笔记前言：

本笔记的内容是去掉步骤的概述后，视频的所有内容。

本猴觉得，自己的步骤概述写的太啰嗦，大家自己做笔记时，

应该每个人都有自己的最舒服最简练的写法，所以没给大家写。

再是本猴觉得，不给大家写这个概述的话，大家会记忆的更深，

掌握的更好！

所以老铁！一定要过呀！不要辜负本猴的心意！~~~

【祝逢考必过，心想事成~~~~】

【一定能过！！！！！】

在直角/柱面坐标系下计算三重积分

例1. 设 Ω 是由马鞍面 z=xy 与平面 y=x、x=1、z=0

所围成的空间区域，则 $\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3\,dxdydz=$ ______。

$$\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3\,dxdydz=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\int_{z_{下}(x,y)}^{z_{上}(x,y)} xy^2z^3\,dz\right]dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\int_0^{xy} xy^2z^3\,dz\right)dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\frac{xy^2z^4}{4}\bigg|_{z=0}^{z=xy}\right)dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\frac{xy^2(xy)^4}{4}-0\right]dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{x^5y^6}{4}\,dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x \frac{x^5y^6}{4}\,dy$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^x \frac{x^5y^6}{4}\,dy\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{x^5y^7}{28}\bigg|_{y=0}^{y=x}\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{x^5x^7}{28}-0\right)dx$$

$$=\int_0^1\frac{x^{12}}{28}\,dx$$

$$=\frac{x^{13}}{364}\bigg|_0^1$$

$$=\frac{1^{13}}{364}-0$$

$$=\frac{1}{364}$$

详见强化高数下—第二章—《二重积分》的一二课

构成 Ω 的所有面:

马鞍面 z=xy

平面 y=x，x=1，z=0

将 z=0 代入 z=xy，得:

0=xy

$\Longrightarrow$ x=0 或 y=0

将 (0.2,0.1) 代入 z=xy，得:

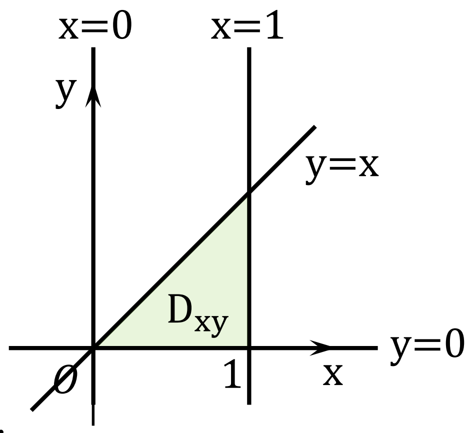
z=0.2×0.1

$\Longrightarrow$ z=0.02

z=0

$\therefore z_{上}(x,y)=xy$

$z_{下}(x,y)=0$



例2. 设 Ω 是由半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与抛物面

$x^2+y^2=3z$ 所围成的空间区域，计算 $\iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\int_{z_{下}(x,y)}^{z_{上}(x,y)} z\,dz\right]dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\int_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\,dz\right)dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\frac{z^2}{2}\Bigg|_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\frac{\left(\sqrt{4-x^2-y^2}\right)^2}{2}-\frac{\left(\frac{x^2+y^2}{3}\right)^2}{2}\right]dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left\{\frac{\left[\sqrt{4-(x^2+y^2)}\right]^2}{2}-\frac{\left(\frac{x^2+y^2}{3}\right)^2}{2}\right\}dxdy$$

详见强化高数下—第二章—《二重积分》的第五课

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\left[\frac{\left(\sqrt{4-r^2}\right)^2}{2}-\frac{\left(\frac{r^2}{3}\right)^2}{2}\right]r\,dr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\left(2r-\frac{r^3}{2}-\frac{r^5}{18}\right)dr$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{3}}\left(2r-\frac{r^3}{2}-\frac{r^5}{18}\right)dr\right]d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\left(r^2-\frac{r^4}{8}-\frac{r^6}{108}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}}\right]d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left\{\left[\left(\sqrt{3}\right)^2-\frac{\left(\sqrt{3}\right)^4}{8}-\frac{\left(\sqrt{3}\right)^6}{108}\right]-0\right\}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{13}{8}\,d\theta$$

$$=\frac{13}{8}\theta\Big|_0^{2\pi}$$

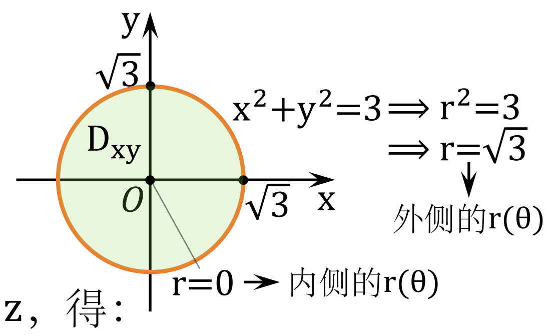
$$=\frac{13}{8}\cdot(2\pi-0)$$

$$=\frac{13\pi}{4}$$

构成 Ω 的所有面：

半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$

抛物面 $x^2+y^2=3z$



将 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 代入 $x^2+y^2=3z$，得：

$$x^2+y^2=3\sqrt{4-x^2-y^2}$$

$$\Rightarrow (x^2+y^2)^2=\left(3\sqrt{4-x^2-y^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow (x^2+y^2)^2+9(x^2+y^2)-36=0$$

$$\Rightarrow (x^2+y^2-3)(x^2+y^2+12)=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-3=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=3$$

将 $(0,0)$ 代入 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$，得：

$$z=\sqrt{4-0^2-0^2}$$

$$\Rightarrow z=2$$

将 $(0,0)$ 代入 $x^2+y^2=3z$，得：

$$0^2+0^2=3z$$

$$\Rightarrow z=0$$

$\therefore z_{上}(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$

$x^2+y^2=3z_{下}(x,y) \Rightarrow z_{下}(x,y)=\frac{x^2+y^2}{3}$

在球面坐标系下计算三重积分

例1. 设 $\Omega=\{(x,y,z)|\underline{x^2+y^2+z^2\le 1}\}$，

求 $\iiint\limits_{\Omega}\underline{(x^2+y^2+z^2)}\,dxdydz$

$0^2\le x^2+y^2+z^2\le 1^2 \implies R_1=0$ 、$R_2=1$

$(r\sin\varphi\cos\theta)^2+(r\sin\varphi\sin\theta)^2+(r\cos\varphi)^2$

$=r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+r^2\cos^2\varphi$

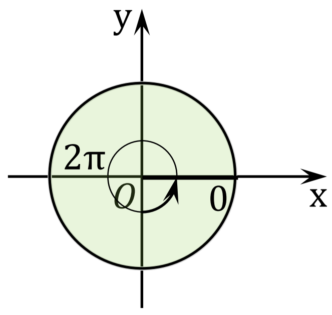
$=r^2\sin^2\varphi(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+r^2\cos^2\varphi$

$=r^2\sin^2\varphi\cdot 1+r^2\cos^2\varphi$

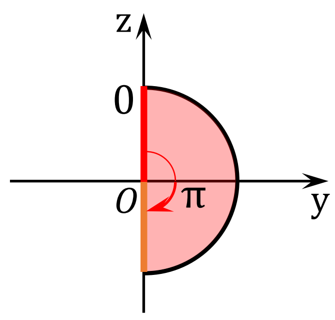
$=r^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)$

$=r^2\cdot 1$

$=\underline{r^2}$



$\theta_1=0$ 、$\theta_2=2\pi$



$\varphi_1=0$ 、$\varphi_2=\pi$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{1}r^2\cdot r^2\,dr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{1}r^4\,dr$$

$$=\theta\Big|_0^{2\pi}\cdot(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi}\cdot\frac{r^5}{5}\Big|_0^{1}$$

$$=(2\pi-0)\cdot[-\cos\pi-(-\cos 0)]\cdot\left(\frac{1^5}{5}-\frac{0^5}{5}\right)$$

$$=2\pi\cdot[1-(-1)]\cdot\frac{1}{5}$$

$$=2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{5}$$

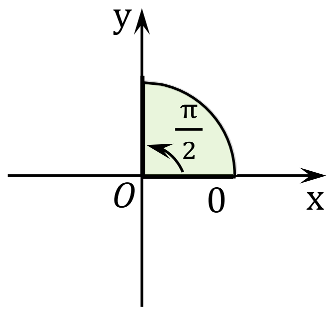
$$=\frac{4\pi}{5}$$

例2. 设 Ω 是 $\underline{x^2+y^2+z^2\le 1}$ 在第一卦限的部分，

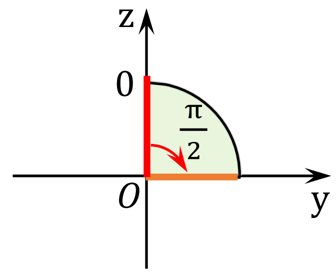
计算 $\iiint\limits_{\Omega} \underline{xyz}\, dxdydz$ $\longrightarrow 0^2\le x^2+y^2+z^2\le 1^2 \implies R_1=0$ 、$R_2=1$

$r\sin\varphi\cos\theta\cdot r\sin\varphi\sin\theta\cdot r\cos\varphi$

$=\underline{r^3\cdot\sin^2\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta}$



$\theta_1=0$ 、$\theta_2=\frac{\pi}{2}$



$\varphi_1=0$ 、$\varphi_2=\frac{\pi}{2}$

将所有被积函数中跟 θ 有关的式子放在 dθ 前面，
跟 φ 有关的式子放在 dφ 前面，
跟 r 有关的式子放在 dr 前面

$$\iiint\limits_{\Omega} xyz\, dxdydz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\, d\varphi\int_0^1 r^3\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta r^2\, dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cdot\cos\theta\, d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\sin^2\varphi\cos\varphi\, d\varphi\int_0^1 r^3\cdot r^2\, dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cdot 2\cos\theta\sin\theta\, d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos\varphi\, d\varphi\int_0^1 r^5\, dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cdot\sin 2\theta\, d\theta\cdot\left.\frac{\sin^4\varphi}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left.\frac{r^6}{6}\right|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\, d\theta\cdot\left[\frac{\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^4}{4}-\frac{(\sin 0)^4}{4}\right]\cdot\left(\frac{1^6}{6}-\frac{0^6}{6}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(-\left.\frac{\cos 2\theta}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[-\frac{\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{2}+\frac{\cos(2\cdot 0)}{2}\right]\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{48}$$

例3. 设 Ω 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $\underline{z=\sqrt{2-x^2-y^2}}$

所围成的区域，计算 $\iiint\limits_{\Omega} \underset{\downarrow}{\underline{z}}\, dxdydz$

$\underline{r\cos\varphi}$

$z^2=2-x^2-y^2 \implies x^2+y^2+z^2=2$

$\therefore 0^2 \le x^2+y^2+z^2=\left(\sqrt{2}\right)^2 \implies R_1=0$ 、$R_2=\sqrt{2}$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\, dxdydz=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r\cos\varphi \cdot r^2\, dr$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r\cdot r^2\, dr$$

$$=\theta\Big|_0^{2\pi}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\cdot 2\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi\cdot\int_0^{\sqrt{2}} r^3\, dr$$

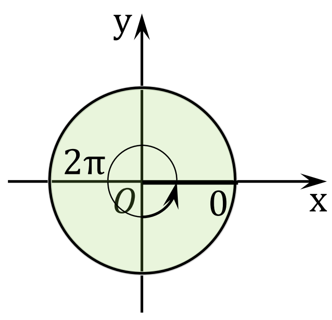
$$=(2\pi-0)\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\varphi\, d\varphi\cdot\frac{r^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{2}}$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\cos 2\varphi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)\cdot\left[\frac{\left(\sqrt{2}\right)^4}{4}-\frac{0^4}{4}\right]$$

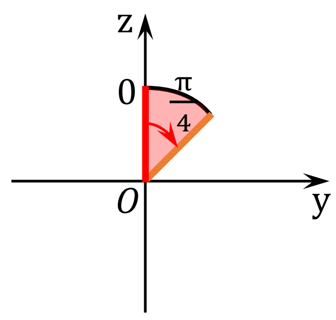
$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{2}+\frac{\cos 0}{2}\right)\cdot 1$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot 1$$

$$=\frac{\pi}{2}$$



$\theta_1=0$ 、$\theta_2=2\pi$



$\varphi_1=0$ 、$\varphi_2=\frac{\pi}{4}$

将所有被积函数中跟 θ 有关的式子放在 $d\theta$ 前面，

跟 φ 有关的式子放在 $d\varphi$ 前面，

跟 r 有关的式子放在 dr 前面

通过先二后一法计算三重积分

例1. 设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域，求 $\iiint\limits_{\Omega} x\,dxdydz$

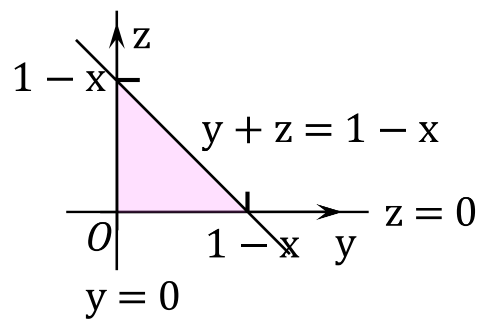
a、构成 Ω 的所有方程:

平面 $x+y+z=1 \Rightarrow\ y+z=1-x$

三个坐标平面 即 $x=0$、$y=0$、$z=0$

b、$y=0$、$z=0$

c、



d、 Ω 在 yOz 面的投影面积 $=\frac{(1-x)^2}{2}=\frac{(1-x)\cdot(1-x)}{2}=\frac{(1-x)^2}{2}$

a、构成 Ω 的所有方程:

