13. Vector Functions

13.1 Vector Functions and Space Curves

vector-valued function 혹은 **vector function**이라 함은, 아래처럼 산출값이 벡터인 함수를 의미한다. 이때 각 벡터의 특정 방향 성분에 해당하는 실수값도 함수인데, 이를 **component functions** 라고 부른다.

$$\mathbf{r}(t) =< f(t), g(t), h(t) >= f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

13단원에서는 이제 3차원 상의 공간에서 vector function을 다룰 것이다. 이러한 상황에서, 아래와 같이 vector function의 limit을 정의한다.

$\mathbf{r}(t) =< f(t), g(t), h(t) >$일 때,

$$\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) =< \lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t) >$$

는 각 component function들의 limit이 존재할 때 정의된다.
한편 이 $\mathbf{r}$이 $t = a$에서 **continuous**라는 것은

$$\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$$

와 동치다.

모든 continuous vector function $\mathbf{r}$에게는 이에 대응되는 곡선이 존재한다.

함수 f, g, h가 continuous일 때

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t)$$

처럼 **parameter** t에 대한 **parametric equation**은 t가 변함에 따라 공간 위에서 **space curve**를 그린다. vector function

$$\mathbf{r}(t) =< f(t), g(t), h(t) >$$

는 이 parametric curve 위의 점으로 향하는 vector이기도 하다. 다르게 말하면, space curve는 $\mathbf{r}(t)$의 자취이다.

대표적으로는 vector equation

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

를 생각할 수 있다. 이는 원통의 겉면을 반시계 방향으로 둘러싸며 감아올라가는 **helix**의 모양을 그린다.

한편 책의 본문에는 없지만, 아래의 식들이 vector function에 대해 성립한다.

$\mathbf{u}, \mathbf{v}$는 vector function이며 $t \to a$임에 따라 limit을 가진다.

$$\lim_{t\to a}[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \lim_{t\to a} \mathbf{u}(t) + \lim_{t\to a} \mathbf{v}(t)$$

$$\lim_{t\to a} c\mathbf{u}(t) = c \lim_{t\to a} \mathbf{u}(t)$$

$$\lim_{t\to a}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \lim_{t\to a} \mathbf{u}(t) \cdot \lim_{t\to a} \mathbf{v}(t)$$

$$\lim_{t\to a}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \lim_{t\to a} \mathbf{u}(t) \times \lim_{t\to a} \mathbf{v}(t)$$

13.2 Calculus of Vector Functions

vector function $\mathbf{r}(t)$의 derivative는 그 component function이 모두 differentiable일 때

$$\mathbf{r}'(t) = < f'(t), g'(t), h'(t) >= f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}$$

처럼 정의된다. 이는 점 $\mathbf{r}(t)$에서 순간적인 이동의 방향과 같기에, **tangent vector**라 불리기도 한다. 점 P에서의 **tangent line**은 점 P를 지나면서 방향벡터가 P에서의 $\mathbf{r}'(t)$와 같은 직선이다.

이는 우리가 일변수함수에서 보았던 differentiate의 정의를 그대로 이용한 것이다. 더 상세하게는

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \langle \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t} \rangle \\ &=< f'(t), g'(t), h'(t) >\end{aligned}$$

에서 얻을 수 있다. 한편 **second derivative**는 component function이 모두 두 번 differentiable하다는 전제하에

$$< f''(t), g''(t), h'(t) >$$

처럼 정의된다. 즉 그냥 component 별로 미분하면 아무런 문제가 없다는 것이다. 이를 감안하면 아래의 성질들이 만족함을 단순한 계산으로써 보일 수 있다.

$\mathbf{u}, \mathbf{v}$가 differentiable vector function이고 f는 real-valued function이다.

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}[c\mathbf{u}(t)] = c\mathbf{u}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{u}(t)] = f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(f(t))] = f'(t)\mathbf{u}'(f(t))$$

즉 inner product나 outer product는 일변수함수에서의 곱과 동일한 방식으로 하나씩 미분하여 더하면 되고, 합성함수도 동일하게 chain rule을 사용하면 됨을 알 수 있다.

