

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ
ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ**

**Домашнее задание по математике
Модуль 5**

**«Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы.
Теория поля»**

Выполнил:
Студент группы Р3255
Федюкович С. А. _____
Вариант 26

Санкт-Петербург

2019

Задача 1

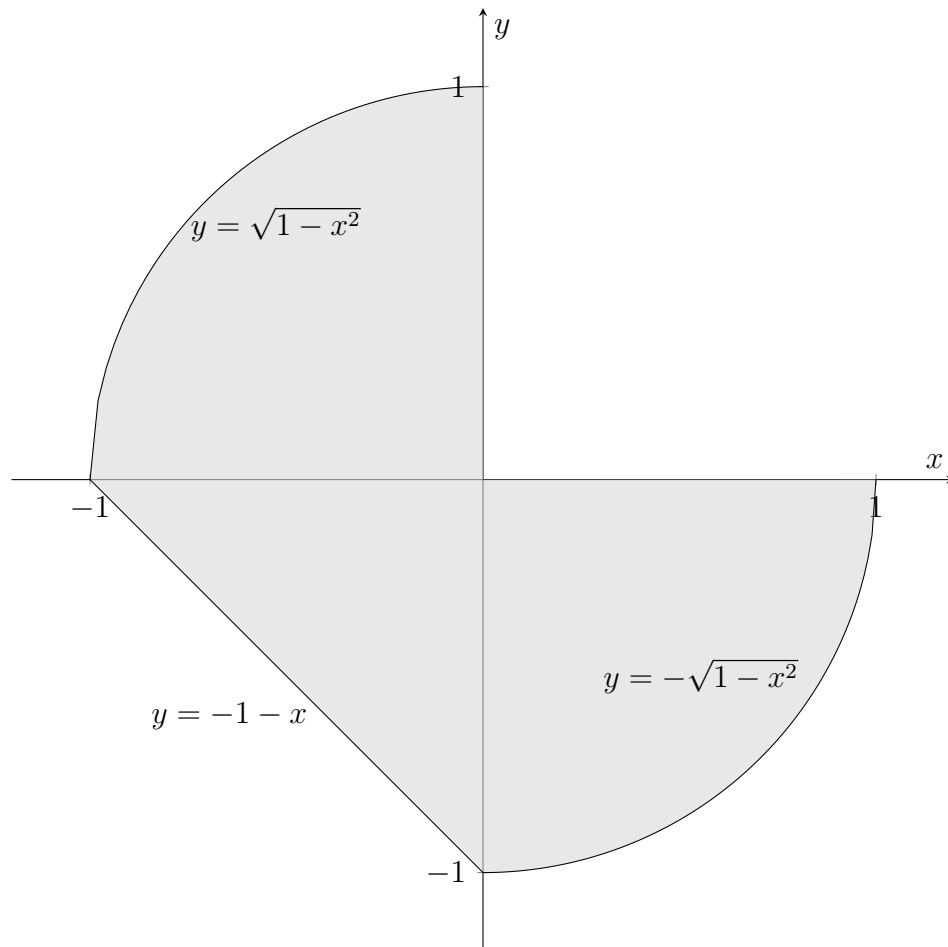
Условие

Вычислить двойной интеграл, затем изменить порядок интегрирования. Нарисовать область интегрирования D и вычислить двойной интеграл.

$$\int_{-1}^0 dx \int_{-1-x}^{\sqrt{1-x^2}} x dy + \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 x dy$$

Решение

1. Область интегрирования D изображена ниже:



Вычислим двойной интеграл:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^0 dx \int_{-1-x}^{\sqrt{1-x^2}} x dy + \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 x dy = \\ &= \int_{-1}^0 x(1+x+\sqrt{1-x^2}) dx + \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = \\ &= \left[1/6(3x^2+2x^3-2(1-x^2)^{3/2}) \right] \Big|_{-1}^0 + \left[-1/3(1-x^2)^{3/2} \right] \Big|_0^1 = \\ &= -1/2 + 1/3 = -1/6 \end{aligned}$$

