

基于热传导和最优化的炉温曲线控制

摘 要

本文针对回焊炉炉温曲线、温区温度和过炉速度的控制问题，建立了热传导模型和优化模型，利用有限差分法对热传导模型求解，利用二分法与粒子群算法对优化模型求解，确定焊接区域中心的温度，由此绘制出炉温曲线，得到不同约束条件下各温区温度和过炉速度的最优解。

为了构造炉温曲线，本文选取回焊炉内的不同位置建立了相应的热传导模型。首先，本文确定热量在空气介质中同时存在热传导与热对流两种传热方式，在 SMC 内部以热传导为主要传热方式，进而建立了热传导方程，又根据对流传热确定了边界条件，结合初始条件构成偏微分方程的定解问题。由此建立了小温区间隙的热传导模型与 SMC 焊接区域中心的热传导模型，作为本文的模型基础。随后，本文采用有限差分法求解热传导模型，使用前项差分对偏微分方程近似微分，得到模型对应的线性方程组，利用矩阵的 LU 分解对其进行不停的求解迭代，即可得到焊接区域中心温度随时间的分布，即炉温曲线。

为了求解 SMC 经过不同温区位置时焊接区域中心的温度，本文结合小温区间隙的热传导模型和 SMC 焊接区域中心的热传导模型，利用有限差分法分别求解这两个模型，在已知各温区温度的条件下，得到了小温区 3、6、7 中点及小温区 8 结束处焊接区域中心的温度分别为 134.60°C ， 171.84°C ， 191.34°C ， 224.68°C ，并绘制出了相应的炉温曲线，每隔 0.5s 焊接区域中心的温度数据存放在 result.csv 中。

为了求解特定条件下允许的最大过炉速度，本文在热传导模型的基础上建立了单目标优化模型，目标变量为传送速度，约束条件为制程界限。运用二分法在规定的速度范围内进行二分搜索，求解得到满足条件的最大传送带过炉速度为 71.00 cm/min 。

为了求解指定曲线要求下的最优炉温曲线，各温区温度和过炉速度，本文在热传导模型的基础上建立了多目标优化模型，目标变量分别为各温区段温度和过炉速度，约束条件为制程界限。运用数值积分、粒子群算法求解该模型，求解得到指定要求下的最优炉温曲线，各温区段的设定温度为 178.17°C ， 186.50°C ， 237.11°C ， 264.89°C ，传送带过炉速度为 89cm/min 。

为了求解满足一定对称条件下的最优炉温曲线、各温区温度、过炉速度及相应指标值，本文在问题三的基础上建立新的多目标优化模型。本文采用一种新颖的利用偏态系数确定曲线函数对称性的方法，作为判定曲线对称性的指标，并将该指标作为目标函数构建多目标优化模型。随后运用粒子群算法求解该模型，得到符合要求的最优炉温曲线，各温区段的设定温度为 165.00°C ， 185.26°C ， 228.46°C ， 264.58°C ，传送带过炉速度为 82cm/min ，相应的指标值为 $\text{SK}=0.1916$ 。

关键词：热传导，热对流，最优化，数值积分，粒子群算法，偏态系数

1 问题重述

1.1 问题背景

印刷电路板回流焊工艺是电子制造行业表面贴装技术 SMT 生产线上极其重要的工艺过程，需要将安装有各种电子元件的印刷电路板 PCB 放置在回焊炉中，通过加热，将电子元件自动焊接到电路板上。回流焊过程的控制是电子产品生产质量的关键，决定着产品的终端质量。

回流焊过程控制在工艺上表现为回流焊温度曲线的控制，它是指印刷电路板与表面组装元器件之间的焊点温度随时间变化的曲线^[16]，该曲线需要满足一定的控制要求，避免因温度过高对元件造成损坏以及避免温度不足造成焊接缺陷。

1.2 问题重述

回焊炉内部设置 11 个小温区及炉前区域和炉后区域，每个小温区长度为 30.5 cm，相邻小温区之间有 5 cm 的间隙，炉前区域和炉后区域长度均为 25 cm。小温区根据功能划分为：预热区、恒温区、回流区、冷却区。电路板两侧搭在传送带上匀速进入炉内进行加热焊接。通过温度传感器检测焊接区域中心温度，由此得到焊接区域中心温度曲线，简称炉温曲线。炉温曲线也需要遵循一定的要求，称为制程界限。

根据上述背景，我们需要解决以下问题：

1. 建立数学模型，描述焊接区域的温度变化规律。题目给定传送带过炉速度为 78 cm/min，各温区温度的设定值分别为 173°C （小温区1-5）、 198°C （小温区6）、 230°C （小温区7）和 257°C （小温区8-9）。根据已知条件建立模型，说明焊接区域中心温度的变化情况，列出小温区 3、6、7 中点及小温区 8 结束处焊接区域中心的温度，画出相应的炉温曲线，并给出每隔 0.5 s 焊接区域中心的温度存放在提供的 result.csv 中。

2. 确定允许的最大传送带过炉速度。此时假设各温区温度的设定值分别为 182°C （小温区1-5）、 203°C （小温区6）、 237°C （小温区7）、 254°C （小温区8-9）。

3. 确定特定要求下的最优炉温曲线、各温区的设定温度和传送带的过炉速度。要求焊接区域中心的温度超过 217°C 的时间不宜过长，峰值温度也不宜过高。理想的炉温曲线应使超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积最小，并求出相应的面积。

4. 在问题 3 的基础上，结合新的要求，给出最优炉温曲线、各温区的设定温度、传送带的过炉速度和相应指标值。此时要求炉温曲线不仅满足制程界限，而且以峰值温度为中心线的两侧超过 217°C 的炉温曲线应尽量对称。

2 问题分析

2.1 回焊炉中热量传递方式的确定

按照热量传递的不同机理，可将传热划分为三种基本方式：热传导，热对流和热辐射^[1]。

热传导是介质内无宏观运动时的传热现象，其在固体、液体和气体中均可发生，但严格而言，只有在固体中才是纯粹的热传导。

热对流是由于液体、气体中温度不同的各部分之间发生宏观相对运动所引起的热量传递过程。工程上经常遇到的是运动流体和温度不同的固体表面之间的热量传递过程^[13]，这种热量传递过程称为表面对流传热，简称对流传热。

热辐射是指温度高于绝对零度的物体向外界以电磁波的形式发射能量的过程。一切温度高于绝对零度的物体都能产生热辐射，温度愈高，辐射出的总能量就愈大，短波成分也愈多。一般的热辐射主要靠波长较长的可见光和红外线传播。由于电磁波的传播无需任何介质，所以热辐射是在真空中唯一的传热方式。

回流焊是利用加热电路将空气或氮气加热到足够高的温度后吹向已经贴好元件的线路板，让贴片元件 SMC 两侧的焊料融化后与 PCB 焊盘融合焊接在一起，然后再通过回流焊的冷却把焊料冷却使 SMC 与 PCB 固化在一起^[5,9,14]。

在热量通过气体向贴片元件 SMC 和 PCB 转移的过程中，热量在空气介质中传递时同时存在热对流与热传导，在贴片元件和线路板上主要以热传导的方式传热，可忽略热辐射对热量传递的影响。

2.2 热传导分析

确定热量在不同介质中的传递方式后，即可建立热量与传递时间、传递距离的数学物理方程。

由题目可知回焊炉中单个小温区内的温度要求保持一致，小温区间隙的温度与相邻温区的温度有关，各温区边界附近的温度可能会受到相邻温区温度的影响，所以在相邻小温区的间隙之间考虑热传导，在小温区与间隙的分界面上考虑热对流。同样，在 SMC 内部考虑热传导，在 SMC 与其表面的空气介质分界面上考虑热对流。由此可根据傅里叶定律^[6]得到相应的热传导方程；根据牛顿冷却定律^[2]在分界面上建立方程描述对流传热情况，得到边界条件；根据零时刻状态确定初始条件。据此得到偏微分方程的定解问题。

2.3 偏微分方程的求解

偏微分方程的求解一般分为解析法和数值法，只有一部分偏微分方程能够求得解析解，实际问题较为复杂在此处并不适用，于是我们采用数值法进行求解。常用的数值解法有：有限差分法、有限元法、矩量法、边界元法，其中有限差分法最是普遍通用。有限差分法的基本思想是将场域划分为网格，把求解场域内连续的场分布用网格节点上的离散的数值解来代替，即用网格节点的差分方程近似代替场域内的偏微分方程来求解。一般来说，只要将网格划分得充分细，所得结果就可达到足够的精确。同时，在利用有限前项差分法时应注意时间步长的选取以保证算法的稳定性^[11]。

3 模型假设

1. 假设空气的比热容不随小幅度温度变化而变化；
2. 假设全程采用热风强制回流焊方法，使用温区式设备工作；
3. 假设该过程中的电子元件为表面组装元件SMC；
4. 假设回焊炉内除加热电路外无其他热源；
5. 假设忽略各种加工缺陷（如：锡膏塌陷、灯芯虹吸现象、润湿不良、虚焊、歪斜等）对热量传递的影响；
6. 假设回焊炉在纵截面视角下的一维水平方向上各点所处的单位空间区域内温度相同；
7. 假设回流焊炉中的气体环境为均匀空气介质；
8. 假设单个小温区内各处的温度相同，该温区的空气介质中各位置的温度也相同。

