문제 2. 1. *급수*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{3^{\log n} - 2^{\log n}}$$

이 수렴하는 x의 범위를 구하시오.

$$a_n = \frac{1}{3^{\log n - 2^{\log n}}}$$

이라 하자. 그러면 $a_n \geq 0$이며,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{\log n} - 2^{\log n}}{3^{\log(n+1)} - 2^{\log(n+1)}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{\log n}}{3^{\log(1+\frac{1}{n})} - \left(\frac{2}{3}\right)^{\log n} \cdot 2^{\log(1+\frac{1}{n})}} \end{aligned}$$

이고

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{\log n} = 0$$

이므로,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$$

이고 $\sum a_n x^n$의 수렴반경은 1이다.

만약 $x = 1$이라면 충분히 큰 n에 대하여

$$3^{\log n} - 2^{\log n} = n^{\log 3} - n^{\log 2} > \frac{1}{2} n^{\log 3}$$

이고,

$$\sum \frac{2}{n^{\log 3}} = 2\zeta(\log 3) < \infty$$

이다. 따라서 비교판정법에 의하여,

$$\frac{1}{3^{\log n} - 2^{\log n}} < \frac{2}{n^{\log 3}}$$

으로부터

$$\sum \frac{1}{3^{\log n} - 2^{\log n}}$$

은 수렴한다.

만약 $x = -1$일 경우, 이 급수는 절대수렴함이 $x = 1$의 경우로부터 알려져 있으므로 수렴한다. 따라서, 원하는 범위는 $-1 \leq x \leq 1$이다.

문제 2. 2. *거듭제곱급수로 주어진 함수*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} x^n \quad (0 \leq x < 1)$$

에 대하여, 다음 물음에 답하시오.

1) $0 < x < 1$이면 $\frac{1}{2} < f'(x) < 1$임을 보이시오.

2) 급수 $\sum f(\sin \frac{1}{n})$은 발산함을 보이시오.

(1) 주어진 급수는 $x < 1$일 때 절대수렴함이 명확하므로, 거듭제곱급수 기본정리에 의하여

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{n-1} \quad (0 < x < 1)$$

이 성립한다. 고정된 x에 대하여 $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{n-1}$이라 하면, (a_n)은 교대급수이며, $|a_n| \geq |a_{n+1}$이 성립한다. 따라서 부분합수열 s_n에 대하여, $a_1 = 1$이 양수이므로 s_{2n-1}은 감소수열이며, s_{2n}은 증가수열이다. 그러므로 $a_1 = 1$과 $a_2 = -\frac{x}{2}$에 대하여

$$1 - \frac{x}{2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{n-1} = f'(x) < 1$$

이 성립하게 된다. 이때 $0 < x < 1$이므로,

$$\frac{1}{2} < 1 - \frac{x}{2} < f'(x) < 1$$

이 성립한다.

(2) 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(\sin\frac{1}{n}) - f(0)}{\sin\frac{1}{n}} = f'(c_n)$$

인 $c_n \in (0, \sin\frac{1}{n})$이 존재하므로, 모든 자연수 n에 대하여

$$f(\sin\frac{1}{n}) = f'(c_n)\sin\frac{1}{n} > \frac{1}{2}\sin\frac{1}{n} > \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n} > 0$$

이 성립하며,

$$\sum \frac{1}{\pi n}$$

이 조화급수로 발산하기에 비교판정법에 의하여

$$\sum f(\sin\frac{1}{n})$$

도 발산한다.

문제 2. 3. $\frac{1}{x^2}$*의 거듭제곱급수전개를 이용하여 다음 급수의 합을 구하시오.*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \left(\frac{1}{3^k}\right)$$

$|x| < 1$에서

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

이므로, 거듭제곱급수 기본정리에 의하여

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

이다. 따라서

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \frac{1}{3^k} = \sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

이다.

문제 2. 4. *다음 거듭제곱급수가 수렴하는* x*의 범위를 구하시오.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\sin\frac{1}{n^2}\right) x^n$$

$$a_n = \sin\sin\frac{1}{n^2} \geq 0$$

이라 두면,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\sin\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\sin\sin\dfrac{1}{n^2}} = 1$$

이다. 그러면 수렴반경은 $R = 1/1 = 1$이다.

