야코비 행렬

야코비 행렬

1-3(1). 1. *사상*

$$f(x,y) = (e^{x+y}, xe^y)$$

의 야코비 행렬을 구하여라.

1-3(1). 2. *사상* $g(x,y) = (\ln(xy), ye^x)$*의 야코비 행렬을 구하여라.*

1-3(1). 3. *사상* $h(x,y)$*가 문제 1번과 2번의* f*와* g *에 대하여* $h = f + g$*로 정의될 때,* h*의* $(1,1)$*에서의 야코비 행렬을 구하여라.*

1-3(1). 4.

$$\mathbf{f}(x,y,z) = (x\sin y + z, ye^x - 3x^2)$$

일 때, $\mathbf{f}$*의 야코비 행렬을 구하여라.*

1-3(1). 5.

$$\mathbf{g}(x, y, z) = (x^3 \cos x, xyz)$$

일 때, $\mathbf{g}$*의* $(0, 1, 1)$*에서의 야코비 행렬을* A*라고 하자.* $\mathbf{b} = (0, 2021) \in \mathbb{R}^2$*에 대하여,* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$*인* $\mathbf{x}$*에 대하여,* $|\mathbf{x}|$*의 최솟값은?*

1-3(1). 6. *함수* $\mathbf{f}(x, y, z) = (xyz^2, xe^{-y}, y \sin xz)$*에 대하여, 야코비 행렬을 구하여라.*

1-3(1). 7. *함수* $\mathbf{g}(x, y, z) = (x - y, x^2 + y^2 + z^2, \ln(xz + 2))$*의 점* $(0, 2, 0)$*에서의 야코비 행렬식을 구하여라.*

1-3(1). 8. $x = 2u$*이고* $y = \sqrt{2}v$*일 때,*

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

의 행렬식을 구하여라.

1-3(1). 9. 함수 $\mathbf{f}(x) = (x^2, \cos 3x, \ln x)$와 $g(s,t,u) = s + t^2 + u^3$에 대하여, 함수 $\mathbf{f} \circ g$의 야코비 행렬을 구하시오.

1-3(1). 10. 함수 $\mathbf{f}(x,y) = (xy - \dfrac{y}{x}, \dfrac{x}{y} + y^3)$과 $\mathbf{g}(s,t) = (s/t, s^2t)$에 대하여 함수 $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$의 야코비 행렬을 구하여라.

1-3(1). 11. 함수 $\mathbf{f}(x,y) = (x^2 - y, \frac{y}{x}, e^y)$와 $\mathbf{g}(s,t,u) = (s + 2t + 3u, stu)$에 대하여, 함수 $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$의 야코비 행렬을 구하시오.

1-3(1). 12. $\mathbf{h}(s,t,u) = (st + tu + su, s^3t^3 - e^{stu^2})$의 야코비 행렬을 구하시오.

1-3(1). 13. *함수* $\mathbf{g}$*와* $\mathbf{f}$*에 대하여,*

$$\mathbf{g}(1,-1,3)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 4 & 0 & 7\end{pmatrix}$$

이며, $\mathbf{g}(1,-1,3)=(3,4,5)$*이라고 한다. 또한*

$$\mathbf{f}(3,4,5)=\begin{pmatrix}10 & 4\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

이다. 이때, $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}$*의* $(1,-1,3)$*에서의 야코비 행렬을 구하시오.*

1-3(1). 14. $\mathbf{g}(1,2)=(3,5)$*이며*

$$\mathbf{g}'(1,2)=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{pmatrix}$$

이다. 또한, 함수 $\mathbf{f}$*에 대하여* $\mathbf{f}$*의* $(3,5)$*에서의 야코비 행렬을 구해 야코비 행렬식을 확인해본 결과,* 2*였다.*

$$\mathbf{f}\circ\mathbf{g}$$

의 점 $(1,2)$*에서의 야코비 행렬식을 구하여라.*

1-3(1). 15. *선형사상* $\mathbf{f}$*에 대하여,*

$$\mathbf{f}'(9,1)=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{pmatrix}$$

이며 함수 $\mathbf{g}(x,y)=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & x+2y\end{pmatrix}$ *이라고 한다. 점* $(1,1)$*에서의 합성함수* $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}$*의 야코비 행렬을 구하여라.*

1-3(1). 16. *$x = u^2 - v^2, y = 2uv$로 치환하였을 때,*

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

의 행렬식을 함수 $g(u,v)$라고 하자. $uv-$평면에서 $g(u,v) = 4$로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하여라.

역함수 정리와 음함수 정리

1-3(1). 17. *사상 $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$이 역함수 $\mathbf{G}$를 가진다고 하자. 점 $(1,1)$에서 $\mathbf{F}$의 야코비 행렬이*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

이며 $\mathbf{F}(1,1) = (1,5)$라고 할 때,

$$\mathbf{G}'(1,5)$$

를 구하여라.

