벡터. 1. *Motive : 극좌표계와 직교좌표계 사이 식을 어떻게 변형하더라?*

좌표평면과 극좌표계에서는 $x = r\sin\theta$, $y = r\cos\theta$가 성립했었다. 따라서 $ax+by=c$에서 x와 y 자리에 이들을 넣어주게 된다면, $ar\cos\theta + br\sin\theta = c$이고 이를 정리해준다면 원하는 것처럼

$$r(a\cos\theta + b\sin\theta) = c$$

이 나온다.

벡터. 2. *Motive : 평행이동을 표현하기 좋은 좌표계가 뭐가 있을까?*

구하고자 하는 식 $r' = g(\theta')$을 직교좌표계로 옮기면 $(g(\theta')\cos\theta', g(\theta')\sin\theta)$이다. 이를 평행이동해 $(g(\theta')\cos\theta' - a, g(\theta')\sin\theta' - b)$로 만들면 이것이 바로 우리가 원하던 $r = f(\theta)$이다. 즉 $r^2 = r'^2 + a^2 + b^2 - 2ar'\cos\theta' - 2br'\sin\theta'$, $\theta = \arctan(\{r'\sin\theta' - b\} \div \{r'\cos\theta' - a\})$이다. 그러므로, 구하는 식은

$$\sqrt{r^2 + a^2 + b^2 - 2ar\cos\theta - 2br\sin\theta} = f(\arctan\left(\frac{r\sin\theta - b}{r\cos\theta - a}\right))$$

이다. 단, $\arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$라고 둔다.

벡터. 3. *Motive : 극좌표계에서는 평행이동을 하기 어려운 대신 회전이동을 하기에는 굉장히 쉽다.*

$r = \frac{1}{1+\cos\theta}$에 대하여, 대칭축은 원래 $\theta = 0$이었다. 그 대칭축과 꼭짓점을 원하는 대로 옮기려면 이 포물선을 반시계 방향으로 $-\frac{3}{4}\pi$만큼 돌려주면 된다. 즉

$$r = \frac{1}{1 + \cos(\theta + \frac{3}{4}\pi)}$$

가 원하는 포물선의 식이다. (그림 생략)

벡터. 4. *Motive : 극좌표계에서 θ에 특정 값을 더하는 것은 어떤 역할을 해 주는가?*

두 그래프가 완전히 일치하기 위해서는, $\sin n\theta$를 시계 방향으로 ϕ만큼 돌린 그래프인 $\sin n(\theta+\phi)$가 원래의 것과 같아야 한다. n이 홀수일 경우에는 n개의 꽃잎이 존재하는데, 이때 꽃잎 사이의 간격은 $\frac{2}{n}\pi$다. 그래프를 ϕ만큼 돌려 원래 그래프와 맞게 만드려면 ϕ는 $\frac{2}{n}\pi$이다. n이 짝수일 경우에는 $2n$개의 꽃잎이 존재하고 각 꽃잎 사이의 간격은 $\frac{1}{n}\pi$이다. 따라서 이때는 ϕ가 $\frac{1}{n}\pi$이다. (그림 생략)

벡터. 5. *Motive : 두 점 사이의 거리는 직교좌표계에서 구하기 쉽다.*

극좌표계를 직교좌표계로 바꾸면 $x^2 + y^2 = \frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2}{x^2+y^2}$이다. 이를 정리하면 $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = x^2 - y^2$이고, 이를 다시 정리해주면 $(x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2} + y^2)(x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{2} + y^2) = \frac{1}{4}$이다. 따라서 $\sqrt{(x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2} + y^2)}\sqrt{(x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{2} + y^2)} = \frac{1}{2}$로 일정한데, 곱해지는 두 식은 그래프 위의 점 (x, y)에서 두 점 $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$과 $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$사이의 거리이다. 따라서 이 곡선은 평면에서 주어진 두 정점 $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$과 $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$까지의 거리의 곱이 0.5로 일정한 점들로 이루어져 있다.

벡터. 6. *Motive : 앞선 공식을 이용하자.*

앞선 공식에서 $a = R\cos\theta_0$, $b = R\sin\theta_0$이며 원래 식은 $r = r_0$였던 것이다. 즉

$$\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos(\theta - \theta_0)} = r_0$$

가 원하는 식이며, 양변을 제곱하고 정리하면

$$r^2 - 2rR\cos(\theta - \theta_0) + R^2 - r_0^2 = 0$$

벡터. 7. *Motive : 선분 l의 양 끝 점을 잡고 이를 이용하여 좌표공간에서 이를 증명하자.*

선분 l에 대하여 양 끝점을 (a_1, b_1, c_1)과 (a_2, b_2, c_2)로 두자. 그렇다면 길이가 l인 선분을 yz 평면에 정사영한 선분은 양 끝점이 $(0, b_1, c_1), (0, b_2, c_2)$가 되며 그 길이는 $(b_1-b_2)^2+(c_1-c_2)^2$일 것이다. 같은 방법으로 이를 수행하면

$$(b_1-b_2)^2+(c_1-c_2)^2+(a_1-a_2)^2+(c_1-c_2)^2+(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^=2\{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2+(c_1-c_2)^2\}$$

이며, 양변이 같기에 등식이 성립한다.

