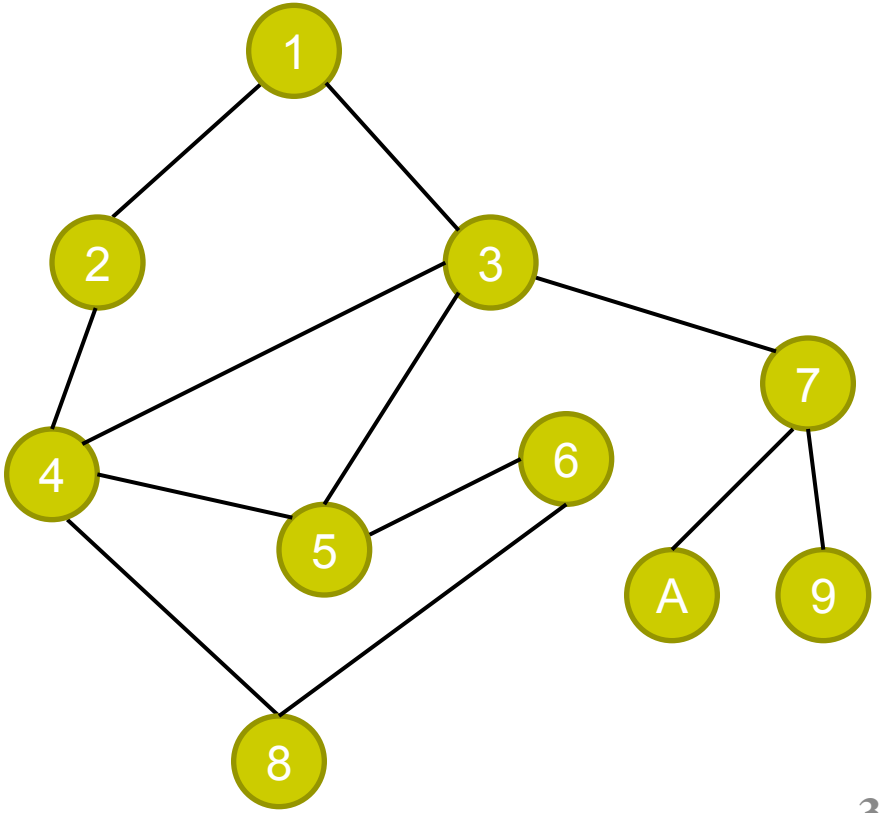
深度优先搜索

入门：城堡问题

在图上寻找路径

在图上如何寻找从1到8的路径?

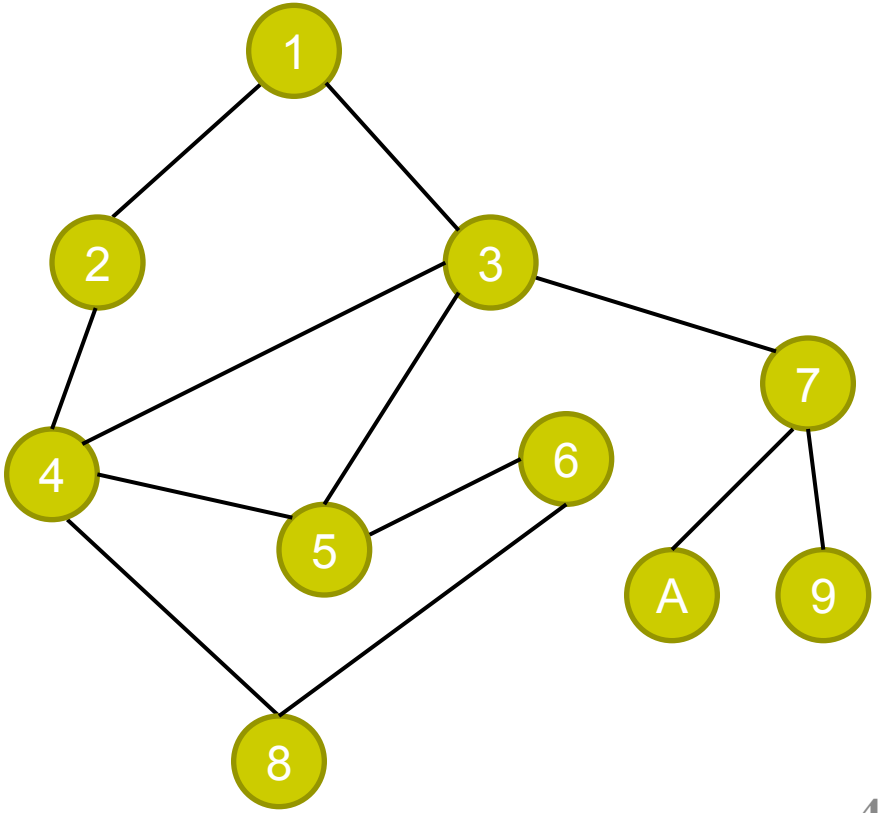
一种策略：只要能发现没走过的点，就走到它。有多个点可走就随便挑一个，如果无路可走就回退，再看有没有没走过的点可走



在图上寻找路径

在图上如何寻找从1到8的路径?

