**중간문풀-5. 1.** *아래와 같이 주어진 함수 $f$에 대하여 물음에 답하시오.*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

*(a) 원점에서 편도함수 $D_1f(x,y), D_2f(x,y)$의 연속성을 조사하시오.*
*(b) 원점에서 함수 $f$의 미분가능성을 조사하시오.*

(a)

$$D_1f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot 0=0$$

$$D_1f(x,y)=\frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}\quad (x,y)\neq(0,0)$$

이다. 그리고

$$0\le \lim_{(x,y)\to(0,0)}|D_1f(x,y)-D_1f(0,0)|\le \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|y|(2|x^4|+|4x^2y^2|+2|y^4|)}{(x^2+y^2)^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}2|y|=0$$

이기에, $D_1f$는 원점에서 연속하다.

다음으로

$$D_2f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0$$

$$D_2f(x,y)=\frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},\quad (x,y)\neq(0,0)$$

이기에,

$$0\le \lim_{(x,y)\to(0,0)}|D_2f(x,y)-D_2f(0,0)|\le \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{x(2x^4+4x^2y^2+2y^4)}{(x^2+y^2)^2}\right|\le \lim_{(x,y)\to(0,0)}2|x|=0$$

이 되므로 $D_2f$는 원점에서 연속이다.

(b) (a)에서 $f$가 원점에서 일급함수임을 알 수 있었다. 따라서 $f$는 원점에서 미분가능함수이다.

**중간문풀-5. 2.** *원점에서 $\mathbf{v}=(2,2,-1)$ 방향으로 발사된 빛과 곡면 $2xy+yz+zx=1$이 주어져 있다.*
*(a) 발사된 빛이 곡면과 닿는 점에서의 접평면의 방정식을 구하시오.*
*(b) 이때 빛이 접평면에서 반사되어 나가는 직선의 방정식을 구하시오.*

(a) 먼저 원점에서 발사된 빛이 곡면에 닿은 점 $P$를 구하자. 이때 점 $P$는

$$P=(0,0,0)+t(2,2,-1)=(2t,2t,-t),\quad t>0$$

로 주어진다. 한편 $P$는 곡면 위의 점이므로,

$$1=2(2t)(2t)+(2t)(-t)+(-t)(2t)=4t^2$$

이고 $t>0$이므로 $t=\frac{1}{2}$이다. 따라서 $P=(1,1,-\frac{1}{2})$이다.

한편 점 $P$에서 곡면에 수직인 벡터는 $f(x,y,z)=2xy+yz+zx$일 때

$$\mathbf{n}=\text{grad}f(1,1,-\frac{1}{2})=(2y+z,2x+z,y+x)|_{(1,1,-\frac{1}{2})}=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},2\right)$$

이므로 접평면의 방정식은

$$\frac{3}{2}(x-1)+\frac{3}{2}(y-1)+2(z+\frac{1}{2})=0$$

이다.

(b) 빛이 반사되어 나가는 방향은

$$\mathbf{v}* = \mathbf{v} - 2\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n} = (2,2,-1) - 2\frac{3+3-2}{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}+4}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},2\right) = \left(\frac{10}{17},\frac{10}{17},-\frac{49}{17}\right)$$

이고, 직선은 $(1,1,-\frac{1}{2})$를 지나야 하므로

$$\frac{x-1}{10} = \frac{y-1}{10} = \frac{z+\frac{1}{2}}{-49}$$

이다.

**중간문풀-5. 3.** *다음 물음에 답하시오.*

*(a) 원점에서 $f(x,y) = \ln(x+e^y)$의 2차 근사다항식을 구하시오.*

*(b) (a)의 결과를 이용하여 $\ln(0.01+e^{0.01})$의 일차근삿값을 구하고, 오차가 $2\times 10^{-4}$ 이하임을 보이시오.*

(a) 원점에서의 2차 근사다항식은

$$T_2f(x,y) = f(0,0) + D_1f(0,0)x + D_2f(0,0)y + \frac{1}{2!}(D_1^2f(0,0)x^2 + 2D_1D_2f(0,0)xy + D_2^2f(0,0)y^2)$$

으로 주어진다.

$$D_1f(x,y) = \frac{1}{x+e^y}$$

$$D_2f(x,y) = \frac{e^y}{x+e^y}$$

$$D_1^2f(x,y) = -\frac{1}{(x+e^y)^2}$$

$$D_1D_2f(x,y) = -\frac{e^y}{(x+e^y)^2}$$

$$D_2^2f(x,y) = \frac{xe^y}{(x+e^y)^2}$$

이기에

$$T_2f(x,y) = x + y - \frac{1}{2}x^2 - xy$$

임을 알 수 있다.

(b) (a)에 의하여, $T_1f(x,y) = x+y$이므로 $T_1f(0.01,0.01) = 0.02$다.

테일러 정리에 의하여

$$|R_1f(x,y)| \le M_2\frac{(|x|+|y|)^2}{2!}$$

이므로

$$|R_1f(0.01,0.01)| \le M_2\frac{(0.01+0.01)^2}{2} = M_2\times(2\times 10^{-4})$$

이다. 여기서

$$M_2 = \max\{|D_iD_jf((0,0)+t(0.01,0.01))| \;:\; 1\le i,j\le 2, 0\le t\le 1\}$$

이다. 그런데 (a)에서 구한 것을 감안하면 $y \ge 0$일 때

$$|D_1^2f(x,y)| = \frac{1}{(x+e^y)^2} \le \frac{e^y}{(x+e^y)^2} = |D_1D_2f(x,y)|$$

이며 $0 \le x \le 0.01$일 때

$$|D_2^2 f(x,y)| = \frac{xe^y}{(x+e^y)^2} \le \frac{e^y}{(x+e^y)^2} = |D_1D_2f(x,y)|$$

인데,

$$|D_1D_2f(x,y)| = \frac{e^y}{(x+e^y)^2} \le \frac{e^y}{(e^y)^2} = \frac{1}{e^y} \le 1$$

이므로 $M_2 \le 1$이다. 그러므로

$$|(\text{오차})| \le M_2 \times (2\times 10^{-4}) \le 2\times 10^{-4}$$

이다.

