Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

Домашнее задание по математике
Модуль 5

«Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Теория поля»

Выполнил:
Студент группы P3255
Федюкович С. А. ______________
Вариант 26

Санкт-Петербург

2019

Задача 1

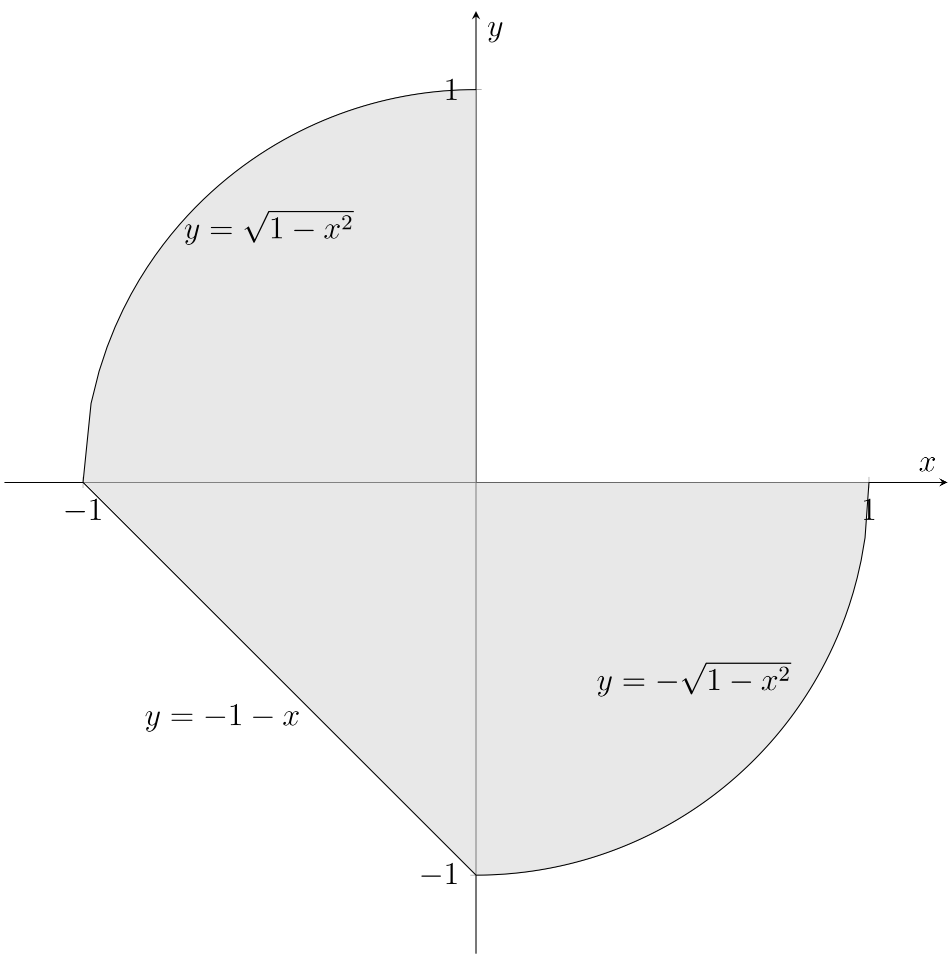
Условие

Вычислить двойной интеграл, затем изменить порядок интегрирования. Нарисовать область интегрирования D и вычислить двойной интеграл.

$$\int_{-1}^{0} dx \int_{-1-x}^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy + \int_{0}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} x\,dy$$

Решение

1. Область интегрирования D изображена ниже:



Вычислим двойной интеграл:

$$\int_{-1}^{0} dx \int_{-1-x}^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy + \int_{0}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} x\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{0} x(1+x+\sqrt{1-x^2})\,dx + \int_{0}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,dx =$$

$$= \Big[1/6(3x^2+2x^3-2(1-x^2)^{3/2})\Big]\Big|_{-1}^{0} + \Big[-1/3(1-x^2)^{3/2}\Big]\Big|_{0}^{1} =$$

$$= -1/2 + 1/3 = -1/6$$

Теперь изменим порядок интегрирования и снова вычислим двойной интеграл:

