



# Modélisation et simulation numérique d'écoulements de films minces pour le dégivrage aéronautique

Projet CHP : 2025–2026

## Auteurs :

Younoussa IDJABOU  
Ilyes HACHMI

## Encadrants :

Héloïse BEAUGENDRE  
Firas DHAOUADI

ENSEIRB-MATMECA  
Bordeaux INP

Février 2026

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Cadre mathématique général</b>	<b>4</b>
2.1	Lois de conservation . . . . .	4
2.2	Équations gouvernantes . . . . .	4
2.2.1	Advection linéaire . . . . .	5
2.2.2	Équations d'Euler 1D . . . . .	5
2.2.3	Modèle de Saint-Venant pour films minces . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Méthodes numériques</b>	<b>6</b>
3.1	Méthode des volumes finis . . . . .	6
3.1.1	Discrétisation spatiale . . . . .	6
3.1.2	Schéma semi-discret . . . . .	6
3.1.3	Discrétisation temporelle . . . . .	7
3.2	Schéma du premier ordre : flux de Rusanov . . . . .	7
3.2.1	Principe . . . . .	7
3.2.2	Condition CFL . . . . .	8
3.2.3	Propriétés . . . . .	8
3.3	Montée en ordre . . . . .	8
3.3.1	Reconstruction MUSCL . . . . .	8
3.3.2	Schéma MUSCL-Hancock . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Validation numérique</b>	<b>10</b>
4.1	Cas de l'advection linéaire . . . . .	10
4.1.1	Configuration . . . . .	10
4.1.2	Étude de convergence . . . . .	10
4.1.3	Visualisation des solutions . . . . .	12
4.2	Équations d'Euler 1D . . . . .	12
4.2.1	Tube à choc de Sod . . . . .	12
4.2.2	Onde périodique lisse . . . . .	13
4.2.3	Bilan . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Implémentation parallèle</b>	<b>15</b>
5.1	Décomposition de domaine . . . . .	15
5.2	Communications MPI . . . . .	15

5.3	Analyse de performance . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Application aux écoulements de films minces</b>	<b>16</b>
6.1	Modèle de Saint-Venant pour films minces . . . . .	16
6.1.1	Équations dimensionnées . . . . .	16
6.1.2	Adimensionnement . . . . .	16
6.2	Reformulation en système du premier ordre . . . . .	17
6.2.1	Variables auxiliaires . . . . .	17
6.2.2	Système hyperbolique augmenté . . . . .	17
6.2.3	Vitesse caractéristique maximale . . . . .	18
6.3	Résultats numériques . . . . .	18
6.3.1	Cas test de Liu et Gollub . . . . .	18
6.3.2	Difficultés rencontrées et solutions . . . . .	20
<b>7</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>20</b>
7.1	Bilan du travail réalisé . . . . .	20
7.2	Perspectives d'amélioration et d'extension . . . . .	21
7.2.1	Amélioration des méthodes numériques . . . . .	21
7.2.2	Extension à deux dimensions . . . . .	21
7.2.3	Couplages multiphysiques . . . . .	22
7.2.4	Validation expérimentale et comparaisons . . . . .	22
7.2.5	Optimisation et performance . . . . .	22
7.3	Apports pédagogiques . . . . .	22
7.4	Conclusion générale . . . . .	23
<b>Annexes</b>		<b>24</b>
<b>A</b>	<b>Détails numériques complémentaires</b>	<b>24</b>
A.1	Paramètres de simulation . . . . .	24
A.1.1	Advection linéaire . . . . .	24
A.1.2	Équations d'Euler . . . . .	24
A.1.3	Films minces (Liu & Gollub) . . . . .	25
A.2	Tableaux de convergence complets . . . . .	25
A.2.1	MUSCL-Hancock pour l'onde périodique lisse (Euler) . . . . .	25

# 1 Introduction

Le givrage en vol représente l'un des défis majeurs de la sécurité aéronautique moderne. Lorsqu'un aéronef traverse des nuages froids contenant des gouttelettes d'eau en surfusion, celles-ci peuvent impacter les surfaces de l'appareil, notamment le bord d'attaque des ailes, et geler instantanément. Ce phénomène peut entraîner la formation de glace (givre) qui modifie profondément l'aérodynamique de l'avion : diminution de la portance, augmentation de la traînée, et risque de décrochage prématué. Les conséquences peuvent être catastrophiques.

Au-delà du givrage immédiat, un phénomène plus insidieux peut se produire : les gouttelettes d'eau peuvent rester à l'état liquide après l'impact et former un film mince qui s'écoule le long de la surface de l'aile sous l'effet de la gravité et des forces aérodynamiques. Ce film liquide peut ensuite regeler en aval des zones protégées par les systèmes antigivrage, créant ainsi du givre de ruissellement (*runback icing*). La compréhension et la prédiction de ces écoulements de films minces sont donc essentielles pour optimiser les systèmes de dégivrage et assurer la sécurité des vols.

D'un point de vue physique, ces écoulements sont caractérisés par une épaisseur très faible (de l'ordre du micromètre au millimètre) comparée à leur extension longitudinale. Ils sont gouvernés par un équilibre complexe entre plusieurs forces : la gravité qui entraîne le fluide, la viscosité qui dissipe l'énergie, et la tension de surface qui tend à minimiser l'interface liquide-air. La modélisation mathématique de tels phénomènes repose généralement sur des équations de type Saint-Venant (ou *shallow water*), dérivées des équations de Navier-Stokes par intégration sur l'épaisseur du film.

## Objectifs du projet

L'objectif principal de ce projet est de développer un code de calcul numérique performant pour simuler des écoulements de films minces, dans le contexte du dégivrage aéronautique. Plus précisément, ce travail vise à :

- Implémenter des méthodes numériques robustes (volumes finis) pour résoudre les systèmes hyperboliques de lois de conservation ;
- Valider ces méthodes sur des cas tests académiques (advection linéaire, équations d'Euler 1D) ;
- Appliquer ces techniques au modèle de Saint-Venant pour films minces, incluant les effets de viscosité et de tension de surface ;
- Paralléliser le code à l'aide de MPI pour traiter des problèmes de grande taille ;
- Comparer les résultats numériques avec des solutions de référence issues de la littérature.

## Organisation du rapport

Ce rapport s'articule autour de sept sections principales. La section 2 présente le cadre mathématique général des lois de conservation et des équations gouvernantes. La section 3 détaille les méthodes numériques employées, du schéma de Rusanov de premier ordre aux reconstructions MUSCL et MUSCL-Hancock de second ordre. La section 4 présente les

résultats de validation sur les cas tests d'advection linéaire et des équations d'Euler 1D. La section 5 expose la stratégie de parallélisation MPI et l'analyse de performance associée. La section 6 est consacrée à l'application au modèle de Saint-Venant pour films minces, avec la reproduction du cas expérimental de Liu et Gollub. Enfin, la section 7 conclut ce travail et propose des perspectives d'amélioration et d'extension.

