矩阵论及其应用
习题 2

陈轶洲 MF20330010

November 18, 2020

1

令 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$，则 $(u,v) = u^T Av$ 满足:

1) $(v,u) = y_1x_1 - y_1x_2 - y_2x_1 + 3y_2x_2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 - y_2 \\ -y_1 + 3y_2 \end{bmatrix} = u^T Av = (u,v)$

2) $(ku,v) = (ku)^T Av = k(u^T Av) = k(u,v)$

3) $(u+w,v) = (u+w)^T Av = u^T Av + w^T Av = (u,v) + (w,v)$

4) $(u,u) = u^T Au = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + 2x_2^2 \geq 0$ 且仅当 $u = 0$ 时等号成立

综上，(u,v) 是 R^2 上的内积。

2

若 $(\alpha,\beta)_1, (\alpha,\beta)_2$ 是 V 的不同内积，则:

1) $(\alpha,\beta) = (\alpha,\beta)_1 + (\alpha,\beta)_2 = (\beta,\alpha)_1 + (\beta,\alpha)_2 = (\beta,\alpha)$

2) $(k\alpha,\beta) = (k\alpha,\beta)_1 + (k\alpha,\beta)_2 = k(\alpha,\beta)_1 + k(\alpha,\beta)_2 = k(\alpha,\beta)$

3) $(\alpha+\delta,\beta) = (\alpha+\delta,\beta)_1 + (\alpha+\delta,\beta)_2 = (\alpha,\beta)_1 + (\alpha,\beta)_2 + (\delta,\beta)_1 + (\delta,\beta)_2 = (\alpha,\beta) + (\delta,\beta)$

4) $(\alpha,\alpha) = (\alpha,\alpha)_1 + (\alpha,\alpha)_2 \geq 0$ 当且仅当 $\alpha = 0$ 时等号成立

设 $(\alpha,\beta)_1$ 为 V 上的内积，定义 $(\alpha,\beta) = (\alpha,\beta)_1 + (\beta,\alpha)_1$，下面证明 (α,β) 为 V 上的内积:

1) $(\alpha,\beta) = (\alpha,\beta)_1 + (\beta,\alpha)_1 = (\beta,\alpha)_1 + (\alpha,\beta)_1 = (\beta,\alpha)$

2) $(k\alpha,\beta) = (k\alpha,\beta)_1 + (\beta,k\alpha)_1 = k(\alpha,\beta)_1 + k(\beta,\alpha)_1 = k(\alpha,\beta)$

3) $(\alpha+\delta,\beta)=(\alpha+\delta,\beta)_1+(\beta,\alpha+\delta)_1=(\alpha,\beta)_1+(\beta,\alpha)_1+(\delta,\beta)_1+(\beta,\delta)_1=(\alpha,\beta)+(\delta,\beta)$

4) $(\alpha,\alpha)=2(\alpha,\alpha)_1\geq 0$ 当且仅当 $\alpha=0$ 时等号成立

证毕。

3

令 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n]$, $B=[\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n]$，由题意知 A 的列向量是 B 中列向量的线性组合，故必存在实数矩阵 $C\in R^{n\times n}$ 使得 $A=BC$ 成立。
于是等式两边左乘 B 得到：$BA=B^2C$。又已知 $B^2=B$，故 $BA=BC=A$，证毕。

4

使用 Schmidt 方法构造正交基与标准正交基:

$$
\begin{aligned}
&q_1'=v_1\quad q_1=\frac{q_1'}{||q_1'||}=\begin{bmatrix}0\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\\
&q_2'=v_2-(v_2,q_1)q_1=\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{bmatrix}\quad q_2=\frac{q_2'}{||q_2'||}=\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{bmatrix}\\
&q_3'=v_3-(v_3,q_1)q_1-(v_3,q_2)q_2=\begin{bmatrix}1\\ -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{6}\\ -\frac{7}{6}\end{bmatrix}\quad q_3=\frac{q_3'}{||q_3'||}=\frac{2}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}1\\ -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{6}\\ -\frac{7}{6}\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$