第二篇　图论与组合数学(Graphic theory & Combinatorial mathematics)

图论是一个古老而又年轻的数学分支，它诞生于 18 世纪.

由于图论为任何一个包含二元关系的系统提供了一个直观而严谨的数学模型，因此，物理学、化学、生物学、工程科学、管理科学、计算机科学与技术等各个领域都可以找到图论的足迹.

随着科学技术的发展，特别是电子计算机的广泛应用，用图论来解决离散型的应用问题已显示出极大的优越性. 同时，图论本身的理论也取得了很大的进展，使它越来越受到数学界、工程技术界以及教育界的重视. 目前，图论已成为计算机科学等学科的基础课程之一

组合数学又叫组合分析、组合论或组合学，它是一个有着悠久历史的数学分支. 组合数学所研究的中心问题与“按照一定的规则来安排一些物件”的数学问题有关，即关于符合要求之安排的存在性或不存在性的证明；求出要求之安排的个数；构造出符合要求的安排；寻求出最优的符合要求之安排等等. 这些问题分别被称为存在性问题、计数问题、构造问题、最优化问题.

我国古代就已开始了对组合学的研究，并对一些有趣的组合问题给出了正确的答案. 越来越多的学者认为中国是早期组合数学的发源地.

随着科学技术的发展，组合数学这门古老的学科正在不断地焕发出新的活力. 特别是由于电子计算机的出现，以及计算机科学与技术的迅速发展，使组合数学建立在全新的基础之上，成为计算机科学与技术发展的一个重要组成部分，并在国防工业、空间技术、信息编码、遗传工程、人工智能、管理科学等领域中有着重要的应用.

本篇主要介绍图论的基本概念和定理以及图论在其它学科的一些应用、组合数学中的计数问题，以及解决计数问题的数学工具，如加法法则、乘法法则、容斥原理、递推关系和母函数等.

第七章　图（Graph）与子图(Subgraph)

§7.1　图的概念

现实世界中，有许多问题都可以用表示两个对象之间的二元关系来描述.最直观的方法就是用图形来描述这种二元关系：用顶点(vertices)表示对象，如果两个对象有关系，则用一条线连接代表这两个对象的两个顶点.例如，世界各国之间的外交关系，城市之间的通讯联系等等，这些问题都可以用这种图的形式来描述.在这些图中，如果我们感兴趣的只是顶点与顶点之间是否有连线，而不关心这些顶点具体代表什么对象，也不关心连线的长短曲直，那么，这种数学抽象就是图的概念.

定义 7.1.1　一个图 G 是一个有序三元组 $G=\langle V,E,\varphi\rangle$.其中：

（1）V 是非空顶点集合；

（2）E 是边(edge)集合，$E\cap V=\varnothing$；

（3）φ 是 E 到 $\{u\upsilon \mid u,\upsilon\in V\}$ 的映射，称为关联函数(incidence function)(当 E 为空集时，允许 φ 不存在). $u\upsilon=\upsilon u$，$u,\upsilon\in V$

[例 7.1]　设 $G=\langle V,E,\varphi\rangle$，其中：

$V=\{\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3\}$

$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$

$\varphi(e_1)=\upsilon_1\upsilon_3, \varphi(e_2)=\upsilon_1\upsilon_2, \varphi(e_3)=\upsilon_1\upsilon_2$,

$\varphi(e_4)=\upsilon_2\upsilon_3, \varphi(e_5)=\upsilon_3\upsilon_3$

通常用$V(G)$、$E(G)$、φ_G分别表示图G的顶点集、边集和关联函数.

一个图G可以用平面上的一个图形(figure)来表示.用平面上的几何点（小圆圈）来代表$V(G)$中的顶点（也称为顶点或简称为点），用平面上连接相应顶点而不经过其它顶点的一条不自交的曲线（也称为边）来表示$E(G)$中的边.例如，图 7.1 画出了例 7.1 所定义图的图形.

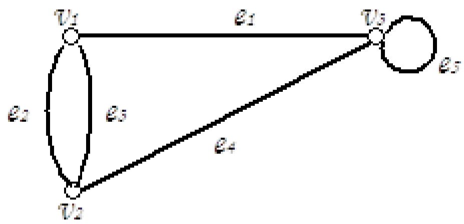


图 7.1

图形有助于我们理解和说明一个图的性质. 我们常将一个图与表示它的图形等同起来. 在一个图G中，如果$e \in E(G), \varphi_G(e)=u\upsilon$，则称$u$和$\upsilon$是$e$的端点(end points)，此时，称$u$和$\upsilon$是邻接的(adjacent)，也称$e$与$u$、$\upsilon$关联(incident). 如果两条不同的边$e_i$和$e_j$关联同一个顶点$u$，则称$e_i$和$e_j$是邻接的. 如果边$e$的两个端点重合，即$\varphi(e)=uu$，则称$e$为环(ring)，否则称为杆(rod)；不与任何边关联的顶点称为孤立点(isolated vertex).

例如，在图 7. 1 中，υ_1和υ_2是e_2和e_3的端点；υ_1与υ_3邻接；e_1与υ_1关联；e_1与e_2邻接；e_5是环，其它边均为杆.

如果图G的$V(G)$和$E(G)$都是有限集，则称G为有限图，否则称为无限图. 本书中的图，若不特别指明，都是指有限图.

对于有限图G，$|V(G)|$称为G的阶. 通常用$G(p,q)$表示p个点q条边的图，用$p(G)$和$q(G)$分别表示图G的顶点数和边数.

定义 7.1.2　设G是一个图，如果G中没有环，而且任意两个顶点之间最多只有一条边，则称G为简单图(simple graph)或单图；否则称为伪图(pseudograph).

例如，图 7.1 就是一个伪图，无环的伪图称为多重图(multigraph)，其中，两个顶点之间$r(>1)$条边称为重边，r称为边的重数.

对于简单图G而言，由于G的任意两个顶点只能确定一条边，因此，有时就用边e的两个端点u和υ来表示该边，记为$e=u\upsilon$.

定义 7.1.3　设G是一个简单图. 如果G的任意两个顶点都邻接，则称G为完全图(complete graph)，p个顶点的完全图记为K_p.

例如，图 7.2 画出了完全图K_3, K_4和K_5.

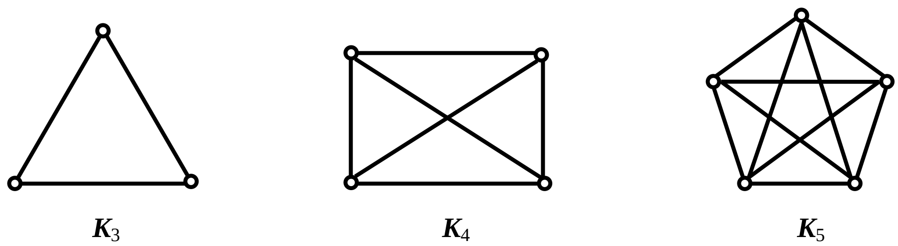


图 7.2

定义 7.1.4　设G是一个图. 如果G的顶点集$V(G)$能分成两个不相交的非空子集V_1和V_2，使得G的每条边的两个端点分别在V_1和V_2中，则称G为二分图(bipartite graph). 记为$G=\langle V, V_2\rangle$.

