Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

Типовой расчет по математике
Модуль 5

«Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Теория поля»

Выполнил:
Студент группы Р3255
Федюкович С. А. _______________
Вариант 26

Санкт-Петербург

2018

Задача 1

Условие

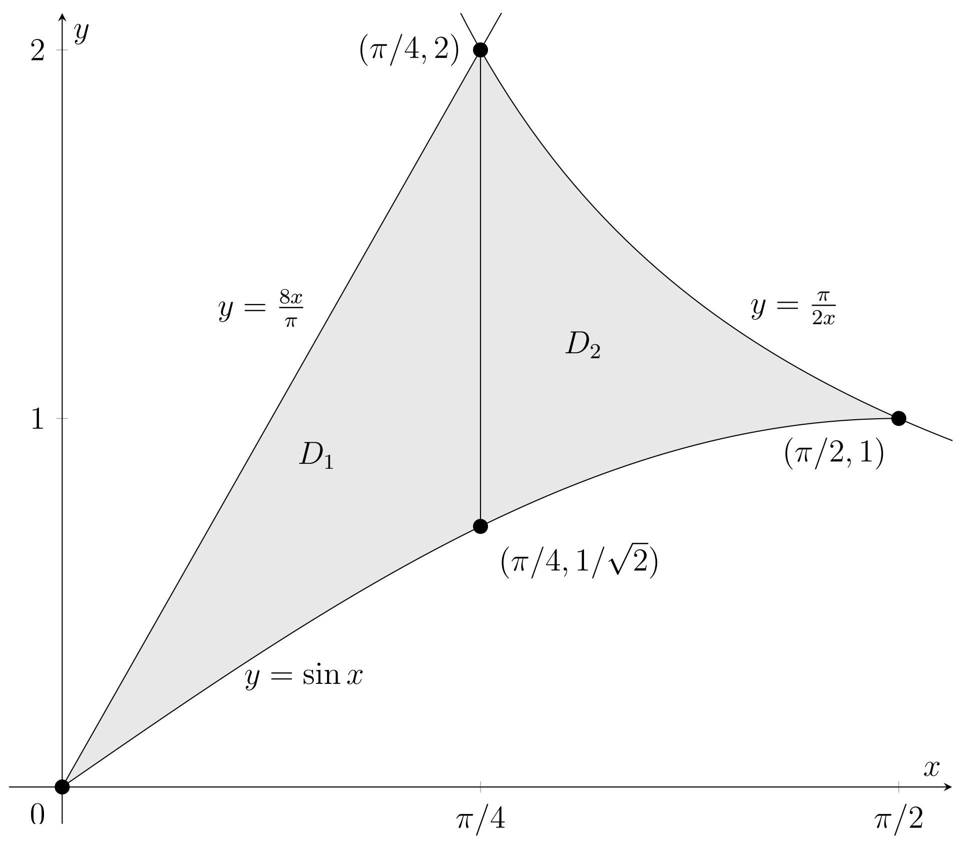
Плоская область D ограничена заданными кривыми:

$$x = \arcsin y, y = \frac{\pi}{2x}, y = \frac{8x}{\pi}, x > 0$$

1. Сделать схематический рисунок области D.
2. С помощью двойного интеграла найти площадь D.

Решение

1. Область D, ограниченная указанными линиями, изображена ниже:



Координаты точек пересечения граничных линий найдены графически.

2. Площадь S области D находится по формуле:

$$S = \iint\limits_D dx\,dy$$

Представим двойной интеграл в виде:

$$S = \iint\limits_D dx\,dy = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy$$

