방향미분과 편미분

1-2(1). 1. $f(x,y)=x^2y+y^3$일 때, $\partial f/\partial x$와 $\partial f/\partial y$를 구하여라.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2+3y^2$$

1-2(1). 2. $z=\cos xy+x\cos y$일 때, 점 (x_0,y_0)에서 $\partial z/\partial x$를 구하여라.

$\partial z/\partial x=-y\sin xy+\cos y$이므로 (x,y)에 (x_0,y_0)을 대입하면

$$-y_0\sin x_0y_0+\cos y_0$$

1-2(1). 3. $f(x,y)=xy/\sqrt{x^2+y^2}$일 때, $\partial f/\partial x$를 구하여라.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-xy\cdot(2x)\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(x^2+y^2)^{-3/2}=\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

1-2(1). 4. $f(x,y)=x^{1/3}y^{1/3}$일 때, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$을 편미분의 정의를 이용하여 구하여라.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$$

1-2(1). 5. $f(x,y,z)=xe^y$에 대하여, $\mathrm{grad}f(x,y,z)$를 구하여라.

$$\mathrm{grad}f(x,y,z)=(e^y,xe^y,0)$$

1-2(1). 6. $f(x,y)=e^{xy}+\sin xy$에 대하여, $\mathrm{grad}f(x,y)$를 구하여라.

$$\mathrm{grad}f(x,y)=(ye^{xy}+y\cos xy,xe^{xy}+x\cos xy)$$

1-2(1). 7. $f(x,y)=xy$에 대하여 $\mathrm{grad}f(x,y)$를 구하여라.

$$\mathrm{grad}f(x,y)=(y,x)$$

1-2(1). 8. $f(x,y)=(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$에 대하여 $\mathrm{grad}f(x,y)$를 구하여라.

$$\mathrm{grad}f(x,y)=((x^2+y^2)\frac{2x}{x^2+y^2}+2x\ln(x^2+y^2),2y+2y\ln(x^2+y^2))=(2x(1+\ln(x^2+y^2)),2y(1+\ln(x^2+y^2)))$$

1-2(1). 9. $z=\ln(\sqrt{1+xy})$에 대하여, 점 $(1,2)$에서의 $\partial z/\partial x$를 구하여라.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1+xy}}\cdot(\frac{1}{2})\cdot(1+xy)^{-1/2}\cdot y=\frac{y}{2+2xy}$$

이므로 $(1,2)$에서의 이 값은 $1/2$다.

1-2(1). 10. $w=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$에서 $\partial w/\partial y$를 구하여라.

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2y(x^2-y^2)+2y(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2} = \frac{4x^2y}{(x^2-y^2)^2}$$

1-2(1). 11. *함수 $f(x,y,z) = z^2e^x\cos y$에 대하여, 기울기 벡터를 구하여라.*

$$\mathrm{grad} f(x,y,z) = (z^2e^x\cos y, -z^2e^x\sin y, 2ze^x\cos y)$$

1-2(1). 12. *점 $(1,1,2)$에서 함수 $f(x,y,z) = z^2x + y^3$의 $(1,2,0)-$방향미분계수를 구하여라.*

$$D_{\mathbf{v}}f(x,y,z) = \lim_{t\to 0}\frac{(2)^2(1+t)+(1+2t)^3-5}{t} = 10$$

1-2(1). 13. *함수 $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$의 기울기 벡터를 구하여라.*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (-\frac{1}{2})\cdot 2x\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

이므로

$$\mathrm{grad} f(x,y,z) = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z)$$

1-2(1). 14. *점 $(1,2)$에서 $f(x,y) = x+2xy-3y^2$의 $(\frac{3}{5},\frac{4}{5})-$방향미분계수를 구하여라.*

$$D_{\mathbf{v}}f(x,y) = \lim_{t\to 0}\frac{(1+\frac{3}{5}t)+2(1+\frac{3}{5}t)(2+\frac{4}{5}t)-3(2+\frac{4}{5}t)^2+7}{t} = -5$$

미분가능함수

1-2(1). 15. *$(-5,-12)$와 방향이 반대인 단위벡터를 $\mathbf{v}$라고 하자. 점 (e,e)에서 함수 $f(x,y) = x^y$의 $\mathbf{v}-$방향미분계수를 구하여라.*

원하는 단위벡터는

$$\mathbf{v} = \left(\frac{5}{13},\frac{12}{13}\right)$$

이며, 기울기 벡터는 $(yx^{y-1}, \ln x\cdot x^y)$이다. 즉 해당 점에서의 기울기 벡터는 (e^e, e^e)이다. 주어진 함수 f는 점 (e,e) 근방에서 일급함수이기에 미분가능함수이며, 이에 따라 $\mathbf{v}$-방향미분계수는

$$D_{\mathbf{v}}f(x,y) = (e^e,e^e)\cdot\mathbf{v} = \frac{17}{13}e^e$$

이다.

