이계미분

1-2(2). 1. 함수 $f(x,y) = x^3y^7 + 3xy^2 - 7xy$ 일 때, f 의 이계미분계수들을 모두 구하여라.

$$D_1^2 f(x,y) = 6xy^7$$
$$D_1D_2 f(x,y) = D_2D_1 f(x,y) = 21x^2y^6 + 6y - 7$$
$$D_2^2 f(x,y) = 42x^3y^5 + 6x$$

1-2(2). 2. 함수 $f(x,y) = \cos(xy)$ 일 때, f 의 이계미분계수들을 모두 구하여라.

$$D_1^2 f(x,y) = -y^2 \cos xy$$
$$D_1D_2 f(x,y) = D_2D_1 f(x,y) = -xy\cos xy - \sin xy$$
$$D_2^2 f(x,y) = -x^2 \cos xy$$

1-2(2). 3. 함수 $f(x,y) = e^{y/x} - ye^{-x}$ 일 때, f 의 이계미분계수들을 모두 구하여라.

$$D_1^2 f(x,y) = \frac{2y}{x^3}e^{y/x} + \frac{y^2}{x^4}e^{y/x} - ye^{-x}$$
$$D_1D_2 f(x,y) = D_2D_1 f(x,y) = -\frac{1}{x^2}e^{y/x} - \frac{y}{x^3}e^{y/x} + e^{-x}$$
$$D_2^2 f(x,y) = \frac{1}{x^2}e^{y/x}$$

1-2(2). 4. 함수 $f(x,y) = \sin\sqrt{x^2+y^2}$ 에 대하여 f 의 이계미분계수들을 모두 구하여라.

$$D_1^2 f(x,y) = \frac{y^2\cos\sqrt{x^2+y^2} - x^2\sqrt{x^2+y^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$
$$D_1D_2 f(x,y) = D_2D_1 f(x,y) = \frac{-xy\sqrt{x^2+y^2}\sin\sqrt{x^2+y^2} - xy\cos\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$
$$D_2^2 f(x,y) = \frac{x^2\cos\sqrt{x^2+y^2} - y^2\sqrt{x^2+y^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

1-2(2). 5. 함수 $f(x,y) = \frac{1}{\sin^2 x + 2e^y}$ 의 모든 이계미분계수를 구하여라.

$$D_1^2 f(x,y) = \frac{(\sin^2 x + 2e^y)(-2\cos 2x) + 2\sin^2 2x}{(\sin^2 x + 2e^y)^3}$$
$$D_1D_2 f(x,y) = D_2D_1 f(x,y) = \frac{4e^y \sin 2x}{(\sin^2 x + 2e^y)^3}$$
$$D_1^2 f(x,y) = \frac{2e^y(2e^y - \sin^2 x)}{(\sin^2 x + 2e^y)^3}$$

1-2(2). 6. 함수 $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ 의 모든 이계미분계수를 구하여라.

$$D_1^2 f(x,y) = e^{x^2+y^2}(2+4x^2)$$
$$D_1D_2 f(x,y) = D_2D_1 f(x,y) = 4xye^{x^2+y^2}$$
$$D_2^2 f(x,y) = e^{x^2+y^2}(2+4y^2)$$

1-2(2). 7. 함수 $f(x, y) = y \sin x - x \cos y$의 모든 이계미분계수를 구하여라.

$$D_1^2 f(x, y) = -y \sin x$$

$$D_1 D_2 f(x, y) = D_2 D_1 f(x, y) = \cos x + \sin y$$

$$D_2^2 f(x, y) = x \cos y$$

1-2(2). 8. 함수 $f(x, y) = \ln(\frac{x}{y})$의 모든 이계미분계수를 구하여라.

$$D_1^2 f(x, y) = -\frac{1}{x^2}$$

$$D_1 D_2 f(x, y) = D_2 D_1 f(x, y) = 0$$

$$D_2^2 f(x, y) = \frac{1}{y^2}$$

1-2(2). 9. $f(x, y, z) = x^2 e^y + e^{2z}$에 대하여, f의 모든 이계미분계수를 구하여라.

$$D_1^2 f(x, y, z) = 2e^y$$

$$D_2^2 f(x, y, z) = x^2 e^y$$

$$D_3^2 f(x, y, z) = 4e^{2x}$$

$$D_1 D_2 f(x, y, z) = D_2 D_1 f(x, y, z) = 2xe^y$$

$$D_1 D_3 f(x, y, z) = D_3 D_1 f(x, y, z) = 0$$

$$D_2 D_3 f(x, y, z) = D_3 D_2 f(x, y, z) = 0$$

1-2(2). 10. 함수 $f(x, y, z) = \frac{x-y}{y+z}$에 대하여, f의 모든 이계미분계수를 구하여라.

$$D_1^2 f(x, y, z) = 0$$

$$D_2^2 f(x, y, z) = \frac{2(x+z)}{(y+z)^3}$$

$$D_3^2 f(x, y, z) = \frac{2(x-y)}{(y+z)^3}$$

$$D_1 D_2 f(x, y, z) = D_2 D_1 f(x, y, z) = -\frac{1}{(y+z)^2}$$

$$D_1 D_3 f(x, y, z) = D_3 D_1 f(x, y, z) = -\frac{1}{(y+z)^2}$$

$$D_2 D_3 f(x, y, z) = D_3 D_2 f(x, y, z) = \frac{2x - y + z}{(y+z)^3}$$

1-2(2). 11. $f(x, y, z) = x^2 yz + xy^2 + xyz^2$일 때, 함수 f의 모든 이계미분계수를 구하라.