运气最好： 1->2->4->8

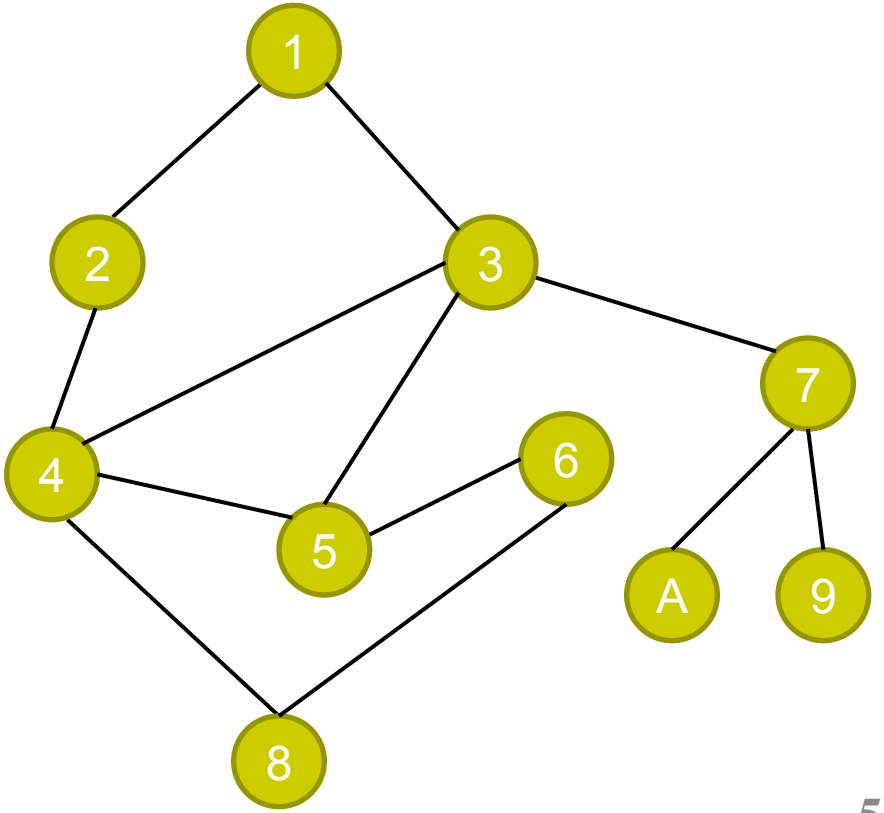


在图上寻找路径

在图上如何寻找从1到8的路径?

运气最好： 1->2->4->8

运气稍差： 1->2->4->5->6->8



在图上寻找路径

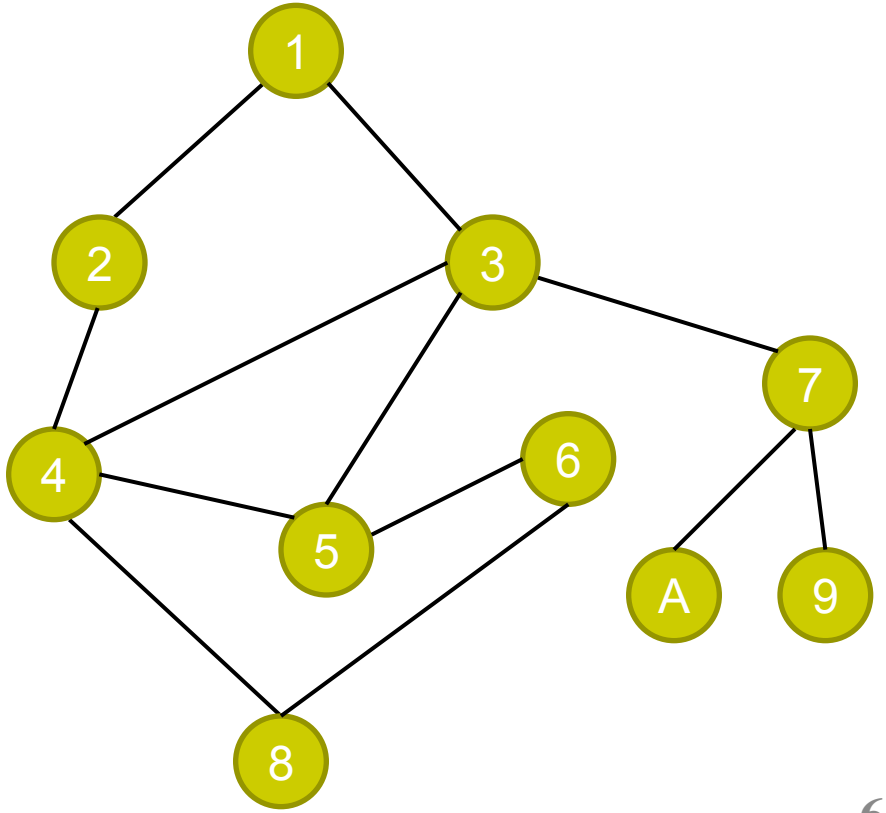
在图上如何寻找从1到8的路径?

