

项目编号: T020PRP29059

上海交通大学

本科生研究计划 (PRP) 研究论文 (第 29 期)

论文题目: 无人机轨迹生成及最优速度规划

项目负责人: 王逸潇 学院(系): 机械与动力工程学院

指导教师: 丁烨 学院(系): 机械与动力工程学院

参与学生: 许子齐、夏浚源、王逸潇

项目执行时间: 2016 年 3 月 至 2017 年 7 月

无人机轨迹生成及最优速度规划

机械与动力工程学院 5140219196

指导老师 机械与动力工程学院 丁烨

摘要

无人机轨迹生成及最优速度规划是无人机高效、准确、稳定执行工作任务的两个重要研究课题。如何平滑生成无人机轨迹目前主要有 B 样条曲线、NURBS 曲线等曲线拟合方式。本 PRP 项目编写了生成 NURBS 曲线的程序，但在实际实践中，忽略 NURBS 曲线中的权重效应，将之转换为 B 样条曲线，方便研究。在生成 B 样条曲线中，笔者采用两种生成方式，对比两种方式在 MATLAB 环境下所需时间，确定 Deboor 算法在生成 B 样条曲线具有更高效率，这对于减轻无人机微机计算负担具有实际意义。但该类曲线拟合难以使所生成的轨迹通过所给定的航迹点。本 PRP 项目参考相关文献，实现两种逼近航迹点生成轨迹算法以及一种由航迹点反求控制点的算法，结合无人机飞行实际，将三种方法进行对比，得出相关结论。最优速度规划，主要通过微分转换、数值处理、非线性规划、曲线插补等方法，对轨迹速度、加速度、跃度进行约束，最优化时间，实现最优速度规划。项目后期开展无人机扫掠问题研究，采用有限元法求解 PDE 方程，规划过渡曲线，生成螺旋线，利用样条曲线进行拟合后速度规划，在起止处利用三段匀跃度运动规划速度，提高起止效率。

关键词：德布尔算法，曲线逼近，反求控制点，非线性规划，曲线插补

ABSTRACT

Trajectory generation and optimal velocity planning are two important research topics for UAV to perform tasks efficiently, accurately and stably. How to smooth the trajectory of UAV is mainly through generation of B spline curve, and NURBS curve. The PRP project has written a program to generate NURBS curve, but in practice, B spline curve is more suitable. The author uses the two generation method, compares the two kinds of way and comes to a conclusion that Deboor algorithm is more efficient in generating B spline curve, improving almost two times of velocity, which largely reduces the computational burden for micro UAV. However, it is difficult to make the trajectory through the given track point. The author uses the two track path approximation algorithms and a track by reverse control points algorithm, combined with the actual UAV flight, compares the three methods and draws relevant conclusions. The author mainly through the differential transformation, numerical processing, nonlinear programming, curve interpolation method, imposes velocity, acceleration and jerk constraints, optimizes time and achieves the optimal velocity planning. On further stage, the author has a research on UAV sweeping problems. The author uses finite difference solution or finite element solution for PDE equation to generate a set of closed curves, creates a method to generate a spiral from them, then fits it by cubic spline curve and plans speed. Re-planning speed at the starting and ending will solve the previous problem in curve interpolation.

Key words: Deboor algorithms, Curve approximation, Reverse control point, Non - linear programming, Curve interpolation

目录

1. 绪论	5
1.1 国内外无人机研究概况	5
1.2 无人机轨迹生成及最优速度规划概述	5
1.3 项目目的及研究范围	5
2. 研究内容及方法	6
2.1 轨迹生成	6
2.1.1 概述	6
2.1.2 曲线生成	6
2.1.3 曲线逼近的三种方法	7
2.2 最优速度规划	9
2.2.1 概述	9
2.2.2 由 NURBS 曲线到运动状态参量	9
2.2.3 非线性规划	10
2.2.4 曲线插补	12
3. 研究结果及讨论	12
3.1 概述	12
3.2 轨迹生成	13
3.3 轨迹逼近	13
3.4 最优速度规划	15
3.5 曲线插补	17
4. 无人机扫掠任务的执行及优化	19
4.1 背景及现实意义	19
4.2 研究过程	19
4.2.1 利用有限差分法或有限元方法求解给定边界条件的偏微分方程。 ..	20
4.2.2 设定合适上下限以及扫掠半径，生成等值闭合的场曲线。	22
4.2.3 按长度等分场曲线，生成过渡曲线，得到一组螺旋点列。	23
4.2.4 三次样条曲线拟合点列，提高曲线的连续性阶次。	25
4.2.5 速度规划，对起止处进行重新规划，提高起止效率。	25
4.3 成果展示	26
4.3.1 起止点处的优化结果	26
4.3.2 飞行仿真	26
5. 结论	26
5.1 研究成果	26
5.2 存在的问题	27
5.3 未来研究方向	27
6. 参考文献	27
6. 致谢	28

1. 绪论

1.1 国内外无人机研究概况

目前无人机技术发展迅猛，其便携性、隐蔽性、高效性、多功能性等特点使之成为科研、商业、军防等领域重点研究方向。据专业机构预测，全球无人机系统方面的研发、测试费用将增长至 2022 年的 114 亿美元。

随着人工智能的发展、新型算法的演进，无人机自主控制系统得到越来越多的关注和研究。近日，美国 Exyn 公司发布人工智能软件，使无人机能够感知自身所在环境，无须人为干涉便能够躲避障碍，飞至终点。另一方面，国内越来越多的学者发表相关论文，使无人机能够自主生成避障轨迹，同时规划速度，使无人机能够最快地到达终点。智能算法的发展，使求解无人机轨迹生成及最优速度规划等非线性系统问题成为可能。相关智能算法包括启发式搜索算法等。

1.2 无人机轨迹生成及最优速度规划概述

无人机轨迹是平滑曲线。通常平滑曲线生成，有多项式曲线拟合等方式。但对于所给定航迹点数量较多，轨迹较为复杂的情况，单一拟合曲线难以较好地生成所需要的轨迹。于是上世纪中叶，由法国工程师皮埃尔·贝塞尔提出 Bezier 曲线，进而发展为 B 样条曲线、NURBS 曲线等。该类曲线能够较好地生成平滑且接近所给定航迹点的曲线。同时通过最小二乘法及反求控制点等方式，可以优化曲线，使之更接近甚至通过航迹点。

无人机执行相关任务，需要对速度进行规划。在军用、商用甚至民用领域，对无人机飞行速度提出更高的要求。因此对无人机进行最优速度规划具有其实际意义。

1.3 项目目的及研究范围

本 PRP 项目的目的在于构建无人机运动模型，研究并实现无人机轨迹生成及最优速度规划，从而实现无人机自主控制。研究对象为多旋翼无人机。由于无人机体积较小，载重能力较弱，优化自动控制算法将大大减轻无人机所搭载微机的计算负担。因此本 PRP 项目的目的还在于比较几种相关算法，选择最优算法以减轻微机计算负担。

本 PRP 的研究范围为无人机运动模型的建立，多种轨迹生成的算法的研究及对比，最优速度规划的研究及实现。

2. 研究内容及方法

2.1 轨迹生成

2.1.1 概述

目前轨迹平滑曲线生成有 Bezier 曲线、B 样条曲线、NURBS 曲线。三种方式依次进阶。所采用的方式均为由控制点生成轨迹。本文采用的方式为 NURBS 曲线。由于无人机轨迹规划对控制点没有权重要求，故将 NURBS 曲线特殊化，变为 B 样条曲线进行规划。对于无人机的实际问题，所需要的轨迹应当更接近甚至通过给定点。因此曲线逼近或反求控制点是有必要的。

2.1.2 曲线生成

2.1.2.1 曲线定义生成

一条 k 次 NURBS 曲线可以表示为一段有理多项式矢函数，其中 u 为参数[1]。

$$p(u) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i d_i N_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^n w_i N_{i,k}(u)}$$

其中 $w_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 为权因子， $w_0, w_n > 0$ ，其余 $w_i \geq 0$ ，且顺序 k 个权因子不同时为零，以防止分母为零、保留凸包性质及曲线不致因权因子而退化为一； $d_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 为控制点， $N_{i,k}$ 为由节点矢量

$$U = [u_0, u_1, \dots, u_{n+k+1}]$$

规定的 k 次规范 B 样条基函数。对于无人机系统，所生成轨迹一般为开曲线，故常将节点矢量两端节点的重度度取为 $k+1$ ，即 $u_0 = u_1 = \dots = u_k$ ， $u_{n+1} = u_{n+2} = \dots = u_{n+k+1}$ 。

一般取节点矢量首尾两点为 0, 1，规定参数 $u \in [0, 1]$ 。对节点矢量的生成有三种主要方式[2]：

(1) 均匀参数法

中间节点均分。

(2) 向心参数化法

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_i = u_{i-1} + |\Delta d_{i-1}|^{1/2}, & i = 1, 2, \dots, n \\ \Delta d_i = d_{i+1} - d_i, & i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

(3) 积累弦长参数化法

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_i = u_{i-1} + |\Delta d_{i-1}|, & i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

本 PRP 项目初步采取均匀参数法，在随后的分析中，节点矢量将依情况而改变。

k 次规范 B 样条基函数的计算方式[3]如下

$$\begin{cases} N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, & \text{若 } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ N_{i,k}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+k} - u_i} N_{i,k-1}(u) + \frac{u_{i+k+1} - u}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u) \\ \text{规定 } \frac{0}{0} = 0 \end{cases}$$