平面 $x+y+z=1$

三个坐标平面 即 $x=0$、$y=0$、$z=0$

b、$x+0+0=1 \Rightarrow\ x=1$

$x=0$

c、没有方程

d、 $x_{大}=1$， $x_{小}=0$

$$\iiint\limits_{\Omega} x\,dxdydz = \int_0^1 x\cdot\frac{(1-x)^2}{2}dx$$

$$=\int_0^1 \frac{x^3-2x^2+x}{2}dx$$

$$=\left.\frac{\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}}{2}\right|_0^1$$

$$=\frac{\frac{1^4}{4}-\frac{2\times1^3}{3}+\frac{1^2}{2}}{2}-\frac{\frac{0^4}{4}-\frac{2\times0^3}{3}+\frac{0^2}{2}}{2}$$

$$=\frac{1}{24}$$

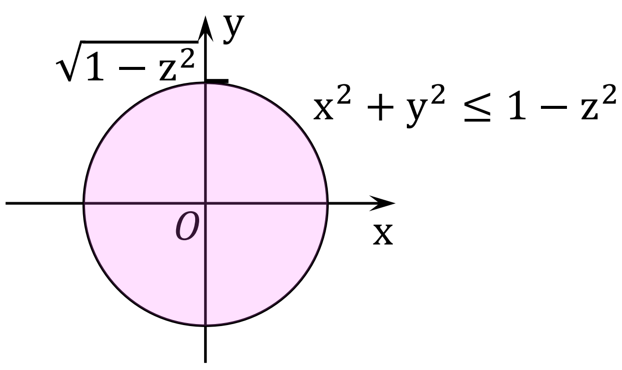
例2. 设 $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1\}$，求 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\,dxdydz$

a、构成 Ω 的所有方程:

$x^2+y^2+z^2\le 1$

b、$x^2+y^2+z^2\le 1 \;\Longrightarrow\; x^2+y^2\le 1-z^2$

c、



d、Ω 在 xOy 面的投影面积 $=\pi\cdot\left(\sqrt{1-z^2}\right)^2=(1-z^2)\pi$

a、构成 Ω 的所有方程:

$x^2+y^2+z^2\le 1$

b、没有方程

c、$0\;+\;0+z^2\le 1 \;\Longrightarrow z^2\le 1 \;\Longrightarrow -1\le z\le 1$

d、$z_{大}=1$，$z_{小}=-1$

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} z^2\,dxdydz &=\int_{-1}^{1} z^2\cdot(1-z^2)\pi\,dz\\ &=\int_{-1}^{1}(z^2-z^4)\pi\,dz\\ &=\pi\left(\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1}\\ &=\pi\left\{\left(\frac{1^3}{3}-\frac{1^5}{5}\right)-\left[\frac{(-1)^3}{3}-\frac{(-1)^5}{5}\right]\right\}\\ &=\frac{4\pi}{15}\end{aligned}$$

例3. 若 Ω 是由 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le R^2 \\ x^2+y^2+(z-R)^2 \le R^2 \end{cases}$ 所确定

求 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\,dxdydz$

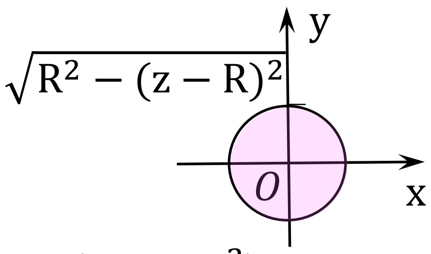
a、构成 Ω 的所有方程：

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le R^2 \\ x^2+y^2+(z-R)^2 \le R^2 \end{cases}$$

b、$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le R^2 \\ x^2+y^2+(z-R)^2 \le R^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 \le R^2-z^2 \\ x^2+y^2 \le R^2-(z-R)^2 \end{cases}$

c、若 $R^2-z^2 \ge R^2-(z-R)^2$

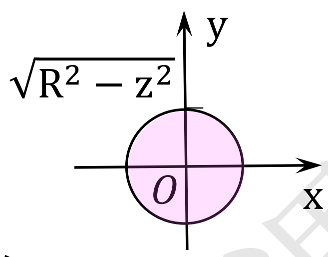
即 $z \le \frac{R}{2}$ 时：



d、Ω 在 xOy 面的投影面积 $=\pi\cdot(\sqrt{R^2-(z-R)^2})^2=\pi\cdot(2Rz-z^2)$

c、若 $R^2-z^2 < R^2-(z-R)^2$

即 $z > \frac{R}{2}$ 时：



d、Ω 在 xOy 面的投影面积 $=\pi\cdot(\sqrt{R^2-z^2})^2=\pi\cdot(R^2-z^2)$

a、构成 Ω 的所有方程：

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le R^2 \\ x^2+y^2+(z-R)^2 \le R^2 \end{cases}$$

b、没有方程

c、$\begin{cases} 0\ +0\ +z^2 \le R^2 \\ 0\ +0\ +(z-R)^2 \le R^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2 \le R^2 \\ (z-R)^2 \le R^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow 0 \le z \le R$$

d、$z_{大}=R$，$z_{小}=0$

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2\,dxdydz = \int_0^{\frac{R}{2}} z^2\cdot\pi\cdot(2Rz-z^2)dz + \int_{\frac{R}{2}}^{R} z^2\cdot\pi\cdot(R^2-z^2)\,dz$$

$$= \int_0^{\frac{R}{2}}(2\pi Rz^3-\pi z^4)\,dz + \int_{\frac{R}{2}}^{R}(\pi R^2z^2-\pi z^4)\,dz$$

$$= \left(2\pi R\frac{z^4}{4}-\pi\frac{z^5}{5}\right)\Big|_{z=0}^{z=\frac{R}{2}} + \left(\pi R^2\frac{z^3}{3}-\pi\frac{z^5}{5}\right)\Big|_{z=\frac{R}{2}}^{z=R}$$

$$= \left(2\pi R\frac{z^4}{4}-\pi\frac{z^5}{5}\right)\Big|_{z=0}^{z=\frac{R}{2}} + \left(\pi R^2\frac{z^3}{3}-\pi\frac{z^5}{5}\right)\Big|_{z=\frac{R}{2}}^{z=R}$$

$$= \left\{\left[2\pi R\cdot\frac{\left(\frac{R}{2}\right)^4}{4}-\pi\cdot\frac{\left(\frac{R}{2}\right)^5}{5}\right]-\left[2\pi R\cdot\frac{0^4}{4}-\pi\cdot\frac{0^5}{5}\right]\right\}$$

$$+\left\{\left(\pi R^2\cdot\frac{R^3}{3}-\pi\frac{R^5}{5}\right)-\left[\pi R^2\cdot\frac{\left(\frac{R}{2}\right)^3}{3}-\pi\cdot\frac{\left(\frac{R}{2}\right)^5}{5}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{40}\pi R^5+\frac{47}{480}\pi R^5$$

$$= \frac{59}{480}\pi R^5$$

通过对称性计算三重积分

$\longrightarrow z=\sqrt{(-x)^2+y^2} \Longrightarrow z=\sqrt{x^2+y^2}$

例1. 设 Ω 是由曲面 $\underline{z=\sqrt{x^2+y^2}}$ 与

$\underline{z=\sqrt{1-x^2-y^2}}$ 所围成的空间区域，

求 $\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^2\,dv$ $\longrightarrow z=\sqrt{1-(-x)^2-y^2} \Longrightarrow z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

令 x 变 $-x$ 时， xy^2z^2 变 $-xy^2z^2$

$\because$ 构成 Ω 的式子中的 x 变 $-x$ 后，式子不变

$\therefore \iiint\limits_{\Omega} xy^2z^2\,dv=0$

$\longrightarrow (x-1)^2+(-z)^2\le 1 \Longrightarrow (x-1)^2+z^2\le 1$

例2. 设 Ω 是由曲面 $\underline{(x-1)^2+z^2\le 1，y=1，}$

$\underline{y=0}$ 所围成的闭区域，求 $\iiint\limits_{\Omega} x^2z\,dv$

令 z 变 $-z$ 时，x^2z 变 $x^2(-z)=-x^2z$

$\because$ 构成 Ω 的式子中的 z 变 $-z$ 后，式子不变

$\therefore \iiint\limits_{\Omega} x^2z\,dv=0$

$\longrightarrow (-x)(-y)+(-x)(-z)+(-y)(-z)\le 1 \Longrightarrow xy+xz+yz\le 1$

例3. 设 $\Omega=\{(x,y,z)|\underline{xy+xz+yz\le 1}\}$,

求 $\iiint\limits_{\Omega} xyz\,dv$

令 x 变 $-x$ ，y 变 $-y$ ，z 变 $-z$ 时，xyz 变 $(-x)(-y)(-z)=-xyz$

$\because$ 构成 Ω 的式子中的 x 变 $-x$ 、y 变 $-y$ 、z 变 $-z$ 后，式子不变

$\therefore \iiint\limits_{\Omega} xyz\,dv=0$

通过轮换对称性计算三重积分

例1. 设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与 x=0，y=0，z=0 所围成的空间区域，求 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\,dxdydz$

x、y、z 地位相等

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\,dxdydz$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}x\,dxdydz+2\iiint\limits_{\Omega}y\,dxdydz+3\iiint\limits_{\Omega}z\,dxdydz$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}x\,dxdydz+2\iiint\limits_{\Omega}x\,dxdydz+3\iiint\limits_{\Omega}x\,dxdydz$$

$$=6\underline{\iiint\limits_{\Omega}x\,dxdydz}$$

$$=6\times\underline{\frac{1}{24}}$$

$$=\frac{1}{4}$$

详见强化高数下 —【三重积分】第3课【通过先二后一法计算三重积分】— 例1

例2. 设 $\Omega=\{(x,y,z)|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$，求 $\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)dxdydz$

y、z 地位相等

$$\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\,dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}y^2\,dxdydz+\iiint\limits_{\Omega}z^2\,dxdydz$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}z^2\,dxdydz+\iiint\limits_{\Omega}z^2\,dxdydz$$

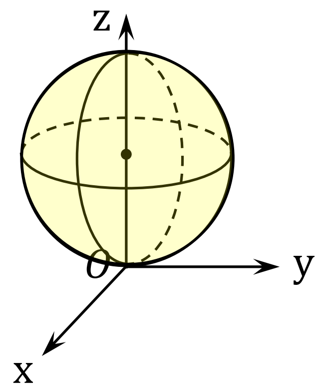
$$=2\underline{\iiint\limits_{\Omega}z^2\,dxdydz}$$

$$=2\times\underline{\frac{4\pi}{15}}$$

$$=\frac{8\pi}{15}$$

详见强化高数下 —【三重积分】第3课【通过先二后一法计算三重积分】— 例2

通过积分区域形心计算三重积分



例1. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(3x+2y+z)\,dv$，其中

Ω 由 $x^2+y^2+(z-1)^2\leq 1$ 所确定

$$\iiint\limits_{\Omega}(3x+2y+1z)\,dxdydz=(3\bar{x}+2\bar{y}+\bar{z})\cdot\Omega\text{的体积}$$

$$=(3\times 0+2\times 0+1)\cdot\Omega\text{的体积}$$

$$=1\cdot\Omega\text{的体积}$$

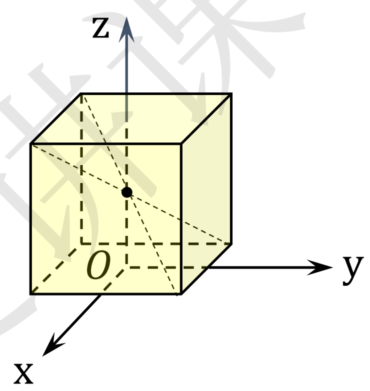
$$=\frac{4\pi}{3}\cdot 1^3$$

$$=\frac{4\pi}{3}$$

Ω 由 $(x-0)^2+(y-0)^2+(z-1)^2\leq 1^2$ 所确定

Ω 是半径为 1 的球体，且形心为 (0,0,1)

球的体积 $=\frac{4\pi}{3}\cdot r^3$



例2. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(2x+3y+4z)\,dv$，其中

$\Omega=\{(x,y,z)|-1\leq x\leq 1,\ -1\leq y\leq 1,0\leq z\leq 2\}$

$$\iiint\limits_{\Omega}(2x+3y+4z)\,dxdydz=(2\bar{x}+3\bar{y}+4\bar{z})\cdot\Omega\text{的体积}$$

$$=(2\times 0+3\times 0+4\times 1)\cdot\Omega\text{的体积}$$

$$=4\cdot\Omega\text{的体积}$$

$$=4\times(2\times 2\times 2)$$

$$=32$$

Ω 是长、宽、高均为 2 的长方体，且形心为 (0,0,1)

长方体的体积 = 长 × 宽 × 高

计算 $\int_L \cdots ds$

例1. 已知曲线 $L:\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases}(0\le t\le\sqrt{2})$，求曲线积分 $\int_L x\,ds$

$$\begin{aligned}\int_L x\,ds &= \int_0^{\sqrt{2}} t\cdot\sqrt{(t')^2+[(t^2)']^2}\,dt\\ &= \int_0^{\sqrt{2}} t\cdot\sqrt{1+4t^2}\ dt\\ &= \int_1^3 t\cdot u\cdot\frac{u}{4t}\,du\\ &= \int_1^3 \frac{u\cdot u}{4}\,du\\ &= \int_1^3 \frac{u^2}{4}\,du\\ &= \frac{u^3}{12}\Big|_1^3\\ &= \frac{3^3}{12}-\frac{1^3}{12}\\ &= \frac{13}{6}\end{aligned}$$

