Contents

Chapter 1

Functions and Limits

1.1 Limit

1.1.1 Limit의 (대략적) 정의

$f(x)$가 a 근처의 open interval에서 정의되었을 때, 만약 x가 a에 점점 가까워질 때 (단, $x \neq a$) $f(x)$가 L이라는 값에 가까워진다면, 우리는

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

이라고 부르며, "the **limit** of $f(x)$, as x approaches a, equals L" 이라고 부른다. 혹은

$$f(x) \to L \quad \text{as} \quad x \to a$$

라고 표현할 수도 있다.

1.1.2 One-Sided Limits

x가 a보다 작은 것을 유지하면서, 즉 왼쪽에서 a에 가까워질 때 $f(x)$가 L에 가까워진다면

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

이라 표현하며, "**left-hand limit** of $f(x)$ as x approaches a"라고 쓰기도 한다. 반면, x가 a보다 큰 것을 유지하면서 a에 가까워질 경우에는

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

이라 표현하며, "**right-hand limit** of $f(x)$ as x approaches a"이라 쓸 수도 있다. 만약 $f(x)$의 left-hand limit과 right-hand limit이 L로 일치한다면,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

이라 할 수 있는 것이다.

1.1.3 Infinite Limits

만약 $f(x)$에서 x가 a에 가까워짐에 따라 무한대로 커지게 된다면, 우리는

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

라고 쓴다. 반면, x가 a에 가까워짐에 따라 무한대로 작아지게 된다면, 우리는

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

라고 쓴다. 이러한 infinite limit은 left-hand limit과 rght-hand limit에 대해서도 적용될 수 있다. 이러한 상황이 벌어진다면, 우리는 $x = a$를 **vertical asymptote**라고 부르게 된다.

1.1.4 Limit Laws

Limit Laws
만약 c가 상수이고

$$\lim_{x\to a} f(x), \quad \lim_{x\to a} g(x)$$

가 존재한다면, 아래가 성립한다.

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}[cf(x)] = c\lim_{x\to a} f(x)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}(\text{단, } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0)$$

한 마디로 정리하면, 사칙연산과 극한은 계산이 가능한 한 서로 교환 가능하다는 것이다. 그런데, 역은 성립하지 않을수도 있다.

문제 1. *위의 5가지 법칙의 역이 성립하지 않는 예시를 $a = 0$에 대해 찾아 보아라. 이때, 그 의미는 다섯 법칙에서 왼쪽 식이 존재할 때, 오른쪽 식과 그것이 같은지를 확인하라는 것이다. 위의 법칙은 오른쪽 식이 존재하는 상태에서 그것이 왼쪽 식과 같다는 것을 이야기하고 있다.*

Limit Laws
만약 c가 상수이고 n이 양의 정수이며

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

가 존재한다면, 아래 역시도 성립한다.

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$$

$$\lim_{x \to a} c = c$$

$$\lim_{x \to a} x = a$$

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n$$

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} \quad (\text{단}, 2|n \to \lim_{x \to a} f(x) \geq 0)$$

이를 이용하면 f가 $x = a$ 주변에서 정의된 polynomial 혹은 rational function일 때,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

가 되는 것도 쉽게 확인할 수 있게 된다.

1.1.5 Limit의 대소 관계

Limit에 대하여 아래의 대소 관계가 성립한다. 단, $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$는 존재한다.

$$f(x) = g(x) \text{ for } x \neq a \quad \rightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$$

$$f(x) \leq g(x) \text{ for } x \text{ near at } a \quad \rightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$$

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \text{ for } x \text{ near at } a \text{ , } \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L \quad \rightarrow \quad \lim_{x\to a} h(x) = L$$

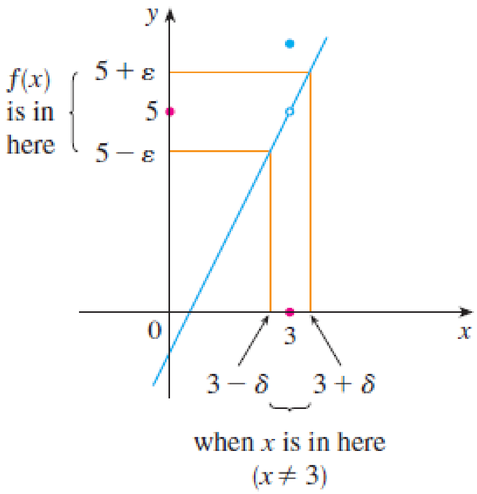
문제 2.

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$$

의 값이 존재하는지를 판단하고, 존재한다면 그 값을 구하여라.

1.2 Epsilon-Delta

1.2.1 Precise Definition of Limit



함수 f가 a 근처에서 정의되었을 때,

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

이라는 것은 곧 모든 양수 $\varepsilon > 0$에 대하여 이에 상응하는, 즉 ε에 의해 결정되는 $\delta > 0$가 존재하여

$$0 < |x-a| < \delta \quad \to \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

이라는 것이다.

이때 만약 $\varepsilon_1 > 0$과 $\delta_1 > 0$이 박스 안의 상황을 만족시킨다고 해보자. 그러면 만약 $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0$인 ε_2를 생각해본다면, ε_2와 δ_1 역시도 박스 안의 식을 만족시키는 것을 확인할 수 있다. 즉, ε의 선택을 더 크게 하는 쪽으로 바꾸어도 δ가 그 기능을 여전히 한다는 것이다. 반면 $\delta_1 > \delta_2 > 0$인 δ_2를 생각해본다면, ε_1과 δ_2 역시 식을 만족시킨다. 즉, ε을 고정시킨 채로 δ를 더 작게 잡아도 된다는 것이다. 반면 각각 반대의 경우에는 불가능할 수도 있다. 또한, 한 가지 더 주의할 것은, δ가 ϵ에 의해 결정된다는 것이다. 어떤 δ가 존재하여 모든 ε에 대해 명제를 만족한다는 것과 모든 ε에 대해 **상응하는** δ가 존재해 명제를 만족한다는 것의 차이를 생각해보자.

아래처럼 문제를 풀 경우에는, 모든 $\varepsilon > 0$의 경우에 어떻게 ε에 대한 식으로 표시되는 $\delta > 0$을 잡아야만 식이 성립할지 고려해 보고, 그런 δ가 실제로 기능함을 보여주면 된다. 아래에서는 δ를 어떻게 잡으면 될까?

문제 3.

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$$

임을 $\varepsilon - \delta$를 이용하여 보여라.

1.2.2 Left-Hand Limit and Right-Hand Limit

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

이라는 것은 곧 모든 양수 $\varepsilon > 0$에 대하여 상응하는 $\delta > 0$이 존재하여

$$a - \delta < x < a \quad \to \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

이다. 같은 이유로,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

이라는 것은 곧 모든 양수 $\varepsilon > 0$에 대하여 상응하는 $\delta > 0$이 존재하여

$$a < x < a + \delta \quad \to \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

이다.

앞과 여기서 모두 주의해야 하는 것은, limit을 따질 때 $x = a$는 고려하지 않아도 된다는 것이다. 우리가 볼 것은 a 근방에서 $f(x)$의 행동이 유일하다.

문제 4. $\lim_{x\to 4} x^3$*의 값을 구하고,* $\varepsilon - \delta$*를 이용하여 증명하라.*

1.2.3 Infinite Limits

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

는 모든 양수 M에 대하여 상응하는 $\delta > 0$가 존재하여

$$0 < |x-a| < \delta \quad \to \quad f(x) > M$$

임을 의미한다. 같은 연유로,

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

는 모든 양수 M에 대하여 상응하는 $\delta > 0$가 존재하여

$$0 < |x-a| < \delta \quad \to \quad f(x) < -M$$

임을 의미한다.

주의할 것은, ∞는 어떤 값이 아니라 "무한하게 커질 수 있는 **상태**"이므로, infinite limit인 경우에는 $f(x)$의 limit이 없다고 보는 시선도 있다는 것이다. 반면, limit을 구하라는 식이 아니라 $\lim_{x\to a} f(x)$를 구하라는 식의 문제가 등장한다면 여기서는 ∞나 $-\infty$를 써 주어도 문제가 없다.

그렇다면 limit이 존재하지 않는다는 것은 어떻게 보이면 될까?

$f(x)$의 limit이 존재하지 않는다는 것을 보이려면, 귀류법을 사용한다. $f(x)$의 limit이 L이라고 가정하면, 모든 $\varepsilon > 0$에 대하여 상응하는 $\delta > 0$가 존재하여

$$0 < |x-a| < \delta \quad \to \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

이어야 한다. 이는 곧 범위 안에 들어가는 x_1과 x_2에 대하여,

$$|f(x_2) - f(x_1)| \le |f(x_2) - L| + |f(x_1) - L| < 2\varepsilon$$

임을 의미한다. 따라서 우리는 δ를 아무리 작게 하여도, 즉 x_2와 x_1을 a로부터 엄청나게 가깝게 하여도 두 함숫값의 차이가 유의미하게 큰 경우를 찾고, 그 특정 값으로부터 ε을 찾아주면 된다. 원래 명제의 부정을 잘 생각해보자!!

문제 5. *원래 명제의 부정을 적어라.*

문제 6. *$x \neq 0$에서 정의된 함수 $f(x) = \dfrac{1}{x}\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|$에 대하여, $\lim_{x\to 0+} f(x)$가 존재한다면 그 값을 구하여라. 존재하지 않는다면 이를 증명하여라.*

1.2.4 x goes to infinity...

우리가 마지막으로 하나 안 본 것이 있는데, a가 inf나 $-$inf일 때이다. 필연적으로 이들에 대해서는 각각 left-hand limit과 right-hand limit만이 존재하지만, 우리는 그냥 $-$나 $+$ 표기 없이 사용한다. 아래는 L이라는 limit이 존재할 때의 예시로, infinite limit도 위처럼 잘 정의해주면 된다.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

이라는 것은 모든 $\varepsilon > 0$에 대하여 상응하는 $N > 0$이 존재하여

$$x > N \quad \to \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

이다. 즉, x가 충분히 커지면 $f(x)$가 L에 가까워진다는 생각과 일치한다.

문제 7. *$x \to -\infty$일 경우의 명제를 작성해보자.*

문제 8.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

를 $\varepsilon - \delta$를 이용해 표현하여라.

1.3 Continuity

1.3.1 The Concept of Continuity

함수 f가 a에서 **continuous**하다는 것은

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

라는 것이다. 반면, 그렇지 아니하면 **discontnuous**하다.

따라서 이 조건을 만족시키기 위해서는 적어도 아래 두 조건은 만족시켜야 한다.
1) $f(a)$가 존재해야 한다.
2) $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재해야 한다.

함수 f가 **continuous from the right at a number** a라는 것은 곧

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

라는 것이며, 함수 f가 **continuous from the left at a number** a라는 것은

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

라는 것이다.

또한, continuous한 함수들은 좋은 성질을 가지고 있다.

f와 g가 a에서 continuous하고 c가 상수라면, 아래 함수들도 모두 a에서 continuous하다.

$$f+g, \quad f-g, \quad cf, \quad fg, \quad \frac{f}{g}\ (g(a) \neq 0)$$

1.3.2 Continuous on Interval

함수 f가 **continuous on an interval**이라는 것은 interval 안의 모든 수에서 f가 continuous라는 것이다. 만약 닫힌 구간 등에서라면, 끝점에서의 continuous는 from the left 혹은 from the right만을 의미하게 된다.
$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$에서 continuous하다는 것은 곧 모든 실수에서 continuous라는 것을 의미한다.

또한, $f+g$와 같이 연속함수의 사칙연산으로서 정의되는 함수들도, 역시 연속함수가 된다는 것을 쉽게 확인해줄 수 있다. 또한, polynomials, rational functions, root functions, trigonometric functions는 domain 안에서라면 항상 continuous하다. 증명도 가능하지만, 여기서는 담지 않고 문제로서 제시하려 한다.

또한, a를 $\lim_{x \to a} x$라고 쓰게 된다면, 우리는

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(\lim_{x \to a} x)$$

라고 쓰는 것인데, 이는 곧 continuous한 함수와 lim은 교환 가능하다는 것이다. 이로부터 우리는 아래의 결론도 얻을 수 있다.

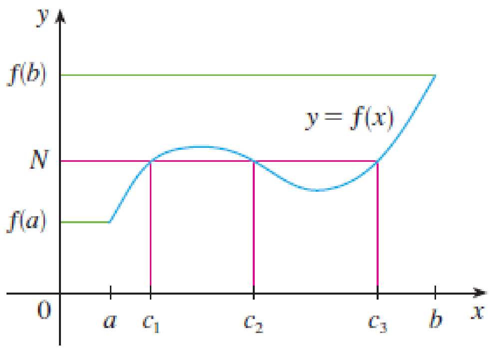
만약 g가 a에서 continuous하고 f가 $g(a)$에서 continuous하면, 함수

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

는 a에서 continuous다.

1.3.3 Intermediate Value Theorem

만약 f가 $[a, b]$에서 정의된 continuous function이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 수 N에 대해 $f(c) = N$인 c가 $[a, b]$에 존재한다.



문제 9. *연속함수 f가 $[0, 1]$에서 정의되고, $f(0) = 1, f(1) = 0$이다. 이때, $f(x_0) = x_0$인 $x_0 \in [0, 1]$가 존재함을 보여라.*

1.4 연습문제

문제 10. *Show that*

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{1 + x + x^2} = 1$$

.

문제 11. *If*

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = 2$$

and

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = 1$$

, *find*

$$\lim_{x \to a} [f(x)g(x)]$$

.

문제 12. *Find all values of* a *such that* f *is continuous on* $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x \leq a) \\ x^2 & (x > a) \end{cases}$$

문제 13. *Define a real-valued function f as follows. If r is rational, then $f(r) = 1$; if r is irrational, then $f(r) = 0$. Show that f is discontinuous at every real number.*

문제 14. *Find the following value.*

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$$

문제 15. *Show that*

$$\lim_{x\to 1} x^2 + \sqrt{x} + \sin(\pi x) = 2$$

by $\varepsilon - \delta$.

문제 16. *Suppose that f is a real-valued function on $\mathbb{R}$ which satisfies $f(x+y) = f(x) + f(y)$ for all $x, y \in \mathbb{R}$, and which is continuous at 0. Show that there exists $\lambda \in \mathbb{R}$ such that $f(x) = \lambda x$ for all $x \in \mathbb{R}$.*

문제 17. *Find the following value.*

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{4-x}-1}{\sqrt{7-x}-2}$$

문제 18. *Find the following value.*

$$\lim_{x\to 0} x\sin(2x[\frac{1}{x^2}])$$

문제 19. *Show that*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\cos x - \sqrt{9x^4 - 3x^3 + 1}}{x^2 + \cos x} = -3$$

.

문제 20. *Find the following value.*

$$\lim_{x \to -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 3x})$$

문제 21. *Find the following value.*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5^x - 4^x}{3^x - 2^x}$$

문제 22. *Find the following value.*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

문제 23. *Find the following value.*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\cos x}{x+\pi}$$

문제 24. *Find the following value.*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}-x}{x+1}$$

문제 25. *Find the following value.*

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\sec x - \tan x)$$

문제 26. *Find the following value.*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$$

문제 27. *Define a real-valued function* f *on* $(0,1)$ *as follows. If* r *is rational and* $r = p/q$ *in lowest terms, then* $f(r) = 1/q$*; if* r *is irrational, then* $f(r) = 0$*. Show that* f *is continuous at every irrational point of* $(0,1)$*, and that* f *is discontinuous at every rational point of* $(0,1)$*.*

문제 28. *Suppose that* f *and* g *are continuous real-valued functions on* A *and that* $h(x) = \max(f(x), g(x))$*, for* $x \in A$*. Show that* h *is continuous.*

문제 29. *Show that* $n^{\frac{1}{n}} \to 1$ *as* $n \to \infty$.

문제 30. *Let's think the function*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \in \mathbb{Q}) \\ \sin x & (x \notin \mathbb{Q}) \end{cases}$$

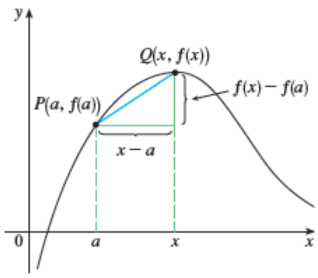
defined on $x \in (0, \pi)$. *Find the all points or intervals that* f *is continuous.*

Chapter 2

Derivatives

2.1 Derivatives and Tangents

2.1.1 Tangents



$x \neq a$일 때 점 $P(a, f(a))$와 $Q(x, f(x))$ 사이에서 그어지는 선 PQ의 기울기, 혹은 **average rate of change of y respect to x**는

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

로 주어진다. 만약 x가 a에 점점 가까워진다면, 직선은 점점 P 한 점만 지나는 것처럼 될 것이고, P 근방의 다른 점들에 엄청나게 가까운 직선이 될 것이다.

> 곡선 $y = f(x)$의 점 $P(a, f(a))$을 지나는 **tangent line**의 기울기는, 아래와 같다.
>
> $$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
>
> 우리는 이를 **slope of the curve**라 부르기도 하며, a 중심적인 표기로 쓴다면
>
> $$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$
>
> 이 되기도 한다.

만약 f가 시간에 따른 위치를 표현하는 함수였다면 이 m 값은 곧 **(instantaneous)velocity**이 될 것이다.

문제 31. *행성 A에서 위로 쏘아올린 공의 고도는 시간 t에 대하여 함수*

$$f(t) = 30t - 6t^2$$

으로 주어진다고 하자. 공을 쏘아 올린지 시간 4가 되었을 때, 공의 수직방향 속력을 구하여라.

2.1.2 Derivatives and Differentiation

함수 f의 a에서의 **derivative**는 $f'(a)$라 쓰며,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

으로 계산된다.

즉 derivative는 tangent line의 slope와 같다.

함수 f에 대하여 모든 점 x에 대해 derivative를 구하게 된다면,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

을 이 값이 존재하는 모든 domain 상에서 구할 수 있다. 이렇게 f로부터 함수 f'을 구하는 과정을 **differentiation**이라 하며,

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

과 같이 표현된다. 이때 D 혹은 d/dx를 **differentiation operator**라 부른다. 특정 점에서의 derivative는

$$f'(a) = \frac{d}{dx} f(x)\bigg|_{x=a} = \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=a} = \frac{d}{dx} f(x)\bigg]_{x=a} = \frac{dy}{dx}\bigg]_{x=a}$$

로 표현할 수 있다.

함수 f에 대하여 $f'(a)$가 존재한다면, 이를 **differentiable at** a라 부른다.
만약 open interval 안의 모든 수에 대해 f가 differentiable하다면, **differentiable on an open interval**이라 한다.

이때, 열린 구간은 실수 a, b에 대하여 $(a, b), (a, \infty), (-\infty, a), (-\infty, \infty)$ 중의 하나이다.

문제 32. 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 \quad (x = 0) \end{cases}$ *에 대하여, 이 함수가* $x = 0$*에서 differentiable함을 보여라.*

2.2 Differentiability and Continuity

> 만약 함수 f가 a에서 differentiable하다면, f는 a에서 continuous하다.

f가 a에서 continuous함을 보이기 위해서는,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

임을 보여주어야 한다. 그런데 함수 f가 a에서 differentiable하므로,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

가 존재해야만 한다. 그러면

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) \\ &= f'(a) \cdot \lim_{x \to a}(x - a) \\ &= f'(a) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

이 되므로,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} f(a) + \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] \\ &= f(a) \end{aligned}$$

임을 확인해줄 수 있다. 단, 그 역은 성립하지 않는다.

문제 33. 함수 $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 \quad (x = 0) \end{cases}$ 는 $x = 0$에서 *continuous하지만 differentiable하지는 않음을 보여라.*

2.3 Higher Derivatives

만약 f가 differentiable하고, 이로써 얻어낸 derivative f' 역시도 diffrentiable하다면, $(f')'$을 구해낼 수 있을 것이다. 이를 f''로 표시하며, **second derivative**라 부른다. 그리고, 아래처럼 표현하기도 한다.

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}f(x) = \frac{d^2f}{dx^2}$$

만약 $f(t)$가 시간에 따른 위치를 표현하는 함수였다면, 앞서 $f'(t)$는 시간에 따른 속도를 표현하는 함수라고 했었다. 그러면 이를 한 번 더 미분한 $f''(t)$는 **acceleration**을 표현하는 함수가 된다. 만약 이를 한 번 더 미분한다면 **jerk**를 표현하는 함수이다.

함수 f가 n번 미분 가능하다면, 이를 n번 미분하여 만든 함수 $f^{(n)}(x)$는 아래와 같이 표현될 수 있다.

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}(f^{(n-1)}(x)) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

이를 우리는 n**th derivative**라 부르며, $n = 3$일 때는 **third derivative**라 부른다.

문제 34. *n차함수 f는 항상 $n + 1$번 미분가능함을 보이고, $f^{(n+1)}(x)$를 구하여라.*

2.4 Formulas for Differentiation

2.4.1 Constant Function

함수 f가 constant function이라면

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0$$

이다. 따라서

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

2.4.2 Power Function

함수 $f(x) = x^n$에 대하여 생각해보자. 특히, n이 자연수일 때를 집중적으로 조명할 것이다. 그러면

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}) \\ &= na^{n-1} \end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 따라서,

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

또한, 증명은 까다롭지만 n이 자연수가 아니더라도, 즉 음의 정수나 소수더라도 위의 식은 성립함이 잘 알려져 있다.

문제 35. *함수 $f(x) = x^2 + x^{-3.5} + 2$에 대하여, $f'(3)$의 값을 구하여라.*

2.4.3 Linearity of Differentiation

differentiation은 덧셈, 뺄셈, 상수곱에 대해서 교환이 가능하다는 것을 기억하고 있자.

함수 $g(x)$를 $cf(x)$로 정의하게 된다면,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} h\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] \\ &= cf'(x) \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

동일하게, 덧셈에 대해서 생각해 본다면 $h(x) = f(x) + g(x)$라 할 경우

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{h(x+h)-h(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\ &= f'(x) + g'(x) \qquad\qquad = \end{aligned}$$

이므로,

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

이며, 같은 이유로

$$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

역시도 성립한다.

문제 36.

$$\frac{d}{dx}(af(x)+bg(x)) = af'(x) + bg'(x)$$

임을 보여라. 단, $f'(x)$와 $g'(x)$이 존재한다고 가정하며, a와 b는 상수이다.

2.4.4 Product Rule

반면, 곱에 대해서는 조금 더 복잡한 규칙이 적용되어야 한다. 아래를 보면, $h(x) = f(x)g(x)$라 할 경우

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\
&= \lim_{h\to 0} f(x+h) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= f(x)g'(x) + f'(x)g(x)
\end{aligned}$$

이다. 또한, $s(x) = \dfrac{1}{g(x)}$라고 둔다면

$$\begin{aligned}
s'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{s(x+h) - s(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{hg(x)g(x+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)} \\
&= -\frac{1}{[g(x)]^2}
\end{aligned}$$

이므로, 조합하면

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$$

을 얻는다.

문제 37. 함수 $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$을 *differentiate*하여라.

2.5 Derivatives of Trigonometric Functions

2.5.1 Limit of Trigonometric Functions

자세한 증명은 책에 모두 나와 있으니, 여기서는 증명은 **독자의 몫**으로 남기고 주요한 결과만을 언급하려 한다.

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1$$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0$$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2} = \frac{1}{2}$$

문제 38. *원점을 중심으로 하는 반지름 1인 원과 동경이 θ인 점들을 이은 직선을 묘사한 그림을 그려 위의 박스의 가장 윗 식을 증명하고, 나머지 식들을 limit law를 통해 증명하여라.*

2.5.2 Derivatives of Trigonometric Functions

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$
$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$
$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

$\sin x$에 대해서만 한 번 증명하여 보자.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\sin x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\sin x\cdot\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\cdot\frac{\sin h}{h}\right] \\
&= \sin x\cdot 0+\cos x\cdot 1 \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

문제 39. *나머지 다섯 개의 diferentiation을 증명하여 보여라.*

2.6 The Chain Rule

만약 g가 x에서 differentiable하고 f가 $g(x)$에서 differentiable할 때, 합성함수 $F(x) = f(g(x))$는 x에서 differentiable하고

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

으로 주어진다. 만약 $y = f(u), u = g(x)$와 같은 형식으로 표현한다면,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

가 되는 것이다.

그렇다면 아래의 응용 역시도 가능하다.

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

문제 40. *함수* $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$*에 대하여,* $x \neq 0$*에서* $f'(x)$*를 구하여라.*

2.7 Implicit Differentiation

지금까지는 y가 x의 함수로써 표현되는 경우들을 다루었었지만, 실제 상황에서는 y와 x의 관계식으로써 둘 사이의 관계가 정의되는 경우도 많다. 앞의 경우에는 y가 x에 대하여 **explicit**하게 표현되었다고 하고, 뒤의 경우에는 **implicit**하게 표현되었다고 이야기한다. 해당하는 경우에는, 그냥 원래 하던 것처럼 미분을 해준 다음 $\frac{dy}{dx}$에 대해 식을 정리해주기만 하면 충분하다.

예를 들어, $x^2 + y^2 = 6xy$로 주어진 경우에는, 양변을 x로 미분한다면

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 6y + 6x\frac{dy}{dx}$$

인 것이므로, y'으로 식을 정리해준다면

$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

이 된다. 따라서 우리는 이렇게 주어진 그림에서 접선의 기울기를 구할 수도 있고, $y^2 = 2x$를 만족하면서 $x^2 + y^2 = 6xy$도 만족시키는 (x, y)에서는 접선의 기울기가 무한에 수렴, 즉 vertical한 접선을 가짐을 알 수 있다.

문제 41. $\sin(x) + y = y^2 \cos x$*일 때, 점* $(0, 0)$*에서의* y'*을 구하여라.*

2.8 연습문제

문제 42. *If $f(x)$ is defined by*

$$f(x) = \lim_{t \to x} \frac{\sec t - \sec x}{t - x}$$

, find the value of $f'(\pi/4)$.

문제 43. *Let's think the circle with radius 1 inscribed in the parabola $y = x^2$. Find the center of the circle.*

문제 44. *If* $f(x) = \dfrac{x^{2021} + x^{2020} + 2}{1+x}$, *calculate* $f^{(2021)}(3)$. *Express your answer using factorial notation.*

문제 45. *For differentiable function* f, *the following holds:*

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad (x, y > 0)$$

If $f'(1) = 3$, *find the value of* $f'(3)$.

문제 46. *Find the two points on the curve* $y = x^4 - 2x^2 - x$ *that have a common tangent line.*

문제 47. *A container in the shape of an inverted cone has height 10cm and radius 4cm at the top. It is partially filled with the water that evaporates through the surface of the water. If we pour the water into the container at a rate of 2* cm^3/min*, then the height of the liquid decreases at a rate of 0.5cm/min when the height is 6cm. If our goal is to keep the liquid at a constant height of 6cm, at what rate should we pour the water into the container?*

문제 48. *Find the limits of followings.*

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{(x^2+1)\sec x} - 1}{x}$

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(a+x) - \sin^2(a)}{x}$

(3) $\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt[3]{8+t} - 2}{t}$

(4) $\lim_{x \to 1} \frac{\sin x - \sin 1}{\sqrt{x} - 1}$

(5) $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2}}{x}$

문제 49. *Find the limits of followings.*

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

(2) $\lim_{x\to\infty} (\frac{3}{x^2} - \cos\frac{1}{x})(1+\sin\frac{1}{x})$

(3) $\lim_{x\to\infty} [\sin(x+\frac{1}{x}) - \sin x]$

(4) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - 0.5}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\pi/6}}$

(5) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

문제 50. *Find the following limit.*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sec x + \tan x - 1}{x}$$

문제 51. *For nonzero differentiable function f, the following holds:*

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

Show that the function

$$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

is constant.

문제 52. *Let* $y = g(x)$ *is an inverse function of* $y = f(x)$*. Express* $\dfrac{dg}{dx}$ *in terms of* f*.*
Hint : Let's think the composite function $(f \circ g)$*.*

문제 53. *Let* $y = g(x)$ *is an inverse function of* $y = f(x)$*. Express* $\dfrac{d^2g}{dx^2}$ *in terms of* f*.*

문제 54. *Let's think the function*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \notin \mathbb{Q}) \end{cases}$$

. Prove that f is differentiable at 0.

문제 55. *Let* $\alpha > 1$. *If* f *satisfies* $|f(x)| \le |x|^\alpha$, *prove that* f *is differentiable at 0.*

문제 56. *Let's think the function*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

. Show that this function is differentiable at $x = 0$ and find the value of $f'(0)$. You may use $\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$.

문제 57. *Polynomial $f(x)$ satisfies*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy - 1$$

for all real number x, y. If

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f'(x)}{x^2 - 1} = 14$$

, find the value of $f'(0)$.

문제 58. *Find the value of*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x - \sin x}$$

문제 59. *The function $f(x)$ is differentiable at $x = 1$ and $f'(1) = 2$. Find the value of*

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(2 - \cos x) - f(1)}{x^2}$$

.

문제 60. *The function $f(x)$ satisfies*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy$$

for all x and y. When $f'(0) = 5$, what is the value of $f'(2)$?

Chapter 3

Applications of Differentiation

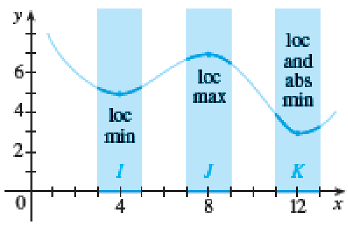
3.1 Maximum and Minimum Values

함수 f에 대하여 domain 안의 모든 x에 대하여
$f(c) \geq f(x)$이라면 $f(c)$는 **absolute maximum** 이다.
$f(c) \leq f(x)$이라면 $f(c)$는 **absolute minimum**이다.

이러한 개념은 전체 domain에서 들여다보는 **global**한 관점이다. 이러한 absolute maximum과 minimum을 우리는 **extreme values**라고 부른다. 반면, 전체 domain에서만이 아니더라도 특정 점 주변에서는 그 점에서의 함숫값이 가장 크거나 작을 수도 있다. 이 경우에는 **local**하게 아래를 정의할 수 있다.

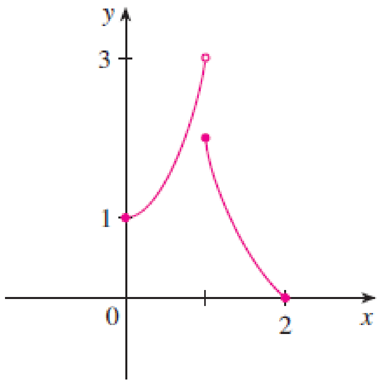
만약 c 근처의 모든 x에 대하여
$f(c) \geq f(x)$라면 $f(c)$는 **local maximum**이다.
$f(c) \leq f(x)$라면 $f(c)$는 **local minimum**이다.

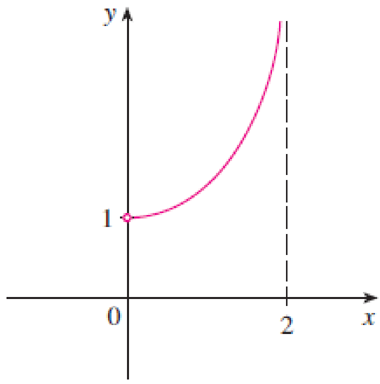
이때, 근처라는 것은 **near**라는 의미인데, c를 포함하는 어떠한 open interval에서를 의미한다. 이러한 값들을 우리는 **local extrema** 등으로 부른다.



The Extreme Value Theorem
만약 f가 closed interval $[a, b]$에서 continuous하면, $f(c)$가 absolute maximum에 다다르는 $c \in [a, b]$와 $f(d)$가 absolute minimum에 다다르는 $d \in [a, b]$가 존재한다.

반면, f가 continuous가 아니거나 $[a, b]$라는 닫힌 구간에서 정의되지 않는다면, 아래처럼 absolute maximum이나 absolute minimum이 없을 수도 있다.





3.2 Extrema and Derivatives

Fermat's Theorem
만약 f가 c에서 local maximum 혹은 local minimum이고 $f'(c)$이 존재한다면, $f'(c) = 0$이다.

f가 c에서 local maximum이라고 가정해보자. 그러면 c 근처에서 $f(x) \le f(c)$가 항상 성립하므로, $x > c$ 라면

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ge 0$$

이고 $x < c$라면

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le 0$$

이다. 그런데 x가 c에 가까워지는 상황을 보면, $f'(c)$가 존재한다고 했으므로

$$0 \le \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \le \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le 0$$

이 성립한다. 따라서, $f'(c) = 0$이어야만 한다.

반면, $f'(c) = 0$이라고 해서 $f(c)$가 local extrema인 것은 아니다. 예를 들어, $y = x^3$은 $x = 0$에서 $y' = 0$ 이지만, $x = 0$에서 local maximum이나 local minimum이 생기지는 않는다.

함수 f에 대하여, $f'(c) = 0$이거나 $f'(c)$가 존재하지 않는 c들을 **critical value**라고 부른다. 즉, f가 $x = c$에서 local maximum 혹은 local minimum을 가진다면, c는 f의 critical number이다.

그런데, absolute maximum이나 absolute minimum은 그 정의에 의하여, 구간 (a, b)에서 생길 경우 local maximum 혹은 local minimum이 된다. 따라서 우리가 만약 $[a, b]$에서 f의 absolute maximum이나 absolute minimum을 찾고 싶다면, 먼저 (a, b)에서 모든 critical value를 찾고, 그들과 a, b에 대하여 f값을 계산하고 가장 큰 것을 absolute maximum, 작은 것들 absolute minimum이라고 두면 되는 것이다.

문제 61. *local minimum일 때에 대하여, Fermat's theorem을 증명하여라.*

3.3 The Mean Value Theorem

Rolle's Theorem
f가 closed interval $[a,b]$에서 continuous하고, open interval (a,b)에서 differentiable하며, $f(a) = f(b)$라면 $f'(c) = 0$인 $c \in (a,b)$가 존재한다.

만약 $f(x)$가 상수함수라면 증명할 필요가 없을 정도로 쉽다. 만약 아니라면, EVT에 의하여, open interval (a,b) 사이에 $[a,b]$에서의 absolute maximum 혹은 absolute minimum에 다다르는 점 c가 있게 된다. 일반성을 잃지 않고 absolute maximum에 도달한다고 하자. 그러면 domain안의 모든 x에 대하여 $f(x) \le f(c)$가 성립한다. 즉 이 점은 local maximum의 기능도 하게 되므로, Fermat's theorem에 의하여 $f'(c) = 0$이 된다. 같은 이유로 absolute minimum에 도달해도 Fermat's theorem을 적용하면 $f'(c) = 0$이다.

그러면 어떤 함수 f에 대하여 새로운 함수

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

를 도입하자. 만약 f가 $[a,b]$에서 continuous, (a,b)에서 differentiable하다면 g 역시도 마찬가지고, $g(a) = g(b) = 0$이다. 그러면 Rolle's theorem에 의하여 $c \in (a,b)$가 있어

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

이며, 이를 종합하면

함수 f가 closed interval $[a,b]$에서 continuous하고, open interval (a,b)에서 differentiable하다면,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

인 $c \in (a,b)$가 존재한다.

문제 62. *만약 (a,b)에서 $f'(x) = 0$이 성립한다면, f가 (a,b)에서 상수함수임을 증명하여라.*

3.4 Graph of Functions

3.4.1 Increasing/Decreasing Test

Increasing/Decreasing Test
1) 만약 interval에서 $f'(x) > 0$이라면, f는 interval에서 increasing한다.
2) 만약 interval에서 $f'(x) < 0$이라면, f가 interval에서 decreasing한다.

첫째 경우만 보면, $x_1 < x_2$일 때

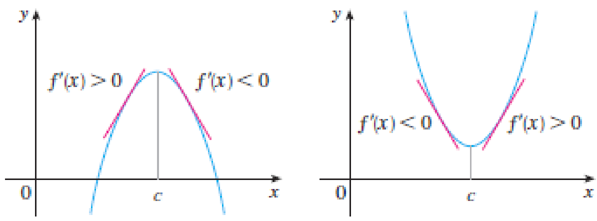
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

인 $c \in (x_1, x_2)$가 존재하므로, $f'(c) > 0$임에 따라

$$f(x_2) > f(x_1)$$

이 성립하게 된다. 따라서 f는 increasing하며, 둘째 경우도 동일한 방식으로 증명할 수도 있다. 또한, 이를 이용하면

The First Derivative Test
만약 c가 연속함수 f의 critical number라면,
1) f'이 c에서 positive에서 negative로 변한다면, f는 c에서 local maximum이다.
2) f'이 c에서 negative에서 positive로 변한다면, f는 c에서 local minimum이다.
3) f'의 부호가 변하지 않는다면, local maximum이나 local minimum이 아니다.

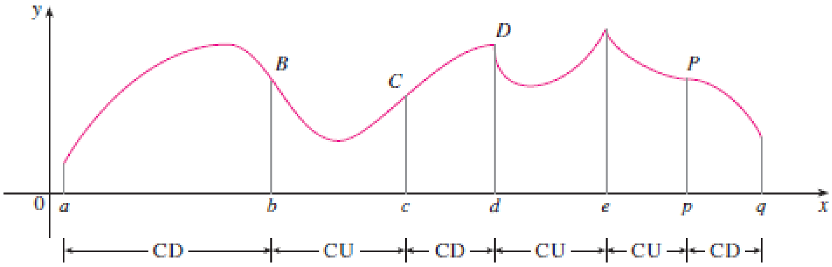


(a) Local maximum (b) Local minimum

문제 63. *f가 c에서 local minimum이지만 $f'(c)$가 0이 아닌 경우가 있는가?*

3.4.2 Concavity Test

만약 함수 f의 그래프가 구간 I에서 그 tangent들보다 항상 위쪽에 있으면 이를 **concave upward** 라고 부르며, f가 모든 tangent들보다 아래에 있으면 **concave downward**라 부른다.



이때 만약 f'이 증가함수라면 x가 진행함에 따라 기울기가 계속 증가하게 되므로, 아래로 볼록한, 즉 concave upward인 상황이 벌어진다. 반대로 f'가 감소한다면 기울기가 감소하므로 concave downward가 된다. 따라서 이를 second derivative와 연결시킨다면

만약 $f''(x) > 0$가 interval 안의 모든 x에 대해 성립한다면 f는 I에서 concave upward이고, $f''(x) < 0$ 이라면 f는 I에서 concave downward이다.

The Second Derivative Test
만약 c 근처에서 f''이 contnuous라면,
1) $f'(c) = 0$인 경우 $f''(c) > 0$이면 f는 c에서 local minimum이다.
2) $f'(c) = 0$인 경우 $f''(c) < 0$이면 f는 c에서 local minimum이다.

위의 결과는 자명하다. 만약 $f''(c) > 0$이라면 f'이 증가함수인 것이므로 c 근방에서 f'은 음수였다가 양수가 되는 것이므로, local minimum이 되는 것이다.

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 P 이전과 이후에서 concavity가 바뀐다면, 우리는 이 P를 **inflection point** 라 부른다.

또한 만약 f''이 존재하고 continuous면, inflection point에서는 concavity가 바뀌어야 하므로 f''의 부호가 바뀌어야만 한다. 따라서 $f''(x) = 0$이 되어야 할 것이다.

문제 64. *concavity가 바뀌면 항상 $f''(x) = 0$이어야 하는가? 그렇다면 증명하고, 아니면 반례를 들어라.*

3.4.3 Horizontal Asymptote

직선 $y = L$은 $y = f(x)$가

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$$

일 때, **horizontal asymptote**가 된다.

이때 무한으로의 극한은 1단원에서 미리 다루어 두었다.

문제 65. *함수*

$$f(x) = \frac{3^x}{3^x + 3^{-x}}$$

의 horizontal asymptote에 대하여 분석해 보아라.

3.4.4 Summary of Curve Sketching

A. Domain

함수 f의 domain이 무엇인지 보고, 어느 범위에서 그래프를 그려야 좋을지 생각하여 보자.

B. Intercepts

그래프를 그릴 때 대략적인 개형을 확인하기 위하여, $f(0)$의 값이나 $f(x) = 0$의 근을 구하여 intercept를 구해주면 좋다.

C. Symmetry

만약 $f(x) = f(-x)$라면 **even function**이고, $x > 0$쪽만 그리면 대칭형으로 외쪽도 그릴 수 있다. 반면 $f(x) = -f(-x)$라면 **odd function**이고, 점대칭 형태로 그리면 된다. 만약 $f(x+p) = f(x)$가 존재한다면, $[0, p]$에서만 그린 후 이를 반복하여 그려주면 된다.

D. Asymptotes

만약

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$$

이 존재한다면 $y = L$이 horizontal asymptote가 된다. 반면,

$$\lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

라면 $x = a$는 vertical asymptote가 된다.

마지막으로 $m \neq 0$일 때

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

이라면, x가 커지거나 작아짐에 따라 $y = mx + b$에 그래프가 가까워진다. 이런 경우는 $f'(c) = 0$인 경우 $f''(c) > 0$이면 f는 c에서 local minimum이다. 이런 경우는 **slant asymptote**라고 부른다.

E. Intervals of Increase or Decrease

f' 등을 이용하여 증가하는 구간과 감소하는 구간을 확인한다.

F. Local Maximum and Minimum Values

f'의 부호가 바뀌는 부분을 찾거나, f''을 계산함으로써 local maximum과 local minimum을 찾을 수 있따.

G. Concavity and Points of Inflection

f''의 부호가 바뀌는 점을 분석하여 inflection point를 찾고, 이를 기준으로 concavity를 확인할 수 있다.

H. Sketch the Curve

이 모든 것을 고려하여 그래프를 그려주면 된다.

3.5 Antiderivatives

함수 F가 interval I에서

$$F'(x) = f(x)$$

라면, F를 **antiderivative**라고 부른다. 상수를 더해 주어도 미분 시 사라지므로,

$$F(x) + c$$

는 모두 antiderivative가 된다.

문제 66. *함수 $y = 3x^2$의 antiderivative를 하나 구해보아라.*

3.6 연습문제

문제 67. *The function f defined on $x > 0$ is always differentiable and satisfies*

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$$

. Then, find the value of

$$\lim_{x\to\infty} (f(x+1) - f(x))$$

.

문제 68. *Show that $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ for all real number x, y.*

문제 69. *Show that* $ny^{n-1}(x-y) \le x^n - y^n \le nx^{n-1}(x-y)$ *for all natural number* n *and* $0 \le y \le x$.

문제 70. *The function* f *defined on* $(-1, 1)$ *is even function and twice differentiable. If* $f(0) = -1$ *and* $f''(x) < 2$, *show that* $f(x) \le x^2 - 1$.

문제 71. *The function f is defined as below.*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos \dfrac{1}{x} \quad (x \neq 0) \\ 0 \quad (x = 0) \end{cases}$$

In this case, show that f is twice differentiable for all real x, and determine whether f'' is continuous or not.

문제 72. *For the function f, $f'(x)$ is increasing on $x > 0$ and $f(0) = 0$. Show that the function $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ is increasing for $x > 0$.*

문제 73. *By using differentiation, prove*

$$1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos x \leq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$

for $x \geq 0$.

문제 74. *The non-constant function f is differentiable at $x = 0$ and*

$$f(x+y) = f(x)f(y) - f(x) - f(y) + 2$$

for all real number x, y. Show that f is differentiable for all real number.

문제 75. *The function f is differentiable and*

$$1 \leq |f'(x) - f(x)| \leq 2$$

. Show that

$$1 < |f(1) - ef(0)| < 2e$$

.

문제 76. *For the function*

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 \quad (x = 0) \end{cases}$$

, show that f is differentiable function and find the value of $f'(0)$. Moreover, show that there is no open interval includes 0 such that f is increasing.

문제 77. *The function $f(x)$ is defined on $(-a, a)$ for $a > 0$ and continuous at $x = 0$. Also, for some $0 < k < 1$, the followings hold.*

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(k^n x)}{x} = \lim_{x\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{f(x) - f(k^n x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(kx)}{x} = \alpha$$

Show that $f(x)$ is differentiable at $x = 0$ and express $f'(0)$ by k and α.

문제 78. *For fhe function $f(x)$ defined on $x > 0$,*

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$$

. Show that f is differentiable at $x = 1$ and evaluate $f'(3)$ when $f'(1) = 3$.

문제 79. *The function f and g is differentiable function. If*

$$x - f(x) \leq g(x) \leq x + g(x)$$

holds and $f(0) = 0$, what is the value of $g'(0)$?

문제 80. *For two differentiable function $f(x)$, $g(x)$ and their product $h(x) = f(x)g(x)$, answer to the each question.*

(1) f and g is positive and have local maximums at $x = a$. Does h has local maximum at $x = a$?

(2) If f and g has their inflection points at $x = a$, does h has inflection point at $x = a$?

Please give proofs or counterexamples.

문제 81. *The function* $f(x)$ *is polynomial. If* $f(x) = \cos x$ *has infinitely many solutions, show that* $f(x)$ *is constant function.*

문제 82. *The function* $y = f(x)$ *is continuously differentiable and* $f(0) = 0, f(1) = 1$.

(1) Show that there is $0 \le c_1 < c_2 \le 1$ *such that*

$$\frac{1}{f'(c_1)} + \frac{1}{f'(c_2)} = 2$$

.

(2) Does there exist $0 \le c_1 < c_2 < c_3 \le 1$ *satisfying*

$$\frac{1}{f'(c_1)} + \frac{1}{f'(c_2)} + \frac{1}{f'(c_3)} = 3$$

always?

문제 83. *The function $y = f(x)$ is continuously differentiable and $f(0) = 0, f(1) = 1$.*

(1) Doese there exist $0 \leq c_1 < c_2 < \cdots < c_n \leq 1$ satisfying

$$f'(c_1) + f'(c_2) + \cdots + f'(c_n) = n$$

always?

(2) Show that there is $0 \leq c_1 < c_2 < c_3 \leq 1$ such that

$$\frac{1}{f'(c_1)} + \frac{2}{f'(c_2)} + \frac{1}{f'(c_3)} = 4$$

.

문제 84. *If* $g'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(\sin x)}$ *and* $g(0) < 0$*, show that there is a positive root of* $g(x) = x$*.*

문제 85. *For real number* $C_0, C_1, \cdots, C_n$*, suppose that*

$$C_0 + \frac{C_1}{2} + \cdots + \frac{C_n}{n+1} = 0$$

. Show that the equation

$$C_0 + C_1 x + \cdots + C_n x^n = 0$$

has at least one real root in $[0, 1]$*.*

문제 86. *The function* f *is continuous on* $[0, \infty)$ *and differentiable on* $(0, \infty)$. *If* $f(0) = 0$ *and*

$$|f'(x)| \leq |f(x)|$$

for $x > 0$, *show that* $f(x) = 0$ *for* $x \geq 0$.

문제 87. *If differentiable function f satisfies*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

, express $f(3)$ by $f(1)$ and $f(4)$.

문제 88. *For quartic function $y=f(x)$, it is known that the graph intercects with $y=k$ at four different points. Let x_1, x_2, x_3, x_4 are the x coordinates of each points, Find the value of*

$$\frac{x_1}{f'(x_1)}+\frac{x_2}{f'(x_2)}+\frac{x_3}{f'(x_3)}+\frac{x_4}{f'(x_4)}$$

.

문제 89. *The function f is continuous on $[a,b]$ and havs a second derivative on (a,b). Show that there is $c \in (a,b)$ such that*

$$\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{x-b} = \frac{1}{2}f''(c)$$

.

문제 90. *The function f is twice differentiable and f'' is continuous. When we define the set S as*

$$S = \left\{ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} : a, b \in \mathbb{R}, a < b \right\}$$

, show that$f''(c) = 0$ if $f'(c) \notin S$.

부록. Summary of Curve Sketching

A. Domain

함수 f의 domain이 무엇인지 보고, 어느 범위에서 그래프를 그려야 좋을지 생각하여 보자.

B. Intercepts

그래프를 그릴 때 대략적인 개형을 확인하기 위하여, $f(0)$의 값이나 $f(x) = 0$의 근을 구하여 intercept를 구해주면 좋다.

C. Symmetry

만약 $f(x) = f(-x)$라면 **even function**이고, $x > 0$쪽만 그리면 대칭형으로 외쪽도 그릴 수 있다. 반면 $f(x) = -f(-x)$라면 **odd function**이고, 점대칭 형태로 그리면 된다. 만약 $f(x+p) = f(x)$가 존재한다면, $[0, p]$에서만 그린 후 이를 반복하여 그려주면 된다.

D. Asymptotes

만약

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$$

이 존재한다면 $y = L$이 horizontal asymptote가 된다. 반면,

$$\lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

라면 $x = a$는 vertical asymptote가 된다.

마지막으로 $m \neq 0$일 때

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

이라면, x가 커지거나 작아짐에 따라 $y = mx + b$에 그래프가 가까워진다. 이런 경우는 $f'(c) = 0$인 경우 $f''(c) > 0$이면 f는 c에서 local minimum이다. 이런 경우는 **slant asymptote**라고 부른다.

E. Intervals of Increase or Decrease

f' 등을 이용하여 증가하는 구간과 감소하는 구간을 확인한다.

F. Local Maximum and Minimum Values

f'의 부호가 바뀌는 부분을 찾거나, f''을 계산함으로써 local maximum과 local minimum을 찾을 수 있따.

G. Concavity and Points of Inflection

f''의 부호가 바뀌는 점을 분석하여 inflection point를 찾고, 이를 기준으로 concavity를 확인할 수 있다.

H. Sketch the Curve

이 모든 것을 고려하여 그래프를 그려주면 된다.

연습문제

문제 91. *Sketch the graph of* $y = x^{-1/3}(1-x)^{1/3}$.

문제 92. *Sketch the graph of* $y = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$.

문제 93. *Sketch the graph of* $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

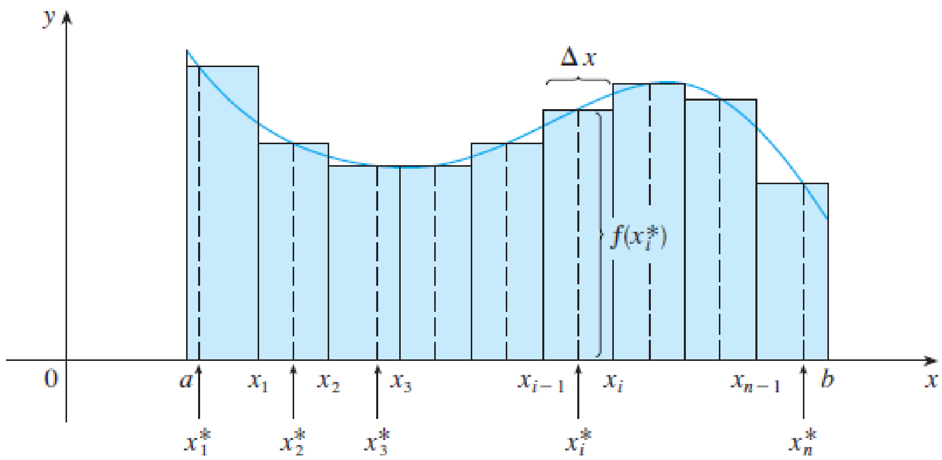
문제 94. *Sketch the graph of* $y^2(x^2-4)=x^4$.

문제 95. *Sketch the graph of* $y = \dfrac{x^2}{(x-2)^2}$.

Chapter 4

Integrals

4.1 Idea of Integral



함수 $f(x)$의 그래프 아래에 있는 영역을 구하기는 쉽지 않다. 우리가 일반적으로 쉽게 넓이를 구할 수 있는 도형은 다각형 혹은 원인데, 영역이 단순히 이들의 합으로 나타내지기란 쉽지 않기 때문이다. 만약 x축을 기준으로 영역을 자르고, 해당 영역의 넓이와 최대한 비슷한 직사각형을 그려주는 경우에는, 그림에서 보는 것처럼 약간씩의 차이가 발생하는데, 이 작은 영역들의 합을 최대한 줄이기 위해서는 Δx를 엄청나게 작게 만들어 멀리서 봤을 때 직사각형들이 합쳐진 모양이 아래 영역과 같아지는 상황을 만들어주면 된다.

continuous function f에 의해 형성되는 영역 S의 **area** A는 아래와 같이 근사식의 극한으로 표현될 수 있다.

$$A = \lim_{n\to\infty}[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x]$$

이때, $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}, x_i = a + i\Delta x$이다.

위의 A는 나누어진 구간 $[x_{i-1}, x_i]$들에서 $f(x_i)$의 함숫값을 높이로 하여 직사각형을 만든 이후, 이들의 넓이 합을 구한 것이다. 실제로 f는 연속함수이기에 Δx가 충분히 작아지면 넓이와 $\Delta x f(x_i)$의 차이 역시도 굉장히 작아진다. 이에 따라, 굳이 오른쪽 점을 택하지 않고 왼쪽 점을 택하거나 사이의 임의의 점을 택하여도 극한값은 같다.

$$A = \lim_{n\to\infty}[f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x]$$

또한, subinterval $[x_{i-1}, x_i]$에서 그 사이에 있는 **sample points** $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$을 임의로 잡아주더라도,

$$A = \lim_{n\to\infty}[f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x]$$

이다. 좌변의 극한 내부에 있는 근사식을 **Riemann sum**이라 지칭한다.

연속함수 f는 닫힌 구간 $[x_{i-1}, x_i]$에서 최댓값과 최솟값을 가지게 될 것이다. 따라서 sample point를 잘 설정한다면 각 구간에서의 최댓값만 나타내게 고를 수 있을 것인데, 이는 **upper sums**라 불린다. 반면 최솟값만 선택되게 만들 경우 **lower sums**이다. 따라서 넓이가 존재하려면 적어도 lower sums의 극한과 upper sums의 극한이 같아야 한다는 것도 알 수 있다.

4.2 The Definite Integral

Definite Integral

만약 f가 $a \le x \le b$에서 정의된 함수라면, 우리는 $[a, b]$를 n개의 등간격 $\Delta x = (b-a)/n$의 subinterval로 나눌 수 있다. $x_0 = a, x_1 = a+\Delta x, \cdots, x_{n-1} = a+(n-1)\Delta x, x_n = b$라 두고 이 사이에서 sample point $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$을 택한다면 **definite integral of f from a to b**는

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

로 정의된다. 단, 이 극한값이 존재하며 모든 x_i^*들의 선택에 대하여 같은 극한값을 가질 때에만 이것이 정의되며 f는 **integrable**하다고 불린다.

$\int_a^b f(x)dx$에서 $f(x)$는 **integrand**라 불리며, a와 b는 **limits of integration**이다. a는 **lower limit**, b는 **upper limit**이 된다. $f(x)$로부터 이러한 값을 구해내는 과정을 **integration**이라 부른다.

또한, 앞서 우리는 lower sum과 upper sum의 차이가 굉장히 작아야만 한다는 사실을 언급하였다. 구간을 작게 만들수록 구간 안에서의 최솟값과 최댓값의 차이가 충분히 작아지려면 어떤 방식을 취해야 할까? 만약 f가 continuous라면 구간 내 최솟값과 최댓값의 차이가 작아질 수 있는 상황이 만들어질 수 있을 것이다. 따라서 아래가 성립한다.

만약 f가 $[a, b]$에서 continuous이거나, 오직 유한 개의 discontinuous한 점을 가지고 있다면, f는 $[a, b]$에서 integrable하다.

반면, f가 integrable하다고 해서 continuous하거나 유한 개의 discontinuous한 점을 가지는 것도 아니다. 그러나 미적분학 단계에서는 이에 대한 상세한 언급을 하기에는 무리가 있다.

문제 96. *integration의 정의를 이용하여*

$$\int_0^1 3x^2 + 2xdx$$

를 구해 보아라.

4.3 Evaluating Integrals

4.3.1 Basic Laws

integration이 정의된 방식을 상세히 들여다보면 아래의 공식들을 도출해낼 수 있다.

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b c dx = c(b-a)$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

문제 97. *sigma notation의 성질들을 이용하여 위의 박스를 보여라.*

4.3.2 Other Laws

또한 $\int_a^b f(x)dx$가 f에 의해 가두어진 영역의 넓이임을 고려해 본다면,

$$\int_a^b f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

이 성립함을 확인해볼 수 있다. 이는 비단 $f(x) \geq 0$이나 continuous라는 조건이 없어도 integrable한 함수 f 모두에 대하여 성립한다.

Comparison Properties of the Integral

만약 $f(x) \geq 0$이 $a \leq x \leq b$에서 성립하면, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$이다.

만약 $f(x) \geq g(x)$이 $a \leq x \leq b$에서 성립하면, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$이다.

만약 $m \leq f(x) \leq M$이 $a \leq x \leq b$에서 성립한다면, $m(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$가 성립한다.

위의 세 공식들은 sigma notation의 성질들을 이용해 증명하기도 쉬우면서, 함수 f의 성질로부터 f의 integration의 성질을 얻어낸다는 점에서 의미가 있다.

문제 98. *sigma notation의 성질들을 이용하여 comparision properties를 증명하여라.*

4.4 The Fundamental Theorem of Calculus

The Fundamental Theorem of Calculus, Part 1
continuous function f가 $[a, b]$에서 정의될 때, 함수

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \quad a \leq x \leq b$$

는 $[a, b]$에서 continuous이고 (a, b)에서 differentiable하며, $g'(x) = f(x)$이다.

(a, b) 내부에 있는 $x, x+h$에 대하여

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)dt \end{aligned}$$

이다. 그런데 닫힌 구간 $[x, x+h]$에서 f는 연속함수이므로 최댓값 $M = f(u)$과 최솟값 $m = f(v)$을 가진다. 이때, $u, v \in [x, x+h]$이다. 따라서

$$mh \leq \int_x^{x+h} f(x)dx \leq Mh$$

가 성립하며,

$$f(v) = m \leq \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \leq M = f(u)$$

이다. 그러면 $h \to 0$일 때, f의 continuity에 의하여 $f(u)$와 $f(v)$는 모두 $f(x)$로 수렴하며, 샌드위치 정리에 따라 사이에 있는

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

의 극한값 $g'(x)$가 존재하고 그 값이 $f(x)$가 된다. 만약 $x = a$이거나 $x = b$인 경우에도 one-sided limit이 존재하고, 이에 의하여 $\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$이다. 따라서 g는 $[a, b]$에서 연속이며 (a, b)에서 미분가능하다.

문제 99.

$$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^4} \ln t dt$$

를 $x > 0$인 영역에서 구하여라.

The Fundamental Theorem of Calculus, Part 2
f가 $[a,b]$에서 continuous라면, f의 antiderivative F에 대하여

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

가 성립한다.

$g(x) = \int_a^x f(t)dt$라 둔다면 g는 f의 antiderivative로 기능하게 된다. F는 g에 상수함수를 더한 꼴이므로, 그냥 g에 대해 증명하기만 하면 충분하다. $g(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$이며 $g(b) = \int_a^b f(t)dt$이므로,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = g(b) - g(a) = F(b) - F(a)$$

가 성립한다. 따라서 우리는 적분을 계산할 때 sigma나 limit을 이용하여 복잡하게 계산하는 것을 넘어서, continuous라면 antiderivative를 찾아주는 것만으로도 쉽게 답을 계산해줄 수 있다. 단, 주의할 점은 FTC는 discontinuos function에는 적용불가하다는 것이다. 그러나 미적분학1에서는 FTC를 적용하는 경우가 99퍼센트 이상이라 보면 된다.

문제 100. *$f(x) = (x-1)g(x)$라고 할 때,*

$$\int_3^5 xg(x)dx$$

를 $g(x)$에 대하여 구하여라. 단, $\frac{d}{dx}(g(x)) = g(x)$이다.

4.5 Indefinite Integrals

$\int f(x)dx$는 f의 임의의 antiderivative를 나타내는 표현으로, definite integrals에서와는 달리 어떤 값이 아니라 x에 대한 함수이다. 이러한 표기를 **indefinite integral**이라 한다.

또한 antiderivative는 상수함수를 거기에 더해도 여전히 antiderivative이기에, 일반적으로

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

꼴로 많이 쓴다. 일반적으로 잘 알려진 성질들은 아래와 같다.

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx \qquad \int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int kdx = kx + C \qquad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

그런데 주의할 점은, integral은 구간 안에서 정의되어야 한다는 것이다. 따라서 만약 함수가 불연속한 점이 있다면, 해당 점에서는 FTC가 유지될 수 없으므로 적분한 함수가 달라질 수도 있다. 예를 들어, $x \neq 0$에서 $\int \frac{1}{x^2}dx$를 계산하는 경우, interval이 둘로 나누어져 있기에

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + C_1 & (x < 0) \\ -\frac{1}{x} + C_2 & (x > 0) \end{cases}$$

처럼 나타난다. 즉, C_1과 C_2가 다를 수도 있다는 것이다. 그러나 일반적인 문제에서는 이러한 문제가 발생하지 않도록 영역을 제한시켜주는 경우가 많다.

문제 101. *함수 f, g가 연속함수이고 미분가능하며, 그들의 도함수도 연속하다면*

$$\int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) + C$$

임을 보여라.

4.6 The Substitution Rule

$\int f(g(x))g'(x)dx$이라는 식을 생각하여 보자. 그러면 f의 antiderivative를 F라 한다면, $\int f(g(x))g'(x)dx = \int F'(g(x))g'(x)dx$ 이며 합성함수 $F \circ g$의 미분형태가 내부에 들어가게 되므로, indefinite integral의 정의에 의하여

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

가 된다. 그런데 $F(g(x))$에서 $g(x)$를 u라는 변수로 보면, 이는 또다시 $\int F(u)du$로 표현될 수 있다. 따라서 아래가 성립한다.

The Substitution Rule
만약 $u = g(x)$가 differentiable하고 f가 continuous하다면,

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

가 성립한다.

이는 definite integral에 대해서도 적용될 수 있다. 다만 적분 영역을 바꾸는 과정이 필요하다. 왜냐하면, 앞의 적분은 x에 대한 적분이지만, 뒤의 적분은 u에 대한 적분이기에 x가 어디서 움직이는지와 u가 어디서 움직이는지가 일치하지 않을 수도 있기 때문이다. 간단히 계산하면 아래를 알 수 있다.

The Substitution Rule for Definite Integrals
만약 g'가 $[a, b]$에서 continuous이고 f가 $u = g(x)$의 range에서 continuous하다면,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

가 성립한다.

또한, 위의 공식을 이용하면 아래를 보일 수도 있다. x에 대한 적분을 $-x = u$에 대한 적분으로 바꾸어 보자.

f가 $[-a, a]$에서 continuous하고 even이라면,

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

이다. 반면, odd라면

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

이다.

문제 102. *위의 박스를 증명하여라.*

4.7 연습문제

문제 103. *Find the value of*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[(\frac{2}{n})^9 + (\frac{4}{n})^9 + \cdots + (\frac{2n}{n})^9]$$

문제 104. *Find the value of*

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}})$$

문제 105. *Find the value of*

$$\lim_{t\to 0}[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{\cos\frac{t}{n}+\cos\frac{2t}{n}+\cdots+\cos\frac{nt}{n}\}]$$

문제 106. *Evaluate*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\tan^2(\frac{k\pi}{4n})\frac{\pi}{n}$$

문제 107. *f is continuous function satisfying*

$$\int_0^x f(t)dt = x\sin x + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}dt$$

. Find the explicit formula of $f(x)$.

문제 108. *Let f, g be continuous on $[a, b]$ wigh $g(x) \geq 0$ for all $a \leq x \leq b$. Show that there is a point $c \in [a, b]$ such that*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

.

문제 109. *By using* $\int_{-1}^{1} \dfrac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$*, find the value of*

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$$

.

문제 110. *Find*

$$\frac{d^2}{dx^2} \int_0^{\sin x} \int_t^{t^2} \sqrt{1+u^2}\, du dt$$

for $x = 0$.

문제 111. *Find*

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx$$

문제 112. *Evaluate*

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_{x^2+1}^{x^4+1}\cos(\tan(\frac{\pi t}{8})-1)dt$$

문제 113. *Consider a function* $f(x) = 1 - \sqrt{1-2x}$ *for* $x \le \frac{1}{2}$.

(1) Calculate $\int_0^x 1 + f(t) + \cdots + f(t)^n dt$.

(2) Find $\int_0^{-4} f(t)^{10} dt$.

문제 114. *Prove that if* f *is a twice differentiable function with* $f(0) = 0$ *and* $f(1) = 1$ *and* $f'(0) = f'(1) = 0$*, then* $|f''(x)| \geq 4$ *for some* $x \in [0, 1]$.

문제 115. *Let* f *and* g *be two continuous on* $[a, b]$. *Show that the following holds.*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2 dx \int_a^b (g(x))^2 dx$$

문제 116. *Find the value of*

$$\int_{-1}^{3} |2x - x^2| dx$$

문제 117. *Find the value of*

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{1 + x^2} dx$$

문제 118. *Evaluate*

$$\int_{1}^{2} x\sqrt{x-1} dx$$

문제 119. *Find*

$$\lim_{x \to 2} \frac{\int_{8}^{x^3} \cos^3 t dt}{x^2 - 4}$$

문제 120. *If f is a quadratic function such that*

$$f(x) = \frac{12}{7}x^2 - 2x\int_1^2 f(t)dt + \{\int_1^2 f(t)dt\}^2$$

for all x, find the value of $f(0)$.

문제 121. *Evaluate* $\int_0^{\pi/2} \dfrac{1}{1+\tan^n x}dx$ *where* $n \in \mathbb{N}$.

문제 122. *Let $f(x)$ be a continuous function on the closed interval $[0, 1]$ satisfying the following conditions.*

1) $f(x) \geq 0$

2) $f(x) + f(1 - x) = 1$

(a) Evaluate $\int_0^1 f(x)dx$.

(b) Evaluate

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} f(\frac{k}{2n}) \sin \frac{k\pi}{2n}$$

문제 123. *Find the limit of*

$$\frac{1}{(\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}})^2}+\frac{1}{(\sqrt{n}+\frac{2}{\sqrt{n}})^2}+\cdots+\frac{1}{4n}$$

as $n \to \infty$.

문제 124. *If* f *is a polynomial function such that*

$$\int_0^x (2t-x)f(t)dt = \frac{3}{4}x^5 - \frac{1}{3}x^4 + ax^3$$

for all x*. If* $f(0)=0$ *and* $f(1)=1$*, find the value of* $f(2)$.

