2-4. 1. *원점에서 함수*

$$f(x,y)=\sin(e^y+x^2-2)$$

의 2차 근사다항식을 구하시오.

f는 이급함수이며 편도함수는 아래와 같다.

$$D_1f(x,y)=2x\cos(e^y+x^2-2)$$

$$D_2f(x,y)=e^y\cos(e^y+x^2-2)$$

$$D_1^2f(x,y)=2\cos(e^y+x^2-2)-4x^2\sin(e^y+x^2-2)$$

$$D_1D_2f(x,y)=-2xe^y\sin(e^y+x^2-2)$$

$$D_2^2f(x,y)=e^y\cos(e^y+x^2-2)-e^{2y}\sin(e^y+x^2-2)$$

이므로 $(0,0)$을 대입하여 얻은 2차 근사 다항식은

$$T_2f(x,y)=\sin(-1)+0x+\cos(-1)y+\frac{2\cos(-1)}{2}x^2+0xy+\frac{\cos(-1)-\sin(-1)}{2}y^2=-\sin 1+y\cos 1+x^2\cos 1+y^2\frac{\cos 1+\sin 1}{2}$$

2-4. 2. *다음 함수의 극대점, 극소점, 안장점을 구하시오.*

$$f(x,y)=2\sin x\sin y,\quad -\pi<x<\pi,-\pi<y<\pi$$

$\mathrm{grad}f(x,y)=(2\cos x\sin y,2\sin x\cos y)$ 이므로 $f(x,y)$의 임계점을 찾으면 $(2\cos x\sin y,2\sin x\cos y)=(0,0)$인 범위 안의 점은

$$(0,0),\left(\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{\pi}{2}\right)$$

의 5개이다. 이때 각 점에서의 헤세 행렬을 구해 보자.

$$D_1^2f(x,y)=-2\sin x\sin y$$

$$D_1D_2f(x,y)=D_2D_1f(x,y)=2\cos x\cos y$$

$$D_2^2f(x,y)=-2\sin x\sin y$$

이므로 각 임계점을 대입하면

$$f''(\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{\pi}{2})=\begin{pmatrix}-2&0\\0&-2\end{pmatrix}<O,\quad \text{(복부호동순)}$$

이므로 이들은 극대점이다.

다음으로

$$f''(\pm\frac{\pi}{2},\mp\frac{\pi}{2})=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}>O,\quad \text{(복부호동순)}$$

이므로 이들은 극소점이다.

마지막으로

$$f''(0,0)=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}$$

의 헤세 행렬식은 -4로 음이기에 원점은 안장점이다. 따라서 극대점은 $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$과 $(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2})$이며 극소점은 $(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2})$과 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$이다. 마지막으로 안장점은 $(0,0)$이다.

2-4. 3. *좌표평면의 원점에서 곡선*

$$x^3 + y^3 - 3x - 3y = 4$$

까지의 거리를 구하시오.

제한조건

$$g(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y - 4 = 0$$

에서 함수 $f(x, y) = x^2 + y^2$의 최솟값을 찾아준 이후 제곱근을 취하면 된다. 이때 영역

$$S = \{(x, y)|f(x, y) \leq 100\} \cap \{(x, y)|g(x, y) = 0\}$$

은 유계닫힌집합이며 점 $(-1, -1)$은 이 영역 안에 있으므로 공집합이 아니다. 따라서 S에서 연속함수 $f(x, y)$는 최솟값을 가진다. 그런데 S 밖에 있는 $g(x, y) = 0$인 점 (x, y)에서는 $f(x, y) > 100$이므로, 그 최솟값은 전체에서의 f의 최솟값과 같다. 라그랑주 승수법에 의하여 S를 따를 때 f의 극값은 f의 기울기 벡터인 $(3x^2 - 3, 3y^2 - 3)$과 제한 조건의 함수 g의 기울기 벡터인 $(2x, 2y)$가 일차종속인 점 (x, y)에서 나타난다. 이때 $(2x, 2y) \neq \mathbf{0}$이므로 실수 λ가 존재하여 $\lambda(2x, 2y) = (3x^2 - 3, 3y^2 - 3)$이다. 따라서 x와 y는

