13.6 연습문제

문제 13. 1. *smooth curve가 parametric curve*

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

의 형태로 표현된다고 할 때, curvature가

$$\kappa = \frac{|f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)|}{\{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

의 형태임을 보여라.

$$y' = \frac{f'}{g'}$$

$$y'' = \frac{f'g'' - g'f''}{(f')^2}$$

이므로 curvature는

$$\kappa = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{|f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)|}{\{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

문제 13. 2. *어떤 입자의 position function이 $\mathbf{r}(t) =< t, t^2, t^2 >$이다. $t = 1$에서 acceleration의 tangential component와 normal component를 구하여라.*

$$\mathbf{r}'(1) =< 1, 2, 2 >$$

이며

$$\mathbf{r}''(1) =< 0, 2, 2 >$$

이므로 tangential component와 normal component는

$$a_T = \frac{8}{3}, \quad a_N = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

문제 13. 3. *주어진 vector valued function*

$$\mathbf{r}(t) = (3\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + (4t)\mathbf{k}$$

에 대하여,

(i) $t = 0$일 때부터 잰 arc length function $s(t)$를 구하라.
(ii) $\mathbf{T}(t), \mathbf{N}(t), \mathbf{B}(t)$를 구하여라.
(iii) curvature와 torsion을 구하여라.

(i)

$$\mathbf{r}'(t) = -(3\sin t)\mathbf{i} + (3\cos t)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

이므로 $|\mathbf{r}'(t)| = 5$이다. 따라서

$$s = \int_0^t |\mathbf{r}'(u)|du = 5t$$

(ii)

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = -\left(\frac{3}{5}\sin t\right)\mathbf{i} + \left(\frac{3}{5}\cos t\right)\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} = \frac{-\left(\frac{3}{5}\cos t\right)\mathbf{i} - \left(\frac{3}{5}\sin t\right)\mathbf{j}}{\frac{3}{5}} = (-\cos t)\mathbf{i} + (-\sin t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) = \left(\frac{4}{5}\sin t\right)\mathbf{i} - \left(\frac{4}{5}\cos t\right)\mathbf{j} + \frac{3}{5}\mathbf{k}$$

(iii)

$$\kappa = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{3}{25}$$

$$\tau = -\frac{\mathbf{B}'(t)\cdot\mathbf{N}}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{4}{25}$$

문제 13. 4.

$$x(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du, \quad y(t) = \int_0^t \sin\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du$$

일 때, $t=0$에서 $t=a$까지의 arc length를 구하고, $t=a$에서의 curvature도 계산하여라.

$$x'(t) = \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right), \quad y'(t) = \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)$$

이므로

$$s = \int_0^a \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = a$$

이다. 한편 curvature는 문제 13.1의 공식에 의하여

$$\kappa = \left| -\cos\left(\frac{\pi a^2}{2}\right)\cdot a\pi\cos\left(\frac{\pi a^2}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi a^2}{2}\right)\cdot a\pi\sin\left(\frac{\pi a^2}{2}\right)\right| = a\pi$$

문제 13. 5.

$$\mathbf{r}(t) =< e^t, \sqrt{2}t, e^{-t} >$$

는 시간 t에 따른 입자의 위치를 의미한다. $P(1,0,1)$에서의 curve의 osculating plane과 normal plane을 구하여라.

$$\mathbf{r}'(t) =< e^t, \sqrt{2}, -e^{-t} >, \quad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{e^{2t}+2+e^{-2t}} = e^t + e^{-t}$$

$$\mathbf{T}(t) = \langle \frac{e^t}{e^t+e^{-t}}, \frac{\sqrt{2}}{e^t+e^{-t}}, \frac{-e^{-t}}{e^t+e^{-t}} \rangle$$

$$\mathbf{T}'(t) = \langle \frac{2}{(e^t+e^{-t})^2}, \frac{-\sqrt{2}(e^t-e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^2}, \frac{2}{(e^t+e^{-t})^2} \rangle, \quad |\mathbf{T}'(t)| = \frac{\sqrt{2}}{e^t+e^{-t}}$$

$$\mathbf{N}(t) = \langle \frac{\sqrt{2}}{e^t+e^{-t}}, \frac{-(e^t-e^{-t})}{e^t+e^{-t}}, \frac{\sqrt{2}}{e^t+e^{-t}} \rangle$$

