11.10 연습문제

별도의 말이 없는 문제는 해당 series가 absolutely convergenent인지, conditionally convergent인지, divergent인지 판정하시면 됩니다.

문제 11. 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{1+3^n}}$$

root test를 사용하자.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{3^{1+3^n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^{\frac{1+3^n}{n}}}$$

인데, $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n^2} = \infty$이므로 n이 충분히 크면

$$\frac{1+3^n}{n} > n$$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^n} = 0$$

임에 따라

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^{\frac{1+3^n}{n}}} = 0$$

이므로, root test에 의하여 이는 absolutely converge이다.

문제 11. 2.

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)\sqrt{(\ln k)^2 - 1}}$$

충분히 큰 k에 대하여

$$\frac{1}{k(\ln k)\sqrt{(\ln k)^2 - 1}} \le \frac{2}{k(\ln k)^2}$$

가 성립하므로, Comparision test에 의하여,

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2}{k(\ln k)^2}$$

가 converge하면 이 series도 converge이다. 그런데 함수

$$f(x) = \frac{2}{x(\ln x)^2}$$

는 x에 대한 decreasing, positive, continuous function이므로 Integral test에 의하여 그 converge 여부는

$$\int_3^{\infty} \frac{2}{x(\ln x)^2} dx$$

의 converge 여부와 같다. 한편 $x = e^t$로 치환하면

$$\int_3^{\infty} \frac{2}{x(\ln x)^2} dx = \int_{\ln 3}^{\infty} \frac{2}{t^2} dt = \frac{2}{\ln 3}$$

으로 converge하기에, 주어진 series

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)\sqrt{(\ln k)^2 - 1}}$$

는 converge한다. 한편 모든 term이 양수기도 하므로, absolutely converge이다.

문제 11. 3.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$$

모든 n에 대하여 $\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}$이 양수이므로 이는 alternating series이며,

$$\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+1}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n(\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n})\neq 0$$

이다. test for divergence에 의하여 이는 diverge.

문제 11. 4.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\arctan\frac{1}{n}$$

$\arctan\dfrac{1}{n}>0$이므로 이는 alternating series이다. 또한 arctan은 증가함수이므로

$$\arctan\frac{1}{n+1}<\arctan\frac{1}{n}$$

이며

$$\lim_{n\to\infty}\arctan\frac{1}{n}=\arctan 0=0$$

이므로, altrnating series test에 의하여 이는 converge.

한편 $\sum\arctan\frac{1}{n}$은

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\arctan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$$

인데 $\sum\frac{1}{n}$이 diverge임에 따라 limit comparison test에 의하여 diverge이다. 따라서 이는 conditionally converge.

문제 11. 5.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cosh\frac{1}{n}\right)$$

먼저 이 series의 converge 여부는 여기에 0이 아닌 상수를 곱한

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cosh\frac{1}{n}-1\right)$$

의 convergee 여부와 같다. 이때 $\cosh\frac{1}{n}-1>0$이다.

limit comparison test를 사용할 것이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cosh\dfrac{1}{n}-1}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos hx-1}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sinh x}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cosh x}{2}=\frac{1}{2}$$

이기에 주어진 series의 converge 여부는

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

의 그것과 같다. 그런데 이는 converge임이 p-series에서 알려져 있다. 또한 모든 항은 양수이다. 따라서 우리의 series는 absolutely converge다.

문제 11. 6. *아래 power series의 interval of convergence를 구하여라.*

$$1 + \frac{2x-1}{2 \cdot 1} + \frac{(2x-1)^2}{2^2 \cdot 2} + \cdots + \frac{(2x-1)^n}{2^n \cdot n} + \cdots$$

우리가 아는 형태로 조금 바꾸어 보자. 그러면

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2x-1}{2 \cdot 1} + \frac{(2x-1)^2}{2^2 \cdot 2} + \cdots + \frac{(2x-1)^n}{2^n \cdot n} + \cdots &= 1 + \frac{x - \frac{1}{2}}{1} + \frac{(x-\frac{1}{2})^2}{2} + \cdots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(x - \frac{1}{2} \right)^n \end{aligned}$$

이 된다. 1은 converge 여부와 무관하기에, 우리의 관심은

$$\sum \frac{1}{n}(x - 0.5)^n$$

의 interval of convergence에 있다. ratio test를 수행한다면

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\frac{1}{n+1}(x-0.5)^{n+1}|}{|\frac{1}{n}(x-0.5)^n|} = \left| x - \frac{1}{2} \right|$$

이므로 $x \in (\frac{-1}{2}, \frac{3}{2})$에서 converge한다. 한편 $\frac{3}{2}$일 때에는 이는 harmonic series이므로 diverge하고, $\frac{-1}{2}$일 때에는 그 합이 유한함을 밝혔었다. 따라서 intereval of convergence는

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

다.

문제 11. 7.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$$

의 interval of convergence를 구하여라.

ratio test를 활용하려 한다.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\frac{(x+1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}|}{|\frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}|} = |x+1|$$

이기에 $(-2, 0)$에서 converge한다. 한편 $x = 0$이라면 이는 $p = \frac{1}{2}$인 p-series이므로 diverge한다. $x = -2$라면

$$\sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

인데, 이는 alternating series이며

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

이므로 alternating series test에 의하여 converge다. 따라서 interval of convergence는

$$[-2, 0)$$

이다.

