Definições, Propriedades e Resultados P2

Introdução a Topologia

Yuri Kosfeld

Abril 2025

1 Variedades

Definição (Variedade e Atlas). *Dado M um espaço métrico, dizemos que M é uma* ***variedade de dimensão n*** *se, existe uma família de funções $A = \{\varphi_i : U_i \subset M \to V_i \subset \mathbb{R}^n\}$ que satisfazem:*

1. *$\forall i \in I$, U_i é aberto em M e V_i é aberto em $\mathbb{R}^n$.*
2. *$\bigcup_{i \in I} U_i = M$.*
3. *$\forall i \in I$, φ_i é um homeomorfismo.*

Denotaremos por M^n. Definimos também A como o ***atlas da variedade****.*

Exemplo.

- *$\mathbb{R}^n$ é uma variedade*
- *qualquer aberto de $\mathbb{R}^n$ é uma variedade*
- *S^1 é uma variedade*

Definição (Fibrado). *Sejam M, N e F espaços métricos. M é um* ***fibrado com base N e fibras F*** *se existem:*

1. *Uma aplicação $\pi : M \to N$ continua tal que $\forall x \in N$, a fibra $\pi^{-1}(x)$ é homeomorfa a F.*
2. *Uma família de abertos $\{U_i\}_{i \in I}$ de N tal que*
$$\bigcup_{i \in I} U_i = N$$
3. *Para cada $i \in I$, existe um homeomorfismo $\varphi_i : U_i \times F \to \pi^{-1}(U_i) \subset M$ satisfazendo*
$$\pi(\varphi(x, v)) = x \quad \forall x \in U_i, v \in F$$

2 Bases

Definição (Base). *Dado M um espaço métrico. Uma* ***base*** *de M é uma coleção de abertos $\beta = \{\beta_i\}_{i \in I}$ que verifica: $\forall U \subset M$ aberto, $\exists I' \subset I$ tal que*

$$U = \bigcup_{i \in I'} \beta_i$$

Exemplo. *$\beta = \{B(x,r) \mid x \in M, r > 0\}$ é uma base.*

Lema. *Seja M espaço métrico e $\beta = \{\beta_i\}_{i \in I}$ uma coleção de abertos. Se β satisfaz: $\forall U \subset M$ aberto e $\forall x \in U$, $\exists i \in I$ tal que $x \in B_i \subset U$, então β é uma base de M.*

Demonstração. *Seja U aberto de M. Queremos mostrar que U é união de elementos de β. Por hipotese: $\forall x \in U$, $\exists i(x) \in I$ tal que $x \in B_{i(x)} \subset U$. Logo*

$$U = \bigcup_{x \in U} x \subset \bigcup_{x \in U} B_{i(x)} \subset \bigcup_{x \in U} U = U$$

$$\Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} B_{i(x)}$$

e assim β é base.

Atenção. *As bases não são únicas!*

Definição (Base Enumerável). *Um espaço métrico M admite* ***base enumerável*** *se existe $\beta = \{\beta_i\}_{i \in I}$ base tal que I é enumerável.*

Exemplo. *$\mathbb{R}$ admite base enumerável: $\beta = \{(a,b) \subset \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Sabemos que $\mathbb{Q}$ é enumerável e β é base pelo* ***lema*** *anterior: dado $U \in \mathbb{R}$ e $x \in U$, temos que $x \in (a,b) \subset B(x,\varepsilon) \subset U$.*

Atenção. *O produto de espaços que admitem base enumerável também admite base enumerável.*

Proposição. *Seja M espaço métrico. São equivalentes:*

1. *M admite base enumerável.*
2. *$\exists D \subset M$ enumerável e denso (M é separavél).*

