문제 1. 1. *다음 급수의 수렴 여부를 구하시오.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$

비율판정법을 이용할 것이다.

$$a_n = \frac{3^n n!}{n^n}$$

이라고 두면

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} 3 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1$$

이다. 따라서 비율판정법의 따름정리에 의해 급수는 발산한다.

문제 1. 2. *아래 급수는 수렴하는가?*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\left(1 - \frac{1}{n^{2018}}\right)^{n^{2019}}\right)$$

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^{2018}}\right)^{n^{2019}}$$

이라고 두면 $0 < a_n < 1$이므로, $\sin a_n \leq a_n$이다. 이때

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^{2018}}\right)^{n^{2018}} = \frac{1}{e} < 1$$

로 거듭제곱근 판정법에 의하여 $\sum a_n$은 수렴하고, 비교판정법에 의하여 $\sum \sin(a_n)$도 수렴한다. 따라서 주어진 급수는 수렴한다.

문제 1. 3. *아래 급수가 수렴하는지 밝히고, 수렴한다면 조건수렴인지 절대수렴인지 고려하라.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n^2+1} - n)$$

$$a_n = \sqrt{n^2+1} - n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

이라고 두자. 그러면 a_n은 항상 양수이므로 $(-1)^n(\sqrt{n^2+1}-n)$는 교대급수이다. 또한

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0$$

이고, $a_n \geq a_{n+1}$이 n의 증가성에 의하여 성립한다. 따라서 교대급수판정법에 의하여

$$\sum_{n=1}^{(} -1)^n a_n$$

은 수렴한다. 절대수렴인지 판정하기 위해

$$\sum a_n$$

을 보면,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} > \frac{1}{3n}$$

임을 알 수 있으나

$$\sum \frac{1}{3n}$$

은 조화급수이므로 발산하고, 비교판정법에 의해 a_n의 급수도 발산한다. 따라서 주어진 급수는 조건수렴한다.

문제 1. 4. *다음 급수의 수렴 여부를 판정하시오.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

거듭제곱근 판정법을 활용하면

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{e} < 1$$

이므로, 주어진 급수는 수렴한다.

문제 1. 5. *아래 급수는 수렴하는가?*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^3}{n^3}$$

$x > 1$일 때 $\log x \le 2\sqrt{x}$이므로,

$$0 \le \frac{(\log n)^3}{n^3} \le \frac{8}{n^{\frac{3}{2}}}$$

이 성립한다. 이때

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^{\frac{3}{2}}} = 8\zeta(1.5) < \infty$$

임을 알고 있으므로, 비교판정법에 의하여 주어진 급수도 수렴한다.

문제 1. 6. *아래 급수가 수렴함을 보이시오.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

이 급수가 절대수렴함을 보임으로써 수렴함을 보일 것이다.

$$0 \le \frac{|\sin n|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$$

이 성립하고, $\sum \frac{1}{n^2}$은 적분판정법에 의하여 수렴하는 급수이다. 따라서 비교판정법에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$$

도 수렴하며, 절대수렴하는 급수는 수렴하므로 원래 급수도 수렴한다.

문제 1. 7. *아래 급수가 수렴하는가?*

$$\sum n^2 \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$$

이 급수의 일반항의 극한을 구해 보면,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

이므로 일반항 판정법에 의하여 수렴하지 않는다.

문제 1. 8. *아래 급수가 수렴하는가?*

$$\sum n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{1}{2}$$

이므로, 유한 개의 n에 대해서만

$$\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2}<\frac{1}{4}$$

이다. 따라서 충분히 큰 n에 대해서는

$$1-\cos\frac{1}{n}\geq\frac{1}{4n^2}$$

이며,

$$n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\geq\frac{1}{4n}$$

이다. 유한한 개수의 항을 더하고 빼는 것은 수렴성에 영향을 주지 않으므로, 조화급수 $\sum\frac{1}{4n}$이 발산함에 따라 비교판정법에 의해

$$\sum n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$$

도 발산한다.

문제 1. 9.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$$

의 수렴, 발산을 판정하시오.

