

문제 4. 1. 좌표평면에서 직선 $ax + by = c$ 는 극좌표계로

$$r(a \cos \theta + b \sin \theta) = c$$

와 같이 표현됨을 보여라.

문제 4. 2. 좌표평면에서 x 축으로 a , y 축으로 b 만큼 이동하는 평행이동은 극좌표 그래프 $r = f(\theta)$ 의 식을 어떻게 바꾸는가?

문제 4. 3. 극좌표에서 포물선 $r = \frac{1}{1 + \cos \theta}$ 가 주어져 있다. 그 개형을 그리고, 모양이 완전히 같지만 대칭축이 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 이며 꼭짓점이 제 3사분면에 오는 포물선의 식을 구하여라.

문제 4. 4. $r = \sin n\theta$ 의 그래프를 그리고, $r = \sin n(\theta + \phi)$ 가 $r = \sin n\theta$ 의 그래프와 완전히 일치하게 하는 가장 작은 양수 ϕ 를 n 에 대해 나타내라.

문제 4. 5. $r^2 = \cos 2\theta$ 로 표현되는 그래프를 그려라. 이 곡선은 평면에서 주어진 두 정점까지의 거리의 곱이 일정한 점들로 이루어져 있음을 밝히라.

문제 4. 6. 직교좌표계에서 중심이 $R(\cos \theta_0, \sin \theta_0)$ 이고 반지름의 길이가 r_0 인 원의 방정식은 극좌표계

$$r^2 - 2rR \cos(\theta - \theta_0) + R^2 - r_0^2 = 0$$

임을 보여라.

문제 4. 7. 삼차원 좌표공간에서 길이가 l 인 선분을 yz -평면, zx -평면, xy -평면에 정사영한 것의 길이를 각각 l_1, l_2, l_3 라고 두면,

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 2l^2$$

임을 보이시오. 또한,

$$|l_1^2 - l_2^2| \leq l_3^2 \leq l_1^2 + l_2^2$$

임도 보여라.

문제 4. 8. 극좌표계로 주어진 곡선 $r = \theta \sin \theta$, $0 \leq \theta < 2\pi$ 의 개형을 좌표평면에 그리시오.

문제 4. 9. 극좌표 $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$ 으로 주어진 점 A 와 극좌표계에서 $r = \frac{1}{1 - \cos \theta}$ 로 표현되는 곡선 위를 움직이는 점 P 가 있다. 좌표평면의 원점을 O 라 할 때, 삼각형 $AP O$ 의 둘레의 길이의 최솟값을 구하시오.

문제 4. 10. 극좌표계로 주어진 곡선 $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ ($a > 0$)의 개형을 그리고, 이 곡선 위에 있는 $\theta = \frac{5\pi}{6}$ 인 점 A 와 점 $B(-a, 0)$, $C(a, 0)$ 에 대하여 $\angle BAC$ 를 구하시오.

문제 4. 11. 곡선 $x^2 + y^2 = 6\sqrt{x^2 - y^2}$ 을 극좌표계로 바꾸고, 이 곡선의 개형을 좌표평면에 그리시오.

문제 4. 12. 극좌표계에서 $r^2 = \cos 2\theta + \frac{3}{2}$ 로 주어진 곡선과 직교좌표계에서 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ 로 주어진 직선의 두 교점을 직교좌표계로 구하고, 두 점 사이의 거리를 구하시오.

문제 4. 13. $P = (\cosh t, \sinh t)$ 로 주어진 점 P 의 자취를 극좌표계로 나타내고, 그 개형을 그려라. 단, $t \in (-\infty, \infty)$ 이다.

문제 4. 14. 극좌표계에서

$$r = \sqrt{3} - 2 \sin 2\theta$$

로 주어진 곡선의 개형을 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 좌표평면에 그려라.

