



杭州电子科技大学  
HANGZHOU DIANZI UNIVERSITY

# 基于全忆阻神经网络的复杂模式形成

杭州电子科技大学电子信息学院电子信息工程专业

指导教师：董玉姣

答辩人：丁羿然

时间：2024-6

# 目录

- 1. 研究背景及意义
- 2. 研究内容，方法和仿真
  - ▶ 2.1 三阶神经元电路模型及其状态分析
    - 2.1.1 简化 CCM 的三阶神经元电路模型
    - 2.1.2 模型的动力学机制分析
    - 2.1.3 模型的状态仿真
  - ▶ 2.2 基于三阶神经元电路的环状神经网络
    - 2.2.1 LAM 忆阻器模型
    - 2.2.2 环状网络的连接模式和数学模型
    - 2.2.3 环状网络的状态度量
    - 2.2.4 基于环状神经网络的时空图案
- 3. 总结

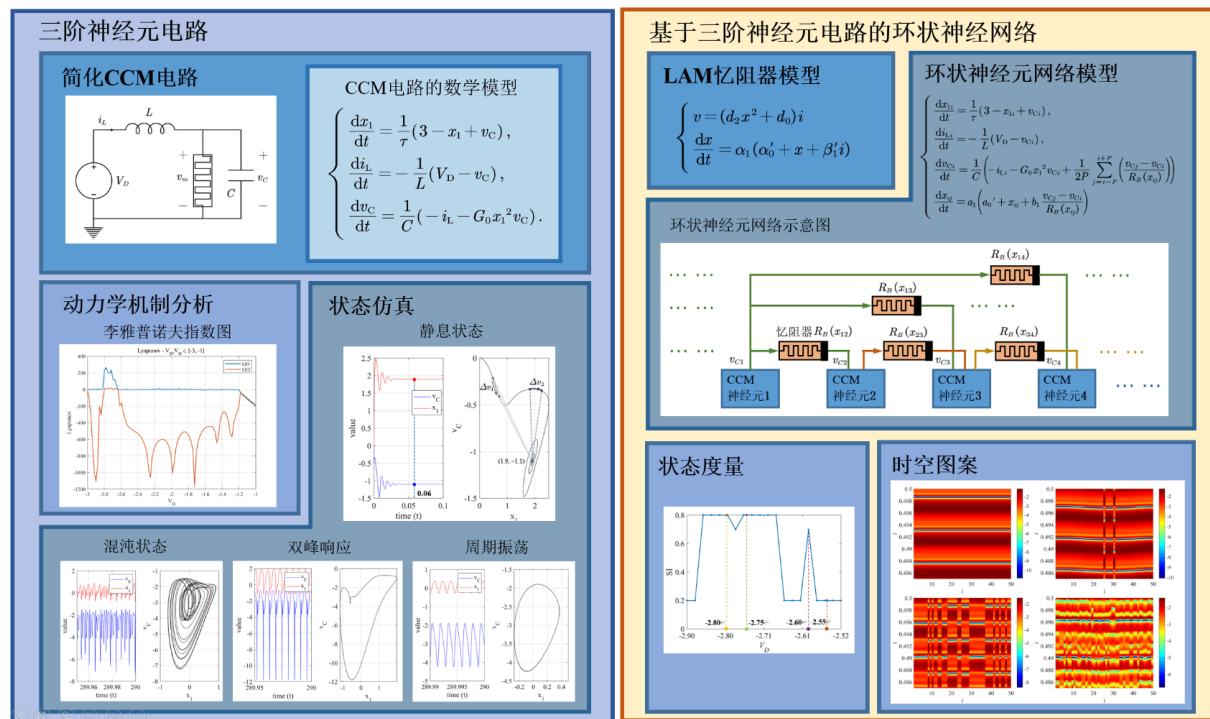


图 1: 目录结构

# 1. 研究背景及意义

霍奇金-赫胥黎(HH)神经元模型<sup>[1]</sup>及其变体是研究神经元动态响应的重要工具，但由于**异常复杂**，理论分析和计算解析解非常困难。因此，研究者构建了更**简单**的三维 Hindmarsh-Rose(HR)神经元模型，能模拟多种膜电位的放电活动，包括混沌和周期性的尖峰和爆发性放电<sup>[2-3]</sup>。研究<sup>[4]</sup>表明，神经元在“**混沌边缘**”运行，是大脑**复杂性**和**适应性**形成的条件之一。

忆阻器是一种新型电子元件，其电流状态与神经元膜电位活动模式相似。研究人员将忆阻器引入经典神经元模型，揭示了**模式转换**和**同步转换**等复杂动力学行为<sup>[5-7]</sup>。基于忆阻器的混沌电路和神经网络开发取得了显著进展<sup>[8-10]</sup>。**奇美拉状态**描述了**同步**和**异步**群集在耦合振荡器网络中的共存现象，在生物系统中有所体现<sup>[11-13]</sup>，有助于理解神经网络的复杂行为和潜在应用<sup>[14-16]</sup>。

