Университет ИТМО

Отчёт по лабораторной работе №2
«Изучение центрального соударения тел. Проверка второго закона Ньютона»

Выполнил: Федюкович С. А.

Факультет: МТУ “Академия ЛИМТУ”

Группа: S3100

Проверил: Пшеничников В. Е.

Санкт-Петербург

2018

Цель работы

1. Экспериментальная проверка законов упругого и неупругого центрального соударения для системы двух тележек, движущихся с малым трением.

2. Исследование зависимости ускорения тележки от приложенной силы и массы тележки.

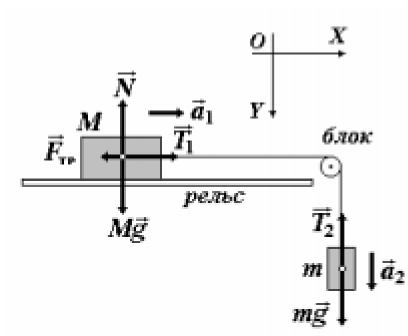
Теоретические основы лабораторной работы

Часть 1

Рассмотрим абсолютно упругое центральное соударение двух тел массами m_1 и m_2 , при таком соударении в замкнутой системе двух тел выполняются законы сохранения импульса и энергии. Пусть до соударения движется только первое тело, тогда уравнения законов имеют вид:

$$\begin{cases} m_1\vec{v}_{10} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \\ \frac{m_1v_{10}^2}{2} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} \end{cases}, \quad (1)$$

где $\vec{v}_{10}$ — скорость первого тела до удара, $\vec{v}_1$и $\vec{v}_2$ — соответственно, скорости первого и второго тел после удара. Считая скорость $\vec{v}_{10}$ известной, найдем скорости обоих тел после удара. Пусть условия соударения таковы, что после удара оба тела продолжают двигаться параллельно той прямой, по которой двигалось первое тело до удара.



Введем координатную ось OX, сонаправленную с вектором $\vec{v}_{10}$. Для проекций скоростей v_1, v_2 из уравнений (1) получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} m_1v_{10} = m_1v_{1x} + m_2v_{2x} \\ \frac{m_1v_{10}^2}{2} = \frac{m_1v_{1x}^2}{2} + \frac{m_2v_{2x}^2}{2} \end{cases} \quad (2)$$

Умножим все слагаемые второго уравнения на два, и перенесем налево в обоих уравнениях слагаемые, характеризующие импульс и энергию первого тела:

$$\begin{cases} m_1(v_{10} - v_{1x}) = m_2v_{2x} \\ m_1(v_{10}^2 - v_{1x}^2) = m_2v_{2x}^2 \end{cases} \quad (3)$$

После удара скорость первого тела должна измениться. Поэтому содержимое скобок в левых частях уравнений (3) отлично от нуля, и для упрощения системы можно поделить левые и правые части нижнего уравнения на соответствующие части верхнего уравнения. Результат деления сделаем вторым уравнением системы:

$$\begin{cases} m_1(v_{10} - v_{1x}) = m_2 v_{2x} \\ v_{10} - v_{1x} = v_{2x} \end{cases} \tag{4}$$

Отсюда нетрудно найти окончательные выражения для скоростей:

$$\begin{cases} v_{1x} = \frac{(m_1 - m_2)v_{10}}{m_1 + m_2} \\ v_{2x} = \frac{2m_1 v_{10}}{m_1 + m_1} \end{cases} \tag{5}$$

Из первого уравнения (5) следует, что в зависимости от соотношения масс первое тело после соударения может:

а) продолжить движение вперед ($m_1 > m_2, v_{1x} > 0$);

б) остановится ($m_1 = m_2, v_{1x} = 0$);

в) поменять направление движения на противоположное ($m_1 < m_2, v_{1x} < 0$).

При абсолютно неупругом соударении рассмотренных выше тел, оба тела после удара двигаются как одно целое с суммарной массой. В этом случае законы сохранения импульса и энергии принимают вид:

$$\begin{cases} m_1 \vec{v}_{10} = (m_1 + m_2)\vec{v} \\ \frac{m_1 v_{10}^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)\vec{v}}{2} + W_{\text{пот}} \end{cases} \tag{6}$$

Здесь $\vec{v}$– скорость тел после соударения, $W_{\text{пот}}$ – потери механической энергии при соударении.