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t)\times\mathbf{N}(t) = \langle \frac{1+e^{-2t}}{(e^t+e^{-t})^2}, -\frac{\sqrt{2}}{e^t+e^{-t}}, \frac{-1-e^{2t}}{(e^t+e^{-t})^2} \rangle$$

원하는 점 P에서 $t=0$이므로,

$$\mathbf{T}(0) = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2} \rangle, \quad \mathbf{N}(0) = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle, \quad \mathbf{B}(0) = \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2} \rangle$$

osculating plane은 $x - \sqrt{2}y - z = 0$이며, normal plane은 $x + \sqrt{2}y - z = 0$이다.

문제 13. 6. *우주선의 위치는 시간 t에 대하여*

$$\mathbf{r}(t) =< 3+t, 2+\ln t, 7-\frac{4}{t^2+1} >$$

으로 주어지며, 우주정거장의 위치는 $(6, 4, 9)$이다. 선장은 어떤 시점에서 엔진을 꺼 우주선이 해당 상황에서의 접선의 방향으로 쭉 나아가게 해 우주정거장에 도착하고 싶다. 언제 엔진을 꺼야 할까?

$$\mathbf{r}'(t) = \langle 1, \frac{1}{t}, \frac{8t}{(t^2+1)^2} \rangle$$

이므로 특정 점 $\mathbf{r}(a)$에서 엔진을 껐다고 할 때 tangent line의 방정식은

$$\langle 3+a, 2+\ln a, 7-\frac{4}{a^2+1} \rangle + s\langle 1, \frac{1}{a}, \frac{8a}{(a^2+1)^2} \rangle$$

처럼 주어진다. 그러면 이 직선이 $(6, 4, 9)$를 지나므로 $a + s = 3$이며

$$2 + \ln a + \frac{3-a}{a} = 4$$

$$7 - \frac{4}{a^2+1} + \frac{8a(3-a)}{(a^2+1)^2} = 9$$

임에 따라 $a = 1, s = 2$이다. 따라서 시간 1일 때 엔진을 끄자.

문제 13. 7.

$$x = \int_0^{2t} \sin\left(\frac{1}{2}\pi\theta^2\right) d\theta, \quad y = \int_0^{2t} \cos\left(\frac{1}{2}\pi\theta^2\right) d\theta$$

으로 주어지는 curve의 curvature를 구하여라.

$$x'(t) = 2\sin(2\pi t^2), \quad y'(t) = 2\cos(2\pi t^2)$$

$$\kappa = \frac{1}{8}|16\pi| = 2\pi$$

이다. 첫 문제의 공식을 적극적으로 이용하도록 하자.

문제 13. 8.

$$\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + \cos^2 t\mathbf{j} + \sin^2 t\mathbf{k}$$

일 때,

(i) $t = \frac{\pi}{2}$일 때 이 curve의 osculating plane을 구하여라.
(ii) $t = \frac{\pi}{2}$일 때 curvature를 구하여라.
(iii) $t = \frac{\pi}{2}$일 때 acceleration의 tangential component와 normal component를 구하여라.

(i)

$$\mathbf{r}'(t) =< 2, -2\cos t \sin t, 2\sin t \cos t >, \quad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{5 - \cos 4t}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \langle \frac{2}{\sqrt{5-\cos 4t}}, \frac{-\sin 2t}{\sqrt{5-\cos 4t}}, \frac{\sin 2t}{\sqrt{5-\cos 4t}} \rangle$$

$$\mathbf{T}'(t) = \langle -4\sin 4t(5-\cos 4t)^{-\frac{3}{2}}, -8\cos 2t(5-\cos 4t)^{-\frac{3}{2}}, 8\cos 2t(5-\cos 4t)^{-\frac{3}{2}} \rangle$$

$$|\mathbf{T}'(t)| = \sqrt{16\sin^2 4t + 128\cos^2 2t}(5-\cos 4t)^{-\frac{3}{2}} = 8|\cos 2t|\sqrt{\sin^2 2t + 2}(5-\cos 4t)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\cos 2t}{|\cos 2t|}\langle \sin 2t \cdot \frac{1}{\sqrt{2+\sin^2 2t}}, \frac{-1}{\sqrt{2+\sin^2 2t}}, \frac{1}{\sqrt{2+\sin^2 2t}} \rangle$$

$$\mathbf{T}(\frac{\pi}{2}) =< 1, 0, 0 >, \quad \mathbf{N}(\frac{\pi}{2}) =< 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$$