Теперь изменим порядок интегрирования и снова вычислим двойной интеграл:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^0 dx \int_{-1-x}^{\sqrt{1-x^2}} x dy + \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 x dy = \\ &= \int_{-1}^0 dy \int_{-1-y}^{\sqrt{1-y^2}} x dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 x dx = \\ &= - \int_{-1}^0 y(1+y) dy + 1/2 \int_0^1 (-1+y^2) dy = \\ &= \left[-y^2/2 - y^3/3 \right] \Big|_{-1}^0 + 1/2 \left[-y + y^3/3 \right] \Big|_0^1 = \\ &= 1/6 - 1/3 = -1/6 \end{aligned}$$

Ответ: $-1/6$

Задача 2

Условие

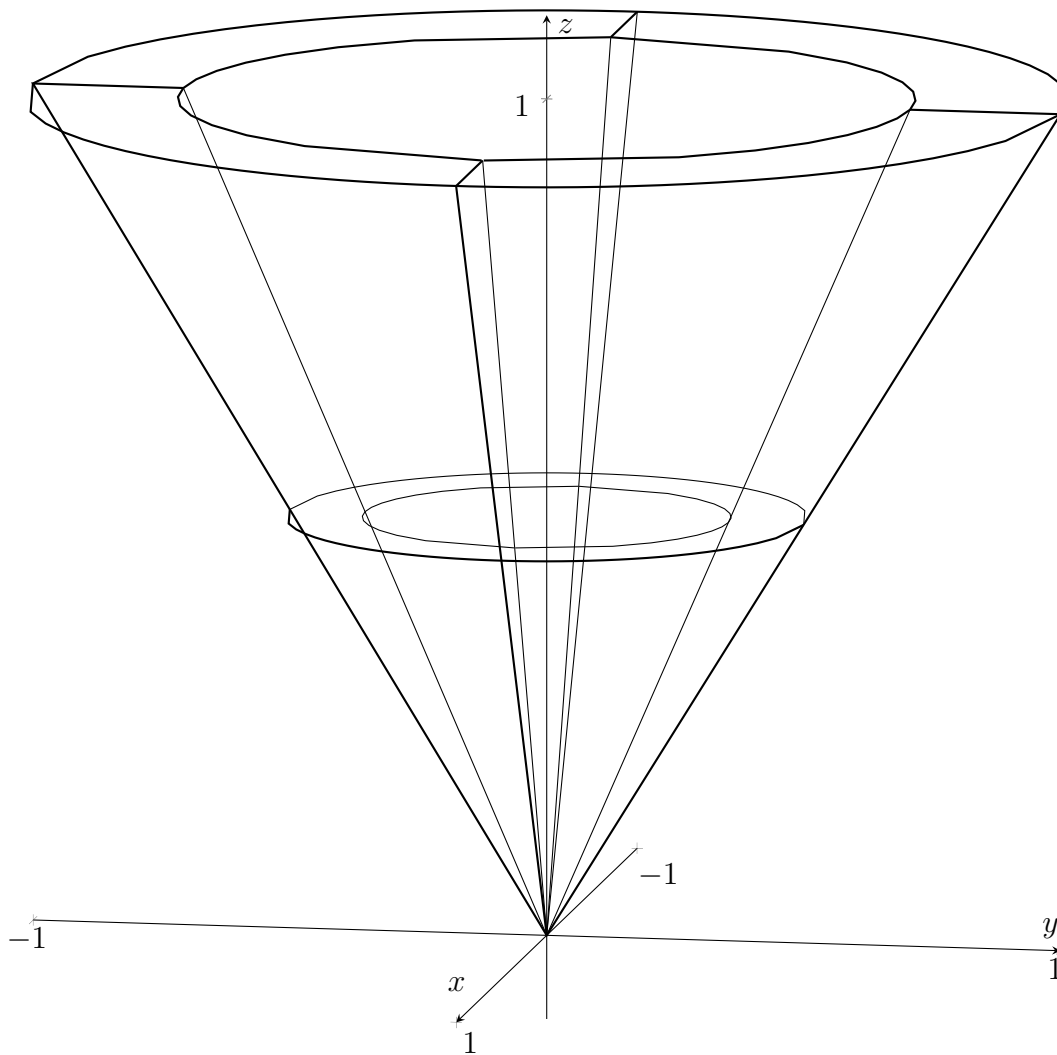
Тело T ограничено заданными поверхностями:

$$z = \sqrt{2(x^2 + y^2)} \quad (1), z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2), z = 1 \quad (3).$$

1. Сделать схематический рисунок тела T .
2. С помощью тройного интеграла найти объем тела T , перейдя к цилиндрическим или сферическим координатам.

Решение

1. Уравнения (1) и (2) задают конусы с вершинами в точке $O(0; 0; 0)$. Уравнение (3) задает плоскость параллельную плоскости xOy , при $z = 1$. Тело T изображено ниже:



2. Объем V тела T выражается тройным интегралом:

$$V = \iiint_T dv$$

Будем вычислять этот интеграл, перейдя к сферическим координатам $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$ с учетом того, что $x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \theta$. Якобиан перехода равен $r^2 \sin \theta$, а формула объема тела примет вид:

$$V = \iiint_T r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

Запишем уравнения поверхностей, ограничивающих тело T , в цилиндрических координатах. Уравнение (1): $z = \sqrt{2r^2}$, уравнение (2): $z = \sqrt{r^2}$.

Объем данного тела будем находить, как разность объемов двух конусов ((1) и (2)):

$$V_T = V_{T_2} - V_{T_1} = \iiint_{T_2} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi - \iiint_{T_1} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

Для расстановки пределов интегрирования найдем линию пересечения плоскости и конуса (2):

$$\begin{cases} z = 1 \\ z = \sqrt{r^2} \\ r \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ 1 = \sqrt{r^2} \\ r \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ r = 1 \end{cases}$$

Также найдём для конуса (1):

$$\begin{cases} z = 1 \\ z = \sqrt{2r^2} \\ r \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ 1 = \sqrt{2r^2} \\ r \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ r = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Таким образом, радиус основания конуса (2) равен 1, а радиус основания конуса (1) равен $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Значит, для всех точек тела T_1 справедливо условие $0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ (4), а для всех точек тела T_2 $0 \leq r \leq 1$ (5).

Используя условия (4) и (5), расставим пределы интегрирования в разности тройных интегралов и решим их:

$$\begin{aligned} & \iiint_{T_2} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi - \iiint_{T_1} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 dr \int_{\sqrt{r^2}}^1 \sin \theta d\theta - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r^2 dr \int_{\sqrt{2r^2}}^1 \sin \theta d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 (1 - \sqrt{r^2}) dr - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r^2 (1 - \sqrt{2r^2}) dr, \sqrt{r^2} \rightarrow |r|, r \geq 0 \rightarrow r \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 (1 - r) dr - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r^2 (1 - \sqrt{2}r) dr = \int_0^{2\pi} \frac{1}{6} d\varphi - \int_0^{2\pi} \frac{1}{12} d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Ответ: $\pi/6$

Задача 3

Условие

Доказать, что данное выражение $(1 - \frac{y}{x^2+y^2}) dx + (\frac{x}{x^2+y^2} - 1) dy$ является полным дифференциалом функции $\Phi(x, y)$ и найти её с помощью криволинейного интеграла.

