중간문풀-3. 1. *각 고정된 실수 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 극한값*

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}$$

을 구하여라.

만약 $m!x$가 정수라면 $|\cos(m!\pi x)| = 1$이고 $m!x$가 정수가 아니라면 $|\cos(m!\pi x)| < 1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\cos^{2n}(m!\pi x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad m!x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{if} \quad m!x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

임을 알 수 있다. 이제 x가 유리수라고 가정하자. 그러면 어떤 정수 p와 자연수 q에 대하여 $x = \frac{p}{q}$라고 쓸 수 있는데, $m \geq q$이면 $m!x \in \mathbb{Z}$이므로

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\cos^{2n}(m!\pi x)\right) = 1$$

이 된다. 한편 x가 무리수라면 어떤 자연수 m에 대해서도 $m!x \notin \mathbb{Z}$이므로 $\lim_{n\to\infty}\cos^{2n}(m!\pi x)$는 모든 항이 0인 m에 대한 수열이다. 따라서 결과를 종합하면

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2n} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{if} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

중간문풀-3. 2. *연속함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$에 대하여 함수 $g : [a, b] \to \mathbb{R}$를*

$$g(x) = \max\{f(y) : a \leq y \leq x\}, \quad x \in [a, b]$$

로 정의하였을 때, g가 연속함수임을 보여라.

임의로 $x \in [a, b]$를 고정하고, 양수 $\varepsilon > 0$이 주어졌다고 하자. 그러면 f의 연속성에 의하여 어떤 $\delta > 0$가 존재하여 $y \in [a, b]$일 때 $|x - y| \leq \delta$이면 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$를 만족한다.

만약 $y > x$이면서 $|x - y| < \delta$이면, $[a, x] \subset [a, y]$이므로, g의 정의에 의해 $g(x) \leq g(y)$이다. 이때 $g(x) \neq g(y)$이면 $g(y)$의 값은 x와 y 사이에 있는 어떤 z에 대하여 $g(y) = f(z)$와 같을 것인데, $|y - x| < \delta$ 이므로 $|z - x| < \delta$이게 되어, 앞선 논의에 의해 $f(z) < f(x) + \varepsilon/2$임을 알 수 있다. 그런데 g의 정의에 이하여 $f(x) \leq g(x)$이므로, $f(x) \leq g(x) \leq g(y) < f(x) + \varepsilon/2$가 조건을 만족하는 모든 x, y에 대해 성립함을 알 수 있다. 즉, $|x - y| < \delta$이면 $|g(x) - g(y)| < \varepsilon/2$이다.

반대로 $y < x$이면서 $|x - y| < \delta$인 경우를 고려해 보면, $[a, y] \subset [a, x]$이므로 $g(y) \leq g(x)$가 성립한다. 이때 $g(x) \neq g(y)$라면 g의 정의에 의해 $g(x) = f(z)$인 z가 y와 x 사이에 존재하고, $|x - z| < \delta$이다. 따라서 $f(z) < f(x) + \varepsilon/2$인 것으로부터 $f(x) - \varepsilon/2 < f(y) \leq g(y) \leq g(x) < f(x) + \varepsilon/2$임을 확인할 수 있고, $|g(y) - g(x)| < \varepsilon$가 된다.

$y = x$일 때는 자명하게 정립하므로, $|x - y| < \delta$이면 $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$이다. 그런데 처음에 양수 ε을 임의의 양수로 잡았으니, 연속성의 정의로부터 g가 연속함수임을 확인할 수 있다.

중간문풀-3. 3. *함수 $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$가 연속이고 $\lim_{x\to\infty}[f(x + 1) - f(x)] = \alpha$일 때,*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \alpha$$

임을 보여라.

먼저 $\alpha = 0$인 경우를 생각한다. 그러면 임의의 양수 $\varepsilon > 0$을 잡았을 때, 실수 R이 존재하여 $x \geq R$이면 $|f(x+1) - f(x)| < \varepsilon/2$를 만족한다. 이때 f는 연속함수이므로 R보다 큰 수 Q에 대하여 구간 $[Q, Q + 1]$에서

최댓값과 최솟값을 가지기에, $Q \le t \le Q+1$이면 $|f(t)| < M$을 만족하는 실수 M이 있다. (혼란을 피하기 위해 적자면, M은 Q에 의존하는 수이다.)