문제 11. 8.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n$$

의 interval of convergence를 구하여라.

ratio test를 활용하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}|x|^{n+1}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}|x|^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}|x|$$

이다. 그런데 우리가 harmonic series가 diverge함을 알기에 n이 충분히 크면

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

이 양의 무한대로 발산함에 따라

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}=1$$

이다. 따라서 연속된 두 항의 절댓값의 비가 $|x|$므로 ratio test에 의해

$$(-1,1)$$

에서 이는 converge다. 만약 $|x|=1$이라면,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}x^n\neq 0$$

이므로 test for divergence에 의해 diverge다. 그러므로 interval of convergence는 $(-1,1)$이다.

문제 11. 9.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

의 interval of convergence를 구하여라.

ratio test를 이용한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2n+3)!}|x|^{2n+3}}{\frac{1}{(2n+1)!}|x|^{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}|x|^2=0$$

이므로 이는 모든 실수 x에서 converge한다. 따라서 interval of convergence는 $(-\infty,\infty)$다.

문제 11. 10. *함수*

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{16-x}}$$

의 Maclaurin series를 구하여라.

$$g(x)=(16-x)^{-\frac{1}{4}}$$

이므로

$$g'(x)=(-1)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(16-x)^{-\frac{5}{4}}=\frac{1}{4}(16-x)^{-\frac{5}{4}}$$

$$g''(x) = \frac{1 \cdot 5}{4^2}(16-x)^{-\frac{9}{4}}$$

$$\vdots$$

$$g^{(n)}(x) = \frac{1 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (4n-3)}{4^n}(16-x)^{-\frac{4n+1}{4}}$$

이며

$$g^{(n)}(0) = \frac{1 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (4n-3)}{4^n} \cdot 4^{-\frac{4n+1}{2}} = \left(\prod_{k=1}^{n}(4k-3)\right) \cdot 4^{-3n-\frac{1}{2}}$$

다. 따라서 Maclaurin series는

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n}(4k-3)}{2^{6n+1}} x^n$$

처럼 주어진다.

문제 11. 11. *함수*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & if \quad x > 0 \\ 0 \quad if \quad x \le 0 \end{cases}$$

에 대하여, f가 $x = 0$에서 모든 차수의 derivative를 가짐을 보여라. 또한, 그 형태가 $2k$차 다항식 $p_k(t)$에 대하여

$$f^{(k)}(1/t) = p_k(t)e^{-t}$$

의 형태임을 이용하여 f의 Maclaurin series를 구하여라.

$x = \frac{1}{t}$이라고 하자.

$$f'(1/t) = f'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = t^2e^{-t}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx} = \frac{dt}{dx} \cdot \frac{d}{dt}f'(1/t) = (-t^2) \cdot (2te^{-t} - t^2e^t) = (t^4 - 2t^3)e^{-t}$$

이처럼 f가 k번 differentiable이며 $2k$차 다항식 $p_k(t)$에 대하여

$$f^{(k)}(1/t) = p_k(t)e^{-t}$$

이라면,

$$f^{(k+1)}(1/t) = -t^2\frac{d}{dt}(p_k(t)e^{-t}) = (t^2p_k(t) - t^2p_k'(t))e^{-t}$$

이고 $p_{k+1}(t) = t^2p_k(t) - t^2p_k'(t)$는 $2(k+1)$차 다항식이다. 또한 $f^{(k+1)}(1/t)$는 differentiable이게 된다. 그러미 f는 $k+1$번 differentiable이다. 수학적 귀납법에 의해 주어진 명제는 성립하게 된다. 더불어

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}e^{-\frac{1}{h}} = 0$$

이다. $f^{(k)}(0) = 0$이라고 가정할 때,

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(k)}(h) - f^{(k)}(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{p_k(1/h)}{he^{\frac{1}{h}}}$$

인데, p_k는 다항함수이므로 이는 h가 0으로 갈 때 0이다. 따라서 $f^{(k+1)}(0) = 0$이다. 수학적 귀납법에 의해 모든 차수의 derivative는 0이다. 그러므로 Maclaurin serie는 0이다.

문제 11. 12. *함수*

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\arcsin x}{x} & if \quad x \ne 0 \\ 1 \quad if \quad 0 \end{cases}$$

의 Maclaurin series를 구하여라.

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

이다. 함수 $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$에 대하여

$$\frac{d^k}{dx^k}(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2k-1)}{2^k}(1-x)^{-\frac{2k+1}{2}}$$

이므로 그 Maclaurin serie는

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^n n!}x^n$$

이다. x 대신 x^2을 넣는다면

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^n n!}x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}x^{2n}$$

이고 양변을 적분하면

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

을 얻을 수 있다. 이를 x로 나눈 $h(x)$는

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{x^{2n}}{2n+1}$$

이며, $x=0$일 때 이 값은 1으로 $h(0)$의 값과도 같다. 따라서 이것이 h의 Maclaurin series다.

문제 11. 13. *부산진구에 사는 오 모씨네 셋째 아들 일러가 e^x의 Maclaurin series에서 x 대신 ix를 넣어 아래의 공식을 만들어냈다.*

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

i가 $i^2=-1$인 imaginary number라고 할 때, Maclaurin series를 이용해 오일러군의 공식을 증명하여라.

