중간문풀-1. 1. *좌표평면에서 정의된 함수*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y}, & y\neq x^2\\ 0, & y=-x^2\end{cases}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) 원점에서 함수 f의 모든 방향미분계수가 존재함을 보이시오.

(b) 원점에서 함수 f의 미분가능성을 조사하시오.

(a) $\mathbf{v}=(a,b)$라고 하자. 첫째로 $b\neq 0$인 경우에는,

$$D_{\mathbf{v}}f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{ab}{ta^2+b}=a$$

이며 $b=0$인 경우에는

$$D_{\mathbf{v}}f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(ta,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0}{ta^2}=0$$

이다. 따라서 모드 방향에 대해 방향미분계수가 존재함을 확인할 수 있다.

(b) 만약 f가 원점에서 미분가능하다면 $\text{grad}f(0,0)\cdot\mathbf{v}=D_{\mathbf{v}}f(0,0)$ 을 만족해야 한다. 그런데 (a)로부터 확인할 수 있는 것이, $\text{grad}f(0,0)=\mathbf{0}$이라는 것이다. 따라서 모든 방향의 방향미분계수가 0이 되어야 한다. 그러나 (a)에서 볼 수 있듯이 $ab\neq 0$일 때는 그 방향미분계수가 $a\neq 0$이기에 모순이다. 따라서 f는 원점에서 미분불가능하다.

중간문풀-1. 2. *좌표평면의 표준 직교좌표계 (x,y)와 극좌표계 (r,θ)에 대하여 $\dfrac{\partial\theta}{\partial x}$을 r와 θ로 표현하여라.*

i) $x\neq 0$일 때, $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$이므로 양변을 x로 편미분하면

$$\sec^2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}=-\frac{r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta}$$

이다. 따라서 $\frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{\sin\theta}{r}$이다.

ii) $y\neq 0$일 때, $\cot\theta=\dfrac{x}{y}$로 주어진다. 따라서 양변을 x로 편미분하면

$$-\csc^2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{1}{y}=\frac{1}{r\sin\theta}$$

이므로 정리하면 $\frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{\sin\theta}{r}$이다.

종합하면 $\dfrac{\partial\theta}{\partial x}=-\dfrac{\sin\theta}{r}$이 성립한다.

중간문풀-1. 3. *함수 $f(x,y)=e^{x\cos y}$와 점 $P(1,0)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.*

(a) 벡터 $\mathbf{v}=(a,b)$에 대하여 $D^2_{\mathbf{v}}f(P)$를 구하고, 점 P에서 $\mathbf{v}$ 방향으로 함수 f가 아래로 볼록인 (a,b)의 영역을 그리시오.

(b) 점 P에서 함수 f의 2차 근사다항식을 구하시오.

(a)

$$D^2_{\mathbf{v}}f(P)=a^2D_1^2f(P)+2abD_1D_2f(P)+b^2D_2^2f(P)$$

로 주어졌음을 확인하였기에, 이계미분계수들을 먼저 구해주어야 한다.

$$D_1f(x,y)=e^{x\cos y}\cos y$$

$$D_2f(x,y)=-x\sin ye^{x\cos y}$$

$$D_1^2 f(x,y) = \cos^2 y e^{x\cos y}$$
$$D_1D_2 f(x,y) = -(\sin y + x\sin y\cos y)e^{x\cos y}$$
$$D_2^2 f(x,y) = (x^2\sin^2 y - x\cos y)e^{x\cos y}$$

이므로 점 P에서

$$D_{\mathbf{v}}^2 f(P) = a^2 D_1^2 f(1,0) + 2abD_1D_2 f(1,0) + b^2 D_2^2 f(1,0) = e(a^2-b^2)$$

임을 알 수 있다. 점 P에서 $\mathbf{v}$ 방향으로 함수 f가 아래로 볼록인 영역은 이것이 양인 영역이므로, $|a| > |b|$이다. 그림은 생략한다.

추가적으로, 경계에서 볼록인지를 확인하여 보자. 어떤 점에서 볼록이라는 것은 그 근방에서 함수가 볼록함수라는 것이라 생각할 수 있다. 즉, 만약 함수의 이계도함수가 존재한다면 그 점의 근방에서 이계도함수는 음이 아니어야 한다. 그런데 경계에서는 해당 점에서 이계도함수가 0이므로, 해당 점이 극소점이 됨을 확인할 수 있다. 따라서 임계점 정리에 의해 삼계미분계수는 0이어야 한다. 만약 점 $(1,0)$에서 $(1,1)$ 방향이나 $(-1,-1)$ 방향으로 이동하는 경우 함숫값이 어떻게 변하는지 보자. 두 경우는 각각 충분히 작은 실수 t에 대하여 $(t+1,t)$과 $(t+1,-t)$로 매개화될 수 있으며, f에 대입하면 t에 대한 함수 $e^{(1+t)\cos t}$를 따름을 알 수 있다. 즉 이 함수가 $t=0$에서 볼록인지 여부를 관찰하면 된다. 삼계도함수를 구하면 그 값이 $-5e/6$으로, 0이 아니다. 따라서 해당 점에서는 볼록이 아니고 경계인 $|a|=|b|$는 원하는 영역에 포함되지 않는다.

