Session 2 : Cinématique 2D et Mouvement de Projectile

Objectifs de la Session :

- Comprendre et appliquer les concepts de vitesse, d'accélération et de position en deux dimensions.
- Analyser et calculer la trajectoire d'un projectile soumis à la gravité.
- Implémenter le mouvement de projectiles dans l'environnement Three.js.
- Réaliser un premier travail pratique de création d'objets en mouvement et de projectiles simples sans moteur physique, en utilisant uniquement les équations de la cinématique.

Bloc 1 : Cinématique 2D - Position, Vitesse et Accélération

Objectifs spécifiques de ce bloc :

- Comprendre la représentation mathématique de la position d'un objet dans un plan bidimensionnel.
- Définir et interpréter les concepts de vitesse moyenne et instantanée sous forme vectorielle en 2D.
- Définir et interpréter les concepts d'accélération moyenne et instantanée sous forme vectorielle en 2D.
- Visualiser et relier les vecteurs position, vitesse et accélération à la trajectoire d'un objet.

1. Introduction et Rappels

- **Brève révision des vecteurs :**
  - Rappel de la définition d'un vecteur comme une quantité possédant une magnitude (longueur, norme) et une direction.
  - Représentation d'un vecteur en 2D à l'aide de ses composantes :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

.

  - Opérations vectorielles de base (addition et soustraction) :

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \end{pmatrix}$$

- Multiplication d'un vecteur par un scalaire :

$$k\vec{a} = \begin{pmatrix} ka_x \\ ka_y \end{pmatrix}$$

.

- **Introduction à la cinématique :**
  - Branche de la mécanique qui décrit le mouvement des objets sans considérer les causes du mouvement (les forces).
  - Contrairement à la dynamique, qui relie le mouvement aux forces.
  - Notre objectif dans ce bloc est de développer les outils mathématiques pour décrire précisément *comment* les objets se déplacent en 2D.

2. Position en 2D

- **Vecteur Position :**
  - Pour décrire la localisation d'un point (ou d'un objet considéré comme un point) dans un plan bidimensionnel, nous utilisons le **vecteur position**, noté $\vec{r}$ (ou parfois $\vec{s}$ ou $\vec{x}$).
  - Si nous définissons un système de coordonnées cartésiennes avec un axe horizontal (x) et un axe vertical (y), le vecteur position d'un point P de coordonnées (x, y) est donné par :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$$

    où $\hat{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est le vecteur unitaire dans la direction de l'axe x, et $\hat{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est le vecteur unitaire dans la direction de l'axe y.
  - Le vecteur position pointe de l'origine du système de coordonnées vers la position de l'objet.
  - La **magnitude** du vecteur position, $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$, représente la distance de l'objet à l'origine.
  - La **direction** du vecteur position peut être donnée par l'angle θ qu'il forme avec l'axe x, où $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$.

