Hedging hors du cadre BMS

Christian Dorion - HEC Montréal
Hiver 2022

Consignes

- Remise électronique sur ZoneCours au plus tard le **8 avril à 15h** de:
  - Un rapport sous forme de Jupyter notebook (.ipynb)
  - **Tous** les fichiers `.py` nécessaires pour l'exécution du notebook.
- Le rapport **doit**:
  - être en format .ipynb (des points seront enlevés pour tout autre format).
  - inclure le numéro de matricule de tous les membres de l'équipe dans la première cellule
  - Répondre aux questions et discuter des résultats à l'aide de tables et graphiques
- Barème
  - **40 %** Exactitude des résultats
  - **25 %** Discussions complètes et **concises** (cellules "markdown")
  - **20 %** Concision du notebook (.ipynb avec minimum de code) et clarté des graphiques
  - **15 %** Clarté du code (.py)

Hedging hors du cadre BMS

Nous présumerons que les rendements du sous-jacent sont adéquatement décrits par le modèle NGARCH:

$$r_{t+1} = r_f + \lambda\sqrt{h_{t+1}} - \frac{1}{2}h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}}\varepsilon_{t+1}, \tag{1}$$

$$h_{t+1} = \omega + \alpha h_t\left(\varepsilon_t - \gamma\right)^2 + \beta h_t, \tag{2}$$

Les parametres du modèle sont données dans le *notebook* inclut avec le code suivant:

`https://www.dropbox.com/sh/vve1liags9r1zqf/AAArtIbNQQhFX_iA0nHto6nka?dl=1`

duquel vous vous inspirerez pour ce TP. Entre autre, vous bâtirez autour de la méthode `simulateQ` pour valoriser une option et la couvrir (*delta-hedging*).

Avant de ce faire, un détour sur les propriétés du modèle.

1. Comparez l'implémentation de `ngarch.simulateP` et `ngarch.simulateQ` dans `variance_risk.py`

2. Le *notebook* présente la prime de risque sur l'équité (ERP) à différents horizons lorsque la variance à 1 jour prédite par le modèle (h_{t+1} ≡`h_tp1`) est de $(55\%)^2$. Discutez des deux figures.

3. Dans les études sur les produits dérivés, la prime de risque sur la variance (VRP) est généralement définie comme la différence entre la variance des **log-**rendements espérés sous $\mathbb{P}$ et la variance correspondante sous $\mathbb{Q}$. (En général, une prime de risque est la différence entre un moment espéré sous $\mathbb{P}$ et sa contrepartie sous $\mathbb{Q}$.)

   Sans changer les simulations, reproduisez pour la VRP les deux figures fournies pour l'ERP. Discutez et comparez avec les graphiques sur l'ERP.

4. Répétez 3. pour $h_{t+1} = (15\%)^2$. Discutez et comparez avec les graphiques obtenus en 3.

Considérez des options de vente (*put*) avec un prix d'exercice de 90$ et différentes échéances à 0.5 mois, 3 mois et 1 an. Le sous-jacent vaut présentement 100$ et, historiquement, la volatilité du titre était de 35%. Le sous-jacent ne détache pas de dividende et sa dynamique est décrite par le NGARCH utilisé ci-haut.

5. Deux investisseurs s'entendent sur le niveaux de volatilité initial h_{t+1}. L'un deux utilisera le modèle de BMS pour tarifier les options, l'autre reconnaitra la nature NGARCH de la dynamique du sous-jacent et utilisera donc ce modèle pour la valorisation. Créer une table comparant, pour les différentes maturités, les prix obtenus (et leur différence) pour $\sqrt{h_{t+1}/\Delta t} = \{0.15, 0.35, 0.55\}$.

   Pour ce faire, vous ne simulerez **qu'une seule fois par niveau de volatilité**, sur un horizon de 1 an. Pour valoriser les options de plus courtes maturités, il suffira de tronquer cette simulation. (Lorsque vous considérez des centaines d'options sur des dizaines de maturités différentes, ne simuler qu'une fois sur la maturité la plus longue est très avantageux computationnellement. De plus, cela assure une cohérence entre les prix des options de différentes maturités.)

6. Concentrons-nous maintenant sur l'option à 1 an, pour les mêmes niveaux de volatilité initiale $\sqrt{h_{t+1}/\Delta t} = \{0.15, 0.35, 0.55\}$. Vous réutiliserez les simulations en 5. (sans les regénérer). Considérons la couverture d'une position courte sur le *put*. Établissez, à t, un portefeuille delta-neutre, en utilisant le delta de BMS, en utilisant $\sigma_t = \sqrt{h_{t+1}/\Delta t}$ pour chacun des scénarios de volatilité initiale.

   À chaque pas de temps dans la simulation, rebalancer votre portefeuille en utilisant toujours le delta de BMS, où $\sigma_{t+n,m} = \sqrt{h_{t+n+1,m}/\Delta t}$ sur la trajectoire m au temps $t + n$. Votre code doit être vectoriel dans la dimension des simulations (m). Notez que l'évolution du compte de marge respectera une équation de la forme:

$$M_{t+n,m} = e^{r\Delta t} M_{t+n-1,m} - (\Delta_{t+n,m} - \Delta_{t+n-1,m}) S_{t+n,m}. \tag{3}$$

Notez que la marge initiale est obtenue en établissant le portefeuille initial que l'on souhaiterait autofinancé et qu'à la maturité, la marge sera aussi affecté par le payoff de l'option.

En utilisant les mêmes innovations $N(0, 1)$ que pour les simulations du modèle NGARCH, simuler, pour chacun des niveaux de volatilité initiale, les trajectoires correspondantes sous BMS. Comparez graphiquement l'évolution de la moyenne de $M_{t+n,m}$ sous les deux modèles.

7. Comparez graphiquement (histogrammes) la distribution finale des marges sous les deux modèles. Discutez, à l'aide potentiellement de différentes mesures statistiques.

bonus #1 Implémentez une approche pour réduire davantage le variance des estimateurs de Monte-Carlo obtenus ci-haut (le code implémente déjà les variables antithétiques).

bonus #2 Comment pourrions-nous calculez le delta sous NGARCH à t? Comment pourrions-nous recalculer ce delta à chaque point $(t+n, m)$ de la simulation de façon réaliste (computationnellement).