$$D_1^2 f(x, y, z) = 2yz$$

$$D_2^2 f(x, y, z) = 2xz$$

$$D_3^2 f(x, y, z) = 2xy$$

$$D_1 D_2 f(x, y, z) = D_2 D_1 f(x, y, z) = 2xz + 2yz + z^2$$

$$D_1D_3f(x,y,z) = D_3D_1f(x,y,z) = 2xy + y^2 + 2yz$$

$$D_2D_3f(x,y,z) = D_3D_2f(x,y,z) = x^2 + 2xy + 2xz$$

1-2(2). 12. *함수 $f(x,y,z) = 2x^3y + xz^2 + y^3z^5 - 7xyz$에 대하여, $D_1D_2D_1f(x,y,z)$를 구하여라.*

$$D_1f(x,y,z) = 6x^2y + z^2 - 7yz$$

$$D_2D_1f(x,y,z) = 6x^2 - 7z$$

$$D_1D_2D_1f(x,y,z) = 12x$$

1-2(2). 13. *함수 $f(x,y,z) = xe^{2y} + ye^{3z} + ze^{-x}$에 대하여, $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$을 자연수 n에 대한 식으로 표현하시오.*

$D_1f(x,y,z) = e^{2y} - ze^{-x}$이며, 이를 x로 더욱 미분하게 된다면

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} = \begin{cases} e^{2y} - ze^{-x}, & n = 1 \\ (-1)^n ze^{-x}, & n \geq 2 \end{cases}$$

임을 알 수 있다.

1-2(2). 14. *무한급 함수 f가*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 6x^7yz^2 - 2x^4$$

를 만족시킨다고 한다. 이때,

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x^3 \partial y \partial z}$$

를 구하여라.

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x^3 \partial y \partial z} = \frac{\partial^3}{\partial x^3}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 1260x^4yz^2 - 48x$$

테일러 전개와 근삿값 이론

1-2(2). 15. *함수*

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$$

에 대하여, 원점을 중심으로 한 2차 근사다항식을 구하시오.

$$Df(x,y) = \left(-\frac{2x}{(x^2+y^2+1)^2}, -\frac{2y}{(x^2+y^2+1)^2}\right)$$

이며

$$D_1^2f(x,y) = \frac{6x^2 - 2y^2 - 2}{(x^2+y^2+1)^3}$$

$$D_2^2f(x,y) = \frac{6y^2 - 2x^2 - 2}{(x^2+y^2+1)^3}$$

$$D_1D_2f(x,y) = \frac{8xy}{(x^2+y^2+1)^3}$$

이므로

$$T_2f(x,y) = f(0,0) + D_1f(0,0)x + D_2f(0,0)y + \frac{1}{2}(D_1^2f(0,0)x^2 + 2D_1D_2f(0,0)xy + D_2^2f(0,0)y^2) = 1 - x^2 - y^2$$

1-2(2). 16. *함수*

$$f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2+1}$$

에 대하여, 점 $(1,-1)$을 중심으로 한 2차 근사다항식을 구하시오.

위의 문제에서 구해 놓은 미분계수들에 대입을 통해 점 $(1,-1)$에서의 근사다항식을 구하면,

$$T_2f(x,y)=\frac{1}{3}-\frac{2(x-1)}{9}+\frac{2(y+1)}{9}+\frac{(x-1)^2}{27}-\frac{8(x-1)(y-1)}{27}+\frac{(y+1)^2}{27}$$

1-2(2). 17. *함수 $f(x,y)=e^{2x+y}$의 원점에서의 이차 근사다항식을 구하시오.*

$$Df(x,y)=(2e^{2x+y},e^{2x+y})$$

$$D_1^2f(x,y)=4e^{2x+y}$$

$$D_2^2f(x,y)=e^{2x+y}$$

$$D_1D_2f(x,y)=2e^{2x+y}$$

이므로 원점에 이를 대입하고 이차 근사다항식을 구하면

$$T_2f(x,y)=1+2x+y+2x^2+2xy+\frac{y^2}{2}$$

1-2(2). 18. *함수 $f(x,y,z)=ye^{3x}+ze^{2y}$의 점 $(0,0,2)$에서의 2차 근사다항식을 구하시오.*

$$Df(x,y,z)=(3ye^{3x},e^{3x}+2ze^{2y},e^{2y})$$

$$D_1^2f(x,y)=9ye^{3x}$$

$$D_2^2f(x,y)=4ze^{2y}$$

$$D_3^2f(x,y)=0$$

$$D_1D_2f(x,y)=3e^{3x}$$

$$D_1D_3f(x,y)=0$$

$$D_2D_3f(x,y)=2e^{2y}$$

이며 점 $(0,0,2)$를 기준으로 이 값들을 구해 만든 2차 근사다항식은

$$T_2f(x,y)=y+z+3xy+4y^2+2yz$$

이다.

