행렬. 1. *Motive: 간단히 감 살리는 용도의 문제*

B가 $m \times k$ 행렬이면 B^t는 $k \times m$ 행렬이다. 따라서 B^tB는 $k \times k$행렬이므로, A는 $k \times k$행렬이다. 또한 $A^t = (B^tB)^t = B^t(B^t)^t = B^tB = A$이므로 대칭행렬임을 역시 확인할 수 있다.

행렬. 2. *Motive: 간단히 감 살리는 용도의 문제*

$A^t = (B + B^t)^t = B^t + B = B + B^t = A$이며, $C^t = (B - B^t)^t = B^t - B = -C$임을 확인할 수 있다. 이로부터 확인할 수 있는 것이, $A+C$를 하면 $2B$가 된다는 것이며, A는 P의 성질을, C는 Q의 성질을 만족한다는 것이다. 따라서

$$M = \frac{1}{2}(M + M^t) + \frac{1}{2}(M - M^t) = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q$$

로 표시될 수 있음을 안다. 해당 성질을 만족하는 행렬은 어떤 실수로 나누어도 여전히 해당 성질을 만족한다.

행렬. 3. *Motive : 참인 명제들은 간단한 계산을 통해 보일 수 있는 반면, 해답이 잘 안보이면 대부분 반례가 있다.*

1)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

일 때를 생각해본다면,

$$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

인 반면

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

으로 서로 같지 않다. 따라서 거짓.

2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

일 때를 생각해본다면,

$$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

인 반면

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

으로 서로 같지 않다. 따라서 거짓.

3)

$$(A^2)^t = (AA)^t = A^tA^t = AA = A^2$$

이다. 따라서 참.

행렬. 4. *Motive : 어떤 선형사상에 대응되는 행렬을 구하기 위해서는 어떻게 해야 하는가?*

대응하는 행렬을 구하기 위해서는 $T(1,0,0)$, $T(0,1,0)$, $T(0,0,1)$을 구해야 한다.

$$T(1,0,0) = \frac{1}{2}\left(T(1,-1,0) + T(2,2,-1) + T(-1,-1,1)\right) = (2,4,-1,3)$$

$$T(0,1,0)=\frac{1}{2}\left(T(2,2,-1)-T(1,-1,0)+T(-1,-1,1)\right)=(-2,2,-2,3)$$
$$T(0,0,1)=T(2,2,-1)+2T(-1,-1,1)=(-1,9,-6,6)$$

으로부터 대응되는 행렬은

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & 9 \\ -1 & -2 & -6 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

임을 확인할 수 있다.

행렬. 5. *Motive : 선형사상의 두 가지 조건을 만족시키는지 확인하여 보자.*

1) $T(1,3,1)=(4,3,1)$*인 반면,* $T(2,6,2)=(8,12,2)$*로*

$$2T(1,3,1)\neq T(2,6,2)$$

이기에 선형사상이 아니다.

2) 선형사상이 맞다. 먼저, 실수 a*에 대하여*

$$aT(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a(x_{n-1},x_{n-2},\cdots,x_1)=(ax_{n-1},ax_{n-2},\cdots,ax_1)$$

이며

$$T(ax_1,ax_2,\cdots,ax_n)=(ax_{n-1},ax_{n-2},\cdots,ax_1)$$

이기에 서로 같다. 또한

$$T(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)=(x_{n-1}+y_{n-1},\cdots,x_1+y_1)=T(x_1,x_2,\cdots,x_n)+T(y_1,\cdots,y_n)$$

임 역시 확인 가능하다. 따라서 이는 선형사상이며, $T(\mathbf{e}_1)$*부터* $T(\mathbf{e}_n)$*을 직접 구해 보면 행렬은*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

이라는 $(n-1)\times n$ *행렬을 만들 수 있게 된다.*

3) 실수 a*에 대하여*

$$T(a\mathbf{x})=(a\mathbf{x}\cdot a\mathbf{x})a\mathbf{x}=a^3T(x)$$

으로, $a\neq\pm1$*일 경우 선형적이지 않다. 따라서, 선형사상이 아니다.*

행렬. 6. *Motive : 단순 계산 문제이다.*

$$\begin{aligned} A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2 &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-(a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+(ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+dc & ad+d^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= O \end{aligned}$$

가 성립한다.

행렬. 7. *Motive : 행렬의 한 행에 상수를 곱하거나, 두 행의 순서를 바꾸거나, 한 행에 다른 행의 상수 배를 하여 더한다는 등의 조작은 어떻게 표현할 수 있을까?*

행렬 A의 앞에 E를 곱한다면,

$$\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & a_{13}+a_{23} \end{pmatrix}$$

이 됨을 확인할 수 있다. 이를 잘 응용하면, A에 대해 원하는 조작을 가하는 행렬 X는

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

임을 확인할 수 있다.