$f(x)=\dfrac{1}{x\log x}$라 하면, $x\geq 2$에서 f는 감소하는 음이 아닌 연속함수이다. 따라서 적분판정법에 의하여,

$$\sum_{n=2}^{\infty}f(n)$$

과

$$\int_2^{\infty}f(x)dx$$

의 수렴성은 동일하다.

$$\int_2^{\infty}f(x)dx=\int_2^{\infty}\frac{1}{x\log x}dx=[\log(\log x)]_2^{\infty}=\infty$$

이기에, 주어진 급수 역시도 발산한다.

문제 1. 10.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\log n}$$

의 수렴성을 조사하시오.

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin x\geq\frac{2}{\pi}x$이므로,

$$\frac{\sin\frac{1}{n}}{\log n}\geq\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n\log n}$$

이다. 한편, 앞선 문제 9번에서 $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\log n}$이 발사함을 보였으므로,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n\log n}$$

역시도 발산하고, 비교판정법의 의하여 주어진 급수도 발산한다.

문제 1. 11. *다음 급수의 수렴과 발산을 판정하고 그 근거를 밝히시오.*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n + n(\log n)^4}$$

$$\frac{\log n}{n + n(\log n)^4} < \frac{\log n}{n(\log n)^4} = \frac{1}{n(\log n)^3}$$

이다. $f(x) = \dfrac{1}{x(\log x)^3}$이라고 두면 f는 항상 양수인 감소함수이며, 연속함수이기에 적분판정법을 이용해줄 수 있다. 그러면

$$\int_2^{\infty} f(x)dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^3} = [-\frac{1}{2}(\log x)^{-2}]_2^{\infty} = \frac{1}{2(\log 2)^2} < \infty$$

이기에 적분판정법에 의해

$$\sum \frac{1}{n(\log n)^3}$$

은 수렴한다. 따라서 비교판정법에 의해 주어진 급수도 수렴한다.

문제 1. 12. *급수* $\sum a_n$*과* $\sum b_n$*은 각각 0이 아닌 항들로 이루어진 수열* (a_n)*과* (b_n)*에서 얻은 급수이다. 아래 명제들에 대하여, 거짓인 명제를 모두 찾고 반례를 제시하시오.*

1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*이면,* $\sum a_n$*은 수렴한다.*
2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$*이면,* $\sum a_n$*의 수렴성과* $\sum b_n$*의 수렴성은 같다.*
3) (a_n)*이 양수의 수열이고 모든* n*에 대하여* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$*이면, 급수* $\sum a_n$*은 수렴한다.*
4) $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho < 1$*이 존재하면* $\sum a_n$*은 절대수렴한다.*
5) $\sum |a_n|$*이 수렴하면* $\sum a_n^2$*은 수렴한다.*
6) $\sum a_n$*이 수렴하면,* $\sum a_n^3$*은 절대수렴한다.*

1) $a_n = \frac{1}{n}$이라 두면 성립하지 않는다.
2) $a_n = \frac{1}{n^2}, b_n = \frac{1}{n}$이라 두면 수렴성이 같지 않다.
3) $a_n = \frac{1}{n}$이면 성립하지 않는다.
6) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}}}$이면 a_n^3의 급수가 수렴은 하나 절대수렴하지는 않는다.

문제 1. 13. *아래 급수는 발산하는가?*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5^n}{n!}$$

$a_n = (-1)^{n+1} \dfrac{5^n}{n!}$이라고 두면

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+1} = 0$$

이므로 비교판정법에 의하여 $\sum |a_n|$은 수렴한다. 따라서 이 급수는 절대수렴하므로 수렴한다.

문제 1. 14. *아래 급수의 수렴성을 판단하여라.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(1+\log(n+2))^2}$$

주어진 급수의 수렴성은

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(1+\log n)^2}$$

의 수렴성과 같다. 그리고 $n \geq 3$일 때

$$\frac{1}{(n+1)(1+\log n)^2} < \frac{1}{n(1+\log n)^2}$$

이다. $f(x) = \dfrac{1}{x(1+\log x)^2}$을 생각하면, 이 함수는 $x \geq 3$에서 양수이고, 감소하는 연속함수이다. 따라서 적분판정법에 의해

$$\int_3^{\infty} f(x)dx = \int_3^{\infty} \frac{1}{x(1+\log x)^2}dx = \left[-\frac{1}{1+\log x}\right]_3^{\infty} = \frac{1}{1+\log 3} < \infty$$

의 수렴에 따라

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(1+\log n)^2}$$

이 수렴한다. 이제 비교판정법에 의해 주어진 급수도 수렴한다.