이며 $\mathbf{r}(\frac{\pi}{2}) =< \pi, 0, 1 >$이므로 osculating plane은 $y + z = 1$이다.

(ii)

$$\kappa = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{8|\cos 2t|\sqrt{\sin^2 2t + 2}(5-\cos 4t)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{5-\cos 4t}}$$

이며 대입하면

$$\kappa(\frac{\pi}{2}) = \frac{8\sqrt{2}}{4^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(iii)

$$\mathbf{r}''(t) =< 0, -2\cos 2t, 2\cos 2t >$$

이므로 주어진 t에서는 $< 0, 2, -2 >$이다. 한편 $\mathbf{r}'(\frac{\pi}{2}) =< 2, 0, 0 >$이다. 공식에 대입하면

$$a_T = 0, a_N = 2\sqrt{2}$$

임을 확인할 수 있다.

문제 13. 9. *curve* $\mathbf{r}(t) =< t, t, 1+t^2 >$*의 curvature를 구하여라.*

$$\mathbf{r}'(t) =< 1, 1, 2t >, \quad \mathbf{r}''(t) =< 0, 0, 2 >$$

이다.

$$\kappa = \frac{2\sqrt{2}}{(2+4t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

문제 13. 10. $y = e^x$*의 그래프가 maximum curvature를 갖는 점은 어디인가?*

$$\kappa(x) = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$$

이며 양변을 미분하면

$$\kappa'(x) = \frac{e^x(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}} - 3e^{3x}(1+e^{2x})^{\frac{1}{2}}}{(1+e^{2x})^3} = \frac{e^x - 2e^{3x}}{(1+e^{2x})^{\frac{5}{2}}}$$

이므로, $x = -\frac{1}{2}\ln 2$ 이전까지는 증가함수이다가 이후로는 감소한다. 따라서 maximum curvature는 점 $(-\frac{1}{2}\ln 2, \frac{1}{\sqrt{2}})$에서 생성된다.

문제 13. 11. $\mathbf{r}(s)$*는* $< 0, 0, 0 >$*으로부터 잰 arc length function* s*를 이용해 arc length parametrization을 수행한 smooth curve이다. 만약 space curve의 binormal vector가 constant vector라면, 이 curve는 어떤 평면 위에 있음을 보여라.*

s가 arc length function이므로 $\mathbf{r}(0) =< 0, 0, 0 >$이며

$$\int_0^s |\mathbf{r}'(t)| dt = s$$

이며, 양변을 미분하면 $|\mathbf{r}'(s)| = 1$이 성립함을 알 수 있다. 그러므로

$$\mathbf{T}(s) = \frac{\mathbf{r}'(s)}{|\mathbf{r}'(s)|} = \mathbf{r}'(s)$$

이며

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{|\mathbf{T}'(s)|} = \frac{\mathbf{r}''(s)}{|\mathbf{r}''(s)|}$$

이다. 한편 binormal vector가 constant라고 하였으므로, 어떤 constant vector $\mathbf{a}$에 대하여

$$\mathbf{a} = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s)}{|\mathbf{r}''(s)|}$$

이다. 이제 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}(s)$라는 새로운 vector function을 고려하자. 그러면 이를 미분할 경우

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}'(s) = \frac{(\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s)) \cdot \mathbf{r}'(s)}{|\mathbf{r}''(s)|}$$

을 얻게 되는데, 분모에서 내적되는 두 벡터 중 하나는 $\mathbf{r}'(s)$에 나란한 반면 하나는 수직하다. 따라서 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}'(s) = 0$이다. 이는 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}(s) = c$ 형태임을 의미하고, $s = 0$을 대입하면 이 곡선이

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}(s) = 0$$

이라는 직선 위에 있음을 안다.

