第五章　命题逻辑（proposition logic）

命题逻辑主要研究命题的推理演算. 本章首先介绍命题逻辑中的基本概念，如命题、逻辑联结词以及命题公式等等，然后介绍命题逻辑的等值演算和推理演算.

§5.1　命题与逻辑联结词

命题逻辑研究的对象是命题(proposition).

凡具有真假意义的陈述句均称为命题.

例如，“地球绕着太阳转”（真），“太阳绕着月亮转”（假），“7 大于 5”（真），都是命题，又例如，“再见！”“祝您一路平安”，“好大的雨啊！”，这些语句不是陈述句，故不是命题. 有些陈述句，如“地球以外的星球上有人”，尽管目前还不知其真假，但它们本身是具有真假意义的，因此，也称为命题. 还有些陈述句，如“1 加上 101 等于 110”，其数学表达式 1+101=110，在十进制范围中为假，而在二进制的范围中为真. 像这类其真假与所讨论问题（称为论域）有关的陈述句也称为命题.

如果一个命题是真的，则称该命题的真值为“真”，用 T（True）或 1 表示；如果一个命题是假的，则称该命题的真值为“假”，用 F（False）或 0 表示. 由于一个命题只有“真”和“假”两个可能的取值，因此，命题逻辑又称为“二值逻辑”.

为了对命题作逻辑演算，需要将命题符号化. 今后用大写字母 $P,Q,R\cdots,P_1,P_2,\cdots$ 表示命题，称为命题符号. 例如，

P:北京是中国的首都.

即 P 表示一个具体的命题——“北京是中国的首都”时，称 P 为一个命题常元. 字母 P 也可以表示任何一个命题，此时称 P 为一个命题变元. 由定义易知，命题变元不是命题. 为方便，我们用 1 表示一个抽象的真命题，用 0 表示一个抽象的假命题.

若干命题可以通过逻辑联结词（简称联结词）构成新的命题——复合命题(compound proposition).而构成符合命题的子命题也可以是复合命题. 我们称不是复合命题的命题为简单命题(simple proposition)，在命题逻辑中，简单命题看作一个整体，它不含任何联结词. 因此，不再分析它们内部的逻辑形式.

显然，复合命题的真值依赖于其中简单命题的真值. 下面介绍五个常用的联结词.

定义 5.1.1　设 P 是一个命题. 复合题“ P 是不对的”称为 P 的否定(negation)，记为 $\neg P$，读作非 P，联结词“ $\neg$ ”称为否定词.

规定 $\neg P$ 为真当且仅当 P 为假，也可以列表定义如下：

P	$\neg P$
1	0
0	1

上表反映了 $\neg P$ 的真值与 P 的真值的依赖关系，称为“ $\neg$ ”的真值表.

[例 5.1]　P：张三是一个大学生.

$\neg P$：张三不是一个大学生.

定义 5.1.2　设 P 、Q 是两个命题. 复合命题“ P 并且 Q ”称为 P 和 Q 的合取(conjunction)，记为 $P\wedge Q$，读作 P 合取 Q，联结词“ $\wedge$ ”称为合取词，规定 $P\wedge Q$ 为真当且仅当 P 与 Q 同时为真.

“$\wedge$”的真值表如下：

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

[例 5.2]　P：今天出太阳.

Q：今天刮风.

$P \wedge Q$：今天出太阳并且刮风

定义 5.1.3　设 P、Q 是两个命题. 复合命题“P 或者 Q”称为 P 和 Q 的析取(disjunction)，记为 $P \vee Q$，读作 P 析取 Q，联结词“$\vee$”称为析取词，规定 $P \vee Q$ 为真当且仅当 P、Q 中至少有一个为真。

“$\vee$”的值表如下：

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

[例 5.3]　P：李四学过英语；

Q：李四学过俄语；

$P \vee Q$：李四学过英语或俄语.

由定义可知，析取式 $P \vee Q$ 表示的是一种“可兼式”，但是，在自然语言中，有时“或”表示的是“不可兼或”. 例如，命题“昨晚 7 点钟，张华在家看电视或者在体育场看足球比赛”. 如果该命题为真，则张华不可能同一时间既在家看电视，又在体育场看足球比赛. 因此，不能简单地表示成 $P \vee Q$ 的形式.

定义 5.1.4　设 P、Q 是两个命题，复合命题“如果 P，则 Q 称为 P 蕴涵 Q，记为 $P \to Q$”. 联结词“$\to$”称为蕴涵词(implication)，并称为 P 为条件(condition)，Q 为结(conclusion)论. 规定 $P \to Q$ 为假，当且仅当 P 为真而 Q 为假.

“$\to$”的真值表如下：

P	Q	$P \to Q$

0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

[例 5.4]　P：今天天晴.

Q：我骑自行车上班.

$P \to Q$：如果今天天晴，则我骑自行车上班.

需要注意的是，在数理逻辑中，允许复合命题$P \to Q$的条件P和结论Q在逻辑上毫无联系，例如，

P：1+1=3

Q：太阳绕着地球转.

$P \to Q$：如果 1+1=3，则太阳绕着地球转.

按定义，命题$P \to Q$为真，而P与Q在日常生活中可以说是风马牛不相及.

定义 5.1.5　设P和Q是两个命题，复合命题“P当且仅当Q称为P等价于Q，记为$P \leftrightarrow Q$”. 联结词“$\leftrightarrow$”称为等价词(equivalence)，规定$P \leftrightarrow Q$为真当且仅当P与Q同时为真或者同时为假.

“$\leftrightarrow$”的真值表如下：

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

[例 5.5]　P：张三唱歌.

Q：李四伴奏.

$P \leftrightarrow Q$：张三唱歌当且仅当李四伴奏.

同样，复合命题$P \leftrightarrow Q$中的P和Q在逻辑上可以毫无关系. 例如，语句“水往高处流当且仅当太阳从西边出”符号化成复合命题$P \leftrightarrow Q$后，在数理逻辑中被认为是一个真命题.

以上定义的五个联结词中，除了否定词“$\neg$”是联结一个命题的一元联结词之外，其余四个都是联结两个命题的二元联结词.

§5.2　命题公式(proposition formula)与等值演算(equivalent calculus)

上节定义的五个联结词，它们各自可以表示自然语言中的一些常用的语句. 要表达更复杂的语句，就必须将这五个联结词综合起来考虑，形成更复杂的复合命题. 当复合命题中有两个以上的联结词时，其真值就与运算次序有关，像数学中的代数表达式那样，我们可以使用括号来区分运算的先后次序. 这样，由命题符号，联结词以及括号所组成的符号串，我们称为命题公式（或简单公式）.

其严格定义如下：

定义 5. 2. 1　命题公式是如下定义的一个符号串.

（i）单个命题符号是命题公式（原子公式）;

（ii）若 A 是命题公式，则 $(\neg A)$ 也是命题公式;

（iii）若 A 、B 是命题公式，则 $(A\wedge B),(A\vee B),(A\to B)$，以及 $(A\leftrightarrow B)$ 也是命题公式;

（iv）仅当有限次地使用（i）~（iii）所得到的符号串才是命题公式.

这是一个递归定义. 它给出了生成和识别命公式的一般规则. 其中（i）~（iii）给出了生成规则，而（iv）则用来识别哪些符号串不是命题公式.

