第十四章 有向图（directed graph）

我们知道，图论为任何一个包含了一种二元关系的系统提供了一个数学模型. 本篇目前为止所示的图形就是这种数学模型的一种直观的外形，其中点与点之间的连线表示了相应点所代表的对象之间的联系. 这种二元关系有一个明显的特征，即对称性. 然而，现实世界中，两个对象之间的关系有的并不具有对称性. 例如，各对选手之间的比赛胜负关系等等. 因此，图形中两个邻接顶点之间的连线能反映出这种次序关系，于是，就产生了有向图的概念.

本章将介绍有向图的基本概念以及在信息科学中的应用.

§14.1 有向图的概念

定义 14. 1. 1 一个有向图 D 是一个有序三元组 $\langle V(D), A(D), \varphi_D \rangle$，其中，

1）$V(D)$ 是非空顶点集合，简记为 V；

2）$A(D)$ 是弧(arc)的集合，简记为 A，$A \cap V = \varnothing$

3）φ_D 是 A 到 $V \times V = \{\langle u, \upsilon \rangle | u, \upsilon \in V\}$ 的一个映射，称为关联函数，简记为 φ.

为方便，有时将 $\langle u, \upsilon \rangle$ 简为 $u\upsilon$. 易知，$u\upsilon = \upsilon u$ 当且仅当 $u = \upsilon$.

[例 1] 设 $V = \{u, \upsilon, w, x\}, A = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_8\}$，$\varphi$ 定义如下：

$$\varphi(\alpha_1) = u\upsilon, \varphi(\alpha_2) = \upsilon\upsilon, \varphi(\alpha_3) = \upsilon w,$$

$$\varphi(\alpha_4) = x\upsilon, \varphi(\alpha_5) = \upsilon x, \varphi(\alpha_6) = x\upsilon,$$

$$\varphi(\alpha_7) = xu, \varphi(\alpha_8) = \upsilon x, \varphi(\alpha_9) = xu.$$

于是，以上定义的有向图 $\langle V, A, \varphi \rangle$ 的图形如图 14.1 所示.

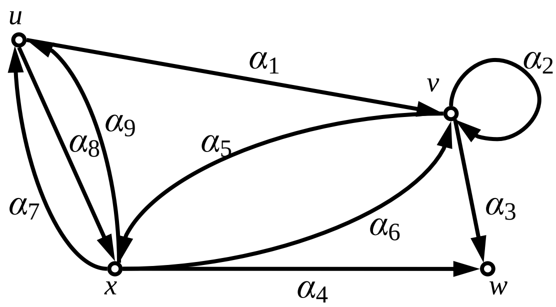


图 14.1

如果 α 是有向图 D 的一条弧，且 $\varphi_D(\alpha) = u\upsilon$，则我们称 u 是 α 的尾(tail)，υ 中 α 的头(head).

为了与有向图相区别，第五章所定义的图称为无向图.

对应于每个有向图D，如果不计D中每条弧上的方向，则得到一个无向图G，这时，称G为D的基础图(underlying graph)；反之，给定任意一个无向图G，对于它的每个连杆（即端点不同的边），给其端点分别规定头和尾，从而确定一条弧，由此得到一个有向图，这时，称D为G的一个定向图(oriented graph).

在有向图中，头尾相同的弧称为环(loop)；两条或两条以上的弧，如果它们的头和尾彼此都相同，则称它们为多重弧(multiple arcs). 例如图 14.1 中，α_7与α_9就是多重弧，而α_5与α_6都不是多理弧.

类似于无向图中简单图的概念，称无环、无多重孤的有向图为简单有向图.

无向图G中的一些概念和记号可以应用于有向图D中. 例如，有向图的子图，图的运算等概念. 又如，$D(p,q)$表示一个具有p上顶点，q条弧的有向图等等. 但有些概念只能在有向图中定义：

在有向图D中，以顶点u为尾的弧的数目称为u的出度(out-degree)，记为$d_D^+(u)$；以u为头的弧的数目称为u的入度（in-degree），记为$d_D^-(u)$；而u的出度与入度之和，则称为u的度(degree)，记为$d_D(u)$.

