Университет ИТМО

Отчёт по лабораторной работе №4
«Изучение свойств идеального газа на примере воздуха»

Выполнил: Федюкович С. А.

Факультет: МТУ “Академия ЛИМТУ”

Группа: S3100

____

Проверил: Пшеничников В. Е.

____

Санкт-Петербург

2018

Цель работы

1. Экспериментальная проверка уравнения состояния идеального газа.

2. Определение температуры абсолютного нуля по шкале Цельсия.

Теоретические основы лабораторной работы

В том случае, когда состояние газа далеко от области фазовых превращений, его с достаточной степенью точности можно считать идеальным. В качестве идеального газа в работе используется обычный атмосферный воздух.

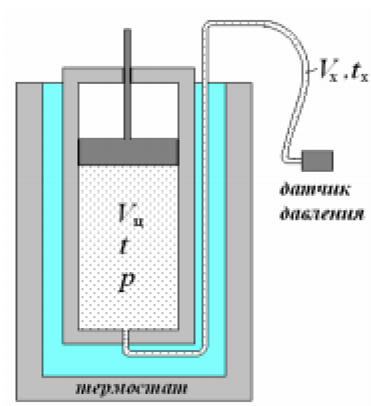
Для произвольной массы m идеального газа справедливо следующее уравнение состояния;

$$pV = \frac{m}{\mu}RT, \tag{1}$$

где p — давление, V — объем, μ — молярная масса, T — абсолютная температура газа, R — универсальная газовая постоянная. Это уравнение называется уравнением Менделеева-Клапейрона.

Нулю абсолютной температуры по шкале Цельсия соответствует значение $273,15°C$. Градусы шкалы абсолютной температуры (шкалы Кельвина) и шкалы Цельсия выбраны одинаковыми. Поэтому значение абсолютной температуры связано со значением температуры по шкале Цельсия формулой:

$$T(K) = t(°C) - t_o = t(°C) + 273,15°C. \tag{2}$$



Пусть исследуемый газ находится в цилиндре с контролируемым рабочим объемом $V_ц$, масса газа в цилиндре $m_ц$. Температура t цилиндра с газом поддерживается постоянной.

Датчик давления, работающий при комнатной температуре, вынесен за пределеы рабочего объёма и соединён с последним трубкой. Объём газа V_x в этой трубке мал по сравнению с рабочим объёмом $V_ц$. В соединительной трубке также находится газ массой m_x при некоторой неизвестной средней температуре t_x, лежащей в интервале от комнатной температуры до температуры t рабочего объёма.

В работе измеряется зависимость давления p газа от велечины рабочего объёма $V_ц$ при разных значениях температуры t (от $20°C$ до $60°C$). Выведем соотношение, связывающее рабочий объём и давление газа при постоянной температуре. Общее количество вещества в рабочем объёме и соединительной трубке в течение всей работы остаётся постоянным.

$$v = (m_ц + m_x)/\mu \tag{3}$$

Выражая массы газа $m_ц$ и m_x из уравнения состояния (1), абсолютную температуру из соотношения (2), и подставляя найденные выражения в формулу (3), получим:

$$v = \frac{pV_ц}{R(t - t_o)} + \frac{pV_x}{R(t_x - t_o)} \tag{4}$$

Из этого уравнения найдем искомое соотношение:

$$V_ц = \frac{vR(t - t_o)}{p} - \frac{V_x(t - t_o)}{(t_x - t_o)} \tag{5}$$

Из-за перераспределения газа между объёмами $V_ц$ и в процессе измерения температура может изменяться. Однако, при относительно малой величине изменением второго слагаемого в формуле (5) можно пренебречь. Поэтому при неизменной температуре t зависимость рабочего объёма $V_ц$ от обратного давления $1/p$ является линейной.

$$K = vR(t - t_o), \tag{6}$$

Угловой коэффициент этой зависимости в свою очередь, линейно меняется с температурой и обращается в нуль при абсолютном нуле температур. Таким образом, изучение зависимости K(t) позволяет найти значение t_o.

