중간문풀-6. 1. *$D = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \le 1\}$과 $D_0 = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 < 1\}$을 생각하자. 그 다음, 연속함수 $u : D \to \mathbb{R}$이 존재하여*

$$\bigtriangledown^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

을 만족시킨다고 한다. 이 조화함수 u에 대하여, $x_0^2+y_0^2+z_0^2 = 1$인 (x_0, y_0, z_0)이 존재하여 모든 $(x,y,z) \in D$에 대해 $u(x,y,z) \le u(x_0,y_0,z_0)$임을 보여라.

D는 유계닫힌집합이므로 최대최소정리에 의하여, D 내부의 어떤 점이 존재하여 연속함수 u는 그 점에서 최대일 것이다. 이제 그 점이 $x_0^2+y_0^2+z_0^2 = 1$인 영역, 즉 $D - D_0$에 있음을 보여야 한다. 그러면 귀류법을 이용하여 보자. 최대인 점이 D_0에 있다면, D_0는 열린집합임에도 불구하고 최대인 점을 가지고 그 점에서의 함숫값은 $\max_{D_0} u$라 표현할 수 있다. 이 값은 유계닫힌집합 $D - D_0$에서의 모든 함숫값 이상이어야 한다. 이 집합에서는 최대최소정리에 의하여 최댓값이 존재한다. 즉 주어진 것의 반대명제이자 반박해야 할 명제는

$$\max_{D_0} u > \max_{D-D_0} u$$

이다.

이를 가정하고, $\varepsilon = \max_{D_0} u - \max_{D-D_0} u > 0$으로 두자. 그러면 가정에 의하여 어떤 $\mathbf{x_0} \in D_0$가 존재하여 $u(\mathbf{x_0}) = \max_{D_0} u$일 것이다. 그 다음으로, 함수 $w : D \to \mathbb{R}$를 아래와 같이 정의하자.

$$w(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + \frac{\varepsilon}{2} e^{x-1}$$

그러면, 양변에 라플라스 연산자를 취할 경우에는

$$\bigtriangledown^2 w(\mathbf{x}) = \bigtriangledown^2 u(\mathbf{x}) + \frac{\varepsilon}{2} e^{x-1} = \frac{\varepsilon}{2} e^{x-1} > 0$$

임을 확인할 수 있다.

이때 함수 w 역시 연속함수임이 자명하고, 유계닫힌구간 D에서 정의되므로 최댓값이 존재한다. 이때 (x_1, y_1, z_1)에서 최댓값에 도달한다고 하자. 그리고 $(x_1, y_1, z_1) \in D_0$이라고 가정해보자. 그러면 D_0는 열린집합이므로, (x_1, y_1, z_1)을 포함하는 열린집합 $V \subseteq D$가 존재할 것이다. 이때 D 전체에서 $\bigtriangledown^2 w$가 양수이므로, 일반성을 잃지 않고

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{(x_1,y_1,z_1)} > 0$$

이라고 해보자. 그러면 경로 $c_1(t) = (t, y_1, z_1)$에 함수 w을 제한시켰을 때, 구간 $(x_1 + \rho x, y_1, z_1)$을 $\rho \in [-\delta, \delta]$이도록 잡으면 $\delta > 0$에 대하여 그것이 충분히 작을 때 이 구간에서 w는 이계도함수가 양수이므로 그 구간에서 아래로 볼록한 함수가 된다. 따라서 이 함수가 (x_1, y_1, z_1)에서 최대가 될 수 없다. 따라서 가정에 모순되므로, $(x_1, y_1, z_1) \in D - D_0$이다.

