Section 3.4　Computational Geometry 计算几何

译 By SuperBrother

知识准备

- 图论
- 最短路

操作

这个模块讨论几个计算某些几何问题的算法，这些算法大多基于下列两个操作：叉积和反正切。

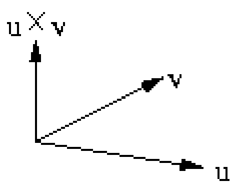
叉积

u 和 v 的叉积被表示成 u x v。两个**三维的向量** u,v 的叉积是下列行列式（**i,j,k 为 x,y,z 轴上单位向量**）:

```
| i  j  k  |
| Ux Uy Uz |
| Vx Vy Vz |
```

即:

```
(Uy*Vz-Vy*Uz)i + (Uz*Vx-Ux*Vz)j + (Ux*Vy-Uy*Vx)k
```



z 分量为 0 时，上面式子就化为 2 维的两向量叉积了。结果只有 z 分量。

即：

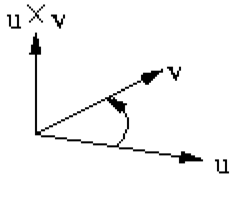
```
| Ux Uy |
| Vx Vy |
Ux*Vy-Uy*Vx
```

（注意！二维的叉积较为猥琐。。其实叉积最早就是定义在三维空间内的，当 z=0 时的特殊情形才是二维向量积。“二维向量”表达式求出的是一个超出平面的向量。。这个向量的方向我们不关心，但**有时又要利用它**。。。（例如求多边形面积）故上式不甚严格）

叉积有 3 个特点：

- 两个向量的叉积是一个与这两个向量同时垂直的向量。
- 叉积的大小等于下面 3 个量的乘积:
  - u 的大小
  - v 的大小
  - u,v 夹角的正弦。

当然与 u,v 同时垂直的向量有两个方向，叉积的方向取决于 u 在 v 的右边还是在 v 的左边。



点积

点积的值由以下三个值确定：

- u 的大小
- v 的大小

- u,v 夹角的余弦。

在 u,v 非零的前提下，点积如果为负，则 u,v 形成的角大于 90 度；如果为零，那么 u,v 垂直；如果为正，那么 u,v 形成的角为锐角。

反正切

反正切函数对于一个给定的正切值，返回一个在-pi/2 到 pi/2 之间的角（即-90 度至+90 度）。C 中另外有一个函数 atan2，给出 y 分量和 x 分量（注意顺序！），计算向量与 x 正半轴的夹角，在-pi 到 pi 之间。它的优点就是不需担心被 0 除，也不需为了处理 x 为负的情况而写代码修改角。atan2 函数几乎比普通的 atan 函数更简单，因为只需调用一次。

全面考虑问题

这些几何问题大多都产生**很多**特殊情况。注意这些特殊情况并且要**保证自己的程序能处理所有的情况**。

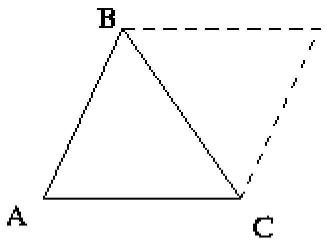
浮点运算也会带来新问题。浮点运算很难精确，因为注意：计算机只能计算有限的精度。特别地，要通过判断两个值的差是否在一个很小的范围内来判断是否相等。

计算几何算法

这里是一些能帮助你计算几何问题的东西。

三角形面积

为了计算由点(A,B,C)构成的三角形的面积，先选取一个顶点（例如 A），再向剩余两个顶点作向量（令 u=b-a, v=c-a）。三角形(A,B,C)的面积即为 u,v 叉积长度的一半。



另一个求三角形面积的变通方法就是用海伦公式。如果三角形三边长为 a,b,c，令 s=(a+b+c)/2，那么三角形面积就是:

```
sqrt(s*(s-a)*(s-b)*(s-c))
```

两条线段平行吗？

为了判断两条线段是否平行，分别沿两条线段建立向量，判断叉积是否（几乎为）零。

多边形面积

由点(x1,y1)...(xn,yn)组成的多边形的面积等于下列行列式的值：

```
 1   | x1 x2 ... xn |
---  |              |
 2   | y1 y2 ... yn |
```