$$\int_{-1}^{0} dx \int_{-1-x}^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy + \int_{0}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} x\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{0} dy \int_{-1-y}^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx + \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} x\,dx =$$

$$= -\int_{-1}^{0} y(1+y)\,dy + 1/2\int_{0}^{1} (-1+y^2)\,dy =$$

$$= \Big[-y^2/2 - y^3/3\Big]\Big|_{-1}^{0} + 1/2\Big[-y+y^3/3\Big]\Big|_{0}^{1} =$$

$$= 1/6 - 1/3 = -1/6$$

Ответ: $-1/6$

Задача 2

Условие

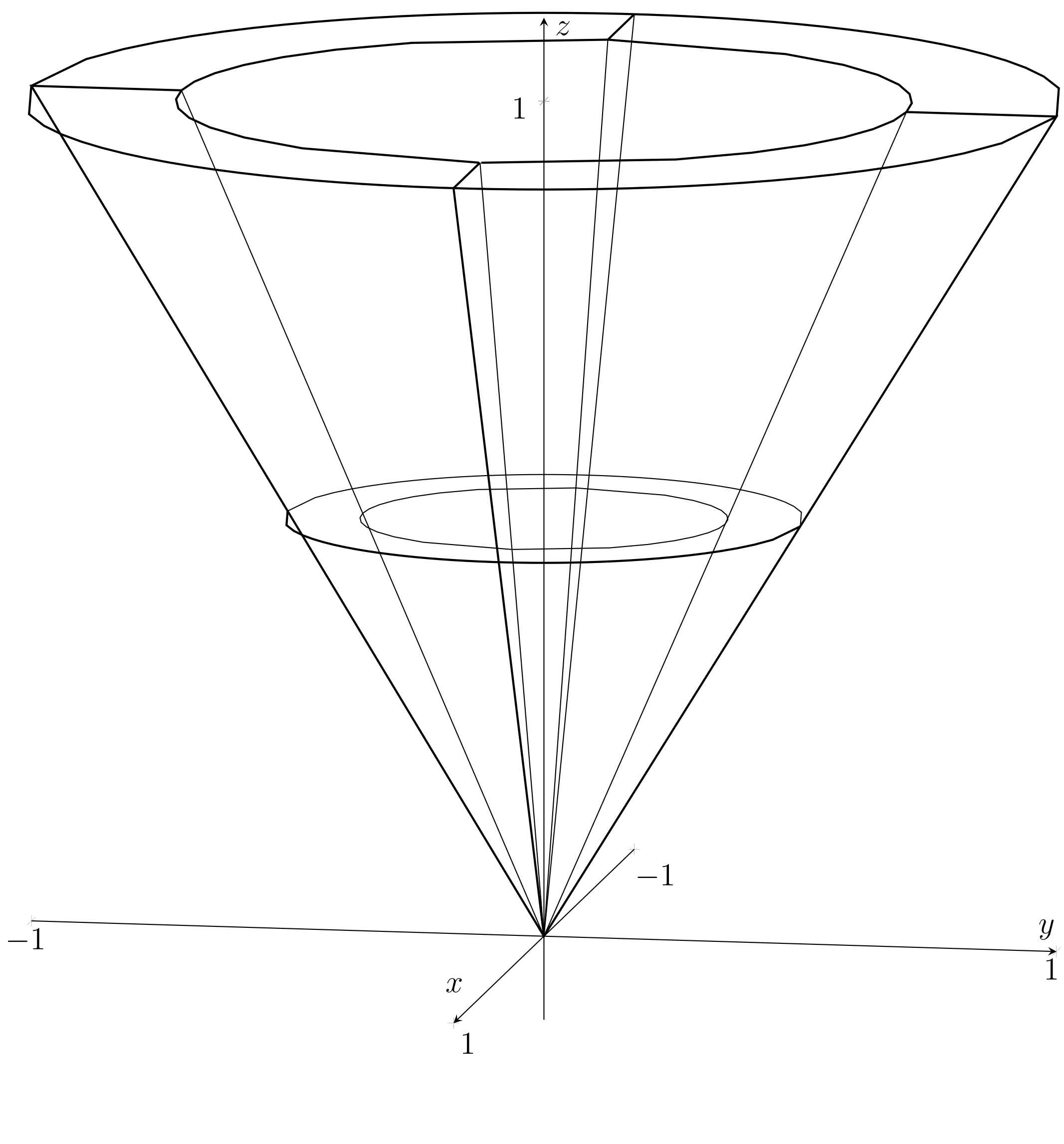
Тело T ограничено заданными поверхностями:

$$z = \sqrt{2(x^2+y^2)} \quad (1), z = \sqrt{x^2+y^2} \quad (2), z = 1 \quad (3).$$

1. Сделать схематический рисунок тела T.
2. С помощью тройного интеграла найти объем тела T, перейдя к цилиндрическим или сферическим координатам.