문제 125. *Let $f(x)$ be a continuous function defined on $(0,\infty)$ satisfying the following two conditions*
1) $f(1)=1$
2) $\int_1^{x^2} f(t)dt = \int_{x^2}^{x^4} f(t)dt$
Find all such an $f(x)$. You can use $\lim_{n\to\infty} a^{1/n}=1$ for $a>0$.

Chapter 5

Applications of Integration

5.1 Area Between Curves

두 곡선 $y = f(x)$와 $y = g(x)$에 대하여 주어진 구간 $[a, b]$에서 $f(x) \geq g(x)$라면, $f(x)$와 $g(x)$ 사이에 있는 영역의 넓이는

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

이다.

우리가 앞서 보았던 것은 $g(x) = 0$, $f(x) \geq 0$일 때이다. 또한, $f(x)$와 $g(x)$의 대소가 정의되지 않았을 경우에는, 넓이가 항상 양수이기에 integrand에 absolute value를 씌워 양수로 만들어주어야 한다. 따라서 일반적으로는

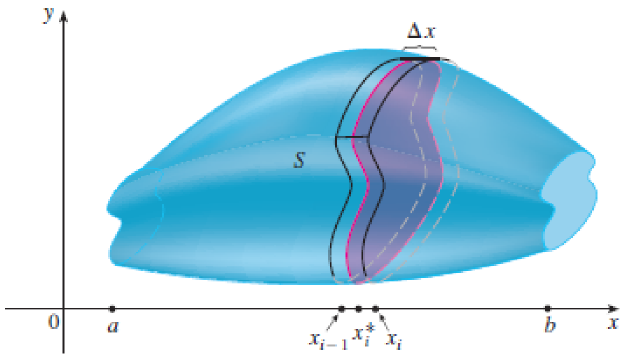
$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

이다.

문제 126. *직선 $y = 2x + 1$과 포물선 $y^2 = 3x + 5$ 사이에 갇힌 영역의 넓이를 구하시오.*

5.2 Volumes

5.2.1 General Case



어떠한 입체의 부피를 들여다보기 위해, 우리는 입체를 단면별로 자른 이후 단면을 밑면으로 하고, 높이를 Δx로 하는 기둥 모양들의 부피를 다 더하는 상황을 생각하기로 하자. 그렇다면, 우리가 보았던 적분의 상황들에서 f가 함숫값이 아니라 단면의 넓이가 된다. 따라서

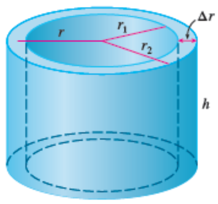
S가 $x = a$와 $x = b$ 사이에 있는 입체일 때, x축에 수직하게 자른 단면이 $A(x)$라는 넓이를 가진다면, S의 **volume**은

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x = \int_a^b A(x)dx$$

이다.

5.2.2 Volumes by Cylindrical Shells

회전체의 부피를 구하기 위한 방법에 대하여 생각해보자. 앞서는 회전축을 자르는 축에 수직하게 두고, 단면이 원이 됨을 이용하여 그 넓이를 구하고 계산해줄 수가 있었다. 그러나 이 경우 $A(x)$가 적분하기 매우 어려운 형태면 계산하기가 어렵다. 또 하나의 방법은 이 회전체를 원판을 쌓아서 보는 것이 아니라, 한 겹 한 겹 벗겨 나가면서 속이 빈 원통 모양의 부피들로써 전체의 부피를 구해낼 수 있다.



원통의 부피는

$$V = V_2 - V_1 = \pi(r_2^2 - r_1^2)h = 2\pi\frac{r_2 + r_1}{2}h(r_2 - r_1)$$

으로 주어지며, r_2와 r_1의 차이가 작다면

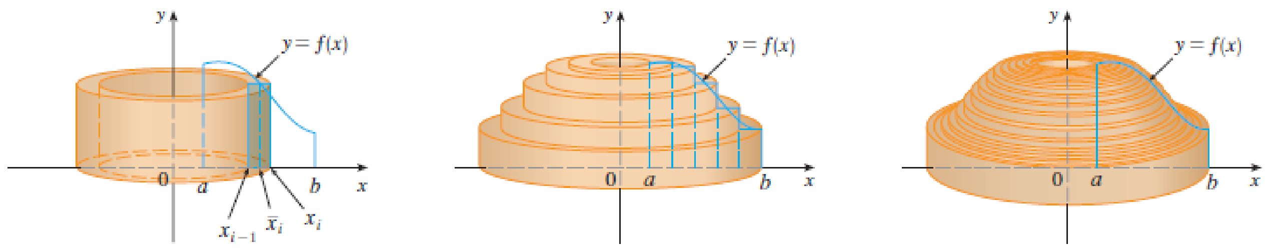
$$V = 2\pi r h \Delta r$$

이 된다. 그러면 회전체를 아주 얇은 막으로 구분하여 생각한다면, $r = \bar{x}_i$, $h = f(\bar{x}_i)$, $\Delta r = \Delta x$가 되어

곡선 $y = f(x)$를 y축을 기준으로 돌려 만든 입체의 부피는

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

이다.



5.3 Work

주어진 시간 x에 $f(x)$라는 힘이 주어질 때, **work done in moving the object from** a **to** b는

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

이다.

문제 127. *$0 \le x \le 1$에서 함수 $f(x) = x^2 + 1$의 윗부분에 있고 $y = 2$ 아래에 있는 영역을 y축을 기준으로 회전시켜 만들어지는 회전체의 부피를 cylinder 방법을 활용하여 구하시오.*

5.4 Average Value of a Function

구간 $[a, b]$에서 f의 **average value of** f는

$$f_{ave} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

이다.

이때 만약 f가 $[a, b]$에서 continuous라면, EVT에 의하여 $f(d)$가 최댓값인 $d \in [a, b]$와 $f(e)$가 최솟값인 $e \in [a, b]$가 존재한다. 그러면

$$f(e) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f(d)$$

가 성립하므로, d와 e 사이에는 $c \in [a, b]$가 존재하여

$$f(c) = f_{ave} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

이게 된다.

The Mean Value Theorem for Integrals
f가 $[a, b]$에서 continuous라면, $c \in [a, b]$가 존재하여

$$f(c) = f_{ave} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

이며, 곧

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

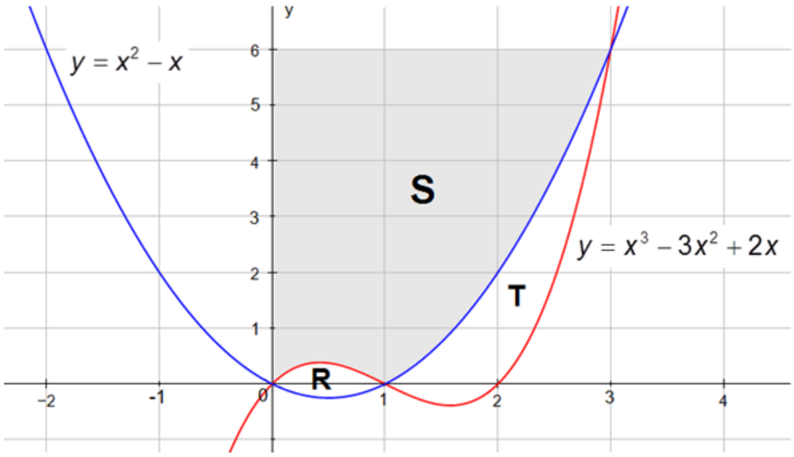
이다.

문제 128. *만약 $f_{ave}[a, b]$가 구간 $[a, b]$에서의 continuous function f의 average value를 표현한다고 하자. 그러면 $a < c < b$에 대하여*

$$f_{ave}[a, b] = \left(\frac{c-a}{b-a}\right) f_{ave}[a, c] + \left(\frac{b-c}{b-a}\right) f_{ave}[c, b]$$

가 성립함을 보여라.

5.5 연습문제



문제 129. *Let $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ and $g(x) = x^2 - x$. S is the shaded region bounded by the two curves, the y-axis and the line $y = 6$, as shown in the diagram below. R and T and from $x = 1$ to $x = 3$ respectively.*

(1) Find the area of S.

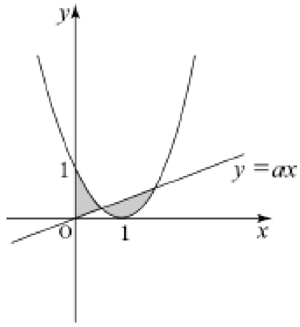
(2) Write an integral expression for the volume of the solid generated when T is rotated about the horizontal line $y = 6$.

(3) The region R is the base of a solid. For this solid, each cross section perpendicular to the x- axis is a semi-circle. Write an integral expression that gives the volume of the solid.

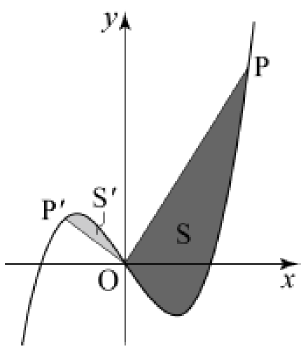
문제 130. *The two parabola* $y = x^2 + ax + b$ *and* $y = x^2 + cx + d$ *have common tangent line* l*, which pass through the origin. The* x *coordinates of intersects of parabolas and tangent line are* $x = 1$ *and* $x = 2$*, respectively. Find the area of region enclosed by two curves and line* l*.*

문제 131. *Find the area of region bounded by* $y = x^2$*,* $y = (x-1)^2 + 2a$ *and their common tangent line.*

문제 132. *The two area enclosed by* $y = (x-1)^2$, $y = ax$, $x = 0$ *have the same area. Find the value of* a.



문제 133. *Let* O *be a origin and* C *be a curve* $y = x^3 - x$. *The two points* P, P' *on* C *move* OP *and* OP' *to keep them perpendicular to each other. The* P *is the point on first quadrant and* P' *is the point on second quadrant. When we set* S *or* S' *as the area of region enclosed by* C *and* OP *or* OP', *respectively, find the minimum value of* S/S'.



문제 134. *Find the volume of the solid generated when the given region T is rotated about the y-axis.*

$$T : 0 \leq x \leq 3, y(x^2 - 3x + 2 - y) \geq 0$$

문제 135. *The cone with radius $2/\sqrt{3}$ and height 2 is rotated by the axis that pass through the vertex of cone and parallel to its base. Find the volume of resulting solid.*

Chapter 6

Inverse Functions

6.1 Inverse Functions

6.1.1 Introduction to Inverse Function

function f에서 $x_1 \neq x_2$라면, $f(x_1) \neq f(x_2)$일 때 이 함수를 **one-to-one function**이라 부른다. 즉, **horizontal line test**를 통과하는 함수를 의미한다.

f가 domain A와 range B를 갖는 one-to-one function이라고 하자. 이때, **inverse function** f^{-1}은 domain B와 range A를 가지는 function으로,

$$f^{-1}(y) = x \quad \Rightarrow \quad f(x) = y$$

로 정의된다.

아래처럼 f와 f^{-1}을 조합하면 **cancellation equation**을 얻는다.

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad (x \in A)$$

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad (x \in B)$$

두 식은 같아 보이지만, domain의 측면에서 차이가 있으니 주의해 주어야만 한다.

Inverse function을 찾고자 할 때는 기존의 $y = f(x)$ 꼴의 형식에서, x를 y로 어떻게 표현할 수 있을지를 생각해본 다음 explicit하게 표현된 식에서 x와 y의 자리를 바꾸어 주면 된다. 따라서 inverse function의 graph는 원래 function의 graph를 $y = x$를 기준으로 대칭시켜준 그래프와 같다.

6.1.2 The Calculus of Inverse Functions

만약 f가 interval에서 정의된 one-to-one continuous function이라면, f^{-1}도 continuous이다.

만약 f가 one-to-one differentiable funtction이고 inverse function f^{-1}이 존재해 $f'(f^{-1}(a)) \neq 0$ 라면, f^{-1}은 $x = a$에서 differentiable이며

$$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$$

이다.

문제 136. *inverse function의 differentiation에 대하여 증명하여라.*

6.2 Exponential Functions and Their Derivatives

6.2.1 Introduction to Exponential Functions

일반적으로, **exponential function**은 양수 b에 대해 아래와 같다.

$$f(x) = b^x$$

1) x가 자연수 n일 때

$$b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{n}$$

2) x가 0일 때

$$b^0 = 1$$

3) x가 음의 정수 $-n$일 때

$$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$$

4) x가 유리수 p/q일 때 ($q > 0, p, q$는 정수)

$$b^{p/q} = \sqrt[q]{b^p} = \left(\sqrt[q]{b}\right)^p$$

5) x가 무리수일 때

함수 $f(x) = b^x$는 increasing 혹은 decreasing임을 이용한다면, x에 다다르는 유리수들의 수열 r_n을 이용하여 b^x를 정의할 수 있다.

$$b^x = \lim_{n \to \infty} b^{r_n} = \lim_{r \to x} b^r \quad (r \in \mathbb{Q})$$

만약 $b > 0$이고 $b \neq 1$이라면, $f(x) = b^x$는 $\mathbb{R}$에서 continuous하며 $(0, \infty)$의 range를 가진다.
1) $0 < b < 1$일 경우 $f(x) = b^x$는 decreasing function이며,

$$\lim_{x\to\infty} b^x = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} b^x = \infty$$

2) $b > 1$일 경우 $f(x) = b^x$는 increasing function이며,

$$\lim_{x\to\infty} b^x = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} b^x = 0$$

$b = 1$일 때는 언급할 가치조차 없게, $y = 1$이라는 constant function이 된다. exponent function에서는 아래 네 개의 성질이 핵심적이다.

Laws of Exponents
1) $b^{x+y} = b^x b^y$
2) $b^{x-y} = \dfrac{b^x}{b^y}$
3) $(b^x)^y = b^{xy}$
4) $(ab)^x = a^x b^x$

특히, 무리수 지수에 대해서는 이러한 성질들이 매우 직관적이지 않음에도 불구하고, 유리수 극한의 힘을 빌려 증명할 수 있다는 것이 매력적이다. 그러나 이들에 대한 자세한 증명은 미적분학 수준에서는 불가능하며, 우리는 그냥 모든 실수에 대하여 exponential function이 아주 잘 정의된다는 정도만 알아두면 충분하다.

6.2.2 Derivatives of Exponential Functions

e는

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

인 수이다. 또한,

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

가 성립한다.

이는

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(e^x) &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} \\ &= e^x\end{aligned}$$

이 정의에 의하여 성립하기 때문이다. 즉, 미분하면 본인과 같다는 성질을 가지는 함수라는 것이다. 이 함수는 그 특성 때문에 적분도 쉽다.

$$\int e^x dx = e^x + C$$

문제 137. *By using mathematical induction to prove that* $x \geq 0$ *and any positive integer* n,

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

문제 138. *By using 문제 137, show that*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty$$

for any positive integer k.

6.3 Logarithmic Functions and Their Derivatives

6.3.1 Introduction to Logarithmic Functions

logarithmic function with base b
logarithmic function은 exponential function의 inverse fuction으로, $b^y = x$라면

$$\log_b x = y$$

이게 된다. 이때, $b > 0, b \neq 1$이어야만 하고, $x > 0$이다. 또한, logarithmic function은 one-to-one, continuous function이며 $b > 1$일 때는 increasing, $b < 1$일 때는 decreasing이 된다.

또한, 아래 성질들은 앞서 보았던 laws of exponents와 inverse function의 정의로부터 자연스럽게 증명된다.

$$\log_b(b^x) = x \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$b^{\log_b x} = x \quad (x > 0)$$

$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$$

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$$

$$\log_b(x^r) = r \log_b x$$

이러한 성질들을 증명하는 것, 혹은 x나 y의 범위를 따지는 것이 의미있는 과정임은 분명하지만, 미적분학에서는 이들의 미적분을 소개하기 위해 이들을 짚고 넘어가는 것에 지나지 않기에, 큰 관심을 둘 필요는 없다.

만약 $b > 1$이라면,

$$\lim_{x\to\infty} \log_b x = \infty, \quad \lim_{x\to 0^+} \log_b x = -\infty$$

이다. 반면, $0 < b < 1$이라면

$$\lim_{x\to\infty} \log_b x = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} \log_b x = \infty$$

이다.

문제 139. *By using 문제 137, Show that $e > 2.7$.*

6.3.2 Natural Logarithms

natural logarithm은 **natural exponential function** e^x의 inverse function으로 정의되며,

$$\ln x = \log_e x$$

와 같이 쓴다.

ln에 대해서는 아래 성질이 성립한다.

$$e^y = x \quad \Rightarrow \quad \ln x = y$$

$$\ln(e^x) = x \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$e^{\ln x} = x \quad (x > 0)$$

$$\ln e = 1, \quad \ln 1 = 0$$

$$b^x = (e^{\ln b})^x = e^{\ln bx}$$

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

또한 이를 응용하면 $y = b^x$ 꼴도 differentiate할 수 있다.

$$\frac{d}{dx}(b^x) = b^x \ln b$$

또한, 이를 이용하여

$$\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln b} + C \quad (b \neq 1)$$

임을 확인할 수도 있다.

문제 140. *chain rule을 이용해 위의 박스를 증명하시오.*

6.3.3 Derivatives of Logarithmic Functions

$\ln x$는 e^x의 inverse function이므로, 앞서 배운 inverse function의 differentiation을 이용하면

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

임을 확인할 수 있다. 또한, chain rule까지 활용한다면

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$
$$\frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{g'(x)}{g(x)} \quad (g(x) > 0)$$
$$\frac{d}{dx}(\log_b x) = \frac{1}{x \ln b}$$

임을 확인해줄 수도 있다. 그리고 함수 $f(x) = \ln|x|$를 생각해 본다면, 이 함수는

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & (x > 0) \\ \ln(-x) & (x < 0) \end{cases}$$

이므로,

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & (x > 0) \\ -\dfrac{1}{-x} = \dfrac{1}{x} & (x < 0) \end{cases}$$

이고, $f'(x) = \frac{1}{x}$이다. 따라서,

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$$
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

임을 알 수도 있다.

6.3.4 The Integral of $\tan x$

$$\begin{aligned} \int \tan x &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= -\int \frac{1}{u} du \quad (u = \cos x) \\ &= -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C \end{aligned}$$

이므로,

$$\int \tan x dx = \ln|\sec x| + C$$

이다.

6.3.5 The Deeper Look on the Number e

우리는 지금 e가 정말로 존재하는지도 모르고 그 성질을 이용하여 정의한 감이 있다. 실제로는, $\ln t$를 e^x에 의존하지 않고

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad x > 0$$

으로 정의해준 이후, e를

$$\ln e = 1$$

이 되는 수라고 놓아준다면 IVT에 의해 이러한 e가 정말로 존재하는지를 확인해줄 수 있다. 또한, 이렇게 e를 정의하고 e^x를 정의해준다면 다른 성질 또한 동일한 방식으로 증명해줄 수 있다.

또한, $\ln x$의 미분으로부터

$$\frac{1}{1} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \lim_{h \to 0} \ln(1+h)^{1/h}$$

임을 알 수 있고 ln은 연속함수이므로

$$e = e^1 = e^{\lim_{h\to 0} \ln(1+h)^{1/h}} = \lim_{h \to 0} e^{\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

으로 생각해줄 수도 있다.

$$\boxed{e = \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

문제 141. *Differentiate* $y = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^4}$.

6.4 Inverse Trigonometric Functions

$\sin, \cos, \tan$와 같은 trigonometric function들에 대해서도 inverse function을 생각해줄 수 있다. 다만, 이들은 increasing이나 decreasing인 것이 아니라 그런 구간이 정해져 있다. 따라서 inverse function을 세울 때 domain과 range를 잘 결정해주는 것이 중요하다. 또한, 이들의 미분은 trigonometric function이 미분가능함에 따라 inverse function의 미분법을 이용하여 자연스럽게 증명가능하다. 일반적으로는 아래 박스가 성립한다.

sin의 inverse function **arcsine function**은 $\sin^{-1}(x)$처럼 쓴다.

$$\sin y = x \quad \Rightarrow \quad y = \sin^{-1}(x) = \arcsin(x) \quad (-1 \le x \le 1, -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2})$$

또한, 이 함수의 미분은

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad -1 < x < 1$$

$\sin^{-1}$에 대해서만 해보면, $\sin y = x$이므로

$$\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

이고

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

임을 알 수 있다.

cos의 inverse function **arcscosine function**은 $\cos^{-1}(x)$처럼 쓴다.

$$\cos y = x \quad \Rightarrow \quad y = \cos^{-1}(x) = \arccos(x) \quad (-1 \le x \le 1, 0 \le y \le \pi)$$

또한, 이 함수의 미분은

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad -1 < x < 1$$

tan의 inverse function **arctangent function**은 $\tan^{-1}(x)$처럼 쓴다.

$$\tan y = x \quad \Rightarrow \quad y = \tan^{-1}(x) = \arctan(x) \quad (-\infty < x < \infty, -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2})$$

또한, 이 함수의 미분은

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

문제 142. *위의 박스들에 있는 미분을 증명하여라.*

또한, $\csc, \sec, \cot$에 대해서도 정의가 가능하다.

$$\csc y = x \quad \Rightarrow \quad y = \csc^{-1} x \quad (|x| > 1, y \in (0, \pi/2] \cup (\pi, 3\pi/2])$$

$$\sec y = x \quad \Rightarrow \quad y = \sec^{-1} x \quad (|x| > 1, y \in [0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2))$$

$$\cot y = x \quad \Rightarrow \quad y = \cot^{-1} x \quad (x \in \mathbb{R}, y \in (0, \pi))$$

$$\frac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

문제 143.

$$\int \frac{1}{x^2+2x+5} dx$$

를 *구하여라.*

6.5 Hyperbolic Functions

6.5.1 Introduction to Hyperbolic Functions

이 챕터에 대해서도 그냥 단순히 정의와 미분식들을 써감으로써 대신하겠다.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$
$$\mathrm{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$
$$\mathrm{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$
$$\mathrm{coth} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

Hyperbolic Identities

$$\sinh(-x) = -\sinh x$$
$$\cosh(-x) = \cosh x$$
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$
$$1 - \tanh^2 x = \mathrm{sech}^2 x$$
$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

문제 144. *위의 박스를 증명하여라.*

Derivatives of Hyperbolic Functions

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \text{sech}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\text{csch} x) = -\text{csch} x \text{coth} x$$

$$\frac{d}{dx}(\text{sech} x) = -\text{sech} x \text{tanh} x$$

$$\frac{d}{dx}(\text{coth} x) = -\text{csch}^2 x$$

문제 145. *위의 박스를 증명하여라.*

6.5.2 Inverse Hyperbolic Functions

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad x \in \mathbb{R}$$
$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \quad x \geq 1$$
$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad -1 < x < 1$$

임을 단순 계산으로써 보여줄 수 있다. 또한, 단순 미분을 통해

$$\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}$$
$$\frac{d}{dx}(\mathrm{csch}^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$$
$$\frac{d}{dx}(\mathrm{sech}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{d}{dx}(\coth^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

문제 146. *위의 모든 박스를 보여라. 정말 귀찮은 과정이지만... 답지에는 타이핑을 다 쳐둘 테니 같이 고생한다고 생각하고 증명하여보자.*

6.6 L'Hospitals's Rule

6.6.1 Cauchy's Mean Value Theorem

Cauchy's Mean Value Theorem
함수 f와 g는 $[a,b]$에서 continuous이고, (a,b)에서 differentiable이다. 만약 $g'(x) \neq 0$이라면, $c \in (a,b)$가 존재하여

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

이다.

즉, 우리가 그동안 봐왔던 MVT는 $g(x) = x$일 때의 상황이었음을 알 수 있다. 만약 함수 h를

$$h(x) = [f(x) - f(a)] - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x) - g(a)]$$

라고 두면 h는 continuous이며 differentiable이고, $h(a) = h(b) = 0$이다. 그러면 Rolle's theorem에 의하여,

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)$$

인 $c \in (a,b)$가 존재하고, 이 c에 대하여

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

이게 된다.

6.6.2 L'Hospital's Rule

이제 differentiable function f와 g에 대하여,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

이라고 하여 보자. 또한,

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

이 존재한다. 그러면 함수 F와 G를 각각

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & (x \neq a) \\ 0 & (x = a) \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & (x \neq a) \\ 0 & (x = a) \end{cases}$$

라고 정의하면, F와 G는 continuous이면서 $x \neq a$에서 differentiable이다. 그러면 $a < y < x$에 대하여 Cauchy's MVT에 의해

$$\frac{F'(y)}{G'(y)} = \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F(x)}{G(x)}$$

이다. 그럼 $x \to a^+$일 때 $y \to a^+$이므로,

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{y \to a^+} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{y \to a^+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = L$$

임을 확인해줄 수도 있다. 좌극한도 동일한 방식으로 보일 수 있다. 혹은, f와 g의 극한이 ∞로 가는 경우에도 적용이 가능하다. 한편, $a = \pm\infty$인 경우에도 적용 가능하다. 이를 종합하면

L'Hospital's Rule f와 g가 differentiable이고 $g'(x) \neq 0$이며, open interval I가 a를 포함한다면

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

이거나

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

라면, 우변이 존재할 때

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

이다.

문제 147. *미분가능한 함수 f, g, h에 대하여,*

$$f'(c) : g'(c) : h'(c) = f(b) - f(a) : g(b) - g(a) : h(b) - h(a)$$

인 $c \in (a, b)$가 항상 존재하는가?

6.7 연습문제

문제 148. *The function f satiesfies $0 \leq f'(x) \leq f(x)$ for all $x > 0$ and $f(0) = 1$¿ Show that $f(x) \leq e^x$ when $x \geq 0$.*

문제 149. *The function f is continuous on $[0, 1]$ and differentiable on $(0, 1)$. Let λ be a real number. Show that there is $c \in (0, 1)$ such that*

$$f'(c) = \lambda f(c)$$

when $f(0) = f(1) = 0$.

문제 150. *The function f is continuously differentiable. If $f(x)$ has two distinct roots on $[a, b]$, show that $f'(x) + f(x) = 0$ has at least one root on $[a, b]$.*

문제 151. *Find the value r to make $f(x) = e^{rx}$ be a root of the differential equation*

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0$$

. By using this, find the solution f satisfying the above equation and $f(0) = 2, f(1) = e + e^2$.

문제 152. *For positive integer r, the twice differentiable function $u(x)$ satisfies below.*

$$u'(1) = r \cdot u'(0), \quad u(1) = r \cdot u(0)$$

$u(x) \neq 0, u'(x) \neq 0$ *for* $x \in [0, 1]$

Now, show that there is $\alpha \in [0, 1]$ such that

$$\frac{u''(\alpha)}{u(\alpha)} > 0$$

.

문제 153. *For two distinct positive real number* x, y, *let's think* $A = |x - y|, B = |\ln x - \ln y|, C = |\sqrt{x} - \sqrt{y}|$. *Is there any solution of* $C^2 = AB$*?*

문제 154. *For the quadratic polynomial $f(x)$ with the leading coefficient 1, let's think the function $g(x) = f(x)e^{f'(x)}$. When the function $g(x)$ has its local minimum 0 at $x = 1$, find the local maximum of $g(x)$.*

문제 155. *Find the function $f(x)$ satisfying below three conditions.*

1) There is second derivative of $f(x)$ on $(-\infty, \infty)$.
2) For all real number x, y, $xyf(x+y) = (x+y)f(x)f(y)$
3) For $x \neq 0$, $xf(x) > 0$

문제 156. *The ineqaulity*

$$e + (x-2)e^{\frac{1}{x}} \geq (x-1)e^{\frac{2}{x}}$$

holds for $x > 2$. *Prove this.*

문제 157. *Consider*

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

. *Show that*

$$P_{2n+2}(x) \le \ln(x+1) \le P_{2n+1}(x)$$

for $x \in [0,1]$ *and* $n \in \mathbb{N}_0$.

문제 158. *Let's think the function*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x > 0) \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

. Find the interval of x where $f(x)$ is concave upward.

문제 159. *Show that the function*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

is continuous and increasing.

문제 160. *For natural number* n*, let's think the equation* $\ln x - x + 20 - n = 0$*. Find the number of* n *to make the equation have two distinct real roots.*

문제 161. *Find the value of*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^x - 1}{x \ln x}$$

.

문제 162. *Find the value of*

$$\lim_{x\to\infty}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$$

문제 163. *Find the limit of*

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{e^x-1}}$$

문제 164. *Find the limit of*

$$\left(\frac{1+\ln x}{\ln x}\right)^{\ln x}$$

as x goes to ∞.

문제 165. *Evaluate*

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\cot x}$$

.

Chapter 7

Techniques of Integration

7.1 Integration by Parts

differentiable function f, g에 대하여 product rule에 의해

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

이다. 여기서 양변을 적분하여 이항하면,

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

를 얻는다.

formula for integration by parts

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

예를 들어,

$$\int_0^1 xe^x dx$$

를 구하려고 해보자. 그러면 $g(x) = e^x, f(x) = x$라고 둘 경우

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

가 integration by parts에 의해 성립하므로, 계산해준다면

$$\int_0^1 xe^x dx = e - [e^x]_0^1 = 1$$

임을 확인해줄 수 있다.

문제 166.

$$\int_0^1 e^x \cos x dx$$

을 구하여라.

7.2 Trigonometric integrals

Strategy for Evaluating $\int \sin^m x \cos^n x dx$

1) $n = 2k+1$처럼 홀수인 경우, $\cos x$를 하나만 남기고 $(\cos^2 x)^k$을 $(1-\sin^2 x)^k$로 바꾸어 식을 $\sin x$에 관한 것으로 만들고, $u = \sin x$로 치환한다.

$$\int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx = \int (\sin x)^m (1-\sin^2 x)^k \cos x dx = \int u^m (1-u^2)^k du$$

2) $m = 2k+1$이 홀수인 경우, 동일한 원리를 이용하여 $\sin^2 x$들을 모두 $1-\cos^2 x$로 바꾸어 계산한다. 이때, $u = \cos x$이다.

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x = \int (1-\cos^2 x)^k (\cos^n x) \sin x dx = -\int (1-u^2)^k u^n du$$

3) 만약 m과 n이 둘 다 짝수인 경우,

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

를 이용하거나

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

를 이용하여 적분하기 쉬운 형태로 만들어 주어야 한다.

Strategy for Evaluating $\int \tan^m x \sec^n x dx$

1) $n = 2k$로 짝수라면, $\sec^2 x$가 $1+\tan^2 x$임을 이용하여 적분계산이 가능하다. 이때, $u = \tan x$이다.

$$\int \tan^m x \sec^{2k} x = \int \tan^m x (1+\tan^2 x)^{k-1} \sec^2 x dx = \int u^m (1+u^2)^{k-1} du$$

2) $m = 2k+1$로 홀수라면, $\sec x \tan x$와 $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$을 이용하면 $u = \sec x$일 때

$$\int \tan^{2k+1} x \sec^n x = \int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{n-1} x \sec x \tan x dx = \int (u^2-1)^k u^{n-1} du$$

이다.

또한, 아래 공식들도 큰 도움이 된다.

$$\int \tan x dx = \ln|\sec x| + C$$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A-B) + \sin(A+B)]$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

7.3 Trigonometric Substitution

만약 $\sqrt{a^2-x^2}$와 같은 식이 적분 안에 등장하는 경우, 제곱근의 존재 때문에 적분하기가 까다롭다. 이런 경우, a^2-x^2을 무언가의 제곱꼴로 만들어주기 위하여 $x=a\sin\theta$로 치환한다면, 제곱근을 풀어 $a|\cos\theta|$로 만들 수 있을 것이다. 이처럼 trigonometric function으로 substitution하는 것을 **trigonometric substitution** 이라 한다.

trigonometric substititions
1) $\sqrt{a^2-x^2}$이 등장하는 경우, $x=a\sin\theta$로 $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ 안에서 치환한다.
2)$\sqrt{a^2+x^2}$이 등장하는 경우, $x=a\tan\theta$로 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ 안에서 치환한다.
3) $\sqrt{x^2-a^2}$이 등장하는 경우, $x=a\tan\theta$로 $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$나 $\pi\le\theta<\frac{3\pi}{2}$ 안에서 치환한다.

문제 167.
$$\int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\frac{x^3}{(4x^2+9)^{\frac{3}{2}}}dx$$
를 구하여라.

7.4 Integration by Partial Fractions

유리함수 $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$를 생각하자. P와 Q가 polynomial이다. 만약 P의 degree가 Q의 degree보다 작다면, 이는 **proper**이며, 반대로 P의 degree가 Q의 degree보다 크다면 **improper**라 불린다.

이들 함수를 적분하기 위해서는 **partial fraction**이라는 새로운 전략이 필요하다. 대수학의 기본정리에 의하여 분모인 $Q(x)$는 실수 계수 이차식과 일차식들의 곱으로써 표현될 수 있다. 따라서, 우리는 $f(x)$를

$$\frac{A_1}{(a_1x + b_1)^{j_1}}$$

혹은

$$\frac{B_1x + C_1}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)^{j_2}}$$

꼴들의 합으로써 표현한 뒤에, 이들을 적분하는 형태로써 계산하자는 것이다. 이때, 분모에 들어갈 식들은 $Q(x)$의 인수일 것이며, 분자에 들어갈 값들은 미정계수법을 통해 계수비교를 함으로써 찾아줄 수 있다.

문제 168.

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$$

을 구하여라.

7.5 Approximate Integration

7.5.1 Midpoint Rule

만약 적분을 계산하기 힘든 함수의 경우에는, 그 값을 대략적으로 추측하는 것만으로 실생활에 사용하기에는 충분하다. 따라서 이 단원에서는 어떻게 이 값들을 추측할지 제안한다.

left and right endpoint approximation

$$\int_a^b f(x)dx \approx L_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

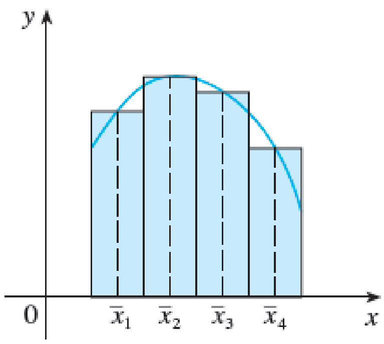
$$\int_a^b f(x)dx \approx R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

위는 우리가 적분을 소개할 때처럼, 각 직사각형의 높이를 왼쪽과 오른쪽에 맞추었을 때 그 직사각형들의 넓이 합이 그래프 아래 넓이와 비슷해진다는 것을 이용한 방법이다. 또한, 그 구간에서 중점의 함숫값을 이용해 아래를 얻을 수도 있다.

Midpoint Rule

구간 $[a, b]$에서 $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$이라 두고, $\bar{x_i} = \dfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$라 둘 경우,

$$\int_a^b f(x)dx \approx M_n = \Delta x[f(\bar{x_1}) + f(\bar{x_2}) + \cdots + f(\bar{x_n})]$$



문제 169. *일차함수 $y = ax + b$에 대해서는 midpoint rule이 항상 정확함을 보여라.*

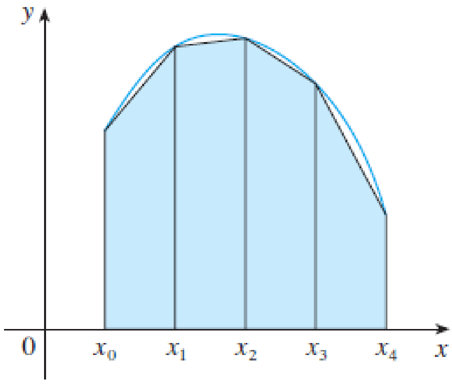
7.5.2 Trapezoidal Rule

혹은 중간에 있는 값을 고르지 말고, 양 끝 값을 이용하여 직사각형 대신 사다리꼴의 넓이로써 이를 근사하는 방법도 있다. 직관적으로는 f''의 값이 0에 가까울수록 이 오차는 점점 작아진다고 생각할 수 있을 것이다.

Trapezoidal Rule

$$\int_a^b f(x)dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

이때, $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, $x_i = a + i\Delta x$이다.



또한, 직관적 이해와 같이 아래의 오차식도 제한됨을 확인할 수 있다. 단, 그 증명은 꽤 까다로우니 유념하지 않아도 된다.

Error Bounds
$|f''(x)| \le K$가 $a \le x \le b$에서 성립한다고 하자. 그러면 trapezoidal rule의 error인 E_T는

$$|E_T| \le \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$$

을 만족시킨다. 반면, midpoint rule의 error인 E_M은

$$|E_M| \le \frac{K(b-a)^3}{24n^2}$$

이다.

그렇다면, 우리는 인위적으로 n을 잘 조절해줌으로써 원하는 수준의 정확도로 적분값을 추측해줄 수 있다는 결론에 다다르게 된다.

문제 170. *trapezoidal rule을 이용하여 $\int_1^2 \ln x dx$를 0.0001 이하의 차이로 근사하고자 한다. n은 어떤 값보다 커야 하는가?*

7.5.3 Simpson's Rule

Simpson's Rule

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n = \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

이 n이 even이고 $\Delta = (b-a)/n$일 때 성립한다.

우리가 보았던 trapezoidal rule과 midpoint rule은 일차함수에 대해서는 정확한 상황이었다. 그런데 이차함수 이상에 대해선 정확하지 않을 수 있다. 따라서 Simpson's rule은 이를 해결하기 위해 나온 방식으로, 구간을 두 개씩 묶어 그 구간에서 세 점을 잘 묘사할 수 있는 이차함수를 건설하고, 그들의 적분값으로써 미지의 함수의 적분값을 구하자는 취지에서 등장하였다. 공교롭게도 이는 삼차함수의 경우까지 모두 정확하게 적분값을 구해낼 수 있음이 알려져 있다. 따라서 error bound는

Error Bound for Simpson's Rule
$|f^{(4)}(x)| \leq K$가 $a \leq x \leq b$에 대해 성립한다. 그러면 error E_S는

$$|E_S| \leq \frac{K(b-a)^5}{180n^4}$$

을 성립시킨다.

문제 171. *Simpson's Rule을 이용하여 아래 주어진 적분을 최소한의 범위로써 예측하여라.*

$$\int_0^1 f(x)dx$$

단, $f^{(4)}(x)$*는* $0 \leq x \leq 1$*에서* -45*과* 288 *사이에 있다. 또한,*

$$f(0) = 0,\ f(0.25) = 1,\ f(0.5) = 2,,\ f(0.75) = 3,\ f(1) = 4$$

이다.

7.6 Improper Integrals

7.6.1 Type 1: Infinite Intervals

만약 적분 구간이 무한대로 가는 경우, 아래처럼 계산하게 된다.

Type 1 Improper Integral
1) 만약 $\int_a^t f(x)dx$가 $t \geq a$에 대해 항상 존재한다면,

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$$

로 정의된다.
2) 만약 $\int_t^b f(x)dx$가 $t \leq b$에 대해 항상 존재한다면,

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx$$

로 정의된다.
3) 만약 앞의 모든 극한이 존재한다면,

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx$$

가 모든 실수 a에 대하여 성립한다.
만약 이러한 improper integral이 존재한다면 그것이 **convergent**하다 말하고, 그렇지 않다면 **divergent**라 한다.

그러면 함수 $\frac{1}{x^p}$에 대해 이를 적용해

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$$

를 구하려 하는 상황을 보자. $p = 1$일 경우에는

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^\infty = \infty$$

으로 divergent이다. 그 외의 경우에는

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^\infty = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{t^{p-1}} - 1\right]$$

이므로 $p > 1$일 경우 그 값이 $\frac{1}{p-1}$으로 convergent이나, $p < 1$일 경우 $p - 1 < 0$이기에 ∞로 divergent이다. 따라서 $p > 1$일 때 convergent이고, $p \leq 1$일 때 divergent이다.

7.6.2 Type 2: Discontinuous Integrands

만약 함수가 $f(x) = \frac{1}{x}$따위라면, x가 0에 가까울 때까지는 적분의 정의가 가능하지만, 적분 범위에 0이 포함되는 순간 해당 점에서 함수가 정의되지 않는 바람에 적분 계산이 어렵다. 이 경우에는 아래처럼 적분을 정의해준다.

Type 2 Improper Integral

1) 만약 f가 $[a, b)$에서 continuous이고 b에서 discontinuous이면,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

2) 만약 f가 $(a, b]$에서 continuous이고 a에서 discontinuous이면,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

3) 만약 f가 c에서 discontinuous이고, $a < c < b$일 때 $[a, b]$의 이외 구간에서는 continuous라면,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

또한, 이 경우에도 극한값이 존재하면 **convergent**, 아니면 **divergent**이다.

7.6.3 Comparison Test for Improper Integrals

Comparison Theorem

f와 g가 continuous function이고, $x \geq a$에서 $f(x) \geq g(x) \geq 0$이라 하자. 그럼

1) $\int_a^\infty f(x)dx$가 convergent이면, $\int_a^\infty g(x)dx$도 convergent이다.

2) $\int_a^\infty g(x)dx$가 divergent이면, $\int_a^\infty f(x)dx$도 divergent이다.

이는 극한의 성질을 생각한다면 자명하다.

문제 172.

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^2}dx$$

가 convergent임을 보여라.

7.7 연습문제1

연습문제1: 8번부터 30번까지는 적분값을 구하는 문제입니다. 혹은, divergent라고 쓰거나, 부정적분의 경우 함수의 형태로 쓰는 것도 허용됩니다.

문제 173.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6 x dx$$

문제 174.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3} dx$$

문제 175.

$$\int \sin x\sqrt{1+\tan^2 x}dx \quad (x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$$

문제 176.

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4+4}dx$$

문제 177.

$$\int \frac{1}{1-e^{-x}}dx$$

문제 178.

$$\int \frac{1}{3\sin x - 4\cos x}dx$$

문제 179.

$$\int_0^x \frac{1}{1+\frac{1}{t^2}} + \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

문제 180.

$$\int_{2\sqrt{3}}^{6} \left(\frac{3}{\sqrt{x^2-9}} \right)^3 dx$$

문제 181.

$$\int_1^\infty \frac{2+e^{-x}}{x}dx$$

문제 182.

$$\int e^{\sqrt[4]{x}}dx$$

문제 183.

$$\int_0^1 \sqrt[3]{1-x^7} - \sqrt[7]{1-x^3}dx$$

문제 184.

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$$

문제 185.

$$\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx$$

문제 186.

$$\int x \sin^2 x \cos x dx$$

문제 187.

$$\int \sin x \ln(\sin x) dx$$

문제 188.

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$$

문제 189.

$$\int \sin(2x)\cos(3x)dx$$

문제 190.

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx$$

문제 191.

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx$$

문제 192.

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^3-1}}dx$$

문제 193.

$$\int_0^{5\pi/2} \frac{1}{2+\cos x}dx$$

문제 194.

$$\int_0^\infty \frac{d}{dx}(e^{1+x-x^2})dx$$

문제 195.

$$\int e^{3x} \arctan(e^x)dx$$

7.8 연습문제 2

문제 196. *f is inversible and differentiable.*

(1) Show $\int_a^b f^{-1}(x)dx = bf^{-1}(b) - af^{-1}(a) - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f(t)dt$.

(2) What about $\int_a^b xf^{-1}(x)dx$*?*

(3) Find the value of $\int_0^2 x\sqrt{2+\sqrt{4-x^2}}dx$

문제 197. *$f(x)$ is a even function. Show*

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$$

and find the value of

$$\int_{-1}^{1} \frac{|x|}{(1+e^{-x})(1+x^2)}dx$$

.

문제 198. *For the function* $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x$, *show the below inequality.*

$$\int_0^2 f(x)dx + \int_0^{10} f^{-1}(x)dx < 40$$

문제 199. *The monotonically increasing differentiable function $f(x)$ and $g(x)$ satisfies belows.*
(1) $f(0) = 2, f(1) = 3$
(2) $f'(x)$ *is continuous.*
(3) For all $x \in [0, 1],\ f(x)^2 - g(x)^2 = 1.$
Evaluate

$$\int_0^1 \frac{f(x)g'(x) - f'(x)g(x)}{f(x)^2 g(x)} dx$$

문제 200. *For positive* x*,*

$$f(x) = \int_0^x t \sin t dt$$

. Show that there is at least one solution of $f(x) = 0$ *on the interval* $(k\pi, (k+1)\pi)$ *for arbitrary* k*.*

문제 201. *Find the value of*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2n)!}{n!n^n} \right)^{\frac{1}{n}}$$

문제 202. *Evaluate*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{n^2(x-\frac{\pi}{4})^2+1}dx$$

문제 203. *Find the recurrence equation of*

$$I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{ax+b}} dx$$

문제 204. *Derive*

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

by using integration by parts.

문제 205. *Suppose that* $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *is a continuous and nonnegative function. Prove that if* $\int_a^\infty f(x)dx = 0$*, then* $f(x) = 0$.

문제 206. *Let f be a positive function such that $f''(x) < 0$ on $[a, b]$. Show that*

$$\int_a^b f(x)dx > T_n$$

where T_n is the approximation from trapezoidal rule.

문제 207. *Prove that* $\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx = (n-1)!$ *when* n *is a positive integer.*

문제 208. *Let* $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ *be given. Find* $f'(\pi)$ *if* $f(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{-sx^2}dx (s > 0)$.

문제 209. *For an integer* $n > 1$*, let* $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^n - n\left(1+\frac{1}{x}\right)$*. Determine whether* $\int_0^1 f(x)dx$ *is convergent or divergent.*

문제 210. *Determine whether* $\int_2^\infty \frac{1}{\ln(x^2+x)}dx$ *is convergent or divergent.*

문제 211. *(1) Using Simpson's rule with* $n = 4$*, approximate* $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ *as the sum of the fractions.*

(2) How large should we take n *in order to guarantee that the approximation for* $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ *is accurate to within 0.0002?*

문제 212. *(1) Let* $J_n = \dfrac{1}{n}\int_0^1 \dfrac{\sin nx}{1+x^2}dx$*. Show that* $|J_n| \le \dfrac{\pi}{4n}$.

(2) Calculate $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\int_0^1 \dfrac{\sin nx}{1+x^2}dx$.

문제 213. *Evaluate*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

문제 214. *Determine the integral* $\int_0^\infty \dfrac{x \arctan x}{(1+x^2)^2} dx$ *is convergent or divergent and evaluate the integral if it is convergent.*

문제 215. *We can extend our definition of average value of a continuous function to an infinite interval by defining the average value of f on the interval $[a, \infty)$ to be*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t-a} \int_a^t f(x)dx$$

(1) Find the average value of $f(x) = \tan^{-1} x$ on the interval $[0, \infty)$.

(2) If $f(x) \geq 0$ and $\lim_{x\to\infty} f(x) = C$, what is the average value of f on the interval $[a, \infty)$?

문제 216. *Determine whether the integral is convergent or divergent.*

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{2+e^x}dx$$

문제 217. *Let R be the region under the curve $y=\cos x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. If we rotate the region R about the $y-$axis, find the volumne of the resulting solid.*

문제 218. *The rate of fuel consumptions, in gallons per minute, recorded during an airplane flight is given by a differentiable function R of time t.*

$$\begin{cases} t=0 & \Rightarrow & R(t)=24 \\ t=2 & \Rightarrow & R(t)=100 \end{cases} \qquad \begin{cases} t=3 & \Rightarrow & R(t)=120 \\ t=4 & \Rightarrow & R(t)=116 \end{cases}$$

(1) Using Trapezoial Rule with three subintervals, find an approximate value for $\frac{1}{4}\int_0^4 R(t)dt$. *Using correct units, give an interpretation to the value of* $\frac{1}{4}\int_0^4 R(t)dt$ *in the context of the question.*

(2) Is there a time t between 0 and 4 such that $R'(t)=0$?

(3) The function R is modelled by the function $f(t)=120-(3t-10)^2, 0 \le t \le 4$. Using this model, estimate the total amount of fuel consumed by the airplane from $t=0$ to $t=4$.

문제 219. *Find the volume generated by rotating the region bounded by* $y = e^{(x+1)}$, $y = 0, x = 1, x = -1$ *about* $x = -1$.

문제 220. *Find the volume generated by rotating the region bounded by* $y = \arctan x$, $y = 0$, $x = 1$ *about* y*-axis.*

문제 221. *Determine whether the integral is convergent or divergent.*

$$\int_0^1 \frac{\sec^2 x}{x\sqrt{x}}dx$$

문제 222. *Evaluate*

$$\int_{-1}^{\infty} \left(\frac{x^4}{1+x^6}\right)^2 dx$$

문제 223. *Let R be the region under the curve $y = \cos^2 x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. When we rotate the region R about the $x-$axis, find the volume of the resulting solid.*

문제 224. *Let R be the region under the curve $y = \cos^2 x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. When we rotate the region R about the $y-$axis, find the volume of the resulting solid.*

문제 225. *Determine whether the improper integral*

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{\sin x}\sqrt{\cos^7 x}} dx$$

is convergent or divergent.

Chapter 8

Midterm Problems

문제 226. *The function f is given by*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ g(x) & (0 \le x \le 1) \\ 1 & (x > 1) \end{cases}$$

. To make f satisfy the following two conditions, give an example of $g(x)$ and show your g satisfying all conditions.

> *1) The function $f(x)$ is differentiable.*
> *2) The absolute maximum of $f(x)$ is 1 and absolute minimum of $f(x)$ is 0.*

문제 227. *For the real number k, find the number of distinct roots of*

$$\frac{3\sqrt{3}}{\sin x} = \frac{1}{\cos x} + k \quad \left(0 < |x| < \frac{\pi}{2}\right)$$

.

문제 228. *Find the absolute minimum of the function* $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^3} - 12(x + \frac{1}{x}) + 10$ *for* $x > 0$.

문제 229. *For differentiable function* $f(x)$, $f(x) + xf'(x) > 0$ *for all* x. *Show that* $f(x) > 0$.

문제 230. *Let $N(r)$ be a number of intersection of the two curves, $y = \cos(\sqrt{\frac{\pi}{2}}x)$ and $x^2 + y^2 = r^2$. Find $N(r)$.*

문제 231. *For the function $f(x), g(x), p(x)$, the following equation holds:*

$$f''(x) + p(x)f(x) = 0, g''(x) + p(x)g(x) = 0$$

(1) Show that $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = C$.
(2) For the interval $[a, b]$, $g(x) > 0$ and $f(a)f(b) < 0$. Find the number of roots of $f(x) = 0$.

문제 232. *For the function $s(x)$ and $c(x)$, the following holds for all $x, y \in \mathbb{R}$.*

1) $\{c(x)\}^2 + \{s(x)\}^2 = 1$
2) $s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y)$
3) $c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)$

(1) Find the value of $s(0)$ and $c(0)$.
(2) When $s'(0)$ and $c'(0)$ exists, show

$$s'(x) = s(x)c'(0) + c(x)s'(0)$$

$$c'(x) = c(x)c'(0) - s(x)s'(0)$$

문제 233. *For polynomial* $f(x) \leq 0$, *show that*

$$f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(n)}(x) \leq 0$$

.

문제 234. *Find the smallest value of* K *to make the below ineqaulity holds for all* $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

$$K(\sin\theta + 8\cos\theta) \geq \sin\theta\cos\theta$$

문제 235. *For the function* $y = x + \cos 2x$ *defined on* $[-\pi, \pi]$,

(1) Find local maximum and local minimum.

(2) Find inflection points.

(3) Draw the graph.

문제 236. *Find the function $f(x)$ satisfying all conditions.*

> *1)* $f(x)$ *is continuous on* $[0,1]$
> *2)* $f(x)$ *is differentiable on* $(0,1)$
> *3)* $f(0)=f(1)$
> *4)* $f'(c)=0$ *for infinitely many* $c\in(0,1)$

문제 237. *For the function* $f(x)=(x^3-4a^3)^3-x$ *and* $g(x)=3x(x^3-4a^3)$*, answer to the question.*

(1) Evaluate $f'(x)-\{g(x)\}^2$.

(2) Find the condition of a *to make* $f'(x)=0$ *has two distinct roots.*

문제 238. *Find the polynomial $f(x)$ satisfying following condition.*

$$\frac{d}{dx}\left(\int 2f(x)f'(x)dx\right) = 2x^3, f(0) = 0$$

문제 239. *Find the following indefinite integral.*

$$\int \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x^2+1}{x^2}dx$$

문제 240. *To draw the three tangent line of $y = x^3 + x$ passing through (p, q), what is the condition of p and q?*

문제 241. 함수 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)$에 대하여, 방정식

$$\frac{d^3}{dx^3}f(x) = 0$$

이 정확히 네 개의 서로 다른 근을 가지고 있음을 보여라.

문제 242. *0이 아닌 상수* a_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$*와 자연수* b_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$*에 대하여* $b_1 > b_2 > \cdots > b_m > 0$*일 때, 방정식*

$$a_1x^{b_1} + a_2x^{b_2} + \cdots + a_mx^{b_m} = 0$$

이 많아야 $m-1$*개의 양근을 가질 수 있음을 보여라.*

문제 243. *함수* f*가 모든 실수* x, y*에 대해 아래 조건들을 만족시킨다.*
(1) $f(x+y) = f(x)f(y)$
(2) $f(x) = 1 + xg(x)$*이며,* $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$
이때, 모든 실수에서 f*가 미분가능하며* $f'(x) = f(x)$*임을 보여라.*

문제 244. *함수* $f(x) = \dfrac{x^2}{3-x^2}$*과* $g(x) = \lambda \sin(1-x^2)$*에 대하여,* $f(x)$*와* $g(x)$*의* $x = 1$*에서 그은 법선이 평행할* λ*의 값을 찾아라.*

문제 245. *함수* f*가*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 5xy$$

를 만족시키고, 모든 실수에서 미분가능하다.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\{f'(k) - f'(0)\}$ *의 값을 구하여라.*

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{[f(x)]^2}{x}$ *의 값을 구하여라.*

문제 246. *함수* f*에 대하여,* f'''*는 연속함수이며* $f'(c) = f''(c) = 0$*이지만* $f'''(c) > 0$*이다.*

(1) f*는* $x = c$*에서 극대 혹은 극소를 가지는가? 증명하거나 반례를 제시하여라.*

(2) f*가* x*좌표가* c*인 변곡점을 가지는가? 증명하거나 반례를 제시하여라.*

문제 247. *함수* f*가 아래 조건을 만족시킨다.*

$$f(a+b) = f(a)f(b) - af(b) - bf(a) + f(a) + f(b) + ab$$

그리고 $f(0) = 0$*이며* $f'(0) = 2$*라고 한다.* f*가 모든 수에서 미분가능함을 보이고,* f' *역시도 모든 수에서 미분가능함을 보여라.*

문제 248. *만약* $x > 0$*에 대하여* $f''(x) > 0$*이라면,*

$$g(x) = xf\left(\frac{b}{x}\right) - xf\left(\frac{a}{x}\right) \quad (0 < a < b)$$

는 $x > 0$*에서 감소함수임을 보여라.*

문제 249. *함수* f*는 미분가능하다. 정의역 안의* a, b*에 대하여* $f'(a) < f'(b)$*라고 하자. 이때,* $f'(a) < k < f'(b)$*를 만족시키는 임의의* k*에 대하여,*

$$f'(c) = k$$

인 $c \in (a, b)$*가 존재함을 보여라.*

문제 250. *다항함수*
$$P(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$
의 계수는 모두 양수이며, $P(x) = 0$*은 정확히* m*개의 서로 다른 근을 가진다고 하자.* $Q(x) = (P(x))^2 - P'(x)$ *역시도* m*개 이상의 근을 가짐을 보여라.*

문제 251. 0 이상 1이하의 실수 a, b, c, d에 대하여

$$abcd \le \frac{4}{27}$$

혹은

$$(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)(1-d^2) \le \frac{4}{27}$$

가 성립함을 보이시오.

문제 252. 각 자연수 $n = 1, 2, \cdots$ 에 대하여, 다항함수

$$f(x) = (x^2 - x)^n$$

의 n계 도함수 $f^{(n)}$이 구간 $[0, 1]$ 사이에서 서로 다른 n개의 실근을 가짐을 보여라.

문제 253. *2 이상의 자연수 n에 대하여 $0 \le x \le 1$에서 정의된 함수*

$$f_n(x) = \frac{nx(1-x)^n}{1+(nx-1)^2}$$

가 있다. 이 함수 f_n이 $x = a_n$에서 최댓값을 가진다고 할 때,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(a_n)$$

을 구하시오.

문제 254. *함수* $f(x)$*는 구간* $I = \{x | a < x < b\}$*에서 2회 미분가능하며,* $f''(x) < 0$*이다.*

(1) $\alpha, \beta \in I$*와* $p \geq 0, q \geq 0, p + q = 1$*에 대하여,* $f(p\alpha + q\beta) \geq pf(\alpha) + qf(\beta)$*임을 보여라.*

(2) (1)을 이용하여, $x_1, x_2, x_3 \in I$*에 대하여*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)}{3}$$

가 성립함을 보여라.

문제 255. *최고차항의 계수가 3인 삼차함수 f가 다음의 조건을 만족시킬 때, f를 구하여라.*

> *1) $f(x)$는 $x = \alpha$와 $x = \beta$ $(\alpha \neq \beta)$에서 극값을 갖고, $(\alpha, f(\alpha))$와 $(\beta, f(\beta))$는 점 $(0, 1)$을 기준으로 대칭이다.*
> *2) $|f(\alpha) - f(\beta)| = \frac{4}{9}$*

문제 256. *함수 $f(x) = \dfrac{b-x}{a^2+x^2}$의 극값을 가지게 하는 x의 값을 α라 하자.*

(1) $\alpha f(\alpha)$는 a, b에 관계없이 항상 일정함을 보여라.

(2) 극댓값이 0.5, 극솟값이 -0.5일 때, a와 b를 구하여라.

문제 257. $-1 < x < 1$에서 정의된 아래 함수를 생각하자.

$$f(x) = \begin{cases} c_n & \left(\dfrac{1}{n+1} \leq |x| < \dfrac{1}{n} : n = 1, 2, \cdots\right) \\ C(x = 0) \end{cases}$$

(1) $f(x)$가 $x = 0$에서 연속일 때, 수열 $\{c_n\}$은 어떤 조건을 만족시키는가?
(2) $f'(0)$이 존재할 때, $f'(0)$의 값을 구하여라.
(3) $f'(0)$이 존재하면, 수열 $\{n(c_n - c)\}$는 수렴함을 보여라.

문제 258. *함수* $f(x) = \sin x$*와 임의의 자연수* n*에 대하여, 두 함수* $y = xf^{(n-1)}(x)$*와* $y = f^{(n)}(x)$*의 그래프를 각각* C_1, C_2*라고 하자.* P*가* C_1, C_2*의 교점이라면* P*에서의* C_1, C_2*의 접선* t_1, t_2*는 서로 직교함을 증명하여라.*

문제 259. xy*평면에서* $x \geq 0, y \geq 0, xy \leq 1$*에 의해 표현되는 영역을* D*라 하고, 그 내부의 점* $P(x, y)$*를 생각하자. 세 점* $A(a, 0), B(0, b), C(c, \frac{1}{c})$*을 꼭짓점으로 하고,* D*에 포함되는 삼각형* ABC*의 넓이의 최댓값을 구하여라.*

문제 260. x^{10}을 $(x-2)^2$으로 나눈 나머지를 구하여라.

문제 261. *길이가 2인 선분* AB*를 지름으로 하는 반원 위를 움직이는 두 점* C, D*가 있다. 선분* AB*의 중점을* O*라고 할 때,*

(1) $\angle COD = \theta$*가 일정할 때, 사각형* $ABCD$*의 넓이의 최댓값을* θ*로 표현하라.*

(2) θ*가 0과* π *사이에서 움직일 때, 사각형* $ABCD$*의 넓이의 최댓값을 구하여라.*

문제 262. 함수 $f(x) = x^3 - 3ax^2 - 3bx$가 $x = p, x = q$에서 극값을 가진다. $-1 \le p \le 0$이고 $1 \le q \le 2$일 때, 두 실수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a + b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. M, m을 구하여라.

문제 263. 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 모양의 색종이가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여, 두 점 A, P를 연결하는 선을 접는 선으로 하여 색종이를 접는다. $\angle PAB = \theta$일 때, 포개어지는 부분의 넓이를 $S(\theta)$라고 하자. $\theta = \alpha$에서 $S(\theta)$가 최댓값을 가진다면, $\cos 2\alpha$의 값은? 단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$이다.

문제 264. *이차함수* $g(x)$*에 대하여* $g(111) = \frac{111}{334}, g(112) = \frac{112}{337}, g(113) = \frac{113}{340}$*이다.*

$$334g'(111) - 340g'(113)$$

의 값을 구하여라.

문제 265. $f(x)$*가 다음을 만족한다.*

$$f(0) = 0, f(2) = 0$$

$$|f'(x)| \le 1 \quad (0 \le x \le 2)$$

이때, $[0, 2]$*에서* $|f(x)|$*의 최댓값이 1 이하임을 보이시오.*

문제 266. n차 다항식 $Q(x)$가 서로 다른 n개의 실근 $r_1, r_2, \cdots, r_n$을 갖는다. $(n-1)$차 이하의 어떤 다항식 $P(x)$에 대해서는 상수 a_k에 대하여

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x - r_k}$$

라고 쓸 수 있다고 한다. 이때, $k = 1, 2, \cdots, n$에 대하여 $a_k = \dfrac{P(r_k)}{Q'(r_k)}$임을 보여라.

문제 267. 실수 전체에서 정의된 n번 미분 가능한 함수 $f(x)$에 대하여, n계 도함수 $f^{(n)}(x)$가 구간 $[0,1]$에서 항상 양수이면, 방정식

$$1 + x + \cdots + x^{n-1} + f(x) = 0$$

은 구간 $[0,1]$에서 n개 이하의 서로 다른 근을 가짐을 보이시오.

문제 268. *편집자주: 문제 268번부터 278번까지는 중간 모의고사처럼 풀어보시길.*

You Don't need to write down your process to solve the problems (1) $\sim$ (10) of the problem 1. You need to write the answer with the smallest number of additive terms. Each point is 5pts.

1. (50min, 50pts)

(1) Evaluate

$$\lim_{n\to\infty}(2^n+3^n+5^n)^{\frac{1}{n}}$$

(2) Evaluate

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}[1+\sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right)]$$

(3) Evaluate

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+3k}\frac{1}{n\sqrt{n}}$$

(4) Find an equation of the tangent line to the curve $y^3\cos x+y\sin(x^2)+\sqrt{y}-7x-2=0$ *at* $(0,1)$.

(5) Find all values of a *for which the limit exists.*

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+ax+a-3}{x^2-x-2}$$

(6) Find the explicit formula of

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin^2 x}{1+\cot x}+\frac{\cos^2 x}{1+\tan x}\right)$$

(7) Find the absolute maximum value of the function

$$f(x)=\frac{1}{1+|x|}+\frac{1}{1+|x-3|}$$

(8) Find the interval $[a,b]$ *for which the value of the integral* $\int_a^b(2+x-x^2)dx$ *is a maximum.*

(9) Find the value of the below for continuous function f.

$$\int_0^x f(u)(x-u)du-\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du$$

(10) Evaluate

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$$

문제 269. *Prove*

$$\lim_{x\to 4}\{x^3 - 2x^2 - 8x + 1\} = 1$$

by $\varepsilon - \delta$. (10pts)

문제 270. *Find the limit, if it exists. If the limit does not exist, explain why. (15pts)*

(1) (7pts)

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x}{x-3}\int_3^x \frac{\cos \pi t}{t}dt\right)$$

(2) (8pts)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)}{\sin^2 x}$$

문제 271. *The continuous function* $f(x)$ *and* $g(x)$ *satisfies below.*

$$\begin{cases} f'(x) = g(x) \\ g'(x) = -f(x) \end{cases}$$

Show that $\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2$ *is constant. (10pts)*

문제 272. *For the positive constant* a*, the tangent line of* $y = 3x^3$ *passing through the point* $(a, 0)$ *is parellel to the tangent line of the same graph passing through the point* $(0, a)$*. Find the value of* $90a$*. (10pts)*

문제 273. *Let's consider the function* $f(x) = \dfrac{1 + 3x - 6x^2 + 2x^3}{1 - 3x + 2x^2}$*. (15pts)*

(1) Find the intercepts and asymptotes of the graph. (2pts)

(2) Find the local minimum and local maximum. (4pts)

(3) Find the inflection points of the graph. (4pts)

(4) Draw the graph. (5pts)

문제 274. *If f and g are differentiable functions with $f(0) = g(0) = 0$ and $g'(0) \neq 0$, show that*

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

. (10pts)

문제 275. *$f(x)$ is defined on $x > 0$ by*

$$f(x) = \int_1^{x^2} t^2 g(xt)dt$$

for the continuous g. If $g(1) = 1$, what is the value of $f'(1)$? (10pts)

문제 276. *The continuous function* $f : [0,2] \to [0,2]$ *is differentiable on* $(0,2)$*. If* $f(0) = \frac{1}{3}, f(1) = \frac{2}{3}, f(2) = 2$*, for the function* $g(x) = f(f(x))$*, show that there is* $c \in (0,2)$ *such that* $g'(c) = 1$*. (15pts)*

문제 277. $f(x)$ *is twicely differentiable and* $f(0) = f(1) = 0$*. For* $x \in (0,1)$*,* $f(x) > 0$*. Show that*

$$\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geq 4$$

. (15pts)

문제 278. *For the cubic function* $h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$*, the followings hold. (15pts)*

1) $h(1) = 1, h(-1) = -1$

2) $h'(x)$ *doesn't have its roots on* $(-\infty, -1) \cap (1, \infty)$

3) $h(x)$ *has local maximum 1 and local minimum -1*

(1) Find $h(x)$*. (4pts)*

(2) The cubic function $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *satisfies*

$$-1 < x < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < f(x) < 1$$

. Show that $|f(x)| < |h(x)|$ *for* $x > 1$*. (Hint: Let's think the* $F(x) = h(x) \pm f(x)$ *and sketch the graph of* F*) (7pts)*

(3)The cubic function $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *satisfies*

$$-1 < x < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < f(x) < 1$$

. Show that $|f(x)| < |h(x)|$ *for* $|x| > 1$*. (4pts)*

Chapter 9

Final term Problems

문제 279. *연속함수* $f, u : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$*이 존재하여* f*는 이계도함수가 연속이며 아래를 만족한다.*

(1) $f''(x) = -f(x)u(x)$

(2) $f(x_1) = f(x_2) = 0$

(3) 모든 실수 $x \in (x_1, x_2)$*에 대하여* $f(x) > 0$, $u(x) < 1$*이 성립한다.*

이때, $\phi(x) = \sin\left(\dfrac{\pi(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}\right)$*을 도입함으로써*

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\phi(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f''(x)\phi(x)dx > 0$$

임을 보이고, $x_2 - x_1$*과* π*의 대소를 비교하시오.*

문제 280. *폐구간* $[a,b]$*에서 연속인 함수* $p(x), q(x)$*에 대하여*

$$\left(\int_a^b p(x)q(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b p(x)^2 dx \cdot \int_a^b q(x)^2 dx$$

가 성립함이 알려져 있다. 폐구간 $[a,b]$*에서 도함수가 연속인 함수* $f(x)$*가* $f(a) = f(b) = 0$, $\int_a^b \{f(x)\}^2 dx = 1$ *을 만족한다. 이때,*

$$\frac{1}{4} \leq \int_a^b \{f'(x)\}^2 dx \int_a^b x^2 \{f(x)\}^2 dx$$

임을 보여라.

