

Seminário 2 - Notas

Simplicidade de A_n , para $n \geq 5$

Davi Bossatto
Enzo Lavezzo
Yuri Florentino

1 A_n e as equações de quinto grau

Agora que vimos a Simplicidade dos grupos alternados de ordem maior ou igual que cinco, estamos mais próximos de entender porque equações de quinto grau ou mais não possuem uma fórmula explícita para suas raízes.

Precisamos antes, relembrar algumas definições e provar alguns resultados vistos em aula.

Definição 1. Seja G um grupo. Uma sequência de subgrupos

$$H^\bullet : \{e\} \leq H_1 \leq H_2 \leq \dots \leq H_n = G$$

é chamada série subnormal se $H_i \triangleleft H_{i+1}$. Os grupos H_i/H_{i+1} são chamados de fatores da série.

Definição 2. Um grupo G é solúvel se possui uma série subnormal, tal que todo grupo fator é abeliano.

Definição 3. Dado um grupo G , definimos o grupo derivado de G por $G' = [G, G]$. De modo mais geral definimos, $G^{(0)} = G$ e $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$.

Proposição. *Sejam G um grupo e G' o seu grupo derivado. Então valem:*

1. G/G' é abeliano;
2. G' é o menor subgrupo normal de G tal que se $H \triangleleft G$ com G/H abeliano, então $G' \subseteq H$.

Demonstração. Sejam $aG', bG' \in G/G'$. Para mostrar que G/G' é abeliano, precisamos verificar que:

$$abG' = baG'$$

Isso é equivalente a mostrar que $a^{-1}b^{-1}ab \in G'$. Mas note que $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ é um comutador, logo por definição pertence a G' . Suponha agora que $H \triangleleft G$ é um subgrupo normal tal que G/H é abeliano. Queremos mostrar que $G' \subseteq H$. Se G/H é abeliano, então como vimos anteriormente, $a^{-1}b^{-1}ab \in H$, ou seja, $[a, b] \in H$. Como G' é gerado por todos os comutadores $[a, b]$ e todos eles pertencem a H , segue que $G' \subseteq H$, uma vez que, H é o grupo que contém todos os geradores de G' . \square

Com esses resultados, podemos agora demonstrar o seguinte teorema

Teorema. *Seja G um grupo. Então G é solúvel se e somente se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $G^{(n)} = \{e_G\}$.*

Demonstração. \Rightarrow : Suponha que G é solúvel, e considere a seguinte série subnormal

$$H^\bullet : \{e\} \leq H_1 \leq \cdots \leq H_n = G$$

com todos os grupos fatores abelianos. Como temos que H_n/H_{n-1} é abeliano, do resultado anterior segue que $G' \subseteq H_{n-1}$. Novamente pela proposição, H_{n-1}/H_{n-2} é abeliano e então $H'_{n-1} \subseteq H_{n-2}$. Mas $G' \subseteq H_{n-1}$, donde segue que $G^{(2)} \subseteq H'_{n-1} \subseteq H_{n-2}$. Se repetirmos o mesmo processo para os demais grupos fatores, chegamos em $G^{(n)} \subseteq \{e\}$, o que queríamos. \Leftarrow : Suponha agora que exista $n \in \mathbb{N}$ tal que $G^{(n)} \subseteq \{e\}$. Temos então que a série de G : $H^\bullet : \{e\} \leq H_1 \leq \cdots \leq H_n = G$ é subnormal, cujo grupos fatores são todos abelianos. Logo G é solúvel. \square

Teorema. *Sejam G um grupo e H um subgrupo normal de G . Então G é solúvel se e somente se H e G/H são também soluveis.*

Demonstração. Seja $\varphi : G \rightarrow G/H$ o homomorfismo canônico. Vamos primeiro mostrar que $\varphi(G') = (\varphi(G))'$. Seja $[x, y] \in G'$ um comutador de G . Aplicando φ temos

$$\varphi([x, y]) = \varphi(xyx^{-1}y^{-1}) = (xyx^{-1}y^{-1})H = (xH)(yH)(x^{-1}H)(y^{-1}H) = [xH, yH] \in (G/H)'$$

Logo $f(G') \subseteq (G/H)'$. Tome agora $[\bar{x}, \bar{y}] \in (G/H)'$, em que $\bar{x} = xH$ e $\bar{y} = yH$. Temos então

$$[\bar{x}, \bar{y}] = \bar{x}\bar{y}\bar{x}^{-1}\bar{y}^{-1} = (xH)(yH)(x^{-1}H)(y^{-1}H) = (xyx^{-1}y^{-1})H = \varphi([x, y])$$

Assim, $(G/H)' \subseteq f(G')$, e então $\varphi(G') = (\varphi(G))'$. Segue então que

$$\varphi(G^{(2)}) = \varphi((G')') = (\varphi(G'))' = ((\varphi(G')))' = (\varphi(G))^{(2)}$$

e indutivamente temos $\varphi(G^{(i)}) = (\varphi(G))^{(i)} = (G/H)^{(i)}$ para todo $i \geq 0$. Suponha então que G é solúvel e seja n um inteiro tal que $G^{(n)} = \{e\}$, segue que $H^{(n)} = \{e\}$ e $(G/H)^{(n)} = \varphi(G^{(n)}) = \varphi(\{e\}) = \{e\}$. Ou seja, os grupos H e G/H são soluveis. Reciprocamente, suponha que H e G/H são soluveis e sejam n e m inteiros tais que $H^{(n)} = \{e\}$ e $(G/H)^{(m)} = \{e\}$. Como $\{e\} = (G/H)^{(m)} = \varphi(G^{(m)})$, temos $G^{(m)} \subseteq \ker \varphi = H$. Logo $G^{(n+m)} = (G^{(m)})^{(n)} \subseteq H^{(n)} = \{e\}$, e assim ganhamos que G é solúvel. \square

Por fim, vamos definir mais um objeto de estudo e enunciar um útilmo teorema.

Definição 4. Um polinômio $p(x) \in K[x]$, onde K é um corpo (como \mathbb{Q}), é dito expresso por radicais ou resolúvel por radicais se todas suas raízes podem ser obtidas a partir de elementos de K usando uma combinação finita das operações aritmeticas e raízes n -esimas.

Teorema. *As raízes de um polinômio podem ser expressa por radicais se e somente se o grupo de permutações do polinômio é solúvel.*

Finalmente, sabemos que o grupo de permutações de um polinômio de grau maior ou igual 5 é o S_n . Como vimos pelo Corolário 3, A_n e S_n são os únicos subgrupos normais de S_n . Mas para $n \geq 5$, A_n é simples e portanto não é abeliano e donde segue que A_n não é solúvel. Logo pelo teorema anterior S_n não é solúvel, e pelo teorema de Galois, o polinômio de grau maior ou igual a 5 não pode ser escrito por radicais. Isso equivale a dizer que não temos uma fórmula geral para esses polinômios.