D 的有向途径是一个有限非空序列：$w=(u_0,\alpha_1\upsilon_1,\cdots,\alpha_k\upsilon_k)$，其中$\upsilon_j \in \alpha V(D), \alpha_j \in A(D)$，并且弧$\alpha_j$的头是$\upsilon_j$，尾是$\upsilon_{j-1}, i=0,\cdots,k, j=1,\cdots,k$. 一般将有向途径$w$简记为$\upsilon_0\upsilon_1\cdots,\upsilon_k$，弧不重复的有向途径称为有向链(directed chain)；顶点不重复的有向途径称为有向通路(directed path)，起点与终点重合的有向通路称为有向回路(directed circuit). 起点为u，终点为υ的有向通路记为有向$(u,\upsilon)-$通路，通路中弧的数目称为该有向通路之长.

定义 14.1.2　设D是有向图. 若对D中任何两个顶点u,υ，既存在有向$(u,\upsilon)-$通路，又存在有向$(\upsilon,u)-$通路，则称D是双向连通图，简称双连通图或强连通图(strong connected graph)；若对D中任何两个顶点u,υ，或者存在有向$(u,\upsilon)-$通路，或者存在$(\upsilon,u)-$通路，则称D是单连通图(single connected graph)；若D的基础图G是连通图，则称D是弱连通图(weak connected graph).

例如，图 14.2 分别给出了强连通图，单连通图和弱连通图.

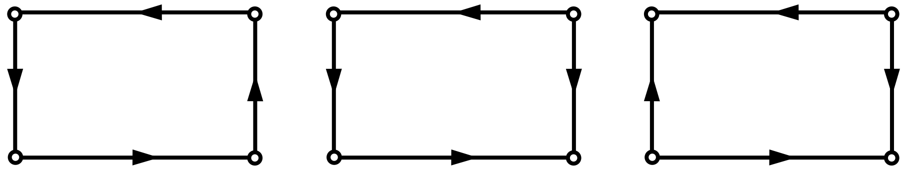


图 14.2

由定义可知，强连通图必是单连通图和弱连通图，单连通图必是弱连通图，但反之不然（见图 14.2）.

有向图D的极大强连通子图称为D的强连通分支. 例如，图 14.3 中，有向图（a）有三个强连通分支如（b）所示.

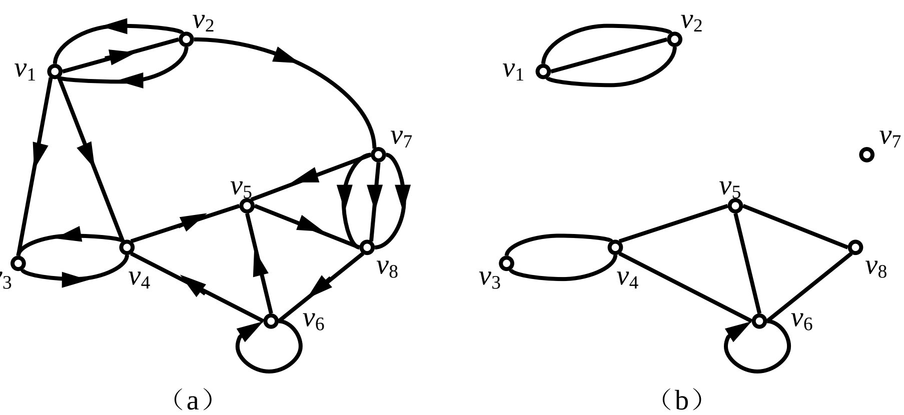


图 14.3

§12．2　有向通路与有向回路

在有向图中，经常要计算有向通路之长，或者要判断有向图中是否存在一条长度至少为$k>0$的有向通路. 由于有向通路的“有向”性，因此，有向性的有向通路之长与其基础图中的通路没有必然的联系. 但有趣的是，它却与图的色数有紧密的联系.

