실수

- **실수의 완비성** : 감소하는 양수들의 수열은 수렴한다.
- 이는 증가하는 수열의 각 항이 일정한 실수보다 작으면, 그 수열은 수렴한다는 것과 동치이다.
- **상계** : 수열이 주어졌을 때, 모든 자연수 n에 대해 $a_n \leq B$가 성립하는 B가 존재한다면, 수열을 **위로 유계**라고 하며, 이때의 B를 **상계**라고 한다.
- **하계** : 수열이 주어졌을 때, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \geq b$인 b가 존재한다면, 수열을 **아래로 유계**라 하고, b를 **하계**라 부른다.
- 아래로 유계이면서 동시에 위로 유계인 수열을 **유계인 수열**이라 부른다. 수렴하는 수열은 모두 유계인 수열이다.

상한과 하한

- 실수집합 A에 대하여

$$a \in A \quad \Rightarrow \quad b \geq a$$

인 실수 b가 존재하면, A는 **위로 유계**라고 말하고, b를 A의 **상계**라 부른다. 이때, A의 상계 중 가장 작은 것을 A의 **최소상계** 혹은 **상한**이라 부르고,

$$\sup A$$

로 나타낸다. 만약 A가 위로 유계가 아니라면, $\sup A = \infty$로 쓴다.

상한과 하한

- 실수집합 A에 대하여

$$a \in A \quad \Rightarrow \quad b \leq a$$

인 실수 b가 존재하면, A는 **아래로 유계**라고 말하고, b를 A의 **하계**라 부른다. 이때, A의 하계 중 가장 큰 것을 A의 **최대하계** 혹은 **하한**이라 부르고,

$$\inf A$$

로 나타낸다. 만약 A가 아래로 유계가 아니라면, $\inf A = -\infty$ 로 쓴다.

실수의 완비성과 상한, 하한

- 위로 유계이면서 아래로 유계인 집합을 **유계**인 집합이라 부른다.
- 공집합이 아닌 위로 유계인 집합은 상한을 가지는데, 이는 실수의 완비성과 동치이다. 즉, 실수에서는 항상 공집합이 아닌 위로 유계인 집합은 상한을 가진다.
- 실수의 완비성은 공집합이 아닌 아래로 유계인 집합이 하한을 가진다는 것과도 동치이다.
- 함수 f의 **치역**

$$f(A) := \{f(a) | a \in A\} \subseteq \mathbb{R}$$

가 유계인 집합이면, 함수 f를 **유계인 함수**라고 한다.

비교판정법 정리의 증명

증명.
수렴하는 급수 $\sum b_n$의 합을 $B < \infty$라고 두면, 임의의 n에 대하여

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_n \leq B$$

가 성립하므로, 수열

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad (n = 1, 2, \cdots,)$$

은 위로 유계인 증가수열이다. 따라서 실수의 완비성에 의하여 그 극한값이 존재한다.

교대급수정리의 증명

증명.
수열 a_n의 부분합수열

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

을 정의하자. 편의를 위하여 a_1을 양수라고 가정하자. 그러면 홀수항 a_{2n-1}들은 양수이고, 짝수항 a_{2n}은 음수이다. 그러면

$$a_1 \geq a_1 + (a_2 + a_3) \geq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) \geq \cdots$$

이므로 $s_1 \geq s_3 \geq s_5 \geq \cdots$이고,

$$a_1 + a_2 \leq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) \leq \cdots$$

이므로 $s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \cdots$이다.

교대급수정리의 증명

한편, 모든 자연수 n에 대하여

$$s_1 \geq s_{2n-1} \geq s_{2n-1} + a_{2n} = s_{2n} \geq s_2$$

이므로 수열 (s_{2n-1})은 아래로 유계인 감소수열이고, (s_{2n})은 위로 유계인 증가수열이므로 실수의 완비성에 의하여 모두 수렴한다. 한편, $s_n - s_{n-1} = a_n$이 $n \to \infty$일 때 0ㅇ로 수렴하므로,

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_{2n-1} + \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_{2n-1}$$

이다. 따라서, 수열 (s_n)은 수렴한다. 즉, 급수 $\sum a_n$은 수렴한다.