В первом уравнении (6) равенство векторов означает равенство их модулей, и для модуля скорости тел после соударения из этого уравнения находим:

$$v = \frac{m_1 v_{10}}{m_1 + m_2} \tag{7}$$

Подставив во второе уравнение системы (6) вместо скорости v правую часть уравнения (7), получим следующее выражение для потерь механической энергии при соударении:

$$W_{\text{пот}} = \frac{m_1 m_2 v_{10}^2}{2(m_1 + m_2)} \tag{8}$$

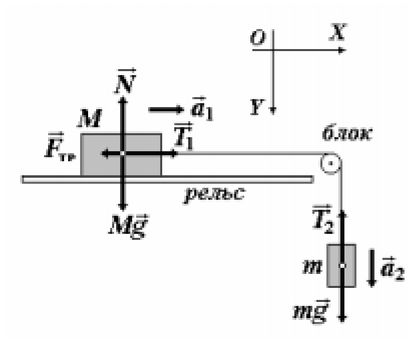
Относительные потери механической энергии при неупругом соударении вычисляются по формуле:

$$\frac{W_{\text{пот}}}{\frac{m_1 v_{10}^2}{2}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \tag{9}$$

В качестве соударяющихся тел в лабораторной работе выступают две тележки, скользящие с малым трением по горизонтальному рельсу.

Часть 2

Рассмотрим систему, состоящую из тележки M и гирьки m, соединенных невесомой нерастяжимой нитью. Тележка с небольшим трением скользит по горизонтальному рельсу. Масса блока, через который перекинута нить, пренебрежимо мала.



Уравнения второго закона Ньютона для тележки и гирьки, соответственно, имеют вид:

$$M\vec{a}_1 = M\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_1 + \vec{F}_{\text{тр}} \tag{10}$$

$$m\vec{a}_2 = m\vec{g} + \vec{T}_2 \tag{11}$$

Здесь $\vec{a}_1$,$\vec{a}_2$ — ускорения тележки и гирьки; $\vec{N}$ — сила реакции опоры, $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ — силы натяжения нити, $\vec{F}_{\text{тр}}$ — сила трения. Из-за нерастяжимости нити модули обоих ускорений равны друг другу, обозначим их одной буквой: $a_1 = a_2 = a$. Из-за невесомости нити и блока можно также принять: $T_1 = T_2 = T$. Для проекций векторов на координатные оси из уравнения (10) получаем:

$$\begin{cases} OY : N = Mg \\ OX : Ma = T - F_{\text{тр}} \end{cases} ; \tag{12}$$

из уравнения (11):

$$\begin{cases} OY : ma = mg - T \end{cases} . \tag{13}$$

Экспериментальные данные

Упражнение 1

Таблица 1.1. Зависимость скорости тел при абсолютно упругом соударении без утяжелителя

№	Тело 1	Тело 2	v_{10x}, м/с	v_{1x}, м/с	v_{2x}, м/с
1	Тележка 1 + втулка с рогаткой	Тележка 2 + втулка с рогаткой	0,53	0,06	0,43
2			0,54	0,06	0,43
3			0,57	0,07	0,43
4			0,55	0,05	0,47
5			0,55	0,05	0,45

Приборные погрешности:$\Delta v_{10} = \Delta v_1 = \Delta v_2 = 0,01$ м/с.

$v = 0,76$ м/с; $v' = 0,54$ м/с.

Таблица 1.2. Зависимость скоростей тел при абсолютно упругом столкновении с утяжелителем

№	Тело 1	Тело 2	v_{10x}, м/с	v_{1x}, м/с	v_{2x}, м/с
1	Тележка 1 + втулка с рогаткой	Тележка 2 + втулка с рогаткой + утяжелитель	0,55	-0,08	0,28
2			0,54	-0,10	0,26
3			0,55	-0,09	0,26
4			0,53	-0,09	0,28
5			0,52	-0,08	0,25

Таблица 2.1. Зависимость скоростей тел при абсолютно неупругом столкновении без утяжелителя

№	Тело 1	Тело 2	v_{10x}, м/с	v, м/с
1	Тележка 1 + втулка с липучкой	Тележка 2 + втулка с липучкой	0,56	0,23
2			0,54	0,21
3			0,47	0,19
4			0,48	0,20
5			0,49	0,20

Таблица 2.2. Зависимость скоростей тел при абсолютно неупругом столкновении с утяжелителем

