10. Parametric Equations and Polar Coordinates

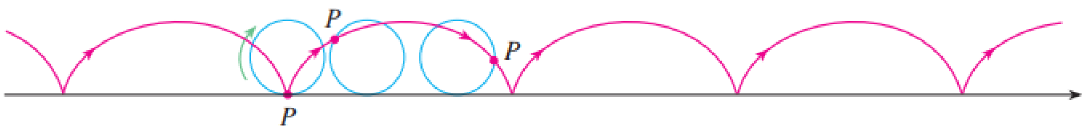
10.1 Curves Defined by Parametric Equations

만약 어떤 곡선 C가 (x, y)를 따르는데, x, y가 제 3의 변수인 **parameter** t에 의해 좌우된다면, 즉,

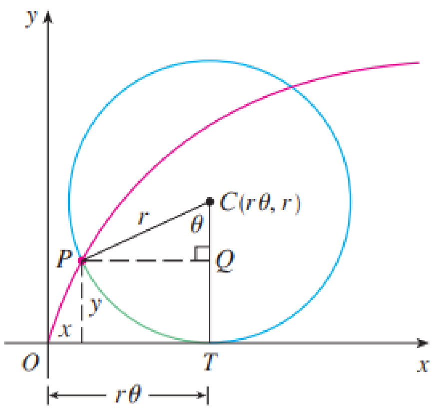
$$x = f(t) \quad y = g(t)$$

라는 **parametric equations**로 표현된다면 이를 **parametric curve**라 부른다.
만약 $a \leq t \leq b$에서 이 curve가 정의된다면, **initial point**를 $(f(a), g(a))$로, **terminal point**를 $(f(b), g(b))$로 설정한다.

가장 많이 접하게 될 parametric equation은 아마 **cycloid**일 것이다.



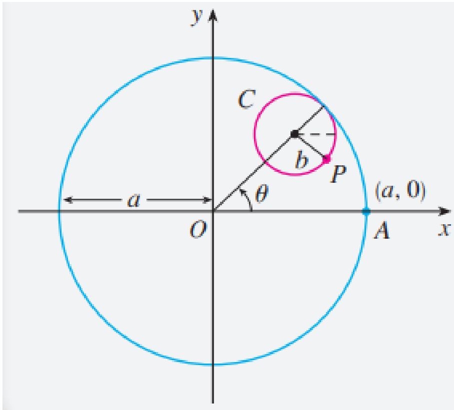
ccloid는 직선 위로 원이 굴러감에 따라 원 위에 있는 점 P가 이동하는 자취의 모양을 일컫는다. 이를 유도해보자면, 원의 반지름이 r이고 직선이 x축이며, 점 P는 원점에서 출발하는 위와 같은 상황을 생각할 때, 원이 회전한 각도 θ에 대하여



$$x = r(\theta - \sin\theta), \quad y = r(1 - \cos\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}$$

이 성립함을 확인해줄 수 있다. 원의 중심 C의 좌표가 $(r\theta, r)$이며 P는 이로부터 r만큼 떨어진 점임을 이용하면 쉽게 이를 유도해낼 수 있다. 이 사이클로이드 개형은 등시곡선 등을 소개할 때 자주 등장하는데, 그 증명은 복잡하므로 미적분학2 수준에서 볼 일은 전혀 없다. 따라서 여기에서는 cycloid가 무엇인지 알고, 왜 해당 parametric equation으로 표현되는지 알면 충분하다.

한편 시험에 자주 등장하는 종류는 여기서 더 나아간다. 특히 우리는 원이 직선이 아닌 더 큰 원 안에서 내접하며 굴러가는 상황, 혹은 외접하며 굴러가는 상황을 아주 많이 접하게 된다. 안에서 구를 때 작은 원의 한 점 P가 이루는 자취를 **hypocycloid**, 밖에서 구를 때 작은 원의 한 점 P가 이루는 자취를 **epicycloid**라 부른다.



