중간문풀-4. 1. *원점에서 함수 $f(x,y)=e^{xy}\sin y$의 3차 근사다항식을 구하시오.*

$e^{xy}=1+xy+o(xy)$이며, $\sin y = y-\frac{1}{6}y^3+o(y^4)$이므로,

$$f(x,y)=(e^{xy}\sin y)=(1+xy+o(xy))(y-\frac{1}{6}y^3+o(y^4))=y-\frac{1}{6}y^3+xy^2+o((x^2+y^2)^{3/2})$$

이다. 따라서 테일러 전개의 유일성에 의하여

$$T_3f(x,y)=y-\frac{1}{6}y^3+xy^2$$

이다.

중간문풀-4. 2. *원점에서 함수 $f(x,y)=(\cos x)\ln(1+y)$의 3차 근사다항식을 구하시오. 그리고 이를 이용하여 $(\cos 0.1)\ln 1.1$의 3차 근삿값을 구하고, 오차가 4×10^{-4} 이하임을 보이시오.*

3차 근사다항식을 구하기 위해 3계 미분계수까지 모두 구하여 보자.

$$D_1f(x,y)=-\sin x\ln(1+y)$$

$$D_2f(x,y)=\cos x\frac{1}{1+y}$$

$$D_1^2f(x,y)=-\cos x\ln(1+y)$$

$$D_1D_2f(x,y)=-\sin x\frac{1}{1+y}$$

$$D_2^2f(x,y)=-\cos x\frac{1}{(1+y)^2}$$

$$D_1^3f(x,y)=\sin x\ln(1+y)$$

$$D_1^2D_2f(x,y)=-\cos x\frac{1}{1+y}$$

$$D_1D_2^2f(x,y)=\sin x\frac{1}{(1+y)^2}$$

$$D_2^3f(x,y)=\cos x\frac{2}{(1+y)^3}$$

여기에 $(x,y)=(0,0)$을 대입하여 근사다항식을 구하면

$$T_3f(x,y)=f(0,0)+D_{(x,y)}f(0,0)+\frac{1}{2!}D^2_{(x,y)}f(0,0)+\frac{1}{3!}D^3_{(x,y)}f(0,0)=y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}x^2y$$

이다. 또한 이를 이용하면

$$\cos 0.1\ln 1.1\approx T_3f(0.1,0.1)=\frac{569}{6000}$$

임을 알 수도 있다. 또한 오차는

$$|R_3f(0.1,0.1)|\le\frac{M_4(0.1+0.1)^4}{4!}$$

을 만족시키며, M_4는 $\max\{|D_iD_jD_kD_lf(tx,ty)|:1\le i,j,k,l\le 2, 0\le t\le 1\}$이다. 그런데

$$D_1^4f(x,y)=\cos x\ln(1+y)$$

$$D_1^3D_2f(x,y)=\sin x\frac{1}{1+y}$$

$$D_1^2D_2^2f(x,y)=\cos x\frac{1}{(1+y)^2}$$

$$D_1D_2^3f(x,y) = -\sin x\frac{2}{(1+y)^3}$$
$$D_2^4f(x,y) = \cos x\frac{-6}{(1+y)^4}$$

이고, 이로부터 $M_4 \le 6$임을 알 수 있다. 따라서

$$(\text{오차}) \le 6 \cdot \frac{1}{4!} \cdot (\frac{2}{10})^4 = 4 \times 10^{-4}$$

이다.

중간문풀-4. 3. *원점에서 함수 $f(x,y) = \ln(\cos(x^2y))$의 6차 근사다항식을 구하시오.*

$$\begin{aligned}\ln(\cos(x^2y)) &= \ln(1-\frac{1}{2}(x^2y)^2 + o((\sqrt{x^2+y^2})^6)\\ &= -\frac{1}{2}x^4y^2 - o((\sqrt{x^2+y^2})^6)) - \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}(x^2y)^2 + o((\sqrt{x^2+y^2})^6))^2 + o((\sqrt{x^2+y^2})^6)\\ &= -\frac{1}{2}x^4y^2 + o((\sqrt{x^2+y^2})^6)\end{aligned}$$

이기에, 테일러 전개의 유일성에 의하여 $T_6f(x,y) = -\frac{1}{2}x^4y^2$이다.

