

중간문풀-2. 1. 다음과 같이 함수  $f(x, y)$ 가 주어져 있다.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y + xy^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) 함수  $f$ 는 연속함수인지 판정하시오.
- (b)  $D_1f(0, 0), D_2f(0, 0)$ 을 구하시오.
- (c) 원점에서 함수  $f$ 의 미분가능성을 판정하시오.

중간문풀-2. 2. 좌표평면에서 정의된 함수

$$f(x, y) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + y^3 \sin\left(\frac{1}{y^2}\right), & xy \neq 0 \\ x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, y = 0 \\ y^3 \sin\left(\frac{1}{y^2}\right), & x = 0, y \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

- (a)  $D_1f(0, 0), D_2f(0, 0)$ 을 구하시오.
- (b) 함수  $f$ 는 원점에서 미분가능한가?
- (c) 함수  $f$ 는 일급함수인가?

중간문풀-2. 3. 좌표평면에서 정의된 함수

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 y)}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

은 원점에서 연속이 아님을 보이시오.

중간문풀-2. 4. 좌표평면에서 정의된 함수  $f(x, y)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 y) \sqrt{x^2 + y^2}}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a)  $f(x, y)$ 가 원점에서 연속인지를 판정하시오.
- (b)  $D_1 f(x, y)$ 와  $D_2 f(x, y)$ 를 구하시오.
- (c) 원점에서  $f(x, y)$ 의 미분가능성을 판정하시오.

중간문풀-2. 5. 미분가능한 함수  $f$ 가 점  $P$ 에서  $(1, 1, -1)$  방향으로 가장 빨리 증가하고 그 때의 방향 변화율은  $2\sqrt{2}$ 이다. 점  $P$ 에서 함수  $f$ 의  $(1, 1, 0)$ -방향미분계수를 구하여라.

중간문풀-2. 6. 다음과 같이 정의된 함수  $f$ 에 대하여 물음에 답하시오.

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) 벡터  $\mathbf{v}$ 에 대하여 함수  $f$ 의 원점에서의  $\mathbf{v}$ -방향 미분계수를 구하시오.
- (b) 함수  $f$ 는 원점에서 미분가능한지 아닌지 판별하고 그 이유를 밝히시오.
- (c) 함수  $D_1 f$ 는 원점에서 불연속임을 보이시오.

**중간문풀-2. 7. 함수**

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y \sin^2 x}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a)  $\mathbf{v} = (1, 1)$ 일 때  $D_{\mathbf{v}}f(0, 0)$ 을 구하시오.
- (b) 함수  $f$ 가 원점에서 연속인지 판정하시오.
- (c) 함수  $f$ 가 원점에서 미분가능하지 않음을 보이시오.

중간문풀-2. 8. 함수  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ 와 점  $P(1, -1)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a)  $f$ 의 그래프 상의 점  $(1, -1, -2)$ 에서 접평면의 방정식을 구하시오.
- (b) 벡터  $\mathbf{v} = (x, y)$ 에 대하여  $D_{\mathbf{v}}f(P)$ 를 구하시오.
- (c) 점  $P$ 에서 함숫값이 가장 빨리 증가하는 방향  $\mathbf{w}$ 를 구하고, 그 방향으로의 변화율을 구하시오. 단,  $\mathbf{w}$ 는 단위벡터이다.



**중간문풀-2. 9.** 타원면  $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6 = 0$ 과 그 위의 점  $P(1, 1, 1)$ 이 있다. 이 타원면 바깥의 어떤 점에서 점  $P$ 를 향하여 단위벡터  $\mathbf{v}$  방향으로 발사된 빛이 타원면에 반사되어 나가는 방향의 단위벡터를  $\mathbf{v}^*$ 라 하자. 벡터  $\mathbf{v}$ 와  $\mathbf{v}^*$ 이 서로 수직일 때,

$$D_{\mathbf{v}^*}g(P) - D_{\mathbf{v}}g(P)$$

의 값을 구하시오.

**중간문풀-2. 10.** 함수  $f(x, y, z) = e^{xz}(x^2 + y^2 - z)$ 와 점  $P = (1, -1, 0)$ 에 대하여 물음에 답하시오.

(a) 점  $P$ 에서 함수  $f$ 가 가장 빨리 증가하는 방향의 단위벡터  $\mathbf{v}$ 를 구하시오.

(b) 곡면  $e^{xz}(x^2 + y^2 - z) = 2$ 의 점  $P$ 에서 접평면의 방정식을 구하시오.

중간문풀-2. 11. 좌표평면에서 정의된 함수

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^5}{x^2 + xy^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

가 원점에서 연속인지 아닌지를 밝히시오.

중간문풀-2. 12. 평면에서 극좌표로 다음과 같이 정의된 함수  $f$ 에 대하여 물음에 답하시오.

$$f(r, \theta) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{r}}, & r > 0 \\ 0, & r = 0 \end{cases}$$

- (a) 함수  $f$ 가 원점에서 연속임을 보이시오.  
 (b) 함수  $f$ 의 기울기 벡터  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ 를  $r$ 과  $\theta$ 를 이용해 나타내시오.  
 (c) 원점이 아닌 점에서의

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

을  $r$ 과  $\theta$ 를 이용하여 나타내시오.

중간문풀-2. 13. 함수

$$f(x, y) = \frac{xy}{xy - y + 2x}$$

가 정의되는 점  $(x, y)$ 에서 다음 방정식을 만족시킴을 보이시오.

$$x^2 D_1 f(x, y) + y^2 D_2 f(x, y) = (f(x, y))^2$$

중간문풀-2. 14. 좌표평면에서 정의된 함수

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

에 대하여 다음 질문에 답하시오.

(a)  $D_1f(0, 0)$ 와  $D_2f(0, 0)$ 을 구하시오.

(b) 함수  $f$ 가 원점에서 미분가능한지 판정하시오.

(c) 조건  $D_1D_2f(x, y) = D_2D_1f(x, y)$ 를 만족시키는 점  $(x, y)$ 를 모두 구하시오.

**중간문풀-2. 15.** 함수  $f(x, y, z) = ze^x \sin y$ 와 곡면  $f(x, y, z) = 1$  위의 점  $P = (0, \frac{\pi}{2}, 1)$ 에 대하여 다음 질문에 답하시오.

- (a) 점  $P$ 에서 함수  $f$ 가 가장 빨리 증가하는 방향의 단위벡터를 구하시오.
- (b) 점  $P$ 에서 곡면  $f(x, y, z) = 1$ 에 접하는 평면의 방정식을 구하시오.