设 $u=\sqrt{1+4t^2}$

则 $dt=\frac{1}{u'}du$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{\left(\sqrt{1+4t^2}\right)'}du\\ &=\frac{1}{\left[(1+4t^2)^{\frac{1}{2}}\right]'}du\\ &=\frac{1}{\frac{1}{2}(1+4t^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(4t^2)'}du\\ &=\frac{1}{\frac{1}{2}(1+4t^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 8t}du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{\frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}}du\\ &=\frac{\sqrt{1+4t^2}}{4t}du\\ &=\frac{u}{4t}du\end{aligned}$$

$t:\ 0\to\sqrt{2}$

$u:\sqrt{1+4\cdot 0^2}\to\sqrt{1+4\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2}$

即 $u:\quad 1\quad\to\quad 3$

【详见强化高数上 — 第三章 — 第二课】

例2. 计算 $\int_L\sqrt{2y^2-2y+1}\,ds$，其中 $L:\begin{cases} y=t \\ x=t^2-t+1 \end{cases}(1\le t\le 2)$

$$\begin{aligned}\int_L\sqrt{2y^2-2y+1}\,ds &= \int_1^2\sqrt{2t^2-2t+1}\cdot\sqrt{[(t^2-t+1)']^2+(t')^2}\,dt\\ &= \int_1^2\sqrt{2t^2-2t+1}\cdot\sqrt{(2t-1)^2+1}\ dt\\ &= \int_1^2\sqrt{2t^2-2t+1}\cdot\sqrt{4t^2-4t+2}\ dt\\ &= \int_1^2\sqrt{2t^2-2t+1}\cdot\sqrt{2t^2-2t+1}\times\sqrt{2}\ dt\\ &= \int_1^2(2t^2-2t+1)\times\sqrt{2}\ dt\\ &= \sqrt{2}\int_1^2(2t^2-2t+1)\ dt\\ &= \sqrt{2}\times\left(\frac{2}{3}t^3-t^2+t\right)\Big|_1^2\\ &= \sqrt{2}\times\left[\left(\frac{2}{3}\times 2^3-2^2+2\right)-\left(\frac{2}{3}\times 1^3-1^2+1\right)\right]\\ &= \frac{8}{3}\sqrt{2}\end{aligned}$$

例3. 设曲线段 L 是摆线: $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $\underbrace{\text{的一拱}}_{(0 \le t \le 2\pi)}$，求 $\int_L \sqrt{2y}\,ds$

$$\int_L \sqrt{2y}\,ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)} \cdot \sqrt{[(t-\sin t)']^2 + [(1-\cos t)']^2}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t} \cdot \sqrt{(1-\cos t)^2 + [-(-\sin t)]^2}\ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t} \cdot \sqrt{1+\cos^2 t - 2\cos t + \sin^2 t}\ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t} \cdot \sqrt{2-2\cos t}\ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (2-2\cos t)\,dt$$

$$= (2t - 2\sin t)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= (2\times 2\pi - 2\sin 2\pi) - (2\times 0 - 2\sin 0)$$

$$= 4\pi$$

例4. 设曲线 $r = \sqrt{2}\ (\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\ )$，求曲线积分 $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds$

$$\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\sqrt{\left(\sqrt{2}\cos\theta\right)^2 + \left(\sqrt{2}\sin\theta\right)^2}} \cdot \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left[\left(\sqrt{2}\right)'\right]^2}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\sqrt{2\cos^2\theta + 2\sin^2\theta}} \times \sqrt{2}\ d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\sqrt{2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}} \times \sqrt{2}\ d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}\ d\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\sqrt{2}}\ d\theta$$

$$= \sqrt{2}e^{\sqrt{2}}\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \sqrt{2}e^{\sqrt{2}} \times \left(\frac{\pi}{4} - 0\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}}{4}\pi$$

通过对称性计算 $\int_L \cdots ds$

$y=-\sqrt{1-(-x)^2} \Rightarrow y=-\sqrt{1-x^2}$

例1. 设 L 是下半圆 $\underline{y=-\sqrt{1-x^2}}$，则 $\oint_L xy^2\,ds=$____

令 x 变 $-x$ 时，xy^2 变 $-xy^2$

$\because$ 构成 L 的式子中的 x 变 $-x$ 后，式子不变

$\therefore \oint_L xy^2\,ds=0$

$x^2+(-y)^2=x \Rightarrow x^2+y^2=x$

例2. 设 L 是椭圆 $\underline{x^2+y^2=x}$，则 $\oint_L 2y\,ds=$_____

令 y 变 $-y$ 时，$2y$ 变 $2\cdot(-y)=-2y$

$\because$ 构成 L 的式子中的 y 变 $-y$ 后，式子不变

$\therefore \oint_L 2y\,ds=0$

$-y=-x \Rightarrow y=x$

例3. 设 L 是曲线 $\underline{y=x}$，则 $\oint_L (x^2y+xy^2)\,ds=$_____

令 x 变 $-x$、y 变 $-y$ 时，x^2y+xy^2 变 $(-x)^2(-y)+(-x)(-y)^2=-(x^2y+xy^2)$

$\because$ 构成 L 的式子中的 x 变 $-x$、y 变 $-y$ 后，式子不变

$\therefore \oint_L (x^2y+xy^2)\,ds=0$

通过积分曲线方程快速计算 $\int_L \dots ds$

例1. 设平面曲线 L 为 $x^2+y^2=1$的下半圆，则曲线积分

$\int_L (x^2+y^2)\,ds =$____

$\because x^2+y^2=1$

$\therefore \int_L (x^2+y^2)\,ds = \int_L 1\,ds$

$= L$ 的长度

$= \frac{1}{2} \times (2\pi \times 1)$

$= \pi$

例2. 设曲线 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长为 a，则曲线积分

$\oint_L (3x^2+4y^2)\,ds =$____

$\because \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \implies 3x^2+4y^2=12$

$\therefore \oint_L (3x^2+4y^2)\,ds = \int_L 12\,ds$

$= 12\int_L 1\,ds$

$= 12 \cdot L$ 的长度

$= 12a$

例3. 设曲线 L: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ ，求:

(1) $\oint_L (x+y+z)\,ds$；　(2) $\oint_L (x^2+y^2+z^2)\,ds$；　(3) $\oint_L (xy+xz+yz)\,ds$

$= \oint_L 1\,ds$

$=$ L 的长度

$= 2\pi\cdot 1$

$= 2\pi$

(1) $\because x+y+z=0$

$\therefore \oint_L (x+y+z)\,ds = \oint_L 0\,ds = 0$

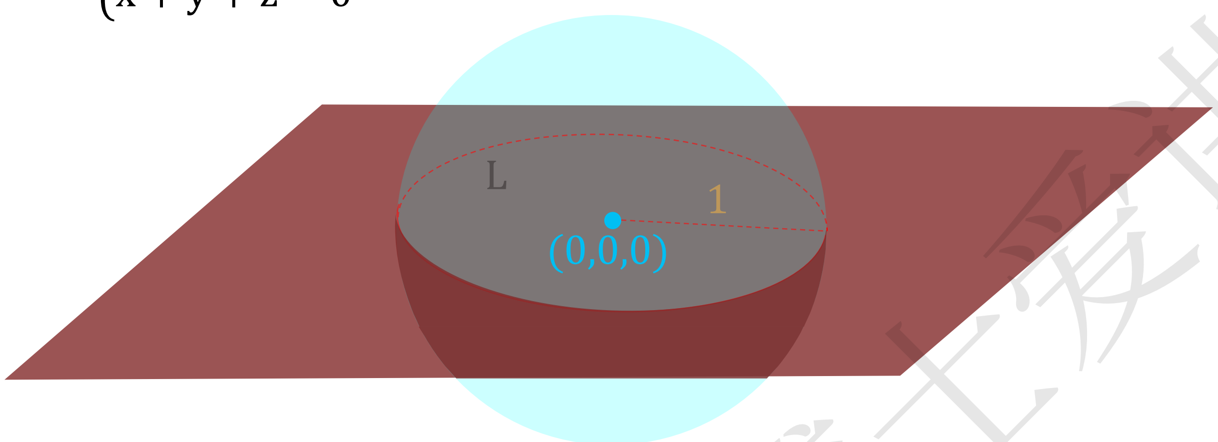
(2) $\because x^2+y^2+z^2=1$

$\therefore \oint_L (x^2+y^2+z^2)\,ds = \oint_L 1\,ds =$ L 的长度 $= 2\pi$

$x^2+y^2+z^2=1$ 是 球心为(0,0,0) 的球壳

$x+y+z=0$ 是 过点 (0,0,0) 的平面

$\therefore$ L: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 是过点 (0,0,0) 的平面 切割 球心为(0,0,0) 的球壳 的切线



$\therefore$ L 的长度 $= 2\pi\cdot 1 = 2\pi$

(3) $x+y+z=0 \Longrightarrow (x+y+z)^2=0^2$

$\Longrightarrow x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=0$

将 $x^2+y^2+z^2=1$ 代入 $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=0$，得：

$1+2xy+2xz+2yz=0$

$\Longrightarrow xy+xz+yz=-\frac{1}{2}$

$\therefore \oint_L (xy+xz+yz)\,ds = \oint_L -\frac{1}{2}\,ds$

$= -\frac{1}{2}\oint_L 1\,ds$

$= -\frac{1}{2}\cdot$ L 的长度

$= -\frac{1}{2}\times 2\pi$

$= -\pi$

通过轮换对称性计算 $\int_L \cdots \mathrm{ds}$

例1. 设曲线 $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$，求：

(1) $\oint_L x\,ds$；　　(2) $\oint_L x^2\,ds$　　(3) $\oint_L (ax^2+by^2+cz^2)\,ds$，a、b、c 为任意常数

(1) $\oint_L x\,ds+\oint_L y\,ds+\oint_L z\,ds=3\oint_L x\,ds$

$$\Rightarrow \oint_L (x+y+z)ds=3\oint_L x\,ds$$

$$\Rightarrow \oint_L 0\,ds=3\oint_L x\,ds$$

$$\Rightarrow \oint_L x\,ds=\frac{1}{3}\oint_L 0\,ds$$

$$\Rightarrow \oint_L x\,ds=\frac{1}{3}\times 0$$

$$\Rightarrow \oint_L x\,ds=0$$

(2) $\oint_L x^2\,ds+\oint_L y^2\,ds+\oint_L z^2\,ds=3\oint_L x^2\,ds$

$$\Rightarrow \oint_L (x^2+y^2+z^2)\,ds=3\oint_L x^2\,ds$$

$$\Rightarrow \oint_L 1\,ds=3\oint_L x^2\,ds$$

$$\Rightarrow \oint_L x^2\,ds=\frac{1}{3}\underline{\oint_L 1\,ds}$$

上一课例3第2问求过了：

$\oint_L 1\,ds=2\pi$

$$\Rightarrow \oint_L x^2\,ds=\frac{1}{3}\times\underline{2\pi}$$

$$\Rightarrow \oint_L x^2\,ds=\frac{2}{3}\pi$$

(3) $\oint_L (ax^2+by^2+cz^2)\,ds=\oint_L ax^2\,ds+\oint_L by^2\,ds+\oint_L cz^2\,ds$

$$=a\oint_L x^2\,ds+b\oint_L y^2\,ds+c\oint_L z^2\,ds$$

$$=a\oint_L x^2\,ds+b\oint_L x^2\,ds+c\oint_L x^2\,ds$$

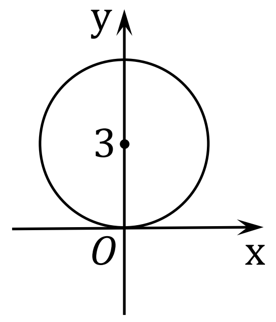
$$=(a+b+c)\oint_L x^2\,ds$$

$$=(a+b+c)\times\frac{2}{3}\pi$$

$$=\frac{2(a+b+c)}{3}\pi$$

通过积分曲线的形心计算 $\int_L \cdots \, ds$

例1. 设 L 为曲线 $x^2 + (y-3)^2 = 9$，求 $\oint_L (2x+y)\, ds$



$$
\begin{aligned}
\oint_L (2x+1y)\, ds &= (2\bar{x}+1\bar{y})\cdot L\text{ 的长度} \\
&= (2\times 0 + 1\times 3)\cdot L\text{ 的长度} \\
&= 3\times \underline{L\text{ 的长度}} \\
&= 3\times 6\pi \\
&= 18\pi
\end{aligned}
$$

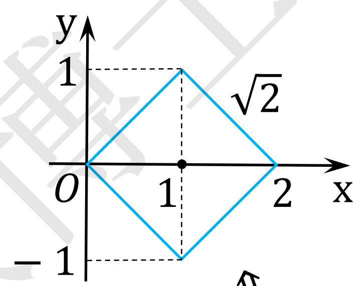
L 为曲线 $(x-0)^2 + (y-3)^2 = 3^2$

L 是半径为 3 的圆，且形心为 $(0,3)$

圆的周长 $= 2\pi r$

L 的长度 $= 2\pi\times 3 = 6\pi$

例2. 设 L 是曲线 $|x-1| + |y| = 1$，求 $\oint_L (3x+5y)\, ds$



$$
\begin{aligned}
\oint_L (3x+5y)\, ds &= (3\bar{x}+5\bar{y})\cdot L\text{ 的长度} \\
&= (3\times 1 + 5\times 0)\cdot L\text{ 的长度} \\
&= 3\times \underline{L\text{ 的长度}} \\
&= 3\times 4\sqrt{2} \\
&= 12\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

L 是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形，且形心是 $(1,0)$

正方形的周长 $= 4\cdot$ 边长

L 的长度 $= 4\sqrt{2}$

$\Uparrow$

$$
|x-1| + |y| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x-1+y=1, & (0<x-1<1,\ 0<y<1) \\ 1-x+y=1, & (-1<x-1<0,\ 0<y<1) \\ 1-x-y=1, & (-1<x-1<0,\ -1<y<0) \\ x-1-y=1, & (0<x-1<1,\ -1<y<0) \end{cases}
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases} y=2-x, & (1<x<2,\ 0<y<1) \\ y=x, & (0<x<1,\ 0<y<1) \\ y=-x, & (0<x<1,\ -1<y<0) \\ y=x-2, & (1<x<2,\ -1<y<0) \end{cases}
$$

