

유형분석. 1. 행렬 연산의 결과 나타나는 행렬식의 변화

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

에 대해 $A, B, 2A, AB, A^{-1}$ 의 행렬식을 구하여라.

유형분석. 2. 공간 안에서 정의한 사상이 선형사상임을 보이고 대응되는 행렬 구하기

벡터 $\mathbf{a} = (1, 0, 2)$ 에 대해 사상 $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 이 아래와 같이 정의되어 있다. L 이 선형사상임을 보이고, L 에 대응되는 행렬을 구하시오.

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{a})$$

유형분석. 3. 선형사상이 공간 안의 사면체를 어떻게 바꾸는가?

선형사상 $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 이 다음을 만족한다.

$$L(1, 1, 0) = (0, 0, 6), L(0, 1, 1) = (0, 4, 2), L(1, 0, 1) = (2, 2, 0)$$

- 1) L 을 나타내는 행렬을 구하여라.
- 2) 세 점 $L(1, 0, 0), L(0, 1, 0), L(0, 0, 1)$ 을 꼭지점으로 갖는 삼각형의 넓이를 구하라.
- 3) 네 점 $L(0, 0, 0), L(1, 0, 0), L(0, 1, 0), L(0, 0, 1)$ 로 이루어진 사면체의 부피를 구하여라.

유형분석. 4. 정사영과 평면에 대한 대칭, 그리고 행렬식

주어진 점 $X \in \mathbb{R}^3$ 과 평면 $x + y + z = 0$ 을 생각하자. 해당 점 X 를 평면에 내린 수선의 발 $T(X)$ 와, 평면에 대해 대칭시킨 $B(X)$ 를 생각하자.

- 1) X 와 $B(X)$ 의 중점을 $T(X)$ 로 표현하라.
- 2) 사상 T 와 B 는 선형사상이다. 이들에 대응하는 행렬 S 와 A 를 구하여라.
- 3) $S^{2021}, A^{2021}, S^{2021} - I, A^{2021} - I$ 의 행렬식을 구하여라.

유형분석. 5. 함수와 선형사상 연습 차수가 n 이하인 다항식 전체의 집합을 P_n 이라고 두고, 다항식 $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 을 벡터 (a_0, a_1, \cdots, a_n) 과 같이 보도록 하자. 사상 T 를 다음과 같이 정의하자.

$$T : P_n \rightarrow P_{n+1}, \quad p(x) \rightarrow \int_0^x p(t)dt + xp(x)$$

- 1) T 가 선형사상임을 보여라.
- 2) $n = 2$ 일 때 T 에 대응되는 행렬을 구하시오.

유형분석. 6. 행렬 연산 속에서 규칙 찾기 실수 a, b, c 에 대하여 3×3 행렬 $L(a, b, c)$ 를

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

로 정의하자. 행렬

$$L(1, 0, 2)^{2021}$$

의 모든 항의 합을 구하여라.

유형분석. 7. 일차종속과 일차독립 판단하기 다음 벡터들이 일차독립인지 일차종속인지 판별하여라.

1) $(1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8), (9, 10, 11, 12), (13, 14, 15, 16)$

2) $(1, 2, 1), (2, 5, 3), (8, 2, 5)$

유형분석. 8. 행렬이 주어지지 않은 상태에서 행렬 연산을 통해 행렬식에 대한 정보 얻기 A 가 모든 항이 실수인 n 차 정사각행렬일 때,

$$(-1)^n \det(-I + 2A - A^2) \geq 0$$

임을 보이시오.

유형분석. 9. 좌표계의 마지막 공간의 두 평면 $x + y - z = 2$ 와 $3x - 4y + 5z = 6$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

1) 두 평면의 교선의 방정식을 구하고, 두 평면 사이의 각 θ 에 대해 $\sin \theta$ 의 값을 구하라. 단, θ 는 0부터 π 사이의 값이다.

2) 점 $(2, 0, 0)$ 을 지나고 위의 두 평면의 교선에 수직인 직선 중에서 평면 $4x - 3y + 4z = 8$ 에 속하는 직선의 방정식을 구하시오.

유형분석. 10. $r = a + b \cos \theta$ 꼴 연습1

극좌표계에서 $0 \leq \sqrt{2} \cos \theta \leq r \leq 1 + \sqrt{2} \cos \theta$ 로 주어진 영역의 넓이를 구하시오.

유형분석. 11. $r = a + b \cos \theta$ 꼴 연습2

극좌표계에서

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 2(1 - \cos \theta) \\ 0 \leq r \leq 2(1 + \cos \theta) \end{cases}$$

로 주어진 영역의 공통부분의 넓이와 둘레를 구하여라.

유형분석. 12. 복잡한 행렬식 계산 연습

$$\begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{pmatrix}$$

의 행렬식을 구하시오.

유형분석. 13. 극좌표에서 $r = f(\theta)$ 가 아닌 경우의 그래프 연습

극좌표로 표현된 두 부등식 $r^2 \leq 6 \cos 2\theta$ 와 $r \cos \theta \geq 1.5$ 를 동시에 만족하는 영역의 넓이를 구하여라.

유형분석. 14. 극좌표에서 제외하는 점들에 대한 논의

$r = \frac{\sec \theta}{1 + 2 \tan \theta}$ 를 $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ 의 범위에서 그려라.

유형분석. 15. 이차곡선과 극좌표

$r = \frac{5}{3 + 2\cos\theta}$ 의 그래프를 그리고, 곡선이 둘러싸는 영역의 넓이를 구하여라.