运气最好： 1->2->4->8

运气稍差： 1->2->4->5->6->8

运气坏：

1->3->7->9=>7->A=>7=>3->5->6->8
（双线箭头表示回退）



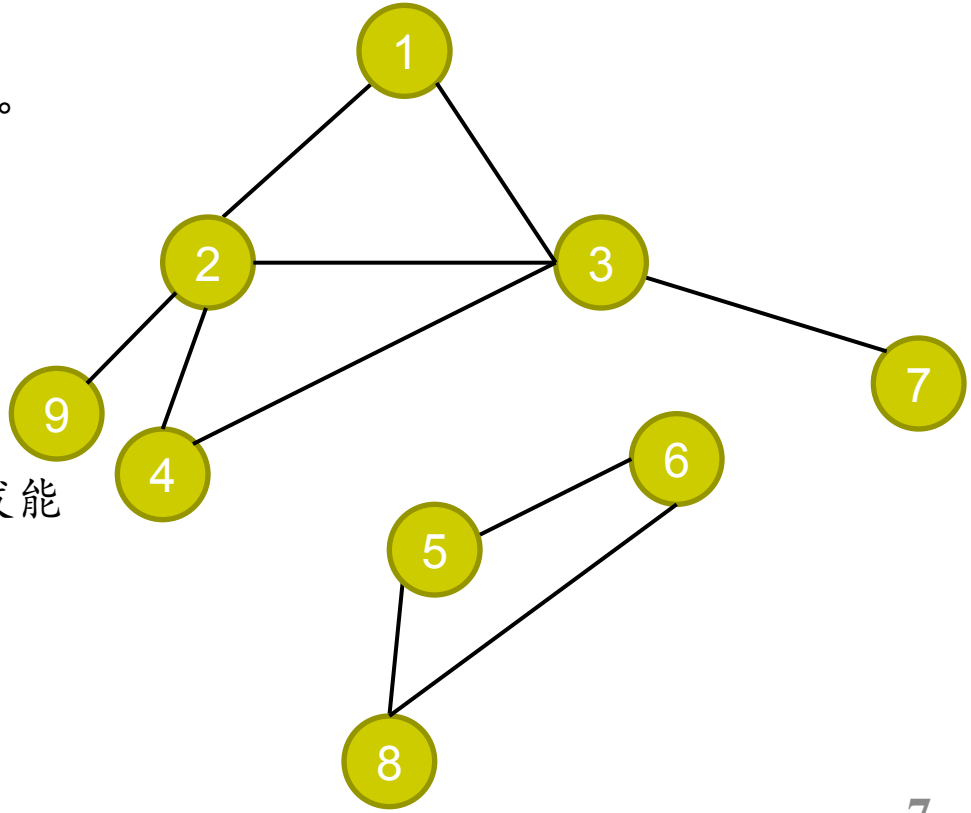
在图上寻找路径

不连通的图，无法从节点1走到节点8。

完整的尝试过程可能如下：
1->2->4->3->7=>3=>4=>2->9=>2=>1

结论：不存在从1到8的路径

得出这个结论之前，一定会把从1出发能走到的点全部都走过。



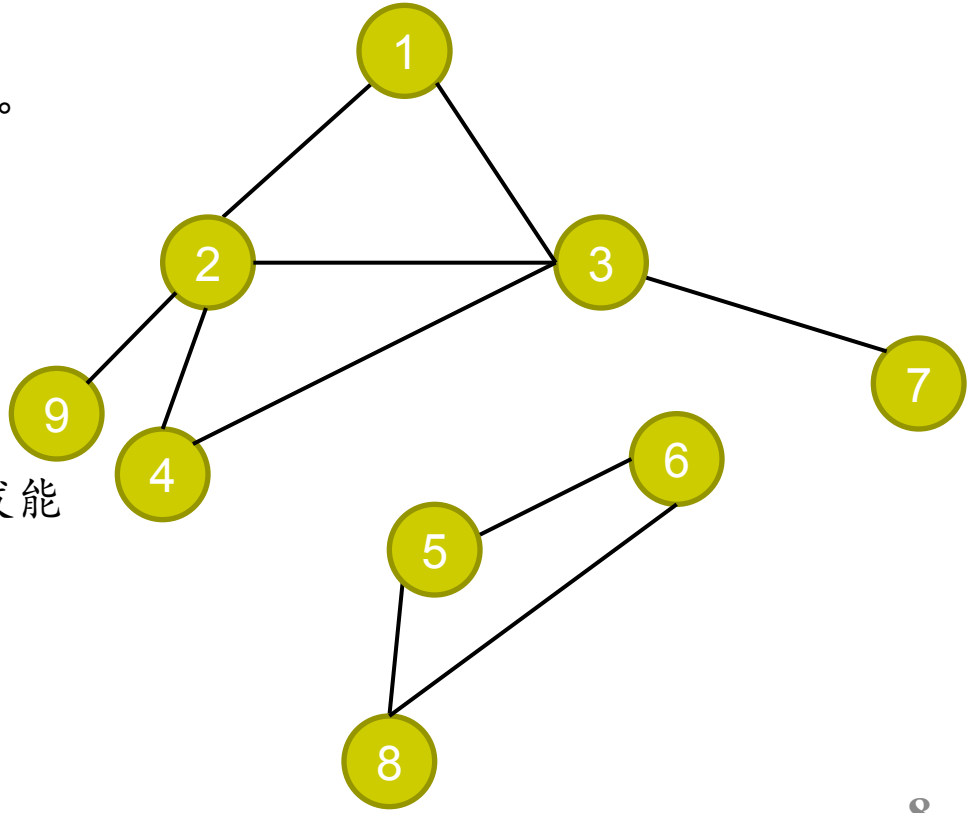
在图上寻找路径

不连通的图，无法从节点1走到节点8。

完整的尝试过程可能如下：
1->2->4->3->7=>3=>4=>2->9=>2=>1

结论：不存在从1到8的路径

得出这个结论之前，一定会把从1出发能走到的点全部都走过。



深度优先搜索(Depth-First-Search)

从起点出发，走过的点要做标记，发现有没走过的点，就随意挑一个往前走，走不了就回退，此种路径搜索策略就称为“深度优先搜索”，简称“深搜”。

其实称为“远度优先搜索”更容易理解些。因为这种策略能往前走一步就往前走一步，总是试图走得更远。所谓远近(或深度)，就是以距离起点的步数来衡量的。

在图上寻找路径

➢判断从V出发是否能走到终点：

```
bool Dfs(V) {
        if( V 为终点）
                return true;
        if( V 为旧点)
                return false;
        将v标记为旧点；
        对和v相邻的每个节点U {
                if( Dfs(U) == true)
                        return true;
        }
        return false;
}
```

在图上寻找路径

```
int main()
{
        将所有点都标记为新点;
        起点 = 1
        终点 = 8
        cout << Dfs(起点）;
}
```

在图上寻找路径

➢判断从V出发是否能走到终点,如果能，要记录路径：

```
Node path[MAX_LEN];   //MAX_LEN取节点总数即可
int depth;
bool Dfs(V) {
        if( V为终点）{
                path[depth] = V;
                return true;
        }
        if( V 为旧点)
                return false;
        将V标记为旧点；
        path[depth]=V;
        ++depth;
```