**중간문풀-5. 4.** *아래와 같이 주어진 함수 $f$에 대하여 물음에 답하시오.*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+|y|^3} & \textit{if}\,(x,y) \ne (0,0) \\ 0 \quad \textit{if}\,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

*(a) 원점에서 $f$의 연속성을 판정하시오.*
*(b) $\mathbf{v} = (1,1)$일 때 $D_{\mathbf{v}}f(0,0)$를 구하시오.*
*(c) 원점에서 $f$의 미분가능성을 판정하시오.*

(a) 산술기하 평균에 의하여 $x^2+|y|^3 \ge 2\sqrt{x^2|y|^3} = 2|x||y|^{\frac{3}{2}}$이 성립한다. 그러면 $x, y \ne 0$일 때

$$0 \le |f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{xy^2}{x^2+|y|^3}\right| \le \frac{|xy^2|}{2|x||y|^{3/2}} = \frac{1}{2}\sqrt{|y|}$$

이 성립한다. 또한 $xy = 0$일 경우에는, $f(x,y) = 0$이므로 위의 부등식이 자명하게 성립한다. 따라서

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}\sqrt{|y|} = 0$$

임을 고려하면,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - f(0,0)| = 0$$

이므로 $f$는 원점에서 연속이다.

(b)

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t,t) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t,t)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\cdot\frac{t^3}{t^2+|t|^3} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{1+|t|} = 1 \end{aligned}$$

이다.

(c) 만약 $f$가 원점에서 미분가능하다면

$$D_{\mathbf{w}}f(0,0) = \mathrm{grad} f(0,0)\cdot\mathbf{w}$$

가 모든 이차원 벡터 $\mathbf{w}$에 대해 성립해야 한다. 만약 $\mathbf{w} = \mathbf{v}$라고 하면, (b)에 의하여 $D_{\mathbf{v}}f(0,0) = 1$이고

$\text{grad} f(0,0)\cdot \mathbf{v} = D_1 f(0,0) + D_2 f(0,0)$도 1이어야 한다. 그러나

$$D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t} = 0$$

이고

$$D_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t} = 0$$

이므로, $D_1 f(0,0) + D_2 f(0,0) \neq 1$이다. 따라서 $f$는 원점에서 미분불가능하다.

**중간문풀-5. 5.** *원점에서 함수* $f(x,y) = \ln(2x+y+1)$*의 이차근사다항식을 구하시오.*

$$f(x,y) = (2x+y) - \frac{1}{2}(2x+y)^2 + o((2x+y)^2) = 2x + y - 2x^2 - 2xy - \frac{1}{2}y^2 + o(x^2+y^2)$$

이다. 이때 테일러 전개의 유일성에 의하여,

$$T_2 f(x,y) = 2x + y - 2x^2 - 2xy - \frac{1}{2}y^2$$

이다.

**중간문풀-5. 6.** *평면에서 직교좌표계를 사용했을 때 라플라스 방정식은*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

*으로 주어진다. 이를 극좌표를 이용하여 나타내면*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = 0$$

*이 됨을 보이시오.*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\sin\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\sin\theta)\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\sin^2\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot(-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot(r\cos\theta))\\ &= r^2\sin^2\theta\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2r^2\sin\theta\cos\theta\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - r\cos\theta\cdot\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin\theta\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}$$

이므로

$$0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

이다.

**중간문풀-5. 7.** *방정식*

$$(x-1)^2 + 2(y-2)^2 + 3(z-3)^2 = 1$$

*로 주어지는 타원면 위의 점 $(a,b,c)$에서 타원면에 접하는 접평면이 원점 $(0,0,0)$을 포함하도록 하는 점 $(a,b,c)$들은 한 평면 위에 있음을 보여라.*

점 $(a,b,c)$에서 타원면에 접하는 접평면의 방정식을 구하여 보자. 주어진 방정식을 $f(x,y,z)=0$의 형태로 들여다 본다면, 등위면 $f^{-1}(1)$에 수직인 벡터는 $\mathrm{grad} f(x,y,z) = (2(x-1), 4(y-2), 6(z-3))$이므로 접평면의 방정식은

$$(a-1)(x-a) + 2(b-2)(y-b) + 3(c-3)(z-c) = 0$$

으로 표현될 수 있다. 이 평면이 원점을 지나기에, $(x,y,z)=(0,0,0)$을 대입한 후 정리하면

$$a^2 - a + 2b^2 - 4b + 3c^2 - 9c = 0$$

이 될 것이다. 이때 점 $(a,b,c)$는 타원면 위의 점이기도 하므로,

$$(a-1)^2 + 2(b-2)^2 + 3(c-3)^2 = 1$$

이다. 이 둘을 연립할 경우에는

$$a + 4b + 9c = 35$$

가 나오며, 점 $(a,b,c)$는 평면 $x+4y+9z=35$ 위에 있음을 알게 된다.

