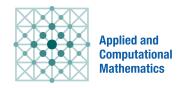
Dr. Andrés Rueda-Ramírez Prof. Dr. Manuel Torrilhon Tamme Claus Dr. Satyvir Singh





## Mathematische Grundlagen IV (CES) | SS 2024 Programmierübung 2 | 16.05.2022 Deadline Anmeldung Testat: see Moodle Testate: see Moodle

Hinweise zur Abgabe einer Programmieraufgabe (bitte sorgfältig lesen!):

- Die Programmieraufgaben sind in **Dreier-** oder **Vierergruppen** zu bearbeiten.
- Tragen Sie sich bitte bis zum see Moodle für einen Testattermin in dem entsprechenden Etherpad des Moodle Lernraums ein.
- · Stellen Sie sicher, dass alle Programmverifikationen vor Abgabe der Aufgabe erfolgreich sind.
- Die Testate finden am see Moodle in verschiedenen Räumen des Rogowski statt (siehe Moodle).
   Bringen Sie zu dem Testat bitte einen Laptop und Ihr lauffähiges Programm mit.

## Konvektions-Diffusionsgleichung

Die Lösung des Konvektions-Diffusionsproblems

$$-\varepsilon \Delta u(x,y) + \cos \beta \, \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \sin \beta \, \frac{\partial u}{\partial y} = f(x,y), \, (x,y) \in \Omega = (0,1)^2,$$
$$u(x,y) = g(x,y), \, (x,y) \text{ auf } \partial \Omega,$$

mit f(x,y) = 1 und g(x,y) = 0 soll mittels eines Finiten-Differenzen Verfahrens bestimmt werden. Verwenden Sie dazu das regelmäßige Gitter

$$\Omega_h := \{ (ih, jh) \mid 1 \le i, j \le n - 1 ) \}, 
\overline{\Omega}_h := \{ (ih, jh) \mid 0 \le i, j \le n ) \},$$

mit der Gitterweite  $h=1/n,\ n\in\mathbb{N}$ . Zur Diskretisierung des Laplace-Operators verwenden Sie die in der Vorlesung vorgestellte Differenzenformel mit zentralen Differenzen. Für die Diskretisierung der x-Ableitung des Konvektionsterms kann ein zentraler Differenzenquotient,

$$\cos \beta \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \approx \frac{\cos \beta}{2h} (u(x+h,y) - u(x-h,y)),$$

oder ein Upwind-Differenzenguotient

$$\cos eta \, rac{\partial u}{\partial x}(x,y) pprox \left\{ egin{array}{l} rac{\cos eta}{h} \left( u(x,y) - u(x-h,y) 
ight), & \cos eta \geq 0, \ rac{\cos eta}{h} \left( u(x+h,y) - u(x,y) 
ight), & \cos eta < 0, \end{array} 
ight.$$

verwendet werden. Analog geht man bei der Diskretisierung der y-Ableitung vor.

- a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem ohne direkte Invertierung der Matrix, also in Matlab oder Julia mit dem Backslash operator \. Bestimmen Sie die Approximationen  $u_{h,\varepsilon}$  von u für n=60 und  $\varepsilon=1,10^{-2},10^{-4}$ , indem Sie einen *Upwind-Differenzenquotienten* zur Diskretisierung des Konvektionsterms verwenden. Dabei sei  $\beta=5\pi/6$ . Plotten Sie die Lösung  $u_{h,\varepsilon}$  als Surface Plot.
- b) Verwenden Sie anstatt des *Upwind-Differenzenquotienten* nun den *zentralen Differenzenquotienten*. Vergleichen Sie die Lösung mit den Ergebnissen aus a).
- c) Wenden Sie das Verfahren auf das Poisson-Problem an:

$$-\Delta u(x,y) = f(x,y), \ (x,y) \in \Omega = (0,1)^2,$$
$$u(x,y) = g(x,y), \ (x,y) \text{ auf } \partial\Omega,$$

mit 
$$f(x,y) = -4$$
 und  $g(x,y) = x^2 + y^2$ .

20 Points