

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования**
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ
ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

Типовой расчет по математике
Модуль 5

**«Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы.
Теория поля»**

Выполнил:
Студент группы Р3255
Федюкович С. А. _____
Вариант 26

Санкт-Петербург

2018

Задача 1

Условие

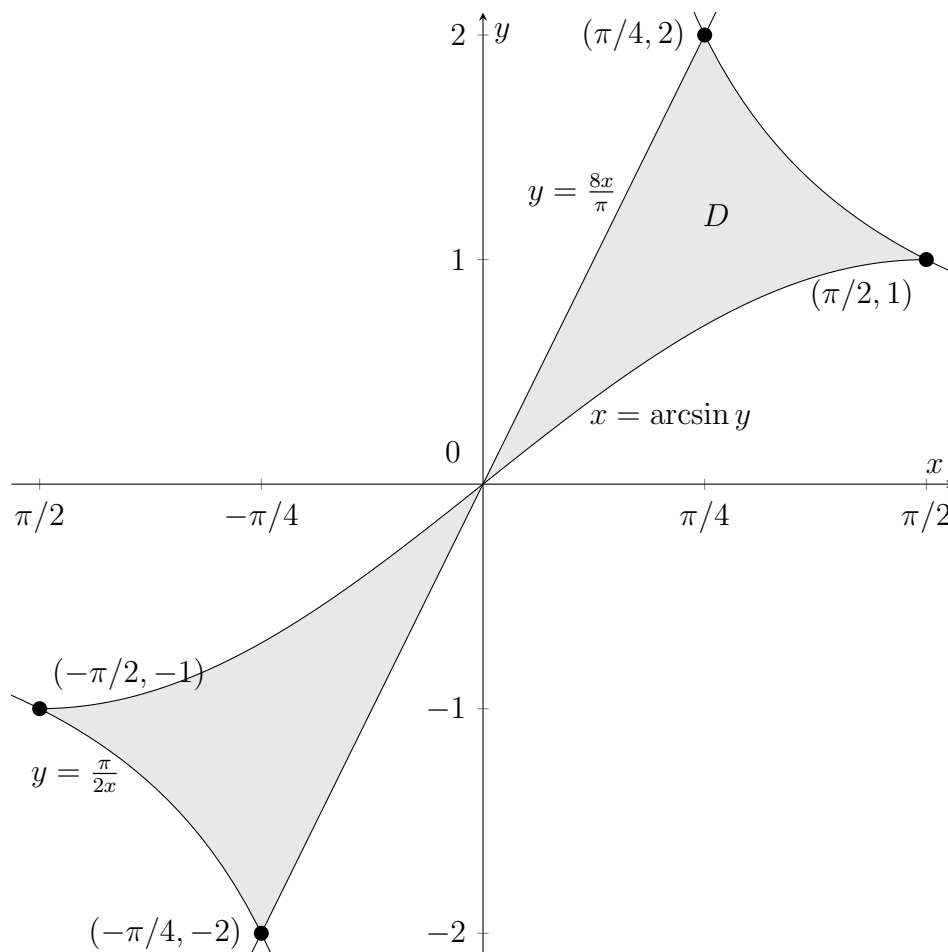
Плоская область D ограничена заданными кривыми:

$$x = \arcsin y, y = \frac{\pi}{2x}, y = \frac{8x}{\pi}.$$

1. Сделать схематический рисунок области D .
2. С помощью двойного интеграла найти площадь D .

Решение

1. Область D , ограниченная указанными линиями, изображена ниже:



Координаты точек пересечения граничных линий найдены графически.