$x = 1$일 경우에는 $y \geq 0$일 경우 $0 \leq \sin y \leq y$이므로

$$0 \leq \sin\sin\frac{1}{n^2} \leq \sin\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

이며, $\sum\frac{1}{n^2}$은 수렴하므로, 비교판정법에 의하여 $\sin\sin\frac{1}{n^2}$도 수렴한다. $x = -1$일 경우, 급수는 절대수렴함을 알 수 있으므로 수렴한다. 따라서, 주어진 급수는 $-1 \leq x \leq 1$에서 수렴한다.

문제 2. 5. *다음 거듭제곱급수가 수렴하는 x의 범위를 구하시오.*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(\log n)^{10}}$$

$a_n = \dfrac{1}{(\log n)^{10}} \geq 0$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log n}{\log(n+1)}\right)^{10} = 1$$

이므로, 수렴반경은 $r = 1$이다. $x = 1$이라면, 충분히 큰 n에 대하여 $(\log n)^{10} < n$이므로,

$$\frac{1}{(\log n)^{10}} > \frac{1}{n}$$

이고, $\sum\frac{1}{n}$이 발산하므로 비교판정법에 의해 $\sum\frac{1}{(\log n)^{10}}$이 발산한다.

$x = -1$일 경우에는 $\sum\frac{(-1)^n}{(\log n)^{10}}$의 수렴 여부를 보아야 한다. 그러면 이 급수는 교대급수이며,

$$\frac{1}{(\log n)^{10}} > \frac{1}{(\log(n+1))^{10}}$$

이고,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\log n)^{10}} = 0$$

이므로 교대급수 판정법에 의해 급수는 수렴한다. 따라서 주어진 급수는 $-1 \leq x < 1$에서 수렴한다.

문제 2. 6. *다음 급수의 합을 구하시오.*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

이다. 먼저, 앞의 항은 등비급수의 합 공식에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} = 3$$

이고, 뒤의 항은

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

로부터

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\log(1-x)$$

가 되므로,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n = \log 4$$

이다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 3 + \log 4$$

문제 2. 7. *다음 급수의 합을 구하여라.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2^n}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n}\right)$$

이다. 이때

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

이므로 $x = \frac{1}{2}$를 대입하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2^n} = \sqrt{e} - 1$$

가 성립한다. 또한,

$$\frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$

이므로 $x = \frac{1}{2}$를 대입하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n} = 2(\sqrt{e} - 1) - 1 = 2\sqrt{e} - 3$$

이다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!2^n} = \sqrt{e} - 1 - (2\sqrt{e} - 3) = 2 - \sqrt{e}$$

이다.

문제 2. 8. *수열* (a_n)*이*

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} (n \geq 1)$$

을 만족하고, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *이 존재한다고 한다.*

(1) 거듭제곱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *의 수렴반경을 구하시오.*

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_n}{3^n}$ *의 값을 구하시오.*

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$라고 하면,

$$\begin{aligned}\alpha &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right) \\ &= 2 + \frac{1}{\alpha}\end{aligned}$$

이다. 이때 $a_0, a_1 > 0$이므로 모든 n에 대해 $a_n > 0$이고, $\alpha > 0$이어야 함을 알 수 있다. 그러므로 방정식을 풀면 $\alpha = 1 + \sqrt{2}$이며, 수렴반경은

$$r = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$

이다.

(2) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$이라고 하면, $|x| < \sqrt{2} - 1$에서

$$(1 - 2x - x^2) f(x) = a_0 + (a_1 - 2a_0)x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n - 2a_{n-1} - a_{n-2}) x^n = 1$$

이 성립하고,

$$f(x) = \frac{1}{1 - 2x - x^2}$$

이다. 이때,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{na_n}{3^n} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{na_n}{3^{n-1}} = \frac{1}{3} f'\left(\frac{1}{3}\right) = 18$$

임을 계산으로 알아낼 수 있다.

문제 2. 9. *다음 급수가 수렴함을 보이고, 급수의 합을 구하시오.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{1}{3^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \quad (|x| < 1)$$

이므로 양변을 적분하여

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \log(1+x)$$

이다. 따라서 $x = \frac{1}{3}$을 대입하면,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{1}{3^n} = \log \frac{4}{3}$$

이다.

문제 2. 10. *다음 급수가 수렴함을 보이고, 급수의 합을 구하시오.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

이므로 양변을 두 번 미분하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

을 얻는다. 따라서,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = x^2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} + x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2}$$

이고, $x = \frac{1}{2}$을 대입하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6$$

이다.

문제 2. 11. *다음 급수가 수렴함을 보이고, 급수의 합을 구시오.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

이므로 양변을 두 번 적분하여

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} x^{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n = (1-x)\log(1-x) + x$$

를 얻는다. 그러면 $x = \frac{1}{2}$를 대입하고, 양변에 2를 곱하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n} = 1 - \log 2$$

를 얻는다.