Для расстановки пределов интегрирования разрешим уравнения граничных линий относительно y:

$$y = \sin x, y = \frac{\pi}{2x}, y = \frac{8x}{\pi}.$$

$$S = \iint\limits_{D_1} dx\,dy + \iint\limits_{D_2} dx\,dy =$$

$$= \int_0^{\pi/4} dx \int_{\sin x}^{8x/\pi} dy + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int_{\sin x}^{\pi/(2x)} dy =$$

$$= \int_0^{\pi/4} (8x/\pi - \sin x)\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\pi/(2x) - \sin x)\,dx =$$

$$= (4x^2/\pi + \cos x)\Big|_0^{\pi/4} + (\frac{\pi}{2}\ln x + \cos x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} =$$

$$= \pi/4 + \sqrt{2}/2 - 1 + \frac{\pi}{2}\ln\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\ln\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}/2 =$$

$$= \pi/4 - 1 + \frac{\pi}{2}\ln 2$$

Ответ: $\pi/4 - 1 + \frac{\pi}{2}\ln 2$

Задача 2

Условие

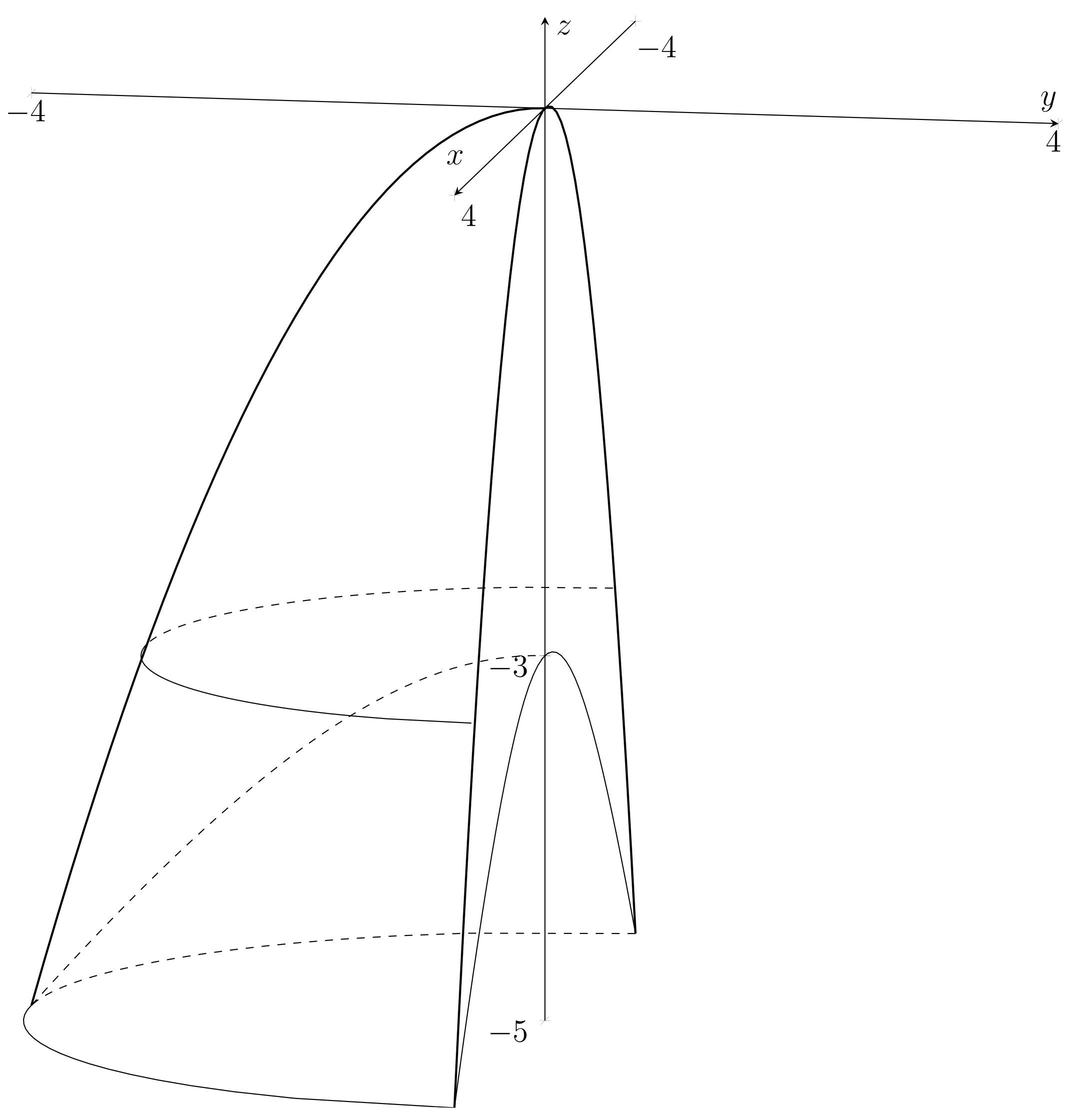
Тело T ограничено заданными поверхностями:

$$z = -\frac{5}{16}(x^2+y^2) \quad (1), z = -\sqrt{x^2+y^2+9} \quad (2), y = 0 \quad (3) \quad \text{при} \quad y \leq 0.$$

1. Сделать схематический рисунок тела T.
2. С помощью тройного интеграла найти объем тела T, перейдя к цилиндрическим или сферическим координатам.

Решение

1. Уравнение (1) задает параболоид вращения, симметричный относительно оси Oz с вершиной в точке $O(0;0;0)$, полость которого обращена вниз. Уравнение (2) задает нижнюю полость двуполостного гиперболоида с вершиной в точке $P(0;0;-3)$. Уравнение (3) задает координатную плоскость Oxz. Условие выделяет ту часть тела, ограниченного указанными поверхностями, которая лежит в области отрицательных значений ординат. Тело T изображено ниже:



2. Объем V тела Т выражается тройным интегралом:

$$V = \iiint\limits_T dv$$

Будем вычислять этот интеграл, перейдя к цилиндрическим координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ с учетом того, что $x^2 + y^2 = r^2$. Якобиан перехода равен r, а формула объема тела примет вид:

$$V = \iiint\limits_T r\,dr\,d\varphi\,dz$$

Запишем уравнения поверхностей, ограничивающих тело Т, в цилиндрических координатах. Уравнение параболоида: $z = -5r^2/16$, уравнение нижней полости двуполостного гиперболоида: $z = -\sqrt{r^2+9}$. Неравенство $y \le 0$ в цилиндрических координатах примет вид:

$$r\sin\varphi \le 0 \Rightarrow \sin\varphi \le 0 \Rightarrow -\pi \le \varphi \le 0 \quad (4)$$

Для расстановки пределов интегрирования найдем линию пересечения параболоида и полости гиперболоида:

$$\begin{cases} z = -5r^2/16 \\ z = -\sqrt{r^2+9} \\ r \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -5r^2/16 \\ -5r^2/16 = -\sqrt{r^2+9} \\ r \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -5 \\ r = 4 \end{cases}$$

Таким образом, параболоид и полость гиперболоида пересекаются по полуокружности радиуса 4 с центром в точке $K(0;0;-5)$ в плоскости $z = -5$ при $y \le 0$. Значит, для всех точек тела Т справедливо условие $0 \le r \le 4$ (5).

Наконец, отметим, что при входе в область Т прямая, параллельная оси Oz, пересечет полость гиперболоида $z = -\sqrt{r^2+9}$, а при выходе — параболоид $z = -5r^2/16$. Следовательно, для всех точек тела выполняется условие $-\sqrt{r^2+9} \le z \le -5r^2/16$ (6).

Используя условия (4), (5) и (6), расставим пределы интегрирования в тройном интеграле и решим его:

$$V = \int_{-\pi}^{0} d\varphi \int_0^4 r\,dr \int_{-\sqrt{r^2+9}}^{-5r^2/16} dz = \int_{-\pi}^{0} d\varphi \int_0^4 r(-5r^2/16 + \sqrt{r^2+9})\,dr =$$

$$= \int_{-\pi}^{0} d\varphi \int_0^4 (-5r^3/16 + r\sqrt{r^2+9})\,dr =$$

$$= \int_{-\pi}^{0} d\varphi \int_0^4 -5r^3/16\,dr + \int_{-\pi}^{0} d\varphi \int_0^4 r\sqrt{r^2+9}\,dr =$$

