COMPUTAÇÃO QUÂNTICA

Gabriel Coutinho

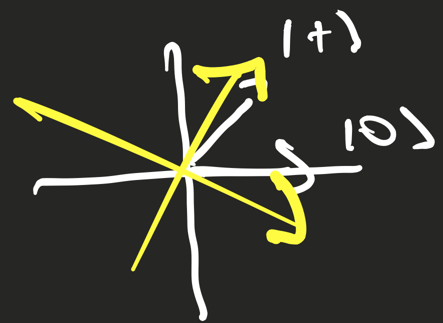
2025 / 1 UFMG

Aula 5

Dadas algumas possibilidades para o estado de um qubit, como saber em qual ele está?

ou $|0\rangle$ ou $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$

medir com



$\mathbb{R}^2$

Decomposição de Schmidt

Ferramenta muito útil para entender sistemas bipartidos.

Teorema se $|\varphi\rangle$ é estado em sistema bipartido, então existem bases ortonormais $|a_1\rangle, \ldots, |a_n\rangle$ e $|b_1\rangle, \ldots, |b_m\rangle$ de cada sistema, e reais $\lambda_i \geq 0$ com $\sum_i \lambda_i^2 = 1$ tais que:

$$|\varphi\rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot |a_i\rangle |b_i\rangle$$

Exemplo:

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\1\\-\sqrt{2}\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left[\sqrt{2}\cdot|00\rangle + 1\cdot|01\rangle - \sqrt{2}\,|10\rangle + 1\cdot|11\rangle\right]$$

tanto temos coeficiente $-\sqrt{2} < 0$, como

se $|a_1\rangle = |0\rangle$, $|a_2\rangle = |1\rangle$, $|b_0\rangle = 0$ e $|b_1\rangle = |1\rangle$,

temos termos $|a_1\rangle|b_2\rangle$ e $|a_2\rangle|b_1\rangle$.

Mas:

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\1\\-\sqrt{2}\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}|+\rangle|1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|-\rangle|0\rangle$$

ρ estado em AB, $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$,

decomposição Schmidt garante

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i |a_i\rangle|b_i\rangle$$ onde $\{|a_i\rangle\}$ e $\{|b_i\rangle\}$ o.n.

e $\lambda_i \neq 0$, $\sum \lambda_i^2 = 1$

ρ estado bipartido , $\rho = \sum \mu_{ij} |a_i\rangle\langle a_j| \otimes |b_i\rangle\langle b_j|$

$$\rho_A = tr_B\, \rho = \sum \underbrace{tr\, |b_i\rangle\langle b_j|}_{\langle b_j|b_i\rangle} \cdot \mu_{ij} \cdot |a_i\rangle\langle a_j|$$

$$\rho = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \cdot |a_i\rangle|b_i\rangle \otimes \langle a_j|\langle b_j|$$

$$= \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j\, |a_i\rangle\langle a_j| \otimes |b_i\rangle\langle b_j|$$

$tr = 0$ se $i \neq j$

$$\rho_A = tr_B\, \rho = \sum \lambda_i^2\, |a_i\rangle\langle a_i|$$

Exercícios:

(1) se ρ é estado puro de sistema A-B, mostre que ρ_A e ρ_B tem mesmos autovalores! $\neq 0$.

(2) Mostre que não existe "decomposição de Schmidt" para sistemas tri-partidos.

Exemplo $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^8$. Não dá para sempre achar $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$, $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle\}$, $\{|c_1\rangle, |c_2\rangle\}$ tais que

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i |a_i\rangle |b_i\rangle |c_i\rangle$$

$\sum \lambda_i^2 = 1, \; \lambda_i \geq 0$

Demonstração 1

comece com $|\psi\rangle = \sum_{i,j} \mu_{ij} \overset{\text{base de A}}{|i\rangle} \overset{\text{base de B}}{|j\rangle}$

