11. Infinite Sequences and Series

11.1 Sequences

sequence는 특정 순서로 나열된 수들의 열을 의미한다.

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

이때 a_i를 ith term이라고 한다. 일반적으로 이런 수열을 $\{a_n\}$ 혹은 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$처럼 쓴다.

대표적인 sequence에는 **Fibonacci sequence** $\{f_n\}$이 있다. 이는

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

처럼 정의되는 sequence이다. 이처럼 이전 항들로부터 새로운 항을 얻어낼 수 있는 sequence도 있는 반면, 무작위로 나열되는 sequence가 있기도 하다.

sequence $\{a_n\}$이 **limit** L을 가진다는 것은 곧

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

임을 의미한다. 만약 그러한 L이 존재한다는 것은 이 sequence가 **convergent**라는 것이며, 그렇지 아니할 때에는 sequence는 **divergent**이다.
다르게 말하면, 모든 $\varepsilon > 0$에 대하여, 상응하는 정수 N이 있어 $n > N$이면 $|a_n - L| < \varepsilon$임을 의미한다.

또한 아래 박스들은 limit의 계산에 도움이 된다.

만약 $\{a_n\}, \{b_n\}$이 convergent sequence이고 c가 constant라면,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad \text{if} \quad \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p \quad \text{if} \quad p > 0, a_n > 0$$

$\lim_{n\to\infty} a_n = L$이며 f가 L에서 continuous라면,

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$$

이다.

Squeeze Theorem
$a_n \le b_n \le c_n$이 $n \ge n_0$에서 성립하며,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$$

이라면,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L$$

이다.
한편, 이를 이용한다면

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

임도 얻을 수 있다.

sequence $\{r^n\}$은 $-1 < r \le 1$일 때 convergent이고 다른 r에 대해 divergent이다. 즉

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad -1 < r < 1 \\ 1 & \text{if} \quad r = 1 \end{cases}$$

이러한 사실들을 기반으로 convergent 여부를 파악하는 것이 11단원의 주요한 과제가 된다. 또한 아래는 그 분석에 도움이 되는 sequence의 여러가지 성질을 소개한다.

sequence $\{a_n\}$에 대하여, 만약 모든 $n \ge 1$에 대하여

$$a_n < a_{n+1}$$

이면 이 sequence는 **increasing**이라 한다. 한편,

$$a_n > a_{n+1}$$

이면 이 sequence는 **decreasing**이라 한다. 만약 increasing 혹은 decreasing이라면, **monotonic**하다고 한다.

sequence $\{a_n\}$에 대하여 수 M이 존재하여

$$a_n \le M$$

이 모든 n에 대해 성립하면, 이는 **bounded above**라 한다. 한편 어떤 m이 존재하여

$$a_n \ge m$$

이 모든 n에 대해 성립하면, 이는 **bounded below**라 한다. 만약 어떤 sequence가 bounded above면서 bounded below면, 이는 **bounded sequence**이다.

이 두 정의는 convergent의 판단에 가장 중요한 역할을 하는 **monotonic sequence theorem**으로 이어진다.

Monotonic Sequence Theorem
모든 bounded, monotonic sequence는 convergent이다.

bounded above인 increasing sequence $\{a_n\}$에 대해 먼저 증명한다면 나머지는 동일한 방식으로 쉽게 증명할 수 있을 것이다. 집합
$$S = \{a_n | n \geq 1\}$$
은 $\{a_n\}$이 bounded above임에 따라 어떤 M이 존재하여 모든 S의 원소가 M보다 작다. 실수는 **Completeness Axiom** 하에서 정의된다. 이는 만약 어떤 실수의 set이 집합 S와 같이 M을 가지면, **least upper bound** L가 존재하여 모든 M보다 작거나 같으면서 여전히 M처럼 작용할 수 있다. S에 대해 $L - \varepsilon$은 M처럼 작용할 수 없으므로, 어떠한 N이 존재하여
$$a_N > L - \varepsilon$$
이다. 이때 a_n은 increasing이므로, $n > N$이면
$$a_n > L - \varepsilon$$
이다. 따라서
$$n > N \quad \Rightarrow \quad |L - a_n| < \varepsilon$$
이 성립하므로
$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$
이며 $\{a_n\}$이 convergent다.

11.2 Series

infinite sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$에 대하여
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$
처럼 표현되는 것을 **infinite series**라고 하며,
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
으로 나타내기도 한다.
한편 n번째 a_i까지의 **partial sums**
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$
을 정의할 때 series $\sum a_n$이 convergent라는 것은
$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$
인 s가 존재한다는 것이며, s는 이 series의 **sum**이다. 만약 $\{s_n\}$이 divergent라면 series가 divergent라는 것이다.

또한 다음 페이지의 박스들은 limit의 계산에 도움이 된다.

$\sum a_n$과 $\sum b_n$이 convergent series라면, $\sum(ca_n)$, $\sum(a_n + b_n)$, $\sum(a_n - b_n)$도 convergent series이며,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(ca_n) = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

이다. 이는 이들의 partial sum을 sequence로 보아 생각하면 자명하다.

geometric series는 **common ratio** r을 가지는 sequence로부터 구성한 infinite series를 의미한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$$

또한 그 partial sum은 아래와 같다.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} ar^{i-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

$|r| < 1$일 때 이 geometric series는 convergent이며, sum은

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1 - r}$$

와 같다. 만약 $|r| \geq 1$이라면 geometric series는 divergent이다.

Test for Divergence
만약 $\lim_{n\to\infty} a_n$이 존재하지 않거나, 0이 아니라면, $\sum a_n$은 divergent이다.

이는 $\sum a_n$이 convergent라면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 라는 것과도 동치이다. 만약 partial sum s_n을 생각한다면, $a_n = s_n - s_{n-1}$이다. 그런데 convergent series라면 아래 식을 성립하게 하는 s가 존재하므로,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0$$

임을 알 수 있다. 주의할 것은 a_n이 0으로 converge 해서 series가 convergent라는 보장은 없다는 것이다.

convergent인지 여부를 판단할 때, 유한 개의 항은 영향을 주지 않는다. 즉 $\sum a_n$이 converge하는지 여부는

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n$$

이 converge하는지 여부와도 같다. 더불어 아래도 성립한다.

