Démonstration : L'Impulsion de Collision

Partie 1 : D'où vient l'Impulsion ? (Le Lien Newtonien)

La relation $J = \Delta p$ n'est pas une invention magique. C'est la 2ème Loi de Newton réécrite sous forme intégrale.

1. Retour à la définition de la Force L'accélération $\vec{a}$ est la dérivée de la vitesse.

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Comme la masse est constante, on peut la rentrer dans la dérivée. On reconnait alors la Quantité de Mouvement ($\vec{p} = m\vec{v}$).

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

2. L'Intégration (Somme des forces) Pour connaitre l'effet total d'un choc entre un instant t_1 et t_2, on multiplie par dt et on intègre (on somme) les deux côtés de l'équation :

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \int_{p_1}^{p_2} d\vec{p}$$

3. Le Résultat : Le Théorème de l'Impulsion

- Le terme de droite devient simplement le changement de quantité de mouvement : $\Delta\vec{p}$.
- Le terme de gauche est la définition exacte de l'Impulsion $\vec{J}$.

$$\vec{J} = \Delta\vec{p}$$

Interprétation Géométrique : L'impulsion est l'**Aire sous la courbe** de la Force en fonction du temps. Peu importe que la force soit petite et longue, ou géante et courte : si l'aire est la même, le changement de vitesse est le même.

Application au Moteur Physique (Temps Zéro)

Dans une simulation « Narrow Phase », on considère que la collision est instantanée ($\Delta t \approx 0$).

Si le temps est nul, pour avoir une aire non-nulle, la Force devrait être infinie. L'ordinateur ne peut pas calculer l'infini.

L'Astuce : On saute l'étape de l'intégration temporelle. On utilise directement le résultat J. Cela nous permet de « téléporter » la vitesse sans passer par l'accélération.

$$\Delta v = \frac{J}{m}$$

Partie 2 : La Règle du Rebond (La Loi)

Nous avons l'outil (J), mais quelle valeur doit-il avoir ? C'est ici qu'intervient la **Loi expérimentale**.

Loi de Restitution : « La vitesse à laquelle deux objets s'éloignent après un choc est proportionnelle à la vitesse à laquelle ils se rapprochaient avant le choc. »

$$v_{\text{rel}}(\text{après}) = -e \cdot v_{\text{rel}}(\text{avant})$$

- $v_{\text{rel}} = v_A - v_B$ (Vitesse relative le long de la normale).
- e : Coefficient de restitution (entre 0 et 1).
- Le signe moins ($-$) indique que les objets repartent dans l'autre sens.

Zoom sur la Vitesse Relative

Avant de calculer, définissons les termes. Soient $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$ les vecteurs vitesse des deux objets dans le monde.

1. Le Vecteur Vitesse Relative ($\Delta\vec{v}$) C'est la vitesse de A vue depuis B.

$$\vec{v}_{\text{diff}} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$$

2. La Normale de Collision ($\vec{n}$) C'est le vecteur unitaire qui relie les centres (la direction du choc).

3. La Vitesse Relative Scalaire (v_{rel}) C'est celle qu'on utilise dans la formule de l'impulsion ! On ne s'intéresse qu'à la vitesse **sur l'axe du choc**. On fait donc une projection (Produit Scalaire) :

$$v_{\text{rel}} = (\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot \vec{n}$$

Interprétation du signe :

- Si $v_{\text{rel}} < 0$: Les objets se rapprochent (Collision imminente).
- Si $v_{\text{rel}} > 0$: Les objets s'éloignent (Ils se sont déjà tapés ou se fuient).
- Si $v_{\text{rel}} = 0$: Ils glissent l'un à côté de l'autre sans s'écraser.

Partie 3 : La Démonstration Complète

Cherchons l'intensité de l'impulsion j (scalaire) à appliquer le long de la normale pour satisfaire la loi du rebond.

Étape A : Application de l'Impulsion On applique j sur la boule A et $-j$ sur la boule B (3ème loi de Newton). Les nouvelles vitesses (v') sont :

$$v'_A = v_A + \frac{j}{m_A} \quad \text{et} \quad v'_B = v_B - \frac{j}{m_B}$$

Étape B : Calcul de la nouvelle vitesse relative On cherche $v'_{\text{rel}} = v'_A - v'_B$.

$$v'_{\text{rel}} = \left(v_A + \frac{j}{m_A}\right) - \left(v_B - \frac{j}{m_B}\right)$$

Regroupons les termes de vitesse et les termes d'impulsion :

$$v'_{\text{rel}} = \underbrace{(v_A - v_B)}_{v_{\text{rel}}} + j\left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B}\right)$$

Étape C : On impose la Loi du Rebond On remplace v'_{rel} par ce qu'on veut obtenir ($-e \cdot v_{\text{rel}}$) :

$$-e \cdot v_{\text{rel}} = v_{\text{rel}} + j\left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B}\right)$$

Étape D : On isole j

1. Passons v_{rel} à gauche :

$$-e \cdot v_{\text{rel}} - v_{\text{rel}} = j\left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B}\right)$$

2. Factorisons v_{rel} :

$$-(1+e)v_{\text{rel}} = j\left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B}\right)$$

Partie 4 : Simplification (Masse Réduite)

Nous avons obtenu :

$$j = \frac{-(1+e)v_{\text{rel}}}{\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B}}$$

Le terme au dénominateur $\left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B}\right)$ est peu intuitif. Transformons-le. Mise au même dénominateur :

$$\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} = \frac{m_B}{m_A m_B} + \frac{m_A}{m_A m_B} = \frac{m_A + m_B}{m_A m_B}$$

Maintenant, remplaçons cette fraction dans la formule de j. Diviser par une fraction, c'est multiplier par son inverse :

$$j = -(1+e)v_{\text{rel}} \cdot \frac{1}{\frac{m_A+m_B}{m_A m_B}}$$

Ce qui nous donne la **Formule Finale** très élégante :

$$j = \underbrace{-(1+e)v_{\text{rel}}}_{\text{Vitesse à changer}} \cdot \underbrace{\left(\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}\right)}_{\text{Masse Équivalente}}$$

Interprétation Physique

Cette forme

$$\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$$

est appelée la **Masse Réduite** du système.

Elle montre que lors d'une collision, le système se comporte comme une masse unique équivalente.

- Si une masse est minuscule ($m_A \ll m_B$), la masse équivalente devient $\approx m_A$.
  Conclusion : C'est le plus léger qui dicte la dynamique du rebond.