9. Differential Equations

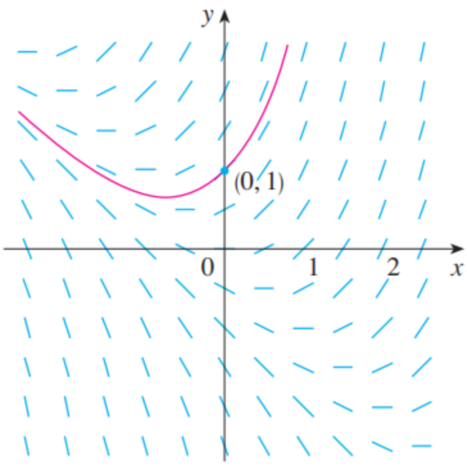
9.1 Introduction to Differential Equations

일반적으로, 알려지지 않은 함수와 그들의 derivative로 이루어진 equation을 **differential equation**이라 한다. 이때, highest derivative의 차수를 그 differential equation을 **order**라 한다. differential equation을 풀어 얻는 함수 f를 그 **solution**이라 한다.
differential equation 중에서, 특정한 점 t_0에서의 함숫값 $y(t_0)$(**initial condition**)를 제공하는 differential equation을 **initial value problem**이라 부른다.

first-order differential equation이 아래처럼 주어진다고 하자.

$$y' = F(x, y)$$

이때 주어진 점 (x, y)에서 y'을 계산해낼 수 있다. 여러 점 (x, y)에서 y'의 방향을 표시하는 작은 선을 그린 것을 **direction field**라 한다.



direction field의 개형과 그래프가 지나는 initial value를 안다면, solution의 개형을 대략적으로 추측할 수 있다.

$y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$을 풀 때, 아주 작은 값 h에 대하여 아래의 식을 반복함으로써 $f(x_n)$의 값을 y_n으로써 추정할 수 있다.

$$f(x_n) \approx y_n = y_{n-1} + hF(x_{n-1}, y_{n-1}), \quad x_n = x_{n-1} + h$$

이렇게 f를 추측하는 방법을 **Euler's method**라 한다.

양변을 잘 정리하면

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = F(x_{n-1}, y_{n-1})$$

을 얻는데, 이는

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = f'(x_n^*) = F(x_n^*, f(x_n^*))$$

에서 $f(x_n)$을 y_n으로, $f(x_{n-1})$을 y_{n-1}로, x_n^*을 x_{n-1}으로 근사해 얻어낸 것이다.

9.2 Separable Equations

first order differential equation이

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$$

의 형태로 표현될 수 있을 때, 이를 **separable equation** 이라고 한다.

separable equation은 first order differential equation 중에서 아주 풀기 쉬운 편에 속한다. $f(y) \neq 0$ 이라는 전제 하에,

$$\frac{1}{f(y)}\frac{dy}{dx} = g(x)$$

인데, 양변을 x로 적분한다면

$$\int g(x)dx = \int \frac{1}{f(y)}\frac{dy}{dx}dx = \int \frac{1}{f(y)}dy$$

를 얻게 된다. 그 다음, initial value에 맞게 양변에서 나오는 적분상수를 잘 조절해주면 된다. 아래 예시를 통해 실제 문제를 풀어 보자.

orthogonal trajectory는 여러 curve로 구성된 family들에 모두 orthogonal하게 진행하는 경로를 의미한다. 이때, curve끼리 orthogonal하다는 것은 교점에서의 각 curve에의 접선이 orthogonal함을 의미한다.

책에 나온 것처럼 $x = ky^2$ 형태의 curve들에 대해 그 orthogonal trajectories를 구해보고자 한다. $x = ky^2$ 의 위에 있는 어떤 점 (x_0, y_0)에 대하여, 그 점에서의 접선의 기울기를 구해 본다면

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1} = \frac{1}{2ky}$$

임에 따라 $\frac{1}{2ky_0}$이다. 그러므로 해당 점을 지나는 orthogonal trajectory는 접선의 기울기로 $-2ky_0$을 가져야 함이 명백하다. 즉 해당 점 근처에서 $y = f(x)$로 orthogonal trajectory가 표현된다면,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = -2ky_0$$

가 성립해야 함을 알고 있다. 그런데 이때 $k = x_0/y_0^2$이었으므로, $(x_0, y_0) = (x, y)$일 때 $f(x)$는

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}$$

라는 differential equation의 solution이 된다.

이는 separable equation이다.

$$-\int 2xdx = \int ydy$$

이므로

$$x^2 + \frac{y^2}{2} = C$$

형태가 만들어지는 것을 알 수 있다. 만약 출제자가 이 문제를 initial-value problem으로 만들고 싶다면, 이 그래프가 특정 점을 지난다는 것을 제시해 주면 된다. 예를 들어, 문제 조건에 이 orthogonal trajectory가 점 $(1, 2)$를 지나야 한다고 제시하면, $C = 3$이며, 정답은

$$x^2 + \frac{y^2}{2} = 3$$

이라는 타원이다.

9.3 Linear Equations

first-order **linear** differential equation은 아래와 같은 형태를 가진다.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

단, P와 Q는 함수가 정의된 interval에서 continuous이다.

이러한 형태의 differential equation은 항상 풀 수 있음이 알려져 있다. 먼저, 어떤 $I(x)$를 양변에 곱하여 아래의 형태를 만들고자 한다. 즉, I는 P에 따라 달라질 수 있다. 우리는 이를 **integrating factor**라 부르려 한다.

$$I(x)(y' + P(x)y) = (I(x)y)'$$

만약 그렇다면, 주어진 differential equation은

$$(I(x)y)' = I(x)Q(x)$$

의 형태가 되는데, 양변을 적분하면

$$I(x)y = \int I(x)Q(x)dx + C$$

의 꼴이며

$$y = \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)Q(x)dx + C\right]$$

로 solution이 얻어짐을 알 수 있다.

이제 $I(x)$가 무엇일지 잘 생각하여 보자. $(I(x)y)' = I'(x)y + I(x)y'$이며, 이것이 $I(x)(y' + P(x)y)$와 같아야 한다. 그러므로

$$I(x)P(x) = I'(x)$$

가 만족될 것이다. 그런데 이를 I에 대한 differential equation으로 보면, 이는 separable임을 알 수 있다.

$$\int P(x)dx = \int \frac{1}{I}dI$$

이므로 이를 정리하면

$$I(x) = Ae^{\int P(x)dx}$$

의 형태임을 알 수 있다. 그런데 A는 상수이므로 사실 곱해주든, 곱해주지 않든 I가 기능하는 데에는 영향을 주지 않는다. 따라서 아래의 방법이 일반적으로 옳다.

linear differential equation

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

를 풀려면, integrating factor

$$I(x) = e^{\int P(x)dx}$$

를 구한 뒤

$$y = \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)Q(x)dx + C\right]$$

에 대입하면 solution을 얻을 수 있다.

9.4 Other types of Equations

integral equation은 모르는 함수 $y(x)$와 이것에 관련된 integral이 포함된 equation을 의미한다.

integral equation은 사실 differential equation과 푸는 방식이 반대인 equation이다. 우리는 differential equation을 풀 때, 적절히 묶거나 정리한 다음 양변을 적분하여 y를 구했었다. 반대로 integral equation을 풀려면 적절히 정리한 다음 양변을 미분하여 정리하면 된다. 그렇다면 우리가 쉽게 풀 수 있는 형태이거나, 알고 있는 differential equation이 등장하게 될 것이다.

Bernoulli differential equation은 아래 형태를 가진 differeential equation이다.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

만약 $n = 0$이거나 $n = 1$이라면 이는 linear이므로 쉽게 해결이 가능하다. 만약 n이 다른 값이라면, $u = y^{1-n}$으로 치환하여 정리할 경우

$$\frac{du}{dx} + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x)$$

로 바꿀 수 있다. 잘 생각하면 이는 이제 linear이다. 그러므로

$$I(x) = e^{\int (1-n)P(x)dx}$$

를 integrating factor로 하여 우리가 알고 있는 풀이법을 사용해주면 되겠다.

