평행이동

- 좌표공간 $\mathbb{R}^n$의 한 점 $\mathbf{v}$에 대하여 함수

$$T_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad T_{\mathbf{v}}(X) := X + \mathbf{v}$$

  를 $\mathbf{v}$만큼 **평행이동**하는 사상이라고 부른다.
- 예를 들어, (x, y)를 $(x+1, y+2)$로 보내는 사상은 각 점들을 오른쪽으로 1, 위쪽으로 2만큼 평행이동하는 사상이다.
- 두 점 $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$에 대하여 평행이동 $T_{\mathbf{v}}$와 평행이동 $T_{\mathbf{w}}$의 합성도 평행이동이 되며, 이를

$$T_{\mathbf{v}} \circ T_{\mathbf{w}} = T_{\mathbf{v}+\mathbf{w}} = T_{\mathbf{w}} \circ T_{\mathbf{v}}$$

  처럼 두 점의 합을 정의하는 방식으로 생각해줄 수도 있다.
- 또한, 음의 점 역시도

$$T_{-\mathbf{v}} = T_{\mathbf{v}}^{-1}$$

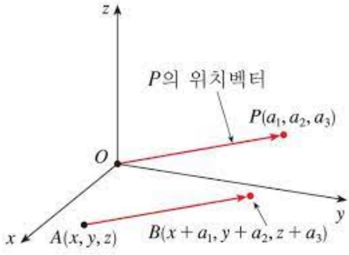
  처럼 도입해줄 수도 있다.

유향선분

- $\mathbb{R}^n$ 속의 두 점 A와 B를 잇는 **유향선분**을
$$\overrightarrow{AB}$$
로 표시한다. 이때 A를 **시점**, B를 **종점**이라고 한다.
- 공간에서 평행이동 T는 점들을 이동시킬 뿐만 아니라 유향선분도 이동시킨다. 즉,
$$T(A) = A', \quad T(B) = B'$$
이면
$$T(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$$
이다.
- 만약 어떤 유향선분 $\overrightarrow{AB}$를 평행이동하여 $\overrightarrow{A'B'}$를 얻는다면, 이 두 유향선분은 **동등하다**고 하고
$$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{A'B'}$$
로 표시한다.

유향선분의 동등관계

- $n-$공간의 유향선분들에 대하여 다음이 성립한다.
- $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{A'B'} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{A'B'} \equiv \overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{A'B'}, \ \overrightarrow{A'B'} \equiv \overrightarrow{A''B''} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{A''B''}$



벡터

- 서로 동등한 유향선분을 같은 것으로 보아 이동 그 자체만을 개체로써 취급하고 싶을 때, 이를 **벡터**라고 부른다.
- 혹은 이를 원점을 시점에서 이동하는 상황으로 볼 경우, 각 벡터는 **점**에 대응시킬 수도 있다. 이러한 상황에서는 우리가 **위치벡터**라 부르기도 한다.
- 원점은 **영벡터**에 대응되며, 이를

$$O = \mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0)$$

으로 표현하기도 한다. 영벡터는 벡터의 덧셈에 대한 항등원이다.

벡터의 합과 상수배

- 벡터의 합은 각각에 대응하는 평행이동의 합에 대응되는 벡터로써 정의된다.
- 간단하게 말하면, 벡터 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$와 벡터 $B = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$의 합은

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n) \in \mathbb{R}^n$$

  으로 원소별 덧셈으로 정의된다.
- 반면 상수배는 대응하는 평행이동의 상수배만큼의 이동에 해당하는 평행이동에 대응하는 벡터로써 정의된다. 이는 복잡한 표현이고, 간단히는

$$tA = t(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (ta_1, ta_2, ta_3, \cdots, ta_n) \in \mathbb{R}^n$$

  이 된다.
- 벡터 $\mathbf{v}$의 역원은 $-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}$이며, 둘의 뺄셈은

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w})$$

  이다.