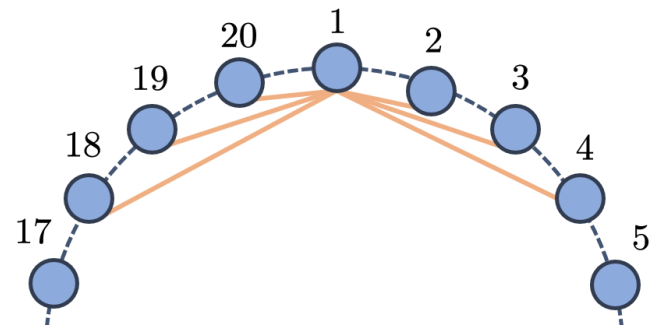


图 2: 环状网络示意图

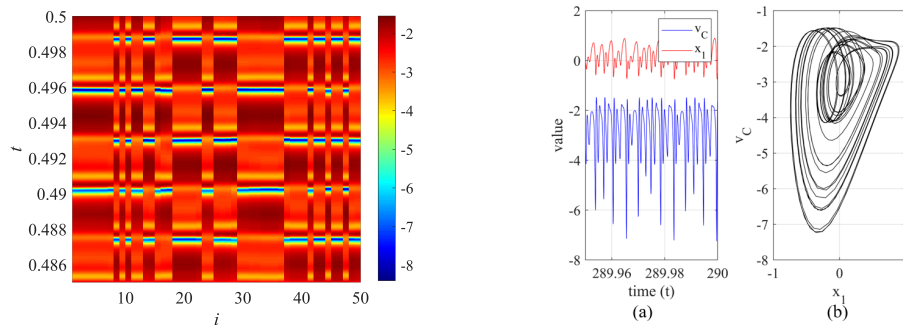


图 3: 环状网络时空分布图    图 4: 三阶神经元混沌状态仿真

## 2.1 三阶神经元电路模型及其状态分析

### 2.1.1 简化 CCM 的三阶神经元电路模型

本文旨研究全忆阻神经网络的动力学复杂模式的形成，电路需要有三阶的复杂度，并着力研究处于混沌状态的特性。考虑在局部有源区域内，根据工作点对应的状态变量范围对 CCM 的数学模型进行简化处理。采用简化后<sup>[17]</sup>的 CCM 模型，可以构建出如图 5 所示的神经元电路。该电路的数学模型可描述为：

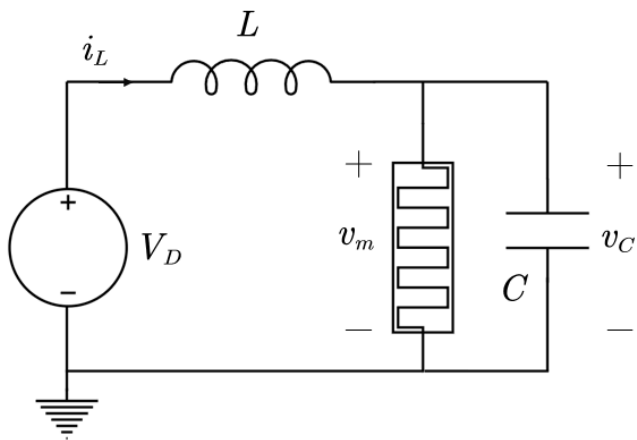


图 5: 三阶神经元电路

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{\tau}(3 - x_1 + v_C), \\ \frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{L}(V_D - v_C), \\ \frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C}(-i_L - G_0 x_1^2 v_C). \end{cases} \quad (1)$$

### 2.1.2 模型的动力学机制分析

假设(1) 中等式左侧均为0时,我们可得到该三阶电路系统的平衡点, 即

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = 3 + \hat{v}_C, \\ \hat{v}_C = V_D, \\ \hat{i}_L = -G_0 \hat{x}_1^2 \hat{v}_C \end{cases} \quad (2)$$

式(2)中可以发现, 平衡点  $Q$  的位置只与偏置电压  $V_D$  有关系。对(1)求导得到其的雅克比矩阵如下:

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau} & 0 & \frac{1}{\tau} \\ 0 & 0 & \frac{1}{L} \\ \frac{-2G_0 x_1 v_C}{C} & -\frac{1}{C} & -\frac{G_0 x_1^2}{C} \end{bmatrix} \quad (3)$$