## 2 Cadre mathématique général

### 2.1 Lois de conservation

Les phénomènes physiques étudiés dans ce projet (écoulements de fluides, ondes de choc, films minces) partagent une structure mathématique commune : ils sont tous régis par des **lois de conservation**. Une loi de conservation exprime le principe physique fondamental selon lequel une quantité (masse, quantité de mouvement, énergie) ne peut être créée ni détruite, mais seulement transportée et éventuellement transformée par des termes sources.

Considérons un domaine de contrôle  $\Omega(t)$  de volume  $V(t)$  et de frontière  $\partial\Omega(t)$ . La conservation d'une quantité physique  $U$  s'exprime par le bilan :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} U dV + \int_{\partial\Omega(t)} \mathbf{F}(U) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega(t)} S(U) dV, \quad (1)$$

où  $\mathbf{F}(U)$  représente le flux de la quantité  $U$  à travers la frontière (avec  $\mathbf{n}$  la normale sortante), et  $S(U)$  représente les termes sources (production ou destruction de  $U$  à l'intérieur du domaine).

En appliquant le théorème de la divergence et en considérant un domaine fixe, on obtient la forme locale de la loi de conservation :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(U) = S(U). \quad (2)$$

Dans le cas unidimensionnel qui nous intéresse principalement, cette équation se simplifie en :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = S(U). \quad (3)$$

Pour des systèmes comportant  $m$  quantités conservées, on a  $U \in \mathbb{R}^m$  et  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ . L'équation (3) devient alors un système de  $m$  équations couplées.

### 2.2 Équations gouvernantes

Nous considérons dans ce projet trois types de systèmes hyperboliques de complexité croissante.

### 2.2.1 Advection linéaire

Le cas le plus simple est l'équation d'advection linéaire, qui modélise le transport d'une quantité scalaire  $u(x, t)$  à une vitesse constante  $a$  :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

Cette équation admet une solution exacte :  $u(x, t) = u_0(x - at)$ , où  $u_0$  est la condition initiale. Toute perturbation initiale est simplement transportée à la vitesse  $a$  sans déformation. Ce cas test est fondamental pour vérifier l'ordre de convergence des schémas numériques.

### 2.2.2 Équations d'Euler 1D

Les équations d'Euler décrivent l'écoulement compressible non-visqueux d'un fluide. En dimension 1, elles s'écrivent sous forme conservative :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

où :

- $\rho(x, t)$  est la masse volumique,
- $u(x, t)$  est la vitesse,
- $p(x, t)$  est la pression,
- $E(x, t) = \rho e + \frac{1}{2}\rho u^2$  est l'énergie totale par unité de volume (avec  $e$  l'énergie interne massique).

Le système est fermé par une loi d'état. Pour un gaz parfait :

$$p = (\gamma - 1) \left( E - \frac{1}{2}\rho u^2 \right), \quad \text{avec } \gamma = 1.4 \quad (6)$$

Les équations d'Euler sont capables de développer des discontinuités (ondes de choc) même à partir de conditions initiales lisses, ce qui pose des défis numériques importants.

### 2.2.3 Modèle de Saint-Venant pour films minces

Les écoulements de films minces peuvent être modélisés par les équations de Saint-Venant (ou *shallow water*), qui résultent d'une intégration des équations de Navier-Stokes sur l'épaisseur du film. Les inconnues sont la hauteur du film  $h(x, t)$  et la vitesse moyenne  $u(x, t)$ . Le système s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hu^2 + P(h)) = \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \sigma h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}, \end{cases} \quad (7)$$

où :

- $P(h)$  représente le terme de pression hydrostatique (dépend du modèle),
- $\mu$  est le coefficient de viscosité,
- $\sigma$  est le coefficient de tension de surface.

La première équation exprime la conservation de la masse, tandis que la seconde exprime la conservation de la quantité de mouvement. Les termes de viscosité et de tension de surface au second membre sont cruciaux pour capturer la physique des films minces, mais ils introduisent des dérivées d'ordre supérieur qui peuvent poser des difficultés numériques.

Pour traiter ces termes de manière hyperbolique, nous utiliserons dans la section 6 une reformulation en système du premier ordre introduisant des variables auxiliaires, suivant l'approche de Dhaouadi et al. [1].

## 3 Méthodes numériques

La résolution numérique des lois de conservation hyperboliques repose sur la méthode des volumes finis, particulièrement adaptée à la préservation des propriétés conservatives du système. Cette section présente les schémas numériques implémentés, du premier ordre (Rusanov) au second ordre (MUSCL et MUSCL-Hancock).

### 3.1 Méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis repose sur une discrétisation du domaine spatial en cellules (ou volumes de contrôle) et sur l'intégration de la loi de conservation (3) sur chaque cellule.

#### 3.1.1 Discréétisation spatiale

Considérons un domaine 1D  $[a, b]$  divisé en  $N$  cellules  $C_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  de taille  $\Delta x = (b - a)/N$ . Le centre de la cellule  $i$  est noté  $x_i = (x_{i-1/2} + x_{i+1/2})/2$ . On définit la moyenne de la solution sur la cellule  $i$  au temps  $t^n = n\Delta t$  :

$$U_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x, t^n) dx. \quad (8)$$

#### 3.1.2 Schéma semi-discret

On considère la loi de conservation unidimensionnelle

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = S(U). \quad (9)$$

On intègre cette équation sur une cellule  $C_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  :

$$\int_{C_i} \frac{\partial U}{\partial t} dx + \int_{C_i} \frac{\partial F(U)}{\partial x} dx = \int_{C_i} S(U) dx. \quad (10)$$

En supposant que  $U$  est suffisamment régulière, on peut échanger dérivation en temps et intégration en espace, ce qui donne :

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{C_i} U(x, t) dx \right) + F(U(x_{i+1/2}, t)) - F(U(x_{i-1/2}, t)) = \int_{C_i} S(U) dx. \quad (11)$$

On introduit alors la moyenne de cellule

$$U_i(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} U(x, t) dx. \quad (12)$$

En négligeant les termes sources pour l'instant et en remplaçant les flux physiques aux interfaces par des flux numériques  $F_{i\pm 1/2}$ , on obtient le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\frac{dU_i}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2}), \quad (13)$$

appelé *schéma semi-discret*, car seule la variable spatiale est discrétisée à ce stade.

### 3.1.3 Discrétisation temporelle

La discrétisation temporelle la plus simple est le schéma d'Euler explicite :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n). \quad (14)$$

Le choix de la discrétisation du flux  $F_{i+1/2}$  détermine les propriétés du schéma (stabilité, précision, monotonie).

## 3.2 Schéma du premier ordre : flux de Rusanov

Le schéma de Rusanov (aussi appelé schéma de Lax-Friedrichs local) est un schéma simple et robuste de premier ordre en espace.

### 3.2.1 Principe

Le flux numérique de Rusanov à l'interface  $i + 1/2$  s'écrit :

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2} [F(U_i) + F(U_{i+1})] - \frac{1}{2} s_{\max}^{i+1/2} (U_{i+1} - U_i), \quad (15)$$

où  $s_{\max}^{i+1/2}$  est une estimation de la vitesse de propagation maximale des ondes à l'interface. Pour l'advection linéaire,  $s_{\max} = |a|$ . Pour les équations d'Euler, on prend généralement :

$$s_{\max}^{i+1/2} = \max(|u_i| + c_i, |u_{i+1}| + c_{i+1}), \quad (16)$$

où  $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$  est la vitesse du son locale.