4 变量与名词说明

4.1 变量说明

表 1 本文章中的主要变量说明

变量名称	变量含义	变量单位
u	温度	$^{\circ}C$
t	时间	s
x	横轴位置坐标	mm
y	纵轴位置坐标	mm
ρ	密度	kg/m^3
c	比热容	$kJ/(kg \cdot ^{\circ}C)$
λ	热传导率（导热系数）	$w/(m \cdot ^{\circ}C)$
k	对流换热系数（热对流系数）	$w/(m^2 \cdot ^{\circ}C)$
q	热流密度	$J/(m^2 \cdot ^{\circ}C)$
$u(x, t)$	(x, t) 处的温度	$^{\circ}C$
$u^{x_0}(t)$	在 $x = x_0$ 下温度随时间变化的一维函数	$/$
$u_{t_0}(x)$	在 $t = t_0$ 下温度随空间位置变化的一维函数	$/$
u_i	第 i 组小温区的设定温度（每组小温区温度一致）	$^{\circ}C$

4.2 名词解释

SMT：电子电路表面组装技术，它是一种将表面组装元件 SMC 安装在 PCB 表面或其它基板的表面上，通过流焊或浸焊等方法加以焊接组装的电路装连技术。

SMC：表面组装元件，是指外形为矩形片状、圆柱形，无引线或短引线，其焊端或引线制作在同一平面内并适用于 SMT 贴片加工组装的电子元器件。

PCB：印刷电路板。

5 模型建立与求解

在本章中，5.1 和 5.2 节是模型准备，其中包括小温区间隙和 SMC 中的热传导模型的建立、求解，以及各物性参数的确定。5.3、5.4、5.5 和 5.6 节分别针对问题一至问题四进行了分析建模。5.7 节是所建立模型的求解结果。

5.1 小温区间隙的热传导模型

对于小温区间隙的热传导模型，首先利用两侧小温区的温度 u_1 和 u_2 结合牛顿冷却定律和热对流建立边界条件，然后利用热传导方程建立微分方程模型。利用有限差分法求解此模型。

5.1.1 模型建立

热量在在空气介质中传递时同时存在热对流与热传导，在 SMC 和 PCB 上主要以热传导的方式传热。我们针对小温区间隙建立如图 1 所示的平面直角坐标系。

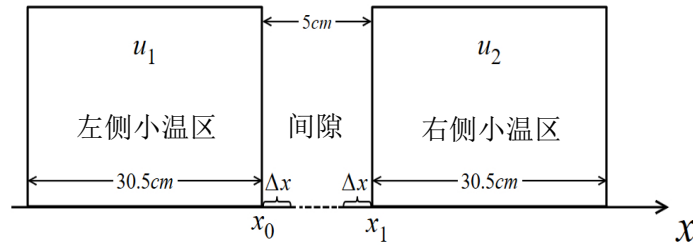


图 1 小温区间隙内热传导模型的空间示意图

首先，考虑空气介质中的热对流情况。小温区的间隙（炉前，炉后区域也视为间隙）处存在流动的空气介质，空气作为运动流体和温度不同的固体表面之间的进行热量传递，该过程称为表面对流传热，简称对流传热^[6]。根据牛顿冷却定律^[2]：当物体表面与周围存在温度差时，单位时间从单位面积流出的热量与温度差成正比，即

$$q = k\Delta u, \quad (1)$$

其中 q 是热流密度, k 是热对流系数, $\Delta u = u_1 - u(x_0, t)$ 表示小温区温度 u_1 与间隙边缘温度 $u(x_0, t)$ 之差, $u(x_0, t)$ 代表 t 时刻 x_0 位置的温度。 q 刻画了对流热量的量级, 且热流密度等于间隙边界的温度变化率与热传导系数 λ 的乘积, 由此可得小温区与间隙分界面上的边界条件:

$$\begin{cases} -\lambda \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=x_0} = k(u_1 - u(x_0, t)), \\ \lambda \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=x_1} = k(u_2 - u(x_1, t)). \end{cases} \quad (2)$$

其次, 考虑相邻两个小温区的间隙之间空气介质中的热传导。

附件给出 SMC 上焊接区域中心的温度随时间变化的数据, 且元件 SMC 搭载在印刷电路板 PCB 上随传送带匀速运动, 仅需考虑焊接区域中心随传送带匀速经过回焊炉内各点的温度。同时基于回焊炉在纵截面视角下的一维水平方向上各点所处的单位空间区域内温度相同这一模型假设, 以及回焊炉内除加热电路外无其他热源的基本假设, 可将问题简化为均匀介质中不含其他热源的一维热传导问题。因此热传导微分方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3)$$

其中 λ, ρ, c 分别为间隙内空气的导热系数, 密度, 比热容。

综上所述, 适用于所有小温区间隙的热传导模型为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ -\lambda \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=x_0} = k(u_1 - u(x_0, t)) \\ \lambda \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=x_1} = k(u_2 - u(x_1, t)). \end{cases} \quad (4)$$

5.1.2 模型求解

1) 模型参数确定 在小温区间隙的热传导模型中, 我们引入了空气的导热系数 λ 、密度 ρ 、比热容 c 和热对流系数 k 等未知参量, 其中 λ, ρ, c 均与温度有关。为了求解偏微分方程, 需要确定上述参量。

根据文献 [3], 我们找到表 2 数据获取部分温度区间中 λ, ρ, c 的取值。

对于空气的热对流系数 k , 可将其分为高温热对流系数 k_e 和低温热对流系数 k_s 。通过设定其取值范围, 进行遍历并利用附件中的炉温曲线信息寻找最优数值, 最后得到高温热对流系数 $k_e = 144$, 低温热对流系数 $k_s = 9.3$ 。热对流系数的具体确定过程请见 5.2.2。

在已知 λ, ρ, c, k 取值的情况下, 小间隙内空气的物性参数可以通过求相邻两个小

温区的温度对应的参数的平均值来确定，即

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\lambda_{u_1} + \lambda_{u_2}}{2} \\ \rho = \frac{\rho_{u_1} + \rho_{u_2}}{2} \\ c = \frac{c_{u_1} + c_{u_2}}{2} \end{cases} \quad (5)$$

表 2 空气在不同温度下的物性参数

T (°C)	λ (W/m·°C)	ρ (kg/m ³)	c (kJ/kg·°C)
25	0.0262	1.177	1.005
173	0.0370	0.783	1.020
175	0.0374	0.760	1.021
182	0.0381	0.750	1.023
195	0.0388	0.740	1.024
198	0.0390	0.732	1.026
203	0.0395	0.725	1.027
230	0.0410	0.705	1.030
235	0.0413	0.695	1.031
237	0.0416	0.687	1.033
254	0.0427	0.660	1.036
255	0.0431	0.653	1.038
257	0.0436	0.642	1.039

2) 有限差分法求解微分方程 求解小温区间隙的热传导模型时，难以求得解析解，因此我们采用最普遍通用的有限差分法求取偏微分方程的数值解。一般地，数值求解形如

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6)$$

的偏微分方程，其中 $\frac{\lambda}{\rho c}$ 是常数，可使用前项差分和后项差分近似微分^[10]。本文考虑

前项差分近似：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\approx \frac{1}{\Delta x^2}(u(x+\Delta x, t+\Delta t) - 2u(x, t+\Delta t) + u(x-\Delta x, t+\Delta t)) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &\approx \frac{1}{\Delta t}(u(x, t+\Delta t) - u(x, t)).\end{aligned}\quad (7)$$

因此有

$$\frac{1}{\Delta t}(u(x, t+\Delta t) - u(x, t)) = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{1}{\Delta x^2}(u(x+\Delta x, t+\Delta t) - 2u(x, t+\Delta t) + u(x-\Delta x, t+\Delta t)).\quad (8)$$

令

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\lambda}{\rho c} \\ r = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x}, \end{cases}\quad (9)$$

则有

$$\begin{bmatrix} -r & 1+2r & -r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x-\Delta x, t+\Delta t) \\ u(x, t+\Delta t) \\ u(x+\Delta x, t+\Delta t) \end{bmatrix} = u(x, t).\quad (10)$$

考虑边界条件 (2)，通过有限差分，得到

$$\begin{cases} -\lambda \left(\frac{u(x_0+\Delta x, t) - u(x_0, t)}{\Delta x} \right) = k(u_1 - u(x_0, t)), \\ \lambda \left(\frac{u(x_1, t) - u(x_1-\Delta x, t)}{\Delta x} \right) = k(u_2 - u(x_1, t)). \end{cases}\quad (11)$$

写作矩阵乘积形式，得

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{k\Delta x}{\lambda} + 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x_0, t) \\ u(x_0+\Delta x, t) \end{bmatrix} = \frac{k\Delta x}{\lambda} u_1, \\ \begin{bmatrix} \frac{k\Delta x}{\lambda} + 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x_1, t) \\ u(x_1-\Delta x, t) \end{bmatrix} = \frac{k\Delta x}{\lambda} u_2. \end{cases}\quad (12)$$

因此，若已知一个时刻除两边界外所有位置的温度信息 $(u(x_0+\Delta x, t), u(x_0+2\Delta x, t), \dots, u(x_1-\Delta x, t))^T$ ，可以通过求解以下方程组来求得下一时刻的所有位置的温度信息：

$$\begin{pmatrix} \frac{k\Delta x}{\lambda} + 1 & -1 & & \\ -r & 1+2r & -r & \\ & & \ddots & \\ & & -r & 1+2r & -r \\ & & & -1 & \frac{k\Delta x}{\lambda} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x_0, t+\Delta t) \\ u(x_0+\Delta x, t+\Delta t) \\ \vdots \\ u(x_1-\Delta x, t+\Delta t) \\ u(x_1, t+\Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k\Delta x}{\lambda} u_1 \\ u(x_0+\Delta x, t) \\ \vdots \\ u(x_1-\Delta x, t) \\ \frac{k\Delta x}{\lambda} u_2 \end{pmatrix}.\quad (13)$$