显然，若图G中含有环，则G不是二分图，若G是二分图，则$V(G)$的二划分子集V_1和V_2可能不惟一. 图 7.3 给出了图G及其二分图$\langle V_1, V_2\rangle$.

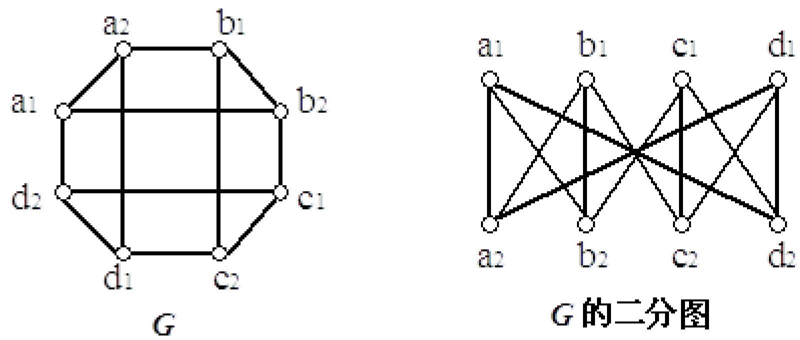


图 7.3

设简单二分图$G=\langle V_1, V_2\rangle$. 如果$V_1$的每个顶点与$V_2$的每个顶点都邻接，则称$G$为完全二分图，记为$K_{m,n}$，其中$|V_1|=m$，$|V_2|=n$.

定义 7.1.5　设G是简单图. 如果简单图H满足：

（1）$V(H)=V(G)$；

（2）对任意$u,\upsilon\in V$，$u\neq\upsilon,u\upsilon\in E(H)$，当且仅当$u\upsilon\notin E(G)$.

则称H为G的补图(complementary graph)，记为$H=\overline{G}$.

显然，$\left(\overline{\overline{G}}\right)=G$，即$G$与$\overline{G}$互为补图.

图 7. 4 给出了两个互为补图的简单图.

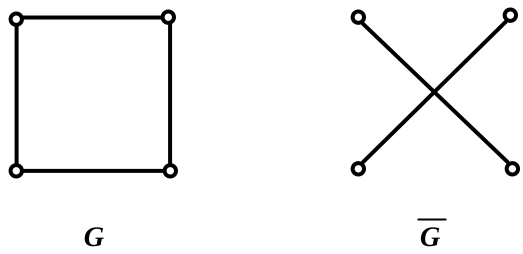


图 7.4

$G(p,0)$称为零图(discrete graph)（无边图），$G(1,0)$称为平凡图（trival graph），即只有一个孤立点的图.

§7. 2　图的同构(isomorphic of graph)

前面曾提到，常将一个图和它的图形等同起来，即给出了图形就确定了一个图. 然而，一个图的图形不是惟一的，即一个图有许多不同的画法，从几何角度看，它们之差异较大，但它们所表示的图又是同一个. 例如，图 7.5 给出了同一个图G的三种图形.

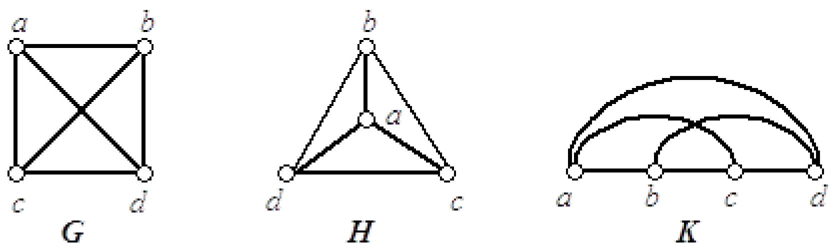


图 7.5

进一步，考虑图 7.6 所示的两个图G和H，不难发现，尽管$V(G)\neq V(H),E(G)\neq E(H)$，但$G$和$H$的顶点数及边数均对应相等，并且如果用其中一个图的顶点适当地标在另一个图的顶点上时，相应的边也作同样的标记，则这两个图在结构上完全一样.

定义 7.2.1　设G和H是两个图. 如果存在两个双射$\sigma:V(G)\to V(H)$和

$\theta : E(G) \to E(H)$，使得：

$$\varphi_G(e) = u\upsilon \text{ 当且仅当 } \varphi_H(\theta(e)) = \sigma(u)\sigma(\upsilon) \qquad (1)$$

则称 G 和 H 是同构的，记为 $G \overset{\sigma}{\cong} H$，$\sigma$ 有时可省略，特别，如果 $V(G)=V(H), E(G)=E(H)$，且 $\varphi_G = \varphi_H$，则称 G 和 H 是相等的，记为 $G = H$.

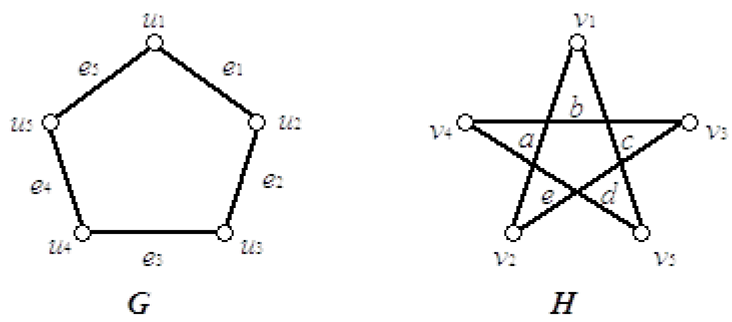


图 7.6

例如，对于图 7. 6，令 $\sigma(u_i) = \upsilon_i, i = 1,2,3,4,5 : \theta(e_i) = a$，$\theta(e_2) = d, \theta(e_3) = b$，

$\theta(e_4) = e, \theta(e_5) = c$，则 σ 和 θ 是满足定义 7.2.1 中（1）式的两个双射，故 $G \cong H$.

相等的两个图显然是同构的，但反之不然．按定义，同构关系是一个等价关系．于是，可以将所有 p 阶图作成的集合按图的同构关系划分成若干等价类．在每个等价类中任选一个图，去掉顶点和边的名称，作为该等价类的一个代表，这种图称为无标记图．当需要区别标记图时，前一节所定义的图就称为标记图或标定图(labeled graph).

§7. 3　顶点的度(degree)

定义 7.3.1　设 G 是一个图，$\upsilon \in V(G)$, G 中与 υ 关联的边的数目称为 υ 在 G 中的度数，简称 υ 的度，记为 $d_G(\upsilon)$ 或 $d(\upsilon)$.

