2-7. 1. *좌표평면에서 함수 $y = e^x$의 그래프와 두 직선 $x = \ln\frac{\pi}{2}$와 $y = \pi$로 둘러싸인 영역 R에 대하여 다음 적분값을 구하시오.*

$$\iint_R ye^x \sin e^x dxdy$$

푸비니 정리의 적용을 위해 영역을 잘 설정하여 보자. 원하는 영역은 $\frac{\pi}{2} < y < \pi$, $\ln\frac{\pi}{2} < x < \ln y$임을 알 수 있다. 따라서 푸비니 정리에 의하여

$$\begin{aligned}\iint_R ye^x \sin e^x dxdy &= \int_{\pi/2}^{\pi}\int_{\ln\pi/2}^{\ln y} ye^x \sin e^x dxdy \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} -ycosydy \\ &= 1 + \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

2-7. 2. *좌표공간의 영역*

$$R : 0 \le y \le 2, 0 < x^2 + z^2 \le 1, x > 0, z > 0$$

에서 정의된 일급가역사상

$$f(x, y, z) = (2zx, 2y, z^2 - x^2) = (u, v, w)$$

에 대하여, 영역 $f(R)$의 밀도함수가 $h(u, v, w) = \frac{2}{\sqrt{u^2+w^2}}$ 일 때 $f(R)$의 질량을 구하시오.

$$(\text{질량}) = \iiint_{f(R)} \frac{2}{\sqrt{u^2+w^2}} dudvdw = \iiint_R \frac{2}{z^2+x^2}\left|\left|\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right|\right| dxdydz$$

이다. 이때 야코비 행렬을 구하여 보면

$$f'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2z & 0 & 2x \\ 0 & 2 & 0 \\ -2x & 0 & 2z \end{pmatrix}$$

이므로, 야코비 행렬식은 $8z^2 + 8x^2$임을 알 수 있다. 따라서, 질량은

$$\iiint_R 16dxdydz = 16 \times \frac{\pi}{4} \times 2 = 8\pi$$

이다.

2-7. 3. *좌표평면에서 영역 $R : 0 \le x \le x^2 + y^2 \le 1$의 밀도 함수가 $\mu(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$일 때, R의 질량중심을 구하시오.*

질량을 먼저 구하여 보자.

$$\begin{aligned}(\text{질량}) &= \iint_R \mu dxdy \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{\cos\theta}^{1} r^2 drd\theta \\ &= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} 1 - \cos^3\theta d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{3\pi - 4}{9}\end{aligned}$$

질량중심의 x좌표를 구하기 위하여 아래 식을 계산하여 보자.

$$\begin{aligned}\iint_R x\mu dxdy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{\cos\theta}^{1} r^3\cos\theta drd\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos\theta - \cos^5\theta d\theta \\ &= \frac{7}{30}\end{aligned}$$

또한, R과 μ는 x축에 대칭이므로

$$\iint_R y\mu dxdy = 0$$

이다. 따라서, 질량중심의 좌표는

$$\left(\frac{21}{10(3\pi-4)}, 0\right)$$

이다.

2-7. 4. *다음 적분을 구하시오.*

$$\int_0^1\int_{\arcsin y}^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos^2 x}dxdy$$

적분 영역을 바꾸게 된다면 $0 \le x \le \pi/2$, $0 \le y \le \sin x$이다. 따라서 푸비니 정리에 의하여

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_{\arcsin y}^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos^2 x}dxdy &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin x}\frac{1}{1+\cos^2 x}dydx \\ &= \int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx \\ &= \int_0^1\frac{1}{1+u^2}du \\ &= \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

2-7. 5. *다음 적분을 구하시오.*

$$\iint_{D_1}\frac{32x^2}{x^2+y^2}dxdy, \quad D_1 : \begin{cases} x^2 - x + y^2 \le 0, \\ y \ge 0 \end{cases}$$

주어진 영역 D_1을 극좌표로 바꾸게 된다면

$$D_1 = \begin{cases} 0 \le r \le \cos\theta \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

일 것이다. 그러면

$$\iint_{D_1}\frac{32x^2}{x^2+y^2}dxdy = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta}\frac{32r^2\cos^2\theta}{r^2}rdrd\theta = 32\int_0^{\pi/2}[\frac{1}{2}r^2]_0^{\cos\theta}\cos^2\theta d\theta = 16\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta d\theta = 3\pi$$

임을 확인할 수 있다.