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2)*:*
Seja $\beta = \{\beta_k\}$ base enumerável. Para cada $k \in \mathbb{N}$ escolhemos $x_k \in \beta_k$, e então defina $D = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. D é natualmente enumerável pela construção, então precisamos verificar ainda que D é denso. Para ver que D é denso, basta ver que dado U aberto, vale $U \cap D \neq \emptyset$. Dado U, $\exists\, k$ tal que $\beta_k \neq \emptyset$ e $\beta_k \subset U$. Logo $x_k \in D \cap U$, e portanto D é denso.
(2) $\Rightarrow$ (1)*:*
Seja D denso e enumerável e considere

$$\beta = \{B(y,r) \mid y \in D, r \in \mathbb{Q}^+\}$$

Temos que β é enumerável e é base pelo ***lema:***
Seja U aberto e $x \in U$. Queremos B elemento da base tal que $x \in B \subset U$. Temos $\exists\, y \in D \cap B(x, \varepsilon/2)$, ou seja, $d(x,y) < \varepsilon/2$. Temos também, $\exists\, r \in \mathbb{Q}$ tal que $d(x,y) < r < \varepsilon/2$. Para este r, vale que $x \in B(y,r)$. Assim $B(y,r) \subset B(x,\varepsilon) \subset U$.

Definição (Base Local). *Dado M espaço métrico e $x \in M$, uma **base local de M em x** é $\beta = \{\beta_i\}_{i \in I}$ de vizinhanças de x que verifica: $\forall\, U$ vizinhança de x, $\exists\, \beta_i \in \beta$ tal que $x \in B_i \subset U$.*

Definição (Primeiro Axioma de Enumerabilidade). *Todo ponto admite base local enumerável.*

Atenção. *Todo espaço métrico satisfaz o Primeiro Axioma de Enumerabilidade. Basta tomar:*

$$\beta = \{B(x, 1/k)\}$$

3 Conexidade

Definição (Separação). *Seja M espaço métrico Uma **separação** de M é um par de subconjuntos de M $\{A, B\}$ que verificam:*

- $A \cup B = M$.
- $A \cap B = \emptyset$.
- *A e B são abertos.*

*Chamamos $\{M, \emptyset\}$ de **separação trivial**.*

Definição (Conexo). *M é **conexo** se a única separação que admite é a trivial. Se M não é conexo, dizemos que M é **desconexo**.*

Atenção. *Se $\{A, B\}$ é separação, então A e B são fechados.*

Proposição. *M é conexo se e somente se os únicos conjuntos abertos e fechados de M são M e $\emptyset$.*

Demonstração. *COMPLETAR!*

Atenção. *$X \subset M$ é conexo se X com a topologia relativa é conexo.*

Proposição. *Se $f : M \to N$ é contínua e M é conexo, então $f(M)$ também é conexo.*

Demonstração. *Queremos ver que f(M) é conexo. Seja $\{A, B\}$ separação de f(M). $\exists\, A', B'$ abertos em N tais que*

$$A' \cap f(M) = A$$
$$B' \cap f(M) = B$$

Como f é contínua, $f^{-1}(A')$ e $f^{-1}(B')$ são abertos de M. Logo

$$\begin{aligned} f^{-1}(A') &= f^{-1}(f(M) \cap A') \\ &= f^1(A) \end{aligned}$$

e também $f^{-1}(B') = f^{-1}(B)$.
Vamos mostrar que $\{f^{-1}(A), f^{-1}(B)\}$ é separação de M.

- *$f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ são abertos.*
- $M = f^{-1}(f(M)) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

- $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) = \emptyset$.

Como M é conexo, temos duas opções: $f^{-1}(A) = \emptyset$ ou $f^{-1}(B) = \emptyset$. Se $f^{-1}(A) = \emptyset$, como $A \subset Im(f)$, segue que $A = \emptyset$ e então $B = f(M)$. Se $f^{-1}(B) = \emptyset$, analogo ao caso anterior temos, $B = \emptyset$ e $A = f(M)$.
Assim $\{A, B\}$ é a separação trivial de f(M).

Corolário 1. *Seja $f : M \to N$ homeomorfismo. Então, M é conexo se e somente se N é conexo.*

Exemplo.