定理 14.2.1　有向图D包含长至少为$\chi(G)-1$的有向通路，其中，G是D的基础图.

证明：设$A'\subseteq A(D)$是使$D'=D-A'$不含有向回路的极小弧的集合，并设D'中最长的有向通路之长为k. 对D'进行如下顶点着色β:当D'中以υ为起点的最长有向通路之长为$i-1$时，令$\beta(\upsilon)=i$. 这样，就得到一个$(k+1)-$着色β. 下面证明β是G的正常$(k+1)$着色.

先证D'中任何一条有向$(u,\upsilon)-$通路$(u\neq\upsilon)$ P均满足$\beta(u)\neq\beta(\upsilon)$. 设$\beta(\upsilon)=i$. 则

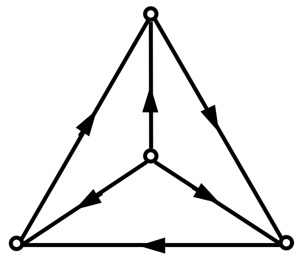
D'中存在一条有向通路$Q=(\upsilon_1,\upsilon_2,\cdots,\upsilon_i)$，其中$\upsilon_i=\upsilon$. 由于$D$不含有向回路，所以

$PQ=(u,\cdots,\upsilon,\upsilon_2,\cdots,\upsilon_i)$必是一条以$u$为起点而长至少为$i$的有向通路，于是$\beta(u)\neq i$.

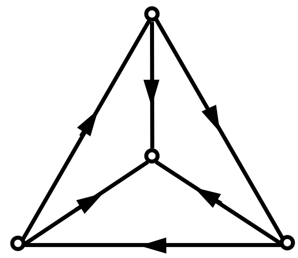
其次证明D的任意一条弧的头、尾均有不同的颜色. 由上所证可知，不妨设$\langle u,\upsilon\rangle\in A(D)-A(D')$，由$A'$的极小性，$D'+(u,\upsilon)$必含有向回路$C$，于是$C-\langle u,\upsilon\rangle$是$D'$中的有向$(u,\upsilon)-$通路，故由上所证，$\beta(u)\neq\beta(\upsilon)$.

总之，我们证明了G的任何两个邻接的顶点在β下颜色不均同. 故$k+1\geq\chi(G), k\geq\chi(G)-1$.

完全图的定向图称为竞赛图，n个顶点的竞赛图可用来表示n个选手之间进行循环赛的胜负状态. 具有四个顶点的竞赛如图 14.4 所示，其中（a）表示有一个赛手获全胜，而其它三个赛手各胜一次.



（a）



（b）

图 14.4

有向图D的有向H通路是指一条含D的所有顶点的有向通路.

推论 14.2.1　每个竞赛图都含有向H通路.

证明：设D是竞赛图，于是，$\chi(G)=|V(D)|=p$，G是D的基础图. 由定理 14. 2. 1 知，D中含长为$p-1$的有向通路，即有向H通路.

有向图D的顶点子集S，如果其中任何两点在D中都不是弧的头或尾（也叫做不邻接），则称S为D的一个独立集.

定理 14.2.2　无环有向图D中总存在这样一个独立集S，使得$V-S$中任何一点υ，存在$u\in S$，从u到υ有长度不超过 2 的有向通路.

证明：对D的顶点数p作归纳证明.

$p=1$时，结论显然成立.

假设对于顶点小于p的所有向图结论成立. 而D是一个有p个顶点的有向图. 任取$\upsilon\in V(D)$. 令

$$N_D^+(\upsilon)=\{w|\langle \upsilon, w\rangle \in A(D)\}$$

并称 $N_D^+(\upsilon)$ 为 υ 的外邻接顶点集.

由归纳假设，在 $D'=D-(\{\upsilon\}\bigcup N_D^+(\upsilon))$ 中，存在一个独立集 S'，使得结论成立.

若 $\upsilon \in N_D^+(u), u\in S'$，则对于 $N_D^+(v)$ 中的任何点 w，从 u 出发，经长度为 2 的有向通路可到达 w. 于是 $S=S'$，即可使结论成立.

