

용어해설

수열: sequence, 급수: series, 일반항: general series

수렴: convergent, 발산: divergent

일반항 판정법: test for divergence

조건수렴: conditionally convergent, 절대수렴: absolutely convergent

비교판정법: comparison test, 극한비교판정법: limit comparison test

비율판정법: ratio test, 제곱근판정법: root test

적분판정법: integral test, 교대급수: alternating series, 교대급수판정법: alternating series test

증가성: increasing, 감소성: decreasing, 조화급수: harmonic series

문제 1. 1. 다음 급수의 수렴 여부를 구하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$

비율판정법을 이용할 것이다.

$$a_n = \frac{3^n n!}{n^n}$$

이라고 두면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1$$

이다. 따라서 비율판정법의 따름정리에 의해 급수는 발산한다.

문제 1. 2. 아래 급수는 수렴하는가?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\left(1 - \frac{1}{n^{2018}} \right)^{n^{2019}} \right)$$

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^{2018}} \right)^{n^{2019}}$$

이라고 두면 $0 < a_n < 1$ 이므로, $\sin a_n \leq a_n$ 이다. 이때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^{2018}} \right)^{n^{2018}} = \frac{1}{e} < 1$$

로 거듭제곱근 판정법에 의하여 $\sum a_n$ 은 수렴하고, 비교판정법에 의하여 $\sum \sin(a_n)$ 도 수렴한다. 따라서 주어진 급수는 수렴한다.

문제 1. 3. 아래 급수가 수렴하는지 밝히고, 수렴한다면 조건수렴인지 절대수렴인지 고려하라.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n^2 + 1} - n)$$

$$a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n}$$

이라고 두자. 그러면 a_n 은 항상 양수이므로 $(-1)^n (\sqrt{n^2 + 1} - n)$ 은 교대급수이다. 또한

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = 0$$

이고, $a_n \geq a_{n+1}$ 이 n 의 증가성에 의하여 성립한다. 따라서 교대급수판정법에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

은 수렴한다. 절대수렴인지 판정하기 위해

$$\sum a_n$$

을 보면,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} > \frac{1}{3n}$$

임을 알 수 있으나

$$\sum \frac{1}{3n}$$

은 조화급수이므로 발산하고, 비교판정법에 의해 a_n 의 급수도 발산한다. 따라서 주어진 급수는 조건수렴한다.

문제 1. 4. 다음 급수의 수렴 여부를 판정하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

거듭제곱근 판정법을 활용하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$$

이므로, 주어진 급수는 수렴한다.

문제 1. 5. 아래 급수는 수렴하는가?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^3}{n^3}$$

$x > 1$ 일 때 $\log x \leq 2\sqrt{x}$ 이므로,

$$0 \leq \frac{(\log n)^3}{n^3} \leq \frac{8}{n^{\frac{3}{2}}}$$

이 성립한다. 이때

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^{\frac{3}{2}}} = 8\zeta(1.5) < \infty$$

임을 알고 있으므로, 비교판정법에 의하여 주어진 급수도 수렴한다.

문제 1. 6. 아래 급수가 수렴함을 보이시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

이 급수가 절대수렴함을 보임으로써 수렴함을 보일 것이다.

$$0 \leq \frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

이 성립하고, $\sum \frac{1}{n^2}$ 은 적분판정법에 의하여 수렴하는 급수이다. 따라서 비교판정법에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right|$$

도 수렴하며, 절대수렴하는 급수는 수렴하므로 원래 급수도 수렴한다.

문제 1. 7. 아래 급수가 수렴하는가?

$$\sum n^2 \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$$

이 급수의 일반항의 극한을 구해 보면,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

이므로 일반항 판정법에 의하여 수렴하지 않는다.

문제 1. 8. 아래 급수가 수렴하는가?

$$\sum n \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

이므로, 유한 개의 n 에 대해서만

$$\frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} < \frac{1}{4}$$

이다. 따라서 충분히 큰 n 에 대해서는

$$1 - \cos \frac{1}{n} \geq \frac{1}{4n^2}$$

이며,

$$n \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{4n}$$

이다. 유한한 개수의 항을 더하고 빼는 것은 수렴성에 영향을 주지 않으므로, 조화급수 $\sum \frac{1}{4n}$ 이 발산함에 따라 비교판정법에 의해

$$\sum n \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$$

도 발산한다.

