Университет ИТМО

Лабораторная работа №1
«Основные понятия линейного программирования»

Выполнил: Федюкович С. А.

Факультет: МТУ “Академия ЛИМТУ”

Группа: S3100

Проверил: ...

Санкт-Петербург

2018

Теоретические основы лабораторной работы

Линейное программирование – это направление математического программирования, изучающее методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными и линейным критерием.

Необходимым условием постановки задачи линейного программирования являются ограничения на наличие ресурсов, величину спроса, производственную мощность предприятия и другие производственные факторы.

Сущность линейного программирования состоит в нахождении точек наибольшего или наименьшего значения некоторой функции при определенном наборе ограничений, налагаемых на аргументы и образующих систему ограничений, которая имеет, как правило, бесконечное множество решений. Каждая совокупность значений переменных (аргументов функции F), которые удовлетворяют системе ограничений, называется допустимым планом задачи линейного программирования. Функция F, максимум или минимум которой определяется, называется целевой функцией задачи. Допустимый план, на котором достигается максимум или минимум функции F, называется оптимальным планом задачи.

Система ограничений, определяющая множество планов, диктуется условиями производства. Задачей линейного программирования (ЗЛП) является выбор из множества допустимых планов наиболее выгодного (оптимального).

В общей постановке задача линейного программирования выглядит следующим образом:

Имеются какие-то переменные $\mathrm{x} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_n)$ и функция этих переменных $f(x) = f(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_n)$, которая носит название целевой функции. Ставится задача: найти экстремум (максимум или минимум) целевой функции $f(x)$ при условии, что переменные x принадлежат некоторой области G:

$$\begin{cases} f(x) \Rightarrow extr \\ x \in G \end{cases}$$

Линейное программирование характеризуется:

- функция $f(x)$ является линейной функцией переменных $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_n$
- область G определяется системой линейных равенств или неравенств.

Математическая модель любой задачи линейного программирования включает в себя:

- максимум или минимум целевой функции (критерий оптимальности);
- систему ограничений в форме линейных уравнений и неравенств;
- требование неотрицательности переменных.

Наиболее общую форму задачи линейного программирования формулируют следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n\{\le, \ge, =\}b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n\{\le, \ge, =\}b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n\{\le, \ge, =\}b_m. \end{cases} \tag{1}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0 \tag{2}$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to max(min) \tag{3}$$

Коэффициенты $a_{i,j}, b_i, c_j, j = 1, 2, ..., n, i = 1, 2, ..., m$ – любые действительные числа (возможно 0).

Решения, удовлетворяющие системе ограничений (1) условий задачи и требованиям неотрицательности (2), называются допустимыми, а решения, удовлетворяющие одновременно и требованиям минимизации (максимализации) (3) целевой функции, - оптимальными.

Выше описанная задача линейного программирования (ЗЛП) представлена в общей форме, но одна и та же (ЗЛП) может быть сформулирована в различных эквивалентных формах. Наиболее важными формами задачи линейного программирования являются каноническая и стандартная.

В канонической форме задача является задачей на максимум (минимум) некоторой линейной функции F, ее система ограничений состоит только из равенств (уравнений). При этом переменные задачи $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, ..., \mathrm{x}_n$ являются неотрицательными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{4}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0 \tag{5}$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to max(min) \tag{6}$$

К канонической форме можно преобразовать любую задачу линейного программирования.

В стандартной форме задача линейного программирования является задачей на максимум (минимум) линейной целевой функции. Система ограничений ее состоит из одних линейных неравенств типа « $\ge$ » или « $\le$ ». Все переменные задачи неотрицательны.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \ge b_m. \end{cases} \tag{7}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0 \tag{8}$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to max(min) \tag{9}$$

Всякую задачу линейного программирования можно сформулировать в стандартной форме.