Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

Типовой расчёт 1

по теории вероятностей и математической статистике

Проверил:
Хартов А. А. ____________
«______» ____________ 2019г.

Оценка ____________

Выполнил:
Студент группы P3355
Федюкович С. А. ____________
Вариант 21

Санкт-Петербург
2019

Тема 1. Непосредственный подсчёт вероятностей в рамках классической схемы.

Задача 1

Условие

Какова вероятность того, что в наудачу выбранном четрырёхзначном числе нет повторяющихся чисел?

Решение

1. Пространство элементарных событий ω состоит из множества четырёхзначных чисел $\{1000, 1001, ...9999\}$. Его мощность равна:

$$card(\omega) = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$$

2. Событие A, вероятность которого нам нужно найти, состоит из множества четырёхзначных чисел, в которых цифры числа не повторяюстя. Тогда:

$$card(A) = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$$

3. Таким образом, искомая вероятность события A будет равна:

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\omega)} = \frac{4536}{9000} = \frac{63}{125} = 0,504$$

Ответ: $P(A) = 0,504$

Задача 2

Условие

В коробке лежат карандаши: двенадцать красных и восемь зелёных. Наудачу извлекают три. Какова вероятность того, что среди извлечённых будет хотя бы один красный карандаш?

Решение

1. Пространство элементарных событий ω состоит из всех сочетаний множества $\{1, 2, ..., 20\}$ по 3. Его мощность равна числу этих сочетаний:

$$card(\omega) = C_{20}^3 = \frac{20!}{(20-3)!3!} = 1140$$

2. Пусть A — искомое событие. Найдём вероятность $\overline{A}$, которое будет состоять из всех сочетаний множества $\{1, 2, ...8\}$ по 3. Тогда:

$$card(\overline{A}) = C_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!3!} = 56$$

3. Тогда вероятность события $\overline{A}$ будет равна:

$$P(\overline{A}) = \frac{card(\overline{A})}{card(\omega)} = \frac{56}{1140} = \frac{14}{285}$$

4. Таким образом, вероятность события A будет равна:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{14}{285} = \frac{271}{285}$$

Ответ: $P(A) = \frac{271}{285}$

Задача 3

Условие

Цифры от 1 до 9 располагаются в случайном порядке. Какова вероятность того, что все нечётные цифры окажутся на нечётных местах?

Решение

1. Пространство элементарных событий ω состоит из всех перестановок множества $\{1, 2, ..., 9\}$. Его мощность равна числу этих перестановок:

$$card(\omega) = P_9 = 9! = 362880$$

2. Событие A, вероятность которого нам нужно найти, состоит из множества девятизначных чисел, в которых нечётные цифры стоят на нечётных местах. Тогда:

$$card(A) = 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2880$$

3. Таким образом, искомая вероятность события A будет равна:

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\omega)} = \frac{2880}{362880} = \frac{1}{126}$$

Ответ: $P(A) = \frac{1}{126}$

Задача 4

Условие

Станция метро оборудована тремя независимо работающими эскалаторами. Вероятность безотказной работы в течение дня для первого эскалатора равна 9/10, для второго — 8/10, для третьего — 85/100. Найти вероятность того, что в течение дня произойдёт поломка не более одного эскалатора.

Решение

1. Пусть A — искомое событие. Обозначим события безотказной работы с первого по третий эскалатор A_1, A_2 и A_3 соответственно. Тогда искомая вероятность будет равна:

$$\begin{gathered} P(A) = P(A_1 A_2 A_3) + P(\overline{A_1} A_2 A_3) + P(A_1 \overline{A_2} A_3) + P(A_1 A_2 \overline{A_3}) = \\ = 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,85 + 0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,85 + 0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,85 + 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,15 = \\ = 0,941 \end{gathered}$$

Ответ: $P(A) = 0,941$

Задача 21

Условие

Предприятием послана автомашина за различными материалами на четыре базы. Вероятность наличия нужного материала на первой базе равна 9/10, на второй — 85/100, на третьей — 7/10, на четвертой — 65/100. Найти вероятность того, что только на первой базе не окажется нужного материала.