큰 원의 반지름이 a, 작은 원의 반지름이 b일 때, $A(a, 0)$에서 있던 점 P는 아래 parametric equation의 hypocycloid이다.

$$x = (a - b)\cos\theta + b\cos\left(\frac{a-b}{b}\theta\right), \quad y = (a - b)\sin\theta - b\sin\left(\frac{a-b}{b}\theta\right)$$

한편 epicycloid라면 살짝만 식을 바꾸어주면 된다. 직접 유도도 가능한데, 아래와 같다. 여기서도 P의 시작점은 A다.

$$x = (a + b)\cos\theta - b\cos\left(\frac{a+b}{b}\theta\right), \quad y = (a + b)\sin\theta - b\sin\left(\frac{a+b}{b}\theta\right)$$

작은 원의 중심 C와 큰 원의 중심 O를 잇는 선과 x축의 양의 방향이 이루는 각도가 θ라고 한다면, P는 $\frac{a}{b}\theta$에 비례하는 정도로 회전하게 된다. hypocycloid에서는 이것이 θ와 상쇄되는 반면, epicycloid는 이것이 θ와 더해진다는 차이점이 있다.

10.2 Calculus with Parametric Curves

chain rule에 의하여,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

가 성립한다. 만약 $dx/dt = 0$이라면, 이 그래프는 해당 점에서 수직의 tangent를 가진다.

즉 parametric curve가 특정 점에서 가지는 접선의 기울기를 구하고 싶다면, 각각을 parameter에 대해 미분한 후 그 비를 구하여주는 것으로 충분하다.

$x = f(t), y = g(t)$와 $\alpha \le t \le \beta$로 표현되는 parametric curve 아래에 있는 영역의 넓이는 아래와 같다.

$$A = \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} y dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(t)f'(t)dt$$

한편 적분을 하고 싶다면 치환적분의 성질을 이용해주면 된다. 일반적으로 우리는 x에 대해 적분을 해왔지만, $x = f(t)$이기에 $\frac{dx}{dt} = f'(t)$이다. 따라서 t에 대해 적분하되 $f'(t)$를 적당히 피적분함수에 곱해준다면 원하는 적분값을 쉽게 얻을 수 있다.

곡선 C가 $x = f(t), y = g(t), \alpha \le t \le \beta$의 parametric equation으로 표현되고, f'과 g'은 $[\alpha, \beta]$에서 continuos이다. 한편 C는 t가 증가함에 따라 한 점을 딱 한 번만 지난다. 이때 C의 길이는

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

으로 주어진다. 한편, 동일한 조건 하에서, $g(t) \ge 0$이라 가정하자. 이 C를 x축을 중심으로 회전시킬 때 회전체의 겉넓이는

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

이다.

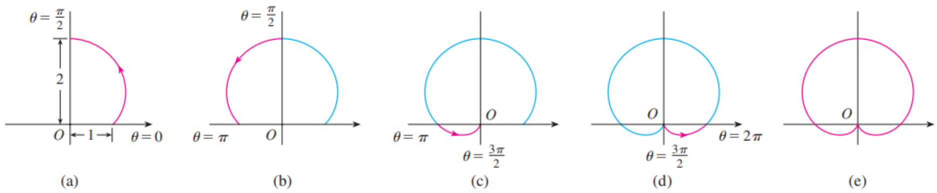
위의 박스는 정말 자명하다. 우리가 그동안 알아 왔던 arc length와 surface area를 구하는 공식에서, dx 대신 dt를 사용하는 대가로 피적분함수에 $f'(t)$를 곱하게 된 것이다. 따라서

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot \frac{dx}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

임에 따라 위의 formula가 등장하게 된다.

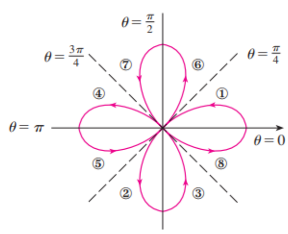
10.3 Calculus on Polar Coordinates

먼저 두 종류의 도형을 먼저 맛 보고 가자. 첫째는 심장을 닮아 이름붙여진 **cardioid**이다.



