Neural Network and Applications
Homework 3

陈轶洲 MF20330010

November 12, 2020

1

不可以用 $y = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$ 来作为神经网络的激活函数，这是因为激活函数需要满足如下性质：

1) 非线性：即导数不是常数，这是多层神经网络的基础，保证多层神经网络不退化成单层线性网络；
2) 几乎处处可微：可微性保证了在优化中梯度的可计算性；
3) 非饱和性：饱和指的是在某些区间梯度接近于零（即梯度消失），使得参数无法继续更新的问题；

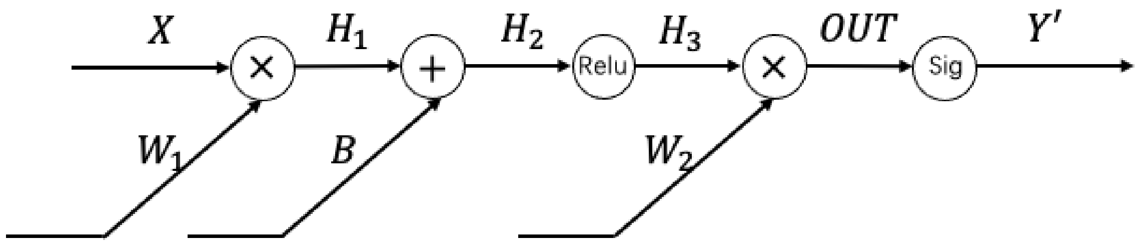
对于题干中所给激活函数，其不满足非线性和非饱和性，因为它在所有位置的梯度都为 0，因此处处饱和，无法作为激活函数。

2

首先对待求参数进行形式化定义：

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad W_1 = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad W_2 = \begin{bmatrix} w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.1}$$

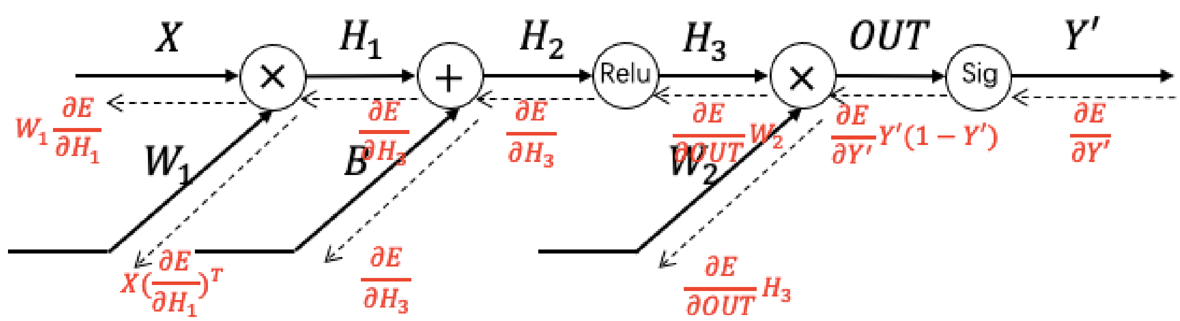
接着用流程图直观表达前向传播过程：



由上图可知前向传播的计算过程：

$$
\begin{aligned}
H_1 &= W_1^T X \\
H_2 &= H_1 + B \\
H_3 &= Relu(H_2) \\
OUT &= W_2^T H_3 \\
Y' &= Sigmoid(OUT)
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