$$= \int_{-\pi}^{0} d\varphi (-5r^4/64)\Big|_0^4 + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0} d\varphi \frac{2(r^2+9)^{3/2}}{3}\Big|_0^4 =$$

$$= \int_{-\pi}^{0} d\varphi(-20) + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0} d\varphi \frac{196}{3} =$$

$$= -20\pi + \frac{98\pi}{3} = \frac{38\pi}{3}$$

Ответ: $38\pi/3$

Задача 3

Условие

С помощью криволинейного интеграла первого рода найти массу M дуги плоской материальной кривой, заданной уравнениями: $\begin{cases} x = 2\sqrt{t} \\ y = \frac{2}{3}t\sqrt{t} \end{cases}$, при $1 \le t \le 4$, $\quad \rho(x,y) = \sqrt{1 + \frac{3}{4}xy}$.

Решение

Масса M дуги плоской материальной кривой между точками A и B выражается криволинейным интегралом первого рода по дуге AB кривой:

$$M = \int\limits_{AB} \rho(x,y)\, dl, \text{где } dl \text{ — дифференциал длины дуги}$$

Если кривая задана параметрическим способом: $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, то $dl = \sqrt{(\psi'(t))^2 + \phi'(t))^2}\, dt$, а криволинейный интеграл преобразуется в определенный интеграл по формуле:

$$M = \int_{t_1}^{t_2} \rho(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt$$

В этом случае $\varphi'(t) = x'_t = 1/\sqrt{t}, \quad \psi'(t) = y'_t = \sqrt{t}$, поэтому:

$$dl = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt = \sqrt{1/t + t}\, dt$$

Плотность примет вид:

$$\rho(x,y) = \sqrt{1 + \frac{3}{4}xy} \Rightarrow \rho(2\sqrt{t}, \frac{2}{3}t\sqrt{t}) = \sqrt{1 + t^2}$$

Подставив полученные формулы в выражение криволинейного интеграла, будем иметь:

$$M = \int_1^4 \sqrt{1 + t^2}\sqrt{1/t + t}\, dt = \int_1^4 \frac{t^2 + 1}{\sqrt{t}}\, dt = \int_1^4 t^{-1/2}(t^2 + 1)\, dt$$

Вычислим неопределенный интеграл:

$$\int t^{-1/2}(t^2 + 1)\, dt = 2\sqrt{t}(t^2 + 1) - \int 2\sqrt{t}(2t)\, dt =$$

$$= 2\sqrt{t}(t^2 + 1) - 4\int t^{3/2}\, dt = 2\sqrt{t}(t^2 + 1) - \frac{8t^{5/2}}{5}$$

Перейдём обратно к определенному интегралу:

$$\int_1^4 t^{-1/2}(t^2 + 1)\, dt = (2\sqrt{t}(t^2 + 1) - \frac{8t^{5/2}}{5})\Big|_1^4 =$$

$$= 68 - \frac{256}{5} - 4 + \frac{8}{5} = \frac{72}{5}$$

Ответ: $\frac{72}{5}$

Задача 4

Условие

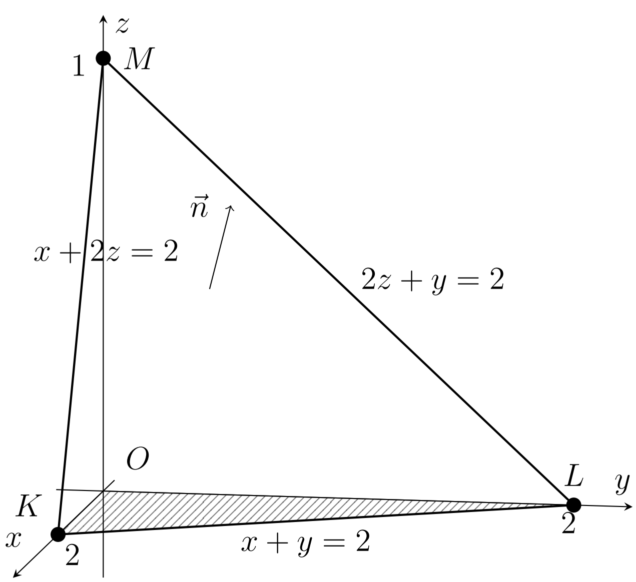
Дано векторное поле $\vec{a} = 3z\vec{i} - (2x+y+3z)\vec{j}$ и плоскость σ, заданная уравнением $x+y+2z = 2$, пересекающая координатные плоскости по замкнутой ломаной $KLMK$, где K, L, M — точки пересечения плоскости σ с координатными осями Ox, Oy и Oz соотвественно.