1-2(2). 19. *함수*

$$f(x,y,z)=\frac{1}{x^2+y^2+z^2+1}$$

의 원점을 기준으로 하는 2차 근사다항식을 구하시오.

$$D_1f(x,y,z)=\frac{-2x}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}$$

$$D_1^2f(x,y,z)=\frac{6x^2-2y^2-2z^2-2}{(x^2+y^2+z^1+1)^3}$$

$$D_1D_2f(x,y,z) = \frac{8xy}{(x^2+y^2+z^2+1)^3}$$

이며 대칭성에 의하여 나머지 변수들에 대한 편미분계수와 이계미분계수도 구해줄 수 있다. 따라서 2차 근사다항식은

$$T_2f(x,y) = 1 - x^2 - y^2 - z^2$$

이다.

1-2(2). 20. *함수* $f(x,y,z) = e^{x+2y+3z}$*의 원점을 기준으로 한 3차 근사다항식을 구하시오.*

$$D_if(0,0,0) = i$$

$$D_iD_jf(0,0,0) = ij$$

$$D_iD_jD_kf(0,0,0) = ijk$$

임을 확인해줄 수 있다. 그러므로 3차 근사다항식은

$$\begin{aligned} T_3f(x,y) = 1 + x + 2y + 3z + \frac{1}{2}(x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 6xz + 12yz) \\ + \frac{1}{6}(x^3 + 8y^3 + 27z^3 + 6x^2y + 9x^2z + 12xy^2 + 36y^2z + 27xz^2 + 54yz^2 + 36xyz) \end{aligned}$$

1-2(2). 21. *함수* $f(x,y) = e^{2x}\cos y$*에 대하여, 원점에서의 2차 근사다항식을 구하고*

$$|R_2f((0,\frac{\pi}{2}),(0.2,0.1))| < 0.1$$

임을 보여라.

먼저 이 함수에 대한 2차 근사다항식을 구해보자.

$$Df(x,y) = (2e^{2x}\cos y, -e^{2x}\sin y)$$

$$D_1^2f(x,y) = 4e^{2x}\cos y$$

$$D_1D_2f(x,y) = -2e^{2x}\sin y$$

$$D_2^2f(x,y) = -e^{2x}\cos y$$

이므로

$$T_2f(x,y) = -(y-\frac{\pi}{2}) - 2x(y-\frac{\pi}{2})$$

이다. 또한

$$D_1^3f(x,y) = 8e^{2x}\cos y$$

$$D_1^2D_2f(x,y) = -4e^{2x}\sin y$$

$$D_1D_2^2f(x,y) = -2e^{2x}\cos y$$

$$D_2^3f(x,y) = e^{2x}\sin y$$

이므로 $M_3(x,y) \leq 8e^{2x}$임을 알 수 있다. 그러면

$$|R_2f((0,\frac{\pi}{2}),(0.2,0.1))| \leq \frac{1}{3!}M_3(|0.2|+|0.1|)^3 \leq \frac{81}{4000}e^{0.4} < \frac{400}{4000} = 0.1$$

1-2(2). 22. *함수* $f(x,y) = e^{x+2y}$*에 대하여* $|R_2((0,0),(0,1,0,1))| < 0.03$*임을 증명하여라.*

$$Df(x,y) = (e^{x+2y}, 2e^{x+2y})$$
$$D_1^2 f(x,y) = e^{x+2y}$$
$$D_1D_2 f(x,y) = 2e^{x+2y}$$
$$D_2^2 f(x,y) = 4e^{x+2y}$$

이므로 2차 근사다항식은

$$T_2 f(x,y) = 1 + x + 2y + \frac{1}{2}x^2 + 2xy + 2y^2$$

으로 주어진다. 또한 3계 편미분계수는 절댓값의 최댓값이 $8e^{x+2y}$임을 알 수 있다.

$$|R_2((0,0),(0,1,0,1))| \le \frac{1}{3!} \cdot 8e^{0.3} \cdot (0.1+0.1)^3 < \frac{128}{6000} < 0.03$$

1-2(2). 23. *함수 $f(x,y) = e^{2x}\cos 3y$에 대하여, $(0,\pi)$를 기준으로 구한 1차 근사다항식은?*

$$Df(x,y) = (2e^{2x}\cos 3y, -3e^{2x}\sin 3y)$$

이므로

$$Df(0,\pi) = (-2, 0)$$

이다. 따라서

$$T_1 f(x,y) = -1 - 2x$$

임을 알 수 있다.

1-2(2). 24. *함수 $f(x,y,z) = xy - 3y^2 + 2xz$에 대하여, $(2,-1,1)$에서의 2차 근사다항식을 구하여라.*

$$Df(x,y,z) = (y+2z, x-6y, 2x)$$
$$D_1^2 f(x,y,z) = 0$$
$$D_2^2 f(x,y,z) = -6$$
$$D_3^2 f(x,y,z) = 0$$
$$D_1D_2 f(x,y,z) = 1$$
$$D_1D_3 f(x,y,z) = 2$$
$$D_2D_3 f(x,y,z) = 0$$

이므로 2차 근사 다항식은

$$T_2 f(x,y) = -1 + (x-2) + 8(y+1) + 4(z-1) + \frac{1}{2}(2(x-2)(y+1) + 4(x-2)(z-1) - 6(y+1)^2)$$

, 혹은 $T_2 f(x,y) = xy - 3y^2 + 2xz$로 정리할 수 있다.