1-3(1). 18. *사상 $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$이 역함수 $\mathbf{G}$를 가진다고 하자. 점 $(1,5)$에서 $\mathbf{F}$의 야코비 행렬이*

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 9 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

이며 $\mathbf{F}(1,5) = (5,5)$라고 할 때, $\mathbf{G}$의 $(5,5)$에서의 야코비 행렬식을 구하여라.

1-3(1). 19. *사상*

$$\mathbf{F}(x,y) = (x^3 + y^6, x^4 + y)$$

이 국소적으로 역함수를 가질 조건을 구하여라.

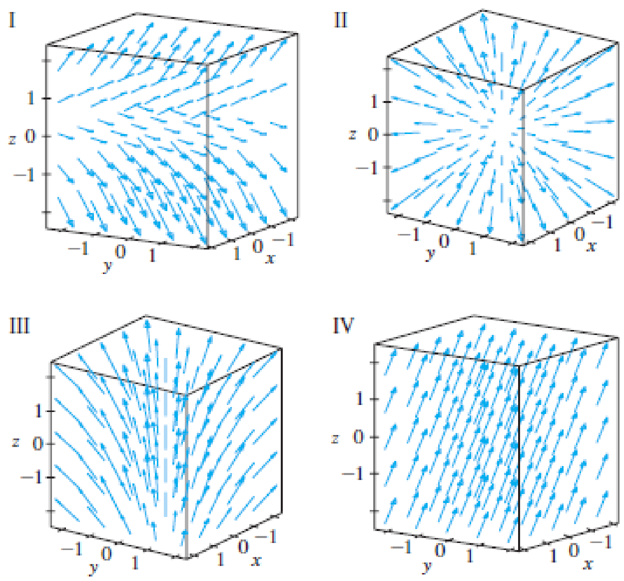
1-3(1). 20. *함수* $f(x,y,z) = x^3 + 6x^2yz + 7yz + 6xz^2$ *의* $0-$ *등위면에서,* z*를* x*와* y*의 함수의 그래프로 표현할 수 있을 조건을 구하여라.*

벡터장과 선적분

벡터장

1-3(1). 21. *주어진 그림에는 네 개의 벡터장과 네 개의 그림이 주어져 있다. 각각을 연결하라.*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$



선적분

* Caution : 이 아래의 선적분 문제는 방향 언급이 없는 이상 t가 증가하는 방향을 따르는 것으로 한다.

1-3(1). 22. $X(t) = (2t, t, 3t),\quad 0 \le t \le 1$*을 따라* $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + 1, y, z - 1)$*을 선적분한 값을 구하여라.*

1-3(1). 23. $X(t) = (\sin t, -\cos t), \quad 0 \le t \le \pi/2$을 따라 $\mathbf{F}(x, y) = (2 + y, x)$을 선적분한 값을 구하여라.

1-3(1). 24. $X(t) = (2t, t), \quad 0 \le t \le 1$을 따라 $\mathbf{F}(x, y) = (x + 1, y + 2)$을 선적분한 값을 구하여라.

1-3(1). 25. $X(t) = (t^2, t^3), \quad -1 \le t \le 1$을 따라 $\mathbf{F}(x, y) = (y - x, x^4 y)$을 선적분한 값을 구하여라.

1-3(1). 26. $X(t) = (3\cos t, 2\sin t, 5t), \quad 0 \le t \le 2\pi$을 따라 $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, xy, xyz)$을 선적분한 값을 구하여라.

1-3(1). 27. $X(t) = (2t, t^2+t, e^t), \quad 0 \le t \le 1$을 따라 $\mathbf{F}(x,y,z) = (-3y, x+1, 3z^2)$을 선적분한 값을 구하여라.

1-3(1). 28. $X(t) = (t, 3t^2, 2t^3), \quad -1 \le t \le 1$을 따라 $\mathbf{F}(x,y,z) = (x, y, -z)$을 선적분한 값을 구하여라.

1-3(1). 29. $X(t) = (\cos t, \sin t, \frac{1}{3}t), \quad 0 \le t \le 4\pi$을 따라 $\mathbf{F}(x,y,z) = (3z, y^2, 6z)$을 선적분한 값을 구하여라.

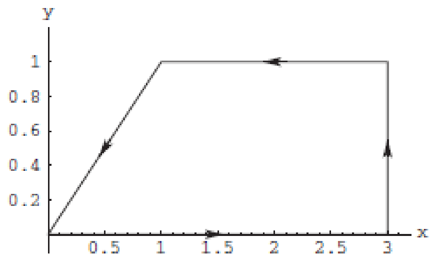
1-3(1). 30. $X(t) = (t, t^2, t^3), \quad 0 \le t \le 1$을 따라 $\mathbf{F}(x,y,z) = (y\cos z, x\sin z, z\sin z^2)$을 선적분한 값을 구하여라.

1-3(1). 31. $X(t) = (t, 3t^2, 5), \quad 0 \le t \le 2$을 따라 $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x, 1, z-5)$을 선적분한 값을 구하여라.