행렬. 8. *Motive : 단순 계산 문제이다.*

AB의 j번째 열을 들여다보자. 이때, AB는 $m \times l$ 행렬이므로 j는 1과 l 사이의 자연수이다.

AB의 i행 j열은 A의 i행과 B의 j열을 벡터로 본 이후 내적한 것과 같다. 그런데, $A\mathbf{b}_j$의 i번째 원소를 볼 경우에는 이 역시 A의 i번째 행과 $\mathbf{b}_j$, 즉 B의 j번째 열을 내적한 것과 같다. 따라서 모든 i에 대해 이것이 성립하므로, AB의 j열은 B의 j열에 A를 곱한 것과 같음을 알 수 있다.

행렬. 9. *Motive : 벡터의 내적을 다른 방법으로 표시할 수는 없을까?*

1) $(A\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = (A\mathbf{v})^t\mathbf{w} = \mathbf{v}^tA^t\mathbf{w} = \mathbf{v}^tA\mathbf{w} = \mathbf{v}\cdot(A\mathbf{w})$

2) $(A\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = (a\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = a\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$이다. 반면, $\mathbf{v}\cdot(A\mathbf{w}) = \mathbf{v}\cdot(b\mathbf{w}) = b\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ 이다. 이때, a와 b가 다르므로 두 벡터를 내적한 값이 0이다. 즉, 두 벡터는 수직하다.

행렬. 10. *Motive : 선형사상인 것은 무엇과 동치인가?*

만약 $L(p\mathbf{x}+q\mathbf{y}) = pL(\mathbf{x}) + qL(\mathbf{y})$가 성립한다면, 선형사상의 조건을 만족시킬 것이다. 따라서 이것이 만족하는지 확인하여 보자.

$$\begin{aligned} L(p\mathbf{x}+q\mathbf{y}) &= \frac{(\mathbf{a}\times(p\mathbf{x}+q\mathbf{y}))\times\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} \\ &= p\frac{(\mathbf{a}\times\mathbf{x})\times\mathbf{a}^2}{|\mathbf{a}|} + q\frac{(\mathbf{a}\times\mathbf{y})\times\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} \\ &= pL(\mathbf{x}) + qL(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

위와 같이 선형사상임을 확인할 수 있다.

$$L(1,0,0) = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}(c^2+b^2, -ab, -ac)$$

$$L(0,1,0) = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}(-ab, c^2+a^2, -bc)$$

$$L(0,0,1) = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}(-ac, -bc, a^2+b^2)$$

이므로, 우리가 원하는 행렬은

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix} c^2+b^2 & -ab & -ac \\ -ab & c^2+a^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

이다.

행렬. 11. *Motive : 삼차원 공간 안에서 한 점을 다른 점으로 옮기는 변환은 어떤 행렬에 대응될까?*

1) 평면의 방정식을 먼저 구해 보자. 두 벡터에 모두 수직한 법선 벡터는 $(1, -1, 1)$*이다. 따라서 평면의 방정식은* $x - y + z = 0$*이며,* P*는* $(x + t, y - t, z + t)$*라고 표현될 수 있다. 이것이 평면 위에 있어야 하므로* $x - y + z + 3t = 0$*이고,* $t = \frac{-x+y-z}{3}$*이다. 따라서*

$$(\frac{2x + y - z}{3}, \frac{x + 2y + z}{3}, \frac{-x + y + 2z}{3})$$

이 P*의 좌표가 된다.*

2, 3) 대응하는 행렬을 구한 이후, 행렬에 사상이 대응되기에 이것이 선형사상임을 보이자. $X = (x, y, z)$*는 위와 같은* P*로서 이동한다. 따라서 대응되는 행렬은*

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

이며, 이에 따라 P*는 선형사상이다.*

행렬. 12. *Motive : 선형사상임을 보이는 방법에는 또 무엇이 있을까?*

$\mathbf{x} = (x, y, z)$*라고 두자.*

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}) &= \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{a} \times (0, 2z, -2y) \\ &= (-2y, 2y, 2z) \end{aligned}$$

