다중적분

넓이와 부피

다중적분

푸비니 정리

1-4(1). 1. *다음 적분값을 구하시오.*

$$\int_0^2 \int_1^3 (x^2+y)dydx$$

$$\int \int_0^2 \int_1^3 (x^2+y)dydx = \int_0^2 2x^2+4dx = \frac{40}{3}$$

1-4(1). 2. *다음 적분값을 구하시오.*

$$\int_0^\pi \int_1^2 y\sin xdydx$$

$$\int_0^\pi \int_1^2 y\sin xdydx = \frac{3}{2}\int_0^\pi \sin xdx = 3$$

1-4(1). 3. *다음 적분값을 구하시오.*

$$\int_{-2}^4 \int_0^1 (xe^y)dydx$$

$$\int_{-2}^4 \int_0^1 (xe^y)dydx = \int_{-2}^4 x(e-1)dx = 6(e-1)$$

1-4(1). 4. *다음 적분값을 구하시오.*

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^1 (e^x\cos y)dxdy$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^1 (e^x\cos y)dxdy = \int_0^{\pi/2} (e-1)\cos ydy = e-1$$

1-4(1). 5. *다음 적분값을 구하시오.*

$$\int_1^2 \int_0^1 (e^{x+y}+x^2+\ln y)dxdy$$

$$\int_1^2 \int_0^1 (e^{x+y}+x^2+\ln y)dxdy = \int_1^2 ((e-1)e^y+\frac{1}{3}+\ln y)dy = e^3-2e^2+e-\frac{2}{3}+2\ln 2$$

1-4(1). 6. *다음 적분값을 구하시오.*

$$\int_1^9 \int_1^e \left(\frac{\ln\sqrt{x}}{xy}\right)dxdy$$

$$\int_1^9 \int_1^e \left(\frac{\ln\sqrt{x}}{xy}\right)dxdy = \frac{1}{2}\int_1^9 \left(\frac{1}{2y}\right)dy = \frac{\ln 3}{2}$$

1-4(1). 7. *다음 적분값을 구하시오.*

$$\int_1^2 \int_0^3 (x+3y+1)dxdy$$

$$\int_1^2 \int_0^3 (x+3y+1)dxdy = \int_1^2 \frac{9}{2}+9y+3dy = 21$$

1-4(1). 8. *다음 적분값을 구하시오.*

$$\int_{-1}^{2}\int_{0}^{1}(2x^2+y^4\sin\pi x)dxdy$$

$$\int_{-1}^{2}\int_{0}^{1}(2x^2+y^4\sin\pi x)dxdy=\int_{-1}^{2}\frac{2}{3}+\frac{2y^4}{\pi}dy=2+\frac{66}{5\pi}$$

1-4(1). 9. *포물면* $z=16-x^2-y^2$*와* $xy-$*평면, 그리고 평면* $x=1, x=-3$*과* $y=-2, y=2$*로 둘러싸인 부분의 부피를 구하시오.*

$$V=\int_{1}^{3}\int_{-2}^{2}(16-x^2-y^2)dydx=\int_{1}^{3}64-4x^2-\frac{16}{3}dx=\frac{248}{3}$$

1-4(1). 10. *그래프* $z=\sin x\cos y$*와 평면* $x=0, x=\pi, y=-\pi/2, y=\pi/2$*, 그리고* $xy-$*평면으로 이루어진 영역의 부피를 구하시오.*

$$V=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{\pi}\sin x\cos ydxdy=2\int_{-pi/2}^{\pi/2}\cos ydy=4$$

1-4(1). 11. *그래프* $z=4-x^2$*과* $xy-$*평면, 그리고* $x=\pm 2$*와* $y=0$*,* $y=5$*로 둘러싸인 영역의 부피를 구하시오.*

$$V=\int_{0}^{5}\int_{-2}^{2}4-x^2dxdy=\int_{0}^{5}\frac{32}{3}dy=\frac{160}{3}$$

