수열

- 미적분학에서 다루는 **수열**은 주로 무한수열을 뜻한다.
- 수열은 **자연수** 집합에서 정의된 함수의 일종이며,
  일반적으로는 함숫값이 **실수체** 내부의 실수인 **실수열**이다.
- 일반적으로 수열 $\mathbf{a} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$에서

  $$a_1 := \mathbf{a}(1), \quad a_2 := \mathbf{a}(2), \quad a_3 := \mathbf{a}(3)$$

  등으로 정의하며, 이 수열을

  $$(a_1, a_2, a_3, \cdots)$$

  $$(a_n)_{n=1}^{\infty}$$

  $$(a_n)$$

  과 같은 다양한 표기로써 표현한다.

수렴과 발산

- 만약 n이 충분히 커지면 a_n이 실수 l에 가까워질 경우, 우리는 (a_n)이 l에 **수렴**한다고 하고, l을 수열 (a_n)의 **극한값**이라 한다.
- 이를 수학적인 표기로 나타내면,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

  이다.
- 수렴하지 않는 수열은 **발산**한다고 한다.
- 만약 수열 (a_n)의 각 항이 한없이 커지면

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

  로 표현하고, **양의 무한대로 발산**한다 말한다.
- 반면 n이 커질수록 a_n이 한없이 작아져 **음의 무한대로 발산**하는 경우도 있다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

Example

양수 ϵ에 대하여 극한 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(1+\epsilon)^n}{n}$의 수렴과 발산을 조사하자.
이항정리에 의하면

$$(1+\epsilon)^n = 1 + n\epsilon + \frac{1}{2}n(n-1)\epsilon^2 + \cdots > \frac{1}{2}n(n-1)\epsilon^2$$

이다. 그러므로

$$\frac{(1+\epsilon)^n}{n} > \frac{1}{2}(n-1)\epsilon^2$$

이며, 우변은 n이 커지면 한없이 증가한다. 따라서 주어진 수열은 무한대로 발산한다. 따라서 그 결과를 활용하면 아래를 얻는다.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = \infty \quad (a > 1)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$$

수렴하는 수열의 기본 성질

- 수열 (a_n)과 수열 (b_n)이 모두 수렴하면, $(a_n + b_n)$이라는 수열과 $(a_n \cdot b_n)$이라는 새로운 수열이 모두 수렴하고,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

  이 성립한다.
- 또한 임의의 실수 t에 대하여 (ta_n)도 수렴하며

$$\lim_{n\to\infty}(ta_n) = t \lim_{n\to\infty} a_n$$

  이 성립한다.
- 이를 **수렴하는 수열의 기본 성질** 혹은 **극한의 기본 성질**이라 부른다.

자연상수

- **자연상수**는
$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718$$
으로 정의한다.
- 위를 이용하면 아래의 극한도 쉽게 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}} \\
&= \frac{1}{e}\cdot 1 = \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

급수

- 어떤 수열에서 초항부터 n항까지를 더하여 만든

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

  에 대하여, 수열 s_n을 **급수**라 부른다.
- 급수는 아래처럼 표현할 수 있다.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n\geq 1} a_n$$

$$\sum a_n$$

급수의 수렴과 발산

- 수열 a_n에서 얻은 급수가 어떤 실수 l에 수렴한다면,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = l$$

  으로 나타내며, l을 급수 $\sum a_n$의 **합**이라 부른다.
- 수렴하지 않는 급수는 **발산**한다고 부른다.
- 즉, 수열의 관점에서 보자면,

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} a_n$$

  이 존재하는지를 보자는 것이다.

일반항 판정법

일반항 판정법

급수 $\sum a_n$이 수렴하면,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

이다.

- 이는 곧 a_n이 0으로 수렴하지 않는다면 급수 $\sum a_n$은 절대로 수렴할 수 없다는 이야기이기도 하다.

일반항 판정법

증명.
급수 $\sum a_n$의 합을 l이라 하고 처음 n항까지의 합 s_n을 들여다보자. 그러면 임의의 양수 ϵ에 대하여 유한 개의 n을 제외하고 $|s_n - l| < \epsilon$일 것이다.
따라서

$$|a_n| = |s_n - s_{n-1}| \le |s_n - l| + |s_{n-1} - l| < 2\epsilon$$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

이다.

