10.6 연습문제

문제 10. 1. *어떤 입자는 $t \in [0, 4\pi]$의 범위에서 $(\cos^2 t, \cos t)$를 따라 움직인다. 이 입자가 이동한 거리를 구하여라. 이를 입자의 경로가 그린 곡선의 길이와 비교하라.*

이 곡선은 주기를 2π로 하여 이동한다. 이동한 거리는

$$d = \int_0^{4\pi} \sqrt{(-2\cos t \sin t)^2 + (-\sin t)^2} dt = \int_0^{4\pi} |\sin t| \sqrt{4\cos^2 t + 1} dt$$

이며, $\sin t$가 양수인 부분과 음수인 부분을 나누어 생각할 때

$$\int_0^{\pi} \sin t \sqrt{4\cos^2 t + 1} dt = \int_{2\pi}^{3\pi} \sin t \sqrt{4\cos^2 t + 1} dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{4u^2+1} du \quad (u = \cos t)$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} -\sin t \sqrt{4\cos^2 t + 1} dt = \int_{3\pi}^{4\pi} -\sin t \sqrt{4\cos^2 t + 1} dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{4u^2+1} du \quad (u = \cos t)$$

이므로

$$d = 4\int_{-1}^{1} \sqrt{4u^2+1} du = 8\int_0^1 \sqrt{4u^2+1} du$$

이다.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{4u^2+1} du &= \int_0^{\tan^{-1} 2} \frac{1}{2} \sec^3 s ds \quad (u = \frac{1}{2}\tan s) \\ &= \frac{1}{4}\left([\tan s \sec s]_0^{\tan^{-1} 2} + [\ln(\tan s + \sec s)]_0^{\tan^{-1} 2} \right) \\ &= \frac{1}{4}(2\sqrt{5} + \ln(2+\sqrt{5})) \end{aligned}$$

이므로

$$d = 4\sqrt{5} + 2\ln(2+\sqrt{5})$$

이다. 한편 입자의 경로가 그린 곡선은 $[0, \pi]$인 부분에서와 다름이 없다. 따라서 곡선의 길이는 d를 4로 나눈

$$l = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})$$

이다.

문제 10. 2. *C_1과 C_2는 각각*

$$C_1 : r = 1 + \cos\theta, \quad C_2 : r = 1 - \sin\theta$$

로 주어지는 cardioid이다. C_1과 C_2의 교점을 모두 찾고, C_1과 C_2를 기준으로 모두 안쪽에 있는 영역의 넓이를 구하라.

두 곡선은 모두 어떤 θ에 대해서도 $r \geq 0$이다. 따라서 교점을 따질 때 $1 + \cos\theta = 1 - \sin\theta$인 θ만 찾으면 충분하다. 그런 θ는 $\frac{3}{4}\pi$와 $\frac{7}{4}\pi$이다. 한편 둘 모두 원점을 지나기 때문에, 원점도 교점이다. 따라서

$$(0,0), \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{4}\pi\right), \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7}{4}\pi\right)$$

가 원하는 모든 교점이다. 둘의 그래프를 그려보았을 때, 둘 모두의 안쪽에 있는 영역의 넓이는 $r = 1 - \sin\theta$의 그래프에서 $\theta = -\frac{1}{4}\pi$부터 $\theta = \frac{3}{4}\pi$까지의 넓이에 두 배를 한 것과 같다. 즉

$$\begin{aligned} A &= 2\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1}{2}(1-\sin\theta)^2 d\theta \\ &= \int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} 1 - 2\sin\theta + \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{3}{2}\pi - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

문제 10. 3. *cycloid의 parametric equation을 유도하여라. 원의 반지름을 r, 원이 굴러가는 직선을 x축이라 하며, 원 위의 점 P는 $(0,0)$에서 출발하여 시계 방향으로 회전하는 상황을 고려한다. 또한, $0 \le x \le 2\pi r$ 구간에서 그려지는 cycloid가 x축을 기준으로 회전될 때 얻어지는 회전체의 surface area도 구하여라.*

공이 θ만큼 굴러간 상황을 생각하자. 그러면 굴러간 길이는 $r\theta$이므로, 원의 중심의 x좌표는 $r\theta$이다. 원의 중심의 좌표는 $(r\theta, r)$이 된다. 한편 P는 양의 x축을 기준으로 $\theta + \frac{\pi}{2}$의 각도를 가질 것이므로,

$$P = \left(r\theta + r\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), r + r\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right) = (r\theta - r\sin\theta, r - r\cos\theta)$$

임을 알 수 있다. 그러면 주어진 x의 구간에서 θ는 $[0, 2\pi]$로 움직인다. 그러면 회전체의 surface area는

$$S = \int_0^{2\pi} 2\pi(r - r\cos\theta)\sqrt{(r-r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} d\theta = 2\pi r^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)\sqrt{2-2\cos\theta} d\theta$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)\sqrt{2-2\cos\theta} d\theta &= 2\int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} d\theta \\ &= 2\int_0^{2\pi} 2\sin^3\frac{\theta}{2} d\theta \\ &= 8\int_0^{\pi} \sin^3 t dt \quad (t = \frac{\theta}{2}) \\ &= 8\left[-\cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{\pi} = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

이니 $S = \frac{64}{3}\pi r^2$이다.