중간문풀-4. 4. *원점에서 함수 $f(x,y) = \cos x \sin y$의 3차 근사다항식을 구하고, 이를 이용해 $\cos 0.02 \sin 0.01$의 3차 근삿값을 얻은 뒤 참값과의 오차가 4×10^{-8} 이하임을 보이시오.*

$$f(x,y) = (1-\frac{x^2}{2}+o(x^3))(y-\frac{y^3}{6}+o(y^4)) = y - \frac{y^3}{6} - \frac{1}{2}x^2y + o((x^2+y^2)^{3/2})$$

이다. 따라서 테일러 전개의 유일성에 의해 $T_3f(x,y) = y - \frac{y^3}{6} - \frac{1}{2}x^2y$이다. 이를 이용하여 구한 3차 근삿값은 $T_3f(0.02, 0.01) = 10^{-2} - 2\times 10^{-6} - \frac{1}{5}\times 10^{-6}$이다. 또한 오차항의 제한을 위하여 3차 잉여항의 크기를 보면,

$$|R_3f(x,y)| \le \frac{M_4}{4!}(0.01+0.02)^4$$

이며 M_4는

$$M_4 = \max\{|D_iD_jD_kD_lf(0.02t, 0.01t)| : 1 \le i,j,k,l \le 2, 0 \le t \le 1\}$$

이다. 그런데 f의 4계도함수는 모두 -1 혹은 1과 $\sin, \cos$함수를 곱한 꼴이기에 $M_4 \le 1$임은 분명하다. 따라서

$$|R_3f(x,y)| \le \frac{M_4}{4!}(0.01+0.02)^4 = \frac{81}{24}\cdot 10^{-8} < 4\times 10^{-8}$$

임을 확인할 수 있다.

중간문풀-4. 5. *도쿄올림픽 배구 경기의 광고료는 시청자 수 x명과 평균 시청 시간 y분에 대하여 $f(x,y) = x^{2.25}y^2$로 책정되었다고 하자. 9999명의 시청자가 평균 101분을 시청하였을 때의 광고료의 근삿값을 점 $(10000, 100)$에서의 f의 근사다항식을 이용하여 구하려고 한다.*

(a) 1차 근사다항식을 이용하여 구하시오.

(b) 2차 근사다항식을 이용하여 구하시오.

(a) $D_1f(x,y) = 2.25x^{1.25}y^2$, $D_2f(x,y) = 2x^{2.25}y$이므로 $P = (10000, 100)$과 $\mathbf{v} = (-1, 1)$에 대하여 구하고자 하는 값은

$$T_1f(P,\mathbf{v}) = f(P) + D_{\mathbf{v}}f(P) = f(10000,100) - D_1f(10000,100) + D_2f(10000,100) = 10^{13} - 2.25\times 10^9 + 2\times 10^{11}$$

이다.

(b) $D_1^2 f(x,y) = \dfrac{45}{16} x^{0.25} y^2$, $D_1 D_2 f(x,y) = 4.5 x^{1.25} y$, $D_2^2 f(x,y) = 2x^{2.25}$이다. 따라서 2차 근삿값은

$$\begin{aligned} T_2 f(P, \mathbf{v}) &= f(P) + D_{\mathbf{v}} f(P) + \frac{1}{2!} D_{\mathbf{v}}^2 f(P) \\ &= 10^{13} - 2.25 \cdot 10^9 + 2 \cdot 10^{11} + \frac{45}{32} \cot 10^5 - 4.5 \cdot 10^7 + 10^9 \end{aligned}$$

중간문풀-4. 6. *다음 명제가 참이면 증명하고, 거짓이면 반례를 드시오.*
두 연속함수 $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$에 대하여 집합

$$\{X \in \mathbb{R}^n | f(X) = 0, g(X) = 0\}$$

은 닫힌 집합이다.

연속함수 f와 g의 등위면은 닫힌 집합임이 알려져 있다. 주어진 집합은 두 닫힌 집합

$$\{X \in \mathbb{R}^n | f(X) = 0\}$$

과

$$\{X \in \mathbb{R}^n | g(X) = 0\}$$

의 교집합이므로, 닫힌 집합이다.

중간문풀-4. 7. 함수 $f(x,y) = \frac{1}{x-y-1}$*에 대하여* $D_{(a,b)}^4 f(0,0)$*을 구하시오.*

$$f(x,y) = -\frac{1}{1-(x-y)} = -\sum_{k=0}^{\infty} (x-y)^k$$

가 $|x-y| < 1$일 때 성립한다. 그런데 원점에서의 근사다항식은 유일하므로, 근사다항식을 구하는 방법에 의하여

$$\frac{1}{4!} D_{(a,b)}^4 f(0,0) = -(a-b)^4$$

가 성립한다. 따라서, 구하는 것은

$$D_{(a,b)}^4 f(0,0) = -24(a-b)^4$$

이다.