이다. 따라서, 대응하는 행렬은

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

임을 확인 가능하며 그렇기에 L*은 선형사상이다.*

행렬. 13. *Motive : 근의 개수는 이 연립방정식의 어떤 부분에 의존할까?*

1) 둘째 식에서 첫째 식의 두 배를 빼고, 셋째 식에 첫째 식을 더해 준다면 각각

$$y + (t - 2)z = -1$$

$$(4 + t)y - 5z = -5$$

이다. 만약 이 두 개의 식이 동일한 식이라면, 근이 무한 개 존재하게 될 것이다. 따라서

$$1 : 4 + t = t - 2 : -5 = -1 : -5$$

인 t*를 떠올린다면,* $t = 1$*이 된다. 이 경우에 일반해를 구하여 보자. 그러면* $y - z = -1$*이 성립하면 되고, 이 경우에* $x = 1 - 4y - z = -5y$*로 표현 가능하다. 따라서 일반해는*

$$\frac{x}{-5} = y = z - 1$$

직선 위에 있는 점 (x, y, z)*가 된다.*

2) 만약 위의 두 식에서 일치하는 것이 아니라, 기울기만 같고 상수항 부분이 다르다면 근이 없다. 따라서 $1 : 4 + t = t - 2 : -5$*인* $t^2 + 2t - 8 = -5$*의 근* $t = -3$*일 때 근이 없다.*

행렬. 14. *Motive : 선형사상에 대응되는 행렬을 어떻게 구하더라?*

$$L(1,0,0) = \frac{1}{2}\left(L(1,0,1) + L(1,1,0) - L(0,1,1)\right) = (0,7,0)$$
$$L(0,1,0) = \frac{1}{2}\left(L(0,1,1) + L(1,1,0) - L(1,0,1)\right) = (-1,3,3)$$
$$L(0,0,1) = \frac{1}{2}\left(L(1,0,1) + L(0,1,1) - L(1,1,0)\right) = (2,-8,0)$$

따라서 대응되는 행렬은

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 7 & 3 & -8 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

임을 알 수 있다. 또한 세 벡터 $(0,7,0)$, $(-1,3,3)$, $(2,-8,0)$*이 일차독립임을 쉽게 확인할 수 있으므로,* L*의 역사상이 존재한다.*

행렬. 15. *Motive : 역행렬의 정의는 무엇인가?*

역행렬에 정의에 의해, 해당하는 행렬 앞에 곱함으로써 단위행렬을 만들 수 있는 행렬을 구하면 된다. 첫 행은 a_1*으로 나누고, 셋째 행에서 둘째 행을 뺀 후, 셋째 행은* a_2*로 나누고, 둘째 행에서는 첫째 행을 빼주면 단위행렬이 된다. 이러한 조작을 모두 통틀면 행렬*

$$E = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a_1} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_2} \end{pmatrix}$$

가 원하는 역행렬이다.

행렬. 16. *Motive : 설마 2021 제곱을 다 하는 사람이 있겠어?*

$$I - A^{2021} = (I - A)(I + A + \cdots + A^{2020})$$

이므로, 그 행렬식은 $det(I - A)$*와* $det(I + A + \cdots + A^{2020})$*의 곱과 같다.*

$$I - A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix}$$

인데, 이를 잘 들여다보면 행을 이루는 세 벡터가 일차독립이 아니다(첫째 행과 셋째 행을 더한 다음 둘째 행의 두 배를 빼면 영벡터). 따라서, 이 행렬의 행렬식은 0이다. 그러므로, 이를 인수로 가지는 $I - A^{2021}$ *역시 행렬식이 0이다.*

행렬. 17. *Motive : 계산 문제이다.*

$xI - A$*를 구하여 보면,*

$$\begin{pmatrix} x-1 & -2 & 2 \\ -2 & x-5 & -3 \\ -1 & 0 & x-8 \end{pmatrix}$$

이며 그 행렬식을 구하면 $(x-1)(x-5)(x-8) - 6 + 2(x-5) - 4(x-8) = x^3 - 14x^2 + 51x - 24$*이고,* $p(x)$*가 이것이 된다.*

$$x^3 - 14x^2 + 51x - 24 = (x-8)(x^2 - 6x + 3)$$

이므로, 근은 $8, 3 \pm \sqrt{6}$*이 된다.*

행렬. 18. *Motive: S의 모양이 뭐지?*

S는 벡터 $(2,-2,0)$, $(2,3,-1)$, $(-3,0,6)$이 이루는 평행육면체와 같다. 따라서 세 벡터로 이루어지는 행렬의 행렬식을 구하면, 54가 부피임을 알 수 있다.

행렬. 19. *Motive : 거듭제곱하면, 역행렬은, 전치행렬은.... 원래 행렬의 행렬식을 어떻게 바꾸지?*

1) $\det(A^{2021}) = (\det(A))^{2021}$이다. 즉 이것이 0일 조건은 주어진 행렬의 행렬식이 0인 것이다. 주어진 행렬의 행렬식을 x로 표현하면,

$$x^2 + 6 + 3x - 5 = x^2 + 3x + 1$$

이 된다. 이것이 0인 x의 값은

$$\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

임을 확인할 수 있다.