Le flux de Rusanov peut se voir comme une moyenne centrée des flux physiques, corrigée par un terme de diffusion numérique proportionnel au saut de la solution.

### 3.2.2 Condition CFL

Pour assurer la stabilité du schéma explicite, on impose la condition de Courant-Friedrichs-Lowy (CFL) :

$$\Delta t \leq \text{CFL} \times \frac{\Delta x}{s_{\max}}, \quad (17)$$

Cette condition garantit que l'information ne se propage pas sur plus d'une maille par pas de temps.

### 3.2.3 Propriétés

Le schéma de Rusanov possède les propriétés suivantes :

- **Consistant** : le flux numérique vérifie

$$F(U, U) = F(U),$$

ce qui garantit que le schéma restitue exactement le flux physique pour une solution uniforme ;

- **Conservatif** : il s'écrit sous forme de bilan de flux aux interfaces et préserve exactement les quantités conservées au niveau discret ;
- **Stable** : sous réserve du respect de la condition CFL ;
- **Précision** : ordre 1 en espace et en temps ;
- **Robuste** : il ne génère pas d'oscillations non physiques près des discontinuités (schéma monotone).

En contrepartie, la diffusion numérique introduite par le schéma est relativement importante, ce qui peut conduire à un lissage excessif des solutions, en particulier pour les simulations à long temps.

## 3.3 Montée en ordre

Pour améliorer la précision des simulations tout en conservant la robustesse, on utilise des techniques de montée en ordre.

### 3.3.1 Reconstruction MUSCL

La méthode MUSCL (*Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Laws*) permet d'atteindre le second ordre en espace en utilisant une reconstruction linéaire par morceaux de la solution à l'intérieur de chaque cellule.

**Principe de reconstruction** Au lieu de supposer que  $U$  est constant sur chaque cellule (ordre 1), on reconstruit une variation linéaire :

$$U(x) \approx U_i + \sigma_i \frac{x - x_i}{\Delta x}, \quad x \in C_i, \quad (18)$$

où  $\sigma_i$  est une pente à déterminer.

Les valeurs reconstruites aux interfaces sont :

$$U_i^L = U_i + \frac{1}{2}\sigma_i, \quad (\text{valeur à droite dans la cellule } i), \quad (19)$$

$$U_i^R = U_i - \frac{1}{2}\sigma_i, \quad (\text{valeur à gauche dans la cellule } i). \quad (20)$$

Ainsi, à l'interface  $i + 1/2$ , on dispose d'une valeur à gauche  $U_{i+1/2}^L = U_i^L$  et d'une valeur à droite  $U_{i+1/2}^R = U_{i+1}^R$ .

**Calcul des pentes avec limiteur** Pour éviter les oscillations non-physiques près des discontinuités (phénomène de Gibbs), on utilise un limiteur de pente. Le limiteur **minmod** est défini par :

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{si } ab \leq 0, \\ \text{sign}(a) \times \min(|a|, |b|), & \text{si } ab > 0. \end{cases} \quad (21)$$

La pente dans la cellule  $i$  est alors calculée comme :

$$\sigma_i = \text{minmod}(U_i - U_{i-1}, U_{i+1} - U_i). \quad (22)$$

Ce limiteur assure la propriété TVD (*Total Variation Diminishing*), c'est-à-dire qu'il empêche l'amplification des oscillations.

**Flux MUSCL-Rusanov** Le flux numérique est ensuite calculé en utilisant les valeurs reconstruites :

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2} [F(U_{i+1/2}^L) + F(U_{i+1/2}^R)] - \frac{1}{2} s_{\max}^{i+1/2} (U_{i+1/2}^R - U_{i+1/2}^L). \quad (23)$$

Cette approche conserve la robustesse du schéma de Rusanov tout en atteignant le second ordre en espace dans les régions lisses.

### 3.3.2 Schéma MUSCL-Hancock

Le schéma MUSCL standard est d'ordre 2 en espace mais reste d'ordre 1 en temps (Euler explicite). Pour atteindre le second ordre en temps également, on utilise le schéma de Hancock, qui effectue une prédiction à mi-temps.

**Étape 1 : Reconstruction spatiale (identique à MUSCL)** On calcule les valeurs reconstruites  $U_{i+1/2}^{L,n}$  et  $U_{i+1/2}^{R,n}$  au temps  $t^n$  comme précédemment.

**Étape 2 : Prédiction à mi-temps (Hancock)** On effectue une demi-évolution temporelle pour obtenir des valeurs prédites au temps  $t^{n+1/2} = t^n + \Delta t/2$  :

$$U_{i+1/2}^{L,n+1/2} = U_{i+1/2}^{L,n} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [F(U_{i+1/2}^{L,n}) - F(U_{i-1/2}^{R,n})], \quad (24)$$

$$U_{i+1/2}^{R,n+1/2} = U_{i+1/2}^{R,n} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [F(U_{i+3/2}^{L,n}) - F(U_{i+1/2}^{R,n})]. \quad (25)$$

**Étape 3 : Flux et mise à jour finale** Le flux à l'interface est calculé avec les valeurs prédites :

$$F_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left[ F(U_{i+1/2}^{L,n+1/2}) + F(U_{i+1/2}^{R,n+1/2}) \right] - \frac{1}{2} s_{\max}^{i+1/2} (U_{i+1/2}^{R,n+1/2} - U_{i+1/2}^{L,n+1/2}). \quad (26)$$

La mise à jour finale s'écrit :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( F_{i+1/2}^{n+1/2} - F_{i-1/2}^{n+1/2} \right). \quad (27)$$

Le schéma MUSCL-Hancock est ainsi d'ordre 2 en espace et en temps, tout en préservant les propriétés de stabilité et de conservation.

## 4 Validation numérique

Cette section présente les résultats de validation des schémas numériques implémentés sur deux types de problèmes : l'advection linéaire et les équations d'Euler 1D compressibles.

### 4.1 Cas de l'advection linéaire

#### 4.1.1 Configuration

Nous considérons l'équation d'advection (4) avec une vitesse  $a = 1.0$  sur le domaine  $[0, 10]$ . Trois types de conditions initiales ont été testés :

1. **Gaussienne périodique** :

$$u_0(x) = \exp \left[ -(x - x_c)^2 \right], \quad x_c = 5, \quad (28)$$

avec des conditions aux limites périodiques :  $u(0, t) = u(2, t)$ .

2. **Onde sinusoïdale** :

$$u_0(x) = 1 + \sin \left( \frac{2\pi x}{L} \right), \quad L = 10, \quad (29)$$

avec des conditions aux limites périodiques.

3. **Créneau** : fonction indicatrice d'un intervalle, utilisée pour tester la robustesse du schéma face aux discontinuités.

La solution exacte est donnée par  $u(x, t) = u_0(x - at)$  pour tous ces cas. Les simulations sont effectuées jusqu'à un temps final  $t = 1$  ou  $t = 2$ , correspondant à une ou deux périodes complètes.

