1 익숙하지 않은 좌표계들

1.1 좌표평면과 극좌표

벡터. 1. *좌표평면에서 직선* $ax + by = c$*는 극좌표계로*

$$r(a\cos\theta + b\sin\theta) = c$$

와 같이 표현됨을 보여라.

벡터. 2. *좌표평면에서* x*축으로* a*,* y*축으로* b*만큼 이동하는 평행이동은 극좌표 그래프* $r = f(\theta)$*의 식을 어떻게 바꾸는가?*

벡터. 3. *극좌표에서 포물선* $r = \dfrac{1}{1+\cos\theta}$*가 주어져 있다. 그 개형을 그리고, 모양이 완전히 같지만 대칭축이* $\theta = \frac{\pi}{4}$*이며 꼭짓점이 제 3사분면에 오는 포물선의 식을 구하여라.*

벡터. 4. $r = \sin n\theta$*의 그래프를 그리고,* $r = \sin n(\theta + \phi)$*가* $r = \sin n\theta$*의 그래프와 완전히 일치하게 하는 가장 작은 양수* ϕ*를* n*에 대해 나타내라.*

벡터. 5. $r^2 = \cos 2\theta$로 표현되는 그래프를 그려라. 이 곡선은 평면에서 주어진 두 정점까지의 거리의 곱이 일정한 점들로 이루어져 있음을 밝히라.

벡터. 6. 직교좌표계에서 중심이 $R(\cos\theta_0, \sin\theta_0)$이고 반지름의 길이가 r_0인 원의 방정식은 극좌표계

$$r^2 - 2rR\cos(\theta - \theta_0) + R^2 - r_0^2 = 0$$

임을 보여라.

벡터. 7. *삼차원 좌표공간에서 길이가* l*인 선분을* $yz-$*평면,* $zx-$*평면,* $xy-$*평면에 정사영한 것의 길이를 각각* l_1, l_2, l_3*라고 두면,*

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 2l^2$$

임을 보이시오. 또한,

$$|l_1^2 - l_2^2| \le l_3^2 \le l_1^2 + l_2^2$$

임도 보여라.

벡터. 8. *1) 극좌표계로 주어진 다음 곡선의 방정식*

$$r = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

를 직교좌표계의 방정식으로 표현하시오. 그리고 위 곡선의 점근선이 있다면 모두 구하시오.

2) 극좌표계로 주어진 세 곡선

$$r = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}, \quad \theta = \frac{\pi}{6}, \quad \theta = 0$$

으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오.

벡터. 9. *극좌표계로 주어진 곡선* $r = \theta \sin\theta, \quad 0 \le \theta < 2\pi$*의 개형을 좌표평면에 그리시오.*

벡터. 10. *극좌표* $\left(4, \dfrac{\pi}{6}\right)$*으로 주어진 점* A*와 극좌표계에서* $r = \dfrac{1}{1-\cos\theta}$*로 표현되는 곡선 위를 움직이는 점* P*가 있다. 좌표평면의 원점을* O*라 할 때, 삼각형* APO*의 둘레의 길이의 최솟값을 구하시오.*

벡터. 11. *극좌표계로 주어진 곡선* $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta \quad (a > 0)$*의 개형을 그리고, 이 곡선 위에 있는* $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$ *인 점* A*와 점* $B(-a, 0)$, $C(a, 0)$*에 대하여* $\angle BAC$*를 구하시오.*

벡터. 12. *로그와선* $r = e^\theta \quad \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}\right)$ *위의 점* (r, θ)*에서의 접선과 점* (r, θ)*와 원점을 지나는 직선이 이루는 각을 구하시오.*

벡터. 13. *곡선* $x^2 + y^2 = 6\sqrt{x^2 - y^2}$*을 극좌표계로 바꾸고, 이 곡선의 개형을 좌표평면에 그리시오.*

벡터. 14. *극좌표계에서* $r^2 = \cos 2\theta + \frac{3}{2}$*로 주어진 곡선과 직교좌표계에서* $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$*로 주어진 직선의 두 교점을 직교좌표계로 구하고, 두 점 사이의 거리를 구하시오.*

벡터. 15. $P = (\cosh t, \sinh t)$로 *주어진 점* P*의 자취를 극좌표계로 나타내고, 그 개형을 그려라. 단,* $t \in (-\infty, \infty)$*이다.*

벡터. 16. *극좌표계에서*

$$r = \sqrt{3} - 2\sin 2\theta$$

로 주어진 곡선의 개형을 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$*에서 좌표평면에 그려라.*

1.2 원기둥좌표계와 구면좌표계

벡터. 17. *원기둥좌표계 상에서*
1) 회전축이 z축이고, $(3,4,3)$을 지나는 높이가 무한한 원기둥
2) $yz-$평면
3) 중심이 $(2,4,5)$이며 반지름이 7이고, $xy-$평면에 평행한 원
의 방정식을 구하여라.