문제 13. 12. *위 문제의 결과 등을 이용하여,*

$$\mathbf{r}(t) = < \sqrt{2}e^t \cos t, e^t \sin t, e^t \sin t >$$

가 어떤 평면 위에서만 움직이는 curve임을 보이고, 그 평면의 equation을 구하여라.

$$\mathbf{r}'(t) = < \sqrt{2}e^t \cos t - \sqrt{2}e^t \sin t, e^t \cos t + e^t \sin t, e^t \cos t + e^t \sin t >$$
$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2e^{2t}(1 - 2\sin t \cos t) + 2e^{2t}(1 + 2\sin t \cos t)} = 2e^t$$
$$\mathbf{T}(t) = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t - \sin t), \frac{1}{2}(\sin t + \cos t), \frac{1}{2}(\sin t + \cos t) \rangle$$
$$\mathbf{T}'(t) = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t - \cos t), \frac{1}{2}(\cos t - \sin t), \frac{1}{2}(\cos t - \sin t) \rangle$$
$$|\mathbf{T}'(t)| = 1$$
$$\mathbf{N}(t) = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t - \cos t), \frac{1}{2}(\cos t - \sin t), \frac{1}{2}(\cos t - \sin t) \rangle$$
$$\mathbf{B}(t) = \langle 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$$

로 binormal vector가 상수이다. 전 문제의 결과를 응용하면 이 curve는 항상

$$y - z = 0$$

이라는 평면 위에서만 이동한다.

문제 13. 13.

$$g(x, y, z) = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = 1\}$$
$$h(x, y, z) = \{(x, y, z) | y + z = 2\}$$

에 대하여, 두 집합의 교선을 C라고 하자. 이 C에 대응하는 vector function을 구하여라.

어떤 함수 $f(\theta)$에 대하여 $x = \cos\theta, y = \sin\theta$라고 두면 $z = 2 - \sin\theta$이다. 즉 vector function

$$\mathbf{r}(\theta) = < \cos\theta, \sin\theta, 2 - \sin\theta >$$

를 $0 \le \theta \le 2\pi$의 범위에서 그려나간다면 C에 대응된다.

문제 13. 14.

$$\mathbf{r}(t) =< t^3, 3t, t^4 >$$

에 대응하는 curve의 어떤 점에서 normal plane이 $6x + 6y - 8z = 1$*에 나란하다고 한다. 이 점은 어디인가?*

$$\mathbf{r}'(t) =< 3t^2, 3, 4t^3 >$$

이다. normal plane은 $\mathbf{T}(t)$에 수직한데, $\mathbf{T}(t)$가 $\mathbf{r}'(t)$에 나란하므로

$$3t^2 : 3 : 4t^3 = 6 : 6 : -8$$

이다. 따라서 $t = -1$이다. 원하는 점은 $(-1, -3, 1)$이다.

문제 13. 15. $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4, y \geq 0$*과* $x^2 + z^2 = 1$*의 intersection* C*를 표현할 수 있는 vector function을 구하고, 그 curvature를 구하여라. 또한,* $(0, 0, \pm 1)$*에서 그 curvature에 대해 어떻게 이야기할 수 있는가?*

$x = \sin t, z = \cos t$이라고 둘 수 있고 이 경우

$$y = \sqrt{4 - \sin^2 t - 4\cos^2 t} = \sqrt{3 - 3\cos^2 t} = \sqrt{3}|\sin t|$$

이다. 따라서 $\mathbf{r}(t) =< \sin t, \sqrt{3}|\sin t|, \cos t >$이 원하는 vector function이다. t의 범위는 편의를 위해 $0 \leq t \leq 2\pi$라고 두자. $0 < t < \pi$에서는

$$\mathbf{r}'(t) =< \cos t, \sqrt{3}\cos t, -\sin t >$$

이며

$$\mathbf{r}''(t) =< -\sin t, -\sqrt{3}\sin t, -\cos t >$$

이므로 curvature는

$$\kappa(t) = \frac{| < -\sqrt{3}, 1, 0 > |}{(3\cos^2 t + \sin^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(2 + \cos 2t)^{\frac{3}{2}}}$$

