중간문풀-2. 1. *다음과 같이 함수 $f(x,y)$가 주어져 있다.*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) 함수 f는 연속함수인지 판정하시오.
(b) $D_1f(0,0), D_2f(0,0)$을 구하시오.
(c) 원점에서 함수 f의 미분가능성을 판정하시오.

(a) 첫째로, 원점이 아닌 점에서는 분모가 0이 될 수 없는 유리함수이므로 연속함수이다. 이제 원점에서 연속하는지 여부를 확인하면 되는데,

$$0 \leq \left|\frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq |x+y|\left|\frac{x^2+y^2}{2(x^2+y^2)}\right| = \frac{1}{2}|x+y|$$

가 산술기하평균 부등식에 의해 성립하며 함수의 절댓값을 가두는 두 함수가 모두 $(x,y) \to (0,0)$임에 따라 0으로 가므로

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$$

임을 확인할 수 있으며, 원점에서도 연속이다.

따라서 f는 연속함수이다.

(b)

$$D_1f(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$$

$$D_2f(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$$

(c) 원점이 아닌 점에서는 분모가 0이 될 수 없는 유리함수이므로 일급함수이고, 이에 따라 미분가능하다. 따라서 원점에서 미분가능한지만 판정해주면 미분가능성의 판정이 가능하다. 만약 원점에서 f가 미분가능하다면 임의의 좌표평면 안 벡터 $\mathbf{v}$에 대하여

$$D_{\mathbf{v}}f(0,0) = \mathrm{grad}f(0,0)\cdot\mathbf{v}$$

가 성립해야 한다. 그런데

$$\mathrm{grad}f(0,0) = (D_1f(0,0), D_2f(0,0)) = \mathbf{0}$$

이므로 모든 방향의 방향미분계수가 0이어야 한다는 결론이 나온다. 그러나

$$D_{(1,1)}f(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{2t^3}{2t^3} = 1$$

로 0이 아님을 확인할 수 있다. 따라서 f는 미분가능한 함수가 아니다.

중간문풀-2. 2. *좌표평면에서 정의된 함수*

$$f(x,y) = \begin{cases} x^3\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) + y^3\sin\left(\dfrac{1}{y^2}\right), & xy \neq 0 \\ x^3\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & x\neq 0, y=0 \\ y^3\sin\left(\dfrac{1}{y^2}\right), & x=0, y\neq 0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$$

(a) $D_1f(0,0), D_2f(0,0)$을 구하시오.

(b) 함수 f는 원점에서 미분가능한가?
(c) 함수 f는 일급함수인가?

(a)

$$D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} t^2 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) = 0$$

$$D_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} t^2 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) = 0$$

(b)

$$\mathrm{grad} f(0,0) = \mathbf{0}$$

이므로 미분가능한지를 확인하려면

$$\lim_{(a,b)\to(0,0)} \frac{f(a,b) - f(0,0)}{|(a,b)|} = 0$$

인지 확인해주면 된다.

먼저 $a \neq 0, b = 0$일 경우에는

$$\frac{f(a,b)}{\sqrt{a^2+b^2}} = a^2 \sin\frac{1}{a^2}$$

이므로

$$\left|\frac{f(a,b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq a^2 \leq a^2 + b^2$$

이다.

둘째로 $a = 0, b \neq 0$일 경우에는 위와 마찬가지의 이유로

$$\left|\frac{f(a,b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = |b^2 \sin\frac{1}{b^2}| \leq b^2 \leq a^2 + b^2$$

마지막으로 $ab \neq 0$일 경우에는

$$\left|\frac{f(a,b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \frac{|a^3 \sin\frac{1}{a^2} + b^3 \sin\frac{1}{b^2}|}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq \frac{|a|^3 + |b|^3}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq a^2 + b^2$$

이다. 즉, 모든 경우에 성립하는 위의 부등식에 의해

$$0 = \lim_{(a,b)\to(0,0)} 0 = \lim_{(a,b)\to(0,0)} \left|\frac{f(a,b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq \lim_{(a,b)\to(0,0)} a^2 + b^2 = 0$$

임을 확인할 수 있고,

$$\lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{0}+\mathbf{v}) - f(\mathbf{0}) - \mathrm{grad} f(0,0)\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = 0$$

이게 될 것이므로 f는 원점에서 미분가능하다.

