코시의 평균값 정리

코시의 평균값 정리

구간 $[a, b]$에서 연속이고, 구간 (a, b)에서 미분가능한 함수 $f(x), g(x)$에 대하여

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} : \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = f'(c) : g'(c)$$

인 $c \in (a, b)$가 존재한다.

증명.
함수 f와 g의 평균변화율을 각각 F, G라고 하자. 즉,

$$F = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad G = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

로 두고 함수 h를

$$h(x) = Gf(x) - Fg(x)$$

라고 두자. 그러면
$h(b) - h(a) = G(f(b) - f(a)) - F(g(b) - g(a)) = 0$이다. 평균값 정리에 의하여 $h'(c) = 0$인 점 c가 구간 (a, b) 안에 존재한다. 한편

$$h'(c) = Gf'(c) - Fg'(c)$$

이므로, 증명이 완료된다.

로피탈 정리

정리 2.0.1

실수 a 근방에서 정의된 두 함수 $f(x), g(x)$가 $x = a$에서 모두 미분가능하고

$$f(a) = g(a) = 0, \quad g'(a) \neq 0$$

이라고 하자. 그러면

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

이다.

증명.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

로피탈 정리

로피탈의 정리

구간 (a, b)에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x), g(x)$에 대하여 $g'(x) \neq 0$이고 극한값

$$l := \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

가 존재한다고 하자. 이때
1) $\lim_{x \to a} f(x) = 0, \lim_{x \to a} g(x) = 0$이거나 또는
2) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty, \lim_{x \to a} g(x) = \infty$이면

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

이다. 이는 a라는 정해진 실수만이 아니라 $\infty, -\infty$인 경우에도 성립한다.

Example

다음 극한을 로피탈의 정리를 여러 번 사용하면 얻을 수 있다.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

혹은,

$$\lim_{x \to 0^+} x \log x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

을 안다.

무한소와 근사다항식

- 만약 실수의 원점 근방에서 정의된 함수 $f(x)$가 $f(0) = 0$이고

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$$

  이라면, 함수 $f(x)$가 원점 근방에서 0으로 수렴하는 정도는 x가 0으로 수렴하는 정도보다 훨씬 빠름을 알 수 있다.
- 이런 상황에서, 우리는 함수 $f(x)$를

$$|f(x)| \ll |x|$$

  혹은 $f(x) = o(x)$라고 표시한다.
- 일반적으로, $f(0) = 0$이고 $f'(0) = 0$인 것은 $f(x) = o(x)$인 것과 동치다.

Example

예를 들어, $\cos x$는 원점 근방에서 어떤 거듭제곱급수 함수 $u(x)$에 대하여

$$\cos x = 1 - x^2 u(x)$$

로 표현되므로,

$$1 - \cos x = x^2 u(x) = o(x)$$

이다.
동일하게, $\sin x = x + o(x)$이다.
또한, $f(x)$와 $g(x)$가 모두 $o(x)$라면, $f(x) \pm g(x)$나 $cf(x)$도 $o(x)$이다.

일차 근사다항식

- 원점 근방에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여, 함수 $p(x) = a + bx$가
$$f(x) - p(x) = o(x)$$
를 만족시키면, $p(x)$를 원점 근방에서 $f(x)$의 **일차 근사다항식**이라고 부른다.
- $0 = f(0) - p(0)$이므로 $a = f(0)$이다.
- $$0 = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - (a + bx)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x} - b \right) = f'(0) - b$$
이니 $b = f'(0)$이다.
- 따라서, $p(x) = f(0) + f'(0)x$임을 알 수 있다. 그러한 의미에서, 원점에서 주어진 함수에 가장 가까운 일차식이 존재한다는 것은 그 함수가 원점에서 미분가능하다는 것과 동치이다.

$o(x^n)$

- 원점 근방에서 정의된 함수 $f(x)$가 $f(0) = 0$이고, 어떤 자연수 n에 대하여
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$$
이면, 함수 f를
$$|f(x)| \ll |x^n| \quad \text{or} \quad f(x) = o(x^n) \quad \text{or} \quad f(x) \in o(x^n)$$
등으로 표현한다.
- 예를 들어, 어떤 거듭제곱급수 함수 $u(x)$에 대하여
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^4 u(x)$$
로 표현되므로 $\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 = o(x^3)$이다.

$o(x^n)$

정리 3.2.2

다음은 원점 근방에서 정의된 n번 미분가능한 함수 $f(x)$가 $o(x^n)$일 필요충분조건이다.

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad \cdots, \quad f^{(n)}(x)(0) = 0$$

증명.

만약 $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$이면 로피탈의 정리에서

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{nx^{n-1}} = \cdots = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{n!x} = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}$$

을 얻는다. 따라서, $f^{(n)}(x) = 0$이므로,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$$

이다. 따라서, $f(x) = o(x^n)$이다.