벡터의 크기

- 유향선분 $\overrightarrow{AB}$의 **크기**, **길이**, **절댓값**은 **벡터의 크기**를 정의하는 방법과 동일하다.
- 벡터 $\mathbf{v}$를 좌표로 표현한 것이

$$(v_1, v_2, \cdots, v_n)$$

  일 때,

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

  이다.
- 영벡터의 크기는 영이고, 크기가 영인 벡터는 영벡터이다.
- 두 벡터 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 사이의 거리는

$$|\mathbf{v} - \mathbf{w}|$$

  로 정의한다. 즉, 두 벡터에 대응되는 점들 사이의 거리이다.

나란한 벡터

- 영이 아닌 두 벡터 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$에 대하여,

$$\mathbf{v} = t\mathbf{w}$$

  인 실수 t가 존재한다면, $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$는 **나란하다**고 말한다. 이때 $t > 0$이면 둘은 **같은 방향**이라고 하고, $t < 0$이면 둘은 **반대 방향**이라고 한다.
- 영벡터는 모든 벡터와 나란한 것으로 여긴다.

표준단위벡터

- 크기가 1인 벡터를 **단위벡터**라고 부른다.
- 삼차원 좌표공간에서는

$$\mathbf{i} = (1,0,0), \quad \mathbf{j} = (0,1,0), \quad \mathbf{k} = (0,0,1)$$

  을 **표준단위벡터** 라고 부른다.
- 일반적으로 $n-$공간에서는

$$\mathbf{e}_i = (0,0,\cdots,1,\cdots,0)$$

  을 i번째 좌표만 1이고 나머지는 0인 **표준단위벡터**라고 생각한다.

벡터의 내적

- $n-$공간 속의 두 벡터

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

  에 대하여 이들의 **내적** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$는

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

  으로 정의된다.

- $n-$공간의 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$와 실수 t에 대하여,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

$$(t\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = t(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (t\mathbf{b})$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

벡터의 내적과 절댓값

- 또한, 아래 역시도 성립한다.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \geq 0$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}(|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{4}(|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2)$$

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2)$$

벡터의 내적

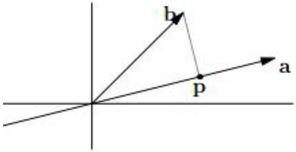
정리 3.1.1

$n-$벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$에 대하여
1) 모든 $n-$벡터 $\mathbf{x}$에 대하여 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0$이면, $\mathbf{a} = 0$이다.
2) 모든 $n-$벡터 $\mathbf{x}$에 대하여 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}$이면, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$이다.

증명.
(1) $\mathbf{x} = \mathbf{a}$를 대입한다면 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 = 0$이어야 하므로, $\mathbf{a}$는 영벡터이다.
(2) 양변을 정리하면 $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{x} = 0$이다. 따라서 (1)에 의하여 $\mathbf{a} - \mathbf{b} = 0$이고, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$이다.

정사영

- 두 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$에 대하여, $\mathbf{a} \neq 0$라고 하자. 이때 $\mathbf{a}$와 나란한 벡터 중에서 $\mathbf{b}$와의 거리가 가장 가까운 벡터, 즉 벡터 $\mathbf{b}$를 직선 $\{t\mathbf{a} | t \in \mathbb{R}\}$에 내린 수선의 발을 $p_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$로 나타내고, 이를 $\mathbf{a}$에 대한 $\mathbf{b}$의 **정사영**이라고 한다.



정리 3.2.1

영벡터가 아닌 벡터 $\mathbf{a}$에 대하여 벡터 $\mathbf{b}$의 정사영은

$$p_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}$$

이다. 이때, $\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$를 벡터 $\mathbf{b}$의 **a성분**이라고 부른다.

증명.

벡터 $\mathbf{a}$와 나란한 벡터 $t\mathbf{a}$ 중에서 $\mathbf{b}$와 가장 거리가 가까운 것을 구하면 된다. 그러면 거리의 제곱을 $f(t)$라 할 경우

$$f(t) = |t\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})t^2 - 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})t + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$$

이므로 $f(t)$의 최솟값은 $t = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$에서 등장한다. 따라서 원하는 등식을 얻는다.

내적과 벡터 사이의 각도

정리 3.2.4

영이 아닌 두 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$$

이다.

증명.

