야코비 행렬

야코비 행렬

1-3(1). 1. *사상*

$$f(x,y) = (e^{x+y}, xe^y)$$

의 야코비 행렬을 구하여라.

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^y & xe^y \end{pmatrix}$$

1-3(1). 2. *사상 $g(x,y) = (\ln(xy), ye^x)$의 야코비 행렬을 구하여라.*

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \\ ye^x & e^x \end{pmatrix}$$

1-3(1). 3. *사상 $h(x,y)$가 문제 1번과 2번의 f와 g 에 대하여 $h = f + g$로 정의될 때, h의 $(1,1)$에서의 야코비 행렬을 구하여라.*

$$h'(1,1) = f'(1,1) + g'(1,1) = \begin{pmatrix} e^2+1 & e^2+1 \\ 2e & 2e \end{pmatrix}$$

1-3(1). 4.

$$\mathbf{f}(x,y,z) = (x\sin y + z, ye^x - 3x^2)$$

일 때, $\mathbf{f}$의 야코비 행렬을 구하여라.

$$\mathbf{f}'(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin y & x\cos y & 1 \\ -6x & e^x & ye^x \end{pmatrix}$$

이다.

1-3(1). 5.

$$\mathbf{g}(x,y,z) = (x^3\cos x, xyz)$$

일 때, $\mathbf{g}$의 $(0,1,1)$에서의 야코비 행렬을 A라고 하자. $\mathbf{b} = (0, 2021) \in \mathbb{R}^2$에 대하여, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$인 $\mathbf{x}$에 대하여, $|\mathbf{x}|$의 최솟값은?

$$\mathbf{g}'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2\cos x - x^3\sin x & 0 & 0 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

이므로

$$A = \mathbf{g}'(0,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

이다. 따라서

$$\mathbf{g}'(0,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2021 \end{pmatrix}$$

이려면 $x = 2021$이어야 한다. 따라서

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \geq |x| = 2021$$

으로부터 $\mathbf{x} = (2021, 0, 0)$일 때의 크기인 2021이 최소임을 알게 된다.

1-3(1). 6. *함수* $\mathbf{f}(x, y, z) = (xyz^2, xe^{-y}, y \sin xz)$*에 대하여, 야코비 행렬을 구하여라.*

$$\mathbf{f}'(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz^2 & xz^2 & 2xyz \\ e^{-y} & -xe^{-y} & 0 \\ zy \cos xz & \sin xz & xy \cos xz \end{pmatrix}$$

1-3(1). 7. *함수* $\mathbf{g}(x, y, z) = (x - y, x^2 + y^2 + z^2, \ln(xz + 2))$*의 점* $(0, 2, 0)$*에서의 야코비 행렬을 구하여라.*

$$\mathbf{g}'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2x & 2y & 2z \\ z/(xt + 2) & 0 & x/(xz + 2) \end{pmatrix}$$

이므로

$$\mathbf{g}'(0, 2, 0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

마지막 행이 모두 0이므로, 행렬식 값은 0이다.

1-3(1). 8. $x = 2u$*이고* $y = \sqrt{2}v$*일 때,*

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

의 행렬식을 구하여라.

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

이므로 그 행렬식은 $2\sqrt{2}$이다.

1-3(1). 9. *함수* $\mathbf{f}(x) = (x^2, \cos 3x, \ln x)$*와* $g(s, t, u) = s + t^2 + u^3$*에 대하여, 함수* $\mathbf{f} \circ g$*의 야코비 행렬을 구하시오.*

$$(\mathbf{f} \circ g)'(s, t, u) = \begin{pmatrix} 2(s + t^2 + u^3) & 4t(s + t^2 + u^3) & 6u^2(s + t^2 + u^3) \\ -3 \sin 3(s + t^2 + u^3) & -6t \sin 3(s + t^2 + u^3) & -9u^2 \sin 3s + t^2 + u^3 \\ \dfrac{1}{s + t^2 + u^3} & \dfrac{2t}{s + t^2 + u^3} & \dfrac{3u^2}{s + t^2 + u^3} \end{pmatrix}$$

이다.