顶点 υ 上的一条环相当于 υ 关联的两条边．在图 7. 1 中，$d(\upsilon_1) = 3, d(\upsilon_3) = 4$.

在一个图 G 中，度为奇数的顶点称为奇点(odd vertex)，度为偶数的顶点称为偶点(even vertex)，特别，度为 1 的顶点称为悬挂点(terminal vertex)．显然，度为 0 的点即孤立点.

在一个图 G 中，各顶点的最大值和最小值分别称为 G 的最大度和最小度，记为 $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$.

一个简单图 G，如果满足 $\Delta(G) = \delta(G) = k$，则 G 称为 $k-$ 正则图(regular graph)．例如，图 7. 5 是一个 3-正则图．显然，p 阶完全图 K_p 必是一个 $(p-1)-$ 正则图，但反之不然.

定理 7.3.1　对任何$G(p,q)$，有：

$$\sum_{i=1}^{p} d(\upsilon_i) = 2q$$

即一个图的所有顶点的度之和是边数的两倍.

推论 7.3.1　任何一个图的奇点个数必为偶数.

证明：设V_1和V_2分别是图$G(p,q)$中奇点集合和偶点集合. 显然,

$$p = |V(G)| = |V_1| + |V_2|$$

由定理 7.3.1 有：

$$2q = \sum_{i=1}^{p} d(v_i) = \sum_{r_i \in V_1} d(\upsilon_i) + \sum_{r_j \in V_2} d(\upsilon_j)$$

由于$\sum_{r_j \in V_2} d(\upsilon_j)$是偶数，所以$\sum_{r_i \in V_1} d(\upsilon_i)$必是偶数. 但$d(\upsilon_i)$是奇数，$\upsilon_i \in V_1$，故$|V_1|$必为偶数.

此推论可用来解决许多实际问题. 如“握手问题”：任何一群人中，与奇数个人握过手的人数必为偶数.

用顶点表示人，两个人如果握过手，则表示这两个人的顶点就邻接，反之亦然，于是，该图中的奇点就是代表那些与奇数个人握过手的人，由推论 7.3.1 即知，结论成立.

§7. 4　子图及图的运算

定义 7.4.1　设G和H是两个图. 如果$V(H) \subseteq V(G)$且$E(H) \subseteq E(G)$，则称H是G的子图，G是H的母图，记为$H \le G$. 如果$H \le G$，而$H \ne G$，则称H是G的真子图，记为$H < G$. 如果$H \le G$，且$V(H) = V(G)$，则称H是G的生成子图(spanning subgraph).

例如，在图 7. 7 中H_1和H_2是G的真子图(proper subgraph)，H_3是G的生成子图.

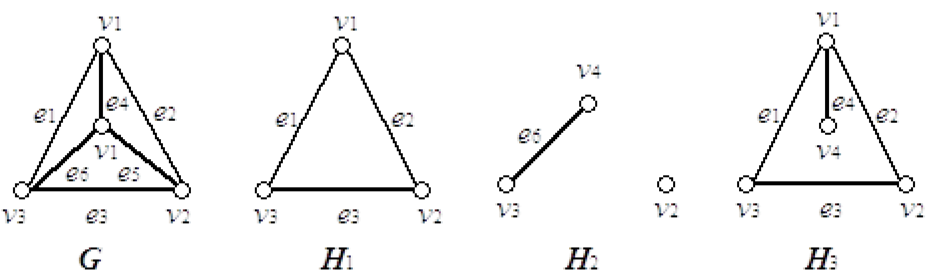


图 7.7

由定义易知，图G的真子图就是从图G中删除一些顶点或一些边所得的图. 自然地，我们约定，从图G中删除一个顶点υ，必须同时删除所有与υ有关联的边；而删除G中一条边$e=(u,\upsilon)$则只要删除顶点u和υ之间的连线e，而保留顶点u和υ. 例如，图 7.7 中，从

G 中删除υ_4就得到子图H_1；从G 中删除υ_1、e_3和e_5后得子图H_2，从G 中删除e_5和e_6则到子图H_3.

从图G 删除非空顶点集$V' \subset V(G)$中的顶点所得的子图记为$G-V'$，特别，$G-\{\upsilon\}$简记为$G-\upsilon, \upsilon \in V(G)$. 类似地，从图$G$ 中删除非空边集$E' \subseteq E(G)$中的边所得的子图记为 $G-E'$ ， 特 别 ， $G-\{e\}$ 简 记 为 $G-e, e \in E(G)$. 例 如 ， 在 图 7. 7 中 ，$H_1 = G-\upsilon_4, H_3 = G-\{e_5, e_6\}$.

下面定义特殊子图，在后面的章节中将会用到.

定义 7.4.2　设G 是一个图，$H \leq G$.

（1）如果$e \in E(H)$当且仅当存在$u, \upsilon \in V(H)$，使得$\varphi_G(e) = u\upsilon$，则称H 是G 的由$V(H)$导出的子图(induced subgraph)，记为$G[V(H)]$，它是G 的点导出子图；

（2）如果$u \in V(H)$当且仅当u 是$E(H)$中某条边的一个端点，则称H 是G 的由$E(H)$导出的子图，记为$G[E(H)]$，它是G 的边导出子图.

例如，在图 7. 7 中，$H_1 = G[\{\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3\}], H_3 = G[\{e_1, e_2, e_3, e_4\}]$.

由导出子图的定义不难知道，G 的（点、边）导出子图必是G 的子图，但G 的子图却不一定是G 的（点或边）导出子图，例如，$H_3 \neq G[\{\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4\}]$，而$H_2$既不是$G$ 的点导出子图，也不是G 的边导出子图.

显然，$G-V' = G[V-V'], V = V(G)$，但是，不一定有$G-E' = G[E-E'], E = E(G)$.

例如，在图 7. 7 中，取$E' = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$则$E-E' = \{e_5, e_6\}$，于是$G[E-E'] < G-E'$.

像集合一样，我们也可以对图定义几种运算：

定义 7.4.3　设G_1和G_2是两个图. 若$V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$（无公共点），则称$G_1$和$G_2$是互不相交的；若$E(G_1) \cap E(G_2) = \varnothing$（无公共边），则称$G_1$和$G_2$是边不重的.

显然，互不相交的两个图必是边不重的，但反之却不然.

定义 7.4.4　设G_1和G_2是两个图.

（1）$G_1 \cup G_2 = \langle V(G_1) \cup V(G_2), E(G_1) \cup E(G_2), \varphi \rangle$称为$G_1$与$G_2$的并，其中，对任意$e \in E(G_1) \cup E(G_2)$，令

$$\varphi(e)=\begin{cases}\varphi_{G_1}(e) & e\in E(G_1)\\ \varphi_{G_2}(e) & e\in E(G_2)\end{cases}$$

特别，若G_1与G_2互不相交，则将G_1和G_2的并记为G_1+G_2 .