문제 1. 15. *양항급수 $\sum a_n$에 대해 아래가 맞는지 틀린지 확인하여라.*

> *모든 자연수 n에 대하여 $\sqrt[n]{a_n} < 1$이면, 급수 $\sum a_n$은 수렴한다.*

거짓인 명제이다. $a_n = \frac{1}{n+1}$이면 모든 자연수 n에 대해 $a_n > 0$이므로 양항급수이고, $\frac{1}{n+1} < 1$이므로 $\sqrt[n]{a_n} < 1$이다. 그러나 $\sum a_n$은 조화급수이므로 발산한다.

문제 1. 16. *아래 급수가 수렴하는 양수 p의 범위를 구하시오.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p + pn}$$

$p > 1$인 경우

$$0 < \frac{1}{n^p + pn} < \frac{1}{n^p}$$

이고 $\sum \frac{1}{n^p} < \infty$이므로 비교판정법에 의하여 주어진 급수도 수렴한다.

$p = 1$인 경우 주어진 급수는 조화급수가 되며, 발산한다.

$p < 1$인 경우

$$\frac{1}{n^p + pn} \geq \frac{1}{(p+1)n}$$

이 성립하게 될 것이며, p가 양수이므로 $p + 1 > 0$이다. 이때

$$\sum \frac{1}{(p+1)n}$$

이 조화급수로 발산하므로, 비교판정법에 의하여 주어진 급수도 발산한다. 따라서 이들을 종합하면 원하는 범위는 $p > 1$이다.

문제 1. 17. *급수*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[5]{\sin \frac{1}{n^2}} \sin\left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

의 수렴, 발산을 판정하시오.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[5]{\sin \frac{1}{n^2}}\sin\left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n^{-\frac{9}{10}}} = 1$$

이기에, 극한비교판정법에 의하여 주어진 급수의 수렴성은 발산하는 급수 $\sum \frac{1}{n^{\frac{9}{10}}}$의 수렴성과 같다. 따라서 주어진 급수는 발산한다.

문제 1. 18. *적분*

$$\int_{2022}^{\infty} \frac{\log x}{e^x} dx$$

의 수렴, 발산을 판정하시오.

$f(x) = \frac{\log x}{e^x}$는 항상 양수인 연속함수이며, $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}e^x - \log x \cdot e^x}{e^{2x}} < 0$이므로 감소함수이다. 적분판정법에 의하여, 이 적분의 수렴성은

$$\sum_{n=2022}^{\infty} \frac{\log n}{e^n}$$

의 수렴성과 같다. 이때

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{\log n} = \frac{1}{e} < 1$$

이므로, 비율판정법에 의하여

$$\sum_{n=2022}^{\infty} \frac{\log n}{e^n}$$

은 수렴한다. 따라서 주어진 적분도 수렴한다.

문제 1. 19.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\sin n}{2^n + n}$$

위 급수의 수렴, 발산을 판정하라.

$$\left|\frac{(n+1)\sin n}{2^n + n}\right| \le \frac{n+1}{2^n}$$

이 성립한다. 이때 비율판정법을 사용하면

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

이므로,

$$\sum \frac{n+1}{2^n}$$

이 수렴하며, 비교판정법에 의해 주어진 급수는 절대수렴한다. 따라서 주어진 급수는 수렴한다.

문제 1. 20.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right)$$

$$a_n = \frac{n^{\frac{3}{2}} - n + 1}{n^2}$$

는 n이 충분히 커짐에 따라

$$a_n = \frac{n^{\frac{3}{2}} - n + 1}{n^2} \ge \frac{\frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{2}}}{n^2} = \frac{1}{2\sqrt{n}} > 0$$

이 성립한다. 그런데

$$\sum \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

이 발산하므로, 비교판정법에 의해 주어진 급수도 발산한다.