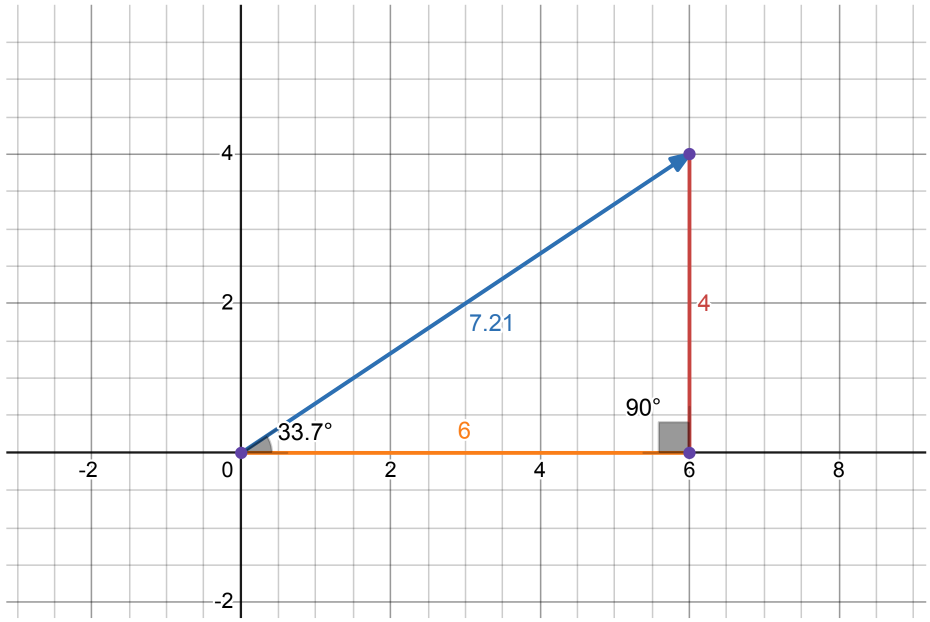

Fig. 1. – Plan 2D avec vecteurs position et vitesse

- **Trajectoire :**
  - Si la position d'un objet change au cours du temps, nous pouvons décrire son mouvement en spécifiant son vecteur position en fonction du temps : $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.
  - L'ensemble des points atteints par l'objet au cours de son mouvement forme sa **trajectoire**. La trajectoire est une courbe dans l'espace (ici, en 2D).
  - Exemples de trajectoires :
    - **Mouvement rectiligne uniforme :** $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0+v_x t \\ y_0+v_y t \end{pmatrix}$, où x_0, y_0, v_x, v_y sont des constantes. La trajectoire est une ligne droite.
    - **Mouvement circulaire uniforme :** $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t) \\ R\sin(\omega t) \end{pmatrix}$, où R est le rayon et ω la vitesse angulaire. La trajectoire est un cercle.
    - **Mouvement parabolique (projectile) :** $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x} t \\ y_0+v_{0y} t-\frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$ (sous l'effet de la gravité). La trajectoire est une parabole.
  - Visualisation de différentes trajectoires et des vecteurs position correspondants à différents instants.

- **Démo cinématique :** Pour visualiser les concepts de cinématique, consultez la démo : file:../scenes/session02.html

3. Vitesse en 2D

- **Vitesse Moyenne :**

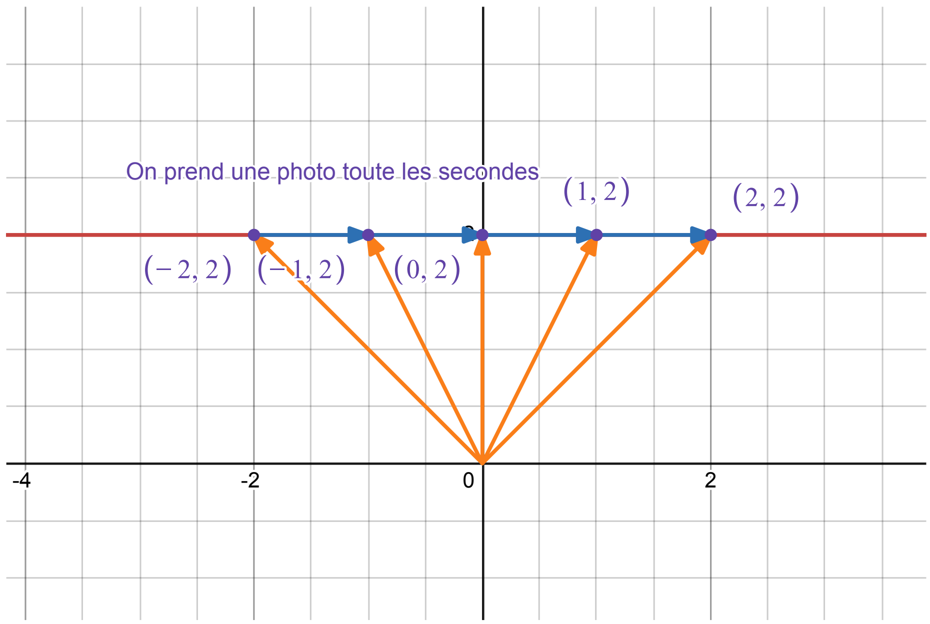

Fig. 2. – Plan 2D avec vecteurs position et vitesse

- Considérons un objet qui se déplace de la position $\vec{r}_i$ à l'instant t_i à la position $\vec{r}_f$ à l'instant t_f.
- Le **déplacement** de l'objet pendant cet intervalle de temps $\Delta t = t_f - t_i$ est le vecteur :

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i = \begin{pmatrix} x_f - x_i \\ y_f - y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

- Le **vecteur vitesse moyenne** $\vec{v}_m$ est défini comme le rapport du déplacement au temps écoulé :

$$\vec{v}_{\text{moy}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{t_f - t_i} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{\text{moy},x} \\ v_{\text{moy},y} \end{pmatrix}$$

- La vitesse moyenne est un vecteur dont la direction est la même que celle du déplacement, et dont la magnitude est le déplacement total divisé par le temps écoulé.

