중간문풀-3. 1. *각 고정된 실수 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 극한값*

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}$$

을 구하여라.

중간문풀-3. 2. *연속함수* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*에 대하여 함수* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$*를*

$$g(x) = \max\{f(y) : a \le y \le x\}, \quad x \in [a, b]$$

로 정의하였을 때, g*가 연속함수임을 보여라.*

중간문풀-3. 3. *함수* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$*가 연속이고* $\lim_{x\to\infty}[f(x+1) - f(x)] = \alpha$*일 때,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$$

임을 보여라.

중간문풀-3. 4. *함수* f*를*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ x & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

라 정의하자. 그러면 어떤 x*에서* f*가 연속하는가?*

중간문풀-3. 5. *극한의 정의를 이용하여*

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{4}$$

임을 보여라.

중간문풀-3. 6. *극한의 정의를 이용하여*

$$\lim_{x\to 8}\sqrt[3]{x}=2$$

임을 보여라.

중간문풀-3. 7.

$$\lim_{x\to 1} e^x = e$$

임을 극한의 정의를 이용하여 보여라.

중간문풀-3. 8. *함수* f*와* g*에 대하여,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to a} g(x) = M$$

임이 알려져 있다. 이때,

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LM$$

임을 보여라.

중간문풀-3. 9. *함수* f*와* g*에 대하여,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a} g(x) = \infty$$

임이 알려져 있다. 이때,

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \infty$$

임을 보여라.

중간문풀-3. 10. *함수* f*와* g*에 대하여,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = c > 0$$

$$\lim_{x \to a} g(x) = \infty$$

임이 알려져 있다. 이때,

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \infty$$

임을 보여라.

중간문풀-3. 11. *모든* x*에 대하여* $f(x) < g(x)$*가 성립하고* $x \to a$*임에 따른* f*와* g*의 극한값이 존재한다고 하자. 그러면*

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$$

임을 증명하라.

중간문풀-3. 12. *연속성의 정의를 이용하여* $\sin x$*가 연속함수임을 증명하여라.*

중간문풀-3. 13.

$$\lim_{x\to\infty} \sin x$$

가 존재하지 않음을 보여라.

중간문풀-3. 14. *함수* $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$*가 아래와 같이 정의된다.*

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in \mathbb{Q} \\ \cos x & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

함수 f*가 연속인* $x \in (0, \frac{\pi}{2})$*를 찾아라.*

중간문풀-3. 15. *참/거짓 문제들*

(a) 함수 f와 g는 모두 $x \to \infty$임에 따른 극한값이 존재하지 않는다. 이때, 함수 $f+g$가 $x \to \infty$일 때의 극한값이 존재하지 않는다.

(b) 함수 $f+g$와 함수 f가 $x \to a$임에 따른 극한값을 가진다. g는 $x \to a$임에 따른 극한값을 가진다.

(c) 함수 fg의 $x \to a$임에 따른 극한값이 존재하고, 함수 f도 $x \to a$임에 따른 극한값이 존재한다. g 역시 $x \to a$일 때의 극한값이 존재한다.

(d) f의 극한값이 항상 존재한다고 한다.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{g(x)}$$

이다.

(e) $\lim_{x \to 0} f(x^2) = 0$이라고 한다. $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$이다.