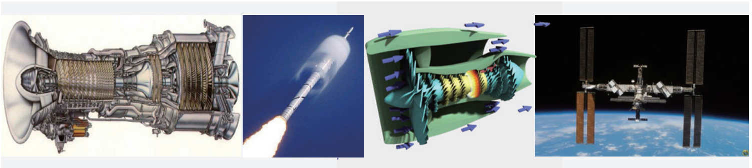
热工基础 之

第8章　导热



机械与动力工程学院

曹　　军

2020年10月

内容

热工基础 之 传热学

8-1

导热的微分方程和导热系数

导热的微观机理

气体

气体分子不规则热运动时相互碰撞的结果。

固体

导电固体：　　通过自由电子的运动实现。

非导电固体：　通过晶格结构的振动，及原子、分子及其平衡位置附近的振动来实现。

液体

与气体类似　or　弹性声波

温度场（Temperature field）

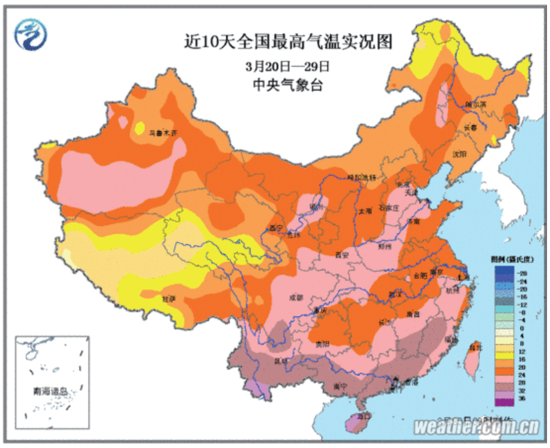
温度场：在各个时刻物体内各点温度所组成的集合，又被称为温度分布(Temperature distribution)。

一般来说，温度场是坐标与时间的函数，即

$$t = f(x, y, z, \tau)$$

其中 x, y, z 为空间坐标，τ 为时间坐标。

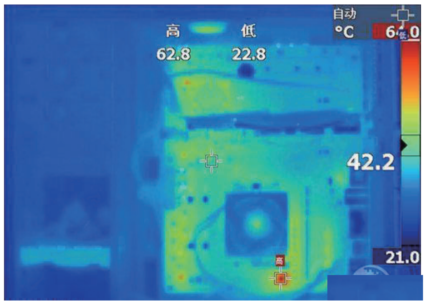
温度场（Temperature field）



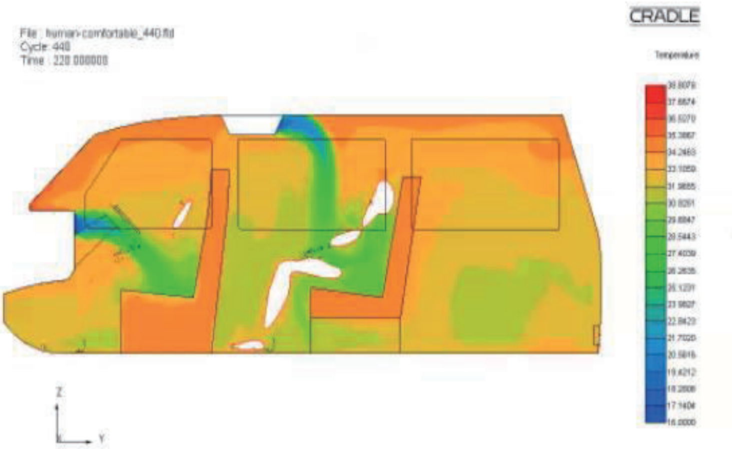
温度场（Temperature field）

温度场
- 稳态温度场或定常温度场 (Steady temperature field) $t = f(x, y, z)$
- 非稳态温度场或瞬态温度场 (Unsteady temperature field) $t = f(x, y, z, \tau)$

稳态温度场



瞬态温度场



等温面与等温线

等温面(Isothermal surface)

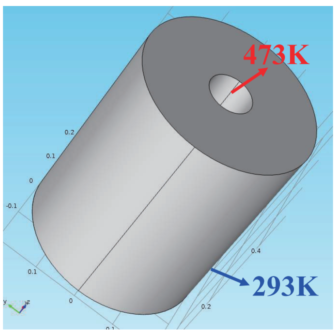
温度场中同一瞬间相同温度各点连成的面。

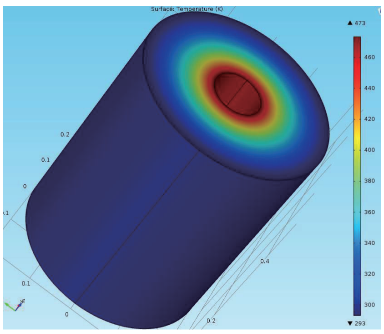
等温线(Isotherm)