9.5 Application of Differential Equations

가장 많이 보게 될 응용은 population growth를 모델링할 때이다. 시간 t에 따른 개체수 P를 생각하여 보자. 환경은 매우 풍족하며, 개체는 사망하지 않는다고 하자. 초기에는 P_0마리의 개체가 있다고 하자. 그렇다면 새로운 개체의 생산 속도 dP/dt는 원래 있던 개체의 수 P에 비례할 것이므로, 적당한 상수 k에 대해

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

일 것이다. 즉 **relative growth rate**가 상수라는 것이다. 이 식을 **law of natural growth**라 부르기도 한다. 이는 separable이므로 풀어내면

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

가 성립함을 알 수 있을 것이다. 즉 제약이 없을 때에는 growth curve가 exponential하게 그려진다.

한편 아래의 새로운 가정을 추가해보자. 원래의 가정은 P가 작을 때에만 성립한다고 하자. 그런데, 환경이 비옥하지 못해서 거주지가 최대 M마리의 개체만을 수용할 수 있다고 하자. 이 M을 **carrying capacity**라 부른다. 그러면

$$\frac{dP}{dt} < 0 \quad \text{if} \quad P > M$$

이라는 가정 또한 제공할 수 있다. 그렇다면 우리는

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

라는 differential equation을 새로 생각해볼 수 있다. 이러한 형태를 **logistic differential equation**이라 한다.

이는 separable이므로

$$\int \frac{1}{P(1-P/M)}dP = \int kdt$$

이며,

$$\frac{1}{P(1-P/M)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{M-P}$$

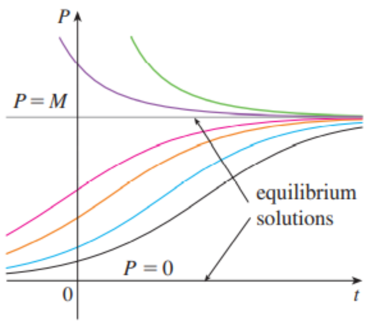
이므로 정리하면

$$\ln|P| - \ln|M-P| = kt + C$$

이다. 이를 P에 대해 표현하면

$$P = \frac{M}{1+Ae^{-kt}}$$

를 얻을 수 있다. 초깃값을 대입하여 준다면, $A = \frac{M-P_0}{P_0}$임도 알 수 있다.



일반적으로 이는 위 그래프처럼 형태를 가진다. 특이한 것은 초깃값 P_0에 따라 그래프의 형태가 달라진다는 것이다. P_0가 만약 M보다 컸다면 개체수는 M까지 지속적으로 감소하는 경향을 보인다. 반면 P_0가 0과 M 사이에 있었다면, 초반에는 가파르게 exponential처럼 증가하다가, M에 점점 가까워질수록 그 상승세가 완만해져 M에 수렴하는 그래프를 가진다. 이는 위에서 얻는 solution에서 $\lim_{t\to\infty} P(t) = M$인 것과도 일치한다. 이때 $P_0 = 0$이거나 $P_0 = M$이면 P는 상수함수인데, 이 때의 solution $P = M$과 $P = 0$을 **equilibrium solution**이라고 한다.

이외의 상황에서는 첫째로 문제 상황을 이해하고, 올바른 방정식을 세워야 한다. 그 다음 그 방정식은 아무리 어려워보았자 separable, linear, integral, Bernoulli 중 하나이므로 푸는 방법을 알고 있다. 그 다음 초깃값에 맞춰 solution을 구해주면 대개의 문제는 풀 수 있다.

위의 population growth model에서도 개체들의 지속적인 migration을 포함하여

$$\frac{dP}{dt} = kP - m$$

형태를 풀 수도 있다. 또는 개체를 방목하는 한정된 농장에서 지속적으로 수확(도축)을 할 때,

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1-\frac{P}{M}\right) - c$$

로 세울 수도 있다. 한편 population level이 적어도 m 이상이어야 mating이 발생하는 환경을 모델링하려면,

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1-\frac{P}{M}\right)\left(1-\frac{m}{P}\right)$$

로 식을 세워야 한다.

spring에 달린 물체에서는 회복력이 늘어난 거리 x에 비례하게 나타난다. 이때 $F = ma$이므로,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

가 성립한다. 변위 x를 시간 t로 두 번 미분하면 a임으로부터 이 결과가 나온다. 다만 우리가 이를 explicit 하게 푸는 방법은 미적분학2에서 배우지 않는다. 어찌하였든 이렇게 differential equation을 세우는 능력이 필요하다.