문제 10. 4. *C_1은 $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1$으로 주어지는 곡선이다. C_2는 $r = 1 + \sin\theta$라는 polar equation에 의해 그려지는 곡선이다.*

(ㄱ) C_1을 $r = f(\theta)$ 형태로 표현하여라.

(ㄴ) C_1과 C_2의 길이를 각각 구하여라.

(ㄷ) 두 곡선을 기준으로 모두 안쪽에 있는 영역을 x축을 기준으로 돌려 얻은 회전체의 surface area를 구하라.

(ㄹ) C_1, C_2에 의해 가두어지는 영역의 넓이를 각각 구하여라.

(ㄱ) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$라고 두면

$$r^{2/3}(\sqrt[3]{\cos^2\theta} + \sqrt[3]{\sin^3\theta}) = 1$$

이므로

$$r = \sqrt{\frac{1}{(\sqrt[3]{\cos^2\theta} + \sqrt[3]{\sin^3\theta})^3}}$$

(ㄴ)

$x = \sin^3\theta$, $y = \cos^3\theta$로 두면 C_1을 잘 표현할 수 있다.

$$L_1 = \int_0^{2\pi} \sqrt{(3\sin^2\theta\cos\theta)^2 + (-3\cos^2\theta\sin\theta)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} 3|\sin\theta\cos\theta| d\theta = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} |\sin 2\theta| d\theta$$

$$L_1 = 6\int_0^{\pi/2} |\sin 2\theta| d\theta = 6$$

$$L_2 = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2+2\sin\theta} d\theta = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1+\cos(\theta-\frac{\pi}{2})}{2}} d\theta = 2\int_0^{2\pi} \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right| d\theta$$

$$L_2 = 8$$

임을 확인할 수 있다.

(ㄷ) 원하는 영역은 그 모양이 정말 어렵긴 하지만, 실제로 내부에 있는 영역을 회전시킨다면 C_2의 것은 신경쓰지 않아도 됨을 알 수 있다. 둘 모두의 내부에 있는 영역에서 경계가 C_2의 일부인 부분은 $y < 0$인 부분에서 존재하는데, $y > 0$에 있는 C_1 곡선에 의해 회전체에서 사라지기 때문이다. 따라서 우리는 그냥 C_1의 $y > 0$인 부분을 돌렸을 때의 회전체 표면적이 정답과 같음을 안다. 더 나아가서는 이 도형이 y축을 기준으로 대칭이므로, 1사분면 부분에 있는 것만 돌린 후 2배를 해주면 된다는 것을 안다.

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi\cos^3\theta \cdot 3|\sin\theta\cos\theta| d\theta = 12\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos^4\theta d\theta = \frac{12}{5}\pi$$

(ㄹ) C_1에 대해서는

$$A_1 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3\theta)\cdot(3\sin^2\theta\cos\theta) d\theta = 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^4\theta d\theta$$

가 성립함을 알 수 있을 것이다. 이를 적분하면 $A_1 = \dfrac{3}{8}\pi$를 얻는다. 한편 C_2에 대해서는

$$A_2 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\sin\theta)^2 d\theta = \frac{3}{2}\pi$$

이 성립한다.

문제 10. 5. *반지름 b의 원 C 위에 있는 고정점 P를 고려하자. C가 중심이 O이고 반지름이 a인 다른 원의 바깥에 붙어 회전할 때, P의 경로는 epicycloid이다. P가 $(a,0)$에서 출발한다고 가정하며, O는 원점이다. 이때 O와 C의 중심을 잇는 선이 양의 x축과 이루는 각도 θ를 이용해 epicycloid를 매개화하여라. 만약 $a = 3, b = 1$이라면 그 개형은 어떻게 되는지 그리거나 묘사하여라.*

O와 C의 중심을 잇는 선이 θ이라면, 두 원의 접점은 출발점 $(a,0)$으로부터 중심원의 원호를 따라 $a\theta$만큼 이동한 것이다. 그러면 작은 원도 이만큼 굴렀어야 하므로, 작은 원의 회전한 각도는 $\frac{a}{b}\theta$임을 알 수 있다. 따라서 P는 O에서 올려본 각도가

$$\pi + \left(1+\frac{a}{b}\right)\theta$$

이다. 구하는 epicycloid는 이제

$$\left((a+b)\cos\theta + b\cos(\pi + \left(1+\frac{a}{b}\right)\theta), (a+b)\sin\theta + b\sin(\pi + \left(1+\frac{a}{b}\right)\theta)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left((a+b)\cos\theta - b\cos\left(\frac{a+b}{b}\theta\right), (a+b)\sin\theta - b\sin\left(\frac{a+b}{b}\theta\right)\right)$$

처럼 쓸 수 있다. $a = 3, b = 1$이라면 이는

$$x = 4\cos\theta - \cos(4\theta), \quad y = 4\sin\theta - \sin(4\theta)$$

이다. 실제로 그래프를 그려본다면, 이는 급식에 나오는 떡국에 들어가는 떡 중 세 잎을 가진 꽃잎 모양의 떡이 붙어서 만들어진 모양과 비슷하다.