（2）若$V(G_1)\cap V(G_2)\neq\varnothing$，则$G_1\cap G_2=\langle V(G_1)\cap V(G_2),E(G_1)\cap E(G_2),\varphi\rangle$称为$G_1$与$G_2$的交，其中，对任意$e\in E(G_1)\cap E(G_2),\varphi(e)=\varphi_{G_1}(e)=\varphi_{G_2}(e)$.

（3）若$E(G_1)-E(G_2)\neq\varnothing$，则$G_1-G_2=G_1[E(G_1)-E(G_2)]=G_1-E(G_2)$称为$G_1$与$G_2$的差；

（4）若$E(G_1)\neq E(G_2)$，则$G_1\oplus G_2=(G_1-G_2)\cup(G_2-G_1)$称为$G_1$与$G_2$的对称差或环和.

[例 7.2]　设G_1和G_2如图 7. 8 所示，于是，G_1与G_2的并、交、差及对称差如图 7. 9 所示：

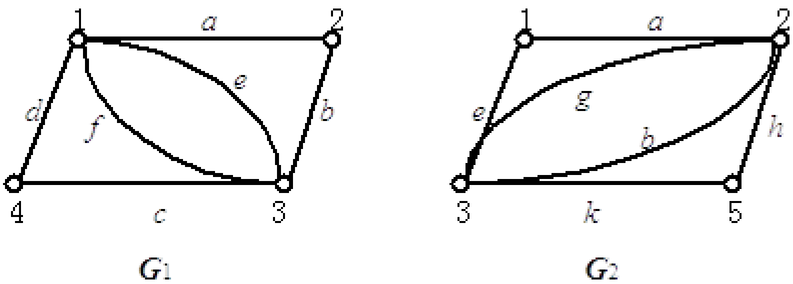


图 7.8

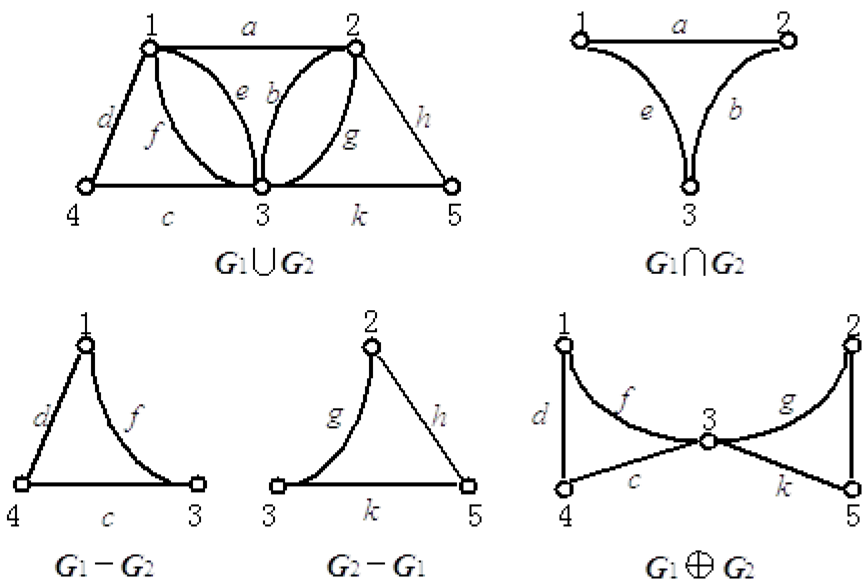


图 7.9

§7.5 通路(path)与连通图(connected graph)

设G是一个图，G中一个顶点和边的非空有限序列$w=\upsilon_0 e_1 \upsilon_1 e_2 \upsilon_2 \cdots e_n \upsilon_n$，称为$G$的一个途径(approach)．其中$\upsilon_i \in V(G), e_j \in E(G), i=0,1,\cdots,n, j=1,\cdots,n$．并且$\varphi_G(e_i)=\upsilon_{i-1}\upsilon_i, i=n.\upsilon_0$和$\upsilon_n$分别称为途径的起点(start point)和终点(end point)，$\upsilon_1,\cdots,\upsilon_{n-1}$则称为途径的内顶点，整数$n$称为途径的长．$w$的子序列：$\upsilon_i e_{i+1} \upsilon_{i+1} \cdots e_j \upsilon_j$称为$w$的$(\upsilon_i,\upsilon_j)$-节(segment).

如果G是简单图，则两个端点只能确定一条边，故途径w可以由它的顶点序列$\upsilon_0 \upsilon_1 \cdots \upsilon_n$完全确定.

例如，在图 7. 10，$1a2f5f2g5h3b2$就是一条途径.

由定义知，途径w中的顶点和边可以重复出现．如果途径w中的边互不相同，则称w为链(chain)．例如，在图 7. 10 中，$w=1e5f2g5h3b2$就是一条链.

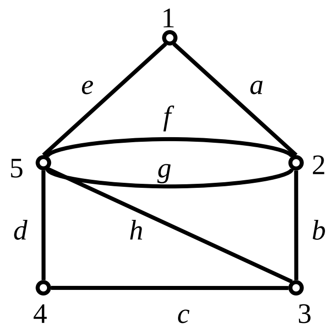


图 7.10

在一条链中，边不重复，但顶点是可以重复出现的，如果途径w中的顶点互不相同，则称w为通路，例如，在图 7. 10 中，$w=1e5f2b3c4$就是一条通路.

显然，通路必是链，但反之不然，图中一条起点为u，终点为υ的通路记为(u,υ)-通路.

起点和终点重合的且长度大于 0 的途径称为闭途径；起点和终点重合的链称为闭链；起点和终点重合的通路称为回路(circuit)，长度为k的回路称为k- 回路．设C是一条k- 回路，若k为奇数，则称C为奇回路；否则称为偶回路，特别, 3-回路称为三角形.

对于图G中的两个顶点u和v，如果存在一条(u,υ)-通路，则称u与v是连通的，记为$u \equiv \upsilon$；否则称u与v不连通，记为$u \not\equiv \upsilon$. 如果图G的任意两个顶点都是连通的，则称G为连通图；否则称为不连通图.

若$u \equiv \upsilon$，则G中(u,υ)-通路可以不惟一，记

$$d(u,\upsilon)=\min\{k | k \text{ 是 } (u,\upsilon)\text{-通路之长度}\}$$

称$d(u,\upsilon)$为u与υ的距离(distance)．例如，在图 7. 10 中，$d(1,4)=2$．若$u \not\equiv \upsilon$，则令$d(u,\upsilon)=\infty$.

图G中顶点间的连通关系显然是一个等价关系. 按此关系, 可以将$V(G)$中的顶点划分成若干等价关系$V_1,V_2,\cdots,V_m$, 于是, 对任意u、$\upsilon\in V(G),u\equiv\upsilon$当且仅当$u,\upsilon\in v_i,1\le i\le m$. 从而点导出子图$G[V_1],G[V_2],\cdots,G[V_m]$分别是$G$的连通子图, 称它们为连通分支. G的连驼分支数目记为$\omega(G)$. 显然, 若G是连通图, 则$\omega(G)=1$.

