鼠鼠的材力期末[①]

by: 一只学土木的鼠鼠

[①]edited by LaTeX

前面的话

这个材料力学的期末小册子是基于孙训方的《材料力学（I）》（第五版）[1] 整理出来的，纯粹是鼠鼠为了期末复习和顺便重拾 LaTeX 而整理，如有真正想学好材料力学的朋友建议啃书本，鼠鼠只是想期末及格。

而且这玩意儿我预感会通篇公式，几乎没有图片。本来鼠鼠是打算给必要的地方放上 Axglyph、PowerPoint 等软件画的矢量图，但实际操作还是不熟悉。等后面鼠鼠有时间了会捣鼓捣鼓 LaTeX 写论文的工作流，会给这篇加上矢量图的。

目录

第一章：绪论及基本概念

PS：经典大学课本第一章绪论。鼠鼠暂时没看到有什么重点，看到了鼠鼠会补充

第二章：轴向拉伸和压缩

这章可以说是材料力学中基础中的基础，第二节的截面法求轴力和画截面图更是后面所有内容的根基。

轴力及轴力图

轴力即作用线与杆轴线重合的力。在我们所学的范围内，杆件所受的拉力和压力绝大多数为轴力。符号规定：拉力为正，压力为负，一般计算先设为正，如果计算为负即为压力。

截面法画轴力图：三步走：截开、代替（用内力代替弃去部分）、平衡可能会出大题，比较简单：先整体受力分析求支反力（求外力），再用截面法求内力（有时候右边比左边好算，具体情况具体分析），作图即可。

应力

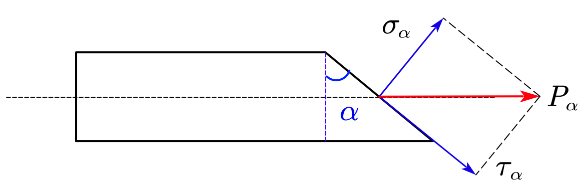
应力分两种：正应力和切应力，正应力引发长度的改变，切应力引发角度的改变。本章主要是正应力的计算，其实可以完全把正应力当作压强看待，其计算公式为

$$\sigma = \frac{F_N}{A} \tag{1}$$

单位为 Pa，其中 A 为横截面面积。符号与轴力保持一致（拉正压负）。

切引力的符号规定要注意：对截面一点产生顺时针力矩的切应力为正，反之为负。

当发生轴向拉压时，斜截面上的正应力和切应力有公式解决，先如图示（不得不画图了）



公式如下

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = p_\alpha cos\alpha = \sigma_0 cos^2\alpha \\ \tau_\alpha = p_\alpha sin\alpha = \frac{\sigma_0}{2} sin2\alpha \end{cases} \tag{2}$$

$\sigma_0 = \frac{F}{A}$ 是拉杆在横截面 $(\alpha = 0)$ 上的正应力，由公式知切应力的最大值在与轴线成 $45°$ 角的斜截面上，大小为 $\tau_{max} = \frac{\sigma}{2}$

许用应力

简单说就是杆件所受最大应力不应超过许用应力，公式为

$$\sigma_{max} \leqslant [\sigma] \tag{3}$$

若为轴向拉压，加上正应力公式，即公式1

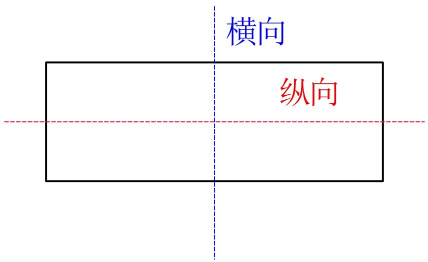
$$\sigma_{max} = \frac{F_{N,max}}{A} \leqslant [\sigma] \tag{4}$$

由它可以得到强度计算的三种类型：

强度校核	$\sigma_{max} = \frac{F_{N,max}}{A} \leqslant [\sigma]$
截面选择	$A \geqslant \frac{F_{N,max}}{[\sigma]}$
计算许可负载	$F_{N,max} = A\,[\sigma]$

横向线应变、纵向线应变、泊松比及胡克定律

别管别的，把横纵向的区别搞清楚先：



线应变为单位长度上的伸长和缩短（压缩和膨胀）。由定义得纵向线应变 ε 和横向线应变 ε' 为

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \qquad \varepsilon' = \frac{\Delta l}{l} \tag{5}$$

线应变的符号规定要注意：纵向伸长为正反之为负；横向压缩为正反之为负。

泊松比（横向变形因数）为横向线应变 ε'与纵向线应变之 ε之比（别比反了！），数值随材料而异。

$$\nu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon' = -\nu\varepsilon \tag{6}$$

胡克定律的原始表达式为:

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA} \tag{7}$$

其中 E 被称作材料的弹性模量，数值随材料而定。EA 被称作杆件的拉伸（压缩）刚度，是衡量杆件抗拉（压）变形能力的，越大越强。

由公式6、7, 得胡克定律的应力-应变表达式：

$$\sigma = E\varepsilon \tag{8}$$

弹性应变能及弹性应变能密度

弹性应变能为弹性体所受力而变形时所积蓄的能量。表达式为：

$$V_\varepsilon = \frac{F_N^2 l}{2EA} \tag{9}$$

联立公式7，得：

$$V_\varepsilon = \frac{EA}{2l}\Delta l^2 \tag{10}$$

弹性应变能密度为单位体积的弹性应变能，即：

$$v_\varepsilon = \frac{V_\varepsilon}{V} = \frac{\frac{1}{2}F\Delta l}{Al} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon \tag{11}$$

联立公式7，得：

$$v_\varepsilon = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2E} \tag{12}$$

材料在拉伸和压缩时的力学性能

这节就两理解性的公式，后面全是过程叙述，鼠鼠捡几个重点稍微说说。

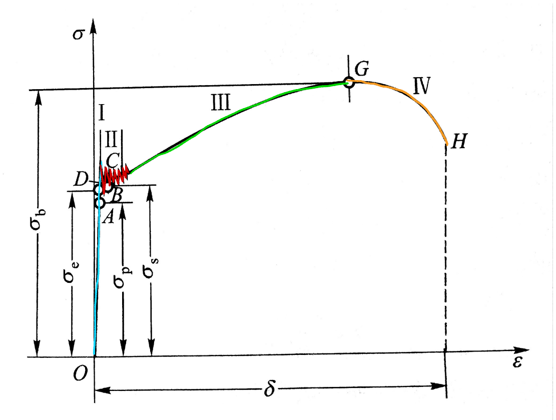
伸长率δ 和断面收缩率ψ 的公式为

$$\delta = \frac{l_1 - l}{l} \times 100\% \qquad \psi = \frac{A - A_1}{A} \times 100\% \tag{13}$$

通常 $\delta > 5\%$ 的材料被称为塑性材料，$\delta < 5\%$ 的材料被称为脆性材料。

力学性能为材料受力时在强度和变形方面所表现出来的性能。

在低碳钢的拉伸实验中，由应力-伸长量图像可将拉伸过程分为四个阶段，如图所示：



I 为弹性阶段，满足胡克定律，比例极限 σ_p 对应点 A（请自行放大，确实不太清楚），弹性极限 σ_e 对应点 B。两者区别在于弹性极限是在弹性范围内的，即形变可以完全恢复；但比例极限是有可能超过了弹性形变的范围，仅仅是数值上符合胡克定律 [2]。

II 为屈服阶段，此阶段应变显著增加，但应力基本不变（屈服现象）。屈服极限 σ_s 对应 D 点。

III 为强化阶段，此阶段材料抵抗变形的能力有所增强。强度极限 σ_b 对应点 G，为最大名义应力。

IV 为局部变形阶段，试件上出现急剧的局部横截面收缩现象（颈缩现象），直至试件断裂。

冷作硬化现象指在强化阶段卸载后，材料的比例极限提高，塑性降低的现象。过程不再详细叙述，只需记住这样后比例极限 σ_p 提高，塑性变形降低，强度极限 σ_b 不变。

后面（课本 P33 及以后）就是一堆没什么规律的文字叙述了。自己看看书，鼠鼠在这里不做赘述。

应力集中（概念）

应力集中指杆件突然变化而引起的应力局部骤然增大的现象。用理论应力集中系数$K_{t\sigma}$描述应力集中程度：

$$K_{t\sigma} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} \tag{14}$$

其中 σ_{max} 为杆件外形局部不规则处的最大局部应力，σ_{nom} 为横截面的平均应力。

考虑应力集中的情况如下表所示：

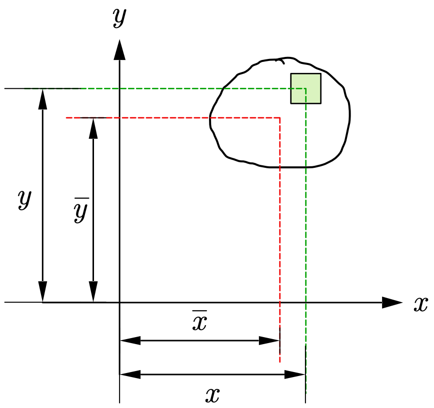
不考虑应力集中	塑性材料、静荷载；非均匀的脆性材料，如铸铁
考虑应力集中	均匀的脆性材料或塑性差的材料；动荷载

附录 I：截面的几何性质

本章涉及大量的公式推导及数学计算，鼠鼠为追求短平快在此只列出必要的定义、公式及结论。对公式推导感兴趣的话可以翻翻书本。

静矩和形心位置

先上图：



静矩（单位：m^3、mm^3）的定义式为：

$$\begin{cases} S_x = \int_A y dA \\ S_y = \int_A x dA \end{cases} \tag{15}$$

形心坐标公式为：

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\int_A y dA}{A} \\ \bar{y} = \frac{\int_A x dA}{A} \end{cases} \tag{16}$$