将式(3)的  $\hat{x}_1, \hat{v}_C, \hat{i}_L$  带入(3),

可以得到系统在平衡点  $Q$  处的特征方程为

$$\lambda^3 + (\hat{x}_1^2/C + 1)\lambda^2 + ((\hat{x}_1^2 + 2\hat{x}_1 V_D)/C + 1/(CL))\lambda + 1/(CL) = 0 \quad (4)$$

因此, 系统的平衡点稳定性取决于参数  $V_D, L$  和  $C$ 。

**李雅普诺夫指数**是评估系统动态行为的重要量化工具, 它体现了系统在相空间中, 相邻轨迹的平均指数性分散或聚合程度。如果系统展示出混沌吸引子, 需要满足以下三个条件:

- 1) 存在至少一个正的李雅普诺夫指数。
- 2) 至少有一个李雅普诺夫指数为零。
- 3) 李雅普诺夫指数谱的总和为负。

这三个条件共同定义了混沌吸引子的基本属性，赋予系统在混沌状态下复杂而稳定的动态特性。对于三阶混沌系统，根据上述分析，其李雅普诺夫指数谱符号唯一，即 $(-, 0, +)$ ，满足  $\mathbf{LE1} < -\mathbf{LE3}$ 。

在仿真过程中，随参数  $V_D$  在  $-3\text{ V}$  到  $-1\text{ V}$  之间变化，李雅普诺夫指数谱如图 6 所示。其中，浅蓝色曲线表示第一李雅普诺夫指数谱  $\mathbf{LE1}$ ，红橙色曲线表示第二指数谱  $\mathbf{LE2}$ 。图示结果显示，在  $L = 0.6\text{ H}$ ， $C = 68\text{ nF}$  的条件下，参数范围 $[-2.82\text{ V}, -2.62\text{ V}]$ 内满足产生混沌的条件： $\mathbf{0} < \mathbf{LE1} < -\mathbf{LE3}$ ， $\mathbf{LE2}$  接近  $\mathbf{0}$ 。

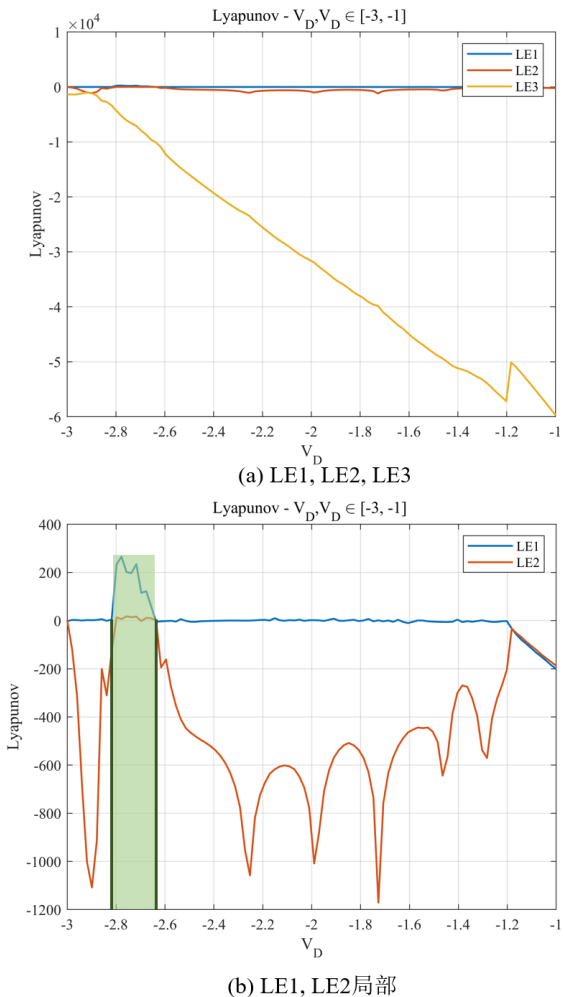


图 6: 李雅普诺夫指数图

### 2.1.3 模型的状态仿真

如图 7(a)，在左侧时域图中，蓝色、橙色的图形分别代表电压 $v_C$ ，状态变量 $x_1$ 的变化趋势。在右侧相位图体现了电压 $v_C$ 与 CCM 器件状态变量 $x_1$ 之间的关系，由此可以清晰的评估系统的动力学现象。

在特定参数( $L = 600 \text{ mH}$ ,  $C = 68 \text{ nF}$ )下，该三阶 CCM 神经元电路展现的神经行为包括：

| 状态    | 图      |
|-------|--------|
| 静息状态  | 图 7(a) |
| 周期尖峰  | 图 7(b) |
| 混沌状态  | 图 7(c) |
| 双峰响应  | 图 7(d) |
| 周期振荡  | 图 7(e) |
| 倍周期现象 | 图 7(f) |

