**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ**

**ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ**

# Домашнее задание по математике
# Модуль 5

## «Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Теория поля»

Выполнил:
Студент группы P3255
Федюкович С. А. ______________
Вариант 26

Санкт-Петербург

2019

# Задача 1

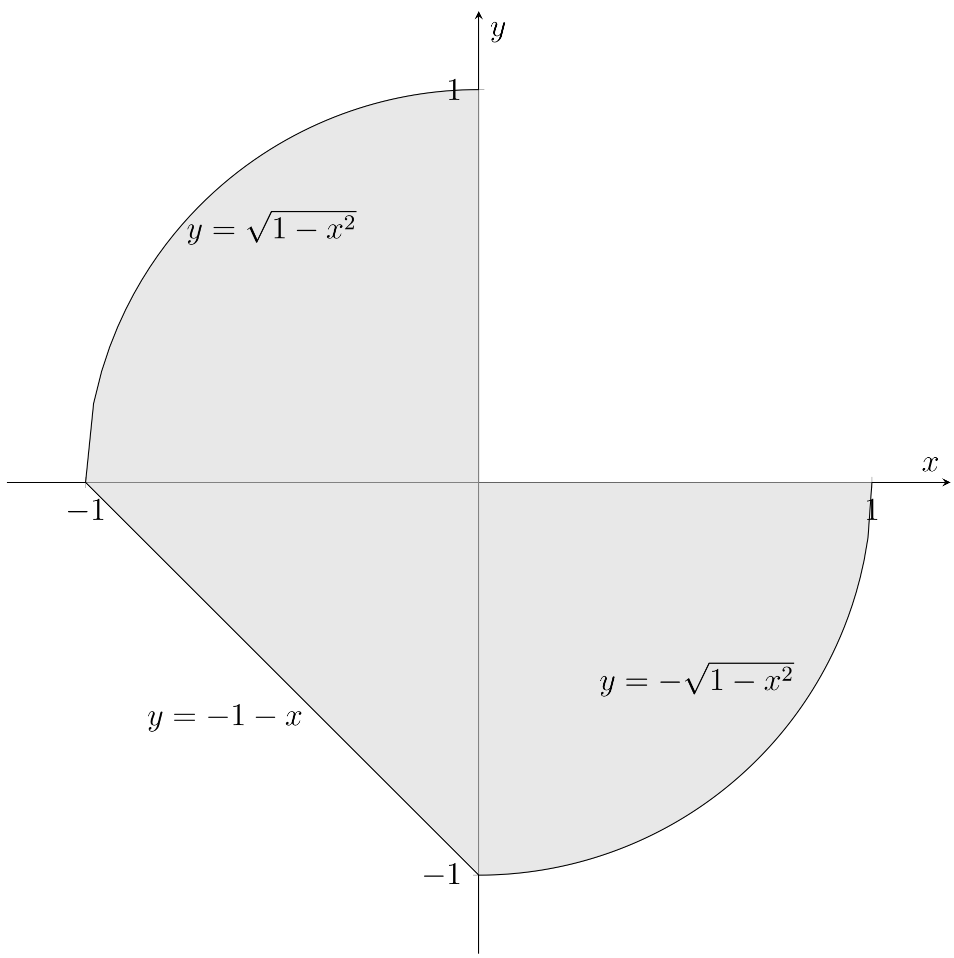
## Условие

Вычислить двойной интеграл, затем изменить порядок интегрирования. Нарисовать область интегрирования $D$ и вычислить двойной интеграл.

$$\int_{-1}^{0} dx \int_{-1-x}^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy + \int_{0}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} x\,dy$$

## Решение

1. Область интегрирования $D$ изображена ниже:



Вычислим двойной интеграл:

$$\int_{-1}^{0} dx \int_{-1-x}^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy + \int_{0}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} x\,dy =$$
$$= \int_{-1}^{0} x(1+x+\sqrt{1-x^2})\,dx + \int_{0}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,dx =$$
$$= \Big[1/6(3x^2+2x^3-2(1-x^2)^{3/2})\Big]\Big|_{-1}^{0} + \Big[-1/3(1-x^2)^{3/2}\Big]\Big|_{0}^{1} =$$
$$= -1/2 + 1/3 = -1/6$$

