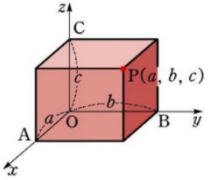
좌표공간



- 삼차원 공간의 각 점은 세 실수의 **순서모음** (a, b, c)에 대응되게 할 수 있다.
- 일반적으로 자연수 n에 대하여

$$\mathbb{R}^n := \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) | a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

  로 표시되는 집합은 n개의 실수가 순서를 가지며 나열되어 표현되는 객체들을 모은 것이다.
- $\mathbb{R}^n$을 n**차원 실수공간**, **좌표공간**, **데카르트 공간** 혹은 n-**공간** 등으로 부르며, 각 원소를 **점**이라 지칭한다.

점의 연산

- n-공간에서 **합**과 **상수배**는 다음과 같이 정의한다.

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)+(b_1, b_2, \cdots, b_n) := (a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)$$

$$t(a_1, a_2, \cdots, a_n) := (ta_1, ta_2, \cdots, ta_n)$$

$$(a_1 t, a_2 t, \cdots, a_n t) = (a_1 t, a_2 t, \cdots, a_n t)$$

- 덧셈에 대해서는 **결합법칙**과 **교환법칙**이 성립하며, **원점**

$$O = (0, 0, \cdots, 0)$$

  을 **항등원**으로 가진다.

- 점 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$의 **역원**은

$$-A = (-a_1, -a_2, \cdots, -a_n) = (-1)A$$

  이다.

점의 연산

- 상수배에 대해서도 결합법칙과 교환법칙이 성립한다.
- 또한 **분배법칙**이 성립한다.

$$t(A + B) = tA + tB$$

$$(t + t')A = tA + t'A$$

- 마지막으로, 좌표공간의 점 A, B에 대하여

$$A - B := A + (-B) = A + (-1)B$$

로 정의한다.

두 점 사이의 거리

- $n-$공간 속의 점 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$과 원점 사이의 거리는 피타고라스 정리에 의해

$$|A| := \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

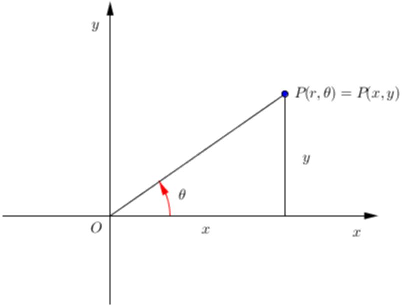
이며, 이를 A의 **절댓값**이라 한다.

- 점 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$과 $B = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 사이의 거리는

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(A, B) &:= |A - B| \\ &= \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2} \end{aligned}$$

극좌표계

- 평면에서 한 점 O와 그 점을 시작으로 하는 반직선 l을 정하면, 평면의 임의의 점 P를 한 쌍의 실수 (r, θ)로써 결정해줄 수 있다. 이때, r은 O와 P 사이의 거리이고, θ는 반직선 OP가 반직선 l과 이루는 각의 크기이다.



- 이런 실수쌍 (r, θ)를 P의 **극좌표**라 하고, 이런 표기 방식을 **극좌표계**라고 부른다.
- 기준이 되는 점 O를 **극점**, 기준으로 삼는 반직선을 **극축**이라 부른다.

극좌표계

- 점 P의 직교좌표 (x, y)와 극좌표 (r, θ) 사이에는 다음 관계가 있다.

$$x = r\cos\theta, \quad y = \sin\theta$$

- 또한 다음도 성립한다.

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \sin\theta = \frac{y}{r}, \quad \theta = \arctan\frac{y}{x}$$

- 다만, 이러한 성질 때문에 각의 값 θ는 하나로 정해지지 않고, 2π의 정수배로 차이가 날 수 있다. 혹은, r을 음수로 할 경우 π의 홀수배만큼 차이나도 같은 점을 표현할 수도 있다. 예를 들어,

$$(r, \theta) = (-r, \theta + \pi) = (r, \theta + 2\pi)$$

  와 같은 식으로 바꿔줄 수 있다.

직선과 원의 방정식

- 극좌표계에서, 주어진 실수 θ_0에 대하여 방정식

$$\theta = \theta_0$$

  은 원점을 지나고 극축과 이루는 각이 θ_0인 직선을 나타낸다.
- 좌표평면에서 직선 $ax + by = c$는 극좌표계로

$$r(a\cos a + \sin\theta\theta) = c$$

  와 같이 표현된다.
- 원점을 중심으로 하고, 반지름의 길이가 $a > 0$인 원의 방정식은

$$r = a$$

  로 표현된다.
- $r = \cos\theta$와 같이 표현되면 원점이 중심이 아닌 원을 만들 수도 있다.

