中级宏观经济学 (拔尖班) 笔记

2024-2025 学年秋冬学期

作者：Yishu Jiang

组织：School of Economics,Zhejiang University

时间：October 31, 2024

Talk is cheap,show me your solution!

前言

本笔记是 2024-2025 学年秋冬学期面向经济学拔尖班开设的中级宏观经济学的学习笔记, 主要使用的教材为何樟勇《高级宏观经济学》和卢卡斯的《经济动态的递归方法》, 授课老师为邬介然.

前半学期的内容更偏向于传统的中宏所涉及的模型, 普通班的同学也可以参考; 后半学期的内容更偏向于高宏的内容.

由于本人初次学习中宏且水平能力有限, 笔记中有所疏漏处, 恳请指正.

目录

第一部分

中宏的简单模型

第 1 章 单期代表性行为人模型

本章介绍最简单的一类宏观经济模型: 代表性行为人模型 (Representative Agent Model), 在这个模型中, 抽象掉**异质性和分配问题** (例如收入、财富、偏好等都被同质化假设掉了). 假定经济由一个代表性的企业和一个代表性的消费者组成 (这和有许多本质相同的企业和许多本质相同的消费者所组成的经济是相同的).

基本的分析思路是: 首先关注行为人在约束条件下的最优化问题, 然后分析不同行为人的自利行为交互会产生怎样的效果. 首先我们需要知道消费者的偏好, 企业的生产技术以及消费者与企业的资源禀赋.

在正式开始分析前, 我们先讨论一个非常基本的问题: 为什么我们可以用代表性行为人的假设抽象掉所有的异质性? 事实上, 它的理论基础是 Arrow-Debru 定理. 当然, 这里不深究具体的技术细节和定理证明, 主要探讨思路上的问题: 在宏观的视角下, 先不考虑个体偏好的差异, 考虑更加易于度量的"收入和财富"的异质性, 并试图抽象掉它——引入所谓的"**个体冲击** (individual shock)", 这里我们不管中间过程如何, 把生下来到长大这段时间中的乱七八糟的都忽略掉, 把人与人之间的收入和财富差异都抽象成一种外部冲击: 即每个人在本质上是一样的, 但由于存在外部冲击, 导致了收入和财富的不同, 继而使得每个消费者的最优化选择出现差异; 而在总体上, 我们希望通过某种"内部交易"方式, 让这些内部冲击相互对冲掉又不会对总体性的结果造成影响. 于是我们引入"保险"来对冲风险, 假设所有人初始财富一致, 彼此之间通过互保的方式应对外部风险, 那么, **假定金融市场是完备的 (这是很理想的假设, 现实中并做不到, 因为现实中的保险交易次数是可数的而风险可以连续变动)**, 无穷期的交易下去, 最终的所有人的财富都应当是一样的 (因为把彼此之间的个体冲击都对冲掉了, 相当于没有个体冲击). 这就是 Arrow-Debru 定理的基本思想, 在此基础上他们证明了福利经济学基本定理, 这一思想也是代表性行为人模型的理论基础.

1.1 决策环境: 偏好、技术与禀赋

1. 基本环境
   (a). 经济活动只进行**一期**.
   (b). 经济中只有一个代表性消费者和一个代表性企业 (相当于有许多本质上相同的消费者和企业放在一块儿).
   (c). 代表性消费者决定最优的资本供给和劳动供给; 代表性企业决定最优的资本和劳动使用量.
   (d). 消费者和企业的行为都是**完全竞争**的 (**对消费者和企业而言, 价格是外生给定的**).
   (e). 消费者拥有企业 (因为在均衡的时候, 市场出清, 相当于消费者提供的劳动和资本都转化为了产品并被消费完全).