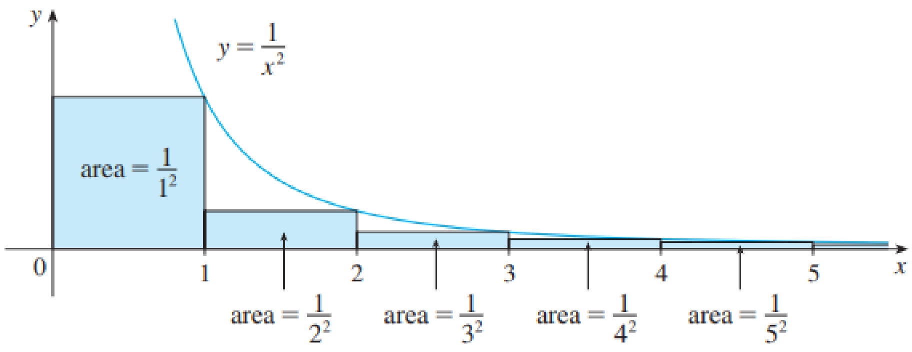
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

11.3 The Integral Test and Estimates of Sums

두 가지 예시로 integral test에 대하여 알아보자. 먼저

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots$$

에 대해 고려하여 보자. 그런데 이는 사실 아래 그림에서 파랑 직사각형들의 넓이의 합과 같다.



더불어 우리의 지식에 의해 이는

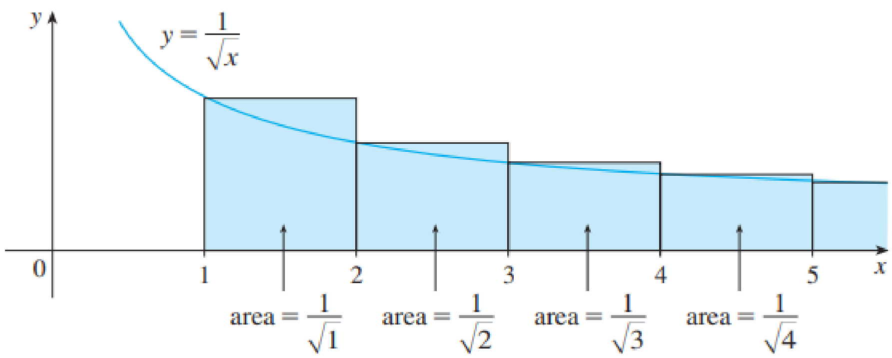
$$\frac{1}{1^2} + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 2$$

보다 작다. 이 series의 partial sum은 bounded above이면서 increasing이기에, monotonic sequence theorem에 의하여 convergent이다.

한편

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots$$

은 아래 그림에서 파랑 직사각형들의 넓이의 합과 같다.



한편 이는

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

보다 클 것인데, 이 적분은 양의 무한대로 diverge한다. 그러니 series의 partial sum도 무한히 커질 것이고, series가 divergent라는 결론을 얻을 수 있을 것이다. 이는 다음 페이지의 판정법으로 이어진다.

The Integral Test
f가 $[1, \infty]$에서 continuous, positive, decreasing function이고 $a_n = f(n)$이라 하자. 그렇다면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

의 converge 여부는

$$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

의 converge 여부와 완벽히 같다.

partial sum을 이용해 조금 더 자세하게 증명하여 보자. 위의 조건에서

$$a_2 + \cdots + a_n \leq \int_1^n f(x)dx \leq a_1 + \cdots + a_{n-1}$$

을 얻을 수 있다. 만약 improper integral이 convergent라면,

$$\sum_{i=2}^{n} a_i \leq \int_1^n f(x)dx \leq \int_1^{\infty} f(x)dx$$

이므로 series는 bounded above이며 increasing이다. 그러므로 monotonic sequence theorem에 의하여 $\sum a_n$ 역시 convergent다.

한편 improper integral이 divergent라면,

$$\int_1^n f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} a_i = s_{n-1}$$

인데 앞의 적분식이 n이 커짐에 따라 무한히 커지므로, s_{n-1}도 무한히 커지며, partial sum이 diverge하니 series도 diverge한다. 결국 integral test는 monotonic sequence theorem의 아주 특별한 경우 중 하나이다.

앞서 converge 여부는 유한 개의 항에 영향을 받지 않는다고 언급하였다. 다르게 말하면, f가 굳이 구간 $[1, \infty]$에서 저 조건을 만족하지 않더라도, 임의의 N에 대해 $[N, \infty]$에서 조건을 만족하면 이 test의 사용이 가능하다는 것이다.

대표적으로는 아래의 **p-series**를 많이 보게 된다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Integral test를 사용하면 함수 $f(x) = \frac{1}{x^p}$가 구간 $[1, \infty]$에서 continuous, positive, decreasing이기에 적분

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

이 diverge하는 $p \leq 1$에서 이 p-series가 divergent이고, converge하는 $p > 1$에서 p-series가 convergent이다.

Remainder Estimate for the Integral Test
$f(k) = a_k$이고 f가 $x \geq n$에서 continuous, positive, decreasing function이며, $\sum a_n$이 convergent 라면

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq R_n = s - s_n \leq \int_{n}^{\infty} f(x)dx$$

이다.

이는

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \leq \int_{n}^{\infty} f(x)dx$$

임에 따라 자연스럽게 등장한다. 이를 다른 방식으로 쓰면

$$s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq s \leq s_n + \int_{n}^{\infty} f(x)dx$$

라는 것이다. 이는 우리가 계산할 수 있는 값인 s_n을 이용하여 실제로 converge하는 값 s를 높은 정확도로 추정할 수 있다는 점에서 의미가 있다.

