문제 5/8. 1. *벡터 $(3,4,0)$의 크기를 구하고, 이와 나란한 방향의 단위벡터를 모두 구하라.*

그 크기는 $\sqrt{3^2+4^2}=5$이며, 나란한 방향의 단위벡터는

$$(\frac{3}{5},\frac{4}{5},0),(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5},0)$$

이다.

문제 5/8. 2. *평행사변형 법칙*

$$|a+b|^2+|a-b|^2=2(|a|^2+|b|^2)$$

을 밝혀라. 단, a,b는 $n-$공간의 벡터이다.

$$\begin{aligned}|a+b|^2+|a-b|^2 &= (a+b)\cdot(a+b)+(a-b)\cdot(a-b)\\ &= 2a\cdot a+2a\cdot b-2a\cdot b+2b\cdot b\\ &= 2(a\cdot a+b\cdot b)\\ &= 2(|a|^2+|b|^2)\end{aligned}$$

문제 5/8. 3. *모든 벡터와 수직인 벡터는 영벡터임을 보여라.*

먼저, 영벡터는 모든 벡터와 내적하였을 때 그 값이 0이므로 모든 벡터와 수직이다. 이제, 0이 아닌 어떤 벡터 $\mathbf{u}$가 있어 모든 벡터와 수직이라고 가정하자.

그러면 이 벡터는 자기 자신과도 수직하기에, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=|\mathbf{u}|^2=0$이다. 그러면 $|\mathbf{u}|=0$인데, 이를 만족하는 벡터는 영벡터 뿐이다. 따라서 모순이므로 영벡터가 유일하다.

문제 5/8. 4. *좌표공간의 한 점 P와 두 벡터 $\mathbf{v}=(1,2,3),\mathbf{w}=(3,2,1)$에 대하여 식*

$$P+t\mathbf{v}+s\mathbf{w},\quad 0\le t\le 1,\quad 0\le s\le 1$$

으로 주어진 평행사변형의 넓이는 얼마인가?

주어진 도형은 사실상 벡터 $\mathbf{v},\mathbf{w}$에 의해 구성되는 평행사변형과 같다. 따라서 그 넓이는 $|\mathbf{v}\times\mathbf{w}|$이다. $\mathbf{v}\times\mathbf{w}=(-4,8,-4)$이고 그 크기가 $\sqrt{16+64+16}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$이다.

문제 5/8. 5. *삼차원 상에서 어떤 세 벡터가 이루는 평행육면체의 부피를 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$를 이용해 표현하여라.*

책에 공식이 증명되어 있다. 공식은 $|\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|$이다.

문제 5/8. 6. *삼차원 공간의 벡터 a,b,c에 대하여*

$$(a\times b)\times c=(a\cdot c)b-(b\cdot c)a$$

임을 보여라.

$a=(a_1,a_2,a_3),b=(b_1,b_2,b_3),c=(c_1,c_2,c_3)$라고 하자.

$$\begin{aligned}(a\times b)\times c &= (a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)\times(c_1,c_2,c_3)\\ &= (a_3b_1c_3-a_1b_3c_3-a_1b_2c_2+a_2b_1c_2,a_1b_2c_1-a_2b_1c_1-a_2b_3c_3+a_3b_2c_3,a_2b_3c_2-a_3b_2c_2-a_3b_1c_1+a_1b_3c_1)\\ &= (a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b-(b_1c_1+b_2c_2+a_3b_3)a\\ &= (a\cdot c)b-(b\cdot c)a\end{aligned}$$

문제 5/8. 7. *삼각형 ABC의 무게중심을 M, 변 BC, CA, AB의 중점을 각각 P, Q, R이라고 할 때, 벡터 $\overrightarrow{PM}$은 $a_1\overrightarrow{AB} + a_2\overrightarrow{AC}$꼴로 표현할 수 있고, 벡터 $\overrightarrow{QM}$은 $b_1\overrightarrow{AB} + b_2\overrightarrow{AC}$꼴로 표현이 가능하다. $a_1b_1 + a_2b_2$의 값은?*

$\overrightarrow{PM}$은 A에서 M으로 가는 벡터에서, A에서 P로 가는 벡터를 뺀 것이다. A에서 M으로 가는 벡터는 A에서 P로 가는 벡터에 $2/3$을 곱한 것이나 마찬가지므로, 결국 $\overrightarrow{PM}$이라는 것은 $\overrightarrow{AP}$에 $-1/3$을 곱한 것과 같음을 알 수 있다. P가 BC의 중점이었으므로, $\overrightarrow{AP} = 0.5\overrightarrow{AB} + 0.5\overrightarrow{AC}$이다. 따라서 $a_1 = -1/6, a_2 = -1/6$이다.