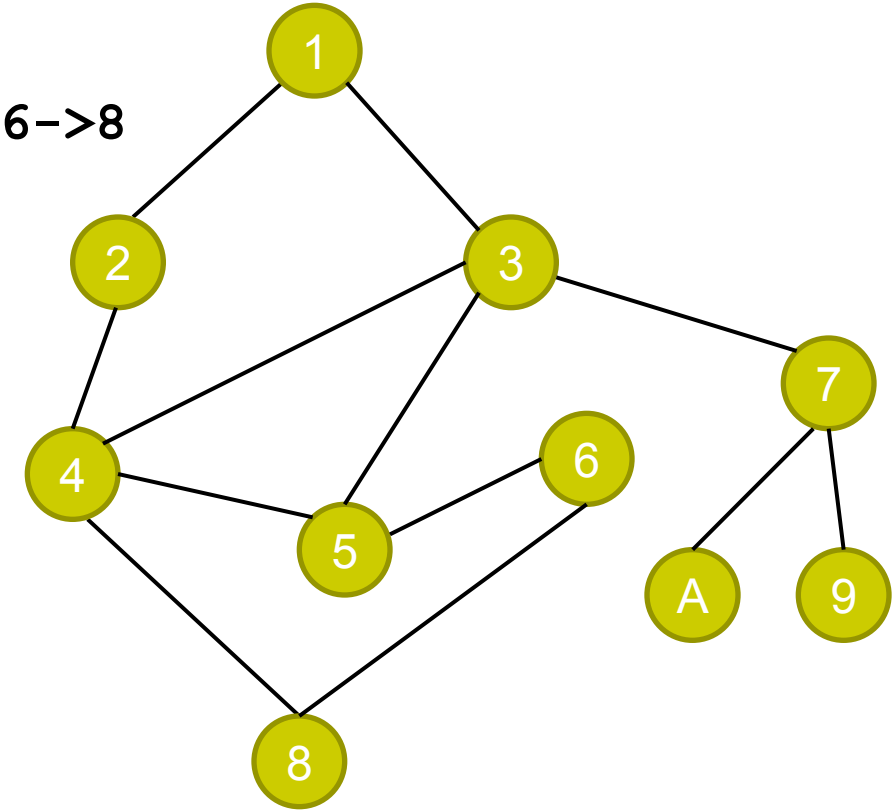
在图上寻找路径

```
        对和v相邻的每个节点U    {
                if( Dfs(U) == true)
                        return true;
        }
        --depth;
        return false;
}
int main()
{
        将所有点都标记为新点；
        depth = 0;
        if( Dfs(起点）)  {
                for(int i = 0;i <= depth; ++ i)
                        cout << path[i] << endl;
        }
}
```

在图上寻找路径

1->3->7->9=>7->A=>7=>3->5->6->8

path: 1,3,5,6,8



在图上寻找最优(步数最少)路径

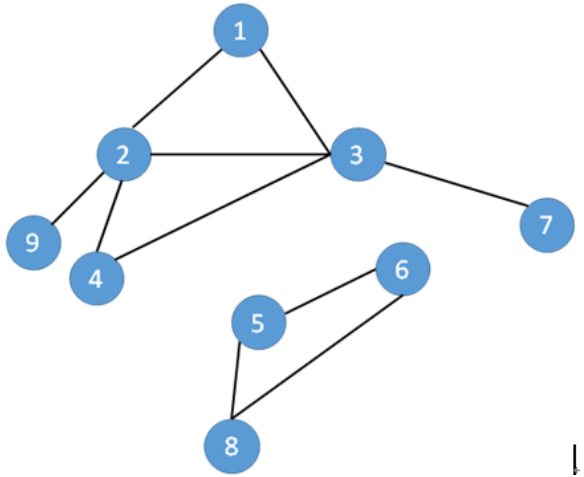
```
Node bestPath[MAX_LEN];
int minSteps = INFINITE; //最优路径步数
Node path[MAX_LEN];  //MAX_LEN取节点总数即可
int depth;
void Dfs(V) {
        if( V为终点）{
                path[depth] = V;
                if( depth < minSteps ) {
                        minSteps = depth;
                        拷贝path到bestPath;
                }
                return;
        }
        if( V 为旧点)  return;
        if( depth >= minSteps ) return ; //最优性剪枝
        将v标记为旧点;
        path[depth]=V;
        ++depth;
```

在图上寻找最优(步数最少)路径

```
        对和v相邻的每个节点U    {
                Dfs(U);
        }
        --depth;
        将v恢复为新点
}
int main()
{
        将所有点都标记为新点;
        depth = 0;
        Dfs(起点);
        if( minSteps != INFINITE) {
                for(int i = 0;i <= minSteps; ++ i)
                        cout << bestPath[i] << endl;
        }
}
```

遍历图上所有节点

```
Dfs(V) {
        if( V是旧点)
                return;
        将V标记为旧点;
        对和v相邻的每个点 U {
                Dfs(U);
        }
}
int main() {
        将所有点都标记为新点;
        while(在图中能找到新点k)
                Dfs(k);
}
```