1-2(2). 25. *함수 $f(x,y,z,w) = \sin(x-y+2z-w)$에 대하여, 원점 근방에서의 2차 근사다항식을 구하시오.*

점 (x,y,z,w)가 원점에 가까울 때

$$\sin(x-y+2z-w) = (x-y+2z-w) + o(x^2+y^2+z^2+w^2)$$

임이 일변수에서의 테일러 전개에 의해 알려져 있다. 따라서 무한급 함수 f의 테일러 전개의 유일성에 의하여 2차 근사다항식은

$$T_2 f(x,y,z,w) = x - y + 2z - w$$

가 됨을 확인할 수 있다.

임계점 정리

헤세 판정법

1-2(2). 26. *함수*

$$f(x,y) = 4x + 6y - 12 - x^2 - y^2$$

의 임계점을 구하고, 분류하여라.

$$Df(x,y) = (4 - 2x, 6 - 2y)$$

이므로 임계점은 $(2,3)$이다. 이때 헤세 행렬은

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

이므로 해당 임계점에선 헤세 행렬이 음행렬이다. 따라서 헤세 판정법에 의해서 $(2,3)$은 극대점이다.

1-2(2). 27. *함수*

$$g(x,y) = x^2 - 2y^2 + 2x + 3$$

에 대해, 임계점을 구하고 분류하여라.

$$Dg(x,y) = (2x + 2, -4y)$$

이므로 $(-1,0)$이 유일한 임계점이다. 해당 점에서의 헤세 행렬은

$$g''(-1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

이므로 헤세 행렬식이 음이다. 따라서 헤세 판정법에 의해 $(-1,0)$은 안장점이다.

1-2(2). 28. *함수 $f(x,y) = 2xy - 2x^2 - 5y^2 + 4y - 3$의 임계점을 찾고 이들을 분류하여라.*

$Df(x,y) = (2y - 4x, 2x - 10y + 4)$이므로 임계점은

$$(\frac{2}{9}, \frac{4}{9})$$

이 될 것이다. 이 때 헤세 행렬은

$$f''(\frac{2}{9}, \frac{4}{9}) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -10 \end{pmatrix}$$

이므로 이는 음행렬이다. 따라서 $(\frac{2}{9}, \frac{4}{9})$는 극대점이다.

1-2(2). 29. *함수 $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$의 임계점을 찾고 이들을 분류하여라.*

$$Df(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}\right)$$

이므로 유일한 임계점은 원점이다. 원점에서의 헤세 행렬을 구하면

$$f''(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

이므로 양행렬이다. 따라서 f에 대하여 $(0,0)$은 극소다.

1-2(2). 30. *함수 $f(x,y) = x^2 + y^3 - 6xy + 2x + 6y$의 임계점을 찾고, 이들을 분류하여라.*

$$Df(x,y) = (2x - 6y + 3, 3y^2 - 6x + 6)$$

이므로, 임계점을 찾으면

$$(\frac{3}{2}, 1), (\frac{27}{2}, 5)$$

이다. 헤세 행렬은

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 6y \end{pmatrix}$$

으로 주어진다. 그러면 점 $(3/2, 1)$에서는 이 행렬의 행렬식이 음이므로, 해당 점은 안장점이다. 반면 점 $(27/2, 5)$에서는 헤세 행렬이 양행렬이므로, 해당 점은 극소점이 된다.

1-2(2). 31. *$f(x,y) = y^4 - 2xy^2 + x^3 - x$에 대하여 임계점을 모두 찾고, 이들을 분류하여라.*

$$Df(x,y) = (-2y^2 + 3x^2 - 1, 4y^3 - 4xy)$$

이므로 임계점에서는 $y = 0$ 혹은 $y^2 = x$여야 한다. 따라서 이를 기반으로 모든 임계점을 구하면,

$$(\pm 1/\sqrt{3}, 0), (1, \pm 1)$$

의 4개이다. 점 (x,y)에서의 헤세 행렬은

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -4y \\ -4y & 12y^2 - 4x \end{pmatrix}$$

이다. 이를 바탕으로 각 점에서 헤세 판정법을 적용하여 보자. 먼저 $(1/\sqrt{3}, 0)$에서는 헤세 행렬의 행렬식이 음이므로, 안장점이다. 또한 $(-1/\sqrt{3}, 0)$에서 역시 행렬식이 -8로 음이기에 안장점이다. $(1,1)$에서는 행렬의 행렬식이 32로 양수이며 1행 1열의 수가 6으로 양수이기에, 헤세 행렬이 양행렬인 것으로부터 $(1,1)$이 극소점임을 알 수 있다. 마지막으로 $(1,-1)$에서 역시 헤세 행렬이 양행렬이기에 극소점이다.