Exemple : Si une voiture se déplace de la position $\vec{r}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à la position $\vec{r}_f = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ au cours d'un intervalle de temps $\Delta t = 5$ secondes, alors le déplacement de la voiture est $\Delta\vec{r} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ et la vitesse moyenne est $\vec{v}_{\text{moy}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ m/s.

- **Vitesse Instantanée :**

- Pour décrire la vitesse de l'objet à un instant précis t, nous utilisons la notion de **vitesse instantanée**, $\vec{v}(t)$.
- Mathématiquement, la vitesse instantanée est définie comme la limite de la vitesse moyenne lorsque l'intervalle de temps Δt tend vers zéro :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- En termes de composantes, la vitesse instantanée est la dérivée des composantes de la position par rapport au temps :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix}$$

  où $v_{x(t)}$ est la composante de la vitesse selon l'axe x, et $v_{y(t)}$ est la composante de la vitesse selon l'axe y à l'instant t.
- La **magnitude** de la vitesse instantanée, $|\vec{v}(t)| = \sqrt{v_{x(t)}^2 + v_{y(t)}^2}$, est appelée **vitesse scalaire**.
- La **direction** de la vitesse instantanée est tangente à la trajectoire de l'objet au point considéré. Visualisation de ce concept avec des exemples de trajectoires courbes.

Application aux différents types de trajectoire :

1. Mouvement rectiligne uniforme :

- Pour $\vec{r}(t) = \binom{x_0+v_x t}{y_0+v_y t}$, la vitesse instantanée est :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

- Le vecteur vitesse est **constant** : direction, magnitude et composantes ne changent pas au cours du temps. Par exemple, un objet avec $\vec{r}(0) = \binom{1}{2}$ et $\vec{v} = \binom{3}{0}$ se déplace horizontalement à 3 m/s.

2. Mouvement circulaire uniforme :

- Pour $\vec{r}(t) = \binom{R\cos(\omega t)}{R\sin(\omega t)}$, la vitesse instantanée est :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega\sin(\omega t) \\ R\omega\cos(\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega y(t) \\ \omega x(t) \end{pmatrix}$$

- La magnitude est constante : $|\vec{v}| = R\omega$. À l'instant $t = \frac{\pi}{2\omega}$ (quand l'objet est en haut du cercle), $\vec{r} = \binom{0}{R}$ et $\vec{v} = \binom{-R\omega}{0}$: la vitesse est purement horizontale et tangente au cercle.

3. Mouvement parabolique (projectile) :

- Pour $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x}t \\ y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$, la vitesse instantanée est :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} - gt \end{pmatrix}$$

- La composante horizontale v_x reste constante, tandis que la composante verticale v_y diminue linéairement. Par exemple, avec $v_{0x} = 10$ m/s, $v_{0y} = 20$ m/s et $g = 9.81$ m/s², à $t = 2$ s : $\vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 - 9.81 * 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0.38 \end{pmatrix}$ m/s. Le projectile est quasiment à son apogée.

4. Accélération en 2D

- **Accélération Moyenne :**
  - Si la vitesse d'un objet change au cours du temps, l'objet est en train d'accélérer.
  - Le **vecteur accélération moyenne** $\vec{a}_{\text{moy}}$ pendant un intervalle de temps $\Delta t = t_f - t_i$ est défini comme le rapport du changement de vitesse au temps écoulé :

$$\vec{a}_{\text{moy}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \\ \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{\text{moy},x} \\ a_{\text{moy},y} \end{pmatrix}$$

  - L'accélération moyenne est un vecteur dont la direction est celle du changement de vitesse.

- **Accélération Instantanée :**
  - L'**accélération instantanée** $\vec{a}(t)$ décrit la manière dont la vitesse d'un objet change à un instant précis t. Elle est définie comme la dérivée de la vitesse par rapport au temps :

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

  - En termes de composantes, l'accélération instantanée est la dérivée des composantes de la vitesse par rapport au temps, ou la deuxième dérivée des composantes de la position par rapport au temps :

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x(t)}{dt} \\ \frac{dv_y(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d^2x(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} \end{pmatrix}$$

  - L'accélération peut changer la magnitude de la vitesse (l'objet accélère ou décélère), sa direction, ou les deux en même temps.

Cas particulier : Accélération constante. Si l'accélération $\vec{a}$ est constante, alors $\vec{a}(t) = \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$, où a_x et a_y sont des constantes. Dans ce cas, nous pouvons

intégrer les équations de l'accélération pour obtenir la vitesse et la position en fonction du temps :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t = \begin{pmatrix} v_{0x} + a_x t \\ v_{0y} + a_y t \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 = \begin{pmatrix} x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \end{pmatrix}$$

où $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{pmatrix}$ est la vitesse initiale et $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ est la position initiale.

