리만적분

2-Extra1. 1. *실수 $C_0, C_1, \cdots, C_n$에 대하여*

$$C_0 + \frac{C_1}{2} + \cdots + \frac{C_n}{n+1} = 0$$

이라 가정하자. 그러면 방정식

$$C_0 + C_1 x + \cdots + C_n x^n = 0$$

이 구간 $[0,1]$에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보여라.

함수 f를

$$f(x) = C_0 + C_1 x + \cdots + C_n x^n$$

이라고 정의하자. 그러면

$$\int_0^1 f(x)ds = \int_0^1 C_0 + C_1 x + \cdots + C_n x^n dx = C_0 + \frac{C_1}{2} + \cdots + \frac{C_n}{n+1} = 0$$

이다. 이때 $F(x) = \int_0^x f(x)dx$라고 둔다면 $F(0) = F(1) = 0$이 되기에, 평균값 정리에 의해 연속함수 f의 부정적분 F는 $F'(c) = f(c) = 0$이 되는 $c \in [0,1]$을 가지게 된다. 따라서 $f(c) = 0$인 c가 존재하기에, 주어진 방정식은 닫힌 구간 $[0,1]$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

2-Extra1. 2. *연속함수 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$가 다음 성질*

$$\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 f(t)dt$$

를 $x \in [0,1]$에 대해 만족시킬 경우, $f = 0$임을 보여라.

함수 g를 아래와 같이 정의하자.

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt - \int_x^1 f(t)dt$$

그러면 g는 모든 $x \in [0,1]$에 대하여 항등적으로 0이므로, $g'(x) = 0$이다.

$$g'(x) = f(x) - (-f(x)) = 2f(x) = 0$$

이게 되므로, f 역시 정의역에서 0이다. 따라서 $f = 0$.

2-Extra1. 3. *집합 $A = \{\frac{1}{n} : n = 2, 3, \cdots\}$이라 두고, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$을*

$$f(x) = \begin{cases}0, & x \notin A, 1, & x \in A\end{cases}$$

라고 두자. f가 리만적분가능함을 보여라.

어떠한 구간을 잡아도 A에 포함되지 않는 원소가 존재하게 할 수 있으므로, 하합은 항상 0임을 확인할 수 있을 것이다. 이제 상합이 임의로 주어진 $\varepsilon > 0$보다 작도록 분할을 만들어 보자. 우선,

$$A \cap [\frac{\varepsilon}{2}, 1] = \{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$$

이라 하고 각 $i = 1, 2, \cdots, N$에 대하여 $y_i < x_i < z_i < y_{i+1}$이고 $z_i - y_i < \frac{\varepsilon}{2N}$이 되도록 y_i, z_i를 잡자. 이제

$$P = \{0, \frac{\varepsilon}{2}, y_1, z_1, y_2, z_2, \cdots, y_N, z_N, 1\} \cap [0,1]$$

이라 두면 $U(f,P) < \varepsilon$임을 확인할 수 있을 것이다. 따라서, 리만적분 가능성의 동치조건에 의해 이는 리만적분가능하다.

2-Extra1. 4. *$|f|$가 리만적분가능하면 f도 리만적분가능한가? 맞으면 증명하고, 아니면 반례를 들어라.*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ -1, & x \in \mathbb{Q}^c \cap [0,1] \end{cases}$$

로 두면 f는 $[0,1]$에서 정의된 함수이면서 수업시간에 보인 것과 같이 리만적분가능하지 않다. 반면 $|f|$는 항등적으로 1인 함수이기에, 리만적분가능하다. 따라서 이 반례에 의해 문제의 명제는 거짓이다.

2-Extra1. 5. *$[a,b]$의 두 분할 P,Q에 대하여 $P \subseteq Q$이면 $||P|| \le ||Q||$임이 알려져 있다. 그 역이 성립하면 증명하고, 아니면 반례를 들어라.*

구간 $[0,1]$에 대하여

$$P = \{0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1\}$$

$$Q = \{0, 1/3, 2/3, 1\}$$

이라고 두자. 그러면 P와 Q의 노음은 각각 $1/5, 1/3$이므로 $||P|| \le ||Q||$가 성립한다. 반면, P는 Q을 포함하는 더 세밀화된 분할이 아니다. 따라서 문제의 명제에는 반례가 있기에 거짓이다.