1. Найти поток Q векторного поля $\vec{a}$ через часть S плоскости σ, расположенную в первом октанте, в направлении нормали $\vec{n}$, образующей острый угол с осью Oz.

2. Найти циркуляцию C векторного поля $\vec{a}$ по контуру $KLMK$, образованному пересечением плоскости σ с координатными осями.

Решение

1. Часть S плоскости σ, лежащая в первом октанте, представляет собой треугольник KLM, изображенный ниже:



Поток Q векторного поля $\vec{a}$ через поверхность S выражается поверхностным интегралом первого рода:

$$Q = \iint\limits_S \vec{a} \cdot \vec{n}\, dS,$$

где $\vec{n} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ — единичный вектор нормали к данной поверхности, направление которого задано в условии задачи, dS — дифференциал площади поверхности.

Скалярное произведение, стоящее под знаком интеграла, в координатной форме имеет вид:

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma,$$

где $a_x = a_x(x,y,z), a_y = a_y(x,y,z), a_z = a_z(x,y,z)$ — координаты вектора $\vec{a}$.

Если уравнение поверхности разрешено относительно z, т. е. задано в виде $z = f(x,y)$, то, введя обозначения частных производных:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p(x,y); \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q(x,y),$$

выразим направляющие косинусы единичного вектора нормали:

$$\cos\alpha = \frac{-p(x,y)}{\pm\sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}}, \quad \cos\beta = \frac{-q(x,y)}{\pm\sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}}$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}}$$

.

В приведенных формулах перед радикалом выбирается знак « + », если вектор нормали образует острый угол с осью Oz, и знак « − » в противном случае. Дифференциал площади поверхности равен:

$$dS = \sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}\,dx\,dy.$$

В условиях данной задачи координаты вектора $\vec{a}$ равны:

$$a_x = 3z, \quad a_y = -(2x+y+3z), \quad a_z = 0$$

Разрешив уравнение плоскости σ относительно z, получим:

$$z = 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2}$$

Частные производные будут равны:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p(x,y) = -\frac{1}{2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q(x,y) = -\frac{1}{2}$$

Радикал, стоящий в знаменателях направляющих косинусов, равен:

$$\sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)} = \sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Согласно условию задачи, $\cos\gamma > 0$, следовательно, перед радикалом выбираем знак «+». В результате получим:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}; \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{6}}; \quad \cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

Найдем скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{n}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{n} = 3z\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} - (2x+y+3z)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} + 0\cdot\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{3z-2x-y-3z}{\sqrt{6}} = -\frac{2x+y}{\sqrt{6}}$$

Для вычисления потока преобразуем поверхностный интеграл по части S плоскости σ в двойной интеграл по плоской области D проекции области S на плоскость Oxy. Для этого выразим дифференциал площади поверхности по формуле:

$$dS = \sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}\,dx\,dy = \frac{\sqrt{6}}{2}\,dx\,dy$$

Получим:

$$Q = \iint\limits_S \vec{a}\cdot\vec{n}\,dS = -\iint\limits_{D_{xy}} \frac{2x+y}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\,dx\,dy = -\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}(2x+y)\,dx\,dy$$

