sad-L1-hw

Yixiao Feng

16/05/2023

1　分别使用左右扰动模型，计算：$\frac{\partial \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{R}}$

1.a　左扰动

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{R}} &= \frac{\partial((\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{R})^{-1}\boldsymbol{p} - \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{\phi}} \\
&= \frac{\partial(\boldsymbol{R}^{-1}\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\phi})^{-1}\boldsymbol{p} - \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{\phi}} \\
&= \frac{\partial(\boldsymbol{R}^{-1}\mathrm{Exp}(-\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{p} - \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{\phi}} \\
&= \frac{\partial(\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\phi}^{\wedge})\boldsymbol{p} - \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{\phi}} \\
&= \frac{\partial(-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{\phi}} \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p}^{\wedge}\boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{\phi}} \\
&= \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p}^{\wedge}
\end{aligned} \tag{1}
$$

1.b　右扰动

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{R}} &= \frac{\partial((\boldsymbol{R}\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\phi}))^{-1}\boldsymbol{p} - \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{\phi}} \\
&= \frac{\partial(\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\phi})^{-1}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p} - \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{\phi}} \\
&= \frac{\partial(\mathrm{Exp}(-\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p} - \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{\phi}} \\
&= \frac{(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\phi}^{\wedge})\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p} - \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{\phi}} \\
&= \frac{\partial(-\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{\phi}} \\
&= \frac{\partial(\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p})^{\wedge}\boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{\phi}} \\
&= (\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p})^{\wedge}
\end{aligned} \tag{2}
$$

2　分别使用左右扰动模型，计算：$\frac{\partial \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2^{-1}}{\partial \boldsymbol{R}_2}$

2.a　左扰动

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{Log}(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2^{-1})}{\partial \boldsymbol{R}_2} &= \frac{\partial \mathrm{Log}(\boldsymbol{R}_1(\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{R}_2)^{-1}) - \mathrm{Log}(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2^{-1})}{\partial \boldsymbol{\phi}} \\
&= \frac{\partial \mathrm{Log}(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2^{-1}\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\phi})^{-1}) - \mathrm{Log}(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2^{-1})}{\partial \boldsymbol{\phi}} \\
&= \frac{\partial \mathrm{Log}(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2^{-1}\mathrm{Exp}(-\boldsymbol{\phi})) - \mathrm{Log}(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2^{-1})}{\partial \boldsymbol{\phi}} \\
&\overset{BCH}{=} \frac{\partial \mathrm{Log}(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2^{-1}) - \boldsymbol{J}_r^{-1}(\mathrm{Log}(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2^{-1}))\boldsymbol{\phi} - \mathrm{Log}(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2^{-1})}{\partial \boldsymbol{\phi}} \\
&= \boldsymbol{J}_r^{-1}(\mathrm{Log}(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2^{-1}))
\end{aligned} \tag{3}
$$

2.b 右扰动

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{Log}(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2^{-1})}{\partial \boldsymbol{R}_2} &= \frac{\partial \mathrm{Log}(\boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{R}_2\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\phi}))^{-1}) - \mathrm{Log}(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2^{-1})}{\partial \boldsymbol{\phi}} \\
&= \frac{\partial \mathrm{Log}(\boldsymbol{R}_1\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\phi})^{-1}\boldsymbol{R}_2^{-1}) - \mathrm{Log}(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2^{-1})}{\partial \boldsymbol{\phi}} \\
&= \frac{\partial \mathrm{Log}(\boldsymbol{R}_1\mathrm{Exp}(-\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{R}_2^{-1}) - \mathrm{Log}(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2^{-1})}{\partial \boldsymbol{\phi}} \\
&= \frac{\partial \mathrm{Log}(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2^{-1}\boldsymbol{R}_2\mathrm{Exp}(-\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{R}_2^{\top}) - \mathrm{Log}(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2^{-1})}{\partial \boldsymbol{\phi}} \\
&\stackrel{adjoint}{=} \frac{\partial \mathrm{Log}(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2^{-1}\mathrm{Exp}(-\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{\phi})) - \mathrm{Log}(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2^{-1})}{\partial \boldsymbol{\phi}} \\
&\stackrel{BCH}{=} \frac{\partial \mathrm{Log}(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2^{-1})\boldsymbol{J}_r^{-1}(\mathrm{Log}(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2^{-1}))\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{\phi} - \mathrm{Log}(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2^{-1})}{\partial \boldsymbol{\phi}} \\
&= \boldsymbol{J}_r^{-1}(\mathrm{Log}(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2^{-1}))\boldsymbol{R}_2
\end{aligned} \tag{4}
$$