1-3(1). 10. *함수* $\mathbf{f}(x, y) = (xy - \dfrac{y}{x}, \dfrac{x}{y} + y^3)$*과* $\mathbf{g}(s, t) = (s/t, s^2 t)$*에 대하여 함수* $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$*의 야코비 행렬을 구하여라.*

$$\mathbf{f} \circ \mathbf{g}(s, t) = (s^3 - st^2, \frac{1}{st^2} + s^6 t^3)$$

이므로

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})'(s, t) = \begin{pmatrix} 3s^2 - t^2 & -2st \\ -\dfrac{1}{s^2 t^2} + 6s^5 t^3 & -\dfrac{2}{st^3} + 3s^6 t^2 \end{pmatrix}$$

1-3(1). 11. *함수* $\mathbf{f}(x, y) = (x^2 - y, \frac{y}{x}, e^y)$*와* $\mathbf{g}(s, t, u) = (s + 2t + 3u, stu)$*에 대하여, 함수* $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$*의 야코비 행렬을 구하시오.*

$$(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})'(s,t,u)=\begin{pmatrix} 2(s+2t+3u)-tu & 4(s+2t+3u)-su & 6(s+2t+3u)-st \\ \dfrac{tu(2t+3u)}{(s+2t+3u)^2} & \dfrac{su(s+3u)}{(s+2t+3u)^2} & \dfrac{st(s+2t)}{(s+2t+3u)^2} \\ tue^{stu} & sue^{stu} & ste^{stu} \end{pmatrix}$$

이다.

1-3(1). 12. $\mathbf{h}(s,t,u)=(st+tu+su, s^3t^3-e^{stu^2})$*의 야코비 행렬을 구하시오.*

$$\mathbf{h}'(s,t,u)=\begin{pmatrix} t+u & s+u & s+t \\ 3s^2t^3-tu^2e^{stu^2} & 3s^3t^2-su^2e^{stu^2} & -2stue^{stu^2} \end{pmatrix}$$

1-3(1). 13. *함수* $\mathbf{g}$*와* $\mathbf{f}$*에 대하여,*

$$\mathbf{g}(1,-1,3)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

이며, $\mathbf{g}(1,-1,3)=(3,4,5)$*이라고 한다. 또한*

$$\mathbf{f}(3,4,5)=\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

이다. 이때, $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}$*의* $(1,-1,3)$*에서의 야코비 행렬식을 구하시오.*

$$(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})'(1,-1,3)=\mathbf{f}'(\mathbf{g}(1,-1,3))\cdot\mathbf{g}'(1,-1,3)=\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 26 & -10 & 28 \\ -1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

1-3(1). 14. $\mathbf{g}(1,2)=(3,5)$*이며*

$$\mathbf{g}'(1,2)=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

이다. 또한, 함수 $\mathbf{f}$*에 대하여* $\mathbf{f}$*의* $(3,5)$*에서의 야코비 행렬을 구해 야코비 행렬식을 확인해본 결과,* 2*였다.*

$$\mathbf{f}\circ\mathbf{g}$$

의 점 $(1,2)$*에서의 야코비 행렬식을 구하여라.*

$$(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})'(1,2)=\mathbf{f}'(3,5)\cdot\mathbf{g}'(1,2)$$

으로부터,

$$|(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})'(1,2)|=2\times(14-15)=-2$$

임을 알 수 있다.

1-3(1). 15. *선형사상* $\mathbf{f}$*에 대하여,*

$$\mathbf{f}'(9,1)=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

이며 함수 $\mathbf{g}(x,y)=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & x+2y \end{pmatrix}$ *이라고 한다. 점* $(1,1)$*에서의 합성함수* $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}$*의 야코비 행렬을 구하여라.*

$$(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})'(1,1)=\mathbf{f}'(\mathbf{g}(1,1))\cdot\mathbf{g}'(1,1)$$

이다. 그런데 $\mathbf{f}$는 선형사상이므로 모든 점에서 야코비 행렬이 동일하다. 즉

$$(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})'(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 2 & 31 \end{pmatrix}$$

1-3(1). 16. *$x = u^2 - v^2, y = 2uv$로 치환하였을 때,*

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

의 행렬식을 함수 $g(u,v)$라고 하자. $uv-$평면에서 $g(u,v) = 4$로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하여라.