일반적으로 $r = a + b\sin\theta$ 혹은 $r = a + b\cos\theta$로 표현되는 도형은 항상 이런 형태를 가진다. sin인지, cos 인지에 따라 다른 것은 심장의 푹 파인 부분이 y축 위에 있는지, x축 위에 있는지이다. 한편 a와 b의 대소에 따라서도 모양이 달라진다. a가 b보다 크다면 그냥 좀 찌그러진 원 모양이 되지만, a와 b가 같아지는 순간 위 그림처럼 뾰족하게 파인 부분이 생긴다. a가 b보다 작다면 심장 가운데에 작은 구멍이 생기기까지 한다. 극좌표에서 자주 등장하는 도형이므로 그 개형을 잘 알아두는 것이 좋다. 여기서 같다, 작다, 크다는 것은 a와 b의 절댓값을 기준으로 한다.

한편 **n-leaved rose**도 자주 등장한다. 단순히 이는 그래프가 꽃을 닮아 붙여진 이름이다.



형태는 대개 $r = \cos n\theta$거나 $r = \sin n\theta$이다. 앞에 상수가 붙거나, cos가 sin으로 바뀌거나 하는 것은 꽃잎의 크기를 늘리거나, 꽃잎을 약간씩 돌리는 것에 그치지 않는다. 직접 그려 보면 무슨 말인지 알 수 있을 것이다. 기억해두면 좋은 것은 n에 따른 꽃잎의 개수이다. 일반적으로, n이 홀수라면 정확히 n개의 꽃잎만 생기지만, n이 짝수라면 $2n$개의 꽃잎이 만들어짐이 알려져 있다.

$r = f(\theta)$의 형태로 표현되는 graph는 θ를 parameter로 하는

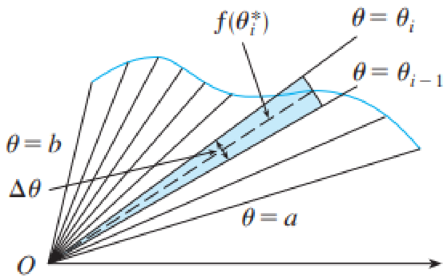
$$x = f(\theta)\cos\theta, \quad y = f(\theta)\sin\theta$$

의 parametric equation으로 표현할 수도 있다. 이때 특정한 점에서 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta}$$

로써 계산 가능하다. 만약 $r'\cos\theta = r\sin\theta$라면, 접선은 y축에 나란하다.

미분은 일반적인 parametric curve에서와 동일한 방식으로 이루어낼 수 있다. 이제는 적분이 문제인데, polar coordinate에서는 주로 θ의 범위를 기준으로 $r = f(\theta)$, $\theta = a$, $\theta = b$에 의해 갇히는 영역의 넓이를 구하는 일이 많다. 이 경우 그동안 하였듯이 단순히 그래프와 한 축 사이에 있는 영역의 넓이를 구하는 것처럼 적분하면 안 된다. 넓이가 구해지는 영역이 다르기 때문이다.



따라서 기존과는 달리 해당 영역을 아주 작은 부채꼴들의 합으로 근사하고자 한다. θ의 범위를 θ_{i-1}부터 θ_i까지로 하면, 중심각이 $\Delta\theta$이다. 갇힌 영역과 같은 넓이를 가지는 부채꼴이 되도록 적절히 $\theta_i^* \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$를 골라 $f(\theta_i^*)$를 반지름으로 하자. (그런 θ_i^*가 존재함은 f가 연속함수일 때 MVT를 이용하여 보일 수 있다. 하지만 이 단원에서의 관심사는 아니므로 자세한 증명은 생략한다.) 그렇다면 우리는

$$A = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta$$

임을 얻을 수 있고, $n \to \infty$로 보낸다면

$$A = \int_a^b \frac{1}{2}[f(\theta)]^2 d\theta$$

임을 얻을 수 있게 된다.

