일계미분방정식

모든 문제에서 주어진 미분방정식을 풀어주시면 됩니다. 무슨 미방인지는 비밀입니다.

2-Extra2. 1.

$$(4+t^2)\frac{dy}{dt}+2ty=4t$$

좌변을 잘 고려하면

$$\frac{d}{dt}((4+t^2)y)=4t$$

임을 확인할 수 있다. 따라서

$$(4+t^2)y=2t^2+c$$

이므로 (c는 상수)

$$y=\frac{2t^2}{4+t^2}+\frac{c}{4+t^2}$$

이 일반해이다.

2-Extra2. 2.

$$\frac{dy}{dt}+\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}e^{t/3}$$

일계선형미분방정식이다. 곱해줄 함수를 잘 생각해주면,

$$\int\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}t$$

이므로 $e^{t/2}$를 곱해주면 된다. 따라서 근은

$$y=e^{-t/2}(\int_{t_0}^{t}\frac{1}{2}e^{t/3}e^{t/2}dt+c)=e^{-t/2}(\frac{3}{5}e^{5t/6}+c)=\frac{3}{5}e^{t/3}+ce^{-t/2}$$

로 주어지며, c는 상수이다.

2-Extra2. 3.

$$\frac{dy}{dt}-2y=4-t$$

일계선형미분방정식이다.

$$\mu(t)=e^{\int -2dt}=e^{-2t}$$

를 이용하면

$$y(t)=e^{2t}(\int_{t_0}^{t}(4-t)e^{-2t}dt+c)=e^{2t}(\frac{1}{2}te^{-2t}-\frac{7}{4}e^{-2t}+c)=\frac{1}{2}t-\frac{7}{4}+ce^{2t}$$

가 일반해임을 확인할 수 있다. 여기서, c는 상수이다.

2-Extra2. 4.

$$ty'+2y=4t^2, y(1)=2$$

우리가 아는 꼴로 바꾸어 주기 위하여 양변을 t로 나누어 주면

$$y'+\frac{2}{t}y=4t$$

이며

$$\mu(t)=e^{\int\frac{2}{t}dt}=t^2$$

이다. 따라서

$$y = \frac{1}{t^2}(\int_1^t 4s^3 ds + c) = t^2 + \frac{c}{t^2}$$

로 주어진다. 또한 $y(1) = 2$이므로 상수 $c = 1$이다. 따라서 근은

$$y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}, t > 0$$

이 될 것이다. 이때 $t = 0$이면 y가 정의되지 않으므로, $t > 0$에서만 미분방정식을 논의할 수 있다.

2-Extra2. 5.

$$y' + y = 4\sin 3t$$

곱해주어야 할 함수는 $e^{\int 1dt} = e^t$이다.

$$\frac{d}{dt}(e^t y) = e^t y' + e^t y = 4e^t \sin 3t$$

이므로

$$e^t y = \frac{2}{5}e^t \sin 3t - \frac{6}{5}e^t \cos 3t + c$$

이며, c는 상수이다. 따라서

$$y = \frac{2}{5}\sin 3t + \frac{6}{5}\cos 3t + ce^{-t}$$

2-Extra2. 6.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \quad y(0) = -1$$

이 미분방정식은

$$2(y-1)dy = (3x^2 + 4x + 2)dx$$

로 표현될 수 있다. 양변을 적분하게 된다면

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c$$

로 표현되며, c는 상수이다. 또한 $y(0) = -1$을 대입하면 $c = 3$임을 확인할 수 있다. 따라서

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3$$

이며, y에 대해 정리한다면 초기항을 만족시키는 y는

$$y = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$$

이다.

2-Extra2. 7.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - x^3}{4 + y^3}$$

이 미분방정식을 다시 쓰면

$$(4 + y^3)dy = (4x - x^3)dx$$

이고, 양변을 적분하면

$$y^4 + 16y + x^4 - 8x^2 = c$$

가 된다. 이때, c는 상수이다.