Решение

1. Пусть A — искомое событие. Обозначим события наличия материала с первой по четвертую базу A_1, A_2, A_3 и A_4 соответственно. Тогда искомая вероятность будет равна:

$$\begin{gathered} P(A) = P(\overline{A_1} A_2 A_3 A_4) + P(A_1 \overline{A_2} A_3 A_4) + P(A_1 A_2 \overline{A_3} A_4) + P(A_1 A_2 A_3 \overline{A_4}) = \\ = 0,1 \cdot 0,85 \cdot 0,7 \cdot 0,65 + 0,9 \cdot 0,15 \cdot 0,7 \cdot 0,65 + 0,9 \cdot 0,85 \cdot 0,3 \cdot 0,65 + 0,9 \cdot 0,85 \cdot 0,7 \cdot 0,35 = \\ = 0,4367 \end{gathered}$$

Ответ: $P(A) = 0,4367$

Тема 2. Геометрические вероятности

Задача 21

Условие

Из отрезка $[0, 1]$ наудачу выбираются три числа. Какова вероятность того, что их сумма не будет превышать единицу?

Решение

1. Областью Лебега Ω является куб со стороной 1:

$$\mu(\Omega) = 1$$

2. Обозначим три числа x, y и z, а интересующую нас область A:

$$A = \begin{cases} x + y + z \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

3. Найдём объём области A:

$$\mu(A) = \iiint\limits_A dx\,dy\,dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1 - x - y)\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (x-1)^2\,dx = \frac{1}{6}$$

4. Таким образом, искомая вероятность будет равна:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{1/6}{1} = \frac{1}{6}$$

Ответ: $P(A) = \frac{1}{6}$

Тема 3. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Задача 21

Условие

На шахматную доску 4×4 ставят два ферзя. Какова вероятность того, что они бьют друг друга?

Решение

1. Пусть $H_г$ — событие, состоящее в том, что ферзи расположились на одной горизонтали; $H_в$ — одной вертикали; $H_д$ — одной диагонали. Найдём их вероятности:

$$P(H_г) = P(H_в) = 4 \cdot \frac{C_4^2}{C_{16}^2} = \frac{1}{5}$$
$$P(H_д) = 2 \cdot \frac{C_4^2 + 2 \cdot C_3^2 + 2 \cdot C_2^2}{C_{16}^2} = \frac{4}{15}$$
$$P(A|H_г) = P(A|H_в) = P(A|H_д) = 1$$

2. Таким образом:

$$P(A) = P(A|H_г) \cdot P(H_г) + P(A|H_в) \cdot P(H_в) + P(A|H_д) \cdot P(H_д) =$$
$$= 1 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{4}{15} = \frac{2}{3}$$

Ответ: $P(A) = \frac{2}{3}$

Тема 4. Схема Бернулли

Задача 21

Условие

Вероятность того, что покупателю потребуется обувь 40-го размера равна $0,4$. В обувной отдел вошли пять покупателей. Найти вероятность того, что по крайней мере двум из них потребуется обувь 40-го размера.

Решение

1. Пусть A — событие того, что в обувной отдел вошёл покупатель, которому требуется обувь 40-го размера:

$$p = P(A) = 0,6$$
$$q = 1 - p = 0,4$$
$$n = 5$$

2. Найдём вероятность $P_5(2,5)$ того, что количество покупателей, которым нужна обувь 40-го размера заключено между 2 и 5:

$$P_5(2,5) = C_5^2 \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^3 + C_5^3 \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^2 + C_5^4 \cdot 0,6^4 \cdot 0,4^1 + C_5^5 \cdot 0,6^5 =$$
$$= 10 \cdot 0,36 \cdot 0,064 + 10 \cdot 0,216 \cdot 0,16 + 5 \cdot 0,1296 \cdot 0,4 + 1 \cdot 0,07776 = 0,91296$$

Ответ: $P_5(2,5) = 0,91296$

Тема 5. Дискретные случайные величины

Задача 21

Условие

Батарея состоит из четырёх орудий. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна $0,9$ для первого орудья, для второго такая вероятность равна $0,8$, для третьего и четвертого $0,6$. Наугад выбирают три орудия, и каждое из них стреляет один раз. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану числа попаданий в мишень. Найти вероятность хотя-бы одного попадания и хотя бы одного непопадания в мишень.