반면, 아래 식에 대해서는

$$|l_1^2 - l_2^2| = |(b_1-b_2)^2 - (a_1-a_2)^2|$$

$$l_3^2 = (b_1-b_2)^2 + (a_1-a_2)^2$$

$$l_1^2 + l_2^2 = (b_1-b_2)^2 + (a_1-a_2)^2 + 2(c_1-c_2)^2$$

이므로 절댓값의 성질에 의해

$$|l_1^2 - l_2^2| \le l_3^2 \le l_1^2 + l_2^2$$

벡터. 8. *Motive : 넓이를 구하려면 극좌표계에 두어서는 안 된다.*

1) 양변을 제곱한 이후 정리하면

$$r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1$$

이며 이를 다시 정리하면

$$x^2 - y^2 = 1$$

로 우리가 알고 있는 쌍곡선의 형태가 된다. 이때 r은 항상 양수여야 하며 $\cos 2\theta$가 음수인 특정 구간에서는 이것이 존재하지 않기에 조심해야 하는데, 이 구간에는 쌍곡선 역시 존재하지 않음을 알 수 있기에 문제가 없다. 점근선은 쌍곡선에서 배운 것처럼 $y = x$와 $y = -x$이다. (그림 생략)

2) 이 세 직선으로 둘러싸인 영역을 직교좌표계로 변환하면,

$$x^2 - y^2 = 1, y = \frac{1}{\sqrt{3}}x, y = 0$$

으로 둘러싸인 영역을 구하라는 것이다. 이를 직접 그려보게 된다면 두 개의 영역이 나오며, 각각 영역은 대칭성에 의하여 넓이가 같다. 그러니 1사분면의 것만 넓이를 구하고 2배 하자. (그림 생략)

이때 쌍곡선과 직선의 교점을 연립방정식을 이용하여 풀면 직교좌표계에서 $(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$일 것이며 구하는 영역은 이 점에서 x축에 내린 수선의 발, 원점, 그리고 이 점으로 이루어지는 직각삼각형에서 쌍곡선 아래에 있는 영역을 뺀 것이다. 삼각형의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$이며 아래 영역의 넓이는

$$\int_1^{\frac{\sqrt{6}}{2}} \sqrt{x^2-1}dx$$

이다.

$$\begin{aligned}\int_1^{\frac{\sqrt{6}}{2}} \sqrt{x^2-1}dx &= \int_0^s \sinh t \sinh t dt \quad (x = \cosh t, \frac{\sqrt{6}}{2} = \cosh s) \\ &= \int_0^s \frac{1}{4}(e^{2t} - 2 + e^{-2t})dt \\ &= \frac{1}{4}[\frac{1}{2}e^{2t} - 2t - \frac{1}{2}e^{-2t}]_0^s \\ &= \frac{1}{4}(\sinh 2s - 2s) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\ln(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2})\end{aligned}$$

이므로, 원하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\ln(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2})$$

이며 이를 2배하면

$$\ln(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2})$$

이 정답이다.

벡터. 9. *Motive : 직접 그리면 된다.*

그래핑 툴을 이용하여 직접 그려보면 정답이 나온다. 단, 좌표평면에 그릴 때는 x축과 y축과의 교점과 같이 특이한 점들은 웬만해선 표시해주는 것이 좋다. 반면, 극좌표계에서는 각도나 길이가 특기할만 하면 이를 표시해야 한다. (그림 생략)

벡터. 10. *Motive : 해당 곡선이 무슨 도형인지를 잘 생각하여 보자. 또한, 길이를 구하기 편리한 좌표계는 어디인가?*

해당 곡선은 초점이 원점이고 꼭짓점이 직교좌표계에서 $(-\frac{1}{2}, 0)$인 포물선이다. (그림 생략) 그러므로 준선은 직교좌표계에서 $x = -1$로 주어질 것이다. 그리고 이 포물선을 직교좌표계에서 표현하면

$$x^2 + y^2 = x^2 + 2x + 1$$

일 것이므로, 정리하면

$$x = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}$$

이다.

A를 직교좌표계로 변환시키면 $(2\sqrt{3}, 2)$이며 APO의 둘레 중 AO는 고정된 길이이며 P의 위치에 따라 AP와 PO가 달라진다. 그런데 P는 포물선 위의 점이므로, PO는 P에서 준선 $x = -1$에 내린 수선의 길이와 같다. 수선의 발을 H라 하자. 이때, H는 고정된 점이 아니며 P와 함께 이동하는 점이다. 따라서 둘레의 길이는 AO의 길이, PH의 길이, AP의 길이의 합과 같다. 그런데 AP와 PH를 합한 길이는 항상 A에서 준선에 내린 수선의 길이보다는 크다. 따라서 A에서 준선에 내린 수선과 포물선의 교점이 P일 때 그 길이가 최소이며, 이 값은 $4 + (2\sqrt{3} + 1)$, 즉 $5 + 2\sqrt{3}$이다.

벡터. 11. *Motive : 점 A와 원점 사이의 거리는?*

그림은 생략하지만, 대략 무한대 기호와 비슷하게 나오면 된다. $\theta = \frac{5}{6}\pi$인 점 A를 직교좌표계에서 들여다보면 $r^2 = 2a^2 \cos \dfrac{5}{3}\pi$이므로 $r = \pm a$이다. 따라서 B, C, A는 원점을 중심으로 하고 반지름이 a인 원 위에 있으며, CB가 지름이므로 BAC는 원주각의 성질에 의해 90도이다.

