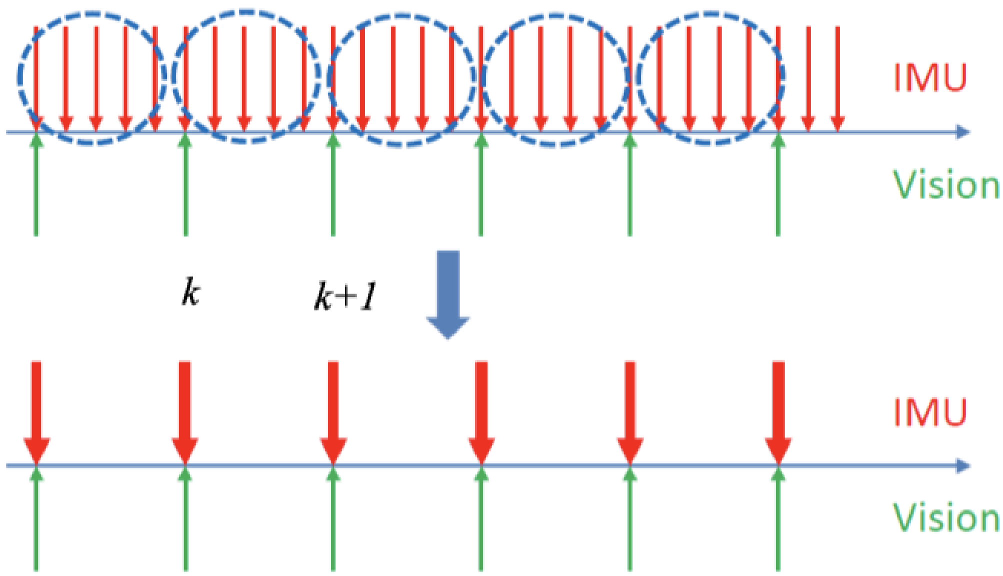
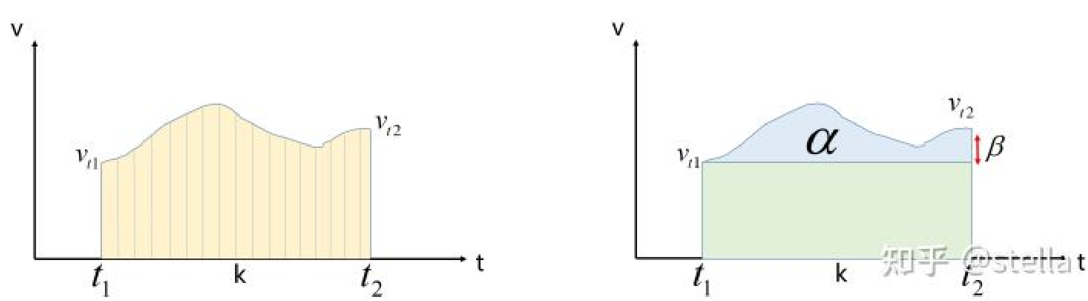
LVI-SAM 学习小组分享



为什么要做IMU预积分？

在构建优化问题时，会将相机或激光关键帧的pvq（位置、速度、旋转）以及imu bias作为状态量进行优化。在求解优化问题时，会不断迭代更新这些状态量。所以，我们在求解优化问题的过程中**每迭代一次，更新了一下关键帧的位姿、速度和IMU bias，就需要重复一次积分操作**，要知道我们在优化的时候不止迭代一次的，这样就会花费大量的时间重新积分，显然是不太合适的。

IMU预积分的思路就是先把每次优化迭代时不变的项提出来，减小每次重新积分的工作量



IMU预积分公式

1. 预积分的定义

一个IMU系统考虑五个变量：旋转R , 平移 p , 角速度ω , 线速度 v 与 加速度 a

由旋转运动学可得：

$$\dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{\omega}^{\wedge}$$
$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{v}$$
$$\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{a}$$

从 t 到 $t+\Delta t$ 的时间里，对上式进行欧拉积分可以得到：

$$\boldsymbol{R}(t+\Delta t) = \boldsymbol{R}(t)\operatorname{Exp}(\boldsymbol{\omega}(t)\Delta t)$$
$$\boldsymbol{v}(t+\Delta t) = \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{a}(t)\Delta t$$
$$\boldsymbol{p}(t+\Delta t) = \boldsymbol{p}(t) + \boldsymbol{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}(t)\Delta t^2$$

其中角速度和加速度是IMU可以测量的量，但受到噪声与重力影响。令测量值为 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\boldsymbol{a}}$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) + \boldsymbol{b}_g(t) + \boldsymbol{\eta}_g(t)$$
$$\tilde{\boldsymbol{a}}(t) = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{a}(t) - \boldsymbol{g}) + \boldsymbol{b}_a(t) + \boldsymbol{\eta}_a(t)$$

代入上式可以得到**测量值和状态量**之间的关系：

$$\boldsymbol{R}(t+\Delta t) = \boldsymbol{R}(t)\operatorname{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{b}_g(t) - \boldsymbol{\eta}_{gd}(t)\right)\Delta t\right)$$
$$\boldsymbol{v}(t+\Delta t) = \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{g}\Delta t + \boldsymbol{R}(t)\left(\tilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b}_a(t) - \boldsymbol{\eta}_{ad}(t)\right)\Delta t$$
$$\boldsymbol{p}(t+\Delta t) = \boldsymbol{p}(t) + \boldsymbol{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}\Delta t^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{R}(t)\left(\tilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b}_a(t) - \boldsymbol{\eta}_{ad}(t)\right)\Delta t^2$$

我们完全可以用这种约束来构建图优化，对IMU相关的问题进行求解。但是这组方程刻画的时间太短，或者说，IMU的测量频率太高。我们并**不希望优化过程随着IMU数据进行调用，那样太浪费计算资源。**于是，预积分方法应运而生，它可以把一段时间的IMU数据累计起来统一处理。

假设关键帧 i 和 j 之间的IMU数据被累计起来，这种被累计起来的观测称为 **预积分**

$$\boldsymbol{R}_j = \boldsymbol{R}_i \prod_{k=i}^{j-1}\left(\operatorname{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \boldsymbol{b}_{g,k} - \boldsymbol{\eta}_{gd,k}\right)\Delta t\right)\right)$$
$$\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{g}\Delta t_{ij} + \sum_{k=i}^{j-1}\boldsymbol{R}_k\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k - \boldsymbol{b}_{a,k} - \boldsymbol{\eta}_{ad,k}\right)\Delta t$$
$$\boldsymbol{p}_j = \boldsymbol{p}_i + \sum_{k=i}^{j-1}\boldsymbol{v}_k\Delta t + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}\Delta t_{ij}^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=i}^{j-1}\boldsymbol{R}_k\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k - \boldsymbol{b}_{a,k} - \boldsymbol{\eta}_{ad,k}\right)\Delta t^2$$

