鼠鼠的材力期末[①]

by: 一只学土木的鼠鼠

[①]edited by LaTeX

前面的话

这个材料力学的期末小册子是基于孙训方的《材料力学（I）》（第五版）[1] 整理出来的，纯粹是鼠鼠为了期末复习和顺便重拾 LaTeX 而整理，如有真正想学好材料力学的朋友建议啃书本，鼠鼠只是想期末及格。

而且这玩意儿我预感会通篇公式，几乎没有图片。本来鼠鼠是打算给必要的地方放上 Axglyph、PowerPoint 等软件画的矢量图，但实际操作还是不熟悉。等后面鼠鼠有时间了会捣鼓捣鼓 LaTeX 写论文的工作流，会给这篇加上矢量图的。

目录

第一章：绪论及基本概念 **1**

第二章：轴向拉伸和压缩 **1**

轴力及轴力图 1

应力 1

许用应力 2

横向线应变、纵向线应变、泊松比及胡克定律 2

弹性应变能及弹性应变能密度 3

材料在拉伸和压缩时的力学性能 3

应力集中（概念） 4

附录 I：截面的几何性质 **5**

静矩和形心位置 5

极惯性矩、惯性矩和惯性积 6

第三章：扭转 **9**

传动轴的外力偶矩 9

扭矩及扭矩图 9

薄壁圆筒的扭转 9

等直圆杆的扭转 10

切应力互等定理 11

斜截面上应力公式 11

第四章：弯曲应力 **13**

剪力和弯矩・剪力图和弯矩图 13

弯曲正应力及强度条件 14

第一章：绪论及基本概念

PS：经典大学课本第一章绪论。鼠鼠暂时没看到有什么重点，看到了鼠鼠会补充

第二章：轴向拉伸和压缩

这章可以说是材料力学中基础中的基础，第二节的截面法求轴力和画截面图更是后面所有内容的根基。

轴力及轴力图

轴力即作用线与杆轴线重合的力。在我们所学的范围内，杆件所受的拉力和压力绝大多数为轴力。符号规定：拉力为正，压力为负，一般计算先设为正，如果计算为负即为压力。

截面法画轴力图：三步走：截开、代替（用内力代替弃去部分）、平衡可能会出大题，比较简单：先整体受力分析求支反力（求外力），再用截面法求内力（有时候右边比左边好算，具体情况具体分析），作图即可。

应力

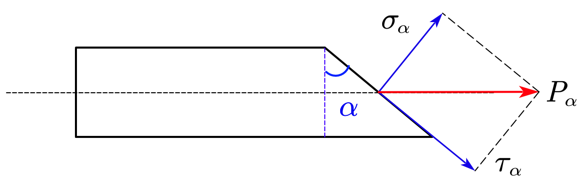
应力分两种：正应力和切应力，正应力引发长度的改变，切应力引发角度的改变。本章主要是正应力的计算，其实可以完全把正应力当作压强看待，其计算公式为

$$\sigma = \frac{F_N}{A} \tag{1}$$

单位为 Pa，其中 A 为横截面面积。符号与轴力保持一致（拉正压负）。

切引力的符号规定要注意：对截面一点产生顺时针力矩的切应力为正，反之为负。

当发生轴向拉压时，斜截面上的正应力和切应力有公式解决，先如图示（不得不画图了）



公式如下

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = p_\alpha cos\alpha = \sigma_0 cos^2\alpha \\ \tau_\alpha = p_\alpha sin\alpha = \frac{\sigma_0}{2} sin2\alpha \end{cases} \tag{2}$$

$\sigma_0 = \frac{F}{A}$ 是拉杆在横截面 $(\alpha = 0)$ 上的正应力，由公式知切应力的最大值在与轴线成 $45°$ 角的斜截面上，大小为 $\tau_{max} = \frac{\sigma}{2}$