C'est ce cas particulier qui sera crucial pour l'étude du mouvement de projectile sous l'effet de la gravité.

Exemples complet par type de trajectoire :

Nous pouvons maintenant reprendre nos 3 exemples et finaliser notre étude de leurs mouvements.

1. Mouvement rectiligne uniforme:

Position :

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + v_x t \\ y_0 + v_y t \end{pmatrix}$$

où x_0 et y_0 sont les positions initiales, et v_x et v_y sont les vitesses initiales.

Vitesse (dérivée de la position) :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

Accélération (dérivée de la vitesse) :

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La dérivée d'un vecteur constant est nulle. Aucune accélération n'est nécessaire pour maintenir le mouvement rectiligne uniforme.

2. Mouvement circulaire uniforme :

Position :

- À l'instant t, le vecteur position est :

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t) \\ R\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Vitesse (dérivée de la position) :

- Dérivons chaque composante par rapport au temps :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \frac{d(R\cos(\omega t))}{dt} \\ \frac{d(R\sin(\omega t))}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\omega\sin(\omega t) \\ R\omega\cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

Accélération (dérivée de la vitesse) :

- Dérivons à nouveau chaque composante :

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{d(R\omega\sin(\omega t))}{dt} \\ \frac{d(R\omega\cos(\omega t))}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\omega^2\cos(\omega t) \\ -R\omega^2\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Relation avec la position :

- On observe que :

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \begin{pmatrix} R\cos(\omega t) \\ R\sin(\omega t) \end{pmatrix} = -\omega^2\vec{r}(t)$$

L'accélération est constante et bien dirigée vers le centre du cercle.

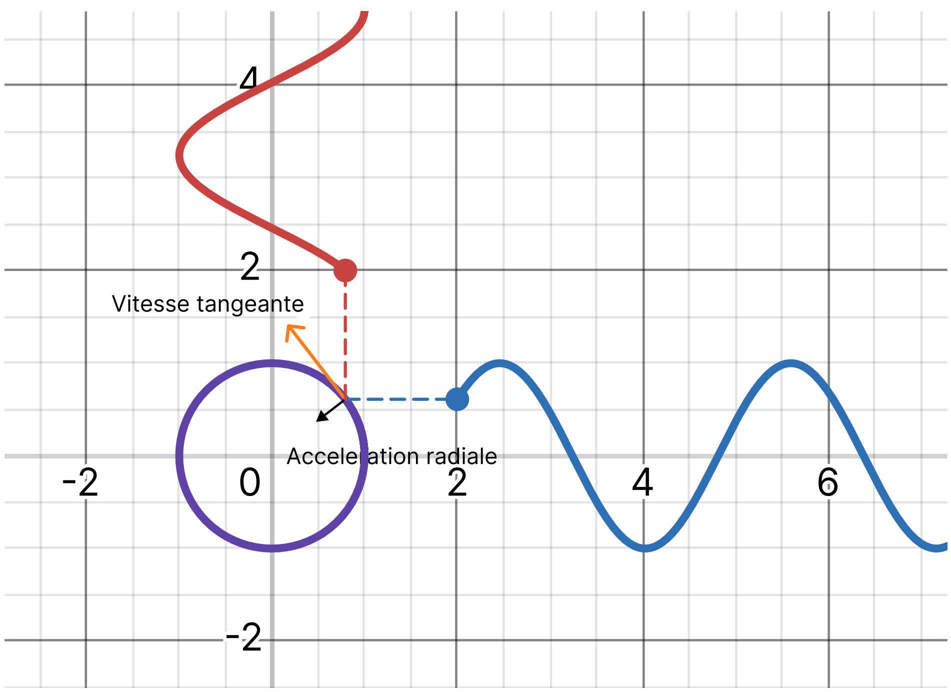

Fig. 3. – Le mouvement circulaire uniforme

3. Mouvement parabolique (projectile) :

- L'équation de la trajectoire est :

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x}t \\ y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$$

  - Pour $\vec{v}(t) = \left(\begin{smallmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} - gt \end{smallmatrix}\right)$, l'accélération instantanée est :

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

  - L'accélération est **constante** et dirigée verticalement vers le bas.

  Avec $g = 9.81$ m/s², quel que soit l'instant t, $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -9.81 \end{smallmatrix}\right)$ m/s². Cette accélération change uniquement la composante verticale de la vitesse. La composante horizontale reste inchangée.