9.6 연습문제

아래 문제들 중에서 별다른 설명이 없는 문제는 주어진 differential equation과 initial value에 대해 solution을 구하면 되는 문제입니다.

문제 9. 1.

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx}+3x(y-1)=0, \quad y(0)=2$$

separable differential equation이다.

$$\frac{1}{y-1}\frac{dy}{dx}=-\frac{3x}{x^2+1}$$

의 양변을 x로 적분한다면

$$\ln(y-1)=-\frac{3}{2}\ln(x^2+1)+C$$

를 얻는다. $y(0)=2$이므로, 대입하면 $C=0$를 얻는다. 따라서 정리하면

$$y=1+(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

이다.

문제 9. 2.

$$\frac{dy}{dt}=1+t^2+y^2+t^2y^2, \quad y(0)=1$$

separable differential equation이다.

$$\frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dt}=1+t^2$$

이므로 양변을 t로 적분한다면

$$\arctan(y)=t+\frac{1}{3}t^3+C$$

를 얻는다. $y(0)=1$을 대입한다면 $C=\frac{\pi}{4}$를 얻을 수 있다. 따라서

$$y=\tan(t+\frac{1}{3}t^3+\frac{\pi}{4})$$

이다.

문제 9. 3. *differentiable function $P(t)$는 아래를 만족한다.*

$$\frac{dP}{dt}=-P(P-1000)f(P)$$

이때 f는 양의 continuous function이다. 아래의 두 명제를 증명하여라.

(1) $P(0)>1000$이라면, $P(t)\geq 1000$은 $t>0$에 대해 성립한다.

(2) $P(0)>1000$이라면, $y=P(t)$의 $t\geq 0$에서의 그래프는 $y=1000$을 horizontal asymptote로 가진다.

(1) $P(0)>1000$이었으므로 0 주변에서는 $\frac{dP}{dt}\neq 0$이다. 따라서 $t=0$을 시작점으로 할 때 이 differential equation은 separable이고,

$$\int_{P(t)}^{P(0)}\frac{1}{P(P-1000)f(P)}dP=t$$

를 얻어낼 수 있다. 이때 우변은 실수이므로 좌변도 t라는 실수로 수렴해야 한다.

만약 어떤 $s>0$에 대해 $P(s)<1000$이라면, P는 continuous이기도 하므로 IVT에 의해 $P(r_n)=1000+\frac{1}{n}$

인 $r_n \in (0, s)$를 가진다. 이때

$$\int_{1000+\frac{1}{n}}^{P(0)} \frac{1}{P(P-1000)f(P)} dP = r_n$$

이고 $n \to \infty$임에 따라 $P(r_n) \to 1000$이다. 적분구간 하에서 피적분함수는 항상 양수이며, f는 continuous 이므로 구간 $[1000, P(0)]$에서 어떤 양수 M에 대하여 $f(t) \leq M$이다. 그러므로

$$\frac{1}{P(P-1000)f(P)} \geq \frac{1}{MP(P-1000)}$$

이며

$$r_n \geq \int_{1000+\frac{1}{n}}^{P(0)} \frac{1}{MP(P-1000)} dP = \frac{1}{500M} [\ln(\csc u - \cot u)]_{\sec^{-1}(1+\frac{1}{500n})}^{\sec^{-1}(\frac{P(0)-500}{500})}$$

이다. 이때 $n \to 1$이라면, 삼각함수와 로그함수의 연속성에 의하여, 우변은 ∞로 발산한다. 즉 n이 충분히 커지면 s보다 큰 값이 등장할 수 있음을 의미한다. $r_n < s$는 값이 정해진 실수이므로, 이는 모순이다. 따라서 그런 s는 없다.

(2) horizontal asymptote라는 것은 곧

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = 1000$$

임을 의미한다. (1)에서 보였듯이 $P(t) \geq 1000$이므로,

$$\frac{dP}{dt} = -P(P-1000)f(P) < 0$$

이기에 P는 감소함수이다. 극한식을 보이려면 모든 $\varepsilon > 0$에 대하여, $t > N$이면 $P(t) < 1000 + \varepsilon$인 N이 존재함을 보여주면 된다. 더 나아가서는 P가 감소함수이기에, 모든 $\varepsilon > 0$에 대하여

$$P(t_\varepsilon) = 1000 + \varepsilon$$

이게 하는 $t_\varepsilon > 0$이 존재함을 보이기만 하면 된다. 이는

$$\int_{1000+\varepsilon}^{P(0)} \frac{1}{P(P-1000)f(P)} dP$$

의 값이 모든 ε에 대해 양의 실수로 정의됨을 보여주기만 해도 충분하다. 근데 주어진 구간에서 피적분함수는 양의 연속함수이기에, 당연히 이 적분이 가능하며, 어떤 양수값을 가진다. 따라서 증명이 완료된다.