2-7. 6. *다음 적분을 구하시오.*

$$\iint_{D_2} e^{\dfrac{1-x-y}{\sqrt{2}}}dxdy, \quad D_2 : \begin{cases} x - 1 \le y \le x + 1, \\ y \ge -x + 1 \end{cases}$$

영역을 잘 생각해보면 $x+y=u$, $x-y=v$라 둘 경우 함수 $G(u,v)=(x,y)$는 일급가역함수이며, 원하는 영역은 $-1\le v\le 1$이며 $1\le u$이다. 또한

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

이므로, 아래와 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}\iint_{D_2} e^{\frac{1-x-y}{\sqrt{2}}}dxdy &= \iint_{D_2} e^{\frac{1-u}{\sqrt{2}}}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv \\ &= \int_1^\infty \int_{-1}^1 \frac{1}{2}e^{\frac{1-u}{\sqrt{2}}}dvdu \\ &= [-\sqrt{2}e^{\frac{1-u}{\sqrt{2}}}]_1^\infty = \sqrt{2}\end{aligned}$$

2-7. 7. *삼차원 공간에서 다음 영역의 부피를 구하시오.*

$$x^2+y^2+z^2\le b^2, x^2+y^2\ge b^2-a^2$$

단, a와 b는 $0<a<b$를 만족하는 실수이다.

주어진 영역 R을 원기둥좌표계에 대하여 나타내면

$$\{(r\cos\theta, r\sin\theta, z) : 0\le\theta\le 2\pi, -a\le z\le a, \sqrt{b^2-a^2}\le r\le\sqrt{b^2-z^2}\}$$

이다. 따라서, 치환적분을 사용하면

$$\begin{aligned}Vol(R) &= \iiint_R 1dV_3 \\ &= \int_0^{2\pi}\int_{-a}^a\int_{\sqrt{b^2-a^2}}^{\sqrt{b^2-z^2}} rdrdzd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_{-a}^a \frac{1}{2}(a^2-z^2)dzd\theta \\ &= \int_0^{2\pi} a^3-\frac{1}{3}a^3d\theta \\ &= \frac{4}{3}\pi a^3\end{aligned}$$

2-7. 8. *다음 적분값을 구하시오.*

$$\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^{1-y-z}(x-3z+1)dxdydz$$

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^{1-y-z}(x-3z+1)dxdydz &= \int_0^1\int_0^{1-z}\frac{1}{2}(1-y-z)^2-3z(1-y-z)+(1-y-z)dydz \\ &= \int_0^1 \frac{1}{6}(1-z)^3-\frac{3}{2}z(1-z)^2+\frac{1}{2}(1-z)^2dz \\ &= \frac{1}{24}-\frac{1}{8}+\frac{1}{6}=\frac{1}{12}\end{aligned}$$

2-7. 9. *$r\theta$평면에서 다음 식에 의해 정의되는 영역이 극좌표계 치환에 의해 xy평면에서 차지하는 영역을 D*

라 할 때, 아래 물음에 답하시오.

$$\begin{cases} \arccos\left(\frac{r+1}{2}\right) \le \theta \le \frac{\pi}{3}, & (0 \le r \le 1) \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}, & (1 \le r \le 2) \\ 0 \le \theta \le \arccos\left(\frac{r-1}{2}\right), & (2 \le r \le 3) \end{cases}$$

(a) 영역 D의 넓이를 구하시오.
(b) 영역 D의 기하학적 중심 $(\bar{x}, \bar{y})$를 구하시오.