2) $x = 5$일 때의 행렬식은 41임을 위의 문제로부터 확인할 수 있다. $\det(A^{-1})$은 1/41이 될 것이며, 전치행렬의 행렬식은 원래와 같으므로 구하는 값은 1/41이 될 것이다.

행렬. 20. *Motive : 식 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$의 자명하지 않은 해가 있다는 것은 무슨 뜻인가?*

식 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$의 자명하지 않은 해가 있다는 것은 곧 A를 이루는 3개의 열이 일차독립이 아니라는 것이다. 따라서 행렬식은 0이다.

행렬. 21. *Motive : 평행육면체의 넓이를 행렬로 표현했던 것 같은데...*

1) $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}$이라는 세 벡터로 이루어지는 사면체의 부피를 구해야 하는 것이므로, 이는 평행육면체를 반으로 나눈 것과 같다. 평행육면체의 경우에는 행렬

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

의 행렬식과 같으므로, 그 값인 2를 6으로 나눈 $\frac{1}{3}$이 그 부피이다.

2) $L(P_1) - L(O) = L(P_1 - O) = L(\overrightarrow{OP_1})$인 것으로부터, 구하는 사면체의 부피는 결국엔 원래의 행렬 앞에 L을 곱한 후 행렬식을 구한 것과 같음을 알 수 있다. 이는 원래 행렬식의 행렬에 주어진 행렬의 행렬식을 곱하면 되는 것이다. 주어진 행렬의 행렬식은

$$5\sqrt{6} - 18 + 15 = 5\sqrt{6} - 3$$

이다. 따라서, 사면체의 부피는 여기에 2를 곱한 이후 6으로 나눈 $\frac{5\sqrt{6}}{3} - 1$이다.

행렬. 22. *Motive : 함수를 행렬의 형태로 바꾸어 볼까?*

먼저, A가 가역행렬이면 역행렬이 존재하므로, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$에서 양변에 A의 역행렬을 곱하면 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$이 유일한 근임을 확인할 수 있다. 동일한 이유로, 우변에 $\mathbf{0}$이 아니라 크기가 맞는 어떤 벡터가 와도 근은 유일하다. 주어진 점들에 대하여, $n-1$차 이하의 다항식 $a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$을 생각하자. 그러면 이는 해당하는 점들을 모두 지나야 하므로,

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & \cdots & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots y_n \end{pmatrix}$$

이 성립함을 확인할 수 있다. 즉, $n-1$*차 이하의 다항함수가 유일한 것과 동치인 명제는 주어진 행렬*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & \cdots & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

의 행렬식이 0이 아닌 것이다. 첫 행을 다른 모든 행에서 빼면,

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2-x_1 & x_2^2-x_1^2 & \cdots & x_2^{n-1}-x_1^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x_n-x_1 & \cdots & \cdots & x_n^{n-1}-x_1^{n-1} \end{pmatrix}$$

이며 그 행렬식은 행렬식의 정의에 의해

$$\begin{pmatrix} x_2-x_1 & x_2^2-x_1^2 & \cdots & x_2^{n-1}-x_1^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n-x_1 & \cdots & \cdots & x_n^{n-1}-x_1^{n-1} \end{pmatrix}$$

의 행렬식과 같다. 여기서 교대다중선형사상의 정의를 이용하여 행의 공통인수들을 빼주면, 그 행렬식 값은

$$\begin{pmatrix} 1 & x_2+x_1 & \cdots & x_2^{n-2}+\cdots+x_1^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & \cdots & x_n^{n-2}+\cdots+x_1^{n-2} \end{pmatrix}$$

의 행렬식에 $(x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)$*을 곱한 것과 같다. 이를 반복해 나가면, 그 행렬식은* $\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$ *임을 수학적 귀납법을 통해 확인할 수 있고,* x*좌표가 모두 다르다고 했으므로 행렬식은 0이 아니다. 따라서, 증명이 완료된다.*

행렬. 23. *1)*

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

인 경우, $AB=O$*임에도 불구하고*

$$BA=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

으로 O*가 아니다.*

2) $\det(A^tA)=\det(A^t)\det(A)=(\det(A))^2$*이 성립한다.*

3) $A=B=I$*일 때,* $\det(A+B)=4$*이지만* $\det(A)+\det(B)=2$*다.*

4) 책에 언급되어 있는 내용으로, 사실이다.