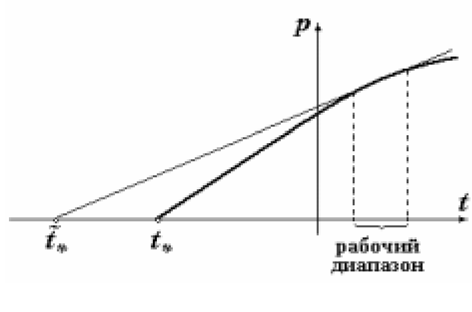
Рассмотрим другой, более точный, способ определения величины t_o. Если для разных температур измерение давления проводить при одних и тех же значениях объёма, то полученные данные легко преобразуются в зависимость давления от температуры при разных значения рабочего объёма газа. Теоретический вид этой зависимости получается из уравнения (5):

$$p = \frac{vR(t - t_o)}{V_ц(1 + x(t))} \approx \frac{vR(t - t_o)}{V_ц}(1 + x(t)), \tag{7}$$

где $x(t) = \frac{V_x(t - t_o)}{V_ц(t_x - t_o)}$. Справедливость приближенного равенства в формуле (7) обусловлена тем, что значения функции $x(t)$ малы, и для малых x можно воспользоваться формулой приближенных вычислений:

$$(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x. \tag{8}$$

В данном случае $\alpha = -1$.



При неизменном рабочем объёме $V_ц$ график зависимости давления от температуры в соответствии с формулой (7) должен быть почти линейным. Причем давление должно обращаться в нуль как раз при $t = t_o$. Из-за малости функции $x(t)$ отклонение от линейности невилико, и при измерении в ограниченном диапазоне температур практичечки незаметно. Но, если искать значение t_o с помощью линейной аппроксимации экспериментальной зависимости $p(t)$, экстраполируя аппроксимирующую прямую до пересечения с осью t, то найденное приближенное значение окажется систематически смещённым влево относительно истинного значения . Причина этого в следующем. Величина $x(t)$ в первом приближении линейно растущая функция температуры, с учетом этого график функции $p(t)$ из уравнения (7) оказывается параболой выпуклой вверх. Аппроксимирующая прямая, параметры которой найдены по точнкам в рабочем диапазоне температур, идет практически по касательной к этому графику, «промахиваясь» мимо истинного значения , как изображено на рис. 1. Однако, можно показать, что разность при малом отношении $V_x/V_ц$ должна убывать обратно пропорционально объёму $V_ц$. Поэтому, правильное значение температуры абсолютного нуля может быть найдено как предел:

$$t_o = \lim_{1/V_ц \to 0} \widetilde{t_o} \tag{9}$$

линейным продолжением графика зависимости $\widetilde{t_o}$ от $1/V_ц$ к значению $1/V_ц = 0$.

Экспериментальные данные

Приборные погрешности $\Delta V = 1$ мл, $\Delta p = 0,1$ кПа.

Атмосферное давление p_0 , определённое с помощью лабораторного барометра равно 756.8 мм ртутного столба.

Таблица 1.1. Зависимость давления от объёма при температуре $t_3 = 20°C$

№	$V_ц$, мл	Δp_1 , кПа	Δp_2, кПа	P, кПа	$1/p$, кПа
1	50	32,3	32,3	132,8	0,008
2	60	12,8	15,2	114,5	0,009
3	70	-1,8	0	99,6	0,010
4	80	-12,1	-11,9	88,5	0,011
5	90	-21,2	-21,3	79,2	0,013
6	100	-28,8	-28,8	71,7	0,014
7	110	-35,2	-35,3	62,2	0,015
8	120	-40,6	-36,8	59,9	0,017

Таблица 1.2. Зависимость давления от объёма при температуре $t_3 = 30°C$

№	$V_ц$, мл	Δp_1 , кПа	Δp_2, кПа	P, кПа	$1/p$, кПа
1	50	53,4	53,4	153,9	0,0065
2	60	29,5	29	129,7	0,0077
3	70	13,7	9,7	112,2	0,0089
4	80	-0,9	-3,5	98,3	0,0102
5	90	-11,7	-13,7	87,8	0,0114
6	100	-22,4	-22,5	78,0	0,0128
7	110	-30,8	-30,8	69,7	0,0143
8	120	-36,8	-36,8	63,7	0,0157