적분 역시 아래와 같이 간단하게 정의된다.

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = \left(\int_a^b f(t)dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b g(t)dt\right)\mathbf{j} + \left(\int_a^b h(t)dt\right)\mathbf{k}$$

한편 $\frac{d}{dt}\mathbf{R}(t) = \mathbf{r}(t)$인 antiderivative $\mathbf{R}(t)$에 대해서도 FTC를 적용해

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$$

처럼 계산하는 것도 가능하다.

13.3 Arc Length of Space Curve

삼차원 상에서 아래의 vector function

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{j}$$

에 의해 표현되는 space curve의 arc length는 아래와 같이 구한다.

arc length formula

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt \end{aligned}$$

한편 이차원에서와 동일하게 **arc length function**을 정의해줄 수도 있다.

arc length function

점 $< f(a), g(a), h(a) >$로부터 잰 arc length function은 아래처럼 정의된다.

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)| du$$

양변을 미분한다면

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|$$

를 얻을 수 있다.

13.4 Unit Tangent, Normal and Binormal Vectors

만약 어떤 구간 I에서 $\mathbf{r}'$이 continuous이며 $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$이라면, $\mathbf{r}(t)$는 **smooth**라 말한다. 이에 대응되는 space curve 역시 **smooth**라고 말한다.

만약 $\mathbf{r}(t)$가 smooth라면, **unit tangent vector**는 아래와 같이 정의된다.

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

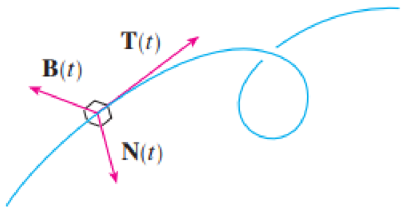
또한 이를 이용하여 **principal unit normal vector**

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}$$

를 정의할 수도 있다. 마지막으로, **binoral vector**를

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

로 정의한다.



삼차원 상에서 이들 셋은 모두 서로 perpendicular하다. 먼저 binormal vector는 outer product의 성질에 의하여 tangent vector와 normal vector에 모두 수직하다. 또한,

$$|\mathbf{T}(t)|^2 = \mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}(t) = 1$$

의 양변을 미분하여 정리하면

$$\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}'(t) = 0$$

을 얻는데, $\mathbf{T}'(t)$는 $\mathbf{N}(t)$에 나란하므로 $\mathbf{T}(t)$와 $\mathbf{N}(t)$는 수직하다. 또한 $\mathbf{T}(t)$와 $\mathbf{N}(t)$는 그 크기가 1이도록 표준화되며, 서로 수직이다. 그렇기에 그 둘의 outer product인 $\mathbf{B}(t)$도 크기가 1이다. 그러므로 이들 세 벡터는 서로 수직하면서 크기가 1인 벡터다.

곡선의 **curvature**는 unit tangent vector $\mathbf{T}$에 대하여

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right|$$

으로 정의된다.

한편 이를 잘 정리하면

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt} \right| = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

처럼 쓸 수도 있다. 더욱 간단히 하기 위해서는 아래의 과정도 필요하다.

$\mathbf{T} = \mathbf{r}'/|\mathbf{r}'|$이며 $|\mathbf{r}'| = ds/dt$이므로

$$\mathbf{r}' = |\mathbf{r}'|\mathbf{T} = \frac{ds}{dt}\mathbf{T}$$

이다. 양변을 한 번 더 미분하면

$$\mathbf{r}'' = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\mathbf{T}'$$

이므로 두 식을 outer product를 취하면

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 (\mathbf{T} \times \mathbf{T}')$$

를 얻는다. 양변에 길이를 취하면

$$|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = \left| \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 (\mathbf{T} \times \mathbf{T}') \right| = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 |\mathbf{T}'|$$