由于无人机轨迹生成对控制点的权没有特殊要求，故取 $w_i = 1 (i = 0, 1, \dots, n)$ ，将 NURBS 曲线转化为 B 样条曲线。

2.1.2.2 DEBOOR 方法

在生成 B 样条曲线时，可采用德布尔算法[4]，更为直接快捷。递推公式如下：

$$p(u) = \sum_{j=0}^n d_j N_{j,k}(u) = \sum_{j=i-k}^{i-1} d_j^l N_{j+l,k-l}(u) = \dots = d_{i-k}^k$$

$$u \in [u_i, u_{i+1}] \subset [u_k, u_{n+1}]$$

$$d_j^l = \begin{cases} d_j, & l = 0 \\ (1 - a_j^l) d_j^{l-1} + a_j^l d_{j+1}^{l-1}, & j = i - k, i - k + 1, \dots, i - l; l = 1, 2, \dots, k \end{cases}$$

$$a_j^l = \frac{u - u_{j+l}}{u_{j+k+1} - u_{j+l}}$$

规定 $\frac{0}{0} = 0$ 。

推导过程如下：

$$\begin{aligned} p(u) &= \sum_{j=0}^n d_j N_{j,k}(u) = \sum_{j=i-k}^i d_j \left[\frac{u_{j+k+1} - u}{u_{j+k+1} - u_{j+1}} N_{j+1,k-1}(u) + \frac{u - u_j}{u_{j+k} - u_j} N_{j,k-1}(u) \right] \\ &= \sum_{j=i-k}^{i-1} \frac{u - u_{j+1}}{u_{j+k+1} - u_{j+1}} d_{j+1} N_{j+1,k-1}(u) + \sum_{j=i-k}^{i-1} \frac{u_{j+k+1} - u}{u_{j+k+1} - u_{j+1}} d_j N_{j+1,k-1}(u) \\ &= \sum_{j=i-k}^{i-1} d_j^1 N_{j+1,k-1}(u) \end{aligned}$$

注：《计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条》一书中的递推公式及推导过程有误。

2.1.3 曲线逼近的三种方法

2.1.3.1 概述

由于生成 NURBS 曲线及 B 样条曲线需要的是控制点，而实际希望无人机能够经过指定点，即航迹点。故希望轨迹尽可能经过给定点。于是提出曲线逼近及反求控制点。

2.1.3.2 最小二乘法

设控制点集为 $\{P\}$ ，航迹点集为 $\{Q\}$ ，由控制点集生成的、对应航迹点集的点集为 $\{Q^*\}$ 。其中设控制点集有 $n+1$ 个，航迹点集有 $m+1$ 个， $n < m$ 。则有如下关系：

$$\begin{bmatrix} Q_0^* \\ Q_1^* \\ \vdots \\ Q_m^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{0,k}(u_0) & N_{1,k}(u_0) & \cdots & N_{n,k}(u_0) \\ N_{0,k}(u_1) & N_{1,k}(u_1) & \cdots & N_{n,k}(u_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{0,k}(u_m) & N_{1,k}(u_m) & \cdots & N_{n,k}(u_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_2 \end{bmatrix}$$

即

$$Q^* = \Phi P$$

利用最小二乘法[5]，即优化

$$\min J = \frac{1}{2} (Q^* - Q)^T (Q^* - Q)$$

计算得：

$$P = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Q$$

利用最小二乘法进行曲线逼近中，需要将逼近点 u_0, u_1, \dots, u_m 分配至节点矢量中，使每个相邻节点矢量之间至少存在一个逼近点。故应重新设置节点矢量[6]。设节点矢量为 $U^* = [u_0^*, u_1^*, \dots, u_n^*]$ 。计算方法如下：

$$d = \frac{m+1}{n-k+1}$$

$$i = \text{int}(jd), \alpha = jd - i$$

$$u_{k+j}^* = (1 - \alpha)u_{i-1} + \alpha u_i, j = 1, 2, \dots, n - k$$

2.1.3.3 最小二乘法改进方法

在实际轨迹优化中，对每个航迹点进行曲线逼近是不合理的。因为初始点和终止点是固定的。故进行曲线逼近中，生成的控制点集首末点应与数据点相同，使曲线起始点及终止点为给定航迹点。实现算法与 2.1.3.2 相同[7]。

2.1.3.4 反求控制点

反求控制点是一种通过航迹点集反推控制点集，从而是曲线能够经过每一个航迹点。在该种方法中，主要问题是边界的要求难以确定。具体实现方法为使 $m+1$ 个数据点的首尾两个端点为曲线端点，使曲线分段的连接点分别一次与 B 样条定义域内的节点一一对应。该曲线由 $n+1$ 个控制点确定，其中 $n = m + k - 1$ ， k 为阶数。边界条件一般有切矢条件、自由端点条件、虚节点条件、抛物线节点等。

在本 PRP 项目中，选取对象为 k 阶三次 B 样条曲线，边界条件为自由端点条件。具体实现方法如下[8]：

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} \\ & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-2} \\ e_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_i = \frac{(\Delta_{i+2})^2}{\Delta_i + \Delta_{i+1} + \Delta_{i+2}} \\ b_i = \frac{\Delta_{i+2}(\Delta_i + \Delta_{i+1})}{\Delta_i + \Delta_{i+1} + \Delta_{i+2}} + \frac{\Delta_{i+1}(\Delta_{i+2} + \Delta_{i+3})}{\Delta_{i+1} + \Delta_{i+2} + \Delta_{i+3}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2 \\ a_i = \frac{(\Delta_{i+1})^2}{\Delta_{i+1} + \Delta_{i+2} + \Delta_{i+3}} \\ e_i = (\Delta_{i+1} + \Delta_{i+2})q_{i-1} \end{cases}$$

加之自由端点条件即可实现所需曲线。具体约束不在赘述。

2.2 最优速度规划

2.2.1 概述

在实际实现无人机飞行的过程中，需要对速度进行最优规划，以使无人机最快且稳定地达到终点。其中结合无人机飞控系统，算法应生成每隔采样周期无人机的位置及速度。故需对无人机所得到的最优的运动状态参数进行插补。

2.2.2 由 NURBS 曲线到运动状态参量

由 2.1 所介绍的方式，得到参数轨迹曲线 $\mathbf{C}(u)$ ，曲线上某点 u_i 的速度大小[9]为

$$V(u_i) = \left| \frac{d\mathbf{C}(u_i)}{dt} \right| = \left| \frac{d\mathbf{C}(u_i)}{du} \right| * \frac{du}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{C}(u_i)}{du} \right| * u'(t_i)$$

设 $\kappa = \sqrt{\sum_{x,y,z} x_u(u)^2}$ ，其中 $(\cdot)_u$ 代表变量对 u 的导数。则

$$u'(t_i) = \frac{V(u_i)}{\left| \frac{d\mathbf{C}(u_i)}{du} \right|} = \frac{V(u_i)}{\kappa}$$

规定 $(\cdot)^\mu (\mu \in \{x, y, z\})$ 为向量在 μ 方向上的分量。

$$\begin{cases} V^\mu(u) = \frac{dC(u_i)}{dt} = C_u^\mu \frac{du}{dt} = C_u^\mu \frac{V(u_i)}{\kappa} \\ A^\mu(u) = \frac{dV^\mu(u_i)}{dt} = C_{uu}^\mu \left(\frac{V(u_i)}{\kappa} \right)^2 + C_u^\mu * \frac{1}{2} * \frac{d\left(\frac{V(u_i)}{\kappa} \right)^2}{du} \end{cases}$$

其中， $\frac{d\left(\frac{V(u_i)}{\kappa} \right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{V(u_i)}{\kappa} \right)}{du} * \frac{V(u_i)}{\kappa} = \frac{1}{2} * \frac{d\left(\frac{V(u_i)}{\kappa} \right)^2}{du}$

定义 $q(u_i) = \left(\frac{V(u_i)}{\kappa} \right)^2$ 。则

$$\begin{cases} A^\mu(u) = C_{uu}^\mu q(u) + C_u^\mu \frac{q_u(u)}{2} \\ J^\mu(u) = \frac{dA^\mu(u)}{dt} = (C_{uuu}^\mu q(u) + \frac{3}{2} C_{uu}^\mu q_u(u) + \frac{1}{2} C_u^\mu q_{uu}(u)) \sqrt{q(u)} \end{cases}$$

至此，无人机运动状态参量公式全部确定。

其中 \mathbf{C} 的 k 阶导数推导[10]如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_k^{(l)}(u) &= \sum_{i=0}^n N_{i,k}^{(l)}(u) \mathbf{d}_i \\ N_{i,k}^{(l)}(u) &= p \left(\frac{N_{i,k-1}^{(l-1)}(u)}{u_{i+k} - u_i} - \frac{N_{i+1,k-1}^{(l-1)}(u)}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} \right) \end{aligned}$$

德布尔算法[11]如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_k^{(l)}(u) &= \frac{\partial}{\partial u^r} \sum_{j=0}^n \mathbf{d}_j N_{j,k}(u) = \sum_{j=i-k}^{i-r} \mathbf{d}_j^r N_{j,k-r}(u) \\ u &\in [u_i, u_{i+1}] \subset [u_k, u_{n+1}] \end{aligned}$$

$$\mathbf{d}_j^l = \begin{cases} \mathbf{d}_j, & l = 0 \\ (k-l+1) \frac{\mathbf{d}_{j+1}^{l-1} - \mathbf{d}_j^{l-1}}{u_{j+k+1} - u_{j+l}}, & j = i-k, i-k+1, \dots, i-r; l = 1, 2, \dots, r \end{cases}$$