2-Extra2. 8.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2 + xy + y^2}{x^2}$$

미분방정식을 정리하면

$$\frac{dy}{dx} = 2 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

이고 $y/x = v$라고 두면

$$v + x\frac{dv}{dx} = 2 + v + v^2$$

로 주어지기에

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2+v^2}{x}$$

이다. 이는 분리가능미분방정식이기에 다시 쓰면

$$\frac{1}{2+v^2}dv = \frac{1}{x}dx$$

이고,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{2}}v) = \ln|x| + c$$

이고, c는 상수가 된다. 따라서 미분방정식의 해는

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{y}{\sqrt{2}x}) - \ln|x| = c$$

이다. y에 대해서 정리해주게 된다면

$$y = \sqrt{2}x\tan(\sqrt{2}\ln|x| + c)$$

이며, c는 상수이다.

2-Extra2. 9.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-4y^2}{2xy}$$

양변을 정리하면

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y/x} - 2\frac{y}{x}$$

로 주어지기에, $v = y/x$라고 하면

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2v} - 2v$$

가 된다. 따라서

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1-6v^2}{2v}$$

임을 확인할 수 있다. 양변을 잘 정리하면

$$(\frac{1}{1-\sqrt{6}v} - \frac{1}{1+\sqrt{6}v})dv = \frac{\sqrt{6}}{x}dx$$

이게 되며, 양변을 적분하면

$$-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln(|1-\sqrt{6}v|) - \frac{1}{\sqrt{6}}\ln(|1+\sqrt{6}v|) = \sqrt{6}\ln|x| + c$$

로 주어지고, c는 상수이다. 이를 정리하면

$$\ln(|1-6v^2|) + 6\ln|x| = c$$

이고,

$$1 - 6v^2 = \pm \frac{A}{x^6}$$

이며 A는 상수다.

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{6}(1 \pm \frac{A}{x^6})$$

이고,

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{6}x^2 \pm \frac{A}{x^4}}$$

로 주어진다.

2-Extra2. 10.

$$(e^x \sin y - 3y \sin x) + (e^x \cos y + 3\cos x)y' = 0$$

주어진 미분형식의 잠재함수를 구해 본다면

$$\varphi(x, y) = e^x \sin y + 3y \cos x$$

에 상수를 더한 꼴이 될 것이다. 따라서 이 미분방정식의 해는

$$e^x \sin y + 3y \cos x = c$$

이고, c는 상수이다.

2-Extra2. 11.

$$(9x^2 + y - 1) - (4y - x)y' = 0$$

대응되는 미분형식은 닫힌형식으로, 잠재함수가 존재한다. 잠재함수를 구하여 보면

$$\varphi(x, y) = 3x^3 + xy - x - 2y^2$$

이므로, 상수 c에 대하여

$$3x^3 + xy - x - 2y^2 = c$$

가 y다.

2-Extra2. 12.

$$2xy^3 + (1 + y^2)y' = 0$$

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{0 - 6xy^2}{2xy^3} = -\frac{3}{y}$$

로 y에 관련된 식임을 확인할 수 있다. 따라서

$$\mu(y) = e^{\int -\frac{3}{y} dy} = \frac{1}{y^3}$$

을 곱해주면

$$2x + \frac{1 + y^2}{y^3}y' = 0$$

으로 분리가능이자 완전미분방정식이 된다. 따라서

$$x^2 - \frac{1}{2y^2} + \ln|y| = c$$

가 해이다. 여기서 c는 상수이다.