Решение

1. Уравнения (1) и (2) задают конусы с вершинами в точке $O(0;0;0)$. Уравнение (3) задает плоскость параллельную плоскости xOy, при $z = 1$. Тело T изображено ниже:



2. Объем V тела T выражается тройным интегралом:

$$V = \iiint\limits_T dv$$

Будем вычислять этот интеграл, перейдя к сферическим координатам $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ с учетом того, что $x^2 + y^2 = r^2$. Якобиан перехода равен r, а формула объема тела примет вид:

$$V = \iiint\limits_T r\,dr\,d\varphi\,dz$$

Запишем уравнения поверхностей, ограничивающих тело T, в цилиндрических координатах. Уравнение (1): $z = \sqrt{2r^2}$, уравнение (2): $z = \sqrt{r^2}$.

Объём данного тела будем находить, как разность объёмов двух косинусов ((1) и (2)):

$$V_T = V_{T_2} - V_{T_2} = \iiint\limits_{T_2} r\,dr\,d\varphi\,dz - \iiint\limits_{T_1} r\,dr\,d\varphi\,dz$$

Для расстановки пределов интегрирования найдем линию пересечения плоскости и конуса (2):

$$\begin{cases} z = 1 \\ z = \sqrt{r^2} \\ r \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ 1 = \sqrt{r^2} \\ r \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ r = 1 \end{cases}$$

Также найдём для конуса (1):

$$\begin{cases} z = 1 \\ z = \sqrt{2r^2} \\ r \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ 1 = \sqrt{2r^2} \\ r \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ r = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Таким образом, радиус основания конуса (2) равен 1, а радиус основания конуса (1) равен $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Значит, для всех точек тела T_1 справедливо условие $0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ (4), а для всех точек тела T_2 $0 \leq r \leq 1$ (5).

Используя условия (4) и (5), расставим пределы интегрирования в разности тройных интегралов и решим их:

$$\iiint\limits_{T_2} r\,dr\,d\varphi\,dz - \iiint\limits_{T_1} r\,dr\,d\varphi\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\,dr \int_{\sqrt{r^2}}^1 dz - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r\,dr \int_{\sqrt{2r^2}}^1 dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r(1 - \sqrt{r^2})\,dr - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r(1 - \sqrt{2r^2})\,dr,\ \sqrt{r^2} \to |r|,\ r \geq 0 \to r$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r(1 - r)\,dr - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r(1 - r)\,dr = \int_0^{2\pi} \frac{1}{6}\,d\varphi - \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}\,d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

Ответ: $\pi/6$

Задача 3

Условие

Доказать, что данное выражение $(1 - \frac{y}{x^2+y^2})\, dx + (\frac{x}{x^2+y^2} - 1)\, dy$ является полным дифференциалом функции $\Phi(x,y)$ и найти её с помощью криволинейного интеграла.

Решение

Обозначим:

$$P(x,y) = (1 - \frac{y}{x^2+y^2}),\ Q(x,y) = (\frac{x}{x^2+y^2} - 1)$$

Очевидно, что:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Для отыскания функции $\Phi(x,y)$, дифференциал которой нам известен, вычислим:

$$\int_{A(a,b)}^{M(x,y)} P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy$$

Путь интегрирования, то есть кривая, соединяющая две точки A и M, должна быть такой, чтобы на ней подынтегральная функция существовала и не претерпевала разрывы, то есть должно быть:

$$x^2 + y^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0,\ y \neq 0$$

Таким образом, ясно, что в точке $(0;0)$ подынтегральная функция терпит разрыв. Поэтому возьмем в качестве пути интегральную ломанную линию $ABM(A(x,0), B(x,y), M(0,y))$:

$$\Phi(x,y) = \int\limits_{ABM} (1 - \frac{y}{x^2+y^2})\, dx + (\frac{x}{x^2+y^2} - 1)\, dy$$