벡터. 12. *Motive : 로그 와선의 다른 이름은 무엇인가?*

로그 와선의 다른 이름은 등각 와선으로, 원점을 지나는 직선과 와선의 각 점에서의 접선은 항상 일정한 각을 이루고 있다. $\theta = \frac{\pi}{4}$일 때를 생각하여 보자. $x = e^\theta \cos\theta$는 미분하면 $\frac{dx}{d\theta} = e^\theta(\cos\theta - \sin\theta)$로, $\theta = \frac{\pi}{4}$

까지는 순증가하다가 그 이후 감소한다. 즉 $\theta = \frac{\pi}{4}$에서 접선은 y축에 평행하다. 이때의 각도는 결국 $\frac{\pi}{4}$이기에, 모든 θ에 대해 각도는 $\frac{\pi}{4}$이다.

벡터. 13. *Motive : 식을 정리하는 과정에서 빼먹은 것이 없는지 생각해 보자.*
이를 극좌표계로 바꾸려면 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$로 치환하면 되고 그 결과

$$r^2 = 6|r|\sqrt{\cos 2\theta}$$

이며 양변을 $|r|$로 나눠주면

$$r = 6\sqrt{\cos 2\theta}$$

이다. 이때 $(0,0)$이 r로 나눠주는 과정에서 무시되었는데, 나눠준 이후에도 $\theta = \frac{\pi}{4}$일 때 이 점이 포함되므로 문제가 없다. 또한, 직접 그려볼 경우 r에 절댓값이 없어도 동일한 모양이라는 것을 확인할 수 있기에 절댓값도 제거할 수 있다. 그림은 생략한다.

벡터. 14. *Motive : 교점을 구하기 쉬운 좌표계는?*

$$r^2 = \cos 2\theta + \frac{3}{2}$$

와 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$의 교점은 $\theta = \frac{\pi}{6}$이어야 한다. 따라서 $r = \pm\sqrt{2}$이다. 즉 교점은 극좌표로 나타냈을 때 $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{6}), (-\sqrt{2}, \frac{\pi}{6})$이다. 따라서 둘 사이의 거리는 $2\sqrt{2}$이다.

벡터. 15. *Motive : 매개변수를 바로 극좌표로 바꾸는 문제를 푼 적이 있었나?*
해당 매개변수 방정식을 먼저 직교좌표계로 바꾸어 보자. 그러면 $x^2 - y^2 = 1$이라는 쌍곡선임을 확인할 수 있다. 이때 t의 범위가 실수 전체인데 해당 범위에서는 $\cosh t$가 항상 양수여야 한다. 따라서, 이 쌍곡선의 $x > 0$ 부분만 그려주면 된다. 이를 다시 극좌표계로 바꾸려면

$$r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1$$

이므로

$$r = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

가 원하는 자취이다. 단, $x > 0$여야 하므로 $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$라는 단서조항을 붙인다. 그림은 생략

벡터. 16. *Motive : 극좌표계 그리기 연습*
풀이 생략.

벡터. 17. *Motive : 원기둥좌표계 연습*
1) 회전축이 z축이며 높이가 무한하고, $(3,4,3)$을 지난다면 r만 결정해주면 된다. $r^2 = 3^2 + 4^2$이므로, 방정식은 $r = 5$.
2) $yz-$평면은 $x = 0$인 점들의 모임이다. 따라서 $r\cos\theta = 0$이 원하는 방정식이다. 즉, $\theta = \frac{\pi}{2}$면 충분하다.
3) $xy-$평면에 평행하다고 했으면 z좌표는 항상 같기에 $z = 5$는 보장되다. 중심이 $(2,4,5)$라고 했는데, 중심이 $(2,4)$이며 반지름이 7인 원은 2번 문제에 의하여

$$r^2 - 4\sqrt{5}r\cos(\theta - \theta_0) - 29 = 0$$

이며, 이때 $\sin(\theta_0) = \frac{1}{\sqrt{5}}$다. 즉 이것이 $z = 5$라는 평면 위에 존재하는 것이므로,

$$r^2 - 4\sqrt{5}r\cos(\theta - \theta_0) - 29 = 0, z = 5$$

가 구하는 방정식이다.

벡터. 18. *Motive : 구면좌표계 연습*

1) φ가 일정하다는 것은 곧 천정으로부터의 각이 일정하다는 것이나 마찬가지이다. 즉, 두 개의 원뿔이 붙어 있는 모양이다.

2) ρ가 일정하다는 것은 원점으로부터의 거리가 일정하다는 것이다. 반지름이 1인 구가 원하는 도형이다.

3) θ가 일정하다는 것은 x축으로부터의 각이 일정하다는 것이나 마찬가지이다. 그 각도가 90도라는 것이므로, 이는 $yz-$평면과 동일하다.

벡터. 19. *Motive : 두 좌표계를 하나로 통일시켜야 좀 보기 쉬워질 것이다.*

A는 직교좌표계로 변형시킬 경우

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{1-4z}$$

이며 B는 직교좌표계로 변형시킬 경우

$$4x^2 + 4y^2 = 1 - 4z$$

이다. 따라서 이 둘을 연립시킬 경우에 $1-4z = \pm 2$라는 결론이 나온다. 그런데 A에서 우변은 항상 양수여야 하므로, $z = -\frac{1}{4}$이다. 그리고 A와 B로부터 $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$임을 알고 있다. 결국 교집합은 $xy-$평면에 평행한 평면 $z = -\frac{1}{4}$에 있는 반지름이 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 인 원이므로, 곡선의 길이는 $\sqrt{2}\pi$이다.