거듭제곱급수

- 주어진 수열과 변수 x에 대하여,

$$\mathbf{a}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

  와 같은 표현을 **거듭제곱급수**라 부르고,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \sum a_n x^n$$

  과 같이 쓴다.
- 거듭제곱급수는 곧 차수가 무한대인 다항식으로 이해할 수 있으며, 이에 따라 x^0의 계수인 a_0은 **상수항**이라 불리기도 한다.

거듭제곱급수와 수렴

- 거듭제곱급수에 대해서도 그냥 일반항이 $a_n x^n$이 되었다고 생각하고, 1장에서 사용하였던 다양한 판정법을 이용하여 수렴하는지 확인할 수 있다.
- 반면, 여기서는 x에 의해 항 간의 비율이나, 거듭제곱근이 달라질 수도 있게 되는데, 이것은 특정 x에 대해서는 급수가 수렴하지만, 어떤 x에 대해서는 급수가 발산하게 만들기도 한다.
- 단 하나 확실한 것은, $x = 0$에서는 상수항만 남게 될 것이므로 항상 급수가 수렴한다는 것이다.

Example

거듭제곱급수

$$\sum x^n$$

은 $|x| < 1$에서 수렴하고, $|x| \geq 1$에서는 발산한다.

거듭제곱급수와 수렴성질

거듭제곱급수의 성질 - 1

거듭제곱급수

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

이 $x = x_0$일 때 수렴하고, $x = x_1$일 때 발산한다고 하자. 그러면
1) $f(x)$는 $|x| < |x_0|$인 임의의 실수 x에 대하여 절대수렴한다.
2) $f(x)$는 $|x| > |x_1|$인 임의의 실수 x에 대하여 발산한다.

거듭제곱급수와 수렴성질

증명.
1) $x_0 \neq 0$이다. 만약 급수 $\sum a_n x_0^n$이 수렴하면, 일반항 판정법에서 $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$이다. 그러면 n이 아주 크면 $|a_n x_0^n| < 1$이고,

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

이다. 그러므로 유한 개의 항을 제외하면

$$\sum |a_n x^n| \leq \sum \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < \infty$$

이므로, x에서도 수렴한다.
2) 만약 수렴한다면 $x| > |x_1|$이므로 $\sum a_n x_1^n$이 수렴해야 하고, 이는 가정에 모순이다. 따라서 주어진 명제가 참이다.

거듭제곱급수와 수렴성질

거듭제곱급수의 성질 - 2

앞의 성질 1에 의하여, 거듭제곱급수 $f(x)$는 셋 중 하나의 경우가 될 수 있다.
(1) $f(x)$가 $x = 0$에서만 수렴한다.
(2) $f(x)$가 모든 실수에서 수렴한다.
(3) 다음을 만족시키는 양수 r이 존재한다.
- $|x| < r$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)$가 수렴한다.
- $|x| > r$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)$가 발산한다.

- 이때 (3)에 해당하는 경우 실수 r을 $f(x)$의 **수렴반경**이라 부른다. (1)의 경우에는 수렴반경이 0이라 하고, (2)의 경우에는 수렴반경이 ∞가 된다.
- 주의할 것은, $|x| = r$인 경우의 수렴성에 대해서는 아무 보장도 없다는 것이다.

거듭제곱급수와 수렴성질

거듭제곱급수의 성질 - 3

거듭제곱급수 $\sum a_n x^n$에서 $a_n \neq 0$이고, 극한값

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$$

이 존재한다고 하자. 이때, 거듭제곱급수 $\sum a_n x^n$의 수렴반경은 $\frac{1}{l}$이다.

거듭제곱급수와 수렴성질

증명.
이 급수의 일반항의 비는

$$\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} = \frac{a_{n+1}}{a_n}x$$

이다. 그러므로 $|x| < 1/l$이면

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}x\right| = l|x| < 1$$

이고, 비율판정법에 의하여 $\sum a_n x^n$은 절대수렴하며 수렴한다.
반면, $|x| > 1/l$인 경우에는 이 비율이 1보다 커지므로, n이 아주 크면 $|a_{n+1}x^{n+1}| \geq |a_n x^n| > 0$이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty} |a_n x^n| \neq 0$$

이므로, 일반항 판정법에 의해 급수 $\sum a_n x^n$은 발산한다.

