Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

Типовой расчет по математике
Модуль 6

«Ряды»

Выполнил:
Студент группы P3255
Федюкович С. А. ______________
Вариант 26

Санкт-Петербург

2019

Задача 1

Условие

Исследовать сходимость числовых рядов:

1. Сходится или расходится положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+2^n}{10^n}$
2. Сходится или расходится знакопеременный ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$; если ряд сходится, установить характер сходимости.

Решение

1. Применим интегральный признак Коши. Для этого введем функцию $f(x) = \frac{5^x+2^x}{10^x}$, удовлетворяющую условиям интегрального признака и исследуем несобственный интеграл от этой функции:

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{5^x+2^x}{10^x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} (\frac{1}{2^x} + \frac{1}{5^x})\,dx = \lim_{b\to+\infty} \Big[-\frac{1}{2^x\ln 2} - \frac{1}{5^x\ln 5}\Big]\Big|_0^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} (-\frac{1}{2^b\ln 2} - \frac{1}{5^b\ln 5} - (-\frac{1}{2\ln 2} - \frac{1}{5\ln 5})) = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{5\ln 5}$$

Несобственный интеграл сходится, значит, по интегральному признаку Коши сходится исследуемый ряд.

2. Данный ряд является знакочередующимся, поэтому применим признак Лейбница. Последовательность абсолютных величин членов данного ряда является убывающей:

$$\frac{1}{n\sqrt{\ln n}} < \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$$

Также:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}} = 0$$

Значит по признаку Лейбница данный ряд сходится.

Исследуем характер сходимости. Для этого рассмотрим положительный ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$, снова применив интегральный признак Коши. Для этого введем функцию $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$, удовлетворяющую условиям интегрального признака и исследуем несобственный интеграл от этой функции:

$$\int\limits_2^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_2^{b} \frac{d(\ln n)}{\sqrt{\ln x}} = \lim_{b\to+\infty} 2\sqrt{\ln n}\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} (2\sqrt{\ln b} - 2\sqrt{\ln 2}) = \infty$$

Несобственный интеграл расходится, значит, по интегральному признаку Коши расходится исследуемый ряд. Следовательно сходящийся знакочередующийся ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$ сходится условно.

Ответ: 1) ряд сходится; 2) ряд сходится условно.

Задача 2

Условие

Найти область сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n} \ln n}{\sqrt{n^2+1}}$$

Решение

Согласно обобщенному признаку Даламбера, интервал сходимости находится из условия:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} < 1,$$

где $u_n(x)$ — общий член ряда. В нашем случае:

$$u_n(x) = \frac{(x+1)^{2n} \ln n}{\sqrt{n^2+1}}, u_{n+1}(x) = \frac{(x+1)^{2(n+1)} \ln{(n+1)}}{\sqrt{(n+1)^2+1}}.$$

Тогда:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x+1)^{2(n+1)} \ln{(n+1)}}{\sqrt{(n+1)^2+1}}}{\frac{(x+1)^{2n} \ln n}{\sqrt{n^2+1}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+1)^2 \ln{(n+1)} \sqrt{n^2+1}}{\ln n \sqrt{(n+1)^2+1}} \right| =$$

$$= (x+1)^2 \lim_{n\to\infty} \left| \sqrt{\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}} \cdot \frac{\ln{(n+1)}}{\ln n} \right| = (x+1)^2$$

Перейдём к неравенству:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} < 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 < 1 \Leftrightarrow |x+1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x+1 < 1 \Leftrightarrow -2 < x < 0$$

В граничных точках $x = -2$ и $x = 0$ получим положительный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)^{2n} \ln n}{\sqrt{n^2+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^2+1}}$$

Для получения оценки общего члена данного ряда рассмотрим неравенства:

$$\begin{cases} \ln n > 1 \\ \sqrt{n^2+1} > n \end{cases} \quad \text{при } n > 2 \Rightarrow \frac{\ln n}{\sqrt{n^2+1}} > \frac{1}{n} \text{ при } n > 2$$

Значит, при $n > 2$ каждый член положительного ряда больше соответствующего члена гармонического ряда, который расходится. По первому признаку сравнения в граничных точках $x = -2$ и $x = 0$ исследуемый степенной ряд расходится, т. е. область его абсолютной сходимости — интервал $(-2; 0)$.

Ответ: область абсолютной сходимости ряда — интервал $(-2; 0)$.

Задача 3

Условие

Разложить функции в степенные ряды по степеням x, используя стандартные разложения. Указать интервалы их сходимости.