节点矢量根据阶数变化重新定义。

2.2.3 非线性规划

对速度进行最优规划，即使到达终止点所需时间最小，目标函数可以为：

$$\min \int_0^s \frac{ds}{v} = \min \int_0^1 \frac{du}{u'}$$

其中， s 为弦长， v 为速度大小， u' 为参数 u 对时间的导数。由于篇幅限制，下文直接给出计算公式，推导过程不再赘述。

对该优化问题，有如下几个约束：

$$\textcircled{1} \text{ 弓高误差: } \epsilon_i = \rho_i - \sqrt{\rho_i^2 - \left(\frac{V(u_i)T_s}{2}\right)^2}. \text{ 其中, } \rho_i \text{ 为 } u_i \text{ 处的曲率半径, } T_s \text{ 为采样周期.}$$

给定最高弓高误差为 ϵ_{max} ，则有

$$V(u_i) \leq 2 \sqrt{\rho_i^2 - (\rho_i - \epsilon_{max})^2} / T_s \approx 2 \sqrt{2\rho_i \epsilon_{max}} / T_s$$

注：上式忽略二阶小量。其中，曲率半径计算公式[12] [13]如下：

$$\rho(u) = \frac{|\mathbf{C}_u(u)|^3}{|\mathbf{C}_u(u) \times \mathbf{C}_{uu}(u)|}$$

②最大飞行速度：实际无人机飞行时，受到环境及电机极限影响，客观上存在最大飞行速度；另一方面人们使用无人机时，处于安全稳定等因素考虑，主观上给无人机关定了最大飞行速度，记为 V_{max} 。

③最大飞行加速度及跃度：根据无人机实际机构及环境影响，存在最大飞行加速度及跃度，分别记为 A_{max}^μ, J_{max}^μ 。

④首尾速度点均为零。

由于跃度约束为非线性约束，同时为了简化计算，可先有加速度约束得到优化速度，再通过该组数据，加入跃度约束，以取得更好地结果[14]。

加速度约束离散化，最优规划问题如下：

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^{T_N} V^2(u_i) \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq V^2(u_i) \leq \min \left\{ V_{max}^2, \frac{8\rho_i \epsilon_{max}}{T_s^2} \right\}, \quad V^2(u_0) = V^2(u_{T_N}) = 0 \\ & -A_{max}^\mu \leq C_{uu}^\mu(u_i) \left(\frac{V(u_i)}{\kappa(u_i)} \right)^2 + \frac{C_u^\mu(u_i) \left(\left(\frac{V(u_{i+1})}{\kappa(u_{i+1})} \right)^2 - \left(\frac{V(u_{i-1})}{\kappa(u_{i-1})} \right)^2 \right)}{2(u_{i+1} - u_{i-1})} \leq A_{max}^\mu \\ & -A_{max}^\mu \leq C_{uu}^\mu(u_i) q_i + \frac{C_u^\mu(u_i)(q_{i+1} - q_i)}{2(u_{i+1} - u_{i-1})} \leq A_{max}^\mu \\ & q_i = q(u_i) = \left(\frac{V(u_i)}{\kappa(u_i)} \right)^2 \end{aligned}$$

注： T_N 为曲线上的点的个数。

由上述问题得到一组最优速度大小的解之后，再进行跃度约束。此处并没有起止点的加速度约束，具体分析随后分析。

首先将跃度计算公式离散化得（为方便书写，将 $q(u_i)$ 记为 q_i ）：

$$-J_{max}^\mu \leq (\alpha_i^\mu q_{i-1} + \beta_i^\mu q_i + \gamma_i^\mu q_{i+1}) \sqrt{q_i} \leq J_{max}^\mu$$

其中 $\alpha_i^\mu = \frac{C_u^\mu(u_i)}{2\Delta u^2} - \frac{3C_{uu}^\mu(u_i)}{4\Delta u}$, $\beta_i^\mu = C_{uuu}^\mu(u_i) - \frac{C_u^\mu(u_i)}{\Delta u^2}$, $\gamma_i^\mu = \frac{C_u^\mu(u_i)}{2\Delta u^2} + \frac{3C_{uu}^\mu(u_i)}{4\Delta u}$, $\Delta u = u_{i+1} - u_i$ 。

对于无人机实际问题，无人机靠电机驱动，电机旋转速度依靠电信号大小，电信号传递给电机，使电机产生旋转也同样需要时间，有一段加速的过程。由简单的力学分析可知，电机旋转速度对应无人机运动的加速度，而电信号对应无人机运动的跃度。由飞控控制驱动无人机本质上是控制电信号，从而达到控制无人机飞行的目的。故在实际飞行中，对无人机起止点的跃度约束有实际意义，而加速度约束则没有实际意义。起止点跃度计算如下：

$$j^\mu = \frac{da^\mu}{dt} = a^\mu \frac{da^\mu}{dv^\mu} = \frac{1}{2} \frac{d(a^\mu)^2}{dv}$$

离散化后可得：

$$j^\mu(u_0) = T_N^2 \left(C_u^\mu(u_2) \right)^2 \sqrt{q_0} q_1 / (8C_u^\mu(u_1))$$

$$j^\mu(u_{T_N}) = T_N^2 \left(C_u^\mu(u_{T_N-2}) \right)^2 \sqrt{q_{T_N-1}} q_{T_N-2} / (8C_u^\mu(u_{T_N-1}))$$

由于跃度约束为非线性约束，故需将其转化为线性约束，以方便求解。设从加速度约束中得到最优序列为 $\{q_i^*\}$ ，在不等式两端同时乘以 $\sqrt{\frac{q_i^*}{q_i}}$ ，并通过 $\sqrt{\frac{q_i^*}{q_i}} \geq \frac{3}{2} - \frac{q_i}{2q_i^*} \geq 1$ ，可得：

$$\begin{aligned}
 -J_{\max}^{\mu} \left(\frac{3}{2} - \frac{q_i}{2q_i^*} \right) &\leq \sqrt{q_i^*} (\alpha_i^{\mu} q_{i-1} + \beta_i^{\mu} q_i + \gamma_i^{\mu} q_{i+1}) \leq J_{\max}^{\mu} \left(\frac{3}{2} - \frac{q_i}{2q_i^*} \right) \\
 -J_{\max}^{\mu} \left(\frac{3}{2} - \frac{q_0}{2q_0^*} \right) &\leq \sqrt{q_0^*} T_N^2 \left(C_u^{\mu}(u_2) \right)^2 \sqrt{q_0} q_1 / (8C_u^{\mu}(u_1)) \leq J_{\max}^{\mu} \left(\frac{3}{2} - \frac{q_0}{2q_0^*} \right) \\
 -J_{\max}^{\mu} \left(\frac{3}{2} - \frac{q_{T_N-1}}{2q_{T_N-1}^*} \right) &\leq \sqrt{q_{T_N-1}^*} T_N^2 \left(C_u^{\mu}(u_{T_N-2}) \right)^2 \sqrt{q_{T_N-1}} q_{T_N-2} / (8C_u^{\mu}(u_{T_N-1})) \leq J_{\max}^{\mu} \left(\frac{3}{2} - \frac{q_{T_N-1}}{2q_{T_N-1}^*} \right)
 \end{aligned}$$

由上述约束，加之以限制加速度时的几个约束，可以求得最终的速度规划。

2.2.4 曲线插补

对于无人机实际控制系统，需要输入每隔一个采样周期的无人机理论位置及速度信息。故需要对曲线进行插补[15]。

对参数 u_{i+1} 进行泰勒展开，并忽略三阶小量，可得：

$$u_{i+1} = u_i + u'(t_i)T_s + u''(t_i) \frac{T_s^2}{2}$$

目前，本 PRP 项目已经得到了最优速度规划，即速度大小 $V(u_i)$ 已经为已知常量。同时通过插值方式，可以估算任意参数 u 的速度大小值，可推出如下公式：

$$\begin{aligned}
 u''(t_i) &= \frac{V(u_i) \left/ \left| \frac{dC(u_i)}{du} \right| \right.}{dt} = -V(u_i) \frac{\left| \frac{dC(u_i)}{du} \right|}{\left| \frac{dC(u_i)}{du} \right|^2} \frac{\left| \frac{d^2C(u_i)}{du^2} \right| \frac{du}{dt}}{\left| \frac{dC(u_i)}{du} \right|^2} \\
 &= -V(u_i) \frac{\left| \frac{d^2C(u_i)}{du^2} \right| \frac{V(u_i)}{\left| \frac{dC(u_i)}{du} \right|}}{\left| \frac{dC(u_i)}{du} \right|^2} = -V(u_i)^2 \frac{\left| \frac{d^2C(u_i)}{du^2} \right|}{\left| \frac{dC(u_i)}{du} \right|^3}
 \end{aligned}$$

故可得：

$$u_{i+1} = u_i + \frac{V(u_i)}{\left| \frac{dC(u_i)}{du} \right|} T_s - V(u_i)^2 \frac{\left| \frac{d^2C(u_i)}{du^2} \right|}{\left| \frac{dC(u_i)}{du} \right|^3} \frac{T_s^2}{2}$$

3. 研究结果及讨论

3.1 概述

本 PRP 项实现了无人机轨迹的生成及最优速度规划。其中轨迹生成对比定义生成及德布尔方式生成，发现德布尔方式生成有的速度提升，大大减轻了机载微机的计算负担。轨迹逼近则对比三种轨迹生成方式，得出第二种最小二乘法逼近方式为最佳，第一种不符合无人机飞行实际，反求控制点则边界条件在高阶 B 样条曲线生成时不容易控制。在进行最优速度规划中，本 PRP 项目，成功实现最优速度规划，生成了符合实际及约束、平滑的速度函数。