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(ix)^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}(-x^2)^k + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}(-x^2)^k\cdot ix \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \\
&= \cos x + i\sin x
\end{aligned}$$

문제 11. 14.

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n}x^n$$

일 때,

$$g'(x) = \frac{kg(x)}{1+x}, \quad -1 < x < 1$$

임을 보여라. 또한 이 differential equation을 이용해 $g(x)$를 구하여라. 단, $g(x)$는 $|x|<1$에서 정의된다.

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\binom{k}{n}x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \binom{k}{n} x^{n-1}$$

이므로

$$\begin{aligned}
(1+x)g'(x) &= g'(x) + xg'(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{k}{n}x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{k}{n}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\binom{k}{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n\binom{k}{n}x^n \\
&= k + \sum_{n=1}^{\infty}\left((n+1)\binom{k}{n+1} + n\binom{k}{n}\right) \\
&= k + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{k}{n} \cdot kx^n \\
&= k\sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n}x^n = kg(x)
\end{aligned}$$

이며, 정리하면

$$g'(x) = \frac{kg(x)}{1+x}$$

이다. 한편 differential equation을 풀면 이는 separable이므로

$$\ln(|g(x)|) = k\ln(1+x) + C$$

이고,

$$g(x) = A(1+x)^k$$

이다. 그런데 $g(0) = 1$이므로, $A = 1$이다. 따라서

$$g(x) = (1+x)^k$$

문제 11. 15.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tanh\frac{1}{n}\right)$$

limit comparision test를 이용하자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tanh\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sinh x}{x\cosh x} = 1$$

이므로 이는 $\sum \frac{1}{n}$이 diverge함에 따라 diverge한다.

문제 11. 16.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \cdots \cdot (4n-1)(x-3)^n}{4^n}$$

의 interval of convergence를 구하여라.

ratio test를 수행하여 보자.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+2}3\cdot7\cdot11\cdot\cdots\cdot(4n+3)(x-3)^{n+1}}{4^{n+1}}}{\frac{(-1)^{n+1}3\cdot7\cdot11\cdot\cdots\cdot(4n-1)(x-3)^{n}}{4^{n}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{4n+3}{4}|x-3| = \begin{cases}0 & (x=3)\\ \infty & (x\neq 3)\end{cases}$$

따라서 ratio test에 의하여 이는 $x=3$에서만 converge한다. interval of convergence는 $x=3$.

문제 11. 17.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4n^2(x)^{2n-1}$$

의 radius of convergence를 구하여라. 더불어 이를 이용해

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4n^2\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

의 값도 구하라.

ratio test를 이용하면

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4(n+1)^2x^{2n+1}}{4n^2x^{2n-1}}\right| = |x|^2$$

이므로 $|x|<1$에서 converge, $|x|>1$에서 diverge이다. 따라서 radius of convergence는 1이다. $-1<x<1$에서 이 함수를 $f(x)$라고 하자.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4n^2\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0} 4n^2\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)$$

이 $f(x)$의 radius of convergence인 1보다 $\frac{1}{2}$의 절댓값이 작음에 따라 성립한다. 그러면 term-by-term integration을 수행할 경우

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n} = x\sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n-1}$$

인데,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n-1} &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}\right)\\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)\\ &= \frac{2x}{(1-x^2)^2}\end{aligned}$$

임에 따라

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2x^2}{(1-x^2)^2}\right) = \frac{4x}{(1-x^2)^3}$$

이다. 따라서 원하는 값은

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4n^2\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{64}{27}$$

문제 11. 18.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$$

을 구하여라.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2(2k)+1}\left(-\frac{1}{3}\right)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2(2k+1)+1}\left(-\frac{1}{3}\right)^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4k+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4k+1}\cdot\sqrt{3} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4k+3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4k+3}\cdot(-\sqrt{3})\end{aligned}$$

$$f_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4k+1}x^{4k+1}$$

이라고 두면

$$f_1'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}x^{4k} = \frac{1}{1-x^4}$$

이므로

$$f_1(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^4}dt = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{1}{2}\tan^{-1}(x)$$

이고

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4k+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4k+1} = f_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right) + \frac{\pi}{12}$$

이다.

$$f_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4k+3}x^{4k+3} = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^4}dt = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{2}\tan^{-1}x$$

이기에

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4k+3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4k+3} = f_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right) - \frac{\pi}{12}$$

이다. 이를 종합하면

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)} = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

이다.

문제 11. 19.

$$h(x) = \frac{2x+1}{(x+1)^2}$$

의 Maclaurin series를 구하여라. 일반적으로 아는 함수의 Maclaurin series를 응용해도 좋다.

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n \quad |x|<1$$

이므로, 양변을 미분하면

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot nx^{n-1}, \quad |x|<1$$

이다. 양변에 $-(2x+1)$을 곱하면

$$h(x) = \frac{2x+1}{(x+1)^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot nx^n + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot nx^{n-1}$$

$$h(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot (n-1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n-1)x^n$$

이다.