许用应力

简单说就是杆件所受最大应力不应超过许用应力，公式为

$$\sigma_{max} \leqslant [\sigma] \tag{3}$$

若为轴向拉压，加上正应力公式，即公式1

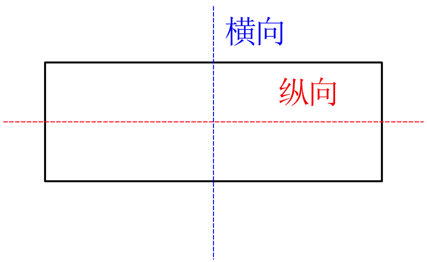
$$\sigma_{max} = \frac{F_{N,max}}{A} \leqslant [\sigma] \tag{4}$$

由它可以得到强度计算的三种类型：

强度校核	$\sigma_{max} = \frac{F_{N,max}}{A} \leqslant [\sigma]$
截面选择	$A \geqslant \frac{F_{N,max}}{[\sigma]}$
计算许可负载	$F_{N,max} = A[\sigma]$

横向线应变、纵向线应变、泊松比及胡克定律

别管别的，把横纵向的区别搞清楚先：



线应变为单位长度上的伸长和缩短（压缩和膨胀）。由定义得纵向线应变 ε 和横向线应变 ε' 为

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \qquad \varepsilon' = \frac{\Delta l}{l} \tag{5}$$

线应变的符号规定要注意：纵向伸长为正反之为负；横向压缩为正反之为负。

泊松比（横向变形因数）为横向线应变 ε'与纵向线应变之 ε之比（别比反了！），数值随材料而异。

$$\nu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon' = -\nu\varepsilon \tag{6}$$

胡克定律的原始表达式为:

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA} \tag{7}$$

其中 E 被称作材料的弹性模量，数值随材料而定。EA 被称作杆件的拉伸（压缩）刚度，是衡量杆件抗拉（压）变形能力的，越大越强。

由公式6、7, 得胡克定律的应力-应变表达式：

$$\sigma = E\varepsilon \tag{8}$$

弹性应变能及弹性应变能密度

弹性应变能为弹性体所受力而变形时所积蓄的能量。表达式为：

$$V_\varepsilon = \frac{F_N^2 l}{2EA} \tag{9}$$

联立公式7，得：

$$V_\varepsilon = \frac{EA}{2l}\Delta l^2 \tag{10}$$

弹性应变能密度为单位体积的弹性应变能，即：

$$v_\varepsilon = \frac{V_\varepsilon}{V} = \frac{\frac{1}{2}F\Delta l}{Al} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon \tag{11}$$

联立公式7，得：

$$v_\varepsilon = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2E} \tag{12}$$

材料在拉伸和压缩时的力学性能

这节就两理解性的公式，后面全是过程叙述，鼠鼠捡几个重点稍微说说。

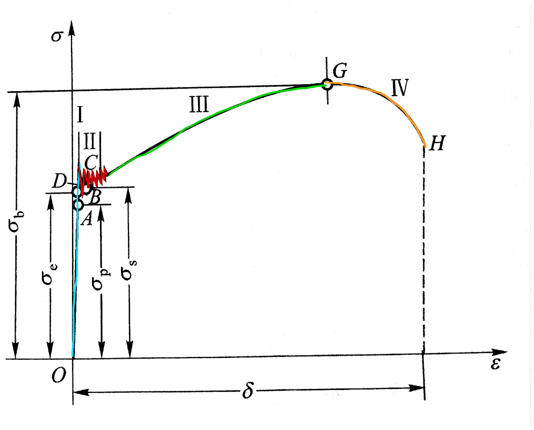
伸长率δ 和断面收缩率ψ 的公式为

$$\delta = \frac{l_1 - l}{l} \times 100\% \qquad \psi = \frac{A - A_1}{A} \times 100\% \tag{13}$$

通常 $\delta > 5\%$ 的材料被称为塑性材料，$\delta < 5\%$ 的材料被称为脆性材料。

力学性能为材料受力时在强度和变形方面所表现出来的性能。

在低碳钢的拉伸实验中，由应力-伸长量图像可将拉伸过程分为四个阶段，如图所示：



I 为弹性阶段，满足胡克定律，比例极限 σ_p 对应点 A（请自行放大，确实不太清楚），弹性极限 σ_e 对应点 B。两者区别在于弹性极限是在弹性范围内的，即形变可以完全恢复；但比例极限是有可能超过了弹性形变的范围，仅仅是数值上符合胡克定律 [2]。