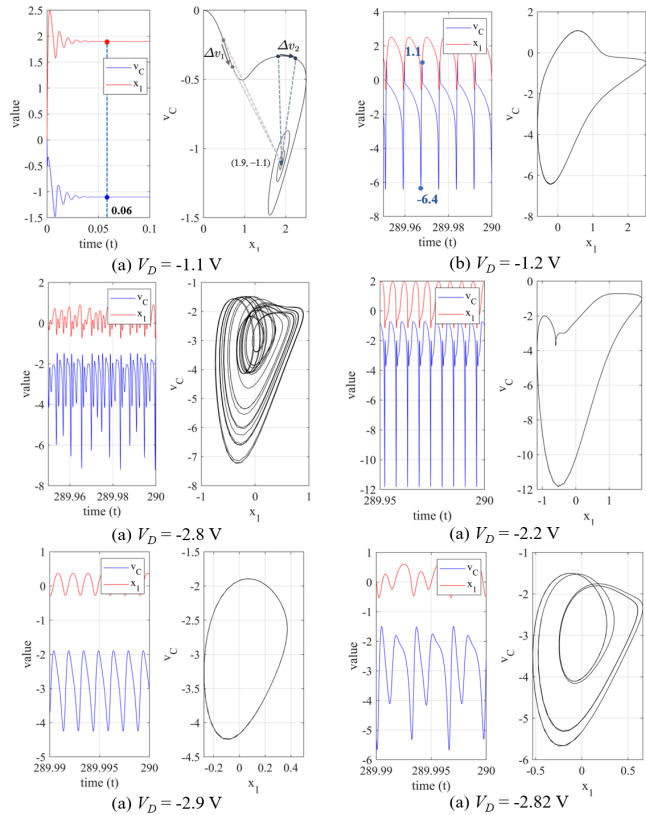


图 7:  $V_D$ 不同时的对应的模型状态

### 2.1.3 模型的状态仿真

**静息状态**如图 8(a)，设置  $V_D = -1.1$  V 时，电路初期的  $v_C, x_1$  出现振荡，随着时间发展，振荡的幅值逐渐减小，在  $t = 0.06$  秒后稳定为零。相位图从起始点  $(0, 0)$  开始，最终稳定在平衡点  $(x_Q, v_{CQ}) = (1.9, 1.1)$  处，此时神经元处于静息状态。

**混沌状态**如图 8(b)。设置  $V_D = -2.8$  V 时的时域中，相关变量  $v_C, x_1$  呈现出非周期性和不规则性，表现为混沌的尖峰振动。而在相位图中则展现了在这种混沌状态下，神经网络边界性和遍历性特征。

**周期尖峰**如图 8(c,d)。如图 8(c)所示设置  $V_D = -1.2$  V 时，时域上的波形出现了尖峰现象，相位图显示出了极限环。如图 8(d)所示，进一步调整  $V_D = -1.3$  V，一个周期内的尖峰的形态发生变化，相位图的极限环呈现扩展趋势。