Таблица 1.3. Зависимость давления от объёма при температуре $t_3 = 40°C$

№	$V_ц$, мл	Δp_1 , кПа	Δp_2, кПа	P, кПа	$1/p$, кПа
1	50	50,2	51,7	151,4	0,0066
2	60	28	27,6	128,3	0,0078
3	70	3,7	5,1	104,9	0,0095
4	80	-7,8	-6,1	93,5	0,0107
5	90	-16,3	-16,5	84,1	0,0119
6	100	-24,4	-24,5	76,0	0,0132
7	110	-31,1	-31,1	69,4	0,0144
8	120	-36,7	-36,7	63,8	0,0157

Обработка результатов измерений

1. Переведем показания лабораторного барометра из миллиметров ртутного столба в паскали:

$$p_0(\text{Па}) = p_0(\text{мм.рт.ст})10^{-3}\frac{\text{м}}{\text{мм}}\rho g = 100495(\text{Па}) = 100,495(\text{кПа}). \qquad (10)$$

   Здесь $\rho = 13,55 \cdot 10^3$кг/м^3 — плотность ртути, $g = 9,819$м/c^2 — ускорение свободного падения на широте Санкт-Петербурга.

2. Для каждой из 1.1 — 1.3 вычислим давление газа p по формуле

$$p = p_0 + \frac{\Delta p_1 + \Delta p_2}{2}, \qquad (11)$$

   обратное давление 1/p и заполним пятую и шестую колонки таблиц.

3. По данным таблиц 1.1 — 1.3 для температур построим на одной координатной сетке графики зависимости рабочего объёма $V_{цот}$ обратного давления $1/p$.

Рис. 2. Графики зависимости рабочего объёма $V_ц$ от обратного давления $1/p$. Из рис. 2 видно, что зависимость $V_ц$ от $1/p$ во всех пяти случаях является прямолинейной. Кроме того, наблюдается рост углового коэффициента K с ростом t.

4. Перенесём значения рабочих температур во второй столбец таблицы 2.1. Для каждого из графиков $V_ц$ от $1/p$ рассчитаем угловой коэффициент K, следующим образом: Пусть $X_1, X_2 ... X_n$ — абсциссы, $Y_1, Y_2 ... Y_n$ — ординаты графика некоторой экспериментально измеренной зависимости $Y(X)$. Если предполагается, что эта зависимость линейна, т.е. $Y(X) = AX + C$, то наиболее вероятные значения углового коэффициента A и свободного слагаемого C можно найти из требования минимальности суммы квадратов отклонений ординат экспериментальных точек от искомой прямой:

$$\sum_{i=1}^{N}(Y_i - (AX_i + C))^2 = min. \tag{12}$$

Исходя из условия (15) можно получить следующие выражения

$$A = \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})Y_i, C = \overline{Y} - A\overline{X}, \tag{13}$$

где

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}, \overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i}{N}, D = \sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^2. \tag{14}$$

Погрешности коэффициента и слагаемого вычисляются по формулам:

$$\Delta A = \sqrt{E/D}, \Delta C = \sqrt{(\frac{1}{N} + \frac{\overline{X^2}}{D})E}, \tag{15}$$

где

$$E = \frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{N}(Y_i - AX_i - C)^2. \tag{16}$$

Значения K занесём в таблицу 2.1:

№	$t, ^\circ C$	K, Дж
1	20	7622
2	30	7585
3	40	7718
4	50	8084
5	60	8513

5. По таблице 2.1. построим график зависимости $K(t)$:

Рис. 3. График зависимости углового коэффициента K графика $V_ц(1/p)$ от температуры газа. Как видим, в соответствии с формулой (6) график «идёт» прямолинейно. В теории график должен пересекать ось t при температуре абсолютного нуля. По найденным экспериментальным точкам найдём угловой коэффициент A и свободное слагаемое C для зависимости $K(t)$ по формулам $(13), (14)$.

