Trabalho 2

Grupos e Corpos

Yuri Kosfeld

Junho 2025

Exercício (4.1.8)**.** *a) Poderiámos provar utilizando Eisenstein, mas vamos mostrar por um processo analogo a um exemplo dessa seção. Informalmente, sabemos que uma raiz de $x^2 - 3$ é $\sqrt{3}$, assim sabemos que o polinomio pode ser reescrito como $x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$. Então se $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, o polinomio é redutivel. Suponha então que $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Logo $\exists a, b \in \mathbb{Q}$ tais que $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$.*

$$\begin{aligned}(\sqrt{3})^2 &= (a + b\sqrt{2})^2 \\ 3 &= a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2 \\ &= (a^2 + 2b^2) + (2ab)\sqrt{2}\end{aligned}$$

Assim temos, $a^2 + 2b^2 = 3$ e $2ab = 0$. Como $2ab = 0$, então ou $a = 0$ ou $b = 0$.

- *Se $a = 0$, então $2b^2 = 3 \Rightarrow b = \sqrt{3/2}$ e logo $b \notin \mathbb{Q}$, absurdo.*
- *O caso $b = 0$ é analago ao anterior, também chegando em um absurdo.*

Logo $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e assim o polinomio é irredutivel.