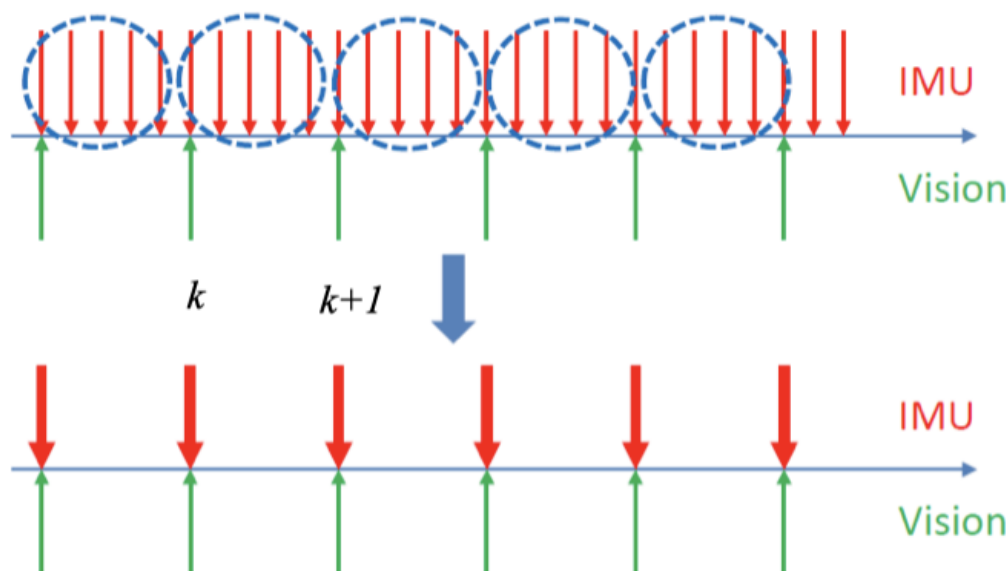


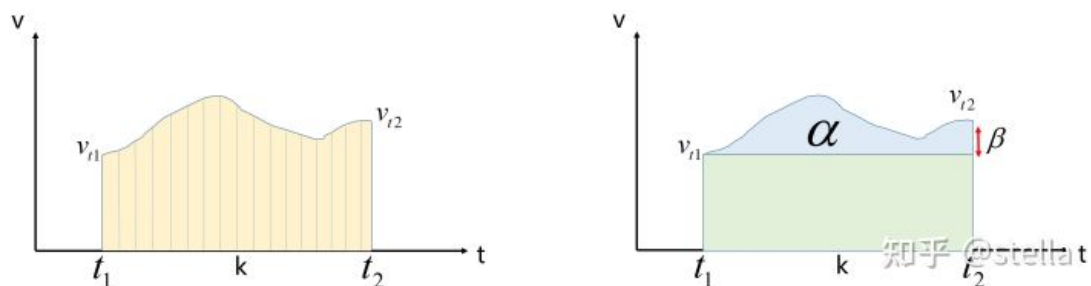
LVI-SAM 学习小组分享



为什么要做IMU预积分？

在构建优化问题时，会将相机或激光关键帧的pvq（位置、速度、旋转）以及imu bias作为状态量进行优化。在求解优化问题时，会不断迭代更新这些状态量。所以，我们在求解优化问题的过程中**每迭代一次，更新了一下关键帧的位姿、速度和IMU bias，就需要重复一次积分操作**，要知道我们在优化的时候不止迭代一次的，这样就会花费大量的时间重新积分，显然是不太合适的。

IMU预积分的思路就是先把每次优化迭代时不变的项提出来，减小每次重新积分的工作量



IMU预积分公式

1. 预积分的定义

一个IMU系统考虑五个变量：旋转 R ，平移 p ，角速度 ω ，线速度 v 与加速度 a

由旋转运动学可得：

$$\dot{R} = R\omega^\wedge$$

$$\dot{p} = v$$

$$\dot{v} = a$$

从 t 到 $t + \Delta t$ 的时间里，对上式进行欧拉积分可以得到：

$$R(t + \Delta t) = R(t) \text{Exp}(\omega(t)\Delta t)$$

$$v(t + \Delta t) = v(t) + a(t)\Delta t$$

$$p(t + \Delta t) = p(t) + v(t)\Delta t + \frac{1}{2}a(t)\Delta t^2$$

其中角速度和加速度是IMU可以测量的量，但受到噪声与重力影响。令测量值为 $\tilde{\omega}, \tilde{a}$

$$\tilde{\omega}(t) = \omega(t) + b_g(t) + \eta_g(t)$$

$$\tilde{a}(t) = R^T(a(t) - g) + b_a(t) + \eta_a(t)$$

代入上式可以得到测量值和状态量之间的关系：

$$R(t + \Delta t) = R(t) \text{Exp}((\tilde{\omega} - b_g(t) - \eta_{gd}(t)) \Delta t)$$

$$v(t + \Delta t) = v(t) + g\Delta t + R(t)(\tilde{a} - b_a(t) - \eta_{ad}(t)) \Delta t$$

$$p(t + \Delta t) = p(t) + v(t)\Delta t + \frac{1}{2}g\Delta t^2 + \frac{1}{2}R(t)(\tilde{a} - b_a(t) - \eta_{ad}(t)) \Delta t^2$$