图的表示方法 -- 邻接表

用一个二维数组G存放图，G[i][j]表示节点i和节点j之间边的情况(如有无边，边方向，权值大小等）。

遍历复杂度：$O(n^2)$　　n为节点数目

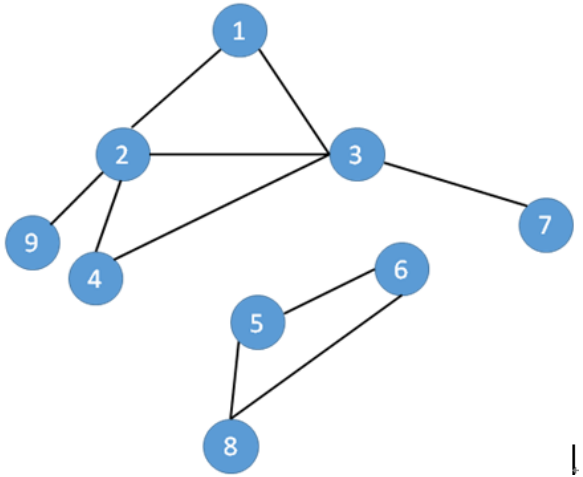
图的表示方法 -- 邻接表

每个节点V对应一个一维数组(vector)，里面存放从V连出去的边，边的信息包括另一顶点，还可能包含边权值等。

1	2	3		
2	1	4	9	3
3	1	4	7	2
4	2	3		
5	6	8		
6	5	8		
7	3			
8	5	6		
9	2			

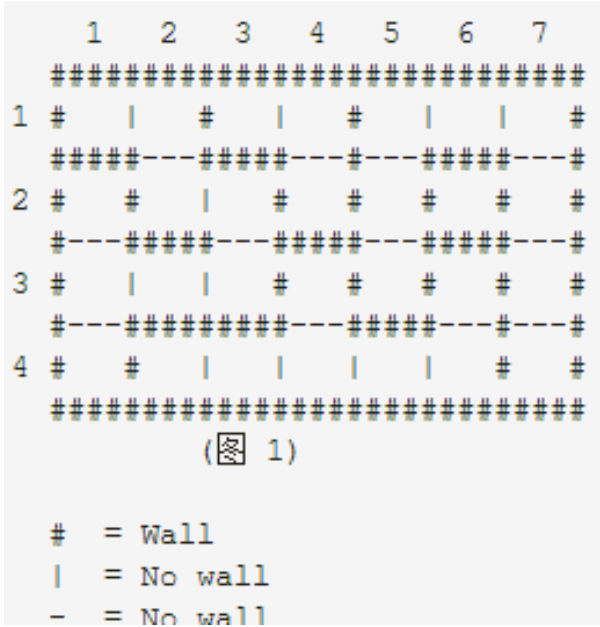
遍历复杂度：O(n+e)

n为节点数目，e为边数目



例题：百练2815 城堡问题

- 右图是一个城堡的地形图。请你编写一个程序，计算城堡一共有多少房间，最大的房间有多大。城堡被分割成m×n(m≤50, n≤50)个方块，每个方块可以有0~4面墙。



输入输出

- 输入
  - 程序从标准输入设备读入数据。
  - 第一行是两个整数，分别是南北向、东西向的方块数。
  - 在接下来的输入行里，每个方块用一个数字(0≤p≤50)描述。用一个数字表示方块周围的墙，1表示西墙，2表示北墙，4表示东墙，8表示南墙。每个方块用代表其周围墙的数字之和表示。城堡的内墙被计算两次，方块(1,1)的南墙同时也是方块(2,1)的北墙。
  - 输入的数据保证城堡至少有两个房间。
- 输出
  - 城堡的房间数、城堡中最大房间所包括的方块数。
  - 结果显示在标准输出设备上。