반면 $\overrightarrow{QM}$이라는 것은 CA의 중점 Q에서 M으로 가는 것이기에, $\overrightarrow{QM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BQ}$이다. $\overrightarrow{BQ} = 0.5\overrightarrow{BC} + 0.5\overrightarrow{BA} = 0.5\overrightarrow{AC} - 0.5\overrightarrow{AB} - 0.5\overrightarrow{AB} = 0.5\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. 즉 $b_1 = 1/3, b_2 = -1/6$이다. 따라서 구하는 값은 $-1/18 + 1/36 = -1/36$이다.

문제 5/8. 8. *n-공간의 0이 아닌 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$이 있고 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$는 나란하지 않다. 이때, $\mathbf{v} = \mathbf{b} - p_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$와 $\mathbf{w} = \mathbf{c} - p_{\mathbf{a}}(\mathbf{c}) - p_{\mathbf{v}}(\mathbf{c})$를 새롭게 정의하자. $\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$가 서로 수직임을 보이시오.*

먼저, $\mathbf{a}$와 $\mathbf{v}$가 수직함을 보이고자 한다. 서로 수직하다는 것은 내적하면 0이라는 것이다.

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\mathbf{a} \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0\end{aligned}$$

이므로 둘은 서로 수직하다. 그 다음으로는 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{w}$가 수직함을 보이자.

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{w} &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

이므로 수직이다. 이때, $\mathbf{v}$가 $\mathbf{a}$와 수직하기 때문에 마지막 내적은 0임이 항상 보장된다. 마지막으로, $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$가 수직함을 보이자.

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{c} - 0 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{c} = 0$$

이므로 수직이다. 이때 두번째 항은 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{v}$가 수직이기 때문에 사라진다. 따라서, 우리는 세 벡터가 서로 수직임을 알 수 있다.

문제 5/8. 9. *삼차원 좌표공간에서 두 벡터 A, B가 이루는 평행사변형 P를 yz 평면에 정사영한 것의 넓이를 a_1, zx 평면에 정사영한 것의 넓이를 a_2, xy 평면에 정사영한 것의 넓이를 a_3이라고 하자. 이때 P의 넓이 a는*

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

임을 보이시오. 또한, P와 yz, zx, xy 평면 사이의 각을 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$이라고 둘 때 $a_i = a\cos\theta_i$임을 보이시오.

두 벡터가 이루는 평행사변형을 평면에 정사영한 것은 두 벡터를 평면에 정사영해 만든 벡터들로 이루어진 평행사변형과 같다. 따라서 두 벡터 A, B를 각각 (p, q, r)과 (u, v, w)라고 한다면 a_1은 $(0, q, r)$과 $(0, v, w)$가 이루는 평행사변형의 넓이인 $|qw - rv|$다. 이를 a_2, a_3에 대해서도 수행하면 a^2의 값인

$$(qw - rv)^2 + (pw - ru)^2 + (pv - qu)^2$$

과 같음을 알 수 있다. 또한 θ_1은 P와 yz 평면 사이의 각인데, 이는 P의 법선벡터와 yz평면의 법선벡터인 $(1, 0, 0)$이 이루는 각과 같다. P의 법선벡터는 $A \times B$임을 고려하게 된다면,

$$\cos\theta_1 = \left|\frac{qw - rv}{\sqrt{(qw - rv)^2 + (pw - ru)^2 + (pv - qu)^2}}\right|$$

임을 알 수 있으며 이와 같은 방법으로 $a_i = a\cos\theta_i$임을 보일 수 있다.

문제 5/8. 10. *$x^2+2y^2+3z^2=1$일 때, $x+y+z$가 최소 혹은 최대인 (x,y,z)을 구하시오.*

$$(x+y+z)^2 \le (x^2+2y^2+3z^2)(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})$$

이 CBS 부등식에 의해 성립한다. 오른쪽은 그 값이 $\frac{11}{6}$으로 정해져 있기에, $x+y+z$가 최소 혹은 최대가 되려면 CBS 부등식의 등호조건인 $x:\sqrt{2}y:\sqrt{3}z = 1:\dfrac{1}{\sqrt{2}}:\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이 성립해야 한다. 즉, $x=2y=3z$이며, 이를 $x^2+2y^z+3z^2=1$에 대입하게 되면 $x=\sqrt{\frac{6}{11}}$이며 $y=\sqrt{\dfrac{3}{22}}$, $z=\sqrt{\dfrac{2}{33}}$이다. 최소일 때는 여기에 마이너스를 붙이면 된다.

즉

$$(\sqrt{\frac{6}{11}},\sqrt{\frac{3}{22}},\sqrt{\frac{2}{33}}),(-\sqrt{\frac{6}{11}},-\sqrt{\frac{3}{22}},-\sqrt{\frac{2}{33}})$$

이 원하는 점이다.

문제 5/8. 11. *$(x-10)^2+(y-10)^2+(z-10)^2=1$를 만족하는 해인 (p,q,r)을 고려하자.*

$$\frac{p+q+r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

의 최솟값을 구하여라.