Решение

Обозначим:

$$P(x, y) = (1 - \frac{y}{x^2 + y^2}), \quad Q(x, y) = (\frac{x}{x^2 + y^2} - 1)$$

Очевидно, что:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Для отыскания функции $\Phi(x, y)$, дифференциал которой нам известен, вычислим:

$$\int_{A(a,b)}^{M(x,y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

Путь интегрирования, то есть кривая, соединяющая две точки A и M , должна быть такой, чтобы на ней подынтегральная функция существовала и не претерпевала разрывы, то есть должно быть:

$$x^2 + y^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0, y \neq 0$$

Таким образом, ясно, что в точке $(0; 0)$ подынтегральная функция терпит разрыв. Поэтому возьмем в качестве пути интегральную ломанную линию $ABM(A(x, 0), B(x, y), M(0, y))$:

$$\Phi(x, y) = \int_{ABM} (1 - \frac{y}{x^2 + y^2}) dx + (\frac{x}{x^2 + y^2} - 1) dy$$

на $AB : x = \text{const}, dx = 0, y \in [0, y]$; на $BM : y = \text{const}, dy = 0, x \in [x, 0]$. Тогда сводя криволинейный интеграл к определенному получаем:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \int_0^y (\frac{x}{x^2 + y^2} - 1) dy + \int_x^0 (1 - \frac{y}{x^2 + y^2}) dx = \\ &= \arctg(x/y) + \arctg(y/x) - y - x \end{aligned}$$

Ответ: $\arctg(x/y) + \arctg(y/x) - y - x$

Задача 4

Условие

Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = \vec{i} - 2z\vec{k}$ из тела T , ограниченного указанными поверхностями $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $x = 0 (x \geq 0)$, $z = 0$ с помощью поверхностного интеграла первого рода, второго рода и также проверить результат с помощью теоремы Гаусса-Остроградского.

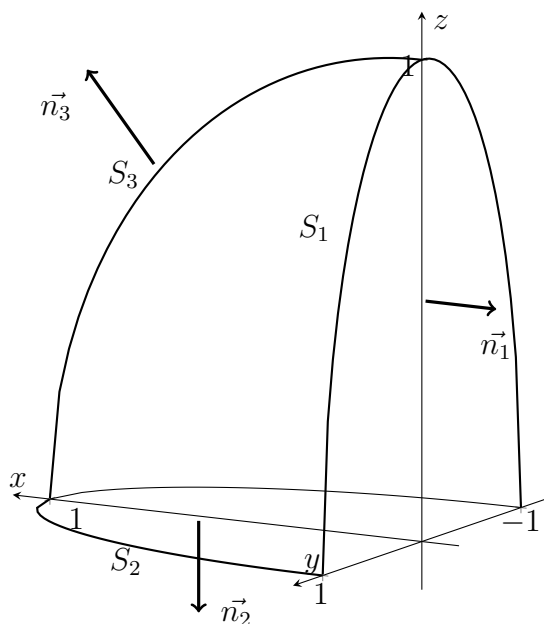
Решение

Данное тело ограничено тремя поверхностями:

$S_1 : x = 0$ ($\vec{n}_1 = -\vec{i}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности $S_1 : a_n = -1$).

$S_2 : z = 0$ ($\vec{n}_2 = -\vec{k}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности $S_2 : a_n = 2z$).

S_3 — часть сферы $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$:



Вычислим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$dS = \sqrt{1+p^2(x, y) + q^2(x, y)} dx dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy$$

Нормаль \vec{n}_3 образует острый угол с осью Oz , то есть соответствует верхней стороне поверхности S_3 , следовательно:

$$\cos \alpha = x; \quad \cos \beta = y; \quad \cos \gamma = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$a_n = 1 \cdot x + 0 \cdot y - 2z \cdot \sqrt{1-x^2-y^2} = x - 2z\sqrt{1-x^2-y^2}$$

Вычислим теперь поток Π вектора \vec{a} из тела T . Ясно, что поток равен сумме трех потоков, то есть $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$, где Π_1 — поток через поверхность S_1 , Π_2 — поток через поверхность S_2 и Π_3 — поток через поверхность S_3 . Тогда:

$$\Pi_1 = \iint_{S_1} a_n dS = \iint_{S_1} (-1) dS = - \int_0^1 dz \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} dy = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Pi_2 = \iint_{S_2} a_n dS = \iint_{S_2} (2z) dS = 0,$$

