문제 5/8. 1. *벡터* $(3,4,0)$*의 크기를 구하고, 이와 나란한 방향의 단위벡터를 모두 구하라.*

문제 5/8. 2. *평행사변형 법칙*

$$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$$

을 밝혀라. 단, a, b*는* $n-$*공간의 벡터이다.*

문제 5/8. 3. *모든 벡터와 수직인 벡터는 영벡터임을 보여라.*

문제 5/8. 4. *좌표공간의 한 점* P*와 두 벡터* $\mathbf{v} = (1,2,3), \mathbf{w} = (3,2,1)$*에 대하여 식*

$$P + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}, \quad 0 \le t \le 1, \quad 0 \le s \le 1$$

으로 주어진 평행사변형의 넓이는 얼마인가?

문제 5/8. 5. *삼차원 상에서 어떤 세 벡터가 이루는 평행육면체의 부피를* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$*를 이용해 표현하여라.*

문제 5/8. 6. *삼차원 공간의 벡터* a, b, c*에 대하여*

$$(a \times b) \times c = (a \cdot c)b - (b \cdot c)a$$

임을 보여라.

문제 5/8. 7. *삼각형* ABC*의 무게중심을* M*, 변* BC, CA, AB*의 중점을 각각* P, Q, R*이라고 할 때, 벡터* $\overrightarrow{PM}$*은* $a_1\overrightarrow{AB} + a_2\overrightarrow{AC}$*꼴로 표현할 수 있고, 벡터* $\overrightarrow{QM}$*은* $b_1\overrightarrow{AB} + b_2\overrightarrow{AC}$*꼴로 표현이 가능하다.* $a_1b_1 + a_2b_2$*의 값은?*

문제 5/8. 8. n*-공간의 0이 아닌 벡터* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$*이 있고* $\mathbf{a}$*와* $\mathbf{b}$*는 나란하지 않다. 이때,* $\mathbf{v} = \mathbf{b} - p_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$*와* $\mathbf{w} = \mathbf{c} - p_{\mathbf{a}}(\mathbf{c}) - p_{\mathbf{v}}(\mathbf{c})$*를 새롭게 정의하자.* $\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$*가 서로 수직임을 보이시오.*

문제 5/8. 9. *삼차원 좌표공간에서 두 벡터* A, B*가 이루는 평행사변형* P*를* yz *평면에 정사영한 것의 넓이를* a_1, zx *평면에 정사영한 것의 넓이를* a_2, xy *평면에 정사영한 것의 넓이를* a_3*이라고 하자. 이때* P*의 넓이* a*는*

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

임을 보이시오. 또한, P*와* yz, zx, xy *평면 사이의 각을* $\theta_1, \theta_2, \theta_3$*이라고 둘 때* $a_i = a\cos\theta_i$*임을 보이시오.*

문제 5/8. 10. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$*일 때,* $x + y + z$*가 최소 혹은 최대인* (x, y, z)*을 구하시오.*

문제 5/8. 11. $(x-10)^2+(y-10)^2+(z-10)^2=1$를 만족하는 해인 (p,q,r)을 고려하자.

$$\frac{p+q+r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

의 최솟값을 구하여라.

문제 5/8. 12. 어떤 두 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$가 다음 조건을 만족한다고 하자.
임의의 실수 x, y에 대하여 벡터 $x\mathbf{u}+y\mathbf{v}$의 크기가 $\sqrt{x^2-xy+3y^2}$이다.
이때, 두 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$가 이루는 예각의 탄젠트 값을 구하여라.

문제 5/8. 13. *임의의* $u, v, w \in \mathbf{R}^3$*에 대하여*

$$(u \times v) \times w = (u \cdot w) \times v - (v \cdot w) \times u$$

가 성립함이 알려져 있다. 이를 이용하여 $a, b \in \mathbb{R}^3$*에 대하여*

$$((a \times b) \times a) \times ((a \times b) \times b) = t(a \times b)$$

를 만족시키는 $t \in \mathbb{R}$*을 구하시오.*

문제 5/8. 14. *크기가 각각 1,2,3인 서로 수직인 벡터* $a, b, c \in \mathbb{R}^3$*와* $x^4 + y^4 + z^4 = 1$*를 만족시키는 세 실수* x, y, z*에 대하여* $|xa + yb + zc|$*의 최댓값을 구하시오.*

0.1 도형의 방정식

문제 5/8. 15. *공간에서* $\mathbf{v}$ *방향으로 진행하던 빛이 벡터* $\mathbf{n} \neq 0$*에 수직인 평면에 반사되어 나가는 방향을* $\mathbf{v}*$*이라 하면* $\mathbf{v}* = \mathbf{v} - 2\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n}$*임을 보여라.*

문제 5/8. 16. *벡터* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$*를 평면* $\mathbf{n}\cdot(X - P)$*에 정사영한 벡터를 구하여라.*

문제 5/8. 17. *꼬인 위치에 있는 두 직선* $l_1 = P_1 + t\mathbf{v}$*와* $l_2 = P_2 + s\mathbf{w}$ *사이의 거리를 구하여라.*

문제 5/8. 18. *점* (a, b, c)*와 평면* $px + qy + rz = s$ *사이의 거리를 구하여라.*

문제 5/8. 19. *삼차원 공간에서 두 평면*

$$2x + 4y + z = 5, \quad x - 3y + 2z = 0$$

이 이루는 교각의 코사인 값을 구하시오.