문제 1. 9.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

의 수렴, 발산을 판정하시오.

$f(x) = \frac{1}{x \log x}$ 라 하면, $x \geq 2$ 에서 f 는 감소하는 음이 아닌 연속함수이다. 따라서 적분판정법에 의하여,

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$$

과

$$\int_2^{\infty} f(x) dx$$

의 수렴성은 동일하다.

$$\int_2^{\infty} f(x) dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{x \log x} dx = [\log(\log x)]_2^{\infty} = \infty$$

이기에, 주어진 급수 역시도 발산한다.

문제 1. 10.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\log n}$$

의 수렴성을 조사하시오.

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ 이므로,

$$\frac{\sin \frac{1}{n}}{\log n} \geq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n \log n}$$

이다. 한편, 앞선 문제 9번에서 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ 이 발사함을 보였으므로,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n \log n}$$

역시도 발산하고, 비교판정법에 의하여 주어진 급수도 발산한다.

문제 1. 11. 다음 급수의 수렴과 발산을 판정하고 그 근거를 밝히시오.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n + n(\log n)^4}$$

$$\frac{\log n}{n + n(\log n)^4} < \frac{\log n}{n(\log n)^4} = \frac{1}{n(\log n)^3}$$

이다. $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^3}$ 이라고 두면 f 는 항상 양수인 감소함수이며, 연속함수이기에 적분판정법을 이용해줄 수 있다. 그러면

$$\int_2^{\infty} f(x)dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^3} = \left[-\frac{1}{2}(\log x)^{-2}\right]_2^{\infty} = \frac{1}{2(\log 2)^2} < \infty$$

이기에 적분판정법에 의해

$$\sum \frac{1}{n(\log n)^3}$$

은 수렴한다. 따라서 비교판정법에 의해 주어진 급수도 수렴한다.

문제 1. 12. 급수 $\sum a_n$ 과 $\sum b_n$ 은 각각 0이 아닌 항들로 이루어진 수열 (a_n) 과 (b_n) 에서 얻은 급수이다. 아래 명제들에 대하여, 거짓인 명제를 모두 찾고 반례를 제시하시오.

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이면, $\sum a_n$ 은 수렴한다.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ 이면, $\sum a_n$ 의 수렴성과 $\sum b_n$ 의 수렴성은 같다.

3) (a_n) 이 양수의 수열이고 모든 n 에 대하여 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ 이면, 급수 $\sum a_n$ 은 수렴한다.

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho < 1$ 이 존재하면 $\sum a_n$ 은 절대수렴한다.

5) $\sum |a_n|$ 이 수렴하면 $\sum a_n^2$ 은 수렴한다.

6) $\sum a_n$ 이 수렴하면, $\sum a_n^3$ 은 절대수렴한다.

1) $a_n = \frac{1}{n}$ 이라 두면 성립하지 않는다.

2) $a_n = \frac{1}{n^2}, b_n = \frac{1}{n}$ 이라 두면 수렴성이 같지 않다.

3) $a_n = \frac{1}{n}$ 이면 성립하지 않는다.

6) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}}}$ 이면 a_n^3 의 급수가 수렴은 하나 절대수렴하지는 않는다.

문제 1. 13. 아래 급수는 발산하는가?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5^n}{n!}$$

$a_n = (-1)^{n+1} \frac{5^n}{n!}$ 이라고 두면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n+1} = 0$$

이므로 비교판정법에 의하여 $\sum |a_n|$ 은 수렴한다. 따라서 이 급수는 절대수렴하므로 수렴한다.

문제 1. 14. 아래 급수의 수렴성을 판단하여라.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(1+\log(n+2))^2}$$

주어진 급수의 수렴성은

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(1+\log n)^2}$$

의 수렴성과 같다. 그리고 $n \geq 3$ 일 때

$$\frac{1}{(n+1)(1+\log n)^2} < \frac{1}{n(1+\log n)^2}$$

이다. $f(x) = \frac{1}{x(1+\log x)^2}$ 을 생각하면, 이 함수는 $x \geq 3$ 에서 양수이고, 감소하는 연속함수이다. 따라서 적분판정법에 의해

$$\int_3^{\infty} f(x)dx = \int_3^{\infty} \frac{1}{x(1+\log x)^2} dx = \left[-\frac{1}{1+\log x} \right]_3^{\infty} = \frac{1}{1+\log 3} < \infty$$

의 수렴에 따라

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(1+\log n)^2}$$

이 수렴한다. 이제 비교판정법에 의해 주어진 급수도 수렴한다.