(b) 점 P에서의 일계편미분계수와 이계편미분계수를 모두 구해주면 된다. 그러면 $f(1,0)=e$, $D_1 f(1,0) = e$, $D_2 f(1,0) = 0$이며 이계편미분계수에 대해서는 이미 앞에서 그 값을 구하였었다. 따라서 해당 점에서 f의 2차 근사다항식을 구하면

$$T_2 f(x,y) = e + e(x-1) + \frac{1}{2}e(x-1)^2 - \frac{1}{2}ey^2$$

이다.

중간문풀-1. 4. *좌표평면에서 정의된 함수*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y\sqrt{x^2+y^2}}{x^6+y^2}, (x,y)\neq(0,0) \\ 0, (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) 함수 f가 원점에서 연속인지 판정하시오.

(b) $D_1 f(0,0)$와 $D_2 f(0,0)$을 구하시오.

(c) 함수 f가 원점에서 미분가능한지 판정하시오.

(a) $f(x,y)$에서 x와 y가 0에 가까울 때 그 값이 어디로 다가가는지 확인하여 보자.

$$\begin{aligned} 0 &\le |f(x,y)| \\ &= \left|\frac{x^3 y\sqrt{x^2+y^2}}{x^6+y^2}\right| \\ &\le \left|\frac{(x^6+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{2(x^6+y^2)}\right| \quad \text{(산술평균과 기하평균의 관계)} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} \end{aligned}$$

이며 $|f(x,y)|$를 감싸고 있는 두 함수가 모두 $(x,y) \to (0,0)$임에 따라 0으로 가기에,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

임을 감안하면 주어진 함수는 원점에서 연속이다.

(b)

$$D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$$

$$D_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$$

(c) 함수 f의 원점에서의 기울기 벡터는

$$\mathrm{grad} f(0,0) = (D_1 f(0,0), D_2 f(0,0)) = \mathbf{0}$$

이다. 따라서 f가 미분가능하려면

$$\lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{0}+\mathbf{v}) - f(\mathbf{0}) - \mathrm{grad} f(0,0)\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{v})}{|\mathbf{v}|} = \lim_{(a,b)\to(0,0)} \frac{a^3 b}{a^6 + b^2}$$

가 0이어야 한다. 그런데, $b = a^3$을 따를 경우

$$\lim_{a\to 0} \frac{a^3\cdot a^3}{a^6 + (a^3)^2} = \frac{1}{2}$$

이므로, 원하는 극한값은 절대 0이 될 수 없다. 따라서, 원점에서 미분 불가능하다.

중간문풀-1. 5. *3차원 공간의 점 $(0,0,3)$에서 $\mathbf{v} = (1,2,-6)$ 방향으로 발사된 빛이 곡면 $z = x^2 - y^2$에 접함을 보이시오.*

직선의 방정식은 $X(t) = (0,0,3) + t(1,2,-6) = (t, 2t, -6t+3) \quad (t \in \mathbb{R})$로 표현이 가능하다. 곡면과의 교점을 찾아보면 $-6t + 3 = t^2 - 4t^2$이므로 $3(t-1)^2 = 0$이기에 $t = 1$일 때 점 $(1,2,-3)$이 그 교점 P임을 확인할 수 있다. 곡면을 등위면으로 보면 $F(x,y,z) = x^2 - y^2 - z = 0$이기에 점 P에서의 기울기벡터는 그 접평면에 수직한 법선 벡터이다. $\mathrm{grad}F(x,y,z) = (2x, -2y, -1)$이므로 $\mathrm{grad}F(1,2,-3) = (2,-4,-1)$이다. 그런데

$$\mathbf{v}\cdot \mathrm{grad}F(1,2,-3) = (1,2,-6)\cdot(2,-4,1) = 0$$

이므로 두 벡터는 서로 수직한다. 따라서 직선은 접점에서의 접평면에 포함되기에, 직선이 곡면에 접함을 확인할 수 있다.

중간문풀-1. 6. *$z = f(x,y)$가 방정식*

$$2x + y + z + \frac{e^{2z}}{2} = \frac{1}{2}$$

의 해가 된다고 할 때, 원점에서 $f(x,y)$의 이차 근사다항식을 구하시오.

원점에서 $f(x,y)$의 이차 근사다항식을 구하기 위해서는 결국엔 $f(0,0), D_1f(0,0), D_2f(0,0), D_1^2 f(0,0)$, $D_1D_2f(0,0), D_2D_1f(0,0), D_2^2f(0,0)$의 값을 구해주어야 한다.