문제 10. 6. *$r = 3\cos\theta$와 $r = 1 + \cos\theta$를 고려하자. 이들의 그래프를 그리고, 교점을 모두 묘사하여라. 그 다음, 각각의 곡선 내부에 있는 영역의 넓이를 구하여라.*

$r = 3\cos\theta$는 지름이 3인 원이고, $r = 1 + \cos\theta$는 x축의 음의 방향에서 움푹 파인 cardioid이다. 교점은 $\cos\theta = \frac{1}{2}$인 θ와 그래프 개형을 고려해볼 때

$$(0,0), \quad \left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{3}\right), \quad \left(\frac{3}{2}, -\frac{\pi}{3}\right)$$

의 세 점이 교점이다. 두 곡선 모두의 내부에 있는 영역은 그 넓이가

$$A = 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2 d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(3\cos\theta)^2 d\theta\right)$$

으로 주어짐을 확인할 수 있다. 계산을 거치면

$$A = \frac{5}{4}\pi$$

임을 알 수 있다.

문제 10. 7. *ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$를 polar equation으로 표현하여라. 그 다음, polar coordinate에서 영역의 넓이를 구하는 방법을 통해 그 내부의 넓이가 $ab\pi$임을 보여라.*

이 도형은 focus가 origin이 아니기에 우리가 아는 방법을 사용하기엔 좀 껄끄럽다. $x = r\cos\theta$와 $y = r\sin\theta$라고 할 때

$$r^2(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta) = a^2b^2$$

이므로

$$r = \left(\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

으로 표현해주면 된다. 마이너스 부분을 그려보면 플러스 부분을 그리는 것과 똑같기에, 플러스 부분만 써주어도 문제가 없다. 넓이는

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}r^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{a^2b^2\sec^2\theta}{a^2\tan^2\theta + b^2} d\theta$$

$\tan\theta$를 t로 치환하고 범위 제한을 위해 대칭성을 적극적으로 이용한다면

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2b^2}{a^2t^2 + b^2} dt = \left[ab\arctan\left(\frac{a}{b}t\right)\right]_{-\infty}^{\infty} = ab\pi$$

문제 10. 8. *$0 < a < b$일 때 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$, $\quad 0 \le \theta \le 2\pi$는 어떤 도형인가? 이 도형을 y축을 기준으로 회전시켜 얻은 회전체의 surface area는 얼마인가?*

저 parametric curve는

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

을 만족하기에, 세로로 긴 타원이다. 회전체의 surface area는 θ가 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$의 범위에 있을 때를 고려해 구하면

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 2\pi \cdot |a\cos\theta| \cdot \sqrt{(-a\sin\theta)^2 + (b\cos\theta)^2} d\theta = 2\pi a \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos\theta| \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta} d\theta$$

이며 조금 더 정리하면

$$S = 4\pi a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta} d\theta = 4\pi a \int_0^1 \sqrt{a^2u^2 + b^2(1-u^2)} du \quad (u = \sin\theta)$$

이므로

$$S = 4\pi ab \int_0^1 \sqrt{1 - \frac{b^2 - a^2}{b^2} u^2} du = 4\pi ab \int_0^{\sin^{-1}(\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}})} \cos v \cdot \sqrt{\frac{b^2}{b^2 - a^2}} \cos v dv \quad \left(\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2}} u = \sin v\right)$$

$$S = \frac{2\pi ab^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \int_0^{\sin^{-1}(\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}})} (1 + \cos 2v) dv = \frac{2\pi ab^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \cdot \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2}}\right) + 2\pi a^2$$

문제 10. 9. *polar curve $r^2 = \cos 2\theta$를 polar axis로 회전시켜 얻는 회전체의 surface area는?*

$r^2 = \cos 2\theta > 0$이므로 θ는 한정된 범위에서만 정의된다. 또한 $r = \sqrt{\cos 2\theta}$와 $r = -\sqrt{\cos 2\theta}$의 그래프가 동일하기에, $r = \sqrt{\cos 2\theta}$만 $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$와 $\frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{5\pi}{4}$에서 고려해주면 된다. 따라서 surface area는

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\pi\sqrt{\cos 2\theta} \sin\theta \sqrt{(\sqrt{\cos 2\theta})^2 + \left(\frac{-2\sin 2\theta}{2\sqrt{\cos 2\theta}}\right)^2} d\theta = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta d\theta = (4 - 2\sqrt{2})\pi$$

다.

