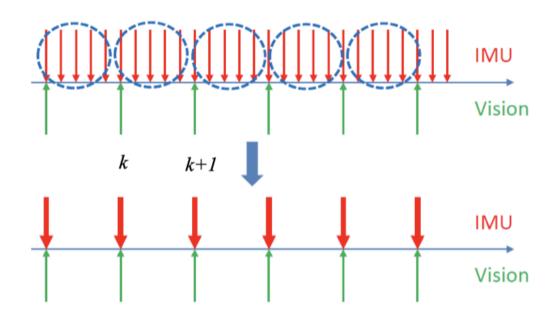
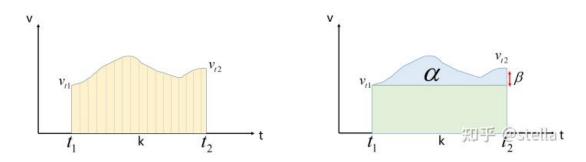
# LVI-SAM 学习小组分享



## 为什么要做IMU预积分?

在构建优化问题时,会将相机或激光关键帧的pvq(位置、速度、旋转)以及imu bias作为状态量进行优化。在求解优化问题时,会不断迭代更新这些状态量。所以,我们在求解优化问题的过程中**每迭代一次,更新了一下关键帧的位姿、速度和IMU bias,就需要重复一次积分操作**,要知道我们在优化的时候不止迭代一次的,这样就会花费大量的时间重新积分,显然是不太合适的。

#### IMU预积分的思路就是先把每次优化迭代时不变的项提出来,减小每次重新积分的工作量



# IMU预积分公式

#### 1. 预积分的定义

一个IMU系统考虑五个变量:旋转R, 平移 p, 角速度 $\omega$ , 线速度 v 与 加速度 a

由旋转运动学可得:

$$\dot{m{R}} = m{R}m{\omega}^\wedge$$

$$\dot{m p}=m v$$

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{a}$$

从 t 到  $t + \Delta t$  的时间里,对上式进行欧拉积分可以得到:

$$\mathbf{R}(t + \Delta t) = \mathbf{R}(t) \operatorname{Exp}(\boldsymbol{\omega}(t)\Delta t)$$

$$oldsymbol{v}(t+\Delta t) = oldsymbol{v}(t) + oldsymbol{a}(t)\Delta t$$

$$oldsymbol{p}(t+\Delta t) = oldsymbol{p}(t) + oldsymbol{v}(t)\Delta t + rac{1}{2}oldsymbol{a}(t)\Delta t^2$$

其中角速度和加速度是IMU可以测量的量,但受到噪声与重力影响。令测量值为  $ilde{oldsymbol{\omega}}, ilde{oldsymbol{a}}$ 

$$ilde{m{\omega}}(t) = m{\omega}(t) + m{b}_g(t) + m{\eta}_g(t)$$

$$ilde{oldsymbol{a}}(t) = oldsymbol{R}^{ ext{T}}(oldsymbol{a}(t) - oldsymbol{g}) + oldsymbol{b}_a(t) + oldsymbol{\eta}_a(t)$$

代入上式可以得到**测量值和状态量**之间的关系:

$$oldsymbol{R}(t+\Delta t) = oldsymbol{R}(t) \operatorname{Exp}\left(\left( ilde{oldsymbol{\omega}} - oldsymbol{b}_g(t) - oldsymbol{\eta}_{gd}(t)
ight) \Delta t
ight)$$

$$oldsymbol{v}(t+\Delta t) = oldsymbol{v}(t) + oldsymbol{g} \Delta t + oldsymbol{R}(t) \left( ilde{oldsymbol{a}} - oldsymbol{b}_a(t) - oldsymbol{\eta}_{ad}(t) 
ight) \Delta t$$

$$oldsymbol{p}(t+\Delta t) = oldsymbol{p}(t) + oldsymbol{v}(t)\Delta t + rac{1}{2}oldsymbol{g}\Delta t^2 + rac{1}{2}oldsymbol{R}(t)\left( ilde{oldsymbol{a}} - oldsymbol{b}_a(t) - oldsymbol{\eta}_{ad}(t)
ight)\Delta t^2$$

我们完全可以用这种约束来构建图优化,对IMU相关的问题进行求解。但是这组方程刻画的时间太短,或者说,IMU的测量频率太高。我们并**不希望优化过程随着IMU数据进行调用,那样太浪费计算资源**。于是,预积分方法应运而生,它可以把一段时间的IMU数据累计起来统一处理。

假设关键帧 i 和 j 之间的IMU数据被累计起来,这种被累计起来的观测称为 **预积分** 

$$oldsymbol{R}_{j} = oldsymbol{R}_{i} \prod_{k=i}^{j-1} \left( \operatorname{Exp} \left( \left( ilde{oldsymbol{\omega}}_{k} - oldsymbol{b}_{g,k} - oldsymbol{\eta}_{gd,k} 
ight) \Delta t 
ight)$$

$$oldsymbol{v}_j = oldsymbol{v}_i + oldsymbol{g} \Delta t_{ij} + \sum_{k=i}^{j-1} oldsymbol{R}_k \left( ilde{oldsymbol{a}}_k - oldsymbol{b}_{a,k} - oldsymbol{\eta}_{ad,k} 
ight) \Delta t_i$$

$$oldsymbol{p}_{j} = oldsymbol{p}_{i} + \sum_{k=i}^{j-1} oldsymbol{v}_{k} \Delta t + rac{1}{2} oldsymbol{g} \Delta t_{ij}^{2} + rac{1}{2} \sum_{k=i}^{j-1} oldsymbol{R}_{k} \left( ilde{oldsymbol{a}}_{k} - oldsymbol{b}_{a,k} - oldsymbol{\eta}_{ad,k} 
ight) \Delta t^{2}$$