1-2(1). 16. *함수 $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$이 점 $(1,2)$에서 미분가능함수임을 보여라.*

점 $(1,2)$ 주변에서 주어진 함수는 분모가 0이 되지 않으며, 다항함수와 제곱근, 그리고 그 분수식으로 이루어진 함수이다. f는 $(1,2)$ 주변에서 x와 y로 편미분 가능하며, 연속함수이다.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

이며 이 역시 연속함수이다. 같은 방법으로

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

역시 연속함수이다. 따라서 f는 일급함수이므로 미분가능함수이다.

1-2(1). 17. *정의를 이용하여 $f(x,y)=x^2+y^2$이 미분가능함수임을 보여라.*

$\text{grad}f(x,y)=(2x,2y)$이므로 이를 $\mathbf{a}$로 사용해 미분가능함수임을 보이자. 이때, $X_0=(x_0,y_0)$이며 $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$이다.

$$\lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}}\frac{f(X_0+\mathbf{v})-f(X_0)-2X_0\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=\lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}}\frac{v_1^2+v_2^2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}=0$$

이므로, 미분가능의 정의에 의해 정의역의 모든 점 X_0에 대하여 f는 미분가능하다.

1-2(1). 18. *함수 $f(x,y,z)=x^2e^{-yz}$에 대하여 점 $(1,0,0)$에서 $\mathbf{v}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$방향으로의 방향미분계수를 구하여라.*

주어진 함수 f는 일급함수이므로 미분가능함수이다. 따라서 $\mathbf{v}$ 방향의 방향미분계수는 $\mathbf{v}$와 해당 점에서의 기울기 벡터를 내적해주면 나온다.

$$\text{grad}f(x,y,z)=(2xe^{-yz},-zx^2e^{-yz},-zx^2e^{-yz})$$

이므로 원하는 점에서는 이 벡터가 $(2,0,0)$이다. 이것과 $\mathbf{v}$를 내적하면

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

이다.

1-2(1). 19. *점 $(0,1)$에서 함수 $f(x,y)=x^2-y^2$가 가장 빠르게 증가하는 방향은 어디인가?*

함수 f가 미분가능함수이므로 가장 빠르게 증가하는 방향은 $\text{grad}f(0,1)$과 같은 방향이다. 즉 이를 단위벡터의 관점으로 보면 $(0,-1)$ 이 원하는 방향이 된다.

1-2(1). 20. *함수 $f(x,y)=e^x\cos(\pi y)$의 점 $(0,-1)$에서의 $(2,1)$-방향미분계수를 구하여라.*

주어진 함수는 일급함수이므로 미분가능함수이고, 방향미분계수는 해당 방향과 해당 점에서의 기울기 벡터를 내적하면 얻을 수 있다.

$$\text{grad}f(x,y)=(e^x\cos(\pi y),-\pi e^x\sin(\pi y))$$

이므로 $\text{grad}f(0,-1)=(-1,0)$과 $(2,1)$을 내적하면 -2가 방향미분계수이다.

1-2(1). 21. *함수 $f(x,y,z)=xy^2+y^2z^3+z^3x$에 대하여, 점 $(4,-2,1)$에서 $(1,3,2)$-방향미분계수를 구하여라.*

$\text{grad}f(x,y,z)=(y^2+z^3,2xy+2yz^3,3y^2z^2+3z^2x)$이므로 $\text{grad}f(4,-2,1)=(5,-20,24)$이고, 방향미분계수는 -7이다.

1-2(1). 22. *함수 $f(x,y)=(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$에 대하여, $(1,1)$에서 $\mathbf{v}$-방향미분계수가 0이라고 한다. 이를 만족시키는 단위벡터 $\mathbf{v}$를 모두 찾아라.*

주어진 함수 f는 점 $(1,1)$ 근방에서 일급함수이며, 미분가능함수이다. f의 기울기 벡터를 찾아 보면,

$$\text{grad}f(x,y)=(\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2},-\frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2})$$

이므로 $\text{grad}f(1,1)=(1,-1)$이며, 이것과 벡터 $\mathbf{v}$를 내적한 값이 0이라는 것이다. 따라서

$$\mathbf{v}=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})\quad\text{(복부호동순)}$$

이 원하는 벡터다.