на $AB : x = const,\ dx = 0\, , y \in [0,y]$; на $BM : y = const,\ dy = 0\, , x \in [x,0]$. Тогда сводя криволинейный интеграл к определенному получаем:

$$\Phi(x,y) = \int\limits_0^y (\frac{x}{x^2+y^2} - 1)\, dy + \int\limits_x^0 (1 - \frac{y}{x^2+y^2})\, dx =$$

$$= arctg(x/y) + arctg(y/x) - y - x$$

Ответ: $arctg(x/y) + arctg(y/x) - y - x$

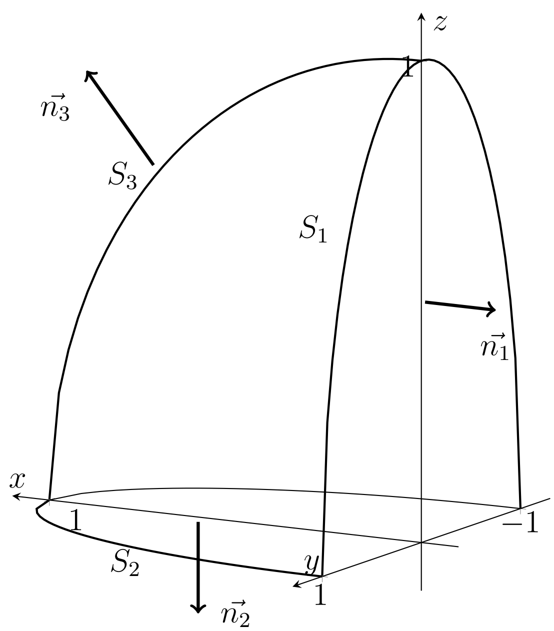
Задача 4

Условие

Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = \vec{i} - 2z\vec{k}$ из тела T, ограниченного указанными поверхностями $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x = 0\,(x \geq 0)$, $z = 0$ с помощью поверхностного интеграла первого рода, второго рода и также проверить результат с помощью теоремы Гаусса-Остроградского.

Решение

Данное тело ограничено тремя поверхностями:
$S_1 : x = 0$ ($\vec{n_1} = -\vec{i}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности $S_1 : a_n = -1$).
$S_2 : z = 0$ ($\vec{n_1} = -\vec{k}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности $S_2 : a_n = 2z$).
S_3 — часть сферы $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$:



Вычислим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$dS = \sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)}\, dx\, dy = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy$$

Нормаль $\vec{n_3}$ образует острый угол с осью Oz, то есть соответствует верхней стороне поверхности S_3, следовательно:

$$\cos\alpha = x; \quad \cos\beta = y; \quad \cos\gamma = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$a_n = 1 \cdot x + 0 \cdot y - 2z \cdot \sqrt{1 - x^2 - y^2} = x - 2z\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Вычислим теперь поток Π вектора $\vec{a}$ из тела T. Ясно, что поток равен сумме трех потоков, то есть $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$, где Π_1 — поток через поверхность S_1, Π_2 — поток через поверхность S_2 и Π_3 — поток через поверхность S_3. Тогда:

$$\Pi_1 = \iint\limits_{S_1} a_n\, dS = \iint\limits_{S_1} (-1)\, dS = -\int_0^1 dz \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} dy = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Pi_2 = \iint\limits_{S_2} a_n\, dS = \iint\limits_{S_2} (2z)\, dS = 0,$$

так как на поверхности S_2 $z = 0$;

$$\Pi_3 = \iint\limits_{S_3} a_n\, dS = \iint\limits_{S_3} \left[x - 2z\sqrt{1 - x^2 - y^2}\right] dS = \iint\limits_{D} \frac{x - 2(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy$$

Для вычисления двойного интеграла перейдем к полярным координатам:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ |I(r, \varphi)| = r$$

Получим:

$$\Pi_3 = \iint\limits_{D} \frac{r\cos\varphi - 2(1 - r^2)}{\sqrt{1 - r^2}} r\, dr\, d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \frac{r\cos\varphi - 2(1 - r^2)}{\sqrt{1 - r^2}} r\, dr$$

$$I_{\text{вн.}} = \int_0^1 \frac{r\cos\varphi - 2(1 - r^2)}{\sqrt{1 - r^2}} r\, dr =$$

$$= \left[1/2arcsin(r)\cos\varphi - \frac{1}{6}\sqrt{1 - r^2}(-4 + 4r^2 + 3r\cos\varphi)\right]\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{4}\cos\varphi - \frac{2}{3}$$

$$\Pi_3 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\frac{\pi}{4}\cos\varphi - \frac{2}{3})\, d\varphi = \left[-\frac{2\varphi}{3} + \frac{\pi}{4}\sin\varphi\right]\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\frac{\pi}{6}$$

Окончательно:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = -\frac{\pi}{2} + 0 - \frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3}$$

Вычислим поток Π векторного поля $\vec{a}$ через поверхностный интеграл второго рода:

$$\Pi = \iint\limits_{S} a_x(x, y, z)\, dy\, dz + a_y(x, y, z)\, dx\, dz + a_z(x, y, z)\, dydx =$$

По прежнему $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$:

$$\Pi_1 = \iint\limits_{S_1} 1\, dy\, dz + 0 \cdot\ dz\, dx - 2z\, dxdy = \iint\limits_{S_1}\ dydz = -\frac{\pi}{2},$$

на $S_1 : x = 0,\ dx = 0.$

$$\Pi_2 = \iint\limits_{S_2} 1\, dy\, dz + 0 \cdot\ dz\, dx - 2z\, dxdy = 0,$$

на $S_2 : z = 0,\ dz = 0.$

$$\Pi_3 = \iint\limits_{S_3} 1\, dy\, dz + 0 \cdot\ dz\, dx - 2z\, dxdy,$$

на $S_3 : z = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

$$\iint\limits_{S_3} 1\,dy\,dz - 2z\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{S_1} dy\,dz - 2\iint\limits_{D} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2\iint\limits_{D} \sqrt{1-r^2} r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-r^2} r\,dr =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$$

Окончательно:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = -\frac{\pi}{2} + 0 - \frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3}$$

Проверим по формуле Гаусса-Остроградского:

$$\Pi = \iiint\limits_{T} \left[\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right] dxdydz = -2\iiint\limits_{T} dxdydz =$$

$$= -2\iiint\limits_{T} r^2 \sin\theta\,d\varphi d\theta dr = -2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\,d\theta \int_0^1 r^2\,dr = -\frac{2\pi}{3}$$

Ответ: $\frac{2\pi}{3}$

Задача 5

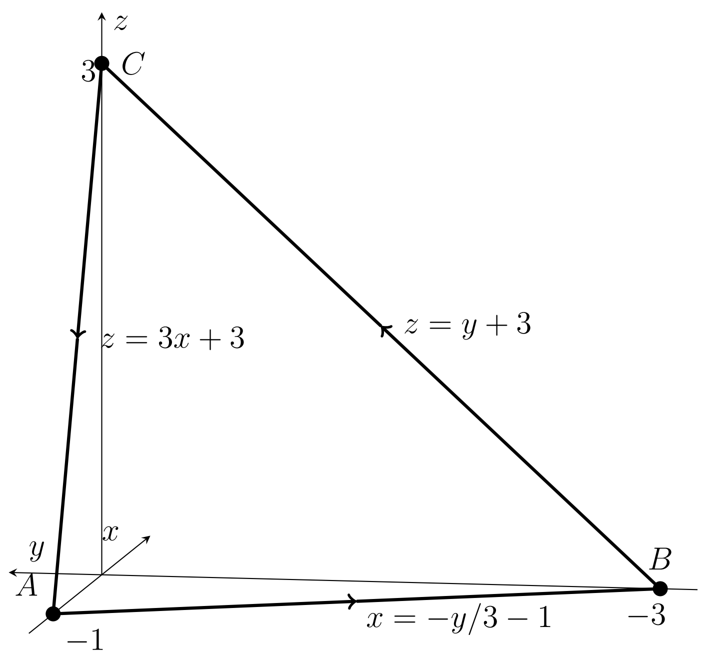
Условие

Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = zx\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$ по контуру (замкнутой линии) l, получающемуся при пересечении заданной плоскости $\alpha : -3x - y + z = 3$ координатными плоскостями, через криволинейный интеграл первого и второго рода и с помощью формулы Стокса через поверхностный интеграл первого и второго рода. Контур l считается лежащим в координатном октанте, заданном неравенствами: $x \leq 0$; $y \leq 0$; $z \geq 0$.

Решение

Нарисуем контур l. Для этого заметим, что уравнение плоскости $\alpha : -3x - y + z = 3$ может быть преобразовано к виду:

$$-\frac{x}{1} - \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$$



Циркуляция векторного поля $\vec{a}$ по контуру l представляет собой криволинейный интеграл первого рода:

$$C = \int\limits_{l} [a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma]\, dS =$$

$$= \int\limits_{ABCA} [zx \cos\alpha + \cos\beta + z\cos\gamma]\, dS =$$

$$= \left\{ \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CA} \right\} [zx \cos\alpha + \cos\beta + z\cos\gamma]\, dS =$$

Вычислим отдельно каждый из трех интегралов:

$$J_1 = \int\limits_{AB} [zx \cos\alpha + \cos\beta + z\cos\gamma]\, dS$$

— это интеграл вдоль отрезка AB,касательный вектор к которому $\vec{\tau}$, очевидно, можно взять просто $\vec{AB} = (1;-3;0)$ (касательный вектор постоянен, так как AB — это отрезок прямой). Направляющие косинусы, очевидно, совпадают с искомыми:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2+(-3)^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}; \cos\beta = -\frac{3}{\sqrt{10}}; \quad \cos\gamma = \frac{0}{\sqrt{10}} = 0$$

Напишем параметрические уравнения линии AB:

$$\begin{cases} x(t) = -1+t \\ y(t) = 0-3t \qquad ,t\in[0;1] \\ z(t) = 0+0\cdot t \end{cases}$$

Учитывая параметрическое представление линии KL и формулу для вычисления dS, получаем:

$$dS = \sqrt{(x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2)}\,dt = \sqrt{10}\,dt$$

Подставляя полученные результаты в равенство для J_1, имеем следующие выражения для криволинейного интеграла первого рода J_1 через определенный интеграл:

$$J_1 = \int\limits_0^1 \left\{0\cdot(-1+t)\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{3}{\sqrt{10}} + 0\cdot 0\right\}\sqrt{10}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \left\{-\frac{3}{\sqrt{10}}\right\}\sqrt{10}\,dt = (-3t)\Big|_0^1 = -3$$

Аналогично для J_2

$$J_2 = \int\limits_{BC} [zx\cos\alpha + \cos\beta + z\cos\gamma]\,dS$$

Имеем $\vec{\tau} = \vec{LM} = (0;3;3)$:

$$\cos\alpha = \frac{0}{\sqrt{0^2+3^2+3^2}} = 0; \quad \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{18}}; \quad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{18}}$$

$$\begin{cases} x(t) = 0+0\cdot t \\ y(t) = -3+3t \qquad ,t\in[0;1] \\ z(t) = 0+3t \end{cases}$$

$$dS = \sqrt{(x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2)}\,dt = \sqrt{18}\,dt$$

$$J_2 = \int\limits_0^1 \left\{(3t)\cdot 0\cdot 0 + \frac{3}{\sqrt{18}} + (3t)\cdot\frac{3}{\sqrt{18}}\right\}\sqrt{18}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \left\{\frac{3}{\sqrt{18}} + (3t)\cdot\frac{3}{\sqrt{18}}\right\}\sqrt{18}\,dt = (3t+\frac{9t^2}{2})\Big|_0^1 = \frac{15}{2}$$

Аналогично для J_3

$$J_3 = \int\limits_{CA} [zx\cos\alpha + \cos\beta + z\cos\gamma]\, dS$$

Имеем $\vec{\tau} = \vec{CA} = (-1; 0; -3)$:

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-3)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}; \quad \cos\beta = \frac{0}{\sqrt{10}} = 0; \quad \cos\gamma = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\begin{cases} x(t) = 0 - 1t \\ y(t) = 0 + 0 \cdot t \qquad , t \in [0; 1] \\ z(t) = 3 - 3t \end{cases}$$

$$dS = \sqrt{(x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2)}\, dt = \sqrt{10}\, dt$$

$$J_3 = \int\limits_0^1 \left\{(3-3t)(-1t)(-\frac{1}{\sqrt{10}}) + 0 + (3-3t)(-\frac{3}{\sqrt{10}})\right\}\sqrt{10}\, dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \left\{(3-3t)(-1t)(-\frac{1}{\sqrt{10}}) + (3-3t)(-\frac{3}{\sqrt{10}})\right\}\sqrt{10}\, dt =$$

$$(-3(3t - 2t^2 + \frac{t^3}{3}))\Big|_0^1 = -4$$

Окончательно: $C = -3 + \frac{15}{2} - 4 = \frac{1}{2}$

Циркуляция векторного поля $\vec{a}$ по контуру l представляет собой криволинейный интеграл второго рода:

$$C = \int\limits_l \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int\limits_l a_x\, dx + a_y\, dy + a_z\, dz$$

Для нашей задачи получим:

$$C = \int\limits_{ABCA} a_x\, dx + a_y\, dy + a_z\, dz = \int\limits_{ABCA} zx\, dx + \, dy + z\, dz$$

Для вычисления циркуляции применим свойство аддитивности интеграла и представим C в виде суммы трех криволинейных интегралов J_{AB}, J_{BC}, и J_{CA}, взятым по отрезкам AB, BC и CA соответственно, т. е. $C = J_{AB} + J_{BC} + J_{CA}$. Найдём значения этих интегралов:

Отрезок AB представляет собой отрезок прямой, заданной системой: $\begin{cases} z = 0 \\ y = -3x - 3 \end{cases}$, откуда следует, что: $\begin{cases} dz = 0 \\ dy = -3\, dx \end{cases}$. При движении от точки A к точке B координата x меняется от -1 до 0, следовательно:

$$I_{AB} = \int\limits_{-1}^0 -3\, dx = (-3x)\Big|_2^0 = -3$$

Отрезок BC представляет собой отрезок прямой, заданной системой: $\begin{cases} x = 0 \\ y = z - 3 \end{cases}$, откуда следует, что: $\begin{cases} dx = 0 \\ dy = dz \end{cases}$. При движении от точки B к точке C координата z меняется от 0 до 3, следовательно:

$$I_{BC} = \int\limits_0^3 (1+z)\,dz = (z + z^2/2)\Big|_0^3 = \frac{15}{2}$$

Отрезок CA представляет собой отрезок прямой, заданной системой: $\begin{cases} y = 0 \\ x = z/3 - 1 \end{cases}$, откуда следует, что: $\begin{cases} dy = 0 \\ dx = 1/3\,dz \end{cases}$. При движении от точки C к точке A координата z меняется от 3 до 0, следовательно:

$$I_{CA} = \int\limits_3^0 (z(z/3-1)/3 + z)\,dz = (z^3/27 + z^2/3)\Big|_3^0 = -4$$

Окончательно: $C = -3 + \frac{15}{2} - 4 = \frac{1}{2}$

Проверим циркуляцию векторного поля $\vec{a}$ с помощью формулы Стокса. В начале вычислим $rot\,\vec{a}$:

$$rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ zx & 1 & z \end{vmatrix} = \vec{i}\left\{\frac{\partial(z)}{\partial y} - \frac{\partial(1)}{\partial z}\right\} - \vec{j}\left\{\frac{\partial(z)}{\partial x} - \frac{\partial(zx)}{\partial z}\right\} + \vec{k}\left\{\frac{\partial(1)}{\partial x} - \frac{\partial(zx)}{\partial y}\right\} = \vec{j}x$$

Тогда:

$$C = \iint\limits_\sigma [0 \cdot \cos\alpha + x\cos\beta + 0 \cdot \cos\gamma]\,d\sigma = \iint\limits_\sigma (x\cos\beta)\,d\sigma$$

