

## 곡선

### 매개화된 곡선

#### 1-1. 1. 곡선

$$X(t) = (t^3, \ln(3-t), \sqrt{t})$$

가 정의될 수 있는  $t$ 의 범위를 구하여라.

#### 1-1. 2. 곡선

$$X(t) = \left(1 + t^3, te^{-t}, \frac{\sin t}{t}\right)$$

에 대하여,

$$\lim_{t \rightarrow 0} X(t)$$

의 값을 구하여라.

#### 1-1. 3. 곡선

$$X(t) = (1 + t, 2 + 5t, -1 + 6t)$$

이 어떤 모양인지 설명하고, 이를 좌표공간의 방정식으로 바꾸어라.

#### 1-1. 4. 점 $(1, 3, -2)$ 와 $(2, -1, 3)$ 사이를 잇는 선분을 매개화된 곡선으로 표현하라.

1-1. 5. 좌표공간에서  $x^2 + y^2 = 1$ 과  $y + z = 2$ 가 나타내는 곡면이 만나는 부분은 곡선 모양이다. 이 곡선을 매개화하여 나타내시오.

1-1. 6.  $t = 0$ 일 때

$$X(t) = (t, t^2, e^t)$$

의 속도벡터를 구하여라.

1-1. 7.  $t = \pi/2$ 일 때

$$X(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

의 속도벡터를 구하여라.

1-1. 8. 좌표공간의 곡선  $X(t)$ 에 대하여,  $X(0) = (3, 6, 5)$ 이며  $X'(0) = (1, -1, 0)$ 이다.  $t = 0$ 일 때  $X(t)$ 의 접선의 방정식을 구하여라.

1-1. 9. 롯데월드의 롤러코스터는 시간  $t$ 에 따라 곡선

$$X(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$$

를 따라 이동하고 있다. 만약  $t = 1$ 일 때 열차가 탈선되었다면,  $t = 3$ 에서 열차의 위치는 어디겠는가? 단, 중력은 무시한다.

1-1. 10. 곡선

$$X(t) = (6t, 3t^2, t^3)$$

의 속도벡터를 구하여라.

1-1. 11. 곡선

$$X(t) = (\sin 3t, \cos 3t, 2t^2)$$

의 속도벡터를 구하여라.

1-1. 12. 곡선

$$X(t) = (\cos^2 t, 3t - t^3, t)$$

의 속도벡터를 구하여라.

1-1. 13. 곡선

$$X(t) = (4e^t, 6t^4, \cos t)$$

의 속력을 구하여라.

1-1. 14.  $t = 0$ 일 때 곡선

$$X(t) = (e^t, \cos t)$$

의 속도벡터를 구하여라.

1-1. 15.  $t = 1$ 일 때 곡선

$$X(t) = (3t^2, t^3)$$

의 속력을 구하여라.

1-1. 16.  $t = \pi$ 일 때 곡선

$$X(t) = (t \sin t, 4t)$$

의 속도벡터를 구하여라.

1-1. 17.  $t = 1$ 일 때 곡선

$$X(t) = (t^2, e^2)$$

의 접선의 방정식을 구하여라.

1-1. 18.  $t = 1$ 일 때 곡선

$$X(t) = (\sin 3t, \cos 3t, 2t^{5/2})$$

의 접선의 방정식을 구하여라.

1-1. 19. 에버랜드의 롤러코스터는 곡선

$$X(t) = (t^2, t^3 - 4t, 0)$$

을 따라 진행하고 있다. 해당 롤러코스터가  $t = 2$ 일 때 탈선한다면  $t = 3$ 일 때 어디에 있겠는가? 단, 중력은 무시한다.

1-1. 20.

$$X_1(t) = (e^t, \sin t, t^3)$$

$$X_2(t) = (e^{-t}, \cos t, -2t^3)$$

에 대하여

$$\frac{d}{dt}(X_1(t) + X_2(t))$$

를 구하여라.

1-1. 21.

$$X_1(t) = (e^t, \sin t, t^3)$$

$$X_2(t) = (e^{-t}, \cos t, -2t^3)$$

에 대하여

$$\frac{d}{dt}(X_1(t) \cdot X_2(t))$$

를 구하여라.

1-1. 22.

$$X_1(t) = (e^t, \sin t, t^3)$$

$$X_2(t) = (e^{-t}, \cos t, -2t^3)$$

에 대하여

$$\frac{d}{dt}(X_1(t) \times X_2(t))$$

를 구하여라.