1-4(1). 12. *그래프* $z=|x|\sin\pi y$*와* $xy-$*평면,* $x=-2$*,* $x=3, y=0, y=1$ *로 둘러싸인 영역의 부피를 구하여라.*

$$V=\int_{-2}^{3}\int_{0}^{1}|x|\sin\pi ydydx=\int_{-2}^{3}\frac{2|x|}{\pi}dx=\frac{13}{\pi}$$

1-4(1). 13. *다음 적분값을 구하여라.*

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2}x^3dydx$$

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2}x^3dydx=\int_{-2}^{2}(4x^3-x^5)dx=0$$

1-4(1). 14. *다음 적분값을 구하여라.*

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{x^3}3dydx$$

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{x^3}3dydx=\int_{0}^{1}3x^3dx=\frac{3}{4}$$

1-4(1). 15. *다음 적분값을 구하여라.*

$$\int_{0}^{2}\int_{0}^{y^2}ydxdy$$

$$\int_{0}^{2}\int_{0}^{y^2}ydxdy=\int_{0}^{2}y^3dy=4$$

1-4(1). 16. *다음 적분값을 구하여라.*

$$\int_{0}^{2}\int_{0}^{x^2}ydydx$$

$$\int_0^2 \int_0^{x^2} ydydx = \int_0^2 \frac{x^4}{2}dx = \frac{16}{5}$$

1-4(1). 17. *다음 적분값을 구하여라.*

$$\int_{-1}^3 \int_x^{2x+1} xydydx$$

$$\int_{-1}^3 \int_x^{2x+1} xydydx = \frac{1}{2}\int_{-1}^3 (3x^3+4x^2+x)dx = \frac{152}{3}$$

1-4(1). 18. *다음 적분값을 구하여라.*

$$\int_0^2 \int_{x^2/4}^{x/2} (x^2+y^2)dydx$$

$$\int_0^2 \int_{x^2/4}^{x/2} (x^2+y^2)dydx = \int_0^2 \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{24} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{192}dx = \frac{33}{70}$$

1-4(1). 19. *다음 적분값을 구하여라.*

$$\int_0^4 \int_0^{2\sqrt{y}} x\sin(y^2)dxdy$$

$$\int_0^4 \int_0^{2\sqrt{y}} x\sin(y^2)dxdy = \int_0^4 2y\sin(y^2)dy = 1-\cos 16$$

1-4(1). 20. *다음 적분값을 구하여라.*

$$\int_0^\pi \int_0^{\sin x} y\cos xdydx$$

$$\int_0^\pi \int_0^{\sin x} y\cos xdydx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2 x\cos xdx = 0$$

1-4(1). 21. *다음 적분값을 구하여라.*

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 3dydx$$

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 3dydx = \int_0^1 6\sqrt{1-x^2}dx = \frac{3}{2}\pi$$

1-4(1). 22. *다음 적분값을 구하여라.*

$$\int_0^1 \int_{-e^x}^{e^x} y^3dydx$$

$$\int_0^1 \int_{-e^x}^{e^x} y^3dydx = \int_0^1 0dx = 0$$

1-4(1). 23. *영역* $x \geq 0, y \geq 0,\ x+y \geq 2$*에서 함수* $1-xy$*를 적분한 값을 구하여라.*

$$\int_0^2 \int_0^{2-x} (1-xy)dydx = \int_0^2 2-3x+2x^2-\frac{x^3}{2}dx = \frac{4}{3}$$

1-4(1). 24. *함수* $y=\sqrt{x}$*와* $y=32x^3$*로 둘러싸인 부분에서 함수* $3xy$*를 적분한 값을 구하여라.*

$$\int_0^{1/4}\int_{32x^3}^{\sqrt{x}} 3xydydx = \int_0^{1/4}\left(\frac{3}{2}x^2 - 1536x^7\right)dx = \frac{5}{1024}$$

