8.7 연습문제

문제 8. 1. *R은 $y=0$과 $y=\sqrt{1-x^2}$에 의해 둘러싸인 영역이다. R을 $y=x-1$로 돌렸을 때 얻어지는 입체의 부피를 구하시오.*

$y=\sqrt{1-x^2}$는 $y=x-1$을 기준으로 항상 위쪽에 있다. 그러면 배운 공식을 이용하여 회전시킬 때 입체의 부피는

$$V_1=\frac{\pi}{(1+1^2)^{3/2}}\int_{-1}^{1}[\sqrt{1-x^2}-x+1]^2\left[1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]dx=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_{\pi}^{0}[\sin t-\cos t+1]^2\left[1-\frac{\cos t}{\sin t}\right]\cdot(-\sin t)dt$$

처럼 주어진다. 이때 $x=\cos t$로 치환한 것이다. 이를 추가적으로 정리하면

$$V_1=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^{\pi}[\sin t-\cos t+1]^2[\sin t-\cos t]dt$$

이다.

$$\int_0^{\pi}\sin^2 t\cos t dt=\left[\frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^{\pi}=0$$
$$\int_0^{\pi}\cos^2 t\sin t dt=\left[-\frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{\pi}=\frac{2}{3}$$
$$\int_0^{\pi}\sin^2 t dt=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\left[\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$
$$\int_0^{\pi}\cos^2 t dt=\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$
$$\int_0^{\pi}\sin t\cos t dt=\left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^{\pi}=0$$

임에 따라

$$V_1=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(4+\frac{4}{3}+\pi+\pi\right)=\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi^2$$

이다. 그런데 우리는 R이 돌려진 입체의 부피를 구하고 싶으므로, 같은 구간에서 $y=0$을 돌렸을 때 얻어지는 입체의 부피를 빼 주어야 한다. 이는 반지름과 높이가 $\sqrt{2}$인 원뿔의 부피와 같다.

$$V_2=\pi\times\frac{1}{3}\times(\sqrt{2})^3=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$$

그러므로 원하는 부피는

$$V=V_1-V_2=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi^2$$

이다.

혹은 파푸스 정리를 이용하여도 괜찮다. 먼저 R의 넓이는 $\frac{1}{2}\pi$임을 받아들일 수 있다. 또한 $\bar{x}=0$임을 대칭성에서 안다.

$$\bar{y}=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1-x^2)dx=\frac{4}{3\pi}$$

이며, 원하는 직선까지의 거리는

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{4}{3\pi}+1\right)$$

이므로 부피는

$$2\pi\cdot\frac{1}{2}\pi\cdot\left(\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi^2$$

문제 8. 2. *$y = \sqrt{1-x^2}$를 $0 \le x \le \frac{1}{2}$에서 x축으로 회전시킬 때, 회전체의 표면적을 구하시오.*

$$S = \int_0^{1/2} 2\pi\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}dx = \int_0^{1/2} 2\pi dx = \pi$$

문제 8. 3. *$\bar{x}$를 $a \le x \le b$에서 $y = f(x) \ge 0$의 그래프 아래에 있는 영역의 centroid가 갖는 x좌표라 하자. 이때*

$$\int_a^b (cx+d)f(x)dx = (c\bar{x}+d)\int_a^b f(x)dx$$

임을 보여라.

$$\begin{aligned}\int_a^b (cx+d)f(x)dx &= c\int_a^b xf(x)dx + d\int_a^b f(x)dx \\ &= c \times \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx} \times \int_a^b f(x)dx + d\int_a^b f(x)dx \\ &= c\bar{x}\int_a^b f(x)dx + d\int_a^b f(x)dx \\ &= (c\bar{x}+d)\int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

문제 8. 4. *두 그래프 $y = x^3 - x$와 $y = 1 - x^4$로 둘러싸인 영역의 centroid를 구하여라.*

두 그래프의 교점을 먼저 보면, $x^3 - x = 1 - x^4$에서 $x^4 + x^3 - x - 1 = 0$이므로 $(x+1)(x-1)(x^2+x+1) = 0$이고 $x = -1, 1$에서 교점이 생긴다. centroid는

$$A = \int_{-1}^{1}(1-x^4-x^3+x)dx = \frac{8}{5}$$

$$\bar{x} = \frac{5}{8}\int_{-1}^{1} x(1-x^4-x^3+x)dx = \frac{1}{6}$$

$$\bar{y} = \frac{5}{8}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1-x^4-x^3+x)^2dx = \frac{31}{63}$$

임을 알 수 있다.