## 가속도

1-1. 23.  $t = 0$ 일 때

$$X(t) = (\cos t, \sin 2t)$$

를 따라 움직이는 입자의 속도와 가속도 벡터를 구하여라.

1-1. 24.  $t = 0$ 일 때

$$X(t) = (\sqrt{2}t, e^t, e^{-t})$$

를 따라 움직이는 입자의 속도와 가속도 벡터를 구하여라.

1-1. 25.  $t = 0$ 일 때

$$X(t) = (t \sin t, t \cos t, \sqrt{3}t)$$

를 따라 움직이는 입자의 속도와 가속도 벡터를 구하여라.

1-1. 26.  $t = 9$ 일 때

$$X(t) = (t, t, 4t^{3/2})$$

를 따라 움직이는 입자의 속도와 가속도 벡터를 구하여라.

1-1. 27. 속도벡터가  $(6t, 3t^2, t^3)$ 으로 주어지며  $(0, 0, 0)$ 을 지나는 곡선이 있다.  $t = 2$ 일 때 곡선이 지나가는 점은 어디인가?

1-1. 28. 곡선  $X(t)$ 는  $X(0) = (0, -5, 1)$ 이며  $X'(t) = (t, e^t, t^2)$ 이다.  $X(t)$ 를 구하여라.

1-1. 29. 곡선  $(\sin 2t, t, \cos 2t)$  위의 점  $(0, \pi, 1)$ 에 대한 접축평면의 방정식을 구하여라.

1-1. 30. 곡선  $(t + 2, 1 - t, \frac{1}{2}t^2)$ 의 접축평면을 구하여라.

### 재매개화

1-1. 31. 곡선  $y = e^x$ 를 두 가지 방법으로 매개화하되, 한 곡선의 속도벡터가 다른 하나의 곡선의 속도벡터와 방향은 반대이면서 크기는 두 배가 되도록 하여라.

1-1. 32. 곡선  $4x^2 + y^2 = 1$ 을  $t$ 에 대한 곡선으로 매개화하여라. 단,  $t \in [0, \pi]$ 이다.



1-1. 33. 원점과  $(a, b, c)$  사이를 잇는 직선을 곡선  $X(t)$ 로 표현하여라.

1-1. 34.  $9x^2 + 16y^2 = 4$ 를 매개화하여라.

### 곡선의 길이

1-1. 35.  $[0, 2\pi]$ 에서 곡선  $X(t) = (r \cos t, r \sin t)$ 의 길이를 구하여라. 단,  $r > 0$

1-1. 36.  $[0, 1]$ 에서 곡선  $X(t) = (\cos t, \sin t, \frac{1}{2}t^2)$ 의 길이를 구하여라

1-1. 37. 사차원의 곡선  $X(t) = (\cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t)$  이  $t \in [0, \pi]$  에서 정의될 때, 그 길이를 구하여라.

1-1. 38.  $t \in [0, 2\pi]$  에서 정의된 곡선

$$(2 \cos t, 2 \sin t, t)$$

의 길이를 구하여라.

1-1. 39.  $t \in [0, 1]$  에서 정의된 곡선

$$(1, 3t^2, t^3)$$

의 길이를 구하여라.

1-1. 40.  $t \in [0, 1]$  에서 정의된 곡선

$$(\sin 3t, \cos 3t, 2t^{3/2})$$

의 길이를 구하여라.

1-1. 41.  $t \in [1, 2]$ 에서 정의된 곡선

$$(t + 1, \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}, \frac{1}{2}t^2)$$

의 길이를 구하여라.

1-1. 42.  $t \in [0, 2\pi]$ 에서 정의된 곡선

$$(2 \cos t - \cos 2t, 2 \sin t - \sin 2t)$$

의 길이를 구하여라.

1-1. 43.  $t \in [0, \pi]$ 에서 정의된 곡선

$$(t, t \sin t, t \cos t)$$

의 길이를 구하여라.

1-1. 44. 곡선  $X(t)$ 는  $0 \sim 2\pi$ 에서는  $(2 \cos t, 2 \sin t, t)$ 로,  $2\pi \sim 4\pi$ 에서는  $(2, t - 2\pi, t)$ 로 정의된다. 곡선  $X(t)$ 의 길이를 구하여라.

1-1. 45. 곡선  $(2t, t^2, \ln t)$ 는  $t > 0$ 에서 정의된다. 점  $(2, 1, 0)$ 과  $(4, 4, \ln 2)$  사이 이 곡선의 길이를 구하여라.