5)

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

이라면, 일단 그 자체는 O*가 아니다.*

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

으로 O*가 아니다. 그러나* $A^3=O$*로, 반례가 된다.*

6)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

라고 하자. 그 다음 $B = (2, -1)$, $C = (4, -2)$라고 하면 $AB = (0, 0)$, $AC = (0, 0)$으로 첫 열이 같지만 B와 C는 첫 열이 다르다.

7) $A = I$라고 하자. 그러면 B와 C가 동일한 첫 열을 가지므로 참이다.

8) 이 역시 참이다. 앞서 행렬을 곱하는 것은 뒤에 있는 행렬의 각 열에 앞에 있는 행렬을 곱한 열들을 늘어놓는 것과 같다고 했다.

9) $I = I - A^m = (I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^{m-1})$이 성립한다. 따라서 $I - A$는 역행렬 $I + A + A^2 + \cdots + A^{m-1}$을 가진다. 즉, 가역행렬이다.

행렬. 24. *Motive : A의 행렬식을 직접 구하기는 쉽지 않을 것 같은데, 다른 방법이 있으려나?*

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$도 $\mathbf{v}$로서 기능할 수 있으므로 대응되는 $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n$이 존재한다. 즉

$$AX = (A\mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2, \cdots, A\mathbf{x}_n) = (\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n) = I$$

이게 하는 행렬

$$X = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n \end{pmatrix}$$

이 존재한다. 그런데 X의 모든 항도 정수이므로, 그 행렬식도 정수이고 A도 마찬가지다. 따라서 두 정수를 곱했는데 I의 행렬식 1이 나와야 하므로, 그 절댓값은 1임을 확인할 수 있다.

행렬. 25. *Motive : 작은 크기부터 시작해볼까?*

2×2인 경우, 그 행렬식은 $9 \times 9 - 1 \times 1$이므로 80이다. 3×3인 경우, 셋째 행에 첫째 행과 둘째 행을 모두 더해도 행렬식은 같고, 그 결과로서

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 11 & 11 & 11 \end{pmatrix}$$

이다. 11로 나눠준 이후에 셋째 행을 첫째 행과 둘째 행에서 빼면,

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

의 행렬식에 11을 곱한 값과 같음을 알 수 있다. 위의 행렬은 하삼각행렬이므로, $11 \times 8^{3-1}$이 행렬식 값임을 알 수 있다. 이와 같이 10×10 행렬을 다룰 때도, 마지막 행에 모두를 더한 다음 18로 나눠주고, 다시 빼주면 $8^9 \times 18$이 원하는 행렬식임을 알 수 있다.

행렬. 26. *Motive : 행렬식의 정의는 무엇인가?*

행렬식의 정의로부터 이 행렬의 행렬식은 $2^5 = 32$를 약수로 가져야 한다. 120은 32의 배수가 아니므로, 그럴 수 없다.

행렬. 27. *Motive : 39랑 -77은 너무 이상한데?*

주어진 행렬은 상삼각행렬이므로 대각선 원소의 곱인 10이 그 행렬식이다. 다섯제곱하면 행렬식도 다섯제곱되므로, 정답은 100000이다.

행렬. 28. *Motive : 2021제곱을 직접 계산하라고 하지는 않을 것 같다*

1) X에서 $E(X)$로 가는 벡터는 평면에 수직하며, 해당하는 벡터의 크기는 $X - P$를 n에 정사영한 것과 같다. 이러한 점을 모두 고려하면,

$$E(X) = X + \frac{((P - X) \cdot \mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$$

임을 알 수 있다. 그런데 법선벡터가 단위벡터이므로, 주어진 것과 같다.

2) 점 (p,q,r)에 대하여 정사영된 점은 $(p-t,q-2t,r-3t)$의 형태로 표현되며 이는 평면 위에 있는 점이므로 $t=\frac{p+2q+3r}{14}$임을 알 수 있다. 따라서 정사영된 점은

$$(\frac{13p-2q-3r}{14},\frac{-2p+10q-6r}{14},\frac{-3p-6q+5r}{14})$$

이다. 대응되는 행렬 A는

$$\frac{1}{14}\begin{pmatrix}13 & -2 & -3\\ -2 & 10 & -6\\ -3 & -6 & 5\end{pmatrix}$$

임을 확인할 수 있다. 이때 직접 확인해보거나, 정사영은 두 번 해도 동일해진다는 점에서 $A^2=A$이다. 따라서 $\det(A^{2021}-I)$는 $\det(A-I)$와 같다. 또한, 평면 위에 있는 점 $\mathbf{x}$에 대해서는 $A\mathbf{x}=\mathbf{x}$라는 것으로부터 $(A-I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$에 자명하지 않은 해가 있기에 $\det(A-I)=0$이다. 또한 어떤 원점이 아닌 점 $\mathbf{x}$에서 원점에 수선의 발을 내릴 수 있기에, $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$에 자명하지 않은 해가 있으므로 $\det(A)=0$이다. 따라서 값은 0이다.