3.2 轨迹生成

在轨迹生成中，笔者分别采用传统定义和德布尔的方式解算图 3.2 (1) 4 阶 B 样条曲线：

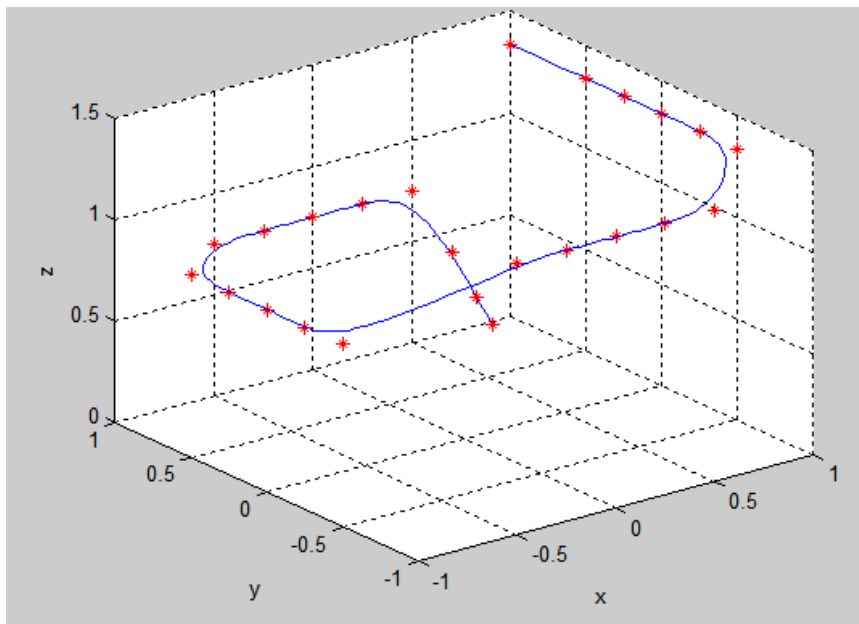


图 3.2 (1)

传统方式下，所需时间为 0.039229s；德布尔算法下，所需时间为 0.013819s。速度提升三倍左右。计算该曲线一阶导数所需时间分别为 0.023009s、0.014485s；该曲线二阶导数所需时间分别为 0.022856s、0.016435s；该曲线三阶导数所需时间分别为 0.023512s、0.016473s。总体生成 PRP 项目所需要的曲线、一二三阶导，时间分别为 0.073774s、0.048269s。利用德布尔算法生成相关曲线及导矢，大大减轻了机载微机计算负担。

3.3 轨迹逼近

利用 2.1.3.3 方法，计算得到的曲线如图 3.3 (1)：

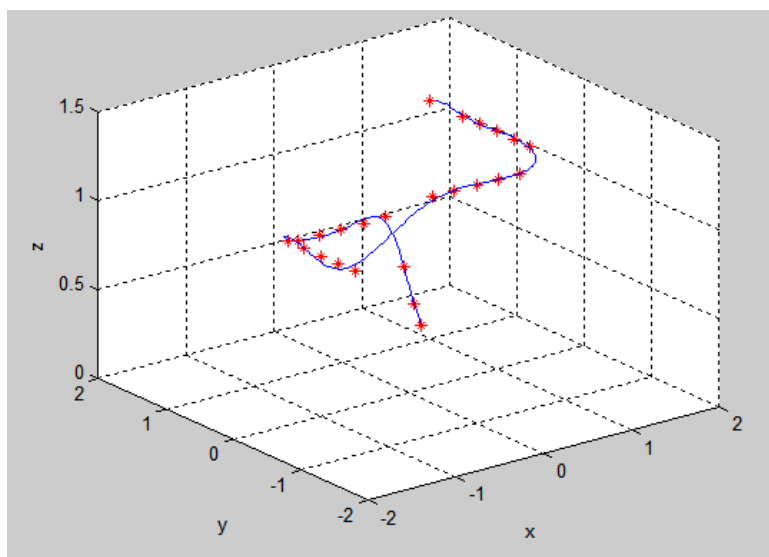


图 3.3 (1)

可以清楚地看到，相较 3.2 中所生成的曲线，更加逼近航迹点。

笔者利用 2.1.3.4 的方法进行计算求解，得到的曲线图像与 2.1.3.3 方法得到的图像一致。经过推演验证，两种方式本质上相同。2.1.3.3 的方式中隐含首末控制点与航迹点相同。通过对得到的曲线的观察检测，也同样得到曲线首尾与首尾航迹点相同。使用 2.1.3.3 的方法，在该例中需要 0.018153s；而使用 2.1.3.4 却花了 0.021654s。就算法复杂性而言，2.1.3.3 方式更占优势。

在利用最小二乘法进行逼近时， $n - m$ 的值对生成曲线影响较大。上图为 $n - m = 9$ 时得到的曲线。当 $n - m = 7$ 时，在端点处会产生奇异形状，如图 3.3 (2)：

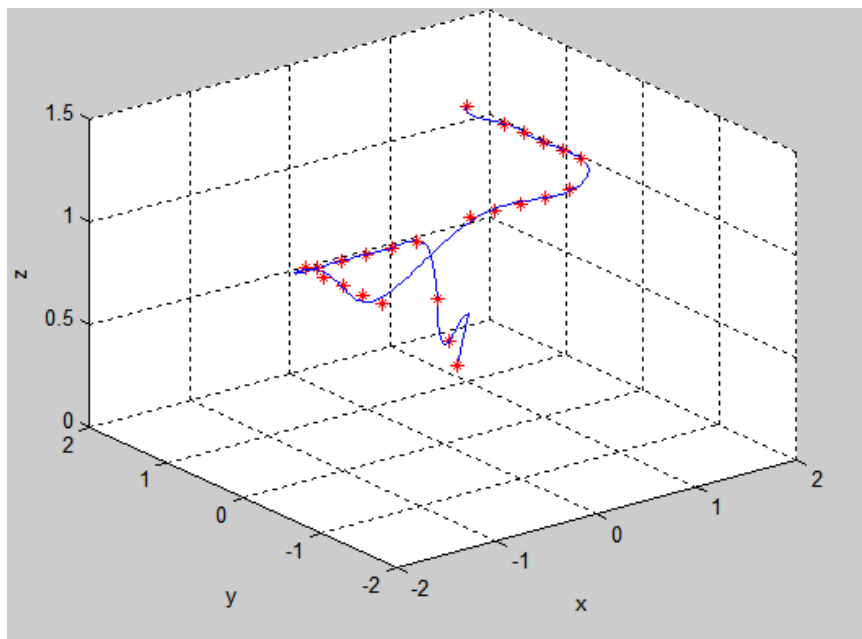
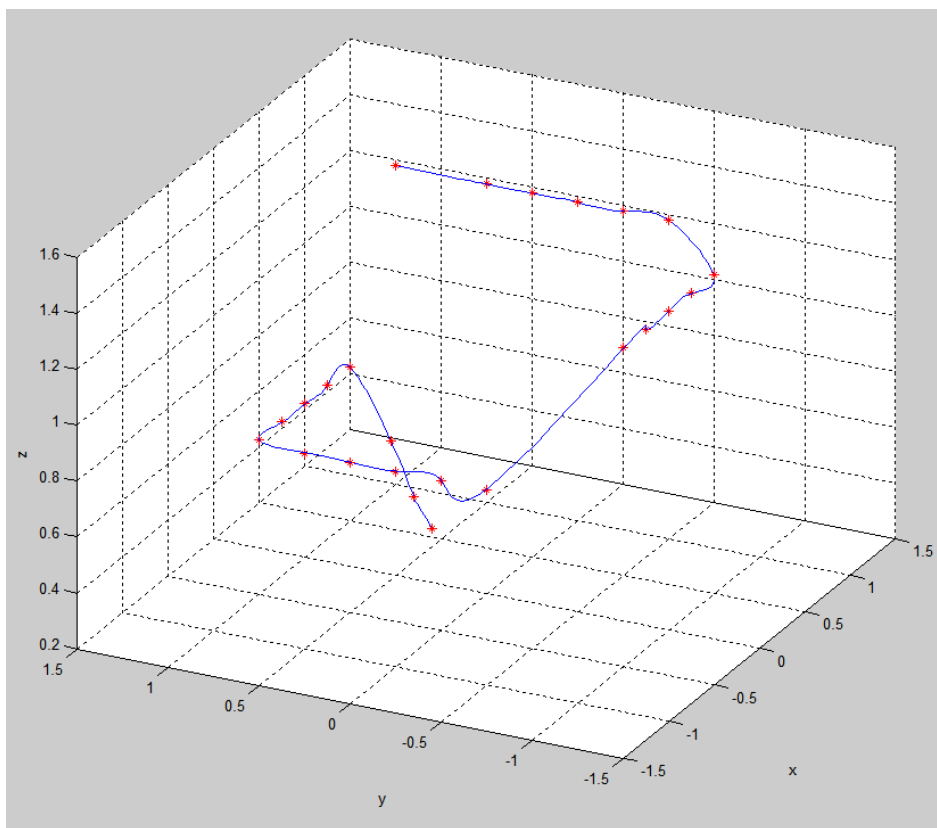


图 3.3 (2)

通过测试，发现随着 $n - m$ 的减小，曲线更加接近航迹点；随着 $n - m$ 的增加，曲线则容易在端点处出现奇异形状，而且实验发现，首端点先出现奇异形状，且幅度更大。

由于边界条件界定复杂，笔者对相同的航迹点拟合了一条 3 次 B 样条曲线，对其进行反求控制点进行拟合。曲线如图 3.3 (3)：



、图 3.3 (3)

从结果上看，反求控制点所得到的曲线能够通过所有航迹点。总体较为平滑。同时若边界条件选取较好，则能够避免最小二乘法存在的某些问题：如何选定 m 与 n 之间的关系，即控制点及航迹点数量之差；某些所需要经过的航迹点难以达到等。但其存在弊端，边界条件难以确定，尤其是高阶 B 样条曲线；曲线某些部分曲率较大，不够平滑。