문제 10. 10. *$r^2 = \cos 2\theta$과 $r^2 = \sin 2\theta$의 그래프를 그리고, 그 교점을 표시하여라. 그 다음 두 곡선을 기준으로 모두 안쪽에 있는 영역의 넓이를 구하라.*

그래프를 그려 보면 하나는 무한대 기호가 수평으로, 하나는 무한대 기호가 45도 기울어져 있는 모습이 나타날 것이다. 교점에서는 $\cos 2\theta = \sin 2\theta$여야 하므로,

$$(0,0), \quad \left(\sqrt[4]{\frac{1}{2}}, \frac{\pi}{8}\right), \quad \left(\sqrt[4]{\frac{1}{2}}, \frac{9\pi}{8}\right)$$

영역의 넓이는

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{2}\cos 2\theta d\theta = [\sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

문제 10. 11. *$r = 1 - \cos\theta$과 $r = \cos\theta$를 고려하여라. 두 그래프를 그리고, 교점을 표시하여라. 이 두 그래프에 의해 갇히는 영역을 R이라 할 때, R을 둘러싸는 곡선의 길이를 구하여라.*

그래프를 그리면 $r = 1 - \cos\theta$가 cardioid고 $r = \cos\theta$는 원이다. 그래프를 그리면 교점이

$$(0,0), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{3}\right)$$

임을 알 수 있을 것이다. 영역 R을 둘러싸는 곡선의 길이는

$$L = 2\left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} d\theta\right) = \frac{1}{3}\pi + 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left|\sin\frac{\theta}{2}\right| d\theta = 8 - 4\sqrt{3} + \frac{1}{3}\pi$$

문제 10. 12. *$r = 1 + 2\cos(2\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$로 표현되는 곡선을 cyloid of ceva라고 한다. 이를 Cartesian equation의 형태로 나타내어라. 또한, 그래프를 그렸을 때 나타나는 네 개의 닫힌 영역에 대하여 각각의 넓이를 구하라.*

$$\sqrt{x^2+y^2} = r = 1 + 2\cos(2\theta)4\cos^2\theta - 1 = \frac{4x^2}{r^2} - 1 = \frac{3x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

이므로

$$(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} = 3x^2 - y^2$$

과 같이 표현할 수 있을 것이다. 네 개의 닫힌 영역을 구분하는 θ의 기준은

$$\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

에서 생기므로 큰 닫힌 영역의 넓이는

$$A_1 = \int_{-\frac{1}{3}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{2}(1+2\cos(2\theta))^2 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 1 + 4\cos 2\theta + 2 + 2\cos 4\theta d\theta = \pi + \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

이며 작은 닫힌 영역의 넓이는

$$A_2 = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{1}{2}(1+2\cos 2\theta)^2 d\theta = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 3 + 4\cos 2\theta + 2\cos 4\theta d\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

이다.

문제 10. 13. *곡선 $r = 1 + c\sin\theta$를 생각하여라. 어떤 c에 대하여 이 곡선이 자기 스스로 교차할 것인가? 또한, c에 따라 이 곡선이 vertical tangent line을 가지는 점의 개수가 어떻게 달라지는지 추적하라.*

cardioid에 대한 이해를 한다면 $|c| > 1$일 때 스스로 교차함을 확인할 수 있을 것이다. 한편 vertical tangent line을 가진다는 것은

$$\frac{dx}{d\theta} = -r\sin\theta + r'\cos\theta = c\cos^2\theta - \sin\theta - c\sin^2\theta = 0$$

이라는 것이다. 만약 $|\cos\theta| = |\sin\theta|$라면 이 값은 절대 0이 될 수 없으므로,

$$c = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos 2\theta}$$

일 것이다. 우변을 θ의 함수로 보면 이는 주기가 2π인 함수인데, θ로 미분할 시

$$\frac{\cos\theta\cos 2\theta + 2\sin 2\theta\sin\theta}{(\cos 2\theta)^2} = \frac{\cos\theta(1+\sin^2\theta)}{(\cos 2\theta)^2}$$

이다. 그러므로 θ에 대해 그 함수를 그려본다면, $(0, 2\pi)$의 범위에서만 볼 때 $(0, \frac{\pi}{4})$에선 0부터 무한대까지 증가하며, $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$에서는 음의 무한대에서 -1까지 증가하다가 다시 감소해 음의 무한대로 간다. 한편 $(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$에서는 양의 무한대에서 음의 무한대로 감소한다. $(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$에서는 양의 무한대에서 감소하다가 1을 기점으로 다시 증가한다. $(\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$서는 음의 무한대에서 0으로 증가한다. 따라서 이를 감안한다면 $|c| > 1$에서는 4개, $|c| = 1$에서는 3개, $|c| < 1$에서는 2개 생긴다.

문제 10. 14. *곡선 $(2\cos t - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t)$를 고려하여라. 이 곡선을 그리고, 길이를 구하자.*

그래프를 그려보면 심장 같은 형태가 나온다. 길이를 구해 본다면

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-2\sin t + 2\sin 2t)^2 + (2\cos t - 2\cos 2t)^2}dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{8 - 8\cos t}dt \\ &= 4\int_0^{2\pi} \left|\sin \frac{t}{2}\right| dt = 16 \end{aligned}$$

문제 10. 15. *$C_1 : f(\theta) = 1 - \cos\theta$, $C_2 : g(\theta) = 1 + \cos\theta$로 표현되는 두 polar equation이 있다. 둘 모두의 안쪽에 있는 영역이 polar axis를 기준으로 회전될 때, surface area를 구하여라.*

대칭성에 의하여

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi \cdot (1-\cos\theta)\sin\theta \cdot \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2}d\theta = 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos\theta)\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}d\theta$$

이다. 정리하면

$$S = 32\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta = 64\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} u^4 du \quad \left(u = \sin\frac{\theta}{2}\right)$$

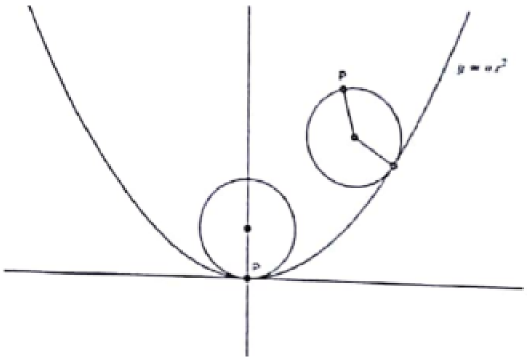
이므로 $S = \frac{8\sqrt{2}}{5}\pi$다.

