행렬

- 일차 연립 방정식

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

을 생각하자. 이를 풀려면 방정식의 계수를 행과 열을 맞춰 늘어놓은

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

을 다루면 좋을 것이다. 이와 같은 모양으로 수를 배열한 것을 **행렬**이라 부른다.

행렬

- 일반적으로 $m \times n$개의 수를

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

  과 같이 나열한 것을 $m \times n$ 행렬이라고 한다.
- 이때 $(a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in})$을 i번째 **행**이라 부른다.
- 이때 $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$를 j번째 **열**이라 한다.
- **행의 수**는 m, **열의 수**는 n이 된다.
- 이러한 행렬을 간단히 (a_{ij})로 써주기도 한다.

행렬의 연산

- 모든 항이 0인 행렬을 **영행렬**이라 하고, O로 나타낸다.
- 또한, 실수 c에 대하여 $c(a_{ij})$는 각 (i,j)항이 ca_{ij}인 행렬을 뜻한다. 즉, 행렬의 상수곱은 행렬의 모든 원소에 상수를 곱한 뒤 다시 모은 행렬이다.
- 만약 (a_{ij})와 (b_{ij})가 같은 크기를 가지고 있어 행과 열의 수가 모두 같으면, 두 행렬의 합을

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij} + b_{ij})$$

로 정의한다. 즉, 두 행렬의 합은 같은 위치에 있는 원소들을 합한 것들을 모은 행렬이다.

행렬의 곱

- 행렬의 곱은 일반적인 곱과는 달리 교환법칙이 성립하지 않는다. 또한, 그 순서에 따라 행렬의 곱이 정의될 수도 있고, 정의조차 되지 않을수도 있다.
- 즉, $A = (a_{ij})$와 $B = (b_{jk})$에 대하여 AB와 BA는 다를 수도 있다.
- 일반적으로 A가 $m \times n$행렬이고, B가 $n \times l$행렬일 때처럼 행렬은 앞에 곱해지는 행렬의 열의 개수와 뒤에 곱해지는 행렬의 행의 개수가 같아야지만 곱셈이 정의될 수 있다.
- 또한, AB는 $m \times l$행렬이 된다.
- AB의 (i, k)행은 A의 i번째 행과 B의 k번째 열을 각각 $\mathbb{R}^n$의 벡터로 보았을 때 둘의 내적인

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

이 된다.

행렬의 곱

Example

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 13 \\ 28 & 40 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 9 & 14 & 19 \\ 15 & 24 & 33 \end{pmatrix}$$

행렬의 곱

- 행렬 A, B, C에 대하여 곱 AB와 곱 BC가 정의될 때,

$$(AB)C = A(BC)$$

  이다.
- A, A'이 $m \times n$ 행렬이고, B, B'이 $n \times l$ 행렬일 때, 실수 t에 대하여

$$(A + A')B = AB + A'B$$

$$A(B + B') = AB + AB'$$

$$(tA)B = t(AB) = A(tB)$$

  가 성립한다.

전치행렬

- $m \times n$ 행렬 $A = (a_{ij})$의 각 항들을 다시 배열하여 (i, j) 항을 (j, i)항이 되도록 만든 $n \times m$ 행렬을 A의 **전치행렬**이라 부른다.
- 전치행렬은 A^t로 쓴다. 예를 들어,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

이라면

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

- $m \times n$ 행렬 A, B와 $n \times l$ 행렬 C에 대하여, 아래가 성립한다.

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

$$(cA)^t = cA^t$$

$$(A^t)^t = A$$

$$(AC)^t = C^t A^t$$

정사각행렬

- 행의 수와 열의 수가 같은 행렬을 **정사각행렬** 혹은 **정방행렬**이라 부른다.
- 이때 행의 수가 n이면 **n차 정사각행렬**이라 한다.
- (i, i)항들을 **대각선**의 항들이라 부른다.
- 만약 대각선의 항들이 모두 1이고, 나머지 항은 모두 0인 n차 정사각행렬을 **n차 단위행렬**이라 부르고, I_n 혹은 I로 쓴다.
- 예를 들어,

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 정사각행렬 중 대각선 이외의 항이 모두 영인 행렬을 **대각행렬**이라 부른다. 단위행렬은 대각행렬의 한 예시이다.

선형사상

- 일반적으로, $n-$공간의 원소를 열벡터 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$으로 나타내면,

  $m \times n$ 행렬 $A = (a_{ij})$와 곱하여 $m-$공간의 원소를 얻는다. 즉,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

- 즉, $m \times n$ 행렬 A는 사상

$$L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad L_A(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$$

  로 이해할 수 있다.

선형사상

- 행렬에서 얻어지는 사상 L은 임의의 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$과 $t \in \mathbb{R}$에 대하여
$$L(\mathbf{x}+\mathbf{y}), \quad L(t\mathbf{x}) = tL(\mathbf{x})$$
을 만족시킨다.
- 이와 같은 성질을 가지고 있는 사상을 **선형사상**이라고 부른다.
- 예를 들어, **항등사상**
$$\mathrm{id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{id}(\mathbf{x}) := \mathbf{x}$$
는 선형사상이다.
- 예를 들어, 원점에 대한 점대칭변환
$$-\mathrm{id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad -\mathrm{id}(\mathbf{x}) := -\mathbf{x}$$
도 선형사상이다.
- $L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$이다.

선형사상은 행렬

- 행렬에 대응되는 사상은 항상 선형사상인데, 선형사상은 항상 행렬에 대응된다.
- $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$이 주어졌을 때, 표준단위벡터 $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$의 상을 각각 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$으로 두고 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$을 열벡터로 가지는 행렬을 A로 두자.
- 그러면, 임의의 벡터 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$에 대하여,

$$L(\mathbf{x}) = x_1 L(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_n L(\mathbf{e}_n) = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = A\mathbf{x} = L_A(\mathbf{x})$$

이니 행렬과 선형사상은 서로 같은 것임을 안다.

Example

단위벡터 $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$에 대한 벡터 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$의 정사영은 $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})\mathbf{v}$이고, i번째 원소는

$$v_i\left(v_1x_1 + \cdots + v_nx_n\right)$$

이므로 이 선형사상에 대응되는 행렬은

$$\mathbf{v}\mathbf{v}^t = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = \left(v_i v_j\right)$$

이다.

선형사상의 성질

- $L_{A+B}(\mathbf{x}) = L_A(\mathbf{x}) + L_B(\mathbf{x})$
- $L_{cA}(\mathbf{x}) = cL_A(\mathbf{x})$
- $m \times n$ 행렬 A와 $n \times l$ 행렬 B에 대하여, 두 선형사상 $L_B : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$와 $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$의 합성

$$L_A \circ L_B : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$$

  은 $L_{AB} : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$과 일치한다.

대각합

- n차 정사각행렬 $A = (a_{ij})$의 **대각합**을

$$\mathrm{tr}A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

  로 정의한다.

- 임의의 n차 정사각행렬 A, B에 대하여,

$$\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$$

$$\mathrm{tr}(cA) = c\mathrm{tr}(A)$$

$$\mathrm{tr}(A^t) = \mathrm{tr}(A)$$

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

$$\mathrm{tr}(A^t A) \geq 0$$