2-1. 1.
$$X(t) = (e^{\tan\frac{t}{2}}\tan^2\frac{t}{2}, e^{\tan\frac{t}{2}}\tan\frac{t}{2}, \tan\frac{t}{2})$$
일 때, 점 $X(\frac{\pi}{2})$에서 곡선 X의 접촉평면을 구하시오.

이 상태에서 직접 접촉평면을 구하기란 너무 어렵다. 이때, 접촉평면은 재매개화 시에도 변하지 않는다는 것을 감안하면
$$s = \tan\frac{t}{2}$$
라고 할 때 재매개화된 곡선
$$\tilde{X}(s) = (s^2e^s, se^s, s)$$
의 $s = 1$일 때의 접촉평면을 구하면 된다.
$$\tilde{X}'(s) = ((s^2+2s)e^s, (s+1)e^s, 1)$$
이므로 $\tilde{X}'(1) = (3e, 2e, 1)$이며
$$\tilde{X}''(s) = ((s^2+4s+2)e^s, (s+2)e^s, 0)$$
이므로 $\tilde{X}''(1) = (7e, 3e, 0)$이다. 따라서 $(e, e, 1)$을 지나며 법선벡터가 $(3, -7, 5e)$인 평면
$$3x - 7y + 5ez = e$$
가 원하는 평면이다.

2-1. 2. *극좌표로 주어진 좌표평면상의 곡선*
$$r = 1 + \cos\theta, 0 \le \theta \le \pi$$
을 점 $(2, 0)$에서부터 잰 호의 길이 s로 재매개화하면 다항식 $p(s), q(s)$에 대하여
$$\tilde{X}(s) = (p(s), \sqrt{q(s)})$$
가 된다고 할 때, s의 범위와 $p(s)$, $q(s)$를 구하시오.

곡선은 $(\cos\theta + \cos^2\theta, \sin\theta + \sin\theta\cos\theta)$로 주어지는 것이나 마찬가지이며
$$X'(\theta) = (-\sin\theta - \sin 2\theta, \cos\theta + \cos 2\theta)$$
이므로 $|X'(\theta)| = \sqrt{2 + 2\cos\theta}$이다.
$$s = \int_0^\theta \sqrt{2 + 2\cos u}\,du = \int_0^\theta 2\cos\frac{u}{2}du = 4\sin\frac{\theta}{2}$$
이면
$$p(s) = \cos\theta + \cos^2\theta = 1 - \frac{s^2}{8} + 1 - \frac{s^2}{4} + \frac{s^4}{64} = 2 - \frac{3}{8}s^2 + \frac{s^4}{64}$$
이며
$$\sqrt{q(s)} = \sin\theta + \sin\theta\cos\theta = \sin\theta(2 - \frac{s^2}{2}) = \sqrt{\frac{s^2}{4} - \frac{s^4}{64}}(2 - \frac{s^2}{8})$$
이므로
$$q(s) = (\frac{s^2}{4} - \frac{s^4}{64})(4 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{64}) = s^2 - \frac{3}{16}s^4 - \frac{1}{256}s^6 - \frac{s^8}{4096}$$

이다. 그리고 θ가 0부터 π까지 이동하면 s는 0부터 4까지 이동하므로, $0 \le s \le 4$가 그 범위다.

2-1. 3. *$t = 1$에서 다음 곡선의 접촉평면을 구하시오.*

$$X(t) = \left(\int_0^{\ln t} u du, \int_0^t \cos(2\pi u) du, \int_0^t e^u du + t \right) \times (1, t-1, et)$$

$$X'(t) = \left(\frac{\ln t}{t}, \cos(2\pi t), e^t + 1 \right) \times (1, t-1, et) + \left(\int_0^{\ln t} u du, \int_0^t \cos(2\pi u) du, \int_0^t e^u du + t \right) \times (0, 1, e)$$

이므로 $X'(1) = (0, 1, e+1) \times (1, 0, e) + (0, 0, e) \times (0, 1, e) = (e, e+1, -1) + (-e, 0, 0) = (0, e+1, -1)$이고,

$$\begin{aligned} X''(t) = &(\frac{1 - \ln t}{t^2}, -2\pi \sin(2\pi t), e^t) \times (1, t-1, et) + 2(\frac{\ln t}{t}, \cos(2\pi t), e^t + 1) \times (0, 1, e) \\ &+ \left(\int_0^{\ln t} u du, \int_0^t \cos(2\pi u) du, \int_0^t e^u du + t \right) \times (0, 0, 0) \end{aligned}$$

이므로 $X''(1) = (1, 0, e) \times (1, 0, e) + 2(0, 1, e+1) \times (0, 1, e) = (-2, 0, 0)$ 이다. 마지막으로 $X(1) = (0, 0, e) \times (1, 0, e) = (0, e, 0)$이다.