其中 $\Delta x, x_0, x_1$ 等记号的意义见图 1。

至此，通过有限差分构造了线性方程组 (13)。在已知初始条件

$$u(x_0, 0) = 25. \quad (14)$$

的情况下，利用矩阵的 LU 分解对线性方程组 (13) 进行不停的求解迭代，即可求得 $u(x, t)$ ，也就是求出了温度随时间和空间的分布。

3) 有限差分参数的确定 在有限差分法中，时间步长 Δt 和空间步长 Δx 是可调节的参数。为保证算法稳定性，考虑如下引理^[11]：

引理 1 对于形如

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (15)$$

的偏微分方程，其中 D 是常数，若其使用前项差分法数值求解，令 Δx 是空间步长， Δt 为时间步长，如果

$$\frac{D\Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2}, \quad (16)$$

前项差分法稳定。

根据以上引理，在设置空间步长和时间步长时，应保证 $\frac{D\Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2}$ 以获得稳定的收敛性。因此，在实际求解中，空间步长不能太小。我们设定 $\Delta x = 0.1$ (cm), $\Delta t = 0.01$ (s)。在这样的条件下，总是满足 $\frac{D\Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2}$ 。

4) 对温度达到稳定的刻画 根据题目叙述，回焊炉启动后，炉内空气温度会在短时间内达到稳定。因此需要将上面求出的二元函数 $u(t, x)$ 降维为与时间无关的一维函数 $u(x)$ 。具体地，考虑小温区边界上的温度随时间的变化函数 $u^{x_0}(t)$ ，考虑相对误差函数

$$\text{RelErr}(t) = \frac{|u^{x_0}(t + \Delta t)| - |u^{x_0}(t)|}{|u^{x_0}(t)|}, \quad (17)$$

当相对误差 $\text{RelErr}(t) < 0.001$ 时，停止对时间维度的进一步求解，并将 $u_t(x)$, ($x \in [x_0, x_1]$) 当做间隙内的稳定温度，不再随时间变化。利用相对误差，此系统衡量了边界上温度达到稳定的条件，进而可以决定整个热传导系统达到稳定温度的时刻。

5) 小温区间隙温度的求解结果及分析 在 175°C (小温区 1-5), 195°C (小温区 6), 235°C (小温区 7) 和 255°C (小温区 8-9) 的条件 (附件条件) 下，利用以上模型和算法求得小温区间隙以及小温区的温度随空间变化函数 $\hat{u}_1(x)$ 如图 2。

由图 2 中的信息可得，在单个小温区内，温度保持不变。在相邻两个小温区的间隙内，由于热传导和边界热对流，温度呈两边高、中间稍低的情形，且温度连续变化，符合热传导规律。

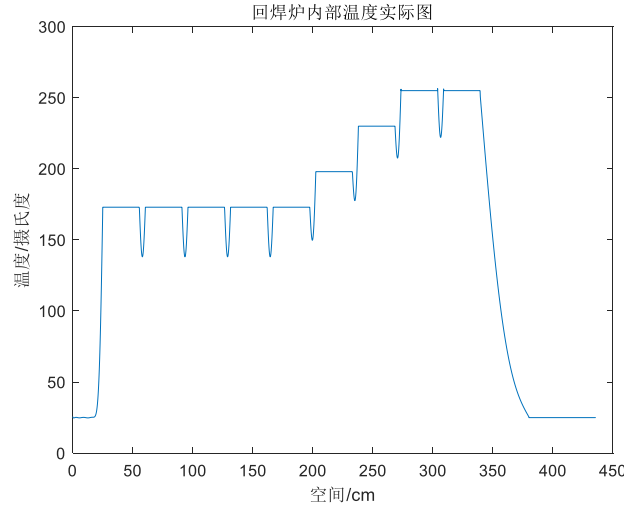


图 2 小温区间隙内的热传导模型的求解结果

5.2 SMC 的热传导模型

对于 SMC 内部的热传导模型，首先利用 SMC 上下侧外部的温度 $\hat{u}_1(x)$ 和 $\hat{u}_2(x)$ 结合牛顿冷却定律、路程-速度关系和热对流建立随时间变化的边界条件。然后利用热传导方程建立微分方程模型，同样利用有限差分法求解。

5.2.1 模型建立

在 SMC 内部，热量主要以热传导的方式进行传递；在 SMC 与其表面的空气介质分界面上，运动流体和温度不同的固体表面之间传递热量，即对流传热。我们针对 SMC 建立如图 3 所示的平面直角坐标系。

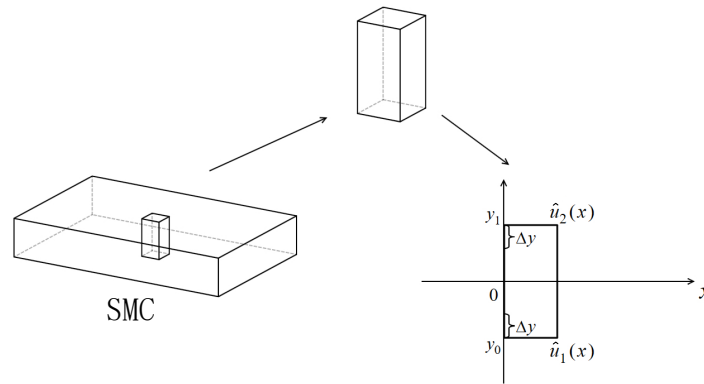


图 3 SMC 内热传导模型的空间示意图

首先，考虑 SMC 与其表面的空气介质分界面上的热对流^[8,12,16]。再次利用牛顿冷却定律，类比小温区间隙边界条件的确定方法，得到 SMC 与空气介质分界面上的边

界条件:

$$\begin{cases} \hat{q} = \hat{k}_2 \Delta u, \\ -\lambda \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=y_0} = k_2(\hat{u}_1(x) - u(y_0, t)) \\ \lambda \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=y_1} = \hat{k}(\hat{u}_2(x) - u(y_1, t)), \end{cases} \quad (18)$$

其中 \hat{q}, \hat{k} 分别表示 SMC 内部边缘的热流密度和热对流系数, $\hat{u}_1(x), \hat{u}_2(x)$ 分别表示在横坐标 x 处 SMC 上表面与下表面分界面上环境的温度。同时基于同一横坐标位置所在的区域温度相等的基本假设, 可得

$$\hat{u}_1(x) = \hat{u}_2(x). \quad (19)$$

其次, 考虑 SMC 的焊接区域内竖直方向的热传导。类比小温度间隙中的热传导方程, 可用如下方程描述 SMC 内部的热传导:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\rho}\hat{c}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (20)$$

其中 $\hat{\lambda}, \hat{\rho}, \hat{c}$ 分别表示 SMC 的导热系数, 密度和比热容^[5,9,14]。又有路程-速度关系:

$$x = vt. \quad (21)$$

综上所述, SMC 中的热传导模型为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\rho}\hat{c}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ -\lambda \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=y_0} = \hat{k}(\hat{u}_1(vt) - u(y_0, t)) \\ \lambda \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=y_1} = \hat{k}(\hat{u}_1(vt) - u(y_1, t)). \end{cases} \quad (22)$$

5.2.2 模型求解

1) 模型参数确定 在 SMC 的热传导模型中, 我们引入了边界热对流系数 \hat{k} , 导热系数 $\hat{\lambda}$, SMC 密度 $\hat{\rho}$ 和比热容 \hat{c} 等未知参量, 为了求解模型, 我们需要确定上述参量。

通过查阅资料, 我们在文献 [13] 中找到了较为合适的边界热对流系数和 SMC 密度的参数值数据:

$$\begin{cases} \hat{k} = 32.68 \text{ } w/m^2 \cdot K, \\ \hat{\rho} = 2330 \text{ } kg/m^3. \end{cases} \quad (23)$$

同时，我们在文献 [13] 中找到了 SMC 比热容 \hat{c} 与温度的关系数据，如表 3 所示。采用六次多项式拟合，得到温度与比热容的关系：

$$\hat{c} = f_{\hat{c}}(u). \quad (24)$$

对于导热系数 $\hat{\lambda}$ ，我们利用文献 [13] 中的硅制体 SMC 的导热率与温度的关系数据，如表 4 所示，通过六次多项式拟合，得到温度与比热容的关系：

$$\hat{\lambda} = f_{\hat{\lambda}}(u). \quad (25)$$

拟合数据请见附件。

表 3 SMC 比热容

温度 ($^{\circ}C$)	-173	-73	27	127	327	527	627	827	1127
比热容 ($J/(kg \cdot K)$)	259	556	712	790	867	913	946	967	992

表 4 SMC 导热系数

温度 ($^{\circ}C$)	-173	-73	27	127	327	527	627	827	1127
导热系数 ($w/(m \cdot K)$)	884	264	148	98.9	61.9	42.2	31.2	25.7	22.7

