역행렬

- 어떤 정사각행렬 A에 대하여,

$$AB = BA = I$$

  인 정사각행렬 B가 존재한다면 A를 **가역행렬**이라 한다.
- 이때, B를 A의 **역행렬**이라 부르고 A^{-1}로 쓴다. 즉,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

  이다.
-

$$(A^{-1})^{-1} = A$$
$$(A^{-1})^k = (A^k)^{-1}$$
$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

치환

- 자연수 n에 대하여, 집합 $\{1, 2, \cdots, n\}$의 수들을 $\{1, 2, \cdots, n\}$에 하나씩 대응시키는 사상을 n-**치환**이라고 한다.
- 예를 들어, $n = 3$이라면 1을 3으로, 2를 1로, 3을 2으로 대응시키는 관계는 치환이라 할 수 있다.
- 이를 직관적으로 나타낸다면

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

처럼 볼 수 있으며, $\sigma(k)$는 곧 치환에 의해 k라는 값이 어떤 새로운 값을 가지는지를 묻는 것이다. 위의 예시에서라면 $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 2$이다.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

치환의 곱과 역치환

- **항등치환**은 치환 결과 자기 자신을 얻는 치환으로, $\mathrm{id}(k) = k$이다.
- 두 $n-$치환 σ_1, σ_2의 합성 $\sigma_1 \circ \sigma_2$를 $n-$치환의 **곱**이라 부르고, $\sigma_1\sigma_2$라 쓰기로 한다. 이 역시도 여전히 $n-$치환이다.
- $\sigma\mathrm{id} = \sigma = \mathrm{id}\sigma$이다.
- 임의의 치환 σ에 대하여, 그 역관계를 표시하는 σ^{-1}도 치환이고, 이를 **역치환**이라 한다.
- 예를 들어, 치환

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

  는 역치환이

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

치환의 부호

- 어떤 치환을 항등치환으로 바꾸는 과정을 생각해보자. 그러면 두 번째 행에서 원래 자리를 찾아주기 위해 숫자들을 바꾸어주는 과정이 필요할 것이다.
- 예를 들어, 치환
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
는 둘째 행의 1과 3을 바꾼 후, 다시 2와 3을 바꾸어주면 된다. 즉, 적어도 2번 바꾸어주어야 한다. 이처럼 두 번 혹은 짝수 번 바꾸어 항등치환을 얻는다면, 그 치환의 **부호**는 $+1$이다. 이런 치환을 **짝치환**이라 부른다.
- 반면, 치환
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
은 둘째 행의 3과 1을 바꾸어주면 된다. 이처럼 한 번 혹은 홀수 번 바꾸어 항등치환을 얻는다면, 그 치환의 부호는 -1이다. 이런 치환을 **홀치환**이라 부른다.

전도의 수

- 다만 홀수 번 바꿔도 항등치환이 되고, 짝수 번 바꿔도 항등치환이 되는 치환이 있다면 치환의 부호를 정의하기가 쉽지 않다. 그러나 수학자들은 이것이 잘 정의됨을 밝혀냈다.
- 또한, 주어진 치환 σ에 대하여 집합

$$\{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | i < j, \sigma(i) > \sigma(j)\}$$

  의 원소의 개수 $N(\sigma)$를 치환 σ의 **전도의 수**라 정의한다.
- 즉, 치환에서 $\sigma(1)$ 이후 $\sigma(1)$보다 작은 항들의 개수, $\sigma(2)$ 이후 $\sigma(2)$보다 작은 항들의 개수, $\cdots$, $\sigma(n-1)$ 이후에 $\sigma(n-1)$ 보다 작은 항들의 개수를 모두 더한 것을 보자는 것이다.
- $(-1)^{\text{전도의 수}}$는 부호 $\operatorname{sgn}(\sigma)$와 같다.