문제 8. 5. *$\mathcal{R}$은 $-1 \le x \le 1$과 $2 \le y \le 4$에 의해 둘러싸인 직사각형 영역이다. 이를 $3x - 4y = 0$을 기준으로 회전시켰을 때 얻어지는 입체의 부피를 구하여라.*

도형의 모양이 공식을 막무가내로 대입하기에는 꽤 까다롭다. 그림을 그려보면 알 수 있듯이 네 개의 그래프가 합쳐져 있기 때문이다. 기본적으로는 원뿔대 두 개를 합친 후, 작은 원뿔대 두 개를 뺌으로써 답을 구하고자 한다. 점 (a, b)에서 $3x - 4y = 0$에 내린 수선의 발을 $(4t, 3t)$라고 하자. 그러면

$$\frac{a-4t}{b-3t} = -\frac{4}{3}$$

이어야 하므로

$$-3a + 12t = 4b - 12t$$

이고,

$$t = \frac{1}{8}a + \frac{1}{6}b$$

임을 알 수 있다. 수선의 길이는

$$\frac{4}{5}(b-\frac{3}{4}a)=\frac{4}{5}b-\frac{3}{5}a$$

이다. 이렇게 네 원뿔대들을 잘 정의해 길이를 구하고, 부피를 구하여 계산할 수도 있다. 그러나 이는 너무 오래 걸리기도 하고, 계산 과정에서 오류가 생길 수도 있다. 다만, 정답은 $\frac{96}{5}\pi$이다.

혹은 파푸스의 정리를 사용해도 무방하다. 도형의 면적은 4이다. centroid인 $(0,3)$에서 $3x-4y=0$에 내린 수선의 길이는 $\frac{12}{5}$이다. 따라서 부피는

$$2\pi\cdot\frac{12}{5}\cdot 4=\frac{96}{5}\pi$$

이다.

문제 8. 6. *x축보다는 위에 있고, $y=1-x^n$보다는 아래에 있는 영역의 centroid를 구하여라. 이때, n은 양의 짝수라고 하자. 만약 $n\to\infty$라면, centroid는 어디로 수렴하는가?*

$$A=\int_{-1}^{1}1-x^n dx=\frac{2n}{n+1}$$

$$\bar{x}=\frac{n+1}{2n}\int_{-1}^{1}x(1-x^n)dx=0$$

$$\bar{y}=\frac{n+1}{2n}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1-x^n)^2dx=\frac{n+1}{2n}\left(1-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$$

이므로 $n\to\infty$라면 centroid는 $(0,\frac{1}{2})$으로 수렴한다. 그림을 그려보면 이를 더욱 명확하게 납득할 수 있을 것이다. 왜냐하면 영역의 모양이 직사각형에 점점 유사해질 것이기 때문이다.

문제 8. 7. *$y=\frac{1}{2}x$를 축으로 하여 $0\le y\le\sqrt{5-x^2}$, $0\le x\le 1$로 표현되는 영역을 회전시킬 때, 표면적을 구하시오.*

공식을 사용하여 표면적을 구하자.

$$S=\frac{2\pi}{1+m^2}\int_0^1\left[\sqrt{5-x^2}-\frac{1}{2}x\right]\left[1-\frac{x}{2\sqrt{5-x^2}}\right]\sqrt{1+\frac{x^2}{5-x^2}}dx$$

여기서 수월한 계산을 위해 $x=\sqrt{5}\cos t$로 치환하며, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$라고 한다면

$$S=\frac{2\pi}{1+m^2}\int_{\alpha}^{\pi/2}\left[\sqrt{5}\sin t-\frac{\sqrt{5}}{2}\cos t\right]\left[1-\frac{1}{2}\cot t\right]\cot t\cdot\sqrt{5}\sin tdt$$

$$\begin{aligned}
S&=\frac{5\pi}{1+m^2}\int_{\alpha}^{\pi/2}[2\sin t-\cos t][2-\cot t]\cos tdt\\
&=\frac{5\pi}{1+m^2}\int_{\alpha}^{\pi/2}4\sin t\cos t-4\cos^2 t+\frac{\cos^3 t}{\sin t}dt\\
&=\frac{5\pi}{1+m^2}\int_{\alpha}^{\pi/2}2\sin 2t-2-2\cos 2tdt+\frac{5\pi}{1+m^2}\int_{\frac{2}{\sqrt{5}}}^{1}\frac{1-u^2}{u}du\quad(u=\sin t)\\
&=4\pi[-2t-\sin 2t-\cos 2t]_{\alpha}^{\pi/2}+4\pi\left[\ln u-\frac{1}{2}u^2\right]_{2/\sqrt{5}}^{1}\\
&=4\pi(-\pi+1+2\alpha+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)+4\pi\ln\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)-2\pi+\frac{8}{5}\pi
\end{aligned}$$

임을 얻을 수 있다.

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{3}{5}$$

이므로 구하는 표면적은

$$8\sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\pi + \frac{22}{5}\pi + 4\ln\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\pi - 4\pi^2$$

임을 알 수 있다.