(c) 함수 f가 일급함수이려면 f의 편도함수들이 연속함수여야 한다. $x \neq 0$일 때

$$D_1 f(x,y) = 3x^2 \sin\frac{1}{x^2} - 2\cos\frac{1}{x^2}$$

으로 주어지는데, 이는 $x = 0$ 근방에서 진동하는 함수이므로,

$$\lim_{x\to 0} D_1 f(x,y)$$

가 존재하지 않는다. 따라서 $\frac{\partial f}{\partial x}$가 연속함수일 수 없기에, f의 편도함수 중 하나가 연속함수가 아니다. 따라서 f는 일급함수가 아니다.

중간문풀-2. 3. *좌표평면에서 정의된 함수*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

은 원점에서 연속이 아님을 보이시오.

만약 $y=x^2$을 따라 원점으로 접근할 경우에는

$$f(x,x^2)=\frac{\sin(x^4)}{x^4+x^4}=\frac{\sin x^4}{2x^4}$$

이므로 $x\to 0$임에 따라 그 값이 1/2로 간다. 이는 $f(0,0)=0$과는 다른 값이기에, f는 원점에서 연속이 아니다.

중간문풀-2. 4. *좌표평면에서 정의된 함수 $f(x,y)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2y)\sqrt{x^2+y^2}}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(a) $f(x,y)$가 원점에서 연속인지를 판정하시오.
(b) $D_1f(x,y)$와 $D_2f(x,y)$를 구하시오.
(c) 원점에서 $f(x,y)$의 미분가능성을 판정하시오.

(a)

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sin(x^2y)\sqrt{x^2+y^2}}{x^4+y^2}\right| &\le \left|\frac{x^2y\sqrt{x^2+y^2}}{x^4+y^2}\right|\\ &\le \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\end{aligned}$$

가 산술기하 부등식에 의하여 성립하기에, $(x,y)\to(0,0)$임에 따라 (x,y)의 크기는 0으로 가기에

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2y)\sqrt{x^2+y^2}}{x^4+y^2}=0=f(0,0)$$

이고, f는 원점에서 연속이다.

(b)

$$D_1f(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{0}{t}=0$$

$$D_2f(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{0}{t}=0$$

(c) 만약 f가 미분가능하다면

$$\lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}}\frac{f(\mathbf{0}+\mathbf{v})-f(\mathbf{0})-\mathrm{grad}f(0,0)\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=\lim_{(a,b)\to(0,0)}\frac{f(a,b)}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

이어야 한다. 따라서, 이는 곧

$$\lim_{(a,b)\to(0,0)}\frac{\sin(a^2b)}{a^4+b^2}$$

이 0이 되어야 한다는 것이다. 그런데 만약 $a^2 = b$인 경로를 따른다면

$$\frac{\sin(a^2 b)}{a^4 + b^2} = \frac{\sin(b^2)}{2b^2}$$

이고, 이는 $b \to 0$임에 따라 $1/2$라는 0이 아닌 극한값으로 간다. 따라서 미분가능성의 정의에 의해 $f(x, y)$는 원점에서 미분불가능하다.

중간문풀-2. 5. *미분가능한 함수 f가 점 P에서 $(1, 1, -1)$방향으로 가장 빨리 증가하고 그 때의 방향 변화율은 $2\sqrt{2}$이다. 점 P에서 함수 f의 $(1, 1, 0)-$방향미분계수를 구하여라.*

미분가능한 함수 f의 기울기 벡터가 존재하므로 이를

$$\mathrm{grad} f(P)$$

라고 둘 수 있다. $\mathbf{v}-$방향미분계수는 이 벡터를 $\mathbf{v}$와 내적한 것이므로, f가 가장 빨리 증가하는 방향이 $D_{\mathbf{v}} f(P)$가 최대라는 것을 고려해 보면 $\mathrm{grad} f(P)$는 $(1, 1, -1)$과 같은 방향이다. $\mathrm{grad} f(P) = t(1, 1, -1)$이라고 하면 $2\sqrt{2} = 3t$이므로, $t = 2\sqrt{2}/3$이다.