극좌표상의 곡선 $r = f(\theta)$가 주어져 있다. $f(\theta)$가 연속함수일 때, 이 곡선과 $\theta = a, \theta = b$에 의해 갇힌 영역의 넓이는

$$A = \int_a^b \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

이다. 단, $a \leq b$임을 전제하도록 하자.

한편, 간단한 계산을 통해 f'이 continuous일 때 동일한 구간에서 곡선의 길이는

$$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

이다.

증명의 힌트를 제시하자면, 위에서 $dy/d\theta$와 $dx/d\theta$를 r', r, θ로 제시한 적이 있었다. 우리가 원래 사용하던 공식인

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

의 자리에서 dx/dt와 dy/dt를 r', r, θ에 관련한 식으로 바꾸고 정리해보아라. 위 박스의 피적분함수가 등장하게 될 것이다. 이를 이용하면 surface area에 대해서도 아래 공식이 성립한다는 것을 확인할 수 있다.

f'가 continuous이며 $0 \le a \le b \le \pi$일 때, 곡선 $r = f(\theta)$, $a \le \theta \le b$를 polar axis로 회전시켜 얻은 회전체의 surface area는

$$S = \int_a^b 2\pi r \sin\theta \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta$$

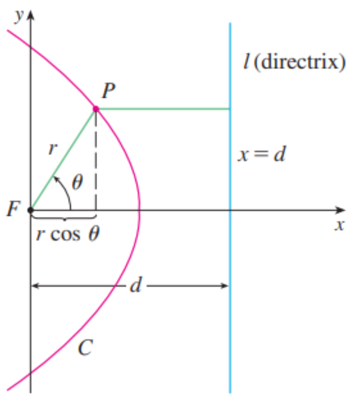
10.4 Conic Sections in Polar Coordinates

먼저, 기본적으로 conic section이 무엇인지에 대한 설명은 여기서 생략하고자 한다. 수학2를 제대로 공부한 학생이라면 지겨울 정도로 풀어 보았을 것이라 생각한다. 수학2에서 conic section을 돌리려고 정말 고생했던 기억이 있을 것이다. 다행히도 polar coordinate에서는 이 돌리는 게 정말 쉽다. 그냥 ϕ만큼 돌리고 싶다면 θ의 자리에 $\theta - \phi$를 넣어주면 되기 때문이다. 즉 극좌표 상에서 conic section을 다뤄보는 것은 그 나름의 의의가 있다고 볼 수 있다.

F가 고정된 점 **focus**이고 l은 고정된 직선 **directrix**이다. **eccentricity** e는 고정된 양의 상수이다. 이때,

$$\frac{|PF|}{|Pl|} = e$$

인 모든 점 P의 자취를 모아둔 것을 **conic section**이라 한다. 이때,
(ㄱ) $e < 1$이면 이는 **ellipse**이다.
(ㄴ) $e = 1$이면 이는 **parabola**이다.
(ㄷ) $e > 1$이면 이는 **hyperbola**이다.



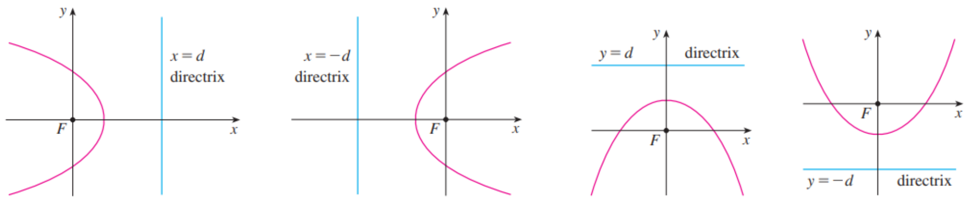
F가 원점이며 directrix가 $x = d$처럼 표현된다고 하자. 그렇다면 P가 polar coordinate (r, θ)를 가진다고 할 때 $|PF| = r$이며 $|Pl| = d - r\cos\theta$이다. 둘의 비가 e라고 했으니, 계산해 본다면

$$r = e(d - r\cos\theta)$$

임을 확인해줄 수 있다. r에 대해 정리한다면

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

이다. 만약 directrix의 위치나 각도가 바뀌게 된다면, 아래처럼 다양한 형태의 conic section이 생기게 된다.



(a) $r = \dfrac{ed}{1 + e\cos\theta}$ (b) $r = \dfrac{ed}{1 - e\cos\theta}$ (c) $r = \dfrac{ed}{1 + e\sin\theta}$ (d) $r = \dfrac{ed}{1 - e\sin\theta}$

한편 이를 cartesian coordinate에서로 바꾸면, 정리했을 때

$$x^2 + y^2 = e^2(d - x)^2 = e^2(d^2 - 2dx + x^2)$$

또는

$$(1 - e^2)x^2 + 2de^2x + y^2 = e^2d^2$$

을 얻게 된다. 만약 $e = 1$이라면 이는 parabola의 형태를 가짐을 쉽게 확인할 수 있을 것이다. $e \neq 1$이라면,

$$\left(x + \frac{e^2d}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2}$$

을 얻는다. 만약 $e < 1$이라면 이는 ellipse의 형태이며, $e > 1$이라면 hyperbola의 형태임을 쉽게 알 수 있다. 또한 두 경우 모두에서, center로부터 foci까지의 거리 c와 장반지름에 해당하는 a에 대하여, $e = \frac{c}{a}$임도 보일 수 있다.

만약 우리가 $r = \dfrac{\alpha}{\beta - \gamma\cos\theta}$의 그래프를 그려야 한다고 가정하여 보자. 상수는 물론 양수라고 하자. 그렇다면 먼저 우리는 분자와 분모를 β로 나누어 익숙한 형태를 만들어 주어야 한다. $\delta = \alpha/\beta$, $\epsilon = \gamma/\beta$라 한다면 이는

$$r = \frac{\delta}{1 - \epsilon\cos\theta}$$

를 얻는다. $ed = \delta$, $e = \epsilon$이 되므로, e와 d를 α, β, γ로 표현할 수 있다. 즉, 아래과 같다.

$$e = \frac{\gamma}{\beta}, \quad d = \frac{\alpha}{\gamma}$$

그러면 γ와 β의 비교를 통해 e가 1보다 큰지, 작은지 확인해줄 수 있을 것이다. 이를 통해 conic section의 종류를 먼저 확인하자. 이를 확인하였다면, d를 계산해 적절한 directrix를 그어 주어야 한다. 특히 지금은 분모에서 $1 - \epsilon\cos\theta$가 등장하였으므로, $x = -d$를 directrix로 그어주는 것이 올바르겠다. 그 다음에는 θ에 0이나 π같은 수들을 넣어 r을 각각 구하고, 점을 찍어 준다. 그 다음은 우리가 아는 개형에 따라 점을 이어가며 conic section을 그려 주면 된다.

10.5 Kepler's Laws

Kepler's Laws

1. A planet revolves around the sun in an elliptical orbit with the sun at one focus.
2. The line joining the sun to a planet sweeps out equal areas in equal times.
3. The square of the period of revolution of a planet is proportional to the cube of the length of the major axis of its orbit.

책에서 Kepler's Law는 꽤나 중요하게 박스로 등장하지만, 사실 그 증명은 어렵기에 잘 다루지 않는다. 따라서 그냥 이런 게 있다는 정도로만 알고 있어도 충분하다. 이처럼 천체의 운동을 확인하기 위해서는 식을 e나 d 대신, eccentricity e와 semimajor axis a로 표현하는 편이 적절하다. 그렇다면

$$d = \frac{a(1-e^2)}{e}, \quad ed = a(1-e^2)$$

임이 확인할 수 있다. 즉

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

처럼 쓸 수도 있다.

행성이 태양으로부터 가장 가까이 있을 때를 **perihelion**, 멀리 있을 때를 **aphelion**이라 부른다. 각 상태에서 태양까지의 거리를 **perihelion distance**, **aphelion distance**라 한다. 각각의 거리는 $a(1-e)$와 $a(1+e)$로 주어지게 된다.

10.6 연습문제

문제 10. 1. *어떤 입자는* $t \in [0, 4\pi]$*의 범위에서* $(\cos^2 t, \cos t)$*를 따라 움직인다. 이 입자가 이동한 거리를 구하여라. 이를 입자의 경로가 그린 곡선의 길이와 비교하라.*

문제 10. 2. C_1*과* C_2*는 각각*

$$C_1 : r = 1 + \cos\theta, \quad C_2 : r = 1 - \sin\theta$$

로 주어지는 cardioid이다. C_1*과* C_2*의 교점을 모두 찾고,* C_1*과* C_2*를 기준으로 모두 안쪽에 있는 영역의 넓이를 구하라.*

문제 10. 3. *cycloid의 parametric equation을 유도하여라. 원의 반지름을* r*, 원이 굴러가는 직선을* x*축이라 하며, 원 위의 점* P*는* $(0,0)$*에서 출발하여 시계 방향으로 회전하는 상황을 고려한다. 또한,* $0 \leq x \leq 2\pi r$ *구간에서 그려지는 cycloid가* x*축을 기준으로 회전될 때 얻어지는 회전체의 surface area도 구하여라.*

문제 10. 4. C_1은 $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1$으로 주어지는 곡선이다. C_2는 $r = 1 + \sin\theta$라는 *polar equation*에 의해 그려지는 곡선이다.

(ㄱ) C_1을 $r = f(\theta)$ 형태로 표현하여라.

(ㄴ) C_1과 C_2의 길이를 각각 구하여라.

(ㄷ) 두 곡선을 기준으로 모두 안쪽에 있는 영역을 x축을 기준으로 돌려 얻은 회전체의 *surface area*를 구하라.

(ㄹ) C_1, C_2에 의해 가두어지는 영역의 넓이를 각각 구하여라.

문제 10. 5. *반지름 b의 원 C 위에 있는 고정점 P를 고려하자. C가 중심이 O이고 반지름이 a인 다른 원의 바깥에 붙어 회전할 때, P의 경로는 epicycloid이다. P가 $(a, 0)$에서 출발한다고 가정하며, O는 원점이다. 이때 O와 C의 중심을 잇는 선이 양의 x축과 이루는 각도 θ를 이용해 epicycloid를 매개화하여라. 만약 $a = 3, b = 1$이라면 그 개형은 어떻게 되는지 그리거나 묘사하여라.*

문제 10. 6. *$r = 3\cos\theta$와 $r = 1 + \cos\theta$를 고려하자. 이들의 그래프를 그리고, 교점을 모두 묘사하여라. 그 다음, 각각의 곡선 내부에 있는 영역의 넓이를 구하여라.*

문제 10. 7. *ellipse* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$를 *polar equation*으로 표현하여라. 그 다음, *polar coordinate*에서 영역의 넓이를 구하는 방법을 통해 그 내부의 넓이가 $ab\pi$ 임을 보여라.

문제 10. 8. $0 < a < b$일 때 $(a\cos\theta, b\sin\theta), \quad 0 \le \theta \le 2\pi$는 어떤 도형인가? 이 도형을 y축을 기준으로 회전시켜 얻은 회전체의 *surface area*는 얼마인가?

문제 10. 9. *polar curve* $r^2 = \cos 2\theta$를 *polar axis*로 회전시켜 얻는 회전체의 *surface area*는?

문제 10. 10. $r^2 = \cos 2\theta$과 $r^2 = \sin 2\theta$의 그래프를 그리고, 그 교점을 표시하여라. 그 다음 두 곡선을 기준으로 모두 안쪽에 있는 영역의 넓이를 구하라.