- 样例输入

4

7

11 6 11 6 3 10 6

7 9 6 13 5 15 5

1 10 12 7 13 7 5

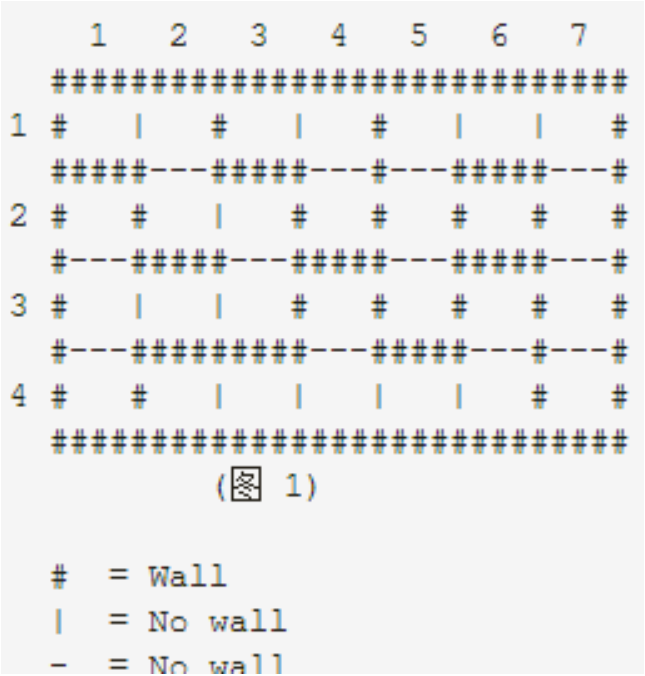
13 11 10 8 10 12 13

- 样例输出

5

9

数据保证城堡
四周都是墙

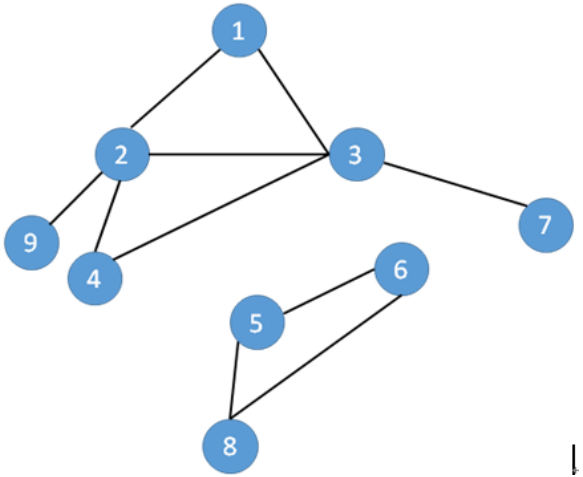


解题思路

- 把方块看作是节点，相邻两个方块之间如果没有墙，则在方块之间连一条边，这样城堡就能转换成一个图。

- 求房间个数，实际上就是在求图中有多少个极大连通子图。

- 一个连通子图，往里头加任何一个图里的其他点，就会变得不连通，那么这个连通子图就是极大连通子图。（如：(8, 5, 6)）



解题思路

- 对每一个房间，深度优先搜索，从而给这个房间能够到达的所有位置染色。最后统计一共用了几种颜色，以及每种颜色的数量。
- 比如

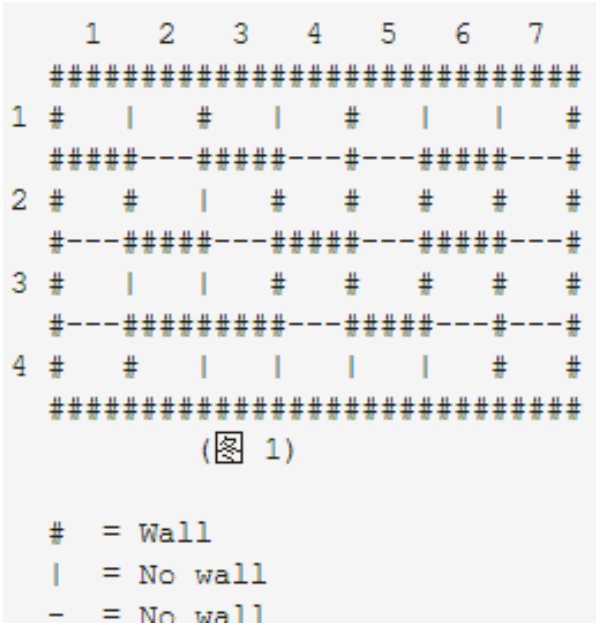
1 1 2 2 3 3 3

1 1 1 2 3 4 3

1 1 1 5 3 5 3

1 5 5 5 5 5 3

- 从而一共有5个房间，最大的房间（1）占据9个格子



```
#include <iostream>
#include <stack>
#include <cstring>
using namespace std;
int R,C;  //行列数
int rooms[60][60];
int color[60][60]; //方块是否染色过的标记
int maxRoomArea = 0, roomNum = 0;
int roomArea;
void Dfs(int i,int k) {
        if( color[i][k] )
                return;
        ++ roomArea;
        color [i][k] = roomNum;
        if( (rooms[i][k] & 1) == 0 ) Dfs(i,k-1);    //向西走
        if( (rooms[i][k] & 2) == 0 ) Dfs(i-1,k);    //向北
        if( (rooms[i][k] & 4) == 0 ) Dfs(i,k+1);   //向东
        if( (rooms[i][k] & 8) == 0 ) Dfs(i+1,k);   //向南
}
```

```
int main()  {
        cin >> R >> C;
        for( int i = 1;i <= R;++i)
                for ( int k = 1;k <= C; ++k)
                        cin >> rooms[i][k];
        memset(color,0,sizeof(color));
        for( int i = 1;i <= R; ++i)
                for( int k = 1; k <= C; ++ k) {
                        if( !color[i][k] ) {
                                ++ roomNum ;    roomArea = 0;
                                Dfs(i,k);
                                maxRoomArea =
                                        max(roomArea,maxRoomArea);
                        }
                }
        cout << roomNum << endl;
        cout << maxRoomArea << endl;
}
```

复杂度：O(R*C)

例题：百练4982 踩方格

有一个方格矩阵，矩阵边界在无穷远处。我们做如下假设：

a. 每走一步时，只能从当前方格移动一格，走到某个相邻的方格上；
b. 走过的格子立即塌陷无法再走第二次；
c. 只能向北、东、西三个方向走；

请问：如果允许在方格矩阵上走n步(n<=20)，共有多少种不同的方案。2种走法只要有一步不一样，即被认为是不同的方案。

例题：百练4982 踩方格

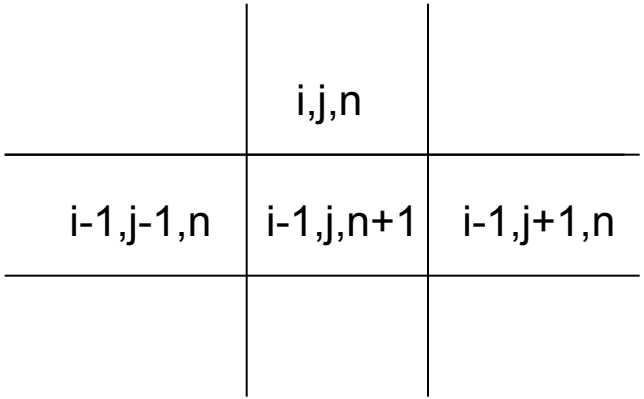
思路：

递归
从（i, j）出发，走n步的方案数，等于以下三项之和：

从(i+1, j)出发，走n-1步的方案数。前提：(i+1, j)还没走过
从(i, j+1)出发，走n-1步的方案数。前提：(i, j+1)还没走过
从(i, j-1)出发，走n-1步的方案数。前提：(i, j-1)还没走过

```
#include <iostream>
#include <cstring>
using namespace std;
int visited[30][50];
int ways ( int i,int j,int n)
{
        if( n == 0)
                return 1;
        visited[i][j] = 1;
        int num = 0;
        if( ! visited[i][j-1] )
                num+= ways(i,j-1,n-1);
        if( ! visited[i][j+1] )
                num+= ways(i,j+1,n-1);
        if( ! visited[i+1][j] )
                num+= ways(i+1,j,n-1);
        visited[i][j] = 0;
        return num;
}
```

```
#include <iostream>
#include <cstring>
using namespace std;
int visited[30][50];
int ways ( int i,int j,int n)
{
        if( n == 0)
                return 1;
        visited[i][j] = 1;
        int num = 0;
        if( ! visited[i][j-1] )
                num+= ways(i,j-1,n-1);
        if( ! visited[i][j+1] )
                num+= ways(i,j+1,n-1);
        if( ! visited[i+1][j] )
                num+= ways(i+1,j,n-1);
        visited[i][j] = 0;
        return num;
}
```



```
int main()
{
        int n;
        cin >> n;
        memset(visited,0,sizeof(visited));

        cout << ways(0,25,n) << endl;
        return 0;
}
```