평균값 정리

평균값 정리

연속함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$가 구간 (a, b)에서 미분가능하면,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

인 $c \in (a, b)$이 존재한다.

거듭제곱급수 기본정리

거듭제곱급수 기본정리

거듭제곱급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

의 수렴반경 r이 양이면
1) 거듭제곱급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

의 수렴반경도 r이다.
2) 거듭제곱급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

의 수렴반경도 r이다.

거듭제곱급수 기본정리

거듭제곱급수 기본정리

3) 구간 $-r < x < r$에서 함수

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

는 미분가능하고 다음 등식이 성립한다.

(a)

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (-r < x < r)$$

(b)

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad (-r < x < r)$$

거듭제곱급수 기본정리

증명.
(1) 먼저 $0 < t < c < r$이 되도록 t와 c를 잡는다. 극한식

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\log n} = 1$$

을 이용하면 아주 큰 n에 대하여 $n^{1/n}t < c$이고, 따라서

$$|na_n t^{n-1}| = |a_n|(n^{1/n}t)^n/t \le |a_n|c^n/t$$

을 얻는다. 이제 비교판정법에 의하여 급수 $\sum na_n t^{n-1}$은 절대수렴한다. 따라서 거듭제곱급수 $\sum na_n x^{n-1}$의 수렴반경은 r 이상이다.

거듭제곱급수 기본정리

이제 수렴반경이 r 이하임을 보여 보자. $\sum |na_n x^{n-1}|$은 수렴하면 비교판정법에 의하여 $\sum |a_n x^{n-1}|$이 수렴하고, 따라서 $\sum a_n x^n$이 절대수렴한다. 그러므로, 이것이 항상 보장되기 위해서는 적어도 $\sum na_n x^{n-1}$의 수렴반경은 r 이하여야 한다. 따라서 전 슬라이드의 결과와 종합하면,

$$\sum na_n x^{n-1}$$

의 수렴반경은 r이다.

거듭제곱급수 기본정리

(2) 거듭제곱급수

$$\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

의 관점에서 보면, (1)을 적용할 경우 이 거듭제곱급수의 수렴반경은

$$\sum a_n x^n$$

과 같은 r이 되어야만 함이 자명하다.

거듭제곱급수 기본정리

(3) 미분에 대해 보이기 위해서는

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sum na_n x^{n-1}$$

임을 확인하면 된다. $|x|<c<r$인 c를 하나 고정하고, h의 값이 아주 작아 $|x+h|<c$라고 하자. 그러면 $x+h$도 수렴하는 범위에 속하므로, f가 잘 정의되며,

$$\begin{aligned} A(h) &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \sum na_n x^{n-1} \\ &= \frac{\sum a_n(x+h)^n - \sum a_n x^n}{h} - \sum na_n x^{n-1} \\ &= \sum a_n \left(\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - nx^{n-1} \right) \\ &= \sum na_n (y_n^{n-1} - x^{n-1}) \end{aligned}$$

인 y_n이 x와 $x+h$ 사이에 존재한다.

거듭제곱급수 기본정리

그러면 y_n과 x 사이에서 다시 평균값 정리를 사용하면

$$y_n^{n-1} - x^{n-1} = (y_n - x)(n-1)z_n^{n-2}$$

인 z_n이 y_n과 x 사이에 존재하며, $A(h)$에 대하여

$$\begin{aligned} A(h) &= \sum na_n(y_n - x)(n-1)z_n^{n-2} \\ &\le |h| \sum n(n-1)|a_n|c^{n-2} \quad (|y_n - x| \le |h|, |z_n| \le c) \end{aligned}$$