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4u^2 + 4v^2$$

이다. 따라서 그 $4-$ 등위면은 $uv-$평면 위에서 반지름이 1인 원이다. 따라서 그 넓이는 π이다.

역함수 정리와 음함수 정리

1-3(1). 17. *사상 $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$이 역함수 $\mathbf{G}$를 가진다고 하자. 점 $(1,1)$에서 $\mathbf{F}$의 야코비 행렬이*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

이며 $\mathbf{F}(1,1) = (1,5)$라고 할 때,

$$\mathbf{G}'(1,5)$$

를 구하여라.

역함수 정리에 의하여

$$\mathbf{G}'(1,5) = (\mathbf{F}'(1,1))^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

이다.

1-3(1). 18. *사상 $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$이 역함수 $\mathbf{G}$를 가진다고 하자. 점 $(1,5)$에서 $\mathbf{F}$의 야코비 행렬이*

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 9 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

이며 $\mathbf{F}(1,5) = (5,5)$라고 할 때, $\mathbf{G}$의 $(5,5)$에서의 야코비 행렬식을 구하여라.

역함수 정리에 의해 구하는 값은 $(1,5)$에서 구한 $\mathbf{F}$의 야코비 행렬식의 역수이다.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 9 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 108 - 25 + 8 - 45 - 45 = 7$$

따라서, 정답은 $1/7$이다.

1-3(1). 19. *사상*

$$\mathbf{F}(x,y) = (x^3 + y^6, x^4 + y)$$

이 국소적으로 역함수를 가질 조건을 구하여라.

$\mathbf{F}$의 야코비 행렬식이 0이 아니면 역함수 정리에 의해 국소적으로 역함수가 존재한다.

$$\mathbf{F}'(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 6y^5 \\ 4x^3 & 1 \end{pmatrix}$$

이므로, 야코비 행렬식은 $3x^2 - 24x^3y^5$이다. 즉, 역함수를 가질 조건은

$$3x^2(1-8xy^5) \neq 0$$

인 것이다. 따라서 $x \neq 0$, $xy^5 \neq \frac{1}{8}$일 때이다.

1-3(1). 20. *함수 $f(x,y,z) = x^3 + 6x^2yz + 7yz + 6xz^2$의 0− 등위면에서, z를 x와 y의 함수의 그래프로 표현할 수 있을 조건을 구하여라.*

음함수 정리에 의하여, 그 조건은

$$\frac{\partial f}{\partial z}(P) \neq 0$$

인 것이다.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 6x^2y + 7y + 12xz$$

이므로, $6x^2y + 7y + 12xz \neq 0$이면 된다.

벡터장과 선적분

벡터장

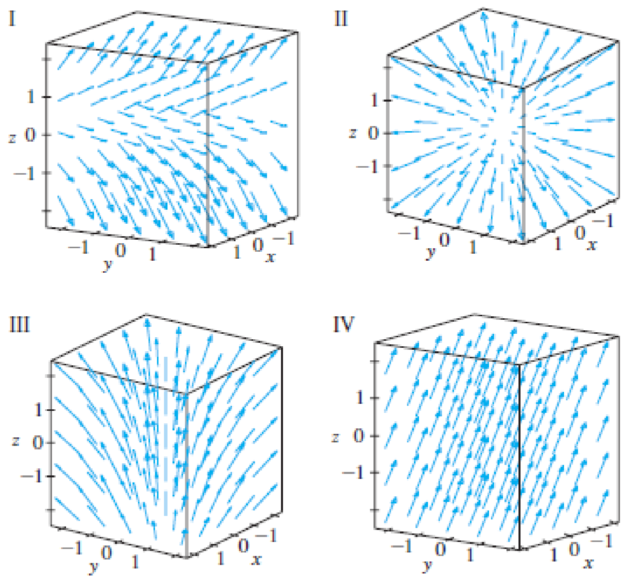
1-3(1). 21. *주어진 그림에는 네 개의 벡터장과 네 개의 그림이 주어져 있다. 각각을 연결하라.*