$$(x - y)(3(x + y) - 2\lambda) = 0$$

을 만족시킨다. $x = y$일 경우 $2x^3 - 6x = 4$여야 하므로 가능한 점은 $(-1, -1)$과 $(2, 2)$이고 가능한 f의 최솟값은 2이다. 만약 $x \neq y$인 경우, $3(x + y) = 2\lambda$이고 $2\lambda x = 3x^2 + 3xy = 3x^2 - 3$이므로 $xy = -1$이다. 이때

$$g(x, y) = (x + y)(x^2 - xy + y^2 - 3) - 4 = (x + y)((x + y)^2 - 3xy - 3) - 4 = (x + y)^3 - 4 = \frac{8}{27}\lambda^3 - 4 = 0$$

이므로 $\lambda = \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$이다. 또한 그러므로 $x + y = \sqrt[3]{4}$이며 $xy = 1$인 x와 y를 찾아줄 수 있다. 이들은 이차방정식

$$t^2 - \sqrt[3]{4}t + 1$$

의 근이지만, 판별식의 값이 0보다 작으므로 근이 없다. 따라서 실수 범위에서 그런 (x, y)는 존재하지 않는다. 따라서 $x - y = 0$일 때의 최소인 2가 그 최소다. 따라서 거리의 최소는 그 제곱근 값인

$$\sqrt{2}$$

임을 알 수 있다.

2-4. 4. *좌표평면의 영역*

$$\{(x, y)|x > 0\}$$

에서 정의된 다음 함수 f의 임계점을 구하고, 그 임계점을 극대점, 극소점 혹은 안장점으로 분류하여라.

$f(x, y)$의 기울기 벡터를 구하면

$$\mathrm{grad} f(x, y) = (1 + \frac{x - y}{x^2 + y^2}, -2 + \frac{x + y}{x^2 + y^2})$$

이다. 주어진 정의역에서 임계점을 구하면

$$(x, y) = (\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$$

뿐이고, 이것이 유일한 임계점이다. $f(x,y)$의 헤세 행렬을 구하면

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-x^2+y^2+2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-x^2+y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{-x^2+y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

이고, 임계점에서 이 행렬을 구하면

$$\det f''\left(\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right) = \begin{vmatrix} \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{vmatrix} = -\frac{25}{2} < 0$$

이다. 따라서 헤세 판정법에 의해 $(\frac{1}{5},\frac{3}{5})$는 안정점이다.

2-4. 5. *좌표평면에서 정의된 함수 $f(x,y) = e^{x+y}\sin(xy)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.*
(a) 원점에서 $f(x,y)$의 3차 근사다항식을 구하시오.
(b) $\mathbf{v} = (1,2)$에 대하여 $D^3_{\mathbf{v}}(0,0)$을 구하시오.

(a)

$$e^{x+y}\sin(xy) = (1+(x+y)+\frac{1}{2!}(x+y)^2+o((x^2+y^2)^{3/2}))(xy+o((x^2+y^2)^{3/2})) = xy+x^2y+xy^2+o((x^2+y^2)^{3/2})$$

이므로 테일러전개의 유일성에 의하여

$$T_3f(x,y) = xy + x^2y + xy^2$$

(b) 3차 근사다항식으로부터

$$D_1^3f(0,0) = 0$$

$$D_1^2D_2f(0,0) = 2$$

$$D_1D_2^2f(0,0) = 2$$

$$D_2^3f(0,0) = 0$$

임을 알 수 있다. 따라서

$$D^3_{\mathbf{v}}(0,0) = (D_1^3f(0,0) + 6D_1^2D_2f(0,0) + 12D_1D_2^2f(0,0) + 8D_2^3f(0,0)) = 36$$

이다.

2-4. 6. *아래와 같이 주어진 닫힌 영역 S에서 정의된 함수 $f(x,y,z) = x+y+z$의 최댓값과 최솟값이 존재함을 보이고, 그 값을 각각 구하시오.*

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2+4x \le 0, x \ge -2\}$$

S를 다르게 쓰면 $(x+2)^2+y^2+z^2 \le 4$에서 $x \ge -2$인 부분이므로 그 모양은 반구이다. 따라서 집합 S는 유계닫힌집합니다. 따라서 연속함수 f는 S에서 최댓값과 최솟값을 가진다.