2) 有限差分法求解微分方程 类比有限差分法求解小温区间隙热传导模型的方法步骤，容易得到有限差分法求解 SMC 中的热传导模型对应的线性方程组：

$$\begin{pmatrix} \frac{\hat{k}\Delta y}{\lambda} + 1 & -1 & & & & \\ -\hat{r} & 1+2\hat{r} & -\hat{r} & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -\hat{r} & 1+2\hat{r} & -\hat{r} \\ & & & & -1 & \frac{\hat{k}\Delta y}{\lambda} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(y_0, t+\Delta t) \\ u(y_0+\Delta y, t+\Delta t) \\ \vdots \\ u(y_1-\Delta y, t+\Delta t) \\ u(y_1, t+\Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\hat{k}\Delta y}{\lambda} \hat{u}_1(vt) \\ u(y_0+\Delta y, t) \\ \vdots \\ u(y_1-\Delta y, t) \\ \frac{\hat{k}\Delta y}{\lambda} \hat{u}_1(vt) \end{pmatrix}, \hat{r} = \frac{\hat{\lambda}\Delta t}{\hat{\rho}\hat{c}\Delta y}, \quad (26)$$

其中 $\Delta y, y_0, y_1$ 等记号的意义见图 3。根据 (26)，可以求得 SMC 中心位置的温度随时间变化的函数 $u^{\frac{y_0+y_1}{2}}(t)$ ，此即炉温曲线。

SMC 热传导模型求解得到的线性方程组 (26) 不同于小温区间隙热传导模型求解得到的方程组 (13)，其不同之处在于：对于 (26) 中的不同横轴坐标 $x = vt$ ，其对应的边界条件不同，这是由于外界温度会随着横轴位置变化而变化导致的。换句话说，在 (13) 中，边界条件对应的温度 u_1 和 u_2 总是确定的，但在 (26) 中，边界条件对应的外界温度是 $\hat{u}_1(vt)$ ，它是随时间变化而变化的。

3) 基于制程界限和附件信息确定空气热对流系数 首先刻画制程界限^[4,6,15]：对于

一条炉温曲线 $u(t)$ ，其满足制程界限等价于

$$\begin{cases} |\frac{\partial u}{\partial t}| \leq 3, \\ \mu(E(u(t) \in [150, 190])) \in [60, 120], \\ \mu(E(u(t) > 217)) \in [40, 90], \\ u_{max}(t) \in [240, 250], \end{cases} \quad (27)$$

其中 $\mu(\cdot)$ 是集合长度， $t \in E = [0, \infty]$ 是温度函数 $u(t)$ 的定义域， $E(u(t) > 217^\circ C)$ 表示 E 中满足条件 $u(t) > 217^\circ C$ 的时间 t 构成的集合。对于 (27) 中的第一个条件，使用其差分近似：

$$|u(t + \Delta t) - u(t)| \leq 3\Delta t. \quad (28)$$

为了寻找符合条件的空气热对流系数 k ，首先设定题目所给参数： $173^\circ C$ （小温区 1-5）， $198^\circ C$ （小温区 6）， $230^\circ C$ （小温区 7）和 $257^\circ C$ （小温区 8-9）。令高温或低温下的热对流系数^[13]分别是 k_e, k_s ，给定它们的搜索区间均为 $[6, 25]$ ，通过遍历寻优来求得最符合条件的 k_e, k_s 。在满足制程界限的条件下，计算

$$\sum_{t_i} \|u_{\{k_e, k_s\}}(t_i) - f(t_i)\|_1, \quad (29)$$

其中 $u_{\{k_e, k_s\}}(t_i)$ 表示在空气热对流系数在高低温时分别为 k_e, k_s 时由题目数据算出的炉温曲线， $f(t_i)$ 表示附件所给的炉温曲线。

综上所述，基于制程界限和附件信息确定空气热对流系数的最优化模型为

$$\begin{aligned} \{k_e^*, k_s^*\} &= \underset{\{k_e, k_s\}}{\operatorname{argmin}} \sum_{t_i} \|u_k(t_i) - f(t_i)\|_1 \\ s.t. \quad &\begin{cases} |u(t_i + \Delta t_i) - u(t_i)| \leq 3\Delta t, \\ \mu(E(u(t_i) \in [150, 190])) \in [60, 120], \\ \mu(E(u(t_i) > 217)) \in [40, 90], \\ u_{max}(t_i) \in [240, 250], \\ k \in [6, 25]. \end{cases} \end{aligned} \quad (30)$$

其中 k_e, k_s 分别代表高温和低温情况下的热对流系数。通过二重遍历，得到空气热对流系数 $k_e^* = 144$ ， $k_s^* = 9.3$ 。在热传导模型中，边界温度超过 $25^\circ C$ 时使用 k_e^* ，否则使用 k_s^* 。

4) SMC 炉温曲线的求解结果及分析 在 $175^\circ C$ （小温区 1-5）， $195^\circ C$ （小温区 6）， $235^\circ C$ （小温区 7）和 $255^\circ C$ （小温区 8-9）的条件（附件条件）下，利用以上模型及算法求得 SMC 内部的温度变化如图 4(a)。而所求得的炉温曲线和附件所给的炉

温曲线的对比图如图 4(b)。

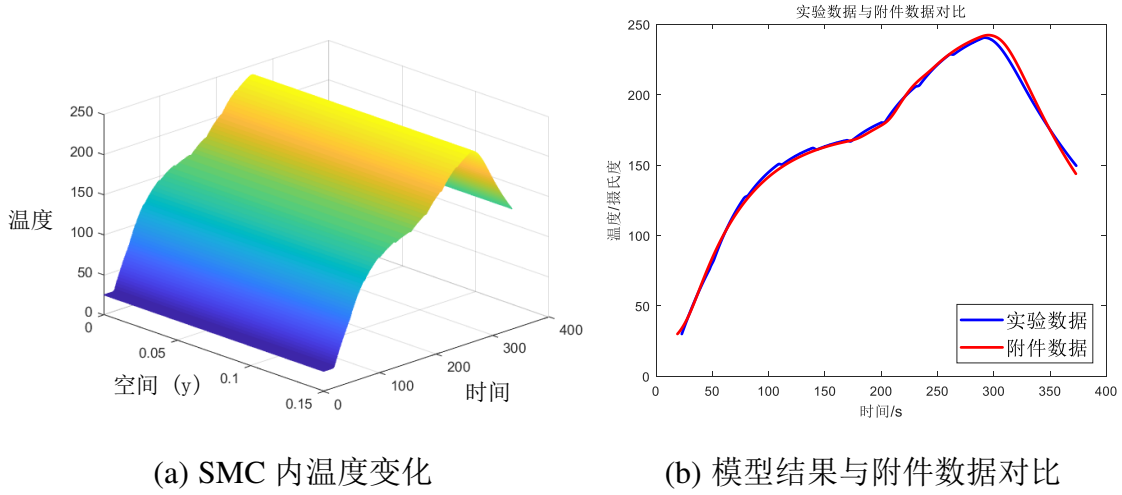


图 4 (a): SMC 内热传导模型的求解结果。(b): 模型求出的炉温曲线与附件所给炉温曲线的对比

根据图 4(a)，SMC 内部温度随时间变化是由环境温度 $\hat{u}_1(x)$ ($\hat{u}_1(x)$ 对应于图 2) 决定的：当 $\hat{u}_1(x)$ 升高时，通过热传导和热对流，SMC 内部温度升高；当 $\hat{u}_1(x)$ 下降时，SMC 进入冷却区，内部温度下降。同时由于 SMC 的厚度较小，温度在空间维度上的变化不明显。此外，所求得的炉温曲线与附件炉温曲线拟合程度较高，验证了本模型的准确性。

5.3 小温区间隙和 SMC 热传导模型求解

对于第一问，使用已建立的小温区间隙热传导模型：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ -\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = k(u_1 - u(x_0, t)) \\ \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_1} = k(u_2 - u(x_1, t)). \end{cases} \quad (31)$$

以及 SMC 内部热传导模型：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\rho} \hat{c}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ -\lambda \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=y_0} = \hat{k}(\hat{u}_1(vt) - u(y_0, t)) \\ \lambda \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=y_1} = \hat{k}(\hat{u}_1(vt) - u(y_1, t)). \end{cases} \quad (32)$$

进行两次有限差分法，其中各物性参数已知，在 173°C （小温区 1-5）， 198°C （小温区 6）， 230°C （小温区 7）和 257°C （小温区 8-9）的条件下，得到小温区 3、6、7 中点及小温区 8 结束处焊接区域中心的温度分别为 134.60°C ， 171.84°C ， 191.34°C ， 224.68°C 。对应的炉温曲线如图 5，每隔 0.5 s 焊接区域中心的温度存放在 result.csv 中，详见附件。

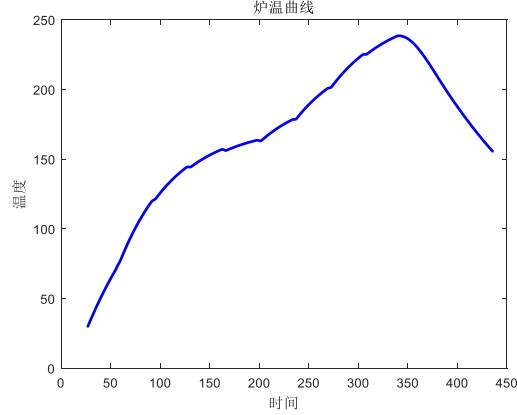


图 5 第一问对应的炉温曲线

5.4 传送速度优化模型

接下来的三节皆讨论优化问题。因此可以建立对应的优化模型，用二分/粒子群的方法寻找最优解。

5.4.1 最优化模型建立

令 v 代表传送速度，在满足制程界限的条件下，可建立如下的单目标最优化模型：

$$\begin{aligned} & \max v \\ & s.t. \begin{cases} |u(t + \Delta t) - u(t)| \leq 3\Delta t, \\ \mu(E(u(t) \in [150, 190])) \in [60, 120], \\ \mu(E(u(t) > 217)) \in [40, 90], \\ u_{max}(t) \in [240, 250]. \end{cases} \end{aligned} \quad (33)$$

