문제 4. 1. *좌표평면에서 직선 $ax+by=c$는 극좌표계로*

$$r(a\cos\theta+b\sin\theta)=c$$

와 같이 표현됨을 보여라.

Motive : 극좌표계와 직교좌표계 사이 식을 어떻게 변형하더라?

좌표평면과 극좌표계에서는 $x=r\sin\theta$, $y=r\cos\theta$가 성립했었다. 따라서 $ax+by=c$에서 x와 y 자리에 이들을 넣어주게 된다면, $ar\cos\theta+br\sin\theta=c$이고 이를 정리해준다면 원하는 것처럼

$$r(a\cos\theta+b\sin\theta)=c$$

이 나온다.

문제 4. 2. *좌표평면에서 x축으로 a, y축으로 b만큼 이동하는 평행이동은 극좌표 그래프 $r=f(\theta)$의 식을 어떻게 바꾸는가?*

Motive : 평행이동을 표현하기 좋은 좌표계가 뭐가 있을까?

구하고자 하는 식 $r'=g(\theta')$을 직교좌표계로 옮기면 $(g(\theta')\cos\theta', g(\theta')\sin\theta)$이다. 이를 평행이동해 $(g(\theta')\cos\theta'-a, g(\theta')\sin\theta'-b)$로 만들면 이것이 바로 우리가 원하던 $r=f(\theta)$이다. 즉 $r^2=r'^2+a^2+b^2-2ar'\cos\theta'-2br'\sin\theta'$, $\theta=\arctan\left(\{r'\sin\theta'-b\}\div\{r'\cos\theta'-a\}\right)$이다. 그러므로, 구하는 식은

$$\sqrt{r^2+a^2+b^2-2ar\cos\theta-2br\sin\theta}=f(\arctan\left(\frac{r\sin\theta-b}{r\cos\theta-a}\right))$$

이다. 단, $\arctan(\infty)=\dfrac{\pi}{2}$라고 둔다.

문제 4. 3. *극좌표에서 포물선 $r=\dfrac{1}{1+\cos\theta}$가 주어져 있다. 그 개형을 그리고, 모양이 완전히 같지만 대칭축이 $\theta=\frac{\pi}{4}$이며 꼭짓점이 제 3사분면에 오는 포물선의 식을 구하여라.*

Motive : 극좌표계에서는 평행이동을 하기 어려운 대신 회전이동을 하기에는 굉장히 쉽다.

$r=\dfrac{1}{1+\cos\theta}$에 대하여, 대칭축은 원래 $\theta=0$이었다. 그 대칭축과 꼭짓점을 원하는 대로 옮기려면 이 포물선을 반시계 방향으로 $-\dfrac{3}{4}\pi$만큼 돌려주면 된다. 즉

$$r=\frac{1}{1+\cos(\theta+\dfrac{3}{4}\pi)}$$

가 원하는 포물선의 식이다. (그림 생략)

문제 4. 4. *$r=\sin n\theta$의 그래프를 그리고, $r=\sin n(\theta+\phi)$가 $r=\sin n\theta$의 그래프와 완전히 일치하게 하는 가장 작은 양수 ϕ를 n에 대해 나타내라.*

Motive : 극좌표계에서 θ에 특정 값을 더하는 것은 어떤 역할을 해 주는가?

두 그래프가 완전히 일치하기 위해서는, $\sin n\theta$를 시계 방향으로 ϕ만큼 돌린 그래프인 $\sin n(\theta+\phi)$가 원래의 것과 같아야 한다. n이 홀수일 경우에는 n개의 꽃잎이 존재하는데, 이때 꽃잎 사이의 간격은 $\dfrac{2}{n}\pi$다. 그래프를 ϕ만큼 돌려 원래 그래프와 맞게 만드려면 ϕ는 $\dfrac{2}{n}\pi$이다. n이 짝수일 경우에는 $2n$개의 꽃잎이 존재하고 각 꽃잎 사이의 간격은 $\dfrac{1}{n}\pi$이다. 따라서 이때는 ϕ가 $\dfrac{1}{n}\pi$이다. (그림 생략)

문제 4. 5. *$r^2=\cos 2\theta$로 표현되는 그래프를 그려라. 이 곡선은 평면에서 주어진 두 정점까지의 거리의 곱이 일정한 점들로 이루어져 있음을 밝히라.*

Motive : 두 점 사이의 거리는 직교좌표계에서 구하기 쉽다.

