Университет ИТМО

Лабораторная работа №1
«Основные понятия линейного программирования»

Выполнил: Федюкович С. А.

Факультет: МТУ “Академия ЛИМТУ”

Группа: S3100

____

Проверила: Авксентьева Е. Ю.

____

Санкт-Петербург

2018

Теоретические основы лабораторной работы

Линейное программирование – это направление математического программирования, изучающее методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными и линейным критерием.

Необходимым условием постановки задачи линейного программирования являются ограничения на наличие ресурсов, величину спроса, производственную мощность предприятия и другие производственные факторы.

Сущность линейного программирования состоит в нахождении точек наибольшего или наименьшего значения некоторой функции при определенном наборе ограничений, налагаемых на аргументы и образующих систему ограничений, которая имеет, как правило, бесконечное множество решений. Каждая совокупность значений переменных (аргументов функции F), которые удовлетворяют системе ограничений, называется допустимым планом задачи линейного программирования. Функция F, максимум или минимум которой определяется, называется целевой функцией задачи. Допустимый план, на котором достигается максимум или минимум функции F, называется оптимальным планом задачи.

Система ограничений, определяющая множество планов, диктуется условиями производства. Задачей линейного программирования (ЗЛП) является выбор из множества допустимых планов наиболее выгодного (оптимального).

В общей постановке задача линейного программирования выглядит следующим образом:

Имеются какие-то переменные $\mathrm{x} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots \mathrm{x}_n)$ и функция этих переменных $f(x) = f(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots \mathrm{x}_n)$, которая носит название целевой функции. Ставится задача: найти экстремум (максимум или минимум) целевой функции $f(x)$ при условии, что переменные x принадлежат некоторой области G:

$$\begin{cases} f(x) \Rightarrow extr \\ x \in G \end{cases}$$

Линейное программирование характеризуется:

- функция $f(x)$ является линейной функцией переменных $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots \mathrm{x}_n$
- область G определяется системой линейных равенств или неравенств.

Математическая модель любой задачи линейного программирования включает в себя:

- максимум или минимум целевой функции (критерий оптимальности);
- систему ограничений в форме линейных уравнений и неравенств;
- требование неотрицательности переменных.

Наиболее общую форму задачи линейного программирования формулируют следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n\{\leq, \geq, =\}b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n\{\leq, \geq, =\}b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n\{\leq, \geq, =\}b_m. \end{cases} \tag{1}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0 \tag{2}$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \rightarrow max(min) \tag{3}$$

Коэффициенты $a_{i,j}, b_i, c_j, j = 1, 2, ..., n, i = 1, 2, ..., m$ – любые действительные числа (возможно 0).

Решения, удовлетворяющие системе ограничений (1) условий задачи и требованиям неотрицательности (2), называются допустимыми, а решения, удовлетворяющие одновременно и требованиям минимизации (максимализации) (3) целевой функции, - оптимальными.

Выше описанная задача линейного программирования (ЗЛП) представлена в общей форме, но одна и та же (ЗЛП) может быть сформулирована в различных эквивалентных формах. Наиболее важными формами задачи линейного программирования являются каноническая и стандартная.

В канонической форме задача является задачей на максимум (минимум) некоторой линейной функции F, ее система ограничений состоит только из равенств (уравнений). При этом переменные задачи $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, ..., \mathrm{x}_n$ являются неотрицательными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{4}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0 \tag{5}$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \rightarrow max(min) \tag{6}$$

К канонической форме можно преобразовать любую задачу линейного программирования.

В стандартной форме задача линейного программирования является задачей на максимум (минимум) линейной целевой функции. Система ограничений ее состоит из одних линейных неравенств типа « $\geq$ » или « $\leq$ ». Все переменные задачи неотрицательны.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geq b_m. \end{cases} \tag{7}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0 \tag{8}$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \rightarrow max(min) \tag{9}$$

Всякую задачу линейного программирования можно сформулировать в стандартной форме.

Решение заданий

Привести к канонической форме следующие задачи линейного программирования:

$$1.\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 5, \\ x_1 + 2x_3 = 8, \\ -x_1 - 2x_2 \geq 1. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$F = x_1 - x_2 + 3x_3 \rightarrow min$$

Также привести к стандартному виду.

