Definições e Propriedades P1

Introdução a Topologia

Yuri Kosfeld

Abril 2025

Definição (Distância). *Seja M um conjunto. Uma* ***distância*** *em M é uma função $d : M \times M \to [0, \infty)$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $d(x, x) = 0$ *para todo* $x \in M$.
2. $d(x, y) > 0$ *para todos* $x, y \in M$ *com* $x \neq y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$ *para todos* $x, y \in M$.
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *para todos* $x, y, z \in M$.

Definição (Bola Aberta). *Sejam (M, d) um espaço métrico, $x \in M$ e $\varepsilon > 0$. Definimos a* ***bola aberta*** *centrada em x e de raio ε como:*

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in M \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

Definição (Bola da distância induzida).

$$B_A(x, \varepsilon) = \{y \in A \mid d_A(x, y) < \varepsilon\}$$

$$B_A(x, \varepsilon) = B(x, \varepsilon) \cap A$$

Definição (Conjunto Aberto). *$U \subset M$ é* ***conjunto aberto*** *se $\forall\, x \in U\ \exists\, \varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U$.*

Definição (Vizinhança). *U aberto tal que $x \in U$.*

Definição (Topologia). *Seja (M, d) espaço metrico, dizemos que* ***topologia*** *é a familia de todos os subconjuntos abertos de M.*

$$\mathcal{T} = \{U \subset M \mid U \text{ é aberto}\}$$

Definição (Aberto EM). *Dizemos que U é* ***aberto em A*** *$\Leftrightarrow \exists\, V$ aberto em M tal que $U = V \cap A$.*

Definição (Ponto de Interior). *Dizemos que $x \in A$ é um* ***ponto de interior*** *de A se existir U vizinhança de x tal que $U \subset A$. Temos então int(A).*

Proposição. *Valem:*

1. $int(A) \subset A$.
2. $int(int(A)) = int(A)$

3. $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$
4. $int(A \cup B) \subset int(A) \cup int(B)$

Definição (Ponto Limite). *Seja (M, d) espaço metrico e $A \subset M$. Dizemos que $x \in M$ é **ponto limite** de A, se $\forall\, \varepsilon > 0$ temos que $B(x, \varepsilon) \cap A \setminus x \neq \emptyset$. Conjunto de todos os pontos limites de A: A'.*

Definição (Ponto Isolado). *Dizemos que x é **ponto isolado** de A, se $x \in A \setminus A'$, ou seja, $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \cap A \setminus x = \emptyset$*

Definição (Conjunto Fechado). *Dizemos que $F \subset M$ é um **conjunto fechado** se $F' \subset F$.*

Proposição. *(M, d) espaço metrico e $A \subset M$. A é aberto $\Leftrightarrow A^c$ é fechado.*

Definição (Fecho). *Definimos o **fecho** de um conjunto A como $\overline{A} = A \cup A'$.*

Proposição. *Valem:*

1. $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\; B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$
2. *F é fechado* $\Leftrightarrow \overline{F} = F$

Definição (Denso). *(M, d) espaço metrico, $A \subset M$. Dizemos que A é **denso** se $\overline{A} = M$.*