Теперь изменим порядок интегрирования и снова вычислим двойной интеграл:

$$\int_{-1}^{0} dx \int_{-1-x}^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy + \int_{0}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} x\,dy =$$
$$= \int_{-1}^{0} dy \int_{-1-y}^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx + \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} x\,dx =$$
$$= -\int_{-1}^{0} y(1+y)\,dy + 1/2\int_{0}^{1} (-1+y^2)\,dy =$$
$$= \Big[-y^2/2 - y^3/3\Big]\Big|_{-1}^{0} + 1/2\Big[-y+y^3/3\Big]\Big|_{0}^{1} =$$
$$= 1/6 - 1/3 = -1/6$$

**Ответ:** $-1/6$

# Задача 2

## Условие

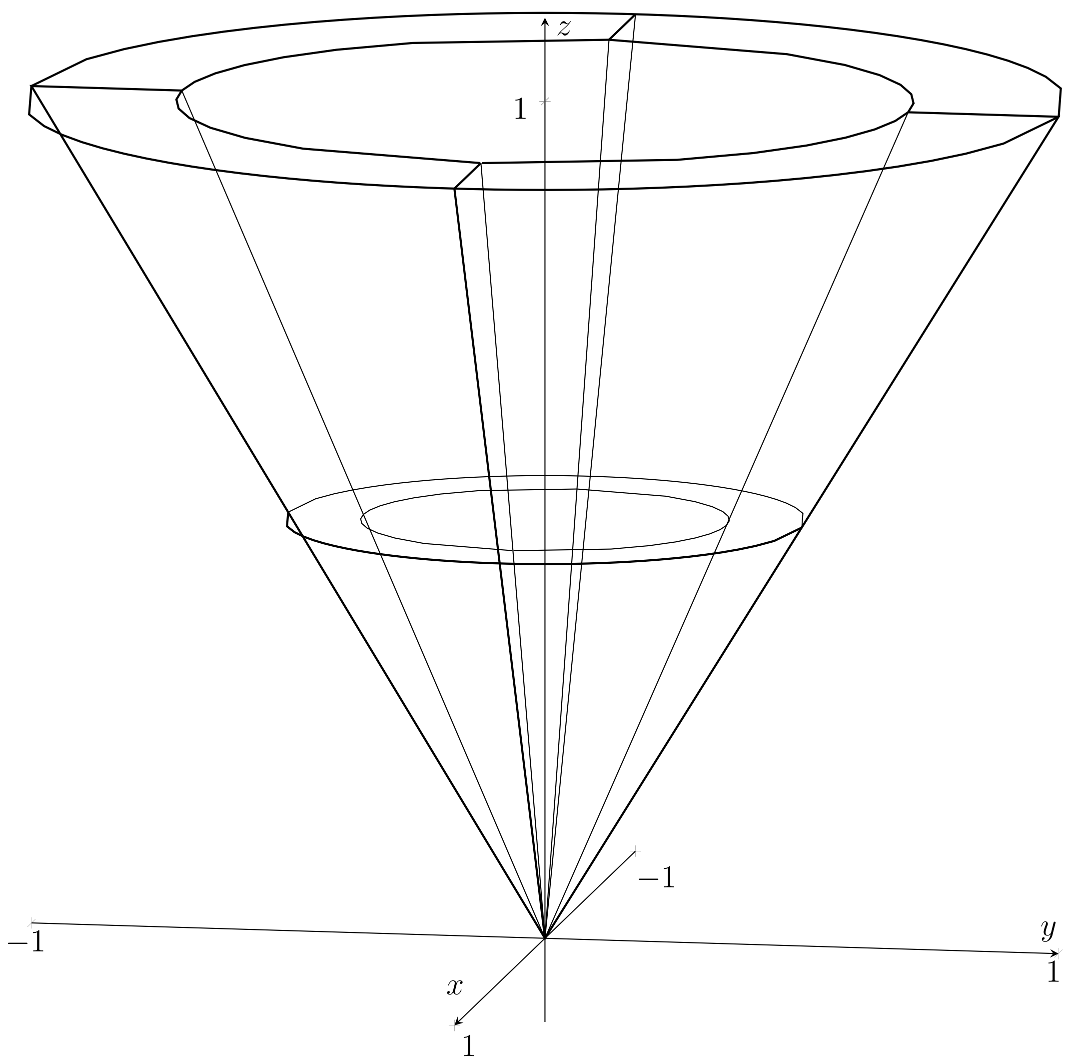
Тело T ограничено заданными поверхностями:

$$z = \sqrt{2(x^2 + y^2)} \quad (1), z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2), z = 1 \quad (3).$$

1. Сделать схематический рисунок тела T.
2. С помощью тройного интеграла найти объем тела T, перейдя к цилиндрическим или сферическим координатам.

## Решение

1. Уравнения (1) и (2) задают конусы с вершинами в точке $O(0;0;0)$. Уравнение (3) задает плоскость параллельную плоскости $xOy$, при $z = 1$. Тело T изображено ниже:



2. Объем $V$ тела Т выражается тройным интегралом:

$$V = \iiint\limits_T dv$$

Будем вычислять этот интеграл, перейдя к сферическим координатам $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ с учетом того, что $x^2 + y^2 = r^2$. Якобиан перехода равен $r$, а формула объема тела примет вид:

$$V = \iiint\limits_T r\,dr\,d\varphi\,dz$$

Запишем уравнения поверхностей, ограничивающих тело Т, в цилиндрических координатах. Уравнение (1): $z = \sqrt{2r^2}$ , уравнение (2): $z = \sqrt{r^2}$.

Объём данного тела будем находить, как разность объёмов двух косинусов ((1) и (2)):

$$V_T = V_{T_2} - V_{T_2} = \iiint\limits_{T_2} r\,dr\,d\varphi\,dz - \iiint\limits_{T_1} r\,dr\,d\varphi\,dz$$

Для расстановки пределов интегрирования найдем линию пересечения плоскости и конуса (2):

$$\begin{cases} z = 1 \\ z = \sqrt{r^2} \\ r \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ 1 = \sqrt{r^2} \\ r \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ r = 1 \end{cases}$$

Также найдём для конуса (1):

$$\begin{cases} z = 1 \\ z = \sqrt{2r^2} \\ r \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ 1 = \sqrt{2r^2} \\ r \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ r = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Таким образом, радиус основания конуса (2) равен 1, а радиус основания конуса (1) равен $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Значит, для всех точек тела $T_1$ справедливо условие $0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ (4), а для всех точек тела $T_2$ $0 \leq r \leq 1$ (5).

Используя условия (4) и (5), расставим пределы интегрирования в разности тройных интегралов и решим их:

$$\iiint\limits_{T_2} r\,dr\,d\varphi\,dz - \iiint\limits_{T_1} r\,dr\,d\varphi\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\,dr \int_{\sqrt{r^2}}^1 dz - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r\,dr \int_{\sqrt{2r^2}}^1 dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r(1 - \sqrt{r^2})\,dr - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r(1 - \sqrt{2r^2})\,dr,\ \sqrt{r^2} \to |r|,\ r \geq 0 \to r$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r(1 - r)\,dr - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r(1 - r)\,dr = \int_0^{2\pi} \frac{1}{6}\,d\varphi - \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}\,d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

**Ответ:** $\pi/6$

# Задача 3

## Условие

Доказать, что данное выражение $(1-\frac{y}{x^2+y^2})\,dx+(\frac{x}{x^2+y^2}-1)\,dy$ является полным дифференциалом функции $\Phi(x,y)$ и найти её с помощью криволинейного интеграла.