문제 11. 20.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) &= \lim_{t\to\infty}\sum_{n=2}^{t} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\
&= \lim_{t\to\infty}\sum_{n=2}^{t}(\ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln(n)) \\
&= \lim_{t\to\infty} \ln(t+1) - \ln(t) + \ln(1) - \ln(2) = -\ln(2)
\end{aligned}$$

이므로 이 series는 sum이 존재하는 convergent series이다. 한편

$$\left|\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right| = -\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

이므로 주어진 급수에 -1을 곱하여도 converge임에 따라 absolutely convergent다.

문제 11. 21.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

함수

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$$

는 positive, continuous, decreasing이므로 Integral test에 의하여 이 series의 converge 여부는

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}dx$$

의 converge 여부와 같다. 그런데

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}dx = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \infty$$

이다. 따라서 이 series는 diverge한다.

문제 11. 22.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}}$$

n이 커짐에 따라 $\sin(\frac{1}{n})$은 항상 양수의 범위에 있으므로, 이 series의 모든 term은 positive이다. limit comparision test를 사용하면

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sin(\frac{1}{n})}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1$$

이므로 이 series의 converge 여부는 $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$의 그것과 같다. 이 series는 $p = \frac{3}{2}$인 p-series이므로 converge다. 따라서 이 series는 absolutely convergent다.

문제 11. 23.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\arctan n)^n}$$

먼저 이 series는 alternating series이고,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\arctan n)^n} = 0$$

이며

$$\frac{1}{(\arctan(n+1))^{n+1}} < \frac{1}{(\arctan n)^n}$$

이므로 alternating series test에 의하여 convergent이다. 한편

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\arctan n)^n}$$

은

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\arctan n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\arctan n} = \frac{2}{\pi} < 1$$

이므로 root test에 의하여 convergent이다. 따라서 이는 absolutely convergent.

문제 11. 24.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$0 < \frac{\pi}{n} \leq \pi$이므로, $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$은 양수이기에 이는 alternating series이다.

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 0$$

이며

$$\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \leq \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

이므로 alternating series test에 의하여 이는 convergent이다. 한편

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

은 limit comparison theorem에서

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = 1$$

인데 $\sum \frac{\pi}{n}$이 p-series여서 diverge임에 따라 diverge한다. 따라서 이는 conditionally convergent series이다.

문제 11. 25.

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L, \quad \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$$

일 때, $\{a_n\}$이 convergent임을 보여라. 또한 그 limit이 무엇인지 $\varepsilon - \delta$로 밝혀라.

모든 양수 $\varepsilon > 0$에 대하여 상응하는 N_1, N_2가 있어 $n \geq N_1$이면

$$|a_{2n} - L| < \varepsilon$$

이고 $n \geq N_2$이면

$$|a_{2n+1} - L| < \varepsilon$$

이다. 그러면 $N = \max\{N_1, N_2\}$일 때 $n \geq N$이라면

$$|a_{2n} - L| < \varepsilon, \quad |a_{2n+1} - L| < \varepsilon$$

이므로 $M = 2N$에 대하여 $n \geq M$이라면

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

이다. 따라서 $\{a_n\}$은 convergent이며 limit은 L이다.

문제 11. 26. *sequence* $\{a_n\}$*이*

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$$

을 만족하고 $a_1 = 1$*이라고 한다. 이 sequence가 convergent임을 보이고, 그 limit을 찾아라.*

위의 문제를 적극적으로 이용하도록 하자. 만약 이 sequence의 limit이 존재한다면, 이를 L이라고 둘 때

$$L = 1 + \frac{1}{L}$$

이므로 $L = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$이다. 이를 기준으로 문제를 풀어볼 것이다. 먼저 정수 k에 대하여 $a_{2k} > L$이다. 먼저 $a_2 = 2 > L$이며, $a_{2k} > L$일 때

$$a_{2k+2} = 1 + \frac{1}{a_{2k+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_{2k}}} > 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{L}} = L$$

이므로 수학적 귀납법에 의해 $a_{2k} > L$이다. 한편 $a_{2k+1} = 1 + \frac{1}{a_{2k}} < 1 + \frac{1}{L} = L$이 성립한다. 이때

$$a_{2k+2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_{2k}}} < a_{2k}$$

가 $a_{2k} > L$임에 따라 성립하기에, a_{2k}는 decreasing이다. L이 이 sequence의 모든 항보다 작기에, monotonic sequence theorem에 의하여 a_{2k}는 converge한다. 한편 $a_{2k+1} < L$이므로

$$a_{2k+3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_{2k+1}}} > a_{2k+1}$$

이고, a_{2k+1}은 increasing이다. L이 이 sequence의 모든 항보다 크기에, monotonic sequence theorem에 의하여 a_{2k+1}은 converge한다. 각각의 limit이 s_1, s_2라고 할 때

$$s_1 = 1 + \frac{1}{s_2}, \quad s_2 = 1 + \frac{1}{s_1}$$

이므로 $s_1 = s_2 = L$이고, 위 문제에 의하여 이 sequence는 convergent이며

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

문제 11. 27.

$$g(t) = \begin{cases} 1 & if \quad t = 0 \\ \dfrac{\sin t}{t} & if \quad t \neq 0 \end{cases}$$

일 때,

$$f(x) = \int_0^x g(t)dt$$

의 power series representation을 구하라.

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}$$

이므로 양변을 $t \neq 0$일 때 t로 나누면

$$\frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n}$$

이다. 그런데 $t = 0$을 우변에 대입한다면 값이 1이므로, $t = 0$을 포함하여 이 power series를 정의한다면 이는 $g(t)$로 converge한다. 따라서

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n}$$

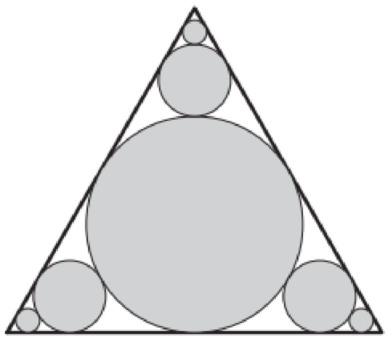
이며, 양변을 0부터 x까지 적분하면

$$f(x) = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot(2n+1)!} x^{2n+1}$$

이다. 그런데 $f(0) = 0$이므로, $C = 0$이다. 따라서

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot(2n+1)!} x^{2n+1}$$

문제 11. 28. *아래 그래프처럼 한 변의 길이가 1인 정삼각형에 원을 그려 나간다. 어두운 부분의 넓이를 구하라.*



이 삼각형의 내접원의 반지름은 $\frac{1}{2\sqrt{3}}$이다. 큰 내접원과 작은 원의 접점에서 접선을 그려 만들어지는 작은 세 정삼각형의 한 변의 길이는

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

이다. 따라서 이를 바탕으로 넓이를 구하면

$$\frac{1}{12}\pi + \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} \cdot \frac{1}{12}\pi = \frac{1}{12}\pi + \frac{1}{4}\pi \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{11}{96}\pi$$

임을 알 수 있다.

문제 11. 29. *$\sum a_n x^n$과 $\sum b_n x^n$의 interval of convergence가 각각 $(-r, r)$과 $(-s, s)$이다.*

(i) 만약 $r < s$라면,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$$

의 interval of convergence는 어떻게 되는가?

(ii) $r = s$라면 interval of convergence는 어떠한가? 어떤 정보를 얻을 수 있는가?

(i) $(-r, r)$에서는 두 series가 모두 converge이므로 둘의 합인 주어진 series도 converge이다. 한편 $[r, s)$와 $(-s, r]$에서는 $\sum a_n x^n$은 diverge인 반면, $\sum b_n x^n$은 converge이다. 그러면 만약 $\sum(a_n + b_n)x^n$이 converge일 경우 여기서 $\sum b_n x^n$을 뺀 $\sum a_n x^n$도 converge여야 하는데, 이는 모순이다. 따라서 diverge한다. $|x| \geq s$에서는 둘 모두가 diverge한다. 그런데 만약 이 구간에서 주어진 series가 converge하려면, 이는 power series의 interval of convergence가 가질 수 있는 세 가지 가능성 중 어느 것에도 속하지 못한다. 따라서 이 구간에서 series는 diverge이다. 그러므로 interval of convergence는 $(-r, r)$이다.

(ii) $(-r, r)$에서 converge임은 위와 같은 이유에 의해 converge이다. 따라서 interval of convergence는 항상 $(-r, r)$을 포함한다. 그 외에는 정보를 줄 수 없다. 예를 들어 $a_n = b_n$이라면 interval of convergence는 그대로 $(-r, r)$이다. 반면, $a_n = -b_n$이라면 모든 x에서 converge한다. 한편 $a_n = 1$, $b_n = 2^{-n} - 1$과 같이 주어진다면, 주어진 series의 radius of convergence는 2로 증가한다. 따라서 그 외에는 어떤 정보도 얻을 수 없다.

문제 11. 30.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n+2)!}$$

ratio test를 이용하면

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!(2n+3)!}{(3n+5)!}}{\frac{n!(2n+1)!}{(3n+2)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+2)(2n+3)}{(3n+3)(3n+4)(3n+5)} = \frac{4}{9} < 1$$

이기에 이 series는 absolutely convergent다.

문제 11. 31.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p + n^q}, \quad 0 < p < q < 1$$

$$\frac{1}{n^q + n^p} \geq \frac{1}{2n}$$

이며 $\sum \frac{1}{2n}$은 diverge하므로, 이 series는 comparison test에 의하여 diverge한다.

문제 11. 32.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$$

$1 - \cos\frac{1}{n} > 0$이며

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

이므로 limit comparison test에 의하여 이는 $\sum \frac{1}{n^2}$와 converge 여부와 같다. 그런데 이는 $p = 2$인 p-series이므로, converge이다. 한편 absolutely converge기도 하다.

문제 11. 33.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$$

root test를 사용하면

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n!)^n}{(n^n)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^2}=\infty$$

이므로 이는 diverge한다.

문제 11. 34. *$\{a_n\}$이 아래와 같이 정의된다.*

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{3}{a_n}\right)$$

또한 $a_1=1$이다. 이때 $\{a_n\}$이 converge하는지 판단하고, 존재한다면 limit을 구하라.