2. Площадь S области D находится по формуле:

$$S = \iint_D dx dy$$

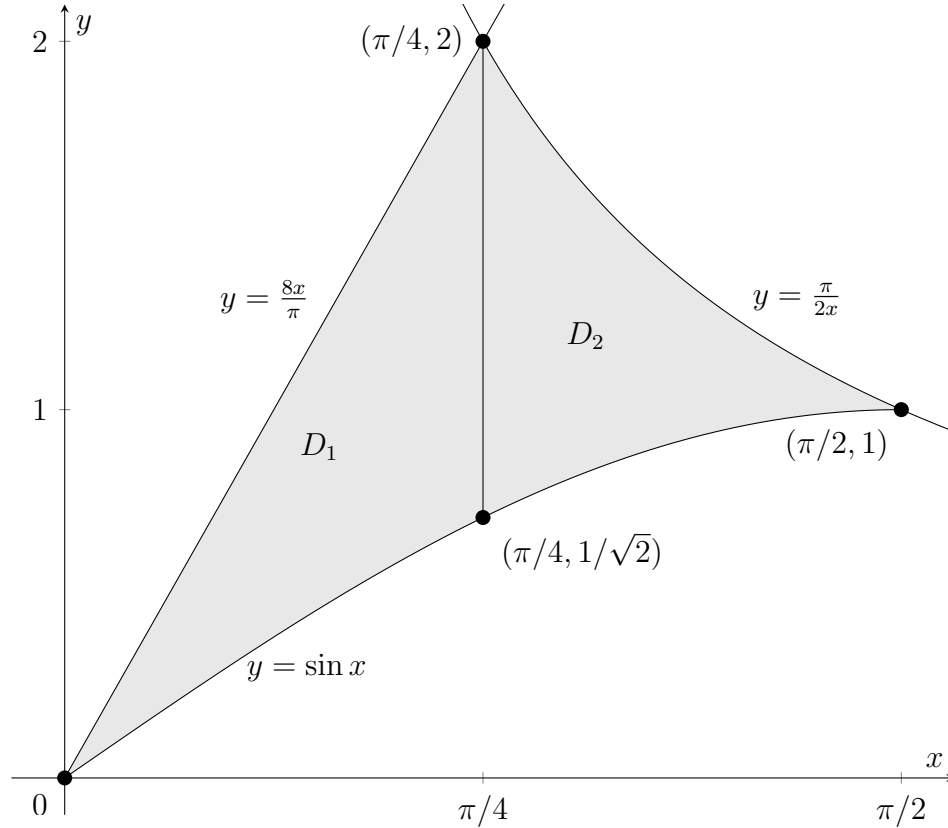
Представим двойной интеграл в виде:

$$S = \iint_D dx dy = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy$$

Для расстановки пределов интегрирования разрешим уравнения граничных линий относительно y :

$$y = \sin x, y = \frac{\pi}{2x}, y = \frac{8x}{\pi}.$$

В силу нечетности кривых площадь D , при $x > 0$ будет равна площади D , при $x < 0$. Площадь S области D представим в виде удвоенной суммы площадей областей D_1 и D_2 :



$$\begin{aligned} S &= 2\left(\iint_{D_1} dx dy + \iint_{D_2} dx dy\right) = \\ &= 2\left(\int_0^{\pi/4} dx \int_{\sin x}^{8x/\pi} dy + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int_{\sin x}^{\pi/(2x)} dy\right) = \\ &= 2\left(\int_0^{\pi/4} (8x/\pi - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\pi/(2x) - \sin x) dx\right) = \\ &= 2\left((4x^2/\pi + \cos x)\Big|_0^{\pi/4} + \left(\frac{\pi}{2} \ln x + \cos x\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}\right) = \\ &= 2\left(\pi/4 + \sqrt{2}/2 - 1 + \frac{\pi}{2} \ln \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \ln \frac{\pi}{4} - \sqrt{2}/2\right) = \\ &= 2\left(\pi/4 - 1 + \frac{\pi}{2} \ln 2\right) = \pi/2 - 2 + \pi \ln 2 \end{aligned}$$