5.4.2 二分求解

对于模型 (33)，可使用二分求解。给定区间 $v \in [65, 100]$ ，对其进行二分搜索，得到满足条件的最大传送速度为 71.00 cm/min 。

5.5 阴影面积限制的多目标优化模型

5.5.1 模型建立

令 u^{-1} 表示 $u(t)$ 的反函数, $\{u_i\}(i = 1, 2, 3, 4)$ 表示小温区组的温度集合。利用积分的性质, 考虑区间 $[u^{-1}(217), u^{-1}(u_{max})]$ 上的积分值减去 $217(u^{-1}(u_{max}) - u^{-1}(217))$, 其表示阴影部分的面积。因此可建立以下的多目标最优化模型:

$$\begin{aligned} (\{u_i^*\}, v^*)^T = \operatorname{argmin}_{(\{u_i\}, v)^T} & \left\| \int_{u^{-1}(217)}^{u^{-1}(u_{max})} u(t) dt - 217(u^{-1}(u_{max}) - u^{-1}(217)) \right\|_1 \\ \text{s.t.} & \begin{cases} |u(t + \Delta t) - u(t)| \leq 3\Delta t, \\ \mu(E(u(t) \in [150, 190])) \in [60, 120], \\ \mu(E(u(t) > 217)) \in [40, 90], \\ u_{max}(t) \in [240, 250]. \end{cases} \end{aligned} \quad (34)$$

5.5.2 模型求解

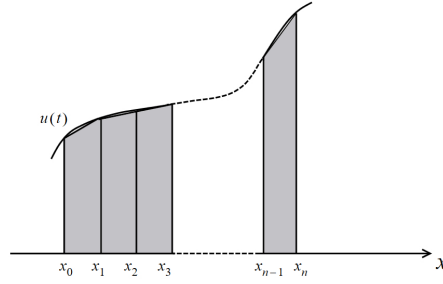


图 6 数值积分示意图。在已知离散坐标的情况下, 利用符合梯形法则^[11]进行近似积分。具体地, 计算每个梯形的面积, 进行求和

1) 数值积分 由于得到的炉温曲线函数实际上是离散点, 因此考虑对连续函数的积分 $\int_{u^{-1}(217)}^{u^{-1}(u_{max})} u(t) dt$ 利用复合梯形法则^[11]进行数值近似 (图 6):

$$\int_{u^{-1}(217)}^{u^{-1}(u_{max})} u(t) dt \approx \sum_{x_i \in [0, u^{-1}(u_{max}) - u^{-1}(217)]} \frac{(u(u^{-1}(u_{max}) - x_{i+1}) + u(u^{-1}(u_{max}) - x_i)) \Delta x_i}{2}. \quad (35)$$

因此所求模型变为

$$\begin{aligned} (\{u_i^*\}, v^*)^T = \operatorname{argmin}_{(\{u_i\}, v)^T} & \left\| \sum_{x_i \in [0, u^{-1}(u_{max}) - u^{-1}(217)]} \frac{(u(u^{-1}(u_{max}) - x_{i+1}) + u(u^{-1}(u_{max}) - x_i)) \Delta x_i}{2} \right. \\ & \left. - 217(u^{-1}(u_{max}) - u^{-1}(217)) \right\|_1 \end{aligned} \quad (36)$$

2) 粒子群求解优化模型 利用粒子群算法^[7]求解模型 (34)。具体地, 令 n 个初始粒子, 他们在空间上的位置为 $X_i = (x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_4^i, x_5^i)$ 。而令

$$\begin{cases} P_i = (p_1^i, p_2^i, p_3^i, p_4^i, p_5^i), \\ P_g = (p_1^g, p_2^g, p_3^g, p_4^g, p_5^g), \\ V_i = (v_1^i, v_2^i, v_3^i, v_4^i, v_5^i), \end{cases} \quad (37)$$

其中 P_i, P_g, V_i 分别表示第 i 个粒子所经历的所有路程上最优的位置, 所有粒子经历过的路程上的最优位置和第 i 个粒子的移动速度。以下为粒子群算法的核心公式:

$$\begin{cases} v_d^i = \omega v_d^i + (p_d^i - x_d^i) + (p_d^g - x_d^i), \\ x_d^i = x_d^i + \alpha v_d^i, \end{cases} \quad (38)$$

其中 i 代表粒子编号, d 代表维度编号, $\omega > 0$ 为惯性因子; α 是约束因子, 用来控制速度的权重。通过迭代更新 (38), 粒子群可以寻找到最优解。

在具体算法实现中, 根据粒子群优化算法参数设置推荐^[7], 可设定 $\omega = \alpha = 1.49225, n = 50$ 。在初始粒子位置随机的情况下, 设置 30 次迭代进化。迭代优化的过程可见图 7(a)。

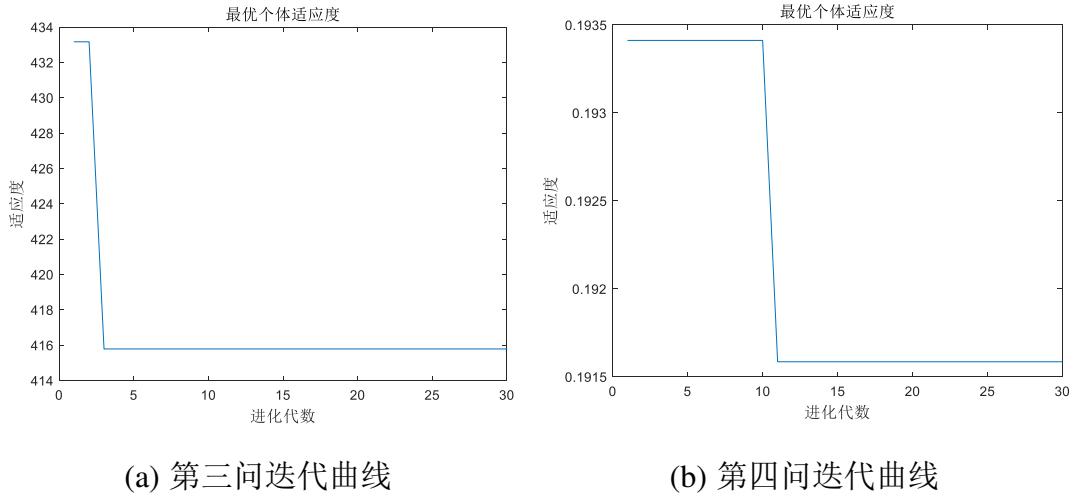
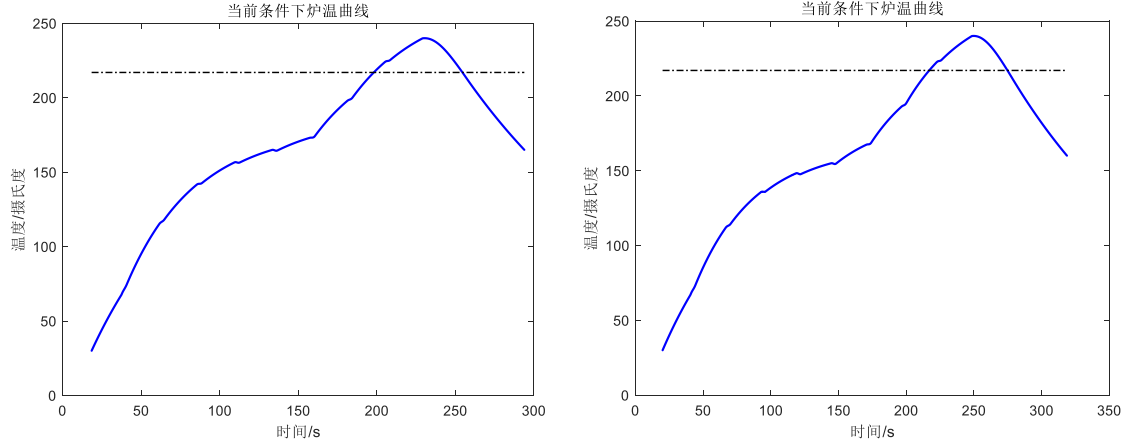


图 7 粒子群算法的迭代曲线

最终求得 $u_1^* = 178.1777^\circ\text{C}$, $u_2^* = 186.5095^\circ\text{C}$, $u_3^* = 237.1129^\circ\text{C}$, $u_4^* = 264.8940^\circ\text{C}$, $v^* = 89 \text{ cm/min}$ 。对应的炉温曲线如图 8(a), 对应的最小面积为 $S_{min} = 415.7895$ 。



