해석학적 극한과 연속

2-Extra2. 1.
$$\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$
가 $x\to 0$임에 따라 극한값이 존재함을 보이고, 그 값을 구하시오.

$$\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = \frac{(x+x^2)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(2x)(\sqrt{1+x+x^2}+1)} = \frac{(1+x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2(\sqrt{1+x+x^2}+1)}$$

이다. 여기에 단순히 $x=0$을 대입할 경우 그 값이 $1/2$가 되기에, 극한값이 $1/2$가 될 것이라 추측할 수 있다. 정말 $1/2$인지 확인하여 보자.

먼저, 어떠한 양수 ε을 잡아주자. 그 다음 $|x|<\dfrac{1}{6}\varepsilon$이라고 두자. 이 경우

$$\left|\frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}+1}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{2(\sqrt{1+x+x^2}+1)}\right| \le \frac{|1-\sqrt{1+x+x^2}|}{2} < \frac{|x|}{2} < \frac{1}{12}\varepsilon$$

이다. 둘째로 $|x|<\dfrac{1}{6}\varepsilon$일 경우

$$|(1+x)-1| = |x| < \frac{1}{6}\varepsilon$$

이다.

마지막으로 $1-|x|<\sqrt{1+x},\sqrt{1-x}<1+|x|$임은 자명하므로 $|x|<\frac{1}{6}\varepsilon$일 경우

$$2-\frac{1}{3}\varepsilon < \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} < 2+\frac{1}{3}\varepsilon$$

이다 .따라서 만약 $\varepsilon<1$인 환경에서 생각해 보면,

$$\frac{(1+x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2(\sqrt{1+x+x^2}+1)} < (\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\varepsilon)(1+\frac{1}{6}\varepsilon)(1+\frac{1}{6}\varepsilon) < \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{12}\varepsilon+\frac{1}{216}\varepsilon^2) < \frac{1}{2}+\varepsilon$$

이 성립하며 왼쪽으로는

$$\frac{(1+x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2(\sqrt{1+x+x^2}+1)} > (\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\varepsilon)(1-\frac{1}{6}\varepsilon)(1-\frac{1}{6}\varepsilon) = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{12}\varepsilon^2-\frac{1}{216}\varepsilon^3) > \frac{1}{2}-\varepsilon$$

이 성립한다. 따라서 $\varepsilon<1$일 때는 $\delta=\dfrac{1}{6}\varepsilon$으로 둘 경우 모든 $\varepsilon>0$에 대하여 상응하는 δ가 존재하며

$$\left|\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}-\frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

이게 할 수 있다. 또한, $\varepsilon\ge 1$이어도 이보다 더 작은 ε인 $1/2$에 대하여 δ가 존재하므로 그 δ를 이용하면

$$\left|\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}-\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2} < \varepsilon$$

이게 만들 수 있다. 따라서, 극한의 정의에 의해 주어진 값은 $x\to 0$임에 따라 극한값이 존재하며, 그 값이 $1/2$다.

2-Extra2. 2. *함수 f를 생각하며, f는 $(0,1)$에서 정의된 함수이다. r이 만약 유리수이고 $r=p/q$로 표현된다고 할 때, p와 q가 서로소인 자연수라면 우리는 이를 최저표현이라고 부르기로 하자. 만약 r이 최저표현으로 p/q라면, $f(r)=1/q$로 주어진다. 만약 x가 무리수라면, $f(x)=0$이다. f가 모든 무리수 점에서는*

연속하지만, 모든 유리수 점에서는 불연속함을 보여라.

먼저 무리수에서 생각하여 보자. 그러면 무리수 x에서 $f(x) = 0$이므로, 해당 점에서 연속이려면

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \text{ such that if } |x - y| < \delta, \text{ then } |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

이 성립해야 한다. 그런데 $f(x) = 0$이므로, $|f(y)| < \epsilon$이게 만들 수 있는 δ를 찾아주면 된다. 만약 y도 무리수라면, $f(y) = 0$이기에 고려할 필요가 없다. 따라서 y가 유리수인 경우를 생각해주면 된다. 어떤 $\varepsilon > 0$에 대해서라도 우리는 자연수 N이 존재하여 $\varepsilon > 1/N$이게 할 수 있음을 자연스럽게 알고 있다. 그 다음, 집합