마지막으로, 가장 많이 등장하는 종류는 mixing problem이다. 여기에서는 특정 용질이 어떤 용매에 녹아가는데, 용질이 들어오는 속도와 나가는 속도를 제시할 때 용질의 양을 시간에 따라 추적하는 것을 목표로 한다. $y(t)$를 t일 때의 용질의 양이라 하며, $y_0 = y(0)$을 알고 물의 양이 P이라 하자. 그 다음 이 물탱크에 용질이 시간당 k의 일정한 속도로 d만큼의 물과 함께 들어오고, 배수구로는 용액이 d의 일정한 속도로 빠져나간다고 하자. 그렇다면 우리는

$$\frac{dy}{dt} = k - \frac{d}{P} \cdot y$$

라는 differential equation을 세우게 될 수 있다. 이는 linear이니 풀 수 있다. 이렇게 주어진 상황에서 들어오는 용질의 양과 나가는 용질의 양이 어떻게 표현될 것인지 생각하고, equation만 세운다면 못 풀 문제가 없을 것이다.

9.6 연습문제

아래 문제들 중에서 별다른 설명이 없는 문제는 주어진 differential equation과 initial value에 대해 solution을 구하면 되는 문제입니다.

문제 9. 1.

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx}+3x(y-1)=0, \quad y(0)=2$$

문제 9. 2.

$$\frac{dy}{dt}=1+t^2+y^2+t^2y^2, \quad y(0)=1$$

문제 9. 3. *differentiable function* $P(t)$*는 아래를 만족한다.*

$$\frac{dP}{dt} = -P(P - 1000)f(P)$$

이때 f*는 양의 continuous function이다. 아래의 두 명제를 증명하여라.*

(1) $P(0) > 1000$*이라면,* $P(t) \geq 1000$*은* $t > 0$*에 대해 성립한다.*

(2) $P(0) > 1000$*이라면,* $y = P(t)$*의* $t \geq 0$*에서의 그래프는* $y = 1000$*을 horizontal asymptote로 가진다.*

문제 9. 4. *곡선* C*는* $x \geq 0$*에서 정의되며,* $y = f(x)$*의 그래프 형태이다.* $x = 0$*으로부터의 arc length function* $s(x)$*가*

$$s(x) = \frac{1}{2}\{f(x)\}^2 - 2$$

이라 할 때, $f(x)$*를 구하여라.*

문제 9. 5.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

문제 9. 6. *코로나19의 확산에 대한 differential equation을 세우고자 한다. 알려진 바에 따르면, 감염 속도는 전체 인구 중 감염자의 비율과 비감염자의 비율의 곱에 정비례한다고 한다. 감염자의 비율을* y*라 할 때,* y*에 대한 differential equation을 세우고, 이를 풀어라. 단, 전체 인구는 불변한다. 또한 문제 상황 설정에 필요한 함수나 상수는 적절히 설정한 후 답에 포함시켜도 된다.*

문제 9. 7. $P(t)$*는 시간* t*의 진행에 따른 population이다.* $t \geq 0$*이다. differential equation*

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = P(8-P) - 7 \\ P(0) = 6 \end{cases}$$

을 고려하자. $P(t)$*를 구하고,* $\lim_{t\to\infty} P(t)$*를 구하여라.*

문제 9. 8.

$$y(x) = -2 + \int_1^x \frac{dt}{ty(t)}, \quad x > 0$$

문제 9. 9. *2000리터 들이의 콘테이너에 40kg의 소금을 넣은 1000리터의 소금물을 들이부었다. 그 다음 분당 50리터의* $0.02kg/l$ *소금물을 유입시키는 동시에, 잘 섞어 주면서, 분당 25리터의 소금물을 빼냈다. 시간* $0 \leq t \leq 40$*에 대하여,* t*분일 때의 소금의 양* $s(t)$*를 구하고,* $s(40)$*을 구하라.*

문제 9. 10. f는 양의 *differentiable function*이고, R_t는 $y = f(x)$와 x축 사이에 둘러싸인 영역을 $x = 0$, $x = t$로 잘라 만든 영역이다. $(\bar{x}, \bar{y})$는 R_t의 *centroid*이다. 만약 $\bar{x} = \frac{t}{2}$가 $t > 0$에 대해 성립한다면, $f(x)$가 $x > 0$에서 *constant*임을 보여라.

