기울기 벡터장과 잠재함수

1-3(2). 1. *벡터장* (e^{xy}, e^{x+y})*는 닫힌 벡터장인가?*

$$\frac{\partial}{\partial x}e^{xy} = e^{xy}$$

이며

$$\frac{\partial}{\partial y}e^{x+y} = e^{x+y}$$

로, 둘은 서로 다르다. 따라서 이 벡터장은 닫힌 벡터장이 아니다.

1-3(2). 2. *벡터장* $\mathbf{F}(x,y) = (e^{-y} - y\sin xy, -xe^{-y} - x\sin xy)$*의 잠재함수를 구하여라.*

이 벡터장이 닫힌 벡터장인지 한 번 확인하여 보자.

$$\frac{\partial}{\partial y}(e^{-y} - y\sin xy) = -e^{-y} - \sin xy - xy\cos xy = \frac{\partial}{\partial x}(-xe^{-y} - x\sin xy)$$

닫힌 벡터장임을 확인하였다. 따라서 실수 전체에서 이것이 정의된다면 좌표공간은 열린 볼록집합이므로 잠재함수가 존재함을 알 수 있으며, 곡선연결집합이기에 그 형태가 유일하다. 직접 구하면 상수 C에 대하여

$$\varphi(x,y) = xe^{-y} + \cos xy + C$$

이다.

문제 3 10에서는 주어진 벡터장에 대하여 그 벡터장이 닫힌 벡터장인지 확인하고, 만약 그렇다면 잠재함수 하나를 구해야 합니다.

1-3(2). 3. $\mathbf{F}(x,y) = (xy + y^2, x^2 + 2xy)$

$\partial/\partial y(xy+y^2) = x + 2y$는 $\partial/\partial x(x^2+2xy) = 2x+2y$와 다르기 때문에, 닫힌 벡터장이 아니다.

1-3(2). 4. $\mathbf{F}(x,y) = (y^2 - 2x, 2xy)$

$\partial(y^2-2x)/\partial y = 2y = \partial(2xy)/\partial x$이므로 $\mathbf{F}$는 닫힌 벡터장이다. 또한 좌표평면은 열린 볼록집합이며 곡선연결집합이기에 유일한 잠재함수 φ가 존재한다. 따라서 $\varphi(x,y) = xy^2 - x^2 + C$. ($C$는 상수)

1-3(2). 5. $\mathbf{F}(x,y) = (y^2e^{xy}, (1+xy)e^{xy})$

$\partial/\partial y(y^2e^{xy}) = xy^2e^{xy} + 2ye^{xy} = (xy^2+2y)e^{xy}$이며 $\partial/\partial x((1+xy)e^{xy}) = (y+xy^2)e^{xy} + ye^{xy} = (xy^2+2y)e^{xy}$로 같다. 따라서 열린 볼록집합이자 곡선연결집합인 좌표평면에서 정의된 이 닫힌 벡터장은 유일한 잠재함수 $\varphi(x,y) = ye^{xy} + C$, ($C$는 상수)를 가진다.

1-3(2). 6. $\mathbf{F}(x,y) = (ye^x, e^x + e^y)$

잠재함수를 잡아 보면 $\varphi(x,y) = ye^x + e^y$을 생각할 수 있다. 따라서 이 벡터장은 잠재함수를 가지므로 닫힌 벡터장이어야 한다. 또한 정의된 영역인 좌표평면은 열린 집합이면서 곡선연결된 볼록집합이므로, 잠재함수는 상수 C에 대하여 $\varphi(x,y) = ye^x + e^y + C$ 꼴이 유일하다.