1-2(2). 32.

$$f(x,y) = xy + \frac{8}{x} + \frac{1}{y}$$

의 임계점을 찾고 이들을 분류하여라.

$$Df(x,y) = (y - \frac{8}{x^2}, x - \frac{1}{y^2})$$

이므로 임계점에서는 $0 = y(8y^3 - 1)$이 만족된다. 그런데 $y \neq 0$이어야 함수가 정의될 수 있으므로, 임계점은

$$(4, \frac{1}{2})$$

가 유일하다. 해당 점에서 헤세 행렬을 구하면

$$f''(4, 1/2) = \begin{pmatrix} 1/4 & 1 \\ 1 & 16 \end{pmatrix}$$

이므로, 이 행렬은 양행렬이다. 따라서 점 $(4, 1/2)$는 극소점이다.

1-2(2). 33. *함수*

$$f(x, y, z) = e^x \sin y + z^2$$

의 모든 극점을 찾아라.

$$Df(x, y, z) = (e^x \sin y, e^x \cos y, 2z)$$

이 영벡터가 되는 (x, y, z)는 존재하지 않음을 알 수 있다. 따라서 임계점은 없다. 그러나 이 함수는 무한급 함수이므로 미분가능하기에, 임계점 정리에 의해 극점은 모두 임계점이기에 임계점이 없다는 것은 곧 극점이 없다는 것이다. 따라서 극점은 존재하지 않는다.

1-2(2). 34. *함수* $f(x, y) = e^{x^2+5y^2}$ *의 모든 임계점을 구하고, 최솟값을 구하여라.*

$$f'(x, y) = (2xe^{x^2+5y^2}, 10ye^{x^2+5y^2})$$

이므로 유일한 임계점은 $(0, 0)$이다. 또한 이 점에서 $f(0, 0) = e^0 = 1$인데, 다른 모든 점에서 $x^2 + 5y^2 > 0$이므로 $f(x, y) > e^0 = 1$이다. 따라서 이 점에서 최솟값을 가지며, 그 값은 1이다.

1-2(2). 35. *함수* $f(x, y, z) = e^x(x^2 - y^2 - 2z^2)$*에 대하여,* $y = z = 0$*일 때 헤세 행렬식은* x*에 대한 함수로 표현된다. 그 함수를* $g(x)$*라 할 때,* $g(x)$*를 구하시오.*

$$Df(x, y, z) = (e^x(x^2 + 2x - y^2 - 2z^2), -2ye^x, -4ze^x)$$

이며 헤세 행렬을 구하면

$$f''(x, y, z) = \begin{pmatrix} e^x(x^2 + 4x + 2 - y^2 - 2z^2) & -2ye^x & -4ze^x \\ -2ye^x & -2e^x & 0 \\ -4ze^x & 0 & -4e^x \end{pmatrix}$$

이며

$$g(x) = |f''(x, 0, 0)| = \begin{vmatrix} e^x(x^2 + 4x + 2) & 0 & 0 \\ 0 & -2e^x & 0 \\ 0 & 0 & -4e^x \end{vmatrix}$$

이다. 따라서

$$g(x) = -8e^{3x}(x^2 + 4x + 2)$$

1-2(2). 36. *함수*

$$f(x, y) = \frac{2y^3 - 3y^2 - 36y + 2}{1 + 3x^2}$$

의 임계점을 구하고, 이들을 분류하여라.

$$Df(x, y) = \left(\frac{6x(2y^3 - 3y^2 - 36y + 2)}{(1 + 3x^2)^2}, \frac{6(y^2 - y - 6)}{1 + 3x^2} \right)$$

이므로 임계점은 $(0,3)$과 $(0,-2)$이다. 헤세 행렬을 구하면

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{6(3x-1)(3x+1)(2y^3-3y^2-36y+2)}{(3x^2+1)^3} & \frac{-36x(y-3)(y+2)}{(3x^2+1)^2} \\ \frac{-36x(y-3)(y+2)}{(3x^2+1)^2} & \frac{6(2y-1)}{3x^2+1} \end{pmatrix}$$

이며, 이에 따라 $(0,-2)$에서는 헤세 행렬이 음행렬이므로 이는 극대점이고, $(0,3)$에서는 헤세 행렬이 양행렬이므로 이는 극소점이다.

라그랑주 승수법

1-2(2). 37. *평면 $2x-3y-z=4$ 위에서 함수 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$가 최소가 되는 점 (x,y,z)를 찾아라.*

먼저 원점을 기준으로 큰 구를 그리면 평면과 만나게 할 수 있다. 따라서 해당 구과 평면의 교집합은 유계닫힌집합이기에, 연속함수 f는 여기서 최솟값을 가진다. 그런데 구 안에서의 f 값은 구 밖에서의 f 값보다 항상 크기에, 그 최솟값은 평면 위에서 f의 최솟값과 같으며 존재한다. 라그랑주 승수법을 이용하면 f의 기울기 벡터와 등위면인 평면의 기울기 벡터가 나란해야 한다. 즉, $(2x,2y,2z)$와 $(2,-3,-1)$이 나란해야 한다. 이때 뒤의 벡터는 영벡터가 아니므로 실수 λ가 존재하여 $x=\lambda, y=-1.5\lambda, z=-0.5\lambda$라고 둘 수 있다. 이때 이 점은 평면 위에 존재해야 하므로, $\lambda=4/7$이 된다. 따라서 해당하는 점은

$$(4/7,-6/7,2/7)$$

이다.