## Решение

Обозначим:

$$P(x,y)=(1-\frac{y}{x^2+y^2}),\; Q(x,y)=(\frac{x}{x^2+y^2}-1)$$

Очевидно, что:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Для отыскания функции $\Phi(x,y)$, дифференциал которой нам известен, вычислим:

$$\int_{A(a,b)}^{M(x,y)} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$$

Путь интегрирования, то есть кривая, соединяющая две точки $A$ и $M$, должна быть такой, чтобы на ней подынтегральная функция существовала и не претерпевала разрывы, то есть должно быть:

$$x^2+y^2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0,\, y\neq 0$$

Таким образом, ясно, что в точке $(0;0)$ подынтегральная функция терпит разрыв. Поэтому возьмем в качестве пути интегральную ломанную линию $ABM(A(x,0),B(x,y),M(0,y))$:

$$\Phi(x,y)=\int\limits_{ABM}(1-\frac{y}{x^2+y^2})\,dx+(\frac{x}{x^2+y^2}-1)\,dy$$

на $AB: x=const,\, dx=0\,, y\in[0,y]$; на $BM: y=const,\, dy=0\,, x\in[x,0]$. Тогда сводя криволинейный интеграл к определенному получаем:

$$\Phi(x,y)=\int\limits_0^y(\frac{x}{x^2+y^2}-1)\,dy+\int\limits_x^0(1-\frac{y}{x^2+y^2})\,dx=$$
$$=arctg(x/y)+arctg(y/x)-y-x$$

**Ответ:** $arctg(x/y)+arctg(y/x)-y-x$

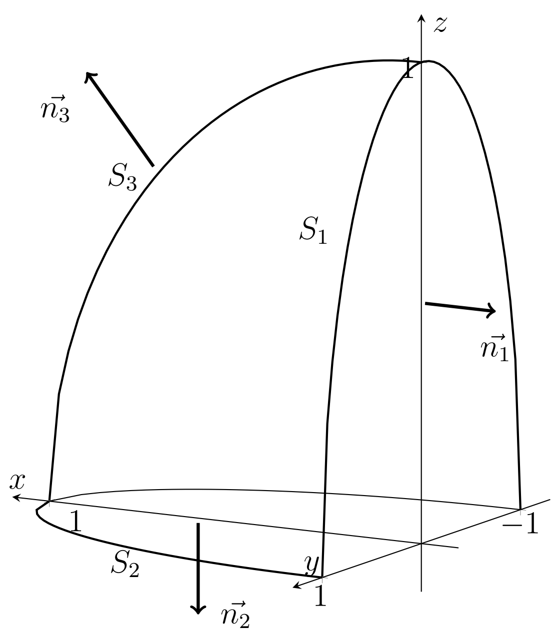
# Задача 4

## Условие

Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = \vec{i} - 2z\vec{k}$ из тела $T$, ограниченного указанными поверхностями $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x = 0\,(x \geq 0)$, $z = 0$ с помощью поверхностного интеграла первого рода, второго рода и также проверить результат с помощью теоремы Гаусса-Остроградского.

## Решение

Данное тело ограничено тремя поверхностями:
$S_1 : x = 0$ ( $\vec{n_1} = -\vec{i}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности $S_1 : a_n = -1$).
$S_2 : z = 0$ ( $\vec{n_1} = -\vec{k}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности $S_2 : a_n = 2z$).
$S_3$ — часть сферы $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$:




Вычислим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$dS = \sqrt{1 + p^2(x,y) + q^2(x,y)}\,dx\,dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

Нормаль $\vec{n_3}$ образует острый угол с осью $Oz$, то есть соответствует верхней стороне поверхности $S_3$, следовательно:

$$\cos\alpha = x; \quad \cos\beta = y; \quad \cos\gamma = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$a_n = 1 \cdot x + 0 \cdot y - 2z \cdot \sqrt{1-x^2-y^2} = x - 2z\sqrt{1-x^2-y^2}$$