치환의 부호의 성질

- $\mathrm{sgn}(\mathrm{id}) = 1$이다.
- 두 치환 σ_1과 σ_2에 대하여,

$$\mathrm{sgn}(\sigma_1\sigma_2) = \mathrm{sgn}(\sigma_1)\mathrm{sgn}(\sigma_2)$$

  이다.
- 임의의 치환 σ와 그 역치환 σ^{-1}은 부호가 같다. 즉,

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1})$$

행렬식

- 이차 정사각행렬의 **행렬식**은

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

  로 정의한다.
- 삼차 정사각행렬

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

  의 행렬식은

$$\begin{aligned} \det A = & \, a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ & - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} \end{aligned}$$

  으로 정의한다.

행렬식

- S_n은 $n-$치환 전체의 집합을 의미한다.
- 일반적으로, $n \times n$ 행렬에서는 행렬식을

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

  으로 정의한다. $n = 3$일 때는 앞의 식과 일치함을 확인할 수 있을 것이다.
- 항등행렬에서는 $\sigma = \mathrm{id}$ 이외에는 $a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = 0$이 될 것이므로, 항등행렬의 행렬식은 1이다.
- 만약 대각선 원소 기준으로 위쪽이나 아래쪽에는 0만 있게 된다면, 이 경우에도 역시 id만 유효하게 되므로, 대각선 원소들의 곱이 행렬식의 값이 된다.

Example

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = 0 + 30 + 42 - 24 - 48 - 0 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 291 & 392 & 293 \\ 0 & 2 & 131 & -92 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$$

교대다중선형사상

- n차 정사각행렬 $A = (a_{ij})$를 n개의 $n-$벡터

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

  의 모임으로 이해하자.
- 그러면

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

  으로 써줄 수 있고,

$$\det A = \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

  이다.

교대다중선형사상

정리 3.2.2

행렬식 det에 대하여,
(0) 항등행렬의 행렬식값은 1이다.
(1) 각 열에 대하여 선형사상이다. 즉, 실수 t와 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$에 대하여 다음이 성립한다. (다중선형적)

$$\begin{aligned}&\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_{i-1}, t\mathbf{a}_i + \mathbf{a}'_i, \mathbf{a}_{i+1}, \cdots, \mathbf{a}_n)\\ &= t\det(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}'_i, \mathbf{a}_{i+1}, \cdots, \mathbf{a}_n)\end{aligned}$$

(2) 두 열을 바꾸면 부호가 바뀐다. 즉, $i < j$이면

$$\det(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_n) = -\det(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_n)$$

이다. (교대적)
(3) 이러한 교대다중선형성을 만족하는 사상은 행렬식의 상수배인 것만 존재한다.

교대다중선형사상

따름정리 3.2.3

(1) 서로 다른 열에 같은 벡터가 있는 정사각행렬의 행렬식은 0 이다.

증명.

$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j$라고 생각하여 보자. 그러면,

$$\det(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_n) = -\det(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_n)$$

처럼 i열과 j열을 바꾸더라도 위의 식이 성립해야만 하는데, 이런 성질을 만족하려면

$$\det(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_n) = 0$$

이다.

따름정리 3.2.3

(2) 정사각행렬에서 어떤 열의 벡터를 상수배하여 다른 열에 더하더라도, 행렬식의 값은 변화가 없다. 즉, 임의의 실수 t와 서로 다른 $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}&\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i + t\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{i+1}, \cdots, \mathbf{a}_n)\\ &= \det(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \cdots, \mathbf{a}_n)\end{aligned}$$

증명.

$$\begin{aligned}&\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i + t\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{i+1}, \cdots, \mathbf{a}_n)\\ &= \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \cdots, \mathbf{a}_n)\\ &+ t\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{i+1}, \cdots, \mathbf{a}_n)\\ &= \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \cdots, \mathbf{a}_n)\end{aligned}$$

이다.

Example

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -2 & 4 & 7 \\ -3 & 5 & 8 \\ -4 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ -3 & 5 & 3 \\ -4 & 6 & 3 \end{pmatrix} &= 3 \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \\ -4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 3 \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \times 3 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}
$$

행렬식의 곱

정리 3.2.6

n차 정사각행렬 A, B에 대하여

$$\det(AB) = (\det(A))(\det(B))$$

이다.