II 为屈服阶段，此阶段应变显著增加，但应力基本不变（屈服现象）。屈服极限 σ_s 对应 D 点。

III 为强化阶段，此阶段材料抵抗变形的能力有所增强。强度极限 σ_b 对应点 G，为最大名义应力。

IV 为局部变形阶段，试件上出现急剧的局部横截面收缩现象（颈缩现象），直至试件断裂。

冷作硬化现象指在强化阶段卸载后，材料的比例极限提高，塑性降低的现象。过程不再详细叙述，只需记住这样后比例极限 σ_p 提高，塑性变形降低，强度极限 σ_b 不变。

后面（课本 P33 及以后）就是一堆没什么规律的文字叙述了。自己看看书，鼠鼠在这里不做赘述。

应力集中（概念）

应力集中指杆件突然变化而引起的应力局部骤然增大的现象。用理论应力集中系数$K_{t\sigma}$描述应力集中程度：

$$K_{t\sigma} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} \tag{14}$$

其中 σ_{max} 为杆件外形局部不规则处的最大局部应力，σ_{nom} 为横截面的平均应力。

考虑应力集中的情况如下表所示：

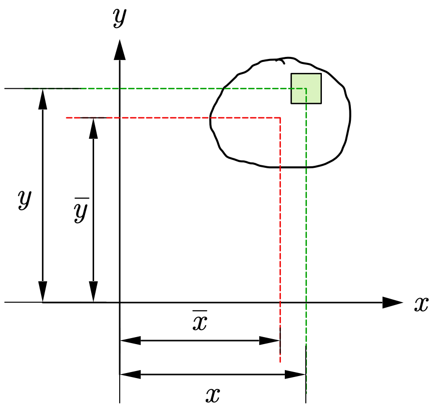
不考虑应力集中	塑性材料、静荷载；非均匀的脆性材料，如铸铁
考虑应力集中	均匀的脆性材料或塑性差的材料；动荷载

附录 I：截面的几何性质

本章涉及大量的公式推导及数学计算，鼠鼠为追求短平快在此只列出必要的定义、公式及结论。对公式推导感兴趣的话可以翻翻书本。

静矩和形心位置

先上图：



静矩（单位：m^3、mm^3）的定义式为：

$$\begin{cases} S_x = \int_A y dA \\ S_y = \int_A x dA \end{cases} \tag{15}$$

形心坐标公式为：

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\int_A y dA}{A} \\ \bar{y} = \frac{\int_A x dA}{A} \end{cases} \tag{16}$$

由公式15、16，得

$$\bar{x} = \frac{S_y}{A} \Rightarrow S_y = A\bar{x} \tag{17}$$

$$\bar{y} = \frac{S_X}{A} \Rightarrow S_x = A\bar{y} \tag{18}$$

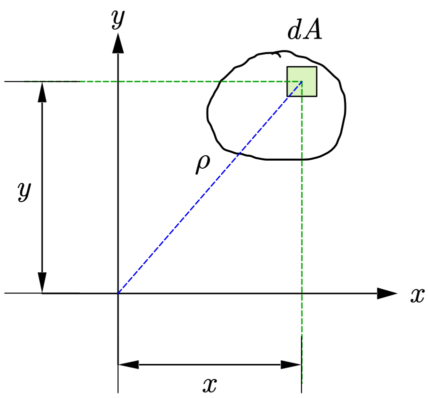
实际题目中出现的比较多的是规则图形组合截面的静矩和形心坐标，由定义式易得：

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} A_i \bar{y}_i \qquad S_y = \sum_{i=1}^{n} A_i \bar{x}_i \tag{19}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \tag{20}$$