[例 5.6]　符号串

$$((\neg P)\to(((P\to Q)\wedge R)\vee Q))$$

是命题公式，它可由定义经以下步骤生成：

（1）P　（i）

（2）Q　（i）

（3）$(p\to Q)$　（i）,(2),(iii)

（4）R　（i）

（5）$((p\to Q)\wedge R)$　(3),(4),(iii)

（6）$(((p\to Q)\wedge R)\vee Q)$　(2),(5),(iii)

（7）$(\neg P)$　(1),(ii)

（8）$((\neg P)\to(((P\to Q)\wedge R)\vee Q))$　（6），（7），（iii）

为了尽量减少命题公式中的括号，作如下约定：

1．五种联结词的运算优先级按如下次序由高到低：

$$\neg,\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow$$

且多个同类联结词不达意按从左到右的优先次序.

2、公式 $(\neg A)$ 的括号可省略，写成省略，写成 $\neg A$；

3．整个公式最外层括号可省略.

例如，命题公式 $((p\vee(Q\wedge R)))\to((Q\wedge((\neg P)\vee R)))$

可简写成$P \vee Q \wedge R \rightarrow Q \wedge (\neg P \vee R)$.

由定义可知，命题公式是由命题符号、逻辑联结词、括号按规定组成的符号串，而命题符号可以是一个命题变元（它表示任意一个命题），因此，如果不对命题变元指定一个真值，则整个命题公式就无真值可言，故命题公式不一定是命题.

定义 5.2.2　设G是命题公式，$A_1, \cdots, A_n$是出现在G中的所有命题变元，指定$A_1, \cdots, A_n$的一组真值$(a_1, \cdots a_n), a_i \in \{0,1\}, i = 1, \cdots n$，则这组真值称为$G$的一个解释(interpretation).

以下不妨约定命题公式中的所有命题符号全是命题变元，因为后面我们可以看到，可以根据联结词的定义，将所有命题常元适当地消去.

由定义可知，含$n(n \geq 1)$个命题变元的命题公式共有2^n个不同的解释. 像联结词的真值表那样，我们也可以将一个命题的公式的所有解释与公式的真值列表对应起来，形成该命题公式的真值表. 例如，公式$(P \rightarrow Q) \wedge R$的真值表如下：

$(P \rightarrow Q) \wedge R$的真值表

P	Q	R	$(P \leftrightarrow Q) \wedge R$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

上表说明，公式$(P \leftrightarrow Q) \wedge R$在解释（0，0，1），（0，1，1），（1，1，1）下为真，在其它解释下为假.

根据各种解释下公式的取值情况，可将命题公式作如下分类.

定义 5. 2. 3　设G是一个命题公式.

（1）若G在它的所有解释下均为真，则称G为重言式(tautology)，或称G是永真的.

（2）若G在它的所有解释下均为假，则称G为矛盾式(contradiction)，或称G是永假的.

（3）若至少有一个解释使G为真，则称G为可满足式(satisfiable formula)，或称G是可满足的(satisfiable).

显然，G是永真的，当且仅当$\neg G$是永假的；重言式一定是可满足式，反之不然.

如果公式G在解释I下为真，则称I满足G；如果公式G在解释I下为假，则称I弄假G.

给定一个命题公式，判断它是重言式、矛盾式，还是可满足式，这类问题称为判定问题.

由于一个命题公式的所有解释数目是有限的，因此，命题公式的判定问题是可解的.

给定n个命题变元，由命题公式的生成规则，可以生成无限多个命题公式. 但是，容易

验证，n个命题变元只能生成2^{2^n}个真值互不相同的命题公式，这就是说，有些命题公式从符号串的角度看它们是不同的命题形式，但它们在相同的解释下，其真值完全一样. 例如，$n=2$时，$P\to Q,\neg P\vee Q,\neg(P\wedge\neg Q)$等它在所有四个解释（0,0），（0,1），（1,0），（1,1）下均有相同的真值.

定义 5. 2. 4　两个命题公式A、B，如果在其任何解释I下，相应的真值均相同，则称A与B等值(equivalent)，记为$A\Leftrightarrow B$.

注意，符号“$\Leftrightarrow$”是一个关系符，而不是联结词. 此外，有时也用关系符“=”，约定A = B当且仅当A与B是两个符号串相同的命题公式. 显然，若$A=B$，则$A\Leftrightarrow B$，反之不然.

容易证明，$A\Leftrightarrow B$当且仅当$A\leftrightarrow B$是重言式.

判断两个命题公式是否等值，按定义可将两个公式的真值表列出，通过判断两个真值表是否相同来进行. 用这种方法，不难验证面的基本等值式，其中P、Q、R表示任意公式，而 1 表示永真式，0 表示永假式.

（1）$P\Leftrightarrow\neg\neg P$　　双重否定律

（2）$\left.\begin{array}{l}P\Leftrightarrow P\vee P\\ P\Leftrightarrow P\wedge P\end{array}\right\}$　　等幂律

（3）$\left.\begin{array}{l}P\vee Q\Leftrightarrow Q\vee P\\ P\wedge Q\Leftrightarrow Q\wedge P\end{array}\right\}$　　交换律

（4）$\left.\begin{array}{l}(P\vee Q)\vee R\Leftrightarrow P\vee(Q\vee R)\\ (P\wedge Q)\wedge R\Leftrightarrow P\wedge(Q\wedge R)\end{array}\right\}$　　结合律

（5）$\left.\begin{array}{l}P\wedge(Q\vee R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)\\ P\wedge(Q\vee R)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)\end{array}\right\}$　　分配律

（6）$\left.\begin{array}{l}\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q\\ \neg(P\vee Q)\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q\end{array}\right\}$　　De Morgan 律

（7）$\left.\begin{array}{l}P\wedge(P\vee Q)\Leftrightarrow P\\ P\vee(P\wedge Q)\Leftrightarrow P\end{array}\right\}$　　吸收律

（8）$\left.\begin{array}{l}P\vee 1\Leftrightarrow 1\\ P\wedge 0\Leftrightarrow 0\end{array}\right\}$　　零律

（9）$\left.\begin{array}{l}P\vee 0\Leftrightarrow P\\ P\wedge 1\Leftrightarrow P\end{array}\right\}$　　同一律

（10）$\left.\begin{array}{l}P\vee\neg P\Leftrightarrow 1\\ P\wedge\neg P\Leftrightarrow 0\end{array}\right\}$　　补余律

在以上等值式中，由于P、Q、R表示任意命题公式，因此，它们可以代表任意多个同类型的命题公式．例如，由补余律$P \vee \neg P \Leftrightarrow 1$可以得出$(P \wedge Q) \vee \neg (P \wedge Q) \Leftrightarrow 1$, $(\neg P) \vee \neg (\neg P) \Leftrightarrow 1$等等任意多个等值式.

不难验证，等值关系“$\Leftrightarrow$”是定义在命题公式集合上的二元关系，它满足自反性、对称性和传递性. 因此，等值关系是一个等价关系正是由于这种性质，使得我们可以从某个公式G出发，经有限次使用以上基本等值和已知的等值式，推演出另外一些公式，这一过程称为等值演算.

[例 5.7]　试证明公式$P \vee \neg ((\neg Q \vee P) \wedge Q)$为重言式.

证明：因为

$P \vee \neg ((\neg Q \vee P) \wedge Q)$

$\Leftrightarrow P \vee \neg ((\neg Q \wedge Q) \vee (P \wedge Q))$　　（分配律）

$\Leftrightarrow P \vee \neg ((0 \vee (P \wedge Q))$　　（补余律）

$\Leftrightarrow P \vee \neg (P \wedge Q)$　　（同一律）

$\Leftrightarrow P \vee (\neg P \vee Q)$　　（De Morgan 律）

$\Leftrightarrow (P \vee \neg P) \vee \neg Q$　　（结合律）

$\Leftrightarrow 1 \vee \neg Q$　　（补余律）

$\Leftrightarrow 1$　　（零律）

因此，由定义知$P \vee \neg ((\neg Q \vee P) \wedge Q)$为重言式.

