数字货币兑换路径优化研究

1. 研究简介

数字货币种类繁多、兑换汇率随货币当前存量和交易兑换量而变化，选择不同兑换路径（包括中间币种和汇兑渠道）将产生不同收益。因此，在多币种兑换过程中存在套利机会。具体而言，以一定数量的货币 A 兑换成货币 B，可经不同的渠道（交易所/合约）兑换不同数量的中间货币；采用优化算法可得到一条当前情况下的最优兑换路径，使最终得到的货币 B 数量最多。

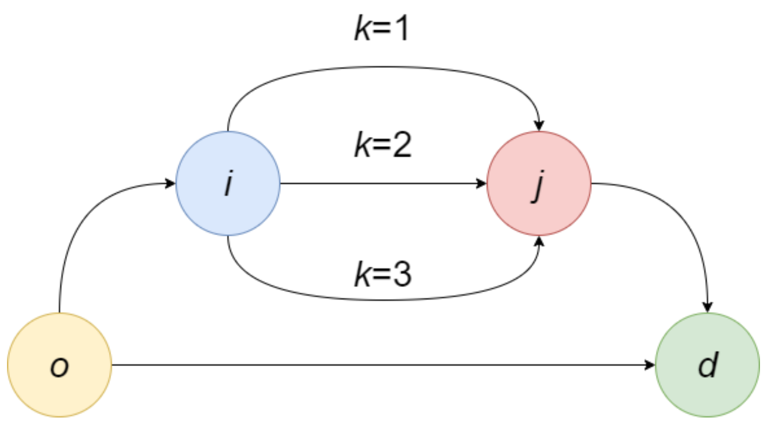
由于套利机会转瞬即逝，因此需要在给定各个渠道的每种货币存量的情况下，快速计算兑换路径。为此，拟建立基于网络图的路径规划模型，**以兑换货币量最大为目标，考虑汇兑路径特征和可行性、手续费预算等，针对不同问题规模和效率要求，提出一系列精确和近似求解方法。**

2. 数学模型

考虑 N 种货币，K 个渠道（交易所/合约），需要决策从初始货币 o 到最终货币 d，经过哪些中间币种，以何种渠道进行兑换。相关假设如下：

（1）每步兑换过程中相关渠道下所有币种的存量，**不受除当前操作以外的交易行为影响**（即兑换过程瞬间完成）。

（2）任意两个不同货币之间都可用每个渠道进行兑换，示意图如下：



首先定义所需的下标、变量和参数，而后给出优化目标和约束的表达式，并基于此构建数学规划模型。

2.1 定义

（1）下标

符号	含义
i,j	某种货币，取值属于[1,N]之间，整数
k	某个渠道，取值属于[1,K]之间，整数
o	初始货币
d	最终货币

（2）变量

符号	含义
X_{ijk}	为经渠道 k 兑换成货币 j，使用货币 i 的数量，非负连续变量
Y_{ijk}	是否从渠道 k 将货币 i 兑换成货币 j，0-1 变量
Z_{ij}	是否将货币 i 兑换成货币 j，0-1 变量
U_i	货币 i 的访问序号，非负连续变量

（3）参数

符号	含义
V_{ik}	渠道 k 中货币 i 的存量，非负数
T_o	待兑换的货币 o 的总量，非负数
B_{ijk}^1	从渠道 k 将货币 i 兑换成货币 j 的手续费，与渠道有关，非负数
B_{ijk}^2	从渠道 k 将货币 i 兑换成货币 j 的手续费，与交易量有关，非负数
$GasBudget$	手续费上限，正数
M	建模所需，一个足够大的正数