由公式15、16，得

$$\bar{x} = \frac{S_y}{A} \Rightarrow S_y = A\bar{x} \tag{17}$$

$$\bar{y} = \frac{S_X}{A} \Rightarrow S_x = A\bar{y} \tag{18}$$

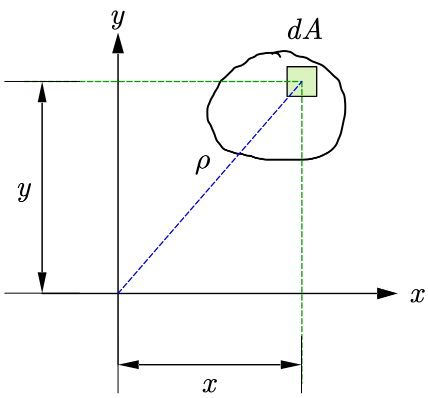
实际题目中出现的比较多的是规则图形组合截面的静矩和形心坐标，由定义式易得：

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} A_i \bar{y}_i \qquad S_y = \sum_{i=1}^{n} A_i \bar{x}_i \tag{19}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i \bar{y}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i} \qquad \bar{y} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i \bar{x}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i} \tag{20}$$

极惯性矩、惯性矩和惯性积

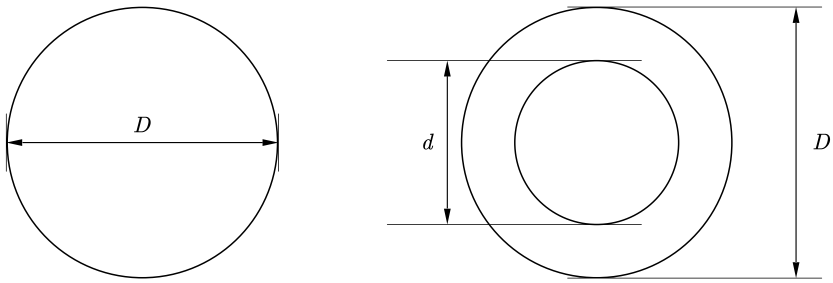
先上图：



极惯性矩（单位：m^4、mm^4，对点）的定义式为：

$$I_p = \int_A \rho^2 dA \tag{21}$$

可由公式21推导出实心圆和空心圆对圆心 O 的极惯性矩为：



$$\text{实心圆：} I_p = \frac{\pi D^4}{32} \qquad \text{空心圆：} I_p = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) \tag{22}$$

惯性矩（单位：m^4、mm^4，对轴）的定义式为：

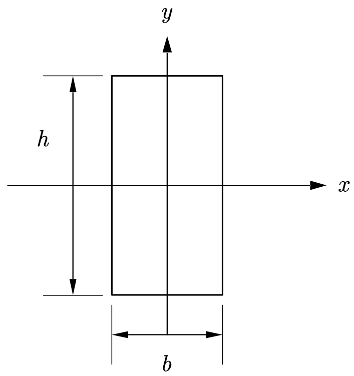
$$\begin{cases} I_x = \int_A y^2 dA \\ I_y = \int_A x^2 dA \end{cases} \tag{23}$$

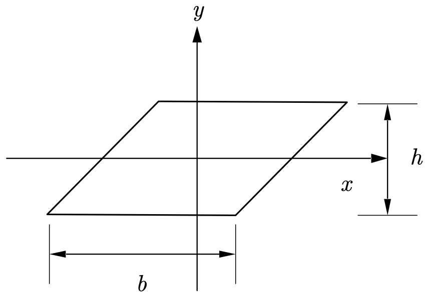
由公式21、23知：

$$I_p = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y \tag{24}$$

即截面对一点的极惯性矩，等于截面对以该点为原点的任意两正交坐标轴的惯性矩之和。

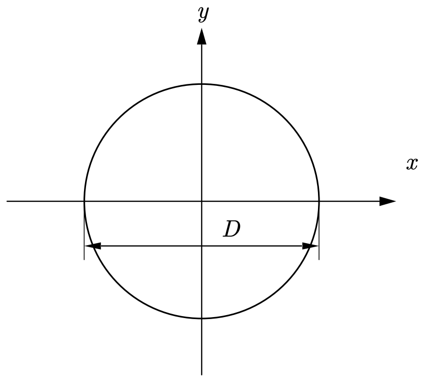
可由公式23推导出矩形和平行四边形对其形心轴的惯性矩为：





$$I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad I_y = \frac{hb^3}{12} \tag{25}$$

圆对其形心轴的惯性矩为：



$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64} \tag{26}$$

惯性积(单位：m^4、mm^4，对两轴) 的定义式为：

$$I_{xy} = \int_A xydA \tag{27}$$

惯性半径的定义式为：

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \tag{28}$$

惯性矩和惯性积的平行移轴公式为：

参考文献

[1] 孙训方. *材料力学（1）*. 高等教育出版社, 2009.

[2] 匿名用户. 比例极限和弹性极限的区别？. *Sougou*, 2017.