으로 주어진다. 한편 $\pi < t < 2\pi$에서는

$$\mathbf{r}'(t) =< \cos t, -\sqrt{3}\cos t, -\sin t >$$

이며

$$\mathbf{r}''(t) =< -\sin t, \sqrt{3}\sin t, -\cos t >$$

이므로

$$\kappa(t) = \frac{2}{(2 + \cos 2t)^{\frac{3}{2}}}$$

이므로, curvature는 $t \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$에서

$$\kappa(t) = \frac{2}{(2 + \cos 2t)^{\frac{3}{2}}}$$

이다. 그런데 $t = 0, \pi, 2\pi$일 때에는 $(0, 0, \pm 1)$인데, 여기서는 y의 식이 바뀐다. 즉 이 curve는 그 점에서 smooth하지 않다. 따라서 여기서는 curvature에 대한 논의가 불가능하다.

문제 13. 16.

$$\mathbf{r}(t) =< \sinh t, \cosh t, t >$$

로 parametrization되는 C*에 대하여,* $(0, 1, 0)$*에서의 osculating plane을 구하고, osculating circle의 center를 구하라.*

$$\mathbf{r}'(t) =< \cosh t, \sinh t, 1 >$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1 + \sinh^2 t + \cosh^2 t} = \sqrt{2}\cosh t$$

$$\mathbf{T}(t) = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sinh t}{\sqrt{2}\cosh t}, \frac{1}{\sqrt{2}\cosh t} \rangle$$

$$\mathbf{T}'(t) = \langle 0, \frac{1}{\sqrt{2}\cosh^2 t}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sinh t}{\cosh^2 t} \rangle$$

$$|\mathbf{T}'(t)| = \frac{1}{\sqrt{2}\cosh t}$$

$$\mathbf{N}(t) = \langle 0, \frac{1}{\cosh t}, -\frac{\sinh t}{\cosh t} \rangle$$

$$\mathbf{B}(t) = \langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sinh t}{\sqrt{2}\cosh t}, \frac{1}{\sqrt{2}\cosh t} \rangle$$

이다. $(0,1,0)$에서 $t = 0$이므로 binormal vector는

$$\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$$

이므로 osculating plane은 $x - z = 0$이다. 한편

$$\kappa = \frac{1}{2\cosh^2 t}$$

이므로 osculating circle의 반지름은 2이며, 해당 거리만큼 $N(0) =< 0,1,0 >$의 방향으로 간 점이 center 이기에 원하는 점은 $(0,3,0)$이다.

문제 13. 17. *타원 $x^2 + 4y^2 = 1$ 위의 점 $(0, \frac{1}{2})$에서의 curvature와 osculating circle을 구하시오.*

$(\cos t, \frac{1}{2}\sin t, 0)$로 parametrize하자. 그러면 $t = \frac{\pi}{2}$일 때의 curvature와 osculating circle을 구하면 된다.

$$\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \frac{1}{2}\cos t, 0)$$

$$\mathbf{r}''(t) = (-\cos t, -\frac{1}{2}\sin t, 0)$$

이기에 우리가 원하는 점에서는 각각 $(-1,0,0)$과 $(0,-\frac{1}{2},0)$이다. curvature는 그럼 $\frac{1}{2}$이고 osculating circle 의 반지름은 2이다. normal vector는 $(0,-1,0)$이므로 osculating circle은

$$x^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 4$$

이다.

문제 13. 18. *극좌표에서 $r = e^\theta$ 처럼 주어진 curve가 있다. 이를 $X(0)$으로부터 잰 arc length로 parametrize 하고, curvature를 구하라.*

$$s(\theta) = \int_0^\theta \sqrt{(e^s)^2 + (e^s)^2} ds = \sqrt{2}(e^\theta - 1)$$

이므로 잘 정리하면

$$\theta = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)$$

이고, 다시 parametrize하면

$$\mathbf{r}(s) = \langle \left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\cos\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right), \left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\sin\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\rangle$$

처럼 쓸 수 있을 것이다. 단, $s \geq 0$이다.

$$\kappa = \frac{|-2e^\theta\sin\theta\cdot e^\theta(\sin\theta+\cos\theta) - 2e^\theta\cos\theta\cdot e^\theta(\cos\theta-\sin\theta)|}{(e^{2\theta}(\cos t-\sin t)^2 + e^{2\theta}(\sin t+\cos t)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}e^\theta} = \frac{1}{s+\sqrt{2}}$$

임을 확인할 수 있다.