若对任何 $u\in S'$，均有 $\upsilon \notin N_D'(u)$，则令 $S=S'\bigcup\{v\}$ 即使结论成立. 由归纳法原理知，定理成立.

推论 14.2.2　竞赛图总含一个顶点，使得从它出发，到其它每个顶点都有一条长度不超过 2 的有向通路.

定理 14.2.3（Moon，1966）　顶点数 $p\geq 3$ 的强连通竞赛图 D 的每个顶点都包含在一条有向 $k-$ 回路中，其中 $3\leq k\leq p$.

证明：设 D 是 $p\geq 3$ 的强连通图，任取 $u\in V(D)$，令 $S=N^+(u)$，设 $T=N^-(u)=\{w|(w,u)\in A(D)\}$. 首先证明 u 在 D 的一条向 $3-$ 回路中.

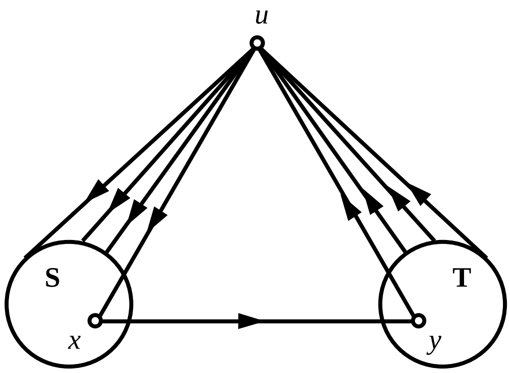


图 14.5

由于 D 是强连通的，因此，S 和 T 均非空，并且同理 $(S,T)=\{(x,y)\in S, y\in T\}$ 也是非空集（见图 14.5）. 于是，在 D 中存在一条弧 (x,y)，使得 $x\in S, y\in T$. 从而，u 在有向 $3-$ 回路 (u,x,y,u) 中.

现在对 k 用归纳法来证明定理中的结论. 假设 u 在所有长为 3 和 n 之间的有向回路中，其中 $n<p$. 下证 u 也在有向（$n+1$）一回路中.

设$C=(\upsilon_0,\upsilon_1,\cdots,\upsilon_n)$是有向$n$-回路，其中$\upsilon_0=\upsilon_n=u$. 若$V(D)-V(C)$中存在一个顶点$\upsilon$，使得$\upsilon$既是尾在$C$中一条弧的头，又是头在$C$中一条弧的尾，则$C$中必存在顶点$\upsilon_i$和$\upsilon_{i+1}$，使得$(\upsilon_i,\upsilon)$，$(\upsilon,\upsilon_{i+1})$都是$D$的弧，此时，$u$在有向$(n+1)-$回路$(\upsilon_0,\upsilon_1,\cdots\upsilon_i,\upsilon,\upsilon_{i+1},\cdots\upsilon_n)$中，否则，令

$$S=\{x\in V(D)-V(C)|(u,x)\in A(D),u\in V(c)\}$$

$$T=\{y\in V(D)-V(C)|(y,\upsilon)\in A(D),\upsilon\in V(C)\}$$

见图 14.6 和前面的理由一样，由于D是强连通的，S、T和(S,T)都是非空集，而且在D中存在一条弧(x,y)，使得$x\in S,y\in T$，因此，u在有向$(n+1)-$回路$(\upsilon_0,x,y,\upsilon_2,\cdots,\upsilon_n)$中.

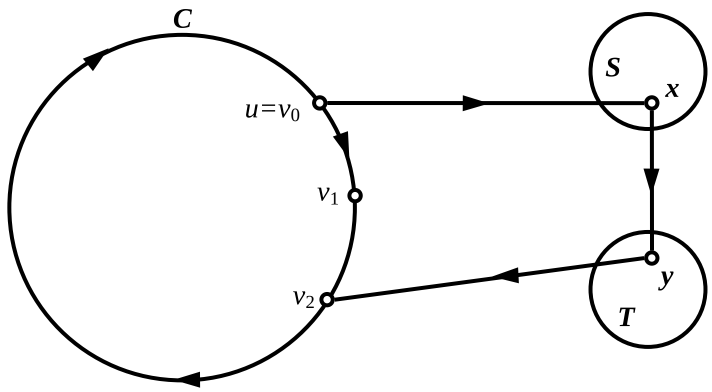


图 14.6

推论 14.2.3　任何强连通竞赛图都含有向H回路.
对一般有向图D中是否存在有向H回路的判定，可将第八章的推论 8. 2. 1 扩展到有向图的情形.
定理 14.2.4　若D是简单有向图，并且