1-2(2). 38. *제한조건 $g(x,y)=2x^2+y^2=4$에서 함수 $f(x,y)=y$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.*

제한조건이 의미하는 영역은 타원으로, 유계닫힌집합이기에 연속함수 f는 해당 집합 위에서 최솟값과 최댓값을 가진다.

$$\mathrm{grad} f(x,y)=(0,1)$$

이 g의 기울기 벡터 $(4x,2y)$와 일차종속이기 위해서는 $x=0$이어야 하며, 해당 점에서 $y=\pm 2$이다. 따라서 최댓값은 $(0,2)$에서 2, 최솟값은 $(0,-2)$에서 -2이다.

1-2(2). 39. *함수 $f(x,y)=5x+2y$의 최댓값과 최솟값을 제한조건 $g(x,y)=5x^2+2y^2=14$ 위에서 찾아라.*

제한조건이 나타내는 영역은 타원이므로 유계닫힌집합이다. 따라서 연속함수 f는 이 위에서 최댓값과 최솟값을 가진다. 라그랑주 승수법에 의하여 $\mathrm{grad} f(x,y=(5,2))$와 $\mathrm{grad} g(x,y)=(10x,4y)$는 나란해야 하며, 이에 따라 $x=y$이다. 그러면 $x=y=\sqrt{2}$여야 하므로, 최댓값은 $f(\sqrt{2},\sqrt{2})=7\sqrt{2}$이며 최솟값은 $f(-\sqrt{2},-\sqrt{2})=-7\sqrt{2}$이다.

1-2(2). 40. *함수 $f(x,y)=xy$에 대하여, 제한조건 $g(x,y)=2x-3y=6$ 위에서 함수 f의 값을 구할 때 그 최솟값이 존재한다고 한다. 라그랑주 승수법을 이용해 최솟값을 가지는 점을 구하시오.*

f는 일급함수이므로 라그랑주 승수법에 의하여 최솟값을 가지는 점에서 f와 g의 기울기 벡터가 서로 나란하다. 즉, (y,x)와 $(2,-3)$ 이 나란해야 하므로 $x=-3\lambda, y=2\lambda$로 둔다면 $-12\lambda=6$이다. 따라서 $x=3/2, y=-1$임을 알 수 있다. 이 점이 유일하므로 이 점이 원하는 점임을 확신할 수 있다. 따라서

$$\left(\frac{3}{2},-1\right)$$

이 그 점이다.

1-2(2). 41. *함수 $f(x,y,z)=xyz$를 제한조건 $g(x,y,z)=2x+3y+z=6$ 위에서 고려하자. 이때, f의 기울기 벡터와 g의 기울기 벡터가 일차종속인 점을 모두 찾아라.*

$$\mathrm{grad} f(x, y, z) = (yz, xz, xy)$$

이며 g의 기울기 벡터는 $(2, 3, 1)$이므로 어떤 실수 λ에 대하여

$$yz = 2\lambda, xz = 3\lambda, xy = \lambda$$

이다. 만약 $\lambda \neq 0$인 경우를 먼저 생각하면

$$xyz = \sqrt{6}\lambda^{3/2}$$

이므로

$$x = \frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{\lambda}, y = \frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{\lambda}, z = \sqrt{6}\sqrt{\lambda}$$

이므로 $3\sqrt{6}\sqrt{\lambda} = 6$이고, 이로부터 $\lambda = 2/3$이다. 즉 원하는 점은

$$(1, \frac{2}{3}, 2)$$

이다. 만약 $\lambda = 0$인 경우에는, $xy = yz = zx = 0$이며 $2x + 3y + z = 6$이려면

$$(3, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 6)$$

이 원하는 점이다.

1-2(2). 42. *함수 $f(x, y, z) = 3 - x^2 - 2y^2 - z^2$을 제한조건 $g(x, y, z) = 2x + y + z = 2$ 위에서 생각하자. g와 f의 기울기 벡터가 나란한 점을 모두 구하여라.*

f의 기울기 벡터 $(-2x, -4y, -2z)$와 g의 기울기 벡터 $(2, 1, 1)$이 나란해야 하므로 실수 λ가 존재하여 $-2x = 2\lambda, -4y = \lambda, -2z = \lambda$이다. 이를 풀어내면 $x = 2z$와 $y = z/2$이므로 $z = 4/11$임을 알 수 있고, 유일한 해는

$$(\frac{8}{11}, \frac{2}{11}, \frac{4}{11})$$

이다.