也等于下面的式子的值:

```
x1y2 + x2y3 + ... + xny1 - y1x2 - y2x3 - ... - ynx1
```

就是选取原点作标准 连接原点和个顶点 并且两两个地计算叉积并加起来

点到直线的距离

点 P 到直线 AB 的距离也可以由叉积给出，准确的说,d(P,AB) = |(P - A) x (B - A)| / | B - A| 。

点 P 到由点 A,B 和 C 确定的平面的距离，令 n = (B - A) x (C - A)，那么 d(P,ABC) = (P-A) • n / |n|。

点在直线上

如果点到直线的距离是 0，那么点在直线上。

点都在直线的同侧

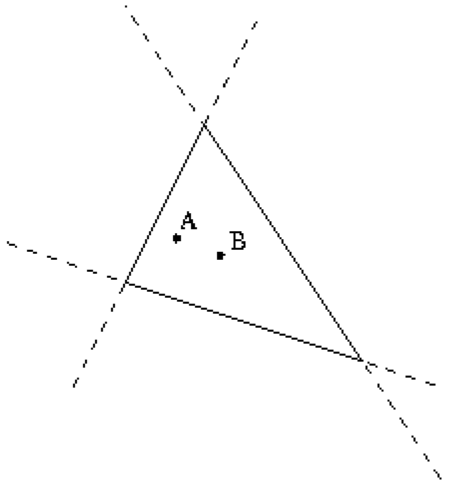
只讲两个点的情况。如果要确定点 C 和 D 是否在直线 AB 同侧，计算(B - A) x (C - A)和(B - A) x (D - A)的 z 分量。如果同号（或如果积为正），那么点 C,D 在直线 AB 同侧。

点在线段上

为了求出点 C 是否在线段 AB 上，先判断点 C 是否在直线 AB 上，再判断线段 AB 的长度是否等于线段 AC 长度与线段 BC 长度之和。

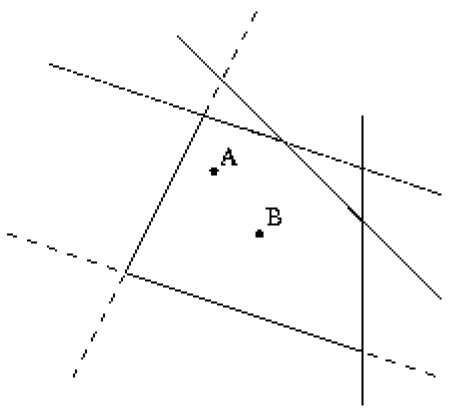
点在三角形内

要确定点 A 是否在三角形内，首先选择一个三角形内部的点 B(重心就很不错)。接下来，判断点 A,B 是否都在三边所在的三条直线的同侧。



点在凸多边形内

方法同上



四点（或更多）共面

如果要确定一组点是否共面，任选 3 个点。如果对于任意点 D，有((B - A) x (C - A)) • (D - A) = ~0，那么这些点共面。

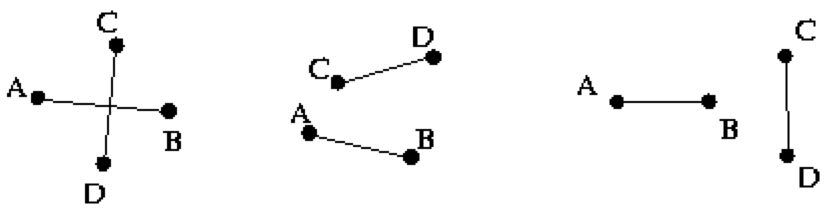
两条直线相交

平面内两条直线相交当且仅当直线不平行。

空间内，两直线 AB,CD 相交则 AB,CD 不平行，且点 A,B,C,D 共面。

两条线段相交

平面内，两条线段相交当且仅当 A,B 在直线 CD 异侧且 C,D 在直线 AB 异侧。



注意两个判断都是必须的，例如第三种情况第一个判断为 true，但第二个判断说明线段 AB,CD 不相交。在空间中，计算下面方程组，其中 i,j 未知：

```
Ax + (Bx - Ax) i = Cx + (Dx - Cx) j
Ay + (By - Ay) i = Cy + (Dy - Cy) j
Az + (Bz - Az) i = Cz + (Dz - Cz) j
```

如果方程组有解(i,j)满足 0<=i<=1，0<=j<=1，那么两线段相交于点(Ax + (Bx - Ax)i, Ay + (By - Ay)i, Az + (Bz - Az) i)

两直线的交点

在平面内的两条直线 AB,CD，求交点最直接的方法就是解下列的二元一次方程组：

```
Ax + (Bx - Ax)i = Cx + (Dx - Cx) j
Ay + (By - Ay)i = Cy + (Dy - Cy) j
```