$o(x^n)$

반대로

$$f(x) = o(x^n)$$

일 때를 생각해보자. $n = 1$일 때에는, 앞서 일차근사다항식에서 본 것에 의해 성립한다. 만약 $n > 1$이라면, 수학적 귀납법을 이용해보자. $f(x) = o(x^n)$이면 $f(x) = o(x^{n-1})$이고, 따라서 귀납법의 가정에 의하여

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0)$$

임을 안다. 그런데 로피탈의 정리에서

$$0 = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}0}{n!}$$

을 얻으므로, $f^{(n)}(0) = 0$이다. 따라서 수학적 귀납법에 의해 성립한다.

근사다항식

- 함수 $f(x)$에 대하여 다항함수 $p(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n$이

$$f(x) - p(x) = o(x^n)$$

  을 만족시키면, $p(x)$를 원점에서 $f(x)$의 n차 **근사다항식** 또는 원점에서 $f(x)$의 n차 **테일러 다항식**이라고 부른다.

근사다항식의 존재성과 유일성

원점 근방에서 n번 미분가능한 함수 $f(x)$의 n차 근사다항식은 오직 하나뿐이고 그것은

$$T_n f(x) := f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

이다.

근사다항식

증명.
$f(x)$와 $T_n(x)$는

$$f(0) = T_nf(0), \quad f'(0) = T_nf'(0), \quad , \cdots , f^{(n)}(x)(0) = T_nf^{(n)}(0)$$

이므로
$$f(x) - T_nf(x) = o(x^n)$$
이 정리 3.2.2에 의해 성립한다. 이제 유일성을 밝히자. 만약 다항식 $p(x) = p_0 + p_1x + \cdots + p_nx^n$이 $f(x)$의 n차 근사다항식이라면,

$$f(x) - p(x) = o(x^n) = f(x) - T_nf(x)$$

이므로 $p(x) - T_nf(x) = o(x^n)$이어야만 한다. 그러나 $p - T_n$은 n차 다항식이므로, $o(x^n)$이려면 상수함수 0이다. 따라서, $p = T_n$으로 유일하다.

Example

함수 $f(x) = \cos(x + x^2)$의 3차 근사다항식을 구해 보자.

$$f'(x) = -(1 + 2x)\sin(x + x^2)$$

$$f''(x) = -2\sin(x + x^2) - (1 + 2x)^2\cos(x + x^2)$$

$$f(3)(x) = -6(1 + 2x)\cos(x + x^2) + (1 + 2x)^3\sin(x + x^2)$$

이므로, $f(0) = 1, f'(0) = 0, f'(0) = -1, f^{(3)}(0) = -6$이다. 따라서 구하는 근사다항식은

$$T_3 f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - x^3$$

이다.

Example

혹은 $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$에서 x 대신에 $x + x^2$을 대입하면

$$\cos(x + x^2) = 1 - \frac{1}{2}(x + x^2)^2 + o(x^3)$$

을 얻을 것이므로 정리하면

$$\cos(x + x^2) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - x^3 + o(x^3)$$

이고, 이로부터 원하는 근사다항식을 얻는다.

테일러 정리

- $$R_nf(x) = f(x) - T_nf(x)$$

  를 $f(x)$의 n차 테일러 **나머지항**이라 부르고,

  $$f(x) = T_nf(x) + R_nf(x)$$

  와 같은 표현을 원점에서 $f(x)$의 **테일러 전개**라고 부른다.
- 나머지항은

  $$R_nf(x) = o(x^n), \quad (R_nf)^{(k)}(x) = 0 \quad (k = 0, 1, \cdots, n)$$

  이다.
- T_nf와 R_nf는 각각 T_n, R_n으로 쓸 수도 있다.

테일러 정리

테일러 정리

원점 0을 포함하는 구간 I에서 정의된 $n+1$번 미분가능한 함수 $f : I \to \mathbb{R}$와 임의의 $x \in I$에 대하여

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_*)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

을 만족시키는 x_*가 0과 x 사이에 존재한다.

증명.

$x = 0$이면 증명할 필요가 없으므로 $x \neq 0$이라고 하자. 그러면 f의 n차 테일러 나머지 항 $R_n = f - T_n$에 대하여

$$g(s) = R_n(x)s^{n+1} - x^{n+1}R_n(s) \quad (s \in [0, x])$$

라고 두자.

테일러 정리

$k = 1, 2, \cdots, n$에 대하여

$$g^{(k)}(s) = (n+1)\cdots(n-k+2)R_n(x)s^{n-k+1} - x^{n+1}R_n^{(k)}(x)$$

이고,

$$g'(0) = g''(0) = \cdots = g^{(n)}(0) = 0$$

이 된다. 한편, $g(0) = g(x) = 0$이므로 평균값 정리에서

$$g'(x_1) = 0$$

인 x_1이 0과 x 사이에 존재한다. 이러한 방식으로 계속

$$g''(x_2) = 0, \cdots, g^{(n)}(x_n) = 0$$

인 $x_2, \cdots, x_n$을 0과 x 사이에서 잡아줄 수 있다.

