중간문풀-6. 1. $D = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$과 $D_0 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$을 생각하자. 그 다음, 연속함수 $u : D \to \mathbb{R}$이 존재하여

$$\bigtriangledown^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

을 만족시킨다고 한다. 이 조화함수 u에 대하여, $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$인 (x_0, y_0, z_0)이 존재하여 모든 $(x, y, z) \in D$에 대해 $u(x, y, z) \leq u(x_0, y_0, z_0)$임을 보여라.

중간문풀-6. 2. *함수* $f(x,y,z)$*를 아래와 같이 정의하자.*

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xyz(x^2-3y^2+2z^2)}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 \quad (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

(a) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}(0,0,0)$*을 구하여라.*

(b) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial z}(0,0,0)$*을 구하여라.*

(c) f*가 삼급함수인지 판별하여라.*

중간문풀-6. 3. $u(x,y,z)$는 *원점을 제외한 좌표공간에서 정의된 이급함수이다. 이때, 아래 식이 성립함이 잘 알려져 있다.*

$$\bigtriangledown^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\sin\phi \frac{\partial u}{\partial \phi}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

(a) 이 식이 성립함을 연쇄법칙을 이용하여 보여라.

(b) 만약 $\bigtriangledown^2 u = 0$*이고* $u(x,y,z)$*가* ρ*에만 의존한다고 하자. 또한,* $u(1,1,1) = \sqrt{3}, u(1,2,2) = 1$*이라고 한다. 이때,* $u(3,4,0)$*의 값을 구하여라.*

중간문풀-6. 4. *아래 극한값을 구하여라. 만약 존재하지 않는다면, 그 이유도 써라. (a)*

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{1-\cos xyz}{(x^2+2y^2+z^2)^3}$$

(b)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{2xy\sin z}{x^2+y^2+z^2}$$

중간문풀-6. 5. *함수 f를 아래와 같이 정의하자.*

$$f(x) = \begin{cases} x^p \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

p가 어떤 조건이어야,
(a) f가 연속함수인가?
(b) f가 미분가능한가?
(c) f가 일급함수인가?

중간문풀-6. 6. *함수 u는 유계인 열린집합 D에서 정의된 조화함수이며, $\mathbf{p}$라는 점에서 최대이다. 또한, 함수 u와 D는 아래 성질을 만족함이 알려져 있다:*

(가) D의 임의의 두 점을 고르면, 그 두 점을 잇는 경로 중 D에 포함되는 것이 있다.

(나) D 안에서 함수 u가 점 Q에서 극대라면, $\mathbf{q}$를 중심으로 하는 D 내부의 어떤 공 B_R이 존재하여 B_R 안에서 u의 값은 $u(\mathbf{q})$와 같다. 즉, 내부에서 상수함수이다.

이때, u는 D 내부에서 상수함수임을 증명하여라.

중간문풀-6. 7. *어떤* r*값에 대하여 함수*

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{(x+y+z)^r}{x^2+y^2+z^2} & if \quad (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 \quad (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

이 $\mathbb{R}^3$*에서 연속함수인가?*

중간문풀-6. 8. *두 연속함수 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$이 각 유리수점에서 함수값이 일치할 때 $f = g$임을 보여라.*

중간문풀-6. 9. *함수* $f(x)$*를 아래와 같이 정의하자.*

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(a) 함수 f*가 모든 점에서 미분가능함을 보이고,* $f'(0)$*의 값을 구하여라.*

(b) 0*을 포함하는 그 어떤 열린 구간도 그 안에서* f*가 증가함수가 아님을 보여라.*

중간문풀-6. 10.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{2}{1+e^{-1/x}} = 2$$

임을 극한의 정의를 이용하여 보여라.