$$\min\{\delta^-,\delta^+\}\geq p/2>1$$

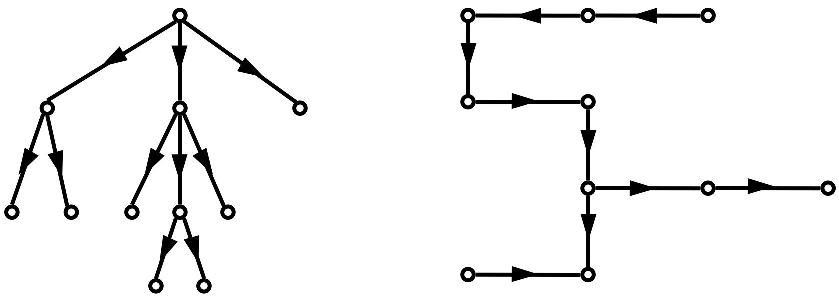
则D中含有向H回路.

§ 14. 3 有向树

树是一种重要的图结构. 在许多实际应用中，表示层次结构的对象之间的关系往往是具有反对称性的. 于是便有了有向树的概念.

定义 14.3.1　若有向图T的基础图是树，则称T为有向树(directed tree).

例如，图 14.7 给出了两个有向树的图形.



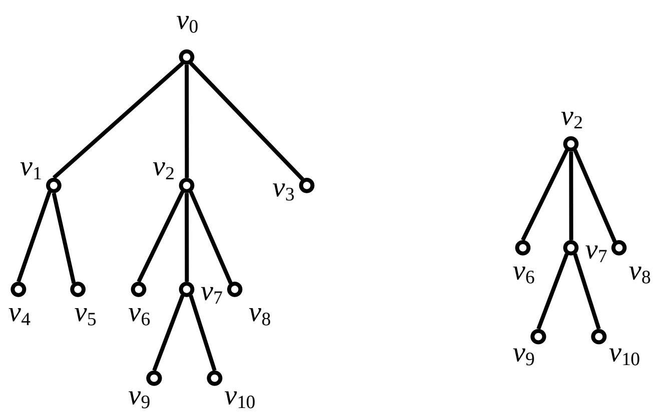
（a）　　　　　　　　　　（b）

图 14.7

定义 14.3.2　设 T 是一个有向树. 如果 T 中恰有一个顶点入度为 0，其它顶点的入度均为 1，则称 T 为根树(root tree)，其中入度为 0 的顶点称为 T 的根(root)，记为 V_r 或 V_0；出度为 0 的顶点称为叶(leaf)，出度不为 0 的顶点称为分枝点(branch vertex).

例如，图 14.7(a)是根树，而(b)则不是根树. 以下所提到的有向树，都是指根树，并简称为树. 根树可用于表示许多具有层结构的关系，如指挥系统的控制关系；一个单位的人事关系；社会生活中的家庭关系等等. 在实际应用中，常将根画在最上面，其它顶点 u 按根到 u 的唯一有向通路的次序由上至下画出，即弧的方向一律朝下，这样，箭头就可能省略不画. 此外，按根到各顶点的有向通路的长度，将长度为 i 的顶点画在第 i 层，根在第 0 层，如图 14.8 所示的根树 T 中，从根出发最长的有向通路之长称为 T 的高度，例如，图 14.8 (a)的高度为 3.