- $M = \{x\}$ *é conexo.*
- $[0, 1) \cup (1, 2]$ *não é conexo. Basta perceber que $\{[0, 1), (1, 2]\}$ é separação, já que $[0, 1) = (-1, 1) \cap M$ e $(1, 2] = (1, 3) \cap M$ são abertos.*

Teorema. *Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, então I é conexo. Mais ainda, os únicos conexos de $\mathbb{R}$ são intervalos ou conjuntos com um único ponto.*

Demonstração. *Tomemos I intervalo de $\mathbb{R}$ e suponhamos que admite uma separação não trivial $\{A, B\}$.*
$\exists a \in A, b \in B$. Podemos supor que $a < b$. Como I é um intervalo, vale $[a, b] \subset I$. Defina $C = \{x \in [a, b] \mid [a, x] \subset A\}$. Vamos mostrar que $C \subset A$.
Primeiro vamos mostrar que $C \neq \emptyset$. $a \in A$, como A é aberto em I. $\Rightarrow A \cap [a, b]$ é aberto em $[a, b]$.
$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \; (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap [a, b] \subset A$.
Como $C \neq \emptyset$ e é limitado pois $C \subset [a, b]$. Existe $c = \sup(C)$. Como $\{A, B\}$ é separação, então $c \in A$ ou $c \in B$. ***Afirmação:*** *$c \notin B$.*
Se $c \in B$, como B é aberto, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset B$. Logo $c - \varepsilon/2$ é uma cota superior de C menor que c. Absurdo, já que c é $\sup(C)$. Então $c \in A$. ***Afirmação:*** *$\sup(C) = b$ Se $c < b$, como A é aberto, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset A$. Como $c = \sup(C)$, $\exists x \in (c - \varepsilon/2, c]$ tal que*
$x \in C \Rightarrow [a, x] \subset A \Rightarrow (c - \varepsilon, c + \varepsilon/2] \subset A$. Logo a união $[a, c + \varepsilon/2]$ está contido em A, logo $c + \varepsilon/2 \in C$, absurdo já que $c = \sup(C)$. Então $c = b$ e portanto $b \in A \cap B$ um absurdo.

Exemplo.

- S^1 *é conexo*
- S^1 *não é homeomorfo a nenhum intervalo de $\mathbb{R}$.*

Corolário 2 (**Teorema do Valor Intermediario**). *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e $f(a) < f(b)$, então $\forall\, d \in [f(a), f(b)] \; \exists\, c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$.*

Demonstração. *COMPLETAR !!*

Lema. *Se M é espaço métrico, $\{A, B\}$ separação de M e $X \subset M$ é conexo, então $X \subset A$ ou $X \subset B$.*

Demonstração. *$\{A \cap X, B \cap X\}$ é separação de X. Então ou $A \cap X = X$ ou $B \cap X = X$. Logo ou $X \subset A$ ou $X \subset B$.*

Proposição. *Se $X \subset Y \subset \overline{X} \subset M$ com X conexo, então Y é conexo.*

Demonstração. *Seja $\{A, B\}$ separação de Y. Pelo lema anterior, como X é conexo, então ou $X \subset A$ ou $X \subset B$. Suponhamos que $X \subset A$, como A é fechado em Y $\overline{X}^Y \subset \overline{A}^Y = A$. Mas $\overline{X}^Y = \overline{X}^M \cap Y$. Logo $Y = A$. $\Rightarrow \{A, B\}$ é separação trivial de Y.*

Proposição. *Seja* $\{X_i\}_{i\in I}$ *uma família de subconjuntos conexos em M, tais que* $\bigcap_{i\in I} X_i \neq \emptyset$*. Então* $\bigcup_{i\in I}$ *é conexo.*

Demonstração. *Seja* $\{A, B\}$ *separação de* $X = \bigcup_{i\in I} X_i$*. Tome* $x_0 \in \bigcap_{i\in I} X_i$*. Pela separação, cada* $X_i \subset A$ *ou* $X_i \subset B$*. Se* $x_0 \in A$*, então* $X_i \subset A \quad \forall\, i$*. Assim* $A = X$ *e* $B = \emptyset$*.*

Proposição. *Se* $M_1, M_2, \ldots, M_n$ *são espaços conexos, então* $M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ *é conexo.*

Demonstração. *Vamos provar por indução em n, quantidade de espaços conexos.*
Como caso base vamos provar para $n = 2$*. Sejam M e N conexos. Tome um ponto* (x, y') *em* $M \times N$*. Temos que* $\{x\} \times N$ *é homeomorfo a N, logo é conexo. De maneira analoga temos que* $M \times \{y'\}$ *é conexo. Defina então* $C_x = (\{x\} \times N) \cup (M \times \{y'\})$*.* C_x *é conexo pois é união de dois conexos com um ponto em comum,* (x, y')*. Agora* $M \times N = \bigcup_{x\in M} C_x$*, com cada* C_x *conexo e* $\bigcap_{x\in M} C_x = M \times \{y'\}$*. Então pela proposicao novamente,* $M \times N$ *é conexo. Seguindo pela indução temos:*

$$M_1 \times \cdots \times M_n \times M_{n+1} = (M_1 \times \cdots \times M_n) \times M_{n+1}$$

Então pela hipotese de indução, é conexo.