$\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$

$\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$

$\mathbf{F}(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$

$\mathbf{F}(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$



먼저, 첫 번째 벡터장은 상수 벡터장이다. 따라서 모든 벡터장의 방향과 크기가 같은 네 번째인 IV가 첫 번째 벡터장이다. 둘째 벡터장은 x, y 성분으로는 상수이지만 z 성분은 점의 z좌표에 의존한다. 즉 z에 따라

서만 그 모양이 달라져야 하므로, I임을 알 수 있다. 셋째 벡터장은 z성분은 일정하게 유지되기에, z 좌표와 벡터장의 크기와 방향이 무관해야 한다. 이를 따르는 것은 III이다. 마지막은 공간에서의 위치벡터장으로, 그 모양은 뻗어나가는 II다.

선적분

* Caution : 이 아래의 선적분 문제는 방향 언급이 없는 이상 t가 증가하는 방향을 따르는 것으로 한다.

1-3(1). 22. *$X(t) = (2t, t, 3t)$, $\quad 0 \le t \le 1$을 따라 $\mathbf{F}(x, y, z) = (x+1, y, z-1)$을 선적분한 값을 구하여라.*

$$\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (2t+1, t, 3t-1) \cdot (2, 1, 3) dt = \int_0^1 (14t-1) dt = 6$$

1-3(1). 23. *$X(t) = (\sin t, -\cos t)$, $\quad 0 \le t \le \pi/2$을 따라 $\mathbf{F}(x, y) = (2+y, x)$을 선적분한 값을 구하여라.*

$$\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{\pi/2} (2-\cos t, \sin t) \cdot (\cos t, \sin t) dt = \int_0^{\pi/2} 2\cos t - \cos^2 t + \sin^2 t dt = 2$$

1-3(1). 24. *$X(t) = (2t, t)$, $\quad 0 \le t \le 1$을 따라 $\mathbf{F}(x, y) = (x+1, y+2)$을 선적분한 값을 구하여라.*

$$\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (2t+1, t+2) \cdot (2, 1) dt = \int_0^1 (5t+4) dt = \frac{13}{2}$$

1-3(1). 25. *$X(t) = (t^2, t^3)$, $\quad -1 \le t \le 1$을 따라 $\mathbf{F}(x, y) = (y-x, x^4 y)$을 선적분한 값을 구하여라.*

$$\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{-1}^1 (t^3 - t^2, t^{11}) \cdot (2t, 3t^2) dt = \int_{-1}^1 (2t^4 - 3t^3 + 3t^{13}) dt = \frac{4}{5}$$

1-3(1). 26. *$X(t) = (3\cos t, 2\sin t, 5t)$, $\quad 0 \le t \le 2\pi$을 따라 $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, xy, xyz)$을 선적분한 값을 구하여라.*

$$\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (3\cos t, 6\cos t \sin t, 30t \cos t \sin t) \cdot (-3\sin t, 2\cos t, 5) dt = \int_0^{2\pi} (-9\cos t \sin t + 12\cos^2 t \sin t + 150t \cos t \sin t) dt$$

1-3(1). 27. *$X(t) = (2t, t^2+t, e^t)$, $\quad 0 \le t \le 1$을 따라 $\mathbf{F}(x, y, z) = (-3y, x+1, 3z^2)$을 선적분한 값을 구하여라.*

$$\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (-3(t^2+t), 2t+1, 3e^{2t}) \cdot (2, 2t+1, e^t) dt = \int_0^1 (-2t^2 - 2t + 1 + 3e^{3t}) dt = \frac{3e^3 - 5}{3}$$

1-3(1). 28. *$X(t) = (t, 3t^2, 2t^3)$, $\quad -1 \le t \le 1$을 따라 $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, -z)$을 선적분한 값을 구하여라.*

$$\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{-1}^1 (t, 3t^2, -2t^3) \cdot (1, 6t, 6t^2) dt = \int_{-1}^1 (t + 18t^3 - 12t^5) dt = 0$$