定理 7.5.1　若图G不连通, 则$\overline{G}$必连通.

证明: 设G不连通. 任取$u,\upsilon\in V(\overline{G})=V(G)$. 若$u$与$\upsilon$在$G$中不邻接, 则它们在$\overline{G}$中必邻接; 若$u$与$\upsilon$在$G$中邻接, 则$u$、$\upsilon$必在$G$的某一个连通分支$G[V_i]$中. 于是, 在$G$的另一个分支$G[V_j](i\ne j)$中, 存在顶点$w$与$u$、$\upsilon$均不邻接. 因此, $\overline{G}$中存在通路$uw\upsilon$. 即u与υ在$\overline{G}$中连通. 总之u、υ在$\overline{G}$中连通. 故由u、υ的任意性知, $\overline{G}$是连通图.

利用回路的概念, 可以判定一个图是否是一个二分图.

定理 7.5.2　一个图G是二分图, 当且仅当G不含奇回路.

证明: 设G是具有二划分$\langle V_1,V_2\rangle$的二分图. 若G有回路, 则任取一条k-回路$C=\upsilon_0\upsilon_1\cdots\upsilon_{k-1}\upsilon_0,k\ge 2$. 不妨设$\upsilon_0\in V_1$, 则由于$\upsilon_0\upsilon_1\in E(G)$且$G$是二分图, 所以$\upsilon_1\in V_2$, 同理$\upsilon_2\in V_1$. 于是有$\upsilon_{2i}\in V_{1,\upsilon_{2i+1}}\in V_2$. 又因为$\upsilon_0\in V_1$, 所以$\upsilon_{k-1}\in V_2$. 从而$k$为偶数. 故$C$为偶回路, 由$C$的任意性知, G不含奇回路.

反之, 设G不含奇回路, 不妨设G是连通图, 任取$u\in V(G)$. 令

$$V_1=\{x\in V(G)\mid d(u,x)\text{ 是偶数}\}$$

$$V_1=\{y\in V(G)\mid d(u,y)\text{ 是奇数}\}$$

下面证明$\langle V_1,V_2\rangle$就是G的一个二划分. 设υ和w是V_1的两个顶点. 又设P是最短(u,υ)- 通路, Q是最短(u,w)- 通路. 于是, P和Q至少有一个公共顶点u. 从u出发, 设u_1是P和Q的最后一个公共顶点. 由P和Q的性质, P和Q上的两条(u,u_1)-通路也是G中的最短(u,u_1)-通路. 因此它们具有相同的长度. 又因P和Q的长度均为偶数, 所以, P上的(u_1,υ)-通路P_1的长度与Q上的(u_1,w)-通路Q_1的长度具有相同的奇偶性. 由此推出(υ,w)-通路$P_1^{-1}Q_1$的长度为偶数(见图 7.11, 其中P_1^{-1}表示P上的(υ,u_1)- 通路, 称为P_1^{-1}的

逆，而 $P_1^{-1}Q_1$ 表示通路 P_1^{-1} 与 Q_1 的连接）. 如果 υ 与 w 邻接，则 $P_1^{-1}Q_1w\upsilon$ 是 G 的一条奇回路，此与假设矛盾. 故 V_1 中任意两个顶点均不邻接. 同理可证 V_2 中任意两个顶点也不邻接. 故 G 是二分图.

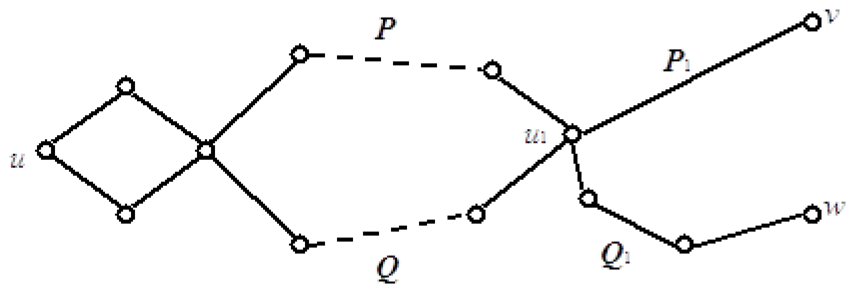


图 7.11

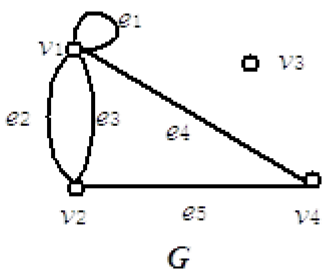
§7. 6　图的矩阵表示

一个图由其顶点与边的关联关系惟一确定. 对于图 $G(p,q)$，我们可以用一个 $(p\times q)$ 的矩阵来表示这种关系.

设 $V(G)=\{\upsilon_1,\upsilon_2,\cdots\upsilon_p\}, E(G)=\{e_1,e_2,\cdots e_q\}$，令 $M(G)=(m_{ij})_{p\times q}$，其中：

$$m_{ij}=\begin{cases}0 & \upsilon_i\text{不与}e_j\text{关联;}\\ 1 & \upsilon_i\text{不与}e_j\text{关联;}\\ 2 & e_j\text{是端点为}\upsilon_i\text{的环.}\end{cases}$$

我们称 $M(G)$ 为图 G 的关联矩阵(incidence matrices). 图 7. 12 给出了图 G 以及它的关联矩阵 $M(G)$.



$$M(G)=\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{array}\begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5\\ \end{array}\begin{bmatrix}2&1&1&1&0\\0&1&1&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\qquad A(G)=\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{array}\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4\\ \end{array}\begin{bmatrix}1&2&0&1\\2&0&0&1\\0&0&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}$$

图 7.12

显然，若 G 是无环图，则 $M(G)$ 是一个 0-1 矩阵.

由 $M(G)$ 的定义容易看出，$M(G)$ 中 υ_i 所在的第 i 行各元素之和就是 υ_i 的度；又 e_j 所在列的非零元素之和均为 2，并且 e_j 的端点就是所在列中非零元素所在行相应顶点.

我们也可以用 $p\times q$ 矩阵 $A(G)=(a_{ij})_{p\times q}$ 来表示图 G 中各顶点的邻接关系，称为 G 的邻接矩阵(adjacent matrices). 其中 a_{ij} 表示 υ_i 与 υ_j 之间边的数目. 例如，图 7. 12 中的 $A(G)$ 就是 G 的邻接矩阵.

容易知道，$A(G)$ 是一个对称矩阵；$A(G)$ 的对角线均为 0 当且仅当 G 中无环；当 G 是简单图时，$A(G)$ 是对角线元素均为 0 的 0- 1 对称矩阵. 反之，若给定一个对角线元素均为 0 的 0- 1 的对称矩阵 A，则可以惟一地作出一个简单图 G，使得 $A(G)=A$. 因此，有标记的简单图与这种矩阵 A 一一对应. 利用矩阵的运算结果，可以得出图的许多性质.