문제 8. 8. *한 변의 길이가 10인 정사각형을 잘라, 오른쪽 아래 꼭짓점만을 포함하는 넓이가 30인 직각삼각형과 나머지 부분으로 나누었다. 이때 나머지 부분의 centroid는 나머지 부분에 온전하게 남아있는 두 변 중 왼쪽 변에 4만큼의 거리로 떨어져 있다고 한다. 그렇다면 centroid는 위쪽 변과는 얼마만큼의 거리를 가지겠는가?*

왼쪽 아래 변이 $(0,0)$이라고 하며 이 정사각형이 x, y축에 접하게 놓여 있다고 하자. 나머지 부분의 centroid를 $(4, a)$라고 하자. 그리고 잘린 직각삼각형 부분의 centroid를 (b, c)라고 하자. 그런데 전체 직사각형의 centroid는 $(5,5)$임을 알고 있다. centroid를 질량중심처럼 바라본다면, 각 질량이 70, 30인 점질량 두 개의 질량중심이 $(5,5)$여야 한다. 따라서

$$4 \times 0.7 + b \times 0.3 = 5$$

로부터 $b = \frac{22}{3}$을 얻는다. 한편

$$a \times 0.7 + c \times 0.3 = 5$$

임도 안다. 직각삼각형의 centroid는 오른쪽 변으로부터 $\frac{8}{3}$만큼 떨어져 있고, 무게중심의 성질에 의해 빗면의 중심은 오른쪽 변으로부터 4만큼 떨어져 있게 된다. 따라서 직각삼각형의 아랫변의 길이는 8, 윗변의 길이는 $\frac{15}{2}$임을 확인해줄 수 있고 이에 따라 $10 - c = \frac{15}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{2}$이다. 그러므로 $a = \frac{85}{14}$이다. 따라서 centroid는 위쪽 변과는 $\frac{55}{14}$ 만큼 떨어져 있다.

문제 8. 9. *$y = \frac{1}{x^2+1}$, $y = 0, x = 0, x = 1$로 둘러싸인 영역의 centroid를 구하여라.*

$$A = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{A}\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx \\ &= \frac{2}{\pi}[\ln(x^2+1)]_0^1 = \frac{2\ln 2}{\pi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{A}\int_0^1 \frac{1}{2(x^2+1)^2}dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/4} \cos^4 t \sec^2 t dt \quad (x = \tan t) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/4} \cos 2t + 1 dt = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\end{aligned}$$

문제 8. 10. *$y^2 = x^3 - x^4$으로 주어지는 곡선을 생각하자. 이 곡선에 의해 생성되는 닫힌 영역의 centroid를 구하여라.*

영역은 $y = \sqrt{x^3 - x^4}$과 $y = -\sqrt{x^3 - x^4}$에 의하여 $(0, 1)$ 사이에서 이루어진다. 따라서

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 2\sqrt{x^3 - x^4}dx \\
&= \int_0^1 2x\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}dx \\
&= \int_0^1 x\sqrt{1 - (2x-1)^2}dx \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin t + 1}{2}\cos t \cdot \frac{\cos t}{2}dt \quad (\sin t = 2x - 1) \\
&= \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t + \cos^2 t \sin t dt \\
&= \frac{1}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 + \cos 2t dt \quad (\cos^2 t \sin t\text{는 } t = 0\text{을 기준으로 점대칭}) \\
&= \frac{1}{8}\pi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{A}\int_0^1 2x\sqrt{x^3 - x^4}dx \\
&= \frac{16}{\pi}\int_0^1 x^2\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}dx \\
&= \frac{8}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(\sin t + 1)^2}{4}\cos t \cdot \frac{\cos t}{2}dt \quad (\sin t = 2x - 1) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 t\cos^2 t + 2\cos^2 t\sin t + \cos^2 t dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^2 2t}{4} + \frac{1 + \cos 2t}{2}dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{3}{4} - \frac{1}{8}\cos 4t + \frac{1}{2}\cos 2t dt \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_0^1 0dx = 0$$

임을 알 수 있다.

문제 8. 11. *$y^2 = x^3 - x^4$으로 주어지는 곡선을 생각하자. 이 곡선에 의해 생성되는 닫힌 영역을 $(0, 1)$을 지나는 어떤 직선 l에 대해 회전시켰다. l이 양의 기울기를 가진다고 할 때, 회전체의 최대 부피를 구하여라.*

영역의 넓이는 $\frac{1}{8}\pi$으로 고정되어 있다. 파푸스의 정리에 의해 회전체의 최대 부피는 centroid에서 직선에 내린 수선의 발의 길이에 의존하게 된다. 직선을 $y = mx + 1$이라고 하며, $m > 0$이라 할 때, centroid $(\frac{3}{4}, 0)$에서 내린 수선의 발이 $(t, mt + 1)$이라면

$$\frac{mt + 1}{t - \frac{3}{4}} = -\frac{1}{m}$$

이므로

$$m^2 t + m = \frac{3}{4} - t$$

에서

$$t = \frac{\frac{3}{4} - m}{1 + m^2}$$

을 얻는다. 수선의 길이는

$$\sqrt{\left(\frac{3}{4} - t\right)^2 + (mt+1)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}\left(\frac{3}{4} - t\right) = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\left(\frac{3m^2 + 4m}{4(1+m^2)}\right) = \frac{3m+4}{4\sqrt{1+m^2}}$$

이다. 이를 m에 대해 미분하면

$$\frac{12\sqrt{1+m^2} - (3m+4)\frac{4m}{\sqrt{1+m^2}}}{16(1+m^2)} = \frac{3(1+m^2) - 3m^2 - 4m}{4(1+m^2)^{3/2}} = \frac{3 - 4m}{4(1+m^2)^{3/2}}$$

이므로, $m = \frac{3}{4}$에서 최대가 됨을 알 수 있다. 이 때의 수선의 길이는 $\frac{5}{4}$이므로, 파푸스의 정리에 의해

$$\frac{1}{8}\pi \cdot \frac{5}{4} \cdot 2\pi = \frac{5}{16}\pi^2$$

이 최댓값이다.

문제 8. 12. *$f(t)$가 $[0,1]$에서의 differentiable function이고 $f(0) = 0, f(1) = 1$이다. 또한 $f'(t) \geq 0$이 $t \in (0,1)$에서 성립한다. 아래 부등식이 성립함을 보여라.*

$$\sqrt{2} \leq \int_0^1 \sqrt{1 + [f'(t)]^2}dt \leq 2$$

함수 f의 곡선은 $(0,0)$과 $(1,1)$을 이으며, 중간의 적분식은 둘 사이를 잇는 곡선의 길이다. 이는 둘 사이를 잇는 직선의 길이인 $\sqrt{2}$보다는 길면서, 증가하는 직선이므로 계단식으로 가는 길이인 2보다는 짧다. 이것이 직관적으로 나타나는 부등식이다. 2보다 작음을 조금 더 명확하게 보여주자. 우리가 곡선의 길이를 구할 때 $x_1, x_2, \cdots, x_n$을 잡아준 다음 $|P_{i-1}P_i|$의 합으로써 곡선의 길이를 근사하였었다. $f'(t) \geq 0$이라는 것은 $\Delta x > 0$일 때 $\Delta y = f(x_i) - f(x_{i-1}) > 0$임을 의미한다. 따라서 삼각부등식에 의하여

$$|P_{i-1}P_i| \leq \Delta x + \Delta y$$

이며,

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\Delta x + \Delta y) = \lim_{n\to\infty}(1+1) = 2$$

가 성립한다.

문제 8. 13. *X가 continuous random variable일 때,*

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

라고 한다. $f(x)$가 probability density function이 될 수 있음을 보이고, 그 cumulative distribution function 을 구하여라.

먼저 모든 x에서 $f(x)$는 nonnegative임이 확실하다. 또한

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\infty} xe^{-x}dx = [(-x-1)e^{-x}]_0^{\infty} = 1$$

이므로, $f(x)$는 pdf로 잘 기능할 수 있다. 또한, cumulative distribution function은

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 1-(x+1)e^{-x} & (x \geq 0) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

으로 설정할 수 있다.

문제 8. 14. *X가 continuous random variable일 때, 그 probability density function이다.*

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

라고 한다. $Y = X^2$으로 새로운 random variable Y를 정의할 때 Y의 probability density function을 구하고, X, Y의 expectation과 variance를 구하여라.

Y에 대하여 cdf를 먼저 구해볼 때, $a \geq 0$에 대하여

$$\begin{aligned} P(Y \leq a) &= P(X^2 \leq a) \\ &= P(-\sqrt{a} \leq X \leq \sqrt{a}) \\ &= \int_0^{\sqrt{a}} xe^{-x}dx \\ &= [(-x-1)e^{-x}]_0^{\sqrt{a}} \\ &= 1-(\sqrt{a}+1)e^{-\sqrt{a}} \end{aligned}$$

이므로 Y의 pdf는

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\sqrt{y}} & (y \geq 0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

처럼 주어짐을 알 수 있다.

$$E[X] = \int_0^{\infty} x^2e^{-x}dx = [(-x^2-2x-2)e^{-x}]_0^{\infty} = 2$$

$$Var(X) = \int_0^{\infty} (x-2)^2e^{-x}dx = \int_0^{\infty} x^3e^{-x}dx - 4 = [(-x^3-3x^2-6x-6)e^{-x}]_0^{\infty} - 4 = 6-4 = 2$$

이며,

$$E[Y] = E[X^2] = Var(X) + (E[X])^2 = 6$$

$$Var(Y) = \int_0^{\infty} \frac{1}{2}y^2e^{-\sqrt{y}}dy - 36$$

이다. 이때,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} y^2e^{-\sqrt{y}}dy &= \int_0^{\infty} t^4e^{-t} \cdot 2tdt \quad (t = \sqrt{y}) \\ &= 2[(-t^5-5t^4-20t^3-60t^2-120t-120)e^{-t}]_0^{\infty} = 240 \end{aligned}$$

이므로

$$Var(Y) = 120-36 = 84$$

문제 8. 15. *영역*

$$S = \{(x,y) | x \geq 0, y \leq x^2+y^2 \leq 4y\}$$

의 centroid를 구하여라.

