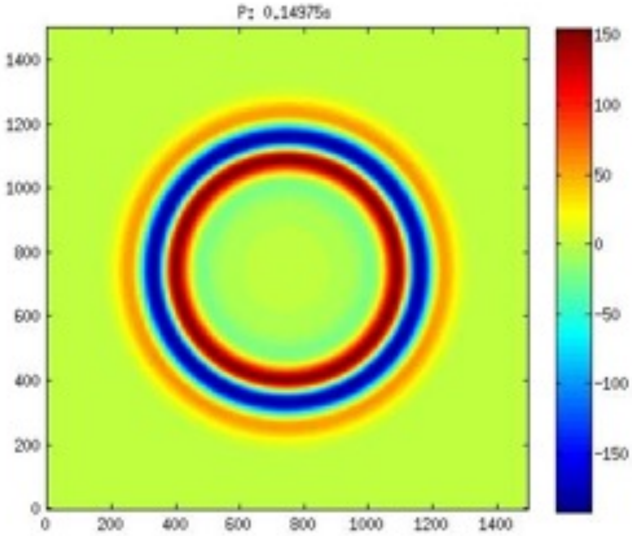
有速度结构与密度结构分布分别如下:





再通过上述多分辨分析将波动函数分解到Haar小波基上进行计算，我们设置总步数为2000，通过这些数据点即可正演出所求区域的波场分布如下图所示:





Finite Difference Time-Domain (FDTD)　　Multi-Resolution Time-Domain (MRTD)

从所得结果可以看出，用多分辨分析的到的结果与有限元方法没有明显差别，计算速度上有提高（不明显，Matlab运行多分辨分析的结果依旧很慢。。。）

V. 程序运行说明

解压seisfd2d_matlab2.zip程序包后，其中sim_elastic2d_iso_stg_multi.m文件是多尺度分析的主程序，直接运行即可（还需要调用其他函数，都在压缩包里，主要是一些我们专业地球物理的接受函数和波场生成函数）。压缩包里我还附上了sim_elastic2d_iso_stg.m文件，是没有改动过的有限元方法的matlab代码，我也是基于此改进得到的多尺度分析程序。二者可以先后运行相比对一下，来体会多尺度分析对提高计算效率的优点。

分工

李智（地球物理专业）：具体实现，结合地球物理学中波动方程的实例推演波场分布，FDTD (finite-difference time-domain) 方法的改进和运用，文献阅读

周培伦（统计专业）：基本公式推导，计算，MRTD (multi-resolution time-domain) 方法的调研，文献阅读

Reference

Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets. Philadelphia,* PA: SIAM, 1992.

Costas D. Sarris, *Adaptive Mesh Refinement for Time-Domain Numerical Electromagnetics*. Morgan & Claypool Publishers.

B. Z. Steinberg and Y. Leviatan, “On the use of wavelet expansions in the method of moments,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 41, pp. 610–619, May 1993.

K. Goverdhanam and L. P. B. Katehi, “Applications of Haar wavelet based MRTD schemes in the characterization of 3D microwave circuits,” in *1999 IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig*.

S.Grivet-TalociaandF.Canavero,“Wavelet-basedadaptivesimulation of nonuniform interconnects with arbitrary loads,” in *Proc. IEEE 1999 Int. Symp. EMC*, Seattle, WA, pp. 450–455.

S. Grivet-Talocia and F. Canavero, “Wavelet-based adaptive solution for the nonuniform multiconductor transmission lines,” *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, vol. 8, pp. 287–289, 1998.

M. Krumpholtz, C. Huber, and P. Russer, “A field theoretical comparison of FDTD and TLM,” *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 43, pp. 1935–1950, 1995.

K. S. Yee, “Numerical solution of initial boundary value problems in- volving Maxwell’s equations in isotropic media,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-14, pp. 302–307, 1966.

K. Goverdhanam, L. P. B. Katehi, and A. Cangellaris, “Applications of multiresolution based FDTD multigrid,” in *1997 IEEE MTT-S Int. Mi- crowave Symp. Dig.*, pp. 333–336.

何凯涛，”小波多分辨分析方法在波动方程正演模拟中的应用”,《地球物理学进展》2001年第02期.

Acknowledgement

感谢地球空间学院张伟老师研究组（http://ess.ustc.edu.cn/user/248）对我们的帮助以及研究组里周逸成师兄所给予的指导！