(p,q,r)은 중심이 $(10,10,10)$이고 반지름이 1인 구 위에 존재하는 점이다. 또한 구하라고 한 값은 사실 벡터 $(10,10,10)$과 (p,q,r)이 이루는 각의 코사인 값에 $\sqrt{3}$을 곱한 것과 같다. 이것이 최소가 되려면 둘이 이루는 각이 가장 커야 하고(둔각이 될 수는 없으므로), 이는 원점에서 해당 구에 접선을 그을 때 그 접점이 (p,q,r)일 때다. 반지름이 1, 원점과 구의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{300}$이고 접점과 반지름 사이의 각도는 90도이기에, 해당하는 각도가 포함된 직각삼각형에서 빗변의 길이는 $\sqrt{300}$, 밑변의 길이는 $\sqrt{299}$이다. 따라서 그때의 코사인 값인

$$\sqrt{\frac{299}{300}}$$

에 $\sqrt{3}$을 곱한

$$\frac{\sqrt{299}}{10}$$

이 최솟값이다.

문제 5/8. 12. *어떤 두 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$가 다음 조건을 만족한다고 하자.*
임의의 실수 x,y에 대하여 벡터 $x\mathbf{u}+y\mathbf{v}$의 크기가 $\sqrt{x^2-xy+3y^2}$이다.
이때, 두 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$가 이루는 예각의 탄젠트 값을 구하여라.

주어진 벡터의 크기 $|x\mathbf{u}+v\mathbf{v}|$는 아래와 같이 구해질 수 있다.

$$\begin{aligned} x^2-xy+3y^2 &= |x\mathbf{u}+y\mathbf{v}|^2 \\ &= (x\mathbf{u}+y\mathbf{v})\cdot(x\mathbf{u}+y\mathbf{v}) \\ &= |\mathbf{u}|^2x^2+2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}xy+|\mathbf{v}|^2y^2 \end{aligned}$$

따라서, 우리는 $\mathbf{u}$의 크기가 1, $\mathbf{v}$의 크기가 $\sqrt{3}$, 그리고 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=-\dfrac{1}{2}$임을 알 수 있다. 이를 바탕으로 둘이 이루는 각도의 코사인 값을 구하면 $-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$인데, 예각의 탄젠트 값을 구해야 하므로 정답은 $\sqrt{11}$이 된다.

문제 5/8. 13. *임의의 $u, v, w \in \mathbb{R}^3$에 대하여*

$$(u \times v) \times w = (u \cdot w) \times v - (v \cdot w) \times u$$

가 성립함이 알려져 있다. 이를 이용하여 $a, b \in \mathbb{R}^3$에 대하여

$$((a \times b) \times a) \times ((a \times b) \times b) = t(a \times b)$$

를 만족시키는 $t \in \mathbb{R}$을 구하시오.

$$\begin{aligned} ((a \times b) \times a) \times ((a \times b) \times b) &= (a \times b) \cdot ((a \times b) \times b)a - (a \cdot ((a \times b) \times b))(a \times b) \\ &= -(a \cdot ((a \times b) \times b))(a \times b) \\ &= -(a \cdot ((a \cdot b)b - (b \cdot b)a))(a \times b) \\ &= -((a \cdot b)^2 - |a|^2|b|^2))(a \times b) \end{aligned}$$

이다. 여기서 주목해야 할 것은 둘째 줄로 넘어가는 과정인데, $(a \times b) \times b$는 그것과 내적되는 벡터 $a \times b$와 수직하기 때문에 0이 되어 사라지기에 계산이 편해진다. 따라서

$$t = |a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2 = |a \times b|^2$$

임을 알 수 있다.

문제 5/8. 14. *크기가 각각 1,2,3인 서로 수직인 벡터 $a, b, c \in \mathbb{R}^3$와 $x^4 + y^4 + z^4 = 1$를 만족시키는 세 실수 x, y, z에 대하여 $|xa + yb + zc|$의 최댓값을 구하시오.*

$|xa + yb + zc|$는 피타고라스 정리에 의해 그 크기가 $\sqrt{x^2 + 4y^2 + 9z^2}$이다. CBS 부등식으로부터

$$(x^2 + 4y^2 + 9z^2)^2 \leq (x^4 + y^4 + z^4)(1^2 + 4^2 + 9^2)$$

을 얻을 수 있고, 좌변의 최댓값은 98임을 확인할 수 있게 된다. 여기에 네제곱근을 취하면 우리가 원하는 값이 나오기에, 최댓값은 $(98)^{\frac{1}{4}}$임을 알 수 있다.

