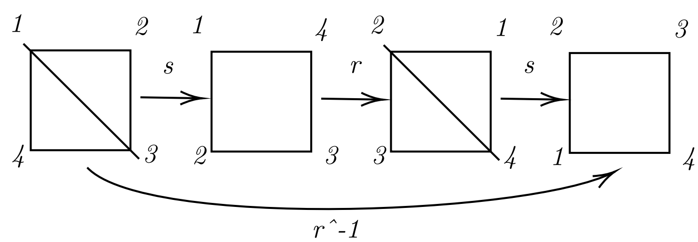
Trabalho 1

Grupos e Corpos

Yuri Kosfeld

Abril 2025

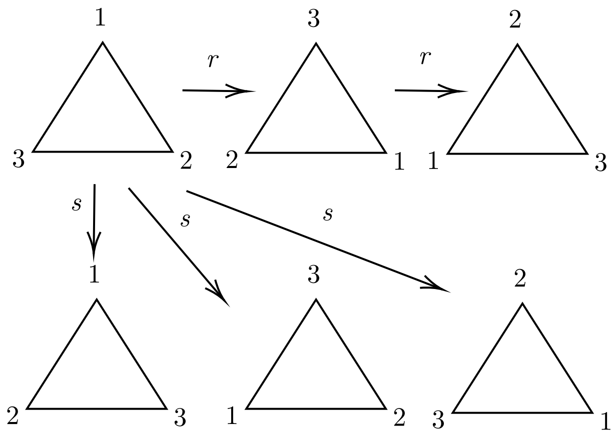
Exercício (Semana 1 - 13)**.** *(a) Para facilitar a explicação, vamos numerar os vértices do poligono de maneira ordenada de 1 até n. Uma rotação nesse poligono é uma forma de ciclar entre os vértices. Então se o nosso poligono tem 4 lados, temos 4 vértices: 1, 2, 3, 4. Se aplicarmos uma rotação nesse poligono os vértices agora trocam de indexação e vao de 1234 para 4123. Aplicando mais uma vez vamos para 3412 e assim por diante. A relação $r^n = 1$ é equivalente a dizer aplicar n rotações no poligono é a mesma ação de não aplicar rotação nenhuma. Visualmente é intuitivo pensar dessa forma, por exemplo, no nossa caso de n = 4, se olharmos o vértices da primeira posição, apos 4 rotações voltamos ao 1, ou seja, é igual a não ter feito rotação alguma. As reflexões no poligono são equivalentes a espelhamentos sobre um eixo do poligono de simetria desse poligono. Ou seja, as reflexões sobre um dado eixo não podem "mudar" o nosso poligono. De modo geral temos duas possibilidades de reflexões, as que fixam vértices e as que não vixam vértice algum. Em ambos os casos não é dificil notar que aplicando a mesma reflexão duas vezes seguidas voltamos ao estado inicial. Assim vem a relação de $s^2 = 1$.*



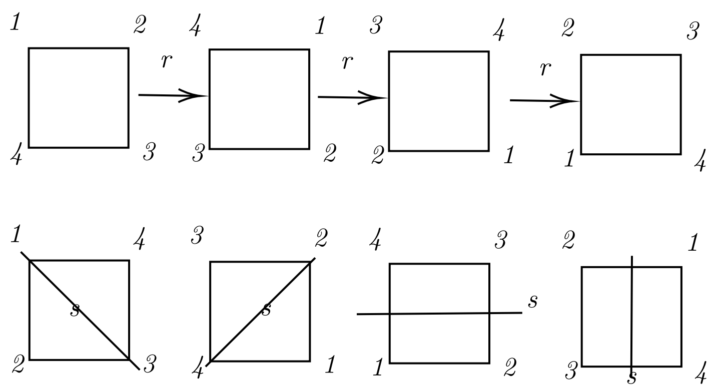
(b) Como D_n é gerado por todos os possiveis produtos de rotações e reflexões, para calcular a ordem de D_n é suficiente contar quantas rotações e quantas reflexões são possiveis a depender de n. Pela relação $r^n = 1$ segue que temos n rotações em D_n. Agora para as reflexões, precisamos separar nos casos, n par e n impar. Se n for par, então temos dois tipos de reflexões, as que fixam dois vértices e as que não vixam nenhum. Para as que fixam 2 vértices, temos então $n/2$ reflexões possiveis. Já para as reflexões que não fixam nenhum vértice, elas são as reflexões cujos eixos passam pelos pontos medios de lados opostos. Assim também temos $n/2$ reflexões. Logo o número total de reflexões é n. Para n impar, é mais simples. As únicas reflexões são aquelas que fixam um vértice, logo temos n reflexões. Assim

$$|D_n| = |\textit{rotações}| + |\textit{reflexões}| = n + n = 2n$$

(c)