3.4 最优速度规划

笔者选取 $V_{max} = 1$ ， $A_{max} = 2.5$ ， $J_{max} = 3$ ， $e_{max} = 1$ ，进行速度规划。结果如图 3.4 (1)、图 3.4 (2)、图 3.4 (3)：

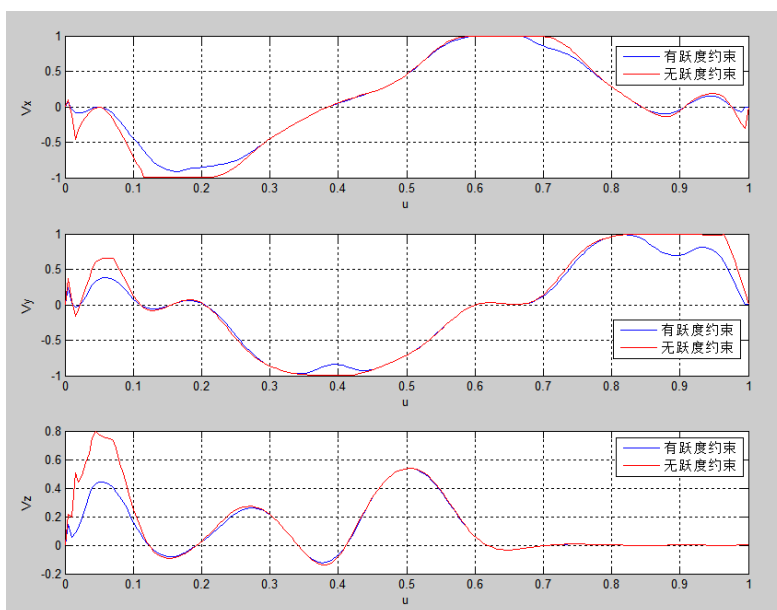


图 3.4 (1)

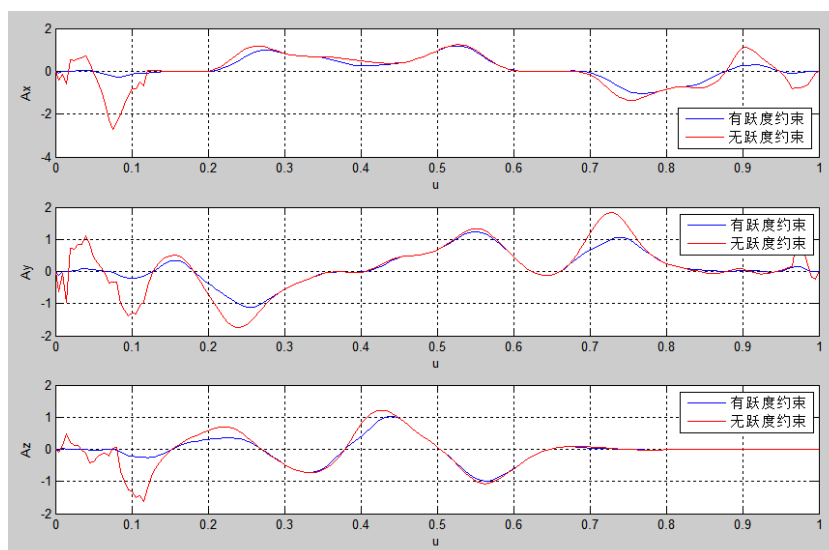


图 3.4 (2)

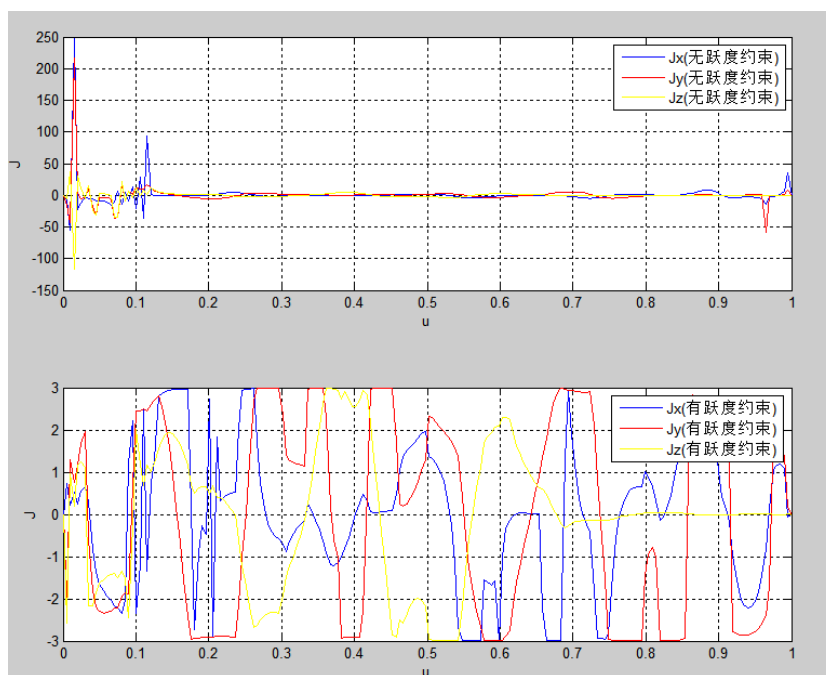


图 3.4 (3)

由上述图示可得，在有跃度情况下，速度及加速度曲线变化更为平滑，且跃度被限制在理想范围之内，从而使无人机能够更为平稳地飞行。

其中在 $V_y - u$ 图中，有跃度情况下在 $u = 0.4, 0.9$ 附近有突起或凹陷的速度变化。通过笔者分析，这是由于该处曲线存在较大曲率，因此在限制跃度的情况下，速度应当适当减小，符合无人机最优速度规划实际。

3.5 曲线插补

取 $T_s = 0.1$ ，得到的曲线插补曲线图 3.5 (1)：

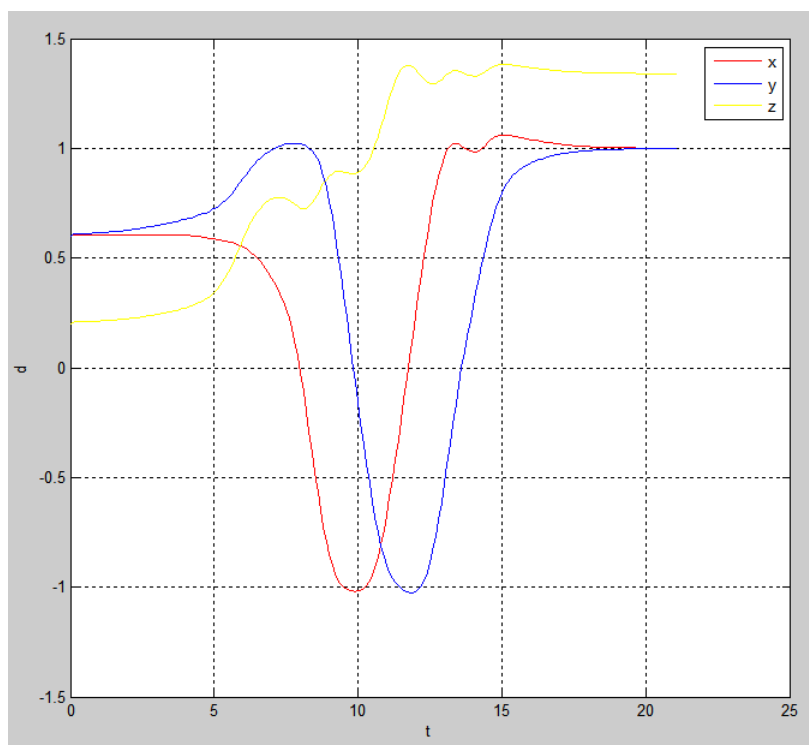


图 3.5 (1)

可以看到在起止点处运动过慢，使整个运动过慢。通过修改起止点约束，较好地解决起止点过慢的问题，如图 3.5 (2)。

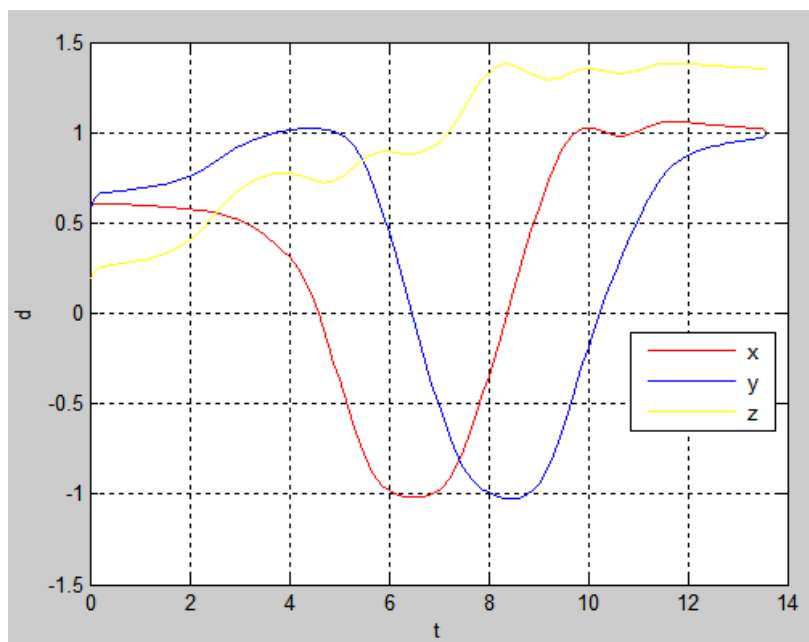


图 3.5 (2)