**중간문풀-5. 8.** *이급 함수 $f$가*

$$f(tx,ty) = t^2 f(x,y) \quad \forall t,x,y \in \mathbf{R}$$

*을 만족하면*

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left[x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\right]$$

*임을 보여라. 또한, 위 등식을 만족하는 $0$이 아닌 함수 $f$의 예를 들어라.*

$$f(tx,ty) = t^2 f(x,y)$$

를 $t$에 대하여 미분하면,

$$xD_1 f(tx,ty) + yD_2 f(tx,ty) = 2tf(x,y)$$

이다. 이를 다시 $t$에 대하여 미분한다면,

$$x^2 D_1^2 f(tx,ty) + 2xyD_1D_2 f(tx,ty) + y^2 D_2^2 f(tx,ty) = 2f(x,y)$$

이며 여기에 $t=0$을 대입하면

$$\frac{1}{2}\left[x^2 D_1^2 f(0,0) + 2xyD_1D_2 f(0,0) + y^2 D_2^2 f(0,0)\right] = f(x,y)$$

가 성립한다. 이를 만족하려면 $f$가 $x$와 $y$에 대한 이차식으로 구성되어 있으면 될 것이다. 따라서 실수 $a,b,c$에 대하여

$$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

꼴이 예시가 될 수 있다.

**중간문풀-5. 9.** *직원뿔의 반지름 $r$은 1초당 3센치미터 증가하고, 높이 $h$는 1초당 5센치미터 증가한다. 반지름이 15센치미터이고 높이가 25센치미터일 때, 부피의 증가율을 구하여라.*

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$이며, $\frac{dr}{dt} = 3$, $\frac{dh}{dt} = 5$이다. 그러면 $V$를 $t$로 미분할 경우

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\cdot\frac{dh}{dt}\\ &= \frac{2}{3}\pi rh\cdot 3 + \frac{1}{3}\pi r^2\cdot 5\\ &= 1125\pi\end{aligned}$$

**중간문풀-5. 10.** *아래 함수 $f$의 원점에서의 연속성을 조사하시오.*

$$f(x,y) = \begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}\sqrt{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \quad (x,y) = (0,0)\end{cases}$$

산술기하평균부등식에 의하여

$$x^4 + y^2 \geq 2\sqrt{x^4y^2} = 2|x^2y|$$

가 성립하므로,

$$0 \leq f(x,y) \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

이다. 이때 $f(x,y)$를 가두는 두 함수는 $(x,y)\to(0,0)$임에 따라 0으로 수렴하므로, 샌드위치 정리에 의하여

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

이다. 따라서 이 함수 $f$는 원점에서 연속이다.

**중간문풀-5. 11.** *평평한 금속판 위에서 전압분포가 아래와 같다.*

$$V(x,y) = 50 + ax^2 - by^2$$

*(a) 점 $(1,-2)$에서 전압이 가장 빨리 증가하는 방향이 $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 16\mathbf{j}$와 평행할 때, $a$와 $b$의 관계식을 구하여라.*

*(b) (a)의 관계식이 성립하고 $V(1,-2) = 33$일 때, $(1,-2)$에서 가장 빨리 감소하는 방향의 단위벡터와 그 방향으로의 변화율을 구하여라.*

(a) $\mathrm{grad}V(x,y) = (2ax, -2by)$이므로 $\mathrm{grad}V(1,-2) = (2a, 4b)$이다. 그런데 방향 $\mathbf{v}$가 가장 빨리 증가하는 방향이므로, $(2a,4b)$가 벡터 $(-2,16)$과 나란함을 알 수 있다. 따라서 $b = -4a$가 성립한다.

(b) $V(1,-2) = 50+a-4b = 33$이므로, 앞의 식과 연립해보면 $a = -1, b = 4$이다. 그리고 $\mathrm{grad}V(1,-2) = (-2,16)$이 될 것이기에, 가장 빨리 감소하는 방향의 단위벡터는

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{(-2)^2+16^2}}(2,-16) = \left(\frac{1}{\sqrt{65}}, -\frac{8}{\sqrt{65}}\right)$$

이 된다. 이때의 변화율은

$$D_{\mathbf{w}}(1,-2) = \mathrm{grad}V(1,-2)\cdot\mathbf{w} = -2\sqrt{65}$$

이 된다.

**중간문풀-5. 12.** *$f(u,v)$가 미분가능하고 $w = f(x-y, y-x)$일 때, $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$임을 보여라.*

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= D_1f(x-y,y-x)\cdot\frac{\partial(x-y)}{\partial x} + D_2f(x-y,y-x)\cdot\frac{\partial(y-x)}{\partial x}\\ &= D_1f(x-y,y-x) - D_2f(x-y,y-x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial y} &= D_1f(x-y,y-x)\cdot\frac{\partial(x-y)}{\partial y}+D_2f(x-y,y-x)\cdot\frac{\partial(y-x)}{\partial y}\\ &= D_2f(x-y,y-x)-D_1f(x-y,y-x)\end{aligned}$$

이므로, $\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}=0$이다.

**중간문풀-5. 13.** *함수 $f(x,y)=e^x\ln(1+y)$의 원점에서의 2차 근사다항식을 구하여라.*

$$e^x = 1+x+x^2+o(x^2)$$
$$\ln(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+o(y^2)$$

이므로

$$e^x\ln(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+xy+o(x^2+y^2)$$

임을 알 수 있다. 따라서 테일러 전개의 유일성에 의하여 $f$의 2차 근사다항식은

$$T_2f(x,y)=y-\frac{y^2}{2}+xy$$

이다.

**중간문풀-5. 14.** *좌표평면에서 정의된 함수*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

*에 대하여 다음 질문에 답하여라.*

*(a) $f$는 $(0,0)$에서 연속인가?*

*(b) $D_1f(0,0)$과 $D_2f(0,0)$은 존재하는가? 존재한다면 그 값은 얼마인가?*

*(c) $f$는 $(0,0)$에서 미분가능한가?*

(a) 산술기하 평균 부등식에 의하여 $|xy^2|\le\frac{1}{2}(x^2+y^4)$이므로

$$|f(x,y)-f(0,0)|\le\left|\frac{xy^2\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^4}\right|\le\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

이 성립한다. 0과 $\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$가 모두 $(x,y)$가 원점으로 감에 따라 0으로 가기에, 그 사이에 있는 $|f(x,y)-f(0,0)|$도 0으로 수렴한다. 따라서

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)=0$$

이다. 따라서 $f$는 원점에서 연속이다.