문제 281. $f(x)$*와* $g(x)$*가 구간* $[0,\infty)$*에서 각각 정의된다. 또한, 이 함수들은 모두 음이 아니며 연속이다. 이때, 모든* $x \in [0,\infty)$*에 대하여*

$$f(x) \leq C + \int_0^x f(s)g(s)dx \quad (C > 0)$$

이 성립한다.

(1) $u(t) = C + \int_0^t f(s)g(s)ds$*일 때,* $u'(t) \leq u(t)g(t)$*가 성립함을 보이시오.*

(2) $f(x) \leq Ce^{\int_0^x g(s)dx}$*가 성립함을 보이시오.*

문제 282.

$$f(x) = \frac{d^{100}}{dx^{100}} \left(\frac{1}{100!}(x - x^2)^{100} \right)$$

에 대하여, 다음 물음에 답하시오.

(1) $\int_0^1 f(t)dt = 0$*임을 보이시오.*

(2) $0 \le \int_0^1 x^{100} f(x)dx \le \left(\frac{1}{4}\right)^{100}$ *임을 보이시오.*

문제 283.

$$I_n = \int \frac{1}{x^n(ax^2+bx+c)}dx$$

의 점화식을 구하시오. 단, $c \neq 0$*이다.*

문제 284.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{n}{1+e^{nx}}dx$$

의 값을 구하여라.

문제 285. *자연수 n과 $r = 0, 1, \cdots, n$에 대해 다음 등식을 증명하여라.*

$$\int_0^1 x^r(1-x)^{n-r}dx = \frac{1}{(n+1)_nC_r}$$

문제 286. a가 양의 상수이고 $x > -1$일 때,

$$f(x) = \int_0^x \frac{\ln(t+1)+a}{t+1}dt$$

이라 정의하자. $y = f(x)$의 최솟값이 $-\frac{1}{2}$일 때,

(1) a의 값을 구하여라.

(2) 아래 적분을 계산하라.

$$\int_0^{e^2-1} \frac{(\ln(x+1)+1)\cdot f(x)}{x+1}dx$$

문제 287. *연속함수* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$*이 다음 성질*

$$\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 f(t)dt$$

를 만족하면 $f(x) = 0$*임을 보여라.*

문제 288. *(1) 임의의 자연수* n*에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오.*

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

(2) 아래를 구하시오.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right)$$

문제 289. *실수 전체에서 정의된 함수 f는 미분가능하고, f'은 증가하는 연속 함수이다.*
(1) $a < b$에 대하여 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{1}{2}f'(a)(b-a)^2 \leq \int_a^b (f(b) - f(x))dx \leq \frac{1}{2}f'(b)(b-a)^2$$

(2) 다음 등식이 성립함을 보여라.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - n\int_0^1 f(x)dx\right) = \frac{f(1) - f(0)}{2}$$

문제 290. *(1) 직선* $y = Ax + B$*가 곡선* $y = x^2$*에 접하면, 이 직선은 항상 곡선 아래 있음을 증명하시오.*

(2) (1)을 이용하여 $a < b$*일 때 구간* $[a, b]$*에서 연속인 함수* $f(t)$*에 대하여 부등식*

$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)^2 \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)^2 dt$$

을 증명하시오.

문제 291.

$$\int \frac{\tan^{-1} x}{x^2} dx$$

을 구하여라.

문제 292.

$$\int \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx$$

을 구하여라.

문제 293.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{9+x^6} dx$$

을 구하여라.

문제 294. *양의 정수 n에 대하여, I_1을 찾고 I_n의 점화식을 구하여라.*

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$$

문제 295. *$y = e, y = e^{x^2}, x = 0$으로 둘러싸인 영역을 y축으로 회전시켜 얻은 영역의 부피를 구하여라.*

문제 296.

$$\lim_{x\to 0^+} x^{(x^x)}$$

을 *구하여라.*

문제 297.

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x \cos x}{2\sin^2 x + \cos^4 x} dx$$

를 *구하여라.*

문제 298.

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}dx$$

문제 299. $\arctan \frac{1}{2}$를 *근사하여보자.*

(a) $\arctan x > x - \frac{1}{x^3}$*이* $x > 0$*에 대해 성립함을 보여라.*

(b) $\arctan x < x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$*가* $x > 0$*에 대해 성립함을 보여라.*

(c) (a), (b)를 확장한 부등식을 예측하고, 이를 보여라.

문제 300.

$$\cosh^2(\cosh x) - \sinh^2(\sinh x) \geq 2$$

가 모든 x에 대해 성립함을 보여라.

문제 301. *어떤 a에 대하여,*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = e$$

인가?

문제 302. $e^\pi > \pi^e$ 임을 보여라.

문제 303.

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{e^x-1}}$$

을 구하여라.

문제 304.

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} < \frac{\ln(1+x)}{\sin^{-1} x}$$

가 $0 < x < 1$*에서 성립함을 보여라.*

문제 305. a*가 양의 상수일 때,*

$$ae^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

가 하나 이하의 근만 가짐을 보여라.

문제 306. *$a > 0$인 경우에,*

$$\sinh^2(\sqrt{x^2+a}) - \sinh^2(\sqrt{x^2}) > a$$

가 모든 x에 대해 성립함을 보여라.

문제 307. *만약 함수 f가 integrable할 뿐, continuous하지 않다고 하자. 이때, $F(x) = \int_1^x f(t)dt$는 미분가 능한가?*

문제 308. *미분가능한 함수* $A(x)$*와* $B(x)$*에 대하여, 아래 조건이 성립한다.*

1) $A'(x) = B(x), \quad B'(x) = A(x)$

2) $A(0) = 0,\ B(0) = 1$

이때, A, B*를 찾아라.*

문제 309. *$r < R$에 대하여, 중심이 $(R, 0)$이고 반지름이 r인 원을 $y = \frac{r}{2}$로 자를 때 넓이가 작은 부분을 D라 하자. 이 D를 y축을 기준으로 회전시켰을 때, 부피를 구하여라.*

문제 310. *(1) $c > 0$에 대하여, $y = \sin\frac{x}{c}$와 $x = 0, x = 1, y = 0$으로 둘러싸인 영역을 x축으로 회전시킨 입체의 부피 $V(c)$를 구하여라.*

(2) 앞서 구한 $V(c)$에 대하여, 이는 $c = \frac{2}{\alpha}$일 때 극대를 가진다. $\tan\alpha - \alpha$의 값을 구하여라.

문제 311.

$$\int_0^1 2\pi x \sin^{-1} x dx$$

를 구하여라.

문제 312. *D를 $x=-1, x=2, y=0, y=x^2-2x+2$에 의해 둘러싸인 영역이라고 하자.*

(1) D의 넓이를 구하여라.

(2) D를 y축으로 회전하였을 때 형성되는 입체의 부피를 구하여라.

문제 313. *함수* f*를*

$$f(x) = \begin{cases} |x|^x & (x \neq 0) \\ c & (x = 0) \end{cases}$$

으로 정의하자.

(1) f*가 continuous이기 위한* c*의 값을 구하여라.*

(2) c*를 잘 결정하여* f*가* $x = 0$*에서 differentiable하게 만들 수 있는가?*

(3) $(1, 1)$*에서* $y = f(x)$ *그래프의 접선을 구하여라.*

문제 314.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

의 값을 구하여라.

문제 315. *함수*

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x=0)\\ \dfrac{1}{x^2} & (0<x\le 1)\end{cases}$$

이 $[0,1]$*에서 적분불가함을 보여라.*

문제 316. *곡선* $f(x) = -ax^2 + (a+1)x$*와* $y = 0$*으로 둘러싸인 영역* R*을* $x = 0$*을 기준으로 돌려 만드는 입체의 부피가 최소가 되는* a*를 구하시오.*

문제 317. *(1)* $\dfrac{d}{dx}(\tanh^{-1} x)$*를 구하여라.*

(2)

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t^3} dt + 1 = \tanh^{-1} x \quad |a| < 1$$

인 $f(x)$*와* a*를 찾아라.*

(3) (2)에서 구한 f*에 대하여,*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+h} f(t) dt$$

를 구하여라.

문제 318. 만약 f가 *differentiable*이고 $f(x+y) = f(x)f(y)$가 성립한다면,

(1) $f(0) \neq 0$일 때 $f'(x) = cf(x)$가 성립함을 보여라. 단, c는 상수이다.

(2) $f(x) = e^{cx}$임을 보여라. 단, (1)의 조건을 그대로 승계한다.

문제 319. $f(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^3}dt + 1$일 때, 다음 질문에 답하여라.

(1) f가 $\frac{1}{2}$보다 작은 어떤 α에 대하여 $[\alpha, \infty)$를 *domain*으로 하는 *inverse function*을 가짐을 보여라.

(2) $(f^{-1})'(1)$과 $(f^{-1})''(1)$이 존재한다면 구하여라.

문제 320.

$$\int \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 4}} dx$$

를 구하여라.

문제 321.

$$\lim_{x \to 0} \left(\csc x - \frac{1}{x} \right)$$

을 구하여라.

문제 322.

$$F(x) = \int_0^x e^{-x^2t^2}\,dt$$

에 대하여, $xF'(x) + F(x)$를 구하여라.

문제 323. $f(x) = \int_0^{x^3} e^{t^2}\,dt$일 때,

$$6\int_0^1 x^2 f(x)\,dx - 2\int_0^1 e^{x^2}\,dx$$

의 값을 구하여라.

문제 324. *f가 $[a,b]$에서 continuous function이고 g는 $[a,b]$에서 nonnegative integrable function이다. 이때, 우리는*

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt$$

인 $c \in [a,b]$가 존재함을 알고 있다.

(1) f가 continuous하지는 않으나 $[a,b]$에서 유한한 값을 가지는 경우에는 성립하는가?

(2) f와 g가 continuous하다는 조건은 충분한가?

문제 325. *f가 $[a,b]$에서 continuous function이고 g는 $[a,b]$에서 nonnegative integrable function이다. 이때, 우리는*

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt$$

인 $c \in [a,b]$가 존재함을 알고 있다.

f가 continuous라고 가정하자. $0 < a < b$일 경우,

$$\lim_{x\to 0}\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}dt$$

를 계산하여라. 단, $f(0) = 1$이다.

문제 326. *아래 L'Hospital's rule과 비슷한 법칙이 성립한다면 증명하고, 그렇지 않다면 반례를 들어라.*

$f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$가 *differentiable*이고 $g'(x) \neq 0$이다. 또한, $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$이다. 그렇다면,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

는 곧

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$$

를 의미한다.

문제 327. $0 < a < b$에 대하여,

$$\lim_{t\to 0} \left[\int_0^1 (bx + a(1-x))^t \right]^{\frac{1}{t}}$$

를 구하여라.

문제 328. 연속함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt = 2\sin x - 2x$$

일 때,

$$\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} f(x)^3 dx$$

의 값을 구하시오.

문제 329. $I = \int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{x\sin x}{4-\cos^2 x}dx$, $J = \int_0^{\pi} \dfrac{\sin x}{4-\cos^2 x}dx$라 하자.

(1) I를 J에 관한 식으로 표현하시오.

(2) I의 값을 구하시오.

문제 330. *반지름의 길이가 13인 구면을 평면으로 자른 모양의 그릇에 물이 들어 있다. 이 그릇에 반지름의 길이가 9인 쇠공을 집어넣었더니, 그릇 안의 수면의 높이가 쇠공의 지름과 같아졌다. 처음 수면의 높이를 구하시오.*

문제 331. *함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[0,1]$에서 연속이고 이 구간에서 nonnegative이다. 함수 $F(x)$가*

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \quad (0 \leq x \leq 1)$$

이라면,

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)F(x)dx = k$$

를 만족시키는 0이 아닌 상수 k의 값을 구하여라.

문제 332. *부등식* $0 \le x \le 1, x^2 \le y \le x$*이 나타내는 영역을 직선* $y = x$*를 회전축으로 회전시킨 입체의 부피를 구하시오.*

문제 333.

$$\int_0^1 \ln(1+\sqrt{x})dx$$

를 구하여라.

문제 334. *실수 전체에서 정의된 연속함수* $f(x)$*가 다음 조건을 만족시킨다.*

(가) $f(x)$*의 그래프는* $(11, 2)$*를 기준으로 점대칭이다.*

(나) $\int_{20}^{21} f(x)dx = 4$

(1) $\int_{1}^{2} f(x)dx$*를 구하시오.*

(2) $\int_{c}^{2} f(x)dx = cf(c)$*를 만족시키는 상수* c*가 구간* $(1, 2)$*에 적어도 하나 존재함을 보이시오.*

문제 335. *자연수 k에 대하여, 다음 부등식이 성립함을 증명하시오.*

$$\int_1^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx > \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{k+1}{2}\right)$$

문제 336. *집합*

$$\{(x,y)|x^2+y^2 \le r^2, x \ge \sqrt{r^2-h^2}\}$$

이 나타내는 영역을 y축 둘레로 회전시킬 때 생기는 입체도형의 부피를 구하시오. 단, $1 < h \le r$이다.

문제 337. 함수 $f(x) = ([x]+1)^2 - (x-[x]-1)^2$과 직선 $x = n-1$, $x = n$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라 할 때,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{3S_k+1}{n^2}\right)$$

을 구하시오.

문제 338. *양의 실수 전체의 집합에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 임의의 양의 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_1 < t_2$ 이면 $f(t_1) \le f(t_2)$를 만족한다. 자연수 n과 음이 아닌 정수 k에 대하여 x_k, S_k를 아래와 같이 정의하자.*

$$x_k = \frac{k\pi}{n}, \quad S_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\cos^2 nx dx$$

(1) 아래가 성립함을 보여라.

$$\frac{\pi}{2n} f(x_k) \le S_k \le \frac{\pi}{2n} f(x_{k+1})$$

(2) (1)을 이용하여

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f(x)\cos^2 nx dx$$

를 구하여라.

(3)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} (\cos 2nx)\ln(1+x)dx$$

를 구하여라.

Chapter 10

Miscellaneous Problems

편집자주: 여기에 있는 문제들은 중간범위일지, 기말범위일지 모릅니다. 기말고사를 준비하며 중간고사 내용을 복습하고 싶으신 분들, 혹은 방학 중 예습을 하고 개학 직전 복습하시려는 건실하신 분들, 미적분학2 수강 전 본인의 미적분학1 이해도를 확인하시려는 분들이 풀어보시면 좋겠습니다. 앞의 문제들과 중복이 있을 수도 있습니다.

문제 339. *함수 $f(x)$가 두 번 미분가능하고 $f(0) = f(1) = 0$이다. 구간 $(0,1)$에서 $f(x) > 0$일 때,*

$$\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geq 4$$

임을 보여라.

문제 340. *n을 2 이상의 자연수라 할 때,*

$$f(x) = x^n + px + q$$

형태의 n차 함수에 대하여, 적분

$$I = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \{f(x)\}^2 dx$$

를 고려하자. I를 최소로 하는 (p, q)는 유일함을 보이고, 그러한 (p, q)와 I의 최솟값을 구하여라.

문제 341. 함수 $f(x)$는 폐구간 $[0,1]$에서 실수 $\mathbb{R}$로 가는 연속함수이고 $[0,1]$에 있는 모든 실수 x, y와 $0 \leq \lambda \leq 1$인 λ에 대해서

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

이라 한다.

(1) $k = 1, 2, \cdots, n-1$에 대하여

$$f(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{2}(f(\frac{k}{n}) + f(\frac{n-k}{n}))$$

임을 보이시오.

(2) $f(\frac{1}{2}) = \alpha$일 때, $\int_0^1 f(t)dt$가 가지는 최솟값을 α로 표현하시오.

문제 342. 함수 $f(x)$는 구간 $[0,1]$에서 연속이고 $g(x)$는 실수 전체에서 연속이다. 또한, $g(x) > 0$이며 $\int_x^{x+1} g(t)dt = C$로 일정하다.

(1) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+1) = g(x)$임을 보이시오.

(2) $\int_0^1 f(x)g(x)dx = f(c)\int_0^1 g(x)dx \quad (0 < c < 1)$을 만족하는 c가 존재함을 증명하시오.

(3) $f(x)$가 증가함수이며 $\int_0^1 f(x)dx = 2, \int_0^1 g(x)dx = 3$일 때,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)g(nx)dx$$

의 값을 구하시오.

문제 343. *구간* $[-1,1]$*에서 정의된 함수* $f(x)$*에 대하여,* $f'(x)$*가 우함수이고*

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f'(x)dx = 0$$

일 때 $f(1)+f(-1)$*을 구하여라.*

문제 344. *함수* $g(s)=\int_{1-s}^{1} e^t f(s+t)dt$*에 대하여,* $g'(0)$*의 값을 구하여라. 단,* f*는 연속함수이며* $f(1)=1$*이다.*

문제 345. a, b, c는 실수이다. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$는 아래 두 조건을 만족한다.

(A) $f(-1) = -1,\ f(1) = 1$
(B) $-1 \le x \le 1$인 x에 대하여, $f(x) \le 3x^2 - 1$

이때, 적분 $I = \int_{-1}^{1} \{f'(x)\}^2 dx$의 값이 취하는 범위를 구하시오.

문제 346. $a \geq 1$이라 하자, 부등식 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $1 \leq y \leq a\sin x$로 정해지는 영역의 면적을 S_1, 부등식 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq 1, 0 \leq y \leq a\sin x$로 정해지는 영역의 면적을 S_2라 하자. $S_2 - S_1$을 최대로 하는 a의 값과 그때의 $S_2 - S_1$을 구하여라.

문제 347. *곡선* $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}}$ *위의 점* (p, q)*에서 그린 tangent line과* $x = p$, $y = 0$*에 의해 만들어지는 삼각형의 넓이를* A*라고 하자.* $\lim_{p\to\infty} S$*를 구하여라.*

문제 348. *세로로 된 벽에 10m짜리 사다리가 비스듬히 놓여 있다. 사다리의 각 끝에는 0.15m의 반지름을 가진 바퀴가 있다. 만약 사다리의 아래쪽 끝이 벽으로부터 초당 1m의 속도로 멀어지고 있다면, 사다리 아래쪽 끝이 벽으로부터 6m떨어진 상황에서 벽에 접한 바퀴의 각속도는?*

문제 349. *f'가 전체 실수에서 continuous이며, $f(c)f'(c) > 0$이 어떤 c에 대해 성립한다.*

(1) $f(x)^2$이 increasing인 열린 구간 (a, b)가 존재함을 보여라.

(2)

$$(b-a)|f(a)| \le \int_a^b |f(x)|dx \le (b-a)|f(b)|$$

가 성립함을 보여라.

(3)

$$[f(b)^2 - f(a)^2] \le 4\int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b f'(x)^2 dx$$

임을 보여라.

문제 350. *implicit function* $x^3 + y^3 = 1$*을 생각하자.*
1) 모든 critical point의 x*좌표와* y*좌표를 찾아라.*
2) y*의 absolute maximum과 absolute minimum을 구하여라.*

문제 351. *함수* f*는* $x \to \infty$*임에 따라 slant asymptote를 가진다고 한다. 함수* $g(x)$*가* $\lim_{x\to\infty} \dfrac{g(x)}{x} = L \neq 0$ *이라면,* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$*는 horizontal asymptote를 가짐을 보여라.*

문제 352. *만약 f와 g가 differentiable이고 f와 g가 concave upward인 열린 구간 I가 존재한다면, 이 I에서 함수 $f+g$도 concave upward임을 보여라.*

문제 353. *$x^2+xy+y^2=1$의 그래프를 생각하자.*

1) $\dfrac{dy}{dx}$를 x, y로 표현하라.
2) 그래프의 접선이 horizontal한 모든 점을 찾아라.
3) 접선이 $y=-x$와 나란한 모든 점을 찾아라.

문제 354. *함수 f는 $x = a$를 포함한 구간에서 정의되는 함수이다. 또한,*

$$f(a+h) = f(a) + Lh + \epsilon(h)h$$

인 관계를 만족시키는 수 L과 continuous function ϵ이 존재한다고 하자. 이때, $\epsilon(0) = 0$이다. f가 $x = a$에서 differentiable임을 보여라.

문제 355. *만약 quadratic function $g(x)$가 함수 $f(x)$에 대하여*

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - g(x)] = 0$$

을 만족시킨다면, f의 parabolic asymptote라 불린다.
$f(x) = \dfrac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x-1}$이 parabolic asymptote를 가진다. 그 식을 구하여라. 단, $a \neq 0$이다.

문제 356. *주어진 곡선과 서로 다른 두 접점에서만 만나는 접선의 방정식을 각각 구하시오.*

1) $y = x^4 - 8x^2 + 12x$

2) $y = x^5 - 15x^3 + 10x^2$

문제 357. *반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 삼각형 ABC에 대하여, $\overline{AB} = 3\overline{AC}$이다. $\angle BAC = \theta$라 할 때, 아래 물음에 답하시오. 단, $\frac{5\pi}{12} < \theta < \pi$이다.*

1) 삼각형 ABC의 넓이를 θ에 대한 식으로 나타내시오.

2) 삼각형 ABC의 넓이가 최대가 되는 θ의 값을 α라 할 때, $\cos\alpha$의 값을 구하시오. 단, $\cos\frac{5\pi}{12} > \frac{1}{4}$이다.

문제 358. *한 변의 길이가* $\frac{\pi}{2}$*인 정사각형* $ABCD$*에 대하여, 선분* AB *위를 움직이는 점* P*가 있다. 점* P*는 점* A*에서 출발하여 점* B *방향으로 초당 1의 속도로 움직인다. 시각* t*초에서* $\angle QPB = t$*가 되는 점* Q*가 선분* BC *위에 있다. 점* Q*를 지나고 선분* PQ*에 수직인 직선이 정사각형* $ABCD$*의 변과 만나는 점 중* Q*가 아닌 점을* R*이라 하자.* $t = \frac{5\pi}{12}$*일 때, 삼각형* PQR*의 넓이의 시각* t*에 대한 변화율을 구하시오. 단,* $0 < t < \frac{\pi}{2}$*이며* $\tan\frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$*이다.*

문제 359. *$x \geq 1$이고 n이 자연수일 때, 다음 부등식이 성립함을 증명하여라.*

$$\frac{1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}}{n+1} \geq \frac{x+x^3+x^5+\cdots+x^{2n-1}}{n}$$

문제 360. *다음을 만족하는 연속함수 $f(x), g(x)$에 대하여 물음에 답하시오. 단, $g(0) \neq 0$이다.*

1) $f(x-y) = f(x)g(y) - g(x)f(y)$
2) $g(x-y) = g(x)g(y) - f(x)f(y)$
3) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

(1) $f(x)$는 odd, $g(x)$는 even임을 보이고 $g(x)^2 - f(x)^2$의 값을 구하시오.
(2) $g(x)$가 differentiable임을 보이고 $g'(x)$를 $f(x)$에 대한 식으로 표현하시오.

문제 361. *윗면의 반지름 길이가 2m, 아랫면의 반지름 길이가 1m, 높이가 4m인 원뿔대 모양의 그릇이 있다. 이 그릇에 초당 1세제곱미터의 물을 붓는다. 밑면으로부터 물 표면까지의 높이가 2m일 때, 시간에 대한 물 표면의 넓이의 변화율을 구하시오.*

문제 362. *실수 전체에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.*

가) $f(0) = 0, f'(0) = 1$
나) 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x)f(y) \neq -1$
다) 모든 실수 x, y에 대하여

$$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$$

1) 모든 실수 x에 대해 $|f(x)| < 1$임을 보이시오.
2) 구간 $(0, \infty)$에서 $y = f(x)$의 그래프가 *concave downward*임을 보이시오.

문제 363. *1) 두 다항함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$가 $x = p$에서 공통접선을 가질 때, $h(x) = f(x) - g(x)$는 2 이상의 어떤 자연수 n에 대해 $(x-p)^n$를 인수로 가짐을 보이시오.*

2) 두 곡선 $y = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x$, $y = ax^2 + b$가 두 점에서 접할 때, 두 실수 a, b의 값을 구하시오.

문제 364. *$f : [0, 2] \to [0, 2]$인 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[0, 2]$에서 연속이고 열린 구간 $(0, 2)$에서 미분가능하다.*

$f(0) = \frac{1}{3}, f(1) = \frac{2}{3}, f(2) = 2$일 때, $g(x) = f(f(x))$에 대하여 $g'(c) = 1$이 되는 c가 $(0, 2)$에 존재함을 보이시오.

문제 365. *변 AD와 변 BC가 평행한 사다리꼴 $ABCD$에서 $\overline{AB} = 1$, $\overline{BC} = 2$, $\overline{CD} + \overline{AD} = 2$를 만족하고, $\angle B = \theta$라고 할 때, $\angle B$가 매초 3씩 일정하게 증가한다. $\overline{AD} = \frac{1}{2}$일 때의 사다리꼴 넓이의 변화율을 구하시오.*

문제 366. *점 P에서 곡선 $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ $(x > 0)$에 그은 두 개의 접선이 서로 수직이라고 한다. 점 P의 자취의 길이를 구하시오.*

문제 367. *최고차항의 계수가 양수인 다항함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 법선의 x절편을 $g(t)$라 할 때, 함수 $f(x)$, $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.*

1) $\lim_{t\to\infty} \dfrac{g(t) - 3t^5}{t^5} = 0$
2) 방정식 $g(t) = t$는 서로 다른 세 실근을 가지고, 다항식 $g(t) - t$는 $(t-1)^3$으로 나누어 떨어진다.
3) 점 $(1, 1)$에서 곡선 $y = f(x)$에 그은 접선은 두 개 존재한다.

이때, 함수 $f(x)$를 구하시오.

문제 368. 함수 $f(x)$가 $x = 2$에서 미분가능하고 $f(2) = 1$, $f'(2) = -1$일 때, 다음 식의 값을 구하시오. 단, $8f(x) - x^3 f(2) \neq 0$이다.

$$\lim_{x \to 2} \frac{xf(x) - 2f(2)}{8f(x) - x^3 f(2)}$$

문제 369. *continuous function* f*에 대하여,* $g(x) = |f(x)|$*도 continuous임을 보여라.*

문제 370. *continuous function* f*에 대하여, 함수* $g(x) = f(x)^2$*도 continuous임을 보여라.*

문제 371. *continuous funtion* f*와* g*에 대하여, 함수* $h(x) = f(x) + g(x)$*도 continuous임을 보여라.*

문제 372. *continuous function* f*와* g*에 대하여,* $h(x) = g(x)f(x)$*도 continuous임을 보여라.*

문제 373. *continuous function* f*에 대하여, 모든* x*에서* $f(x) \neq 0$*이라고 한다. 그러면* $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$*도 continuous임을 보여라.*

문제 374. *함수* f*와* g*가 모두 continuous라면,*

$$\max\{f(x), g(x)\}, \quad \min\{f(x), g(x)\}$$

는 모두 continuous임을 보여라.

문제 375. *함수* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*와 임의의 양수* $\epsilon > 0$*에 대하여,*

$$x, y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

을 만족하는 것과 continuous인 것은 동치인가? 그렇다면 증명하고, 아니라면 어떤 관계가 있는지 이야기하시오.

문제 376. *함수* $F:[a,b]\to\mathbb{R}$*가 미분가능하고* $F'(a)<\alpha<F'(b)$*이면,*

$$F'(c)=\alpha$$

인 $c\in(a,b)$*가 존재함을 보여라.*

문제 377. *수학적 귀납법을 이용하여, 다음 등식*

$$(fg)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

을 보여라.

문제 378. *구간에서 정의된 함수 f와 구간의 점 c에 대하여, 다음 성질*

$$0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(c)| < M|x - c|^\alpha$$

를 만족하는 양수 $\delta > 0$, $M > 0, \alpha > 0$이 존재하면, 함수 f가 점 c에서 연속임을 보여라.

문제 379. *함수 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$이 미분가능하다고 하자. $m < f'(x) < M$인 m, M을 항상 찾을 수 있는가?*

문제 380. *함수* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$*가 연속이고, 임의의 점* $x \in (a,b) - \{c\}$*에서 미분가능하다고 하자. 단,* $a < c < b$*이다. 만일 극한값* $\lim_{x\to c} f'(x)$*가 존재한다면, 함수* f*가* c*에서 미분가능하고,* $f'(c)$*가 바로 그 극한값임을 증명하여라.*

문제 381. *함수* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*가 주어져 있고, 두 함수* $2^x f(x)$*와* $2^{-f(x)}$*가 decreasing이라고 한다.* $f(0) = -1$ *일 때,* $f(2)$*를 구하여라.*

문제 382. *$|f|$가 적분가능하지만 f가 적분불가능한 예시를 들어라.*

문제 383. *함수 $f(x)$와 $g(x)$를 각각*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} x & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

이라고 하자. 이때, $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt, G(x) = \int_{-1}^{x} g(t)dt$를 정의하자. F, G가 differentiable한 점은 어디인가?

문제 384. $f(x+y) = f(x) + f(y)$일 때, f가 $x = 0$에서 *continuous*라고 한다. f가 *continuous function* 임을 보여라.

문제 385.

$$\lim_{x\to\infty}\{x - f(x)\} = 2$$

일 때,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{f(x)}}{\sqrt{x}-\sqrt{f(x)}}$$

을 구하여라.

문제 386. *함수 $f(x)$는 3차함수이다.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x(x-1)}=1,\quad \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x(x-1)}=0$$

일 때, $f(x)$를 구하여라.

문제 387.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+|x|}=1$$

임을 보여라.

문제 388.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$$

을 구하여라.

문제 389. *함수 f에 대하여, $f''(x)$가 $[a,b]$에서 존재한다고 한다. 그렇다면,*

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{1}{2}f''(c)(b-a)^2$$

인 $c\in(a,b)$가 존재함을 보여라.

문제 390. *함수*

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & (x \in [0,\pi] \cap \mathbb{Q}) \\ \cos x & (x \in [0,\pi] \cap \mathbb{Q}^c) \end{cases}$$

가 continuous인 x*를 구하여라.*

문제 391. a*와* b*는 방정식* $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$*의 서로 다른 두 실근이다. 이때, 방정식*

$$nx^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$$

이 a*와* b *사이에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보여라.*

문제 392. *함수* $y = \dfrac{x^3 + 3x}{x^2 + 1}$*의 그래프를 그려라.*

문제 393. *함수* $y = \dfrac{x}{(x+1)^2}$ *의 그래프를 그려라.*

문제 394. 함수 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$이 있고, a_n과 a_0은 서로 다른 부호를 가진다. 이때, $f(x) = 0$은 적어도 하나의 양의 실근을 가짐을 보여라.

문제 395. 함수 $y = \sqrt{4x^2 + 2} - x$의 *slant asymptote*가 있다면 구하여라.

문제 396. *다항함수 $f(x)$에 대하여, $f(x) = e^x$의 근이 무한 개 존재할 수는 없음을 보여라.*

문제 397. *함수* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*가 성질*

$$x, y \in X, \quad x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|$$

을 만족한다고 하자.

(1) $f(x) = x$*인* x*는 하나 이하임을 보여라.*

(2) 위 조건을 만족하지만, $f(x) = x$*의 근이 없는 예시를 들어라.*

문제 398. *함수 f가 c 근방에서 정의되고 f는 두 번 미분 가능하고, f''이 연속임을 안다. 이때, 다음 극한*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}(f(c+h)+f(c-h)-2f(c))$$

이 존재하고 그 값이 $f''(c)$임을 보여라. 이 극한값이 존재하지만 $f''(c)$는 존재하지 않는 예를 들어라.

문제 399. *이태는 미적분학1 수업시간에 배운 Midpoint rule이나 Trapezoidal rule에 흥미를 느껴 서울대학교에서 수치해석개론 강의를 수강하였다. 이 강의에서 이태는 f만이 아니라 그 도함수인 f'을 이용해 적분값을 추정하는 Hermitian interpolation에 대해 배웠다.*

함수 $\phi_i(t)$가 아래와 같이 정의된다.

$$\phi_0(t) = (t-1)^2 + 2t(t-1)^2$$

$$\phi_1(t) = t^2 - 2t^2(t-1)$$

$$\phi_2(t) = t(t-1)^2$$

$$\phi_3(t) = t^2(t-1)$$

이때, $p_3(t) = f(a)\phi_0(t) + f(b)\phi_1(t) + f'(a)\phi_2(t) + f'(b)\phi_3(t)$을 생각하자. p_3는 삼차함수이면서, a, b에서의 함숫값과 도함숫값이 f의 그것과 동일함을 보여라.

문제 400. *이제 Hermite interpolation을 완성하고자 한다. 그 아이디어는*

$$\int_a^b f(t)dt \approx \int_a^b p_3(t)dt$$

이다. 즉 구간에서 f와 유사한 삼차함수를 찾고 이로써 적분값을 근사한다는 것이다. 상수함수를 찾았던 midpoint rule이나, 직선을 찾았던 trapezoidal rule과 굉장히 유사한 방법임을 알 수 있다. Hermite interpolation의 공식을 완성하여라. 다르게 말하면,

$$\int_a^b f(t)dt \approx \alpha f(a) + \beta f(b) + \gamma f'(a) + \delta f'(b)$$

로 표현됨을 알 때 각 그리스문자의 값을 찾아보아라. 일반적으로 이는 $b-a$가 작아질수록 수업시간에 배웠던 각종 rule보다 더 낮은 오차로 적분값을 추정함이 알려져 있다!

Chapter 1

Functions and Limits

Limit Laws

만약 c가 상수이고

$$\lim_{x\to a} f(x), \quad \lim_{x\to a} g(x)$$

가 존재한다면, 아래가 성립한다.

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}[cf(x)] = c\lim_{x\to a} f(x)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} (\text{단, } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0)$$

문제 1. *위의 5가지 법칙의 역이 성립하지 않는 예시를 $a = 0$에 대해 찾아 보아라. 이때, 그 의미는 다섯 법칙에서 왼쪽 식이 존재할 때, 오른쪽 식과 그것이 같은지를 확인하라는 것이다. 위의 법칙은 오른쪽 식이 존재하는 상태에서 그것이 왼쪽 식과 같다는 것을 이야기하고 있다.*

첫째 법칙에서는 $f(x) = 1/x$, $g(x) = -1/x$라고 두면 왼쪽 식의 극한값은 항상 0이지만, 오른쪽 식은 극한값이 존재하지 않기에 성립하지 않는다. 둘째 법칙에서는 $f(x) = g(x) = 1/x$이라 두면 왼쪽 극한값이 0으로 존재하지만 오른쪽의 극한값은 존재하지 않는다. 세 번째로는 $c = 0$, $f(x) = 1/x$라고 둘 때 왼쪽 극한값은 0으로써 존재하지만, 오른쪽의 극한값은 없다. 네 번째로는 $g(x) = 0$이라는 상수함수라고 두면 셋째 케이스와 같이 반례를 만들어줄 수 있다. 마지막으로는 $f(x) = g(x) = 1/x$이라 둘 경우 왼쪽 극한값은 1로 존재하지만, 오른쪽 극한값은 존재하지 않는다.

문제 2.

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$$

의 값이 존재하는지를 판단하고, 존재한다면 그 값을 구하여라.

$|\sin\frac{1}{x}| \leq 1$이므로,

$$-x^2 \leq x^2 \sin\frac{1}{x} \leq x^2$$

이다. 이때

$$\lim_{x\to 0} x^2 = \lim_{x\to 0} -x^2 = 0$$

이므로, squeeze theorem에 의하여

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$$

이다.

문제 3.

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$$

임을 $\varepsilon - \delta$를 이용하여 보여라.

$\varepsilon > 0$에 대하여 $\delta = \sqrt{\varepsilon}$을 설정하자. 그러면 $|x-0| < \delta$일 경우

$$|x^2 \sin\frac{1}{x} - 0| \leq |x^2| < \delta^2 = \varepsilon$$

이므로 $\varepsilon - \delta$에 의하여

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$$

이다.

문제 4. $\lim_{x\to 4} x^3$*의 값을 구하고, $\varepsilon - \delta$를 이용하여 증명하라.*

주어진 $\varepsilon > 0$에 대하여 $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{61}\}$이라 두면 $|x-4| < \delta$일 때 $|x^3 - 64| = |x-4||x^2+4x+16| < 61|x-4| < \varepsilon$이므로

$$\lim_{x\to 4} x^3 = 64$$

이다.

$f(x)$의 limit이 존재하지 않는다는 것을 보이려면, 귀류법을 사용한다. $f(x)$의 limit이 L이라고 가정하면, 모든 $\varepsilon > 0$에 대하여 상응하는 $\delta > 0$가 존재하여

$$0 < |x-a| < \delta \quad \to \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

이어야 한다. 이는 곧 범위 안에 들어가는 x_1과 x_2에 대하여,

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq |f(x_2) - L| + |f(x_1) - L| < 2\varepsilon$$

임을 의미한다. 따라서 우리는 δ를 아무리 작게 하여도, 즉 x_2와 x_1을 a로부터 엄청나게 가깝게 하여도 두 함숫값의 차이가 유의미하게 큰 경우를 찾고, 그 특정 값으로부터 ε을 찾아주면 된다. 원래 명제의 부정을 잘 생각해보자!!

문제 5. *원래 명제의 부정을 적어라.*

어떤 $\varepsilon > 0$에 대해서는 모든 L에 대하여 $|x-a| < \delta$이면 $|f(x) - L| < \varepsilon$이 되는 $\delta > 0$을 찾을 수 없다.

문제 6. *$x \neq 0$에서 정의된 함수 $f(x) = \frac{1}{x}\left|\sin\frac{1}{x}\right|$에 대하여, $\lim_{x\to 0+} f(x)$가 존재한다면 그 값을 구하여라. 존재하지 않는다면 이를 증명하여라.*

만약 극한값 L이 존재한다면, 모든 ε에 대하여 $0 < x < \delta$이면 $|f(x) - L| < \varepsilon$인 상응하는 δ가 존재한다. 그러면 $\varepsilon = 1/4$이라 둔 경우의 δ를 생각하면, 자연수의 무한함에 의하여

$$n > \frac{1}{\delta}, \quad \delta > \frac{1}{n}$$

인 n이 존재하며

$$0 < \frac{1}{(2n + \frac{1}{2})\pi} < \frac{1}{2n\pi} < \delta$$

이기에

$$\left| f\left(\frac{1}{(2n + \frac{1}{2})\pi}\right) - L \right| = |(2n + \frac{1}{2})\pi - L| < \frac{1}{4}$$

$$\left| f\left(\frac{1}{2n\pi}\right) - L \right| = |0 - L| < \frac{1}{4}$$

이므로

$$(2n + \frac{1}{2})\pi < |(2n + \frac{1}{2})\pi - L| + |0 - L| < \frac{1}{2}$$

이라는 결론이 나오는데, n이 자연수이므로 모순이다. 따라서 $\lim_{x \to 0^+} f(x)$는 존재하지 않는다.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

이라는 것은 모든 $\varepsilon > 0$에 대하여 상응하는 $N > 0$이 존재하여

$$x > N \quad \to \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

이다. 즉, x가 충분히 커지면 $f(x)$가 L에 가까워진다는 생각과 일치한다.

문제 7. *$x \to -\infty$일 경우의 명제를 작성해보자.*

모든 $\varepsilon > 0$에 대하여 상응하는 $N > 0$이 존재하여 $x < -N$이면 $|f(x) - L| < \varepsilon$이 된다.

문제 8.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

를 $\varepsilon - \delta$를 이용해 표현하여라.

모든 $M > 0$에 대하여 상응하는 $N > 0$이 존재하여 $x < -N$이면 $f(x) < -M$이다.

문제 9. *연속함수 f가 $[0, 1]$에서 정의되고, $f(0) = 1, f(1) = 0$이다. 이때, $f(x_0) = x_0$인 $x_0 \in [0, 1]$가 존재함을 보여라.*

함수 $g(x)$를 $g(x) = f(x) - x$이라 하자. 그러면 g 역시도 연속함수이고, IVT에 의하여 $g(0) = -1$, $g(1) = 1$이므로 $g(x_0) = 0$인 $x_0 \in [0, 1]$이 존재한다. 따라서 $f(x_0) = x_0$인 $x_0 \in [0, 1]$이 존재한다.

문제 10. *Show that*

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{1 + x + x^2} = 1$$

.

$$\begin{aligned} |\sqrt{1+x+x^2}-1| &= \left|\frac{x+x^2}{\sqrt{1+x+x^2}+1}\right| \\ &\le |x|\cdot\frac{|1+x|}{\sqrt{1+x+x^2}+1} \\ &\le \frac{2}{3}\cdot|x| \end{aligned}$$

이 $|x|\le 1$일 때 성립함을 확인해줄 수 있다. 그러면 $\delta=\min\{1,\varepsilon\}$이라 둘 경우 $|x-0|<\delta$이면

$$|\sqrt{1+x+x^2}-1|\le\frac{2}{3}\cdot|x|<\varepsilon$$

이 성립하게 되므로,

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{1+x+x^2}=1$$

이다.

문제 11. *If*

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=2$$

and

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=1$$

, find

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]$$

.

limit law에 의하여

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]^2-\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]^2=\lim_{x\to a}4f(x)g(x)=2^2-1^2$$

이므로,

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=\frac{3}{4}$$

이다.

문제 12. *Find all values of a such that f is continuous on $\mathbb{R}$.*

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x\le a) \\ x^2 & (x>a) \end{cases}$$

f가 continuous하지 않을 케이스는 $x=a$에서밖에 없다. 따라서 $a+1=a^2$이면 f가 $\mathbb{R}$에서 continuous 이게 되므로,

$$a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

이다.

문제 13. *Define a real-valued function f as follows. If r is rational, then $f(r)=1$; if r is irrational, then $f(r)=0$. Show that f is discontinuous at every real number.*

f가 만약 $x=a$에서 continuous라고 가정하자. 그러면 $|x-a|<\delta$이면 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$인 δ가 모든

$\varepsilon > 0$에 상응하게 존재한다. $\varepsilon = 1/2$라고 하면, $(a-\delta, a+\delta)$에서 유리수 x_1과 무리수 x_2를 골랐을 때

$$1 = |f(x_1) - f(x_2)| \le |f(x_1) - f(a)| + |f(x_2) - f(a)| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

이므로 모순이 생긴다. 따라서 f는 모든 점에서 discontinuous이다.

문제 14. *Find the following value.*

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x}+1)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x}+1}{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x}+1} \\ &= \frac{5}{4}\end{aligned}$$

이다.

문제 15. *Show that*

$$\lim_{x\to 1} x^2 + \sqrt{x} + \sin(\pi x) = 2$$

by $\varepsilon - \delta$*.*

$x \neq 1$일 때

$$\begin{aligned}|x^2 + \sqrt{x} + \sin(\pi x) - 2| &\le |x^2 - 1| + |\sqrt{x} - 1| + |\sin(\pi x) - 0| \\ &\le |x+1||x-1| + \frac{1}{\sqrt{x}+1}|x-1| + \left|\frac{\sin(\pi(1-x))}{1-x}\right| |x-1|\end{aligned}$$

이다. 이때 그림을 통하여 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$임을 확인해줄 수 있으므로 $|x-1| < \delta_1$일 때 $\left|\frac{\sin(\pi(1-x))}{1-x}\right| < 2$일 것이다. 그렇다면 $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{5}, \delta_1\}$이라 둘 경우

$$|x^2+\sqrt{x}+\sin(\pi x)-2| \le |x+1||x-1| + \frac{1}{\sqrt{x}+1}|x-1| + \left|\frac{\sin(\pi(1-x))}{1-x}\right| |x-1| \le 2|x-1| + |x-1| + 2|x-1| < \varepsilon$$

이 성립하므로,

$$\lim_{x\to 1} x^2 + \sqrt{x} + \sin(\pi x) = 2$$

이다.

문제 16. *Suppose that f is a real-valued function on $\mathbb{R}$ which satisfies $f(x+y) = f(x) + f(y)$ for all $x, y \in \mathbb{R}$, and which is continuous at 0. Show that there exists $\lambda \in \mathbb{R}$ such that $f(x) = \lambda x$ for all $x \in \mathbb{R}$.*

$f(1) = \lambda$라 한다면 자연수 n에 대하여 $f(n) = f(1) + f(1) + \cdots + f(1) = n\lambda$가 성립한다. 또한 $f(0+0) = f(0) + f(0)$이므로 $f(0) = 0$이고, $f(n) + f(-n) = f(0) = 0$이므로 정수에 대해서는 $f(x) = \lambda x$가 성립한다. 또한 n과 서로소인 자연수 p에 대하여

$$f(n) = f(\frac{n}{p}) + \cdots + f(\frac{n}{p})$$

이므로, $f(\frac{n}{p}) = \frac{n}{p}$이고, 유리수에 대해서도 $f(x) = \lambda x$가 성립한다. 이때 f는 0에서 continuous하다고 한다. 그러면

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = \lim_{h\to 0} f(x) + f(h) = f(x) + f(0) = f(x)$$

이므로, f는 전체 x에서 continuous이다. $x \neq 0$에서 $g(x) = f(x)/x$ 역시도 연속함수이다. 따라서 g는 x가 유리수일 때 그 값이 λ로 고정된다. 이때 만약 a가 무리수일 때 $g(a) \neq \lambda$라고 하면,

$$\varepsilon = \frac{|g(a) - \lambda|}{2}$$

에 대하여 상응하는 δ가 존재하여 $|x - a| < \delta$면 $|g(x) - g(a)| < \varepsilon$이 된다. 그런데 x를 유리수로 택하면 $|g(x) - g(a)| = |g(a) - \lambda| = 2\varepsilon$이므로, 모순이 된다. 따라서 $g(a) = \lambda$가 되므로, 전체 실수에서 $f(x) = \lambda x$ 이다.

문제 17. *Find the following value.*

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{4-x}-1}{\sqrt{7-x}-2}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{4-x}-1}{\sqrt{7-x}-2} &= \lim_{x\to 3} \frac{(3-x)(\sqrt{7-x}+2)}{(3-x)(\sqrt{4-x}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{7-x}+2}{\sqrt{4-x}+1} = 2\end{aligned}$$

문제 18. *Find the following value.*

$$\lim_{x\to 0} x\sin(2x[\frac{1}{x^2}])$$

$$-x \leq x\sin(2x[\frac{1}{x^2}]) \leq x$$

가 성립하고 $\lim_{x\to 0} -x = \lim_{x\to 0} = 0$이므로, squeeze theorem에 의하여

$$\lim_{x\to 0} x\sin(2x[\frac{1}{x^2}]) = 0$$

이다.

문제 19. *Show that*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\cos x - \sqrt{9x^4 - 3x^3 + 1}}{x^2 + \cos x} = -3$$

.

$x > 100$일 때

$$\begin{aligned}\left|\frac{x\cos x - \sqrt{9x^4-3x^3+1}}{x^2+\cos x} + 3\right| &= \frac{|-3x^2 + 3\cos x + x\cos x - \sqrt{9x^4-3x^3+1}|}{x^2+\cos x} \\ &\leq \frac{|-3x^2 - \sqrt{9x^4-3x^3+1}| + |3\cos x + x\cos x|}{\frac{1}{2}x^2} \\ &\leq \frac{2}{x^2}\left(\left|\frac{-3x^3+1}{-3x^2+\sqrt{9x^4-3x^3+1}}\right|\right) + \frac{6}{x^2} + \frac{2}{x} \\ &\leq \frac{6x}{10x^2} + \frac{6}{x} + \frac{2}{x} < \frac{10}{x}\end{aligned}$$

이 성립한다. 따라서 주어진 $\varepsilon > 0$에 대하여 만약 $x > \max\{100, \frac{10}{\varepsilon}\}$이라면

$$\left|\frac{x\cos x - \sqrt{9x^4-3x^3+1}}{x^2+\cos x} + 3\right| \leq \frac{10}{x} < \varepsilon$$

이므로, 극한의 정의에 의해 주어진 식의 극한값이 -3임을 확인할 수 있게 된다.

문제 20. *Find the following value.*

$$\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+3x})$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+3x}) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}-x}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{3}{-\sqrt{1+\frac{3}{x}}-1} = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

가 성립한다. $x\to-\infty$인 것에 유의하자.

문제 21. *Find the following value.*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5^x-4^x}{3^x-2^x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5^x-4^x}{3^x-2^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\frac{5}{3})^x-(\frac{4}{3})^x}{1-(\frac{2}{3})^x} = \infty$$

이다. 자세한 증명 역시도 $\varepsilon-\delta$를 이용하여 수행해줄 수 있다.

문제 22. *Find the following value.*

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3} &= \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x^2}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

이 성립한다. 삼각함수의 극한은 그림을 통해 보여줄 수 있는데, 중간고사 범위에서는 어차피 마음껏 사용 가능하니 시험을 준비하는 입장에서는 걱정할 필요 없다.

문제 23. *Find the following value.*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x+\pi}$$

$x\to-\infty$임에 따라 $|\cos x|\le 1$이고 $x+\pi\to-\infty$이므로,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x+\pi} = 0$$

이다.

문제 24. *Find the following value.*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}-x}{x+1}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}-x}{x+1} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-1}{1+\frac{1}{x}}\\ &= -3\end{aligned}$$

이다.

문제 25. *Find the following value.*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\sec x - \tan x)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\sec x - \tan x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\sec x + \tan x} = 0$$

이 성립한다.

문제 26. *Find the following value.*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3+1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{9-\frac{1}{x^5}}}{1+\frac{1}{x^3}} = -3$$

문제 27. *Define a real-valued function f on $(0,1)$ as follows. If r is rational and $r = p/q$ in lowest terms, then $f(r) = 1/q$; if r is irrational, then $f(r) = 0$. Show that f is continuous at every irrational point of $(0,1)$, and that f is discontinuous at every rational point of $(0,1)$.*

먼저 f가 무리수 점에서는 continuous임을 보여보자. 어떤 $\varepsilon > 0$을 세팅하면, $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$이라 둘 경우 N은 유한하므로, N 이하의 자연수들을 분모로 하는 0과 1 사이의 유리수들의 집합을 A라 한다면 $x \in Q - A$인 x는 분모가 N보다 큰 유리수이므로, $f(x) < 1/N < \varepsilon$임을 알 수 있다. 또한 A는 유한집합이다. 그러므로 주어진 무리수 x에 대하여 $s = \min\{|x-y| : y \in A\}$라고 두면 s는 0 초과의 정해진 수이다. 그러면 $\delta = s$라 둘 경우 $(x-\delta, x+\delta)$ 사이에 들어 오는 모든 수 y는 무리수이거나 분모가 N보다 큰 무리수이며, 이들에 대해서는 $f(y) < 1/N < \varepsilon$이다. 따라서 $|x-y| < \delta$이면 $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$이 성립하므로, f는 무리수 x에서 continuous이다. 반면 유리수일 때는, $f(x) = 1/q$라고 둘 경우 $\varepsilon = 1/2q$라고 두면 x 주변의 무리수 y에 대해서는 y가 아무리 x에 가까워도 $f(y) = 0$으로 $f(x)$와의 차이가 ε보다 커지는 상황이 나타나기에, discontinuous이다.

문제 28. *Suppose that f and g are continuous real-valued functions on A and that $h(x) = \max(f(x), g(x))$, for $x \in A$. Show that h is continuous.*

함수 f가 continuous이면 $|f|$도 continuous임을 먼저 보여보자. f가 x에서 continuous이면 $\varepsilon > 0$에 대하여 $\delta > 0$가 상응하게 존재하여 $|y-x| < \delta$이면 $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$이다. $|f|$는

$$||f(x)| - |f(y)|| < |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

이 성립하므로, $|y-x| < \delta$이면 $||f(x)| - |f(y)|| < \varepsilon$이 되기에 $|f|$는 continuous이다. 그런데

$$h(x) = \max(f(x), g(x)) = \frac{|f(x) - g(x)| + |f(x) + g(x)|}{2}$$

이고 f, g가 continuous이면 h도 그들의 절댓값과 사칙연산으로 이루어지는 함수이기에 h도 continuous이다.

문제 29. *Show that $n^{\frac{1}{n}} \to 1$ as $n \to \infty$.*

모든 $\varepsilon > 0$에 대하여 $M > 0$이 존재하여 $n > M$이면 $|n^{\frac{1}{n}} - 1| < \varepsilon$임을 보여보자. 이때 n은 자연수일 것이므로 $n^{\frac{1}{n}} > 1$이므로,

$$n^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n < (1+\varepsilon)^n$$

임을 보이면 된다. 그러면 $n \geq 2$일 때

$$(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 > n \cdot \frac{(n-1)}{2}\varepsilon^2$$

이므로, $n > \dfrac{2}{\varepsilon^2} + 1$이라면

$$(1+\varepsilon)^n > n \cdot \frac{(n-1)}{2}\varepsilon^2 > n$$

이 성립한다. 따라서 $M = \max\{2, \left[\dfrac{2}{\varepsilon^2}\right] + 1\}$이라 둔다면 $n > M$일 때 $0 < n^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon$이므로,

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$$

이다.

문제 30. *Let's think the function*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \in \mathbb{Q}) \\ \sin x & (x \notin \mathbb{Q}) \end{cases}$$

defined on $x \in (0,\pi)$. Find the all points or intervals that f is continuous.

$x \in (0,\pi)$에 대하여 $\sin x > 0$이다. $x = a$일 때 f가 continuous라 가정한다면, $\varepsilon = \dfrac{\sin a}{2}$에 대하여 상응하는 $\frac{\sin a}{2} > \delta > 0$이 존재하여

$$|x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \frac{\sin a}{4}$$

이게 된다. 그러면 구간 $(a-\delta, a+\delta) \cap (0,\pi)$에서 유리수 x_1을 고르면 $|f(x_1) - f(a)| < \dfrac{\sin a}{4}$이고, 무리수 x_2를 고르면 $|f(x_2) - f(a)| < \dfrac{\sin a}{4}$이므로 삼각부등식에 의하여

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\sin(x_2)| < |f(x_1) - f(a)| + |f(x_2) - f(a)| < \frac{\sin a}{2}$$

여야 한다. 그런데

$$|\sin(a)| = |\sin(a-x_2)\cos(x_2) + \cos(a-x_2)\sin(x_2)| \le |\sin(x_2)| + |\cos(x_2)||\sin(a-x_2)| \le |\sin(x_2)| + |x_2 - a|$$

이므로

$$\sin a - |x_2 - a| \le |\sin(x_2)| < \frac{\sin a}{2}$$

이다. 따라서

$$\sin a < 2|x_2 - a| < 2\delta$$

여야만 한다. 그런데 δ의 범위를 이것이 성립할 수 없게 잡았으므로, 모순이 된다. 따라서 이 함수는 $(0,\pi)$의 모든 점에서 discontinuous이다.

Chapter 2

Derivatives

문제 31. *행성 A에서 위로 쏘아올린 공의 고도는 시간 t에 대하여 함수*

$$f(t) = 30t - 6t^2$$

으로 주어진다고 하자. 공을 쏘아 올린지 시간 4가 되었을 때, 공의 수직방향 속력을 구하여라.

$f'(t) = 30 - 12t$이므로 $t = 4$일 때의 수직 방향 속력은 -18이다.

문제 32. *함수* $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ *에 대하여, 이 함수가 $x = 0$에서 differentiable함을 보여라.*

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

이므로, $x = 0$에서 f는 differentiable이다.

문제 33. *함수* $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ *는 $x = 0$에서 continuous하지만 differentiable하지는 않음을 보여라.*

$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0)$으로, f는 $x = 0$에서 continuous이다. 반면,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$$

는 극한값이 존재하지 않으므로, $x = 0$에서 differentiable하지는 않다.

문제 34. *n차함수 f는 항상 $n + 1$번 미분가능함을 보이고, $f^{(n+1)}(x)$를 구하여라.*

수학적 귀납법으로써 보이자. 먼저, 일차함수는 항상 두 번 미분가능하며, $n = 1$일 때가 이 경우이다. $n - 1$에 대해 참이라고 생각하면, n차함수 f는 다항함수이므로 미분 가능하며, 이를 미분할 경우 $n - 1$차 함수가 되고, n번 더 미분 가능하다. 따라서 n차함수는 총 $n + 1$번 미분가능하므로, 명제가 성립한다. 또한 f를 $n + 1$번 미분하면 모든 항이 사라지게 되므로, $f^{(n+1)}(x) = 0$이다.

문제 35. *함수 $f(x) = x^2 + x^{-3.5} + 2$에 대하여, $f'(3)$의 값을 구하여라.*

$$f'(x) = 2x - 3.5x^{-4.5}$$

가 되므로, $f'(3) = 6 - \frac{7}{162\sqrt{3}}$이 된다.

문제 36.

$$\frac{d}{dx}(af(x)+bg(x))=af'(x)+bg'(x)$$

임을 보여라. 단, $f'(x)$와 $g'(x)$이 존재한다고 가정하며, a와 b는 상수이다.

$$\frac{d}{dx}(af(x)+b(g(x)))=\lim_{h\to 0}\frac{af(x+h)+bg(x+h)-af(x)-bg(x)}{h}=a\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+b\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

임이 성립한다. 따라서 f,g가 미분가능함을 고려하면

$$\frac{d}{dx}(af(x)+bg(x))=af'(x)+bg'(x)$$

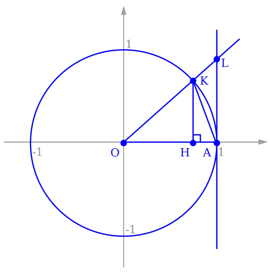
이다.

문제 37. *함수 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$을 differentiate하여라.*

$$f(x)=-\frac{2}{x^3},\quad x\neq 0$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$
$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta}=1$$
$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta-1}{\theta}=0$$
$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\frac{1}{2}$$

문제 38. *원점을 중심으로 하는 반지름 1인 원과 동경이 θ인 점들을 이은 직선을 묘사한 그림을 그려 위의 박스의 가장 윗 식을 증명하고, 나머지 식들을 limit law를 통해 증명하여라.*



각 KOH를 $\theta>0$라 두면 삼각형 KOA의 넓이는 $\frac{1}{2}\sin\theta$이며, 부채꼴 KOA의 넓이는 $\frac{1}{2}\theta$이다. 또한, 삼각형 OAL의 넓이는 $\frac{1}{2}\tan\theta$이다. 따라서 삼각형 넓이의 대소관계에 의하여

$$\sin\theta<\theta<\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

이다. 그러면

$$\cos\theta<\frac{\sin\theta}{\theta}<1$$

인데, $\theta \to 0^+$이면 $\cos\theta$와 1이 모두 1로 수렴하므로 squeeze theorem에 의하여

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

이다. 또한, θ의 성질에 의하여 $\sin(-\theta) = -\sin\theta$이므로, $\theta \to 0^-$에 대해서도 동일한 결론을 얻을 수 있다. 따라서

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

이다. 나머지는 아래와 같다.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta} = 1$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta - 1}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{-\sin^2\theta}{\theta(\cos\theta+1)} = -\lim_{\theta\to 0}\sin\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta+1} = 0$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2} = \lim_{\theta\to 0} -\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos\theta} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x\cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x\tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

문제 39. *나머지 다섯 개의 diferentiation을 증명하여 보여라.*

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x-h)-\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{-h}\cdot(-1) = -\cos(\frac{\pi}{2}-x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\csc x\cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x\tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\tan x}\right) = \frac{-\sec^2 x}{\tan^2 x} = -\csc^2 x$$

문제 40. *함수 $f(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$에 대하여, $x \neq 0$에서 $f'(x)$를 구하여라.*

$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

문제 41. *$\sin(x) + y = y^2\cos x$일 때, 점 $(0,0)$에서의 y'을 구하여라.*

impliit differentiation을 이용한다면

$$\cos x + \frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}\cos x - y^2\sin x$$

이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x + y^2\sin x}{2y\cos x - 1}$$

이다.

문제 42. *If $f(x)$ is defined by*

$$f(x) = \lim_{t \to x} \frac{\sec t - \sec x}{t - x}$$

, find the value of $f'(\pi/4)$.

$f(x) = (\sec)'(x) = \sec x \tan x$이다. 따라서 $f'(x) = \sec x \tan^2 x + \sec^3 x$이므로

$$f'(\pi/4) = 3\sqrt{2}$$

임을 알 수 있다.

문제 43. *Let's think the circle with radius 1 inscribed in the parabola $y = x^2$. Find the center of the circle.*

$y = x^2$의 대칭성에 의하여 내접하는 원의 중심은 $(0, a)$로 주어진다. 그러면 원의 방정식은 $x^2 + (y-a)^2 = 1$이므로,

$$2x + 2(y-a)\frac{dy}{dx} = 0$$

이므로 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y-a}$인데, 접점을 (b, b^2)이라 하면 $b^2 + (b^2 - a)^2 = 1$이고, $2b = -\frac{b}{b^2 - a}$이다. 따라서 $b^2 - a = -\frac{1}{2}$이며 $b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$다. 따라서 $a = \frac{5}{4}$이다. 즉 원의 중심은 $(0, \frac{5}{4})$이다.

문제 44. *If $f(x) = \dfrac{x^{2021} + x^{2020} + 2}{1 + x}$, calculate $f^{(2021)}(3)$. Express your answer using factorial notation.*

$$f(x) = x^{2020} + \frac{2}{1+x}$$

이므로,

$$f'(x) = 2020x^{2019} - \frac{2}{(1+x)^2}$$

$$f''(x) = 2020 \cdot 2019x^{2018} + 2 \cdot (-1)^2 \cdot 2! \frac{1}{(1+x)^3}$$

$$f^{(3)}(x) = 2020 \cdot 2019 \cdot 2018x^{2017} + 2 \cdot (-1)^3 \cdot 3! \cdot \frac{1}{(1+x)^4}$$

이다. 그러면 f를 2021번 미분한다면, 앞의 다항함수 부분은 사라지며, 가장 뒷부분만 남아

$$f^{(2021)}(x) = 2 \cdot (-1)^{2021} \cdot 2021! \cdot \frac{1}{(1+x)^{2022}}$$

이 될 것이다. $x = 3$인 상황이라면,

$$f^{(2021)}(3) = -2021! \cdot \frac{1}{2^{4043}}$$

이다.

문제 45. *For differentiable function f, the following holds:*

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad (x, y > 0)$$

If $f'(1) = 3$, find the value of $f'(3)$.

$y = 1 + \frac{h}{x}$라고 두면

$$f(x+h) = f(x) + f(1 + \frac{h}{x})$$

이다. 그리고 $f(1) = f(1) + f(1)$이므로, $f(1) = 0$이다. 그러면

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+\frac{h}{x})-f(1)}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{f'(1)}{x} = \frac{3}{x}$$

이다. 따라서 $f'(3) = 1$이다.

문제 46. *Find the two points on the curve $y = x^4 - 2x^2 - x$ that have a common tangent line.*

공통접선을 $y = mx + b$라고 하면,

$$x^4 - 2x^2 - (m+1)x - b$$

가 $(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$ 꼴일 경우 두 점이 공통된 접선을 가지게 된다. 그러면 x^3 항이 없으므로, 이는 $(x^2-1)^2$의 제곱임을 알 수 있고, $m = -1$, $b = -1$이다. 따라서 $y = -x - 1$이 원하는 공통접선이며, 교점은 $(1, -2)$와 $(-1, 0)$이다.

문제 47. *A container in the shape of an inverted cone has height 10cm and radius 4cm at the top. It is partially filled with the water that evaporates through the surface of the water. If we pour the water into the container at a rate of 2 cm^3/min, then the height of the liquid decreases at a rate of 0.5cm/min when the height is 6cm. If our goal is to keep the liquid at a constant height of 6cm, at what rate should we pour the water into the container?*

시간에 따른 수면의 높이를 $h(t)$라고 하자. 그러면 $h = 6$일 때 $V = \frac{4}{75}\pi h^3$에 대하여, 상수 k가 존재하여 $\frac{dV}{dt} = 2 - k\cdot\frac{4}{25}\pi h^2$이라면 $\frac{dh}{dt} = -0.5$라는 것이다.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{25}\pi h^2\cdot\frac{dh}{dt}$$

이어야 하므로, $h = 6$에서라면

$$2 - k\frac{144}{25}\pi = -\frac{72}{25}\pi$$

이고

$$k = \frac{25}{36\pi} + \frac{1}{2}$$

임을 알 수 있다. 그러면

$$k\cdot\frac{144}{25}\pi = 4 + \frac{72}{25}\pi$$

만큼을 넣어 주어야만 수면을 유지시킬 수 있다.

문제 48. *Find the limits of followings.*

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{(x^2+1)\sec x}-1}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(a+x)-\sin^2(a)}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+t}-2}{t}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin x - \sin 1}{\sqrt{x}-1}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x}$

(1) 함수 $f(x) = \sqrt{(x^2+1)\sec x}$의 $x = 0$에서의 미분계수이다.

$$f'(x) = \frac{1}{2}((x^2+1)\sec x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x\sec x + (x^2+1)\sec x \tan x)$$

이므로, $f'(0) = 0$이다.

(2) 함수 $f(x) = \sin^2(a+x)$의 $x = 0$에서의 미분계수와 같다. 따라서, 이 값은 $2\sin a \cos a$이다.

(3) 함수 $f(x) = (8+x)^{\frac{1}{3}}$의 $x = 0$에서의 미분계수와 같다.

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot (8+x)^{-\frac{2}{3}}$$

이므로, 원하는 값은 $\frac{1}{12}$이다.

