常微分方程笔记

2024-2025 学年秋冬学期

作者：Yishu Jiang
组织：School of Economics,Zhejiang University
时间：October 8, 2024

Talk is cheap,show me your solution!

前言

本笔记是 2024-2025 学年秋冬学期 3.5 学分概率论的学习笔记, 基于周青龙老师的板书并参考中科大赵立丰老师、清华大学刘思齐老师的常微分方程课程整理而成.

由于本人初次学习概率论且水平能力有限, 笔记中有所疏漏处, 恳请指正.

目录

第一部分

常微分方程的解法

第 1 章 常微分方程的解法

1.1 恰当方程

1.2 一阶线性方程

1.3 一阶隐式方程

1.4 其他重要的常微分方程

1.5 幂级数解法

第二部分

常微分方程的适定性理论

第 2 章 解的几何解释

第 3 章 解的存在唯一性

首先给出本章的一些约定:$I \subset \mathbb{R}$ 是一个区间, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个区域. 函数 $f: I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ 是连续函数 (这一要求是基于 Riemann 积分的, 用来保证积分方程是可导的; 如果是 Lebesgue 积分, 则要求 f 是几乎处处连续的).
初值问题 (E):

$$\begin{aligned}\mathbf{y}' &= \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(x_0) &= \mathbf{y_0}\end{aligned} \tag{3.1}$$

在这一章中, 最核心的定理是 Picard 存在唯一性定理, 表明如果 f 关于 y 是 **Lip-连续**的, 则解在**局部**上存在唯一. 其中有两点值得我们关注, 一个是 Lip-连续, 这是一个相当强的条件, 类似与“可导”; 另一个是局部. 很自然地, 我们要问: 如果弱化“Lip-连续”条件, 会得到什么?——于是有了 Peano 存在性定理和 Osgood 存在唯一性定理. 如果扩充“局部”的结论, 这是否可行?——于是有了解的延伸定理; 更进一步地, 在延伸的基础上要估计解的最大存在区间——从而有了比较定理.

在处理解的存在性问题时, 我们的基本思路是: **构造一族 $\{y_n(x)\}$, 希望它能一致收敛到方程的解.**

3.1 Picard 定理

首先定义 Lipschitz 条件:

定义 3.1 (Lipschitz 条件)

设函数 $f(x, y)$ 在区域 Ω 上满足: 存在常数 $L > 0$, 对于任意的 $y_1, y_2 \in \Omega$ 都有 $\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|$, 则称 $f(x, y)$ 在 Ω 上对 y 满足 Lip-条件. ♣

同样地, 还可以定义局部 Lip-条件, 只需要去掉 L 为“常数”的要求即可 (换言之, 在区域内找不到一个统一的 L 使得均有 Lip-条件成立); 之后会证明在有界闭集上局部 Lip-条件与整体 Lip-条件是等价的. 特别地, 若 Ω 是凸的有界闭区域, f'_y 连续, 则 f 关于 y 满足 Lip-条件.

先给出标量情形的 Picard 定理; 对于向量值函数的版本, 通过定义适当的范数, 可以归结到标量情形.

定理 3.1 (Picard 存在唯一定理)

若 $f(x, y)$ 在矩形区域 $R: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$ 上连续, 且关于 y 满足 Lip-条件. 则初值问题 (E) 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上有且仅有一个解. 其中 $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}, M = \max_{(x,y)\in R} |f(x, y)|$. ♡

证明

Step1. 转化成等价的积分方程.
初值问题等价于

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\mathrm{d}s$$

(这样处理的好处在于: 积分方程在解连续时是自动满足可微性的条件的, 且包含了初值; 另外积分不等式相比微分不等式在估计上更加方便.)
以下说明等价性: 若 $y(x)$ 连续, 则 $f(x, y(x))$ 连续, 从而可知 $y(x)$ 可微, 且 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y(x)), y(x_0) = y_0$. 反之, 若 $y = y(x)$ 是初值问题 (E) 的解, 从 x_0 到 x 积分, 有 $y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(x, f(x))\mathrm{d}x$.
Step2. 构造 Picard 序列.

构造如下 Picard 序列 $\{y_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, 满足:

$$\begin{cases} y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_{n-1}(s))\mathrm{d}s \\ y_0(x_0)=y_0 \end{cases}$$

(一致连续性如果成立, 这是非常好的性质, 它允许积分和极限换序, 从而可以由序列极限逼近方程的解.)