计算 $\int_L Pdx + Qdy$

例1. 设 $L:\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$ $(t: 1 \to 0)$，计算 $\int_L ydx + xdy$

例1. 设 L 为 y=x 上从点(1,1)到点(0,0)的一段，计算 $\int_L ydx + xdy$

设 x=t

$L:\begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases}$ $(t: 1 \to 0)$

$\int_L ydx + xdy$

$= \int_1^0 \{t \cdot t' + t \cdot t'\}\, dt$

$= \int_1^0 (t \cdot 1 + t \cdot 1)\, dt$

$= \int_1^0 2t\, dt$

$= t^2 |_1^0$

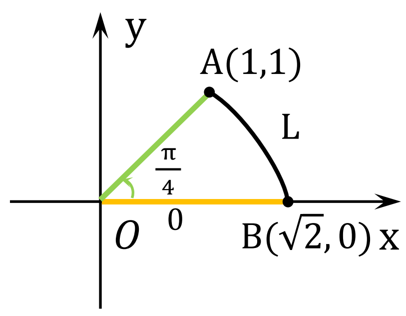
$= 0^2 - 1^2$

$= -1$

例2. 设 $L:\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = \sqrt{2}\sin t \end{cases}$ $(t: 0 \to \frac{\pi}{4})$，求 $\int_L ydx + xdy$

例2. 设 L 为下图中 B 到 A 的部分，BA 是圆 $x^2+y^2=2$ 的一部分，求 $\int_L ydx + xdy$

设 $L:\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = \sqrt{2}\sin t \end{cases}$ $(t: 0 \to \frac{\pi}{4})$



$\int_L ydx + xdy$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{\sqrt{2}\sin t \cdot \left(\sqrt{2}\cos t\right)' + \sqrt{2}\cos t \cdot \left(\sqrt{2}\sin t\right)'\right\} dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\sqrt{2}\sin t \cdot \left(-\sqrt{2}\sin t\right) + \sqrt{2}\cos t \cdot \sqrt{2}\cos t\right] dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2 t - 2\sin^2 t)\, dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2(\cos^2 t - \sin^2 t)\, dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2t\, dt$

$= \sin 2t |_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \sin\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) - \sin(2 \times 0)$

$= 1$

例3. 设 L 是从点(0,0) 到点(2a,0)的一段水平线，计算

$\int_L [e^x \sin y - b(x+y)]\,dx + (e^x \cos y - ax)\,dy$

$$
\begin{aligned}
\int_L [e^x \sin y - b(x+y)]\,dx + (e^x \cos y - ax)\,dy &= \int_0^{2a} [e^x \sin 0 - b(x+0)]\,dx \\
&= \int_0^{2a} (-bx)\,dx \\
&= -\frac{b}{2} x^2 \Big|_0^{2a} \\
&= -\frac{b}{2} \cdot (2a)^2 - \left(-\frac{b}{2} \times 0^2\right) \\
&= -2a^2 b
\end{aligned}
$$

例4. 设 L 是从点(1,6)到点(1,1)的一段竖直线，计算 $\int_L y dx + x dy$

$$
\begin{aligned}
\int_L y dx + x dy &= \int_6^1 1\,dy \\
&= y|_6^1 \\
&= 1 - 6 \\
&= -5
\end{aligned}
$$

格林公式

例1. 设 L 为逆向的圆周 $x^2+y^2=1$，则曲线积分

$$\oint_L \underbrace{(2-2x+y)}_{P}dx+\underbrace{(3x-2y-2)}_{Q}dy=\_\_\_\_$$

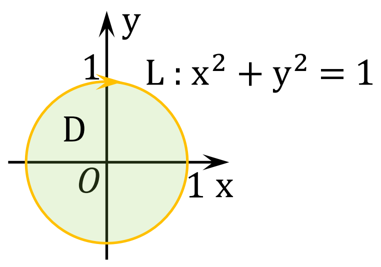
P、Q 在 L 围成的区域 D 里都一直有意义

$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial(3x-2y-2)}{\partial x}=3$

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial(2-2x+y)}{\partial y}=1$

$\frac{\partial Q}{\partial x}$、$\frac{\partial P}{\partial y}$ 在 L 围成的区域 D 里都一直连续

$$\oint_L (2-2x+y)dx+(3x-2y-2)dy=-\iint_D (3-1)\,dxdy$$



$$=-\iint_D 2\,dxdy$$

$$=-2\iint_D 1\,dxdy$$

$=-2\cdot$(区域 D 的面积)

$$=-2\times(\pi\times 1^2)$$

$$=-2\pi$$

例2. 若 L: |x|+|y|=1，取逆时针方向，

求 $\oint_L \underbrace{(-4-4x^2+y^2-2xy+4x+4y)}_{P}dx+\underbrace{(8-2x^2+3y^2+4xy-8x-8y)}_{Q}dy$

P、Q 在 L 围成的区域 D 里都一直有意义

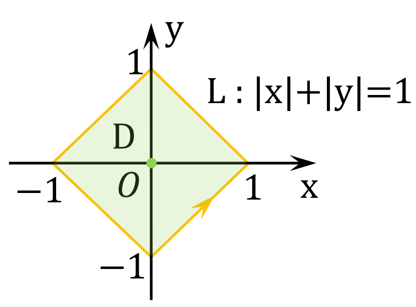
$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial(8-2x^2+3y^2+4xy-8x-8y)}{\partial x}=-4x+4y-8$

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial[-4-4x^2+y^2-2xy+4x+4y]}{\partial y}=2y-2x+4$

$\frac{\partial Q}{\partial x}$、$\frac{\partial P}{\partial y}$ 在 L 围成的区域 D 里都一直连续

$$\oint_L (-4-4x^2+y^2-2xy+4x+4y)dx+(8-2x^2+3y^2+4xy-8x-8y)dy$$

$$=\iint_D [(-4x+4y-8)-(2y-2x+4)]\,dxdy$$



$$=\iint_D (-2x+2y-12)\,dxdy$$

$$=\underline{\iint_D (-2x+2y)\,dxdy}-\iint_D 12\,dxdy$$

$=(-2\bar{x}+2\bar{y})\cdot$ D 的面积 $-\iint_D 12\,dxdy$

形心法求二重积分：

$\iint_D (ax+by)\,dxdy=(a\bar{x}+b\bar{y})\cdot$ D 的面积

【详见强化高数下 — 第二章 — 第9课】

$=(-2\times 0+2\times 0)\cdot$ D 的面积 $-\iint_D 12\,dxdy$

$$=0-\iint_D 12\,dxdy$$

$$=-12\iint_D 1\,dxdy$$

$=-12\cdot$(区域 D 的面积)

$$=-12\times\left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$=-24$$

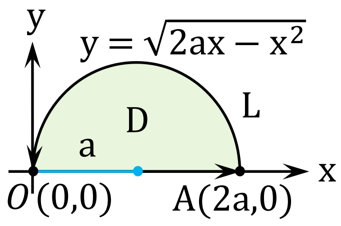
例3. 求 $\oint_L \overset{P}{\underline{[e^x\sin y-b(x+y)]}}\,dx+\overset{Q}{\underline{(e^x\cos y-ax)}}\,dy$，其中 a、b 为正的常数， L 为从点 $O(0,0)$ 到点 $A(2a,0)$，再从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 回到点 $O(0,0)$ 的闭合曲线

P、Q 在 L 围成的区域 D 里都一直有意义

$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial(e^x\cos y-ax)}{\partial x}=e^x\cos y-a$

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial[e^x\sin y-b(x+y)]}{\partial y}=e^x\cos y-b$

$\frac{\partial Q}{\partial x}$、$\frac{\partial P}{\partial y}$ 在 L 围成的区域 D 里都一直连续



$\oint_L [e^x\sin y-b(x+y)]\,dx+(e^x\cos y-ax)\,dy$

$=\iint\limits_D [(e^x\cos y-a)-(e^x\cos y-b)]\,dxdy$

$=\iint\limits_D (b-a)\,dxdy$

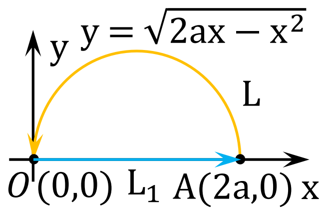
$=(b-a)\cdot\iint\limits_D 1\,dxdy$

$=(b-a)\cdot$(区域 D 的面积)

$=(b-a)\cdot\frac{\pi a^2}{2}$

$=\frac{\pi a^2(b-a)}{2}$

例4. 求 $\int_L [e^x\sin y-b(x+y)]\,dx+(e^x\cos y-ax)\,dy$，其中 a、b 为正的常数， L 为点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧



$\int_L [e^x\sin y-b(x+y)]\,dx+(e^x\cos y-ax)\,dy$

$=\underline{\int_{L+L_1} [e^x\sin y-b(x+y)]\,dx+(e^x\cos y-ax)\,dy}$ 本课例3求过

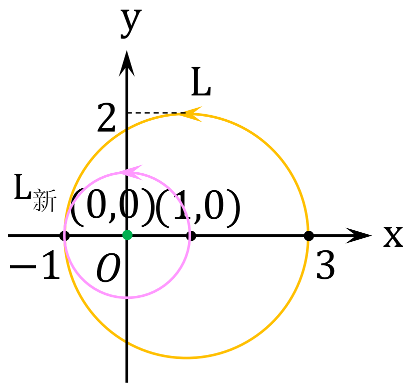
$\quad\underline{-\int_{L_1} [e^x\sin y-b(x+y)]\,dx+(e^x\cos y-ax)\,dy}$ 上一课例3求过

$=\underline{\frac{\pi a^2(b-a)}{2}}-\underline{(-2a^2b)}$

$=\left(\frac{\pi}{2}+2\right)a^2b-\frac{\pi a^3}{2}$

不能用格林公式的一种情况

例1. 计算曲线积分 $I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中 L 是以点 (1,0) 为圆心、半径为 2 的圆周，取逆时针方向。



$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\oint_L \frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$$

$$P=\frac{-y}{x^2+y^2}、\ Q=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)}{\partial x}=\frac{x'\cdot(x^2+y^2)-x\cdot\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x}}{(x^2+y^2)^2}=\frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)}{\partial y}=\frac{(-y)'\cdot(x^2+y^2)-(-y)\cdot\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y}}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-(x^2+y^2)+y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

在(0,0)点处，
分母为 0，
无意义，
不能用格林公式

$L_新$： $x^2+y^2=1$,取逆时针方向

$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\oint_{L_新} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\oint_{L_新} \frac{xdy-ydx}{1}=\oint_{L_新} xdy-ydx$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{dx}{dx}=1$$
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{d(-y)}{dy}=-1$$

$$=\iint_D [1-(-1)]\,dxdy$$
$$=\iint_D 2\,dxdy$$
$$=2\iint_D 1\,dxdy$$
$$=2\cdot D的面积$$
$$=2\cdot(\pi\times 1^2)$$
$$=2\pi$$

$\int_L Pdx + Qdy$ 与路径无关

例1. 若曲线积分 $\int_L \frac{xdx-aydy}{x^2+y^2-1}$ 在区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$ 内

与路径无关，则 $a=$_____

$$\int_L \frac{xdx-aydy}{x^2+y^2-1}=\int_L \frac{x}{x^2+y^2-1}dx+\frac{-ay}{x^2+y^2-1}dy$$

$$\frac{\partial\left(\frac{x}{x^2+y^2-1}\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{-ay}{x^2+y^2-1}\right)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{-2xy}{(x^2+y^2-1)^2}=\frac{2axy}{(x^2+y^2-1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad -2xy=2axy$$

$$\Rightarrow \quad a=-1$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\frac{x}{x^2+y^2-1}\right)}{\partial y}&=\frac{\frac{\partial x}{\partial y}\cdot(x^2+y^2-1)-x\cdot\frac{\partial(x^2+y^2-1)}{\partial y}}{(x^2+y^2-1)^2}\\&=\frac{0\cdot(x^2+y^2-1)-x\cdot(2y)}{(x^2+y^2-1)^2}\\&=\frac{-2xy}{(x^2+y^2-1)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\frac{-ay}{x^2+y^2-1}\right)}{\partial x}&=\frac{\frac{\partial(-ay)}{\partial x}\cdot(x^2+y^2-1)-(-ay)\cdot\frac{\partial(x^2+y^2-1)}{\partial x}}{(x^2+y^2-1)^2}\\&=\frac{0\cdot(x^2+y^2-1)-(-ay)\cdot(2x)}{(x^2+y^2-1)^2}\\&=\frac{2axy}{(x^2+y^2-1)^2}\end{aligned}$$