Seja $M = ((\mu_{ij}))$, e considere $\underbrace{M = UDV^*}_{\text{S.V.D.}}$

$\Rightarrow$ U unitária
V unitária
D real ≥ 0
diagonal

Logo $\mu_{ij} = \sum_k d_{kk} u_{ik} v_{kj}$

$$\Rightarrow |\psi\rangle = \sum_{i,j,k} d_{kk} u_{ik} v_{kj} |i\rangle|j\rangle =$$

$$= \sum_k d_{kk} \left[\underbrace{\sum_i u_{ik} |i\rangle} \right] \left[\underbrace{\sum_j v_{kj} |j\rangle} \right]$$

Demonstração 2

Escreva $\rho_A = \sum_i p_i |a_i\rangle\langle a_i|$ (diagonalização)

Logo $\exists\ \mu_{ij}$ e $|j\rangle$ com $|\psi\rangle = \sum_{i,j} \mu_{ij} |a_i\rangle |j\rangle$

$$= \sum_i |a_i\rangle \otimes \underbrace{\sum_j \mu_{ij} |j\rangle}_{|b_i\rangle}$$

Note que $\mathrm{tr}_B \rho = \rho_A \implies \langle b_j | b_\ell \rangle = \begin{cases} p_j & \text{se } j = \ell \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Reescalonando $|b_j\rangle \to \frac{1}{\sqrt{p_j}} |b_j\rangle$, segue que

$$|\psi\rangle = \sum_i p_i |a_i\rangle |b_i\rangle$$

Exercícios

(1) verifique que a decomposição é única

$\Leftrightarrow$ ρ_A e ρ_B não possuem autovalores

repetidos (exceto pelo 0)

O número de Schmidt é a quantidade de valores $\lambda_k > 0$. Primeiro, note que este número só depende de ρ. Agora mostre que

(a) $|\psi\rangle$ é um estado não-emaranhado entre A e B $\Longleftrightarrow$

(b) Número de Schmidt $= 1$ $\Longleftrightarrow$

(c) ρ_A e ρ_B são estados puros

Conclua que não é possível criar emaranhamento com operações unitárias locais!

Purificação

Seja ρ_A um estado misto. Então existe estado $|\psi\rangle$

em sistema $\underbrace{AR}_{\text{“ancilla”}}$ tal que $\rho_A = \mathrm{Tr}_R |\psi\rangle\langle\psi|$.

Ou seja: qualquer estado é estado reduzido de um estado puro.

$\rightarrow$ se $\rho_A = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|$, então basta fazer

$|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i}\, |i\rangle|i'\rangle$ $\Big\}$ ou seja, R pode ter mesma dim que A.

$$\frac{2}{3} \quad e \quad \frac{1}{3}$$
$$|+\rangle \qquad |-\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\rho = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/6 \\ 1/6 & 1/2 \end{bmatrix} = \underline{\frac{2}{3}|+\rangle\langle+| + \frac{1}{3}|-\rangle\langle-|}$$

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|+\rangle|1\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|-\rangle|0\rangle$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} |0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2} |1\rangle\langle 1|$$

$$= \frac{1}{3} |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + \frac{1}{3} |\psi_2\rangle\langle\psi_2| + \frac{1}{3} |\psi_3\rangle\langle\psi_3|$$

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle \, , \quad |\psi_2\rangle = -\frac{1}{2} |0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2} |1\rangle \, , \quad |\psi_3\rangle = -\frac{1}{2} |0\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2} |1\rangle$$

Encontrar $|\psi\rangle$ tal que se você observa o auxiliar com $\mathcal{H}_1$, você recupera $\left\{ \frac{1}{2} |0\rangle , \frac{1}{2} |1\rangle \right\}$ e com $\mathcal{H}_2$, você recupera $\left\{ \frac{1}{3} |\psi_1\rangle , \frac{1}{3} |\psi_2\rangle , \frac{1}{3} |\psi_3\rangle \right\}$

Exercício Sejam $\rho = \sum p_i |a_i\rangle\langle a_i| = \sum q_j |b_j\rangle\langle b_j|$

dois ensembles diferentes resultando no estado ρ.

Ache uma única purificação que realize cada

ensemble a depender do observável utilizado.

Dica: Escreva estados para cada ensemble no formato

da decomposição de Schmidt.