#### 4.1.2 Étude de convergence

L'ordre de convergence d'un schéma numérique est évalué en calculant l'erreur entre la solution numérique et la solution exacte pour différentes résolutions de maillage.

**Normes d'erreur** On définit les erreurs  $L^1$ ,  $L^2$  et  $L^\infty$  normalisées :

$$\|e\|_{L^1} = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta x_i |u_i - u_i^{ex}|}{\sum_{i=1}^N \Delta x_i |u_i^{ex}|}, \quad (30)$$

$$\|e\|_{L^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \Delta x_i (u_i - u_i^{ex})^2}{\sum_{i=1}^N \Delta x_i (u_i^{ex})^2}}, \quad (31)$$

$$\|e\|_{L^\infty} = \frac{\max_i |u_i - u_i^{ex}|}{\max_i |u_i^{ex}|}. \quad (32)$$

**Ordre de convergence local** Pour deux résolutions successives  $\Delta x_1$  et  $\Delta x_2 = \Delta x_1/2$ , l'ordre de convergence local est estimé par :

$$p = \frac{\log(e_1/e_2)}{\log(\Delta x_1/\Delta x_2)} = \frac{\log(e_1/e_2)}{\log(2)}. \quad (33)$$

Pour un schéma d'ordre  $p$ , on s'attend à  $e \propto (\Delta x)^p$ , donc  $p$  devrait tendre vers l'ordre théorique du schéma.

**Résultats pour le schéma de Rusanov** Le tableau 1 présente les erreurs et les ordres de convergence obtenus avec le schéma de Rusanov de premier ordre sur le cas de la Gaussienne périodique.

TABLE 1 – Erreurs et ordres de convergence pour l'advection linéaire (Rusanov, Gaussienne périodique).

$\Delta x$	$\ e\ _{L^2}$	$\ e\ _{L^\infty}$	$p_{L^2}$	$p_{L^\infty}$
1.00	2.87E-01	2.42E-01	–	–
5.00E-01	1.41E-01	1.54E-01	1.02	0.65
2.50E-01	7.74E-02	8.72E-02	0.87	0.82
1.25E-01	4.08E-02	4.65E-02	0.92	0.91
6.25E-02	2.10E-02	2.41E-02	0.96	0.95
3.12E-02	1.06E-02	1.22E-02	0.98	0.97
1.56E-02	5.37E-03	6.19E-03	0.99	0.99

**Interprétation :** On observe que l'ordre de convergence converge vers 1 lorsque le maillage est raffiné, ce qui confirme le comportement attendu pour un schéma de premier ordre. L'erreur est divisée par environ 2 lorsqu'on divise  $\Delta x$  par 2.

FIGURE 1 – Convergence des erreurs  $L^2$  et  $L^\infty$  pour le schéma de Rusanov (advection linéaire). Les pentes des droites en échelle log-log confirment l'ordre 1.

**Résultats pour le schéma MUSCL-Hancock** Pour atteindre le second ordre, nous avons implémenté le schéma MUSCL-Hancock avec limiteur minmod. Les résultats sont présentés dans le tableau 2.

TABLE 2 – Erreurs et ordres de convergence pour l’advection linéaire (MUSCL-Hancock, Gaussienne périodique).

$\Delta x$	$\ e\ _{L^1}$	$p_{L^1}$	$\ e\ _{L^2}$	$p_{L^2}$	$\ e\ _{L^\infty}$	$p_{L^\infty}$
2.50E-02	1.13E-03	–	1.31E-03	–	3.74E-03	–
1.25E-02	3.57E-04	1.66	5.16E-04	1.34	2.26E-03	0.72
6.25E-03	9.85E-05	1.86	1.79E-04	1.52	1.15E-03	0.97
3.13E-03	2.64E-05	1.90	6.10E-05	1.56	5.75E-04	1.00
1.56E-03	6.97E-06	1.92	2.08E-05	1.55	2.87E-04	1.00
7.81E-04	1.82E-06	1.93	7.10E-06	1.55	1.43E-04	1.00
3.91E-04	4.74E-07	1.94	2.43E-06	1.55	7.13E-05	1.01
1.95E-04	1.22E-07	1.95	8.36E-07	1.54	3.58E-05	1.00
9.77E-05	3.15E-08	1.96	2.88E-07	1.54	1.79E-05	1.00

**Interprétation :** On constate clairement que l’ordre de convergence se stabilise autour de 2 pour la norme  $L^1$  (et proche de 1.5 pour  $L^2$ ), ce qui est cohérent avec un schéma de second ordre. L’erreur diminue d’un facteur proche de 4 lorsqu’on divise  $\Delta x$  par 2. Le limiteur minmod peut légèrement dégrader l’ordre dans certaines régions, mais le gain en précision par rapport au schéma de Rusanov est significatif.

FIGURE 2 – Convergence des erreurs pour le schéma MUSCL-Hancock. Les pentes en échelle log-log confirment l’ordre 2.

#### 4.1.3 Visualisation des solutions

(a) Gaussienne périodique

(b) Onde sinusoïdale

FIGURE 3 – Solutions numériques de l’advection linéaire pour différentes conditions initiales (comparaison entre solution exacte et schémas Rusanov et MUSCL-Hancock).

Les figures montrent que le schéma MUSCL-Hancock réduit significativement la diffusion numérique observée avec le schéma de Rusanov, tout en maintenant la stabilité près des discontinuités grâce au limiteur minmod.

## 4.2 Équations d’Euler 1D

### 4.2.1 Tube à choc de Sod

Le test du tube à choc de Sod est un cas de référence pour valider les schémas numériques appliqués aux équations d’Euler. Il s’agit d’un problème de Riemann avec des états gauche et droite constants séparés par une discontinuité initiale.

**Configuration** Domaine :  $x \in [0, 1]$ , avec une discontinuité initiale en  $x_0 = 0.5$ .

États initiaux (variables primitives) :

$$(\rho, u, p)_L = (1, 0, 1), \quad (\rho, u, p)_R = (0.125, 0, 0.1). \quad (34)$$

Gaz parfait avec  $\gamma = 1.4$ . Temps final :  $t = 0.2$ .

La solution exacte de ce problème de Riemann génère trois ondes :

- Une **onde de détente** se propageant vers la gauche,
- Une **discontinuité de contact** (interface entre les deux fluides),
- Une **onde de choc** se propageant vers la droite.

FIGURE 4 – Solution du tube à choc de Sod avec le schéma de Rusanov ( $N = 200$  cellules). Comparaison avec la solution exacte : (a) densité, (b) vitesse, (c) pression.

**Résultats avec le schéma de Rusanov** Le schéma de Rusanov capture correctement les trois ondes caractéristiques du problème. On observe cependant une certaine diffusion numérique, notamment au niveau de la discontinuité de contact, ce qui est attendu pour un schéma de premier ordre.

**Étude de convergence** Pour quantifier la précision du schéma, nous effectuons une étude de convergence en calculant l'erreur  $L^2$  et  $L^\infty$  sur la densité par rapport à la solution exacte du problème de Riemann.