그런데 모든 $\mathbf{x} \in D - D_0$에 대하여,

$$w(\mathbf{x_0}) - w(\mathbf{x}) = (u(\mathbf{x_0}) - u(\mathbf{x})) + \frac{\varepsilon}{2}(e^{x_0-1} - e^{x-1}) > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$$

임이 ϵ의 정의와 $x_0, x < 1$임에 따라 성립하고, 이로부터 $w(\mathbf{x_0}) > w(\mathbf{x})$이 된다. 따라서 최댓값의 정의에 의해, 함수 w의 최댓값은 $D - D_0$에서 만들어질 수 없다. 그러나 윗 문단에서 w의 최댓값은 항상 $D - D_0$에서 만들어져야 한다고 했다. 따라서 모순이 생긴다. 그러므로, 가정이 기각되어 u는 그 최댓값을 $D - D_0$, 즉 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 위에서 가지게 된다.

중간문풀-6. 2. *함수 $f(x,y,z)$를 아래와 같이 정의하자.*

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz(x^2-3y^2+2z^2)}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 \quad (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

(a) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(0,0,0)$*을 구하여라.*
(b) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z}(0,0,0)$*을 구하여라.*
(c) f*가 삼급함수인지 판별하여라.*

(a)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(0,0,0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(0,0,0)\right) \\
&= \lim_{h_x \to 0} \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(h_x,0,0) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(0,0,0)}{h_x} \\
&= \cdots \\
&= \lim_{h_x \to 0} \lim_{h_y \to 0} \frac{\lim_{h_z \to 0} \frac{f(h_x,h_y,h_z)-f(h_x,h_y,0)}{h_z} - \lim_{h_z \to 0} \frac{f(h_x,0,h_z)-f(h_x,0,0)}{h_z} - \lim_{h_z \to 0} \frac{f(0,h_y,h_z)-f(0,h_y,0)}{h_z} + \text{li}}{h_x h_y} \\
&= \lim_{h_x \to 0} \lim_{h_y \to 0} \lim_{h_z \to 0} \frac{f(h_x,h_y,h_z) - (f(h_x,h_y,0) + f(h_x,0,h_z) + f(0,h_y,h_z)) + (f(h_x,0,0) + f(0,h_y,0) + f}{h_x h_y h_z} \\
&= \lim_{h_x \to 0} \lim_{h_y \to 0} \lim_{h_z \to 0} \frac{f(h_x,h_y,h_z)}{h_x h_y h_z} \\
&= \lim_{h_x \to 0} \lim_{h_y \to 0} \lim_{h_z \to 0} \frac{h_x^2 - 3h_y^2 + 2h_z^2}{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2} \\
&= \lim_{h_x \to 0} \lim_{h_y \to 0} \frac{h_x^2 + 3h_y^2}{h_x^2 + h_y^2} \\
&= \lim_{h_x \to 0} \frac{h_x^2}{h_x^2} = 1
\end{aligned}$$

(* 도저히 이 식을 종이에 욱여넣을 수 있는 방법을 찾지 못해 우측이 잘려 있습니다. 양해 부탁드립니다. 뒤에는 무엇이 들어가야 할지는 여러분의 수학 실력에 맡깁니다.)

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z}(0,0,0) &= \lim_{h_y \to 0} \lim_{h_x \to 0} \lim_{h_z \to 0} \frac{h_x^2 - 3h_y^2 + 2h_z^2}{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2} \\
&= \lim_{h_y \to 0} \lim_{h_x \to 0} \lim_{h_z \to 0} \frac{h_x^2 - 3h_y^2}{h_x^2 + h_y^2} \\
&= \lim_{h_y \to 0} \frac{-3h_y^2}{h_y^2} = -3
\end{aligned}$$

(c) 만약 f가 삼급함수였다면, 편미분 교환법칙에 의하여 $f_{zyx} = f_{zxy}$여야 한다. 그러나, $f_{zyx}(0,0,0) \neq f_{zxy}(0,0,0)$이다. 따라서 f는 삼급함수가 아니다.

중간문풀-6. 3. *$u(x,y,z)$는 원점을 제외한 좌표공간에서 정의된 이급함수이다. 이때, 아래 식이 성립함이 잘 알려져 있다.*

$$\bigtriangledown^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial u}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$$

(a) 이 식이 성립함을 연쇄법칙을 이용하여 보여라.