문제 9. 11. f는 양의 *differentiable function*이고, R_t는 $y = f(x)$와 x축 사이에 둘러싸인 영역을 $x = 0$, $x = t$로 잘라 만든 영역이다. $(\bar{x}, \bar{y})$는 R_t의 *centroid*이다. $\bar{y} = \frac{f(t)}{4}$가 $t > 0$에 대해 성립하는 f를 구해 보고, 만약 그런 f가 존재하지 않는다면 증명하여라.

문제 9. 12.

$$2xy' + y = 6x, \quad x > 0, \quad y(4) = 20$$

문제 9. 13.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{xy}, \quad y(1) = 2$$

문제 9. 14.

$$y = \frac{x}{1+kx}, \quad x \neq 0$$

의 orthogonal trajectories를 구하여라.

문제 9. 15. $f(x) \geq 0, f(0) = 0, f(1) = 1$*일 때,*

$$\int_0^x f(t)dt \quad \propto \quad \{f(x)\}^{(n+1)}$$

가 성립한다고 한다. $0 \leq x \leq 1$*에서 정의된 함수* $f(x)$*를 구하여라.*

문제 9. 16. $y = f(x)$는 *differentiable*이며 *nonzero* x에서

$$y' = \left(\frac{2}{x} - 1\right) y$$

의 *solution*이다.

continuous random variable X의 *probability density function*이

$$\begin{cases} f(x) & x > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

일 때, $f(x)$를 구하고 $E(X)$를 계산하여라.

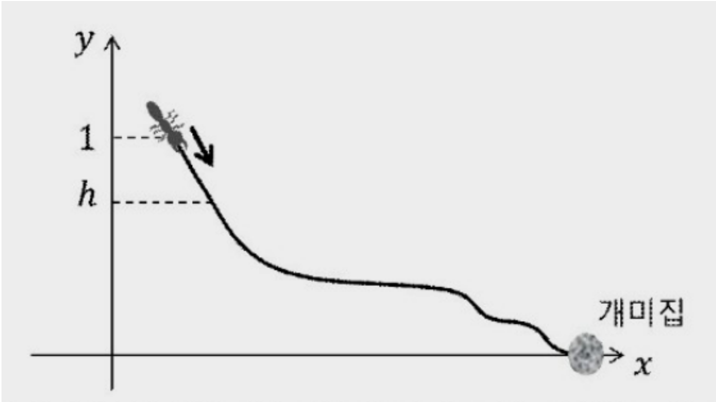
문제 9. 17. *레고랜드에는 총 4000여 점의 레고세트가 있는데, 그 중 20개가 스페셜 브릭이라고 한다. 이때 100점 당 2개의 스페셜 브릭을 포함한 레고 뭉텅이가 하루마다 15점씩 들어온다고 한다. 한편 무작위로 하루마다 15점의 레고세트가 판매된다. 2달(60일) 후에는 얼마만큼의 스페셜 브릭이 남아 있겠는가? (단, 레고세트와 브릭의 개수는 소수개일 수도 있다.)*

문제 9. 18.

$$e^x y' = 2(x+1)y^2, \quad y(0) = \frac{1}{7}$$

문제 9. 19.

$$4x^3 y + x^4 y' = \sin^3 x$$



문제 9. 20. *좌표평면 위의 곡선을 따라 개미가 집에 간다. 이 곡선은 x에 대해 differentiable한 decreasing function의 그래프이며, x축과 개미집에서 만난다. 또한 이 function의 derivative도 cotinuous이다. t라는 시점에서 개미는 $y(t)$라는 y좌표를 가지며, 개미의 y좌표가 h인 점에서 집까지 곡선의 길이를 $S(h)$라고 한다. y 역시 differentiable이다. $y(0) = 1$이다.*

이제 $s(t) = (S \circ y)(t)$를 정의하자. 즉 $s(t)$는 시간 t일 때 개미가 집까지 가기까지 남은 거리와도 같다. s는 아래의 differential equation을 만족한다고 하자.

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{y(t)^2 - 3y(t) + 2}$$

$A(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta S(1-y)\dfrac{2y+1}{(y^2+y)^{3/2}}dy$일 때, $y = \frac{1}{3}$인 위치에서부터 집까지 걸리는 시간을 $S(h)$와 $A(\alpha, \beta)$를 이용해 나타내시오.