벡터. 20. *Motive : 벡터 연습*

그 크기는 $\sqrt{3^2+4^2} = 5$이며, 나란한 방향의 단위벡터는

$$(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0), (-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0])$$

이다.

벡터. 21. *Motive : 벡터 연산 연습*

$$\begin{aligned}
|a+b|^2 + |a-b|^2 &= (a+b)\cdot(a+b) + (a-b)\cdot(a-b) \\
&= 2a\cdot a + 2a\cdot b - 2a\cdot b + 2b\cdot b \\
&= 2(a\cdot a + b\cdot b) \\
&= 2(|a|^2 + |b|^2)
\end{aligned}$$

벡터. 22. *Motive : 벡터와 수직이라는 것은 무슨 의미인가?*

먼저, 영벡터는 모든 벡터와 내적하였을 때 그 값이 0이므로 모든 벡터와 수직이다. 이제, 0이 아닌 어떤 벡터 $\mathbf{u}$가 있어 모든 벡터와 수직이라고 가정하자.

그러면 이 벡터는 자기 자신과도 수직하기에, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2 = 0$이다. 그러면 $|\mathbf{u}| = 0$인데, 이를 만족하는 벡터는 영벡터 뿐이다. 따라서 모순이므로 영벡터가 유일하다.

벡터. 23. *Motive : 평행사변형 넓이를 쉽게 구할 수 있는 방법이 뭐였더라?*

주어진 도형은 사실상 벡터 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$에 의해 구성되는 평행사변형과 같다. 따라서 그 넓이는 $|\mathbf{v}\times\mathbf{w}|$이다. $\mathbf{v}\times\mathbf{w} = (-4, 8, -4)$이고 그 크기가 $\sqrt{16+64+16} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$이다.

벡터. 24. *Motive : 공식 암기를 묻는 문제이다.*

책에 공식이 증명되어 있다. 공식은 $|\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|$이다. 혹은, $|\det(\mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c})|$라고 표현할 수도 있다.

벡터. 25. *Motive : 단순 계산 문제이다.*

$a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3), c = (c_1, c_2, c_3)$라고 하자.

$$\begin{aligned}
(a\times b)\times c &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)\times(c_1, c_2, c_3) \\
&= (a_3b_1c_3 - a_1b_3c_3 - a_1b_2c_2 + a_2b_1c_2, a_1b_2c_1 - a_2b_1c_1 - a_2b_3c_3 + a_3b_2c_3, a_2b_3c_2 - a_3b_2c_2 - a_3b_1c_1 + a_1b_3c_1) \\
&= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b - (b_1c_1 + b_2c_2 + a_3b_3)a \\
&= (a\cdot c)b - (b\cdot c)a
\end{aligned}$$

벡터. 26. *Motive : 그림을 그려 해결하여 보자!*

$\overrightarrow{PM}$은 A에서 M으로 가는 벡터에서, A에서 P로 가는 벡터를 뺀 것이다. A에서 M으로 가는 벡터는 A에서 P로 가는 벡터에 $2/3$을 곱한 것이나 마찬가지므로, 결국 $\overrightarrow{PM}$이라는 것은 $\overrightarrow{AP}$에 $-1/3$을 곱한 것과 같음을 알 수 있다. P가 BC의 중점이었으므로, $\overrightarrow{AP} = 0.5\overrightarrow{AB} + 0.5\overrightarrow{AC}$이다. 따라서 $a_1 = -1/6, a_2 = -1/6$이다.

반면 $\overrightarrow{QM}$이라는 것은 CA의 중점 Q에서 M으로 가는 것이기에, $\overrightarrow{QM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BQ}$이다. $\overrightarrow{BQ} = 0.5\overrightarrow{BC} + 0.5\overrightarrow{BA} = 0.5\overrightarrow{AC} - 0.5\overrightarrow{AB} - 0.5\overrightarrow{AB} = 0.5\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. 즉 $b_1 = 1/3, b_2 = -1/6$이다. 따라서 구하는 값은 $-1/18 + 1/36 = -1/36$이다.

벡터. 27. *Motive : 수직임을 보이려면 어떻게 해야 하는가?*

먼저, $\mathbf{a}$와 $\mathbf{v}$가 수직함을 보이고자 한다. 서로 수직하다는 것은 내적하면 0이라는 것이다.

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{v} &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{a}\cdot\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a} \\ &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0\end{aligned}$$

이므로 둘은 서로 수직하다. 그 다음으로는 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{w}$가 수직함을 보이자.

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{w} &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} - 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

이므로 수직이다. 이때, $\mathbf{v}$가 $\mathbf{a}$와 수직하기 때문에 마지막 내적은 0임이 항상 보장된다. 마지막으로, $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$가 수직함을 보이자.

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{c} - 0 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{c} = 0$$

이므로 수직이다. 이때 두번째 항은 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{v}$가 수직이기 때문에 사라진다. 따라서, 우리는 세 벡터가 서로 수직임을 알 수 있다.