我们完全可以用这种约束来构建图优化，对IMU相关的问题进行求解。但是这组方程刻画的时间太短，或者说，IMU的测量频率太高。我们并不希望优化过程随着IMU数据进行调用，那样太浪费计算资源。于是，预积分方法应运而生，它可以把一段时间的IMU数据累计起来统一处理。

假设关键帧 i 和 j 之间的IMU数据被累计起来，这种被累计起来的观测称为**预积分**

$$R_j = R_i \prod_{k=i}^{j-1} (\text{Exp}((\tilde{\omega}_k - b_{g,k} - \eta_{gd,k}) \Delta t))$$

$$v_j = v_i + g\Delta t_{ij} + \sum_{k=i}^{j-1} R_k (\tilde{a}_k - b_{a,k} - \eta_{ad,k}) \Delta t$$

$$p_j = p_i + \sum_{k=i}^{j-1} v_k \Delta t + \frac{1}{2}g\Delta t_{ij}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{j-1} R_k (\tilde{a}_k - b_{a,k} - \eta_{ad,k}) \Delta t^2$$

在已知 i 时刻状态和所有测量时，该式可以用于推断 j 时刻的状态，上式为传统意义的**直接积分**

直接积分的缺点：

如果我们对 i 时刻的状态进行优化，那么 $i+1, i+2 \dots, j-1$ 时刻的状态也会跟着发生改变，这个积分就必须重新计算。为此，我们对上式进行改变，定义相对运动量为：

$$\Delta \mathbf{R}_{ij} \doteq \mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_j = \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp}((\tilde{\omega}_k - \mathbf{b}_{g,k} - \boldsymbol{\eta}_{gd,k}) \Delta t)$$

$$\Delta \mathbf{v}_{ij} \doteq \mathbf{R}_i^T (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \Delta t_{ij}) = \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \mathbf{R}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_{a,k} - \boldsymbol{\eta}_{ad,k}) \Delta t$$

$$\Delta \mathbf{p}_{ij} \doteq \mathbf{R}_i^T \left(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{g} \Delta t_{ij}^2 \right)$$

$$= \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \mathbf{v}_{ik} \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{R}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_{a,k} - \boldsymbol{\eta}_{ad,k}) \Delta t^2 \right]$$

这种改变实际上只是计算了某种从 i 到 j 的“差值”。这个定义在计算上有一些有趣的性质

1. 我们不妨考虑从 i 时刻出发，此时这三个量都为零。在 $i+1$ 时刻，我们计算出 $\Delta \mathbf{R}_{i,i+1}, \mathbf{v}_{i,i+1}$ 和 $\Delta \mathbf{p}_{i,i+1}$ 。而在 $i+2$ 时刻时，由于这三个式子都是累乘或累加的形式，只需在 $i, i+1$ 时刻的结果之上，加上第 $i+2$ 时刻的测量值即可。这在计算层面带来了很大的便利。进一步，我们还会发现这种性质对后续计算各种雅可比矩阵都非常方便。
2. 上述所有计算都和 \mathbf{R}_i 的取值无关。即使 \mathbf{R}_i 的估计值发生改变，这些量也无需重新计算。这又是非常方便的一个特性。
3. 不过，如果零偏 $\mathbf{b}_{a,k}$ 或 $\mathbf{b}_{g,k}$ 发生变化，那么上述式子理论上还是需要重新计算。然而，我们也可以通过“修正”而非“重新计算”的思路，来调整我们的预积分量。
4. 请注意，预积分量并没有直接的物理含义。尽管符号上用了 $\Delta \mathbf{v}, \Delta \mathbf{p}$ 之类的样子，但它并不表示某两个速度或位置上的偏差。它只是如此定义而已。当然，从量纲上来说，应该与角度、速度、位移对应。
5. 同样地，由于预积分量不是直接的物理量，这种“测量模型”的噪声也必须从原始的IMU噪声推导而来。

2. 预积分的测量模型

预积分内部带有IMU的零偏量，因此不可避免地会依赖此时的零偏量估计。为了处理这种依赖，我们对预积分定义作一些工程上的调整：

1. 我们首先认为 i 时刻的零偏是固定的，并且在整个预积分计算过程中也都是固定的。
2. 我们作出预积分对零偏量的一阶线性化模型，即，舍弃对零偏量的高阶项。
3. 当零偏估计发生改变时，用这个线性模型来修正预积分。

首先，我们固定 i 时刻的零偏估计，来分析预积分的噪声。无论是图优化还是滤波器技术，都需要知道某个测量量究竟含有多大的噪声

从旋转开始计算，因为旋转相对来说比较容易。利用BCH展开，可以作出下列的近似：

$$\Delta \mathbf{R}_{ij} = \prod_{k=i}^{j-1} \underbrace{\text{Exp}((\tilde{\omega}_k - \mathbf{b}_{g,k} - \boldsymbol{\eta}_{gd,k}) \Delta t)}_{\text{利用 BCH: } \approx \text{Exp}((\tilde{\omega}_k - \mathbf{b}_{i,g}) \Delta t) \text{Exp}(-\mathbf{J}_{r,k} \boldsymbol{\eta}_{gd,k} \Delta t)}$$

$$\approx \prod_{k=i}^{j-1} [\text{Exp}((\tilde{\omega}_k - \mathbf{b}_{i,g}) \Delta t) \text{Exp}(-\mathbf{J}_{r,k} \boldsymbol{\eta}_{gd,k} \Delta t)]$$