Вычислим теперь поток $\Pi$ вектора $\vec{a}$ из тела $T$. Ясно, что поток равен сумме трех потоков, то есть $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$, где $\Pi_1$ — поток через поверхность $S_1$, $\Pi_2$ — поток через поверхность $S_2$ и $\Pi_3$ — поток через поверхность $S_3$. Тогда:

$$\Pi_1 = \iint\limits_{S_1} a_n\,dS = \iint\limits_{S_1} (-1)\,dS = -\int_0^1 dz \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} dy = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Pi_2 = \iint\limits_{S_2} a_n\, dS = \iint\limits_{S_2} (2z)\, dS = 0,$$

так как на поверхности $S_2$ $z = 0$;

$$\Pi_3 = \iint\limits_{S_3} a_n\, dS = \iint\limits_{S_3} \left[x - 2z\sqrt{1-x^2-y^2}\right] dS = \iint\limits_{D} \frac{x - 2(1-x^2-y^2)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\, dx\, dy$$

Для вычисления двойного интеграла перейдем к полярным координатам:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ |I(r,\varphi)| = r$$

Получим:

$$\Pi_3 = \iint\limits_{D} \frac{r\cos\varphi - 2(1-r^2)}{\sqrt{1-r^2}} r\, dr\, d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \frac{r\cos\varphi - 2(1-r^2)}{\sqrt{1-r^2}} r\, dr$$

$$I_{\text{вн.}} = \int_0^1 \frac{r\cos\varphi - 2(1-r^2)}{\sqrt{1-r^2}} r\, dr =$$

$$= \left[1/2arcsin(r)\cos\varphi - \frac{1}{6}\sqrt{1-r^2}(-4+4r^2+3r\cos\varphi)\right]\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{4}\cos\varphi - \frac{2}{3}$$

$$\Pi_3 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\frac{\pi}{4}\cos\varphi - \frac{2}{3})\, d\varphi = \left[-\frac{2\varphi}{3} + \frac{\pi}{4}\sin\varphi\right]\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\frac{\pi}{6}$$

Окончательно:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = -\frac{\pi}{2} + 0 - \frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3}$$

Вычислим поток $\Pi$ векторного поля $\vec{a}$ через поверхностный интеграл второго рода:

$$\Pi = \iint\limits_{S} a_x(x,y,z)\, dy\, dz + a_y(x,y,z)\, dx\, dz + a_z(x,y,z)\, dydx =$$

По прежнему $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$:

$$\Pi_1 = \iint\limits_{S_1} 1\, dy\, dz + 0\cdot\ dz\, dx - 2z\, dxdy = \iint\limits_{S_1} dydz = -\frac{\pi}{2},$$

на $S_1 : x = 0,\ dx = 0.$

$$\Pi_2 = \iint\limits_{S_2} 1\, dy\, dz + 0\cdot\ dz\, dx - 2z\, dxdy = 0,$$

на $S_2 : z = 0,\ dz = 0.$

$$\Pi_3 = \iint\limits_{S_3} 1\, dy\, dz + 0\cdot\ dz\, dx - 2z\, dxdy,$$

на $S_3 : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

$$\iint\limits_{S_3} 1\,dy\,dz - 2z\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{S_1} dy\,dz - 2\iint\limits_{D} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dxdy =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2\iint\limits_{D} \sqrt{1 - r^2}r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - r^2}r\,dr =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$$

Окончательно:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = -\frac{\pi}{2} + 0 - \frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3}$$

Проверим по формуле Гаусса-Остроградского:

$$\Pi = \iiint\limits_{T} \left[\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right] dxdydz = -2\iiint\limits_{T} dxdydz =$$

$$= -2\iiint\limits_{T} r^2 \sin\theta\,d\varphi d\theta dr = -2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\,d\theta \int_0^1 r^2\,dr = -\frac{2\pi}{3}$$

