Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

Домашняя работа по математике
Модуль 6

«Ряды»

Выполнил:
Студент группы Р3255
Федюкович С. А. ______________
Вариант 26

Санкт-Петербург

2019

Задача 1

Условие

Исследовать сходимость числовых рядов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln \frac{2n+3}{2n+1}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{(3n)!}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\, \frac{n}{3^n+n^2}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^{3/4} n}$

Решение

1. Данный ряд является знакочередующимся, поэтому применим признак Лейбница. Последовательность абсолютных величин членов данного ряда является убывающей:

$$\ln \frac{2(n+1)+3}{2(n+1)+1} = \ln \frac{2n+5}{2n+3} < \ln \frac{2n+3}{2n+1}$$

Также:

$$\lim_{n\to\infty} \ln \frac{2n+3}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{2+3/n}{2+1/n} = \ln 1 = 0$$

Значит по признаку Лейбница данный ряд сходится. Исследуем характер сходимости. Для этого с помощью предельного признака сравнения исследуем положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{2n+3}{2n+1}$.
Для этого рассмотрим данный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n+1}$$

Он расходится по интегральному признаку Коши:

$$\int_1^{\infty} \frac{2}{2n+1}\,dn = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{2n+1}\,d(2n+1) = \lim_{b\to\infty} \ln(2n+1)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}(\ln(2b+1) - \ln 3) = \infty$$

Сравним эти ряды:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{2n+3}{2n+1}}{\frac{2}{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{2}{2n+1}\right)}{\frac{2}{2n+1}} = 1$$

Получено конечное число, отличное от нуля, значит, исследуемый ряд расходится вместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n+1}$. Следовательно данный ряд сходится условно.
В ходе вычисления последнего предела был использован замечательный предел:

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1,$$

где в качестве бесконечно малой величины выступает $\alpha = \frac{2}{2n+1}$

2. Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{(n+1)^2}}{(3(n+1))!}}{\frac{2^{n^2}}{(3n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{(2n+1)}}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{(2n+1)}}{27n^3+54n^2+33n+6} = \frac{\infty}{\infty}$$

Дабы избавиться от неопределенности применим правило Лопиталя три раза:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2^{(2n+1)})'''}{(27n^3+54n^2+33n+6)'''} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^{(2n+2)}\ln 2)''}{(81n^2+108n+33)''} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2^{(2n+3)}\ln^2 2)'}{(162n+108)'} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{(2n+4)}\ln^3 2}{162} = \infty$$

Предел равен бесконечности, следовательно ряд расходится.

3. Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{arctg\,\frac{n+1}{3^{(n+1)}+(n+1)^2}}{arctg\,\frac{n}{3^n+n^2}}$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3^{(n+1)}+(n+1)^2} = 0;\ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^n+n^2} = 0$$

(очевидно, используя правило Лопиталя один раз), то воспользуемся эквивалентным преобразованием $arctg(\alpha(x)) \approx \alpha(x)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{arctg\,\frac{n+1}{3^{(n+1)}+(n+1)^2}}{arctg\,\frac{n}{3^n+n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{3^{(n+1)}+(n+1)^2}}{\frac{n}{3^n+n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(3^n+n^2)}{n(3^{(n+1)}+(n+1)^2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{3^n+n^2}{3^{(n+1)}+(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n+n^2}{3^{(n+1)}+n^2+2n+1}$$

Дабы избавиться от неопределенности применим правило Лопиталя два раза:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3^n+n^2)''}{(3^{(n+1)}+n^2+2n+1)''} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3^n\ln 3+2n)'}{(3^{(n+1)}\ln 3+2n+2)'} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n\ln^2 3+2}{3^{(n+1)}\ln^2 3+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{3^{(n+1)}\ln^2 3}}{1+\frac{2}{3^{(n+1)}\ln^2 3}} = \frac{1}{3}$$

Предел равен $\frac{1}{3}$, следовательно ряд сходится.

4. Данный ряд является знакочередующимся, поэтому применим признак Лейбница. Последовательность абсолютных величин членов данного ряда является убывающей:

$$\frac{1}{n\ln^{3/4} n} > \frac{1}{(n+1)\ln^{3/4}(n+1)}$$

Также:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\ln^{3/4} n} = 0$$

Значит по признаку Лейбница данный ряд сходится. Исследуем характер сходимости. Для этого рассмотрим положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln^{3/4} n}$, применив интегральный признак Коши. Для этого введем функцию $f(x) = \frac{1}{x\ln^{3/4} x}$, удовлетворяющую условиям интегрального признака и исследуем несобственный интеграл от этой функции:

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x\ln^{3/4} x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{1}{x\ln^{3/4} x} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \ln^{-3/4} x\,d\ln x =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} (4(\ln x)^{(1/4)})\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} (4(\ln b)^{(1/4)} - 4(\ln 1)^{(1/4)}) = \infty$$

Ответ: 1) ряд сходится условно; 2) ряд расходится; 3) ряд сходится; 4) ряд сходится условно.