그 다음 임의의 자연수 N을 생각하고 $Q \le t \le Q+1$ t에 대해 $|f(t+N) - f(t)|$를 떠올리자. 그러면

$$\begin{aligned} |f(t+N) - f(t)| &= \left| \sum_{k=1}^{N} (f(t+k) - f(t+k-1)) \right| \\ &\le \sum_{k=1}^{N} |f(t+k) - f(t+k-1)| \\ &\le \sum_{k=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon N}{2} \end{aligned}$$

이다. 그런데 $-M < f(t) < M$이므로,

$$-M - \frac{\varepsilon N}{2} < f(t) - \frac{\varepsilon N}{2} < f(t+N) < f(t) + \frac{\varepsilon N}{2} < M + \frac{\varepsilon N}{2}$$

이다. 따라서 $y = t+N$으로 두었을 때,

$$\left| \frac{f(y)}{y} \right| < \frac{M}{t+N} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{N}{t+N} < \frac{M}{R+N} + \frac{\varepsilon}{2}$$

이 됨을 알 수 있다. 그런데 M과 Q는 정해진 수이므로 $\lim_{N\to\infty} \dfrac{M}{R+N} = 0$이다. 즉 적당한 자연수 N_0을 잡아 $N \ge N_0$이면 $\dfrac{M}{R+N}$이 $\varepsilon/2$보다 작게 만들 수 있다. 그러면 그런 N_0에 대하여 실수 s가 $s \ge Q + N_0$이면 $Q \le t \le Q+1$인 실수 t와 $N \ge N_0$이 자연수 N이 존재하여 $s = t+N$이 되므로,

$$\left| \frac{f(s)}{s} \right| < \varepsilon$$

이 성립한다. 즉 모든 양수 ε에 대해 이에 상응하는 수 $Q + N_0$이 존재해 이것보다 s가 클 경우 $f(s)/s$의 절댓값이 ε보다 작게 할 수 있으므로,

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s} = 0$$

이다. 이제 α가 0이 아닌 경우를 생각해보자. 그러면 함수 $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$을 $g(x) = f(x) - \alpha x$로 정의할 경우

$$g(x+1) - g(x) = f(x+1) - \alpha(x+1) - f(x) + \alpha x = f(x+1) - f(x) - \alpha$$

이고, $f(x+1) - f(x)$의 $x \to \infty$임에 따른 극한값이 α였기에 $g(x+1) - g(x)$의 $x \to \infty$임에 따른 극한값은 0이다. 따라서 우리는 앞서 $\alpha = 0$일 때 시행한 결과를 적용할 수 있고,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$$

이다. 그런데 $g(x) = f(x) - \alpha x$였으므로,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$$

임을 확인할 수 있다.

중간문풀-3. 4. *함수* f*를*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ x & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

라 정의하자. 그러면 어떤 x에서 f가 연속하는가?

우린 f가 오직 0에서만 연속할 것이라고 추측할 수 있다. 먼저 $a \neq 0$인 경우의 a에서 f가 불연속함을 보이자. 더욱 자세하게는, $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재하지 않음을 보이자.

만약 극한값이 존재한다면, 그 값을 L이라고 둘 수 있다. 그러면 모든 양수 ε에 대하여, 상응하는 $\delta > 0$이 존재하여 만약 $0 < |x-a| < \delta$라면 $|f(x) - L| < \varepsilon$이다. 그러면 $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$를 고른 후 상응하는 δ를 생각하자. 그런데 구간 $(a-\delta, a+\delta)$에는 유리수와 무리수가 둘 다 있다. 만약 $0 < |x-a| < \delta$인 $x \in \mathbb{Q}$와 $|y| > |a|$이며 $0 < |y-a| < \delta$인 $y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$를 떠올린다면,

$$|a| < |y| = |f(x) - f(y)| = |f(x) - L + L - f(y)| \leq |f(x) - L| + |f(y) - L| < \frac{|a|}{2} + \frac{|a|}{2} = |a|$$

이게 되므로, 모순이 생긴다. 따라서 f는 $a \neq 0$에서 불연속이다.