设 T 是一个树，u 是 T 的一个分枝点，容易证明，由 u 以及 T 中从 u 出发可到达的所有顶点连同所经过的弧所构成的 T 的子图是一个以 u 为根的根树，称它为 T 的子树. 例如图 14.8 中 (b) 是一个以 υ_2 为根的 (a) 的子树.



（a）　　　　　　　　　　（b）

图 14.8

常常将树的顶点称为结点(node)，并借用家族中的各种称呼，例如，在图 14.8(a)中，称υ_1为υ_4、υ_5父结点，称υ_4、υ_5为υ_1的子结点；同一个分枝点的子结点称为兄弟结点，如υ_6,υ_7和υ_8；称υ_9,υ_{10}为υ_2和υ_0的后裔（结点），υ_0，υ_2为υ_9和υ_{10}的祖先（结点）.

定义 14.3.3　若对一个树的结点（弧）从上至下，同一层结点（弧）从左至右规定了一个次序，则称T为有序树(ordered tree).

例如，图 14.8(a)就是一个有序树，有序树在编码理论和计算机科学中应用较广. 常对有序树的结点按如下编号：先交根标记为υ_0，然后将υ_0的子结点从左至右标记为$\upsilon_1,\upsilon_2,\cdots$，对$\upsilon_i$的子结点从左至右标记为$\upsilon_{ij1},\upsilon_{i2}\cdots$, 如此类推，这样的编号可根据下标清楚地表示各结点之间的相互关系. 例如，结点υ_{235}表示υ_{23}的子结点，υ_2的后裔，并且在树的第 3 层（下标有 3 位）.

定义 14.3.4　设T是（有序）树，$m \geq 1$.

（1）若对T的每个结点υ，均有

$$d^+(\upsilon) \leq m$$

则称T为m元（有序）树；

（2）若对T的每个结点υ，均有

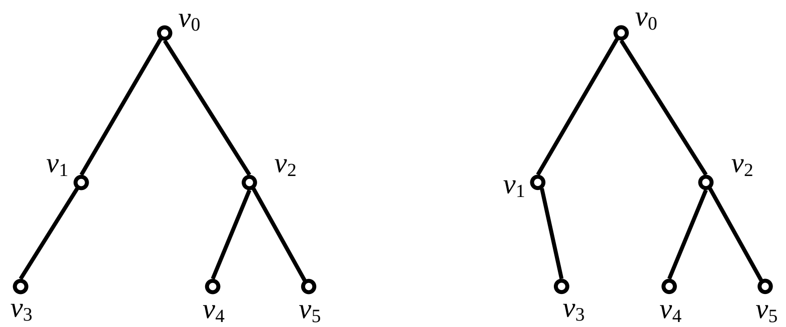
$$d^+(\upsilon) = m \text{ 或 } d^+(\upsilon) = 0$$

则称T为完全m元（有序）树；

（3）若完全m元（有序）树的所有叶结都在同一层，则称T为正则m元（有序）树.

特别，当$m = 2$时，分别称它们为二叉树，完全二叉树和正则二叉树.

二叉树中任何分枝点的子结点总是有左大路之分的，因此，它是一种特殊的有序树，例如，图 14.9 所示的是两个相同的有序树，但它们是不同的二叉树.



（a）　　　（b）

图 14.9

§ 14.4 应用

在有t位选手参加比赛的单淘汰赛中，设每组有m位选手参加比赛，产生一个分组赛冠军，接着本轮分组赛的冠军又m位一组进行淘汰赛，如此下去，最后产生一位总冠军. 可将此过程用一棵完全m元树T来表示，其中有t个叶结点，i个分枝结点，树叶表示选手，分枝点表示每局（分组赛）的冠军，根表示最后的比赛冠军. 因为每局比赛共淘汰$(m-1)i$位选手，因此i局比赛共淘汰$(m-1)i$位选手，最后剩下一位冠军. 故$(m-1)i+1=t$，即$(m-1)i=t-1$.

[例 1] 设某单位计算机房有个人电脑 37 台，公用一个电源插座，假设每台电脑只需一个插座，问需要多少具有四插座的接线板.