在任何一个二维的截面上，等温面表现为等温线。

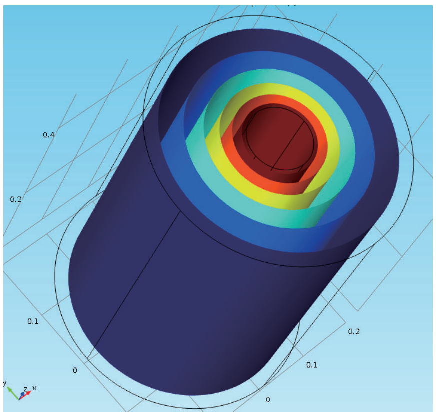
用一个平面与各等温面相交，在这个平面上得到一个等温线簇

等温面与等温线

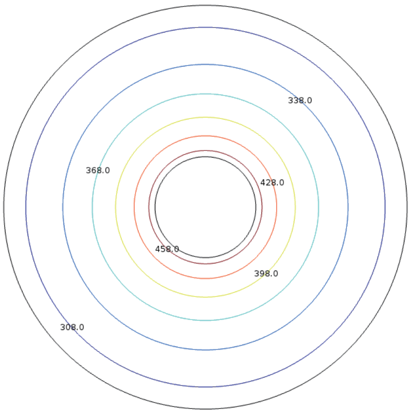




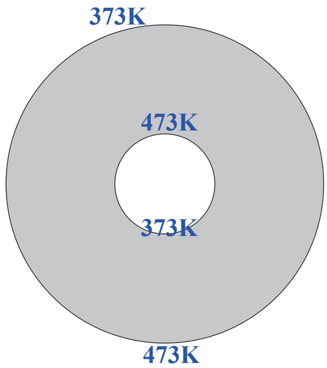
等温面

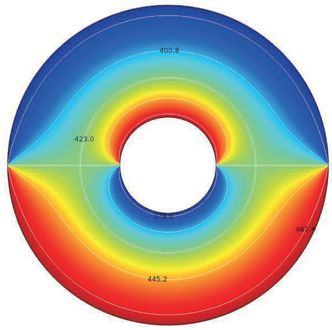


等温线

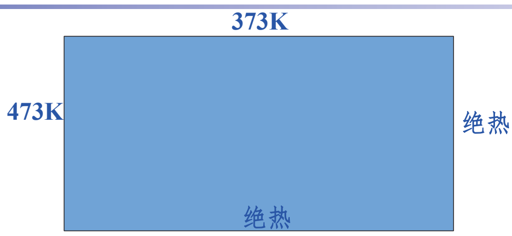


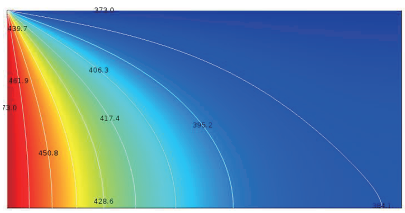
温度场分布及等温线





温度场分布及等温线



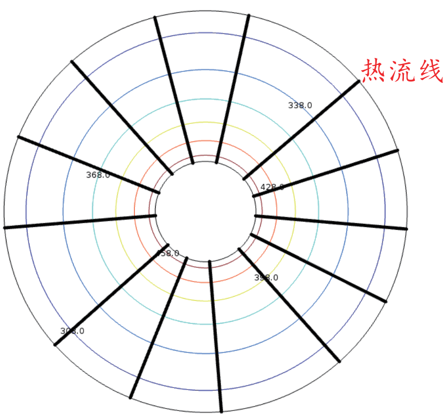


等温面与等温线

等温面与等温线的特点

- 温度不同的等温面或等温线彼此不能相交；
- 在连续的温度场中，等温面或等温线不会中断，它们或者是物体中完全封闭的曲面（曲线），或者终止于物体的边界上；
- 若每条等温线间的温度间隔相等时，等温线的疏密可反映出不同区域导热热流密度的大小。

等温线与热流线



导热基本定律

傅里叶导热定律(Fourier's Law of heat conduction)

在导热过程中，单位时间内通过给定截面的导热量，正比于垂直该截面方向上的温度变化率和截面面积，而热量传递的方向则与温度升高的方向相反。

$$\Phi = -\lambda A \frac{\partial t}{\partial x}$$

Φ：热流量(Heat transfer rate)，单位 W

A：平面面积，单位 m^2

λ：热导率，又称导热系数(Thermal conductivity), 单位：$W/(m\cdot K)$

负号表示热量传递方向与温度升高的方向相反

导热基本定律

热流量 $\Phi=-\lambda A\dfrac{\partial t}{\partial x}$　　热流密度 $q=-\lambda\dfrac{\partial t}{\partial x}$

$$\vec{q}=-\lambda \mathrm{grad}t=-\lambda\frac{\partial t}{\partial x}\vec{n}$$

$\mathrm{grad}t$ 空间某点的温度梯度

$\vec{n}$ 通过该点的等温线上的法向单位矢量，指向温度升高的方向。

导热问题的数学描写

- 热传导研究的重要任务就是确定导热物体内部的温度分布，即确定 $t=f(x, y, z, t)$ 的具体函数关系。
- 直接利用Fourier定律可以计算简单形状物体的导热问题，稳定的平板导热、圆筒壁导热、球壁导热中的热流和温度分布
- 对复杂几何形状和不稳定情况下的导热问题，仅用Fourier定律往往无法解决，必须以能量守恒定律和Fourier定律为基础，建立导热微分方程式，然后结合具体条件求得导热体内部的温度分布。

导热问题的数学描写

导热微分方程Partial differential equation of heat conduction

根据能量守恒定律与傅立叶定律，建立导热物体中的温度场应满足的数学表达式，是所有导热物体的温度场都要满足的通用方程。

定解条件 Condition for unique solution

对于具体问题所规定的相应时间与边界的条件

导热问题的数学描写 → 导热微分方程 / 定解条件

导热问题的数学描写

假设条件：

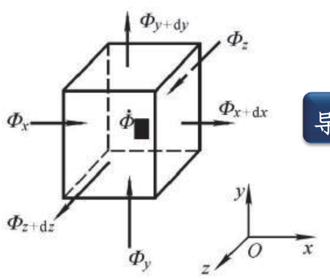
1. 导热体（固体或静止流体）由各向同性的均匀材料组成；
2. 材料的热导率 λ、密度 ρ 和比热容 Cp 都是常数；
3. 导热体内部存在热源（如电热元件、凝固潜热等）

导热微分方程式的导出步骤：

(1) 根据物体的形状，选择合适的坐标系，选取物体中的微元体作为研究对象；
(2) 分析导热过程中进、出微元体边界的能量及微元体内部的能量变化；
(3) 根据能量守恒定律，建立微元体的热平衡方程式；
(4) 根据傅里叶定律及已知条件，对热平衡方程式进行归纳整理，最后得出导热微分方程式。

导热微分方程

导入　　导出



根据能量守恒定律

[微元体热量的积累]= [导入微元体的热量]
－ [导出微元体的热量]
＋ [微元体内热源产生的热量]