   需要注意的是, 这些假设都是基于均衡性质的结果, 经济模型本身是动态的, 但在这里我们只分析经济达到均衡时的情形, 因而可以使用上述假设, 在动态模型的过程中不能这么干; 类似地, 在处理总的消费的时候也需要注意个体加总的问题, 总消费函数与个体消费函数的含义有根本上的不同, 不能出现混为一谈的问题.
2. 偏好
   我们用效用函数来表示消费者的偏好:
   $$u(c,l)$$
   其中 c 表示消费,l 是闲暇. 两者之间存在一个替代作用: 每天的时间是固定的, 闲暇时间越长, 劳动时间越短, 收入就越少, 消费也就越少, 反之同理. 效用函数满足以下假设:
   (a). 严格凹 (确保最优解存在)、二次可微;
   (b). 严格增:$u(\cdot)$ 对 c 和 l 增;
   (c). Inada 条件 (规范性条件, 确保没有角点解):
   $$\frac{\partial u}{\partial c}(0,l)=+\infty,\ \frac{\partial u}{\partial c}(+\infty,l)=0;\ \frac{\partial u}{\partial l}(c,0)=+\infty,\ \frac{\partial u}{\partial l}(c,+\infty)=0$$
3. 技术
   我们用生产函数刻画技术:
   $$y=zf(k,n)$$
   其中 k 表示资本要素投入, n 表示劳动要素投入, y 表示产出, z 是全要素生产参数 (TFP, 用于解释在给定相同的资本和劳动的情形下产出的不同, 反应劳动和资本的效率).f 满足如下假设:
   (a). 严格拟凹 (生产问题的形式是无约束的最优化, 不需要用到更强的 "严格凹" 假设)、二次可微;
   (b). 严格增;
   (c). 一次齐次 (**表明规模报酬不变**);
   (d). Inada 条件
4. 禀赋
   消费者拥有 k_0 的初始资本, 初始资本只能租借给企业不能用于自己消费, 资本与消费品可以转换; 消费者还拥有 h 的时间禀赋, 可以用于劳动也可以用于闲暇.

第 2 章 两期动态模型

第 3 章 三期动态模型

第 4 章 无穷期动态模型

第二部分

DEGE: 动态随机一般均衡

第 5 章 动态随机一般均衡基础

本章介绍 DSGE 的一些基础知识, 包括集值映射、Bellman 方程、最优化和动态规划等, 并简单介绍一下引入随机性 (风险) 的情形. 主要参考书为《动态经济的递归方法》. 同时为了写公式方便, 笔者这里在涉及到较多公式的区域时会直接写英语 (~~也是在复刻邬 sir 的上课风格~~).

5.1 集值映射

作为

5.2 Bellman 方程

在之前的无穷期模型中, 我们已经接触到了 Bellman 方程, 通过迭代的方法求解无穷期的最优化问题, 从而有了 Bellman 方程. 但 Bellman 方程的求解是相当困难的, 并且对于这样一个形式的方程, 我们在求解之前首先得讨论它的解的存在性和唯一性.

5.2.1 Bellman 方程的基本形式

5.2.2 预备概念与定理

通过之前的讨论, Bellman 方程的解定义在了函数空间上, 现在的目标是将 $\mathbb{R}^n$ 上的性质相似地迁移到函数空间上. 为此, 我们需要引入度量空间、收敛、完备性、压缩映射等概念.

5.2.2.1 度量空间

首先我们给出度量的概念, 它用于刻画“距离”的概念.

定义 5.1 (metric and metric space)

A Metric Space is a set S and a function $d : S \times S \to \mathbb{R}$ such that for all $x, y, z \in S$:

1. $d(x, y) \geq 0$ (non-negativity) and $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (identity of indiscernibles)
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (symmetry)
3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ (triangle inequality)

The function d is called a metric. ♣

定义 5.2 (covegence)

A sequence $\{x_n\}$ in a metric space (S, d) is said to converge to $x \in S$ if for every $\varepsilon > 0$, there exists an N such that $d(x_n, x) < \varepsilon$ for all $n \geq N$. ♣

定义 5.3 (completeness)

A metric space (S, d) is said to be complete if every Cauchy sequence in S converges to a point in S. A sequence $\{x_n\}$ is said to be Cauchy if for every $\varepsilon > 0$, there exists an N such that $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ for all $n, m \geq N$. ♣

5.2.2.2 Banach 空间与压缩映射定理

接着我们要更进一步, 刻画单个元素的“大小”. 为此我们引入范数的概念.