$A = 23(\text{Дж}/°C)$; $C = 6992,15(\text{Дж})$;

Рассчитаем температуру абсолютного нуля: $t_o = \frac{-C}{A} = -306,5(°C)$;

Вычислим погрешность температуры абсолютного нуля: $\Delta t_o = t_o\sqrt{\frac{\Delta A}{A}^2 + \frac{\Delta C}{C}^2} = -77,9°C$;

Таким образом, доверительный интервал найденного значения температуры абсолютного нуля: $t_o = 306,5.5 \pm 77,9(°C)$.

6. По данным таблиц 1.1 – 1.5 заполним таблицу 2.2:

$V_ц$, мл	50	60	70	80	90	100	110	120
$T,° C$	P, кПа							
20	132,8	114,5	99,6	88,5	79,25	71,7	65,25	59,9
30	153,9	129,75	112,2	98,3	87,8	78,05	69,7	63,7
40	151,45	128,3	104,9	93,55	84,1	76,05	69,4	63,8
$1/V_ц, \text{мл}^{-1}$	0,02	0,017	0,014	0,013	0,011	0,01	0,009	0,0083
$\widetilde{t_o}$, C	-205,22	-192,91	-219,75	-235,1	-232,092	-246,442	-225,788	-251,691

Пользуясь таблицей 2.2 для значений объема цилиндра 50, 90, 120 мл на одной координатной сетке построим графики $p(t)$:

Рис. 4. Графики зависимости давленияи от температуры. Как видим, графики «идут» прямолинейно.

7. Для каждого из объемов (покажем рассчеты только для $V_1 = 50$мл) в таблице 2.2 найдём значение обратного объема $1/V_{ц}$ и рассчитаем величину $\widetilde{t_o}$ по формуле:
$\widetilde{t_o} = -\frac{c}{a} = -205,219°C$,

   где a и c , соответственно, угловой коэффициент и свободное слагаемое для зависимости $p(t)$, вычисляемые по формулам $(13),(14)$. Занесём значения в таблицу 2.2.

8. Пользуясь таблицей 2.2, по формулам (13),(14) найдём угловой коэффициент A' и свободное слагаемое C' для зависимости $\widetilde{t_o}(1/V_ц)$. Величина C' фактически есть предел (9), т.е. совпадает со значением t_o. На координатной сетке $\widetilde{t_o}$ от $1/V_ц$ отметим экспериментальные точки и проведём прямую, соответствующую найденным параметрам A' и C' . Продолжим прямую до пересечения с осью ординат.

Рис. 5. Зависимость $\widetilde{t_o}(1/V_ц)$. Точка пересечения с осью ординат есть температура абсолютного нуля t_o.

9. Рассчитаем погрешность Δt_o как $\Delta C'$ по формулам (15)–(16).
$A' = 4151(°C/\text{мл}^{-1})$
$C' = -279(°C)$;
Вычислим погрешность температуры абсолютного нуля:
$\Delta C = \sqrt{(\frac{1}{N} + \frac{\overline{X^2}}{D})E} \approx 14,48°C.$

Вывод

Мы убедились, что зависимость объёма от величины обратного давления является линейной, а значит объём обратно пропорционален давлению при неизменной температуре, что согласуется с уравнением состояния идеального газа:$pV = \frac{m}{\mu}RT$.

Помимо этого мы рассчитали температуру абсолютного нуля двумя способами. Первый способ, основан на том, что угловой коэффициента K графика зависимости объёма от обратного давления обращается в нуль при температуре абсолютного нуля. Второй способ построен на анализе зависимости давления от температуры при постоянном объёме: при различных значениях объёма определяется $\widetilde{t_o}$ — приближенное значение температуры абсолютного нуля. Затем это значение уточняется как предел при $1/V_ц \to 0$. Как и ожидалось, этот способ дал более точный результат $t_o = -279 \pm 14,5(°C)$.

Тот факт, что полученные значения достаточно близки, подтверждает правильность расчетов и рассуждений, на основе которых были произведены расчеты.