2-2. 1. *나선*

$$X(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

에서 밀도함수가 $f(t) = t^2$ *일 때, 구간* $-\pi \le t \le \pi$*에서 나선의 질량과 질량 중심을 구하시오.*

질량을 먼저 구하자. 질량을 M이라고 하면

$$M = \int_X f ds = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2}t^2 dt = \left[\frac{\sqrt{2}}{3}t^3\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi^3$$

$$\bar{x} = \frac{3}{2\sqrt{2}\pi^3}\int_X t^2 \cos t ds = \frac{3}{2\pi^3}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos t dt = \frac{3}{2\pi^3}[t^2 \sin t + 2t\cos t - 2\sin t]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{6}{\pi^2}$$

$$\bar{y} = \frac{3}{2\sqrt{2}\pi^3}\int_X t^2 \sin t ds = \frac{3}{2\pi^3}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin t dt = \frac{3}{2\pi^3}[-t^2 \cos t + 2t\sin t + 2\cos t]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\bar{z} = \frac{3}{2\sqrt{2}\pi^3}\int_X t^2 \cdot t ds = \frac{3}{2\pi^3}\int_{-\pi}^{\pi} t^3 dt = \frac{3}{2\pi^3}[\frac{1}{4}t^4]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

이므로, 질량중심은

$$\left(-\frac{6}{\pi^2}, 0, 0\right)$$

이다.

2-2. 2. *타원*

$$x^2 + 4y^2 = 1$$

위의 점 $(0, 1/2)$*에서 곡률벡터와 접촉원의 방정식을 구하시오.*

타원은 $X(\theta) = (\cos\theta, \frac{1}{2}\sin\theta)$로 매개화될 수 있다. $X'(\theta) = (-\sin\theta, \frac{1}{2}\cos\theta)$이며 $|X'(\theta)| = \sqrt{\sin^2\theta + \frac{1}{4}\cos^2\theta}$ 이다. 그리고

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\kappa}(\theta) = &\frac{1}{\sqrt{\sin^2\theta + \frac{1}{4}\cos^2\theta}}\left(-\cos\theta\frac{1}{\sqrt{\sin^2\theta + \frac{1}{4}\cos^2\theta}} - \sin\theta(2\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta)(\sin^2\theta + \frac{1}{4}\cos^2\theta)^{-3/2}\right)\mathbf{e}_1 \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\sin^2\theta + \frac{1}{4}\cos^2\theta}}\left(-\frac{1}{2}\sin\theta\frac{1}{\sqrt{\sin^2\theta + \frac{1}{4}\cos^2\theta}} + \frac{1}{2}\cos\theta(2\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta)(\sin^2\theta + \frac{1}{4}\cos^2\theta)^{-3/2}\right)\mathbf{e}_2\end{aligned}$$

이므로 $\theta = \pi/2$일 때는 그 벡터가

$$(0, -\frac{1}{2})$$

이다. 그러면 접촉원의 중심은 $(0, 1/2) + 4(0, -\frac{1}{2}) = (0, -3/2)$이며 반지름은 2다. 따라서 방정식은

$$x^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = 4$$

가 된다.

2-2. 3. *곡선*

$$X : x^{2/3} + y^{2/3} = 1, \quad x \ge 0, y \ge 0$$

의 밀도함수가 $\mu(x, y) = y$*로 주어질 때, 곡선* X*의 질량중심을 구하시오.*

주어진 곡선은 $X(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \quad 0 \le t \le \pi/2$로 매개화할 수 있다. 그러면 질량을 먼저 구한다면

$$M = \int_X \mu ds = \int_0^{\pi/2} \sin^3 t \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9 \sin^4 t \cos^2 t} dt = 3\int_0^{\pi/2} \cos t \sin^4 t = [\frac{3}{5}\sin^5 t]_0^{\pi/2} = \frac{3}{5}$$

이다. 이제 질량중심을 구하여 보자.

$$\bar{x} = \frac{5}{3}\int_X x\mu ds = \frac{5}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^3 t \sin^3 t(3\cos t \sin t)dt = \frac{5}{16}\int_0^{\pi/2} \sin^4 2t dt = \frac{5}{64}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)^2 dt = \frac{15}{256}\pi$$

$$\bar{y} = \frac{5}{3}\int_0^{\pi/2} \sin^6 t(3\cos t \sin t)dt = \int_0^{\pi/2} 5\cos t \sin^7 t dt = \frac{5}{8}$$

이기에 질량중심은

$$\left(\frac{15}{256}\pi, \frac{5}{8}\right)$$

2-2. 4. *$\mathbb{R}^4$의 곡선*

$$X(t) = (\sin t \cos t, \sin^2 t, \cos t, \sin t)$$

에 대하여, 점 $X(\pi)$에서의 곡률벡터와 곡률을 구하시오.

$$X'(t) = (\cos 2t, \sin 2t, -\sin t, \cos t)$$

이므로

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 2t, \sin 2t, -\sin t, \cos t)$$

이며

$$\boldsymbol{\kappa}(t) = \frac{1}{2}(-2\sin 2t, 2\cos 2t, -\cos t, -\sin t)$$

이며 $t = \pi$일 때의 곡률벡터는

$$(0, 1, \frac{1}{2}, 0)$$

이며 그 크기인 곡률은 $\frac{\sqrt{5}}{2}$다.

2-2. 5. *좌표평면에 놓인 로그와선*

$$X(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t), t \ge 0$$

에 대하여 $X(t)$를 점 $X(0)$으로부터 잰 호의 길이로 매개화하고, $t > 0$에서의 곡률을 t에 대해 표현하시오.

$$X'(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t))$$

이며 $|X'(t)| = \sqrt{2}e^t$이다. 따라서 $s = \sqrt{2}(e^t - 1)$로 두면 $t = \ln(1 + \frac{s}{\sqrt{2}})$이다. 그러면 다시 매개화할 경우

$$\tilde{X}(s) = \left((1 + \frac{s}{\sqrt{2}})\cos(\ln(1 + \frac{s}{\sqrt{2}})), (1 + \frac{s}{\sqrt{2}})\sin(\ln(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}))\right)$$

임을 알 수 있다.

곡률을 구하여 보면

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t)$$

임에 따라

$$\boldsymbol{\kappa}(t) = \frac{1}{2e^t}(-\sin t - \cos t, \cos t - \sin t)$$

가 될 것이며, 그 크기인 곡률은

$$\frac{1}{\sqrt{2}e^t}$$

이다.

2-2. 6. *좌표공간의 이급 정규곡선 $X(t)$와 곡률벡터 $\boldsymbol{\kappa}(t)$에 대하여 다음의 등식이 성립함을 보이시오. 단, $P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$는 벡터 $\mathbf{w}$의 벡터 $\mathbf{v}$ 위로의 정사영을 말한다.*

$$\boldsymbol{\kappa}(t) = \frac{1}{|X'(t)|^2}\left\{X''(t) - P_{X'(t)}(X''(t))\right\}$$

$$\boldsymbol{\kappa}(t) = \frac{1}{|X'(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{X'(t)}{|X'(t)|}\right) = -\frac{1}{|X'(t)|^3}X'(t)\frac{d}{dt}(|X'(t)|) + \frac{1}{|X'(t)|^2}X''(t)$$

인데,

$$\frac{d}{dt}(|X'(t)|) = \frac{X'(t)}{|X'(t)|}\cdot X''(t)$$

으로 주어지므로

$$\boldsymbol{\kappa}(t) = \frac{1}{|X'(t)|^2}(X''(t) - -\frac{X'(t)\cdot X''(t)}{|X'(t)|^2}X'(t)) = \frac{1}{|X'(t)|^2}\left\{X''(t) - P_{X'(t)}(X''(t))\right\}$$

임을 증명할 수 있다.

2-2. 7. *곡선 위의 한 점 $Q = X(0) = (1,0,1)$에 대하여 Q에서의 속도벡터와 가속도벡터가 각각 $(1,2,1)$과 $(-1,2,1)$이다. 문제 **2-2. 6**을 이용해 곡선 X의 점 Q에서의 접촉원의 중심을 구하시오.*

$\boldsymbol{\kappa}(t) = \frac{1}{6}((-1,2,1) - \frac{4}{6}(1,2,1)) = (-\frac{5}{18}, \frac{1}{9}, \frac{1}{18})$이므로, 곡률은 $\sqrt{30}/18$이다. 접촉원의 중심은

$$(1,0,1) + \frac{54}{5}(-\frac{5}{18}, \frac{1}{9}, \frac{1}{18}) = (-2, \frac{6}{5}, \frac{8}{5})$$

임을 알 수 있다.

2-2. 8. *일차함수 $f(x,y,z) = ax + by + z + c$의 $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0)$ 방향 기울기가 1이고 $(-1/\sqrt{10}, 0, 3/\sqrt{10})$ 방향 기울기가 $\sqrt{2}$일 때, $f(x,y,z)$의 $(2/\sqrt{29}, 4/\sqrt{29}, 3/\sqrt{29})$ 방향 기울기를 구하시오.*

주어진 정보는 $\frac{a+2b}{\sqrt{5}}$가 1, $\frac{-a+3}{\sqrt{10}}$가 $\sqrt{2}$임을 의미한다. 따라서 $a = 3 - 2\sqrt{5}$, $b = -3/2 + 3\sqrt{5}/2$이다. 그러면 $(2/\sqrt{29}, 4/\sqrt{29}, 3/\sqrt{29})$ 방향의 기울기는 $\frac{2a+4b+3}{\sqrt{29}} = \frac{6-4\sqrt{5}-6+6\sqrt{5}+3}{\sqrt{29}} = \frac{3+2\sqrt{5}}{\sqrt{29}}$이다.

2-2. 9.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + x^2y^2 + y^2}{x^2 + y^2}$$

의 값이 존재한다면 구하여라.

$$x^2 + y^2 \le x^2 + x^2y^2 + y^2 \le x^2 + 2x^2y^2 + y^2 + x^4 + y^4 \le x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^2$$

이므로

$$1 \le \frac{x^2 + x^2y^2 + y^2}{x^2 + y^2} \le 1 + x^2 + y^2$$

이다. 그런데 (x,y)가 원점으로 감에 따라 1과 $1 + x^2 + y^2$가 모두 1으로 수렴하므로, 둘 사이에 있는 분수식 역시 1로 수렴한다. 따라서

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + x^2y^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$$

2-2. 10.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \sin^2 y}{x^3 + 2y^2}$$

의 값이 존재한다면 구하여라.

만약 $x = 0$ 경로를 따른다면 함숫값은 0을 유지하며 다가오므로 이 때의 극한값은 0이다. 반면,

$$y^{10/3} - 2y^2 = x^3$$

을 따라 원점으로 다가오는 경우를 생각하여 보자. 그러면 $x^3 + 2y^2 = y^{10/3}$이므로 y가 0으로 갈 때

$$\frac{x^2 \sin^2 y}{x^3 + 2y^2} = \frac{(y^{10/3} - 2y^2)^{2/3} \sin^2 y}{y^{10/3}} = \frac{(y^{4/3} - 2)^{2/3} \sin^2 y}{y^2}$$

의 극한값을 보면 된다. 그런데

$$\lim_{y\to 0} \frac{(y^{4/3} - 2)^{2/3} \sin^2 y}{y^2} = -\sqrt[3]{4}$$

이며, 이는 0과 다르다. 따라서 경로에 따라 극한값이 달라지므로 (x, y)가 $(0, 0)$으로 감에 따른 극한값은 없다.