例2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数，L 是

上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线，其起点为(a,c)，

终点为(b,d)，记 $I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy$，

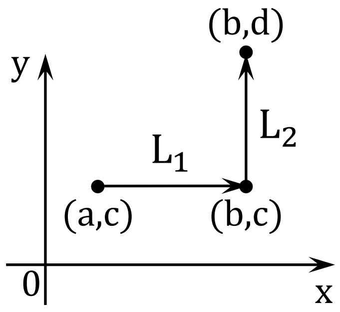
当 $ac=bd$ 时，求 I 的值

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}&=\frac{\partial\left\{\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\right\}}{\partial y}\\&=\frac{d\left(\frac{1}{y}\right)}{dy}\cdot[1+y^2f(xy)]+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial[1+y^2f(xy)]}{\partial y}\\&=-\frac{1}{y^2}\cdot[1+y^2f(xy)]+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial[y^2f(xy)]}{\partial y}\\&=-\frac{1}{y^2}\cdot[1+y^2f(xy)]+\frac{1}{y}\cdot\left[\frac{d(y^2)}{dy}\cdot f(xy)+y^2\cdot\frac{\partial[f(xy)]}{\partial y}\right]\\&=-\frac{1}{y^2}\cdot[1+y^2f(xy)]+\frac{1}{y}\cdot\left[2y\cdot f(xy)+y^2\cdot f'(xy)\cdot\frac{\partial(xy)}{\partial y}\right]\\&=-\frac{1}{y^2}\cdot[1+y^2f(xy)]+\frac{1}{y}\cdot[2y\cdot f(xy)+y^2\cdot f'(xy)\cdot x]\\&=f(xy)-\frac{1}{y^2}+xyf'(xy)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x}&=\frac{\partial\left\{\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\right\}}{\partial x}\\&=\frac{\partial\left(\frac{x}{y^2}\right)}{\partial x}\cdot[y^2f(xy)-1]+\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial[y^2f(xy)-1]}{\partial x}\\&=\frac{1}{y^2}\cdot[y^2f(xy)-1]+\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial[y^2f(xy)]}{\partial x}\\&=\frac{1}{y^2}\cdot[y^2f(xy)-1]+\frac{x}{y^2}\cdot\left[\frac{\partial(y^2)}{\partial x}\cdot f(xy)+y^2\cdot\frac{\partial[f(xy)]}{\partial x}\right]\\&=\frac{1}{y^2}\cdot[y^2f(xy)-1]+\frac{x}{y^2}\cdot\left[0\cdot f(xy)+y^2\cdot f'(xy)\cdot\frac{\partial(xy)}{\partial x}\right]\\&=\frac{1}{y^2}\cdot[y^2f(xy)-1]+\frac{x}{y^2}\cdot[y^2\cdot f'(xy)\cdot y]\\&=f(xy)-\frac{1}{y^2}+xyf'(xy)\end{aligned}$$

$\therefore \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \Longrightarrow \int_L \frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\,dy$ 与路径无关

设 L 由 (a,c) 到 (b,c) 的水平线 L_1 和 (b,c)到 (b,d) 的竖直线 L_2 组成



$$\begin{aligned}
&\int_L \frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\,dy\\
&=\int_{L_1} \frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy\\
&+\int_{L_2} \frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy\\
&=\int_a^b\left[\frac{1}{c}+cf(xc)\right]dx+\int_c^d\left[bf(by)-\frac{b}{y^2}\right]dy\\
&=\left[\frac{x}{c}+F(xc)\right]\Big|_a^b+\left[F(by)+\frac{b}{y}\right]\Big|_c^d\\
&=\left[\frac{b}{c}+F(bc)\right]-\left[\frac{a}{c}+F(ac)\right]+\left[F(bd)+\frac{b}{d}\right]-\left[F(bc)+\frac{b}{c}\right]\\
&=\frac{b}{d}-\frac{a}{c}+F(bd)-F(ac)\\
&=\frac{b}{d}-\frac{a}{c}+0\\
&=\frac{b}{d}-\frac{a}{c}
\end{aligned}$$

划线部分的计算过程详见本章【第二类曲线积分】第1课

【设 $F'(x)=f(x)$、$F'(y)=f(y)$

则 $[F(xc)]'=f(xc)\cdot(xc)'=cf(xc)$

$[F(by)]'=f(by)\cdot(by)'=bf(by)$

则 $\left[\frac{x}{c}+F(xc)\right]'=\left(\frac{x}{c}\right)'+[F(xc)]'=\frac{1}{c}+cf(xc)$

$\left[F(by)+\frac{b}{y}\right]'=[F(by)]'+\left(\frac{b}{y}\right)'=bf(by)-\frac{b}{y^2}$】

例3. 设函数 $u(x,y)$ 满足 $\frac{\partial[u(x,y)]}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$，且 $u(0,y)=y+1$，

L_t 是从点 $(0,0)$ 到点 $(1,t)$ 的光滑曲线，计算曲线积分

$I(t)=\int_{L_t}\frac{\partial[u(x,y)]}{\partial x}dx+\frac{\partial[u(x,y)]}{\partial y}dy$

$$\begin{aligned}
\int_{L_t}\frac{\partial[u(x,y)]}{\partial x}dx+\frac{\partial[u(x,y)]}{\partial y}dy&=u(x,y)\big|_{(0,0)}^{(1,t)}\\
&=(xe^{2x-y}+y+1)\big|_{(0,0)}^{(1,t)}\\
&=(1\cdot e^{2\times1-t}+t+1)-(0\cdot e^{2\times0-0}+0+1)\\
&=e^{2-t}+t
\end{aligned}$$

$\because \frac{\partial[u(x,y)]}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$

$\therefore u(x,y)=\int(2x+1)e^{2x-y}\,dx+$ 不含 x 的项

$=\int[2x\cdot e^{2x-y}+1\cdot e^{2x-y}]\,dx+$ 不含 x 的项

$=\int\left[x\cdot\frac{\partial(e^{2x-y})}{\partial x}+x'\cdot e^{2x-y}\right]dx+$ 不含 x 的项

$=xe^{2x-y}+$ 不含 x 的项

$u(0,y)=y+1$

将 x=0 代入 $u(x,y)=xe^{2x-y}+$ 不含 x 的项：

$u(0,y)=0\cdot e^{2\times0-y}+$ 不含 x 的项

$\Longrightarrow u(0,y)=$ 不含 x 的项

$\therefore$ 不含 x 的项 $=y+1$

$\therefore u(x,y)=xe^{2x-y}+y+1$

$\oint_L Pdx + Qdy$ 与路径无关

例1. 设在上半平面 D=$\{(x,y)|y>0\}$ 内，函数 f(x,y) 具有连续

偏导数，且 $f(x,y) + yf'_2(x,y) = -f(x,y) - xf'_1(x,y)$ 。

证明：对 D 内任意一条简单闭曲线 L，

都有 $\oint_L yf(x,y)dx - xf(x,y)dy = 0$

$P = yf(x,y)$，$Q = -xf(x,y)$

$\because$ 根据题干可知，在 D 内，P、Q 有意义

$\frac{\partial P}{\partial y} = f(x,y) + yf'_2(x,y)$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = -f(x,y) - xf'_1(x,y)$

且 $\frac{\partial P}{\partial y}$、$\frac{\partial Q}{\partial x}$ 连续，$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$\therefore$ D 内任意一条简单的闭曲线 L ，都有 $\oint_L yf(x,y)dx - xf(x,y)dy = 0$

例2. 设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数，对右平面 x>0 内的任意一条

简单闭曲线 L ，有 $\oint_L \frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4} = 0$，求函数 $\varphi(y)$ 的表达式

$\oint_L \frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4} = \oint_L \frac{\varphi(y)}{2x^2+y^4}dx + \frac{2xy}{2x^2+y^4}dy$

$P = \frac{\varphi(y)}{2x^2+y^4}$，$Q = \frac{2xy}{2x^2+y^4}$

$\because$ 根据题干可知，在 D 内，P、Q 有意义

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2x^2\varphi'(y)+y^4\varphi'(y)-4y^3\cdot\varphi(y)}{(2x^2+y^4)^2}$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-4x^2y+2y^5}{(2x^2+y^4)^2}$

且 $\frac{\partial P}{\partial y}$、$\frac{\partial Q}{\partial x}$ 连续

$\therefore$ 根据题干可知，$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 即 $\frac{2x^2\varphi'(y)+y^4\varphi'(y)-4y^3\cdot\varphi(y)}{(2x^2+y^4)^2} = \frac{-4x^2y+2y^5}{(2x^2+y^4)^2}$

$$\Rightarrow 2x^2\varphi'(y) + y^4\varphi'(y) - 4y^3\cdot\varphi(y) = -4x^2y + 2y^5$$

$$\Rightarrow 2x^2\varphi'(y) + y^4\varphi'(y) - 4y^3\cdot\varphi(y) + 4x^2y - 2y^5 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2[\varphi'(y) + 2y] + y^3[y\varphi'(y) - 4\varphi(y) - 2y^2] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi'(y) + 2y = 0 & ① \\ y\varphi'(y) - 4\varphi(y) - 2y^2 = 0 & ② \end{cases}$$

由①式可得：

$\varphi'(y) = -2y$

$\therefore$ 若对两边同时积分，则

$\int \varphi'(y)dy = \int -2y\,dy + C$

即 $\varphi(y) = \int -2y\,dy + C$

$= -y^2 + C$

将 $\varphi'(y) = -2y$、$\varphi(y) = -y^2 + C$ 代入②式，可得：

$y\cdot(-2y) - 4(-y^2 + C) - 2y^2 = 0$

$\Rightarrow -4C = 0$

$\Rightarrow C = 0$

将 $C = 0$ 代入刚才求的结论 $\varphi(y) = -y^2 + C$，可得：

$\varphi(y) = -y^2 + C = -y^2 + 0 = -y^2$

已知$\dfrac{\partial u}{\partial x}$、$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，求 u

例1. 已知二元函数 u(x,y) 的两个一阶偏导 $\frac{\partial u}{\partial x}=5x^4+3xy^2-y^3$

$\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2y-3xy^2+y^2$，求 u(x,y) 的表达式

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} y变y_0后的\frac{\partial u}{\partial x}dx+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial u}{\partial y}dy+C$$

$$=\int_{x_0}^{x}(5x^4+3xy_0{}^2-y_0{}^3)dx+\int_{y_0}^{y}(3x^2y-3xy^2+y^2)dy+C \quad \boxed{设\ x_0=0，\ y_0=0}$$

$$=\int_{0}^{x}(5x^4+3x\cdot 0^2-0^3)dx+\int_{0}^{y}(3x^2y-3xy^2+y^2)dy+C$$

$$=\int_{0}^{x}5x^4\,dx+\int_{0}^{y}(3x^2y-3xy^2+y^2)\,dy+C$$

$$=\int_{0}^{x}5x^4\,dx+\int_{0}^{y}3x^2y\,dy-\int_{0}^{y}3xy^2\,dy+\int_{0}^{y}y^2\,dy+C$$

$$=x^5\Big|_0^x+\frac{3}{2}x^2y^2\Big|_0^y-xy^3\Big|_0^y+\frac{1}{3}y^3\Big|_0^y+C$$

$$=x^5-0^5+\frac{3}{2}x^2y^2-\frac{3}{2}x^2\cdot 0^2-(xy^3-x\cdot 0^3)+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{3}\cdot 0^3+C$$

$$=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3+C$$

计算 $\int_L Pdx + Qdy + Rdz$

例1. 计算曲线积分 $\oint_L (z-y)dx + (x-z)dy + (x-y)dz$，

其中曲线 L 是 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$，从 z 轴正向看去，

L 的方向是顺时针的

$L_{投影}: \underline{x^2+y^2=1}$，顺时针 $\longleftarrow$ ∵ 从 z 轴正向看去，L 的方向是顺时针的 ∴ $L_{投影}$ 的方向也是顺时针的

$x-y+z=2 \Rightarrow z=2-x+y$

$$\oint_L (z-y)dx + (x-z)dy + (x-y)dz$$

$$= \oint_{L_{投影}} (z-y)dx + (x-z)dy + (x-y)\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)$$

$$= \oint_{L_{投影}} (2-x+y-y)dx + [x-(2-x+y)]dy + (x-y)\left[\frac{\partial(2-x+y)}{\partial x}dx + \frac{\partial(2-x+y)}{\partial y}dy\right]$$

$$= \oint_{L_{投影}} (2-x+y-y)dx + [x-(2-x+y)]dy + (x-y)(-dx+dy)$$

$$= \oint_{L_{投影}} (2-2x+y)dx + (3x-2y-2)dy \longleftarrow$$

本章【第二类曲线积分】第2课 例1 求过了

$$= -2\pi$$

例2. 计算 $\oint_L (y^2-z^2)dx + (2z^2-x^2)dy + (3x^2-y^2)dz$，

其中 L 是平面 x+y+z=2 与柱面 |x|+|y|=1 的交线，

从 z 轴正向看去，L 的方向是逆时针的

$$\oint_L (y^2-z^2)dx + (2z^2-x^2)dy + (3x^2-y^2)dz$$

$$= \oint_{L_{投影}} (y^2-z^2)dx + (2z^2-x^2)dy + (3x^2-y^2)\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)$$

L 的方程为 $\begin{cases} x+y+z=2 \\ \underline{|x|+|y|=1} \end{cases}$

$L_{投影}: \underline{|x|+|y|=1}$，逆时针 $\longleftarrow$ ∵ 从 z 轴正向看去，L 的方向是逆时针的 ∴ $L_{投影}$ 的方向也是逆时针的