定理 7.6.1　设 $A(G)$ 是 p 阶图 G 的邻接矩阵，于是，$A^k(G)$ 的元素 $a_{ij}^{(k)}$ 等于 G 中长度为 k 的 (υ_i,υ_j)- 途径的数目.

证明：对 k 作归纳证明：

当 $k=0$ 时，$A^0(G)=I$（单位矩阵）. 此时，G 中任一顶点 υ_i 到自身有一条长度为 0 的途径，而 υ_i 到 $\upsilon_j=(i\neq j)$ 没有长度为 0 的途径. 结论成立.

假设对 k 结论成立.

由 $A^{k+1}(G)=A(G)\cdot A^k(G)$ 知

$$a_{ij}^{(k+1)}=\sum_{l=1}^{p}a_{il}a_{lj}^{(k)}$$

注意到 a_{il} 表示 G 中长度为 1 的 (υ_i,υ_l)- 途径数目，而 $a_{lj}^{(k)}$ 是 G 中长度为 k 的 (υ_l,υ_j)- 途径的数目. 因此，$a_{il}\cdot a_{lj}^{(k)}$ 表示由 υ_i 经过一条边到 υ_l 再经过长度为 k 的途径到 υ_j，总长度为 $k+1$ 的途径数目. 这样，对 l 求和，得到的 $a_{ij}^{(k+1)}$ 是所有长度为 $(k+1)$ 的 (υ_i,υ_j)- 途径的数目. 从而结论对 $k+1$ 也成立. 由归纳法原理知，结论成立.

推论 7. 6. 1　若 $A(G)=(a_{ij})_{p\times p}$ 是简单图 G 的邻接矩阵，则：

$$a_{ii}^{(2)}=\sum_{j=1}^{p}a_{ij}=\sum_{j=1}^{p}a_{ji}=d(\upsilon_i)$$

证明：$a_{ii}^{(2)}=\sum_{j=1}^{p}a_{ij}a_{ji}=\sum_{j=1}^{p}a_{ij}^2=\sum_{j=1}^{p}a_{ij}=\sum_{j=1}^{p}a_{ji}=d(\upsilon_i)$

§7. 7　应用(最短通路问题)

寻找图中顶点间的最短通路是一个应用广泛的重要问题，本节分别讨论单源最短通路问题和求所有顶点对之间的最短通路问题.

设 G 是一个图，对 G 的每一条边 e，相应地赋以一个非负实数 $w(e)$，称为边 e 的权. 图 G 连同它的边上的权称为赋权图.

设 G 是一个赋权图，$H \leq G$. 令

$$W(H) = \sum_{e \in E(H)} w(e)$$

称 $W(H)$ 为 H 的权.

在实际应用中，赋权图中各边的权可以表示通讯时间、路程、运输费用等等. 设 P 是 G 的一条通路，通路上各边的权也称为该边的长度. 通路的长度为 $W(P)$.

一、单源最短通路问题

给定赋权图 G 中的一个点 u_0，称为源点，求 u_0 到 G 中其它各顶点的最短通路的长度，称为单源最短通路问题.

关于单源最短通路问题，目前公认的最有效的算法是 Dijkstra 算法. 该算法的思想是：设置并不断扩充一个顶点集合 $S \subseteq V(G)$. 一个顶点属于 S 当且仅当从源到该顶点的通路及距离已求出. 初始时，S 中仅含有源.

设 $\upsilon \in V(G)$，我们把从源到 υ 且中间只经过 S 中顶点的通路称为源到 υ 的特殊通路，并且用数组 D 来记录当前源到每个顶点所对应的最短特殊通路长度. 由于每条边上的权都是非负实数，所以我们可以求出源到每个顶点的最短特殊通路长. 如果 $\upsilon \notin S$ 且 υ 是当前 $V(G)$- S 中具有最短特殊通路的点，则把 υ 添加到 S 中，同时对数组 D 作必要修改. 一旦 $S = V(G)$，则算法结束，这时 D 就记录了从源到每一个其它顶点的最短通路长度.

Dijkstra 算法描述如下，其中输入的赋权图是简图 $G, V(G) = \{1, 2, \cdots, n\}$, 1 是源，$C[i, j]$ 表示边 $e = ij$ 上的权. 当顶点 i 与 j 不邻接时，令 $C[i, j] = \infty, D[i]$ 表示当前源到顶点 i 的最短特殊通路的长度.

Procedure   Dijkstra;
{计算从顶点 1 到其它每一个顶点的最短通路长度}
begin

（1） $S := \{1\}$；

（2） $for\ \ i := 2\ \ to\ \ n\ \ do$

（3） $D[i] := C[1, i]$; $\{初始化D\}$

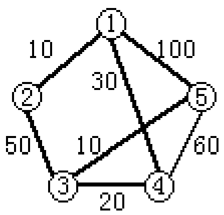
（4） $for\ i := 1\ to\ n - 1\ do\ begin$

（5）从$V - S$中选取一个顶点w使得$D[w]$最小；

（6）将w加入到S中；
（7）对每个顶点$\upsilon \in V - S$执行
（8）$D[\upsilon] := \min\{D[\upsilon],\quad D[w] + c[w,\upsilon]\}$

  end
end; {Dijkstra}

[例 7.3]　将 Dijkstra 算法应用于图 7.13（a）. 初始 $S = \{1\}, D[2] = 10, D[3] = \infty, D[4] = 30, D[5] = 100$. 在第一遍执行（4）—（8）行的 for 循环时，因为 D[2]的值最小，所以到$w = 2$，同时置$D[3] = \min\{\infty, 10 + 50\} = 60$，而 $D[4]$和$D[5]$的值不变. 每遍执行 for 循环之后所得到的D值序列见图 7. 13（b）



(a)赋权图G

迭代	S	W	D[2]	D[3]	D[4]	D[5]
初始	{1}	—	10	∞	30	100
1	{1,2}	2	10	60	30	100
2	{1,2,4}	4	10	50	30	90
3	{1,2,4,3}	3	10	50	30	60
4	{1,2,4,3,5}	5	10	50	30	60

（b）Dijkstra 算法执行过程

图 7.13

如果还要求出从源到各顶的最短通路，可以设一个一维数组$P[1..n]$. 定义$P[i]$是从源 1 到i的前一个顶点. 初始时，令$P[i] = 1, i = 2,3,\cdots,n.$每次执行完 Dijkstra 算法中的第（8）行之后，如果$D[\upsilon] = D[w] + C[w,\upsilon]$，则说明当前从源到$\upsilon$的最短特殊通路中最后是经过$w$到达$\upsilon$的，此时置$P[\upsilon] := w.$到算法结束时，就可以根据数组$P$找到从源到$\upsilon$的最短通路上每个顶点的前一个顶点. 从而得到从源到υ的最短通路.