2-Extra2. 13.

$$y' = e^{3x} + y - 1$$

y에 대한 일계선형미분방정식이다.

$$\mu(x) = e^{\int -1dx} = e^{-x}$$

이며,

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = e^{2x} - e^{-x}$$

이므로

$$e^{-x}y = \frac{1}{2}e^{2x} + e^{-x} + c$$

로 주어지고, c는 상수이다. 따라서

$$y = \frac{1}{2}e^{3x} + 1 + ce^{-x}$$

2-Extra2. 14.

$$(4x/y^2 + 3/x^2y) + (3/xy^2 + 2y/x^2)y' = 0$$

$$N_x - M_y = -3/x^2y^2 - 4y/x^3 + 8x/y^3 + 3/x^2y^2 = \frac{1}{x^3y^3}(8x^4 - 4y^4)$$

$$xM - yN = 4x^2/y^2 + 3/xy - 3/xy - 2y^2/x^2 = \frac{1}{x^2y^2}(4x^4 - 2y^4)$$

이므로,

$$\frac{N_x - M_y}{xM - yN} = \frac{2}{xy}$$

로 xy에 관한 식이다. 따라서 $\mu(xy)$는

$$\mu'(xy) = \frac{2}{xy}\mu(xy)$$

이므로 선형미분방정식이다. 양변에 $e^{\int -2/xyd(xy)} = (xy)^{-2}$을 곱하면

$$(xy)^{-2}\mu'(xy) - 2(xy)^{-3}\mu(xy) = \frac{d}{dxy}((xy)^{-2}\mu(xy)) = 0$$

이므로,

$$\mu(xy) = c(xy)^2$$

꼴이며, c는 상수이다. 따라서 x^2y^2을 양변에 곱하면

$$(4x^3 + 3y) + (3x + 2y^3)y' = 0$$

이므로 잠재함수를 구함으로써 계산하면

$$x^4 + 3xy + \frac{1}{2}y^4 = c$$

이고, c는 상수다.

2-Extra2. 15.

$$(4 + 3/x) + (6y/x - 1/x)y' = 0$$

$$M_y - N_x = 6y/x^2 - 1/x^2$$

이고

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1}{x}$$

로 x에 관련된 식이기에 μ를 x에 관한 함수로 볼 수 있다.

$$\mu'(x) = \frac{1}{x}\mu(x)$$

이고, 양변에 $1/x$를 곱하고 넘겨주면

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}\mu) = 0$$

임을 확인할 수 있다. 따라서 $\mu = x$로 두면 잘 기능함을 확인가능하다. 따라서

$$(4x+3) + (6y-1)y' = 0$$

은 완전미분방정식이므로 잠재함수를 구하여 계산하면

$$2x^2 + 3x + 3y^2 - y = c$$

가 근이고, c는 상수이다.

2-Extra2. 16.

$$\left(\frac{\sin y}{y} - 3e^{-x}\sin x\right) + \left(\frac{\cos y + 3e^{-x}\cos x}{y}\right)y' = 0$$

단, $\mu(x,y) = ye^x$가 합리적인 후보로 보인다는 소문이 있다.

소문을 믿어 주어진 함수를 양변에 곱해보면,

$$(e^x \sin y - 3y\sin x) + (e^x\cos y + 3\cos x)y' = 0$$

이다. 대응되는 미분형식은 닫힌형식이기 때문에, 여기에는 잠재함수가 존재하며 이를 바탕으로 근을 구하면

$$e^x \sin y + 3y\cos x = c$$

이며, c는 상수이다.

2-Extra2. 17.

$$t^2y' + 2ty - y^3 = 0, \quad t > 0$$

양변을 정리하여 주면

$$t^2y' + 2ty = y^3$$

이기에, 이는 베르누이 미분방정식임을 확인할 수 있다. $n = 3$인 경우이므로, $v = 1/y^2$으로 치환해준다면

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dt}$$

이므로

$$-\frac{t^2y^3}{2}\frac{dv}{dt} + 2ty = y^3$$

로부터

$$\frac{t^2y^2}{2}\frac{dv}{dt} - 2t - y^2 = 0$$

과

$$t^2\frac{dv}{dt} - 4vt - 2 = 0$$

을 이끌어낼 수 있다.