$x+y+z=2 \Rightarrow z=2-x-y$

$$\oint_L (y^2-z^2)dx + (2z^2-x^2)dy + (3x^2-y^2)dz$$

$$= \oint_{L_{投影}} (y^2-z^2)dx + (2z^2-x^2)dy + (3x^2-y^2)\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)$$

$$= \oint_{L_{投影}} [y^2-(2-x-y)^2]dx + [2(2-x-y)^2-x^2]dy + (3x^2-y^2)\left[\frac{\partial(2-x-y)}{\partial x}dx + \frac{\partial(2-x-y)}{\partial y}dy\right]$$

$$= \oint_{L_{投影}} [y^2-(2-x-y)^2]dx + [2(2-x-y)^2-x^2]dy + (3x^2-y^2)(-dx-dy)$$

$$= \underline{\oint_{L_{投影}} (-4-4x^2+y^2-2xy+4x+4y)dx + (8-2x^2+3y^2+4xy-8x-8y)dy}$$

$$= -24$$

本章【第二类曲线积分】第2课 例1 求过了

计算 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS$

例1. 已知 Σ 为 $x-y+z=2$ 被 $x^2+y^2=1$ 所围的部分，

求 $\iint\limits_{\Sigma} -\frac{2\sqrt{3}}{3}\,dS$

$x-y+z=2 \implies z=2-x+y$

$$\iint\limits_{\Sigma} -\frac{2\sqrt{3}}{3}\,dS = \iint\limits_{D_{xy}} -\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} -\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{1+(-1)^2+1^2}\,dxdy$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} -\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}\,dxdy$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} -2\,dxdy$$

$$= -2\iint\limits_{D_{xy}} 1\,dxdy$$

$$= -2\cdot(D_{xy}\text{的面积})$$

$$= -2\cdot(\pi\times 1^2)$$

$$= -2\pi$$

a、形成 Σ 的所有方程：

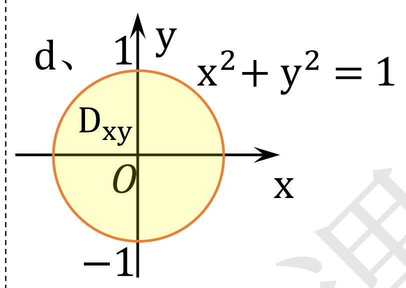
$x-y+z=2$

$x^2+y^2=1$

b、$x^2+y^2=1$

c、无结果

d、



$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial(2-x+y)}{\partial x} = -1$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial(2-x+y)}{\partial y} = 1$

例2. 已知 Σ 为 $x+y+z=2$ 被 $|x|+|y|=1$ 所围的部分，

求 $\iint\limits_{\Sigma} \frac{2\sqrt{3}}{3}(-4x-2y-3z)\,dS$

$x+y+z=2 \implies z=2-x-y$

$$\iint\limits_{\Sigma} \frac{2\sqrt{3}}{3}(-4x-2y-3z)dS = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{2\sqrt{3}}{3}[-4x-2y-3(2-x-y)]\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} \frac{2\sqrt{3}}{3}[-4x-2y-3(2-x-y)]\cdot\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,dxdy$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} \frac{2\sqrt{3}}{3}(-x+y-6)\cdot\sqrt{3}\,dxdy$$

$$= \underline{\iint\limits_{D_{xy}} (-2x+2y-12)\,dxdy}$$

$$= -24$$

本章【第二类曲线积分】第2课 例2

解题步骤的第三行计算过了

a、形成 Σ 的所有方程：

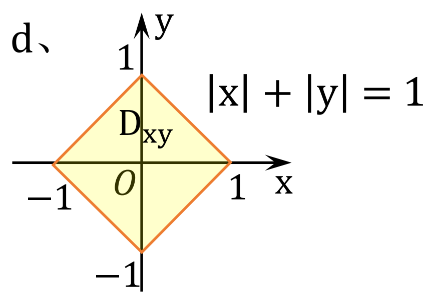
$x+y+z=2$

$|x|+|y|=1$

b、$|x|+|y|=1$

c、无结果

d、



$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial(2-x-y)}{\partial x} = -1$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial(2-x-y)}{\partial y} = -1$

例3. 设曲线 C 的方程为$\begin{cases}2z-y=0\\ x^2+y^2+z^2-yz=1\end{cases}$，计算

曲线积分$\iint\limits_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS$，其中 Σ 是椭球面 S:

$x^2+y^2+z^2-yz=1$ 位于曲线 C 上方的部分

$x^2+y^2+z^2-yz=1$ 不能写成 $z=?$ 的形式，∴ 先写成 $z=z$ 吧

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{2x}{y-2z}\right)^2+\left(\frac{2y-z}{y-2z}\right)^2}\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\cdot\sqrt{\frac{(y-2z)^2}{(y-2z)^2}+\frac{(2x)^2}{(y-2z)^2}+\frac{(2y-z)^2}{(y-2z)^2}}\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\cdot\sqrt{\frac{4x^2+5y^2+5z^2-8yz}{(y-2z)^2}}\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\cdot\sqrt{\frac{y^2+z^2-4yz+4x^2+4y^2+4z^2-4yz}{(y-2z)^2}}\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\cdot\sqrt{\frac{y^2+z^2-4yz+4(x^2+y^2+z^2-yz)}{(y-2z)^2}}\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\cdot\sqrt{\frac{y^2+z^2-4yz+4\times1}{(y-2z)^2}}\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\cdot\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|y-2z|}\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(x+\sqrt{3})\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}x\,dxdy+\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{3}\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}x\,dxdy+\sqrt{3}\iint\limits_{D_{xy}}dxdy$$

$$=0+\sqrt{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$

$$=2\pi$$

详见强化高数下 — 第二章 —《二重积分》的第七课

$\because D_{xy}$关于 x 轴对称

且 $f(x,y)=x$，$f(-x,y)=-x$

即 $f(-x,-y)=-f(x,y)$

$\therefore\iint\limits_{D_{xy}}x\,dxdy=0$

$\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=D_{xy}$区域的面积

$=$椭圆的面积

$=\pi\times1\times\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

a、形成 Σ 的所有方程:

$\begin{cases}2z-y=0\\ x^2+y^2+z^2-yz=1\end{cases}$

$x^2+y^2+z^2-yz=1$

b、无结果

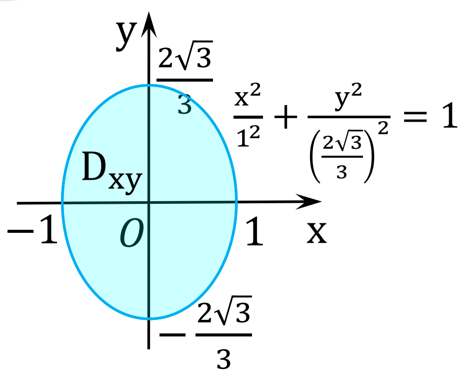
c、$\begin{cases}2z-y=0\\ x^2+y^2+z^2-yz=1\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}z=\frac{y}{2}\\ x^2+y^2+z^2-yz=1\end{cases}$

$\Rightarrow x^2+y^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2-y\cdot\frac{y}{2}=1$

$\Rightarrow\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=1$

d、



$x^2+y^2+z^2-yz=1$ 隐函数

a、将等式变成 ?=0 的形式，令 F=?

$x^2+y^2+z^2-yz=1$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-yz-1=0$

$F=x^2+y^2+z^2-yz-1$

b、求 $\frac{\partial F}{\partial x}$、$\frac{\partial F}{\partial y}$、$\frac{\partial F}{\partial z}$（当作 z 同 x、y 无关）

$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial(x^2+y^2+z^2-yz-1)}{\partial x}=2x$

$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial(x^2+y^2+z^2-yz-1)}{\partial y}=2y-z$

$\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial(x^2+y^2+z^2-yz-1)}{\partial z}=2z-y$

c、$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\neq0\right)$

$\therefore\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{2x}{2z-y}=\frac{2x}{y-2z}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{2y-z}{2z-y}=\frac{2y-z}{y-2z}$

详见强化高数下 —《多元函数微分学》— 第6课的知识

通过对称性计算 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS$

$\to |-x|+|y|+|z|=1 \Rightarrow |x|+|y|+|z|=1$

例1. 设曲面 Σ : $\underline{|x|+|y|+|z|=1}$，

则 $\oiint\limits_{\Sigma} xy^2\,dS =$____。

令 x 变 $-x$ 时，xy^2 变 $-xy^2$

$\because$ 构成 Σ 的式子中的 x 变 $-x$ 后，式子不变

$\therefore \oiint\limits_{\Sigma} xy^2\,dS = 0$

$\to x^2+(-y)^2+z^2=a^2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=a^2$

例2. 已知 Σ 为球面 $\underline{x^2+y^2+z^2=a^2}$ 上

$z \geq h$ 的部分，其中 $0<h<a$，

计算 $\iint\limits_{\Sigma} x^2y\,dS$

令 y 变 $-y$ 时，x^2y 变 $x^2(-y)=-x^2y$

$\because$ 构成 Σ 的式子中的 y 变 $-y$ 后，式子不变

$\therefore \iint\limits_{\Sigma} x^2y\,dS = 0$

$\to (-x)+(-y)+(-z)=0 \Rightarrow x+y+z=0$

例3. 设曲面 Σ : $\underline{x+y+z=0}$，

计算 $\iint\limits_{\Sigma} xyz\,dS$

令 x 变 $-x$、y 变 $-y$、z 变 $-z$ 时，xyz 变 $(-x)(-y)(-z)=-xyz$

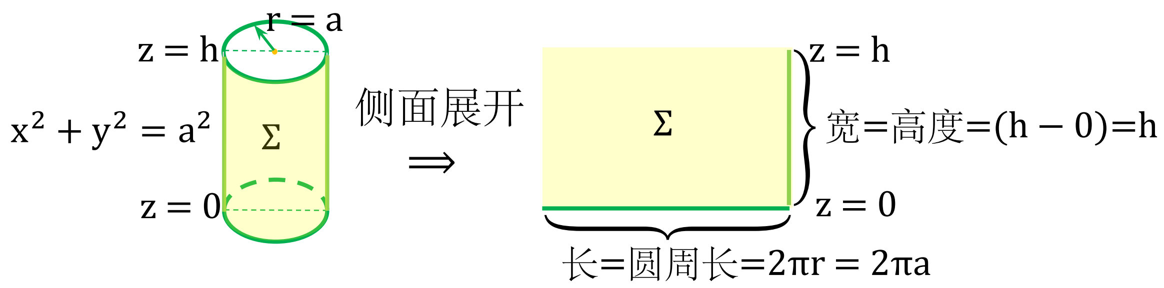
$\because$ 构成 Σ 的式子中的 x 变 $-x$、y 变 $-y$、z 变 $-z$ 后，式子不变

$\therefore \iint\limits_{\Sigma} xyz\,dS = 0$

通过轮换对称性计算 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS$

例1. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} x^2\,dS$，$\Sigma$ 为圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ ← $\boxed{x,y\text{ 地位相等}}$

介于 $z=0$ 与 $z=h$ 之间的部分



$$\iint\limits_{\Sigma} x^2\,dS = \iint\limits_{\Sigma} y^2\,dS$$

$$\iint\limits_{\Sigma} (x^2+y^2)\,dS = \iint\limits_{\Sigma} x^2\,dS + \iint\limits_{\Sigma} y^2\,dS$$

$$= 2\iint\limits_{\Sigma} x^2\,dS$$

即 $\iint\limits_{\Sigma} x^2\,dS = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma} (x^2+y^2)\,dS$

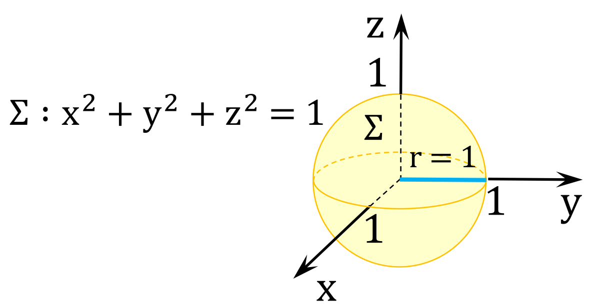
即 $\iint\limits_{\Sigma} x^2\,dS = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma} a^2\,dS = \frac{a^2}{2}\iint\limits_{\Sigma} 1\,dS = \frac{a^2}{2}\cdot\Sigma\text{的面积}$

$$= \frac{a^2}{2}\cdot 2\pi a\cdot h$$

$$= \pi a^3 h$$

$\boxed{x,y,z\text{ 地位相等}}$ ↓

例2. 设曲面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$，计算 $\oiint\limits_{\Sigma} y^2\,dS$



$$\oiint\limits_{\Sigma} x^2\,dS = \oiint\limits_{\Sigma} y^2\,dS = \oiint\limits_{\Sigma} z^2\,dS$$

$$\oiint\limits_{\Sigma} (x^2+y^2+z^2)\,dS = \oiint\limits_{\Sigma} x^2\,dS + \oiint\limits_{\Sigma} y^2\,dS + \oiint\limits_{\Sigma} z^2\,dS$$

$$= 3\oiint\limits_{\Sigma} y^2\,dS$$

即 $\oiint\limits_{\Sigma} y^2\,dS = \frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma} (x^2+y^2+z^2)\,dS$

即 $\oiint\limits_{\Sigma} y^2\,dS = \frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma} 1\,dS = \frac{1}{3}\cdot\Sigma\text{ 的面积} = \frac{1}{3}\cdot 4\pi\times 1^2 = \frac{4\pi}{3}$

