문제 6. 1. *B가 $m\times k$ 행렬일 때, $A=B^tB$가 $k\times k$ 행렬이며 $A^t=A$임을 보여라.*

B가 $m\times k$ 행렬이면 B^t는 $k\times m$ 행렬이다. 따라서 B^tB는 $k\times k$행렬이므로, A는 $k\times k$행렬이다. 또한 $A^t=(B^tB)^t=B^t(B^t)^t=B^tB=A$이므로 대칭행렬임을 역시 확인할 수 있다.

문제 6. 2. *B가 $n\times n$ 행렬이라면, $A=B+B^t$는 $A=A^t$이며 $C=B-B^t$는 $C^t=-C$임을 보여라. 이를 이용하여, 임의의 정사각행렬 M은 $P=P^t$인 행렬 P와 $Q=-Q^t$인 행렬 Q의 합으로 표현될 수 있음을 보여라.*

$A^t=(B+B^t)^t=B^t+B=B+B^t=A$이며, $C^t=(B-B^t)^t=B^t-B=-C$임을 확인할 수 있다. 이로부터 확인할 수 있는 것이, $A+C$를 하면 $2B$가 된다는 것이며, A는 P의 성질을, C는 Q의 성질을 만족한다는 것이다. 따라서

$$M=\frac{1}{2}(M+M^t)+\frac{1}{2}(M-M^t)=\frac{1}{2}P+\frac{1}{2}Q$$

로 표시될 수 있음을 안다. 해당 성질을 만족하는 행렬은 어떤 실수로 나누어도 여전히 해당 성질을 만족한다.

문제 6. 3. *다음이 참인지, 아닌지를 판정하라.*
1) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$
2) B의 대각선 원소들을 제외하면 모두 0이라고 할 때, $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$
3) $A=A^t$라면, $A^2=(A^2)^t$

1)

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

일 때를 생각해본다면,

$$(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

인 반면

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

으로 서로 같지 않다. 따라서 거짓.

2)

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$$

일 때를 생각해본다면,

$$(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix}2&0\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\4&0\end{pmatrix}$$

인 반면

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix}0&0\\3&0\end{pmatrix}$$

으로 서로 같지 않다. 따라서 거짓.

3)

$$(A^2)^t=(AA)^t=A^tA^t=AA=A^2$$

이다. 따라서 참.

문제 6. 4. *선형사상* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$*가 있어서*

$$T(1,-1,0) = (4,2,1,0), T(2,2,-1) = (1,3,0,6), T(-1,-1,1) = (-1,3,-3,0)$$

이라고 한다. T*에 대응되는 행렬을 구하여라.*

대응하는 행렬을 구하기 위해서는 $T(1,0,0)$, $T(0,1,0)$, $T(0,0,1)$을 구해야 한다.

$$T(1,0,0) = \frac{1}{2}\left(T(1,-1,0) + T(2,2,-1) + T(-1,-1,1)\right) = (2,4,-1,3)$$
$$T(0,1,0) = \frac{1}{2}\left(T(2,2,-1) - T(1,-1,0) + T(-1,-1,1)\right) = (-2,2,-2,3)$$
$$T(0,0,1) = T(2,2,-1) + 2T(-1,-1,1) = (-1,9,-6,6)$$

으로부터 대응되는 행렬은

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & 9 \\ -1 & -2 & -6 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

임을 확인할 수 있다.

문제 6. 5. *아래 사상들이 선형사상이 맞는지 판단하라. 만약 맞다면, 이들에 대응되는 행렬을 구하여라.*
1) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1x_2, x_3)$
2) $n \geq 2$*에 대하여,* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$, $T(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_1)$
3) $n \geq 2$*에 대하여,* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}$

1) $T(1,3,1) = (4,3,1)$인 반면, $T(2,6,2) = (8,12,2)$로

$$2T(1,3,1) \neq T(2,6,2)$$

이기에 선형사상이 아니다.

2) 선형사상이 맞다. 먼저, 실수 a에 대하여

$$aT(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a(x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_1) = (ax_{n-1}, ax_{n-2}, \cdots, ax_1)$$

이며

$$T(ax_1, ax_2, \cdots, ax_n) = (ax_{n-1}, ax_{n-2}, \cdots, ax_1)$$

이기에 서로 같다. 또한

$$T(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n) = (x_{n-1} + y_{n-1}, \cdots, x_1 + y_1) = T(x_1, x_2, \cdots, x_n) + T(y_1, \cdots, y_n)$$

임 역시 확인 가능하다. 따라서 이는 선형사상이며, $T(\mathbf{e}_1)$부터 $T(\mathbf{e}_n)$을 직접 구해 보면 행렬은

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

이라는 $(n-1) \times n$ 행렬을 만들 수 있게 된다.