(b) 만약 $\bigtriangledown^2 u = 0$이고 $u(x,y,z)$가 ρ에만 의존한다고 하자. 또한, $u(1,1,1) = \sqrt{3}, u(1,2,2) = 1$이라고 한다. 이때, $u(3,4,0)$의 값을 구하여라.

(a) 세부 계산은 생략한다.

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \sin\phi\cos\theta\frac{\partial}{\partial\rho}(\cos\theta\sin\phi u_\rho + \frac{1}{\rho}\cos\phi\cos\theta u_\phi - \frac{1}{\rho\sin\phi}\sin\theta u_\theta) \\ &+ \frac{1}{\rho}\cos\phi\cos\theta\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\theta\sin\phi u_\rho + \frac{1}{\rho}\cos\phi\cos\theta u_\phi - \frac{1}{\rho\sin\phi}\sin\theta u_\theta) \\ &+ -\frac{\sin\theta}{\rho\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\theta}(\cos\theta\sin\phi u_\rho + \frac{1}{\rho}\cos\phi\cos\theta u_\phi - \frac{1}{\rho\sin\phi}\sin\theta u_\theta) \end{aligned}$$

와 같은식으로 엄청난 계산을 수행하면,

$$\begin{aligned} \bigtriangledown^2 u &= u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \\ &= u_{\rho\rho} + \frac{2}{\rho}u_\rho + \frac{1}{\rho^2}u_{\phi\phi} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\cos\phi}{\sin\phi}u_\phi + \frac{1}{\rho^2}\frac{1}{\sin^2\phi}u_{\theta\theta} \\ &= \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial u}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} \end{aligned}$$

임을 증명할 수 있다.

(b)

$$\bigtriangledown^2 u = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial u}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = 0$$

이다. 이때 u는 ρ에만 의존한다고 하였으므로, 뒤의 항들은 u를 ϕ나 θ에 대해 미분하므로 0이다. 따라서

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}) = u_{\rho\rho} + \frac{2}{\rho}u_\rho = 0$$

이라는 ρ에 대한 미분방정식이 만들어진다. 따라서 $u_\rho = z$라고 두면 이는

$$z' + \frac{2}{\rho}z = 0$$

이므로, $z = \frac{-c}{\rho^2}$꼴이 된다. 이때, c는 상수이다. 따라서 u는

$$u = \frac{c}{\rho} + d$$

의 꼴일 것이며, c, d는 상수이다.

$$u(1,1,1) = \frac{c}{\sqrt{3}} + d = \sqrt{3}$$

$$u(1,2,2) = \frac{c}{3} + d = 1$$

을 연립하면 $c = 3, d = 0$이 될 것이며,

$$u(3,4,0) = \frac{c}{5} + d = \frac{3}{5}$$

중간문풀-6. 4. *아래 극한값을 구하여라. 만약 존재하지 않는다면, 그 이유도 써라. (a)*

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{1-\cos xyz}{(x^2+2y^2+z^2)^3}$$

(b)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{2xy\sin z}{x^2+y^2+z^2}$$

(a) 경로 $X_1(t)=(t,0,0)$을 따라 원점에 접근할 경우 극한값은

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-1}{t^6}=0$$

이다.

경로 $X_2(t)=(t,t,t)$을 따라 원점에 접근할 경우 극한값은

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t^3}{64t^6} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin^2 t^3}{64t^6(1+\cos t^3)} = \frac{1}{128}$$

로 서로 다르다. 따라서 경로에 따라 극한값이 다르므로, 존재하지 않는다.