Example

- **조화급수**는 각 항이 **등차수열**의 역수로 이루어진 수열, 즉 **조화수열**에서 얻은 급수이다.
- $$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$
  을 생각하자. 이 급수는
  $$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots$$
  보다 빨리 증가하고, 따라서 발산함을 알 수 있다.
- 반면 일반항 $\frac{1}{n}$은 0으로 수렴한다. 따라서 일반항 판정법의 역은 성립하지 않는다.

수렴하는 급수의 기본 성질

- 실수 t와 수렴하는 급수 $\sum a_n$과 $\sum b_n$에 대하여 아래를 얻는다.

$$\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$$

$$\sum t a_n = t \sum a_n$$

- 단,

$$\sum (a_n \cdot b_n) \neq \left(\sum a_n\right) \cdot \left(\sum b_n\right)$$

  일 수 있다.

등비급수

- 첫항이 1이고 **공비**가 r인 등비수열에서 얻은 **등비급수**

$$1 + r + r^2 + \cdots$$

  는 수학(상)에서 배웠듯이 $|r| < 1$일 때 수렴하며,

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r} \quad (|r| < 1)$$

  이다.

- $$\frac{1}{1-r} - (1 + r + \cdots + r^{n-1}) = \frac{r^n}{1-r}$$

  을 응용하면

$$\frac{1}{1+\epsilon} \approx 1 - \epsilon$$

  임을 보일 수도 있다.

비교판정법

- 일반항이 영 이상의 실수로 이루어진 급수를 **양항급수**라 부른다.
- 양항급수는 항상 증가하는 수열이므로, 무한대로 발산하거나 수렴하는 경우 두 가지만 존재한다. 따라서

$$\sum a_n < \infty$$

는 수렴한다는 것이나 매한가지이다.

비교판정법

$0 \leq a_n \leq b_n$일 때,

(1) $\sum b_n < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum a_n < \infty$

(2) $\sum a_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \sum b_n = \infty$

Example

급수

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

이 수렴함을 비교판정법을 이용해 증명해보자. 만약 $n \geq 2$이면

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

이고, 급수

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 < \infty$$

은 수렴한다. 따라서 비교판정법으로부터 급수는 수렴한다. 단, 이 값을 미적분학에서는 구할 수 없다.

극한비교판정법

- 이 판정법은 24쪽의 4번 문제로부터 비롯된다. 즉, 본문에는 존재하지 않으니 수업시간에 가르치시는지를 확인하고 사용하자!

극한비교판정법

양의 수열 (a_n)과 (b_n)에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = r$$

일 때, r이 0이 아닌 유한한 값이면 $\sum a_n$이 수렴하는 것은 $\sum b_n$이 수렴하는 것과 필요충분조건이다.

거듭제곱근 판정법

거듭제곱근 판정법 - 1

양항급수 $\sum a_n$과 양수 $\epsilon < 1$에 대하여
(1) 모든 n에 대하여 $\sqrt[n]{a_n} < 1 - \epsilon$이면 급수 $\sum a_n$은 수렴하고,
(2) 모든 n에 대하여 $\sqrt[n]{a_n} > 1 + \epsilon$이면 급수 $\sum a_n$은 발산한다.

증명.
(1) $a_n < (1-\epsilon)^n$이며

$$\sum a_n < \sum (1-\epsilon)^n < \infty$$

가 비교판정법에 의해 성립한다.
(2) $a_n > (1+\epsilon)^n$이며

$$\sum (1+\epsilon)^n = \infty$$

이므로 비교판정법에 의해 $\sum a_n$도 발산한다.

거듭제곱근 판정법

거듭제곱근 판정법 - 2

양항급수 $\sum a_n$에서 극한값

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$$

이 존재한다고 하자. 이때 r을 **거듭제곱근 극한**이라 부르고
(1) $r < 1$이면 급수 $\sum a_n$은 수렴하고,
(2) $r > 1$이면 급수 $\sum a_n$은 발산한다.