так как на поверхности S_2 $z = 0$;

$$\Pi_3 = \iint_{S_3} a_n dS = \iint_{S_3} \left[x - 2z\sqrt{1-x^2-y^2} \right] dS = \iint_D \frac{x - 2(1-x^2-y^2)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy$$

Для вычисления двойного интеграла перейдем к полярным координатам:

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, |I(r, \varphi)| = r$$

Получим:

$$\begin{aligned} \Pi_3 &= \iint_D \frac{r \cos \varphi - 2(1-r^2)}{\sqrt{1-r^2}} r dr d\varphi = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \frac{r \cos \varphi - 2(1-r^2)}{\sqrt{1-r^2}} r dr \\ I_{\text{BH.}} &= \int_0^1 \frac{r \cos \varphi - 2(1-r^2)}{\sqrt{1-r^2}} r dr = \\ &= \left[1/2 \arcsin(r) \cos \varphi - \frac{1}{6} \sqrt{1-r^2} (-4 + 4r^2 + 3r \cos \varphi) \right] \Big|_0^1 = \\ &= \frac{\pi}{4} \cos \varphi - \frac{2}{3} \\ \Pi_3 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{4} \cos \varphi - \frac{2}{3} \right) d\varphi = \left[-\frac{2\varphi}{3} + \frac{\pi}{4} \sin \varphi \right] \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Окончательно:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = -\frac{\pi}{2} + 0 - \frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3}$$

Вычислим поток Π векторного поля \vec{a} через поверхностный интеграл второго рода:

$$\Pi = \iint_S a_x(x, y, z) dy dz + a_y(x, y, z) dx dz + a_z(x, y, z) dy dx =$$

По прежнему $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$:

$$\Pi_1 = \iint_{S_1} 1 dy dz + 0 \cdot dz dx - 2z dx dy = \iint_{S_1} dy dz = -\frac{\pi}{2},$$

на S_1 : $x = 0, dx = 0$.

$$\Pi_2 = \iint_{S_2} 1 dy dz + 0 \cdot dz dx - 2z dx dy = 0,$$

на S_2 : $z = 0, dz = 0$.

$$\Pi_3 = \iint_{S_3} 1 dy dz + 0 \cdot dz dx - 2z dx dy,$$

на $S_3 : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

$$\begin{aligned}
 & \iint_{S_3} 1 \, dy \, dz - 2z \, dx \, dy = \\
 &= \iint_{S_1} dy \, dz - 2 \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx \, dy = \\
 &= \frac{\pi}{2} - 2 \iint_D \sqrt{1 - r^2} r \, dr \, d\varphi = \\
 &= \frac{\pi}{2} - 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} r \, dr = \\
 &= \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}
 \end{aligned}$$

Окончательно:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = -\frac{\pi}{2} + 0 - \frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3}$$

Проверим по формуле Гаусса-Остроградского:

$$\begin{aligned}
 \Pi &= \iiint_T \left[\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right] dx \, dy \, dz = -2 \iiint_T dx \, dy \, dz = \\
 &= -2 \iiint_T r^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, dr = -2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \, d\theta \int_0^1 r^2 \, dr = -\frac{2\pi}{3}
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{2\pi}{3}$