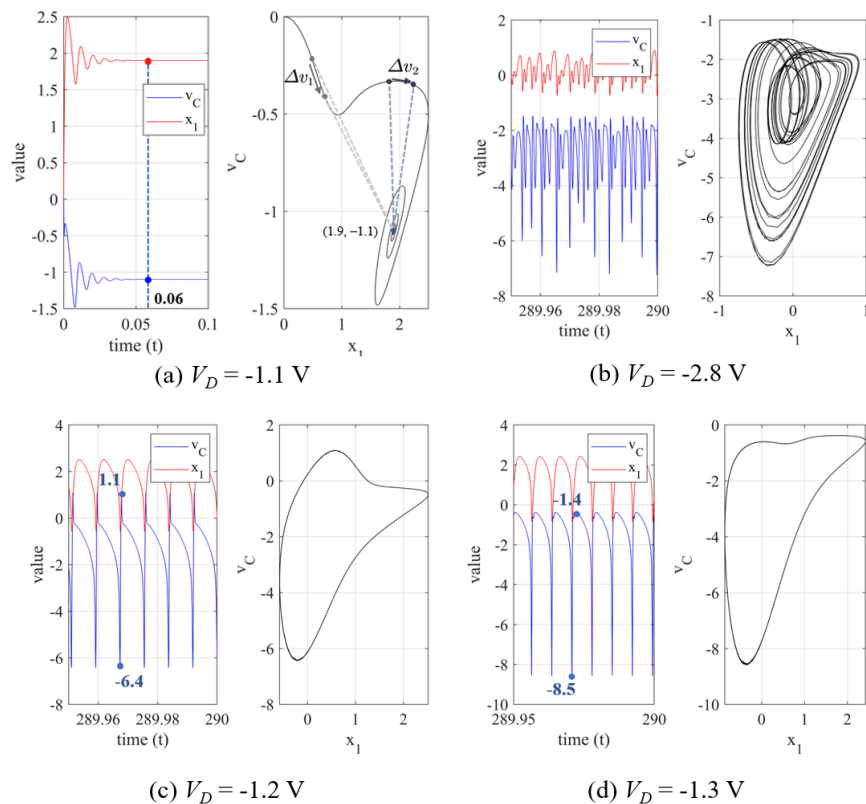


图 8:  $V_D$  不同时的对应的模型状态



## 2.1.3 模型的状态仿真

**双峰响应**如图 9(a)，设置  $V_D = -2.2$  V 时，时域上观察到两种不同振幅的尖峰振荡呈现交替的模式。

**周期振荡**如图 9(b,c)，设置  $V_D = -2.9$  V 和  $-2.85$  V 时， $v_C$  波形恢复为稳定的周期振荡现象。几乎所有生物的大脑结构中都存在能够产生振荡的神经元结构。研究人员往往认为电信号的周期性波动在神经元的传递信息过程中起着非常关键的作用。

**倍周期现象**如图 9(d)，是混沌系统中常见的一种动力学行为，表现为系统的**周期性行为**在参数变化时发生的**倍增**。具体来说，当系统参数逐渐变化到某个临界值时，系统的周期解会从原来的周期 $T$ 变为周期 $2T$ ，然后再变为 $4T, 8T$ ，依此类推，最终进入混沌状态。当外加偏置电压  $V_D$  为  $-2.82$  V 时，如图 9(d)所示，在  $t \in [299.99, 300]$  时， $v_C$  波形的周期约为 3 个，相位图显示神经元处于周期振荡状态，周期为  $V_D = -2.9$  V (图 9(c))时的 2 倍。

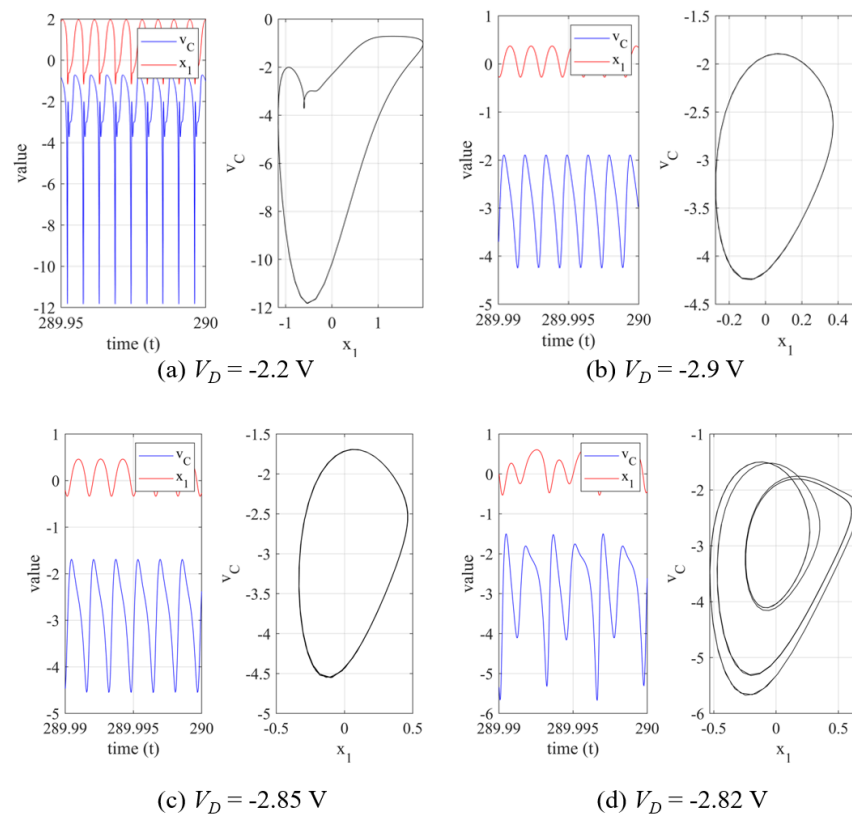


图 9:  $V_D$  不同时的对应的模型状态

## 2.2 基于三阶神经元电路的环状神经网络

### 2.2.1 LAM 忆阻器模型

根据基于 Chua's 展开定理<sup>[18]</sup>设计的忆阻系统<sup>[19]</sup>的数学框架，一个通用的电流控制型忆阻器可以描述为：

$$\begin{cases} v = R_M(x)i = \left( \sum_{k=0}^r d_k x^k \right) i \\ \frac{dx}{dt} = f(x, i) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + \sum_{k=0}^m \beta_k i^k + \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^q \delta_{kl} i^k x^l \end{cases} \quad (5)$$