만약 $a = 0$인 경우엔 $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$임을 보이면 된다. 모든 $\varepsilon > 0$에 대하여 상응하는 $\delta = \varepsilon > 0$이 존재하여, $0 < |x| < \delta = \varepsilon$일 경우 $|f(x)| \leq |x| < \varepsilon$을 쉽게 알 수 있다. 따라서 극한의 정의에 의하여 위가 성립한다. 그리고

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

이기에, f는 $x = 0$에서 연속이다.

중간문풀-3. 5. *극한의 정의를 이용하여*

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$$

임을 보여라.

보이라는 것은 모든 $\varepsilon > 0$에 대하여 상응하는 $\delta > 0$이 존재하여 $|x-2| < \delta$일 경우 $\left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}\right|$이게 한다는 것이다. 함수 $1/x^2$의 존재성을 위해 $\delta < 2$라고 두자. 그러면

$$\left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}\right| = \frac{|x-2||x+2|}{4x^2} < \frac{\delta(\delta+4)}{4(2-\delta)^2}$$

이다. 여기서 $\delta < 1$이라 둘 경우

$$\frac{\delta(\delta+4)}{4(2-\delta)^2} < \frac{\delta(\delta+4)}{4}$$

이며, $\delta < 1 < 4$이기에

$$\frac{\delta(\delta+4)}{4} < 2\delta$$

이다. 따라서 $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{2})$이라 둘 경우, $|x-2| < \delta$면 $|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}| < \varepsilon$이다. 따라서 극한의 정의에 의해 문제의 등식이 성립한다.

중간문풀-3. 6. *극한의 정의를 이용하여*

$$\lim_{x\to 8} \sqrt[3]{x} = 2$$

임을 보여라.

$7 < x < 9$인 범위에서

$$|\sqrt[3]{x} - 2| = \frac{|x-8|}{|\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4|}$$

로 표현할 수 있으며, 임의의 양수 a, b에 대하여 $a^2 + ab + b^2 \geq \frac{3}{4}b^2$이 성립하므로 a 대신 $\sqrt[3]{x}$, b 대신 2를 넣으면

$$\frac{|x-8|}{|\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4|} \leq \frac{|x-8|}{3}$$

이 성립함을 알 수 있다. 따라서 모든 양수 $\varepsilon > 0$에 대하여 상응하는 $\delta = \min\{1, 3\varepsilon\}$가 존재하여 $|x-8| < \delta$이면 $|\sqrt[3]{x} - 2| < \varepsilon$임을 확실히 이야기할 수 있기에, 극한의 정의에 의하여 문제의 식이 성립한다.

중간문풀-3. 7.
$$\lim_{x\to 1} e^x = e$$
임을 극한의 정의를 이용하여 보여라.

$$|e^x - e| = e|e^{x-1} - 1|$$

이므로, 만약 $|x-1| < \delta$라면
$$e(e^{-\delta} - 1) < e(e^{x-1} - 1) < e(e^{\delta} - 1)$$

이고, $|e^{-\delta} - 1| = e^{-\delta}|1 - e^{\delta}| < |e^{\delta} - 1|$이므로

$$|e^{x-1} - 1| < |e^{\delta} - 1|$$

이다. 즉,
$$|e^x - e| < e|e^{\delta} - 1|$$

이다. 그러면 만약 δ를 $\ln(\frac{\varepsilon}{e} + 1)$이라 둘 경우 $|e^x - e| < \varepsilon$임을 알 수 있다. 따라서, 모든 $\varepsilon > 0$에 대하여 상응하는 $\delta = \ln(\frac{\varepsilon}{e} + 1)$이 존재하여 $|x-1| < \delta$일 경우 $|e^x - e| < \varepsilon$이기에, 극한의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to 1} e^x = e$$

이다.