11.4 The Comparison Tests

어떤 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$에 대하여,

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i, \quad t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

이라고 하며, 항상 $0 \leq a_n \leq b_n$이라고 하자. 그렇다면 $\{s_n\}$과 $\{t_n\}$은 increasing sequence이며, t_n이 t로 converge하기 때문에

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \leq \sum_{i=1}^{n} b_i = t_n \leq t$$

임을 알 수 있다. 따라서 s_n은 monotonic sequence theorem에 의하여 converge한다. 즉 series $\sum a_n$도 converge한다. 또한 대우 명제까지 이용하면 아래를 얻을 수 있다.

The Comparison Test
$\sum a_n$, $\sum b_n$은 positive terms에 의해 구성된 series이다.
(i) 만약 $\sum b_n$이 convergent이고 $a_n \leq b_n$이라면, $\sum a_n$도 convergent이다.
(ii) 만약 $\sum b_n$이 divergent이고 $a_n \geq b_n$이라면, $\sum a_n$도 divergent이다.

이때 원래 converge 여부를 아는 series는 geometric series, p-series 등이 있고, integral test를 이용하여 이를 증명해낼 수도 있다.

헷갈리지 않아야 할 것은, 어떤 series가 convergent임을 보이려면 이 series보다 큰 어떤 series를 찾아 그 series가 convergent임을 보여야 한다는 것이다. 그 series보다 작은 sequence의 converge를 따지는 것은 아무런 도움이 되지 않는다. 같은 이유로 어떤 series가 divergent임을 보이려면 그 series보다 작은 다른 series가 divergent임을 보여 주어야 한다. 그 series보다 큰 series의 converge 여부는 증명에 도움이 되지 않는다. 다르게 말하면, 우리가 어떤 series를 보고 그 series가 converge하는지, diverge하는지를 comparison test로 판단하기를 원한다면, 대강 감으로 이미 정답을 추측하고 있어야 한다는 것이다. 따라서 11단원은 문제를 많이 풀어보는 게 무엇보다 중요한 단원이다.

The Limit Comparison Test

$\sum a_n$과 $\sum b_n$은 positive term의 series이다.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

이고 finite c가 $c > 0$이라면, 두 series의 converge 여부는 동일하다.

$m < c < M$인 m, M을 잡아줄 때, limit의 정의에 의하여 어떤 N이 있어 $n \geq N$이면

$$m < \frac{a_n}{b_n} < M$$

이다. 즉

$$mb_n < a_n < Mb_n$$

임을 알 수 있다. 그럼 각 series가 convergent일 때와 divergent일 때 각각 comparison test를 적용하면, 둘의 converge 여부는 같음을 알 수 있다.

한편 살짝씩 변형하면 새로운 결과를 얻어낼 수도 있다. 만약 $\sum b_n$이 convergent인 상황에서,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

이라면, n이 충분히 커질 때 a_n이 b_n보다 굉장히 작아진다는 것이다. 따라서 comparison test에 의하여 $\sum a_n$도 convergent임을 알 수 있다. 한편

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$$

라면 $\sum a_n$에 대한 converge 여부는 알 수 없다.

반대로 $\sum b_n$이 divergent일 때

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

는 $\sum a_n$의 converge 여부에 정보를 제공하지 못한다. 한편

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$$

는 a_n이 b_n보다 언젠가는 커짐을 의미하므로, $\sum a_n$도 divergent임을 알려준다.

Remainder Estimate for the Comparison Test

$\sum b_n$이 converge이며 $0 \leq a_n \leq b_n$이면 comparison test에 의하여 $\sum a_n$도 convergent이다. 이때

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + \cdots \leq b_{n+1} + \cdots = t - t_n = T_n$$

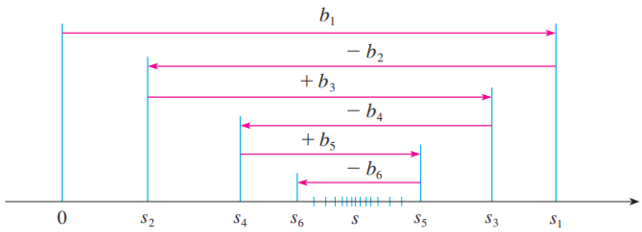
이 성립한다. 즉 $\sum a_n$의 remainder는 $\sum b_n$의 remainder보다 작다. b_n의 remainder는 integral test에서 estimate하거나, 직접 구하여야 한다.

11.5 Alternating Series

Alternating Series Test
부호가 교대로 양과 음으로 나타나는 sequence의 series **alternating series**에 대하여, $a_n = (-1)^{n-1}b_n$, $b_n = |a_n|$일 때

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots$$

가 $b_{n+1} \le b_n$이며 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이라면, 이 series는 convergent이다.



짝수 번째 partial sum만 생각해 본다면,

$$s_{2n} = s_{2n-2} + (b_{2n-1} - b_{2n}) \ge s_{2n-2}$$

이므로

$$0 \le s_2 \le s_4 \le \cdots \le s_{2n} \le \cdots$$

이다. 그런데

$$s_{2n} = b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \cdots - (b_{2n-2} - b_{2n-1}) - b_{2n} \le b_1$$

이므로, monotonic sequence theorem에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s$$

이다. 그리고

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = s + 0 = s$$

이다. 그러면 일반적으로도

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

이다.

Alternating Series Estimation Theorem
alternating series의 remainder R_n에 대하여 아래 부등식이 성립한다.

$$|R_n| = |s - s_n| \le b_{n+1}$$

alternating series test에서의 증명에서, s는 s_n과 s_{n+1}의 사이에 있음을 안다. 따라서

$$|R_n| = |s - s_n| \le |s_n - s_{n+1}| = b_{n+1}$$

임을 자명하게 알게 되는 것이다.

11.6 Absolute Convergence and Rearrangement

series $\sum a_n$에 대하여, 만약

$$\sum |a_n|$$

이 convergent라면, 이는 **absolutely convergent**라고 부른다.

만약 $\sum a_n$이 absolutely convergent라면, $\sum a_n$은 convergent이다.