接着验证 $|y_n(x)-y_0|\le b, n=1,2,3,\cdots$, 采用数学归纳法: $|y_1(x)-y_0|=|\int_{x_0}^{x} f(s,y_0)ds|\le M|x-x_0|\le M\cdot h\le M\cdot b/M=b$ 假设 $|y_{n-1}(x)-y_0|\le b$, 则 $|y_n(x)-y_0|=|\int_{x_0}^{x} f(x,y_{n-1}(x))\mathrm{d}x|\le M|x-x_0|\le b$.

Step3. 说明 Picard 序列一致收敛.

注意到:

$$y_n(x)=\sum_{j=0}^{n-1}(y_{j+1}(x)-y_j(x))+y_0(x)$$

要说明 $\{y_n(x)\}$ 一致收敛, 只需说明 $\sum_{j=0}^{\infty}(y_{j+1}(x)-y_j(x))$ 收敛.

对 $|y_{j+1}(x)-y_j(x)|$ 进行估计:

$j=0$,$|y_1(x)-y_0|=|\int_{x_0}^{x} f(x,y_0)\mathrm{d}x|\le M|\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x|=M|x-x_0|$.

$j=1$,$|y_2(x)-y_1(x)|=|\int_{x_0}^{x}(f(x,y_1(x))-f(x,y_0))\mathrm{d}x|\le\int_{x_0}^{x} L|(y_1(x)-y_0)|\mathrm{d}x\le\int_{x_0}^{x} LM|x-x_0|\mathrm{d}x=\frac{1}{2}LM|x-x_0|^2$.

$j=2$,$|y_3(x)-y_2(x)|=|\int_{x_0}^{x}(f(x,y_2(x))-f(x,y_1(x)))\mathrm{d}x|\le\int_{x_0}^{x} L|(y_2(x)-y_1(x))|\mathrm{d}x\le\int_{x_0}^{x}\frac{1}{2}L^2M|x-x_0|^2\mathrm{d}x=\frac{1}{6}L^2M|x-x_0|^3$.

一般地, 有 $|y_{j+1}(x)-y_j(x)|\le\frac{1}{(j+1)!}L^jM|x-x_0|^{j+1}=\frac{M}{L}\cdot\frac{(L|x-x_0|)^{j+1}}{(j+1)!}$.

故 $|\sum_{j=0}^{\infty}(y_{j+1}(x)-y_j(x))|\le\sum_{j=0}^{\infty}\frac{M}{L}\cdot\frac{(L|x-x_0|)^{j+1}}{(j+1)!}\le\sum_{j=0}^{\infty}\frac{M}{L}\cdot\frac{(Lh)^{j+1}}{(j+1)!}<+\infty$. 从而 $y_n(x)\rightrightarrows\varphi(x)\ on\ [x_0-h,x_0+h]$.

在 Picard 序列中, 令 $n\to+\infty$, 有 $\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))\mathrm{d}x$, 即 $\varphi(x)$ 是 Step1 中积分方程的解, 也即初值问题 (E) 的解.

Step4. 证明解的唯一性.

(很经典的操作, 证明解的唯一性是 Gronwall 不等式的重要应用之一; 另外, 这里也正是 Lip-条件保证了可以这么估计, 从而得到了唯一性)

设 $y=\phi_1(x),y=\phi_2(x)$ 都是初值问题 (E) 的的解. 令 $\omega(x)=\phi_1(x)-\phi_2(x)$, 则有

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x}\right| &= \left|\frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}x}\right| \\ &= \left|(y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\phi_1(x))\,\mathrm{d}x)-(y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\phi_2(x))\,\mathrm{d}x)\right| \\ &= \left|\int_{x_0}^{x}(f(x,\phi_1(x))-f(x,\phi_2(x)))\,\mathrm{d}x\right| \\ &\le L|\int_{x_0}^{x}(\phi_1(x)-\phi_2(x))\mathrm{d}x|(Lip) \\ &\le L\int_{x_0}^{x}|\omega(x)|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式可知, $|\omega(x)|\le 0$, 从而 $\omega(x)\equiv 0$, 即解唯一.

3.2 Peano 定理

3.3 解的延伸定理

3.4 比较定理

第 4 章 解对初值和参数的依赖性

4.1 解对初值和参数的连续依赖性

4.2 解对初值和参数的连续可微性

第三部分

高阶微分方程与线性常微分方程组

第 5 章 线性微分方程组

第四部分

其他延伸内容

第 6 章 边值问题

6.1 Sturm 比较定理

6.2 Strum-Liouville 边值问题

6.3 特征函数系的正交性

6.4 周期边值问题

第 7 章 常微分方程定性理论

7.1 动力系统、相空间、轨线

7.2 Lyapunov 稳定性

7.3 平面奇点和极限环

第 8 章 一阶偏微分方程

8.1 首次积分