

# Arbres binomiaux et CJM

Christian Dorion - HEC Montréal  
Hiver 2022

## Consignes

- Remise électronique sur ZoneCours au plus tard le **11 février à 16h** de:
  - Un rapport sous forme de Jupyter notebook (.ipynb)
  - **Tous** les fichiers .py nécessaires pour l'exécution du notebook.
- Le rapport **doit**:
  - être en format .ipynb (des points seront enlevés pour tout autre format).
  - inclure le numéro de matricule de tous les membres de l'équipe dans la première cellule
  - Répondre aux questions et discuter des résultats à l'aide de tables et graphiques
- Barème
  - **40 %** Exactitude des résultats
  - **25 %** Discussions complètes et **concises** (cellules "markdown")
  - **20 %** Concision du notebook (.ipynb avec minimum de code) et clarté des graphiques
  - **15 %** Clarté du code (.py)

## Arbres binomiaux et Carr-Jarrow-Myneni

L'objectif de ce travail est d'évaluer des options de vente (*put*) américaines écrites sur l'action ordinaire de ACG Corp. en date du 18 janvier 2022 en utilisant un arbre binomial. L'action de ACG Corp. vaut 100\$ à la fermeture des marchés, le taux sans risque à 1 mois est de 3% et, historiquement, la volatilité du titre de ACG Corp. était de 35%. L'action sur ACG Corp. ne détache pas de dividende.

1. À la fermeture du marché au 18 janvier, des *puts* européens venant à échéance le 18 février et de prix d'exercice 90\$, 95\$, 100\$, 105\$ et 110\$ se transigent respectivement à 2.1809\$, 2.5394\$, 4.1029\$, 6.7978\$, 11.0215\$. Tracer le *smile* de volatilité implicite correspondant à ces prix en fonction de leur *moneyness*  $M$  définie comme étant  $M = 0.5 - N(d_1)$ , où vous utiliserez la volatilité historique pour calculer  $d_1$ .
2. En utilisant une interpolation linéaire, trouver la volatilité implicite des *put* européens de même échéance et dont le prix d'exercice seraient de 92.50\$, 97.50\$, 102.50\$ et 107.50\$.

3. Pour les 5 *puts* européens mentionnés en (1), ainsi qu'un 6e put *put* de *strike* 97.50\$, vous devez calculer les prix CRR<sup>1</sup> pour  $N = 10, \dots, 500$  pas de temps. Pour chacun des puts, utiliser sa volatilité implicite. Tracer les 6 graphes de convergence, avec le nombre de pas en axe des x) en une figure 3x2 telle que:
  - (a) Les graphes sont en ordre croissant de prix d'exercice, avec le prix d'exercice en guise de titre
  - (b) Chaque graphe rapporte l'erreur relative, en pourcentage, au prix de Black-Merton-Scholes en plus de (i) une ligne '-' en 0 (ii) une ligne ':' en -0.1% et (iii) une ligne ':' en +0.1%.
4. Concentrez-vous maintenant sur le *put* européen de *strike* 97.50\$. Calculer son prix CRR
  - (a) sans ajustement Black-Merton-Scholes
  - (b) avec ajustement Black-Merton-Scholes à l'avant-dernière date

Représentez à nouveau (graph supérieur d'une figure 3x1) la convergence des prix du *put* selon les méthodes en a et b en traçant un graphique des prix obtenus pour un nombre de pas allant de 10 à 500. En deuxième sous-figure, rapporter le temps de calcul en fonction du nombre de pas des deux méthodes en fonction du nombre de pas de temps. En troisième sous-figure, rapporter les prix, encore en fonction du nombre de pas, obtenus à l'aide la méthode avec ajustement, des *puts* européen et américain. Discutez.
5. Dans une figure 2x2, tracer la frontière d'exercice de chacun des quatre *puts* américains, de *strike* 92.50\$, 97.50\$, 102.50\$ et 107.50\$, en fonction de sa maturité résiduelle dans l'arbre binomial avec ajustement à 500 pas de temps. Sur le même graphique, tracez la frontière obtenue si vous utilisiez plutôt une volatilité de 40%.
6. Tracer ces mêmes frontières d'exercice à l'aide de la forme quasi-analytique de Carr-Jarrow-Myneni. Comparer.

---

<sup>1</sup>Prix obtenus à l'aide de l'arbre binomial paramétrisé selon la méthode de Cox, Ross et Rubinstein (1979).