즉 $(0, e, 0)$을 지나며 $(0, e+1, -1)$과 $(-2, 0, 0)$에 평행한 평면

$$y + (e+1)z = e$$

가 접촉평면이다.

2-1. 4. *곡선*

$$X(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} (\cos \arctan t, \sin \arctan t), t \ge 0$$

을 $X(0)$으로부터 잰 호의 길이로 매개화하시오.

$$X'(t) = \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}} (\cos \arctan t, \sin \arctan t) + \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}} (-\sin \arctan t, \cos \arctan t)$$

이며 $(\cos \arctan t, \sin \arctan t)$는 $(-\sin \arctan t, \cos \arctan t)$와 수직하기에 피타고라스 정리에 의하여

$$|X'(t)| = \sqrt{\frac{1}{(1+t^2)^{3/2}} + \frac{t^2}{(1+t^2)^{3/2}}} = \frac{1}{1+t^2}$$

이다.

$$s = \int_0^t \frac{1}{1+u^2} du = \arctan t$$

로 치환하면 되고, $s \in [0, \frac{\pi}{2})$이다. 따라서 재매개화된 곡선은

$$\tilde{X}(s) = \sin s (\cos s, \sin s) = (\sin s \cos s, \sin^2 s)$$

이다.

2-1. 5. *곡선*

$$X(t) = e^t (1, \sinh t, -\cosh t)$$

위의 점 $X(\ln 2)$에서 접선의 방정식과 접촉평면의 방정식을 구하여라.

$$X'(t) = (e^t, e^t \sinh t + e^t \cosh t, -e^t \cosh t - e^t \sinh t)$$

$$X''(t) = (e^t, 2e^t(\sinh t + \cosh t), -2e^t(\sinh t + \cosh t)$$

이므로 $X(\ln 2) = 2(1, \frac{3}{4}, -\frac{5}{4}) = (2, \frac{3}{2}, -\frac{5}{2}),\ X'(\ln 2) = (2, 4, -4),\ X''(\ln 2) = (2, 8, -8)$이다.

즉 접선의 방정식은

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3/2}{4} = \frac{z+5/2}{-4}$$

이며 접촉평면은

$$y + z = -1$$

이 된다.

2-1. 6. *삼차원 공간 속의 곡선*

$$X(t) = (\sin t \cos t, \sin^2 t, \cos t)$$

의 $t = \pi$에서의 접선의 방정식 및 접촉평면의 방정식을 구하시오.

$$X'(t) = (\cos 2t, \sin 2t, -\sin t)$$

$$X''(t) = (-2\sin 2t, 2\cos 2t, -\cos t)$$

이며 $X(\pi) = (0, 0, -1),\ X'(\pi) = (1, 0, 0), X''(\pi) = (0, 2, 1)$이므로 접선의 방정식은

$$y = 0, z = -1$$

이고 접촉평면의 방정식은

$$y - 2z = -2$$

이다.

2-1. 7. *삼차원 공간 속의 다음 곡선*

$$X(t) = (\cos t, \sin t, t^2), \quad t \in \mathbb{R}$$

에 대하여 t에서의 속도 벡터와 가속도 벡터를 인접한 두 변으로 하는 평행사변형의 넓이를 t에 관한 함수로 나타내시오.

$$X'(t) = (-\sin t, \cos t, 2t)$$

$$X''(t) = (-\cos t, -\sin t, 2)$$

이며 평행사변형의 넓이는 두 벡터의 벡터곱의 크기와 같다.

$$X'(t) \times X''(t) = (2\cos t + 2t \sin t, -2t\cos t + 2\sin t, 1)$$

이므로 그 크기는

$$\sqrt{4\cos^2 t + 8t \sin t \cos t + 4t^2 \sin^2 t + 4t^2 \cos^2 t - 8t \sin t \cos t + 4\sin^2 t + 1} = \sqrt{4t^2 + 5}$$

이다.