식을 조금 더 정리하면

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4}$$

이면서

$$x^2 + (y-2)^2 \leq 4$$

여야 한다. 즉 영역은 두 원 사이에 있는 영역 중 $x \geq 0$인 영역이나 마찬가지이다. 반원의 무게중심에 대한 논의는 이미 많이 수행했었는데, $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ 형태의 그래프와 x축에 의해 만들어지는 반원의 무게중심은 반원 지름의 중심에서 $\frac{4r}{3\pi}$만큼 떨어져 있다. 작은 반원의 무게중심은 $(\frac{2}{3\pi}, \frac{1}{2})$이며 면적은 $\frac{1}{8}\pi$이다. 큰 반원의 무게중심은 $(\frac{8}{3\pi}, 2)$이며 면적은 2π이다. 원하는 영역의 centroid를 (a, b)라고 한다면, 아래 두 등식이 성립한다.

$$a \times \frac{15}{8}\pi + \frac{2}{3\pi} \times \frac{1}{8}\pi = \frac{8}{3\pi} \times 2\pi$$

$$b \times \frac{15}{8}\pi + \frac{1}{2} \times \frac{1}{8}\pi = 2 \times 2\pi$$

따라서 $a = \frac{14}{5\pi}, b = \frac{21}{10}$이다.

문제 8. 16. *random variable X가 아래의 probability density function을 가진다.*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{4}x + k & 1 < x \leq 3 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

이때 k, $E[X], Var(X)$를 구하시오.

probability density function의 정의에 따라

$$\int_0^3 f(x)dx = \frac{1}{2} + \int_1^3 -\frac{1}{4}x + kdx = 1$$

이어야 하므로,

$$2k - 1 = \frac{1}{2}$$

이며, $k = \frac{3}{4}$이다.

$$E[X] = \int_0^1 x \cdot \frac{1}{2}dx + \int_1^3 -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}xdx = \frac{1}{4} - \frac{13}{6} + 3 = \frac{13}{12}$$

$$E[X^2] = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2dx + \int_1^3 -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2dx = \frac{1}{6} - 5 + \frac{13}{2} = \frac{5}{3}$$

$$Var(X) = \frac{5}{3} - \frac{169}{144} = \frac{71}{144}$$

문제 8. 17. *곡선 $y = \frac{x^4}{16} + \frac{1}{2x^2}$을 $1 \leq x \leq 2$의 범위에서 x축을 기준으로 회전시켰을 때, 회전체의 표면적을 구하여라.*

$$\begin{aligned}
S &= \int_1^2 2\pi \cdot \left[\frac{x^4}{16} + \frac{1}{2x^2}\right] \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{x^3}{4} - \frac{1}{x^3}\right)^2} dx \\
&= \frac{1}{8}\pi \int_1^2 (x^4 + 8x^{-2}) \cdot \left(\frac{x^3}{4} + \frac{1}{x^3}\right) dx \\
&= \frac{1}{32}\pi \int_1^2 x^7 + 8x + 4x + 32x^{-5} dx \\
&= \frac{\pi}{32}\left(\frac{255}{8} + 18 + 8 - \frac{1}{2}\right) = \frac{459}{256}\pi
\end{aligned}$$

문제 8. 18. *median은 continuous random variable X의 $E[|X-c|]$를 최소화하는 c의 값임을 보여라. 단, X의 cumulative distribution function F와 probability density function f는 continuous이다.*

$$\begin{aligned}
E[|X-c|] &= \int_{-\infty}^{\infty} |x-c| f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{c} (c-x)f(x)dx + \int_c^{\infty} (x-c)f(x)dx \\
&= c - 2c\int_c^{\infty} f(x)dx - \int_{-\infty}^{c} xf(x)dx + \int_c^{\infty} xf(x)dx
\end{aligned}$$

이므로, c로 미분할 경우

$$1 - 2(1 - F(c)) + 2cf(c) - 2cf(c) = 2F(c) - 1$$

을 얻는다. 따라서 이는 $F(c) = 0.5$일 때, 즉 c가 median일 때 최소화됨을 알 수 있다.

문제 8. 19. *양의 정수 n에 대하여 $y = x^n$과 $y = 0, x = 1$으로 둘러싸인 영역의 centroid를 $(\overline{x_n}, \overline{y_n})$라고 하자.*

$$\lim_{n\to\infty} \overline{y_n} - \overline{x_n}$$

을 구하여라.

$$A_n = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

$$\overline{x_n} = (n+1)\int_0^1 x^{n+1}dx = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\overline{y_n} = (n+1)\int_0^1 \frac{1}{2}x^{2n}dx = \frac{n+1}{4n+2}$$

이므로,

$$\lim_{n\to\infty} \overline{y_n} - \overline{x_n} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

문제 8. 20. *random variable X는 오직 1, 2, 3만을 값으로 가진다고 한다. 만약 $E[X] = 2$라면, $Var(X)$를 최소화시키는 $p_i = P\{X = i\}$의 값은 각각 어떻게 될 것인가? $Var(X)$를 최대화시키려면 어떻게 해야 할까?*

자세한 설명은 생략한다. $Var(X)$가 가질 수 있는 최솟값인 0을 $p_1 = 0, p_2 = 1, p_3 = 0$일 때 얻어낼 수 있다. 한편 $Var(X)$를 최대화하려면, $p_1 = p_3 = \frac{1}{2}, p_2 = 0$이어야 한다.