벡터. 18. *구면좌표계 상에서*
1) $\varphi = \frac{\pi}{6}$
2) $\rho = 1$
3) $\theta = \frac{\pi}{2}$
가 나타내는 도형의 모양을 설명하여라.

벡터. 19. *삼차원 좌표공간에 곡면 A와 B가 다음과 같이 주어져 있다.*

A : *원기둥좌표계* (r, θ, z)*에서* $r^2 = \dfrac{1}{1-4z}$

B : *구면좌표계* (ρ, φ, θ)*로* $\rho = \dfrac{1}{2+2\cos\varphi}$

이때, 두 곡면의 교집합은 곡선이다. 이 곡선의 길이를 구하시오.

2 좌표공간과 도형, 벡터와 좌표공간, 벡터의 내적과 외적

2.1 좌표공간의 평행이동과 벡터의 연산

벡터. 20. *벡터* $(3,4,0)$*의 크기를 구하고, 이와 나란한 방향의 단위벡터를 모두 구하라.*

벡터. 21. *평행사변형 법칙*

$$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$$

을 밝혀라. 단, a, b*는* $n-$*공간의 벡터이다.*

벡터. 22. *모든 벡터와 수직인 벡터는 영벡터임을 보여라.*

벡터. 23. *좌표공간의 한 점 P와 두 벡터 $\mathbf{v} = (1, 2, 3), \mathbf{w} = (3, 2, 1)$에 대하여 식*

$$P + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq s \leq 1$$

으로 주어진 평행사변형의 넓이는 얼마인가?

벡터. 24. *삼차원 상에서 어떤 세 벡터가 이루는 평행육면체의 부피를* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$*를 이용해 표현하여라.*

벡터. 25. *삼차원 공간의 벡터* a, b, c*에 대하여*

$$(a \times b) \times c = (a \cdot c)b - (b \cdot c)a$$

임을 보여라.

벡터. 26. *삼각형 ABC의 무게중심을 M, 변 BC, CA, AB의 중점을 각각 P, Q, R이라고 할 때, 벡터 $\overrightarrow{PM}$은 $a_1\overrightarrow{AB} + a_2\overrightarrow{AC}$꼴로 표현할 수 있고, 벡터 $\overrightarrow{QM}$은 $b_1\overrightarrow{AB} + b_2\overrightarrow{AC}$꼴로 표현이 가능하다. $a_1b_1 + a_2b_2$의 값은?*

벡터. 27. *n-공간의 0이 아닌 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$이 있고 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$는 나란하지 않다. 이때, $\mathbf{v} = \mathbf{b} - p_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$와 $\mathbf{w} = \mathbf{c} - p_{\mathbf{a}}(\mathbf{c}) - p_{\mathbf{v}}(\mathbf{c})$를 새롭게 정의하자. $\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$가 서로 수직임을 보이시오.*

벡터. 28. *삼차원 좌표공간에서 두 벡터* A, B*가 이루는 평행사변형* P*를* yz *평면에 정사영한 것의 넓이를* a_1, zx *평면에 정사영한 것의 넓이를* a_2, xy *평면에 정사영한 것의 넓이를* a_3*이라고 하자. 이때* P*의 넓이* a*는*

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

임을 보이시오. 또한, P*와* yz, zx, xy *평면 사이의 각을* $\theta_1, \theta_2, \theta_3$*이라고 둘 때* $a_i = a\cos\theta_i$*임을 보이시오.*

벡터. 29. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$*일 때,* $x + y + z$*가 최소 혹은 최대인* (x, y, z)*을 구하시오.*

벡터. 30. $(x-10)^2+(y-10)^2+(z-10)^2=1$를 만족하는 해인 (p,q,r)을 고려하자.

$$\frac{p+q+r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

의 최솟값을 구하여라.

벡터. 31. 어떤 두 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$가 다음 조건을 만족한다고 하자.

임의의 실수 x, y에 대하여 벡터 $x\mathbf{u}+y\mathbf{v}$의 크기가 $\sqrt{x^2-xy+3y^2}$이다.

이때, 두 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$가 이루는 예각의 탄젠트 값을 구하여라.