有些等值式，可以根据定义，用真值表的方法来获得.

[例 5.8]　试证明，$P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q, P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$

证明：将以上四个公式的真值表列表如下：

P	Q	$P \to Q$	$\neg P \vee Q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

由等值的定义知，$P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q, P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$.

§5. 3　对偶与范式

在上节介绍的基本等值式中，除双重否定外，都是成对出现的，它们之间呈对偶形式出

现。

定义 5.3.1　在仅含联结词$\neg,\wedge,\vee$的命题公式A中，若将所有的“$\wedge$”换成“$\vee$”，所有的“$\vee$”换成“$\wedge$”，则称所得的命题公式称为A的对偶式(dual formula)，记为A^*.

特别，命题常元 1 和 0 互为对偶式. 即$1^*=0,0^*=1$.

例如，设$A=(\neg P\wedge Q)\vee R$，则$A^*=(\neg P\vee Q)\wedge R$。显然，定义中的$A$也是$A^*$的对偶式，即

$$(A^*)^*=A$$

由等值式$A\to B\Leftrightarrow\neg A\vee B$及

$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\to B)\wedge(B\to A)\Leftrightarrow(\neg A\vee B)\wedge(\neg B\vee A)$，我们可以将任何命题公式化成等值的且仅含联结词$\neg,\wedge,\vee$的公式，因此，任何命题公式均存在对偶式. 以下涉及到对偶式，不妨假设公式中不含联结词“$\to$”和“$\leftrightarrow$”.

由对偶式的定义，我们有：

命题 5. 3. 1　设A^*,B^*分别是命题公式A,B的对偶式，于是，

（1）$\neg(A^*)=(\neg A)^*$

（2）$(A\vee B)^*=A^*\wedge B^*$

（3）$(A\wedge B)^*=A^*\vee B^*$

定义 5. 3. 2　设A是命题公式，若将A中各命题变元的所有肯定形式的出现换为其否定，所有否定形式的出现换为其肯定，则所得的公式称为A的内否式，记为$\overline{A}$.

例如，设$A=P\wedge\neg Q$，则$\overline{A}=\neg P\wedge Q$

显然，定义中的A也是$\overline{A}$的内否式，即

$$\overline{(\overline{A})}=A$$

由内否式的定义，我们有

命题 5. 3. 2　设A、B是命题公式，则

（1）$\neg(\overline{A})=\overline{(\neg A)}$

（2）$\overline{(A\vee B)}=\overline{A}\vee\overline{B}$

（3）$\overline{(A\wedge B)}=\overline{A}\wedge\overline{B}$

下面讨论对偶式与内否式的关系，进而得出对遇原理.

定理 5. 3. 1　对任何命题公式A，均有

$\neg A = \overline{A^*}$

证明：对公式中联结词的个数n作归纳证明.

（i）当$n = 0$时，A中无联结词，不妨设$A = P$，于是$A^* = P$，且

$\neg A = \neg P$

而$\overline{A^*} = \neg P$

故$\neg A = \overline{A^*}$

（ii）设$n \le k$时定理成立.

（iii）当$n = k + 1$时，因为$n \ge 1$，所以A中至少有一个联结词，故A必可写成下列三种形式之一：

$A = \neg A_1$　　　$A = A_1 \wedge A_2, A = A_1 \vee A_2$

而且公式A_1和A_2中的联结词的个数均小于n. 于是，由归纳假设有

$\neg A_1 = \overline{A^*{}_1}$　　　　$\neg A_2 = \overline{A^*{}_2}$

（a）当$A = \neg A_1$时，

$\neg A = \neg(\neg A_1) = \neg\overline{A^*{}_1}$　　（由归纳假设）

$= \overline{\neg(A^*{}_1)}$　　（由命题 5. 3. 2 之（1））

$= \overline{(\neg A_1)^*}$　　（由命题 5. 3. 1 之（1））

$= \overline{A^*}$（由$A = \neg A_1$）

(b)当$A = A_1 \wedge A_2$时，

$\neg A = \neg(A_1 \wedge A_2) = \neg A_1 \vee \neg A_2$（由 De Morgan 律）

$= \overline{A^*{}_1} \vee \overline{A^*{}_2}$（由归纳假设）

$= \overline{A^*{}_1 \vee A^*{}_2}$（由命题 5. 3. 2 之（2））

$= \overline{(A_1 \wedge A_2)^*}$（由命题 5. 3. 1 之（3））

$= \overline{A^*}$　　　由$A = A_1 \wedge A_2$

（c）当$A = A_1 \vee A_2$时，与(b)类似地，也有

$\neg A = \overline{A^*}$

总之，由归纳法，本定理成立.

定理 5. 3. 2（对偶原理）设 A 、 B 是两个命题公式，于是，若 $A \Leftrightarrow B,$ 则 $A^* \Leftrightarrow B^*$

证明：若 $A \Leftrightarrow B,$ 则 $\neg A \Leftrightarrow \neg B,$ 由定理 5. 3. 1 知 $\neg A = \overline{A^*}, \neg B = \overline{B^*}$ ，于是，$\overline{A^*} \Leftrightarrow \overline{B^*}$ ，从而

$$A^* \Leftrightarrow B^*$$

由对偶原理可知，若 A 为重言式，则 A^* 必为矛盾式，这是因为，1 与 0 互为对偶式，若 A 为重言式，则 $A \Leftrightarrow 1$，于是，由对偶原理，$A^* \Leftrightarrow 0,$ 即 A^* 为矛盾式.

我们知道，判定一个命题公式是重言式、矛盾式还是满足式，以及判定两个命题公式是否等值，可以用真值表达和等值演算法. 但当公式比较复杂或其中命题变元较多时，这两种方法不是很方便. 下面介绍一种有效的方法，这就是将命题公式化成某种统一的标准形式.

定义 5.3.3 命题变元 P 及其否定式 $\neg P$ 统称为 P 的文字(literal). 有限个文字的析取称为析取式(disjunction form)；有限个文字的合取称为合取式(conjunction form).

特别，一个文字既可称为一个析取式，也可称为一个合取式.

例如，$P \vee \neg Q \vee R$ 是一个析取式；$P \wedge \neg Q \wedge R$ 是一个合取式，而 P 、$\neg Q$ 既是析取式，又是合取式.

定义 5.3.4 有限个合取式的析取称为析取范式(disjunctive normal form)；有限个析取式的合取称为合取范式(conjunctive normal form).

特别，一个文字既可称为一个析取范式，也可称为一个合取范式. 而一个析取式，一个合取式，既可看作是合取范式，也可以看作是析取范式.

例如，$(P \vee Q) \vee (\neg P \wedge R)$ 是一个析取范式，$(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg R)$ 是一个合取范式，而 $(P \vee Q) \wedge \neg R) \vee S$ 既非析取范式，也非合取范式.

析取范式和合取范式统称为范式(normal).

显然，任何析取范式的对偶式为合取范式，反之，任何合取范式的对偶式为析取范式. 由定义知，范式是一种形式规范的命题公式. 那么，任何命题公式是否都存在与其等值的范式呢？回答是肯定的.

定理 5. 3. 3 对于任意命题公式 G ，都存在与 G 等值的析取范式和合取范式.

证明：依次执行如下步骤，可得出与 G 等值的范式.

（1）利用 $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$ 和 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$ 将 G 中的联结词“$\to$”和“$\leftrightarrow$”消去.

