

# Démonstration : L'Impulsion de Collision

## Partie 1 : D'où vient l'Impulsion ? (Le Lien Newtonien)

La relation  $J = \Delta p$  n'est pas une invention magique. C'est la 2ème Loi de Newton réécrite sous forme intégrale.

**1. Retour à la définition de la Force** L'accélération  $\vec{a}$  est la dérivée de la vitesse.

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Comme la masse est constante, on peut la rentrer dans la dérivée. On reconnaît alors la Quantité de Mouvement ( $\vec{p} = m\vec{v}$ ).

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

**2. L'Intégration (Somme des forces)** Pour connaître l'effet total d'un choc entre un instant  $t_1$  et  $t_2$ , on multiplie par  $dt$  et on intègre (on somme) les deux côtés de l'équation :

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{p_1}^{p_2} d\vec{p}$$

**3. Le Résultat : Le Théorème de l'Impulsion**

- Le terme de droite devient simplement le changement de quantité de mouvement :  $\Delta\vec{p}$ .
- Le terme de gauche est la définition exacte de l'Impulsion  $\vec{J}$ .

$$\vec{J} = \Delta\vec{p}$$

**Interprétation Géométrique :** L'impulsion est l'**Aire sous la courbe** de la Force en fonction du temps. Peu importe que la force soit petite et longue, ou géante et courte : si l'aire est la même, le changement de vitesse est le même.

## Application au Moteur Physique (Temps Zéro)

Dans une simulation « Narrow Phase », on considère que la collision est instantanée ( $\Delta t \approx 0$ ).

Si le temps est nul, pour avoir une aire non-nulle, la Force devrait être infinie. L'ordinateur ne peut pas calculer l'infini.

**L'Astuce :** On saute l'étape de l'intégration temporelle. On utilise directement le résultat  $J$ . Cela nous permet de « téléporter » la vitesse sans passer par l'accélération.

$$\Delta v = \frac{J}{m}$$

## Partie 2 : La Règle du Rebond (La Loi)

Nous avons l'outil ( $J$ ), mais quelle valeur doit-il avoir ? C'est ici qu'intervient la **Loi expérimentale**.

**Loi de Restitution** : « La vitesse à laquelle deux objets s'éloignent après un choc est proportionnelle à la vitesse à laquelle ils se rapprochaient avant le choc. »

$$v_{\text{rel}}(\text{après}) = -e \cdot v_{\text{rel}}(\text{avant})$$

- $v_{\text{rel}} = v_A - v_B$  (Vitesse relative le long de la normale).
- $e$  : Coefficient de restitution (entre 0 et 1).
- Le signe moins ( $-$ ) indique que les objets repartent dans l'autre sens.

## Zoom sur la Vitesse Relative

Avant de calculer, définissons les termes. Soient  $\vec{v}_A$  et  $\vec{v}_B$  les vecteurs vitesse des deux objets dans le monde.

**1. Le Vecteur Vitesse Relative ( $\Delta\vec{v}$ )** C'est la vitesse de A vue depuis B.

$$\vec{v}_{\text{diff}} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$$

**2. La Normale de Collision ( $\vec{n}$ )** C'est le vecteur unitaire qui relie les centres (la direction du choc).

**3. La Vitesse Relative Scalaire ( $v_{\text{rel}}$ )** C'est celle qu'on utilise dans la formule de l'impulsion ! On ne s'intéresse qu'à la vitesse **sur l'axe du choc**. On fait donc une projection (Produit Scalaire) :

$$v_{\text{rel}} = (\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot \vec{n}$$

**Interprétation du signe :**

- Si  $v_{\text{rel}} < 0$  : Les objets se rapprochent (Collision imminente).
- Si  $v_{\text{rel}} > 0$  : Les objets s'éloignent (Ils se sont déjà tapés ou se fuient).
- Si  $v_{\text{rel}} = 0$  : Ils glissent l'un à côté de l'autre sans s'écraser.

## Partie 3 : La Démonstration Complète

Cherchons l'intensité de l'impulsion  $j$  (scalaire) à appliquer le long de la normale pour satisfaire la loi du rebond.

**Étape A : Application de l'Impulsion** On applique  $j$  sur la boule A et  $-j$  sur la boule B (3ème loi de Newton). Les nouvelles vitesses ( $v'$ ) sont :

$$v'_A = v_A + \frac{j}{m_A} \quad \text{et} \quad v'_B = v_B - \frac{j}{m_B}$$

**Étape B : Calcul de la nouvelle vitesse relative** On cherche  $v'_{\text{rel}} = v'_A - v'_B$ .

$$v'_{\text{rel}} = \left( v_A + \frac{j}{m_A} \right) - \left( v_B - \frac{j}{m_B} \right)$$

Regroupons les termes de vitesse et les termes d'impulsion :

$$v'_{\text{rel}} = \underbrace{(v_A - v_B)}_{v_{\text{rel}}} + j \left( \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right)$$

**Étape C : On impose la Loi du Rebond** On remplace  $v'_{\text{rel}}$  par ce qu'on veut obtenir ( $-e \cdot v_{\text{rel}}$ ) :

$$-e \cdot v_{\text{rel}} = v_{\text{rel}} + j \left( \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right)$$

**Étape D : On isole  $j$**

1. Passons  $v_{\text{rel}}$  à gauche :

$$-e \cdot v_{\text{rel}} - v_{\text{rel}} = j \left( \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right)$$

2. Factorisons  $v_{\text{rel}}$  :

$$-(1 + e)v_{\text{rel}} = j \left( \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right)$$

## **Partie 4 : Simplification (Masse Réduite)**

Nous avons obtenu :

$$j = \frac{-(1 + e)v_{\text{rel}}}{\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B}}$$

Le terme au dénominateur  $\left( \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right)$  est peu intuitif. Transformons-le. Mise au même dénominateur :

$$\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} = \frac{m_B}{m_A m_B} + \frac{m_A}{m_A m_B} = \frac{m_A + m_B}{m_A m_B}$$

Maintenant, remplaçons cette fraction dans la formule de  $j$ . Diviser par une fraction, c'est multiplier par son inverse :

$$j = -(1 + e)v_{\text{rel}} \cdot \frac{1}{\frac{m_A + m_B}{m_A m_B}}$$

Ce qui nous donne la **Formule Finale** très élégante :

$$j = \underbrace{-(1+e)v_{\text{rel}}}_{\text{Vitesse à changer}} \cdot \underbrace{\left( \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} \right)}_{\text{Masse Équivalente}}$$

## 💡 Interprétation Physique

Cette forme

$$\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$$

est appelée la **Masse Réduite** du système.

Elle montre que lors d'une collision, le système se comporte comme une masse unique équivalente.

- Si une masse est minuscule ( $m_A \ll m_B$ ), la masse équivalente devient  $\approx m_A$ .

**Conclusion :** C'est le plus léger qui dicte la dynamique du rebond.