1. $f(x) = \frac{x}{10} \ln(1+10x)$
2. $f(x) = \frac{6}{3x^2+2}$

Решение

1. Разложим функцию, используя разложение $f(x) = \ln(1+x)$, затем каждый член полученного ряда почленно умножим на $\frac{x}{10}$:

$$f(x) = \frac{x}{10} \cdot \ln(1+10x) = \frac{x}{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (10x)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (10x)^{n+1} x}{10(n+1)}$$

Степенной ряд $f(x) = \ln(1+x)$ сходится абсолютно при условии $-1 < x \leq 1$, поэтому область сходимости полученного ряда будем искать из неравенства $-1 < 10x \leq 1$, откуда следует $-1/10 < x \leq 1/10$. Таким образом, область абсолютной сходимости представляет собой интервал $(-1/10; 1/10]$.

2. Представим данную функцию в виде:

$$f(x) = \frac{6}{3x^2+2} = 3 \cdot \frac{1}{1+3/2x^2}$$

Разложим функцию, используя разложение $f(x) = \frac{1}{1+x}$, затем каждый член полученного ряда почленно умножим на 3:

$$f(x) = 3 \cdot \frac{1}{1+3/2x^2} = 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (3/2x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (9/2x^2)^n$$

Степенной ряд $f(x) = \frac{1}{1+x}$ сходится абсолютно при условии $-1 < x < 1$, поэтому область сходимости полученного ряда будем искать из неравенства $-1 < 3/2x^2 < 1$, откуда следует $-\sqrt{2/3} < x < \sqrt{2/3}$. Таким образом, область абсолютной сходимости представляет собой интервал $(-\sqrt{2/3}; \sqrt{2/3})$.

Ответ: 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (10x)^{n+1} x}{10(n+1)}$ на $(-1/10; 1/10]$;
2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (9/2x^2)^n$ на $(-\sqrt{2/3}; \sqrt{2/3})$.

Задача 4

Условие

Разложить функцию $f(x) = x^2 - 2$ при $0 \le x \le 2$ в ряд Фурье на промежутке $[-2; 2]$. Доопределить её на промежутке $[-2; 0)$ нечетным образом. Сделать схематический чертеж графика функции $f(x)$ на промежутке $[-2; 2]$ и графика суммы $S(x)$ ряда Фурье этой функции.

Решение

Разложение в ряд Фурье нечетной функции содержит только синусы и имеет вид:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{p}, \text{ где } b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p}\, dx.$$

В нашем случае $p = 2$. Найдём b_n:

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p}\, dx = \int_0^2 (x^2 - 2) \sin \frac{n\pi x}{2}\, dx = \int_0^2 (x^2 - 2) \Big(-\frac{2}{\pi n} \Big)\, d\Big(\cos \frac{n\pi x}{2} \Big) =$$

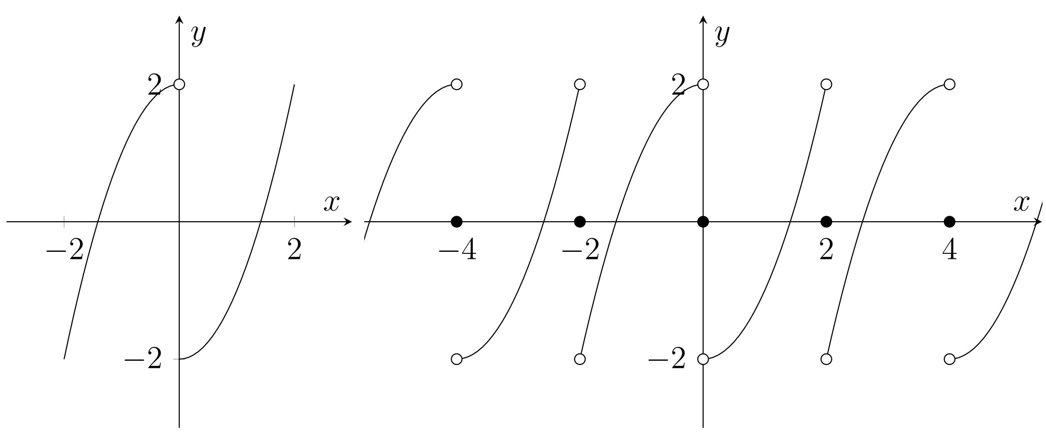
$$\frac{2(x^2-2)}{\pi n} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 + \frac{4}{\pi n} \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2}\, dx = \frac{4(1+\cos \pi n)}{\pi n} - \frac{16 \cos((\pi n x)/2) + 8n\pi x \sin((n\pi x)/2)}{n^3 \pi^3} \Big|_0^2 =$$

$$= -\frac{8(\pi n \cos((\pi n)/2) - 2 \sin((\pi n)/2))^2}{n^3 \pi^3}$$

Ряд Фурье для функции $f(x)$ имеет вид:

$$S(x) = -\frac{8}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi n \cos((\pi n)/2) - 2 \sin((\pi n)/2))^2}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{2}$$

Графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ряда Фурье изображены ниже



Ответ: $S(x) = -\frac{8}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi n \cos((\pi n)/2) - 2 \sin((\pi n)/2))^2}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{2}$.