벡터. 28. *Motive : 평행사변형을 평면에 정사영하는 방법은 무엇일까?*

두 벡터가 이루는 평행사변형을 평면에 정사영한 것은 두 벡터를 평면에 정사영해 만든 벡터들로 이루어진 평행사변형과 같다. 따라서 두 벡터 A, B를 각각 (p, q, r)과 (u, v, w)라고 한다면 a_1은 $(0, q, r)$과 $(0, v, w)$가 이루는 평행사변형의 넓이인 $|qw - rv|$다. 이를 a_2, a_3에 대해서도 수행하면 a^2의 값인

$$(qw - rv)^2 + (pw - ru)^2 + (pv - qu)^2$$

과 같음을 알 수 있다. 또한 θ_1은 P와 yz 평면 사이의 각인데, 이는 P의 법선벡터와 yz평면의 법선벡터인 $(1, 0, 0)$이 이루는 각과 같다. P의 법선벡터는 $A \times B$임을 고려하게 된다면,

$$\cos\theta_1 = \left|\frac{qw - rv}{\sqrt{(qw - rv)^2 + (pw - ru)^2 + (pv - qu)^2}}\right|$$

임을 알 수 있으며 이와 같은 방법으로 $a_i = a\cos\theta_i$임을 보일 수 있다.

벡터. 29. *Motive : CBS 부등식*

$$(x + y + z)^2 \le (x^2 + 2y^2 + 3z^2)(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})$$

이 CBS 부등식에 의해 성립한다. 오른쪽은 그 값이 $\frac{11}{6}$으로 정해져 있기에, $x + y + z$가 최소 혹은 최대가 되려면 CBS 부등식의 등호조건인 $x : \sqrt{2}y : \sqrt{3}z = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{1}{\sqrt{3}}$이 성립해야 한다. 즉, $x = 2y = 3z$이며,

이를 $x^2+2y^z+3z^2=1$에 대입하게 되면 $x=\sqrt{\frac{6}{11}}$이며 $y=\sqrt{\frac{3}{22}}$, $z=\sqrt{\frac{2}{33}}$이다. 최소일 때는 여기에 마이너스를 붙이면 된다.

즉

$$(\sqrt{\frac{6}{11}},\sqrt{\frac{3}{22}},\sqrt{\frac{2}{33}}),(-\sqrt{\frac{6}{11}},-\sqrt{\frac{3}{22}},-\sqrt{\frac{2}{33}})$$

이 원하는 점이다.

벡터. 30. *Motive : 주어진 식을 벡터의 관점에서 해석하여 보자.*

(p,q,r)은 중심이 $(10,10,10)$이고 반지름이 1인 구 위에 존재하는 점이다. 또한 구하라고 한 값은 사실 벡터 $(10,10,10)$과 (p,q,r)이 이루는 각의 코사인 값에 $\sqrt{3}$을 곱한 것과 같다. 이것이 최소가 되려면 둘이 이루는 각이 가장 커야 하고(둔각이 될 수는 없으므로), 이는 원점에서 해당 구에 접선을 그을 때 그 접점이 (p,q,r)일 때다. 반지름이 1, 원점과 구의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{300}$이고 접점과 반지름 사이의 각도는 90 도이기에, 해당하는 각도가 포함된 직각삼각형에서 빗변의 길이는 $\sqrt{300}$, 밑변의 길이는 $\sqrt{299}$이다. 따라서 그때의 코사인 값인

$$\sqrt{\frac{299}{300}}$$

에 $\sqrt{3}$을 곱한

$$\frac{\sqrt{299}}{10}$$

이 최솟값이다.

벡터. 31. *Motive : 벡터의 크기는 어떻게 구하는가?*

주어진 벡터의 크기 $|x\mathbf{u}+v\mathbf{v}|$는 아래와 같이 구해질 수 있다.

$$\begin{aligned} x^2-xy+3y^2 &= |x\mathbf{u}+y\mathbf{v}|^2 \\ &= (x\mathbf{u}+y\mathbf{v})\cdot(x\mathbf{u}+y\mathbf{v}) \\ &= |\mathbf{u}|^2x^2+2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}xy+|\mathbf{v}|^2y^2 \end{aligned}$$

따라서, 우리는 $\mathbf{u}$의 크기가 1, $\mathbf{v}$의 크기가 $\sqrt{3}$, 그리고 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=-\frac{1}{2}$임을 알 수 있다. 이를 바탕으로 둘이 이루는 각도의 코사인 값을 구하면 $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$인데, 예각의 탄젠트 값을 구해야 하므로 정답은 $\sqrt{11}$이 된다.

벡터. 32. *Motive : 단순한 식 정리 문제처럼 보인다.*

$$\begin{aligned} ((a\times b)\times a)\times((a\times b)\times b) &= (a\times b)\cdot((a\times b)\times b)a-(a\cdot((a\times b)\times b)(a\times b) \\ &= (a\cdot((a\times b))\times b)(a\times b) \\ &= (a\cdot((a\cdot b)b-(b\cdot b)a))(a\times b) \\ &= ((a\cdot b)^2-|a|^2|b|^2))(a\times b) \end{aligned}$$

이다. 여기서 주목해야 할 것은 둘째 줄로 넘어가는 과정인데, $(a\times b)\times b$는 그것과 내적되는 벡터 $a\times b$와 수직하기 때문에 0이 되어 사라지기에 계산이 편해진다. 따라서

$$t=(a\cdot b)^2-|a|^2|b|^2=|a\times b|^2$$

임을 알 수 있다.

벡터. 33. *Motive : 이번 단원에서 배운 최댓값을 구하는 방법에 뭐가 있었지?*

$|xa+yb+zc|$는 피타고라스 정리에 의해 그 크기가 $\sqrt{x^2+4y^2+9z^2}$이다. *CBS* 부등식으로부터

$$(x^2+4y^2+9z^2)^2 \le (x^4+y^4+z^4)(1+4+9)$$

을 얻을 수 있고, 좌변의 최댓값은 14임을 확인할 수 있게 된다. 여기에 네제곱근을 취하면 우리가 원하는 값이 나오기에, 최댓값은 $(14)^{\frac{1}{4}}$임을 알 수 있다.

