1 행렬과 선형사상

1.1 행렬과 선형사상, 연립방정식

행렬. 1. *B가 $m \times k$ 행렬일 때, $A = B^t B$가 $k \times k$ 행렬이며 $A^t = A$임을 보여라.*

행렬. 2. *B가 $n \times n$ 행렬이라면, $A = B + B^t$는 $A = A^t$이며 $C = B - B^t$는 $C = -C$임을 보여라. 이를 이용하여, 임의의 행렬 M은 $P = P^t$인 행렬 P와 $Q = -Q^t$인 행렬 Q의 합으로 표현될 수 있음을 보여라.*

행렬. 3. *다음이 참인지, 아닌지를 판정하라.*
1) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$
2) B의 대각선 원소들을 제외하면 모두 0이라고 할 때, $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$
3) $A = A^t$*라면,* $A^2 = (A^2)^t$

행렬. 4. *선형사상 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$가 있어서*

$$T(1, -1, 0) = (4, 2, 1, 0), T(2, 2, -1) = (1, 3, 0, 6), T(-1, -1, 1) = (-1, 3, -3, 0)$$

이라고 한다. T에 대응되는 행렬을 구하여라.

행렬. 5. *아래 사상들이 선형사상이 맞는지 판단하라. 만약 맞다면, 이들에 대응되는 행렬을 구하여라.*

1) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1x_2, x_3)$

2) $n \geq 2$*에 대하여,* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$, $T(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_1)$

3) $n \geq 2$*에 대하여,* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}$

행렬. 6. 2×2 *행렬*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

을 A*라고 하자.* $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 = O$*임을 보여라.*

행렬. 7. 3×3 *행렬*

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

을 E*라고 하자.* 3×3 *행렬* $A = (a_{ij})$*에 대하여,* E*를 곱하면* A*는 어떻게 되는지 구하시오. 이를 통해,* A*의 둘째 행에 3배를 한 후 첫째 행과 셋째 행을 뒤바꾸는 변환에 대응하는 행렬* X*를 구하시오.*

행렬. 8. *$m\times n$ 행렬 A와 $n\times l$ 행렬 B가 주어졌을 때, B의 j열을 $\mathbf{b}_j$라 하면 AB의 j열은 $A\mathbf{b}_j$임을 보이시오. 곧,*

$$AB = A\left(\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \cdots \mathbf{b}_n\right) = \left(A\mathbf{b}_1\ A\mathbf{b}_2\ \cdots A\mathbf{b}_n\right)$$

행렬. 9. *$n\times n$ 정사각행렬 A가 $A = A^t$를 만족한다.*

1) $n\times 1$ 행렬 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$에 대해 $(A\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \mathbf{v}\cdot(A\mathbf{w})$임을 보이시오.

2) $A\mathbf{v} = a\mathbf{v}$, $A\mathbf{w} = b\mathbf{w}$인 서로 다른 상수 a, b가 존재하는 경우, 벡터 $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$는 수직임을 증명하시오. (Hint : 벡터의 내적을 다른 방식으로 표현해 보시오)

행렬. 10. *영이 아닌 벡터 $\mathbf{a} = (a, b, c)$에 대해 $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$을 아래와 같이 정의하자.*

$$L(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{a}\times\mathbf{x})\times\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}$$

L이 선형사상임을 보이고, 이에 대응하는 행렬을 구하시오.

행렬. 11. *삼차원 좌표공간의 벡터* $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$*과* $\mathbf{v} = (1, 2, 1)$*를 포함하며 원점을 지나는 평면을* H*라 할 때, 다음 물음에 답하시오.*

1) 점 X*에 대하여 그것과 가장 가까운* H *위의 점을* P*라고 하자. 점* $X = (x, y, z)$*에 대하여,* P*의 좌표를 구하여라.*

2) X*에 대하여* P*를 내놓는 사상* $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*가 선형사상임을 보이시오.*