(a) 第三问结果对应的炉温曲线

(b) 第四问结果对应的炉温曲线

图 8 第三、四问对应的炉温曲线

5.6 偏态系数限制的优化模型

5.6.1 指标设定

为了刻画炉温曲线的对称性，我们提出一种新颖的利用偏态系数确定曲线函数对称性的方法，作为判定对称性的指标。

定义 1 对于一组样本数据 $\{y_i\}$ ，其偏态系数定义为

$$\text{SkCoe} = \frac{\sum_i (y_i - \bar{y})^3}{\sigma^3 \cdot N}, \quad (39)$$

其中 \bar{y}, σ, N 分别表示样本均值，样本标准差和样本个数。

偏态系数衡量了一组样本点中位数与均值的偏差，即衡量了样本点对应的分布函数的倾斜程度。三条频率分布函数曲线和对应的偏态系数如图 9(a)。

我们对炉温曲线的偏态系数作如下定义：

定义 2 （炉温曲线的偏态系数）考虑一条炉温曲线 $u(t)$ ，对于其中温度大于 217°C 的横坐标点集 $\{t_i\}, (i = 1, 2 \cdots n)$ ，有其对应的温度点集 $\{u(t_i)\}, (u(t_i) > 217)$ 。令 $\{K_i\}_{i=1}^n$ 是一个整数集，其中的每一个元素

$$K_i = \text{fix}(u(t_i) - 217), \quad (40)$$

其中 $\text{fix}(\cdot)$ 表示临近取整函数。令集合

$$X = \bigcup_{i=1}^n \{t_i^1, t_i^2 \cdots t_i^{K_i}\}, \quad (41)$$

其中

$$t_i^k = t_i, \forall k = 1, 2 \cdots K_i. \quad (42)$$

定义炉温曲线的偏态系数为：

$$\text{SK}(u(t)) = \text{SkCoe}(X). \quad (43)$$

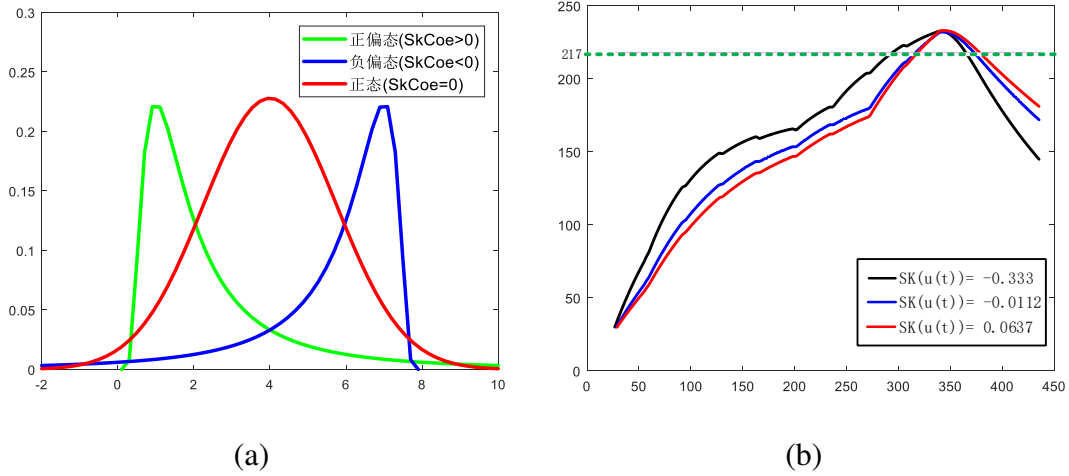


图 9 (a): 偏态系数与曲线倾斜度关系。(b): 对指标 $\text{SK}(u(t))$ 验证: 红色炉温曲线为正偏态, 对应的 $\text{SK}(u(t)) > 0$; 蓝色炉温曲线和黑色炉温曲线为负偏态, 对应的 $\text{SK}(u(t)) < 0$; 且由于黑色炉温曲线负偏态最多, 其 SK 值最小

当 $\text{SK}(u(t)) > 0$ 时, 炉温曲线在 217°C 以上的区域向左倾斜; 当 $\text{SK}(u(t)) < 0$ 时, 炉温曲线在 217°C 以上的区域向右倾斜; 当 $\text{SK}(u(t)) \approx 0$ 时, 炉温曲线在 217°C 以上的区域接近对称, 见图 9(b)。

$\text{SK}(u(t))$ 的本质, 实际上是根据样本的频率密度函数确定样本的偏态系数。因此, 可以将此指标作为目标函数, 在限制条件中加入阴影部分面积的限制, 建立最优化模型。

5.6.2 最优化模型

为了联合考虑阴影部分面积和对称性, 我们将阴影面积作为限制条件: 在某一组变量下所求出的炉温曲线必须满足阴影部分面积在第三问所求的最小阴影部分面积

S_{min} 的 1.05 倍以下。此外，将 $SK(u)$ 作为目标函数，建立如下的多目标最优化模型：

$$\begin{aligned}
 (\{u_i^*\}, v^*)^T &= \underset{(\{u_i\}, v)^T}{\operatorname{argmin}} \|SK(u)\|_1 \\
 s.t. \quad &\begin{cases} |u(t + \Delta t) - u(t)| \leq 3\Delta t, \\ \mu(E(u(t) \in [150, 190])) \in [60, 120], \\ \mu(E(u(t) > 217)) \in [40, 90], \\ u_{max}(t) \in [240, 250], \\ \int_{u^{-1}(217)}^{u^{-1}(u_{max})} u(t)dt - 217(u^{-1}(u_{max}) - u^{-1}(217)) < 1.05S_{min} \end{cases} \quad (44)
 \end{aligned}$$

5.6.3 模型求解

对积分项采用梯形法则 (35) 进行数值近似，由此可将多目标最优化模型 (44) 转化为如下模型：

$$\begin{aligned}
 (\{u_i^*\}, v^*)^T &= \underset{(\{u_i\}, v)^T}{\operatorname{argmin}} \|SK(u)\|_1 \\
 s.t. \quad &\begin{cases} |u(t + \Delta t) - u(t)| \leq 3\Delta t, \\ \mu(E(u(t) \in [150, 190])) \in [60, 120], \\ \mu(E(u(t) > 217)) \in [40, 90], \\ u_{max}(t) \in [240, 250], \\ \sum_{x_i \in [0, u^{-1}(u_{max}) - u^{-1}(217)]} \frac{(u(u^{-1}(u_{max}) - x_{i+1}) + u(u^{-1}(u_{max}) - x_i))\Delta x_i}{2} \\ \quad - 217(u^{-1}(u_{max}) - u^{-1}(217)) < 1.05S_{min} \end{cases} \quad (45)
 \end{aligned}$$

对 $(\{u_i\}, v)^T$ 在题目所给范围内利用粒子群算法进行求解，设置 30 次迭代进化。迭代优化的过程可见图 7(b)。

在满足制程界限的情况下，得到 $u_1^* = 165.0000^\circ C$, $u_2^* = 185.2627^\circ C$, $u_3^* = 228.4643^\circ C$, $u_4^* = 264.5886^\circ C$, $v^* = 82 \text{ cm/min}$ 。而对应的

$$SK(u_{(\{u_i^*\}, v^*)^T}) = 0.1916, \quad (46)$$

对应的阴影部分面积为 421.0913，对应的炉温曲线如图 8(b)。

5.7 求解结果

对于第一问，求得小温区 3、6、7 中点及小温区 8 结束处焊接区域中心的温度分

别为 134.60°C , 171.84°C , 191.34°C , 224.68°C 。对应的炉温曲线如图 5，每隔 0.5 s 焊接区域中心的温度存放在 result.csv 中，详见附录。

对于第二问，求得满足条件的最大传送速度为 71.00 cm/min 。

对于第三问，求得 $u_1^* = 178.1777^{\circ}\text{C}$, $u_2^* = 186.5095^{\circ}\text{C}$, $u_3^* = 237.1129^{\circ}\text{C}$, $u_4^* = 264.8940^{\circ}\text{C}$, $v^* = 89\text{ cm/min}$ 。对应的炉温曲线如图 8(a)

对于第四问，求得 $u_1^* = 165.0000^{\circ}\text{C}$, $u_2^* = 185.2627^{\circ}\text{C}$, $u_3^* = 228.4643^{\circ}\text{C}$, $u_4^* = 264.5886^{\circ}\text{C}$, $v^* = 82\text{ cm/min}$ 。对应的指标 $\text{SK}(u_{(\{u_i^*\}, v^*)^T}) = 0.1916$ ，对应的炉温曲线如图 8(b)。

6 模型检验与评价

6.1 模型检验

本小节通过实验验证模型的鲁棒性及灵敏性，从而验证模型的实用性和可行性。

6.1.1 鲁棒性分析

由于系统内温度在总体分布已知的情况下，具有局部的随机变化，因此对利用小温区间隙热传导模型计算出的 $\hat{u}_1(t)$ 进行高斯加噪 ($N(0, \sigma^2)$)，以模拟温度的局部随机变化。加噪前后本章模型得到的炉温曲线如图 10（小温区和传送速度数据与第一问中相同）。

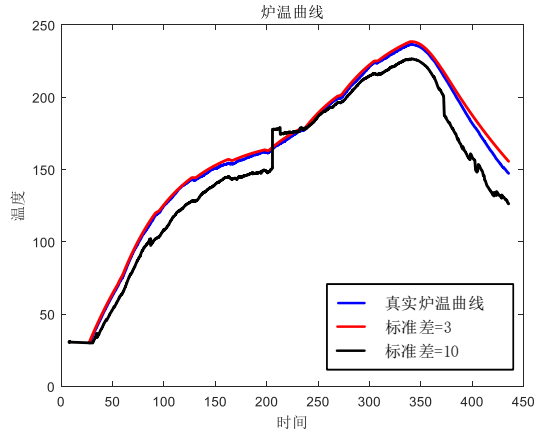


图 10 在高斯噪声情况下的模型鲁棒性分析

可以看出，本模型在系统温度具有标准差为 3 或更小方差的随机高斯噪声的情况下保持了理想的鲁棒性，而在噪声极大（标准差为 10）的情况下会受到影响，这是十分合理的。