S의 내부인 영역

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2+4x < 0, x > -2\}$$

에서의 임계점을 먼저 구해보면, 함수 f의 기울기 벡터 $(1,1,1)$은 절대 영벡터가 될 수 없으므로 내부에는 임계점이 없다. 따라서 최대 혹은 최소는 경계에 존재한다.

먼저 반구의 밑면인 원판 부분을 생각하면, 해당 부분의 곡면에서 제한조건은 $x = -2$이므로 기울기 벡터가 $(1,0,0)$이다. 이것이 $(1,1,1)$과 일차독립일 수는 없다. 다음으로 구면 부분을 생각하면, 해당 구면은

$(x+2)^2+y^2+z^2=4$라는 구면의 일부이므로 기울기 벡터가 $(2(x+2),2y,2z)$에 나란해야 한다. 따라서 $x+2=y=z=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$여야 한다. 이 때 $f(x,y,z)=x+y+z=2\sqrt{3}-2$이다. 마지막으로 두 곡면의 교선인 $x=-2, y^2+z^2=4$에서 생각하면 $x+y+z$의 최댓값과 최솟값은 $y^2+z^2=4$에서 $y+z-2$의 최댓값과 최솟값을 찾아야 한다. 즉 $(2y,2z)$과 $(1,1)$이 나란해야 하며, $y=z$이기에 최댓값은 $y=z=\sqrt{2}$일 때 $2\sqrt{2}-2$이며, 최솟값은 $y=z=-\sqrt{2}$에서 $-2\sqrt{2}-2$다. 따라서 이 값들을 모두 고려하면, 최댓값은 $2\sqrt{3}-2$, 최솟값은 $-2\sqrt{2}-2$이다.

2-4. 7. *함수 $f(x,y)=e^x\ln(1+y)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.*

(a) 원점에서 3차 근사다항식 $T_3f(x,y)$를 구하시오.

(b) $|e^{0.1}\ln 1.1-T_3f(0.1,0.1)|<5\times 10^{-4}$임을 보이시오. 단, $e^{0.1}<1.2$이다.

(a)

$$e^x\ln(1+y)=(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o((x^2+y^2)^{3/2}))(y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3+o((x^2+y^2)^{3/2}))$$

이므로

$$e^x\ln(1+y)=y-\frac{1}{2}y^2+xy-\frac{1}{2}xy^2+\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{3}y^3+o((x^2+y^2)^{3/2})$$

이다. 무한급함수 f의 테일러 전개의 유일성에 의해

$$T_3f(x,y)=y-\frac{1}{2}y^2+xy-\frac{1}{2}xy^2+\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{3}y^3$$

(b) 3차 근사다항식의 원래 함수와의 차이가 특정 값 이하임을 보이기 위해서는 4계 편미분계수까지 계산해야 한다.

$$D_1^4f(x,y)=e^x\ln(1+y)$$
$$D_1^3D_2f(x,y)=\frac{e^x}{1+y}$$
$$D_1^2D_2^2f(x,y)=-\frac{e^x}{(1+y)^2}$$
$$D_1D_2^3f(x,y)=\frac{2e^x}{(1+y)^3}$$
$$D_2^4f(x,y)=-\frac{6e^x}{(1+y)^4}$$

이며

$$M_4(0.1,0.1)=\max\{|D_{i_1}D_{i_2}D_{i_3}D_{i_4}f(0.1t,0.1t)|:1\le i_1,i_2,i_3,i_4\le 2, 0\le t\le 1\}\le\frac{6e^{0,1}}{1^4}<7.2$$

이다. 그러므로

$$|R_3f(0.1,0.1)|\le M_4(0.1,0.1)\cdot\frac{(0.1+0.1)^4}{4!}<5\times 10^{-4}$$

이다.

