문제 6. 1. B가 $m \times k$ 행렬일 때, $A = B^t B$가 $k \times k$ 행렬이며 $A^t = A$임을 보여라.

문제 6. 2. B가 $n \times n$ 행렬이라면, $A = B + B^t$는 $A = A^t$이며 $C = B - B^t$는 $C = -C$임을 보여라. 이를 이용하여, 임의의 정사각행렬 M은 $P = P^t$인 행렬 P와 $Q = -Q^t$인 행렬 Q의 합으로 표현될 수 있음을 보여라.

문제 6. 3. *다음이 참인지, 아닌지를 판정하라.*

1) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

2) B*의 대각선 원소들을 제외하면 모두* 0*이라고 할 때,* $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

3) $A = A^t$*라면,* $A^2 = (A^2)^t$

문제 6. 4. *선형사상* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$*가 있어서*

$$T(1,-1,0) = (4,2,1,0), T(2,2,-1) = (1,3,0,6), T(-1,-1,1) = (-1,3,-3,0)$$

이라고 한다. T*에 대응되는 행렬을 구하여라.*

문제 6. 5. *아래 사상들이 선형사상이 맞는지 판단하라. 만약 맞다면, 이들에 대응되는 행렬을 구하여라.*

1) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1x_2, x_3)$

2) $n \geq 2$*에 대하여,* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$, $T(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_1)$

3) $n \geq 2$*에 대하여,* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}$

문제 6. 6. 2×2 행렬

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

을 A라고 하자. $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 = O$임을 보여라.

문제 6. 7. 3×3 행렬

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

을 E라고 하자. 3×3 행렬 $A = (a_{ij})$에 대하여, E를 곱하면 A는 어떻게 되는지 구하시오. 이를 통해, A의 둘째 행에 3배를 한 후 첫째 행과 셋째 행을 뒤바꾸는 변환에 대응하는 행렬 X를 구하시오.

문제 6. 8. *$m \times n$ 행렬 A와 $n \times l$ 행렬 B가 주어졌을 때, B의 j열을 $\mathbf{b}_j$라 하면 AB의 j열은 $A\mathbf{b}_j$임을 보이시오. 곧,*

$$AB = A(\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \cdots \mathbf{b}_n) = (A\mathbf{b}_1\ A\mathbf{b}_2\ \cdots A\mathbf{b}_n)$$

문제 6. 9. *$n \times n$ 정사각행렬 A가 $A = A^t$를 만족한다.*

1) $n \times 1$ 행렬 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$에 대해 $(A\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot (A\mathbf{w})$임을 보이시오.

2) $A\mathbf{v} = a\mathbf{v}$, $A\mathbf{w} = b\mathbf{w}$인 서로 다른 상수 a, b가 존재하는 경우, 벡터 $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$는 수직임을 증명하시오.

(Hint : 벡터의 내적을 다른 방식으로 표현해 보시오)

문제 6. 10. *영이 아닌 벡터 $\mathbf{a} = (a, b, c)$에 대해 $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$을 아래와 같이 정의하자.*

$$L(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}$$

L이 선형사상임을 보이고, 이에 대응하는 행렬을 구하시오.

문제 6. 11. *삼차원 좌표공간의 벡터* $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$*과* $\mathbf{v} = (1, 2, 1)$*를 포함하며 원점을 지나는 평면을* H*라 할 때, 다음 물음에 답하시오.*

1) 점 X*에 대하여 그것과 가장 가까운* H*위의 점을* P*라고 하자. 점* $X = (x, y, z)$*에 대하여,* P*의 좌표를 구하여라.*

2) X*에 대하여* P*를 내놓는 사상* $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*가 선형사상임을 보이시오.*

3) 선형사상 P*에 대응하는 행렬을 구하시오.*

문제 6. 12. *두 벡터* $\mathbf{a} = (1,1,0)$*과* $\mathbf{b} = (-2,0,0)$*에 대하여 다음과 같이 정의된 사상* $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*이 선형사상임을 보이고,* L*을 나타내는 행렬을 구하시오.*

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3)$$

문제 6. 13.

$$x + 4y + 1z = 1$$

$$2x + 9y + tz = 1$$

$$-x + ty - 6z = -6$$

에 대하여, 1) 근이 무한 개 존재하는 t*의 값을 구하고, 해당 경우 일반해를 구하라.*

2) 근이 없는 t*의 값을 모두 구하여라.*

문제 6. 14. *방향이* $\mathbf{v} = (3, 2, 1)$*이고 점* (x_1, x_2, x_3)*을 지나는 직선이* $xy-$*평면과 만나는 점을* $T(x_1, x_2, x_3)$ *이라고 하자.*

1) 사상 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*을 구하시오.*

2) T*가 선형사상임을 보이고, 이에 대응되는 행렬을 구하시오.*

문제 6. 15. *벡터* $\mathbf{a} = (1, 0, 2)$*에 대해 사상* $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*이 아래와 같이 정의되어 있다.* L*이 선형사상임을 보이고,* L*에 대응되는 행렬을 구하시오.*

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{a})$$

문제 6. 16. *차수가 n 이하인 다항식 전체의 집합을 P_n이라고 두고, 다항식 $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$을 벡터 $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$과 같이 보도록 하자. 사상 T를 다음과 같이 정의하자.*

$$T : P_n \to P_{n+1}, \quad p(x) \to \int_0^x p(t)dt + xp(x)$$

1) T가 선형사상임을 보여라.
2) $n = 2$일 때 T에 대응되는 행렬을 구하시오.

문제 6. 17. *실수* a, b, c*에 대하여* 3×3 *행렬* $L(a, b, c)$*를*

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

로 정의하자. 행렬

$$L(1, 0, 2)^{2021}$$

의 모든 항의 합을 구하여라.

문제 6. 18. P_n을 차수가 n 이하인 실수 계수 다항식들의 집합이라고 하자. 그러면, 다항식 $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$은 다항식의 계수들로 만들어지는 벡터 $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$과 동일하게 생각할 수 있다. 다음 사상 T가 선형사상임을 보이고, 이에 대응되는 행렬을 구하시오.

$$T : P_1 \to \mathbb{R}^2$$
$$T(a+bx) = \left(\int_0^1 (a+bx)dx, a\right)$$

문제 6. 19. $\mathbb{R}^4$에서 다음과 같이 행렬의 곱으로 정의된 선형변환 $L(a,b,c,d) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$을 생각하자.

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

선형변환 L에 대응되는 행렬을 구하시오.

문제 6. 20. *삼차원 공간에서 벡터* $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$*과* $\mathbf{b} = (1, -1, 1)$, $\mathbf{c} = (0, 1, 1)$*에 대하여 다음 물음에 답하시오.*

1) 벡터 $\mathbf{a}$*에 대한 정사영* $f(\mathbf{x}) = p_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$*와 사상* $g(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{x})$*는 선형사상임을 보이시오.*

2) 정사영 f*와 사상* g*의 합성 사상* $g \circ f$*이 선형사상임을 보이고, 이에 대응하는 행렬* M*을 구하시오.*