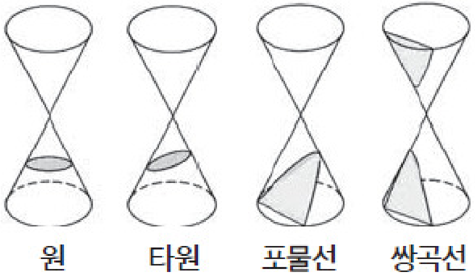
원뿔곡선

- 원뿔의 단면으로 나타나는 타원, 포물선, 쌍곡선 등의 곡선을 **원뿔곡선**이라 한다.
- 좌표계를 사용하면 원뿔곡선은 이차다항식

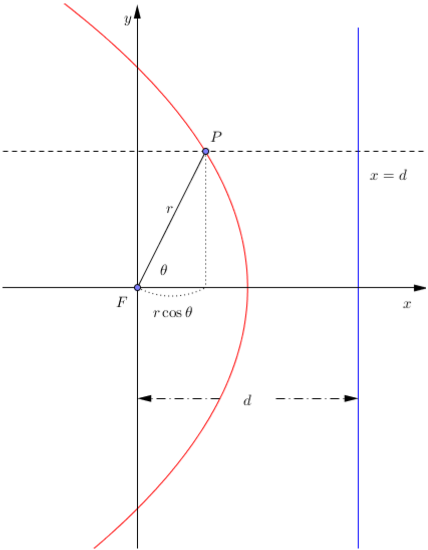
$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

  의 꼴로 나타내어진다.
- 평면에서 한 점 F와 이 점을 지나지 않는 직선 l이 주어져 있다고 하자. 이때 준선 l까지의 거리에 대한 정점 F까지의 거리의 비율 ϵ이 일정한 점들의 집합을 보면, 그것 역시 원뿔곡선이다.
- 이때 F를 원뿔곡선의 한 **초점**, 거리의 비율 ϵ을 **이심률**이라 한다.

원뿔곡선



원뿔곡선



원뿔곡선

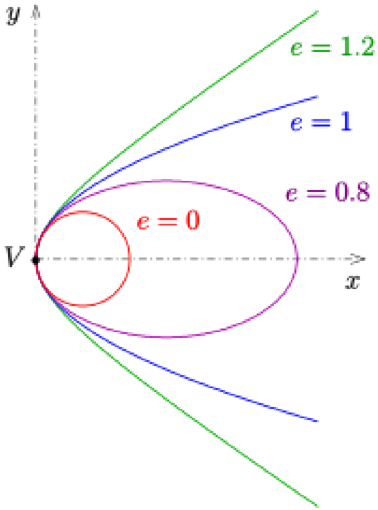
- $\epsilon > 1$이라면 이 이차곡선은 쌍곡선 (두 초점에서의 거리 차가 일정한 점들의 집합, $b^2 - 4ac > 0$)
- $\epsilon = 1$이라면 이 이차곡선은 포물선 (한 초점과 어떤 선(준선)에 대하여 거리가 같은 점들의 집합, $b^2 - 4ac = 0$)
- $0 < \epsilon < 1$이라면 이 이차곡선은 타원 (두 초점에서의 거리 합이 일정한 점들의 집합, $b^2 - 4ac < 0$)
- 또한 앞 페이지의 그림에서부터

$$r = \epsilon(d - r\cos\theta)$$

임을 알 수 있으므로, 정리하면 원뿔곡선의 극좌표계 방정식은

$$r = \frac{\epsilon d}{1 + \epsilon\cos\theta}$$

원뿔곡선



원뿔곡선

- 타원 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$에서

$$\epsilon = \sqrt{1 - (b/a)^2}, \quad F = \pm(\epsilon, 0), \quad d = a(1/\epsilon - \epsilon)$$

  이다.
- 포물선 $y = ax^2$에서

$$F = \left(0, \frac{1}{4a}\right), \quad d = \frac{1}{2a}$$

  이다.
- 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$에서

$$\epsilon = \sqrt{1 + (b/a)^2}, \quad F = \pm\epsilon(a, 0), \quad d = a(\epsilon - 1/\epsilon)$$

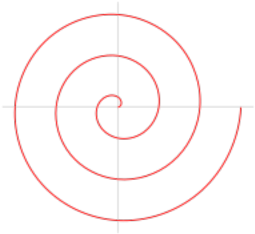
  이다.

다른 도형들

- 기본적으로 직교좌표계로 표현된 도형들에서 r, θ와 x, y의 관계를 통해 극좌표계로 표현되는 도형을 만드는 것이 중심적인 원리다.
- **아르키메데스 와선**
  극좌표계에서 상수 k에 대하여 식

$$r = k\theta$$

  로 나타내지는 곡선

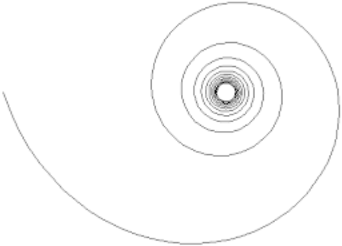


다른 도형들

- **쌍곡 와선** 극좌표계에서 상수 k에 대하여 식

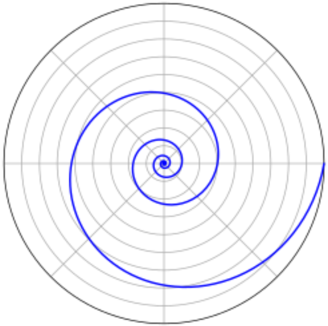
$$r = \frac{k}{\theta}$$

으로 표현된다.