Ответ: $\pi/2 - 2 + \pi \ln 2$

Задача 2

Условие

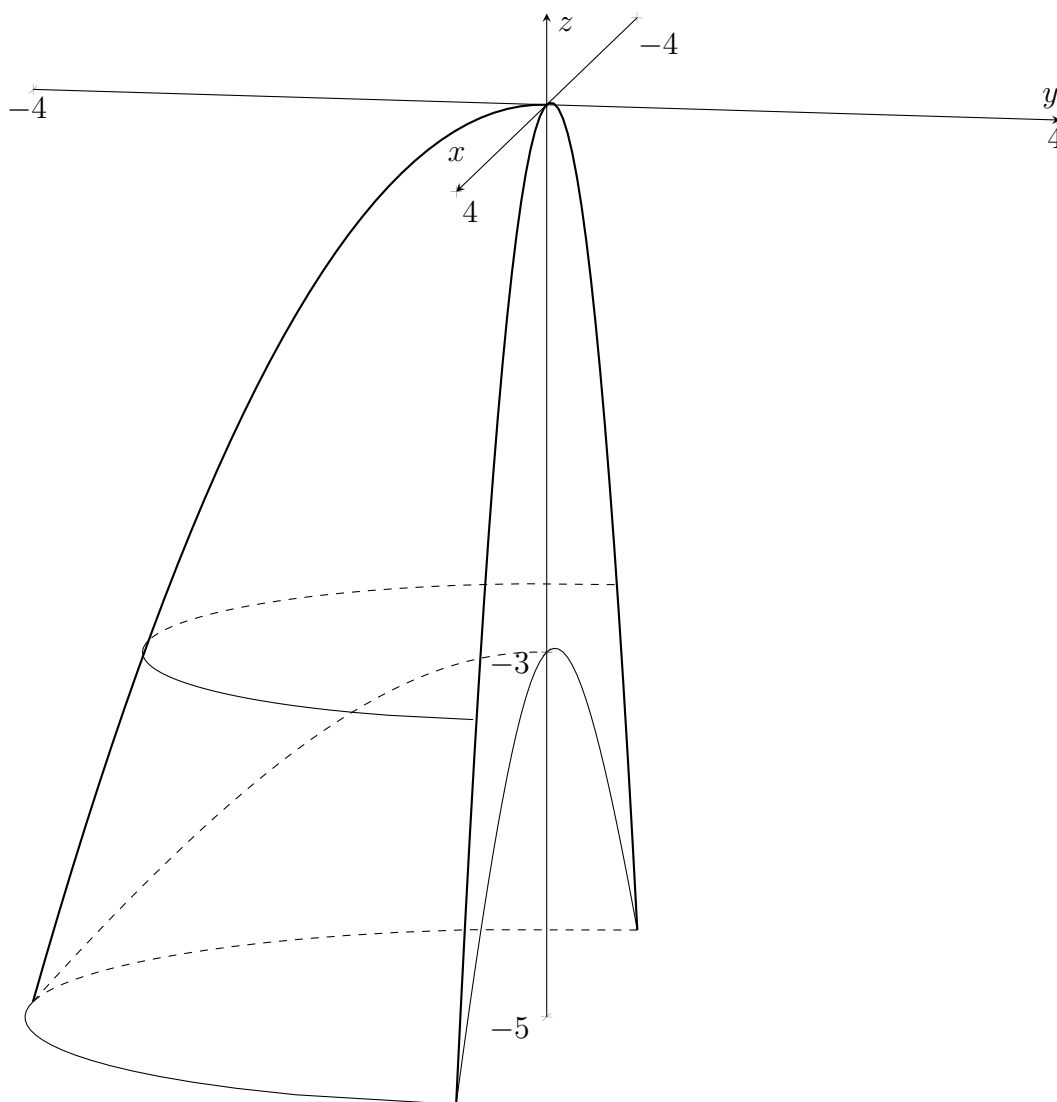
Тело T ограничено заданными поверхностями:

$$z = -\frac{5}{16}(x^2 + y^2) \quad (1), z = -\sqrt{x^2 + y^2 + 9} \quad (2), y = 0 \quad (3) \quad \text{при} \quad y \leq 0.$$

1. Сделать схематический рисунок тела T .
2. С помощью тройного интеграла найти объем тела T , перейдя к цилиндрическим или сферическим координатам.