6.1.2 灵敏性分析

在第一问的设定下，对小温区温度和传送速度进行小幅度改变：

$$\begin{cases} u_i = u_i + \epsilon, i = 1, 2, 3, 4 \\ v = v + \epsilon. \end{cases} \quad (47)$$

在其他变量不变的情况下，得到的部分炉温曲线如图 11；炉温曲线每个位置的平均温度改变绝对值 u_ϵ 如表 5。可见，本模型在小幅度小温区温度和传送速度的改变下

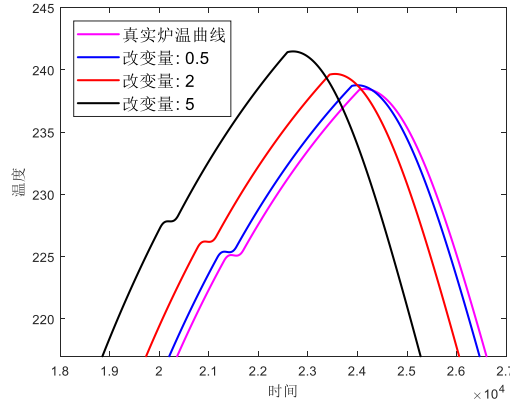


图 11 模型灵敏度分析得到的炉温曲线部分图（改变量为 ϵ ）

表 5 灵敏性分析的数值结果

ϵ	0.5	1	2	3	4	5
u_ϵ	0.9009	1.7375	3.5387	5.7106	6.8369	8.4698

具有一定稳定性，在大幅度改变下具有灵敏性。

6.2 模型评价

6.2.1 模型优点

1. 基于热传导和热对流建立的小温区间隙的热量传递模型具有鲁棒性，准确性；并且利用有限差分法可以合适地解决模型中的偏微分问题。利用这个间隙热传导模型可以计算出系统内的稳定温度，为之后的 SMC 模型建立和求解提供了基础。

2. 基于热传导和热对流建立的 SMC 热量传递模型具有鲁棒性；利用此模型可以在各种条件下计算出炉温曲线。同时，利用附件数据和制程界限可以很好地估计出待确定参数。

3. 以上的两个模型可以灵活地移植到各种最优化问题的求解中。

4. 我们提出了一种基于偏态系数的判定曲线对称性的指标。这个指标被验证具有良好的鲁棒性和准确性，并可以灵活地移植到最优化问题中。

6.2.2 模型缺点

1. 粒子群算法容易陷入局部最优解。
2. 将模型移植到其他最优化问题中进行求解时，计算量较大。

6.2.3 改进方向

1. 在小温区间热传导模型中，可尝试设计稳态的热传导模型，从解析式上消除时间对温度的影响，而不是利用相对误差寻找稳定状态。
2. 可设计更好的解决最优化问题的方法来配合热传导模型，以减少计算量。

7 参考文献

- [1] M. a. Qubeissi. Proposing a numerical solution for the 3d heat conduction equation. In *2012 Sixth Asia Modelling Symposium*, pages 144–149, 2012.
- [2] Y. Chen, J. Zhao, Y. Liu, B. Jin, F. Wang, J. Cao, H. Ouyang, B. Yuan, and P. Zhu. Electric customer credit-rating based on entropy and newton’s law of cooling. In *2017 13th International Conference on Natural Computation, Fuzzy Systems and Knowledge Discovery (ICNC-FSKD)*, pages 2070–2074, 2017.
- [3] S. Lang, C. Fillmore, L. Maxwell, C. J. Fillmore, and L. Whitfield-Maxwell. J. res. natl. blur. stand, 1952.
- [4] 刘彪. 浅谈回流炉性能分析在smt中的应用. *2011中国电子制造与封装技术年会论文集*, 2011.
- [5] 吕莉. 基于六西格玛方法的smt回流焊产品质量控制. *电子技术与软件工程*, (11), 2019.
- [6] 李昂. 傅里叶热传导方程和牛顿冷却定律在流体热学研究中的数学模型应用. *工业技术创新*, 03:498–502, 2016.
- [7] 杨维. 粒子群优化算法综述. *中国工程科学*, pages 87–94, 2004.
- [8] 汪健. 回流焊炉巧用若干例. *2019中国高端SMT学术会议论文集*, 2019.
- [9] 王宁. 回流焊温度控制系统的建模与实现. 西南交通大学, 2011.

- [10] 王秦. 基于时空联合广义有限差分法求解三维非稳态热传导方程. 北京力学会.北京力学会第26届学术年会论文集, pages 1236–1238, 2020.
- [11] 萨奥尔. 数值分析. 机械工业出版社, 2014.
- [12] 薛竞成. 回流焊接技术整合中的设备因素-回流焊炉的性能效益. 2008中国电子制造技术论坛论文集, 2008.
- [13] 赵晓军. Pop 回流焊工艺参数分析及质量评估软件开发. 西安电子科技大学, 2012.
- [14] 陆政. 浅谈回流焊炉温度设置及焊点的切片金相检测. 科技创新导报, 000(029):83–84, 2019.
- [15] 陈忠. 无铅回流炉技术发展综述. 机电工程技术, 40(006):13–14, 2011.
- [16] 高金刚. 表面贴装工艺生产线上回流焊曲线的优化与控制. 上海交通大学, 2007.

8 附录

8.1 拟合数据

表 6 SMC 比热容 \hat{c} 和热传导系数 $\hat{\lambda}$ 随温度变化的拟合数据

因变量	常数项	系数一	系数二	系数三	系数四	系数五	系数六	误差
\hat{c}	-285	714	-0.019	2.99×10^{-5}	2.52×10^{-7}	1.11×10^{-10}	0	2.48
$\hat{\lambda}$	48.9	0.299	1.01×10^{-3}	2.05×10^{-7}	2.53×10^{-9}	2.00×10^{-13}	0	4.24×10^{-18}

8.2 文件列表

8.2.1 MATLAB 代码

1) 第一问

test: 问题一搜索参数

test2: 回焊炉内单一间隙温度随空间变化模拟并绘制图像

test6: 问题一主程序, 根据求解好的参数计算数据, 画炉温曲线, 存储数据

test7: 计算并绘制回焊炉内部温度随空间变化连续图

2) 第二问

test8: 遍历搜索速度

3) 第三问

fun: 输入参数, 输出适应度 (面积)

test_PSO3: 粒子群算法, 调用 fun

4) 第四问

fun1: 输入参数, 输出 SK

test_PSO4: 粒子群算法, 调用 fun1

5) 共用程序

chase: 追赶法

get_kall: 输入温度, k (参数), 输出各间隙拟合系数

8.2.2 空气物性参数表

8.3 result.csv

时间/s	温度/℃	时间/s	温度/℃	时间/s	温度/℃
0	25	20	28.254	40	66.82
0.5	25	20.5	29.371	40.5	67.64
1	24.999	21	30.479	41	68.453
1.5	24.999	21.5	31.579	41.5	69.259
2	25	22	32.67	42	70.06
2.5	25	22.5	33.753	42.5	70.854
3	25.001	23	34.827	43	71.866
3.5	25.001	23.5	35.894	43.5	72.91
4	25	24	36.951	44	73.815
4.5	25	24.5	38.001	44.5	74.63
5	24.999	25	39.043	45	75.417
5.5	24.999	25.5	40.097	45.5	76.242
6	24.999	26	41.123	46	77.159
6.5	24.999	26.5	42.14	46.5	78.206
7	25	27	43.13	47	79.34
7.5	25.001	27.5	44.132	47.5	80.463
8	25.001	28	45.146	48	81.572
8.5	25.001	28.5	46.133	48.5	82.668
9	25.001	29	47.092	49	83.751
9.5	25	29.5	48.064	49.5	84.821
10	24.999	30	49.028	50	85.878
10.5	24.999	30.5	50.003	50.5	86.922
11	24.999	31	50.953	51	87.954
11.5	24.999	31.5	51.876	51.5	88.974
12	24.999	32	52.81	52	89.981
12.5	25	32.5	53.738	52.5	90.976
13	25.001	33	54.658	53	91.96
13.5	25.003	33.5	55.589	53.5	92.931
14	25.004	34	56.477	54	93.891
14.5	25.008	34.5	57.376	54.5	94.839
15	25.016	35	58.268	55	95.776
15.5	25.034	35.5	59.154	55.5	96.702
16	25.068	36	60.05	56	97.616
16.5	25.13	36.5	60.904	56.5	98.52
17	25.231	37	61.769	57	99.413
17.5	25.387	37.5	62.627	57.5	100.3
18	25.613	38	63.479	58	101.17
18.5	25.923	38.5	64.341	58.5	102.03
19	26.327	39	65.162	59	102.88
19.5	27.128	39.5	65.995	59.5	103.72