극좌표계를 직교좌표계로 바꾸면 $x^2+y^2 = \dfrac{x^2}{x^2+y^2} - \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$이다. 이를 정리하면 $x^4+2x^2y^2+y^4 = x^2-y^2$이고, 이를 다시 정리해주면 $(x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{2}+y^2)(x^2+\sqrt{2}x+\frac{1}{2}+y^2) = \frac{1}{4}$이다. 따라서 $\sqrt{(x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{2}+y^2)}\sqrt{(x^2+\sqrt{2}x+\frac{1}{2}+y^2)} = \frac{1}{2}$로 일정한데, 곱해지는 두 식은 그래프 위의 점 (x,y)에서 두 점 $(\frac{1}{\sqrt{2}},0)$과 $(-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$사이의 거리이다. 따라서 이 곡선은 평면에서 주어진 두 정점 $(\frac{1}{\sqrt{2}},0)$과 $(-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$까지의 거리의 곱이 0.5로 일정한 점들로 이루어져 있다.

문제 4. 6. *직교좌표계에서 중심이 $R(\cos\theta_0, \sin\theta_0)$이고 반지름의 길이가 r_0인 원의 방정식은 극좌표계*

$$r^2 - 2rR\cos(\theta-\theta_0) + R^2 - r_0^2 = 0$$

임을 보여라.

Motive : 앞선 **문제 4.2**의 공식을 이용하자.

앞선 공식에서 $a = R\cos\theta_0$, $b = R\sin\theta_0$이며 원래 식은 $r = r_0$였던 것이다. 즉

$$\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos(\theta-\theta_0)} = r_0$$

가 원하는 식이며, 양변을 제곱하고 정리하면

$$r^2 - 2rR\cos(\theta-\theta_0) + R^2 - r_0^2 = 0$$

문제 4. 7. *삼차원 좌표공간에서 길이가 l인 선분을 $yz-$평면, $zx-$평면, $xy-$평면에 정사영한 것의 길이를 각각 l_1, l_2, l_3라고 두면,*

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 2l^2$$

임을 보이시오. 또한,

$$|l_1^2 - l_2^2| \le l_3^2 \le l_1^2 + l_2^2$$

임도 보여라.

Motive : 선분 l의 양 끝 점을 잡고 이를 이용하여 좌표공간에서 이를 증명하자.

선분 l에 대하여 양 끝점을 (a_1,b_1,c_1)과 (a_2,b_2,c_2)로 두자. 그렇다면 길이가 l인 선분을 yz 평면에 정사영한 선분은 양 끝점이 $(0,b_1,c_1),(0,b_2,c_2)$가 되며 그 길이는 $(b_1-b_2)^2+(c_1-c_2)^2$일 것이다. 같은 방법으로 이를 수행하면

$$(b_1-b_2)^2+(c_1-c_2)^2+(a_1-a_2)^2+(c_1-c_2)^2+(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^{=}2\{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2+(c_1-c_2)^2\}$$

이며, 양변이 같기에 등식이 성립한다.

반면, 아래 식에 대해서는

$$|l_1^2 - l_2^2| = |(b_1-b_2)^2 - (a_1-a_2)^2|$$

$$l_3^2 = (b_1-b_2)^2 + (a_1-a_2)^2$$

$$l_1^2 + l_2^2 = (b_1-b_2)^2 + (a_1-a_2)^2 + 2(c_1-c_2)^2$$

이므로 절댓값의 성질에 의해

$$|l_1^2 - l_2^2| \le l_3^2 \le l_1^2 + l_2^2$$

문제 4. 8. *극좌표계로 주어진 곡선 $r = \theta\sin\theta,\quad 0 \le \theta < 2\pi$의 개형을 좌표평면에 그리시오.*

Motive : 직접 그리면 된다.

그래핑 툴을 이용하여 직접 그려보면 정답이 나온다. 단, 좌표평면에 그릴 때는 x축과 y축과의 교점과 같이 특이한 점들은 웬만해선 표시해주는 것이 좋다. 반면, 극좌표계에서는 각도나 길이가 특기할 정도라면 이를 표시해야 한다. (그림 생략)

문제 4. 9. *극좌표 $\left(4, \dfrac{\pi}{6}\right)$으로 주어진 점 A와 극좌표계에서 $r = \dfrac{1}{1-\cos\theta}$로 표현되는 곡선 위를 움직이는 점 P가 있다. 좌표평면의 원점을 O라 할 때, 삼각형 APO의 둘레의 길이의 최솟값을 구하시오.*

Motive : 해당 곡선이 무슨 도형인지를 잘 생각하여 보자. 또한, 길이를 구하기 편리한 좌표계는 어디인가?