문제 10. 16. *두 곡선 $r = \sqrt{3}\cos\theta$, $r = \sin\theta$의 안쪽에 있는 영역의 넓이를 구하여라.*

$\theta = \frac{\pi}{3}$와 $\theta = -\frac{\pi}{3}$에서 교점이 생긴다. 영역의 넓이는

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}\sin^2\theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2}\cos^2\theta d\theta = \frac{5}{24}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

문제 10. 17. *반지름이 r인 곡선이 $y = ax^2$이라는 parabola의 안쪽을 구르고 있다. 이때, $a > 0$이고 $r \le \frac{1}{2a}$이다. 원 위의 고정점 P는 원점 $(0,0)$에서 출발한다.*



P의 경로를 매개화하여 표현하여라.

접점의 좌표를 (t, at^2)이라고 하면 해당 점에서 접선의 기울기는 $2at$고 원의 중심과 접점을 잇는 선의 기울기는 $-\frac{1}{2at}$이다. 또한 P가 회전한 각도 θ에 대하여, 구른 각도 $r\theta$는 원점에서 접점까지의 arc length인

$$\int_0^t \sqrt{1+(2ax)^2}dx = \frac{1}{2a}\int_0^{\arctan(2at)} \sec^3 u du = \frac{1}{4a}(2at + \sqrt{1+4a^2t^2} + \ln(2at + \sqrt{1+4a^2t^2}))$$

과 같으므로 원의 중심은

$$\left(t - \frac{2atr}{\sqrt{4a^2t^2+1}}, at^2 - \frac{r}{\sqrt{4a^2t^2+1}}\right)$$

이며 원하는 점 P는

$$\theta(t) = \frac{1}{4ar}(2at + \sqrt{1+4a^2t^2} + \ln(2at + \sqrt{1+4a^2t^2}))$$

에 대하여

$$x = t - \frac{2atr}{\sqrt{4a^2t^2+1}} + \frac{2atr}{\sqrt{4a^2t^2+1}}\cos(\theta(t)) - \frac{r}{\sqrt{4a^2t^2+1}}\sin(\theta(t))$$
$$y = at^2 - \frac{r}{\sqrt{4a^2t^2+1}} + \frac{r}{\sqrt{4a^2t^2+1}}\cos(\theta(t)) + \frac{2atr}{\sqrt{4a^2t^2+1}}\sin(\theta(t))$$

처럼 매개화할 수 있다.

문제 10. 18. *$r = 1 - 2\cos\theta$는 두 개의 루프를 가지고 있다. 안쪽 루프와 바깥쪽 루프의 사이에 있는 영역의 넓이를 구하시오.*

바깥쪽 루프의 안에 있는 영역의 넓이는

$$A_1 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \frac{1}{2}(1-2\cos\theta)^2 d\theta = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} 1 - 4\cos\theta + 2 + 2\cos 2\theta d\theta = 2\pi + \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

문제 10. 19. *중심이 P이고 반지름이 1인 원 위에 점 Q와 S가 있다. 이 원은 중심이 원점 O이고 반지름이 1인 원 바깥에서 미끄러짐 없이 시계 반대 방향으로 구르고 있다. 한편 Q는 중심이 P인 원 위에서 P의 각속도와 동일한 각속도로 시계 반대 방향으로 자체적으로 이동하고 있다. S는 원 위에서 고정되어 움직이지 않는다. 직선 OP과 x축이 이루는 각도를 θ라고 하자. Q와 S의 처음 위치가 $(1, 0)$일 때, S와 Q의 parametric equation을 $0 \le \theta \le 2\pi$에서 구하여라. S는 epicycloid임은 이미 밝혀본 적이 있다.*

그 다음, S의 자취를 기준으로는 안쪽에 있으면서 P의 자취를 기준으로는 바깥에 있는 영역의 넓이를 구하여라.

일반적으로 epicycloid를 parametrization할 때와 동일한 방식으로 해내면 된다. 그러면

$$S = (2\cos\theta - \cos 2\theta, 2\sin\theta - \sin 2\theta)$$

를 얻으며, Q는 θ만큼 더 돌아간 것이므로

$$Q = (2\cos\theta - \cos 3\theta, 2\sin\theta - \sin 3\theta)$$

이게 된다.

