中级微观经济学 (拔尖班) 笔记

2024-2025 学年秋冬学期

作者：Yishu Jiang

组织：School of Economics,Zhejiang University

时间：November 4, 2024

Talk is cheap,show me your solution!

前言

本笔记是 2024-2025 学年秋冬学期面向经济学拔尖班开设的中级微观经济学的学习笔记, 主要使用的教材为范里安的《微观经济学: 现代观点》, 本人使用范里安的《微观经济分析》、MWG 的《微观经济理论》和平新乔的《微观经济学十八讲》作为参考书, 授课老师为汪淼军. 由于本人初次学习中微且水平能力有限, 笔记中有所疏漏处, 恳请指正.

基本的授课思路是先介绍基本假设下的消费者理论和生产者理论, 接着从局部均衡到一般均衡, 得到福利经济学第一第二定理, 以及对市场均衡做进一步分析, 再破除假设研究实际问题; 更加确切地说, 微观经济学更应当称为“价格理论”, 主要研究“看不见的手”在资源配置中的作用.

这份笔记的思路基本按照汪老师的上课思路展开, 但在细节上会补充一些课上没有处理的特别好的技术细节, 力求让笔记阅读起来更加流畅, 因此会涉及一些高微的内容做补充, 在初学时遇到这些内容如果感到困难的话可以先跳过.

目录

第 1 章 预备数学知识

1.1 最优化的数学工具: 拉格朗日方法与哈密尔顿方法

拉格朗日方法 (一般用在静态的处理中)

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})$$
$$\text{s.t.}\ \ g(\mathbf{x}) \leq 0$$

构造拉格朗日函数 $L(\mathbf{x};\lambda) = f(\mathbf{x}) - \lambda g(x)$(经济学中一般喜欢让 $\lambda > 0$, 在后面有相应的经济学含义).
一阶条件 FOC:$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$ 且 $g(\mathbf{x}) = 0$. 当然, 解出来的结果并不一定就是最值, 还需要验证二阶条件; 另外, 拉格朗日方法只能给出内点解, 对于二阶条件和角点解的处理, 后续会介绍 KKT 条件.

哈密尔顿方法 (往往和动态最优化相关)

1.2 包络定理

考虑一个带参数的最优化问题 (这里假设 f 性质足够好):

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x};a) =: v(a)$$

记 $\mathbf{x}^* \in \arg\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x};a)$, 两边同时对 a 求导, 有:

$$\frac{\mathrm{d}v(a)}{\mathrm{d}a} = \frac{\partial f}{\partial x_1^*}\frac{\partial x_1^*}{\partial a} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n^*}\frac{\partial x_n^*}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial a}$$

又根据最值的一阶条件:$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 故有

$$\frac{\mathrm{d}v(a)}{\mathrm{d}a} = \frac{\partial f}{\partial a}$$

包络定理在我们只关注参数对最值的影响时, 直接绕开了求解最值的过程, 对比较静态分析的化简有很大帮助.

1.3 凹函数与拟凹函数

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为凹函数等价于 $tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \leq f(tx_1 + (1-t)x_2), \forall t \in (0,1)$; 一般会假设 $f''(\cdot) \leq 0$.
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为拟凹函数等价于 $f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq \min\{f(x_1), f(x_2)\}, \forall t \in (0,1)$.

第 2 章 消费者行为

对于消费者, 我们要刻画其需求——构成需求需要三个元素: 可选择的商品组合、价格以及消费者的收入.

基本知识框架:

1. 偏好关系与效用函数
2. 消费集、预算集
3. 约束下的最优化问题; 无差异曲线、Walras 需求函数、效用最大化问题、支出最小化问题、间接效用函数、花费函数、对偶关系.

2.1 消费集和预算约束

2.1.1 消费集

首先我们讨论消费者选择的对象: 商品. 不考虑任何经济上的约束, 对于可供消费者选择的商品, 假设共有 n 种. 用一个 n 维向量 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 表示一个消费选择, 称作**消费束**, 所有消费束所构成的集合 $X\subset\mathbb{R}_+^n$ 称作**消费集**.

消费集通常符合以下假设:

1. $X\subset\mathbb{R}_+^n$, 即消费数量非负（“减少一些东西”可以用绝对值替代）.
2. $0\in X$.
3. X 是**闭集**, 指 $\partial X\subset X$(或者 $\forall x\in X$,$\exists\{x_n\}\subset X$, s.t. $x_n\to x, as\ n\to\infty$). 换言之: 消费集中的任意一消费束都可以由一列消费束进行逼近, 即消费集允许“极限行为”“擦边球行为”.
4. X 是**凸集**, 指 $\forall x^1,x^2\in X,\forall\lambda\in[0,1],\lambda x^1+(1-\lambda)x^2\in X$, 换言之: **消费集中任意两点连线上的所有点都在消费集内部**, 即可以通过连续的调整, 实现一种消费向另一种消费的过渡.
5. X 无上界. **消费集仅仅表示消费者客观上可选择的商品组合 (也就是在刻画消费者的欲望, 是允许无穷大的), 不考虑消费是否能够实现.**

2.1.2 预算约束

进一步地, 我们引入经济约束——商品的价格和人们的收入限制了消费. 设价格向量 $p=(p_1,\cdots,p_n)$; 设消费这的预算为 m, 则有 $p\cdot x\le m$. 在这一限制条件下, 所有可行的消费品集合为 $\{x\in X\mid p\cdot x\le m\}$, 它是消费集的子集——消费者能负担得起的所有消费束的集合, 也就是**预算集**. 当然, 预算集能表示成 $\{x\in X\mid p\cdot x\le m\}$, 得建立在**市场完备性** (所有商品的价格都是公开、透明的) 的基础上. 考虑最简单的情况, 价格 p 不变, 这种最简单的预算集被称为 Walrasian 运算集, 这建立在**价格接受**假设上, 仅当单个消费者的需求占总需求的占比很小时才成立. 此外, 还有一些因素也会影响消费者选择的可行域: 比如资源约束、分配方式（配额等）. 预算集的边界 $\{x\in X\mid p\cdot x=m\}$ 是 n 为空间中的 $n-1$ 为超平面, 称为**预算超平面**. 可以看出, 价格向量 $p=(p_1,\cdots,p_n)$ 与预算超平面正交.

2.2 偏好关系和效用函数

2.3 偏好与选择

接下来我们需要刻画消费者的选择行为本身. 微观经济学假定人是“理性”的, 反映在偏好上, 也就是说: 对于一个理性的消费者而言, 所有消费束都是可比较的并且这种比较是完备的.

定义 2.1

偏好关系 $\succ$ 是消费集 X 上的一个二元关系, $\forall x, y \in X, x \succeq y$ 当且仅当“X 至少和 y 一样好”.

♣

由此引申出另两种二元关系:

定义 2.2 (严格偏好关系)

$x \succ y$ 当且仅当 $x \succeq y$ 但 $y \succeq x$ 不成立.

♣

定义 2.3 (无差异关系)

$x \sim y$ 当且仅当 $x \succeq y$ 且 $y \succeq x$.

♣

2.3.1 特殊效用函数的计算事例

以下均假设预算约束为 $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq m$.

首先介绍 CES 效用函数 (替代弹性恒定 Constant Elasticity Substitution).

例题 2.1 (CES 效用函数)

$$u(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

边际效用 $MU_{x_i} = x_i^{-\frac{1}{\sigma}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}}$.

边际替代率 $MRS_{x_i, x_j} = \frac{MU_{x_i}}{MU_{x_j}} = \frac{x_j}{x_i}^{\frac{1}{\sigma}}$

p;

2.4 消费者的最优选择

在给定的约束下, 理性的消费者会选择自己最喜欢的商品组合. 这样的最优化结果有两种刻画指标: 给定支付能力（收入）, 获取最大效用——效用最大化问题 (Utility Maximizing Problem,UMP)；给定效用, 使用最小的支出——支出最小化问题 (Expenditure Minimizing Problem,EMP). 这两种问题在最优化问题的意义上且具有**对偶性**.

2.4.1 效用最大化问题 (UMP) 与支出最小化问题 (EMP)

在理性人和价格接受者的假设下, 消费者的最优选择

2.4.2 对偶性: UMP 与 EMP 的联系

2.5 基于最优选择的进一步分析

2.5.1 收入效应与替代效应

2.5.2 收入效应与替代效应的图示

2.5.3 Slustky 方程

定理 2.1 (Slustky 方程)

设 $x(p,y)$ 为马歇尔需求,u 为消费者在价格 p 与收入 y 下的效用水平, 则有

$$\underbrace{\frac{\partial x_i(p,y)}{\partial p_j}}_{TE} = \underbrace{\frac{\partial x_i^h(p,u)}{\partial p_j}}_{SE} \underbrace{-x_j(p,y)\frac{\partial x_i(p,y)}{\partial y}}_{IE}$$

称为 Slustky 方程, 表示价格 p_j 为 x_i 消费量的总效应 (TE) 等于替代效应 (SE) 与收入效应 (IE) 之和. ♡

证明 (事实上,**SLustky** 方程是 **UMP** 与 **EMP** 对偶关系的一个推论). 当 $y=e(p,u^*)$ 时, 有 $x_i^h(p,u^*)\equiv x_i(p,y)$. 两边对 p_j 求偏导, 得 $\frac{\partial x_i^h}{\partial p_j}=\frac{\partial x_i}{\partial p_j}+\frac{\partial x_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p_j}$ 又 $y=e(p,u)$, 由 Shephard 引理, 有 $\frac{\partial y}{\partial p_j}=\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_j}=x_j^h(p,u)=x_j$

2.5.4 福利分析

2.5.5 加总和需求

2.6 其他问题

2.6.1 不确定性下的选择

2.6.2 跨期选择

这一部分内容在中级宏观经济学中也有讲到 (参见中宏里的两期模型).