(b)

$$D_1f(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{0}{t^3}=0$$
$$D_2f(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{0}{t^5}=0$$

(c) $\mathrm{grad} f(0,0) = (0,0)$임을 알 수 있다. 따라서 만약 $f$가 미분가능하다면,

$$\begin{aligned}\lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}} \frac{|f(\mathbf{v})|}{|\mathbf{v}|} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} \\ &= 0\end{aligned}$$

이어야만 한다. 그러나 $y^2 = x$ 경로로 원점에 다가갈 경우,

$$\lim_{y\to 0} \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2} \neq 0$$

이므로, 극한값이 0일 수 없다. 따라서 $f$는 원점에서 미분불가능하다.

**중간문풀-5. 15.** *다음 질문에 답하여라.*
*(a) 원점에서* $f(x,y) = \sin(x+y)e^{x+2y}$ *의 2차 근사다항식을 구하여라.*
*(b) (a)의 근사다항식을 이용하여* $\sin(0.02)e^{0.03}$ *의 1차 근사값을 구하고, 오차가* $5\times 10^{-3}$ *이하임을 보여라.*

(a)

$$\sin(x+y) = (x+y) + o((x+y)^2)$$

$$e^{x+2y} = 1 + (x+2y) + \frac{1}{2!}(x+2y)^2 + o((x+2y)^2)$$

이므로,

$$f(x,y) = x + y + x^2 + 3xy + 2y^2 + o(x^2+y^2)$$

이다. 따라서 테일러 전개의 유일성에 의하여 2차 근사다항식은

$$T_2 f(x,y) = x + y + x^2 + 3xy + 2y^2$$

으로 주어진다.

(b) $T_1 f(x,y) = x+y$임을 알고 있는 상황이다. 그러면 $\sin(0.02)e^{0.03}$의 일차근사값은 $x=0.01, y=0.01$을 넣었을 때의 일차근삿값인 0.02이다.

오차한계를 구하여 보자. 오차항은 아래와 같이 제한된다.

$$|R_1 f(0.01, 0.01)| \leq \frac{M_2}{2!}(0.01+0.01)^2$$

이때, $M_2$는 아래와 같이 정의된다.

$$M_2 = \max\{|D_i D_j f(0.01t, 0.01t) : 1 \leq i,j \leq 2, 0 \leq t\ le 1\}$$

그러면 이차 편미분계수를 가지고 구하여 보면,

$$|D_1^2 f(x,y)| = |2\cos(x+y)e^{x+2y}| \leq 2e \leq 21$$

$$|D_1 D_2 f(x,y)| = |(3\cos(x+y) + \sin(x+y))e^{x+2y}| \leq 4e \leq 21$$

$$|D_2^2 f(x,y)| = |(4\cos(x+y) + 3\sin(x+y))e^{x+2y}| \leq 7e \leq 21$$

이므로 $M_2 \leq 21$이다. 따라서

$$|R_1 f(0.01, 0.01)| \leq \frac{M_2}{2}(0.02)^2 \leq 42\times 10^{-4} \leq 5\times 10^{-3}$$

이다.

**중간문풀-5. 16.** *미분가능한 이변수함수 $f$에 대하여 삼변수함수 $g$를 다음과 같이 정의하자.*

$$g(x,y,z) = x^3 f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$$

*이때, 아래 식이 성립함을 보이시오.*

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} + z\frac{\partial g}{\partial z} = 3g$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= 3x^2 f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) + x^3 \left[D_1 f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) \cdot (-\frac{y}{x^2}) + D_2 f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) \cdot (-\frac{z}{x^2})\right] \\ &= 3x^2 f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) - xyD_1 f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) - xzD_2 f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y} &= x^3 \left[D_1 f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) \cdot (\frac{1}{x}) + D_2 f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) \cdot 0\right] \\ &= x^2 D_1 f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial z} &= x^3 \left[D_1 f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) \cdot 0 + D_2 f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) \cdot (\frac{1}{x})\right] \\ &= x^2 D_2 f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x})\end{aligned}$$

이기에,

$$\begin{aligned}x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} + z\frac{\partial g}{\partial z} &= 3x^3 f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) - x^2 yD_1 f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) - x^2 zD_2 f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) + x^2 yD_1 f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) + x^2 zD_2 f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) \\ &= 3x^3 f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) = 3g\end{aligned}$$

가 성립한다.

**중간문풀-5. 17.** *공간의 점 $(1,1,1)$에서 곡면 $z = x\cos y - ye^x$ 모양의 거울을 향하여 빛이 $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,-1)$의 방향으로 진행하고 있다.*

*(a) 빛이 거울과 만나는 점의 좌표를 구하시오.*
*(b) (a)에서 구한 점에서 거울에 접하는 평면의 방정식을 구하시오.*
*(c) 빛이 거울에 반사되어 나가는 방향의 단위벡터를 구하시오.*

(a) 점 $(1,1,1)$을 지나고 $\mathbf{v}$ 방향으로 진행하는 점들은 양의 실수 $t$에 대하여

$$(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}t, 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}t, 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}t)$$

로 표현된다. 이 직선과 곡면이 만나는 최초의 점을 구하여 보자.

$$1 - \frac{1}{\sqrt{3}}t = (1 - \frac{1}{\sqrt{3}}t)\cos(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}t) - (1 - \frac{1}{\sqrt{3}}t)e^{1-\frac{1}{\sqrt{3}}t}$$

를 풀면, $t = \sqrt{3}$일 경우

$$1 = \cos(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}t) - e^{1-\frac{1}{\sqrt{3}}t}$$

인데 $1 + e^{1-\frac{1}{\sqrt{3}}t} > 1$이고 $\cos(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}t) \leq 1$이므로 모순이 생긴다. 따라서 $t = \sqrt{3}$일 때를 보면, 그것이 근이 됨을 확인할 수 있다. 따라서 $t = \sqrt{3}$일 때 빛과 거울이 만나고, 해당하는 점은 $(0,0,0)$이다.