在已知 i 时刻状态和所有测量时，该式可以用于推断 j 时刻的状态，上式为传统意义的**直接积分**

直接积分的缺点：

如果我们对 i 时刻的状态进行优化，那么 i +1 , i + 2 ... ， j -1 时刻的状态也会跟着发生改变，这个积分就必须重新计算。为此，我们对上式进行改变，定义相对运动量为：

$$
\Delta \boldsymbol{R}_{ij} \doteq \boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_j = \prod_{k=i}^{j-1} \operatorname{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \boldsymbol{b}_{g,k} - \boldsymbol{\eta}_{gd,k}\right) \Delta t\right)
$$

$$
\Delta \boldsymbol{v}_{ij} \doteq \boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{g} \Delta t_{ij}\right) = \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \boldsymbol{R}_{ik} \left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k - \boldsymbol{b}_{a,k} - \boldsymbol{\eta}_{ad,k}\right) \Delta t
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{p}_{ij} &\doteq \boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{v}_i \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \boldsymbol{g} \Delta t_{ij}^2\right) \\
&= \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \boldsymbol{v}_{ik} \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{R}_{ik} \left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k - \boldsymbol{b}_{a,k} - \boldsymbol{\eta}_{ad,k}\right) \Delta t^2\right]
\end{aligned}
$$

其实就是不再传统积分记录每个状态的量，而是记录每个状态之间的变化量，这样不仅计算简单，而且复用率高

这种改变实际上只是计算了某种从 i 到 j 的“差值”。这个定义在计算上有一些有趣的性质

1. 我们不妨考虑从 i 时刻出发，此时这三个量都为零。在 $i+1$ 时刻，我们计算出 $\Delta \boldsymbol{R}_{i,i+1}, \boldsymbol{v}_{i,i+1}$ 和 $\Delta \boldsymbol{p}_{i,i+1}$ 。而在 $i+2$ 时刻时，由于这三个式子都是累乘或累加的形式，只需在 $i, i+1$ 时刻的结果之上，加上第 $i+2$ 时刻的测量值即可。这在计算层面带来了很大的便利。进一步，我们还会发现这种性质对后续计算各种雅可比矩阵都非常方便。
2. 上述所有计算都和 $\boldsymbol{R}_i$ 的取值无关。即使 $\boldsymbol{R}_i$ 的估计值发生改变，这些量也无需重新计算。这又是非常方便的一个特性。
3. 不过，如果零偏 $\boldsymbol{b}_{a,k}$ 或 $\boldsymbol{b}_{g,k}$ 发生变化，那么上述式子理论上还是需要重新计算。然而，我们也可以通过“**修正**”而非“**重新计算**”的思路，来调整我们的预积分量。
4. 请注意，预积分量并没有直接的物理含义。尽管符号上用了 $\Delta \boldsymbol{v}, \Delta \boldsymbol{p}$ 之类的样子，但它并不表示某两个速度或位置上的偏差。它只是如此定义而已。当然，从量纲上来说，应该与角度、速度、位移对应。
5. 同样地，由于预积分量不是直接的物理量，这种“测量模型”的噪声也必须从原始的IMU噪声推导而来。

2. 预积分的测量模型

预积分内部带有IMU的零偏量，因此不可避免地会依赖此时的零偏量估计。为了处理这种依赖，我们对预积分定义作一些工程上的调整：

1. 我们首先认为 i 时刻的零偏是固定的，并且在整个预积分计算过程中也都是固定的。
2. 我们作出预积分对零偏量的一阶线性化模型，即，舍弃对零偏量的高阶项。
3. 当零偏估计发生改变时，用这个线性模型来修正预积分。

首先，我们固定 i 时刻的零偏估计，来分析预积分的噪声。无论是图优化还是滤波器技术，都需要知道某个测量量究竟含有多大的噪声

从旋转开始计算，因为旋转相对来说比较容易。利用BCH展开，可以作出下列的近似：

$$
\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{R}_{ij} &= \prod_{k=i}^{j-1} \underbrace{\operatorname{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \boldsymbol{b}_{g,k} - \boldsymbol{\eta}_{gd,k}\right) \Delta t\right)}_{\text{利用 BCH:}\approx \operatorname{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \boldsymbol{b}_{i,g} \Delta t\right)\right) \operatorname{Exp}\left(-\boldsymbol{J}_{r,k} \boldsymbol{\eta}_{gd,k} \Delta t\right)} \\
&\approx \prod_{k=i}^{j-1} \left[\operatorname{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \boldsymbol{b}_{i,g}\right) \Delta t\right) \operatorname{Exp}\left(-\boldsymbol{J}_{r,k} \boldsymbol{\eta}_{gd,k} \Delta t\right)\right]
\end{aligned}
$$

因为指数映射内相加并不等于旋转矩阵的相加，所以EXP指数映射中存在较大变化量和较小变化量，可以通过BCH把较小变化量乘雅可比指数映射，相当于把噪声分离出来

在这个式子中，把噪声项分离出去，从而定义**预积分测量**$\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ij}$ （测量量会带有上标符号）

$\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ij} = \prod_{k=i}^{j-1} \operatorname{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \boldsymbol{b}_{g,i}\right) \Delta t\right)$

基于这种巧妙的定义方式，可以把上式改写成：

$$
\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{R}_{ij} &= \underbrace{\operatorname{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i - \boldsymbol{b}_{i,g}\right) \Delta t\right)}_{\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i,i+1}} \operatorname{Exp}\left(-\boldsymbol{J}_{r,i} \boldsymbol{\eta}_{gd,i} \Delta t\right) \underbrace{\operatorname{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} - \boldsymbol{b}_{i,g}\right) \Delta t\right)}_{\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i+1,i+2}} \operatorname{Exp}\left(-\boldsymbol{J}_{r,i+1} \boldsymbol{\eta}_{gd,i} \Delta t\right) \ldots \\
&= \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i,i+1} \underbrace{\operatorname{Exp}\left(-\boldsymbol{J}_{r,i} \boldsymbol{\eta}_{gd,i} \Delta t\right) \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i+1,i+2}}_{=\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i+1,i+2} \operatorname{Exp}\left(-\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i+1,i+2}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J}_{r,i} \boldsymbol{\eta}_{gd,i} \Delta t\right)} \operatorname{Exp}\left(-\boldsymbol{J}_{r,i+1} \boldsymbol{\eta}_{gd,i} \Delta t\right) \ldots \\
&= \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i,i+2} \operatorname{Exp}\left(-\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i+1,i+2}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J}_{r,i} \boldsymbol{\eta}_{gd,i} \Delta t\right) \operatorname{Exp}\left(-\boldsymbol{J}_{r,i+1} \boldsymbol{\eta}_{gd,i} \Delta t\right) \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i+2,i+3} \ldots
\end{aligned}
$$