D_3



D_4

(d) Para D_4 ser ciclico, ele deve ser gerado por um único elemento de D_4. Vamos mostrar que isso não é possivel. Tome primeiro r uma rotação. Pela relação $r^n = 1$, temos que $\langle r \rangle = \{1, r, r^2, r^3\}$, e então faltam as reflexões. Tome então uma s uma reflexão de D_4. Novamente pela relação $s^2 = 1$, temos que $\langle s \rangle = \{1, s\}$, assim faltando todas as demais reflexões e todas as rotações. Logo nenhum elemento de D_4 gera todo as simetrias e portanto D_4 não é ciclico. (e) Antes de mostrarmos que $D_n < S_n$, vamos ver que toda simetria em D_n é uma permutação dos vértices. Para isso, vamos mostrar que rotações e reflexões são permutação, e como esses são os geradores das simetrias em D_n, mostramos que todas são. Uma rotação em um poligono de n lados é uma permutação ciclica nos vertices do poligono. Então r uma rotação leva $r(i) = i + 1$. Por exemplo, em D_4, uma rotação de $90°$ no sentido horário é a permutação dos vértices (1234). Já uma reflexão é uma permutação que age nos vertices em pares. Note que em ambos os casos de reflexão isso vale, já que uma reflexão que fixa um vertice (caso n ímpar), temos $n - 1$ vértices para mudar e como n é impar, n-1 é par, logo temos $\frac{n-1}{2}$ mudanças. Para o caso n par, isso também vale, seja fixando um par de vértices ou não fixando nenhum. Como as simetrias são geradas por rotações e reflexões, qualquer produto de duas simetrias ainda é uma simetria em D_n, logo é fechado para o produto. Temos também um elemento neutro, a simetria identidade. Além disso, toda simetria tem um elemento inverso. Para mostrar isso vamos mostrar que toda rotação e toda reflexão possuem inversos. Tome r_k uma rotação, sabemos que vale a relação $r^n = 1$, então

se r é uma rotação dada por $r_k(i) = i + k$, segue que $r_k = r^k$ e então o inverso de r_k é r^{n-k}, uma vez que, $r_k r^{n-k} = r^k r^{n-k} = r^{n-k+k} = r^n = 1$. Para as reflexões, basta notar que segue da relação $s^2 = 1$ que o inverso é ela mesma. Assim D_n é um subgrupo de S_n.

Exercício (Semana 2 - 4)**.** *Primeiro precisamo mostrar que G/G' é um grupo. Para isso, basta verificar se $G' \lhd G$. Tome então um comutador de G, ou seja, $[x, y] \in G'$ e vamos mostrar que vale a inclusão para todo $g \in G$. Lembre que vale $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$, então segue*

$$g[x, y]g^{-1} = g(xyx^{-1}y^{-1})g^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1})(gx^{-1}g^{-1})(gy^{-1}g^{-1})$$

Vamos mostrar que $(gxg^{-1})^{-1} = gx^{-1}g^{-1}$. Seja então d o inverso de gxg^{-1}, segue então

$$\begin{aligned} gxg^{-1}d &= 1 \\ xg^{-1}d &= g^{-1} \\ g^{-1}d &= x^{-1}g^{-1} \\ d &= gx^{-1}g^{-1} \end{aligned}$$

Note que o mesmo vale para y. Então temos que

$$g[x, y]g^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1})(gxg^{-1})^{-1}(gyg^{-1})^{-1} = [gxg^{-1}, gyg^{-1}] \in G'$$

Logo $G' \lhd G$. Agora que garantimos que G/G' é um grupo, vamos mostrar que ele é abeliano. Queremos mostrar então para $g_1, g_2 \in G$

$$(g_1G')(g_2G') = (g_2G')(g_1G') \Leftrightarrow g_1g_2G' = g_2g_2G'$$

Ou seja, queremos ver ser $g_1g_2(g_2g_1)^{-1} \in G'$. Mas note que, $g_1g_2(g_2g_1)^{-1} = g_1g_2g_2^{-1}g_1^{-1} = [g_1, g_2] \in G'$. Logo G/G' é abeliano.