문제 9. 4. *곡선 C는 $x \geq 0$에서 정의되며, $y = f(x)$의 그래프 형태이다. $x = 0$으로부터의 arc length function $s(x)$가*

$$s(x) = \frac{1}{2}\{f(x)\}^2 - 2$$

이라 할 때, $f(x)$를 구하여라.

식을 다시 쓰면

$$\int_0^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt = \frac{1}{2}\{f(x)\}^2 - 2$$

이다. 양변을 x로 미분하면

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = f(x)f'(x)$$

이며, f'에 대한 식으로 정리하면, $x = 0$ 주변에서 $f(x) > 1, f'(x) > 0$임이 명백하므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

이기에 separable이고,

$$x = \int \sqrt{y^2 - 1} dy = \int \tan^2 u \sec u du \quad (y = \sec u)$$

이기에

$$x = \frac{1}{2} \sec u \tan u - \frac{1}{2} \ln(\sec u + \tan u) + C = \frac{1}{2} y \sqrt{y^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) + C$$

을 얻는다. $x = 0$을 넣었을 때의 초깃값으로부터 $f(0) = 2$을 얻기 때문에,

$$x = \frac{1}{2} y \sqrt{y^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) - \sqrt{3} + \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3})$$

이며 $f(x)$는 함수

$$g(x) = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) - \sqrt{3} + \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3})$$

의 역함수 $g^{-1}(x)$와 같다.

문제 9. 5.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$\frac{dy}{dx} = g(x)$라는 새로운 함수로 보면

$$\frac{d}{dx} g(x) = \sqrt{1 + [g(x)]^2}$$

이고 이는 separable이다.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + g^2}} dg = x$$

에서 $g = \tan u$로 치환하면

$$x = \int \cos u \sec^2 u du = \int \sec u du = \ln(\sec u + \tan u) = \ln(g + \sqrt{g^2 + 1}) + C$$

를 얻는다. g에 대한 식으로 정리하면

$$g + \sqrt{g^2 + 1} = e^{x - C} = A e^x$$

임에 따라

$$g(x) = \frac{A^2 e^{2x} - 1}{2 A e^x} = \frac{A}{2} e^x - \frac{1}{2A} e^{-x}$$

의 꼴이다. 이 역시 separable이므로, 양변을 x로 적분하면,

$$f(x) = \frac{A}{2} e^x + \frac{1}{2A} e^{-x} + D$$

을 얻을 수 있다. 이때 A와 D는 초깃값에 의해 결정되는 두 상수이다.

문제 9. 6. *코로나19의 확산에 대한 differential equation을 세우고자 한다. 알려진 바에 따르면, 감염 속도는 전체 인구 중 감염자의 비율과 비감염자의 비율의 곱에 정비례한다고 한다. 감염자의 비율을 y라 할 때, y에 대한 differential equation을 세우고, 이를 풀어라. 단, 전체 인구는 불변한다. 또한 문제 상황 설정에 필요한 함수나 상수는 적절히 설정한 후 답에 포함시켜도 된다.*

시간 $t \geq 0$에 대하여

$$\frac{dy}{dt} = ky(1 - y)$$

이 성립함을 확인할 수 있다. 이때 k는 비례계수다. separable이므로

$$\frac{1}{y(1-y)}\frac{dy}{dt} = k$$

에서 양변을 t로 적분하면

$$\int \frac{1}{y(1-y)}dy = kt$$

이고 정리하면

$$\ln(y) - \ln(1-y) = kt + c$$

이다. 이때 y_0을 $t = 0$일 때의 감염자 비율이라 한다면, $y_0 = 0$ 혹은 $y_0 = 1$일 때엔 $y = 0$이나 $y = 1$이 solution이다. 한편 $0 < y_0 < 1$일 경우에는 위의 식에 대입할 때

$$c = \ln\left(\frac{y_0}{1-y_0}\right)$$

이며

$$\frac{y}{1-y} = \frac{y_0}{1-y_0}e^{kt}$$

이다. 따라서

$$y(t) = \frac{y_0 e^{kt}}{(1-y_0) + y_0 e^{kt}}$$

가 원하는 solution이다.