$0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|$이 성립함은 당연하다. 만약 $\sum a_n$이 absolutely convergent라면, $\sum 2|a_n|$이 convergent이므로, comparison test에 의하여

$$\sum(a_n + |a_n|)$$

도 convergent다. 그런데 $\sum |a_n|$도 convergent이므로, 서로 뺀 $\sum a_n$도 convergent가 되는 것이다. 반면 어떤 series가 convergent라고 해서 absolutely convergent인 것은 아니다. 대표적으로,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

는 convergent이지만,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

이기에 absolutely convergent는 아니다.

자주 등장하는 series이기에 위의 식을 조금 더 자세하게 짚고 넘어가려 한다. 먼저 **harmonic series** $\sum \frac{1}{n}$이 divergent임은 p-series에 대한 논의에서 쉽게 알 수 있다. 이제 저 alternating series가 $\ln 2$로 수렴하는지를 잘 살펴보자.

$$t_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

라고 두면, integral test에서 했던 것처럼 직사각형들을 만들어

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} > 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + \ln n$$

임을 보일 수 있으므로 $t_n > 1$이다. 한편

$$t_{n+1} - t_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = -\int_n^{n+1} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{n+1}\right) dx < 0$$

이기에 t_n은 decreasing sequence다. 따라서 monotonic sequence theorem에 의해 이는 converge한다. 그러면

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} t_{2n} = t$$

인 t가 존재한다. 이제

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = (t_{2n} + \ln(2n)) - 2 \times \frac{1}{2} \times (t_n + \ln n)$$

이기에

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i}\right) = \ln 2$$

를 얻는다. 또한

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i}\right)+\frac{1}{2n+1}=\ln 2$$

이므로,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$$

임을 알 수 있다.

series $\sum a_n$이 convergent이지만 absolutely convergent가 아니라면, **conditionally convergent** 라고 한다.

즉 지금 본 이 수열은 conditionally convergent인 것이다. conditionally convergent sequence의 대표적인 특징에는 아래가 있다.

$\sum a_n$이 conditionally convergent series이며 r이 임의의 실수라면, a_n의 더하는 순서를 달리하여 더한 **rearrangement**를 수행하면, series의 sum이 r과 같게 만들 수 있다.
반면, $\sum a_n$이 absolutely convergent라면, rearrangement를 거쳐도 그 series의 sum은 항상 원래의 것과 같다.

즉 분명히 같은 값들을 무한 개 더했는데, 더하는 순서에 따라 합한 값이 달라질 수 있다는 것이다. 굉장히 논센스하지만, 우리가 앞서 본 수열에서도 이런 현상이 나타난다. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots$를 지금처럼 더하지 않고,

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots$$

처럼 양수, 양수, 음수 순으로 더해간다고 생각하여 보자.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\ln 2$$

$$0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{2}\ln 2$$

를 더하면

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3}{2}\ln 2$$

를 얻는다. 즉 양수를 조금 더 먼저 많이 더하는 것만으로 series의 합이 달라지는 말도 안 되는 결과가 나오는 것이다.

이제 conditionally convergent series $\sum a_n$의 rearrangement를 통해 임의의 r을 만들어 보자. a_n^+와 a_n^-을 아래와 같이 정의하자.

$$a_n^+=\begin{cases}a_n & (a_n>0)\\ 0 & (a_n\le 0)\end{cases}\qquad a_n^-=\begin{cases}0 & (a_n>0)\\ a_n & (a_n\le 0)\end{cases}$$

이면 $a_n=a_n^++a_n^-$이며 $|a_n|=a_n^+-a_n^-$이다. 만약 $\sum a_n^+$이 convergent라면,

$$\sum a_n^-=\sum a_n-\sum a_n^+$$

이므로 $\sum a_n^-$도 convergent이며, 그 합인 $\sum|a_n|$도 convergent라는 결론이 나온다. 이는 $\sum a_n$이 conditionally convergent series라는 데 배치되므로, $\sum a_n^+$는 convergent일 수 없다. 같은 이유로 $\sum a_n^-$도 convergent일 수 없다.

이제 이를 기반으로, a_n을 rearrangement하되 아래의 규칙을 따르게 하려 한다. $\sum a_n$의 rearrangement $\sum b_n$에 대하여, b_n은 아래와 같이 결정한다.

(i) b_n은 어떤 i에 대하여 a_i와 같다. 즉 자연수에서 자연수로 가는 one-to-one, onto function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$이 존재하여 $b_n = a_{f(n)}$이다. 즉 우리는 f라는 function을 구성해나가고자 한다.

(ii) 만약

$$\sum_{i=1}^{n} b_i < r$$

이라면

$$f(n+1) = \min\{k : a_k = a_k^+, k \notin f(\{1, 2, \cdots, n\})\}$$

로 고른다. 그렇다면 $a_{f(n+1)} = a_{f(n+1)}^+ \geq 0$이므로, series의 partial sum은 증가한다. 한편 이러한 $f(n+1)$을 무조건 고를 수 있으려면 $a_k = a_k^+$인 k가 무한히 많아야 한다. 만약 k가 유한하다면, $\sum a_k^+$가 convergent일 것이다. 그런데 앞에서 이것이 divergent임을 보였다. 따라서 $f(n+1)$을 못 고를 걱정은 하지 않아도 된다.

(iii) 만약

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \geq r$$

이라면,

$$f(n+1) = \min\{k : a_k = a_k^-, k \notin f(\{1, 2, \cdots, n\})\}$$

으로 고른다. $a_{f(n+1)} = a_{f(n+1)}^- \leq 0$이기에 partial sum은 감소한다. 이 역시 $f(n+1)$을 고르지 못할 걱정은 하지 않아도 된다.

