Definições e Propriedades P1

Introdução a Topologia

Yuri Kosfeld

Abril 2025

Definição (Distância). *Seja M um conjunto. Uma* ***distância*** *em M é uma função $d : M \times M \to [0, \infty)$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $d(x, x) = 0$ *para todo* $x \in M$.
2. $d(x, y) > 0$ *para todos* $x, y \in M$ *com* $x \neq y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$ *para todos* $x, y \in M$.
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *para todos* $x, y, z \in M$.

Definição (Bola Aberta). *Sejam (M, d) um espaço métrico, $x \in M$ e $\varepsilon > 0$. Definimos a* ***bola aberta*** *centrada em x e de raio ε como:*

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in M \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

Definição (Bola da distância induzida).

$$B_A(x, \varepsilon) = \{y \in A \mid d_A(x, y) < \varepsilon\}$$

$$B_A(x, \varepsilon) = B(x, \varepsilon) \cap A$$

Definição (Conjunto Aberto). *$U \subset M$ é* ***conjunto aberto*** *se $\forall\, x \in U\ \exists\, \varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U$.*

Definição (Vizinhança). *U aberto tal que $x \in U$.*

Definição (Topologia). *Seja (M, d) espaço metrico, dizemos que* ***topologia*** *é a familia de todos os subconjuntos abertos de M.*

$$\mathcal{T} = \{U \subset M \mid U \text{ é aberto}\}$$

Definição (Aberto EM). *Dizemos que U é* ***aberto em A*** *$\Leftrightarrow \exists\, V$ aberto em M tal que $U = V \cap A$.*

Definição (Ponto de Interior). *Dizemos que $x \in A$ é um* ***ponto de interior*** *de A se existir U vizinhança de x tal que $U \subset A$. Temos então int(A).*

Proposição. *Valem:*

1. $int(A) \subset A$.
2. $int(int(A)) = int(A)$

3. $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$

4. $int(A \cup B) \subset int(A) \cup int(B)$

Definição (Ponto Limite). *Seja (M, d) espaço metrico e $A \subset M$. Dizemos que $x \in M$ é* ***ponto limite*** *de A, se $\forall \varepsilon > 0$ temos que $B(x, \varepsilon) \cap A \setminus x \neq \emptyset$. Conjunto de todos os pontos limites de A: A'.*

Definição (Ponto Isolado). *Dizemos que x é* ***ponto isolado*** *de A, se $x \in A \setminus A'$, ou seja, $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \cap A \setminus x = \emptyset$*

Definição (Conjunto Fechado). *Dizemos que $F \subset M$ é um* ***conjunto fechado*** *se $F' \subset F$.*

Proposição. *(M, d) espaço metrico e $A \subset M$. A é aberto $\Leftrightarrow$ A^c é fechado.*

Definição (Fecho). *Definimos o* ***fecho*** *de um conjunto A como $\overline{A} = A \cup A'$.*

Proposição. *Valem:*

1. $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\; B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

2. *F é fechado* $\Leftrightarrow \overline{F} = F$

Definição (Denso). *(M, d) espaço metrico, $A \subset M$. Dizemos que A é* ***denso*** *se $\overline{A} = M$.*

Proposição. *A é denso $\Leftrightarrow$ para todo U aberto de M, $U \cap A \neq \emptyset$.*

Definição (Conjunto Perfeito). *(M, d) espaço metrico, $A \subset M$. A é* ***perfeito*** *se $A = A'$. Todo conjunto perfeito é fechado.*

Definição. *Dizemos que um conjunto $A \subset M$ é* ***discreto*** *se para todo $x \in A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \cap A = \{x\}$.*

Definição (Fronteira). *(M, d) espaço metrico, $A \subset M$. A* ***fronteira*** *de A é definida como: $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$*

Proposição. *Valem:*

1. *$int(A)$ e ∂A são disjuntos.*

2. $\overline{A} = int(A) \cup \partial A$

3. *$\partial A = \emptyset \Leftrightarrow$ A é aberto e fechado ao mesmo tempo.*

Definição (Sequencia Convergente). *Seja $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequencia em M. x_k é* ***convergente*** *se:*

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, k_0 \in \mathbb{N} \quad tal\ que \quad x_k \in B(x, \varepsilon)\; \forall\, k \geq k_0$$

Proposição. *Valem:*

1. *A convergencia é unica.*

2. *M um conjunto e d_1 e d_2 duas distancias topologicamente equivalentes. Então x_k converge a x por d_1 se e somente se x_k converge a x por d_2.*

3. *M espaço metrico e $A \subset M$. Então, $x \in \overline{A}$ se e somente se existe uma sequencia $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de pontos em A que convergem a x.*

4. *Sejam $M_1, \dots, M_n$ espaços metricos, e defina $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ espaço metrico. Uma sequencia x_k em M é convergente se e somente se cada sequencia coordenada for convergente.*

Definição (Sequencia de Cauchy). *Dizemos que $x_{k\,k \in \mathbb{N}}$ é uma **sequencia de cauchy** se:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, k_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tal que se} \quad k, l \geq k_0 \text{ então}\, d(x_k, x_l) < \varepsilon$$

Definição (espaço Completo). *Um espaço metrico M é **completo** se toda sequencia de Cauchy em M converge para um ponto de M.*

Definição (Ponto de Aderencia). *Dizemos que x é um **ponto de aderencia** de x_k se existe uma sub de x_k que converge a x.*

Proposição. *Valem:*

1. *Se x_k é convergente, então é de Cauchy.*
2. *Se x_k é de Cauchy e possui uma subsequencia convergente, então x_k é convergente.*
3. *Se $x_k \subset \mathbb{R}$ é monotona e limitada, então x_k é convergente.*
4. *Se $x_k \subset \mathbb{R}$ é limitada, então x_k possui uma sub convergente.*
5. *$\mathbb{R}$ é completo.*

Definição (Eventualmente Constante). *Dizemos que x_k é **eventualmente constante** se existe k_0 tal que para todo $k, m \geq k_0$ temos $x_k = x_m$.*

Definição (Isometria). *Dizemos que $f : M \to N$ é uma **isometria** se é bijetiva e:*

$$\forall\, x, y \in M \quad d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y)$$

Definição (Homeomorfismo). *Dizemos que f é um **homeomorfismo** se é bijetiva e:*

$$U \in T_M \quad \text{se e somente se} \quad f(U) \in T_N$$

Definição (Continua). *Uma função $f : M \to N$ é dita **continua**, se para todo aberto $U \subset N$, a pré-imagem $f^{-1}(U)$ é aberto em M.*

Proposição. *Valem as equivalencias:*

1. *f é continua*
2. *Para todo F fechado em N, $f^{-1}(F)$ é fechado em M.*
3. *Para todo $x \in M$ e para todo varepsilon > 0, existe $\mathit{\Delta} > 0$ tal que $f(B(x, \mathit{\Delta})) \subset B(f(x), \varepsilon)$.*
4. *Para toda sequencia x_k em M e x em M, se x_k converge a x então $f(x_k)$ converge a $f(x)$.*
5. *Para todo A em M, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*