反向传播过程中的流程图如下所示：



由式 (2.2) 可推出反向传播过程中各参数对损失函数的偏导，(将 mask() 定义为：找到原矩阵中非正元素位置，将其对应偏导矩阵中对应位置的元素置为

0)：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial Y'} &= \frac{\partial (Y'-Y)^2}{\partial Y'} = 2(Y'-Y) \\
\frac{\partial E}{\partial OUT} &= \frac{\partial E}{\partial Y'} Y'(1-Y') = 2(Y'-Y)Y'(1-Y') \\
\frac{\partial E}{\partial H_3} &= \frac{\partial E}{\partial OUT} W_2 = 2(Y'-Y)Y'(1-Y')W_2 \\
\frac{\partial E}{\partial W_2} &= \frac{\partial E}{\partial OUT} H_3 = 2(Y'-Y)Y'(1-Y')H_3 \\
\frac{\partial E}{\partial H_2} &= mask(2(Y'-Y)Y'(1-Y')W_2) \\
\frac{\partial E}{\partial H_1} &= mask(2(Y'-Y)Y'(1-Y')W_2) \\
\frac{\partial E}{\partial B} &= mask(2(Y'-Y)Y'(1-Y')W_2) \\
\frac{\partial E}{\partial W_1} &= X(\frac{\partial E}{\partial H_1})^T = X(mask(2(Y'-Y)Y'(1-Y')W_2))^T \\
\frac{\partial E}{\partial X} &= W_1 \frac{\partial E}{\partial H_1} = W_1 mask(2(Y'-Y)Y'(1-Y')W_2)
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

以上就是对该神经网络前向与反向传播的完整推导。损失函数对于 w_1, b_2, w_5 的偏导，其表达式已被包含在了更抽象的 $\frac{\partial E}{\partial W_1}, \frac{\partial E}{\partial B}, \frac{\partial E}{\partial W_2}$ 之中。特别的，当 $X = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 2.8 \end{bmatrix}, W_1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.8 \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 0.6 \end{bmatrix}$ 时：

前向传播：

$$
\begin{aligned}
H_1 &= W_1^T X = \begin{bmatrix} 0.68 \\ 1.27 \end{bmatrix} \\
H_2 &= H_1 + B = \begin{bmatrix} 0.98 \\ 2.07 \end{bmatrix} \\
H_3 &= Relu(H_2) = \begin{bmatrix} 0.98 \\ 2.07 \end{bmatrix} \\
OUT &= W_2^T H_3 = \begin{bmatrix} 4.672 \end{bmatrix} \\
Y' &= Sigmoid(OUT) = \begin{bmatrix} 0.99073313 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

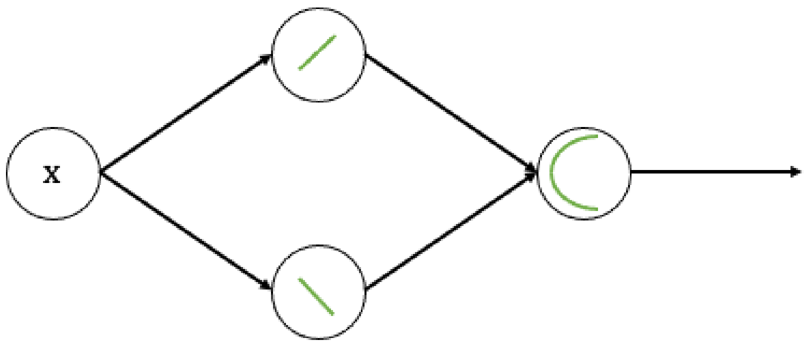
反向传播：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial Y'} &= \frac{\partial (Y'-Y)^2}{\partial Y'} = 2(Y'-Y) = -9.21853373 \\
\frac{\partial E}{\partial W_2} &= \frac{\partial E}{\partial OUT} H_3 = 2(Y'-Y)Y'(1-Y')H_3 = \begin{bmatrix} -0.08294257 \\ -0.17519502 \end{bmatrix} \\
\frac{\partial E}{\partial B} &= mask(2(Y'-Y)Y'(1-Y')W_2) = \begin{bmatrix} -0.29622346 \\ -0.05078116 \end{bmatrix} \\
\frac{\partial E}{\partial W_1} &= X(\frac{\partial E}{\partial H_1})^T = X(mask(2(Y'-Y)Y'(1-Y')W_2))^T = \begin{bmatrix} -0.08886704 & -0.01523435 \\ -0.82942569 & -0.14218726 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

损失函数对 w_3 的偏导为-0.83

3

使用单神经元无法拟合二次曲线，这是因为单神经元只能拟合一次线性曲线，而二次曲线是非线性的。
为了拟合二次曲线，至少需要三个神经元，如下图所示：



已知单神经元只能拟合线性函数，所以在隐藏层中使用两个神经元，用来拟合两条直线，输出层使用一个神经元将隐藏层训练的两条线连接起来，达到拟合二次曲线的目的。