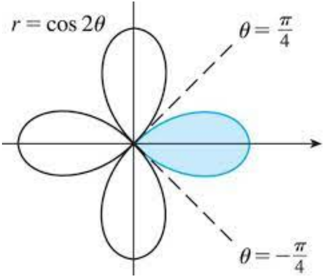
다른 도형들

- **로그 와선**
  상수 r_0와 k에 대하여
  $$r = r_0 e^{k\theta}$$
  으로 표현된다. 이는 원점을 지나는 직선과 와선의 각 점에서의 접선이 항상 일정한 각을 이루는데, 이 때문에 **등각 와선**이라 부르기도 한다.



다른 도형들

- **네잎 장미**
  극좌표계에서 $r = \cos 2\theta$는 아래의 그래프를 가진다.



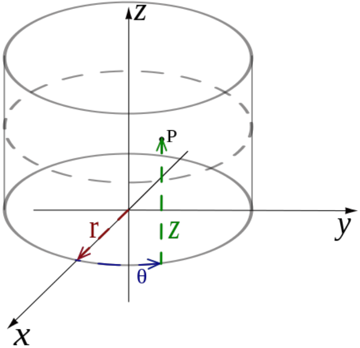
- 극좌표계에서
$$r = \sin n\theta, \quad r = \cos n\theta$$
  로 표현된 곡선은 n이 짝수이면 $2n$개의 잎을 가지고 있고, n이 홀수이면 n개의 잎을 가지고 있다.

원기둥좌표계

- 삼차원 좌표공간에서는 점 $P(x, y, z)$에 대하여

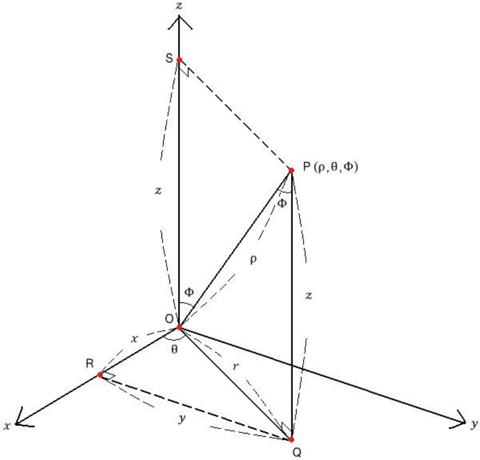
$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$

를 만족시키는 값 $r, \theta, z)$를 대응시키는 방법을 **원기둥좌표계**라고 한다.



구면좌표계

- 삼차원 좌표공간에서 점 $P(x, y, z)$와 원점 O 사이의 거리를 ρ, 선분 OP와 z축 사이의 각을 φ, 점 P를 xy평면으로 정사영한 점 P'에 대해 OP'와 x축 사이의 각도를 θ라 하자.



구면좌표계

- 이때 (ρ, φ, θ)로 점을 표현하는 방식을 **구면좌표계**라 부르며, θ를 **경도**, φ를 **천정각**이라 부른다.
- 일반적으로, 혼동을 피하기 위해 이들의 범위는

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

  로 둔다.
-

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \varphi$$

- ρ가 일정하면 구, φ가 일정하면 원뿔면이 된다.

숙제 문제

- 164 165쪽 2, 4번
- 170쪽 1, 2, 3, 4, 6번
- 프린트 3의 배수 문제

문제풀이 TIP

- TYPE 1. 극좌표계/원기둥좌표계/구면좌표계/직교좌표계 사이의 방정식 바꾸기
  = 직교좌표계와 각 좌표계 사이의 변환공식을 대입하여 그냥 식 정리만 해주면 충분함.
- TYPE 2. 극좌표계 그래프 그리기
  = 1) 직교좌표계로 바꾼 후, 우리가 아는 그래프일 경우 이에 맞추어 그린다.
  = 2) 혹은, $\theta = 0, \pi$와 같은 계산이 쉬운 값들에 대해 r을 계산하고, 점들을 매끄럽게 연결하여 그래프를 대략적으로 그린다.
- TYPE 3. 3차원 공간에서의 영역 부피 구하기 (미적분)
  = 좌표계에서 주어진 방정식들을 잘 분석하여 (혹은 직교좌표계로 바꾸어) 그것들이 어떤 도형을 그리는지 예측하고, 미적분을 이용하여 그 부피를 구해준다. 예를 들어, φ가 일정하면 이는 원뿔이며, ρ가 일정하면 구이고, θ가 일정하면 평면일 것이다. 가장 시운 판별은 직교좌표계로 바꾸어보는 것이다.