在这个式子中，把噪声项分离出去，从而定义**预积分测量** $\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}$ （测量量会带有上标符号）

$$\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij} = \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp}((\tilde{\omega}_k - \mathbf{b}_{i,g}) \Delta t)$$

基于这种巧妙的定义方式，可以把上式改写成：

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{R}_{ij} &= \underbrace{\text{Exp}((\tilde{\omega}_i - \mathbf{b}_{i,g}) \Delta t)}_{\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i,i+1}} \text{Exp}(-\mathbf{J}_{r,i} \boldsymbol{\eta}_{gd,i} \Delta t) \underbrace{\text{Exp}((\tilde{\omega}_{i+1} - \mathbf{b}_{i,g}) \Delta t) \text{Exp}(-\mathbf{J}_{r,i+1} \boldsymbol{\eta}_{gd,i} \Delta t) \dots}_{\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i+1,i+2}} \\ &= \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i,i+1} \underbrace{\text{Exp}(-\mathbf{J}_{r,i} \boldsymbol{\eta}_{gd,i} \Delta t) \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i+1,i+2}}_{=\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i+1,i+2} \text{Exp}(-\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i+1,i+2}^T \mathbf{J}_{r,i} \boldsymbol{\eta}_{gd,i} \Delta t)} \text{Exp}(-\mathbf{J}_{r,i+1} \boldsymbol{\eta}_{gd,i} \Delta t) \dots \\ &= \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i,i+2} \text{Exp}(-\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i+1,i+2}^T \mathbf{J}_{r,i} \boldsymbol{\eta}_{gd,i} \Delta t) \text{Exp}(-\mathbf{J}_{r,i+1} \boldsymbol{\eta}_{gd,i} \Delta t) \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i+2,i+3} \dots \end{aligned}$$

不断地把观测置换到左侧，并把噪声置换到右侧，并且把噪声项内部的 $\Delta \tilde{\mathbf{R}}$ 项合并，可以得到：

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{R}_{ij} &= \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij} \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp}(-\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1,j}^T \mathbf{J}_{r,k} \boldsymbol{\eta}_{gd,k} \Delta t) \\ &\doteq \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij} \text{Exp}(-\delta \phi_{ij}) \end{aligned}$$

速度部分：

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \mathbf{R}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_{a,k} - \boldsymbol{\eta}_{ad,k}) \Delta t \\ &= \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \underbrace{\text{Exp}(-\delta \phi_{ik})}_{\approx \mathbf{I} - \delta \phi_{ik}^\wedge} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_{a,k} - \boldsymbol{\eta}_{ad,k}) \Delta t \\ &= \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} (\mathbf{I} - \delta \phi_{ik}^\wedge) (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_{a,k} - \boldsymbol{\eta}_{ad,k}) \Delta t \end{aligned}$$

舍掉上式中的噪声二阶小量，并且定义**预积分速度观测量**为：

$$\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij} = \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_{a,i}) \Delta t$$

那么上式化简为：

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \underbrace{\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_{a,i}) \Delta t}_{\text{累加此项}} + \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_{a,i})^\wedge \delta \phi_{ik} \Delta t - \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_{ad,k} \Delta t \\ &= \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij} + \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_{a,i})^\wedge \delta \phi_{ik} \Delta t - \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_{ad,k} \Delta t \\ &= \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij} - \delta \mathbf{v}_{ij} \end{aligned}$$

平移部分：

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{p}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \mathbf{v}_{ik} \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{R}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_{a,k} - \boldsymbol{\eta}_{ad,k}) \Delta t^2 \right] \\
&= \sum_{k=i}^{j-1} \left[(\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ik} - \delta \mathbf{v}_{ik}) \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \underbrace{\text{Exp}(-\delta \boldsymbol{\phi}_{ik})}_{\mathbf{I} - \delta \boldsymbol{\phi}_{ik}^{\wedge}} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_{a,k} - \boldsymbol{\eta}_{ad,k}) \Delta t^2 \right] \\
&\approx \sum_{k=i}^{j-1} \left[(\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ik} - \delta \mathbf{v}_{ik}) \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} (\mathbf{I} - \delta \boldsymbol{\phi}_{ik}^{\wedge}) (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_{a,i}) \Delta t^2 - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_{ad,k} \Delta t^2 \right] \quad \text{我们定义} \\
&\approx \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ik} \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_{a,i}) \Delta t^2 - \delta \mathbf{v}_{ik} \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_{a,i})^{\wedge} \delta \boldsymbol{\phi}_{ik} \Delta t^2 - \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_{ad,k} \Delta t^2 \right]
\end{aligned}$$