3) 실수 a에 대하여

$$T(a\mathbf{x}) = (a\mathbf{x}\cdot a\mathbf{x})a\mathbf{x} = a^3T(x)$$

으로, $a \neq \pm 1$일 경우 선형적이지 않다. 따라서, 선형사상이 아니다.

문제 6. 6. *2×2 행렬*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

을 A라고 하자. $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = O$임을 보여라.

$$\begin{aligned} A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+dc & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= O \end{aligned}$$

가 성립한다.

문제 6. 7. *3×3 행렬*

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

을 E라고 하자. 3×3 행렬 $A = (a_{ij})$에 대하여, E를 곱하면 A는 어떻게 되는지 구하시오. 이를 통해, A의 둘째 행에 3배를 한 후 첫째 행과 셋째 행을 뒤바꾸는 변환에 대응하는 행렬 X를 구하시오.

행렬 A의 앞에 E를 곱한다면,

$$\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & a_{13}+a_{23} \end{pmatrix}$$

이 됨을 확인할 수 있다. 이를 잘 응용하면, A에 대해 원하는 조작을 가하는 행렬 X는

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

임을 확인할 수 있다.

문제 6. 8. *$m\times n$ 행렬 A와 $n\times l$ 행렬 B가 주어졌을 때, B의 j열을 $\mathbf{b}_j$라 하면 AB의 j열은 $A\mathbf{b}_j$임을 보이시오. 곧,*

$$AB = A(\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \cdots \mathbf{b}_n) = (A\mathbf{b}_1\ A\mathbf{b}_2\ \cdots A\mathbf{b}_n)$$

AB의 j번째 열을 들여다보자. 이때, AB는 $m\times l$ 행렬이므로 j는 1과 l 사이의 자연수이다.

AB의 i행 j열은 A의 i행과 B의 j열을 벡터로 본 이후 내적한 것과 같다. 그런데, $A\mathbf{b}_j$의 i번째 원소를 볼 경우에는 이 역시 A의 i번째 행과 $\mathbf{b}_j$, 즉 B의 j번째 열을 내적한 것과 같다. 따라서 모든 i에 대해 이것이 성립하므로, AB의 j열은 B의 j열에 A를 곱한 것과 같음을 알 수 있다.

문제 6. 9. *$n\times n$ 정사각행렬 A가 $A = A^t$를 만족한다.*

1) $n\times 1$ 행렬 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$에 대해 $(A\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \mathbf{v}\cdot(A\mathbf{w})$임을 보이시오.

2) $A\mathbf{v} = a\mathbf{v}$, $A\mathbf{w} = b\mathbf{w}$인 서로 다른 상수 a, b가 존재하는 경우, 벡터 $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$는 수직임을 증명하시오. (Hint : 벡터의 내적을 다른 방식으로 표현해 보시오)

1) $(A\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (A\mathbf{v})^t \mathbf{w} = \mathbf{v}^t A^t \mathbf{w} = \mathbf{v}^t A \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot (A\mathbf{w})$

2) $(A\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (a\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = a\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$이다. 반면, $\mathbf{v} \cdot (A\mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (b\mathbf{w}) = b\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ 이다. 이때, a와 b가 다르므로 두 벡터를 내적한 값이 0이다. 즉, 두 벡터는 수직하다.

문제 6. 10. *영이 아닌 벡터 $\mathbf{a} = (a, b, c)$에 대해 $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$을 아래와 같이 정의하자.*

$$L(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}$$

L이 선형사상임을 보이고, 이에 대응하는 행렬을 구하시오.

만약 $L(p\mathbf{x} + q\mathbf{y}) = pL(\mathbf{x}) + qL(\mathbf{y})$가 성립한다면, 선형사상의 조건을 만족시킬 것이다. 따라서 이것이 만족하는지 확인하여 보자.

$$\begin{aligned} L(p\mathbf{x} + q\mathbf{y}) &= \frac{(\mathbf{a} \times (p\mathbf{x} + q\mathbf{y})) \times \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} \\ &= p\frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} + q\frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} \\ &= pL(\mathbf{x}) + qL(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

위와 같이 선형사상임을 확인할 수 있다.

$$L(1,0,0) = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}(c^2+b^2, -ab, -ac)$$

$$L(0,1,0) = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}(-ab, c^2+a^2, -bc)$$

$$L(0,0,1) = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}(-ac, -bc, a^2+b^2)$$

이므로, 우리가 원하는 행렬은

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix} c^2+b^2 & -ab & -ac \\ -ab & c^2+a^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

이다.