导热微分方程的推导

导入

$$\Phi_x=-\lambda\frac{\partial t}{\partial x}dydz$$

$$\Phi_y=-\lambda\frac{\partial t}{\partial y}dxdz$$

$$\Phi_z=-\lambda\frac{\partial t}{\partial z}dxdy$$

导出

$$\Phi_{x+dx}=\Phi_x+\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx=\Phi_x+\frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda\frac{\partial t}{\partial x}dydz\right)dx$$

$$\Phi_{y+dy}=\Phi_y+\frac{\partial\Phi}{\partial y}dy=\Phi_y+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\lambda\frac{\partial t}{\partial y}dxdz\right)dy$$

$$\Phi_{z+dz}=\Phi_z+\frac{\partial\Phi}{\partial z}dz=\Phi_z+\frac{\partial}{\partial z}\left(-\lambda\frac{\partial t}{\partial z}dxdy\right)dz$$

导热微分方程的推导

导入： $\Phi_x+\Phi_y+\Phi_z$

导出：

$$\Phi_x+\frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda\frac{\partial t}{\partial x}dydz\right)dx+\Phi_y+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\lambda\frac{\partial t}{\partial y}dxdz\right)dy+\Phi_z+\frac{\partial}{\partial z}\left(-\lambda\frac{\partial t}{\partial z}dxdy\right)dz$$

微元体内热源生成的热量为： $\dot{\Phi}\,dxdydz$

微元体热量的积累为： $\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}dxdydz$

导热微分方程的推导

[微元体热量的积累]=[导入微元体的热量]

−[导出微元体的热量]

+[微元体内热源产生的热量]

$$\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}dxdydz=\Phi_x+\Phi_y+\Phi_z$$

$$-\left[\Phi_x+\frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda\frac{\partial t}{\partial x}dydz\right)dx+\Phi_y+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\lambda\frac{\partial t}{\partial y}dxdz\right)dy+\Phi_z+\frac{\partial}{\partial z}\left(-\lambda\frac{\partial t}{\partial z}dxdy\right)dz\right]$$

$$+\dot{\Phi}\,dxdydz$$

导热微分方程

$$\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}dxdydz=\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\frac{\partial t}{\partial x}dxdydz)+\frac{\partial}{\partial y}(\lambda\frac{\partial t}{\partial y}dxdydz)+\frac{\partial}{\partial z}(\lambda\frac{\partial t}{\partial z}dxdydz)+\dot{\Phi}\,dxdydz$$

三维非稳态导热微分方程式(笛卡尔坐标)

$$\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial z}\right)\right]+\dot{\Phi}$$

导热微分方程建立了导热过程中物体的温度随时间和空间变化的函数关系。

导热微分方程的简化

1）当导热系数λ为常数时

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{\lambda}{\rho c}\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)+\frac{\dot{\Phi}}{\rho c}$$ 或写成 $$\frac{\partial t}{\partial \tau}=a\nabla^2 t+\frac{\dot{\Phi}}{\rho c}$$

式中，∇^2是拉普拉斯算子，在直角坐标系中有：

$$\nabla^2 t=\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

$$a=\frac{\lambda}{\rho c}$$

◆ 热扩散率或热扩散系数，也称导温系数，单位为m^2/s。

◆ 热扩散率a是材料传播温度变化能力大小的指标。

导热微分方程的简化

2）当λ为常数，无内热源时：

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{\lambda}{\rho c}\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)$$ 或写成 $$\frac{\partial t}{\partial \tau}=a\nabla^2 t$$

3）常物性、稳态导热时：

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{\lambda}{\rho c}\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)+\frac{\dot{\Phi}}{\rho c} \Rightarrow \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}+\frac{\dot{\Phi}}{\lambda}=0$$

4）常物性、无内热源，稳态导热时：

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}=0$$

柱坐标和球坐标系下导热微分方程

柱坐标系

$$\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r\frac{\partial t}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial \varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial z}\right)+\dot{\Phi}$$

球坐标系

$$\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\lambda\sin\theta\frac{\partial t}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial \varphi}\right)+\dot{\Phi}$$

导热微分方程

$$\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial z}\right)\right]+\dot{\Phi}$$

非稳态项　　扩散项　　源项

常物性，无内热源的一维稳态导热问题

$$\frac{d^2 t}{\partial x^2}=0$$

导热微分方程的定解条件

•导热微分方程是描述导热过程共性的数学表达式。

•为了获得满足某一具体导热问题的温度分布，必须给出用以表征该特定问题的一些附加条件。

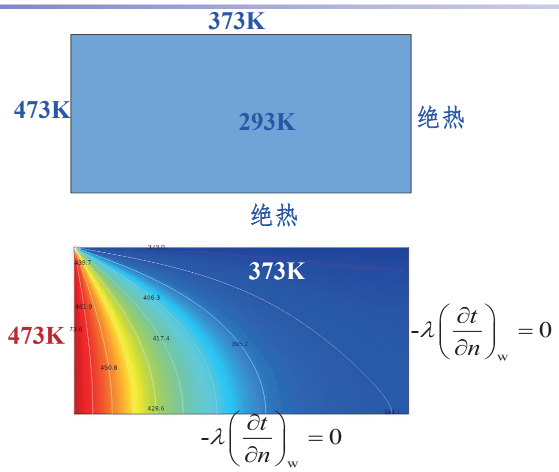
定解条件

◆ 使微分方程获得适合某一特定问题的解的附加条件。

非稳态导热问题的定解条件 → 初始条件Initial condition；边界条件 Boundary condition

稳态导热问题的定解条件 → 边界条件

初始条件与边界条件的区别



导热问题的三类边界条件

1. 第一类边界条件　$t_w=f(x,y,z,\tau)$

给出物体边界上的温度分布及其随时间的变化规律

2. 第二类边界条件　$q_w=f(x,y,z,\tau)$　$q_w=-\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_w$