Задача 5

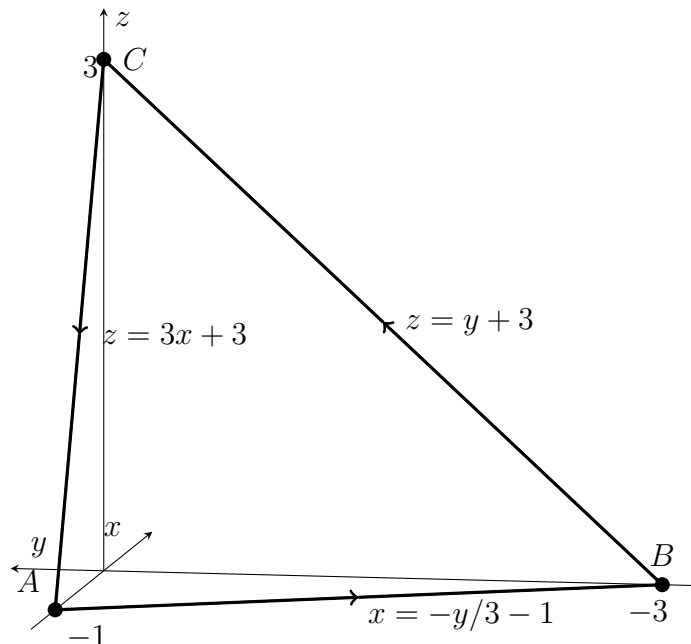
Условие

Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = zx\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$ по контуру (замкнутой линии) l , получающемуся при пересечении заданной плоскости $\alpha : -3x - y + z = 3$ координатными плоскостями, через криволинейный интеграл первого и второго рода и с помощью формулы Стокса через поверхностный интеграл первого и второго рода. Контур l считается лежащим в координатном октанте, заданном неравенствами: $x \leq 0$; $y \leq 0$; $z \geq 0$.

Решение

Нарисуем контур l . Для этого заметим, что уравнение плоскости $\alpha : -3x - y + z = 3$ может быть преобразовано к виду:

$$-\frac{x}{1} - \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$$



Циркуляция векторного поля \vec{a} по контуру l представляет собой криволинейный интеграл первого рода:

$$\begin{aligned} C &= \int_l [a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma] dS = \\ &= \int_{ABCA} [zx \cos \alpha + \cos \beta + z \cos \gamma] dS = \\ &= \left\{ \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA} \right\} [zx \cos \alpha + \cos \beta + z \cos \gamma] dS = \end{aligned}$$

Вычислим отдельно каждый из трех интегралов:

$$J_1 = \int_{AB} [zx \cos \alpha + \cos \beta + z \cos \gamma] dS$$

— это интеграл вдоль отрезка AB , касательный вектор к которому $\vec{\tau}$, очевидно, можно взять просто $\vec{AB} = (1; -3; 0)$ (касательный вектор постоянен, так как AB — это отрезок прямой). Направляющие косинусы, очевидно, совпадают с искомыми:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}; \quad \cos \beta = -\frac{3}{\sqrt{10}}; \quad \cos \gamma = \frac{0}{\sqrt{10}} = 0$$

Напишем параметрические уравнения линии AB :

$$\begin{cases} x(t) = -1 + t \\ y(t) = 0 - 3t \\ z(t) = 0 + 0 \cdot t \end{cases}, t \in [0; 1]$$

Учитывая параметрическое представление линии KL и формулу для вычисления dS , получаем:

$$dS = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt = \sqrt{10} dt$$

Подставляя полученные результаты в равенство для J_1 , имеем следующие выражения для криволинейного интеграла первого рода J_1 через определенный интеграл:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^1 \left\{ 0 \cdot (-1 + t) \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{3}{\sqrt{10}} + 0 \cdot 0 \right\} \sqrt{10} dt = \\ &= \int_0^1 \left\{ -\frac{3}{\sqrt{10}} \right\} \sqrt{10} dt = (-3t) \Big|_0^1 = -3 \end{aligned}$$