1-1. 46. 곡선

$$X(t) = (t, \ln t, 2\sqrt{2t}), \quad 1 \leq t \leq 2$$

의 길이를 구하여라.

### 호의 길이와 재매개화

1-1. 47. 곡선

$$X(t) = \left(1 + t, \frac{t-1}{2}, \frac{t-2}{3}\right)$$

를  $t = 0$ 로부터  $\pi$  호의 길이로 매개화하여라.

1-1. 48. 곡선

$$(\sinh t, \cosh t, t), \quad t \geq 0$$

를  $t = 0$ 으로부터  $\pi$  호의 길이로 매개화하여라.

1-1. 49. 곡선  $(\sqrt{2}e^t \cos t, e^t \sin t, e^t \sin t)$ 를  $t = 0$ 으로부터 켤 호의 길이로 매개화하여라.

1-1. 50. 곡선  $(\sin 2t, \cos 2t)$ ,  $\pi \leq t \leq 3\pi$ 를  $t = \pi$ 으로부터 켤 호의 길이로 매개화하여라.

### 선적분

1-1. 51.  $[0, 2\pi]$ 에서 정의된 나선  $X(t) = (\cos t, \sin t, t)$ 에 대하여,  $\int_X x^2 + y^2 + z^2 ds$ 의 값을 구하여라.

1-1. 52.  $f(x, y, z) = y$ 와  $t \in [0, 1]$ 에서 정의된  $X(t) = (0, 0, t)$ 에 대하여

$$\int_X f ds$$

의 값을 구하여라.

**1-1. 53.**  $f(x, y, z) = x + y + z$ 와  $X(t) = (\sin t, \cos t, t)$ 에 대하여,  $t \in [0, 2\pi]$ 에서  $\int_X f ds$ 의 값을 구하여라.

**1-1. 54.**  $f(x, y, z) = \cos z$ 와  $X(t) = (\sin t, \cos t, t)$ 에 대하여,  $t \in [0, 2\pi]$ 에서  $\int_X f ds$ 의 값을 구하여라.

**1-1. 55.**  $f(x, y, z) = e^{\sqrt{z}}$ 과  $X(t) = (1, 2, t^2)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ 에 대하여  $\int_X f ds$ 의 값을 구하여라.

**1-1. 56.**  $f(x, y, z) = yz$ 와  $X(t) = (t, 3t, 2t)$ 에 대하여  $t \in [1, 3]$ 에서  $\int_X f ds$ 의 값을 구하여라.

1-1. 57.  $f(x, y, z) = x \cos z$ 와  $X(t) = (t, t^2, 0)$ 에 대하여,  $t$ 가 0 이상 1 이하일 때  $\int_X f ds$ 의 값을 구하여라.

1-1. 58.  $f(x, y, z) = (x + y)/(y + z)$ 와  $X(t) = (t, \frac{2}{3}t^{3/2}, t)$ ,  $t \in [1, 2]$ 에 대하여  $X$ 를 따라  $f$ 를 선적분하여라.

1-1. 59.  $y \neq 0$ 인 곳에서 정의되는 함수

$$f(x, y, z) = 1/y^3$$

를  $X(t) = (\ln t, t, 2)$ 에 대하여  $t \in [1, e]$ 에서 선적분한 값은?

1-1. 60.  $x = t^4, y = t^4, -1 \leq t \leq 1$ 을 따라 함수  $f(x, y) = 2x - y$ 를 선적분하여라.

1-1. 61. 곡선  $X(t) = (t^2, t, \frac{4}{3}t^{3/2})$ 이  $t \in [0, 1]$ 에서 정의될 때, 그 중심을 구하여라.

1-1. 62. 3차원 좌표공간에서  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 과  $x + y + z = 0$ 이 이루는 교선을 따라 롤러코스터의 레일이 분포해 있다.  $(x, y, z)$ 에서 레일의 밀도는  $\rho(x, y, z) = z^2$ 으로 주어진다. 레일의 질량을 구하여라.

1-1. 63. 곡선  $X(t) = (0, 2 \sin t, 2 \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ 의 평균  $y$ 좌표를 구하시오.

1-1. 64. 함수  $y = \ln x$ 에 대하여,  $x = 1$ 부터  $x = \sqrt{3}$  범위에서 점  $(x, y)$ 의 밀도는  $e^{2x}$ 라고 한다. 이 그래프의 평균 밀도를 구하여라.



## 곡선과 곡률

1-1. 65. 원점에서  $y = x^2$ 의 접촉원을 찾아라.