给出物体边界上的热流密度分布及其随时间的变化规律

3. 第三类边界条件

给出与物体表面进行对流换热的流体温度t_f及表面传热系数h

$$-\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_w=h(t_w-t_f)$$

工欲善其事，必先利其器

导热系数

◆ 数值上等于 单位温度梯度作用下物体内 热流密度 矢量的模

$$\lambda=\frac{|\vec{q}|}{\left|\frac{\partial t}{\partial x}\vec{n}\right|}$$

◆ 导热系数的数值取决于物质的种类和温度等因素。

◆ 把导热系数小的材料称为保温材料，隔热材料或者绝热材料

$\lambda_{金属}>\lambda_{非金属};$　　$\lambda_{固相}>\lambda_{液相}>\lambda_{气相}$

一些典型材料的导热系数

纯金属	50--415	W/m·K
合金	12--120	W/m·K
非金属固体	1--40	W/m·K
液体(非金属)	0.17--0.7	W/m·K
绝热材料	0.03--0.12	W/m·K
气体	0.007--0.17	W/m·K

注：多孔材料的导热系数一般指它的表观导热系数，或称作折算导热系数

工程导热材料的一般分类

◆均匀，各向同性	常见大部分材料
◆均匀，各向异性	木材，石墨等
◆不均匀，各向同性	空心砖等
◆不均匀，各向异性	航空材料等

热工基础 之 传热学

8-2

稳态导热

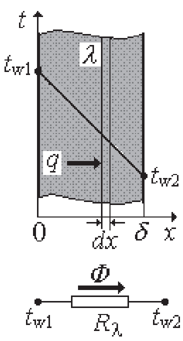
单层平壁

建筑墙体

单层平壁的导热

假 设

- 平壁的表面面积为A、厚度为δ、热导率λ为常数、无内热源。
- 平壁两侧表面分别保持均匀恒定的温度 t_{w1}、t_{w2}，且 $t_{w1} > t_{w2}$。
- 选取坐标轴x与壁面垂直



导热微分方程式： $\frac{d^2 t}{dx^2} = 0$

边界条件： $x = 0\,,\ t = t_{w1}$
$x = \delta\,,\ t = t_{w2}$

积分求解得平壁内的温度分布为： $t = \frac{t_{w2} - t_{w1}}{\delta} x + t_{w1}$

单层平壁的导热

当热导率λ为常数时，平壁内的温度呈线性分布，温度分布曲线的斜率为：

$$\frac{dt}{dx} = \frac{t_{w2} - t_{w1}}{\delta}$$

通过平壁的热流密度可由傅立叶定律得出：

$$q = -\lambda \frac{dt}{dx} = \lambda \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\delta}$$

通过整个平壁的热流量为 ：

$$\Phi = Aq = A\lambda \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\delta}$$

稳态法测量导热系数的依据

对于给定材料和厚度的平壁，

- 施加已知的热流密度，
- 通过测定平壁两侧的温差，

即可得到实验条件下的导热系数。

$$q=\lambda\frac{\Delta t}{\delta} \Rightarrow \lambda=\frac{q\delta}{\Delta t}$$

稳态法测导热系数的主要依据

热阻的概念

转移过程的共同规律

$$\text{过程中的转移量}=\frac{\text{过程的动力}}{\text{过程的阻力}}$$

对于热量传递而言，转移量即为热流量

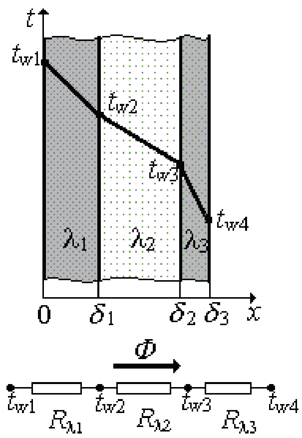
通过整个平壁的热流量为 ：

$$\Phi=Aq=A\lambda\frac{t_{w1}-t_{w2}}{\delta}=\frac{t_{w1}-t_{w2}}{\dfrac{\delta}{A\lambda}}=\frac{\Delta t}{R}$$

热转移过程的阻力称为热阻 $R=\dfrac{\delta}{A\lambda}$

多层平壁

温度场的计算—多层平壁的导热



$$\Phi=\frac{t_{w1}-t_{w2}}{\dfrac{\delta_1}{A\lambda_1}}=\frac{t_{w1}-t_{w2}}{R_1}$$

$$\Phi=\frac{t_{w2}-t_{w3}}{\dfrac{\delta_2}{A\lambda_2}}=\frac{t_{w2}-t_{w3}}{R_2}$$

$$\Phi=\frac{t_{w3}-t_{w4}}{\dfrac{\delta_3}{A\lambda_3}}=\frac{t_{w3}-t_{w4}}{R_3}$$

多层平壁的导热

$$\Phi=\frac{t_{w1}-t_{w2}}{\dfrac{\delta_1}{A\lambda_1}} \Rightarrow t_{w1}-t_{w2}=\Phi\cdot\frac{\delta_1}{A\lambda_1}$$

$$\Phi=\frac{t_{w2}-t_{w3}}{\dfrac{\delta_2}{A\lambda_2}} \Rightarrow t_{w2}-t_{w3}=\Phi\cdot\frac{\delta_2}{A\lambda_2}$$

$$\Phi=\frac{t_{w3}-t_{w4}}{\dfrac{\delta_3}{A\lambda_3}} \Rightarrow t_{w3}-t_{w4}=\Phi\cdot\frac{\delta_3}{A\lambda_3}$$

三式左右两边分别相加

$$t_{w1}-t_{w4}=\Phi\left(\frac{\delta_1}{A\lambda_1}+\frac{\delta_2}{A\lambda_2}+\frac{\delta_3}{A\lambda_3}\right)$$

多层平壁的导热计算—以热阻形式表示

$$\Phi=\frac{t_{w1}-t_{w4}}{\dfrac{\delta_1}{A\lambda_1}+\dfrac{\delta_2}{A\lambda_2}+\dfrac{\delta_3}{A\lambda_3}}=\frac{t_{w1}-t_{w4}}{R_1+R_2+R_3}$$