문제 13. 19.

$$\mathbf{r}(t) = (e^{\tan\frac{t}{2}}\tan^2\frac{t}{2}, e^{\tan\frac{t}{2}}\tan\frac{t}{2}, \tan\frac{t}{2})$$

일 때 점 $\mathbf{r}(\frac{\pi}{2})$에서의 osculating plane을 구하여라.

osculating plane은 parameter를 바꾼다고 해서 바뀌지 않는다. $\tan\frac{t}{2} = s$라고 두자. 그러면

$$\mathbf{u}(s) =< s^2e^s, se^s, s >$$

처럼 새로이 쓸 수 있다. 또한 $t = \frac{\pi}{2}$일 때 $s = 1$이다.

$$\mathbf{u}'(s) =< (s^2+2s)e^s, (s+1)e^s, 1 >$$

$$|\mathbf{u}'(s)| = \sqrt{1+e^{2s}(s^4+4s^3+5s^2+2s+1)} = \frac{1}{f(s)}$$

라고 두면

$$\mathbf{T}'(s) =< f(s)(s^2+4s+2)e^s + f'(s)(s^2+2s)e^s, f(s)(s+2)e^s + f'(s)(s+1)e^s, f'(s) >$$

이다.

$$\mathbf{u}'(\mathbf{1}) =< 3e, 2e, 1 >, f(1) = \frac{1}{\sqrt{13e^2+1}}$$

$$f'(1) = -\frac{27e^2}{(1+13e^2)\sqrt{1+13e^2}}$$

$$\mathbf{T}'(1) =< 10e^2+7e, 3e-15e^2, -27e^2 >$$

osculating plane은 $\mathbf{u}'(1)$과 $\mathbf{T}'(1)$을 모두 포함하고 있어야 하므로

$$\mathbf{u}'(1)\times\mathbf{T}'(1) =< -39e^2-3e, 91e^2+7e, -65e^3-5e^2 >= (13e^2+e) < -3, 7, -5e >$$

가 이 평면에 수직하다. 따라서 osculating plane은 $(e, e, 1)$을 지나며 $< -3, 7, -5e >$에 수직하므로

$$3x - 7y + 5ez = e$$

가 원하는 osculating plane이다.

문제 13. 20. *vector function $\mathbf{r}(t)$에 대응하는 space curve 위의 한 점 $Q = \mathbf{r}(0) = (1,0,1)$에 대하여 Q에서의 velocity와 acceleration이 각각 $(1,2,1)$과 $(-1,2,1)$이다.*

등식

$$\kappa = \left|\frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|^2}(\mathbf{r}''(t) - \frac{\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|^2}\mathbf{r}'(t))\right|$$

이 성립함을 보이고 이를 이용해 Q에서의 curvature를 구한 다음, 이를 통해 osculating circle의 radius를 구하라.

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} \\
&= \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} \cdot \left| \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right) \right| \\
&= \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} \left| \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} \mathbf{r}''(t) - \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|^2} \frac{d}{dt}(|\mathbf{r}'(t)|) \mathbf{r}'(t) \right| \\
&= \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} \left| \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} \mathbf{r}''(t) - \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|^3} \mathbf{r}'(t) \right| \\
&= \left| \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|^2} (\mathbf{r}''(t) - \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|^2} \mathbf{r}'(t)) \right|
\end{aligned}$$

임을 쉽게 보일 수 있다. 그럼 Q에서의 curvature는

$$\kappa = \sqrt{\frac{25}{324} + \frac{1}{81} + \frac{1}{324}} = \frac{\sqrt{30}}{18}$$

이므로, radius는

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{18}{\sqrt{30}} = \frac{3\sqrt{30}}{5}$$

이다.