$$D_{(1,1,0)} f(P) = \mathrm{grad} f(P) \cdot (1, 1, 0) = 2t = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

중간문풀-2. 6. *다음과 같이 정의된 함수 f에 대하여 물음에 답하시오.*

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, \quad (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

(a) 벡터 $\mathbf{v}$에 대하여 함수 f의 원점에서의 $\mathbf{v}-$방향 미분계수를 구하시오.
(b) 함수 f는 원점에서 미분가능한지 아닌지 판별하고 그 이유를 밝히시오.
(c) 함수 $D_1 f$는 원점에서 불연속임을 보이시오.

(a) $\mathbf{v} = (a, b)$라고 하자.

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}} f(0, 0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(t\mathbf{v}) - f(\mathbf{0})}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} tab \sin \frac{1}{\sqrt{t^2 a^2 + t^2 b^2}} = 0 \end{aligned}$$

임을 $\sin \frac{1}{\sqrt{t^2 a^2 + t^2 b^2}}$이 항상 유계인 것으로부터 알 수 있다.

(b) (a)로부터 $D_1 f(0, 0) = D_2 f(0, 0) = 0$임을 알 수 있다. 즉 원점에서의 기울기벡터는 영벡터다. 만약 f가 원점에서 미분가능하다면,

$$\lim_{(a,b) \to (0,0)} \frac{f(a, b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

이어야 함을 확인할 수 있다.

$$\begin{aligned} 0 \le \left| \frac{f(a, b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| &= \left| \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \\ &\le \frac{|ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &\le \frac{a^2 + b^2}{2\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &\le \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \end{aligned}$$

이 산술기하평균 부등식에 의해 성립한다. 또한 함수를 가두는 두 함수인 0과 $\sqrt{a^2+b^2}/2$는 모두 $(a,b) \to (0,0)$임에 따라 0으로 가는 함수이므로,

$$\lim_{(a,b)\to(0,0)} \frac{f(a,b)}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$

이 성립한다. 따라서 f는 원점에서 미분가능하다.

(c) 먼저 원점이 아닌 점에서는

$$D_1 f(x,y) = y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - x^2 y(x^2+y^2)^{-3/2}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

이며, (x,y)가 원점으로 감에 따라 어떤 극한값을 가지는지 들여다 보면

만약 $y=0$인 경로를 따라 원점에 접근할 경우 그 극한값은 0이다. 반면 $x=y$인 경로를 따라 접근할 경우

$$D_1 f(t,t) = t\sin\frac{1}{\sqrt{2}t} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{2}t}$$

이므로 $t\to 0$일 때 극한값이 존재하지 않는다. 따라서 경로에 무관하게 같은 값으로 다가갈 수 없으므로,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} D_1 f(x,y)$$

는 존재하지 않고, 연속일 수 없다.

중간문풀-2. 7. *함수*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y\sin^2 x}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) $\mathbf{v}=(1,1)$*일 때* $D_{\mathbf{v}} f(0,0)$*을 구하시오.*

(b) 함수 f*가 원점에서 연속인지 판정하시오.*

(c) 함수 f*가 원점에서 미분가능하지 않음을 보이시오.*

(a)

$$D_{\mathbf{v}} f(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t\mathbf{v})-f(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{2t^2} = \frac{1}{2}$$

(b) 아래 부등식이 성립한다.

$$\begin{aligned} 0 &\le \left|\frac{y\sin^2 x}{x^2+y^2}\right| \\ &\le \frac{|y|x^2}{x^2+y^2} \\ &\le |y| \end{aligned}$$

이때 (x,y)가 원점으로 가면 0과 $|y|$ 모두 0으로 가기에,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

이므로 f는 원점에서 연속이다.

(c)

$$D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t} = 0$$

$$D_2f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0}{t}=0$$

이므로 $\mathrm{grad}f(0,0)=\mathbf{0}$이다. 만약 f가 원점에서 미분가능하다면

$$D_{\mathbf{v}}f(0,0)=\mathrm{grad}f(0,0)\cdot\mathbf{v}$$

여야 하는데, $\mathbf{v}=(1,1)$일 때 좌변은 $1/2$인 반면 우변은 0이 되므로 다르다. 따라서 f는 원점에서 미분불가능하다.