Решение

1. Для построения ряда распределения найдём вероятности количества попаданий в мишень. Пусть A_x — вероятность x попаданий в мишень, тогда:

$$P(A_0) = \frac{1}{4}(0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,4 \cdot 0,4) = 0.016$$

$$P(A_1) = \frac{1}{4}(0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,6 + 0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,6+$$
$$+0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,6 + 0,9 \cdot 0,4 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,6 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,4 \cdot 0,6) = 0,162$$

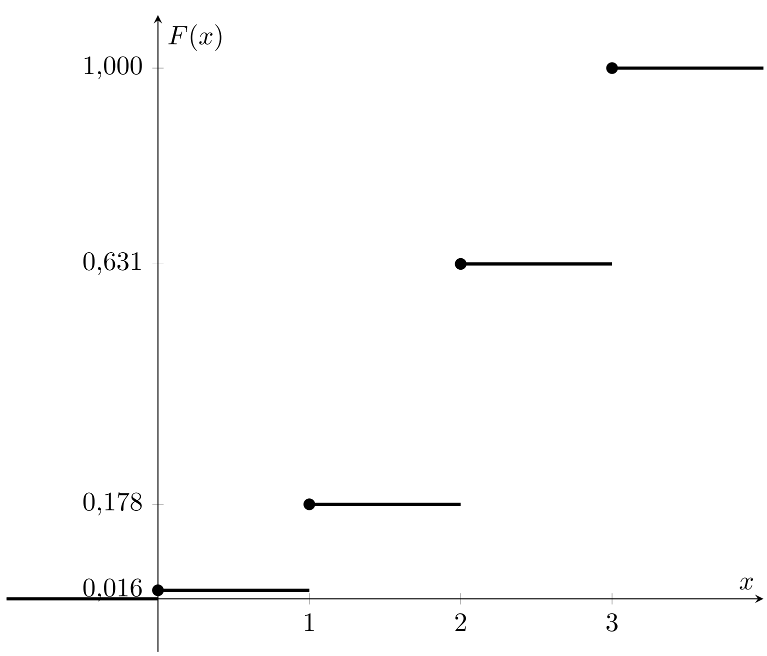
$$P(A_2) = \frac{1}{4}(0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,6 + 0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,6 + 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,6 + 0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,6+$$
$$+0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,6 + 0,9 \cdot 0,6 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,6 \cdot 0,6 + 0,9 \cdot 0,4 \cdot 0,6) = 0.453$$

$$P(A_3) = \frac{1}{4}(0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,6 + 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,6 + 0,9 \cdot 0,6 \cdot 0,6) = 0,369$$

2. Получаем закон распределения:

x	0	1	2	3
x^2	0	1	4	9
P	$0,016$	$0,162$	$0,453$	$0,369$

3. Построим функцию распределения:



4. Найдём математическое ожидание:

$$M(X) = 0 \cdot 0,016 + 1 \cdot 0,162 + 2 \cdot 0,453 + 3 \cdot 0,369 = 2,175$$

5. Найдём среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{0 \cdot 0,016 + 1 \cdot 0,162 + 4 \cdot 0,453 + 9 \cdot 0,369 - 2,175^2} = \sqrt{0.564375}$$

6. Мода и медиана будут равны 2.

7. Вероятность хотя-бы одного попадания будет равна $1 - P(A_0) = 1 - 0,016 = 0,984$; хотя бы одного непопадания $1 - P(A_3) = 1 - 0,369 = 0,613$.

Ответ: $M(X) = 2,175$; $\sigma(X) = \sqrt{0.564375}$. Вероятность хотя-бы одного попадания равна $0,984$; хотя бы одного непопадания $0,613$

Тема 6. Непрерывные случайные величины

Задача 21

Условие

Дана плотность распределения случайной величины X:

$$f(x) = \frac{a}{e^x + e^{-x}}$$

Найти коэффициент a, функцию распределения $F(x)$, вероятность $P\{X \geq 0\}$, моду $mod(X)$ и медиану $med(X)$.

Решение

1. Для нахождения коэффициента a возьмём интеграл;

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = a\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = a \cdot (\lim_{t\to\infty} arctg(e^x)\big|_{-t}^{t}) = a \cdot \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{\pi}$$

2. Найдём функцию $F(x)$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{2}{\pi} \cdot (\lim_{t\to\infty} arctg(e^x)\big|_{-t}^{x}) = \frac{2 \cdot arctg(e^x)}{\pi}$$

3. Найдём вероятность $P\{X \geq 0\}$:

$$F(0) = \frac{2 \cdot arctg(e^0)}{\pi} = \frac{1}{2}$$

4. Мода $mod(X) = 0$(максимум плотности распределения).

5. Найдём медиану $med(X)$:

$$F(med(X)) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2 \cdot arctg(e^{med(X)})}{\pi} = \frac{1}{2} \Rightarrow med(X) = 0$$

Ответ: $a = \frac{2}{\pi}$; $F(x) = \frac{2 \cdot arctg(e^x)}{\pi}$; $P\{X \geq 0\} = \frac{1}{2}$; $mod(X) = 0$; $med(X) = 0$.