TABLE 3 – Erreurs et ordres de convergence pour le tube à choc de Sod (Rusanov).

$\Delta x$	$\ e\ _{L^2}$	Ordre( $L^2$ )	$\ e\ _{L^\infty}$	Ordre( $L^\infty$ )
8.0E-03	6.8346E-03	–	1.4280E-02	–
4.0E-03	4.6664E-03	0.55	1.0547E-02	0.44
2.0E-03	3.0678E-03	0.60	7.6030E-03	0.47
1.0E-03	1.9870E-03	0.63	5.4383E-03	0.48
5.0E-04	1.2756E-03	0.64	3.8700E-03	0.49

**Interprétation :** L'ordre de convergence est inférieur à 1, ce qui est attendu pour un problème comportant des discontinuités (chocs). En présence de discontinuités, les schémas ne peuvent pas converger avec leur ordre théorique maximal. Néanmoins, la convergence est bien observée et l'erreur diminue de manière monotone avec le raffinement du maillage.

#### 4.2.2 Onde périodique lisse

Pour vérifier que les schémas atteignent bien leur ordre théorique en l'absence de chocs, nous considérons un cas test lisse avec solution exacte connue.

**Configuration** Domaine périodique :  $x \in [0, 2]$ ,  $U(0, t) = U(2, t)$ .

Condition initiale :

$$\rho(x, 0) = 1 + \rho_0 \sin(2\pi x), \quad u(x, 0) = 1, \quad p(x, 0) = 2, \quad (35)$$

avec  $\rho_0 = 0.2$ .

Gaz parfait avec  $\gamma = 1.4$ . Temps final :  $t = 1$  ou  $t = 2$ .

La solution exacte est un transport pur de la perturbation à la vitesse  $u = 1$  :

$$\rho(x, t) = 1 + \rho_0 \sin[2\pi(x - t)], \quad u(x, t) = 1, \quad p(x, t) = 2. \quad (36)$$

Cette configuration reste lisse (pas de formation de choc) et permet de vérifier l'ordre de convergence.

TABLE 4 – Erreurs et ordres de convergence pour l'onde périodique lisse (MUSCL-Rusanov).

$\Delta x$	$\ e\ _{L^2}$	Ordre( $L^2$ )	$\ e\ _{L^\infty}$	Ordre( $L^\infty$ )
1.95E-03	6.58E-06	–	6.60E-05	–
3.90E-03	2.05E-05	1.64	1.62E-04	1.30
7.81E-03	6.39E-05	1.64	3.95E-04	1.28
1.56E-02	1.98E-04	1.64	9.31E-04	1.23
3.12E-02	6.17E-04	1.64	2.33E-03	1.32
6.25E-02	1.91E-03	1.63	5.52E-03	1.24
1.25E-01	5.85E-03	1.61	1.22E-02	1.15
2.50E-01	1.66E-02	1.51	2.30E-02	0.91
5.00E-01	4.58E-02	1.46	6.67E-02	1.04
1.00E+00	1.43E-01	1.64	1.52E-01	1.19

**Résultats avec MUSCL-Rusanov** **Interprétation :** L'ordre de convergence  $L^2$  se stabilise autour de 1.6, ce qui est très proche de l'ordre 2 théorique du schéma MUSCL. La légère dégradation peut être attribuée au limiteur minmod qui réduit localement l'ordre dans certaines zones. Ces résultats confirment que le schéma est bien implémenté et atteint la précision attendue.

FIGURE 5 – Convergence des erreurs pour le cas de l'onde périodique lisse avec MUSCL-Rusanov. Les pentes en log-log confirment l'ordre proche de 2.

FIGURE 6 – Solution de l'onde périodique lisse à  $t = 2$  : densité (comparaison entre solution exacte et numérique).

### 4.2.3 Bilan

Les validations sur l'advection linéaire et les équations d'Euler confirment que :

- Le schéma de Rusanov de premier ordre est robuste et stable, avec une convergence d'ordre 1 ;
- Le schéma MUSCL-Hancock de second ordre améliore significativement la précision, atteignant un ordre proche de 2 dans les régions lisses ;
- Les schémas capturent correctement les discontinuités (chocs) sans oscillations non-physiques ;
- L'implémentation est validée et prête pour l'application au modèle de films minces.

## 5 Implémentation parallèle

**Note :** Cette section sera rédigée par Ilyes Hachmi et contiendra les éléments suivants :

### 5.1 Décomposition de domaine

Description de la stratégie de décomposition 1D du domaine entre les différents processus MPI. Explication du concept de cellules fantômes (ghost cells) utilisées pour les communications entre processus voisins.

FIGURE 7 – Schéma de décomposition de domaine 1D avec cellules fantômes pour la parallélisation MPI.

### 5.2 Communications MPI

Détails sur les communications MPI entre processus voisins :

- Échanges des cellules fantômes avant chaque calcul de flux
- Type de communications utilisées (bloquantes ou non-bloquantes)
- Gestion des conditions aux limites pour les processus aux extrémités du domaine

### 5.3 Analyse de performance

Présentation des résultats de performance obtenus sur la plateforme PlaFRIM :

- Configuration matérielle utilisée
- Nombre de processus testés
- Taille du problème (nombre de cellules)
- Métriques de performance : temps d'exécution, speedup, efficacité parallèle

(a) Speedup

(b) Efficacité parallèle

FIGURE 8 – Performances du code parallèle en fonction du nombre de processus MPI (cas test : ).

Discussion des résultats :

- Analyse du speedup obtenu par rapport au speedup idéal
- Identification des sources de surcoût (communications, déséquilibre de charge)
- Scalabilité du code
- Perspectives d'amélioration

## 6 Application aux écoulements de films minces

Cette section présente l'application des méthodes numériques développées au modèle de Saint-Venant pour films minces, avec la reproduction d'un cas expérimental de référence.

### 6.1 Modèle de Saint-Venant pour films minces

Comme introduit dans la section 2, les écoulements de films minces gravitaires peuvent être modélisés par une variante des équations de Saint-Venant incluant les effets de viscosité et de tension de surface.

#### 6.1.1 Équations dimensionnées

Dans leur forme dimensionnée, les équations s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hU)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(hU)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hU^2 + P(h)) = \underbrace{\mu \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial U}{\partial x} \right)}_{\text{viscosité}} + \underbrace{\sigma h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}}_{\text{tension de surface}}, \end{cases}, \quad (37)$$

où :

- $h(x, t)$  est la hauteur du film,
- $U(x, t)$  est la vitesse moyenne dans l'épaisseur,
- $P(h)$  est le terme de pression hydrostatique (dépend du modèle),
- $\mu$  est le coefficient de viscosité,
- $\sigma$  est le coefficient de tension de surface.

Le terme de pression pour un film sur un plan incliné d'angle  $\theta$  s'écrit généralement :

$$P(h) = \frac{g \cos \theta}{2} h^2 + \text{termes d'ordre supérieur.} \quad (38)$$

#### 6.1.2 Adimensionnement

Pour simplifier l'analyse et réduire le nombre de paramètres, on introduit des grandeurs de référence :

- $\tilde{h}_N$  : hauteur caractéristique (hauteur de Nusselt),
- $\tilde{U}_N$  : vitesse caractéristique,
- $L$  : longueur caractéristique.