(4) 분모와 분자에 모두 $\sqrt{x}+1$을 곱한 다음 생각하여 보자. 그러면 이 극한값은 $\sin x$의 1에서의 미분계수에 2를 곱한 값임을 쉽게 확인해줄 수 있다. 즉 $2\cos 1$이 원하는 값이다.

(5) 함수 $y = \frac{1}{2+x}$의 $x = 0$에서의 미분계수이다. 따라서 원하는 값은 $-\frac{1}{4}$임을 알 수 있다.

문제 49. *Find the limits of followings.*

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (\frac{3}{x^2} - \cos\frac{1}{x})(1+\sin\frac{1}{x})$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} [\sin(x+\frac{1}{x}) - \sin x]$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - 0.5}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\pi/6}}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

(1) 앞서 본문에서 $\frac{1}{2}$이 이 값임을 다루었다.

(2) 앞의 괄호 부분은 -1로, 뒤의 괄호 부분은 1로 수렴하기에 극한값은 -1이다.

(3)

$$\sin(x+\frac{1}{x}) - \sin x = \sin x(\cos\frac{1}{x} - 1) + \cos x(\sin\frac{1}{x})$$

에서, $\sin x$와 $\cos x$는 -1과 1 사이의 수이지만 $x \to \infty$임에 따라 $\cos\frac{1}{x}$가 1로 수렴하고, $\sin\frac{1}{x}$가 0으로 수렴하므로, 이 극한값은 0이 된다.

(4)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - 0.5}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\pi/6}} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \sin\frac{\pi}{6}}{x - \frac{\pi}{6}} \cdot \left(\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\pi/6}}{x - \frac{\pi}{6}}\right)^{-1} \\
&= \cos\frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}(\frac{\pi}{6})^{-\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{(1-\cos x)^2}\cdot\left(\frac{(1-\cos x)}{x^2}\right)^2\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

문제 50. *Find the following limit.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sec x+\tan x-1}{x}$$

함수 $f(x)=\sec x+\tan x$를 미분하여 $f'(0)$의 값을 구하면 이 극한값과 같다. $f'(x)=\sec x\tan x+\sec^2 x$이므로 $f'(0)=0+1=1$이다. 따라서 원하는 극한값은 1이다.

문제 51. *For nonzero differentiable function f, the following holds:*

$$f(x+y)=f(x)f(y)$$

Show that the function

$$g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

is constant.

먼저, $f(0+0)=f(0)f(0)$이므로 $f(0)$은 0 혹은 1이다. 그러나 $f(0)=0$이라면 $f(x)=f(x)f(0)=0$이므로, f가 nonzero라는 데에 모순된다. 따라서 $f(0)=1$이다.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)(f(h)-f(0))}{h}=f(x)f'(0)$$

이 성립하므로, $g(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}=f'(0)$이 성립하고 g는 constant가 된다.

문제 52. *Let $y=g(x)$ is an inverse function of $y=f(x)$. Express $\dfrac{dg}{dx}$ in terms of f.*
Hint : Let's think the composite function $(f\circ g)$.

$f(g(x))=x$이므로, 양변을 x로 미분하면

$$f'(g(x))\cdot g'(x)=1$$

이고,

$$\frac{dg}{dx}=\frac{1}{f'(g(x))}=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

임을 알 수 있다.

문제 53. *Let $y=g(x)$ is an inverse function of $y=f(x)$. Express $\dfrac{d^2g}{dx^2}$ in terms of f.*

$$\begin{aligned}\frac{d^2g}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dg}{dx}\right)\\ &= \frac{-f''(f^{-1}(x))\cdot\frac{dg}{dx}}{(f'(f^{-1}(x)))^2}\\ &= -\frac{f''(f^{-1}(x)}{(f'(f^{-1}(x)))^3}\end{aligned}$$

문제 54. *Let's think the function*

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\in\mathbb{Q}) \\ 0 & (x\notin\mathbb{Q}) \end{cases}$$

. Prove that f is differentiable at 0.

$$0\le\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|\le\frac{x^2}{|x|}=|x|$$

이 성립하며, $\lim_{x\to0}0=\lim_{x\to0}|x|=0$이므로, squeeze theorem에 의하여

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$$

이다. 따라서 f는 $x=0$에서 differentiable이다.

문제 55. *Let $\alpha>1$. If f satisfies $|f(x)|\le|x|^\alpha$, prove that f is differentiable at 0.*

먼저, 이 함수는 $x=0$에서 $|f(0)|\le0^\alpha$이므로, $f(0)=0$이다.

$$0\le\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|\le\frac{|x|^\alpha}{|x|}=|x|^{\alpha-1}$$

이 성립하며, $\lim_{x\to0}0=\lim_{x\to0}|x|^{\alpha-1}=0$이므로, squeeze theorem에 의하여

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$$

이다. 따라서 f는 $x=0$에서 differentiable이다.

문제 56. *Let's think the function*

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x\neq0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

. Show that this function is differentiable at $x=0$ and find the value of $f'(0)$. You may use $\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=0$.

$$\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=\lim_{h\to0^+}\frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h}=0$$

이며,

e^x는 증가함수이므로 $e^{-\frac{1}{h}}\ge e^{-\frac{1}{h^2}}>0$임을 감안하면, squeeze theorem에 의하여

$$\lim_{h\to0^+}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}=0$$

임을 알 수 있다. 또한 여기서

$$[\lim_{h\to0^+}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{-h}=0=\lim_{h\to0^-}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}$$

이므로,

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=0$$

임을 알 수 있다. 따라서 f는 $x=0$에서 differentiable이고 $f'(0)=0$이다.

문제 57. *Polynomial $f(x)$ satisfies*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy - 1$$

for all real number x, y. If

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f'(x)}{x^2 - 1} = 14$$

, find the value of $f'(0)$.

주어진 식에 $x = y = 0$을 넣으면 $f(0) = 2f(0) - 1$이 되며, $f(0) = 1$임을 알 수 있다.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) + 2xh - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} + 2x = f'(0) + 2x$$

이고, 이로부터 $f(x) = x^2 + f'(0)x + 1$꼴임을 알 수 있다. 그러면

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f'(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 + (f'(0) - 2)x + (1 - f'(0))}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x + f'(0) - 1}{x + 1} = 14$$

이어야만 한다. 따라서 $f'(0) = 28$임을 알 수 있다.

문제 58. *Find the value of*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x - \sin x}$$

$x - \sin x = v$라고 두어 보자. 그러면 $x \to 0$이면 $v \to 0$이다.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x - \sin x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(v + \sin x) - \sin(\sin x)}{v} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)(\cos v - 1) + \sin v \cos(\sin x)}{v} \\
&= \lim_{x\to 0} \left[\sin(\sin x) \cdot \frac{\cos v - 1}{v} + \cos(\sin x) \cdot \frac{\sin v}{v}\right] \\
&= 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1
\end{aligned}$$

문제 59. *The function $f(x)$ is differentiable at $x = 1$ and $f'(1) = 2$. Find the value of*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(2 - \cos x) - f(1)}{x^2}$$

.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{f(2 - \cos x) - f(1)}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{f(2 - \cos x) - f(1)}{1 - \cos x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \\
&= f'(1) \cdot \frac{1}{2} = 1
\end{aligned}$$

문제 60. *The function $f(x)$ satisfies*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy$$

for all x and y. When $f'(0) = 5$, what is the value of $f'(2)$?

$x = y = 0$을 대입하면 $f(0) = 2f(0)$이므로 $f(0) = 0$이다. 그러면

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(f(h)-f(0))+3xh}{h}=3x+f'(0)$$

임을 알 수 있으므로, f는 모든 x에서 미분가능하며 $f'(x)=3x+5$이다. 따라서 $f'(2)=11$이다.

Chapter 3

Applications of Differentiation

문제 61. *local minimum일 때에 대하여, Fermat's theorem을 증명하여라.*

만약 $f(c)$가 local minimum이라면 c 주변에서 $f(x) \geq f(c)$가 성립한다. 그렇다면 충분히 작은 $h > 0$에 대하여,

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

이므로

$$f'(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

이다. 반면

$$f'(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c-h) - f(c)}{h} \leq 0$$

이어야만 하므로, $f'(c)$가 존재한다면 그 값은 0이어야 한다.

문제 62. *만약 (a, b)에서 $f'(x) = 0$이 성립한다면, f가 (a, b)에서 상수함수임을 증명하여라.*

만약 f가 (a, b)에서 상수함수가 아니라고 해보자. 그러면 $f(x_1) \neq f(x_2)$인 $a < x_1 < x_2 < b$가 존재한다. 구간 $[x_1, x_2]$에서 f는 연속함수이며 (x_1, x_2)에서 미분가능하기에, MVT를 이용하면

$$0 \neq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0$$

인 $c \in (x_1, x_2)$가 존재하게 된다. 따라서 모순이 생기고, f는 상수함수여야만 한다.

문제 63. *f가 local minimum이지만 $f'(c)$가 0이 아닌 경우가 있는가?*

함수 $y = |x|$는 $x = 0$에서 local minimum 값 0을 가지지만, $f'(0)$은 정의되지 않는다.

문제 64. *concavity가 바뀌면 항상 $f''(x) = 0$이어야 하는가? 그렇다면 증명하고, 아니면 반례를 들어라.*

함수 $y = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ -x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ 에서 $x = 0$ 기준으로 concavity가 바뀌지만, $f''(0)$은 존재하지 않는다.

문제 65. *함수*

$$f(x) = \frac{3^x}{3^x + 3^{-x}}$$

의 horizontal asymptote에 대하여 분석해 보아라.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3^x}{3^x + 3^{-x}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x}{3^x+3^{-x}}=0$$

이므로, $y=0$과 $y=1$이 horizontal asymptote다.

문제 66. *함수 $y=3x^2$의 antiderivative를 하나 구해보아라.*

함수 $y=x^3+2021$을 미분하면 $3x^2$가 등장한다. 따라서 이것이 antiderivative 중 하나이다.

문제 67. *The function f defined on $x>0$ is always differentiable and satisfies*

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$$

. Then, find the value of

$$\lim_{x\to\infty}(f(x+1)-f(x))$$

.

f는 항상 미분 가능하기에 평균값 정리를 적용할 수 있는 상황이 된다. 따라서 $[x,x+1]$에서 f가 연속이고 $(x,x+1)$에서 f가 미분가능함을 이용한다면 평균값 정리에 의해

$$f(x+1)-f(x)=f'(c)$$

인 $c\in(x,x+1)$이 존재한다. 이때 $x\to\infty$라면 $c\to\infty$이므로,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(f(x+1)-f(x))&=\lim_{x\to\infty}f'(c) &&(3.1)\\ &=\lim_{c\to\infty}f'(c)=0 &&(3.2)\end{aligned}$$

이다.

문제 68. *Show that $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$ for all real number x,y.*

먼저 $x=y$일 경우에는 양변이 모두 0이므로 성립함이 자명하다. 따라서 $x\ne y$인 경우만 고려하면 되는데, x와 y의 자리가 바뀌어도 식은 동일하므로 $y>x$임을 가정하자. 그러면 양변을 $|x-y|$로 나눌 경우

$$\frac{|\sin x-\sin y|}{|x-y|}=\left|\frac{\sin x-\sin y}{x-y}\right|\le 1$$

임을 보여주면 충분하다는 것이다. 그런데 $\sin x$는 연속함수이고 미분가능함수이므로, 평균값 정리를 적용하면

$$\frac{\sin x-\sin y}{x-y}=\cos(c)$$

인 $c\in(x,y)$가 존재한다. 그런데 $|\cos(c)|\le 1$이므로,

$$\left|\frac{\sin x-\sin y}{x-y}\right|\le 1$$

역시도 성립하게 된다.

문제 69. *Show that $ny^{n-1}(x-y)\le x^n-y^n\le nx^{n-1}(x-y)$ for all natural number n and $0\le y\le x$.*

만약 $x=y$라면 당연하게 성립하게 된다. 따라서 $y<x$인 경우만 고려하여 보자. 이 경우에는 양변을 $x-y$를 나눈다면

$$ny^{n-1}\le\frac{x^n-y^n}{x-y}\le nx^{n-1}$$

임을 보이면 충분하다. 그런데 사이에 있는 분수식은 거듭제곱함수의 연속성과 미분가능성을 고려한다면

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = nc^{n-1}$$

인 $c \in (y, x)$가 존재한다. 그런데 거듭제곱함수는 n이 자연수일 때 증가함수이므로, $y < c < x$라면

$$ny^{n-1} \le nc^{n-1} \le nx^{n-1}$$

역시도 성립하게 된다.

문제 70. *The function f defined on $(-1, 1)$ is even function and twice differentiable. If $f(0) = -1$ and $f''(x) < 2$, show that $f(x) \le x^2 - 1$.*

이 함수 f는 두 번 미분가능한 우함수임이 알려져 있다. 그러면

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(-h) - f(0)}{-h} \cdot (-1) \\ &= -f'(0) \end{aligned}$$

이므로 $f'(0) = 0$이게 된다. 그리고 함수 $g(x) = f(x) - x^2 + 1$을 생각하면,

$$g'(x) = f'(x) - 2x$$

$$g''(x) = f''(x) - 2 < 0$$

이 성립한다. 그리고 $g'(0) = f'(0) - 0 = 0$이므로, 함수 g는 $x = 0$에서 극대이다. 또한 구간 $(-1, 1)$에서 x가 음수면 f가 증가, x가 양수면 f가 감소하므로 최댓값은 $g(0) = f(0) + 1 = 0$이다. 따라서 이 구간에서

$$f(x) \le x^2 - 1$$

이 성립한다.

문제 71. *The function f is defined as below.*

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \cos \frac{1}{x} & (x \ne 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

In this case, show that f is twice differentiable for all real x, and determine whether f'' is continuous or not.

먼저 f'을 구하자. $x \ne 0$에서는 단순히 합성함수의 미분을 해주면 되고, $x = 0$에서는 미분계수의 정의를 이용하여 구해주면

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 \cos \frac{1}{x} + x^2 \sin \frac{1}{x} \quad (x \ne 0) 0 \quad (x = 0) \end{cases}$$

이다. 동일한 방식으로 $f''(x)$를 구해주면,

$$f''(x) = \begin{cases} 12x^2 \cos \frac{1}{x} + 6x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & (x \ne 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

이다. 그런데

$$\lim_{x\to 0} f''(x) = \lim_{x\to 0} 12x^2\cos\frac{1}{x} + 6x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

이 존재하지 않으므로, f''는 연속함수가 아니다.

문제 72. *For the function f, $f'(x)$ is increasing on $x > 0$ and $f(0) = 0$. Show that the function $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ is increasing for $x > 0$.*

그러면 $0 < x < y$인 x, y에 대하여

$$\frac{f(x)}{x} < \frac{f(y)}{y}$$

임을 보여주면 된다. 그러면 새로운 수 p를

$$p = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

이라고 두면

$$(y - x)p + xg(x) = yg(y)$$

임이 성립하는데, 만약 $g(y)$가 가장 크거나 작은 상황이 있다면, 예를 들어 크다면

$$yg(y) = (y - x)p + xg(x) < (y - x)g(y) + xg(y) = yg(y)$$

이 성립하므로 모순이 된다. 따라서 $g(y)$는 p와 $g(x)$ 사이에 있는 값이어야만 한다. 그런데 평균값 정리에 의하여

$$p = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c_1)$$

인 $x < c_1 < y$가 존재하며,

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c_2)$$

인 $0 < c_2 < x$가 존재한다. 그런데 f'이 증가함수이므로 $c_2 < x < c_2$로부터 $f'(c_2) < f'(c_1)$이고, $g(x) < p$이다. 따라서 대소관계는

$$g(x) < g(y) < p$$

이 된다. 만약 같은 값이 있다면 셋 모두 같은 값이 되므로 모순이다. 따라서 g는 증가함수이다.

문제 73. *By using differentiation, prove*

$$1 - \frac{1}{2}x^2 \le \cos x \le 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$

for $x \ge 0$.

먼저 함수 $g(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4$을 생각하여 보자. 그러면 $g(0) = 0$이 되고,

$$g'(x) = -\sin x + x - \frac{1}{6}x^3$$

$$g''(x) = -\cos x + 1 - \frac{1}{2}x^2$$

$$g^{(3)}(x) = \sin x - x$$

$$g^{(4)}(x) = \cos x - 1 \le 0$$

이다. 그런데 계산하여보면 $x = 0$을 넣으면 저 모든 미분계수들은 값이 0이 되는데, $g^{(4)}(x) \le 0$이므로 $x \ge 0$에서 $g^{(3)}(x) \le 0$이고, 같은 과정을 반복한다면 $g(x)$도 $x \ge 0$에서 $g(x) \le 0$이다. 따라서 $\cos x \le$

$1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4$이 성립하며, $g''(x)\le 0$이므로 $1-\frac{1}{2}x^2\le\cos x$이다. 따라서 주어진 부등식이 성립한다.

문제 74. *The non-constant function f is differentiable at $x=0$ and*

$$f(x+y)=f(x)f(y)-f(x)-f(y)+2$$

for all real number x,y. Show that f is differentiable for all real number.

먼저 $x=y=0$을 넣는다면

$$f(0)=f(0)^2-2f(0)+2$$

이므로 $f(0)=2$이거나 $f(0)=1$이어야 한다. 일반적인 상황에서는 $f(x)=f(x)f(0)-f(x)-f(0)+2$이므로, $f(0)=1$이라면 f가 상수함수가 되므로 모순이고 $f(0)=2$다. $y=h$를 넣고 $h\to 0$을 만들어보자. 그러면

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)-f(h)+2-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)(f(h)-f(0))}{h}-\frac{(f(h)-f(0))}{h}$$

이게 되므로,

$$f'(x)=f(x)f'(0)-f'(0)$$

으로써 도함수가 존재하게 된다. 따라서 f는 모든 실수에서 미분가능하다.

문제 75. *The function f is differentiable and*

$$1\le|f'(x)-f(x)|\le 2$$

. Show that

$$1<|f(1)-ef(0)|<2e$$

. You can use $\frac{d}{dx}e^x=e^x$.

함수 $g(x)=f(x)e^{-x}$를 고려하자. 그러면 만약 $0<x<1$이라면 $g'(x)=(f'(x)-f(x))e^{-x}$이므로

$$\frac{1}{e}<|f'(x)-f(x)||e^{-x}|=|g'(x)|<2$$

가 성립함을 알 수 있다. 그리고 f가 미분가능하므로 g는 $[0,1]$에서 연속이고 $(0,1)$에서 미분가능해지며,

$$g'(c)=\frac{g(1)-g(0)}{1-0}=\frac{f(1)}{e}-f(0)$$

인 $c\in(0,1)$이 존재한다. 그러면

$$\frac{1}{e}<|g'(c)|=\left|\frac{g(1)-g(0)}{1-0}\right|=|\frac{f(1)}{e}-f(0)|<2$$

이므로, 이를 정리하면

$$1<|f(1)-ef(0)|<2e$$

이다.

문제 76. *For the function*

$$f(x)=\begin{cases}x+2x^2\sin\frac{1}{x} & (x\ne 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

, show that f is differentiable function and find the value of $f'(0)$. Moreover, show that there is no open interval includes 0 such that f is increasing.

$x \neq 0$에서는 함수가 합성함수의 미분법에 의해 미분가능하며, $x = 0$에서는

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} 1 + 2h \sin \frac{1}{h} = 0$$

으로 존재하므로 미분가능하고, 그 도함수값은 0이다. 만약 0을 포함하는 열린 구간 중에서 f가 증가하는 구간이 있다고 해보자. 그러면 그 열린 구간에 포함되는 $(-h, h)$가 양수 $h > 0$에 대하여 있다. 그런데 h가 아무리 작아도 $\frac{1}{h\pi} < n$인 자연수 n을 잡아줄 수 있고, 구간 $(-h, h)$에 포함되는 수

$$x_1 = \frac{1}{2n\pi}, \quad x_2 = \frac{1}{2n\pi + \frac{1}{2}\pi}$$

을 생각해 본다면

$$f(x_1) = \frac{1}{2n\pi}$$

$$f(x_2) = \frac{1}{2n\pi + \frac{1}{2}\pi} + \frac{2}{(2n\pi + \frac{1}{2}\pi)^2}$$

이다. 그러면 $0 < x_2 < x_1$이지만

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{(2n\pi)(2n\pi + \frac{1}{2}\pi)} - \frac{2}{(2n\pi + \frac{1}{2}\pi)^2} = \frac{2n\pi + \frac{1}{2}\pi - 4n\pi - \pi}{(2n\pi)(2n\pi + \frac{1}{2}\pi)^2} < 0$$

이므로 $f(x_1) < f(x_2)$이다. 따라서 f는 이 구간에서 증가함수가 아니다.

문제 77. *The function $f(x)$ is defined on $(-a, a)$ for $a > 0$ and continuous at $x = 0$. Also, for some $0 < k < 1$, the followings hold.*

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(k^n x)}{x} = \lim_{x \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{f(x) - f(k^n x)}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(kx)}{x} = \alpha$$

Show that $f(x)$ is differentiable at $x = 0$ and express $f'(0)$ by k and α.

만약 $k^n x = h$라고 두면,

$$\alpha = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(kh)}{h} = \lim_{x \to 0} \frac{f(k^n x) - f(k^{n+1} x)}{k^n x}$$

이므로

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(k^n x) - f(k^{n+1} x)}{x} = k^n \alpha$$

가 성립한다. 이때

$$\sum_{r=0}^{n-1} \lim_{x \to 0} \frac{f(r^n x) - f(r^{n+1} x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(k^n x)}{x}$$

이므로

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{1-k} &= \sum_{r=0}^{n-1}\lim_{x\to 0}\frac{f(r^n x)-f(r^{n+1}x)}{x}\\ &= \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(k^n x)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)-f(k^n x)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\end{aligned}$$

이다. 따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하며, $f'(0)=\dfrac{\alpha}{1-k}$이다.

문제 78. *For fhe function $f(x)$ defined on $x>0$,*

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$$

. Show that f is differentiable at $x=1$ and evaluate $f'(3)$ when $f'(1)=3$.

$f(1)=f(1)-f(1)$이므로 $f(1)=0$임을 알 수 있다. 그러면 $y\neq 0$일 때 $x=y+h$라고 두고 $h\to 0$으로 하면,

$$\begin{aligned}f'(y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(y+h)-f(y)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+\frac{h}{y})-f(1)}{\frac{h}{y}}\cdot\frac{1}{y}\\ &= \frac{f'(1)}{y}=\frac{3}{y}\end{aligned}$$

이고, $y=3$이면

$$f'(3)=1$$

이다.

문제 79. *The function f and g is differentiable function. If*

$$x-f(x)\le g(x)\le x+f(x)$$

holds and $f(0)=0$, what is the value of $g'(0)$?

먼저 부등식으로부터 항상 $f(x)\ge 0$임을 알 수 있다. 그런데 $f(0)=0$이므로 f는 $x=0$에서 극소이고, f는 미분가능하므로 $f'(0)=0$이다. 또한, $0-f(0)\le g(0)\le 0+f(0)$이므로 $g(0)=0$이다.

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{g(h)-g(0)}{h}\le\lim_{h\to 0^+}\frac{h+f(h)-f(0)}{h}=1+f'(0)=1$$

이고,

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{g(h)-g(0)}{h}\ge\lim_{h\to 0^+}\frac{h-f(h)+f(0)}{h}=1-f'(0)=1$$

이므로 부등식에 의하여 $g'(0)=1$임을 알 수 있게 된다.

문제 80. *For two differentiable function $f(x)$, $g(x)$ and their product $h(x)=f(x)g(x)$, answer to the each question.*

(1) f and g is positive and have local maximums at $x=a$. Does h has local maximum at $x=a$?

(2) If f and g has their inflection points at $x = a$, does h has inflection point at $x = a$? Please give proofs or counterexamples.

(1) $x = a$ 근처에서 $f(x) > 0$과 $g(x) > 0$에 대하여 $f(x) < f(a)$, $g(x) < g(a)$가 성립하며, 이에 따라서

$$h(x) = f(x)g(x) < f(a)g(a) = h(a)$$

가 된다. 따라서 h 역시 $x = a$에서 극대가 된다.

(2) 함수 $f(x) = g(x) = x^3$이라 두면, 두 함수는 모두 $x = 0$에서 변곡점을 갖는다. 하지만 둘을 곱한 함수인 x^6은 $x = 0$에서 변곡점을 가지지 않는다.

문제 81. *The function $f(x)$ is polynomial. If $f(x) = \cos x$ has infinitely many solutions, show that $f(x)$ is constant function.*

만약 $f(x)$가 상수함수가 아니라고 해보자. 그러면 최고차항의 차수 n이 1차 이상이므로, 최고차항에 의하여

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

이 성립한다. 그런데 $f(x) = \cos x$이려면 $|f(x)| \le 1$이어야 하므로, 근이 있을 수 있는 영역은 어떠한 양수 $M > 0$에 대하여 $[-M, M]$으로 제한될 것이다. 따라서 이 영역 안에서 근이 무수히 많을 수 있을지를 생각하여 보자. 이 유한한 영역 안에서 함수 $\cos x$는 유한한 개수의 근만 가질 수 있을 것이며, 같은 이유로 $-\cos x$나 $\pm\sin x$ 역시도 유한한 개수의 근만을 가질 수 있다. 네 개의 함수에 대해 구간 $[-M, M]$에서 가질 수 있는 근의 최대 개수를 m이라고 하여 보자.

$f(x) = \cos x$인 x가 $[-M, M]$에서 무수히 많다고 가정하고, $n+m+2$개의 근을 크기 순서대로 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+m+2}$라고 하여 보자. 그러면 함수 $g(x) = f(x) - \cos x$에 대하여 $g(x_i) = 0$이 $i = 1, 2, \cdots, n+m+2$에 대하여 성립한다. 함수 g는 전체 실수에서 미분가능하고 연속하므로, $i = 1, 2, \cdots, n+m+1$에서 구간 $[x_i, x_i + 1]$에 대하여 롤의 정리를 적용해 본다면 $g'(c_i) = 0$인 $c_i \in (x_i, x_{i+1})$이 존재하므로

$$g'(x) = f'(x) + \sin x$$

에는 적어도 $n+m+1$개의 근이 존재하며, 각각은 서로 다르다. 이와 같은 방식으로 g를 계속적으로 미분하게 되면, $n+1$번 미분 후에는

$$g^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) + h(x)$$

꼴이고, $h(x)$는 $\pm\sin x$나 $\pm\cos x$ 꼴이 된다. 그런데 f는 n차함수이므로 $n+1$번 미분하면 0이 된다. 따라서 $h(x) = 0$에 적어도 $m+1$개 이상의 근이 있어야 하는데, $h(x)$의 꼴에 의해 여기에는 근이 m개 이하로 있다. 따라서 모순이 생기고, $f(x)$는 상수함수가 아닐 수 없다.

문제 82. *The function $y = f(x)$ is continuously differentiable and $f(0) = 0, f(1) = 1$.*

(1) Show that there is $0 \le c_1 < c_2 \le 1$ such that

$$\frac{1}{f'(c_1)} + \frac{1}{f'(c_2)} = 2$$

.

(2) Does there exist $0 \le c_1 < c_2 < c_3 \le 1$ satisfying

$$\frac{1}{f'(c_1)} + \frac{1}{f'(c_2)} + \frac{1}{f'(c_3)} = 3$$

always?

(1) 함수 f는 미분가능한 함수이므로 연속함수이고, 중간값 정리를 적용하면

$$f(x_1) = \frac{1}{2}$$

인 $0 < x_1 < 1$이 존재한다. 그러면 두 구간 $[0, x_1]$과 $[x_1, 1]$에서 미분가능함수 f에 대하여 각각 평균값 정리를 적용하여 준다면,

$$f'(c_1) = \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0} = \frac{1}{2x_1}$$

인 $c_1 \in (0, x_1)$과

$$f'(c_2) = \frac{f(1) - f(x_1)}{1 - x_1} = \frac{1}{2 - 2x_1}$$

인 $c_2 \in (x_1, 1)$이 존재하므로,

$$\frac{1}{f'(c_1)} + \frac{1}{f'(c_2)} = 2$$

인 $0 \le c_1 < x_1 < c_2 \le 1$이 존재하게 된다.

(2)함수 f는 미분가능한 함수이므로 연속함수이고, 중간값 정리를 적용하면

$$f(x_1) = \frac{1}{3}, f(x_2) = \frac{2}{3}$$

인 $0 < x_1 < x_2 < 1$이 존재한다. 그러면 세 구간 $[0, x_1]$과 $[x_1, x_2]$, $[x_2, 1]$에서 미분가능함수 f에 대하여 각각 평균값 정리를 적용하여 준다면,

$$f'(c_1) = \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0} = \frac{1}{3x_1}$$

인 $c_1 \in (0, x_1)$과

$$f'(c_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1}{3x_2 - 3x_1}$$

$$f'(c_3) = \frac{f(1) - f(x_2)}{1 - x_2} = \frac{1}{3 - 3x_2}$$

인 $x_1 < c_2 < x_2 < c_3 \le 1$이 존재하므로,

$$\frac{1}{f'(c_1)} + \frac{1}{f'(c_2)} + \frac{1}{f'(c_3)} = 3$$

인 $0 \le c_1 < x_1 < c_2 < x_2 < c_3 \le 1$이 존재하게 된다.

문제 83. *The function $y = f(x)$ is continuously differentiable and $f(0) = 0, f(1) = 1$.*

(1) Doese there exist $0 \le c_1 < c_2 < \cdots < c_n \le 1$ satisfying

$$f'(c_1) + f'(c_2) + \cdots + f'(c_n) = n$$

always?

(2) Show that there is $0 \le c_1 < c_2 < c_3 \le 1$ such that

$$\frac{1}{f'(c_1)} + \frac{2}{f'(c_2)} + \frac{1}{f'(c_3)} = 4$$

.

(1) 미분가능함수 f에서 $i = 1, 2, \cdots, n$에 대하여 구간 $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ 안에서 평균값 정리를 적용한다면,

$$f'(c_i) = \frac{f(\frac{i}{n}) - f(\frac{i-1}{n})}{\frac{1}{n}} = nf(\frac{i}{n}) - nf(\frac{i-1}{n})$$

인 $\frac{i-1}{n} < c_i < \frac{i}{n}$가 존재한다. 따라서

$$f'(c_1) + \cdots + f'(c_n) = \sum_{i=1}^{n} nf(\frac{i}{n}) - nf(\frac{i-1}{n}) = n(f(1) - f(0)) = n$$

인 $0 \le c_1 < c_2 < \cdots < c_n \le 1$이 존재한다.

(2) 함수 f는 미분가능함수이므로 연속함수이므로, 중간값 정리를 적용하면

$$f(x_1) = \frac{1}{4}, \quad f(x_2) = \frac{3}{4}$$

인 $0 < x_1 < x_2 < 1$이 존재한다. 이에 의해 나누어진 세 구간에서 평균값 정리를 적용하면

$$f'(c_1) = \frac{1}{4(x_1 - 0)}, \quad f'(c_2) = \frac{1}{2(x_2 - x_1)}, \quad f'(c_3) = \frac{1}{4(1 - x_2)}$$

인 $0 < c_1 < x_1 < c_2 < x_2 < c_3 < 1$이 존재하게 된다. 따라서

$$\frac{1}{f'(c_1)} + \frac{2}{f'(c_2)} + \frac{1}{f'(c_3)} = 4x_1 + (4x_2 - 4x_1) + (4 - 4x_2) = 4$$

가 성립한다.

문제 84. *If* $g'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(\sin x)}$ *and* $g(0) < 0$, *show that there is a positive root of* $g(x) = x$.

함수 $f(x) = g(x) - x$를 정의하자. 그러면

$$f'(x) = g'(x) - 1 = \frac{\sin^2(\sin x)}{\cos^2(\cos x)} = \tan^2(\sin x)$$

임을 알 수 있다. 그 다음 실수의 구간을

$$[0, \frac{\pi}{4}], [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}], \cdots$$

와 같이 나누자. 그러면 $[\frac{4n+1}{4}\pi, \frac{4n+3}{4}\pi]$ 형태의 구간에서는 $|\sin x| \ge 1/\sqrt{2}$이므로

$$f'(x) = \tan^2(\sin x) \ge \tan^2(\frac{1}{\sqrt{2}})$$

이다. 그러면 만약

$$f(\frac{4n+1}{4}\pi) > f(\frac{4n+3}{4}\pi) - \frac{\pi}{2} \cdot \tan^2(\frac{1}{\sqrt{2}})$$

이라면 평균값 정리에 의하여

$$f'(c) = \frac{f(\frac{4n+3}{4}\pi) - f(\frac{4n+1}{4}\pi)}{\frac{\pi}{2}} < \tan^2(\frac{1}{\sqrt{2}})$$

인 $c \in (\frac{4n+1}{4}\pi, \frac{4n+3}{4}\pi)$가 생길 것이므로, 모순이다. 따라서

$$f(\frac{4n+3}{4}\pi) \ge f(\frac{4n+1}{4}\pi) + \frac{\pi}{2} \cdot \tan^2(\frac{1}{\sqrt{2}}) = f(\frac{4n+1}{4}\pi) + L$$

이다. 또한 처음 구간이나 $[\frac{4n-1}{4}\pi, \frac{4n+1}{4}\pi]$ 형태의 구간에서는 $f'(x) \ge 0$임을 알고 있으므로

$$f(\frac{4n+1}{4}\pi) \ge f(\frac{4n-1}{4}\pi)$$

이다. 따라서 이들을 종합하면

$$f(\frac{4n-1}{4}\pi) + L \le f(\frac{4n+3}{4}\pi)$$

이 된다. 만약

$$m = \left[\frac{|g(0)|}{L}\right] + 1$$

이라고 둘 경우,

$$f(\frac{4m+7}{4}\pi) \ge f(\frac{4m+3}{4}\pi) + L \ge \cdots \ge f(\frac{3}{4}\pi) + (m+1)L \ge f(0) + (m+1)L > g(0) - g(0) = 0$$

이 된다. f는 연속함수이고 $f(0) = g(0) < 0$이며, $f(\frac{4m+7}{4}\pi) > 0$이기에, 중간값 정리에 의하여 $f(x) = 0$에는 양근이 있다. 즉, $g(x) = x$인 양근이 있다.

문제 85. *For real number $C_0, C_1, \cdots, C_n$, suppose that*

$$C_0 + \frac{C_1}{2} + \cdots + \frac{C_n}{n+1} = 0$$

. Show that the equation

$$C_0 + C_1x + \cdots + C_nx^n = 0$$

has at least one real root in $[0, 1]$.

함수 $g(x) = C_0x + \frac{1}{2}C_1x^2 + \cdots + \frac{1}{n+1}C_nx^{n+1}$를 생각하자. 그러면 $g(0) = g(1) = 0$이며, 다항함수이므로 구간 $[0, 1]$에서 연속이고 $(0, 1)$에서 미분가능하다. 따라서 평균값 정리를 적용하면

$$g'(c) = C_0 + C_1c + \cdots + C_nc^n = 0$$

인 $c \in (0, 1)$이 존재하며, 이에 따라

$$C_0 + C_1x + \cdots + C_nx^n = 0$$

은 구간 $[0, 1]$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

문제 86. *The function f is continuous on $[0, \infty)$ and differentiable on $(0, \infty)$. If $f(0) = 0$ and*

$$|f'(x)| \le |f(x)|$$

for $x > 0$, show that $f(x) = 0$ for $x \ge 0$.

어떤 양의 실수 c에 대하여 $f(c) \ne 0$이라고 가정하자. 그러면 구간 $[0, c]$에서 $f(x) = 0$인 점들을 모두 찾아준다고 생각하면, f는 연속함수이므로 그 점들 중 최댓값인 a가 존재하게 될 것이다. 그러면 $a \ne c$일 것이므로 $a < x_0 \le \min\{a + 1/2, c\}$인 x_0을 하나 택할 수 있고, 이때 $f(x_0) \ne 0$이 된다. 이제 0 이상의 정수 n에 대하여 집합 $(a, a + 1/2]$의 원소 x_n이 정해진다면, 평균값 정리에 의해 x_{n+1}을

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = f'(x_{n+1})$$

을 만족하는 구간 $(a, x_n) \subset (a, a + 1/2]$의 한 실수라고 귀납적으로 정의할 수 있다. 이때 조건에 의하여

$$|f(x_{n+1})| \ge |f'(x_{n+1})| = \frac{|f(x_n)|}{|x_n - a|} \ge 2|f(x_n)|$$

이고 $f(x_0) \ne 0$이므로, 수열 $|f(x_n)|$은 발산하게 된다. 반면 x_n은 항상 a와 x_0 사이에 존재하는 수이기에 $f(x_n)$의 절댓값은 f의 연속성에 의하여 특정 값으로 제한된다. 따라서 서로 모순이 생기게 되므로, $x \ge 0$

에서 $f(x) = 0$이다.

문제 87. *If differentiable function f satisfies*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

, express $f(3)$ by $f(1)$ and $f(4)$.

$$f(x+h) = \frac{f(2x)+f(2h)}{2}$$
$$f(x) = \frac{f(2x)+f(0)}{2}$$

이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \frac{f(2h)-f(0)}{2h} = f'(0) \end{aligned}$$

이 성립하게 된다. 따라서 $f(x) = f'(0)x + b$ 꼴이 되어야만 하며, $f(3) = 3x + b = \frac{1}{3}(x+b) + \frac{2}{3}(4x+b) = \frac{f(1)+2f(4)}{3}$이 성립한다.

문제 88. *For quartic function $y = f(x)$, it is known that the graph intercects with $y = k$ at four different points. Let x_1, x_2, x_3, x_4 are the x coordinates of each points, Find the value of*

$$\frac{x_1}{f'(x_1)} + \frac{x_2}{f'(x_2)} + \frac{x_3}{f'(x_3)} + \frac{x_4}{f'(x_4)}$$

.

f를 고정시킨 뒤 x_1, x_2, x_3, x_4를 k에 의해 변하는 값으로 생각하여 보자. 그러면 $f(x_i(k)) = k$가 $k = 1, 2, 3, 4$에 대하여 성립한다. 그러면 이를 미분한다면

$$f'(x_i)\cdot\frac{dx_i}{dk} = 1$$

이므로,

$$\frac{x_i}{f'(x_i)} = x_i\frac{dx_i}{dk}$$

임을 알 수 있다. 그런데 근과 계수와의 관계에 의해 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$의 값과 $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$의 값은 f에 대한 식으로 고정되므로, 앞의 식을 제곱하고 뒤의 식의 두 배를 뺀 값인 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$의 값은 k에 무관하게 항상 일정하다. 따라서 이를 미분한

$$2x_1\frac{dx_1}{dk} + 2x_2\frac{dx_2}{dk} + 2x_3\frac{dx_3}{dk} + 2x_4\frac{dx_4}{dk}$$

의 값은 0으로 고정된다. 따라서 앞서 본 것에 의하여

$$\frac{x_1}{f'(x_1)} + \frac{x_2}{f'(x_2)} + \frac{x_3}{f'(x_3)} + \frac{x_4}{f'(x_4)} = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

이 된다.

문제 89. *The function f is continuous on $[a, b]$ and havs a second derivative on (a, b). Show that there is*

$c \in (a,b)$ *such that*

$$\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{x-b} = \frac{1}{2}f''(c)$$

.

$g(t)$라는 함수를 아래와 같이 정의하자.

$$g(t) = \frac{(t-x)(t-b)}{(x-a)(b-a)}f(a) + \frac{(t-a)(t-b)}{(x-a)(x-b)}f(x) + \frac{(t-x)(t-a)}{(a-b)(x-b)}f(b)$$

그러면 이 함수를 잘 들여다보면, $g(a) = f(a), g(b) = f(b), g(x) = f(x)$임을 알 수 있다. 또한 g는 t에 대해서 보면 이차함수가 됨 역시도 확인해줄 수 있다. 그러면

$$g(t) = pt^2 + qt + r$$

로 두자.

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = p(x+a)+q$$

가 되며,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = p(b+a)+q$$

가 된다. 따라서 주어진 식의 좌변을 계산해줄 경우, p가 됨을 확인해줄 수 있을 것이다.

또한 함수 $h(x) = f(x) - g(x)$를 생각해본다면, $h(a) = h(b) = h(x) = 0$이다. h는 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속함수이며 열린 구간 (a,b)에서 이계도함수를 가지므로, 평균값정리에 의하여

$$h'(c_1) = h'(c_2) = 0$$

인 $a < c_1 < x < c_2 < b$이 존재한다. 다시 한 번 사용하면, $0 = h''(c) = f''(c) - g''(c) = f''(c) - 2p$인 $a < c < b$가 존재한다. 따라서, $\frac{1}{2}f''(c) = p$인 c가 존재하고, 이로써 증명이 완료된다.

문제 90. *The function f is twice differentiable and f'' is continuous. When we define the set S as*

$$S = \left\{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} : a, b \in \mathbb{R}, a < b\right\}$$

, show that$f''(c) = 0$ *if* $f'(c) \notin S$.

대우로 증명하기 위해 $f''(c) \neq 0$이면 $f'(c) \in S$임을 보여 보자. 일반성을 잃지 않고 $f''(c) > 0$이라고 하면, f''는 연속함수라고 하였으므로 어떤 $h > 0$이 존재하여 영역 $(c-h, c+h)$에서 $f''(x) > 0$이다. 함수 $g(s)$를

$$g(s) = \frac{f(s+\frac{h}{2}) - f(s)}{\frac{h}{2}}$$

라 정의하고, $c - \frac{h}{2} \le s \le c$에서 들여다보자. 또한 이 함수는 $h \neq 0$이므로, 연속이게 된다. 이때

$$g(c - \frac{h}{2}) = \frac{f(c) - f(c-\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = f'(c_1)$$

인 $c - \frac{h}{2} < c_1 < c$인 c_1이 평균값 정리에 의해 존재하고, 같은 이유로

$$g(c) = f'(c_2)$$

인 $c < c_2 < c + \frac{h}{2}$가 존재한다. 그런데 $f'' > 0$이므로 f'는 증가함수이고, $g(c - \frac{h}{2}) = f'(c_1) < f'(c) <$

$f'(c_2) = g(c)$이다. 그런데 g는 연속함수이므로 중간값 정리에 의하여

$$g(d) = f'(c)$$

인 d가 존재하고, 이에 따라

$$a = d + \frac{h}{2}, \quad b = d$$

로 두게 된다면 $f'(c) \in S$임을 확인해줄 수 있다.

문제 91. *문제 91번은 직접 그려보시길 바랍니다. 답지 생략! (절대 귀찮은게... 맞습니다)*

문제 92. *문제 92번은 직접 그려보시길 바랍니다. 답지 생략! (절대 귀찮은게... 맞습니다)*

문제 93. *문제 93번은 직접 그려보시길 바랍니다. 답지 생략! (절대 귀찮은게... 맞습니다)*

문제 94. *문제 94번은 직접 그려보시길 바랍니다. 답지 생략! (절대 귀찮은게... 맞습니다)*

문제 95. *문제 95번은 직접 그려보시길 바랍니다. 답지 생략! (절대 귀찮은게... 맞습니다)*

Chapter 4

Integrals

문제 96. *integration의 정의를 이용하여*

$$\int_0^1 3x^2 + 2x dx$$

를 구해 보아라.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 3x^2 + 2x dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(3\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 2\left(\frac{k}{n}\right) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(3\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^3+3n^2+n}{2n^3} + \frac{n^2+n}{n^2} \right) \\
&= 1 + 1 = 2
\end{aligned}$$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b c dx = c(b-a)$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

문제 97. *sigma notation의 성질들을 이용하여 위의 박스를 보여라.*

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(x_i^*) = -\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{a-b}{n} f(x_i^*) = -\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{a-a}{n} f(x_i^*) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n 0f(x_i^*) = 0$$

$$\int_a^b cdx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n}\cdot c = \lim_{n\to\infty}(b-a)\cdot c = c(b-a)$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n}[f(x_i^*)+g(x_i^*)]dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} f(x_i^*) + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} g(x_i^*)$$

이므로

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b cf(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} cf(x_i^*) = c\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} f(x_i^*) = c\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n}[f(x_i^*)-g(x_i^*)]dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} f(x_i^*) - \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} g(x_i^*)$$

이므로

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

Comparison Properties of the Integral

만약 $f(x) \geq 0$이 $a \leq x \leq b$에서 성립하면, $\int_a^b f(x)dx \geq 0$이다.

만약 $f(x) \geq g(x)$이 $a \leq x \leq b$에서 성립하면, $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$이다.

만약 $m \leq f(x) \leq M$이 $a \leq x \leq b$에서 성립한다면, $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$가 성립한다.

문제 98. *sigma notation의 성질들을 이용하여 comparision properties를 증명하여라.*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} f(x_i^*) \geq \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n}\cdot 0 = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} f(x_i^*) \geq \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n}\cdot g(x_i^*) = \int_a^b g(x)dx$$

$$m(b-a) = \int_a^b mdx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n}\cdot m \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} f(x_i^*) = \int_a^b f(x)dx$$

이고

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} f(x_i^*) \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n}\cdot M = \int_a^b Mdx = M(b-a)$$

이므로

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

문제 99.

$$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^4} \ln t dt$$

를 $x > 0$인 영역에서 구하여라.

$$4x^3 \ln(x^4) - 2x \ln(x^2)$$

문제 100. *$f(x) = (x-1)g(x)$라고 할 때,*

$$\int_3^5 xg(x)dx$$

를 $g(x)$에 대하여 구하여라. 단, $\frac{d}{dx}(g(x)) = g(x)$이다.

$$\int_3^5 xg(x)dx = \int_3^5 f'(x)dx = f(5) - f(3) = 4g(5) - 2g(3)$$

문제 101. *함수 f, g가 연속함수이고 미분가능하며, 그들의 도함수도 연속하다면*

$$\int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) + C$$

임을 보여라.

양변을 미분하였을 때 같음을 보여준다면 충분하다.

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

이고 좌변을 미분한다면 FTC에 의하여 $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$이다. 따라서 둘은 같다.

f가 $[-a, a]$에서 continuous하고 even이라면,

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

이다. 반면, odd라면

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

이다.

문제 102. *위의 박스를 증명하여라.*

f가 even이라면

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^a f(x)dx &= \int_0^a f(x)dx + \int_{-a}^0 f(x)dx \\
&= \int_0^a f(x)dx + \int_a^0 -f(-u)du \quad (u = -x) \\
&= \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(u)du = 2\int_0^a f(x)dx
\end{aligned}$$

이다. 반면, odd라면

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^a f(x)dx &= \int_0^a f(x)dx + \int_{-a}^0 f(x)dx \\
&= \int_0^a f(x)dx + \int_a^0 -f(-u)du \quad (u = -x) \\
&= \int_0^a f(x)dx + \int_0^a -f(u)du = 0
\end{aligned}$$

이다.

문제 103. *Find the value of*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[(\frac{2}{n})^9+(\frac{4}{n})^9+\cdots+(\frac{2n}{n})^9]$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[(\frac{2}{n})^9+(\frac{4}{n})^9+\cdots+(\frac{2n}{n})^9] &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2\cdot\frac{k}{n}\right)^9\\ &= \int_0^1(2x)^9dx\\ &= \left[\frac{512}{10}x^10\right]_0^1=\frac{256}{5}\end{aligned}$$

문제 104. *Find the value of*

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}})$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}}) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}\\ &= \int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx\\ &= \left[2(1+x)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1=2(\sqrt{2}-1)\end{aligned}$$

문제 105. *Find the value of*

$$\lim_{t\to0}[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{\cos\frac{t}{n}+\cos\frac{2t}{n}+\cdots+\cos\frac{nt}{n}\}]$$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0}[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{\cos\frac{t}{n}+\cos\frac{2t}{n}+\cdots+\cos\frac{nt}{n}\}] &= \lim_{t\to0}[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k}{n}\cdot t\right)]\\ &= \lim_{t\to\infty}\int_0^1\cos(xt)dx\\ &= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{t}\sin(xt)\right]_0^1\\ &= \lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}\\ &= 1\end{aligned}$$

문제 106. *Evaluate*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\tan^2(\frac{k\pi}{4n})\frac{\pi}{n}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\tan^2\left(\frac{k\pi}{4n}\right)\frac{\pi}{n} &= \int_0^1 \tan^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)dx \\ &= \int_0^1 \sec^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)-1dx \\ &= \left[\frac{4}{\pi}\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)-x\right]_0^1 \\ &= \frac{4}{\pi}-1\end{aligned}$$

문제 107. *f is continuous function satisfying*

$$\int_0^x f(t)dt = x\sin x + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}dt$$

. Find the explicit formula of $f(x)$.

양변을 미분하면

$$f(x) = x\cos x + \sin x + \frac{1}{2}\frac{f(x)}{1+x^2}$$

을 얻는다. 따라서

$$f(x) = \frac{x\cos x+\sin x}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}} = \frac{2(1+x^2)(x\cos x+\sin x)}{1+2x^2}$$

문제 108. *Let f, g be continuous on $[a,b]$ wigh $g(x)\geq 0$ for all $a\leq x\leq b$. Show that there is a point $c\in[a,b]$ such that*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

.

f는 연속함수이므로 닫힌 구간 $[a,b]$에서 EVT에 의하여 최댓값 $f(d)=M$과 최솟값 $f(e)=m$을 가진다. $(d,e\in[a,b])$

그러면 $m\leq f(x)\leq M$이고 $g(x)\geq 0$이면 $mg(x)\leq f(x)g(x)\leq Mg(x)$이므로,

$$m\int_a^b g(x)dx = \int_a^b mg(x) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b Mg(x)dx = M\int_a^b g(x)dx$$

이다. 그러면 함수 $h(x)=f(x)\int_a^b g(x)dx$를 새롭게 생각하면,

$$h(e) = f(e)\int_a^b g(x)dx = m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx = f(d)\int_a^b g(x)dx = h(d)$$

이다. 그러면 h는 연속함수이므로 $h(e)$와 $h(d)$ 사이에 존재하는 값인 $\int_a^b f(x)g(x)dx$에 대하여 IVT를 이용하면

$$h(c) = f(c)\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

인 $c\in[a,b]$를 가진다.

문제 109. *By using $\int_{-1}^1 \dfrac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$, find the value of*

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx &= \int_\pi^0 \frac{(\pi-u)\sin(\pi-u)}{1+\cos^2(\pi-u)}\cdot(-1)du \quad (u=\pi-x)\\ &= \int_0^\pi \frac{(\pi-u)\sin(u)}{1+\cos^2(u)}du\\ &= \int_0^\pi \frac{\pi\sin(u)}{1+\cos^2(u)}du - \int_0^\pi \frac{u\sin(u)}{1+\cos^2(u)}du\end{aligned}$$

이므로 정리해주면

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\cdot\int_0^\pi \frac{\sin u}{1+\cos^2 u}du$$

이다. $\cos u = v$로 치환하여 생각해보면,

$$\int_0^\pi \frac{\sin u}{1+\cos^2 u}du = \int_1^{-1}\frac{-1}{1+v^2}dv = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$$

이다. 따라서

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi^2}{4}$$

문제 110. *Find*

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_0^{\sin x}\int_t^{t^2}\sqrt{1+u^2}dudt$$

.

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\int_0^{\sin x}\int_t^{t^2}\sqrt{1+u^2}dudt &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\int_0^{\sin x}\int_t^{t^2}\sqrt{1+u^2}dudt\right)\right)\\ &= \frac{d}{dx}\left(\int_{\sin x}^{\sin^2 x}\sqrt{1+u^2}dudt\cdot\cos x\right)\\ &= -\sin x\cdot\int_{\sin x}^{\sin^2 x}\sqrt{1+u^2}dudt + \cos x(2\sin x\cos x\sqrt{1+\sin^4 x} - \cos x\cdot\sqrt{1+\sin^2 x})\end{aligned}$$

이다. $x=0$이라면, 이 값은 -1이 됨을 계산적으로 확인해볼 수 있다.

문제 111. *Find*

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx &= \int_{\pi/2}^0 \frac{\sqrt{\sin(\frac{\pi}{2}-u)}}{\sqrt{\cos(\frac{\pi}{2}-u)}+\sqrt{\sin(\frac{\pi}{2}-u)}}\cdot(-1)du\\ &= \int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\cos u}}{\sqrt{\sin u}+\sqrt{\cos u}}du\end{aligned}$$

이므로,

$$2\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx = \int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx + \int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx = \int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx = \frac{\pi}{2}$$

이다. 따라서 구하는 값은 $\frac{\pi}{4}$이다.

문제 112. *Evaluate*

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_{x^2+1}^{x^4+1}\cos(\tan(\frac{\pi t}{8})-1)dt$$

$$\int_{1^1+1}^{1^4+1}\cos(\tan(\frac{\pi t}{8})-1)dt=0$$

이므로,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_{x^2+1}^{x^4+1}\cos(\tan(\frac{\pi t}{8})-1)dt &= \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\left(\int_{x^2+1}^{x^4+1}\cos(\tan(\frac{\pi t}{8})-1)dt-\int_{1^2+1}^{1^4+1}\cos(\tan(\frac{\pi t}{8})-1)dt\right)\\ &= \frac{d}{dx}\left(\int_{x^2+1}^{x^4+1}\cos(\tan(\frac{\pi t}{8})-1)dt\right)\Bigg|_{x=1}\\ &= 4x^3\cos(\tan(\frac{\pi(x^4+1)}{8}-1))-2x\cos(\tan(\frac{\pi(x^2+1)}{8}-1))\Bigg|_{x=1}\\ &=2\end{aligned}$$

이다.

문제 113. *Consider a function $f(x)=1-\sqrt{1-2x}$ for $x\le\frac{1}{2}$.*
(1) Calculate $\int_0^x 1+f(t)+\cdots+f(t)^n dt$.
(2) Find $\int_0^{-4} f(t)^{10}dt$.

(1) $f'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}=\dfrac{1}{1-f(t)}$임을 알 수 있다. 그러면

$$\begin{aligned}1+f(t)+\cdots+f(t)^n &= \frac{1-\{f(t)\}^{n+1}}{1-f(t)}\\ &=(1-\{f(t)\}^{n+1})f'(t)\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_0^x 1+f(t)+\cdots+f(t)^n dt &= \int_0^x(1-\{f(t)\}^{n+1})f'(t)dt\\ &=\int_{f(0)}^{f(x)}(1-u^{n+1})du \quad (u=f(t))\\ &=\left[u-\frac{1}{n+2}u^{n+2}\right]_0^{1-\sqrt{1-2x}}\\ &=(1-\sqrt{1-2x})-\frac{1}{n+2}\cdot(1-\sqrt{1-2x})^{n+2}\end{aligned}$$

이다.

(2)

$$\begin{aligned}\int_0^{-4}f(t)^{10}dt &= \int_0^{-4}1+f(t)+\cdots+f(t)^{10}dt-\int_0^{-4}1+f(t)+\cdots+f(t)^9dt\\ &=\frac{1}{11}\cdot(-2)^{11}-\frac{1}{12}\cdot(-2)^{12}\\ &=-\frac{17408}{33}\end{aligned}$$

이다.

문제 114. *Prove that if f is a twice differentiable function with $f(0) = 0$ and $f(1) = 1$ and $f'(0) = f'(1) = 0$, then $|f''(x)| \geq 4$ for some $x \in [0, 1]$.*

함수

$$g(x) = \begin{cases} 4x & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}) \\ 4 - 4x & (\frac{1}{2} < x \leq 1) \end{cases}$$

을 생각하여 보자. 만약 $f' < g$이 모든 $x \in (0, 1)$에서 성립한다면,

$$1 = f(1) - f(0) \int_0^1 f'(x)dx < \int_0^1 g(x)dx = 1$$

이 되므로 모순이 생긴다. 따라서 어떤 $c \in (0, 1)$이 존재하여 $f'(c) \geq g'(c)$이다. 만약 $c \leq 1/2$라면,

$$f''(d) = \frac{f'(c) - f'(0)}{c} \geq 4$$

인 $d \in (0, c)$가 존재하며 $c \geq 1/2$일 경우

$$f'(d) = \frac{f'(1) - f'(c)}{1 - c} \leq -4$$

인 $d \in (c, 1)$이 있게 되므로, $|f''(d)| \geq 4$인 점이 있게 된다.

문제 115. *Let f and g be two continuous on $[a, b]$. Show that the following holds.*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2 dx \int_a^b (g(x))^2 dx$$

$$\int_a^b (f(x) - tg(x))^2 dx$$

는 t의 값에 무관하게 항상 음이 아닌 값을 가지는 적분값이다. 이때

$$\int_a^b (f(x) - tg(x))^2 dx = \int_a^b \{f(x)\}^2 dx - 2t \int_a^b f(x)g(x)dx + t^2 \int_a^b \{g(x)\}^2 dx$$

는 t에 대한 이차함수가 되며, 이것이 t에 무관하게 항상 양수여야 하므로, 판별식에 의하여

$$\frac{D}{4} = \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 - \int_a^b (f(x))^2 dx \int_a^b (g(x))^2 dx \leq 0$$

이어야 한다. 따라서,

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2 dx \int_a^b (g(x))^2 dx$$

문제 116. *Find the value of*

$$\int_{-1}^3 |2x - x^2| dx$$

범위를 나누어서 계산해주면 된다.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3}|2x-x^2|dx &= \int_{-1}^{0}x^2-2xdx+\int_{0}^{2}2x-x^2dx+\int_{2}^{3}x^2-2xdx\\ &= \frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=4\end{aligned}$$

이다.

문제 117. *Find the value of*

$$\int_{-1}^{1}\frac{\sin x}{1+x^2}dx$$

함수 $\frac{\sin x}{1+x^2}$는 기함수이므로, $[-1,1]$에서 적분한다면 이 적분값은 0이다.

문제 118. *Evaluate*

$$\int_{1}^{2}x\sqrt{x-1}dx$$

$$\begin{aligned}\int_{1}^{2}x\sqrt{x-1}dx &= \int_{0}^{1}(u+1)\sqrt{u}du \quad (u=x-1)\\ &= \left[\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}u^2\right]_0^1\\ &= \frac{9}{10}\end{aligned}$$

문제 119. *Find*

$$\lim_{x\to 2}\frac{\int_8^{x^3}\cos^3 t dt}{x^2-4}$$

$\int_8^{2^3}\cos^3 t dt=0$이므로, 주어진 식은

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{\int_8^{x^3}\cos^3 t dt}{x^2-4} &= \lim_{x\to 2}\frac{\int_8^{x^3}\cos^3 t dt-\int_8^{2^3}\cos^3 t dt}{x^2-4}\\ &= \frac{d}{dx}\left(\int_8^{x^3}\cos^3 t dt\right)\Bigg|_{x=2}\\ &= 3x^2\cdot\cos^3(x^3)\big|_{x=2}\\ &= 12\cos^3(8)\end{aligned}$$

문제 120. *If f is a quadratic function such that*

$$f(x)=\frac{12}{7}x^2-2x\int_1^2 f(t)dt+\{\int_1^2 f(t)dt\}^2$$

for all x, find the value of $f(0)$.

$A=\int_1^2 f(t)dt$이라고 하면

$$f(x)=\frac{12}{7}x^2-2Ax+A^2$$

이다. 그러면

$$A=\int_1^2\frac{12}{7}x^2-2Ax+A^2dt=4-3A+A^2$$

이므로 $A^2-4A+4=0$이다. 따라서 $A=2$이고, $f(0)=A^2=4$이다.

문제 121. *Evaluate* $\int_0^{\pi/2} \dfrac{1}{1+\tan^n x}dx$ *where* $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\tan^n x}dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x}dx \\
&= \int_{\pi/2}^{0} \frac{\cos^n(\frac{\pi}{2}-u)}{\cos^n(\frac{\pi}{2}-u)+\sin^n(\frac{\pi}{2}-u)} \cdot (-1)du \quad (u = \frac{\pi}{2} - x) \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n u}{\sin^n u + \cos^n u}du
\end{aligned}$$

이므로,

$$2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\tan^n x}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x}dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n u}{\sin^n u + \cos^n u}du = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x + \sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}dx \frac{\pi}{2}$$

이고

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\tan^n x}dx = \frac{\pi}{4}$$

이다.

문제 122. *Let* $f(x)$ *be a continuous function on the closed interval* $[0,1]$ *satisfying the following conditions.*

1) $f(x) \geq 0$

2) $f(x) + f(1-x) = 1$

(a) Evaluate $\int_0^1 f(x)dx$.

(b) Evaluate

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} f(\frac{k}{2n}) \sin\frac{k\pi}{2n}$$

(1)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx &= \int_1^0 f(1-u)\cdot(-1)du \quad (u = 1-x) \\
&= \int_0^1 1 - f(u)du \\
&= 1 - \int_0^1 f(x)dx
\end{aligned}$$

이므로,

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} f(\frac{k}{2n})\sin\frac{k\pi}{2n} &= \int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx \\
&= \int_1^0 f(1-u)\sin(\pi-\pi u)\cdot(-1)du \quad (u=1-x) \\
&= \int_0^1 (1-f(u))\sin(\pi u)du \\
&= \int_0^1 \sin(\pi u)du - \int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx \\
&= \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi u)\right]_0^1 - \int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx = \frac{2}{\pi} - \int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx
\end{aligned}$$

이기에,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} f(\frac{k}{2n})\sin\frac{k\pi}{2n} = \frac{1}{\pi}$$

이다.

문제 123. *Find the limit of*

$$\frac{1}{(\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}})^2} + \frac{1}{(\sqrt{n}+\frac{2}{\sqrt{n}})^2} + \cdots + \frac{1}{4n}$$

as $n\to\infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}})^2} + \frac{1}{(\sqrt{n}+\frac{2}{\sqrt{n}})^2} + \cdots + \frac{1}{4n}\right] &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{k}{n})^2} \\
&= \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}dx \\
&= \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

문제 124. *If f is a polynomial function such that*

$$\int_0^x (2t-x)f(t)dt = \frac{3}{4}x^5 - \frac{1}{3}x^4 + ax^3$$

for all x. If $f(0)=0$ and $f(1)=1$, find the value of $f(2)$.

양변을 x로 미분하면

$$2xf(x) - \int_0^x f(t)dt - xf(x) = \frac{15}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 3ax^2$$

이고, 한 번 더 미분하면

$$2f(x) + 2xf'(x) - f(x) - f(x) - xf'(x) = 15x^3 + 4x^2 + 6ax$$

이다. 따라서 정리하면

$$f'(x) = 15x^2 + 4x + 6a$$

이며

$$f(x) = 5x^3 + 2x^2 + 6ax + b$$

꼴이 되어야만 하고, $f(0) = 0$이니 $b = 0$이고, $f(1) = 1$이니 $a = -1$이다. 따라서 $f(2) = 40 + 8 - 12 = 36$ 이다.

문제 125. *Let $f(x)$ be a continuous function defined on $(0, \infty)$ satisfying the following two conditions*
1) $f(1) = 1$
2) $\int_1^{x^2} f(t)dt = \int_{x^2}^{x^4} f(t)dt$
Find all such an $f(x)$. You can use $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$ for $a > 0$.

둘째 조건에서 양변을 미분하면

$$2xf(x^2) = 4x^3 f(x^4) - 2xf(x^2)$$

이므로 $x^2 f(x^2) = x^4 f(x^4)$이다. 함수 $g(x) = xf(x)$를 생각하면, $g(x^2) = g(x^4)$인 것이다. 그러면 임의의 $a > 0$에 대하여, $(a_n)^{2^{2^n}} = a$인 a_n을 생각할 수 있다. 또한, f가 연속함수이므로 g도 연속함수이다. 이때,

$$g(a_n^2) = g(a_n^4) = g(a_n^{16}) = \cdots = g(a_n^{2^{2^n}}) = g(a)$$

이 성립한다. 그러면,

$$\begin{aligned}
g(a) &= \lim_{n\to\infty} g(a) \\
&= \lim_{n\to\infty} g(a_n^{2^{2^n}}) \\
&= \lim_{n\to\infty} g(a_n^2) \\
&= \lim_{n\to\infty} g(a^{\frac{1}{2^{2^n-1}}}) \\
&= g\left(\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{2^{2^n-1}}}\right) \\
&= g(1) = f(1) = 1
\end{aligned}$$

이게 된다. 따라서 모든 $x > 0$에 대하여 $g(x) = 1$이므로, $f(x) = \dfrac{1}{x}$이 유일한 함수이다.

Chapter 5

Applications of Integration

문제 126. *직선 $y = 2x + 1$과 포물선 $y^2 = 3x + 5$ 사이에 갇힌 영역의 넓이를 구하시오.*

둘의 교점을 먼저 구하자. $x = \dfrac{y^2 - 5}{3}$이므로

$$3y = 2y^2 - 10 + 3$$

이며, $2y^2 - 3y - 7 = 0$이다. 따라서

$$y = \frac{3 \pm \sqrt{65}}{4}$$

에서 교점이 생긴다. 그러면 넓이는

$$A = \int_{(3-\sqrt{65})/4}^{(3+\sqrt{65})/4} \frac{y-1}{2} - \frac{y^2-5}{3} dy = \frac{65\sqrt{65}}{144}$$

이 될 것이다.

문제 127. *$0 \le x \le 1$에서 함수 $f(x) = x^2 + 1$의 윗부분에 있고 $y = 2$ 아래에 있는 영역을 y축을 기준으로 회전시켜 만들어지는 회전체의 부피를 cylinder 방법을 활용하여 구하시오.*

$$V = \int_0^1 2\pi x(2 - x^2 - 1)dx = 2\pi \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

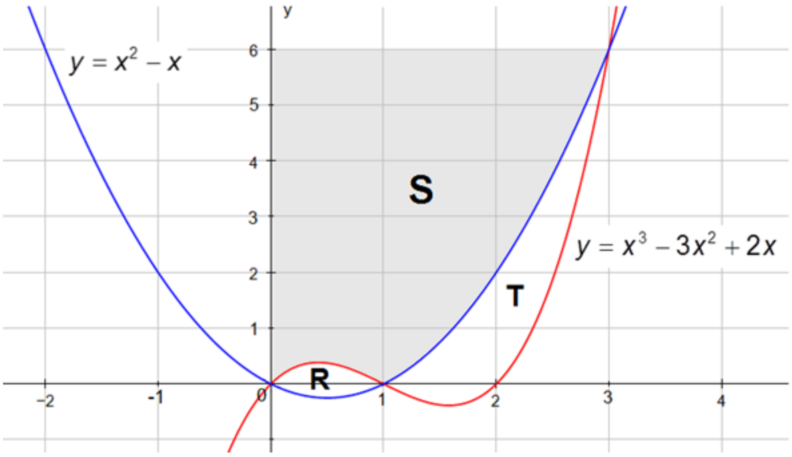
문제 128. *만약 $f_{ave}[a, b]$가 구간 $[a, b]$에서의 continuous function f의 average value를 표현한다고 하자. 그러면 $a < c < b$에 대하여*

$$f_{ave}[a, b] = \left(\frac{c-a}{b-a} \right) f_{ave}[a, c] + \left(\frac{b-c}{b-a} \right) f_{ave}[c, b]$$

가 성립함을 보여라.

$$\begin{aligned} f_{ave}[a, b] &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \\ &= \frac{1}{b-a} \left(\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \right) \\ &= \frac{1}{b-a} \left((c-a)f_{ave}[a, c] + (b-c)f_{ave}[c, b] \right) \\ &= \left(\frac{c-a}{b-a} \right) f_{ave}[a, c] + \left(\frac{b-c}{b-a} \right) f_{ave}[c, b] \end{aligned}$$

이 성립한다.



