

중간문풀-5. 1. 아래와 같이 주어진 함수  $f$ 에 대하여 물음에 답하시오.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) 원점에서 편도함수  $D_1f(x, y), D_2f(x, y)$ 의 연속성을 조사하시오.  
(b) 원점에서 함수  $f$ 의 미분가능성을 조사하시오.

중간문풀-5. 2. 원점에서  $\mathbf{v} = (2, 2, -1)$  방향으로 발사된 빛과 곡면  $2xy + yz + zx = 1$ 이 주어져 있다.

(a) 발사된 빛이 곡면과 닿는 점에서의 접평면의 방정식을 구하시오.

(b) 이때 빛이 접평면에서 반사되어 나가는 직선의 방정식을 구하시오.

중간문풀-5. 3. 다음 물음에 답하시오.

(a) 원점에서  $f(x, y) = \ln(x + e^y)$ 의 2차 근사다항식을 구하시오.

(b) (a)의 결과를 이용하여  $\ln(0.01 + e^{0.01})$ 의 일차근삿값을 구하고, 오차가  $2 \times 10^{-4}$  이하임을 보이시오.

중간문풀-5. 4. 아래와 같이 주어진 함수  $f$ 에 대하여 물음에 답하시오.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + |y|^3} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) 원점에서  $f$ 의 연속성을 판정하시오.
- (b)  $\mathbf{v} = (1, 1)$ 일 때  $D_{\mathbf{v}}f(0, 0)$ 를 구하시오.
- (c) 원점에서  $f$ 의 미분가능성을 판정하시오.

---

중간문풀-5. 5. 원점에서 함수  $f(x, y) = \ln(2x + y + 1)$ 의 이차근사다항식을 구하시오.

중간문풀-5. 6. 평면에서 직교좌표계를 사용했을 때 라플라스 방정식은

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

으로 주어진다. 이를 극좌표를 이용하여 나타내면

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = 0$$

이 됨을 보이시오.

**중간문풀-5. 7. 방정식**

$$(x-1)^2 + 2(y-2)^2 + 3(z-3)^2 = 1$$

로 주어지는 타원면 위의 점  $(a, b, c)$ 에서 타원면에 접하는 접평면이 원점  $(0, 0, 0)$ 을 포함하도록 하는 점  $(a, b, c)$ 들은 한 평면 위에 있음을 보여라.

중간문풀-5. 8. 이급 함수  $f$ 가

$$f(tx, ty) = t^2 f(x, y) \quad \forall t, x, y \in \mathbf{R}$$

을 만족하면

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \left[ x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \right]$$

임을 보여라. 또한, 위 등식을 만족하는 0이 아닌 함수  $f$ 의 예를 들어라.



---

**중간문풀-5. 9.** 직원빨의 반지름  $r$ 은 1초당 3센치미터 증가하고, 높이  $h$ 는 1초당 5센치미터 증가한다. 반지름이 15센치미터이고 높이가 25센치미터일 때, 부피의 증가율을 구하여라.

중간문풀-5. 10. 아래 함수  $f$ 의 원점에서의 연속성을 조사하시오.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

중간문풀-5. 11. 평평한 금속판 위에서 전압분포가 아래와 같다.

$$V(x, y) = 50 + ax^2 - by^2$$

(a) 점  $(1, -2)$ 에서 전압이 가장 빨리 증가하는 방향이  $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 16\mathbf{j}$ 와 평행할 때,  $a$ 와  $b$ 의 관계식을 구하여라.

(b) (a)의 관계식이 성립하고  $V(1, -2) = 33$ 일 때,  $(1, -2)$ 에서 가장 빨리 감소하는 방향의 단위벡터와 그 방향으로의 변화율을 구하여라.

중간문풀-5. 12.  $f(u, v)$ 가 미분가능하고  $w = f(x - y, y - x)$ 일 때,  $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$ 임을 보여라.

---

중간문풀-5. 13. 함수  $f(x, y) = e^x \ln(1 + y)$ 의 원점에서 2차 근사다항식을 구하여라.

중간문풀-5. 14. 좌표평면에서 정의된 함수

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

에 대하여 다음 질문에 답하여라.

- (a)  $f$ 는  $(0, 0)$ 에서 연속인가?
- (b)  $D_1f(0, 0)$ 과  $D_2f(0, 0)$ 은 존재하는가? 존재한다면 그 값은 얼마인가?
- (c)  $f$ 는  $(0, 0)$ 에서 미분가능한가?

중간문풀-5. 15. 다음 질문에 답하여라.

- (a) 원점에서  $f(x, y) = \sin(x + y)e^{x+2y}$  의 2차 근사다항식을 구하여라.
- (b) (a)의 근사다항식을 이용하여  $\sin(0.02)e^{0.03}$  의 1차 근사값을 구하고, 오차가  $5 \times 10^{-3}$  이하임을 보여라.

중간문풀-5. 16. 미분가능한 이변수함수  $f$ 에 대하여 삼변수함수  $g$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$g(x, y, z) = x^3 f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

이때, 아래 식이 성립함을 보이시오.

$$x \frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y} + z \frac{\partial g}{\partial z} = 3g$$



**중간문풀-5. 17.** 공간의 점  $(1, 1, 1)$ 에서 곡면  $z = x \cos y - ye^x$  모양의 거울을 향하여 빛이  $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, -1)$ 의 방향으로 진행하고 있다.