문제 10. 11. $r = 1 - \cos\theta$과 $r = \cos\theta$를 고려하여라. 두 그래프를 그리고, 교점을 표시하여라. 이 두 그래프에 의해 갇히는 영역을 R이라 할 때, R을 둘러싸는 곡선의 길이를 구하여라.

문제 10. 12. $r = 1 + 2\cos(2\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$로 표현되는 곡선을 *cyloid of ceva*라고 한다. 이를 *Cartesian equation*의 형태로 나타내어라. 또한, 그래프를 그렸을 때 나타나는 네 개의 닫힌 영역에 대하여 각각의 넓이를 구하라.

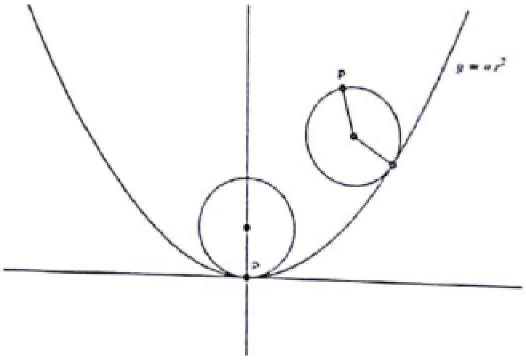
문제 10. 13. *곡선* $r = 1 + c\sin\theta$*를 생각하여라. 어떤* c*에 대하여 이 곡선이 자기 스스로 교차할 것인가? 또한,* c*에 따라 이 곡선이 vertical tangent line을 가지는 점의 개수가 어떻게 달라지는지 추적하라.*

문제 10. 14. *곡선* $(2\cos t - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t)$*를 고려하여라. 이 곡선을 그리고, 길이를 구하자.*

문제 10. 15. $C_1 : f(\theta) = 1 - \cos\theta$, $C_2 : g(\theta) = 1 + \cos\theta$로 표현되는 두 *polar equation*이 있다. 둘 모두의 안쪽에 있는 영역이 *polar axis*를 기준으로 회전될 때, *surface area*를 구하여라.

문제 10. 16. 두 곡선 $r = \sqrt{3}\cos\theta$, $r = \sin\theta$의 안쪽에 있는 영역의 넓이를 구하여라.

문제 10. 17. *반지름이* r*인 곡선이* $y = ax^2$*이라는 parabola의 안쪽을 구르고 있다. 이때,* $a > 0$*이고* $r \leq \frac{1}{2a}$ *이다. 원 위의 고정점* P*는 원점* $(0, 0)$*에서 출발한다.*



P의 경로를 매개화하여 표현하여라.

문제 10. 18. $r = 1 - 2\cos\theta$*는 두 개의 루프를 가지고 있다. 안쪽 루프와 바깥쪽 루프의 사이에 있는 영역의 넓이를 구하시오.*

문제 10. 19. *중심이 P이고 반지름이 1인 원 위에 점 Q와 S가 있다. 이 원은 중심이 원점 O이고 반지름이 1인 원 바깥에서 미끄러짐 없이 시계 반대 방향으로 구르고 있다. 한편 Q는 중심이 P인 원 위에서 P의 각속도와 동일한 각속도로 시계 반대 방향으로 자체적으로 이동하고 있다. S는 원 위에서 고정되어 움직이지 않는다. 직선 OP과 x축이 이루는 각도를 θ라고 하자. Q와 S의 처음 위치가 $(1,0)$일 때, S와 Q의 parametric equation을 $0 \le \theta \le 2\pi$에서 구하여라. S는 epicycloid임은 이미 밝혀본 적이 있다.*

그 다음, S의 자취를 기준으로는 안쪽에 있으면서 P의 자취를 기준으로는 바깥에 있는 영역의 넓이를 구하여라.

문제 10. 20. *두 곡선* C_1, C_2*는*

$$C_1 : r^2 = \sin\theta\cos\theta, \quad C_2 : r = \sin\theta$$

로 주어진다. 이 두 곡선을 그리고, 두 곡선이 horizontal/vertical tangent를 가지거나, 서로 만나는 모든 점을 표시하여라. 또한, 둘 모두의 안쪽에 있는 영역의 넓이를 구하여라.