문제 129. *Let $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ and $g(x) = x^2 - x$. S is the shaded region bounded by the two curves, the y-axis and the line $y = 6$, as shown in the diagram below. R and T and from $x = 1$ to $x = 3$ respectively.*

(1) Find the area of S.

(2) Write an integral expression for the volume of the solid generated when T is rotated about the horizontal line $y = 6$.

(3) The region R is the base of a solid. For this solid, each cross section perpendicular to the x- axis is a semi-circle. Write an integral expression that gives the volume of the solid.

(1)

$$S + R = \int_0^3 (6 - x^2 + x)dx = \left[6x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^3 = 18 - 9 + \frac{9}{2} = \frac{27}{2}$$

이며

$$R = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x - x^2 + x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{5}{12}$$

이므로 $S = \dfrac{157}{12}$이다.

(2)

$$\pi \int_1^3 (6 - x^3 + 3x^2 - 2x)^2 - (6 - x^2 + x)^2 dx$$

(3)

$$\int_0^1 \frac{1}{2}\pi(\frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{2})^2 dx$$

문제 130. *The two parabola $y = x^2 + ax + b$ and $y = x^2 + cx + d$ have common tangent line l, which pass through the origin. The x coordinates of intersects of parabolas and tangent line are $x = 1$ and $x = 2$, respectively. Find the area of region enclosed by two curves and line l.*

직선 l을 $y = mx$라고 하자. 그러면

$$x^2 + (a - m)x + b = (x - 1)^2$$

이므로 $a = m - 2$, $b = 1$이다. 그 다음으로

$$x^2 + (c - m)x + d = (x - 2)^2$$

이므로 $c = m - 4$, $d = 4$이다. 그러면 두 곡선의 교점을 구하면,

$$x^2 + (m-2)x + 1 = x^2 + (m-4)x + 4$$

여야 하므로 $x = \frac{3}{2}$이다. 그러면

$$A = \int_1^{3/2} (x^2 - 2x + 1)dx + \int_{3/2}^2 (x^2 - 4x + 4)dx = \int_{-1/2}^{1/2} x^2 dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{12}$$

이다.

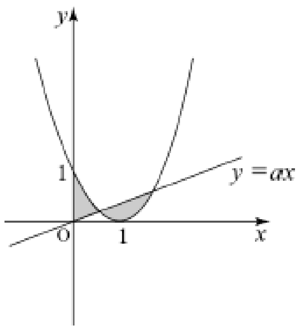
문제 131. *Find the area of region bounded by $y = x^2$, $y = (x-1)^2 + 2a$ and their common tangent line.*

$y = x^2$에서의 접점이 (b, b^2)이라면 접선은 $y = 2bx - b^2$이며 $y = (x-1)^2 + 2a$는 $y' = 2(x-1)$이므로 $(b+1, b^2+2a)$에서 접점을 가진다. 그러므로 $2b^2 + 2b - b^2 = b^2 + 2b = b^2 + 2a$이므로 $2b = 2a$이다. 또한 둘의 교점은 $x^2 = x^2 - 2x + 1 + 2a$, 즉 $x = \frac{1+2a}{2} = \frac{1+2b}{2}$에서 나타난다. 따라서

$$\begin{aligned} A &= \int_b^{b+1/2} (x^2 - 2bx + b^2)dx + \int_{b+1/2}^{b+1} (x^2 - 2(b+1)x + (b+1)^2)dx \\ &= 2\int_0^{1/2} x^2 dx = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

이다.

문제 132. *The two area enclosed by $y = (x-1)^2$, $y = ax$, $x = 0$ have the same area. Find the value of a.*



곡선 $y = (x-1)^2$와 $y = ax$의 교점을 $x^2 - (a+2)x + 1 = 0$의 근 $\alpha < \beta$로써 표시할 수 있다. 그러면 두 영역의 넓이가 같으므로

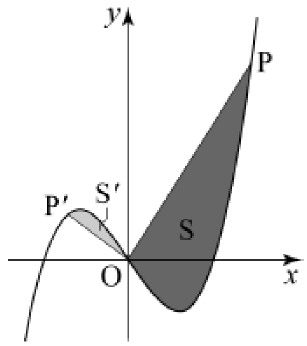
$$\int_0^\beta [x^2 - (a+2)x + 1]dx = \frac{\beta^3}{3} - \frac{(a+2)}{2}\beta^2 + \beta = 0$$

이고, $\beta^2 - (a+2)\beta + 1 = 0$이므로 이를 고려하여 정리해준다면

$$\frac{\beta^2}{3} - \frac{1}{2}(\beta^2 + 1) + 1 = 0$$

이므로 $\beta = \sqrt{3}$이다. 또한 두 근의 곱이 1인 것으로부터 $a + 2 = \beta + \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{3}$이 된다. 따라서 $a = \dfrac{4\sqrt{3} - 6}{3}$ 이다.

문제 133. *Let O be a origin and C be a curve $y = x^3 - x$. The two points P, P' on C move OP and OP' to keep them perpendicular to each other. The P is the point on first quadrant and P' is the point on* *second quadrant. When we set S or S' as the area of region enclosed by C and OP or OP', respectively, find the minimum value of S/S'.*



직선 OP의 방정식을 $y = mx$라고 하면 $x^3 - x = mx$로부터 $x = 0$ 혹은 $x = \pm\sqrt{m+1}$이 교점의 x좌표가 되는데, P는 제 1사분면에 있다고 하였으므로 P의 x좌표는 $\sqrt{m+1}$이다. OQ는 OP와 수직이므로 OQ의 방정식은 $y = -\frac{1}{m}x$이며 교점의 방정식을 계산하여 보면 $x = -\sqrt{\frac{m-1}{m}}$이다. 따라서

$$S = \int_0^{\sqrt{m+1}} \{(m+1)x - x^3\}dx = \frac{(m+1)^2}{4}$$

$$S' = \int_{-\sqrt{\frac{m-1}{m}}}^{0} \{x^3 - \frac{m-1}{m}x\}dx = \frac{(m-1)^2}{4m^2}$$

이므로

$$\frac{S}{S'} = \frac{m^2(m+1)^2}{(m-1)^2} = ((m-1) + \frac{2}{m=1} + 3)^2 \geq (3 + 2\sqrt{2})^2 = 17 + 12\sqrt{2}$$

이다. 따라서 최솟값은 $17 + 12\sqrt{2}$이다.

문제 134. *Find the volume of the solid generated when the given region T is rotated about the y-axis.*

$$T : 0 \leq x \leq 3, y(x^2 - 3x + 2 - y) \geq 0$$

주어진 영역을 y축의 둘레로 회전하여 얻은 입체의 부피 V는

$$V = \int_0^3 2\pi x|x^2 - 3x + 2|dx = 2\pi(\int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx + \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x)dx + \int_2^3 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx)$$

이므로

$$V = 4\pi(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 4 + 8 - 4 + 4 - 8 + 4 + \frac{81}{4} - 27 + 9) = \frac{11}{2}\pi$$

이다.

문제 135. *The cone with radius $2/\sqrt{3}$ and height 2 is rotated by the axis that pass through the vertex of cone and parallel to its base. Find the volume of resulting solid.*

직원뿔의 꼭짓점을 원점으로 놓자. 직원뿔을 회전시켰을 때 얻은 입체는 축으로부터 가장 멀리 있는 부분을 회전하여 얻은 회전체에서 가장 가까이에 있는 부분을 회전하여 얻은 회전체를 제외해 주면 얻게 된다. 가장 가까운 거리는 $|\sqrt{3}x|$이며 가장 먼 거리는 $\sqrt{2^2 + (\frac{4}{3} - x^2)}$이므로, 원하는 부피는

$$V = \pi \int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \left(\frac{16}{3} - 4x^2\right) dx = \frac{64\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{64\pi}{9\sqrt{3}} = \frac{128\sqrt{3}}{27}\pi$$

Chapter 6

Inverse Functions

문제 136. *inverse function의 differentiation에 대하여 증명하여라.*

$$(f^{-1})'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(a)}{x-a}$$

이다. $f(b) = a$고 $f(y) = x$라 한다면, f는 differentiable하기에 continuous하며, f^{-1}도 continuous이다. 따라서 $x \to a$이면 $y \to b$이다. 따라서,

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(a)}{x-a}\\ &= \lim_{y\to b}\frac{y-b}{f(y)-f(b)}\\ &= \frac{1}{\lim_{y\to b}\dfrac{f(y)-f(b)}{y-b}}\\ &= \frac{1}{f'(b)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}\end{aligned}$$

이다.

문제 137. *By using mathematical induction to prove that $x \geq 0$ and any positive integer n,*

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

먼저, 함수 $f(x) = e^x - 1$를 생각하자. 그러면 $f(0) = 0$, $f'(x) = e^x > 0$임이 확실하므로 $f(x) \geq 0$이다. 따라서 $e^x > 1$이며, $g(x) = e^x - 1 - x$이라 두면, $g(0) = 0$이고 $g'(x) = e^x - 1 \geq 0$이므로 $g(x) \geq 0$이다. 따라서 $n = 1$일 때는 증명한 것이나 마찬가지이다. 이제 k일 때

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!}$$

라고 하고 함수

$$h_{k+1}(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right)$$

을 생각하면, $h_{k+1}(0) = 0$이고 $h'_{k+1}(x) = h_k(x) \geq 0$임이 가정에 의하여 알려져 있으므로, $x \geq 0$일 때 $h_{k+1}(x) \geq 0$이다. 따라서 수학적 귀납법에 의하여, 모든 자연수 n에 대해 이것이 성립한다. 즉

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

문제 138. *By using 문제 137, show that*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^k}=\infty$$

for any positive integer k.

$k+2$에 대해서도 성립하므로, x가 충분히 클 때

$$e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{k+2}}{(k+2)!}\geq\frac{x^{k+2}}{(k+2)!}\geq x^{k+1}$$

이 성립한다. 따라서,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^k}\geq\lim_{x\to\infty}\frac{x^{k+1}}{x^k}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$$

이기에

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^k}=\infty$$

이다.

문제 139. *By using 문제 137, Show that $e>2.7$.*

식에서 $x=1$을 넣으면

$$e\geq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}=2.5+0.166\cdots+0.416\cdots>2.7$$

이므로, $e>2.7$이다.

$$\boxed{\frac{d}{dx}(b^x)=b^x\ln b}$$

문제 140. *chain rule을 이용해 위의 박스를 증명하시오.*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(b^x)=b^x\ln b=\frac{d}{dx}(e^{\ln bx})\\ =e^{\ln bx}\cdot\ln b\\ =\ln b\cdot b^x\end{aligned}$$

문제 141. *Differentiate $y=\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^4}$.*

양변에 ln을 씌우면

$$\ln y=\ln x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-4\ln(3x+2)$$

이고, 미분하면

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{12}{3x+2}$$

이다. 따라서

$$y'=\frac{x\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^4}\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{12}{3x+2}\right)$$

이다.

cos의 inverse function **arcscosine function**은 $\cos^{-1}(x)$처럼 쓴다.

$$\cos y = x \quad \Rightarrow \quad y = \cos^{-1}(x) = \arccos(x) \quad (-1 \le x \le 1, 0 \le y \le \pi)$$

또한, 이 함수의 미분은

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad -1 < x < 1$$

tan의 inverse function **arctangent function**은 $\tan^{-1}(x)$처럼 쓴다.

$$\tan y = x \quad \Rightarrow \quad y = \tan^{-1}(x) = \arctan(x) \quad (-\infty < x < \infty, -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2})$$

또한, 이 함수의 미분은

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

문제 142. *위의 박스들에 있는 미분을 증명하여라.*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) &= \frac{1}{-\sin(\cos^{-1} x)} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos(\cos^{-1}(x))}} \quad (0 < \cos^{-1} x < \pi) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) &= \frac{1}{\sec^2(\tan^{-1} x)} \\
&= \frac{1}{1+\tan^2(\tan^{-1} x)} \\
&= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

문제 143.

$$\int \frac{1}{x^2+2x+5} dx$$

를 구하여라.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+2x+5} dx &= \int \frac{1}{(x+1)^2+4} dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2} du \quad (u = \frac{x+1}{2}) \\
&= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

Hyperbolic Identities

$$\sinh(-x) = -\sinh x$$
$$\cosh(-x) = \cosh x$$
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$
$$1 - \tanh^2 x = \mathrm{sech}^2 x$$
$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

문제 144. *위의 박스를 증명하여라.*

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -\sinh x$$
$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh x$$
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right) = \frac{4}{4} = 1$$
$$1 - \tanh^2 x = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \mathrm{sech}^2 x$$
$$\sinh(x+y) = \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} = \frac{e^{x} - e^{-}x}{2} \cdot \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} + \frac{e^{x} + e^{-}x}{2} \cdot \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$
$$\cosh(x+y) = \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-}x}{2} \cdot \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} + \frac{e^{x} - e^{-}x}{2} \cdot \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

Derivatives of Hyperbolic Functions

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$$
$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$$
$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \mathrm{sech}^2 x$$
$$\frac{d}{dx}(\mathrm{csch} x) = -\mathrm{csch} x \mathrm{coth} x$$
$$\frac{d}{dx}(\mathrm{sech} x) = -\mathrm{sech} x \mathrm{tanh} x$$
$$\frac{d}{dx}(\mathrm{coth} x) = -\mathrm{csch}^2 x$$

문제 145. *위의 박스를 증명하여라.*

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh x$$
$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \text{sech}^2 x$$
$$\frac{d}{dx}(\text{csch}x) = \frac{-\cosh x}{\sinh^2 x} = -\text{csch}x\text{coth}x$$
$$\frac{d}{dx}(\text{sech}x) = \frac{-\sinh x}{\cosh^2 x} = -\text{sech}x\text{tanh}x$$
$$\frac{d}{dx}(\text{coth}x) = \frac{-(\tanh x)'}{\tanh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x} = -\text{csch}^2 x$$

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad x \in \mathbb{R}$$
$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \quad x \geq 1$$
$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad -1 < x < 1$$

임을 단순 계산으로써 보여줄 수 있다. 또한, 단순 미분을 통해

$$\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}$$
$$\frac{d}{dx}(\text{csch}^{-1}x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$$
$$\frac{d}{dx}(\text{sech}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{d}{dx}(\text{coth}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

문제 146. *위의 모든 박스를 보여라. 정말 귀찮은 과정이지만... 답지에는 타이핑을 다 쳐둘 테니 같이 고생한다고 생각하고 증명하여보자.*

$x = \sinh y$라 둘 경우 $2x = e^y - e^{-y}$이므로 이차방정식의 근의 공식에 의해

$$e^y = x + \sqrt{x^2+1}$$

이고 $y = \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$이다.

$x = \cosh y$라 둘 경우 $2x = e^y + e^{-y}$이므로 이차방정식의 근의 공식에 의해

$$e^y = x + \sqrt{x^2-1}$$

이고 $y = \cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$이다.

$x = \tanh y$라 둘 경우 $x = \dfrac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \dfrac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$이다. 그러면

$$xe^{2y} + x = e^{2y} - 1$$

이므로 $e^{2y} = \dfrac{1+x}{1-x}$이다. 따라서

$$y = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

이다.

$$\frac{d}{dx}(\sinh^{-1}x) = \frac{d}{dx}(\ln(x+\sqrt{x^2+1})) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1}x) = \frac{d}{dx}(\ln(x+\sqrt{x^2-1})) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1}x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right) = \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1}{2(1-x)} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{csch}^{-1}x) = \frac{1}{-\mathrm{csch}(\mathrm{csch}^{-1}x)\cot(\mathrm{csch}^{-1}x)} = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{sech}^{-1}x) = \frac{1}{-\mathrm{sech}(\mathrm{sech}^{-1}x)\tan(\mathrm{sech}^{-1}x)} = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\coth^{-1}x) = \frac{1}{-\mathrm{csch}^2(\coth^{-1}x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

문제 147. *미분가능한 함수 f, g, h에 대하여,*

$$f'(c) : g'(c) : h'(c) = f(b) - f(a) : g(b) - g(a) : h(b) - h(a)$$

인 $c \in (a, b)$가 항상 존재하는가?

함수 $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x, h(x) = x$이라고 생각하면 $[a, b] = [0, \pi]$일 때

$$f'(c) : g'(c) : h'(c) = \cos c : -\sin c : 1$$

이어야 한다. 또한,

$$f(\pi) - f(0) : g(\pi) - g(0) : h(\pi) - h(0) = 0 : -2 : \pi$$

이다. 따라서 $\cos c = 0$이고, 범위에 의하여 $c = \frac{\pi}{2}$이다. 그러나 이 경우

$$\cos c : -\sin c : 1 = 0 : -1 : 1$$

이므로 $0 : -2 : \pi$와는 다르다. 따라서 이 경우에는 그러한 c가 존재하지 않는다.

문제 148. *The function f satiesfies $0 \leq f'(x) \leq f(x)$ for all $x > 0$ and $f(0) = 1$¿ Show that $f(x) \leq e^x$ when $x \geq 0$.*

함수 $g(x) = f(x)e^{-x}$를 정의하자. 그러면

$$g(0) = f(0)e^0 = f(0) = 1$$

$$g'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = \{f'(x) - f(x)\}e^{-x}$$

이 성립한다. 또한 $f'(x) \leq f(x)$이므로,

$$g'(x) \leq 0$$

역시 성립한다. 따라서 $g(0) = 1$이고 $g(x) \leq 1$이 $x \leq 0$에서 성립하므로, $g(x) \leq 1$이 모든 $x \geq 0$에서 성립한다. 따라서,

$$f(x) \leq e^x$$

이게 된다.

문제 149. *The function f is continuous on $[0,1]$ and differentiable on $(0,1)$. Let λ be a real number. Show that there is $c \in (0,1)$ such that*

$$f'(c) = \lambda f(c)$$

when $f(0) = f(1) = 0$.

함수 $g(x) = f(x)e^{-\lambda x}$를 도입하자. 그러면 $g(0) = g(1) = 0$이다. 또한 $g'(x) = (f'(x) - \lambda f(x))e^{-\lambda x}$이므로, 구간 $[0,1]$에서 연속하고 $(0,1)$에서 미분가능한 함수 $g(x)$는 평균값 정리에 의해

$$g'(c) = \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = 0$$

인 $c \in (0,1)$이 존재한다. 그런데 $e^{-\lambda c} \neq 0$이므로,

$$f'(c) - \lambda f(c) = 0$$

인 $c \in (0,1)$이 존재한다. 따라서

$$f'(c) = \lambda f(c)$$

다.

문제 150. *The function f is continuously differentiable. If $f(x)$ has two distinct roots on $[a,b]$, show that $f'(x) + f(x) = 0$ has at least one root on $[a,b]$.*

함수 $g(x) = f(x)e^x$를 생각하자. 그러면 g는 미분가능하고, $g'(x) = (f'(x) + f(x))e^x$이므로 연속함수이다. $f(x)$의 두 근을 각각 c, d라 한다면 $f(c) = f(d) = g(c) = g(d) = 0$이므로 구간 $[c,d]$에서 평균값 정리를 사용할 수 있다. 따라서

$$g'(s) = (f'(s) + f(s))e^s = 0$$

인 s가 존재하고, $e^s \neq 0$이므로 $f'(x) + f(x) = 0$은 $[a,b]$ 안에서 적어도 하나의 근을 가진다.

문제 151. *Find the value r to make $f(x) = e^{rx}$ be a root of the differential equation*

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0$$

. By using this, find the solution f satisfying the above equation and $f(0) = 2, f(1) = e + e^2$.

$f(x) = e^{rx}$를 대입한다면

$$r^2e^{rx} - 3re^{rx} + 2e^{rx} = 0$$

이며, $e^{rx} \neq 0$이므로 $r^2 - 3r + 2 = 0$이다. 그러면 $r = 1$과 $r = 2$가 가능해진다. 미분의 선형성에 의하여

$$f(x) = ae^x + be^{2x}$$

꼴은 모두 방정식을 만족시키며, 주어진 값들을 확인하기 위해서는

$$f(x) = e^x + e^{2x}$$

이다.

문제 152. *For positive integer r, the twice differentiable function $u(x)$ satisfies below.*

$$u'(1) = r \cdot u'(0), \quad u(1) = r \cdot u(0)$$

$u(x) \neq 0, u'(x) \neq 0$ *for* $x \in [0,1]$

Now, show that there is $\alpha \in [0,1]$ such that

$$\frac{u''(\alpha)}{u(\alpha)} > 0$$

.

함수 $g(x) = \ln|u(x)|$를 떠올리면,

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

이므로 $g'(1) = g'(0)$이 성립한다. 그러면 g는 두 번 미분 가능하므로 g'에 대한 평균값정리에 의하여,

$$g''(c) = \frac{u''(c)u(c) - u'(c)u'(c)}{\{u(c)\}^2} = 0$$

인 $c \in (0,1)$이 존재한다. 이때 $u''(c)u(c) = \{u'(c)\}^2 > 0$이 되므로,

$$\frac{u''(c)}{u(c)} > 0$$

이다.

문제 153. *For two distinct positive real number x, y, let's think $A = |x-y|, B = |\ln x - \ln y|, C = |\sqrt{x} - \sqrt{y}|$. Is there any solution of $C^2 = AB$?*

일반성을 잃지 않고 $x > y$라고 가정하고, 문제의 조건을 만족하는 x, y가 존재한다고 하자. 그러면 $AB - C^2 = |x-y||\ln x - \ln y| = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$ 이다. 그런데 $x > y$라 하였으므로, 절댓값을 풀어

$$(x-y)(\ln x - \ln y) - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 0$$

인 x, y를 찾겠다고 생각하자. 양변을 y로 나눈다면

$$\left(\frac{x}{y} - 1\right)\ln\frac{x}{y} - \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} - 1\right)^2 = 0$$

이 되고, $t = \sqrt{x}/\sqrt{y}$라고 두면

$$2(t^2-1)\ln t - (t-1)^2 = 0$$

이고, $t > 1$이다. 함수 $f(t) = 2(t^2-1)\ln t - (t-1)^2$이라 두면

$$f'(t) = 4t\ln t + \frac{2t-2}{t}$$

이며, $t > 1$에서 이는 항상 양수이다. 따라서 $f(t)$는 $t > 1$에서 증가함수이고, $f(1) = 0$이므로 $f(t) > 0$이 된다. 그런데 이는 모순이므로, 이런 조건을 만족시키는 x, y는 없다.

문제 154. *For the quadratic polynomial $f(x)$ with the leading coefficient 1, let's think the function $g(x) = f(x)e^{f'(x)}$. When the function $g(x)$ has its local minimum 0 at $x = 1$, find the local maximum of $g(x)$.*

$f(x) = x^2 + ax + b$라 하면 $f'(x) = 2x + a$이므로

$$g(x) = (x^2 + ax + b)e^{2x+a}$$

이고,

$$g'(x) = \{2x^2 + (2 + 2a)x + (a + 2b)\}e^{2x+a}$$

이다. $x = 1$에서 이 함수가 극솟값 0을 가지므로,

$$g(1) = (1 + a + b)e^{2+a} = 0$$

이니 $a + b = -1$이고

$$g'(1) = (3a + 2b + 4)e^{2+a} = 0$$

이므로 $3a + 2b = -4$이다. 이를 연립하면 $a = -2, b = 1$이고 $g'(x) = (2x^2 - 2x)e^{2x-2}$이 된다. 따라서 $g'(0) = 0$이란 결론을 얻게 된다. $g'(x)$의 부호는 $x = 0$에서 양에서 음이 되므로, $g(0)$은 극댓값이며 이 값은

$$g(0) = be^a = e^{-2}$$

이다.

문제 155. *Find the function $f(x)$ satisfying below three conditions.*

> *1) There is second derivative of $f(x)$ on $(-\infty, \infty)$.*
> *2) For all real number x, y, $xyf(x + y) = (x + y)f(x)f(y)$*
> *3) For $x \neq 0$, $xf(x) > 0$*

함수 $g(x)$를 아래와 같이 정의하자.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & (x \neq 0) \\ f'(0) & (x = 0) \end{cases}$$

문제의 두 번째 조건에 $y = 0$을 대입하면, $xf(x)f(0) = 0$을 얻고, 세 번째 조건에 의해 $f(0) = 0$이다. 또한, 이에 따라 $g(x)$의 $x \to 0$일 때의 극한인 $f'(0)$이 되면서 g는 연속함수이다. 그리고 $x, y, x + y \neq 0$일 때 둘째 조건에 의하여

$$\frac{f(x + y)}{x + y} = \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{f(y)}{y}$$

이므로 $g(x + y) = g(x)g(y)$이다. 또한, $f(x)$의 이계도함수가 존재하니 로피탈 정리에 의하여

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(h)}{h} - f'(0)}{h} = \frac{1}{2}f''(0)$$

이고 $g'(0)$이 존재한다. 위에서 얻은 식을 y로 미분하고 $y = 0$으로 대입하면

$$g'(x) = g'(0)g(x)$$

가 되고, 이로부터 $g'(x) = e^{g'(0)x+C}$꼴임을 알 수 있다. 또한 $g(x + y) = g(x)g(y)$이므로 $C = 0$이다. 따라서, $g(x) = a^x$ 꼴이며,

$$f(x) = xa^x \quad (a > 0)$$

문제 156. *The ineqaulity*

$$e + (x - 2)e^{\frac{1}{x}} \geq (x - 1)e^{\frac{2}{x}}$$

holds for $x > 2$. Prove this.

$x = 2$인 경우는 당연하므로 $x > 2$인 경우만 생각하자. $f(t) = e^t$는 미분가능하므로, 평균값 정리에 의하여

$$f'(c_1) = \frac{f(\frac{2}{x}) - f(\frac{1}{x})}{\frac{2}{x} - \frac{1}{x}} = (e^{\frac{2}{x}} - e^{\frac{1}{x}})x, f'(c_2) = \frac{f(1) - f(\frac{2}{x})}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{(e - e^{\frac{2}{x}})x}{x - 2}$$

인 $\frac{1}{x} < c_1 < \frac{2}{x}, \frac{2}{x} < c_2 < 1$이 존재한다. $f'(t) = e^t$이므로 f'은 증가함수이고, 따라서 $f'(c_1) \le f'(c_2)$로부터

$$e + (x-2)e^{\frac{1}{x}} \ge (x-1)e^{\frac{2}{x}}$$

임을 알 수 있다.

문제 157. *Consider*

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

. Show that

$$P_{2n+2}(x) \le \ln(x+1) \le P_{2n+1}(x)$$

for $x \in [0,1]$ and $n \in \mathbb{N}_0$.

$f(x) = \ln(x+1) - P_{2n+2}(x)$이라고 하자. 그러면

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \frac{1}{1+x} - \frac{1-(-x)^{2n+2}}{1+x} = \frac{x^{2n+2}}{1+x}$$

이므로, $0 \le x < 1$에 대해 $f'(x) \ge 0$이 되어 $f(x)$는 $0 \le x < 1$에서 증가하는 함수이다. $f(0) = 0$이므로, 이 구간에서 $f(x) \ge 0$이다. 따라서 $P_{2n+2}(x) \le \ln(x+1)$이다.

마찬가지로, $g(x) = P_{2n+1}(x) - \ln(x+1)$이라고 두면, $g(0) = 0$, $g'(x) = \dfrac{x^{2n+1}}{1+x} \ge 0$이므로 $0 \le x < 1$에서 $\ln(x+1) \le P_{2n+1}(x)$이다.

따라서

$$P_{2n+2}(x) \le \ln(x+1) \le P_{2n+1}(x)$$

문제 158. *Let's think the function*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x > 0) \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

. Find the interval of x where $f(x)$ is concave upward.

함수 $f(x)$의 이계도함수가 0보다 큰 구간에서 concave upward이다. 함수의 이계도함수를 계산하면, $x \ne 0$일 때

$$f''(x) = \left(e^{\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right)\right)' = \frac{2}{x^4} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(\frac{2}{x^2} - 3\right)$$

이다. 따라서 $\frac{2}{x^2} > 3$인 구간을 구하면 된다. 즉,

$$0 < x < \frac{\sqrt{6}}{3}$$

이 원하는 구간이다.

문제 159. *Show that the function*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & (x \ne 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

is continuous and increasing.

먼저 함수 f가 연속함수임을 보이자. $x \neq 0$인 경우에 함수 f는 연속인 두 함수 $e^x - 1$과 x에 관한 유리함수이므로 연속이다. $x = 0$일 경우

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = e^0 = 1 = f(0)$$

이므로, f는 $x = 0$에서도 continuous이다. f에서 $x \neq 0$일 경우에 도함수는

$$f'(x) = \frac{(x-1)e^x + 1}{x^2}$$

이 된다. 그러면 함수 $g(x) = (x-1)e^x + 1$이라고 하면, $g'(x) = xe^x$이므로 g는 $x = 0$에서 최소값 $g(0) = 0$을 가진다. 그러므로 $x \neq 0$이면 $g(x) \geq 0$이기에 $f'(x) \geq 0$이고, 함수 f는 증가한다. 또한

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

이 L'Hospital's theorem에 의해 성립하므로, f는 $x = 0$에서도 증가한다. 따라서 f는 increasing.

문제 160. *For natural number n, let's think the equation $\ln x - x + 20 - n = 0$. Find the number of n to make the equation have two distinct real roots.*

$f(x) = \ln x - x + 20 - n$이라 놓으면 $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$이다. $f'(x) = 0$이려면 $x = 1$이고, 증감을 조사하면 $x = 1$에서 극대이고

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

이므로 $f(x) = 0$이 서로 다른 두 실근을 가질 조건은 $f(1) = 19 - n > 0$이다. 따라서 자연수 n의 개수는 18개이다.

문제 161. *Find the value of*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^x - 1}{x \ln x}$$

.

$$\lim_{x \to 0+} x \ln x = \lim_{h \to \infty} -\frac{\ln h}{h} = 0$$

이므로, $x \ln x = t$라고 두면

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^x - 1}{x \ln x} = \lim_{h \to \infty} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

이다.

문제 162. *Find the value of*

$$\lim_{x \to \infty} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$$

x가 충분히 커진다면

$$e^x < e^x + x < 2e^x$$

이다. 따라서

$$e < (e^x + x)^{\frac{1}{x}} < 2^{\frac{1}{x}} e$$

이다. 이때

$$\lim_{x \to \infty} e = \lim_{x \to \infty} 2^{\frac{1}{x}} \cdot e = e$$

임을 알고 있으므로, 샌드위치 정리에 의하여

$$\lim_{x \to \infty} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

이다.

문제 163. *Find the limit of*

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{e^x-1}}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{e^x-1}} &= \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{e^x-1}}\\ &= e^{1\times 1} = e\end{aligned}$$

이다.

문제 164. *Find the limit of*

$$\left(\frac{1+\ln x}{\ln x}\right)^{\ln x}$$

as x goes to ∞.

$h=\ln x$이라 생각하면 $x\to\infty$일 때 $h\to\infty$이므로,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\ln x}{\ln x}\right)^{\ln x} &= \lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^{h}\\ &= e\end{aligned}$$

문제 165. *Evaluate*

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\cot x}$$

.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\cot x} &= \lim_{x\to 0^+}\ln x\cdot\tan x\\ &= \lim_{x\to 0^+}(x\ln x)\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\\ &= 0\cdot 1\cdot 1 = 0\end{aligned}$$

이다.

Chapter 7

Techniques of Integration

문제 166.

$$\int_0^1 e^x \cos x dx$$

을 구하여라.

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^x \cos x dx &= [e^x \sin x]_0^1 - \int_0^1 e^x \sin x \\ &= e \sin 1 - \left([-e^x \cos x]_0^1 - \int_0^1 -e^x \cos x dx\right) \\ &= -\int_0^1 e^x \cos x dx + e \sin 1 + e \cos 1 - 1\end{aligned}$$

이므로, 정리해주면

$$\int_0^1 e^x \cos x dx = \frac{e \sin 1 + e \cos 1 - 1}{2}$$

이다.

문제 167.

$$\int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{\frac{3}{2}}} dx$$

를 구하여라.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{\frac{3}{2}}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{27}{8}\tan^3\theta}{27\sec^3\theta} \cdot \frac{3}{2}\sec^2\theta d\theta \quad (x = \frac{3}{2}\tan\theta) \\ &= \frac{3}{16}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta} \\ &= \frac{3}{16}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta} \cdot \sin\theta d\theta \\ &= -\frac{3}{16}\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1-u^2}{u^2} du \\ &= \frac{3}{16}\left[u + \frac{1}{u}\right]_1^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{3}{32}\end{aligned}$$

이다.

문제 168.

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$$

을 구하여라.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+4} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{x}{x^2+4} dx - \frac{1}{x^2+4} dx \\ &= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + K\end{aligned}$$

꼴이다.

문제 169. *일차함수 $y = ax + b$에 대해서는 midpoint rule이 항상 정확함을 보여라.*

구간 $[\alpha, \beta]$에서

$$\int_\alpha^\beta (ax+b)dx = \frac{\beta - \alpha}{2} \cdot [(a\alpha + b) + (a\beta + b)]$$

임을 보이면 충분하다. 이때, 좌변은

$$a\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} + b(\beta - \alpha)$$

이고, 우변도

$$a\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} + b(\beta - \alpha)$$

이므로 서로 같다. 따라서 일차함수에 대해서는 이것이 항상 성립한다.

문제 170. *trapezoidal rule을 이용하여 $\int_1^2 \ln x dx$를 0.0001 이하의 차이로 근사하고자 한다. n은 어떤 값보다 커야 하는가?*

$f(x) = \ln x$라고 하면

$$|f''(x)| = \left| -\frac{1}{x^2} \right| \le 1$$

이 $1 \le x \le 2$에서 성립한다. 그럼 $K = 1$, $a = 1$, $b = 2$를 가지고 생각해 보았을 때

$$\frac{1(1)^3}{12n^2} < 0.0001$$

이어야 하므로,

$$n^2 > \frac{10000}{12} = 8333.33\cdots$$

임에 따라

$$n \ge 92$$

이어야 한다. 따라서 n은 적어도 92보다는 큰 자연수여야 한다.

문제 171. *Simpson's Rule을 이용하여 아래 주어진 적분을 최소한의 범위로써 예측하여라.*

$$\int_0^1 f(x)dx$$

단, $f^{(4)}(x)$는 $0 \le x \le 1$에서 -45과 288 사이에 있다. 또한,

$$f(0) = 0,\ f(0.25) = 1,\ f(0.5) = 2, ,\ f(0.75) = 3,\ f(1) = 4$$

이다.

$a = 1, b = 2$이며 $K = 288$이어야 한다. 그리고 $n = 4$이다. 따라서

$$|E_S| \leq \frac{288}{180 \cdot 4^4} = \frac{1}{160} = 0.00625$$

이다. 그리고

$$S_n = \frac{1}{12}(1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 2\dot{2} + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 4) = 2$$

이므로, 이 적분값은

$$1.99375 \leq \int_0^1 f(x)dx \leq 2.00625$$

를 만족시킨다.

문제 172.

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^2} dx$$

가 convergent임을 보여라.

$x \geq 1$에서

$$0 \leq \frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

이고, 이들 continuous function 중에서

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$$

가 convergent이므로, comparison theorem에 의하여

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^2} dx$$

도 convergent이다.

7.1 연습문제1

연습문제1: 8번부터 30번까지는 적분값을 구하는 문제입니다. 혹은, divergent라고 쓰거나, 부정적분의 경우 함수의 형태로 쓰는 것도 허용됩니다.

문제 173.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6 x dx$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sin^6 x dx &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 dx \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} (1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x) dx \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{6}[\sin 2x]_0^{\pi/2} + 3\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 4x}{2} dx - \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 2x)\cos 2x dx\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\int_0^0 (1-u^2) du\right) \quad (u = \sin 2x) \\
&= \frac{5}{32}\pi
\end{aligned}$$

문제 174.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3} dx$$

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3} dx &= \lim_{a\to 1^+}\lim_{t\to\infty} \int_a^t \frac{1}{x(\ln x)^3} dx \\
&= \lim_{a\to 1^+}\lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{2}(\ln x)^{-2}\right]_a^t \\
&= \lim_{a\to 1^+}\lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{2(\ln a)^2} - \frac{1}{2(\ln t)^2}\right] \\
&= \lim_{a\to 1^+} \left[\frac{1}{2(\ln a)^2}\right] = \infty
\end{aligned}$$

이다. 따라서 divergent.

문제 175.

$$\int \sin x\sqrt{1+\tan^2 x} dx \quad (x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$$

$$\begin{aligned}
\int \sin x\sqrt{1+\tan^2 x} dx &= \int \sin x\sqrt{\sec^2 x} dx \\
&= \int \sin x|\sec x| dx \\
&= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \quad (\because x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) \\
&= -\ln(\cos x) + C
\end{aligned}$$

문제 176.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+4} dx$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{x^4+4}dx &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{x^4+4}dx \\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{8}\int_0^t \frac{-x+2}{x^2-2x+2}+\frac{x+2}{x^2+2x+2}dx \\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{8}\int_0^t \frac{-(x-1)+1}{(x-1)^2+1}+\frac{(x+1)+1}{(x+1)^2+1}dx \\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{8}\left(\int_{-1}^{t-1}\frac{-u+1}{u^2+1}du+\int_1^{t+1}\frac{v+1}{v^2+1}dv\right) \quad (u=x-1, v=x+1) \\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{8}\left(-\int_{-1}^{t-1}\frac{u}{u^2+1}du+\int_{-1}^{t-1}\frac{1}{u^2+1}du+\int_1^{t+1}\frac{v}{v^2+1}dv+\int_1^{t+1}\frac{1}{v^2+1}dv\right) \\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{8}\left(-\left[\frac{1}{2}\ln(u^2+1)\right]_{-1}^{t-1}+[\arctan(u)]_{-1}^{t-1}+\left[\frac{1}{2}\ln(v^2+1)\right]_1^{t+1}+[\arctan v]_1^{t+1}\right) \\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{2}\ln(t^2-2t+2)+\frac{1}{2}\ln 2+\tan^{-1}(t-1)+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln(t^2+2t+2)-\frac{1}{2}\ln 2+\tan^{-1}(t+1)-\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t^2+2t+2}{t^2-2t+2}\right)+\tan^{-1}(t+1)+\tan^{-1}(t-1)\right) \\
&= \frac{1}{8}\cdot 2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}
\end{aligned}
$$

문제 177.

$$\int \frac{1}{1-e^{-x}}dx$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{1-e^{-x}}dx &= \int \frac{e^x}{e^x-1}dx \\
&= \int \frac{1}{u-1}du \quad (u=e^x) \\
&= \ln(|u-1|)+C=\ln(|e^x-1|)+C
\end{aligned}
$$

문제 178.

$$\int \frac{1}{3\sin x-4\cos x}dx$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{3\sin x-4\cos x}dx &= \frac{1}{5}\int \frac{1}{\frac{3}{5}\sin x-\frac{4}{5}\cos x}dx \\
&= \frac{1}{5}\int \frac{1}{\sin(x+\theta)}dx \quad (\cos\theta=\frac{3}{5},\ \sin\theta=-\frac{4}{5}) \\
&= \frac{1}{5}\int \csc(x+\theta)dx \\
&= \frac{1}{5}\ln|\csc(x+\theta)-\cot(x+\theta)|+C \\
&= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{\frac{3}{5}\sin x-\frac{4}{5}\cos x}-\frac{\frac{3}{5}\cos x+\frac{4}{5}\sin x}{\frac{3}{5}\sin x-\frac{4}{5}}\right|+C \\
&= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5-3\cos x-4\sin x}{3\sin x-4\cos x}\right|+C
\end{aligned}
$$

문제 179.

$$\int_0^x \frac{1}{1+\frac{1}{t^2}}+\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$$

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{1+\frac{1}{t^2}}dt + \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt &= \int_0^x \frac{t^2}{t^2+1}dt + \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt \\ &= \int_0^x \frac{t^2+1}{t^2+1}dt \\ &= x\end{aligned}$$

문제 180.

$$\int_{2\sqrt{3}}^{6} \left(\frac{3}{\sqrt{x^2-9}}\right)^3 dx$$

$$\begin{aligned}\int_{2\sqrt{3}}^{6} \left(\frac{3}{\sqrt{x^2-9}}\right)^3 dx &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left(\frac{3}{|3\tan\theta|}\right)^3 \cdot 3\sec\theta\tan\theta d\theta \quad (x=3\sec\theta) \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{3}{\cos\theta\tan^2\theta}d\theta \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{3\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta \\ &= \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{3}{u^2}du \quad (u=\sin\theta) \\ &= \left[-\frac{3}{u}\right]_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \\ &= 3\left(2-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 6-2\sqrt{3}\end{aligned}$$

문제 181.

$$\int_1^\infty \frac{2+e^{-x}}{x}dx$$

$$\frac{2+e^{-x}}{x} > \frac{1}{x}$$

이 $x>1$에서 성립하는데, 본문에서 보았듯이

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$$

는 divergent이다. 따라서 comparision theorem에 의하여,

$$\int_1^\infty \frac{2+e^{-x}}{x}dx$$

는 divergent.

문제 182.

$$\int e^{\sqrt[4]{x}}dx$$

$$
\begin{aligned}
\int e^{\sqrt[4]{x}} dx &= \int 4u^3 e^u du \quad (u = \sqrt[4]{x}) \\
&= 4\left([u^3 e^u] - \int 3u^2 e^u du\right) \\
&= 4u^3 e^u - 12\left([u^2 e^u] - \int 2ue^u du\right) \\
&= 4u^3 e^u - 12u^2 e^u + 24\left([ue^u] - \int e^u du\right) \\
&= (4u^3 - 3u^2 + 24u - 24)e^u + C \\
&= e^{\sqrt[4]{x}}(4(\sqrt[4]{x})^3 - 12(\sqrt[4]{x})^2 + 24\sqrt[4]{x} - 24) + C
\end{aligned}
$$

문제 183.

$$\int_0^1 \sqrt[3]{1-x^7} - \sqrt[7]{1-x^3} dx$$

함수 $y = \sqrt[3]{1-x^7}$와 $y = \sqrt[7]{1-x^3}$는 서로 역함수 관계임을 확인할 수 있다. 그리고 구간 $[0,1]$에서 이들 함수는 $(0,1)$과 $(1,0)$을 가로질러 이동하는 모양이다. 따라서 두 함수를 각각 적분한 값은 그래프 $y = \sqrt[3]{1-x^7}$과 x축, y축에 의해 가두어진 넓이와 같다. 따라서 서로 빼면 0이다.

문제 184.

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x + \cos x} dx$$

$\tan\frac{x}{2} = t$로 치환하면 $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$이므로

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

이다. 또한,

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} = \frac{t^2+1}{2}$$

이다. 그러면

$$
\begin{aligned}
\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x+\cos x} dx &= \int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{t^2+1} dt \\
&= \int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{2}{t^2+1+1-t^2+2t} dt \\
&= \int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{1}{1+t} dt \\
&= [\ln(1+t)]_{1/\sqrt{3}}^{1} \\
&= \ln(2) - \ln(3+\sqrt{3}) + \ln(3) \\
&= \ln(3-\sqrt{3})
\end{aligned}
$$

문제 185.

$$\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}dx &= \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}dx \\
&= \lim_{t\to 0^+}\int_{1/t}^1 -ue^u du \quad (u = x^{-1}) \\
&= \lim_{p\to\infty}\int_1^p ue^u du \\
&= \lim_{p\to\infty}[(u-1)e^u]_1^p \\
&= \lim_{p\to\infty}(p-1)e^p = \infty
\end{aligned}$$

이므로, divergent이다.

문제 186.

$$\int x\sin^2 x\cos x dx$$

$$\begin{aligned}
\int x\sin^2 x\cos x dx &= [x\cdot\frac{1}{3}(\sin x)^3] - \int \frac{1}{3}(\sin x)^3 dx \\
&= x\cdot\frac{1}{3}(\sin x)^3 - \frac{1}{3}\int\frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)dx \\
&= \frac{1}{3}x(\sin x)^3 + \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{36}\cos 3x + C
\end{aligned}$$

문제 187.

$$\int \sin x\ln(\sin x)dx$$

$$\begin{aligned}
\int \sin x\ln(\sin x)dx &= [-\cos x\ln(\sin x)] + \int \cos x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}dx \\
&= -\cos x\ln(\sin x) + \int \csc x - \sin x dx \\
&= \ln|\csc x - \cot x| - \cos x(\ln(\sin x) - 1) + C
\end{aligned}$$

문제 188.

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$$

$$\begin{aligned}
\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx &= \int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= \sin^{-1}x - \sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

문제 189.

$$\int \sin(2x)\cos(3x)dx$$

$$\begin{aligned}\int \sin(2x)\cos(3x)dx &= \int \frac{1}{2}\left(\sin 5x + \sin(-x)\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\cos 5x\end{aligned}$$

문제 190.

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx &= \lim_{t\to 0^+}\int_t^{\pi/2} \ln(\sin x)dx \\ &= \lim_{t\to 0^+}\int_{\frac{\pi}{2}-t}^{0} \ln(\sin(\frac{\pi}{2}-u))\cdot(-1)du \quad (u=\frac{\pi}{2}-x) \\ &= \lim_{t\to 0^+}\int_0^{\frac{\pi}{2}-t} \ln(\sin(\frac{\pi}{2}-u))du \\ &= \lim_{t\to 0^+}\int_0^{\frac{\pi}{2}-t} \ln(\cos u)du\end{aligned}$$

이므로, 구하는 값을 I라고 한다면

$$\begin{aligned}2I &= I + I \\ &= \lim_{t\to 0^+}\int_t^{\pi/2} \ln(\sin x)dx + \lim_{t\to 0^+}\int_0^{\frac{\pi}{2}-t} \ln(\cos u)du \\ &= \lim_{t\to 0^+}\int_t^{\frac{\pi}{2}-t} \ln(\sin x) + \ln(\cos x)dx + \lim_{t\to 0^+}\int_{\frac{\pi}{2}-t}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx + \lim_{t\to 0^+}\int_0^{t} \ln(\cos x)dx \\ &= \lim_{t\to 0^+}\int_t^{\frac{\pi}{2}-t} \ln(\sin x\cos x)dx \\ &= \lim_{t\to 0^+}\int_t^{\frac{\pi}{2}-t} \ln(\sin 2x) - \ln(2)dx \\ &= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+}\int_{2t}^{\pi-2t} \ln(\sin u)du - \lim_{t\to 0^+}\ln 2\cdot(\frac{\pi}{2}-2t) \\ &= -\frac{\ln 2}{2}\pi + \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to 0^+}\int_{2t}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u)du + \lim_{t\to 0^+}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-2t} \ln(\sin u)du\right) \\ &= -\frac{\ln 2}{2}\pi + \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx - \lim_{t\to 0^+}\int_{\frac{\pi}{2}}^{2t} \ln(\sin(\pi-v))dv\right) \quad (v=\pi-u) \\ &= -\frac{\ln 2}{2}\pi + \frac{1}{2}\left(I + \lim_{t\to 0^+}\int_{2t}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(v))dv\right) \\ &= -\frac{\ln 2}{2}\pi + I\end{aligned}$$

이므로, 원하는 값 I는 $-\frac{\ln 2}{2}\pi$이다.

문제 191.

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx &= \lim_{a\to 0^+}\lim_{t\to\infty}\int_a^t \frac{\ln x}{1+x^2}dx \\
&= \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx + \lim_{a\to 0^+}\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\ln x}{1+x^2}dx \\
&= \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx + \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\ln x}{1+x^2}dx \\
&= \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx + \lim_{t\to\infty}\int_1^{\frac{1}{t}} \frac{-\ln u}{1+\frac{1}{u^2}}\cdot\frac{-1}{u^2}dx \quad (u=x^{-1}) \\
&= \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx - \lim_{t\to\infty}\int_{\frac{1}{t}}^1 \frac{\ln u}{u^2+1}dx \\
&= \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx - \lim_{b\to 0^+}\int_b^1 \frac{\ln u}{1+u^2}du \\
&= 0
\end{aligned}$$

위의 계산은 극한이 존재한다는 가정 하에 이루어진 것이다. 따라서 둘 중 적어도 하나가 convergent임을 보여 주어야 충분하다. 우리는

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}dx$$

을 볼 것이다. x가 충분히 커지면 $\ln x < \sqrt{x}$가 성립함을 6단원에서 다루었다. 따라서 x가 충분히 크면

$$0 < \frac{\ln x}{x^2+1} < \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{3/2}}$$

일 것이다. 그런데

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}dx$$

가 convergent임을 알고 있으므로, comparision theorem에 의하여

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}dx$$

도 convergent이다. 위에서 이 값이 존재한다면

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2+1}dx$$

도 존재하며 그 값이 서로 부호만 다르다는 것을 알았으므로, 답이 0이라는 데 합리적 근거를 얻는다.

문제 192.

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^3-1}}dx$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sqrt{x^3-1}}dx &= \int \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{2u}{3x^2}du \quad (u=\sqrt{x^3-1}) \\
&= \int \frac{2}{3(u^2+1)}du \\
&= \frac{2}{3}\arctan(u)+C \\
&= \frac{2}{3}\arctan(\sqrt{x^3-1})+C
\end{aligned}$$

문제 193.

$$\int_0^{5\pi/2} \frac{1}{2+\cos x} dx$$

$\tan\frac{x}{2} = t$로 치환하면 $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$이므로

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

이다. 또한,

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} = \frac{t^2+1}{2}$$

이다. 그러면

$$\begin{aligned}
\int_0^{5\pi/2} \frac{1}{2+\cos x} dx &= 3\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2+\cos x} dx + 2\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{2+\cos x} dx \\
&= 3\int_0^1 \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{t^2+1} dt + 2\int_1^\infty \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{t^2+1} dt \\
&= 3\int_0^1 \frac{2}{t^2+3} dt + 2\int_1^\infty \frac{2}{t^2+3} dt \\
&= 3\left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 + 2\left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_1^\infty \\
&= 2\sqrt{3}(\frac{\pi}{6} - 0) + \frac{4\sqrt{3}}{3}(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) \\
&= \frac{7\sqrt{3}}{9}\pi
\end{aligned}$$

문제 194.

$$\int_0^\infty \frac{d}{dx}(e^{1+x-x^2}) dx$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{d}{dx}(e^{1+x-x^2}) dx &= \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{d}{dx}(e^{1+x-x^2}) dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_0^t (1-2x)e^{1+x-x^2} dx \\
&= \lim_{t\to\infty} [e^{1+x-x^2}]_0^\infty \\
&= \lim_{t\to\infty} (e^{-t^2+t+1} - e^1) \\
&= -e
\end{aligned}$$

문제 195.

$$\int e^{3x} \arctan(e^x) dx$$

$$\begin{aligned}\int e^{3x}\arctan(e^x)dx &= \int u^2\arctan(u)du \quad (u=e^x)\\ &= \frac{u^3\arctan u}{3} - \int \frac{u^3}{3(1+u^2)}du\\ &= \frac{1}{3}u^3\arctan u - \frac{1}{3}\int u - \frac{u}{1+u^2}du\\ &= \frac{1}{3}u^3\arctan u - \frac{1}{6}u^2 + \frac{1}{6}\ln(1+u^2)\end{aligned}$$

7.2 연습문제 2

문제 196. *f is inversible and differentiable.*

(1) Show $\int_a^b f^{-1}(x)dx = bf^{-1}(b) - af^{-1}(a) - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f(t)dt$.

(2) What about $\int_a^b xf^{-1}(x)dx$?

(3) Find the value of $\int_0^2 x\sqrt{2+\sqrt{4-x^2}}dx$

(1)

$$\begin{aligned}\int_a^b f^{-1}(x)dx &= \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} y \cdot \frac{dx}{dy}dy \quad (y = f^{-1}(x))\\ &= \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} y \cdot f'(y)dy\\ &= [yf(y)]_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f(y)dy\\ &= bf^{-1}(b) - af^{-1}(a) - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f(t)dt\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_a^b xf^{-1}(x)dx &= \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f(y) \cdot y \cdot f'(y)dy \quad (y = f^{-1}(x))\\ &= \left[\frac{y}{2}\{f(y)\}^2\right]_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} \frac{\{f(y)\}^2}{2}dy\\ &= \frac{1}{2}b^2(f^{-1}(b)) - \frac{1}{2}a^2(f^{-1}(a)) - \frac{1}{2}\int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} \{f(t)\}^2dt\end{aligned}$$

(3) 함수 $y = f^{-1}(x) = \sqrt{2+\sqrt{4-x^2}}$의 역함수를 $x \in [0,2]$에서 구하여 보자. 그러면

$$y^2 - 2 = \sqrt{4-x^2}$$

이므로

$$x^2 = 4y^2 - y^4$$

이고,

$$f(x) = \sqrt{4y^2 - y^4}$$

이다. 또한, $f^{-1}(0) = 2$, $f^{-1}(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_0^2 x\sqrt{2+\sqrt{4-x^2}}dx &= \frac{1}{2}(2)^2 \cdot \sqrt{2} - \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 2 - \frac{1}{2}\int_2^{\sqrt{2}} 4t^2 - t^4dt\\ &= 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5\right]_2^{\sqrt{2}}\\ &= 2\sqrt{2} - \frac{14}{15}\sqrt{2} + \frac{32}{15}\\ &= \frac{32}{15} + \frac{16}{15}\sqrt{2}\end{aligned}$$

문제 197. *$f(x)$ is a even function. Show*

$$\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx=\int_{0}^{a}f(x)dx$$

and find the value of

$$\int_{-1}^{1}\frac{|x|}{(1+e^{-x})(1+x^2)}dx$$

.

$$\begin{aligned}I&=\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx\\&=-\int_{a}^{-a}\frac{f(-u)}{1+e^{u}}dx\quad(u=-x)\\&=\int_{-a}^{a}\frac{e^{-u}f(u)}{e^{-u}+1}du\end{aligned}$$

이므로

$$2I=\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx+\int_{-a}^{a}\frac{e^{-x}f(x)}{e^{-x}+1}dx=\int_{-a}^{a}f(x)\frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$$

이다. 따라서

$$\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx=I=\int_{0}^{a}f(x)dx$$

이다. 그러면 아래 문제를 풀기 위해 적용하면, 함수

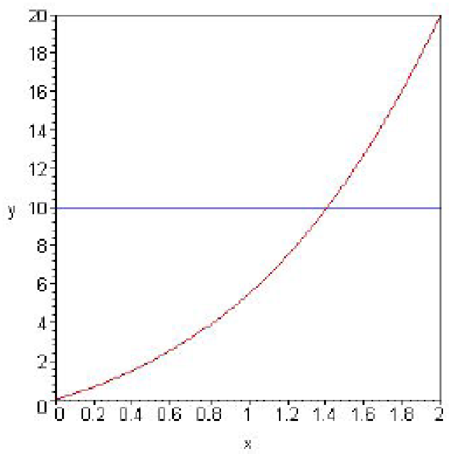
$$f(x)=\frac{|x|}{1+x^2}$$

은 우함수이므로

$$\int_{-1}^{1}\frac{|x|}{(1+e^{-x})(1+x^2)}dx=\int_{0}^{1}\frac{x}{1+x^2}dx=[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)]_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$$

문제 198. *For the function $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2+3x$, show the below inequality.*

$$\int_{0}^{2}f(x)dx+\int_{0}^{10}f^{-1}(x)dx<40$$



함수 $f(x)$의 그래프는 위와 같다. 위 그림에서 $\int_0^2 f(x)dx$는 x축과 $x=2$, $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이이며, $\int_0^{10} f^{-1}(x)dx$는 y축과 $y=10$, $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이이다. 따라서 이 둘의 합은 원점과 $(2,20)$을 끝점으로 하는 직사각형의 넓이보다 작다. 따라서

$$\int_0^2 f(x)dx + \int_0^{10} f^{-1}(x)dx < 40$$

이다.

문제 199. *The monotonically increasing differentiable function $f(x)$ and $g(x)$ satisfies belows.*

(1) $f(0)=2, f(1)=3$

(2) $f'(x)$ is continuous.

(3) For all $x \in [0,1]$, $f(x)^2 - g(x)^2 = 1$.

Evaluate

$$\int_0^1 \frac{f(x)g'(x) - f'(x)g(x)}{f(x)^2 g(x)} dx$$

$f(x)^2 - g(x)^2 = 1$이므로, 양변을 미분하면 $2f(x)f'(x) - 2g(x)g'(x) = 0$이다. 따라서,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{f(x)g'(x) - f'(x)g(x)}{f(x)^2 g(x)} dx &= \int_0^1 \left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)' \frac{1}{g(x)} dx \\
&= \left[\frac{g(x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{g(x)}{f(x)} \cdot \frac{g'(x)}{g(x)^2} dx \\
&= \left[\frac{1}{f(x)}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)^2 - 1} dx \\
&= \left[\frac{1}{f(x)}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)-1} - \frac{f'(x)}{f(x)+1} dx \\
&= \left[\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{2}\ln(f(x)-1) - \ln(f(x)+1)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

문제 200. *For positive x,*

$$f(x) = \int_0^x t \sin t dt$$

. Show that there is at least one solution of $f(x)=0$ on the interval $(k\pi, (k+1)\pi)$ for arbitrary k.

$$f(x) = \int_0^x t \sin t dt = -x\cos x + \sin x$$

임을 알고 있다. 이때

$$f(k\pi) = -k\pi\cos(k\pi), \quad f((k+1)\pi) = -(k+1)\pi\cos((k+1)\pi)$$

이므로,

$$f(k\pi)f((k+1)\pi) = k(k+1)\pi^2\cos(k\pi)\cos((k+1)\pi)$$

이다. k는 자연수이고, 모든 k에 대해서

$$f(k\pi)f((k+1)\pi) = k(k+1)\pi^2\cos(k\pi)\cos((k+1)\pi) = -k(k+1)\pi^2 < 0$$

이게 되므로, f의 연속성과 중간값 정리에 의하여 f는 이 구간에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

문제 201. *Find the value of*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}} &= e^{\ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)} \\ &= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(1\cdot3\cdot\dots\cdot(2n-1)\cdot(\frac{2}{n})^n)} \\ &= e^{\lim_{n\to\infty}\ln(2)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(\frac{2k-1}{n})} \\ &= e^{\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^2\ln t\,dt} \\ &= 2e^{\ln 2-1}=\frac{4}{e}\end{aligned}$$

문제 202. *Evaluate*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{n^2(x-\frac{\pi}{4})^2+1}dx$$

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{n^2(x-\frac{\pi}{4})^2+1}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{n^2(t-\frac{\pi}{4})^2+1}dt\quad(t=\frac{\pi}{2}-x)$$

$$2I_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{n^2(x-\frac{\pi}{4})^2+1}dx+\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{n^2(t-\frac{\pi}{4})^2+1}dt\quad(t=\frac{\pi}{2}-x)=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x+\cos x}{n^2(x-\frac{\pi}{4})^2+1}dx$$

이므로,

$$\begin{aligned}I_n &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x+\cos x}{n^2(x-\frac{\pi}{4})^2+1}dx \\ &= \sqrt{1}\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(x-\frac{\pi}{4})}{n^2(x-\frac{\pi}{4})^2+1}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\cos u}{n^2u^2+1}du\quad(u=x-\frac{\pi}{4}) \\ &= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\frac{\cos u}{n^2u^2+1}du\end{aligned}$$

이다. 그러면

$$\begin{aligned}0\le I_n &= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\frac{\cos u}{n^2u^2+1}du \\ &\le \sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\frac{1}{n^2u^2+1}du \\ &= \sqrt{2}\int_0^{n\pi/4}\frac{1}{n(v^2+1)}dv\quad(v=nu) \\ &< \frac{\sqrt{2}}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

임을 알 수 있으므로, $n\to\infty$임에 따라 샌드위치 정리에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{n^2(x-\frac{\pi}{4})^2+1}dx=0$$

이다.

문제 203. *Find the recurrence equation of*

$$I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{ax+b}}dx$$

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{x^n}{\sqrt{ax+b}}dx \\ &= \left[x^n \cdot \frac{2\sqrt{ax+b}}{a}\right] - n\int \frac{2x^{n-1}(ax+b)}{a\sqrt{ax+b}}dx \\ &= x^n \cdot \frac{2\sqrt{ax+b}}{a} - 2nI_n - \frac{2nb}{a}I_{n-1} \end{aligned}$$

이므로 정리해주면

$$I_n = \frac{2x^n\sqrt{ax+b}}{a(2n+1)} - \frac{2nb}{a(2n+1)}I_{n-1}$$

문제 204. *Derive*

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$$

by using integration by parts.

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 (1-x^2)^n dx \\ &= [x(1-x^2)^n]_0^1 + 2n\int_0^1 x^2(1-x^2)^{n-1}dx \\ &= 2n(I_{n-1} - I_n) \end{aligned}$$

이므로

$$I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$$

이다. 그럼 먼저 $I_1 = \frac{2}{3} = \frac{4^1(1!)^2}{3!}$임이 확인되었고, I_{n-1}에 대해서도 저 식이 성립한다고 가정하면

$$I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{4^{n-1}(n-1)!}{(2n-1)!} = \frac{4^n(n!)!}{(2n+1)!}$$

이게 되므로, 수학적 귀납법에 의해 성립한다.

문제 205. *Suppose that* $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ *is a continuous and nonnegative function. Prove that if* $\int_a^\infty f(x)dx = 0$*, then* $f(x) = 0$*.*

$f(x) \geq 0$임은 잘 알려져 있으므로, $b > a$인 모든 b에 대하여

$$\int_b^\infty f(x)dx = \lim_{c\to\infty}\int_b^c f(x)dx \geq 0$$

임도 자명하다. 따라서 주어진 조건을 만족시키려면

$$0 \geq -\int_a^b f(x)dx = \int_b^\infty f(x)dx \geq 0$$

이어야 하므로, 모든 b에 대해 $\int_a^b f(x)dx = 0$이다. 그러면 함수

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (x \in [a, \infty)$$

를 정의할 때 이 함수는 미적분학 기본정리에 의해 모든 실수에서 미분가능하며 연속이고, 항상 0이라는 값을 가지는 상수함수이므로 $x \in (a, \infty)$에서

$$F'(x) = f(x) = 0$$

이 성립하게 된다. 또한, $f(a)$의 경우에는

$$f(a) = \lim_{d \to a} f(d) = 0$$

이게 된다. 따라서 $f(x) = 0$이 $[a, \infty)$에서 성립한다.

문제 206. *Let f be a positive function such that $f''(x) < 0$ on $[a, b]$. Show that*

$$\int_a^b f(x)dx > T_n$$

where T_n is the approximation from trapezoidal rule.

우리는 구간 $[x_{i-1}, x_i]$에 대해서만 볼 것이다. x_i의 정의나 i의 범위 등에 대해서는 trapezoidal rule에서 했던 것과 동일하게 둘 것이다. 즉, $i = 1, 2, \cdots, n$에 대하여 $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$로 두겠다는 것이다. 그러면 T_n을 계산함에 있어 이 부분의 기여값은

$$\frac{b-a}{n} \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

이 된다. 그럼, 이것이

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

작음을 보여주면 전체 구간에서 계산함으로써 이 부등식을 쉽게 보일 수 있다.

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \frac{b-a}{n} \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f(x) - \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} (x - x_{i-1}) + f(x_{i-1}) \right) \right) dx$$

인데,

$$g(x) = f(x) - \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} (x - x_{i-1}) + f(x_{i-1}) \right)$$

이라 두면 $g(x_{i-1}) = g(x_i) = 0$이며

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$$g''(x) = f''(x) < 0$$

이다. 구간 $[x_{i-1}, x_i]$에는 롤의 정리에 의하여 $g'(c_i) = 0$인 c_i가 존재하며, $g''(x) < 0$가 이 구간에서 성립하므로 $x_{i-1} < x < c_i$에서는 $g'(x) > 0$이고, $c_i < x < x_i$에서는 $g'(x) < 0$이다. 따라서 $g(x) > 0$이 구간 (x_{i-1}, x_i)에서 성립한다. 따라서

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \frac{b-a}{n} \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f(x) - \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} (x - x_{i-1}) + f(x_{i-1}) \right) \right) dx > 0$$

이고, 이는 곧

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx > \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = T_n$$

을 증명한다.

문제 207. *Prove that* $\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx = (n-1)!$ *when* n *is a positive integer.*

모든 자연수 n에 대하여,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = 0$$

이 성립함을 알고 있다. 그러면, $n = 1$일 때에

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}[-e^{-x}]_0^t = 1 = 0!$$

이다. 또한, $n = k-1$일 때 성립한다고 가정하면 $n = k$일 때

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{k-1}e^{-x}dx &= \lim_{t\to\infty}\left([-x^{k-1}e^{-x}]_0^t + \int_0^t (k-1)x^{k-2}e^{-x}\right)\\ &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t (k-1)x^{k-2}e^{-x}\\ &= (k-1)\int_0^\infty x^{k-2}e^{-x}dx = (k-1)(k-2)! = (k-1)!\end{aligned}$$

이므로, 수학적 귀납법에 의해

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx = (n-1)!$$

이다.

문제 208. *Let* $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ *be given. Find* $f'(\pi)$ *if* $f(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{-sx^2}dx (s > 0)$.