중간문풀-2. 8. *함수 $f(x,y)=x^3-3xy^2$와 점 $P(1,-1)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.*

(a) f의 그래프 상의 점 $(1,-1,-2)$에서 접평면의 방정식을 구하시오.

(b) 벡터 $\mathbf{v}=(x,y)$에 대하여 $D_{\mathbf{v}}f(P)$를 구하시오.

(c) 점 P에서 함숫값이 가장 빨리 증가하는 방향 $\mathbf{w}$를 구하고, 그 방향으로의 변화율을 구하시오. 단, $\mathbf{w}$는 단위벡터이다.

(a) f의 그래프

$$\{(x,y,f(x,y))|x,y\in\mathbb{R}\}=\{(x,y,x^3-3xy^2)|x,y\in\mathbb{R}\}$$

는 함수 $g(x,y,z)=x^3-3xy^2-z$의 $0-$등위면이다. 등위면 위의 점 $(-1,-1,-2)$에서의 접평면은 $\mathrm{grad}g(1,-1,-2)$에 수직인데, $\mathrm{grad}g(x,y,z)=(3x^2-3y^2,-6xy,-1)$이므로 법선벡터는 $(0,6,-1)$이다. 따라서 접평면의 방정식은

$$6y-z+4=0$$

이 된다.

(b) f는 다항함수이므로 미분가능하기에, $D_{\mathbf{v}}f(P)=xD_1f(P)+yD_2f(P)$로서 표현된다.

$$\mathrm{grad}f(x,y)=(3x^2-3y^2,-6xy)$$

이므로,

$$D_{(x,y)}f(P)=6y$$

임을 알 수 있다.

(c) 점 P에서 함숫값이 가장 빨리 증가하는 방향은 $x^2+y^2=1$일 때 $D_{(x,y)}f(P)$가 최대인 x,y를 찾는 것이나 매한가지이다. 따라서 $(0,1)$이 $\mathbf{w}$가 되고, 그때의 변화율은 6임을 확인할 수 있다.

중간문풀-2. 9. *타원면 $g(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-6=0$과 그 위의 점 $P(1,1,1)$이 있다. 이 타원면 바깥의 어떤 점에서 점 P를 향하여 단위벡터 $\mathbf{v}$ 방향으로 발사된 빛이 타원면에 반사되어 나가는 방향의 단위벡터를 $\mathbf{v}*$라 하자. 벡터 $\mathbf{v}$와 $\mathbf{v}*$이 서로 수직일 때,*

$$D_{\mathbf{v}*}g(P)-D_{\mathbf{v}}g(P)$$

의 값을 구하시오.

빛이 타원면에서 반사될 때는 그 점에서의 접평면을 기준으로 입사각과 반사각이 같게 된다. 따라서 심화미적분학1에서 배운 바와 같이, $\mathbf{v}*-\mathbf{v}$가 $\mathrm{grad}g(P)$에 나란하게 되며 $\mathbf{v}$는 $\mathbf{v}*$와 수직하므로 $\mathbf{v}*-\mathbf{v}$는 크기가 $\sqrt{2}$이며 $\mathrm{grad}g(P)$와 나란한 벡터가 될 것이다. 따라서 미분가능함수 g에 대하여

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{v}*}g(P)-D_{\mathbf{v}}g(P)&=\mathrm{grad}g(P)\cdot(\mathbf{v}*-\mathbf{v})\\&=\sqrt{2}|\mathrm{grad}g(P)|^2\end{aligned}$$

임을 확인할 수 있다. $\mathrm{grad}g(x,y,z)=(2x,4y,6z)$이며 $\mathrm{grad}g(1,1,1)=(2,4,6)$인 것으로부터

$$D_{\mathbf{v}*}g(P)-D_{\mathbf{v}}g(P)=4\sqrt{7}$$

임을 확인할 수 있게 된다.

