

# Definições e Propriedades P1

## Introdução a Topologia

Yuri Kosfeld

Abril 2025

**Definição (Distância).** *Seja  $M$  um conjunto. Uma **distância** em  $M$  é uma função  $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$  que satisfaz as seguintes propriedades:*

1.  $d(x, x) = 0$  para todo  $x \in M$ .
2.  $d(x, y) > 0$  para todos  $x, y \in M$  com  $x \neq y$ .
3.  $d(x, y) = d(y, x)$  para todos  $x, y \in M$ .
4.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  para todos  $x, y, z \in M$ .

**Definição (Bola Aberta).** *Sejam  $(M, d)$  um espaço métrico,  $x \in M$  e  $\varepsilon > 0$ . Definimos a **bola aberta** centrada em  $x$  e de raio  $\varepsilon$  como:*

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in M \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

**Definição (Bola da distância induzida).**

$$B_A(x, \varepsilon) = \{y \in A \mid d_A(x, y) < \varepsilon\}$$

$$B_A(x, \varepsilon) = B(x, \varepsilon) \cap A$$

**Definição (Conjunto Aberto).**  $U \subset M$  é **conjunto aberto** se  $\forall x \in U \exists \varepsilon > 0$  tal que  $B(x, \varepsilon) \subset U$ .

**Definição (Vizinhança).**  $U$  aberto tal que  $x \in U$ .

**Definição (Topologia).** *Seja  $(M, d)$  espaço métrico, dizemos que **topologia** é a família de todos os subconjuntos abertos de  $M$ .*

$$\mathcal{T} = \{U \subset M \mid U \text{ é aberto}\}$$

**Definição (Aberto EM).** *Dizemos que  $U$  é **aberto em  $A$**   $\Leftrightarrow \exists V$  aberto em  $M$  tal que  $U = V \cap A$ .*

**Definição (Ponto de Interior).** *Dizemos que  $x \in A$  é um **ponto de interior** de  $A$  se existir  $U$  vizinhança de  $x$  tal que  $U \subset A$ . Temos então  $\text{int}(A)$ .*

**Proposição.** *Valem:*

1.  $\text{int}(A) \subset A$ .
2.  $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$

$$3. \text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$$

$$4. \text{int}(A \cup B) \subset \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$$

**Definição (Ponto Limite).** Seja  $(M, d)$  espaço métrico e  $A \subset M$ . Dizemos que  $x \in M$  é **ponto limite** de  $A$ , se  $\forall \varepsilon > 0$  temos que  $B(x, \varepsilon) \cap A \setminus x \neq \emptyset$ . Conjunto de todos os pontos limites de  $A$ :  $A'$ .

**Definição (Ponto Isolado).** Dizemos que  $x$  é **ponto isolado** de  $A$ , se  $x \in A \setminus A'$ , ou seja,  $\exists \varepsilon > 0$  tal que  $B(x, \varepsilon) \cap A \setminus x = \emptyset$

**Definição (Conjunto Fechado).** Dizemos que  $F \subset M$  é um **conjunto fechado** se  $F' \subset F$ .

**Proposição.**  $(M, d)$  espaço métrico e  $A \subset M$ .  $A$  é aberto  $\Leftrightarrow A^c$  é fechado.

**Definição (Fecho).** Definimos o **fecho** de um conjunto  $A$  como  $\overline{A} = A \cup A'$ .

**Proposição.** Valem:

$$1. x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

$$2. F \text{ é fechado} \Leftrightarrow \overline{F} = F$$

**Definição (Denso).**  $(M, d)$  espaço métrico,  $A \subset M$ . Dizemos que  $A$  é **denso** se  $\overline{A} = M$ .

**Proposição.**  $A$  é denso  $\Leftrightarrow$  para todo  $U$  aberto de  $M$ ,  $U \cap A \neq \emptyset$ .

**Definição (Conjunto Perfeito).**  $(M, d)$  espaço métrico,  $A \subset M$ .  $A$  é **perfeito** se  $A = A'$ . Todo conjunto perfeito é fechado.