1-3(2). 7. $\mathbf{F}(x,y) = (ye^x + \sin y, e^x + x\cos y)$

잠재함수를 잡아보면 $\varphi(x,y) = ye^x + x\sin y$를 생각할 수 있따. 따라서 이 벡터장은 잠재함수를 가지므로 닫힌 벡터장이다. 또한 좌표평면은 곡선연결집합이므로 잠재함수가 여기에 상수를 더한 꼴인 $\varphi(x,y) = ye^x + x\sin y + C$로 유일하다. (단, C는 상수)

1-3(2). 8. $\mathbf{F}(x,y) = (2xy + y^{-2}, x^2 - 2xy^{-3})$, $y > 0$

$$\partial(2xy + y^{-2})/\partial y = 2x - 2y^{-3}$$

$$\partial(x^2 - 2xy^{-3})/\partial x = 2x - 2y^{-3}$$

으로 닫힌 벡터장이다. 그리고 $y > 0$인 영역은 열린 집합이며 곡선연결집합이고, 닫힌집합니다. 따라서 해당 구간에서 닫힌 벡터장인 이 벡터장은 유일한 잠재함수 꼴을 가진다.

$$\varphi(x, y) = 2x^2y + xy^{-2} + C$$

, C는 상수가 된다.

1-3(2). 9. $\mathbf{F}(x, y) = (y^2 \cos x + \cos y, 2y \sin x - x \sin y)$

잠재함수의 후보인 $\varphi(x, y) = y^2 \sin x + x \cos y$를 생각하여 보면 이는 잠재함수로서 기능함을 확인할 수 있다. 잠재함수가 존재하기에 이 벡터장은 닫힌 벡터장이며, 정의된 영역인 좌표평면이 열린 곡선연결집합이기에 여기에 상수를 더한 꼴로 유일하다. 따라서 상수 C에 대하여 $\varphi(x, y) = y^2 \sin x + x \cos y + C$

1-3(2). 10. $\mathbf{F}(x, y) = (\ln y + y/x, \ln x + x/y)$

잠재함수의 후보인 $\varphi(x, y) = x \ln y + y \ln x$를 생각하여 보면, 이것이 정의되는 영역인 $x > 0, y > 0$은 열린집합이며 곡선연결집합이다. 따라서 벡터장 $\mathbf{F}$는 잠재함수가 있으니 닫힌 벡터장이고, 잠재함수는 유일하게

$$\varphi(x, y) = x \ln y + y \ln x + C$$

처럼 정해지며, C는 상수다.

11번부터 17번까지는 주어진 벡터장에 대하여 그 잠재함수를 구하고 이를 통하여 주어진 곡선을 따라 선적분한 값을 구하는 문제입니다.

1-3(2). 11. $\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy^2, 2x^2y)$*이며,* C*는* $(1, 1)$*으로부터* $(4, \frac{1}{4})$*까지* $y = 1/x$*의 호*

벡터장의 잠재함수를 찾아보면 $\varphi(x, y) = x^2y^2 + 3x$가 대표적이다. 그러면 선적분 기본정리에 의하여 해당 값은

$$\varphi(4, \frac{1}{4}) - \phi(1, 1) = 9$$

1-3(2). 12. $\mathbf{F}(x, y) = (x^2y^3, x^3y^2)$*이며* C*는* $X(t) = (t^3 - 2t, t^3 + 2t)$*로 표현되고,* t*는* 0*과* 1 *사이*

벡터장의 잠재함수를 찾아보면 $\varphi(x, y) = \frac{1}{3}x^3y^3$이며 곡선의 첫 점과 끝 점은 각각 $(0, 0)$과 $(-1, 3)$이다. 따라서 원하는 값은

$$\varphi(-1, 3) - \varphi(0, 0) = -9$$

이다.

1-3(2). 13. $\mathbf{F}(x, y) = ((1 + xy)e^{xy}, x^2e^{xy})$*이며* C*는* $0 \le t \le \pi/2$*에서* $(\cos t, 2 \sin t)$*를 따름*

잠재함수를 찾아보자. $\varphi(x, y) = xe^{xy}$가 대표적이다. 그러면 선적분 기본정리에 의해 원하는 값은

$$\varphi(0, 2) - \varphi(1, 0) = -1$$

임을 확인할 수 있다.