1-2(1). 23. *$f(x,y) = x\tan^{-1}(x/y)$의 점 $(1,1)$에서의 $(1,1)-$방향미분계수를 구하여라.*

f는 점 $(1,1)$ 근방에서 일급함수이며 미분가능함수이다.

$$\mathrm{grad} f(x,y) = (\tan^{-1}(x/y) + \frac{xy}{x^2+y^2}, -\frac{x^2}{x^2+y^2})$$

이므로 기울기벡터는 $(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$이다. $(1,1)$과 이것을 내적하면 방향미분계수는

$$\frac{\pi}{4}$$

이다.

1-2(1). 24. *인왕산의 점 (x,y)에서 높이는 $h(x,y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$로 주어진다고 하자. 점 $(1,0)$에서 산을 가장 빠르게 올라가기 위한 방향은 어디인가?*

$$\mathrm{grad} h(x,y) = (-4xe^{-x^2}, -6ye^{-3y^2})$$

이므로 기울기 벡터는 $(-4e^{-1}, 0)$이 된다. 그러므로 산을 가장 빠르게 올라가기 위해서는 기울기 벡터와 같은 방향인 $(-1,0)$으로 향해야 한다.

1-2(1). 25. *북동쪽으로 시속 20킬로미터로 움직이는 보트가 있다. 바다의 온도는 북쪽으로 갈수록 1킬로미터당 0.2도, 동쪽으로 갈수록 1킬로미터당 0.3도 떨어짐이 알려져 있다. 보트에서 관찰되는 시간당 온도의 변화량은?*

북동쪽으로 시속 20킬로미터로 움직일 경우, 북쪽으로 $10\sqrt{2}$킬로미터, 동쪽으로 $10\sqrt{2}$킬로미터 움직였다는 것이다. 그러면 온도의 감소는 $(10\sqrt{2}, 10\sqrt{2})\cdot(0.2, 0.3) = 5\sqrt{2}$가 된다. 따라서 1시간당 $5\sqrt{2}$도만큼 온도가 감소한다.

연쇄법칙

1-2(1). 26. *$X(t) = (e^t, \cos t)$이고 $f(x,y) = xy$일 때, $\frac{d}{dt}f(X(t))$를 구하여라.*

$$\frac{d}{dt}f(X(t)) = \mathrm{grad} f(X(t)) \cdot X'(t) = (\cos t, e^t)\cdot(e^t, -\sin t) = e^t\cos t - e^t \sin t$$

1-2(1). 27. *$f(x,y) = e^{xy}$에 대하여 $\frac{d}{dt}f(3t^2, t^3)$을 구하여라.*

$$\frac{d}{dt}f(3t^2,t^3) = (t^3e^{3t^5}, 3t^2e^{3t^5})\cdot(6t, 3t^2) = 15t^4e^{3t^5}$$

1-2(1). 28. *$f(x,y) = xe^{x^2+y^2}$에 대하여 $\frac{d}{dt}f(t,-t)$을 구하여라.*

$$\frac{d}{dt}f(t,-t) = (e^{2t^2} + 2t^2e^{2t^2}, -2t^2e^{2t^2})\cdot(1,-1) = (4t^2+1)e^{2t^2}$$

1-2(1). 29.

$$f(u,v) = \frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}$$

이고 $u(x,y) = e^{-x-y}$, $v(x,y) = e^{xy}$일 때, $\partial h/\partial x$를 구하여라.

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-4uv^2}{(u^2-v^2)^2}\cdot(-e^{-x-y}) + \frac{4vu^2}{(u^2-v^2)^2}\cdot(ye^{xy}) = \frac{4(1+y)e^{2xy-2x-2y}}{(e^{-2x-2y}-e^{2xy})^2}$$

1-2(1). 30. $f(u,v) = \cos u \sin v$*이고* $T(s,t) = (\cos(t^2 s), \ln\sqrt{1+s^2})$*일 때*

$$\frac{\partial}{\partial s}(f\circ T)(1,0)$$

을 구하여라.

$$\frac{\partial}{\partial s}(f\circ T)(s,t) = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s} = -\sin u \sin v \cdot (-t^2)\sin(t^2 s) + \cos u \cos v \cdot \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$$

이며 $T(1,0) = (1, \ln\sqrt{2})$이므로

$$\frac{\partial}{\partial s}(f\circ T)(1,0) = \frac{1}{2}\cos 1 \cos(\ln(\sqrt{2}))$$

이다.