在已知 i 时刻状态和所有测量时,该式可以用于推断 j 时刻的状态,上式为传统意义的**直接积分** 

#### 直接积分的缺点:

如果我们对 i 时刻的状态进行优化,那么 i +1 , i + 2 ... ,j -1 时刻的状态也会跟着发生改变,这个积分就必须重新计算。为此,我们对上式进行改变,定义相对运动量为:

$$egin{aligned} \Delta oldsymbol{R}_{ij} &\doteq oldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}} oldsymbol{R}_j = \prod_{k=i}^{j-1} \mathrm{Exp} \left( \left( ilde{oldsymbol{\omega}}_k - oldsymbol{b}_{g,k} - oldsymbol{\eta}_{gd,k} 
ight) \Delta t 
ight) \ \Delta oldsymbol{v}_{ij} &\doteq oldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}} \left( oldsymbol{v}_j - oldsymbol{v}_i - oldsymbol{g} \Delta t_{ij} 
ight) = \sum_{k=i}^{j-1} \Delta oldsymbol{R}_{ik} \left( ilde{oldsymbol{a}}_k - oldsymbol{b}_{a,k} - oldsymbol{\eta}_{ad,k} 
ight) \Delta t \ = \sum_{k=i}^{j-1} \left[ \Delta oldsymbol{v}_{ik} \Delta t + rac{1}{2} \Delta oldsymbol{R}_{ik} \left( ilde{oldsymbol{a}}_k - oldsymbol{b}_{a,k} - oldsymbol{\eta}_{ad,k} 
ight) \Delta t^2 
ight] \end{aligned}$$

这种改变实际上只是计算了某种从 i 到 j 的"差值"。这个定义在计算上有一些有趣的性质

- 1. 我们不妨考虑从 i 时刻出发,此时这三个量都为零。在 i+1 时刻,我们计算出  $\Delta \mathbf{R}_{i,i+1}, \mathbf{v}_{i,i+1}$  和  $\Delta \mathbf{p}_{i,i+1}$  。而在 i+2 时刻时,由于这三个式子都是累乘或累加的形式,只需在 i,i+1 时刻的结果之上,加上第 i+2 时刻的测量值即可。这在计算层面带来了很大的便利。进一步,我们还会发现这种性质对后续计算各种雅可比矩阵都非常方便。
- 2. 上述所有计算都和  $R_i$  的取值无关。即使  $R_i$  的估计值发生改变,这些量也无需重新计算。这又是非常方便的一个特性。
- 3. 不过,如果零偏  $b_{a,k}$  或  $b_{g,k}$  发生变化,那么上述式子理论上还是需要重新计算。然而,我们也可以通过"**修正**"而非"**重新计算**"的思路,来调整我们的预积分量。
- 4. 请注意,预积分量并没有直接的物理含义。尽管符号上用了  $\Delta v$ ,  $\Delta p$  之类的样子,但它并不表示某两个速度或位置上的偏差。它只是如此定义而已。当然,从量纲上来说,应该与角度、速度、位移对应。
- 5. 同样地,由于预积分量不是直接的物理量,这种"测量模型"的噪声也必须从原始的IMU噪声推导而来。

#### 2. 预积分的测量模型

预积分内部带有IMU的零偏量,因此不可避免地会依赖此时的零偏量估计。为了处理这种依赖,我们对预积分定义作 一些工程上的调整:

- 1. 我们首先认为 i 时刻的零偏是固定的,并且在整个预积分计算过程中也都是固定的。
- 2. 我们作出预积分对零偏量的一阶线性化模型,即,舍弃对零偏量的高阶项。
- 3. 当零偏估计发生改变时,用这个线性模型来修正预积分。

首先,我们固定 i 时刻的零偏估计,来分析预积分的噪声。无论是图优化还是滤波器技术,都需要知道某个测量量究 竟含有多大的噪声

从旋转开始计算,因为旋转相对来说比较容易。利用BCH展开,可以作出下列的近似:

$$egin{aligned} \Delta oldsymbol{R}_{ij} &= \prod_{k=i}^{j-1} & \operatorname{Exp}\left(\left( ilde{oldsymbol{\omega}}_k - oldsymbol{b}_{g,k} - oldsymbol{\eta}_{gd,k}
ight) \Delta t
ight) \ & \operatorname{egin{aligned} \mathbb{H}BCH:} pprox \operatorname{Exp}\left(\left( ilde{oldsymbol{\omega}}_k - oldsymbol{b}_{i,g} \Delta t
ight) \operatorname{Exp}\left(-oldsymbol{J}_{r,k} oldsymbol{\eta}_{gd,k} \Delta t
ight) \ & pprox \prod_{k=i}^{j-1} \left[\operatorname{Exp}\left(\left( ilde{oldsymbol{\omega}}_k - oldsymbol{b}_{i,g}
ight) \Delta t
ight) \operatorname{Exp}\left(-oldsymbol{J}_{r,k} oldsymbol{\eta}_{gd,k} \Delta t
ight) 
ight] \end{aligned}$$

在这个式子中,把噪声项分离出去,从而定义**预积分测量\Delta ilde{m{R}}\_{ij}** (测量量会带有上标符号)

$$\Delta ilde{m{R}}_{ij} = \prod_{k=i}^{j-1} \mathrm{Exp}\left(\left( ilde{m{\omega}}_k - m{b}_{q,i}
ight) \Delta t
ight)$$

基于这种巧妙的定义方式,可以把上式改写成:

$$\Delta \boldsymbol{R}_{ij} = \underbrace{\operatorname{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{i} - \boldsymbol{b}_{i,g}\right)\Delta t\right)}_{\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i,i+1}} \operatorname{Exp}\left(-\boldsymbol{J}_{r,i}\boldsymbol{\eta}_{gd,i}\Delta t\right) \underbrace{\operatorname{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} - \boldsymbol{b}_{i,g}\right)\Delta t\right)}_{\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i+1,i+2}} \operatorname{Exp}\left(-\boldsymbol{J}_{r,i+1}\boldsymbol{\eta}_{gd,i}\Delta t\right) \dots$$

$$= \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i,i+1} \underbrace{\operatorname{Exp}\left(-\boldsymbol{J}_{r,i}\boldsymbol{\eta}_{gd,i}\Delta t\right)\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i+1,i+2}}_{=\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i+1,i+2}\operatorname{Exp}\left(-\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i+1,i+2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{r,i}\boldsymbol{\eta}_{gd,i}\Delta t\right)} \operatorname{Exp}\left(-\boldsymbol{J}_{r,i+1}\boldsymbol{\eta}_{gd,i}\Delta t\right) \dots$$

$$= \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i,i+2}\operatorname{Exp}\left(-\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i+1,i+2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{r,i}\boldsymbol{\eta}_{gd,i}\Delta t\right) \operatorname{Exp}\left(-\boldsymbol{J}_{r,i+1}\boldsymbol{\eta}_{gd,i}\Delta t\right)\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i+2,i+3}\dots$$

不断地把观测置换到左侧,并把噪声置换到右侧,并且把噪声项内部的 $\Delta ilde{m{R}}$  项合并,可以得到:

$$egin{aligned} \Delta oldsymbol{R}_{ij} &= \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ij} \prod_{k=i}^{j-1} \operatorname{Exp}\left(-\Delta ilde{oldsymbol{R}}_{k+1,j}^{\mathrm{T}} oldsymbol{J}_{r,k} oldsymbol{\eta}_{gd,k} \Delta t
ight) \ &\doteq \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ij} \operatorname{Exp}\left(-\delta oldsymbol{\phi}_{ij}
ight) \end{aligned}$$