1-4(1). 25. *$x+y=2$와 $y^2-2y-x=0$으로 둘러싸인 영역에서 $x+y$를 적분한 값을 구하여라.*

$$\int_{-1}^{2}\int_{y^2-2y}^{2-y}(x+y)dxdy = \int_{-1}^{2} -\frac{y^4}{2}+y^3-\frac{y^2}{2}+2dy = \frac{99}{20}$$

1-4(1). 26. *$x=y^3$ 아래에 있고, $y=x^2$ 위에 있는 영역에서 xy를 적분한 값을 구하여라.*

$$\iint_D xydA = \int_0^1\int_{y^3}^{\sqrt{y}} xydxdy = \int_0^1 \frac{y^2}{2}-\frac{y^7}{2}dy = \frac{5}{48}$$

1-4(1). 27. *좌표평면에서 $y=x$, x축, $x=1$로 가두어진 영역 안에서 함수 e^{x^2}을 적분한 값을 구하여라.*

$$\iint_D e^{x^2}dA = \int_0^1\int_0^x e^{x^2}dydx = \int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}(e-1)$$

1-4(1). 28. *x축, y축, $y=1/\sqrt{x}$, $y=x$, $y=3$에 의해 생성되는 영역에서 $3y$를 적분한 값을 구하여라.*

영역은 두 부분으로 나누어 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}\iint_D 3ydA &= \int_0^{1/9}\int_x^3 3ydydx + \int_{1/9}^1\int_x^{1/\sqrt{x}} 3ydydx \\ &= \int_0^{1/9}\frac{27}{2}-\frac{3}{2}x^2dx + \int_{1/9}^1 \frac{3}{2x}-\frac{3}{2}x^2dx \\ &= 1+3\ln 3\end{aligned}$$

1-4(1). 29. *좌표평면에서 두 그래프 $y=x^2+2$와 $y=2x^2-2$ 사이에 있는 영역에서 $x-2y$를 적분한 값을 구하여라.*

$$\iint_D (x-2y)dA = \int_{-2}^{2}\int_{2x^2-2}^{x^2+2}(x-2y)dydx = \int_{-2}^{2} 3x^4-x^3-12x^2+4xdx = -\frac{128}{5}$$

1-4(1). 30. *좌표평면에서 $y=x$, $y=3x$, $y=3/x$에 의해 형성되는 영역 중 제 1사분면에 있는 것을 D라고 하자. D 위에서 함수 x^2+y^2을 적분한 값을 구하여라.*

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+y^2)dA &= \int_0^1\int_x^{3x}(x^2+y^2)dydx + \int_1^{\sqrt{3}}\int_x^{3/x}(x^2+y^2)dydx \\ &= \int_0^1 \frac{32}{3}x^3dx + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{9}{x^3}+3x-\frac{4x^3}{3}dx = 6\end{aligned}$$

1-4(1). 31. *함수 $y=x^3$와 $y=x^{1/5}$는 세 개의 교점을 가지고 있으며, 두 그래프 사이에 있는 영역은 새싹과 비슷한 모양을 가지고 있다. 그 모양의 넓이를 구하시오.*

$$A = 2\int_0^1\int_{x^3}^{x^{1/5}} 1dydx = 2\int_0^1 x^{1/5}-x^3dx = \frac{7}{6}$$

1-4(1). 32. *$y=-2x, y=2-x^2, y=x$가 좌표평면 위에 그려져 있다. 그 중에서, 포물선의 아래에 있고 두 직선의 위에 있는 부분의 넓이를 구하시오.*

$$\begin{aligned} A &= \int_{1-\sqrt{3}}^{0}\int_{-2x}^{2-x^2} 1dydx + \int_0^1 \int_x^{2-x^2} 1dydx \\ &= \int_{1-\sqrt{3}}^{0}(2+2x-x^2)dx + \int_0^1 (2-x-x^2)dx \\ &= \frac{4\sqrt{3}-3}{2} \end{aligned}$$