（2）利用 $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$ 以及 De Morgan 律，将 G 中所有否定词“$\neg$”放在命题变元之前.

(3) 反复使用分配律，若求析取范式，则使用 $\wedge$ 对 $\vee$ 的分配，即

$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$; 若求合取范式，则使用 $\vee$ 对 $\wedge$ 的分配，即 $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$. 最后可得与 G 等值的范式.

[例 5.9] 试求 $(P \vee Q) \to R \to S$ 的析取范式和合取范式.

解:（1）求析取范式

$((P \vee Q) \to R) \to S$

$\Leftrightarrow \neg((P \vee Q) \to R) \vee S$ （消去右边的“$\to$”）

$\Leftrightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \vee R) \vee S$ （消去“$\to$”）

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \neg R) \vee S$ （左边的“$\neg$”内移）

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg R) \vee S$ （$\wedge$对$\vee$的分配）

（2）求合取范式

$((P \vee Q) \to R) \to S$

$\Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge \neg R) \vee S$ （利用（1）的部分结果）

$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee S) \wedge (\neg R \vee S)$ （$\vee$对$\wedge$的分配）

显然，一个命题公式的范式形式不是惟一的. 为此，需要在范式的基础上，进一步定义惟一的标准形式.

定义 5.3.5 在含 n 个命题变元 $P_1, \cdots, P_n$ 的合取式中，若 P_i 的文字在该合取式左起的第 i 个位置上恰好出现一次（$i = 1, \cdots, n$），则称此合取式为关于 $P_1, \cdots, p_n$ 的一个极小项.

例如，$n = 3$ 时，$P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3, \neg P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3$ 都是关于 P_1，P_2，P_3 的极小项，而 $P_1 \wedge \neg P_3 \wedge P_2, P_1 \wedge P_2, P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3 \wedge \neg P_1$ 都不是关于. P_1，P_2，P_3 的极小项.

如果命题变元无下标，则按字母顺序排列.

易知，对于 n 个命题变元 P_1，$P_2 \cdots$、P_n 的任何一个极小项 m，在所有的 2^n 个解释中，有而且只有一个解释使 m 为真，如果将真值 1，0 看作是数，则每一个解释对应一个 n 位二进制数.

令使极小项 m 为真的解释所对应的二进制数为 $b_1 b_2 \cdots b_n, b_k \in \{0,1\}, K = 1, \cdots, n,$ 而与二进制 $b_1, b_2 \cdots b_n$ 对应的十进制为 i，今后就将 m 记为 m_i. 于是，关于 n 个命题变元的 2^n 个极小项可记为:

$m_0, m_1, \cdots, m_{2^n-1}$

例如，$n=2$时，4个极小项的取值及表示如下表：

P_1	P_2	$\neg P_1 \wedge \neg P_2$	$\neg P_1 \wedge P_2$	$P_1 \wedge \neg P_2$	$P_1 \wedge P_2$
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1
记为		m_0	m_1	m_2	m_3

定义 5. 3. 6　设G是含n个命题变元$P_1, \cdots, P_n$的命题公式，G'是G的一个析取范式，若G'中的合取式全是关于$P_1, \cdots, P_n$的极小项，则称G'为G的主析取范式.

定理 5. 3. 4　对于任意可满足的命题公式G，都存在与G等值的析取范式.

证明：设G中含命题变元$P_1, \cdots, P_n$. 由定理 5. 3. 3 知，存在与G等值的析取范式$G' = G_1' \vee G_2' \vee \cdots \vee G_r'$. 不妨设$G_i'$是可满足式，且下标由小到大排列，$i = 1, \cdots, r$.

对G'中每个合取式G_i'进行检查. 若G_i'不是关于$P_1, \cdots, P_n$的极小项，则G_i'中必缺少命题变元$P_{j1}, \cdots, P_{jk}$. 由于：

$$G_t' \Leftrightarrow G_t' \wedge (P_{j1} \vee \neg P_{j1}) \wedge \cdots \wedge (P_{jk} \vee \neg P_{jk})$$

$$\Leftrightarrow \cdots$$

$$\Leftrightarrow m_{i_1} \vee \cdots m_{i_2 k}$$

于是，将G'化成了极小项之析取. 最后将重复出现的极小项m_i合并成一个极小项m_i，就得到项G等值的主析取范式.

[例 5.10] 试求$P \to Q$的主析取范式.

解：$P \to Q$

$\Leftrightarrow \neg P \vee Q$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q)) \vee ((P \vee \neg P) \wedge Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$

$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3$

由极小项的定义可知，$P \to Q$ 的主析取范式中，极小项 m_0，m_1 和 m_3 的下标所对应的二进制 00,01 和 11 所对应的解释都使 $P \to Q$ 为真，而主析取范式中没有出现的极小项 m_2 的下标所对应的二进制 10 所对应的解释使 $P \to Q$ 为假，由此可知，只要知道了一个命题公式 G 的主析取范式，就可立即写出 G 的真值表.

反之，若知道了 G 的真值表，则表中所有使 G 为真的解释所对应的极小项的析取，便是 G 的主析取范式.

由于任何极小项恰有一个解释使其为真，因此，结合定理 5. 3. 4 不难证明，任意可满足的命题公式 G 的主析取范式（在不考虑各极小项的次序的意义下）是惟一的.

1、判断两个命题公式是否等值.

设 A、B 是两个命题公式，则 $A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 A 与 B 有相同的主析取范式.

2、判断命题公式的类型.

设 A 是含 n 个命题变元的命题公式，于是：

（1）A 为重言式，当且仅当 A 的主析取范式含全部 2^n 个极小项.

（2）A 为矛盾式，当且仅当 A 不存在主析取范式.

（3）A 为满足式，当且仅当 A 存在主析取范式.

3、求满足公式或弄假命题公式的解释.

设命题公式 $A \Leftrightarrow m_{i_1} \vee m_{i_2} \vee \cdots \vee m_{i_k}$，则与下标 i_j 等值二进制所对应的解释均满足 $A, j = 1, \cdots, k$；其它解释弄假公式 A.

主析取范式的对偶形式，我们称为主合取范式. 其形式定义如下.

定义 5.3.7　在含 n 个命题变元 $P_1, \cdots, P_n$ 的析取式中，若 P_i 的文字在该析取式左起的第 i 个位置上恰好出现一次（$i = 1, \cdots, n$），则称此析取式为关于 $P_1, \cdots, p_n$ 的一个极大项.

例如，$P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3$ 就是一个关于 P_1, P_2, P_3 的极大项.

如果命题变元无下标，则按字母顺序排列.

同极小项情况类似，对于 n 个命题变元 $P_1, \cdots, P_n$ 的任何一个极大项 M，在所有 2^n 个解释中，有而且只有一个解释使 M 为假. 我们也将此极大项 M 记为 M_i，其中下标 i 是使 M 为假的解释所对应的二进制的十进制表示.

例如，$n = 3$ 时，$M_5 = \neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3$，其中，解释（1，0，1）使 M_5 为假.

定义 5.3.8　设 G 是 n 个命题变元 $P_1, \cdots, P_n$ 的命题公式. G' 是 G 的一个合取范式. 若 G' 中的析取式全是关于 $P_1, \cdots, P_n$ 的极大项，则称 G' 为 G 的主合取范式.

定理 5.3.5　对于任意非重言式G，都存在与G等值的主合取范式.

证明：设G中含命题变元$P_1,\cdots,P_n$. 由定理 5. 3. 3 知，存在与G等值的合取范式$G' = G' \wedge G_2' \wedge \cdots \wedge G_r'$.

