2-5. 1. *함수*

$$F(x,y) = (-\sin x + 2e^y, -\sin x - e^y)$$

$$G(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)$$

에 대하여, $(\pi, 0)$*에서 합성함수* $G \circ F$*의 야코비 행렬과 야코비 행렬식을 구하시오.*

$$G'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$$

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} -\cos x & 2e^y \\ -\cos x & -e^y \end{pmatrix}$$

이므로

$$\begin{aligned}(G\circ F)'(\pi,0) &= G'(F(\pi,0)) \cdot F'(\pi,0) \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

이고 야코비 행렬식은 -48이다.

2-5. 2. *다음을 구하시오.*

(a) *일급함수* $G(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$*가*

$$g_2(x,y) = g_1(x^3 - xy^2, x^2y - y^3)$$

이고 $g_1(1,0) = 1, D_1g_1(1,0) = 2, D_2g_1(1,0) = 1$*을 만족할 때, 야코비 행렬* $G'(1,0)$*을 구하시오.*

(b) *일급함수* $F(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$*가*

$$f_2(x,y) = f_1(x^2+y^2, xy)$$

이고 f_1*의 편미분계수들이 아래와 같다.*

$$D_1f_1(1,1) = 4, D_2f_1(1,1) = 2, D_1f_1(2,1) = 1, D_2f_1(2,1) = 3$$

이때, 야코비 행렬식

$$|(F\circ G)'(1,0)|$$

을 구하시오.

(a)

$$G'(1,0) = \begin{pmatrix} D_1g_1(1,0) & D_2g_1(1,0) \\ D_1g_2(1,0) & D_2g_2(1,0) \end{pmatrix}$$

이며, 1행이 이미 주어져 있으므로 2행의 수들을 구하면 된다. 연쇄법칙에 의하여, $u = x^3 - xy^2, v = x^2y - y^3$로 두면

$$\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g_2}{\partial x}(u,v) = \frac{\partial g_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = (3x^2-y^2)D_1g_1(x^3-xy^2, x^2y-y^3) + 2xyD_2g_1(x^3-xy^2, x^2y-y^3)$$

이므로 $\frac{\partial g_2}{\partial x}(1,0) = 3D_1g_1(1,0) = 6$이다. 마찬가지로

$$\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) = -2xyD_1g_1(x^3-xy^2, x^2y-y^3) + (x^2-3y^2)D_2g_1(x^3-xy^2, x^2y-y^3)$$

이므로 $\frac{\partial g_2}{\partial y}(1,0) = 1$이다. 따라서

$$G'(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) 연쇄법칙에 의하여

$$(F \circ G)'(1,0) = F'(G(1,0)) \cdot G'(1,0)$$

이다. 이때 $g_1(1,0) = 1$이며 $g_2(1,0) = g_1(1,0) = 1$이므로 $G_1(1,0) = (1,1)$이다. 즉, 구하기 위해서는 $F'(1,1)$을 구해주어야 한다. $t = x^2+y^2, s = xy$로 두면

$$D_1f_2(x,y) = \frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} = 2xD_1f_2(x^2+y^2, xy) + yD_2f_1(x^2+y^2, xy)$$

이므로

$$D_1f_2(1,1) = 5$$

이다. 또한

$$D_2f_2(x,y) = \frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} = 2yD_1f_2(x^2+y^2, xy) + xD_2f_1(x^2+y^2, xy)$$

이므로 $D_2f_2(1,1) = 5$이다. 따라서

$$F'(1,1) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

임을 알고 있다. 따라서

$$\det(F \circ G)'(1,0) = \det F'(1,1) \det G'(1,0) = 10 \times (-4) = -40$$

이다.

2-5. 3. *원점을 제외한 좌표평면에서 정의된 벡터장*

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{(2x-y, x+3y)}{x^2+y^2}$$

을 곡선 $r = e^\theta$*를 따라* $(1,0)$*부터* $(e^{2\pi}, 0)$*까지 적분한 값을 구하시오.*

곡선을 매개화하면

$$X(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)(0 \le t \le 2\pi)$$

이다. 그러면

$$\begin{aligned}
\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(X(t)) \cdot X'(t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{2t}}(2e^t\cos t - e^t \sin t, e^t \cos t + 3e^t \sin t) \cdot (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} (3\cos^2 t + 4\sin^2 t + \cos t \sin t)dt \\
&= 7\pi
\end{aligned}$$

2-5. 4. *사상* $F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$*와 선형사상* $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*에 대하여* $|(G\circ F)'(2,\pi/6)| = 3$*일 때,* $G'(1,1)$*의 행렬식을 구하시오.*

$F(2,\pi/6) = (\sqrt{3},1)$이므로

$$\begin{aligned} 3 &= \det(G\circ F)'(1,\frac{\pi}{6}) \\ &= \det(G'(F(2,\frac{\pi}{6}))F'(2,\frac{\pi}{6})) \\ &= \det G'(\sqrt{3},1)\det F'(2,\frac{\pi}{6}) \end{aligned}$$

이다.