定义 5.4 (norm and norm space)

A norm on a vector space V is a function $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ such that for all $x, y \in V$ and $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\|x\| \geq 0$ (non-negativity) and $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (identity of indiscernibles)
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ (positive-homogeneity)
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (triangle inequality)

♣

以下是一些函数空间上一些常见的范数.

- L^p 范数:
$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p dx\right)^{1/p}$$
- L^∞ 范数 (又称无穷范数):
$$\|f\|_\infty = \sup |f|$$
- L^2 范数 (也就是常说的欧式范数):
$$\|f\|_2 = \left(\int |f|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}$$
- L^1 范数 (俗称曼哈顿范数): L^1 范数是定义在函数空间上的范数, 它的定义如下:
$$\|f\|_1 = \int |f| \mathrm{d}x$$

事实上, 我们可以用范数定义度量, 换言之, 赋范线性空间一定是度量空间. 在赋范线性空间的基础上, 再加上完备性, 我们就得到了 Banach 空间.

定义 5.5 (Banach space)

A Banach Space is a normed vector space that is complete with respect to the metric induced by the norm. ♣

Banach 空间的性质相当优良, 对于压缩映射具有不动点定理, 可以用来证明存在唯一性 (例如数学分析中的隐函数定理、ODE 中的 Picard 定理, 都可以通过压缩映射定理加以证明).

定义 5.6 (contraction mapping)

Let (X, d) be a metric space.A mapping $T : X \to X$ is said to be a contraction if there exists a constant $0 < \beta < 1$ such that for all $x, y \in X$:
$$d(T(x), T(y)) \leq \beta d(x, y)$$

We call β the moudel of T.

♣

压缩映射是一类特殊的映射, 随着迭代的进行, 两个元素的相之间的“距离”会越来越小. 事实上, 可以看出它具有一致连续性.

引理 5.1

Let (S, d) be a metric space and $T : S \to S$ be a contraction mapping, then T is uniformly continous. ♡

证明 For any $\varepsilon > 0$, let $\delta = \frac{\varepsilon}{\beta}$. Since $d(Tx, Ty) \leq \beta d(x, y)$, if $d(x, y) \leq \delta$, then $d(Tx, Ty) < \varepsilon$.

接下来给出本章最重要的一个定理, 正如书中所说的, 简洁且强大.

定理 5.1 (Banach fixed point theorem)

Let (S, d) be a complete metric space and suppose $T : S \to S$ is a contraction mapping with moudle β. Then:

- the operator T has excatly one fixed point $v^* \in S$.
- For any $v_0 \in S$ and for any $n \in \mathbb{N}$, $d(T^n v_0, v^*) \leq \beta^n d(v_0, v^*)$, that means for any $v_0 \in S$,$\{T^n v_0\}_{n=0}^{\infty}$ converges to v^*.

♡

证明

5.2.2.3 函数空间的完备性和 Blackwell 定理

当然, 如果我们要把 **Banach** 不动点定理用于解 **Bellman** 方程, 首先需要说明定义 **Bellman** 算子的函数空间是 **Banach** 空间; 其次还要说明 **Bellman** 算子是一个压缩映射. 本节主要介绍解决这两个问题的两个定理.

定理 5.2 (completeness of continuous-function space)

Let $X \subset \mathbb{R}^L$, $C(X)$ be the set of bounded continuous function $f: X \to \mathbb{R}$ with the sup-norm. Then $(C(X), \|\cdot\|)$ is a Banach Space.

证明 Let $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ be a Cauchy Sequence i.e. for all $\varepsilon > 0$, exists $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ such that $\|f_n - f\| = \sup_{x\in X}|f_n(x) - f_m(x)| \le \varepsilon, \forall n, m \ge N_\varepsilon$. We want to show that there exists a function $f \in C(X)$ such that $\|f_n - f\| \to 0$.