2-1. 8. *좌표공간의 곡선*

$$X(t) = (e^t, \sin(2t+\pi), \ln(t^2+e))$$

위의 점 $(1,0,1)$*에서 접촉평면의 방정식을 구하시오.*

$$X'(t) = (e^t, 2\cos(2t+\pi), \frac{2t}{t^2+e})$$

$$X''(t) = (e^t, -4\sin(2t+\pi), \frac{2}{t^2+e} - \frac{4t^2}{(t^2+e)^2})$$

이다. 접촉평면을 구하는 점은 $X(0)$이므로, $X'(0) = (1,-2,0)$과 $X''(0) = (1,0,2/e)$이 평면에 평행하다. 즉 법선벡터는 $(2,1,-e)$가 될 것이다. 평면의 방정식은

$$2x + y - ez = 2 - e$$

가 됨을 확인할 수 있다.

2-1. 9. *삼차원 공간 속의 다음 곡선*

$$X(t) = (\cos t, \sin t, t^2), \quad t \in \mathbb{R}$$

에 대하여 $t = g(s) = 2\sinh s$*인* s*로 재매개화한 곡선* $\tilde{X}(s)$*에 대해*

$$|\tilde{X}'(s) \times \tilde{X}''(s)|$$

의 최솟값을 구하시오.

$$\frac{d}{ds}\tilde{X}(s) = \frac{d}{dt}X(t)\frac{dt}{ds} = X'(g(s)) \cdot g'(s)$$

임을 알고 있다. 같은 방법으로,

$$\frac{d^2}{ds^2}\tilde{X}(s) = (g'(s))^2 X''(g(s)) + g''(s)X'(g(s))$$

이다. 즉

$$\tilde{X}'(s) \times \tilde{X}''(s) = g'(s)X'(g(s)) \times ((g'(s))^2 X''(g(s)) + g''(s)X'(g(s))) = (g'(s)^3 X'(t) \times X''(t)$$

이며 원하는 값은

$$(g'(s))^3 |X'(t) \times X''(t)| = 8\cosh^3 s\sqrt{4t^2+5} = 8\cosh^3 s\sqrt{16\sinh^2 s + 5}$$

이다. 이를 s로 미분하면

$$24\sinh s\cosh^2 s\sqrt{16\sinh^2 s+5} + 4\cosh^3 s\frac{32\sinh s\cosh s}{\sqrt{16\sinh^2 s+5}} = 8\sinh s\cosh^2 s\frac{48\sinh^2 s + 15 + 16\cosh^2 s}{\sqrt{16\sinh^2 s+5}}$$

이다. 따라서 이 함수의 극점은 $\sinh s = 0$인 $s = 0$일 때 발생한다. 해당점을 기준으로 주어진 함수의 미분값이 음에서 양이 되므로, 해당하는 점은 극소이자 최소이다. $s = 0$일 때 그 값은

$$8\sqrt{5}$$

이다.

2-1. 10. *좌표평면의 곡선*

$$X(t) = e^{\sqrt{t}}(\cos\sqrt{t}, \sin\sqrt{t}), \quad t \geq 1$$

의 호의 길이에 대한 매개화 $\tilde{X}(s)$를 구하시오. 단, 매개화된 곡선 $\tilde{X}(s)$는 $\tilde{X}(0) = e(\cos 1, \sin 1)$을 만족한다.

조건에 의하여 $X(1)$로부터 잰 호의 길이로서 재매개화하면 됨을 알 수 있다.

$$X'(t) = \frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}(-\sin\sqrt{t}, \cos\sqrt{t}) + \frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}(\cos\sqrt{t}, \sin\sqrt{t})$$

이므로 $|X'(t)| = \sqrt{2} \cdot \dfrac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}} = \dfrac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{2t}}$이다. 즉

$$s = \int_1^t \frac{e^{\sqrt{u}}}{\sqrt{2u}} du = [\sqrt{2}e^{\sqrt{u}}]_1^t = \sqrt{2}(e^{\sqrt{t}} - e)$$

이며, 이를 잘 정리하면

$$t = \left(\ln(\frac{s}{\sqrt{2}} + e)\right)^2$$

이며 매개화된 곡선은

$$\tilde{X}(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + e\right)(\cos\ln(\frac{s}{\sqrt{2}} + e), \sin\ln(\frac{s}{\sqrt{2}} + e))$$

이며, s의 범위는 $s \geq 0$이다.