문제 9. 7. *$P(t)$는 시간 t의 진행에 따른 population이다. $t \geq 0$이다. differential equation*

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = P(8-P) - 7 \\ P(0) = 6 \end{cases}$$

을 고려하자. $P(t)$를 구하고, $\lim_{t\to\infty} P(t)$를 구하여라.

separable이다.

$$\frac{1}{9-(P-4)^2}\frac{dP}{dt} = 1$$

의 양변을 t로 적분하면

$$\begin{aligned} t &= \int \frac{1}{9-(P-4)^2}dP \\ &= \int \frac{1}{9-9\sin^2 u} \cdot 3\cos u du \quad (P = 4 + 3\sin u) \\ &= \int \frac{1}{3}\sec u dt \\ &= \frac{1}{3}\ln(\sec u + \tan u) + C \\ &= \frac{1}{3}\ln\left(\left(1 - \left(\frac{P-4}{3}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{P-4}{3}\right)\right) + C \end{aligned}$$

를 얻는다. $P(0) = 6$이므로 $C = -\frac{1}{6}\ln(5)$이고,

$$\sqrt[6]{5}e^t = \left(\frac{P-1}{\sqrt{9-(P-4)^2}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

에서

$$P - 1 = \sqrt{9-(P-4)^2}\sqrt{5}e^{3t}$$

$$P^2 - 2P + 1 = 5(-P^2 + 8P - 7)e^{6t}$$

$$(5e^{6t} + 1)P^2 - (2 + 40e^{6t})P + (1 + 35e^{6t}) = 0$$

$$P = \frac{(1 + 20e^{6t}) \pm \sqrt{(1 + 20e^{6t})^2 - (5e^{6t} + 1)(1 + 35e^{6t})}}{1 + 5e^{6t}}$$

을 얻는다. $t = 0$일 때 $P = 6$이어야 하므로, 부호는 $+$이며 정리하면

$$P = \frac{1 + 35e^{6t}}{1 + 5e^{6t}}$$

을 얻게 된다. 한편

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = 7$$

이다.

문제 9. 8.

$$y(x) = -2 + \int_1^x \frac{dt}{ty(t)}, \quad x > 0$$

양변을 x로 미분하면

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy}$$

가 성립한다. 이는 separable이므로

$$\frac{1}{2}y^2 = \ln x + C$$

처럼 쓸 수 있다. 원래 식에서 $x = 1$을 넣으면 $y(1) = -2$를 얻었으므로, 이를 대입하면 $C = 2$이다. y에 대해 정리하면

$$y = -\sqrt{4 + 2\ln x}$$

를 얻을 수 있다.

문제 9. 9. *2000리터 들이의 콘테이너에 40kg의 소금을 넣은 1000리터의 소금물을 들이부었다. 그 다음 분당 50리터의* $0.02kg/l$ *소금물을 유입시키는 동시에, 잘 섞어 주면서, 분당 25리터의 소금물을 빼냈다. 시간* $0 \le t \le 40$*에 대하여,* t*분일 때의 소금의 양* $s(t)$*를 구하고,* $s(40)$*을 구하라.*

식을 세우면

$$\frac{ds}{dt} = 1 - \frac{25}{1000 + 50t}s$$

이며, $s(0) = 40$이다. 이는 linear differential eqaution이며,

$$I(t) = \exp\left(\int \frac{25}{1000 + 50t}dt\right) = (40 + 2t)^{1/2}$$

임에 따라

$$s(t) = (40 + 2t)^{-1/2}\left[\int_0^t (40 + 2u)^{1/2}du\right] + 40$$

이 성립하게 된다. 정리하면

$$s(t) = \frac{1}{3}((40+2t) - 40\sqrt{40}(40+2t)^{-1/2}) + 40 = \frac{160}{3} + \frac{2}{3}t - \frac{40\sqrt{40}}{3}(40+2t)^{-1/2}$$

이며, $s(40) = 80 - \frac{40\sqrt{3}}{9}$이다.