伴随性质替换组合

不断地把观测置换到左侧，并把噪声置换到右侧，并且把噪声项内部的$\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}$ 项合并，可以得到：

$$
\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{R}_{ij} &= \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ij} \prod_{k=i}^{j-1} \operatorname{Exp}\left(-\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{k+1,j}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J}_{r,k} \boldsymbol{\eta}_{gd,k} \Delta t\right) \\
&\doteq \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ij} \operatorname{Exp}\left(-\delta \boldsymbol{\phi}_{ij}\right)
\end{aligned}
$$

预积分量=预积分观测量*噪声量

速度部分:

$$
\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{v}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \boldsymbol{R}_{ik} \left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k - \boldsymbol{b}_{a,k} - \boldsymbol{\eta}_{ad,k}\right) \Delta t \\
&= \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik} \underbrace{\operatorname{Exp}\left(-\delta \phi_{ik}\right)}_{\approx \boldsymbol{I} - \delta \phi_{ik}} \left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k - \boldsymbol{b}_{a,k} - \boldsymbol{\eta}_{ad,k}\right) \Delta t \\
&= \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik} \left(\boldsymbol{I} - \delta \boldsymbol{\phi}_{ik}^{\wedge}\right) \left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k - \boldsymbol{b}_{a,k} - \boldsymbol{\eta}_{ad,k}\right) \Delta t
\end{aligned}
$$

泰勒展开

舍掉上式中的噪声二阶小量，并且定义**预积分速度观测量**为:

$\Delta \tilde{\boldsymbol{v}}_{ij} = \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik} \left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k - \boldsymbol{b}_{a,i}\right) \Delta t$

那么上式化简为：

$$
\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{v}_{ij} = \sum_{k=i}^{j-1} & \underbrace{\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik} \left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k - \boldsymbol{b}_{a,i}\right) \Delta t}_{\text{累加此项}} + \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik} \left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k - \boldsymbol{b}_{a,i}\right)^{\wedge} \delta \boldsymbol{\phi}_{ik} \Delta t - \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_{ad,k} \Delta t \\
&= \Delta \tilde{\boldsymbol{v}}_{ij} + \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik} \left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k - \boldsymbol{b}_{a,i}\right)^{\wedge} \delta \boldsymbol{\phi}_{ik} \Delta t - \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_{ad,k} \Delta t \\
&= \Delta \tilde{\boldsymbol{v}}_{ij} - \delta \boldsymbol{v}_{ij}
\end{aligned}
$$

平移部分：

$$
\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{p}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta \boldsymbol{v}_{ik}\Delta t+\frac{1}{2}\Delta \boldsymbol{R}_{ik}\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k-\boldsymbol{b}_{a,k}-\boldsymbol{\eta}_{ad,k}\right)\Delta t^2\right] \\
&= \sum_{k=i}^{j-1}[(\Delta \tilde{\boldsymbol{v}}_{ik}-\delta \boldsymbol{v}_{ik})\Delta t+\frac{1}{2}\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}\underbrace{\operatorname{Exp}\left(-\delta \boldsymbol{\phi}_{ik}\right)}_{\boldsymbol{I}-\delta \boldsymbol{\phi}_{ij}^{\wedge}}\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k-\boldsymbol{b}_{a,k}-\boldsymbol{\eta}_{ad,k}\right)\Delta t^2] \\
&\approx \sum_{k=i}^{j-1}\left[(\Delta \tilde{\boldsymbol{v}}_{ik}-\delta \boldsymbol{v}_{ik})\Delta t+\frac{1}{2}\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}\left(\boldsymbol{I}-\delta \boldsymbol{\phi}_{ik}^{\wedge}\right)\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k-\boldsymbol{b}_{a,i}\right)\Delta t^2-\frac{1}{2}\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_{ad,k}\Delta t^2\right)\Bigg] \text{ 我们定义} \\
&\approx \sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta \tilde{\boldsymbol{v}}_{ik}\Delta t+\frac{1}{2}\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k-\boldsymbol{b}_{a,i}\right)\Delta t^2-\delta \boldsymbol{v}_{ik}\Delta t+\frac{1}{2}\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k-\boldsymbol{b}_{a,i}\right)^{\wedge}\delta \boldsymbol{\phi}_{ik}\Delta t^2-\right. \\
&\left.\frac{1}{2}\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_{ad,k}\Delta t^2\right]
\end{aligned}
$$

预积分位移观测量为：

$$
\Delta \tilde{\boldsymbol{p}}_{ij}=\sum_{k=i}^{j-1}\left[(\Delta \tilde{\boldsymbol{v}}_{ik}\Delta t)+\frac{1}{2}\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k-\boldsymbol{b}_{a,i}\right)\Delta t^2\right]
$$

前面式子可以写成：

$$
\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{p}_{ij} &= \Delta \tilde{\boldsymbol{p}}_{ij}+\sum_{k=i}^{j-1}\left[-\delta \boldsymbol{v}_{ik}\Delta t+\frac{1}{2}\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k-\boldsymbol{b}_{a,i}\right)^{\wedge}\delta \boldsymbol{\phi}_{ik}\Delta t^2-\frac{1}{2}\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_{ad,k}\Delta t^2\right] \\
&\doteq \Delta \tilde{\boldsymbol{p}}_{ij}-\delta \boldsymbol{p}_{ij}
\end{aligned}
$$

于是，此三式共同定义了预积分的三个观测量和它们的噪声。将它们代回最初的定义式，可以简单写为：

$$
\begin{aligned}
\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ij} &= \boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j\operatorname{Exp}\left(\delta \boldsymbol{\phi}_{ij}\right) \\
\Delta \tilde{\boldsymbol{v}}_{ij} &= \boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{v}_j-\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{g}\Delta t_{ij}\right)+\delta \boldsymbol{v}_{ij} \\
\Delta \tilde{\boldsymbol{p}}_{ij} &= \boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{p}_j-\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{v}_i\Delta t_{ij}-\frac{1}{2}\boldsymbol{g}\Delta t_{ij}^2\right)+\delta \boldsymbol{p}_{ij}
\end{aligned}
$$