Definição (Componentes Conexas). *Dado M espaço métrico, definimos* $\sim$ *em M,* $x \sim y$ *se existe* $C \subset M$ *conexo tal que* $x, y \in C$*. Chamamos as classes de N como* ***componentes conexas*** *de M.*

Proposição. *M espaço métrico,* $\{C_i\}_{i\in I}$ *as componentes conexas de M. Então:*

1. $M = \bigcup_{i\in I} C_i$*.*
2. *Se* $i \neq j$ *então* $C_i \cap C_j = \emptyset$*.*
3. *Cada* C_i *é conexa.*
4. *Se* $C \subset M$ *é conexo, então existe* $i \in I$ *tal que* $C \subset C_i$*.*
5. *Cada* C_i *é fechada.*
6. *M é conexo se e somente se* $|I| = 1$*.*

Demonstração. ***(1) e (2)*** *são imediatos, pois* $\sim$ *é uma relação de equivalencia e as classes formam uma partição do espaço.*
(3)*: Fixemos* $x \in C_i$*, e para cada* $y \in C_i$ *seja* D_y *conexo de M tal que* $x, y \in D_y$*. Então* $C_i = \bigcup_{y\in C_i} D_y$ *e* $\{x\} \subset \bigcap_{y\in C_i} D_y$*. Logo* C_i *é união de conexos com um ponto em comum e portanto é conexo.*
(4)*: Se* $C \subset M$ *é conexoe* $x \in C$*, seja* C_i *tal que* $x \in C_i$*.* $\forall\, y \in C, y \sim x \Rightarrow y \in C_i \Rightarrow C \subset C_i$*.*
(5)*:* C_i *conexo, então* $\overline{C_i}$ *é conexo. Mas pelo item (4)* $\overline{C_i} \subset C_i$*, portanto* $C_i = \overline{C_i}$*.*
(6)*: Trivial.*

Atenção. C_i *nem sempre é aberto. Precisamos de uma quantidade finita de compontes conexas para que cada uma delas seja aberta.*

Definição (Totalmente Disconexo). *Se* $\forall i \in I$*,* $|C_i| = 1$*, ou seja,* C_i *é um único ponto, dizemos que M é* ***totalmente disconexo****.*

Exemplo.

- $\mathbb{Q}$ *é totalmente disconexo.*

- *Todo espaço discreto é totalmente disconexo.*

Atenção. *Conexão é uma propriedade global. Ou seja, temos que entender todo o espaço para determinar se verifica a propriedade.*

Definição (Localmente Conexo). *M é **localmente conexo** se $\forall\, x, \forall\, U_x$ vizinhança de x $\exists V_x$ vizinhança de x conexa com $V_x \subset U_x$.*

Exemplo.

- *$\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$ são localmente conexos.*
- *$M = [0,1) \cup (1,2]$ é localmente conexo, mas não é conexo.*

Proposição. *Seja M espaço métrico localmente conexo, então toda componente conexa é aberta.*

Demonstração. *Seja C componente conexa e $x \in C$. $\exists\, V_x$ aberto conexo que contém x. Então $V_x \subset C$ e portanto x é ponto de interior de C. Logo C é aberto.*

Teorema. *Seja M conexo, $\forall\, x \in M$ $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon)$ é separavél. Então M é separavél.*

Demonstração. *Se considerarmos $A \subset M$ tal que se provarmos que $A = M$ então concluimos o teorema. Para provarmos que $A = M$, mostraremos que*

1. *$A \neq \emptyset$*
2. *A é aberto*
3. *A é fechado*

Assim como M é conexo, ganhamos que $A = M$.