2-4. 8. *삼차원 좌표공간에서 원점과 곡면 $z^2+xy^2-1=0$ 사이의 최단거리를 라그랑주 승수법을 이용하여 구하시오.*

제한조건을 위한 함수를

$$g(x,y,z)=z^2+xy^2-1=0$$

이라고 두자. 그리고 최소화시키자 하는 함수를 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$으로 두자. 원점을 중심으로 충분히 큰 구를 그리면, 함수 g의 $0-$ 등위면과 교점이 있게 할 수 있다. 그러면 그 교집합은 공집합이 아니면서 유계인 닫힌집합이다. 따라서 해당 영역에서 f의 최솟값이 존재한다. 또한 원점을 중심으로 그린 구 밖에서 f의

함숫값은 구 내에서의 함숫값보다 클 수 없으므로, g의 $0-$ 등위면에 최솟값이 존재한다. 라그랑주 승수법을 적용하면

$$\text{grad}f(x,y,z) = 2(x,y,z)$$

와

$$\text{grad}g(x,y,z) = (y^2, 2xy, 2z)$$

는 서로 나란하다. 따라서 $2x : y^2 = 2y : 2xy = 2z : 2z$여야 하므로 $z = 0$이거나 $2x = y^2$여야 한다. $z = 0$인 경우에는 $xy^2 = 1$이며, $2y^3 = 4x^2y$이므로 $y \neq 0$으로부터 $y^2 = 2x^2$이다. 그러면 $2x^3 = 1$이므로, $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$이다. 즉 만족시키는 점은

$$(2^{-1/3}, \pm 2^{1/6}, 0)$$

이 되며 이 때 $f(x,y,z) = 3 \cdot 2^{-2/3}$이다. 그 다음으로 $2x = y^2$인 경우에는 $y = 0$이거나 $y = \pm\sqrt{2}$이어야 한다. 후자인 경우 $x = 1$이며, 이때는 만족하는 z가 존재하지 않는다. 전자의 경우에는 $f(x,y,z) = 1$이다. 이때 $3 \cdot 2^{-2/3} > 1$이므로, f의 최솟값은 1이다. 따라서 최단거리는 여기에 근호를 씌운 1이다.

2-4. 9. *다음 함수의 임계점을 구하고 극대점인지 극소점인지, 또는 안장점인지를 판별하시오.*

$$f(x,y) = x^3 - y^3 - xy$$

f의 기울기 함수는 $(3x^2 - y, -3y^2 - x)$이며 이것이 영벡터일 때 임계점이다. 따라서 $y = 3x^2, x = -3y^2$이므로 이를 연립하면 $(0,0)$과 $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$이 임계점이다.

헤세 행렬은

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} D_1^2 f(x,y) & D_1D_2 f(x,y) \\ D_2D_1 f(x,y) & D_2^2 f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -1 \\ -1 & -6y \end{pmatrix}$$

먼저

$$f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

은 행렬식이 -1으로 음이기에 안장점이다. 둘째로

$$f''\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} < O$$

이기에 $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$은 극대점이다.

2-4. 10. *함수 $f(x,y) = x^3y + 2xy^2 - xy$의 임계점을 모두 구하고, 그 점들을 극대점, 극소점, 안장점으로 분류하시오.*

$\text{grad}f(x,y) = (3x^2y + 2y^2 - y, x^3 + 4xy - x)$이므로 연립방정식을 풀어 임계점을 모두 구하면

$$(0,0), (-1,0), (1,0), (0, \frac{1}{2}), (\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{1}{5}), (-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{1}{5})$$

또한 헤세 행렬은

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy & 3x^2 + 4y - 1 \\ 3x^2 + 4y - 1 & 4x \end{pmatrix}$$

이다.

$$f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

이므로 $(0,0)$에서 헤세 행렬식이 음이고, 안장점이다.

$$f''(-1,0)=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$$

는 헤세 행렬식이 음이므로 안장점이다.

$$f''(1,0)=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

는 헤세 행렬식이 음이므로 안장점이다.

$$f''(0,\frac{1}{2})=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

는 헤세 행렬식이 음이므로 안장점이다.

$$f''(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{1}{5})=\begin{pmatrix}\frac{6\sqrt{5}}{25} & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}$$

로 양행렬이기에 극소점이다.

$$f''(-\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{1}{5})=\begin{pmatrix}-\frac{6\sqrt{5}}{25} & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{5} & -\frac{4\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}$$

는 음행렬이므로 극대점이다.

따라서 안장점은

$$(0,0),(-1,0),(1,0),(0,\frac{1}{2})$$

이며, 극소점은

$$(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{1}{5})$$

이고 극대점은

$$(-\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{1}{5})$$

이다.

2-4. 11. *함수* $f(x,y)=e^{x+xy}\ln(1-xy)$*에 대하여 물음에 답하시오.*

(a) 원점에서 f*의 2차 근사다항식을 구하시오.*

(b) $D_1^3D_2^3f(0,0)$*을 구하시오.*

$$e^{x+xy}\ln(1-xy)=-(1+(x+xy)+\frac{(x+xy)^2}{2!}+o(x^2+y^2))(xy+o(x^2+y^2)) \quad =-xy+o(x^2+y^2)$$

이므로 무한급 함수 f의 테일러 전개의 유일성에 의하여

$$T_2f(x,y)=-xy$$

로 주어진다.

(b) 위와 같은 방법으로 테일러 전개의 유일성을 이용하여 $T_6f(x,y)$을 구할 수 있는데, 이 때

$$\frac{{}_6C_3}{6!}D_1^3D_2^3f(0,0)$$

이 그 x^3y^3의 계수와 같다.

$$e^{x+xy}\ln(1-xy) = -(1+(x+xy)+\frac{(x+xy)^2}{2!}+\frac{(x+xy)^3}{3!}+\cdots)(xy+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{x^3y^3}{3}+\cdots)$$

우변에서 x^3y^3의 계수를 찾아주면,

$$-xy\cdot\frac{x^2y^2}{2}-\frac{x^2y^2}{2!}\cdot xy-\frac{x^3y^3}{3} = -\frac{4}{3}x^3y^3$$

이다. 즉

$$D_1^3D_2^3f(0,0) = -\frac{720}{20}\cdot\frac{4}{3} = -48$$

이다.

2-4. 12. *좌표평면에 있는 곡선 $x^3+y^3+6xy=8$에서의 함수 $f(x,y)=x^2+y^2$의 최솟값을 구하여라.*

함수 g를 $g(x,y)=x^3+y^3+6xy-8$로 정의하자. 그러면

$$S = \{(x,y)|g(x,y)=0\}$$

$$D = \{(x,y)|x^2+y^2\le 8\}$$

이라 두면 $S\cap D$는 점 $(-2,-2)$를 포함하므로 공집합이 아닌 유계닫힌집합이기에 연속함수 f는 이 위에서 최솟값을 가진다. 이때 $S\cap D$에서 $f(x,y)\le 8$이므로 $S\cap D$ 위에서의 최솟값이 S에서의 최솟값이다.

라그랑주 승수법에 의해 f와 g의 기울기 함수는 일차종속인 점에서 극점이 나올 수 있다. 그러면

$$\mathrm{grad}f(x,y) = (2x,2y)$$

와

$$\mathrm{grad}g(x,y) = (3x^2+6y, 3y^2+6x)$$

이 일차종속이므로

$$6x^2y+12y^2 = 6xy^2+12x^2$$

을 정리하면

$$3(x-y)(2x+2y-xy) = 0$$

이다. 먼저 $x=y$일 경우

$$0 = g(x,x) = 2x^3+6x^2-8$$

로부터 $x=1$ 혹은 $x=-2$다. 최소점 후보인 $(1,1)$에서 함숫값은 2, $(-2,-2)$에서는 8이다.

둘째로 $2x+2y=xy$인 경우

$$0 = g(x,y) = x^3+y^3+6xy-8 = (x+y)^3-3xy(x+y)+6xy-8 = (x+y)^3-6(x+y)^2+12(x+y)-8$$

이므로 $x+y=2$, $xy=4$이다. 그러나 이를 만족하는 실수 x,y는 존재하지 않는다. 따라서 S 위에서 f의 최솟값은 2이다.