深度优先搜索

寻路问题

ROADS （POJ1724）

N个城市，编号1到N。城市间有R条单向道路。
每条道路连接两个城市，有长度和过路费两个属性。
Bob只有K块钱，他想从城市1走到城市N。问最短共需要走多长的路。如果到不了N，输出-1

2<=N<=100
0<=K<=10000
1<=R<=10000
每条路的长度 L，1 <= L <= 100
每条路的过路费T ， 0 <= T <= 100

输入：
K
N
R
s_1 e_1 L_1 T_1
s_1 e_2 L_2 T_2
...
s_R e_R L_R T_R
s e是路起点和终点

解题思路

从城市 1开始深度优先遍历整个图，找到所有能过到达 N 的走法，选一个最优的。

解题思路

从城市 1开始深度优先遍历整个图，找到所有能过到达 N 的走法，
选一个最优的。

最优性剪枝：

1）如果当前已经找到的最优路径长度为L ，那么在继续搜索的过程中，总长度已经大于等于L的走法，就可以直接放弃，不用走到底了

解题思路

从城市 1开始深度优先遍历整个图，找到所有能到达 N 的走法，
选一个最优的。

最优性剪枝：

1）如果当前已经找到的最优路径长度为L ，那么在继续搜索的过程中，总长度已经大于等于L的走法，就可以直接放弃，不用走到底了

保存中间计算结果用于最优性剪枝：

2）用midL[k][m] 表示：走到城市k时总过路费为m的条件下，最优路径的长度。若在后续的搜索中，再次走到k时，如果总路费恰好为m，且此时的路径长度已经超过midL[k][m],则不必再走下去了。

解题思路

另一种通用的最优性剪枝思想 ---保存中间计算结果用于最优性剪枝：

2） 如果到达某个状态A时，发现前面曾经也到达过A，且前面那次到达A所花代价更少，则剪枝。这要求保存到达状态A的到目前为止的最少代价。

用midL[k][m] 表示：走到城市k时总过路费为m的条件下，最优路径的长度。若在后续的搜索中，再次走到k时，如果总路费恰好为m，且此时的路径长度已经超过midL[k][m],则不必再走下去了。

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <cstring>
using namespace std;
int K,N,R;
struct Road {
    int d,L,t;
};
vector<vector<Road> > cityMap(110); //邻接表。cityMap[i]是从点i有路连到的城市集合
int minLen = 1 << 30;  //当前找到的最优路径的长度
int totalLen;   //正在走的路径的长度
int totalCost ; //正在走的路径的花销
int visited[110];  //城市是否已经走过的标记
int minL[110][10100]; //minL[i][j]表示从1到i点的，花销为j的最短路的长度
```

```
void Dfs(int s) //从 s开始向N行走
{
        if( s == N ) {
                minLen = min(minLen,totalLen);
                return ;
        }
        for( int i = 0 ;i < cityMap[s].size(); ++i ) {
                int d =  cityMap[s][i].d;  //s 有路连到d
                if(! visited[d] ) {
                    int cost = totalCost +  cityMap[s][i].t;
                    if( cost > K)
                                continue;
                    if( totalLen +  cityMap[s][i].L >= minLen ||
                      totalLen + cityMap[s][i].L >= minL[d][cost])
                                continue;
```

```
                    totalLen += cityMap[s][i].L;
                    totalCost +=  cityMap[s][i].t;
                    minL[d][cost] = totalLen;
                    visited[d] = 1;
                    Dfs(d);
                    visited[d] = 0;
                    totalCost -=  cityMap[s][i].t;
                    totalLen -= cityMap[s][i].L;
                }
        }
}
```

```
int main()
{
        cin >>K >> N >> R;
        for( int i = 0;i < R; ++ i) {
                int s;
                Road r;
                cin >> s >> r.d >> r.L >> r.t;
                if( s != r.d )
                        cityMap[s].push_back(r);
        }
        for( int i = 0;i < 110; ++i )
                for( int j = 0; j < 10100; ++ j )
                        minL[i][j] = 1 << 30;
        memset(visited,0,sizeof(visited));
        totalLen = 0;
        totalCost = 0;
        visited[1] = 1;
```