벡터 $\mathbf{a}$에 대한 $\mathbf{b}$의 정사영은

$$p_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = (|\mathbf{b}| \cos\theta)\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

임을 기하적으로 알아차릴 수 있다. 즉, 정사영은 $\mathbf{b}$의 길이에 $\cos\theta$를 곱한 만큼의 길이를 가지고, 방향이 $\mathbf{a}$와 같은 벡터라는 것이다. 그런데 이는 앞에서 본 바에 의하여

$$p_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\mathbf{a}$$

이므로, 둘을 비교하면

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$$

내적과 벡터 사이의 각도

따름정리 3.2.5

영이 아닌 두 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$의 사잇각이
1) 예각일 필요충분조건은 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$
2) 둔각일 필요충분조건은 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$
3) 직각일 필요충분조건은 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

- 표준단위벡터들을 서로 수직이다.
- 직각에 대해서는 아래의 정리, 즉 **피타고라스 정리**가 성립한다는 것을 확인해줄 수 있다.

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$$

- 두 벡터가 이루는 평행사변형의 넓이는 $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta$일텐데, 이는

$$\sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}$$

  으로 표현해줄 수도 있다.

CBS 부등식

임의의 두 $n-$벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$에 대하여

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$$

가 성립한다. 또, 등호가 성립할 때는 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$가 나란할 때이다.

증명.

만약 $\mathbf{a}$가 영벡터이면 자명하므로, 아니라고 가정하자. 그러면 실수 t에 대한 이차 다항함수

$$f(t) = |\mathbf{b} - t\mathbf{a}|^2 = t^2|\mathbf{a}|^2 - 2t(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2$$

가 항상 영 이상의 값을 가지므로, 판별식이 영 이하여야 한다.
이를 고려한다면,

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \leq |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2$$

이다. 등호가 성립하려면 판별식이 영이어야 하고, 이때는 $f(t_0) = 0$인 t_0가 존재하므로 $\mathbf{b} = t_0\mathbf{a}$가 되고, 둘은 나란한 벡터다.

CBS 부등식과 삼각부등식

- **CBS 부등식**을 좌표의 성분을 써서 표현하면

  $$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

  이다.

삼각부등식

임의의 $n-$벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$에 대하여

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

가 성립한다. 또 등호가 성립하는 경우는 둘이 같은 방향일 때다.

증명.
CBS부등식으로부터

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 - (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2 = 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|) \leq 0$$

이므로, 원하는 결론을 얻는다.

평면의 방정식

- 삼차원 공간 속에서 평면은 평면 위의 한 점 (a, b, c)와 그 평면에 수직인 방향 (l, m, n)에 의하여 결정된다. 따라서 평면의 방정식은

$$(l, m, n) \cdot ((x, y, z) - (a, b, c)) = 0$$

혹은

$$l(x - a) + m(y - b) + n(z - c) = 0$$

꼴이 된다.

- $n-$공간 속에서는 이러한 형태의 집합을 **초평면**이라 부른다. 이는 $n-$공간의 점 P를 지나고, 벡터 $\mathbf{a} \neq 0$에 수직인 벡터들의 집합이다. 따라서 그 방정식은

$$\mathbf{a} \cdot (X - P) = 0$$

이 된다. 혹은,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$$

꼴로 나타내어지게 된다.

- 공간 속의 점 P를 지나고 방향이 $\mathbf{v}$인 직선의 방정식은

$$X = X(t) = P + t\mathbf{v} \quad (t \in \mathbb{R})$$

  로 나타낼 수 있다. 이때 t를 **매개변수**라 부른다.
- 혹은,

$$\frac{x_1 - p_1}{v_1} = \cdots = \frac{x_n - p_n}{v_n}$$

  으로 표현해줄 수도 있다.
- 만약 두 점이 주어지고 그 두 점을 지나는 직선을 찾으라 한다면, 그 중 한 점을 P로 두고, 두 점 사이의 유향선분에 대응되는 벡터를 방향벡터로 가진다고 보면 된다.