1-3(1). 29. *$X(t) = (\cos t, \sin t, \frac{1}{3}t)$, $\quad 0 \le t \le 4\pi$을 따라 $\mathbf{F}(x, y, z) = (3z, y^2, 6z)$을 선적분한 값을 구하여라.*

$$\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{4\pi} (t, \sin^2 t, 2t) \cdot (-\sin t, \cos t, 1/3) dt = \int_0^{4\pi} (-t\sin t + \sin^2 t \cos t + \frac{2}{3}t) dt = \frac{12\pi + 16\pi^2}{3}$$

1-3(1). 30. *$X(t) = (t, t^2, t^3)$, $\quad 0 \le t \le 1$을 따라 $\mathbf{F}(x,y,z) = (y\cos z, x\sin z, z\sin z^2)$을 선적분한 값을 구하여라.*

$$\int_X \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t^2\cos t^3, t\sin t^2, t^3\sin t^6)\cdot(1,2t,3t^2)dt = \int_0^1 (t^2\cos t^3 + 2t^2\sin t^3 + 3t^5\sin t^6)dt = \frac{7-7\cos 1+2\sin 1}{6}$$

1-3(1). 31. *$X(t) = (t, 3t^2, 5)$, $\quad 0 \le t \le 2$을 따라 $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x, 1, z-5)$을 선적분한 값을 구하여라.*

$$\int_X \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^2 (2t,1,0)\cdot(1,6t,0)dt = \int_0^2 (8t)dt = 16$$

1-3(1). 32. *$X(t) = (t, t^2)$, $\quad 0 \le t \le 1$을 따라 $\mathbf{F}(x,y) = (e^{-x^2}+y, e^{-y^2}+x)$을 선적분한 값을 A라 하고, $Y(t) = (1-2t, 4t^2-4t+1)$, $\quad 0 \le t \le 1/2$를 따라 $\mathbf{F}$를 선적분한 값을 B라고 하자. $(e^A - 3e^{-B})/(e^A + e^{-B})$를 구하여라.*

X는 Y의 역향 재매개화임을 두 곡선의 식이 $(0,0)$에서 $(1,1)$까지의 $y = x^2$그래프를 따름으로부터 확인해볼 수 있다. 따라서 $A = -B$이다.

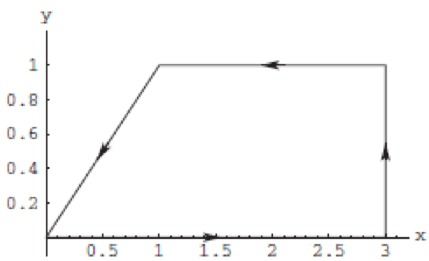
$$\frac{e^A - 3e^{-B}}{e^A + e^{-B}} = \frac{e^A - 3e^A}{e^A + e^A} = -1$$

임을 확인할 수 있다.

1-3(1). 33. *$X(t) = (t+1, -4t+1, 2t+1)$, $\quad 0 \le t \le 1$을 따라 $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2y, z, 2x-y)$을 선적분한 값을 구하여라.*

$$\int_X \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 ((t+1)^2(1-4t), 1+2t, 2(1+t)-(1-4t))\cdot(1,-4,2)dt = \int_0^1 (-4t^3-7t^2+2t-1)dt = -\frac{10}{3}$$

1-3(1). 34. *아래 그림의 경로를 따라 $\mathbf{F}(x,y) = (x^2y, -x-y)$라는 벡터장을 선적분한 값을 구하여라.*



조각적 연속이므로 원점으로부터 출발하여 경로를 꺾는 것을 기준으로 곡선을 C_1, C_2, C_3, C_4라고 하자. 전체 곡선을 X라고 하면,

$$\int_X \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} + \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} + \int_{C_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} + \int_{C_4} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

로 구하면 된다.

$$\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^3 (0,-t)\cdot(1,0)dt = 0$$

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (9t, -3-t) \cdot (0,1) dt = -\frac{7}{2}$$

$$\int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^2 ((3-t)^2, -4+t) \cdot (-1,0) dt = -\frac{26}{3}$$

$$\int_{C_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 ((1-t)^3, -2+2t) \cdot (-1,-1) dt = \frac{3}{4}$$

으로부터

$$\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{137}{12}$$

임을 알 수 있다.