중간문풀-2. 10. *함수 $f(x,y,z)=e^{xz}(x^2+y^2-z)$와 점 $P=(1,-1,0)$에 대하여 물음에 답하시오.*

(a) 점 P에서 함수 f가 가장 빨리 증가하는 방향의 단위벡터 $\mathbf{v}$를 구하시오.

(b) 곡면 $e^{xz}(x^2+y^2-z)=2$의 점 P에서 접평면의 방정식을 구하시오.

(a)

$$\mathrm{grad}f(x,y,z)=(ze^{xz}(x^2+y^2-z)+2xe^{xz},2ye^{xz},xe^{xz}(x^2+y^2-z)-e^{xz})$$

이므로 $\mathrm{grad}f(1,-1,0)=(2,-2,1)$이다. 따라서 함수가 가장 빨리 증가하는 방향은 이와 같은 방향의 단위벡터

$$\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

이다.

(b) 접평면의 법선벡터가 $(2,-2,1)$이고 점 P를 지나므로 접평면의 방정식은

$$2x-2y+z=4$$

가 된다.

중간문풀-2. 11. *좌표평면에서 정의된 함수*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^5}{x^2+xy^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

가 원점에서 연속인지 아닌지를 밝히시오.

원점을 지나는 직선 $y=0$을 따라서 원점에 다가올 때를 생각해 보자.

$$f(x,0)=\frac{x^2}{x^2}=1$$

으로, $f(0,0)=0$과 다르기에 f는 원점에서 연속이 아니다.

중간문풀-2. 12. *평면에서 극좌표로 다음과 같이 정의된 함수 f에 대하여 물음에 답하시오.*

$$f(r,\theta)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{r}}, & r>0\\ 0, & r=0\end{cases}$$

(a) 함수 f가 원점에서 연속임을 보이시오.

(b) 함수 f의 기울기 벡터 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$를 r과 θ를 이용해 나타내시오.

(c) 원점이 아닌 점에서의

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

을 r과 θ를 이용하여 나타내시오.

(a)

$$\lim_{r\to0^+}e^{-\frac{1}{r}}=0$$

이므로, f는 원점에서 연속이다.

(b) 원점이 아닌 경우에는

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{1}{r^2}e^{-\frac{1}{r}}\cos\theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{r^2}e^{-\frac{1}{r}}\sin\theta$$

이므로 기울기 벡터는

$$\text{grad}f(x,y) = \left(\frac{e^{-\frac{1}{r}}\cos\theta}{r^2}, \frac{e^{-\frac{1}{r}}\sin\theta}{r^2}\right), \quad (x,y) \neq (0,0)$$

이다. 원점에서는

$$D_1f(0,0) = D_2f(0,0) = \lim_{t\to 0^+}\frac{e^{-1/t}}{t} = 0$$

이므로

$$\text{grad}f(0,0) = (0,0)$$

이다. 따라서

$$\text{grad}f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{e^{-\frac{1}{r}}\cos\theta}{r^2}, \frac{e^{-\frac{1}{r}}\sin\theta}{r^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0), \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

이 된다.

(c)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{e^{-\frac{1}{r}}\cos\theta}{r^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{e^{-\frac{1}{r}}\sin\theta}{r^2}) \\
&= \frac{\partial}{\partial r}(\frac{e^{-\frac{1}{r}}\cos\theta}{r^2})\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{e^{-\frac{1}{r}}\cos\theta}{r^2})\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r}(\frac{e^{-\frac{1}{r}}\sin\theta}{r^2})\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{e^{-\frac{1}{r}}\sin\theta}{r^2})\frac{\partial \theta}{\partial y} \\
&= \frac{\partial}{\partial r}(\frac{e^{-\frac{1}{r}}}{r^2})\cos^2\theta + \sin^2\theta\frac{e^{-\frac{1}{r}}}{r^3} + \frac{\partial}{\partial r}(\frac{e^{-\frac{1}{r}}}{r^2})\sin^2\theta + \cos^2\theta\frac{e^{-\frac{1}{r}}}{r^3} \\
&= \frac{\partial}{\partial r}(\frac{e^{-\frac{1}{r}}}{r^2}) + \frac{e^{-\frac{1}{r}}}{r^3} \\
&= -\frac{1}{r^3}e^{-\frac{1}{r}} + \frac{1}{r^4}e^{-\frac{1}{r}} = \frac{1-r}{r^4}e^{-\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

이다.