문제 8. 21. *인기 예능 신서유기에서는 n명의 멤버를 데리고 90년대 노래 퀴즈를 진행한다. 각각이 정답을 맞출 확률은 p이며, 각자의 결과에 독립적이다. 나PD는 최소 반 이상이 정답을 맞췄을 때 식사를 제공하기로 했다. 이때 식사를 제공받으면 $X_p = 1$, 제공받지 못하면 $X_p = 0$이라 하자. 즉 X_p는 식사 제공에 대한 indicator variable이다.*

1) p가 어느 값 이상이어야 5명의 멤버가 도전했을 때 3명의 멤버가 도전했을 때보다 더 성공 확률이 높을 것인가?

2) p가 어느 값 이상이어야 $2k+1$명의 멤버가 도전했을 때 $2k-1$명의 멤버가 도전했을 때보다 $E[X_p]$가 더 높을 것인가?

(1) 5명의 멤버가 도전했을 때의 성공 확률은

$$p^5 + 5p^4(1-p) + 10p^3(1-p)^2 = p^3(p^2 + 5p - 5p^2 + 10 - 20p + 10p^2) = p^3(6p^2 - 15p + 10)$$

이며, 3명의 멤버가 도전했을 때의 성공 확률은

$$p^3 + 3p^2(1-p) = p^2(3-2p)$$

이다. 앞의 확률이 뒤의 확률보다 큰 것은

$$6p^3 - 15p^2 + 12p - 3 = 3(2p-1)(p-1)^2 \geq 0$$

과 동치이며, $p > \frac{1}{2}$일 때가 원하는 상황이다.

(2) indicator variable의 expectation은 그 사건이 발생할 확률과 동일하다.

$2k+1$명의 멤버가 도전했을 때, $k+2$명 이상이 성공할 확률을 x_k, $k+1$명 성공했을 확률을 y_k, k명 성공했을 확률을 z_k라고 하자.

$2k+1$명의 멤버가 도전할 때, 먼저 $2k-1$명이 시도하여 결과가 나오고 나머지 두 명을 남겨둔 상태라고 생각하자. 만약 x_{k-1}의 확률로 $k+1$명 이상 성공했을 경우에는 남은 두 명의 결과와 관계 없이 성공한다. 만약 y_{k-1}의 확률로 k명만 성공했을 경우에는, 나머지 두 번의 시행에서 적어도 한 번은 성공해야 하며 그 확률은 $1-(1-p)^2$이다. 만약 z_{k-1}의 확률로 $k-1$명 성공했을 때는, 나머지 두 번의 시행에서 모두 성공해야 하며 그 확률은 p^2이다. 그 외의 경우에는 성공이 불가능하다. 따라서,

$$\begin{aligned}
x_k + y_k &= x_{k-1} + (2p - p^2)y_{k-1} + p^2 z_{k-1} \\
&= x_{k-1} + (2p-p^2)\binom{2k-1}{k}p^k(1-p)^{k-1} + p^2\binom{2k-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^k \\
&= x_{k-1} + (2p^2 - p^3 + p^2 - p^3)\binom{2k-1}{k}p^{k-1}(1-p)^{k-1} \\
&= (x_{k-1} + y_{k-1}) + (3p^2 - 2p^3)\binom{2k-1}{k}p^{k-1}(1-p)^{k-1} - p\binom{2k-1}{k}p^{k-1}(1-p)^{k-1} \\
&= (x_{k-1} + y_{k-1}) + (-2p^2 + 3p - 1)\binom{2k-1}{k}p^k(1-p)^{k-1}
\end{aligned}$$

임을 확인할 수 있다. $x_k + y_k$가 성공 확률이므로, $(-2p^2+3p-1)\binom{2k-1}{k}p^k(1-p)^{k-1}$가 양수여야 문제의 조건을 만족한다. 따라서, 1)에서 구한 것처럼 그 범위는 $p > 1/2$이다.

문제 8. 22. *나PD는 다음 게임으로 n명의 멤버들을 방에 불러 두고 그들의 모자를 모두 모아 섞었다. 그 다음, 연장자 순으로 무작위의 모자를 고르고 가져갔다. X를 자신의 모자를 되찾은 멤버의 수라고 하자. $E[X] = 1$임을 보여라.*

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{i번째 사람이 자신의 모자를 되찾은 경우} \\ 0 & \text{그렇지 못한 경우} \end{cases}$$

라고 두면,
$X = X_1 + X_2 + ... + X_n$이다. i번째 사람의 모자를 N명의 사람들이 모두 동일한 확률로 가져갈 수 있으므로 $P(X_i = 1) = \frac{1}{N}$이다. 이로부터 $E[X_i] = \frac{1}{N}$임을 알 수 있다. 따라서 $E[X] = E[X_1]+E[X_2]+...+E[X_n] = 1$.