$\sqrt{s}x = u$라고 두자. 그러면

$$\begin{aligned}f(s) &= \int_{-\infty}^\infty e^{-sx^2}dx\\ &= \lim_{t\to\infty}\lim_{a\to-\infty}\int_{-a}^t e^{-sx^2}dx\\ &= \lim_{t\to\infty}\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{s}}\int_{-\sqrt{s}a}^{\sqrt{s}t} e^{-u^2}du\\ &= \frac{1}{\sqrt{s}}\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}du\\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}\end{aligned}$$

이므로

$$\frac{d}{ds}f(s) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}(s)^{-3/2}$$

이다. 따라서

$$f'(\pi) = -\frac{1}{2\pi}$$

문제 209. *For an integer* $n > 1$, *let* $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^n - n\left(1+\frac{1}{x}\right)$. *Determine whether* $\int_0^1 f(x)dx$ *is convergent or divergent.*

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^n - n\left(1+\frac{1}{x}\right) = \sum_{k=0}^n {}_nC_k\frac{1}{x^k} - n\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 - n +_n C_2\frac{1}{x^2} + {}_nC_3\frac{1}{x^3} + \cdots + {}_nC_n\frac{1}{x^n}$$

인데, $0 < x < 1$에서는

$$f(x) = 1 - n +_n C_2 \frac{1}{x^2} +_n C_3 \frac{1}{x^3} + \cdots +_n C_n \frac{1}{x^n} > 1 - n + 2^n \frac{1}{x^2} > 0$$

이 성립한다. 그런데

$$\int_0^1 1 - n + 2^n \frac{1}{x^2} dx$$

는 divergent임이 명확하므로, comparison theorem에 의하여

$$\int_0^1 f(x) dx$$

도 divergent이다.

문제 210. *Determine whether* $\int_2^\infty \frac{1}{\ln(x^2+x)} dx$ *is convergent or divergent.*

$\ln(x^2+x) \leq \ln(2x^2) \leq \ln(x^3) = 3\ln x < 3x$가 $x \geq 2$에서 성립하므로,

$$\frac{1}{\ln(x^2+x)} > \frac{1}{3x}$$

이다. 그런데

$$\int_2^\infty \frac{1}{3x} dx$$

가 divergent이므로, comparison theorem에 의하여

$$\int_2^\infty \frac{1}{\ln(x^2+x)} dx$$

도 divergent이다.

문제 211. *(1) Using Simpson's rule with* $n = 4$, *approximate* $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ *as the sum of the fractions.*

(2) How large should we take n in order to guarantee that the approximation for $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ *is accurate to within 0.0002?*

(1)

$$S_4 = \frac{0.25}{3}(1 + \frac{4}{1.25} + \frac{2}{1.5} + \frac{4}{1.75} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{12} + \frac{4}{15} + \frac{1}{9} + \frac{4}{21} + \frac{1}{24}$$

이다.

(2) Simpson's rule에서 error는 $\frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{24}{x^5}$의 $x \in [1, 2]$에서의 최댓값 $K = 24$에 대하여

$$|E_S| \leq \frac{24(2-1)^5}{180n^4} = \frac{2}{15n^4}$$

을 성립시킨다. 그러면 $|E_S| \leq 0.0002$를 보장시키기 위해서는

$$n^4 \geq \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{0.0002} = \frac{2000}{3} \approx 666.66\cdots$$

이다. 그러면 적어도 $n \geq 6$이어야 함을 알 수 있다.

문제 212. *(1) Let* $J_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\sin nx}{1+x^2} dx$. *Show that* $|J_n| \leq \frac{\pi}{4n}$.

(2) Calculate $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\sin nx}{1+x^2} dx$.

(1) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}$이므로,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \le \frac{\pi}{4}$$

이다. 따라서,

$$|J_n| = \frac{1}{n}\left|\int_0^1 \frac{\sin nx}{1+x^2}dx\right| \le \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{|\sin nx|}{1+x^2}dx \le \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \le \frac{\pi}{4n}$$

임을 알 수 있다.

(2)

$$\frac{1}{n}\left|\int_0^1 \frac{\sin nx}{1+x^2}dx\right| \le \frac{\pi}{4n}$$

이고 $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{4n} = 0$이므로, 샌드위치 정리에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\sin nx}{1+x^2}dx = 0$$

문제 213. *Evaluate*

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}} &= \int_{-\infty}^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{u^2+1}du \\ &= \lim_{t\to\infty}[\arctan u]_0^t = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

문제 214. *Determine the integral* $\int_0^\infty \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}dx$ *is convergent or divergent and evaluate the integral if it is convergent.*

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}dx &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{2x}{(1+x^2)^2}\cdot \arctan x dx \\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\left(\left[-\frac{1}{x^2+1}\arctan x\right]_0^t + \int_0^t \frac{1}{(x^2+1)^2}dx\right) \\ &= \lim_{a\to\frac{\pi}{2}-}\frac{1}{2}\int_0^a \frac{1}{(\sec^2 u)^2}\sec^2 u du \quad (x=\tan u) \\ &= \lim_{a\to\frac{\pi}{2}-}\frac{1}{2}\int_0^a \cos^2 u du \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2u}{2}du \\ &= \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

문제 215. *We can extend our definition of average value of a continuous function to an infinite interval by defining the average value of f on the interval $[a,\infty)$ to be*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t-a}\int_a^t f(x)dx$$

(1) Find the average value of $f(x) = \tan^{-1} x$ on the interval $[0,\infty)$.

(2) If $f(x)\ge 0$ and $\lim_{x\to\infty} f(x) = C$, what is the average value of f on the interval $[a,\infty)$?

(1)

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \tan^{-1}x dx &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left([x\tan^{-1}x]_0^t - \int_0^t \frac{x}{1+x^2}dx\right)\\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left(t\tan^{-1}t - \left[-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^t\right)\\ &= \lim_{t\to\infty}\left(\tan^{-1}t + \frac{1}{2}\frac{\ln(1+t^2)}{t}\right)\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

(2) $f(x)\geq 0$이므로 $C>0$이다.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = C$$

이므로, 임의의 ε에 대하여

$$x \geq M \quad \Rightarrow \quad |f(x)-C| < \epsilon$$

이 성립하는 $a<M$이 존재한다. 그러면

$$\int_a^M f(x)dx = L$$

이라는 유한한 값을 생각해본다면,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t-a}\int_a^t f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t-a}(L+\int_M^t f(x)dx)$$

이며 구간 $[M,t]$에서 $C-\varepsilon < M < C+\varepsilon$이므로

$$\frac{L}{t-a}+\frac{t-M}{t-a}(C-\varepsilon) \leq \frac{1}{t-a}(L+\int_M^t f(x)dx) \leq \frac{L}{t-a}+\frac{t-M}{t-a}(C+\varepsilon)$$

이다. 이때

$$\lim_{t\to\infty}\frac{L}{t-a}+\frac{t-M}{t-a}(C+\varepsilon) = C+\varepsilon$$

이므로, t가 충분히 커진다면,

$$\frac{1}{t-a}(L+\int_M^t f(x)dx) \leq \frac{L}{t-a}+\frac{t-M}{t-a}(C+\varepsilon) \leq (C+2\varepsilon)$$

임을 알 수 있다. 같은 이유로,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{L}{t-a}+\frac{t-M}{t-a}(C-\varepsilon) = C-\varepsilon$$

이므로 충분히 큰 t에 대해

$$\frac{1}{t-a}(L+\int_M^t f(x)dx) \geq \frac{L}{t-a}+\frac{t-M}{t-a}(C-\varepsilon) \geq (C-2\varepsilon)$$

이다. 따라서 모든 ε에 대해, t가 충분히 크면

$$\left|\frac{1}{t-a}(L+\int_M^t f(x)dx) - C\right| < 2\varepsilon$$

을 만들 수 있다. 따라서,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t-a}\int_a^t f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t-a}(L+\int_M^t f(x)dx) = C$$

문제 216. *Determine whether the integral is convergent or divergent.*

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{2+e^x}dx$$

$x \geq 0$에서

$$0 < \frac{\arctan x}{2+e^x} \leq \frac{\arctan x}{e^x} \leq \frac{\pi}{2}e^{-x}$$

이며,

$$\int_0^\infty \frac{\pi}{2}e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{\pi}{2}e^{-x}\right]_0^t = \frac{\pi}{2}$$

로 convergent이기에 comparison theorem에 의하여 주어진 integral도 convergent이다.

문제 217. *Let R be the region under the curve $y = \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. If we rotate the region R about the $y-$axis, find the volumne of the resulting solid.*

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi x \cos x dx \\ &= [2\pi x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi \sin x dx \\ &= \pi^2 - 2\pi \end{aligned}$$

문제 218. *The rate of fuel consumptions, in gallons per minute, recorded during an airplane flight is given by a differentiable function R of time t.*

$$\begin{cases} t=0 & \Rightarrow \quad R(t)=24 \\ t=2 & \Rightarrow \quad R(t)=100 \end{cases} \qquad \begin{cases} t=3 & \Rightarrow \quad R(t)=120 \\ t=4 & \Rightarrow \quad R(t)=116 \end{cases}$$

(1) Using Trapezoial Rule with three subintervals, find an approximate value for $\frac{1}{4}\int_0^4 R(t)dt$. Using correct units, give an interpretation to the value of $\frac{1}{4}\int_0^4 R(t)dt$ in the context of the question.

(2) Is there a time t between 0 and 4 such that $R'(t) = 0$?

(3) The function R is modelled by the function $f(t) = 120 - (3t-10)^2, 0 \leq t \leq 4$. Using this model, estimate the total amount of fuel consumed by the airplane from $t = 0$ to $t = 4$.

(1) 등간격이 아니지만 그냥 trapezoidal rule을 써주기로 하자. 그러면

$$\int_0^4 R(t)dt \approx T_3 = \frac{2}{2}(24+100) + \frac{1}{2}(100+120) + \frac{1}{2}(120+116) = 124+110+118 = 352$$

이므로, 구하는 근삿값은 이를 4로 나눈 88이다. 이는 곧 4분 동안의 평균 연료 사용량이다.

(2) $R(t)$는 미분가능하므로 연속이다. 그러면 2분 3분 사이에 IVT에 의하여 $R(c) = 116$인 c가 존재한다. 또한, 이 c와 4분 사이에서 MVT를 사용하면, $R'(d) = 0$인 d가 2분과 4분 사이에 존재한다. 따라서 $R'(t) = 0$의 근이 존재한다.

(3)

$$\begin{aligned} &\int_0^4 120 - (3t-10)^2 dt \\ &= 480 - \frac{1}{9}[(3t-10)^3]_0^4 \\ &= 480 - 112 = 368 \end{aligned}$$

즉, 368갤런을 사용한 것이다.

문제 219. *Find the volume generated by rotating the region bounded by* $y = e^{(x+1)}$, $y = 0, x = 1, x = -1$ *about* $x = -1$.

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{1} 2\pi(x+1)e^{(x+1)}dx \\ &= \int_{0}^{2} 2\pi u e^{u} du \quad (u = x+1) \\ &= 2\pi\left([ue^{u}]_0^2 - \int_0^2 e^u du\right) \\ &= 2\pi(2e^2 - (e^2 - 1)) \\ &= 2\pi(e^2 + 1) \end{aligned}$$

문제 220. *Find the volume generated by rotating the region bounded by* $y = \arctan x$, $y = 0$, $x = 1$ *about* y*-axis.*

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 2\pi x \arctan x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\pi u \tan u \sec^2 u du \quad (\tan u = x) \\ &= [2\pi u \sec^2 u]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\pi \sec^2 u du \\ &= \pi^2 - 2\pi[\tan u]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \pi^2 - 2\pi \end{aligned}$$

문제 221. *Determine whether the integral is convergent or divergent.*

$$\int_0^1 \frac{\sec^2 x}{x\sqrt{x}} dx$$

$0 \le x \le 1$에서

$$1 \le \cos x \le \frac{1}{2}$$

임이 명확하므로, $\sec^2 x \ge 1$이다. 그런데

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}} dx$$

가 divergent임은 이미 알고 있으므로,

$$0 < \frac{1}{x^{3/2}} \le \frac{1}{x^{3/2}}$$

와 comparison theorem으로부터 주어진 integral도 divergent임을 얻는다.

문제 222. *Evaluate*

$$\int_{-1}^{\infty} \left(\frac{x^4}{1+x^6}\right)^2 dx$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{\infty}\left(\frac{x^4}{1+x^6}\right)^2 dx &= \int_{-1}^{\infty}\frac{u^2}{3(1+u^2)^2}du \quad (u=x^3)\\
&= \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\tan^2 v}{\sec^4 v}\right)\cdot\sec^2 vdv \quad (u=\tan v)\\
&= \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 vdv\\
&= \frac{1}{6}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}1-\cos 2vdv\\
&= \frac{1}{6}\left[v-\frac{1}{2}\sin 2v\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{\pi}{8}-\frac{1}{12}
\end{aligned}$$

문제 223. *Let R be the region under the curve $y=\cos^2 x$, $0\le x\le\frac{\pi}{2}$. When we rotate the region R about the $x-$axis, find the volume of the resulting solid.*

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi\cos^4 xdx\\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx\\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}dx\\
&= \frac{\pi}{4}\left[\frac{3}{2}x+\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= \frac{\pi}{4}\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{3}{16}\pi
\end{aligned}$$

문제 224. *Let R be the region under the curve $y=\cos^2 x$, $0\le x\le\frac{\pi}{2}$. When we rotate the region R about the $y-$axis, find the volume of the resulting solid.*

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi x\cos^2 xdx\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi x+2\pi x\cos 2xdx\\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}xdx+\pi\left[\frac{1}{2}x\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx\\
&= \pi\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= \pi\left(\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{\pi^3}{8}-\pi
\end{aligned}$$

문제 225. *Determine whether the improper integral*

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{\sin x}\sqrt{\cos^7 x}} dx$$

is convergent or divergent.

$0 \le x \le \frac{\pi}{4}$에서 $1 \le \sqrt{\cos^7 x} \le \dfrac{1}{2^{7/4}}$이며, $\sin x \ge \frac{2}{\pi}x$이므로

$$0 \le \frac{1}{\sqrt{\sin x}\sqrt{\cos^7 x}} \le \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\pi}x 2^{7/4}}} = \frac{C}{\sqrt{x}}$$

가 상수 $C = \sqrt{\pi}/2^{9/4}$에 대해 성립하게 된다. 이때

$$\int_0^{\pi/4} \frac{C}{\sqrt{x}} dx = \left[2C\sqrt{x}\right]_0^{\pi/4} = C\sqrt{\pi}$$

이므로 $\int_0^{\pi/4} \dfrac{C}{\sqrt{x}} dx$는 convergent이고, comparison theorem에 의하여 주어진 integral도 convergent이다.

Chapter 8

Midterm Problems

문제 226. *The function f is given by*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ g(x) & (0 \le x \le 1) \\ 1 & (x > 1) \end{cases}$$

. To make f satisfy the following two conditions, give an example of $g(x)$ and show your g satisfying all conditions.

> *1) The function $f(x)$ is differentiable.*
> *2) The absolute maximum of $f(x)$ is 1 and absolute minimum of $f(x)$ is 0.*

함수가 만족시켜야 하는 조건을 잘 생각해보면, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, $g'(0) = g'(1) = 0$에 $0 \le g(x) \le 1$이다. 우리는 이러한 g를 하나 찾아주기만 하면 되므로, 생각하기 쉬운 함수인 다항함수를 볼 것이다. g' 역시도 다항함수가 되며, 그것이 적어도 두 개 이상의 근을 가져야 한다. 그러면 g가 삼차함수이며, $g'(x) = ax(x-1)$이라고 두어 보자. 그러면

$$g(x) = a(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2) + C$$

꼴이 될 것이며, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$이어야 하므로 $a = -6, C = 0$이다. 그러면 이 함수는

$$g(x) = -2x^3 + 3x^2$$

이 된다. 또한 이 함수는 $0 \le x \le 1$에서 $0 \le g(x) = x^2(3 - 2x) \le 1$을 만족함을 확인해줄 수 있다. 따라서 원하는 g 중 하나는 $g(x) = -2x^3 + 3x^2$이다.

문제 227. *For the real number k, find the number of distinct roots of*

$$\frac{3\sqrt{3}}{\sin x} = \frac{1}{\cos x} + k \quad \left(0 < |x| < \frac{\pi}{2}\right)$$

.

$f(x) = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sin x} - \dfrac{1}{\cos x}$이라 하면

$$f'(x) = -\frac{3\sqrt{3}\cos^3 x + \sin^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

이므로 $f'(x) > 0$인 구간은 곧 $-\sin^3 x > 3\sqrt{3}\cos^3 x$인 구간이며, $\tan x < -\sqrt{3}$인 구간이다. 따라서 $x - -\frac{\pi}{3}$

에서 극댓값 -8을 가지며,

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to0^+} f(x) = \infty$$

이다. 서로 다른 실근 x의 개수는 곧 $f(x)$와 $y = k$의 교점의 개수를 의미하므로, $k > -8$이면 1개, $k = -8$이면 2개, $k < -8$이면 3개이다.

문제 228. *Find the absolute minimum of the function* $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^3} - 12(x + \frac{1}{x}) + 10$ *for* $x > 0$.

$t = x + \frac{1}{x}$이라 두면 $x > 0$에서 산술기하평균으로부터 $t \geq 2$이다. 한편,

$$t^3 - 3t = (x + \frac{1}{x})^3 - 3(x + \frac{1}{x}) = x^3 + \frac{1}{x^3}$$

이므로

$$f(x) = t^3 - 3t - 12t + 10 = t^3 - 15t + 10$$

이다. 즉, $t \geq 2$에서 이 함수의 최솟값을 구하면 된다. 미분하면 $3t^2 - 15$이므로, $t = \sqrt{5}$에서 극값을 가지며 미분계수의 변화에 의해 여기서 극소이다. 따라서 그래프 개형에 의해 여기서 최소가 되며, 이를 대입하면 $-10\sqrt{5} + 10$이며, 이것이 최솟값이다.

문제 229. *For differentiable function* $f(x)$, $f(x) + xf'(x) > 0$ *for all* x. *Show that* $f(x) > 0$.

$g(x) = xf(x)$라 하면, $g'(x) = xf'(x) + f(x) > 0$이므로, g는 증가함수이고 $g(0) = 0$이다. 따라서 $x > 0$일 때, $g(x) = xf(x) > 0$이다. 따라서 $x > 0$일 때 $f(x) > 0$이다. 또한 $x < 0$일 때는 $g(x) < 0$이 되고, $f(x) > 0$이라는 결론을 얻게 되다. 마지막으로 $x = 0$일 때는 주어진 식에 대입하면, $xf'(x)$ 항이 사라져 $f(0) > 0$을 얻는다. 따라서 모든 x에 대하여 $f(x) > 0$이다.

문제 230. *Let* $N(r)$ *be a number of intersection of the two curves,* $y = \cos(\sqrt{\frac{\pi}{2}}x)$ *and* $x^2 + y^2 = r^2$. *Find* $N(r)$.

$y = \cos(\sqrt{\frac{\pi}{2}}x)$를 대입하면

$$x^2 + \cos^2(\sqrt{\frac{\pi}{2}}x) = r^2$$

이므로 $\frac{\sqrt{\pi 2}}{x} = \theta$이라고 두면

$$\frac{2}{\pi}\theta^2 + \cos^2\theta - r^2 = 0$$

이다. $f(\theta) = \frac{2}{\pi}\theta^2 + \cos^2\theta$라고 둔 다음, 이 함수가 $y = r^2$와 몇 개의 교점을 가지는지 확인해주자. $f'(\theta) = \frac{4}{\pi}\theta - 2\cos\theta\sin\theta$라고 두면 $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$와 $\theta = 0$에서 극대와 극소가 생긴다. $f(0) = 1$, $f(\pm\frac{pi}{4}) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}$이며, $\lim_{x\pm\infty} f(\theta) = \infty$이므로 $0 < r < \sqrt{\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}}$일 때 $N(r) = 0$, $r = \sqrt{\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}}, r > 1$일 때 $N(r) = 2$, $\sqrt{\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}} < r < 1$일 때 $N(r) = 4$, $r = 1$일 때 $N(r) = 3$이다.

문제 231. *For the function* $f(x), g(x), p(x)$, *the following equation holds:*

$$f''(x) + p(x)f(x) = 0, g''(x) + p(x)g(x) = 0$$

(1) Show that $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = C$.
(2) For the interval $[a, b]$, $g(x) > 0$ *and* $f(a)f(b) < 0$. *Find the number of roots of* $f(x) = 0$.

(1) 주어진 두 식의 양변에 $g(x)$, $f(x)$를 각각 곱하면

$$f''(x)g(x) + p(x)f(x)g(x) = 0$$

$$g''(x)f(x) + p(x)g(x)f(x) = 0$$

이다. 따라서

$$f''(x)g(x) - g''(x)f(x) = 0$$

이 성립한다. 그런데 함수 $h(x) = f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$를 생각하면 $h'(x) = f''(x)g(x) - g''(x)f(x) = 0$이게 되므로, h는 상수함수이다.

(2) (1)으로부터

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} = \frac{C}{\{g(x)\}^2}$$

꼴임을 확인해줄 수 있다. 만약 $C = 0$이라면 $f(x)$와 $g(x)$의 비율은 일정하게 되는데, $f(a)f(b) < 0$으로부터 f는 상수함수가 아니므로 $A \neq 0$이고, $g(a)g(b) = \dfrac{f(a)f(b)}{A^2} < 0$이 되어 $g(x) > 0$에 모순된다. 따라서 $C \neq 0$이다. 그러면 $f(x)/g(x)$는 증가함수이거나 감소함수여야 하는데, $f(a)f(b) < 0$이므로, f는 구간 $[a, b]$에서 연속이므로 MVT에 의하여 $f(c) = 0$인 $c \in (a, b)$가 존재한다. 따라서 $\frac{f(c)}{g(c)} = 0$이다. 그런데 이 함수는 증가함수 혹은 감소함수라 했으므로, 구간에서 단 하나의 근을 갖고, $f(x)$도 하나만의 근을 가진다. 따라서 $f(x) = 0$의 근의 개수는 1개이다.

문제 232. *For the function $s(x)$ and $c(x)$, the following holds for all $x, y \in \mathbb{R}$.*

> *1)* $\{c(x)\}^2 + \{s(x)\}^2 = 1$
> *2)* $s(x + y) = s(x)c(y) + c(x)s(y)$
> *3)* $c(x + y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)$

(1) Find the value of $s(0)$ and $c(0)$.

(2) When $s'(0)$ and $c'(0)$ exists, show

$$s'(x) = s(x)c'(0) + c(x)s'(0)$$

$$c'(x) = c(x)c'(0) - s(x)s'(0)$$

(1) $x = y = 0$이면 $s(0)(1 - 2c(0)) = 0$이고 $c(0) = \{c(0)\}^2 - \{s(0)\}^2$이다. $s(0) = 0$이면 $c(0) = 1$ 또는 $c(0) = 0$인데, $c(0) = 0$이면 첫 조건에 모순되므로 $c(0) = 1$이다. 만약 $c(0) = 1/2$이라면 $\{s(0)\}^2 = -1/4$가 되어 모순이 생긴다.

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{s(x+h) - s(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{s(x)c(h) + c(x)s(h) - s(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{s(x)(c(h) - c(0)) + c(x)(s(h) - s(0)}{h} \\ &= s(x)c'(0) + c(x)s'(0) = s'(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{c(x+h) - c(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{c(x)(c(h) - c(0)) - s(x)(s(h) - s(0))}{h} \\ &= c(x)c'(0) - s(x)s'(0) = c'(x)\end{aligned}$$

임을 알 수 있다.

문제 233. *For polynomial $f(x) \leq 0$, show that*

$$f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(n)}(x) \leq 0$$

.

먼저, $f(x) \le 0$이 항상 성립하기 때문에, $\lim_{x\to\infty} f(x)$와 $\lim_{x\to-\infty} f(x)$는 모두 0 이하여야 한다. 그런데 이러한 상황에서는 f의 최고차항의 차수가 항상 짝수이며, 그 계수는 음수여야만 함을 알고 있다. $g(x) = f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(n)}(x)$이라고 두면, 정수 m에 대하여

$$g(x) = b_{2m}x^{2m} + b_{2m-1}x^{2m-1} + \cdots + b_1x + b_0$$

꼴이고 $b_{2m} < 0$이므로 $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = -\infty$이다. 그러면 충분히 큰 M에 대하여 폐구간 $[-M, M]$을 잡아주면, 이 구간에서 연속함수 $y = g(x)$는 EVT에 의해 최댓값을 가진다. $x = c$에서 최댓값을 갖는다고 하면 $g'(c) = 0$이며,

$$0 = g'(c) = f'(c) + f''(c) + \cdot + f^{(n+1)}(c) = g(c) - f(c)$$

이다. 따라서

$$g(x) \le g(c) = f(c) \le 0$$

이므로, $g(x) \le 0$이 성립한다.

문제 234. *Find the smallest value of K to make the below ineqaulity holds for all $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.*

$$K(\sin\theta + 8\cos\theta) \ge \sin\theta\cos\theta$$

주어진 구간에서 $\sin\theta + 8\cos\theta > 0$이므로, $K \ge \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+8\cos\theta}$가 항상 성립하게 하는 K 중에서 최솟값을 찾아주면 된다. 즉, 이 범위에서 함수 $f(\theta) = \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+8\cos\theta}$의 최댓값을 찾자.

$$f'(\theta) = \frac{\cos^3\theta(8 - \tan^3\theta)}{(\sin\theta + 8\cos\theta)^3}$$

이므로, $\tan\alpha = 2$인 α에서 이 함수는 극대이다. 이때의 함숫값은

$$f(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{25}$$

이므로, K의 최솟값은 $\dfrac{\sqrt{5}}{25}$이다.

문제 235. *For the function $y = x + \cos 2x$ defined on $[-\pi, \pi]$,*
(1) Find local maximum and local minimum.
(2) Find inflection points.
(3) Draw the graph.

(1) $y' = 1 - 2\sin 2x$이므로, 이것이 0이 되는 점들을 찾아 주면

$$x = -\frac{11}{12}\pi, -\frac{7}{12}\pi, \frac{1}{12}\pi, \frac{5}{12}\pi$$

이며 이들 점에서 y'의 부호가 어떻게 바뀌는지 관찰하면, 순서대로 이들 x에서는 극댓값, 극솟값, 극댓값, 극솟값이 생김을 알 수 있다. 함숫값을 계산하여 확인해주면, 극댓값은

$$-\frac{11}{12}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{12}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이며 극솟값은

$$-\frac{7}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이다.

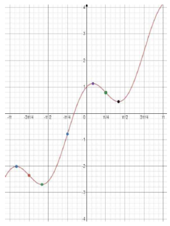
(2) $y'' = -4\cos 2x$이며, 이것이 0이 되는 점을 찾아주면 $x = -\frac{3\pi}{4}, x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$이다. 그리고 이들

점 모두에서는 y''의 부호가 바뀌므로, 변곡점은

$$\left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}\right), \left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$$

이 된다.

(3) 이들을 종합하여 그래프 그리기의 8가지 과정을 모두 수행하면, 그래프를 그려낼 수 있다. 대략적인 개형은 아래와 같다. (실제 답지에는 변곡점, 극대/극소에서의 함숫값, 절편 등을 표기하면 좋다!)



문제 236. *Find the function $f(x)$ satisfying all conditions.*

> *1) $f(x)$ is continuous on $[0,1]$*
> *2) $f(x)$ is differentiable on $(0,1)$*
> *3) $f(0) = f(1)$*
> *4) $f'(c) = 0$ for infinitely many $c \in (0,1)$*

함수 $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{\pi}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ 을 생각하자. 그러면 이 함수는 $x \neq 0$에서 x와 $\sin\frac{\pi}{x}$가 연속이므로 연속이고, $x = 0$에서는 $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$이므로 $x = 0$에서도 연속이다. 또한 미분가능성 역시도 $x \in (0,1)$에서 곱해지는 두 함수가 미분가능하기에 보장해줄 수 있다. 또한, $f(0) = 0, f(1) = 1$이다. 마지막으로, 이 함수는 자연수 n에 대하여 $f(\frac{1}{n}) = 0$이므로, 구간 $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$에서 MVT를 적용하면 이 구간 안에 $f'(c_n) = 0$인 $c_n \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$이 존재한다. 자연수 n의 무한함에 의하여, $f'(x) = 0$의 근도 $(0,1)$에 무한히 많게 존재한다.

문제 237. *For the function $f(x) = (x^3 - 4a^3)^3 - x$ and $g(x) = 3x(x^3 - 4a^3)$, answer to the question.*

(1) Evaluate $f'(x) - \{g(x)\}^2$.

(2) Find the condition of a to make $f'(x) = 0$ has two distinct roots.

(1) $f'(x) = 3(x^3 - 4a^3)^2 \cdot 3x^2 - 1 = \{3x(x^3 - 4a^3)\}^2 - 1$이므로 $f'(x) - \{g(x)\}^2 = -1$이다.

(2) $f'(x) = g(x)^2 + 1$이므로, $g(x)^2 + 1$의 범위를 확인해주면 f'에 대한 지식도 얻을 수 있다. $g'(x) = 12x^3 - 12a^3 = 12(x-a)(x^2 + ax + a^2)$이므로 $g(x)$는 $x < a$에서 감소하고, $x > a$에서 증가한다. 따라서 $x = a$에서 최솟값 $-9a^4$을 가진다. 그러면 $g(x) = \pm 1$인 점이 2개이려면 $-1 < -9a^4 < 1$을 만족하면 되므로

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} < a < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

이다.

문제 238. *Find the polynomial $f(x)$ satisfying following condition.*

$$\frac{d}{dx}\left(\int 2f(x)f'(x)dx\right) = 2x^3, f(0) = 0$$

$f(x)$는 상수함수가 아니므로, $f(x)$는 n차, $f'(x)$는 $n-1$차이다. 그러면 $2n-1$차함수를 적분한 다음 미분하면 3차함수가 되어야 하므로, $n = 2$여야 한다. $f(x) = ax^2 + bx + c$라고 두면 $f(0) = 0$이므로 $f(c) = 0$

이고, $(ax^2+bx)(2ax+b)=x^3$이 되므로

$$f(x)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x^2$$

이다.

문제 239. *Find the following indefinite integral.*

$$\int\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{x^2+1}{x^2}dx$$

$t=x-\frac{1}{x}$이라고 두면

$$x^3-\frac{1}{x^3}=t^3-3t$$

이다. 그리고

$$\frac{dt}{dx}=1+\frac{1}{x^2}$$

이므로, 주어진 부정적분은

$$\int(t^3-3t)tdt$$

와 같다. 따라서

$$\frac{1}{5}t^5-t^3=\frac{1}{5}\left(x-\frac{1}{x}\right)^5-\left(x-\frac{1}{x}\right)^3$$

가 원하는 적분이다.

문제 240. *To draw the three tangent line of $y=x^3+x$ passing through (p,q), what is the condition of p and q?*

접점의 좌표를 (t,t^3+t)라고 한다면 접선의 방정식은

$$y-(t^3+t)=(3t^2+1)(x-t)$$

이고 p,q를 지나므로 정리하면

$$2t^3-3pt^2-p+q=0$$

에 세 개의 근이 있어야 한다. 이 함수를 $f(t)$라 두고 $f'(t)$를 구해보면 $6t(t-p)$이다. 삼차함수 $f(t)$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 $p\neq 0$이고 극대와 극소에서의 함숫값을 곱하면 음수여야 한다. 따라서

$$(-p+q)(-p^3-p+q)<0, p\neq 0$$

이 원하는 p,q의 조건이다.

문제 241. *함수 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)$에 대하여, 방정식*

$$\frac{d^3}{dx^3}f(x)=0$$

이 정확히 네 개의 서로 다른 근을 가지고 있음을 보여라.

먼저, $f(x)$는 7차함수이므로 이를 세 번 미분한 4차함수 $\dfrac{d^3}{dx^3}f(x)$는 최대 네 개의 근을 가진다. 이때 $f(x)$는 총 7개의 근을 가지며 다항함수이기에 실수 전체에서 연속하고 미분가능하기에, 1과 2, 2와 3, 3과 4, 4와 5, 5와 6, 6과 7 사이에서 롤의 정리에 의하여 $f'(x)=0$인 x가 존재한다. 따라서, f'이라는 6차함수의 근은 적어도 6개 존재한다. 이와 같은 방식을 이용하여 계속적으로 롤의 정리를 적용하면, $f^{(3)}(x)$는 적어도 4개의

근을 가진다. 그러나 이 함수가 최대 네 개의 근을 가짐은 밝혀졌으므로, 이 함수는 정확히 네 개의 서로 다른 근을 가진다.

문제 242. *0이 아닌 상수* a_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$*와 자연수* b_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$*에 대하여* $b_1 > b_2 > \cdots > b_m > 0$*일 때, 방정식*

$$a_1x^{b_1} + a_2x^{b_2} + \cdots + a_mx^{b_m} = 0$$

이 많아야 $m - 1$*개의 양근을 가질 수 있음을 보여라.*

$x = 0$은 근임이 확실한데, 양근이 아니기에 제외해주어도 된다. 그러면 $i = 1, 2, \cdots, m - 1$에 대하여 $b_i - b_m = c_i$이라고 두면,

$$a_1x^{c_1} + a_2x^{c_2} + \cdots + a_m = 0$$

의 양근을 보면 된다. 만약 이 함수가 m개 이상의 양근을 가진다고 해보자. 그러면 롤의 정리에 의하여 이를 미분한

$$a_1x^{c_1-1} + \cdots + a_{m-1}x^{c_{m-1}-1} = 0$$

은 적어도 $m - 1$개의 양근을 가지게 된다. 그러면 여기서 다시 $x^{c_{m-1}-1}$을 나누게 된다면,

$$a_1x^{d_1} + \cdots + a_{m-2}x^{d_{m-2}} = 0$$

형태가 만들어지게 된다. 이를 반복하면

$$a_1x^{\alpha} = 0$$

은 적어도 1개의 양근을 가져야 하는데, 이 함수는 분명하게도 양근을 가지지 않는다. 따라서 모순이 되므로, 이 함수의 양근은 많아야 $m - 1$개이다.

문제 243. *함수* f*가 모든 실수* x, y*에 대해 아래 조건들을 만족시킨다.*

(1) $f(x + y) = f(x)f(y)$
(2) $f(x) = 1 + xg(x)$*이며,* $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$
이때, 모든 실수에서 f*가 미분가능하며* $f'(x) = f(x)$*임을 보여라.*

$f(0 + 0) = f(0)f(0)$이므로 $f(0) = 0$ 혹은 $f(0) = 1$이다. 그런데 (2)에 의하여

$$f(0) = 1 + 0g(0) = 1$$

이므로, $f(0) = 1$로 두면 된다. 미분가능한지를 보기 위해서

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)(f(h) - f(0))}{h} = f(x)f'(0)$$

을 계산할 수 있는데, 이로부터 $f'(0)$이 존재한다면 f가 모든 실수에서 미분가능함을 알 수 있다. 이때

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hg(h)}{h} = \lim_{h\to 0} g(h) = 0$$

이 되므로, $f'(0) = 1$이고 $f'(x) = f(x)$이 된다.

문제 244. *함수* $f(x) = \dfrac{x^2}{3 - x^2}$*과* $g(x) = \lambda \sin(1 - x^2)$*에 대하여,* $f(x)$*와* $g(x)$*의* $x = 1$*에서 그은 법선이 평행할* λ*의 값을 찾아라.*

법선이 평행하다는 것은 곧 미분계수가 같다는 것이나 마찬가지다.

$$f'(x) = \frac{2x(3 - x^2) + 2x(x^2)}{(3 - x^2)^2}$$

이므로

$$f'(1) = \frac{3}{2}$$

이다.

$$g'(x) = \lambda \cos(1 - x^2) \cdot (-2x)$$

이니

$$g'(1) = -2\lambda$$

이다. 따라서 두 값이 같으려면

$$\lambda = -\frac{3}{4}$$

여야만 한다.

문제 245. *함수 f가*

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 5xy$$

를 만족시키고, 모든 실수에서 미분가능하다.

(1) $\sum_{k=1}^{10} \{f'(k) - f'(0)\}$ 의 값을 구하여라.

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{[f(x)]^2}{x}$ 의 값을 구하여라.

(1) 먼저, x와 y에 모두 0을 넣으면

$$f(0 + 0) = f(0) + f(0) + 0$$

이므로 $f(0) = 0$이다. 이제 $y = h$를 넣고 $h \to 0$이라고 해보자. 그러면

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0) + 5xh}{h} = f'(0) + 5x$$

로 주어진다. 따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} \{f'(k) - f'(0)\} &= \sum_{k=1}^{10} 5k \\ &= 275 \end{aligned}$$

이다.

(2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{[f(x)]^2}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{[f(x)]^2 - [f(0)]^2}{x - 0} \\ &= \frac{d}{dx}[f(x)]^2 \Big|_{x=0} \\ &= 2f(0)f'(0) = 0 \end{aligned}$$

이 성립한다.

문제 246. *함수 f에 대하여, f'''는 연속함수이며 $f'(c) = f''(c) = 0$이지만 $f'''(c) > 0$이다.*

(1) f는 $x = c$에서 극대 혹은 극소를 가지는가? 증명하거나 반례를 제시하여라.

(2) f가 x좌표가 c인 변곡점을 가지는가? 증명하거나 반례를 제시하여라.

(1) 함수 $f(x) = x^3$은 $x = 0$에서 $f'(0) = f''(0) = 0$이지만 $f'''(0) > 0$이다. 그러나 이 함수는 $x = 0$에서 극대나 극소를 가지지 않는다.

(2) f'''가 연속함수이며 $f'''(c) > 0$이기에, c 근방에서 $f''' > 0$이고 f''는 증가함수이다. 이때 $f''(c) = 0$이므로, f''의 부호는 $x = c$에서 음수에서 양수가 됨을 알 수 있다. 따라서 f는 $(c, f(c))$를 변곡점으로 가진다.

문제 247. *함수 f가 아래 조건을 만족시킨다.*

$$f(a+b) = f(a)f(b) - af(b) - bf(a) + f(a) + f(b) + ab$$

그리고 $f(0) = 0$이며 $f'(0) = 2$라고 한다. f가 모든 수에서 미분가능함을 보이고, f' 역시도 모든 수에서 미분가능함을 보여라.

$$f(a+h) - f(a) = (f(a) - a + 1)f(h) - (f(a) - a)h$$

임이 계산을 통해 밝혀질 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= (f(a) - a + 1) \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} - f(a) + a \\ &= f'(0)(f(a) - a + 1) - f(a) + a \\ &= f(a) - a + 2 \end{aligned}$$

로 존재하기에 f는 모든 수에서 미분가능하다. 또한 f'은 f에 관련된 식과 다항함수의 합으로 나타내지기에, 이 역시도 미분가능하게 된다.

문제 248. *만약 $x > 0$에 대하여 $f''(x) > 0$이라면,*

$$g(x) = xf\left(\frac{b}{x}\right) - xf\left(\frac{a}{x}\right) \quad (0 < a < b)$$

는 $x > 0$에서 감소함수임을 보여라.

x가 양수일 때 $g'(x) = f(\frac{b}{x}) - f(\frac{a}{x}) - \frac{1}{x}(bf(\frac{b}{x}) - af(\frac{a}{x}))$가 성립한다. 또한 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(\frac{b}{x}) - f(\frac{a}{x})}{\frac{b}{x} - \frac{a}{x}} = f'(c)$$

인 $0 < \frac{a}{x} < c < \frac{b}{x}$가 존재하며, 이로써 $g'(x)$를 정리해준다면

$$g'(x) = f'(c)(\frac{b}{x} - \frac{a}{x}) - \frac{b}{x}f(\frac{b}{x}) + \frac{a}{x}f(\frac{a}{x}) = \frac{b}{x}(f'(c) - f'(\frac{b}{x})) + \frac{a}{x}(f'(\frac{a}{x}) - f'(c))$$

이 될 것이다. 그러면 다시 각각에 대해 평균값 정리를 사용해주면

$$f'(c) - f'(\frac{b}{x}) = (c - \frac{b}{x})f''(u) < 0$$

이고

$$f'(\frac{a}{x}) - f'(c) = (\frac{a}{x} - c)f''(v) < 0$$

인 $0 < \frac{a}{x} < u < c < v < \frac{b}{x}$인 u, v가 존재하게 된다. 따라서

$$g'(x) = \frac{b}{x}(c - \frac{b}{x})f''(u) + \frac{a}{x}(\frac{a}{x} - c)f''(v) < 0$$

이 x가 양수일 때 성립하고, g는 감소함수가 된다.

문제 249. *함수 f는 미분가능하다. 정의역 안의 a, b에 대하여 $f'(a) < f'(b)$라고 하자. 이때, $f'(a) < k < f'(b)$를 만족시키는 임의의 k에 대하여,*

$$f'(c) = k$$

인 $c \in (a, b)$가 존재함을 보여라.

함수 $g(x) = f(x) - kx$를 정의하자. 그러면 g는 미분가능함수가 된다. 또한 $g(a) = f(a) - ka$, $g(b) = f(b) - kb$가 되며, g는 닫힌 구간 $[a, b]$에서 최댓값과 최솟값을 가진다. 만약 열린 구간 (a, b)에 이들 모두가 없다면, $g(a)$와 $g(b)$는 각각 최댓값과 최솟값이어야 한다. 그러나 $g'(a) = f'(a) - k < 0$으로 g는 a에서 감소상태고, $g(a)$는 최솟값이 될 수 없으니 최댓값이 되어야 한다. 반면 $g'(b) = f'(b) - k > 0$이므로 g는 b에서 증가상태이고, $g(b)$는 최솟값이 될 수 없으니 최솟값이다. 그러면 둘이 최댓값이면서 최솟값이 되어야 하므로 g는 상수함수인데, 그러면 $g'(a)$가 0이어야 하므로 모순이다. 따라서 $c \in (a, b)$가 존재해 $x = c$에서 최대 혹은 최소가 있어야 하고, 이는 극대 혹은 극소이기도 하므로 $g'(c) = f'(c) - k = 0$이어야만 한다. 따라서 $f'(c) = k$인 $c \in (a, b)$가 존재한다.

문제 250. *다항함수*

$$P(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

의 계수는 모두 양수이며, $P(x) = 0$은 정확히 m개의 서로 다른 근을 가진다고 하자. $Q(x) = (P(x))^2 - P'(x)$ 역시도 m개 이상의 근을 가짐을 보여라.

$P(x) = 0$의 근을 크기 순서대로 $x_1, x_2, \cdots, x_m$이라고 두자. 그러면 $P(x) = b_m(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m)$으로 주어진다. 그러면 x_i들은 모두 다르므로, $P'(x_i)$의 형태와 x_i들의 대소 관계를 를 고려해 보았을 때 $P'(x_i)P'(x_{i+1}) < 0$이 모든 $i = 1, 2, \cdots, m-1$에 대해 성립함을 알 수 있다. 또한 $Q(x_i) = (P(x_i))^2 - P'(x_i) = -P'(x_i)$이므로, $Q(x_i)Q(x_{i+1}) < 0$역시도 성립한다. 만약 $Q(x)$는 $2m$차 함수이며 최고차항이 항상 양수일 것이기에,

$$\lim_{x \to \pm\infty} Q(x) = \infty$$

이 성립한다. 만약 m이 홀수라면 $Q(x_1) = -P'(x_1) = -b_m(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_m) < 0$이고 계속적으로 부호가 바뀌어 $Q(x_m) < 0$이 될 것이다. 따라서 m개의 구간

$$(-\infty, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{m-1}, x_m]$$

양 끝에서의 함숫값의 부호가 다르고 Q는 연속함수이기에, 중간값 정리에 의해 각 구간 내부에는 $Q(x) = 0$의 근이 존재한다. 따라서 적어도 m개의 근이 존재한다. 반면 m이 짝수라면 $Q(x_1) = -P'(x_1) = -b_m(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_m) > 0$일 것이며, $Q(x_2) < 0$이고, $Q(x_m) < 0$일 것이다. 그러면 m개의 구간

$$[x_1, x_2], \cdots, [x_{m-1}, x_m], [x_m, \infty]$$

에서 중간값 정리를 사용하면 적어도 m개의 근이 존재함을 알 수 있다. 따라서 m의 홀짝성에 상관없이 항상 $Q(x)$는 m개 이상의 근을 가진다.

문제 251. *0 이상 1이하의 실수 a, b, c, d에 대하여*

$$abcd \le \frac{4}{27}$$

혹은

$$(1 - a^2)(1 - b^2)(1 - c^2)(1 - d^2) \le \frac{4}{27}$$

가 성립함을 보이시오.

만약 $a(1 - a^2)b(1 - b^2)c(1 - c^2)d(1 - d^2) \le \dfrac{16}{729}$를 보인다면 두 식 모두가 $\frac{4}{27}$보다 클 수가 없게 되므로,

자동적으로 증명이 완료된다. 그런데

$$f(x) = x(1-x^2)$$

을 생각해본다면, $f'(x) = -3x^2+1$이므로 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$일 때 최댓값

$$f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

을 가지게 될 것이고, $a, b, c, d \in [0, 1]$이므로

$$a(1-a^2)b(1-b^2)c(1-c^2)d(1-d^2) \le (\frac{2}{3\sqrt{3}})^4 = \frac{16}{729}$$

가 성립하므로, 문제에 주어진 두 조건 중 하나는 무조건 성립하게 된다.

문제 252. *각 자연수 $n = 1, 2, \cdots$에 대하여, 다항함수*

$$f(x) = (x^2-x)^n$$

의 n계 도함수 $f^{(n)}$이 구간 $[0, 1]$ 사이에서 서로 다른 n개의 실근을 가짐을 보여라.

이 함수 $f(x)$는 $f(x) = x^n(x-1)^n$이므로, $1 \le j \le n-1$에 대하여

$$\frac{d^j}{dx^j} f(x)$$

가 항상 $(x-1)$ 혹은 x를 인수로 가지는 다항함수가 되고, 이에 따라 $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(1) = 0$이다. 그러면 $j = 1$에 대해서 먼저 생각을 해보게 되면, $f(0) = f(1) = 0$이므로 평균값 정리에 의해 $f'(c_1^1) = 0$인 $c_1^1 \in (0, 1)$을 가지게 되고, $f'(0) = f'(1) = 0$이다. 같은 방법으로 구간 $(0, c_1^1), (c_1^1, 1)$에서 평균값 정리를 활용한다면,

$$f''(0) = f''(c_1^2) = f''(c_2^2) = f''(1)$$

인 $0 < c_1^1 < c_2^1 < 1$이 존재한다. 같은 방식으로 계속해나가면 $f^{(n-1)}(x)$에는 근이 $n+1$개 존재할 것이며, 각각은 $0 < c_1^{n-1} < c_2^{n-1} < \cdots < c_{n-1}^{n-1} < 1$이다. 그러면 여기서 평균값 정리를 활용하면

$$f^{(c_i^n)}(x) = 0$$

인 $0 < c_1^n < c_2^n < \cdots < c_n^n < 1$이 존재할 것이며, 구간 $[0, 1]$에 적어도 n개의 근이 존재한다. 그러나 $f^{(n)}(x)$는 n차함수이므로 n개의 실근만을 가질 수 있다. 따라서 $f^{(n)}$은 구간 $[0, 1]$에서 정확히 n개의 서로 다른 실근을 가진다.

문제 253. *2 이상의 자연수 n에 대하여 $0 \le x \le 1$에서 정의된 함수*

$$f_n(x) = \frac{nx(1-x)^n}{1+(nx-1)^2}$$

가 있다. 이 함수 f_n이 $x = a_n$에서 최댓값을 가진다고 할 때,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(a_n)$$

을 구하시오.

$f_n(x)$를 두 부분으로 나누어 생각해보자. $g_n(x) = nx(1-x)^n$, $h_n(x) = 1+(nx-1)^2$이라 두면,

$$g_n'(x) = n(1-x)^n - n^2x(1-x)^{n-1} = n(1-x)^{n-1}(1-x-nx) = n(n+1)(1-x)^{n-1}(\frac{1}{n+1} - x)$$

이므로 이 함수는 $x=\frac{1}{n+1}$일 때 극대이자 최대임을 알 수 있다. 또한 그 이전에는 증가함수이고, 이후로는 감소함수이다. 반면 $h_n(x)$는 $x=\frac{1}{n}$일 때 극소이자 최소이고, 항상 양수임을 알 수 있다. 동일하게 이 이전에는 감소함수, 이후로는 감소함수가 된다. 따라서 $g_n(\frac{1}{n+1})=a, h_n(\frac{1}{n})=b$라고 하면 $0<x<\frac{1}{n+1}$에서는

$$f_n(x)=\frac{g_n(x)}{h_n(x)}\le\frac{a}{h_n(x)}\le\frac{a}{h_n(\frac{1}{n+1})}=f_n(\frac{1}{n+1})$$

이다. 반면 $\frac{1}{n}<x<1$일 때에는

$$f_n(x)=\frac{g_n(x)}{h_n(x)}\le\frac{g_n(x)}{b}\le\frac{g_n(\frac{1}{n})}{b}=f_n(\frac{1}{n})$$

이다. 따라서 f_n이 최댓값을 가지려면,

$$\frac{1}{n+1}\le a_n\le\frac{1}{n}$$

이 성립한다. 그러면 $\frac{1}{n+1}\le x\le\frac{1}{n}$일 때는

$$(1-\frac{1}{n})^n=f_n(\frac{1}{n})\le f_n(a_n)=\frac{g_n(a_n)}{h_n(a_n)}\le\frac{a}{b}=\frac{n}{n+1}\cdot(1-\frac{1}{n+1})^n$$

이어야 하는데,

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot(1-\frac{1}{n+1})^n=\frac{1}{e}$$

이다. 따라서 샌드위치 정리에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}f_n(a_n)=\frac{1}{e}$$

이 성립한다.

문제 254. *함수 $f(x)$는 구간 $I=\{x|a<x<b\}$에서 2회 미분가능하며, $f''(x)<0$이다.*

(1) $\alpha,\beta\in I$와 $p\ge0, q\ge0, p+q=1$에 대하여, $f(p\alpha+q\beta)\ge pf(\alpha)+qf(\beta)$임을 보여라.

(2) (1)을 이용하여, $x_1,x_2,x_3\in I$에 대하여

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)\ge\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$$

가 성립함을 보여라.

(1) $\alpha=\beta$인 경우는 명확하게 성립하므로, $\alpha\ne\beta$라고 하자. $q=1-p$라고 두고 α,β를 고정하여

$$F(p)=f(p\alpha+(1-p)\beta)-pf(\alpha)-(1-p)f(\beta)$$

라고 두면 $F(0)=F(1)=0$이며,

$$F'(p)=(\alpha-\beta)f'(p\alpha+(1-p)\beta)-f(\alpha)+f(\beta)$$

$$F''(p)=(\alpha-\beta)^2f''(p\alpha+(1-p)\beta)<0$$

이 성립한다. 따라서 $F(p)$는 이 구간에서 오직 하나 이하의 극점을 가질 수 있고, $F(0)=F(1)=1$이었으므로 롤의 정리에 의해 $F'(c)=0$인 $c\in(0,1)$인 점이 존재하고 이것이 유일한 극점이다. 이때 $F''<0$이므로 구간 $(0,c)$에서는 F가 증가함수, $(c,1)$에서는 F가 감소함수여야 하며, 이에 따라 $p\in[0,1]$에서 $F(p)\ge0$이어야 한다. 따라서,

$$f(p\alpha+q\beta)=f(p\alpha+(1-p)\beta)\ge pf(\alpha)+(1-p)f(\beta)=pf(\alpha)+qf(\beta)$$

(2) $p=\frac{1}{3}$, $q=\frac{2}{3}$이라 두고 $\alpha = x_1, \beta = \frac{x_2+x_3}{2}$이라 놓으면

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}x_1 + \frac{x_2+x_3}{3}\right) \geq \frac{1}{3}f(x_1) + \frac{2}{3}f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right) \geq \frac{1}{3}f(x_1) + \frac{1}{3}f(x_2) + \frac{1}{3}f(x_3)$$

이다.

문제 255. *최고차항의 계수가 3인 삼차함수 f가 다음의 조건을 만족시킬 때, f를 구하여라.*

> *1) $f(x)$는 $x=\alpha$와 $x=\beta$ $(\alpha \neq \beta)$에서 극값을 갖고, $(\alpha, f(\alpha))$와 $(\beta, f(\beta))$는 점 $(0,1)$을 기준으로 대칭이다.*
> *2) $|f(\alpha)-f(\beta)| = \frac{4}{9}$*

조건 1)로부터 $\alpha+\beta=0$과 $f(\alpha)+f(\beta)=2$를 얻을 수 있다. 한편, $f(x)=3x^3+ax^2+bx+c$라고 두면 $f'(x)=9x^2+2x+b$이며, α와 β는 이것의 근이므로 근과 계수와의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta = -\frac{2}{9}a, \quad \alpha\beta = \frac{1}{9}b$$

이다. 이때 위에서 구한 결과와 비교해보면, $a=0$이고 $\alpha=-\beta$이다. 이를 $f(\alpha)+f(\beta)=2$에 대입하면

$$(3\alpha^3+b\alpha+c)+(-3\alpha^2+-b\alpha+c)=2$$

이므로 $c=1$이다. 또한, $b=9\alpha\beta=-9\alpha^2$이다. 이를 조건 2)에 적용한다면

$$\begin{aligned} |f(\alpha)-f(\beta)| &= |f(\alpha)-f(-\alpha)| \\ &= |(3\alpha^3+b\alpha+1)-(-3\alpha^3-b\alpha+1)| \\ &= 2|3\alpha^3-9\alpha^3| \\ &= 12|\alpha|^3 = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

이게 되므로 $|\alpha|=\frac{1}{3}$이고, $b=-1$을 얻는다. 따라서 $f(x)=3x^3-x+1$이다.

문제 256. *함수 $f(x)=\dfrac{b-x}{a^2+x^2}$의 극값을 가지게 하는 x의 값을 α라 하자.*
(1) $\alpha f(\alpha)$는 a,b에 관계없이 항상 일정함을 보여라.
(2) 극댓값이 0.5, 극솟값이 -0.5일 때, a와 b를 구하여라.

(1)

$$f'(x) = \frac{x^2-2bx-a^2}{(a^2+x^2)^2}$$

이다. $x=\alpha$는 $f'(x)$의 부호가 바뀌는 곳이어야 하므로 $f'(\alpha)=0$이며, 대입 시

$$\alpha^2-a^2=2b\alpha$$

를 얻는다. 그러면

$$f(\alpha) = \frac{b-\alpha}{a^2+\alpha^2} = \frac{b-\alpha}{2\alpha^2-2b\alpha} = -\frac{1}{2\alpha}$$

이므로, $\alpha f(\alpha) = -\frac{1}{2}$로 일정하다.

(2) 극댓값, 극솟값을 갖게 하는 x의 값을 각각 p,q라고 하면, (1)에 의하여 $pf(p)=qf(q)=-0.5$이다. 따라서, 주어진 조건에 의하여 $p=-1, q=1$이어야만 한다. 한편 p,q는 $f'(p)=f'(q)=0$이어야 하므로 $x^2-2bx-a^2=0$의 두 근이고, 이 방정식은 x^2-1 과 동일하다. 따라서 $a=\pm1, b=0$이어야 한다.

문제 257. *$-1 < x < 1$에서 정의된 아래 함수를 생각하자.*

$$f(x) = \begin{cases} c_n & \left(\dfrac{1}{n+1} \le |x| < \dfrac{1}{n} : n = 1, 2, \cdots\right) \\ C(x=0) \end{cases}$$

(1) $f(x)$가 $x = 0$에서 연속일 때, 수열 $\{c_n\}$은 어떤 조건을 만족시키는가?
(2) $f'(0)$이 존재할 때, $f'(0)$의 값을 구하여라.
(3) $f'(0)$이 존재하면, 수열 $\{n(c_n - c)\}$는 수렴함을 보여라.

(1) $\dfrac{1}{|x|} - 1 \le n\dfrac{1}{|x|}$에서 $x \to 0$이라 하면 $n \to \infty$이므로,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{n\to\infty} c_n$$

이다. 이때 $x = 0$에서 연속할 조건은 위의 극한값이 c인 것이므로,

$$\lim_{n\to\infty} c_n = f(0) = c$$

이다.

(2) $f(-x) = f(x)$이 성립하므로,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} -\frac{f(-x) - f(0)}{-x} \\ &= -f'(0) \end{aligned}$$

이고 $f'(0) = 0$이다.

(3) $\dfrac{1}{n+1} \le |x| < \dfrac{1}{n}$일 때는 $n + 1 \ge \dfrac{1}{|x|} > n$이므로

$$(n+1)|c_n - c| \ge \frac{|f(x) - f(0)|}{|x|} \ge n|c_n - c|$$

이고 잘 조절하면

$$\frac{n}{n+1}\left|\frac{f(x) - f(0)}{x}\right| \le n|c_n - c| \le \left|\frac{f(x) - f(0)}{x}\right|$$

이 성립한다. 이때 $n \to \infty$를 취하면,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\left|\frac{f(x) - f(0)}{x}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(x) - f(0)}{x}\right| = |f'(0)| = 0$$

이므로, 샌드위치 정리에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} n(c_n - c) = 0$$

이다.

문제 258. *함수 $f(x) = \sin x$와 임의의 자연수 n에 대하여, 두 함수 $y = xf^{(n-1)}(x)$와 $y = f^{(n)}(x)$의 그래프를 각각 C_1, C_2라고 하자. P가 C_1, C_2의 교점이라면 P에서의 C_1, C_2의 접선 t_1, t_2는 서로 직교함을 증명하여라.*

$f(x) = \sin x$이므로 $f'(x) = \cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$이고, 이와 같은 식으로 반복한다면 일반적으로

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

이 성립함을 알 수 있다. 또한, 수학적 귀납법에 의하여 이를 증명할 수도 있다. (생략)

그러면 $y = x\sin\left(x + \frac{n-1}{2}\pi\right)$과 $y = \sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right)$을 생각하자. 교점 P의 x좌표를 a라고 하면

$$a\sin\left(a + \frac{n-1}{2}\pi\right) = \sin\left(a + \frac{n}{2}\pi\right)$$

이다. $a + \frac{n}{2}\pi = b$라 두고 둘의 이 점에서의 접선의 기울기를 m_1, m_2이라 두면

$$m_1 = \sin(a + \frac{n-1}{2}\pi) + a\sin(a + \frac{n}{2}\pi) = -\cos b + a\sin b$$

$$m_2 = \sin\left(a + \frac{n+1}{2}\pi\right) = \cos b$$

이다. 이때 a의 성질에 의하여 $-a\cos b = \sin b$이고, 이를 대입해준다면

$$m_1 m_2 = -\cos^2 b + a\sin b\cos b = -\cos^2 b - \sin^2 b = -1$$

이다. 따라서 두 직선은 직교한다.

문제 259. *xy평면에서 $x \geq 0, y \geq 0, xy \leq 1$에 의해 표현되는 영역을 D라 하고, 그 내부의 점 $P(x,y)$를 생각하자. 세 점 $A(a,0), B(0,b), C(c,\frac{1}{c})$을 꼭짓점으로 하고, D에 포함되는 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값을 구하여라.*

점 $(c, \frac{1}{c})$는 곡선 $xy = 1$위에 있다. 접선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{c^2}(x - c) + \frac{1}{c}$$

이고, 이 접선과 x축, y축의 교점을 E, F라고 놓으면 $E(2c, 0)$과 $F(0, \frac{2}{c})$임을 알 수 있다. 삼각형 ABC가 영역 D 안에 포함되기 위해서는 적어도 이 두 점 A, B가 이 접선보다 아래쪽 혹은 접선 바로 위에 있어야 하는 것이 된다. 따라서 $0 \leq a \leq 2c$이고 $0 \leq b \leq \frac{2}{c}$이다.

만약 $0 \leq a \leq c$일 경우를 생각해 보면, OA를 고정시킨 경우 B를 찾으려 해보면 B는 F일 때 OA와의 거리가 가장 멀어짐을 확인해줄 수 있다. 따라서 B를 F로 보내고 CFA의 넓이가 언제 최대가 되는지를 생각해보면, CF와 A를 가장 멀리 둘 수 있는 O가 적당함을 확인할 수 있다. 따라서 최대 넓이는 $A = O$이고 $B = F$일 때 1이다. 반면 $a \geq c$일 경우에는 B가 O로 선택되고, A가 E가 되어야 하므로 삼각형 COE를 생각할 수 있고, 이 넓이 역시 1이다. 따라서 최댓값은 1이다.

문제 260. *x^{10}을 $(x-2)^2$으로 나눈 나머지를 구하여라.*

$$x^{10} = (x-2)^2 Q(x) + ax + b$$

라고 두면 $Q(x)$는 다항함수이다. 양변을 x에 대해 미분하면

$$10x^9 = 2(x-2)Q(x) + (x-2)^2 Q(x) + a$$

이고 양변에 2를 대입하면 $a = 5120$이다. 첫 식에 2를 대입할 경우 $b = 2^{10} - 2b$를 얻고, 이 값은 -9216이다. 따라서 나머지는 $5120x - 9216$이다.

문제 261. *길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위를 움직이는 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점을 O라고 할 때,*

(1) $\angle COD = \theta$가 일정할 때, 사각형 $ABCD$의 넓이의 최댓값을 θ로 표현하라.

(2) θ가 0과 π 사이에서 움직일 때, 사각형 $ABCD$의 넓이의 최댓값을 구하여라.

(1) $\angle BOC = x$, $\angle DOA = y$라 하고 사각형 ABCD의 넓이를 S라고 하면

$$S = \triangle BOC + \triangle COD + \triangle DOA$$

이므로 이를 x, y에 대해서 표현하면

$$S = \frac{1}{2}(\sin x + \sin\theta + \sin y) = \frac{1}{2}\left(2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \sin\theta\right)$$

이며, $x + y + \theta = \pi$이므로

$$\sin\frac{x+y}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \cos\frac{\theta}{2}$$

이고,

$$S = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta$$

이므로 $\cos\frac{x-y}{2} = 1$일 때 S는 최댓값을 가진다. 따라서 최댓값은

$$\cos\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta$$

이다.

(2) $\theta/2 = t$라고 두면 최댓값은 곧 $\cos t + \frac{1}{2}\sin 2t$이고, 미분하여 정리하면

$$-(2\sin t - 1)(\sin t + 1)$$

이다. 따라서 $t = \frac{\pi}{6}$일 때 극대이며 최댓값을 가지게 됨을 알 수 있다. 따라서 이를 대입해준다면, 최댓값은 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$이다.

문제 262. *함수 $f(x) = x^3 - 3ax^2 - 3bx$가 $x = p, x = q$에서 극값을 가진다. $-1 \le p \le 0$이고 $1 \le q \le 2$일 때, 두 실수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a + b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. M, m을 구하여라.*

이 함수가 $x = p$와 $x = q$에서 극값을 가지므로, $f'(x) = 3x^2 - 6ax - 3b$의 두 실근이 p, q이다. 그러면 $-1 \le p \le 0$이고 $1 \le q \le 2$라고 하였으므로 $g(-1) = 1 + 2a - b \ge 0$, $g(0) = -b < 0$, $g(1) = 1 - 2a - b \le 0$, $g(2) = 4 - 4a - b \ge 0$이 성립하여야 한다. 따라서 원하는 (a, b)는 이들에 의해 가두어지는 다각형 영역 안에 있어야 한다.

그러면 $a + b$는 점 $(\frac{1}{2}, 2)$에서 최대이고, $(\frac{1}{2}, 0)$에서 최소가 된다. 따라서 $M = \frac{5}{2}, m = \frac{1}{2}$이다.

문제 263. *길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 모양의 색종이가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여, 두 점 A, P를 연결하는 선을 접는 선으로 하여 색종이를 접는다. $\angle PAB = \theta$일 때, 포개어지는 부분의 넓이를 $S(\theta)$라고 하자. $\theta = \alpha$에서 $S(\theta)$가 최댓값을 가진다면, $\cos 2\alpha$의 값은? 단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$이다.*

색종이를 접었을 때 호 AP와 선분 AB의 교점을 Q, 접힌 색종이를 다시 피면 Q가 되돌아오는 점을 Q'이라 하자. 도형 AQP와 APQ'은 합동이므로, $S(\theta)$는 곧 도형 APQ'의 넓이와도 같다. 따라서 이는 호 AP와 현 AP로 둘러싸인 도형에서 호 AQ'와 현 AQ'으로 둘러싸인 도형의 넓이를 뺀 것이다. 그러면

$$S(\theta) = \frac{1}{2}\{(\pi - 2\theta) - \sin(\pi - 2\theta)\} - \frac{1}{2}\{(\pi - 4\theta) - \sin(\pi - 4\theta)\} = \frac{1}{2}(2\theta - \sin 2\theta + \sin 4\theta)$$

이고,

$$S'(\theta) = 2\cos 4\theta - \cos 2\theta + 1 = 4\cos^2 2\theta - \cos 2\theta - 1$$

이다. 따라서 최대값을 가지려면

$$4(\cos 2\alpha - \frac{1+\sqrt{17}}{8})(\cos 2\alpha - \frac{1-\sqrt{17}}{8}) = 0$$

을 만족시켜야 하고, θ의 범위에 의하여

$$\cos 2\alpha = \frac{1+\sqrt{17}}{8}$$

이다.

문제 264. *이차함수 $g(x)$에 대하여 $g(111) = \frac{111}{334}, g(112) = \frac{112}{337}, g(113) = \frac{113}{340}$이다.*

$$334g'(111) - 340g'(113)$$

의 값을 구하여라.

$h(x) = (3x+1)g(x) - x$라고 한다면, $h(111) = h(112) = h(113)$이다. 이때 $h(x)$는 삼차함수이므로,

$$h(x) = a(x-111)(x-112)(x-113)$$

꼴이다. 그러면

$$a(x-111)(x-112) + a(x-111)(x-113) + a(x-112)(x-113) = h'(x) = 3g(x) + (3x+1)g'(x) - 1$$

이며, $x = 111$과 $x = 113$을 대입하면

$$334g'(111) - 340g'(113) = 3g(111) - 3g(113) = \frac{3}{56780}$$

이 됨을 알 수 있다.

