중간문풀-7. 1. *다음 물음에 답하시오.*

(a) 함수 $f(\varphi,\theta)=e^{\varphi\cos\theta}\sin(\varphi\sin\theta)$*에 대하여, 편미분* $\dfrac{\partial f}{\partial\theta}$*를 구하시오.*

(b) 함수 $g(\varphi)=\int_0^{2\pi}e^{\varphi\cos\theta}\cos(\varphi\sin\theta)d\theta$*라 하면,* $g(\varphi)$*는 실수전체집합* $\mathbb{R}$*에서 정의된 연속함수이다. 이때* $g(2021)$*의 값을 구하시오.*

(a)

$$\frac{\partial f}{\partial\theta}=\varphi e^{\varphi\cos\theta}\cos(\varphi\sin\theta)\cos\theta-\varphi e^{\varphi\cos\theta}\sin(\varphi\sin\theta)\sin\theta$$

(b) $\varphi\neq 0$일 때

$$\begin{aligned}
g'(\varphi)&=\frac{d}{d\varphi}\int_0^{2\pi}e^{\varphi\cos\theta}\cos(\varphi\sin\theta)d\theta\\
&=\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(e^{\varphi\cos\theta}\cos(\varphi\sin\theta))d\theta\quad(\text{라이프니츠 정리})\\
&=\int_0^{2\pi}\varphi e^{\varphi\cos\theta}\cos(\varphi\sin\theta)\cos\theta-\varphi e^{\varphi\cos\theta}\sin(\varphi\sin\theta)\sin\theta d\theta\\
&=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\varphi}\frac{\partial f}{\partial\theta}d\theta\\
&=\frac{1}{\varphi}(f(\varphi,2\pi)-f(\varphi,0))=0
\end{aligned}$$

이때 g는 $[0,2021]$에서 연속이고 $(0,2021)$에서 $g'(\varphi)=0$이므로, g는 $[0,2021]$에서 상수함수이다. 이제 $g(0)=\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi$이므로, $g(2021)=g(0)=2\pi$.

중간문풀-7. 2. *함수* f,g*가 좌표평면에서 정의된 일급함수라고 할 때 다음 물음에 답하시오.*

(a) $h(t)=f(tx,ty)$*라 할 때,* $h'(t)$*를 구하시오.*

(b) $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial x}$*가 성립할 때*

$$\varphi(x,y)=\int_0^1(xf(tx,ty)+yg(tx,ty))dt$$

라고 하자. 이때 $grad\varphi(x,y)$*를* f,g*로 표현하시오.*

(a) $h(t)=f(tx,ty)$일 때 연쇄법칙에 의하여

$$h'(t)=\frac{\partial(tx)}{\partial t}D_1f(tx,ty)+\frac{\partial(ty)}{\partial t}D_2f(tx,ty)=xD_1f(tx,ty)+yD_2f(tx,ty)$$

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y)&=\frac{\partial}{\partial x}\int_0^1(xf(tx,ty)+yg(tx,ty))dt\\
&=\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}(xf(tx,ty)+yg(tx,ty))dt\\
&=\int_0^1(f(tx,ty)+txD_1f(tx,ty)+tyD_1g(tx,ty))dt\\
&=\int_0^1(h(t)+th'(t))dt\\
&=[th(t)]_0^1=h(1)=f(x,y)
\end{aligned}$$

마찬가지 방법으로 $\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y) = g(x,y)$이다. 따라서

$$\mathrm{grad}\varphi(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$$

중간문풀-7. 3. 함수

$$f(x,y) = \int_y^{x^2} \frac{2}{t} e^{-xt^2} dt$$

에 대하여 $gradf(1,1)$*을 구하시오.*

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= 2x \cdot \frac{2}{x^2} \cdot e^{-x \cdot x^4} + \int_y^{x^2} \frac{\partial}{\partial x}(\frac{2}{t} e^{-xt^2}) dt \quad (\text{라이프니츠 정리, 연쇄법칙}) \\ &= \frac{4}{x} e^{-x^5} + \int_y^{x^2} (-2te^{-xt^2}) dt \\ &= \frac{4}{x} e^{-x^5} + \left[\frac{1}{x} e^{-xt^2}\right]_{t=y}^{t=x^2} = \frac{5}{x} e^{-x^5} - \frac{1}{x} e^{-xy^2} \end{aligned}$$