문제 6. 11. *삼차원 좌표공간의 벡터 $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$과 $\mathbf{v} = (1, 2, 1)$를 포함하며 원점을 지나는 평면을 H라 할 때, 다음 물음에 답하시오.*

1) 점 X에 대하여 그것과 가장 가까운 H위의 점을 P라고 하자. 점 $X = (x, y, z)$에 대하여, P의 좌표를 구하여라.

2) X에 대하여 P를 내놓는 사상 $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$가 선형사상임을 보이시오.

3) 선형사상 P에 대응하는 행렬을 구하시오.

1) 평면의 방정식을 먼저 구해 보자. 두 벡터에 모두 수직한 법선 벡터는 $(1, -1, 1)$이다. 따라서 평면의 방정식은 $x - y + z = 0$이며, P는 $(x + t, y - t, z + t)$라고 표현될 수 있다. 이것이 평면 위에 있어야 하므로 $x - y + z + 3t = 0$이고, $t = \frac{-x+y-z}{3}$이다. 따라서

$$(\frac{2x+y-z}{3}, \frac{x+2y+z}{3}, \frac{-x+y+2z}{3})$$

이 P의 좌표가 된다.

2, 3) 대응하는 행렬을 구한 이후, 행렬에 사상이 대응되기에 이것이 선형사상임을 보이자. $X = (x, y, z)$는 위와 같은 P로서 이동한다. 따라서 대응되는 행렬은

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

이며, 이에 따라 P는 선형사상이다.

문제 6. 12. *두 벡터 $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$과 $\mathbf{b} = (-2, 0, 0)$에 대하여 다음과 같이 정의된 사상 $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$이 선형사상임을 보이고, L을 나타내는 행렬을 구하시오.*

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3)$$

$\mathbf{x} = (x, y, z)$라고 두자.

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}) &= \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{a} \times (0, 2z, -2y) \\ &= (-2y, 2y, 2z) \end{aligned}$$

이다. 따라서, 대응하는 행렬은

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

임을 확인 가능하며 그렇기에 L은 선형사상이다.

문제 6. 13.

$$x + 4y + 1z = 1$$

$$2x + 9y + tz = 1$$

$$-x + ty - 6z = -6$$

에 대하여, 1) 근이 무한 개 존재하는 t의 값을 구하고, 해당 경우 일반해를 구하라.

2) 근이 없는 t의 값을 모두 구하여라.

1) 둘째 식에서 첫째 식의 두 배를 빼고, 셋째 식에 첫째 식을 더해 준다면 각각

$$y + (t - 2)z = -1$$

$$(4 + t)y - 5z = -5$$

이다. 만약 이 두 개의 식이 동일한 식이라면, 근이 무한 개 존재하게 될 것이다. 따라서

$$1 : 4 + t = t - 2 : -5 = -1 : -5$$

인 t를 떠올린다면, $t = 1$이 된다. 이 경우에 일반해를 구하여 보자. 그러면 $y - z = -1$이 성립하면 되고, 이 경우에 $x = 1 - 4y - z = -5y$로 표현 가능하다. 따라서 일반해는

$$\frac{x}{-5} = y = z - 1$$

직선 위에 있는 점 (x, y, z)가 된다.

2) 만약 위의 두 식에서 일치하는 것이 아니라, 기울기만 같고 상수항 부분이 다르다면 근이 없다. 따라서 $1 : 4+t = t-2 : -5$인 $t^2+2t-8 = -5$의 근 $t = -3$일 때 근이 없다.

문제 6. 14. *방향이* $\mathbf{v} = (3,2,1)$*이고 점* (x_1, x_2, x_3)*을 지나는 직선이* $xy-$*평면과 만나는 점을* $T(x_1, x_2, x_3)$ *이라고 하자.*

1) 사상 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*을 구하시오.*

2) T*가 선형사상임을 보이고, 이에 대응되는 행렬을 구하시오.*

1) $xy-$ 평면과 만난다는 것은 곧 z좌표가 0이 되는 점을 찾으라는 것이다. 따라서, 원하는 점은

$$(x_1 - 3x_3, x_2 - 2x_3, 0)$$

이다.