速度部分:

$$egin{aligned} \Delta oldsymbol{v}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \Delta oldsymbol{R}_{ik} \left( ilde{oldsymbol{a}}_k - oldsymbol{b}_{a,k} - oldsymbol{\eta}_{ad,k} 
ight) \Delta t \ &= \sum_{k=i}^{j-1} \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ik} \underbrace{\operatorname{Exp} \left( -\delta \phi_{ik} 
ight)}_{pprox oldsymbol{I} -\delta \phi_{ik}} \left( ilde{oldsymbol{a}}_k - oldsymbol{b}_{a,k} - oldsymbol{\eta}_{ad,k} 
ight) \Delta t \ &= \sum_{k=i}^{j-1} \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ik} \left( oldsymbol{I} - \delta oldsymbol{\phi}_{ik}^{\wedge} 
ight) \left( ilde{oldsymbol{a}}_k - oldsymbol{b}_{a,k} - oldsymbol{\eta}_{ad,k} 
ight) \Delta t \end{aligned}$$

舍掉上式中的噪声二阶小量,并且定义**预积分速度观测量**为:

$$\Delta ilde{m{v}}_{ij} = \sum_{k=i}^{j-1} \Delta ilde{m{R}}_{ik} \left( ilde{m{a}}_k - m{b}_{a,i} 
ight) \Delta t$$

那么上式化简为:

$$egin{aligned} \Delta oldsymbol{v}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \underbrace{\Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ik} \left( ilde{oldsymbol{a}}_k - oldsymbol{b}_{a,i}
ight) \Delta t}_{ ext{ text{ text{ text{$\tilde{R}}}}_{ik}}} + \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ik} \left( ilde{oldsymbol{a}}_k - oldsymbol{b}_{a,i}
ight)^{\wedge} \delta oldsymbol{\phi}_{ik} \Delta t - \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ik} oldsymbol{\eta}_{ad,k} \Delta t \ &= \Delta ilde{oldsymbol{v}}_{ij} + \delta oldsymbol{v}_{ij} \end{aligned}$$

平移部分:

$$egin{aligned} \Delta oldsymbol{p}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[ \Delta oldsymbol{v}_{ik} \Delta t + rac{1}{2} \Delta oldsymbol{R}_{ik} \left( ilde{oldsymbol{a}}_k - oldsymbol{b}_{a,k} - oldsymbol{\eta}_{ad,k} 
ight) \Delta t^2 
ight] \ &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[ \left( \Delta ilde{oldsymbol{v}}_{ik} - \delta oldsymbol{v}_{ik} 
ight) \Delta t + rac{1}{2} \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ik} \underbrace{\operatorname{Exp} \left( -\delta oldsymbol{\phi}_{ik} \right)}_{oldsymbol{I} - \delta oldsymbol{\phi}_{ij}^{\wedge}} \left( ilde{oldsymbol{a}}_k - oldsymbol{b}_{a,k} - oldsymbol{\eta}_{ad,k} 
ight) \Delta t^2 
ight] \\ &pprox \sum_{k=i}^{j-1} \left[ \left( \Delta ilde{oldsymbol{v}}_{ik} - \delta oldsymbol{v}_{ik} 
ight) \Delta t + rac{1}{2} \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ik} \left( oldsymbol{I} - \delta oldsymbol{\phi}_{ik}^{\wedge} 
ight) \left( ilde{oldsymbol{a}}_k - oldsymbol{b}_{a,i} 
ight) \Delta t^2 - rac{1}{2} \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ik} \left( ilde{oldsymbol{a}}_k - oldsymbol{b}_{a,i} 
ight)^{\wedge} \delta oldsymbol{\phi}_{ik} \Delta t^2 - rac{1}{2} \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ik} oldsymbol{\eta}_{ad,k} \Delta t^2 
ight] \end{aligned}$$

#### **预积分位移观测量**为:

$$\Delta ilde{m{p}}_{ij} = \sum_{k=i}^{j-1} \left[ \left( \Delta ilde{m{v}}_{ik} \Delta t 
ight) + rac{1}{2} \Delta ilde{m{R}}_{ik} \left( ilde{m{a}}_k - m{b}_{a,i} 
ight) \Delta t^2 
ight]$$

前面式子可以写成:

$$egin{aligned} \Delta oldsymbol{p}_{ij} &= \Delta ilde{oldsymbol{p}}_{ij} + \sum_{k=i}^{j-1} \left[ -\delta oldsymbol{v}_{ik} \Delta t + rac{1}{2} \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ik} \left( ilde{oldsymbol{a}}_k - oldsymbol{b}_{a,i} 
ight)^\wedge \delta oldsymbol{\phi}_{ik} \Delta t^2 - rac{1}{2} \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ik} oldsymbol{\eta}_{ad,k} \Delta t^2 
ight] \ &\doteq \Delta ilde{oldsymbol{p}}_{ij} - \delta oldsymbol{p}_{ij} \end{aligned}$$

于是,此三式共同定义了预积分的三个观测量和它们的噪声。将它们代回最初的定义式,可以简单写为:

$$egin{aligned} \Delta ilde{m{R}}_{ij} &= m{R}_i^{ ext{T}} m{R}_j \operatorname{Exp}\left(\delta m{\phi}_{ij}
ight) \ \Delta ilde{m{v}}_{ij} &= m{R}_i^{ ext{T}} \left(m{v}_j - m{v}_i - m{g} \Delta t_{ij}
ight) + \delta m{v}_{ij} \ \Delta ilde{m{p}}_{ij} &= m{R}_i^{ ext{T}} \left(m{p}_j - m{p}_i - m{v}_i \Delta t_{ij} - rac{1}{2} m{g} \Delta t_{ij}^2
ight) + \delta m{p}_{ij} \end{aligned}$$

这个式子归纳了前面我们讨论的内容,显示了预积分的几大优点:

- 1. 它的左侧是可以通过传感器数据积分得到的观测量,右侧是根据状态变量推断出来的预测值,再加上一个随机噪声
- 2. 左侧变量的定义方式非常适合程序实现

$$egin{aligned} \Delta ilde{m{R}}_{ij} &= \prod_{k=i}^{j-1} \mathrm{Exp}\left( \left( ilde{m{\omega}}_k - m{b}_{g,i} 
ight) \Delta t 
ight) \ \Delta ilde{m{v}}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \Delta ilde{m{R}}_{ik} \left( ilde{m{a}}_k - m{b}_{a,i} 
ight) \Delta t \ \Delta ilde{m{p}}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[ \left( \Delta ilde{m{v}}_{ik} \Delta t 
ight) + rac{1}{2} \Delta ilde{m{R}}_{ik} \left( ilde{m{a}}_k - m{b}_{a,i} 
ight) \Delta t^2 
ight] \end{aligned}$$

并且如果知道k时刻的预积分观测,很容易根据 k+1 时刻的传感器读数,计算出k +1 时刻的预积分观测量

3. 从右侧来看,也很容易根据 i 和 j 时刻的状态变量来推测预积分观测量的大小,从而写出误差公式,构建最小二 乘问题

现在的问题是:预积分的噪声是否符合零均值的高斯分布?如果是,它的协方差有多大?和IMU本身的噪声之间是什么关系?

#### 3. 预积分噪声模型

将复杂的噪声项线性化,保留一阶项系数,然后推导线性模型下的协方差矩阵变化。这是一种非常常见的处理思路,对许多复杂模型都很有效。

先从旋转的噪声开始看:

$$ext{Exp}\left(-\deltaoldsymbol{\phi}_{ij}
ight) = \prod_{k=i}^{j-1} ext{Exp}\left(-\Delta ilde{oldsymbol{R}}_{k+1}^{ ext{T}} oldsymbol{J}_{r,k} oldsymbol{\eta}_{gd,k} \Delta t
ight)$$

作为随机变量的  $\delta\phi_{ij}$  只和随机变量  $\pmb{\eta}_{gd}$  有关,而其他的都是确定的观测量。当我们线性化后取期望时,由于  $\pmb{\eta}_{gd}$  为白噪声,因此  $\delta\phi_{ij}$  均值也为零

为了分析它的协方差,我们需要对上式进行线性化。对两侧取 Log, 可得:

$$\deltaoldsymbol{\phi}_{ij} = -\log\left(\prod_{k=i}^{j-1} \mathrm{Exp}\left(-\Delta ilde{oldsymbol{R}}_{k+1}^{\mathrm{T}} oldsymbol{J}_{r,k} oldsymbol{\eta}_{gd,k} \Delta t
ight)
ight)$$

该式又可以通过BCH进行线性近似。同时,由于内部的系数项  $-\Delta ilde{m{R}}_{k+1}^{\mathrm{T}} m{J}_{r,k} m{\eta}_{gd,k} \Delta t$  接近于零,且为噪声,我们可将BCH近似的右雅可比取为单位阵,可以得到:

$$\deltaoldsymbol{\phi}_{ij}pprox \sum_{k=i}^{j-1} \Deltaoldsymbol{R}_{k+1,j}^{ ext{T}}oldsymbol{J}_{r,k}oldsymbol{\eta}_{ad,k}\Delta t$$

此式是高斯随机变量的线性组合,它的结果依然是高斯的。同时,由于预积分的累加特性,预测分观测量的噪声也 会随着时间不断累加

上式是累加形式的,很容易将其写成递推的形式:

$$egin{aligned} \delta oldsymbol{\phi}_{ij} &pprox \sum_{k=i}^{j-1} \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{k+1,j}^{\mathrm{T}} oldsymbol{J}_{r,k} oldsymbol{\eta}_{gd,k} \Delta t \ &= \sum_{k=i}^{j-2} \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{k+1,j}^{\mathrm{T}} oldsymbol{J}_{r,k} oldsymbol{\eta}_{gd,k} \Delta t + \underbrace{\Delta oldsymbol{R}_{j,j}^{\mathrm{T}} oldsymbol{J}_{r,j-1} oldsymbol{\eta}_{gd,j-1} \Delta t} \ &= \sum_{k=i}^{j-2} \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{k+1,j}^{\mathrm{T}} oldsymbol{J}_{r,k} oldsymbol{\eta}_{gd,k} \Delta t + oldsymbol{J}_{r,j-1} oldsymbol{\eta}_{gd,j-1} \Delta t \ &= \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{j-1,j}^{\mathrm{T}} oldsymbol{\delta}_{i,j-1} + oldsymbol{J}_{r,j-1} oldsymbol{\eta}_{gd,j-1} \Delta t \ &= \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{j-1,j}^{\mathrm{T}} \delta oldsymbol{\phi}_{i,j-1} + oldsymbol{J}_{r,j-1} oldsymbol{\eta}_{gd,j-1} \Delta t \ \end{aligned}$$

该式描述了如何从 j - 1 时刻的噪声推断到 j 时刻。显然这是一个线性系统,设 j -1 时刻的  $\delta m{\phi}_{i,j-1}$  的协方差为  $m{\Sigma}_{j-1}$  ,  $m{\eta}_{gd}$  的协方差为  $m{\Sigma}_{\eta_{gd}}$  , 则有:

$$oldsymbol{\Sigma}_{j} = \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{i-1,j}^{\mathrm{T}} oldsymbol{\Sigma}_{j-1} \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{j-1,j} + oldsymbol{J}_{r,j-1} oldsymbol{\Sigma}_{\eta_{od}} oldsymbol{J}_{r,i-1}^{\mathrm{T}} \Delta t^2$$

表明预积分误差会随着累计变大,预积分观测量也会变得越来越不确定

速度部分的噪声:

$$\delta oldsymbol{v}_{ij}pprox \sum_{k=i}^{j-1}\left[-\Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ik}\left( ilde{oldsymbol{a}}_{k}-oldsymbol{b}_{a,i}
ight)^{\wedge}\deltaoldsymbol{\phi}_{ik}\Delta t+\Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ik}oldsymbol{\eta}_{ad,k}\Delta t
ight]$$

写成累加的形式

$$egin{aligned} \delta oldsymbol{v}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[ -\Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ik} \left( ilde{oldsymbol{a}}_k - oldsymbol{b}_{a,i} 
ight)^{\wedge} \delta oldsymbol{\phi}_{ik} \Delta t + \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ik} oldsymbol{\eta}_{ad,k} \Delta t 
ight] \ &= \sum_{k=i}^{j-2} \left[ -\Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ik} \left( ilde{oldsymbol{a}}_k - oldsymbol{b}_{a,i} 
ight)^{\wedge} \delta oldsymbol{\phi}_{ik} \Delta t + \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ik} oldsymbol{\eta}_{ad,k} \Delta t 
ight] \ &- \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{i,j-1} \left( ilde{oldsymbol{a}}_{j-1} - oldsymbol{b}_{a,i} 
ight)^{\wedge} \delta oldsymbol{\phi}_{i,j-1} \Delta t + \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{i,j-1} oldsymbol{\eta}_{ad,j-1} \Delta t \ = & \delta oldsymbol{v}_{i,j-1} - \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{i,j-1} \left( ilde{oldsymbol{a}}_{j-1} - oldsymbol{b}_{a,i} 
ight)^{\wedge} \delta oldsymbol{\phi}_{i,j-1} \Delta t + \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{i,j-1} oldsymbol{\eta}_{ad,j-1} \Delta t \end{aligned}$$

