벡터곱

- 벡터의 내적은 모든 n-공간의 벡터에 대해 정의되었었는데, 여기서는 **삼차원 공간** $\mathbb{R}^3$의 벡터만 다루려 한다.
- 공간의 두 벡터 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$와 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$의 **벡터곱**은

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} := (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

  으로 정의한다.
- 이를 기억하기 위해서는

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

  처럼 배열하고 난 뒤에, 첫째 원소는 둘째 줄과 셋째 줄의 대각선 원소들끼리 곱하고 더한 다음 빼는 것으로, 둘째 원소는 첫째 줄과 셋째 줄에 대하여 이를 수행하되 부호를 음으로 하며, 셋째 줄은 첫째 줄과 둘째 줄에 대해 수행한 결과임을 기억하면 좋다.

벡터곱의 성질

삼차원 공간의 임의의 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$와 실수 t에 대하여 다음 등식이 성립한다. 증명은 모두 a_i와 b_i를 이용하여 단순 계산으로 증명해줄 수 있다.

- $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
- $(t\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = t(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (t\mathbf{b})$
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
- $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$

벡터곱과 각도

- $|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 + |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2$
- 또한, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$이므로, 위로부터

  $$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\sin\theta|$$

  이다.
- 이는 벡터 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$가 이루는 평행사변형의 넓이와도 같다.
- 만약 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$가 일차종속이면, $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{0}$이다.
- 만약 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$가 일차독립이면, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$는 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$에 수직이면서 그 크기가 평행사변형의 넓이와 같은 벡터이다.
- $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a} = -\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{a}) = -\mathbf{b}\cdot\mathbf{0} = 0$

기하학적 관점

- 만약 어떤 세 점 A, B, C가 삼각형을 이루게 주어져 있고 그 세 점을 지나는 평면을 구하려 하는 상황이라면, 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{AC}$가 이 평면에 포함된다. 그러면 두 벡터를 벡터곱하여

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

를 생각한다면, 이는 평면에 포함된 일차독립인 두 벡터의 벡터곱이므로 평면에 수직하다. 따라서 평면

$$\mathbf{n} \cdot (X - A) = 0$$

이 원하는 평면이다.

기하학적 관점

- 공간에서 점 P를 지나고 단위벡터 $\mathbf{v}$와 나란한 방향의 직선을 l이라 하자. 이때, 공간의 점 Q와 직선 l 사이의 최단 거리를 생각하자.
- 직선 l의 점 중에서 Q와 가장 가까운 점을 Q'이라 하자. 또 벡터 $\mathbf{v}$와 벡터 $\overrightarrow{PQ}$ 사이의 각을 θ라 하면, 구하는 거리는

$$d = \overline{QQ'} = \overline{PQ}|\sin\theta| = |\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{v}|$$

이다. 따라서, 우리는 알고 있는 점 Q와 알고 있는 벡터 $\mathbf{v}$에 대하여, P만 임의로 잡아주면 쉽게 거리를 구할 수 있다.

기하학적 관점

- 일차독립인 벡터 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$에 대하여 공간 속의 두 직선

$$A_1 + t\mathbf{v}_1$$

$$A_2 + t\mathbf{v}_2$$

사이의 최단거리는

$$\left| (A_1 - A_2) \cdot \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|} \right|$$

이다.

기하학적 관점

- 공간에서 영이 아닌 벡터 $\mathbf{a}$에 대한 벡터 $\mathbf{b}$의 정사영 $p_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$를 생각하자. 그러면,

$$\mathbf{b} - p_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$$

이다.

다양한 벡터곱의 성질들

- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$
- $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$
- $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$
- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$

숙제 문제

- 288쪽과 289쪽 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7번