문제 5/8. 15. *공간에서 $\mathbf{v}$ 방향으로 진행하던 빛이 벡터 $\mathbf{n} \neq 0$에 수직인 평면에 반사되어 나가는 방향을 $\mathbf{v}*$이라 하면 $\mathbf{v}* = \mathbf{v} - 2\dfrac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}\mathbf{n}$임을 보여라.*

입사각과 반사각은 항상 동일하기에, 빛이 반사된다면 평면에 수직한 성분의 벡터의 방향이 반대가 되고, 이외의 성분은 그대로 유지된다. 다르게 이야기하면, 법선벡터에 해당 벡터를 정사영한 벡터를 두 배 하여 원래 벡터에서 빼주면 우리가 원하는 $\mathbf{v}*$이 등장한다. 따라서,

$$\mathbf{v}* = \mathbf{v} - 2\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}\mathbf{n}$$

이 성립한다.

문제 5/8. 16. *벡터 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$를 평면 $\mathbf{n} \cdot (X - P)$에 정사영한 벡터를 구하여라.*

평면에 정사영한 벡터는 원래 벡터에서 평면에 수직인 성분을 제외한 것이다. 따라서, 원래 벡터에서 법선벡터에 원래 벡터를 정사영한 것을 빼면 평면에 정사영한 벡터가 나올 것이다. 이때, 점이 아니라 벡터를 묻는 것이므로 P는 어떤 점이든지 상관이 없다. 즉

$$\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}\mathbf{n}$$

이 원하는 벡터이다.

문제 5/8. 17. *삼차원 위의 꼬인 위치에 있는 두 직선* $l_1 = P_1 + t\mathbf{v}$*와* $l_2 = P_2 + s\mathbf{w}$ *사이의 거리를 구하여라.*

두 꼬인 위치에 있는 직선 사이를 연결하는 최단 거리의 선분을 l이라 하며, 양 끝은 l_1과 l_2 사이에 있는 점 H_1과 H_2라고 하자. 그러면 H_1H_2는 두 직선에 모두 수직하며, 유일하다.

먼저, $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v} \times \mathbf{w}$는 $\mathbb{R}^3$의 기저를 이룸을 알고 있다. 이는 두 직선이 꼬인 위치에 있으며, 삼차원에서 나란하지 않은 두 벡터로 구성되는 평면에 수직한 벡터는 해당하는 두 벡터와 기저를 이룬다는 것으로부터 확인할 수 있다. 따라서

$$\overrightarrow{P_1P_2} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w} + c(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

라고 표현 가능하다. 그리고 l_1, l_2 위에 있는 점 Q_1, Q_2에 대하여 $\overrightarrow{P_1Q_1}$은 l_1에 속하므로 어떤 실수 t에 대하여 $t\mathbf{v}$라고 표현 가능하고, $\overrightarrow{P_2Q_2}$는 l_2에 포함되므로 어떤 실수 s에 대하여 $s\mathbf{w}$라고 표현가능하다. 그러면

$$\overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{Q_1P_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2Q_2} = (a-t)\mathbf{v} + (b+s)\mathbf{w} + c(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

임을 알고 있다. $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$의 선형결합 부분과 $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$은 수직하므로, $|\overrightarrow{Q_1Q_2}|$의 길이는

$$|\overrightarrow{Q_1Q_2}|^2 = |(a-t)\mathbf{v} + (b+s)\mathbf{w}|^2 + |c(\mathbf{v} \times \mathbf{w})|^2$$

를 만족시키며, c는 정해진 값이므로 $t = a$이고 $s = -b$으로 앞의 $|(a-t)\mathbf{v} + (b+s)\mathbf{w}|^2$이 0으로 최소가 될 때 최소의 길이가 된다. 즉, 두 직선 사이 두 점을 이을 때 최소가 되는 점은 $\overrightarrow{P_1Q_1} = a\mathbf{v}$, $\overrightarrow{P_2Q_2} = -b\mathbf{w}$이 되는 점으로 존재하며 유일하고, 이 때는 $\overrightarrow{H_1H_2} = c(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$으로 두 직선에 모두 수직함을 확인할 수 있다.

따라서 H_1H_2은 존재하며 유일하고, 길이가 최소이다. 그런데 증명 과정에서 보았듯 이는 $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$에 모두 수직하며, $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$에 나란할 것이다. 그런데,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2} &= \overrightarrow{P_1H_2} + \overrightarrow{H_2P_2} \\ &= \overrightarrow{P_1H_1} + \overrightarrow{H_1H_2} + \overrightarrow{H_2P_2}\end{aligned}$$

에서 $\overrightarrow{P_1H_1}$은 $\mathbf{v}$에 평행하고, $\overrightarrow{H_2P_2}$는 $\mathbf{w}$에 평행하다. 즉 둘은 모두 $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$에 수직하다. 따라서 $\overrightarrow{P_1P_2}$을 $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$에 정사영하면 $\overrightarrow{H_1H_2}$이 됨을 알 수 있다. 그 길이는 우리가 원하는 값이다. 즉

$$d = |\overrightarrow{H_1H_2}| = |p_{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}\overrightarrow{P_1P_2}| = \left| \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \overrightarrow{P_1P_2}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|} \right|$$

가 된다.