(a) 적분 영역을 θ에 대한 관점으로 바꾸어 생각을 해보면,

$$\begin{cases} 2\cos\theta - 1 \le r \le 1, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3} \\ 1 \le r \le 2, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3} \\ 2 \le r \le 2\cos\theta + 1, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

이 될 것이므로 그 범위는

$$2\cos\theta - 1 \le r \le 2\cos\theta + 1$$

이 될 것이다. 따라서

$$\iint_D dV_2 = \int_0^{\pi/3} \int_{2\cos\theta-1}^{2\cos\theta+1} r dr d\theta = \int_0^{\pi/3} 4\cos\theta = 2\sqrt{3}$$

(b)

$$\bar{x} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_0^{\pi/3} \int_{2\cos\theta-1}^{2\cos\theta+1} r^2 \cos\theta dr d\theta = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_0^{\pi/3} 8\cos^3\theta + \frac{2}{3}\cos\theta d\theta = \frac{5}{3}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_0^{\pi/3} 8\cos^2\theta \sin\theta + \frac{2}{3}\sin\theta d\theta = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

이다. 따라서 기하학적 중심은

$$\left(\frac{5}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$$

2-7. 10. *다음 적분값을 계산하시오.*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2+y^2+z^2} e^{-x^2-y^2-z^2} dx dy dz$$

구면좌표계로 바꿀 시

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2+y^2+z^2} e^{-x^2-y^2-z^2} dx dy dz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \rho e^{-\rho^2} \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1}{2} t e^{-t} \sin\varphi dt d\varphi d\theta \quad (t = \rho^2) \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left[\frac{1}{2}(t-1)e^{-t}\right]_0^{\infty} \sin\varphi d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\sin\varphi d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi \end{aligned}$$

2-7. 11. *$0 < a \le b$인 실수 a, b에 대하여 다음 두 타원판의 공통부분의 넓이는 $4ab\arctan\frac{a}{b}$ 임을 보이시오.*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1, \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} \le 1$$

두 타원의 교점은 네 개 있으며, 제 1사분면 위에 있는 영역의 네 배를 해 주면 된다. 제 1사분면의 교점은

$$(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}})$$

이며, 공통부분의 넓이는 원점과 이 교점, 그리고 이 교점이 x축에 내린 수선의 발이 이루는 직각삼각형의 넓이인 S_1과 교점으로부터 장축이 y축에 포함된 타원에서 교점으로부터 x축의 교점까지 $y > 0$인 영역에서 적분한 S_2의 합에 8배를 하면 된다. 이때

$$S_1 = \frac{a^2b^2}{2(a^2+b^2)}$$

$$S_2 = \int_{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx = \int_0^{\arctan\frac{a}{b}} ab\sin^2\theta = \frac{ab}{2}\arctan\frac{a}{b} - \frac{a^2b^2}{2(a^2+b^2)}$$

이므로

$$8(S_1+S_2) = 4ab\arctan\frac{a}{b}$$

이다.

2-7. 12. *다음 적분값을 구하시오.*

$$\int_0^1 \int_{\frac{1}{2}\arcsin y}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^4 x}}dxdy$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{\frac{1}{2}\arcsin y}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^4 x}}dxdy &= \int_0^{\pi/4}\int_0^{\sin 2x} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^4 x}}dydx \quad \text{(푸비니 정리)} \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-(\frac{1-\cos 2x}{2})^2}}dydx \\
&= \left[\arcsin\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\right]_0^{\pi/4} \\
&= \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