3) 대칭시킬 경우에는

$$V(X)=X+2(O-X)\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$$

이 성립한다. 이때, 원점을 지나기에 O를 P 대신 사용해주어도 괜찮다. $V(tX+Y)$에 대해 시행해보면 그 값이 $tV(X)+V(Y)$와 같아 선형사상이다.

4) B는 대칭을 시키는 것인데, 2)에서 구한 t에 대해 두 배를 해 주어 원래 점에서 빼주면 충분하다. 따라서 대칭된 점은

$$(\frac{12p-4q-6r}{14},\frac{-4p+6q-6r}{14},\frac{-6p-12q-4r}{14})$$

이며, 이 경우에는 $B^2=I$가 성립함을 확인할 수 있다. 이는 점을 두 번 대칭하면 원래 점으로 돌아온다는 점에서 자명하다. 즉 $B-I$의 행렬식을 찾아야 하는데, 평면 위에 있는 점은 대칭해도 원래 점으로 다시 돌아오기 때문에 $(B-I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$에는 자명하지 않은 해가 존재한다. 따라서 행렬식은 0이다.

5) 4번과 동일한 원리로, 항상 0이다.

행렬. 29. *Motive : 세 벡터가 뭔지 정확히 모르는데 어떻게 일차독립인지 판단하지?*

1) 먼저 충분조건임을 보이자. L이 일대일 함수임에도 $L(\mathbf{x})=\mathbf{0}$의 해 중 자명하지 않은 것이 있다고 하자. 그러면 $L(\mathbf{0})=L(\mathbf{x})$이기에, 일대일 함수가 아니다. 따라서 자명한 해만이 존재한다. 필요조건임을 보이자. 만약 일대일함수가 아니라면, 서로 다른 두 벡터에 대해 $L(\mathbf{x})=L(\mathbf{y})$이다. 그런데 L은 선형사상이기에, $L(\mathbf{x}-\mathbf{y})=\mathbf{0}$이다. 자명한 해만 존재하므로, 이는 모순이다. 따라서 둘은 필요충분조건이다.

2) 선형사상 L이 일대일 함수이므로, 만약

$$L(a\mathbf{u}+b\mathbf{v}+c\mathbf{w})=\mathbf{0}$$

인 $(a,b,c)\neq(0,0,0)$이 존재한다면 세 벡터가 일차독립이 아님을 확인할 수 있다. 그런데 L은 선형사상이므로, 이는 주어진 세 벡터 $(2,-2,2),(-2,0,4),(1,-2,3)$이 일차독립인지와 동치이다. 그런데 세 벡터로 이루어진 행렬의 행렬식을 구하면 0이 아니기에, 이 벡터는 일차독립이다. 따라서 벡터 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 역시도 일차독립이다.

행렬. 30. *Motive : 일차종속을 판단하는 방법에는 무엇이 있었지?*

세 벡터가 일차종속이 것은 삼차원 공간에서 세 벡터 중 하나가 다른 벡터의 선형결합을 이룬다는 것이고, 이는 세 벡터가 한 평면에 포함되는 것과 동치이다. 따라서 점 A,B,C로 이뤄지는 평면 $x+2y-3z=-4$ 위에 X가 있어야 하므로, $t=2$다.

행렬. 31. *Motive : 일차독립의 정의가 뭐지?*

만약 어떤 $(a,b,c,d)\neq(0,0,0,0)$이 존재하여 $a\mathbf{v}_1+b\mathbf{v}_2+c\mathbf{v}_3+d\mathbf{v}_4$가 영벡터라고 해보자. 그러면 양변에

모두 L을 취하면, 결국엔

$$2a\mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_3 + 7d\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$$

$$4a\mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_3 + 49d\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$$

$$8a\mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_3 + 343d\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$$

까지 발전시킬 수 있다. 그러면 둘째 식에서 첫째 식을 뺄 경우

$$2a\mathbf{v}_1 + 42d\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$$

이며, 셋째 식에서 첫째 식을 빼면

$$6a\mathbf{v}_1 + 336d\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$$

이다. 이 둘이 모두 성립하려면 $a = d = 0$이고, 나머지 식에 대입하면 모두가 0이다. 따라서 그런 a, b, c, d가 없기에, 네 벡터는 일차독립이다.