1-2(2). 43. *함수 $f(x, y, z) = x^6 + y^6 + z^6$을 중심이 원점이며 반지름이 $\sqrt{6}$인 구면 위에서 생각하자. 라그랑주 승수법을 이용하여 극점이 될 수 있는 점들의 후보를 모두 구하여라.*

우리가 풀고자 하는 연립방정식은

$$\begin{cases} 6x^5 = 2\lambda x \\ 6y^5 = 2\lambda y \\ 6z^5 = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \end{cases}$$

으로 요약할 수 있다. 첫번째 식은 $x = 0$이거나 $\lambda = 3x^4$일 때 성립한다. 같은 이유로, 두번째 식과 세 번째 식도 이해할 수 있다. 만약 x, y, z가 모두 0이라면 마지막 식을 만족시킬 수 없기 때문에, 0의 개수는 $0, 1, 2$개 중 하나이다. 먼저 두 개가 0인 경우에는 나머지 하나가 $\pm\sqrt{6}$이 되면 해결된다. 따라서

$$(0, 0, \pm\sqrt{6}), (0, \pm\sqrt{6}, 0), (\pm\sqrt{6}, 0, 0)$$

의 6개가 원하는 점이다. 만약 하나만이 0일 경우에는 나머지 둘의 네제곱이 같아야 하므로, 둘은 절댓값이 같으며 마지막 식으로부터 그 값이 $\sqrt{3}$임을 알 수 있다. 따라서

$$(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}, 0), (\pm\sqrt{3}, 0, \pm\sqrt{3}), (0, \pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3})$$

의 12개가 원하는 점이다. 마지막으로 0이 없는 경우에는 $|x| = |y| = |z| = \sqrt{2}$이다. 따라서

$$(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$$

의 8가지가 후보이다. 따라서 총 26개의 후보를 구하였다.

1-2(2). 44. *함수 $f(x, y) = x^2 + y$가 제한조건 $g(x, y) = x^2 + 2y^2 = 1$ 위에서 정의되어 있다. f의 최댓값을 구하여라.*

제한조건으로 정의된 영역은 타원의 표면이므로 유계닫힌집합이며, 연속함수 f는 이 위에서 최댓값을 가짐을 알 수 있다. 라그랑주 승수법을 적용하면 두 기울기 벡터가 일차종속일 때, 즉 $(2x, 1)$과 $(2x, 4y)$가 나란할 때 극점이 만들어질 수 있다. 첫째로 $x = 0$일 경우에는 $y = \pm 1/\sqrt{2}$이다. 그러면 $f(0, 1/\sqrt{2})$일 때 $1/\sqrt{2}$가 최댓값이다. 둘째로 $x \neq 0$일 경우에는 $y = 1/4$여야 하며, $x = \sqrt{7/8}$이어야 한다. 이 경우에는 $f(\sqrt{7/8}, 1/4) = f(-\sqrt{7/8}, 1/4) = 9/8$이 최대이다. 따라서 모든 경우를 고려해보면, 최댓값은 9/8이 될 것이다.

1-2(2). 45. *가로가 x, 세로가 y, 높이가 z인 직육면체 모양의 상자를 만드려 한다. 이때 이 상자를 만드는 비용은 $g(x, y, z) = 2x + 2y + z$원으로 주어지는데, 상자의 단가는 108원 이하여야 한다고 한다. 이때, 상자의 들이를 최대로 할 수 있는 x, y, z를 구하시오.*

주어진 영역은 $x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0, 2x + 2y + z \leq 108$인 영역으로 이해할 수 있으며, 이는 유계닫힌영역이기에 연속함수 $f(x, y, z) = xyz$의 최댓값이 존재한다.

먼저, 내부 영역에서 임계점이 있는지 보자. 즉 $x > 0, y > 0, z > 0, 2x + 2y + z < 108$ 인 영역에서 $f(x, y, z) = xyz$의 임계점이 존재하는지를 보면 된다. 그런데 $x, y, z \neq 0$이므로 임계점이 없다. 따라서 극대점은 경계에 존재한다. 그런데 $xyz = 0$인 부분에서는 들이가 항상 0이며 이는 최대가 될 수 없기에, 표면 중에서도 $2x + 2y + z = 108$인 영역에서 고려해주면 된다. 라그랑주 승수법을 이용하면 (yz, zx, xy)가 $(2, 2, 1)$과 나란해야 하며, 이를 만족시키려면 $x = y = z/2$이며 $3z = 108$이 되기에 그 점은$(18, 18, 36)$으로 유일하다. 따라서 이 점이 최댓값이 얻어지는 점이 되어야 한다. 따라서 가로와 세로는 18, 높이는 36인 상자가 원하는 상자이다.

1-2(2). 46. *공장에서는 밑면의 반지름이 r이고 높이가 h인 음료수 캔을 생산하고 있다. 그런데 자재의 부족으로 캔의 표면적은 600π이어야 한다고 한다. 이때, 캔의 부피를 최대로 하는 r과 h의 값을 구하시오.*

최대화시키려는 함수를 $f(r, h) = \pi r^2 h$라 두고, 제한조건을 $g(r, h) = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 600\pi$라고 하자. 그러면 라그랑주 승수법에 의하여

$$\begin{cases} 2\pi rh = \lambda(2\pi h + 4\pi r) \\ \pi r^2 = 2\lambda\pi r \\ 2\pi rh + 2\pi r^2 = 600\pi \end{cases}$$

를 만족하는 r, h, λ를 찾아주어야 한다. 그런데 $r \neq 0$일 것이므로 두 번째 식을 풀면 $r = 2\lambda$가 되며, 첫째 식에 이를 대입할 경우 $h = 2r$이 나온다. 따라서 마지막 식에 이를 다시 대입하게 된다면 $6\pi r^2 = 600\pi$가 되므로, $r = 10$이다. 따라서 밑며의 반지름은 10, 높이는 20이 되어야 한다.