Задача 2

Условие

Найти область сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(x-1)^{4n}}$$

Решение

Согласно обобщенному признаку Даламбера, интервал сходимости находится из условия:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} < 1,$$

где $u_n(x)$ — общий член ряда. В нашем случае:

$$u_n(x) = \frac{n^5}{(x-1)^{4n}}, u_{n+1}(x) = \frac{(n+1)^5}{(x-1)^{4(n+1)}}.$$

Тогда:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{n^5}{(x-1)^{4n}}}{\frac{(n+1)^5}{(x-1)^{4(n+1)}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^5 (x-1)^{4(n+1)}}{(n+1)^5 (x-1)^{4n}} \right| =$$

$$= (x-1)^4 \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^5}{(n+1)^5} \right| = (x-1)^4$$

Перейдём к неравенству:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} < 1 \Leftrightarrow (x-1)^4 < 1 \Leftrightarrow |x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$$

В граничных точках $x = 0$ и $x = 2$ получим положительный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(1)^{4n}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^5$$

Для получения оценки общего члена данного ряда рассмотрим неравенства:

$$n^5 > \frac{1}{n}, \text{ при } n > 1$$

Значит, при $n > 1$ каждый член положительного ряда больше соответствующего члена гармонического ряда, который расходится. По первому признаку сравнения в граничных точках $x = 0$ и $x = 2$ исследуемый степенной ряд расходится, т. е. область его абсолютной сходимости — интервал $(0; 2)$.

Ответ: область абсолютной сходимости ряда — интервал $(0; 2)$.

Задача 3

Условие

Найти три первых отличных от нуля члена разложения функции в ряд Маклорена:

$$f(x) = arctg(1 - 2x)$$

Решение

Ряд маклорена имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

где $f^{(n)}(0)$ — значение n-ой производной в нуле ($f^{(0)}(0) = f(x)$). Для заданной функции имеем: $f(0) = arctg(1) = \frac{\pi}{4}$. Теперь найдём последовательно столько производных, сколько потребуется, чтобы три из них были отличны от нуля в точке $x = 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{-2x^2 + 2x - 1}, \ f'(0) = -1$$

$$f''(x) = \frac{-2 + 4x}{(1 + 2x - 2x^2)^2}, \ f''(0) = -2$$

$$f'''(x) = \frac{4(1 - 6x + 6x^2)}{(-1 + 2x - 2x^2)^3}, \ f'''(0) = -4$$

Ответ: $arctg(1 - 2x) = -x - x^2 - 2/3x^3 + ...$

Задача 4

Условие

Построить ряд Тейлора данной функции в окрестности точки x_0, используя стандартные разложения Маклорена основных элементарных функций. Указать область, в которой разложение справедливо:

1. $f(x) = x^2 \cos(x^3 + \pi/4)$, $x_0 = 0$;
2. $f(x) = (x^2 - 3x + 2)^{-1}$, $x_0 = -3$

Решение

1. Представим данную функцию в виде:

$$f(x) = x^2 \cos(x^3 + \pi/4) = x^2(\cos x^3 \cos \pi/4 - \sin x^3 \sin \pi/4) = \frac{x^2}{\sqrt{2}}(\cos x^3 - \sin x^3)$$

Тогда разложим функцию, используя разложения $f(x) = \sin x$ и $f(x) = \cos x$, затем почленно вычтем два ряда и каждый член полученного ряда почленно умножим на $\frac{x^2}{\sqrt{2}}$:

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2}}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^3)^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^3)^{(2n+1)}}{(2n+1)!}\Big) =$$

$$= \frac{x^2}{\sqrt{2}}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1-x^3) x^{6n}}{(2n+1)!}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1-x^3) x^{(6n+2)}}{\sqrt{2}(2n+1)!}$$

Степенные ряды $f(x) = \sin x$ и $f(x) = \cos x$ сходятся абсолютно при условии $-\infty < x < +\infty$, поэтому область сходимости полученного ряда будем искать из неравенства $-\infty < x^3 < +\infty$, откуда следует $-\infty < x < +\infty$. Таким образом, область абсолютной сходимости представляет собой интервал $(-\infty; +\infty)$.