预积分位移观测量为：

$$\Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij} = \sum_{k=i}^{j-1} \left[(\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ik} \Delta t) + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_{a,i}) \Delta t^2 \right]$$

前面式子可以写成：

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{p}_{ij} &= \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij} + \sum_{k=i}^{j-1} \left[-\delta \mathbf{v}_{ik} \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_{a,i})^{\wedge} \delta \boldsymbol{\phi}_{ik} \Delta t^2 - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_{ad,k} \Delta t^2 \right] \\
&\doteq \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij} - \delta \mathbf{p}_{ij}
\end{aligned}$$

于是，此三式共同定义了预积分的三个观测量和它们的噪声。将它们代回最初的定义式，可以简单写为：

$$\begin{aligned}
\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij} &= \mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_j \text{Exp}(\delta \boldsymbol{\phi}_{ij}) \\
\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij} &= \mathbf{R}_i^T (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \Delta t_{ij}) + \delta \mathbf{v}_{ij} \\
\Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij} &= \mathbf{R}_i^T \left(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{g} \Delta t_{ij}^2 \right) + \delta \mathbf{p}_{ij}
\end{aligned}$$

这个式子归纳了前面我们讨论的内容，显示了预积分的几大优点：

1. 它的左侧是可以通过传感器数据积分得到的观测量，右侧是根据状态变量推断出来的预测值，再加上一个随机噪声
2. 左侧变量的定义方式非常适合程序实现

$$\begin{aligned}
\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij} &= \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp}((\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_{g,i}) \Delta t) \\
\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_{a,i}) \Delta t \\
\Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[(\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ik} \Delta t) + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_{a,i}) \Delta t^2 \right]
\end{aligned}$$

并且如果知道k时刻的预积分观测，很容易根据 k+1 时刻的传感器读数，计算出k+1 时刻的预积分观测量

3. 从右侧来看，也很容易根据 i 和 j 时刻的状态变量来推测预积分观测量的大小，从而写出误差公式，构建最小二乘问题

现在的问题是：预积分的噪声是否符合零均值的高斯分布？如果是，它的协方差有多大？和IMU本身的噪声之间是什么关系？

3. 预积分噪声模型

将复杂的噪声项线性化，保留一阶项系数，然后推导线性模型下的协方差矩阵变化。这是一种非常常见的处理思路，对许多复杂模型都很有效。

先从旋转的噪声开始看：

$$\text{Exp}(-\delta\phi_{ij}) = \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp}\left(-\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1}^T \mathbf{J}_{r,k} \boldsymbol{\eta}_{gd,k} \Delta t\right)$$

作为随机变量的 $\delta\phi_{ij}$ 只和随机变量 $\boldsymbol{\eta}_{gd}$ 有关，而其他的都是确定的观测量。当我们线性化后取期望时，由于 $\boldsymbol{\eta}_{gd}$ 为白噪声，因此 $\delta\phi_{ij}$ 均值也为零

为了分析它的协方差，我们需要对上式进行线性化。对两侧取 Log，可得：

$$\delta\phi_{ij} = -\log\left(\prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp}\left(-\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1}^T \mathbf{J}_{r,k} \boldsymbol{\eta}_{gd,k} \Delta t\right)\right)$$

该式又可以通过BCH进行线性近似。同时，由于内部的系数项 $-\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1}^T \mathbf{J}_{r,k} \boldsymbol{\eta}_{gd,k} \Delta t$ 接近于零，且为噪声，我们可将BCH近似的右雅可比取为单位阵，可以得到：

$$\delta\phi_{ij} \approx \sum_{k=i}^{j-1} \Delta\mathbf{R}_{k+1,j}^T \mathbf{J}_{r,k} \boldsymbol{\eta}_{gd,k} \Delta t$$

此式是高斯随机变量的线性组合，它的结果依然是高斯的。同时，由于预积分的累加特性，预测分观测量的噪声也会随着时间不断累加

上式是累加形式的，很容易将其写成递推的形式：

$$\begin{aligned} \delta\phi_{ij} &\approx \sum_{k=i}^{j-1} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1,j}^T \mathbf{J}_{r,k} \boldsymbol{\eta}_{gd,k} \Delta t \\ &= \sum_{k=i}^{j-2} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1,j}^T \mathbf{J}_{r,k} \boldsymbol{\eta}_{gd,k} \Delta t + \underbrace{\Delta\mathbf{R}_{j,j}^T}_{=\mathbf{I}} \mathbf{J}_{r,j-1} \boldsymbol{\eta}_{gd,j-1} \Delta t \\ &= \sum_{k=i}^{j-2} \underbrace{\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1,j}^T}_{=\mathbf{I}} \mathbf{J}_{r,k} \boldsymbol{\eta}_{gd,k} \Delta t + \mathbf{J}_{r,j-1} \boldsymbol{\eta}_{gd,j-1} \Delta t \\ &= \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{j-1,j}^T \sum_{k=i}^{j-2} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1,j-1}^T \mathbf{J}_{r,k} \boldsymbol{\eta}_{gd,k} \Delta t + \mathbf{J}_{r,j-1} \boldsymbol{\eta}_{gd,j-1} \Delta t \\ &= \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{j-1,j}^T \delta\phi_{i,j-1} + \mathbf{J}_{r,j-1} \boldsymbol{\eta}_{gd,j-1} \Delta t \end{aligned}$$