1-3(1). 32. $X(t) = (t, t^2), \quad 0 \le t \le 1$을 따라 $\mathbf{F}(x, y) = (e^{-x^2} + y, e^{-y^2} + x)$을 선적분한 값을 A라 하고, $Y(t) = (1-2t, 4t^2-4t+1), \quad 0 \le t \le 1/2$를 따라 $\mathbf{F}$를 선적분한 값을 B라고 하자. $(e^A - 3e^{-B})/(e^A + e^{-B})$를 구하여라.

1-3(1). 33. $X(t) = (t+1, -4t+1, 2t+1), \quad 0 \le t \le 1$을 따라 $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2y, z, 2x-y)$을 선적분한 값을 구하여라.

1-3(1). 34. *아래 그림의 경로를 따라* $\mathbf{F}(x, y) = (x^2y, -x - y)$*라는 벡터장을 선적분한 값을 구하여라.*



1-3(1). 35. *함수* $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$*의* $9-$ *등위면 위에 있는 곡선* $X(t)$*에 대하여,* $0 \le t \le 1$*에서*

$$\int_X X \cdot d\mathbf{s}$$

의 값을 구하여라.

1-3(1). 36. $X(t) = (t^3, -t^2, t), \quad 0 \le t \le 1$*을 따라* $\mathbf{F}(x, y, z) = (\sin x, \cos y, xz)$*을 선적분한 값을 구하여라.*

1-3(1). 37. $X(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \le t \le \pi/2$을 따라 $\mathbf{F}(x, y) = (x^2, -xy)$을 선적분한 값을 구하여라.

1-3(1). 38. $X(t) = (t, t^2, t^3), \quad 0 \le t \le 2$을 따라 $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, yz, zx)$을 선적분한 값을 구하여라.

1-3(1). 39. $X(t)$가 $(0, 0)$으로부터 $(2, 1)$으로 직선을 따라 가다 해당 점에서 꺾어 다시 직선으로 $(3, 0)$으로 가는 곡선이라고 할 때, $\mathbf{F}(x, y) = (x + 2y, x^2)$을 선적분한 값을 구하여라.

1-3(1). 40. $X(t)$가 $x = y^3$을 따라 $(-1, -1)$에서 $(1, 1)$으로 이동하는 곡선일 때, $\mathbf{F}(x, y) = (e^x, 0)$을 X를 따라 선적분한 값을 구하여라.

1-3(1). 41. $X(t) = (t, t^2, t^3), \quad 0 \leq t \leq 1$을 따라 $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, xye^{yz}, 0)$을 선적분한 값을 구하여라.

1-3(1). 42. $X(t)$가 $(1, 0, 0)$에서 $(4, 1, 2)$까지의 선분일 때, 이를 따라 $\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2, x^2, y^2)$을 선적분한 값을 구하여라.

1-3(1). 43. $X(t)$와 $Y(t)$는 모두 시작점이 $(0, 0, 0)$이고 종점이 $(1, 1, 1)$인 곡선이다. 이때 $X(t) = (2t, 4t^2, t^3 + \frac{7}{8}t)$이며 $Y(t) = (t-1, t^2 - 2t + 1, \frac{2t^3 - 6t^2 + 13t - 9}{16})$이라고 한다. 함수 $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, yz, zx)$에 대하여, $\mathbf{F}$를 X를 따라 선적분한 값을 A, Y를 따라 선적분한 값을 B라고 부르자. $A - B + 2$ 보다 절댓값이 작은 정수의 개수를 구하여라.

1-3(1). 44. $X(t) = (t^3, t^2), \quad 0 \le t \le 1$을 따라 $\mathbf{F}(x,y) = (xy^2, -x^2)$을 선적분한 값을 구하여라.

1-3(1). 45. $X(t) = (t^2, t^3, -2t), \quad 0 \le t \le 2$을 따라 $\mathbf{F}(x,y,z) = (x + y^2, xz, y + z)$을 선적분한 값을 구하여라.

1-3(1). 46. $X(t)$가 $y = 1 + x^2$이라는 포물선을 따라 $(-1,2)$로부터 $(1,2)$까지 움직일 때, $\mathbf{F}(x,y) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$을 선적분한 값을 구하여라.

1-3(1). 47. $X(t) = (t^2, t^3), \quad 0 \le t \le 1$을 따라 $\mathbf{F}(x,y) = (e^{x-1}, xy)$을 선적분한 값을 구하여라.

1-3(1). 48. $X(t) = (t^3, t^2), \quad 0 \le t \le 1$을 따라 $\mathbf{F}(x, y) = (xy^2, -x^2)$을 선적분한 값을 구하여라.

1-3(1). 49. $X(t) = (2t, 3t, -t^2), \quad -1 \le t \le 1$을 따라 $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, -z, y)$을 선적분한 값을 구하여라.

1-3(1). 50. 힘의 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - y^2, y - z^2, z - x^2)$이 작용하는 평면 안에서 입자가 $(0, 0, 1)$부터 $(2, 1, 0)$까지 직선으로 이동하면서 입자에게 가해진 일의 양을 구하여라.