1-4(1). 33. *포물선* $y = 4 - x^2$*보다는 아래에 있고* $y = 4x - x^2$*보다는 위에 있는 영역 중에서* $x \geq 0$*이 부분을* D*라고 하자.*

$$\iint_D (24 - 2x - 6y)dA$$

를 구하여라.

$$\begin{aligned} \iint_D (24-2x-6y)dA &= \int_0^1 \int_{4x-x^2}^{4-x^2} (24-2x-6y)dydx \\ &= \int_0^1 80x^2 - 24x^3 - 104x + 48dx = \frac{50}{3} \end{aligned}$$

1-4(1). 34. *다음 적분값을 구하여라.*

$$\int_0^1 \int_{x^2-x}^{x} (x^2+6y^2)$$

$$\int_0^1 \int_{x^2-x}^{x} (x^2+6y^2) = \int_0^2 -2x^6 + 6x^5 - 7x^4 + 6x^3 = \frac{232}{35}$$

1-4(1). 35. *다음 적분값을 구하여라.*

$$\int_{-4}^{5}\int_{x^2-10}^{31-(x-1)^2} (4x+2y+25)dydx$$

$$\int_{-4}^{5}\int_{x^2-10}^{31-(x-1)^2} (4x+2y+25)dydx = \int_{-4}^{5} (-12x^2 - 78x^2 + 330x + 1800)dx = 11664$$

1-4(1). 36. $y = 2x$*와* $y = x^2$ *사이의 영역에서* $2x+1$*을 적분하여라.*

$$\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (2x+1)dxdy = \int_0^4 -\frac{y^2}{4} + \frac{y}{2} + \sqrt{y}dy = 4$$

1-4(1). 37. $y = x$*와* $y = 2x$*,* $y = 1$*에 의해 결정되는 삼각형 모양의 영역에서* e^x*를 적분하여라.*

$$\int_0^1 \int_y^{2y} e^x dxdy = \int_0^1 (e^{2y} - e^y)dy = \frac{1}{2}(e^2 - 2e + 1)$$

1-4(1). 38. *다음 적분값을 구하여라.*

$$\int_0^1 \int_{3y}^{3} \cos x^2 dxdy$$

$$\int_0^1 \int_{3y}^{3} \cos x^2 dxdy = \frac{1}{3}\int_0^3 x\cos x^2 dx = \frac{\sin 9}{6}$$

1-4(1). 39. *다음 적분값을 구하여라.*

$$\int_0^1 \int_y^1 x^2 \sin xy dx dy$$

$$\int_0^1 \int_y^1 x^2 \sin xy dx dy = \int_0^1 \int_0^x x^2 \sin xy dy dx = \int_0^1 x - x \cos x^2 dx = \frac{1}{2}(1 - \sin 1)$$

1-4(1). 40. *다음 적분값을 구하여라.*

$$\int_0^\pi \int_y^\pi \frac{\sin x}{x} dx dy$$

$$\int_0^\pi \int_y^\pi \frac{\sin x}{x} dx dy = \int_0^\pi \int_0^x \frac{\sin x}{x} dy dx = \int_0^\pi \sin x dx = 2$$

1-4(1). 41. *다음 적분값을 구하여라.*

$$\int_0^3 \int_0^{9-x^2} \frac{xe^{3y}}{9-y} dy dx$$

$$\int_0^3 \int_0^{9-x^2} \frac{xe^{3y}}{9-y} dy dx = \int_0^9 \int_0^{\sqrt{9-y}} \frac{xe^{3y}}{9-y} dx dy = \int_0^9 (e^{3y}/2) dx = \frac{e^{27}-1}{6}$$

1-4(1). 42. *다음 적분값을 구하여라.*

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{-x^2} dy dx$$

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{-x^2} dy dx = \int_0^1 \int_0^{2x} e^{-x^2} dx = \int_0^1 (2xe^{-x^2}) dx = 1 - \frac{1}{e}$$