对于*n*层平壁的稳态导热有：

$$\Phi=\frac{t_{w1}-t_{w(n+1)}}{\sum_{i=1}^{n}R_{\lambda i}}$$

单层圆筒壁

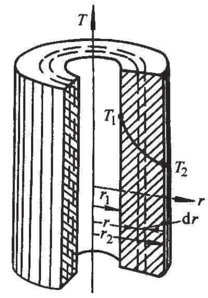
假 设

- 单层圆筒内外半径分别为r1, r2，内外表面温度分别为t1, t2。
- 无内热源，导热系数为常数。

单层圆筒壁的导热

导热微分方程式 $\frac{d}{dr}[r\frac{dt}{dr}]=0$

边界条件 $r=r_1$，$t=t_1$
$r=r_2$，$t=t_2$



圆筒壁内的温度分布为：

$$t=t_1+(t_2-t_1)\frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}$$

单层圆筒壁的导热

热流密度： $q=-\lambda\frac{dt}{dr}=\frac{\lambda}{r}\frac{t_1-t_2}{\ln(r_2/r_1)}$

- 径向热流密度不等于常数，而是r的函数，随着r的增加，热流密度逐渐减小。

- 对于稳态导热，通过整个圆筒壁的热流量是不变的

$$\Phi=2\pi rl\cdot q=2\pi l\lambda\frac{t_1-t_2}{\ln(r_2/r_1)}=\frac{t_1-t_2}{\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi l\lambda}}=\frac{\Delta t}{R}$$

整个圆筒壁的导热热阻：

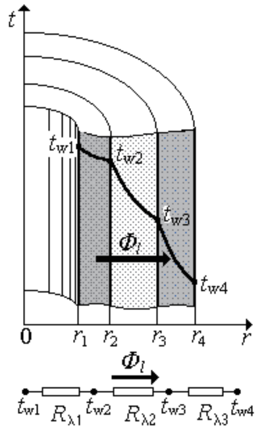
$$R=\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi l\lambda}=\frac{\ln(d_2/d_1)}{2\pi l\lambda}$$

多层圆筒壁的导热

单位长度三层圆筒壁的导热热流量为：

$$\Phi_l=\frac{t_{w1}-t_{w4}}{R_{l_1}+R_{l_2}+R_{l_3}}$$

$$=\frac{t_{w1}-t_{w4}}{\frac{1}{2\pi\lambda_1}\ln\frac{d_2}{d_1}+\frac{1}{2\pi\lambda_2}\ln\frac{d_3}{d_2}+\frac{1}{2\pi\lambda_3}\ln\frac{d_4}{d_3}}$$



对于n层不同材料组成的多层圆筒壁的稳态导热，单位管长的热流量为：

$$\Phi_l=\frac{t_{w1}-t_{w(n+1)}}{\sum_{i=1}^{n}R_{\lambda i}}=\frac{t_{w1}-t_{w(n+1)}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\pi\lambda_i}\ln\frac{d_{i+1}}{d_i}}$$

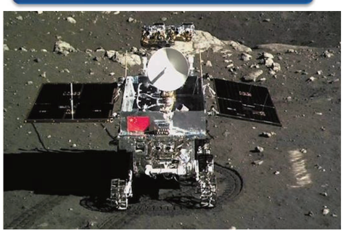
非稳态导热（Unsteady heat conduction）

定义：物体的温度随时间而变化的导热过程称为非稳态导热。

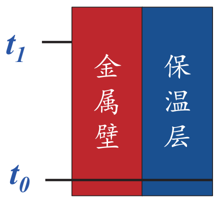
非稳态导热

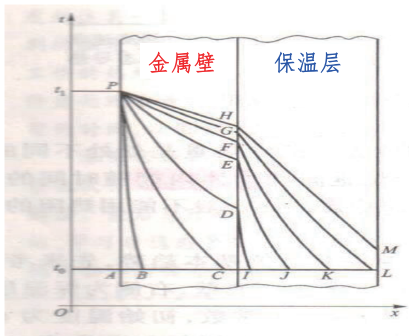
温度逐渐趋于恒定的值

温度随时间做周期性变化



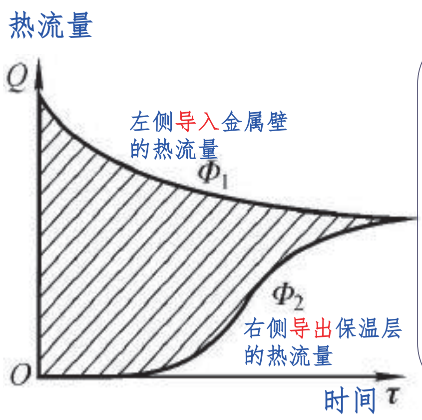
非稳态导热（Unsteady heat conduction）





- 非正规状况阶段 (Non regular regime)
- 正规状况阶段 (Regular regime)

非稳态导热（Unsteady heat conduction）



- 在整个非稳态导热过程中，左右两侧的热流量是不相等的，随着时间的进行，其差别逐渐减小，直到进入稳定阶段两者达到平衡。
- 阴影线部分表示复合平壁在升温过程中所积聚的能量。

非稳态导热（Unsteady heat conduction）

区别稳态导热的特点

- 非稳态导热过程中在热量传递方向上不同位置处的导热量是处处不同的。
- 不同位置间导热量的差别来自两个位置间的物体内能随时间的变化。

Bi数与准则数

定义：导热热阻与表面对流换热热阻的比值

$$Bi = \frac{\delta/\lambda}{1/h} = \frac{\delta h}{\lambda}$$

特征数 Characteristic number

- 表征某一类物理现象或者物理过程特征的无量纲数，又被称为准则数。
- 出现在特征数定义式中的几何尺度成为特征长度。

零维问题

导热热阻与表面对流换热热阻的比值

$$Bi = \frac{\delta/\lambda}{1/h} = \frac{\delta h}{\lambda} \to 0$$

- 当 物体内部的导热热阻远小于其表面的对流换热热阻时，任何时刻固体内部的温度都趋于一致，以致于可以认为，整个固体在同一瞬间均处于同一温度下。
- 这时所要求解的温度，仅仅是时间 的一元函数而与空间坐标无关，好像该固体原来连续分布的质量和热容量汇总到一个点上，而只有一个温度值一样。