极惯性矩、惯性矩和惯性积

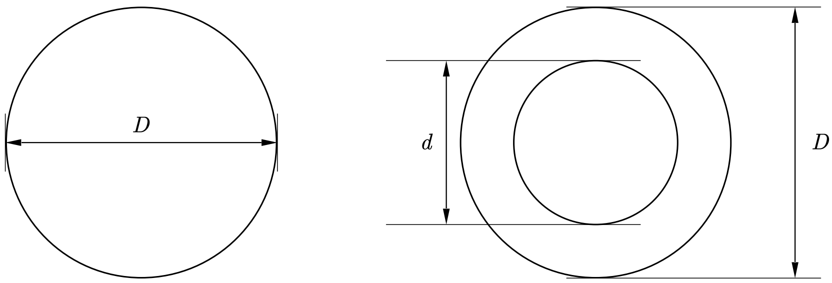
先上图：



极惯性矩（单位：m^4、mm^4，对点）的定义式为：

$$I_p = \int_A \rho^2 dA \tag{21}$$

可由公式21推导出实心圆和空心圆对圆心 O 的极惯性矩为：



$$\text{实心圆：} I_p = \frac{\pi D^4}{32} \qquad \text{空心圆：} I_p = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) \tag{22}$$

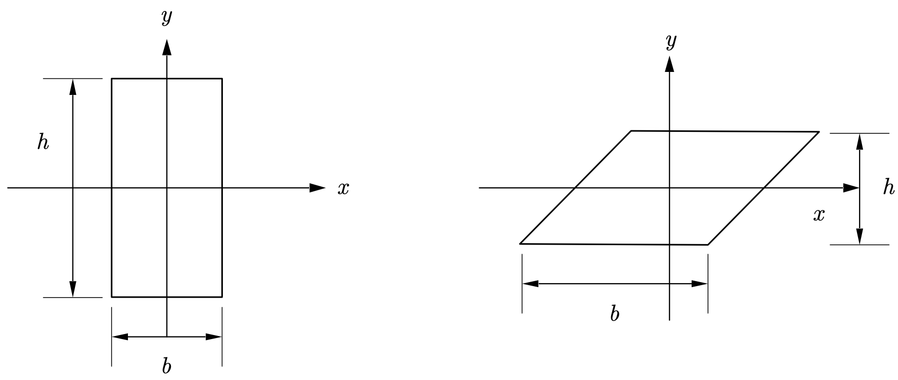
惯性矩（单位：m^4、mm^4，对轴）的定义式为：

$$\begin{cases} I_x = \int_A y^2 dA \\ I_y = \int_A x^2 dA \end{cases} \tag{23}$$

由公式21、23知：

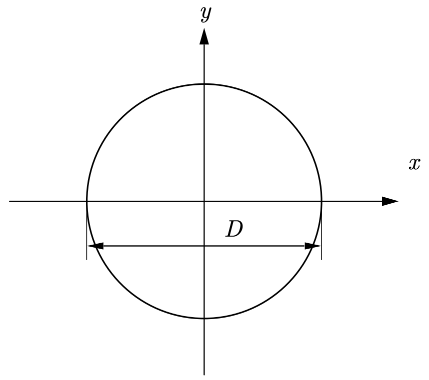
$$I_p = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y \tag{24}$$

即截面对一点的极惯性矩，等于截面对以该点为原点的任意两正交坐标轴的惯性矩之和。
可由公式23推导出矩形和平行四边形对其形心轴的惯性矩为：



$$I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad I_y = \frac{hb^3}{12} \tag{25}$$

圆对其形心轴的惯性矩为：



$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64} \tag{26}$$

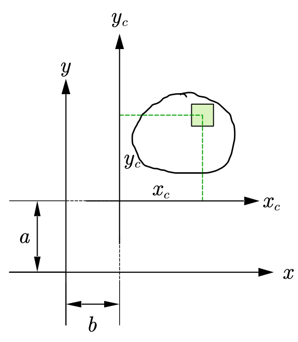
惯性积(单位：m^4、mm^4，对两轴) 的定义式为：

$$I_{xy} = \int_A xydA \tag{27}$$

惯性半径的定义式为：

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \tag{28}$$

惯性矩和惯性积的平行移轴公式为：



$$\begin{cases} I_x = I_{x_c} + a^2 A \\ I_y = I_{y_c} + b^2 A \\ I_{xy} = I_{x_c y_c} + abA \end{cases} \tag{29}$$