만약 이 sequence의 limit이 존재한다면, 이를 L이라고 둘 때

$$L=\frac{1}{2}\left(L+\frac{3}{L}\right)$$

이므로 $L=\sqrt{3}$ 혹은 $L=-\sqrt{3}$일 것이다. 그런데 $a_1=1$이며 $a_n\geq 0$이면 $a_{n+1}\geq 0$임에 따라 a_n은 계속 양수이므로, 아마 $L=\sqrt{3}$일 것이다. 이를 기준으로 논의를 이어나가자. 한편

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{3}{a_n}\right)\geq\sqrt{a_n\cdot\frac{3}{a_n}}=\sqrt{3}$$

이다. 그러면 $n\geq 2$에서

$$a_{n+1}<a_n$$

은 $a_n>\sqrt{3}$과 동치기에, a_n은 decreasing sequence이다. 그런데 $\sqrt{3}$에 의해 이 sequence가 bounded below 이므로, monotonic sequence theorem에 의하여 이는 converge한다. 이때 극한은 $\sqrt{3}$이게 된다.

문제 11. 35.

$$f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ \dfrac{\sin x}{x} & x>0\end{cases}$$

이라면, $\int_0^\infty f(x)dx$라는 improper integral이 convergent임을 밝혀라.

$$a_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}f(x)dx$$

라고 두자. 그러면 n이 $2k$일 경우 $f(x)<0$므로 $a_n<0$이고, n이 $2k+1$일 경우 $f(x)>0$이므로 $a_n>0$이다. 따라서 $\{a_n\}$은 alternatins series이다. 한편

$$|a_{n+1}|=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|f(x)|dx=\int_0^{\pi}|f(x+n\pi)|dx\leq\int_0^{\pi}|f(x+(n-1)\pi)|dx=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|f(x)|dx=a_n$$

이므로 a_n은 decreasing이고,

$$0\leq\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|f(x)|dx\leq\lim_{n\to\infty}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{1}{x}dx=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)=0$$

이므로 극한이 0이다. 따라서 alternating series theorem에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}a_n=\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}f(x)dx=s$$

가 어떤 실수 s에 대해 성립한다. 한편 $t \in (0,\pi)$인 t에 대하여

$$\int_0^{n\pi+s} f(x)dx = \int_0^{n\pi} f(x)dx + \int_{n\pi}^{n\pi+s} f(x)dx$$

인데

$$\left|\int_{n\pi}^{n\pi+s} f(x)dx\right| \le \int_{n\pi}^{n\pi+s} |f(x)|dx \le \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(x)|dx = a_{n+1}$$

이므로 a_{n+1}이 0으로 수렴함에 따라 이 역시 0으로 수렴한다. 따라서 n이 ∞로 갈 때

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi+s} f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} f(x)dx + \lim_{n\to\infty}\int_{n\pi}^{n\pi+s} f(x)dx = s+0=s$$

이다. 따라서 $\int_0^\infty f(x)dx$가 존재하며 convergent이다.

문제 11. 36.

$$\sum_{n=3}^\infty \frac{n}{2^n}x^{2n}$$

의 interval of convergence를 구하여라.

ratio test를 수행하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}|x|^{2n+2}}{\frac{n}{2^n}|x|^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}|x|^2 = \frac{|x|^2}{2}$$

이므로 이는 $|x|<\sqrt{2}$에서 converge이고 $|x|>\sqrt{2}$에서 diverge이다. 한편 $|x|=\sqrt{2}$였다면 이는 general term 이 n인 series이므로, test for divergence에 의하여 diverge한다. 따라서 inteerval of convergence는

$$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

이다.

문제 11. 37.

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{3^n\sqrt{n}}(x+3)^n$$

의 interval of convergence를 구하라.

ratio test를 이용하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3^{n+1}\sqrt{n+1}}|x+3|^{n+1}}{\frac{1}{3^n\sqrt{n}}|x+3|^n} = \frac{|x+3|}{3}$$

이므로 $(-6,0)$에서 converge이며 $|x+3|>3$에서 diverge이다. 한편 $x=0$일 경우에는 $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$이 diverge하며, $x=-6$일 경우에는 $\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$이 alternating series이며

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$$

이고

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{1}{\sqrt{n}}$$

임에 따라 alternatins series theorem에 의하여 convergent이다. 따라서 interval of convergence는 $[-6,0)$ 이다.

문제 11. 38.

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n+1)}{n!}x^n$$

의 interval of convergence를 구하여라.

ratio test를 사용하면

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n+3)}{(n+1)!}|x|^{n+1}}{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n+1)}{n!}|x|^{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+1}|x| = 2|x|$$

이므로 $|x| < \frac{1}{2}$에서 converge, $|x| > \frac{1}{2}$에서 diverge이다. $x = \frac{1}{2}$이라면,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n+1)}{n!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n+1}{2n} \neq 0$$

이므로 test for divergence에 의하여 diverge한다. $x = -\frac{1}{2}$일 때에도 역시 general term의 absolute value가 위와 같을텐데, test for divergence에 의해 diverge다. 그러므로 interval of convergence는

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

이다.

문제 11. 39.

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{18} + \frac{8}{81} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{2^n}{n3^n} + \cdots$$

를 구하여라.

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{18} + \frac{8}{81} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{2^n}{n3^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n}{n3^n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

이다.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$$

은 ratio test에 의하여 $|x| < 1$일 때 converge하고, $-\frac{2}{3}$의 절댓값이 1보다 작으므로 구해야 하는 값은 $-f(-\frac{2}{3})$과 같다. 한편

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

이므로

$$f(x) = C - \ln(1-x)$$

인데, $f(0) = 0$이므로 $C = 0$이다. 따라서 구해야 하는 값은

$$-f\left(-\frac{2}{3}\right) = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

문제 11. 40. $\arcsin x$*의 power series representation을 구하고,*

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n+1)}$$

임을 이용하여

$$\int_0^1 \frac{\sin^{-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

를 series 형태로 표현하자. 마지막으로, 만약 위에서 구한 series의 sum이 $\frac{\pi^2}{8}$ *임을 안다고 할 때,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

임을 보여라.