- Find the f.
  Fixed $\bar{x} \in X$, we got a sequence $\{f_n(\bar{x})\}_{n=0}^{\infty}$.
  Since $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ is a Cauchy Sequence, for any $\varepsilon > 0$, there exists N_ε such that
  $$|f_n(\bar{x}) - f_m(\bar{x})| \le \sup_{x\in X}|f_n(x) - f_m(x)| \le \varepsilon, \forall n, m \ge N_\varepsilon$$
  so the $\{f_n(\bar{x})\}_{n=0}^{\infty}$ is a Cauchy Sequence in $\mathbb{R}$, it converges to a limit $f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$.
  Now, we define a function $f: X \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \forall x \in X$.
- Show that $\sup_{x\in X}|f_n(x) - f(x)| \to 0$.
  We want to show that $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in X}|f_n(x) - f(x)| = 0$ i.e. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t. $\sup_{x\in X}|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon, \forall n \ge N_\varepsilon$.
  $$\sup_{x\in X}|f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in X}|(f_n(x) - f_m(x)) + (f_m(x) - f(x))| \le \sup_{x\in X}|f_n(x) - f_m(x)| + \sup_{x\in X}|f_m(x) - f(x)|$$
  Since $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ is a Cauchy Sequence, $\sup_{x\in X}|f_n(x) - f_m(x)| \to 0$;
  Since $\{f_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ is a convergent sequence on $\mathbb{R}$ for any $x \in X$,with the definition of f, for any $m \to \infty$ $\sup_{x\in X}|f_m(x) - f(x)| \to 0$.
  Then $\sup_{x\in X}|f_n(x) - f(x)| \to 0$.
- Proof that $f \in C(X)$.
  We need to proof that $f \in C(X)$ i.e. f is a bounded continuous function.
  Obviously, f is bounded, Otherwise, f_n could not be bounded due to the covegence.
  Besides, $|f(x) - f(x_0)| = |(f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - f_n(x_0)) + (f_n(x_0) - f(x_0))| \le |(f(x) - f_n(x))| + |(f_n(x) - f_n(x_0))| + |(f_n(x_0) - f(x_0))|$
  Since f_n is continous, $|f_n(x) - f_n(x_0)| \to 0$; Since $\{f_n(x_0)\}$ converge to $f(x_0)$ (we have already proved it), $|f_n(x_0) - f(x_0)| \to 0$, similarly, $|f(x) - f_n(x)| \to 0$.

注:
1. 证明完备性需要我们找到 Cauchy 列的极限, 我们的思路是先固定 x, 通过实数的完备性得到点态收敛, 再证明在范数下函数收敛 (事实上依此处定义的范数收敛等价于一致收敛).
2. 从逻辑上来说, 到第二部分为止的证明是不够的, 因为我们没有证明 $f \in C(X)$, 也就是说, f 虽然满足了 $\sup|f_n(x) - f(x)|$ 收敛到零, 但它还不是这个范数所作用的对象, 这一细节还需要进一步地证明.
3. 更自然的想法可能会先证明 $f \in C(X)$ 再证明 $\|f_n - f\| \to 0$, 但在这里有点反其道而行, 主要是为了得到更多的估计工具.
4. 有人可能会困惑为什么这里多了有界的条件, 这主要是因为这儿没说 X 是紧集, 如果声明 X 是紧集的话, 有界性自动成立.

5.3 最优化工具

5.4 马尔可夫过程

第 6 章 真实经济周期模型 RBC

第 7 章 Banking Model

第 8 章 OLG 模型

第 9 章 金融摩擦

第三部分

附录

第 10 章 数学工具

10.1 哈密尔顿方法

第 11 章 宏观经济学的微观经济理论基础

11.1 Arrow-Debru 定理

第 12 章 读书笔记:《宏观经济学史: 从凯恩斯到卢卡斯及其后》