$$\frac{dv}{dt} - \frac{4}{t}v + \frac{2}{t^2} = 0$$

이라는 선형미분방정식으로부터

$$\mu(t) = e^{\int -4/t dt} = 1/t^4$$

를 얻어낼 수 있고,

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{t^4}v) = -\frac{2}{t^6}$$

이며

$$v = \frac{2}{5t} + ct^4$$

이다. 또한, 여기서 c는 상수이다. $v = y^{-2}$이므로

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{\left|\frac{2}{5t} + ct^4\right|}} = \pm\left(\left|\frac{5t}{2+5ct^5}\right|\right)^{1/2}$$

를 얻어낼 수 있다.

2-Extra2. 18.

$$\frac{dy}{dt} = (\cos t + 1)y - y^3$$

단, 근을 표시할 때는 $f(t) = \int_0^t e^{2\sin s + 2s} ds$를 이용하여라.

$y^{-2} = v$라고 하면

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dt}$$

이므로

$$-\frac{y^3}{2}\frac{dv}{dt} = (\cos t + 1)y - y^3$$

이고,

$$y^2\frac{dv}{dt} + 2(\cos t + 1) - 2y^2 = 0$$

으로부터

$$\frac{dv}{dt} + 2(\cos t + 1)v - 2 = 0$$

이라는 선형미분방정식을 만들 수 있다.

$$\mu(t) = e^{\int 2(\cos t + 1) dt} = e^{2\sin t + 2t}$$

를 이용하면

$$v = \frac{1}{e^{2\sin t + 2t}}\left(\int_0^t 2e^{2\sin s + 2s} ds + c\right) = \frac{1}{e^{2\sin t + 2t}}(2f(t) + c)$$

로 표현된다. $v = 1/y^2$였으므로,

$$y = \pm\frac{e^{\sin t + t}}{\sqrt{2f(t) + c}}$$

으로 표현되다.

2-Extra2. 19.

$$y' = 1 + t^2 - 2ty + y^2$$

전형적인 리카치 미분방정식의 꼴이다. 이 경우에는 우리가 알고 있는 해를 먼저 하나 찾아야 한다.

$y_1(t) = t$라고 두면

$$1 = 1 + t^2 - 2t^2 + t^2$$

이므로, 근이 됨을 확인할 수 있다. 그러면 나머지 하나의 근을

$$y(t) = y_1(t) + \frac{1}{v(t)}$$

라고 두면,

$$\frac{dv}{dt} = -(-2t + 2t)v - 1$$

라는 선형미분방정식이 성립함을 안다. 따라서 $v = -t + c$이며, c는 상수이다. 즉

$$y = t + \frac{1}{c - t}$$

가 다른 근이 된다.

2-Extra2. 20.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2\cos^2 t - \sin^2 t + y^2}{2\cos t}, \quad y_1(t) = \sin t$$

미방을 처음 볼 때 리카치 타입임을 캐치하기에는 오랜 시간이 걸릴 수도 있지만 근 하나를 주었기에 리카치 타입임을 쉽게 확인할 수 있다. $y = y_1 + 1/v$를 또다른 근으로 본다면,

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\sin t}{\cos t}v - \frac{1}{2\cos t}$$

이라는 v에 대한 선형미분방정식을 얻어낼 수 있다.

$$\mu(t) = e^{\int \frac{\sin t}{\cos t}dt} = \frac{1}{\cos t}$$

이므로

$$\frac{1}{\cos t}\frac{dv}{dt} + \frac{\sin t}{\cos^2 t}v = -\frac{1}{2\cos^2 t}$$

으로부터

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\cos t}v\right) = -\frac{1}{2\cos^2 t}$$

가 되고,

$$v = -\frac{1}{2}\sin t + c\cos t$$

이다. 이때, c는 상수이다. 따라서

$$y = \sin t + \frac{2}{c\cos t - \sin t}$$

가 근이며, c는 (앞과는 다른) 상수이다.