经过近似和化简<sup>[20]</sup>，得到简单的 S 型电流控制 LAM 模型如下

$$\begin{cases} v = (d_2 x^2 + d_0) i \\ \frac{dx}{dt} = \alpha_1 (\alpha'_0 + x + \beta'_1 i) \end{cases} \quad (6)$$

## 2.2.2 环状网络的连接模式和数学模型

考虑到研究了上述忆阻器构成的环状三阶神经网络。环形连接模式如图 10 所示，其中最后一个子网络连接到第一个子网络，形成一个完全封闭的环网络。环网络由  $N$  个子网络组成， $x_{1i}$  表示第  $i$  个子网络的状态变量。

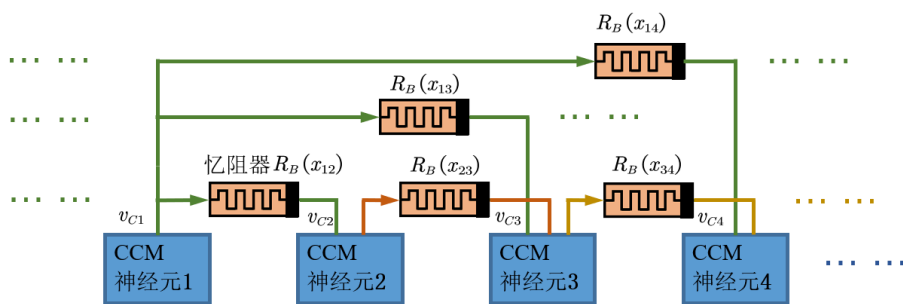


图 10: 环状神经网络示意图

由此，我们得到如下方程：

$$\begin{cases} \frac{dx_{1i}}{dt} = \frac{1}{\tau}(3 - x_{1i} + v_{Ci}), \\ \frac{di_{Li}}{dt} = -\frac{1}{L}(V_D - v_{Ci}), \\ \frac{dv_{Ci}}{dt} = \frac{1}{C}(-i_{Li} - G_0 x_{1i}^2 v_{Ci} \\ \quad + \frac{1}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} \left( \frac{v_{Cj} - v_{Ci}}{R_B(x_{ij})} \right)) \\ \frac{dx_{ij}}{dt} = a_1 \left( a_0' + x_{ij} + b_1 \frac{v_{Cj} - v_{Ci}}{R_B(x_{ij})} \right) \end{cases} \quad (7)$$

其中  $R_B(x_{ij}) = (d_2 x_{ij}^2 + d_0)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ，每个三阶神经元与其最近的  $2P$  个邻居对称耦合，即与其左右邻居中的  $P$  个相互作用，并且通过  $x_{ij}$  相互连接。

### 2.2.3 环状网络的状态度量

为了定量描述环状三阶神经网络中揭示的**集体行为**，采用不一致性强度(SI)<sup>[20,21]</sup>。定义变换变量为  $w_{1i} = x_{1(i+1)} - x_{1i}$ ，对于  $i = 1, 2, \dots, N$ 。根据文献<sup>[20,22]</sup>的分析结果，将神经元子网络的数量分为  $M$  个相等长度的箱，即  $n = N/M$ 。定义局部标准差  $\sigma(m)$  为

$$\sigma(m) = \left\langle \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=n(m-1)+1}^{mn} (w_{1j} - \langle w_1 \rangle)^2} \right\rangle_t, \quad (8)$$

其中  $m = 1, 2, \dots, M$ ),  $\langle w_1 \rangle = (1/N) \sum_{i=1}^N w_{1i}(t)$ ,  $\langle \dots \rangle_t$  表示时间平均。因此，SI 可以通过以下方式计算

$$SI = 1 - \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \Theta[\delta - \sigma(m)] \quad (9)$$

$V_D$  在  $[-3V, -1V]$  下的 SI 呈现在图 11 中。大于  $-2.89$  的点都处于奇美拉态，在  $[-2.84V, -2.70V]$  的情况下，环状网络比较**倾向于部分不同步**，与前文针对李雅普诺夫指数图的分析结论一致。其余点**倾向于部分同步**。