$$D_2 f(x,y) = (-1) \cdot \frac{2}{y} e^{-xy^2} = -\frac{2}{y} e^{-xy^2}$$

$$\mathrm{grad}f(1,1) = (D_1 f(1,1), D_2 f(1,1)) = (\frac{4}{e}, -\frac{2}{e})$$

중간문풀-7. 4. $x > 0, y > 0$*인 영역에서 정의된 함수*

$$f(x,y) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x^2 y} \frac{\sin(xt)}{t} dt$$

에 대하여 $(1, \frac{\pi}{2})$*에서* $f(x,y)$*의 일차 근사다항식을 구하시오.*

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= 2xy \cdot \frac{\sin(x^3 y)}{x^2 y} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x^2 y} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin(xt)}{t}\right) dt \quad (\text{라이프니츠 정리, 연쇄법칙}) \\ &= 2 \cdot \frac{\sin(x^3 y)}{x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x^2 y} \cos(xt) dt \\ &= \frac{2\sin(x^3 y)}{x} + \left[\frac{\sin(xt)}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{x^2 y} \\ &= \frac{2\sin(x^3 y)}{x} + \frac{\sin(x^3 y)}{x} - \frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{x} \\ &= \frac{3\sin(x^3 y)}{x} - \frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{x} \end{aligned}$$

이고

$$D_2 f(x,y) = x^2 \cdot \frac{\sin(x^3 y)}{x^2 y} = \frac{\sin(x^3 y)}{y}$$

이다. 그러면

$$f(1, \frac{\pi}{2}) = 0, \quad D_1 f(1, \frac{\pi}{2}), \quad D_2 f(1, \frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$$

이다. 따라서

$$T_1 f(x,y) = 2(x-1) + \frac{2}{\pi}(y - \frac{\pi}{2}) = 2x + \frac{2}{\pi} y - 3$$

중간문풀-7. 5. $F(x,y) = \int_1^{xy} e^{-t^2 y} dt$라 할 때, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(1,1)$를 구하시오.

$G(t,y) = \int e^{-t^2 y} dt$라 하자. 그러면 $\dfrac{\partial G}{\partial t}(t,y) = e^{-t^2 y}$이다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \int_1^{xy} e^{-t^2 y} dt \\
&= \frac{\partial}{\partial y}(G(xy,y) - G(1,y)) \\
&= \frac{\partial G}{\partial y}(xy,y) + \frac{\partial G}{\partial t}(xy,y) \cdot x - \frac{\partial G}{\partial y}(1,y) \\
&= \int_1^{xy} -t^2 e^{-t^2 y} dt + e^{-(xy)^2 y} x
\end{aligned}$$

이다.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\int_1^{xy} -t^2 e^{-t^2 y} dt + e^{-(xy)^2 y} x)$$

그리고 $g(t,y) = \int -t^2 e^{-t^2 y} dt$라 하자. $\frac{\partial g}{\partial t} = -t^2 e^{-t^2 y}$이다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}(g(xy,y) - g(1,y)) + x(-2xy^3)e^{-x^2 y^3} + e^{-x^2 y^3} \\
&= \frac{\partial g}{\partial t}(xy,y) \cdot y - 2x^2 y^3 e^{-x^2 y^3} + e^{-x^2 y^3} \\
&= -x^2 y^3 e^{-x^2 y^3} - 2x^2 y^3 e^{-x^2 y^3} + e^{-x^2 y^3} \\
&= (-3x^2 y^3 + 1) e^{-x^2 y^3}
\end{aligned}$$

이므로

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(1,1) = (-3+1)e^{-1} = -2e^{-1}$$