문제 1. 15. 양항급수 $\sum a_n$ 에 대해 아래가 맞는지 틀린지 확인하여라.

모든 자연수 n 에 대하여 $\sqrt[n]{a_n} < 1$ 이면, 급수 $\sum a_n$ 은 수렴한다.

거짓인 명제이다. $a_n = \frac{1}{n+1}$ 이면 모든 자연수 n 에 대해 $a_n > 0$ 이므로 양항급수이고, $\frac{1}{n+1} < 1$ 이므로 $\sqrt[n]{a_n} < 1$ 이다. 그러나 $\sum a_n$ 은 조화급수이므로 발산한다.

문제 1. 16. 아래 급수가 수렴하는 양수 p 의 범위를 구하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p + pn}$$

$p > 1$ 인 경우

$$0 < \frac{1}{n^p + pn} < \frac{1}{n^p}$$

이고 $\sum \frac{1}{n^p} < \infty$ 이므로 비교판정법에 의하여 주어진 급수도 수렴한다.

$p = 1$ 인 경우 주어진 급수는 조화급수가 되며, 발산한다.

$p < 1$ 인 경우

$$\frac{1}{n^p + pn} \geq \frac{1}{(p+1)n}$$

이 성립하게 될 것이며, p 가 양수이므로 $p+1 > 0$ 이다. 이때

$$\sum \frac{1}{(p+1)n}$$

이 조화급수로 발산하므로, 비교판정법에 의하여 주어진 급수도 발산한다. 따라서 이들을 종합하면 원하는 범위는 $p > 1$ 이다.

문제 1. 17. 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[5]{\sin \frac{1}{n^2}} \sin \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

의 수렴, 발산을 판정하시오.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{\sin \frac{1}{n^2}} \sin \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right)}{n^{-\frac{9}{10}}} = 1$$

이기에, 극한비교판정법에 의하여 주어진 급수의 수렴성은 발산하는 급수 $\sum \frac{1}{n^{\frac{9}{10}}}$ 의 수렴성과 같다. 따라서 주어진 급수는 발산한다.

문제 1. 18. 적분

$$\int_{2022}^{\infty} \frac{\log x}{e^x} dx$$

의 수렴, 발산을 판정하시오.

$f(x) = \frac{\log x}{e^x}$ 는 항상 양수인 연속함수이며, $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}e^x - \log x \cdot e^x}{e^{2x}} < 0$ 이므로 감소함수이다. 적분판정법에 의하여, 이 적분의 수렴성은

$$\sum_{n=2022}^{\infty} \frac{\log n}{e^n}$$

의 수렴성과 같다. 이때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{\log n} = \frac{1}{e} < 1$$

이므로, 비율판정법에 의하여

$$\sum_{n=2022}^{\infty} \frac{\log n}{e^n}$$

은 수렴한다. 따라서 주어진 적분도 수렴한다.

문제 1. 19.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \sin n}{2^n + n}$$

위 급수의 수렴, 발산을 판정하라.

$$\left| \frac{(n+1) \sin n}{2^n + n} \right| \leq \frac{n+1}{2^n}$$

이 성립한다. 이때 비율판정법을 사용하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

이므로,

$$\sum \frac{n+1}{2^n}$$

이 수렴하며, 비교판정법에 의해 주어진 급수는 절대수렴한다. 따라서 주어진 급수는 수렴한다.

문제 1. 20.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} \right)$$

$$a_n = \frac{n^{\frac{3}{2}} - n + 1}{n^2}$$

는 n 이 충분히 커짐에 따라

$$a_n = \frac{n^{\frac{3}{2}} - n + 1}{n^2} \geq \frac{\frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{2}}}{n^2} = \frac{1}{2\sqrt{n}} > 0$$

이 성립한다. 그런데

$$\sum \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

이 발산하므로, 비교판정법에 의해 주어진 급수도 발산한다.