(b) 거울을 함수 $f(x,y,z) = x\cos y - ye^x - z$의 0-등위면으로 바라보자. 그러면 $\mathrm{grad} f(x,y,z) = (\cos y - ye^x, -x\sin y - e^x, -1)$로 주어진다. 원점을 이에 대입할 경우에 원점에서의 기울기 벡터는 $(1,-1,-1)$이다. 이는 점에서 거울에 접하는 평면의 법선 벡터이므로, 원점을 지나는 구하는 평면은

$$x - y - z = 0$$

이다.

(c) 원점에서의 법선벡터를 $\mathbf{n}$, 빛의 방향을 $\mathbf{v}$라 할 때, 빛이 반사되어 나가는 방향은

$$\mathbf{v}* = \mathbf{v} - 2\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n}$$

으로 주어진다. 그러면 주어진 것을 이에 대입해 본다면,

$$\mathbf{v}* = \frac{1}{3\sqrt{3}}(-5,-1,-1)$$

로 주어진다. 이 벡터는 크기가 이미 1이므로, 방향은 위의 벡터

$$\left(-\frac{5\sqrt{3}}{9}, -\frac{\sqrt{3}}{9}, -\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$$

이다.

**중간문풀-5. 18.** *함수 $f(x,y)$를 다음과 같이 정의하자.*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

*(a) 원점에서 $f$는 연속인가?*

*(b) $D_1 f(0,0)$와 $D_2 f(0,0)$이 존재하면 그 값을 구하여라.*

*(c) 원점에서 $f$는 미분가능한가?*

(a) $\ln(1+xy) = xy + o(xy)$로 주어진다. 그러면

$$|f(x,y)| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{o(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| + \left|\frac{o(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|$$

이다. 이때

$$0 \leq \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{1/2}$$

이고 $(x,y)$가 원점으로 감에 따라 0과 $\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{1/2}$가 모두 0으로 가기에, 그 사이에 있는 $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$은 $(x,y)$가 원점으로 감에 따른 극한값이 0이다. 그리고 만약 $xy = 0$일 경우에는 $\ln(1+xy) = xy = 0$이므로 위로부터 $f(x,y)$는 $xy = 0$을 만족하며 원점으로 갈 때는 0이라는 극한값을 가짐을 알 수 있다. 만약 $xy \neq 0$이라면,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{o(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{o(xy)}{xy}\cdot\right|\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{o(xy)}{xy}\right|\cdot\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} = 0$$

이 $(x,y) \to (0,0)$임에 따라 $xy \to 0$임과 $\sqrt{x^2+y^2} \to 0$임에 따라 성립한다. 따라서 앞선 두 명제에 의해 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ 역시 성립한다. 따라서 원점에서 $f$는 연속이다.

(b)

$$D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

$$D_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

(c) 원점에서 미분가능일 필요충분조건을 고려하자. 그런데 주어진 조건에 의하여 $f(0,0) = 0, \mathrm{grad} f(0,0) = (0,0)$이다. 따라서 확인해볼 것은

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|\frac{\ln(1+xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2} = 0$$

이 성립하는지이다. 그런데 $x = y$인 경로를 따라 원점으로 다가오는 경우를 생각해보면,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

로 0이 아니기에, 주어진 극한은 0이 될 수 없다. 따라서 $f$는 원점에서 미분불가능하다.

**중간문풀-5. 19.** *곡면 $z = 8 - 3xy + 2y^2$ 위의 점 $P$에서의 접평면이 직선 $\frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = z - 1$과 수직이 될 때의 $P$를 구하고, 이때 접평면의 방정식을 구하시오.*

$f(x,y,z) = 8 - 3xy + 2y^2 - z$라 할 때, 이 함수의 $0-$ 등위면의 점 $P$에서 주어진 직선과 수직인 접평면을 구하려면, 기울기 벡터는 직선의 방향벡터 $(3,2,1)$과 나란해야 한다. 즉

$$(-3y, -3x + 4y, -1) = t(3,2,1)$$

인 실수 $t$가 존재하며, $t = -1$이 바로 그것이다. 따라서 $x = 2, y = 1, z = 4$이므로 점 $P$는 $(2,1,4)$이다. 그리고 이 점을 지나며 직선의 방향벡터를 법선벡터로 가지는 접평면의 방정식은

$$3x + 2y + z = 12$$

다.

**중간문풀-5. 20.** $(0.98)^{1.01}$*의 2차 근사값을 구하여라.*

함수 $f(x,y) = x^y$을 고려해 보자. 그리고 $\mathbf{v} = (-0.02, 0.01)$이라 정의하면,

$$(0.98)^{1.01} = f(0.98, 1.01) = f((1,1) + \mathbf{v})$$

의 2차 근삿값은

$$f(1,1) + D_{\mathbf{v}} f(1,1) + \frac{1}{2} D_{\mathbf{v}}^2 f(1,1)$$

이다. 점 $(1,1)$ 근방에서

$$D_1 f(x,y) = yx^{y-1}$$

$$D_2 f(x,y) = x^y \ln x$$

$$D_1^2 f(x,y) = y(y-1)x^{y-2}$$

$$D_1 D_2 f(x,y) = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x$$

$$D_2^2 f(x,y) = x^y (\ln x)^2$$

이므로 $D_{\mathbf{v}} f(1,1) = (1,0)\cdot(-0.02, 0.01) = -0.02$이고, $D_{\mathbf{v}}^2 f(1,1) = (-0.02)^2 D_1^2 f(1,1) + 2(-0.02)(0.01) D_1 D_2 f(1,1) +$

$(0.01)^2 D_2^2 f(1,1) = -0.0004$이므로 근삿값은

$$1 - 0.02 - 0.0002 = 0.9798$$

이다.