증명.
$\epsilon = \dfrac{|r-1|}{2}$라고 두면 두 경우 모두 $\epsilon > 0$이다. 그런데 r의 정의에 의하여 유한 개의 n을 제외하면 $r - \epsilon < \sqrt[n]{a_n} < r + \epsilon$이 성립한다. 만약 $r < 1$이라면 $r + \epsilon \leq 1 - \epsilon$이고, $r > 1$이라면 $r - \epsilon \geq 1 + \epsilon$ 이므로, 앞 페이지에 의하여 $\sum a_n$의 수렴과 발산이 결정된다.

Example

급수
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$$
의 수렴과 발산을 판정하여 보자. 이 급수에 대하여 비교판정법을 적용하기란 쉽지 않다. log라는 함수가 계산하기도 어려운 데다가, n제곱이라는 거추장스러운 거듭제곱도 붙었기 때문이다. 반면, 거듭제곱근 극한이
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0 < 1$$
임을 알고 있기에, 주어진 급수는 수렴함을 쉽게 알 수 있다.

비율판정법

비율판정법 - 1

양수의 수열 (a_n)과 $0 < r < 1$에 대하여
(1) 모든 n에 대하여 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$이면, 급수 $\sum a_n$은 수렴한다.
(2) 모든 n에 대하여 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$이면, 급수 $\sum a_n$은 발산한다.

증명.
(1)

$$a_{n+1} \leq ra_n \leq r^2 a_{n-1} \leq \cdots \leq r^n a_1$$

이 성립하고 등비급수 $\sum r^n a_1$이 수렴하므로 비교판정법에 의하여 $\sum a_n$이 수렴한다.
(2)

$$a_n \geq a_{n-1} \geq \cdots \geq a_1$$

이므로 a_1이 양수임에 따라

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

이고, 일반항 판정법에 의해 $\sum a_n$도 발산한다.

비율판정법

비율판정법 - 2

양수의 수열 (a_n)에서 극한값

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

이 존재한다고 하자. 이때
(1) $\rho < 1$이면 $\sum a_n$은 수렴한다.
(2) $\rho > 1$이면 $\sum a_n$은 발산한다.

비율판정법

증명.
(1) $\rho < 1$이라면, $\rho < r < 1$에 대하여 n이 충분히 크면,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r < 1$$

이므로 비율판정법에 의해 $\sum a_n$이 수렴한다.
(2) $\rho > 1$이라면 n이 충분히 클 경우

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

이므로 비율판정법에 의해 $\sum a_n$이 발산한다.

Example

급수
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$
을 비율판정법을 이용하여 수렴/발산 여부를 판단해보자.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

이므로, 비율판정법에 의하여 이 급수는 수렴한다.

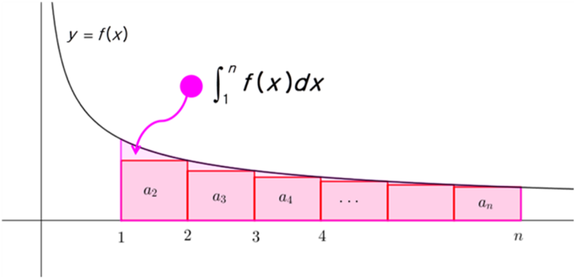
적분판정법

적분판정법

연속함수 $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$가 감소함수이고 항상 양수일 때, $\sum f(n)$ 이 수렴할 필요충분조건은

$$\int_1^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b f(x)dx$$

가 수렴하는 것이다.



적분판정법

증명.
부등식

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$$

이 f의 연속성과 감소성에 의하여 성립한다. 이를 $n = 1$부터 더해 나가면,

$$f(2) + \cdots + f(n+1) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq f(1) + \cdots + f(n)$$

이다. 여기서 비교판정법을 이용한다면, $\sum f(n)$이 수렴할 경우 여기서 $\int_1^{n+1} f(x)dx$가 $n \to \infty$일 때 극한값을 가진다는, 즉 수렴함을 알 수 있고 반대로 적분값이 수렴할 경우 $\sum f(n+1) = \sum f(n) - f(1)$이 수렴함을 알 수 있다. 따라서 $\sum f(n)$이 수렴한다.