문제 9. 10. *f는 양의 differentiable function이고, R_t는 $y = f(x)$와 x축 사이에 둘러싸인 영역을 $x = 0$, $x = t$로 잘라 만든 영역이다. $(\bar{x}, \bar{y})$는 R_t의 centroid이다. 만약 $\bar{x} = \frac{t}{2}$가 $t > 0$에 대해 성립한다면, $f(x)$가 $x > 0$에서 constant임을 보여라.*

$$\frac{t}{2} = \bar{x} = \frac{\int_0^t uf(u)du}{\int_0^t f(u)du}$$

이므로 양변을 정리해 분수를 없애고 t로 미분하면

$$\int_0^t f(u)du + tf(t) = 2tf(t)$$

이며, t로 한 번 더 미분하면

$$f(t) = f(t) + f'(t)$$

를 얻으므로 f'이 0이다. 이는 함수는 $f(x)$이 constant라는 증거이다.

문제 9. 11. *f는 양의 differentiable function이고, R_t는 $y = f(x)$와 x축 사이에 둘러싸인 영역을 $x = 0$, $x = t$로 잘라 만든 영역이다. $(\bar{x}, \bar{y})$는 R_t의 centroid이다. $\bar{y} = \frac{f(t)}{4}$가 $t > 0$에 대해 성립하는 f를 구해 보고, 만약 그런 f가 존재하지 않는다면 증명하여라.*

주어진 조건을 식으로 세우면

$$\frac{f(t)}{4} = \bar{y} = \frac{\int_0^t \frac{1}{2}(f(u))^2 du}{\int_0^t f(u)du}$$

이고, 양변을 정리하면

$$f(t)\int_0^t f(u)du = 2\int_0^t (f(u))^2 du$$

이다. 양변을 t로 미분하면

$$f'(t)\int_0^t f(u)du + (f(t))^2 = 2(f(t))^2$$

이다. 이는 곧

$$f'(t)\int_0^t f(u)du = (f(t))^2$$

으로 이어진다. $\int_0^t f(u)du = F(t)$라고 쓰면,

$$f'(t)F(t) = (f(t))^2$$

이므로

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{f(t)}{F(t)}$$

이다. 각각을 t에 대해 적분하면

$$\ln(f(t)) = \ln(F(t))$$

를 얻는데, 이는 $f(t) = F(t)$이므로 $f(t) = e^t$가 좋은 예시다. 따라서 그런 f는 $f(x) = e^x$이다.

문제 9. 12.

$$2xy' + y = 6x, \quad x > 0, \quad y(4) = 20$$

정리하면

$$y' = 3 - \frac{1}{2x}y$$

이므로 이는 linear이다.

$$I(x) = \exp\left(\int \frac{1}{2x}dx\right) = \sqrt{x}$$

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\int 3\sqrt{x}dx + C\right) = 2x + \frac{C}{\sqrt{x}}$$

인데 $y(4) = 20$이므로 $C = 24$이다. 따라서

$$y(x) = 2x + \frac{24}{\sqrt{x}}$$

이다.

문제 9. 13.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{xy}, \quad y(1) = 2$$

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{x}$$

이므로 양변을 x로 적분하면

$$\frac{1}{2}y^2 = \int \frac{\ln x}{x}dx = \int \frac{t}{e^t}e^t dt \quad (x = e^t)$$

을 얻기에

$$y = (t^2 + C)^{1/2} = \sqrt{(\ln x)^2 + C}$$

임을 안다. 초깃값에 의하여

$$y = \sqrt{(\ln x)^2 + 4}$$

이다.

문제 9. 14.

$$y = \frac{x}{1+kx}, \quad x \neq 0$$

의 orthogonal trajectories를 구하여라.

주어진 곡선에 대해서는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1+kx)^2}$$

이 성립하므로, 곡선 위의 점 (x_0, y_0)을 지나는 orthogonal trajectory는 $y = g(x)$일 때

$$y_0 = \frac{x_0}{1+kx_0}$$

$$g'(x_0) = (1+kx_0)^2$$

$$y_0 = g(x_0)$$

을 만족시킨다. 둘째 식을 첫째 식을 이용하여 정리하면

$$g'(x_0) = \frac{x_0^2}{(g(x_0))^2}$$

이며 이는 모든 k에 대해 성립해야 하므로, 일반적인 x_0에 대해서도 성립한다. 이는 separable differential equation이고,

$$\frac{1}{3}(g(x))^3 = \frac{1}{3}x^3 + C$$

을 얻을 수 있다. 따라서

$$g(x) = (x^3 + C)^{\frac{1}{3}}$$

이 원하는 orthogonal trajectory이다.