2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_3 \\ x_2 - 2x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

을 얻게 되므로, T는 대응되는 행렬

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

을 갖는 선형사상이다.

문제 6. 15. *벡터* $\mathbf{a} = (1,0,2)$*에 대해 사상* $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*이 아래와 같이 정의되어 있다.* L*이 선형사상임을 보이고,* L*에 대응되는 행렬을 구하시오.*

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{a})$$

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$이라 하자. 그러면

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}) &= \mathbf{a} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{a}) \\ &= (1,0,2) \times ((x_1, x_2, x_3) \times (1,0,2)) \\ &= (1,0,2) \times (2x_2, x_3 - 2x_1, -x_2) \\ &= (4x_1 - 2x_3, 5x_2, x_3 - 2x_1) \end{aligned}$$

을 얻으므로, L에 대응되는 행렬은

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

이며, 행렬에 대응되므로 선형사상이다.

문제 6. 16. *차수가* n *이하인 다항식 전체의 집합을* P_n*이라고 두고, 다항식* $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ *을 벡터* $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$*과 같이 보도록 하자. 사상* T*를 다음과 같이 정의하자.*

$$T : P_n \to P_{n+1}, \quad p(x) \to \int_0^x p(t)dt + xp(x)$$

1) T*가 선형사상임을 보여라.*

2) $n = 2$*일 때* T*에 대응되는 행렬을 구하시오.*

1) 정해진 n에 대하여 $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$으로 생각하자. 그러면

$$\begin{aligned}
T(p+q) &= \int_0^x (p(t)+q(t))dt + x(p(x)+q(x)) \\
&= (a_0+b_0)x + \frac{1}{2}(a_1+b_1)x^2 + \cdots + \frac{1}{n+1}(a_n+b_n)x^{n+1} + (a_0+b_0)x + \cdots + (a_n+b_n)x^{n+1} \\
&= 2(a_0+b_0)x + \frac{3}{2}(a_1+b_1)x^2 + \cdots + \frac{n+2}{n+1}(a_n+b_n)x^{n+1} \\
&= \left(2a_0 x + \frac{3}{2}a_1 x^2 + \cdots + \frac{n+2}{n+1}a_n x^{n+1}\right) + \left(2b_0 x + \frac{3}{2}b_1 x^2 + \cdots + \frac{n+2}{n+1}b_n x^{n+1}\right) = T(p) + T(q)
\end{aligned}$$

이며,

$$\begin{aligned}
T(rp) &= \int_0^x rp(t)dt + x(rp(x)) \\
&= r\int_0^x p(t)dt + r(xp(x)) \\
&= r(\int_0^x p(t)dt + xp(x)) = rT(p)
\end{aligned}$$

이므로, T는 선형사상이다.

2) $n = 2$일 때 $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$을 고려하자. 그러면

$$T(p) = 2a_0 x + \frac{3}{2}a_1 x^2 + \frac{4}{3}a_2 x^3$$

을 얻으므로, 우리는 곧

$$(a_0, a_1, a_2) \quad \to \quad (0, 2a_0, \frac{3}{2}a_1, \frac{4}{3}a_2)$$

인 사상 T를 생각할 수 있는 것이다. 대응되는 행렬은

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

이다.

문제 6. 17. *실수 a, b, c에 대하여 3×3 행렬 $L(a,b,c)$를*

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

로 정의하자. 행렬

$$L(1,0,2)^{2021}$$

의 모든 항의 합을 구하여라.

행렬

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

이 어떤 행렬 앞에 곱해지는 상황을 들여다보자. 그러면

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\\x_7&x_8&x_9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+2x_7&x_2+2x_8&x_3+2x_9\\2x_1+x_4&2x_2+x_5&2x_3+x_6\\2x_5+x_7&2x_6+x_8&2x_7+x_9\end{pmatrix}$$

이다. 그럼 모든 항의 합은 $(x_1+x_2+\cdots+x_9)$에서 $(3x_1+3x_2+\cdots+3x_9)$로 3배가 됨을 알 수 있다. $L(1,0,2)$는 모든 항의 합이 9였으므로, $L(1,0,2)^2$는 여기에 3을 곱한 27을 모든 항의 합으로 가진다. 따라서, $L(1,0,2)^{2021}$는 3^{2022}를 모든 항의 합으로 가진다.