벡터. 32. *임의의* $u, v, w \in \mathbf{R}^3$*에 대하여*

$$(u \times v) \times w = (u \cdot w) \times v - (v \cdot w) \times u$$

가 성립함이 알려져 있다. 이를 이용하여 $a, b \in \mathbb{R}^3$*에 대하여*

$$((a \times b) \times a) \times ((a \times b) \times b) = t(a \times b)$$

를 만족시키는 $t \in \mathbb{R}$*을 구하시오.*

벡터. 33. *크기가 각각 1,2,3인 서로 수직인 벡터* $a, b, c \in \mathbb{R}^3$*와* $x^4 + y^4 + z^4 = 1$*를 만족시키는 세 실수* x, y, z*에 대하여* $|xa + yb + zc|$*의 최댓값을 구하시오.*

2.2 도형의 방정식

벡터. 34. *공간에서* $\mathbf{v}$ *방향으로 진행하던 빛이 벡터* $\mathbf{n} \neq 0$*에 수직인 평면에 반사되어 나가는 방향을* $\mathbf{v}*$ *이라 하면* $\mathbf{v}* = \mathbf{v} - 2\dfrac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}\mathbf{n}$*임을 보여라.*

벡터. 35. *벡터* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$*를 평면* $\mathbf{n} \cdot (X - P)$*에 정사영한 벡터를 구하여라.*

벡터. 36. *꼬인 위치에 있는 두 직선* $l_1 = P_1 + t\mathbf{v}$*와* $l_2 = P_2 + s\mathbf{w}$ *사이의 거리를 구하여라.*

벡터. 37. *점* (a, b, c)*와 평면* $px + qy + rz = s$ *사이의 거리를 구하여라.*

벡터. 38. *삼차원 공간에서 두 평면*

$$2x + 4y + z = 5, \quad x - 3y + 2z = 0$$

이 이루는 교각의 코사인 값을 구하시오.

벡터. 39. *좌표공간에서 평면* $x + y + 2z = 0$*에 대하여 점* $P = (x, y, z)$*를 대칭시킨 점을* Q*라고 하자.* Q*를 또다시 이 평면에 대해 대칭시킨 점을* R*이라고 할 때,* Q*와* R*의 좌표를 구하여라.*

벡터. 40. *공간 속의 점* $P_1, P_2, \cdots, P_k$*에 대하여 아래 값을 최소로 하는 점* Q*는 어디인가?*

$$|P_1 - Q|^2 + \cdots + |P_k - Q|^2$$

벡터. 41. *삼차원 공간에서 두 평면* $2x - z = 8$*과* $x + y - z = 6$*의 교선이* $zx-$*평면과 만나는 점을* A*,* $xy-$*평면과 만나는 점을* B*라 하자. 두 점* A, B*와 점* $C = (-2, -4, 3)$*가 이루는 평면과 원점 사이의 거리를 구하시오.*

벡터. 42. *세 점* $P = (1, -1, 0), Q = (2, 1, -1), R = (-1, 1, 2)$*를 지나는 평면과 수직이고 점*$P$*를 지나는 직선의 방정식을 구하라. 또한, 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이 역시 구하라.*

벡터. 43. *3차원 공간에서 세 점* $A(1, 2, 3), B(2, 4, 5), Q(3, 4, 6)$*을 지나는 평면에 대하여 평면 밖의 한 점* P*에서 이 평면에 내린 수선의 발이* Q*라고 한다.* $\overrightarrow{AP}$*의 길이가 8일 때,* $\overrightarrow{AP}$*와* $\overrightarrow{AB}$*가 이루는 각의 크기* θ*를 구하시오.*

벡터. 44. *세 점* $(2,1,0),(0,1,-2),(5,-1,2)$*를 지나는 평면* P *상의 점* $(2,1,0)$*에서* $(1,1,1)$ *방향으로 진행하던 빛이 평면* $x-2y-z=5$*에 반사되어 다시 평면* P*에 맺히는 상을 구하시오.*

벡터. 45. *공간 속의 점* $(1,-1,2)$*에서 두 평면* $x-2y+4z=2$*와* $x+y-2z=5$*의 교선에 내린 수선의 발을 구하시오.*

벡터. 46. *좌표공간에서* $P(1,2,3)$*을 지나고* $\mathbf{v} = (2,3,-1)$*과 나란한 직선* l_1*과, 점* $Q(0,3,2)$*를 지나고* $\mathbf{w} = (1,3,2)$*와 나란한 직선* l_2*에 대해 다음 물음에 답하시오.*

1) $\mathbf{x} = \overrightarrow{PQ}$*의* $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$*에 대한 정사영을 구하시오.*

2) 두 직선 l_1*과* l_2 *사이의 거리를 구하시오.*

벡터. 47. $\mathbb{R}^3$*의 세 벡터* $A = (1,2,2), B = (2,1,1), X_0 = (1,3,1)$*에 대하여* $p(X)$*를* A*에 대한* X*의 정사영이라고 할 때*

(1) $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*는* $p \circ p = p$*임을 보여라.*

(2) $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*를* $q(X) = p(X) + B$*라고 정의하자.* $q^n = q^{n-1} \circ q$*라고 귀납적으로 정의할 경우,* $q^n(X_0)$*을* n*에 대해 나타내라.*