를 얻을 수 있다. 그러므로

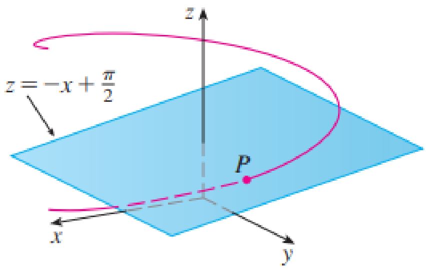
$$\kappa = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}$$

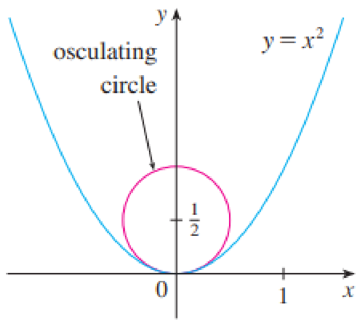
역시도 성립한다. 한편 $z=0$과 같은 상황이라 Cartesian plane에서 $y=f(x)$처럼 curve가 그려진다면,

$$\kappa(x)=\frac{|f''(x)|}{[1+(f'(x))^2]^{3/2}}$$

로써 구할 수도 있다.

plane curve C의 한 점 P 위에서, **N**과 **B**로 이루어지는 평면을 **normal plane**이라 한다. 이는 해당 지점에서 곡선과 수직하다.
한편 **N**과 **T**에 의해 결정되는 평면은 **osculating plane**이라 한다. 이는 P 근방에서 곡선에 가장 가까운 평면이다. osculating plane에 포함되면서 C의 오목한 부분에 존재하고, 반지름이 $\rho=\frac{1}{\kappa}$인 원을 **osculating circle**이라 한다. 점 P에서 curve를 가장 잘 묘사하는 원이다.





이때, osculating circle의 formula를 구하라고 할 수도 있다. 그러면 아래와 같은 방식으로 구해주면 된다.
(i) osculating circle의 중심은

$$P+\rho\mathbf{N}$$

에 존재한다.
(ii) osculating circle의 반지름은 ρ이다.
(iii) osculating circle은 osculating plane 위에 존재한다. 즉 원호 위의 각 점은 osculating circle의 중심에서 어떤 a,b에 대하여 $a\mathbf{T}+b\mathbf{N}$만큼 떨어져 있다. 그리고 $a^2+b^2=\rho^2$이다.
따라서 원하는 circle은 $0\le\theta\le2\pi$에 대하여

$$\mathbf{c}(\theta)=P+\rho\mathbf{N}+\rho\cos\theta\mathbf{T}+\rho\sin\theta\mathbf{N}=P+\rho\cos\theta\mathbf{T}+(\rho+\rho\sin\theta)\mathbf{N}$$

처럼 표현될 수 있다. $y=x^2$에 대해서는 $P=(0,0)$이며 $\mathbf{T}=(1,0)$, $\mathbf{N}=(0,1)$, $\kappa=2$이기에

$$c(\theta)=\langle\frac{1}{2}\cos\theta,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin\theta\rangle$$

로 그림에 그려진 원과 동일하다.

아래는 본문은 아니지만 연습문제에 나오는 중요한 항등식들이다.

torsion τ of the curve

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau(s)\mathbf{N}$$

다르게 쓰면

$$\tau = -\frac{\mathbf{B}'(t)\cdot\mathbf{N}}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

Frenet-Serret formulas

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$$

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}$$

Formulas from Frenet-Serret

$$\mathbf{r}'' = s''\mathbf{T} + \kappa(s')^2\mathbf{N}$$

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \kappa(s')^3\mathbf{B}$$

$$\mathbf{r}''' = [s''' - \kappa''(s')^3]\mathbf{T} + [3\kappa s's'' + \kappa'(s')^2]\mathbf{N} + k\tau(s')^3\mathbf{B}$$

$$\tau = \frac{(\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'')\cdot\mathbf{r}'''}{|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''|^2}$$

13.5 Velocity and Acceleration

만약 t가 시간이었다면, $\mathbf{r}(t)$는 시간에 따른 위치를 의미한다. 따라서 아래가 성립한다.