(b) 한 경로를 미리 관찰해 보자. $X(t)=(t,0,0)$경로로 원점에 접근하는 극한값을 보면,

$$\lim_{t\to 0} \frac{2t\cdot 0\cdot \sin 0}{t^2}=0$$

이다. 따라서, 그 극한값이 0이라고 가정하고 엡실론-델타 논법을 적용하여 보자. 즉,

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0\quad \text{such that if}\quad 0<|\sqrt{x^2+y^2+z^2}|<\delta,\quad \text{then}\quad \left|\frac{2xy\sin z}{x^2+y^2+z^2}\right|<\varepsilon$$

을 보이면 된다. 만약 $\delta=\varepsilon$으로 둘 경우, $0<\sqrt{x^2+y^2+z^2}<\delta=\varepsilon$일 경우

$$\varepsilon>\sqrt{x^2+y^2+z^2}\geq|z|\geq|\sin z|\geq|\sin z|\left|\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}\right|\geq\left|\frac{2xy\sin z}{x^2+y^2+z^2}\right|$$

가 사인함수의 성질과 산술기하평균부등식에 의해 성립하게 된다. 따라서 엡실론-델타 논법에 의하여,

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{2xy\sin z}{x^2+y^2+z^2}=0$$

이다.

중간문풀-6. 5. *함수 f를 아래와 같이 정의하자.*

$$f(x) = \begin{cases} x^p \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

p가 어떤 조건이어야,
(a) f가 연속함수인가?
(b) f가 미분가능한가?
(c) f가 일급함수인가?

(a) 모든 문제를 풀기에 앞서, $x \neq 0$일 때는 $f(x)$는 일급함수 두 개의 곱으로 이루어지므로 연속함수이며, 미분가능하고, 일급함수다. 따라서 $x = 0$에서만 관찰하면 된다.

$|\sin(1/x)| \leq 1$이므로, $-|x|^p \leq x^p \sin(1/x) \leq |x|^p$이고, $p > 0$이면 $0 = \lim_{x\to 0} -|x|^p = \lim_{x\to 0} |x|^p$이므로 샌드위치 정리에 의해 $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$이기에 연속이다. 만약 $p < 0$이면 $x_n = (2n\pi + \frac{1}{2}\pi)^{-2}$를 자연수 n에 대하여 넣으면 x_n은 0으로 수렴하는 수열이지만 $f(x_n) = (2n\pi + \frac{1}{2})^{-p}$는 $-p > 0$이므로 양의 무한대로 발산하는 수열이기에 연속이 아니다. $p = 0$이면 $\lim_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x})$가 존재하지 않으므로 연속이 아니다. 따라서 $p > 0$이 되어야만 한다.

(b)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h^{p-1} \sin(1/h)$$

가 존재해야 하므로, (a)에서 본 것에 의하여 $p > 1$이어야 한다.

(c) 먼저 f가 일급함수이려면 f가 미분가능해야 한다. $p > 1$일 때

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h^{p-1} \sin(1/h) = 0$$

이고,

$$f'(x) = px^{p-1} \sin(1/x) - x^{p-2} \cos(1/x)$$

가 $x \neq 0$에서 성립한다. 따라서 f'가 연속함수이기 위해서는

$$\lim_{x\to 0} px^{p-1} \sin(1/x) - x^{p-2} \cos(1/x) = 0$$

이어야 하며, 이를 위해서는 $p > 2$이다.

중간문풀-6. 6. *함수 u는 유계인 열린집합 D에서 정의된 조화함수이며, $\mathbf{p}$라는 점에서 최대이다. 또한, 함수 u와 D는 아래 성질을 만족함이 알려져 있다:*

(가) D의 임의의 두 점을 고르면, 그 두 점을 잇는 경로 중 D에 포함되는 것이 있다.

(나) D 안에서 함수 u가 점 Q에서 극대라면, $\mathbf{q}$를 중심으로 하는 D 내부의 어떤 공 B_R이 존재하여 B_R 안에서 u의 값은 $u(\mathbf{q})$와 같다. 즉, 내부에서 상수함수이다.

이때, u는 D 내부에서 상수함수임을 증명하여라.