时间/s	温度/℃	时间/s	温度/℃	时间/s	温度/℃
60	104.55	81	130.11	102	145.21
60.5	105.37	81.5	130.63	102.5	145.54
61	106.18	82	131.13	103	145.87
61.5	106.98	82.5	131.64	103.5	146.2
62	107.77	83	132.13	104	146.52
62.5	108.56	83.5	132.62	104.5	146.84
63	109.33	84	133.11	105	147.15
63.5	110.09	84.5	133.58	105.5	147.46
64	110.85	85	134.06	106	147.77
64.5	111.59	85.5	134.52	106.5	148.07
65	112.33	86	134.98	107	148.37
65.5	113.05	86.5	135.44	107.5	148.66
66	113.77	87	135.89	108	148.95
66.5	114.48	87.5	136.34	108.5	149.25
67	115.18	88	136.78	109	149.53
67.5	115.88	88.5	137.21	109.5	149.81
68	116.56	89	137.64	110	150.09
68.5	117.24	89.5	138.06	110.5	150.36
69	117.91	90	138.48	111	150.64
69.5	118.57	90.5	138.89	111.5	150.9
70	119.22	91	139.3	112	151.16
70.5	119.79	91.5	139.71	112.5	151.43
71	120.19	92	140.11	113	151.69
71.5	120.48	92.5	140.5	113.5	151.95
72	120.71	93	140.89	114	152.19
72.5	120.94	93.5	141.28	114.5	152.44
73	121.24	94	141.66	115	152.69
73.5	121.66	94.5	142.03	115.5	152.93
74	122.22	95	142.4	116	153.18
74.5	122.83	95.5	142.77	116.5	153.41
75	123.43	96	143.13	117	153.65
75.5	124.03	96.5	143.49	117.5	153.88
76	124.62	97	143.84	118	154.11
76.5	125.2	97.5	144.18	118.5	154.34
77	125.77	98	144.38	119	154.56
77.5	126.33	98.5	144.44	119.5	154.78
78	126.89	99	144.4	120	155
78.5	127.45	99.5	144.32	120.5	155.21
79	127.99	100	144.28	121	155.43
79.5	128.53	100.5	144.34	121.5	155.64
80	129.07	101	144.55	122	155.84
80.5	129.59	101.5	144.87	122.5	156.05

时间/s	温度/℃	时间/s	温度/℃	时间/s	温度/℃
123	156.25	144	161.53	165	170.25
123.5	156.46	144.5	161.67	165.5	170.57
124	156.65	145	161.8	166	170.89
124.5	156.85	145.5	161.94	166.5	171.21
125	156.99	146	162.07	167	171.53
125.5	156.98	146.5	162.2	167.5	171.84
126	156.83	147	162.33	168	172.15
126.5	156.62	147.5	162.46	168.5	172.46
127	156.4	148	162.58	169	172.76
127.5	156.25	148.5	162.71	169.5	173.05
128	156.21	149	162.83	170	173.35
128.5	156.33	149.5	162.95	170.5	173.64
129	156.53	150	163.07	171	173.92
129.5	156.73	150.5	163.19	171.5	174.2
130	156.92	151	163.31	172	174.48
130.5	157.11	151.5	163.43	172.5	174.76
131	157.3	152	163.54	173	175.03
131.5	157.49	152.5	163.57	173.5	175.3
132	157.68	153	163.49	174	175.57
132.5	157.86	153.5	163.34	174.5	175.83
133	158.04	154	163.18	175	176.09
133.5	158.22	154.5	163.08	175.5	176.35
134	158.4	155	163.1	176	176.61
134.5	158.57	155.5	163.29	176.5	176.86
135	158.75	156	163.66	177	177.11
135.5	158.92	156.5	164.07	177.5	177.35
136	159.09	157	164.47	178	177.59
136.5	159.25	157.5	164.86	178.5	177.83
137	159.42	158	165.25	179	178.07
137.5	159.58	158.5	165.64	179.5	178.29
138	159.74	159	166.02	180	178.4
138.5	159.9	159.5	166.39	180.5	178.43
139	160.06	160	166.76	181	178.43
139.5	160.21	160.5	167.13	181.5	178.45
140	160.37	161	167.49	182	178.56
140.5	160.52	161.5	167.85	182.5	178.82
141	160.67	162	168.21	183	179.26
141.5	160.82	162.5	168.56	183.5	179.84
142	160.96	163	168.9	184	180.41
142.5	161.11	163.5	169.24	184.5	180.98
143	161.25	164	169.58	185	181.54
143.5	161.39	164.5	169.92	185.5	182.09

时间/s	温度/℃	时间/s	温度/℃	时间/s	温度/℃
186	182.64	207	200.75	228	220.15
186.5	183.19	207.5	200.92	228.5	220.56
187	183.72	208	201.02	229	220.97
187.5	184.25	208.5	201.1	229.5	221.37
188	184.77	209	201.23	230	221.77
188.5	185.29	209.5	201.45	230.5	222.16
189	185.8	210	201.83	231	222.55
189.5	186.31	210.5	202.39	231.5	222.94
190	186.81	211	203	232	223.32
190.5	187.3	211.5	203.6	232.5	223.69
191	187.79	212	204.2	233	224.07
191.5	188.28	212.5	204.79	233.5	224.43
192	188.75	213	205.37	234	224.79
192.5	189.23	213.5	205.95	234.5	225.02
193	189.69	214	206.52	235	225.12
193.5	190.15	214.5	207.08	235.5	225.12
194	190.61	215	207.64	236	225.09
194.5	191.06	215.5	208.19	236.5	225.09
195	191.51	216	208.74	237	225.17
195.5	191.95	216.5	209.28	237.5	225.39
196	192.38	217	209.81	238	225.73
196.5	192.81	217.5	210.34	238.5	226.08
197	193.24	218	210.86	239	226.42
197.5	193.66	218.5	211.38	239.5	226.76
198	194.08	219	211.89	240	227.1
198.5	194.49	219.5	212.39	240.5	227.44
199	194.89	220	212.89	241	227.77
199.5	195.3	220.5	213.38	241.5	228.09
200	195.69	221	213.87	242	228.42
200.5	196.09	221.5	214.35	242.5	228.74
201	196.47	222	214.83	243	229.05
201.5	196.86	222.5	215.3	243.5	229.36
202	197.24	223	215.76	244	229.67
202.5	197.61	223.5	216.23	244.5	229.98
203	197.98	224	216.68	245	230.28
203.5	198.35	224.5	217.13	245.5	230.58
204	198.71	225	217.58	246	230.87
204.5	199.07	225.5	218.02	246.5	231.17
205	199.42	226	218.45	247	231.45
205.5	199.77	226.5	218.88	247.5	231.74
206	200.12	227	219.31	248	232.02
206.5	200.46	227.5	219.73	248.5	232.3

时间/s	温度/℃	时间/s	温度/℃	时间/s	温度/℃
249	232.58	270	236.23	291	212.96
249.5	232.85	270.5	235.93	291.5	212.26
250	233.12	271	235.62	292	211.56
250.5	233.39	271.5	235.28	292.5	210.82
251	233.65	272	234.94	293	210.08
251.5	233.91	272.5	234.56	293.5	209.34
252	234.17	273	234.18	294	208.6
252.5	234.43	273.5	233.78	294.5	207.88
253	234.68	274	233.37	295	207.13
253.5	234.93	274.5	232.95	295.5	206.4
254	235.17	275	232.5	296	205.68
254.5	235.42	275.5	232.04	296.5	204.95
255	235.66	276	231.57	297	204.25
255.5	235.9	276.5	231.08	297.5	203.51
256	236.13	277	230.59	298	202.8
256.5	236.37	277.5	230.07	298.5	202.09
257	236.59	278	229.54	299	201.38
257.5	236.83	278.5	229.01	299.5	200.69
258	237.05	279	228.46	300	199.97
258.5	237.27	279.5	227.91	300.5	199.27
259	237.49	280	227.33	301	198.57
259.5	237.71	280.5	226.76	301.5	197.88
260	237.93	281	226.17	302	197.2
260.5	238.14	281.5	225.57	302.5	196.49
261	238.35	282	224.97	303	195.81
261.5	238.45	282.5	224.35	303.5	195.12
262	238.47	283	223.72	304	194.44
262.5	238.48	283.5	223.09	304.5	193.78
263	238.46	284	222.45	305	193.09
263.5	238.43	284.5	221.82	305.5	192.41
264	238.37	285	221.16	306	191.74
264.5	238.3	285.5	220.5	306.5	191.08
265	238.21	286	219.84	307	190.42
265.5	238.09	286.5	219.17	307.5	189.75
266	237.96	287	218.51	308	189.09
266.5	237.81	287.5	217.82	308.5	188.43
267	237.65	288	217.13	309	187.78
267.5	237.45	288.5	216.45	309.5	187.14
268	237.25	289	215.76	310	186.48
268.5	237.02	289.5	215.08	310.5	185.84
269	236.77	290	214.36	311	185.18
269.5	236.52	290.5	213.66	311.5	184.54

时间/s	温度/℃	时间/s	温度/℃	时间/s	温度/℃
312	183.92	320	174.02	328	164.77
312.5	183.27	320.5	173.44	328.5	164.2
313	182.65	321	172.83	329	163.64
313.5	182	321.5	172.24	329.5	163.08
314	181.37	322	171.65	330	162.53
314.5	180.76	322.5	171.06	330.5	161.99
315	180.12	323	170.49	331	161.43
315.5	179.52	323.5	169.89	331.5	160.88
316	178.88	324	169.31	332	160.34
316.5	178.27	324.5	168.74	332.5	159.8
317	177.67	325	168.16	333	159.27
317.5	177.04	325.5	167.6	333.5	158.72
318	176.45	326	167.02	334	158.19
318.5	175.83	326.5	166.45	334.5	157.65
319	175.22	327	165.88	335	157.12
319.5	174.63	327.5	165.32		