2-6. 1. *극좌표계로 표현한 곡선 $r = 100 - \theta$에 대하여, $0 \le \theta \le 10\pi$인 범위에서 이를 따라 벡터장*

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{(x-y, x+y)}{x^2+y^2}$$

을 적분한 값을 구하시오.

$$\mathbf{F}_1(x,y) = \frac{(-y, x)}{x^2+y^2}$$

와

$$\mathbf{F}_2(x,y) = \frac{(x, y)}{x^2+y^2}$$

을 생각하면 $\mathbf{F}$는 위의 두 벡터장의 합으로 생각할 수 있다. 그리고 해당 곡선을 X라고 할 때, X를 따라 선적분한 값은 두 벡터장을 X에 따라 선적분한 후 더한 것과 같다. 이때 $\mathbf{F}_1(x,y)$는 각원소 벡터장이므로 이 곡선을 따라 선적분한 값이 θ의 변한 값인 10π이다. 또한 벡터장 $\mathbf{F}_2(x,y)$의 잠재함수는 $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$으로 주어지므로, 선적분 기본정리에서

$$\int_X \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{2}(\ln(100^2) - \ln(100 - 10\pi^2)) = \ln\left(\frac{10-\pi}{10}\right)$$

이다. 따라서 선적분한 값은 둘의 합인

$$10\pi + \ln\left(\frac{10-\pi}{10}\right)$$

임을 알 수 있다.

2-6. 2. *삼차원 공간에서 정의된 벡터장*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = ((1+x)e^{x+y+z}, xe^{x+y+z} + z, xe^{x+y+z} + y)$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) $\mathbf{F}$의 잠재함수가 존재하면 모두 구하시오.

(b) $X(t) = (3 - 2\cos t, 1 + \sin 2t, t)$이며 $0 \le t \le \pi$일 때, X를 따라 벡터장 $\mathbf{F}$를 선적분한 값을 구하시오.

(a) $\varphi(x,y,z) = xe^{x+y+z} + yz$로 하면 $\mathrm{grad}\varphi(x,y,z) = \mathbf{F}(x,y,z)$이다. 연결된 열린 집합 $\mathbb{R}^3$에서 $\mathbf{F}$의 잠재함수는 $\varphi(x,y,z) + C$ (C는 상수)로 유일하게 존재한다.

(b) 선적분 기본정리에 의하여

$$\begin{aligned}\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \varphi X(\pi) - \varphi X(0) \\ &= 5e^{6+\pi} + \pi - e^2\end{aligned}$$

이다.

2-6. 3. *벡터장 $\mathbf{F}(x,y) = (xe^{x^2+y^2} + xy, ye^{x^2+y^2} + x^2)$을 점 $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 X를 따라 반시계 방향으로 선적분한 값을 구하시오.*

$\mathbf{G}(x,y) = (0, \frac{1}{2}x^2)$이라 하면,

$$\mathbf{F}(x,y) = \mathrm{grad}(\frac{1}{2}e^{x^2+y^2} + \frac{1}{2}x^2y) + \mathbf{G}(x,y)$$

이므로, 선적분 기본 정리에 의해 위처럼 닫힌 곡선에 대해 잠재함수가 있는 벡터장을 선적분한 값은 0이므로

$$\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_X \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}$$

이다. 그런데 이 때 $\mathbf{G}$의 x 방향 성분은 0이므로, y 방향의 변화가 있는 올라갈 때와 대각선으로 내려올 때를 보면 된다.

올라갈 때는 $X_1(t) = (1, t)$로 주어지고, t는 0과 1 사이이다.

$$\int_{X_1} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}$$

사선으로 내려갈 때는 $X_2(t) = (1-t, 1-t)$로 주어지고, t는 0과 1 사이이다.

$$\int_{X_2} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 -\frac{1}{2}(1-t)^2 dt = -\frac{1}{6}$$

이므로, 전체 곡선에 대하여 선적분한 값은 1/3이다. 따라서 구하는 값은 1/3.