만약 이를 반복하여 f를 구성해 나가 rearrangement를 수행하였다 하자. 우리는 앞서 $\sum a_n^+$와 $\sum a_n^-$가 모두 divergent임을 보였다. 만약 일정한 N 이후로는 (ii) 혹은 (iii) 중 하나만 실행되었다고 하자. 일반성을 잃지 않고 (ii)가 계속 시행되었다고 하자. 그러면 계속 a_k^+들이 더해지는 것인데, 그러면 series가 divergent하며 $a_k^+ > 0$임에 따라 partial sum은 언젠가는 r을 넘어갈 것이다. 이는 (ii)가 계속 시행된다는 것에 모순이다. 따라서 (ii)와 (iii)은 계속 반복하며 나타난다. 다르게 말하면 둘 중 하나가 유한하게 수행되지는 않는다는 것이다. 따라서 모든 a_k에 대하여, $f^{-1}(k)$가 항상 존재해 $b_{f^{-1}(k)} = a_k$라는 것이다.

series $\sum a_n$은 convergent이므로,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

이다. 따라서 모든 $\varepsilon > 0$에 대하여, 상응하는 N이 존재하며 $n \geq N$이면 $|a_n| < \varepsilon$이다. 그리고 a_1부터 a_N까지의 모든 수는 어떤 l에 대하여 $b_1, \cdots, b_l$에서 사용된다. 그러므로

$$n \geq l \quad \Rightarrow \quad |b_n| < \varepsilon$$

이 성립한다. 한편 (ii)나 (iii) 중 하나만 무한히 반복할 수는 없다고 했으므로, 무한집합

$$U = \left\{c \geq l : \sum_{i=1}^{c} b_i < r \leq \sum_{i=1}^{c+1} b_i \quad \text{or} \quad \sum_{i=1}^{c+1} b_i < r \leq \sum_{i=1}^{c} b_i\right\}$$

의 원소 c 중 작은 것부터 나열한 sequence

$$c_1, c_2, \cdots$$

을 고려하자. 그러면 $n \geq c_1$인 모든 n에 대하여,

$$l \leq c_j \leq n < c_{j+1}$$

인 j을 찾아줄 수 있다. 그러면 c가 정의된 방식에 의하여

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n} b_i - r\right| &\le \min\left\{\left|\sum_{i=1}^{c_j} b_i - r\right|, \left|\sum_{i=1}^{c_{j+1}} b_i - r\right|\right\} \\
&\le \min\left\{\left|\sum_{i=1}^{c_j} b_i - \sum_{i=1}^{c_j+1} b_i\right|, \left|\sum_{i=1}^{c_{j+1}} b_i - \sum_{i=1}^{c_{j+1}+1} b_i\right|\right\} = \min\{|b_{c_j+1}|, |b_{c_{j+1}+1}|\} < \varepsilon
\end{aligned}
$$

임을 알 수 있다. 따라서 극한의 정의에 의하여 rearrange된 series는 r로 converge한다.

한편 정해진 실수 r이 아니라 양의 무한대나 음의 무한대로 diverge할 수도 있다. 이는 여기서 증명하지는 않겠고, 시험에 나올 일도 없을 것 같다. 다만 정해진 실수 r에 대해서 증명하는 것은 엄연히 책 문제에 있기 때문에 여기서 다루었다.

한편 $\sum a_n$이 absolutely convergent였다면, $\sum |a_n|$과의 합과 차를 통해 $\sum a_n^+$와 $\sum a_n^-$가 모두 convergent 임을 알 수 있었을 것이다. 또한 모든 $\varepsilon > 0$에 대하여 상응하는 N이 있어

$$
\sum_{i=N+1}^{\infty} |a_i| < \varepsilon
$$

이다. 그리고 rearrangment $\sum b_n$에 대하여, 어떤 M이 존재하여

$$
\{a_1, \cdots, a_N\} \subset \{b_1, \cdots, b_M\}
$$

이게 할 수 있다. 앞서 언급하였듯 rearrangement는 $a_1, \cdots, a_N$을 어떤 b_k와 같도록 재배치하는 것이다. 따라서 어떤 M에 대하여, b_1부터 b_M까지 M개의 항 안에 유한한 원래의 초기 N개 항이 들어가도록 만들 수 있다. 그러면 모든 $m \ge M$에 대하여

$$
\sum_{i=1}^{\infty} a_i - \sum_{i=1}^{m} b_i < \sum_{i=1}^{\infty} a_i - \sum_{i=1}^{N} a_i \le \sum_{i=N+1}^{\infty} |a_i| < \varepsilon
$$

이므로, $\sum b_n$은 $\sum a_n$과 같은 값으로 convergent다.

11.7 The Ratio Test and Root Test

The Ratio Test

$$
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L
$$

일 때, 아래가 성립한다.
(i) $L < 1$이면 $\sum a_n$은 absolutely convergent.
(ii) $L > 1$이거나 $L = \infty$라면, $\sum a_n$은 divergent다.
(iii) L이 존재하지 않거나, $L = 1$이라면, 이만으로는 결론내릴 수 없다.

만약 $L < 1$이라면, 극한의 정의에 의하여 어떤 $L < r < 1$과 상응하는 N이 존재하여 $n \ge N$이면

$$
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r
$$

이게 할 수 있다. 그러면 일반적으로

$$
|a_{N+k}| < |a_N| r^k
$$

가 성립하며,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{N+k}|$$

는 $|a_{N+k}| < |a_N|r^k$이며 $|a_N|r^k$가 geometric series로 $r < 1$에서 convergent임에 따라 comparision test에 의해 convergent이다. 따라서 유한 개의 항만 더한 $\sum a_n$은 absolutely convergent이다.

한편 $L > 1$이라면 어떤 N이 있어 $n \geq N$이면 $|a_{n+1}| > |a_n| \geq |a_N|$이라는 것이다. 그러면

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

이므로 divergent이다.

한편 (iii)의 경우에는 $\sum \frac{1}{n}$과 $\sum \frac{1}{n^2}$을 생각해보면 된다. 둘은 모두 주어진 극한값이 1이지만, converge 여부는 확연히 다르다.

The Root Test

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

일 때, 아래가 성립한다.

(i) $L < 1$이면 $\sum a_n$은 absolutely converegent다.

(ii) $L > 1$이거나 $L = \infty$라면 $\sum a_n$은 divergent이다.

(iii) $L = 1$이라면 판정 불가하다.

