Conjuntos Abertos

Introdução a Topologia

Yuri Kosfeld

Abril 2025

Bolas Abertas

O estudo de conjuntos abertos é motivado por querer entender a forma de um espaço metrico olhando para as vizinhanças de todos os pontos desse espaço. Vamos relembrar alguns detalhes importantes sobre distâncias.

Definição (Distância). *Seja M um conjunto. Uma* ***distância*** *em M é uma função $d : M \times M \to [0, \infty)$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $d(x, x) = 0$ *para todo* $x \in M$.
2. $d(x, y) > 0$ *para todos* $x, y \in M$ *com* $x \neq y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$ *para todos* $x, y \in M$.
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *para todos* $x, y, z \in M$.

Conseguimos agora então entender a proximidade de dois pontos. Para então formalizar matematicamente essa ideia de vizinhança de um ponto, vamos definir o que é uma **bola aberta**.

Definição (Bola Aberta). *Sejam (M, d) um espaço métrico, $x \in M$ e $\varepsilon > 0$. Definimos a* ***bola aberta*** *centrada em x e de raio ε como:*

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in M \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

Não é dificil notar que em $\mathbb{R}$ com a distância usual, temos que a bola $B(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Pela definição, segue que $B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < \varepsilon\}$. Então tomando $y \in B(x, \varepsilon)$ temos $|x - y| < \varepsilon$ e então

$$\begin{aligned}
-\varepsilon < x - y < \varepsilon \\
-\varepsilon < y - x < \varepsilon \\
x - \varepsilon < y < x + \varepsilon \\
\Leftrightarrow y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)
\end{aligned}$$

Outro exemplo é a bola em $\mathbb{R}^2$, com a distância euclidiana centrada na origem:

$$B((0, 0), \varepsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < \varepsilon^2\}$$

Assim note, que com essa distância, as bolas em $\mathbb{R}^2$ são discos.

Um resultado interessante é o que acontecem com bolas no espaço produto levando em conta a distância produto. Sejam $(M_1, d_1), \ldots, (M_n, d_n)$ espaços metrico, e defina $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ com a distância produto. Vamos mostrar que a bola produto é o produto das bolas, ou seja, $B((x_1, \ldots, x_n), \varepsilon) = B(x_1, \varepsilon) \times \cdots \times B(x_n, \varepsilon)$. Lembre que a distância produto é dada por

$$d_{max}(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), \ldots, d_n(x_n, y_n)\}$$

Então segue que se $y \in B((x_1, \ldots, x_n), \varepsilon)$, $d_i(x_i, y_i) < \varepsilon \quad \forall i$. Equivalente a dizer que $\forall i \quad y_i \in B(x_i, \varepsilon)$ e então $y \in B(x_1, \varepsilon) \times \cdots \times B(x_n, \varepsilon)$. Agora tome $y \in B(x_1, \varepsilon) \times \cdots \times B(x_n, \varepsilon)$, note que para cada i, $y_i \in B(x_i, \varepsilon)$. Logo pela definição de bola e da distância produto vale $d(y, x) < \varepsilon$. Donde segue que $y \in B(x, \varepsilon)$.

Podemos então perceber que a bola com a distância produto são quadrados de lado 2ε.

Outra bola interessante é a bola da distância induzida. Seja então (M, d) um espaço metrico e $A \subset M$ com a distância induzida. Vamos representar a bola da distância induzida em A por $B_A(x, \varepsilon)$, para um dado $x \in A$ e raio ε. Vamos provar que $B_A(x, \varepsilon) = B(x, \varepsilon) \cap A$. Tome $y \in B_A(x, \varepsilon)$, então $d(x, y) < \varepsilon$, donde segue que $y \in B(x, \varepsilon) \cap A$. Agora tome $y \in B(x, \varepsilon) \cap A$, então $d_A(x, y) < \varepsilon$ e segue que $y \in B_A(x, \varepsilon)$.

Conjuntos Abertos

Primeiro vamos definir alguns objetos para depois entender as suas propriedades e relações.

Definição (Conjunto Aberto). *$U \subset M$ é **conjunto aberto** se $\forall\, x \in U\ \exists\, \varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U$.*

Definição (Vizinhança). *U é uma **vizinhança** de x se U aberto tal que $x \in U$.*

Definição (Topologia). *Seja (M, d) espaço metrico, dizemos que **topologia** é a familia de todos os subconjuntos abertos de M.*

$$\mathcal{T} = \{U \subset M \mid U \text{ é aberto}\}$$

Um primeiro exemplo simples é que todo intervalo aberto (a,b) em $\mathbb{R}$ é aberto. Para isso basta tomar $\varepsilon \leq \min\{x - a.b - x\}$. Como já vimos anteriormente, $B(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, então se $y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ temos $x - \varepsilon < y < x + \varepsilon$, donde segue:

$$\begin{aligned} y &> x - \varepsilon \\ y &> x - x + a = a \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y &< x + \varepsilon \\ y &< x - x + b = b \end{aligned}$$

Logo $y \in (a, b)$.

Podemos também mostrar que em $\mathbb{R}$, qualquer conjunto formado por apenas um ponto, não é aberto em $\mathbb{R}$. Vamos mostrar que x não é aberto em $\mathbb{R}$. Note que para todo $\varepsilon > 0$, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Tome então $y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \setminus \{x\}$, logo $y \neq x$ e então $y \notin \{x\}$. Assim $B(x, \varepsilon) \subseteq \{x\}$ e não é aberto.

Podemos extender nosso exemplo para o caso de $\mathbb{R}^2$. Como vimos, um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ é aberto em $\mathbb{R}$. Tomando então dois invervalos abertos $(a, b), (c, d)$ temos $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tais que $B(x, \varepsilon_1) \subset (a, b)$ e $B(y, \varepsilon_2) \subset (c, d)$. Defina então $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ e então, lembrando da propriedade de que uma bola aberta em $\mathbb{R}^2$ é igual ao produto de duas bolas abertas em $\mathbb{R}$, segue:

$$B((x, y), \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subset (x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \times (y - \varepsilon_2, y + \varepsilon_2) \subset (a, b) \times (c, d)$$

Logo é aberto em $\mathbb{R}^2$.

Vamos mostrar agora que toda bola aberta é um subconjunto aberto. Tome então $z \in B(x, \varepsilon)$. Precisamos achar um $\varepsilon' > 0$ tal que $B(z, \varepsilon') \subset B(x, \varepsilon)$. Vamos mostar que $\varepsilon' = \varepsilon - d(x, z)$ é suficiente. Tome $y \in B(z, \varepsilon')$, pela desigualdade triangular temos:

$$d(y, x) \leq d(y, z) + d(z, x) < \varepsilon' + d(z, x) = \varepsilon - d(z, x) + d(z, x) = \varepsilon$$

Logo $y \in B(x, \varepsilon)$. E então a bola aberta é um conjunto aberto.