velocity vector $\mathbf{v}(t)$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t), \quad \text{speed: } |\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)| = \frac{ds}{dt}$$

acceleration $\mathbf{a}(t)$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$$

또한 이를 이용해 운동방정식을 세우면

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t}\mathbf{a}(u)du, \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t}\mathbf{v}(u)du$$

임을 알 수 있다. 또 뉴턴의 법칙은

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t)$$

처럼 쓸 수도 있다. 간단하게는 고정점에서 위로 각도 α, 속력 $\mathbf{v}_0$로 쏜 공의 궤적을 표현하기 위해 방정식

$$\mathbf{a} = -g\mathbf{j}$$

로부터 아래를 얻을 수도 있다.

$$x = (v_0 \cos\alpha)t, \quad y = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

마지막으로 가속도를 tangent vector와 normal vector로 분리하여 보자. speed를 $v = |\mathbf{v}|$로 둘 때, $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$ 이므로

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}' = v'\mathbf{T} + v\mathbf{T}' = v'\mathbf{T} + kv^2\mathbf{N}$$

으로 쓸 수 있다. 일반적으로 $a_T = v'$를 acceleration의 tangential component, $a_N = kv^2$를 normal component라고 한다. 이들을 $\mathbf{r}$에 대한 식으로 표현한다면

$$a_T = v' = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{v} = \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

$$a_N = kv^2 = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

처럼 쓰는 것도 가능하다. 자세한 계산은 정말 귀찮기만 하며 영양가가 없으므로, 생략한다.

한편 책에서는 이런 것들을 이용하여 Kepler's law를 조금 더 자세하게 증명하거나, 여러 물리 문제를 풀려고 시도한다. 각운동량이나 토크가 대표적이다. 그러나 이들은 시험에 잘 나오지도 않고, 물리 문제에 더욱 가깝다. 미적분학2를 공부하는 우리는 그냥 선생님이 강조하시면 한 번 연습해 보기만 하고, 언급이 없으셨다면 그냥 앞부분이나 열심히 공부하도록 하자.

13.6 연습문제

문제 13. 1. *smooth curve가 parametric curve*

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

의 형태로 표현된다고 할 때, curvature가

$$\kappa = \frac{|f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)|}{\{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

의 형태임을 보여라.

문제 13. 2. *어떤 입자의 position function이* $\mathbf{r}(t) =< t, t^2, t^2 >$*이다.* $t = 1$*에서 acceleration의 tangential component와 normal component를 구하여라.*

문제 13. 3. *주어진 vector valued function*

$$\mathbf{r}(t) = (3\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + (4t)\mathbf{k}$$

에 대하여,

(i) $t = 0$*일 때부터 잰 arc length function* $s(t)$*를 구하라.*

(ii) $\mathbf{T}(t), \mathbf{N}(t), \mathbf{B}(t)$*를 구하여라.*

(iii) curvature와 torsion을 구하여라.

문제 13. 4.

$$x(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du, \quad y(t) = \int_0^t \sin\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du$$

일 때, $t = 0$*에서* $t = a$*까지의 arc length를 구하고,* $t = a$*에서의 curvature도 계산하여라.*

문제 13. 5.

$$\mathbf{r}(t) =< e^t, \sqrt{2}t, e^{-t} >$$

는 시간 t*에 따른 입자의 위치를 의미한다.* $P(1,0,1)$*에서의 curve의 osculating plane과 normal plane을 구하여라.*

문제 13. 6. *우주선의 위치는 시간 t에 대하여*

$$\mathbf{r}(t) =< 3+t, 2+\ln t, 7-\frac{4}{t^2+1} >$$

으로 주어지며, 우주정거장의 위치는 $(6,4,9)$이다. 선장은 어떤 시점에서 엔진을 꺼 우주선이 해당 상황에서의 접선의 방향으로 쭉 나아가게 해 우주정거장에 도착하고 싶다. 언제 엔진을 꺼야 할까?

문제 13. 7.

$$x = \int_0^{2t} \sin\left(\frac{1}{2}\pi\theta^2\right) d\theta, \quad y = \int_0^{2t} \cos\left(\frac{1}{2}\pi\theta^2\right) d\theta$$

으로 주어지는 curve의 curvature를 구하여라.

문제 13. 8.

$$\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + \cos^2 t\mathbf{j} + \sin^2 t\mathbf{k}$$

일 때,

(i) $t = \frac{\pi}{2}$ *일 때 이 curve의 osculating plane을 구하여라.*

(ii) $t = \frac{\pi}{2}$ *일 때 curvature를 구하여라.*

(iii) $t = \frac{\pi}{2}$ *일 때 acceleration의 tangential component와 normal component를 구하여라.*

문제 13. 9. *curve* $\mathbf{r}(t) =< t, t, 1 + t^2 >$*의 curvature를 구하여라.*

문제 13. 10. $y = e^x$ *의 그래프가 maximum curvature를 갖는 점은 어디인가?*

문제 13. 11. $\mathbf{r}(s)$는 $< 0, 0, 0 >$으로부터 잰 *arc length function* s를 *이용해 arc length parametrization 을 수행한 smooth curve이다. 만약 space curve의 binormal vector가 constant vector라면, 이 curve는 어떤 평면 위에 있음을 보여라.*

문제 13. 12. *위 문제의 결과 등을 이용하여,*

$$\mathbf{r}(t) =< \sqrt{2}e^t \cos t, e^t \sin t, e^t \sin t >$$

가 어떤 평면 위에서만 움직이는 curve임을 보이고, 그 평면의 equation을 구하여라.

문제 13. 13.

$$g(x,y,z) = \{(x,y,z)|x^2+y^2=1\}$$

$$h(x,y,z) = \{(x,y,z)|y+z=2\}$$

에 대하여, 두 집합의 교선을 C라고 하자. 이 C에 대응하는 vector function을 구하여라.

문제 13. 14.

$$\mathbf{r}(t) = < t^3, 3t, t^4 >$$

에 대응하는 curve의 어떤 점에서 normal plane이 $6x+6y-8z=1$에 나란하다고 한다. 이 점은 어디인가?

문제 13. 15. $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4, y \geq 0$과 $x^2 + z^2 = 1$의 *intersection* C를 표현할 수 있는 *vector function*을 구하고, 그 *curvature*를 구하여라. 또한, $(0, 0, \pm 1)$에서 그 *curvature*에 대해 어떻게 이야기할 수 있는가?

문제 13. 16.

$$\mathbf{r}(t) = < \sinh t, \cosh t, t >$$

로 parametrization되는 C*에 대하여,* $(0, 1, 0)$*에서의 osculating plane을 구하고, osculating circle의 center를 구하라.*

문제 13. 17. *타원* $x^2 + 4y^2 = 1$ *위의 점* $(0, \frac{1}{2})$*에서의 curvature와 osculating circle을 구하시오.*

문제 13. 18. *극좌표에서* $r = e^{\theta}$ *처럼 주어진 curve가 있다. 이를* $X(0)$*으로부터 잰 arc length로 parametrize 하고, curvature를 구하라.*

문제 13. 19.

$$\mathbf{r}(t) = (e^{\tan\frac{t}{2}}\tan^2\frac{t}{2}, e^{\tan\frac{t}{2}}\tan\frac{t}{2}, \tan\frac{t}{2})$$

일 때 점 $\mathbf{r}(\frac{\pi}{2})$*에서의 osculating plane을 구하여라.*

문제 13. 20. *vector function* $\mathbf{r}(t)$*에 대응하는 space curve 위의 한 점* $Q = \mathbf{r}(0) = (1, 0, 1)$*에 대하여* Q*에서의 velocity와 acceleration이 각각* $(1, 2, 1)$*과* $(-1, 2, 1)$*이다.*

등식

$$\kappa = \left| \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|^2} (\mathbf{r}''(t) - \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|^2} \mathbf{r}'(t)) \right|$$

이 성립함을 보이고 이를 이용해 Q*에서의 curvature를 구한 다음, 이를 통해 osculating circle의 radius를 구하라.*