对G'中每个析取式G_i'进行检查. 若G_i'不是关于$P_1,\cdots,P_n$的极大项，则G_i'中必缺少命题变元$P_{j1},\cdots,P_{jk}$. 由于：

$$G_i' \Leftrightarrow G_i' \vee (P_{j1} \wedge \neg P_{j1}) \vee \cdots \vee (P_{jk} \wedge \neg P_{jk})$$
$$\Leftrightarrow \cdots$$
$$\Leftrightarrow M_{i_1} \wedge \cdots \wedge M_{i_2 k}$$

于是，将G'化成了极大项之合取. 最后将重复出现的极大项M_i合并成极大项M_i，就得到与G等值的主合取范式.

[例 5.11]　求$P \wedge Q$ 的主合取范式.

解：$P \wedge Q \Leftrightarrow (P \vee (Q \wedge \neg Q)) \wedge (Q \vee (P \wedge \neg P))$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee P) \wedge (Q \vee \neg P)$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$$

$$= M_0 \wedge M_1 \wedge M_2$$

由主合取范式与主析取范式形式上的对偶性，我们可以通过命题公式G的主析取范式来获得G的主合取范式，反之亦然.

首先注意到，m_i与M_i有如下关系：

$$\neg m_i \Leftrightarrow M_i, \quad \neg M_i \Leftrightarrow m_i$$

例如，令$M_3 = P \vee \neg Q \vee \neg R$，则

$$\neg M_3 = \neg P \wedge Q \wedge R = m_3$$

设命题公式G中含n个命题变元，且G的主析取范式G'中含k个极小项$m_{i_1},\cdots,m_{ik}$.

由于$G \vee \neg G$是重言式，因此，$\neg G$的主析取范式中必含$2^n - k$个极小项，设为$m_{j1},\cdots,m_{j2^n-k}$. 即：

$$\neg G \Leftrightarrow m_{j1} \vee m_{j2} \vee \cdots \vee m_{j_{2^n-k}}.$$

于是：

$G \Leftrightarrow \neg\neg G$

$\Leftrightarrow \neg(m_{j1} \vee m_{j2} \vee \cdots \vee m_{j_{2^n-k}})$

$\Leftrightarrow \neg m_{j1} \wedge \neg m_{j2} \wedge \cdots \wedge \neg m_{j_{2^n-k}}$

$\Leftrightarrow M_{j1} \wedge M_{j2} \wedge \cdots \wedge M_{j_{2^n-k}}$

例如，设公式G中含 3 个命题变元，且：

$G \Leftrightarrow m_0 \vee m_5 \vee m_7$（$G$的主析取范式）

则：

$G \Leftrightarrow M_1 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_7$（$G$的主合取范式）

同主析取范式情况类似，对于任何一个命题公式G，若G存在主合取范式，则G的主合取范式（在不考虑各极大项次序的意义下）是惟一的.

此外，主合取范式也可用来判断命题公式之间是否等值，判断命题公式的类型，以及求满足和弄假公式的解释.

§5. 4 推理理论(inference theory)

各门科学中都有推理和论证. 特别在数学中，要通过推理和证明来建立定理. 定理证明中的每一步骤都是根据逻辑推理的规则，从某些称之为前提的命题推出另一些称之为结论的命题，但是，数学中除数理逻辑之外的各个分支，它们都并不研究各自的共同使用的逻辑推理规则，即它们并不研究推理.

数理逻辑则以推理为研究对象，用数学的方法来研究推理的形式结构和推理规则，也就是说，在研究推理时，并不考虑具体的前提和结论之间的推理关系，并不涉及前提和结论的涵义，而是研究前提和结论的逻辑形式之间的关系.

定义 5.4.1　设G和H是两个命题公式. 如果$G \to H$是重言式，则称H是G的逻辑结果(logical consequence)，或称G蕴涵H，记$G \Rightarrow H$.

注意，符号“$\Rightarrow$”也是一个关系词，而不是逻辑联结词.

由联结词“$\to$”的定义知，$G \to H$是重言式，当且仅当对G、H的任意解释I，若I满足G，则I也满足H. 因此，$G \Rightarrow H$的充要条件是，满足G的解释均满足H.

我们可以将上述定义推广如下.

定义 5.4.2　设$G_1, \cdots, G_n, H$是命题公式，$n \ge 1$. 若

$G_1 \wedge \cdots \wedge G_n \Rightarrow H$

则称H是$G_1, \cdots, G_n$的逻辑结果，或称$G_1, \cdots, G_n$共同蕴涵H. 记为$G_1, \cdots, G_n \Rightarrow H$.

定义中的$G_1, \cdots, G_n$常称为前提(premise)，所谓推理正确，就是指由一组前提$G_1, \cdots, G_n$，能逻辑地推出结论H，即$G_1, \cdots, G_n$记为$G_1, \cdots, G_n \Rightarrow H$.

判断推理是否正确的方法一般有真值表法，等值演算法，以及本节将要介绍的构造证明法等.

[例 5.12] 判断下面各推理是否正确.

（1）如果今天下雨，我就不骑自行车上班. 今天下雨，所以，我没有骑自行车上班.

（2）如果我进城，我就去书店. 我没有进城. 所以，我没有去书店.

解：首先应将命题符号化，然后找出前提，结论以及推理的形式结构，最后进行判断.

（1）P：今天下雨

Q：我骑自行车上班.

前提：$P \to \neg Q, P$

结论：$\neg P$

推是的形式结构：$((P \to \neg Q) \wedge P) \Rightarrow \neg Q$

判断：

（a）真值表法

列出$((P \to \neg Q) \wedge P)$和$\neg Q$的真值表如下：

P	Q	$((P \to \neg Q) \wedge P)$	$\neg Q$
0	0	0	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0

从表中可看出，使公式$(P \to \neg Q) \wedge P)$为真的（惟一）解释（1，0），也使$\neg Q$为真. 因此，$(P \to \neg Q) \wedge P) \Rightarrow \neg Q$，故推理正确.

(b) 等值演算法

$((P \to \neg Q) \wedge P) \to \neg Q$

$\Leftrightarrow \neg((P \to \neg Q) \wedge P) \vee \neg Q$

$\Leftrightarrow \neg((\neg P \vee \neg Q) \wedge P) \vee \neg Q$

$\Leftrightarrow \neg\ (\neg P \vee \neg Q) \vee \neg P \vee \neg Q$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \vee \neg Q)$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee \neg(P \wedge Q)$

$\Leftrightarrow 1$

即 $((P \to \neg Q) \wedge P) \to \neg Q$ 是重言式. 因此

$$((P \to \neg Q) \wedge P) \Rightarrow \neg Q$$

故推理正确.

（2） P :我进城.

Q :我去书店.

前提： $P \to Q, \neg P$

结论： $\neg Q$

推理的形式结构： $((P \to Q) \wedge \neg P) \Rightarrow \neg Q$

判断：

（a）真值表法

列出 $(P \to Q) \wedge \neg P$ 和 $\neg Q$ 的真值表如下：

P	Q	（$P \to Q) \wedge \neg P$	$\neg Q$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	0	0

从表中可看出，使公式 $(P \to Q) \wedge \neg P$ 为真的解释（0，1），却使 $\neg Q$ 为假. 因此，此推理不正确.

（ b ）等值演算法

$(P \to Q) \wedge \neg P \to \neg Q$

$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \wedge \neg P) \to \neg Q$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee P \wedge \neg Q$

$\Leftrightarrow P \vee \neg Q$

显然， $P \vee \neg Q$ 不是重言式. 因此， $(P \to Q) \wedge \neg P \to \neg Q$ 也非重言式. 故推理不正确.