1-3(1). 35. *함수 $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$의 9− 등위면 위에 있는 곡선 $X(t)$에 대하여, $0 \le t \le 1$에서*

$$\int_X X \cdot d\mathbf{s}$$

의 값을 구하여라.

$X(t) = (x(t), y(t), z(t))$라고 한다면 이 곡선은 f의 등위면 위에 있으므로, $x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = 9$를 항시 만족한다. 양변을 t로 미분하게 되면,

$$x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + z(t)z'(t) = 0$$

임을 알 수 있다.

$$\int_X X \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 X(t) \cdot X'(t) dt = 0$$

이 된다.

1-3(1). 36. *$X(t) = (t^3, -t^2, t), \quad 0 \le t \le 1$을 따라 $\mathbf{F}(x,y,z) = (\sin x, \cos y, xz)$을 선적분한 값을 구하여라.*

$$\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (\sin(t^3), \cos(-t^2), t^4) \cdot (3t^2, -2t, 1) dt = \int_0^1 3t^2 \sin t^3 - 2t\cos(-t^2) + t^4 dt = 6/5 - \cos 1 - \sin 1$$

1-3(1). 37. *$X(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \le t \le \pi/2$을 따라 $\mathbf{F}(x,y) = (x^2, -xy)$을 선적분한 값을 구하여라.*

$$\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t, -\cos t \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{\pi/2} (-2\cos^2 t \sin t) dt = -\frac{2}{3}$$

1-3(1). 38. *$X(t) = (t, t^2, t^3), \quad 0 \le t \le 2$을 따라 $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy, yz, zx)$을 선적분한 값을 구하여라.*

$$\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t^3, t^5, t^4) \cdot (1, 2t, 3t^2) dt = \int_0^1 (t^3 + 5t^6) dt = \frac{27}{28}$$

1-3(1). 39. *$X(t)$가 $(0,0)$으로부터 $(2,1)$으로 직선을 따라 가다 해당 점에서 꺾어 다시 직선으로 $(3,0)$으로 가는 곡선이라고 할 때, $\mathbf{F}(x,y) = (x+2y, x^2)$을 선적분한 값을 구하여라.*

$$\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^2 2x + \frac{1}{2}x^2 dx + \int_2^3 (6 - x - x^2) dx = \frac{5}{2}$$

1-3(1). 40. *$X(t)$가 $x = y^3$을 따라 $(-1,-1)$에서 $(1,1)$으로 이동하는 곡선일 때, $\mathbf{F}(x,y) = (e^x, 0)$을 X를 따라 선적분한 값을 구하여라.*

$$\int_X \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{-1}^{1} 3y^2 e^{y^3}\, dy = e - \frac{1}{e}$$

1-3(1). 41. *$X(t) = (t, t^2, t^3), \quad 0 \le t \le 1$을 따라 $\mathbf{F}(x,y,z) = (0, xye^{yz}, 0)$을 선적분한 값을 구하여라.*

$$\int_X \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{0}^{1} 2t^4 e^{t^5}\, dt = \frac{2}{5}(e-1)$$

1-3(1). 42. *$X(t)$가 $(1,0,0)$에서 $(4,1,2)$까지의 선분일 때, 이를 따라 $\mathbf{F}(x,y,z) = (z^2, x^2, y^2)$을 선적분한 값을 구하여라.*

곡선은 $X(t) = (1+3t, t, 2t)$로 $0 \le t \le 1$에서 매개화될 수 있다. 따라서

$$\int_X \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{0}^{1} 23t^2 + 6t + 1dt = \frac{35}{3}$$