3) 선형사상 P*에 대응하는 행렬을 구하시오.*

행렬. 12. *두 벡터* $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$*과* $\mathbf{b} = (-2, 0, 0)$*에 대하여 다음과 같이 정의된 사상* $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*이 선형사상임을 보이고,* L*을 나타내는 행렬을 구하시오.*

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3)$$

행렬. 13.

$$x + 4y + 1z = 1$$

$$2x + 9y + tz = 1$$

$$-x + ty - 6z = -6$$

에 대하여, 1) 근이 무한 개 존재하는 t*의 값을 구하고, 해당 경우 일반해를 구하라.*

2) 근이 없는 t*의 값을 모두 구하여라.*

2 역행렬과 행렬식

2.1 역행렬

행렬. 14. *다음과 같이 주어진 선형사상 $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$에 대응하는 행렬을 구하시오. 그리고 L의 역사상이 존재함을 보이시오.*

$L(1,0,1) = (2,-1,0),\ L(0,1,1) = (1,-5,3),\ L(1,1,0) = (-1,10,3)$

행렬. 15. *행렬*

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 \end{pmatrix}$$

의 역행렬을 구하시오. 단, $a_1 a_2 \neq 0$이다.

2.2 행렬식

행렬. 16. *다음과 같이 주어진 행렬 A에 대하여, $I - A^{2021}$의 행렬식을 구하시오.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

행렬. 17. *다음과 같이 주어진 행렬 A에 대해서, $p(x) = det(xI - A)$라고 정의하자. $p(x)$의 근을 모두 구하시오.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

행렬. 18. *삼차원 좌표공간의 세 벡터 $\mathbf{u} = (1, -1, 0), \mathbf{v} = (2, 3, -1), \mathbf{w} = (-1, 0, 2)$에 대하여*

$$S = \{x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w} : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 3\}$$

일 때, S의 부피를 구하시오.

행렬. 19. *행렬 A가 아래와 같이 주어져 있다.*

$$\begin{pmatrix} -5 & x & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ x & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) $det(A^{2021}) = 0$일 조건을 구하여라.

2) $x = 5$일 때, $det((A^{-1})^t)$의 값을 구하여라.

행렬. 20. 3×3 *행렬* A*가* $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$*에 대하여* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$*을 성립시킬 때,* A*의 행렬식을 구하여라.*

행렬. 21. *네 점* $O(0,0,0), P_1(1,1,1), P_2(1,2,4), P_3(1,3,9)$*와 행렬*

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 2 \\ -3 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

에 대응되는 선형사상 L*에 대해 다음 물음에 답하시오.*

1) 네 점 O, P_1, P_2, P_3*을 꼭짓점으로 하는 사면체의 부피는?*

2) 네 점 $L(O), L(P_1), L(P_2), L(P_3)$*를 꼭짓점으로 하는 사면체의 부피는?*

행렬. 22. A*가 가역행렬일 경우,* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$*의 근이 유일함을 보여라. 또한, 이를 이용하여 좌표평면에* x *좌표가 다른* n*개의 점* $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$*가 주어져 있을 때 이들 모두를 지나는* $n-1$*차 이하의 다항함수가 유일함을 보여라.*

행렬. 23. *다음 명제가 참이면* T*, 거짓이면* F*를 표시하시오.*

1) $n \times n$ *정사각행렬* A*와* B*에 대하여,* $AB = O$*이면* $BA = O$*이다.*

2) $n \times n$ *정사각행렬* A*에 대하여* $det(A^t A) = (detA)^2$*이다.*

3) $n \times n$ *정사각행렬* A*와* B*에 대하여* $det(A + B) = detA + detB$*이다.*

4) $n \times n$ *정사각행렬* A*와* B*에 대하여,* $det(AB) = det(A)det(B)$*이다.*

5) 3×3 *정사각행렬* A*에 대하여,* $A^3 = O$*이면* $A^2 = O$*또는* $A = O$*이다.*

6) O*가 아닌 행렬* A*에 대해,* AB*와* AC*가 정의되며 이들의 첫 열이 같다고 한다.* B*와* C*도 같은 첫 열을 가진다.*

7) B*와* C*가* AB*와* AC*가 정의되는 모든* A*에 대하여,* AB*와* AC*가 동일한 첫 열을 가지고 있다.* B*와* C*는 동일한 첫 열을 가진다.*