중간문풀-3. 8. *함수 f와 g에 대하여,*
$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$
$$\lim_{x\to a} g(x) = M$$
임이 알려져 있다. 이때,
$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LM$$
임을 보여라.

아래의 식이 성립한다.

$$|f(x)g(x) - LM| = |f(x)g(x) - Lg(x) + Lg(x) - LM| \le |g(x)||f(x) - L| + |L||g(x) - M|$$

먼저, $1 > 0$에 대해서는 극한의 정의에 의해 $|x-a| < \delta_1$이면 $|g(x) - M| < 1$인 δ_1을 찾을 수 있다. 그러면 $|g(x)| \le |g(x) - M| + |M| < 1 + |M|$이게 된다. 또한, 극한의 정의에 의해 주어진 $\varepsilon > 0$에 대하여

$$|x-a| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2|M| + 2}$$

인 δ_2와
$$|x-a| < \delta_3 \quad \Rightarrow \quad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2|L| + 1}$$

인 δ_3를 찾을 수 있다.

그럼 주어진 $\varepsilon > 0$에 대하여 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$이라 둘 경우 $|x-a| < \delta$이면

$$|f(x)g(x) - LM| \le |g(x)||f(x) - L| + |L||g(x) - M| < (|M| + 1)\frac{\varepsilon}{2|M| + 1} + |L|\frac{\varepsilon}{2|L| + 1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

이므로, 극한의 정의에 의해 문제의 식이 성립한다.

중간문풀-3. 9. *함수 f와 g에 대하여,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

임이 알려져 있다. 이때,

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \infty$$

임을 보여라.

주어진 $N > 0$에 대하여, 상응하는 $\delta > 0$이 존재하여 $|x-a| < \delta$ 면 $f(x)g(x) > N$임을 증명하여야 한다. 그런데 주어진 두 사실에 의하여 $1 > 0$과 $N > 0$에 대해

$$|x-a| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad f(x) > N$$

$$|x-a| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad g(x) > 1$$

인 δ_1, δ_2가 있다. 그러면 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$라고 두자. 그러면 주어진 $N > 0$에 대하여 $|x-a| < \delta$일 경우 $f(x)g(x) > N \cdot 1 = N$이 되기에, 극한의 정의에 의하여 문제에서 보여야 하는 식이 성립한다.

중간문풀-3. 10. *함수 f와 g에 대하여,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = c > 0$$

$$\lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

임이 알려져 있다. 이때,

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \infty$$

임을 보여라.

주어진 $N > 0$에 대하여, 상응하는 $\delta > 0$이 존재하여 $|x-a| < \delta$ 면 $f(x) > N$임을 증명하여야 한다. 그런데 주어진 두 사실에 의하여 $c/2 > 0$과 $2N/c > 0$에 대해

$$|x-a| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad f(x) > 2N/c$$

$$|x-a| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad f(x) > c/2$$

인 δ_1, δ_2가 있다. 그러면 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$라고 두자. 그러면 주어진 $N > 0$에 대하여 $|x-a| < \delta$일 경우 $f(x)g(x) > \frac{2N}{c} \cdot \frac{c}{2} = N$이 되기에, 극한의 정의에 의하여 문제에서 보여야 하는 식이 성립한다.

중간문풀-3. 11. *모든 x에 대하여 $f(x) < g(x)$가 성립하고 $x \to a$임에 따른 f와 g의 극한값이 존재한다고 하자. 그러면*

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$$

임을 증명하라.

귀류법으로 증명하자.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L > \lim_{x\to a} g(x) = M$$

이라고 가정하자. 그러면 극한의 정의에 의하여, 주어진 $\frac{L-M}{2} > 0$에 대하여 δ_1이 존재해 $0 < |x-a| < \delta_1$이면 $|f(x) - L| < \frac{L-M}{2}$이고, δ_2가 존재하여 $0 < |x-a| < \delta_2$면 $|g(x) - M| < \frac{L-M}{2}$이다. 그러면 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 라고 둘 때, $|x-a| < \delta$라면

$$g(x) < \frac{L+M}{2} < f(x)$$

가 성립하게 되므로, $f(x) < g(x)$라는 데 모순이 되게 된다. 따라서 $L \le M$이 성립한다.