3 带一定角速度的平抛运动实现

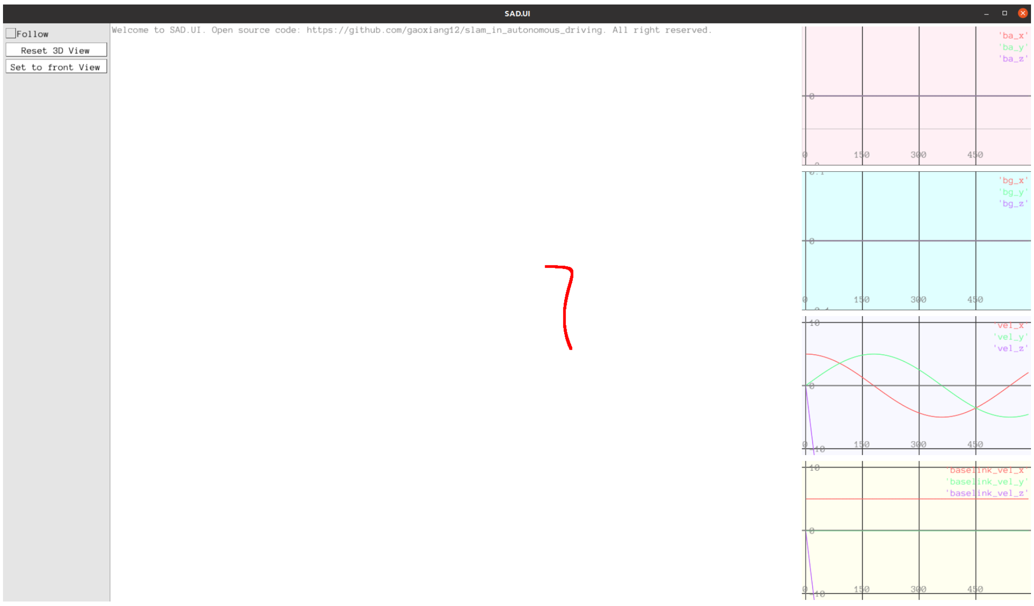

图 1: 可视化效果

```cpp
double angular_velocity_rad = FLAGS_angular_velocity * sad::math::kDEG2RAD;  // 弧度制角速度
SE3 pose;                                                                    // TWB表示的位姿
Vec3d omega( x: 0, y: 0, z: angular_velocity_rad);                                    // 角速度矢量
Vec3d v_body( x: FLAGS_linear_velocity, y: 0, z: 0);                                  // 本体系速度
Vec3d a_world( x: 0, y: 0, z: -9.8);                                               // 重力加速度
const double dt = 0.05;                                                      // 每次更新的时间

while (ui.ShouldQuit() == false) {
    // 更新自身位置
    Vec3d v_world = pose.so3() * v_body;
    pose.translation() = pose.translation() + v_world * dt + 0.5 * a_world * dt * dt;
    // 更新速度
    v_body += a_world * dt;
```

图 2: 代码实现

定义重力加速度，用 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}t$ 更新速度矢量。世界坐标系下的位移需要讨论重力加速度的影响，即 $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$。动画在压缩包附件里。

4 高斯牛顿法和 LM 法的差异

高斯牛顿方程：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x} &= -\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\
\boldsymbol{H}\Delta\boldsymbol{x} &= -\boldsymbol{g} \\
\Delta\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{H}^{-1}(-\boldsymbol{g})
\end{aligned} \tag{5}
$$

高斯牛顿法的增量方程中，$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ 的计算起到了重要的作用，它必须是可逆的，然而实际计算中 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ 只是半正定的。换句话说，$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ 可能是奇异矩阵，这时增量方程的鲁棒性较差，可能出现 ill-posed，算法不收敛的情况。

LM 法比高斯牛顿法更鲁棒，但是收敛速度较慢。LM 法对高斯牛顿法中二阶泰勒展开的近似设定了一个信赖域 (Trust Region)，在这个信赖域里，我们认为二阶近似是准确的。LM 法中，给出了一个分式用来判断近似是否够好，该式如下：

$$
\boldsymbol{\rho} = \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x}} \tag{6}
$$

分子用来表示实际函数下降的值，分母表示近似模型下降的值。如果 ρ 接近 1，说明近似较好；如果 ρ 太小，说明实际减小的值远小于近似减小的值，认为近似较差；如果 ρ 较大，说明实际下降的值大于近似的值，可以扩大一些信赖域。

LM 法的优化问题：

$$
\min_{\Delta\boldsymbol{x}_k} \frac{1}{2}||\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)\Delta\boldsymbol{x}_k||^2, \quad s.t. ||\boldsymbol{D}\Delta\boldsymbol{x}_k||^2 \leq \mu \tag{7}
$$

具体修正信赖域大小的方式是这样的：若 $\rho > \frac{3}{4}$，则 $\mu = 2\mu$；若 $\rho < \frac{1}{4}$, 则 $\mu = 0.5\mu$。

无约束优化问题，引入拉格朗日算子：

$$
\min_{\Delta\boldsymbol{x}_k} \frac{1}{2}||\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)\Delta\boldsymbol{x}_k||^2 + \frac{\lambda}{2}||\boldsymbol{D}\Delta\boldsymbol{x}_k||^2 \tag{8}
$$

LM 法增量方程：

$$
(\boldsymbol{H} + \lambda\boldsymbol{I})\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g} \tag{9}
$$

从式(9)中，当参数 λ 较小时，$\boldsymbol{H}$ 占主要地位，说明二阶近似在该信赖域内较好，LM 法接近于 GN 法。当参数 λ 较大时，该式更接近一阶梯度下降法，说明在附近近似不够好。LM 法一定程度上避免了奇异矩阵引起的不收敛问题，提供更稳定的增量 $\Delta\boldsymbol{x}$。