通过斯托克斯公式计算 $\oint_L \mathrm{Pdx} + \mathrm{Qdy} + \mathrm{Rdz}$

例1. 计算曲线积分 $\oint_L (z-y)dx + (x-z)dy + (x-y)dz$，

其中曲线 L 是 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$，从 z 轴正向看去，

L 的方向是顺时针的

Σ 为平面 $x-y+z=2$ 被 $x^2+y^2=1$ 所围的部分

$(A,B,C)=(-1,1,-1)$

$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{|(-1,1,-1)|}\cdot(-1,1,-1)=\frac{1}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}}\cdot(-1,1,-1)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$\oint_L (z-y)dx + (x-z)dy + (x-y)dz$

$$=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z-y & x-z & x-y \end{vmatrix} dS$$

$$=\iint_\Sigma \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}\left[\frac{\partial(x-y)}{\partial y}-\frac{\partial(x-z)}{\partial z}\right]-\frac{\sqrt{3}}{3}\left[\frac{\partial(x-y)}{\partial x}-\frac{\partial(z-y)}{\partial z}\right]-\frac{\sqrt{3}}{3}\left[\frac{\partial(x-z)}{\partial x}-\frac{\partial(z-y)}{\partial y}\right]\right\}dS$$

$$=\iint_\Sigma \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}[(-1)-(-1)]-\frac{\sqrt{3}}{3}(1-1)-\frac{\sqrt{3}}{3}[1-(-1)]\right\}dS$$

$$=\iint_\Sigma -\frac{2\sqrt{3}}{3}dS \leftarrow$$ 本章【第一类曲面积分】第1课 例1 求过了

$=-2\pi$

例2. 计算 $\oint_L (y^2-z^2)dx + (2z^2-x^2)dy + (3x^2-y^2)dz$，

其中 L 是平面 x+y+z=2 与柱面 |x|+|y|=1 的交线，

从 z 轴正向看去，L 的方向是逆时针的

Σ 为平面 $x+y+z=2$ 被 |x|+|y|=1 所围的部分

$(A,B,C)=(1,1,1)$

$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{|(1,1,1)|}\cdot(1,1,1)=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\cdot(1,1,1)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$\oint_L (y^2-z^2)dx + (2z^2-x^2)dy + (3x^2-y^2)dz$

$$=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & 2z^2-x^2 & 3x^2-y^2 \end{vmatrix} dS$$

$$=\iint_\Sigma \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\left[\frac{\partial(3x^2-y^2)}{\partial y}-\frac{\partial(2z^2-x^2)}{\partial z}\right]-\frac{\sqrt{3}}{3}\left[\frac{\partial(3x^2-y^2)}{\partial x}-\frac{\partial(y^2-z^2)}{\partial z}\right]+\frac{\sqrt{3}}{3}\left[\frac{\partial(2z^2-x^2)}{\partial x}-\frac{\partial(y^2-z^2)}{\partial y}\right]\right\}dS$$

$$=\iint_\Sigma \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}(-2y-4z)-\frac{\sqrt{3}}{3}[6x-(-2z)]+\frac{\sqrt{3}}{3}(-2x-2y)\right\}dS$$

$$=\iint_\Sigma \frac{2\sqrt{3}}{3}(-4x-2y-3z)\,dS \leftarrow$$ 本章【第一类曲面积分】第1课 例2 求过了

$=-24$

求某面 Σ 上的 $\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$

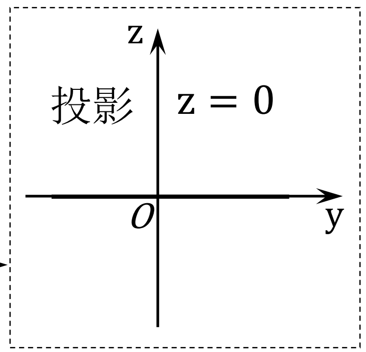
例1. 计算 $\iint\limits_{\Sigma_1} xydydz + xdzdx + x^2dxdy$，

Σ_1 为 $\begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ z=0 \end{cases}$ 的下侧

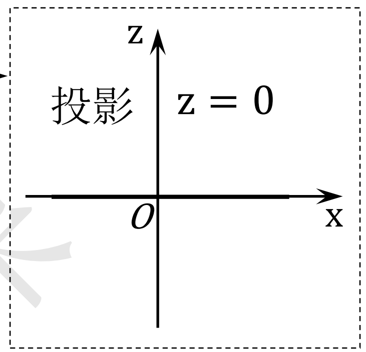
$$\iint\limits_{\Sigma_1} xydydz + xdzdx + x^2dxdy$$

$$= \iint\limits_{\Sigma_1} xydydz + \iint\limits_{\Sigma_1} xdzdx + \iint\limits_{\Sigma_1} x^2dxdy$$

$$= \pm \underbrace{\iint\limits_{\Sigma_1\text{在yOz面的投影}}}_{\text{少x}} xydydz \pm \iint\limits_{\Sigma_1\text{在xOz面的投影}} xdzdx \pm \iint\limits_{\Sigma_1\text{在xOy面的投影}} x^2dxdy$$



$$= \pm 0 \pm \underbrace{\iint\limits_{\Sigma_1\text{在xOz面的投影}}}_{\text{少y}} xdzdx \pm \iint\limits_{\Sigma_1\text{在xOy面的投影}} x^2dxdy$$

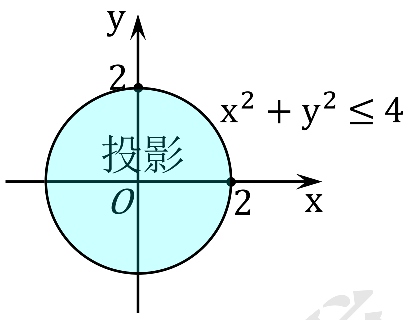


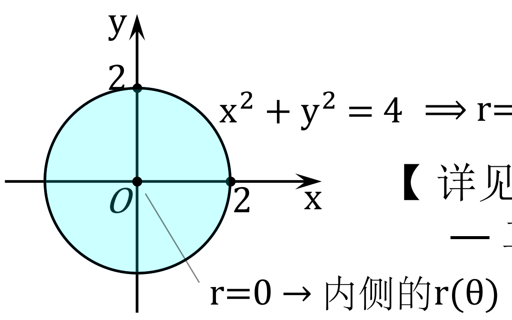
$$= \pm 0 \pm 0 \pm \iint\limits_{\Sigma_1\text{在xOy面的投影}} x^2dxdy$$

$$= \pm \iint\limits_{\Sigma_1\text{在xOy面的投影}} x^2dxdy \quad \boxed{\Sigma_1 \text{ 是下侧}}$$

$$= - \iint\limits_{\Sigma_1\text{在xOy面的投影}} x^2dxdy$$

$$= -4\pi$$





【 详见强化高数下 — 第二章 — 二重积分 — 第五课 】

$$\therefore \ -\iint\limits_{\Sigma_1\text{在xOy面的投影}} x^2dxdy = -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (r\cos\theta)^2\, rdr$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3\cos^2\theta\, dr$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 r^3\cos^2\theta\, dr\right] d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{r^4}{4}\cos^2\theta\right)\Big|_{r=0}^{r=2}\right] d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left(\frac{2^4}{4}\cos^2\theta - \frac{0^4}{4}\cos^2\theta\right) d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} 4\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} (2+2\cos2\theta)\, d\theta$$

$$= -(2\theta + \sin2\theta)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= -4\pi$$

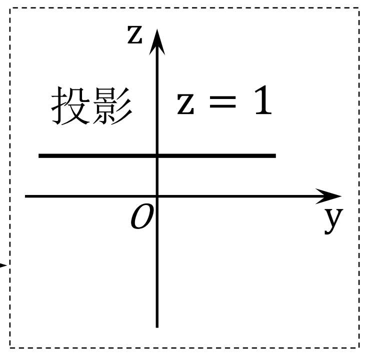
例2. 计算 $\iint\limits_{\Sigma_1} xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dxdy$,

Σ_1 为 $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 1 \\ z = 1 \end{cases}$ 的上侧

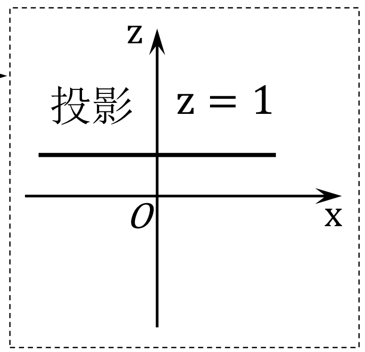
$$\iint\limits_{\Sigma_1} xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dxdy$$

$$= \iint\limits_{\Sigma_1} xdydz + \iint\limits_{\Sigma_1} 2ydzdx + \iint\limits_{\Sigma_1} 3(z-1)dxdy$$

$$= \underbrace{\pm \iint\limits_{\Sigma_1\text{在yOz面的投影}} xdydz}_{\text{少x}} \pm \iint\limits_{\Sigma_1\text{在xOz面的投影}} 2ydzdx \pm \iint\limits_{\Sigma_1\text{在xOy面的投影}} 3(z-1)dxdy$$



$$= \pm 0 \pm \underbrace{\iint\limits_{\Sigma_1\text{在xOz面的投影}} 2ydzdx}_{\text{少y}} \pm \iint\limits_{\Sigma_1\text{在xOy面的投影}} 3(z-1)dxdy$$



$$= \pm 0 \pm 0 \pm \iint\limits_{\Sigma_1\text{在xOy面的投影}} 3(z-1)dxdy$$

$$= \pm \iint\limits_{\Sigma_1\text{在xOy面的投影}} 3(z-1)dxdy \quad \boxed{\Sigma_1 \text{ 表达式中 } z = 1}$$

$$= \pm \iint\limits_{\Sigma_1\text{在xOy面的投影}} 3(1-1)dxdy$$

$$= \pm \iint\limits_{\Sigma_1\text{在xOy面的投影}} 0\, dxdy$$

$$= 0$$

用高斯公式求 $\oiint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$

例1. 设 Σ 是曲面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与平面 $z=0$ 所围空间区域的表面外侧，计算 $\oiint\limits_{\Sigma} \underbrace{xy}_{P}dydz + \underbrace{x}_{Q}dzdx + \underbrace{x^2}_{R}dxdy$

P、Q、R 在 Σ 围成的空间区域 Ω 上都一直有意义

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial (xy)}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial (x^2)}{\partial z} = 0$$

$\frac{\partial P}{\partial x}$、$\frac{\partial Q}{\partial y}$、$\frac{\partial R}{\partial z}$ 在 Σ 围成的空间区域 Ω 上都一直连续

$\because$ Σ 是外侧

$$\therefore \oiint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$$

即 $\oiint\limits_{\Sigma} xydydz + xdzdx + x^2dxdy = \iiint\limits_{\Omega} (y+0+0)\, dxdydz$

$$= \iiint\limits_{\Omega} y\, dxdydz$$

$$= 0$$

详见强化高数下第五章《三重积分》第四课

$\because$ Ω 由 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与平面 $z=0$ 所围成

把 Ω 中的 y 变成 $-y$ 时，Ω 不变

且 $f(x,y,z) = y$，$f(x,-y,z) = -y$

$f(x,-y,z) = -f(x,y,z)$

$\therefore \iiint\limits_{\Omega} y\, dxdydz = 0$

例2. 设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围空间区域的

表面外侧，计算 $\oiint\limits_{\Sigma} \underbrace{x}_{P}dydz+\underbrace{2y}_{Q}dzdx+\underbrace{3(z-1)}_{R}dxdy$

P、Q 、R在 Σ 围成的空间区域 Ω 上都一直有意义

$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{dx}{dx}=1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{d(2y)}{dy}=2 \qquad \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{d[3(z-1)]}{dz}=3$

$\frac{\partial P}{\partial x}$、$\frac{\partial Q}{\partial y}$、$\frac{\partial R}{\partial z}$在 Σ 围成的空间区域 Ω 都一直连续

$\because \Sigma$ 是外侧

$\therefore \oiint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$

即 $\oiint\limits_{\Sigma} xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy=\iiint\limits_{\Omega}(1+2+3)\,dxdydz$

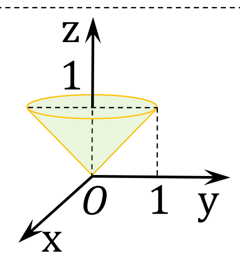
$=\iiint\limits_{\Omega} 6\,dxdydz$

$=6\iiint\limits_{\Omega} 1\,dxdydz$

$=6\cdot\underline{(\text{空间区域 }\Omega\text{ 的体积})}$

$=6\times\underline{\frac{1}{3}\times\pi\times 1^2\times 1}$

$=2\pi$



圆锥体体积 $=\frac{1}{3}\times$ 底面积 $\times$ 高

$=\frac{1}{3}\pi r^2\times$ 高

例3. 设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的内侧，

计算 $\oiint\limits_{\Sigma} \underbrace{x}_{P}dydz+\underbrace{y}_{Q}dzdx+\underbrace{z}_{R}dxdy$

P、Q 、R在 Σ 围成的空间区域 Ω 上都一直有意义

$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{dx}{dx}=1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{dy}{dy}=1 \qquad \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{dz}{dz}=1$

$\frac{\partial P}{\partial x}$、$\frac{\partial Q}{\partial y}$、$\frac{\partial R}{\partial z}$在 Σ 围成的空间区域 Ω 都一直连续

$\because \Sigma$ 是内侧

$\therefore \oiint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=-\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$

即 $\oiint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy=-\iiint\limits_{\Omega}(1+1+1)\,dxdydz$

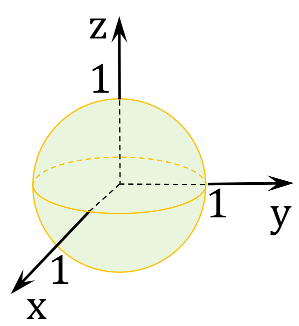
$=-\iiint\limits_{\Omega} 3\,dxdydz$

$=-3\iiint\limits_{\Omega} 1\,dxdydz$

$=-3\cdot\underline{(\text{空间区域 }\Omega\text{ 的体积})}$

$=-3\cdot\underline{\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3}$

$=-4\pi$



球的体积 $=\frac{4}{3}\pi R^3$

通过高斯公式+补面来计算 $\iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$

例1. 设曲面 Σ 是 $z=\overset{\geq 0}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ 的上侧，