可以发现，上述插补能够大大减小所用时间，将 21s 减少为 14s。

上图所示曲线存在一定突起和凹陷，这是由于曲线本身存在突起和凹陷。总体上，无人机能够平滑地运行到终点。

4. 无人机扫掠任务的执行及优化

4.1 背景及现实意义

扫掠指定区域进行探查、喷涂等是无人机的一大重要应用。而无人机存在稳定性较差、续航能力弱等缺点，在扫掠复杂区域时尤为突出。目前无人机在指定区域扫掠路径生成已经取得较为成熟的研究成果，但在复杂的区域中，多沿袭传统路径生成方式，如 ZIG-ZAG，以一组平行线段相连生成路径。这种方式无人机姿态、速度变化频繁，跟踪性能略低，且对于孤岛问题适用性较低。因此有必要提出一种新的无人机扫掠路径生成及速度规划方式。

螺旋线路径具有曲线连续、曲率变化平和等特点，从而无人机姿态变化幅度较小，跟踪性能提高。

在 PRP 项目末尾研究的生成螺旋线轨迹以提高无人机执行扫掠任务时姿态稳定性、跟踪性，具有重要的理论和现实意义。

4.2 研究过程

结合如图 4.2（1）所示的扫掠区域实例来说明研究过程。其中蓝色边界为外边界，红色边界为内边界，目的是让无人机扫掠内外边界所夹的区域。

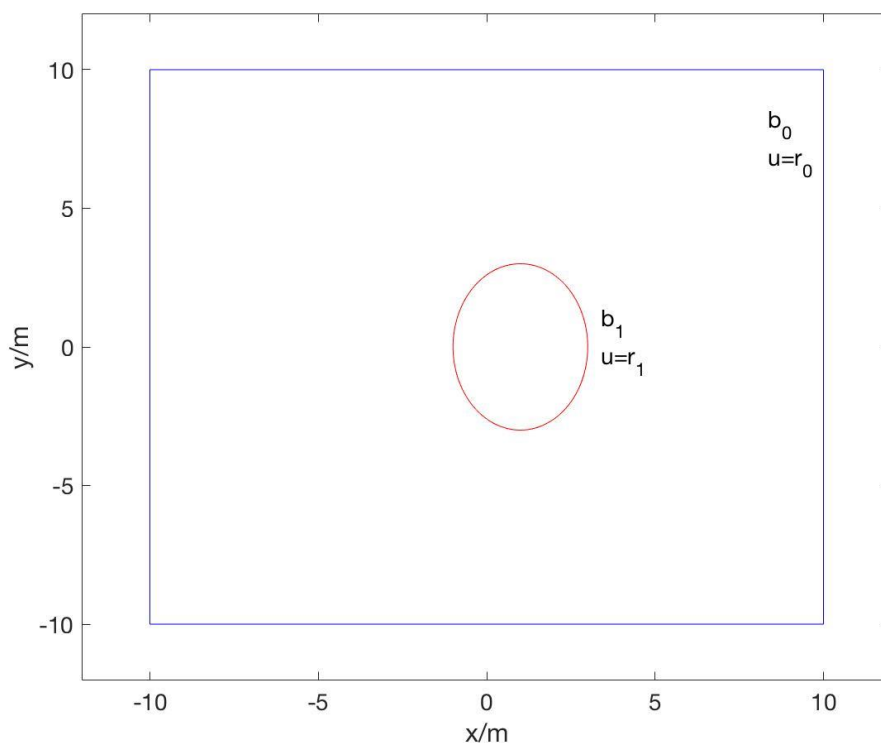


图 4.2（1）

4.2.1 利用有限差分法或有限元方法求解给定边界条件的偏微分方程。

偏微分方式适用于复杂边界情况，由此生成的曲线连续性良好，将可以由此得到一组较好的曲线族。

对于有孤岛的扫掠区域问题，边界条件取为狄利克雷边界条件，构建偏微分方程及边界条件如下：

$$\begin{cases} -(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = f \\ u = r_0, (x, y) \in b_0 \\ u = r_1, (x, y) \in b_1 \end{cases}$$

其中， u 为偏微分方程的解， f 、 r_0 、 r_1 为大于零的常数，且 $r_0 < r_1$ ，内外边界分别为 b_1 、 b_0 。

4.2.1.1 有限差分法求解偏微分方程

有限差分法是将区域进行矩形划分，将导数项转化为差分项，实现降次求解。如图 4.2.1.1(1) 为区域内部的点。

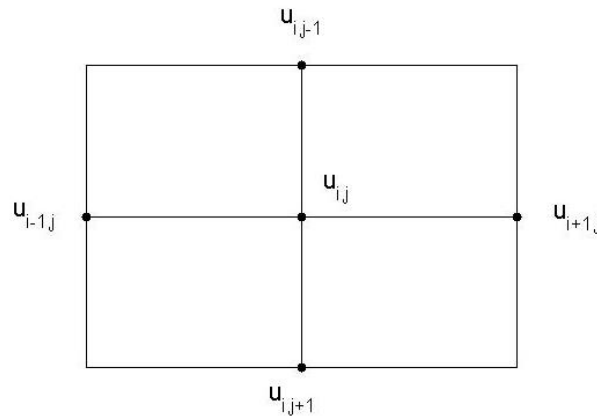


图 4.2.1.1 (1)

通过中心差分法，可以得到下式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j}}{dx^2}$$

其中 dx 为相邻两点横坐标之差。 y 方向上同理。

边界处以图 4.2.1.1 (1) 为例。

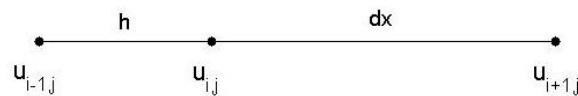


图 4.2.1.1 (2)

其中 $u_{i-1,j}$ 为边界点， $u_{i-1,j}$ 的值已知。

通过线性插值方式解决边界问题:

$$\frac{u_{i-1,j} - u_{i,j}}{h} = \frac{u_{i,j} - u_{i+1,j}}{dx}$$

y 方向上同理。

4.2.1.2 通过 pde tool 用有限元方法求解偏微分方程。

可以通过 matlab 工具箱，求解偏微分方程。

先进行网格划分。结果如图 4.2.1.2 (1)。

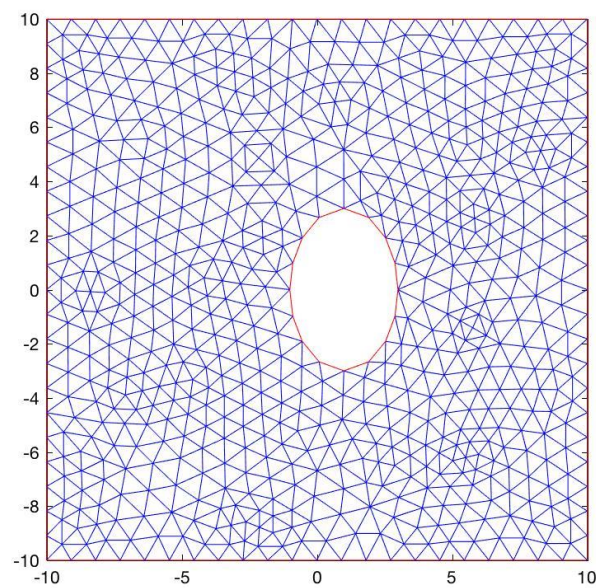


图 4.2.1.2 (1)

利用有限元方法，求解偏微分方程组，结果如图 4.2.1.2 (2)。

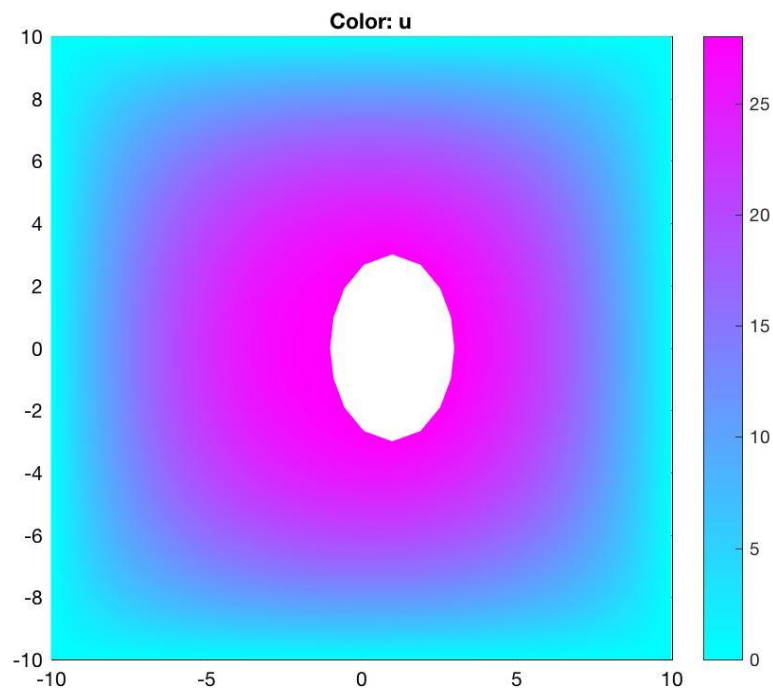


图 4.2.1.2 (2)

4.2.2 设定合适上下限以及扫掠半径，生成等值闭合的场曲线。

区域内，等值场量（本例中场量为 u ）将构成基曲线族。扫掠任务中，设置无人机扫掠直径为 d ，为保证区域均被扫掠到，相邻曲线的距离应小于 d 。相邻曲线的距离定义如下：

$$h(a,b) = \max \{ \min (distance(a,b)) \}$$

其中， a 、 b 为两图形的点集， $distance(a,b)$ 为 a 、 b 两点之间的距离。

设定精度要求 e ，使 $h(a,b) \in (d - e, d)$ ，可以得到一组符合条件的闭合曲线，即无人机按照上述曲线扫掠，可以覆盖整个扫掠区域。结果如图 4.2.2 (1)。