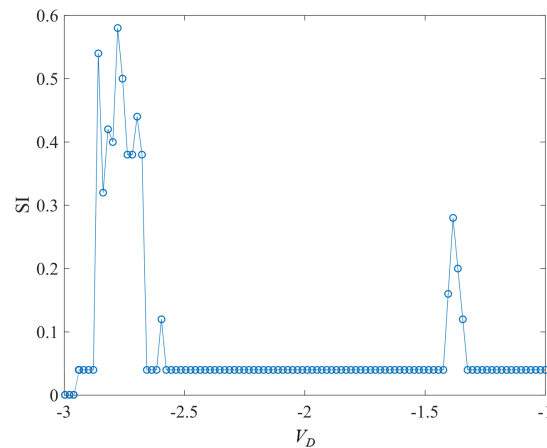


图 11: 环状网络不一致性强度

## 2.2.4 基于环状神经网络的时空图案

在这里，考虑三阶神经元电压 $V_D$ ，以数值方式展示了当三阶神经元电压 $V_D$ 变化时环网络中奇美拉(或多重奇美拉)、同步和不同步状态的转变。

- $V_D$ 调整为  $-2.55$  V，此时  $SI = 0.2$ ，为同步状态。图 12(a)显示环网络处于一个有序的单一一致状态
- $V_D$ 调整为  $-2.60$  V 时，此时  $SI = 0.7$ ，为部分同步的奇美拉态。图 12(b)显示，环网络以一种不完全同步的状态振荡。序号为 25 和 30 的节点振荡处于不同步状态，而其余子网络几乎以一致或空间同步的状态振荡。
- $V_D$ 调整为  $-2.75$  V 时，此时  $SI = 0.8$ ，为部分不同步的奇美拉态。图 12(c)显示，环网络以一种不完全同步的状态振荡。有两组不完全相邻的节点群(组 1 数量:组 2 数量=1:1)振荡处于不同步状态，每个节点群几乎以一致的状态振荡
- $V_D$ 调整为  $-2.80$  V 时，此时计算的  $SI = 0.8$ ，为不同步状态。

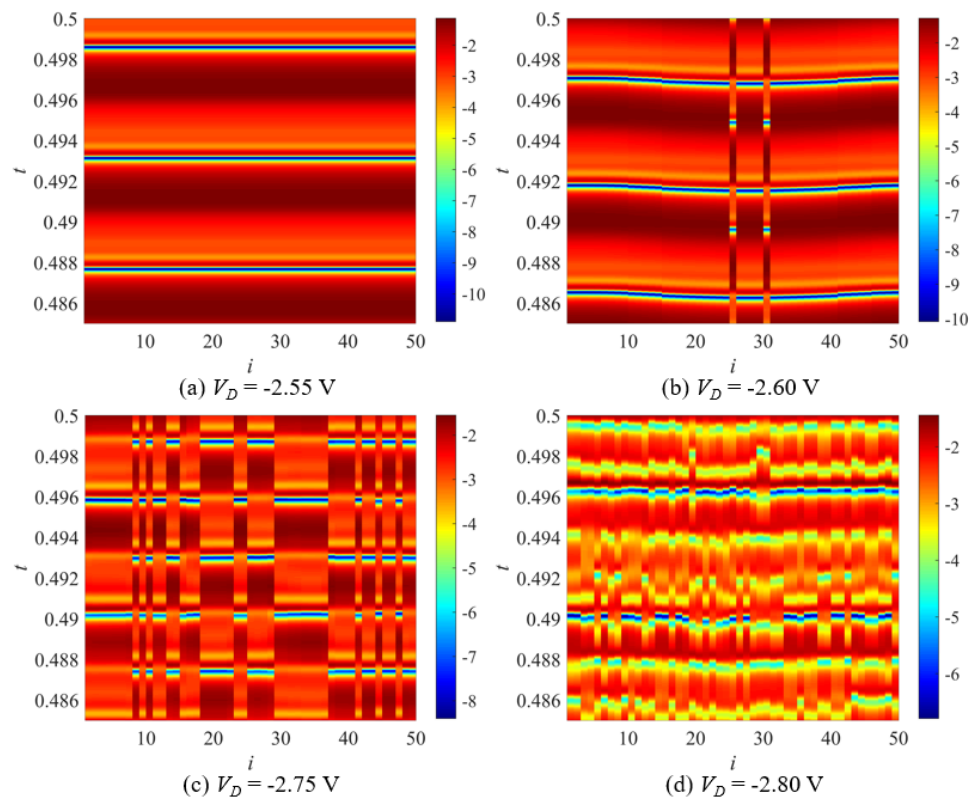


图 12:  $V_D$ 不同时的对应的时空图案

### 3. 总结

本文基于简化的 CCM 模型，验证了一种新型的**三阶神经元电路**。该电路在不同输入电压  $V_D$  控制下展示出丰富的动力学行为。通过**相空间轨迹**和 **Lyapunov 指数**分析，研究了系统从有序到混沌的转变过程。相空间轨迹揭示了不同动力学状态的形态，而 Lyapunov 指数分析显示系统的稳定性和混沌特性。具体来说，当 Lyapunov 指数为(+,0,-)时，系统表现出混沌行为，其他情况下则为周期性和稳定状态。仿真验证表明，该电路展现了**静息状态、周期尖峰、混沌状态和双峰响应**等多种动力学行为，支持了 Lyapunov 指数的推断。

在此基础上，本文引入 **LAM 忆阻器模型**，设计了一个**环状三阶神经元网络**。该网络由  $N$  个三阶神经元电路组成，每个神经元与其最近的  $2P$  个邻居对称耦合，形成封闭环结构。通过仿真研究了环状网络在不同初始条件下的动态行为，并采用**不一致性强度(SI)**等统计度量方法定量描述网络状态。仿真结果表明，通过调节电压  $V_D$ ，该网络能够产生**同步、不同步、部分同步和部分不同步的奇美拉状态**。时空图像仿真提供了这些复杂状态的直观展示，支持了对网络动态行为的理解。

Thank you for watching.