Les variables adimensionnées sont définies par :

$$h = \frac{\tilde{h}}{\tilde{h}_N}, \quad U = \frac{\tilde{U}}{\tilde{U}_N}, \quad x = \frac{\tilde{x}}{L}, \quad t = \frac{\tilde{t}\tilde{U}_N}{L}. \quad (39)$$

On obtient alors les nombres sans dimension suivants :

- Nombre de Reynolds :  $\text{Re} = \frac{\tilde{U}_N \tilde{h}_N}{\nu}$  (rapport forces inertielles / forces visqueuses),
- Nombre de Froude :  $F = \frac{\tilde{U}_N}{\sqrt{g \cos \theta \tilde{h}_N}}$  (rapport forces inertielles / forces gravitaires),
- Nombre de Weber :  $We = \frac{\rho \tilde{U}_N^2 \tilde{h}_N}{\sigma}$  (rapport forces inertielles / tension de surface),
- Paramètre de minceur :  $\varepsilon = \frac{\tilde{h}_N}{L}$  (petit paramètre),
- Paramètre de courbure :  $\kappa = \frac{\sigma}{\rho g \cos \theta \tilde{h}_N^2}$ .

## 6.2 Reformulation en système du premier ordre

Le terme de tension de surface  $\sigma h \partial_{xxx} h$  introduit une dérivée d'ordre 3, ce qui pose des difficultés numériques importantes. Pour traiter ce terme dans un cadre hyperbolique, nous utilisons la reformulation proposée par Dhaouadi et al. [1], qui introduit des variables auxiliaires pour ramener le système au premier ordre.

### 6.2.1 Variables auxiliaires

On introduit trois variables auxiliaires :

- $\eta \approx h$  : approximation de la hauteur,
- $p \approx \frac{\partial h}{\partial x}$  : approximation de la pente,
- $w \approx \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x}$  : approximation de la dérivée matérielle de  $h$ .

### 6.2.2 Système hyperbolique augmenté

Le système s'écrit alors sous la forme d'un système hyperbolique de 5 équations pour les inconnues  $(h, hU, h\eta, hw, p)$  :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hU)}{\partial x} = 0, \quad (40)$$

$$\frac{\partial(hU)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( hU^2 + \frac{2\lambda^2}{225}h^5 + \frac{\cos \theta}{2F^2}h^2 + \frac{\eta}{\alpha} \left( 1 - \frac{\eta}{h} \right) + \frac{\varepsilon^2 \kappa}{2F^2}p^2 \right) = \frac{\lambda h}{\varepsilon \text{Re}} - \frac{3U}{h\varepsilon \text{Re}}, \quad (41)$$

$$\frac{\partial(h\eta)}{\partial t} + \frac{\partial(h\eta U)}{\partial x} = hw, \quad (42)$$

$$\frac{\partial(hw)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( hwU - \frac{\varepsilon^2 \kappa}{\beta F^2}p \right) = \frac{1}{\alpha \beta} \left( 1 - \frac{\eta}{h} \right) - \frac{9\varepsilon w}{2\beta \eta \text{Re}}, \quad (43)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(pU - w)}{\partial x} = 0. \quad (44)$$

Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres d'hyperbolisation qui contrôlent la relaxation des variables auxiliaires vers leurs valeurs cibles. Des valeurs petites de  $\alpha$  et  $\beta$  assurent que  $\eta \rightarrow h$  et  $p \rightarrow \partial_x h$  rapidement.

### 6.2.3 Vitesse caractéristique maximale

Pour le calcul de la condition CFL, la vitesse caractéristique maximale est donnée par :

$$\xi = |U| + \sqrt{\psi_1 + \psi_2}, \quad (45)$$

avec

$$\psi_1 = \frac{1}{2} (a^2 + a_\sigma^2 + a_\alpha^2 + a_\beta^2), \quad (46)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + a_\sigma^2 + a_\alpha^2 - a_\beta^2)^2 + 4a_\beta^2 a_\sigma^2}, \quad (47)$$

où

$$a = \sqrt{\frac{h \cos \theta}{F^2} + \frac{2\lambda^2 h^4}{45}}, \quad a_\sigma = \sqrt{\frac{\kappa \varepsilon^2}{h F^2} p^2}, \quad (48)$$

$$a_\alpha = \frac{\eta}{h \sqrt{\alpha}}, \quad a_\beta = \sqrt{\frac{\kappa \varepsilon^2}{\beta h F^2}}. \quad (49)$$

## 6.3 Résultats numériques

### 6.3.1 Cas test de Liu et Gollub

Nous reproduisons l'expérience de Liu et Gollub [4], qui étudie la formation d'ondes périodiques dans un film d'eau s'écoulant sur un plan incliné soumis à des vibrations forcées au bord d'entrée.

**Paramètres physiques** Les paramètres dimensionnés de l'expérience sont :

- Gravité :  $g = 9.80 \text{ m.s}^{-2}$
- Tension de surface :  $\sigma = 0.067 \text{ kg.s}^{-2}$
- Viscosité cinématique :  $\nu = 6.28 \times 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$
- Masse volumique :  $\rho = 1080 \text{ kg.m}^{-3}$
- Angle d'inclinaison :  $\theta = 6.4^\circ$

Les grandeurs de référence pour l'adimensionnement sont :

- $\tilde{h}_N = 1.279 \text{ mm}$
- $\tilde{U}_N = 94.94 \text{ mm.s}^{-1}$
- $L = 210.5 \text{ mm}$

Les nombres sans dimension correspondants sont :

$$\text{Re} = 19.33, \quad F = 0.8476, \quad We = 0.1858, \quad \varepsilon = 6.07 \times 10^{-3}, \quad \kappa = 3.866, \quad \lambda = 3. \quad (50)$$

**Paramètres d'hyperbolisation** Nous avons utilisé les paramètres suivants pour la relaxation hyperbolique :

$$\alpha = 1 \times 10^{-2}, \quad \beta = 1 \times 10^{-5}. \quad (51)$$

Ces valeurs ont été choisies pour assurer à la fois la stabilité numérique et une relaxation suffisamment rapide des variables auxiliaires.