该式描述了如何从 $j-1$ 时刻的噪声推断到 j 时刻。显然这是一个线性系统，设 $j-1$ 时刻的 $\delta\phi_{i,j-1}$ 的协方差为 Σ_{j-1} ， $\boldsymbol{\eta}_{gd}$ 的协方差为 $\Sigma_{\boldsymbol{\eta}_{gd}}$ ，则有：

$$\Sigma_j = \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{j-1,j}^T \Sigma_{j-1} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{j-1,j} + \mathbf{J}_{r,j-1} \Sigma_{\boldsymbol{\eta}_{gd}} \mathbf{J}_{r,j-1}^T \Delta t^2$$

表明预积分误差会随着累计变大，预积分观测量也会变得越来越不确定

速度部分的噪声：

$$\delta \mathbf{v}_{ij} \approx \sum_{k=i}^{j-1} \left[-\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_{a,i})^\wedge \delta \phi_{ik} \Delta t + \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_{ad,k} \Delta t \right]$$

写成累加的形式：

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{v}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[-\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_{a,i})^\wedge \delta \phi_{ik} \Delta t + \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_{ad,k} \Delta t \right] \\ &= \sum_{k=i}^{j-2} \left[-\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_{a,i})^\wedge \delta \phi_{ik} \Delta t + \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_{ad,k} \Delta t \right] \\ &\quad - \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i,j-1} (\tilde{\mathbf{a}}_{j-1} - \mathbf{b}_{a,i})^\wedge \delta \phi_{i,j-1} \Delta t + \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i,j-1} \boldsymbol{\eta}_{ad,j-1} \Delta t \\ &= \delta \mathbf{v}_{i,j-1} - \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i,j-1} (\tilde{\mathbf{a}}_{j-1} - \mathbf{b}_{a,i})^\wedge \delta \phi_{i,j-1} \Delta t + \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i,j-1} \boldsymbol{\eta}_{ad,j-1} \Delta t \end{aligned}$$

平移部分：

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{p}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[\delta \mathbf{v}_{ik} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_{a,i})^\wedge \delta \phi_{ik} \Delta t^2 + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_{ad,k} \Delta t^2 \right] \\ &= \sum_{k=i}^{j-2} \left[\delta \mathbf{v}_{ik} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_{a,i})^\wedge \delta \phi_{ik} \Delta t^2 + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_{ad,k} \Delta t^2 \right] \\ &\quad + \delta \mathbf{v}_{i,j-1} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i,j-1} (\tilde{\mathbf{a}}_{j-1} - \mathbf{b}_{a,i})^\wedge \delta \phi_{i,j-1} \Delta t^2 + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i,j-1} \boldsymbol{\eta}_{ad,j-1} \Delta t^2 \\ &= \delta \mathbf{p}_{i,j-1} + \delta \mathbf{v}_{i,j-1} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i,j-1} (\tilde{\mathbf{a}}_{j-1} - \mathbf{b}_{a,i})^\wedge \delta \phi_{i,j-1} \Delta t^2 + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i,j-1} \boldsymbol{\eta}_{ad,j-1} \Delta t^2 \end{aligned}$$

至此，推导了如何从 j-1 时刻将噪声递推至 j 时刻，下面整理成矩阵形式：

$$\boldsymbol{\eta}_{ik} = \begin{bmatrix} \delta \phi_{ik} \\ \delta \mathbf{v}_{ik} \\ \delta \mathbf{p}_{ik} \end{bmatrix}$$

并且把IMU的零偏噪声定义为：

$$\boldsymbol{\eta}_{d,j} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_{gd,j} \\ \boldsymbol{\eta}_{ad,j} \end{bmatrix}$$

那么从 $\boldsymbol{\eta}_{i,j-1}$ 到 $\boldsymbol{\eta}_{i,j}$ 的递推式可以写为：

$$\boldsymbol{\eta}_{ij} = \mathbf{A}_j \boldsymbol{\eta}_{i,j-1} + \mathbf{B}_j \boldsymbol{\eta}_{d,j-1}$$

其中的系数矩阵为：

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_j &= \begin{bmatrix} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{j-1,j}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i,j-1} (\tilde{\mathbf{a}}_{j-1} - \mathbf{b}_{a,i})^\wedge \Delta t & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i,j-1} (\tilde{\mathbf{a}}_{j-1} - \mathbf{b}_{a,i})^\wedge \Delta t^2 & \Delta t & \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_j &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{r,j-1} \Delta t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i,j-1} \Delta t \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i,j-1} \Delta t^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

矩阵形式更清晰地显示了几个噪声项之间累计递推关系。

由于它们的累加关系，在程序实现中也十分便捷。

4. 零偏的更新

先前的讨论都假设了在 i 时刻的IMU零偏恒定不变，当然这都是为了方便后续的计算。然而在实际的图优化中，我们经常会状态变量（优化变量）进行更新。那么，理论上讲，如果IMU零偏发生了变化，预积分应该重新计算，因为预积分的每一步都用到了 i 时刻的IMU零偏。但是实际操作过程中，我们也可以选用一种讨巧的做法：**假定预积分观测是随零偏线性变化的**，虽然实际上并不是线性变化的，但我们总可以对一个复杂函数做线性化并保留一阶项，然后在原先的观测上进行修正