Решение

Приведение к каноническому виду:

Введем дополнительные переменные x_4, x_5. Причем в первое неравенство введем неотрицательную переменную x_4 со знаком плюс, а в третье – со знаком минус переменную x_5, поменяв знак целевой функции, запишем задачу в виде:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_3 = 8, \\ -x_1 - 2x_2 - x_5 = 1. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1...5$$

$$F = -x_1 + x_2 - 3x_3 \rightarrow max$$

что и дает эквивалентную задачу в канонической форме.

Приведение к стандартному виду:

Второе уравнение заменим на два равносильных противоположных неравенства, а третье неравенство умножим на минус единицу. Поменяв знак целевой функции, запишем задачу в виде:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 5, \\ x_1 + 2x_3 \leq 8, \\ -x_1 - 2x_3 \leq -8, \\ x_1 + 2x_2 \leq -1. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$F = -x_1 + x_2 - 3x_3 \rightarrow max$$

что и дает эквивалентную задачу в стандартной форме.

$$2.\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 4, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 9, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$F = 2x_1 + x_2 - x_3 \to max$$

Также привести к стандартному виду.

Решение

Приведение к каноническому виду:

Введем дополнительные переменные x_4, x_5. Причем в первое неравенство введем неотрицательную переменную x_4 со знаком минус, а во второе – со знаком плюс переменную x_5 запишем задачу в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$F = 2x_1 + x_2 - x_3 \to max$$

что и дает эквивалентную задачу в канонической форме.

Приведение к стандартному виду:

Третье уравнение заменим на два равносильных противоположных неравенства, а первое неравенство умножим на минус единицу и запишем задачу в виде:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq -4, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 9, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10, \\ -x_1 - 3x_2 - 2x_3 \leq -10. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$F = 2x_1 + x_2 - x_3 \to max$$

что и дает эквивалентную задачу в стандартной форме.

$$3.\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 5, \\ -2x_2 + 4x_3 + 4x_4 \leq 4. \end{cases}$$

$$x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_5 \geq 0$$

$$F = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 \to min$$

Решение

Введем дополнительную переменную x_6 во второе неравенство со знаком плюс, поменяем знак целевой функции и переменные x_1 и x_4 распишем через разность двух соответствующих неотрицельных переменных. Запишем задачу в виде:

$$\begin{cases} x_1' - x_1'' + 2x_2 - x_3 - 2x_4' + 2x_4'' + x_5 = 5, \\ -2x_2 + 4x_3 + 4x_4' - 4x_4'' + x_6 = 4. \end{cases}$$

$$x_1' \geq 0, x_1'' \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4' \geq 0, x_4'', x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$$

$$F = -2x_1' + 2x_1'' + x_2 - 3x_3 - x_4' + x_4'' + 2x_5 \to max$$

что и дает эквивалентную задачу в канонической форме.

$$4.\ \begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 \geq 6, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 2. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

$$F = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 \to max$$

Решение

Введем дополнительную неотрицательную переменную x_6 в первое неравенство со знаком минус и переменную x_2 распишем через разность двух соответствующих неотрицельных переменных. Запишем задачу в виде:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2' - x_2'' + 4x_3 - 2x_4 - x_6 = 6, \\ x_1 - 2x_2' + 2x_2'' + 3x_3 + x_4 + x_5 = 2. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2' \geq 0, x_2'' \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$$

$$F = x_1 + 2x_2' - 2x_2'' + 3x_3 + 2x_4 + x_5 \to max$$

что и дает эквивалентную задачу в канонической форме.

$$5.\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6x_3 \le 12, \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 = 14, \\ -3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \le 18. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$$

$$F = -2x_1 - x_2 + x_3 \to min$$

Также привести к стандартному виду.

Решение

Приведение к каноническому виду:

Введем дополнительные неотрицательные переменные x_4 и x_5 в первое и третье неравенство соответсвенно со знаком плюс, поменяем знак целевой функции и запишем задачу в виде:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6x_3 + x_4 = 12, \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 = 14, \\ -3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_5 = 18. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0$$

$$F = 2x_1 + x_2 - x_3 \to max$$

что и дает эквивалентную задачу в канонической форме.

Приведение к стандартному виду:

Второе уравнение заменим на два равносильных противоположных неравенства, поменяем знак целевой функции и запишем задачу в виде:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6x_3 \le 12, \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 \le 14, \\ -3x_1 - 5x_2 + 12x_3 \le -14, \\ -3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \le 18. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$$

$$F = 2x_1 + x_2 - x_3 \to max$$

что и дает эквивалентную задачу в стандартной форме.

$$6.\ \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 12, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 18, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \ge 16. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$$

$$F = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \to max$$

Также привести к стандартному виду.

