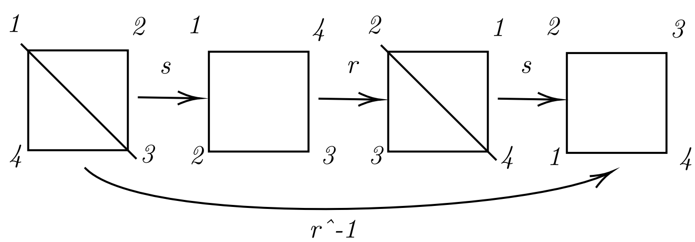
Trabalho 1

Grupos e Corpos

Yuri Kosfeld

Abril 2025

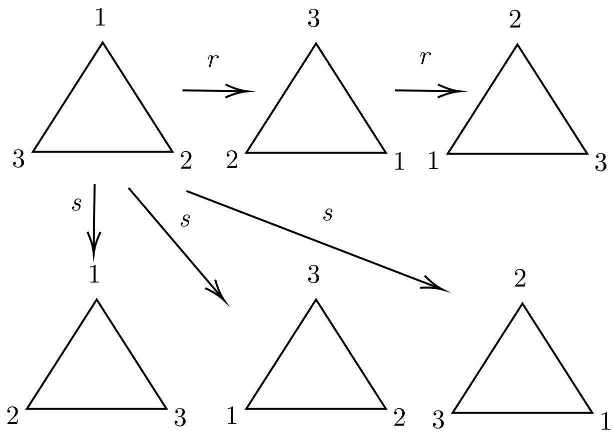
Exercício (Semana 1 - 13). *(a) Para facilitar a explicação, vamos numerar os vértices do poligono de maneira ordenada de 1 até n. Uma rotação nesse poligono é uma forma de ciclar entre os vértices. Então se o nosso poligono tem 4 lados, temos 4 vértices: 1, 2, 3, 4. Se aplicarmos uma rotação nesse poligono os vértices agora trocam de indexação e vao de 1234 para 4123. Aplicando mais uma vez vamos para 3412 e assim por diante. A relação* $r^n = 1$ *é equivalente a dizer aplicar n rotações no poligono é a mesma ação de não aplicar rotação nenhuma. Visualmente é intuitivo pensar dessa forma, por exemplo, no nossa caso de n = 4, se olharmos o vértices da primeira posição, apos 4 rotações voltamos ao 1, ou seja, é igual a não ter feito rotação alguma. As reflexões no poligono são equivalentes a espelhamentos sobre um eixo do poligono de simetria desse poligono. Ou seja, as reflexões sobre um dado eixo não podem "mudar" o nosso poligono. De modo geral temos duas possibilidades de reflexões, as que fixam vértices e as que não vixam vértice algum. Em ambos os casos não é dificil notar que aplicando a mesma reflexão duas vezes seguidas voltamos ao estado inicial. Assim vem a relação de* $s^2 = 1$.



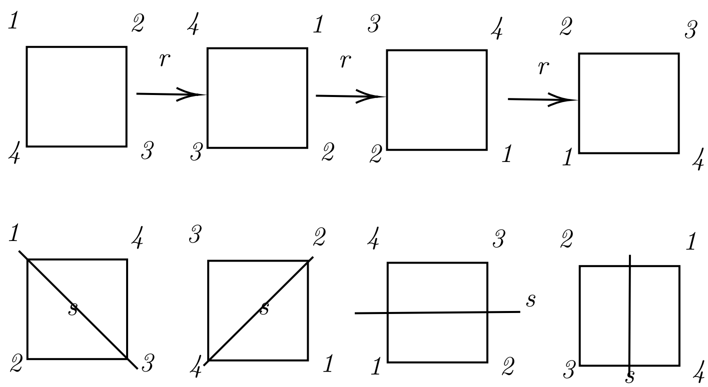
(b) Como D_n *é gerado por todos os possiveis produtos de rotações e reflexões, para calcular a ordem de* D_n *é suficiente contar quantas rotações e quantas reflexões são possiveis a depender de n. Pela relação* $r^n = 1$ *segue que temos n rotações em* D_n. *Agora para as reflexões, precisamos separar nos casos, n par e n impar. Se n for par, então temos dois tipos de reflexões, as que fixam dois vértices e as que não vixam nenhum. Para as que fixam 2 vértices, temos então* $n/2$ *reflexões possiveis. Já para as reflexões que não fixam nenhum vértice, elas são as reflexões cujos eixos passam pelos pontos medios de lados opostos. Assim também temos* $n/2$ *reflexões. Logo o número total de reflexões é n. Para n impar, é mais simples. As únicas reflexões são aquelas que fixam um vértice, logo temos n reflexões. Assim*

$$|D_n| = |rotações| + |reflexões| = n + n = 2n$$

(c)



D_3



D_4

(d) Para D_4 ser ciclico, ele deve ser gerado por um único elemento de D_4. Vamos mostrar que isso não é possivel. Tome primeiro r uma rotação. Pela relação $r^n = 1$, temos que $\langle r\rangle = \{1, r, r^2, r^3\}$, e então faltam as reflexões. Tome então uma s uma reflexão de D_4. Novamente pela relação $s^2 = 1$, temos que $\langle s\rangle = \{1, s\}$, assim faltando todas as demais reflexões e todas as rotações. Logo nenhum elemento de D_4 gera todo as simetrias e portanto D_4 não é ciclico. (e)