Dr. Andrés Rueda-Ramírez
Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Tamme Claus
Dr. Satyvir Singh

Applied and Computational Mathematics | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Mathematische Grundlagen IV (CES) | SS 2024
Programmierübung 2 | 16.05.2022
Deadline Anmeldung Testat: see Moodle
Testate: see Moodle

Hinweise zur Abgabe einer Programmieraufgabe (bitte sorgfältig lesen!):

- Die Programmieraufgaben sind in **Dreier-** oder **Vierergruppen** zu bearbeiten.
- Tragen Sie sich bitte bis zum **see Moodle** für einen Testattermin in dem entsprechenden Etherpad des Moodle Lernraums ein.
- Stellen Sie sicher, dass alle Programmverifikationen vor Abgabe der Aufgabe erfolgreich sind.
- Die Testate finden am **see Moodle** in verschiedenen Räumen des Rogowski statt (siehe Moodle).
  Bringen Sie zu dem Testat bitte einen Laptop und Ihr lauffähiges Programm mit.

Konvektions–Diffusionsgleichung

Die Lösung des Konvektions–Diffusionsproblems

$$-\varepsilon\Delta u(x,y) + \cos\beta\,\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \sin\beta\,\frac{\partial u}{\partial y} = f(x,y),\ (x,y)\in\Omega=(0,1)^2,$$
$$u(x,y) = g(x,y),\ (x,y) \text{ auf } \partial\Omega,$$

mit $f(x,y)=1$ und $g(x,y)=0$ soll mittels eines Finiten-Differenzen Verfahrens bestimmt werden. Verwenden Sie dazu das regelmäßige Gitter

$$\Omega_h := \{(ih,jh) \mid 1\le i,j\le n-1)\},$$
$$\overline{\Omega}_h := \{(ih,jh) \mid 0\le i,j\le n)\},$$

mit der Gitterweite $h=1/n,\ n\in\mathbb{N}$. Zur Diskretisierung des Laplace-Operators verwenden Sie die in der Vorlesung vorgestellte Differenzenformel mit zentralen Differenzen. Für die Diskretisierung der x-Ableitung des Konvektionsterms kann ein zentraler Differenzenquotient,

$$\cos\beta\,\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \approx \frac{\cos\beta}{2h}\left(u(x+h,y)-u(x-h,y)\right),$$

oder ein Upwind-Differenzenquotient

$$\cos\beta\,\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \approx \begin{cases} \dfrac{\cos\beta}{h}\left(u(x,y)-u(x-h,y)\right), & \cos\beta\ge 0,\\ \dfrac{\cos\beta}{h}\left(u(x+h,y)-u(x,y)\right), & \cos\beta < 0,\end{cases}$$

verwendet werden. Analog geht man bei der Diskretisierung der y-Ableitung vor.

a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem ohne direkte Invertierung der Matrix, also in `Matlab` oder `Julia` mit dem Backslash operator $\backslash$. Bestimmen Sie die Approximationen $u_{h,\varepsilon}$ von u für $n=60$ und $\varepsilon = 1, 10^{-2}, 10^{-4}$, indem Sie einen *Upwind-Differenzenquotienten* zur Diskretisierung des Konvektionsterms verwenden. Dabei sei $\beta = 5\pi/6$. Plotten Sie die Lösung $u_{h,\varepsilon}$ als Surface Plot.

b) Verwenden Sie anstatt des *Upwind-Differenzenquotienten* nun den *zentralen Differenzenquotienten*. Vergleichen Sie die Lösung mit den Ergebnissen aus a).

c) Wenden Sie das Verfahren auf das Poisson-Problem an:

$$-\Delta u(x,y) = f(x,y),\ (x,y)\in\Omega=(0,1)^2,$$
$$u(x,y) = g(x,y),\ (x,y) \text{ auf } \partial\Omega,$$

mit $f(x, y) = -4$ und $g(x, y) = x^2 + y^2$.

20 Points