观测值=预测值+噪声

这个式子归纳了前面我们讨论的内容，显示了预积分的几大优点：

1. 它的左侧是可以通过传感器数据积分得到的观测量，右侧是根据状态变量推断出来的预测值，再加上一个随机噪声
2. 左侧变量的定义方式非常适合程序实现

$$
\begin{aligned}
\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ij} &= \prod_{k=i}^{j-1}\operatorname{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k-\boldsymbol{b}_{g,i}\right)\Delta t\right) \\
\Delta \tilde{\boldsymbol{v}}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1}\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k-\boldsymbol{b}_{a,i}\right)\Delta t \\
\Delta \tilde{\boldsymbol{p}}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1}\left[(\Delta \tilde{\boldsymbol{v}}_{ik}\Delta t)+\frac{1}{2}\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k-\boldsymbol{b}_{a,i}\right)\Delta t^2\right]
\end{aligned}
$$

并且如果知道k时刻的预积分观测，很容易根据 k+1 时刻的传感器读数，计算出k +1 时刻的预积分观测量

3. 从右侧来看，也很容易根据 i 和 j 时刻的状态变量来推测预积分观测量的大小，从而写出误差公式，构建最小二乘问题

现在的问题是：预积分的噪声是否符合零均值的高斯分布？如果是，它的协方差有多大？和IMU本身的噪声之间是什么关系？

3. 预积分噪声模型

将复杂的噪声项线性化，保留一阶项系数，然后推导线性模型下的协方差矩阵变化。这是一种非常常见的处理思路，对许多复杂模型都很有效。

先从旋转的噪声开始看：

$\operatorname{Exp}\left(-\delta \boldsymbol{\phi}_{ij}\right)=\prod_{k=i}^{j-1} \operatorname{Exp}\left(-\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{k+1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J}_{r, k} \boldsymbol{\eta}_{gd, k} \Delta t\right)$

作为随机变量的 $\delta\phi_{ij}$ 只和随机变量 $\boldsymbol{\eta}_{gd}$ 有关，而其他的都是确定的观测量。当我们线性化后取期望时，由于 $\boldsymbol{\eta}_{gd}$ 为白噪声，因此 $\delta\phi_{ij}$ 均值也为零

为了分析它的协方差，我们需要对上式进行线性化。对两侧取 Log， 可得：

$\delta \boldsymbol{\phi}_{ij}=-\log \left(\prod_{k=i}^{j-1} \operatorname{Exp}\left(-\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{k+1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J}_{r, k} \boldsymbol{\eta}_{gd, k} \Delta t\right)\right)$

该式又可以通过BCH进行线性近似。同时，由于内部的系数项 $-\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{k+1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J}_{r, k} \boldsymbol{\eta}_{gd, k} \Delta t$ 接近于零，且为噪声，我们可将BCH近似的右雅可比取为单位阵，可以得到：

$\delta \boldsymbol{\phi}_{ij} \approx \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \boldsymbol{R}_{k+1, j}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J}_{r, k} \boldsymbol{\eta}_{gd, k} \Delta t$

此式是高斯随机变量的线性组合，它的结果依然是高斯的。同时，由于预积分的累加特性，预测分观测量的噪声也会随着时间不断累加

上式是累加形式的，很容易将其写成递推的形式：

$$
\begin{aligned}
\delta \boldsymbol{\phi}_{ij} & \approx \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{k+1, j}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J}_{r, k} \boldsymbol{\eta}_{gd, k} \Delta t \\
& =\sum_{k=i}^{j-2} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{k+1, j}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J}_{r, k} \boldsymbol{\eta}_{gd, k} \Delta t+\underbrace{\Delta \boldsymbol{R}_{j, j}^{\mathrm{T}}}_{=\boldsymbol{I}} \boldsymbol{J}_{r, j-1} \boldsymbol{\eta}_{gd, j-1} \Delta t \\
& =\sum_{k=i}^{j-2} \underbrace{\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{k+1, j}^{\mathrm{T}}} \boldsymbol{J}_{r, k} \boldsymbol{\eta}_{gd, k} \Delta t+\boldsymbol{J}_{r, j-1} \boldsymbol{\eta}_{gd, j-1} \Delta t \\
& =\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{j-1, j}^{\mathrm{T}} \sum_{k=i}^{j-2} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{k+1, j-1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J}_{r, k} \boldsymbol{\eta}_{gd, k} \Delta t+\boldsymbol{J}_{r, j-1} \boldsymbol{\eta}_{gd, j-1} \Delta t \\
& =\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{j-1, j}^{\mathrm{T}} \delta \boldsymbol{\phi}_{i, j-1}+\boldsymbol{J}_{r, j-1} \boldsymbol{\eta}_{gd, j-1} \Delta t
\end{aligned}
$$

该式描述了如何从 j - 1 时刻的噪声推断到 j 时刻。显然这是一个线性系统，设 j -1 时刻的 $\delta \boldsymbol{\phi}_{i,j-1}$ 的协方差为 $\boldsymbol{\Sigma}_{j-1}$ ，$\boldsymbol{\eta}_{gd}$ 的协方差为 $\boldsymbol{\Sigma}_{\eta_{gd}}$ ， 则有：

$\boldsymbol{\Sigma}_{j}=\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{j-1, j}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}_{j-1} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{j-1, j}+\boldsymbol{J}_{r, j-1} \boldsymbol{\Sigma}_{\eta_{gd}} \boldsymbol{J}_{r, j-1}^{\mathrm{T}} \Delta t^{2}$

表明预积分误差会随着累计变大，预积分观测量也会变得越来越不确定

速度部分的噪声：

$\delta \boldsymbol{v}_{ij} \approx \sum_{k=i}^{j-1}\left[-\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k-\boldsymbol{b}_{a,i}\right)^{\wedge} \delta \boldsymbol{\phi}_{ik} \Delta t+\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_{ad,k} \Delta t\right]$