1-4(1). 43. *다음 적분값을 구하여라.*

$$\iiint_{[-1,1]\times[0,2]\times[1,3]} xyz dV$$

$$\iiint_{[-1,1]\times[0,2]\times[1,3]} xyz dV = \int_1^3 \int_0^2 \int_{-1}^1 xyz dx dy dz = \int_1^3 \int_0^2 0 dy dz = 0$$

1-4(1). 44. *다음 적분값을 구하여라.*

$$\iiint_{[0,1]\times[0,2]\times[0,3]} (x^2 + y^2 + z^2) dV$$

$$\iiint_{[0,1]\times[0,2]\times[0,3]} (x^2+y^2+z^2) dV = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 (x^2+y^2+z^2) dz dy dz = \int_0^1 \int_0^2 3x^2+3y^2+9 dy dx = \int_0^1 6x^2+26 dx = 28$$

1-4(1). 45. *다음 적분값을 구하여라.*

$$\iiint_{[1,e]\times[1,e]\times[1,e]} \left(\frac{1}{xyz}\right) dV$$

$$\iiint_{[1,e]\times[1,e]\times[1,e]} \left(\frac{1}{xyz}\right) dV = \left(\int_1^e \frac{1}{x} dx\right) \left(\int_1^e \frac{1}{y} dx\right) \left(\int_1^e \frac{1}{z} dx\right) = 1^3 = 1$$

1-4(1). 46. *다음 적분값을 구하여라.*

$$\int_{-1}^{2}\int_{1}^{z^2}\int_{0}^{y+z} 3yz^2dxdydz$$

$$\int_{-1}^{2}\int_{1}^{z^2}\int_{0}^{y+z} 3yz^2dxdydz = 3\int_{-1}^{2}\int_{1}^{z^2} y^2z^2+yz^3dydz = 3\int_{-1}^{2}\frac{z^8}{3}+\frac{z^7}{2}-\frac{z^3}{2}-\frac{z^2}{3}dz = \frac{1539}{16}$$

1-4(1). 47. *다음 적분값을 구하여라.*

$$\int_{1}^{3}\int_{0}^{z}\int_{1}^{xz}(x+2y+z)dydxdz$$

$$\int_{1}^{3}\int_{0}^{z}\int_{1}^{xz}(x+2y+z)dydxdz = \int_{1}^{3}\int_{0}^{z} x^2z+x^2z^2+xz^2-x-z-1dxdz = \int_{1}^{3}\frac{z^5}{3}+\frac{5z^4}{6}-\frac{3z^2}{2}-zdz = \frac{574}{9}$$

1-4(1). 48. *다음 적분값을 구하여라.*

$$\int_{0}^{1}\int_{1+y}^{2y}\int_{z}^{y+z} zdxdydz$$

$$\int_{0}^{1}\int_{1+y}^{2y}\int_{z}^{y+z} zdxdydz = \int_{0}^{1}\int_{1+y}^{2y} yzdzdy = \int_{0}^{1}\frac{3y^3}{2}-y^2-\frac{y}{2}dy = -\frac{5}{24}$$

1-4(1). 49. *다음 적분값을 구하여라.*

$$\int_{0}^{1}\int_{-2}^{2}\int_{0}^{y^2}(2x-y+z)dzdydx$$

$$\int_{0}^{1}\int_{-2}^{2}\int_{0}^{y^2}(2x-y+z)dzdydx = \int_{0}^{1}\int_{-2}^{2} 2xy^2-y^3+\frac{y^4}{2}dydx = \int_{0}^{1}\frac{32x}{3}+\frac{64}{10} = \frac{176}{15}$$