해당 곡선은 초점이 원점이고 꼭짓점이 직교좌표계에서 $(-\frac{1}{2}, 0)$인 포물선이다. (그림 생략) 그러므로 준선은 직교좌표계에서 $x = -1$로 주어질 것이다. 그리고 이 포물선을 직교좌표계에서 표현하면

$$x^2 + y^2 = x^2 + 2x + 1$$

일 것이므로, 정리하면

$$x = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}$$

이다.

A를 직교좌표계로 변환시키면 $(2\sqrt{3}, 2)$이며 APO의 둘레 중 AO는 고정된 길이이며 P의 위치에 따라 AP와 PO가 달라진다. 그런데 P는 포물선 위의 점이므로, PO는 P에서 준선 $x = -1$에 내린 수선의 길이와 같다. 수선의 발을 H라 하자. 이때, H는 고정된 점이 아니며 P와 함께 이동하는 점이다. 따라서 둘레의 길이는 AO의 길이, PH의 길이, AP의 길이의 합과 같다. 그런데 AP와 PH를 합한 길이는 항상 A에서 준선에 내린 수선의 길이보다는 크다. 따라서 A에서 준선에 내린 수선과 포물선의 교점이 P일 때 그 길이가 최소이며, 이 값은 $4 + (2\sqrt{3} + 1)$, 즉 $5 + 2\sqrt{3}$이다.

문제 4. 10. *극좌표계로 주어진 곡선 $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta \quad (a > 0)$의 개형을 그리고, 이 곡선 위에 있는 $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$인 점 A와 점 $B(-a, 0)$, $C(a, 0)$에 대하여 $\angle BAC$를 구하시오.*

Motive : 점 A와 원점 사이의 거리는?

그림은 생략하지만, 대략 무한대 기호와 비슷하게 나오면 된다. $\theta = \frac{5}{6}\pi$인 점 A를 직교좌표계에서 들여다보면 $r^2 = 2a^2 \cos \dfrac{5}{3}\pi$이므로 $r = \pm a$이다. 따라서 B, C, A는 원점을 중심으로 하고 반지름이 a인 원 위에 있으며, CB가 지름이므로 BAC는 원주각의 성질에 의해 90도이다.

문제 4. 11. *곡선 $x^2 + y^2 = 6\sqrt{x^2 - y^2}$을 극좌표계로 바꾸고, 이 곡선의 개형을 좌표평면에 그리시오.*

Motive : 식을 정리하는 과정에서 빼먹은 것이 없는지 생각해 보자.

이를 극좌표계로 바꾸려면 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$로 치환하면 되고 그 결과

$$r^2 = 6|r|\sqrt{\cos 2\theta}$$

이며 양변을 $|r|$로 나눠주면

$$r = 6\sqrt{\cos 2\theta}$$

이다. 이때 $(0, 0)$이 r로 나눠주는 과정에서 무시되었는데, 나눠준 이후에도 $\theta = \frac{\pi}{4}$일 때 이 점이 포함되므로 문제가 없다. 또한, 직접 그려볼 경우 r에 절댓값이 없어도 동일한 모양이라는 것을 확인할 수 있기에 절댓값도 제거할 수 있다. 그림은 생략한다.

문제 4. 12. *극좌표계에서 $r^2 = \cos 2\theta + \frac{3}{2}$로 주어진 곡선과 직교좌표계에서 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$로 주어진 직선의 두 교점을 직교좌표계로 구하고, 두 점 사이의 거리를 구하시오.*

Motive : 교점을 구하기 쉬운 좌표계는?

$$r^2 = \cos 2\theta + \frac{3}{2}$$

와 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$의 교점은 $\theta = \frac{\pi}{6}$이어야 한다. 따라서 $r = \pm\sqrt{2}$이다. 즉 교점은 극좌표로 나타냈을 때 $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{6}), (-\sqrt{2}, \frac{\pi}{6})$이다. 따라서 둘 사이의 거리는 $2\sqrt{2}$이다.