이 역시 비슷한 방식으로 증명하면 된다. $L < 1$일 때 $L < r < 1$인 r과 상응하는 N을 고려하면, $n \geq N$일 때

$$\sqrt[n]{|a_n|} < r$$

이므로 $|a_n| < r^n$이다. 그러면 geometric series가 convergent임에 따라 comparision test에서 $\sum a_n$이 absolutely converge임이 나온다.

한편 $L > 1$이면 어떤 N이 있어 $n \geq N$에서

$$\sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

이므로 $a_n > 1$이 되어 divergence test에 의해 diverge한다.

(iii)의 경우는 ratio test에서 세운 예시가 또다시 기능함을 알 수 있다.

일반적으로, ratio test보다 root test가 더욱 강력하다.

이를 다른 말로 쓰면, ratio test에서 판정이 가능한 series는 root test에서도 판정이 가능하다는 것이다. term 사이 비에 대한 limit이 L이었다고 해보자. 그렇다면 모든 $\varepsilon > 0$에 대하여 상응하는 N이 있어 $n \geq N$이면

$$L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon$$

이므로

$$(L-\varepsilon)^{n-N} a_N \leq a_n \leq (L+\varepsilon)^{n-N} a_N$$

이고 정리해주면 n이 충분히 커질 때 $\frac{N}{n} \to 0$임에 따라

$$L - \varepsilon < (L-\varepsilon)^{1-\frac{N}{n}} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq (L+\varepsilon)^{1-\frac{N}{n}} < (L+\varepsilon)(1+\varepsilon) = L + \varepsilon(L+1+\varepsilon)$$

이다. ($(L+\varepsilon)^{\frac{N}{n}}$이 1으로 수렴함을 고려해 보면 된다.) 따라서 N이 충분히 커질 때 $\sqrt[n]{a_n}$이 L에 가까워지므로, root의 limit이 L이다.

11.8 Power Series

power series는 아래 형태로 된 series를 의미한다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

이때 x는 variable이며, c_n들은 **coefficients** of the series이다. 이는 x에 대한 함수이기도 하며, x의 값에 따라 converge 여부가 달라질 수 있다.
한편 series가

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

의 형태라면 이는 **power series in** $(x-a)$혹은 **power series centered at** a, **power series about** a라 불린다.

일반적으로, 아래가 성립함이 알려져 있다. 상세한 증명은 미적분학2 수준에서 하지 않지만, 이전 단원에서 해왔던 각종 test를 생각해본다면 은근 자명한 결과일 것이다.

power series $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$는 세 가지 가능성만을 가진다.
(i) $x = a$일 때에만 converge
(ii) 모든 x에서 converge
(iii) 어떤 양수 R이 있어 $|x-a| < R$이면 converge, $|x-a| > R$이면 diverge한다. $|x-a| = R$일 때는 converge 여부를 알 수 없다.

이때의 R은 **radius of convergence**라고 불리며, converge하는 범위를 **interval of convergence**라 한다. 즉 interval of convergence의 길이는 $2R$이 된다. (i) 같은 경우에서는 $R = 0$이며, (ii)에서는 $R = \infty$이다.

대표적으로 아래의 power series를 생각하여 보자.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$$

여기에 ratio test를 수행한다면

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|\frac{1}{n}x^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}|x| = |x|$$

이므로 $|x| < 1$이면 converge, $|x| > 1$이면 diverge하는 (iii)과 같은 경우이다. 한편 $|x| = 1$이라면, $x = 1$일 때에는 이 harmonic series는 diverge지만 $x = -1$일 때에는 합이 $\ln 2$인 converge하는 series이다. 이 경우 $R = 1$이며, interval of convergence는 $[-1, 1)$임을 알 수 있다. 대부분의 경우에도 주어진 power series에서 ratio test 등을 수행하여 radius of convergence를 구해주면 된다.

한편 이는 x에 따라 값이 달라지는 함수로 볼 수도 있다.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

은 geometric series이기에 $|x| < 1$에서 converge한다. 이처럼 converge하는 범위에서는 적절한 함수로 power series를 표시할 수도 있다. 주의할 점은, 미적분학2 수준에서는 interval of convergence의 양 끝, 즉 -1과 1과 같은 x에서는 이를 논의하지 않는다는 것이다. 해당 점에서 converge하는지 여부는 차치하고서라도 말이

다. 실제로는 converge할 경우엔 그 부분까지 extension이 가능하다고 알려져 있지만, 우리의 관심사는 그 영역까지 미치지는 않는다. 시험문제에서 function의 domain을 써달라고 요구하면, converge하는 범위를 그대로 써버리면 안 된다는 것이다. 안전하게 $(-R, R)$의 형태로 써주도록 하자. 한편 이 구간 하에서는 아래도 성립한다.

term-by-term differentiation and integration
$\sum c_n(x-a)^n$이 $R>0$의 radius of convergence를 가질 때, 함수 f가

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

으로 정해진다면 이는 $(a-R, a+R)$에서 continuous며 differentiable이고

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$

$$\int f(x)dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

이다. 또한 $f'(x)$와 $\int f(x)dx$의 radius of convergence는 여전히 R이다.

정말 다행히도 증명은 하지 않아도 된다. 만약 기초해석학과 같은 과목을 한과영에서 수강하거나 대학에서 관련 강의를 듣는다면 증명을 접해볼 수 있을 것이다. 이 정리에서 우리는 더 다양한 power series들을 함수 형태로 표현할 수 있게 된다. 예를 들면,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$$

을 아까 다루었었다. 그런데 양변을 미분한다면

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

를 얻을 수 있고, radius of convergence가 1로 동일한 것도 볼 수 있다. 한편 이는 separable differential equation이므로, 풀어보면

$$f(x) = C - \ln(1-x)$$

이다. 물론 domain이 $(-1, 1)$임을 확인해야 한다. $f(0) = 0$이므로 $c = 0$이고,

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n, \quad -1 < x < 1$$

임을 확인해줄 수 있다. 역시 또다시 주의할 것은 이는 $-1 < x < 1$에서 성립한다는 것이다. 실제로는 $x = -1$일 때에도 등식 자체는 성립한다고 지난 장에서 다루었었지만, $-1 < x < 1$일 때만 이 power series를 function의 형태로 표현이 가능하다는 것이다. 풀이를 쓸 때 꼭 주의하도록 하자.