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2^n n!} x^{2n}$$

이므로, 양변을 적분하고 $x = 0$을 대입하면

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

을 얻을 수 있다. 그러면

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\sin^{-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \cdot \frac{1}{2n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}
\end{aligned}$$

을 얻을 수 있다. 만약

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = s$$

라고 둔다면,

$$s = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots = \left(1 + \frac{1}{3}^2 + \cdots\right) + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) = \frac{1}{4}s + \frac{\pi^2}{8}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

임을 얻을 수 있다.

문제 11. 41.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\arctan n}}{n^2+1}$$

$$\frac{e^{\arctan n}}{n^2+1} \le \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{n^2+1} \le \frac{100}{n^2}$$

인데,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{n^2}$$

은 converge하므로 comparision test에 의해 이 series는 absolutely convergent이다.

문제 11. 42.

$$\sum_{n=2023}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)\ln(\ln n)}$$

이는 양의 term들로 이루어진 series이며,

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)\ln(\ln x)}$$

는 $(2023, \infty]$에서 positive, decreasing, continuous이므로 integral test에 의하여 이 series의 converge 여부는

$$\int_{2023}^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)\ln(\ln x)} dx$$

의 converge 여부와 동일하다. 그런데

$$\int_{2023}^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)\ln(\ln x)} dx = \int_{\ln 2023}^{\infty} \frac{1}{t\ln(t)} dt \quad (t = e^x)$$

이며

$$\int_{\ln 2023}^{\infty} \frac{1}{t\ln(t)} dt = \int_{\ln(\ln 2023)}^{\infty} \frac{1}{u} du = [\ln u]_{\ln(\ln(2023))}^{\infty} = \infty$$

가 $u = e^t$임에 따라 성립하기에 diverge이다. 따라서 우리가 보고픈 이 series도 diverge이다.

문제 11. 43. *만약 $a_n > 0$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 converge한다면,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$$

도 converge함을 보여라.

$\sum a_n$이 converge하므로 a_n은 0으로 converge한다. limit comparision test에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} = 1$$

으로부터 $\sum \ln(1 + a_n)$의 converge 여부가 $\sum a_n$의 converge 여부와 같음을 아는데, $\sum a_n$이 converge한다. 따라서 우리의 series도 converge한다.

문제 11. 44.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)^p$$

가 converge하는 p를 구하여라.

$$\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}$$

은 항상 양수이므로 이는 positive term만을 가지는 series이다. 한편

$$\frac{1}{n^k}$$

와 limit comparision theorem을 수행한다면

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)^p}{\frac{1}{n^k}} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x - \sin x}{x^{\frac{k}{p}}}\right)^p = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{1 - \cos x}{\frac{k}{p} x^{\frac{k}{p}-1}}\right)^p$$

이므로 이 극한이 양의 실수이려면 $\frac{k}{p} - 1 = 2$이다. 따라서 $k = 3p$여야 한다. 그러면 이는 $\sum \frac{1}{n^{3p}}$의 converge 여부와 같은데, 이는 p-series이므로 $p < \frac{1}{3}$일 때 diverge, $p > \frac{1}{3}$에서 converge이다.

문제 11. 45.

$$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{6n-5}-\frac{1}{6n-1}+\cdots$$

를 구하여라.

(주의. 아래 풀이가 솔직히 수학적으로 엄밀하지는 않으나, 기출인데 우리가 배운 수준에서는 이 풀이가 최선인 것 같아 씁니다.)

$$\begin{aligned}
1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{6n-5}-\frac{1}{6n-1}+\cdots &= 1\cdot 1^1-\frac{1}{5}\cdot 1^5+\frac{1}{7}\cdot 1^7-\frac{1}{11}\cdot 1^{11}+\cdots \\
&= \int_0^1 1-t^4+t^6-t^{10}+\cdots dt \\
&= \int_0^1 (1+t^6+t^{12}+\cdots)-(t^4+t^{10}+\cdots)dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1-t^6}-\frac{t^4}{1-t^6}dt \\
&= \int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}dx \\
&= \int_0^1 \frac{1+\frac{1}{x^2}}{(x-\frac{1}{x})^2+3}dx \\
&= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{t^2+3}dt \quad \left(t=x-\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

문제 11. 46. *만약 $\{a_n\}$이 convergent sequence라면,*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$$

이 존재함을 보여라.