한편 S의 자취와 P의 자취가 만나는 점을 생각하려면 S의 자취 중 원점과의 거리가 2인 θ를 찾으면 된다.

$$(2\cos t - \cos 2t)^2 + (2\sin t - \sin 2t)^2 = 4$$

를 정리하면 $\cos t = \frac{1}{4}$이고, 두 교점이

$$\left(\frac{11}{8}, \pm\frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$$

다. S의 자취 중 $\cos t = \frac{1}{4}$인 t로부터 $t = \pi$에 이르기까지의 그래프와 x축 사이에 있는 영역의 넓이는

$$\left|\int_{\arccos(\frac{1}{4})}^{\pi} (2\sin t - \sin 2t)\cdot(-2\sin t + 2\sin 2t)dt\right| = \frac{129}{128}\sqrt{15} + 3\pi - 3\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$$

며 P의 자취는 동일한 영역의 넓이가

$$\frac{\sqrt{15}}{32} + 2\pi - 2\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$$

이므로, 원하는 영역의 넓이는

$$\frac{125}{64}\sqrt{15} + 2\pi - 2\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$$

이다.

문제 10. 20. *두 곡선 C_1, C_2는*

$$C_1 : r^2 = \sin\theta\cos\theta, \quad C_2 : r = \sin\theta$$

로 주어진다. 이 두 곡선을 그리고, 두 곡선이 horizontal/vertical tangent를 가지거나, 서로 만나는 모든 점을 표시하여라. 또한, 둘 모두의 안쪽에 있는 영역의 넓이를 구하여라.

둘 다 앞에서 그려본 형태의 곡선들이다. 특히 앞의 곡선은

$$r^2 = \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

임을 감안하면 더욱 좋다.

먼저 C_1은

$$r = \sqrt{\frac{\sin(2\theta)}{2}}$$

로 들여다 보면 충분하다.

$$\frac{dx}{d\theta} = -r\sin\theta + r'\cos\theta = -\sqrt{\frac{\sin(2\theta)}{2}}\sin\theta + \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{2\sin 2\theta}}\cos\theta = \frac{\cos 3\theta}{\sqrt{2\sin 2\theta}}$$

이므로 vertical tangent는 $\cos 3\theta = 0$인 $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$에서 생성되며 각각의 점들은 r으로

$$\frac{3^{\frac{1}{4}}}{2}, 0, \frac{3^{\frac{1}{4}}}{2}, 0$$

을 가진다. 한편

$$\frac{dy}{d\theta} = r\cos\theta + r'\sin\theta = \frac{\sin 3\theta}{\sqrt{2\sin 2\theta}}$$

이므로 $\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{4}{3}\pi$에서 horizontal tangent가 만들어지고 각각에서 r은

$$0, \frac{3^{\frac{1}{4}}}{2}, 0, \frac{3^{\frac{1}{4}}}{2}$$

이다.

C_2는 원이므로 vertical asymptote가

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$$

에서 생기며 horizontal asymptote는

$$(0,0), \quad \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$$

에서 생긴다. 둘의 교점은

$$(0,0), \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$$

이다.

둘 모두의 안쪽에 있는 영역의 넓이는 아래처럼 구할 수 있다.

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\sin^2\theta d\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta d\theta=\frac{1}{16}\pi-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{16}\pi$$

문제 10. 21. *두 곡선 $r=3+2\cos\theta$와 $r=3+2\sin\theta$의 안쪽에 있는 영역의 넓이를 구하여라.*

$$\begin{aligned}A&=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\frac{1}{2}(3+2\cos\theta)^2d\theta\\&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}11+12\cos\theta+2\cos2\theta d\theta\\&=11\pi-12\sqrt{2}\end{aligned}$$

문제 10. 22. *곡선*

$$r=\left(\cos\frac{\theta}{3}\right)^3$$

의 길이를 구하여라.

이 곡선은 cos의 성질을 고려해 직접 그려본다면 주기가 3π이다. 따라서 $(0,3\pi)$에서 arc length formula를 이용하면

$$\begin{aligned}L&=\int_0^{3\pi}\sqrt{\left(\cos\frac{\theta}{3}\right)^6+\left(-\cos^2\frac{\theta}{3}\sin\frac{\theta}{3}\right)^2}d\theta\\&=\int_0^{3\pi}\cos^2\frac{\theta}{3}d\theta=\frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

이다.

문제 10. 23. *원 C는 중심이 원점이고 반지름이 2인 원이다. 반지름이 1인 원 D가 C의 주위를 미끄러짐 없이 반시계 방향으로 구르고 있다. L을 C와 D의 중심을 잇는 직선이라 하고, 이것이 x축과 이루는 각도를 θ라고 하자. 한편 종찬이는 잘 구르고 있던 D를 C 기준으로 밖에서 안쪽으로 옮겨 동일한 방식으로 굴렸다. 이때 D 위에 있는 고정점 P는 각각 epicycloid와 hypocycloid를 그리게 될 것이다. P가 그리는 두 곡선 사이에 있는 영역의 넓이를 구하여라. P의 시작점이 어디에 있는지는 정답에 영향을 미치지 않음을 (말 혹은 수식으로) 설명한다면 이를 이용하여도 된다.*

큰 원의 반지름이 2로, 작은 원의 반지름인 1의 정수배이므로 P의 자취는 epicycloid이든, hypocycloid이든 항상 2π를 주기로 같은 점을 지나게 된다. 즉 P의 자취는 항상 폐곡선을 그린다. 따라서 P가 어떤 점에서 시작하든, 둘의 자취는 rotating만 될 뿐, 폐곡선 안 쪽의 넓이는 변하지 않는다. 더불어 epicycloid는 항상 원 C의 원호 바깥에, hypocycloid는 항상 C의 원호 안쪽에 있기에 서로 rotating된다고 해서 겹치지 않으며, 이는 원하는 영역의 넓이가 변하지 않는다는 것의 근거가 된다. 위와 같은 방식으로 대강 설명해주기만 하면 정당성을 얻기엔 충분하다.