행렬. 32. *Motive : F가 모든 벡터를 만들 수 있을 조건과, 선형독립일 조건은...? 같나?*

먼저 F가 선형결합을 통해 모든 벡터를 만들 수 있을 조건은 2차원이므로 선형독립일 조건과 같다. 따라서 선형독립인지를 판단하자. 만약 $(p, q) \neq (0, 0)$이 $(pa+qc)v_1 + (pb+qd)v_2 = \mathbf{0}$이라면, E는 기저였으므로 $pa+qc = pb+qd = 0$이어야 한다. 따라서, $a : c = b : d$이다. 즉, 다르게 표현하면 $ad - bc \neq 0$이어야 기저가 될 수 있다.

행렬. 33. *Motive : 3차원 공간에서 평면은 뭐지?*

1) $\mathbf{x} = (x, y)$를 선형사상 L_A를 이용해 처리하면, 그 결과는

$$x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

이다. 따라서 두 벡터로 선형결합되어 표현되는 영역이 치역이기에, 평면이다. 원점을 포함하고, 위의 두 벡터에 수직한 법선벡터를 가지는 평면이기에, 그 식은 $x - y - z = 0$이다.

2) $A\mathbf{x}$는 평면 위에 있는 점이므로, Q와의 거리가 최소가 되려면 Q가 평면 위에 정사영된 점이 $A\mathbf{x}$일 것이다. 정사영된 점은

$$Q - p_{(1,-1,-1)}(Q)$$

이며, 이를 계산하면 $Q = (4/3, 2/3, 2/3)$이 될 것이다. 즉, $x = 4/3, y = 2/3$이므로

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

이다.

행렬. 34. *Motive : 어? 적분 안에 있는 식이 뭔가 이상한데?*

1) 정리하면 $2r + x = 1$이기 때문에, $4x^2 + 4y^2 = 1 - 2x + x^2$이다. 즉,

$$3(x + \frac{1}{3})^2 + 4y^2 = \frac{4}{3}$$

이며 더욱 정리하면

$$\frac{9}{4}(x + \frac{1}{3})^2 + 3y^2 = 1$$

임을 확인할 수 있다.

2) 적분값은 주어진 타원의 넓이에 2배를 한 것과 같다. 주어진 타원에서 장반지름은 $\frac{2}{3}$, 단반지름은 $\sqrt{\frac{1}{3}}$

이기에, 주어진 적분의 값은 $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$이다.

행렬. 35. *Motive : 곡선의 길이를 어떻게 구하지?*

$$X'(t) = (-\frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\sin\arctan t + \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\arctan t, \frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\arctan t + \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\sin\arctan t)$$

이므로

$$|X'(t)| = \frac{1}{(1+t^2)}$$

임을 확인할 수 있다. 따라서

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$$

의 값을 구해주면 되고, 이는 곧

$$\arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

행렬. 36. *Motive : 굳이 극좌표로 바꾸라고 한 이유가 뭘까?*

1) 먼저, 곡선을 극좌표로 바꾸자.

$$r^2 = 2|r|\sqrt{\cos 2\theta}$$

이므로,

$$|r| = 2\sqrt{\cos 2\theta}$$

라고 정리해줄 수 있다. 이때, 직접 그려보면 이는

$$r = 2\sqrt{\cos 2\theta}$$

와 같음 역시 알 수 있다. 모양은 리본 모양처럼 나오면 된다.

2) $\frac{1}{2}r^2$의 값이 $2\cos 2\theta$로 매우 간단하다. 리본의 오른쪽 부분만 먼저 구해보면, 이는 θ가 $-\pi/4$일 때부터 $\pi/4$일 때까지 $2\cos 2\theta$를 적분한 것이므로,

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2\cos 2\theta d\theta = [\sin 2\theta]_{-\pi/4}^{\pi/4} = 2$$

이다. 이것이 두 개 있으니, 넓이는 4다.

행렬. 37. *Motive : 곡선의 길이는 어떻게 재지?*

$X'(t) = (e^t\cos t - e^t\sin t, e^t\cos t + e^t\sin t)$ 이므로 $|X'(t)| = \sqrt{2}e^t$임을 알 수 있다. 따라서 $t = 0$부터 $t = 1$까지 잰 거리는 $\sqrt{2}e$이다.