문제 4. 13. $P = (\cosh t, \sinh t)$로 *주어진 점* P*의 자취를 극좌표계로 나타내고, 그 개형을 그려라. 단,* $t \in (-\infty, \infty)$*이다.*

Motive : 매개변수를 바로 극좌표로 바꾸는 문제를 푼 적이 있었나?

해당 매개변수 방정식을 먼저 직교좌표계로 바꾸어 보자. 그러면 $x^2 - y^2 = 1$이라는 쌍곡선임을 확인할 수 있다. 이때 t의 범위가 실수 전체인데 해당 범위에서는 $\cosh t$가 항상 양수여야 한다. 따라서, 이 쌍곡선의 $x > 0$ 부분만 그려주면 된다. 이를 다시 극좌표계로 바꾸려면

$$r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1$$

이므로

$$r = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

가 원하는 자취이다. 단, $x > 0$여야 하므로 $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$라는 단서조항을 붙인다. 그림은 생략

문제 4. 14. *극좌표계에서*

$$r = \sqrt{3} - 2\sin 2\theta$$

로 주어진 곡선의 개형을 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$*에서 좌표평면에 그려라.*

Motive : 극좌표계 그리기 연습

풀이 생략.

문제 4. 15. *원기둥좌표계 상에서*

1) 회전축이 z*축이고,* $(3, 4, 3)$*을 지나는 높이가 무한한 원기둥*

2) $yz-$*평면*

3) 중심이 $(2, 4, 5)$*이며 반지름이 7이고,* $xy-$*평면에 평행한 원*

의 방정식을 구하여라.

Motive : 원기둥좌표계 연습

1) 회전축이 z축이며 높이가 무한하고, $(3, 4, 3)$을 지난다면 r만 결정해주면 된다. $r^2 = 3^2 + 4^2$이므로, 방정식은 $r = 5$.

2) $yz-$평면은 $x = 0$인 점들의 모임이다. 따라서 $r\cos\theta = 0$이 원하는 방정식이다. 즉, $\theta = \frac{\pi}{2}$면 충분하다.

3) $xy-$평면에 평행하다고 했으면 z좌표는 항상 같기에 $z = 5$는 보장되다. 중심이 $(2, 4, 5)$라고 했는데, 중심이 $(2, 4)$이며 반지름이 7인 원은 2번 문제에 의하여

$$r^2 - 4\sqrt{5}r\cos(\theta - \theta_0) - 29 = 0$$

이며, 이때 $\sin(\theta_0) = \frac{1}{\sqrt{5}}$다. 즉 이것이 $z = 5$라는 평면 위에 존재하는 것이므로,

$$r^2 - 4\sqrt{5}r\cos(\theta - \theta_0) - 29 = 0, z = 5$$

가 구하는 방정식이다.

문제 4. 16. *구면좌표계 상에서*

1) $\varphi = \frac{\pi}{6}$

2) $\rho = 1$

3) $\theta = \frac{\pi}{2}$

가 나타내는 도형의 모양을 설명하여라.

Motive : 구면좌표계 연습

1) φ가 일정하다는 것은 곧 천정으로부터의 각이 일정하다는 것이나 마찬가지이다. 즉, 두 개의 원뿔이 붙어 있는 모양이다.

2) ρ가 일정하다는 것은 원점으로부터의 거리가 일정하다는 것이다. 반지름이 1인 구가 원하는 도형이다.

3) θ가 일정하다는 것은 x축으로부터의 각이 일정하다는 것이나 마찬가지이다. 그 각도가 90도라는 것이므로, 이는 $yz-$평면과 동일하다.

문제 4. 17. *삼차원 좌표공간에 곡면 A와 B가 다음과 같이 주어져 있다.*

A : 원기둥좌표계 (r,θ,z)에서 $r^2 = \dfrac{1}{1-4z}$

B : 구면좌표계 (ρ,φ,θ)로 $\rho = \dfrac{1}{2+2\cos\varphi}$

이때, 두 곡면의 교집합은 곡선이다. 이 곡선의 길이를 구하시오.

Motive : 두 좌표계를 하나로 통일시켜야 좀 보기 쉬워질 것이다.

A는 직교좌표계로 변형시킬 경우

$$x^2+y^2 = \frac{1}{1-4z}$$

이며 B는 직교좌표계로 변형시킬 경우

$$4x^2+4y^2 = 1-4z$$

이다. 따라서 이 둘을 연립시킬 경우에 $1-4z = \pm 2$라는 결론이 나온다. 그런데 A에서 우변은 항상 양수여야 하므로, $z = -\frac{1}{4}$이다. 그리고 A와 B로부터 $x^2+y^2 = \frac{1}{2}$임을 알고 있다. 결국 교집합은 $xy-$평면에 평행한 평면 $z = -\frac{1}{4}$에 있는 반지름이 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 인 원이므로, 곡선의 길이는 $\sqrt{2}\pi$이다.