문제 2. 12. $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$*일 때, 거듭제곱급수* $\sum_{n=1}^{\infty} h_n x^n$*에 대하여,*

1) $\sum_{n=1}^{\infty} h_n x^n$*의 수렴범위가* $-1 < x < 1$*임을 보이시오.*

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{h^n}{2^n}$*의 값을 구하시오.*

1) $\lim_{n\to\infty} h_n = \infty$임을 알고 있다. 그러면

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{h_{n+1}}{h_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| 1 + \frac{1}{(n+1)h_n} \right| = 1$$

이므로, 수렴반경은 1이다. 이때 $x = \pm 1$이라면 $\lim_{n\to h_n} = \infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty} x^n h_n \neq 0$$

이고, 일반항판정법에 의해 발산한다. 따라서 수렴 범위는 $-1 < x < 1$이다.

2) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n x^n$이라고 하자. 그러면

$$f(x) - xf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} + x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$$

이므로,

$$f(x) = \frac{-\log(1-x)}{1-x}$$

이다. 이때 $x = \frac{1}{2}$를 대입하면,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{2^n} = f(\frac{1}{2}) = \log 4$$

가 됨을 확인할 수 있다.

문제 2. 13. *급수*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}$$

의 합을 구하시오.

주어진 식을 얻기 위해 $\sin x$의 급수

$$\sin x = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

을 이용하려 한다. 위 급수의 수렴반경은 $(-\infty, \infty)$이므로 거듭제곱급수의 기본정리에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = -x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} \right)' = -x^2 \left(\frac{\sin x}{x} \right)' = \sin x - x \cos x$$

이다. 따라서 $x = \frac{\pi}{4}$를 대입하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}\pi}{8}$$

을 얻는다.

문제 2. 14. *다음 거듭제곱급수 수렴하는 실수 x의 범위를 구하여라.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\tan \frac{1}{n} \right) x^n$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\tan \frac{1}{n+1}}{\tan \frac{1}{n}} \right) = 1$$

이므로, 수렴반경은 1이다. $x = 1$일 때는 $\tan \frac{1}{n} > \frac{1}{n}$이므로, $\sum \frac{1}{n}$이 발산함에 따라 비교판정법에 의하여 $\sum \tan \frac{1}{n}$도 발산한다.

한편, $x = -1$일 때는 일반항

$$(-1)^n \tan \frac{1}{n}$$

을 살펴 보면 이 급수는 교대급수이며, $\tan x$는 $0 < x < 1$에서 증가함수이므로

$$\tan \frac{1}{n} > \tan \frac{1}{n+1}$$

이고,

$$\lim_{n\to\infty} \tan \frac{1}{n} = \tan 0 = 0$$

이다. 따라서 교대급수정리에 의하여 급수

$$[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\tan \frac{1}{n}\right)$$

은 수렴한다. 따라서 급수가 수렴하는 범위는 $-1 \le x < 1$이다.

문제 2. 15. *다음 거듭제곱급수가 수렴하는 실수 x의 범위를 구하여라.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n}\right) x^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\log(1+\frac{1}{n+1})}{\log(1+\frac{1}{n})} \right| = 1$$

이므로, 수렴반경은 1이다. $x = 1$일 때에는, 급수 $\sum(-1)^n \log(1+\frac{1}{n})$은 교대급수이며, log는 증가함수이기에

$$\log(1+\frac{1}{n}) > \log(1+\frac{1}{n+1})$$

이고,

$$\lim_{n\to\infty} \log(1+\frac{1}{n}) = 0$$

이므로 교대급수정리에 의하여 수렴한다. 반면 $x = -1$일 경우에는, 급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

를 보아야 하는데,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1$$

이므로, n이 충분히 크면

$$\log(1+\frac{1}{n}) > \frac{1}{2n} > 0$$

인데 $\sum \frac{1}{2n}$은 조화급수이므로 발산한다. 따라서 비교판정법에 의하여, 주어진 급수도 발산한다. 따라서 수렴하는 범위는 $-1 < x \le 1$이다.

문제 2. 16. *다음 급수의 합을 구하시오.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)n!}$$

$$xe^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$$

이 성립하므로 양변을 적분하면

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)n!} = \int_0^x te^t dt = (x-1)e^x + 1$$

이다. $x = 3$을 대입한다면

$$2e^3 + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{(n+2)n!}$$

이고,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)n!} = \frac{2e^3+1}{9}$$

이다.