写成累加的形式：

$$
\begin{aligned}
\delta \boldsymbol{v}_{ij} &=\sum_{k=i}^{j-1}\left[-\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k-\boldsymbol{b}_{a,i}\right)^{\wedge} \delta \boldsymbol{\phi}_{ik} \Delta t+\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_{ad,k} \Delta t\right] \\
&=\sum_{k=i}^{j-2}\left[-\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k-\boldsymbol{b}_{a,i}\right)^{\wedge} \delta \boldsymbol{\phi}_{ik} \Delta t+\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_{ad,k} \Delta t\right] \\
&\quad -\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i,j-1}\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_{j-1}-\boldsymbol{b}_{a,i}\right)^{\wedge} \delta \boldsymbol{\phi}_{i,j-1} \Delta t+\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i,j-1} \boldsymbol{\eta}_{ad,j-1} \Delta t \\
&=\delta \boldsymbol{v}_{i,j-1}-\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i,j-1}\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_{j-1}-\boldsymbol{b}_{a,i}\right)^{\wedge} \delta \boldsymbol{\phi}_{i,j-1} \Delta t+\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i,j-1} \boldsymbol{\eta}_{ad,j-1} \Delta t
\end{aligned}
$$

平移部分：

$$
\begin{aligned}
\delta \boldsymbol{p}_{ij} &=\sum_{k=i}^{j-1}\left[\delta \boldsymbol{v}_{ik} \Delta t-\frac{1}{2} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k-\boldsymbol{b}_{a,i}\right)^{\wedge} \delta \boldsymbol{\phi}_{ik} \Delta t^2+\frac{1}{2} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_{ad,k} \Delta t^2\right] \\
&=\sum_{k=i}^{j-2}\left[\delta \boldsymbol{v}_{ik} \Delta t-\frac{1}{2} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k-\boldsymbol{b}_{a,i}\right)^{\wedge} \delta \boldsymbol{\phi}_{ik} \Delta t^2+\frac{1}{2} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_{ad,k} \Delta t^2\right] \\
&\quad +\delta \boldsymbol{v}_{i,j-1} \Delta t-\frac{1}{2} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i,j-1}\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_{j-1}-\boldsymbol{b}_{a,i}\right)^{\wedge} \delta \boldsymbol{\phi}_{i,j-1} \Delta t^2+\frac{1}{2} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i,j-1} \boldsymbol{\eta}_{ad,j-1} \Delta t^2 \\
&=\delta \boldsymbol{p}_{i,j-1}+\delta \boldsymbol{v}_{i,j-1} \Delta t-\frac{1}{2} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i,j-1}\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_{j-1}-\boldsymbol{b}_{a,i}\right)^{\wedge} \delta \boldsymbol{\phi}_{i,j-1} \Delta t^2+\frac{1}{2} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i,j-1} \boldsymbol{\eta}_{ad,j-1} \Delta t^2
\end{aligned}
$$

至此，推导了如何从 j -1 时刻将噪声递推至 j 时刻，下面整理成矩阵形式：

$$
\boldsymbol{\eta}_{ik}=\left[\begin{array}{c}
\delta \boldsymbol{\phi}_{ik} \\
\delta \boldsymbol{v}_{ik} \\
\delta \boldsymbol{p}_{ik}
\end{array}\right]
$$

并且把IMU的零偏噪声定义为:

$$
\boldsymbol{\eta}_{d,j}=\left[\begin{array}{c}
\boldsymbol{\eta}_{gd,j} \\
\boldsymbol{\eta}_{ad,j}
\end{array}\right]
$$

那么从 $\eta_{i,j-1}$ 到 $\eta_{i,j}$ 的递推式可以写为：

$$
\boldsymbol{\eta}_{ij}=\boldsymbol{A}_j \boldsymbol{\eta}_{i,j-1}+\boldsymbol{B}_j \boldsymbol{\eta}_{d,j-1}
$$

其中的系数矩阵为：

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}_j=\left[\begin{array}{ccc}
\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{j-1,j}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
-\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i,j-1}\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_{j-1}-\boldsymbol{b}_{a,i}\right)^{\wedge} \Delta t & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\
-\frac{1}{2} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i,j-1}\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_{j-1}-\boldsymbol{b}_{a,i}\right)^{\wedge} \Delta t^2 & \Delta t & \boldsymbol{I}
\end{array}\right] \\
&\boldsymbol{B}_j=\left[\begin{array}{cc}
\boldsymbol{J}_{r,j-1} \Delta t & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i,j-1} \Delta t \\
\mathbf{0} & \frac{1}{2} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i,j-1} \Delta t^2
\end{array}\right]
\end{aligned}
}
$$

矩阵形式更清晰地显示了几个噪声项之间累计递推关系。

由于它们的累加关系，在程序实现中也十分便捷。

4. 零偏的更新

先前的讨论都假设了在 i 时刻的IMU零偏恒定不变，当然这都是为了方便后续的计算。然而**在实际的图优化中，我们经常会对状态变量（优化变量）进行更新**。那么，理论上来讲，如果IMU零偏发生了变化，预积分应该重新计算，因为预积分的每一步都用到了 i 时刻的IMU零偏。但是实际操作过程中，我们也可以选用一种讨巧的做法：**假定预积分观测是随零偏线性变化的**，虽然实际上并不是线性变化的，但我们总可以对一个复杂函数做线性化并保留一阶项,然后在原先的观测量上进行修正

把预积分观测量看成是 $b_{g,i}, b_{a,i}$的 函数，当其更新了 $\delta b_{g,i}, \delta b_{a,i}$ 之后，预积分作如下修正：

$$\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ij}\left(\boldsymbol{b}_{g,i}+\delta \boldsymbol{b}_{g,i}\right)=\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ij}\left(\boldsymbol{b}_{g,i}\right) \operatorname{Exp}\left(\frac{\partial \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ij}}{\partial \boldsymbol{b}_{g}} \delta \boldsymbol{b}_{g,i}\right)$$

$$\Delta \tilde{\boldsymbol{v}}_{ij}\left(\boldsymbol{b}_{g,i}+\delta \boldsymbol{b}_{g,i}, \boldsymbol{b}_{a,i}+\delta \boldsymbol{b}_{a,i}\right)=\Delta \tilde{\boldsymbol{v}}_{ij}\left(\boldsymbol{b}_{g,i}, \boldsymbol{b}_{a,i}\right)+\frac{\partial \Delta \tilde{\boldsymbol{v}}_{ij}}{\partial \boldsymbol{b}_{g,i}} \delta \boldsymbol{b}_{g,i}+\frac{\partial \Delta \tilde{\boldsymbol{v}}_{ij}}{\partial \boldsymbol{b}_{a,i}} \delta \boldsymbol{b}_{a,i}$$

$$\Delta \tilde{\boldsymbol{p}}_{ij}\left(\boldsymbol{b}_{g,i}+\delta \boldsymbol{b}_{g,i}, \boldsymbol{b}_{a,i}+\delta \boldsymbol{b}_{a,i}\right)=\Delta \tilde{\boldsymbol{p}}_{ij}\left(\boldsymbol{b}_{g,i}, \boldsymbol{b}_{a,i}\right)+\frac{\partial \Delta \tilde{\boldsymbol{p}}_{ij}}{\partial \boldsymbol{b}_{g,i}} \delta \boldsymbol{b}_{g,i}+\frac{\partial \Delta \tilde{\boldsymbol{p}}_{ij}}{\partial \boldsymbol{b}_{a,i}} \delta \boldsymbol{b}_{a,i}$$

如何计算上面列写的几个偏导数（雅可比）呢?

