# Vecteurs 101

*Géométrie et Calcul Vectoriel*

## Définitions et Notation

**Définition :**

Un vecteur est une grandeur ayant une direction et une magnitude.

Un vecteur est un objet de l'espace. On dit qu'il est de dimension $n$ si il a $n$ composantes.

Dans le plan, $n = 2$.

**Notation vectorielle :**

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = v_x \vec{\imath} + v_y \vec{\jmath}$$

**Example :**

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = 6\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$$

**Déplacement :** Vecteur reliant le point $A$ au point $B$ :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

## Norme (Grandeur)

La longueur du vecteur, notée $\|\vec{v}\|$.

**En 2D :**

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

**Vecteur Unitaire ($\hat{u}$) :** Vecteur de longueur 1 direction $\vec{v}$ :

$$\hat{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

## Opérations de Base

Soit $\vec{u} = \binom{u_x}{u_y}$ et $\vec{v} = \binom{v_x}{v_y}$.

**Addition :**

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \end{pmatrix}$$

**Soustraction :**

$$\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x - v_x \\ u_y - v_y \end{pmatrix}$$

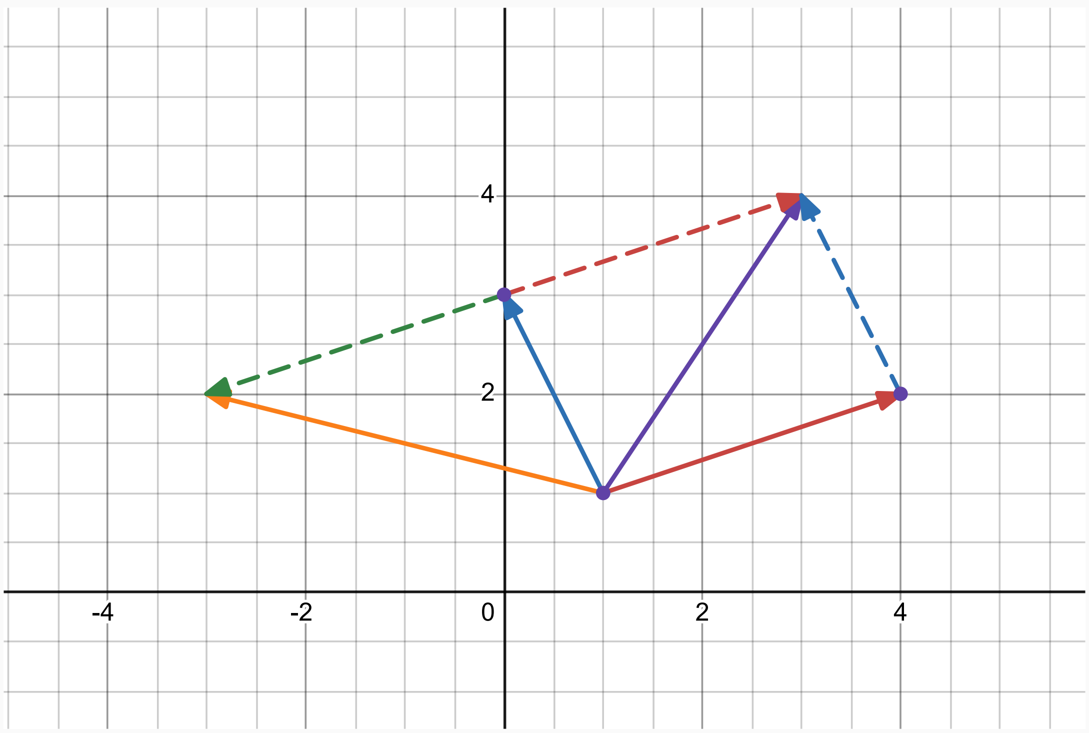


Fig. 1. – Le vecteur $\vec{u}$ (rouge) et le vecteur $\vec{v}$ (bleu)

**Multiplication par scalaire ($k$) :**

$$k \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} ku_x \\ ku_y \end{pmatrix}$$

## Produit Scalaire

Résultat : un **nombre** (scalaire).