2-6. 4. *곡선 $X(t) = (t, \sin t, \cos t), (1 \le t \le e^2)$에 대하여 다음 선적분을 구하시오.*

$$\int_X \ln x dx - z dy + y dz$$

$X'(t) = (1, \cos t, -\sin t)$이므로

$$\begin{aligned}\int_X \ln x dx - z dy + y dz &= \int_1^{e^2} (\ln t, -\cos t, \sin t) \cdot (1, \cos t, -\sin t) dt \\ &= \int_1^{e^2} \ln t - 1 dt \\ &= 2\end{aligned}$$

2-6. 5. *$xyz-$ 공간에서 정의된 다음 벡터장의 잠재함수를 모두 구하시오.*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (yz^2 \cos x, z^2 \sin x + z \sinh(1 + yz), 2yz \sin x + y \sinh(1 + yz) + z)$$

함수 $\varphi(x, y, z) = yz^2 \sin x + \cosh(1 + yz) + \frac{1}{2}z^2$을 고려하면 $\mathrm{grad}\varphi(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z)$이다. 이때, 벡터장이 정의된 집합인 $xyz-$ 공간은 연결되어 있으므로 잠재함수의 유일성에 의해

$$\varphi_c = yz^2 \sin x + \cosh(1 + yz) + \frac{1}{2}z^2 + C, \quad (C\text{는 상수})$$

가 벡터장 $\mathbf{F}$의 모든 잠재함수이다.

2-6. 6. *좌표평면의 오른쪽 반평면 $H = \{(x, y) | x > 0\}$에서 정의된 다음 벡터장에 대하여 물음에 답하시오.*

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{(-y, x)}{x^2 + y^2}$$

(a) 이 벡터장이 닫힌 벡터장인지 판단하시오.

(b) 이 벡터장이 잠재함수를 갖는지 판단하고, 만일 잠재함수를 가진다면 이를 구하시오.

(c) H 위에 놓인 일급곡선 X는 $(1, -1)$에서 출발하여 $(1, 1)$에서 끝나다고 할 때, 선적분 $\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$를 구하시오.

(a) $\mathbf{F}$에서

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

이므로 닫힌 벡터장이다.

(b) H는 열린 볼록집합이므로 푸엥카레 도움정리에 의해 잠재함수 $\arctan(\frac{y}{x})$를 가짐을 알고 있다. 따라서, 잠재함수를 가지며 이는 $\varphi(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$다.

(c) $\mathbf{F}$는 잠재함수를 가지므로 선적분의 기본정리에 의해

$$\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \varphi(1,1) - \varphi(1,-1) = \frac{\pi}{2}$$

이다.

2-6. 7. *벡터장*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2x\sin(yz) + 1, x^2 z\cos(yz) + 3y^2 e^z, x^2 y\cos(yz) + e^z y^3)$$

의 잠재함수를 구하고, 곡선 $X(t) = (e^t, \cos t, t)$ $(0 \le t \le \pi)$*에 대하여* $\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$*를 구하여라.*

잠재함수는 하나만 구하면 되고, 대표적으로는

$$\varphi(x,y,z) = x^2\sin(yz) + y^3 e^z + x$$

를 들 수 있다. 이때 선적분의 기본정리에 의해

$$\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \varphi(X(\pi)) - \varphi(X(0)) = \varphi(e^\pi, -1, \pi) - \varphi(1,1,0) = -2$$

이다.

2-6. 8. *S는 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$이라는 구와 $x + y + z = 1$이라는 평면이 이루는 교선이다.*

$$\int_S (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$$

의 값을 구하여라.