중간문풀-4. 8. *좌표평면에서 정의된 함수 $f(x,y) = e^{x+y} \sin(xy)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.*
(a) 원점에서 $f(x,y)$의 3차 근사다항식을 구하시오.
(b) $\mathbf{v} = (1,2)$에 대해 $D_{\mathbf{v}}^3 f(0,0)$을 구하시오.

(a)

$$e^{x+y} = 1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2} + o((x+y)^2)$$

이며

$$\sin xy = xy - \frac{(xy)^3}{3!} + o((xy)^3)$$

이다. 따라서

$$e^{x+y} \sin xy = xy - \frac{x^3 y^3}{6} + xy(x+y) - \frac{(xy)^3 (x+y)}{3!} + \frac{xy(x+y)^2}{2} - \frac{(xy)^3 (x+y)^2}{12} + o((x^2+y^2)^{3/2})$$

이고, 테일러 전개의 유일성에 의하여 3차근사다항식은

$$T_3 f(x,y) = xy + x^2 y + xy^2$$

으로 주어진다.

(b) (a)에 의하여

$$\frac{1}{3!}D^3_{\mathbf{v}}f(0,0) = 1^2 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2$$

이다. 따라서

$$D^3_{(1,2)}f(0,0) = 6(2+4) = 36$$

중간문풀-4. 9. *함수 $f(x,y) = e^{x+xy}\ln(1-xy)$에 대하여 물음에 답하시오.*

(a) 원점에서 f의 2차 근사다항식을 구하시오.

(b) $D_1^3 D_2^3 f(0,0)$을 구하시오.

(a)

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (1 + (x+xy) + \frac{1}{2}(x+xy)^2 + o((x+xy)^2))(-xy + o(xy)) \\ &= -xy + o(x^2+y^2) \end{aligned}$$

이므로, 테일러 전개의 유일성에 의하여

$$T_2 f(x,y) = -xy$$

이다.

(b) f의 더 높은 차수의 근사다항식을 구하여 보자.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (1 + (x+xy) + \frac{1}{2}(x+xy)^2 + \cdots + \frac{1}{6!}(x+xy)^6 + o((x+xy)^6))(-xy - \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{3}x^3y^3 + o((xy)^3)) \\ &= -xy - \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{3}x^3y^3 - x^2y - x^2y^2 - \frac{1}{2}x^3y^2 - \frac{1}{2}x^3y^3 - \frac{1}{2}x^3y - x^3y^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}x^3y^3 - \frac{1}{4}x^4y^2 - \frac{1}{6}x^4y - \frac{1}{2}x^4y^2 - \frac{1}{4!}x^5y + o((x^2+y^2)^3) \end{aligned}$$

이다. 테일러 전개의 유일성에 의하여 이것이 f의 6차 근사다항식이며, x^3y^3의 계수는 $-\frac{4}{3}$이다. 테일러 전개를 하는 방식을 고려해볼 경우

$$\frac{{}_6C_3 D_1^3 D_2^3 f(0,0)}{6!} = -\frac{4}{3}$$

이므로, 구하는 값은

$$D_1^3 D_2^3 f(0,0) = -48$$

이다.

중간문풀-4. 10. *원점에서 함수 $f(x,y) = \sin x \sin y$의 이차 근사다항식을 찾고, $|x| \le 0.1, |y| \le 0.1$인 범위에서 이차근삿값의 오차의 한계가 0.002보다 작음을 보이시오.*

$f(0,0) = 0$이며,

$$D_1 f(x,y) = \cos x \sin y$$

$$D_2 f(x,y) = \sin x \cos y$$

$$D_1^2 f(x,y) = -\sin x \sin y$$

$$D_1 D_2 f(x,y) = \cos x \cos y$$

$$D_2^2 f(x,y) = -\sin x \sin y$$

이므로, 원점에서 구한 이차 근사다항식은

$$T_2 f(x,y) = xy$$

가 된다.

또한 $M_3(a,b)$를

$$M(a,b) = \max\{|D_iD_jD_kf(ta,tb)| : 1 \leq i,j,k \leq 2, 0 \leq t \leq b\}$$

라고 정의하자. 이때

$$D_1^3f(x,y) = D_1D_2^2f(x,y) = -\cos x \sin y$$

$$D_1^2D_2f(x,y) = D_2^3f(x,y) = -\sin x \cos y$$

이므로, $M_3(a,b) \leq 1$이다. 따라서 $|x| \leq 0.01, |y| \leq 0.01$일 때,

$$|R_2f(x,y)| \leq \frac{M_3(x,y)}{3!}(|x|+|y|)^3 \leq \frac{1}{6!}(0.2)^3 < 0.002$$

이므로 보이고자 하는 바가 옳다.