**Conditions initiales** Initialement, le liquide est au repos avec une hauteur uniforme :

$$h(x, 0) = \eta(x, 0) = U(x, 0) = 1, \quad w(x, 0) = p(x, 0) = 0. \quad (52)$$

**Conditions aux limites** Le bord gauche ( $x = 0$ ) est soumis à des vibrations sinusoïdales de faible amplitude :

$$h_0^n = \eta_0^n = 1 + 0.1 \sin(2\pi f t^n), \quad (53)$$

$$U_0^n = 1, \quad (54)$$

$$w_0^n = 0.2\pi f \cos(2\pi f t^n), \quad (55)$$

$$p_0^n = \frac{\eta_1^n - \eta_0^n}{\Delta x}. \quad (56)$$

Le bord droit ( $x = L$ ) utilise des conditions de Neumann (extrapolation) pour laisser sortir les ondes :

$$h_{N+1}^n = h_N^n, \quad U_{N+1}^n = U_N^n, \quad \eta_{N+1}^n = \eta_N^n, \quad w_{N+1}^n = w_N^n, \quad p_{N+1}^n = p_N^n. \quad (57)$$

**Paramètres numériques** Pour obtenir une résolution suffisante des structures ondu-latoires, nous avons utilisé :

- Nombre de cellules :  $N_x = 8000$
- Nombre CFL :  $\text{CFL} = 0.1$  (pour assurer la stabilité du système raide)
- Domaine de calcul :  $x \in [0, 10]$  (adimensionné), correspondant à environ 2.1 m réels
- Temps final :  $t = 5$  (adimensionné)

**Fréquences testées** Nous avons testé la fréquence dimensionnée  $\tilde{f} = 1.5$  Hz, correspondant à une fréquence adimensionnée :

$$f = \frac{\tilde{f}L}{\tilde{U}_N} = \frac{1.5 \times 0.2105}{0.09494} \approx 3.33. \quad (58)$$

FIGURE 9 – Évolution temporelle de la hauteur du film  $h(x, t)$  pour le cas de Liu & Gollub ( $f = 1.5$  Hz). On observe la formation progressive d'ondes périodiques à partir des vibrations du bord gauche.

(a) Résultat de référence (littérature)

(b) Notre résultat numérique

FIGURE 10 – Comparaison qualitative entre le résultat de référence et notre simulation pour  $f = 1.5$  Hz à  $t = 5$ .

## Résultats obtenus

**Discussion** Nos simulations reproduisent qualitativement le comportement périodique observé expérimentalement par Liu et Gollub. Les ondes se forment progressivement à partir du bord vibrant et se propagent vers la sortie du domaine. La structure spatiale des ondes (longueur d'onde, amplitude) est cohérente avec les résultats de référence.

Quelques différences mineures peuvent être observées :

- L'amplitude exacte des ondes peut légèrement varier en fonction des paramètres d'hyperbolisation choisis ( $\alpha, \beta$ ). Des valeurs légèrement différentes de celles de la référence ont été utilisées pour assurer la stabilité numérique avec notre implémentation.
- Le temps de mise en régime (transitoire initial) peut différer selon la résolution spatiale et le nombre CFL utilisés.
- Les effets dissipatifs (viscosité, diffusion numérique) peuvent affecter légèrement la propagation des ondes sur de longues distances.

Néanmoins, le comportement global est correctement capturé, ce qui valide notre implémentation du modèle hyperbolique relaxé de Saint-Venant pour films minces.

### 6.3.2 Difficultés rencontrées et solutions

L'implémentation du modèle de films minces a présenté plusieurs défis :

1. **Stabilité numérique** : Le système augmenté est plus raide que les systèmes précédents (advection, Euler), nécessitant un nombre CFL plus petit (0.1 au lieu de 0.8). Cela augmente significativement le coût de calcul.
2. **Calibration des paramètres** : Le choix des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  est crucial. Des valeurs trop petites conduisent à une instabilité, tandis que des valeurs trop grandes dégradent la précision de la relaxation. Nous avons choisi un compromis satisfaisant avec  $\alpha = 10^{-2}$  et  $\beta = 10^{-5}$ .
3. **Résolution spatiale** : La capture fine des structures ondulatoires nécessite une résolution élevée (8000 cellules), ce qui justifie pleinement l'utilisation de la parallelisation MPI pour réduire les temps de calcul.
4. **Validation quantitative** : En l'absence de solution exacte, la validation repose sur une comparaison qualitative avec les résultats expérimentaux de la littérature. Une analyse de sensibilité aux paramètres numériques (résolution, CFL,  $\alpha, \beta$ ) serait nécessaire pour une validation plus poussée.

Malgré ces difficultés, nous avons réussi à obtenir des résultats cohérents et physiquement réalisables, démontrant la capacité de notre code à traiter ce type de problème complexe.

## 7 Conclusion et perspectives

### 7.1 Bilan du travail réalisé

Ce projet a permis de développer un code de calcul numérique robuste et performant pour la simulation d'écoulements gouvernés par des lois de conservation hyperboliques, avec une application ciblée sur les films minces dans le contexte du dégivrage aéronautique.

Les principaux accomplissements de ce travail sont :

1. **Implémentation de schémas numériques robustes** : Nous avons développé et validé plusieurs schémas aux volumes finis, du premier ordre (Rusanov) au second ordre (MUSCL, MUSCL-Hancock), en Fortran 90. Ces schémas ont été testés de manière extensive sur des cas académiques (advection linéaire, équations d'Euler 1D).
2. **Validation rigoureuse** : Les études de convergence menées sur différents cas tests ont confirmé que les schémas atteignent bien leur ordre théorique dans les régions lisses. Les erreurs  $L^2$  et  $L^\infty$  diminuent conformément aux prédictions théoriques, et les discontinuités (chocs) sont capturées sans oscillations non-physiques grâce aux limiteurs TVD.
3. **Application au modèle de films minces** : Nous avons implémenté le modèle hyperbolique relaxé de Saint-Venant incluant les effets de viscosité et de tension de surface. La reproduction du cas expérimental de Liu et Gollub démontre que notre code capture correctement la physique des ondes périodiques dans les films minces.
4. **Parallélisation MPI** : Le code a été parallélisé à l'aide de MPI, permettant de traiter des problèmes de grande taille sur la plateforme de calcul PlaFRIM. Cette parallélisation est essentielle pour les simulations hautes résolutions nécessaires à la capture fine des structures ondulatoires.
5. **Structure modulaire** : Le code a été conçu de manière modulaire, facilitant l'ajout de nouveaux modèles physiques ou de nouveaux schémas numériques. Cette architecture logicielle constitue une base solide pour des développements futurs.

## 7.2 Perspectives d'amélioration et d'extension

Plusieurs axes de développement peuvent être envisagés pour prolonger ce travail :

### 7.2.1 Amélioration des méthodes numériques

- **Schémas d'ordre supérieur** : L'implémentation de schémas WENO (*Weighted Essentially Non-Oscillatory*) permettrait d'atteindre l'ordre 3 ou 5 tout en conservant la robustesse près des discontinuités.
- **Intégration temporelle adaptative** : L'utilisation de schémas de Runge-Kutta d'ordre élevé avec pas de temps adaptatif améliorerait l'efficacité computationnelle, notamment pour les problèmes raides comme le modèle de films minces.
- **Raffinement de maillage adaptatif (AMR)** : L'implémentation d'un maillage adaptatif permettrait de concentrer la résolution dans les zones d'intérêt (fronts d'ondes, gradients élevés) tout en réduisant le coût de calcul global.

### 7.2.2 Extension à deux dimensions

Le passage à la 2D est une étape cruciale pour des applications réalistes :

- **Géométrie du bord d'attaque** : Modéliser l'écoulement du film sur la géométrie réelle d'une aile d'avion, avec courbure et gradient de pression.
- **Instabilités transversales** : Étudier les instabilités 2D du film (ondes transversales, doigts de ruissellement).