S의 모양은 중심이 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$이며 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{6}}{3}$인 원호가 될 것이다. 해당 평면에서 벡터의 크기가 반지름의 길이와 같은 두 벡터를 찾아준다면 각각

$$(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$$

일 것이며, 이에 따라 매개화는

$$S(\theta) = (\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta, \frac{1}{3}\cos\theta, \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta + \frac{1}{3}\cos\theta, \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\cos\theta)$$

가 될 것이다. 또한, θ의 범위는 0부터 2π이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_S (y-z, z-x, x-y) \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} (\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta, -\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta - \cos\theta, \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta) \\ &\quad \cdot (\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta - \frac{1}{3}\sin\theta, -\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta - \frac{1}{3}\sin\theta, \frac{2}{3}\sin\theta)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{2}{\sqrt{3}}\cos^2\theta + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2\theta d\theta = \frac{4\sqrt{3}}{3}\pi\end{aligned}$$

2-6. 9. *다음 명제가 참인지 거짓인지 판별하시오.*

(a) 각원소 벡터장은 $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$*에서 잠재함수를 가진다.*

(b) 모든 일급 벡터장은 국소적으로 잠재함수를 가진다.

(c) $n-$ 공간의 열린집합에서 정의된 일급 벡터장 $\mathbf{F}$의 임의의 두 잠재함수 ϕ와 φ에 대하여, $\phi - \varphi$는 상수함수이다.

(d) 입체각 벡터장은 $\mathbf{R}^3 - \{(0,0,0)\}$에서 닫힌 벡터장이다.

(e) $n-$ 공간의 열린집합 U에서 정의된 벡터장 $\mathbf{F}$에 대하여, 영역 U 속의 임의의 닫힌 곡선 C에 대하여 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$이면, $\mathbf{F}$는 닫힌 벡터장이다.

(a) 원 $x^2 + y^2 = 1$을 반시계방향으로 돎에 따라 각원소 벡터장을 적분한 값은 2π로, 순환도가 0이 되지 않기에 각원소벡터장은 잠재함수를 가지지 않는다. 거짓.

(b) 일급 벡터장 중에서는 국소적으로도 잠재함수를 가질 수 없는 것이 있다. 예를 들어, 벡터장 $(y^2, x+y)$를 고려하여 보자. 잠재함수 φ가 존재했다면 이를 x로 편미분한 것이 xy^2이기에

$$\varphi(x,y) = xy^2 + g(y)$$

이며, $g(y)$는 y에만 의존적이다. 이를 y로 미분하게 되면 $2xy + g'(y) = x + y$가 되어야 하다. 그러나 $g'(y)$는 x에 관련된 항이 없고, 이에 따라 x에 관련된 항이 항등적으로 같지 않게 된다. 따라서 그런 $g(y)$와 φ는 없다. 따라서 일급 벡터장임에도 잠재함수가 없다. 거짓.

(c) 이 정리는 벡터장이 정의된 영역이 곡선연결집합일 때만 성립하게 된다. 만약 $\mathbf{F}$가 정의된 영역이 $x > 1$과 $x < -1$의 합집합이라고 하자. 이는 $n-$공간의 열린집합이지만 곡선연결집합은 아니다. 그러면 $\mathbf{F}$가 (y, x)라고 하면,

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} xy + 1 & \text{if } x > 1 \\ xy - 1 & \text{if } x < -1 \end{cases}$$

은 주어진 정의역에서 잠재함수이다. 반면

$$\phi(x,y) = \begin{cases} xy - 1 & \text{if } x > 1 \\ xy + 1 & \text{if } x < -1 \end{cases}$$

역시 잠재함수이다. 그런데

$$\phi(x,y) - \varphi(x,y) = 2 \cdot (-1)^{\frac{|x|}{x}}$$

이 되며, 이는 상수함수가 아니다. 따라서 곡선연결집합이 아니면 문제가 생기기에 거짓.

(d) 입체각 벡터장은 $\varphi(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$이라는 잠재함수를 가지기에 닫힌 벡터장이다. 참.

(e) 책의 정리 3.5.5에 의하여 이는 성립함을 알고 있다. 따라서 참.