중간문풀-2. 13. 함수

$$f(x,y) = \frac{xy}{xy - y + 2x}$$

가 정의되는 점 (x,y)에서 다음 방정식을 만족시킴을 보이시오.

$$x^2D_1f(x,y) + y^2D_2f(x,y) = (f(x,y))^2$$

$$D_1f(x,y) = \frac{y(xy-y+2x) - xy(y+2)}{(xy-y+2x)^2} = \frac{-y^2}{(xy-y+2x)^2}$$

$$D_2f(x,y) = \frac{x(xy-y+2x) - xy(x-1)}{(xy-y+2x)^2} = \frac{2x^2}{(xy-y+2x)^2}$$

이므로

$$x^2D_1f(x,y) + y^2D_2f(x,y) = \frac{x^2y^2}{(xy-y+2x)^2} = (f(x,y))^2$$

중간문풀-2. 14. *좌표평면에서 정의된 함수*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

에 대하여 다음 질문에 답하시오.

(a) $D_1f(0,0)$*와* $D_2f(0,0)$*을 구하시오.*

(b) 함수 f*가 원점에서 미분가능한지 판정하시오.*

(c) 조건 $D_1D_2f(x,y) = D_2D_1f(x,y)$*를 만족시키는 점* (x,y)*를 모두 구하시오.*

(a)

$$D_1f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

$$D_2f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

(b)

$$\mathrm{grad} f(0,0) = \mathbf{0}$$

이므로

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

인지를 확인하면 된다.

$$\begin{aligned} 0 &\le \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &\le \frac{|xy|(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ &\le \frac{(x^2+y^2)(x^2+y^2)}{2(x^2+y^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}$$

이 산술기하평균 부등식과 절댓값의 성질에 의해 성립한다. 이때 $(x,y) \to (0,0)$이면 0과 $\sqrt{x^2+y^2}$은 모두 0으로 가기에,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

이다. 따라서 원점에서 미분가능하다.

(c) $(x,y) \neq (0,0)$인 경우 분모가 0이 아닌 유리함수이므로 이급함수이며, 따라서 오일러의 편미분 교환 법칙에 의하여

$$D_1D_2f(x,y) = D_2D_1f(x,y)$$

이다. 만약 $(x,y) = (0,0)$인 경우,

$$\begin{aligned} D_1D_2f(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{D_2f(x,0) - D_2f(0,0)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \lim_{y\to 0} \frac{f(x,y)-f(x,0)}{y} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \lim_{y\to 0} \frac{x^3y - xy^3}{y(x^2+y^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D_2D_1f(0,0) &= \lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{x^3y - xy^3}{x(x^2+y^2)} \\
&= \lim_{y\to0}\frac{-y}{y} = -1
\end{aligned}
$$

이다. 따라서 $D_1D_2f(0,0) \neq D_2D_1f(0,0)$이다. 따라서 원하는 점의 집합은

$$\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

이다.

중간문풀-2. 15. *함수 $f(x,y,z) = ze^x \sin y$와 곡면 $f(x,y,z) = 1$ 위의 점 $P = (0, \frac{\pi}{2}, 1)$에 대하여 다음 질문에 답하시오.*

(a) 점 P에서 함수 f가 가장 빨리 증가하는 방향의 단위벡터를 구하시오.

(b) 점 P에서 곡면 $f(x,y,z) = 1$에 접하는 평면의 방정식을 구하시오.

(a) $\mathrm{grad}f(x,y,z) = (ze^x \sin y, ze^x \cos y, e^x \sin y)$이므로, $\mathrm{grad}f(P) = (1,0,1)$이고 이 방향의 단위벡터

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

가 함수 f가 가장 빨리 증가하는 방향의 단위벡터이다.

(b) 구하고자 하는 접평면의 법선벡터는 $\mathrm{grad}f(P)$이다. 따라서 P를 지나며 법선벡터가 $(1,0,1)$인 평면의 방정식 $x + z = 1$이 접평면의 방정식이다.