首先来考虑旋转。预积分旋转观测量可以写为：

$$\begin{aligned}
\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ij}\left(\boldsymbol{b}_{g,i}+\delta \boldsymbol{b}_{g,i}\right) &= \prod_{k=i}^{j-1} \operatorname{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{k}-\left(\boldsymbol{b}_{g,i}+\delta \boldsymbol{b}_{g,i}\right)\right) \Delta t\right) \\
&= \prod_{k=i}^{j-1} \operatorname{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{k}-\boldsymbol{b}_{g,i}\right) \Delta t\right) \operatorname{Exp}\left(-\boldsymbol{J}_{r,k} \delta \boldsymbol{b}_{g,i} \Delta t\right) \\
&= \underbrace{\operatorname{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{i}-\boldsymbol{b}_{g,i}\right) \Delta t\right)}_{\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i,i+1}} \operatorname{Exp}\left(-\boldsymbol{J}_{r,i} \delta \boldsymbol{b}_{g,i} \Delta t\right) \underbrace{\operatorname{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{i+1}-\boldsymbol{b}_{g,i}\right) \Delta t\right)}_{\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i+1,i+2}} \\
&= \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i,i+1} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i+1,i+2} \operatorname{Exp}\left(-\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i+1,i+2}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J}_{r,i} \delta \boldsymbol{b}_{g,i} \Delta t\right) \ldots \\
&= \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ij} \prod_{k=i}^{j-1} \operatorname{Exp}\left(-\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{k+1,j}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J}_{r,k} \delta \boldsymbol{b}_{g,i} \Delta t\right) \\
&\approx \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ij} \operatorname{Exp}\left(-\sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{k+1,j}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J}_{r,k} \Delta t \delta \boldsymbol{b}_{g,i}\right)
\end{aligned}$$

通过这种方式我们可以算出 $\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ij}$ 相对于 $b_{g,i}$ 的雅可比矩阵，记为 $\frac{\partial \Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{ij}}{\partial \boldsymbol{b}_{g}}$

速度测量：

$$
\begin{aligned}
\Delta\tilde{\boldsymbol{v}}\left(\boldsymbol{b}_i+\delta\boldsymbol{b}_i\right) &= \sum_{k=i}^{j-1}\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}\left(\boldsymbol{b}_{g,i}+\delta\boldsymbol{b}_{g,i}\right)\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k-\boldsymbol{b}_{a,i}-\delta\boldsymbol{b}_{a,i}\right)\Delta t\\
&= \sum_{k=i}^{j-1}\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}\operatorname{Exp}\left(\frac{\partial\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}}{\partial\boldsymbol{b}_{g,i}}\delta\boldsymbol{b}_{g,i}\right)\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k-\boldsymbol{b}_{a,i}-\delta\boldsymbol{b}_{a,i}\right)\Delta t\\
&= \sum_{k=i}^{j-1}\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}\left(\boldsymbol{I}+\left(\frac{\partial\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}}{\partial\boldsymbol{b}_{g,i}}\delta\boldsymbol{b}_{g,i}\right)^{\wedge}\right)\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k-\boldsymbol{b}_{a,i}-\delta\boldsymbol{b}_{a,i}\right)\Delta t\\
&\approx \Delta\boldsymbol{v}_{ij}-\sum_{k=i}^{j-1}\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}\Delta t\delta\boldsymbol{b}_{a,i}-\sum_{k=i}^{j-1}\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k-\boldsymbol{b}_{a,i}\right)^{\wedge}\frac{\partial\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}}{\partial\boldsymbol{b}_{g,i}}\Delta t\delta\boldsymbol{b}_{g,i}\\
&= \Delta\boldsymbol{v}_{ij}+\frac{\partial\Delta\boldsymbol{v}_{ij}}{\partial\boldsymbol{b}_{a,i}}\delta\boldsymbol{b}_{a,i}+\frac{\partial\Delta\boldsymbol{v}_{ij}}{\partial\boldsymbol{b}_{g,i}}\delta\boldsymbol{b}_{g,i}
\end{aligned}
$$

最后是平移部分：

$$
\begin{aligned}
\Delta\tilde{\boldsymbol{p}}_{ij}\left(\boldsymbol{b}_i+\delta\boldsymbol{b}_i\right) = &\sum_{k=i}^{j-1}\left[\left(\Delta\tilde{\boldsymbol{v}}_{ik}+\frac{\partial\Delta\boldsymbol{v}_{ij}}{\partial\boldsymbol{b}_{a,i}}\delta\boldsymbol{b}_{a,i}+\frac{\partial\Delta\boldsymbol{v}_{ij}}{\partial\boldsymbol{b}_{g,i}}\delta\boldsymbol{b}_{g,i}\right)\Delta t+\right.\\
&\left.\frac{1}{2}\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}\left(\boldsymbol{I}+\left(\frac{\partial\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}}{\partial\boldsymbol{b}_{g,i}}\delta\boldsymbol{b}_{g,i}\right)^{\wedge}\right)\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k-\boldsymbol{b}_{a,i}-\delta\boldsymbol{b}_{a,i}\right)\Delta t^2\right]\\
=&\delta\tilde{\boldsymbol{p}}_{ij}+\sum_{k=i}^{j-1}\left[\frac{\partial\Delta\boldsymbol{v}_{ij}}{\partial\boldsymbol{b}_{a,i}}\Delta t-\frac{1}{2}\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}\Delta t^2\right]\delta\boldsymbol{b}_{a,i}+\\
&\sum_{k=i}^{j-1}\left[\frac{\partial\Delta\boldsymbol{v}_{ij}}{\partial\boldsymbol{b}_{g,i}}\Delta t-\frac{1}{2}\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k-\boldsymbol{b}_{a,i}\right)^{\wedge}\frac{\partial\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}}{\partial\boldsymbol{b}_{g,i}}\Delta t^2\right]\delta\boldsymbol{b}_{g,i}\\
=&\delta\tilde{\boldsymbol{p}}_{ij}+\frac{\partial\Delta\tilde{\boldsymbol{p}}_{ij}}{\partial\boldsymbol{b}_{a,i}}\delta\boldsymbol{b}_{a,i}+\frac{\partial\Delta\tilde{\boldsymbol{p}}_{ij}}{\partial\boldsymbol{b}_{g,i}}\boldsymbol{b}_{g,i}
\end{aligned}
$$