문제 8. 23. *배구선수 김연경의 리시브효율은 p이며, 연달아서 서브를 계속 받고 있다. 또한, 각 서브리시브의 성공확률인 p는 이전/이후 서브 시도의 영향을 받지 않는다. random variable X를 성공까지 필요한 시도 횟수라고 하자. 즉, X가 k라는 말은 $k-1$번의 리시브 실패 후 k번째 서브를 잘 받아냈다는 것을 의미한다.*

X의 expectation은 얼마인가?

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

가 양의 정수 k에 대해 성립함을 쉽게 알아낼 수 있다.

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = \sum_{j=1}^{\infty} p(1-p)^{j-1} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{p}$$

문제 8. 24. *평소 연습량이 많은 김연경 선수는 r번의 성공을 얻기 전까지 리시브 훈련을 계속한다. 이처럼, 특정 성공 횟수를 얻기 위한 시행의 수를 Y라고 할 때, Y는* ***negative geometric distribution****을 따른다고 한다.*

1) $k = r, r+1, \cdots$에 대하여 $P(Y = k)$을 구하여라.

2) $E[Y] = r/p$임을 보여라.

1) k번째 실험에서 r번의 성공을 얻기 위해서는 $k-1$번째 실험까지 $r-1$번의 성공이 있어야 한다. $k-1$번째 실험까지 $r-1$번의 성공이 있을 확률은 ${}_{k-1}C_{r-1}p^{r-1}(1-p)^{k-r}$이고 k번째 실험에서 성공할 확률은 p이므로

$$P(Y = k) =_{k-1} C_{r-1}p^r(1-p)^{k-r}$$

2)

$$\begin{aligned} E[Y] &= \sum_{k=r}^{\infty} k_{k-1}C_{r-1}p^r(1-p)^{k-r} \\ &= \sum_{k=r}^{\infty} r_kC_rp^r(1-p)^{k-r} \\ &= \frac{r}{p} \cdot \sum_{k+1=r+1}^{\infty} {}_{(k+1)-1}C_{(r+1)-1}p^{(r+1)}(1-p)^{(k+1)-(r+1)} = \frac{r}{p} \end{aligned}$$

이때 마지막 등호는, $r+1$번의 성공을 얻기 위해 훈련을 진행할 때의 probability mass function들의 합이기에 값이 1이다.

문제 8. 25. *continuous random variable X에 대하여, $E[X]$가 존재한다고 가정하자.*

$$E[X] = \int_0^{\infty} P(X > x)dx - \int_0^{\infty} P(X < -x)dx$$

임을 보여라. 단, $E(X)$가 존재하면 $\lim_{t\to\infty} tF(-t) = 0$ 임은 증명 없이 사용해도 괜찮다.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \\
&= \lim_{t\to\infty}\lim_{s\to\infty}[xF(x)]_0^s - \int_0^s F(x)dx + [xF(x)]_{-t}^0 + \int_{-t}^0 F(x)dx \\
&= \lim_{t\to\infty}\lim_{s\to\infty} sF(s) - \int_0^s P(X>x)dx - s + tF(-t) + \int_{-t}^0 P(X<x)dx \\
&= \lim_{t\to\infty}\lim_{s\to\infty} s(F(s)-1) + tF(-t) + \int_0^s P(X>x)dx + \int_0^t P(X<-x)dx
\end{aligned}$$

그런데, $E(X)$가 존재한다면 $\lim_{t\to\infty} tF(-t) = 0$임을 알고 있다. 이를 잘 응용하면 $\lim_{s\to\infty} s(F(s)-1) = 0$ 역시도 동치임을 확인할 수 있다. 따라서, 극한을 이상적분 형태로 다시 바꿔주면

$$E[X] = \int_0^\infty P(X>x)dx - \int_0^\infty P(X<-x)dx$$

문제 8. 26. *X가 continuous random variable이며, $a \le X \le b$이고 $E[X] = \mu$라고 하자.*
(1) $a \le \mu \le b$임을 보여라.
(2) $V(X) \le \frac{1}{4}(b-a)^2$ 임을 보여라.

(1)

$$E(X) = \int_a^b xf(x)dx$$

이다. 이때, $f(x)$는 X의 probability density function이다. 그런데, $a \le x \le b$이므로

$$a\int_a^b f(x)dx \le E(X) \le b\int_a^b f(x)dx)$$

이며, $f(x)$는 probability density function이므로 적분값이 1이다. 따라서,

$$a \le \mu \le b$$

임을 알 수 있다.