平移部分:

$$\begin{split} \delta \boldsymbol{p}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[ \delta \boldsymbol{v}_{ik} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik} \left( \tilde{\boldsymbol{a}}_k - \boldsymbol{b}_{a,i} \right)^{\wedge} \delta \boldsymbol{\phi}_{ik} \Delta t^2 + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_{ad,k} \Delta t^2 \right] \\ &= \sum_{k=i}^{j-2} \left[ \delta \boldsymbol{v}_{ik} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik} \left( \tilde{\boldsymbol{a}}_k - \boldsymbol{b}_{a,i} \right)^{\wedge} \delta \boldsymbol{\phi}_{ik} \Delta t^2 + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_{ad,k} \Delta t^2 \right] \\ &+ \delta \boldsymbol{v}_{i,j-1} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i,j-1} \left( \tilde{\boldsymbol{a}}_{j-1} - \boldsymbol{b}_{a,i} \right)^{\wedge} \delta \boldsymbol{\phi}_{i,j-1} \Delta t^2 + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i,j-1} \boldsymbol{\eta}_{ad,j-1} \Delta t^2 \\ &= \delta \boldsymbol{p}_{i,j-1} + \delta \boldsymbol{v}_{i,j-1} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i,j-1} \left( \tilde{\boldsymbol{a}}_{j-1} - \boldsymbol{b}_{a,i} \right)^{\wedge} \delta \boldsymbol{\phi}_{i,j-1} \Delta t^2 + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i,j-1} \boldsymbol{\eta}_{ad,j-1} \Delta t^2 \end{split}$$

至此,推导了如何从 i-1 时刻将噪声递推至 i 时刻,下面整理成矩阵形式:

$$oldsymbol{\eta}_{ik} = \left[egin{array}{c} \delta oldsymbol{\phi}_{ik} \ \delta oldsymbol{v}_{ik} \ \delta oldsymbol{p}_{ik} \end{array}
ight]$$

并且把IMU的零偏噪声定义为:

$$oldsymbol{\eta}_{d,j} = \left[egin{array}{c} oldsymbol{\eta}_{gd,j} \ oldsymbol{\eta}_{ad,j} \end{array}
ight]$$

那么从  $\eta_{i,j-1}$  到  $\eta_{i,j}$  的递推式可以写为:

$$oldsymbol{\eta}_{ij} = oldsymbol{A}_j oldsymbol{\eta}_{i,j-1} + oldsymbol{B}_j oldsymbol{\eta}_{d,j-1}$$

其中的系数矩阵为:

$$oldsymbol{A}_j = \left[egin{array}{cccc} \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{j-1,j}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \ -\Delta ilde{oldsymbol{R}}_{i,j-1} \left( ilde{oldsymbol{a}}_{j-1} - oldsymbol{b}_{a,i} 
ight)^{\wedge} \Delta t & oldsymbol{I} & \mathbf{0} \ -rac{1}{2} \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{i,j-1} \left( ilde{oldsymbol{a}}_{j-1} - oldsymbol{b}_{a,i} 
ight)^{\wedge} \Delta t^2 & \Delta t & oldsymbol{I} \end{array}
ight] oldsymbol{B}_j = \left[egin{array}{cccc} oldsymbol{J}_{r,j-1} \Delta t & \mathbf{0} \ \mathbf{0} & \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{i,j-1} \Delta t \ \mathbf{0} & rac{1}{2} \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{i,j-1} \Delta t^2 \end{array}
ight]$$

矩阵形式更清晰地显示了几个噪声项之间累计递推关系。

由于它们的累加关系,在程序实现中也十分便捷。

#### 4. 零偏的更新

先前的讨论都假设了在 i 时刻的IMU零偏恒定不变,当然这都是为了方便后续的计算。然而**在实际的图优化中,我们经常会对状态变量(优化变量)进行更新**。那么,理论上来讲,如果IMU零偏发生了变化,预积分应该重新计算,因为预积分的每一步都用到了 i 时刻的IMU零偏。但是实际操作过程中,我们也可以选用一种讨巧的做法:假定预积分观测是随零偏线性变化的,虽然实际上并不是线性变化的,但我们总可以对一个复杂函数做线性化并保留一阶项,然后在原先的观测量上进行修正

把预积分观测量看成是  $b_{q,i},b_{a,i}$ 的 函数,当其更新了  $\delta b_{q,i},\delta b_{a,i}$  之后,预积分作如下修正:

$$\Delta ilde{m{R}}_{ij} \left(m{b}_{g,i} + \delta m{b}_{g,i}
ight) = \Delta ilde{m{R}}_{ij} \left(m{b}_{g,i}
ight) \mathrm{Exp} \left(rac{\partial \Delta ilde{m{R}}_{ij}}{\partial m{b}_g} \delta m{b}_{g,i}
ight) \ \Delta ilde{m{v}}_{ij} \left(m{b}_{g,i} + \delta m{b}_{g,i}, m{b}_{a,i} + \delta m{b}_{a,i}
ight) = \Delta ilde{m{v}}_{ij} \left(m{b}_{g,i}, m{b}_{a,i}
ight) + rac{\partial \Delta ilde{m{v}}_{ij}}{\partial m{b}_{g,i}} \delta m{b}_{g,i} + rac{\partial \Delta ilde{m{v}}_{ij}}{\partial m{b}_{a,i}} \delta m{b}_{a,i} \ \Delta ilde{m{p}}_{ij} \left(m{b}_{g,i} + \delta m{b}_{g,i}, m{b}_{a,i} + \delta m{b}_{a,i} + \delta m{b}_{a,i}
ight) = \Delta ilde{m{p}}_{ij} \left(m{b}_{g,i}, m{b}_{a,i}
ight) + rac{\partial \Delta ilde{m{p}}_{ij}}{\partial m{b}_{g,i}} \delta m{b}_{g,i} + rac{\partial \Delta ilde{m{p}}_{ij}}{\partial m{b}_{a,i}} \delta m{b}_{a,i}$$