2.2 目标

由于计算货币兑换量需要对汇率的表达式，故此处先对汇率形成机理进行分析。在某个渠道 k 下的两种不同货币 i 和 j，其当前存量分别为V_{ik}和V_{jk}，根据 Uniswap 协议，二者的乘积应保持恒定值。假设使用Δ_{ik} 的货币 i 能兑换出Δ_{jk}的货币 j，则有如下关系成立：$(V_{ik}+\Delta_{ik})(V_{jk}-\Delta_{jk})=V_{ik}V_{jk}$ ，进一步推导可得：

$$\Delta_{jk}=\frac{V_{jk}\Delta_{ik}}{V_{ik}+\Delta_{ik}}$$

在此基础上，最大化从各个渠道的所有币种兑换成币种 d 的量，即为目标：

$$\max\ \sum_{i,k}\frac{V_{dk}X_{idk}}{V_{ik}+X_{idk}} \tag{1}$$

2.3 约束

将初始货币和最终货币分别看做网络图的起点和终点，则可以得到对于网络中各个节点的"流限制"约束，以表示各个节点的性质和节点之间的关系。

（1）起点和终点要求

起点不能有"流入"，即不存在某个货币兑换成货币 o。同理，终点不能有"流出"，即一旦换成货币 d 就不能继续兑换了。此外，起点需将持有的所有货币 o 兑换出去。

$$\sum_{i,k}X_{iok}=0 \tag{2}$$

$$\sum_{j,k}X_{djk}=0 \tag{3}$$

$$\sum_{j,k}X_{ojk}=T_o \tag{4}$$

（2）中间货币要求

对于任意中间货币，兑换得到的量一定等于从此种货币继续兑换出的量，也即流平衡约束。同时，不允许存在同种货币的自循环式兑换。

$$\sum_{i,k}\frac{V_{jk}X_{ijk}}{V_{ik}+X_{ijk}}=\sum_{i,k}X_{jik}\quad\forall\ j\neq o,d \tag{5}$$

$$\sum_{k}X_{jjk}=0\ \ \forall j \tag{6}$$

（3）手续费预算

由于手续费相比交易量来说较小，故将其作为约束考虑。客户一般存在可以

承受的交易手续费的上限。手续费和所用渠道以及交易量有关，因此需借助相应的 0-1 变量Y_{ijk}表达预算限制。同时，给出X_{ijk}和Y_{ijk}的关系。

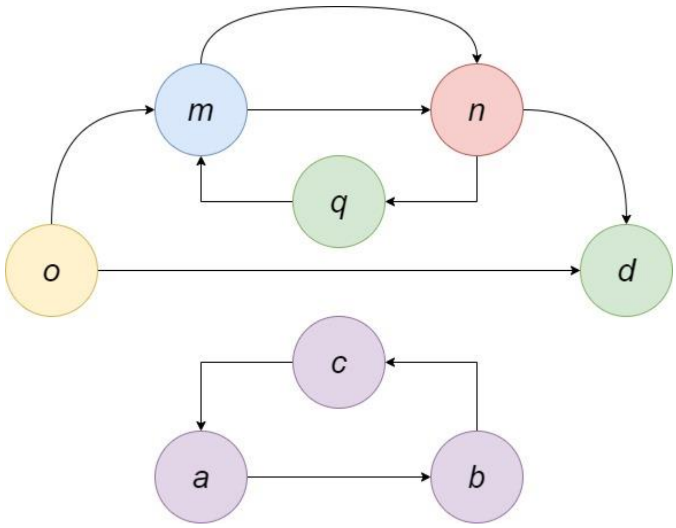
$$\sum_{i,j,k} B_{ijk}^1 Y_{ijk} + B_{ijk}^2 X_{ijk} \leqslant GasBudget \tag{7}$$

$$Y_{ijk} \leqslant X_{ijk} M \quad \forall i,j,k \tag{8}$$

$$X_{ijk} \leqslant MY_{ijk} \quad \forall i,j,k \tag{9}$$

（4）兑换路径子环路消除

子环路即独立形成闭环的环路，如下图中的 m-n-q-m 或 a-b-c-a。子环路最好在建模过程中去除，以减少求解时候的搜索空间，提升求解效率。



上图中的子环路**一定**对目标函数无正向贡献（如 m-n-q-m），**可能**与初始持有货币量无关（如 a-b-c-a）。因此，在不超过手续费约束的情况下，将可能不受到限制。但这种兑换操作显然不合理，故应借助 0-1 变量Z_{ij}引入相关约束，去掉此种情况。同时引入Y_{ijk}和Z_{ij}的关系：

$$U_i - U_j + Z_{ij} M \leqslant M - 1 \tag{10}$$

$$Z_{ij} \leqslant \sum_k Y_{ijk} M \quad \forall i,j \tag{11}$$

$$\sum_k Y_{ijk} \leqslant Z_{ij} M \quad \forall i,j \tag{12}$$

注意，如果考虑到汇兑过程中货币之间汇率的时变性，则子环路可能对目标函数产生正向贡献，即使用给定数量的某种货币开始兑换，最终兑换回本币得到的数量多于初始持有量。当然，孤立于正常兑换路径之外的子环路仍然需要避免。