행렬. 38. *Motive : 굳이 모든 교점에서 접선의 각을 구해야 하나..ㅜㅜ*

1) 두 곡선의 교점을 먼저 구해 보자. C_2에 의하여 $r = 0.5$로 고정되므로, C_1에서 $r = \pm 0.5$이 되는 점을 찾자. 해당하는 경우에는 $\cos 2\theta = 0.5$이므로, $\theta = \pi/6, \pi/3, 2\pi/3, 5\pi/6, 7\pi/6, 4\pi/3, 5\pi/3, 11\pi/6$이다. 공통영역의 넓이는 $-\pi/6$부터 $\pi/6$까지의 부분을 4배 해주면 된다. 해당 부분은 원의 넓이인 $\pi/24$에, $\pi/6$부터 $\pi/4$까지 C_1이 둘러싸고 있는 넓이인

$$0.5\int_{\pi/6}^{\pi/4}\cos^2 2\theta d\theta = 0.5\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{\cos 4\theta + 1}{2}d\theta = 0.5[\frac{1}{8}\sin 4\theta + \frac{1}{2}\theta]_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{1}{48}\pi - \frac{\sqrt{3}}{32}$$

에 두 배 해준 것을 더하면 된다. 즉,

$$4(\pi/24 + \pi/24 - \frac{\sqrt{3}}{16}) = \frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

가 원하는 넓이다.

2) 극좌표는

$$(\frac{1}{2},\frac{1}{6}\pi),(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\pi),(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\pi),(\frac{1}{2},\frac{5}{6}\pi)$$

$$(\frac{1}{2},\frac{7}{6}\pi),(\frac{1}{2},\frac{4}{3}\pi),(\frac{1}{2},\frac{5}{3}\pi),(\frac{1}{2},\frac{11}{6}\pi)$$

이 되며, 이들은 모두 대칭형이기에 각도는 모두 같다. 대표적으로

$$(\frac{1}{2},\frac{1}{6}\pi)$$

에서의 접선 사이 각도를 구하여 보자. 해당 점에서 C_2*의 경우에는 기울기가* $-\sqrt{3}$*이어야 한다.* C_1*의 경우에는* $\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\cos 2\theta-2\cos\theta\sin 2\theta=-\frac{7}{4}$, $\frac{dy}{d\theta}=\cos\theta\cos 2\theta-2\sin\theta\sin 2\theta=-\frac{\sqrt{3}}{4}$*이므로, 기울기가* $\frac{\sqrt{3}}{7}$*이다. 그러면* $(1,-\sqrt{3})$*과* $(7,\sqrt{3})$ *사이의 각도를 구하면 되기에,*

$$\cos\varphi=\frac{7-3}{\sqrt{52}\sqrt{4}}=\frac{1}{\sqrt{13}}$$

행렬. 39. *Motive : 간단한 연습 문제*

$r=3\theta^2$*이면,*

$$(3\theta^2\cos\theta,3\theta^2\sin\theta)$$

이므로

$$X'(t)=(6\theta\cos\theta-3\theta^2\sin\theta,6\theta\sin\theta+3\theta^2\cos\theta)$$

$$|X'(t)|=\sqrt{36\theta^2+9\theta^4}=3\theta\sqrt{4+\theta^2}$$

$$\int_1^2 3\theta\sqrt{4+\theta^2}d\theta=[(4+\theta^2)^{\frac{3}{2}}]_1^2=16\sqrt{2}-5\sqrt{5}$$

개형은 생략한다.

행렬. 40. *Motive : 곡선의 길이를 구하자.*

1) $X(\theta)=(\cos\theta+\cos^2\theta,\sin\theta+\sin\theta\cos\theta)$*로 표시되며*

$$X'(t)=(-\sin\theta-\sin 2\theta,\cos\theta+\cos 2\theta)$$

$$|X'(t)=\sqrt{2+2\cos\theta}$$

$$\int_0^\pi\sqrt{2+2\cos\theta}d\theta=2\int_0^\pi\cos\frac{\theta}{2}d\theta=[4\sin\frac{\theta}{2}]_0^\pi=4$$

2) 넓이는

$$\int_0^\pi\frac{1}{2}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta=\frac{3}{4}\pi$$

행렬. 41. *Motive : 함수의 길이를 어떻게 구하지?*

$$\int_{-b}^b\sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{a}}dx=2\int_0^b\cosh\frac{x}{a}=\left[2a\sin\frac{x}{a}\right]_0^b=2a\sin\frac{b}{a}$$

행렬. 42. *Motive: 간단한 연습문제*

1) $X'(t)=(e^t\cos t-e^t\sin t,e^t\cos t+e^t\sin t)$ *이다. 즉* $X'(\frac{\pi}{4})=(0,\sqrt{2}e^{\pi/4})$*이므로 접선* l*은* $x=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\pi/4}$ *이다.*

2) 해당하는 직선은 $y = -\frac{2}{7}x + 1$*이다. 교점을 구하면,*

$$(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\pi/4}, -\frac{\sqrt{2}}{7}e^{\pi/4} + 1)$$