#### 如何计算上面列写的几个偏导数(雅可比)呢?

首先来考虑旋转。预积分旋转观测量可以写为:

$$egin{aligned} \Delta ilde{m{R}}_{ij} \left( m{b}_{g,i} + \delta m{b}_{g,i} 
ight) &= \prod_{k=i}^{j-1} \operatorname{Exp} \left( \left( ilde{m{\omega}}_k - \left( m{b}_{g,i} + \delta m{b}_{g,i} 
ight) 
ight) \Delta t 
ight) &= \prod_{k=i}^{j-1} \operatorname{Exp} \left( \left( ilde{m{\omega}}_k - m{b}_{g,i} 
ight) \Delta t 
ight) \operatorname{Exp} \left( -m{J}_{r,k} \delta m{b}_{g,i} \Delta t 
ight) \underbrace{\operatorname{Exp} \left( \left( ilde{m{\omega}}_{i+1} - m{b}_{g,i} 
ight) \Delta t 
ight)}_{\Delta ilde{m{R}}_{i,i+1}} &= \underbrace{\Delta ilde{m{R}}_{i,i+1} \Delta ilde{m{E}}_{i+1,i+2} \operatorname{Exp} \left( -\Delta ilde{m{R}}_{i+1,i+2}^{\mathrm{T}} m{J}_{r,k} \delta m{b}_{g,i} \Delta t 
ight) \ldots \\ &= \Delta ilde{m{R}}_{ij} \prod_{k=i}^{j-1} \operatorname{Exp} \left( -\Delta ilde{m{R}}_{k+1,j}^{\mathrm{T}} m{J}_{r,k} \delta m{b}_{g,i} \Delta t 
ight) \\ &pprox \Delta ilde{m{R}}_{ij} \operatorname{Exp} \left( -\sum_{k=i}^{j-1} \Delta ilde{m{R}}_{k+1,j}^{\mathrm{T}} m{J}_{r,k} \Delta t \delta m{b}_{g,i} 
ight) \end{aligned}$$

通过这种方式我们可以算出  $\Delta ilde{m{R}}_{ij}$  相对于  $b_{g,i}$  的雅可比矩阵,记为  $\frac{\partial \Delta ilde{m{R}}_{ij}}{\partial m{b}_g}$  速度测量:

LVI-SAM 学习小组分享

8

$$egin{aligned} \Delta ilde{oldsymbol{v}} \left(oldsymbol{b}_i + \delta oldsymbol{b}_i
ight) &= \sum_{k=i}^{j-1} \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ik} \left(oldsymbol{b}_{g,i} + \delta oldsymbol{b}_{g,i}
ight) \left( ilde{oldsymbol{a}}_k - oldsymbol{b}_{a,i} - \delta oldsymbol{b}_{a,i}
ight) \Delta t \ &= \sum_{k=i}^{j-1} \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ik} \left(oldsymbol{I} + \left(rac{\partial \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ik}}{\partial oldsymbol{b}_{g,i}} \delta oldsymbol{b}_{g,i}
ight)^{\wedge} \right) \left( ilde{oldsymbol{a}}_k - oldsymbol{b}_{a,i} - \delta oldsymbol{b}_{a,i}
ight) \Delta t \ &pprox \Delta oldsymbol{v}_{ij} - \sum_{k=i}^{j-1} \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ik} \Delta t \delta oldsymbol{b}_{a,i} - \sum_{k=i}^{j-1} \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ik} \left( ilde{oldsymbol{a}}_k - oldsymbol{b}_{a,i}
ight)^{\wedge} rac{\partial \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ik}}{\partial oldsymbol{b}_{g,i}} \Delta t \delta oldsymbol{b}_{g,i} \ &= \Delta oldsymbol{v}_{ij} + rac{\partial \Delta oldsymbol{v}_{ij}}{\partial oldsymbol{b}_{a,i}} \delta oldsymbol{b}_{a,i} + rac{\partial \Delta oldsymbol{v}_{ij}}{\partial oldsymbol{b}_{g,i}} \delta oldsymbol{b}_{g,i} \end{aligned}$$

最后是平移部分:

$$\begin{split} \Delta \tilde{\boldsymbol{p}}_{ij} \left( \boldsymbol{b}_{i} + \delta \boldsymbol{b}_{i} \right) &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[ \left( \Delta \tilde{\boldsymbol{v}}_{ik} + \frac{\partial \Delta \boldsymbol{v}_{ij}}{\partial \boldsymbol{b}_{a,i}} \delta \boldsymbol{b}_{a,i} + \frac{\partial \Delta \boldsymbol{v}_{ij}}{\partial \boldsymbol{b}_{g,i}} \delta \boldsymbol{b}_{g,i} \right) \Delta t + \\ & \frac{1}{2} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik} \left( \boldsymbol{I} + \left( \frac{\partial \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}}{\partial \boldsymbol{b}_{g,i}} \delta \boldsymbol{b}_{g,i} \right)^{\wedge} \right) \left( \tilde{\boldsymbol{a}}_{k} - \boldsymbol{b}_{a,i} - \delta \boldsymbol{b}_{a,i} \right) \Delta t^{2} \right] \\ &= \delta \tilde{\boldsymbol{p}}_{ij} + \sum_{k=i}^{j-1} \left[ \frac{\partial \Delta \boldsymbol{v}_{ij}}{\partial \boldsymbol{b}_{a,i}} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik} \Delta t^{2} \right] \delta \boldsymbol{b}_{a,i} + \\ & \sum_{k=i}^{j-1} \left[ \frac{\partial \Delta \boldsymbol{v}_{ij}}{\partial \boldsymbol{b}_{g,i}} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik} \left( \tilde{\boldsymbol{a}}_{k} - \boldsymbol{b}_{a,i} \right)^{\wedge} \frac{\partial \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}}{\partial \boldsymbol{b}_{g,i}} \Delta t^{2} \right] \delta \boldsymbol{b}_{g,i} \\ &= \delta \tilde{\boldsymbol{p}}_{ij} + \frac{\partial \Delta \tilde{\boldsymbol{p}}_{ij}}{\partial \boldsymbol{b}_{a,i}} \delta \boldsymbol{b}_{a,i} + \frac{\partial \Delta \tilde{\boldsymbol{p}}_{ij}}{\partial \boldsymbol{b}_{a,i}} \boldsymbol{b}_{g,i} \end{split}$$