8)B*와* C*가 동일한 첫 열을 가지고 있다.* AB*와* AC*가 정의된다면,* AB*와* AC*는 동일한 첫 열을 가진다.*

9) $n \times n$ *행렬* A*가* $A^m = O$*이다. 그러면,* $I - A$*이 가역행렬이다.*

행렬. 24. *모든 항이 정수로 이루어진* $n \times n$ *행렬* A*가 존재하여 다음을 만족시킨다. 모든 성분이 정수인 벡터* $\mathbf{v}$*에 대하여, 모든 성분이 정수인 어떤 벡터* $\mathbf{x}$*가 존재하여* $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$*를 만족한다. 이때,* A*의 행렬식의 절댓값을 구하여라.*

행렬. 25. 10×10 *행렬* A*는 대각선 원소는 모두 9이고 나머지 원소는 모두 1인 아래와 같은 행렬이다.*

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 9 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 9 \end{pmatrix}$$

행렬식을 구하여라.

행렬. 26. 5×5 *행렬* A*의 모든 원소는 짝수이다.* A*의 행렬식이 120일 수 있는가? 만약 존재한다면, 이를 구하여라.*

행렬. 27. *행렬 A는 아래와 같다.*

$$\begin{pmatrix} -5 & 39 & -3 \\ 0 & 2 & -77 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A^5의 행렬식을 구하여라.

행렬. 28. *삼차원 좌표공간의 점 P를 지나고 단위벡터 $\mathbf{n}$에 수직인 평면을 α라고 하자. 또한, 이 평면은 원점을 지난다. 이때, 삼차원 좌표공간의 점 X를 평면 α로 정사영한 점을 $E(X)$라고 하자.*

1) 이때,

$$E(X) = X + ((P - X) \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$$

임을 보이시오.

2) $\mathbb{R}^3$에서 평면 $x + 2y + 3z = 0$으로의 정사영을 나타내는 선형사상이 있다. 이 선형사상에 대응되는 행렬 A를 구하고, $det(A^{2021} - I) - det(A)$를 구하시오.

3) 반면, 점 X를 평면 α로 대칭시킨 점을 $V(X)$라고 하자. $V(X)$가 선형사상임을 보여라.

4) 위에서 다룬 평면 $x + 2y + 3z = 0$에 대한 대칭을 시키는 V라는 선형사상에 대해 이에 대응되는 행렬을 B라고 하자. $B^{2021} - I$의 행렬식을 구하여라.

5) 원점을 지나는 임의의 평면 β에 대하여 이에 대한 대칭 선형사상에 대응되는 행렬을 C_β라고 부르자. $C_\beta^{2021} - I$의 행렬식을 구하여라.

2.3 일차독립과 기저

행렬. 29. *1) 선형사상* $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*이 일대일 함수일 필요충분조건은 방정식* $L(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$*의 해가 자명한 것뿐임을 보이시오.*

2) 일대일 함수인 선형사상 $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *및 세 벡터* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$*에 대하여*

$$L(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, L(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, L(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

라고 한다. $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$*이 일차독립인지 아닌지 판정하시오.*

행렬. 30. *삼차원 공간의 네 점* $A = (1, 2, 3), B = (0, 1, 2), C = (1, -1, 1), X = (2t, t, 2t)$*에 대하여* $\overrightarrow{XA}, \overrightarrow{XB}, \overrightarrow{XC}$*가 일차종속이 되게 하는 실수* t*의 값을 구하시오.*

행렬. 31. *선형사상* $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$*와* $\mathbb{R}^4$*의 영벡터가 아닌 벡터* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$*가 다음을 만족한다고 하자.*

$$L(\mathbf{v}_1) = 2\mathbf{v}_1, L(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}, L(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_3, L(\mathbf{v}_4) = 7\mathbf{v}_4$$