2.4 模型

由此我们得到一个**带有分式项的非线性混合整数规划模型**，如下所示：

$$\max \sum_{i,k} \frac{V_{dk} X_{idk}}{V_{ik} + X_{idk}}$$

$$\sum_{i,k} X_{iok} = 0$$

$$\sum_{j,k} X_{djk} = 0$$

$$\sum_{j,k} X_{ojk} = T_o$$

$$\sum_{i,k} \frac{V_{jk} X_{ijk}}{V_{ik} + X_{ijk}} = \sum_{i,k} X_{jik} \quad \forall \ j \neq o, d$$

$$\sum_{k} X_{jjk} = 0 \ \ \forall j$$

$$\sum_{i,j,k} B^1_{ijk} Y_{ijk} + B^2_{ijk} X_{ijk} \leqslant GasBudget$$

$$Y_{ijk} \leqslant X_{ijk} M \quad \forall i,j,k$$

$$X_{ijk} \leqslant M Y_{ijk} \quad \forall i,j,k$$

$$U_i - U_j + Z_{ij} M \leqslant M - 1$$

$$Z_{ij} \leqslant \sum_{k} Y_{ijk} M \quad \forall i,j$$

$$\sum_{k} Y_{ijk} \leqslant Z_{ij} M \ \ \forall i,j$$

$$X_{ijk} \geqslant 0,\ U_i \geqslant 0,\ Y_{ijk} \in \{0,1\},\ Z_{ij} \in \{0,1\}$$

3. 解决方案构想

针对上述数学模型，拟从**精确求解**和**近似求解**两方面来探索解决方案。

3.1 精确求解

精确求解是指将 2.4 节中的问题转化为商业求解器（如 Gurobi 等）可以直接处理的标准模型。例如，转化成混合整数二次规划模型 Mixed Integer Quadratically Constrained Programming (MIQCP)。精确求解方案只适合于**小规模**案例。

由于计算效率受到问题数学性质的显著影响，故在初期为了提升计算速度，可能会暂时忽略约束的（3）和（4），即**暂不考虑手续费和子环路消除**。

3.2 近似求解

对于**大规模**案例，为符合求解时间要求，只能采用近似求解方法。该类方法有很多选择，每种方法也需要进行尝试来得到最合适的参数配置。因此在有限的工作时间内，只能探索其中一些有潜力的方法，并逐步加以完善和创新。

（1）**凸转化**

采用分段线性函数等工具，从数值角度对分式项进行近似处理，将非线性规划（非凸规划）转变为线性规划（凸规划）。在此基础上，调用求解器求解，求解效率可显著提升，同时也可尽量降低精度损失。

（2）**数值优化方法**

使用数值优化方法，通过迭代方式对非线性（非凸）规划求局部最优解。而后有两种可能的选择（可根据试验结果选择）：

1）使用 Multi-Start 方法，改善求解质量。

2）设计邻域搜索方法，基于随机跳动避免局部最优。

（3）**缩减可行域**

增加一些规则来缩减可行域，如限制每个币种向外兑换时使用渠道的个数，或中转的币种总数等。另外，还可考虑暂时忽略部分约束（如手续费和子环路消除），以获得松弛解。

（4）**智能优化算法**

智能优化算法，如遗传算法、禁忌搜索、粒子群搜索等，可广泛适用于非凸优化问题的求解。相比局部搜索算法，能获得更高的精度，具备全局寻优性能。但是该类方法效率较低。

此外需要说明，该方法的适应性更广，不仅可以适用于目前静态问题的求解，也可用来求解动态问题(即汇兑过程中，受到外部环境影响，汇率也在实时变化)。

（5）**其他定制化启发式算法**

拟基于动态规划求解最短路问题，将结果作为初始解，而后通过邻域搜索进行改进。但此种方案目前并不成熟，后续将对其求解质量和效率展开进一步论证。