**중간문풀-5. 21.** *원점에서 함수 $f(x,y) = e^x \sin(x^2+y^2)$의 3차 근사 다항식을 구하여라.*

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$
$$\sin(x^2+y^2) = (x^2+y^2) + o((x^2+y^2)^2)$$

이므로,

$$e^x \sin(x^2+y^2) = x^2 + y^2 + x^3 + xy^2 + o((x^2+y^2)^{3/2})$$

이다. 따라서 테일러 전개의 유일성에 의하여

$$T_3 f(x,y) = x^2 + y^2 + x^3 + xy^2$$

**중간문풀-5. 22.** *함수 $f(x,y)$가 다음과 같이 주어져 있다.*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

*(a) $f$가 원점에서 연속인지 판단하여라.*
*(b) $D_1 f(0,0)$와 $D_2 f(0,0)$가 존재하면 그 값을 구하여라.*
*(c) 원점에서 $f$의 미분가능성을 판단하여라.*

(a)

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(0,0)| &= \left| \frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^2}} \right| \\ &\leq \frac{|y|}{\sqrt{x^4+y^2}} |xy| \\ &\leq |xy| \end{aligned}$$

인데, 0과 $|xy|$는 모두 $(x,y) \to (0,0)$으로 갈 때 0으로 가기에, 그 사이에 있는 $f(x,y) - f(0,0)$의 절댓값도 0으로 수렴한다. 따라서 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$이므로, $f$는 원점에서 연속이다.

(b)

$$D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$
$$D_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

(c) 함수 $f$에 대하여, $f(0,0) = 0, \mathrm{grad} f(0,0) = (0,0)$이다. 만약 $f$가 미분가능하다면

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

이어야 한다. 이를 확인하여 보자.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^4+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|}{\sqrt{x^4+y^2}} \cdot \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot |x| = 0$$

이 $\dfrac{|y|}{\sqrt{x^4+y^2}} \le 1, \dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 1$이 성립하며 $|x|$는 $(x,y)$가 원점으로 감에 따라 0으로 가기에 참이다. 따라서 미분가능성의 정의에 의하여, 함수 $f$는 원점에서 미분가능하다.

**중간문풀-5. 23.** *(a) 미분가능한 함수 $f(x,y,z)$가 모든 실수 $x,y,z$에 대하여 $f(x,y,z) = f(x,-y,z)$를 만족할 때, $D_2f(0,0,0)$의 값을 구하여라.*

*(b) (a)의 조건을 만족하는 함수 $f$에 대하여 $D_{(1,1,1)}f(0,0,0) = 1$, $D_{(1,2,3)}f(0,0,0) = 2$일 때, 원점에서 함수 $f$가 가장 빨리 증가하는 방향을 구하여라.*

(a)

$$f(x,y,z) = f(x,-y,z)$$

이므로, 양변을 $y$로 편미분하였을 때

$$D_2f(x,y,z) = -D_2f(x,-y,z)$$

이다. $(x,y,z) = (0,0,0)$을 대입하면, $D_2f(0,0,0) = -D_2f(0,0,0)$이므로 $D_2f(0,0,0) = 0$이다.

(b) 원점에서 $f$가 가장 빨리 증가하는 방향은 $\mathrm{grad}f(0,0,0)$ 방향이다. 이 방향을 $(a,b,c)$라고 두면, (a)의 결과에 의해 $b = 0$이다. 그리고

$$D_{(1,1,1)}f(0,0,0) = (a,0,c)\cdot(1,1,1) = a+c = 1$$

$$D_{(1,2,3)}f(0,0,0) = (a,0,c)\cdot(1,2,3) = a+3c = 2$$

임에 따라 연립하면 $a = 1/2, c = 1/2$이다. 따라서 가장 빨리 증가하는 방향은

$$\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

다. 이를 단위벡터로 바꾸면

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

**중간문풀-5. 24.** *곡면*

$$\frac{x^3}{2^3} + \frac{y^3}{3^3} - \frac{z^3}{4^3} = 1$$

*위의 점 $(2,3,4)$에서 접평면의 방정식을 구하여라.*

$f(x,y,z) = [\frac{x^3}{2^3} + \frac{y^3}{3^3} - \frac{z^3}{4^3} - 1$로 두자. 그러면 주어진 곡면은 함수 $f$의 $0-$ 등위면이다. 또한, $f$의 기울기 벡터는

$$\mathrm{grad}f(x,y,z) = \left(\frac{3}{2^3}x^2, -\frac{3}{3^3}y^2, -\frac{3}{4^3}z^2\right)$$

이다. 점 $(2,3,4)$를 대입하면

$$\mathrm{grad}f(2,3,4) = \left(\frac{3}{2}, 1, -\frac{3}{4}\right)$$

따라서 점 $(2,3,4)$를 지나며 이 벡터를 법선벡터로 갖는 접평면의 방정식은

$$6x + 4y - 3z = 12$$

이다.