문제 10. 21. *두 곡선* $r = 3 + 2\cos\theta$*와* $r = 3 + 2\sin\theta$*의 안쪽에 있는 영역의 넓이를 구하여라.*

문제 10. 22. *곡선*

$$r = \left(\cos\frac{\theta}{3}\right)^3$$

의 길이를 구하여라.

문제 10. 23. *원 C는 중심이 원점이고 반지름이 2인 원이다. 반지름이 1인 원 D가 C의 주위를 미끄러짐 없이 반시계 방향으로 구르고 있다. L을 C와 D의 중심을 잇는 직선이라 하고, 이것이 x축과 이루는 각도를 θ라고 하자. 한편 종찬이는 잘 구르고 있던 D를 C 기준으로 밖에서 안쪽으로 옮겨 동일한 방식으로 굴렸다. 이때 D 위에 있는 고정점 P는 각각 epicycloid와 hypocycloid를 그리게 될 것이다. P가 그리는 두 곡선 사이에 있는 영역의 넓이를 구하여라. P의 시작점이 어디에 있는지는 정답에 영향을 미치지 않음을 (말 혹은 수식으로) 설명한다면 이를 이용하여도 된다.*

문제 10. 24. *polar equation으로 주어진 곡선*

$$r = 1 + \cos\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi$$

에 대하여 점 $(2,0)$에서부터 잰 arc length function을 $s(\theta)$라고 두자. 이 곡선을 s를 통해 좌표평면에서 매개화하면

$$(p(s), \sqrt{q(s)})$$

처럼도 쓸 수 있다고 한다. s의 범위와 $p(s), q(s)$를 구하여라.

문제 10. 25. *곡선*

$$\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cos\tan^{-1} t, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \sin\tan^{-1} t\right), \quad t \ge 0$$

의 $(0,0)$에서부터 잰 arc length function $s(t)$을 구하여라.

문제 10. 26. *곡선*

$$(e^{\sqrt{t}}\cos\sqrt{t}, e^{\sqrt{t}}\sin\sqrt{t}), \quad t \geq 0$$

에 대하여, $0 \leq t \leq 4\pi^2$ *의 구간에서 잰 arc length를 구하라.*

문제 10. 27. *곡선*

$$r = \frac{\sec\theta}{1 + 2\tan\theta}$$

를 $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ *의 범위에서 그리고,* $\theta \in [\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi]$ *일 때 길이를 구하여라.*

문제 10. 28. *Cartesian coordinate에서*

$$x^2 + y^2 = 2\sqrt{x^2 - y^2}$$

가 주어져 있다. 이를 $\frac{y}{x} = \tan\theta$*인* θ*에 대한 parametric curve로 바꾸고, 개형을 그려라. 그 다음, 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하라.*

문제 10. 29.

$$C_1 : r = \cos 2\theta, \quad C_2 : r = \frac{1}{2}$$

에 대하여, C_1*과* C_2*의 모든 교점을 구하고 각 교점에서 두 교선이 이루는 각* ϕ*의* $\tan\phi$*를 구하시오.*

문제 10. 30. *directrix가* $r = -2\sec\theta$*로 주어지며 focus가 origin인 conic section을 생각하여 보자.*

(ㄱ) eccentricity가 $0.5, 1, 2$*로 변함에 따라 해당 conic section은 어떻게 변하는가?*

(ㄴ) eccentricity가 위처럼 변한다면, conic section은 어떤 polar equation으로 표현할 수 있는가?

(ㄷ) eccentricity가 0부터 점점 증가함에 따라, 도형의 $x < 0$*인 부분과* y*축 사이에 가두어지는 영역의 넓이가 점점 커짐을 밝혀라. 또, eccentricity가 0에 아주 가까운 양수일 때와, 양의 무한에 아주 가까워지는 때 그 넓이는 각각 얼마에 가까워질 것인지도 말하여라.*