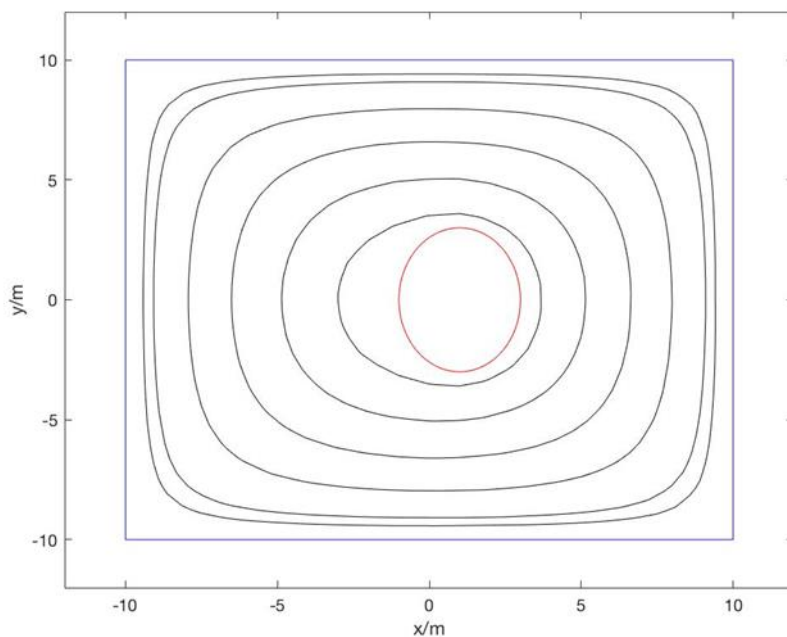


图 4.2.2 (1)

4.2.3 按长度等分场曲线，生成过渡曲线，得到一组螺旋点列。

按照长度 n 等分曲线，并将相邻曲线按长度依次相连，得到一组过渡线段，如图 4.2.3 (1)。

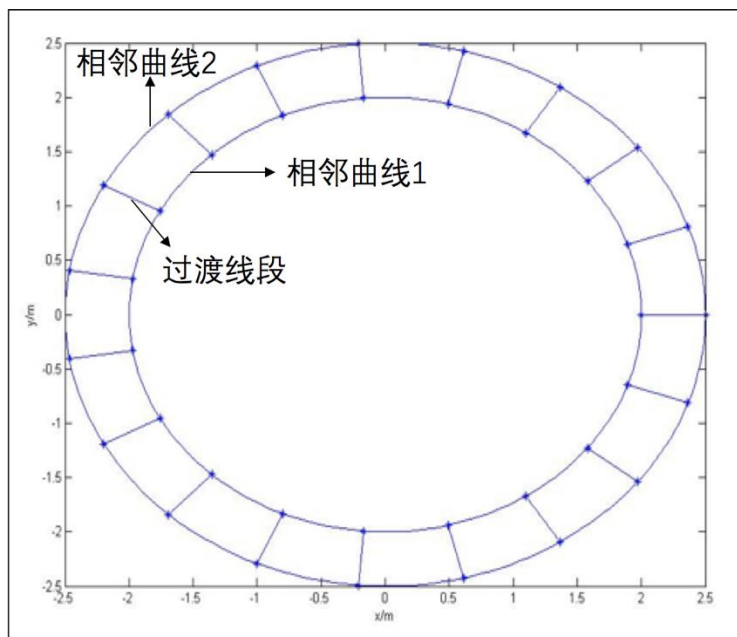


图 4.2.3 (1)

将过渡线段 n 等分，并依次将第 i 条过渡线段上第 $i-1$ 个等分点相连，得到过渡曲线，如图 4.2.3 (2)。

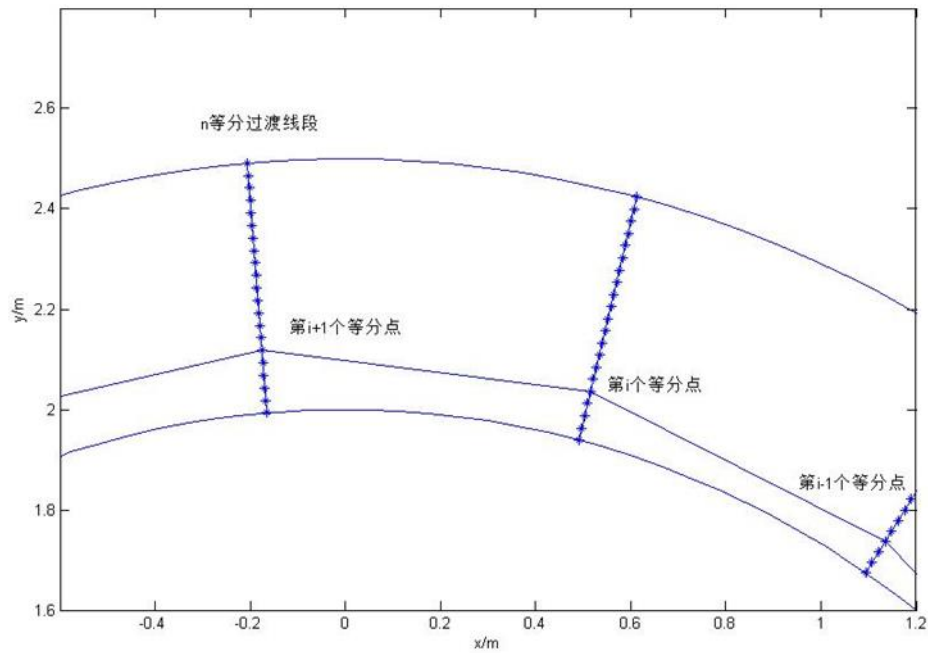


图 4.2.3 (2)

最终结果示例如图 4.2.3 (3)。

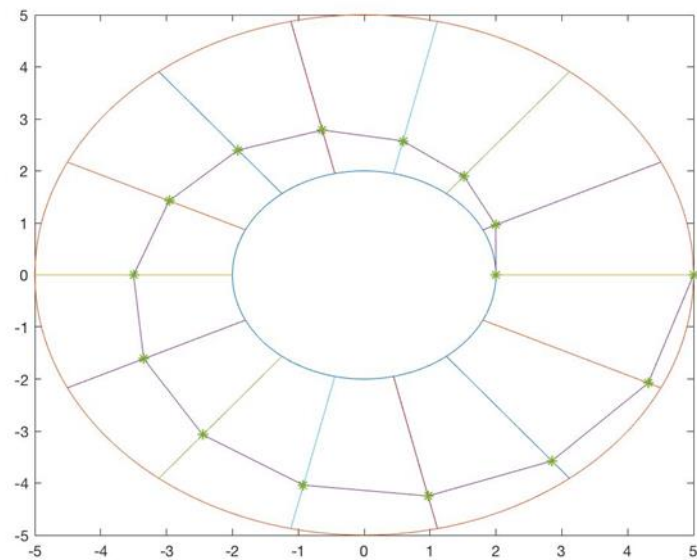


图 4.2.3 (3)

其中内外边界为圆心在【0, 0】处、半径分别为 2 和 5 的同心圆。将内外边界按长度等分为 15 份，并将等分点依次相连，生成过渡直线，最后将过渡直线分别等分 15 份，依次取第 1、2、3……15 等分点，得到过渡曲线点列。

4.2.4 三次样条曲线拟合点列，提高曲线的连续性阶次。

将上述过渡点列，按照适当的距离间隔重新生成，得到新的等距的过渡点列，根据过渡点列，利用最小二乘法逼近，得到控制点列，然后进行用德布尔法生成三次样条曲线，所得结果如图 10。

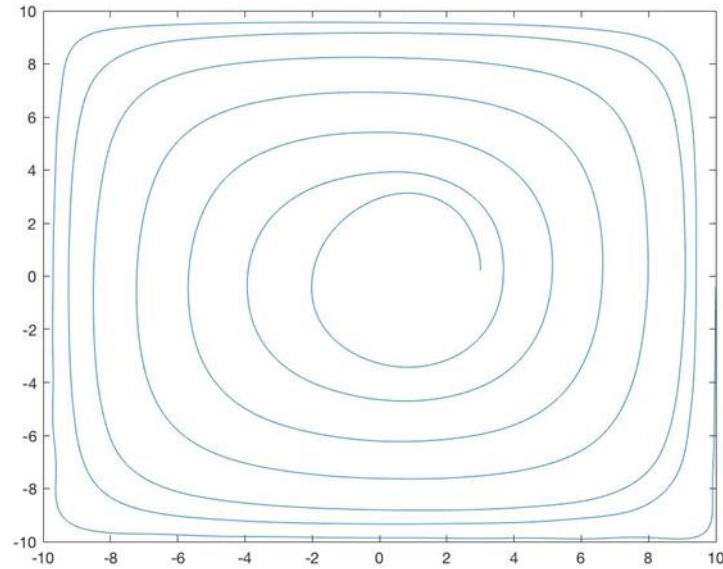


图 4.2.4 (1)

4.2.5 速度规划，对起止处进行重新规划，提高起止效率。

速度规划主要通过对最大弓高误差、速度、加速度、跃度、起止点初值的约束，离散化，并经过合适的线性转换，得到一个线性规划问题并求解，然后通过曲线插补，得到等时间间隔的速度和位置的时序列。