2-7. 13. *좌표평면에서 네 점 $(1,0),(2,0),(0,-2),(0,-1)$을 꼭짓점으로 하는 사각형이 영역 R일 때, 다음 적분값을 구하시오.*

$$\iint_R e^{(x+2y)/(x-y)}dxdy$$

$u = x+2y, v = x-y$로 치환하자. 이 때, $x = \frac{u+2v}{3}, y = \frac{u-v}{3}$이므로,

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$$

이다. 또한 사각형으로 표현되는 범위는

$$-2v \le u \le v, 1 \le v \le 2$$

이다. 치환적분법에 의하여

$$\begin{aligned}\iint_R e^{\frac{x+2y}{x-y}}dxdy &= \int_1^2 \int_{-2v}^{v} \frac{1}{3}e^{\frac{u}{v}}dudv \\ &= \int_1^2 \frac{1}{3}(ev - e^{-2}v)dv \\ &= \frac{1}{2}(e - \frac{1}{e^2})\end{aligned}$$

이다.

2-7. 14. *좌표공간에서 다음 부등식을 모두 만족하는 영역의 부피를 구하시오.*

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 2, \quad x^2 + y^2 + 1 \leq z$$

원기둥좌표계로 변환시켜본다면

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1+r^2}^{1+\sqrt{2-r^2}} rdzdrd\theta &= \int_0^{2\pi}\int_1^2 r(\sqrt{2-r^2} - r^2)drd\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 r\sqrt{2-r^2} - r^3 dr \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{3}(2-r^2)^{3/2} - \frac{1}{4}r^4\right]_0^1 \\ &= 2\pi(-\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2\sqrt{2}}{3}) \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi - \frac{7}{6}\pi\end{aligned}$$

2-7. 15. *좌표공간에 있는 두 원기둥*

$$x^2 + z^2 \leq R^2, y^2 + x^2 \leq R^2$$

의 공통부분의 부피를 구하시오.

$x = r$일 때의 단면을 생각하면 단면의 넓이는 $4(R^2 - x^2)$으로 주어질 것이다. 따라서 그 부피는

$$\int_{-R}^{R} 4(R^2 - x^2)dx = \frac{16}{3}R^3$$

2-7. 16. *영역* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 4 < x^2 + y^2 < 9, x > 0, y > 0\}$*에서 함수*

$$f(x,y) = \frac{(\ln(x^2+y^2))^2}{4\sqrt{x^2+y^2}}$$

을 적분한 값을 구하시오.

극좌표계로 바꾸면 적분은 아래와 같이 계산할 수 있다.

$$\iint_D f(x,y)dV_2 = \int_0^{\pi/2}\int_2^3 \frac{(\ln r^2)^2}{4r}\cdot rdrd\theta$$
$$= \frac{\pi}{2}\int_2^3 (\ln r)^2 dr$$
$$= \frac{\pi}{2}\left([r(\ln r)^2]_2^3 - \int_2^3 2\ln r dr\right)$$
$$= \frac{\pi}{2}\big(3(\ln 3)^2 - 2(\ln 2)^2 - 2[r\ln r - r]_2^3\big)$$
$$= \frac{\pi}{2}\big(3(\ln 3)^2 - 2(\ln 2)^2 - 6\ln 3 + 4\ln 2 + 2\big)$$

2-7. 17. *다음 적분값을 구하시오.*

$$\int_0^1\int_y^1 \frac{\sin(\ln(x^2+1))}{x^2+1}dxdy$$

주어진 영역을 잘 생각해 푸비니 정리를 이용하게 된다면

$$\int_0^1\int_y^1 \frac{\sin(\ln(x^2+1))}{x^2+1}dxdy = \int_0^1\int_0^x \frac{\sin(\ln(x^2+1))}{x^2+1}dydx$$

이다. 따라서

$$\int_0^1\int_0^x \frac{\sin(\ln(x^2+1))}{x^2+1}dydx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\sin(\ln(x^2+1))dx$$
$$= \int_0^{\ln 2}\frac{1}{2}\sin t dt \quad (t = \ln(x^2+1))$$
$$= \frac{1}{2}(1-\cos(\ln 2))$$