集中参数法 Lumped parameter method

这种忽略物体内部导热热阻的简化分析方法称为集中参数法。

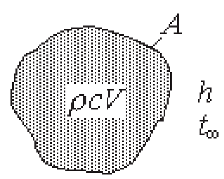
如果物体的导热系数很大，或者几何尺寸很小，或者表面传热系数很低，其非稳态导热过程均可看作这一类问题。

集中参数法温度场的分析解

假设： 一个任意形状的物体，体积为V，表面面积为A，密度ρ、比热容c及热导率λ为常数，无内热源，初始温度为 t_0。

突然将该物体放入温度恒定为 t_∞ 的流体之中，且物体表面和流体之间对流换热的表面传热系数h为常数。

求物体温度随时间的变化关系。



集中参数法温度场的分析解

$$\frac{dt}{d\tau}=a\nabla^2 t+\frac{\dot{\Phi}}{\rho c_p}$$

内部热阻可以忽略，温度与空间坐标无关。

$$\frac{dt}{d\tau}=\frac{\dot{\Phi}}{\rho c}$$

截面上交换的热量折算成整个物体的体积热源。

$$-\dot{\Phi}V=Ah(t-t_\infty)$$

$$\rho cV\frac{dt}{d\tau}=-Ah(t-t_\infty)$$

引入过余温度

$$\theta=t-t_\infty \qquad \rho cV\frac{d\theta}{d\tau}=-Ah\theta \qquad \frac{d\theta}{\theta}=-\frac{hA}{\rho cV}d\tau$$

集中参数法温度场的分析解

$$\frac{d\theta}{\theta}=-\frac{hA}{\rho cV}d\tau \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\theta}=-\int_0^{\tau}\frac{hA}{\rho cV}d\tau$$

$$\ln\frac{\theta}{\theta_0}=-\frac{hA}{\rho cV}\tau \qquad \frac{\theta}{\theta_0}=\frac{t-t_\infty}{t_0-t_\infty}=e^{-\frac{hA}{\rho cV}\tau}=\exp\left(-\frac{hA}{\rho cV}\tau\right)$$

特征长度

$$l_c=\frac{V}{A} \qquad \frac{hA}{\rho cV}\tau=\frac{hl_c}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{\rho c}\frac{\tau}{l_c^2}=\frac{hl_c}{\lambda}\cdot\frac{a\tau}{l_c^2}=Bi\cdot Fo$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{\theta_0}=\exp(-Bi\cdot Fo)$$

傅里叶数Fo

$$Fo=\frac{a\tau}{l_c^2}=\frac{\tau}{l_c^2/a}$$

τ 从边界上开始发生热扰动的时刻起，到所计算时刻为止的时间间隔。

l_c^2/a ：使边界上发生有限大小的热扰动穿过一定厚度的固体层扩散到 l_c^2 的面积上所需的时间。

Fo数：表征非稳态过程进行深度的无量纲时间。

◆ Fo数越大，热扰动就越深入的传播到物体内部，因而物体内部各点的温度越接近周围介质的温度。

导热量计算式

- 采用集中参数法分析时，从初始时刻到某一瞬间的时间间隔内，导热物体与流体间所交换的热量，可由瞬时热流量对时间积分而得。

$$\Phi=-\rho cV\frac{dt}{d\tau}=Ah(t-t_\infty) \qquad \frac{\theta}{\theta_0}=\frac{t-t_\infty}{t_0-t_\infty}=\exp\left(-\frac{hA}{\rho cV}\tau\right)$$

$$\Phi=Ah(t_0-t_\infty)\exp\left(-\frac{hA}{\rho cV}\tau\right)$$

$$Q_\tau=\int_0^\tau\Phi d\tau=(t_0-t_\infty)\int_0^\tau Ah\exp\left(-\frac{hA}{\rho cV}\tau\right)d\tau=(t_0-t_\infty)\rho cV\left[1-\exp\left(-\frac{hA}{\rho cV}\tau\right)\right]$$

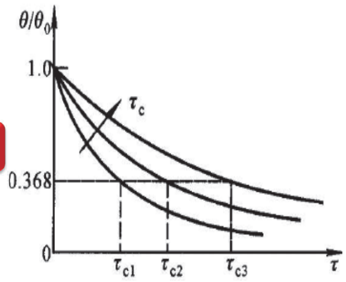
时间常数

$$\frac{\theta}{\theta_0}=e^{-\frac{hA}{\rho cV}\tau}=exp\left(-\frac{hA}{\rho cV}\tau\right)$$

$$\tau=\tau_c \qquad \tau_c=\frac{\rho cV}{hA}$$

时间常数

$$\frac{\theta}{\theta_0}=e^{-1}=0.368=36.8\%$$



- 物体的过余温度达到初始过余温度的36.8%。
- 时间常数反映物体对周围环境温度变化响应的快慢。
- 时间常数越小，物体的温度变化越快。

集中参数法的适用范围

If

平板 $\mathrm{Bi}=\frac{hl}{\lambda}<0.1$

圆柱 $\mathrm{Bi}=\frac{hl}{\lambda}<0.05$

球 $\mathrm{Bi}=\frac{hl}{\lambda}<0.033$

Then

集中参数法=true

For

Object=平板 or 圆柱 or 球

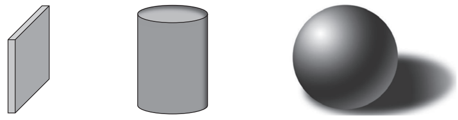
If

$$\mathrm{Bi}=\frac{hl_c}{\lambda}\le 0.1$$

Then

集中参数法=true

简单结构中的温度场分布



导热问题的数学描写 ⇒ 导热微分方程：

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{\lambda}{\rho c}\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)+\frac{\dot{\Phi}}{\rho c}$$