2. Представим данную функцию в виде:

$$f(x) = (x^2 - 3x + 2)^{-1} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

Введём обозначение $x - x_0 = x + 3 = -t$, откуда $x = -t - 3$. Тогда:

$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{-t-5} - \frac{1}{-t-4} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1+t/5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+t/4}$$

Каждое из слагаемых $(1+t/5)^{-1}$ и $(1+t/4)^{-1}$ разложим, используя разложение $f(x) = (1+x)^{-1}$, затем почленно домножим суммы на $-\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{4}$ и сложим ряды:

$$f(x) = -\frac{1}{5}(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (t/5)^n) + \frac{1}{4}(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (t/4)^n) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{(-t/5)^n}{5} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t/4)^n}{4} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5(-t/4)^n - 4(-t/5)^n}{20} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5(-1/4)^n - 4(-1/5)^n}{20} t^n,\ t = -x - 3$$

Степенной ряд $f(x) = (1+x)^{-1}$ сходится абсолютно при условии $-1 < x < 1$, поэтому область сходимости полученного ряда будем искать из неравенств $-1 < t/4 < 1$ и $-1 < t/5 < 1$, откуда следует $-1 < (-x-3)/4 < 1 \Leftrightarrow -7 < x < 1$ и $-1 < (-x-3)/5 < 1 \Leftrightarrow -8 < x < 2$. Таким образом, областью абсолютной сходимости будет интервал $(-7; 1)$.

Ответ: 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1-x^3) x^{(6n+2)}}{\sqrt{2}(2n+1)!}$ на $(-\infty; +\infty)$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5(-1/4)^n - 4(-1/5)^n}{20} (-x-3)^n$ на $(-7; 1)$.

Задача 5

Условие

Вычислить интеграл с точностью $0,001$:

$$\int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}\,dx$$

Решение

Используя стандартный ряд Маклорена для функции $f(x) = (1+x)^\alpha$ будем иметь:

$$(1+x^3)^{-1/3} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1/3(-1/3-1)...(-1/3-n+1)x^{3n}}{n!}$$

Интегрируя этот ряд почленно, получим:

$$\int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}\,dx = \left(x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1/3(-1/3-1)...(-1/3-n+1)x^{3n+1}}{n!(3n+1)}\right)\Big|_0^{0,5} =$$

$$= 0,5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1/3(-1/3-1)...(-1/3-n+1)(0,5)^{3n+1}}{n!(3n+1)}$$

Полученный ряд является знакочередующимся. Отсюда, на основании признака Лейбница, следует, что абсолютная величина погрешности, возникающей при замене суммы ряда n-ой частичной суммой, не превосходит модуля первого отброшенного члена. Вычисляя последовательно слагаемые полученного ряда видим, что модуль второго члена:

$$|a_2| = \left|\frac{1}{1792 \cdot 2,25}\right| < 0,001$$

Следовательно, в качестве нужного нам приближения достаточно взять:

$$S_1 = 0,5 - \frac{1}{192} \approx 0,494$$

Ответ: $0,494$

Задача 6

Условие

Найти решение задачи Коши в виде ряда:

$$xy'' + (x^2+1)y' + 2xy = 10x;\; y(0)=0,\; y'(0)=0$$

$$(x^2+2)y''(x) + x(y''' + 4y') + 2y - 10 = 0$$

Решение

Найдём решение в виде ряда Маклорена:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n, \text{ где } y(0)=0,\; y'(0)=0,$$

а остальные значения производных в нуле $y^{(n)}(0)$, $n \geq 2$ последовательно найдём из исходного уравнения:

$$\begin{array}{llll}
y'' & = -\frac{2y+x(y'''+4y')-10}{x^2+2} & \Rightarrow y''(0) & = -\frac{-10}{2} = 5, \\
y''' & = -\frac{6y'+x(y^{IV}+6y'')}{x^2+3} & \Rightarrow y'''(0) & = -\frac{0}{3} = 0, \\
y^{IV} & = -\frac{12y''+x(y^{V}+8y''')}{x^2+4} & \Rightarrow y^{IV}(0) & = -3\cdot 5 = -15, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
y^{(n+3)} & = -\frac{(n+2)(n+3)y^{(n+1)}+x(y^{(n+4)}+2(n+3)y^{(n+2)})-10x^{(n+2)}}{x^2+n+3} & \Rightarrow y^{(n+3)}(0) & = -(n+2)y^{(n+1)} - 10x^{(n+2)}.
\end{array}$$

Первое равенство получили, выразив y'' из данного в задаче уравнения, предварительно продифференцировав его, для получения второго продифференцировали уравнение второй раз и так далее. Таким образом, получили рекуррентную формулу выражающую значение $(n+3)$-ей производной в нуле через значение n-ой производной. Поскольку $y'(0) = y'''(0) = 0$, то значение всех производных порядка $1+2m$, $m = 0, 1, 2...$, в нуле равны нулю. Отличны от нуля только при $x = 0$ только производные, порядок которых четен:

$$y^{(VI)}(0) = -5y^{(IV)}(0) = 5\cdot 3\cdot 5,\; y^{(VIII)}(0) = -7y^{(VI)}(0) = -7\cdot 5\cdot 3\cdot 5$$

$$y^{(2m)}(0) = 5\cdot 3\cdot ...\cdot [2m-1]\cdot(-1)^{m+1},\; m = 1, 2...$$

Ответ: $y(x) = 5\sum_{m=1}^{\infty} \frac{3\cdot ...\cdot(2m-1)\cdot(-1)^{m+1}}{2m!} x^{2m}.$