1-2(2). 47. *타원체의 표면 $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$에 있는 점 (x, y, z) 중에서 원점과의 거리가 가장 먼 점을 구하여라.*

타원체의 표면은 유계닫힌집합이므로 연속함수 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$은 최댓값을 가진다. 라그랑주 승수법에 의해 극점에서는

$$\mathrm{grad} f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$$

가 타원이 기울기 벡터 $(6x, 4y, 2z)$에 나란해야 한다. 따라서 첫 번째 성분으로부터 $x = 0$ 혹은 $\lambda = 1/3$임을 알 수 있으며, 같은 이유로 $y = 0$ 혹은 $\lambda = 1/2$, $z = 0$ 혹은 $\lambda = 1$이다. 따라서 후보가 되는 점들은

$$(\pm\sqrt{2}, 0, 0), (0, \pm\sqrt{3}), (0, 0, \pm\sqrt{6})$$

이며, 이 중에서 f에 넣으면 최댓값이 등장하므로 6이다. 따라서 거리의 최댓값은 $\sqrt{6}$이다.

1-2(2). 48. *곡면* $g(x,y) = 3x^2 - 4xy + 3y^2 = 50$ *위에서 함수* $f(x,y) = x^2 + y^2$*의 최댓값과 최솟값을 구하여라.*

g의 등위면은 타원 모양이므로 유계닫힌집합이고, 그 위에서 연속함수 f는 최댓값과 최솟값을 가진다. 라그랑주 승수법에 의해 극점이 될 수 있는 후보는

$$\begin{cases} 2x = \lambda(6x - 4y) \\ 2y = \lambda(-4x + 6y) \\ 3x^2 - 4xy + 3y^2 = 50 \end{cases}$$

을 만족시키는 실수 λ가 있게 해야 한다. 그러면

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{6x - 4y}{2x} = \frac{-4x + 6y}{2y}$$

를 정리하면 $y = \pm x$를 얻어낼 수 있다. 만약 $y = x$일 경우 마지막 식으로부터 $x = \pm 5$임을 알 수 있고, $y = -x$라면 $x = \pm\sqrt{5}$임을 확인할 수 있다. 따라서, 점

$$(5,5), (-5,-5), (\sqrt{5}, -\sqrt{5}), (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$$

에 대하여 함숫값을 들여다보면 된다. 앞선 두 점에 대해서는 그 값이 50, 뒤의 두 점에 대해서는 그값이 10이다. 따라서 최댓값은 50, 최솟값은 10이다.

1-2(2). 49. *원점을 중심으로 하고 반지름이* $\sqrt{17}$*인 원이 있다. 이 원 위의 점에서* $f(x,y) = \sqrt{x} + 8\sqrt{y}$*이 정의된다고 할 때, 그 최댓값을 찾아라.*

f가 정의되는 원의 영역은 원에서 $x \geq 0, y \geq 0$인 부분이다. 따라서 유계닫힌집합이므로, 연속함수 f는 여기서 최댓값과 최솟값을 가진다. 라그랑주 승수법을 이용하면

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 2\lambda x \\ \dfrac{4}{\sqrt{y}} = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases}$$

을 만족하는 (x, y, λ)를 찾아야 한다. 식을 연립하게 되면 $y^{3/2} = 8x^{3/2}$이므로 $y = 4x$이고, 결론적으로 $(1,4)$가 원하는 점이 된다. 그런데 f가 정의되는 영역은 열린 구간이 아니게 되어 버리므로, 우리는 라그랑주 승수법에서 제외된 원호의 끝 점인 $(\sqrt{17}, 0)$과 $(0, \sqrt{17})$ 역시 보아야 한다. 세 점에서 각각 f의 값을 구해줄 경우, 최대는 $(1,4)$일 때의 값인 17이다.

1-2(2). 50. $\alpha + \beta + \gamma = \pi$*일 때,* $f(\alpha, \beta, \gamma) = \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$*의 최댓값이 존재한다고 알려져 있다. 최댓값을 구하여라.*

최댓값이 존재함이 주어져 있으므로 존재성에 대한 논의를 해줄 필요는 없다. 라그랑주 승수법을 이용하면

$$\begin{cases} \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma = \lambda \\ \sin\alpha \cos\beta \sin\gamma = \lambda \\ \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma = \lambda \\ \alpha + \beta + \gamma = \pi \end{cases}$$

의 근을 찾아 주어야 한다. 첫째 식과 둘째 식을 연립할 경우 $\cos\alpha \sin\beta = \sin\alpha \cos\beta$이거나 $\sin\gamma = 0$이어야 한다. 그러나 이때 $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$일 때 f는 양수이므로, $\sin\gamma = 0$인 경우는 f를 0으로 만들기에 고려해줄

필요가 없다. 따라서 앞선 경우만 고려하면

$$\sin(\alpha - \beta) = 0$$

이 될 것이다. 동일한 방식으로 모든 경우에 대해 수행하면,

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\beta - \gamma) = \sin(\gamma - \alpha) = 0$$

이 되어야 한다. 이를 만족시키고 제한 조건을 만족시키기 위해서는,

$$\sin(\alpha) = \sin(\beta) = \sin(\gamma) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이면 된다. 따라서 최댓값은 이를 따를 때의 $3\sqrt{3}/8$이다.