# Géométrie et Calcul Vectoriel

### Définitions

Un vecteur est une grandeur ayant une direction et une magnitude.

On dit qu'il est de dimension $n$ si il a $n$ composantes.

Dans le plan, $n = 2$, donc un vecteur a 2 composantes, 2 dimensions.

### Représentation

Un vecteur est représenté par une flèche. Il peut être placé n'importe où dans le plan. On le place habituellement par rapport au contexte de ce qu'il représente.

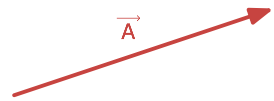


Fig. 1. – Un vecteur

### Notation vectorielle

Même si le vecteur est défini par ses magnitude et direction, on utilise une notation vectorielle, qui décompose le vecteur selon les vecteurs $\hat{\imath}$ et $\hat{\jmath}$ du plan cartésien. On retrouve ses 2 dimensions représentées en colonne.

*Exemple*.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$$

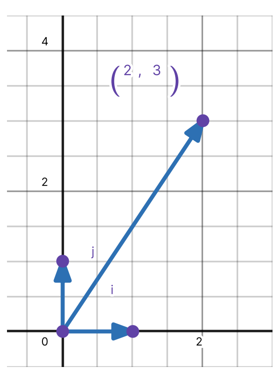


Fig. 2. – Le vecteur $\vec{v}$

### Déplacement

Un déplacement peut se décrire par le vecteur reliant le point $A$ (départ) au point $B$ (arrivée) :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

### Des vecteurs célèbres en physique

- **Le vecteur position**

Souvent noté $\vec{r}$ (radius), représente la position d'un point dans l'espace en partant de l'origine.

- **Le vecteur vitesse**

Noté $\vec{v}$, représente la vitesse d'un objet, souvant représenté partant du centre de l'objet.

- **Le vecteur accélération**

Noté $\vec{a}$, représente l'accélération d'un objet, souvant représenté partant du centre de l'objet.

### Magnitude et direction

La longueur du vecteur, aussi appelée magnitude, est notée $\|\vec{v}\|$, et parfois simplement $|\vec{v}|$.

**En 2D :**

On utilise le théorème de Pythagore pour calculer la norme (autre nom de la magnitude) :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

**Vecteur Unitaire ($\hat{u}$) :**

Vecteur de longueur 1 direction $\vec{v}$ :

$$\hat{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Un vecteur unitaire est un vecteur de longueur 1, il est souvent utilisé pour représenter une direction sans avoir à se soucier de la magnitude.

### Opérations de Base

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$.

**Addition :**

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \end{pmatrix}$$

**Soustraction :**

$$\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x - v_x \\ u_y - v_y \end{pmatrix}$$

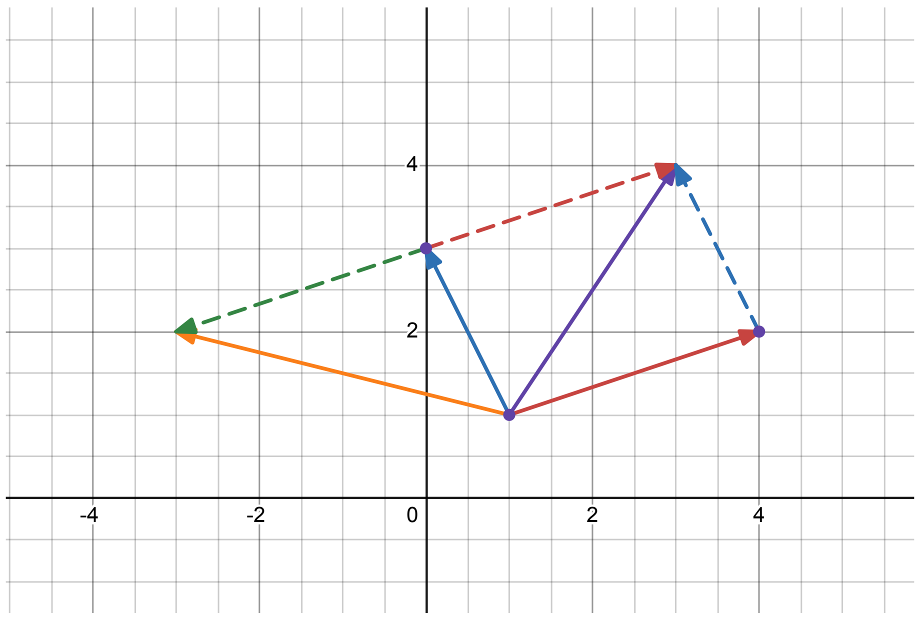


Fig. 3. – Le vecteur $\vec{u}$ (rouge) et le vecteur $\vec{v}$ (bleu)

**Multiplication par scalaire ($k$) :**

$$k \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} ku_x \\ ku_y \end{pmatrix}$$

## Produit Scalaire

Résultat : un **nombre** (scalaire).

**Formule algébrique :**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

**Formule géométrique :**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\theta)$$

Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, alors $\vec{u} \perp \vec{v}$.

## Angle entre 2 vecteurs

On isole $\cos(\theta)$. :

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}\right)$$

## Produit Vectoriel (3D)

Résultat : un **vecteur** perpendiculaire.

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$$

**Magnitude :**

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\theta)$$

**Calcul (Déterminant) :** Notez les flèches sur $i, j, k$ :

$$\vec{u} \times \vec{v} = \det\left(\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix}\right)$$

## Projections

Projection de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$.

$$\text{proj}_v(\vec{u}) = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right) \cdot \vec{v}$$

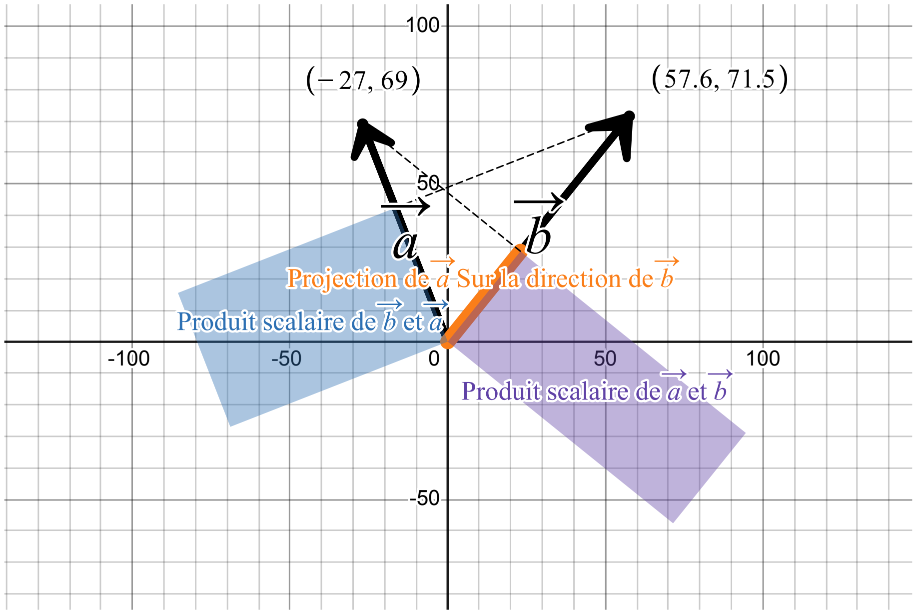


Fig. 4. – Produit scalaire, projection