组合截面的惯性矩（或惯性积）等于其各组成部分对同一坐标轴的惯性矩（或惯性积）之和。即：

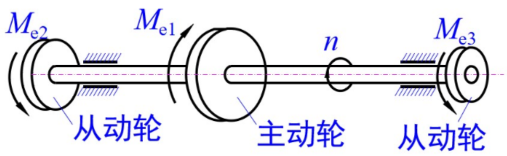
$$\begin{cases} I_x = \sum_{i=1}^{n} I_{x_i} \\ I_y = \sum_{i=1}^{n} I_{y_i} \\ I_x y = \sum_{i=1}^{n} I_{x_i y_i} \end{cases} \tag{30}$$

第三章：扭转

本章开始就有点抽象了，鼠鼠们做好被薄纱的准备（bushi）。

传动轴的外力偶矩

传动轴的转速 n(r/min)、功率 P(kW) 及在其上作用的外力偶矩M_e(N·m) 之间的关系为：

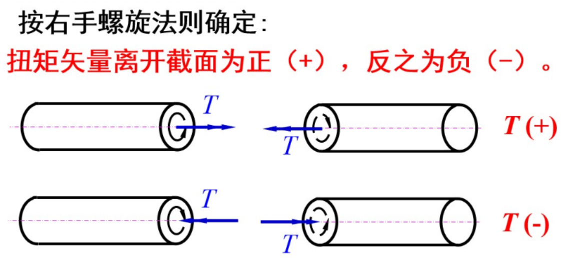


$$M_e = 9550\frac{P}{n} \tag{31}$$

扭矩及扭矩图

扭矩T 指圆轴受纽时其截面上的内力偶矩。

注意扭矩的符号规定：

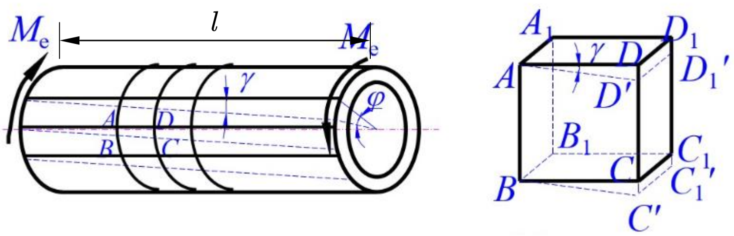


T 的大小依然可以用截面法确定，三步走：截开、代替及平衡。

有了大小和正负，就可以按照轴力图的方法做出扭矩图，不再细锁。

薄壁圆筒的扭转

本节鼠鼠复习了半天也没完全整明白，课后老师也没有留作业，鼠鼠暂且认为本节内容不算重点，但却是后面等直圆杆的基础，而等直圆杆是重点中的重点。

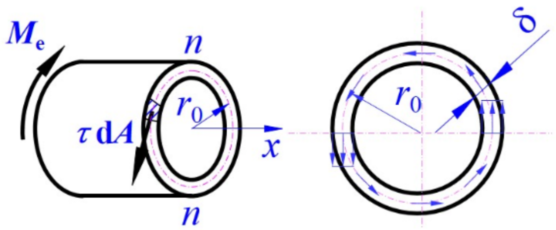


薄壁圆筒受扭时，两端界面之间相对转过的圆心角被称为相对扭转角φ。表面上正方格子倾斜的角度，即直角的改变量被称为切应变γ，如上图所示：

由几何关系（鼠鼠没搞懂这几何关系怎么来的，书上也没仔细说 QAQ）得：

$$\gamma = \frac{\varphi r}{l} \tag{32}$$

通过一系列数学推导，可得出薄壁圆筒横截面上切应力计算公式得：



$$\tau = \frac{T}{r_o A} = \frac{T}{2\pi r_o^2 \delta} \tag{33}$$

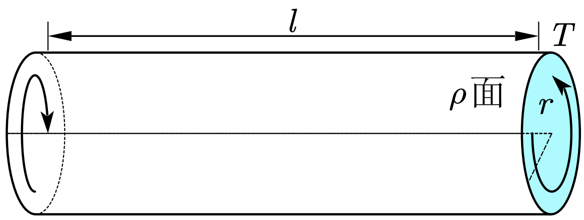
通过实验得到剪切胡克定律：当外力偶矩在某一范围内时，相对扭转角 φ 与外力偶矩 M_e,(在数值上等于扭矩 T) 之间成正比，即：