무게중심

- 공간 속의 k개의 점 $A_1, A_2, \cdots, A_k$의 기하학적 **중심** $\bar{A}$는 등식

$$\sum_{i=1}^{k}(A_i - \bar{A}) = 0$$

을 만족하는 점이다. 즉, 중심은

$$\bar{A} = \frac{1}{k}(A_1 + \cdots + A_k)$$

- 만약 각 점의 질량이 $m_1, m_2, \cdots, m_k$로 주어지는 경우에는, 이들의 **질량중심** $\bar{A}$는 등식

$$\sum_{i=1}^{k} m_i(A_i - \bar{A}) = 0$$

을 만족시키는 점이다. 즉, 질량중심은

$$\bar{A} = \frac{m_1 A_1 + \cdots + m_k A_k}{m_1 + \cdots + m_k}$$

로 정의된다.

일차독립과 일차종속

- 임의의 실수 $t_1, t_2, \cdots, t_k$에 대하여 벡터

$$t_1\mathbf{a}_1 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k$$

  를 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$의 **일차결합**이라고 부른다.
- $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$ 중에서 어느 하나가 나머지 벡터들의 일차결합이라면, $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$를 **일차종속**이라고 한다.
- 벡터 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$가 일차종속이 아니면, 이들을 **일차독립**이라고 한다.

일차독립의 판정

정리 5.0.2

벡터 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$가 일차독립일 필요충분조건은 방정식

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$$

의 해가 자명한 해($(0, 0, \cdots, 0)$)뿐인 것이다.

증명.
위 명제의 대우를 증명해보자. 만약 방정식이 자명하지 않은 해를 가진다고 가정하자. 그러면 어떤 $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$에 대하여 $x_i \neq 0$이다. 따라서

$$\mathbf{a}_i = -\frac{x_1}{x_i}\mathbf{a}_1 - \cdots - \frac{x_{i-1}}{x_i}\mathbf{a}_{i-1} - \frac{x_{i+1}}{x_i}\mathbf{a}_i - \cdots - \frac{x_k}{x_i}\mathbf{a}_k$$

이므로, $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$는 일차종속이다.

일차독립의 판정

반면, $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$가 일차종속이라 하자. 그러면 어떤 $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$에 대하여 $\mathbf{a}_i$가 나머지 벡터의 일차결합

$$\mathbf{a}_i = t_1\mathbf{a}_1 + \cdots + t_{i-1}\mathbf{a}_{i-1} + t_{i+1}\mathbf{a}_{i+1} + \cdots + t_k\mathbf{a}_k$$

이고, 따라서

$$(x_1, \cdots, x_k) = (t_1, \cdots, t_{i-1}, -1, t_{i+1}, \cdots, t_k)$$

는 방정식의 자명하지 않은 해이다.

생성집합과 기저

- 주어진 공간의 임의의 벡터가 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$의 일차결합으로 표시되면, $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$가 이 공간을 **생성한다**고 한다.
- 그리고 집합 $\{\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k\}$를 생성집합이라 부른다.
- 일차독립이면서, 동시에 $n-$공간을 생성하는 벡터들의 모임을 $n-$공간의 **기저**라고 부른다.
- 예를 들어, 표준단위벡터들의 집합

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$$

은 $n-$공간을 생성하면서 일차독립이므로, $\mathbb{R}^n$의 기저이다.

좌표공간의 차원

- 자세한 증명은 하지 않을 가능성이 높으니 생략하고, 주요 결과들만 나열하겠다.
- $n-$공간에서 n개의 벡터 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$가 일차독립이면, 이들은 $n-$ 공간의 기저이다.
- $n-$ 공간에서 $n+1$개 이상의 벡터들은 일차종속이다.
- $n-$공간의 기저에 대해, 그 원소 개수는 n개이다.
- 또한 기저에 대해서 기저 안의 벡터들의 일차결합으로써 공간 안의 어떤 벡터를 표현하는 방식은 유일하다.
- **벡터공간**에서 기저의 원소 수를 **차원**이라고 부른다.

숙제 문제

- 185쪽 1, 7번
- 195쪽 1, 2, 3, 15, 16번
- 204쪽 2, 5, 6, 7, 10, 18, 19번
- 212쪽 1, 2, 3, 5, 6번