注意，在日常生活逻辑中，（2）所指的推理却是正确的. 因此，没有进城，也就没有去书店. 可是，结论 $\neg Q$ 却不是前提 $P \to Q$ 和 $\neg P$ 的逻辑结果. 这就是数理逻辑中的推理与一般推理不同的地方.

利用以上两种方法，不难证明以下一些基本蕴涵式，其中 P 、 Q 、 R 、 S 是任意命题

公式.

（1）$\begin{cases} P \Rightarrow (P \vee Q) \\ Q \Rightarrow (P \vee Q) \end{cases}$ 附加(adjunction)

（2）$\begin{cases} (P \wedge Q) \Rightarrow P \\ (P \wedge Q) \Rightarrow Q \end{cases}$ 化简(simplification)

（3）$P, Q \Rightarrow P \wedge Q$ 合取(conjunction)

（4）$P \to Q, P \Rightarrow Q$ 假言推理(modus ponens)

（5）$P \vee Q, \neg P \Rightarrow Q$ 析取三段论(disjunctive syllogism)

（6）$P \to Q, \neg Q \Rightarrow \neg P$ 拒取式(modus tollendo ponens)

（7）$P \to Q, Q \to R \Rightarrow P \to R$ 假言三段论(hypothetical syllogism)

（8）$P \to Q, R \to S, P \vee R \Rightarrow Q \vee S$ 构造性二难(constructive dilemma)

在推理过程中，当出现在前提和结论中的命题变元较多时，真值表法和等值演算法都不是很方便，而且，这些方法看不出由前提到结论的推理过程.

下面介绍构造证明法. 这种方法必须在给定的规则下进行，其中有些规则要用到以上基本蕴涵式.

在数理逻辑中，证明是一个描述推理过程的命题公式序列，其中每个命题公式，或者是已知的前提，或者是由某些前提应用推理规则得到的结论. 证明中常用的推理规则有：

1、前提引入规则：在证明的任何步骤中，都可以引入前提.

2、结论引入规则：在证明的任何步骤中，所证明的结论都可以作为后继证明的前提.

3、置换规则：在证明的任何步骤中，命题公式中的任何子公式都可以用等值的命题公式置换.

所谓命题公式G的子公式G'，就是指在生成公式G的某一步所产生的符号串（也是命题公式），例如，公式$P \to Q \wedge R$的子公式有$P, Q, R, Q \wedge R$和$P \to Q \wedge R$，而$P \to Q$就不是它的子公式.

[例 5.13]　给出下面推理的证明.

如果今天是星期日，则我去商场购物，或在家看书. 如果今天下雨，则我不去商场购物. 今天是星期日而且下雨，所以，我在家看书.

解：P:今天是星期日.

Q:我去商场购物.

R:我在家看书.

S:今天下雨

前提：$P \to (Q \vee R), S \to \neg Q, P, S$

结论：R

证明：

（1）$P \to (Q \vee R)$ 前提引入

（2）P 前提引入

（3）$Q \vee R$ 假言推理，根据（1），（2）

（4）$S \to \neg Q$ 前提引入

（5）S 前提引入

（6）$\neg Q$ 假言推理，根据（4），（5）

（7）R 析取三段论，根据（3），（6）

在用构造证明法进行推理时，经常用到一些技巧，主要有以下两种.

1、附加前提证明法

定理 5. 4. 1 设 $H_1, \cdots, H_m$， P 共同蕴涵 Q，则 $H_1, \cdots, H_m$ 共同蕴涵 $P \to Q$.

证明：由假设有，$(H_1 \wedge \cdots \wedge H_m \wedge P) \Rightarrow Q$，即

$$(H_1 \wedge \cdots \wedge H_m \wedge P) \to Q$$

是重言式，又

$$(H_1 \wedge \cdots \wedge H_m \wedge P) \to Q$$

$$\Leftrightarrow \neg(H_1 \wedge \cdots \wedge H_m \wedge P) \vee Q$$

$$\Leftrightarrow \neg(H_1 \wedge \cdots \wedge H_m) \vee (\neg P \vee Q)$$

$$\Leftrightarrow (H_1 \wedge \cdots \wedge H_m) \to (P \to Q)$$

因此，$(H_1 \wedge \cdots \wedge H_m) \to (P \to Q)$ 也是重言式，于是，

$$(H_1 \wedge \cdots \wedge H_m) \Rightarrow (P \to Q)$$

故 $H_1 \wedge \cdots \wedge H_m$ 共同蕴涵 $P \to Q$ 证毕

此定理说明，若要证明 $P \to Q$ 是 $H_1 \wedge \cdots \wedge H_m$ 的逻辑结果，则只须证明 Q 是 $H_1 \wedge \cdots \wedge H_m$， P 的逻辑的结果. 其中 P 称为附加前提，故这种证明方法称为附加前提法.

[例 5.14] 用附加前提证明法，证明以下推理.

前提：$P \to Q, Q \to R$

结论：$P \to R$

证明：

（1）$P \to Q$ 前提引入

（2）P 附加前提引入

（3）Q 假言推理，根据（1），（2）

（4）$Q \to R$ 前提引入

（5）R 假言推理，根据（3），（5）

由附加前提证明法可知，推理正确.

2、归谬法

定义 5. 4. 3　设 $H_1, \cdots, H_m$ 是 m 个命题公式. 若 $H_1 \wedge \cdots \wedge H_m$ 是可满足式，则称 $H_1, \cdots, H_m$ 是相容的. 否则，称 $H_1, \cdots, H_m$ 是不相容的.

由定义知，$H_1 \wedge \cdots \wedge H_m$ 不相容，当且仅当 $H_1 \wedge \cdots \wedge H_m \Leftrightarrow P \wedge \neg P$（矛盾式），其中 P 为任意命题公式.

定理 5. 4. 2　设命题公式 $H_1, \cdots, H_m$ 是相容的. 于是，（$H_1 \wedge \cdots \wedge H_m \Leftrightarrow G$ 当且仅当 $H_1, \cdots, H_m, \neg G$ 是不相容的.

证明：因为

$$H_1 \wedge \cdots \wedge H_m \to G$$

$$\Leftrightarrow \neg(H_1 \wedge \cdots \wedge H_m) \vee G$$

$$\Leftrightarrow \neg(H_1 \wedge \cdots \wedge H_m \wedge \neg G)$$

所以，$H_1 \wedge \cdots \wedge H_m \Leftrightarrow G$ 当且仅当 $(H_1 \wedge \cdots \wedge H_m \wedge \neg G)$

$\Leftrightarrow P \wedge \neg P$ 当且仅当 $H_1, \cdots, H_m, \neg G$ 不相容，故定理成立.

这种将 $\neg G$ 作为附加前提，进而推出矛盾的证明称为归谬法(reduction to absurdity). 数学中常使用的反证法就属此类方法.

[例 5.15]　用归谬法，构造下面推理的证明.

前提：$P \to (\neg(R \wedge S) \to \neg Q), P, \neg S$

结论：$\neg Q$

证明：

（1）$P \to (\neg(R \wedge S) \to \neg Q)$ 前提引入

（2）P 前提引入

（3）$\neg(R\wedge S)\to\neg Q$　　假言推理，根据（1），（2）

（4）$\neg(\neg Q)$　　否定结论作附加前提引入

（5）Q　　置换规则，根据（4）

（6）$R\wedge S$　　拒取式，根据（3），（5）

（7）$\neg S$　　前提引入

（8）S　　化简，根据（6）

（9）$S\wedge\neg S$　　合取，根据（7）、（8）

由（9）得出一个矛盾式，根据归谬法可知推理正确.