Решение

Приведение к каноническому виду:

Введем дополнительные неотрицательные переменные x_4 и x_5 в первое неравенство со знаком плюс и в третье со знаком минус соответственно. Запишем задачу в виде:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 12, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 18, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_5 = 16. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0$$

$$F = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \to max$$

что и дает эквивалентную задачу в канонической форме.

Приведение к стандартному виду:

Второе уравнение заменим на два равносильных противоположных неравенства, третье неравенство умножим на минус единицу и запишем задачу в виде:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 12, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 \le 18, \\ -6x_1 + 3x_2 - 4x_3 \le -18, \\ -3x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le -16. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$$

$$F = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \to max$$

что и дает эквивалентную задачу в стандартной форме.

$$7.\ \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geq 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 16, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 18. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$F = 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 \to min$$

Также привести к стандартному виду.

Решение

Приведение к каноническому виду:

Введем дополнительные неотрицательные переменные x_4, x_5 и x_6 в первое неравенство со знаком минус, во второе со знаком плюс и в третье со знаком минус соответственно. Поменяем знак целевой функции и запишем задачу в виде:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 16, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_6 = 18. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$$

$$F = -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \to max$$

что и дает эквивалентную задачу в канонической форме.

Приведение к стандартному виду:

Первое и третье неравенство умножим на минус единицу, поменяем знак целевой функции и запишем задачу в виде: и запишем задачу в виде:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \leq -4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 16, \\ -x_1 - x_2 - x_3 \leq -18. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$F = -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \to max$$

что и дает эквивалентную задачу в стандартной форме.

$$8.\quad \begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \geq 15, \\ 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 \leq 12, \\ 3x_1 - x_2 + 10x_3 \leq 17. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$F = -3x_1 - 5x_2 - 6x_3 \to min$$

Также привести к стандартному виду.

Решение

Приведение к каноническому виду:

Введем дополнительные неотрицательные переменные x_4, x_5 и x_6 в первое неравенство со знаком минус, во второе и третье со знаком плюс. Поменяем знак целевой функции и запишем задачу в виде:

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 - x_4 = 15, \\ 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 + x_5 = 12, \\ 3x_1 - x_2 + 10x_3 + x_6 = 17. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$$

$$F = 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \to max$$

что и дает эквивалентную задачу в канонической форме.

Приведение к стандартному виду:

Первое неравенство умножим на минус единицу, поменяем знак целевой функции и запишем задачу в виде:

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 8x_3 \leq -15, \\ 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 \leq 12, \\ 3x_1 - x_2 + 10x_3 \leq 17. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$F = 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \to max$$

что и дает эквивалентную задачу в стандартной форме.

$$9. \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \ge 8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$$

$$F = -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to min$$

Также привести к стандартному виду.

Решение

Приведение к каноническому виду:

Введем дополнительные неотрицательные переменные x_5, x_6 и x_7 в первое неравенство со знаком плюс, во второесл знаком минус и в третье со знаком плюс. Поменяем знак целевой функции и запишем задачу в виде:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_6 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_7 = 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0, x_6 \ge 0, x_7 \ge 0$$

$$F = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to max$$

что и дает эквивалентную задачу в канонической форме.

Приведение к стандартному виду:

Второе неравенство умножим на минус единицу, четвертое уравнение заменим на два равносильных противоположных неравенства, поменяем знак целевой функции и запишем задачу в виде:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \le 6, \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \le -8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 \le 15. \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 3x_4 \le -15. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$$

$$F = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to max$$

что и дает эквивалентную задачу в стандартной форме.

$$10.\ \begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 + x_5 \le 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \le 3 \\ x_3 - x_4 + 2x_3 \le 6, \\ x_1 - x_2 + x_4 - 5x_5 \ge 8. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0$$

$$F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5 \to max$$

Решение

Введем дополнительные неотрицательные переменные x_6, x_7, x_8 и x_9 в первое, второе и третье неравенство со знаком плюс и в четвертое со знаком минус. Запишем задачу в виде:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 3 \\ x_3 - x_4 + 2x_3 + x_8 = 6, \\ x_1 - x_2 + x_4 - 5x_5 - x_9 = 8. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0, x_6 \ge 0, x_7 \ge 0, x_8 \ge 0, x_9 \ge 0$$

$$F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5 \to max$$

что и дает эквивалентную задачу в канонической форме.