$$\tau = G\gamma \tag{34}$$

G（单位：Pa）被称为材料的切变模量。

等直圆杆的扭转

先上图：



刚刚写了很多我觉得必要的公式推导，想想还是删掉了。因为这并不符合我写这玩意儿的初衷。

当等直圆杆受扭时，横截面周边上各点处切应力最大，即等直圆杆最大切应力公式为：

$$\tau_{max} = \frac{Tr}{I_p} \tag{35}$$

r 代表横截面半径，I_p 代表横截面的极惯性矩，T 代表横截面上的扭矩。

若用 W_p 代表 I_p/r，则有：

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_p} \tag{36}$$

W_p 被称作扭转截面系数，单位为 m^3

鼠鼠觉得可以先背两个圆的极惯性矩结论，即公式22，W_p 只需除以其半径即可。故不再赘述。

相对扭转角φ 为：

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p} \tag{37}$$

其中 l 为两横截面之间的距离，G 为材料的切变模量。

和轴向拉压一样，扭转时杆件内也会积蓄应变能，为：

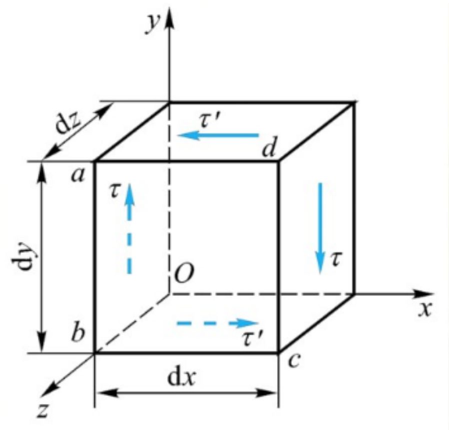
$$V_\varepsilon = \frac{T^2 l}{2GI_p} \tag{38}$$

联立公式37，得：

$$V_\varepsilon = \frac{GI_p}{2l}\varphi^2 \tag{39}$$

切应力互等定理

直接给结论，这部分证明鼠鼠一头雾水 QAQ。



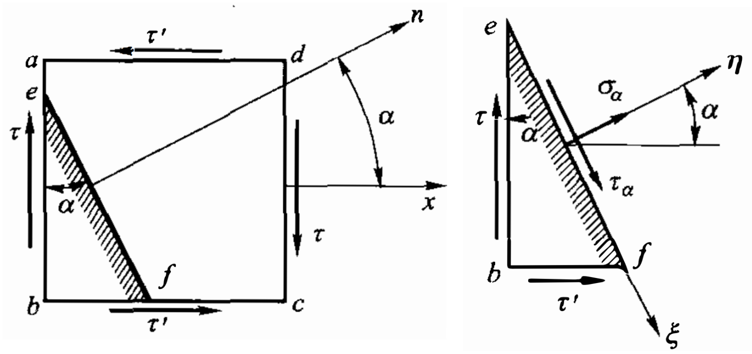
切应力互等定理指两相互垂直平面上的切应力 τ 和 τ' 数值相等，且均指向（或背离）该两平面的交线。

斜截面上应力公式

经过一系列证明，得斜截面上应力公式QAQ：

$$\sigma_\alpha = -\tau sin2\alpha \qquad \tau_\alpha = \tau cos2\alpha \tag{40}$$

由上述公式易知：



1、 单元体的四个侧面 ($\alpha = 0°$ 和 $\alpha = 90°$) 上切应力的绝对值最大

2、 $\alpha = -45°$ 和 $\alpha = +45°$ 截面上切应力为零，而正应力绝对值最大，其值为：

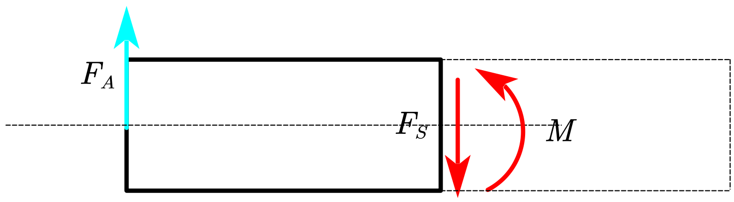
$$\sigma_{-45°} = \sigma_{max} = +\tau \qquad \sigma_{+45°} = \sigma_{min} = -\tau \tag{41}$$