§5.5　命题演算的公理系统

在命题逻辑中，判断两个公式是否等值，判断一个推理是否正确，都归结为判断一个公式是否为重言式. 因此，重言式表示了命题逻辑中一个重要逻辑规律. 然而，命题逻辑中的重言式有无穷多个. 为了掌握重言式的规律，就必须将所有重言式作为一个整体来讲，公理系统就是这样一个整体.

所谓公理系统，就是从一些最简单的概念出发，只承认一些再显然不过的事实（公理），使用极少数的逻辑规则演绎出一些定理，如此形成的演绎系统就叫做公理系统(axiom system). 例如，欧几里得几何学就是一个古典的公理系统. 它从点、直线、平面等不加定义的原始概念出发，接受一些所谓自明的事实作为公理不予证明，例如“两点确定一条直线”，运用很少几条逻辑推理规则，如“三段”，推演出平面几何学的全部定理，而由命题逻辑的重言式组成的公理系统则属于现代公理系统，它比古典公理更严谨、更形式化，亦即系统中的每一个演绎过程中，所遵循的公理和推理规则却必须是极其明确的，而不允许有任何含混. 此外，作为公理，它必须能充分确定所要研究的事物的特征和满足一些必要的条件.

本书所讨论的公理化方法是一种语法方法，即不使用解释，也即不使用真值和真值表，而使用形式推演来证明一些等值公式.

下面给出一个命题逻辑的公理系统L.

定义 5. 5. 1　公理系统L定义如下.

（1）字母表(alphabet)

$$P_1,P_2,\cdots,P_n,\cdots,\neg,\to,(,).$$

（2）合式公式(well-formed formula)：

（i）P_i是合式公式，$i=1,2,\cdots$；

（ii）如果A，B是合式公式，则$(\neg A)$，$(A\to B)$也是合式公式；

（iii）所有合式公式均有限次地使用（i）~（ii）所得到的符号串.

（3）公理(axiom)：

设A,B,C为任意的合式公式.

$L_1:(A\to(B\to A))$

$L_2:((A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C)))$

$L_3: (((\neg A) \to (\neg B)) \to (B \to A))$

（4）推理规则(rule of inference)：从 A 和（ $A \to B$ ）可以推得 B．称为分离规则，简称 MP 规则，记为

$$r_{mp} \qquad \frac{A, A \to B}{B}$$

当规定“ $\neg$ ”的优先级高于“ $\to$ ”时，我们约定，以上公理及合式公式中最外层括号以及 $(\neg A)$ 的括号均可以省略．例如，公理 L_3 可写成 $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$．

定义 5.5.2　L 中的证明是一个由合式公式 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 组成的有穷非空序列，使得对于每个 $i (1 \le i \le n)$， A_i 或者是公理，或者是由序列中的两个合式公式 $A_j, A_k (j, k < i)$ 应用 MP 规则直接推出的结论．此序列称作 A_n 在 L 中的证明(proof)，并称 A_n 为 L 的定理(theorem)，记为 $\vdash A_n$

[例 5.16]　给出下面定理的证明：

（ a ） $\vdash (A \to A)$

（ b ） $\vdash (\neg B \to (B \to A))$

解（ a ）的证明序列如下：

（1） $((A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)))$　（ L_2 ）

（2） $(A \to ((A \to A) \to A))$　（ L_1 ）

（3） $((A \to (A \to A)) \to A)$　（1），（2），MP

（4） $(A \to (A \to A))$　L_1

（5） $(A \to A)$　（3）（4），MP

（ b ）的证明序列如下：

（1） $(\neg B \to (\neg A \to \neg B))$　（ L_1 ）

（2） $((\neg A \to \neg B) \to (B \to A))$　（ L_3 ）

（3） $(((\neg A \to \neg B) \to (B \to A)) \to (\neg B \to ((\neg A \to \neg B) \to (B \to A)))$　（ L_1 ）

（4） $(\neg B \to ((\neg A \to \neg B) \to (B \to A)))$　（2），（3），MP

（5） $((\neg B \to ((\neg A \to \neg B) \to (B \to A)))$

$\to ((\neg B \to (\neg A \to \neg B)) \to (\neg B \to (B \to A)))$　（ L_2 ）

（6）$((\neg B \to (\neg A \to \neg B)) \to (\neg B \to (B \to A)))$ （4），（5），MP

（7）$(\neg B \to (B \to A))$ （1），（6），MP

从以上两例中可以看出，公理系统中定理的证明往往是冗长的. 为了缩短证明过程，我们引进一些类似于推理规则的“元定理”. 首先给出演绎定理，它为公理系统中定理的证明提供了新的途径.

定义 5.5.3 设Γ是L的合式公式集（可空）. $A_1,\cdots A_n$是L的一个有穷非空合式公式序列. 如果对每个$i(1\le i\le n)$，下列之一成立：

（1）A_i是L的公理；

（2）A_i是Γ中的一个合式公式；

（3）A_i是序列中由$A_j,A_k(j,k<i)$经 MP 规则直接推得. 则称$A_1,\cdots,A_n$是Γ的一个推演(deduce)，称作在L中的一个结论，记作$\Gamma\vdash A_n$.

定理 5.5.1（演绎定理） 如果$\Gamma\bigcup\{A\}-B$，则$\Gamma\vdash(A\to B)$. 其中，A,B为L的任意合式公式，Γ为L的合式公式集（可空）.

证明 对B的推演长度k（即推演B的序列中命题的个数）作归纳证明.

1）$k=1$时，推演序列中仅有一个合式公式，即为B. 由定义，有以下三种情形.

情形 1：B是L的公理. 于是我们有：

（1）B L的公理

（2）$(B\to(A\to B))$ （L_1）

（3）$(A\to B)$ （1），（2），MP

因此$\Gamma\vdash(A\to B)$.

情形 2：$B\in\Gamma$. 此时，我们有

（1）B Γ中的合式公式

（2）$(B\to(A\to B))$ （L_1）

（3）$(A\to B)$ （1），（2）MP

情形 3：B是A

由例 5.16，我们有$\vdash(A\to A)$，因此L中$(A\to A)$的证明中以作为Γ中$(A\to A)$的推演，即有$\Gamma\vdash(A\to A)$，也即$\Gamma\vdash(A\to B)$.

2）设B的推演长度为$k(1\le k\le n)$时，结论成立.

3）下证$k=n+1$时，结论也成立.

当 B 为以上 3 种情形之一时，证明过程与相应情形的过程完全一样. 因此只需考虑 B 是由序列中 $Ar, As(r, s < n)$ 经 MP 规则直接推得. 易知，Ar 和 Aa 必分别有 $(C \to B)$ 和 C 的形式. 而 $(C \to B)$ 和 C 的证明序列长度 $\leq n$. 因此，由归纳假设，有：