求 $\iint\limits_{\Sigma} xydydz + xdzdx + x^2dxdy$

$$\iint\limits_{\Sigma} xydydz + xdzdx + x^2dxdy = \underbrace{\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} xydydz + xdzdx + x^2dxdy}_{} - \underbrace{\iint\limits_{\Sigma_1} xydydz + xdzdx + x^2dxdy}_{}$$

$$= 0 - (-4\pi)$$

$$= 4\pi$$

本章【第二类曲面积分】第1课 例1 求过

本章【第二类曲面积分】第2课 例1 求过

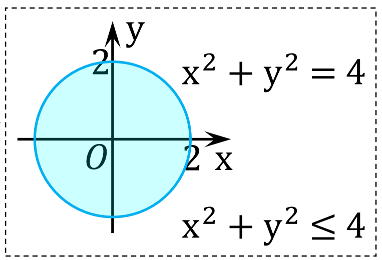
$\Sigma_1: \begin{cases} z = z_0 \\ z_0 = z(x,y) \text{ 包围的区域} \end{cases}$ 的下侧 Σ 是上侧，Σ_1 就是下侧

$\Downarrow$

$\Sigma_1: \begin{cases} z = 0 \\ 0 = \sqrt{4-x^2-y^2} \text{ 包围的区域} \end{cases}$ 的下侧

$\Downarrow$

$\Sigma_1: \begin{cases} z = 0 \\ x^2+y^2 = 4 \text{ 包围的区域} \end{cases}$ 的下侧



$\Downarrow$

$\Sigma_1: \begin{cases} z = 0 \\ x^2+y^2 \leq 4 \end{cases}$ 的下侧

∵ 0 是 z 的最小值

∴ z = 0 对应的面 Σ_1 的 z 值更小

∴ 面 Σ 的 z 值更大， 而 Σ 是上侧

∴ 上侧的面 z 值更大

$\Sigma + \Sigma_1$ 是 Σ 同 z = 0 组成曲面的 $\begin{cases} \text{外侧，上侧的面 z 值更大} \\ \text{内侧，下侧的面 z 值更大} \end{cases}$

$\Downarrow$

$\Sigma + \Sigma_1$ 是 Σ 同 z = 0 组成曲面的外侧

例2. 设曲面 Σ 是 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\le z\le 1)$ 的下侧，

求 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy$

$$\iint\limits_{\Sigma} xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy=\underline{\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy}-\underline{\iint\limits_{\Sigma_1} xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy}$$

$$=2\pi-0$$

$$=2\pi$$

本章【第二类曲面积分】第1课 例2 求过

本章【第二类曲面积分】第2课 例2 求过

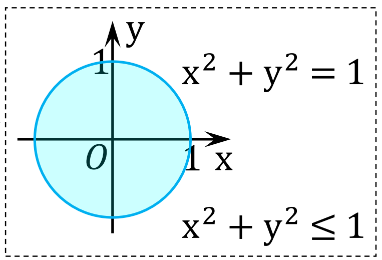
$\Sigma_1:\begin{cases} z=z_0 \\ z_0=z(x,y)\ \text{包围的区域}\end{cases}$ 的上侧　Σ 是下侧，Σ_1 就是上侧

$\Downarrow$

$\Sigma_1:\begin{cases} z=1 \\ 1=\sqrt{x^2+y^2}\ \text{包围的区域}\end{cases}$ 的上侧

$\Downarrow$

$\Sigma_1:\begin{cases} z=1 \\ x^2+y^2=1\ \text{包围的区域}\end{cases}$ 的上侧



$\Downarrow$

$\Sigma_1:\begin{cases} z=1 \\ x^2+y^2\le 1\end{cases}$ 的上侧

∵ 1 是 z 的最大值
∴ $z=1$ 对应的面 Σ_1 的 z 值更大
而 Σ_1 是上侧
∴ 上侧的面 z 值更大

$\Sigma+\Sigma_1$ 是 Σ 同 $z=1$ 组成曲面的$\begin{cases}\text{外侧，上侧的面 } z \text{ 值更大} \\ \text{内侧，下侧的面 } z \text{ 值更大}\end{cases}$

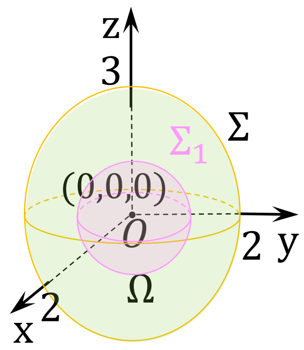
$\Downarrow$

$\Sigma+\Sigma_1$ 是 Σ 同 $z=1$ 组成曲面的外侧

不能用高斯公式的一种情况

例1. 设 Σ 是椭球面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ 的外侧，

求 $\oiint\limits_{\Sigma} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dydz+\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dzdx+\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy$



$P=\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$、$Q=\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$、$R=\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial\left[\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]}{\partial x}=\frac{1\cdot(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}-x\cdot\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x}{\left[(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\right]^2}$$

$$=\frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial\left[\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]}{\partial y}=\frac{1\cdot(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}-y\cdot\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2y}{\left[(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\right]^2}=\frac{x^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial\left[\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]}{\partial z}=\frac{1\cdot(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}-z\cdot\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2z}{\left[(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\right]^2}=\frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{x^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{0}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}=0$$

$\Sigma_1: x^2\ +\ y^2+z^2=1$，取内侧

$$\oiint\limits_{\Sigma} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dydz+\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dzdx+\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy$$

$$=-\oiint\limits_{\Sigma_1} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dydz+\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dzdx+\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy$$

$$=-\oiint\limits_{\Sigma_1} \frac{x}{1^{\frac{3}{2}}}dydz+\frac{y}{1^{\frac{3}{2}}}dzdx+\frac{z}{1^{\frac{3}{2}}}dxdy$$

$$=-\oiint\limits_{\Sigma_1} xdydz+ydzdx+zdxdy \qquad \boxed{\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{dx}{dx}=1、\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{dy}{dy}=1、\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{dz}{dz}=1}$$

$$=-\left[-\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz\right]$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(1+1+1)\,dxdydz$$

$$=\iiint\limits_{\Omega} 3\,dxdydz$$

$$=3\iiint\limits_{\Omega} 1\,dxdydz$$

$$=3\times\left(\frac{4}{3}\pi\times 1^3\right)$$

$$=4\pi$$

计算长度、面积、体积、形心、质心(重心)、质量、转动惯量

例1. 设 Ω 是由半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与抛物面 $x^2+y^2=3z$

所围成的空间区域，求 Ω 的形心的竖坐标 $\bar{z}$

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz}{\iiint\limits_{\Omega} 1\,dxdydz}$$

本章《三重积分》第1课 例2 求过

$$=\frac{\frac{13\pi}{4}}{\frac{19\pi}{6}}$$

$$=\frac{39}{38}$$

详见强化高数下第五章《三重积分》第一课

$$\iiint\limits_{\Omega} 1\,dxdydz$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\int_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 1\,dz\right)dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left(z\Big|_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)dxdy$$

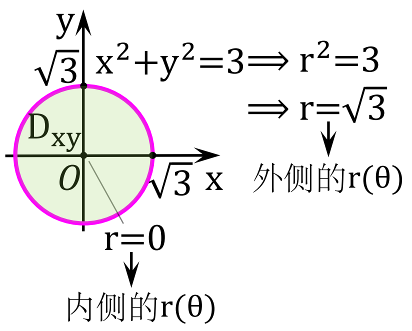
$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\sqrt{4-(x^2+y^2)}-\frac{x^2+y^2}{3}\right]dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{4-r^2}-\frac{r^2}{3}\right)r\,dr$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{3}}\left(r\sqrt{4-r^2}-\frac{r^3}{3}\right)dr\right]d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{3}}\left(r\sqrt{2^2-r^2}-\frac{r^3}{3}\right)dr\right]d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{(4-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{r^4}{12}\right]\Bigg|_0^{\sqrt{3}}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{19}{12}d\theta=\frac{19}{12}\theta\Big|_0^{2\pi}=\frac{19\pi}{6}$$



详见强化高数下第二章《二重积分》第五课

例2. 设密度为 ρ 的均匀平面薄板 D 由 $x^2\le y\le 1$ 所确定，

求该薄板 D 关于直线 $x-y=0$ 的转动惯量 I

∵ 点 (x_0,y_0) 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离 $d=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$

∴ 点 (x,y) 到直线 $x-y=0$ 的距离 $d=\left|\frac{1x+(-1)y+0}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\right|=\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$

即 $1\cdot x-1\cdot y+0=0$

$$I=\iint\limits_D d^2\rho\,dxdy$$

$$=\iint\limits_D\left(\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}\right)^2\rho\,dxdy$$

$$=\iint\limits_D\frac{x^2+y^2-2xy}{2}\rho\,dxdy$$

详见强化高数下第二章《二重积分》的一二课

$$=\frac{\rho}{2}\iint\limits_D(x^2+y^2-2xy)\,dxdy$$

$$=\frac{\rho}{2}\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}(x^2+y^2-2xy)\,dy$$

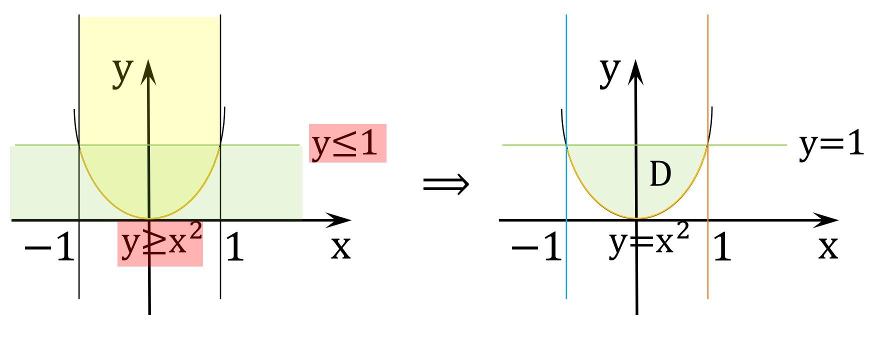
$$=\frac{\rho}{2}\int_{-1}^{1}\left[\int_{x^2}^{1}(x^2+y^2-2xy)\,dy\right]dx$$

$$=\frac{\rho}{2}\int_{-1}^{1}\left[\left(x^2y+\frac{y^3}{3}-xy^2\right)\Big|_{y=x^2}^{y=1}\right]dx$$

$$=\frac{\rho}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^2+\frac{1}{3}-x-x^4-\frac{x^6}{3}+x^5\right)dx$$

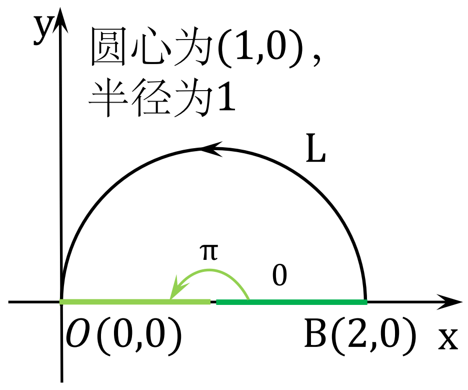
$$=\frac{\rho}{2}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{21}+\frac{x^6}{6}\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{44\rho}{105}$$



计算变力作的功

例1. 设位于点 (0,1) 的质点 A 对质点 M 的引力大小为 $\frac{k}{r^2}$（k为正常数，r 为 A 与 M 之间的距离），质点 M 沿曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 自点 B(2,0) 运动到点 $O(0,0)$，求此过程中质点 A 对质点 M 的引力所作的功



力作的功 $=\int_L F_x dx + F_y dy$

① 设 M 的坐标是 (x,y)

② 力的方向向量：$\overrightarrow{MA}=(0-x,1-y)=(-x,1-y)$

∵ 题干是质点 A 对质点 M的引力 ∴ 写成 $\overrightarrow{MA}$

$$\overrightarrow{F_0}=\frac{\overrightarrow{MA}}{|\overrightarrow{MA}|}=\frac{(-x,1-y)}{\sqrt{(-x)^2+(1-y)^2}}=\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+(1-y)^2}},\frac{1-y}{\sqrt{x^2+(1-y)^2}}\right)$$

③ $$|\vec{F}|=\frac{k}{r^2}=\frac{k}{\left(\sqrt{(0-x)^2+(1-y)^2}\right)^2}=\frac{k}{\left(\sqrt{x^2+(1-y)^2}\right)^2}=\frac{k}{x^2+(1-y)^2}$$

④ $$\vec{F}=|\vec{F}|\cdot\overrightarrow{F_0}$$

$$=\frac{k}{x^2+(1-y)^2}\cdot\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+(1-y)^2}},\frac{1-y}{\sqrt{x^2+(1-y)^2}}\right)$$

$$=\left(\frac{-kx}{[x^2+(1-y)^2]^{\frac{3}{2}}},\frac{k(1-y)}{[x^2+(1-y)^2]^{\frac{3}{2}}}\right)$$

⑤ $$F_x=\frac{-kx}{[x^2+(1-y)^2]^{\frac{3}{2}}},\quad F_y=\frac{k(1-y)}{[x^2+(1-y)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

∴ 力作的功 $=\int_L F_x dx + F_y dy$

$$=\int_L \frac{-kx}{[x^2+(1-y)^2]^{\frac{3}{2}}}dx+\frac{k(1-y)}{[x^2+(1-y)^2]^{\frac{3}{2}}}dy$$

详见 本章《第二类曲线积分》第1课

$$L:\begin{cases}x-1=\cos t\\ y-0=\sin t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\cos t+1\\ y=\sin t\end{cases},\quad (t:0\to\pi)$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{-k(\cos t+1)}{[(\cos t+1)^2+(1-\sin t)^2]^{\frac{3}{2}}}(\cos t+1)'+\frac{k(1-\sin t)}{[(\cos t+1)^2+(1-\sin t)^2]^{\frac{3}{2}}}(\sin t)'dt$$

$$=k\int_0^{\pi}\frac{\sin t+\cos t}{[3+2\cos t-2\sin t]^{\frac{3}{2}}}dt$$

$$=k\cdot\left[(3+2\cos t-2\sin t)^{-\frac{1}{2}}\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$=\frac{(5-\sqrt{5})k}{5}$$