解：将四元树的每个分枝点看作是具有四插座的接线板，把树叶看作是电脑. 由上面讨论的结果可知，$m=4, t=37,$ 于是，$i=(t-1)/(m-1)=36/3=12$. 即需要 12 个四插座接线板.

二叉树也有很广泛的应用.

在远程通讯中常用 0 和 1 组成的字符串（称为$0-1$序列，或简称序列）作为英文字母的传送信息. 已知英文字母共有 26 个，希望用长度尽量短的序列来表示这 26 个字母，通过计算可知，用长度不超过 4 的序列就可以表示这 26 个字母. 比如用 0 表示A，1 表示B，00 表示C，01 表示D，…. 这时，有两个问题需要解决.

（1）序列与字母如何对应？

（2）如何对接收到的序列译码？即如何将$0-1$序列按对应关系翻译成字母序列？

对于第一个问题，为了减少信息量，应该将较短的$0-1$序列分配给使用频率高的字母，对于第二问题，它显然与第一个问题有关，如果分配不当，则会出现译码多义性问题. 例如，设字母A,B,C,D 所对应的$0-1$序列分别为：

$$0-A,\quad 1-B,\quad 01-C,\quad 10-D$$

假如接收到的$0-1$序列为 0010110，则根据对应关系，即可将它译为$AABABBA$，也可将它译为$ACCD$等等，这样，就起不到通讯的作用了，出现这种情况的原因是有些序列是另一些序列的一部分：

定义 14.4.1 设$a=b_1b_2\cdots b_n$, $b_i\in\{0,1\}$是一个$0-1$序列，序列$\beta=b_1b_2\cdots b_i(1\le i\le n)$称为$a$的前缀(prefix) .

例如，设$a=010,$ 于是$0, 01, 010$都是a的前缀.

定义 14.3.6 设$Q=\{a_1a_2,\cdots,a_m\}$是一个$0-1$序列集合. 如果Q没有一个序列是另一个序列的前缀. 则称Q为一个前缀码(prefix code).

例如，$\{0,10,110\}$就是一个前缀码，而$\{0,10,101\}$就不是前缀码.

二叉树与前缀码有着密切的联系.

定理 14.4.1 任何一个二叉树的叶子可以对应一个前缀码.

证明：设 T 是一个二叉树，对T的每个分枝v，将以v为尾的（最多两条）弧上标记0或1:以左结点为头的弧上标0，以右子结点的头弧上标为1. 于是，从根结点出发到每个叶子结点的惟一通路各弧上的标记依次连接而组成一个$0-1$序列. 显然，它们是一组前缀码. 例如，图 14.10(a)所示的二叉树的叶结点所对应的前缀码为$\{001,10,110\}$.

定理 14.4.2 任何一个前缀码都对应一个二叉树.

证明：设$Q=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$是一个前缀码，令h是Q中最长序列之长度. 今构造一个高度为h的正则二叉树T，按定理 14.4.1 的方法给T的每条弧上标记0或1.这样,每个非根结点v_i都对应一个$0-1$序列β_i,即由根到v_i通路上各弧上的标号依次连接而成的序列,由T的构造易知,Q中每个序列a_i在T中恰对应一个结点v_i,使得$\beta_i=a_i, i=1,\cdots,m.$将$v_i$的子结点及后裔从$T$中删去,使$v_i$变成叶结点,$i=1,\cdots m,$再将所有不在根到$v_i$的通路上的结点和弧都删去,最后所得的二叉树即是对应前缀的Q的二叉树.