Аналогично для J_2

$$J_2 = \int_{BC} [zx \cos \alpha + \cos \beta + z \cos \gamma] dS$$

Имеем $\vec{\tau} = L\vec{M} = (0; 3; 3)$:

$$\cos \alpha = \frac{0}{\sqrt{0^2 + 3^2 + 3^2}} = 0; \quad \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{18}}; \quad \cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{18}}$$

$$\begin{cases} x(t) = 0 + 0 \cdot t \\ y(t) = -3 + 3t \\ z(t) = 0 + 3t \end{cases}, t \in [0; 1]$$

$$dS = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt = \sqrt{18} dt$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^1 \left\{ (3t) \cdot 0 \cdot 0 + \frac{3}{\sqrt{18}} + (3t) \cdot \frac{3}{\sqrt{18}} \right\} \sqrt{18} dt = \\ &= \int_0^1 \left\{ \frac{3}{\sqrt{18}} + (3t) \cdot \frac{3}{\sqrt{18}} \right\} \sqrt{18} dt = \left(3t + \frac{9t^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{15}{2} \end{aligned}$$

Аналогично для J_3

$$J_3 = \int_{CA} [zx \cos \alpha + \cos \beta + z \cos \gamma] dS$$

Имеем $\vec{\tau} = \vec{CA} = (-1; 0; -3)$:

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-3)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}; \quad \cos \beta = \frac{0}{\sqrt{10}} = 0; \quad \cos \gamma = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\begin{cases} x(t) = 0 - 1t \\ y(t) = 0 + 0 \cdot t \\ z(t) = 3 - 3t \end{cases}, t \in [0; 1]$$

$$dS = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt = \sqrt{10} dt$$

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_0^1 \left\{ (3 - 3t)(-1t)\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + 0 + (3 - 3t)\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \right\} \sqrt{10} dt = \\ &= \int_0^1 \left\{ (3 - 3t)(-1t)\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + (3 - 3t)\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \right\} \sqrt{10} dt = \\ &= \left(-3(3t - 2t^2 + \frac{t^3}{3}) \right) \Big|_0^1 = -4 \end{aligned}$$

Окончательно: $C = -3 + \frac{15}{2} - 4 = \frac{1}{2}$

Циркуляция векторного поля \vec{a} по контуру l представляет собой криволинейный интеграл второго рода:

$$C = \int_l \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_l a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

Для нашей задачи получим:

$$C = \int_{ABCA} a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_{ABCA} zx dx + dy + z dz$$

Для вычисления циркуляции применим свойство аддитивности интеграла и представим C в виде суммы трех криволинейных интегралов J_{AB} , J_{BC} , и J_{CA} , взятым по отрезкам AB , BC и CA соответственно, т. е. $C = J_{AB} + J_{BC} + J_{CA}$. Найдём значения этих интегралов:

Отрезок AB представляет собой отрезок прямой, заданной системой:

$\begin{cases} z = 0 \\ y = -3x - 3 \end{cases}$, откуда следует, что: $\begin{cases} dz = 0 \\ dy = -3 dx \end{cases}$. При движении от точки A к точке B координата x меняется от -1 до 0 , следовательно:

$$I_{AB} = \int_{-1}^0 -3 dx = (-3x) \Big|_{-1}^0 = -3$$

Отрезок BC представляет собой отрезок прямой, заданной системой:

$\begin{cases} x = 0 \\ y = z - 3 \end{cases}$, откуда следует, что: $\begin{cases} dx = 0 \\ dy = dz \end{cases}$. При движении от точки B к точке C координата z меняется от 0 до 3, следовательно:

$$I_{BC} = \int_0^3 (1 + z) dz = (z + z^2/2) \Big|_0^3 = \frac{15}{2}$$

Отрезок CA представляет собой отрезок прямой, заданной системой:

$\begin{cases} y = 0 \\ x = z/3 - 1 \end{cases}$, откуда следует, что: $\begin{cases} dy = 0 \\ dx = 1/3 dz \end{cases}$. При движении от точки C к точке A координата z меняется от 3 до 0, следовательно:

$$I_{CA} = \int_3^0 (z(z/3 - 1)/3 + z) dz = (z^3/27 + z^2/3) \Big|_3^0 = -4$$

Окончательно: $C = -3 + \frac{15}{2} - 4 = \frac{1}{2}$

Проверим циркуляцию векторного поля \vec{a} с помощью формулы Стокса. В начале вычислим $\text{rot } \vec{a}$:

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ zx & 1 & z \end{vmatrix} = \vec{i} \left\{ \frac{\partial(z)}{\partial y} - \frac{\partial(1)}{\partial z} \right\} - \vec{j} \left\{ \frac{\partial(z)}{\partial x} - \frac{\partial(zx)}{\partial z} \right\} + \vec{k} \left\{ \frac{\partial(1)}{\partial x} - \frac{\partial(zx)}{\partial y} \right\} = \vec{j}x$$

Тогда:

$$C = \iint_{\sigma} [0 \cdot \cos \alpha + x \cos \beta + 0 \cdot \cos \gamma] d\sigma = \iint_{\sigma} (x \cos \beta) d\sigma$$

Выражения для циркуляции через поверхностный интеграл первого рода (здесь в качестве поверхности σ выбран треугольник ABC , ограниченный контуром l — ломанной $ABCA$). Вычислим $\cos \beta$. Для этого заметим, что нормалью к поверхности σ может служить вектор $\vec{n} = (-3; -1; 1)$. Направляющие косинусы будут равны:

$$\cos \alpha = \frac{-3}{\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 1^2}} = -\frac{3}{\sqrt{11}}; \cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{11}}; \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{11}}$$

Тогда циркуляция примет вид:

$$C = - \iint_{\sigma} \frac{x}{\sqrt{11}} d\sigma = \iint_{D_{xz}} \frac{x}{\sqrt{11}} \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dx dz$$

$$y = -3x - 3 + z$$

Тогда интеграл примет вид:

$$C = \iint_{D_{xz}} \frac{x}{\sqrt{11}} \sqrt{11} dx dz = \iint_{D_{xz}} x dx dz = \int_{-1}^0 dx \int_{3x+3}^0 x dz = \frac{1}{2}$$

Выполним расчет циркуляции по формуле Стокса, используя при этом поверхностный интеграл второго рода:

$$C = \iint_{\sigma} [0 \, dydz + x \, dx dz + 0 \, dx dy] = \iint_{\sigma} x \, dx dz$$

Выражая поверхностный интеграл второго рода через двойной, имеем:

$$C = \iint_{D_{xz}} x \, dx dz$$

Здесь использован тот факт, что нормаль $\vec{n} = (-3; -1; 1)$ к поверхности σ образует тупой угол β с осью Oy . Очевидно, что этот интеграл совпадает с соответствующим выражением поверхностного интеграла первого рода $-\iint_{\sigma} \frac{x}{\sqrt{11}} \, d\sigma$ через двойной интеграл.

Поэтому $C = \iint_{D_{xz}} x \, dx dz = \frac{1}{2}$ — как и следовало ожидать.

Ответ: $C = \frac{1}{2}$.

Работа над ошибками

Задача 3

В качестве пути возьмем корректную интегральную ломанную линию $ABM(A(y, 1), B(1, 1), M(1, x))$:

$$\Phi(x, y) = \int_{ABM} \left(1 - \frac{y}{x^2 + y^2}\right) dx + \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - 1\right) dy$$

на $AB : x = \text{const}, dx = 0, y \in [y, 1]$; на $BM : y = \text{const}, dy = 0, x \in [1, x]$. Тогда сводя криволинейный интеграл к определенному получаем:

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) &= \int_y^1 \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - 1\right) dy + \int_1^x \left(1 - \frac{y}{x^2 + y^2}\right) dx = \\ &= \left(\arctg\left(\frac{y}{x}\right) - y\right)\Big|_y^1 + \left(x - \arctg\left(\frac{x}{y}\right)\right)\Big|_x^1 + C = \\ &= \arctg(y) - 1 - \frac{\pi}{4} + y + 1 - \arctg(x)x + \frac{\pi}{4} + C = \\ &= \arctg(y) - \arctg(x) + y - x + C\end{aligned}$$

Ответ: $\arctg(y) - \arctg(x) + y - x + C$