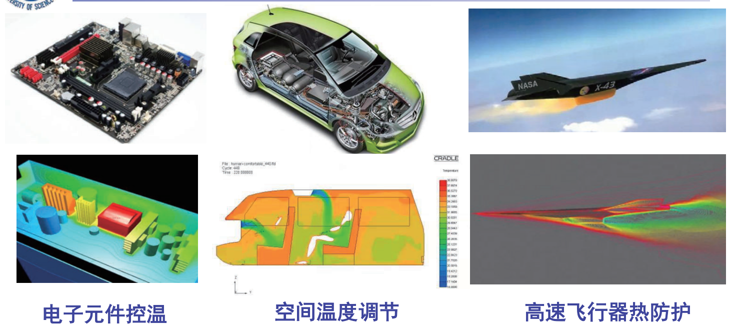
定解条件：边界条件+初始条件

简单结构中温度场分布的分析解(Analytical solution)

$$t=f(x,y,z) \qquad t=f(x,y,z,\tau)$$

其中，x,y,z 为空间坐标，τ 为时间坐标。

复杂结构中传热问题的求解



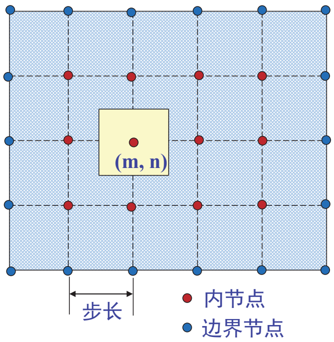
$$t=f(x,y,z) \qquad t=f(x,y,z,\tau)$$

对于复杂结构中的传热过程，无法求出温度场分布的分析解。

数值求解的基本思想

数值解 Numerical solution

基本思想：用所涉及空间和时间区域内有限个离散点(称为节点) 的温度近似值来代替物体内实际连续的温度分布。



- 利用与坐标轴平行的网格线将物体划分成若干个子区域。
- 网格宽度称为**步长**。
- 网格线交点（内节点）和网格线与物体边界线的交点（边界节点）称为**节点**。
- **每个节点代表以它为中心的子区域。节点的温度值也即该子区域的温度值。**

连续问题 ⇒ 离散化

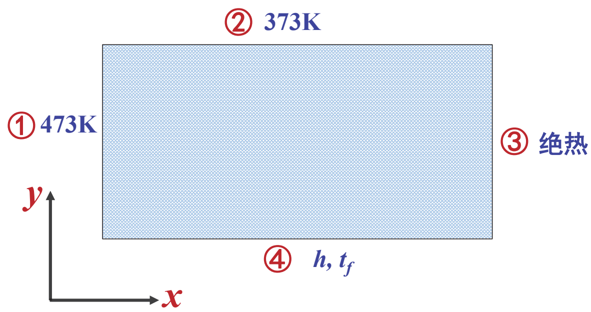
导热问题数值求解的基本思想

- 用导热问题所涉及的空间和时间区域内有限个离散点（称为节点）的温度近似值来代替物体内实际连续的温度分布。
- 将连续温度分布函数的求解问题转化为各节点温度值的求解问题。
- 将导热微分方程的求解问题转化为节点温度代数方程的求解问题。

数值求解的基本步骤

(1) 建立连续区域的导热微分方程及定解条件
↓
(2) 连续区域离散化，确定节点
↓
(3) 建立离散节点温度的代数方程
↓
(4) 设立节点温度场的迭代初值
↓
(5) 求解节点温度的代数方程组
↓
是否收敛？ —否→ 改进温度初场 → (5)
↓ 是
(6) 温度场解的分析

导热问题的数值求解 – 示例



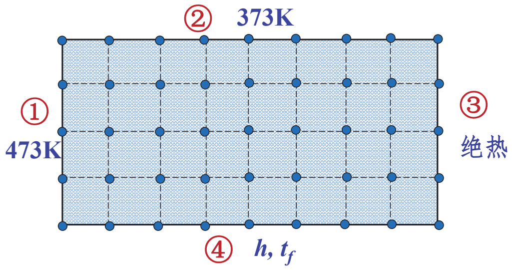
求解该平板在稳定状态下的温度分布。

导热问题的数值求解 – (1) 建立导热微分方程及定解条件

二维 稳态 无内热源 常物性 导热问题

导热微分方程	$\dfrac{\partial^2 t}{\partial^2 x}+\dfrac{\partial^2 t}{\partial^2 y}=0$
定解条件	① $t=473$ ② $t=373$ ③ $q=-\lambda\dfrac{\partial t}{\partial x}=0$ ④ $-\lambda\dfrac{\partial t}{\partial x}=h(t-t_f)$

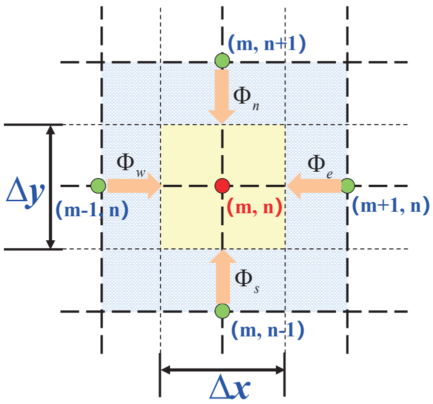
导热问题的数值求解 – (2) 区域离散化



导热问题的数值求解 – (3) 建立离散节点温度的代数方程

稳态时，从周围相邻节点控制单元导入节点(m,n)所代表控制单元的热流量之和等于零。

$$\Phi_w+\Phi_e+\Phi_s+\Phi_n=0$$



傅里叶导热定律

$$\Phi_e=\lambda\cdot\Delta y\frac{t_{m+1,n}-t_{m,n}}{\Delta x}$$

$$\Phi_w=\lambda\cdot\Delta y\frac{t_{m-1,n}-t_{m,n}}{\Delta x}$$

$$\Phi_s=\lambda\cdot\Delta x\frac{t_{m,n-1}-t_{m,n}}{\Delta y}$$

$$\Phi_n=\lambda\cdot\Delta x\frac{t_{m,n+1}-t_{m,n}}{\Delta y}$$

导热问题的数值求解 – (3) 建立节点温度的代数方程

$$\lambda\cdot\Delta y\frac{t_{m-1,n}-t_{m,n}}{\Delta x}+\lambda\cdot\Delta y\frac{t_{m+1,n}-t_{m,n}}{\Delta x}+\lambda\cdot\Delta x\frac{t_{m,n-1}-t_{m,n}}{\Delta y}+\lambda\cdot\Delta x\frac{t_{m,n+1}-t_{m,n}}{\Delta y}=0$$