1-2(1). 31. $f(x,y,z) = xy + yz + zx,\ X(t) = (e^t, \cos t, \sin t)$*일 때*

$$(f\circ X)'(1)$$

을 구하여라.

$\mathrm{grad} f(e, \cos 1, \sin 1) = (\cos 1 + \sin 1, e + \sin 1, e + \cos 1)$이며 $g'(1) = (e, -\sin 1, \cos 1)$이다. 따라서 구하는 값은

$$e\cos 1 + e\sin 1 - e\sin 1 - \sin^2 1 + e\cos 1 + \cos^2 1 = 2e\cos 1 + \cos 2$$

1-2(1). 32. $f(x,y,z) = e^{xyz}$*이고* $X(t) = (6t, 3t^2, t^3)$*일 때*

$$(f\circ X)'(1)$$

을 구하여라.

$\mathrm{grad} f(6,3,1) = (3e^{18}, 6e^{18}, 18e^{18})$이며 $X'(1) = (6,6,3)$이다. 따라서 구하는 값은

$$18e^{18} + 36e^{18} + 54e^{18} = 108e^{18}$$

1-2(1). 33. $f(x,y) = x^2 + y^2,\ X(u) = (\sin 3u, \cos 8u)$*라고 하자. 그리고* $g(u) = f(X(u))$*라고 하자.*

$$\frac{dg}{du}(0)$$

을 구하여라.

$\mathrm{grad} f(\sin 3u, \cos 8u) = (2\sin 3u, 2\cos 8u)$이며 $X'(u) = 3\cos 3u, -8\sin 8u)$ 이므로 $u = 0$일 때 구하는 값은

$$(0,2)\cdot(3,0) = 0$$

이다.

1-2(1). 34. *경로* $X(t) = (e^t, e^{-t})$*를 따를 때* $f(x,y) = x^2/(2+\cos y)$*에 대하여*

$$\frac{d}{dt}f(X(t))$$

를 구하여라.

$$\mathrm{grad} f(x,y) = \left(\frac{2x}{2+\cos y}, \frac{x^2 \sin y}{(2+\cos y)^2}\right)$$
$$X'(t) = (e^t, -e^{-t})$$

이므로 구하는 값은

$$\frac{2e^{2t}}{2+\cos e^{-t}} - \frac{e^t \sin e^{-t}}{(2+\cos e^{-t})^2}$$

기울기 벡터와 등위면

1-2(1). 35. *$z = x^2 + y^4 + e^{xy}$의 $(1,0,2)$에서의 접평면을 구하여라.*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + ye^{xy}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 + xe^{xy}$$

이므로 해당 점에서의 접평면의 법선벡터는

$$(-2, -1, 1)$$

이다. 따라서

$$-2x - y + z = 0$$

가 원하는 평면의 방정식이다.

1-2(1). 36. *점 $(1,1,1)$에서 그린 곡면 $z = e^{x-y}$의 접평면이 z축과 만나는 좌표는?*

곡면은 함수 $z - e^{x-y}$의 0-등위면이므로 기울기벡터인 $(-e^{x-y}, e^{x-y}, 1)$을 법선벡터로 가지며 점 $(1,1,1)$을 지나는 평면을 구해야 한다. 즉 구하는 평면은 $-x+y+z=1$이 된다. 따라서 이 평면과 z축이 만나는 점은 $(0,0,1)$이 된다.

1-2(1). 37. *곡면 $z = x^2 + y^3$ 위의 점 $(3,1,10)$에서 그린 접평면의 방정식을 구하여라.*

기울기 벡터는 $(2x, 3y^2, -1)$이므로 해당 점에서의 기울기 벡터는 $(6,3,-1)$이다. 따라서 평면의 방정식은 $6x+3y-z=11$이다.