Полученное выражение представляет собой двойной интеграл по треугольнику OKL, лежащему в плоскости Oxy. Расставим пределы интегрирования и вычислим этот интеграл:

$$Q = -\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}(2x+y)\,dx\,dy = -\frac{1}{2}\int_0^2 dx\int_0^{2-x}(2x+y)\,dy$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^2 dx(2xy+\frac{y^2}{2})\Big|_0^{2-x} = -\frac{1}{2}\int_0^2(2+2x-\frac{3x^2}{2})\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}(2x+x^2-\frac{x^3}{2})\Big|_0^2 = -\frac{1}{2}(4+4-\frac{8}{2}) = -2$$

Вычислим поток Q векторного поля $\vec{a}$ через поверхностный интеграл второго рода:

$$Q = \iint\limits_S a_x\,dy\,dz + a_y\,dx\,dz + a_z\,dy\,dx =$$

$$= \iint\limits_S 3z\,dy\,dz - (2x+y+3z)\,dx\,dz + 0\cdot\,dy\,dx =$$

$$= \iint\limits_S 3z\,dy\,dz - \iint\limits_S(2x+y+3z)\,dx\,dz =$$

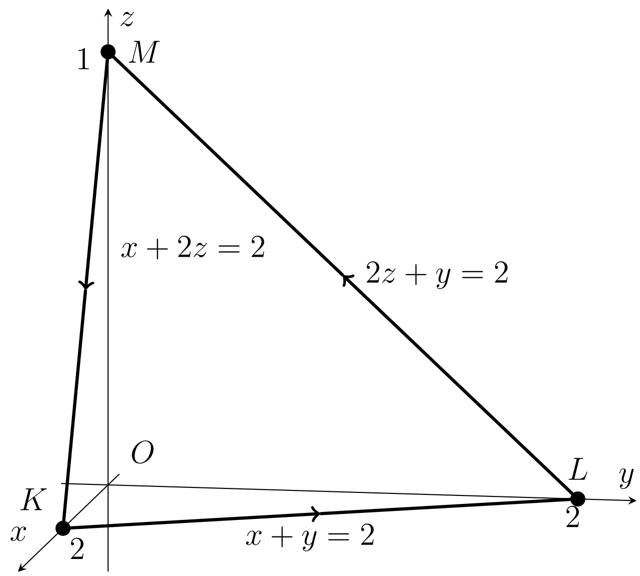
$$= 3\iint\limits_{D_{yz}} z\,dy\,dz - \iint\limits_{D_{xz}}(x+z+2)\,dx\,dz =$$

$$= 3\int_0^2 dy\int_0^{1-1/2y} z\,dz - \int_0^2 dx\int_0^{1-1/2x}(x+z+2)\,dz =$$

$$= 3\int_0^2 (y-2)^2/8\,dy - \int_0^2(20-4x-3x^2)/8\,dx =$$

$$= 3\cdot 1/3 - 3 = -2$$

2. По условию задачи обход контура производится в направлении отмеченном ниже:



Циркуляция векторного поля $\vec{a}$ по контуру l представляет собой криволинейный интеграл первого рода:

$$C = \int\limits_{l} [a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma] \, dS =$$

$$= \int\limits_{KLMK} [3z\cos\alpha - (2x + y + 3z)\cos\beta] \, dS =$$

$$= \left\{ \int\limits_{KL} + \int\limits_{LM} + \int\limits_{MK} \right\} [3z\cos\alpha - (2x + y + 3z)\cos\beta] \, dS =$$

Вычислим отдельно каждый из трех интегралов:

$$J_1 = \int\limits_{KL} [3z\cos\alpha - (2x + y + 3z)\cos\beta] \, dS$$

— это интеграл вдоль отрезка KL,касательный вектор к которому $\vec{\tau}$, очевидно, можно взять просто $\vec{KL} = (-2; 2; 0)$ (касательный вектор постоянен, так как KL — это отрезок прямой).Направляющие косинусы, очевидно, совпадают с искомыми:

$$\cos\alpha = \frac{-2}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2}} = -\frac{2}{\sqrt{8}}; \quad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{8}}; \quad \cos\gamma = \frac{0}{\sqrt{8}} = 0$$