이고, (1)을 두 번 적용하면

$$\sum n(n-1)|a_n|c^{n-2} < \infty$$

임도 알 수 있다. 따라서

$$\lim_{h\to 0} A(h) = 0$$

이고,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum na_nx^{n-1}$$

거듭제곱급수 기본정리

미적분학 기본정리에 의하여

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

이며, 앞선 증명 결과를 응용한다면

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

이다. 따라서 도함수가 같고 원점에서의 값이 일치하는 두 함수는 서로 같다. 즉,

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad (-r < x < r)$$

거듭제곱급수 기본정리의 응용

Example

$|x| < 1$일 때

$$g(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

은 잘 정의된다. 양변을 미분하면

$$\frac{1}{(1-x)^2} = g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

이므로 $x = 1/2$으로써 정리하면

$$2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

을 얻을 수도 있다. 즉, 주어진 급수가 수렴한다는 지식을 넘어서 그 값을 직접 구해줄 수도 있는 것이다.

거듭제곱급수 기본정리의 응용

Example

한 번 더 미분하여

$$\frac{2}{(1-x)^3} = g''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$$

를 얻는다면,

$$4 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2^n}$$

을 얻기도 한다.

로그함수와 거듭제곱급수

$|x| < 1$일 때

$$g(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

에서 반대로 적분을 해본다면,

$$-\log(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

이며, 이를 잘 정리해주면

로그함수의 거듭제곱급수

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (|x| < 1)$$

Abel's theorem (몰라도 됨)

Abel's theorem

수렴반경이 r인 거듭제곱급수 $f(x)$가 $x = r$일 때 l에 수렴하면,

$$\lim_{x \to r^-} f(x) = l$$

이다.

즉, $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ 라는 것이다. 우리 책에서는 이를 다음 슬라이드에서처럼 보인다.

Example

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + (-1)^n \frac{x^n}{1-x}$$

이므로 구간 $[0, x]$에서 이를 적분하면

$$|\log(1+x)| = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt$$

이고,

$$\left|\log(1+x) - \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)\right| \le \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt \le \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

이다. 특히 $x = 1$이라면

$$\left|\log 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)\right| \le \frac{1}{n+1}$$

이므로, 앞 슬라이드의 결과를 얻는다.

지수함수와 거듭제곱함수

거듭제곱급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

의 수렴반경은 무한대이므로, 함수

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

은 모든 실수 x에 대해 정의된다. 이때 $\exp(0) = 1$이고 $\exp'(x) = \exp(x)$이므로, $e^x = \exp(x)$이게 된다. 따라서,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

이다.

자연상수는 무리수

만약 e가 유리수라면, 여기에 어떤 자연수 p를 곱하면 자연수가 된다. 따라서,

$$e \cdot p! = p! + p! + \frac{p!}{2!} + \cdots + \frac{p!}{p!} + \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{p!}{n!}$$

도 자연수여야 한다. 그런데,

$$0 < \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{p!}{n!} < \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2} + \cdots = \frac{1}{p} < 1$$

이므로, 주어진 수는 자연수일 수 없다. 따라서, e는 무리수이다.

지수함수의 증가율

지수함수 e^x의 거듭제곱급수전개에서, 임의의 자연수 n와 충분히 큰 양수 x에 대하여

$$e^x > \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} > x^{n+1}$$

임을 확인할 수 있다. 따라서 임의의 다항함수 $p(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n$에 대하여

$$0 \leq \lim_{x\to\infty} \frac{|p(x)|}{e^x} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{|p(x)|}{x^{n+1}} = 0$$

이 된다. 따라서, e^x는 그 어떤 다항함수보다도 빠르게 증가한다.

삼각함수와 거듭제곱함수

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

와

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

을 생각하자. 두 거듭제곱급수의 수렴반경은 비율판정법에 의하여 모두 무한대임을 쉽게 확인해줄 수 있으며, 이 실수 전체에서 정의된 두 함수는

$$S'(x) = C(x), \quad C'(x) = -S(x)$$

이다.

삼각함수와 거듭제곱함수

이제 함수

$$f(x) = (S(x) - \sin x)^2 + (C(x) - \cos x)^2$$

를 생각하면, 양변을 미분할 때

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(S(x) - \sin x)(S'(x) - \cos x) + 2(C(x) - \cos x)(C'(x) + \sin x) \\ &= 2(S(x) - \sin x)(C(x) - \cos x) + 2(C(x) - \cos x)(-S(x) + \sin x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

이므로 상수함수이고, $f(0) = 0$이므로 $f(x) = 0$이다. 따라서,

삼각함수와 거듭제곱함수

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

쌍곡함수

쌍곡함수

1) **쌍곡 코사인함수**는

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

으로 정의된다. 이 함수는 좌우 대칭인 짝함수이다.