한편 이러한 문제 때문에, $f(x)$에선 $x = a+R$일 때 converge하지만, $f'(x)$나 $\int f(x)dx$에서는 $x = a+R$일 때 diverge할 수도, converge할 수도 있다. 즉 경계에서의 행동은 우리가 보장을 절대 해줄 수 없다는 것이다. 위의 예시에서 $\sum \frac{1}{n} x^n$은 $x = -1$에서 converge하는 반면, $\sum x^{n-1}$은 $x = -1$에서 diverge함을 확인할 수 있을 것이다.

11.9 Taylor and Maclaurin Series

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots$$

$$f''(x) = 2c_2 + 6c_3(x-a) + \cdots$$

이 $|x-a| < R$에서 성립한다고 하면, $f(a) = c_0$, $f'(a) = c_1$, $f''(a) = 2c_2$처럼 f의 중심 a에서 derivative 값들로 coefficient들을 계산해낼 수 있다. 이를 반복한다면

$$f^{(n)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot nc_n = n!c_n$$

을 얻고

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

이다. 따라서 power series representation에서

Maclaurin series of the function f

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

Taylor series of the function f at a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

을 얻을 수 있다. 만약 n번째 항까지만 쓴다면,

nth-degree Taylor polynomial of f at a

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

remainder of the Taylor series

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

따라서 만약

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

이 $|x-a| < R$에서 성립한다면,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

이며 $f(x)$는 Taylor series의 sum이다. 그런데 여기서 들 수 있는 의문이, 과연 그렇지 않은 함수 f가 있냐는 것이다. 실제로 그런 f가 있다. 함수

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

는 모든 n에 대해 $T_n(x) = 0$으로 $T_n(x)$가 0으로 수렴하지만, $f(x)$는 0이 아니다.

또 일반적으로

Taylor's Inequality
만약 $|x-a| \leq d$일 때 $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$이라면,

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \quad \text{for} \quad |x-a| \leq d$$

이다. $n=1$일 때를 예시로 들어 보자. 그렇다면 $a \leq x \leq a+d$일 때

$$\int_a^x f''(t)dt \leq \int_a^x M dt = M(x-a)$$

이며 FTC에서

$$f'(x) \leq f'(a) + M(x-a)$$

이다. 여기서 다시 양변을 적분하면

$$f(x) - f(a) \leq f'(a)(x-a) + M\frac{(x-a)^2}{2}$$

이고

$$R_1(x) = f(x) - T_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \leq \frac{M}{2}(x-a)^2$$

이다. $f''(x) \geq -M$에 대해서도 동일하게 수행하면

$$|R_1(x)| \leq \frac{M}{2}|x-a|^2$$

이다. $n \geq 2$에 대해서도, 동일한 방식으로 계속 적분을 반복해 나가면 이 inequality를 보일 수 있다. 중요하지도 않고 증명이 재미있지도 않으니 여기서는 생략하도록 하겠다. 한편 이를 이용하면 $x=0$ 근방에서 $f(x)=e^x$의 Maclaurin series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$

에서 $|x| \leq d$이면 $|f^{(n+1)}(x)| = e^x \leq e^d$이므로

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$

이고 n이 무한대로 간다면 우변이 0으로 수렴함에 따라 R_n도 0으로 수렴한다. 따라서 T_n이 f로 수렴하기에

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

임을 확인할 수 있다. 이는 6장에서 배운

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots$$

와도 상통한다.

아래는 e^x와 같은 방식으로 각종 함수의 Taylor series가 원래 함수로 수렴함을 보임으로써 얻어낸 것이다.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad R = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad R = \infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \quad R = \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad R = \infty$$

$$\tan^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \quad R = 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad R = 1$$

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad R = 1$$

11단원은 워낙 많은 종류의 series가 등장하고, 이와 결합하여 다양한 함수들의 Taylor series를 differentiate/integrate해야 한다. 따라서 최대한 많은 형태의 series를 보고, 이들을 어떻게 풀어나갈지를 연습하는 것이 좋다. 따라서 이 교재의 문제에만 의존하지 않고, 책 문제를 먼저 다 풀어 보는 것을 추천한다. 특히 실라버스 문제만이 아니라 전체 문제를 다 풀어보면 좋겠다.

11.10 연습문제

별도의 말이 없는 문제는 해당 series가 absolutely convergenent인지, conditionally convergent인지, divergent인지 판정하시면 됩니다.

문제 11. 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{1+3^n}}$$

문제 11. 2.

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)\sqrt{(\ln k)^2 - 1}}$$

문제 11. 3.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$$

문제 11. 4.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \arctan\frac{1}{n}$$

문제 11. 5.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cosh\frac{1}{n}\right)$$

문제 11. 6. *아래 power series의 interval of convergence를 구하여라.*

$$1+\frac{2x-1}{2\cdot 1}+\frac{(2x-1)^2}{2^2\cdot 2}+\cdots+\frac{(2x-1)^n}{2^n\cdot n}+\cdots$$

문제 11. 7.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$$

의 *interval of convergence*를 구하여라.

문제 11. 8.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) x^n$$

의 *interval of convergence*를 구하여라.

문제 11. 9.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

의 interval of convergence를 구하여라.

문제 11. 10. *함수*

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{16-x}}$$

의 Maclaurin series를 구하여라.

문제 11. 11. 함수

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & if \quad x > 0 \\ 0 & if \quad x \leq 0 \end{cases}$$

에 대하여, f가 $x = 0$에서 모든 차수의 *derivative*를 가짐을 보여라. 또한, 그 형태가 $2k$차 다항식 $p_k(t)$에 대하여

$$f^{(k)}(1/t) = p_k(t)e^{-t}$$

의 형태임을 이용하여 f의 *Maclaurin series*를 구하여라.