№	Тело 1	Тело 2	v_{10x}, м/с	v, м/с
1	Тележка 1 + втулка с липучкой	Тележка 2 + втулка с липучкой + утяжелитель	0,56	0,11
2			0,56	0,13
3			0,53	0,15
4			0,49	0,07
5			0,50	0,15

Упражнение 2

$x_1 = 0,150$ м; $x_2 = 0,800$ м. Погрешности координат примем $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 5$ мм

Таблица 3.1. Зависимость времени от количества шайб без утяжелителя

№	Состав подвески	t_1, с	t_2, с
1	крючок	0,29	0,69
2	крючок + 1 шайба	0,36	0,84
3	крючок + 2 шайба	0,41	0,96
4	крючок + 3 шайба	0,46	1,07

Приборные погрешности:$\Delta t_1 = \Delta t_2 = 0,05$ с.

Таблица 3.2. Зависимость времени от количества шайб с утяжелителем

№	Состав подвески	t_1, с	t_2, с
1	крючок + утяжелитель	0,19	0,48
2	крючок + утяжелитель + 1 шайба	0,24	0,59
3	крючок + утяжелитель + 2 шайбы	0,29	0,68
4	крючок + утяжелитель + 3 шайбы	0,32	0,76

Обработка результатов измерений

Упражнение 1

1. Оценим относительные потери импульса и кинетической энергии за счет трения по формулам:

$$\partial_p^{(\text{тр})} = \frac{\Delta p}{p} = \frac{v'}{v} - 1 \approx -0,29; \partial_W^{(\text{тр})} = \frac{\Delta W_\text{к}}{W_\text{к}} = \frac{v'^2}{v^2} - 1 \approx -0,49. \tag{14}$$

2. С помощью таблицы масс для таблицы 1.1 рассчитаем массы m_1, m_2 соударяющихся тел. Найденные значения занести в таблицу 4.1 . По данным таблицы 1.1 рассчитаем и и занесем в таблицу 4.1 импульсы тел:

$$p_{10x} = m_1 v_{10x}, p_{1x} = m_1 v_{1x}, p_{2x} = m_2 v_{2x}. \tag{15}$$

№	m_1, г	m_2, г	$p_{10x}, \text{мН} \cdot \text{с}$	$p_{1x}, \text{мН} \cdot \text{с}$	$p_{2x}, \text{мН} \cdot \text{с}$	∂_p	∂_W
1	49,5	51,5	26,23	2,97	22,14	-0,04	-0,30
2			26,73	2,97	22,14	-0,06	-0,39
3			28,21	3,46	22,14	-0,09	-0,39
4			27,22	2,47	24,20	-0,02	-0,23
5			27,22	2,47	23,17	-0,05	-0,29

3. Вычислим для каждой строки 4.1 относительные изменения импульса и кинетической энергии системы при соударении по формулам:

$$\partial_p = \Delta P_x / p_{10x} = \frac{p_{1x} + p_{2x}}{p_{10x}} - 1 \tag{16}$$

$$\partial_p = \Delta W_\text{к} / W_{\text{к}0} = \frac{m_1 v_{1x}^2 + m_2 v_{2x}^2}{m_1 v_{10x}^2} - 1 \tag{17}$$

Занесем результаты в таблицу. Рассчитаем средние значения $\overline{\partial}_p, \overline{\partial}_W$ относительных потерь импульса и энергии по двум последним колонкам таблицы 4.1:

$$\overline{\partial}_p = \frac{\sum_{i=1}^{N} \partial_{pi}}{N} \approx -0,05; \overline{\partial}_W = \frac{\sum_{i=1}^{N} \partial_{Wi}}{N} \approx -0,32. \tag{18}$$

Здесь i – номер опыта, N общее число опытов. По разбросу отдельных значений ∂_p, ∂_W найдем погрешности их средних значений:

$$\Delta\overline{\partial_p} = K_S(\alpha_\text{дов}, N)\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\partial_{pi} - \overline{\partial}_p)^2}{N(N-1)}} \approx 0,01; \Delta\overline{\partial_W} = K_S(\alpha_\text{дов}, N)\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\partial_{Wi} - \overline{\partial}_W)^2}{N(N-1)}} \approx 0,04, \tag{19}$$

где $K_S(\alpha_\text{дов}, N)$ – коэффициент Стьюдента для доверительной вероятности $\alpha_\text{дов} = 0,7$ и количества измерений N. Сравним разности $\overline{\partial}_p - \partial_p^{(\text{тр})} = -0,05 + 0,29 = 0,24; \overline{\partial}_W - \partial_W^{(\text{тр})} = -0,32 + 0,49 = 0,17$ с соответствующими неопределенностями (19).