1-3(2). 14. $\mathbf{F}(x, y) = (yz, xz, xy + 2z)$*이며* C*는* $(1, 0, -2)$*로부터* $(4, 6, 3)$*으로 가는 선분*

벡터장의 잠재함수는 대표적으로 $\varphi(x, y, z) = xyz + z^2$이 있다. 따라서 서적분 기본정리에 의하여 원하는 값은

$$\varphi(4, 6, 3) - \varphi(1, 0, -2) = 72 + 9 - 4 = 77$$

1-3(2). 15. $\mathbf{F}(x,y,z)=(y^2z+2xz^2, 2xyz, xy^2+2x^2z)$*이며* C*는* $0\le t\le 1$*의 범위에서* $(\sqrt{t}, t+1, t^2)$*을 따름*

벡터장의 잠재함수를 찾아보면

$$\varphi(x,y,z)=xy^2z+x^2z^2$$

임을 확인할 수 있으며, C의 양 끝 점은 각각 $(0,1,0)$과 $(1,2,1)$이다. 따라서 원하는 값은

$$\varphi(1,2,1)-\varphi(0,1,0)=4+1=5$$

이다.

1-3(2). 16. $\mathbf{F}(x,y,z)=(yze^{xz}, e^{xz}, xye^{xz})$*이며 곡선* C*는* $0\le t\le 2$*에서* $X(t)=(t^2+1, t^2-1, t^2-2t)$*를 따른다.*

먼저 잠재함수를 구해보면,

$$\varphi(x,y,z)=ye^{xz}$$

로 존재함을 알 수 있다. 곡선 C의 시작점은 $(1,-1,0)$이며 종점은 $(5,3,0)$이다. 따라서 구하는 값은

$$\varphi(5,3,0)-\varphi(1,-1,0)=3+1=4$$

이다.

1-3(2). 17. $\mathbf{F}(x,y,z)=(\sin y, x\cos y+\cos z, -y\sin z)$*이며 곡선* C*는* $(\sin t, t, 2t)$*로 표시되고* t*의 범위는* 0*부터* $\pi/2$*까지다.*

벡터장의 잠재함수를 먼저 구하면

$$\varphi(x,y,z)=x\sin y+y\cos z$$

이다. 곡선의 시작점은 $(0,0,0)$이고 끝점은 $(1,\pi/2,\pi)$이므로 구하는 값은

$$\varphi(1,\pi/2,\pi)-\varphi(0,0,0)=1-\pi/2$$

이다.

1-3(2). 18. $\mathbf{F}(x,y)=(x^3,y^3)$ *위에서 물체가* $(1,0)$*에서* $(2,2)$*로 이동할 때, 벡터장에 의해 행해진 일을 구하여라.*

벡터장의 잠재함수를 먼저 구하면

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{4}(x^4+y^4)$$

이다. 따라서 선적분의 기본정리에 의해 일의 양은

$$\frac{1}{4}(2^4+2^4-1^4)=\frac{31}{4}$$

1-3(2). 19. *벡터장이* $(2x+y, x)$*일 때, 점* $(1,1)$*에서* $(4,3)$*으로 이동할 때 물체의 작용한 일의 양을 구하시오.*

벡터장의 잠재함수를 구하여 보면, $\varphi(x,y)=x^2+xy$이고 선적분 기본정리에 의하여 일의 양은

$$4^2+4\times 3-1^2-1=26$$

임을 확인할 수 있다.

전미분과 미분형식

1-3(2). 20. *경로* $X(t) = (2t+1, 4t+1)$*에 대하여,* $0 \le t \le 1$*에서* $\int_X (x^2-y)dx + (x-y^2)dy$*를 구하여라.*

$$\int_X (x^2-y)dx + (x-y^2)dy = \int_0^1 -56t^2 - 24tdt = -\frac{92}{3}$$

1-3(2). 21. *곡선* C*가* $y^2 = x^3$*이며* $-1 \le y \le 1$ *범위에서 정의될 때,*

$$\int_C x^2ydx - xydy$$

의 값을 구하여라.

곡선 C를 $X(t) = (t^2, t^3), -1 \le t \le 1$로 매개화하면,

$$\int_C x^2ydx - xydy = \int_{-1}^1 (2t^8 - 3t^7)dt = \frac{4}{9}$$

1-3(2). 22. *곡선* $X(t)$*가* $X(t) = (3-t, (3-t)^2)$*으로 주어지며* $0 \le t \le 3$*일 때,*

$$\int_X ydx - xdy$$

의 값을 구하여라.