1-2(1). 38. *$f(x,y) = x^2 + y^2$의 그래프와 $g(x,y) = (-x^2 - y^2 - xy^3)$의 그래프에 대하여, 점 $(0,0,0)$에서 그린 접평면이 이루는 사잇각을 구하여라.*

$f(x,y)$에 대해서는 접평면을 구해보면 법선벡터가 $(2x, 2y, -1)$이므로 $z=0$이 원하는 평면이다. $g(x,y)$에 대해서는 접평면을 구해보면 법선벡터가 $(-2x-y^3, -2y-3xy^2, -1)$이므로 $z=0$이 원하는 평면이다. 따라서 두 접평면이 같으므로 사잇각은 0이다.

1-2(1). 39. *곡면 $x^2 + 2y^2 + 3xz = 10$에 대하여, 점 $(1,2,\frac{1}{3})$에서의 접평면을 구하여라.*

곡면에서의 기울기 벡터를 구하면

$$(2x+3z, 4y, 3x)$$

이므로, 원하는 점에서는 그 벡터가 $(3,8,3)$ 이다. 따라서 원하는 평면은

$$3x + 8y + 3z = 20$$

이다.

1-2(1). 40. *곡면* $z = x^3 + y^3 - 6xy$ *위의 점* $(1, 2, -3)$*에서 그린 접평면의 방정식을 구하여라.*

기울기 벡터를 구하면 $(3x^2 - 6y, 3y^2 - 6x, -1)$로 원하는 점에서는 그 벡터가 $(-9, 6, -1)$이다. 따라서 평면은

$$-9x + 6y - z = 6$$

1-2(1). 41. *곡면* $x^3y^3 + y - z + 2 = 0$ *위의 점* $(0, 0, 2)$*에서 곡면에 수직한 단위벡터를 구하여라.*

해당 곡면의 기울기 벡터는 $(3x^2y^3, 3x^3y^2 + 1, -1)$이므로 원하는 점에서는 $(0, 1, -1)$이다. 따라서 이를 단위벡터로 바꾸면

$$(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

와

$$(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

가 원하는 벡터다.

1-2(1). 42. $f(x, y) = xy$*의 그래프에 대하여, 점* $(2, 1)$*에서 그린 접평면과* $xy-$*평면의 교선의 방정식을 구하여라.*

해당 점에서 그린 접평면의 방정식은

$$x + 2y - z = 4$$

이다. 이 평면과 $xy-$평면의 교선은 $z = 0$, $x + 2y = 4$가 될 것이다. 즉

$$x + 2y = 4, z = 0$$

1-2(1). 43. *곡면* $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ *위의 점* $(1, 1, 1)$*에서 그린 접평면의 방정식을 구하여라.*

기울기 벡터가 $(2, 2, 2)$이므로 접평면의 방정식은 $x + y + z = 3$이다.

1-2(1). 44. *함수* $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$*의* $18-$*등위면 위의 점* $(3, 5, -4)$*를 생각하자. 이 점에서 그린 접평면을 구하여라.*

기울기 벡터는 $(2x, 2y, -2z)$이므로 주어진 점에서의 접평면의 법선벡터는 $(6, 10, -8)$이다. 따라서 평면의 방정식은

$$3x + 5y - 4z = 50$$

이다.

적분연습

1-2(1). 45.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx$$

를 구하여라.

$$\ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$$

1-2(1). 46.

$$\int x\sqrt{a + bx} dx$$

를 구하여라.

$$\frac{2(3bx-2a)(a+bx)^{3/2}}{15b^2}$$

1-2(1). 47.

$$\int \tanh x dx$$

을 구하여라.

$$\ln|\cosh x|$$

최대최소 문제와 고계미분

적분기호 속의 미분법

1-2(1). 48. $\frac{d}{dx}\int_0^1 xe^y dy$*를 구하여라.*

xe^y가 일급함수이므로 라이프니츠 정리를 이용하면

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 xe^y dy = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}(xe^y)dy = \int_0^1 e^y dy = e-1$$

1-2(1). 49. $\frac{d}{dy}\int_0^1 x^2 y dx$*의 값을 구하여라.*

x^2y가 일급함수이므로 라이프니츠 정리를 이용하면

$$\frac{d}{dy}\int_0^1 x^2 y dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} x^2 y dx = \frac{1}{3}$$

이다.

1-2(1). 50. $\frac{d}{dx}\int_0^1 e^{-y^2} dy$*의 값을 구하여라.*

적분된 수는 x에 무관한 상수이므로 x로 미분한 값은 0이다. 따라서 해당하는 값은 0.