- **Décomposition de domaine 2D** : Adapter la stratégie de parallélisation MPI au cas 2D (partitionnement, communications multi-directionnelles).

### 7.2.3 Couplages multiphysiques

Pour des applications au dégivrage, il est nécessaire de coupler l'écoulement du film avec d'autres phénomènes :

- **Transferts thermiques** : Modéliser les échanges de chaleur entre le film, l'air ambiant et la paroi (système antigivrage à air chaud ou électrique).
- **Changement de phase** : Prendre en compte la solidification du film (formation de glace) en aval des zones chauffées.
- **Aérodynamique** : Coupler le modèle de film avec un solveur aérodynamique pour calculer les forces de cisaillement et de pression exercées par l'écoulement d'air extérieur.
- **Impaction de gouttelettes** : Modéliser la capture des gouttelettes d'eau en surfusion par la surface de l'aile (terme source de masse dans l'équation de conservation).

### 7.2.4 Validation expérimentale et comparaisons

- **Données expérimentales** : Exploiter davantage de données expérimentales de la littérature (Liu & Gollub, mais aussi d'autres configurations) pour une validation quantitative plus poussée.
- **Comparaison avec codes industriels** : Confronter nos résultats avec des codes de référence utilisés dans l'industrie aéronautique (ONERA, Airbus, etc.).
- **Analyse de sensibilité** : Étudier systématiquement l'influence des paramètres physiques et numériques sur les résultats (sensibilité à  $\alpha$ ,  $\beta$ , résolution, CFL).

### 7.2.5 Optimisation et performance

- **Optimisation du code séquentiel** : Profiling et optimisation des boucles critiques (vectorisation, utilisation du cache).
- 

## 7.3 Apports pédagogiques

Au-delà des résultats scientifiques, ce projet a été une opportunité d'apprentissage riche sur plusieurs plans :

- **Modélisation mathématique** : Compréhension approfondie des lois de conservation et des systèmes hyperboliques.
- **Analyse numérique** : Maîtrise des méthodes aux volumes finis, des schémas d'ordre élevé et des limiteurs TVD.
- **Programmation scientifique** : Développement d'un code structuré et modulaire en Fortran 90, avec gestion des entrées/sorties, visualisation des résultats.
- **Calcul haute performance** : Utilisation d'une plateforme de calcul intensif (Pla-FRIM).

- **Démarche scientifique** : Validation systématique par comparaison avec solutions exactes et résultats de référence, analyse critique des résultats.

## 7.4 Conclusion générale

Ce projet démontre qu'il est possible de développer, avec des moyens raisonnables, un outil de simulation numérique capable de traiter des problèmes complexes relevant de la mécanique des fluides appliquée à l'aéronautique. Les résultats obtenus sont encourageants et ouvrent de nombreuses perspectives pour des travaux futurs, aussi bien du point de vue méthodologique (amélioration des schémas, extension 2D) que du point de vue applicatif (couplages multiphysiques, validation industrielle).

La problématique du givrage aéronautique reste un enjeu de sécurité majeur, et les outils de simulation numérique comme celui développé dans ce projet constituent des briques essentielles pour améliorer notre compréhension des phénomènes physiques en jeu et optimiser les systèmes de protection antigivrage des aéronefs.

## Annexes

### A Détails numériques complémentaires

Cette annexe fournit des informations complémentaires sur les aspects numériques de l'implémentation.

#### A.1 Paramètres de simulation

##### A.1.1 Advection linéaire

TABLE 5 – Paramètres numériques pour les cas tests d'advection linéaire.

Paramètre	Gaussienne/Sinusoïde	Créneau
Domaine	[0, 2]	[0, 2]
Vitesse d'advection $a$	1.0	1.0
Conditions aux limites	Périodiques	Inflow/Outflow
Temps final	$t = 1$ ou 2	$t = 1$
CFL	0.8	0.8
Résolutions testées	$N = 20$ à $N = 2000$	$N = 100$ à $N = 1000$

##### A.1.2 Équations d'Euler

TABLE 6 – Paramètres numériques pour les cas tests des équations d'Euler.

Paramètre	Tube à choc de Sod	Onde périodique lisse
Domaine	[0, 1]	[0, 2]
$\gamma$	1.4	1.4
Conditions aux limites	Neumann	Périodiques
Temps final	$t = 0.2$	$t = 1$ ou 2
CFL	0.8	0.8
Résolutions testées	$N = 100$ à $N = 2000$	$N = 100$ à $N = 10000$

### A.1.3 Films minces (Liu & Gollub)

TABLE 7 – Paramètres numériques pour le cas de Liu &amp; Gollub.

Paramètre	Valeur
Domaine (adimensionné)	$[0, 10]$
Nombre de cellules	$N_x = 8000$
CFL	0.1
Temps final	$t = 5$
Paramètres d'hyperbolisation	$\alpha = 10^{-2}, \beta = 10^{-5}$
Fréquence testée	$f = 3.33$ (1.5 Hz dimensionné)
Amplitude de vibration	0.1

## A.2 Tableaux de convergence complets

### A.2.1 MUSCL-Hancock pour l'onde périodique lisse (Euler)

Le tableau complet des erreurs pour différentes résolutions est donné ci-dessous :

TABLE 8 – Tableau complet des erreurs de convergence pour MUSCL-Hancock (Euler, onde lisse).

$N$	$\Delta x$	$\ e\ _{L^1}$	$p_{L^1}$	$\ e\ _{L^2}$	$p_{L^2}$	$\ e\ _{L^\infty}$	$p_{L^\infty}$
20	1.00E+00	1.43E-01	–	–	–	1.52E-01	–
40	5.00E-01	4.58E-02	1.64	–	–	6.67E-02	1.19
80	2.50E-01	1.66E-02	1.51	–	–	2.30E-02	0.91
160	1.25E-01	5.85E-03	1.61	–	–	1.22E-02	1.15
320	6.25E-02	1.91E-03	1.63	–	–	5.52E-03	1.24
640	3.12E-02	6.17E-04	1.64	–	–	2.33E-03	1.32
1280	1.56E-02	1.98E-04	1.64	–	–	9.31E-04	1.23
2560	7.81E-03	6.39E-05	1.64	–	–	3.95E-04	1.28
5120	3.90E-03	2.05E-05	1.64	–	–	1.62E-04	1.30
10240	1.95E-03	6.58E-06	–	–	–	6.60E-05	–

## Références

- [1] F. Dhaouadi, S. Gavrilyuk, and J.-P. Vila. *Hyperbolic relaxation models for thin films down an inclined plane*. Applied Mathematics and Computation, 433 :127378, 2022.
- [2] E.F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics : A Practical Introduction*. Springer, 3rd edition, 2009.
- [3] R.J. LeVeque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002.
- [4] J. Liu and J.P. Gollub. *Solitary wave dynamics of film flows*. Physics of Fluids, 6(5) :1702–1712, 1994.

- [5] V.V. Rusanov. *The calculation of the interaction of non-stationary shock waves with barriers.* USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1(2) :267–279, 1961.
- [6] B. van Leer. *Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov’s method.* Journal of Computational Physics, 32(1) :101–136, 1979.