4. По данным таблиц 1.2 вычислим импульсы (15) и относительные изменения импульса и энергии (16), (17). Результаты представим в таблице 4.2:

№	m_1, г	m_2, г	p_{10x}, мН · с	p_{1x}, мН · с	p_{2x}, мН · с	∂_p	∂_W
1	49,5	102,5	27,22	-3,96	28,7	-0,19	-0,44
2			26,73	-4,95	26,65	-0,18	-0,48
3			27,22	-4,45	26,65	-0,14	-0,51
4			26,23	-4,45	28,7	-0,26	-0,39
5			25,74	-3,96	25,62	-0,14	-0,49

По двум последним колонкам таблицы 4.2 найдём средние значения $\overline{\partial}_p \approx -0,18; \overline{\partial}_W \approx -0,46$ и сравним их, соответственно, с $\partial_p^{(\text{тр})}, \partial_W^{(\text{тр})}$

5. По данным из таблицы 2.1 заполним следующую таблицу 5.1:

№	m_1, г	m_2, г	$p_{10}, \text{мН} \cdot \text{с}$	$p, \text{мН} \cdot \text{с}$	∂_p	$\partial_W^{(\text{э})}$	$\partial_W^{(\text{т})}$
1	52,4	54,4	29,34	24,56	-0,16	-0,65	-0,17
2			28,29	22,42	-0,20	-0,69	
3			24,62	20,29	-0,17	-0,66	
4			25,15	21,36	-0,15	-0,64	
5			25,67	21,36	-0,16	-0,66	

Здесь m_1, m_2 – массы соударяющихся тел;

$$p_{10} = m_1 v_{10} - \text{импульс системы до соударения;} \tag{20}$$

$$p = (m_1 + m_2)v - \text{импульс системы после соударения;} \tag{21}$$

$$\partial_p = \Delta p / p_{10} = (\frac{p_1}{p_{10}} - 1) - \text{относительное изменение импульса;} \tag{22}$$

$\partial_W^{(\text{э})}$ — экспериментальное значение относительного изменения механической энергии, вычисляемое по формуле:

$$\partial_W^{(\text{э})} = \Delta W_{\text{к}} / W_{\text{к}0} = \frac{(m_1 + m_2) v_2^2}{m_1 v_{10}^2} - 1, \tag{23}$$

$\partial_W^{(\text{т})}$—теоретическое значение относительного изменения механической энергии, вычисляемое по формуле (9). Вычислим средние значения $\overline{\partial}_p \approx -0,17$ и $\overline{\partial}_W^{(\text{э})} \approx -0,66$. Сравним $\overline{\partial}_p$ и $\partial_p^{(\text{тр})}$. Найдем $\overline{\partial}_W^{(\text{э})} - \partial_W^{(\text{т})} = -0,66 + 0,17 = -0,49$, сравним с величиной $\partial_W^{(\text{тр})}$.

6. Выполним вычисления пункта 5 для данных из таблицы 2.2, заполнив таблицу 5.2:

№	m_1, г	m_2, г	$p_{10}, \text{мН} \cdot \text{с}$	$p, \text{мН} \cdot \text{с}$	∂_p	$\partial_W^{(\text{э})}$	$\partial_W^{(\text{т})}$
1	52,4	105,4	29,34	17,35	-0,40	-0,88	-0,35
2			29,34	20,51	-0,30	-0,83	
3			27,77	23,67	-0,14	-0,75	
4			25,67	11,04	-0,56	-0,93	
5			26,2	23,67	-0,09	-0,72	

Вычислим средние значения $\overline{\partial}_p \approx -0,29$ и $\overline{\partial}_W^{(\text{э})} \approx -0,82$. Сравним $\overline{\partial}_p$ и $\partial_p^{(\text{тр})}$. Найдем $\overline{\partial}_W^{(\text{э})} - \partial_W^{(\text{т})} = -0,82 + 0,35 = -0,47$, сравним с величиной $\partial_W^{(\text{тр})}$.