[例 7.4]　对于例 7.3 中的图G，我们有$P[2] = 1, P[3] = 4$，$P[4] = 1, P[5] = 3$. 如果要找出从顶点 1 到 3 的最短通路，则根据P得到 3 的前一个顶点是 4，而 4 的前一个顶点是 1，因而从顶点 1 到 3 的最短通路是 1, 4, 3. 同理可得，从顶点 1 到 5 的最短通路是 1, 4, 3, 5.

二、求所有顶点对之间的最短通路

我们可能把每个顶点都看成源，用 Dijkstra 算法去解这类问题. 但这并不是最好的办法，Foloyd 发现了更直接的算法.

设顶点集$V = \{1,2,\cdots,n\}$，二维数组C的意义如前所述. 定义$n \times n$矩阵A的初始值如

下：

$$A[i,j]=\begin{cases}0 & i=j\\ C[i,j] & i\neq j\text{且}i\text{与}j\text{邻接}\\ \infty & i\neq j\text{且}i\text{与}j\text{不邻接}\end{cases}$$

在矩阵 A 上做 n 次迭代. 第 k 次迭代之后，$A[i,j]$ 的值是从 i 到 j，中间不经过编号大于 k 的顶点的最短通路长度，迭代公式如下：

$$A^{(k)}[i,j]=\min\begin{cases}A^{(k-1)}[i,j]\\ A^{(k-1)}[i,k]+A^{(k-1)}[k,j]\end{cases}$$

其中：$A^{(k-1)}[i,k]+A^{(k-1)}[k,j]$ 表示从 i 到 k，再从 k 到 j，且中间不经过编号大于 k 的顶点的最短通路长度，迭代公式如下：

$$A^{(k)}[i,j]=\min\begin{cases}A^{(k-1)}[i,j]\\ A^{(k-1)}[i,k]+A^{(k-1)}[k,j]\end{cases}$$

其中：$A^{(k-1)}[i,k]+A^{(k-1)}[k,j]$ 表示从 i 到 k，再从 k 到 j，且中间不经过编号大于 k 的顶点的最短通路长度.

算法从 $k=1$ 开始，i,j 取遍从 1 到 n 的所有值，每迭代一次，k 增加 1，直到 $k=n$ 时算法终止. 这时，$A[i,j]$ 就是从 i 到 j 的最短通路长度.

如果需要求出 i 到 j 的最短通路，可以设置一个二维数组 P，当算法中执行了

$$A[i,j]:=A[i,k]+A[k,j]$$

时，说明 i 到 j 的最短通路中必经过顶点 k. 此时，置 $P[i,j]:=k$. 而 $P[i,j]=0$ 表示当前从 i 到 j 的最短通路就是图中的边 (i,j). 下面给出的就是 Floyd 算法：

Procedure Shortest：

{给定边权矩阵 C，计算最短通路长度矩阵 A 以及“中点”矩阵 P, $P[i,j]$ 是从 i 到 j 的最短通路上的一个顶点}

```
begin
  for  i:=1  to n do
    for  j:=1  to n do
      begin
        A[i, j]:= C[i, j];
        P[i, j]:= 0
```

```
    end;
  for  k := 1 to n do
    for  i := 1 to n do
      for  j := 1 to n do
        if  A[i,k] + A[k,j] < A[i,j] then
         begin
           A[i,j] := A[i,k] + A[k,j]
           P[i,j] := k
         end
end; {Shortest}
```

为了求出从 i 到 j 的最短通路，只要调用下面的过程 $\text{Path}(i,j)$.

```
Procedure Path(i, j : integer);
  Var  k :integer;
  Begin
    k := P[i,j];
    if  k = 0 then return;
    Path(i,k);
    Writeln(k);
    Path(k,j);
  End; {Path}
```

这是一个递归过程.

[例 7.5]　求图 7.13(a)中 G 的任意两个顶点间的最短通路长度及“中点”矩阵 P .

解：用图 G 知，初始时，矩阵 $A^{(0)}$ 如下：

$$A^0 = \begin{bmatrix} 0 & 10 & \infty & 30 & 100 \\ 10 & 0 & 50 & \infty & \infty \\ \infty & 50 & 0 & 20 & 10 \\ 30 & \infty & 20 & 0 & 60 \\ 100 & \infty & 10 & 60 & 0 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

以下用 $A^{(k)}$ 表示第 k 次迭代后 A 的结果．我们有

$$A^{(1)}=\begin{bmatrix}0&10&\infty&30&100\\10&0&50&40&110\\\infty&50&0&20&10\\30&40&20&0&60\\100&110&10&60&0\end{bmatrix},\quad \begin{matrix}P[2,4]:=1,\\P[2,5]:=1;\end{matrix}$$

$$A^{(2)}=\begin{bmatrix}0&10&60&30&100\\10&0&50&40&110\\60&50&0&20&10\\30&40&20&0&60\\100&110&10&60&0\end{bmatrix},\quad P[1,3]:=2;$$

$$A^{(3)}=\begin{bmatrix}0&10&60&30&70\\10&0&50&40&60\\60&50&0&20&10\\30&40&20&0&30\\70&60&10&30&0\end{bmatrix},\quad \begin{matrix}P[1,5]:=3,\\P[2,5]:=3,\\P[4,5]:=3;\end{matrix}$$

$$A^{(4)}=\begin{bmatrix}0&10&50&30&60\\10&0&50&40&60\\50&50&0&20&10\\30&40&20&0&30\\60&60&10&30&0\end{bmatrix},\quad \begin{matrix}P[1,3]:=4,\\P[1,5]:=4;\end{matrix}$$

$$A^{(5)}=\begin{bmatrix}0&10&50&30&60\\10&0&50&40&60\\50&50&0&20&10\\30&40&20&0&30\\60&60&10&30&0\end{bmatrix}\qquad P=\begin{bmatrix}0&0&4&0&4\\0&0&0&1&3\\4&0&0&0&0\\0&1&0&0&3\\4&3&0&3&0\end{bmatrix}$$

习题七

1．请举出 5 个日常生活中可以用图来描述的实例.

2．设$G(p,q)$是简单二分图，求证：$q\le p^2/4$

3．设$G(p,q)$是简单图，求证：$q\le 1/2p(p-1)$在什么情况下，$q=1/2p(p-1)$？

4．试画出四个顶点的所有非同构的简单图.