1-4(1). 50. *원기둥* $x^2+y^2=9$*의* $y>0$*인 부분을 평면* $z=6-2y$*와* xy*평면으로 잘랐을 때 사이에 있는 영역의 부피를 구하여라.*

$$\begin{aligned} V &= \iiint_W 1dV \\ &= \int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{6-2y} 1dzdydx \\ &= \int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} 6-2ydydx \\ &= \int_{-3}^{3} 6\sqrt{9-x^2}+x^2-9dx \\ &= 27\pi-36 \end{aligned}$$

치환적분

1-4(1). 51. *다음 적분의 값을 구하여라.*

$$\int_0^1 \int_{y/2}^{y/2+2} (2x-y)dxdy$$

$u = 2x - y, v = y$라고 두면 주어진 적분 영역은 $0 \le u \le 4$과 $0 \le v \le 1$로 바꿔줄 수 있다. 또한

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

이므로 $G(u,v) = (x,y)$의 야코비 행렬식은 $1/2$이고, 이에 따라

$$\int_0^1 \int_{y/2}^{y/2+2} (2x-y)dxdy = \int_0^1 \int_0^4 \frac{1}{2} ududv = 4$$

임을 확인할 수 있다.

1-4(1). 52. *다음 적분의 값을 구하여라.*

$$\iint_0^2 \int_{x/2}^{x/2+1} x^5(2x-y)e^{(2x-y)^2} dydx$$

$u = x, v = 2x - y$로 둔다면

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

이므로 사상 $G(u,v) = (x,y)$의 야코비 행렬식은 $1/2$이고, 이에 따라

$$\iint_0^2 \int_{x/2}^{x/2+1} x^5(2x-y)e^{(2x-y)^2} dydx = \int_0^2 \int_0^2 \frac{1}{2} u^5 v e^{v^2} dudv = \frac{8}{3}(e^4 - 1)$$

임을 알 수 있다. u와 v의 범위는 주어진 영역을 잘 바꾸어 내면 둘 모두 $[0,2]$임을 확인할 수 있을 것이다.

1-4(1). 53. *점 $(0,0), (2,1), (3,-1), (1,-2)$를 연결하여 만든 직사각형을 생각하자. 이 정사각형 안에서 함수*

$$\frac{(2x+y-3)^2}{5(2y-x+6)^2}$$

을 적분한 값을 구하여라.

$u = 2x + y - 3$, $v = 2y - x + 6$으로 치환하게 된다면, 주어진 사각형은 $1 \le v \le 6, -3 \le u \le 2$가 만드는 영역과 같다. 또한 사상 $G(u,v) = (x,y)$의 야코비 행렬식은 $1/5$로 주어진다. 따라서 원하는 값은

$$\int_1^6 \int_{-3}^2 \frac{u^2}{3v^2} dudv = \frac{7}{3} \int_1^6 v^{-2} dv = \frac{35}{18}$$

로 주어진다.

1-4(1). 54. *다음 적분값을 구하여라.*

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 3dydx$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 3dydx = \int_0^{2\pi} \int_0^1 3rdrd\theta = \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} d\theta = 3\pi$$

1-4(1). 55. *다음 적분값을 구하여라.*

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dydx$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dydx = \int_0^{\pi/2} \int_0^2 rdrd\theta = \int_0^{\pi/2} 2d\theta = \pi$$

1-4(1). 56. *다음 적분값을 구하여라.*

$$\int_0^{2\pi} \int_0^3 r^4 drd\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^3 r^4 drd\theta = \int_0^{2\pi} \frac{243}{5} d\theta = \frac{486\pi}{5}$$

1-4(1). 57. *다음 적분값을 구하여라.*

$$\int_{-a}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} e6x^2 + y^2 dxdy$$

$$\int_{-a}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} e6x^2 + y^2 dxdy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^a re^{r^2} drd\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}(e^{a^2} - 1)d\theta = \frac{\pi}{2}(e^{a^2} - 1)$$

1-4(1). 58. *다음 적분값을 구하여라.*

$$\int_0^3 \int_0^x \frac{dydx}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\int_0^3 \int_0^x \frac{dydx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^{\pi/4} \int_0^{3\sec\theta} drd\theta = \int_0^{\pi/4} 3\sec\theta = \ln(1+\sqrt{2})$$

1-4(1). 59. $x^2 + (y-1)^2 = 1$*은 좌표평면에서 원을 나타낸다. 이 원 내부에서 함수*

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

을 적분하여라.

해당 영역을 극좌표계로 변환하면, $r^2\cos^2\theta + (r\sin\theta - 1)^2 = 1$은 정리하면 $r^2 = 2r\sin\theta$이기에 원하는 영역은

$$D = \{(r,\theta) | r \le r\sin\theta,\ 0 \le \theta \le \pi\}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}} dA &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\sin\theta} \frac{1}{\sqrt{4-r^2}} rdrd\theta \\ &= \int_0^{\pi} 2 - 2\sqrt{\cos^2\theta} d\theta \\ &= 2\pi - 4\end{aligned}$$

1-4(1). 60. *좌표평면에서* $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$*의 네 교점이 이루는 정사각형 내부를 생각하자. 그 내부에서 함수*

$$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

을 적분한 값을 구하여라.

극좌표로 바꾸어서 생각해준다면, $x \le 1$은 $r \le 1/\cos\theta$로 이해해줄 수 있다. 따라서 구하는 값은

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dA &= \int_0^{\pi/4}\int_0^{1/\cos\theta} r\cos\theta drd\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{1/\sin\theta} r\cos\theta drd\theta \\ &= \int_0^{\pi/4}\frac{1}{2}\sec\theta d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\cos\theta}{2\sin^2\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{2}(\ln(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}-1)\end{aligned}$$

1-4(1). 61. *다음 적분값을 구하여라.*

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{3}\frac{e^x}{\sqrt{x^2+y^2}}dzdydx$$

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{3}\frac{e^x}{\sqrt{x^2+y^2}}dzdydx &= \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_r^3\frac{e^z}{d}zdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^3 e^3-e^r drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 2e^3+1d\theta = 2\pi(2e^3+1)\end{aligned}$$

1-4(1). 62. *다음 적분값을 구하여라.*

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\int_0^{4-x^2-y^2} e^{x^2+y^2+z}dzdxdy$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\int_0^{4-x^2-y^2} e^{x^2+y^2+z}dzdxdy &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{4-r^2} e^{r^2+z}rdzdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 re^{r^2}(e^{4-r^2}-1)drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{e^4}{2}-\frac{e}{2}+\frac{1}{2}d\theta = \pi(e^4-e+1)\end{aligned}$$

1-4(1). 63. *다음 적분값을 구하여라. 단, B는 반지름이 2인 구를 의미한다.*

$$\iiint_B \frac{dV}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+3}}$$

$$\begin{aligned}\iiint_B \frac{dV}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+3}} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^2 \frac{\rho^2\sin\varphi}{\sqrt{\rho^2+3}}d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{7}-\frac{3}{2}\sinh^{-1}(\frac{2}{\sqrt{3}})\sin\varphi d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 2\sqrt{7}-3\sinh^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}d\theta \\ &= (4\sqrt{7}-6\ln(2+\sqrt{7})+3\ln 3)\pi\end{aligned}$$

1-4(1). 64. $-1 \le z \le 2$*와* $x^2+y^2 \le 4$ *에 의해 결정되는 영역에서* $f(x,y,z) = x^2+y^2+2z^2$*을 적분하여라.*

$$\iiint_W (x^2+y^2+2z^2)dV = \int_{-1}^{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 r(r^2+2z^2)drd\theta dz$$
$$= \int_{-1}^{2}\int_0^{2\pi}(4z^2+4)d\theta dz$$
$$= \int_{-1}^{2}(8\pi z^2+8\pi)dz = 48\pi$$

1-4(1). 65. *반지름이 b인 구에서 반지름이 a인 구 ($b>a>0$)를 뺀 영역이 있다. 해당 영역에서 함수*

$$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}e^{x^2+y^2+z^2}$$

의 적분값을 a와 b로 표현하여라.

$$\iiint_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}e^{x^2+y^2+z^2}dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^b \rho^3 e^{\rho^2}\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$
$$= \pi\int_0^{\pi}\left((1-a^2)e^{a^2}+(b^2-1)e^{b^2}\right)\sin\varphi d\varphi d\theta$$
$$= 2\pi((1-a^2)e^{a^2}+(b^2-1)e^{b^2})$$

1-4(1). 66. *원뿔 $z=\sqrt{3x^2+3y^2}$과 구 $x^2+y^2+z^2=6z$ 에 의해 가둬지는 영역에서 z^2을 적분하여라.*

원뿔의 식을 잘 계산하면 $\rho\cos\varphi=\sqrt{3}\rho\sin\varphi$이므로 $\varphi=\pi/6$이며, 구는 $\rho^2=6\rho\cos\varphi$이므로 $\rho=6\cos\varphi$이다. 따라서

$$\iiint_W z^2dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^{6\cos\varphi}\rho^4\cos^2\varphi\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\frac{7776}{5}\cos^7\varphi\sin\varphi d\varphi d\theta$$
$$= \frac{8505\pi}{32}$$

1-4(1). 67. *원뿔 $z=2\sqrt{x^2+y^2}$와 $z=6$에 의해 결정되는 원뿔에서 함수*

$$f(x,y,z)=2+\sqrt{x^2+y^2}$$

를 적분하여라.

$$\iiint_W (2+\sqrt{x^2+y^2})dV = \int_0^3\int_0^{2\pi}\int_{2r}^6 r(2_r)dzd\theta dr$$
$$= \int_0^3\int_0^{2\pi}(-2r^3+2r^2+12r)d\theta dr$$
$$= \int_0^3 2\pi(-2r^3+2r^2+12r)dr = 63\pi$$

1-4(1). 68. *반지름이 b인 구와 반지름이 a인 구를 생각하여보자. $b>a>0$일 때, 반지름이 더 큰 구에서 작은 구를 뺀 속이 빈 구 모양의 $x\geq 0, y\geq 0$인 부분에서 $f(x,y,z)=x+y+z$을 적분하여라.*

$$\iiint_W (x+y+z)dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_a^b (\rho\sin\varphi\cos\theta+\rho\sin\varphi\sin\theta+\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\frac{b^4-a^4}{4}(\sin^2\varphi(\cos\theta+\sin\theta)+\sin\varphi\cos\varphi)d\varphi d\theta$$
$$= \frac{b^4-a^4}{4}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{4}(\cos\theta+\sin\theta)+\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{3\pi(b^4-a^4)}{16}$$

1-4(1). 69. *아래 삼중적분은 어떤 영역의 부피인가? 단, $b>0$이다.*

$$\int_0^{2\pi}\int_0^b\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} rdzdrd\theta$$

치환적분의 의미를 생각해보면 해당 삼중적분은

$$0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le b, 0\le z\le\sqrt{a^2-r^2}$$

이다. 따라서 θ는 전체이며, r은 b보다 작다. $0\le z$이며 $x^2+y^2+z^2\le a^2$임을 알 수 있다. 따라서 이 영역은 $x^2+y^2\le b^2$인 원기둥과 $x^2+y^2+z^2=a^2$의 $z\ge 0$인 부분인 반구 모두의 내부에 있는 쓰레기통 모양의 부피이다.

1-4(1). 70. *아래 적분의 값을 구하시오.*

$$\int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^{9-r^2} rdzd\theta dr$$

$$\int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^{9-r^2} rdzd\theta dr = \int_0^2\int_0^{2\pi}(9r-r^3)d\theta dr$$
$$= \int_0^2 (18\pi r-2\pi r^3)dr$$
$$= 28\pi$$