Решение

1. Уравнение (1) задает параболоид вращения, симметричный относительно оси Oz с вершиной в точке $O(0; 0; 0)$, полость которого обращена вниз. Уравнение (2) задает нижнюю полость двуполостного гиперболоида с вершиной в точке $P(0; 0; -3)$. Уравнение (3) задает координатную плоскость Oxz . Условие выделяет ту часть тела, ограниченного указанными поверхностями, которая лежит в области отрицательных значений ординат. Тело T изображено ниже:



2. Объем V тела T выражается тройным интегралом:

$$V = \iiint_T dv$$

Будем вычислять этот интеграл, перейдя к цилиндрическим координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ с учетом того, что $x^2 + y^2 = r^2$. Якобиан перехода равен r , а формула объема тела примет вид:

$$V = \iiint_T r dr d\varphi dz$$

Запишем уравнения поверхностей, ограничивающих тело T , в цилиндрических координатах. Уравнение параболоида: $z = -5r^2/16$, уравнение нижней полости двуполостного гиперболоида: $z = -\sqrt{r^2 + 9}$. Неравенство $y \leq 0$ в цилиндрических координатах примет вид:

$$r \sin \varphi \leq 0 \Rightarrow \sin \varphi \leq 0 \Rightarrow -\pi \leq \varphi \leq 0 \quad (4)$$

Для расстановки пределов интегрирования найдем линию пересечения параболоида и полости гиперболоида:

$$\begin{cases} z = -5r^2/16 \\ z = -\sqrt{r^2 + 9} \\ r \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -5r^2/16 \\ -5r^2/16 = -\sqrt{r^2 + 9} \\ r \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -5 \\ r = 4 \end{cases}$$

Таким образом, параболоид и полость гиперболоида пересекаются по полуокружности радиуса 4 с центром в точке $K(0; 0; -5)$ в плоскости $z = -5$ при $y \leq 0$. Значит, для всех точек тела T справедливо условие $0 \leq r \leq 4$ (5).

Наконец, отметим, что при входе в область T прямая, параллельная оси Oz , пересечет полость гиперболоида $z = -\sqrt{r^2 + 9}$, а при выходе — параболоид $z = -5r^2/16$. Следовательно, для всех точек тела выполняется условие $-\sqrt{r^2 + 9} \leq z \leq -5r^2/16$ (6).

Используя условия (4), (5) и (6), расставим пределы интегрирования в тройном интеграле и решим его:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\pi}^0 d\varphi \int_0^4 r dr \int_{-\sqrt{r^2+9}}^{-5r^2/16} dz = \int_{-\pi}^0 d\varphi \int_0^4 r(-5r^2/16 + \sqrt{r^2+9}) dr = \\ &= \int_{-\pi}^0 d\varphi \int_0^4 (-5r^3/16 + r\sqrt{r^2+9}) dr = \\ &= \int_{-\pi}^0 d\varphi \int_0^4 -5r^3/16 dr + \int_{-\pi}^0 d\varphi \int_0^4 r\sqrt{r^2+9} dr = \\ &= \int_{-\pi}^0 d\varphi (-5r^4/64) \Big|_0^4 + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^0 d\varphi \frac{2(r^2+9)^{3/2}}{3} \Big|_0^4 = \\ &= \int_{-\pi}^0 d\varphi (-20) + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^0 d\varphi \frac{196}{3} = \\ &= -20\pi + \frac{98\pi}{3} = \frac{38\pi}{3} \end{aligned}$$

Ответ: $38\pi/3$

Задача 3

Условие

С помощью криволинейного интеграла первого рода найти массу M дуги плоской материальной кривой, заданной уравнениями: $\begin{cases} x = 2\sqrt{t} \\ y = \frac{2}{3}t\sqrt{t} \end{cases}$, при $1 \leq t \leq 4$, $\rho(x, y) = \sqrt{1 + \frac{3}{4}xy}$.