$\Gamma \vdash (A \to (C \to B))$ 及 $\Gamma \vdash (A \to C)$ 成立. 于是，有：

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \\ \vdots & \\ (l) & (A \to C) \end{array}\right\} \text{从 } \Gamma \text{ 中推出 } (A \to C)$$

$$\left.\begin{array}{ll} (l+1) & \\ \vdots & \\ (l+m) & (A \to (C \to B) \end{array}\right\} \text{从 } \Gamma \text{ 中推出 } (A \to (C \to B))$$

$$(l+m+1) \quad (A \to (C \to B)) \to ((A \to C) \to (A \to B)) \quad (L_2)$$

$$(l+m+2) \quad (A \to C) \to (A \to B) \quad (l+m), (l+m+1), \text{MP}$$

$$(l+m+3) \quad (A \to B) \qquad (l), (l+m+2), \text{MP}$$

从而， $\Gamma \vdash (A \to B)$

利用演绎定理，我们有

推论 5. 5.1　对于 L 的任意合式公式 A, B, C 有

$\{(A \to B), (B \to C)\} \mid\!-(A \to C)$

证明：根据演绎定理，只需证明：

$\{(A \to B), (B \to C), A\} \mid\!-C$

（1）$(A \to B)$	假设
（2）$(B \to C)$	假设
（3）A	假设
（4）B	（1），（3）MP
（5）C	（2），（4）MP

以上结果又称作“假言二段论”规则，简记为 HS 规则. 对 HS 规则再次应用演绎定理，又可得到以下结果：

$\{(A \to B)\} \vdash ((B \to C)) \to (A \to C))$

以及 $\vdash ((A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)))$

这些都可以作为 HS 规则的表达形式. 利用 HS 规则，可得如下定理：

定理 5. 5. 2　对于 L 的任意合式公式 A 和 B，有：

（a）$\vdash(\neg B\to(B\to A))$

（b）$\vdash((\neg A\to A)\to A))$

证明：（a）的证明序列如下：

（1）$(\neg B\to(\neg A\to\neg B)))$ （L_1）

（2）$(\neg A\to\neg B)\to(B\to A))$ （L_3）

（3）$(\neg B\to(B\to A))$ （1），（2）HS

此结果在例 5.16 中证过，应用 HS 规则后，证明减少了 4 步.

对于（b），先证$\{\neg A\to A\}|-A$：

（1）$(\neg A\to A)$ 假设

（2）$(\neg A\to(\neg\neg(\neg A\to A)\to\neg A))$ （L_1）

（3）$(\neg\neg(\neg A\to A)\to A)\to(A\to\neg(\neg A\to A))$ （L_3）

（4）$(\neg A\to(A\to\neg(\neg A\to A)))$ （2），（3），HS

（5）$(\neg A\to(A\to\neg(\neg A\to A)))$

$\to((\neg A\to A)\to(\neg A\to\neg(\neg A\to A)))$ （L_2）

（6）$(\neg A\to A)\to(\neg A\to\neg(\neg A\to A))$ （4），（5）MP

（7）$(\neg A\to\neg(\neg A\to A)$ （1），（6）MP

（8）$(\neg A\to\neg(\neg A\to A))\to((\neg A\to A)\to A)$ （L_3）

（9）$(\neg A\to A)\to A$ （7），（8）MP

（10）A （1），（9）MP

从而由演绎定理，得$\vdash((\neg A\to A)\to A))$.

习题五

1、试判断下列语句是否为命题，并指出哪些是简单命题，哪些是复合命题.

（1）$\sqrt{2}$ 是有理数.

（2）计算机能思考吗？

（3）如果我们学好了离散数学，那么我们就为学习计算机专业课程打下了良好的基础.

（4）请勿抽烟！

（5）$X+5>0$

（6）π 的小数展开式中，符号串 1234 出现奇数次.

（7）这幅画真好看啊！

（8）2050 年的元旦那天天气晴朗.

（9）李明与张华是同学.

（10）2 既是偶数又是质数.

2、讨论上题中命题的真值，并将其中的复合命题符号化.

3、将下列命题符号化：

（1）小王很聪明，但不用功.

（2）如果天下大雨，我就乘公共汽车上班.

（3）只有天下大雨，我才乘公共汽车上班.

（4）不是鱼死，就是网破.

（5）李平是否唱歌，将看王丽是否伴奏而定.

4、求下列命题公式的真值表.

（1）$P\to(Q\vee R)$

（2）$P\wedge(Q\vee\neg R)$

（3）$(P\wedge(P\to Q))\to Q$

（4）$\neg(P\to Q)\wedge Q$

（5）$(P\vee Q)\leftrightarrow(P\wedge Q)$

5、用真值表方法验证下列基本等值式.

（1）分配律；

（2）De Morgan 律；

（3）吸收律

6、用等值演算的方法证明下列等值式.

（1）$(P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\Leftrightarrow P$；

（2）$((P\to Q)\wedge(P\to R)\Leftrightarrow(P\to(Q\wedge R))$；

（3）$\neg(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow((P\vee Q)\wedge\neg(P\wedge Q))$.

7、设 A、B、C 为任意命题公式，试判断以下说法是否正确. 并简单说明之.

（1）若 $A\vee C\Leftrightarrow B\vee C$，则 $A\Leftrightarrow B$；

（2）若 $A\wedge C\Leftrightarrow B\wedge C$，则 $A\Leftrightarrow B$；

（3）若 $\neg A\Leftrightarrow\neg B$，则 $A\Leftrightarrow B$.

8、下表是含两个命题变元的所有命题公式 $F_1\sim F_{16}$ 的真值表. 试写出每个命题公式 F_1 的最多含两个命题变元的具体形式，$i=1,2,\cdots,16$.

P	Q	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

9、证明命题 5. 3. 1

10、证明命题 5. 3. 2

11、求下列命题公式的析取范式和合取范式.

（1）$(\neg P \wedge Q) \to R$

（2）$(P \to Q) \to R$

（3）$(\neg P \to Q) \to (\neg Q \vee P)$

（4）$\neg(P \to Q) \wedge P \wedge R$

12、求下列命题公式的主析取范式和主合取范式.

（1）$(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q)$

（2）$P \vee (\neg P \to (Q \vee (\neg Q \to R)))$

（3）$(\neg P \to R) \wedge (P \leftrightarrow Q)$

13、通过求主析取范式，证明：

$P \vee (\neg P \wedge Q) \Rightarrow P \vee Q$

14、构造下列推理的证明：

（1）前提：$\neg(P \wedge \neg Q), \neg Q \vee R, \neg R$

结论：$\neg P$

（2）前提：$P \to (Q \to S), Q, P \vee \neg R$

结论：$R \to S$

（3）前提：$P \to Q$

结论：$P \to (P \wedge Q)$

（4）前提：$P \vee Q, P \to R, Q \to S$

结论：$S \vee R$

（5）前提：$P \to (Q \to S), \neg R \vee P, Q$

结论：$R \to S$

（6）前提：$\neg P \wedge \neg Q$

结论：$\neg(P \wedge Q)$

15、某公安人员审查一件盗窃案. 已知的事实如下：

（1）甲或乙盗窃了电视机；

（2）若甲盗窃了电视机，则作案时间不能发生在午夜前；

（3）若乙的口供正确，则午夜时屋里灯光未灭.

（4）若乙的口供不正确，则作案时间发生在午夜之前.

（5）午夜时屋里灯光灭了.

试利用逻辑推理来确定谁盗窃了电视机.

16、判断下面的推理是否正确.

（1）如果a、b两数之积为 0，则a、b中至少有一个数为 0，a、b两数之积不为零. 所以，a、b均不为零.

（2）若a、b两数之积是负的，则a、b中恰有一个数为负数. a、b中不是恰有一个为负数. 所以，a、b两数之积是非负的.

（3）如果今天是星期一，则明天是星期三. 今天是星期一. 所以，明天是星期三.

（4）如果西班牙是一个国家，则北京是一个城市. 北京是一个城市. 所以，西班牙是一个国家.

17、给出下列定理的证明序列

（1）$(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$

（2）$(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

18、利用演绎定理证明

（1）$\vdash (B \to A) \to (\neg A \to \neg B)$

（2）$\vdash ((A \to B) \to A) \to A$

（3）$\vdash \neg(A \to B) \to (B \to A)$