벡터. 34. *Motive : 빛이 반사되면 어떻게 이동하는 거지?*

입사각과 반사각은 항상 동일하기에, 빛이 반사된다면 평면에 수직한 성분의 벡터의 방향이 반대가 되고, 이외의 성분은 그대로 유지된다. 다르게 이야기하면, 법선벡터에 해당 벡터를 정사영한 벡터를 두 배 하여 원래 벡터에서 빼주면 우리가 원하는 $\mathbf{v}*$이 등장한다. 따라서,

$$\mathbf{v}* = \mathbf{v} - 2\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n}$$

이 성립한다.

벡터. 35. *Motive : 평면에 정사영을 한 벡터를 원래 벡터에서 빼면 어떤 특성을 가지지?*

평면에 정사영한 벡터는 원래 벡터에서 평면에 수직인 성분을 제외한 것이다. 따라서, 원래 벡터에서 법선벡터에 원래 벡터를 정사영한 것을 빼면 평면에 정사영한 벡터가 나올 것이다. 이때, 점이 아니라 벡터를 묻는 것이므로 P는 어떤 점이든지 상관이 없다. 즉

$$\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n}$$

이 원하는 벡터이다.

벡터. 36. *Motive : 거리라는 건 결국 두 직선에 모두 수직인 선분의 길이이기도 한데, 이걸 구하는 방법이 있던 것 같은데...*

두 꼬인 위치에 있는 직선 사이를 연결하는 최단 거리의 선분을 l이라 하며, 양 끝은 l_1과 l_2 사이에 있는 점 H_1과 H_2라고 하자. 그러면 H_1H_2는 두 직선에 모두 수직하며, 유일하다.

먼저, $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v}\times\mathbf{w}$는 $\mathbb{R}^3$의 기저를 이룸을 알고 있다. 이는 두 직선이 꼬인 위치에 있으며, 삼차원에서 나란하지 않은 두 벡터로 구성되는 평면에 수직한 벡터는 해당하는 두 벡터와 기저를 이룬다는 것으로부터 확인할 수 있다. 따라서

$$\overrightarrow{P_1P_2} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w} + c(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$$

라고 표현 가능하다. 그리고 l_1, l_2 위에 있는 점 Q_1, Q_2에 대하여 $\overrightarrow{P_1Q_1}$은 l_1에 속하므로 어떤 실수 t에 대하여 $t\mathbf{v}$라고 표현 가능하고, $\overrightarrow{P_2Q_2}$는 l_2에 포함되므로 어떤 실수 s에 대하여 $s\mathbf{w}$라고 표현가능하다. 그러면

$$\overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{Q_1P_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2Q_2} = (a-t)\mathbf{v} + (b+s)\mathbf{w} + c(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$$

임을 알고 있다. $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$의 선형결합 부분과 $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$은 수직하므로, $|\overrightarrow{Q_1Q_2}|$의 길이는

$$|\overrightarrow{Q_1Q_2}|^2 = |(a-t)\mathbf{v} + (b+s)\mathbf{w}|^2 + |c(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|^2$$

를 만족시키며, c는 정해진 값이므로 $t=a$이고 $s=-b$으로 앞의 $|(a-t)\mathbf{v}+(b+s)\mathbf{w}|^2$이 0으로 최소가 될 때 최소의 길이가 된다. 즉, 두 직선 사이 두 점을 이을 때 최소가 되는 점은 $\overrightarrow{P_1Q_1} = a\mathbf{v}$, $\overrightarrow{P_2Q_2} = -b\mathbf{w}$이 되는 점으로 존재하며 유일하고, 이 때는 $\overrightarrow{H_1H_2} = c(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$으로 두 직선에 모두 수직함을 확인할 수 있다.

따라서 H_1H_2은 존재하며 유일하고, 길이가 최소이다. 그런데 증명 과정에서 보았듯 이는 $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$에 모두

수직하며, $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$에 나란할 것이다. 그런데,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2} &= \overrightarrow{P_1H_2}+\overrightarrow{H_2P_2}\\ &= \overrightarrow{P_1H_1}+\overrightarrow{H_1H_2}+\overrightarrow{H_2P_2}\end{aligned}$$

에서 $\overrightarrow{P_1H_1}$은 $\mathbf{v}$에 평행하고, $\overrightarrow{H_2P_2}$는 $\mathbf{w}$에 평행하다. 즉 둘은 모두 $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$에 수직하다. 따라서 $\overrightarrow{P_1P_2}$을 $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$에 정사영하면 $\overrightarrow{H_1H_2}$이 됨을 알 수 있다. 그 길이는 우리가 원하는 값이다. 즉

$$d = |\overrightarrow{H_1H_2}| = |p_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}\overrightarrow{P_1P_2}| = \left|\frac{(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\cdot\overrightarrow{P_1P_2}}{|\mathbf{v}\times\mathbf{w}|}\right|$$

가 된다.