交点是：

```
(Ax + (Bx - Ax) i, Ay + (By - Ay) i)
```

空间内，解同样的方程组来判断交点，交点是：

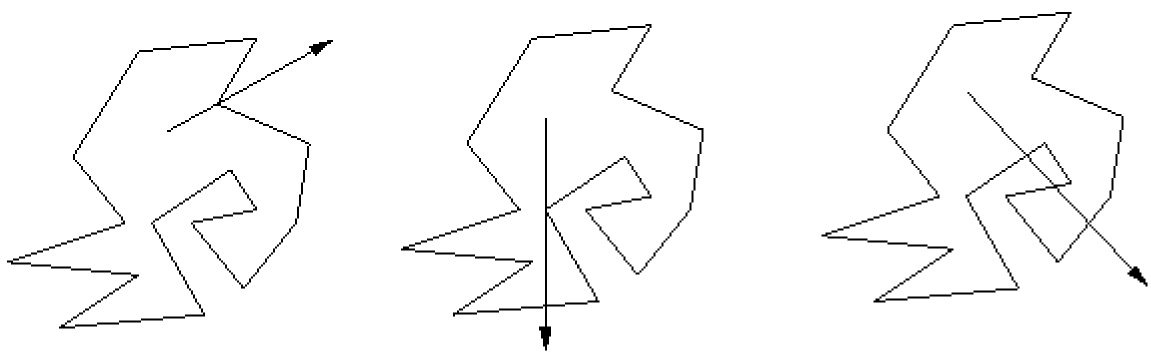
```
(Ax + (Bx - Ax)i, Ay + (By - Ay)i, Az + (Bz - Az)i)
```

判断平面内多边形的凹凸性

要判断平面内一多边形是否为凸，沿着顺时针方向扫一遍。对于每三个点(A,B,C)，计算叉积(B - A) x (C - A)。如果叉积的 z 分量均为负，多边形则为凸多边形。

点在凹多边形内

要确定点是否在凹多边形内，任选一点作射线，计算相交次数。如果与多边形相交于一点或一边，则换一个方向，否则，点在多边形内当且仅当射线与点相交次数为奇数。



这个方法也可以扩展到三维（或更高），但此时应相交于面（再判断），不是在点上或边上。

几何方法

这些几何方法介绍了一些技巧，可以用来优化时间和求得更精确的解。

蒙特卡洛方法(Monte Carlo)

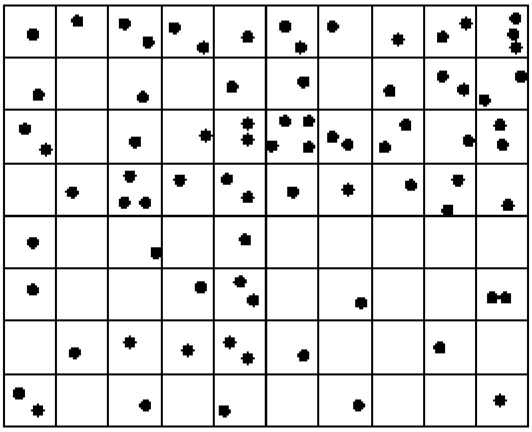
第一个方法是建立在随机化之上的。它不去直接计算某件事的概率，而是以一个随机事件来模拟，求得事件发生的频率。如果次数足够，频率和概率的差别会很小。

这对于确定某些东西来说是很有用的，例如计算某个图形的面积。它不去直接计算面积，而是建立一个已知大小的区域，每次向该区域扔一个“飞镖”，并计算击中区域内图形的频率。如果计算足够精确，就可以得到实际面积的一个足够好的近似值。

这个方法要得到一个足够小的相对误差（误差于实际值之商），需要大量成功发生的事件。如果发生的概率很小，结果就不好了。

分割技术

分割技术可用来优化时间。这需要把平面分割成小块（通常是分成小格，但有时也会用角度或其它方法），并将元素放入合适的区域中。当检查图案的某部分时，只有有该图案的格子会被检查到。所以，时间可以大大地优化，比如，要确定到定点的距离小于某个值的元素（此时图案是个圆），或求是否相交（此时图案为直线）。



转化为图

有时看起来像几何问题的问题实际上却是一个图的问题。因为输入是平面内的点，并不代表问题是几何问题。

例子

Point Moving

给定一组线段和点 A,B，能否在不穿过线段的情况下从 A 移动到 B?

线段将平面分割成不同部分,检查 A,B 是否在一个部分。

Bicycle Routing

给出有起点和终点的一组建筑物，找出从建筑物 A 到 B 不穿过任何建筑物的最短路线。

题解：图论问题。以建筑物的起点和*重*终点为点，两点之间在不径直穿过任何建筑物时连一条边，边权为两点之间的距离。这样就把原问题转化成了最短路问题。

Maximizing Line Intersections

给出平面内一组点，找到能被一条直线能相交到的最多线段。

题解：很显然，直线必须经过两个交点。这样，枚举每对交点，计算此时直线的交点数。可用分割法优化。

Polygon Classification

给出一组直线所确定的多边形，判断多边形是否是简单的（任意两条不相邻的线段不会相交）和凸的.