答辩人：丁羿然

指导老师：董玉姣

## 附录

- [1]. Hodgkin A L, Huxley A F. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve[J]. The Journal of physiology, 1952, 117(4): 500.
- [2]. Gu H. Biological experimental observations of an unnoticed chaos as simulated by the Hindmarsh-Rose model[J]. PLoS One, 2013, 8(12): e81759.
- [3]. Gu H, Pan B, Chen G, et al. Biological experimental demonstration of bifurcations from bursting to spiking predicted by theoretical models[J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 78(1): 391-407.
- [4]. Sangwan V K, Lee H S, Bergeron H, et al. Multi-terminal memtransistors from polycrystalline monolayer molybdenum disulfide[J]. Nature, 2018, 554(7693): 500-504.
- [5]. Majhi S, Perc M, Ghosh D. Chimera states in a multilayer network of coupled and uncoupled neurons[J]. Chaos: an interdisciplinary journal of nonlinear science, 2017, 27(7).
- [6]. Wang Y, Ma J, Xu Y, et al. The electrical activity of neurons subject to electromagnetic induction and Gaussian white noise[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2017, 27(02): 1750030.
- [7]. Xu Y, Jia Y, Ge M, et al. Effects of ion channel blocks on electrical activity of stochastic Hodgkin–Huxley neural network under electromagnetic induction[J]. Neurocomputing, 2018, 283: 196-204.
- [8]. Itoh M, Chua L O. Memristor oscillators[J]. International journal of bifurcation and chaos, 2008, 18(11):3183-3206.
- [9]. 包伯成, 胡文, 许建平, 等. 忆阻混沌电路的分析与实现[J]. 物理学报, 2011, 60(12):8.



- [10]. Teng L, Iu H H C, Wang X, et al. Chaotic behavior in fractional-order memristor-based simplest chaotic circuit using fourth degree polynomial[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 77(1-2):231-241.
- [11]. Bera B K, Majhi S, Ghosh D, et al. Chimera states: effects of different coupling topologies[J]. *Europhysics Letters*, 2017, 118(1): 10001.
- [12]. Wojewoda J, Czolczynski K, Maistrenko Y, et al. The smallest chimera state for coupled pendula[J]. *Scientific reports*, 2016, 6(1): 34329.
- [13]. Rakshit S, Bera B K, Perc M, et al. Basin stability for chimera states[J]. *Scientific reports*, 2017, 7(1): 2412.
- [14]. Abrams D M, Strogatz S H. Chimera states for coupled oscillators[J]. *Physical review letters*, 2004, 93(17): 174102.
- [15]. Dudkowski D, Maistrenko Y, Kapitaniak T. Different types of chimera states: An interplay between spatial and dynamical chaos[J]. *Physical Review E*, 2014, 90(3): 032920.
- [16]. Majhi S, Perc M, Ghosh D. Chimera states in uncoupled neurons induced by a multilayer structure[J]. *Scientific reports*, 2016, 6(1): 39033.
- [17]. Guo H-M, Liang Y, Dong Y-J, 等. Simplification of Chua corsage memristor and hardware implementation of its neuron circuit[J]. *Acta Physica Sinica*, 2023, 72(7): 070501.
- [18]. Chua L. Resistance switching memories are memristors[J]. *Handbook of memristor networks*, 2019: 197-230.
- [19]. Ascoli A, Slesazeck S, Tetzlaff R, et al. Unfolding the local activity of a memristor[C]//2014 14th International Workshop on Cellular Nanoscale Networks and their Applications (CNNA). *IEEE*, 2014: 1-2.
- [20]. Rakshit S, Bera B K, Perc M, et al. Basin stability for chimera states[J]. *Scientific reports*, 2017, 7(1): 2412.
- [21]. Gopal R, Chandrasekar V K, Venkatesan A, et al. Observation and characterization of chimera states in coupled dynamical systems with nonlocal coupling[J]. *Physical review E*, 2014, 89(5): 052914.
- [22]. Majhi S, Perc M, Ghosh D. Chimera states in uncoupled neurons induced by a multilayer structure[J]. *Scientific reports*, 2016, 6(1): 39033.