请注意上述计算都是迭代形式的。也就是说，我们只需要在程序中保留一个变量，随着数据不断进行累加即可。

把这些雅可比矩阵整理一下，得到更整齐的结果：

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\frac{\partial\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ij}}{\partial\boldsymbol{b}_{g,i}} &= -\sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{k+1,j}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{k,r}\Delta t\right]\\
\frac{\partial\Delta\tilde{\boldsymbol{v}}_{ij}}{\partial\boldsymbol{b}_{a,i}} &= -\sum_{k=i}^{j-1}\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}\Delta t\\
\frac{\partial\Delta\tilde{\boldsymbol{v}}_{ij}}{\partial\boldsymbol{b}_{g,i}} &= -\sum_{k=i}^{j-1}\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k-\boldsymbol{b}_{a,i}\right)^{\wedge}\frac{\partial\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ij}}{\partial\boldsymbol{b}_{g,i}}\Delta t\\
\frac{\partial\Delta\tilde{\boldsymbol{p}}_{ij}}{\partial\boldsymbol{b}_{a,i}} &= \sum_{k=i}^{j-1}\frac{\partial\Delta\boldsymbol{v}_{ij}}{\partial\boldsymbol{b}_{a,i}}\Delta t-\frac{1}{2}\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}\Delta t^2\\
\frac{\partial\Delta\tilde{\boldsymbol{p}}_{ij}}{\partial\boldsymbol{b}_{g,i}} &= \sum_{k=i}^{j-1}\frac{\partial\Delta\boldsymbol{v}_{ij}}{\partial\boldsymbol{b}_{g,i}}\Delta t-\frac{1}{2}\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k-\boldsymbol{b}_{a,i}\right)^{\wedge}\frac{\partial\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ik}}{\partial\boldsymbol{b}_{g,i}}\Delta t^2
\end{aligned}
}
$$

5. 预积分模型归结到图优化

定义了预积分的测量模型，推导了它的噪声模型和协方差矩阵，并说明了随着零偏量更新，预积分应该怎么更新。事实上，我们已经可以把预积分观测作为图优化的因子（Factor）或者边（Edge）了。下面我们来说明如何使用这种边，以及它推导它相对于状态变量的雅可比矩阵。

在IMU相关的应用中，通常把每个时刻的状态建模为包含旋转、平移、线速度、IMU零偏的变量，构成状态变量集合 $\mathcal{X}$：

$$\boldsymbol{x}_k=[\boldsymbol{R},\boldsymbol{p},\boldsymbol{v},\boldsymbol{b}_a,\boldsymbol{b}_g]_k\in\mathcal{X}$$

预积分模型构建了关键帧 i 与关键帧 j 之间的一种约束，它的残差可以写成：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_{\Delta\boldsymbol{R}_{ij}}&=\log\left(\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ij}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j\right)\right)\\
\boldsymbol{r}_{\Delta\boldsymbol{v}_{ij}}&=\boldsymbol{R}_i^T\left(\boldsymbol{v}_j-\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{g}\Delta t_{ij}\right)-\Delta\tilde{\boldsymbol{v}}_{ij}\\
\boldsymbol{r}_{\Delta\boldsymbol{p}_{ij}}&=\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{p}_j-\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{v}_i\Delta t_{ij}-\frac{1}{2}\boldsymbol{g}\Delta t_{ij}^2\right)-\Delta\tilde{\boldsymbol{p}}_{ij}
\end{aligned}$$

通常我们会把残差统一写成一个9维的残差变量，表面上关联两个时刻的旋转，平移，速度，但是由于预积分观测内部含有IMU零偏，所以也和 i 时刻的两个零偏有关。除了预积分因子本身之外，还需要约束IMU的随机游走，因此在IMU的不同时刻零偏会存在一个约束因子。

6. 预积分的雅可比矩阵

讨论预积分相比于状态变量的雅可比矩阵。由于预积分测量已经归纳了IMU在短时间内的读数，残差相对于状态变量的雅可比推导显得十分简单

旋转与 R_i , R_j 和 $b_{g,i}$ 有关，我们用 SO(3) 的右扰动推导它：

对 ϕ_i：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_{\Delta\boldsymbol{R}_{ij}}\left(\boldsymbol{R}_i\operatorname{Exp}\left(\boldsymbol{\phi}_i\right)\right)&=\log\left(\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ij}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{R}_i\operatorname{Exp}\left(\boldsymbol{\phi}_i\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j\right)\right)\\
&=\log\left(\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ij}^{\mathrm{T}}\operatorname{Exp}\left(-\boldsymbol{\phi}_i\right)\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j\right)\\
&=\log\left(\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j\operatorname{Exp}\left(-\boldsymbol{R}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{\phi}_i\right)\right)\\
&=\boldsymbol{r}_{\Delta\boldsymbol{R}_{ij}}-\boldsymbol{J}_r^{-1}\left(\boldsymbol{r}_{\Delta\boldsymbol{R}_{ij}}\right)\boldsymbol{R}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{\phi}_i
\end{aligned}$$

对 ϕ_j：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_{\Delta\boldsymbol{R}_{ij}}\left(\boldsymbol{R}_j\operatorname{Exp}\left(\boldsymbol{\phi}_j\right)\right)&=\log\left(\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j\operatorname{Exp}\left(\boldsymbol{\phi}_j\right)\right)\\
&=\boldsymbol{r}_{\Delta\boldsymbol{R}_{ij}}+\boldsymbol{J}_r^{-1}\left(\boldsymbol{r}_{\Delta\boldsymbol{R}_{ij}}\right)\boldsymbol{\phi}_j
\end{aligned}$$

对于零偏量要稍微麻烦一些。注意在优化过程中，零偏量应该不断地更新，而每次更新时我们会利用当前零偏来修正预积分的观测量。由于这个过程是不断进行的，我们总会有一个初始的观测量和当前修正后的观测量，在推导时必须考虑到这一点。

假设优化初始的零偏为 $b_{g,i}$,在某一步迭代时，我们当前估计出来的零偏修正为 $\delta b_{g,i}$,而当前我们修正得到的预积分旋转观测量为 $\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ij}^{\prime}=\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ij}\left(\boldsymbol{b}_{g,i}+\delta\boldsymbol{b}_{g,i}\right)$ ，残差为 $\boldsymbol{r}_{\Delta}^{\prime}\boldsymbol{R}_{ij}$