벡터. 37. *Motive : 점에서 평면에 내린 수선의 발은?*

점 (a,b,c)에서 평면에 내린 수선은 평면의 법선벡터 (p,q,r)에 평행하다. 따라서, 수선의 발은 임의의 $t\in\mathbb{R}$에 대하여 $(a-pt,b-qt,c-rt)$라고 표현가능하다. 이것이 평면 위에 존재하므로,

$$p(a-pt)+q(b-qt)+r(c-rt)=s$$

이며 이로부터

$$t=\frac{ap+bq+cr-s}{p^2+q^2+r^2}$$

임을 알 수 있다. 구하고자 하는 것은 (pt,qt,rt)의 길이, 즉 $|t|\sqrt{p^2+q^2+r^2}$이므로,

$$\frac{|ap+bq+cr-s|}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

벡터. 38. *Motive : 평면 사이의 각은 어떻게 구하지?*

평면사이의 교각은 곧 법선벡터 사이의 각도와 같다. 두 법선벡터 $(2,4,1)$과 $(1,-3,2)$ 사이의 각도에 대한 코사인 값은

$$\frac{2-12+2}{\sqrt{21}\sqrt{14}}=-\frac{8}{7\sqrt{6}}$$

이다. 근데 일반적으로 교각은 예각을 표시하기에, 답은 관점에 따라

$$\left|\frac{2-12+2}{\sqrt{21}\sqrt{14}}\right|=\frac{8}{7\sqrt{6}}$$

가 될 수도 있다. 즉,

$$\pm\frac{4\sqrt{6}}{21}$$

벡터. 39. *Motive : 대칭시킨 점과 원래 점을 이은 직선과 평면의 교점이 어디지?*

직선 $\overrightarrow{PQ}$는 평면에 수직하므로 법선벡터에 나란하다. 따라서, 우리는 $Q=(x-2t,y-2t,z-4t)$라고 표현가능하다. 또한 $\overrightarrow{PQ}$와 평면의 교점은 둘 사이 중점이므로 $(x-t,y-t,z-2t)$고 이것이 평면 위에 존재한다. 따라서 $x-t+y-t+2z-4t=0$이기에, $t=\dfrac{x+y+2z}{6}$이다. 이로부터

$$Q=\left(\frac{4x-2y-4z}{6},\frac{-2x+4y-4z}{6},\frac{-4x-4y-2z}{6}\right)$$

임을 알 수 있고 다시 R은 원래 점 P로 돌아오기에 (x,y,z)다.

벡터. 40. *Motive : 길이를 내적으로 표시하는 방법이 있던 것 같은데...*

$$\begin{aligned}|P_1-Q|^2+\cdots+|P_k-Q|^2 &= (P_1-Q)\cdot(P_1-Q)+\cdots+(P_k-Q)\cdot(P_k-Q)\\ &= |P_1|^2+\cdots+|P_k|^2-2Q\cdot(P_1+P_2+\cdots+P_k)+k|Q|^2\\ &= k((Q-\bar{P})\cdot(Q-\bar{P})+P\text{에 관한 식으로, }Q\text{와 무관})\end{aligned}$$

와 같이 표시됨을 알 수 있다. 즉, 이것이 최소가 되려면 나머지 부분은 건드릴 수 없으니 $Q=\bar{P}$이다. 이때, $\bar{P}$는 모든 P점들의 무게중심이다.

벡터. 41. *Motive : 단순 벡터 계산 문제*
두 평면의 교선 먼저 구하자. 첫 식에서 둘째 식을 빼면 $x-y=2$로, y와 z를 x에 대해 표기하게 된다면 각각 $x-2, 2x-8$이다. 따라서 해당 직선은

$$x=y+2=\frac{z+8}{2}$$

라고 표시되며, $zx-$평면과 만나는 점은 $(2,0,-4)$이다. $xy-$평면과 만나는 점은 $(4,2,0)$이다. 세 점이 이루는 평면은 벡터 $(2,2,4)$와 $(4,4,7)$을 모두 포함하고 있으니 법선벡터가 $(1,-1,0)$이고, 이에 따라 $x-y=2$가 원하는 평면임을 알 수 있다. 이 평면과 원점 사이의 거리는 공식을 적용하면 $\sqrt{2}$임을 확인할 수 있다.

벡터. 42. *Motive : 세 점을 지나는 평면의 법선벡터는 어떻게 구하지?*
평면은 $\overrightarrow{PQ}$와 $\overrightarrow{PR}$을 포함하고 있다. 즉 $(1,2,-1)$과 $(-2,2,2)$에 모두 수직인 벡터를 찾아야 한다. 먼저 삼각형의 넓이를 구하면, 외적의 크기에 반을 해주면 된다. 외적은 $(6,0,6)$이므로, 삼각형의 넓이는 $3\sqrt{2}$이다. 또한 이것이 법선벡터이고 직선은 이 벡터에 나란하다. 또한 직선이 P를 지나야 하기에

$$x-1=z,\quad y=-1$$

이 원하는 직선이다.