把预积分观测看成是 $b_{g,i}, b_{a,i}$ 的函数，当其更新了 $\delta b_{g,i}, \delta b_{a,i}$ 之后，预积分作如下修正：

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\mathbf{b}_{g,i} + \delta \mathbf{b}_{g,i}) &= \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\mathbf{b}_{g,i}) \text{Exp} \left(\frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_g} \delta \mathbf{b}_{g,i} \right) \\ \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij}(\mathbf{b}_{g,i} + \delta \mathbf{b}_{g,i}, \mathbf{b}_{a,i} + \delta \mathbf{b}_{a,i}) &= \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij}(\mathbf{b}_{g,i}, \mathbf{b}_{a,i}) + \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_{g,i}} \delta \mathbf{b}_{g,i} + \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_{a,i}} \delta \mathbf{b}_{a,i} \\ \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij}(\mathbf{b}_{g,i} + \delta \mathbf{b}_{g,i}, \mathbf{b}_{a,i} + \delta \mathbf{b}_{a,i}) &= \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij}(\mathbf{b}_{g,i}, \mathbf{b}_{a,i}) + \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_{g,i}} \delta \mathbf{b}_{g,i} + \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_{a,i}} \delta \mathbf{b}_{a,i}\end{aligned}$$

如何计算上面列写的几个偏导数（雅可比）呢？

首先来考虑旋转。预积分旋转观测可以写为：

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\mathbf{b}_{g,i} + \delta \mathbf{b}_{g,i}) &= \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp}((\tilde{\omega}_k - (\mathbf{b}_{g,i} + \delta \mathbf{b}_{g,i})) \Delta t) \\ &= \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp}((\tilde{\omega}_k - \mathbf{b}_{g,i}) \Delta t) \text{Exp}(-\mathbf{J}_{r,k} \delta \mathbf{b}_{g,i} \Delta t) \\ &= \underbrace{\text{Exp}((\tilde{\omega}_i - \mathbf{b}_{g,i}) \Delta t)}_{\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i,i+1}} \text{Exp}(-\mathbf{J}_{r,i} \delta \mathbf{b}_{g,i} \Delta t) \underbrace{\text{Exp}((\tilde{\omega}_{i+1} - \mathbf{b}_{g,i}) \Delta t)}_{\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i+1,i+2}} \\ &= \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i,i+1} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i+1,i+2} \text{Exp}(-\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i+1,i+2}^T \mathbf{J}_{r,i} \delta \mathbf{b}_{g,i} \Delta t) \dots \\ &= \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij} \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp}(-\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1,j}^T \mathbf{J}_{r,k} \delta \mathbf{b}_{g,i} \Delta t) \\ &\approx \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij} \text{Exp} \left(- \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1,j}^T \mathbf{J}_{r,k} \Delta t \delta \mathbf{b}_{g,i} \right)\end{aligned}$$

通过这种方式我们可以算出 $\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}$ 相对于 $b_{g,i}$ 的雅可比矩阵，记为 $\frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_g}$

速度测量：

$$\begin{aligned}
\Delta \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{b}_i + \delta \mathbf{b}_i) &= \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik}(\mathbf{b}_{g,i} + \delta \mathbf{b}_{g,i})(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_{a,i} - \delta \mathbf{b}_{a,i}) \Delta t \\
&= \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \text{Exp} \left(\frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial \mathbf{b}_{g,i}} \delta \mathbf{b}_{g,i} \right) (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_{a,i} - \delta \mathbf{b}_{a,i}) \Delta t \\
&= \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \left(\mathbf{I} + \left(\frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial \mathbf{b}_{g,i}} \delta \mathbf{b}_{g,i} \right)^\wedge \right) (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_{a,i} - \delta \mathbf{b}_{a,i}) \Delta t \\
&\approx \Delta \mathbf{v}_{ij} - \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \Delta t \delta \mathbf{b}_{a,i} - \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_{a,i})^\wedge \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial \mathbf{b}_{g,i}} \Delta t \delta \mathbf{b}_{g,i} \\
&= \Delta \mathbf{v}_{ij} + \frac{\partial \Delta \mathbf{v}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_{a,i}} \delta \mathbf{b}_{a,i} + \frac{\partial \Delta \mathbf{v}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_{g,i}} \delta \mathbf{b}_{g,i}
\end{aligned}$$