- (a) 빛이 거울과 만나는 점의 좌표를 구하시오.
- (b) (a)에서 구한 점에서 거울에 접하는 평면의 방정식을 구하시오.
- (c) 빛이 거울에 반사되어 나가는 방향의 단위벡터를 구하시오.

중간문풀-5. 18. 함수  $f(x, y)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) 원점에서  $f$ 는 연속인가?
- (b)  $D_1f(0, 0)$ 와  $D_2f(0, 0)$ 이 존재하면 그 값을 구하여라.
- (c) 원점에서  $f$ 는 미분가능한가?

중간문풀-5. 19. 곡면  $z = 8 - 3xy + 2y^2$  위의 점  $P$ 에서의 접평면이 직선  $\frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = z-1$ 과 수직이 될 때의  $P$ 를 구하고, 이때 접평면의 방정식을 구하시오.

중간문풀-5. 20.  $(0.98)^{1.01}$ 의 2차 근사값을 구하여라.

---

중간문풀-5. 21. 원점에서 함수  $f(x, y) = e^x \sin(x^2 + y^2)$ 의 3차 근사 다항식을 구하여라.

중간문풀-5. 22. 함수  $f(x, y)$ 가 다음과 같이 주어져 있다.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a)  $f$ 가 원점에서 연속인지 판단하여라.
- (b)  $D_1f(0, 0)$ 와  $D_2f(0, 0)$ 가 존재하면 그 값을 구하여라.
- (c) 원점에서  $f$ 의 미분가능성을 판단하여라.

**중간문풀-5. 23.** (a) 미분가능한 함수  $f(x, y, z)$ 가 모든 실수  $x, y, z$ 에 대하여  $f(x, y, z) = f(x, -y, z)$ 를 만족할 때,  $D_2f(0, 0, 0)$ 의 값을 구하여라.

(b) (a)의 조건을 만족하는 함수  $f$ 에 대하여  $D_{(1,1,1)}f(0, 0, 0) = 1$ ,  $D_{(1,2,3)}f(0, 0, 0) = 2$ 일 때, 원점에서 함수  $f$ 가 가장 빨리 증가하는 방향을 구하여라.

중간문풀-5. 24. 곡면

$$\frac{x^3}{2^3} + \frac{y^3}{3^3} - \frac{z^3}{4^3} = 1$$

위의 점  $(2, 3, 4)$ 에서 접평면의 방정식을 구하여라.



- 중간문풀-5. 25. (a) 원점에서  $f(x, y) = e^{-x} \cos y$ 의 2차 근사다항식을 구하여라.  
(b)  $e^{-0.01} \cos(0.02)$ 의 2차 근사값을 구하고 오차가  $\frac{1}{3!}(0.03)^3$  이하임을 보여라.

## 중간문풀-5. 26. 함수

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) = (0, 0) \\ 0, & (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

에 대하여 다음 물음에 답하여라.

- (a) 원점에서  $f(x, y)$ 의 연속성을 조사하여라.
- (b)  $D_1f(0, 0)$ 과  $D_2f(0, 0)$ 을 구하여라.
- (c) 원점에서  $f(x, y)$ 의 미분가능성을 조사하여라.

**중간문풀-5. 27.**  $f$ 는 일변수 미분가능함수이며 절대 0이 되지 않는 함수이다. 그리고  $g(x, y)$ 는  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$  상에서 아래와 같이 정의되었다.

$$g(x, y) = xyf\left(\frac{x+y}{xy}\right)$$

. 이때 다음 관계식을 만족하는  $D$  위의 함수  $G(x, y)$ 를 구하여라.

$$x^2 \frac{\partial g}{\partial x} - y^2 \frac{\partial g}{\partial y} = G(x, y)g(x, y)$$

중간문풀-5. 28. 두 곡면  $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ 과  $z = x + 2y$ 의 교선 위의 한 점  $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 2)$ 에서의 교선에 대한 접선의 방정식을 구하시오.

---

중간문풀-5. 29. 함수  $f(x, y) = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$ 의 원점에서의 2차 근사다항식을 구하여라.

중간문풀-5. 30. 곡면  $e^x \ln y + \cos(xz) + z^2 = 3$  위의 점  $P(0, e, 1)$ 에서 접평면의 방정식을 구하여라.

중간문풀-5. 31. 좌표평면에서 정의된 함수

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y \sqrt{x^2 + y^2}}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

에 대하여 다음 질문에 답하여라.

- (a)  $f$ 는  $(0, 0)$ 에서 연속인가?
- (b)  $D_1 f(0, 0)$ 과  $D_2 f(0, 0)$ 은 존재하는가? 존재한다면 그 값은 얼마인가?
- (c)  $f$ 는  $(0, 0)$ 에서 미분가능한가?

중간문풀-5. 32. 곡면  $2y - z^3 - 3xz = 2$  위의 점  $(1, 8, 2)$ 에서의 접평면을 구하여라.



중간문풀-5. 33. 다음 두 곡면의 교선 상의 주어진 점  $P$ 에서 이 교선에 대한 접선의 방정식을 구하여라.

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4$$

$$x^3 - 2y^2 + z^2 = 3$$

$$P = (1, 1, 2)$$

중간문풀-5. 34.  $f(x, y) = x^2y + 1$  일 때, 이 함수의 테일러 급수를  $(x-2)$ 와  $(y-2)$ 의 거듭제곱급수 형태로 표현하시오.