5．证明图 7. 14 中的两个图是同构的，图 7.15 中的两个图不是同构的．试问，图 7.16 中的两个图是否同构？

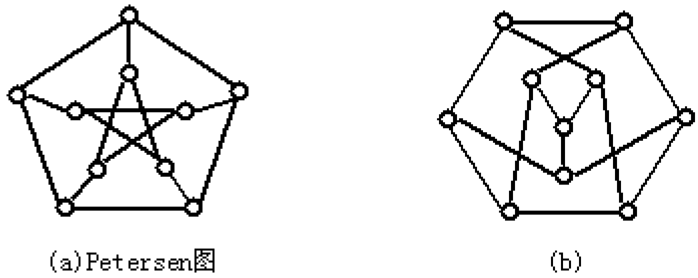


图 7.14

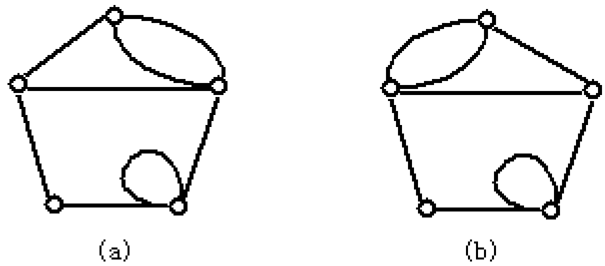


图 7.15

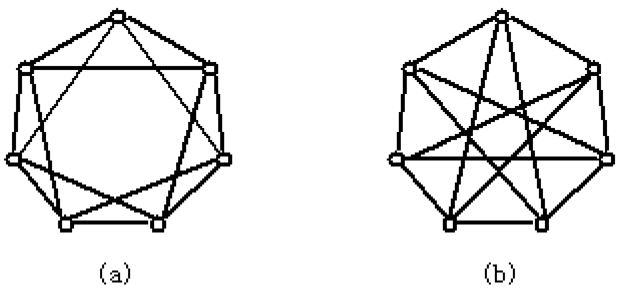


图 7.16

6．设$G(p,q)$是简单图，且$G \cong \overline{G}$求证$p \equiv 0$或$1 \pmod 4$.

7．构造一个简单图G，使得$G \cong \overline{G}$.

8．求证：对任何图$G(p,q)$，有：$\delta(G) \le 2q/p \le \Delta(G)$

9．设$G(p,q)$是简单图，$p \ge 2$，求证，G中至少有两个顶点的度数相等.

10．求证：在图$G(p,p+1)$中，至少有一个顶点υ，满足$d(\upsilon) \ge 3$.

11．求证：在任何有$n(\ge 2)$个人的人群中，至少有两个在其中恰有上同个数的朋友.

12．求证：每一个p阶简单图G，都与K_p的子图同构.

13．求证：任何完全图的每个点导出子图仍是完全图.
14．求证：二分图的每个顶点数不小于 2 的子图仍是二分图.

15．设$G(p,q)$是简单图，整数n满足$1 < n < p-1$，求证：若$p \ge 4$，且G的所有n个顶点

的导出子图均有相同的边数，则$G \cong K_p$或若$G \cong \overline{K_p}$.

16．设$G(p,q)$是连通图，求证：

（1）G至少有$p-1$条边；

（2）若$q > p-1$，则G中必含回路.

（3）若$q = p-1$，则G中至少有两个悬挂点.

17．求证：若边e在图G的一条闭链中，则e必在G的一条回路中.

18．求证：对于图$G(p,q)$，若$\delta(G) \geq 2$，则G必含回路.

19．设$G(p,q)$是简单图，且$q > C_{p-1}^2$，求证：G是连通图.

20．对于$p > 1$，作一个$q = C_{p-1}^2$的非连通$G(p,q)$

21．证明：若$G(p,q)$是简单图且$\delta(G) > \lfloor p/2 \rfloor - 1$，则$G$连通. 当$p$为偶数时，作一个非连通的$k$- 正则简单图，其中$k = \lfloor p/2 \rfloor - 1$.

22．证明：若$e \in E(G)$，则$w(G) \leq (G-e) \leq w(G)+1$

23．证明：对图G中任意三个顶点u, υ和w，

$d(u,\upsilon) + d(\upsilon,w) \geq d(u,w)$

24．设G是简单连通的非完全图，求证：G中存在三个顶点u, υ和w，使$u\upsilon, \upsilon w \in E(G)$，但$uw \notin E(G)$.

25．证明：若G是简单图，且$\delta(G) \geq 2$，则G中有一条长度至少是$\delta(G)+1$的回路.

26．求图 7. 17 的关联矩阵和邻接矩阵.

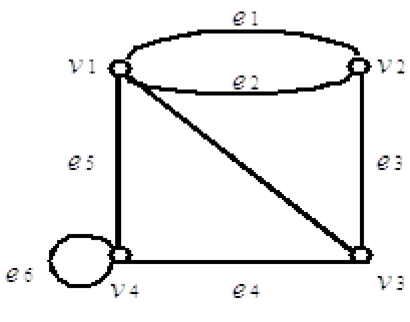


图 7.17

27．设 G 是一个图，$M(G)$ 和 $A(G)$ 分别是 G 的关联矩阵和邻接矩阵.

（1）求证：$M(G)$ 中每列各元素之和为 2.

（2）$A(G)$ 的各列元素之和是什么？

28．设 G 是二分图，求证：可以将 G 的顶点和适当排列，使得 G 的邻接矩阵 $A(G)$ 形如

$$A(G)=\begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

其中：A_{21} 和 A_{12} 的转置.

29．设 G 是一个图，$V' \subseteq V(G), E' \subseteq E(G)$.

（1）如何从 $M(G)$ 得到 $M(G-E')$ 和 $M(G-V')$？

（2）如何从 $A(G)$ 得到 $A(G-V')$？

30．在图 7. 18 中，找出 u_1 到各个顶点的最短通路长度，并给出从 u_1 到 u_{11} 的最短通路.

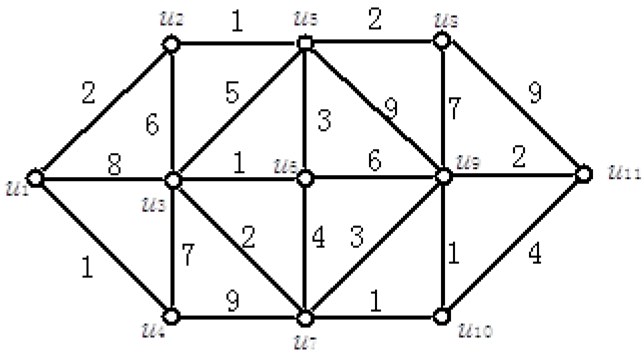


图 7.18

31．求图 7. 19 所示的图 G 中任意两个顶点的最短通路长度，并给出从 υ_1 到 υ_3 的最短通路.

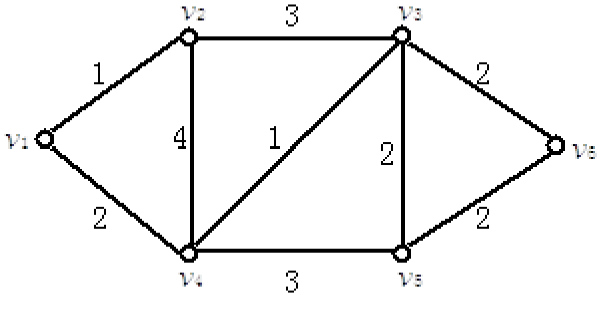


图 7.19