2-3. 1. *$\mathbb{R}^3$의 두 곡면 $x^2+2y^2+4z^2=6$과 $2z=x^2+2y^2$의 한 교점에서 두 곡면에 대한 접평면이 서로 수직이 되었다. 이러한 교점을 모두 구하시오.*

교점의 좌표를 (a,b,c)라고 두자. 해당 점에서 접평면이 서로 수직하다는 것은 해당 점에서 각 곡면에 대해 구한 기울기 벡터가 수직하다는 것이다. 첫째로 곡면 $x^2+2y^2+4z^2=6$에 대해서는 기울기 벡터가 $(2a,4b,8c)$이며, 둘째 곡면에 대해서는 $(2a,4b,-2)$가 얻어진다. 둘이 수직하면 내적한 값이 0이기에, $4a^2+16b^2-16c=0$이다. 이를 $a^2+2b^2+4c^2=6$과 $2c=a^2+2b^2$과 연립하자. 첫째 식에서 셋째 식의 8배를 더해주면, $4a^2=8a^2$이기에 $a=0$이다. 또한, 이는 $b^2-c=0$과 $b^2+2c^2=3$으로 이어지기에 $b=c=1$ 혹은 $b=-1,c=1$임을 알 수 있다. 따라서 교점은

$$(0,\pm1,1)$$

이 된다.

2-3. 2. *다음 함수에 대하여 물음에 답하시오.*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{|x|^3+y^6}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(a) $D_1f(0,0)$, $D_2f(0,0)$, $D_{(1,1)}f(0,0)$이 존재하면 구하시오.
(b) f는 원점에서 연속인지 판정하시오.
(c) f는 원점에서 미분가능한지 판정하시오.

(a)

$$D_1f(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$$

$$D_2f(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$$

$$D_{(1,1)}f(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(t,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\sqrt{|t|^3+t^6}}$$

인데, 마지막의 경우 t가 0으로 감에 따라 발산하므로 값이 존재하지 않는다.

(b) $X(t)=(t|t|,t)$라고 둔다면 $\lim_{t\to0}X(t)=(0,0)$으로 해당 경로를 따라 t가 0으로 가면 원점에 접근하지만,

$$\lim_{t\to0}f(X(t))=\lim_{t\to0}\frac{t^2|t|}{\sqrt{t^6+t^6}}=\lim_{t\to0}\frac{|t|^3}{\sqrt{2}|t|^3}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

이므로 $x=0$이나 $y=0$ 경로를 따를 때의 극한값인 0과 다르다. 따라서 f는 원점에서 연속이 아니다.

(c) f는 원점에서 연속이 아니므로 원점에서 미분가능할 수 없다.

2-3. 3. *좌표평면에서 정의된 다음 함수 $f(x,y)$에 대해 아래 물음에 답하시오.*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(a) f는 원점에서 연속인가?
(b) 0이 아닌 벡터 $\mathbf{v}=(a,b)$에 대하여 $D_{\mathbf{v}}f(0,0)$를 구하시오.
(c) f는 원점에서 미분가능한지 판정하시오.

(a)

$$0\le\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\le\frac{x^2|y|+|y|^3}{x^2+y^2}=|y|$$

이며,

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$$

이므로, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$이기에 원점에서 연속이다.

(b)

$$D_{\mathbf{v}} f(0,0) = \frac{d}{dt}|_0 \frac{t^3 a^2 b}{t^2a^2 + t^2 b^2} = \frac{a^2 b}{a^2+b^2}$$

(c) $\mathrm{grad} f(0,0) = (0,0)$임을 알고 있다. 만약 f가 미분가능하다면, 모든 $\mathbf{v}$에 대해

$$D_{\mathbf{v}} f(0,0) = \mathrm{grad} f(0,0) \cdot \mathbf{v} = 0$$

이어야 하나 이는 (b)에서 구한 결과와 모순된다. 따라서 미분가능하지 않다.

2-3. 4. *원점 근방에서 정의된 미분가능함수 $f(x,y)$가 다음 성질을 만족한다고 하자.*

$$xyf(x,y) = \cos(x+y+f(x,y))$$

이때, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$의 값을 구하시오.

먼저, $(x,y) = (0,0)$을 대입하여 보자. 그러면 좌변은 0이며, 우변은 $\cos(f(0,0))$이므로 $f(0,0)$은 $(n+\frac{1}{2})\pi$ 꼴이다. (단, n은 정수) 그 다음으로 f는 미분가능함수이므로 y로 편미분가능하다. 또한 좌변과 우변은 모두 f와 다항함수, 삼각함수가 합과 곱이나 합성함수로 연결되어 있기에 모두 y로 편미분가능하다. 이에 따라 양변을 y로 편미분한다면

$$xf(x,y) + xy\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\sin(x+y+f(x,y))(1+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y))$$

이며, $(x,y) = (0,0)$을 대입할 경우

$$0 = -\sin(f(0,0))(1+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0))$$

이다. 그런데 $f(0,0)$이 가질 수 있는 값에 의하여 $\sin(f(0,0))$은 0이 아니다. 따라서 $1+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$이므로, 원하는 값은 -1이다.

2-3. 5. *삼차원 좌표공간에 놓인 곡면 $xyz = 2021$ 위의 점 (a,b,c)에서의 접평면과 $xy-$평면, $yz-$평면, $zx-$평면들로 둘러싸인 사면체의 부피를 구하시오.*

일반성을 잃지 않고 (a,b,c)가 $x>0, y>0, z>0$인 영역에 있다고 하자. 만약 (a,b,c)가 $a>0, b<0, c<0$인 영역에 있는 경우, $(a,-b,-c)$는 $a>0, -b>0, -c>0$에 있을 것이며 이는 역시 곡면 위에 있다. 여기서 놓인 접평면과 세 좌표평면이 이루는 사면체는 대칭성에 의해 (a,b,c)에서 그린 것과 동일한 모양을 가질 것이기에, 위처럼 제한시켜도 된다.

해당 점에서의 접평면은 해당 점을 지나며 해당 점에서의 기울기 벡터를 법선 벡터로 가지는 평면이다. 기울기 벡터는 $(yz,xz,xy) = (bc,ac,ab)$일 것이며 점 (a,b,c)를 지나기에, 평면의 방정식은

$$bcx + acy + abz = 3abc$$

로 주어진다. 이들과 각 좌표평면으로 둘러싸인 사면체는 원점을 기준으로 세 변에서 오는 선분들이 모두 수직을 이룬다. 따라서, x,y,z 축과의 교점의 좌표를 구한 다음 이를 곱하고, 1/6배 하면 그 부피가 나온다. 첫째로 x축과의 교점은 $(3a,0,0)$이며, 같은 이유로 원점과 y축의 교점 사이 거리는 $3b$, z축과는 $3c$다. 따라서

부피는

$$\frac{1}{6}(27abc) = \frac{9}{2}abc = \frac{18189}{2}$$

임을 알 수 있다.

2-3. 6. *자연수 n에 대하여*

$$F_n(x) = \int_2^{2x} (x-t)^n e^{t^2} dt$$

라 두자. 이때 $F_n'(1)$을 구하시오.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}F_n(x) &= \frac{d}{dx}\int_2^{2x} (x-t)^n e^{t^2} dt \\
&= \frac{d}{dx}F(2, 2x, x) \quad \left(F(u,v,x) = \int_u^v (x-t)^n e^{t^2} dt\right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}(2)(x-2)^n e^4 + \frac{\partial}{\partial x}(2x)(x-2x)^n e^{4x^2} + \frac{\partial}{\partial x}(x)\frac{\partial}{\partial x}\int_2^{2x}(x-t)^n e^{t^2} dt \\
&= 2(-x)^n e^{4x^2} + \int_2^{2x} n(x-t)^{n-1} e^{t^2} dt \quad (\text{라이프니츠 정리})
\end{aligned}$$

이때 $x = 1$을 대입하면

$$F_n'(1) = (-1)^n \cdot 2e^4 + \int_2^2 n(x-t)^{n-1}e^{t^2} dt = (-1)^n \cdot 2e^4$$

이다.

2-3. 7. *$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$을 만족하는 x, y, z에 대하여 $z^2 + 2xy \neq 0$일 때, z를 x, y의 함수로 쓸 수 있다고 한다. 이때 $\frac{\partial z}{\partial x}$를 x, y, z에 대한 식으로 나타내시오.*

식을 x에 대해 미분해 보자. 그러면

$$\frac{d}{dx}(x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz) = \frac{d}{dx}(1) = 0$$

이다. 이때의 미분은 편미분이 아니라 상미분이다. 좌변을 원하는 형태인 $\frac{\partial z}{\partial x}$가 포함된 식으로 바꾸어 주자. 그러면

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dx}(x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz) + \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz) + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}(x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz) \\
&= (3x^2 + 6yz) + \frac{\partial y}{\partial x}(3y^2 + 6xz) + \frac{\partial z}{\partial x}(3z^2 + 6xy)
\end{aligned}$$

그런데, 현재 z를 x, y의 함수로 보고 있으므로 y는 x에 독립적인 변수이다. 따라서 $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$이고, $z^2 + 2xy \neq 0$이므로

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x^2 - 2yz}{z^2 + 2xy}$$

2-3. 8. *함수 $f(x,y) = e^{-x^2-2y^2}$에 대하여 다음 물음에 답하시오.*

(a) 점 (1,1)에서 함숫값이 가장 빨리 증가하는 방향이 $\mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$일 때, $\tan\theta$를 구하시오.

(b) 그래프 $z = f(x,y)$의 점 $(1, 1, e^{-3})$에서의 접평면의 방정식을 구하시오.

(a) 함숫값이 가장 빨리 증가하는 방향은

$$\mathrm{grad} f(1,1)$$

과 같은 방향이다.

$$D_1 f(1,1) = -2e^{-3}, D_2 f(1,1) = -4e^{-3}$$

이므로 이를 단위벡터로 표시할 경우

$$(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

이다. 따라서 $\tan\theta = 2$다.

(b) 이 그래프는 $z - f(x,y) = 0$이 표현하는 영역과 같다. 따라서 그 기울기 벡터는 $(2e^{-3}, 4e^{-3}, 1)$로 주어지며, 평면은 $(1,1,e^{-3})$을 지난다. 따라서 평면의 방정식은

$$2e^{-3}x + 4e^{-3}y + z = 7e^{-3}$$

혹은

$$2x + 4y + e^3 z = 7$$

로 표현가능하다.

2-3. 9. *함수*

$$f(x,y) = \int_{y^2}^{x} \frac{e^{xt^2}}{t} dt$$

에 대하여 $\mathrm{grad} f(2,1)$*를 구하시오.*

$$D_1 f(x,y) = \frac{e^{x^3}}{x} + \int_{y^2}^{x} te^{xt^2} dt = \frac{e^{x^3}}{x} + \frac{1}{2x}(e^{x^3} - e^{xy^4})$$

$$D_2 f(x,y) = -2y\frac{e^{xy^4}}{y^2} + \int_{y^2}^{x} 0 dt = -\frac{2e^{xy^4}}{y}$$

이므로,

$$\mathrm{grad} f(2,1) = (\frac{e^8}{2} + \frac{1}{4}(e^8 - e^2), -2e^2) = (\frac{1}{4}(3e^8 - e^2), -2e^2)$$

2-3. 10. $w = x^2 f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$*일 때, 다음 등식이 성립함을 보이시오.*

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} = 2w$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2xf(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) - yD_1 f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) - zD_2 f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = xD_1 f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = xD_2 f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$$

이므로

$$
\begin{aligned}
x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} &= 2x^2 f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) - xyD_1 f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) - xzD_2 f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) + xyD_1 f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) + xzD_2 f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) \\
&= 2x^2 f(xD_2 f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x})) \\
&= 2w
\end{aligned}
$$

가 성립한다.