문제 4. 18. *원기둥 좌표계로 주어진 방정식*

$$z = r^2\cos 2\theta$$

를 직교좌표계 (x,y,z)와 구면좌표계 (ρ,φ,θ)의 방정식으로 각각 나타내시오.

직교좌표계에서는

$$z = r^2\cos 2\theta = r^2(1+2\cos^2\theta) = r^2+2(r\cos\theta)^2 = x^2+y^2+2x^2 = 3x^2+y^2$$

이 원하는 방정식이며, 구면좌표계에서는

$$\rho\cos\varphi = z = 3x^2+y^2 = \rho^2\sin^2\varphi(3\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$

이며 $\rho > 0$로 생각하면

$$\cos\varphi = \rho\sin^2\varphi\cos 2\theta$$

가 원하는 방정식이다. 주의할 점은 여기서 θ는 주어진 식의 그것과는 다르다는 것이다. (원점도 이 방정식이 해를 가지는데, $\rho > 0$으로 가정한 후 양변을 나누어 주어도 원점이 이 방정식의 해가 될 수 있으니 문제가 없다.)

문제 4. 19. *직교좌표계 (x,y,z)와 구면좌표계 (ρ,φ,θ)에 대하여 두 식 $\varphi \le \dfrac{\pi}{6}$과 $z \le 4$로 표현된 영역의 부피를 구하시오.*

처음 식은 천정각을 제한시키는 공식이므로, 표현되는 영역은 z축의 양의 방향을 감싸고 있는 원뿔이다. $z \le 4$이면 이 원뿔의 밑면을 제한시켜주는 것이다. 따라서 둘에 의해 형성되는 영역은 높이가 4이며, 반지름이 $4\tan\frac{\pi}{6} = \frac{4}{\sqrt{3}}$인 원뿔이다. 그 부피는

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{16}{3}\pi\cdot 4 = \frac{64}{9}\pi$$

이다.

문제 4. 20. *공간의 점 P, Q를 구면 좌표계로 나타낼 때, 각각*

$$P = (\sqrt{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}), \quad Q = (2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$$

이라고 하자. 이때, P와 Q 사이의 거리를 구하고, 삼각형 OPQ의 넓이를 구하라.

두 점을 직교 좌표계로 변환하자.

$$x_P = \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad y_P = \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad z_P = \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$x_Q = 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad y_Q = 2\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad z_P = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$$

그러면 우리는 둘 사이의 거리가 1이며, O, P, Q는 모두 $\theta = \frac{\pi}{4}$라는 평면 위에 있는 점임을 알 수 있다. 또한, 삼각형 OPQ는 직각삼각형이 된다. 높이인 PQ는 1이고, 밑변인 OP는 $\sqrt{3}$이다. 따라서 삼각형의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이다.

문제 4. 21. *구면좌표계 (ρ, φ, θ)에서 아래와 같이 주어진 곡면의 겉넓이를 구하시오.*

$$\rho = 4\cos\varphi$$

양변에 ρ를 곱하면

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 = 4\rho\cos\varphi = 4z$$

를 얻고, 이를 정리하면

$$x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4$$

이라는 반지름이 2인 구가 된다. 이 구의 겉넓이는 16π이다.

문제 4. 22. *다음 두 곡선의 개형을 그리고, 모든 교점을 직교좌표계로 나타내시오. 단, $\theta \neq \dfrac{\pi}{4} + n\pi$ (n은 정수)이다.*

$$r = \frac{4}{3 + \sqrt{5}\cos\theta}, \quad r = \frac{\sqrt{5}}{\sin\theta - \cos\theta}$$

첫째 식을 잘 조정해주면,

$$r = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}}}{1 + \frac{\sqrt{5}}{3}\cos\theta}$$

이다. 따라서 이 그래프는 $\epsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$이고, $d = \frac{4}{\sqrt{5}}$인 이차곡선이다. 그리고 $\epsilon < 1$이므로, 이 곡선은 타원임을 확인해줄 수도 있다. 따라서, 그래프는 원점을 초점으로 하면서, $\theta = 0$일 때 $r = \frac{4}{3+\sqrt{5}}$를 지나며 $\theta = \pi$일 때 $r = \frac{4}{3-\sqrt{5}}$를 지나도록 타원을 그려주면 된다. 직교좌표계로 변형하려면,

$$3r = 4 - \sqrt{5}r\cos\theta$$

이므로 양변을 제곱하고 정리해주면

$$9(x^2 + y^2) = 16 - 8\sqrt{5}x + 5x^2$$

이고,

$$\frac{(x+\sqrt{5})^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

인 타원이다.