중간문풀-3. 12. *연속성의 정의를 이용하여 $\sin x$가 연속함수임을 증명하여라.*

이는 곧 주어진 실수 a에 대하여

$$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$$

임을 보이라는 것이나 마찬가지이다. 즉 이를 보이기 위해서는 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여 상응하는 $\delta > 0$이 존재하여 만약 $0 < |x-a| < \delta$일 경우 $|\sin x - \sin a| < \varepsilon$임을 확인해야 한다.

이때

$$|\sin x - \sin a| = 2|\cos\frac{x+a}{2}||\sin\frac{x-a}{2}| \le 2|\cos\frac{x+a}{2}||\frac{x-a}{2}| = |x-a||\cos\frac{x+a}{2}| < |x-a|$$

이 성립하므로, $\delta = \varepsilon$이라고 둘 경우 문제의 식이 옳음을 확인할 수 있다. (자세한 과정은 생략)

중간문풀-3. 13.

$$\lim_{x\to\infty} \sin x$$

가 존재하지 않음을 보여라.

극한값 L이 존재한다고 가정하자. 그러면 극한의 정의에 의하여, 모든 $\varepsilon > 0$에 대하여 상응하는 $M > 0$이 존재해 만약 $x > M$이면 $|\sin x - L| < \varepsilon$이어야 한다. 이제 $\varepsilon = \frac{1}{2}$라고 두자. 또한, 이에 상응하는 M이 존재할 것이다. 자연수는 무한하게 커질 수 있으므로, 자연수 n에 대하여 $x = 2n\pi > M$인 x와 $y = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$인 y를 잡자. 그러면

$$1 = |\sin x - \sin y| = |\sin x - L + L - \sin y| \le |\sin x - L| + |\sin y - L| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

로 모순이 생기게 된다. 따라서 극한값 L은 존재하지 않는다.

중간문풀-3. 14. *함수 $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$가 아래와 같이 정의된다.*

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in \mathbb{Q} \\ \cos x & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

함수 f가 연속인 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$를 찾아라.

우리는 $g(x) = -\cos x$가 연속함수임을 알고 있으므로, $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(f(x) + g(x))$는

$$h(x) = \begin{cases} \sin(x - \frac{\pi}{4}) & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

와 같이 정의되며, 이것이 연속인 점에서는 f도 연속이고 이것이 불연속인 점에서는 f도 불연속임을 확인할 수 있다. 만약 $a \neq \frac{\pi}{4}$인 무리수일 경우 $|\sin(a - \frac{\pi}{4})| > 0$이며, sin은 연속함수이므로 $\varepsilon = \frac{|\sin(a-\frac{\pi}{4})|}{2}$라고 둘 경우 상응하는 δ_1가 존재하여 $|b - a| < \delta_1$이며 b가 유리수일 경우 $|\sin(b - \frac{\pi}{4}) - \sin(a - \frac{\pi}{4})| < \frac{|\sin(a-\frac{\pi}{4})|}{2}$를 만족시킨다. 즉,

$$|\sin(b - \frac{\pi}{4})| > \frac{|\sin(a - \frac{\pi}{4})|}{2}$$

이 성립한다. 그러면 주어진 $\varepsilon = \frac{|\sin(a-\frac{\pi}{4})|}{2}$에 대하여 어떠한 δ를 잡아도 구간 $(a - \delta, a + \delta)$ 안에는 유리수이면서 $|a - b| < \delta_1$인 b가 존재할 것이므로, 그 b에 대해

$$|\sin(b - \frac{\pi}{4})| > \frac{|\sin(a - \frac{\pi}{4})|}{2}$$

성립한다. 그러나

$$\frac{|\sin(a - \frac{\pi}{4})|}{2} > |f(b) - f(a)| = |\sin(b - \frac{\pi}{4})| > \frac{|\sin(a - \frac{\pi}{4})|}{2}$$