在上述过程中，出现曲线插补存在奇异、起止点效率很低的问题。假设起止点处为三段匀跃度构成，重新对起止点处的速度进行规划。将空间三个方向独立考虑。取 x 方向为例，设三段匀跃度值分别为 J_1 、 J_2 、 J_3 ，三段匀跃度的时间分别为 t_1 、 t_2 、 t_3 。初始点位于原点，速度、加速度均为零，终止点的 x 坐标为 s，速度为 v，加速度为 a。由此可得：

$$\begin{cases} a = J_1 t_1 + J_2 t_2 + J_3 t_3 \\ v = J_1 (0.5 t_1^2 + t_1 t_2 + t_1 t_3) + J_2 (0.5 t_2^2 + t_2 t_3) + J_3 (0.5 t_3^2) \\ s = J_1 \left(\frac{t_1^3}{6} + \frac{t_2 t_1^2}{2} + \frac{t_1 t_2^2}{2} + \frac{t_1 t_3^2}{2} + \frac{t_3 t_1^2}{2} + t_1 t_2 t_3 \right) + J_2 \left(\frac{t_2^3}{6} + \frac{t_3 t_2^2}{2} + \frac{t_2 t_3^2}{2} \right) + J_3 \left(\frac{t_3^3}{6} \right) \end{cases}$$

取 $t_1 = t_2 = t_3 = t$ ，可得：

$$\begin{bmatrix} t & t & t \\ \frac{5}{2} t^2 & \frac{3}{2} t^2 & \frac{1}{2} t^2 \\ \frac{19}{6} t^3 & \frac{7}{6} t^3 & \frac{1}{6} t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ v \\ s \end{bmatrix}$$

易得方阵的秩为 3，该方程组有解。

4.3 成果展示

4.3.1 起止点处的优化结果

起止点处的运动参数，取 x 方向起始处为例，结果如图 4.3.1 (1)，其中圆圈处为人为设定的起始处的末端。

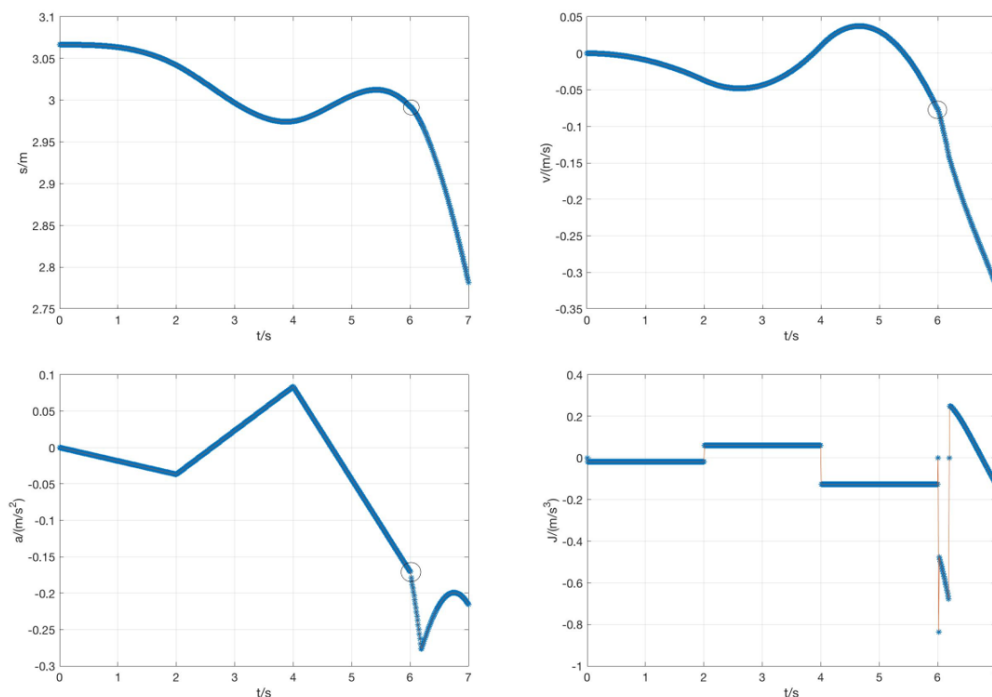


图 4.3.1 (1)

可以看到速度、加速度均连续，且跃度在最大跃度以下，说明效果良好。

4.3.2 飞行仿真

在ubuntu中进行无人机飞行仿真。可以看出螺旋线扫掠飞行平稳，跟踪性能良好。

5. 结论

5.1 研究成果

①实现 NURBS 曲线编程，由定义及德布尔方法分别生成 B 样条曲线及导矢。利用德布尔方法生成 B 样条曲线速度提升有 3 倍之多，求其导矢速度相较于定义生成也存在极大优势。

②实现两种最小二乘法方法逼近曲线及反求控制点的方式使曲线通过航迹点。实用最小二乘法进行曲线逼近中，通过实验发现：生成的控制点越多，曲线越逼近航迹点；生成的控制点过多，则会在首末端点处产生突弯，形成不想要的形状。探究反求控制点的方式生成曲线，使曲线完全通过航迹点，使轨迹规划更具实际意义。

③实现无跃度约束下最优速度规划以及有跃度约束下最优速度规划。通过对起止点的约束的调整，解决有跃度约束下最优速度规划存在的分母为零的数值问题。

④实现曲线的插补，将参数 u 转化为 t ，从而生成每隔单位采样周期无人机理论位置及运动参数信息，切合无人机飞控系统，真正实现对无人机的飞行控制。对起止点附近进行重新规划，解决起止过慢的问题。

5.2 存在的问题

①最小二乘法逼近曲线，需要根据实际情况设置控制点个数，以达到想要的曲线要求，这部分需要人为判断和调整；反求控制点虽理论上已经实现高阶的 B 样条曲线生成，但尚未程序实现。

②最优速度规划中，对起止点约束的调整参数尚未有最优解，主要通过人为设定。在小样本实验中，均能较好适用。但尚未探究在一般曲线中，该调整参数是否能够较好地适用。尚未探究该参数的实际意义，即参数对实际无人机飞行的影响。

③曲线插补中，起止过慢的问题理论上存在更好的解决方案，并已理论验证，尚未程序实现。同时尚未探究起止过慢的深层次原因。

5.3 未来研究方向

①探究控制点个数与曲线要求之间的关系，通过理论方法找出合理的控制点个数，从而实现智能控制；程序实现高阶反求控制点的 B 样条曲线生成。

②确定起止点约束调整参数的实际意义，研究调整参数智能生成算法。

③程序实现解决起止过慢的更好方法；探究起止过慢的深层次原因，研究从本质上解决起止过慢的方法，而非通过外加约束或使用新方法插补起止点附近曲线。

④研究通过智能算法，求解非线性规划，从而实现不需要放宽跃度约束即可求解最优速度；理论上直接求解非线性规划，将能得到优于目前速度规划的最优速度集。但非线性规划求解的弊端在于求解复杂，故未来的研究方向应考虑何种智能算法能够快速、准确求解非线性规划问题。

6.参考文献

[1] 专著： 施法中，《计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条》，北京市东城区沙滩后街 55 号，高等教育出版社，2001 年 8 月，310-314

[2] 专著： Les Piegl, Wayne Tiller，《非均匀有理 B 样条》，北京清华大学学研大厦 A 座，清华大学出版社，2010 年 12 月，256-257

- [3] 专著： 施法中，《计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条》，北京市东城区沙滩后街 55 号，高等教育出版社，2001 年 8 月，212-213
- [4] 专著： 施法中，《计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条》，北京市东城区沙滩后街 55 号，高等教育出版社，2001 年 8 月，239-244
- [5] 学位论文： 董伟，《四旋翼飞行机器人抗扰追踪控制与轨迹优化技术研究》，[学位论文]，上海交通大学，2015 年
- [6] 专著： Les Piegl, Wayne Tiller, 《非均匀有理 B 样条》，北京清华大学学研大厦 A 座，清华大学出版社，2010 年 12 月，284-288
- [7] 专著： Les Piegl, Wayne Tiller, 《非均匀有理 B 样条》，北京清华大学学研大厦 A 座，清华大学出版社，2010 年 12 月，284-288
- [8] 专著： 施法中，《计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条》，北京市东城区沙滩后街 55 号，高等教育出版社，2001 年 8 月，254-262
- [9] 学位论文： 董伟，《四旋翼飞行机器人抗扰追踪控制与轨迹优化技术研究》，[学位论文]，上海交通大学，2015 年
- [10] 学位论文： 董伟，《四旋翼飞行机器人抗扰追踪控制与轨迹优化技术研究》，[学位论文]，上海交通大学，2015 年
- [11] 专著： 施法中，《计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条》，北京市东城区沙滩后街 55 号，高等教育出版社，2001 年 8 月，244-245
- [12] 期刊： 闫焱，《空间曲线的主法向量方向的探讨》，《陕西师范大学继续教育学报》，2005 年，第 22 卷第 3 期，104-105
- [13] 期刊： 张学东，《空间曲线的曲率计算方法》，《塔里木农垦大学学报》，2002 年，第 14 卷第 2 期
- [14] 学位论文： 董伟，《四旋翼飞行机器人抗扰追踪控制与轨迹优化技术研究》，[学位论文]，上海交通大学，2015 年
- [15] 学位论文： 董伟，《四旋翼飞行机器人抗扰追踪控制与轨迹优化技术研究》，[学位论文]，上海交通大学，2015 年

6.致谢

感谢丁烨老师、董伟师兄、陈刚师兄、陈杰师兄、叶欣师兄在 PRP 项目中给予的指导。通过本次 PRP 项目，我不仅较为深入地理解了 B 样条曲线、NURBS 曲线的性质、生成的几种算法，曲线插补，非线性规划等知识，还通过实验、编程等培养了科学素养、科研方法。

再次感谢丁烨老师能够提供这样一个机会，让我获得科学知识的同时，培养了一定的科学素养，为未来的科研道路提供了丰富的知识和宝贵的经验。