最后是平移部分：

$$\begin{aligned}
\Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij}(\mathbf{b}_i + \delta \mathbf{b}_i) &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[\left(\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ik} + \frac{\partial \Delta \mathbf{v}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_{a,i}} \delta \mathbf{b}_{a,i} + \frac{\partial \Delta \mathbf{v}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_{g,i}} \delta \mathbf{b}_{g,i} \right) \Delta t + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \left(\mathbf{I} + \left(\frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial \mathbf{b}_{g,i}} \delta \mathbf{b}_{g,i} \right)^\wedge \right) (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_{a,i} - \delta \mathbf{b}_{a,i}) \Delta t^2 \right] \\
&= \delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij} + \sum_{k=i}^{j-1} \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{v}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_{a,i}} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \Delta t^2 \right] \delta \mathbf{b}_{a,i} + \\
&\quad \sum_{k=i}^{j-1} \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{v}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_{g,i}} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_{a,i})^\wedge \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial \mathbf{b}_{g,i}} \Delta t^2 \right] \delta \mathbf{b}_{g,i} \\
&= \delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij} + \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_{a,i}} \delta \mathbf{b}_{a,i} + \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_{g,i}} \delta \mathbf{b}_{g,i}
\end{aligned}$$

请注意上述计算都是迭代形式的。也就是说，我们只需要在程序中保留一个变量，随着数据不断进行累加即可。

把这些雅可比矩阵整理一下，得到更整齐的结果：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_{g,i}} &= - \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1,j}^\top \mathbf{J}_{k,r} \Delta t \right] \\
\frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_{a,i}} &= - \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \Delta t \\
\frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_{g,i}} &= - \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_{a,i})^\wedge \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial \mathbf{b}_{g,i}} \Delta t \\
\frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_{a,i}} &= \sum_{k=i}^{j-1} \frac{\partial \Delta \mathbf{v}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_{a,i}} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \Delta t^2 \\
\frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_{g,i}} &= \sum_{k=i}^{j-1} \frac{\partial \Delta \mathbf{v}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_{g,i}} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_{a,i})^\wedge \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial \mathbf{b}_{g,i}} \Delta t^2
\end{aligned}$$

5. 预积分模型归结到图优化

定义了预积分的测量模型，推导了它的噪声模型和协方差矩阵，并说明了随着零偏量更新，预积分应该怎么更新。事实上，我们已经可以把预积分观测作为图优化的因子（Factor）或者边（Edge）了。下面我们来说明如何使用这种边，以及它推导它相对于状态变量的雅可比矩阵。

在IMU相关的应用中，通常把每个时刻的状态建模为包含旋转、平移、线速度、IMU零偏的变量，构成状态变量集合 \mathcal{X} ：

$$\mathbf{x}_k = [\mathbf{R}, \mathbf{p}, \mathbf{v}, \mathbf{b}_a, \mathbf{b}_g]_k \in \mathcal{X}$$

预积分模型构建了关键帧 i 与关键帧 j 之间的一种约束，它的残差可以写成：

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{R}_{ij}} &= \log \left(\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}^T \left(\mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_j \right) \right) \\ \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}} &= \mathbf{R}_i^T (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \Delta t_{ij}) - \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij} \\ \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}} &= \mathbf{R}_i^T \left(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{g} \Delta t_{ij}^2 \right) - \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij} \end{aligned}$$

通常我们会把残差统一写成一个9维的残差变量，表面上关联两个时刻的旋转，平移，速度，但是由于预积分观测内部含有IMU零偏，所以也和 i 时刻的两个零偏有关。除了预积分因子本身之外，还需要约束IMU的随机游走，因此在IMU的不同时刻零偏会存在一个约束因子。

6. 预积分的雅可比矩阵

讨论预积分相比于状态变量的雅可比矩阵。由于预积分测量已经归纳了IMU在短时间内的读数，残差相对于状态变量的雅可比推导显得十分简单

旋转与 \mathbf{R}_i , \mathbf{R}_j 和 $\mathbf{b}_{g,i}$ 有关，我们用 $\text{SO}(3)$ 的右扰动推导它：

对 ϕ_i ：

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{R}_{ij}} (\mathbf{R}_i \text{Exp}(\phi_i)) &= \log \left(\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}^T \left(\mathbf{R}_i \text{Exp}(\phi_i)^T \mathbf{R}_j \right) \right) \\ &= \log \left(\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}^T \text{Exp}(-\phi_i) \mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_j \right) \\ &= \log \left(\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}^T \mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_j \text{Exp}(-\mathbf{R}_j^T \mathbf{R}_i \phi_i) \right) \\ &= \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{R}_{ij}} - \mathbf{J}_r^{-1} (\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{R}_{ij}}) \mathbf{R}_j^T \mathbf{R}_i \phi_i \end{aligned}$$

对 ϕ_j ：

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{R}_{ij}} (\mathbf{R}_j \text{Exp}(\phi_j)) &= \log \left(\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}^T \mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_j \text{Exp}(\phi_j) \right) \\ &= \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{R}_{ij}} + \mathbf{J}_r^{-1} (\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{R}_{ij}}) \phi_j \end{aligned}$$

对于零偏量要稍微麻烦一些。注意在优化过程中，零偏量应该不断地更新，而每次更新时我们会利用当前零偏来修正预积分的观测量。由于这个过程是不断进行的，我们总会有一个初始的观测量和当前修正后的观测量，在推导时必须考虑到这一点。