증명.

행렬 B의 각 열벡터를 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n$으로 두면 행렬 AB의 열벡터는 $A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2, \cdots, A\mathbf{b}_n$이다. 이제, 함수

$$f(\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n) = f(B) = \det(AB)$$

로 정의한다면, f는 교대다중선형사상이며, $f(I) = \det(A)$이다. 따라서, 정리 3.2.2(3)에 의하여

$$f(B) = f(I) \det B = (\det A)(\det B)$$

전치행렬의 행렬식

정리 4.2.5

n차 정사각행렬 A와 그 전치행렬은 행렬식 값이 같다.

$$\det(A) = \det(A^t)$$

증명.

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdot a_{\sigma(n)n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdot a_{n\sigma^{-1}(n)} \\
&= \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau^{-1}) a_{1\tau 1} a_{2\tau 2} \cdots a_{n\tau n} \\
&= \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) a_{1\tau 1} a_{2\tau 2} \cdots a_{n\tau n} \\
&= \det(A^t)
\end{aligned}$$

행렬식과 일차독립

정리 4.2.2

$n-$벡터 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$이 일차독립일 필요충분조건은 아래와 같다.

$$\det(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n) \neq 0$$

증명.
먼저 일차독립임을 가정하자. 그러면 이들은 $n-$공간을 생성하니, 표준단위벡터 $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$이 이들의 일차결합으로 표시된다. 따라서

$$\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i b_{ij}$$

로 쓸 수 있다. 이제

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}, \quad B = (b_{ij})$$

라고 두면 $I = AB$가 되고, 따라서

$$1 = \det I = \det AB = (\det A)(\det B)$$

이므로 $0 \neq \det(A)$를 얻는다.

행렬식과 일차독립

반대로 $n-$벡터 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$이 일차종속이면, 이들 중 어느 하나가 나머지 벡터들의 일차결합이다. 일반성을 잃지 않고

$$\mathbf{a}_1 = c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n$$

이라 두자. 그러면

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a_n}) &= \det(\sum_{k=2}^{n} c_k\mathbf{a}_k, \cdots, \mathbf{a_n}) \\ &= \sum_{k=2}^{n} c_k \det(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n) \\ &= 0\end{aligned}$$

을 얻는다.

가역행렬의 행렬식

정리 4.2.4

n차 정사각행렬 A가 가역일 필요충분조건은 $\det A \neq 0$이다. 이때

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$$

이다.

증명.
만약 n차 정사각행렬 A가 역행렬을 가진다면,

$$1 = \det I = \det(AA^{-1}) = (\det A)(\det A^{-1})$$

이므로, $\det A \neq 0$이고 $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$이다.

가역행렬의 행렬식

반대로 $\det A \neq 0$이면 A의 열벡터 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$가 일차독립인 $n-$벡터들이고, 따라서 이들은 $n-$공간의 기저이다. 그러면 $\mathbb{R}^n$의 어떤 벡터 $\mathbf{v}$에 대하여,

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n = A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

이 될 것이다. 그리고 이 $c_1, c_2, \cdots, c_n$은 유일하게 결정됨이 알려져 있으므로, 행렬 A에 대응되는 선형사상 L_A는 전단사함수이며 역함수를 가진다. 그 역함수 역시 어떤 n차 정사각행렬 B에 대한 선형사상 L_B일 것이다. 따라서

$$L_{AB} = L_A \circ L_B = L_I = L_B \circ L_B = L_{BA}$$

로부터 $AB = I = BA$를 얻는다. 즉, $A^{-1} = B$

벡터곱의 성질

정리 1.1.1

삼차원 공간의 임의의 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

숙제 문제

- 256쪽 1, 2번
- 265쪽 1, 8, 9번
- 275쪽 8번
- 278쪽 11, 22(a)번
- 290쪽 21, 22, 25번