**Formule algébrique :**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

**Formule géométrique :**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\theta)$$

Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, alors $\vec{u} \perp \vec{v}$.

## Angle entre 2 vecteurs

On isole $\cos(\theta)$. Les parenthèses assurent que la fraction reste bien empilée :

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}\right)$$

## Produit Vectoriel (3D)

Résultat : un **vecteur** perpendiculaire.

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$$

**Magnitude :**

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\theta)$$

**Calcul (Déterminant) :** Notez les flèches sur $i, j, k$ :

$$\vec{u} \times \vec{v} = \det\left(\begin{pmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix}\right)$$

### Projections

Projection de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$.

$$\text{proj}_v(\vec{u}) = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right) \cdot \vec{v}$$

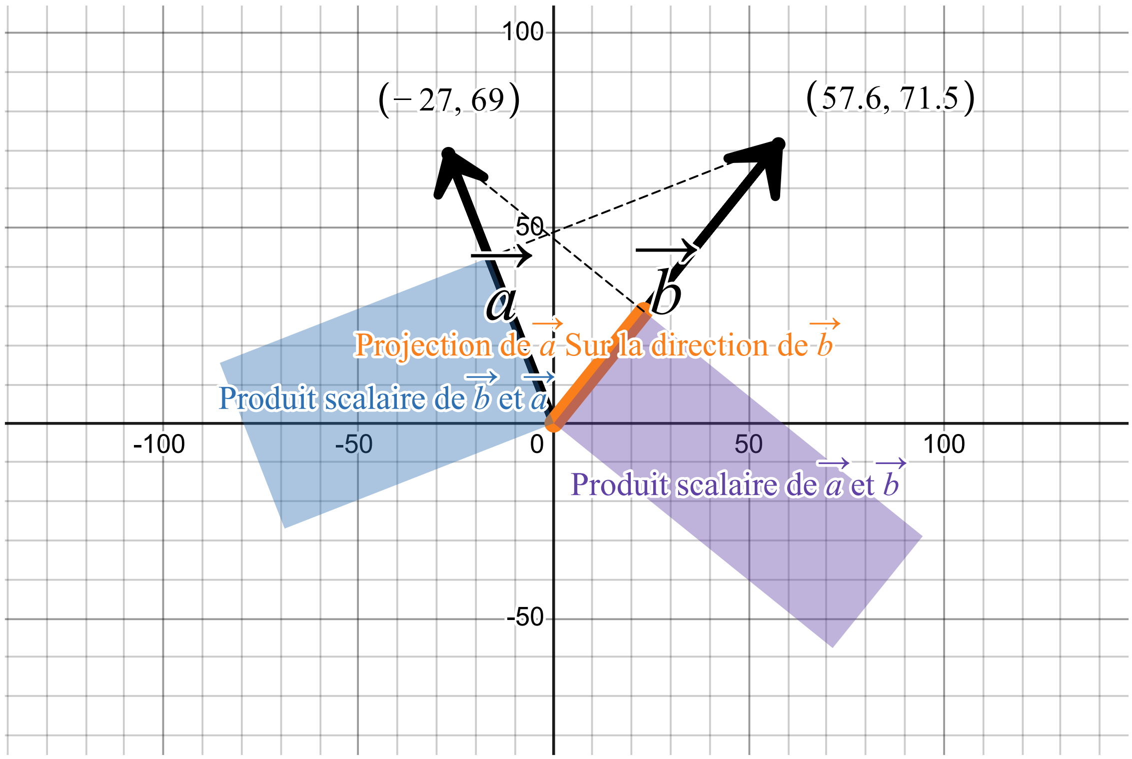


Fig. 2. – Produit scalaire, projection