Conjuntos Abertos

Introdução a Topologia

Yuri Kosfeld

Abril 2025

O estudo de conjuntos abertos é motivado por querer entender a forma de um espaço metrico olhando para as vizinhanças de todos os pontos desse espaço. Vamos relembrar alguns detalhes importantes sobre distâncias.

Definição (Distância). *Seja M um conjunto. Uma* ***distância*** *em M é uma função $d : M \times M \to [0, \infty)$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $d(x, x) = 0$ *para todo* $x \in M$.
2. $d(x, y) > 0$ *para todos* $x, y \in M$ *com* $x \neq y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$ *para todos* $x, y \in M$.
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *para todos* $x, y, z \in M$.

Conseguimos agora então entender a proximidade de dois pontos. Para então formalizar matematicamente essa ideia de vizinhança de um ponto, vamos definir o que é uma **bola aberta**.

Definição (Bola Aberta). *Sejam (M, d) um espaço métrico, $x \in M$ e $\varepsilon > 0$. Definimos a* ***bola aberta*** *centrada em x e de raio ε como:*

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in M \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

Não é dificil notar que em $\mathbb{R}$ com a distância usual, temos que a bola $B(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Pela definição, segue que $B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < \varepsilon\}$. Então tomando $y \in B(x, \varepsilon)$ temos $|x - y| < \varepsilon$ e então

$$\begin{aligned} -\varepsilon < x - y < \varepsilon \\ -\varepsilon < y - x < \varepsilon \\ x - \varepsilon < y < x + \varepsilon \\ \Leftrightarrow y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \end{aligned}$$

Outro exemplo é a bola em $\mathbb{R}^2$, com a distância euclidiana centrada na origem:

$$B((0, 0), \varepsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < \varepsilon^2\}$$

Assim note, que com essa distância, as bolas em $\mathbb{R}^2$ são discos.

Um resultado interessante é o que acontecem com bolas no espaço produto levando em conta a distância produto. Sejam $(M_1, d_1), \ldots, (M_n, d_n)$ espaços metrico, e defina $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ com a distância produto.

Vamos mostrar que a bola produto é o produto das bolas, ou seja, $B((x_1, \dots, x_n), \varepsilon) = B(x_1, \varepsilon) \times \cdots \times B(x_n, \varepsilon)$. Lembre que a distância produto é dada por

$$d_{max}(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), \dots, d_n(x_n, y_n)\}$$

Então segue que se $y \in B((x_1, \dots, x_n), \varepsilon)$, $d_i(x_i, y_i) < \varepsilon \quad \forall i$. Equivalente a dizer que $\forall i \quad y_i \in B(x_i, \varepsilon)$ e então $y \in B(x_1, \varepsilon) \times \cdots \times B(x_n, \varepsilon)$. Agora tome $y \in B(x_1, \varepsilon) \times \cdots \times B(x_n, \varepsilon)$, note que para cada i, $y_i \in B(x_i, \varepsilon)$. Logo pela definição de bola e da distância produto vale $d(y, x) < \varepsilon$. Donde segue que $y \in B(x, \varepsilon)$.