둘째 식에서는 $\sin\theta - \cos\theta$를 양변에 곱해 주면,

$$y - x = r(\sin\theta - \cos\theta) = \sqrt{5}$$

임을 알 수 있다. 따라서 $y = x + \sqrt{5}$라는 직선이 된다. 따라서 두 그래프는 아마 교점을 0개, 1개, 혹은 2개 가짐을 확인해줄 수 있다. 이를 직접적인 계산으로 보여주려면, 직교좌표계에서의 두 식을 연립해주면 된다.

$$1 = \frac{(x+\sqrt{5})^2}{9} + \frac{y^2}{4} = \frac{y^2}{9} + \frac{y^2}{4}$$

이므로 $y = \pm\dfrac{6}{\sqrt{13}}$이고 이에 대응하는 x를 생각하면 두 교점은

$$\left(\frac{6}{\sqrt{13}} - \sqrt{5}, \frac{6}{\sqrt{13}}\right), \left(-\frac{6}{\sqrt{13}} - \sqrt{5}, -\frac{6}{\sqrt{13}}\right)$$

문제 4. 23. *다음 직교좌표계* (x, y, z)*로 표현된 식을 구면좌표계* (ρ, φ, θ)*로 나타내시오.*

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 \le 1, \quad z \ge \sqrt{3x^2 + 3y^2}, \quad yz \ge 0$$

첫째 식을 잘 정리해주면

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \le 2z = 2\rho\cos\varphi$$

이고 $\rho \ge 0$이므로,

$$0 \le \rho \le 2\cos\varphi$$

를 얻을 수 있다. 둘째 식의 경우에는

$$\rho\cos\varphi = z \ge \sqrt{3x^2 + 3y^2} = \sqrt{3}\rho|\sin\varphi|$$

를 얻을 수 있으며, $\rho > 0$이므로

$$|\tan\varphi| < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

이다. $\cos\varphi > 0$이면서 위를 만족하려면, 그 범위는

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$$

이다. 마지막 식이려면 $y \ge 0, z \ge 0$이거나 $y \le 0, z \le 0$이다. 즉, $\sin\theta$와 $\cos\varphi$의 부호가 같아야 한다. 따라서

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \theta \le \pi \quad \text{or} \quad \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi, \pi \le \theta \le 2\pi$$

가 원하는 구간이다. 이를 모두 종합하면,

$$0 \le \rho \le 2\cos\varphi, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}, 0 \le \theta \le \pi$$

이 원하는 부분이다.

문제 4. 24. $r = \dfrac{\sec\theta}{1 + 2\tan\theta}$*를* $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$*의 범위에서 그려라.*

$$r + 2r\tan\theta = \sec\theta$$

이므로

$$r\cos\theta + 2r\sin\theta = 1$$

이고, $x+2y=1$이 원하는 그래프가 된다. 그런데 범위를 잘 들여다볼 필요가 있는데, 다행히도 이 범위에서는 아무런 문제 없이 정의되는 것으로 보인다. $\tan\theta=-\frac{1}{2}$인 경우를 제외하려고 할 수 있는데, 이미 직선에서 이 경우는 자동적으로 사라져 있다. 따라서 빠지는 점 없이 직선을 그려주면 된다.

문제 4. 25. *$r=\dfrac{5}{3+2\cos\theta}$의 그래프를 그리고, 곡선이 둘러싸는 영역의 넓이를 구하여라. (미적분)*

$$r=\frac{5}{3+2\cos\theta}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{2}}{1+\frac{2}{3}\cos\theta}$$

이므로 이 곡선은 $\epsilon=\frac{2}{3}<1$인 타원이다. 이를 직교좌표계의 식으로 옮기면,

$$(3r)^2=(5-2r\cos\theta)^2$$

으로부터

$$9x^2+9y^2=25-20x+4x^2$$

이고,

$$\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$$

이 원하는 방정식이다. 이 타원에 의해 둘러싸인 영역의 넓이는 $3\sqrt{5}\pi$이다.