$$S_N = \{r \in \mathbb{Q} : r\text{이 최저표현일 때, 분모가 } N\text{이하인 분수들의 모임}\}$$

을 생각하면 이는 유한집합이며 어떤 유리수 y가 S_N에 포함되지 않는다면 최저표현에서 분모가 $N + 1$이상이므로 $|f(y)| < 1/N$임을 확인할 수 있다. S_N은 유한집합이므로 그 모든 원소와 x의 차를 모은 집합도 유한집합이고, x는 무리수이므로 해당 집합은 모두 양수로만 이루어져 있다. 따라서 해당 집합에는 0이 아닌 최솟값 A가 존재할 것이다. 그러면 우리가 만약 $\delta = A/2$라고 둘 경우, $|x - y| < \delta$라면 y는 x로부터 $A/2$ 이상 떨어져 있을 수 없으므로 S_N의 원소가 아니고, $|f(y)| < 1/N < \varepsilon$이다. 따라서 y가 유리수든 무리수이든 원하는 성질을 만족하기에 연속이다.

둘째로 유리수에서 생각하여 보자. 해당 유리수를 $r = p/q$라고 두고, 이를 최저표현이라고 생각하자. 그러면 어떤 δ를 잡아도 r로부터 δ 이하로 떨어진 점 중 무리수 점이 존재하므로, $\varepsilon < 1/q$인 경우에는 해당하는 δ를 찾는 것이 불가능하다. 따라서 불연속하다.

2-Extra2. 3.

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}$$

을 구하여라.

모든 $\varepsilon > 0$에 대하여 $N \in \mathbb{N}$을 잡아 $n \geq N$일 때 $1 < n^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$이게 할 수 있음을 보여 보자. 일단 부등식의 좌변은 n이 1보다 크고 $1/n$이 양수인 것으로부터 자명하게 알 수 있다. 따라서 우변만 보여주면 될 것이다. 양변을 n제곱하면

$$n < (1 + \varepsilon)^n$$

이다. 그런데 만약 $n \geq 2$일 경우에는

$$1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 < (1 + \varepsilon)^n$$

이므로, 위의 부등식을 보이기 위해서는

$$n < \frac{(n)(n-1)}{2}\varepsilon^2$$

만 보여도 충분하다. 이를 정리해 주면

$$\frac{2}{\varepsilon^2} + 1 < n$$

이다.

따라서 우리가 만약 주어진 $\varepsilon > 0$에 대하여

$$N > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$$

인 3 이상의 자연수 N을 잡아 준다면, $n \geq N$일 때

$$\frac{2}{\varepsilon^2} + 1 < n$$

이므로

$$n < \frac{(n)(n-1)}{2}\varepsilon^2$$

이고,

$$1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 < (1+\varepsilon)^n$$

이므로

$$n < (1+\varepsilon)^n$$

이며 $1 < n^{\frac{1}{n}} < 1+\varepsilon$임을 확인할 수 있다. 따라서 주어진 $\varepsilon > 0$에 대하여 자연수 N을 잡아 $n \geq N$일 때 $|n^{\frac{1}{n}} - 1| < \varepsilon$이게 할 수 있으므로, 구하는 값은 1이다.

2-Extra2. 4. *f가 구간 I에서 정의된 함수이며*

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^2$$

가 임의의 $x, y \in I$에서 성립한다고 한다. f가 상수함수임을 보여라.

$x = y + h$을 넣어보면

$$|f(y+h) - f(y)| \leq h^2$$

이며, 이로부터 $h \neq 0$일 때

$$\left| \frac{f(y+h) - f(y)}{h} - 0 \right| \leq |h|$$

가 만족함을 확인할 수 있다. 그러면 우리가 어떤 $\varepsilon > 0$을 가지고 있더라도 $\delta = \varepsilon$으로 잡을 경우 $|h| < \delta = \varepsilon$이면

$$\left| \frac{f(y+h) - f(y)}{h} - 0 \right| \leq |h| < \varepsilon$$

을 만족시킬 수 있으므로,

$$f'(y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(y+h) - f(y)}{h} = 0$$

이라는 것이 된다. 만약 f가 상수함수가 아니라면 구간 I 안의 어떤 a, b가 존재하여 $f(a) \neq f(b)$이다. 일반성을 잃지 않고 $a < b$라고 했다면 f는 전체 구간에서 연속하며 미분가능한 함수이므로 평균값 정리에 의해 어떤 $c \in (a, b)$가 존재하여 $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b-a) \neq 0$이다. 그러나 이는 $f' = 0$이라는 데에 모순된다. 따라서 f는 상수함수이다.