请注意上述计算都是迭代形式的。也就是说,我们只需要在程序中保留一个变量,随着数据不断进行累加即可。 把这些雅可比矩阵整理一下,得到更整齐的结果:

9

$$\begin{split} &\frac{\partial \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ij}}{\partial \boldsymbol{b}_{g,i}} = -\sum_{k=i}^{j-1} \left[ \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{k+1,j}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J}_{k,r} \Delta t \right] \\ &\frac{\partial \Delta \tilde{\boldsymbol{v}}_{ij}}{\partial \boldsymbol{b}_{a,i}} = -\sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik} \Delta t \\ &\frac{\partial \Delta \tilde{\boldsymbol{v}}_{ij}}{\partial \boldsymbol{b}_{g,i}} = -\sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik} \left( \tilde{\boldsymbol{a}}_k - \boldsymbol{b}_{a,i} \right)^{\wedge} \frac{\partial \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ij}}{\partial \boldsymbol{b}_{g,i}} \Delta t \\ &\frac{\partial \Delta \tilde{\boldsymbol{p}}_{ij}}{\partial \boldsymbol{b}_{a,i}} = \sum_{k=i}^{j-1} \frac{\partial \Delta \boldsymbol{v}_{ij}}{\partial \boldsymbol{b}_{a,i}} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik} \Delta t^2 \\ &\frac{\partial \Delta \tilde{\boldsymbol{p}}_{ij}}{\partial \boldsymbol{b}_{g,i}} = \sum_{k=i}^{j-1} \frac{\partial \Delta \boldsymbol{v}_{ij}}{\partial \boldsymbol{b}_{g,i}} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik} \left( \tilde{\boldsymbol{a}}_k - \boldsymbol{b}_{a,i} \right)^{\wedge} \frac{\partial \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}}{\partial \boldsymbol{b}_{g,i}} \Delta t^2 \end{split}$$

#### 5. 预积分模型归结到图优化

定义了预积分的测量模型,推导了它的噪声模型和协方差矩阵,并说明了随着零偏量更新,预积分应该怎么更新。 事实上,我们已经可以把预积分观测作为图优化的因子(Factor)或者边(Edge)了。下面我们来说明如何使用这种边,以及它推导它相对于状态变量的雅可比矩阵。

在IMU相关的应用中,通常把每个时刻的状态建模为包含旋转、平移、线速度、IMU零偏的变量,构成状态变量集合 $oldsymbol{\mathcal{X}}$ :

$$oldsymbol{x}_k = \left[oldsymbol{R}, oldsymbol{p}, oldsymbol{v}, oldsymbol{b}_a, oldsymbol{b}_g
ight]_k \in \mathcal{X}$$

预积分模型构建了关键帧 i 与关键帧 j 之间的一种约束, 它的残差可以写成:

$$egin{aligned} oldsymbol{r}_{\Delta oldsymbol{R}_{ij}} &= \log \left( \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ij}^{\mathrm{T}} \left( oldsymbol{R}_{i}^{\mathrm{T}} oldsymbol{R}_{j} 
ight) 
ight) \ oldsymbol{r}_{\Delta oldsymbol{v}_{ij}} &= oldsymbol{R}_{i}^{\mathrm{T}} \left( oldsymbol{v}_{j} - oldsymbol{v}_{i} - oldsymbol{g} \Delta t_{ij} 
ight) - \Delta ilde{oldsymbol{v}}_{ij} \ oldsymbol{r}_{\Delta oldsymbol{p}_{ij}} &= oldsymbol{R}_{i}^{\mathrm{T}} \left( oldsymbol{p}_{j} - oldsymbol{p}_{i} - oldsymbol{v}_{i} \Delta t_{ij} - rac{1}{2} oldsymbol{g} \Delta t_{ij}^{2} 
ight) - \Delta ilde{oldsymbol{p}}_{ij} \end{aligned}$$

通常我们会把残差统一写成一个9维的残差变量,表面上关联两个时刻的旋转,平移,速度,但是由于预积分观测内部含有IMU零偏,所以也和 i 时刻的两个零偏有关。除了预积分因子本身之外,还需要约束IMU的随机游走,因此在IMU的不同时刻零偏会存在一个约束因子。

#### 6. 预积分的雅可比矩阵

讨论预积分相比于状态变量的雅可比矩阵。由于预积分测量已经归纳了IMU在短时间内的读数,残差相对于状态变量的雅可比推导显得十分简单

旋转与  $R_i$  ,  $R_j$  和  $b_{g,i}$  有关,我们用 SO(3) 的右扰动推导它:

对  $\phi_i$ :

$$egin{aligned} oldsymbol{r}_{\Delta oldsymbol{R}_{ij}} \left( oldsymbol{R}_i \operatorname{Exp} \left( oldsymbol{\phi}_i 
ight) 
ight) &= \log \left( \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ij}^{\mathrm{T}} \operatorname{Exp} \left( -oldsymbol{\phi}_i 
ight)^{\mathrm{T}} oldsymbol{R}_j 
ight) \ &= \log \left( \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ij}^{\mathrm{T}} oldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}} oldsymbol{R}_j^{\mathrm{T}} oldsymbol{R}_j \operatorname{Exp} \left( -oldsymbol{R}_j^{\mathrm{T}} oldsymbol{R}_i oldsymbol{\phi}_i 
ight) 
ight) \ &= oldsymbol{r}_{\Delta oldsymbol{R}_{ij}} - oldsymbol{J}_r^{-1} \left( oldsymbol{r}_{\Delta oldsymbol{R}_{ij}} 
ight) oldsymbol{R}_j^{\mathrm{T}} oldsymbol{R}_i oldsymbol{\phi}_i \end{aligned}$$

对  $\phi_i$ :

$$egin{aligned} oldsymbol{r}_{\Delta oldsymbol{R}_{ij}} \left( oldsymbol{R}_j & \operatorname{Exp} \left( oldsymbol{\phi}_j 
ight) 
ight) = \log \left( \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ij}^{\mathrm{T}} oldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}} oldsymbol{R}_j & \operatorname{Exp} \left( oldsymbol{\phi}_j 
ight) 
ight) \ &= oldsymbol{r}_{\Delta oldsymbol{R}_{ij}} + oldsymbol{J}_r^{-1} \left( oldsymbol{r}_{\Delta oldsymbol{R}_{ij}} 
ight) oldsymbol{\phi}_j \end{aligned}$$

对于零偏量要稍微麻烦一些。注意在优化过程中,零偏量应该不断地更新,而每次更新时我们会利用当前零偏来修 正预积分的观测量。由于这个过程是不断进行的,我们总会有一个初始的观测量和当前修正后的观测量,在推导时 必须考虑到这一点。