为了求导，又在上面的基础上加上了 $\tilde{\delta}\boldsymbol{b}_{g,i}$

则：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_{\Delta\boldsymbol{R}_{ij}}(\boldsymbol{b}_{g,i}+\delta\boldsymbol{b}_{g,i}+\tilde{\delta}\boldsymbol{b}_{g,i}) &= \operatorname{Log}\left(\left(\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ij}\operatorname{Exp}\left(\frac{\partial\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ij}}{\partial\boldsymbol{b}_{g,i}}(\delta\boldsymbol{b}_{g,i}+\tilde{\delta}\boldsymbol{b}_{g,i})\right)\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j\right) \\
&\overset{\mathrm{BCH}}{=}\operatorname{Log}\left(\left(\underbrace{\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ij}\operatorname{Exp}(\frac{\partial\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ij}}{\partial\boldsymbol{b}_{g,i}}\delta\boldsymbol{b}_{g,i})}_{\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ij}^{\prime}}\operatorname{Exp}(\boldsymbol{J}_{r,b}\frac{\partial\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ij}}{\partial\boldsymbol{b}_{g,i}}\tilde{\delta}\boldsymbol{b}_{g,i})\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j\right) \\
&=\operatorname{Log}\left(\operatorname{Exp}\left(-\boldsymbol{J}_{b,r}\frac{\partial\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ij}}{\partial\boldsymbol{b}_{g,i}}\tilde{\delta}\boldsymbol{b}_{g,i}\right)\underbrace{(\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ij}^{\prime})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j}_{\operatorname{Exp}\left(\boldsymbol{r}^{\prime}_{\Delta\boldsymbol{R}_{ij}}\right)}\right) \\
&=\operatorname{Log}\left(\operatorname{Exp}\left(\boldsymbol{r}^{\prime}_{\Delta\boldsymbol{R}_{ij}}\right)\operatorname{Exp}\left(-\operatorname{Exp}\left(\boldsymbol{r}^{\prime}_{\Delta\boldsymbol{R}_{ij}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{b,r}\frac{\partial\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ij}}{\partial\boldsymbol{b}_{g,i}}\tilde{\delta}\boldsymbol{b}_{g,i}\right)\right) \\
&=\boldsymbol{r}^{\prime}_{\Delta\boldsymbol{R}_{ij}}-\boldsymbol{J}_r^{-1}(\boldsymbol{r}^{\prime}_{\Delta\boldsymbol{R}_{ij}})\operatorname{Exp}\left(\boldsymbol{r}^{\prime}_{\Delta\boldsymbol{R}_{ij}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{b,r}\frac{\partial\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ij}}{\partial\boldsymbol{b}_{g,i}}\tilde{\delta}\boldsymbol{b}_{g,i}
\end{aligned}
$$

所以最后得到：

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}_{\Delta\boldsymbol{R}_{ij}}}{\partial\boldsymbol{b}_{g,i}}=-\boldsymbol{J}_r^{-1}\left(\boldsymbol{r}^{\prime}_{\Delta\boldsymbol{R}_{ij}}\right)\operatorname{Exp}\left(\boldsymbol{r}^{\prime}_{\Delta\boldsymbol{R}_{ij}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{b,r}\frac{\partial\Delta\tilde{\boldsymbol{R}}_{ij}}{\partial\boldsymbol{b}_{g,i}}\tilde{\delta}\boldsymbol{b}_{g,i}$$

速度项更为简单，它与 v_i, v_j 呈线性关系，不难得到：

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}_{\Delta v_{ij}}}{\partial\boldsymbol{v}_i}=-\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}},\quad\frac{\partial\boldsymbol{r}_{\Delta v_{ij}}}{\partial\boldsymbol{v}_j}=\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}$$

对旋转部分只需要做一阶泰勒展开即可：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_{\Delta\boldsymbol{v}_{ij}}\left(\boldsymbol{R}_i\operatorname{Exp}\left(\delta\boldsymbol{\phi}_i\right)\right) &= \left(\boldsymbol{R}_i\operatorname{Exp}\left(\Delta\boldsymbol{\phi}_i\right)\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{v}_j-\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{g}\Delta t_{ij}\right)-\Delta\tilde{\boldsymbol{v}}_{ij} \\
&=\left(\boldsymbol{I}-\Delta\boldsymbol{\phi}_i^{\wedge}\right)\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{v}_j-\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{g}\Delta t_{ij}\right)-\Delta\tilde{\boldsymbol{v}}_{ij} \\
&=\boldsymbol{r}_{\Delta\boldsymbol{v}_{ij}}\left(\boldsymbol{R}_i\right)+\left(\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{v}_j-\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{g}\Delta t_{ij}\right)\right)^{\wedge}\Delta\boldsymbol{\phi}_i
\end{aligned}
$$

速度残差相对 $b_{g,i}, b_{a,i}$ 的雅可比只和 $\Delta\tilde{\boldsymbol{v}}_{ij}$ 有关，由于速度的残差项与它只相差一个负号，所以我们只需要在前面推导的零偏雅可比的前面添加一个负号即可

平移部分：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{r}_{\Delta \boldsymbol{p}_{ij}}}{\partial \boldsymbol{p}_i} &= -\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}} \\
\frac{\partial \boldsymbol{r}_{\Delta \boldsymbol{p}_{ij}}}{\partial \boldsymbol{p}_j} &= \boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}} \\
\frac{\partial \boldsymbol{r}_{\Delta \boldsymbol{p}_{ij}}}{\partial \boldsymbol{v}_i} &= -\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}} \Delta t_{ij} \\
\frac{\partial \boldsymbol{r}_{\Delta \boldsymbol{p}_{ij}}}{\partial \boldsymbol{\phi}_i} &= \left(\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{v}_i \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \boldsymbol{g} \Delta t_{ij}^2 \right) \right)^{\wedge}
\end{aligned}
$$

零偏的残差也只需在零偏雅可比基础上添加负号即可

至此，我们推导了预积分观测量对所有状态变量的导数形式。如果我们愿意，也可以将预积分观测写成一列，将状态变量写成一列，然后把这些雅可比矩阵都写在一起即可

3. vins-mono 预积分

4. gtsam预积分

参考文献：

[1] https://zhuanlan.zhihu.com/p/438525032

[2] https://zhuanlan.zhihu.com/p/388859808

[3] VINS论文推导及代码解析 — 崔华坤