Решение

Масса M дуги плоской материальной кривой между точками A и B выражается криволинейным интегралом первого рода по дуге AB кривой:

$$M = \int_{AB} \rho(x, y) dl, \text{ где } dl \text{ — дифференциал длины дуги}$$

Если кривая задана параметрическим способом: $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, то $dl = \sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$, а криволинейный интеграл преобразуется в определенный интеграл по формуле:

$$M = \int_{t_1}^{t_2} \rho(\phi(t), \psi(t)) \sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

В этом случае $\phi'(t) = x'_t = 1/\sqrt{t}$, $\psi'(t) = y'_t = \sqrt{t}$, поэтому:

$$dl = \sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt = \sqrt{1/t + t} dt$$

Плотность примет вид:

$$\rho(x, y) = \sqrt{1 + \frac{3}{4}xy} \Rightarrow \rho(2\sqrt{t}, \frac{2}{3}t\sqrt{t}) = \sqrt{1 + t^2}$$

Подставив полученные формулы в выражение криволинейного интеграла, будем иметь:

$$M = \int_1^4 \sqrt{1 + t^2} \sqrt{1/t + t} dt = \int_1^4 \frac{t^2 + 1}{\sqrt{t}} dt = \int_1^4 t^{-1/2}(t^2 + 1) dt$$

Вычислим неопределенный интеграл:

$$\begin{aligned} \int t^{-1/2}(t^2 + 1) dt &= 2\sqrt{t}(t^2 + 1) - \int 2\sqrt{t}(2t) dt = \\ &= 2\sqrt{t}(t^2 + 1) - 4 \int t^{3/2} dt = 2\sqrt{t}(t^2 + 1) - \frac{8t^{5/2}}{5} \end{aligned}$$

Перейдём обратно к определенному интегралу:

$$\begin{aligned} \int_1^4 t^{-1/2}(t^2 + 1) dt &= \left(2\sqrt{t}(t^2 + 1) - \frac{8t^{5/2}}{5} \right) \Big|_1^4 = \\ &= 68 - \frac{256}{5} - 4 + \frac{8}{5} = \frac{72}{5} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{72}{5}$

Задача 4

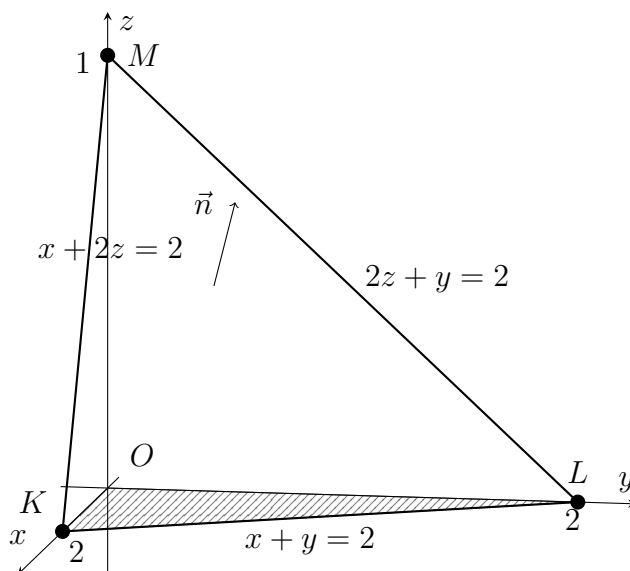
Условие

Дано векторное поле $\vec{a} = 3z\vec{i} - (2x + y + 3z)\vec{j}$ и плоскость σ , заданная уравнением $x + y + 2z = 2$, пересекающая координатные плоскости по замкнутой ломаной $KLMK$, где K, L, M — точки пересечения плоскости σ с координатными осями Ox, Oy и Oz соответственно.

1. Найти поток Q векторного поля \vec{a} через часть S плоскости σ , расположенную в первом октанте, в направлении нормали \vec{n} , образующей острый угол с осью Oz .
2. Найти циркуляцию C векторного поля \vec{a} по контуру $KLMK$, образованному пересечением плоскости σ с координатными осями.