若 $\Delta x=\Delta y$ $\quad t_{m-1,n}+t_{m+1,n}+t_{m,n-1}+t_{m,n+1}-4t_{m,n}=0$

节点(m,n)温度代数方程（离散）	$t_{m,n}=\dfrac{t_{m+1,n}+t_{m-1,n}+t_{m,n+1}+t_{m,n-1}}{4}$
区域导热微分方程（连续）	$\dfrac{\partial^2 t}{\partial^2 x}+\dfrac{\partial^2 t}{\partial^2 y}=0$

求解区域连续温度分布 ➡ 求解各离散节点温度值

求解导热微分方程 ➡ 求解节点温度代数方程

数值求解的基本步骤

(1) 建立连续区域的导热微分方程及定解条件

↓

(2) 连续区域离散化，确定节点

↓

(3) 建立离散节点温度的代数方程

↓

(4) 设立节点温度场的迭代初值

↓

(5) 求解节点温度的代数方程组 ← 改进温度初场

↓

是否收敛？ —否→ 改进温度初场

↓ 是

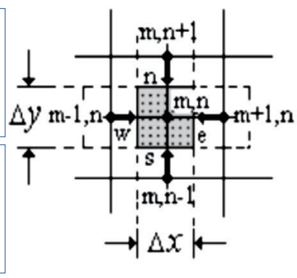
(6) 温度场解的分析

热平衡法(Heat balance method)

基本思路：

根据节点所代表的控制容积在导热过程中的能量守恒建立节点温度差分方程。

内部节点(m,n)所代表的控制容积在导热过程中的热平衡可表述为：从周围相邻控制容积导入的热流量之和等于零。



从节点(m-1,n)通过界面w传导到节点(m,n)的热流量为：

$$\Phi=\lambda\cdot\Delta y\frac{t_{m-1,n}-t_{m,n}}{\Delta x}$$

热平衡法(Heat balance method)

$$\Phi_{\mathrm{w}}+\Phi_{\mathrm{e}}+\Phi_{\mathrm{s}}+\Phi_{\mathrm{n}}=0$$

$$\lambda\cdot\Delta y\frac{t_{m-1,n}-t_{m,n}}{\Delta x}+\lambda\cdot\Delta y\frac{t_{m+1,n}-t_{m,n}}{\Delta x}+\lambda\cdot\Delta x\frac{t_{m,n-1}-t_{m,n}}{\Delta y}+\lambda\cdot\Delta x\frac{t_{m,n+1}-t_{m,n}}{\Delta y}=0$$

若 $\Delta x=\Delta y$

$$t_{m-1,n}+t_{m+1,n}+t_{m,n-1}+t_{m,n+1}-4t_{m,n}=0$$

节点(m,n)温度的代数方程

$$t_{m,n}=\frac{t_{m+1,n}+t_{m-1,n}+t_{m,n+1}+t_{m,n-1}}{4}$$

网格Bi数

Bi数：导热热阻与表面对流换热热阻的比值

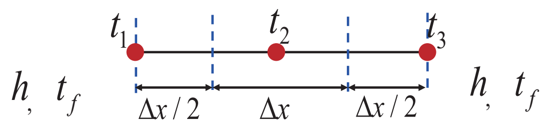
$$Bi=\frac{\delta/\lambda}{1/h}=\frac{\delta h}{\lambda}$$

网格Bi数：以网格步长为特征长度 $Bi=\dfrac{h\Delta x}{\lambda}$

代数方程组的求解

代数方程组的求解

高斯-赛德尔(Gauss-Seidel)迭代法



$$\begin{cases}a_{11}t_1+a_{12}t_2+a_{13}t_3=b_1\\a_{21}t_1+a_{22}t_2+a_{23}t_3=b_2\\a_{31}t_1+a_{32}t_2+a_{33}t_3=b_3\end{cases}$$

高斯-赛德尔(Gauss-Seidel)迭代法

$$\begin{cases}a_{11}t_1+a_{12}t_2+a_{13}t_3=b_1\\a_{21}t_1+a_{22}t_2+a_{23}t_3=b_2\\a_{31}t_1+a_{32}t_2+a_{33}t_3=b_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_1=\dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1-a_{12}t_2-a_{13}t_3\right)\\t_2=\dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2-a_{21}t_1-a_{23}t_3\right)\\t_3=\dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3-a_{31}t_1-a_{32}t_2\right)\end{cases}$$

- 假设一组解，由右式逐一计算出改进值，每次计算均用t的最新值代入。
- 以计算所得之值作为初场，重复上述计算，直到相邻两次迭代值之差小于允许值，此时称为已经达到迭代收敛，迭代计算终止。

迭代过程是否已经收敛的判据

$$\max\left|t_i^k-t_i^{k+1}\right|<\varepsilon\qquad\max\left|\frac{t_i^k-t_i^{k+1}}{t_i^k}\right|<\varepsilon\qquad\max\left|\frac{t_i^k-t_i^{k+1}}{t_{\max}^k}\right|<\varepsilon$$

迭代过程能否收敛的判据-对角占优法则

每一个迭代变量的系数总是大于或者等于该式中其它变量系数绝对值之和。

$$\frac{|a_{12}|+|a_{13}|}{|a_{11}|}\le 1 \qquad \frac{|a_{21}|+|a_{23}|}{|a_{22}|}\le 1 \qquad \frac{|a_{31}|+|a_{32}|}{|a_{33}|}\le 1$$

Thank you!