第四章：弯曲应力

本章可能看起来比扭转直观，但实际计算比扭转可要复杂多了，计算一直是鼠鼠的软肋…… 扯远了哈哈，本章的重点在剪力图和弯矩图（后面简称“双图”）的画法及正切应力的计算。双图的两种画法里第二种利用规律及微分关系更重要，但第一种列剪力弯矩方程的方法也要知道。鼠鼠会在篇幅中加以体现。

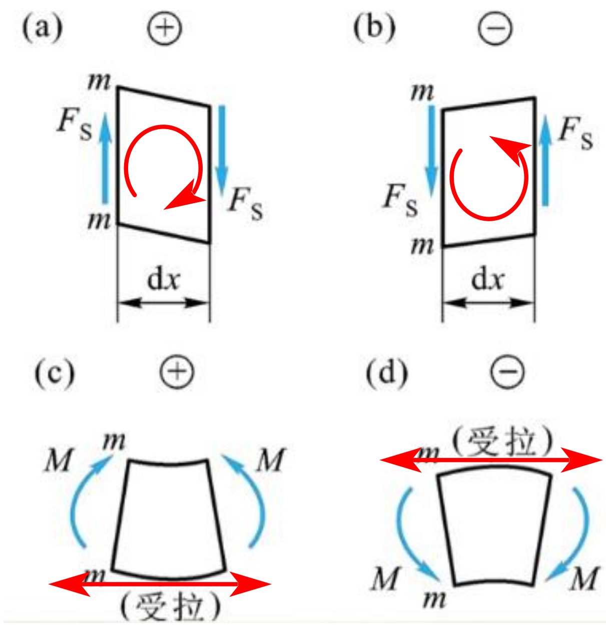
剪力和弯矩 · 剪力图和弯矩图

如果说轴力是纵向内力，那么剪力就是横向内力（这个说法不甚严谨，但是对我们理解剪力挺有帮助的）。如下图所示（虚线部分为截面法截去部分）：



和轴力一样，剪力F_S 和横向外力 F_A 相平衡。而弯矩M 与 F_A 和 F_S 所形成的力矩相平衡。

剪力和弯矩的符号规定就尤为重要了：课本上的文字规定略显生涩，咱直接看图：



对于剪力的符号：左上右下为正，左下右上为负（可用顺时针与逆时针简记，如红色旋转符号所示，注意这只是简记符号，不是力矩方向）。因为平时做题我们一般都会用到截面法，去掉截取部分后看剪力在所留部分的哪边，按照上面的符号规定定符号。

