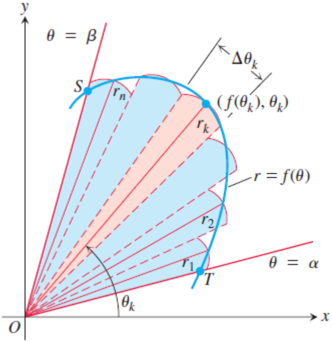
극좌표계 곡선의 넓이

- 극좌표계에서 $0 \le r \le f(\theta), \theta_0 \le \theta \le \theta_1$로 표현된 영역의 넓이는 어떻게 구할까?



극좌표계 곡선의 넓이

극좌표계 곡선의 넓이

극좌표계에서 $0 \leq r \leq f(\theta), \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$로 둘러싸인 영역의 넓이는

$$A = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{1}{2} f(\theta)^2 d\theta$$

로 주어진다.

Example

$r = 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$로 표현되는 곡선은 원점을 중심으로 하고 반지름이 1인 원이다. 그러면

$$A = \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2} 1^2 d\theta = \pi$$

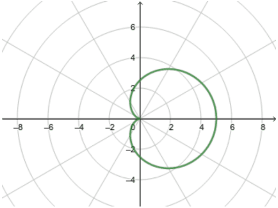
로, 우리가 아는 것과 같다.

Example

곡선 $y = 1 + \cos\theta$에 의해 둘러싸인 부분의 넓이는

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)^2 d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{2}(2\pi + 0 + \pi) = \frac{3}{2}\pi
\end{aligned}
$$

이다.



극좌표계와 곡선의 길이

곡선의 길이

극좌표계에서

$$r = r(\theta), \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$$

로 표현된 곡선의 길이는

$$l = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} d\theta$$

이다.

Example

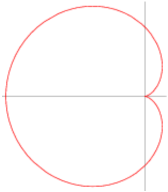
곡선 $r = 1 - \cos\theta$의 길이를 구하여보자. 그러면

$$r' = \sin\theta, \quad r^2 + r'^2 = 2 - 2\cos\theta = 4\sin^2\frac{\theta}{2}$$

이므로,

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{\theta}{2} d\theta = 8$$

이다.



숙제 문제

- 324쪽 1, 2, 3, 4, 5, 6번
- 343쪽 8번