**중간문풀-5. 25.** *(a) 원점에서 $f(x,y) = e^{-x}\cos y$의 2차 근사다항식을 구하여라.*

*(b) $e^{-0.01}\cos(0.02)$의 2차 근사값을 구하고 오차가 $\frac{1}{3!}(0.03)^3$ 이하임을 보여라.*

(a)

$$e^{-x}\cos y = (1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))(1 - \frac{y^2}{2} + o(y^2)) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + o(x^2 + y^2)$$

이므로, 테일러 전개의 유일성에 의하여 2차 근사다항식은

$$T_2 f(x, y) = 1 - x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$$

이다.

(b) (a)에서 구한 2차 근사 다항식에 $(0.01, 0.02)$를 대입하자. 그러면 그 값은 0.98985가 된다.

그 다음으로,

$$M_3 = \max\{|D_iD_jD_kf(0.01t, 0.02t)| : 1 \le i, j, k \le 2, 0 \le t \le 1\}$$

을 구하여 보자. 이때 $D_1^3 f, D_1^2 D_2 f, D_1 D_2^2 f, D_2^3 f$는 모두 $\pm e^x \cos y, \pm e^x \sin y$의 형태이므로 $M_3 \le \max\{e^{-x}|0 \le x \le 0.01\} \le 1$이다. 그러므로

$$|R_2 f(0.01, 0.02)| \le \frac{M_3}{3!}(0.01 + 0.02)^3 = \frac{1}{3!}(0.03)^3$$

이 성립하게 된다.

**중간문풀-5. 26.** *함수*

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) = (0, 0) \\ 0, \quad (x, y) \ne (0, 0) \end{cases}$$

*에 대하여 다음 물음에 답하여라.*

*(a) 원점에서 $f(x, y)$의 연속성을 조사하여라.*

*(b) $D_1 f(0, 0)$과 $D_2 f(0, 0)$을 구하여라.*

*(c) 원점에서 $f(x, y)$의 미분가능성을 조사하여라.*

(a) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$이라고 하면, $(x, y) \to (0, 0)$임에 따라 $r \to 0$이다. 그러면 $f(x, y) = r^2 \sin \frac{1}{r}$이다. 이때 $|r^2 \sin \frac{1}{r}| \le |r^2|$인데, $r^2$은 $r$이 0으로 감에 따라 0으로 간다. 따라서 이보다 작은 함수인 $f(x, y)$ 역시 $(x, y) \to (0, 0)$임에 따라 0으로 수렴한다. 따라서

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$$

이므로, $f$는 원점에서 연속이다.

(b)

$$D_1 f(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} t \sin \frac{1}{|t|} = 0$$

$$D_2 f(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} t \sin \frac{1}{|t|} = 0$$

(c) $f$는 원점에서 기울기 벡터가 영벡터이며, 원점에서 함숫값이 0이다. 따라서 미분가능성을 확인하기 위해서는

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = 0$$

가 성립하는지를 보아야 한다.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \sqrt{x^2+y^2} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = 0$$

은 $|\sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}| \leq 1$임과 $\sqrt{x^2+y^2}$이 $(x,y) \to (0,0)$임에 따라 0에 한없이 가까워짐에 의하여 성립한다. 따라서 $f$는 원점에서 미분가능하다.

**중간문풀-5. 27.** *$f$는 일변수 미분가능함수이며 절대 0이 되지 않는 함수이다. 그리고 $g(x,y)$는 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$ 상에서 아래와 같이 정의되었다.*

$$g(x,y) = xyf(\frac{x+y}{xy})$$

*. 이때 다음 관계식을 만족하는 $D$ 위의 함수 $G(x,y)$를 구하여라.*

$$x^2\frac{\partial g}{\partial x} - y^2\frac{\partial g}{\partial y} = G(x,y)g(x,y)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= yf(\frac{x+y}{xy}) + xy(-\frac{1}{x^2})f'(\frac{x+y}{xy}) \\ &= yf(\frac{x+y}{xy}) - \frac{y}{x}f'(\frac{x+y}{xy})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y} &= xf(\frac{x+y}{xy}) + xy(-\frac{1}{y^2})f'(\frac{x+y}{xy}) \\ &= xf(\frac{x+y}{xy}) - \frac{x}{y}f'(\frac{x+y}{xy})\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}x^2\frac{\partial g}{\partial x} - y^2\frac{\partial g}{\partial y} &= x^2\left(yf(\frac{x+y}{xy}) - \frac{y}{x}f'(\frac{x+y}{xy})\right) - y^2\left(xf(\frac{x+y}{xy}) - \frac{x}{y}f'(\frac{x+y}{xy})\right) \\ &= (x^2y - y^2x)f(\frac{x+y}{xy}) \\ &= (x-y)g(x,y)\end{aligned}$$

이다. 따라서 $G(x,y) = x - y$이다.

**중간문풀-5. 28.** *두 곡면 $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$과 $z = x + 2y$의 교선 위의 한 점 $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 2)$에서의 교선에 대한 접선의 방정식을 구하시오.*

$f(x,y,z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1$, $g(x,y,z) = x + 2y - z$라 하면

$$\mathrm{grad}f(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 2) = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{9}\right)$$

$$\mathrm{grad}g(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 2) = (1, 2, -1)$$

이다. 구하는 접선방정식의 방향벡터를 잘 생각해보면, 접선은 그 점에서의 곡면의 접평면에 포함되는 것이므로 기울기 벡터와 수직하다. 따라서 위의 두 벡터와 모두 수직한 둘의 외적벡터가 접선의 방향벡터와 나란하다.

$$\mathrm{grad}f(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 2) \times \mathrm{grad}g(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 2) = (-11, 16, 21)$$

이므로, 접선의 방정식은

$$\frac{x-\frac{2}{3}}{-11} = \frac{y-\frac{2}{3}}{16} = \frac{z-2}{21}$$

이 될 것이다.