$$F'(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

에서 $\det F'(r,\theta) = r$이므로 $\det(2,\pi/6) = 2$이다. 이를 위의 식에 대입하면

$$\det G'(\sqrt{3},1) = \frac{3}{2}$$

을 얻는다. 사상 G는 선형사상이므로, G의 야코비 행렬은 선형사상 G에 대응되는 행렬과 같으며 (x,y)에 의존하지 않는다. 따라서

$$\det G'(1,1) = \mathrm{g}'(\sqrt{3},1) = \frac{3}{2}$$

2-5. 5. *벡터함수* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$*과* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$*는 아래와 같이 주어진다.*

$$f(s,t) = (e^{2s+t}, 3t - \cos s, s^2 + t + 2)$$

$$g(x,y,z) = (3x + 2y + z^2, x^2 - z + 1)$$

벡터함수 $F = g\circ f$*와* $G = f\circ g$*에 대하여,* $F'(0,0)$*과* $G'(0,0,0)$*을 각각 구하시오.*

$$f'(s,t) = \begin{pmatrix} 2e^{2s+t} & e^{2s+t} \\ \sin s & 3 \\ 2s & 1 \end{pmatrix}$$

$$g'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2z \\ 2x & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

이다. $f(0,0) = (1,-1,2)$, $g(0,0,0) = (0,1)$이므로,

$$F'(0,0) = g'(f(0,0)) \cdot f'(0,0) = g'(1,-1,2)\cdot f'(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 13 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G'(0,0,0) = f'(g(0,0,0)) \cdot g'(0,0,0) = f'(0,1)\cdot g'(0,0,0) = \begin{pmatrix} 6e & 4e & -e \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2-5. 6. *좌표평면에서 정의된 영역*

$$D = \left\{(x,y) \mid 0 < x < \frac{1}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2}\right\}$$

정의된 사상 $F(x,y) = (e^x\cos y, e^x\sin y) = (u,v)$*와 그 역사상* $G(u,v) = (x,y)$*에 대하여 다음 물음에 답하시오.*

(a) 영역 D의 F에 의한 상을 $uv-$평면 위에 표현하고, $uv-$평면 위에서의 그 넓이를 구하여라.
(b) $G'(u,v)$와 그 행렬식을 u,v로 표현하시오.

(a) 영역 D의 F에 의한 상은 $uv-$ 평면 위에서 원점을 중심으로 반지름이 $\sqrt{e}$인 원에서 반지름이 1인 원을 뺀 모양의 제 1사분면 부분이다. 단, 원호의 경계는 포함하지 않는다. 그 넓이는 $\frac{e-1}{4}\pi$가 된다.

(b)

$$(F \circ G)(u,v) = (u,v)$$

이므로 연쇄법칙에 의하여

$$F'(x,y)G'(u,v) = I$$

다. 따라서

$$G'(u,v) = (F'(x,y))^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{u}{u^2+v^2} & \dfrac{v}{u^2+v^2} \\ \dfrac{-v}{u^2+v^2} & \dfrac{u}{u^2+v^2} \end{pmatrix}$$

이며 그 행렬식은 $\frac{1}{u^2+v^2}$이다.

2-5. 7. *벡터장*

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)i + \left(\frac{x}{x^2+y^2} + x^2y\right)\mathbf{j}$$

를 곡선 $y = 2 - x^2$를 따라 점 $(-1,1)$에서 점 $(\sqrt{2},0)$까지 적분한 값을 구하시오.

$$\mathbf{F}(x,y) = \mathbf{a}(x,y) = (0, x^2y)$$

로 표현할 수 있다. 이때 $\mathbf{a}$는 각원소 벡터장이다. 또한 곡선을 매개화하면

$$X(t) = (t, 2-t^2) \quad (-1 \le t \le \sqrt{2})$$

이다. 이제 적분값을 구하여 보자.

$$\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_X \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} + \int_X (0, x^2y) \cdot d\mathbf{s}$$

인데, $\int_X \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s}$는 곡선을 따른 각의 변화율이며 곡선이 이동한 각도는 반시계 방향으로 $-\frac{3}{4}\pi$이므로 그 값 역시 $-\frac{3}{4}\pi$이다.

둘째 식은 선적분의 정의에 의하여

$$\begin{aligned}\int_X (0, x^2y) \cdot d\mathbf{s} &= \int_{-1}^{\sqrt{2}} (0, t^2(2-t^2)) \cdot (1, -2t)dt \\ &= \int_{-1}^{\sqrt{2}} 2t^5 + 4t^3 dt \\ &= -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{3}{4}\pi - \frac{2}{3}$$

2-5. 8. *미분가능한 함수 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$와 $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$가 다음 조건을 만족한다.*

$$f(1,1) = (1,0), \quad (g \circ f)'(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g'(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

이때, $f'(1,1)$을 구하시오.

$$(g \circ f)'(1,1) = g'(f(1,1)) \cdot f'(1,1) = g'(1,0) \cdot f'(1,1)$$

이므로

$$f'(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2-5. 9. *곡선* $X(t) = (t - \sin t - \pi, 1 - \cos t, 0)$ $(0 \le t \le 2\pi)$*와 벡터장* $\mathbf{F}(x,y,z) = (y, -x, x^2 + y^2)$*에 대하여*

$$\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

를 구하시오.

$$\begin{aligned} \int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos t, \pi + \sin t - t, x^2 + y^2) \cdot (1 - \cos t, \sin t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 + \pi \sin t + \sin^2 t - t \sin t dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2 - 2\cos t + \pi \sin t - t \sin t dt \\ &= 6\pi \end{aligned}$$

2-5. 10. *함수* $F(x,y,z) = (x + y^3 - 3x, x + y^2 + z^2, -x - y^3 - z^3)$*에 대하여 점* $(1,1,1)$*에서의 야코비 행렬식을 구하여라.*

$$F'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 3y^2 & -3 \\ 1 & 2y & 2z \\ -1 & -3y^2 & 3z^2 \end{pmatrix}$$

이므로

$$F'(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

이다. 첫째 행과 셋째 행이 일차종속이므로, 그 행렬식은 0이다.