문제 6. 18. *P_n을 차수가 n 이하인 실수 계수 다항식들의 집합이라고 하자. 그러면, 다항식 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$은 다항식의 계수들로 만들어지는 벡터 $(a_0,a_1,\cdots,a_n)$과 동일하게 생각할 수 있다. 다음 사상 T가 선형사상임을 보이고, 이에 대응되는 행렬을 구하시오.*

$$T:P_1\to\mathbb{R}^2$$
$$T(a+bx)=\left(\int_0^1(a+bx)dx,a\right)$$

$$T(a+bx)=\left(\int_0^1(a+bx)dx,a\right)=\left(a+\frac{1}{2}b,a\right)$$

이므로, 벡터 (a,b)가 $(a+\frac{1}{2}b,a)$로 가는 사상이 T인 것이다. 따라서 이 사상 T는

$$\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\1&0\end{pmatrix}$$

이라는 행렬에 대응되는 선형사상이다.

문제 6. 19. *$\mathbb{R}^4$에서 다음과 같이 행렬의 곱으로 정의된 선형변환 $L(a,b,c,d)=(y_1,y_2,y_3,y_4)$을 생각하자.*

$$\begin{pmatrix}y_1&y_2\\y_3&y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\2&1\end{pmatrix}$$

선형변환 L에 대응되는 행렬을 구하시오.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}y_1&y_2\\y_3&y_4\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\2&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a-c&b-d\\2c&2d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\2&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2a+2b-2c-2d&b-d\\4c+4d&2b\end{pmatrix}\end{aligned}$$

이므로, 선형사상 L은

$$L(a,b,c,d)=(2a+2b-2c-2d,b-d,4c+4d,2b)$$

로 정의된다. 따라서 대응되는 행렬은

$$\begin{pmatrix}2&2&-2&-2\\0&1&0&-1\\0&0&4&4\\0&2&0&0\end{pmatrix}$$

이다.

문제 6. 20. *삼차원 공간에서 벡터* $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$*과* $\mathbf{b} = (1, -1, 1)$, $\mathbf{c} = (0, 1, 1)$*에 대하여 다음 물음에 답하시오.*

1) 벡터 $\mathbf{a}$*에 대한 정사영* $f(\mathbf{x}) = p_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$*와 사상* $g(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{x})$*는 선형사상임을 보이시오.*

2) 정사영 f*와 사상* g*의 합성 사상* $g \circ f$*이 선형사상임을 보이고, 이에 대응하는 행렬* M*을 구하시오.*

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \frac{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y})}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a} \\ &= \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a} + \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{y}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a} \\ &= f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

이며

$$\begin{aligned} f(t\mathbf{x}) &= \frac{\mathbf{a}\cdot(t\mathbf{x})}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a} \\ &= t\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a} \\ &= tf(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

이므로, f는 선형사상이다.

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times(\mathbf{x}+\mathbf{y})) \\ &= \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{x}+\mathbf{c}\times\mathbf{y}) \\ &= \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{x}) + \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{y}) = g(\mathbf{x}) + g(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

이며,

$$\begin{aligned} g(t\mathbf{x}) &= \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times(t\mathbf{x})) \\ &= \mathbf{b}\cdot t(\mathbf{c}\times\mathbf{x}) \\ &= t(\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{x})) = tg(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

이므로 g도 선형사상이다.

2)

$$(g\circ f)(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = g(f(\mathbf{x}+\mathbf{y})) = g(f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})) = g(f(\mathbf{x}))+g(f(\mathbf{y})) = (g\circ f)(\mathbf{x}) + (g\circ f)(\mathbf{y})$$

$$(g\circ f)(t\mathbf{x}) = g(f(t\mathbf{x})) = g(tf(\mathbf{x})) = tg(f(\mathbf{x})) = t(g\circ f)(\mathbf{x})$$

이므로 $g \circ f$도 선형사상이다.

$$\begin{aligned} (g\circ f)(1,0,0) &= g\left(\frac{1}{14}, \frac{2}{14}, \frac{3}{14}\right) = -\frac{1}{14} \\ (g\circ f)(0,1,0) &= g\left(\frac{2}{14}, \frac{4}{14}, \frac{6}{14}\right) = -\frac{2}{14} \\ (g\circ f)(0,0,1) &= g\left(\frac{3}{14}, \frac{6}{14}, \frac{9}{14}\right) = -\frac{3}{14} \end{aligned}$$

이므로, 이를 열로 늘어놓은

$$M = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

이라는 1×3 행렬이 원하는 행렬이다.