**중간문풀-5. 29.** *함수* $f(x,y) = \arctan(\frac{x-y}{1+xy})$*의 원점에서의 2차 근사다항식을 구하여라.*

$$D_1 f(x,y) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$D_2 f(x,y) = -\frac{1}{1+y^2}$$
$$D_1^2 f(x,y) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$
$$D_2^2 f(x,y) = \frac{2y}{(1+y^2)^2}$$
$$D_1 D_2 f(x,y) = 0$$

이므로, $(x,y) = (0,0)$을 대입하여 만든 2차 근사다항식은

$$T_2 f(x,y) = x - y$$

이 된다.

**중간문풀-5. 30.** *곡면* $e^x \ln y + \cos(xz) + z^2 = 3$ *위의 점* $P(0,e,1)$*에서 접평면의 방정식을 구하여라.*

이 곡면을 함수

$$f(x,y,z) = e^x \ln y + \cos(xz) + z^2 - 3$$

의 0-등위면으로 바라보자. 이 함수의 기울기 벡터를 구하여 보면,

$$\mathrm{grad} f(x,y,z) = \left( e^x \ln y - z\sin(xz), \frac{e^x}{y}, -x\sin(xz) + 2z \right)$$

이다. 따라서 $\mathrm{grad} f(P) = (1, \frac{1}{e}, 2)$이다. 접평면은 이를 법선벡터로 하고 $P$를 지나야 하므로,

$$x + \frac{1}{e}y + 2z = 3$$

이 원하는 방정식이다.

**중간문풀-5. 31.** *좌표평면에서 정의된 함수*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y\sqrt{x^2+y^2}}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

*에 대하여 다음 질문에 답하여라.*

*(a)* $f$*는* $(0,0)$*에서 연속인가?*
*(b)* $D_1 f(0,0)$*과* $D_2 f(0,0)$*은 존재하는가? 존재한다면 그 값은 얼마인가?*
*(c)* $f$*는* $(0,0)$*에서 미분가능한가?*

(a) 산술기하 평균 부등식에 의하여 $|x^2 y| \le \frac{1}{2}(x^4+y^2)$이므로

$$|f(x,y) - f(0,0)| \le \left| \frac{x^2 y\sqrt{x^2+y^2}}{x^4+y^2} \right| \le \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

이 성립한다. 0과 $\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$가 모두 $(x,y)$가 원점으로 감에 따라 0으로 가기에, 그 사이에 있는 $|f(x,y)-f(0,0)|$도 0으로 수렴한다. 따라서

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

이다. 따라서 $f$는 원점에서 연속이다.

(b)

$$D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t^3} = 0$$
$$D_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t^5} = 0$$

(c) $\mathrm{grad} f(0,0) = (0,0)$임을 알 수 있다. 따라서 만약 $f$가 미분가능하다면,

$$\begin{aligned}\lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}} \frac{|f(\mathbf{v})|}{|\mathbf{v}|} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

이어야만 한다. 그러나 $y = x^2$ 경로로 원점에 다가갈 경우,

$$\lim_{y\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2} \neq 0$$

이므로, 극한값이 0일 수 없다. 따라서 $f$는 원점에서 미분불가능하다.

**중간문풀-5. 32.** *곡면 $2y - z^3 - 3xz = 2$ 위의 점 $(1,8,2)$에서의 접평면을 구하여라.*

$f(x,y,z) = 2y - z^3 - 3xz - 2$라 하자. 주어진 곡면은 $f$의 $0-$ 등위면이므로, 점 $(1,8,2)$에서의 접평면의 법선벡터는 $\mathrm{grad} f(1,8,2)$로 주어진다. $\mathrm{grad} f(x,y,z) = (-3z, 2, -3z^2-3x)$이므로, $\mathrm{grad} f(1,8,2) = (-6,2,-15)$이다. 따라서 점 $(1,8,2)$를 지나는 접평면의 방정식은

$$6x - 2y + 15z = 20$$

이다.

**중간문풀-5. 33.** *다음 두 곡면의 교선 상의 주어진 점 $P$에서 이 교선에 대한 접선의 방정식을 구하여라.*

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4$$

$$x^3 - 2y^2 + z^2 = 3$$

$$P = (1,1,2)$$

두 곡면의 교선상의 점 $P$에서 교선에 대한 접선은 $P$에서 앞 곡면에 대한 접평면과 뒷 곡면에 대한 접평면의 교선이다. $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3-3xyz$, $g(x,y,z) = x^3-2y^2+z^2$이라고 두면 앞 곡면을 $f$의 $4-$등위면, 뒷 곡면을 $g$의 $3-$등위면이라고 생각할 수 있다. 각각의 법선벡터는 $f$와 $g$의 기울기 벡터가 된다.

$$\mathrm{grad} f(x,y,z) = (3x^2-3yz, 3y^2-3xz, 3z^2-3xy)$$

이므로 $\mathrm{grad} f(P) = (-3,-3,9)$이며

$$\mathrm{grad} g(x,y,z) = (3x^2, -4y, 2z)$$

이므로 $\mathrm{grad} g(P) = (3,-4,4)$이다. 접선의 방향벡터는 이들 모두에 수직이므로, 둘을 외적한 벡터 $(24,39,21)$

에 나란하다. 따라서 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{8} = \frac{y-1}{13} = \frac{z-2}{7}$$

이다.

**중간문풀-5. 34.** *$f(x,y) = x^2y + 1$일 때, 이 함수의 테일러 급수를 $(x-2)$와 $(y-2)$의 거듭제곱급수 형태로 표현하시오.*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2y + 1 \\ &= ((x-2)+2)^2((y-2)+2)+1 \\ &= (x-2)^2(y-2) + 2(x-2)^2 + 4(x-2)(y-2) + 8(x-2) + 4(y-2) + 9 \end{aligned}$$

인데, 테일러 전개의 유일성에 의하여 위가 성립한다.