문제 9. 15. *$f(x) \geq 0, f(0) = 0, f(1) = 1$일 때,*

$$\int_0^x f(t)dt \quad \propto \quad \{f(x)\}^{(n+1)}$$

가 성립한다고 한다. $0 \leq x \leq 1$에서 정의된 함수 $f(x)$를 구하여라.

어떤 상수 k가 존재하여

$$\int_0^x f(t)dt = k(f(x))^{(n+1)}$$

이므로, 양변을 미분할 때

$$f(x) = k(n+1)(f(x))^n f'(x)$$

을 얻을 수 있다. 따라서

$$f'(x) = k(n+1)(f(x))^{-(n-1)}$$

이라는 differential equation을 세울 수 있고, 이는 separable이므로 정리한다면

$$(f(x))^n = \frac{n}{n+1}kx + C$$

이다. 주어진 초깃값에 의해 $C = 0$이며 $k = \frac{n+1}{n}$임을 알 수 있다. 그러므로

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}}$$

이라는 결과를 얻을 수 있다.

문제 9. 16. *$y = f(x)$는 differentiable이며 positive x에서 정의되고,*

$$y' = \left(\frac{2}{x} - 1\right)y$$

의 solution이다.

continuous random variable X의 probability density function이

$$\begin{cases} f(x) & x > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

일 때, $f(x)$를 구하고 $E(X)$를 계산하여라.

이는 first-order linear differential equation이므로, 해는

$$y = \exp\left(\int \frac{2}{x} - 1\right)$$

꼴이므로

$$y = A(x^2 e^{-x})$$

이다. 그런데 이것이 pdf라고 하였으니

$$1 = \int_0^\infty A(x^2e^{-x})dx = A[(-x^2-2x-2)e^{-x}]_0^\infty = 2A$$

임에 따라 $A = \frac{1}{2}$이다.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$$

한편 expectation은

$$E[X] = \int_0^\infty \frac{1}{2}x^3e^{-x}dx = \frac{1}{2}[(-x^3-3x^2-6x-6)e^{-x}]_0^\infty = 3$$

이다.

문제 9. 17. *레고랜드에는 총 4000여 점의 레고세트가 있는데, 그 중 20개가 스페셜 브릭이라고 한다. 이때 100점 당 2개의 스페셜 브릭을 포함한 레고 뭉텅이가 하루마다 15점씩 들어온다고 한다. 한편 무작위로 하루마다 15점의 레고세트가 판매된다. 2달(60일) 후에는 얼마만큼의 스페셜 브릭이 남아 있겠는가? (단, 레고세트와 브릭의 개수는 소수개일 수도 있다.)*

스페셜 브릭의 수를 지나간 날 t에 대한 함수 $s(t)$라고 둔다면,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{3}{10} - \frac{3}{800}s$$

이며 $s(0) = 20$이다. 이는 separable이므로 풀 수 있다.

$$\ln(80-s) = -\frac{3}{800}t + C$$

에서

$$s = 80 - Ae^{-\frac{3}{800}t}$$

를 얻을 수 있으며, 초깃값에 의해 $A = 60$이다. 따라서 $t = 60$을 대입한다면 스페셜 브릭은

$$80 - 60e^{-\frac{9}{40}}$$

개 남아 있게 됨을 알 수 있다.

문제 9. 18.

$$e^xy' = 2(x+1)y^2, \quad y(0) = \frac{1}{7}$$

separable이다.

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = \frac{2(x+1)}{e^x}$$

의 양변을 x로 적분하면

$$-\frac{1}{y} = \int (2x+2)e^{-x}dx = 2(-x-2)e^{-x} + C$$

이다. 정리하면

$$y = \frac{1}{2(x+2)e^{-x}+C}$$

임을 알 수 있다. 초깃값에 의하여 $C = 3$이고,

$$y = \frac{1}{2(x+2)e^{-x}+3}$$

임을 알게 된다.