문제 5/8. 18. *점* (a, b, c)*와 평면* $px + qy + rz = s$ *사이의 거리를 구하여라.*

점 (a, b, c)에서 평면에 내린 수선은 평면의 법선벡터 (p, q, r)에 평행하다. 따라서, 수선의 발은 임의의 $t \in \mathbb{R}$에 대하여 $(a - pt, b - qt, c - rt)$라고 표현가능하다. 이것이 평면 위에 존재하므로,

$$p(a - pt) + q(b - qt) + r(c - rt) = s$$

이며 이로부터

$$t = \frac{ap + bq + cr - s}{p^2 + q^2 + r^2}$$

임을 알 수 있다. 구하고자 하는 것은 (pt, qt, rt)의 길이, 즉 $|t|\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$이므로,

$$\frac{|ap + bq + cr - s|}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

문제 5/8. 19. *삼차원 공간에서 두 평면*

$$2x + 4y + z = 5, \quad x - 3y + 2z = 0$$

이 이루는 교각의 코사인 값을 구하시오.

평면사이의 교각은 곧 법선벡터 사이의 각도와 같다. 두 법선벡터 $(2, 4, 1)$과 $(1, -3, 2)$ 사이의 각도에 대한 코사인 값은

$$\frac{2 - 12 + 2}{\sqrt{21}\sqrt{14}} = -\frac{8}{7\sqrt{6}}$$

이다. 근데 일반적으로 교각은 예각을 표시하기에, 답은 관점에 따라

$$|\frac{2 - 12 + 2}{\sqrt{21}\sqrt{14}}| = \frac{8}{7\sqrt{6}}$$

가 될 수도 있다. 즉,

$$\pm\frac{4\sqrt{6}}{21}$$

문제 5/8. 20. *좌표공간에서 평면 $x + y + 2z = 0$에 대하여 점 $P = (x, y, z)$를 대칭시킨 점을 Q라고 하자. Q를 또다시 이 평면에 대해 대칭시킨 점을 R이라고 할 때, Q와 R의 좌표를 구하여라.*

직선 $\overrightarrow{PQ}$는 평면에 수직하므로 법선벡터에 나란하다. 따라서, 우리는 $Q = (x - 2t, y - 2t, z - 4t)$라고 표현가능하다. 또한 $\overrightarrow{PQ}$와 평면의 교점은 둘 사이 중점이므로 $(x-t, y-t, z-2t)$고 이것이 평면 위에 존재한다. 따라서 $x - t + y - t + 2z - 4t = 0$이기에, $t = \dfrac{x + y + 2z}{6}$이다. 이로부터

$$Q = (\frac{4x - 2y - 4z}{6}, \frac{-2x + 4y - 4z}{6}, \frac{-4x - 4y - 2z}{6})$$

임을 알 수 있고 다시 R은 원래 점 P로 돌아오기에 (x, y, z)다.

문제 5/8. 21. *공간 속의 점 $P_1, P_2, \cdots, P_k$에 대하여 아래 값을 최소로 하는 점 Q는 어디인가?*

$$|P_1 - Q|^2 + \cdots + |P_k - Q|^2$$

$$\begin{aligned} |P_1 - Q|^2 + \cdots + |P_k - Q|^2 &= (P_1 - Q) \cdot (P_1 - Q) + \cdots + (P_k - Q) \cdot (P_k - Q) \\ &= |P_1|^2 + \cdots + |P_k|^2 - 2Q \cdot (P_1 + P_2 + \cdots + P_k) + k|Q|^2 \\ &= k((Q - \bar{P}) \cdot (Q - \bar{P}) + \text{P에 관한 식으로, Q와 무관}) \end{aligned}$$

와 같이 표시됨을 알 수 있다. 즉, 이것이 최소가 되려면 나머지 부분은 건드릴 수 없으니 $Q = \bar{P}$이다. 이때, $\bar{P}$는 모든 P점들의 무게중심이다.

문제 5/8. 22. *삼차원 공간에서 두 평면 $2x - z = 8$과 $x + y - z = 6$의 교선이 $zx-$평면과 만나는 점을 A, $xy-$평면과 만나는 점을 B라 하자. 두 점 A, B와 점 $C = (-2, -4, 3)$가 이루는 평면과 원점 사이의 거리를 구하시오.*

두 평면의 교선 먼저 구하자. 첫 식에서 둘째 식을 빼면 $x - y = 2$로, y와 z를 x에 대해 표기하게 된다면 각각 $x - 2, 2x - 8$이다. 따라서 해당 직선은

$$x = y + 2 = \frac{z + 8}{2}$$

라고 표시되며, $zx-$평면과 만나는 점은 $(2, 0, -4)$이다. $xy-$평면과 만나는 점은 $(4, 2, 0)$이다. 세 점이 이루는

평면은 벡터 $(2,2,4)$와 $(4,4,7)$을 모두 포함하고 있으니 법선벡터가 $(1,-1,0)$이고, 이에 따라 $x-y=2$가 원하는 평면임을 알 수 있다. 이 평면과 원점 사이의 거리는 공식을 적용하면 $\sqrt{2}$임을 확인할 수 있다.