Напишем параметрические уравнения линии KL:

$$\begin{cases} x(t) = 2 - 2t \\ y(t) = 0 + 2t \qquad , t \in [0; 1] \\ z(t) = 0 - 0 \cdot t \end{cases}$$

Учитывая параметрическое представление линии KL и формулу для вычисления dS, получаем:

$$dS = \sqrt{(x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2)}\,dt = \sqrt{8}\,dt$$

Подставляя полученные результаты в равенство для J_1, имеем следующие выражения для криволинейного интеграла первого рода J_1 через определенный интеграл:

$$J_1 = \int\limits_0^1 \left\{3 \cdot 0 \cdot (-\frac{2}{\sqrt{8}}) - (2(2-2t) + 2t + 3 \cdot 0)\frac{2}{\sqrt{8}}\right\}\sqrt{8}\,dt$$

$$= \int\limits_0^1 \left\{-(4 - 4t + 2t)\frac{2}{\sqrt{8}}\right\}\sqrt{8}\,dt$$

$$= \int\limits_0^1 \left\{-(4 - 2t)\frac{2}{\sqrt{8}}\right\}\sqrt{8}\,dt$$

$$= 4(-2t + \frac{t^2}{2})\Big|_0^1 = 4(-2 + \frac{1}{2}) = -6$$

Аналогично для J_2

$$J_2 = \int\limits_{LM} [3z\cos\alpha - (2x + y + 3z)\cos\beta]\,dS$$

Имеем $\vec{\tau} = L\vec{M} = (0; -2; 1)$:

$$\cos\alpha = \frac{0}{\sqrt{0^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 0; \quad \cos\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{cases} x(t) = 0 + 0 \cdot t \\ y(t) = 0 - 2t & , t \in [0; 1] \\ z(t) = 1 + t \end{cases}$$

$$dS = \sqrt{(x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2)}\,dt = \sqrt{5}\,dt$$

$$J_2 = \int\limits_0^1 \left\{3(1+t) \cdot 0 + (2 \cdot 0 - 2t + 3(1+t))\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}\sqrt{5}\,dt$$

$$= \int\limits_0^1 \left\{(-2t + 3 + 3t)\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}\sqrt{5}\,dt$$

$$= \int\limits_0^1 \left\{(3 + t)\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}\sqrt{5}\,dt$$

$$= (2(3t + \frac{t^2}{2}))\Big|_0^1 = 2(3 + \frac{1}{2}) = 7$$

Аналогично для J_3

$$J_3 = \int\limits_{MK} [3z\cos\alpha - (2x+y+3z)\cos\beta]\,dS$$

Имеем $\vec{\tau} = \vec{MK} = (2;0;-1)$:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2+0^2+(-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \cos\beta = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0; \quad \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{cases} x(t) = 2+2t \\ y(t) = 0+0\cdot t \qquad ,t\in[0;1] \\ z(t) = 0-t \end{cases}$$

$$dS = \sqrt{(x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2)}\,dt = \sqrt{5}\,dt$$

$$J_3 = \int\limits_0^1 \left\{3(-t)\frac{2}{\sqrt{5}} - (2(2+2t)+0+3(-t))\cdot 0\right\}\sqrt{5}\,dt$$

$$= \int\limits_0^1 \left\{-3t\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}\sqrt{5}\,dt$$

$$= -3t^2\Big|_0^1 = -3$$

Окончательно: $C = -(J_1+J_2+J_3) = -(-6+7-3) = -(-2) = 2$

Циркуляция векторного поля $\vec{a}$ по контуру l представляет собой криволинейный интеграл второго рода:

$$C = \int\limits_l \vec{a}\cdot\, d\vec{r} = \int\limits_l a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz$$

Для нашей задачи получим:

$$C = \int\limits_{KLMK} a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz = \int\limits_{KLMK} 3z\,dx - (2x+y+3z)\,dy$$