```
        minLen = 1 << 30;
        Dfs(1);
        if( minLen < (1 << 30))
                cout << minLen << endl;
        else
                cout << "-1" << endl;
}
```

深度优先搜索

生日蛋糕

生日蛋糕（POJ1190）

要制作一个体积为NTT 的M层生日蛋糕，每层都是一个圆柱体。
设从下往上数第i(1 <= i <= M)层蛋糕是半径为Ri，高度为Hi的圆柱。当i < M时，要求Ri > Ri+1且Hi > Hi+1。

由于要在蛋糕上抹奶油，为尽可能节约经费，我们希望蛋糕外表面（最下一层的下底面除外）的面积Q最小。

令Q = Sπ

请编程对给出的N和M，找出蛋糕的制作方案（适当的Ri和Hi的值），使S最小。
（除Q外，以上所有数据皆为正整数）

解题思路

- 深度优先搜索，枚举什么？

解题思路

- 深度优先搜索，枚举什么？
  枚举每一层可能的高度和半径。

- 如何确定搜索范围？

解题思路

- 深度优先搜索，枚举什么？
  枚举每一层可能的高度和半径。

- 如何确定搜索范围？
  底层蛋糕的最大可能半径和最大可能高度

- 搜索顺序，哪些地方体现搜索顺序？

解题思路

- 深度优先搜索，枚举什么？
  枚举每一层可能的高度和半径。

- 如何确定搜索范围？
  底层蛋糕的最大可能半径和最大可能高度

- 搜索顺序，哪些地方体现搜索顺序？
  从底层往上搭蛋糕，而不是从顶层往下搭
  在同一层进行尝试的时候，半径和高度都是从大到小试

- 如何剪枝？

剪枝

- 剪枝1：搭建过程中发现已建好的面积已经超过目前求得的最优表面积，或者预见到搭完后面积一定会超过目前最优表面积，则停止搭建（最优性剪枝）

剪枝

●剪枝1：搭建过程中发现已建好的面积已经超过目前求得的最优表面积，或者预见到搭完后面积一定会超过目前最优表面积，则停止搭建（最优性剪枝）

●剪枝2：搭建过程中预见到再往上搭，高度已经无法安排，或者半径已经无法安排，则停止搭建(可行性剪枝)

剪枝

●剪枝1：搭建过程中发现已建好的面积已经不小于目前求得的最优表面积，或者预见到搭完后面积一定会超过目前最优表面积，则停止搭建（最优性剪枝）

●剪枝2：搭建过程中预见到再往上搭，高度已经无法安排，或者半径已经无法安排，则停止搭建（可行性剪枝）

●剪枝3：搭建过程中发现还没搭的那些层的体积，一定会超过还缺的体积，则停止搭建（可行性剪枝）

剪枝

●剪枝1：搭建过程中发现已建好的面积已经不小于目前求得的最优表面积，或者预见到搭完后面积一定会不小于目前最优表面积，则停止搭建（最优性剪枝）

●剪枝2：搭建过程中预见到再往上搭，高度已经无法安排，或者半径已经无法安排，则停止搭建（可行性剪枝）

●剪枝3：搭建过程中发现还没搭的那些层的体积，一定会超过还缺的体积，则停止搭建（可行性剪枝）

●剪枝4：搭建过程中发现还没搭的那些层的体积，最大也到不了还缺的体积，则停止搭建（可行性剪枝）

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <cstring>
#include <cmath>
using namespace std;
int N,M;
int minArea = 1 << 30; //最优表面积
int area = 0; //正在搭建中的蛋糕的表面积
int minV[30]; // minV[n]表示n层蛋糕最少的体积
int minA[30]; // minA[n]表示n层蛋糕的最少侧表面积
int main()
{
        cin >> N >> M  ;//M层蛋糕，体积N
        minV[0] = 0;
        minA[0] = 0;
        for( int i = 1; i<= M; ++ i) {
                minV[i] = minV[i-1] + i * i * i; //第i层半径至少i,高度至少i
                minA[i] =  minA[i-1] + 2 * i * i;
        }
        if( minV[M] > N )
                cout << 0 << endl;
```

```
        else {
                int maxH =  (N - minV[M-1])/(M*M) + 1;//底层最大高度
                //最底层体积不超过 (N-minV[M-1]),且半径至少M
                int maxR = sqrt(double(N-minV[M-1])/M) + 1;//底层高度至少M
                area = 0;
                minArea = 1 << 30;
                Dfs( N,M,maxR,maxH);
                if( minArea == 1 << 30)
                        cout << 0 << endl;
                else
                        cout << minArea << endl;
        }

}
```

```
void Dfs(int v, int n,int r,int h)
//要用n层去凑体积v,最底层半径不能超过r,高度不能超过h
//求出最小表面积放入 minArea
{
        if( n == 0 ) {
                if( v ) return;
                else {
                        minArea = min(minArea,area);
                        return;
                }
        }
        if( v <= 0)
                return ;
        if( minV[n] > v ) //剪枝3
                return ;
        if( area + minA[n] >= minArea) //剪枝1
                return ;
        if( h < n || r < n ) //剪枝2
                return ;
```

```
        if( MaxVforNRH(n,r,h) < v )   //剪枝4
        //这个剪枝最强！没有的话，5秒都超时，有的话，10ms过！
                return;
        //for( int rr = n; rr <= r; ++ rr ) { 这种写法比从大到小慢5倍
        for( int rr = r; rr >=n; -- rr ) {
                if( n == M ) //底面积
                        area = rr * rr;
                for( int hh = h; hh >= n ; --hh ) {
                        area += 2 * rr * hh;
                        Dfs(v-rr*rr*hh,n-1,rr-1,hh-1);
                        area -= 2 * rr * hh;
                }
        }
}
```

```
int MaxVforNRH(int n,int r,int h)
{ //求在n层蛋糕，底层最大半径r，最高高度h的情况下，能凑出来的最大体积
        int v = 0;
        for( int i = 0; i < n ; ++ i )
                v += (r - i ) *(r-i) * (h-i);
        return v;
}
```

还有什么可以改进

还有什么可以改进

1）用数组存放 `MaxVforNRH(n,r,h)` 的计算结果，避免重复计算

还有什么可以改进

1）用数组存放 MaxVforNRH(n,r,h) 的计算结果，避免重复计算

2）

```
for( int rr = r; rr >=n; -- rr ) {
        if( n == M ) //底面积
                area = rr * rr;
        for( int hh = h; hh >= n ; --hh ) {
                area += 2 * rr * hh;
                Dfs(v-rr*rr*hh,n-1,rr-1,hh-1);
//加上对本次Dfs失败原因的判断。如果是因为剩余体积不够大而失败，那么就用不着试下一个高度，直接break; 或者由小到大枚举 h……
                area -= 2 * rr * hh;
        }
}
```