

1 좌표계

좌표계와 곡선. 1. 원기둥 좌표계로 주어진 방정식

$$z = r^2 \cos 2\theta$$

를 직교좌표계 (x, y, z) 와 구면좌표계 (ρ, φ, θ) 의 방정식으로 각각 나타내시오.

좌표계와 곡선. 2. 구면좌표계로 주어진 영역

$$\left\{ (\rho, \varphi, \theta) : \rho \leq 2 \cos \varphi, 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2} \sec \varphi \right\}$$

을 좌표공간에 그리고, 그 부피를 구하여라.

좌표계와 곡선. 3. 직교좌표계 (x, y, z) 와 구면좌표계 (ρ, φ, θ) 에 대하여 두 식 $\varphi \leq \frac{\pi}{6}$ 과 $z \leq 4$ 로 표현된 영역의 부피를 구하시오.

좌표계와 곡선. 4. 공간의 점 P, Q 를 구면 좌표계로 나타낼 때, 각각

$$P = \left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right), \quad Q = \left(2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$$

이라고 하자. 이때, P 와 Q 사이의 거리를 구하고, 삼각형 OPQ 의 넓이를 구하라.

좌표계와 곡선. 5. 구면좌표계에서 $\rho = 2 \cos \varphi$ 와 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 으로 표현되는 두 곡면으로 둘러싸인 영역 중 직교좌표계로 표현된 점 $(0, 0, 1)$ 을 포함하는 영역의 부피를 구하시오.

좌표계와 곡선. 6. 구면좌표계 (ρ, φ, θ) 에서 아래와 같이 주어진 곡면의 겹넓이를 구하시오.

$$\rho = 4 \cos \varphi$$

2 곡선

좌표계와 곡선. 7. 평면에 곡선 $X(t) = r(t)(\cos t, \sin t)$ 가 있다. 모든 t 에 대하여 $r(t) > 0$ 이고 $X(t)$ 와 $X'(t)$ 의 사잇각이 α ($0 < \alpha < \pi$)로 일정할 때, 모든 t 에 대하여 $r(t) = ae^{kt}$ 꼴임을 보여라.

좌표계와 곡선. 8. 극좌표로 주어진 두 곡선 $r = 2 \cos \theta + 2$ 와 $r = \cos \theta$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하여라.

좌표계와 곡선. 9. 극좌표계에서 $r = |1 + 2 \cos \theta|$, $0 \leq \theta \leq \pi$ 로 주어진 곡선과, 직교좌표계에서 $(x - 1)^2 + y^2 = 4$, $y \leq 0$ 으로 주어진 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

좌표계와 곡선. 10. 극좌표로 주어진 곡선 $r = 3 \sin \theta$ 의 내부이면서 $r = 1 + \sin \theta$ 의 외부인 영역의 넓이를 구하여라. 또한, 두 곡선의 교점 중 제 1사분면 위에 있는 교점에서 각 곡선의 접선들이 이루는 각을 φ 라 할 때, $\cos \varphi$ 를 구하여라.

좌표계와 곡선. 11. 극좌표로 주어진 곡선 $r = \sin n\theta$ 에서 한 잎의 넓이를 구하여라. 단, n 은 자연수이다.

좌표계와 곡선. 12. 극좌표 $r = 1 + \cos \theta$ 로 주어진 곡선으로 둘러싸인 내부 영역을 D_1 이라고 하고, 이것을 원점을 중심으로 90° 회전하여 얻은 영역을 D_2 라고 하자. D_1 의 둘레의 길이를 구하고, D_1 과 D_2 의 교집합을 D 라 할 때 D 의 넓이를 구하여라.