第 3 章 生产者行为

3.1 技术

3.2 生产者的最优选择

3.2.1 利润最大化与利润函数

3.2.2 成本最小化与成本函数

3.2.3 对偶

3.3 短期生产分析

区分生产的短期和长期, 看的是是否所有要去投入都可变. 短期生产中部分要素投入固定, 衡量生产的主要指标是**边际报酬**.

3.4 长期生产分析

在长期生产中, 各种要素投入都可变, 衡量生产的主要指标是**规模报酬**.

第 4 章 一般均衡理论

第 5 章 博弈论基础

(写不动, 后边会专门写有关博弈论、机制设计、信息经济学的学习笔记).

第 6 章 不完全竞争市场——市场结构分析

6.1 垄断与垄断行为分析

6.2 寡头与寡头博弈模型

第 7 章 市场失灵

7.1 公共物品

7.2 外部性

第 8 章 回忆卷整理

本部分为 2024-2025 学年小测和历年卷整理, 请勿外传.

8.1 第一次小测

第 1 题为必做题, 2-8 题中选 6 题作答, 每题 2 分, 限时 50 分钟. 小测题基本来自平时讲过的例题, 有改编, 难度不大但请限时完成——尤其确保计算的准确性和熟练性, 50 分钟做这样一张卷子时间相对紧张.

1. 判断题

(1). 在其他条件不变时, 一种商品的价格上升最终导致其需求量增加, 则说明该商品价格变化产生的替代效应可能为正.

(2). 如果收入的补偿变化越大, 则受政策影响的个体效用减少的越多; 如果收入的等价变化越大, 则受政策影响的个体效用减少的越多.

(3). 如果所有生产要素按照相同比例变化至其原来的 0.5 倍, 而对应的产量也变化为原来的 0.4 倍, 则该生产技术具有规模报酬递增的特征.

(4). 在完全竞争市场中, 自由进入行业必然导致企业的长期利润为零. 因此, 产品的市场价格必然是由生产产品的要素价格决定的.

2. 某消费者消费三种商品, 效用函数为 $u(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 8(x_2 + x_3)^{\frac{1}{2}}$, 商品 x_1, x_2, x_3 的价格分别为 $4, 4, 8$, 消费者的收入水平为 $m = 120$. 求消费者对这三种商品的最优消费量.

3. 在一个完全竞争市场中, 企业的生产函数为 $f(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}} + 2x_2^{\frac{1}{2}}$, 两种生产要素 x_1, x_2 对应的市场也是完全竞争的, 且其市场价格分别为 4 和 4. 若短期内要素 $x_1 = 1$, 求出企业的短期供给函数.

4. 企业有两家生产函数, 两家工厂的生产函数分别是 $f(x_1, x_2) = \frac{1}{4}x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$ 和 $f(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{4}}x_2^{\frac{1}{4}}$, 两种竞争性生产要素的市场价格分别是 1 和 4. 当产品市场是竞争的且价格为 8 时, 求出企业两家工厂的最优产量.

5. 间接效用函数 $V(\mathbf{p}, m) = u(\mathbf{x}(\mathbf{p}, m))$, 其中 $\mathbf{x}(\mathbf{p}, m)$ 是在给定价格 $\mathbf{p}$ 和收入 m 时使效用最大化的消费束. 证明: 对于 $t > 1$, 有 $V(t\mathbf{p}, tm) = V(\mathbf{p}, m)$.注意这道题没有可微的条件!

6. 在完全竞争市场中, 所有企业的成本函数都为 $c(q) = q^2 + 20q + 100$, 其中 q 为对应企业的产量. 汽车的需求市场由 500 个消费者组成, 其效用函数为 $u = 10x_1 - \frac{1}{2}x_1^2 + x_2$, x_1 表示汽车, x_2 由一个竞争性市场供给, 市场价格为 10. 厂商进入或者退出不改变任何一家汽车企业的成本函数. 求出长期均衡时市场上存在的汽车厂商数目.

7. 消费者初始财富为 W_0, 存在 π 的概率可能遭受 L 的损失. 现在消费者决定购买 K 单位保险, 事前需要支付保险费用 $\gamma \cdot K$, 在遭受损失时可获得赔偿 K. 假设消费者效用函数 $u(W)$ 满足: $u'(\cdot) > 0, u''(\cdot) < 0, u'''(\cdot) < 0$, 其中 W 为消费者某一状态的财富水平. 现假设存在内点解和保险费率 $\gamma > \pi$, 证明最优保险额度满足: 最优保险额度 K 是保险费率 γ 的单调递减函数.

8. 在完全竞争的行业中, 某企业的生产函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 是严格递增的凹函数, 其生产要素 $x_i, i = 1, \cdots, n$ 都来自完全竞争市场. 假设任意要素 x_i 对应的市场价格为 w_i 且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$. 证明: 企业利润最大化满足:

$$\frac{\partial x_i}{\partial w_j} = \frac{\partial x_j}{\partial w_i}$$