$\mathbf{p}$는 D 내부의 점이며, 최대이면 극대이다. 따라서 성질 (나)에 의하여 어떤 양수 ρ가 존재하여 $B_\rho \subseteq D$이고 모든 $\mathbf{q} \in B_\rho$에서 $u(\mathbf{q}) = u(\mathbf{p})$가 성립한다.

D에 포함되는 임의의 점 $\mathbf{r}$을 생각하자. 그러면 조건 (가)에 의하여, 곡선 $C : [0,1] \to D$가 존재하여 $C(0) = \mathbf{p}$, $C(1) = \mathbf{r}$이다. 또한, 위에서 한 것에 의하여 어떤 구간 $[0,t)$에서 $u(c(t)) = u(\mathbf{p})$가 성립하게 될 것이다. 이런 t 중에서 가장 큰 것을 $b \in [0,1]$이라 하자. 이때 u는 연속함수이므로 $u(c(b)) = \lim_{t\to b-} u(c(t)) = \lim_{t\to b-} u(\mathbf{p}) = u(\mathbf{p})$이고, 구간 $[0,b]$에서 $u(c(t))$는 상수함수가 된다. 만약 $b \neq 1$이라면 $u(c(b))$ 역시도 최대가 되는 것이므로, 앞 문단의 논리에 의하여 어떤 $\delta > 0$가 존재하여

$$u(c(t)) = u(c(b)) = u(\mathbf{p})$$

가 $t \in [0, b+\delta)$에서 성립하게 될 것이다. 이는 이런 성질을 만족하는 t가 b라는 사실에 모순된다. 따라서 $b = 1$이고, $u(\mathbf{r}) = u(\mathbf{p})$이다. $\mathbf{r}$은 D의 임의의 점이므로, u는 D에서 상수함수이다.

중간문풀-6. 7. *어떤 r값에 대하여 함수*

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{(x+y+z)^r}{x^2+y^2+z^2} & \text{if} \quad (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 \quad (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

이 $\mathbb{R}^3$에서 연속함수인가?

이 함수는 원점을 제외하고는 분모가 0이 아닌 유리함수이기에 연속함수이다. 따라서 원점에서만 보면 된다. 즉,

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{(x+y+z)^r}{x^2+y^2+z^2} = 0$$

이 되는 r의 조건을 찾아주면 된다.

산술기하평균부등식을 응용하면

$$(x+y+z)^2 \leq 2(x+y)^2 + 2z^2 \leq 4x^2 + 4y^2 + 4z^2$$

이 성립하게 되므로, 각 r에 대하여

$$|x+y+z|^r = [(x+y+z)^2]^{r/2} \leq (4x^2+4y^2+4z^2)^{r/2}$$

가 성립함을 알 수 있다. 그러면

$$\left|\frac{(x+y+z)^r}{x^2+y^2+z^2}\right| \leq \frac{2^r(x^2+y^2+z^2)^{r/2}}{x^2+y^2+z^2} = 2^r(x^2+y^2+z^2)^{\frac{r-2}{2}}$$

이므로, 샌드위치 정리를 잘 적용하면 $r > 2$일 때는 $2^r(x^2+y^2+z^2)^{\frac{r-2}{2}}$가 $(x,y,z) \to (0,0,0)$일 때 0으로 감에 따라 그 극한값도 0이며, 원하는 식이 완성된다. 따라서 $r > 2$일 때는 연속함수이다. 반면 $r \leq 2$일 경우에는, 경로 $X(t) = (t,0,0)$을 따라 원점에 다가올 때

$$\lim_{t\to 0} f(t,0,0) = t^{r-2}$$

이기에, $r = 2$일 경우 그 값이 1이고, $r < 2$일 경우 극한값이 존재하지 않는다. 따라서 그 극한값이 0이 될 수 없기에 연속이 아니다. 이를 종합하면, $r > 2$에서 이 함수가 연속함수임을 알 수 있다.