문제 5/8. 23. *세 점 $P=(1,-1,0), Q=(2,1,-1), R=(-1,1,2)$를 지나는 평면과 수직이고 점$P$를 지나는 직선의 방정식을 구하라. 또한, 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이 역시 구하라.*

평면은 $\overrightarrow{PQ}$와 $\overrightarrow{PR}$을 포함하고 있다. 즉 $(1,2,-1)$과 $(-2,2,2)$에 모두 수직인 벡터를 찾아야 한다. 먼저 삼각형의 넓이를 구하면, 외적의 크기에 반을 해주면 된다. 외적은 $(6,0,6)$이므로, 삼각형의 넓이는 $3\sqrt{2}$이다. 또한 이것이 법선벡터이고 직선은 이 벡터에 나란하다. 또한 직선이 P를 지나야 하기에

$$x-1=z, \quad y=-1$$

이 원하는 직선이다.

문제 5/8. 24. *3차원 공간에서 세 점 $A(1,2,3), B(2,4,5), Q(3,4,6)$을 지나는 평면에 대하여 평면 밖의 한 점 P에서 이 평면에 내린 수선의 발이 Q라고 한다. $\overrightarrow{AP}$의 길이가 8일 때, $\overrightarrow{AP}$와 $\overrightarrow{AB}$가 이루는 각의 크기 θ를 구하시오.*

먼저, $\overrightarrow{AQ}$의 길이는 $(2,2,3)$의 길이므로 $\sqrt{17}$이다. 그런데 A,P,Q가 직각삼각형을 이루므로 $\overrightarrow{PQ}$의 길이는 $\sqrt{47}$임을 알 수 있다. 그리고 이 벡터는 평면에 수직하다. 세 점으로부터 이들을 지나는 평면을 생각해보면 벡터 $(1,2,2)$와 $(2,2,3)$에 수직한 벡터 $(2,1,-2)$를 법선벡터로 가진다. 따라서 Q의 좌표로부터 P의 좌표가

$$(3 \pm \frac{2\sqrt{47}}{3}, 4 \pm \frac{\sqrt{47}}{3}, 6 \mp \frac{2\sqrt{47}}{3})$$

임을 알고 있다. 그러면

$$\overrightarrow{AP} = (2 \pm \frac{2\sqrt{47}}{3}, 2 \pm \frac{\sqrt{47}}{3}, 3 \mp \frac{2\sqrt{47}}{3})$$

$$\overrightarrow{AB} = (1,2,2)$$

에 대해 교각의 코사인 값을 구하면

$$\cos\theta = \frac{2+4+6}{24} = \frac{1}{2}$$

이다. 따라서 각 θ는 $\frac{\pi}{3}$이다.

문제 5/8. 25. *세 점 $(2,1,0), (0,1,-2), (5,-1,2)$를 지나는 평면 P 상의 점 $(2,1,0)$에서 $(1,1,1)$ 방향으로 진행하던 빛이 평면 $x-2y-z=5$에 반사되어 다시 평면 P에 맺히는 상을 구하시오.*

먼저, 평면 P를 찾아보자. P는 점 $(2,1,0)$을 포함하면서 벡터 $(-2,0,-2)$와 $(3,-2,2)$를 포함한다. 따라서 $(2,1,-2)$가 법선벡터이며 P는 $2x+y-2z=5$라고 이야기할 수 있다. $(2,1,0)$에서 $(1,1,1)$방향으로 진행하면 실수 $t \in \mathbb{R}$에 대하여 반사점은 $(2+t, 1+t, t)$라고 표현 가능하며 이는 평면 $x-2y-z=5$위의 점이기에 $2+t-2-2t-t=-2t=5$로부터 반사점은 $(-0.5,-1.5,-2.5)$이다. 반사된 방향은

$$(1,1,1) - 2\frac{1-2-1}{6}(1,-2,-1) = (\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

이고 반사된 빛의 자취는 실수 s에 대하여 $(-0.5+5s, -1.5-s, -2.5+s)$라 표현 가능하다. 이것이 평면 P 위에 있어야 하므로 $2(-0.5+5s)+(-1.5-s)-2(-2.5+s)=2.5+7s=5$이고 $s=\frac{5}{14}$다. 따라서

$$\left(\frac{9}{7}, -\frac{13}{7}, -\frac{15}{7}\right)$$

문제 5/8. 26. *공간 속의 점 $(1,-1,2)$에서 두 평면 $x-2y+4z=2$와 $x+y-2z=5$의 교선에 내린 수선의 발을 구하시오.*