Решение

1. Часть S плоскости σ , лежащая в первом октанте, представляет собой треугольник KLM , изображенный ниже:



Поток Q векторного поля \vec{a} через поверхность S выражается поверхностным интегралом первого рода:

$$Q = \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS,$$

где $\vec{n} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma$ — единичный вектор нормали к данной поверхности, направление которого задано в условии задачи, dS — дифференциал площади поверхности.

Скалярное произведение, стоящее под знаком интеграла, в координатной форме имеет вид:

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma,$$

где $a_x = a_x(x, y, z)$, $a_y = a_y(x, y, z)$, $a_z = a_z(x, y, z)$ — координаты вектора \vec{a} .

Если уравнение поверхности разрешено относительно z , т. е. задано в виде $z = f(x, y)$, то, введя обозначения частных производных:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p(x, y); \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q(x, y),$$

выразим направляющие косинусы единичного вектора нормали:

$$\cos \alpha = \frac{-p(x, y)}{\pm \sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)}}, \quad \cos \beta = \frac{-q(x, y)}{\pm \sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)}}$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)}}$$

В приведенных формулах перед радикалом выбирается знак « + », если вектор нормали образует острый угол с осью Oz , и знак « - » в противном случае. Дифференциал площади поверхности равен:

$$dS = \sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)} dx dy.$$

В условиях данной задачи координаты вектора \vec{a} равны:

$$a_x = 3z, \quad a_y = -(2x + y + 3z), \quad a_z = 0$$

Разрешив уравнение плоскости σ относительно z , получим:

$$z = 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2}$$

Частные производные будут равны:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p(x, y) = -\frac{1}{2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q(x, y) = -\frac{1}{2}$$

Радикал, стоящий в знаменателях направляющих косинусов, равен:

$$\sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Согласно условию задачи, $\cos \gamma > 0$, следовательно, перед радикалом выбираем знак « + ». В результате получим:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}; \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{6}}; \quad \cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

Найдем скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{n}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = 3z \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} - (2x + y + 3z) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 0 \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{3z - 2x - y - 3z}{\sqrt{6}} = -\frac{2x + y}{\sqrt{6}}$$

Для вычисления потока преобразуем поверхностный интеграл по части S плоскости σ в двойной интеграл по плоской области D проекции области S на плоскость Oxy . Для этого выразим дифференциал площади поверхности по формуле:

$$dS = \sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)} dx dy = \frac{\sqrt{6}}{2} dx dy$$

Получим:

$$Q = \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS = - \iint_{D_{xy}} \frac{2x+y}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} dx dy = -\frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} (2x+y) dx dy$$

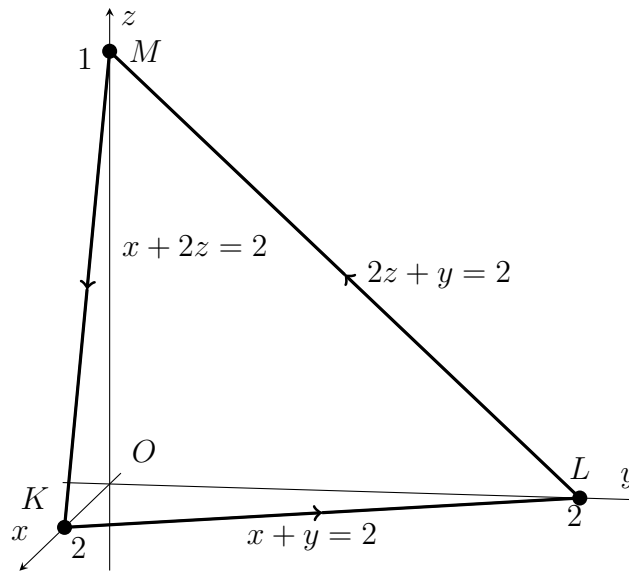
Полученное выражение представляет собой двойной интеграл по треугольнику OKL , лежащему в плоскости Oxy . Расставим пределы интегрирования и вычислим этот интеграл:

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} (2x+y) dx dy = -\frac{1}{2} \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (2x+y) dy \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^2 dx \left(2xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{2-x} = -\frac{1}{2} \int_0^2 \left(2 + 2x - \frac{3x^2}{2} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \left(2x + x^2 - \frac{x^3}{2} \right) \Big|_0^2 = -\frac{1}{2} \left(4 + 4 - \frac{8}{2} \right) = -2 \end{aligned}$$

Вычислим поток Q векторного поля \vec{a} через поверхностный интеграл второго рода:

$$\begin{aligned} Q &= \iint_S a_x dy dz + a_y dx dz + a_z dy dx = \\ &= \iint_S 3z dy dz - (2x+y+3z) dx dz + 0 \cdot dy dx = \\ &= \iint_S 3z dy dz - \iint_S (2x+y+3z) dx dz = \\ &= 3 \iint_{D_{yz}} z dy dz - \iint_{D_{xz}} (x+z+2) dx dz = \\ &= 3 \int_0^2 dy \int_0^{1-1/2y} z dz - \int_0^2 dx \int_0^{1-1/2x} (x+z+2) dz = \\ &= 3 \int_0^2 (y-2)^2/8 dy - \int_0^2 (20-4x-3x^2)/8 dx = \\ &= 3 \cdot 1/3 - 3 = -2 \end{aligned}$$

2. По условию задачи обход контура производится в направлении отмеченном ниже:



Циркуляция векторного поля \vec{a} по контуру l представляет собой криволинейный интеграл первого рода:

$$\begin{aligned} C &= \int_l [a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma] dS = \\ &= \int_{KLMK} [3z \cos \alpha - (2x + y + 3z) \cos \beta] dS = \\ &= \left\{ \int_{KL} + \int_{LM} + \int_{MK} \right\} [3z \cos \alpha - (2x + y + 3z) \cos \beta] dS = \end{aligned}$$

Вычислим отдельно каждый из трех интегралов:

$$J_1 = \int_{KL} [3z \cos \alpha - (2x + y + 3z) \cos \beta] dS$$

— это интеграл вдоль отрезка KL , касательный вектор к которому $\vec{\tau}$, очевидно, можно взять просто $\vec{KL} = (-2; 2; 0)$ (касательный вектор постоянен, так как KL — это отрезок прямой). Направляющие косинусы, очевидно, совпадают с искомыми:

$$\cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2}} = -\frac{2}{\sqrt{8}}; \quad \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{8}}; \quad \cos \gamma = \frac{0}{\sqrt{8}} = 0$$

Напишем параметрические уравнения линии KL :

$$\begin{cases} x(t) = 2 - 2t \\ y(t) = 0 + 2t \\ z(t) = 0 - 0 \cdot t \end{cases}, t \in [0; 1]$$

Учитывая параметрическое представление линии KL и формулу для вычисления dS , получаем:

$$dS = \sqrt{(x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2)} dt = \sqrt{8} dt$$

Подставляя полученные результаты в равенство для J_1 , имеем следующие выражения для криволинейного интеграла первого рода J_1 через определенный интеграл:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^1 \left\{ 3 \cdot 0 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{8}}\right) - (2(2-2t) + 2t + 3 \cdot 0) \frac{2}{\sqrt{8}} \right\} \sqrt{8} dt \\ &= \int_0^1 \left\{ -(4-4t+2t) \frac{2}{\sqrt{8}} \right\} \sqrt{8} dt \\ &= \int_0^1 \left\{ -(4-2t) \frac{2}{\sqrt{8}} \right\} \sqrt{8} dt \\ &= 4(-2t + \frac{t^2}{2}) \Big|_0^1 = 4(-2 + \frac{1}{2}) = -6 \end{aligned}$$