Упражнение 2

1. С помощью таблицы масс для таблицы 3.1 рассчитаем значения массы подвески m . Найденные значения занесем в таблицу 6.1:

№	m, г	a, м/c^2	T, мН
1	1,8	0,29	17,15
2	2,65	0,44	24,84
3	3,5	0,57	32,34
4	4,35	0,71	39,59

2. Используя значения координат оптических ворот и данные из таблицы 3.1, вычислим и запишем в таблицу 6.1 ускорение тележки и силу натяжения нити:

$$a = \frac{2(x_2 - x_1)}{t_2^2 - t_1^2}, T = m(g - a). \tag{24}$$

Ускорение свободного падения возьмем $g = 9,82$ м/ с (на широте С-Петербурга). Формула для ускорения (24) следует из координатного представления равноускоренного движения без начальной скорости: $x = x_0 + \frac{at^2}{2}$. Формула для силы натяжения получается из уравнения (13).

3. В соответствии со вторым законом Ньютона (12), если сила трения не изменяется во время эксперимента, то натяжение нити связано с ускорением линейной зависимостью:

$$T = Ma + F_{\text{тр}}. \tag{25}$$

Угловой коэффициент этой зависимости равен массе M тележки, а значение силы натяжения при нулевом ускорении равно силе трения $F_{\text{тр}}$.

4. Пользуясь таблицей 6.1., нанесем экспериментальные точки на диаграмму T от a. Проведем аппроксимирующую прямую $\widetilde{T}_1(a)$. Выбрем на этой прямой достаточно удаленные друг от друга точки A и B. По их координатам вычислим массу тележки как угловой коэффициент прямой:

$$M_{1\text{гр}} = \frac{T_{B1} - T_{A1}}{a_{A1} - a_{B1}} \approx 50(\text{гр}). \tag{26}$$

5. По отклонениям $T_i - \widetilde{T}(a_i)$ ординат экспериментальных точек от соответствующих ординат точек аппроксимирующей прямой рассчитаем погрешность:

$$\Delta M_{1\text{гр}} = \frac{M_{1\text{гр}}}{T_{B1} - T_{A1}} \sqrt{\frac{2}{N-2} \sum_{i=1}^{N} (T_i - \widetilde{T}(a_i))^2} \approx 2,3(\text{гр}). \tag{27}$$

6. Запишем найденный доверительный интервал для массы разгоняемой тележки:

$$M_1 = M_{1\text{гр}} \pm \Delta M_{\text{гр}} = (50,0 \pm 2,3)\text{гр}. \tag{28}$$

Проверим попадает ли табличное значение в этот интервал.

7. Выполним расчеты пунктов 1,2 для данных из таблицы 3.2, заполнив таблицу 6.2:

№	m, г	a, м/c^2	T, мН
1	1,8	0,14	17,40
2	2,65	0,22	25,43
3	3,5	0,29	33,35
4	4,35	0,36	41,12

8. Используя таблицу 6.2, построим на той же диаграмме график зависимости T от a, проведя аппроксимирующую прямую $\widetilde{T}_2(a)$. Из графиков по формулам (26), (27) найдём доверительные интервалы для массы тележки с утяжелителем и двух тележек с утяжелителем:

$$M_{2\text{гр}} = \frac{T_{B2} - T_{A2}}{a_{A2} - a_{B2}} \approx 100(\text{гр}). \tag{29}$$

$$\Delta M_{2\text{гр}} = \frac{M_{2\text{гр}}}{T_{B2} - T_{A2}} \sqrt{\frac{2}{N-2} \sum_{i=1}^{N} (T_i - \widetilde{T}(a_i))^2} \approx 4,41(\text{гр}). \tag{30}$$

$$M_2 = M_{2\text{гр}} \pm \Delta M_{2\text{гр}} = (100,00 \pm 4,41)\text{гр}. \tag{31}$$

Проверим попадает ли табличное значение в этот интервал.

Вывод

Сравнивая разницы $\overline{\partial}_W^{(э)} - \partial_W^{(т)}$, равные $-0,49$ и $-0,47$, из первого и второго эксперимента соответственно, с величиной $\partial_W^{(тр)} = -0,49$, видим, что в первом опыте разница полностью совпала, а во втором разница совсем незначительна. Она вызвана погрешностью в измерении.

Табличные данные массы тележеки без утяжелителя и с ним соответственно подходят под посчитанные эксперементальным путём значения: $M_1 = (50,0 \pm 2,3)$гр; и $M_2 = (100,00 \pm 4,41)$гр.