먼저 $x = y = 0$일 때 $z + \frac{e^{2z}}{2} = \frac{1}{2}$이므로 $z = 0$이다. 이때, $z + \frac{e^{2z}}{2}$는 z에 대한 순증가함수이므로 근은 유일하다. 따라서 $f(0,0) = 0$으로 정해진다.

주어진 식의 양변을 x로 편미분할 경우

$$2 + \frac{\partial z}{\partial x} + e^{2z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

이므로 양변을 정리해주면

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2}{1+e^{2z}}$$

이다. 따라서

$$D_1 f(0,0) = -\frac{2}{1+e^0} = -1$$

이다.

이 식을 x로 한 번 더 편미분할 경우

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2e^{2z}(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + e^{2z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

이다. 따라서

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2e^{2z}}{1+e^{2z}}(\frac{\partial z}{\partial x})^2$$

이다. 따라서

$$D_1^2 f(0,0) = -1$$

이 식을 y로 편미분할 경우에는

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + 2e^{2z}(\frac{\partial z}{\partial x})(\frac{\partial z}{\partial y}) + e^{2z}\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0$$

이기에

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{2e^{2z}}{1+e^{2z}}(\frac{\partial z}{\partial x})(\frac{\partial z}{\partial y})$$

이다.

원래 식을 y로 편미분하면

$$1 + \frac{\partial z}{\partial y} + e^{2z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

이므로

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{1+e^{2z}}$$

으로부터

$$D_2 f(0,0) = -\frac{1}{1+e^{2z}} = -\frac{1}{2}$$

임을 확인 가능하다. 따라서 위의 식에 대입하면

$$D_2 D_1 f(0,0) = -\frac{1}{2}$$

임도 확인할 수 있다.

또한 위의 식을 x로 편미분하면

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2e^{2z}(\frac{\partial z}{\partial x})(\frac{\partial z}{\partial y}) + e^{2z}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

이고

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2e^{2z}}{1+e^{2z}}(\frac{\partial z}{\partial x})(\frac{\partial z}{\partial y})$$

이기에 $D_1 D_2 f(0,0) = -\frac{1}{2}$이다.

위의 식을 y로 편미분한 경우에는

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2e^{2z}(\frac{\partial z}{\partial y})^2 + e^{2z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

이기에 이를 정리하면

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2e^{2z}}{1+e^{2z}}(\frac{\partial z}{\partial y})^2$$

이므로 $D_2^2 f(0,0) = -\frac{1}{4}$이다. 따라서, 원점에서의 2차 근사다항식은

$$T_2 f(x,y) = -x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{8}y^2$$

이다.

중간문풀-1. 7. *$n-$공간에서 정의된 2021급 함수 f가 임의의 점 P에 대하여 $f(-P) = -f(P)$를 만족한다고 한다. $D_X^{2020} f(O)$를 구하여라.*

정리 1. 일급함수 g가 임의의 $P \in \mathbb{R}^n$에 대해 $g(-P) = -g(P)$를 만족한다면, 임의의 $P \in \mathbf{R}^n$에 대해 $D_X g(-P) = D_X g(P)$이다.

증명하여 보자.

$$\begin{aligned} D_X g(-P) &= \lim_{t\to 0} \frac{g(-P+tX) - g(-P)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{g(P-tX) - g(P)}{-t} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{g(P+sX) - g(P)}{s} = D_X g(P) \end{aligned}$$

정리 2. 일급함수 h가 임의의 $P \in \mathbb{R}^n$에 대해 $h(-P) = h(P)$를 만족한다면, 임의의 $P \in \mathbb{R}^n$에 대해 $D_X h(-P) = -D_X h(P)$이다.

증명하여 보자.

$$\begin{aligned} D_X h(-P) &= \lim_{t\to 0} \frac{h(-P+tX) - h(-P)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{h(P-tX) - h(P)}{t} \\ &= -\lim_{s\to 0} \frac{h(P+sX) - h(P)}{s} = -D_X h(P) \end{aligned}$$

문제에서 주어진 함수 f에 대하여 $f(-P) = -f(P)$이므로, 정리 1에 의하여

$$D_X f(-P) = D_X f(P)$$

가 모든 P에 대해 성립한다. 그런데 이를 또다시 정해진 벡터 X에 대한 함수로 보게 된다면, 정리 2를 적용할 수 있기에

$$D_X^2 f(-P) = -D_X^2 f(-P)$$

이다. 다시 $D_X^2 f$를 하나의 함수로 보게 된다면 정리 1을 적용할 수 있다. 이를 2021급 함수 f에 대해 반복적으로 적용하게 된다면

$$D_X^{2020} f(-P) = -D_X^{2020} f(P)$$

임을 확인할 수 있다. 그러면 $P = O$을 대입하게 된다면,

$$D_X^{2020} f(O) = -D_X^{2020} f(O)$$

임을 확인할 수 있다. 따라서

$$D_X^{2020} f(O) = 0$$

이다.