이 만족할 수 없게 되므로, 그런 δ를 찾을 수는 없다. 따라서 a가 $\frac{\pi}{4}$가 아닌 무리수에서는 극한값이 존재하지 않고 연속이 아니다. 둘째로 a가 유리수일 경우에는, $a \neq \frac{\pi}{4}$가 될 것이며 $|\sin(a-\frac{\pi}{4})| > 0$이다. 그러면 $\varepsilon = \frac{|\sin(a-\frac{\pi}{4})|}{2}$에 대하여, 어떤 δ를 잡아도 $|a-b| < \delta$인 무리수 b가 존재하고,

$$|f(a) - f(b)| = |\sin(a - \frac{\pi}{4})| > \varepsilon = \frac{|\sin(a-\frac{\pi}{4})|}{2}$$

이다. 즉 그런 δ가 존재하지 않으니, 여기서는 연속이 아니다.

마지막으로 $a = \frac{\pi}{4}$인 경우를 생각하여 보자. 함수 $\sin(x-\frac{\pi}{4})$는 연속함수이므로, 주어진 ε에 대하여 상응하는 $\delta > 0$이 존재하여 $|x-\frac{\pi}{4}| < \delta$이면 $|\sin(x-\frac{\pi}{4}) - 0| < \varepsilon$인 δ가 존재한다. 그러면 주어진 $\varepsilon > 0$에 대하여, $|x-\frac{\pi}{4}| < \delta$이면

$$|h(x) - h(\frac{\pi}{4})| = |h(x)| \leq \max\{|\sin(x-\frac{\pi}{4})|, 0\} = |\sin(x - \frac{\pi}{4}) - 0| < \varepsilon$$

임을 알 수 있다. 따라서 극한의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} h(x) = 0 = h(\frac{\pi}{4})$$

이며, 연속의 정의에 의해 h는 정의역에서 오직 $x = \frac{\pi}{4}$일 때만 연속이다. 따라서 f가 연속인 점은 $x = \frac{\pi}{4}$가 유일하다.

중간문풀-3. 15. *참/거짓 문제들*

(a) 함수 f와 g는 모두 $x \to \infty$임에 따른 극한값이 존재하지 않는다. 이때, 함수 $f+g$가 $x \to \infty$일 때의 극한값이 존재하지 않는다.

(b) 함수 $f+g$와 함수 f가 $x \to a$임에 따른 극한값을 가진다. g는 $x \to a$임에 따른 극한값을 가진다.

(c) 함수 fg의 $x \to a$임에 따른 극한값이 존재하고, 함수 f도 $x \to a$임에 따른 극한값이 존재한다. g 역시 $x \to a$일 때의 극한값이 존재한다.

(d) f의 극한값이 항상 존재한다고 한다.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{g(x)}$$

이다.

(e) $\lim_{x\to 0} f(x^2) = 0$이라고 한다. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$이다.

(a) 거짓이다. $f = \sin x, g = -\sin x$는 모두 극한값이 없지만 $f+g=0$은 극한값을 가진다.

(b) 참이다. 극한의 연산에 따라 당연하다.

(c) $f(x) = x - a$, $g(x) = \dfrac{1}{x-a}$인 경우를 생각하자. 그러면 함수 fg는 1이라는 극한값을 가지고, f도 0이라는 극한값을 가진다. 그러나 g는 극한값을 가지지 않는다. 따라서 거짓이다.

(d) $f(x) = g(x) = x - a$라고 두자. 그러면

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

인 반면, 우변은 $\lim_{x\to a} f(x) = 0$이기에 항상 0이다. 따라서 거짓이다.

(e)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ 2021 & x < 0 \end{cases}$$

으로 정의하자. 그러면 문제의 조건을 만족함이 분명하지만, $x \to 0$임에 따른 극한값을 가지지는 않는다. 따라서 거짓이다.