모든 $\varepsilon>0$에 대하여, $n\geq N$이면 $|a_n-L|<\varepsilon$인 N과 L이 존재한다. 그러면 $n\geq N$인 n에 대하여

$$\frac{a_1+\cdots a_n}{n}=\frac{a_1+\cdots+a_{N-1}}{n}+\frac{a_N+\cdots+a_n}{n}$$

이기에 $a_1+\cdots+a_{N-1}=M$이라 할 때

$$\frac{M}{n}+\frac{n-N}{n}(L-\varepsilon)<\frac{a_1+\cdots a_n}{n}<\frac{M}{n}+\frac{n-N}{n}(L+\varepsilon)$$

이며

$$\frac{M}{n}-\varepsilon-\frac{N}{n}(L-\varepsilon)<\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-L<\frac{M}{n}+\varepsilon-\frac{N}{n}(L+\varepsilon)$$

이다. 한편 어떤 P가 있어 $n>P$이면

$$\frac{M}{n}-\varepsilon-\frac{N}{n}(L-\varepsilon)>-2\varepsilon$$

이며

$$\frac{M}{N}+\varepsilon-\frac{N}{n}(L+\varepsilon)<2\varepsilon$$

이므로, $n>\max\{P,N\}$일 때

$$\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-L\right|<2\varepsilon$$

이다. 따라서 주어진 limit이 L로 존재한다.

문제 11. 47.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin^{-1}\frac{1}{n}\tan\frac{1}{n}$$

이는 항상 양수이다. limit comparision theorem을 사용하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sin^{-1}\frac{1}{n}\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin^{-1}x\tan x}{x^2} = 1$$

이기에 이는 $\sum \frac{1}{n}$의 converge 여부와 같다. 그런데 이 harmonic series는 diverge하기에, 주어진 series도 diverge이다.

문제 11. 48.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n \cos n$$

root test를 사용하자.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|n\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n\cos n\right|} = \frac{2}{3}$$

이므로, 이는 absolutely converge한다.

문제 11. 49. *$\frac{1}{1+x^3}$의 power series representation을 이용하여*

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8^n}\left(\frac{2}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}\right)$$

임을 보여라.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^3} &= \frac{1}{1-(-x^3)}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-x^3)^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}\end{aligned}$$

이라는 power series representation을 얻을 수 있다. 양변을 적분하면 $-1 < x < 1$에서

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^3}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}$$

이며 양변에 x를 곱한 후 적분하면

$$\int_0^x \frac{t}{1+t^3}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+2}x^{3n+2}$$

이다. $x = \frac{1}{2}$를 대입한 뒤 4를 곱해 더하면

$$4\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+t}{1+t^3}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8^n}\left(\frac{2}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}\right)$$

을 얻는다. 이제 적분을 수행하면

$$4\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+t}{1+t^3}dt = 4\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dt$$

이고 $t-\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$로 치환하면 이 적분은

$$4\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{4}{3}\cdot\cos^2\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta d\theta = \frac{4}{3\sqrt{3}}\pi$$

이므로, 정리하면

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8^n}\left(\frac{2}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}\right)$$

문제 11. 50. *$\sum b_n x^n$과 $\sum c_n x^n$이 $|x|<R$에서 converge하며 $(-R,R)$에서*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

이다.

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k}$$

일 때,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

이 $|x|<R$에서 converge하며 이것이 그 범위에서 $f(x)g(x)$와 같음을 보여라.

$t_n(x)=\sum_{i=0}^n b_i x^i$이며 $s_n(x)=\sum_{i=0}^n c_i x^i$라고 하자. 그러면 $|x|<R$에서 $t_n \to f$이며 $s_n \to g$이다.

$$r_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i$$

라고 할 때 $\gamma_n(x) = s_n(x) - g(x)$이면

$$\begin{aligned}
r_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} p_i x^i \\
&= b_0c_0 + (b_0c_1+b_1c_0)x + \cdots + (b_0c_n+\cdots+b_nc_0)x^n \\
&= b_0(c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n)+\cdots+b_n(c_0x^n) \\
&= b_0s_n + b_1s_{n-1}x+\cdots+b_ns_0x^n \\
&= b_0(g(x)+\gamma_n)+b_1x(g(x)+\gamma_{n-1})+\cdots+b_nx^n(g(x)+\gamma_0) \\
&= t_ng(x)+b_0\gamma n+\cdots+b_nx^n\gamma_0
\end{aligned}$$

이다. 한편 주어진 $|x|<R$에서 $t_ng \to fg$이므로,

$$\lim_{n\to\infty} b_0\gamma n+\cdots+b_nx^n\gamma_0 = 0$$

임을 보이기만 하면 r_n이 $|x|<R$에서 $f(x)g(x)$로 converge함을 밝힐 수 있다.

한편 임의의 양수 $\varepsilon>0$에 대하여 $n\geq N$이면 $|\gamma_n|<\varepsilon$인 N이 존재하므로, $n\geq N$일 때

$$
\begin{aligned}
|b_0\gamma n + \cdots + b_n x^n \gamma_0| &\le |b_n x^n \gamma_0 + \cdots + b_{N-n} x^{N-n} \gamma_N| + |b_{N-n-1} x^{N-n-1} \gamma_{N+1} + \cdots + b_0 \gamma_n| \\
&\le |b_n x^n \gamma_0 + \cdots + b_{N-n} x^{N-n} \gamma_N| + \varepsilon |f(x)|
\end{aligned}
$$

이다. 그러면 이제 N을 고정하고 $n \to \infty$를 취한다면, $b_i x^i$ 항이 $i \to \infty$임에 따라 0으로 수렴하고 $|f(x)|$는 한정된 값이므로,

$$
\lim_{n \to \infty} |b_0\gamma n + \cdots + b_n x^n \gamma_0| = 0
$$

이다. 따라서 증명이 완료된다.