2-Extra1. 6. *함수 $f,g,h : [a,b] \to \mathbb{R}$가 유계이고, $f \le g \le h$라 하자. 만약 f,h가 적분가능하고*

$$\int_a^b f = \int_a^b h = A$$

이면, g도 적분가능하고 그 적분값이 A임을 보여라.

임의의 분할 $P = \{x_0 = a, x_1, x_2, \cdots, x_n = b\}$를 떠올려 보자. 그러면 $g \le h$이므로 $i = 1,2,3,\cdots,n$에 대하여

$$\sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} g(x) \le \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} h(x)$$

가 성립하므로 상합의 정의에 의하여

$$U_a^b(g,P) \le U_a^b(h,P)$$

가 성립한다. 이것이 모든 분할 P에 대해 성립함을 고려한다면

$$\overline{\int_a^b} g \le \underline{\int_a^b} h$$

이다. 반대로 $f \le g$에 대해서도 동일하게 수행한다면

$$\underline{\int_a^b} g \ge \underline{\int_a^b} f$$

임을 확인해줄 수 있을 것이다. 그런데 f와 h는 리만적분가능하므로

$$A = \underline{\int_a^b} f \le \underline{\int_a^b} g \le \overline{\int_a^b} g \le \underline{\int_a^b} h = A$$

가 성립한다. 따라서 g는 리만적분가능하며 그 적분값은 A이다.

2-Extra1. 7. *함수 f,g가 리만적분가능하면 $max(f,g), min(f,g)$도 리만적분가능함을 보여라.*

$$\max(f,g) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$$
$$\min(f,g) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$$

임이 알려져 있다. 또한 리만적분가능함수의 합과 차, 절댓값, 리만적분가능함수에 상수를 곱한 함수는 항상 리만적분가능하다. 따라서 $\max(f,g), \min(f,g)$는 그렇게 표현되기에 모두 리만적분가능하다.

2-Extra1. 8. *함수 f가 적분가능하면 f^2도 적분가능함이 알려져 있다. 이를 이용하여 f,g가 리만적분가능하면 fg도 리만적분가능함을 보여라.*

$$fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$$

로 표현이 가능하다. 리만적분가능함수의 합과 차, 제곱, 리만적분가능함수에 상수를 곱한 함수는 항상 리만적분가능하다. 따라서 fg는 그렇게 표현되기에 리만적분가능하다.

2-Extra1. 9. *연속함수 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$가 $f\geq 0$이고 $\int_0^1 f(x)dx = 0$이면, f가 상수함수 $f=0$임을 보여라.*

모순을 이끌어내기 위해 $f\neq 0$이라 하자. 그러면 어떤 $x_0\in[0,1]$에 대하여, $f(x_0)=p>0$이다. f는 연속이므로 x_0 근방에서 함숫값은 p에 충분히 가까움을 확인할 수 있다. 즉, 어떤 $\delta>0$가 존재하여 $|x-x_0|<\delta$이면 $|f(x)-p|<p/2$이게 할 수 있을 것이다. 따라서

$$[a,b] = [x_0-\delta, x_0+\delta]\cap[0,1]$$

이 되도록 잡으면 $[a,b]$는 f의 정의역 안에 포함되면서 그 안에서 함숫값은 항상 $p/2>0$을 만족하게 된다. 그러면

$$\int_0^1 f(x)dx \geq \frac{1}{2}(b-a)p > 0$$

임을 확인할 수 있다. 이는 분명하게도 모순이다. 따라서 $f=0$임을 확인할 수 있다.

2-Extra1. 10. *$f:[0,1]\to\mathbb{R}$가 $f\geq 0$이고 $\int_0^1 f(x)dx=0$이면, f가 상수함수 $f=0$여야 하는가? 그렇다면 증명하고, 아니면 반례를 들어라.*

$$f = \begin{cases} 0, & 0<x\leq 1 \\ 1, & x=0 \end{cases}$$

이라고 두면 이 함수는 조건을 만족하지만 상수함수가 아니다. 따라서 아니어도 된다.