먼저 두 직선의 교선을 구하자. 첫째 식에 둘째 식에 두 배를 한 후 더하면 $3x = 12$로 $x = 4$다. 또한, $y - 2z = 1$이 성립하게 된다. 따라서 둘의 교선은

$$x = 4, \quad y - 2z = 1$$

이다. 점 $(1, -1, 2)$에서 여기 내린 수선의 발의 좌표를 실수 a에 대해 $(4, 1 + 2a, a)$라고 할 수 있으며, 이를 둘 사이를 잇는 벡터 $(2, 2 + 2a, a - 2)$는 교선의 방향벡터 $(0, 2, 1)$에 수직하다. 따라서 내적한 값이 0이기에, $4 + 4a + a - 2 = 5a + 2 = 0$이다. 즉 $a = -\frac{2}{5}$이다. 따라서 수선의 발은

$$(4, \frac{1}{5}, -\frac{2}{5})$$

문제 5/8. 27. *좌표공간에서 $P(1, 2, 3)$을 지나고 $\mathbf{v} = (2, 3, -1)$과 나란한 직선 l_1과, 점 $Q(0, 3, 2)$를 지나고 $\mathbf{w} = (1, 3, 2)$와 나란한 직선 l_2에 대해 다음 물음에 답하시오.*

1) $\mathbf{x} = \overrightarrow{PQ}$의 $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$에 대한 정사영을 구하시오.

2) 두 직선 l_1과 l_2 사이의 거리를 구하시오.

1) $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$의 값을 먼저 구하여 보자. 외적의 정의를 이용하면 이것이 $(9, -5, 3)$임을 알 수 있다. $\mathbf{x} = (-1, 1, -1)$이므로, 그 정사영을 구하면

$$\frac{-9 - 5 - 3}{81 + 25 + 9}(9, -5, 3) = -\frac{17}{115}(9, 5, -3)$$

2) 둘 사이의 거리는 1)에서 구한 벡터의 크기임을 알고 있다. 즉

$$\frac{17}{\sqrt{115}} = \frac{17\sqrt{115}}{115}$$

문제 5/8. 28. *$\mathbb{R}^3$의 세 벡터 $A = (1, 2, 2), B = (2, 1, 1), X_0 = (1, 3, 1)$에 대하여 $p(X)$를 A에 대한 X의 정사영이라고 할 때*

(1) $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$는 $p \circ p = p$임을 보여라.

(2) $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$를 $q(X) = p(X) + B$라고 정의하자. $q^n = q^{n-1} \circ q$라고 귀납적으로 정의할 경우, $q^n(X_0)$을 n에 대해 나타내라.

1) 먼저, 간단하게는 p는 X를 A에 대해 정사영하는 것, 즉 X에서 A성분만을 가져오는 것이다. 따라서 $p \circ p(X) = p(p(X)) = p(X)$이므로 $p \circ p$이다. 이는 정사영의 특성상 한 번 정사영한 벡터는 항상 A에 평행하기에 다시 한 번 정사영해도 자기 자신과 같기 때문이다.

참고 : $p(X)$의 결과를 직접 구해 두 번 시행하여 같음을 보여도 된다.

2) $q^n(X_0) = q(q^{n-1}(X_0)) = p(q^{n-1}(X_0)) + B$이고, 이를 반복해 시행해 나가면

$$q^n(X_0) = p(q^{n-2}(p(X_0) + B) + B) + B = \cdots = p^n(X_0) + p^{n-1}(B) + \cdots + p(B) + B$$

이다. 그런데 p는 몇 번 시행해도 한 번 한 것과 같음을 1)로부터 보일 수 있다. 따라서 이 값은

$$p(X_0) + (n-1)P(B) + B$$

라고 표현할 수 있다.

$$p(X_0) = \frac{1 + 6 + 2}{9}(1, 2, 2) = (1, 2, 2)$$

이며

$$p(B) = \frac{2 + 2 + 2}{9}(1, 2, 2) = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$$

임을 알고 있다. 따라서

$$(3+\frac{2}{3}(n-1), 3+\frac{4}{3}(n-1), 3+\frac{4}{3}(n-1))$$

가 원하는 값이다.

문제 5/8. 29. *$\mathbb{R}^4$의 표준단위벡터 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$에 대해*

$$\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j \quad (i \neq j,\ 1 \leq i, j \leq 4)$$

라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

1) 네 벡터 $\mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{24}, \mathbf{e}_{34}$가 일차종속인지 일차독립인지 판별하시오.

2) 네 벡터 $\mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{14}, \mathbf{e}_{34}$가 일차종속인지 일차독립인지 판별하시오.