**Definição.** Dizemos que um conjunto  $A \subset M$  é **discreto** se para todo  $x \in A$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(x, \varepsilon) \cap A = \{x\}$ .

**Definição (Fronteira).**  $(M, d)$  espaço métrico,  $A \subset M$ . A **fronteira** de  $A$  é definida como:  $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A}^c$

**Proposição.** Valem:

$$1. \text{int}(A) \text{ e } \partial A \text{ são disjuntos.}$$

$$2. \overline{A} = \text{int}(A) \cup \partial A$$

$$3. \partial A = \emptyset \Leftrightarrow A \text{ é aberto e fechado ao mesmo tempo.}$$

**Definição (Sequência Convergente).** Seja  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  uma sequência em  $M$ .  $x_k$  é **convergente** se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad x_k \in B(x, \varepsilon) \quad \forall k \geq k_0$$

**Proposição.** Valem:

$$1. A \text{ convergência é única.}$$

$$2. M \text{ um conjunto e } d_1 \text{ e } d_2 \text{ duas distâncias topologicamente equivalentes. Então } x_k \text{ converge a } x \text{ por } d_1 \text{ se e somente se } x_k \text{ converge a } x \text{ por } d_2.$$

$$3. M \text{ espaço métrico e } A \subset M. \text{ Então, } x \in \overline{A} \text{ se e somente se existe uma sequência } \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ de pontos em } A \text{ que convergem a } x.$$

4. Sejam  $M_1, \dots, M_n$  espaços metricos, e defina  $M = M_1 \times \dots \times M_n$  espaço metrico. Uma sequencia  $x_k$  em  $M$  é convergente se e somente se cada sequencia coordenada for convergente.

**Definição (Sequencia de Cauchy).** Dizemos que  $x_{k \in \mathbb{N}}$  é uma **sequencia de cauchy** se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que se } k, l \geq k_0 \text{ então } d(x_k, x_l) < \varepsilon$$

**Definição (espaço Completo).** Um espaço metrico  $M$  é **completo** se toda sequencia de Cauchy em  $M$  converge para um ponto de  $M$ .

**Definição (Ponto de Aderencia).** Dizemos que  $x$  é um **ponto de aderencia** de  $x_k$  se existe uma sub de  $x_k$  que converge a  $x$ .

**Proposição.** Valem:

1. Se  $x_k$  é convergente, então é de Cauchy.
2. Se  $x_k$  é de Cauchy e possui uma subsequencia convergente, então  $x_k$  é convergente.
3. Se  $x_k \subset \mathbb{R}$  é monotona e limitada, então  $x_k$  é convergente.
4. Se  $x_k \subset \mathbb{R}$  é limitada, então  $x_k$  possui uma sub convergente.
5.  $\mathbb{R}$  é completo.

**Definição (Eventualmente Constante).** Dizemos que  $x_k$  é **eventualmente constante** se existe  $k_0$  tal que para todo  $k, m \geq k_0$  temos  $x_k = x_m$ .

**Definição (Isometria).** Dizemos que  $f : M \rightarrow N$  é uma **isometria** se é bijetiva e:

$$\forall x, y \in M \quad d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y)$$

**Definição (Homeomorfismo).** Dizemos que  $f$  é um **homeomorfismo** se é bijetiva e:

$$U \in T_M \text{ se e somente se } f(U) \in T_N$$

**Definição (Continua).** Uma função  $f : M \rightarrow N$  é dita **continua**, se para todo aberto  $U \subset N$ , a pré-imagem  $f^{-1}(U)$  é aberto em  $M$ .

**Proposição.** Valem as equivalencias:

1.  $f$  é continua
2. Para todo  $F$  fechado em  $N$ ,  $f^{-1}(F)$  é fechado em  $M$ .
3. Para todo  $x \in M$  e para todo varepsilon  $> 0$ , existe  $\Delta > 0$  tal que  $f(B(x, \Delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$ .
4. Para toda sequencia  $x_k$  em  $M$  e  $x$  em  $M$ , se  $x_k$  converge a  $x$  então  $f(x_k)$  converge a  $f(x)$ .
5. Para todo  $A$  em  $M$ ,  $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ .