Университет ИТМО

Лабораторная работа №2
«Геометрическое истолкование задачи линейного программирования в стандартной форме в случае двух переменных»

Выполнил: Федюкович С. А.

Факультет: МТУ “Академия ЛИМТУ”

Группа: S3100

____

Проверила: Авксентьева Е. Ю.

____

Санкт-Петербург

2018

Теоретические основы лабораторной работы

Задача линейного программирования в стандартной форме с двумя переменными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \geq b_m. \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$
$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \to max(min)$$

Введя систему координат, изобразим каждую совокупность значений переменных x_1 и x_2 точкой на плоскости, откладывая по одной оси x_1, а по другой - x_2. Тогда совокупность решений решений одного отдельно взятого неравенства будет являться полуплоскостью, а системы нескольких неравенств — выпуклой многоугольной областью. Условия неотрицательности переменных $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$ приводят к тому, что эта область находится в первой координатной области.

Решение заданий

1. На звероферме могут выращиваться лисицы и песцы. Для обеспечения нормальных условий их выращивания используется три вида кормов. Количество кормов каждого вида, которое должны получать животные, приведено в таблице 1. В ней также указаны общее количество корма каждого вида, которое может быть использовано зверофермой ежедневно, и прибыль от реализации одной шкурки лисицы и песца. Определить, сколько лисиц и песцов можно вырастить при имеющихся запасах корма. Решить графически.

Таблица 1

Вид корма	Количество единиц корма в день		Запас корма
	Лисица	Песец	
А	2	2	180
Б	4	1	240
В	6	7	426
Цена одной шкурки, руб	1600	1200	

Решение

Пусть x_1 — количество лисиц, а x_2 — количество песцов. Составим модель задачи:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 180, \\ 4x_1 + x_2 \leq 240, \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 426. \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$
$$F = 1600x_1 + 1200x_2 \to max$$

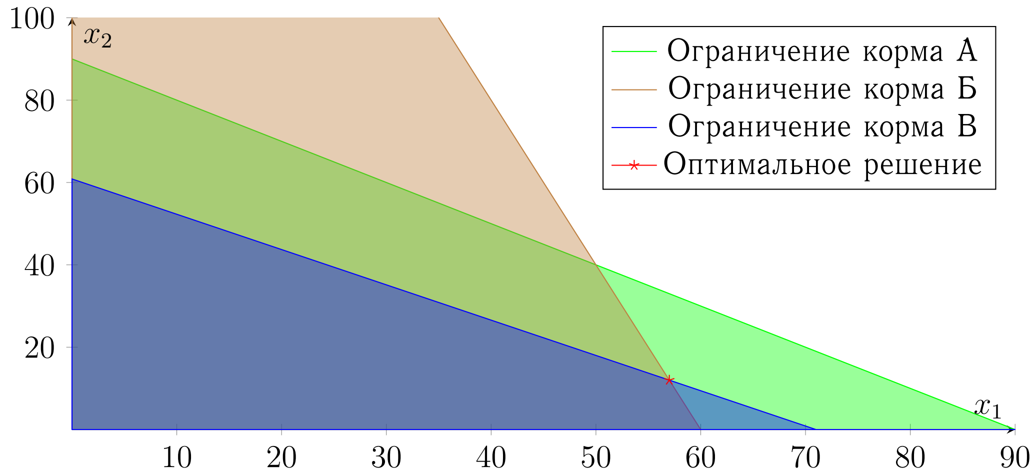
Поделим обе части первого неравенства на два:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 90, \\ 4x_1 + x_2 \le 240, \\ 6x_1 + 7x_2 \le 426. \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$
$$F = 1600x_1 + 1200x_2 \to max$$

Выразим x_2 из каждого неравенства системы:

$$\begin{cases} x_2 \le 90 - x_1, \\ x_2 \le 240 - 4x_1, \\ x_2 \le \frac{426-6x_1}{7}. \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$
$$F = 1600x_1 + 1200x_2 \to max$$

Найдём решение системы, выделив область решений каждого неравенства:



Решением всей системы будет тёмно-синия область на графике, а оптимальное решение достигается в точке пересечения ограничений Б и В (57,12).

Ответ: звероферме нужно содержать 57 лисиц и 12 песцов

2. При подкормке посевов необходимо внести на $0,01$га. почвы не менее 8ед. азота, не менее 24ед. фосфора и не менее 16 единиц калия. Фермер закупает комбинированные удобрения двух видов 'Азофоска' и 'Комплекс'. В таблице 2 указано содержание количества единиц химического вещества в 1кг. каждого вида удобрений и цена 1кг. удобрений. Определить графически потребность фермера в удобрениях того и другого вида на $0,01$га. посевной площади при минимальных затратах на потребление.

Таблица 2

Химическое вещество	Содержание химических веществ в 1кг. удобрения	
	Азофоска	Комплекс
Азот	1	2
Фосфор	12	3
Калий	4	4
Цена 1кг. удобрения, руб.	50	20

Решение

Пусть x_1 — количество килограмм 'Азофоски', а x_2 — 'Комплекса'. Составим модель задачи:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ 12x_1 + 3x_2 \geq 24, \\ 4x_1 + 4x_2 \geq 16. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$F = 50x_1 + 20x_2 \to min$$

Поделим обе части второго неравенства на три, а третьего на четыре:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ 4x_1 + x_2 \geq 8, \\ x_1 + x_2 \geq 4. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$F = 50x_1 + 20x_2 \to min$$