(1) 만약 네 벡터가 일차종속이라면

$$a\mathbf{e}_{12} + b\mathbf{e}_{13} + c\mathbf{e}_{24} + d\mathbf{e}_{34} = \mathbf{0}$$

인 $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$이 존재한다. 그러면

$$(a+b)\mathbf{e}_1 + (a+c)\mathbf{e}_2 + (b+d)\mathbf{e}_3 + (c+d)\mathbf{e}_4 = \mathbf{0}$$

이므로 $a+b = a+c = b+d = c+d = 0$이어야만 한다. 그러면 $a = d = 1$, $b = c = -1$로 두면 됨을 확인가능하다. 따라서 이들은 일차종속이다.

(2) 만약 네 벡터가 일차종속이라면

$$a\mathbf{e}_{12} + b\mathbf{e}_{13} + c\mathbf{e}_{14} + d\mathbf{e}_{34} = \mathbf{0}$$

인 $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$이 존재한다. 그러면

$$(a+b+c)\mathbf{e}_1 + (a)\mathbf{e}_2 + (b+d)\mathbf{e}_3 + (c+d)\mathbf{e}_4 = \mathbf{0}$$

이므로, $a = 0, c = b = -d$여야 하며 $a = b = c = d = 0$임을 알 수 있다. 따라서 이들은 일차독립이다.

문제 5/8. 30. *삼차원 공간의 사면체 $OABC$가*

$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{BC}| = a, \quad |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{AC}| = b, \quad |\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{AB}| = c$$

를 만족한다. 세 점 A, B, C의 중심을 G_1, 세 점 A, O, C의 중심을 G_2라고 할 때, $\overrightarrow{OG_1} \perp \overrightarrow{BG_2}$라고 하자. 이때, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$임을 증명하여라.

$$\begin{aligned} a^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 &= |\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BO}|^2 \\ &= |\overrightarrow{AB}|^2 - 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BO} + |\overrightarrow{BO}|^2 = c^2 + b^2 - 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BO} \end{aligned}$$

이므로,

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BO} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$$

이다. 동일하게,

$$a^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 = c^2 + b^2 - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$$

이므로

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$$

이다.

문제 5/8. 31. *다음 벡터들이 일차독립인지 일차종속인지 판별하여라.*

1) $(1,2,3,4),(5,6,7,8),(9,10,11,12),(13,14,15,16)$

2) $(1,2,1),(2,5,3),(8,2,5)$

1) $(1,2,3,4)-(5,6,7,8)-(9,10,11,12)+(13,14,15,16)=(0,0,0,0)$ 이므로, 일차종속이다.

2)

$$a(1,2,1)+b(2,5,3)+c(8,2,5)=0$$

이려면 $a+2b+8c=0$, $a+3b+5c=0$이므로 $b=3c$이며, $a=-14c$여야 한다. 그러면 $2a+5b+2c=-28c+15c+2c=-11c=0$이어야 하니, $c=a=b=0$이다. 따라서, 일차독립이다.

문제 5/8. 32. *공간의 두 평면* $x+y-z=2$*와* $3x-4y+5z=6$*에 대하여 다음 물음에 답하시오.*

1) 두 평면의 교선의 방정식을 구하고, 두 평면 사이의 각 θ*에 대해* $\sin\theta$*의 값을 구하라. 단,* θ*는* 0*부터* π *사이의 값이다.*

2) 점 $(2,0,0)$*을 지나고 위의 두 평면의 교선에 수직인 직선 중에서 평면* $4x-3y+4z=8$*에 속하는 직선의 방정식을 구하시오.*

1) 두 평면의 교선의 방정식을 구하자. 교선은 두 평면의 법선 벡터에 모두 수직하므로, $(1,1,-1)$과 $(3,-4,5)$를 벡터곱해 얻은 벡터인 $(1,-8,-7)$에 나란하다. 또한 둘을 연립하면 $-7y+8z=0$을 얻고, $y=8, z=7$이면 $x=1$이므로 $(1,8,7)$을 지난다. 따라서 교선은

$$x-1=\frac{y-8}{-8}=\frac{z-7}{-7}$$

이 된다. 두 평면 사이의 각은 두 법선 벡터가 이루는 각과도 같다.

$$\sin\theta=\frac{|(1,1,-1)\times(3,-4,5)|}{|(1,1,-1)||3,-4,5|}=\frac{\sqrt{114}}{\sqrt{3}\sqrt{50}}=\frac{\sqrt{19}}{5}$$

2) 점 $(2,0,0)$을 지나면서, 벡터 $(1,-8,-7)$에 수직이어야 한다. 또한, 평면 $4x-3y+4z=8$에 속하므로, 법선 벡터 $(4,-3,4)$와도 수직하다. 따라서 두 벡터를 벡터곱한 벡터

$$(-53,-32,29)$$

에 나란한 직선인 것이다. 따라서 원하는 직선은

$$\frac{x-2}{-53}=\frac{y}{-32}=\frac{z}{29}$$

가 된다.