중간문풀-6. 8. *두 연속함수 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$이 각 유리수점에서 함수값이 일치할 때 $f = g$임을 보여라.*

함수 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 $h(x) = f(x) - g(x)$로 정의하자. 그러면 $h(x)$는 모든 유리수점에서는 0인 함수이다. 만약 어떤 무리수 a에 대하여 $h(a) \neq 0$이라고 해보자. 그러면 $\varepsilon = \dfrac{|h(a)|}{2}$라는 양수를 생각할 수 있고, h는 연속함수의 차이므로 연속함수이기에 그 정의에 의해 어떤 δ가 존재하여 $|a - y| < \delta$이면 $|h(a) - h(y)| < \varepsilon$이다.

그런데 구간 $(a - \delta, a + \delta)$에는 항상 포함되는 유리수가 존재한다. 이를 b라고 하면, $|h(a) - h(b)| = |h(a)| = 2\varepsilon < \varepsilon$이라는 모순된 결과가 나오게 된다. 따라서 $h(a) = 0$이다. h는 모든 유리수와 무리수에 대해 0이므로, 그 정의에 의해 $f = g$가 성립한다.

중간문풀-6. 9. *함수 $f(x)$를 아래와 같이 정의하자.*

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 \quad x = 0 \end{cases}$$

(a) 함수 f가 모든 점에서 미분가능함을 보이고, $f'(0)$의 값을 구하여라.
(b) 0을 포함하는 그 어떤 열린 구간도 그 안에서 f가 증가함수가 아님을 보여라.

(a) 먼저 원점을 제외한 점에서는 f가 여러 미분가능함수의 곱으로 정의되므로 미분가능하다. 원점에서 미분가능성을 보면

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = 1$$

로 존재하므로, $f'(0) = 1$이다.

(b) 만약 0을 포함하는 열린 구간 안에서 f가 증가함수라고 하자. 그러면 그 열린구간 안에 0이 포함되므로, 어떤 $\delta > 0$이 존재하여 $(-\delta, \delta)$에서 f가 증가함수여야 한다. 그런데 자연수는 무한하므로, 어떤 자연수 n에 대하여 $(2n\pi)^{-1}$와 $(2n\pi + \dfrac{1}{2}\pi)^{-1}$은 δ보다 작을 것이다.

$$f(\frac{1}{2n\pi}) = \frac{1}{2n\pi}$$

$$f(\frac{1}{2n\pi + \frac{1}{2}\pi}) = \frac{1}{2n\pi + \frac{1}{2}\pi} + 2(\frac{1}{2n\pi + \frac{1}{2}\pi})^2$$

이다. 이때

$$f(\frac{1}{2n\pi + \frac{1}{2}\pi}) - f(\frac{1}{2n\pi}) = -\frac{\frac{1}{2}\pi}{2n\pi(2n\pi + \frac{1}{2}\pi)} + 2(\frac{1}{2n\pi + \frac{1}{2}\pi})^2 = \frac{-n\pi - \dfrac{1}{4}\pi^2 + 4n\pi}{2n\pi(2n\pi + \frac{1}{2}\pi)^2} > 0$$

이 된다. 따라서 f는 증가함수일 수 없게 되고, 이를 포함하는 영역인 0을 포함하는 열린구간에서도 증가함수일 수 없다.

중간문풀-6. 10.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{2}{1+e^{-1/x}} = 2$$

임을 극한의 정의를 이용하여 보여라.

$$\left|\frac{2}{1+e^{-1/x}} - 2\right| = \left|\frac{2e^{-1/x}}{1+e^{-1/x}}\right| < |2e^{-1/x}| = \frac{2}{e^{1/x}} < \frac{2}{1/x} = 2x$$

이다. 따라서 주어진 $\varepsilon > 0$에 대하여, 상응하는 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$이 존재하여

$$0 < x < \frac{\varepsilon}{2}$$

이면

$$\left|\frac{2}{1+e^{-1/x}} - 2\right| < 2x < 2\delta = \varepsilon$$

이 성립하므로 극한의 정의에 의해 그 극한값은 2다.