이때, 벡터 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$*가 일차독립임을 보여라.*

행렬. 32. $E = \{v_1, v_2\}$*는* $\mathbb{R}^2$*의 기저라고 한다. 만약* $F = \{av_1 + bv_2, cv_1 + dv_2\}$*가 기저이며* a, b, c, d*는 모두 실수라고 할 때,* a, b, c, d*가 만족해야 하는 조건은 무엇인가?*

행렬. 33. *행렬* A*가 아래와 같을 때, 다음 물음에 답하시오.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) 행렬 A*에서 얻은 선형사상* L_A*의 치역이 평면임을 보이고, 그 방정식을 구하여라.*

2) $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$*에 대하여,* $|A\mathbf{x} - Q|$*의 값이 최소가 되게 하는* $\mathbf{x}$*를 구하시오.*

3 곡선

행렬. 34. *극좌표 방정식* $r = \dfrac{1}{2+\cos\theta}$*로 주어지는 곡선에 대해 물음에 답하시오.*

1) 이 곡선의 식을 직교좌표계로 나타내시오.

2) $\int_0^{2\pi} \left(\dfrac{1}{2+\cos\theta}\right)^2 d\theta$*의 값을 구하시오.*

행렬. 35. *곡선* $X(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}(\cos\arctan t, \sin\arctan t) \quad (t \geq 0)$*에 대하여,* $X(0)$*으로부터* $X(1)$*까지 잰 길이를 구하여라.*

행렬. 36. *좌표평면에서 다음 식으로 주어진 곡선에 대해 아래 물음에 답하라.*

$$x^2 + y^2 = 2\sqrt{x^2 - y^2}$$

1) 곡선을 극좌표로 변환하고, $xy-$ *평면에 개형을 그려라.*

2) 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이 S*를 구하여라.*

행렬. 37. *좌표평면에 놓인 로그와선*

$$X(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t) \quad (t \geq 0)$$

에 대하여, $X(0)$*에서* $X(1)$*까지 잰 호의 길이는?*

행렬. 38. *좌표평면 위에 극좌표로 주어진 두 곡선*

$$C_1 : r = \cos 2\theta$$

$$C_2 : r = \frac{1}{2}$$

에 대하여 다음 물음에 답하여라.

1) C_1*으로 둘러싸인 부분과* C_2*로 둘러싸인 부분의 공통영역의 넓이는?*

2) 두 곡선의 모든 교점의 극좌표를 구하고, 각 교점에서 두 접선이 이루는 각 φ*의* $\cos\varphi$*를 구하시오. 단,* φ*는 예각이다.*

행렬. 39. *극좌표로 표현된 평면의 곡선*

$$r = 3\theta^2, \quad 1 \leq \theta \leq 2$$

의 개형을 그리고, 길이를 구하시오.

행렬. 40. *극좌표계에서* $r(\theta) = 1 + \cos\theta \quad (0 \le \theta \le \pi)$*로 표현된 곡선* $X(\theta)$*에 대하여, 다음 물음에 답하시오.*

1) 곡선의 길이를 구하여라.

2) 위 곡선과 x*축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.*

행렬. 41. *양 끝이 고정되어 있는 끈이 중력에 의하여 이루는 자연스러운 곡선의 모양을 현수선이라고 부른다. 현수선*

$$y = a\cosh\frac{x}{a} \quad (-b \le x \le b)$$

에 대하여, 그 길이를 구하시오. 단, $a, b > 0$*이다.*

행렬. 42. *이차원 평면에서의 곡선*

$$X(t) = (e^t\cos t, e^t\sin t)$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

1) $X(t)$*의* $t = \frac{\pi}{4}$*에서의 접선* l*의 방정식을 구하여라.*

2) 점 $P = (0, 1)$*을 지나고 벡터* $(-7, 2)$*와 나란한 직선과* l*의 교점을 구하시오.*