문제 265. *$f(x)$가 다음을 만족한다.*

$$f(0) = 0, f(2) = 0$$
$$|f'(x)| \le 1 \quad (0 \le x \le 2)$$

이때, $[0,2]$에서 $|f(x)|$의 최댓값이 1 이하임을 보이시오.

f는 연속함수일 것이므로 $|f|$도 연속함수이고, 최대최소정리에 의하여 $[0,2]$에서 $|f|$는 최댓값을 가진다. $f(a) = M$이 최대값이라 하고 $M > 1$이라 하자. 만약 $k = \min\{a, 2-a\} \le 1$을 생각한다면, 평균값 정리에 의하여

$$|f'(c)| = \frac{M}{k} > 1$$

인 c가 존재하게 되므로 조건에 모순된다. 따라서 최대값은 $M \le 1$을 만족시킨다.

문제 266. *n차 다항식 $Q(x)$가 서로 다른 n개의 실근 $r_1, r_2, \cdots, r_n$을 갖는다. $(n-1)$차 이하의 어떤 다항식 $P(x)$에 대해서는 상수 a_k에 대하여*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x - r_k}$$

라고 쓸 수 있다고 한다. 이때, $k = 1, 2, \cdots, n$에 대하여 $a_k = \dfrac{P(r_k)}{Q'(r_k)}$임을 보여라.

문제의 조건에 의하여 0이 아닌 어떤 실수 c에 대하여,

$$Q(x) = c(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)$$

이다. 이때 $k = 1, 2, \cdots, n$에 대하여 $R_k(x) = \dfrac{Q(x)}{x - r_k}$라고 두자. 그러면

$$Q'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{Q(x)}{x - r_k} = \sum_{k=1}^{n} R_k(x)$$

이고

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x - r_k} Q(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k R_k(x)$$

이다. 따라서

$$Q'(r_k) = \sum_{s=1}^{n} R_s(r_k) = R_k(r_k)$$

$$P(r_k) = \sum_{s=1}^{n} a_s R_s(r_k) = a_k R_k(r_k)$$

이므로

$$\frac{P(r_k)}{Q'(r_k)} = a_k$$

이다.

문제 267. *실수 전체에서 정의된 n번 미분 가능한 함수 $f(x)$에 대하여, n계 도함수 $f^{(n)}(x)$가 구간 $[0, 1]$에서 항상 양수이면, 방정식*

$$1 + x + \cdots + x^{n-1} + f(x) = 0$$

은 구간 $[0, 1]$에서 n개 이하의 서로 다른 근을 가짐을 보이시오.

만약 함수 $g(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + f(x)$가 구간 $[0, 1]$에서 $n+1$개의 서로 다른 근 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$을 가진다고 하자. $(0 \le x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} \le 1)$

그러면 함수 $g(x)$ 역시 실수 전체에서 정의된 n번 미분가능한 함수이므로, 각각의 $k = 1, 2, \cdots, n$에 대하여 롤의 정리를 적용하면 각각의 x_k와 x_{k+1} 사이에 $g'(x) = 0$이 되는 x가 적어도 하나 존재함을 알 수 있다. 따라서 $g'(x)$는 구간 $[0, 1]$에서 적어도 n개 이상의 서로 다른 근을 갖는다. 마찬가지 방법으로 계속 미분해나간다면, $g^{(n)}(x) = 0$을 만족하는 x는 적어도 한 개 이상 존재해야 한다. 그런데 $g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) > 0$이므로 $g^{(n)}(x)$는 구간 $[0, 1]$에서 근을 갖지 않아 모순이다.

문제 268. *문제 268번부터 278번까지는 모의고사이긴 한데... 제가 답지를 따로 만들어보지는 않았습니다. 주변 친구들과 함께 풀어보고 답을 맞춰보는 것은 어떨까요? 절대!!! 새로 답지를 쓰기가 귀찮아서가... 맞습니다. 다만 제게 과외를 받으시거나 기부(?)를 해주신다면 제가 채점정도는 해드릴게요...*

문제 269. *문제 268번부터 278번까지는 모의고사이긴 한데... 제가 답지를 따로 만들어보지는 않았습니다. 주변 친구들과 함께 풀어보고 답을 맞춰보는 것은 어떨까요? 절대!!! 새로 답지를 쓰기가 귀찮아서가... 맞습니다. 다만 제게 과외를 받으시거나 기부(?)를 해주신다면 제가 채점정도는 해드릴게요...*

문제 270. *문제 268번부터 278번까지는 모의고사이긴 한데... 제가 답지를 따로 만들어보지는 않았습니다. 주변 친구들과 함께 풀어보고 답을 맞춰보는 것은 어떨까요? 절대!!! 새로 답지를 쓰기가 귀찮아서가... 맞습니다. 다만 제게 과외를 받으시거나 기부(?)를 해주신다면 제가 채점정도는 해드릴게요...*

문제 271. *문제 268번부터 278번까지는 모의고사이긴 한데... 제가 답지를 따로 만들어보지는 않았습니다. 주변 친구들과 함께 풀어보고 답을 맞춰보는 것은 어떨까요? 절대!!! 새로 답지를 쓰기가 귀찮아서가... 맞습니다. 다만 제게 과외를 받으시거나 기부(?)를 해주신다면 제가 채점정도는 해드릴게요...*

문제 272. *문제 268번부터 278번까지는 모의고사이긴 한데... 제가 답지를 따로 만들어보지는 않았습니다. 주변 친구들과 함께 풀어보고 답을 맞춰보는 것은 어떨까요? 절대!!! 새로 답지를 쓰기가 귀찮아서가... 맞습니다. 다만 제게 과외를 받으시거나 기부(?)를 해주신다면 제가 채점정도는 해드릴게요...*

문제 273. *문제 268번부터 278번까지는 모의고사이긴 한데... 제가 답지를 따로 만들어보지는 않았습니다. 주변 친구들과 함께 풀어보고 답을 맞춰보는 것은 어떨까요? 절대!!! 새로 답지를 쓰기가 귀찮아서가... 맞습니다. 다만 제게 과외를 받으시거나 기부(?)를 해주신다면 제가 채점정도는 해드릴게요...*

문제 274. *문제 268번부터 278번까지는 모의고사이긴 한데... 제가 답지를 따로 만들어보지는 않았습니다. 주변 친구들과 함께 풀어보고 답을 맞춰보는 것은 어떨까요? 절대!!! 새로 답지를 쓰기가 귀찮아서가... 맞습니다. 다만 제게 과외를 받으시거나 기부(?)를 해주신다면 제가 채점정도는 해드릴게요...*

문제 275. *문제 268번부터 278번까지는 모의고사이긴 한데... 제가 답지를 따로 만들어보지는 않았습니다. 주변 친구들과 함께 풀어보고 답을 맞춰보는 것은 어떨까요? 절대!!! 새로 답지를 쓰기가 귀찮아서가... 맞습니다. 다만 제게 과외를 받으시거나 기부(?)를 해주신다면 제가 채점정도는 해드릴게요...*

문제 276. *문제 268번부터 278번까지는 모의고사이긴 한데... 제가 답지를 따로 만들어보지는 않았습니다. 주변 친구들과 함께 풀어보고 답을 맞춰보는 것은 어떨까요? 절대!!! 새로 답지를 쓰기가 귀찮아서가... 맞습니다. 다만 제게 과외를 받으시거나 기부(?)를 해주신다면 제가 채점정도는 해드릴게요...*

문제 277. *문제 268번부터 278번까지는 모의고사이긴 한데... 제가 답지를 따로 만들어보지는 않았습니다. 주변 친구들과 함께 풀어보고 답을 맞춰보는 것은 어떨까요? 절대!!! 새로 답지를 쓰기가 귀찮아서가... 맞습니다. 다만 제게 과외를 받으시거나 기부(?)를 해주신다면 제가 채점정도는 해드릴게요...*

문제 278. *문제 268번부터 278번까지는 모의고사이긴 한데... 제가 답지를 따로 만들어보지는 않았습니다. 주변 친구들과 함께 풀어보고 답을 맞춰보는 것은 어떨까요? 절대!!! 새로 답지를 쓰기가 귀찮아서가... 맞습니다. 다만 제게 과외를 받으시거나 기부(?)를 해주신다면 제가 채점정도는 해드릴게요...*

Chapter 9

Final term Problems

문제 279. *연속함수* $f, u : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$*이 존재하여* f*는 이계도함수가 연속이며 아래를 만족한다.*

(1) $f''(x) = -f(x)u(x)$

(2) $f(x_1) = f(x_2) = 0$

(3) 모든 실수 $x \in (x_1, x_2)$*에 대하여* $f(x) > 0$*,* $u(x) < 1$*이 성립한다.*

이때, $\phi(x) = \sin\left(\dfrac{\pi(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}\right)$*을 도입함으로써*

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\phi(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f''(x)\phi(x)dx > 0$$

임을 보이고, $x_2 - x_1$*과* π*의 대소를 비교하시오.*

구간 (x_1, x_2)에서 $\phi(x) > 0$이고 $f(x) > 0$, $u(x) < 1$이므로

$$f(x)\phi(x) > f(x)u(x)\phi(x) = -f''(x)\phi(x)$$

이다. 따라서

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\phi(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f''(x)\phi(x)dx > 0$$

임을 얻어낼 수 있다.

또한 이 ϕ에서 $\phi(x_1) = \phi(x_2) = 0$이며 $x_1 < x < x_2$에서 $\phi(x) > 0$이기에,

$$\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_2} f''(x)\phi(x)dx &= [f'(x)\phi(x)]_{x_1}^{x_2} - \frac{\pi}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} f'(x)\cos\frac{\pi(x - x_1)}{x_2 - x_1}dx \\
&= -\frac{\pi}{x_2 - x_1}\left[\left[f(x)\cos\frac{\pi(x - x_1)}{x_2 - x_1}\right]_{x_1}^{x_2} + \frac{\pi}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(x)\sin\frac{\pi(x - x_1)}{x_2 - x_1}dx\right] \\
&= -\left(\frac{\pi}{x_2 - x_1}\right)^2 \int_{x_1}^{x_2} f(x)\phi(x)dx
\end{aligned}$$

를 얻는다. 그런데 우리가 앞서 보인 식에 의하여,

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\phi(x)dx > \left(\frac{\pi}{x_2 - x_1}\right)^2 \int_{x_1}^{x_2} f(x)\phi(x)dx$$

를 얻게 되므로 $f(x)\phi(x) > 0$임에 의하여

$$0 < \left(\frac{\pi}{x_2 - x_1}\right)^2 < 1$$

이고, $x_1 < x_2$이므로 $\pi < x_2 - x_1$를 얻는다.

문제 280. *폐구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $p(x), q(x)$에 대하여*

$$\left(\int_a^b p(x)q(x)dx\right)^2 \le \int_a^b p(x)^2dx \cdot \int_a^b q(x)^2dx$$

가 성립함이 알려져 있다. 폐구간 $[a,b]$에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 $f(a) = f(b) = 0$, $\int_a^b \{f(x)\}^2dx = 1$을 만족한다. 이때,

$$\frac{1}{4} \le \int_a^b \{f'(x)\}^2dx \int_a^b x^2\{f(x)\}^2dx$$

임을 보여라.

$$\int_a^b \{f'(x)\}^2dx \int_a^b x^2\{f(x)\}^2dx \ge \left(\int_a^b xf(x)f'(x)dx\right)^2$$

이 주어진 부등식에 의해 성립한다. 이때,

$$\begin{aligned}\int_a^b xf(x)f'(x)dx &= \left[x \cdot \frac{1}{2}\{f(x)\}^2\right]_a^b - \int_a^b \frac{1}{2}\{f(x)\}^2dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_a^b \{f(x)\}^2dx = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

임에 따라

$$\int_a^b \{f'(x)\}^2dx \int_a^b x^2\{f(x)\}^2dx \ge \left(\int_a^b xf(x)f'(x)dx\right)^2 = \frac{1}{4}$$

이다.

문제 281. *$f(x)$와 $g(x)$가 구간 $[0,\infty)$에서 각각 정의된다. 또한, 이 함수들은 모두 음이 아니며 연속이다. 이때, 모든 $x \in [0,\infty)$에 대하여*

$$f(x) \le C + \int_0^x f(s)g(s)dx \quad (C > 0)$$

이 성립한다.

(1) $u(t) = C + \int_0^t f(s)g(s)ds$일 때, $u'(t) \le u(t)g(t)$가 성립함을 보이시오.

(2) $f(x) \le Ce^{\int_0^x g(s)dx}$가 성립함을 보이시오.

(1) f, g가 양수이므로 $x > 0$일 때

$$C + \int_0^x f(s)g(s)ds > 0$$

이다. 그러면

$$u'(t) = f(t)g(t) \le (C + \int_0^t f(s)g(s)ds)g(t) = u(t)g(t)$$

이다.

(2) $u(t) > 0$이므로 앞선 식에서 양변을 $u(t)$로 나누고 $[0,x]$에서 적분하면

$$\int_0^x \frac{u'(t)}{u(t)}dt \le \int_0^x g(t)dt$$

를 얻는다. 그러면 $u(0) = C$임을 고려해본다면

$$\ln \frac{u(x)}{C} \le \int_0^x g(t)dt$$

를 얻는 것이고, 양변을 정리하면

$$u(x) \le Ce^{\int_0^x g(t)dt}$$

를 얻는다. 그런데 $f(x) \le u(x)$임이 주어져 있으니,

$$f(x) \le Ce^{\int_0^x g(s)dx}$$

문제 282.

$$f(x) = \frac{d^{100}}{dx^{100}} \left(\frac{1}{100!}(x - x^2)^{100} \right)$$

에 대하여, 다음 물음에 답하시오.

(1) $\int_0^1 f(t)dt = 0$*임을 보이시오.*

(2) $0 \le \int_0^1 x^{100} f(x)dx \le \left(\frac{1}{4}\right)^{100}$ *임을 보이시오.*

(1)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(t)dt &= \int_0^1 \frac{d^{100}}{dt^{100}} \left(\frac{1}{100!}(t - t^2)^{100} \right) dt \\
&= \frac{d^{99}}{dt^{99}} \left(\frac{1}{100!}(t - t^2)^{100} \right) \Bigg|_{t=1} - \frac{d^{99}}{dt^{99}} \left(\frac{1}{100!}(t - t^2)^{100} \right) \Bigg|_{t=0} \\
&= 0 - 0 = 0
\end{aligned}$$

(2) 함수 $g(x) = \dfrac{1}{100!}(x - x^2)^{100}$이라 두면 $g^{(100)}(x) = f(x)$이게 된다. 또한, $k = 0, 1, 2, \cdots, 99$에 대하여 $g^{(k)}(0) = g^{(k)}(1) = 0$임을 관찰가능하다. 그러면

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{100} f(x)dx &= \int_0^1 x^{100} g^{(100)}(x)dx \\
&= [x^{100} g^{(99)}(x)]_0^1 - \int_0^1 100x^{99} g^{(99)}(x)dx \\
&= -100 \int_0^1 x^{99} g^{(99)}(x)dx \\
&= \cdots \\
&= (-1)^{99} 100! \int_0^1 x g'(x)dx \\
&= 100! \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 x^{100}(1 - x)^{100} dx
\end{aligned}$$

을 얻는다. 이때 $x \in [0, 1]$에서 $0 \le x(1 - x) \le \frac{1}{4}$이므로

$$0 \le x^{100}(1 - x)^{100} \le \left(\frac{1}{4}\right)^{100}$$

을 얻고, 이를 적분해낸다면

$$0 \le \int_0^1 x^{100} f(x)dx = \int_0^1 x^{100}(1 - x)^{100} dx \le \left(\frac{1}{4}\right)^{100}$$

을 얻는다.

문제 283.

$$I_n = \int \frac{1}{x^n(ax^2+bx+c)}dx$$

의 점화식을 구하시오. 단, $c \neq 0$*이다.*

$$\begin{aligned} aI_{n-2} + bI_{n-1} + cI_n &= \int \frac{ax^2+bx+c}{x^n(ax^2+bx+c)}dx \\ &= \int \frac{1}{x^n}dx \\ &= -\frac{1}{x^{n-1}(n-1)} \end{aligned}$$

을 얻을 수 있다. 이때, $c \neq 0$이므로,

$$I_n = -\frac{1}{c(n-1)x^{n-1}} - \frac{b}{c}I_{n-1} - \frac{a}{c}I_n$$

이다.

문제 284.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{n}{1+e^{nx}}dx$$

의 값을 구하여라.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{n}{1+e^{nx}}dx &= \lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{ne^{-nx}}{e^{-nx}+1}dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{e^{-n^2}}^1 \frac{1}{u+1} \quad (e^{-nx}=u) \\ &= \lim_{n\to\infty} \ln(2) - \ln(1+e^{-n^2}) \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

문제 285. *자연수* n*과* $r = 0, 1, \cdots, n$*에 대해 다음 등식을 증명하여라.*

$$\int_0^1 x^r(1-x)^{n-r}dx = \frac{1}{(n+1)_nC_r}$$

$y > 1$에서 다음 항등식에서 y^r의 계수를 비교하면 된다.

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^n {}_nC_r y^r \int_0^1 x^r(1-x)^{n-r}dx &= \int_0^1 \sum_{r=0}^n {}_nC_r(xy)^r(1-x)^{n-r}dx \\ &= \int_0^1 (xy+(1-x))^n dx \\ &= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{y-1}(y^{n+1}-1) \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{r=0}^n y^r \end{aligned}$$

그러면

$$ {}_nC_r \int_0^1 x^r(1-x)^{n-r}dx = \frac{1}{n+1} $$

이게 되므로,

$$ \int_0^1 x^r(1-x)^{n-r}dx = \frac{1}{(n+1)_nC_r} $$

이다.

문제 286. *a가 양의 상수이고 $x > -1$일 때,*

$$ f(x) = \int_0^x \frac{\ln(t+1)+a}{t+1}dt $$

이라 정의하자. $y = f(x)$의 최솟값이 $-\frac{1}{2}$일 때,
(1) a의 값을 구하여라.
(2) 아래 적분을 계산하라.

$$ \int_0^{e^2-1} \frac{(\ln(x+1)+1)\cdot f(x)}{x+1}dx $$

(1) $f(x)$를 계산하여주면,

$$ f(x) = \frac{1}{2}(\ln(x+1))^2 + a\ln(x+1) = \frac{1}{2}(\ln(x+1)+a)^2 - \frac{1}{2}a^2 $$

이므로 최솟값이 $-\frac{1}{2}$이려면 $a = 1$이어야 한다.
(2)

$$ \begin{aligned} \int_0^{e^2-1} \frac{(\ln(x+1)+1)\cdot f(x)}{x+1}dx &= \int_0^{e^2-1} f'(x)f(x)dx \\ &= \left[\frac{1}{2}f(x)^2\right]_0^{e^2-1} \\ &= \frac{1}{2}f(e^2-1)^2 \end{aligned} $$

이고,

$$ f(e^2-1) = \frac{1}{2}(\ln(e^2))^2 + \ln(e^2) = 4 $$

이므로 원하는 값은 8이다.

문제 287. *연속함수 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$이 다음 성질*

$$ \int_0^x f(t)dt = \int_x^1 f(t)dt $$

를 만족하면 $f(x) = 0$임을 보여라.

양변에 $\int_0^x f(t)dt$를 더하자. 그러면

$$ 2\int_0^x f(t)dt = \int_0^x f(t)dt + \int_x^1 f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt $$

이고, 우변은 어떤 상수이므로 어떤 상수 C에 대해

$$ \int_0^x f(t)dt = C $$

이다. 그러면 양변을 미분하면

$$f(x) = 0$$

가 모든 $x \in (0,1)$에 대해 성립함을 알 수 있다. 이때 f가 연속이므로 $f(0) = f(1) = 0$도 성립한다. 따라서 $f(x) = 0$이다.

문제 288. *(1) 임의의 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오.*

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

(2) 아래를 구하시오.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)$$

(1)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} - \frac{1}{k}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}\\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx\\ &= [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2\end{aligned}$$

문제 289. *실수 전체에서 정의된 함수 f는 미분가능하고, f'은 증가하는 연속 함수이다.*

(1) $a < b$에 대하여 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{1}{2}f'(a)(b-a)^2 \le \int_a^b (f(b) - f(x))dx \le \frac{1}{2}f'(b)(b-a)^2$$

(2) 다음 등식이 성립함을 보여라.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - n\int_0^1 f(x)dx\right) = \frac{f(1)-f(0)}{2}$$

(1) 구간 (a,b)사이의 각 실수 x에 대하여, 평균값의 정리에 의하여

$$f(b) - f(x) = f'(c)(b-x)$$

인 $c \in (x,b)$가 있음을 안다. 이때 f'가 증가하는 함수이므로, $f'(a) \le f'(c) \le f'(b)$임을 안다. 따라서 부등식

$$f'(a)(b-x) \le f(b)-f(x) \le f'(b)(b-x)$$

가 성립한다. 이제 양 변에 a부터 b까지의 정적분을 취하면,

$$\int_a^b f'(a)(b-x)dx \le \int_a^b (f(b)-f(x))dx \le \int_a^b f'(b)(b-x)dx$$

이므로 계산을 수행하면

$$\frac{1}{2}f'(a)(b-a)^2 \le \int_a^b (f(b)-f(x))dx \le \frac{1}{2}f'(b)(b-a)^2$$

이다.

(2)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - n\int_0^1 f(x)dx &= \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - n\sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx \\ &= n\sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)dx\end{aligned}$$

인데 문제 (1)의 부등식에 의하여,

$$\frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k-1}{n}\right) \le \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)dx \le \frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right)$$

이므로

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n f'\left(\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{n} \le n\sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)dx \le \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n f'\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$

이다. 이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n f'\left(\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n f'\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)dx = \frac{f(1)-f(0)}{2}$$

이므로, 샌드위치 정리에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - n\int_0^1 f(x)dx\right) = \frac{f(1)-f(0)}{2}$$

문제 290. *(1) 직선 $y = Ax + B$가 곡선 $y = x^2$에 접하면, 이 직선은 항상 곡선 아래 있음을 증명하시오.*

(2) (1)을 이용하여 $a < b$일 때 구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(t)$에 대하여 부등식

$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)^2 \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)^2dt$$

을 증명하시오.

(1) 직선 $y = Ax + B$가 곡선에 접하는 점을 (a,a^2)이라 하자. 그러면 이 점에서의 접선의 방정식이 $y = 2ax - a^2$이므로 $A = 2a, B = -a^2$이 된다. 그러면 모든 실수 x에 대하여

$$x^2 - (Ax+B) = x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2 \ge 0$$

이므로, 항상 $Ax + B \leq x^2$이다.

(2) 구간 $[a, b]$의 임의의 실수 t에 대하여, 곡선 $y = x^2$ 위의 점 $(f(t), \{f(t)\}^2)$에서의 접선은 항상 곡선의 아래에 있다. 즉,

$$x^2 - 2f(t)x + \{f(t)\}^2 \geq 0$$

이다. 부등식의 양변을 t에 대해서 a부터 b까지 정적분한 후 $b - a$로 나누면 이차부등식

$$x^2 - \left(\frac{2}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right) + \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)^2 dt \geq 0$$

이고, 이는 임의의 실수 x에 대해서도 성립하므로 판별식을 이용하면

$$D/4 = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)^2 - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)^2 dt \leq 0$$

이므로

$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)^2 \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)^2 dt$$

이다.

문제 291.

$$\int \frac{\tan^{-1} x}{x^2} dx$$

을 구하여라.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\tan^{-1} x}{x^2} dx &= \int \frac{u}{\tan^2 u} \sec^2 u du \quad (u = \tan^{-1} x) \\
&= \int u \csc^2 u du \\
&= -u \cot u + \int \cot u du \\
&= -u \cot u + \ln|\sin x| + C
\end{aligned}$$

문제 292.

$$\int \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx$$

을 구하여라.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx &= -\frac{\ln(x+1)}{x} + \int \frac{1}{x(x+1)} dx \\
&= -\frac{\ln(x+1)}{x} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx \\
&= -\frac{\ln(x+1)}{x} + \ln|x| - \ln|x+1| + C
\end{aligned}$$

문제 293.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{9 + x^6} dx$$

을 구하여라.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{9+x^6}dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{3(9+u^2)}du \quad (u=x^3)\\ &= \frac{2}{3}\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{9+u^2}du\\ &= \frac{2}{3}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{3}\arctan(\frac{t}{3})\\ &= \frac{2}{9}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{9}\end{aligned}$$

문제 294. *양의 정수 n에 대하여, I_1을 찾고 I_n의 점화식을 구하여라.*

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx$$

$$I_1 = \int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$$

$$\begin{aligned}I_n &= \int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx\\ &= \left[\frac{x}{(x^2+1)^n}\right] - \int 2n\frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}dx\\ &= \frac{x}{(x^2+1)^n} - 2n\left(\int \frac{1}{(x^2+1)^n} - \int \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\right)\\ &= \frac{x}{(x^2+1)^n} - 2nI_n + 2nI_{n+1}\end{aligned}$$

이므로, 접화식을 구하면

$$I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n}I_n + \frac{x}{2n(x^2+1)^{n+1}} \quad (n \ge 1)$$

이다.

문제 295. *$y=e, y=e^{x^2}, x=0$으로 둘러싸인 영역을 y축으로 회전시켜 얻은 영역의 부피를 구하여라.*

$$\begin{aligned}V &= \int_0^1 2\pi x(e-e^{x^2})dx\\ &= \int_0^1 2\pi ex - \pi\int_0^1 2xe^{x^2}dx\\ &= \pi e - \pi[e^{x^2}]_0^1\\ &= \pi\end{aligned}$$

문제 296.

$$\lim_{x\to 0^+} x^{(x^x)}$$

을 구하여라.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x^{(x^x)} &= \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x\cdot e^{x\ln x}} \\ &= \lim_{t\to -\infty} e^t \\ &= 0\end{aligned}$$

문제 297.

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x\cos x}{2\sin^2 x+\cos^4 x}dx$$

를 구하여라.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x\cos x}{2\sin^2 x+\cos^4 x}dx &= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x\cos x}{2\sin^2 x+(1-\sin^2 x)^2}dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{\frac{1}{2}\sin 2x}{1+\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}}dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{2\sin 2x}{5-2\cos 2x+\cos^2 2x}dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{5-2u+u^2}du \quad (u=\cos 2x) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{4+(u-1)^2}du \\ &= \left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{u-1}{2}\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\cdot\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

문제 298.

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}dx$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}dx &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{u}du \quad (u=\arctan x) \\ &= \left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{12}\end{aligned}$$

문제 299. $\arctan\frac{1}{2}$*를 근사하여보자.*

(a) $\arctan x > x - \frac{1}{x^3}$*이* $x > 0$*에 대해 성립함을 보여라.*

(b) $\arctan x < x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$*가* $x > 0$*에 대해 성립함을 보여라.*

(c) (a), (b)를 확장한 부등식을 예측하고, 이를 보여라.

(a) 함수 $f(x) = \arctan x - x + \frac{1}{3}x^3$을 생각하자. 그러면 $f(0) = 0$이며,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 = \frac{x^4}{1+x^2} > 0$$

이기에, $x > 0$에서 $f(x) > 0$이다. 따라서, $\arctan x > x - \frac{1}{x^3}$이다.

(b) 함수 $g(x) = \arctan x - x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5$라고 하면 $g(0) = 0$이며,

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 - x^4 = \frac{-x^6}{1+x^2} < 0$$

이므로 $x > 0$에서 $g(x) < 0$이다. 따라서 $\arctan x < x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$이다.

(c) 다음으로는 $\arctan x > x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$이 예상된다. 이 역시도 같은 방법으로 보일 수 있다. 따라서 이를 계속적으로 확장한다면

$$\arctan x > \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k-1} x^{2k-1}$$

을 얻을 수 있고,

$$\arctan x < \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k-1} x^{2k-1}$$

을 얻을 수도 있다.

문제 300.

$$\cosh^2(\cosh x) - \sinh^2(\sinh x) \geq 2$$

가 모든 x에 대해 성립함을 보여라.

$$\cosh^2(\cosh x) - \cosh^2(\sin x) \geq 1 = \cosh^2 x - \sinh^2 x$$

임을 보이면 충분하다. 그러면 이를 정리한다면

$$\cosh^2(\cosh x) - \cosh^2 x \geq \cosh^2(\sin x) - \sinh^2 x$$

이다. 함수 $f(x) = \cosh^2(x) - x^2$에 대하여, $f'(x) = 2\cosh x \sinh x - 2x$으로 $f'(0) = 0$이며 $f''(x) = 2\sinh^2 x + 2\cosh^2 x - 2 = 4\sinh^2 x > 0$이기에, $f'(x)$는 $x > 0$에서 양수이며 f는 이 범위에서 증가함수이게 된다. 그런데 $\cosh x \geq \sinh x$가 성립하므로, $x > 0$인 구간에서 이들이 모두 양수임에 따라

$$f(\cosh x) \geq f(\sinh x)$$

를 얻고 증명이 완료된다. x가 음수인 경우에도 $\cosh^2$에 의하여 그 효과가 사라지므로, 성립한다. 따라서 모든 x에 대하여 원하는 식을 얻을 수 있다.

문제 301. *어떤 a에 대하여,*

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = e$$

인가?

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x &= \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}\cdot 2a \cdot \frac{x}{x-a}} \\ &= e^{2a} = e\end{aligned}$$

이어야 하므로, $a = \frac{1}{2}$이다.

문제 302. *$e^\pi > \pi^e$ 임을 보여라.*

로그함수는 증가함수이므로, 양변에 로그를 씌운 식에 대하여 증명하면 충분하다. 로그를 씌우면

$$\pi > e\ln(\pi)$$

를 얻고, 양변을 $e\pi$로 나누면

$$\frac{\ln e}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi}$$

를 얻는다. 따라서 함수 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$를 들여다보자. 이 함수는

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

이므로, $x < e$에서 증가하고, $x > e$에서 감소하며 $x = e$일 때 ㅢ대이다. 그러면 $e \neq \pi$이므로,

$$\frac{\ln e}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi}$$

이고, 이를 정리하면 우리가 원하던 식 $e^\pi > \pi^e$을 얻게 된다.

문제 303.

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{e^x-1}}$$

을 구하여라.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{e^x-1}} &= \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{e^x-1}} \\ &+ e^{1\cdot 1} = e\end{aligned}$$

문제 304.

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} < \frac{\ln(1+x)}{\sin^{-1}x}$$

가 $0 < x < 1$에서 성립함을 보여라.

양변을 정리해

$$\frac{1}{1+x^2}\sin^{-1}x < \ln(1+x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

을 보여주면 된다. $x \in (0,1)$에 대하여, MVT에 의하여 $0 < x_1, x_2 < x$가 있어

$$\frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}} = \frac{\sin^{-1}x}{x} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+x_2} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

이게 되는데, 이는 $x_1, x_2 < x$에 의해 당연하다. 따라서,

$$\frac{1}{1+x}\sin^{-1}x < \frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\sin^{-1}x < \ln(1+x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

을 얻게 되므로 주어진 식을 보일 수 있다.

문제 305. *a가 양의 상수일 때,*

$$ae^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

가 하나 이하의 근만 가짐을 보여라.

함수

$$f(x) = \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2}{e^x}$$

가 일대일함수임을 보여주면 된다. 만약 $x_1 \neq x_2$에 대하여 $f(x_1) = f(x_2)$라면, MVT에 의하여 어떤 c가 있어 $f'(c) = 0$이어야 한다. 이때 $f'(x) = -\dfrac{1}{2}x^2e^{-x}$이므로, $c = 0$이다. 이때 $x_1 < 0 < x_2$이라 둘 수 있게 되면,

$$f(x_1) - f(0) = x_1 f'(c_1) > 0, \quad f(x_2) - f(0) = x_2 f'(c_2) < 0$$

일 것이므로 모순이 생긴다. 따라서, 일대일함수이므로 $f(x)$는 오직 한 값에 하나의 x값만 대응되며, 모든 a에 대해 유일한 근을 가지거나 근을 가지지 않는다.

문제 306. *$a > 0$인 경우에,*

$$\sinh^2(\sqrt{x^2 + a}) - \sinh^2(\sqrt{x^2}) > a$$

가 모든 x에 대해 성립함을 보여라.

먼저, 모든 $x > 0$에 대하여 $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2x} > 1$임을 보여 보자. 만약 $f(x) = e^x - e^{-x} - 2x$라고 두면, 이 함수는 $f(0) = 0$이고 $f'(x) = e^x + e^{-x} - 2 \geq 0$이므로 $f(x) > 0$이다. 따라서 원하는 부등식이 성립한다. 그러면

$$\sinh^2(\sqrt{x^2 + a}) - \sinh^2(\sqrt{x^2})$$

에 대하여, 함수 $f(u) = \sinh^2 \sqrt{u + x^2}$를 생각한다면 원하는 것은 $f(a) - f(0)$이고, f는 미분가능하므로

$$\sinh^2(\sqrt{x^2 + a}) - \sinh^2(\sqrt{x^2}) = f(a) - f(0) = af'(l)$$

인 $l \in (0, a)$가 있다. 이때 $f'(l) = \sinh(2\sqrt{l + t})\dfrac{1}{2\sqrt{l + t}} > 1$이 앞서 보인 것에 의해 성립하므로,

$$\sinh^2(\sqrt{x^2 + a}) - \sinh^2(\sqrt{x^2}) = af'(l) > a$$

임을 알 수 있다.

문제 307. *만약 함수 f가 integrable할 뿐, continuous하지 않다고 하자. 이때, $F(x) = \int_1^x f(t)dt$는 미분가능한가?*

만약 continuous라는 조건까지 붙었다면, FTC에 의하여 자명히 미분가능하다. 그런데 integrable조건만 붙었다고 생각해보자. 그러면 함수

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 1) \\ 0 & (x = 1) \\ -1 & (x < 1) \end{cases}$$

을 생각하면 이는 계단함수이므로 미분가능하지만,

$$\int_1^x f(t)dt = |x - 1|$$

은 $x = 1$에서 미분불가능하다. 따라서 integrable은 충분한 조건이 아니다.

문제 308. *미분가능한 함수 $A(x)$와 $B(x)$에 대하여, 아래 조건이 성립한다.*

1) $A'(x) = B(x), \quad B'(x) = A(x)$

2) $A(0) = 0$, $B(0) = 1$

이때, A, B를 찾아라.

함수 $f(x) = A(x) + B(x)$를 생각한다면, $f'(x) = A'(x) + B'(x) = A(x) + B(x) = f(x)$이므로 $f(x) = ae^x$ 꼴이다. 이때, $f(0) = 1$이므로, $f(x) = e^x$이다. 반대로 $g(x) = B(x) - A(x)$를 도입하면 $g(x) = -g'(x)$이고

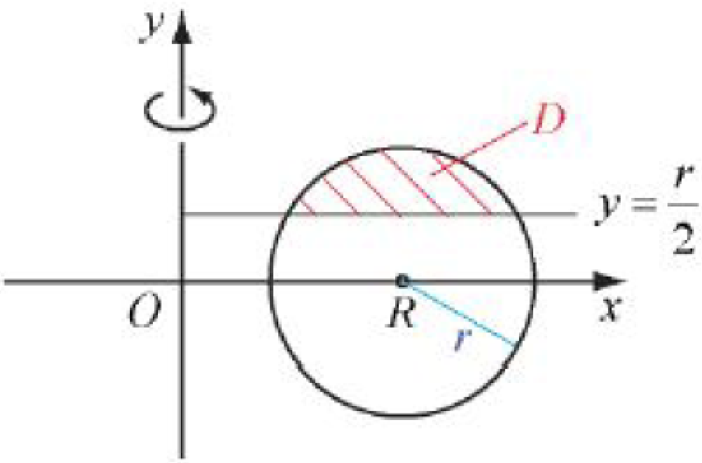
$g(0) = 1$이므로 $g(x) = e^{-x}$이다. 따라서

$$A(x) = \frac{1}{2}(f(x) - g(x)) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$B(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x)) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

이다.

문제 309. *$r < R$에 대하여, 중심이 $(R, 0)$이고 반지름이 r인 원을 $y = \frac{r}{2}$로 자를 때 넓이가 작은 부분을 D라 하자. 이 D를 y축을 기준으로 회전시켰을 때, 부피를 구하여라.*



$y = \frac{r}{2}$와 $(x - R)^2 + y^2 = r^2$은

$$\left(R - \frac{\sqrt{3}}{2}r, \frac{r}{2}\right), \left(R + \frac{\sqrt{3}}{2}r, \frac{r}{2}\right)$$

에서 만난다. 그러면 부피는

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{R+\frac{\sqrt{3}}{2}r}^{R-\frac{\sqrt{3}}{2}r} 2\pi x(\sqrt{r^2-(x-R)^2}-\frac{r}{2})dx \\
&= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}r}^{\frac{\sqrt{3}}{2}r} 2\pi(u+R)(\sqrt{r^2-u^2}-\frac{r}{2})du \quad (u=x-R) \\
&= 2\pi\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}r}^{\frac{\sqrt{3}}{2}r} u\sqrt{r^2-u^2}du + 2\pi\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}r}^{\frac{\sqrt{3}}{2}r} R\sqrt{r^2-u^2}du \\
&- 2\pi\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}r}^{\frac{\sqrt{3}}{2}r} \frac{r}{2}udu - 2\pi\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}r}^{\frac{\sqrt{3}}{2}r} \frac{r}{2}Rdu \\
&= 2\pi[-\frac{1}{3}(r^2-u^2)^{\frac{3}{2}}]_{-\frac{\sqrt{3}}{2}r}^{\frac{\sqrt{3}}{2}r} + 2\pi R\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}r}^{\frac{\sqrt{3}}{2}r} \sqrt{r^2-u^2}du \\
&- \pi r[\frac{1}{2}u^2]_{-\frac{\sqrt{3}}{2}r}^{\frac{\sqrt{3}}{2}r} - \pi rR(\sqrt{3}r) \\
&= 2\pi R\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}r}^{\frac{\sqrt{3}}{2}r} \sqrt{r^2-u^2}du - \sqrt{3}\pi Rr^2 \\
&= 2\pi R(\frac{\pi}{3}r^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}r^2) - \sqrt{3}\pi Rr^2 \\
&= Rr^2\pi(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2})
\end{aligned}
$$

문제 310. *(1) $c > 0$에 대하여, $y = \sin\frac{x}{c}$와 $x = 0, x = 1, y = 0$으로 둘러싸인 영역을 x축으로 회전시킨 입체의 부피 $V(c)$를 구하여라.*

(2) 앞서 구한 $V(c)$에 대하여, 이는 $c = \frac{2}{\alpha}$일 때 극대를 가진다. $\tan\alpha - \alpha$의 값을 구하여라.

(1)

$$
\begin{aligned}
V(c) &= \int_0^1 \pi\sin^2\frac{x}{c}dx \\
&= \int_0^1 \frac{\pi}{2}(1-\cos\frac{2x}{c})dx \\
&= \pi[\frac{1}{2}x - \frac{c}{4}\sin\frac{2x}{c}]_0^1 = \pi(\frac{1}{2} - \frac{c}{4}\sin\frac{2}{c})
\end{aligned}
$$

(2) $V'(c) = -\frac{1}{4}\sin\frac{2}{c} + \frac{1}{2c}\cos\frac{2}{c} = 0$이므로,

$$\frac{c}{2}\sin\frac{2}{c} = \cos\frac{2}{c}$$

일 때 극대를 가져야 한다. 따라서,

$$\tan\frac{2}{c} = \frac{2}{c}$$

이며, $c = \frac{2}{\alpha}$이므로,

$$\tan\alpha - \alpha = 0$$

이다.

문제 311.

$$\int_0^1 2\pi x\sin^{-1}xdx$$

를 구하여라.

물론 integration by parts를 이용하여 이를 계산하여도 좋겠지만, 그래프 형태상 이는 함수 $y = \sin^{-1} x$과 $x = 0, x = 1, y = 0$에 의해 가두어지는 영역을 y축으로 돌린 입체의 부피와 같다. 이는 곧 $(0,0)$과 $(1,1)$을 끝점으로 하는 정사각형을 x축으로 돌려 만들어지는 원기둥에서 $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = 0$과 $y = \sin x$에 의해 갇힌 영역을 x축으로 돌린 입체를 뺀 부피와 같으므로,

$$\begin{aligned}\int_0^1 2\pi x \sin^{-1} x dx &= \frac{\pi^2}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \pi dx \\ &= \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2x)\pi dx \\ &= \frac{\pi^2}{4}\end{aligned}$$

문제 312. *D를 $x = -1, x = 2, y = 0, y = x^2 - 2x + 2$에 의해 둘러싸인 영역이라고 하자.*

(1) D의 넓이를 구하여라.

(2) D를 y축으로 회전하였을 때 형성되는 입체의 부피를 구하여라.

(1) $y = (x-1)^2 + 1 \geq 0$이므로, $y > 0$일 때를 상정하고 보면 된다. 그러면 넓이 S는

$$S = \int_{-1}^2 f(x)dx = \int_{-1}^2 (x^2 - 2x + 2)dx = [\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x]_{-1}^2 = 6$$

(2) 주어진 영역을 두 개로 나누어 생각해 보아야 한다. 첫째는 $-1 \leq x \leq 1$으로, 이 구간에서는 항상 $-1 < x < 0$에 해당하는 부분에서 더 함숫값이 크다. 따라서 부피는

$$V_1 = \int_{-1}^0 2\pi(-x)(x^2 - 2x + 2)dx = \frac{23}{6}\pi$$

이다. 반대로 $1 \leq x \leq 2$에서는 이 구간에 해당하는 영역만 부피를 만든다. 따라서

$$V_2 = \int_1^2 2\pi x(x^2 - 2x + 2)dx = \frac{25}{6}\pi$$

이다. 따라서 둘을 합하면 8π를 얻는다.

문제 313. *함수 f를*

$$f(x) = \begin{cases} |x|^x & (x \neq 0) \\ c & (x = 0) \end{cases}$$

으로 정의하자.

(1) f가 continuous이기 위한 c의 값을 구하여라.

(2) c를 잘 결정하여 f가 $x = 0$에서 differentiable하게 만들 수 있는가?

(3) $(1,1)$에서 $y = f(x)$ 그래프의 접선을 구하여라.

(1) f가 continuous이려면

$$\lim_{x\to 0} |x|^x = f(0) = c$$

여야만 한다. 이때

$$\lim_{x\to 0} x \ln|x| = 0$$

임을 알고 있으므로,

$$\lim_{x\to 0} |x|^x = e^{\lim_{x\to 0} x \ln|x|} = e^0 = 1$$

이게 된다. 따라서, $c = 1$.

(2) f가 differentiable이려면 적어도 continuous여야 한다. 따라서, $f(0) = 1$이다. 그러면 우리는

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|^x - 1}{x}$$

가 존재하는지를 보아야 한다. 이때 $|x|$가 거슬리므로, 부호를 나누어 확인하자. $x > 0$이라면 $|x|^x = e^{x\ln x}$이며,

$$\lim_{x\to 0+} \frac{|x|^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{x\ln x}(\ln x + 1)}{1}$$

이 극한이 존재할 경우 로피탈의 정리에 의해 설명한다. 그러나 이 극한은 존재하지 않는다. 따라서, 미분불가능하다.

(3) $x = 1$에서 $f(x) = x^x$이다. 그러면 이를 미분할 경우,

$$f'(x) = x^x(\ln x + 1)$$

을 얻는다. 따라서, $f'(1) = 1$이다. 따라서 기울기가 1이고 $(1, 1)$을 지나는 직선인 $y = x$가 접선이다.

문제 314.

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)^{\frac{1}{x}}$$

의 값을 구하여라.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

가 로피탈의 정리에 의해 성립한다. 또한

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x})}{x} = \lim_{x\to 1} \ln(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}) = -\ln 2$$

임을 알 수 있다. 또한 e^x는 연속함수이므로,

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$$

를 얻게 된다. 따라서, 원하는 값은 $\frac{1}{2}$이다.

문제 315. *함수*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \dfrac{1}{x^2} & (0 < x \le 1) \end{cases}$$

이 $[0, 1]$*에서 적분불가함을 보여라.*

적분의 정의를 이용하여 보자. 만약 f가 $[0, 1]$에서 적분가능하다면, 적분의 정의에 의하여, 모든 $\epsilon > 0$에 대해 상응하는 $N > 0$이 있어 $n > N$이라면

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x - L \right| < \epsilon$$

이 x_k^*의 선택에 상관없이 성립한다. 이때, $k = 1, 2, \cdots, n$에 대해 $x_k = \frac{k}{n}$이며 $\Delta x = \frac{1}{n}$, $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$이다. 이제, $\epsilon = 1$에 대하여 x_k^*과 x_k^{**}을 아래와 같이 선택하자.

$$x_k^* = \frac{k}{n}$$

$$x_1^{**} = \frac{1}{5n}, \quad x_k^{**} = x_k^* \quad (k = 2, 3, \cdots, n)$$

이때 f가 integrable이라 하였으므로,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(f(x_k^*) - f(x_k^{**}))\Delta x\right| \le \left|\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x - L\right| + \left|\sum_{k=1}^{n} f(x_k^{**})\Delta x - L\right| < 2$$

가 성립하게 된다. 그런데,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(f(x_k^*) - f(x_k^{**}))\Delta x\right| = |\Delta x(f(x_1^*) - f(x_1^{**}))| = |24n| < 2$$

를 얻게 된다. 따라서 n이 자연수인 한 이를 성립시킬 수는 없으므로, f는 $[0, 1]$에서 적분불가하다.

문제 316. *곡선 $f(x) = -ax^2 + (a+1)x$와 $y = 0$으로 둘러싸인 영역 R을 $x = 0$을 기준으로 돌려 만드는 입체의 부피가 최소가 되는 a를 구하시오.*

$$V_a = \int_0^{\frac{a+1}{a}} 2\pi x(-ax^2 + (a+1)x)dx$$

이며, 계산하여 준다면

$$\begin{aligned} V_a &= 2\pi \int_0^{\frac{1+a}{a}} [-ax^3 + (a+1)x^2]dx \\ &= 2\pi \left[-\frac{a}{4}x^4 + \frac{a+1}{3}x^3\right]_0^{\frac{a+1}{a}} = \frac{\pi(a+1)^4}{6a^3} \end{aligned}$$

이다. 그러면

$$V'(a) = \frac{\pi}{6}\left(1 - \frac{6}{a^2} - \frac{8}{a^3} - \frac{3}{a^4}\right) = 0$$

인 부분에서 미분가능함수 $V(a)$의 최소가 생길 수 있고, 우리는

$$a^4 - 6a^2 - 8a - 3 = (a+1)^3(a-3) = 0$$

을 풀어 $a = 3$을 얻는다. 또한 $a > 3$일 때 $V'(a) > 0$이고, $0 < a < 3$일 때 $V'(a) < 0$인 것도 볼 수 있으므로 종합하면 $a = 3$이 원하는 값이다.

문제 317. *(1) $\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x)$를 구하여라.*

(2)

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t^3}dt + 1 = \tanh^{-1} x \quad |a| < 1$$

인 $f(x)$와 a를 찾아라.

(3) (2)에서 구한 f에 대하여,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+h} f(t)dt$$

를 구하여라.

(1)

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

이며, inverse를 구하기 위해 생각하면

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

이므로 정리하면

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

이며

$$y = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

이다. 따라서,

$$\frac{d\tanh^{-1} x}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1-x}{1+x}\frac{2}{(1-x^2)} = \frac{1}{1-x^2}$$

이다.

(2) $x = a$를 대입하면

$$1 = \tanh^{-1} a$$

를 얻는다. 따라서, $a = \tanh(1) = \dfrac{e^2-1}{e^2+1}$이다. 이제 양변을 미분하면

$$\frac{f(x)}{x^3} = \frac{1}{1-x^2}$$

이어야 하므로

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$$

이다.

(3) 함수

$$g(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)dt$$

를 생각하면, 주어진 극한은

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(\frac{1}{2}+h) - g(\frac{1}{2})}{h}$$

이다. 그리고 g는 f가 연속이니 FTC에 의해 미분가능함수이므로, 이 값은 $g'(\frac{1}{2})$이다.

$$g'(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{6}$$

이므로, 구하는 것은 1/6.

문제 318. *만약 f가 differentiable이고 $f(x+y) = f(x)f(y)$가 성립한다면,*

(1) $f(0) \neq 0$일 때 $f'(x) = cf(x)$가 성립함을 보여라. 단, c는 상수이다.

(2) $f(x) = e^{cx}$임을 보여라. 단, (1)의 조건을 그대로 승계한다.

(1) 먼저, $f(0)$을 구하자. $x = y = 0$을 대입하면 $f(0)^2 = f(0)$을 얻고, $f(0) \neq 0$이라 하였으므로 $f(0) = 1$이다. 그러면 f가 미분가능하다 하였으므로,

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y) - f(x)}{y} = f'(x) = \lim_{y\to 0}\left[f(x)\cdot\frac{f(y) - f(0)}{y}\right] = f(x)f'(0)$$

임을 알 수 있다. 따라서, $f'(0) = c$라고 두면 $f'(x) = cf(x)$이다.

(2) 함수 $f(x)e^{-cx} = g(x)$를 정의한다면,

$$g'(x) = (f'(x) - cf(x))e^{-cx} = 0$$

임을 얻을 수 있다. 또한, $g(0) = f(0) = 1$이므로, 미분가능함수 g는 상수함수 1이다. 따라서, $f(x) = e^{cx}$이다.

문제 319. *$f(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^3}dt + 1$일 때, 다음 질문에 답하여라.*
(1) f가 $\frac{1}{2}$보다 작은 어떤 α에 대하여 $[\alpha, \infty)$를 domain으로 하는 inverse function을 가짐을 보여라.
(2) $(f^{-1})'(1)$과 $(f^{-1})''(1)$이 존재한다면 구하여라.

(1) $f'(x) = \sqrt{1+x^3} > 0$이므로 f는 증가함수이다. 그러면 이제 $x = -1$일 때 f가 최솟값이라는 것을 아는데,

$$f(-1) = \int_0^{-1} \sqrt{1+t^3}dt + 1 = 1 - \int_{-1}^0 \sqrt{1+t^3}dt = \alpha < 1 - \int_0^1 \sqrt{1+t}dt = \frac{1}{2}$$

이므로 f^{-1}은 $\alpha < \frac{1}{2}$인 어떤 α에 대하여 그 값보다 크다. 또한,

$$\int_0^N \sqrt{1+t^3}dt + 1 > N$$

이므로, N이 충분히 커지면 $f(N)$도 충분히 커지는 것을 확인해줄 수 있다. 따라서, f^{-1}의 domain은 $[\alpha, \infty)$이다.

(2) f가 differentiable이므로, f^{-1}도 differentiable이다. 또한, $f^{-1}(1) = 0$임을 알므로,

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\sqrt{1+0^3}} = 1$$

이다. 또한,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{1+f^{-1}(x)^3}$$

임을 알므로 이를 미분하면

$$(f^{-1})''(x) = -\frac{1}{2}(1+f^{-1}(x)^3)^{-\frac{3}{2}}(3f^{-1}(x)^2)((f^{-1})'(x))$$

이다. $x = 1$을 대입하면, 이 값은 0이 된다. 따라서, $(f^{-1})''(1) = 0$.

문제 320.

$$\int \sqrt{x + \sqrt{x^2+4}}dx$$

를 구하여라.

$a = \sqrt{x + \sqrt{x^2+4}}$이라고 두면, $a^2 = x + \sqrt{x^2+4}$이므로

$$\frac{4}{a^2} = \sqrt{x^2+4} - x$$

이다. 따라서, 이를 정리하면

$$x = \frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{4}{a^2}\right)$$

을 얻고,

$$\frac{dx}{da} = \left(a + \frac{4}{a^3}\right)$$

이므로

$$\int \sqrt{x + \sqrt{x^2+4}}dx = \int a^2 + \frac{4}{a^2}da = \frac{1}{3}a^3 - \frac{4}{a} + C$$

이다. 이제, $a = \sqrt{x + \sqrt{x^2+4}}$를 다시 대입해준다면

$$\int \sqrt{x + \sqrt{x^2+4}}dx = \frac{1}{3}(\sqrt{x + \sqrt{x^2+4}})^3 - 4\frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x^2+4}}} + C$$

이다.

문제 321.

$$\lim_{x\to 0}\left(\csc x - \frac{1}{x}\right)$$

을 구하여라.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\csc x - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} \quad \text{(L'Hospital's rule)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} = 0\end{aligned}$$

임을 알 수 있다.

문제 322.

$$F(x) = \int_0^x e^{-x^2t^2}dt$$

에 대하여, $xF'(x)+F(x)$를 구하여라.

$xF'(x)+F(x) = (xF(x))'$이다. 이때,

$$xF(x) = \int_0^x e^{-x^2t^2}dt$$

이며 $u = xt$로 치환하면

$$xF(x) = \int_0^{x^2} e^{-u^2}du$$

를 얻는다. 이때 e^{-u^2}은 연속함수이므로, FTC와 연쇄법칙을 적용하면

$$xF'(x)+F(x) = \frac{d(xF(x))}{dx} = 2xe^{-x^4}$$

을 얻는다.

문제 323. *$f(x) = \int_0^{x^3} e^{t^2}dt$일 때,*

$$6\int_0^1 x^2f(x)dx - 2\int_0^1 e^{x^2}dx$$

의 값을 구하여라.

$$g(x) = \int_0^x e^{t^2}dt$$

라고 두면, $f(x) = g(x^3)$이다. 따라서, 치환적분법에 의하여 $u = x^3$으로 치환할 때

$$6\int_0^1 xf(x)dx = 6\int_0^1 x^2g(x^3)dx = 2\int_0^1 g(u)du$$

이다. 여기서 integration by parts를 이용하면

$$2\int_0^1 g(u)du = 2[ug(u)]_0^1 - 2\int_0^1 ue^{u^2}du = 2g(1) - 2\int_0^1 ue^{u^2}du$$

이므로,

$$6\int_0^1 x^2f(x)dx - 2\int_0^1 e^{x^2}dx = -2\int_0^1 ue^{u^2}du = [-e^{u^2}]_0^1 = 1-e$$

이다.

문제 324. *f가 $[a,b]$에서 continuous function이고 g는 $[a,b]$에서 nonnegative integrable function이다. 이때, 우리는*

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt$$

인 $c \in [a,b]$가 존재함을 알고 있다.

(1) f가 continuous하지는 않으나 $[a,b]$에서 유한한 값을 가지는 경우에는 성립하는가?

(2) f와 g가 continuous하다는 조건은 충분한가?

(1) $g(x) = 1$로 두고,

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \neq \frac{1}{2}) \\ 1 & (x = \frac{1}{2}) \end{cases}$$

를 $[a,b] = [0,1]$에서 생각하자. 그러면

$$\int_0^1 f(t)g(t)dt = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}$$

인데, f는 결코 $\frac{1}{2}$가 될 수 없으므로 c는 존재하지 않는다.

(2) $f(x) = x$와 $g(x) = x$를 $[a,b] = [-1,1]$에서 본다면

$$\int_{-1}^1 f(t)g(t)dt = \int_{-1}^1 t^2dt = \frac{2}{3}$$

이다. 그러나, $\int_{-1}^1 g(t)dt = 0$이므로 등식이 성립할 수 없다.

문제 325. *f가 $[a,b]$에서 continuous function이고 g는 $[a,b]$에서 nonnegative integrable function이다. 이때, 우리는*

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt$$

인 $c \in [a,b]$가 존재함을 알고 있다.

f가 continuous라고 가정하자. $0 < a < b$일 경우,

$$\lim_{x\to 0}\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)}{t}dt$$

를 계산하여라. 단, $f(0) = 1$이다.

첫째로 $x > 0$이라면, $\frac{1}{t}$는 nonnegative function이며 f는 continuous이므로 아는 것을 적용하면 $c \in [ax, bx]$에 대하여

$$\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)}{t}dt = f(c)\int_{ax}^{bx}\frac{1}{t}dt = f(c)\ln\frac{b}{a}$$

임을 알 수 있다. 따라서, $x \to 0^+$임에 따라 $c \to 0^+$이므로,

$$\lim_{x\to 0^+}\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)}{t}dt = \lim_{cx\to 0^+}\frac{f(c)}{\ln}\frac{b}{a} = \ln\frac{b}{a}$$

이다. 만약 $x < 0$이라면, 동일하게 $-\frac{1}{t}$가 nonnegative이므로

$$\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)}{t}dt = \int_{bx}^{ax}\frac{f(t)}{-t}dt = f(c)(\ln\frac{b}{a})$$

인 $c \in [bx, ax]$가 있고, 이에 따라

$$\lim_{x\to 0^-}\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)}{t}dt = \ln\frac{b}{a}$$

이다. 이를 종합하면 극한값은

$$\ln\frac{b}{a}$$

문제 326. *아래 L'Hospital's rule과 비슷한 법칙이 성립한다면 증명하고, 그렇지 않다면 반례를 들어라.*

> *$f, g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$가 differentiable이고 $g'(x) \neq 0$이다. 또한, $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$이다. 그렇다면,*
>
> $$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$
>
> *는 곧*
>
> $$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$$
>
> *를 의미한다.*

순서가 로피탈 법칙과는 다른 것을 알 수 있다. $f(x) = -x - \sin x$,$g(x) = -\ln(1+x)$이라 두면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{\ln(1+x)} = \infty$$

이지만,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty}(x+1)(1+\cos x)$$

로 극한값을 가지지 않는다.

문제 327. $0 < a < b$*에 대하여,*

$$\lim_{t\to 0}\left[\int_0^1 (bx + a(1-x))^t dx\right]^{\frac{1}{t}}$$

를 구하여라.

$$\int_0^1 [bx + a(1-x)]^t dx = \int_0^1 [a + (b-a)x]^t dx = \left[\frac{1}{b-a}\frac{1}{t+1}(a+(b-a)x)^{t+1}\right]_0^1 = \frac{1}{b-a}\frac{b^{t+1}-a^{t+1}}{t+1}$$

이다. 이제, 로피탈 법칙을 이용하여 아래 극한을 계산하자.

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\frac{b^{t+1}-a^{t+1}}{(b-a)(t+1)})}{t}$$

분모와 분자가 모두 0으로 수렴하므로, 이는

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\frac{b^{t+1}-a^{t+1}}{(b-a)(t+1)})}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{(b-a)(t+1)}{b^{t+1}-a^{t+1}}\cdot\frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^{t+1}\ln b - a^{t+1}\ln a - (b^{t+1}-a^{t+1})}{(t+1)^2} = \frac{b\ln b - a\ln a - (b-a)}{b-a}$$

이다. 따라서 원하는 극한값은

$$\lim_{t\to 0}\left[\int_0^1 (bx + a(1-x))^t dx\right]^{\frac{1}{t}} = e^{\frac{b\ln b - a\ln a - (b-a)}{b-a}} = \frac{1}{e}\frac{a^a}{b^b}$$

문제 328. *연속함수 $f(x)$에 대하여*

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt = 2\sin x - 2x$$

일 때,

$$\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} f(x)^3 dx$$

의 값을 구하시오.

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt = x\int_0^x f(t)dt = \int_0^x tf(t)dt = 2\sin x - 2x$$

의 양변을 미분하면

$$\int_0^x f(t)dt = 2\cos x - 2$$

이고 한 번 더 미분하면 $f(x) = -2\cos x$이다. 따라서, 구하는 값은

$$\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} -8\sin^3 x dx = -8\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} \sin x(1-\cos^2 x)dx = 8\int_{-1}^0 (1-t^2)dt = \frac{16}{3}$$

이다.

문제 329. *$I = \int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{x\sin x}{4-\cos^2 x}dx$, $J = \int_0^\pi \dfrac{\sin x}{4-\cos^2 x}dx$라 하자.*
(1) I를 J에 관한 식으로 표현하시오.
(2) I의 값을 구하시오.

(1) $\dfrac{x\sin x}{4-\cos^2 x}$는 even function이므로

$$I = 2\int_0^\pi f(x)dx$$

이다. $u = \pi - x$라고 하면

$$I = 2\int_\pi^0 \frac{(\pi-u)\sin u}{4-\cos^2 u}(-1)du = 2\int_0^\pi \frac{(\pi-x)\sin x}{4-\cos^2 x}dx = 2\pi J - I$$

를 얻는다. 따라서,

$$I = \pi J$$

(2)

$$J = \int_0^\pi \frac{\sin x}{4-\cos^2 x}dx$$

이므로 $\cos x = u$로 치환하면

$$J = \int_{-1}^1 \frac{1}{4-u^2}du = \frac{1}{4}[\ln(2+u) - \ln(2-u)]_{-1}^1 = \frac{1}{2}\ln 3$$

을 얻는다. 따라서, $I = \frac{\pi}{2}\ln 3$이다.

문제 330. *반지름의 길이가 13인 구면을 평면으로 자른 모양의 그릇에 물이 들어 있다. 이 그릇에 반지름의 길이가 9인 쇠공을 집어넣었더니, 그릇 안의 수면의 높이가 쇠공의 지름과 같아졌다. 처음 수면의 높이를 구하시오.*

그릇의 중심을 원점이라 하면 그릇의 방정식은 $x^2+y^2=13^2$이며, 쇠공은 끝까지 가라앉을 것이므로, $x^2+(y+4)^2=9^2$이 원하는 방정식이다. 물의 부피를 V라 하면, V는

$$V=\pi\int_{-13}^{5}[(13^2-y^2)-(9^2-(y+4)^2)]dy=1296\pi$$

이다. 처음 물의 높이의 좌표를 h라 하면

$$V=\pi\int_{-13}^{h}(13^2-y^2)dy=\pi(169h-\frac{h^3}{3}+\frac{4394}{3})$$

이다. 따라서 위의 두 식에서

$$h^3-507h+506=(h+1)(h+22)(h-23)=0$$

을 얻는데, $-12<h<13$이어야 하므로 $h=-1$이다. 따라서 원래 수면은 12였다.

문제 331. *함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[0,1]$에서 연속이고 이 구간에서 nonnegative이다. 함수 $F(x)$가*

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt \quad (0\le x\le 1)$$

이라면,

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)F(x)dx=k$$

를 만족시키는 0이 아닌 상수 k의 값을 구하여라.

$k=\int_0^1 f(x)dx=F(1)$이며,

$$k=\int_0^1 f(x)F(x)dx=[\frac{1}{2}F(x)^2]_0^1=\frac{F(1)^2-F(0)^2}{2}$$

가 FTC에 의해 성립한다. 그런데 $F(0)=0$이므로, $2F(1)=F(1)^2$이 된다. 그런데 $k\ne 0$이라 하였으므로, $k=F(1)=2$이다.

문제 332. *부등식 $0\le x\le 1, x^2\le y\le x$이 나타내는 영역을 직선 $y=x$를 회전축으로 회전시킨 입체의 부피를 구하시오.*

점 $0\le t\le 1$일 때 $P(t,t^2)$에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 발을 H라 하자. H는 두 직선 $y=x$와 $y=-(x-t)+t^2$의 교점이므로, H의 좌표는

$$H\left(\frac{t+t^2}{2},\frac{t+t^2}{2}\right)$$

이다. $\overline{OH}=l,\overline{PH}=h$라 하면,

$$l=\frac{t+t^2}{\sqrt{2}},\quad h=\frac{t-t^2}{\sqrt{2}}$$

이므로 부피는

$$V=\int_0^{\sqrt{2}}\pi h^2 dl=\pi\int_0^1\left(\frac{t-t^2}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{2t+1}{\sqrt{2}}dt=\frac{\sqrt{2}\pi}{60}$$

이다.

문제 333.

$$\int_0^1 \ln(1+\sqrt{x})dx$$

를 구하여라.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(1+\sqrt{x})dx &= [x\ln(1+\sqrt{x})]_0^1 - \int_0^1 x\frac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \\ &= \ln 2 - \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{2(1+\sqrt{x})}dx \\ &= \ln 2 - \int_0^1 \frac{t^2}{1+t}dt \quad (t=\sqrt{x}) \\ &= \ln 2 - \int_0^1 (t-1+\frac{1}{t+1})dt \\ &= \ln 2 - (\ln 2 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

문제 334. *실수 전체에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.*

(가) $f(x)$의 그래프는 $(11,2)$를 기준으로 점대칭이다.

(나) $\int_{20}^{21} f(x)dx = 4$

(1) $\int_1^2 f(x)dx$를 구하시오.

(2) $\int_c^2 f(x)dx = cf(c)$를 만족시키는 상수 c가 구간 $(1,2)$에 적어도 하나 존재함을 보이시오.

(1) (가) 조건은 곧 $f(x)+f(22-x)=4$임을 이야기해주고 있다. 그러면,

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (4-f(22-x))dx = -\int_{21}^{20}(4-f(u))du \quad (u=22-x)$$

를 얻는다. 그런데

$$-\int_{21}^{20}(4-f(u))du = 4 - \int_{20}^{21} f(u)du = 4-4=0$$

이므로, 원하는 적분값은 0이다.

(2) 함수

$$F(x) = x\int_x^2 f(t)dt$$

를 $x\in[1,2]$에서 생각하자. $y=F(x)$는 $[1,2]$에서 연속이고 $(1,2)$에서 미분가능하며, $F(1)=F(2)=0$ 이므로 롤의 정리를 적용하면 $F'(c)=0$인 c가 구간 $(1,2)$에 적어도 하나 존재함을 알 수 있다. 그런데

$$F'(x) = \int_x^2 f(t)dt - xf(x)$$

이므로,

$$\int_c^2 f(t)dt = cf(c)$$

인 c가 구간 $(1,2)$ 안에 적어도 하나 존재한다.

문제 335. *자연수 k에 대하여, 다음 부등식이 성립함을 증명하시오.*

$$\int_1^{k\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx > \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{k+1}{2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
\int_1^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx &> \int_{\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \int_{i\pi}^{(i+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \\
&> \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{(i+1)\pi} \int_{i\pi}^{(i+1)\pi} |\sin x| dx \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i+1} \\
&> \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{k-1} \int_{i+1}^{i+2} \frac{1}{x} dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_2^{k+1} \frac{1}{x} dx \\
&= \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{k+1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

이다.

문제 336. *집합*

$$\{(x,y)|x^2+y^2 \le r^2, x \ge \sqrt{r^2-h^2}\}$$

이 나타내는 영역을 y축 둘레로 회전시킬 때 생기는 입체도형의 부피를 구하시오. 단, $1 < h \le r$이다.