假设优化初始的零偏为 $b_{g,i}$,在某一步迭代时, 我们当前估计出来的零偏修正为 $\delta b_{g,i}$,而当前我们修正得到的预积分旋转观测量为 $\Delta \tilde{\mathbf{R}}'_{ij} = \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\mathbf{b}_{g,i} + \delta \mathbf{b}_{g,i})$, 残差为 $\mathbf{r}'_{\Delta R_{ij}}$

为了求导, 又在上面的基础上加上了 $\tilde{\delta} \mathbf{b}_{g,i}$

则：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_{\Delta R_{ij}}(\mathbf{b}_{g,i} + \delta \mathbf{b}_{g,i} + \tilde{\delta} \mathbf{b}_{g,i}) &= \text{Log} \left(\left(\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij} \text{Exp} \left(\frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_{g,i}} (\delta \mathbf{b}_{g,i} + \tilde{\delta} \mathbf{b}_{g,i}) \right) \right)^T \mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_j \right) \\
 &\stackrel{\text{BCH}}{=} \text{Log} \left(\left(\underbrace{\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij} \text{Exp} \left(\frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_{g,i}} \delta \mathbf{b}_{g,i} \right)}_{\Delta \tilde{\mathbf{R}}'_{ij}} \text{Exp} \left(\mathbf{J}_{b,r} \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_{g,i}} \tilde{\delta} \mathbf{b}_{g,i} \right) \right)^T \mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_j \right) \\
 &= \text{Log} \left(\text{Exp} \left(-\mathbf{J}_{b,r} \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_{g,i}} \tilde{\delta} \mathbf{b}_{g,i} \right) \underbrace{(\Delta \tilde{\mathbf{R}}'_{ij})^T \mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_j}_{\text{Exp}(\mathbf{r}'_{\Delta R_{ij}})} \right) \\
 &= \text{Log} \left(\text{Exp}(\mathbf{r}'_{\Delta R_{ij}}) \text{Exp} \left(-\text{Exp}(\mathbf{r}'_{\Delta R_{ij}})^T \mathbf{J}_{b,r} \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_{g,i}} \tilde{\delta} \mathbf{b}_{g,i} \right) \right) \\
 &= \mathbf{r}'_{\Delta R_{ij}} - \mathbf{J}_r^{-1}(\mathbf{r}'_{\Delta R_{ij}}) \text{Exp}(\mathbf{r}'_{\Delta R_{ij}})^T \mathbf{J}_{b,r} \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_{g,i}} \tilde{\delta} \mathbf{b}_{g,i}
 \end{aligned}$$

所以最后得到：

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta R_{ij}}}{\partial \mathbf{b}_{g,i}} = -\mathbf{J}_r^{-1}(\mathbf{r}'_{\Delta R_{ij}}) \text{Exp}(\mathbf{r}'_{\Delta R_{ij}})^T \mathbf{J}_{b,r} \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_{g,i}} \tilde{\delta} \mathbf{b}_{g,i}$$

速度项更为简单, 它与 v_i, v_j 呈线性关系, 不难得到：

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta v_{ij}}}{\partial v_i} = -\mathbf{R}_i^T, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta v_{ij}}}{\partial v_j} = \mathbf{R}_i^T$$

对旋转部分只需要做一阶泰勒展开即可：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_{\Delta v_{ij}}(\mathbf{R}_i \text{Exp}(\delta \phi_i)) &= (\mathbf{R}_i \text{Exp}(\Delta \phi_i))^T (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \Delta t_{ij}) - \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij} \\
 &= (\mathbf{I} - \Delta \phi_i^\wedge) \mathbf{R}_i^T (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \Delta t_{ij}) - \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij} \\
 &= \mathbf{r}_{\Delta v_{ij}}(\mathbf{R}_i) + \left(\mathbf{R}_i^T (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \Delta t_{ij}) \right)^\wedge \Delta \phi_i
 \end{aligned}$$

速度残差相对 $b_{g,i}, b_{a,i}$ 的雅可比只和 $\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij}$ 有关, 由于速度的残差项与它只相差一个负号, 所以我们只需要在前面推导的零偏雅可比的前面添加一个负号即可

平移部分：

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta p_{ij}}}{\partial \mathbf{p}_i} = -\mathbf{R}_i^T$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta p_{ij}}}{\partial \mathbf{p}_j} = \mathbf{R}_i^T$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta p_{ij}}}{\partial \mathbf{v}_i} = -\mathbf{R}_i^T \Delta t_{ij}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta p_{ij}}}{\partial \phi_i} = \left(\mathbf{R}_i^T \left(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{g} \Delta t_{ij}^2 \right) \right)^\wedge$$

零偏的残差也只需在零偏雅可比基础上添加负号即可

至此，我们推导了预积分观测对所有状态变量的导数形式。如果我们愿意，也可以将预积分观测写成一列，将状态变量写成一列，然后把这些雅可比矩阵都写在一起即可

3. vins-mono 预积分

4. gtsam预积分

参考文献：

[1] <https://zhuanlan.zhihu.com/p/438525032>

[2] <https://zhuanlan.zhihu.com/p/388859808>

[3] VINS论文推导及代码解析 — 崔华坤