1-1. 66. 나선

$$X(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t, t)$$

에 대하여, 그 곡률을  $t$ 에 대해 표현하여라.

1-1. 67. 곡선

$$X(t) = (\cos t, \sin t)$$

의  $\kappa$ 가 항상 일정함을 보여라.

1-1. 68. 곡선

$$X(t) = (0, t^3, t^2)$$

에 대하여  $t = 1$ 일 때의 곡률을 구하여라.

1-1. 69. 곡선  $X(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$ 의  $(1, 1, 0)$ 에서의 곡률벡터와 곡률을 구하여라.

1-1. 70. 곡선  $X(t) = (2 \sin 2t, 2 \cos 2t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ 에 대해, 접축원을 구하시오.

## 다변수함수

### 그래프와 등위면

\* 주의 : 이번 단원의 문제 중 그리는 문제에 대해서는 그림을 넣지 않고, 개형 설명만 하였다.

<https://www.geogebra.org/3d?lang=en> 등을 이용하여라.

1-1. 71.  $\mathbb{R}^2$ 에서  $x - y + 2$ 의 2-등위면을 그려라.

1-1. 72.  $\mathbb{R}^2$ 에서  $x^2 + 4y^2$ 의 16-등위면을 그려라.

1-1. 73.  $\mathbb{R}^2$ 에서  $-xy$ 의 2-등위면을 그려라.

1-1. 74.  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ 의  $c$ -등위면이  $c$ 의 값에 따라 어떻게 변하는지 설명하시오.

1-1. 75.  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ 의 0-등위면의 모양을 설명하시오.

1-1. 76.  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ 의 0-등위면의 모양을 설명하시오.

1-1. 77.  $f(x, y, z) = x + y + z$ 의 1- 등위면과 2- 등위면 사이의 거리를 구하여라.

1-1. 78.  $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 10z - 11 = 0$ 가 그리는 모양을 설명하여라.

1-1. 79.  $f(x, y) = |x| + |y|$ 의 1- 등위면의 모양을 설명하라.

1-1. 80.  $x^2 + y^2 = 4$ 와  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 이 삼차원에서 어떤 형태를 띠는지 설명하고,  $z > 0$ 인 영역에서의 교선이 폐곡선일 경우 그 교선을 한 바퀴 돌 동안 함수  $f(x, y, z) = x + y + z$ 를 선적분한 값을 구하라.

## 연속함수

1-1. 81.  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2$ 에 대하여,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x, y)$$

의 값을 구하여라.

1-1. 82.

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & xy \leq 0 \\ 0 & xy > 0 \end{cases}$$

에 대하여,  $(0, 0)$ 에서  $f(x, y)$ 의 극한이 존재하는가?

1-1. 83.

$$f(x, y) = (x^2y, (y + x^3)/(1 + x^2))$$

는  $(1, 2)$ 에서 연속인가?

1-1. 84.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

의 값이 존재한다면 구하여라.

1-1. 85.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

의 값이 존재한다면 구하여라.

1-1. 86.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

의 값이 존재한다면 구하여라.

1-1. 87.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^2 + y^2}$$

의 값이 존재한다면 구하여라.

1-1. 88.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{xy}$$

의 값이 존재한다면 구하여라.

1-1. 89.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$$

의 값이 존재한다면 구하여라.

1-1. 90.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{y}$$

의 값이 존재한다면 구하여라. (물론이게도  $y$ 는 0이 아닌 영역에서 정의된다.)

1-1. 91.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy} - 1}{y}$$

의 값이 존재한다면 구하여라.

1-1. 92.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2 + 2}$$

의 값이 존재한다면 구하여라.

**1-1. 93.**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy}}{x+1}$$

의 값이 존재한다면 구하여라.

**1-1. 94.**

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{2x^2y \cos z}{x^2 + y^2}$$

의 값이 존재한다면 구하여라.

**1-1. 95.**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin 2x - 2x + y}{x^3 + y}$$

의 값이 존재한다면 구하여라.

**1-1. 96.**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2 + y^2}$$

의 값이 존재한다면 구하여라.



1-1. 97.

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\sin(x+y+z)}{x+y+z}$$

의 값이 존재한다면 구하여라.

1-1. 98.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x+y^2}$$

의 값이 존재한다면 구하여라.

1-1. 99.

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

의 값이 존재한다면 구하여라.

1-1. 100.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin y}{x^2 + 1 - \cos y}$$

의 값이 존재한다면 구하여라.