**Ответ:** $\frac{2\pi}{3}$

# Задача 5

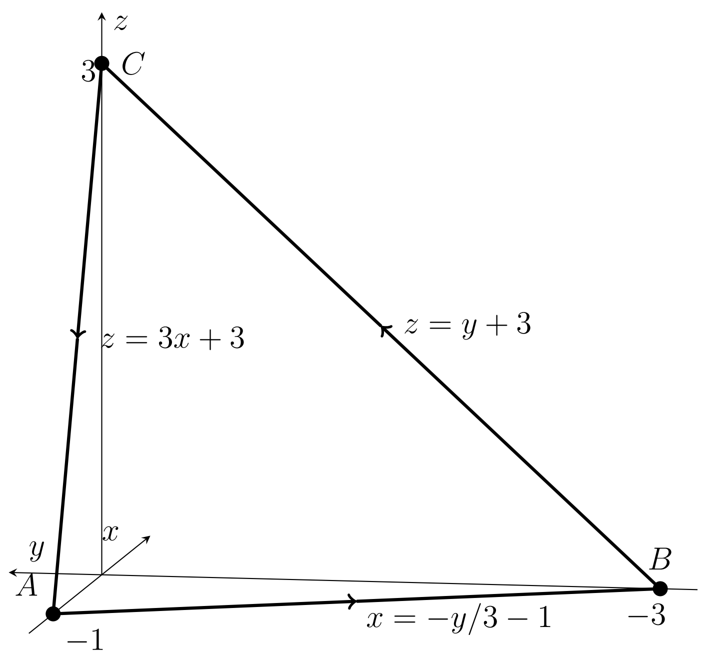
## Условие

Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = zx\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$ по контуру (замкнутой линии) $l$, получающемуся при пересечении заданной плоскости $\alpha : -3x - y + z = 3$ координатными плоскостями, через криволинейный интеграл первого и второго рода и с помощью формулы Стокса через поверхностный интеграл первого и второго рода. Контур $l$ считается лежащим в координатном октанте, заданном неравенствами: $x \leq 0$; $y \leq 0$; $z \geq 0$.

## Решение

Нарисуем контур $l$. Для этого заметим, что уравнение плоскости $\alpha : -3x - y + z = 3$ может быть преобразовано к виду:

$$-\frac{x}{1} - \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$$




Циркуляция векторного поля $\vec{a}$ по контуру $l$ представляет собой криволинейный интеграл первого рода:

$$C = \int\limits_{l} [a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma]\, dS =$$

$$= \int\limits_{ABCA} [zx \cos\alpha + \cos\beta + z \cos\gamma]\, dS =$$

$$= \left\{ \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CA} \right\} [zx \cos\alpha + \cos\beta + z \cos\gamma]\, dS =$$

Вычислим отдельно каждый из трех интегралов:

$$J_1 = \int\limits_{AB} [zx \cos\alpha + \cos\beta + z \cos\gamma]\, dS$$

— это интеграл вдоль отрезка $AB$,касательный вектор к которому $\vec{\tau}$, очевидно, можно взять просто $\vec{AB} = (1;-3;0)$ (касательный вектор постоянен, так как $AB$ — это отрезок прямой). Направляющие косинусы, очевидно, совпадают с искомыми:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2+(-3)^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}};\ \cos\beta = -\frac{3}{\sqrt{10}}; \quad \cos\gamma = \frac{0}{\sqrt{10}} = 0$$

Напишем параметрические уравнения линии $AB$:

$$\begin{cases} x(t) = -1+t \\ y(t) = 0-3t \qquad ,t\in[0;1] \\ z(t) = 0+0\cdot t \end{cases}$$

Учитывая параметрическое представление линии $KL$ и формулу для вычисления $dS$, получаем:

$$dS = \sqrt{(x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2)}\,dt = \sqrt{10}\,dt$$

Подставляя полученные результаты в равенство для $J_1$, имеем следующие выражения для криволинейного интеграла первого рода $J_1$ через определенный интеграл:

$$J_1 = \int\limits_0^1 \left\{0\cdot(-1+t)\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{3}{\sqrt{10}} + 0\cdot 0\right\}\sqrt{10}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \left\{-\frac{3}{\sqrt{10}}\right\}\sqrt{10}\,dt = (-3t)\Big|_0^1 = -3$$