이제 hypocycloid부터 생각하자. P가 $(2,0)$부터 출발한다고 했을 때 hypocycloid의 자취는 놀랍게도 x축 위의 직선 $-2\le x\le 2, y=0$이다. 즉 그 내부에 있는 영역은 없다. 한편 epicycloid의 자취는

$$(3\cos t-\cos(3t),3\sin t-\sin(3t))$$

이며 내부의 넓이는

$$A=4\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\sin t-\sin(3t))\cdot(-3\sin t+3\sin(3t))dt\right|=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sin^2t-4\sin t\sin3t+\sin^2 3tdt=12\pi$$

이다. 그러므로 우리가 원하는 값은 12π이다.

문제 10. 24. *polar equation으로 주어진 곡선*

$$r = 1 + \cos\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi$$

에 대하여 점 $(2,0)$에서부터 잰 arc length function을 $s(\theta)$라고 두자. 이 곡선을 s를 통해 좌표평면에서 매개화하면

$$(p(s), \sqrt{q(s)})$$

처럼도 쓸 수 있다고 한다. s의 범위와 $p(s), q(s)$를 구하여라.

$$s(\theta) = \int_0^\theta \sqrt{(1+\cos u)^2 + (-\sin u)^2} du = 2\int_0^\theta \left|\cos\frac{u}{2}\right| du = 4\sin\frac{\theta}{2}$$

이므로 s의 범위는 $0 \le s \le 4$이다. 또한 $\theta = 2\arcsin(\frac{s}{4})$이므로

$$p(s) = r\cos\theta = \cos\theta + \cos^2\theta = (1-\frac{s^2}{8}) + (1-\frac{s^2}{8})^2 = \frac{1}{64}x^4 - \frac{3}{8}s^2 + 2$$

$$\sqrt{q(s)} = r\sin\theta = \sin\theta + \sin\theta\cos\theta = 2\cdot\frac{s}{4}\cdot\sqrt{1-\frac{s^2}{16}} + \frac{s}{8}\sqrt{16-s^2}(1-\frac{s^2}{8}) = \frac{s}{8}\sqrt{16-s^2}(2-\frac{s^2}{8})$$

$$q(s) = \frac{s^2}{64}(16-s^2)(4-\frac{s^2}{2}+\frac{s^4}{64})$$

문제 10. 25. *곡선*

$$\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\cos\tan^{-1}t, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\sin\tan^{-1}t\right), \quad t \ge 0$$

의 $(0,0)$에서부터 잰 arc length function $s(t)$을 구하여라.

$u = \tan^{-1}t$로 두고 저 곡선을 u로 parametrization한다면

$$(\sin u\cos u, \sin^2 u)$$

처럼 표현이 가능하다. $t = 0$일 때 $u = 0$이며 곡선 위의 점 $(0,0)$이 $u = 0$에 해당하는 점이므로

$$s(u) = \int_0^u \sqrt{(\cos^2 v - \sin^2 v)^2 + (2\sin v\cos v)^2} dv = u$$

가 성립한다. 그러면

$$s(t) = s(\tan u) = \tan u$$

가 성립함을 알 수 있을 것이다.

문제 10. 26. *곡선*

$$(e^{\sqrt{t}}\cos\sqrt{t}, e^{\sqrt{t}}\sin\sqrt{t}), \quad t \ge 0$$

에 대하여, $0 \le t \le 4\pi^2$의 구간에서 잰 arc length를 구하라.

$u = \sqrt{t}$로 parametrize하면

$$(e^u\cos u, e^u\sin u), 0 \le u \le 2\pi$$

에서 arc length를 구하는 것과 같다.

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(e^u\cos u - e^u\sin u)^2 + (e^u\cos u + e^u\sin u)^2} du = \sqrt{2}[e^u]_0^{2\pi} = \sqrt{2}(e^{2\pi}-1)$$

문제 10. 27. *곡선*

$$r = \frac{\sec\theta}{1+2\tan\theta}$$

를 $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ *의 범위에서 그리고,* $\theta \in [\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi]$*일 때 길이를 구하여라.*

이 그래프를 그리면 그 형태가 직선으로 나온다. 따라서 주어진 θ 구간에서 곡선의 길이는 곧 직선의 길이와 같다. $\theta = \frac{7}{4}\pi$일 경우 점은 $(-1,1)$이며, $\theta = \frac{5}{4}\pi$일 경우의 점은 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$이므로 피타고라스 정리에 의하여 직선의 길이가 $\frac{2\sqrt{5}}{3}$이다.