1-3(1). 43. *$X(t)$와 $Y(t)$는 모두 시작점이 $(0,0,0)$이고 종점이 $(1,1,1)$인 곡선이다. 이때 $X(t) = (2t, 4t^2, t^3 + \frac{7}{8}t)$이며 $Y(t) = (t-1, t^2-2t+1, \frac{2t^3-6t^2+13t-9}{16})$이라고 한다. 함수 $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy, yz, zx)$에 대하여, $\mathbf{F}$를 X를 따라 선적분한 값을 A, Y를 따라 선적분한 값을 B라고 부르자. $A - B + 2$ 보다 절댓값이 작은 정수의 개수를 구하여라.*

X와 Y는 같은 곡선의 매개화를 다르게 한 것인데, 시점과 종점의 관계로부터 둘은 동향재매개화임을 알 수 있다. 따라서 $A = B$이고, $A - B + 2$는 2이다. 이보다 절댓값이 적은 정수의 개수는 3개이다.

1-3(1). 44. *$X(t) = (t^3, t^2), \quad 0 \le t \le 1$을 따라 $\mathbf{F}(x,y) = (xy^2, -x^2)$을 선적분한 값을 구하여라.*

$$\int_X \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{0}^{1} (t^7, -t^6)\cdot(3t^2, 2t)dt = \int_{0}^{1} 3t^9 - 2t^7 dt = \frac{1}{20}$$

1-3(1). 45. *$X(t) = (t^2, t^3, -2t), \quad 0 \le t \le 2$을 따라 $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y^2, xz, y+z)$을 선적분한 값을 구하여라.*

$$\int_X \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{0}^{2} (t^2+t^6, -2t^3, t^3-2t)\cdot(2t, 3t^2, -2)dt = \int_{0}^{2} 2t^7 - 6t^5 + 4tdt = 8$$

1-3(1). 46. *$X(t)$가 $y = 1 + x^2$이라는 포물선을 따라 $(-1,2)$로부터 $(1,2)$까지 움직일 때, $\mathbf{F}(x,y) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$을 선적분한 값을 구하여라.*

$$\int_X \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{-1}^{1} (\frac{t}{\sqrt{t^2+(1+t^2)^2}}, \frac{1+t^2}{\sqrt{t^2+(1+t^2)^2}})\cdot(1, 2t)dt = \int_{-1}^{1} \frac{t(3+2t^2)}{\sqrt{t^4+3t^2+1}}dt = 0$$

1-3(1). 47. *$X(t) = (t^2, t^3), \quad 0 \le t \le 1$을 따라 $\mathbf{F}(x,y) = (e^{x-1}, xy)$을 선적분한 값을 구하여라.*

$$\int_X \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{0}^{1} (e^{t^2-1}, t^5)\cdot(2t, 3t^2)dt = \int_{0}^{1} 2te^{t^2-1} + 3t^7 dt = \frac{11}{8} - \frac{1}{e}$$

1-3(1). 48. *$X(t) = (t^3, t^2), \quad 0 \le t \le 1$을 따라 $\mathbf{F}(x,y) = (xy^2, -x^2)$을 선적분한 값을 구하여라.*

$$\int_X \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{0}^{1} (t^7, -t^6)\cdot(3t^2, 2t)dt = \int_{0}^{1} 3t^9 - 2t^7 dt = \frac{1}{20}$$

1-3(1). 49. $X(t) = (2t, 3t, -t^2), \quad -1 \le t \le 1$*을 따라* $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, -z, y)$*을 선적분한 값을 구하여라.*

$$\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{-1}^{1} (2t, t^2, 3t) \cdot (2, 3, -2t) dt = \int_{-1}^{1} 4t - 3t^2 dt = -2$$

1-3(1). 50. *힘의 벡터장* $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - y^2, y - z^2, z - x^2)$*이 작용하는 평면 안에서 입자가* $(0, 0, 1)$*부터* $(2, 1, 0)$*까지 직선으로 이동하면서 입자에게 가해진 일의 양을 구하여라.*

곡선을 매개화하면 $(2t, t, 1 - t)$이며, t는 $0 \le t \le 1$을 만족시킨다. 따라서

$$W = \int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (2t - t^2, t - (1 - t)^2, 1 - t - (2t)^2) \cdot (2, 1, -1) dt = \int_0^1 t^2 + 8t - 2dt = \frac{7}{3}$$