Аналогично для $J_2$

$$J_2 = \int\limits_{BC} [zx\cos\alpha + \cos\beta + z\cos\gamma]\,dS$$

Имеем $\vec{\tau} = \vec{LM} = (0;3;3)$:

$$\cos\alpha = \frac{0}{\sqrt{0^2+3^2+3^2}} = 0; \quad \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{18}}; \quad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{18}}$$

$$\begin{cases} x(t) = 0+0\cdot t \\ y(t) = -3+3t \qquad ,t\in[0;1] \\ z(t) = 0+3t \end{cases}$$

$$dS = \sqrt{(x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2)}\,dt = \sqrt{18}\,dt$$

$$J_2 = \int\limits_0^1 \left\{(3t)\cdot 0\cdot 0 + \frac{3}{\sqrt{18}} + (3t)\cdot\frac{3}{\sqrt{18}}\right\}\sqrt{18}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \left\{\frac{3}{\sqrt{18}} + (3t)\cdot\frac{3}{\sqrt{18}}\right\}\sqrt{18}\,dt = (3t+\frac{9t^2}{2})\Big|_0^1 = \frac{15}{2}$$

Аналогично для $J_3$

$$J_3 = \int\limits_{CA} [zx\cos\alpha + \cos\beta + z\cos\gamma]\, dS$$

Имеем $\vec{\tau} = \vec{CA} = (-1; 0; -3)$:

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-3)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}; \quad \cos\beta = \frac{0}{\sqrt{10}} = 0; \quad \cos\gamma = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\begin{cases} x(t) = 0 - 1t \\ y(t) = 0 + 0 \cdot t \qquad , t \in [0; 1] \\ z(t) = 3 - 3t \end{cases}$$

$$dS = \sqrt{(x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2)}\, dt = \sqrt{10}\, dt$$

$$J_3 = \int\limits_0^1 \left\{(3-3t)(-1t)(-\frac{1}{\sqrt{10}}) + 0 + (3-3t)(-\frac{3}{\sqrt{10}})\right\}\sqrt{10}\, dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \left\{(3-3t)(-1t)(-\frac{1}{\sqrt{10}}) + (3-3t)(-\frac{3}{\sqrt{10}})\right\}\sqrt{10}\, dt =$$

$$(-3(3t - 2t^2 + \frac{t^3}{3}))\Big|_0^1 = -4$$

Окончательно: $C = -3 + \frac{15}{2} - 4 = \frac{1}{2}$

Циркуляция векторного поля $\vec{a}$ по контуру $l$ представляет собой криволинейный интеграл второго рода:

$$C = \int\limits_l \vec{a} \cdot\, d\vec{r} = \int\limits_l a_x\, dx + a_y\, dy + a_z\, dz$$

Для нашей задачи получим:

$$C = \int\limits_{ABCA} a_x\, dx + a_y\, dy + a_z\, dz = \int\limits_{ABCA} zx\, dx + \, dy + z\, dz$$

Для вычисления циркуляции применим свойство аддитивности интеграла и представим $C$ в виде суммы трех криволинейных интегралов $J_{AB}$, $J_{BC}$, и $J_{CA}$, взятым по отрезкам $AB$, $BC$ и $CA$ соответственно, т. е. $C = J_{AB} + J_{BC} + J_{CA}$ . Найдём значения этих интегралов:

Отрезок $AB$ представляет собой отрезок прямой, заданной системой: $\begin{cases} z = 0 \\ y = -3x - 3 \end{cases}$ , откуда следует, что: $\begin{cases} dz = 0 \\ dy = -3\, dx \end{cases}$ . При движении от точки $A$ к точке $B$ координата $x$ меняется от $-1$ до 0, следовательно:

$$I_{AB} = \int\limits_{-1}^0 -3\, dx = (-3x)\Big|_2^0 = -3$$

Отрезок $BC$ представляет собой отрезок прямой, заданной системой:
$\begin{cases} x = 0 \\ y = z - 3 \end{cases}$, откуда следует, что: $\begin{cases} dx = 0 \\ dy = dz \end{cases}$. При движении от точки $B$ к точке $C$ координата $z$ меняется от 0 до 3, следовательно:

$$I_{BC} = \int\limits_0^3 (1+z)\,dz = (z + z^2/2)\Big|_0^3 = \frac{15}{2}$$

Отрезок $CA$ представляет собой отрезок прямой, заданной системой:
$\begin{cases} y = 0 \\ x = z/3 - 1 \end{cases}$, откуда следует, что: $\begin{cases} dy = 0 \\ dx = 1/3\,dz \end{cases}$. При движении от точки $C$ к точке $A$ координата $z$ меняется от 3 до 0, следовательно:

$$I_{CA} = \int\limits_3^0 (z(z/3-1)/3 + z)\,dz = (z^3/27 + z^2/3)\Big|_3^0 = -4$$

Окончательно: $C = -3 + \frac{15}{2} - 4 = \frac{1}{2}$

Проверим циркуляцию векторного поля $\vec{a}$ с помощью формулы Стокса. В начале вычислим $rot\,\vec{a}$:

$$rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ zx & 1 & z \end{vmatrix} = \vec{i}\left\{\frac{\partial(z)}{\partial y} - \frac{\partial(1)}{\partial z}\right\} - \vec{j}\left\{\frac{\partial(z)}{\partial x} - \frac{\partial(zx)}{\partial z}\right\} + \vec{k}\left\{\frac{\partial(1)}{\partial x} - \frac{\partial(zx)}{\partial y}\right\} = \vec{j}x$$

Тогда:

$$C = \iint\limits_{\sigma} [0\cdot\cos\alpha + x\cos\beta + 0\cdot\cos\gamma]\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma} (x\cos\beta)\,d\sigma$$

Выражения для циркуляции через поверхностный интеграл первого рода (здесь в качестве поверхности $\sigma$ выбран треугольник $ABC$, ограниченный контуром $l$ — ломанной $ABCA$). Вычислим $\cos\beta$. Для этого заметим, что нормалью к поверхности $\sigma$ может служить вектор $\vec{n} = (-3;-1;1)$. Направляющие косинусы буду равны:

$$\cos\alpha = \frac{-3}{\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+1^2}} = -\frac{3}{\sqrt{11}};\ \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{11}};\quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{11}}$$

Тогда циркуляция примет вид:

$$C = -\iint\limits_{\sigma} \frac{x}{\sqrt{11}}\,d\sigma = \iint\limits_{D_{xz}} \frac{x}{\sqrt{11}}\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dxdz$$

$$y = -3x - 3 + z$$

Тогда интеграл примет вид:

$$C = \iint\limits_{D_{xz}} \frac{x}{\sqrt{11}}\sqrt{11}\,dxdz = \iint\limits_{D_{xz}} x\,dxdz = \int_{-1}^{0} dx \int_{3x+3}^{0} x\,dz = \frac{1}{2}$$

Выполним расчет циркуляции по формуле Стокса, используя при этом поверхностный интеграл второго рода:

$$C = \iint\limits_{\sigma} [0\,dydz + x\,dxdz + 0\,dxdy] = \iint\limits_{\sigma} x\,dxdz$$

Выражая поверхностный интеграл второго рода через двойной, имеем:

$$C = \iint\limits_{D_{xz}} x\,dxdz$$

Здесь использован тот факт, что нормаль $\vec{n} = (-3; -1; 1)$ к поверхности $\sigma$ образует тупой угол $\beta$ с осью $Oy$. Очевидно, что этот интеграл совпадает с соответствующим выражением поверхностного интеграла первого рода $-\iint\limits_{\sigma} \frac{x}{\sqrt{11}}\,d\sigma$ через двойной интеграл.

Поэтому $C = \iint\limits_{D_{xz}} x\,dxdz = \frac{1}{2}$ — как и следовало ожидать.

**Ответ:** $C = \frac{1}{2}$.