Выражения для циркуляции через поверхностный интеграл первого рода (здесь в качестве поверхности σ выбран треугольник ABC, ограниченный контуром l — ломанной $ABCA$). Вычислим $\cos\beta$. Для этого заметим, что нормалью к поверхности σ может служить вектор $\vec{n} = (-3; -1; 1)$. Направляющие косинусы буду равны:

$$\cos\alpha = \frac{-3}{\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 1^2}} = -\frac{3}{\sqrt{11}};\ \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{11}}; \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{11}}$$

Тогда циркуляция примет вид:

$$C = -\iint\limits_\sigma \frac{x}{\sqrt{11}}\,d\sigma = \iint\limits_{D_{xz}} \frac{x}{\sqrt{11}}\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dxdz$$

$$y = -3x - 3 + z$$

Тогда интеграл примет вид:

$$C = \iint\limits_{D_{xz}} \frac{x}{\sqrt{11}}\sqrt{11}\,dxdz = \iint\limits_{D_{xz}} x\,dxdz = \int_{-1}^0 dx \int_{3x+3}^0 x\,dz = \frac{1}{2}$$

Выполним расчет циркуляции по формуле Стокса, используя при этом поверхностный интеграл второго рода:

$$C = \iint\limits_{\sigma} [0\,dydz + x\,dxdz + 0\,dxdy] = \iint\limits_{\sigma} x\,dxdz$$

Выражая поверхностный интеграл второго рода через двойной, имеем:

$$C = \iint\limits_{D_{xz}} x\,dxdz$$

Здесь использован тот факт, что нормаль $\vec{n} = (-3; -1; 1)$ к поверхности σ образует тупой угол β с осью Oy. Очевидно, что этот интеграл совпадает с соответствующим выражением поверхностного интеграла первого рода $-\iint\limits_{\sigma} \frac{x}{\sqrt{11}}\,d\sigma$ через двойной интеграл.

Поэтому $C = \iint\limits_{D_{xz}} x\,dxdz = \frac{1}{2}$ — как и следовало ожидать.

Ответ: $C = \frac{1}{2}$.

Работа над ошибками

Задача 3

В качестве пути возьмем корректную интегральную ломанную линию $ABM(A(x,1), B(x,y), M(1,y))$:

$$\Phi(x,y) = \int\limits_{ABM} (1 - \frac{y}{x^2+y^2})\,dx + (\frac{x}{x^2+y^2} - 1)\,dy$$

на $AB : x = const,\ dx = 0\,, y \in [1,y]$; на $BM : y = const,\ dy = 0\,, x \in [x,1]$. Тогда сводя криволинейный интеграл к определенному получаем:

$$\Phi(x,y) = \int\limits_1^y (\frac{x}{x^2+y^2} - 1)\,dy + \int\limits_x^1 (1 - \frac{y}{x^2+y^2})\,dx =$$

$$= (arctg(\frac{y}{x}) - y)\Big|_1^y + (x - arctg(\frac{x}{y}))\Big|_1^x + C =$$

$$= \frac{\pi}{4} - y - arctg(y) + 1 + x - \frac{\pi}{4} - 1 + arctg(x) + C =$$

$$= arctg(x) - arctg(y) + x - y + C$$

В качестве пути возьмем корректную интегральную ломанную линию $ABM(A(y,1), B(1,1), M(1,x))$:

$$\Phi(x,y) = \int\limits_{ABM} (1 - \frac{y}{x^2+y^2})\,dx + (\frac{x}{x^2+y^2} - 1)\,dy$$

на $AB : x = const,\ dx = 0\,, y \in [y,1]$; на $BM : y = const,\ dy = 0\,, x \in [1,x]$. Тогда сводя криволинейный интеграл к определенному получаем:

$$\Phi(x,y) = \int\limits_y^1 (\frac{x}{x^2+y^2} - 1)\,dy + \int\limits_1^x (1 - \frac{y}{x^2+y^2})\,dx =$$

$$= (arctg(\frac{y}{x}) - y)\Big|_y^1 + (x - arctg(\frac{x}{y}))\Big|_x^1 + C =$$

$$= arctg(y) - 1 - \frac{\pi}{4} + y + 1 - arctg(x)x + \frac{\pi}{4} + C =$$

$$= arctg(y) - arctg(x) + y - x + C$$

Ответ: $arctg(y) - arctg(x) + y - x + C$