(2)

$$\int_a^b (x-a)(b-x)f(x)dx$$

는 피적분함수가 항상 양수이므로 양수이다. 이를 잘 풀어내면,

$$\int_a^b (x-a)(b-x)f(x)dx = -\int_a^b x^2 f(x)dx + (a+b)\int_a^b xf(x)dx - ab\int_a^b f(x)dx = -E(X^2) + (a+b)\mu - ab$$

이다. 그러니

$$\begin{aligned}
Var(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\
&= -\int_a^b (x-a)(b-x)f(x)dx - \mu^2 + (a+b)\mu - ab \\
&\le -\mu^2 + (a+b)\mu - ab \\
&= -(\mu - \frac{a+b}{2})^2 + \frac{1}{4}(b-a)^2
\end{aligned}$$

임을 확인할 수 있다.

문제 8. 27. *소방서가 수직선 위에 있다. 불의 위치가* $f(x)$*라는 probability density function을 가진 random variable에 따라 분포해 있으며,* $\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)dx < \infty$*를 만족한다고 하자. 그렇다면, 불로부터 소방서 사이의 거리의 expectation을 최소화할 수 있는 소방서의 위치는 어디인가?*

소방서의 거리가 a라고 하자. 그러면 소방서의 위치는

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x-a|f(x)dx$$

의 값을 최소화시키는 a이다. $|x-a| \leq |x|+|a|$이므로,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x-a|f(x)dx \leq \int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty}|a|f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)dx + |a| < \infty$$

임 역시 확인해줄 수 있다. 그런 a의 자리를 찾아보자. a로 식을 미분하게 된다면,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{da}\int_{-\infty}^{\infty}|x-a|f(x)dx &= \frac{d}{da}\int_{-\infty}^{a}(a-x)f(x)dx + \frac{d}{da}\int_{a}^{\infty}(x-a)f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{a}f(x)dx - af(a) + af(a) - af(a) + af(a) - \int_{a}^{\infty}f(x)dx \\
&= 2F(a) - 1
\end{aligned}$$

이다. 따라서, $F(a) = 0.5$일 때 이것이 최소가 됨을 알 수 있다. 즉, 소방서는 $F(x) = 0.5$가 되는 점에 설치해야 한다.

문제 8. 28. *random variable* R*은*

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$$

이라는 probability density function을 가질 때 Rayleigh distribution이라고 부른다. $E[R]$*을* σ*를 이용해 표현하여라.*

단, $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$*임을 이용하여도 좋다.*

$$\begin{aligned}
E[R] &= \int_{-\infty}^{\infty}rf_R(r)dr \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}r^2e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}dr \\
&= \sigma\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt \quad \left(t = \frac{r}{\sigma}\right) \\
&= \sigma\left([-te^{-\frac{t^2}{2}}]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma
\end{aligned}$$

문제 8. 29. $X_1, X_2, \cdots, X_n$*은 독립인 random variable이며, 그들의 probability density function은 모두*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

라고 하자. $M = max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$*이라고 정의할 때,* M*의 probability density function를 구하여라. 이때 random variable끼리 독립이라는 것은, 각 random variable이 특정한 값을 가질 확률이 다른 random variable이 어떤 값을 가지는지에 무관하다는 것이다.*

$0 \le a \le 1$에 대하여

$$P(M \le a) = P(X_1 \le a, \cdots, X_n \le a) = P(X_1 \le a) \times \cdots \times P(X_n \le a) = \left(\int_0^a 1dx \right)^n = a^n$$

임을 알 수 있다. 한편 $a > 1$이면 $P(M \le a) = 1$이고 $a < 0$이면 $P(M \le 0) = 0$이다. 따라서 M의 probability density function은 이를 미분한

$$g(x) = \begin{cases} nx^{n-1} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

임을 알 수 있다.

문제 8. 30. *$X_1, X_2, \cdots$는 독립이며 동일한 probability density function를 가지는 continuous random variable의 수열이다. $N \ge 2$를*

$$X_1 \ge X_2 \ge \cdots \ge X_{N-1} < X_N$$

인 N이라 정의하자. 즉, 감소를 멈추는 첫 점이라고 생각하자. 이때 random variable끼리 독립이라는 것은, 각 random variable이 특정한 값을 가질 확률이 다른 random variable이 어떤 값을 가지는지에 무관하다는 것이다.

1) $P(N \ge n)$의 값을 구하여라.

2) $e = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$ 임을 알 때, $E[N] = e$임을 보여라.

1) 동일한 probability density function를 가지므로, 어느 X_i가 다른 X_j보다 작을 확률과 클 확률은 0.5로 같다. 즉, 문제를 풀 때 연속확률분포가 무엇인지 알 필요가 없다. $P(N \ge n)$은 $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_{N-1}$이 계속 감소해야 하므로, $N - 1$개의 숫자를 늘어놓았을 때 그것이 내림차순으로 배열될 확률이다. 즉,

$$P(N \ge n) = \frac{1}{(n-1)!}$$

임을 알 수 있다. 물론, n은 2 이상의 자연수일 것이다.

2)

$$\begin{aligned} E[N] &= \sum_{k=2}^{\infty} kP(N = k) \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} k(P(N \ge k) - P(N \ge k+1)) \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} = e \end{aligned}$$