Example

제타함수는 아래와 같이 정의된다.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s > 1)$$

이 함수에서, $s > 1$이라면 함수 $f(x) = \dfrac{1}{x^s}$에 대하여 이 함수는 연속이고, 양수이며, 감소함수이다. 따라서 $\zeta(s)$가 유한할 조건은 적분판정법에 의해

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx$$

가 수렴하는 것이다. 만약 $s > 1$이라면

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx = \left[-\frac{1}{-s+1} \cdot \frac{1}{x^{s-1}} \right]_1^{\infty} = \frac{1}{s-1}$$

이므로, $\zeta(s)$는 $s > 1$일 때 유한하고 잘 정의된다. 반면 $s = 1$일 경우 ∞가 적분값이 되므로, $s \leq 1$에서는 비교판정법에 의해 제타함수가 무한한 값을 가지고 정의되지 않는다.

교대급수정리

- 일반항이 0이 아닌 급수 $\sum a_n$에서 각 항 a_n의 부호가 a_{n+1}의 부호와 다르면, 이 급수를 **교대급수**라 부른다.

교대급수정리

(1) 모든 n에 대하여 a_n과 a_{n+1}의 부호가 다르고
(2) 모든 n에 대하여 $|a_n| \geq |a_{n+1}|$이며,
(3) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이면
교대급수 $\sum a_n$은 수렴한다.

절대수렴급수

- 급수 $\sum |a_n|$에 대하여, 급수 $\sum |a_n|$이 수렴하면, 처음 급수 $\sum |a_n|$은 **절대수렴**하다 말한다.
- 절대수렴하는 급수는 수렴한다.
- **증명.**
  실수 a에 대하여

$$a^+ = \max\{a, 0\}, \quad a^- = -\min\{a, 0\}$$

이라 두면

$$a = a^+ - a^-, \quad |a| = a^+ + a^-$$

임을 쉽게 알 수 있다. 이제 $0 \le a^\pm \le |a|$이므로, 비교판정법에 의하여 $\sum |a_n|$이 수렴하면, 급수 $\sum a_n^\pm$이 수렴하고, 그들의 차로써 표현되는 $\sum a_n$도 수렴한다.

Example

만약 급수가 수렴하지만 절대수렴하지 않다면, 이를 **조건수렴**하다 말한다. 급수

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}$$

이 조건수렴함을 보여 보자. 먼저, 이 급수는 모든 n에 대하여 a_n과 a_{n+1}의 부호가 다르고, $|a_n| \geq |a_{n+1}|$이며, a_n은 0으로 수렴한다. 따라서 교대급수정리에 의하여 수렴한다. 반면

$$\sum \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum \frac{1}{n}$$

은 발산함을 알고 있다. 따라서 절대수렴하지는 않는다.

총정리

- 수열과 급수, 그리고 그들의 수렴/발산에 대해 다루어 보았다.
- 급수가 수렴하는지를 판단하는 판정법에는 일반항 판정법, 비교판정법, 거듭제곱근 판정법, 비율판정법, 적분판정법, 교대급수정리가 있었다.
- 이외의 급수는 절대수렴함을 보여 수렴함을 보이거나, 등비급수 형태와 관련지어 증명하거나, $\sum \frac{1}{n}$이 발산함을 증명할 때처럼 condensation시켜 보이는 다양한 방식으로 증명할 수 있다.
- 비교판정법과 교대급수정리에 대해서는 증명하지 않았는데, 이는 부록에서 다룰 **완비성 공리**의 개입이 필요하기 때문이다.
- 이 장과 관련된 대부분의 문제는 어떤 급수를 주고 다양한 방법을 이용해 이 급수가 수렴하는지를 판단하라는 식이다.

숙제 문제

- 14쪽 2, 5, 6, 8번
- 24쪽 1, 3번
- 27쪽 1, 2번
- 32쪽 1, 3번
- 36쪽 1, 3, 4, 5번
- 39쪽 1, 4번
- 프린트 3의 배수 문제