2) **쌍곡 사인함수**는

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

으로 정의된다. 이 함수는 원점 대칭인 홀함수이다.

- 쌍곡 사인함수와 쌍곡 코사인함수는 아래 성질을 만족시킨다.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

- 이들은 모두 무한번 미분 가능한 함수로,

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x, \quad \frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$$

쌍곡함수와 거듭제곱급수

지수함수의 거듭제곱급수전개로부터, 아래를 알 수 있다.

쌍곡함수와 거듭제곱급수

1)

$$\cosh x = \sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

2)

$$\sinh x = \sum \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

역함수 정리

- 두 집합 A, B 사이의 함수 $f : A \to B$가 전단사 함수이면 $x = f(y)$인 x와 y를 연관시키는

  $$y = f^{-1}(x)$$

  이라는 **역함수**가 존재한다.
- 역함수의 역함수는 처음 함수이다. 즉,

  $$(f^{-1})^{-1} = f$$

  이다.
- $$\begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= x \quad (x \in B) \\ f^{-1}(f(x)) &= x \quad (x \in A) \end{aligned}$$

역함수 정리

역함수 정리

열린 구간 I에서 정의된 함수 $f : I \to \mathbb{R}$가 미분 가능하고 정의역의 임의의 점 x에서 $f'(x) \neq 0$이면,

1) f는 일대일 함수이다.
2) f의 치역 $J = f(I)$는 열린 구간이다.
3) f의 역함수 $f^{-1} : J \to I$는 미분가능하다.
4) $x_0 \in I$이고 $y_0 = f(x_0)$이면, 아래가 성립한다.

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y_0) = \frac{1}{\frac{d}{dx} f(x_0)}$$

역사인 함수

- 사인함수 $\sin x$의 정의역을 구간 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$에 제한하면, $\sin x$는 순증가하므로 일대일 함수이고, 역함수를 가진다.
- 이 역함수를 **역사인함수**라 부르고, arcsin혹은 $\sin^{-1}$으로 쓴다.
- 이 함수의 정의역은
$$[-1, 1]$$
이며, 치역은
$$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$
이 된다.
- $$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

역탄젠트 함수

- 탄젠트 함수는 구간 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에서 순증가 함수이고, 역함수를 가진다.
- 이 역함수를 **역탄젠트 함수**라 부르고, arctan 혹은 $\tan^{-1}$ 등으로 표현한다.
- 정의역은 $(-\infty, \infty)$이며 치역은 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$이다.
- $$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

역탄젠트 함수와 거듭제곱급수

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

이므로, 양변을 적분하면

역탄젠트 함수의 거듭제곱급수

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Example

여기에 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$을 대입한다면,

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \cdots\right)$$

과 같은 식을 얻고 이로써 π를 예측할 수도 있다.
ln에 대해서 했을 때와 비슷하게 $|x| = 1$일 때에도 Abel's theorem 의 결과가 성립함을

$$\left|\arctan x - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right| = \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t}dt \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

에서 $x = 1$을 대입함으로써 알 수 있고, 여기서 **라이프니츠의 공식**

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

를 얻는다.

다른 함수들

- **쌍곡시컨트함수**, **쌍곡탄젠트함수** : 83쪽 문제 2번에서 소개한다.
- **역코사인함수** : 93쪽 문제 4번에서 소개한다.
- **역쌍곡사인함수** : 94쪽 문제 9번에서 소개한다.
- **역쌍곡코사인함수** : 94쪽 문제 10번에서 소개한다.
- **역쌍곡탄젠트함수** : 94쪽 문제 19번에서 소개한다.

숙제 문제

- 69쪽 1, 2, 3, 8번
- 75쪽 2번
- 79쪽 2, 4번
- 83쪽 2, 3번
- 93쪽 4, 9, 10, 11, 19번
- 프린트 문제 3의 배수