$$\int_X ydx - xdy = \int_0^3 (3-t)^2dt = 9$$

1-3(2). 23. *곡선* C*는* $(-2,2)$*에서* $(0,0)$*으로 가는 선분과* $(0,0)$*에서* $(1,1)$*로 가는 선분으로 이루어져 있다.* C*에 대하여 미분형식* $(x-y)^2dx + (x+y)^2dy$*를 적분한 값을 구하여라.*

$$\int_C (x-y)^2dx + (x+y)^2dy = \int_{-2}^0 4t^2dt + \int_0^1 4t^2dt = 12$$

1-3(2). 24. *곡선* $X(t) = (2\sin t, 2\cos t)$*에 대하여,* $0 \le t \le \pi$*에서*

$$\int_C xy^2dx - xydy$$

를 구하여라.

$$\int_C xy^2dx - xydy = \int_0^\pi 16\cos^3 t \sin t + 8\sin^2 t \cos tdt = 0$$

1-3(2). 25. *점* $(1,1,2)$*에서* $(5,3,1)$*로 가는 선분을 생각하여 보자. 해당 선분 위에서 미분형식* $yzdx - xzdy + xydz$*를 적분한 값을 구하여라.*

해당 곡선을 X라고 하면, $0 \le t \le 1$의 범위에서 $X(t) = (4t+1, 2t+1, -t+2)$로 표현된다. 그러면

$$\int_X yzdx - xzdy + xydz = \int_0^1 -8t^2 - 8t + 3dt = -\frac{11}{3}$$

1-3(2). 26. *곡선이* $X(t) = (2\cos t, 2\sin t, 4\cos^2 t)$*로 주어진다고 할 때,* $t = 0$*부터* $t = 2\pi$*일 때까지 곡선* X*를 따라 미분형식* $zdx + xdy + ydz$*를 적분한 값을 구하여라.*

$$\int_X zdx + xdy + ydz = \int_0^{2\pi} -8\cos^2 t \sin t + 2 + 2\cos 2t - 16\sin^2 t \cos t dt = 4\pi$$

1-3(2). 27. *곡선* $y = x^2$*에 대하여, 점* $(0,0)$*부터* $(1,1)$*까지에 대해 미분형식* $y^3dx - x^2dy$*를 적분한 값을 구하여라.*

곡선은 $X(t) = (t, t^2)$으로 매개화할 수 있으며, t의 범위는 0과 1 사이이다. 그러면

$$\int_X y^3dx - x^2dy = \int_0^1 t^6 - 2t^3 dt = -\frac{5}{14}$$

임을 확인할 수 있다.

1-3(2). 28. *곡선* $X(t) = (t,t,t), 0 \le t \le 1$*에 대하여 미분형식* $z^2dx + 2ydy + xzdz$*를 적분한 값을 구하여라.*

$$\int_X z^2dx + 2ydy + xzdz = \int_0^1 (t^2 + 2t + t^2)dt = \frac{5}{3}$$

1-3(2). 29. *곡선* $X(t) = (t, t^2, t^3), 0 \le t \le 1$*에 대하여 미분형식* $z^2dx + 2ydy + xzdz$*를 적분한 값을 구하여라.*

$$\int_X z^2dx + 2ydy + xzdz = \int_0^1 (t^6 + 2t^2(2t) + t^4(3t^2))dt = \frac{11}{7}$$

1-3(2). 30. *벡터장* $\mathbf{F}(x,y) = (3x - 5y, 7y - 5x)$*에 대하여, 경로* $(1 + t^2 + t^3 + 2t^4, 3 - 2t^2 + t)$*를 따라* $0 \le t \le 1$*에서 적분한 값을 구하여라.*

벡터장 $\mathbf{F}$는 $(7y - 5x)_x = -5 = (3x - 5y)_y$이기에 닫힌 벡터장이며, 좌표평면은 열린 볼록집합이기에 푸앵카레 도움정리에 의해 잠재함수가 존재한다. 따라서 선적분의 값은 경로에 무관하다. 따라서 시작점인 $(1,3)$으로부터 종점인 $(5,2)$까지로 가는 가장 간단한 경로인 $X(t) = (4t+1, -t+3)$을 따라서 $0 \le t \le 1$에서 적분한다면

$$\int_X (3x - 5y)dx + (7y - 5x)dy = \int_0^1 95t - 64dt = -\frac{33}{2}$$

임을 알 수 있다.