문제 4. 15. 원기둥좌표계 상에서

- 1) 회전축이 z 축이고, $(3, 4, 3)$ 을 지나는 높이가 무한한 원기둥
- 2) yz -평면
- 3) 중심이 $(2, 4, 5)$ 이며 반지름이 7 이고, xy -평면에 평행한 원의 방정식을 구하여라.

문제 4. 16. 구면좌표계 상에서

- 1) $\varphi = \frac{\pi}{6}$
 - 2) $\rho = 1$
 - 3) $\theta = \frac{\pi}{2}$
- 가 나타내는 도형의 모양을 설명하여라.

문제 4. 17. 삼차원 좌표공간에 곡면 A 와 B 가 다음과 같이 주어져 있다.

$$A : \text{원기둥좌표계 } (r, \theta, z) \text{에서 } r^2 = \frac{1}{1-4z}$$

$$B : \text{구면좌표계 } (\rho, \varphi, \theta) \text{로 } \rho = \frac{1}{2+2\cos\varphi}$$

이때, 두 곡면의 교집합은 곡선이다. 이 곡선의 길이를 구하시오.

문제 4. 18. 원기둥 좌표계로 주어진 방정식

$$z = r^2 \cos 2\theta$$

를 직교좌표계 (x, y, z) 와 구면좌표계 (ρ, φ, θ) 의 방정식으로 각각 나타내시오.

문제 4. 19. 직교좌표계 (x, y, z) 와 구면좌표계 (ρ, φ, θ) 에 대하여 두 식 $\varphi \leq \frac{\pi}{6}$ 과 $z \leq 4$ 로 표현된 영역의 부피를 구하시오.

문제 4. 20. 공간의 점 P, Q 를 구면 좌표계로 나타낼 때, 각각

$$P = (\sqrt{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}), \quad Q = (2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$$

이라고 하자. 이때, P 와 Q 사이의 거리를 구하고, 삼각형 OPQ 의 넓이를 구하라.

문제 4. 21. 구면좌표계 (ρ, φ, θ) 에서 아래와 같이 주어진 곡면의 겹넓이를 구하시오.

$$\rho = 4 \cos \varphi$$

문제 4. 22. 다음 두 곡선의 개형을 그리고, 모든 교점을 직교좌표계로 나타내시오. 단, $\theta \neq \frac{\pi}{4} + n\pi$ (n 은 정수)이다.

$$r = \frac{4}{3 + \sqrt{5} \cos \theta}, \quad r = \frac{\sqrt{5}}{\sin \theta - \cos \theta}$$

문제 4. 23. 다음 직교좌표계 (x, y, z) 로 표현된 식을 구면좌표계 (ρ, φ, θ) 로 나타내시오.

$$x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1, \quad z \geq \sqrt{3x^2 + 3y^2}, \quad yz \geq 0$$

문제 4. 24. $r = \frac{\sec \theta}{1 + 2 \tan \theta}$ 를 $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ 의 범위에서 그려라.

문제 4. 25. $r = \frac{5}{3 + 2 \cos \theta}$ 의 그래프를 그리고, 곡선이 둘러싸는 영역의 넓이를 구하여라. (미적분)

문제 4. 26. 구면좌표계로 주어진 영역

$$\left\{ (\rho, \varphi, \theta) : \rho \leq 2 \cos \varphi, 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2} \sec \varphi \right\}$$

을 좌표공간에 그리고, 그 부피를 구하여라. (미적분)

문제 4. 27. 구면좌표계에서 $\rho = 2 \cos \varphi$ 와 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 으로 표현되는 두 곡면으로 둘러싸인 영역 중 직교좌표계로 표현된 점 $(0, 0, 1)$ 을 포함하는 영역의 부피를 구하시오. (미적분)

문제 4. 28. 로그와선 $r = e^\theta$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$ 위의 점 (r, θ) 에서의 접선과 점 (r, θ) 와 원점을 지나는 직선이 이루는 각을 구하시오. (미적분)