문제 2. 17. *다음 급수의 수렴 여부를 판단하시오.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{2n} - \arcsin \frac{1}{2n+1} \right)$$

함수 $\arcsin x$가 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$에서 증가함수이므로

$$0 < \arcsin \frac{1}{2n} - \arcsin \frac{1}{2n+1} \;\leq \arcsin \frac{1}{2n} - \arcsin \frac{1}{2n+2}$$

이다. 그런데

$$\lim_{n\to\infty} \arcsin \frac{1}{2n+2} = 0$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{2n} - \arcsin \frac{1}{2n+2} \right) = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

으로 수렴한다. 따라서 원래 급수도 비교판정법에 의해 수렴한다.

문제 2. 18. *수열 (a_n)의 부분합 수열 $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$에 대하여, 부분합의 거듭제곱급수*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

이 양의 수렴반경 r을 가진다고 하자. 이때, 임의의 $|x| < r$에 대하여 거듭제곱급수

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

이 수렴하고, $f(x) = (1-x)F(x)$임을 보이시오.

$F(x)$가 $|x| < r$에서 수렴하므로 $xF(x)$도 $|x| < r$에서 수렴한다. 그러면

$$\begin{aligned} F(x) - xF(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^{n+1} \\ &= s_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (s_n - s_{n-1}) x^n \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x) \end{aligned}$$

이므로, $f(x) = (1-x)F(x)$이며

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

도 $|x| < r$에서 수렴한다.

문제 2. 19. *다음 급수의 합을 구하시오.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{(n+2)!}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

이며, 거듭제곱급수 기본정리에 의하여

$$xe^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$$

로부터 양변을 적분하면

$$(x-1)e^x + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^{n+2}}{(n+2)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^{n+2}}{(n+2)!} + (e^x - 1 - x)$$

이다. 따라서 정리하면,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n+2}}{(n+2)!} = (x-2)e^x + x + 2$$

이다. $x = 3$을 대입하면,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^{n+2}}{(n+2)!} = e^3 + 5$$

이다. 따라서 원하는 값은

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{(n+2)!} = \frac{e^3+5}{9}$$

이다.

문제 2. 20. *다음 급수가 수렴하는 x의 범위를 구하시오.*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(\log n)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{n \log n}{(n+1)\log(n+1)} \right| = 1$$

이므로, 수렴반경은 1이다. $x = 1$일 때는 $f(x) = \frac{1}{x \log x}$는 감소함수이며, 연속이고, $f(x) > 0$이므로 적분판정법에 의해 $\int_3^\infty \dfrac{1}{x\log x}dx$와 수렴성이 같다. 이때,

$$\int_3^\infty \frac{1}{x \log x} dx = [\log\log x]_3^\infty = \infty$$

이므로 발산한다. $x = -1$일 경우, $\sum \frac{(-1)^n}{n \log n}$에서 $a_n = \frac{1}{n\log n}$이라고 두면 이 급수는 교대급수이면서 $a_n > a_{n+1}$이고, $a_n \to 0$이 $n \to \infty$일 때 성립하므로, 교대급수판정법에 의하여

$$\sum \frac{(-1)^n}{n \log n}$$

은 수렴한다. 따라서 이 급수는 $-1 \leq x < 1$에서 수렴한다.

문제 2. 21. *다음 급수가 수렴하는 x의 범위를 구하시오.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

$y = x + 2$로 치환하면 주어진 급수는

$$\sum \frac{n}{3^{n+1}} y^n$$

이 되고,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)3^{n+1}}{n3^{n+2}}\right| = \frac{1}{3}$$

이므로 수렴반경은 3이다. $y = \pm 3$일 경우에는, 일반항

$$\frac{n}{3^{n+1}} \cdot y^n$$

에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^{n+1}} \cdot y^n \neq 0$$

이므로, 일반항 판정법에 의하여 발산한다. 따라서 $-3 < y < 3$일 때 수렴하고, $-5 < x < 1$일 때 수렴한다.

문제 2. 22. *다음 급수의 합을 구하시오.*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$$

이라 하면

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n = \frac{1}{1-x}$$

이고, 다시 적분하면

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n = -\log(1-x)$$

이게 된다. 그러면

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)} &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{2^n(n-1)}\\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n} = \frac{1}{2} + f(\frac{1}{2})\end{aligned}$$

이다. 따라서, 구하고자 하는 값은

$$\frac{1}{2} + \log 2$$

이다.