문제 5/8. 20. *좌표공간에서 평면* $x + y + 2z = 0$*에 대하여 점* $P = (x, y, z)$*를 대칭시킨 점을* Q*라고 하자.* Q*를 또다시 이 평면에 대해 대칭시킨 점을* R*이라고 할 때,* Q*와* R*의 좌표를 구하여라.*

문제 5/8. 21. *공간 속의 점* $P_1, P_2, \cdots, P_k$*에 대하여 아래 값을 최소로 하는 점* Q*는 어디인가?*

$$|P_1 - Q|^2 + \cdots + |P_k - Q|^2$$

문제 5/8. 22. *삼차원 공간에서 두 평면* $2x - z = 8$*과* $x + y - z = 6$*의 교선이* $zx-$*평면과 만나는 점을* A*,* $xy-$*평면과 만나는 점을* B*라 하자. 두 점* A, B*와 점* $C = (-2, -4, 3)$*가 이루는 평면과 원점 사이의 거리를 구하시오.*

문제 5/8. 23. *세 점* $P = (1, -1, 0), Q = (2, 1, -1), R = (-1, 1, 2)$*를 지나는 평면과 수직이고 점*$P$*를 지나는 직선의 방정식을 구하라. 또한, 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이 역시 구하라.*

문제 5/8. 24. *3차원 공간에서 세 점* $A(1, 2, 3), B(2, 4, 5), Q(3, 4, 6)$*을 지나는 평면에 대하여 평면 밖의 한 점* P*에서 이 평면에 내린 수선의 발이* Q*라고 한다.* $\overrightarrow{AP}$*의 길이가 8일 때,* $\overrightarrow{AP}$*와* $\overrightarrow{AB}$*가 이루는 각의 크기* θ*를 구하시오.*

문제 5/8. 25. *세 점* $(2,1,0),(0,1,-2),(5,-1,2)$*를 지나는 평면* P *상의 점* $(2,1,0)$*에서* $(1,1,1)$ *방향으로 진행하던 빛이 평면* $x-2y-z=5$*에 반사되어 다시 평면* P*에 맺히는 상을 구하시오.*

문제 5/8. 26. *공간 속의 점* $(1,-1,2)$*에서 두 평면* $x-2y+4z=2$*와* $x+y-2z=5$*의 교선에 내린 수선의 발을 구하시오.*

문제 5/8. 27. *좌표공간에서* $P(1,2,3)$*을 지나고* $\mathbf{v}=(2,3,-1)$*과 나란한 직선* l_1*과, 점* $Q(0,3,2)$*를 지나고* $\mathbf{w}=(1,3,2)$*와 나란한 직선* l_2*에 대해 다음 물음에 답하시오.*

1) $\mathbf{x}=\overrightarrow{PQ}$*의* $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$*에 대한 정사영을 구하시오.*

2) 두 직선 l_1*과* l_2 *사이의 거리를 구하시오.*

문제 5/8. 28. $\mathbb{R}^3$*의 세 벡터* $A=(1,2,2), B=(2,1,1), X_0=(1,3,1)$*에 대하여* $p(X)$*를* A*에 대한* X*의 정사영이라고 할 때*

(1) $p:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$*는* $p\circ p=p$*임을 보여라.*

(2) $q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$*를* $q(X)=p(X)+B$*라고 정의하자.* $q^n=q^{n-1}\circ q$*라고 귀납적으로 정의할 경우,* $q^n(X_0)$*을* n*에 대해 나타내라.*

문제 5/8. 29. *$\mathbb{R}^4$의 표준단위벡터 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$에 대해*

$$\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j \quad (i \neq j,\ 1 \leq i, j \leq 4)$$

라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

1) 네 벡터 $\mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{24}, \mathbf{e}_{34}$가 일차종속인지 일차독립인지 판별하시오.

2) 네 벡터 $\mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{14}, \mathbf{e}_{34}$가 일차종속인지 일차독립인지 판별하시오.

문제 5/8. 30. *삼차원 공간의 사면체 $OABC$가*

$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{BC}| = a, \quad |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{AC}| = b, \quad |\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{AB}| = c$$

를 만족한다. 세 점 A, B, C의 중심을 G_1, 세 점 A, O, C의 중심을 G_2라고 할 때, $\overrightarrow{OG_1} \perp \overrightarrow{BG_2}$라고 하자. 이때, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$임을 증명하여라.

문제 5/8. 31. *다음 벡터들이 일차독립인지 일차종속인지 판별하여라.*

1) $(1,2,3,4),(5,6,7,8),(9,10,11,12),(13,14,15,16)$

2) $(1,2,1),(2,5,3),(8,2,5)$

문제 5/8. 32. *공간의 두 평면* $x+y-z=2$*와* $3x-4y+5z=6$*에 대하여 다음 물음에 답하시오.*

1) 두 평면의 교선의 방정식을 구하고, 두 평면 사이의 각 θ*에 대해* $\sin\theta$*의 값을 구하라. 단,* θ*는* 0*부터* π *사이의 값이다.*

2) 점 $(2,0,0)$*을 지나고 위의 두 평면의 교선에 수직인 직선 중에서 평면* $4x-3y+4z=8$*에 속하는 직선의 방정식을 구하시오.*