테일러 정리

이제 구간 $[0, x_2]$에서 함수 $g^{(n)}(s)$에 평균값 정리를 적용하면

$$0 = g^{(n+1)}(x_*) = (n+1)!R_n(x) - x^{n+1}R_n^{(n+1)}(x_*)$$

를 만족시키는 $x_* \in [0, x_n] \subset [0, x]$가 존재함을 안다. 따라서,

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}R_n^{n+1}(x_*) = \frac{x^n}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_*)$$

이다.

나머지항의 제한

- 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 연속이면 $f(x)$를 **일급함수**라 부른다.
- 동일하게, n번 미분가능한 함수 $f(x)$의 n번째도함수 $f^{(n)}(x)$가 연속함수이면 $f(x)$를 n**급 함수**라 부른다.

따름정리 4.0.4

원점을 포함하는 구간에서 정의된 $n+1$급 함수 $f(x)$에 대하여

$$M_{n+1}(x) := \max\{|f^{(n+1)}(x)| : t \in [0, x]\}$$

로 두면, $f(x)$의 n차 테일러 나머지항 $R_n(x)$는

$$|R_n(x)| \le M_{n+1}(x) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

을 만족시킨다.

무리함수와 근삿값

Example

원점 근방에서 함수 $f(x) = \sqrt{1+x}$의 테일러 전개를 구하면,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

이다. 그러면 $x_* \in [0, x]$에 대하여

$$R_1(x) = \frac{1}{2} f''(x_*) x^2 = -\frac{1}{8}(1 + x_*)^{-3/2} x^2$$

이고,

$$\left| \sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{1}{2}x\right) \right| \leq \frac{x^2}{8}$$

이다. 따라서,

$$\sqrt{1.1} = \sqrt{1+0.1} = 1 + \frac{0.1}{2} \pm \frac{0.1^2}{8}$$

테일러 급수

- 원점 근방에서 정의된 무한 번 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여, 거듭제곱급수

$$Tf(x) := f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n + \cdots$$

  를 원점에서의 f의 **테일러 급수**라고 부른다.
- 거듭제곱급수에서 정의된 함수의 테일러 급수는 자신과일치한다.
- 테일러 급수가 원래 함수에 수렴하려면, 나머지항 $R_nf(x)$가 0에 수렴하여야 한다.

임의의 점을 기준으로 한 테일러 전개

- 점 $x = a$ 근방에서 정의된 함수 $f(x)$와 자연수 n에 대하여, $f(x)$의 n차 **근사다항식**은

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - p(x)}{(x-a)^n} = 0$$

  을 만족시키는 다항식 $p(x)$를 뜻한다.

- 구간 I에서 정의된 n번 미분가능한 함수 $f(x)$와 $a \in I$에 대하여,

$$T_n^a f(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

  로 정의한다.

- 점 a에서 $f(x)$의 n차 **나머지항**을

$$R_n^a f(x) := f(x) - T_n^a f(x)$$

  로 정의하자.

임의의 점을 기준으로 한 테일러 전개

정리 5.0.1

구간 I에서 정의된 n번 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여
(1) 구간의 점 $x = a$에서 $f(x)$의 n차 근사다항식은 $T_n^a f(x)$이다.
(2) 또 $x \in I$에서

$$R_{n-1}^a f(x) = \frac{f^{(n)}(x_*)}{n!}(x-a)^n$$

을 만족시키는 x_*이 a와 x 사이에 존재한다.

- 전개

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n^a f(x)$$

를 점 a에서 $f(x)$의 **테일러 전개**라고 한다.

Example

$x = 1$에서 지수함수 $f(x) = e^x$의 2차 근사다항식을 구해 보자.

$$f'(x) = f''(x) = e^x$$

이므로, $f'(1) = f''(1) = e$이다. 따라서,

$$T_2(x) = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2$$

이다. 반면,

$$R_2(x) = e^x - e - e(x-1) - \frac{e}{2}(x-1)^2$$

이 되는 것이다.

임의의 점을 기준으로 한 테일러 급수

- 점 $x = a$ 근방에서 정의된 무한급 함수 $f(x)$에 대하여, 점 a 에서 f의 **테일러 급수**는

$$T^a f(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

로 정의한다.

- 예를 들어, 함수 $f(x) = \dfrac{1}{x}$의 $x = 1$을 기준으로 한 $f(x)$의 테일러 급수는

$$T^1 f(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \cdots$$

이다. 혹은 기하급수를 이용하면

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \cdots$$

임을 쉽게 확인해줄 수 있다.

해석함수와 비해석함수

- 테일러 급수가 원래 함수로 수렴하는 함수를 **해석함수**라고 부른다.
- 반면, 함수
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \le 0) \end{cases}$$
은 무한급 함수이며, 모든 n에 대하여 $f^{(n)}(0) = 0$이다. 따라서 테일러 급수는 상수함수 0이 된다. 그러나 $f(x)$는 상수함수가 아니다.

숙제 문제

- 116쪽 1, 2, 5, 6, 7번
- 125쪽 1, 4, 5번
- 132쪽 1, 6, 7, 11, 14, 15, 16번
- 137쪽 1, 2,4번