문제 11. 12. *함수*

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\arcsin x}{x} & \textit{if} \quad x \neq 0 \\ 1 \quad \textit{if} \quad 0 \end{cases}$$

의 Maclaurin series를 구하여라.

문제 11. 13. *부산진구에 사는 오 모씨네 셋째 아들 일러가* e^x *의 Maclaurin series에서* x *대신* ix*를 넣어 아래의 공식을 만들어냈다.*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

i*가* $i^2 = -1$*인 imaginary number라고 할 때, Maclaurin series를 이용해 오일러군의 공식을 증명하여라.*

문제 11. 14.

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$$

일 때,

$$g'(x) = \frac{kg(x)}{1+x}, \quad -1 < x < 1$$

임을 보여라. 또한 이 differential equation을 이용해 $g(x)$*를 구하여라. 단,* $g(x)$*는* $|x| < 1$*에서 정의된다.*

문제 11. 15.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tanh\frac{1}{n}\right)$$

문제 11. 16.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3\cdot 7\cdot 11\cdot\cdots\cdot(4n-1)(x-3)^n}{4^n}$$

의 interval of convergence를 구하여라.

문제 11. 17.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4n^2(x)^{2n-1}$$

의 *radius of convergence*를 구하여라. 더불어 이를 이용해

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

의 값도 구하라.

문제 11. 18.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$$

을 구하여라.

문제 11. 19.

$$h(x) = \frac{2x+1}{(x+1)^2}$$

의 Maclaurin series를 구하여라. 일반적으로 아는 함수의 Maclaurin series를 응용해도 좋다.

문제 11. 20.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

문제 11. 21.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

문제 11. 22.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}}$$

문제 11. 23.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\arctan n)^n}$$

문제 11. 24.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

문제 11. 25.

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L, \quad \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$$

일 때, $\{a_n\}$*이 convergent임을 보여라. 또한 그 limit이 무엇인지* $\varepsilon - \delta$*로 밝혀라.*

문제 11. 26. *sequence* $\{a_n\}$*이*

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$$

을 만족하고 $a_1 = 1$*이라고 한다. 이 sequence가 convergent임을 보이고, 그 limit을 찾아라.*

문제 11. 27.

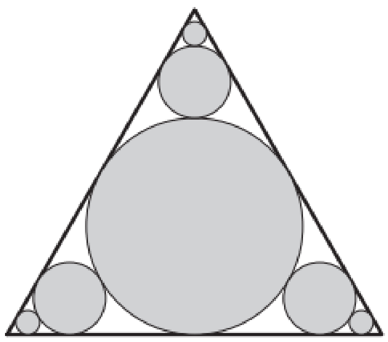
$$g(t) = \begin{cases} 1 \quad if \quad t = 0 \\ \dfrac{\sin t}{t} \quad if \quad t \neq 0 \end{cases}$$

일 때,

$$f(x) = \int_0^x g(t)dt$$

의 power series representation을 구하라.

문제 11. 28. *아래 그래프처럼 한 변의 길이가 1인 정삼각형에 원을 그려 나간다. 어두운 부분의 넓이를 구하라.*



문제 11. 29. $\sum a_n x^n$과 $\sum b_n x^n$의 *interval of convergence*가 각각 $(-r, r)$과 $(-s, s)$이다.

(i) 만약 $r < s$*라면,*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$$

의 interval of convergence는 어떻게 되는가?

(ii) $r = s$*라면 interval of convergence는 어떠한가? 어떤 정보를 얻을 수 있는가?*

문제 11. 30.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n+2)!}$$

문제 11. 31.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p + n^q}, \quad 0 < p < q < 1$$

문제 11. 32.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$$

문제 11. 33.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$$

문제 11. 34. $\{a_n\}$*이 아래와 같이 정의된다.*

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right)$$

또한 $a_1 = 1$*이다. 이때* $\{a_n\}$*이 converge하는지 판단하고, 존재한다면 limit을 구하라.*

문제 11. 35.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & x > 0 \end{cases}$$

이라면, $\int_0^\infty f(x)dx$*라는 improper integral이 convergent임을 밝혀라.*

문제 11. 36.

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{2n}$$

의 *interval of convergence*를 구하여라.

문제 11. 37.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \sqrt{n}} (x+3)^n$$

의 *interval of convergence*를 구하라.

문제 11. 38.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n+1)}{n!} x^n$$

의 interval of convergence를 구하여라.

문제 11. 39.

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{18} + \frac{8}{81} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{2^n}{n3^n} + \cdots$$

를 구하여라.

문제 11. 40. $\arcsin x$의 *power series representation*을 구하고,

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n+1)}$$

임을 이용하여

$$\int_0^1 \frac{\sin^{-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

를 series 형태로 표현하자. 마지막으로, 만약 위에서 구한 series의 sum이 $\frac{\pi^2}{8}$ *임을 안다고 할 때,*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

임을 보여라.

문제 11. 41.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\arctan n}}{n^2+1}$$

문제 11. 42.

$$\sum_{n=2023}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)\ln(\ln n)}$$

문제 11. 43. *만약* $a_n > 0$*이고* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*이 converge한다면,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$$

도 converge함을 보여라.

문제 11. 44.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)^p$$

가 converge하는 p*를 구하여라.*

문제 11. 45.

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{6n-5} - \frac{1}{6n-1} + \cdots$$

를 구하여라.

문제 11. 46. *만약* $\{a_n\}$*이 convergent sequence라면,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

이 존재함을 보여라.

문제 11. 47.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin^{-1} \frac{1}{n} \tan \frac{1}{n}$$

문제 11. 48.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{2n}{3n+1} \right)^{n} \cos n$$

문제 11. 49. $\frac{1}{1+x^3}$의 *power series representation*을 이용하여

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n} \left(\frac{2}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} \right)$$

임을 보여라.

문제 11. 50. $\sum b_n x^n$과 $\sum c_n x^n$이 $|x| < R$에서 *converge*하며 $(-R, R)$에서

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

이다.

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k}$$

일 때,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

이 $|x| < R$에서 *converge*하며 이것이 그 범위에서 $f(x)g(x)$와 같음을 보여라.