문제 4. 26. *구면좌표계로 주어진 영역*

$$\left\{(\rho,\varphi,\theta):\rho\le 2\cos\varphi, 0\le\rho\le\frac{1}{2}\sec\varphi\right\}$$

을 좌표공간에 그리고, 그 부피를 구하여라. (미적분)

그림은 생략한다. 먼저 처음 식에 ρ를 곱하면

$$x^2+y^2+z^2=\rho^2\le 2\rho\cos\varphi=2z$$

이므로 이는 곧

$$x^2+y^2+(z-1)^2\le 1$$

이다. 둘째 식에 $\cos\varphi$를 곱하면,

$$z=\rho\cos\varphi\le\frac{1}{2}$$

를 얻으므로 z의 좌표는 $\frac{1}{2}$보다 작아야 한다. 이를 모두 고려하면, 주어진 영역은 공의 지름을 4등분한 후 그 중 구의 중심이 아닌 점을 지나게 지름에 수직하게 잘랐을 때 만들어지는 속이 꽉 찬 그릇 모양임을 확인해줄 수 있다. 그리고 그 부피는, 미적분을 통해 구해야만 한다.

$$\begin{aligned}
V&=\int_0^{\frac{1}{2}}(\sqrt{1-(1-z)^2})^2\pi dz\\
&=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}(2z-z^2)dz\\
&=\pi[z^2-\frac{1}{3}z^3]_0^{\frac{1}{2}}\\
&=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{24}=\frac{5\pi}{24}
\end{aligned}$$

문제 4. 27. *구면좌표계에서 $\rho=2\cos\varphi$와 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$으로 표현되는 두 곡면으로 둘러싸인 영역 중 직교좌표계로 표현된 점 $(0,0,1)$을 포함하는 영역의 부피를 구하시오. (미적분)*

첫째 식에 ρ를 곱하면

$$x^2+y^2+z^2=\rho^2=2\rho\cos\varphi=2z$$

이므로 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$이라는 구면이다. 둘째 식은 천정각을 제한하므로, 원뿔면이다. 따라서 두 곡면으로 둘러싸인 영역은 아이스크림 모양의 영역과, 구에서 아이스크림을 제외하고 남은 쪼개진 사과 모양의 영역으로 나뉠 것이다. 이때 $(0,0,1)$은 z축의 양의 방향에 있는 점이므로, 원뿔면 안에 포함될 것이므로, 아이스크림 모양 영역의 부피를 구해주면 된다.

두 그래프의 교점을 구해 보면, $\rho=2\cos\varphi=2\cos\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}$이다. 그러면 $z=\rho\cos\dfrac{\pi}{6}=\frac{3}{2}$이다.

아이스크림 콘 부분은 원뿔로 생각하면 되고, 높이가 $\frac{3}{2}$이고, 밑면의 반지름이 $\frac{3}{2}\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 부피가

$$\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\pi\times\frac{3}{2}=\frac{3\pi}{8}$$

이다. 아이스크림 부분은 바로 전 문제에서 구한 것과 완벽히 똑같은 모양이다. 따라서 둘을 합해주면,

$$\frac{3\pi}{8}+\frac{5\pi}{24}=\frac{7}{12}\pi$$

가 원하는 부피가 된다.

문제 4. 28. *로그와선 $r=e^\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ 위의 점 (r,θ)에서의 접선과 점 (r,θ)와 원점을 지나는 직선이 이루는 각을 구하시오. (미적분)*

Motive : 로그 와선의 다른 이름은 무엇인가?

로그 와선의 다른 이름은 등각 와선으로, 원점을 지나는 직선과 와선의 각 점에서의 접선은 항상 일정한 각을 이루고 있다. $\theta=\frac{\pi}{4}$일 때를 생각하여 보자. $x=e^\theta\cos\theta$는 미분하면 $\frac{dx}{d\theta}=e^\theta(\cos\theta-\sin\theta)$로, $\theta=\frac{\pi}{4}$까지는 순증가하다가 그 이후 감소한다. 즉 $\theta=\frac{\pi}{4}$에서 접선은 y축에 평행하다. 이때의 각도는 결국 $\frac{\pi}{4}$이기에, 모든 θ에 대해 각도는 $\frac{\pi}{4}$이다.