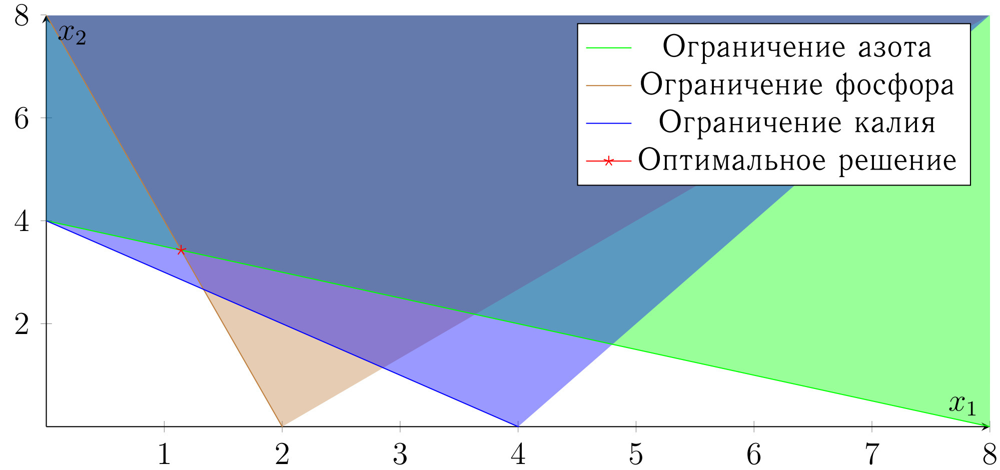
Выразим x_2 из каждого неравенства системы:

$$\begin{cases} x_2 \geq \frac{8-x_1}{2}, \\ x_2 \geq 8 - 4x_1, \\ x_2 \geq 4 - x_1. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$F = 50x_1 + 20x_2 \to min$$

Найдём решение системы, выделив область решений каждого неравенства:



Решением всей системы будет тёмно-синия область на графике, а оптимальное решение достигается в точке пересечения ограничений азота и фосфора $(\frac{8}{7}, \frac{24}{7})$.

Ответ: фермеру потребуется $\frac{8}{7}$кг. ‘Азофоски’ и $\frac{24}{7}$кг. ‘Комплекса’.

3. Полной даме необходимо похудеть, а за помощью она обратилась к подруге. Подруга посоветовала перейти на рациональное питание, состоящее из двух продуктов P и Q.

   Суточное питание этими продуктами должно давать менее 14ед. жира (чтобы похудеть), но не менее 300 килокалорий. На упаковке продукта P написано, что в одном килограмме этого продукта содержится 15ед. жира и 150 килокалорий, а на упаковке с продуктом Q — 4 единицы жира и 200 килокалорий соответственно. При этом цена продукта P равна 250руб./кг, а цена продукта Q равна 210руб./кг.

   Так как дама была стеснена в средствах, то ее интересовал вопрос: в какой пропорции нужно брать эти продукты для того, чтобы выдержать условия диеты и истратить как можно меньше денег? Решите задачу графически.

   Решение

   Пусть x_1 — количество продукта P, а x_2 — Q. Составим модель задачи:

$$\begin{cases} 15x_1 + 4x_2 < 14, \\ 150x_1 + 200x_2 \geq 300. \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$
$$F = 250x_1 + 210x_2 \to min$$

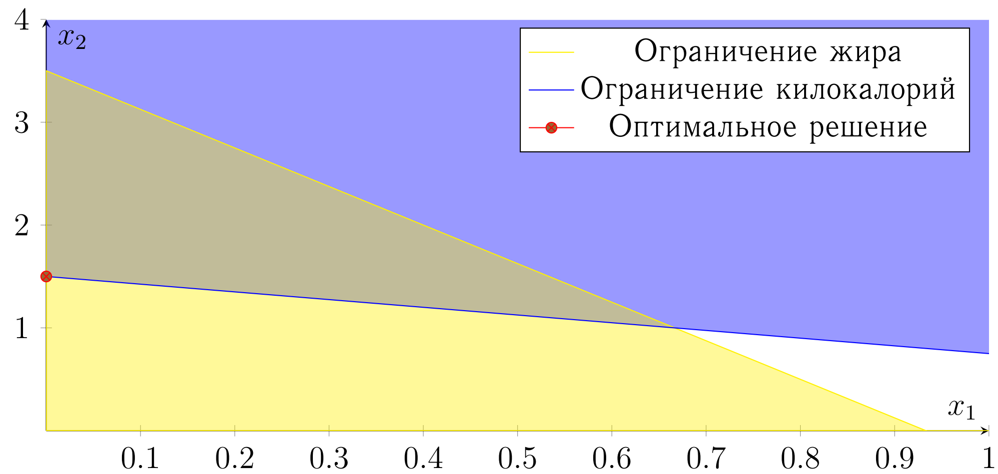
   Обе части второго неравенства поделим на 50:

$$\begin{cases} 15x_1 + 4x_2 < 14, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 6. \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$
$$F = 250x_1 + 210x_2 \to min$$

   Выразим x_2 из каждого неравенства системы:

$$\begin{cases} x_2 < \frac{14-15x_1}{4}, \\ x_2 \geq \frac{6-3x_1}{4}. \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$
$$F = 250x_1 + 210x_2 \to min$$

Найдём решение системы, выделив область решений каждого неравенства:



Решением всей системы будет жёлто-синия область на графике, а оптимальное решение достигается в точке пересечения ограничений килокалорий и оси x_2 $(0, \frac{3}{2})$.

Ответ: даме потребуется 0кг. продукта P и $\frac{3}{2}$кг. продукта Q.