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_{\sqrt{r^2-h^2}}^{r} 2x\sqrt{r^2-x^2} dx \\
&= 4\pi[-\frac{1}{3}(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}]_{\sqrt{r^2-h^2}}^{r} \\
&= \frac{4}{3}\pi h^3
\end{aligned}
$$

문제 337. *함수 $f(x) = ([x]+1)^2 - (x-[x]-1)^2$과 직선 $x = n-1$, $x = n$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라 할 때,*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{3S_k+1}{n^2}\right)$$

을 구하시오.

$n-1 \le x < n$에서 $[x] = n-1$이므로

$$f(x) = -x^2 + 2nx$$

를 얻을 수 있다. 따라서,

$$S_n = \int_{n-1}^{n} (-x^2+2nx) dx = -\frac{1}{3} + n^2$$

이다. 그러면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{3S_k+1}{n^2}\right) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\left(3\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\frac{1}{n}\\ &= \int_0^1 x\sin(3x^2)dx\\ &= \frac{1}{6}\int_0^3 \sin t dt \quad (t=3x^2)\\ &= \frac{1-\cos 3}{6}\end{aligned}$$

문제 338. *양의 실수 전체의 집합에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 임의의 양의 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_1 < t_2$ 이면 $f(t_1) \le f(t_2)$를 만족한다. 자연수 n과 음이 아닌 정수 k에 대하여 x_k, S_k를 아래와 같이 정의하자.*

$$x_k = \frac{k\pi}{n}, \quad S_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\cos^2 nx dx$$

(1) 아래가 성립함을 보여라.

$$\frac{\pi}{2n}f(x_k) \le S_k \le \frac{\pi}{2n}f(x_{k+1})$$

(2) (1)을 이용하여

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi f(x)\cos^2 nx dx$$

를 구하여라.

(3)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi (\cos 2nx)\ln(1+x)dx$$

를 구하여라.

(1) f는 단조증가하므로

$$f(x_k)\int_{x_k}^{x_{k+1}}\cos^2 nx dx \le S_k \le f(x_{k+1})\int_{x_k}^{x_{k+1}}\cos^2 nx dx$$

을 얻는다. 그런데,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}\cos^2 nx dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{1+\cos 2nx}{2}dx = \frac{1}{2}(x_{k+1}-x_k) = \frac{\pi}{2n}$$

이므로,

$$\frac{\pi}{2n}f(x_k) \le S_k \le \frac{\pi}{2n}f(x_{k+1})$$

를 얻는다.

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi f(x)\cos^2 nx dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}S_k$$

임을 알고, S_k의 범위에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\pi}{2n}f(x_k) \le \lim_{n\to\infty}\int_0^\pi f(x)\cos^2 nx dx \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\pi}{2n}f(x_{k+1})$$

을 얻는다. 그런데 이를 가두는 두 식은 모두

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\pi}{2n}f(x_k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{n}f\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{1}{2}\int_0^\pi f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\pi}{2n}f(x_{k+1})$$

를 만족시키므로, squeeze theorem에 의하여,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi f(x)\cos^2 nxdx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}S_k=\frac{1}{2}\int_0^\pi f(x)dx$$

이다.

(3)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi(\cos 2nx)\ln(1+x)dx&=\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi(2\cos^2 nx-1)\ln(1+x)dx\\&=2\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi\ln(1+x)\cos^2 nxdx-\int_0^\pi\ln(1+x)dx\\&=\int_0^\pi\ln(1+x)dx-\int_0^\pi\ln(1+x)dx=0\end{aligned}$$

을 얻는다.

Chapter 10

Miscelleneous Problems

문제 339. *함수* $f(x)$*가 두 번 미분가능하고* $f(0) = f(1) = 0$*이다. 구간* $(0,1)$*에서* $f(x) > 0$*일 때,*

$$\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geq 4$$

임을 보여라.

함수 $f(x)$가 구간 $[0,1]$에서 연속이므로 적당한 $X \in [0,1]$에 대하여 최댓값 Y가 존재하여 $f(X) = Y$이다. 구간 $[0,X], [X,1]$에서 각각 평균값 정리를 적용하면 적당한 $a, b \in [0,1]$이 존재하여

$$f'(a) = \frac{f(X)}{X} = \frac{Y}{X}$$

$$f'(b) = \frac{f(1) - f(X)}{1 - X} = \frac{-Y}{1 - X}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx &\geq \int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \\ &\geq \frac{1}{Y} \int_a^b |f''(x)| dx \\ &\geq \frac{1}{Y} \left| \int_a^b f''(x) dx \right| \\ &= \frac{1}{Y} \left| \frac{-Y}{1-X} - \frac{Y}{X} \right| \\ &= \frac{1}{X(1-X)} \geq 4 \end{aligned}$$

가 성립한다.

문제 340. n*을 2 이상의 자연수라 할 때,*

$$f(x) = x^n + px + q$$

형태의 n*차 함수에 대하여, 적분*

$$I = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 dx$$

를 고려하자. I*를 최소로 하는* (p,q)*는 유일함을 보이고, 그러한* (p,q)*와* I*의 최솟값을 구하여라.*

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2n + p^2x^2 + q^2)dx + \int_{-1}^{1}(px^{n+1} + qx^n)dx
\end{aligned}$$

를 얻는다. 만약 n이 짝수라면

$$I = \frac{1}{3}p^2 + \left(q + \frac{1}{n+1}\right)^2 + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

을 얻고, n이 홀수라면

$$I = \frac{1}{3}\left(p + \frac{3}{n+2}\right)^2 + q^2 + \frac{1}{2n+1} - \frac{3}{(n+2)^2}$$

를 얻는다. 따라서,

$n = 2m$일 경우에는 $(p,q) = \left(0, -\dfrac{1}{n+1}\right)$일 때 최소이고, 그 값은

$$\frac{n^2}{(n+1)^2(2n+1)}$$

이다. $n = 2m+1$이라면 $(p,q) = \left(-\dfrac{3}{n+2}, 0\right)$일 때 최소이고, 그 값은

$$\frac{(n-1)^2}{(n+2)^2(2n+1)}$$

이다.

문제 341. *함수 $f(x)$는 폐구간 $[0,1]$에서 실수 $\mathbb{R}$로 가는 연속함수이고 $[0,1]$에 있는 모든 실수 x, y와 $0 \leq \lambda \leq 1$인 λ에 대해서*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

이라 한다.

(1) $k = 1, 2, \cdots, n-1$에 대하여

$$f(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{2}(f(\frac{k}{n}) + f(\frac{n-k}{n}))$$

임을 보이시오.

(2) $f(\frac{1}{2}) = \alpha$일 때, $\int_0^1 f(t)dt$가 가지는 최솟값을 α로 표현하시오.

(1) $\lambda = \frac{1}{2}$를 대입한다면,

$$f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

이므로, 각각 k/n과 $(n-k)/n$을 대입한다면,

$$f(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{2}(f(\frac{k}{n}) + f(\frac{n-k}{n}))$$

을 얻는다.

(2) (1)에서 얻은 식을 전부 더하고, 여기에

$$f(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) \leq \max(f(0), f(1))$$

을 더해준다면

$$nf(\frac{1}{2}) \leq \max(f(0), f(1)) + \sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n})$$

이므로

$$f(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$$

혹은

$$f(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$$

을 얻는다. 따라서 어떤 경우나

$$f(\frac{1}{2}) = \lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{2}) \leq \lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x)dx$$

가 되므로, $\int_0^1 f(x)dx$의 최솟값은 α가 된다.

문제 342. *함수 $f(x)$는 구간 $[0,1]$에서 연속이고 $g(x)$는 실수 전체에서 연속이다. 또한, $g(x) > 0$이며 $\int_x^{x+1} g(t)dt = C$로 일정하다.*

(1) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+1) = g(x)$임을 보이시오.

(2) $\int_0^1 f(x)g(x)dx = f(c)\int_0^1 g(x)dx \quad (0 < c < 1)$을 만족하는 c가 존재함을 증명하시오.

(3) $f(x)$가 증가함수이며 $\int_0^1 f(x)dx = 2, \int_0^1 g(x)dx = 3$일 때,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)g(nx)dx$$

의 값을 구하시오.

(1) $\int_x^{x+1} g(t)dt = C$의 양변을 x로 미분하면

$$g(x+1) - g(x) = 0$$

을 얻기에, 성립한다.

(2) 함수 $h(x) = f(x)\int_0^1 g(x)dx$를 생각하자. 함수 f는 구간 $[0,1]$에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 가지고, 이를 각각 $f(d) = M, f(e) = m$이라고 두자. 그러면 $g(x) > 0$이므로

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

이고, 이를 구간 $[0,1]$에서 적분한다면

$$h(e) = m\int_0^1 g(x)dx \leq \int_0^1 f(x)g(x)dx \leq M\int_0^1 g(x)dx = h(d)$$

이다. 그리고 h 역시도 연속함수이므로, 중간값 정리에 의하여 d와 e 사이에서 $h(c) = f(c)\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 f(x)g(x)dx$인 c를 가진다. 따라서 이를 종합하면 $\int_0^1 f(x)g(x)dx = f(c)\int_0^1 g(x)dx$인 $c \in (0,1)$이 존재한다.

(3) $nx = y$라고 치환하면

$$\int_0^1 f(x)g(nx)dx = \frac{1}{n}\int_0^n f(\frac{y}{n})g(y)dy$$

이다. 그러면

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)g(nx)dx &= \frac{1}{n}\int_0^n f(\frac{y}{n})g(y)dy \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} f(\frac{y}{n})g(y)dy \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{c_k}{n})\int_k^{k+1} g(y)dy \quad ((2), c_k \in (k,k+1)) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 3f(\frac{c_k}{n}) \quad (\int_x^{x+1} g(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = 3)\end{aligned}$$

이므로,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)g(nx)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 3f(\frac{c_k}{n}) = 3\int_0^1 f(x)dx = 6$$

을 얻는다.

문제 343. *구간 $[-1,1]$에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여, $f'(x)$가 우함수이고*

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 f'(x)dx = 0$$

일 때 $f(1)+f(-1)$을 구하여라.

f'이 우함수라 하였으므로

$$\int_0^1 f'(x)dx = \int_{-1}^0 f'(x) = 0$$

을 얻는다. 따라서 미적분학 기본정리에 의하여 $f(1)-f(0) = f(0)-f(-1) = 0$을 얻는다. 또한 $f'(-x) = f'(x)$의 양변을 적분하면 $-f(-x) = f(x)+C$를 얻으며, $C = -f(-1)-f(1) = -2f(0)$이다. 또다시 양변을 $[-1,1]$에서 정적분하면

$$-\int_{-1}^1 f(-x)dx = \int_{-1}^1 f(x)dx - 4f(0)$$

을 얻고,

$$-\int_{-1}^1 f(-x)dx = -\int_{-1}^1 f(t)dt$$

임이 $t=-x$ 치환으로부터 나오므로 $f(0)=0$을 얻는다. 따라서,

$$f(-1)+f(1) = 2f(0) = 0$$

문제 344. *함수 $g(s) = \int_{1-s}^1 e^t f(s+t)dt$에 대하여, $g'(0)$의 값을 구하여라. 단, f는 연속함수이며 $f(1)=1$이다.*

$s+t=u$라고 두면

$$g(s) = \int_{1-s}^1 e^t f(s+t)dt = \int_1^{1+s} e^{u-s}f(u)du = e^{-s}\int_1^{1+s} e^u f(u)du$$

이므로

$$g'(s) = -e^{-s}\int_1^{1+s} e^u f(u)du + e^{-s}e^{1+s}f(1+s)$$

이다. 따라서

$$g'(0) = ef(1) = e$$

를 얻는다.

문제 345. *a, b, c는 실수이다. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$는 아래 두 조건을 만족한다.*

> *(A) $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$*
> *(B) $-1 \le x \le 1$인 x에 대하여, $f(x) \le 3x^2 - 1$*

이때, 적분 $I = \int_{-1}^{1} \{f'(x)\}^2 dx$의 값이 취하는 범위를 구하시오.

$g(x) = f(x) - x$로 두면, $g(\pm 1) = 0$이므로 $g(x) = a(x+1)(x-1)$ 꼴이고, $f(x) = ax^2 + x - a$가 된다. 또한, $f(x) \le 3x^2 - 1$이므로,

$$h(x) = 3x^2 - 1 - f(x) = (3-a)x^2 - x + a - 1$$

을 생각하자.

만약 $a \ge 3$인 경우, h는 직선이거나 위로 볼록한 포물선이다. 또 $h(-1) = 3, h(1) = 1$이므로 부등식이 성립한다. $a < 3$인 경우

$$h(x) = (3-a)\left(x - \frac{1}{2(3-a)}\right)^2 - \frac{4a^2 - 16a + 13}{4(3-a)}$$

이다. 대칭축은 양수 부분에 있다. 만약 $\frac{5}{2} \le a < 3$인 경우, $h(1) = 1$이므로, 부등식은 성립한다. 반면 $a \le \frac{5}{2}$인 경우에는, $h(x) \ge 0$으로부터 $4a^2 - 16a + 13 \le 0$을 얻고, 범위에 의하여

$$\frac{4 - \sqrt{3}}{2} \le x \le \frac{5}{2}$$

이다.

$$I = \int_{-1}^{1} \{f'(x)\}^2 dx = \int_{-1}^{1} (2ax + 1)^2 dx = \frac{8}{3}a^2 + 2$$

에서, a의 범위를 고려해본다면 I의 값이 취하는 범위는

$$I \ge \frac{4(11 - 4\sqrt{3})}{3}$$

이다.

문제 346. *$a \ge 1$이라 하자, 부등식 $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $1 \le y \le a \sin x$로 정해지는 영역의 면적을 S_1, 부등식 $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le y \le 1, 0 \le y \le a \sin x$로 정해지는 영역의 면적을 S_2라 하자. $S_2 - S_1$을 최대로 하는 a의 값과 그때의 $S_2 - S_1$을 구하여라.*

$y = a \sin x, y = 1$의 교점의 x좌표를 α라 하면, $\sin \alpha = \dfrac{1}{a}$이다. 이때 $a \ge 1$이므로, $0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$를 만족시킨다. 그러면 조건에 의하여

$$S_1 = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (a \sin x - 1) dx, \quad S_2 = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} a \sin x dx - S_1$$

이다. 계산을 해주면,

$$S_1 = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \alpha - \frac{\pi}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{\sin \alpha} - S_1$$

이고,

$$S_2 - S_1 = \frac{1 - 2\cos \alpha}{\sin \alpha} - 2\alpha + \pi$$

이다. 우변을 미분하면

$$\frac{(2\cos\alpha - 1)\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

이고 $\alpha = \frac{\pi}{3}$일 때 극대이며 이때의 $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$이다. 최대는 $\frac{\pi}{3}$임을 계산으로부터 얻을 수 있다.

문제 347. *곡선 $y = \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}$ 위의 점 (p,q)에서 그린 tangent line과 $x = p$, $y = 0$에 의해 만들어지는 삼각형의 넓이를 A라고 하자. $\lim_{p\to\infty} S$를 구하여라.*

$y' = \frac{1-x^4}{(x^4+1)^{\frac{3}{2}}}$를 미분으로 얻을 수 있다. 따라서, 접선의 방정식은

$$y - \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} = \frac{1-p^4}{(p^4+1)^{\frac{3}{2}}}(x-p)$$

이므로 정리하면

$$x = p + \frac{p(p^4+1)}{p^4-1}$$

이다. 그러면 A는

$$A = \frac{1}{2}(x-p)q = \frac{1}{2}\frac{p^2\sqrt{p^4+1}}{p^4-1}$$

이 되며,

$$\lim_{p\to\infty} A = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{p^4}}}{1-\frac{1}{p^4}} = \frac{1}{2}$$

를 얻는다.

문제 348. *세로로 된 벽에 10m짜리 사다리가 비스듬히 놓여 있다. 사다리의 각 끝에는 0.15m의 반지름을 가진 바퀴가 있다. 만약 사다리의 아래쪽 끝이 벽으로부터 초당 1m의 속도로 멀어지고 있다면, 사다리 아래쪽 끝이 벽으로부터 6m떨어진 상황에서 벽에 접한 바퀴의 각속도는?*

사다리의 아래쪽 끝이 벽과 떨어진 거리를 x라고 하자. 그러면 $\frac{dx}{dt} = 1$임을 알고 있는 것이다. 그러면 사다리의 위쪽 끝과 바닥 사이의 거리는 $\sqrt{100-x^2}$이므로, 벽에 접한 위쪽 끝이 미끄러지는 속도는

$$v = \frac{x}{\sqrt{100-x^2}} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{x}{\sqrt{100-x^2}}$$

이다. $x = 6$이라면 우리는 초당 0.75m로 떨어진다는 것을 알게 된다. 이때 바퀴의 반지름이 0.15m이므로, 각속도 w는

$$w = \frac{|v|}{r} = 5$$

이다.

문제 349. *f'가 전체 실수에서 continuous이며, $f(c)f'(c) > 0$이 어떤 c에 대해 성립한다.*

(1) $f(x)^2$이 increasing인 열린 구간 (a,b)가 존재함을 보여라.

(2)

$$(b-a)|f(a)| \le \int_a^b |f(x)|dx \le (b-a)|f(b)|$$

가 성립함을 보여라.

(3)

$$[f(b)^2 - f(a)^2] \le 4\int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b f'(x)^2 dx$$

임을 보여라.

(1) f'가 연속함수이기에 ff' 역시도 연속함수이다. 그런데, $f(x)^2$을 미분하면 $2f(x)f'(x)$임을 알고 있다. 이때 $f(c)f'(c) > 0$이고, ff'는 연속함수이므로

$$\epsilon = \frac{f(c)f'(c)}{2} > 0$$

에 대하여 상응하는 $\delta > 0$가 있어

$$|x-c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)f'(x) - f(c)f'(c)| < \epsilon = \frac{f(c)f'(c)}{2}$$

이므로, 구간 $(c-\delta, c+\delta)$에서

$$f(x)f'(x) > \frac{f(c)f'(c)}{2} > 0$$

이게 된다. 따라서 이 구간에서는 $f(x)^2$이 increasing이니, $a = c-\delta, b = c+\delta$를 주면 된다.

(2) 이 구간에서 $f(x)^2$는 증가함수이다. 또한, $\sqrt{x}$도 증가함수이므로, $|f(x)|$도 증가함수인 것이다. 또한 $|f(x)|$는 양수이므로,

$$\int_a^b |f(a)|dx \le \int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b |f(b)|dx$$

이다. 따라서,

$$(b-a)|f(a)| \le \int_a^b |f(x)|dx \le (b-a)|f(b)|$$

(3) 적분의 코시-슈바르츠 부등식을 알고 있다고 가정하자. 그러면

$$[f(b)^2 - f(a)^2] = \int_a^b 2f(x)f'(x)dx \le \int_a^b f(x)^2dx \int_a^b 4f'(x)^2dx$$

을 간단히 얻을 수 있다.

문제 350. *implicit function $x^3 + y^3 = 1$을 생각하자.*
1) 모든 critical point의 x좌표와 y좌표를 찾아라.
2) y의 absolute maximum과 absolute minimum을 구하여라.

1) 양변을 미분하면 $3x^2 + 3y^2y' = 0$을 얻으므로, $y' = -\frac{x^2}{y^2}$이다. 따라서 $y = 0$일 때 y'이 존재하지 않고, $x = 0$일 때 $y' = 0$이므로 $(1, 0)$과 $(0, 1)$이 원하는 두 점이다.

2) $x = \sqrt[3]{1-n^3}$이라 두면 $y = n$이다. 자연수의 무한함에 의하여 absolute maximum은 없다. 반대로, $x = \sqrt[3]{1+n^3}$이라 두면 $y = -n$이고, 자연수의 무한함에 의하여 absolute minimum은 없다.

문제 351. *함수 f는 $x \to \infty$임에 따라 slant asymptote를 가진다고 한다. 함수 $g(x)$가 $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = L \neq 0$ 이라면, $\frac{f(x)}{g(x)}$는 horizontal asymptote를 가짐을 보여라.*

만약 f가 slant asymptote를 가진다면, 어떤 $y = mx + b$에 대하여

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - mx - b = 0$$

이어야 하므로

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{mx + b + (f(x) - mx - b)}{x} = m$$

을 얻는다. 따라서,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{g(x)}{x}} = \frac{m}{L}$$

을 얻게 되므로 이 함수는 horizontal asymptote를 가진다.

문제 352. *만약 f와 g가 differentiable이고 f와 g가 concave upward인 열린 구간 I가 존재한다면, 이 I에서 함수 $f+g$도 concave upward임을 보여라.*

$a \in I$에 대하여, concave upward의 정의에 의하여 모든 $x \in I$에 대해

$$f(x) \geq f'(a)(x-a)+f(a)$$

$$g(x) \geq g'(a)(x-a)+g(a)$$

이다. 둘을 더하면,

$$(f+g)(x) \geq (f+g)'(a)(x-a)+(f+g)(a)$$

를 얻고 우리는 $f+g$ 역시도 concave upward임을 얻는다.

문제 353. *$x^2+xy+y^2=1$의 그래프를 생각하자.*

1) $\dfrac{dy}{dx}$를 x, y로 표현하라.

2) 그래프의 접선이 horizontal한 모든 점을 찾아라.

3) 접선이 $y=-x$와 나란한 모든 점을 찾아라.

1) 양변을 x로 미분하면

$$2x+xy'+y+2yy'=0$$

을 얻고, 정리해주면

$$y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+y}{x+2y}$$

2) $y'=0$인 모든 점을 찾자. $y=-2x$와 $x^2+xy+y^2=1$을 연립하면 $3x^2=1$을 얻고, 이로써

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

이라는 두 점을 얻는다.

3) $y'=-1$인 모든 점을 찾아주려면 $y=x$인 점을 찾아주어야 한다. 따라서 동일하게 $3x^2=1$을 얻는데, 여기선 $y=x$이므로

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

이라는 두 점을 얻는다.

문제 354. *함수 f는 $x=a$를 포함한 구간에서 정의되는 함수이다. 또한,*

$$f(a+h)=f(a)+Lh+\epsilon(h)h$$

인 관계를 만족시키는 수 L과 continuous function ϵ이 존재한다고 하자. 이때, $\epsilon(0)=0$이다. f가 $x=a$에서 differentiable임을 보여라.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=L+\epsilon(h)$$

가 성립한다. 그러면, ϵ이 continuous function임을 고려할 때

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}L+\epsilon(h)=L+\epsilon(0)=L$$

이 성립한다. 따라서 f는 $x=a$에서 differentiable이고, $f'(a)=L$이다.

문제 355. *만약 quadratic function $g(x)$가 함수 $f(x)$에 대하여*

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to-\infty}[f(x)-g(x)] = 0$$

을 만족시킨다면, f의 parabolic asymptote라 불린다.
$f(x) = \dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x-1}$이 parabolic asymptote를 가진다. 그 식을 구하여라. 단, $a \neq 0$이다.

parabolic asymptote를 $g(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$이라고 두자. 그러면

$$f(x)-g(x) = \frac{(a-a_2)x^3 + (b-a_1+a_2)x^2 + (c-a_0+a_1)x + d - a_0}{x-1}$$

이 $x \to \pm\infty$일 때 0으로 수렴해야 한다. 그러면,

$$\lim_{x\to\infty} f(x)-g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(a-a_2)x^2 + (b-a_1+a_2)x + (c-a_0+a_1)x + \frac{d-a_0}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 0$$

이어야 하므로

$$a_2 = a, \quad a_1 = a+b, \quad a_0 = a+b+c$$

이 된다. 따라서 원하는 식은

$$g(x) = ax^2 + (a+b)x + (a+b+c)$$

이다.

문제 356. *주어진 곡선과 서로 다른 두 접점에서만 만나는 접선의 방정식을 각각 구하시오.*
1) $y = x^4 - 8x^2 + 12x$
2) $y = x^5 - 15x^3 + 10x^2$

1) $(t, t^4 - 8t^2 + 12t)$에서의 접선의 방정식은

$$y = (4t^3 - 16t + 12)(x-t) + t^4 - 8t^2 + 12t$$

이다. 접점이 각각 $x = t$와 $x = s$에서 생긴다고 하면, 그 방정식이 같아야 하므로

$$4t^3 - 16t + 12 = 4s^3 - 16s + 12$$

$$-3t^4 + 8t^2 = -3s^4 + 8s^2$$

를 얻는다. 각각을 정리하면

$$(t-s)(t^2+ts+s^2) = 4(t-s)$$

$$3(t^2-s^2))(t^2+s^2) = 8(t^2-s^2)$$

을 얻는다. $t \neq s$가 주어져 있으므로, 윗 식을 정리하면 $t^2+ts+s^2 = 4$를 얻는다. 아래 식에서는 $t^2-s^2 = 0$ 혹은 $t^2+s^2 = \frac{3}{8}$을 얻는데, 둘째 경우의 경우

$$4 = t^2+ts+s^2 \le 2(t^2+s^2) = \frac{3}{4}$$

로 모순이기에 $t = -s$이면서 $t^2+ts+s^2 = s^2 = 4$가 된다. 따라서, $(t,s) = (2,-2)$와 $(t,s) = (-2,2)$가 원하는 상황이다. 이때의 접선의 방정식은 $y = 12x - 16$이다.

2) $y = x^5 - 15x^3 + 10x^2$과 두 접접에서만 만나는 접선의 방정식이 $y = ax + b$라면,

$$x^5 - 15x^3 + 10x^2 - ax - b = (x-p)^3(x-q)^2$$

꼴이 되어 주어야만 한다.

$$(x-p)^3(x-q)^2 = x^5+(-3p-2q)x^4+(q^2+3p^2+6pq)x^3+(-p^3+3pq^2-6p^2q)x^2+(3p^2q^2-2qp^3)x-p^3q^2$$

이므로 $-3p-2q=0$이고, $q^2+3p^2+6pq=-15$이다. 연립하면 $p=2, q=-3$에서 이것이 만족됨을 알 수 있다. 이 경우에 $a=-60, b=72$를 얻고, 접선의 방정식은 $y=-60x+72$가 된다.

문제 357. *반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 삼각형 ABC에 대하여, $\overline{AB}=3\overline{AC}$이다. $\angle BAC=\theta$라 할 때, 아래 물음에 답하시오. 단, $\frac{5\pi}{12}<\theta<\pi$이다.*

1) 삼각형 ABC의 넓이를 θ에 대한 식으로 나타내시오.

2) 삼각형 ABC의 넓이가 최대가 되는 θ의 값을 α라 할 때, $\cos\alpha$의 값을 구하시오. 단, $\cos\frac{5\pi}{12}>\frac{1}{4}$이다.

1) 사인법칙에 의하여 $\overline{BC}=2\sin\theta$이고, $\overline{AC}=a$라 하면 제2코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}=\sqrt{10a^2-6a^2\cos\theta}$$

이므로, 둘을 비교하면 $a^2=\dfrac{2\sin^2\theta}{5-3\cos\theta}$를 얻는다. 삼각형 ABC의 넓이를 $S(\theta)$라 하면,

$$S(\theta)=\frac{3}{2}a^2\sin\theta=\frac{3\sin^3\theta}{5-3\cos\theta}$$

2)

$$S'(\theta)=\frac{-9\sin^2\theta(2\cos^2\theta-5\cos\theta+1)}{(5-3\cos\theta)^2}=0$$

이려면 $\sin\theta=0$ 혹은 $\cos\theta=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{4}$여야 하는데, θ의 범위에 의하여

$$\cos\theta=\frac{5-\sqrt{17}}{4}$$

만이 가능하다. 이때의 θ를 θ_0이라 한다면, $\frac{5\pi}{12}<\theta<\theta_0$ 일 때 $\frac{5-\sqrt{17}}{4}<\cos\theta<\cos\frac{5\pi}{12}$이므로 $S'(\theta)>0$이고 $\theta_0<\theta<\pi$일 때 $-1<\cos\theta<\frac{5-\sqrt{17}}{4}$이므로 $S'(\theta)<0$이다. 따라서 $S(\theta)$는 $\theta=\theta_0$일 때 최댓값을 가진다. 따라서 구하는 $\cos\alpha$의 값은 $\frac{5-\sqrt{17}}{4}$이다.

문제 358. *한 변의 길이가 $\frac{\pi}{2}$인 정사각형 $ABCD$에 대하여, 선분 AB 위를 움직이는 점 P가 있다. 점 P는 점 A에서 출발하여 점 B 방향으로 초당 1의 속도로 움직인다. 시각 t초에서 $\angle QPB=t$가 되는 점 Q가 선분 BC 위에 있다. 점 Q를 지나고 선분 PQ에 수직인 직선이 정사각형 $ABCD$의 변과 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 R이라 하자. $t=\frac{5\pi}{12}$일 때, 삼각형 PQR의 넓이의 시각 t에 대한 변화율을 구하시오. 단, $0<t<\frac{\pi}{2}$이며 $\tan\frac{5\pi}{12}=2+\sqrt{3}$이다.*

$\overline{PB}=\frac{\pi}{2}-t, \overline{QB}=\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\tan t, \overline{PQ}=\dfrac{\frac{\pi}{2}-t}{\cos t}, \overline{CQ}=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\tan t, \angle RQC=t$이므로 $\overline{CQ}\tan t<\frac{\pi}{2}$이면 점 R은 변 CD 위에, $\overline{CQ}\tan t=\frac{\pi}{2}$라면 점 R은 점 D에, $\overline{CQ}\tan t>\frac{\pi}{2}$이면 점 R은 변 DA 위에 있다. $t=\frac{5\pi}{12}$일 때는 대입을 해보면 점 R은 DA 위에 있음을 안다. 점 R을 지나고 변 CD에 평행한 직선이 변 BC와 만나는 점을 T라 하자.

$\angle RQT=t, \overline{RT}=\frac{\pi}{2}$이므로 $\overline{RQ}=\dfrac{\frac{\pi}{2}}{\sin t}$이다. 점 R이 변 DA 위에 있을 때 삼각형 PQR의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}-t}{\cos t}\times\frac{\frac{\pi}{2}}{\sin t}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\csc(2t)$$

이고, R이 A나 D가 아닐 때

$$S'(t)=-\frac{\pi}{2}\csc(2t)-\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\csc(2t)\cot(2t)\times 2$$

이며, $t = \frac{5\pi}{12}$를 여기 대입해준다면

$$S'\left(\frac{5\pi}{12}\right) = -\pi + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi^2$$

을 얻는다.

문제 359. *$x \geq 1$이고 n이 자연수일 때, 다음 부등식이 성립함을 증명하여라.*

$$\frac{1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}}{n+1} \geq \frac{x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{2n-1}}{n}$$

$$f(x) = \frac{1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}}{n+1}$$

$$g(x) = \frac{x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{2n-1}}{n}$$

이라고 하자. 그러면 $x = 1$일 때 $f(1) = g(1) = 1$이고, $x > 1$일 때

$$f(x) = \frac{x^{2n+2} - 1}{(n+1)(x^2 - 1)}$$

$$g(x) = \frac{x^{2n+1} - x}{n(x^2 - 1)}$$

이다.

$$f(x) - g(x) = \frac{n(x^{2n+2} - 1) - (n+!)(x^{2n+1} - x)}{n(n+1)(x^2 - 1)}$$

이고, 분자 부분을 $h(x)$라고 하면

$$h(1) = 0$$

$$h'(x) = n(2n+2)x^{2n+1} - (n+1)(2n+1)x^{2n} - (n+1) = (2n^2 + 2n)(x^{2n+1} - x^{2n}) + (n+1)(x^{2n} - 1) > 0$$

이므로 $x > 1$일 때 $h(x) > 0$이다. 그러므로 $x \geq 1$일 때 $f(x) \geq g(x)$이다.

문제 360. *다음을 만족하는 연속함수 $f(x), g(x)$에 대하여 물음에 답하시오. 단, $g(0) \neq 0$이다.*

> *1)* $f(x - y) = f(x)g(y) - g(x)f(y)$
> *2)* $g(x - y) = g(x)g(y) - f(x)f(y)$
> *3)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

(1) $f(x)$는 odd, $g(x)$는 even임을 보이고 $g(x)^2 - f(x)^2$의 값을 구하시오.

(2) $g(x)$가 differentiable임을 보이고 $g'(x)$를 $f(x)$에 대한 식으로 표현하시오.

(1) $f(0) = f(0)g(0) - g(0)f(0) = 0$이고 $g(0) \neq 0$이면서 $g(0) = g(0)^2 - f(0)^2 = g(0)^2$이므로 $g(0) = 1$이 성립한다. 따라서

$$f(-x) = f(0 - x) = f(0)g(x) - g(0)f(x) = -f(x)$$

$$g(-x) = g(0 - x) = g(0)g(x) - f(0)f(x) = g(x)$$

이고, $1 = g(x - x) = g(x)^2 - f(x)^2$이다.

(2)

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)g(-h)-f(x)f(-h)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)(g(h)-1)+f(x)f(h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)}{g(h)+1} \cdot \frac{f(h)}{h} \cdot f(h) + f(x)\frac{f(h)}{h} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

이고, $g'(x) = f(x)$를 얻는다.

문제 361. *윗면의 반지름 길이가 2m, 아랫면의 반지름 길이가 1m, 높이가 4m인 원뿔대 모양의 그릇이 있다. 이 그릇에 초당 1세제곱미터의 물을 붓는다. 밑면으로부터 물 표면까지의 높이가 2m일 때, 시간에 대한 물 표면의 넓이의 변화율을 구하시오.*

그릇 밑면에서 물 표면까지의 높이를 h, 물 표면의 반지름 길이를 r, 물 표면의 넓이를 S, 물의 부피를 V라 하면 아래가 성립한다.

$$\frac{dV}{dt} = 1, \quad S = \pi r^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2(h+4) - \frac{4}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi(r^3-1)$$

그렇다면,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dr} \cdot \frac{dr}{dV} \cdot \frac{dV}{dt} = 2\pi r \cdot \frac{1}{4\pi r^2} \cdot 1 = \frac{1}{2r}$$

이 되므로, $h = 2$이면 $r = \frac{3}{2}$이기에 넓이의 변화율은 $\frac{1}{3}$이다.

문제 362. *실수 전체에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.*

> *가)* $f(0) = 0, f'(0) = 1$
> *나)* 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x)f(y) \neq -1$
> *다)* 모든 실수 x, y에 대하여
> $$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$$

1) 모든 실수 x에 대해 $|f(x)| < 1$임을 보이시오.
2) 구간 $(0, \infty)$에서 $y = f(x)$의 그래프가 concave downward임을 보이시오.

1) 어떤 실수 a에 대하여 $f(a) = 1$이라면

$$f(0) = f(a-a) = \frac{f(a)+f(-a)}{1+f(a)f(-a)} = 1$$

이 되어 모순이다. 마찬가지로 $f(a) = -1$이라면 $f(0) = -1$이 되어 모순이다. 따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \neq \pm 1$이다. 만약 $|f(a)| > 1$인 a가 존재한다면, $f(0) = \dfrac{2f(0)}{1-f(0)^2}$으로부터 $f(0) = 0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 연속함수 f는 $|f(c)| = 1$인 0과 a 사이의 c를 가지는데, 이는 모순이다. 따라서 모든 실수 x에 대하여 $|f(x)| < 1$이다.

2)

$$f'(x) = \lim_{h\to\infty} \frac{f(h)}{h} \cdot \frac{1-f(x)^2}{1+f(x)f(h)} = 1 - f(x)^2$$

이다. $f'(x) > 0$이므로 $f(x)$는 증가함수이고 $f(0) = 0$이므로 $x > 0$일 때 $f(x) > 0$이다. 또한

$$f''(x) = -2f(x)f'(x) < 0$$

을 얻으므로, $y = f(x)$는 $(0, \infty)$에서 concave downward이다.

문제 363. *1) 두 다항함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$가 $x = p$에서 공통접선을 가질 때, $h(x) = f(x) - g(x)$는 2 이상의 어떤 자연수 n에 대해 $(x-p)^n$를 인수로 가짐을 보이시오.*
2) 두 곡선 $y = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x$, $y = ax^2 + b$가 두 점에서 접할 때, 두 실수 a, b의 값을 구하시오.

1) $x = p$에서 공통접선을 가지므로 $f(p) = g(p)$가 되어 $h(p) = 0$이다. 따라서 $h(x) = (x-p)Q(x)$와 같이 표현될 수 있다. 이때 $h'(x) = Q(x) + (x-p)Q'(x)$이고, $f'(p) = g'(p)$여야 하므로 $h'(p) = 0$이다. 따라서, $Q(x) = (x-p)Q_1(x)$와 같이 표현된다. 따라서

$$h(x) = (x-p)Q(x) = (x-p)^2 Q_1(x)$$

가 되어 $h(x)$는 $(x-p)^n$을 인수로 가진다.
2) 두 접점의 x좌표를 p, q라고 하면 1)에 의하여

$$h(x) = (x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x) - (ax^2 + b) = (x-p)^2(x-q)^2$$

으로 표현될 수 있게 된다. 양변을 정리하여 계수를 비교하면

$$-2p - 2q = -2, p^2 + 4pq + q^2 = -4 - a, -2pq(p+q) = 4, p^2q^2 = -b$$

이므로 $p + q = 1, pq = -2$로부터 $a = -1, b = -4$를 얻는다.

문제 364. *$f : [0,2] \to [0,2]$인 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[0,2]$에서 연속이고 열린 구간 $(0,2)$에서 미분가능하다.*
$f(0) = \frac{1}{3}, f(1) = \frac{2}{3}, f(2) = 2$일 때, $g(x) = f(f(x))$에 대하여 $g'(c) = 1$이 되는 c가 $(0,2)$에 존재함을 보이시오.

$h(x) = f(x) - x$를 생각하면 $h(x)$는 닫힌 구간 $[0,2]$에서 연속이고, $h(0) = \frac{1}{3} > 0$, $h(1) = -\frac{1}{[}3] < 0$ 이므로 IVT에 의하여 $h(a) = 0$인 $a \in (0,1)$이 존재한다. 이제 $f(a) = a$이므로,

$$g(a) = f(f(a)) = f(a) = a$$

$$g(2) = f(f(2)) = f(2) = 2$$

가 성립한다. 따라서 미분가능함수 f의 합성인 g도 differentiable임을 감안하면 MVT에 의하여

$$\frac{g(2) - g(a)}{2 - a} = \frac{2 - a}{2 - a} = 1 = g'(c)$$

인 $c \in (a, 2) \subset (0, 2)$가 존재한다.

문제 365. *변 AD와 변 BC가 평행한 사다리꼴 $ABCD$에서 $\overline{AB} = 1$, $\overline{BC} = 2$, $\overline{CD} + \overline{AD} = 2$를 만족하고, $\angle B = \theta$라고 할 때, $\angle B$가 매초 3씩 일정하게 증가한다. $\overline{AD} = \frac{1}{2}$일 때의 사다리꼴 넓이의 변화율을 구하시오.*

점 B를 원점으로 하고 직선 BC를 x축으로 하는 좌표를 생각한다면 점 A의 좌표는 $(\cos\theta, \sin\theta)$이다. 이때 $\overline{AD} = a$라 둔다면 D의 좌표는 $(\cos\theta + a, \sin\theta)$이고 $\overline{CD} = 2 - a$이다. 점 D에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하면 삼각형 CHD는 직각삼각형이므로,

$$(\cos\theta + a - 2)^2 + \sin^2\theta = (2 - a)^2$$

이고 식을 정리하면 $a = 2 - \dfrac{1}{2\cos\theta}$이다. $a = \frac{1}{2}$일 때라면 $\cos\theta = \frac{1}{3}$이고, 넓이 S는

$$S = \frac{1}{2}(2+a)\sin\theta = 2\sin\theta - \frac{1}{4}\tan\theta$$

이고

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{d\theta}\left(2\sin\theta - \frac{1}{4}\tan\theta\right)\frac{d\theta}{dt} = \left(2\cos\theta - \frac{1}{4}\sec^2\theta\right) \times 3$$

이므로, $\overline{AD} = \frac{1}{2}$일 때는

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{19}{4}$$

를 얻는다.

문제 366. *점 P에서 곡선 $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ $(x > 0)$에 그은 두 개의 접선이 서로 수직이라고 한다. 점 P의 자취의 길이를 구하시오.*

$y = x + \frac{1}{x}$이고 $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$이다. 곡선과 접선이 $x = t$에서 접한다고 하면 접선의 방정식은

$$y = \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)(x-t) + \left(t + \frac{1}{t}\right)$$

이다. $P(\alpha, \beta)$라 두면 식을 정리해 얻은

$$\beta = \alpha - \frac{\alpha}{t^2} + \frac{2}{t}$$

에서, $(\alpha-\beta)t^2 + 2t - \alpha = 0$이다. 그런데 이 방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로,

$$D/4 = 1 + \alpha(\alpha - \beta) > 0$$

에서 $\beta < \alpha + \frac{1}{\alpha}$이다. 또한, 두 접선이 서로 수직이므로

$$\left(1 - \frac{1}{x_1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{x_2^2}\right) = -1$$

이고, $x_1 + x_2 = \frac{2}{\beta-\alpha}$, $x_1x_2 = \frac{\alpha}{\beta-\alpha}$이므로

$$0 = 2x_1^2x_2^2 - (x_1^2 + x_2^2) + 1 = 2\left(\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2 - \left\{\left(\frac{2}{\beta-\alpha}\right)^2 - \frac{2\alpha}{\beta-\alpha}\right\} + 1 = \frac{\alpha^2+\beta^2-4}{(\beta-\alpha)^2} = 0$$

을 얻는다. 따라서 $\alpha^2 + \beta^2 = 4$이다. 그런데 $x > 0$에서 정의되었으므로 두 근은 항상 양수여야 하므로, $\beta > \alpha, \alpha > 0$이 보장되어야 한다. 따라서 구하는 자취는 반지름이 2인 원에서, 1/8만 해당하므로 길이는 $\frac{\pi}{2}$이다.

문제 367. *최고차항의 계수가 양수인 다항함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 법선의 x절편을 $g(t)$라 할 때, 함수 $f(x)$, $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.*

1) $\lim_{t\to\infty} \dfrac{g(t) - 3t^5}{t^5} = 0$
2) 방정식 $g(t) = t$는 서로 다른 세 실근을 가지고, 다항식 $g(t) - t$는 $(t-1)^3$으로 나누어 떨어진다.
3) 점 $(1,1)$에서 곡선 $y = f(x)$에 그은 접선은 두 개 존재한다.

이때, 함수 $f(x)$를 구하시오.

$f(x)$는 다항함수이므로 수직접선은 존재하지 않는다. $f'(t) \neq 0$일 때, 점 $(t, f(t))$에서 법선의 방정식은

$$y - f(t) = -\frac{1}{f'(t)}(x - t)$$

이므로 법선의 x절편은 $f(t)f'(t)+t$이다. $f'(t)=0$일 때에도 접선은 $y=f(t)$이므로 법선은 $x=t$이고, 항상

$$g(t)=f(t)f'(t)+t$$

임을 얻는다. 따라서 $g(t)$도 최고차항의 계수가 양수인 다항함수가 되는데, 1) 조건에 의하여 최고차항이 $3t^5$임을 알 수 있다. 그럼 $f(x)$의 최고차항을 a_nx^n이라 했을 때, $g(t)$의 최고차항 $n(a_n)^2t^{2n-1}$이 $3t^5$인 것이니 $f(x)$의 최고차항은 t^3이 됨을 알 수 있다.

$g(t)=t$라는 것은 $f(t)=0$ 혹은 $f'(t)=0$이라는 것이므로, 이것이 만족되는 t가 세 개여야 한다. $f(t)=0$인 t가 3개라면 $f'(t)=0$인 t도 존재해 총 3개가 될 수 없으므로 모순이다. $f(t)=0$인 t가 2개라면, 그래프 개형상 $f'(t)=0$인 t가 2개이지만 한 t에서는 접하므로 문제가 없다. $f(t)=0$인 t가 1개라면, $f'(t)=0$인 t가 2개여야 하므로 극대와 극소가 있다. 마지막으로, f는 삼차함수이므로 $f(t)=0$의 근이 없을 수는 없다. 따라서 모든 경우 $f'(t)$는 서로 다른 두 실근을 가지는 이차함수이다.

$g(t)-t$는 $(t-1)^3$으로 나누어지므로 $t=1$은 $g(t)=t$의 삼중근이고, $f(t)f'(t)$가 $t=1$을 삼중근으로 가지게 된다. $f(t)$가 $(t-1)^3$을 인수로 가진다면 $t=1$만이 유일한 근이 되므로 모순이고, $f'(t)$는 중근을 가질 수 없으니 $f(t)$가 $(t-1)^2$을 인수로, $f'(t)$가 $t-1$을 인수로 가진다는 것을 알 수 있다. 따라서 1이 아닌 실수 α에 대하여

$$f(x)=(x-1)^2(x-\alpha)$$

이게 되고,

$$f'(x)=(x-1)(3x-2\alpha-1)$$

이다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(s,f(s))$에서의 접선은

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

인데, 여기에 $(1,1)$을 대입할 때의 근 t가 두 개 있어야 한다. 즉,

$$1-(t-1)^2(t-\alpha)=(t-1)(3t-2\alpha-1)(1-t)$$

로부터

$$1=-(t-1)^2(2t-\alpha-1)$$

을 얻는다. 즉 곡선 $y=-(t-1)^2(2t-\alpha-1)$과 $y=1$의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로, 이 삼차함수는 극댓값 1을 가져야 한다.

$$y'=-(t-1)(6t-2\alpha-4)$$

에서 $t=\frac{\alpha+2}{3}$일 때 극댓값임을 알 수 있고, 대입하면

$$1=-\left(\frac{\alpha-1}{3}\right)^2\left(\frac{-\alpha+1}{3}\right)=\left(\frac{\alpha-1}{3}\right)^3$$

이니 $\alpha=4$이고 $f(x)=(x-1)^2(x-4)$이다.

문제 368. *함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하고 $f(2)=1$, $f'(2)=-1$일 때, 다음 식의 값을 구하시오. 단, $8f(x)-x^3f(2)\neq 0$이다.*

$$\lim_{x\to 2}\frac{xf(x)-2f(2)}{8f(x)-x^3f(2)}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\frac{xf(x)-2f(2)}{8f(x)-x^3f(2)} &= \lim_{x\to 2}\frac{xf(x)-2f(2)}{x-2}\cdot\left(\frac{\frac{f(x)}{x^3}-\frac{f(2)^3}{8}}{x-2}\cdot 8x^3\right)^{-1} \\
&= (f(2)+2f'(2))\cdot\left(\frac{2^3\cdot f'(2)-3\cdot 2^2\cdot f(2)}{2^6}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{64} \quad (f:\text{differentiable}) \\
&= -1\cdot\frac{64}{-20}\cdot\frac{1}{64} \\
&= \frac{1}{20}
\end{aligned}$$

문제 369. *continuous function f에 대하여, $g(x)=|f(x)|$도 continuous임을 보여라.*

엡실론 델타로 보여주세요. 생략합니다.

문제 370. *continuous function f에 대하여, 함수 $g(x)=f(x)^2$도 continuous임을 보여라.*

엡실론 델타로 보여주세요. 생략합니다.

문제 371. *continuous funtion f와 g에 대하여, 함수 $h(x)=f(x)+g(x)$도 continuous임을 보여라.*

엡실론 델타로 보여주세요. 생략합니다.

문제 372. *continuous function f와 g에 대하여, $h(x)=g(x)f(x)$도 continuous임을 보여라.*

limit law로 보이셔도 되고, 엡실론 델타로 보이셔도 되는데 엡실론 델타는 조금 더 어려울 것 같긴 하네요. 생략합니다.

문제 373. *continuous function f에 대하여, 모든 x에서 $f(x)\neq 0$이라고 한다. 그러면 $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$도 continuous임을 보여라.*

limit law로 보이셔도 되고, 엡실론 델타로 보이셔도 되는데 엡실론 델타는 조금 더 어려울 것 같긴 하네요. 생략합니다.

문제 374. *함수 f와 g가 모두 continuous라면,*

$$\max\{f(x),g(x)\},\quad \min\{f(x),g(x)\}$$

는 모두 continuous임을 보여라.

엡실론 델타로 잘 보여주셔야 할 것 같네요. 참고로 하나만 보이면 나머지 하나는 $f+g$에서 다른 하나를 뺌으로써 쉽게 보여줄 수 있습니다. 힌트를 드리면, $f-g$도 연속함수이기 때문에, $f-g$가 양수인 부분에서 적절한 δ에 대해 양쪽으로 δ씩은 간다고 해도 걔는 여전히 양수일 겁니다. 이 δ를 잘 활용해 보세요!

문제 375. *함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$와 임의의 양수 $\epsilon>0$에 대하여,*

$$x,y\in\mathbb{R}, |x-y|<\delta \quad\Rightarrow\quad |f(x)-f(y)|<\epsilon$$

을 만족하는 것과 continuous인 것은 동치인가? 그렇다면 증명하고, 아니라면 어떤 관계가 있는지 이야기하시오.

답만 이야기드리겠습니다. 저걸 만족하면 continuous는 당연히 성립하지만, continuous라고 해서 저게 성립하는 건 아닙니다. 대표적으로 $f(x)=x^2$이 저걸 만족시키지 못합니다.

문제 376. *함수 $F : [a,b] \to \mathbb{R}$가 미분가능하고 $F'(a) < \alpha < F'(b)$이면,*

$$F'(c) = \alpha$$

인 $c \in (a,b)$가 존재함을 보여라.

정확한 답은 생략하나, 힌트가 거의 답입니다. 여기서 이제 ?VT를 사용해 보세요. 어떤 VT일까요 ?
Hint : $G(x) = F(x) - \alpha x$을 생각하자.

문제 377. *수학적 귀납법을 이용하여, 다음 등식*

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

을 보여라.

수학적 귀납법은 수2때 다들 배우셨을 거라 믿어 의심치 않습니다. 생략합니다.

문제 378. *구간에서 정의된 함수 f와 구간의 점 c에 대하여, 다음 성질*

$$0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(c)| < M|x - c|^{\alpha}$$

를 만족하는 양수 $\delta > 0$, $M > 0, \alpha > 0$이 존재하면, 함수 f가 점 c에서 연속임을 보여라.

임의의 $\epsilon > 0$이 주어졌을 때, $\eta = \min\{\sqrt[\alpha]{\epsilon/M}, \delta\}$으로 두면 $\eta \le \delta$이므로 주어진 조건에 의해 $0 < |x-c| < \eta$일 때

$$\begin{aligned} |f(x) - f(c)| &< M|x - c|^{\alpha} \\ &= M\eta^{\alpha} \\ &\le \epsilon \end{aligned}$$

이 성립하게 되므로, f는 c에서 연속이다.

문제 379. *함수 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$이 미분가능하다고 하자. $m < f'(x) < M$인 m, M을 항상 찾을 수 있는가?*

정확한 답은 생략하나, 못 찾습니다. 아래 함수를 생각해보십시오.
Hint :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & x \ne 0 \\ 0 \quad x = 0 \end{cases}$$

문제 380. *함수 $f : (a,b) \to \mathbb{R}$가 연속이고, 임의의 점 $x \in (a,b) - \{c\}$에서 미분가능하다고 하자. 단, $a < c < b$이다. 만일 극한값 $\lim_{x\to c} f'(x)$가 존재한다면, 함수 f가 c에서 미분가능하고, $f'(c)$가 바로 그 극한값임을 증명하여라.*

충분히 작은 양수 $\delta > 0$에 대하여, $0 < h \le \delta$이면 닫힌 구간 $[c-h, c+h]$가 닫힌 구간 $[a,b]$에 포함되게 할 수 있다. 이때, $[c, c+h]$에서 f가 continuous이고 $(c, c+h)$에서 differentiable이므로 MVT에 의해 어떤 $z \in (c, c+h)$가 있어

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(z)$$

를 만족한다. 이때, $h \to 0^+$이므로 $z \to c^+$이므로,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{z \to c^+} f'(z)$$

으로 존재한다. 동일하게 $(c-h, c)$에서 MVT를 수행하더라도 같은 결과를 얻는다. 따라서,

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(c+t)-f(c)}{t}$$

가 존재하며 이 값 $f'(c)$는 $\lim_{x\to c} f'(x)$와 같다.

문제 381. *함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 주어져 있고, 두 함수 $2^x f(x)$와 $2^{-f(x)}$가 decreasing이라고 한다. $f(0)=-1$일 때, $f(2)$를 구하여라.*

함수 $2^{-f(x)}$가 decreasing인데, 2^{-x}가 decreasing이므로 $f(x)$는 increasing이어야 한다. 반면 2^x는 increasing이므로 $x<y$이면

$$2^x f(x) < 2^y f(x) \le 2^y f(y)$$

이게 되니 $2^x f(x)$는 increasing이다. 그러나 이는 decreasing임이 알려져 있으므로, $2^x f(x)$는 constant이다. 따라서 $f(x)=C2^{-x}$ 꼴이고, $f(0)=1$이니 $C=-1$이다. 따라서, $f(2)=-\frac{1}{2}$이다.

문제 382. *$|f|$가 적분가능하지만 f가 적분불가능한 예시를 들어라.*

아래 힌트를 참조하세요. f가 적분불가능함을 보이는 게 조금 힘들 수도 있긴 한데요. 리만적분가능하려면 어떤 x_i^*를 선택해도 극한값이 같아야 한다는 사실을 이용해 주세요. 구간에서 계속 저것들을 유리수로 선택할 때와 무리수로 선택할 때 극한값이 분명히 다를 겁니다! 자세한 과정은 생략합니다.

Hint :

$$f(x)=\begin{cases} x=1 & x\in\mathbb{Q} \\ x=-1 & x\in\mathbb{Q}^c\end{cases}$$

문제 383. *함수 $f(x)$와 $g(x)$를 각각*

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x<0) \\ 1 & (x\ge 0)\end{cases}\quad,\quad g(x)=\begin{cases} x & (x\neq 0) \\ 1 & (x=0)\end{cases}$$

이라고 하자. 이때, $F(x)=\int_{-1}^x f(t)dt, G(x)=\int_{-1}^x g(t)dt$를 정의하자. F,G가 differentiable한 점은 어디인가?

$x\neq 0$일 때 함수 f,g는 continuous이므로, FTC에 의해 F,G는 $x\neq 0$에서 differentiable이다. 이제, $x=0$일 때만 보면 된다. F에 대해서는,

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{F(h)-F(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{F(h)-F(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{0}{h}=0$$

이므로 F는 $x\neq 0$에서만 differentiable이다. 반면

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{G(h)-G(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{G(h)-G(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{2}=0$$

이므로 G는 $x=0$에서도 differentiable이다. 따라서 $x\in\mathbb{R}$에서 differentiable이다.

문제 384. *$f(x+y)=f(x)+f(y)$일 때, f가 $x=0$에서 continuous라고 한다. f가 continuous function임을 보여라.*

f가 $x=0$에서 continuous이다. 그러면 $f(0+0)=f(0)+f(0)$으로부터 $f(0)=0$을 얻고,

$$\lim_{h\to 0} f(h)=f(0)=0$$

이다. 그러면

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a) + \lim_{h\to 0} f(h) = f(a)$$

이니, $f(x)$는 continuous이다.

문제 385.

$$\lim_{x\to\infty}\{x - f(x)\} = 2$$

일 때,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{f(x)}}{\sqrt{x} - \sqrt{f(x)}}$$

을 구하여라.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{f(x)}{x}\right) = 0$$

이므로, $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$이다. 따라서,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{f(x)}}{\sqrt{x} - \sqrt{f(x)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x - f(x) + 1}{x - f(x)} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{f(x)}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{f(x)}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{2} = \frac{3}{2}$$

문제 386. *함수 $f(x)$는 3차함수이다.*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x(x-1)} = 1, \quad \lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x(x-1)} = 0$$

일 때, $f(x)$를 구하여라.

극한값이 모두 존재해야 하므로,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = 0$$

이다. 그런데 f는 다항함수이니 연속함수이기에, $f(0) = f(1) = 0$이다. 따라서 $f(x) = ax(x-1)(x-b)$꼴로 둘 수 있고,

$$\lim_{x\to 1} \frac{ax(x-1)(x-b)}{x(x-1)} = a(1-b) = 0$$

이며 $a \neq 0$이니 $b = 1$이다. 또한,

$$\lim_{x\to 0} \frac{ax(x-1)(x-1)}{x(x-1)} = -a = 1$$

으로부터 $a = -1$이다. 따라서 원하는 polynomial은 $f(x) = -x(x-1)^2$이다.

문제 387.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+|x|} = 1$$

임을 보여라.

이건 진짜 안해도 되는거죠?? 엡실론 델타 사용하세요. 생략합니다.

문제 388.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}$$

을 구하여라.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})} \\
&= \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}} \\
&= 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

문제 389. *함수 f에 대하여, $f''(x)$가 $[a,b]$에서 존재한다고 한다. 그렇다면,*

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{1}{2}f''(c)(b-a)^2$$

인 $c\in(a,b)$가 존재함을 보여라.

수 k를

$$f'(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{k}{2}(b-a)^2$$

을 만족시키는 k라고 하자. 그러면 함수 $T(x)$를

$$T(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{k}{2}(x-a)^2$$

이라고 정의하면, T는 differentiable이다. 그러면 $T(a)=f(a), T(b)=f(b)$이므로 어떤 $c_1\in[a,b]$에 대해 $T'(c_1)=f'(c_1)$이다. 그리고 $T'(a)=f'(a)$이므로, 어떤 $c\in[a,c_1]$에 대해 $T''(c)=f''(c)$이 되고, $k=T''(c)=f''(c)$이다.

문제 390. *함수*

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & (x\in[0,\pi]\cap\mathbb{Q})\\ \cos x & (x\in[0,\pi]\cap\mathbb{Q}^c)\end{cases}$$

가 continuous인 x를 구하여라.

아... 이 문제 어렵습니다. 이 문제 답을 안 써놓은 게 좀 후회스럽네요. 친구들과 함께 잘 논의해 보세요. 일단 정답은 $\sin x=\cos x$인 x에서만 연속합니다. 다른 점에서는 연속하지 않음을 보이는 게 조금 까다롭습니다. 다만 차근차근히, x가 무리수일 때와 유리수일 때를 나누어서, x와 충분히 가까우면서 유리수와 무리수인 점을 각각 골라주세요. 그러면 두 점의 함숫값이 임의의 엡실론보다는 차이가 많이 난다는 걸 보여줄 수 있으실 거에요. 그 임의의 엡실론은 여러분이 잡아주셔야 하긴 한데... 아마 삼각함수로 나오지 않을까요?

문제 391. *a와 b는 방정식 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$의 서로 다른 두 실근이다. 이때, 방정식*

$$nx^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$$

이 a와 b 사이에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보여라.

함수 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$을 생각하면, $f(a)=f(b)=0$이다. 그러면 이 함수 f는 polynomial이므로 continuous이고 differentiable이므로, a와 b 사이에 c가 있어

$$f'(c)=nc^{n-1}+(n-1)a_1c^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$$

이다. 따라서 방정식

$$nx^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$$

은 적어도 하나의 실근을 가진다.

문제 392. *함수* $y = \dfrac{x^3+3x}{x^2+1}$*의 그래프를 그려라.*

그려보세요 생략합니다.

문제 393. *함수* $y = \dfrac{x}{(x+1)^2}$*의 그래프를 그려라.*

그려보세요 생략합니다.

문제 394. *함수* $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$*이 있고,* a_n*과* a_0*은 서로 다른 부호를 가진다. 이때,* $f(x) = 0$*은 적어도 하나의 양의 실근을 가짐을 보여라.*

x^n은 x가 무한으로 갈 때 발산함과, $f(0) = a_0$임을 이용한다면 적절한 양의 상수 N에 대해 구간 $[0, N]$에서 ?VT를 사용하실 수 있을 겁니다. ?가 무엇인지는 여러분이 형태를 보고 아셔야겠죠? 그러면 양의 실근이 존재함을 밝힐 수 있습니다. 생략합니다.

문제 395. *함수* $y = \sqrt{4x^2+2} - x$*의 slant asymptote가 있다면 구하여라.*

$y = x$가 굉장히 이 함수의 그래프와 비슷하다는 풍문이 최근 한과영 내에서 돌고 있다고 합니다. 생략합니다.

문제 396. *다항함수* $f(x)$*에 대하여,* $f(x) = e^x$*의 근이 무한 개 존재할 수는 없음을 보여라.*

아 이문제 진짜 어려운데 제가 이문제를 왜 답을 안써놓았을까요??? 정말 의문입니다. $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$을 잡아주시구요. 이 함수 f가 $f(x) = e^x$의 근을 무한 개 가진다고 해봅시다. 그러면 $f(x) - e^x = 0$인 x도 무한 개라는 건데요. 무한 개니까 임의로 우리가 $n+2$개만 잡아보도록 할까요? 그럼 그 $n+2$개에 대해 롤의 정리를 계속 반복적으로 시행해줍니다. 그럼 결국에는 f는 $n+1$번 미분하면 사라지는 친구일 건데요, 그럼 $-e^x = 0$이 아마 적어도 1개의 근을 가지고 있다는 결과가 나올 것 같아요. 근데 이건 말이 안 되는 거죠? 따라서 모순입니다. 제가 지금 식으로 쓰기에는 귀찮아서 대강 스킴만 적었는데요. 여기 문제 푸실 정도면 이미 이해하실 거라 생각합니다. 식은 생략하겠습니다!

문제 397. *함수* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*가 성질*

$$x, y \in X, \quad x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|$$

을 만족한다고 하자.

(1) $f(x) = x$*인* x*는 하나 이하임을 보여라.*

(2) 위 조건을 만족하지만, $f(x) = x$*의 근이 없는 예시를 들어라.*

(1) 만약 x, y가 둘 다 $f(x) = x, f(y) = y$라면 $x \neq y$일 때

$$|x - y| > |f(x) - f(y)| = |x - y|$$

일 것이므로 모순이다. 따라서 근은 최대 하나이다.

(2) 함수 f를

$$f(x) = |x| + e^{-|x|}$$

라고 두자. 그러면 이 함수는 $x \in \mathbb{R}$에서 연속이다. 만약 $x \geq 0, y \geq 0$이고 $x \neq y$인 경우 $x < y$일 때

$$|f(x) - f(y)| = |x - y + (e^{-x} - e^{-y})| = |x - y| \left| 1 + \frac{e^{-x} - e^{-y}}{x - y} \right|$$

이며, $z \in (x, y)$에 대하여 MVT에 의하여

$$-1 \leq \frac{e^{-x} - e^{-y}}{x - y} = -e^{-z} < 0$$

이니

$$|f(x)-f(y)| = |x-y|\left|1+\frac{e^{-x}-e^{-y}}{x-y}\right| < 1$$

이다. 따라서, $|f(x)-f(y)| < |x-y|$이다. 반대로, $x<0, y<0$인 경우 $f(-x)=f(x)$이고 $|x-y| = |(-x)-(-y)|$이므로

$$|f(x)-f(y)| = |f(-x)-f(-y)| < |(-x)-(-y)| = |x-y|$$

이다. 한편 일반성을 잃지 않고 $y<0\le x$인 것처럼 둘의 부호가 다를 때에는,

$$|f(x)-f(y)| = |f(|x|)-f(|y|)| < ||x|-|y|| \le |x-y|$$

이 성립한다. 따라서 f는 연속이면서 조건을 만족시킨다. 반면

$$f(x) = |x| + e^{-|x|} > |x| \ge x$$

이므로, $f(x) > x$이 되어 $f(x)=x$의 근은 없다.

문제 398. *함수 f가 c 근방에서 정의되고 f는 두 번 미분 가능하고, f''이 연속임을 안다. 이때, 다음 극한*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}(f(c+h)+f(c-h)-2f(c))$$

이 존재하고 그 값이 $f''(c)$임을 보여라. 이 극한값이 존재하지만 $f''(c)$는 존재하지 않는 예를 들어라.

로피탈의 정리를 적용하면

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}(f(c+h)+f(c-h)-2f(c)) &= \lim_{h\to 0}\frac{f'(c+h)-f'(c-h)}{2h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f''(c+h)+f''(c+h)}{2} = f''(c)\end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 반면, 함수 f를

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x\ge 0)\\ -x^2 & (x<0)\end{cases}$$

라 두고 $c=0$이라고 두어 보자. 그러면

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+f(-h)-2f(0)}{h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h^2} = 0$$

으로 극한값은 존재하나 $f''(0)$는 존재하지 않는다.

문제 399. *이태는 미적분학1 수업시간에 배운 Midpoint rule이나 Trapezoidal rule에 흥미를 느껴 서울대학교에서 수치해석개론 강의를 수강하였다. 이 강의에서 이태는 f만이 아니라 그 도함수인 f'을 이용해 적분값을 추정하는 Hermitian interpolation에 대해 배웠다.*

함수 $\phi_i(t)$가 아래와 같이 정의된다.

$$\phi_0(t) = (t-1)^2 + 2t(t-1)^2$$

$$\phi_1(t) = t^2 - 2t^2(t-1)$$

$$\phi_2(t) = t(t-1)^2$$

$$\phi_3(t) = t^2(t-1)$$

이때, $p_3(t) = f(a)\phi_0(t) + f(b)\phi_1(t) + f'(a)\phi_2(t) + f'(b)\phi_3(t)$*을 생각하자.* p_3*는 삼차함수이면서,* a, b *에서의 함숫값과 도함숫값이* f*의 그것과 동일함을 보여라.*

이거 계산문제입니다... 생략하도록 하겠습니다.

문제 400. *이제 Hermite interpolation을 완성하고자 한다. 그 아이디어는*

$$\int_a^b f(t)dt \approx \int_a^b p_3(t)dt$$

이다. 즉 구간에서 f*와 유사한 삼차함수를 찾고 이로써 적분값을 근사한다는 것이다. 상수함수를 찾았던 midpoint rule이나, 직선을 찾았던 trapezoidal rule과 굉장히 유사한 방법임을 알 수 있다. Hermite interpolation의 공식을 완성하여라. 다르게 말하면,*

$$\int_a^b f(t)dt \approx \alpha f(a) + \beta f(b) + \gamma f'(a) + \delta f'(b)$$

로 표현됨을 알 때 각 그리스문자의 값을 찾아보아라. 일반적으로 이는 $b - a$*가 작아질수록 수업시간에 배웠던 각종 rule보다 더 낮은 오차로 적분값을 추정함이 알려져 있다!*

이 역시 계산 문제입니다. 답만 알려드리면요,

$$\int_a^b f(t)dt \approx \frac{b-a}{2}\{f(a) + f(b)\} + \frac{(b-a)^2}{12}\{f'(a) - f'(b)\}$$

입니다.