假设优化初始的零偏为  $b_{g,i}$  ,在某一步迭代时,我们当前估计出来的零偏修正为  $\delta b_{g,i}$  ,而当前我们修正得到的预积分旋转观测量为  $\Delta ilde{m{R}}_{ij}' = \Delta ilde{m{R}}_{ij} \left( m{b}_{g,i} + \delta m{b}_{g,i} 
ight)$ ,残差为  $m{r}_{\Delta}' m{R}_{ij}$ 

为了求导,又在上面的基础上加上了  $ilde{\delta}m{b}_{q,i}$ 

则:

$$egin{aligned} oldsymbol{r}_{\Delta oldsymbol{R}_{ij}}(oldsymbol{b}_{g,i} + \delta oldsymbol{b}_{g,i}) &= \operatorname{Log}\left(\left(\Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ij} \operatorname{Exp}\left(rac{\partial \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ij}}{\partial oldsymbol{b}_{g,i}}(\delta oldsymbol{b}_{g,i} + ilde{\delta} oldsymbol{b}_{g,i})
ight)^{\mathrm{T}} oldsymbol{R}_{i}^{\mathrm{T}} oldsymbol{R}_{j} \\ &= \operatorname{Log}\left(\sum \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ij} \operatorname{Exp}(rac{\partial \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ij}}{\partial oldsymbol{b}_{g,i}} \delta oldsymbol{b}_{g,i}) \operatorname{Exp}(oldsymbol{J}_{r,b} rac{\partial \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ij}}{\partial oldsymbol{b}_{g,i}} \delta oldsymbol{b}_{g,i})
ight) \\ &= \operatorname{Log}\left(\operatorname{Exp}\left(oldsymbol{c} oldsymbol{J}_{b,r} rac{\partial \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ij}}{\partial oldsymbol{b}_{g,i}} \delta oldsymbol{b}_{g,i}
ight) \\ &= \operatorname{Log}\left(\operatorname{Exp}\left(oldsymbol{r}_{\Delta oldsymbol{R}_{ij}}\right) \operatorname{Exp}\left(-\operatorname{Exp}\left(oldsymbol{r}_{\Delta oldsymbol{R}_{ij}}\right)^{\mathrm{T}} oldsymbol{J}_{b,r} rac{\partial \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ij}}{\partial oldsymbol{b}_{g,i}} \delta oldsymbol{b}_{g,i}
ight) 
ight) \\ &= oldsymbol{r}_{\Delta oldsymbol{R}_{ij}} - oldsymbol{J}_{r}^{-1}(oldsymbol{r}_{\Delta oldsymbol{R}_{ij}}) \operatorname{Exp}\left(oldsymbol{r}_{\Delta oldsymbol{R}_{ij}} rac{\partial \Delta ilde{oldsymbol{R}}_{ij}}{\partial oldsymbol{b}_{g,i}} \delta oldsymbol{b}_{g,i} 
ight) 
ight) \end{aligned}$$

所以最后得到:

$$rac{\partial m{r}_{\Delta m{R}_{ij}}}{\partial m{b}_{g,i}} = -m{J}_r^{-1} \left(m{r}_{\Delta m{R}_{ij}}'
ight) \mathrm{Exp} \left(m{r}_{\Delta m{R}_{ij}}'
ight)^{\mathrm{T}} m{J}_{b,r} rac{\partial \Delta ilde{m{R}}_{ij}}{\partial m{b}_{g,i}} ilde{\delta} m{b}_{g,i}$$

速度项更为简单,它与 $v_i, v_j$ 呈线性关系,不难得到:

$$rac{\partial m{r}_{\Deltam{v}_{ij}}}{\partialm{v}_i} = -m{R}_i^{
m T}, \quad rac{\partial m{r}_{\Deltam{v}_{ij}}}{\partialm{v}_j} = m{R}_i^{
m T}$$

对旋转部分只需要做一阶泰勒展开即可:

$$egin{aligned} oldsymbol{r}_{\Delta oldsymbol{v}_{ij}}\left(oldsymbol{R}_i\operatorname{Exp}\left(\deltaoldsymbol{\phi}_i
ight)
ight) &= \left(oldsymbol{R}_i\operatorname{Exp}\left(\Deltaoldsymbol{\phi}_i
ight)
ight)^{\mathrm{T}}\left(oldsymbol{v}_j - oldsymbol{v}_i - oldsymbol{g}\Delta t_{ij}
ight) - \Delta ilde{oldsymbol{v}}_{ij} \ &= oldsymbol{r}_{\Delta oldsymbol{v}_{ij}}\left(oldsymbol{R}_i
ight) + \left(oldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\left(oldsymbol{v}_j - oldsymbol{v}_i - oldsymbol{g}\Delta t_{ij}
ight)
ight)^{\wedge}\Deltaoldsymbol{\phi}_i \end{aligned}$$

速度残差相对  $b_{g,i},b_{a,i}$  的雅可比只和  $\Delta ilde{v}_{ij}$  有关,由于速度的残差项与它只相差一个负号,所以我们只需要在前面推导的零偏雅可比的前面添加一个负号即可

平移部分:

$$egin{aligned} rac{\partial m{r}_{\Deltam{p}_{ij}}}{\partialm{p}_i} &= -m{R}_i^{\mathrm{T}} \ rac{\partial m{r}_{\Deltam{p}_{ij}}}{\partialm{p}_j} &= m{R}_i^{\mathrm{T}} \ rac{\partial m{r}_{\Deltam{p}_{ij}}}{\partialm{v}_i} &= m{R}_i^{\mathrm{T}} \Delta t_{ij} \ rac{\partial m{r}_{\Deltam{p}_{ij}}}{\partialm{\phi}_i} &= \left(m{R}_i^{\mathrm{T}} \left(m{p}_j - m{p}_i - m{v}_i \Delta t_{ij} - rac{1}{2}m{g}\Delta t_{ij}^2
ight)
ight)^{\wedge} \end{aligned}$$

零偏的残差也只需在零偏雅可比基础上添加负号即可

至此,我们推导了预积分观测量对所有状态变量的导数形式。如果我们愿意,也可以将预积分观测写成一列,将状态变量写成一列,然后把这些雅可比矩阵都写在一起即可

### 3. vins-mono 预积分

# 4. gtsam预积分

#### 参考文献:

- [1] https://zhuanlan.zhihu.com/p/438525032
- [2] https://zhuanlan.zhihu.com/p/388859808
- [3] VINS论文推导及代码解析 崔华坤