문제 10. 28. *Cartesian coordinate에서*

$$x^2 + y^2 = 2\sqrt{x^2 - y^2}$$

가 주어져 있다. 이를 $\frac{y}{x} = \tan\theta$*인* θ*에 대한 parametric curve로 바꾸고, 개형을 그려라. 그 다음, 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하라.*

$y = x\tan\theta$라면

$$x^2 + x^2\tan^2\theta = 2\sqrt{x^2 - x^2\tan^2\theta}$$

이므로

$$x^2\sec^2\theta = 2|x|\sqrt{1-\tan^2\theta}$$

이며

$$|x| = 2|\cos\theta|\sqrt{\cos 2\theta}$$

이다. 한편 $|y| = 2|\sin\theta|\sqrt{\cos 2\theta}$를 얻는다.

개형을 그리면 무한대처럼 나타나며, parametric curve로 매끄럽게 그리면

$$(2\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta}, 2\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta})$$

이다.

이를 다르게 표현해 극좌표에서 보면 $r^2 = 4\cos 2\theta$인데, 그럼 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\cdot 4\cos 2\theta d\theta = 4$$

문제 10. 29.

$$C_1 : r = \cos 2\theta, \quad C_2 : r = \frac{1}{2}$$

에 대하여, C_1*과* C_2*의 모든 교점을 구하고 각 교점에서 두 교선이 이루는 각* ϕ*의* $\tan\phi$*를 구하시오.*

$\cos 2\theta = \pm\frac{1}{2}$인 점을 찾아주면 되기에 교점은 총 8개이다. θ는

$$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}$$

일 때며, $r = \frac{1}{2}$이다. 이 8개의 점에서 대칭성에 의하여 $\tan\phi$의 값은 같다. $\theta = \frac{\pi}{6}$일 때를 보자.

먼저 $r = \frac{1}{2}$에서는 접선의 기울기가 원의 성질에 의해 $-\sqrt{3}$이다. 한편, $r = \cos(2\theta)$ 도형에서는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\cos(2\theta)\cos\theta - 2\sin(2\theta)\sin\theta}{-\cos(2\theta)\sin(\theta) - 2\sin(2\theta)\cos(\theta)}$$

이므로 원하는 점에서는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}$$

이게 된다. 그러면 탄젠트 합공식에 의하여

$$\tan\phi = \frac{\frac{1}{3}+\sqrt{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1+3\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

이다.

문제 10. 30. *directrix가 $r=-2\sec\theta$로 주어지며 focus가 origin인 conic section을 생각하여 보자.*
(ㄱ) eccentricity가 $0.5, 1, 2$로 변함에 따라 해당 conic section은 어떻게 변하는가?
(ㄴ) eccentricity가 위처럼 변한다면, conic section은 어떤 polar equation으로 표현할 수 있는가?
(ㄷ) eccentricity가 0부터 점점 증가함에 따라, 도형의 $x<0$인 부분과 y축 사이에 가두어지는 영역의 넓이가 점점 커짐을 밝혀라. 또, eccentricity가 0에 아주 가까운 양수일 때와, 양의 무한에 아주 가까워지는 때 그 넓이는 각각 얼마에 가까워질 것인지도 말하여라.

directrix가 $r=-2\sec\theta$라는 것은 곧 Cartesian coordinate에서는 $x=-2$라는 것이나 마찬가지이다. 그 다음 우리가 아는 공식을 이용하면, conic section의 식은

$$r = \frac{2e}{1-e\cos\theta}$$

의 형태로 주어짐을 알 수 있을 것이다.

(ㄱ) e가 $0.5, 1, 2$로 변함에 따라 conic section은 ellipse, parabola, hyperbola가 된다.

(ㄴ) e에 관계없이, conic section은

$$r = \frac{2e}{1-e\cos\theta}$$

처럼 표현할 수 있다.

(ㄷ) e가 양수일 때 $x<0$인 부분은 항상 θ가 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$에 있을 때 만들어진다. 원하는 넓이는

$$A(e) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{2}r^2 d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{4e^2}{(1-e\cos\theta)^2}d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{4}{(\cos\theta-\frac{1}{e})^2}d\theta$$

이다. 이때 $\cos\theta \le 0$이기 때문에,

$$\cos\theta - \frac{1}{e}$$

는 e에 대한 감소함수이며, 항상 음수이다. 따라서 피적분함수는 어떤 θ에 대해서라도 e에 대한 감소함수이다. 그러므로 $e_1 < e_2$이면 $A(e_1) < A(e_2)$임이 성립한다.

한편 e가 0에 아주 가깝다면 분모가 무한대로 발산하기에, 피적분함수가 0으로 수렴한다. 따라서 한정된 구간에서 이를 적분하면

$$\lim_{e\to 0^+} A(e) = 0$$

이다. 반면 e가 무한대에 가까워지면 $\frac{1}{e}$가 0으로 수렴하기에, $4\sec^2\theta$를 적분하면 된다. 주어진 구간에서 이 적분은 무한대로 발산한다. 따라서

$$\lim_{e\to\infty} A(e) = \infty$$