对于弯矩的符号就比较简单了：画完剪力方向，把剪力方向往反方向一拉就是弯矩方向。下侧受拉为正，上侧受拉为负。研究对象同样是所留部分。

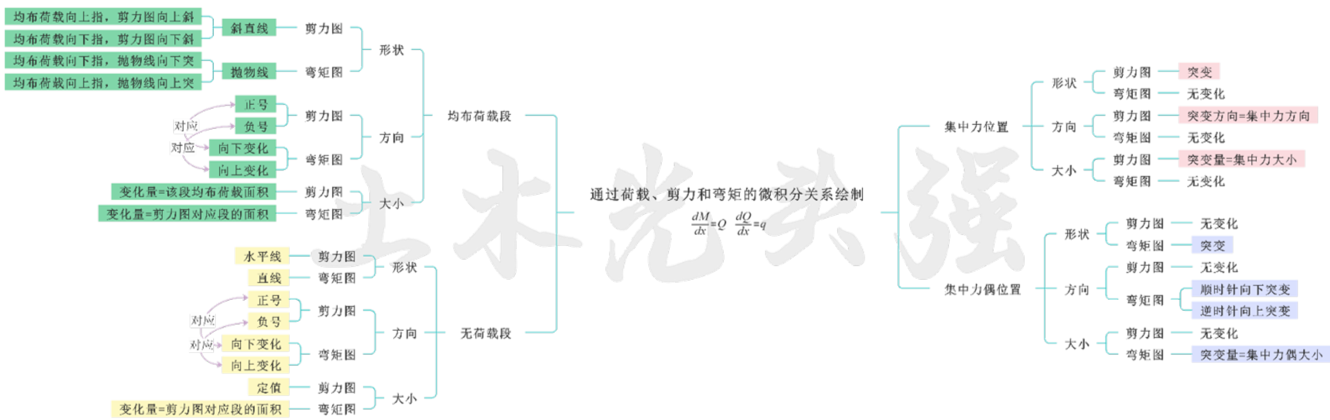
对于它俩的计算，三个字：截面法，不做赘述。

双图的画法前面提到过：第一种就是就是借助截面法求剪力弯矩方程做函数图像，这个方法咱看看课本上例题理解下过程就行，遇到复杂的弯曲情况计算量就太大了。下面鼠鼠详细聊聊第二种：

首先，我们通过一系列的数理过程得到荷载 q、剪力 F_S 和弯矩 M 之间的微分关系为：

$$q = \frac{dF_S}{x} \qquad F_S = \frac{dM}{dx} \tag{42}$$

由上述微分关系易得荷载的积分就是剪力，剪力的积分就是弯矩。那么我们的作图步骤就很明晰了，一般题目给的就是荷载，我们先做出剪力图，就可以通过剪力图得到弯矩图的变化规律。具体如图：

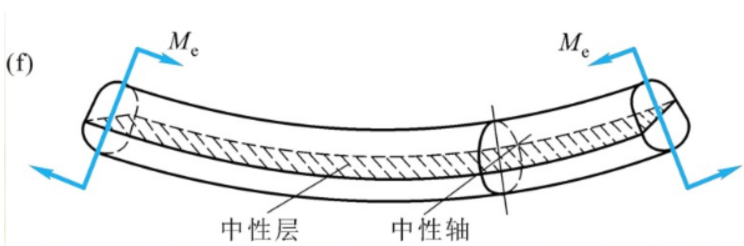


这里强调两点：

1. 双图都是从左端 0 开始，右端 0 结束
2. 弯矩图是正在下，负在上

弯曲正应力及强度条件

首先先交代清楚。下面的公式从严格的数理证明来说仅适用于剪力为零，弯矩为常量的梁的情况（即纯弯曲情况）。但在工程实践中在特殊情况下（一般题目也会满足这个情况）其计算既有剪力又有弯矩的梁（即横力弯曲情况）误差是满足工程中的精度要求的。



弯曲变形时，由于变形的连续性，中间必有一层纵向线无长度改变，称为中性层，中性层和横截面的交线称为中性轴。如上图所示：

经过一系列的数理证明，得横截面上的任一点处的正应力σ 为：

$$\sigma = \frac{My}{I_z} \tag{43}$$

其中 M 是横截面上的弯矩；I_z 是横截面对中性轴 z 的惯性矩；y 为求应力点的纵坐标。

由上式知，当 y 达到最大时，σ 最大，即：

$$\sigma_{max} = \frac{My_{max}}{I_z} \tag{44}$$

若令 $W_z = I_z/y_{max}$，有

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_z} \tag{45}$$

W_z 被称为弯曲截面系数，同扭转截面系数一样，鼠鼠还是觉得可以先背矩形和圆的惯性矩，即公式25、26，分别除去 $h/2$、$D/2$ 即可得到 W_z。

弯曲正应力强度条件即为最大工作正应力 σ_{max} 不得超过材料的需用弯曲正应力 $[\sigma]$，即 $\sigma_{max} \leqslant [\sigma]$，由公式45得：

$$\frac{M_{max}}{W_z} \leqslant [\sigma] \tag{46}$$

弯曲切应力及强度条件

参考文献

[1] 孙训方. 材料力学（*1*）. 高等教育出版社, 2009.

[2] 匿名用户. 比例极限和弹性极限的区别？. *Sougou*, 2017.