문제 9. 19.

$$4x^3y + x^4y' = \sin^3 x$$

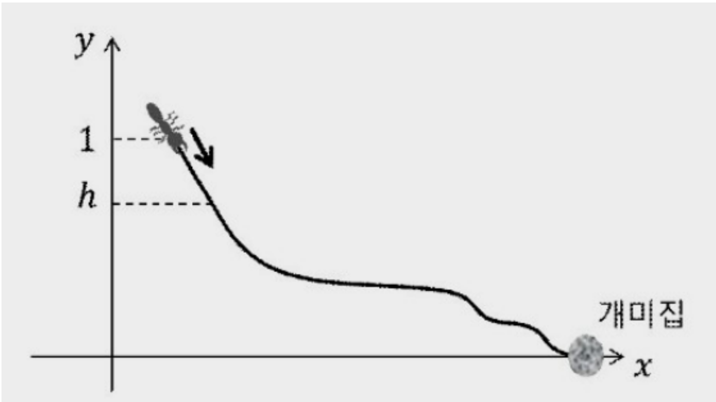
좌변은 x^4y의 미분 형태이기에, 정리하면

$$x^4y = \int \sin^3 x dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

이다. 따라서 구하는 것은

$$y = -\frac{\cos x}{x^4} + \frac{\cos^3 x}{3x^4} + \frac{C}{x^4}$$

이다. 이때 C는 상수다.



문제 9. 20. *좌표평면 위의 곡선을 따라 개미가 집에 간다. 이 곡선은 x에 대해 differentiable한 decreasing function의 그래프이며, x축과 개미집에서 만난다. 또한 이 function의 derivative도 cotinuous이다. t라는 시점에서 개미는 $y(t)$라는 y좌표를 가지며, 개미의 y좌표가 h인 점에서 집까지 곡선의 길이를 $S(h)$라고 한다. y 역시 differentiable이다. $y(0) = 1$이다.*

이제 $s(t) = (S \circ y)(t)$를 정의하자. 즉 $s(t)$는 시간 t일 때 개미가 집까지 가기까지 남은 거리와도 같다. s는 아래의 differential equation을 만족한다고 하자.

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{y(t)^2 - 3y(t) + 2}$$

$A(\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta S(1-y)\dfrac{2y+1}{(y^2+y)^{3/2}}dy$일 때, $y = \frac{1}{3}$인 위치에서부터 집까지 걸리는 시간을 $S(h)$와 $A(\alpha,\beta)$를 이용해 나타내시오.

이 곡선을 $y = f(x)$이라고 하자. 그러면 f는 decreasing이며 differentiable이고, f'도 cotinuous이기에, 어떤 inverse g를 가지며 g도 differentiable이고 g'은 continuous이다. 그러면 arc length formula에서

$$S(h) = \int_0^h \sqrt{1+(g'(y))^2}dy$$

을 얻으므로, $h = y(t)$일 때의 상황을 고려하면

$$\frac{dS}{dy} = \sqrt{1+(g'(y))^2}$$

임을 알게 된다. 이때 chain rule에 의하여,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{dS}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}$$

이기에

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\sqrt{y^2-3y+2}}{\sqrt{1+(g'(y))^2}}$$

임을 안다. 그러면 이는 separable differential equation이므로 해를 얻을 수 있다.

$$t = \int_y^1 \frac{\sqrt{1+(g'(u))^2}}{\sqrt{u^2-3u+2}}du$$

절한 적분범위와 상수를 잡아 초깃값인 $y(0)=1$을 맞춰준 것이다. 그렇다면 구하는 시간은 $y=\frac{1}{3}$인 점에서 $y=0$인 점까지 걸리는 시간이므로

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\sqrt{1+(g'(u))^2}}{\sqrt{u^2-3u+2}}du = \int_{\frac{2}{3}}^1 \frac{\sqrt{1+(g'(1-y))^2}}{y^2+y}dy \quad (y=1-u)$$

을 얻는다. 이제 이를 우리가 원하는 식으로 변형시켜보자.

$$\begin{aligned}\int_{\frac{2}{3}}^1 \frac{\sqrt{1+(g'(1-y))^2}}{\sqrt{y^2+y}}dy &= \Big[-S(1-y)(y^2+y)^{-1/2}\Big]_{2/3}^1 - \frac{1}{2}\int_{\frac{2}{3}}^1 S(1-y)\frac{2y+1}{(y^2+y)^{3/2}}dy \\ &= \frac{3\sqrt{10}}{10}S\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}A\left(\frac{2}{3},1\right)\end{aligned}$$