심화미적분학2 모의 중간고사 (70분, 13문항;26문제)

1. 함수 $f(x,y,z) = z - x^2 - y^2 + 1$의 $1-$등위면 위의 점 $P(a,b,c)$에서 등위면에 접하는 접평면이 아래 직선을 포함한다고 한다.

$$L : x = 3t+1, y = t-1, z = 14t-3 \quad (-\infty < t < \infty)$$

그러한 점 P를 모두 구하여라. (4점)

2. 영주가 가지고 있는 함수 $f(x, y, z)$는 미분가능한 함수이며, 다음 두 조건을 만족시킨다.

   1) $f(t^2+1, 5t, t^3-t) = t - t^2$이 모든 t에 대해 성립한다.

   2) 점 $P_0(5, 10, 6)$에서 f는 벡터 $\mathbf{A} = (\square, 1, -2)$ 방향과 같은 방향일 때 가장 빠르게 증가한다.

   이때, $\mathbf{A}$의 첫 번째 원소는 원래 밝혀져 있었으나, 영주가 실수로 커피를 쏟아 버리는 바람에 왼쪽 부분이 가려져 오른쪽 부분밖에 볼 수 없었다. 오른쪽 부분은 3과 닮아 있어, $\square$가 3 혹은 8임을 확인할 수 있었다. 주어진 두 조건을 이용하여 커피에 가려진 숫자는 무엇인지 구하여라. (5점)

3. 아래 극한이 존재하면 그 값을 구하고, 존재하지 않으면 그 이유를 설명하여라. (8점; 각 4점)

(1)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x^2-y^2)}{(y-x^2)^2+(y+x^2)^2}$$

(2)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^6+y^2)}{x^4-y^2}$$

4. 아래 명제가 옳으면 T, 거짓이면 F라고 써라. 단, 증명 혹은 반증할 필요는 없다. (16점; 각 2점)

(1) $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 가 모든 함수 f에 대해 성립한다. ( )

(2) 함수 $f(x)$는 모든 x에서 미분가능하고, 함수 $g(y)$는 모든 y에서 미분가능하다. 그러면 함수 $h(x,y) = f(x)g(y)$ 역시도 모든 (x,y)에서 미분가능하다. ( )

(3) 연속함수 $f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$의 편도함수

$$\frac{\partial f}{\partial x} : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$$

이 존재하고 연속이라 하자. 그러면

$$\frac{d}{dx}\int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$$

이다. ( )

(4) 일급함수 $a(x), b(x), g(x,y)$에 대하여

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} g(x,y)dy = \int_{a(x}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} g(x,y)dy$$

가 성립한다. ( )

(5) 두 무한급함수 f와 g가 P를 중심으로 한 n차 근사다항식이 서로 같다고 하자. 즉,

$$T_n f(P,\mathbf{v}) = T_n g(P,\mathbf{v})$$

이다. 이때, $f(x) - g(x)$는 점 P 근방에서 0이다. ( )

(6) 어떤 벡터 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$의 $p-$노름은 아래와 같이 정의된다.

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

이때, $p = 2$인 경우에는 유클리디안 노음이 되는 것이며, $p = \infty$일 경우에는 이것이 $\max\{|x_k| : k = 1, 2, \cdots, n\}$이 된다. 집합 $D = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\|_p = 1\}$은 모든 p에 대해 닫힌 집합이다. ( )

(7) 이차원 상의 두 점 사이의 거리를 나타내는 임의의 거리함수 $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$가 있다. 이때, 점열 $\langle (x_n, y_n) \rangle_{n\in\mathbb{N}}$이 (x,y)로 수렴한다고 하자. 그러면 $d(x_n, y_n)$도 $d(x,y)$로 수렴한다. ( )

(8) 무한급함수 $f(x,y,z)$에 대하여, $f(0,0,0) = 5$라고 한다. f의 $5-$등위면에 대하여, 점 $(0,0,0)$에서의 접평면은 벡터공간이며, 그 차원은 2다. ( )

5. 좌표평면에서 정의된 함수

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

는 평면 속의 원점을 지나는 임의의 직선에 제한하면 연속함수이다. f는 연속함수인가? 맞으면 증명하고, 아니면 반증하여라. (4점)

6. 일급함수 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$에 대하여, $z = f\left(\dfrac{x-y^2}{xy^2}, \dfrac{y^2-x}{xy^2}\right)$이라고 한다. 아래 식을 단순화한 후, $x = y = 1$일 때의 값을 구하여라.

$$2x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^3\frac{\partial z}{\partial y}$$

(5점)

7. 함수 $f(x, y) = e^x \ln(1+y)$에 대하여 다음 물음에 답하시오. (9점)

   (a) 테일러 전개의 유일성을 이용하여 원점에서 3차 근사다항식 $T_3 f(x, y)$를 구하시오. (4점)

   (b) $|e^{0.1} \ln 1.1 - T_3 f(0.1, 0.1)| < 5 \times 10^{-4}$임을 보이시오. 단, $e^{0.1} < 1.2$이다. (5점)

8. 미분가능함수 $f(x, y, z)$가 아래 세 조건을 만족한다.

1) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3, 1, 3) = 1$

2) 곡선

$$C_1 : (3 + 2t, 1 - t^2, 3 - 5t^2), \quad (-\infty < t < \infty)$$

는 함수 f의 등위면 중에서 $(3, 1, 3)$을 지나는 등위면 S에 포함된다.

3) 곡선

$$C_2 : (2 + t^2, 2t^3 - 1, 2t + 1), \quad (-\infty < t < \infty)$$

는 곡선 C_1이 포함되는 등위면에 포함된다.

이때, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(3, 1, 3)$을 구하여라. (8점)

9. 좌표평면에서 정의된 함수 $f(x,y)=e^{x+y}\sin(xy)$에 대하여 다음 물음에 답하시오. (7점)

   (a) 원점에서 $f(x,y)$의 2차 잉여항을 구하시오. 단, 테일러 전개의 유일성을 사용할 수 없다. (4점)

   (b) $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2$이며, $|\mathbf{v}|\le 4$일 때, $D_{\mathbf{v}}^2 f(0,0)$의 최댓값을 구하시오. (3점)

10. 미분가능한 함수 f에 대하여, $g(x,y) = f(x^2 - y^2, 2xy)$라고 하자. 또한, 그래프 $z = g(x,y)$ 위의 점 $(-2,1,7)$ 위에서 그린 접평면의 방정식이 $z = 5x - 6y + 23$이라 한다. 이때, 점 $(3,-4,7)$에서 그래프 $z = f(x,y)$에 대한 접평면의 방정식을 구하여라. (5점)

11. 함수 $f : \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a > 0\}$는 어떤 $m \in \mathbb{R}$에 대하여,

$$f(x, y) = \frac{x^m y}{x^{2m} + y^2}$$

로 정의된다. $\lim_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x, y)$가 존재하기 위한 m의 조건을 구하여라. (6점)

12. 어떤 산의 높이는 좌표 (x, y)에서 $z = y^5 - 2x^2y + 1$으로 정해진다. (8점)

(1) 만약 둥근 공이 $(-1, -1, 2)$에서 놓아진다면, 이 공은 어떤 방향으로 움직이기 시작할까? 이차원 안의 단위벡터로 답하시오. (3점)

(2) 로켓이 $(-1, -1, 2)$에서 산의 표면에 수직한 방향으로 하늘로 쏘아져 직진하기 시작했다. 이 로켓이 $x^2 + y^2 + z^2 = 30$과 만나는 점의 좌표를 구하여라. (5점)

13. 아래 글을 잘 읽고, 질문에 답하여라. (15점)

(가) 이차원 평면 위의 $\mathbb{R}^2$에서의 열린집합 $U \subset \mathbb{R}^2$과 U에서 정의된 이급함수 f에 대하여,

$$\triangle f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

을 **라플라스 방정식**이라 부르며, 연산자 $\triangle$을 **라플라스 연산자**라 부른다.
(나) 라플라스 방정식을 만족시키는 함수를 **조화 함수**라 부른다.
(다) 조화 함수는 여러 가지 편미분방정식의 해가 되거나, 그것을 구하는 데 직접적으로 관련되는 경우가 많다. 이것이 중요한 이유는 우리가 생각할 수 있는 대부분의 이차원 현상이 이변수 편미분방정식으로 모델링될 수 있기 때문이다. 대표적으로, 파동방정식, 연소 반응 등이 조화 함수를 이용하여 풀이될 수 있는 방정식들이다.

(1) 원점을 포함하는 열린집합에서 정의된 조화함수 f에 대하여, $D^2_{(2,1)}f(0,0) > 0$이며 $D_1 D_2 f(0,0) = 0$이라고 한다. 이때, f는 원점에서 $(-1,5)$ 방향으로 오목한가 볼록한가? (5점)

(2) 발열을 동반하며 자발적으로 진행하는 산화 반응을 표현하는 데 사용하는 **연소방정식**은 아래와 같다.

$$\triangle u = -e^u$$

그런데, $x^2+y^2 \le 1$에서 이 함수의 근은 어떠한 (a,b,c)에 대하여

$$u(x,y) = a\ln(bx^2 + by^2 + c)$$

의 형태로 표현됨이 알려져 있다. 더불어, $u(x,y)=0$이 경계인 $x^2+y^2=1$에서 성립한다. 이때, 가능한 a,b,c를 모두 구하여라. (8점)

(3) (2)에서 구한 모든 a,b,c에 대하여, u의 최댓값을 구하여라. (2점)