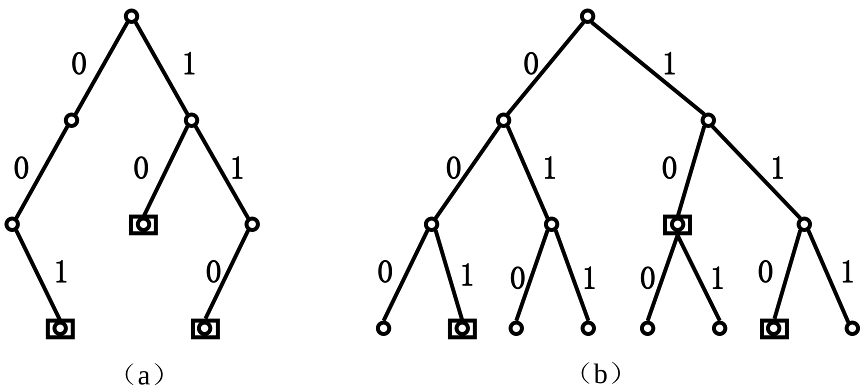


图 14.10

例如，对于前缀码$\{001,10,110\}$. 图 14.10（b）给出了一个高度为 3 的正则二叉树，（a）则是经过删剪后得到的对应该前缀码的二叉树.

习题十四

1．一个简单图G有多少个不同的定向图？

2．简单有向图的基础图一定是简单图吗？

3．设$D(p,q)$是简单有向图，证明：

（1）若D是强连通图，则$p\le q\le p(p-1)$

（2）若 D 是弱连通图，则 $p-1\le q\le p(p-1)$

4．设 $D(p,q)$ 是有向图，证明：

$$\sum_{i=1}^{p} d_D^+(u_i)=q=\sum_{i=1}^{p} d_D^-(u_i)$$

5．基础图是完全图的有向图称有向完全图. 证明：对任何有向完全图 $D(p,q)$，有

$$\sum_{i=1}^{p}\left(d_D^+(u_i)\right)^2=\sum_{i=1}^{p}\left(d_D^-(u_i)\right)^2$$

6．设 D 是单连通图. 证明：若对任意 $u\in V(D)$，均有 $d^+(u)=d^-(u)$，则 D 有一条有向回路.

7．有向图 D 中各顶点的最大和最小的出度和入度分别用 $\Delta^+(D),\delta^+(D)$ 和 $\Delta^-(D),\delta^-(D)$ 来表示，简记为 Δ^+,δ^+ 和 Δ^-,δ^-. 设 D 是一个简单有向图. 证明：

（1） D 中包含长度至少为 $\max\{\delta^+,\delta^-\}$ 的有向通路；

（2）若 $\max\{\delta^+,\delta^-\}=k>0$，则 D 中包含长度至少为 $k+1$ 的有向回路.

8. 有向图 D 的有向 E 闭链指 D 中存在一条过每条弧恰好一次的有向闭链. 证明：有向图 D 含有向 E 闭链当且仅当 D 是强连通的，并且对所有 $\upsilon\in V(G)$，有 $d_D^+(\upsilon)=d_d^-(\upsilon)$.

9、设 D 晃含有向回路的有向图. 证明：

（1） $\delta^+=0$；

（2）存在 $V(D)$ 的一个有序顶点序列 $\upsilon_1,\upsilon_2,\cdots,\upsilon_p$ 使得对于 $1\le i\le p$， D 的每条以 υ_i 为头的弧在 $\{\upsilon_1,\upsilon_2,\cdots,\upsilon_{i-1}\}$ 中都有它的尾.

10．证明：若有向完全图 D 中的有一条有向回路，则 D 中有一个三角形的有向回路.

11． $d_D^-(\upsilon)=0$ 的顶点称为发点，$d_D^+(\upsilon)=0$ 的顶点称为收点. 证明：如果有一个有向图 D 不含有向回路，则 D 至少有一个发点和收点.

12．假设在一次有 $n(\ge 3)$ 名选手参加的循环赛中，每一对选手赛一局定胜负，没有平局，并且没有一个人是全胜的. 证明其中一定有三名选手甲、乙、丙，使得甲胜乙，乙胜丙，丙胜甲.

13．证明：在完全二叉树中，弧的数目 q 恒为

$$q=2(l-1)$$

其中l是树叶结点数目.

14．证明：一个完全二叉树必有奇数个结点.

15．试构造一个与英文字母b, d, e, g, o, y对应的前缀码，并画出该前缀码对应的二叉树，再用这六个字母构成一个英文短语，写出此短语的编码信息（0-1 序列）.