벡터. 43. *Motive : 두 벡터가 이루는 각을 구하려면 내적을 사용하는 게 좋은 방법 아닐까?*
먼저, $\overrightarrow{AQ}$의 길이는 $(2,2,3)$의 길이므로 $\sqrt{17}$이다. 그런데 A,P,Q가 직각삼각형을 이루므로 $\overrightarrow{PQ}$의 길이는 $\sqrt{47}$임을 알 수 있다. 그리고 이 벡터는 평면에 수직하다. 세 점으로부터 이들을 지나는 평면을 생각해보면 벡터 $(1,2,2)$와 $(2,2,3)$에 수직한 벡터 $(2,1,-2)$를 법선벡터로 가진다. 따라서 Q의 좌표로부터 P의 좌표가

$$(3\pm\frac{2\sqrt{47}}{3},4\pm\frac{\sqrt{47}}{3},6\mp\frac{2\sqrt{47}}{3})$$

임을 알고 있다. 그러면

$$\overrightarrow{AP}=(2\pm\frac{2\sqrt{47}}{3},2\pm\frac{\sqrt{47}}{3},3\mp\frac{2\sqrt{47}}{3})$$

$$\overrightarrow{AB}=(1,2,2)$$

에 대해 교각의 코사인 값을 구하면

$$\cos\theta=\frac{2+4+6}{24}=\frac{1}{2}$$

이다. 따라서 각 θ는 $\frac{\pi}{3}$이다.

벡터. 44. *Motive : 반사되는 빛은 어떻게 구했었지?*
먼저, 평면 P를 찾아보자. P는 점 $(2,1,0)$을 포함하면서 벡터 $(-2,0,-2)$와 $(3,-2,2)$를 포함한다. 따라서 $(2,1,-2)$가 법선벡터이며 P는 $2x+y-2z=5$라고 이야기할 수 있다. $(2,1,0)$에서 $(1,1,1)$방향으로 진행하면 실수 $t\in\mathbb{R}$에 대하여 반사점은 $(2+t,1+t,t)$라고 표현 가능하며 이는 평면 $x-2y-z=5$위의

점이기에 $2+t-2-2t-t=-2t=5$로부터 반사점은 $(-0.5,-1.5,-2.5)$이다. 반사된 방향은

$$(1,1,1)-2\frac{1-2-1}{6}(1,-2,1)=(\frac{1}{3},\frac{7}{3},\frac{1}{3})$$

이고 반사된 빛의 자취는 실수 s에 대하여 $(-0.5+s,-1.5+7s,-2.5+s)$라 표현 가능하다. 이것이 평면 P 위에 있어야 하므로 $-1+2s-1.5+7s+5-2s=2.5+7s=5$이고 $s=\frac{5}{14}$다. 따라서

$$(-\frac{1}{7},\frac{1}{2},-\frac{15}{7})$$

가 원하는 상의 좌표다.

벡터. 45. *Motive : 수선의 발과 점을 이은 직선과 교선 사이의 각도는?*

먼저 두 직선의 교선을 구하자. 첫째 식에 둘째 식에 두 배를 한 후 더하면 $3x=12$로 $x=4$다. 또한, $y-2z=1$이 성립하게 된다. 따라서 둘의 교선은

$$x=4,\quad y-2z=1$$

이다. 점 $(1,-1,2)$에서 여기 내린 수선의 발의 좌표를 실수 a에 대해 $(4,1+2a,a)$라고 할 수 있으며, 이를 둘 사이를 잇는 벡터 $(2,2+2a,a-2)$는 교선의 방향벡터 $(0,2,1)$에 수직하다. 따라서 내적한 값이 0이기에, $4+4a+a-2=5a+2=0$이다. 즉 $a=-\frac{2}{5}$이다. 따라서 수선의 발은

$$(4,\frac{1}{5},-\frac{2}{5})$$

벡터. 46. *Motive : 꼬인 위치에 있는 직선 사이 거리를 어떻게 구하더라?*

1) $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$의 값을 먼저 구하여 보자. 외적의 정의를 이용하면 이것이 $(9,-5,3)$임을 알 수 있다. $\mathbf{x}=(-1,1,-1)$이므로, 그 정사영을 구하면

$$\frac{-9-5-3}{81+25+9}(9,-5,3)=-\frac{17}{115}(9,5,-3)$$

2) 둘 사이의 거리는 1)에서 구한 벡터의 크기임을 알고 있다. 즉

$$\frac{17}{\sqrt{115}}=\frac{17\sqrt{115}}{115}$$

벡터. 47. *Motive : 어? 노가다는 아닐 것 같은데....*

1) 먼저, 간단하게는 p는 X를 A에 대해 정사영하는 것, 즉 X에서 A성분만을 가져오는 것이다. 따라서 $p\circ p(X)=p(p(X))=p(X)$이므로 $p\circ p$이다. 이는 정사영의 특성상 한 번 정사영한 벡터는 항상 A에 평행하기에 다시 한 번 정사영해도 자기 자신과 같기 때문이다.

참고 : $p(X)$의 결과를 직접 구해 두 번 시행하여 같음을 보여도 된다.

2) $q^n(X_0)=q(q^{n-1}(X_0))=p(q^{n-1}(X_0))+B$이고, 이를 반복해 시행해 나가면

$$q^n(X_0)=p(q^{n-2}(p(X_0)+B)+B)+B=\cdots=p^n(X_0)+p^{n-1}(B)+\cdots+p(B)+B$$

이다. 그런데 p는 몇 번 시행해도 한 번 한 것과 같음을 1)로부터 보일 수 있다. 따라서 이 값은

$$p(X_0)+(n-1)P(B)+B$$

라고 표현할 수 있다.

$$p(X_0)=\frac{1+6+2}{9}(1,2,2)=(1,2,2)$$

이며

$$p(B) = \frac{2+2+2}{9}(1,2,2) = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$$

임을 알고 있다. 따라서

$$(3 + \frac{2}{3}(n-1), 3 + \frac{4}{3}(n-1), 3 + \frac{4}{3}(n-1))$$

가 원하는 값이다.