Для вычисления циркуляции применим свойство аддитивности интеграла и представим C в виде суммы трех криволинейных интегралов I_{KL}, I_{LM}, и I_{MK}, взятым по отрезкам KL, LM и MK соответственно, т. е. $C = I_{KL} + I_{LM} + I_{MK}$. Найдём значения этих интегралов:

Отрезок KL представляет собой отрезок прямой, заданной системой: $\begin{cases} z=0 \\ y=2-x \end{cases}$, откуда следует, что: $\begin{cases} dz=0 \\ dy=-\,dx \end{cases}$. При движении от точки K к точке L координата x меняется от 2 до 0, следовательно:

$$I_{KL} = \int\limits_2^0 (2x+2-x)\,dx = (x^2/2+2x)\Big|_2^0 = -6$$

Отрезок LM представляет собой отрезок прямой, заданной системой: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 - 2z \end{cases}$, откуда следует, что: $\begin{cases} dx = 0 \\ dy = -2\,dz \end{cases}$. При движении от точки L к точке M координата z меняется от 0 до 1, следовательно:

$$I_{LM} = 2\int\limits_0^1 (2 - 2z + 3z)\,dz = 2(z^2/2 + 2z)\Big|_0^1 = 5$$

Отрезок MK представляет собой отрезок прямой, заданной системой: $\begin{cases} y = 0 \\ x = 2 - 2z \end{cases}$, откуда следует, что: $\begin{cases} dy = 0 \\ dx = -2\,dz \end{cases}$. При движении от точки M к точке K координата z меняется от 1 до 0, следовательно:

$$I_{LM} = -2\int\limits_1^0 3z\,dz = -6(z^2/2)\Big|_1^0 = 3$$

Окончательно получим: $C = -6 + 5 + 3 = 2$

Ответ: 1) $Q = -2$, 2) $C = 2$.

Работа над ошибками

Задача 4

2) Приведём верные расчеты интегралов J_2 и J_3 и окончательного значения циркуляции C:

$$J_2 = \int\limits_{LM} [3z\cos\alpha - (2x + y + 3z)\cos\beta]\, dS$$

Имеем $\vec{\tau} = \vec{LM} = (0; -2; 1)$:

$$\cos\alpha = \frac{0}{\sqrt{0^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 0; \quad \cos\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{cases} x(t) = 0 + 0 \cdot t \\ y(t) = 2 - 2 \cdot t \qquad , t \in [0; 1] \\ z(t) = 0 + t \end{cases}$$

$$dS = \sqrt{(x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2)}\, dt = \sqrt{5}\, dt$$

$$J_2 = \int\limits_0^1 \left\{ 3t \cdot 0 + (2 \cdot 0 + 2 - 2t + 3t)\frac{2}{\sqrt{5}} \right\} \sqrt{5}\, dt$$

$$\int\limits_0^1 \left\{ (2 + t)\frac{2}{\sqrt{5}} \right\} \sqrt{5}\, dt$$

$$(2(2t + t^2/2))\Big|_0^1 = 5$$

Аналогично для J_3

$$J_3 = \int\limits_{MK} \left[3z\cos\alpha - (2x+y+3z)\cos\beta\right] dS$$

Имеем $\vec{\tau} = \vec{MK} = (2;0;-1)$:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2+0^2+(-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \cos\beta = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0; \quad \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{cases} x(t) = 0+2t \\ y(t) = 0+0\cdot t \qquad , t\in[0;1] \\ z(t) = 1-t \end{cases}$$

$$dS = \sqrt{(x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2)}\,dt = \sqrt{5}\,dt$$

$$J_3 = \int\limits_0^1 \left\{3(1-t)\frac{2}{\sqrt{5}} - (2(2t)+0+3(1-t))\cdot 0\right\}\sqrt{5}\,dt$$

$$= \int\limits_0^1 \left\{3(1-t)\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}\sqrt{5}\,dt$$

$$= (6t-3t^2)\Big|_0^1 = 3$$

Окончательно: $C = J_1 + J_2 + J_3 = -6+5+3 = 2$