Аналогично для J_2

$$J_2 = \int_{LM} [3z \cos \alpha - (2x + y + 3z) \cos \beta] dS$$

Имеем $\vec{r} = L\vec{M} = (0; -2; 1)$:

$$\cos \alpha = \frac{0}{\sqrt{0^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 0; \quad \cos \beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{cases} x(t) = 0 + 0 \cdot t \\ y(t) = 0 - 2t \\ z(t) = 1 + t \end{cases}, t \in [0; 1]$$

$$dS = \sqrt{(x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2)} dt = \sqrt{5} dt$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^1 \left\{ 3(1+t) \cdot 0 + (2 \cdot 0 - 2t + 3(1+t)) \frac{2}{\sqrt{5}} \right\} \sqrt{5} dt \\ &= \int_0^1 \left\{ (-2t + 3 + 3t) \frac{2}{\sqrt{5}} \right\} \sqrt{5} dt \\ &= \int_0^1 \left\{ (3+t) \frac{2}{\sqrt{5}} \right\} \sqrt{5} dt \\ &= (2(3t + \frac{t^2}{2})) \Big|_0^1 = 2(3 + \frac{1}{2}) = 7 \end{aligned}$$

Аналогично для J_3

$$J_3 = \int_{MK} [3z \cos \alpha - (2x + y + 3z) \cos \beta] dS$$

Имеем $\vec{\tau} = \vec{MK} = (2; 0; -1)$:

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \cos \beta = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0; \quad \cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{cases} x(t) = 2 + 2t \\ y(t) = 0 + 0 \cdot t \\ z(t) = 0 - t \end{cases}, t \in [0; 1]$$

$$dS = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt = \sqrt{5} dt$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^1 \left\{ 3(-t) \frac{2}{\sqrt{5}} - (2(2 + 2t) + 0 + 3(-t)) \cdot 0 \right\} \sqrt{5} dt \\ &= \int_0^1 \left\{ -3t \frac{2}{\sqrt{5}} \right\} \sqrt{5} dt \\ &= -3t^2 \Big|_0^1 = -3 \end{aligned}$$

Окончательно:

$$C = -(J_1 + J_2 + J_3) = -(-6 + 7 - 3) = -(-2) = 2$$

Циркуляция векторного поля \vec{a} по контуру l представляет собой криволинейный интеграл второго рода:

$$C = \int_l \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_l a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

Для нашей задачи получим:

$$C = \int_{KLMK} a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_{KLMK} 3z dx - (2x + y + 3z) dy$$

Для вычисления циркуляции применим свойство аддитивности интеграла и представим C в виде суммы трех криволинейных интегралов I_{KL} , I_{LM} , и I_{MK} , взятым по отрезкам KL , LM и MK соответственно, т. е. $C = I_{KL} + I_{LM} + I_{MK}$. Найдём значения этих интегралов:

Отрезок KL представляет собой отрезок прямой, заданной системой:

$$\begin{cases} z = 0 \\ y = 2 - x \end{cases}, \text{ откуда следует, что: } \begin{cases} dz = 0 \\ dy = -dx \end{cases}. \text{ При движении от точки } K \text{ к точке } L$$

координата x меняется от 2 до 0, следовательно:

$$I_{KL} = \int_2^0 (2x + 2 - x) dx = (x^2/2 + 2x) \Big|_2^0 = -6$$

Отрезок LM представляет собой отрезок прямой, заданной системой:

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 - 2z \end{cases}$, откуда следует, что: $\begin{cases} dx = 0 \\ dy = -2 dz \end{cases}$. При движении от точки L к точке M координата z меняется от 0 до 1, следовательно:

$$I_{LM} = 2 \int_0^1 (2 - 2z + 3z) dz = 2(z^2/2 + 2z) \Big|_0^1 = 5$$

Отрезок MK представляет собой отрезок прямой, заданной системой:

$\begin{cases} y = 0 \\ x = 2 - 2z \end{cases}$, откуда следует, что: $\begin{cases} dy = 0 \\ dx = -2 dz \end{cases}$. При движении от точки M к точке K координата z меняется от 1 до 0, следовательно:

$$I_{LM} = -2 \int_1^0 3z dz = -6(z^2/2) \Big|_1^0 = 3$$

Окончательно получим: $C = -6 + 5 + 3 = 2$

Ответ: 1) $Q = -2$, 2) $C = 2$.