

# Crank-Nicolson

Christian Dorion - HEC Montréal  
Hiver 2022

## Consignes

- Remise électronique sur ZoneCours au plus tard le **24 mars à 15h** de:
  - Un rapport sous forme de Jupyter notebook (.ipynb)
  - **Tous** les fichiers .py nécessaires pour l'exécution du notebook.
- Le rapport **doit**:
  - être en format .ipynb (des points seront enlevés pour tout autre format).
  - inclure le numéro de matricule de tous les membres de l'équipe dans la première cellule
  - Répondre aux questions et discuter des résultats à l'aide de tables et graphiques
- Barème
  - **40 %** Exactitude des résultats
  - **25 %** Discussions complètes et **concises** (cellules "markdown")
  - **20 %** Concision du notebook (.ipynb avec minimum de code) et clarté des graphiques
  - **15 %** Clarté du code (.py)

## Crank-Nicolson, frontière d'exercice et gamma

Considérez une option de vente (*put*) américaine avec un prix d'exercice de 100\$ et qui vient à échéance dans 1 an. La structure à terme du taux sans risque est plate à 5% et, historiquement, la volatilité du titre était de 25%. Le sous-jacent ne détache pas de dividende.

Considérez, pour la méthode de Crank-Nicolson, une grille 5,000 pas d'actifs, articulés entre 0 et  $S_{max}$ , et 3,650 pas de temps. Pour les *puts* "vanilles",  $S_{max} = 200$ . Vous considérerez aussi une version *up-and-out* de l'option américaine, avec une barrière à 110\$.

1. Pour *put up-and-out*, quel  $S_{max}$  suggérez-vous?
2. Écrivez une fonction `CrankNicolson` que vous invoquerez exactement 3 fois pour l'ensemble du TP, avec 3 jeux de paramètres différents. Ces paramètres inclueront: le strike, le taux sans risque, la maturité, la volatilité, le nombre de pas d'actifs, le nombre de pas de temps, le type d'exercice

et la barrière lorsque nécessaire. Assurez-vous que votre fonction retourne toute la grille de prix d’option, ainsi qu’une approximation de la frontière d’exercice dans le cas des options américaines.

3. En utilisant la fonction précédemment mentionnée ainsi que la fonction en forme fermée de Black-Scholes, comparez, sur un même graphe, la valeur:
  - Du *put* européen selon BS et CN
  - Du *put* américain et sa contrepartie *up-and-out*

en fonction de la valeur initiale du sous-jacent entre 0 et  $S_{max}$ . Pour le *put up-and-out*, utiliser 2,750 pas d’actifs (plutôt que 5,000). Assurez-vous que le graphe soit facilement compréhensible malgré la richesse de l’information qui s’y trouve. Étant donné que les options sur le marché sortent rarement de la fourchette 75%–125% de moneyness, fournissez une seconde version de ce graphe, avec un focus sur  $S$  entre 75 et 125. Comparez les 4 courbes.

4. Tracer la frontière d’exercice des *puts* américains (avec ou sans barrière) en fonction de leur maturité résiduelle dans la grille. Comparez ces deux courbes.
5. À l’aide des valeurs d’options obtenues au premiers pas de temps de la grille, calculez les gammas pour les noeuds 2 à  $I - 1$ . Comparez graphiquement ces gammas pour le *put* européen à ceux obtenus analytiquement avec Black-Scholes. L’approximation est-elle fidèle? Pourquoi selon vous?
6. Rapportez sur un autre graphe ces gammas pour les deux versions du *put* américain. Discutez.
7. Considérez la trajectoire quotidienne suivante (partant du temps 0) pour le sous-jacent:

<https://www.dropbox.com/s/2lwtedqyhbn18dg/S.csv?dl=0>

Sans ré-utiliser la fonction `CrankNicolson`, créez une figure avec 2 sous-graphiques superposés (i) rapportant la trajectoire du sous-jacent et la frontière d’exercice en fonction du temps (qui passe), et (ii) rapportant, en fonction du temps, deux “trajectoires” pour le *put*: l’une où l’on ignore le fait que le put aurait été potentiellement exercé précédemment sur la trajectoire du sous-jacent, l’autre qui préserve la valeur au premier exercice pour jusqu’à la fin de la trajectoire du sous-jacent. Discutez de l’implémentation et des résultats.